ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT
A. GELEJI

TOMUS 47 FASCICULI 1—2

SERIES GEODAETICA ET GEOPHYSICA
TOMUS 5 FASCICULI 1—2

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1964

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

ACTA TECHNICA

Tomus 47

Series Geodaetica et Geophysica 5

INDEX

Ádám, A.—Verő, J.: Ergebnisse der regionalen tellurischen Messungen in Ungarn — Results of the Regional Telluric Surveys in Hungary — Les résultats des mesures telluriques régionales en Hongrie — *Адам, А.—Верё, Й.:* О результатах региональной съемки, проведенной на территории Венгрии методом теллурических токов 63

Ádám, A.—Verő, J.: Sonnenaufgangseffekt in den Erdströmen — Sunrise Effect on Earth Currents — L'influence du lever de soleil sur les courants telluriques — *Адам, А.—Верё, И.:* О влиянии восхода Солнца на земные токи 79

Alpár, Gy.—Somogyi, J.: Über die Fehlerverteilung der räumlichen Aerotriangulation — On the Error Distribution in Spatial Aerial Triangulation — De la distribution des erreurs de la triangulation sérienne spatiale — *Альпар, Д.—Шомоди, И.;* Распределение погрешностей при пространственной аэро-триангуляции ... 29

Asszonyi, Cs.: Adjustment of a Discrete Value System by a Linear Function — Dies Ausgleichung eines diskreten Wertsystems mit Hilfe einer linearen Funktion — Compensation des systèmes de valuers discrètes par fonctions linéaires — *Ассони, Ч.:* Уравнивание дискретной системы значений при помощи линейного уравнения 309

Asszonyi, Cs.: Contribution to the Determination of the Tangent of the Bearing Belonging to an Adjusting Straight Line Satisfying the Principle $\Sigma pe^2 = \min$ — Ein Beitrag zur Bestimmung der Richtungstangente einer der dem Prinzip $\Sigma pe^2 = \min$ entsprechenden Geraden — Remarques sur la détermination de la tangente de direction de la droite de compensation satisfaisant au principe $\Sigma pe^2 = \min$ — *Ассони, Ч.:* Замечания к определению тангенса угла уравнивающей прямой, исходящей из принципа $\Sigma pe^2 = \min$ 321

Bencze, P.: Über den täglichen und jährlichen Gang der luftelektrischen Unruhe — On the Daily and Annual Variation of the Atmospheric Electrical Agitation — Sur la variation diurne et annuelle de l'inquiétude électrique de l'atmosphère — *Бенце, П.:* О суточных и годовых вариациях атмосферного электрического беспокойства 87

Boldizsár, T.: Geothermal Measurements in the Twin Shafts of Hosszúhetény — Messung des irdischen Wärmeflusses in der Zwillingsschacht von Hosszúhetény — Mesures du courant géothermique, dans les puits jumeaux de Hosszúhetény — *Болдижар, Т.:* О работах по измерению геотермических потоков, в двоенных шахтах района Хоссухетень 293

Forrai, S.: Simple Determination of the Direct Tangent of the Bearing of an Adjusting Straight Line which Satisfies the Condition $\Sigma pe^2 = \min$ — Die einfache und unmittelbare Bestimmung der Richtungstangente einer nach dem Grundsatze $\Sigma pe^2 = \min$ eingeschalteten ausgleichenden Geraden — Détermination simple de la tangente de direction directe de la droite de compensation satisfaisant au principe $\Sigma pe^2 = \min$ — *Форраи, Ш.:* Простой способ определения непосредственного углового коэффициента уравнивающей прямой по принципу $\Sigma pe^2 \min$. 97

Forrai, S.: Relations between the Standard Error Ellipse and Adjusting Straight Lines — Zusammenhänge zwischen der Standard-Fehlerellipse und den ausgleichenden Geraden — Relation entre l'ellipse d'erreur standard et les droites de compensation — *Форраи, Ш.:* Зависимости эллипса стандартных ошибок и прямых уравнивания 333

Halmos, F.: Die einheitliche Untersuchung und Ausgleichung der Wildschen Sektorenmethode — The Uniform Analysis and Adjustment of Wild's Sector-Method — L'analyse et la compensation de la méthode des secteurs de Wild — *Хальмош, Ф.:* Единое рассмотрение и уравнивание секториального метода Вильда .. 3

Halmos, F.: Die rasche Auflösung der Normalgleichungen im allgemeinen Falle der Ausgleichung — Quick Solution of Normal Equations in General Case of Adjustment — Une solution rapide des équations normales dans le cas général de la compensation — *Хальмош, Ф.:* Ускоренное решение нормальных уравнений в общем случае выравнивания 131

Halmos, F.: Konstruktion der Fußpunktkurve der mittleren Fehlerellipse bei einfachem Bogenschnitt — Construction of Pedal Curve of the Ellipse of Error with Simple Arc Section — Construction de la courbe podaire de l'ellipse d'erreur par section d'arc — *Хальмош, Ф.:* Построение кривой точки подошвы эллипса ошибки при помощи простой засечки дуги 365

Halmos, F.: Die Zurückführung der bedingten Beobachtungen mit ungemessenen Unbekannten auf die reinen bedingten Beobachtungen — Tracing Back of Conditional Observations with Unmeasured Unknowns to Pure Conditional Observations — Les rapports entre la compensation d'observations conditionnelles à inconnues non mesurées et la compensation d'observations conditionnelles pures — *Хальмош, Ф.:* Сведение условных наблюдений с неизмеренными неизвестными к чистым условным наблюдениям 379

Hazay, I.: Dimension of the Sunsidiary Quantities of Adjustment — Dimensionen der Hilsgröße der Ausgleichung — La dimension des quantités auxiliaires de la compensation — *Хазаи, И.:* О размерности вспомогательных величин выравнения 123

Hazay, I.: Bestimmung der charakteristischen Funktion der winkeltreuen Projektionen mit Hilfe der Grundgleichung der konformen Abbildung — Determination of the Characteristic Function of Conformal Projections by Means of the Fundamental Equation of Conformality — Détermination des fonctions caractérisant les projections conformes, au moyen de l'équation fondamentale de la conformité — *Хазаи, И.:* Определение характеристической функции конформных проекций при помощи основного уравнения конформности 351

Milasovszky, B.: Über die Berechnung der Basisnetze mit gemessenen Richtungen — On the Calculation of the Base Quadrilateral in the Method of Series — Calcul du réseau de développement quadrilatère à mesures de direction — *Милашовски, Б.:* О вычислении четырехугольного базиса пеленгации 181

Milasovszky, B.: Analysis of the Meridian Method of Time Determinations — Analyse der Meridianmethode der Zeitbestimmungen — L'analyse de la méthode méridienne dans les déterminations de temps — *Милашовски, Б.:* Анализ меридианного метода определения времени 265

Mitter, J.: Das meteorologische Problem der elektrischen Entfernungsmessung — The Meteorological Problem of Electronic Distance Measurements — Le problème météorologique de la détermination électronique des distances — *Миттер, Й.:* О метеорологической проблеме электронного дальноизмерения 159

Neubert, K.: Richtungsabnahmen hoher Genauigkeit im Bergbaugebiet — Highly Accurate Determination of Directions in Mining Districts — Détermination de haute précision des directions dans les régions minières — *Нейберт, К.:* Высокоточное определение направления в районах горных разработок 445

Scheffer, V.: Geophysical Investigation of the Geothermal Zones of the Earth — Geophysikalische Untersuchung der geothermischen Gebiete der Erde — Investigation géophysique des zones géothermiques de la Terre — *Шеффер, В.:* Геофизическое изучение геотермических зон Земли 409

Такач, Э.: Регистрирующий магнитометр для магнито-теллурических измерений — *Takács, E.* Recording Magnetometer for Magnetotelluric Measurements — Registrierender Magnetometer für magnotellurische Messungen — Magnétomètre enregistreur pour mesures magnéto-telluriques 109

Tárczy-Hornoch, A.: Determination of the Adjusting Straight Line within Several Points, and the Major and Minor Axes of the Telluric Stations Ellipse — Über die Bestimmung der Ausgleichungsgeraden zwischen mehreren Punkten, bzw. der großen und der kleinen Achse der tellurischen Stationsellipse — De la détermination de la droite de compensation entre plusieurs points, resp. des deux axes de l'ellipse caractérisant la station d'observation tellurique — *Тарци—Хорнох, А.:* Об определении уравнивающей прямой между несколькими пунктами, т. е. об определении большой и малой осей эллипса теллурических станций 213

Tárczy-Hornoch, A.: Über die Ausgleichung der Streckennetze mit Koordinaten nach der Methode der bedingten Beobachtungen — The Adjustment of Quadrangles of Lineal Grids by Coordinates According to the Method used for the Adjustment of Fictitious Measurements — Compensation par coordonnées des quadrilatères aux côtés mesurés, selon la méthode des observations conditionnelles — *Тарци-Хорнок, А.:* Выравнение квадратов сети дальноизмерения координатами по методу условных измерений 241

Tárczy-Hornoch, A.—Alpár, Gy.: Zur genauen Bestimmung kleiner Neigungswinkel mittels Sekundenlibellen — On the Determination of Small Slope Angles by Using a Second-Spirit Level — De la détermination exacte de petits angles d'inclinaison au moyen de niveaux de haute précision — *Тарци-Хорнох, А.—Альпар, Д.:* К точному определению небольших углов наклона с помощью уровня с отвесом, имеющим секундное деление 397

Tatár, J.: Anwendung der neutronen-induzierten Reaktion zur Schnellanalyse von Bauxit — Application of Neutron Activation for Speedy Bauxite Analysis — L'application de l'activation par neutrons à l'analyse rapide des bauxites — *Татар Я.:* О применении активации нейтронами для ускоренного анализа бокситов.. 455

Wallner, Á.: Über die erdmagnetischen Beobachtungen im Observatorium bei Negycenk und über deren Auswertung — On Observations Related to Terrestrial Magnetism Made in the Observatory Near Nagycenk and the Evaluation of Same — De l'évaluation des observations géomagnétiques faites à l'observatoire de Nagycenk— *Валлнер, А.:* О наблюдениях земного магнетизма в обсерватории в районе Надьценк и обработке наблюдений 431

Verő—Hetényi, M.: Die Ausgleichung der Punktionschaltung durch Längenmessungen mit der Methode der Ausgleichung der bedingten Beobachtungen — The Adjustment of Fixed Point Interpolation in Lineal Measurements by using the Method for the Adjustment of Fictitious Observations — Compensation du rattachement des points par mesures des longueurs selon la méthode de compensation des observations conditionnelles — *Верё—Хетени, М.:* Выравнение привязки пунктов дальноизмерения методом выравнения условных наблюдений 229

Некрасова, К.: О геодезических словарях — *Nekrassowa, K.:* On Geodetic Dictionaries — Über geodätische Wörterbücher — Étude sur les dictionnaires de géodésie 257

Book Review — Buchbesprechung — Compte rendu de livres — Обзор книг 263

A. Réthly—Z. Berkes: Nordlichtbeobachtungen in Ungarn (1523—1960) P. Bencze 263

A. Tárczy-Hornoch: Markscheiderische Studien. *E. Regőczi* 467

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT
A. GELEJI

TOMUS 47

SERIES GEODAETICA ET GEOPHYSICA
TOMUS 5

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1964

ACTA TECHN. HUNG.

DIE EINHEITLICHE UNTERSUCHUNG UND AUSGLEICHUNG DER WILDSCHEN SEKTORENMETHODE

F. HALMOS

GEODÄTISCHES FORSCHUNGSLABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, SOPRON (UNGARN

[Eingegangen am 23. März 1962]

Der einleitende Teil der Arbeit befaßt sich mit der Bedeutung der Schweizer Wildschen Sektorenmethode. Sie macht die prinzipielle Anordnung der Beobachtung und die Frage des Auswahl der Gewichte (Wiederholungszahlen) bekannt.

Ferner führt die Arbeit die verschiedenen Ausgleichungsverfahren an:

1. Lösung von vermittelnden Beobachtungen mit Zwangsbedingungen,
2. Verfahren nach den bedingten Beobachtungen.

Sie zeigt, daß die zweite Methode eigentlich durch Verwendung der Schlußfolgerungen aus der ersten ihre entsprechenden Zusammenhänge anschreibt (d. h. daß bei dem Anschreiben der Horizontalschlußgleichung sämtliche Beobachtungsergebnisse, ihrem Gewicht entsprechend, berücksichtigt werden sollen und durch Befriedigung dieser Bedingung auf dem Wege der Verbesserungen der wahrscheinlichste Wert der übrigen Winkel bestimmt wird). Es wird bewiesen, daß diese letzten Zusammenhänge eigentlich mit den entsprechenden Formeln der Lösung mit den vermittelnden Beobachtungen mit Zwangsbedingungen übereinstimmen. (Zusammenhänge (29)—(37).)

Die Arbeit macht folgende Lösung bekannt: die Ausgleichung der Beobachtungen der Sektorenmethode durch bedingte Beobachtungen mit ungemessenen Unbekannten und durch die zwischen diesen bestehenden Zwangsbedingungen (Gleichungen (38)—(40)). Dann zeigt sie einen recht anschaulichen, einfachen Aufbau der Lösung der Ausgleichung durch Einführen fiktiver Verbesserungen (Gleichungen (41)—(42)). Sämtliche Methoden führen zur Bildung des gewogenen arithmetischen Mittelwertes.

Der vierte Teil der Arbeit befaßt sich mit der Bestimmung des Gewichtes der ausgeglichenen Werte. Sie untersucht ferner, ob die auf diese Weise bestimmten wahrscheinlichsten Werte bei der Ausgleichung des Netzes als voneinander unabhängige Größen zu behandeln sind. Sie beweist, daß — sofern nach der Ausgleichung die Gewichtsgleichheit der Sektorenwinkel gesichert ist — diese, im Sinne von THIELE, als voneinander unabhängig zu betrachten sind. Sie leitet diejenigen Zusammenhänge ab, welche die Gewichte bzw. die Wiederholungszahlen, bei Berücksichtigung von obigem, bestimmen (Gleichungen (51)—(57)). Sie befaßt sich kurz mit der Frage, mit welcher Weise auf sämtlichen Stationen das gleiche Gewicht der ausgeglichenen Werte zu erreichen ist. Die erste Bedingung dafür ist, daß die Meßzahl (mittlerer Fehler) der Beobachtungen mit dem Einheitsgewicht nahezu gleich sei.

Der Grundgedanke der Schreiberschen Winkelmeßmethode besteht darin, daß die Gewichte der Horizontalwinkel, sowohl innerhalb einer Instrumentenstellung, als auch an den weiteren Punkten des Netzes gemessen, gleich sind. Die Zuverlässigkeit des gemessenen Winkels wird durch verschiedene topographische, atmosphärische und Sicht-Verhältnisse wesentlich beeinflußt, und infolgedessen wirkt nicht nur die Wiederholungszahl der Messung, sondern auch der Einfluß der letzteren darin mit, daß die Gewichte der mit der Schreiberschen Methode ausgeführten Winkelmessungen faktisch nicht gleich sind. Darauf weisen übrigens auch die bei der Ausgleichung sich bei jeder Station

ergebenden mittleren Winkelfehler hin. Damit bei jeder Instrumentenstellung der mittlere Fehler der Winkelmessung gleich sei, müßten identische Meßverhältnisse geschaffen werden. Die Möglichkeit dazu besteht aus äußeren Gründen nicht, während das Abwarten der günstigsten Sichtverhältnisse für sämtliche Winkelmessungen die für die Beobachtung aufgewendete Zeit und Kosten übertrieben erhöhen würde. Nachteilige Wirkungen haben bezüglich der Genauigkeit der Winkelmessungen die Geländeverhältnisse der bergig-hügeligen Gebiete, die Veränderung der atmosphärischen Verhältnisse, sowie auch die infolgedessen hervorgerufenen verschiedenen Sichtverhältnisse.

Um diese Wirkungen einigermaßen zu vermindern, hat WILD im Jahre 1904 die nach ihm benannte Schweizer Sektorenmethode ausgearbeitet. Das Verfahren ist besonders deshalb bemerkenswert, weil es in verhältnismäßig einfacher Weise die allergünstigste Verteilung der Winkelmessungen sichert und, von den äußeren Umständen abhängend, in der Gruppierung der Meßrichtungen, in der Anordnung der Messungen sowie in der Reihenfolge der Beobachtungen dem Ingenieur mehr Freiheit läßt als die Schreibersche Methode. Die letztere fordert von dem Ausführenden der Messung eine größere Selbständigkeit, sie beansprucht außerdem bei freier Anordnung der Messungen für die sichere Beurteilung der Güte der verschiedenen Beobachtungsrichtungen eine größere Erfahrung und mehr Umsicht. Mit dem Durchbrechen der Grenzen des Schematismus stellt sie den Ingenieur bei sämtlichen Instrumentenstandpunkten vor immer neuere Aufgaben, und die Genauigkeit der Beobachtungen hängt, über seine eigene Leistungsfähigkeit hinaus, neben der günstigen Auswahl der Beleuchtungseinrichtungen und der Winkelmeßinstrumente auch von der richtigen Beurteilung der objektiven Verhältnisse ab.

Die ausländische Literatur der Sektorenmethode — obwohl nicht überall verbreitet — ist ziemlich groß ([1], [2], [3], [4]). Die Fachbücher geben über das Problem eine ausführliche Darlegung ([5], [6]). Auch die ungarische Fachliteratur macht die Methode mit einer den Erfordernissen entsprechenden Ausführlichkeit bekannt ([7], [8], [9], [10]). Der Lösung der Fragen soll jetzt, von einer anderen Seite beleuchtet, näher getreten werden, dazu wird es aber als notwendig erachtet, gerade im Interesse der Vollständigkeit der Vergleiche, einleitend das Wesentliche der Methode und der Ausgleichungsarbeit kurz zusammenzufassen.

Bei dem Messen mit der Sektorenmethode werden die Beobachtungen in solche Sektoren eingeteilt, die am besten sichtbar sind und vom Standpunkt der Visur zuverlässige, am Horizont gleichmäßig verteilte 3—4 möglichst Haupttriangulationsrichtungen (Sektorenrichtungen) haben (in der Abb. 1 die Richtungen A, B, C). Diese fallen nach Möglichkeit in solche Richtungen, bei welchen vorausgesetzt wird, daß die Lateralrefraktion nur eine kleine Wirkung hat. Nach Möglichkeit wird eine kurze Anschlußrichtung nicht als Sektorenrichtung angenommen. Zuerst werden die Winkel zwischen diesen

Anschlußrichtungen bei verschiedenen Kreisstellungen gemessen, wobei die Wiederholungszahl innerhalb des Instrumentenstandes eine Funktion von äußeren Verhältnissen, von der Ordnung und der Bedeutung des zu messenden Winkels ist. Danach erfolgt die Beobachtung der Winkel zwischen den Anschlußrichtungen zweiter Ordnung und den mit ihnen benachbarten Sektorenrichtungen (zwischen den Richtungen *D*, *E*, *F*, *G*), sodann jene der dritten Ordnung, zwischen den Richtungen *H*, *I*, *J*. Sollten diese letzteren in größerer

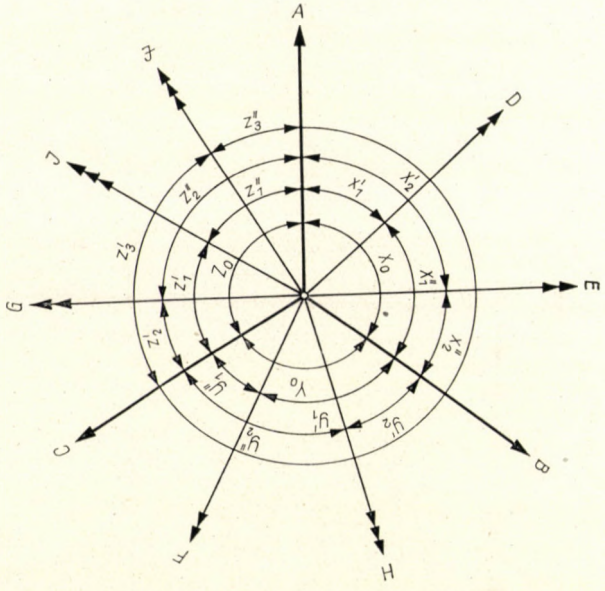

Abb. 1

Anzahl vorkommen, so können innerhalb der Sektoren zwischen den vorkommenden Anschlußrichtungen zweiter Ordnung noch Untersektoren (Zwischensektoren) errichtet werden. Die Wiederholungszahl der zu messenden Winkel wird so bestimmt, daß das Gewicht für die Anschlußrichtungen erster Ordnung gesondert, das Gewicht für die Anschlußrichtungen zweiter und dritter Ordnung ebenfalls gesondert, ungefähr einen vorher bestimmten Wert betragen soll (z. B. für erste Ordnung 10, zweite Ordnung 6, dritte Ordnung 4, oder 6, 4, 2). Bei der Ausgleichung kommen die gleichwertigen Winkel mit gleichem Gewicht in Betracht. Bei der Ausgleichung dieser Beobachtungen findet das erste Mal das Prinzip Anwendung, daß die Beobachtungen niederer Ordnung bei Berücksichtigung ihrer Gewichte zur Erhöhung der Genauigkeit der Beobachtungen höherer Ordnung verwendet werden kann. Dieses Prinzip ist in der letzten Zeit schon anderen Ortes verschiedentlich angewendet worden, während

es zur Erhöhung der Genauigkeit von Winkelmessungen hier das erste Mal Verwendung fand. Eigentlich ist auch hier bis zu einem gewissen Grade der mathematische Zwang wirksam, daß das Gewicht der einzelnen Winkel im voraus gesichert werden soll.

Die Grundlage der Ausgleichung ist von BAESCHLIN und RUESCH festgelegt worden [1], und soll im Interesse der Vergleichbarkeit hier beschrieben werden. Die Lösung der Aufgabe ist mit der Ausgleichung der vermitteln-

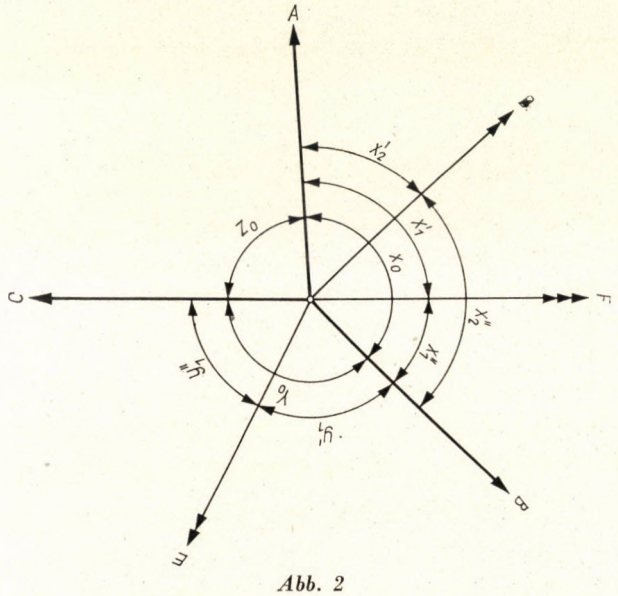

Abb. 2

den Beobachtungen mit Zwangsbedingungen durchgeführt worden. Entsprechend der Abb. 2. seien A, B, C die Sektorenrichtungen, D, E die Richtungen zweiter Ordnung und F die Richtung dritter Ordnung. Die von den Hauptrichtungen eingeschlossenen Winkel sind x_0, y_0, z_0, während die durch die Richtungen niederer Ordnung bzw. durch letztere und je eine Hauptrichtung eingeschlossenen Winkel mit dem Index 1 bezeichnet werden, der Index 2 bezeichnet dasselbe, nur in einer anderen Gruppierung. Mit l die einzelnen Beobachtungen und mit p die einzelnen Gewichte bezeichnend, können den neun Messungen entsprechend folgende Gleichungen angeschrieben werden [6]:

Fehlergleichungen:

$$l_{x_0} + v_{x_0} = x_0 \qquad \text{Gewicht } p_{x_0} ,$$

$$l_{x_1'} + v'_{x1} = x'_1 \qquad \text{Gewicht } p_{x_1'} ,$$

$$l_{x_1''} + v_{x_1''} = x''_1 \qquad \text{Gewicht } p_{x_1''} ,$$

$$
\begin{aligned}
l_{x_2'} + v_{x_2'} &= x_2' && \text{Gewicht } p_{x_2'} ,\\
l_{x_2''} + v_{x_2''} &= x_2'' && \text{Gewicht } p_{x_2''} ,\\
l_{y_0} + v_{y_0} &= y_0 && \text{Gewicht } p_{y_0} ,\\
l_{y_1'} + v_{y_1'} &= y_1' && \text{Gewicht } p_{y_1'} ,\\
l_{y_2''} + v_{y_1''} &= y_1'' && \text{Gewicht } p_{y_2''} ,\\
l_{z_0} + v_{z_0} &= z_0 && \text{Gewicht } p_{z_0} ,
\end{aligned}
\tag{1a}
$$

und die Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten:

$$
\begin{aligned}
x_0 + y_0 + z_0 - 4\pi &= 0 ,\\
x_1' + x_1'' - x_0 &= 0 ,\\
x_2' + x_2'' - x_0 &= 0 ,\\
y_1' + y_1'' - y_0 &= 0 .
\end{aligned}
\tag{1b}
$$

Die Gewichte werden im allgemeinen der Anzahl der in zwei Fernrohrlagen gemessenen Richtungssätzen proportional aufgenommen. Nach dem symmetrischen Anschreiben der Verbesserungsgleichungen ist zu sehen, daß in sämtlichen Gleichungen nur ein unbekanntes Glied mit dem Koeffizienten $+1$ vorkommt, und dementsprechend enthalten die Normalgleichungen auch nur die Hauptdiagonalen entlang Werte sowie den Zwangsbedingungen entsprechende Glieder! Also werden die Normalgleichungen die folgenden sein:

$$
\begin{aligned}
1)\quad & +p_{x_0}x_0 && && && && && -k_0 - k_{x_1} - k_{x_2} && -p_{x_0}l_{x_0} = 0 ,\\
2)\quad & && +p_{x_1'}x_1' && && && && +k_{x_1} && -p_{x_1'}l_{x_1'} = 0 ,\\
3)\quad & && && +p_{x_1''}x_1'' && && && +k_{x_1} && -p_{x_1''}l_{x_1''} = 0 ,\\
4)\quad & && && && +p_{x_2'}x_2' && && && +k_{x_2} && -p_{x_2'}l_{x_2'} = 0 ,\\
5)\quad & && && && && +p_{x_2''}x_2'' && && +k_{x_2} && -p_{x_2''}l_{x_2''} = 0 ,\\
6)\quad & && && && && && +p_{y_0}y_0 && -k_0 && -k_{y_1} && -p_{y_0}l_{y_0} = 0 ,\\
7)\quad & && && && && && && +p_{y_1'}y_1' && +k_{y_1} && -p_{y_1'}l_{y_1'} = 0 ,\\
8)\quad & && && && && && && +p_{y_1''}y_1'' && +k_{y_1} && -p_{y_1''}l_{y_1''} = 0 ,\\
9)\quad & && && && && && && && +p_{z_0}z_0 - k_0 && -p_{z_0}l_{z_0} = 0 ,\\
10)\quad & x_0 && && +y_0 && && +z_0 && && && -4\pi = 0 ,\\
11)\quad & -x_0 + x_1' + x_1'' && && && && && && && = 0 ,\\
12)\quad & -x_0 && +x_2' + x_2'' && && && && && && = 0 ,\\
13)\quad & && && -y_0 + y_1' + y_1'' && && && && && = 0 .
\end{aligned}
\tag{2}
$$

wo k_{x_1}, k_{x_2}, k_{y_1} und k_0 den Zwangsbedingungen entsprechende Korrelaten sind. Auf Grund der Normalgleichungen [2], [3], [4], [5], [7] und [8] können die Korrelaten k_{x_1}, k_{x_2}, k_{y_1} ausgedrückt werden. Also:

$$\frac{k_{x_1}}{p_{x_1}} = l_{x_1'} - x_1', \qquad \frac{k_{x_1}}{p_{x_1''}} = l_{x_1''} - x_1''. \tag{3}$$

Wenn

$$\frac{1}{p_{x_1'}} + \frac{1}{p_{x_1''}} = \left[\frac{1}{p_{x_1}}\right],$$

$$l_{x_1'} + l_{x_1''} = [l_{x_1}], \tag{4}$$

$$x_1' + x_1'' = [x_1],$$

ist, dann kann auf Grund der Gleichungen (3) geschrieben werden:

$$k_{x_1} = \frac{1}{\left[\frac{1}{p_{x_1}}\right]} ([l_{x_1}] - [x_1]). \tag{5}$$

In ähnlicher Weise:

$$k_{x_2} = \frac{1}{\left[\frac{1}{p_{x_2}}\right]} ([l_{x_2}] - [x_2]), \tag{6}$$

und

$$k_{y_1} = \frac{1}{\left[\frac{1}{p_{y_1}}\right]} ([l_{y_1}] - [y_1]). \tag{7}$$

Es sollen die Werte von k_{x_1}, k_{x_2} in die erste Normalgleichung eingeführt werden, und es soll beachtet werden, daß auf Grund der Normalgleichungen (10) und (11)

$$[x_1] = x_0 \qquad \text{und} \qquad [x_2] = x_0. \tag{8}$$

Also:

$$p_{x_0} x_0 - p_{x_1}([l_{x_1}] - x_0) - p_{x_2}([l_{x_2}] - x_0) + k_0 - p_{x_0} l_{x_0} = 0, \tag{9}$$

wo

$$p_{x_1} = \frac{1}{\left[\frac{1}{p_{x_1}}\right]} \quad \text{und} \quad p_{x_2} = \frac{1}{\left[\frac{1}{p_{x_2}}\right]}. \tag{10}$$

Im Sinne der weiteren Bezeichnungen ist zu schreiben:

$$\left.\begin{aligned} p_{x_0} + p_{x_1} + p_{x_2} &= [p_x], \\ \text{und} \qquad p_{x_0} l_{x_0} + p_{x_1}[l_{x_1}] + p_{x_2}[l_{x_2}] &= [p_x l_x]. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Werden diese in die Gleichung (9) eingeführt und die Operationen dementsprechend für die anderen Normalgleichungen ausgeführt, so werden — unter Zufügung der Normalgleichung (13) — die hier folgenden 4 Normalgleichungen mit 4 Unbekannten erhalten:

$$\begin{aligned} [p_x]\, x_0 + \qquad\qquad + k_0 - [p_x l_x] &= 0, \\ [p_y]\, y_0 + \qquad\qquad + k_0 - [p_y l_y] &= 0, \\ [p_z]\, z_0 \qquad + k_0 - [p_z l_z] &= 0, \\ x_0 + y_0 + z_0 \qquad - 4\pi &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Zuerst wird aus den vier Gleichungen k_0 eliminiert. Zu diesem Zweck soll $k_0/[p_x]$, $k_0/[p_y]$, ... aus den ersten drei Gleichungen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \frac{k_0}{[p_x]} &= \frac{[p_x l_x]}{[p_x]} - x_0, \\ \frac{k_0}{[p_y]} &= \frac{[p_y l_y]}{[p_y]} - y_0, \\ \frac{k_0}{[p_z]} &= \frac{[p_z l_z]}{[p_z]} - z_0. \end{aligned} \tag{13}$$

Es sollen die weiteren Bezeichnungen eingeführt werden:

$$P_x = [p_x], \quad P_y = [p_y], \quad P_z = [p_z]$$

und

$$L_x = \frac{[p_x l_x]}{[p_x]}, \quad L_y = \frac{[p_y l_y]}{[p_y]}, \quad L_z = \frac{[p_z l_z]}{[p_z]}. \tag{14}$$

Die Gleichungen (13) sollen addiert und daraus der Wert von k_0 ausgedrückt werden, mit Rücksicht auf die Bezeichnungen in (14):

$$k_0 = \frac{(L_x + L_y + L_z) - 4\pi}{\frac{1}{P_x} + \frac{1}{P_y} + \frac{1}{P_z}}, \tag{15}$$

wo also das Absolutglied:

$$W = L_x + L_y + L_z - 4\pi. \tag{15a}$$

In Kenntnis von k_0 können auf Grund der Gleichungen (13) die Werte von x_0, y_0, z_0 auch einzeln bestimmt werden:

$$\begin{aligned} x_0 &= L_x - W\frac{P}{P_x}, \\ y_0 &= L_y - W\frac{P}{P_y}, \\ z_0 &= L_z - W\frac{P}{P_z}, \end{aligned} \tag{16}$$

wo

$$P = \frac{1}{\frac{1}{P_x} + \frac{1}{P_y} + \frac{1}{P_z}}. \tag{17}$$

Nach der Berechnung der von den Sektorenrichtungen eingeschlossenen Winkel werden die Winkel der Richtungen zweiter bzw. dritter Ordnung auf Grund der Normalgleichungen 2., 3., 4., 5. und 7., 8. folgendermaßen erhalten:

$$\begin{aligned} x_1' &= l_{x_1'} - ([l_{x_1}] - x_0)\frac{p_{x_1}}{p_{x_1'}}, \\ x_1'' &= l_{x_1''} - ([l_{x_1}] - x_0)\frac{p_{x_1}}{p_{x_1''}}, \\ x_2' &= l_{x_2'} - ([l_{x_2}] - x_0)\frac{p_{x_2}}{p_{x_2'}}, \\ x_2'' &= l_{x_2''} - ([l_{x_2}] - x_0)\frac{p_{x_2}}{p_{x_2''}}, \\ y_1' &= l_{y_1'} - ([l_{y_1'}] - y_0)\frac{p_{y_1}}{p_{y_1'}}, \\ y_1'' &= l_{y_1''} - ([l_{y_1}] - y_0)\frac{p_{y_1}}{p_{y_1''}}. \end{aligned} \tag{18}$$

Auf Grund des bisher Ausgeführten kann also aus der bereits von BAESCHLIN mitgeteilten wichtigen Regel geschlossen werden: *nachdem für sämtliche Sektorenwinkel, die aus den unmittelbaren Beobachtungen sowie von den durch diese eingeschlossenen sämtlichen Kombinationen berechneten gewogenen arithmetischen Mittelwerte gebildet worden sind, wird das Absolutglied der auf Grund dieser Werte anzuschreibenden Stationsbedingung im Verhältnis ihrer Gewichte verteilt.* Dieser Satz ist gleicherweise auch für die anzuschreibenden Bedingungen der endgültigen Sektorenwinkel gültig (Gleichungen (18)). Den mittleren Fehler der Beobachtung mit Einheitsgewicht kann man aus den sich als Differenzen der ausgeglichenen Werte und der gemessenen Werte ergebenden v Verbesserungen bestimmen:

$$\mu_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n - r - m}} \tag{19}$$

wobei p = das Gewicht der Beobachtung, v = die Verbesserung der Beobachtung (ausgeglichener Wert minus gemessener Wert), n = die Zahl der gemessenen Winkel, r = die Zahl der Unbekannten und m = die Zahl der Zwangsbedingungen ist. Auf die Berechnung des mittleren Fehlers des ausgeglichenen Winkelwertes soll später zurückgekehrt werden.

Zusammenfassend ist auf Grund des bisher Gesagten festzustellen, daß bei der Ausgleichung der vermittelnden Beobachtungen mit Zwangsbedingungen die Lösung, bei strengstem Einhalten des Prinzips der kleinsten Quadrate, auf die wiederholte Anwendung der arithmetischen Mittelwertbildung und des Gesetzes der Fehlerfortpflanzung zurückzuführen ist. Übrigens werden bei der Ausgleichung im allgemeinen annähernde Werte eingeführt und als Unbekannte fungieren die Ergänzungswerte.

*

Eine andere Lösung der Aufgabe ergibt sich nach den bedingten Beobachtungen (unmittelbare Beobachtungen mit Bedingungen), die im Jahre 1952 von KNEISSL bekannt gemacht wurde [4]. Das Grundprinzip der Ausgleichung ist, daß man zuerst die Stationsbedingung befriedigt, und zwar so, daß sie bei deren Befriedigung sämtliche am Horizont verteilte Winkelmessungen ihrem Gewicht entsprechend berücksichtigt. In diesem Sinne kann ein Sektorenwinkel erstens durch den Mittelwert der unmittelbar zu diesem Zweck durchgeführten Messungen ausgedrückt werden (das Gewicht ist gleich der Wiederholungszahl der Beobachtungen), außerdem mit Hilfe der gewogenen arithmetischen Mittelwerte der Messungsergebnisse von zwei oder mehr Winkeln innerhalb des Sektors. Entsprechend der Abb. 2 kann also der Winkel x_0 ausgedrückt werden:

1. durch unmittelbare Beobachtung: l_{x_0}, mit dem Gewicht p_{x_0}
2. durch die Summe von zwei gemessenen Winkeln:

$$l_{x_1'} + l_{x_1''} = \{l_{x_0}\}_1 \qquad \text{mit dem Gewicht } \{p_{x_0}\}_1 = \frac{1}{1/p_{x_1'} + 1/p_{x_1''}},$$

bzw.

$$l_{x_2'} + l_{x_2''} = \{l_{x_0}\}_2 \qquad \text{mit dem Gewicht } \{p_{x_1'}\}_1 = \frac{1}{1/p_{x_2'} + 1/p_{x_2''}}.$$

In ähnlicher Weise auch der Winkel y_0:

1. durch unmittelbare Beobachtung: l_{y_0} mit dem Gewicht p_{y_0}
2. durch die Summe von zwei gemessenen Winkeln:

$$l_{y_1'} + l_{y_1''} = \{l_{y_0}\}_1 \qquad \text{mit dem Gewicht } \{p_{y_0}\}_1 = \frac{1}{1/p_{y_1'} + 1/p_{y_1''}}. \tag{20}$$

z_0 kann nur durch unmittelbare Messungen des Sektorenwinkels gebildet werden: l_{z_0} mit dem Gewicht p_{z_0}. Entsprechend kann die Stationsbedingung folgendermaßen angeschrieben werden:

$$(l_{x_0}) + (v_{x_0}) + (l_{y_0}) + (v_{y_0}) + (l_{z_0}) + (v_{z_0}) - 4\pi = 0, \tag{21}$$

wo

$$\begin{aligned}
(l_{x_0}) &= \frac{p_{x_0} l_{x_0} + \{p_{x_0}\}_1 \{l_{x_0}\}_1 + \{p_{x_0}\}_2 \{l_{x_0}\}_2}{p_{x_0} + \{p_{x_0}\}_1 + \{p_{x_0}\}_2} \quad \text{mit dem Gewicht } (px_0) = \\
&\qquad = p_{x_0} + \{p_{x_0}\}_1 + \{p_{x_0}\}_2, \\
(l_{y_0}) &= \frac{p_{y_0} l_{y_0} + \{p_{y_0}\} \{l_{y_0}\}_1}{p_{y_0} + \{p_{y_0}\}_1} \quad \text{mit dem Gewicht } (p_{y_0}) = p_{y_0} + \{p_{y_0}\}_1 \\
(l_{z_0}) &= l_{z_0} \qquad\qquad \text{mit dem Gewicht } (p_{z_0}) = p_{z_0},
\end{aligned} \tag{22}$$

und $(v_{x_0}), (v_{y_0}), (v_{z_0})$ die zu den gewogenen arithmetischen Mittelwerten gehörenden Verbesserungen sind. Die Normalgleichung ist:

$$\left(\frac{1}{(p_{x_0})} + \frac{1}{(p_{y_0})} + \frac{1}{(p_{z_0})}\right) k_1 + \omega_1 = 0 \tag{23}$$

wo ω_1 das entsprechend absolute Glied der Gleichung ist. Die einzelnen Verbesserungen werden durch Lösung der Normalgleichungen folgendermaßen erhalten:

$$\begin{aligned}
(v_{x_0}) &= -\frac{\omega_1}{(p_{x_0})\left(\frac{1}{(p_{x_0})} + \frac{1}{(p_{y_0})} + \frac{1}{(p_{z_0})}\right)}, \\
(v_{y_0}) &= -\frac{\omega_1}{(p_{y_0})\left(\frac{1}{(p_{x_0})} + \frac{1}{(p_{y_0})} + \frac{1}{(p_{z_0})}\right)}, \\
(v_{z_0}) &= -\frac{\omega_1}{(p_{z_0})\left(\frac{1}{(p_{x_0})} + \frac{1}{(p_{y_0})} + \frac{1}{(p_{z_0})}\right)}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Durch Addieren der zu den Näherungswerten gehörenden Verbesserungen werden die ausgeglichenen Sektorenwinkel erhalten:

$$\begin{aligned} x_0 &= (l_{x_0}) + (v_{x_0}), \\ y_0 &= (l_{y_0}) + (v_{y_0}), \\ z_0 &= (l_{z_0}) + (v_{z_0}). \end{aligned} \tag{24a}$$

In Kenntnis dieser Winkel können auch die endgültigen Werte der durch die einzelnen Zwischenrichtungen gemessenen Winkel unter Befriedigung der entsprechenden Bedingung errechnet werden. Die bei diesen vorkommenden Sektorenwinkel erhalten keine Verbesserung mehr, weil bei deren Berechnung sämtliche Beobachtungen berücksichtigt worden sind. Es können also die folgenden Bedingungsgleichungen angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} x_1' + x_1'' - x_0 = 0, \qquad y_1' + y_1'' - y_0 = 0. \\ x_2' + x_2'' - x_0 = 0, \end{aligned} \tag{25}$$

Mit Hilfe der entsprechenden Beobachtungen und Verbesserungen:

$$\begin{aligned} l_{x_1'} + v_{x_1'} + l_{x_1''} + v_{x_1''} - x_0 = 0, \\ l_{x_2'} + v_{x_2'} + l_{x_2''} + v_{x_2''} - x_0 - 0, \\ l_{y_1'} + v_{y_1'} + l_{y_1''} + v_{y_1''} - y_0 = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Die Normalgleichungen sind unter Berücksichtigung der entsprechenden Gewichte die folgenden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{p_{x_1'}} + \frac{1}{p_{x_1''}}\right) k_2 + \qquad\qquad + \omega_2 = 0, \\ \left(\frac{1}{p_{x_2'}} + \frac{1}{p_{x_2''}}\right) k_3 + \qquad\qquad + \omega_3 = 0, \\ \left(\frac{1}{p_{y_1'}} + \frac{1}{p_{y_2''}}\right) k_4 + \omega_4 = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Da es in keiner einzigen Gleichung eine gemeinsame Korrelate gibt, kann jede unmittelbar gelöst werden. Die Verbesserungen können aus den folgenden

Zusammenhängen errechnet werden:

$$v_{x_1'} = -\frac{\omega_2}{p_{x_1'}\left(\frac{1}{p_{x_1'}}+\frac{1}{p_{x_1''}}\right)} = -\frac{\{p_{x_0}\}_1\,\omega_2}{p_{x_1'}},$$

$$v_{x_1''} = -\frac{\omega_2}{p_{x_1''}\left(\frac{1}{p_{x_1'}}+\frac{1}{p_{x_1''}}\right)} = -\frac{\{p_{x_0}\}_1\,\omega_2}{p_{x_1''}}, \qquad (28)$$

$$\vdots$$

$$v_{y_1'} = -\frac{\omega_4}{p_{y_1'}\left(\frac{1}{p_{y_1'}}+\frac{1}{p_{y_1''}}\right)} = -\frac{\{p_{y_0}\}_1\,\omega_4}{p_{y_1'}}.$$

Sollten neben den Sektoren, im Falle vieler Richtungen, auch noch Zwischensektoren geschaffen werden, so werden die von den Zwischensektoren eingeschlossenen endgültigen Winkel erst nach der endgültigen Bestimmung der Winkel zwischen den Sektoren (wo also sämtliche Beobachtungen berücksichtigt werden) errechnet und durch deren Hilfe, den Gleichungen (25)—(28) entsprechend, die übrigen Winkel.

Im weiteren sollen die durch die zwei Ausgleichungen gebotenen Ergebnisse verglichen werden. Das in der Gleichung (24) vorkommende Absolutglied ω_1 ist:

$$\omega_1 = (l_{x_0}) + (l_{y_0}) + (l_{z_0}) - 4\pi. \qquad (29)$$

Wird der Wert von (l_{x_0}) aus der Gleichung (22) mit dem Wert L_x der Zusammenhänge in (14) verglichen, indem das dortige

$$[p_x] = p_{x_0} + \frac{1}{\frac{1}{p_{x_1'}}+\frac{1}{p_{x_1''}}} + \frac{1}{\frac{1}{p_{x_2'}}+\frac{1}{p_{x_2''}}} =$$

$$= p_{x_0} + \{p_{x_0}\}_1 + \{p_{x_0}\}_2, \qquad (30)$$

und

$$[p_x\, l_x] = p_{x_0}\, l_{x_0} + \{p_{x_0}\}_1 \{l_{x_0}\}_1 + \{p_{x_0}\}_2 \{l_{x_0}\}_2 \qquad (31)$$

ist, dann ist

$$(l_{x_0}) = L_x, \qquad (p_{x_0}) = [p_x] = P_x, \qquad (32a)$$

und gleicherweise

$$(l_{y_0}) = L_y, \qquad (p_{y_0}) = [p_y] = P_y, \qquad (32b)$$

$$(l_{z_0}) = L_z, \qquad (p_{z_0}) = [p_z] = P_z. \qquad (32c)$$

Es muß also sein:

$$\omega_1 = W. \qquad (33)$$

Daraus folgend:

$$(v_{x_0}) = - W \frac{P}{P_x} = - \frac{(p)\,\omega_1}{(p_{x_0})}, \tag{34}$$

wo

$$(p) = \frac{1}{\frac{1}{(p_{x_0})} + \frac{1}{(p_{y_0})} + \frac{1}{(p_{z_0})}} = \frac{1}{\frac{1}{Px} + \frac{1}{Py} + \frac{1}{Pz}} = P \tag{35}$$

ist. In der gleichen Weise ist das auch für die übrigen Unbekannten zu beweisen. Für das ω_2 aus (28) besteht folgender Zusammenhang:

$$\omega_2 = l_{x_1'} + l_{x_1''} - x_0 = [l_{x_1}] - x_0. \tag{36}$$

Es ist aber auch die hier folgende Gleichung auf Grund von (18) und (28) gültig:

$$v_{x_1'} = - \frac{\{p_{x_0}\}_1\,\omega_2}{p_{x_1'}} = - ([l_{x_1}] - x_0)\,\frac{p_{x_1}}{p_{x_1'}} \tag{37a}$$

da infolge der ersten Lösung

$$p_{x_1} = \frac{1}{\frac{1}{p_{x_1'}} + \frac{1}{p_{x_1''}}} = \{p_{x_0}\}_1. \tag{37b}$$

Auf die gleiche Weise kann der Beweis auch für die übrigen Winkel durchgeführt werden.

Damit ist eigentlich auch bewiesen, daß — gleichgültig ob die Lösung der Aufgabe durch vermittelnde Beobachtungen mit Zwangsbedingungen oder durch unmittelbare Beobachtungen mit Bedingungen (bedingte Beobachtungen) erfolgt — in beiden Fällen ist nicht nur die Menge der Berechnungsarbeit, sondern auch die Berechnung selbst aus denselben Elementen, Operationen zusammengesetzt. Damit ist gleichzeitig auch bewiesen, daß die zwei Lösungsarten, obzwar auf verschiedenen Wegen, bei strengstem Einhalten des Prinzipes der Methode der kleinsten Quadrate, zu denselben Schritten führen, also identisch sind. Vom Gesichtspunkt des prinzipiellen Ansatzes betrachtet ist die BAESCHLIN/RUESCHsche Lösung eine solche ohne Bedingung (d. h. von den vermittelnden Beobachtungen mit Zwangsbedingungen ausgegangen), während KNEISSL — durch die Befriedigung der ersten Bedingung sämtliche Beobachtungen berücksichtigt — eigentlich schon den auf Grund der ersten Lösung gegebenen Satz anwendet, nur leitet er zuerst die Verbesserungen ab.

*

Es soll nun zu einer dritten Lösungsart übergangen werden. Sofern, der Abb. 2 entsprechend, die Sektorenwinkel (x_0, y_0, z_0) als Unbekannte in die Ausgleichung eingeführt werden, führt die Lösung der Aufgabe zu der

Ausgleichung bedingter Beobachtungen mit ungemessenen Unbekannten und mit den zwischen den Unbekannten bestehenden Zwangsbedingungen ([11], [12]). Die zu befriedigenden Gleichungen sind die folgenden:

Bedingungsgleichungen mit ungemessenen Unbekannten (im allgemeinen nennt man sie ungemessene Unbekannte, hier sind sie jedoch gemessen und so nur als geschätzte Unbekannte eingesetzt)

$$\begin{aligned}
(l_{x_0} + v_{x_0}) + & & - x_0 &= 0\,, \\
(l_{x_1'} + v_{x_1'}) + (l_{x_1''} + v_{x_1''}) + & & - x_0 &= 0\,, \\
(l_{x_2'} + v_{x_2'}) + (l_{x_2''} + v_{x_2''}) + & & - x_0 &= 0\,, \\
(l_{y_0} + v_{y_0}) + & & - y_0 &= 0\,, \\
(l_{y_1'} + v_{y_1'}) + (l_{y_1''} + v_{y_1''}) + & & - y_0 &= 0\,, \\
(l_{z_0} + v_{z_0}) + & & - z &= 0\,.
\end{aligned} \tag{38a}$$

Zwangsbedingungsgleichung:

$$x_0 + y_0 + z_0 - 4\pi = 0\,. \tag{38b}$$

Die Einfachheit des angeschriebenen Gleichungssystems besteht darin, daß in allen Gleichungen verschiedene Verbesserungen vorkommen. Dementsprechend wurden, unter Berücksichtigung der Bezeichnungen aus der ersten Lösung folgende Normalgleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
+\frac{k_1}{p_{x_0}} & & - x_0 & + l_{x_0} = 0 \\
+\frac{k_2}{\frac{1}{\frac{1}{p_{x_1'}} + \frac{1}{p_{x_1''}}}} & & - x_0 & + l_{x_1} = 0 \\
+\frac{k_3}{\frac{1}{\frac{1}{p_{x_2'}} + \frac{1}{p_{x_2''}}}} & & - x_0 & + l_{x_2} = 0 \\
+\frac{k_4}{p_{y_0}} & & - y_0 & + l_{y_0} = 0 \\
+\frac{k_5}{\frac{1}{\frac{1}{p_{y_1'}} + \frac{1}{p_{y_1''}}}} & & - y_0 & + l_{y_1} = 0 \\
+\frac{k_6}{p_{z_0}} & & - z_0 & + l_{z_0} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{39a}$$

$$\left.\begin{aligned} -k_1 - k_2 - k_3 \qquad\qquad + k_0 &= 0 \\ -k_4 - k_5 \qquad\quad + k_0 &= 0 \\ -k_6 \quad + k_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (39b)$$

$$x_0 + y_0 + z_0 - 4\pi = 0. \quad (39c)$$

Da 6 Bedingungsgleichungen mit drei Unbekannten und einer Zwangsbedingung vorhanden sind, muß die Zahl der Normalgleichungen 10 sein. Die Bezeichnungen ergeben sich sinngemäß. k_0 ist eine sich infolge der Zwangsbedingung ergebende Korrelate. Nachdem in sämtlichen Gleichungen nur eine Korrelate vorkommt, können diese nacheinander ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} k_1 &= +p_{x_0} x_0 - p_{x_0} l_{x_0}, \\ k_2 &= +\{p_{x_0}\}_1 x_0 - \{p_{x_0}\}_1 \{l_{x_0}\}_1, \\ k_3 &= +\{p_{x_0}\}_2 x_0 - \{p_{x_0}\}_2 \{l_{x_0}\}_2, \\ k_4 &= +p_{y_0} y_0 - p_{y_0} l_{y_0}, \\ k_5 &= +\{p_{y_0}\}_1 y_0 - \{p_{y_0}\}_1 \{l_{y_0}\}_1, \\ k_6 &= +p_{z_0} z_0 - p_{z_0} l_{z_0}. \end{aligned} \quad (40a)$$

Diese Werte in die Normalgleichungen (39b) einsetzend (sämtliche Gleichungen wurden mit -1 multipliziert, damit die Unbekannten positive Koeffizienten erhalten), bekommt man:

$$\begin{aligned} (p_{x_0} + \{p_{x_0}\}_1 + \{p_{x_0}\}_2)\, x_0 + \qquad & + k_0 - p_{x_0} l_{x_0} - \{p_{x_0}\}_1 \{l_{x_0}\}_1 - \\ & - \{p_{x_0}\}_2 \{l_{x_0}\}_2 = 0, \\ (p_{y_0} + \{p_{y_0}\}_1)\, y_0 + \qquad & + k_0 - p_{y_0} l_{y_0} - \{p_{y_0}\}_1 \{l_{y_0}\}_1 = 0, \\ (p_{z_0})\, z_0 \qquad & + k_0 - p_{z_0} l_{z_0} = 0. \end{aligned} \quad (40b)$$

Durch Addition der Gleichungen, wenn die Unbekannten (x_0, y_0, z_0) als Koeffizienten $+1$ erhalten, und die älteren Bezeichnungen berücksichtigt werden, bekommen wir die folgende Gleichung:

$$\frac{k_0}{[p_x] + [p_y] + [p_z]} = \frac{[p_x l_x]}{[p_x]} + \frac{[p_y l_y]}{[p_y]} + \frac{[p_z l_z]}{[p_z]} - (x_0 + y_0 + z_0). \quad (40b/1)$$

Das heißt:

$$k_0 = \frac{L_x + L_y + L_z - 4\pi}{\frac{1}{P_x} + \frac{1}{P_y} + \frac{1}{P_z}} = P(L_x + L_y + L_z - 4\pi) = PW. \quad (40b/2)$$

Den Wert von k_0 in die Gleichungen (40b) einsetzend, werden die endgültigen Werte der Sektorenwinkel erhalten:

$$x_0 = L_x - W\frac{P}{P_x},$$

$$y_0 = L_y - W\frac{P}{P_y}, \tag{40c}$$

$$z_0 = L_z - W\frac{P}{P_z}.$$

Die gegebene Lösung der Gleichungen unter (40b) ist identisch mit dem üblichen Lösungsverfahren der Normalgleichungen. Da zuerst die Werte von x_0, y_0, z_0 ausgedrückt und diese in die Zwangsbedingungen eingesetzt worden sind, wird derselbe Zusammenhang erhalten, wie er unter (40b/1) zu finden ist. Es ist zu ersehen, daß die abgeleiteten Gleichungen identisch mit den Gleichungen (16) der ersten Lösungsart sind. Verfasser ist der Ansicht, daß die unmittelbare Ableitung der Ausgleichung von der Wildschen Sektorenmethode dieses zuletzt angegebene Verfahren ist. Vom Gesichtspunkt der praktischen Berechnung gelangt man schließlich auch hier zu den gewogenen arithmetischen Mittelwerten. Die Berechnung der Winkel innerhalb der Sektoren wird durch das Verteilen des Absolutgliedes der für die Sektorenwinkel als Zwangsbedingung angeschriebenen Gleichungen im Verhältnis der Gewichte der vorkommenden Winkel ausgeführt. Die Zusammenhänge sind identisch mit jenen aus (18).

Im übrigen kann diese letzte Lösung auch auf den Fall der „vermittelnden Beobachtungen mit Zwangsbedingungen" zurückgeführt werden, sofern auf Grund der Gleichungen (38) fiktive Verbesserungen eingeführt werden. Diese letzteren werden lediglich im Interesse der Vollständigkeit getan, bedeutet es doch vom Gesichtspunkt des Rechnens aus keine Vereinfachung, doch ist die einfache Ableitung um so übersichtlicher und anschaulicher. Man kann übrigens auch sonst das Einführen der fiktiven Beobachtungen anwenden, da in sämtlichen Gleichungen verschiedene Verbesserungen vorkommen. Also:

$$v_{x_0} = -\lambda_{x_0}, \qquad \text{Gewicht } P_{\lambda_{x_0}} = \frac{1}{\frac{1}{p_{x_0}}} = p_{x_0},$$

$$v_{x_1'} + v_{x_1''} = -\lambda_{x_1}, \qquad \text{Gewicht } P_{\lambda_{x_1}} = \frac{1}{\frac{1}{p_{x_1'}} + \frac{1}{p_{x_1''}}} = \{p_{x_0}\}_1,$$

$$v_{x_2'} + v_{x_2''} = -\lambda_{x_2}, \qquad \text{Gewicht } P_{\lambda_{x_2}} = \frac{1}{\frac{1}{p_{x_2'}} + \frac{1}{p_{x_2''}}} = \{p_{x_0}\}_2,$$

$$v_{y_0} = -\lambda_{y_0}, \qquad \text{Gewicht } P_{\lambda_{y_0}} = \frac{1}{\frac{1}{p_{y_0}}} = p_{y_0}, \tag{41}$$

$$v_{y_1'} + v_{y_1''} = -\lambda_{y_1}, \qquad \text{Gewicht } P_{\lambda_{y_1}} = \frac{1}{\frac{1}{p_{y_1'}} + \frac{1}{p_{y_1''}}} = \{p_{y_0}\}_1,$$

$$v_{z_0} = -\lambda_{z_0}, \qquad \text{Gewicht } P_{\lambda_{z_0}} = \frac{1}{\frac{1}{p_{z_0}}} = p_{z_0}.$$

Damit kommt in jeder Gleichung nur eine Verbesserung vor, also sind die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned}
+\left(p_{x_0} + \{p_{x_0}\}_1 + \{p_{x_0}\}_2\right) x_0 + & \quad + k_0 - p_{x_0} l_{x_0} - \{p_{x_0}\}_1 \{l_{x_0}\}_1 - \\
& \quad - \{p_{x_0}\}_2 \{l_{x_0}\}_2 = 0, \\
\left(p_{y_0} + \{p_{y_0}\}_1\right) y_0 & \quad + k_0 - p_{y_0} l_{y_0} - \{p_{y_0}\}_1 \{l_{y_0}\}_1 = 0, \\
\left(p_{z_0}\right) z_0 & \quad + k_0 - p_{z_0} l_{z_0} = 0, \\
x_0 + y_0 + z_0 & \quad - 4\pi = 0,
\end{aligned} \tag{42}$$

bzw. unter Berücksichtigung der Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}
[p_{x_0}]\, x_0 + & \quad + k_0 - [p_x\, l_x] = 0, \\
[p_{y_0}]\, y_0 + & \quad + k_0 - [p_y\, l_y] = 0, \\
[p_{z_0}]\, z_0 & \quad + k_0 - [p_z\, l_z] = 0, \\
x_0 + y_0 + z_0 & \quad - 4\pi = 0.
\end{aligned} \tag{42a}$$

Man gelangt zu einem mit dem vorangehenden identischen Resultat. Bezüglich der prinzipiellen Ableitung ist die letztere Lösung die kürzeste. Wird diese mit der ersten Lösung verglichen, so ergibt sich als Zahl der zwischendurch angewandten Normalgleichungen nur 4, anstatt 13 (infolge von 3 Unbekannten und 1 Zwangsbedingung). Während sich die 4 Normalgleichungen hier unmittelbar ergeben, können diese bei der ersten, der BAESCHLIN/RUESCH-schen Lösung und auch bei der dritten Lösungsart nur nach einer sukzessiven Gleichungslösung erhalten werden.

Aus all diesem kann also die Schlußfolgerung gezogen werden, daß *die zur Bestimmung sämtlicher Unbekannten geeigneten Zusammenhänge durch bedingte Beobachtungen mit ungemessenen Unbekannten und durch die Lösung*

der zwischen diesen bestehenden Zwangsbedingungsgleichungen auf dem Wege der Einführung fiktiver Verbesserungen der Ausgleichung der Sektorenmethode auf eine recht einfache Art erhalten werden können. Gleichzeitig ist mit dieser Methode auch die Strenge der bisherigen Methoden bewiesen worden. Auch ist es ersichtlich, daß bei strengem Einhalten des Prinzips der Methode der kleinsten Quadrate durch die sukzessiven einzelnen Lösungen der Normalgleichungen die gewogenen arithmetsichen Mittelwerte die einzelnen Unbekannten liefern.

*

Sofern die Ausgleichung der Sektoren stationsweise so ausgeführt wird, werden zur Ausgleichung des Triangulationsnetzes die ausgeglichenen Werte verwendet. Dazu ist es jedoch nötig, die mittleren Fehler der Unbekannten zu bestimmen, damit bei der neuen Ausgleichung die entsprechenden Gewichte berücksichtigt werden können. Bereits in dem Zusammenhang (19) ist die Formel des mittleren Fehlers der Beobachtung mit Einheitsgewicht angegeben worden. Auf diese Berechnung soll hier nicht ausführlich eingegangen werden, die Fachliteratur macht mehrere Lösungen bekannt. Es soll darauf an anderer Stelle zurückgegriffen werden. Das Gewicht der Unbekannten ergibt sich unmittelbar aus den Gleichungen (40c), bzw. (16). Wird das Gewicht der Unbekannten x_0 mit G_{x_0} bezeichnet, deren mittlerer Fehler als μ_{x_0}, dann ist auf Grund der aus der Ausgleichsrechnung bekannten Formel:

$$\frac{1}{G_{x_0}} = \left[\frac{ff}{p}\right] - \frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} = \frac{1}{P_x} - \frac{\left(\frac{1}{P_x}\right)^2}{\frac{1}{P_x}+\frac{1}{P_y}+\frac{1}{P_z}} = \frac{\mu_0^2}{\mu_{x_0}^2}, \tag{43}$$

da $f = 1$ und $a = 1$, so ist:

$$\left[\frac{af}{p}\right] = \frac{1}{P_x}, \quad \left[\frac{ff}{p}\right] = \frac{1}{P_x}, \quad \left[\frac{aa}{p}\right] = \frac{1}{P_x}+\frac{1}{P_y}+\frac{1}{P_z}.$$

Den Ausdruck weiter umformend und die alten Bezeichnungen berücksichtigend wird:

$$G_{x_0} = P_x\left(\frac{1}{1-\frac{P}{P_x}}\right) = \frac{P_x}{P_x-P}\left(\frac{1}{\frac{1}{P_x}}\right) = \left(1+\frac{P}{P_x-P}\right) = P_x + \tag{44}$$

$$+\frac{1}{\frac{P_x-P}{P_xP}} = P_x + \frac{1}{\frac{1}{P}-\frac{1}{P_x}} = P_x + \frac{1}{\frac{1}{P_y}+\frac{1}{P_z}}.$$

Aus diesem ist der Satz zu ziehen, *daß das Gewicht des ausgeglichenen Sektoren-*

winkels gleich der Gewichtssumme der Beobachtungen aus dem Sektor plus der reziproke Wert der Summe der Gewichtsreziproken der Summe aller weiter vorkommenden Winkel ist. In ähnlicher Weise läßt sich dieses auch für die übrigen Winkel ableiten. Das entsprechende Gewicht läßt sich auf einfache Weise auch für die Winkel zweiter Ordnung ableiten, davon kann aber hier Abstand genommen werden.

Des weiteren ist es eine sehr wichtige Frage, ob die ausgeglichenen Sektorenwinkel und deren mittlere Fehler bezüglich der weiteren Ausgleichung als voneinander unabhängige Werte zu behandeln sind ([8], S. 168). Sollte dies nicht der Fall sein, so müßten bei der Ausgleichung des Netzes auch die Stationsbedingungen in die Ausgleichung mit einbezogen werden, oder sollten als voneinander abhängige Werte behandelt werden [13] [14]. Im Sinne der grundlegenden Untersuchungen THIELES [15], [16] sind die schon einmal ausgeglichenen Werte im weiteren als voneinander unabhängig zu betrachten, wenn in den die Unbekannten ausdrückenden Gleichungen die Summe der Produkte der Koeffizienten der gleichen gemessenen Werte gleich Null sind. Wenn die in der Gleichung von x_0 vorkommenden Koeffizienten mit s bezeichnet werden, die von y_0 mit t und die von z_0 mit u, so ist nach Hinweis von H. WOLF:

$$\left[\frac{st}{P}\right] = 0\,, \quad \left[\frac{su}{P}\right] = 0 \quad \text{und} \quad \left[\frac{tu}{P}\right] = 0\,. \tag{45}$$

In vorliegendem Falle den Gleichungen (40c) bzw. (16) entsprechend:

$$\begin{aligned}
\frac{st}{P} = &- \frac{\frac{1}{P_y}\cdot\frac{1}{P_x}}{\frac{1}{P_x}+\frac{1}{P_y}+\frac{1}{P_z}} + \frac{\frac{1}{P_x^2}}{\frac{1}{P_x}+\frac{1}{P_y}+\frac{1}{P_z}}\cdot \\
&\cdot\frac{\frac{1}{P_y}}{\frac{1}{P_x}+\frac{1}{P_y}+\frac{1}{P_z}} - \frac{\frac{1}{P_x}\cdot\frac{1}{P_y}}{\frac{1}{P_x}+\frac{1}{P_y}+\frac{1}{P_z}} + \\
&+\frac{\frac{1}{P_x}}{\frac{1}{P_x}+\frac{1}{P_y}+\frac{1}{P_z}}\cdot\frac{\frac{1}{P_y^2}}{\frac{1}{P_x}+\frac{1}{P_y}+\frac{1}{P_z}} + \\
&+\frac{\frac{1}{P_x}}{\frac{1}{P_x}+\frac{1}{P_y}+\frac{1}{P_z}}\cdot\frac{\frac{1}{P_y}\cdot\frac{1}{P_z}}{\frac{1}{P_x}+\frac{1}{P_y}+\frac{1}{P_z}} = \\
&= -2P\left(\frac{1}{P_x}\cdot\frac{1}{P_y}\right)+3P\left(\frac{1}{P_x\cdot P_y}\right) = \frac{P}{P_x P_y}\,,
\end{aligned} \tag{46a}$$

ähnlicherweise:

$$\left[\frac{su}{P}\right] = -2P\left(\frac{1}{P_x}\cdot\frac{1}{P_z}\right) + 3P\left(\frac{1}{P_x\cdot P_z}\right) = \frac{P}{P_x P_z} \tag{46b}$$

$$\left[\frac{ut}{P}\right] = -2P\left(\frac{1}{P_y}\cdot\frac{1}{P_z}\right) + 3P\left(\frac{1}{P_y\cdot P_z}\right) = \frac{P}{P_y P_z}\,. \tag{46c}$$

Wie aus den Werten von (46) ersichtlich, sind die Produkte nicht gleich Null, infolgedessen ist auch die Unabhängigkeit der ausgeglichenen Werte nicht gesichert. Es soll bemerkt werden, daß dadurch, daß bei der Bildung der Produktglieder die Koeffizienten der einzelnen Mittelwerte verwendet wurden, vollständig streng vorgegangen wurde, denn diese sind voneinander ganz unabhängig gewonnene Werte, sie sind also unabhängig voneinander. In diesem Sinne muß man bei der Ausgleichung des Netzes die Sektorenwinkel als voneinander abhängige Werte behandeln. Wie verhält es sich, wenn die ausgeglichenen Sektorenwinkel das gleiche Gewicht haben? Also

$$P_z = P_y = P_x = P_\varphi \tag{47}$$

Dementsprechend kann auf Grund der Gleichungen (46) geschrieben werden:

$$\left[\frac{st}{P}\right] = -2P\left(\frac{1}{P_\varphi}\cdot\frac{1}{P_\varphi}\right) + 3P\left(\frac{1}{P_\varphi\cdot P_\varphi}\right) = -2P\frac{1}{P_\varphi^2} + \\ + 3P\frac{1}{P_\varphi^2} = \frac{P}{P_\varphi^2} = \left[\frac{su}{P}\right] = \left[\frac{ut}{P}\right]. \tag{48}$$

Wenn nun weiter die folgende Gleichung eingesetzt wird:

$$P = \frac{1}{\frac{1}{P_\varphi}+\frac{1}{P_\varphi}+\frac{1}{P_\varphi}} = \frac{1}{\frac{3}{P_\varphi}} = \frac{P_\varphi}{3}, \tag{49}$$

dann ist

$$\left[\frac{st}{P}\right] = \left[\frac{su}{P}\right] = \left[\frac{ut}{P}\right] = \frac{1}{3P_\varphi}\,. \tag{50}$$

Für den Fall also, daß die ausgeglichenen Sektorenwinkel das gleiche Gewicht haben, ist der Wert der Produktglieder in jeder Gleichung $+\frac{1}{3P_\varphi}$. Schon THIELE betont, daß falls die Null-Bedingung nicht gesichert ist, die Unabhängigkeit noch immer vorhanden sein kann, insbesondere, wenn die Summe überall die gleiche ist $\left(\text{in diesem Falle: } +\frac{1}{3P_\varphi}\right)$. Wenn nämlich zu den Werten x_0, y_0, z_0 immer dieselbe fiktive Beobachtung l_f addiert oder davon subtrahiert wird, dann wird auch die Bedingung $\left[\frac{st}{P}\right] = \left[\frac{su}{P}\right] = \left[\frac{ut}{P}\right] = 0$

erfüllt. Dies kann übrigens bei diesen Ausgleichungen getan werden, da es praktisch soviel bedeutet, daß die hier ausgeglichenen Winkel als auf die erste Richtung bezogene Richtungswinkel betrachtet werden, die auch auf eine andere Ausgangsrichtung bezogen werden können.

Ein Beispiel dieses Falles ist in [8], Seite 152—154 dargestellt, auf die Schreibersche Winkelvermessung bezogen, zu finden. Entsprechend des oben Ausgeführten können *die ausgeglichenen Winkel auch im Falle der Sektorenmethode im weiteren als voneinander unabhängig betrachtet werden, wenn ihr Gewicht das gleiche ist.* Es ist jedoch fraglich, wie weit bei der ziemlich freien Anordnung der Beobachtungen und der sich infolge äußerer Umstände ergebenden Gewichtsgebundenheit die gleichen Gewichte nach der Ausgleichung zu sichern sind. Von der Gleichung (44) ausgehend:

$$G_{x_0} = P_x + \frac{1}{\frac{1}{P_y} + \frac{1}{P_z}} = P_\varphi + \frac{1}{\frac{1}{P_\varphi} + \frac{1}{P_\varphi}} = \frac{3}{2} P_\varphi . \tag{51}$$

Im allgemeinen, wenn es N Sektoren gibt, ist

$$G_\varphi = P_\varphi + \frac{1}{\frac{N-1}{P_\varphi}} = \frac{N}{N-1} P_\varphi . \tag{52}$$

Wie ersichtlich, hängt das Gewicht des ausgeglichenen Winkels von der Zahl der Sektorenwinkel ab. Da innerhalb der Station die Summe der Gewichte mit der Gleichung

$$P_\varphi = \frac{1}{\frac{1}{P_\varphi} + \frac{1}{P_\varphi} + \dots} = \frac{P_\varphi}{N} , \tag{53}$$

auszudrücken ist, muß infolgedessen, damit P_φ in allen Stationen gleich sei, folgende Bedingung erfüllt werden:

$$P_\varphi = NP = S , \tag{53a}$$

wo S eine konstante Zahl ist. Die Gewichtskonstanz kann auf Grund des Obengesagten für jeden Sektor folgendermaßen gesichert werden. Den früheren Bezeichnungen entsprechend setzt sich das Gewicht P_φ des φ Winkels aus den folgenden Elementen zusammen:

$$P_\varphi = P_{\varphi_0} + \frac{1}{\frac{1}{P_{\varphi_1'}} + \frac{1}{P_{\varphi_1''}}} + \frac{1}{\frac{1}{P_{\varphi_2'}} + \frac{1}{P_{\varphi_2''}}} + \dots , \tag{54}$$

$$P_\varphi = P_{\varphi_0} + \frac{1}{\frac{N_{\varphi_1}}{P_{\varphi_1}}} + \frac{1}{\frac{N_{\varphi_2}}{P_{\varphi_2}}} + \dots = S , \tag{54a}$$

wo N_{φ_1}, N_{φ_2} die Zahl der gemeinsamen Winkel zweiter bzw. dritter Ordnung innerhalb des Sektors φ ist. Wenn angenommen wird, daß zwischen den Gewichten folgendes Verhältnis besteht:

$$P_{\varphi_0} : P_{\varphi_1} : P_{\varphi_2} : \ldots = A : B : C : \ldots , \tag{55}$$

wo A, B, C reine Zahlen sind, dann läßt sich der Zusammenhang (54a) folgendermaßen beschreiben:

$$P_{\varphi_0} + \frac{1}{\frac{N_{\varphi_1}}{\frac{B}{A} P_{\varphi_0}}} + \frac{1}{\frac{N_{\varphi_2}}{\frac{C}{A} P_{\varphi_0}}} + \ldots = S , \tag{56}$$

bzw.

$$P_{\varphi_1} = \frac{B}{A} P_{\varphi_0} \quad \text{und} \quad P_{\varphi_2} = \frac{C}{A} P_{\varphi_0} \ldots . \tag{57}$$

Im Endresultat bedeutet also eine derartige Angabe der Gewichte, mit den früheren verglichen, keine größere Gebundenheit, da das Verhältnis der Gewichte auch bisher schon gegeben war, höchstens — falls in irgendeinem Sektor mehrere Winkel zweiter und dritter Ordnung (Zwischensektoren) vorkommen — entfallen dementsprechend auf den Winkel etwas weniger Beobachtungswiederholungszahlen als auf einen solchen Sektorenwinkel, in dem es keine Zwischenrichtungen gibt.

Es soll als Beispiel untersucht werden, welche Werte für die einzelnen Gewichte erhalten werden, wenn nach der in Abb. 2 gegebenen Anordnung, A, B, C Richtungen erster Ordnung sind, D, F solche zweiter Ordnung und E dritter Ordnung. Es sei:

$$N = 3 , \quad S = 3 ,$$

$$P_{x_0} : P_{x_1} : P_{x_2} = 3 : 2 : 1 .$$

Dann ist:

$$P_{x_0} = 6 , \; P_{x_1} = \frac{4}{6} 6 = 4 \; P_{x_2} = \frac{2}{6} 6 = 2 ,$$

$$P_{y_0} = 7 , \; P_{y_1} = \frac{4}{6} 7 = 4{,}67 \cong 5 ,$$

$$P_{z_0} = 9 .$$

Es steht natürlich dem nichts im Wege, daß bei der Bestimmung der Gewichte die verschiedenen atmosphärischen Bedingungen und auch andere äußere Umstände berücksichtigt werden. Selbstverständlich stößt aber ein solches zahlenmäßiges Berücksichtigen in jedem Falle auf ziemlich viele Schwierigkeiten. Besonders wesentlich ist jedoch derjenige Teil der Untersuchung, der

bezüglich der Ausgleichung die so wichtige Gewichtsgleichheit und damit die Unabhängigkeit zu sichern wünscht.

Mit den Gewichtsproblemen der Winkel zweiter und dritter Ordnung befaßt sich die Arbeit nicht, da diese Beobachtungen in den meisten Fällen bei der Punktausgleichung verwendet und dort sowieso verschiedene Gewichte angewendet werden.

Mit diesen Ausführungen sollte die sich auf die Sektorenmethode beziehende Literatur zusammengefaßt und ergänzt werden. Das Verfahren kann wegen seiner praktischen Vorteile an vielen Stellen Anwendung finden. Die Schweizer verwenden sie seit 1904 zur Beobachtung des Triangulationsnetzes II. und III. Ordnung, und seit 1910 auch bei jener I. Ordnung. Sie konnten mit Hilfe der Ferreroschen internationalen Formel für mittlere Fehler einen $\pm 0.3''$-igen Winkelfehler nachweisen, was für die Genauigkeit der Methode eine Aufklärung qualifizierenden Charakters gibt.

Die Möglichkeit der entsprechenden Erwägung der atmosphärischen und topographischen Verhältnisse, die allerwirtschaftlichste Auswahl und die Verteilung der Beobachtungswiederholungen, die gemeinsame Ausgleichung der Beobachtungen niederer Ordnung mit solchen höherer Ordnung und die dadurch zu erzielende Erhöhung der Genauigkeit, die einfache Ausführbarkeit der ganzen Ausgleichungsarbeit und endlich das Sichern gleicher Gewichte zum Zwecke der Unabhängigkeit sprechen alle dafür, daß die Anwendung der Methode von wirtschaftlichem Gesichtspunkt aus eine recht große Bedeutung hat. Natürlich darf man auch hier keine übertrieben großen Schranken bezüglich der Gewichte bzw. der Wahl der Meßzahlen setzen, denn dadurch würde man sich denselben Problemen gegenübergestellt sehen wie bei der Schreiberschen Winkelmeßmethode, wo selbst die Auswahl der äußeren, objektiven Verhältnisse nicht in Frage kommen kann. Daß der Methode eine große Bedeutung zuerkannt wird, wird durch nichts besser bewiesen, als daß in den meisten Lehr- und Handbüchern eine recht ausführliche Analyse derselben enthalten ist. Über die bisher durchgeführten Landesvermessungen hinausgehend, kann die Sektorenmethode zweckmäßig bei industriellen und Stadt-Triangulationen angewendet werden, wobei es häufig vorkommt, daß die Beobachtungen nicht in allen Punkten und für jede Richtung gleich sind. Auch hier erfordert jedoch das richtige Erwägen der verschiedenen Umstände eine große Sorgfalt und Umsicht.

LITERATUR

1. Baeschlin, C. I.: Compensation simplifiée d'une station observée d'après la méthode des secteurs. *Schweiz. Z. für Vermessungsw. u. Kulturtechnik* 1925.
2. Zoelly, H.: La méthode des secteurs en Triangulation. *Schweiz. Z. für Vermessungswesen u. Kulturtechnik*, 1925.
3. Kneissl, M.: Betrachtungen zur Horizontalwinkelmessung unter besonderer Berücksichtigung der Sektorenmethode. *Nachrichten aus dem Reichs-Verm.-Dienst* 1941, 249—266.

4. KNEISSL, M.: Einige Bemerkungen zur Winkelmessung nach der Sektorenmethode. *Österr. Z. für Vermessungswesen* 1952. 129—134 und 161—169.
5. JORDAN/EGGERT/KNEISSL: Handbuch der Vermessungskunde IV. (1. Mathematische Geodäsie, Stuttgart, 1958. S. 346—366).
6. GROSSMANN, W.: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. Berlin, 1953. S. 204—209.
7. HAZAY, I.: Kiegyenlítőszámítás a geodéziai gyakorlatban (Ausgleichungsrechnung in der geodätischen Praxis). Budapest, 1938. S. 101—104.
8. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Felsőgeodézia I (Höhere Geodäsie I). Felsőoktatási Jegyzetellátó V. Budapest, 1953. S. 157—162.
9. HOMORÓDI, L.: Felsőgeodézia II (Höhere Geodäsie II). Felsőoktatási Jegyzetellátó V. Budapest, 1955. S. 293—294.
10. HAZAY, I.: Geodéziai Kézikönyv (Geodätisches Handbuch, Bd. I). Budapest, 1956, S. 459—464 u. 622.
11. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Eine weitere Ausgleichsgruppe. *A Bánya- és Kohómérnöki Osztály Közleményei*, Sopron, 1948—1949. 325—332.
12. WOLF, H.: Über eine allgemeine Form der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. *Arbeiten aus dem Institut für Erdmessung*, Bamberg, 1948.
13. TIENSTRA, J. M.: An extension of the technique of the methods of least squares to correlated observations. *Bulletin Géodesique*, 1940, 202—335.
14. WOLF, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. *Vermessungstechnische Rundschau*, 1961. S. 92—95 und 145—153 sowie 167.
15. THIELE, T. N.: Theory of Observations. London, 1903.
16. HELMERT, F. R.: Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig—Berlin, 1907, S. 220—225 u. 240—243.

THE UNIFORM ANALYSIS AND ADJUSTMENT OF WILD'S SECTOR-METHOD

F. HALMOS

SUMMARY

The introduction of the paper deals with the importance of WILD's Swiss sector-method. In the following the different adjusting methods are presented.

1. Solution of intermediate observations on the base of constraint conditions.
2. Method according to conditional observations.

It is proved that the relations of the second method are set up, as a matter of fact, by utilizing the final conclusions of the first method. Furthermore, it is also proved that the above-mentioned relations actually comply with the corresponding formulae of solution 1. [relations (29)—(37)].

The solution referring to the adjustment of measuring results obtained by the sector-method, for this purpose using the unmeasured unknowns of conditional observations and constraint conditions existing between the latter, is also discussed [equations (38)—(40)]. Later the visibly descriptive and simple setting up of solutions referring to the adjustment, arrived at by introducing fictitious corrections, is presented [equations (41)—(42)]. All these methods conduce to the weighted mean value.

The fourth paragraph deals with the determination of the weight belonging to the adjusted values. Furthermore, it was analysed whether the most probable values determined in this way could be treated as independent magnitudes when adjusting the grid. If after the adjustment the uniform weight of the sector-angles is ensured, then according to THIELE the angles in question can be regarded as being independent of each other. Relations giving the determination of weights and reiterative numbers, taking the above ones into consideration, are deduced [equations (51)—(57)].

L'ANALYSE ET LA COMPENSATION DE LA MÉTHODE DES SECTEURS DE WILD

F. HALMOS

RÉSUMÉ

Dans son introduction, l'article traite de l'importance de la méthode d'observation suisse nommée méthode des secteurs de Wild. Il fait connaître la disposition de principe des observations et le problème de la détermination des poids. Il présente ensuite les différentes méthodes de compensation, et notamment:

1. la méthode des observations indirectes à conditions,
2. la méthode des observations conditionnées.

L'auteur démontre que la deuxième méthode utilise, en somme, les conclusions finales de la première pour écrire les équations convenables. Il prouve que ces équations concordent, par conséquent, avec les formules correspondantes de la méthode indirecte complétée par des équations de condition [éq. (29)—(37)].

Par la suite, l'auteur fait connaître la solution de la compensation des observations effectuées en secteurs, par introduction d'inconnues non mesurées, et des conditions existant entre celles-ci [éq. (38)—(40)], puis présente une construction simple et claire pour la résolution de la compensation à l'aide de corrections fictives [éq. (41), (42)]. Tous ces procédés nous ramènent à la moyenne arithmétique pondérée.

La quatrième partie de l'article étudie la détermination du poids des valeurs compensées. Il examine, en outre, si les valeurs les plus probables ainsi déterminées peuvent être considérées, dans la compensation du réseau de triangulation, comme des données indépendantes. Il démontre que si l'égalité de poids des angles des secteurs est assurée après la compensation, alors ces valeurs peuvent, selon Thiele, être considérées comme indépendantes. Pour terminer l'auteur déduit les formules donnant la détermination des poids, resp. des nombres de répétitions, compte tenu des considérations précédentes [éq. (51)—(57)].

ЕДИНОЕ РАССМОТРЕНИЕ И УРАВНИВАНИЕ СЕКТОРИАЛЬНОГО МЕТОДА ВИЛЬДА

Ф. ХАЛЬМОШ

РЕЗЮМЕ

В введении работы рассматривается значение секториального метода Вильда. Излагается принципиальная схема измерений и обсуждается вопрос выбора весов.

В дальнейшем описываются различные способы уравнивания:

1) решение вспомогательных наблюдений при помощи принудительных условий,
2) способ по условным наблюдениям.

Автор показывает, что во втором методе соответствующие соотношения получаются, собственно говоря, с использованием окончательных выводов, вытекающих из первого. Последние соотношения, собственно говоря, согласуются с соответствующими формулами, служащими для решения вспомогательных наблюдений при помощи принудительных условий (соотношения [29] — [37]).

Описывается решение уравнивания измерений секториальным методом, при помощи неизмеренных неизвестных в условных наблюдениях и действительных между ними принудительных условий (уравнения [38] — [40]). Затем описывается простое, наглядное построение решения уравнивания при введении фиктивных поправок (уравнения [41] — [42]). Все методы приводят к образованию взвешанной среднеарифметической величины.

В четвертой части работы рассматривается вопрос об определении веса полученных уравниванием значений. Кроме того, анализируется возможность рассмотрения определенных таким образом наиболее вероятных значений как независимых друг от друга величин, при уравнивании сети. Доказано, что в случае, когда после уравнивания обеспечивается равный вес секториальных углов, то, в соответствии с указаниями *Тиле*, они могут считаться самостоятельными. Автором выводятся соотношения, определяющие веса или повторяющиеся числа, с учетом вышеизложенного (уравнения [51] — [57]).

ÜBER DIE FEHLERVERTEILUNG DER RÄUMLICHEN AEROTRIANGULATION

GY. ALPÁR und J. SOMOGYI

GEODÄTISCHES FORSCHUNGSLABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 3. September 1962]

Die räumliche Aerotriangulation trat als wirtschaftliches Punktverdichtungsverfahren in der letzten Zeit auch in Ungarn in den Vordergrund. Eine genauere Methode als die bei uns bisher angewandte graphische Fehlerverteilung wurde bezüglich einer konkreten Aufgabe benötigt. Nach einer kurzen Darstellung und Kritik der diesbezüglichen ausländischen Fachliteratur erörtern die Autoren vier Varianten einer einfachen numerischen Fehlerverteilungsmethode. Diese Fehlerverteilungsmethode beruht auf der auch von VERDIN angewandten bildpaarenweisen Transformation und bestimmt durch die Anwendung von Differenzreihen von zweiter, dritter bzw. höherer Ordnung die Transformationskoeffizienten der Zwischenteilmodelle innerhalb der Modellreihe. Diese neue Methode hat neben ihrer Einfachheit auch den Vorteil, daß sie auch im Falle von Zwischenpaßpunkten anwendbar ist. Die Anwendung der neuen Methode wird auch an einem praktischen Beispiel vorgeführt.

In Zusammenhang mit einer konkreten Aerotriangulationsarbeit haben wir in der letzten Zeit die diesbezügliche Fachliteratur gründlich studiert und mußten bedauerlicherweise feststellen, daß die ungarische Fachliteratur bezüglich der Fehlerverteilung von räumlichen Aerotriangulierungen sehr arm und unvollständig ist. Zwar wurde die räumliche Aerotriangulation bis zu den letzten Jahren in Ungarn selten angewandt, und so ist es wahrscheinlich diesem Umstand zuzuschreiben, daß sich außer den Universitätslehrheften sowie dem Band III. von »Geodéziai Kézikönyv« (Geodätisches Handbuch) nur zwei neuere Studien [1] und [2] mit diesbezüglichen einheimischen Problemen befassen. (Die Studie [2] erschien nach der Fertigstellung unseres Manuskriptes.) Demgegenüber ist die ausländische Fachliteratur in dieser Hinsicht äußerst reich, und dies ist leicht erklärlich, weil auch im Zusammenhang mit geodätischen Arbeiten die Geschwindigkeit und Wirtschaftlichkeit eine immer wesentlichere Forderung ist, und dies verursacht die immer ausgedehntere Anwendung der Fotogrammetrie.

In dem Geodätischen Forschungslaboratorium der UAdW werden — — wenn auch vorläufig noch unter bescheidenen Verhältnissen — nach ausländischen Vorbildern Forschungen zur weiteren inländischen Anwendung einiger fotogrammetrischer Verfahren vollführt. Betreffs der Untersuchung der Fehlerverteilung von Aerotriangulationen standen wir im Interesse der Beschleunigung konkreter Aufgaben von volkswirtschaftlicher Bedeutung mit dem »Kartográfiai Vállalat« (Karthographischen Betrieb) in Zusammenarbeit.

Die oben erwähnten Umstände bewogen uns zur Veröffentlichung der während unserer Untersuchungen bisher erzielten Ergebnisse, um die Unvollständigkeit der heimischen Fachliteratur der Aerotriangulation wenigstens teilweise nachzuholen.

Vorerst soll erwähnt werden, daß in Zusammenhang mit räumlicher Aerotriangulation häufig über Aeropolygonierung und Aeronivellement gesprochen wird. Bezüglich der Benennungen wollen wir hier nicht Stellung nehmen, es soll bloß bemerkt werden, daß andere Fehlerverteilungsmethoden angewendet werden müssen, falls während der Aerotriangulation nur die Horizontal-, oder gemeinsam die Horizontal- und Höhenkoordinaten der Geländepunkte zu bestimmen sind. Es muß noch in Betracht gezogen werden, ob zu den Zwischenaufnahmen der Modellreihe die mit Hilfe von Statoskopen oder elektronischen Höhenmeßgeräten, Sonnen- bzw. Horizontkameras, bzw. Giroskopgeräten gemessenen äußeren Orientierungsdaten zur Verfügung stehen oder nicht.

In dem von uns erörterten Falle wird über eine räumliche Aerotriangulation mit Folgebildanschluß zur Bestimmung der Horizontal-Koordinaten der Geländepunkte gesprochen. Die Methode selbst ist allgemein bekannt, daher sollen hier nur die im Laufe der Umrechnung der Modellkoordinaten zu Geländekoordinaten entstehenden Probleme erörtert werden.

Zur Umrechnung der sog. Modellkoordinaten eines orientierten Raummodells in ein geodätisches Koordinatensystem wird allgemein eine einfache lineare räumliche Koordinatentransformation (die häufigst angewandte Form, auch Helmert-Transformation genannt) verwendet. Es sei hier bemerkt, daß in der ausländischen Fachliteratur immer häufiger spezielle »affine«, »konforme« und Koordinatentransformationen sogar höherer Ordnung angetroffen werden. Nach unseren Erfahrungen bringt die Anwendung dieser Methoden bei zeitgemäßen fotogrammetrischen Geräten im Falle der Koordinatentransformation eines *einzigen* Modells — es sei denn, daß eine von vornherein bekannte Gesetzmäßigkeit sie nicht begründet — wegen ihrer relativ kleinen Fläche kaum eine Genauigkeitserhöhung und sie ist folglich nicht wirtschaftlich. Anders ist es aber, wenn es sich um die gemeinsame Transformation einer kurzen, von 4—5 Modellen bestehenden Modellreihe handelt, weil hier zum Beispiel die von SCHUTT vorgeschlagene Transformation von höherer Ordnung [3] auch die Aufgaben der Fehlerverteilung übernehmen kann. Eine andere Frage ist es aber, ob eine solche Transformation z. B. konform sei oder nicht. Die ausführliche Behandlung dieser Fragen würde aber zu weit führen und den Rahmen unserer jetzigen Studie überschreiten. Über unsere diesbezüglichen Untersuchungen werden wir möglicherweise später ebenfalls berichten.

Die möglichst richtige Fehlerverteilung bei der räumlichen Aerotriangulierung hat besonders im Falle längerer Flugstreifen eine große Bedeu-

tung. Da über Fehlerverteilung gesprochen wird, müssen naturgemäß die Gründe der in Frage stehenden Fehler und die eventuelle Gesetzmäßigkeit ihrer Erscheinung gesucht werden. In dieser Hinsicht können wir uns leider auf einheimische Untersuchungen nicht berufen, und so muß von der Analyse ausländischer Versuchsmessungen ausgegangen werden. Wie im allgemeinen, so werden auch bei der räumlichen Aerotriangulation regelmäßige und zufällige Fehler voneinander unterschieden.

J. M. ZARZYCKI erörtert in seiner Arbeit [4], mit allgemeinem Hinweis auf die Fachliteratur, auch quasiregelmäßige und pseudozufällige Fehler. Auf Grund der Arbeit [5] von L. SOLAINI und C. TROMBETTI ist es aber offensichtlich, daß, wenn auch zweifellose Beweise für das Vorkommen der regelmäßigen und zufälligen Fehlerquellen vorhanden sind, ist die Trennung der regelmäßigen und zufälligen Fehler bis jetzt noch nicht gelungen, und es besteht in unserem Fall auch wenig Hoffnung hierfür. Unter solchen Umständen kann auch die Augsleichung nur eine Art von Interpolationsverfahren zur Annäherung der sehr komplizierten Fehlerfunktion sein. Schon der Umstand, daß so viele Methoden zur Fehlerverteilung der räumlichen Aerotriangulierung vorhanden sind — in der Studie [5] wird auch unter anderen über Versuche mit etwa acht solchen Fehlerverteilungsmethoden berichtet —, weist darauf hin, daß diesbezüglich noch keine beruhigende Lösung zur Verfügung steht. Zur Charakterisierung der jeztigen Lage des Problemenkreises sollen hier die folgenden Sätze aus der erwähnten Studie von L. SOLAINI und C. TROMBETTI angeführt werden: »Dans ces conditions, il est sage d'adopter des principles plus simples et compatibles avec l'approximation des resultats qu'on peut obtenir.« (Unter diesen Bedingungen ist es vernünftig, solche einfacheren und leicht anwendbaren Prinzipien anzunehmen, mit welchen die (überhaupt) erreichbaren Ergebnisse (gut) annähbar sind.) Zwar ist dieses Zitat nur eine willkürlich erfaßte Meinung und bedeutet keinesfalls, daß die Autoren die Vorteile der strengen Ausgleichung nicht anerkennen würden, für die Probleme der Fehlerverteilung der räumlichen Aerotriangulation halten wir es doch für charakteristisch. Im weiteren wird eine solche einfache Lösung erstrebt.

Die zur Zeit zu der räumlichen Aerotriangulation angewandten Fehlerverteilungsmethoden können verschiedentlich klassifiziert werden. Allgemein verbreitet ist die Gruppierung, bei welcher Verteilungen zweiter und dritter Ordnung unterschieden werden. Während sich die Verteilungen zweiter Ordnung eher der Fortplanzung der regelmäßigen Fehler anpassen, lassen die Verteilungen dritter Ordnung zur Korrektion der zufälligen Fehler mehr Raum. Es besteht aber zur Zeit noch kein verläßlicher Versuchsbeweis dafür, welche Art der Fehlerverteilung den praktischen Anforderungen besser entspricht. Die Frage ist wegen der obenerwähnten komplizierten Fehlerfunktionen theoretisch schwer zu entscheiden.

Nach der Art der Fehlerverteilung wurden im Laufe unserer Untersuchungen die bekannten Methoden für kontinuierlich bzw. stufenweise vollführtes Verfahren erklärt, je nach dem, ob die Korrektion der Modellkoordinaten für die ganze Modellreihe nach einheitlicher, kontinuierlicher Gesetzmäßigkeit oder aber mit einer den einzelnen Bildpaaren entsprechenden Auflösung in Raummodelle erfolgt.

Die auch bei uns bekannten Verfahren gehören zu der ersteren Gruppe. Wie z. B. die SCHWIDEFSKYsche Methode [6], bei der die zu den Modellkoordinaten zuzurechnenden Δ Korrektion als stetige Funktionen der Koordinaten des auf die ganze Modellreihe einheitlichen Systems ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 , \\ \Delta y_i &= a_3 + a_4 y_i + a_5 x_i y_i + a_6 x_i^2 , \\ \Delta h_i &= b_1 + b_2 x_i + b_3 y_i + b_4 x_i y_i + b_5 x_i^2 . \end{aligned} \tag{1}$$

Es ist aus den Formeln (1) ersichtlich, daß diese Fehlerverteilung im Grunde genommen eine Interpolation zweiter Ordnung ist. Ein ähnliches kontinuierliches Verfahren ist noch die Methode von ZARZYCKI [7] und PAWLOW [8], doch sind die beiden schon dritter Ordnung.

Der gemeinsame Zug der stufenweisen Verfahren ist, daß zu den Modellkoordinaten nicht Korrektionen gerechnet werden, sondern man arbeitet je Modell mit eigenen Transformationskonstanten. So sind z. B. die Methoden von VERDIN [9] und VERMEIR [10], bei denen eine einfache lineare Transformation zu jedem dem jeweiligen Bildpaar entsprechenden Raummodell gehört. Am Anfang und Ende der Raummodellreihe können die für die zwei äußersten Modelle gültigen Transformationskonstanten mit Hilfe von Paßpunkten berechnet, während die Transformationskonstanten auf die Zwischenmodelle durch entsprechende Interpolation ermittelt werden. Nach unserer Meinung passen sich letztere Methoden besser den tatsächlichen Umständen der räumlichen Aerotriangulation an, weil während der instrumentalen Auswertung das Raummodell der ganzen Reihe aus den den einzelnen Bildpaaren entsprechenden Modellen zusammengestellt wird, und so ist es offensichtlich, daß die Verzerrungen innerhalb je eines Modells nach verschiedenen Gesetzen zur Geltung kommen. Bei diesen Verfahren muß natürlich mathematisch gesichert werden, daß die auf die Überdeckungszonen gleichfalls gültigen zwei nacheinander vollzuführenden Transformationen wesentliche Widersprüche nicht verursachen können. Ein solches Problem besteht bei den stetigen Fehlerverteilungen nicht, es treten dagegen bei diesen, eben wegen der stetigen Fehlerverteilung, Modellverzerrungen auf, die regelmäßige Fehler zurücklassen.

Bei der Bekanntmachung der Methoden der stufenweise Fehlerverteilung kann davon ausgegangen werden, daß zwischen den Modellkoordinaten

jedes Modells der Modellreihe und den entsprechenden geodätischen Koordinaten folgender linearer Transformationszusammenhang besteht:

$$\begin{aligned} X &= k(x\cos\varphi - y\sin\varphi) + a\,, \\ Y &= k(x\sin\varphi + y\cos\varphi) + b\,, \end{aligned} \tag{2}$$

wo X, Y die geodätischen Koordinaten; k der Maßstabfaktor; x, y die Modellkoordinaten; φ der Drehungswinkel des zum Modell gehörenden Koordinatensystems im Verhältnis zu dem geodätischen Koordinationsystem; a und b die Verschiebungswerte der beiden Koordinatensysteme sind. Dieser einfache Transformationszusammenhang ist natürlich nur eine Voraussetzung, aber es wird durch die Praxis bewiesen, daß — wie es bereits erwähnt wurde — im Falle eines einzigen Modells andere Transformationszusammenhänge auch kein besseres Ergebnis liefern. Anstatt der in den Gleichungen (2) vorkommenden Parameter k und φ werden der in [11] erörterten Lösung entsprechend folgende Substitutionen eingeführt

$$\begin{aligned} k\cos\varphi &= r\,, \\ k\sin\varphi &= s\,, \end{aligned}$$

und so können unsere Gleichungen (2) in einfacherer Form angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} X &= rx - sy + a\,, \\ Y &= ry + sx + b\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Auf Grund der Gleichungen (3) ist einzusehen, daß ein durch zwei planimetrische (horizontale) Koordinaten angegebener Paßpunkt zur Bestimmung der Transformationskonstanten r, s, a, b eines Modells genügt.

Falls wir innerhalb eines Modells mehr als zwei Paßpunkte besitzen, so werden, dem ebenfalls in [11] Erörterten gemäß, die bestanschmiegenden r, s, a, b Transformationskonstanten durch das Minimum der Quadratsummen der Koordinatenwidersprüche bestimmt. In diesem Zusammenhang haben wir absichtlich nicht über Ausgleichung gesprochen, weil sich hier auch die zufälligen Fehler der Ausgleichung mit den regelmäßigen Fehlern vermischen, man muß sogar mit den regelmäßigen Fehlern der Geländepunkte rechnen, so kann sozusagen nur von einer näherungsweisen Fehlerverteilung gesprochen werden.

Als erste Stufe soll von dem Falle ausgegangen werden, bei dem wir nur in den ersten und letzten Modellen der Modellreihe Paßpunkte besitzen. In diesem Falle können dem obenstehenden entsprechend — bei mehr als zwei Punkten mit Fehlerverteilung — die Transformationskonstanten des

ersten und letzten Modells berechnet werden:

$$X_1 = r_1 x_1 - s_1 y_1 + a_1 ,$$
$$Y_1 = r_1 y_1 + s_1 x_1 + b_1 ,$$

und (4)

$$X_n = r_n x_n - s_n y_n + a_n ,$$
$$Y_n = r_n y_n + s_n x_n + b_n .$$

Demnach liegt der Gedanke auf der Hand, daß die Fehlerverteilung der räumlichen Aerotriangulation durch Interpolation zwischen den Transformationskonstanten der obenstehenden zwei äußeren Modelle gelöst wird. Das Verfahren von VERDIN und VERMEIR beruht auch auf diesem Gedankengang, aber die zur Bestimmung der Transformationskonstanten der Zwischenmodelle angewandte Interpolation ist in beiden Fällen verschieden. VERDIN zeigt durch die Anwendung der sogenannten arithmetischen Reihen ein relativ einfaches Annäherungsverfahren, während die Aufgabe von VERMEIR mit der Methode der kleinsten Quadrate indirekt gelöst wird.

Im weiteren wird eine zur Fehlerverteilung der räumlichen Aerotriangulation ausgearbeitete neue Methode vorgeführt, welche nach dem von uns für günstiger erklärten stufenweisen Prinzip aus dem schon erwähnten VERDINschen Verfahren weiterentwickelt worden ist. Unser Ziel war es, ohne Verlust an Genauigkeit weitere Vereinfachungen zu erreichen und den praktischen Erfordernissen ensprechend die Einbeziehung von an beliebiger Stelle — — zweckmäßig in der Mitte — der Modellreihe liegenden Paßpunkten zu ermöglichen. Es ist nicht zu bestreiten, daß die fehlerlosen Werte mit Hilfe einer auch im besten Falle nur durch statistisch bekannte Fehlerhäufung konstruierten Fehlerverteilung nicht zurückgewonnen werden können, und wenn wir nur am Anfang und am Ende der Modellreihe Paßpunkte besitzen, so muß mit bedeutenden Restfehlern innerhalb der Reihe gerechnet werden. Die Größe der Restfehler kann — wie bekannt — wirksam vermindert werden, wenn Paßpunkte auch innerhalb der Modellreihe vorhanden sind. Deswegen wurde die Ausarbeitung einer solchen numerischen Fehlerverteilungsmethode angestrebt, welche in dieser Hinsicht weitergehend anpassungsfähig und auch zur Fehlerverteilung großmaßstäblicher räumlicher Aerotriangulierungen brauchbar ist.

Das von uns ausgearbeitete Verfahren enthält dem *Verdin*schen gegenüber auch ohne Anwendung von Zwischenpaßpunkten Neues, da es durch das Fortfallen der Berechnung der Transformationskonstanten a und b eine weitere Vereinfachung ermöglicht.

Zur Veranschaulichung des Verfahrens müssen wir uns eine rechtwinklige ebene Koordinatensystemreihe vorstellen, bei welcher die Ausgangspunkte der einzelnen Systeme in den sog. Anschlußpunkten der benachbarten Modelle liegen.

Dies ist im Falle der Abb. 1 eben dadurch leicht zu verstehen, daß der Ausgangspunkt des Koordinatensystems in jedem Falle in den Anschlußpunkt der Überdeckungszone gesetzt wurde. Die allgemein verschiedenen Transformationskonstanten der zwei benachbarten Modelle können in diesem Punkte keine Koordinatenwidersprüche verursachen, weil ihre sich auf das Anschlußmodell beziehenden Koordinaten:

$$x = 0 \text{ und } y = 0 \text{ sind.}$$

Auf diese Weise wurde anstatt des einheitlichen Modellreihen-Koordinatensystems eine dem obigen entsprechende Koordinatensystemkette ein-

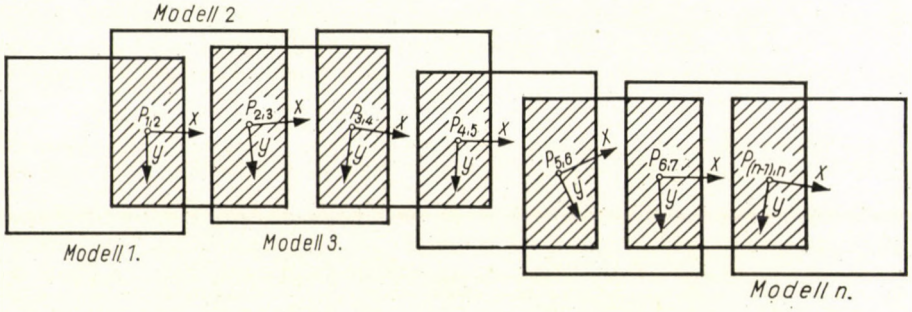

Abb. 1

geführt, deren Verschiebungswerte durch die Lage der Anschlußpunkte gegeben sind. Hier soll nebenbei bemerkt darauf hingewiesen werden, daß während der Auswertung allgemein nicht ein, sondern mehrere (meistens drei) Anschlußpunkte zur Anschließung der benachbarten Modelle verwendet werden, daher können die obenerwähnten Koordinatenwidersprüche allgemein in jedem solchen Punkt nicht für Null angenommen werden. Falls aber in Betracht gezogen wird, daß die Knüpfung der Modelle im Auswertegerät tatsächlich mit diesen Anschlußpunkten geschieht, so ist es leicht einzusehen, daß diese zurückbleibenden Fehler nicht größer als die zufälligen Fehler der Auswertung sein können. Diese zurückbleibenden Fehler können dadurch noch weiter vermindert werden, daß die Anfangspunkte der Koordinatensysteme in den Schwerpunkt der zusammengehörenden Anschlußpunkte gesetzt werden.

In dem bisherigen sprachen wir über eine ebene Koordinatensystemskette, obwohl es offensichtlich ist, daß streng genommen zu jedem Modell ein Raumkoordinatensystem anzuordnen ist, unabhängig davon, ob eine Höhenauswertung durchgeführt wird oder nicht. So wurden durch die Anwendung des ebenen Koordinatensystems scheinbar nur die Drehungen in der Ebene der Modelle beachtet. Diese Annäherung ist aber in der Praxis meistens

erlaubt, weil die kleinen in den x, z und y, z Ebenen vollzogenen Drehungen der einzelnen Modelle nicht von maßgebender Wirkung auf die horizontalen Koordinaten sind, und diese Vernachlässigung wird auch durch die freie Änderung der r, s Trasnformationskonstanten vermindert, falls sie nicht durch Interpolation bestimmt werden.

Dem vorhergehenden entsprechend gehören zu jedem Koordinatensystem besondere r, s Transformationskonstanten. Die Berechnung der a und b Verschiebungswerte bleibt bei den Zwischenmodellen dem obigen entsprechend weg. Bei der Berechnung der r_i s_i Werte der Zwischenmodelle, ausgehend von dem mit Hilfe der Paßpunkte berechenbaren r_1, da

$$r_2 = r_1 + \Delta r_{1,2}\,; \quad r_3 = r_2 + \Delta r_{2,3} = r_1 + \Delta r_{1,2} + \Delta r_{2,3}\,; \ldots$$
$$\ldots r_i = r_{i-1} + \Delta r_{(i-1),i} = r_1 + \Delta r_{1,2} + \Delta r_{2,3} + \ldots + \Delta r_{(i-1),i}$$

ist, müssen die folgenden Bedingungsgleichungen befriedigt werden:

$$r_n - r_1 = \Sigma\, \Delta r \tag{5}$$

und analog

$$s_n - s_1 = \Sigma\, \Delta s\,.$$

Andererseits bestehen zwei Koordinatenbedingung für die Koordinatendifferenzen der P Anschlußpunkte:

$$X_{P(n-1),n} - X_{P_{1,2}} = \sum_{i=2}^{i=(n-1)} \Delta X_P \Big]_{(i-1),i}^{i,(i+1)}$$

und (6)

$$Y_{P(n-1),n} - Y_{P_{1,2}} = \sum_{i=2}^{i=(n-1)} \Delta Y_P \Big]_{(i-1),i}^{i,(i+1)}$$

In den Gleichungen (6) bedeuten X und Y — den Bezeichnungen der Abb. 1 entsprechend — die mit auf das erste bzw. das letzte Modell bezogenen Transformationskoeffizienten berechneten geodätischen Koordinaten der Anschlußpunkte der ersten und zweiten, bzw. der vorletzten und letzten Modelle, während

$$\Delta X \Big]_{(i-1),i}^{i,(i+1)} \text{ und } \Delta Y \Big]_{(i-1),i}^{i,(i+1)}$$

die mit auf die vorherigen Anschlußpunkte bezogenen — vorläufig unbekannten — Transformationskoeffizienten berechneten Differenzen der Zwischenanschlußpunkte bedeuten.

Wenn wir bei der Erfüllung der Bedingungen (5) und (6) hauptsächlich die Verteilung der regelmäßigen Fehler anstreben, so kann dies z. B. mit Hilfe der auch von VERDIN angewandten arithmetischen Reihen einfach voll-

führt werden. In dem erwähnten Fall können arithmische Reihen zweiter Ordnung angewandt werden, bei welchen folglich die sog. zweiten Differenzen konstante Werte sind. D. h. $\Delta' r = \text{konst.}$ und $\Delta' s = \text{konst.}$ Wenn die zu den einzelnen Modellen gehörenden r_i, s_i Transformationskoeffizienten als Glieder solcher Reihen aufgefaßt werden, so nehmen die Bedingungen (5) und (6) folgende Form an:

$$\begin{aligned} r_n - r_1 &= \binom{n-1}{1} \Delta r + \binom{n-1}{2} \Delta' r \,, \\ s_n - s_1 &= \binom{n-1}{1} \Delta s + \binom{n-1}{2} \Delta' s \,, \end{aligned} \tag{5a}$$

bzw.

$$\begin{aligned} X_{P(n-1),n} - X_{P_{1,2}} = r_1 &\left\{ \Delta x \right]_{1,2}^{2,3} + \Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} - \\ - s_1 &\left\{ \Delta y \right]_{1,2}^{2,3} + \Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} + \\ + \Delta r &\left\{ \Delta x \right]_{1,2}^{2,3} + 2\Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + (n-1)\, \Delta x \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} - \\ - \Delta s &\left\{ \Delta y \right]_{1,2}^{2,3} + 2\Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + (n-1)\, \Delta y \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} + \\ + \Delta' r &\left\{ \Delta x \right]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} \Delta y \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} - \\ - \Delta' s &\left\{ \Delta y \right]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} \Delta y \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Y_{P(n-1),n} - Y_{P_{1,2}} = r_1 &\left\{ \Delta y \right]_{1,2}^{2,3} + \Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} + \\ + s_1 &\left\{ \Delta x \right]_{1,2}^{2,3} + \Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} + \\ + \Delta r &\left\{ \Delta y \right]_{1,3}^{2,3} + 2\Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + (n-1)\ \Delta y \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} + \\ + \Delta s &\left\{ \Delta x \right]_{1,2}^{2,3} + \Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + (n-1)\, \Delta x \Big]_{(n-2)\text{-}(n-1)}^{(n-1),n} \right\} + \\ + \Delta' r &\left\{ \Delta y \right]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} \Delta y \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} + \\ + \Delta' s &\left\{ \Delta x \right]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} \Delta x \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\}. \end{aligned} \tag{6a}$$

In den Gleichungen (5a) sind r_1, r_n, s_1 und s_n nach dem bereits erörterten berechenbare Werte, Δr, Δs und $\Delta' r$, $\Delta' s$ aber die bestimmbaren Differenzwerte der sich auf die Modellreihe beziehenden r, s Reihen.

In den Gleichungen (6a) bedeuten gemäß der bekannten Bezeichnung Δx und Δy die Differenzen der Modellkoordinaten der einander folgenden Anschlußpunkte, den Indexbeziehungen entsprechend so, daß von der mit einem Oberindex bezeichnete Modellkoordinate die mit einem Unterindex bezeichnete zu substrahieren ist.

Auf diese Weise gelangen wir zu einem Gleichungssystem mit vier Unbekannten, wo Δr, $\Delta' r$, Δs und $\Delta' s$ die gesuchten Werte sind. Ihre Ermittlung wird durch die einfache Form der Gleichungen (5a) wesentlich erleichtert. Die Gleichungen (6a) sind auch nur dem Anscheine nach schwerfällig, in der Praxis können die in Großklammer stehenden Summen einfach und schnell berechnet werden, das Rechnungsschema kann sogar leicht im Kopfe behalten werden.

In Kenntnis der Werte Δr, $\Delta' r$ und Δs, $\Delta' s$ können die Transformationskoeffizienten der einzelnen Modelle, entsprechend den Gleichungen (5a), einfach berechnet werden:

$$\begin{aligned} r_i &= r_1 + \binom{i-1}{1} \Delta r + \binom{i-1}{2} \Delta' r \\ s_i &= s_1 + \binom{i-1}{1} \Delta s + \binom{i-1}{2} \Delta' s . \end{aligned} \tag{7}$$

In Kenntnis von r_i und s_i können auf Grund der Zusammenhänge (3) die geodätischen Koordinaten eines jeglichen Punktes des i-ten Modells bekanntermaßen einfach berechnet werden.

Als zweite Variation der Fehlerverteilung wollen wir unsere Vorstellungen prüfen, wonach bei der Erfüllung der Bedingungen (5) und (6) Minimalbedingungen für die Quadratsummen der Differenzen der einander folgenden r und s Werte gesichert werden sollen. Dies bedeutet naturgemäß nicht soviel, daß dadurch die strenge Ausgleichung der Fehler verwirklicht wird, weil — abgesehen von den bereits vorher erwähnten Hindernissen — die Minimalbedingung hier nicht für die Quadratsumme der den Meßergebnissen zuzurechnenden Verbesserungen aufgeschrieben wird. In der geschilderten Weise kann man aber doch erreichen, daß die Transformationskoeffizienten der nacheinander folgenden Modelle nicht stark voneinander abweichen, d. h., daß die benachbarten Modelle sich einander gut anpassen. Endlich — wenn n die Zahl der Modelle der Modellreihe und folglich $(n-1)$ die Zahl der Anschlußpunkte bedeutet — werden die Transformationskoeffizienten der Zwischenmodelle durch arithmetische Reihen $(n-2)$-ter Ordnung aufgeschrieben, und dadurch wird eine größere Möglichkeit auch zur Kompensation der zufälligen Fehler gesichert. In den folgenden Gleichungen bedeuten die Symbole $\Delta r]_i^{i+1}$ und $\Delta s]_i^{i+1}$ mit den bereits bekannten Bezeichnungen die Differenzen $(r_{i+1} - r_i)$ bzw. $(s_{i+1} - s_i)$. Dieser Fehlerverteilungsvariation entsprechend gestalten

sich die Bedingungsgleichungen (5) und (6) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \Delta r\Big]_1^2 + \Delta r\Big]_2^3 + \ldots + \Delta r\Big]_{(n-1)}^n + (r_n - r_1) = 0\,, \\ \Delta s\Big]_1^2 + \Delta s\Big]_2^3 + \ldots + \Delta s\Big]_{(n-1)}^n + (s_n - s_1) = 0 \end{aligned} \tag{5b}$$

und

$$\begin{aligned} X_{P(n-1)} - X_1 = r_1 \left\{\Delta x\Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta x\Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n}\right\} + \\ + \Delta r\Big]_1^2 \left\{\Delta x\Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta x\Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n}\right\} + \\ + \Delta r\Big]_2^3 \left\{\Delta x\Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n}\right\} + \ldots + \Delta r\Big]_{(n-2)}^{(n-1)} \Delta x\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} - \\ - s_1 \left\{\Delta y\Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta y\Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n}\right\} - \\ - \Delta s\Big]_1^2 \left\{\Delta y\Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta y\Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n}\right\} - \\ - \Delta s\Big]_2^3 \left\{\Delta y\Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n}\right\} - \ldots - \Delta s\Big]_{(n-2)}^{(n-1)} \Delta y\Big]_{(n-2).(n-1)}^{(n-1),n}\,, \\ Y_{P(n-1)} - Y_1 = r_1 \left\{\Delta y\Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta y\Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n}\right\} + \\ + \Delta r\Big]_1^2 \left\{\Delta y\Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta y\Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n}\right\} + \\ + \Delta r\Big]_2^3 \left\{\Delta y\Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n}\right\} + \ldots + \Delta r\Big]_{(n-2)}^{(n-1)} \Delta y\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} + \\ + s_1 \left\{\Delta x\Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta x\Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n}\right\} + \\ + \Delta s\Big]_1^2 \left\{\Delta x\Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta x\Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n}\right\} + \\ + \Delta s\Big]_2^3 \left\{\Delta x\Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n}\right\} + \ldots + \Delta s\Big]_{(n-2)}^{(n-1)} \Delta x\Big]_{(n2-),(n-1)}^{(n-1),n}\,. \end{aligned} \tag{6b}$$

Diese Differenzen sind hier die zu bestimmenden Unbekannten, die dem vorherstehenden entsprechend noch die Bedingung

$$[\Delta r\, \Delta r] + [\Delta s\, \Delta s] = \min$$

befriedigen müssen.

Mit den allgemein bekannten Bezeichnungen der strengen Ausgleichung der bedingten Beobachtungen kann nunmehr das Normalgleichungssystem mit vier Korrelaten ohne weiteres angeschrieben werden:

$$[aa]\, k_1 + [ab]\, k_2 + [ac]\, k_3 + [ad]\, k_4 + l_1 = 0\,.$$

Hier ergeben sich wieder weitere Möglichkeiten zur Reduktion dadurch, daß sämtliche Koeffizienten der Unbekannten der Gleichungen (5b) gleich der Einheit sind, folglich ist

$$[aa] = (n-1), \quad [bb] = (n-1).$$

Die Produktglieder werden auch dadurch reduziert, daß

$[ab] = 0$; $[cd] = 0$ ist; und $[ac] = -[bd]$; $[ad] = [bc]$; $[cc] = [dd]$ sind.

Nach der Berechnung der Korrelaten bekommen wir aus den folgenden bekannten Zusammenhängen die gesuchten $\Delta r]_i^{i+1}$ und $\Delta s]_i^{i+1}$ Werte:

$$\begin{aligned}
\Delta r\Big]_1^2 &= a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + d_1 k_4 , \\
\Delta r\Big]_2^3 &= a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + d_2 k_4 , \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\text{weiter} \qquad & \qquad (8) \\
\Delta s\Big]_1^2 &= a_n k_1 + b_n k_2 + c_n k_3 + a_n k_4 , \\
\Delta s\Big]_2^3 &= a_{n+1} k_1 + b_{n+1} k_2 + c_{n+1} k_3 + d_{n+1} k_4 . \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Demnach können die r_i und s_i Transformationskoeffizienten der Zwischenmodelle, weiter mit diesen die entsprechenden geodätischen Koordinaten schon gleich dem vorherigen berechnet werden.

Im weiteren waren wir bestrebt, in unserer Fehlerverteilungsmethode auch die Beachtung der in den Zwischenmodellen eventuell zur Verfügung stehenden Paßpunkte zu ermöglichen. Die Weiterentwicklung der Methode in diesem Sinne fördert beträchtlich die Genauigkeitssteigerung der Fehlerverteilung, weil es offenkundig ist, daß bei der Bestimmung der Fehlerfunktion durch Kenntnis eines Zwischenpunktes die Interpolationsintervalle wesentlich verkürzt werden können. Eben deshalb ist der Aufbau einiger bereits bekannter Fehlerverteilungsmethoden von vornherein so gestaltet, daß zu ihrer Anwendung die in der Mitte des Modells liegenden Paßpunkte auch nötig sind. (S. z. B. [6]). Die Zahl und die Anordnung der Paßpunkte steht aber mit der Wirtschaftlichkeit der räumlichen Aerotriangulierung stark in Zusammenhang. Betreffs der Fehlerverteilung wäre allerdings der günstigste Fall, wenn das je einem Bildpaar entsprechende Modell auf Grund der Paßpunkte orientierbar wäre. In diesem Falle würden aber die durch die Bestimmung der Paßpunkte verursachten Mehrausgaben schon die Wirtschaftlichkeit der räumlichen Aerotriangulation gefährden. Für alle Fälle würde eine Wirtschaftlichkeits-Minimumrechnung mit gegebenen Fehlergrenzen zur Bestimmung der Zahl und Anordnung der anzuwendenden Paßpunkte sich für nützlich erweisen, aber mangels verläßlicher Ausgangspunkte und wegen der

Vielfältigkeit der Fehlerverteilungsmethode könnten wir zur Zeit ein in dieser Hinsicht auch in der Praxis gut nutzbares Ergebnis nicht angeben. Es kann aber nicht bestritten werden, daß eine Fehlerverteilungsmethode, die auch die Berücksichtigung von Zwischenpunkten ermöglicht, in der Praxis allgemeiner anwendbar ist.

Dementsprechend wird, falls wir in einem Zwischenmodell der Modellreihe einen Paßpunkt besitzen, dadurch die Einbeziehung zweier neuer Koordinatenbedingungen ermöglicht und benötigt, während keine weiteren Bedingungen für die r und s Transformationskoeffizienten gewonnen werden. Es ist auch unmittelbar einzusehen, daß falls wir in mehreren Zwischenteilmodellen je einen Paßpunkt besitzen, zweimal so viel weitere Koordinatenbedingungen zu erfüllen sind. Wenn aber in einem Zwischenmodell nicht ein, sondern zwei oder mehr Paßpunkte zur Verfügung stehen, so können die r und s Transformationskoeffizienten für dieses Modell auch selbständig bestimmt werden, d. h., daß auch für die Transformationskonstanten eine neue Bedingung gewonnen wird. In diesem Falle ist es aber bezüglich der Fehlerverteilung günstiger, die Modellreihe auf zwei getrennte Abschnitte zu teilen, da dadurch die Rechenarbeit wesentlich vereinfacht wird. In diesem Falle ergibt sich also das in Frage stehende, auch selbständig orientierbare Zwischenmodell als Schlußmodell des ersten Abschnitts der Modellreihe und gleichzeitig als Anfangsmodell des zweiten Abschnitts, und die Fehlerverteilung kann dem bisher Erörterten entsprechend innerhalb der einzelnen Abschnitte vollführt werden.

Im weiteren wird nur noch der Fall untersucht, daß nur je ein Paßpunkt in den Zwischenmodellen vorhanden ist, und zu diesem Koordinatenbedingungen eingeführt werden müssen. Zwischen den r, s Transformationskoeffizienten des ersten und letzten Modells bestehen weiterhin die Bedingungen (5). Bei Voraussetzung eines einzigen Zwischenpaßpunktes im i-ten Modell innerhalb der ganzen Modellreihe, können zwischen dem ersten Anschlußpunkt und dem Zwischenpaßpunkt, weiter zwischen dem letzteren und dem letzten Anschlußpunkt den Gleichungen (6) analoge Koordinatenbedingungen aufgeschrieben werden:

$$X_i - X_{P_{1,2}} = \sum_{i=1,2}^{(i-1),i} \Delta X_P \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta X_i ,$$

$$Y_i - Y_{P_{1,2}} = \sum_{i=1,2}^{(i-1),i} \Delta Y_P \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta Y_i ,$$

und (9)

$$X_{P_{(n-1),n}} - X_i = \sum_{(i-1),i}^{i=(n-1),n} \Delta X_P \Big]_{(i-1),i}^{i,(i+1)} - \Delta X_i ,$$

$$Y_{P_{(n-1),n}} - Y_i = \sum_{(i-1),i}^{(n-1),n} \Delta Y_P \Big]_{(i-1),i}^{i,(i+1)} - \Delta Y_i .$$

(In diesen Gleichungen sind nebst den bereits bekannten Bezeichnungen X_i und Y_i die Geländekoordinaten des an dem i-ten Modell befindlichen Zwischenpaßpunktes, ΔX_i und ΔY_i bedeuten aber die mit den Transformationskonstanten des i-ten Modells vom Anschlußpunkt $P_{(i-1),i}$ berechneten Koordinatendifferenzen.)

Falls die zu den einzelnen Modellen gehörenden Transformationskonstanten auch weiterhin als die Glieder der arithmetischen Reihen aufgefaßt werden, so müssen in diesem Falle zur gleichzeitigen Befriedigung der Bedingungen (5) und (9) schon arithmetische Reihen dritter Ordnung angewandt werden. Folglich können mit den Transformationskonstanten des ersten und letzten Modells folgende Bedingungsgleichungen aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} r_n - r_1 &= \binom{n-1}{1}\Delta r + \binom{n-1}{2}\Delta' r + \binom{n-1}{3}\Delta'' r\,, \\ s_n - s_1 &= \binom{n-1}{1}\Delta s + \binom{n-1}{2}\Delta' s + \binom{n-1}{3}\Delta'' s\,. \end{aligned} \tag{5c}$$

Die Koordinatenbedingungen der Gleichung (9) gestalten sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} X_i - X_{P_{1,2}} = {} & r_1\left\{\Delta x\right]_{1,2}^{2,3} + \Delta x\Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x\Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta x_i\right\} - \\ & - s_1\left\{\Delta y\right]_{1,2}^{2,3} + \Delta y\Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y\Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta y_i\right\} + \\ & + \Delta r\left\{\Delta x\right]_{1,2}^{2,3} + 2\,\Delta x\Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + (i-2)\,\Delta x\Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + (i-1)\,\Delta x_i\right\} - \\ & - \Delta s\left\{\Delta y\right]_{1,2}^{2,3} + 2\,\Delta y\Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + (i-2)\,\Delta y\Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + (i-1)\,\Delta y_i\right\} + \\ & + \Delta' r\left\{\Delta x\right]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \frac{(i-2)\,(i-3)}{2}\,\Delta x\Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \frac{(i-1)\,(i-2)}{2}\,\Delta x_i\right\} - \\ & - \Delta' s\left\{\Delta y\right]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \frac{(i-2)\,(i-3)}{2}\,\Delta y\Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \frac{(i-1)\,(i-2)}{2}\,\Delta y_i\right\} + \\ & + \Delta'' r\left\{\Delta x\right]_{3,4}^{4,5} + \ldots + \frac{(i-2)\,(i-3)\,(i-4)}{6}\cdot\Delta x\Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \\ & \qquad + \frac{(i-1)\,(i-2)\,(i-3)}{6}\,\Delta x_i\right\} - \\ & - \Delta'' s\left\{\Delta y\right]_{3,4}^{4,5} + \ldots + \frac{(i-2)\,(i-3)\,(i-4)}{6}\,\Delta y\Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \\ & \qquad + \frac{(i-1)\,(i-2)\,(i-3)}{6}\,\Delta x_i\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Y_i - Y_{P_{1,2}} = r_1 \Big\{ & \Delta y \Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta y_i \Big\} + \\
+ \; s_1 \Big\{ & \Delta x \Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta x_i \Big\} + \\
+ \; \Delta r \Big\{ & \Delta y \Big]_{1,2}^{2,3} + 2\Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + (i-2)\, \Delta y \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + (i-1)\, \Delta y_i \Big\} + \\
+ \; \Delta s \Big\{ & \Delta x \Big]_{1,2}^{2,3} + 2\Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + (i-2)\, \Delta x \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + (i-1)\, \Delta x_i \Big\} + \\
+ \; \Delta' r \Big\{ & \Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \frac{(i-2)\,(i-3)}{2} \Delta y \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \frac{(i-1)(i-2)}{2} \Delta y_i \Big\} + \\
+ \; \Delta' s \Big\{ & \Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \frac{(i-2)\,(i-3)}{2} \Delta x \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \frac{(i-2)(i-3)}{2} \Delta x_i \Big\} + \\
+ \Delta'' r \Big\} & \Delta y \Big]_{3,4}^{4,5} + \ldots + \frac{(i-2)\,(i-3)\,(i-4)}{6} \Delta y \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \\
& + \frac{(i-1)\,(i-2)\,(i-3)}{6} \Delta y_i \Big\} + \\
+ \Delta'' s \Big\{ & \Delta x \Big]_{3,4}^{4,5} + \ldots + \frac{(i-2)\,(i-3)\,(i-4)}{6} \Delta x \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \\
& + \frac{(i-1)\,(i-2)\,(i-3)}{6} \Delta x_i \Big\}
\end{aligned}
\tag{9a}
$$

und

$$
\begin{aligned}
X_{P_{(n-1),n}} - X_{P_{1,2}} = r_1 \Big\{ & \Delta x \Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \Big\} - \\
- \; s_1 \Big\{ & \Delta y \Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \Big\} + \\
+ \; \Delta r \Big\{ & \Delta x \Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + (n-1)\, \Delta x \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \Big\} - \\
- \; \Delta s \Big\{ & \Delta y \Big]_{1,2}^{2,3} + 2\, \Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + (n-1)\, \Delta y \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \Big\} + \\
+ \Delta' r \Big\{ & \Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} \Delta x \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),1} \Big\} - \\
- \Delta' s \Big\{ & \Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} \Delta y \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \Big\} + \\
+ \Delta'' r \Big\{ & \Delta x \Big]_{3,4}^{4,5} + \ldots + \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{6} \Delta x \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \Big\} - \\
- \Delta'' s \Big\{ & \Delta y \Big]_{3,4}^{4,5} + \ldots + \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{6} \Delta y \Big]_{(n-2).(n-1)}^{(n-1),n} \Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{P_{(n-1),n}} - Y_{P_{1,2}} = r_1 &\left\{ \Delta y \right]_{1,2}^{2,3} + \Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} + \\
+ s_1 &\left\{ \Delta x \right]_{1,2}^{2,3} + \Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} + \\
+ \Delta r &\left\{ \Delta y \right]_{1,2}^{2,3} + 2\,\Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + (n-1)\,\Delta y \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(2-1),n} \right\} + \\
+ \Delta s &\left\{ \Delta x \right]_{1,2}^{2,3} + 2\,\Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + (n-1)\,\Delta x \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} + \\
+ \Delta' r &\left\{ \Delta y \right]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \Delta y \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} + \\
+ \Delta' s &\left\{ \Delta x \right]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \Delta x \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} + \\
+ \Delta'' r &\left\{ \Delta y \right]_{3,4}^{4,5} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \Delta y \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} + \\
+ \Delta'' s &\left\{ \Delta x \right]_{3,4}^{4,5} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \Delta x \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\}.
\end{aligned}
$$

Die Aufschreibung der Zusammenhänge

$$(X_{P_{(n-1),n}} - X_i) \quad \text{und} \quad (Y_{P_{(n-1),n}} - Y_i)$$

führt im Laufe der Entwicklung der Symbole zu folgenden gleichwertigen Ausdrücken:

$$(X_{P_{(n-1),n}} - X_{P_{1,2}}), \quad (Y_{P_{(n-1),n}} - Y_{P_{1,2}}).$$

(In den Gleichungen (5c) und (9a) bedeuten $\Delta'' r$, $\Delta'' s$, mit den bereits bekannten Bezeichnungen, die sog. dritten Differenzen.)

In diesem Falle müssen also aus den Gleichungen (5c) und (9a) bereits sechs Unbekannte (Δr, Δs, $\Delta' r$, $\Delta' s$, $\Delta'' r$ und $\Delta'' s$) berechnet werden, und die Transformationskonstanten der Zwischenmodelle können durch Ausdehnung der früheren Gleichungen (7) aus folgenden Zusammenhängen berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
r_i &= r_1 + \binom{i-1}{1} \Delta r + \binom{i-1}{2} \Delta' r + \binom{i-1}{3} \Delta'' r, \\
s_i &= r_1 + \binom{i-1}{1} \Delta s + \binom{i-1}{2} \Delta' s + \binom{i-1}{3} \Delta'' s.
\end{aligned}
\tag{7a}
$$

Die endgültigen, den einzelnen Modellkoordinaten entsprechenden geodätischen Koordinaten können jetzt schon mit den entsprechenden Transfor-

mationskonstanten auf die in dem früheren schon erörterte Weise berechnet werden.

Auf Grund des bisherigen — wie bereits erwähnt wurde — ist es auch leicht einzusehen, daß die Einbeziehung eines jeden weiteren Zwischenpaßpunktes — falls diese einzelweise in jedem Modell vorkommen — die Bestimmung zweier weiterer Unbekannten erfordert. Die weiteren Unbekannten können aus den nach Gleichungen (9a) aufschreibbaren Koordinatenbedingungen bestimmt werden. Diesbezüglich muß erwähnt werden, daß die Wirtschaftlichkeit ohnedies die Lösung der räumlichen Aerotriangulation durch die Einbeziehung von relativ weniger Paßpunkten erfordert, es muß also nicht befürchtet werden, daß das von uns vorgeschlagene Fehlerverteilungsverfahren eventuell zur Lösung eines großen linearen Gleichungssystems führt. Übrigens bestehen weiterhin bei der Bestimmung der Unbekannten die in dem vorherigen schon erwähnten Vereinfachungsmöglichkeiten.

Die Fehlerverteilung kann auch im Falle der Einbeziehung von Zwischenpaßpunkten so gelöst werden, daß anstatt der arithmetischen Reihe auch hier eine Minimumbedingung auf die Quadratsummen der Differenzen der aufeinanderfolgenden r bzw. s Transformationskoeffizienten eingeführt wird. Bei dieser Lösung können unsere früheren Bedingungsgleichungen (5b) und (6b) weiterhin unverändert angewandt werden, während die weiteren Koordinatenbedingungen durch die Einbeziehung des einzelnen in dem i-ten Teilmodell befindlichen Zwischenpaßpunkte folgende Form annehmen werden:

$$
\begin{aligned}
X_i - X_{P_{1,2}} = r_1 \Big\{ \Delta x \Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta x_i \Big\} + \\
+ \Delta r \Big]_1^2 \Big\{ \Delta x \Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x \Big]_{(i-1),(i-2)}^{(i-1),i} + \Delta x_i \Big\} + \\
+ \Delta r \Big]_2^3 \Big\{ \Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta x_i \Big\} + \\
+ \ldots + \Delta r \Big]_{(i-2)}^{(i-1)} \Big\{ \Delta x \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta x_i \Big\} - \\
- s_1 \Big\{ \Delta y \Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta y_i \Big\} - \\
- \Delta s \Big]_1^2 \Big\{ \Delta y \Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta y_i \Big\} - \\
- \Delta s \Big]_2^3 \Big\{ \Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta y_i \Big\} - \\
- \ldots - \Delta s \Big]_{(i-2)}^{(i-1)} \Big\{ \Delta y \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta y_i \Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_i - Y_{P_{1,2}} = r_1 \Big\{ \Delta y \Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta y_i \Big\} - \\
- \Delta r \Big]_1^2 \Big\{ \Delta y \Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta y_i \Big\} + \\
+ \Delta r_i \Big]_2^3 \Big\{ \Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta y_i \Big\} + \\
+ \ldots + \Delta r \Big]_{(i-2)}^{(i-1)} \Big\{ \Delta y \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta y_i \Big\} + \\
+ s_1 \Big\{ \Delta x \Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta x_i \Big\} + \\
+ \Delta s \Big]_1^2 \Big\{ \Delta x \Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1(,i} + \Delta x_i \Big\} + \\
+ \Delta s \Big]_2^3 \Big\{ \Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta x_i \Big\} + \\
+ \ldots + \Delta s \Big]_{(i-2)}^{(i-1)} \Big\{ \Delta x \Big]_{(i-2).(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta x_i \Big\}. \qquad (9b)
\end{aligned}
$$

Auf Grund der Gleichungen (9b) kann die Aufstellung der Normalgleichungen, die Berechnung der Korrelaten und der Δr- bzw. Δs-Werte, dem vorherigen entsprechend, einfach vollführt werden. Die Einbeziehung des neuen Zwischenpaßpunktes hat die Zahl der Bedingungsgleichungen und so auch die der bestimmenden Korrelaten naturgemäß auch hier um zwei erhöht. Im Falle der Einbeziehung weiterer Zwischenpaßpunkte sind hier auch die vorher schon erörterten gültig.

Es können endlich interessante Vergleiche bezüglich der parallelen Anwendung der Quadratsummenminima der Differenzen und der Differenzenreihen der anschließenden Transformationskoeffizienten gezogen werden. Es soll hier sogleich darauf hingewiesen werden, daß die Anwendung der Differenzenreihen rechentechnisch nur dem Anscheine nach einfacher ist. In dem als Anhang vorgeführten praktischen Beispiel hat es sich erwiesen, daß die zweite Variante, die also auf dem Quadratsummenminimum der Differenzen der Transformationskoeffizienten beruht, rechentechnisch, wenn auch nicht wesentlich, aber doch einfacher ist. Zu dem weiteren Vergleich kann diese Fehlerverteilungsmethode als eine Interpolation mit einer Differenzenreihe $(n - 1)$-ter Ordnung aufgefaßt werden, gegenüber den Lösungen mit Differenzenreihen von erster, zweiter bzw. dritter Ordnung. So liegt der Gedanke, daß die zweite Variante durch Anwendung einer Interpolation mit höherer Ordnung die bessere Annäherung der unbekannten Fehlerfunktion gibt, auf der Hand. In dieser Hinsicht sind aber — wie bereits früher erwähnt wurde — sachliche Beweise vorerst nicht aufzufinden, weil die reelle Fehlerfunktion nicht bekannt ist. Die Tatsache jedoch, daß bei der zweiten Variante die Orientierungsdifferenzen der Anschlußmodelle unter den gegebenen Möglich-

keiten die kleinsten sind, ist eine gute Sicherung dafür, daß die sich aus den zweierlei Transformationsmethoden ergebenden, auf die Überdeckungszonen gültigen Restwidersprüche am kleinsten sein werden. Dies bedeutet gleichzeitig soviel, daß die auf dem Instrument eingestellten relativen Orientierungen während der Fehlerverteilung kaum verändert wurden, und dies ist eine nennenswerte Garantie dafür, daß das während der Auswertung erzielte Gesamtmodell kaum verzerrt wurde. Die Ergebnisse des praktischen Beispiels zeigen allerdings, daß die nach den zwei Methoden berechneten entsprechenden Transformationskoeffizienten voneinander kaum abweichen. Dies bedeutet soviel, daß im gegebenen Falle auch durch die Anwendung von Differenzienreihen (Interpolationen) zweiter bzw. dritter Ordnung ein entsprechendes Ergebnis gewonnen wurde. Es muß aber bemerkt werden, daß die zweite Variante rechentechnisch doch einfacher war. Während unseres praktischen Beispiels wurden die, nach der Fehlerverteilung zurückbleibenden Koordinatenwidersprüche an einigen in die Fehlerverteilung nicht einbezogenen Zwischenpaßpunkten kontrolliert. In diesem Falle wurde auch bewiesen, daß im Falle von längeren Streifen die gute Annäherung der wahren Fehlerfunktion nur durch die Anwendung von Zwischenpaßpunkten zu erwarten ist. Der Vorteil der hier erörterten Fehlerverteilungsverfahren ist, daß sie nach Belieben, mit oder ohne der Einbeziehung von Zwischenpaßpunkten, anwendbar sind, weiter können sie als numerische Methoden zur Fehlerverteilung von großmaßstäblichen Aerotriangulierungen eine entsprechende Genauigkeit sichern.

Wie in der Einleitung schon erwähnt wurde, waren bei der Lösung der in Frage stehenden praktischen Aufgabe Höhenkoordinaten nicht erforderlich. Trotzdem wurde — vollständigkeitshalber —, falls sie dennoch nötig wären, auch die Fehlerverteilung der Höhenkoordinaten nach dem bereits erörterten Gedankengang ausgearbeitet. Bei deren Beschreibung müssen wir auf unsere frühere Feststellung zurückkehren, wonach zu den einzelnen Modellen streng genommen je ein Raumkoordinatensystem gehört. Dies bedeutet zumal soviel, daß die Fehlerverteilung der x, y und z Koordinaten korreliert ist, und auf alle drei Koordinaten gleichzeitig vollführt werden soll. Falls aber die Drehungswinkel der sich anschließenden Raumkoordinatensysteme im Verhältnis zueinander klein sind — in der Praxis ist meistens dies der Fall —, so ist auch die voneinander abgetrennte Fehlerverteilung der Horizontal- und Höhenkoordinaten erlaubt. So eine Teilung ist durch praktische Gesichtspunkte gerechtfertigt. Bei der räumlichen Aerotriangulierung häufen sich nämlich die Fehler der Höhenmessungen ungünstiger, und so würde ihre mit den Fehlern der horizontalen Koordinaten korrelierte Verteilung zur Bildung eines viel Rechenarbeit beanspruchenden Verfahrens führen. Wenn die bisherigen Fehlerverteilungsverfahren der räumlichen Aerotriangulierung untersucht werden, so ist es auffallend, daß bei einigen in der Praxis

verbreiteten Methoden und bei den beiden besprochenen einheimischen Relationen sogar die Korrelation der horizontalen Koordinaten zueinander nicht beachtet wurde, doch wurde dadurch die Konformität des Grundrisses des Fehlerverteilungsverfahrens willkürlich verändert. In unserem Falle — wie bereits erwähnt wurde — waren nur die Horizontalkoordinaten nötig, d. h. die Genauigkeit des Grundrisses primär wichtig. Was den Anspruch an Rechenarbeit der gemeinsamen Fehlerverteilung betrifft, können z. Z. die Möglichkeiten der elektronischen Rechenmaschinen nicht außer acht gelassen werden, es ist aber auch in diesem Falle wichtig, daß die Vorbereitungsarbeit möglichst wenig sei. Es könnte ohne weiteres ein allgemeiner Transformationszusammenhang folgendermaßen aufgeschrieben werden, wie z. B.:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

und unser bereits erörterter Gedankengang könnte auch auf diesen angewandt werden. Hier sollten aber die vorher erwähnten Umstände, sowie weitere Wirtschaftlichkeits-Gesichtspunkte untersucht werden, die die Rahmen unserer gegenwärtigen Zielsetzungen überschreiten, auf die wir aber anderenorts noch zurückkehren werden.

Dem bei den Horizontalkoordinaten angewandten Gedankengang entsprechend kann für die Höhenkoordinaten folgender Zusammenhang aufgeschrieben werden:

$$Z = k\,(x \tan \varphi + y \tan \omega + z) + c\,, \tag{10}$$

wo Z die sich auf das geodätische Koordinatensystem beziehende Höhenkoordinate; k der Maßstabfaktor, x, y, z die entsprechenden Modellkoordinaten; φ die Neigung des Modellkoordinatensystems zu x; ω die Neigung zu y und c den Höhenverschiebungswert der in Frage stehenden zwei Koordinatensysteme bedeutet. Da in der Praxis an der Höhenskala des Auswertegerätes c einstellbar, $k \cdot z$ aber unmittelbar ablesbar sind, kann nach der Substitution von p für $k \tan \varphi$, q für $k \tan \omega$ unsere Gleichung (10) auf folgende Form gebracht werden:

$$Z = xp + yq + Z'. \tag{11}$$

Hier sind x und y die Modell-Koordinaten und $Z' = kz$. Werden die Transformationskonstanten p und q von Modell zu Modell für veränderlich betrachtet, so können die entsprechenden Werte der Zwischenmodelle zwischen die mit Hilfe von Höhenpaßpunkten bestimmbaren p und q Werte des ersten und letzten Modells der Modellreihe interpoliert werden. Nebenbei sei bemerkt, daß zur Bestimmung der p und q Transformationskonstanten das bei den r

und s Grundriß-Transformationskonstanten Festgestellte sinngemäß gültig ist. Bei der Interpolation müssen im Falle der Anwendung der bereits erörterten Differenzenreihen folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$p_n - p_1 = \binom{n-1}{1} \Delta p + \binom{n-2}{2} \Delta' p$$

und (12)

$$q_u = q_1 = \binom{n-1}{1} \Delta q .$$

Bei der Transformationskonstante q, mit der also die Neigung der einzelnen Modelle in Querlage in Betracht gezogen wird, haben wir uns mit der linearen Interpolation begnügt, weil in dieser Richtung die Fehlerfortpflanzung günstig ist, da die Höhenfehler sich nur in dem der einzelnen Modellbreite entsprechenden Abschnitt häufen können. Es kann noch folgende Koordinatenbedingung aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} Z_{P(n-1)n} - Z_{P_{1,2}} = {} & p_1 \left\{ \Delta x \right]_{1,2}^{2,3} + \Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta x \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \Big\} + \\ & + q_1 \left\{ \Delta y \right]_{1,2}^{2,3} + \ldots + \Delta y \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} + \\ & + \Delta p \left\{ \Delta x \right]_{1,2}^{2,3} + 2\, \Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + (n-1)\, \Delta x \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \Big\} + \\ & + \Delta q \left\{ \Delta y \right]_{1,2}^{2,3} + 2\, \Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + (n-1)\, \Delta y \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \Big\} + \\ & + \Delta' p \left\{ \Delta x \right]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \Delta x \Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \Big\} + \left\{ Z'_{P(n-1)n} - Z'_{P_{1,2}} \right\} . \end{aligned} \tag{13}$$

Δp, $\Delta' p$ und Δq können in der bekannten Weise aus den obigen drei Gleichungen bestimmt werden. Die Einführung der Unbekannten $\Delta' q$ würde übrigens keine Schwierigkeit bereiten, die auch in der Querlage zu einer Interpolation zweiter Ordnung führen würde, weil die zur Berechnung der vierten Unbekannten nötige vierte Bedingungsgleichung durch die Auflösung der Koordinatenbedingung (13) in Komponenten von der Richtung x und y ([8] S. 447—449) aufschreibbar ist. Die damit verbundene Genauigkeitserhöhung konnte aber an einem praktischen Beispiel nicht kontrolliert werden, und so können wir uns nur auf die in [9] mitgeteilte VERDINsche Feststellung berufen, wonach $\Delta' q$ fortgelassen werden kann.

Im Falle der Einbeziehung von zwischenliegenden Höhenpaßpunkten muß ebenfalls Unterschied gemacht werden, je nachdem in den Zwischenmodellen je Modell ein oder mehrere Paßpunkte zur Verfügung stehen. Im Falle, wenn je Modell zwei oder mehrere Höhenpaßpunkte einbezogen werden, kann das in Frage stehende Modell vertikal auch selbständig orientiert werden,

und solche Zwischenmodelle ermöglichen im Falle der Fehlerverteilung der Horizontalkoordinaten in der bereits erwähnten Weise hier auch die Teilung der Modellreihe auf kürzere Abschnitte. Dies ist bei der Höhenfehlerverteilung wegen der bekanntlich ungünstigen Fortpflanzung der Höhenfehler besonders vorteilhaft, und so sind die kürzeren Interpolationsabschnitte mit kleineren Vernachlässigungen verbunden. In diesem Zusammenhang soll erwähnt werden, daß hinsichtlich der Höhenfehlerverteilung die Modellreihe auch dann auf Abschnitte geteilt werden kann, wenn in den Zwischenmodellen nur Zwischenpaßpunkte — ohne ihre Horizontalkoordinaten — zur Verfügung stehen, weil die zur Aufstellung der Gleichung (13) nötigen Δx, Δy — Koordinaten durch die Grundrißfehlerverteilung schon früher berechnet werden können.

Wenn wir aber in den Zwischenmodellen nur je einen Höhenpaßpunkt besitzen, so müssen der Grundrißfehlerverteilung ähnlich hier auch soviel weitere Koordinatenbedingungen berücksichtigt werden, wieviel Höhenpaßpunkte in die Fehlerverteilung einbezogen werden. Falls in dem i-ten Modell ein Höhenpaßpunkt vorausgesetzt wird, können nebst der Koordinatenbedingung (13) noch folgende Gleichungen aufgeschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
Z_i - Z_{P_{1,2}} = p_1 \Big\{ & \Delta x \Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots \Delta x \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta x_i \Big\} + \\
+ \; q_1 \Big\{ & \Delta y \Big]_{1,2}^{2,3} + \Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + \Delta y \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta y_i \Big\} + \\
+ \Delta p \Big\{ & \Delta x \Big]_{1,2}^{2,3} + 2\,\Delta x \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + (i-2)\,\Delta x \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + (i-1)\,\Delta x_i \Big\} + \\
+ \Delta q \Big\{ & \Delta y \Big]_{1,2}^{2,3} + 2\,\Delta y \Big]_{2,3}^{3,4} + \ldots + (i-2)\,\Delta y \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + (i-1)\,\Delta y_i \Big\} + \\
+ \Delta' p \Big\{ & \Delta x \Big]_{2\text{-}3}^{3,4} + \ldots + \frac{(i-2)\,(i-1)}{2}\,\Delta x \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \\
& + \frac{(i-1)\,(i-2)}{2}\,\Delta x_i \Big\} + \\
+ \Delta'' p \Big\{ & \Delta x \Big]_{3,4}^{4,5} + \ldots + \frac{(i-2)\,(i-3)\,(i-4)}{6}\,\Delta x_i \Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \\
& + \frac{(i-1)\,(i-2)\,(i-3)}{6}\,\Delta x_i \Big\} + (Z_i' - Z'_{P_{1,2}}) .
\end{aligned}
\tag{14}
$$

In diesem Falle müssen wir in unsere Gleichungen (12) noch ein Differenzglied $\Delta'' p$ zur Erfüllung der weiteren Bedingung einführen. Es soll eine solche Koordinatenbedingung für einen jeden — im Modell allein stehenden — Zwischenhöhenpaßpunkt eingeführt werden.

Außer der Lösung mit Differenzenreihen ist bei der Höhenfehlerverteilung auch die Anwendung der auf der $[\Delta p\,\Delta p] + [\Delta q\,\Delta q] = \min$ Bedingung beruhenden Methode möglich. In diesem Falle, wenn $\Delta p]_1^2$, $\Delta p]_2^3 \ldots \Delta q]_1^2$, $\Delta q]_2^3, \ldots$ die Differenzen zwischen den entsprechenden Höhentransformationskonstanten der mit Index bezeichneten Modelle bedeuten, bestehen folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} \Delta p\Big]_1^2 + \Delta p\Big]_2^3 + \ldots + \Delta p\Big]_{(n-1)}^{n} + (p_n - p_1) &= 0\,, \\ \Delta q\Big]_1^2 + \Delta q\Big]_2^3 + \ldots + \Delta q\Big]_{(n-1)}^{n} + (q_n - q_1) &= 0\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Während die Koordinatenbedingung:

$$\begin{aligned} {}'Z_{P_{(n-1),n}} - Z_{P_{1,2}} = {} & p_1 \left\{ \Delta x\Big]_{1,2}^{2,3} + \ldots + \Delta x\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} + \\ & + \Delta p\Big]_1^2 \left\{ \Delta x\Big]_{1,2}^{2,3} + \ldots + \Delta x\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} + \ldots + \Delta p\Big]_{(n-2)}^{(n-1)} \Delta x\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} + \\ & + q_1 \left\{ \Delta y\Big]_{1,2}^{2,3} + \ldots + \Delta y\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} + \\ & + \Delta q\Big]_1^2 \left\{ \Delta y\Big]_{1,2}^{2,3} + \ldots + \Delta y\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} \right\} + \\ & + \ldots + \Delta q\Big]_{(n-2)}^{(n-1)} \Delta y\Big]_{(n-2),(n-1)}^{(n-1),n} + Z'_{P_{(n-1),n}} - Z'_{P_{1,2}} \end{aligned} \tag{16}$$

sein wird. $\Delta x]_{1,2}^{2,3}, \ldots \Delta y]_{1,2}^{2,3}, \ldots$ bedeuten in der Gleichung (16) die Koordinatendifferenzen zwischen den mit Index bezeichneten Anschlußpunkten. Endlich ergibt sich die Koordinatenbedingung, für den im i-ten Modell befindlichen Höhenpaßpunkt, wie folgt:

$$\begin{aligned} Z_i - Z_{P_{1,2}} = {} & p_1 \left\{ \Delta x\Big]_{1,2}^{2,3} + \ldots + \Delta x\Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta x_i \right\} + \\ & + \Delta p\Big]_1^2 \left\{ \Delta x\Big]_{1,2}^{2,3} + \ldots + \Delta x\Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta x_i \right\} + \\ & + \ldots + \Delta p\Big]_{(i-2)}^{(i-1)} \left\{ \Delta x\Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta x_i \right\} + \\ & + q_1 \left\{ \Delta y\Big]_{1,2}^{2,3} + \ldots + \Delta y\Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta y_i \right\} + \\ & + \Delta q\Big]_1^2 \left\{ \Delta y\Big]_{1,2}^{2,3} + \ldots + \Delta y\Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta y_i \right\} + \\ & + \ldots + \Delta q\Big]_{(i-2)}^{(i-1)} \left\{ \Delta y\Big]_{(i-2),(i-1)}^{(i-1),i} + \Delta y_i \right\} + Z'_i - Z'_{P_{1,2}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Bezüglich der Lösung der Gleichung ist das bei der horizontalen Fehlerverteilung bereits Erörterte sinngemäß gültig. Die Rechenarbeit wird hier

auch durch die Einfachheit der Gleichungen (12) bzw. (15) wesentlich erleichtert.

Die Höhentransformationskonstanten p und q können bezüglich der einzelnen Modelle nunmehr aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} p_i &= p_1 + \binom{i-1}{1} \Delta p + \binom{i-1}{2} \Delta' p \,, \\ q_i &= q_1 + \binom{i-1}{1} \Delta q + \binom{i-1}{2} \Delta' q \,, \end{aligned} \tag{18}$$

bzw.

$$\begin{aligned} p_i &= p_1 + \Delta p\Big]_1^2 + \Delta p\Big]_2^3 + \ldots + \Delta p\Big]_{(i-1)}^{i} \,, \\ q_i &= q_1 + \Delta q\Big]_1^2 + \Delta q\Big]_2^3 + \ldots + \Delta q\Big]_{(i-1)}^{i} \end{aligned} \tag{19}$$

einfach berechnet werden und in deren Kenntnis kann man auf Grund des Zusammenhanges (11) die Höhe eines jeden Punktes der Modellreihe in dem geodätischen Koordinatensystem gewinnen.

Bei dem Vergleich der zwei für die Höhenfehlerverteilung gegebenen Verfahren muß darauf hingewiesen werden, daß die auf dem Quadratsummen-Minimum der Differenzen der Transformationskonstanten beruhende Methode, als eine Interpolation höherer Ordnung, die hier komplexere Fehlerfunktion besser annähern kann, und so können von ihrer Anwendung noch mehr Vorteile erwartet werden als bei der horizontalen Fehlerverteilung. Diese Methode ist anscheinend allgemein vorteilhafter.

Endlich soll erwähnt werden, daß bei der Anwendung dieser Methode die in den Bedingungsgleichungen der Höhenfehlerverteilung vorkommenden $\Delta x]_{1,2}^{2,3}, \ldots \Delta y]_{1,2}^{2,3}$ Glieder mit den entsprechenden Gliedern der Bedingungsgleichungen der Grundrißfehlerverteilung übereinstimmen. Auf solche Weise kann noch eine weitere Rechenarbeit erspart werden, die hinsichtlich der Anwendbarkeit unseres Verfahrens vorteilhaft ist.

ANHANG

Die in dem bisherigen bekanntgegebenen Verfahren sollen im weiteren an einem praktischen Rechenbeispiel veranschaulicht werden. Der Streifen besteht aus 12 Modellen. Es stehen uns auf dem ersten, mittleren und letzten Modell Paßpunkte zur Verfügung. Da die im theoretischem Teil erörterten Fehlerverteilungsmethoden in zwei Gruppen geteilt werden:

a) ohne Anwendung von Zwischenkontrollpunkten,

b) mit Anwendung von Zwischenkontrollpunkten, so wurden die Berechnungen für den Streifen dementsprechend auf zweierlei Art vollführt.

Die zu den Berechnungen angewandten Paßpunkte

X, Y: Gelände-, x, y: Modellkoordinaten.

Die Transformationskoeffizienten des Modells 1 und 12 sind nach [11]:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0{,}122\,484\,12, & s_1 &= 1{,}492\,818\,86, \\ r_{12} &= 0{,}119\,771\,51, & s_{12} &= 1{,}492\,143\,66, \\ r_{12} - r_1 &= -0{,}002\,712\,61, & s_{12} - s_1 &= -0{,}000\,675\,20 \,. \end{aligned}$$

P	Y	X	y	x	Modellnummer
1	905,68	795,00	184,26	231,18	1
2	920,46	775,24	198,25	239,98	1
3	924,59	739,39	222,27	240,74	1
4	932,07	745,25	218,84	246,05	1
5	1912,53	822,53	220,31	902,27	4
6	2372,92	814,92	250,23	1208,00	5
7	4131,83	1013,46	212,72	2388,99	12
8	4144,49	963,31	246,75	2394,61	12
9	4206,32	1012,99	217,02	2438,58	12
10	4252,61	972,15	246,60	2467,20	12
11	4334,75	1003,11	230,43	2523,51	12

Schwerpunktskoordinaten der Anschlußpunkte zweier benachbarter Modelle und deren Differenzen:

$y]_1^2$	212,70	$x]_1^2$	371,06				
$y]_2^3$	213,88	$x]_2^3$	610,27	$y]_1^2$	+ 1,18	$x]_1^2$	239,21
$y]_3^4$	215,72	$x]_3^4$	828,93	$y]_2^3$	+ 1,84	$x]_2^3$	218,66
$y]_4^5$	216,78	$x]_4^5$	1011,51	$y]_3^4$	+ 1,06	$x]_3^4$	182,54
$y]_5^6$	186,36	$x]_5^6$	1181,06	$y]_4^5$	−30,42	$x]_4^5$	169,53
$y]_6^7$	206,46	$x]_6^7$	1389,50	$y]_5^6$	+20,10	$x]_5^6$	208,48
$y]_7^8$	203,44	$x]_7^8$	1576,73	$y]_6^7$	− 3,02	$x]_6^7$	187,23
$y]_8^9$	223,00	$x]_8^9$	1836,27	$y]_7^8$	+19,56	$x]_7^8$	259,54
$y]_9^{10}$	225,15	$x]_9^{10}$	2011,42	$y]_8^9$	+ 2,15	$x]_8^9$	175,15
$y]_{10}^{11}$	220,98	$x]_{10}^{11}$	2185,16	$y]_9^{10}$	− 4,17	$x]_9^{10}$	173,74
$y]_{11}^{12}$	222,66	$x]_{11}^{12}$	2418,11	$y]_{10}^{11}$	+ 1,68	$x]_{10}^{11}$	232,95
				Σ	+ 9,96	Σ	2047,04

$Y_1^2 = 1117{,}94$ $Y_{11}^{12} = 4176{,}54$ $Y_{11}^{12} - Y_1^2 = +3058{,}59$ $X_1^2 = 769{,}69$ $X_{11}^{12} = 1002{,}07$ $X_{11}^{12} - X_1^2 = +232{,}38$

1. *Lösung: (ohne Anwendung von Zwischenpaßpunkt, dies dient nur zur Kontrolle).* Die vier Bedingungsgleichungen:

$$11\,\Delta r + 55\,\Delta' r = -0{,}00271261,$$

$$11\,\Delta s + 55\,\Delta' s = -0{,}00067520,$$

$$102{,}13\,\Delta r + 374{,}64\,\Delta' r + 11179{,}19\,\Delta s + 33768{,}48\,\Delta' s = +1{,}49521080,$$

$$11179{,}19\,\Delta r + 33768{,}48\,\Delta' r - 102{,}13\,\Delta s - 374{,}64\,\Delta' s = -3{,}48264200.$$

Δr und Δs sind durch $\Delta' r$ bzw. $\Delta' s$ aus den ersten zwei Gleichungen ausdrückbar, so bleiben zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

$$-136{,}01\,\Delta' r - 22127{,}47\,\Delta' s = 2{,}20659495,$$

$$-22127{,}47\,\Delta' r + 136{,}01\,\Delta' s = -0{,}73211260.$$

Die Werte der Unbekannten nach der Lösung der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta r &= -0{,}00040896, \\ \Delta' r &= +0{,}00003247, \\ \Delta s &= +0{,}00043823, \\ \Delta' s &= -0{,}00009992. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Werte kann die Transformationskonstante der einzelnen Modelle mit folgenden Formeln berechnet werden:

$$r_i = r_1 + (i-1)\,\Delta r + \frac{(i-1)(i-2)}{2}\,\Delta' r,$$

$$s_i = s_1 + (i-1)\,\Delta s + \frac{(i-1)(i-2)}{2}\,\Delta' s,$$

$r_1 = 0{,}122484$,	$s_1 = 1{,}492818$,
$r_2 = 0{,}122075$,	$s_2 = 1{,}493257$,
$r_3 = 0{,}121699$,	$s_3 = 1{,}493595$,
$r_4 = 0{,}121355$,	$s_4 = 1{,}493834$,
$r_5 = 0{,}121043$,	$s_5 = 1{,}493972$,
$r_6 = 0{,}120764$,	$s_6 = 1{,}494011$,
$r_7 = 0{,}120517$,	$s_7 = 1{,}493949$,
$r_8 = 0{,}120303$,	$s_8 = 1{,}493788$,
$r_9 = 0{,}120122$,	$s_9 = 1{,}493527$,
$r_{10} = 0{,}119972$,	$s_{10} = 1{,}493166$,
$r_{11} = 0{,}119856$,	$s_{11} = 1{,}492705$,
$r_{12} = 0{,}119772$,	$s_{12} = 1{,}492144$.

Die Geländekoordinaten der Schwerpunktskoordinaten von Anschlußpunkten zweier benachbarter Modelle:

	$\Delta y \cdot r$	$\Delta x \cdot s$	[ ]	$\Delta x \cdot r$	$-\Delta y \cdot s$	[ ]	Y	X
M_1^2							1117,94	769,69
M_2^3	0,14	357,20	357,34	29,20	− 1,76	27,44	1475,28	797,13
M_3^4	0,22	326,59	326,81	26,61	− 2,75	23,86	1802,09	820,99
M_4^5	0,13	272,74	272,84	22,16	− 1,58	20,58	2074,96	841,57
M_5^6	−3,68	253,30	249,62	20,52	+45,45	65,97	2324,58	907,54
M_6^7	2,43	311,41	313,84	25,17	−30,03	− 4,83	2638,42	902,71
M_7^8	−0,36	279,71	279,35	22,56	+ 4,51	27,07	2917,77	929,78
M_8^9	2,35	387,70	390,05	31,22	−29,22	2,00	3307,82	931,71
M_9^{10}	0,26	261,59	261,85	21,04	− 3,21	17,83	3569,67	949,68
M_{10}^{11}	−0,50	259,42	258,92	20,84	+ 6,23	27,07	3828,59	976,67
M_{11}^{12}	0,20	347,72	347,92	27,92	− 2,51	25,41	4176,53	1002,0

Die Differenz nach der Fehlerverteilung zwischen den berechneten bzw. gegebenen Geländekoordinaten der in dem 4. und 5. Modell befindlichen 5. bzw. 6. Paßpunkte:

$Y^{sz} = 2372{,}56$	$X^{sz} = 815{,}38$	$Y^{sz} = 1912{,}21$	$X^{sz} = 823{,}03$
$Y_6 = 2372{,}92$	$X_6 = 814{,}92$	$Y_5 = 1912{,}53$	$X_5 = 822{,}53$
$-0{,}36$	$+0{,}46$	$-0{,}32$	$+0{,}50$

2. *Lösung (Fehlerverteilung mit Einbeziehung eines Zwischenpaßpunktes)*

$$\Delta r = 5\,\Delta' r - 15\,\Delta'' r - 0{,}0002466009, \qquad \overset{*}{Y}_6 - Y_1^2 = 2372{,}92 - 1117{,}94 = +1254{,}98$$

$$\Delta s = 5\,\Delta' s - 15\,\Delta'' s - 0{,}0000613818, \qquad X_6 - X_1^2 = 814{,}92 - 769{,}69 = + 45{,}23\,.$$

Die Bedingungsgleichungen nach der Eliminierung von Δr und Δs:

$$-136{,}01\,\Delta' r - 855{,}65\,\Delta'' r - 22127{,}47\,\Delta' s - 99557{,}61\,\Delta'' s = 2{,}20659495\,,$$

$$-22127{,}47\,\Delta' r - 99557{,}61\,\Delta'' r + 136{,}01\,\Delta' s + 855{,}65\,\Delta'' s = -0{,}73211260\,,$$

$$-503{,}48\,\Delta' r - 1992{,}74\,\Delta'' r - 8105{,}81\,\Delta' s - 29184{,}91\,\Delta'' s = 1{,}14172370\,,$$

$$-8105{,}81\,\Delta' r - 29184{,}91\,\Delta'' r + 503{,}48\,\Delta' s + 1992{,}74\,\Delta'' s = -0{,}76934943\,.$$

Obiges Gleichungssystem mit vier Unbekannten ist tabellenmäßig nach [12] leicht zu lösen

i	$k=1$	2	3	4	$-a^*_i$		
1	− 99 557,61	−22 127,47	+ 855,65	+ 136,01	+ 732,1126		
2	− 29 184,91	− 8 105,81	+ 1 992,74	+ 503,48	+ 769,3494		
3	− 1 992,74	− 503,48	− 29 184,91	− 8 105,81	−1141,7237		
4	− 855,65	− 136,01	− 99557,61	−22 127,47	−2206,5950		
$-S$	+131 590,9100	+30 872,7700	+125 894,1300	+29593,7900	+1846,8567		
1	− 99 557,61	−0,22225795	+0,0085945213	+0,0013661437	−0,007536578	−0,06008557	$\Delta'' r$
2	− 29 184,91	− 1 619,2317	+1,075763	+0,28631432	+0,34259060	+0,30337715	$\Delta' r$
3	− 1 992,74	− 60,5777	− 29 267,2039	−0,27764445	−0,040220138	+0,05880370	Δ''_s
4	− 855,65	+ 54,1650	− 99 506,6952	+ 5 514,3509	−0,32784317	−0,32784317	$\Delta' s$
$-\sigma$	+131 590,9100	+ 1 625,6444	+128 773,8991	− 5 514,3509			
		3	1	1	0		

* Zur Erhöhung der Rechnungsschärfe wird das Tausendfachste der reinen Glieder genommen, daher müssen die berechneten Unbekannten durch 1000 dividiert werden.

$$\Delta r = -0{,}00086220\,, \qquad \Delta s = +0{,}00081578\,,$$

$$\Delta' r = +0{,}00030338\,, \qquad \Delta' s = -0{,}00032784\,,$$

$$\Delta'' r = -0{,}00006008\,, \qquad \Delta'' s = +0{,}00005080\,.$$

Die Transformationskonstanten bezüglich der einzelnen Modelle mit folgenden Formeln:

$$r_i = r_1 + (i-1)\,\Delta r + \frac{(i-1)(i-2)}{2}\,\Delta' r + \frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{6}\,\Delta'' r\,,$$

$$s_i = s_1 + (i-1)\,\Delta s + \frac{(i-1)(i-2)}{2}\,\Delta' s + \frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{6}\,\Delta'' s$$

geben:

$$r_1 = 0{,}122484, \qquad s_1 = 1{,}492819\,,$$

$$r_2 = 0{,}121622\,, \qquad s_2 = 1{,}493635\,,$$

$$r_3 = 0{,}121063\,, \qquad s_3 = 1{,}494122\,,$$

$$r_4 = 0{,}120748\,, \qquad s_4 = 1{,}494333\,,$$

$$r_5 = 0{,}120615\,, \qquad s_5 = 1{,}494318\,,$$

$$r_6 = 0{,}120606\,, \qquad s_6 = 1{,}494127\,,$$

$$r_7 = 0{,}120660\,, \qquad s_7 = 1{,}493812\,,$$

$$r_8 = 0{,}120717\,, \qquad s_8 = 1{,}493423\,,$$

$r_9 = 0{,}120717\,,$ $\quad s_9 = 1{,}493010\,,$
$r_{10} = 0{,}120599\,,$ $\quad s_{10} = 1{,}492626\,,$
$r_{11} = 0{,}120305\,,$ $\quad s_{11} = 1{,}492320\,,$
$r_{12} = 0{,}119772\,,$ $\quad s_{12} = 1{,}492144\,.$

Die Geländekoordinaten der Anschlußpunkte (ausführliche Berechnung im ersten Beispiel).

	Y	X
M_1^2	1117,94	769,69
M_2^3	1475,37	797,02
M_3^4	1802,29	820,74
M_4^5	2075,26	841,21
M_5^6	2324,95	907,12
M_6^7	2638,81	902,23
M_7^8	2918,14	929,33
M_8^9	3308,10	931,45
M_9^{10}	3569,86	949,38
M_{10}^{11}	3828,69	976,55
M_{11}^{12}	4176,53	1002,07

Die Differenz nach der Fehlerverteilung zwischen den berechneten bzw. gegebenen Geländekoordinaten der 5. bzw. 6. Paßpunkte des 4. und 5. Modells:

$Y_5^{sz} = 1912{,}43$	$X_5^{sz} = 822{,}74$	$Y_6^{sz} = 2372{,}91$	$X_6^{sz} = 814{,}93$
$Y_5 = 1912{,}53$	$X_5 = 822{,}53$	$Y_6 = 2372{,}92$	$X_6 = 814{,}92$
$-0{,}10$	$+0{,}21$	$-0{,}01$	$+0{,}01$

3. *Lösung (ohne Kontrollpunkt)*

Die Korrelatengleichungen:

$$15819385{,}2882\,k_1 + 0\,k_2 + 102{,}13\,k_3 + 11179{,}19\,k_4 - 1495{,}21080 = 0\,,$$
$$0\,k_1 + 15819385{,}2882\,k_2 + 11179{,}19\,k_3 - 102{,}13\,k_4 + 3482{,}64200 = 0\,,$$
$$102{,}13\,k_1 + 11179{,}19\,k_2 + 11\,k_3 + 0\,k_4 + 2{,}71261 = 0\,,$$
$$11179{,}19\,k_1 - 102{,}13\,k_2 + 0\,k_3 + 11\,k_4 + 0{,}67520 = 0\,.$$

$k_1 = +0{,}000000495070\,,$
$k_2 = -0{,}000000164256\,,$
$k_3 = -0{,}0000842654\,,$
$k_4 = -0{,}000566041\,.$

Die einzelnen Δr- bzw. Δs-Werte können mit den k-Korrelaten berechnet werden:

$\Delta r]_1^2 = -0{,}00041557\,,$ $\quad \Delta s]_1^2 = +0{,}00044903\,,$
$\Delta r]_2^3 = -0{,}00037687\,,$ $\quad \Delta s]_2^3 = +0{,}00033041\,,$
$\Delta r]_3^4 = -0{,}00034186\,,$ $\quad \Delta s]_3^4 = +0{,}00022185\,,$
. . . . . .
$\Delta r]_{11}^{12} = -0{,}00008426$ $\quad \Delta s]_{11}^{12} = -0{,}00056604$
$r_2 = r_1 + \Delta r]_1^2$ $\quad s_2 = s_1 + \Delta s]_1^2$

$$r_3 = r_1 + \Delta r]_1^2 + \Delta r]_2^3 \qquad s_3 = s_1 + \Delta s]_1^2 + \Delta s]_2^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_{11} = r_1 + \Delta r]_1^2 + \ldots + \Delta r]_2^3 + \Delta r]_{10}^{11} \quad s_{11} = s_1 + \Delta s]_1^2 + \Delta s]_2^3 + \ldots + \Delta s]_{10}^{11}.$$

Bedingungsgleichungen

Die Reihenfolge der Normalgleichungen wurde aus rechentechnischen Gründen verwechselt.

	a	*b*	*c*	*d*
$\Delta r]_1^2$	9,96	2047,05	1	
$\Delta r]_2^3$	8,87	1807,84	1	
$\Delta r]_3^4$	6,94	1589,18	1	
$\Delta r]_4^5$	5,88	1406,60	1	
$\Delta r]_5^6$	36,30	1237,05	1	
$\Delta r]_6^7$	16,20	1028,61	1	
$\Delta r]_7^8$	19,22	841,38	1	
$\Delta r]_8^9$	−0,34	581,84	1	
$\Delta r]_9^{10}$	−2,49	406,69	1	
$\Delta r]_{10}^{11}$	1,68	232,95	1	
$\Delta r]_{11}^{12}$	—	—	1	
$\Delta s]_1^2$	2047,05	−9,96		1
$\Delta s]_2^3$	1807,84	−8,87		1
$\Delta s]_3^4$	1589,18	−6,94		1
$\Delta s]_4^5$	1406,60	−5,88		1
$\Delta s]_5^6$	1237,05	−36,30		1
$\Delta s]_6^7$	1028,61	− 16,20		1
$\Delta s]_7^8$	841,38	−19,22		1
$\Delta s]_8^9$	581,84	+0,34		1
$\Delta s]_9^{10}$	406,69	+2,49		1
$\Delta s]_{10}^{11}$	232,95	−1,68		1
$\Delta s]_{11}^{12}$	—	—		1

Die auf die einzelnen Modelle bezüglichen Transformationskonstanten können mit Hilfe der obigen Formeln berechnet werden:

$$r_1 = 0{,}122484\,, \qquad s_1 = 1{,}492819\,,$$
$$r_2 = 0{,}122068\,, \qquad s_2 = 1{,}493268\,,$$
$$r_3 = 0{,}121692\,, \qquad s_3 = 1{,}493598\,,$$
$$r_4 = 0{,}121350\,, \qquad s_4 = 1{,}493820\,,$$
$$r_5 = 0{,}121037\,, \qquad s_5 = 1{,}493951\,,$$
$$r_6 = 0{,}120768\,, \qquad s_6 = 1{,}494004\,,$$
$$r_7 = 0{,}120523\,, \qquad s_7 = 1{,}493950\,,$$
$$r_8 = 0{,}120310\,, \qquad s_8 = 1{,}493803\,,$$
$$r_9 = 0{,}120130\,, \qquad s_9 = 1{,}493525\,,$$

$$r_{10} = 0{,}119977\,, \qquad s_{10} = 1{,}493160\,,$$
$$r_{11} = 0{,}119856\,, \qquad s_{11} = 1{,}492710\,,$$
$$r_{12} = 0{,}119772\,, \qquad s_{12} = 1{,}492144\,.$$

Die Geländekoordinaten der Übergangspaßpunkte.

	Y	X
M_1^2	1117,94	769,69
M_2^3	1475,28	797,13
M_3^4	1802,09	820,99
M_4^5	2074,96	841,57
M_5^6	2324,58	907,54
M_6^7	2638,42	902,71
M_7^8	2917,77	929,78
M_8^9	3307,82	931,78
M_9^{10}	3569,67	949,61
M_{10}^{11}	3828,59	976,68
M_{11}^{12}	4176,53	1002,07

$Y_5^{sz} = 1912{,}21$	$X_5^{sz} = 823{,}03$	$Y_6^{sz} = 2372{,}56$	$X_6^{sz} = 815{,}38$
$Y_5 = 1912{,}53$	$X_5 = 822{,}53$	$Y_6 = 2372{,}92$	$X_6 = 814{,}92$
$-0{,}32$	$+0{,}50$	$-0{,}36$	$+0{,}46$

4. *Lösung mit Kontrollpunkt*

Die Korrelatengleichungen:

$$15819385{,}288\,k_1 + 0\,k_2 + 3673780{,}664\,k_3 - 227064{,}0435\,k_4 + 102{,}13\,k_5 + 11179{,}19\,k_6 - $$
$$- 1495{,}21080 + 0\,,$$
$$0k_1 + 15819385{,}288k_2 + 227064{,}0435k_3 + 3673780{,}664k_4 + 11179{,}19k_5 - 102{,}13k_6 + 3482{,}64200 = 0\,,$$
$$3673780{,}664k_1 + 227064{,}0435k_2 + 1245091{,}7675k_3 + 0k_4 + 141{,}84k_5 + 2010{,}23k_6 - 983{,}3542 = 0\,,$$
$$-227064{,}0435k_1 + 3673780{,}664k_2 + 0k_3 + 1245091{,}7675k_4 2010{,}23k_5 - 141{,}84k_6 + 1256{,}36757 = 0\,,$$
$$102{,}13k_1 + 11179{,}19k_2 + 141{,}84k_3 + 2010{,}23k_4 + 11k_5 + 0k_6 + 2{,}71261 = 0\,,$$
$$11179{,}19k_1 - 102{,}13k_2 + 2010{,}23k_3 - 141{,}84k_4 + 0k_5 + 11k_6 + 0{,}67520 = 0.$$

$$k_6 = -0{,}305144\,,$$
$$k_5 = -0{,}373364\,,$$
$$k_4 = -0{,}00162462\,,$$
$$k_3 = +0{,}00126575\,,$$
$$k_2 = +0{,}000400849\,,$$
$$k_1 = -0{,}00000470154\,.$$

Die einzelnen Δr- bzw. Δs-Werte können mit den k-Korrelaten berechnet werden.

$$\Delta r]_1^2 = -0{,}00085605\,, \qquad \Delta s]_1^2 = +0{,}00080157\,,$$
$$\Delta r]_2^3 = -0{,}00057381\,, \qquad \Delta s]_2^3 = +0{,}00049847\,,$$
$$\Delta r]_3^4 = -0{,}00030854\,, \qquad \Delta s]_3^4 = +0{,}00022048\,.$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta r]_{11}^{12} = -0{,}00037336\,, \qquad \Delta s]_{11}^{12} = 0{,}00030514;$$

$$r_2 = r_1 + \Delta r]_1^2, \qquad s_2 = s_1 + \Delta s]_1^2,$$

$$r_3 = r_1 + \Delta r]_1^2 + \Delta r]_2^3\,, \qquad s_3 = s_1 + \Delta s]_1^2 + \Delta s]_2^3\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{11} = r_1 + \Delta r]_1^2 + \Delta r]_2^3 + \ldots \Delta r]_{10}^{11}\,, \qquad s_{11} = s_1 + \Delta s]_1^2 + \Delta s]_2^3 + \ldots \Delta s]_{10}^{11}\,.$$

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
$\Delta r]_1^2$	9,96	2047,05	37,53	836,94	1	
$\Delta r]_2^3$	8,78	1807,84	36,35	597,73	1	
$\Delta r]_3^4$	6,94	1589,18	34,51	379,07	1	
$\Delta r]_4^5$	5,88	1406,60	33,45	196,49	1	
$\Delta r]_5^6$	36,30	1237,05	—	—	1	
$\Delta r]_6^7$	16,20	1028,61	—	—	1	
$\Delta r]_7^8$	19,22	841,38	—	—	1	
$\Delta r]_8^9$	−0,34	581,84	—	—	1	
$\Delta r]_9^{10}$	−2,49	406,69	—	—	1	
$\Delta r]_{10}^{11}$	1,68	232,95	—	—	1	
$\Delta r]_{11}^{12}$	—	—	—	—	1	
$\Delta s]_1^2$	2047,05	−9,96	836,94	−37,53		1
$\Delta s]_2^3$	1807,84	−8,78	597,73	−36,35		1
$\Delta s]_3^4$	1589,18	−6,94	379,07	−34,51		1
$\Delta s]_4^5$	1406,60	−5,88	196,49	−33,45		1
$\Delta s]_5^6$	1237,05	−36,30	—	—		1
$\Delta s]_6^7$	1028,61	−16,20	—	—		1
$\Delta s]_7^8$	841,38	−19,22	—	—		1
$\Delta s]_8^9$	581,84	+0,34	—	—		1
$\Delta s]_9^{10}$	406,69	+2,49	—	—		1
$\Delta s]_{10}^{11}$	232,95	−1,68	—	—		1
$\Delta s]_{11}^{12}$	—	—	—	—		1

Die Transformationskonstanten der einzelnen Modelle können mit den obigen Formeln berechnet werden.

$$r_1 = 0{,}122484\,, \qquad s_1 = 1{,}492819\,,$$
$$r_2 = 0{,}121619\,, \qquad s_2 = 1{,}493620\,,$$
$$r_3 = 0{,}121045\,, \qquad s_3 = 1{,}494119\,,$$
$$r_4 = 0{,}120737\,, \qquad s_4 = 1{,}494339\,,$$
$$r_5 = 0{,}120650\,, \qquad s_5 = 1{,}494328\,,$$
$$r_6 = 0{,}120773\,, \qquad s_6 = 1{,}494003\,,$$
$$r_7 = 0{,}120811\,, \qquad s_7 = 1{,}493686\,,$$
$$r_8 = 0{,}120775\,, \qquad s_8 = 1{,}493370\,,$$
$$r_9 = 0{,}120635\,, \qquad s_9 = 1{,}493062\,,$$
$$r_{10} = 0{,}120425\,, \qquad s_{10} = 1{,}492756\,,$$
$$r_{11} = 0{,}120145\,, \qquad s_{11} = 1{,}492449\,,$$
$$r_{12} = 0{,}119772\,, \qquad s_{12} = 1{,}494144\,.$$

Die Geländekoordinaten der Anschlußpunkte:

	Y	X
M_1^2	1117,94	769,69
M_2^3	1475,37	797,02
M_3^4	1802,29	820,74
M_4^5	2075,26	841,21
M_5^6	2324,95	907,13
M_6^7	2638,79	902,27
M_7^8	2918,09	929,40
M_8^9	3308,04	931,53
M_9^{10}	3569,81	949,45
M_{10}^{11}	3828,66	976,59
M_{11}^{12}	4176,53	1002,07

$Y_5^{sz} = 1912{,}43$	$X_5^{sz} = 822{,}74$	$Y_6^{sz} = 2372{,}92$	$X_6^{sz} = 814{,}93$
$Y_5 = 1912{,}53$	$X_5 = 822{,}53$	$Y_6 = 2372{,}92$	$X_6 = 814{,}92$
$-0{,}10$	$+0{,}21$	0	$+0{,}01$

SCHRIFTTUM

1. Koós, T.—Németh, F.: Fényképillesztőpontok meghatározása légisokszögeléssel (Die Bestimmung der Bildpaßpunkte durch räumliche Polygonierung). *Geodézia és Kartográfia.* **1958.**
2. Szabó, I.—Vagács, G.: Pontsűrítés légiháromszögeléssel az 1 : 1000-es térképezéshez (Punktverdichtung mit Aerotriangulierung zur Kartierung im Maßstab 1 : 100). *Geodézia és Kartográfia.* 1962.
3. Schutt, G. H.: A Method of Block Adjustment for Horizontal Coordinates. *The Canadian Surveyor,* 1961.
4. Zarzycki, J. M.: Beitrag zur Fehlertheorie der räumlichen Aerotriangulation. Promotionsarbeit an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, 1952, Nr. 2081.
5. Solaini, L.—Trombetti, C.: Rapport sur les résultats des travaux d'enchainement et de compensation executés pour la Commission A de l'O. E. E. P. E. jusqu'au mois de Janvier 1960. (Photogrammetria, Publications spéciales de l'O. E. E. P. E. Numero III; XVII. 1960—1961; 4.)
6. Schwidefsky, K.: Grundriß der Photogrammetrie. 5. Aufl. 1954.
7. Zarzycki, J. M.: Graphische Interpolationsausgleichung eines Doppelstreifens. *Schweiz. Z. f. Vermessung u. Kulturtechnik.* 1949.
8. Buchholtz, A.: Photogrammetrie. 2. Auflage 1960.
9. Verdin, A.: La transformation des coordonnées „appareil" en coordonnées „terrain" dans le cheminement aérien. *Bulletin de la Société Belge de Photogrammétrie,* 1953. No. 31.
10. Vermeir, P. A.: La triangulation aérienne. — Propagation des Erreurs et Compensation. *Bulletin de la Société Belge de Photogrammétrie,* 1954. No. 35.
11. Jordan-Eggert: Handbuch der Vermessungskunde, Zweiter Band, Stuttgart 1950; 168—175.
12. Zurmühl, R.: Matrizen. 1950. 252—260.

ON THE ERROR DISTRIBUTION IN SPATIAL AERIAL TRIANGULATION

GY. ALPÁR—J. SOMOGYI

SUMMARY

The methods referring to error distribution in spatial aerial triangulation scarcely dealt with in the Hungarian technical literature. Recently in Hungary, the spatial aerial triangulation, as an economic method of fixed point interpolation, has also come into the foreground. In connection with an actual problem, the necessity of a more precise method of error distribution, than the in Hungary usual diagrammatic one, was required. After a roughly outlined survey and criticism of the foreign technical literature related to the subject, authors report on four variations of a simple numerical method of error distribution. The method in question is based on the transformation according to a pair of pictures — which is also applied by VERDIN — and determines the transformation coefficient of intermediate model-parts lying within the model series by using difference series of the second, third and higher order. In addition to the simplicity of the new method the chief advantage of same also consists in its applicability to intermediate adjusting points. The application of the new method is introduced by a practical example.

DE LA DISTRIBUTION DES ERREURS DE LA TRIANGULATION AÉRIENNE SPATIALE

GY. ALPÁR—J. SOMOGYI

RÉSUMÉ

Les méthodes de distribution des erreurs de la triangulation aérienne spatiale ont été peu étudiées par les spécialistes hongrois. La triangulation aérienne spatiale, en tant que procédé de rattachement économique, a récemment passé en Hongrie au premier plan et à propos d'un problème concret, le besoin s'est fait sentir d'une méthode plus exacte que la distribution graphique des erreurs jusque-là utilisée. Après un bref aperçu et l'analyse critique de la littérature étrangère consacrée à ce sujet, les auteurs présentent quatre variantes d'une méthode de distribution numérique. Celle-ci se base sur la transformation par couples d'images utilisée également par VERDIN et détermine, par application de séries, les coefficients de transformation des images plastiques partielles intermédiaires à l'intérieur de la série d'images plastiques. Outre sa simplicité, la nouvelle méthode offre surtout l'avantage de pouvoir être employée en cas de points de rattachement intermédiaires. Son application est illustrée par un exemple numérique.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АЭРОТРИАНГУЛЯЦИИ

Д. АЛЬПАР — И. ШОМОДИ

РЕЗЮМЕ

Методы распределения погрешностей при пространственной аэротриангуляции мало освещаются в венгерской литературе. За последнее время метод пространственной аэротриангуляции, как экономичный метод сгущения точек, получает и у нас все большее распространение и в связи с одной из конкретных задач возникла необходимость создания метода распределения погрешностей, более точного, чем применявшийся у нас графический метод. После схематического обзора и обсуждения соответствующей иностранной литературы, авторы описывают четыре варианта простого численного метода распределения погрешностей. В основе предлагаемого метода лежит трансформация по парным снимкам, применяющаяся и *Вердэном*. Коэффициенты трансформации промежуточных частей модели в пределах ряда моделей определяются путем применения разностных рядов второй, третьей или высшей степени. Кроме простоты, новый метод отличается главным образом тем, что он может применяться и в случае наличия промежуточных точек привязки. Применение нового метода иллюстрируется на практическом примере.

ERGEBNISSE DER REGIONALEN TELLURISCHEN MESSUNGEN IN UNGARN

A. ÁDÁM und J. VERŐ

GEOPHYSIKALISCHES FORSCHUNGSLABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, SOPRON (UNGARN)

[Eingegangen am 3. September 1962]

Das Geophysikalische Forschungslaboratorium der Ung. Akademie d. Wissenschaften hat in den letzten Jahren auch regionale Erdstromregistrierungen mit einem beweglichen Observatorium durchgeführt. Das verfolgte Ziel dieser Messungen kann man im folgenden zusammenfassen:

1. Studium der elektrischen Eigenschaften des Erdmantels mit Hilfe der relativen Flächeninhalte der tellurischen Ellipsen zwischen der Basisstation des Observatoriums bei Nagycenk und den einzelnen Wanderstationen als Funktion der Periode und mit Hilfe der Magnetotellurik.
2. Studium der ungarischen Erdstromverhältnisse, d. h. der regionalen Verteilung und Richtungscharakteristiken der Ströme, die deformierenden Einflüsse der Grundgebirge und der Tektonik.
3. Umrechnung der Erdstromverteilung für homogenen Untergrund.
4. Errichtung tellurischer Basisstationen für die tellurische Erkundung.

Die Verfasser geben in ihrem Artikel ein Bild über ihre diesbezüglichen Ergebnisse.

Ein Observatorium beschäftigt sich in erster Linie mit den Studien des Verlaufes der physikalischen Ereignisse als Funktion der Zeit. Die zu untersuchenden Erscheinungen, in unserem Fall die tellurischen Ströme haben aber auch eine räumliche Verteilung, und es ist in diesem Fall von Vorteil, auch eine räumliche Untersuchung dieser Erscheinung vorzunehmen. Dazu sind bewegliche Stationen die rationellsten. Unser Laboratorium hat zur regionalen Vermessung von Ungarn ebenfalls bewegliche Stationen angewandt.

Zuerst soll eine Erläuterung der Apparaturen und Meßmethoden gegeben werden. Wir benützen dazu die im Handel befindlichen ungarischen Instrumente, die auf Schnellvortrieb mit 2 cm/min, bzw. Langsamvortrieb mit 2 cm/h umschaltbar sind. Die Frequenzcharakteristiken der verwendeten Galvanometer sind bis zu einer unteren Periode von etwa 5 sec einander sehr ähnlich. Die Empfindlichkeit vermindert sich aber darunter im allgemeinen schon rasch. Zwischen 5 und 8 sec treten Unterschiede in den relativen Empfindlichkeiten für verschiedene Galvanometer nur bis etwa 5% auf, über 8 sec sind sie praktisch schon identisch.

Die Registriermethode wird vom Sonnenzyklus beeinflußt. Zu Beginn unserer Untersuchungen in den Jahren des Sonnenfleckenmaximums (1958—59) registrierten wir zwei Tage lang mit Langsamvortrieb und einen Tag lang mit Schnellvortrieb. Jetzt, da die langperiodischen Variationen viel kleinere Amplituden besitzen, und im Spektrum die kurzperiodischen Pulsationen

nicht so häufig sind, wird zwei Tage lang mit Schnellvortrieb registriert, und diese Aufzeichnungen werden auch für die längeren Perioden angewandt. Wir verfolgten mit unseren Messungen mehrere Ziele:

1. Studium der elektrischen Eigenschaften des Erdmantels mit Hilfe der relativen Flächeninhalte der tellurischen Ellipsen zwischen der Basisstation des Observatoriums und den einzelnen Wanderstationen als Funktionen der Periode und mit Hilfe der Magnetotellurik.

2. Studium der ungarischen Erdstromverhältnisse, d.h. der regionalen Verteilung und Richtungscharakteristiken der Ströme, der deformierenden Einflüsse des Grundgebirges und der Tektonik.

3. Umrechnung der Erdstromverteilung für homogenen Untergrund.

4. Errichtung tellurischer Basisstationen für die tellurische Erkundung.

Verteilung der Meßpunkte

Für die Wahl der Punkte sind vor allen Dingen geologische Gesichtspunkte ausschlaggebend. Die einzelnen Punkte sollen einzelne kleinere geologische Abschnitte charakterisieren. Im Raume von Sopron, Westungarn und Südostungarn haben wir zuerst versuchsweise kleinere Gebiete vermessen, um die Genauigkeit der Messungen studieren zu können. Dann gingen wir auf die systematische Messung größerer Gebiete über. Unser Endziel ist die Überdeckung ganz Ungarns mit einem tellurischen Meßnetz. Dann kann man auch die industriellen tellurischen Messungen an unser Basisnetz anschließen. Zu unseren Untersuchungen wurden vom Eötvös-Institut in Budapest und vom Geophysikalischen Institut der Technischen Hochschule in Miskolc ihre vermessenen Basispunkte zur Verfügung gestellt und mitberücksichtigt.

Bearbeitungsmethoden

Zur Auswertung unserer Messungen konnten wir die üblichen relativen tellurischen Auswertungsmethoden nicht ohne weiteres benutzen. Eine relative Methode ist für unsere Zwecke deshalb nicht geeignet, weil sie stark die geologischen Verhältnisse an *beiden* Meßpunkten (Basis- und Wanderstation) enthält. Die Bestimmung der relativen Ellipse erfordert bei großen Entfernungen sehr viele Ablesungen und erreicht trotzdem keine sehr hohe Genauigkeit (Bild 1). Es schien uns vielmehr geeigneter, die absolute Ellipse nach KUNETZ [1] zu benutzen, und zwar getrennt für verschiedene Perioden. Diese Ellipse wird deshalb absolut genannt, weil sie nicht von einer Basisstation abhängig ist. Man erhält sie als statistisches Mittel der Feldvektoren in jeder Richtung. Wir benützen aber bei den Schnellregistrierungen nicht

die Mittelwerte der Feldvektoren in den einzelnen Richtungen, sondern die Mittelwerte der Ableitungen der Variationen, weil diese Methode gegenüber Potentialsprüngen nicht so empfindlich ist. Die zur Bestimmung der Ellipsenparameter notwendigen Formeln sind in VERŐS Arbeit in *Gerlands Beiträge*

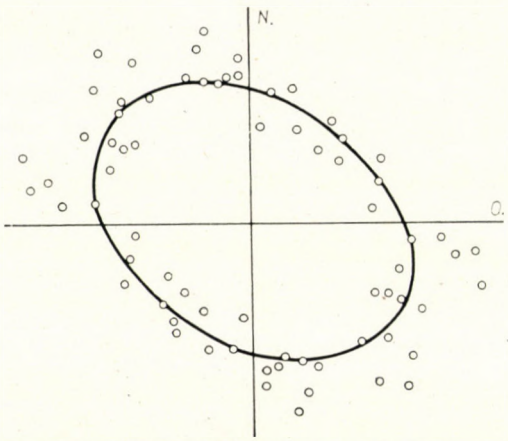

Bild 1. Tellurische relative Ellipse Rohod/Nagycenk (Entfernung etwa 500 km)

im Jahre 1960 erschienen [2]. Zur Konstruktion einer für unsere Zwecke geeigneten Ellipse braucht man 500—1000 Ablesungen. Man kann bei den meisten Messungen schon im Laufe des Tages ein brauchbares Periodenspektrum erhalten. Die aus den Registrierungen eines Tages ermittelte temporäre

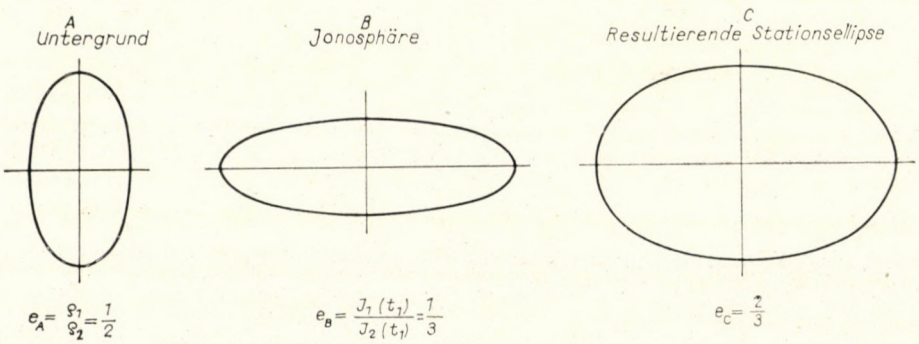

Bild 2. Die Entstehung der absoluten (Stations-) Ellipse

Ellipse ist natürlich in ihren Parametern zeitlich noch variabel. Es gelingt aber mit Hilfe der entsprechenden temporären Ellipse der Basisstation die temporäre Ellipse der Wanderstation auf die absolute Ellipse der Basisstation, die über einen längeren Zeitraum erhalten wurde, umzurechnen (Bild 2). Bei den langsamen Registrierungen wurden nicht die Ableitungen, sondern die Variationen selbst, mit den gleichen Formeln benutzt.

Eine absolute Ellipse ist durch drei Daten bestimmt: Zwei davon geben ein Orientierungsmaß der Erdströme (Richtung der großen Achse und Exzentrizität), aus den Flächeninhalten wird auf die Leitfähigkeit gefolgert. Die Möglichkeit der Frequenzsondierung ist dadurch gegeben, daß die absoluten Ellipsen getrennt für 5 Periodenbereiche bestimmt wurden. Die mittleren Perioden der Bereiche sind 10, 25, 100, 500 und 1000 sec. Die ersten vier Ellipsen wurden von der Schnell-, die beiden letzten von der Langsamregistrierung gegeben, wodurch auch eine Überdeckung vorhanden ist. Die einzelnen Ellipsen wurden durch gewogene Mittelbildungen berechnet. Die Gewichtszahlen ergeben sich aus der Anzahl der Auslesungen und aus den Größen der Variationen. Wir gaben das maximale Gewicht den mittleren Amplituden. Die zu kleinen und zu großen stürmischen Variationen erhielten entsprechend kleinere Gewichte.

Die Umrechnung der Erdstromverteilung für homogenen Untergrund

Zur Bestimmung der Widerstandsellipsen der Meßpunkte ist es notwendig, daß die Widerstandsellipse in einem Punkt (Basis) bekannt sei. Es gibt drei verschiedene Methoden für die Bestimmung dieser Ellipse:

a) die Magnetotellurik,

b) die geoelektrische Drehsondierung,

c) die Mittelbildung der auf die Basis bezogenen relativen Ellipsen sämtlicher Meßpunkte, wodurch die speziellen geologischen Einflüsse mit guter Wahrscheinlichkeit ausgeschaltet werden und nur regionale Effekte neben den der ionosphärischen Inhomogenitäten übrig bleiben. Die Inversellipse dieser Mittel nähert sich dann der Widerstandsellipse an.

In Kenntnis der relativen Ellipse zwischen der Widerstands- und der endgültigen absoluten Ellipsen (die nach dem obigen regionale und ionosphärische Effekte enthält), kann man die Widerstandsellipse der Wanderstationen bestimmen, da diese relative Ellipse für alle Punkte auf einem verhältnismäßig großen Gebiet annähernd konstant bleibt.

Wir betonen, daß die Mitberücksichtigung der endgültigen absoluten Ellipsen zu unseren Untersuchungen nicht notwendig ist, da man die Umrechnung auch auf die temporären Ellipsen mit dem gleichen Ergebnis durchführen kann.

Die nach der Methode der Magnetotellurik bestimmte Widerstandsellipse unseres Observatoriums und die inverse Landesmittelellipse sind in Bild 3 für Perioden von etwa 25 sec angegeben. Die horizontale Leitfähigkeit beträgt nach der Tiefsondierung des Geophysikalischen Institutes R. Eötvös etwa 400 Ω^{-1}, nach magnetotellurischen Messungen in der NS-Richtung etwa 700 Ω^{-1}, und in der OW-Richtung etwa 480 Ω^{-1}.

Die Berechnung der geologischen Ellipsen sind im Gange, aber es ist schon jetzt feststellbar, daß deren bevorzugte Richtungen mit den tektonisch bevorzugten Richtungen in Übereinstimmung stehen.

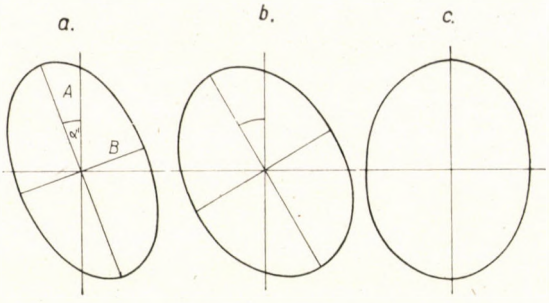

Bild 3. Die Anisotropie-Ellipsen des Observatoriums: *a)* Mittlere Stationsellipse um 90° verdreht, *b)* Mittlere relative Ellipse aus der Landesvermessung, *c)* Magnetotellurische Anisotropie-Ellipse

Interpretation der Flächeninhaltsveränderungen der relativen Ellipsen

Zur Bestimmung des relativen Flächeninhaltes ist die vorher geschilderte Umrechnung nicht notwendig, da dieser invariant sein muß. Die relativen Flächeninhalte in den gemessenen 65 Punkten sind im Bild 4 aufgetragen. Die Extremwerte sind 0,2 bzw. 28. Die Karte enthält — wegen der großen Stationsentfernungen — nur regionale Effekte und sie entsprechen gut dem

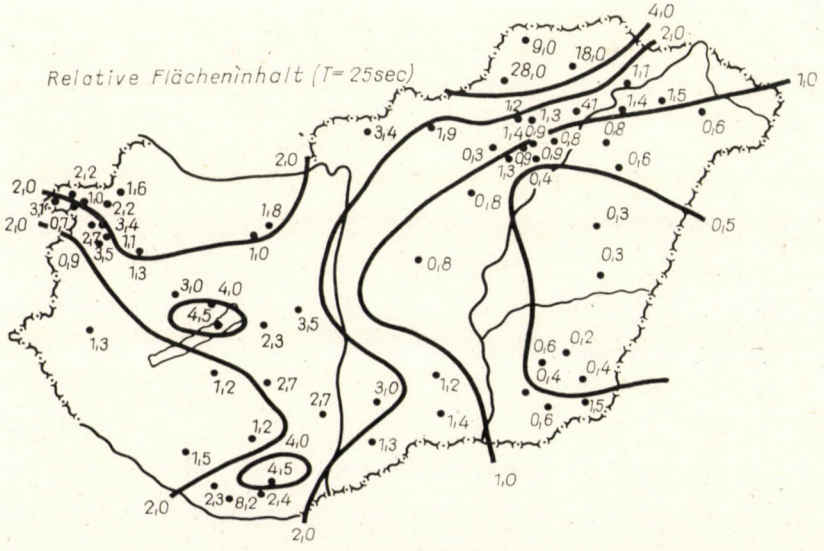

Bild 4. Karte der relativen Flächeninhalte bei 25 sec

tektonischen Bild des ungarischen Teiles des Karpatenbeckens. (Die Isoarealen sind dabei etwas ausgeglichen). Die NW-SO streichende Erhöhung ist nach V. SCHEFFER die sog. Transdanubien—Bácskaer Schwelle. Die weiter

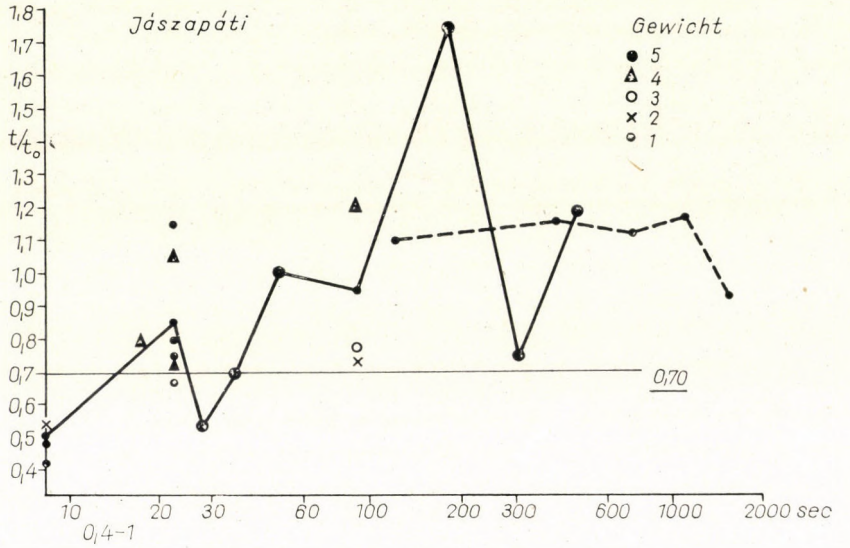

Bild 5. Tellurisches Frequenzsondierungsdiagramm von Jászapáti

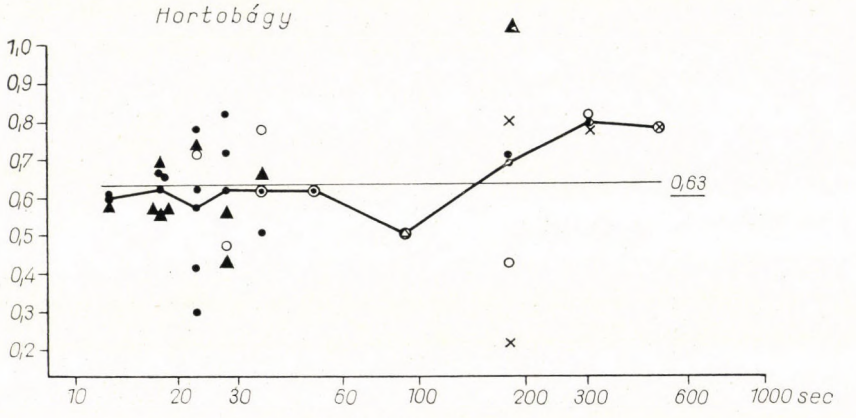

Bild 6. Tellurisches Frequenzsondierungsdiagramm von Hortobágy

nach Osten, zwischen Budapest und Szeged liegende Vertiefung scheint die Fortsetzung der Bruchzone der Wardariden zu sein. Der Graben von Makó—Hódmezővásárhely ist auch zu erkennen. Südwestlich der Schwelle befindet sich auch eine Tiefzone. Die Gebirgszüge im Norden sind durch sehr hohe Flächeninhalte gekennzeichnet.

Die Ablesungen an den einzelnen Punkten wurden — wie schon erwähnt — auch nach Perioden geordnet. Aus jeder Periodengruppe wurde der entsprechende, zum spezifischen Widerstand proportionale relative Flächeninhalt bestimmt, die gemeinsam einen Zusammenhang zwischen Perioden und Leitfähigkeit darstellen. Als Beispiel für diesen Zusammenhang sollen die Meßergebnisse von Jászapáti dienen (Bild 5. Die Periodengruppen sind hier noch weiter unterteilt). Die Streuung ist hier ziemlich groß, und es ist besonders auffallend, daß es solche Zeitintervalle gibt, z.B. die beiden Stunden, bei denen bei Variationen von 20 sec der relative Flächeninhalt 1,05 bzw. 1,15 betrug, als der Charakter der Variationen in Ungarn auch verschieden war; es sind also die relativen Flächeninhalte, wahrscheinlich wegen kleinräumlicher, ionosphärischer Inhomogenitäten sehr abweichend. Solche Werte wurden bei der späteren Verarbeitung weggelassen. Bei größeren Perioden sind die Streuungen auch größer und genügend genaue Ergebnisse wurden nur aus einer bedeutend größeren Anzahl von Daten gewonnen.

Der Zusammenhang der Flächeninhalt-Perioden von Jászapáti zeigt eine zunehmende Tendenz von Werten 0,5 bei 10 sec bis 1 bei 1 min. Die Übereinstimmung der schnellen (ausgezogen) und der langsamen (gestrichelt) Registrierung ist befriedigend (Bild 5). Leider ist dies nicht in allen Punkten der Fall, da die Ablesung der Variationen mit Perioden von einigen Minuten aus den langsamen Registrierungen durch die Pulsationen erschwert wird. Die Bestimmung der absoluten Ellipsen aus Schnellregistrierungen scheint viel vorteilhafter zu sein (Bild 6).

Die Veränderung des Flächeninhaltes innerhalb eines Periodenbereiches wurde auf semilogarithmischem Papier linear, also nach

$$F = t \log T + \text{const}.$$

ausgeglichen, wo F der Flächeninhalt, T die mittlere Periode und t der gesuchte Wert der Frequenzsondierung ist. Diese t-Werte sind zwischen je zwei der Frequenzbereiche im Bild 7 a—d aufgetragen. Bild 8 gibt den auf das Landesmittel reduzierten Mittelwert. Das auffallendste Gepräge aller Karten ist eine OW-streichende Minimalzone längs des 47. Breitengrades. Der südöstliche Teil ist durch ein starkes Maximum gekennzeichnet, im Norden sind nicht sonderlich positive Werte in der Gegend des Bükk-Gebirges. Die dritte positive Zone ist in der Gegend von Sopron.

Es wurden von unseren Karten die Werte der unmittelbar auf dem Grundgebirge liegenden Punkte weggelassen. Die kurzperiodischen Variationen sind in all diesen Punkten viel stärker als die langperiodischen. Als Beispiel diene ein Aufzeichnungspaar von Bakonybél und Nagycenk (Bild 9*a*,*b*) bzw. die relativen Ellipsen mit verschiedenen Perioden von Galvács (Bild 10). Diese deuten auf eine gutleitende Zone in größeren Tiefen unter dem Grundgebirge hin.

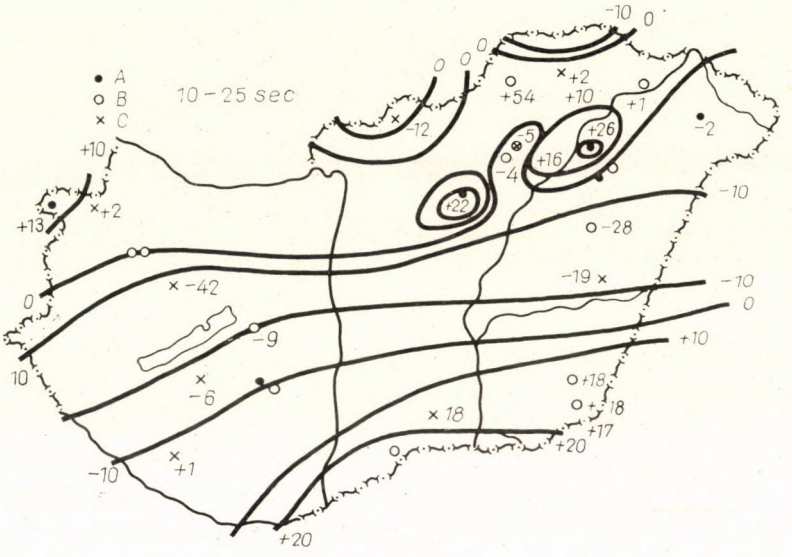

Bild 7a

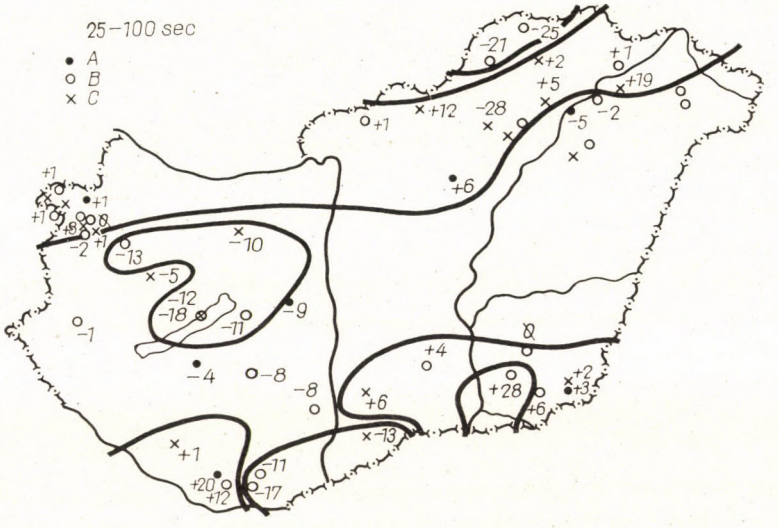

Bild 7b

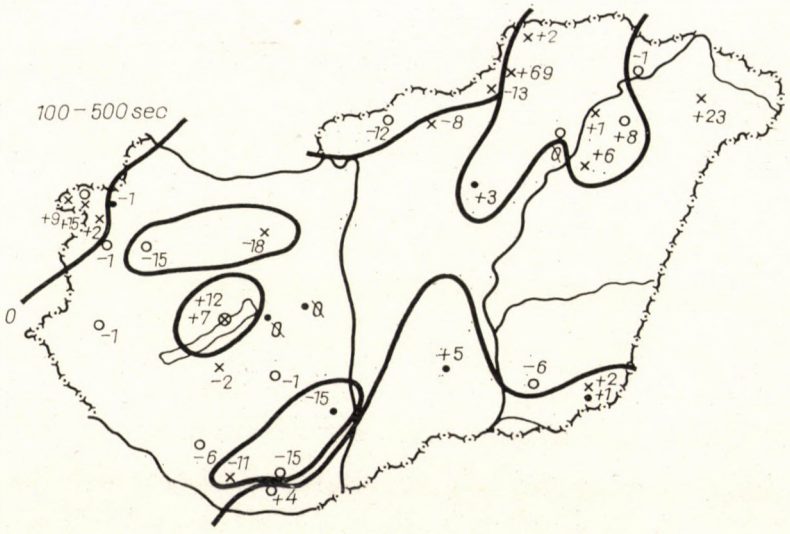

Bild 7c

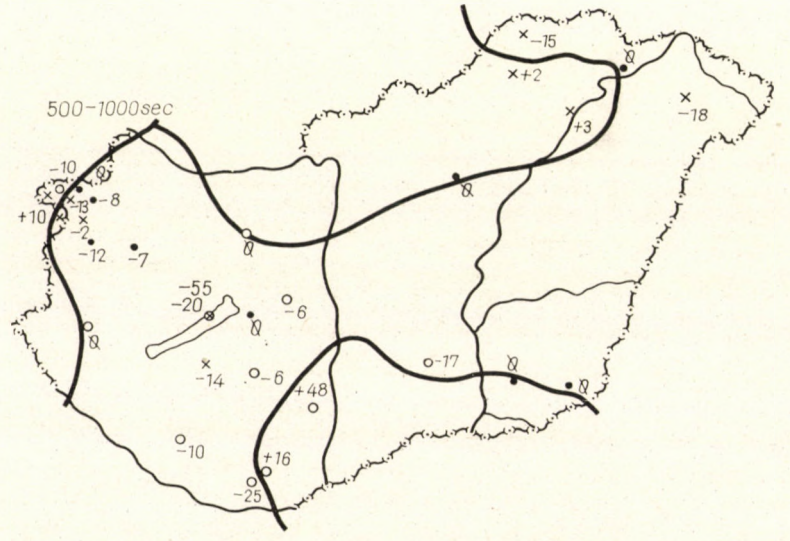

Bild 7d

Bild 7. Karte der aus den tellurischen Frequenzsondierungen bestimmten Parameter der Tiefenabhängigkeit der Leitfähigkeiten für die einzelnen Periodenintervalle

Es besteht nun die Frage, welche Ursache die angeführten Anomalien haben.

Zur Beantwortung wurden magnetotellurische Vergleichsmessungen zwischen Nagycenk und Tihany, die eine Station mit negativen Anomalien ist, durchgeführt. Die Messungen in Tihany wurden durch TSCHEN-LU-SÓ vollzogen. Es wurden die scheinbaren Leitfähigkeiten nach der Methode von NIBLETT und SAYN-WITTGENSTEIN berechnet. Die Ergebnisse sind im Bild 12 a—b—c dargestellt. In dieser Leitfähigkeitsteufenverteilung zeigen sich Unterschiede zwischen den beiden Observatorien in der N—S Richtung nur bis zu einer Tiefe von 20 km. Die Unterschiede bei geringen Tiefen stammen

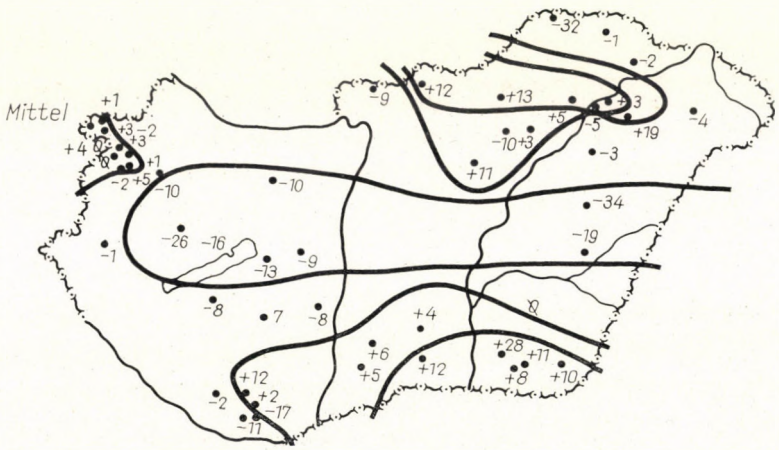

Bild 8. Karte der durchschnittlichen Werte der Parameter der tellurischen Frequenzsondierungen

von den verschiedenen Deckschichtmächtigkeiten der Observatorien. In Tihany gibt es nur eine sehr geringe Deckschicht, in Nagycenk dagegen eine Deckschicht von etwa 1500 m. Es ist auch bemerkenswert, daß die OW-Leitfähigkeitsverteilungen in beiden Punkten abweichend sind und weisen hier auf eine vergrößerte Leitfähigkeit in 10 bzw. 30 km Tiefe hin.

Es wurde ein Deutungsversuch durch Vergleich seismischer und tellurischer Daten (Bild 13) durchgeführt. Auf der Ordinate wurden die tellurischen Werte aufgetragen, die den Anstieg bzw. den Abfall der Leitfähigkeit mit der Teufe repräsentieren; auf der Abszisse sind die Tiefen der Moho-Schicht dargestellt, wie sie aus seismischen Ergebnissen ermittelt wurden. Der Korrelationsfaktor zwischen beiden Werten ergab sich zu — 0,6.

Neuerdings sieht man die Ursachen der elektromagnetischen Anomalien in den horizontalen Inhomogenitäten der kleineren Teufen. Die Teufenverhältnisse der in den Gebirgspunkten gefundenen und durch die Magnetotel-

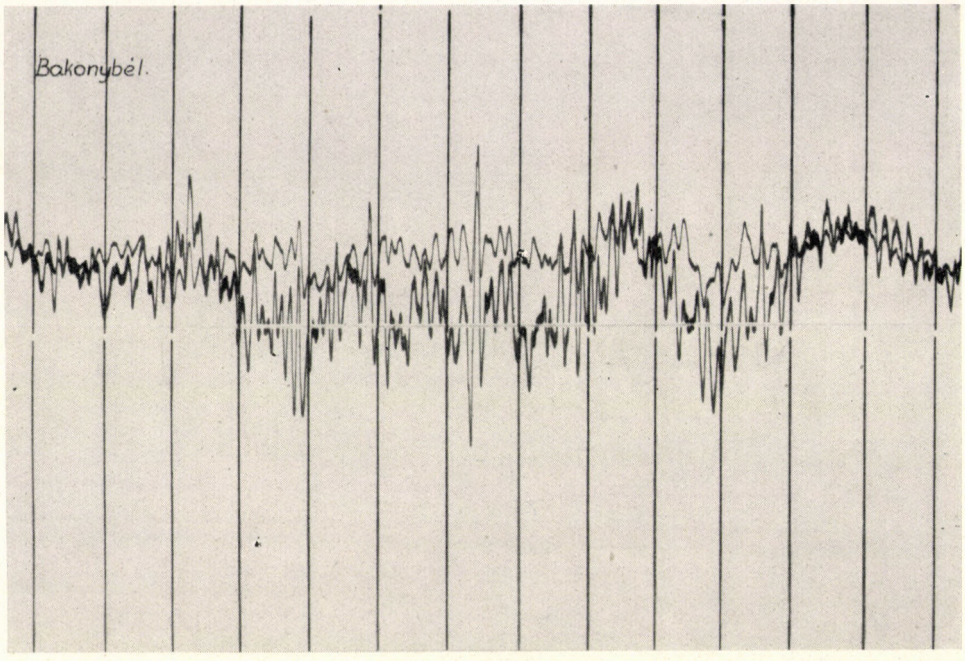

Bild 9a

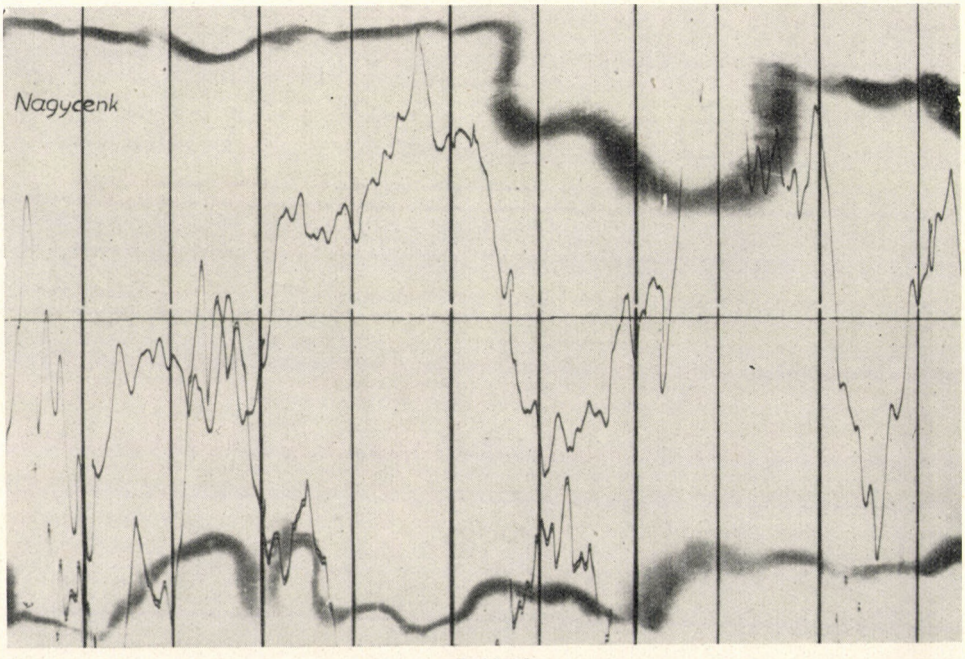

Bild 9b

Bild 9. Gleichzeitige Tellurogramme von Bakonybél und Nagycenk; Zeitmarken in jeder Minute

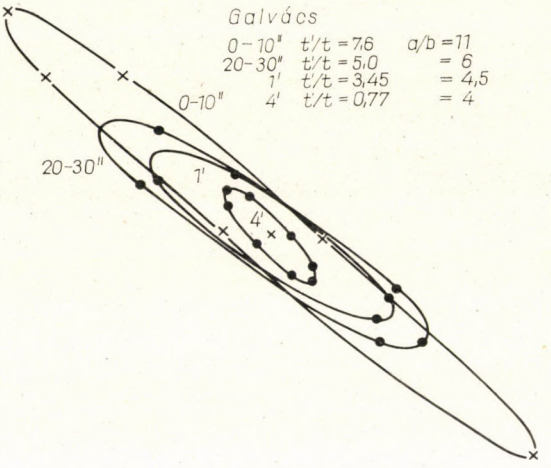

Bild 10. Relative Ellipsen von Galvács aus verschiedenen Perioden berechnet

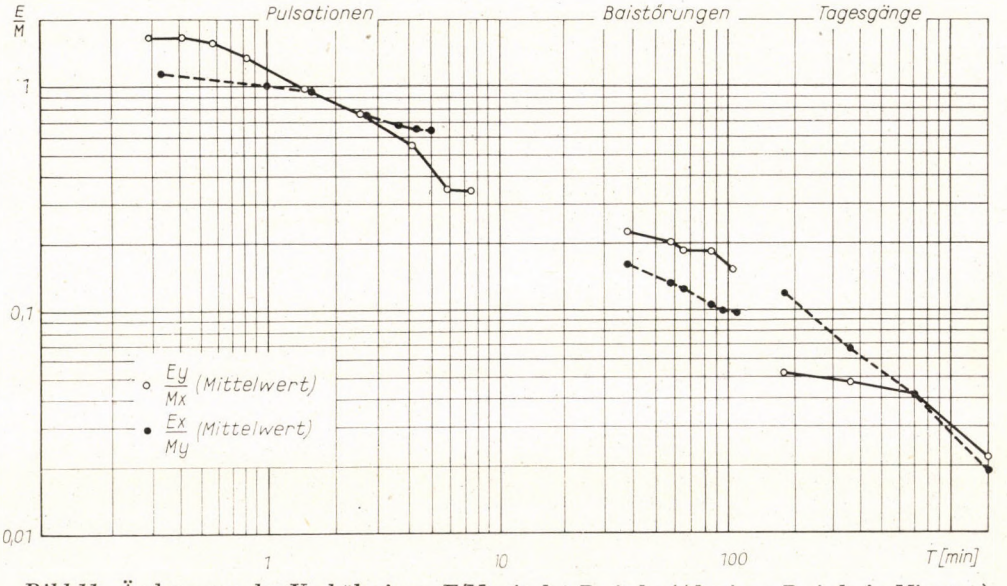

Bild 11. Änderungen des Verhältnisses E/M mit der Periode (Abszisse: Periode in Minuten)

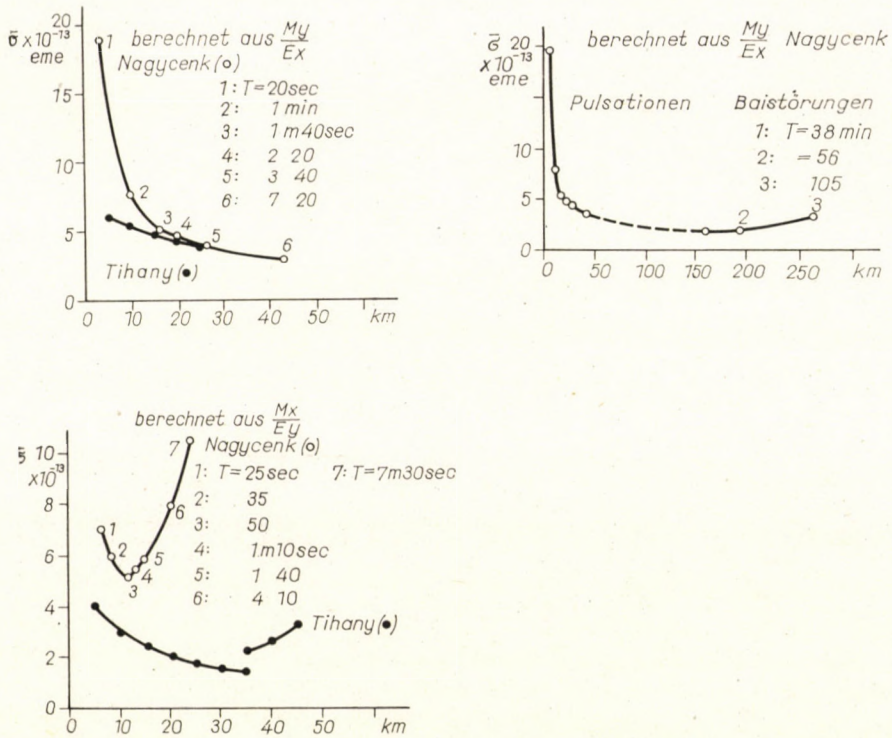

Bild 12. **Spezifische Leitfähigkeiten in verschiedenen Tiefen aus magnetotellurischen Ergebnissen**

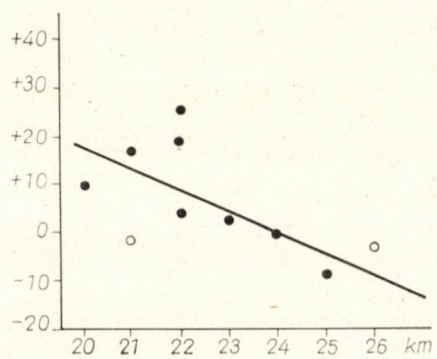

Bild 13. **Korrelation zwischen den tellurischen Parametern und den Tiefen der Moho-Schicht**

lurik bestätigten gutleitenden Schicht wäre auch eine Erklärung für die Erscheinungen.

Es gibt auch ein OW-streichendes Bruchsystem, die sog. südalpine Zone, die aber nur in den jüngeren Sedimenten vorhanden ist und erreicht die vorher erwähnten Tiefen wahrscheinlich nicht. Die positiven Anomalien scheinen im Vordergrund der Gebirge (Alpen bzw. Bükk-Gebirge) gebunden zu sein.

Es besteht im allgemeinen kein Zusammenhang mit der Karte des relativen Flächeninhaltes, möglicherweise bildet hier eine Ausnahme die SO-Anomalie, die im Zusammenhang mit dem Makó—Hódmezővásárhely- Graben steht.

Die in unserem Artikel angeführten Messungen und Berechnungen stellen natürlich nur einen Anfang dar. Sie sollen fortgesetzt und die Berechnungen in Zukunft weiter vertieft werden.

SCHRIFTTUM

1. KUNETZ, G.: Anwendung statistischer Eigenschaften der Erdströme in der praktischen Geophysik. *Freiberger Forschungshefte* C, 32. S. 5., 1957.
2. VERŐ, J.: Die Bestimmung der tellurischen Stationsellipsen. *Gerlands Beiträge zur Geophysik* **69,** Heft 5, 1960.
3. ÁDÁM, A.—VERŐ, J.: Előzetes beszámoló az MTA Geofizikai Kutató Laboratóriumának országos földiárammméréseiről (Vorläufiger Bericht von den regionalen tellurischen Messungen des Geophysikalischen Forschungslaboratorium der UAdW). *Geofizikai Közlemények*, 1962, 27.
4. ÁDÁM, A.—VERŐ, J.: Az országos földiárammérések adatainak feldolgozása és térképi ábrázolása (Bearbeitung und Kartendarstellung der Daten der regionalen tellurischen Messungen). *Magyar Geofizika*, 1962, 81.

RESULTS OF THE REGIONAL TELLURIC SURVEYS IN HUNGARY

A. ÁDÁM and J. VERŐ

SUMMARY

During these years, regional telluric recordings have also been made by the Geophysical Research Laboratory of the Academy of Sciences of Hungary, with the aid of a mobile observatory. The aim of the measurements can be recapitulated as follows:

1. Study of the electrical properties of the Earth's crust with the aid of the relative areas of the telluric ellipses between the base-station at Nagycenk and the individual moving stations, as a function of the period, — further with the aid of magnetotellurics.
2. Study of the telluric conditions in Hungary, i.e. of the regional distribution and directional characteristics of the currents, of the deforming effect of basement and tectonics.
3. Reduction of the telluric current distribution to a homogenous underground.
4. Establishment of telluric base-stations for telluric prospecting.

In this paper, a view of the relevant results is given by the authors.

LES RÉSULTATS DES MESURES TELLURIQUES RÉGIONALES EN HONGRIE

A. ÁDÁM—J. VERŐ

RÉSUMÉ

Le Laboratoire de Recherches Géophysiques de l'Académie des Sciences de Hongrie a effectué ces dernières années, avec son observatoire mobile, un certain nombre de mesures telluriques régionales. Les buts de ces mesures peuvent être résumés comme suit:

1. Étude des caractéristiques électriques de la partie supérieure de la Terre, à l'aide, d'une part, de la proportion d'aires des ellipses telluriques en fonction de la période, relative à l'observatoire de Nagycenk et aux stations mobiles, et d'autre part de la magnétotellurique.
2. Étude des conditions de courants telluriques, c'est-à-dire des caractéristiques d'orientation et de la distribution régionale des courants, et de l'effet déformant du soubassement et de la tectonique.
3. Réduction de la distribution des courants à un sous-sol homogène.
4. Établissement de stations de base pour la prospection tellurique pratique.

L'article offre un perçu des résultats déjà réalisés dans les différents domaines mentionnés.

О РЕЗУЛЬТАТАХ РЕГИОНАЛЬНОЙ СЪЕМКИ, ПРОВЕДЕННОЙ НА ТЕРРИТОРИИ ВЕНГРИИ МЕТОДОМ ТЕЛЛУРИЧЕСКИХ ТОКОВ

А. АДАМ—Й. ВЕРЁ

РЕЗЮМЕ

За последние годы Геофизической исследовательской лабораторией Академии наук Венгрии были проведены при помощи подвижной обсерватории региональные работы методом теллурических токов. Цели этих работ сводятся к следующему:

1. Изучение электрических свойств верхней части Земли по пропорциям площадей эллипсов, полученных в обсерватории при с. Надьценк, с одной стороны, и на различных полевых станциях, с другой, в функции периода, а также при помощи магнитотеллурики.
2. Изучение условий, характерных для земных токов в Венгрии, т. е. изучение особенностей направления и регионального распределения токов, а также деформирующего влияния фундамента и тектоники.
3. Пересчет распределения токов для случая однородной среды.
4. Создание опорных теллурических пунктов для целей практической съемки методом теллурических токов.

В работе излагаются результаты, полученные до сих пор в связи с вышеуказанными вопросами.

SONNENAUFGANGSEFFEKT IN DEN ERDSTRÖMEN

A. ÁDÁM und J. VERŐ

GEOPHYSIKALISCHES LABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, SOPRON

[Eingegangen am 3. September 1962]

Es werden zunächst die bisher in den geomagnetischen Pulsationen gefundenen Sonnenaufgangseffekte zusammengefaßt; eigenen Untersuchungen gemäß wird ein Maximum der kleinperiodischen Variationen (1—5 sec) bestätigt. Es wird weiter ein Minimum in den 1—4 min Variationen beim Sonnenaufgang wahrscheinlich.

Die Schnellregistrierungen des Erdstromobservatoriums bei Nagycenk (Vorschub 2 cm/min) werden nach [1] fortlaufend verarbeitet. Wir charakterisieren die Erdstrompulsationen mit Perioden, Amplituden, Regelmäßigkeitsindizes und Phasenverschiebungen zwischen beiden Komponenten. Das so vorbereitete Material bietet eine vielseitige Möglichkeit zur Untersuchung verschiedener, z.B. solar-terrestrischer Beziehungen. Im folgenden untersuchen wir die bei Sonnenaufgang wahrgenommenen Effekte.

H. KÖNIG [3] hat während der Untersuchung der Spherics mit Frequenzen von 0,5—9 Hz schon einen Sonnenaufgangseffekt gefunden, nämlich Signale von 9 Hz mit 1—4 Hz moduliert. Diese Signale dauerten nach dem Sonnenaufgang höchstens eine Stunde lang. Die Signale erschienen in je 5—10 Minuten mit immer vermindernden Amplituden und gemeinschaftlich in sog. Zügen. Nach KÖNIG werden diese Signale durch die schnellen Umwandlungen der Ionosphäre hervorgerufen: beim Sonnenaufgang ändert sich die nächtliche Struktur der Ionosphäre sehr schnell, und dadurch verändert sich auch die Kapazität des Systems Erde-Ionosphäre. Die Kapazitätsänderung führt zu statischen elektrischen Feldschwankungen (Signale 1—4 Hz). In derselben Zeit beginnen nach [3] die Selbstschwingungen des Erde-Ionosphäre-Systems (9 Hz). Diese Erscheinungen wandern in O—W Richtung von der Erde aus gesehen. (Es ist bemerkenswert, daß wir eine ähnliche O—W Wanderung in den 20 sec-Pulsationen während Messungen in verschiedenen Gebieten von Ungarn entdeckt haben.) Auch während des (80%) Sonnenfinsternisses von 30.06.1954 in München konnte er solche Signale feststellen.

Diese Erscheinungen werden bekanntlich durch die solare UV-Strahlung hervorgerufen. Eine große UV-Verstärkung bedeuten die Solar-Flares. KATO, TAMAO und SAITO [4] entdeckten gleichzeitig mit Solar-Flares auch geomagnetische Pulsationen mit Perioden von etwa 70—80 sec. Sie untersuchten

theoretisch die Möglichkeit der Erzeugung hydromagnetischer Wellen in der Exosphäre bei starker Zunahme der Sonnenstrahlung. Die annähernde Lösung ihrer Gleichungen liefert Oszillationen mit Perioden von einigen sec. (Die Unterschiede zwischen den theoretischen und tatsächlich registrierten Perioden können nach ihrer Meinung in dem Mangel der vorausgesetzten Rotationssymmetrie begründet sein.)

Die Ergebnisse dieser beiden Studien bewegten auch uns zur Analyse unserer Bearbeitungsdaten hinsichtlich eines Sonnenaufgangseffekts, besonders in den in unseren Registrierungen wahrnehmbaren kleinsten Perioden

Tabelle I/a

Perioden 1—10 sec

		1960		1961		1960—1961	
		Fälle	Mittlere Amplitude μV/km	Fälle	Mittlere Amplitude μV/km	Fälle	Mittlere Amplitude μV/km
Vor dem Sonnenaufgang	4 Viertelstunde	12	8	12	24	24	16
	3 „	8	16	16	12	26	16
	2 „	13	24	12	24	29	24
	1 „	12	24	16	16	28	20
Sonnenaufgang		12	32	18	60	32	50
Nach dem Sonnenaufgang	1 Viertelstunde	12	4	10	16	22	10
	2 „	12	15	14	40	29	30
	3 „	9	4	7	28	17	16
	4 „	8	1	13	40	20	23

1—5 sec. Diese sind nahe den von KÖNIG als statische Feldschwankungen bezeichneten Variationen, aber sie können nach [4] auch einen hydromagnetischen Ursprung haben, da sie eben im Grenzgebiet der beiden Periodenbereiche liegen.

Wir haben die Untersuchungen für den Zeitraum 01.01.1960—31.05.1962 durchgeführt und die Daten der Viertelstunde des Sonnenaufganges mit den vier vorausgehenden und nachkommenden Viertelstunden verglichen. Die Anzahl der registrierten Tage beträgt 96. Die hier angeführten Ergebnisse haben wir auch in den getrennt nach den einzelnen Jahren durchgeführten Untersuchungen aufgefunden.

1. Die Häufigkeit und besonders die Amplitude der kleinsten Perioden ($1 \div 10$ sec, besonders $1 \div 5$ sec) wird um Sonnenaufgang merklich größer (Tabelle Ia und Ib).

Die Amplituden sind in μ V/km angegeben, die Mittelwerte beziehen sich auf alle registrierten Tage.

Die Maximalwerte erscheinen mit einer Ausnahme in der Viertelstunde des Sonnenaufganges. Außerdem haben wir verhältnismäßig häufig solche Fälle gefunden, bei denen die kleinperiodischen Variationen *nur* in der Viertelstunde des Sonnenaufganges auffindbar waren, oder, an anderen Tagen, beim Sonnenaufgang begannen und noch einige Viertelstunde dauerten. Die meisten (bei 1—5 sec 10 Fälle von 16) waren unregelmäßig. Diese sind möglicherweise transiente Erscheinungen, die unter Umständen größere Amplituden (in den Erdströmen bis etwa 0,1 mV/km) haben.

Tabelle I/b

Perioden 1—5 sec

1960—1962			Fälle
Vor			
dem	4	Viertelstunde	7
Son-	3	,,	12
nen-	2	,,	15
auf-	1	,,	12
gang			
Sonnenaufgang			16
Nach			
dem	1	Viertelstunde	11
Son-	2	,,	13
nen-	3	,,	7
auf-	4	,,	9
gang			

Es ist jedoch bemerkenswert, daß 5 von den 6 regelmäßigen Fällen in der Viertelstunde des Sonnenaufganges oder eine Viertelstunde früher begannen: dementsprechend ist in einigen seltenen Fällen eine Erzeugung regelmäßiger Variationen mit Perioden von 1—5 sec (»Perlen«) beim Sonnenaufgang möglich (Bilder 1—4).

2. Die hier unter 1 erörterte Erscheinung war nach den Königschen Ergebnissen nicht überraschend; doch bei den Variationen der Perioden von 1—4 min haben wir auch Effekte gefunden (Tabelle II), die bisher in der Fachliteratur noch nicht erwähnt wurden.

Das Minimum liegt immer in der Viertelstunde des Sonnenaufganges, es sind sogar auch die Einzelheiten in beiden Jahren sehr ähnlich. Selbstverständlich ist dieses Material zu endgültigen Folgerungen noch nicht ganz ausreichend, und es sind noch weitere Untersuchungen notwendig. Unser

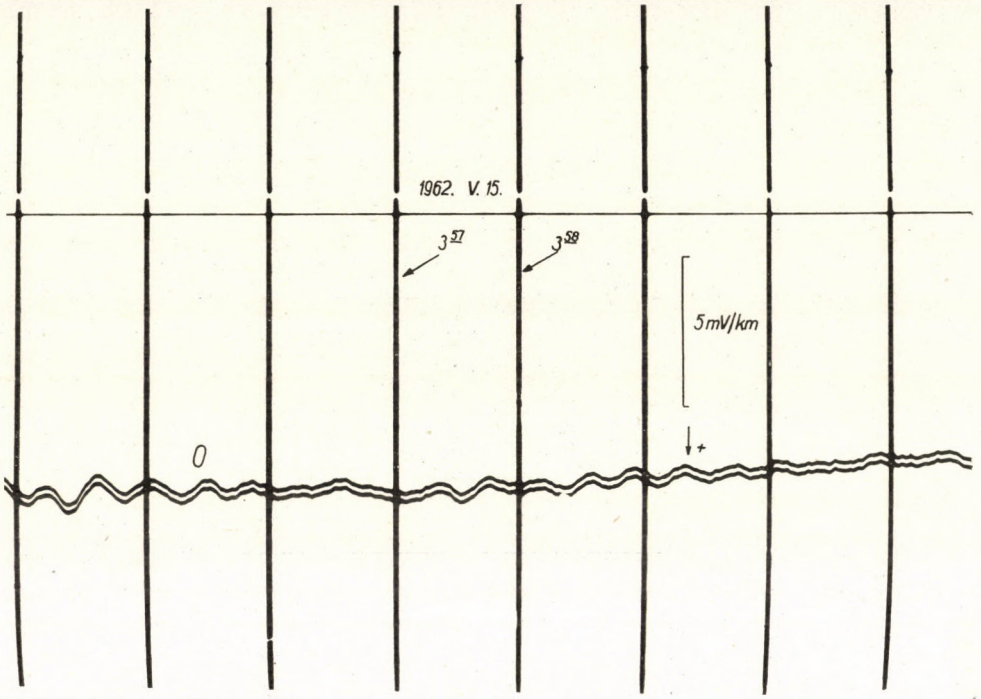

Bild 1. Sonnenaufgangseffekt am 15.05.1962, etwa zehn Minuten von Sonnenaufgang beginnend, Periode etwa 4 sec, unregelmäßig

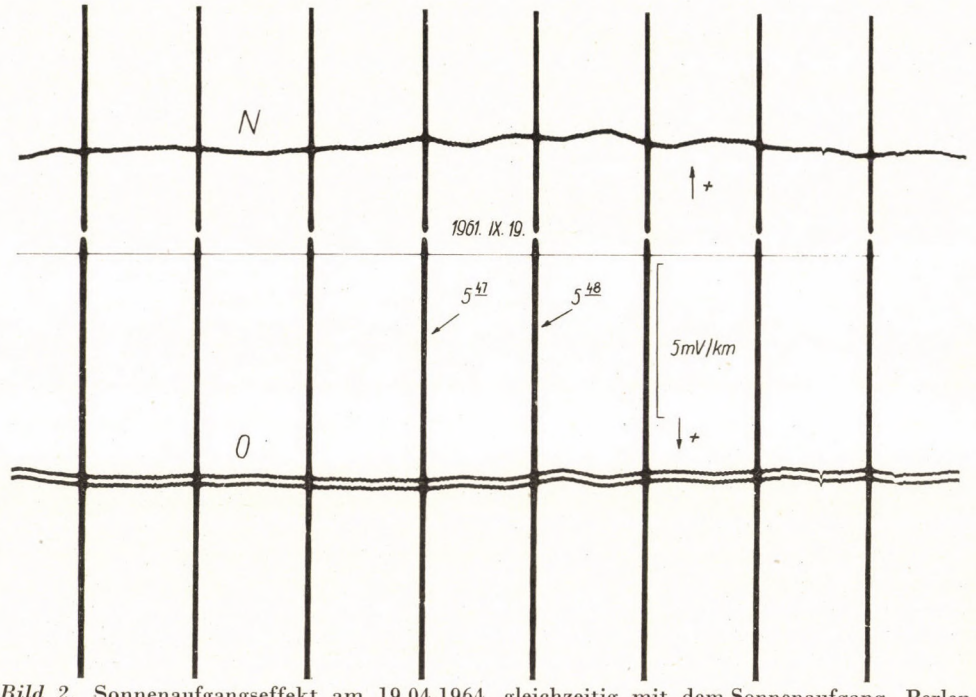

Bild 2. Sonnenaufgangseffekt am 19.04.1964, gleichzeitig mit dem Sonnenaufgang, Perlen mit Perioden etwa 2—2,5 sec

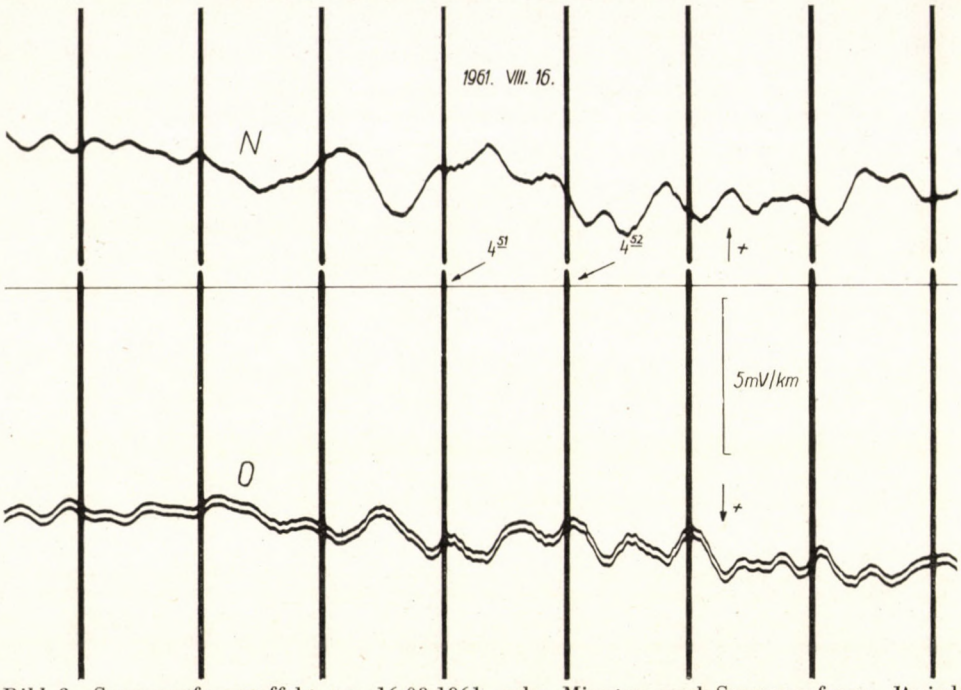

Bild 3. Sonnenaufgangseffekt am 16.08.1961, zehn Minuten nach Sonnenaufgang, Periode etwa 4 sec, unregelmäßig

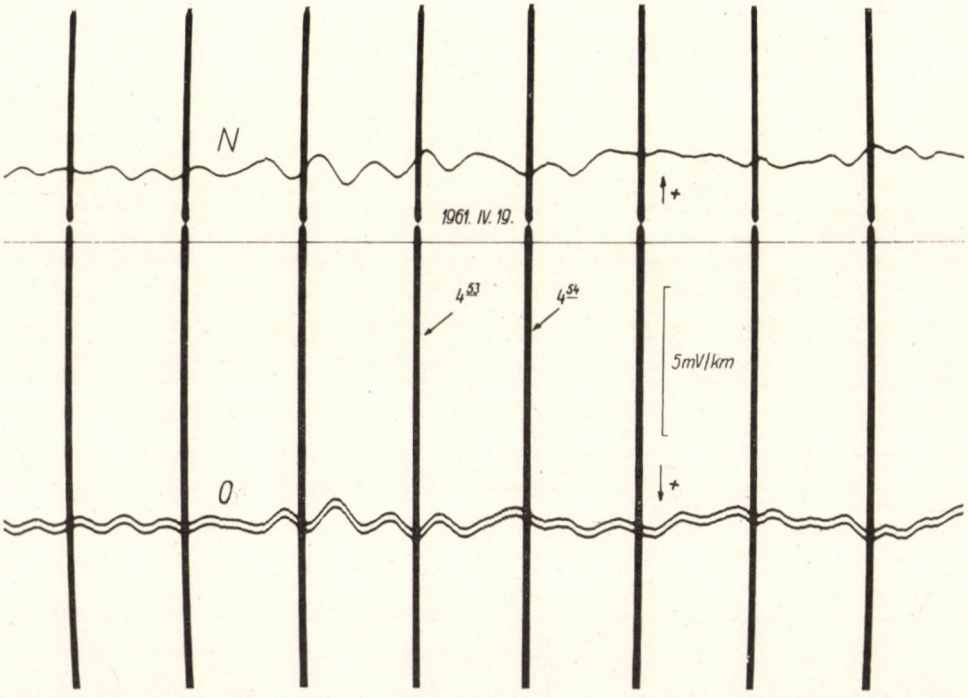

Bild 4. 20 min nach Sonnenaufgang noch immer dauernde Perlen am 19.09.1961 mit Perioden von etwa 3 sec

Hinweis möge diesbezügliche Untersuchungen auch anderswo anregen. Es scheint aber sicher zu sein, daß der Erregermechanismus der längeren Perioden beim Sonnenaufgang, sei es in oder oberhalb der Ionosphäre, (wahrscheinlich wegen der UV-Strahlung) abbricht.

3. In den Pulsationen mit Perioden von 20—60 sec haben wir nur einen sehr kleinen Effekt gefunden, der als ein sekundäres (nicht signifikantes)

Tabelle II

Perioden 1—4 min

			1960.		1961.		1960—1962.	
			Fälle	Mittlere Amplitude μV/km	Fälle	Mittlere Amplitude μV/km	Fälle	Mittlere Amplitude μV/km
Vor dem Sonnenaufgang	4	Viertelstunde	9	380	8	360	17	380
	3	„	6	200	9	320	16	270
	2	„	5	400	6	600	11	500
	1	„	9	400	5	540	15	500
Sonnenaufgang			4	180	4	160	9	200
Nach dem Sonnenaufgang	1	„	12	360	10	360	22	380
	2	„	14	660	12	800	26	740
	3	„	4	260	4	360	9	320
	4	„	10	400	9	520	21	500

Tabelle III

	−60	−45	−30	−15 min	Sonnenaufgang	+15	+30	+45	+60 min
Anzahl der regelmäßigen Oszillationen	43	37	43	42	51	47	50	52	49
Phasenverschiebung	−40	−47	−54	−43	−29	−32	−29	−39	−36 Grad

Maximum in der allgemeinen Zunahme der Amplituden in den Morgenstunden auftritt. Die Häufigkeit ist um etwa 10% höher als in den benachbarten Viertelstunden. Die Anzahl der regelmäßigen Oszillationen nimmt etwas merklicher zu. Der interessanteste Effekt zeigt sich hier in der Phasenverschiebung zwischen beiden Komponenten: man kann eine Phasenänderung in der Verschiebung von 10—15° feststellen (Tabelle III).

Zusammenfassend können wir behaupten, daß beim Sonnenaufgang unregelmäßige Variationen mit Perioden von 1—5 sec möglich sind, die

transiente Erscheinungen darstellen. Es können aber manchmal auch regelmäßige Perlen mit ähnlichen Perioden gefunden werden, die mit den in [4] beschriebenen Oszillationen identisch sind. Die Variationen von 1—4 min werden dagegen in der ersten Viertelstunde nach dem Aufgang seltener und kleiner. In den Pulsationen mit Perioden 20—60 sec kann man nur eine Orientierungsänderung finden.

Bemerkung: Als unsere Abhandlung beinahe vollendet war, haben wir [5] zur Hand bekommen, die in bezug auf einen Sonnenaufgangseffekt in den Perlen (0,3—3 sec) ähnliche Ergebnisse veröffentlicht und auf die Umwandlung der Ionosphäre als eine Möglichkeit zur Erklärung des Effektes hinwies.

SCHRIFTTUM

1. Verő, J.: Die abgeänderte Methode zur Bearbeitung der tellurischen Schnellregistrierungen von 1960 an, im Observatorium bei Nagycenk. *Acta Techn. Hung.*, **43** (1963), 101—108.
2. Schumann, W. O.: Über die strahlungslosen Eigenschwingungen einer leitenden Kugel, die von einer Luftschicht und einer Ionosphärenhülle umgeben ist. *Zeitschr. f. Naturforsch.*, **7** (1952), 150.
3. König, H.: Atmospherics geringster Frequenzen. *Zeitschr. f. angew. Phys.* XI (1959), 264—274.
4. Kato, Y., Tamao, T., Saito, T.: Geomagnetic Pulsation Accompanying with the Intense Solar Flare. *Journ. Geomagn. Geoel.*, X (1958), 203—206.
5. Jacobs, J. A., Jolley, E. F.: Geomagnetic Micropulsations with Periods 0,3—3 Sec ("Pearls"). *Nature*, **194** (1962), 641—643.

SUNRISE EFFECT ON EARTH CURRENTS

A. ÁDÁM—J. VERŐ

SUMMARY

After a discussion of the so far assumed sunrise-effects in geomagnetic pulsations, on the basis of own researches, the presence of a maximum in the amplitudes of the variations with periods 1—5 sec is confirmed. In the 1—4 min variations, however, a minimum is shown.

L'INFLUENCE DU LEVER DE SOLEIL SUR LES COURANTS TELLURIQUES

A. ÁDÁM—J. VERŐ

RÉSUMÉ

L'étude décrit d'abord l'influence du lever de soleil observée jusqu'à présent dans les pulsations géomagnétiques, puis confirme, sur la base d'expériences effectuées par les auteurs, l'apparition du maximum d'amplitude dans les variations de faible période (1—5 sec). Par contre, dans les variations de 1—4 minutes, les auteurs démontrent le minimum au lever du soleil.

О ВЛИЯНИИ ВОСХОДА СОЛНЦА НА ЗЕМНЫЕ ТОКИ

А. АДАМ—Й. ВЕРЁ

РЕЗЮМЕ

В работе сначала дается сводка о наблюдениях, выявивших влияние восхода Солнца на вариации геомагнитного поля, затем описываются исследования авторов результаты которых подтвердили наличие максимума амплитуд в вариациях малых периодов (1—5 *сек*). В то же время в периодах 1—4 *мин.* во время восхода Солнца отмечается минимум.

ÜBER DEN TÄGLICHEN UND JÄHRLICHEN GANG DER LUFTELEKTRISCHEN UNRUHE

P. BENCZE

GEOPHYSIKALISCHES FORSCHUNGSLABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, SOPRON (UNGARN)

[Eingegangen am 3. September 1962]

Es werden die Tagesgänge der Unruheamplitude für vier, vorläufig willkürlich gewählte Frequenzklassen und die Jahresgänge, die ein Maximum im Winter zeigen, untersucht, und Rückschlüsse auf den Ursprung der luftelektrischen Unruhe gezogen. Schließlich wird festgestellt, daß bei der Analyse der luftelektrischen Unruhe auch die Lage der Meßstationen in Betracht gezogen werden muß, und auch der Gewitter-Generatorursprung darf nicht unbeachtet gelassen werden.

Im Geophysikalischen Observatorium bei Nagycenk haben wir die Registrierung des luftelektrischen Potentialgradienten in 1961 begonnen. Bei der Bearbeitung der Aufnahmen wurde zunächst das zur Auswertung der erdmagnetischen- und Erdstromregistrierungen benutzte Verfahren angewandt. Auf Grund dieses Verfahrens wurden in jeder Stunde auch die Variationen mit kleineren Perioden bestimmt und in vier Frequenzklassen geteilt. In der ersten Frequenzklasse werden jene Variationen zusammengefaßt, deren Periode 0—6 min ist. Die Variationen mit Perioden von 6—12 min bilden die zweite, jene mit Perioden von 12—24 min die dritte und diejenige, die eine Periode von 24—60 min haben, die vierte Frequenzklasse. Da die zu einer bestimmten Frequenzklasse gehörigen Variationen nur während eines Bruchteiles der Stunde auftreten (dieses bezieht sich in erster Linie auf die Schwankungen kleinerer Perioden), wird so verfahren, daß die Summe der zu einer Frequenzklasse gehörigen Ausschläge mit der Verhältniszahl der Gesamtdauer der genannten Variationen im Vergleich zur Stunde multipliziert wird. Wir bestimmen außerdem auch die vorherrschende Frequenzklasse. Die Bearbeitung erstreckte sich mit Ausnahme der Stunden mit hohem Potentialgradienten größer als 300 V/m ohne Rücksicht auf das Vorzeichen — und ob diese im Schön- oder im Schlechtwetter registriert wurden — auf das ganze Material. (Die Zeitdauer dieser Abschnitte änderte sich meistens zwischen 1—7 Stunden, die mittlere Zeitdauer betrug 4 Stunden.)

Die Einteilung der Variationen nach den obigen Frequenzklassen war vom Gesichtspunkt des luftelektrischen Potentialgradienten aus selbstverständlich zunächst willkürlich, da uns die Natur dieser Schwankungen zur Zeit des Beginnes der Bearbeitung nur wenig bekannt war. So war es auch nicht möglich, anfänglich zu entscheiden, ob die auf Grund der obigen Klassi-

fikation unterschiedenen Variationen tatsächlich von verschiedener Natur sind, ob diese Frequenzklassen als selbständige Kategorien betrachtet werden können. Das verarbeitete Material bietet nun die Möglichkeit, gewisse Folgerungen zu ziehen.

In Abb. 1 haben wir oben die mittleren monatlichen Tagesgänge des Absolutwertes des Potentialgradienten und darunter die mittleren monat-

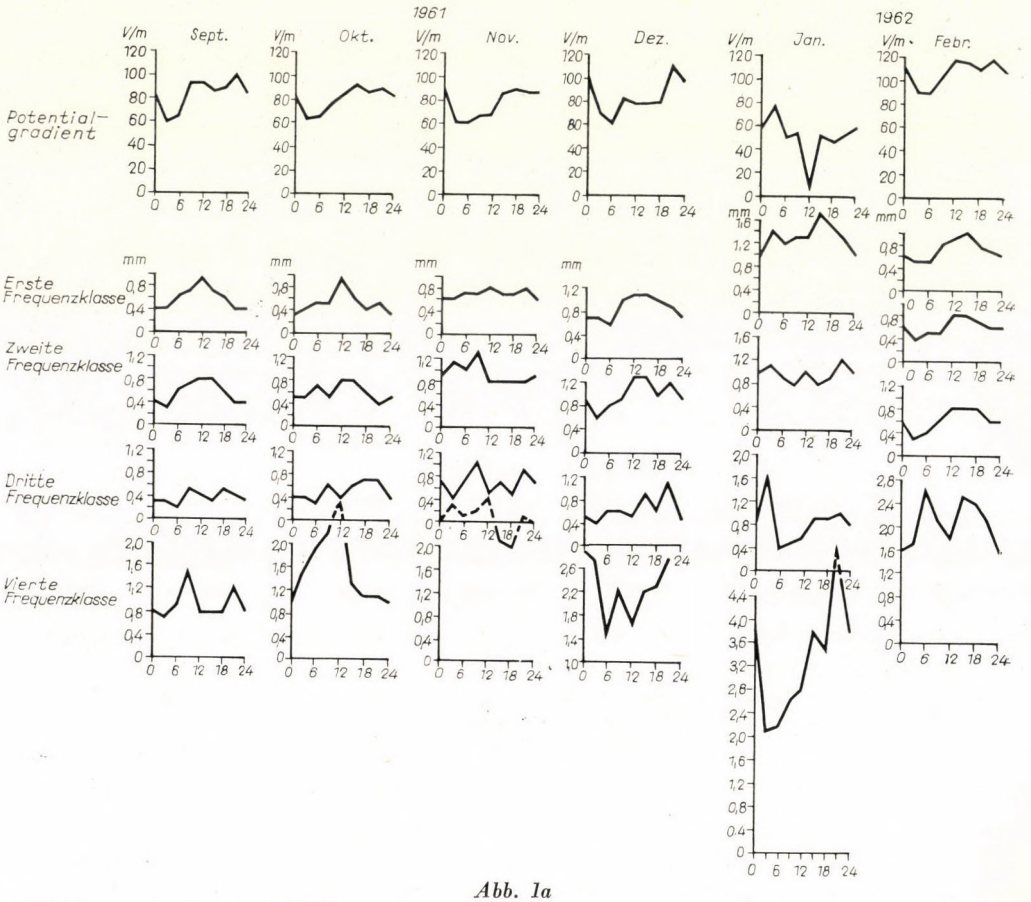

Abb. 1a

Abb. 1. Mittlere monatliche Tagesgänge des Potentialgradienten (oben) und der mittleren Amplitude der Unruhe für die vier Frequenzklassen

lichen Tagesgänge der mittleren Amplituden der vier Frequenzklassen — die auf Grund der Dreistundenwerte konstruiert wurden — getrennt für den Zeitraum von Sept. 1961 bis Aug. 1962 dargestellt. Wie ersichtlich, verhalten sich nicht alle Frequenzklassen voneinander unterschiedlich. Die Tagesgänge der ersten, zweiten und dritten Frequenzklasse sind meistens einander ähnlich. Der Tagesgang der vierten Frequenzklasse unterscheidet sich im allgemeinen von den vorigen. Die Tagesgänge der drei ersten Frequenzklassen

zeigen meistens einen dem auf Grund der Dreistundenwerte des Potentialgradienten konstruierten Tagesgang ähnlichen Ablauf mit einem morgendlichen Minimum und einem Nachmittagsmaximum. Die mittleren Amplituden der drei ersten Frequenzklassen sind etwa gleich und übersteigen im allgemeinen nicht 10% des Absolutwertes des Potentialgradienten. Der Tagesgang der vierten Frequenzklasse zeigt meistens unregelmäßige Variationen. Ihre

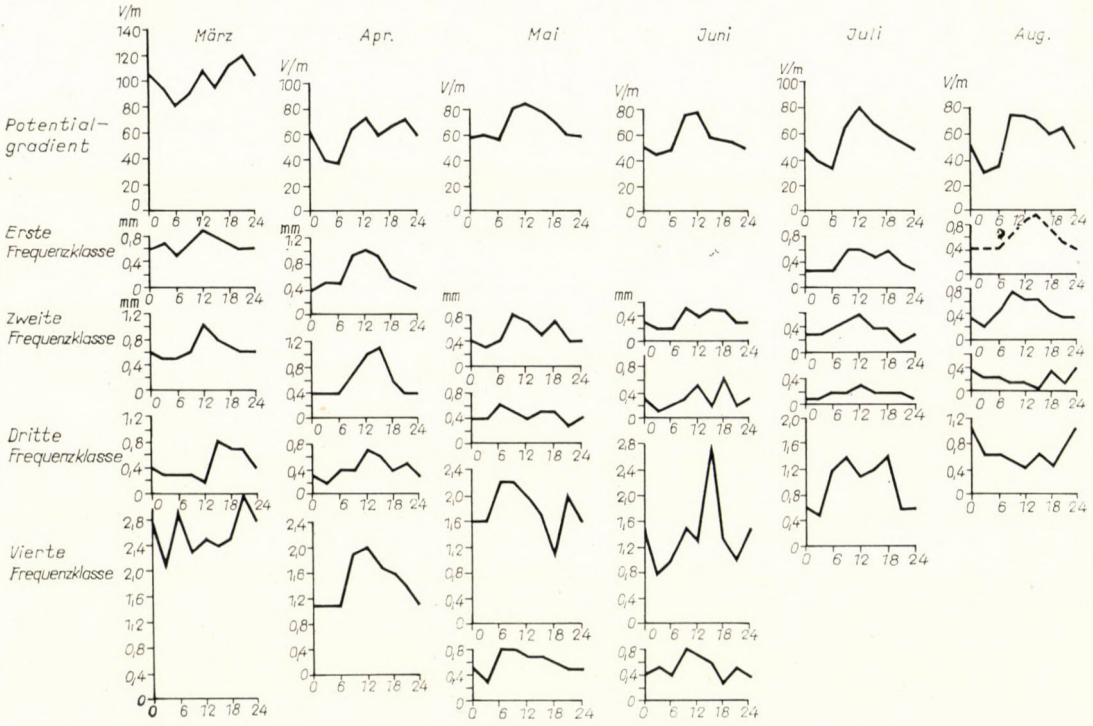

Abb. 1b

mittlere Amplitude kann 30% des Absolutwertes des Potentialgradienten betragen. Dieser unregelmäßige Charakter erstreckt sich manchmal auch auf die dritte (z. B. im September, November), sogar auf die zweite Frequenzklasse (z. B. im November); die Regelmäßigkeit des Tagesganges nimmt mit der Zunahme der mittleren Amplitude der vierten Frequenzklasse ab. Diese Tatsache macht übrigens die Ergebnisse von OGAWA [4] verständlich, der nur die Variationen von 5 Stunden (also von größerer Periode als unsere vierte Frequenzklasse) analysierend keinen Tagesgang gefunden hat.

Abb. 2 zeigt die Jahresgänge des Potentialgradienten und der einzelnen Frequenzklassen. Jeder Jahresgang hat im Sommer ein Minimum und im Winter ein Maximum. Der kleinste Jahresgang zeigt sich bei der dritten, der größte bei der vierten Frequenzklasse.

Aus den vorgelegten vorläufigen Ergebnissen kann man immerhin die nachstehenden Folgerungen ziehen.

Die Amplitude der luftelektrischen Unruhe ist meist kleiner als 30% des Absolutwertes des Potentialgradienten. Nach [1] soll die Amplitude der luftelektrischen Unruhe die Größenordnung des Absolutwertes des Potentialgradienten erreichen. Diese Feststellung kann aber auf Grund der in [1, 2] veröffentlichten, den Zusammenhang zwischen luftelektrischer Unruhe und

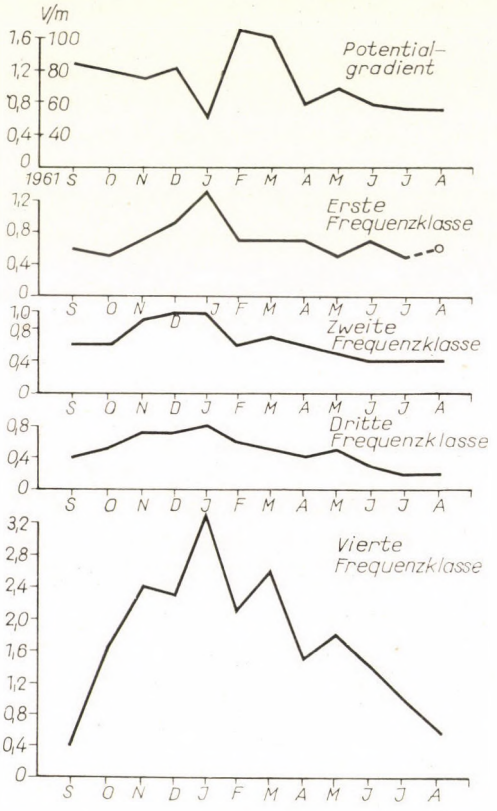

Abb. 2. Jahresgänge des Potentialgradienten (oben) und der mittleren Amplitude der Unruhe für die vier Frequenzklassen

Absolutwert des Potentialgradienten darstellenden Abbildungen 4 bzw. 12 noch schärfer gefaßt werden. Die Gleichung dieser Geraden ist nämlich

$$\Delta E = \Delta E_0 + aE\,,$$

wo ΔE die Amplitude der Unruhe in V/m, ΔE_0 der Achsenabschnitt bzw. Anfangswert in V/m, a die Richtungstangente der Geraden und E der Absolutwert des Potentialgradienten ebenfalls in V/m bedeutet. Daraus erhalten

wir für die Richtungstangente

$$a = \frac{\Delta E - \Delta E_0}{E} .$$

Diese ist also dem Verhältnis der Unruheamplitude zum Absolutwert des Potentialgradienten gleich und danach beträgt die Unruheamplitude etwa 28% des Absolutwertes. Dieser Wert stimmt auch mit dem von OGAWA für eine Landstation ermittelten Wert von 27% [4] sehr gut überein. Es ist wahrscheinlich, daß die zitierte Feststellung auch auf mehr oder weniger gestörte Festlandstationen ausgedehnt werden darf, da die erwähnten, den Zusammenhang zwischen Unruheamplitude und Absolutwert des Potentialgradienten darstellenden Abbildungen auf Grund der an Gebirgsstationen (Jungfraujoch, Gornergrat, Payerne) ausgeführten Messungen gezeichnet wurden. Bei dem Vergleich mit unseren Ergebnissen muß man auch darauf Rücksicht nehmen, daß unsere Werte auf je eine Stunde bezogene mittlere Amplituden sind und nicht den Unterschied zwischen den in einer Stunde auftretenden größten und kleinsten Werten darstellen, wie in [1, 2].

Die Unruheamplitude ist dem Absolutwert des Potentialgradienten proportional. Diese Proportionalität zeigen teilweise schon die Tagesgänge der einzelnen Frequenzklassen, die einen dem Tagesgang des Potentialgradienten beinahe parallelen Gang aufweisen. Weitere Beweise dafür sind die Jahresgänge der einzelnen Frequenzklassen, die auch einen, dem Jahresgang des Potentialgradienten parallelen Ablauf haben. So scheint die Feststellung in [1], daß der Jahresgang der Unruheamplitude sein Maximum im Sommer habe, mit unseren Beobachtungen in Widerspruch zu stehen. Obige Feststellung widerspricht auch der in [2] gemachten Feststellung, wonach die Unruheamplitude dem Absolutwert des Potentialgradienten proportional ist. In diesem Falle muß nämlich, da der Potentialgradient in den Wintermonaten größer als im Sommer ist, die Unruheamplitude im Winter größer sein als im Sommer. Der erwähnte Widerspruch wird noch durch die Feststellung offenkundiger, daß die Unruheamplitude mit der Zunahme der Leitfähigkeit abnimmt [1]. Es muß demnach nämlich dem Jahresgang der Leitfähigkeit entsprechend dem sommerlichen Maximum der Leitfähigkeit im Jahresgang der Unruheamplitude ein Minimum entsprechen. Der obige Widerspruch wird noch deutlicher durch die Feststellung [1], daß die Unruhe an luftelektrisch ruhigen Tagen wesentlich kleiner ist als sonst. Wenn dem so ist, so muß der Jahresgang der Unruhe im Sommer ein Minimum haben, da im Sommer die Zahl der ungestörten Tage größer ist. Beachtenswert ist in dieser Hinsicht auch die Annahme von OGAWA [4], daß im Falle einer kräftigeren Luftbewegung infolge der turbulenten Durchmischung in den untersten Luftschichten die Verteilung der Großionen und Kondensationskerne gleich-

mäßiger wird. So ist es weniger wahrscheinlich, daß die in der Leitfähigkeit der Luft auftretenden Inhomogenitäten eine längere Lebensdauer haben können, und daß Ionenwolken, die eine von ihrer Umgebung abweichende Ladungsdichte haben, entstehen können. Da die turbulenten Luftbewegungen in den untersten Luftschichten im Sommer am stärksten sind, muß die Unruhe auch demzufolge im Sommer kleiner sein als im Winter. Alle vorgebrachten Feststellungen verlangen — im Einklang mit unseren Ergebnissen — einen Jahresgang der Unruhe mit einem Minimum im Sommer und einem Maximum im Winter.

Aus der Analyse der luftelektrischen Unruhe wurde auch auf deren Ursprung gefolgert [1, 2, 3, 4] und die Ursache dafür glaubte man in der Turbulenz zu finden. Auf Grund unserer obigen Ausführungen erscheint es aber weniger wahrscheinlich, daß im Falle eines Jahresganges der Unruheamplitude mit einem Maximum im Sommer und einem Minimum im Winter, wie z. B. auf den Bergstationen [2], die Turbulenz die Hauptursache der Unruhe sei. Als an eine Quelle der Unruhe wurde zwar auch an die Spannungsschwankungen des Gewittergenerators gedacht, aber diese Möglichkeit hat man nachher mit der Begründung abgelehnt, daß die erwähnten Variationen (da ihre Periode kleiner als die Zeitkonstante der Luft ist) bereits nicht stationär sind, und daher der Gewittergenerator-Ursprung unwahrscheinlich erscheint. Bekanntlich ist die Zeitkonstante der Luft die Zeit, während die luftelektrischen Elemente bei Feldänderungen den, dem neuen Zustand entsprechenden Wert bis auf 1% erreichen ([5] S. 141). Ihr Wert ist danach:

$$T = \frac{\ln 100}{4\pi\lambda} = \frac{0{,}367}{\lambda},$$

wo λ die Leitfähigkeit der Luft bedeutet. Die Zeitkonstante der Luft beträgt in der Nähe der Erdoberfläche, wenn man da die Leitfähigkeit der Luft zu $2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{sec}^{-1}$ annimmt, 1835 sec. In der obigen Gleichung ist jedoch λ eine veränderliche Größe, folglich verändert sich mit der Änderung von λ auch die Zeitkonstante, und damit verschiebt sich die Grenze zwischen stationären und nicht stationären Schwankungen einmal in die Richtung der kleineren, ein andermal in die Richtung der größeren Perioden je nachdem, ob λ zu-, oder abnimmt. Da die Änderungen der Leitfähigkeit auf Landstationen erfahrungsgemäß Werte bis 60% des Mittelwertes erreichen, müssen sich die Zeitkonstante bzw. die erwähnte Grenze im gleichen Maße ändern. Das bedeutet, daß fallweise auch Variationen kürzer als eine Stunde, in extremem Fall mit Perioden von nur 38 min als stationäre Änderungen mit den Spannungsschwankungen des Gewittergenerators identifiziert werden können. Die Unterscheidung zwischen stationären und nicht stationären Änderungen auf Grund der Zeitkonstante darf aber nicht so aufgefaßt werden, daß wir die

Variationen des Potentialgradienten, die einen kürzeren Ablauf als die Zeitkonstante bzw. eine kürzere Periode als die zweifache Zeitkonstante haben, überhaupt nicht erfassen können, sondern daß diese Schwankungen nicht in ihrer ganzen Größe, nur mit im Verhältnis ihrer Periode zur Zeitkonstante verminderter Amplitude beobachtet werden können. Da die Annäherung zum Gleichgewichtszustand exponentiell verläuft, sind zur Annäherung der Gleichgewichtslage bis auf nur 10% auf Grund der obigen Gleichung lediglich 15 min nötig, und so werden die Änderungen, die eine Periode von 30 min haben, noch mit 90%-iger Amplitude des stationären Wertes registriert.

Die sich in den untersten Luftschichten abspielenden Leitfähigkeitsänderungen spielen also auch von dem Gesichtspunkt aus eine Rolle, daß sie durch die Erhöhung oder Verminderung der Zeitkonstante die kurzperiodischen Spannungsänderungen des Gewittergenerators einmal in geringerem, ein andermal in größerem Maße auf der Erdoberfläche zur Auswirkung kommen lassen. In welchem Maße diese in Erscheinung treten, können wir nur mit Hilfe der zuverlässigen Registrierung der Variationen der Weltgewittertätigkeit untersuchen.

Unsere obigen Ausführungen werden auch durch die Beobachtungen unterstützt [1, 2], wonach die in dem Vertikalstrom auftretende Unruhe der des Potentialgradienten ganz ähnlich verläuft (der Tagesgang und Jahresgang der Unruheamplitude und der Unruhefrequenz sind mit jenen des Potentialgradienten parallel, die Unruheamplitude ist eine lineare Funktion des Absolutwertes). Aus dem Vergleich der Gleichungen

$$\frac{1}{E}\cdot\frac{dE}{dt}=\frac{1}{V}\cdot\frac{dV}{dt}+\frac{1}{w}\cdot\frac{dw}{dt}-\frac{1}{R}\cdot\frac{dR}{dt};$$

$$\frac{1}{J}\cdot\frac{dJ}{dt}=\frac{1}{V}\cdot\frac{dV}{dt}-\frac{1}{R}\cdot\frac{dR}{dt},$$

welche die relativen Änderungen des Potentialgradienten und des Vertikalstromes in Abhängigkeit von den Parametern des luftelektrischen Stromkreises angeben, geht hervor, daß Potentialgradient und Vertikalstrom nur dann gleichgerichtete Änderungen aufweisen, wenn entweder die aus der Änderung der Spannung V der Ausgleichsschicht und den Widerstandsänderungen dw der untersten Luftschichten stammende Wirkung größer ist als die Wirkung der Säulenwiderstandsänderung, oder wenn diese letztere Wirkung größer ist als jene der Spannungsschwankungen der Ausgleichsschicht und der Widerstandsänderungen der untersten Luftschichten. Da der zweite Fall im allgemeinen seltener, und in diesem Falle die Änderung des Potentialgradienten kleiner als die des Vertikalstromes ist (die Erfahrung zeigt aber meist das Gegenteil: die Unruheamplitude des Potentialgradienten ist größer

als die Unruheamplitude des Vertikalstromes), ändern sich Potentialgradient und Vertikalstrom dann in derselben Richtung und im mit der Erfahrung übereinstimmenden Verhältnis, wenn wir ihre Schwankungen neben den Leitfähigkeitsänderungen der untersten Luftschichten auch den Spannungsschwankungen der luftelektrischen Ausgleichsschicht zuschreiben. Ein Beweis für die letztere Annahme als eine Ursache der Unruhe kann auch die Beobachtung sein, daß auf den Bergstationen (z. B. Jungfraujoch), wo die Spannungsschwankungen der Ausgleichsschicht wegen der verminderten Anwesenheit der die ersteren verdeckenden lokalen Störungen unter günstigeren Verhältnissen untersucht werden können, der Jahresgang der Unruhe sein Maximum zur Zeit der größten Gewittertätigkeit im Sommer hat [2].

Unsere Untersuchungen zeigen jedenfalls, daß man bei der Analyse der luftelektrischen Unruhe auch die Lage der Meßstationen in Betracht ziehen soll, und man darf den Gewittergeneratorursprung der Unruhe auch nicht unbeachtet lassen.

SCHRIFTTUM

1. Israël, H.: Die luftelektrische Unruhe. *Zeitschrift für Geophysik*, **24** (1958), 277.
2. Israël, H.: The atmospheric electric agitation. In Recent Advances in Atmospheric Electricity (Proc. Sec. Conf. Atm. El. Portsmouth, 1958), Pergamon Press, 1958, 149.
3. Ogawa, T.: The structure of the atmospheric electric field. *Journal of Geomagnetism and Geoelectricity* **XI** (1959—60), 139.
4. Ogawa, T.: Diurnal variation in atmospheric electricity. *Journal of Geomagnetism and Geoelectricity* **XII** (1960), 1.
5. Israël, H.: Atmosphärische Elektrizität. Teil I. Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig, Leipzig, 1957.

ON THE DAILY AND ANNUAL VARIATION OF THE ATMOSPHERIC ELECTRICAL AGITATION

P. BENCZE

SUMMARY

In the course of interpreting the records obtained during the atmospheric electrical potentialgradient registrations made in the geophysical observatory at Nagycenk, also the variations of shorter period were determined within each hour, dividing them into four frequency categories. The ranges of the individual frequency categories are: 0—6, 6—12, 12—24, resp. 24—60 minutes. The average daily course of the categories, with the exception of the fourth category, is generally similar to the daily course of the absolute value of the potential gradient, taken on the basis of hourly mean values. The highest amplitude is shown by the fourth frequency category. The annual course of the individual frequency categories, in accordance with the effectivity of the factors determining the atmospheric electrical agitation, shows a maximum in the winter months, contrary to the high-mountain stations. In this connection, the idea of the "thunderstorm-generator" origin of the atmospheric electrical agitation may arise, which can be a source of the atmospheric electrical agitation, to be considered even on the basis of relations concerning the atmospheric electrical circuit.

SUR LA VARIATION DIURNE ET ANNUELLE DE L'INQUIÉTUDE ÉLECTRIQUE DE L'ATMOSPHÈRE

P. BENCZE

RÉSUMÉ

Au cours du dépouillement des enregistrements des gradients du potentiel électrique de l'atmosphère, faits à l'observatoire géophysique de Nagycenk (Hongrie), on a déterminé aussi, pour chaque heure, les variations de périodes plus petites, en les groupant en quatre classes de fréquence. Les limites des groupes étaient: 0—6; 6—12; 12—24 et 24—60 minutes. La marche moyenne des variations dans les groupes de fréquence — excepté le quatrième — est généralement semblable à la marche diurne de la valeur absolue du gradient du potentiel, établie à la base des moyennes horaires. La plus grande amplitude s'observe dans le quatrième groupe. La marche annuelle des groupes de fréquence — en accord avec l'efficacité des facteurs déterminant l'inquiétude électrique de l'atmosphère, et contrairement aux résultats des stations en haute montagne, montre un maximum pendant les mois d'hiver.

Sous ce rapport, on peut aussi imaginer que l'inquiétude électrique de l'atmosphère aurait son origine en un «générateur d'orage», qui à la base même des relations se rapportant au circuit électrique de l'atmosphère, peut être considéré comme la source de cette inquiétude.

О СУТОЧНЫХ И ГОДОВЫХ ВАРИАЦИЯХ АТМОСФЕРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО БЕСПОКОЙСТВА

П. БЕНЦЕ

РЕЗЮМЕ

При обработке записей градиента атмосферного электрического потенциала, зарегистрированных в геофизической обсерватории в с. Надьценк, в круглочасовых интервалах были определены также и вариации меньших периодов, которые зачислялись в четыре группы частот. Пределы отдельных частотных групп составляют соответственно 0—6, 6—12, 1—24 и 24—60 *мин.* Среднесуточное изменение частотных групп, за исключением четвертой группы, близко суточному абсолютных величин градиента потенциала, построенному по среднечасовым величинам. Наибольшей оказывается амплитуда четвертой группы частот. В согласии с автивностью факторов, определяющих атмосферные электрические беспокойства, и в противоположность станциям, находящимся в высоких горах, годовое изменение отдельных частотных групп имеет максимум в зимние месяцы. В связи с этим возникает вопрос о возможной «грозогенераторной» природе атмосферного электрического беспокойства; учитывая зависимости, действительные для атмосферного электричества, это может быть источником атмосферного электрического беспокойства.

SIMPLE DETERMINATION OF THE DIRECT TANGENT OF THE BEARING OF AN ADJUSTING STRAIGHT LINE WHICH SATISFIES THE CONDITION $\Sigma pe^2 = \min!$

S. FORRAI

DEPARTMENT OF MINE EXPLOITATION TECHNICAL UNIVERSITY, MISKOLC (HUNGARY)

[Manuscript received February 7, 1963]

In the present paper the tangent of the bearing belonging to an adjusting straight line, that satisfies GAUSS' minimum condition, is determined by a simple formula and unanimously. Hitherto, in the technical literature referring to this subject, the tangent of the double bearing had been determined. The tangent of the onefold bearing could only be determined indirectly, after the minimum value of the function had already been computed.

On the basis of the peculiarity of a function with two variables (Fig. 3) the tangent of the bearing (a) can be determined directly and unanimously. Accordingly, the sign of the root symbol figuring in formula (15) should comply with the sign of term C figuring in the denominator of the first term. In this case always the tangent of the bearing of the straight line, which satisfies the minimum condition $\Sigma pe^2 = \min!$ will be obtained.

A problem that often arises in level drift locations [1, 3], in geodetic error calculations [2] as well as in liner correlation calculations is the determination of a straight line best fitting a set of points which are not located on one and the same straight line.

At present the accepted condition for the aforementioned straight line consists in the satisfaction of GAUSS' principle, i.e., in the fulfilment of the minimum condition referring to the quadratic sum of residuals.

In the mathematical deduction STEINER's theorem, well-known from the mechanics of solid bodies, is generally utilized [1, 2]. No doubt, this simplifies the mathematical deduction, but it makes the computation itself lengthier, because the coordinates of each point have to be transformed into a system of coordinates referring to the centre of gravity of the set of points in question; this however, means for n points 2 n subtractions.

The aforementioned surplus work might be avoided by deducing the following relations, using the original system of coordinates, instead of a system the centre of which coincides with the centre of gravity. In this case there is a further possibility for the simplification of the mathematical deduction, and this consists in setting up the distance between the point and the straight line in polar coordinates. This ingenious simplification is to be found in book [3]. Using this method the mathematical deduction likewise becomes simple, but the coordinates of the points should not be transformed into the system of coordinates referring to the centre of gravity. Of course, the adjusting straight line in this case also runs through the centre of gravity of the system

of points. This is clearly demonstrated by the expression of the pole-distance ([3], p. 247).

The deductions according to the above mentioned two principles give the tangent of the double bearing directly (see [1] form. 20; [2] form. 50 and [3] p. 247). It might be interesting to mention that formula (24) to be found in [1] precisely complies with the formula deduced on page 274 of [3]. However, paper [3] refers to the pole-angle, while paper [1] to the bearing of the straight line. It is well-known that these two angles are mutually perpendicular to each other.

This is quite obvious, as

$$\tan 2\,\alpha \equiv \tan 2\left(\alpha \pm k\frac{\pi}{2}\right).$$

Namely,

$$\sin\beta \equiv -\sin(\beta \pm k\pi) \quad \text{and} \quad \cos\beta \equiv -\cos(\alpha \pm k\pi) \qquad (k = 1, 3, 5\ldots).$$

The quotient of the above two relations conduces to the previously well-known identity.

Thus, it can be seen that the formula used for the determination of the bearing of the straight line is polyworthy, but biworthy within one period. In the case of the problem referring to level drift location dealt with in [3], the points fall nearly into the same straight line and are, in addition, plotted points. In this case the investigation of the problem of biworthiness is unnecessary, as the straight line perpendicular to the former is obviously unreasonable.

Papers [1] and [2] refer to the investigation of the problem of biworthiness. Here, it is established that there exists a straight line for which the quadratic sum of residuals is minimum and another straight line perpendicular to the former one, for which the aforementioned quadratic sum is maximum. After computing these minimal and maximal values ([1], formulae 30 and 31), with the aid of same the bearing of the already mentioned two straight lines can be computed directly ([1], formulae 39 and 49).

Of course, the directly computed value of the tangent of the bearing coincides with the value which can be computed from the tangent of the double bearing ([1], formula 33), but as will be seen the directly computed value is unambigous. This is mainly important if the points are not plotted and do not lie too close to a straight line. This case often occurs in the field of the correlation calculus or regressive analysis.

From the view-point of problems dealt with in the quoted papers the direct determination of the tangent of the bearing cannot be regarded as being superfluous either, because the computation work by using formula (15), which is to be deduced in the following, requires merely one square root

extraction and one reduction in addition to the determination of the tangent belonging to the double bearing or the double pole-angle, as will later be seen.

*

In the system of coordinates 0 (x, y) according to Fig. 1 there are n points. The problem to be solved should be formularized in such a way that these individual pairs of values (x, y) are in a stochastic connection with each other, i.e., the problem is transferred to the field of regressive analysis.Each individual pair of values is the statistical average value of a certain number of almost identical values. Therefore, the weights of these points are different, but none of them is infinite. The values of weights belonging to the individual points should be denoted by p.

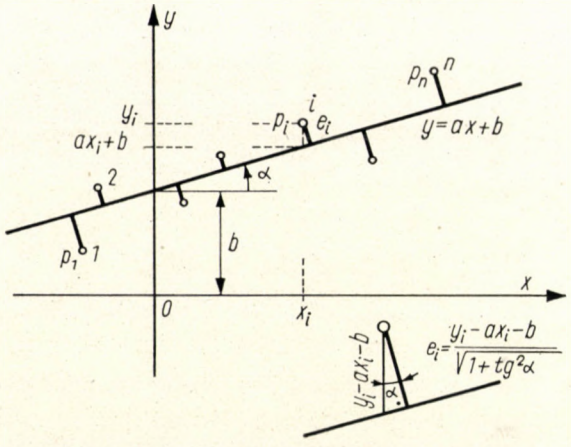

Fig. 1

The equation of the adjusting straight line, inserted on the base of the principle of least squares, is according to Fig. 1:

$$y = ax + b \tag{1}$$

where, as is well known, $a = \tan\alpha$ is the tangent of the bearing of the straight line and b is the section cut off on the y axis.

According to the enlarged detail to be seen in Fig. 1, the perpendicular distance between point i and the straight line can be expressed by the following equation:

$$e_i = [y_i - (ax_i + b)] \cos\alpha . \tag{2}$$

Using the substitution

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} \tag{3}$$

which is well-known from Trigonometry, the minimum condition according to GAUSS' principle can be set up in the form

$$\sum_1^n p_i e_i^2 = \sum_1^n p_i \frac{[y_i - (ax_i + b)]^2}{1 + a^2} = \min ! \tag{4}$$

First of all it should be investigated what kind of surface is described by the function given by equation (4), taking b or a, i.e., α as variable.

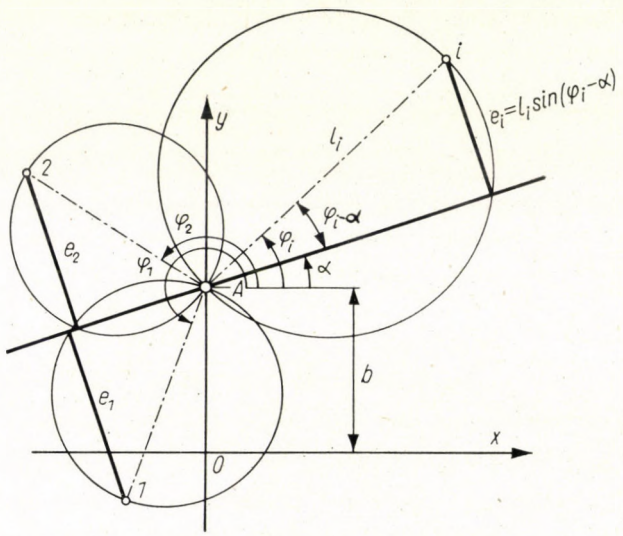

Fig. 2

If a is regarded as being constant and b as variable, the section of our function in this direction is visibly a parabola of the second order, the equation of which is:

$$\sum_1^n p_i e_i^2 = \sum_1^n \frac{p_i}{1 + a^2} (y_i - ax_i)^2 - b \sum_1^n \frac{2p_i}{1+a^2} (y_i - ax_i) + b^2 \sum_1^n \frac{p_i}{1 + a^2} . \tag{5}$$

On the other hand, if b i.e., the section cut off from the y axis is taken as being constant and a, i.e., the angle α varies, then using notations to be seen in Fig. 2 and applying THALES' theorem the change of $\sum_1^n p_i e_i^2$ can be expressed by the following equation:

$$\sum_1^n p_i e_i^2 = \sum_1^n p_i l_i^2 \sin^2 (\varphi_i - \alpha) . \tag{6}$$

After some goniometrical transformation the above equation can also be written as follows:

$$\sum_1^n p_i e_i^2 = \frac{1}{2}\sum_1^n p_i l_i^2 - \frac{1}{2}\sum_1^n p_i l_i^2 \cos 2(\alpha - \varphi_i). \tag{7}$$

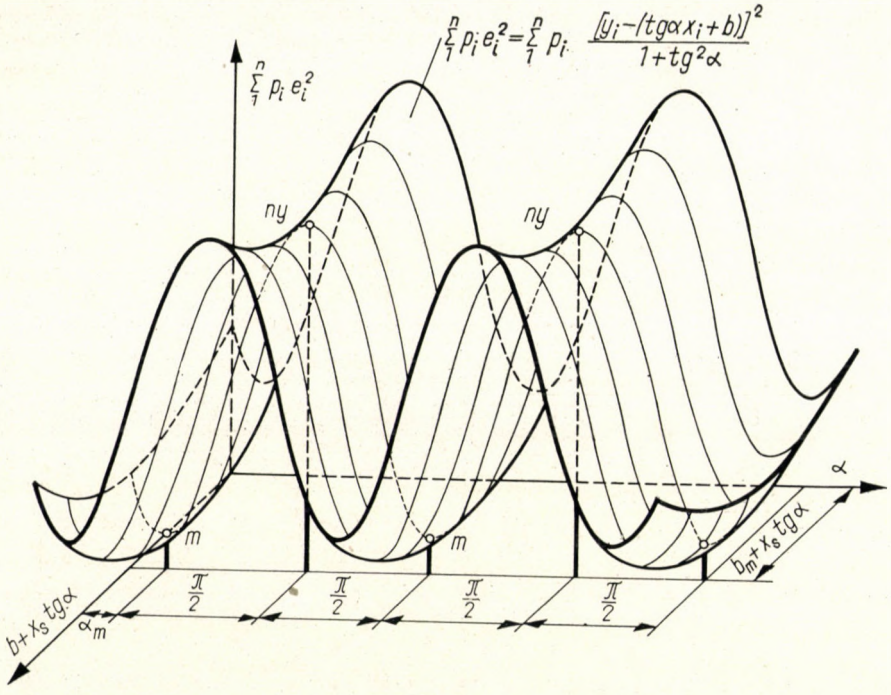

Fig. 3

As can be seen function (7) is according to π periodic and always positive. The run of the function-sum also corresponds to cos 2α, but it has a shifted position, this follows from the well-known mathematical theorem referring to harmonic vibrations.

On the base of what has been said the spatial surface shown in Fig. 3 can be plotted. On one horizontal axis the angle α, while on the other the projection of the section b to the y-directed median $(b + x_s \tan \alpha)$ present themselves. On the base of the previous establishments the equation of the surface in question is:

$$\sum_1^n p_i e_i^2 = \sum_1^n p_i \frac{[y_i - (\tan \alpha x_i + b)]^2}{1 + \tan^2 \alpha}. \tag{8}$$

Fig. 3 clearly shows that *within one period π the function has one single minimum point* (*m*). *The function has no maximum*, but the other stationary point is a saddle-point (*ny*).

In the deduction of paper [1] point *ny* presents itself as a maximum. This is quite obvious, as applying STEINER's theorem the spatial extremum value problem becomes reduced to a planar variation. I.e., the change investigated in paper [1] is the change of the sine-line running through points *m* and *ny*, to be seen in Fig. 3.

In the present deduction it is just the here examined property of the surface characterized by equation (8) that will be utilized to obtain an unambiguous solution, when directly determining the tangent of the bearing of the adjusting straight line.

First, the partial differential quotient of equation (8) should be set up according to b and made equal to zero. $\tan\alpha$ should again be denoted by a, thus the task in question refers to the determination of the direct tangent of the bearing.

$$\frac{\partial \sum_1^n p_i e_i^2}{\partial b} = -\frac{2}{1+a^2}\left[\sum_1^n p_i y_i - \left(a\sum_1^n p_i x_i + b\sum_1^n p_i\right)\right]. \tag{9}$$

Herefrom that value b for which an extremum value can be obtained is arrived at in a simple way:

$$b = \frac{\sum_1^n p_i y_i - a\sum_1^n p_i x_i}{\sum_1^n p_i}. \tag{10}$$

As can be seen, equation (10) indicates that the straight line sought for runs through the centre of gravity belonging to the system of points.

Thereafter, the partial differential quotient of equation (8) according to $a = \tan\alpha$ should be set up and made equal to zero:

$$\frac{\partial \sum_1^n p_i e_i^2}{\partial a} = -\frac{2}{(1+a^2)^2}\left\{\sum_1^n p_i\left[y_i - (ax_i + b)\right]x_i(1+a^2) + a\sum_1^n p_i\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2\right\} = 0. \tag{11}$$

Substituting equation (10) into equation (11), after finishing the oper-

ations and a subsequent reduction the following expression is obtained:

$$\frac{2}{(1+a^2)^2 \sum_1^n p_i}\left\{\left(\sum_1^n p_i \sum_1^n p_i x_i y_i - \sum_1^n p_i x_i \sum_1^n p_i y_i\right) a^2 - \right.$$
$$- \left[\left(\sum_1^n p_i \sum_1^n p_i y_i^2 - \sum_1^n p_i y_i \sum_1^n p_i y_i\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\sum_1^n p_i \sum_1^n p_i x_i^2 - \sum_1^n p_i x_i \sum_1^n p_i x_i\right)\right] a - \tag{12}$$
$$\left. - \left(\sum_1^n p_i \sum_1^n p_i x_i y_i - \sum_1^n p_i x_i \sum_1^n p_i y_i\right)\right\} = 0.$$

For the sake of a plainer writing the following notations should be introduced:

$$A = \sum_1^n p_i \sum_1^n p_i y_i^2 - \sum_1^n p_i y_i \sum_1^n p_i y_i,$$
$$B = \sum_1^n p_i \sum_1^n p_i x_i^2 - \sum_1^n p_i x_i \sum_1^n p_i x_i, \tag{13}$$
$$C = \sum_1^n p_i \sum_1^n p_i x_i y_i - \sum_1^n p_i x_i \sum_1^n p_i y_i.$$

The first factor on the left-hand side of equation (12) can always be eliminated, because the expression $(1 + a^2)/(1 + a^2)$ has for any value of a, even for $a = \infty$, a definite value. This establishment can easily be proved by a repeated application of BERNOULLI-L'HOSPITAL's rule. Thus, using simplified notations according to (13), the heterogeneous quadratic equation from which the tangent of the bearing of the adjusting straight line can directly be determined is the following:

$$Ca^2 - (A - B)\, a - C = 0. \tag{14}$$

The two roots of the above equation are:

$$a_{1,2} = \frac{A - B}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{A - B}{2C}\right)^2 + 1}. \tag{15}$$

The same relation might also be obtained if the tangent of the double bearing determined in papers [1] and [3] is goniometrically expanded by the tangent of the onefold bearing (see [1] formula 33).

Formulae (10) and (15) are obtained on the base of the necessary condition of the extremum value. To arrive at an unambiguous solution, the sufficient condition of the extremum value should be utilized. As is well

known, the latter can be expressed by the symbol

$$\frac{\partial^2 \sum_1^n p_i e^2{}_i}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 \sum_1^n p_i e_i^2}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 \sum_1^n p_i e_i^2}{\partial a \, \partial b} \right)^2 > 0 , \tag{16}$$

if herein b is replaced by equation (10) and a by equation (15). Now, one can also proceed in another way, namely, by computing one parameter from the necessary condition of the extremum value and substituting the obtained result into the relation of the differential quotient according to the other parameter. The investigation concerning the sufficient condition was accomplished by using both methods, obviously giving the same final result. This second deduction is considerably briefer, thus, it is presented here:

First, equation (12) should be set up using simplified notations according to (13) and this function should be denoted by $f(a)$:

$$f(a) = \frac{2}{\sum_1^n p_i} \cdot \frac{Ca^2 - (A - B)\, a - C}{(1 + a^2)^2} . \tag{17}$$

The differential quotient of the above function according to a is:

$$\frac{df(a)}{da} = \frac{2}{\sum_1^n p_i} \cdot \frac{[2\,Ca - (A - B)](1 + a^2)^2 - 4a\,(1 + a^2)[Ca^2 - (A - B) - C]}{(1 + a^2)^4} > 0 . \tag{18}$$

After all possible simplifications and reduction the following relating is arrived at:

$$\frac{df(a)}{da} = \frac{2}{\sum_1^n p_i\,(1 + a^2)^3} [C\,(6\,a - 2\,a^3) + (A - B)\,(3\,a^2 - 1)] > 0 . \tag{19}$$

The sufficient condition for the existence of the minimum is, that if substituting the value of a resulting from eqation (15) into equation (19), this result should be a positive number. The first factor on the right-hand side of equation (19) is positive for any value of a, thus, it is sufficient to investigate the second factor only.

For this purpose relation (15) is to be replaced into the second factor on the right-hand side of equation (19). By so doing the following relation is obtained:

$$\begin{aligned} C\left\{6\left[\frac{A - B}{2\,C} \pm \sqrt{\left(\frac{A - B}{2\,C}\right)^2 + 1}\right] - 2\left[\frac{A - B}{2\,C} \pm \sqrt{\left(\frac{A - B}{2\,C}\right)^2 + 1}\right]^3\right\} + \\ + (A - B)\left\{3\left[\frac{A - B}{2\,C} \pm \sqrt{\left(\frac{A - B}{2\,C}\right)^2 + 1}\right]^2 - 1\right\} > 0 . \end{aligned} \tag{20}$$

Performing the operations and simplifications the above relation takes the form:

$$4C\left[\left(\frac{A-B}{2C}\right)^3 \pm \left(\frac{A-B}{2C}\right)^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{A-B}{2C}\right)^2+1} \pm \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{\left(\frac{A-B}{2C}\right)^2+1} + \frac{A-B}{2C}\right] > 0. \tag{21}$$

Now, equation (21) is to be transformed into a more advantageous form:

$$4C\,\frac{A-B}{2C}\left[\left(\frac{A-B}{2C}\right)^2+1\right] \pm 4C\sqrt{\left(\frac{A-B}{2C}\right)^2+1}\left[\left(\frac{A-B}{2C}\right)^2+1\right] =$$
$$= 2\left[\left(\frac{A-B}{2C}\right)^2+1\right]\left[A-B \pm 2C\sqrt{\left(\frac{A-B}{2C}\right)^2+1}\right] > 0. \tag{22}$$

As can be seen, the first factor of equation (22) is positive for any value of $(A—B)$ and C. Thus, it is merely the second factor, i.e.,

$$A-B \pm 2C\sqrt{\left(\frac{A-B}{2C}\right)^2+1} > 0, \tag{23}$$

which requires further investigation. Dividing the inequality (23) by the absolute value of $2C$, the inequality is invariantly valid:

$$\frac{A-B}{|2C|} \pm \frac{2C}{|2C|}\sqrt{\left(\frac{A-B}{2C}\right)^2+1}. \tag{24}$$

As the relation

$$\left|\frac{A-B}{2C}\right| < \left|\sqrt{\left(\frac{A-B}{2C}\right)^2+1}\right| \tag{25}$$

holds, the inequality (23) can only be satisfied if the second term of same is positive, i.e., if

$$\frac{2C}{|2C|}\sqrt{\left(\frac{A-B}{2C}\right)^2+1} > 0. \tag{26}$$

This however, is only possible if the sign of the root-symbol coincides with that of C.

Summarizing results of the previous deduction it can be established that *the direct tangent of the bearing belonging to an adjusting straight line*

inserted within a set of points on the base of GAUSS' *principle, can be determined simply. The sign of the root-symbol appearing in formula* (15) *should be chosen so as to coincide with the sign of*

$$C = \sum_1^n p_i \sum_1^n p_i x_i y_i - \sum_1^n p_i x_i \sum_1^n p_i y_i$$

to be found in the denominator of the first term. By so doing, the tangent of the bearing of an adjusting straight line, corresponding to the weighted square sum of residuals, will directly be obtained.

Sensibly it follows, if the sign of the root-symbol is chosen inversely, the tangent of the bearing of a straight line will be obtained, this being perpendicular to the adjusting one. It is obvious from equation (15) that $a_1 \cdot a_2 = -1$, this however, is the well-known condition of perpendicularity.

Of course, the deduced relation is also valid for a system of points having the same weight, merely the symbols given in (13) take the forms given hereunder:

$$\begin{aligned} A &= n \sum_1^n y_i^2 - \sum_1^n y_i \sum_1^n y_i, \\ B &= n \sum_1^n x_i^2 - \sum_1^n x_i \sum_1^n x_i, \\ C &= n \sum_1^n x_i y_i - \sum_1^n x_i \sum_1^n y_i. \end{aligned} \tag{13a}$$

The validity of the relation in question also holds for a system of coordinates referring to the centre of gravity of the point-system in question. This is obvious as in respect to the coordinates no stipulation was made. Applying STEINER's theorem the symbols can be simply recalculated (see [1] formula 23).

Instead of a general proof of the deduced formula by a numerical example, two points having the same weight should be assumed. The straight line giving the square sum of residuals must obviously run throught the two given points. Thus, for the tangent of the bearing of this straight line formula (15) must give the same relation, well known for the tangent of the bearing belonging to a straight line running trhough two points.

The coordinates of the two points in question should be (x_1, y_1) and (x_2, y_2). In compliance with equations (13a):

$$\begin{aligned} A &= 2\,(y_1^2 + y_2^2) - (y_1 + y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2, \\ B &= 2\,(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2, \\ C &= 2\,(x_1 y_1 + x_2 y_2) - (x_1 + x_2)\,(y_1 + y_2) = \\ &\qquad = \oplus (y_2 - y_1)\,(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Replacing the above values into formula (15) and taking the sign of the root symbol as being equal to that of C, i.e., positive, for a the following relation is arrived at:

$$a = \frac{(y_2 - y_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 \oplus \sqrt{[(y_2 - y_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 + 4(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)]}}{2(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)}.$$

After the indicated operations (raising to the second power and square root extraction) are finished the following final result is obtained:

$$a = \frac{(y_2 - y_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 + [(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2]}{2(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

and this is the well-known formula of the tangent of the bearing belonging to a straight line running through two points.

On the other hand, if the sign of the root symbol were chosen as being opposite to that of C, i.e., negative, then for a the following result is to be obtained:

$$a_2 = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1},$$

this however, is the tangent of the bearing of a straight line perpendicular to the former.

REFERENCES

1. Milasovszky, B.: The Theoretical Problems of Level Drift Location. *Acta Techn. Hung.* XXXVIII. (1962) pp. 189—229.
2. Milasovszky, B.: Über die exakte Bestimmung der ausgleichenden Geraden. *Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Bánya- és Kohómérnöki Osztályának Közleményei*, Sopron, XV (1943).
3. Zambó, J.: Bányászati telepítések analitikája (Analytics of the Siting in Mining Works). Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1960.

DIE EINFACHE UND UNMITTELBARE BESTIMMUNG DER RICHTUNGSTANGENTE EINER NACH DEM GRUNDSATZE $\Sigma pe^2 = \min!$ EINGESCHALTENEN AUSGLEICHENDEN GERADEN

S. FORRAI

ZUSAMMENFASSUNG

Die Richtungstangente einer nach dem Gaussschen Grundsatze eingeschalteten ausgleichenden Geraden wurde durch eine einfache Formel und eindeutig bestimmt. Bisher wurde in der Fachliteratur die Bestimmung der Tagente des zweifachen Richtungswinkels behandelt. Die Tangente des einfachen Richtungswinkels konnte nur mittelbar bestimmt werden, hiezu mußte man vorher dan Minimalwert der Funktion berechnen.

Auf Grund der Eigenheit der durch eine Funktion mit zwei Veränderlichen gegebenen Fläche (Bild 3) kann die Tangente des Richtungswinkels (a) eindeutig bestimmt werden. Hienach ist in Formel (15) das Vorzeichen des Wurzelzeichens so zu wählen, daß es mit dem Vorzeichen des im Nenner des ersten Gliedes befindlichen C identisch sei. In diesem Falle erhält man stets unmittelbar die Richtungstangente der die Bedingung $\Sigma p_i e_i^2 = \min!$ erfüllenden Geraden.

DÉTERMINATION SIMPLE DE LA TANGENTE DE DIRECTION DIRECTE DE LA DROITE DE COMPENSATION SATISFAISANT AU PRINCIPE $\Sigma pe^2 = \min!$

S. FORRAI

RÉSUMÉ

La tangente de direction directe de la droite de compensation satisfaisant au principe de Gauss est déterminée par une formule simple de façon univoque. Dans la littérature spéciale, on donnait jusqu'à présent la tangente du double de l'angle de direction. La détermination de la tangente de direction directe n'a été possible qu'après calcul de la valeur minime de la fonction.

Sur la base de la caractéristique de la surface correspondant à la fonction à deux variables (fig. 3), la tangente de direction directe (a) peut être déterminée de façon univoque. Dans la formule 15, le signe de la racine carrée doit être pris égal au signe de C figurant dans le dénominateur du premier membre. Dans ce cas on reçoit toujours directement la tangente de direction de la droite satisfaisant à la condition $\sum_1^n p_i \cdot e_i^2 = \min!$

ПРОСТОЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО УГЛОВОГО КОЭФФИЦИЕНТА УРАВНИВАЮЩЕЙ ПРЯМОЙ ПО ПРИНЦИПУ $\Sigma pe^2 = \min!$

Ш. ФОРРАИ

РЕЗЮМЕ

Непосредственный угловой коэффициент уравнивающей прямой по принципу Гаусса определяется простой формулой и однозначно. В литературе до сих пор всегда указывался тангенс двойной величины азимута, а определение самого углового коэффициента осуществлялось только косвенно, после вычисления минимального значения функции.

На основании свойственной особенности поверхности функций с двумя переменными (фиг. 3), непосредственный угловой коэффициент (a) может определяться однозначно. В соответствии с этим в формуле 15 знак квадратного корня берется тождественным знаку величины C, находящейся в знаменателе первого члена. В этом случае всегда непосредственно получается угловой коэффициент прямой, соответствующей условию $\sum_1^n p_i e_i^2 = \min!$

РЕГИСТРИРУЮЩИЙ МАГНИТОМЕТР ДЛЯ МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Э. ТАКАЧ

ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЯЖЕЛОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ, КАФЕДРА ГЕОФИЗИКИ, МИШКОЛЬЦ (ВЕНГРИЯ)

[Поступило 11-го октября 1962 г.]

Исследуется влияние созданной посредством фотоэлемента электронным путем магнитной компенсации на частотную и фазовую характеристики унифилярного магнитометра. При соответствующем расчете можно создать регистрирующий магнитометр высокой чувствительности, обладающий положительными качествами с точки зрения магнито-теллурических измерений.

1

Электрический компонент естественного электромагнитного поля в виде теллурических измерений уже несколько десятилетий применяется для исследований геологических формаций. Теоретические изыскания последних лет позволяют также и совместно применять электрический и магнитный компоненты. Эти так называемые магнито-теллурические измерения технически выполнимы проще и, вместе с тем, дают большее количество данных для исследования геологических формаций, чем классический теллурический метод.

Магнитометры, используемые для измерений, должны обладать очень высокой чувствительностью. Изменения напряженности теллурического поля вообще бывают величиной порядка $10^{-2} - 10^{-1}$ мв/км. Весьма мала также и амплитуда соответствующих им изменений напряженности магнитного поля. Обычно приходится измерять изменения напряженности поля в $10^{-6} - 10^{-5}$ Э. С равной точностью необходимо регистрировать и используемую при расчете характерных для геологической формации параметров область частот от 10 сек в направлении более длительных [1].

2

Для наблюдения за изменениями горизонтальной магнитной составляющей был избран простейший элемент-шуп — горизонтально расположенный магнитный стержень, подвешенный к торсионной нити — так называемый унифилярный магнитометр. Проектируя часть светового луча отраженного зеркалом, прикрепленным к магниту, на фотоэлемент, получаются изменения фототока, пропорциональные его смещению. Изменения фототока подвергаются электронному усилению, и, таким образом, магнито-

метр получает высокую чувствительность. Чувствительность его, однако, становится зависимой от частоты.

На рис. 1. видно абсолютное значение функции переноса унифилярного магнитометра в зависимости от относительной частоты и затухания. Абсолютное значение функции переноса может быть определено по следующей формуле.

$$\left|\frac{\beta}{\beta_0}\right| = \left|\frac{1}{(1-\nu^2)+j\,2\,\alpha\nu}\right| = \frac{1}{(1-\nu^2)^2+4\,\alpha^2\nu^2}, \qquad (1)$$

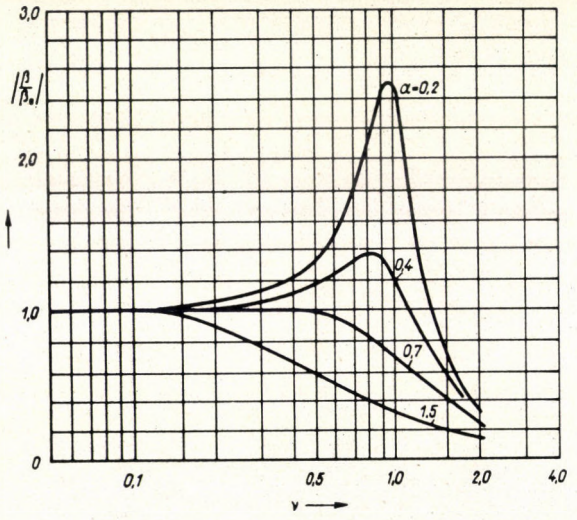

Рис. 1

где β — угол отклонения магнита под влиянием синусоидальных изменений напряженности магнитного поля при разной продолжительности периода, но при постоянном значении амплитуды ΔH;

β_0 — угол отклонения магнита при изменении напряженности магнитного поля на постоянную величину ΔH. Это может быть выражено также и ввиде произведения статической чувствительности (S) и изменения напряженности магнитного поля ΔH;

ν — частное относительной частоты, т. е. регистрируемой круговой частоты (ω) изменения напряженности поля, и собственной круговой частоты подвески (ω_0);

α — относительный коэффициент затухания системы, который является функцией коэффициента затухания (F), момента инерции (I) и собственной круговой частоты

$$\left(\alpha = \frac{F}{2\,I\omega_0}\right).$$

Собственная круговая частота подвески может быть рассчитана по следующей формуле:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C + MH\cos\gamma}{I}}, \tag{2}$$

где C—торсионный параметр нити; M—магнитный момент магнитного стержня; I—момент инерции магнитного стержня; H—горизонтальная составляющая напряженности магнитного поля, оставшаяся после частичной компенсации магнитного поля земли, и γ—угол между магнитным стержнем и H.

Сдвиг фазы (φ) отклонения магнита, отнесенный к изменению напряженности поля, дает зависимость

$$\tan\varphi = \frac{2\alpha\nu}{1-\nu^2}. \tag{3}$$

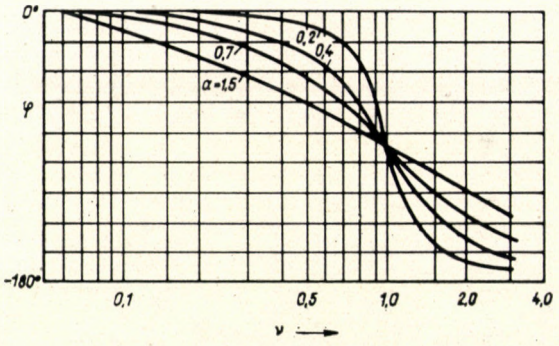

Рис. 2

Эта функция для различных значений затухания изображена на рис. 2.

Измеряемые изменения напряженности поля располагают относительно длинным временем периода, таким образом, с точки зрения зависимости частоты и сдвига фазы действием фотоэлемента и усилителя можно пренебречь, они играют лишь блоков, повышающий чувствительность. Таким образом, соответствующим образом подобранный под соединенный на выход усилителя гальванометр регистрирует различной частоты изменения горизонтальной составляющей магнитного поля земли согласно функции, заданной уравнениями (1) и (3).

Унифилярный магнитометр пригоден для регистрации только такой области частот, где значение приемочной функции постоянно. Самый длинный такой участок имеется на кривой, соответствующей значению относительного затухания ок. 0,7. Размеры подвески магнитометра следует выбирать таким расчетом, чтобы время ее незатухающего колебания было, по крайней мере, в 2,5 раза короче чем подлежащее регистрации наименьшее

время периода, соответствующее постоянному значению (β/β_0) верхней границы участка $\nu = 0{,}4$.

Также с точки зрения сдвига фазы относительное затухание в, ок. 0,7 является оптимальным. Как известно, именно в этом случае выполнено то условие верной по форме регистрации, что действительна зависимость $\varphi_2 = n\,\varphi_1$ между сдвигами фаз ν_1 и $\nu_2 = n\,\nu_1$, соответствующая к относительным частотам.

Отрицательной особенностью унифилярного магнитометра является то, что изменения действия подвески, фотоэлемента и усилителя, вызванные температурной и другими причинами, сильно отражаются на результатах измерений.

На основании уравнения (1) под воздействием изменения напряженности поля ΔH ток соответственно подобранного гальванометра будет

$$i = AE(j\omega)\,\Delta H\,, \tag{4}$$

где A — произведение постоянной на коэффициент усиления, фотоэлемента и статической чувствительности;
$E(j\,\omega)$ — функция переноса по зависимости

$$\frac{1}{(1-\nu^2)+j\,2\,a\nu}\,.$$

Поскольку изменится количество $AE(j\,\omega)$, изменение тока гальванометра будет

$$di = \Delta H d\left\{AE(j\omega)\right\}, \tag{5}$$

что можно записать также и в виде

$$di = \frac{d\left\{AE(j\omega)\right\}}{AE(j\omega)}\,i\,. \tag{6}$$

Таким образом, изменение тока прямо пропорционально относительному изменению произведения функции переноса и вышеупомянутой постоянной.

Унифилярный магнитометр с фотоэлектрическим усилением, таким образом, пригоден для проведения магнито-теллурических измерений лишь в случае определенного затухания и незатухающей собственной частоте. Эти условия трудно выполнимы, так как необходимо изготовить магнит малой инерции (тем самым снижая чувствительность) да и затухание необходимо держать на точном значении [2].

3

Функцию переноса можно значительно улучшить за счет применения обратной связи. Принципиальная схема прибора для этого случая показана на рис. 3. Ток усилителя подводится обратно на расположенную вокруг

подвески катушку Гельмгольца так, чтобы магнитное поле катушки тормозило смещению магнита. Доведение смещения до небольшой величины дает улучшение линейности прибора и устраняет погрешности от неравномерного освещения. Однако более значительно изменение рассматриваемое ниже [3, 4].

Для исследования действия обратной связи используется блокк-диаграмма, приведенная на рис. 4., где записаны функции переноса отдель-

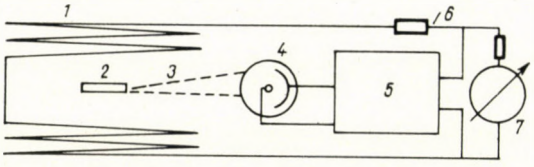

Рис. 3

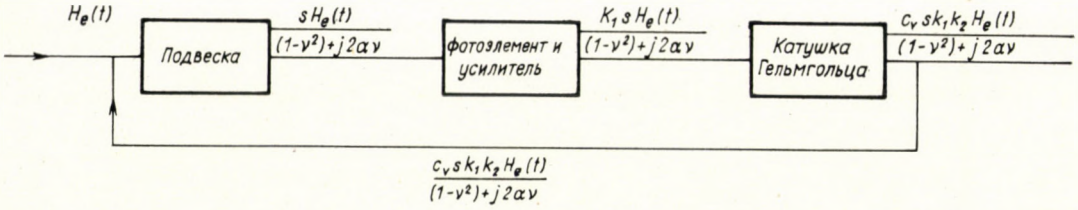

Рис. 4

ных элементов. Функцию переноса всей системы дает произведение функций переноса всех элементов.

Под воздействием магнитного поля магнит получает небольшое смещение. Однако, в этом случае смещение зависит лишь от разности амплитуд и соотношения фаз изменения напряженности поля земли ($H(t)$) и изменения напряженности компенсирующего поля катушки Гельмгольца. Обозначим это изменение напряженности поля через $H_e(t)$.

Если известна функция переноса подвески, то смещение подвески будет

$$\beta(t) = \frac{sH_e(t)}{(1-\nu^2)+\mathrm{j}\,2\,\alpha\nu} \text{ радианов.} \tag{7}$$

По фотоэлементу будет течь ток, пропорциональный углу смещения. Если обозначить произведение постоянной фотоэлемента (принимая во внимание и расстояние до зеркала) на значение усиления через K_1 (ампер/радиан), то получим колебание тока на выводных клемах усилителя

$$i(t) = \frac{K_1\, sH_e(t)}{(1-\nu^2)+j\,2\,\alpha\nu}\,. \tag{8}$$

Согласно рис. 3 часть этого тока подводится к регистрирующему гальванометру ($c_g\, i(t)$), а другая к обмотке обратной связи ($c_v\, i(t)$). Пусть постоянная обмотки будет K_2 (эрстед/ампер), тогда напряженность поля по обратной связи будет:

$$H_v(t) = \frac{K_1 c_v K_2 s H_e(t)}{(1 - \nu^2) + j\, 2\, \alpha\nu} \,. \tag{9}$$

Ввиду того, что $c_v \gg c_g$, роль гальванометра в обратной связи незначительна.

Необходимо исследовать отношение силы тока, попадающей в гальванометр, и колебаний магнитного поля земли с точки зрения амплитуды и фазы в функции относительной частоты, поля земли, отнесенной к подвеске.

На основании рис. 4 сначала выражаем поле, действующее на магнит

$$H_e(t) = H(t) - H_v(t) = H(t) - \frac{c_v s K_1 K_2 H_e(t)}{(1 - \nu^2) + j\, 2\, \alpha\nu} \,. \tag{10}$$

На этом основании искомая функция будет иметь следующий вид

$$\frac{c_{gi}(t)}{H(t)} = \frac{\dfrac{c_g K_1 s H_e(t)}{(1 - \nu^2) + j\, 2\, \alpha\nu}}{H_e(t) + \dfrac{c_v s K_1 K_2 H_e(t)}{(1 - \nu^2) + j\, 2\, \alpha\nu}} \,. \tag{11}$$

Произведя упрощение, получаем

$$\frac{i_g(t)}{H(t)} = \frac{\dfrac{c_g K_1 s}{(1 - \nu^2) + j\, 2\, \alpha\nu}}{1 + \dfrac{c_v K_1 K_2 s}{(1 - \nu^2) + j\, 2\, \alpha\nu}} \,, \tag{12}$$

что можно записать еще и в виде

$$\frac{\dfrac{1}{(1 - \nu^2) + j\, 2\, \alpha\nu}}{\dfrac{1}{c_g K_1 s} + \dfrac{c_v s K_1 K_2}{c_g K_1 s\, [(1 - \nu^2) + j\, 2\, \alpha\nu]}} = \frac{E(j\omega)}{\dfrac{1}{A} + \dfrac{B}{A} E(j\omega)} \,, \tag{13}$$

где $A = c_g K_1 s$ и $B = c_v s K_1 K_2$.

Таким образом, динамическая чувствительность системы и в случае обратной связи является функцией усиления, относительной частоты и затухания [5].

Так как речь идет о возвращении энергии, необходимо исследовать стабильность системы.

Простейшим образом результат можно получить, отобразив на плоскости комплексной переменной функцию переноса ($E(j\omega)$) так называемой

прямой ветви впереди обмотки Гельмгольца. Согласно критерия стабильности Nyquist-а стабильными являются такие системы, для которых эта функция не охватывает точку $(-1+j0)$ комплексной плоскости [5]. Функция показана на рис. 5 для значений относительного затухания 0,4; 0,6 и 0,8 при $A=1$. Изменение значения константы увеличивает или уменьшает векторы радиусом, принадлежащие отдельным значениям ν, не меняя формы.

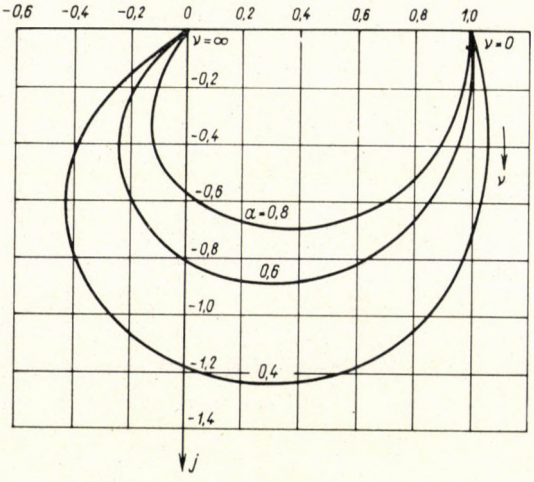

Рис. 5

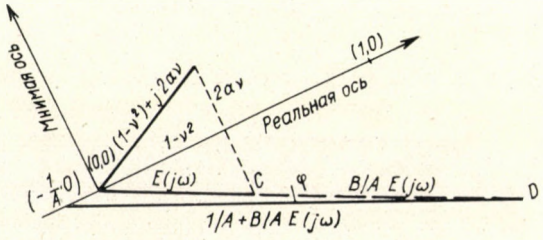

Рис. 6

Итак, магнитометр действует стабильно. Однако, при слишком большом усилении и малом затухании, по причине приближения кривой к точке $(-1+j0)$, произведенные переключения в цепи и механические воздействия могут привести систему в синусоидальное движение с медленным затуханием и с частотой, намного превышающей собственную частоту.

Комплексная диаграмма может быть использована также для расчета динамической чувствительности и сдвига фаз. На основе рис. 6 соотношение

$$\overline{(0,0\,C)}\Big/\left(\overline{-\frac{1}{A},D}\right)$$

задает динамическую чувствительность, а угол между двумя прямыми (φ) дает относительный фазовый угол.

(13)-ое уравнение и рис. 6 позволяют сделать следующие выводы.

а) Направление вектора комплексной плоскости, соответствующего знаменателю уравнения (13), независимо от значения A, так как оно встречается в знаменателе обоих слагающих вектора. Значит, при идентичном параметре B формы кривых относительной частоты и динамической чувствительности будет совпадать и лишь абсолютное значение меняется в функции A.

На рис. 7 показано изменение кривых динамической чувствительности и относительной частоты для значений $\alpha = 0{,}4$; 0,6; 0,8 и $B = 1$; 10; 100; 1000. Для конкретных динамическая чувствительность может быть получена посредством деления на величину A.

б) Из рис. 6 видно, что если $1/A \ll B/A$, т. е. при достаточно большом значении $\frac{c_v}{c_g} K_2$ сдвиг фаз будет незначительным.

в) В знаменателе уравнения (13) для случая пункта б) величиной $1/A$ можно пренебречь. Таким образом, динамическая чувствительность становится функцией коэффициента $\frac{c_v}{c_g} K_2$ т. е. функцией отношение сил токов, текущих по обмотке обратной связи и по гальванометру, и постоянной обмотки.

Из изложенного выше видно, что при правильном подборе параметров возможно осуществить регистрацию более широкого диапазона частот, чем без обратной связи. Нет необходимости даже в точной настройке затухания, так как характер примененных в практике кривых, имеющих идентичный параметр B, едва меняется в функции α.

Изменяется также и передача погрешностей. Соответственно уравнению (13) изменение тока гальванометра под влиянием изменения напряженности магнитного поля $H(t)$ будет

$$i_g(t) = \frac{AE(j\omega)}{1 + BE(j\omega)} H(t) = \frac{AE(j\omega)}{1 + CAE(j\omega)} H(t), \tag{14}$$

где $C = \frac{c_v}{c_g} K_2$.

При идентичном значении $H(t)$, функция переноса

$$\frac{AE(j\omega)}{1 + CAE(j\omega)}$$

должна претерпеть изменение. Продифференцировав уравнение (14), получим следующее из этого значение изменения тока. Ввиду того, что обмотка Гельмгольда и делитель тока является относительно стабильной частью

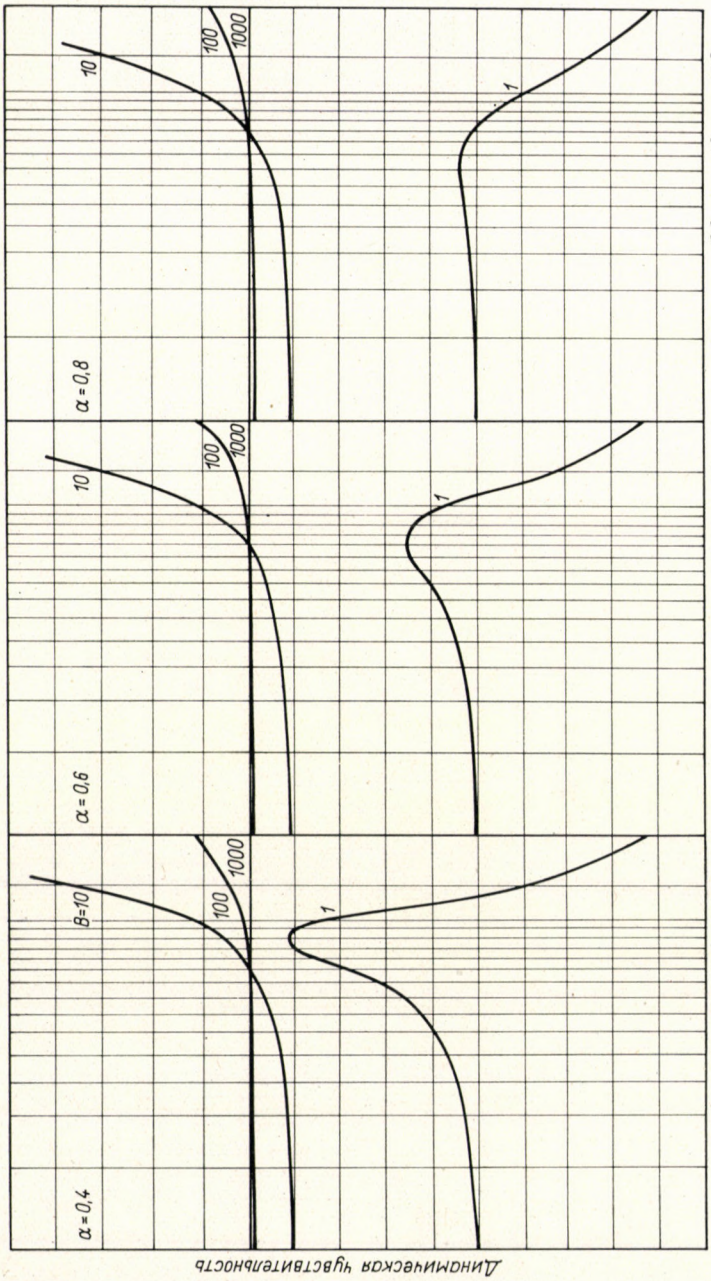
α = 0,8
α = 0,6
α = 0,4
B=10
10
100
1000
1
0,5
1,0
2,0
ν
Динамическая чувствительность

Рис. 7

прибора, значение C в процессе дифференцирования можно брать постоянным.

$$di_g(i) = \frac{H(t)\, d\,[AE(j\omega)][1 + CAE(j\omega)] - H(t)\, AE(j\omega)[Cd\,AE(j\omega)]}{[1 + CAE(j\omega)]^2} = \\ = \frac{H(t)\, d\,[AE(j\omega)]}{[1 + CAE(j\omega)]^2}, \tag{15}$$

где на основании (14)

$$di_g(t) = \frac{i_g(t)}{1 + CAE(j\omega)} \cdot \frac{dAE(\omega)}{AE(j\omega)}. \tag{16}$$

По сравнению с положением без обратной связи (уравнение (6)), перенос погрешностей отличается фактором $1/1 + CAE(j\omega)$ который остановиться намного положительнее.

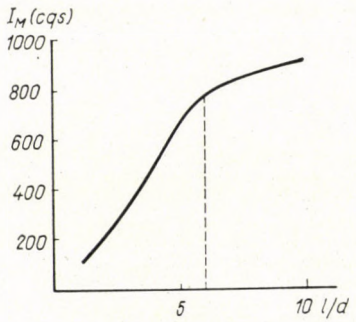

Рис. 8

4

На основе вышесказанных, незатухающий собственный период подвески должен быть возможно наименьшим. В то же время, из-за повышения чувствительности, желательно иметь возможно больший магнитный момент. Эти два требования противоречат друг другу. При расчете ставится задача выбрать оптимальную форму. Применяя в качестве материала подвески сплав альнико-5, для различных соотношений длин (l) и диаметров (d) было рассчитано значение намагниченности (I_M) [6]. Как видно на рис. 8, начиная от $l/d = 6$, значение намагниченности сильно падает. Таким образом, значение l/d должно быть равно ок. 6, так как дальнейшее его увеличение не дает существенное увеличение намагниченности, но в то же время, неблагоприятно повышает момент инерции.

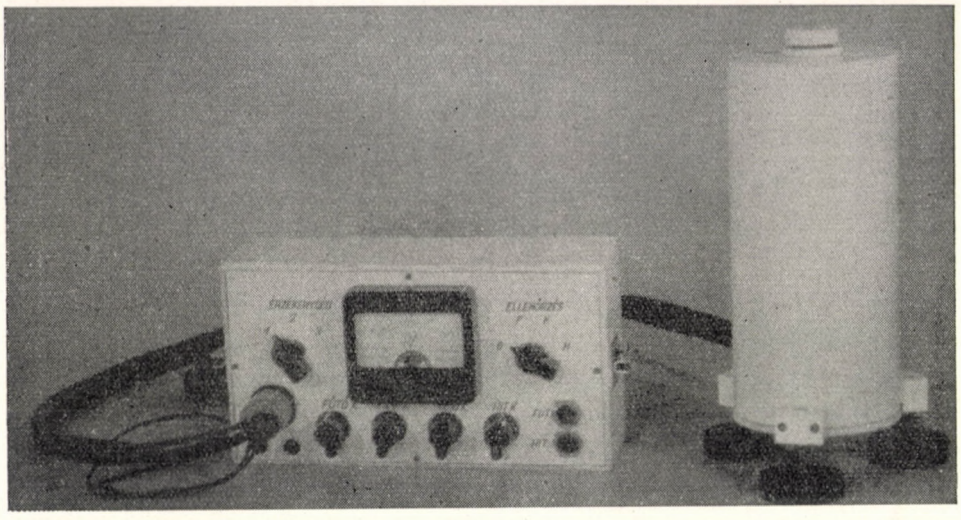

Рис. 9

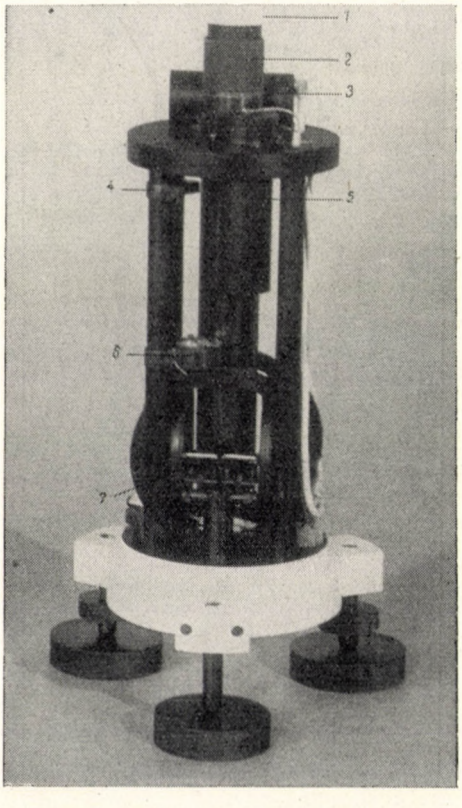

Рис. 10. 1. Торсионная головка. 2. Арретир. 3. Фотоэлемент. 4. Зеркало. 5. Лампочка и оптика. 6. Линза. 7. Зеркало

5

На основе изложенных выше в мастерской Кафедры геофизики Технического университета был построен магнитометр (рис. 9—10), пригодный для регистрации изменений любой горизонтальной составляющей, который может быть подключен к теллурическому регистратору, изготовляемому

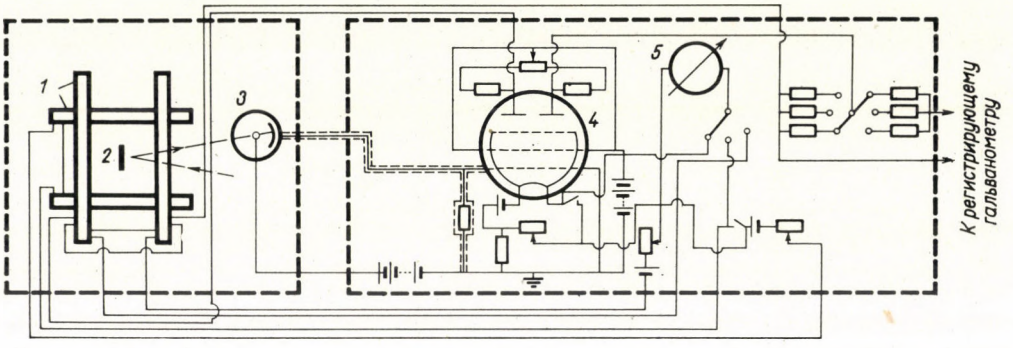

Рис. 11. 1. Катушка Гельмгольца. 2. Подвеска. 3. Фотоэлемент. 4. Электронная лампа. 5. Контрольный прибор

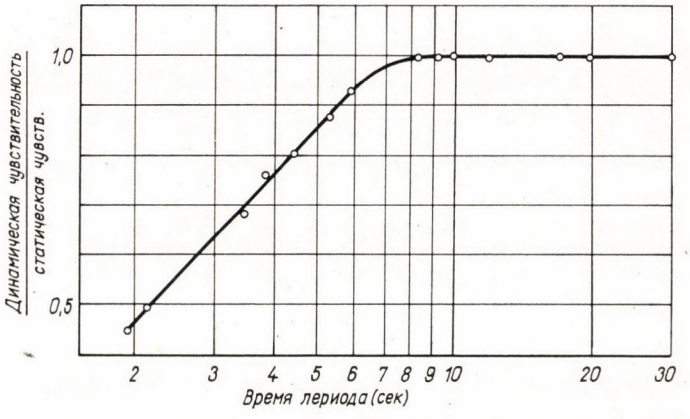

Рис. 12

заводом геофизических измерительных приборов. Принципиальная схема показана на рис. 11.

Расположенные вокруг подвески обмотки Гельмгольца служат для частичной компенсации поля земного магнетизма, обратной связи и юстировки. Частотная характеристика системы включая и регистрирующий гальванометр — показана на рис. 12.

Чувствительность прибора: 0,05 $\gamma/\mathbf{mm}$; 0,1 $\gamma/\mathbf{mm}$ и 0,2 $\gamma/\mathbf{mm}$ — по данным измерений на пленке теллурического прибора.

Изменение исходного положения гальванометра, выраженное эквивалентом изменения напряженности магнитного поля, имеет значение менее 0,005 γ/*мин*. На рис. 13. видны детали полевых съемок. Гальванометр,

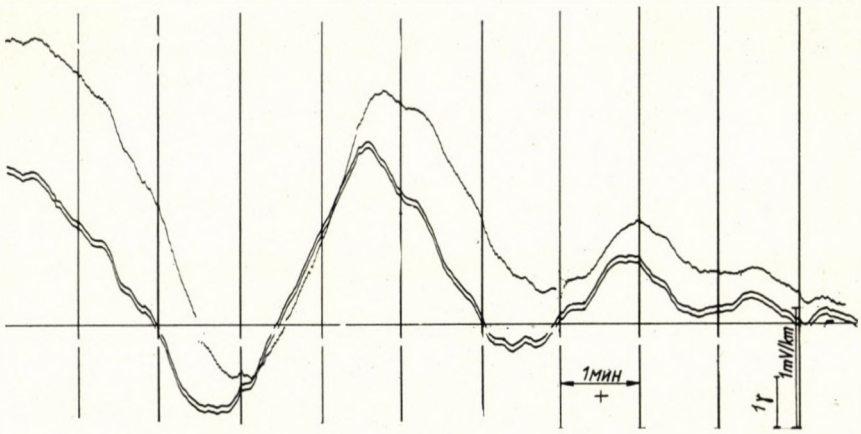

Рис. 13

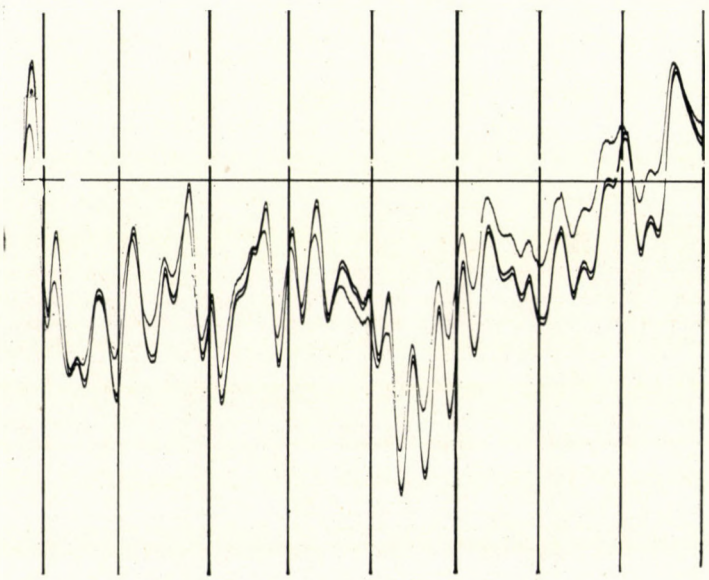

Рис. 14

обозначенный цифрой два, показывает изменение составляющей напряженности теллурического электрического поля в направлении восток — запад, обозначенный же цифрой один изменения составляющей напряженности магнитного поля направления север — юг.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бердичевский:* Электрическая разведка методом теллурических токов. Гостоптехиздат. 1960.
2. RUNCORN: Methods and Techniques in Geophysics. 1960.
3. DÜRSCHNER: Enregistrement à distance des variations du champs magnétique terrestre. *Annales de Geophysique.* 1951.
4. *Брюнелли, Бердичевский, Алексеев, Бурдо:* Наблюдения короткопериодических вариаций электромагнитного поля земли. *Изв. Акад. наук, Серия Геофизическая.* 1956.
5. CHESTNUT—MAYER: Szervomechanizmusok és szabályozó rendszerek tervezése. (Проектирование сервомеханизмов и управляющих систем) Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1959.
6. MEISSER: Die Spannbandmagnetnadel. *Geofisica Pura e Applicata.* 1951.

RECORDING MAGNETOMETER FOR MAGNETOTELLURIC MEASUREMENTS

E. TAKÁCS

SUMMARY

The paper deals with the investigation of the effect of magnetic compensation, produced by electronic means with the aid of a photoelectric cell, on the frequency- and phase-characteristic of a unifilar magnetometer. An appropriate dimensioning might make the construction of a magnetometer possible, this being highly sensitive and possessing, from the view-point of magnetotelluric measurements, advantageous particulars.

REGISTRIERENDER MAGNETOMETER FÜR MAGNOTELLURISCHE MESSUNGEN

E. TAKÁCS

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz befaßt sich mit der Wirkung, die eine auf elektronischem Wege mit Hilfe einer Photozelle erzeugte magnetische Kompensation auf die Frequenz- und Phasencharakteristik des einfaserigen Magnetometers ausübt. Mittels einer entsprechenden Bemessung kann ein registrierender Magnetometer hergestellt werden, der sehr empfindlich ist und vom Gesichtspunkte magnetotellurischer Messungen aus betrachtet über günstige Eigenschaften verfügt.

MAGNÉTOMÈTRE ENREGISTREUR POUR MESURES MAGNÉTO-TELLURIQUES

E. TAKÁCS

RÉSUMÉ

L'étude examine l'influence que la compensation magnétique, produite par voie électronique au moyen d'une cellule photoélectrique, exerce sur les caractéristiques de fréquence et de phase du magnétomètre unifilaire. Avec un dimensionnement convenable, on peut construire un magnétomètre enregistreur de grande sensibilité offrant des propriétés favorables du point de vue des mesures magnéto-telluriques.

DIMENSION OF THE SUBSIDIARY QUANTITIES OF ADJUSTMENT

PROF. I. HAZAY

DR. TECHN. SC.
TECHNICAL UNIVERSITY OF BUILDING AND COMMUNICATION
BUDAPEST

[Manuscript received Dec. 23, 1962]

Author has recently dealt with the question of the dimension of weight applied in all its details in adjustment. In his present study, he discusses the development of dimensions with regard to the subsidiary quantities of adjustment (correlations, transfer coefficients, etc.).

Author in his study published in the *Acta Technica* Tom. 43. Fasc. 1—2. pp. 185—200, dealt with *the dimensional character of weights* applied in adjustment. ("The Use of Dimensional Weights in Adjusting Calculations"). The application of weights in this conception permits to initiate in the same adjustment even different kinds of measuring results (e.g. results of *angular measurements* and of *measurements of lengths)*. It is a matter of course that new qualities differing from previous concepts can be attributed to some notions only if this quality does not come into conflict in the whole field of application of this notion anywhere. Referring this now to the dimension of weights, a weight can be regarded as dimensional only in the case that dimensions are suitably formed in all equations and formulae of adjustment. Therefore the whole field of adjustment had to be examined seeking for the appearance of some contradiction. There was no contradiction, but the examinations resulted in the discovery that not only weights, but other subsidiary quantities of adjustment are dimensional as well. This fact is not a consequence of the dimension of weight, but appears even in cases where it is disregarded, respectively, where weights are not dealt with at all. Subsidiary quantities of this kind are, for instance, the *correlates* (k) or in case of direct observations the socalled *transfer coefficients* (r) figuring in the calculation of the mean square error of the function obtained from adjusting calculations, etc.*

Let us examine the dimensions on the basis of the first example of the aforementioned study. The task was to adjust a triangle on the basis of measuring the three angles (α, β and γ) and the length of the three sides (a, b and c).

* W. LEHMANN in his study "Betrachtungen über die strenge Ausgleichung von Einrechnungszügen" *(Vermessungstechnik*, 1962, No. 7. Berlin) has already put dimensions beside the correlate values.

According to the three surplus observations, three equations of condition were noted, such as:

$$\frac{a}{b}\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}-1=0\,,\qquad \frac{a}{c}\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}-1=0\,,\tag{1}$$
$$\alpha+\beta+\gamma-180^\circ=0\,.$$

The equations reduced to linear form where M is the logarithmic module are as follows:

$$\begin{aligned}
&-\frac{M}{\varrho''}\cot\alpha\, v''_\alpha+\frac{M}{\varrho''}\cot\beta\, v''_\beta+\frac{M}{a}v_a-\frac{M}{b}v_b+l_1=0\,,\\
&-\frac{M}{\varrho''}\cot\alpha\, v''_\alpha+\frac{M}{\varrho''}\cot\gamma\, v''_\gamma+\frac{M}{a}v_a-\frac{M}{c}v_c+l_2=0\,,\\
&v''_\alpha+v''_\beta+v''_\gamma-l_3=0\,.
\end{aligned}\tag{2}$$

The *absolute terms* l_1 and l_2 being nondimensional quantities (logarithmic values), and the value l_3 a value in seconds of arc, the equations of condition are correct even from the point of view of dimensions.

We, for the time being, will examine nothing but dimensions and do not need numerical values, nevertheless let us write the dimensions of the coefficients and absolute terms of the three equations of condition in a tabular form. The dimensionless place is marked by n, the seconds of arc by s, the centimeters by cm. The dimensions of weights are also given. The coefficients of the first equation are noted, as usual, a, those of the second equation b and those of the third equation c.

p	s^{-2}	s^{-2}	s^{-2}	cm^{-2}	cm^{-2}	cm^{-2}	
	v_α	v_β	v_γ	v_a	v_b	v_c	
a	s^{-1}	s^{-1}		cm^{-1}	cm^{-1}		n
b	s^{-1}		s^{-1}	cm^{-1}		cm^{-1}	n
c	n	n	n				s

Let us set up the *normal equations:*

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{aa}{p}\right]k_1+\left[\frac{ab}{p}\right]k_2+\left[\frac{ac}{p}\right]k_3+l_1=0\\
&\left[\frac{ab}{p}\right]k_1+\left[\frac{bb}{p}\right]k_2+\left[\frac{bc}{p}\right]k_3+l_2=0\\
&\left[\frac{ac}{p}\right]k_1+\left[\frac{bc}{p}\right]k_2+\left[\frac{cc}{p}\right]k_3+l_3=0\,.
\end{aligned}\tag{3}$$

The first two coefficients of the first and second equation are dimensionless numbers, the dimension of the last coefficient of two equations and the two first coefficients of the third equation are seconds of arc, whereas to the last coefficient of the third equation belongs the dimension of s^2. Considering the dimensions of the absolute terms given in the table, the equations are valid only if the correlates k_1 and k_2 are dimensionless numbers and the dimension of the correlate k_3 is s^{-1}.

Let us now examine the *correlate equations:*

$$v_i = \frac{a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3}{p_i} \,. \tag{4}$$

With the dimensions given in the table, second values for residuals of angles and centimeter values for residuals of lengths can be obtained, only if the above determined dimensions of the correlates are taken into consideration as well. With these same dimensions a harmony is reached in the equation

$$-[l\ k] = [pvv] \tag{5}$$

as well.

However, the dimension of correlates should not be regarded as the result of the dimension of weight. Let us consider, for instance, the simple task of adjusting the three measured angles of a triangle.

The equation of condition is

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = 0 \tag{6}$$

respectively,

$$v''_\alpha + v''_\beta + v''_\gamma + l = 0 \tag{7}$$

where even to the absolute term belongs the dimension of seconds. The coefficients of the unknowns arc dimensionless numbers. The normal equation

$$[aa]\, k + l = 0 \tag{8}$$

can be valid only in the case if the dimension of the correlate is s and only in this case can be obtained values in seconds of arc from the correlate equations

$$v_i = a_i k \,. \tag{9}$$

Let us now consider one by one the determination of the function weight set up from the *jointly adjusted* measuring results. Referring to our original example, it is known that from the system of equations

$$\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{p}\right] r_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] r_2 + \left[\frac{ac}{p}\right] r_3 + \left[\frac{af}{p}\right] &= 0 \\
\left[\frac{ab}{p}\right] r_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] r_2 + \left[\frac{bc}{p}\right] r_3 + \left[\frac{bf}{p}\right] &= 0 \\
\left[\frac{ac}{p}\right] r_1 + \left[\frac{bc}{p}\right] r_2 + \left[\frac{cc}{p}\right] r_3 + \left[\frac{cf}{p}\right] &= 0
\end{aligned} \tag{10}$$

first the transfer coefficients r should be determined. The values f are the coefficients of the function in question. Let the function be:

$$\varphi = v_a \tag{11}$$

i.e. let us look for the weight of the length measurement of the side a after the adjustment. The following relation is obtained, all unknowns are included in the function:

$$\varphi = f_\alpha v_\alpha + f_\beta v_\beta + f_\gamma v_\gamma + f_a v_a + f_b v_b + f_c v_c \tag{12}$$

where $f_a = 1$, whereas the other f values are identical with zero. Also in this case only the dimensions are discussed. Considering the dimensions of the weights of the values a, b and c as well as of the results of measurements as shown in the table, the absolute term of the two first equations of the system of equations (10) is of the *centimeter* dimension type, whilst that of the third equation appears to be zero. The dimension of the coefficients of the equations have already been determined in connection with equation (3). Equations (10) can remain valid only if the dimension of r_1 and r_2 is cm and that of r_3: cm s^{-1}.

After having determined the values r, the values

$$\begin{aligned}
F_\alpha &= f_\alpha + a_1 r_1 + b_1 r_2 + c_1 r_3 , \\
F_\beta &= f_\beta + a_2 r_1 + b_2 r_2 + c_2 r_3 , \\
F_\gamma &= f_\gamma + a_3 r_1 + b_3 r_2 + c_3 r_3 , \\
F_a &= f_a + a_4 r_1 + b_4 r_2 + c_4 r_3 , \\
F_b &= f_b + a_5 r_1 + b_5 r_2 + c_5 r_3 , \\
F_c &= f_c + a_6 r_1 + b_6 r_2 + c_6 r_3
\end{aligned} \tag{13}$$

have to be formed, and from these the quantity

$$\frac{1}{p_\varphi} = \left[\frac{FF}{f}\right] \tag{14}$$

Taking as basis the determined dimensions, the dimension cm^2 is obtained for that value which meets the requirement in which the weight of the result of length measurements concerning side a should be of dimension cm^{-2}.

The same weight can be determined so that value v_a is expressed by some equation of condition, e.g. by the first:

$$\varphi = v_a = \frac{a \cot \alpha}{\varrho''} v_\alpha - \frac{a \cot \beta}{\varrho''} v_\beta + \frac{a}{b} v_b . \tag{15}$$

All residuals included, it is again the relation (12) that is obtained but here the dimension of f_a and f_β is cm s^{-1} and f_b is a dimensionless number, whilst the other f values are zero. Accordingly, in the first two equations of the system of equation (10), the absolute term is of *centimeter* dimension, and in the third equation the dimension is: cm s. The dimension of the r values appears to be just the same as above and for the weight of the length measurements result of side a the value of dimension cm^{-2} is obtained correctly as well through equations (13) and relation (14).

Should we look, for instance, for the weight of angle α after the adjustment, a similar observation leads to a dimension of seconds for r_1 and r_2, r_3 is dimensionless number, whilst the weight sought for results in the correct dimension of s^{-2}.

Let us now turn to the method of unconditioned observations. By the way of an example, let us determine the coordinates of any point with the intersection combined with the measurement of length. The form of residual equations concerning measurements of direction and length arc, as known:

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{\varrho'' \cos\delta}{t}\,\delta y - \frac{\varrho'' \sin\delta}{t}\,\delta x + l_i \\ v_h &= \sin\delta \cdot \delta y + \cos\delta \cdot \delta x + l_h. \end{aligned} \tag{16}$$

Denoting the coefficients of δy with a and those of δx with b, and considering the dimension s^{-2} of the weight of the measurement of direction as well as the dimension m^{-2} of the weight of the measurement of length, the system of equations

$$\begin{aligned} [paa]\,\delta y + [pab]\,\delta x + [pal] &= 0, \\ [pab]\,\delta y + [pbb]\,\delta x + [pbl] &= 0, \\ [pal]\,\delta y + [pbl]\,\delta x + [pll] &= [pvv] \end{aligned} \tag{17}$$

is satisfied from the point of view of dimensions. Let us look now for the *weight coefficient* of the quantity δy. For this purpose, the system of equations

$$\begin{aligned} [paa]\,Q_{11} + [pab]\,Q_{12} - 1 &= 0, \\ [pab]\,Q_{11} + [pbb]\,Q_{12} + 0 &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

has to be solved. Since the values Q should be of the dimension m^2 — δy being a length value — this system of equations also fills the dimensional requirements.

Now the function weight formed by adjusted values should be considered. The weight of the distance of a given point and the new point is sought for by way of example. The function,

$$t = \sqrt{(y - y_A)^2 + (x + x_A)^2} \tag{19}$$

and after expansion:

$$\varphi = \delta t = \sin\delta \cdot \delta y + \cos\delta \cdot \delta x. \tag{20}$$

Denoting the two coefficients of the relation by A and B, the system of equations

$$\begin{aligned} [paa]\, q_{\mathrm{I}} + [pab]\, q_{\mathrm{II}} - A = 0\,, \\ [pab]\, q_{\mathrm{I}} + [pbb]\, q_{\mathrm{II}} - B = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

should be solved. A and B being dimensionless numbers, the dimension of the q values is m^2 (square meter). The same result is achieved by means of the relation

$$q_{\mathrm{I}} = AQ_{11} + BQ_{12}. \tag{22}$$

The reciprocal value

$$\frac{1}{P_\varphi} = Aq_{\mathrm{I}} + Bq_{\mathrm{II}} \tag{23}$$

of the function weight is of the dimension m^2, hence the dimension of the weight: m^{-2}.

Let us finally look for the weight of the directional angle of the direction connecting the given point A and the new point. The function is

$$\delta = \operatorname{arc\,tan} \frac{y - y_A}{x - x_A} \tag{24}$$

and after expansion:

$$\varphi = \delta\delta'' = \frac{\varrho'' \cos\delta}{t}\,\delta y - \frac{\varrho'' \sin\delta}{t}\,\delta x. \tag{25}$$

In this case the dimension of A as well as of B is s m^{-1}, and thus the dimension of the q values in the system of equations (21) is s m. The same result is obtained from relation (22). The dimension of the reciprocal value of the weight of the direction angle is correctly from the formula (23): s^2, and thus the dimension of the weight is: s^{-2}.

In addition to theoretical studies, numerous examples were examined on the development of dimensions; and in each case a proper harmony was to be found.

DIMENSIONEN DER HILFSGRÖSSEN DER AUSGLEICHUNG

I. HAZAY

ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser hat sich unlängst eingehend mit der Frage der Dimension des in der Ausgleichung angewandten Gewichtes befaßt. In seiner neuen Studie untersucht er die Gestaltung der Dimensionen der Hilfsgrößen der Ausgleichung (Korrelaten, Übertragungskoeffizienten usw.).

LA DIMENSION DES QUANTITÉS AUXILIAIRES DE LA COMPENSATION

I. HAZAY

RÉSUMÉ

Dernièrement, l'auteur a discuté à fond la question de la dimension du poids appliqué dans la compensation. L'étude nouvelle examine la nature des dimensions des quantités auxiliaires de la compensation (corrélées, coefficients de transposition, etc. . .).

О РАЗМЕРНОСТИ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН ВЫРАВНЕНИЯ

И. ХАЗАИ

РЕЗЮМЕ

В последней своей работе автор подробно рассмотрел вопрос о размерности веса, применяемого в выравнении. В настоящей работе анализируются размерности вспомогательных величин (коррелят, переводных коэффициентов и т. п.).

DIE RASCHE AUFLÖSUNG DER NORMALGLEICHUNGEN IM ALLGEMEINEN FALLE DER AUSGLEICHUNG

F. HALMOS

GEODÄTISCHES FORSCHUNGSLABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, SOPRON

[Eingegangen am 14. November 1962]

Der Autor untersucht die Normalgleichungsauflösungen der den Fall der ungemessenen Unbekannten betreffenden Ausgleichung der bedingten Beobachtungen. Er stellt fest, daß diese Ausgleichungsgruppe bei der Ausgleichung der Beobachtungswerte eine immer größere Rolle spielt, und so die moderne Auflösungsmöglichkeit der Normalgleichungen die Berechnungen wesentlich beschleunigt.

Mit der Einführung der aus den quadratischen Koeffizienten mit Nullwerten sich ergebenden imaginären Reduktionswerte können wir — im Hinblick auf die Bestimmung der Unbekannten wie auch der Gewichtskoeffizienten — die Schwierigkeit überbrücken, infolge deren die Choleskysche Lösung auf diese Ausgleichsgruppe bisher nicht angewendet wurde. Die Untersuchungen wurden mit den die Berechnung der Gewichtskoeffizienten des Funktionswertes betreffenden Fragen ergänzt, sogar die Bestimmung der Produktgewichtskoeffizienten wurde angegeben. Auch der Zuschlag der Funktion ist der Tabelle direkt zu entnehmen. Die entsprechenden Methoden der Proben sind auch dargelegt. Die auf die gegenseitig abhängigen Werte bezüglichen Auflösungen können auch zu derartigen Auflösungen führen.

Die Auflösung wurde mit den modernisierten Gaußschen, Bjerhammerschen und Reichenederschen Auflösungen verglichen, dann wird ein Zahlenbespiel mitgeteilt.

Damit ist sinngemäß die Auflösungsmöglichkeit auch für die Ausgleichung der vermittelnden Beobachtungen mit Zwangsbedingungen (IV. Gruppe) und für die Ausgleichung der bedingten Beobachtungen mit ungemessenen Unbekannten und mit zwischen diesen bestehenden Zwangsbedingungen (VI. Gruppe) gegeben, da hier ähnliche Probleme vorliegen.

Die Ausgleichung der bedingten Beobachtungen mit ungemessenen Unbekannten (V. Ausgleichungsgruppe) wird in der neuesten Literatur als der allgemeine Fall der Ausgleichung behandelt ([1] S. 103.; [2] S. 572.). Diese Benennung läßt sich damit erklären, daß auf Grund ihrer allgemeinen Zusammenhänge die übrigen bekannten Ausgleichungsgruppen davon ableitbar sind, d. h. daß sie als die Spezialfälle der obigen, allgemeinen Gruppe aufgefaßt werden können. Die Bedeutung der V. Ausgleichungsgruppe wird immer größer. Zahlreiche Probleme der Ausgleichung werden hierauf zurückgeführt, wobei wir außer der Bestimmung der Zahlenwerte der ungemessenen Unbekannten auch deren Gewicht direkt erhalten. Die großen Anwendungsmöglichkeiten der Ausgleichungsgruppe werden in [3] dargelegt. Neuestens wurde auf Vorschlag von TÁRCZY-HORNOCH auch bei der Ausgleichung der Basisnetze die V. Ausgleichungsgruppe angewandt, wo die bestimmende Seite als ungemessene Unbekannte betrachtet wird [4]. MILASOVSZKY überprüft in seiner Studie [5] die Lösungen mit den vermittelnden und bedingten Beobachtungen mit ungemessenen Unbekannten und stellt fest, daß die

Lösung auf Grund der V. Ausgleichungsgruppe mit der der vermittelnden gleichwertig ist, und daß wir doch wegen des von den ungemessenen Unbekannten herrührenden besonderen Aufbaus der Normalgleichungen statt der eleganteren, modernen Lösungen zur langwierigeren, klassischen Gaßschen zurückkehren müssen. Bezüglich der Anwendungsmöglichkeit schreibt TÁRCZY-HORNOCH in dieser Hinsicht in seiner Studie [3] folgendes: »Auf den von MILASOVSZKY erwähnten Nachteil, daß man zur Elimination das ursprüngliche Gaußsche Verfahren anwenden muß, wollen wir hier nicht eingehen: Die Untersuchung der Frage, wie das Gaußsche Verfahren bei ungemessenen Unbekannten modernisiert werden kann, ist nicht das Ziel dieser Untersuchung.«

Wenn wir also für die V. Ausgleichungsgruppe nebst ihren übrigen Vorteilen eine moderne Normalgleichungsauflösung finden, glauben wir dadurch die Schnelligkeit und Wirtschaftlichkeit der Rechnungen in großem Maße zu erhöhen, und damit kann ihre große Anwendungsmöglichkeit in jeder Hinsicht klar hervortreten. Die allgemeine Ableitung der Ausgleichungsgruppe mag als bekannt vorausgesetzt werden [1, 2, 6, 7, 8]. Im allgemeinen haben die Bedingungsgleichungen mit den Messungsergebnissen und den ungemessenen Unbekannten folgende Form:

$$F(\sigma_1 + v_1,\ \sigma_2 + v_2, \ldots \sigma_n + v_n,\ x, y, \ldots) = 0. \tag{1}$$

Die linearen Verbesserungsgleichungen mit n Beobachtungen, r Bedingungen und q Unbekannten sind:

$$\begin{aligned}
&a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n + A_a \delta x + B_a \delta y + \ldots + L_a = 0\,,\\
&b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n + A_b \delta x + B_b \delta y + \ldots + L_b = 0\,.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n + A_r \delta x + B_r \delta y + \ldots + L_r = 0\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

Hier sind

$$\begin{aligned}
L_a &= F_a(\sigma_1, \sigma_2, \ldots x_0, y_0, \ldots) = F_{a,0}\,,\\
L_b &= F_b(\sigma_1, \sigma_2, \ldots x_0, y_0, \ldots) = F_{b,0}\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

x_0 und y_0 sind die Näherungswerte der Unbekannten, δx, δy die durch Ausgleichung erhaltenen Zuschläge, und $a_1, a_2, \ldots, A_a, B_a, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ usw. die durch die Reihenentwicklung der Funktion (1) gewonnenen Koeffizienten. Durch Befriedigung der die Quadratsumme der Verbesserungen betreffenden Minimumbedingung erhalten wir folgende Normalgleichungen (Beobachtungen mit verschiedenen Gewichten vorausgesetzt):

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{aa}{p}\right]k_a + \left[\frac{ab}{p}\right]k_b + \ldots + \left[\frac{ar}{p}\right]k_r + A_a\,\delta x + B_a\,\delta y + \ldots + L_a = 0\,,\\
&\left[\frac{ab}{p}\right]k_a + \left[\frac{bb}{p}\right]k_b + \ldots + \left[\frac{br}{p}\right]k_r + A_b\,\delta x + B_b\,\delta y + \ldots + L_b = 0\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_a k_a \quad + A_b k_b \quad + \ldots + A_r k_r \quad + 0\,\delta x \quad + 0\,\delta y \quad + \ldots + 0 = 0\,,\\
&B_a k_a \quad + B_b k_b \quad + \ldots + B_r k_r \quad + 0\,\delta x \quad + 0\,\delta y \quad + \ldots + 0 = 0\,.
\end{aligned} \tag{4}$$

Also haben wir insgesamt $(r + q)$ Normalgleichungen zu lösen. Für die Berechnung der Korrelaten und Unbekannten bieten sich mehrere Möglichkeiten. Von den bekannten Lösungen kommen nur solche in Betracht, welche auf dem verhältnismäßig kürzersten Wege die gesuchten Werte und die zur Berechnung der mittleren Fehler benötigten Gewichtskoeffizienten ergeben. Die Rechenarbeit wächst, bekanntlich, annähernd mit der dritten Potenz der Zahl der zu lösenden Gleichungen. Die Wahl der Methode hängt auch von den anzuwendenden Rechenapparaten ab. Heutzutage sind im allgemeinen Hand- und elektrische Rechenmaschinen und elektronische Rechenautomaten im Gebrauch. Mit diesen allen ist die modernisierte Gaußsche Gleichungsauflösung sowie die Cholesky Methode vorteilhaft anwendbar.

Bei der modernisierten Gaußschen Lösung werden die einzelnen Rechenoperationen nicht einzeln abgeschrieben, sondern man gruppiert sie gleich bei den Operationen mit Rechenapparaten so, daß wir sofort die Summenergebnisse erhalten [9, 10]. Die Anwendung dieser Methode ist hinsichtlich des Einflusses der Abrundungsfehler vorteilhaft. Nebst der Bestimmung der Unbekannten erhalten wir zugleich auch deren Gewichtskoeffizienten. Bei Berechnungen in tabellisierter Form sind nur die ersten Reihen der einzelnen reduzierten Gleichungen aufzustellen. Die Lösung verfolgt das Prinzip, Spalte mit Spalte zu multiplizieren, und in dieser Weise sind die Berechnungen mechanisch durchführbar. Im Vergleich mit der später zu behandelnden Choleskyschen Methode ist hier die schriftliche Arbeit etwas mehr, doch das mag im Mangel entsprechender Einübung hinsichtlich der Rechnungsfehler auch günstig sein. Die entsprechenden Proben sind genau so durchzuführen wie bei der klassischen Gaußschen Lösung, nur ist das bei der Entwicklung angewöhnte Schema zu berücksichtigen.

Da die Normalgleichungslösungen der V. Ausgleichungsgruppe mit dieser Methode keine diesbezüglichen neueren Probleme aufwerfen, wollen wir ein Zahlenbeispiel anführen, nur um den Vergleich mit der Cholesky Methode vornehmen zu können.

Wir bemerken, daß die Lösung in der Fachliteratur meist mit CHOLESKY's Namen bezeichnet wird ([1], S. 160—163.; [2], S. 549—552.; [7], S. 123—125.; [11], S. 64., 70—71. und 81. usw. Obwohl in [22], S. 472. diese Lösung als

Rubin—Cholesky-Verfahren erwähnt wird, ist sie an den drei anderen Stellen als Cholesky-Lösung dargestellt). Der Vollständigkeit halber wollen wir von den Grundzusammenhängen nur einige Schritte mitteilen. Um die Ableitungen zu vereinfachen, werden Beobachtungen mit gleichem Gewicht vorausgesetzt, was übrigens hinsichtlich der Lösung der Normalgleichungen bedeutungslos ist, da es ganz gleichgültig ist, in welcher Weise die Koeffizienten in diesen abgeleitet wurden, wesentlich ist nur der symmetrische Aufbau.

Wir wollen davon ausgehen, daß jede der bei der Gaußschen Lösung zu erhaltenden Entwicklungsgleichungen durch die Quadratwurzel des quadratischen Koeffizienten dividiert wird, also z. B. im Falle von drei Unbekannten:

$$\begin{aligned} \sqrt{[aa]}\,\mu_1 + \frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}}\,\mu_2 + \frac{[ac]}{\sqrt{[aa]}}\,\mu_3 + \frac{[al]}{\sqrt{[aa]}} &= 0\,, \\ \sqrt{[bb1]}\,\mu_2 + \frac{[bc1]}{\sqrt{[bb1]}}\,\mu_3 + \frac{[bl1]}{\sqrt{[bb1]}} &= 0\,, \\ \sqrt{[cc2]}\,\mu_3 + \frac{[cl2]}{\sqrt{[cc2]}} &= 0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Beziehungsweise symbolisch:

$$\begin{aligned} \{aa\}\,\mu_1 + \{ab\}\,\mu_2 + \{ac\}\,\mu_3 + \{al\} &= 0\,, \\ \{bb\}\,\mu_2 + \{bc\}\,\mu_3 + \{bl\} &= 0\,, \\ \{cc\}\,\mu_3 + \{cl\} &= 0\,, \end{aligned} \tag{6}$$

wo die Werte der einzelnen Reduktionen aus den Entwicklungszusammenhängen bekannt sind. Z. B.:

$$\{bb\} = \sqrt{[bb1]} = \sqrt{[bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]}} = \sqrt{[bb] - \frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}}\,\frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}}} = \sqrt{[bb] - \{ab\}\{ab\}}\,,$$

$$\{ab\} = \frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}} = \frac{[ab]}{\{aa\}}\,,\quad \{ac\} = \frac{[ac]}{\{aa\}}\,,\quad \ldots\quad \{al\} = \frac{[al]}{\{aa\}}\,,$$

$$\{cc\} = \sqrt{[cc]\,\{ac\}\{ac\}\,\{bc\}\{bc\}}\,,$$

$$\{bl\} = \frac{[bl1]}{\sqrt{[bb1]}} = \frac{1}{\{bb\}}\left([bl] - \{ab\}\{al\}\right), \tag{7}$$

$$\{bc\} = \frac{[bc1]}{\sqrt{[bb1]}} = \frac{1}{\{bb\}}\left([bc] - \frac{[ab]}{[aa]}\,[ac]\right) = \frac{1}{\{bb\}}\left([bc] - \{ab\}\{ac\}\right),$$

$$\{cl\} = \frac{[cl2]}{\sqrt{[cc2]}} = \frac{1}{\{cc\}}\left([cl] - \{ac\}\{al\} - \{bc\}\{bl\}\right).$$

$$\{ll\} = [ll] - \{al\}\{al\} - \{bl\}\{bl\} - \{cl\}\{cl\}$$

usw.

Die Zusammenhänge in (7) lassen sich in allgemeiner Form folgendermaßen schreiben [1, 8]:

1. Im Falle von quadratischen Gliedern

$$\{mm\} = \sqrt{[mm] - \{am\}\{am\} - \{bm\}\{bm\} - \ldots - \{jm\}\{jm\}}. \tag{8a}$$

2. Im Falle von Produktgliedern

$$\{mq\} = \frac{1}{\{mm\}}\left([mq] - \{am\}\{aq\} - \{bm\}\{bq\} - \ldots - \{jm\}\{jq\}\right). \tag{8b}$$

Bei der Betrachtung des Normalgleichungssystems in (4) ist sofort erkennbar, daß bei der Formel in der V. Ausgleichungsgruppe wegen der ungemessenen Unbekannten auch solche quadratische Koeffizienten vorkommen, deren Werte gleich Null sind. Nach den bekannten Formeln ist also die Cholesky-Lösung nicht anwendbar, da Quadratwurzeln aus Gliedern mit negativen Vorzeichen gezogen werden müßten [5]. Im Falle also, wenn z. B. der quadratische Koeffizient $[mm]$ gleich Null ist, wird

$$\{mm\} = \sqrt{0 - \{am\}\{am\} - \{bm\}\{bm\} - \ldots - \{jm\}\{jm\}}. \tag{9}$$

Da jedes Glied des Radikanden mit sich selbst zu multiplizieren ist, bleibt das negative Vorzeichen, infolgedessen ergibt die Quadratwurzelziehung aus der negativen Zahl eine imaginäre Zahl [11]:

$$\begin{aligned}\{mm\} &= \sqrt{-1}\,\sqrt{\{am\}\{am\} + \{bm\}\{bm\} + \ldots + \{jm\}\{jm\}} = \\ &= i\,\sqrt{\{am\}\{am\} + \{bm\}\{bm\} + \ldots + \{jm\}\{jm\}}\end{aligned} \tag{10}$$

ähnlich im Falle von Produktgliedern:

$$\begin{aligned}\{mq\} &= \frac{[mq] - \{am\}\{aq\} - \{bm\}\{bq\} - \ldots - \{jm\}\{jq\}}{i\,\sqrt{\{am\}\{am\} + \ldots + \{jm\}\{jm\}}} = \\ &= -i\,\frac{[mq] - \{am\}\{aq\} - \ldots - \{jm\}\{jq\}}{\sqrt{\{am\}\{am\} + \ldots + \{jm\}\{jm\}}}\end{aligned} \tag{10a}$$

da $1/i = -i$. Im weiteren mag auch der Wert $i \cdot i = i^2 = -1$ und $i/i = 1$ eine Rolle spielen. Es mag vorkommen, daß auch mq gleich Null ist, was aber belanglos ist, da es nicht unter dem Wurzelzeichen steht.

Bei den Lösungen mit der Ausgleichungsgruppe V. werden im allgemeinen die ungemessenen Unbekannten in der Reihenfolge nach den Korrelaten in die Gleichung einbezogen, und dementsprechend stehen auch die quadratischen Koeffizienten mit Nullwert am Ende der Normalgleichun-

gen. Bei der Lösung durch die klassische Gaußsche Elimination ist das eben zweckmäßig, da sich das Gewicht der zuletzt entwickelten ungemessenen Unbekannten in dieser Weise direkt ergibt. Wenn aber zwei oder mehr ungemessene Unbekannte in der Ausgleichung vorkommen, so muß man — um die Gewichte bestimmen zu können — die die Unbekannte eliminierende Entwicklung so oft wiederholen, wieviel Gewichte der Unbekannten zu bestimmen sind. Bei dem modernisierten Gaußschen Algorithmus ist das unnötig, da wir nach der Entwicklung unabhängig von der Reihenfolge der Unbekannten jedes beliebige Gewicht bestimmen können. Freilich, auch hier ist es zweckdienlich aus Gründen der Berechnungswirtschaftlichkeit die ungemessenen Unbekannten zuletzt zu entwickeln, weil wir damit deren Gewicht der Reihe nach erhalten, und so die Bestimmung der Gewichtskoeffizienten der Korrelaten unnötig ist (die übrigens keine Bedeutung haben, wenn sie die Korrelaten betreffen). Nur die Gewichtskoeffizienten der ungemessenen Unbekannten werden also bestimmt.

Im Falle der Cholesky-Lösung ist es ebenfalls gleichgültig, in welcher Reihenfolge die ungemessenen Unbekannten in den Normalgleichungen im Verhältnis zu den Korrelaten vorkommen. Im Gegensatz zur klassischen Gaußschen Elimination sind auch hier die entsprechenden Gewichtskoeffizienten in jedem Fall bestimmbar. Statt der Berechnung der überflüssigen Gewichtskoeffizienten der Korrelaten ist es zweckmäßig, auch bei der Cholesky Lösung, wie gewöhnlich, die ungemessenen Unbekannten am Ende der Gleichungen zu lassen.

Es fragt sich aber, wenn gewisse quadratische Koeffizienten gleich Null sind, wie daraus Unbekannte und Gewichtskoeffizienten mit reellen Werten zu ermitteln sind. Nehmen wir an, daß in Normalgleichungen (3) zwei Korrelaten und eine ungemessene Unbekannte vorkommen, zu welcher der quadratische Koeffizient mit Nullwert $A_{r+1} = A_c = 0$ gehört. Die zur Bestimmung der Unbekannten dienenden Reduktionsglieder sind also den Zusammenhängen (10), (10a) entsprechend:

$$\{A_{r+1}\} = \{A_c\} = \sqrt{0 - \{A_a\}\{A_a\} - \{A_b\}\{A_b\}} = i\sqrt{[\{A\}\{A\}]}\,, \tag{11}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \{L_{r+1}\} = \{L_c\} &= \frac{1}{\{A_c\}}\left(L_c - \{L_a\}\{L_a\} - \{L_b\}\{L_b\}\right) = \\ &= \frac{1}{i\sqrt{[\{A\}\{A\}]}}\left(0 - [\{L\}\{L\}]\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Im Kenntnis der Reduktionen ist der Wert der Unbekannten:

$$x = -\frac{\{L_c\}}{\{A_c\}} = \frac{+[\{L\}\{L\}]}{i^2\,[\{A\}\{A\}]} = \frac{[\{L\}\{L\}]}{-[\{A\}\{A\}]} = -\frac{[\{L\}\{L\}]}{[\{A\}\{A\}]}\,. \tag{13}$$

Somit ergibt sich wieder eine reelle Zahl. Für den Gewichtskoeffizienten der Unbekannten erhalten wir folgenden Zusammenhang:

$$Q_{xx}=\frac{1}{\{A_c\}^2}=\frac{1}{i^2\,(\sqrt{[\{A\}\{A\}]})^2}=\frac{1}{-\,[\{A\}\{A\}]}=-\,\frac{1}{[\{A\}\{A\}]}\,. \tag{14}$$

Wenn in der Ausgleichung mehrere ungemessene Unbekannte vorkommen, ergeben sich für diese sinngemäß ähnlich den Zusammenhängen (13) und (14) die Unbekannten mit reellen Werten, und die zu diesen gehörigen Gewichtskoeffizienten. Für die Produktgewichtskoeffizienten im allgemeinen bei zwei Unbekannten (x, y), wenn x die letztere zu bestimmende Unbekannte war, erhalten wir symbolisch folgendes:

$$Q_{xy}=Q_{xx}\frac{\{mq\}}{\{mm\}}\,. \tag{15}$$

Gemäß den Gleichungen (10) und (10a) wird das imaginäre Produkt in diesem Falle für die ausgerechneten Glieder:

$$\frac{-\,i}{i}=(-\,i)\,(-\,i)=(-\,i)^2=-\,1. \tag{16}$$

In diesem Sinne werden also sowohl die zu den unbekannten Werten gehörenden Koeffizienten als auch die absoluten Glieder und Gewichtskoeffizienten in der zum quadratischen Koeffizienten mit Nullwert gehörenden reduzierten Zeile imaginär, da aber im weiteren immer das Produkt von zwei Spaltenwerten derselben Zeile vorkommt, erhalten wir folglich durch die Multiplikation mit i^2 wieder eine reelle Zahl. Freilich muß man die entsprechenden Vorzeichen der i-Glieder sorgfältig behandeln, unter Berücksichtigung der in (16) und (10a) angegebenen Regeln.

Wegen zweckmäßiger Vereinfachung der Rechenarbeit kann auch hier das in [26] mitgeteilte Verfahren von GERASIMOV angewendet werden, welches bei Programmierung für elektronische Rechenautomaten besonders vorteilhaft ist. Wenn wir unter die r Verbesserungsgleichungen (2) noch die folgenden berechenbaren Zeilen schreiben ([1], S. 162—163.), erhalten wir entsprechend der Koeffiziententabelle:

$$\begin{aligned} b_{r+q+1}&=\frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}}\,i\,,\quad c_{r+q+1}=\frac{[ac]}{\sqrt{[aa]}}\,i\,,\quad \ldots,\quad A_{r+q+1}=\\ &=\frac{A_a}{\sqrt{[aa]}}\,i\,,\ \ldots,\ L_{r+q+1}=\frac{L_a}{\sqrt{[aa]}}\,i \\ c_{r+q+2}&=\frac{[bc1]}{\sqrt{[bb1]}}\,i\,,\ \ldots,\ A_{r+q+2}=\frac{[A_b1]}{\sqrt{[bb1]}}\,i\,,\ \ldots,\ L_{r+q+2}=\frac{[L_b1]}{\sqrt{[bb1]}}\,i\,, \end{aligned} \tag{17}$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist. Im Hinblick auf diese Gleichungen müssen wir nur die erste Normalgleichung von (4) entsprechend der Koeffiziententabelle in die Entwicklungstabelle schreiben, da wir durch die Einbeziehung der ersten Gleichung in (17) in die Aufstellung der Normalgleichungen sofort die erste reduzierte Normalgleichung erhalten, weil

$$\begin{aligned}
[bb1] &= b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_r^2 + \left(\frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}}\, i\right)^2, \\
[bc1] &= b_1 c_1 + b_2 c_2 + \ldots + b_r c_r + \left(\frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}}\, i\right)\left(\frac{[ac]}{\sqrt{[aa]}}\, i\right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[A_b 1] &= A_b + \quad + \left(\frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}}\, i\right)\left(\frac{A_a}{\sqrt{[aa]}}\, i\right) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[L_b 1] &= L_b + \quad + \left(\frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}}\, i\right)\left(\frac{L_a}{\sqrt{[aa]}}\, i\right).
\end{aligned} \tag{18}$$

Ähnlich ergibt sich unter Berücksichtigung der zweiten Gleichung in (17) sogleich die zweimal reduzierte Normalgleichung, weil

$$\begin{aligned}
[cc2] &= c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_r^2 + \left(\frac{[ac]}{\sqrt{[aa]}}\, i\right)^2 + \left(\frac{[bc1]}{\sqrt{[bb1]}}\, i\right)^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[A_b 2] &= A_b + \quad + \left(\frac{[ab]}{\sqrt{[aa]}}\, i\right)\left(\frac{A_a}{\sqrt{[aa]}}\, i\right) + \left(\frac{[bc1]}{\sqrt{[bb1]}}\, i\right)\left(\frac{A_b 1}{\sqrt{[bb1]}}\, i\right), \\
[A_c 2] &= A_c + \quad + \left(\frac{[ac]}{\sqrt{[aa]}}\, i\right)\left(\frac{A_c}{\sqrt{[aa]}}\, i\right) + \left(\frac{A_b 1}{\sqrt{[bb1]}}\, i\right)\left(\frac{A_b 1}{\sqrt{[bb1]}}\, i\right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[L_c 2] &= L_c + \quad + \left(\frac{[ac]}{\sqrt{[aa[}}\, i\right)\left(\frac{L_a}{\sqrt{[aa]}}\, i\right) + \left(\frac{[bc1]}{\sqrt{[bb1]}}\, i\right)\left(\frac{L_b 1}{\sqrt{[bb1]}}\, i\right).
\end{aligned} \tag{19}$$

Durch sinngemäße Weiterentwicklung des obigen können wir auch die zum quadratischen Koeffizienten mit Nullwert der Gleichung $r + 1$ gehörenden reduzierten Werte erhalten. So gewinnen wir bei der praktischen Durchführung der Berechnungen sogleich die der Gleichung (6) entsprechenden Koeffizienten, und das Anschreiben der Koeffizienten der ursprünglichen Normalgleichung fällt fort. Die weitere Rechenarbeit besteht nur aus der Auflösung dieser Gleichungen sowie aus der Berechnung der entsprechenden Gewichtskoeffizienten. Die zur Bestimmung der Gewichtskoeffizienten nötige Reduktions-

tabelle ist auf Grund des der Gleichungen in (17) entsprechenden Prinzips aufgebaut, unter Berücksichtigung, daß die quadratischen Koeffizienten in den ursprünglichen Gleichungen gleich — 1, die übrigen aber gleich Null sind. Da die tabellenmäßige Form der Lösung mit dem bei der V. Ausgleichungsgruppe anwendbaren entwickelten Cholesky-Schema identisch ist, nur kommt von den Normalgleichungen im oberen Teil der Tabelle bloß die erste vor, beschreiben wir sie nicht gesondert, wir weisen nur auf das unten ausgearbeitete Schema hin.

Bevor wir aber auf dieses eingehen, soll erwähnt werden, daß das für den allgemeinen Fall der Ausgleichung beschriebene Schema auch mit der zur Gewichtsberechnung der Funktion von Funktionen nötigen Reduktionstabelle ergänzt werden kann. Wenn wir den mittleren Fehler μ_F der Funktion F nach der Ausgleichung suchen, dann können wir entsprechend der Funktionsform folgenden Zusammenhang aufschreiben:

$$\begin{aligned} F &= F\,(\sigma_1 + v_1,\ \sigma_2 + v_2,\ \ldots,\ \sigma_n + v_n,\ x, y\ \ldots) = \\ &= F_0 + f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 + \ldots + f_n v_n + \bar{f}_x \delta x + \bar{f}_y \delta y + \ldots \end{aligned} \tag{20}$$

wo

$$\begin{aligned} F_0 &= F(\sigma_1,\ \sigma_2\ \ldots\ \sigma_n,\ x_0, y_0\ \ldots) \\ f_i &= \frac{\partial F}{\partial \sigma_i}, \quad \bar{f}_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial F}{\partial y}. \end{aligned} \tag{21}$$

Der mittlere Fehler der Funktion nach der Ausgleichung ist

$$\mu_F = \mu_0 \sqrt{Q_{FF}}, \tag{22}$$

wo die Verbesserungen mit den entsprechenden Korrelaten ausgedrückt werden können, also bei $p_i = 1$:

$$F = F_0 + [af]\, k_1 + [bf]\, k_2 + \ldots + \bar{f}_x \delta x + \bar{f}_y \delta y + \ldots,$$

wo die Beobachtungen selbst als Näherungswerte eingeführt werden, also $[fl] = 0$ ist. Wenn wir diese Koeffizienten $[af]$, $[bf] \ldots \bar{f}_x$, $\bar{f}_y, \ldots$ usw. in eine besondere Spalte eintragen, dann ist der entsprechende Gewichtskoeffizient auf Grund der nachstehenden Reduktionsgleichung ausdrückbar:

$$\begin{aligned} Q_{FF} = \Bigg\{ [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf1]^2}{[bb1]} - \frac{[rf(r-1)]}{[rr(r-1)]} + \frac{\{\bar{f}_x(r)\}^2}{\{A(r)\}} + \\ + \frac{\{\bar{f}_y(r+1)\}^2}{\{B(r)\}} + \ldots \Bigg\} = [ff(r+q)] = \{ff(r+q)\}. \end{aligned} \tag{23}$$

Wenn wir also die Auflösungstabelle der Gleichungen mit den der Funktion F entsprechenden Koeffizientengliedern ergänzen, kann man direkt den Gewichtskoeffizienten der Funktion erhalten. Nichts hindert uns daran, daß wir die Gewichtskoeffizienten auch mehrerer Funktionswerte nach der Ausgleichung bestimmen. Der Gang der Berechnung wird in einer entsprechenden Tabelle mitgeteilt. Dieselbe für die vermittelnden Beobachtungen ist in [13], für die vermittelnden und bedingten Beobachtungen in [14] zu finden.

Bei den Auflösungen gemäß der V. Ausgleichungsgruppe können wir derartigen mittleren Fehlerberechnungen von Funktionen öfters begegnen. Wenn wir z. B. von irgendeiner mittleren Seite des an beiden Enden ange-

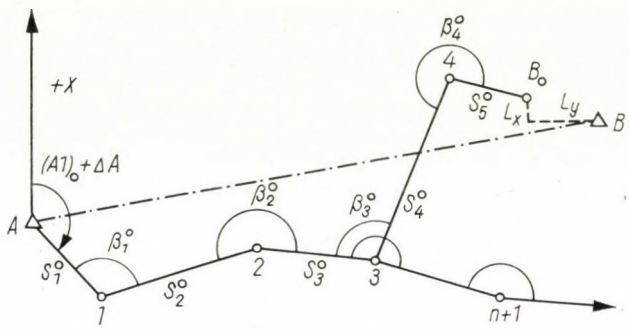

Bild 1

schlossenen Einrechnungszuges ausgehend, einen neuen Polygonzug anschließen wollen (Bild 1.), dann mag gegebenenfalls die Frage entstehen, wie genau die Orientierungsseite des sich abzweigenden Polygonzuges ist [15]. Übrigens, ein solcher Gang der Berechnung läßt sich auch vereinfachen, wenn z. B. gleich bei dem Aufschreiben der Bedingungsgleichungen diese Richtung (2,3) als die ungemessene Unbekannte behandelt wird, dann ergibt sich direkt die Unbekannte und deren Gewichtskoeffizient [3]. Wir können aber auch z. B. die Koordinaten x und y des Punktes 3 einführen, für welche wir nach Ausgleichung die Gewichtskoeffizienten suchen.

Bevor das Rechnungsschema vorgelegt wird, wollen wir noch kurz andeuten, daß entsprechend den obigen Prinzipien die Choleskysche Methode auch für die VI. Ausgleichungsgruppe (Ausgleichung bedingter Beobachtungen mit ungemessenen Unbekannten und mit nur unter den letzteren bestehenden Zwangsbedingungsgleichungen [16, 17]) anwendbar ist, da in diesem Falle die quadratischen Koeffizienten mit Nullwerten bei der üblichen Aufstellungsmethode der Normalgleichungen nicht in den letzten Gleichungen, sondern irgendwo in der Mitte stehen werden. So werden auch die imaginären reduzierten Koeffizienten irgendwo in der Mitte der Tabelle bzw. vor den wegen

der Zwangsbedingungsgleichungen sich ergebenden Normalgleichungen stehen. Durch das Produkt der i-Glieder werden wir in den nächsten Zeilen wieder reelle Zahlen erhalten. Ähnlich lassen sich auch hier die Zahlenschemen durch eine zur mittleren Fehlerberechnung der Funktion von Funktionen nötige Koeffizientenspalte ergänzen, durch deren Reduktion wir den entsprechenden Gewichtskoeffizienten erhalten [18]. Gegebenenfalls bietet sich auch hier die Möglichkeit, zugleich die Gewichtskoeffizienten von mehreren Funktionen und die die gegenseitige Abhängigkeit ausdrückenden Produktgewichtskoeffizienten zu bestimmen, deren Kenntnis sich wegen einer weiteren Ausgleichung nötig erweisen mag.

Die Verfahren der Ausgleichung der gegenseitig abhängigen Werte legt TIENSTRA dar [19], doch eine eingehende Analyse ist auch in [1] S. 107—118. zu finden. Wenn wir unsere Beobachtungen schon einmal vorher einer Ausgleichung unterzogen und im weiteren diese bzw. deren gewisse Funktionen in die Hauptausgleichung eingeführt werden, so sind diese als gegenseitig abhängige Werte zu behandeln. Bei dem Ordnen der verschiedenen Ausgleichungsformen unterscheiden wir auch hier fünf Gruppen, ähnlich den schon bekannten, nur daß die in die Ausgleichung eingeführten Werte nicht voneinander unabhängig sind. Im allgemeinen Falle sind die entsprechenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&a_1 (U_1 + e_1) + a_2 (U_2 + e_2) + \ldots + A_a \delta x + B_a \delta y + \ldots + l_a = 0\,, \\
&b_1 (U_1 + e_1) + b_2 (U_2 + e_2) + \ldots + A_b \delta x + B_b \delta y + \ldots + l_b = 0\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&r_1 (U_1 + e_1) + r_2 (U_2 + e_2) + \ldots + A_r \delta x + B_r \delta y + \ldots + l_r = 0,
\end{aligned} \tag{24}$$

wo U_1, $U_2 \ldots$ die gegenseitig abhängigen fingierten Beobachtungen (mit Gewichtskoeffizienten Q_{11}, Q_{12}, $Q_{13}, \ldots$ Q_{22}, $Q_{23}, \ldots$, $Q_{33} \ldots$), e_1, $e_2, \ldots$ die zu diesen gehörenden Verbesserungen, x und $y \ldots$ die ungemessenen Unbekannten, A_a, $A_b, \ldots$, B_a, $B_b, \ldots$ deren Koeffizienten, a_1, $a_2 \ldots$, b_1, $b_2, \ldots$ die Koeffizienten der fingierten Beobachtungen und l_a, l_b, $l_c, \ldots$ die Absolutglieder sind. Aus Gleichungsgruppe (24) geht sofort hervor, daß es sich hier um die Ausgleichung solcher gegenseitig abhängigen Beobachtungen handelt, welche gewisse Bedingungen mit dem Einbeziehen der ungemessenen Unbekannten befriedigen müssen. Das ist also auch hier der allgemeine Fall der Ausgleichung, während die übrigen Gruppen wieder dem schon bekannten Verfahren gemäß als Spezialfälle abzuleiten sind. Da die auf die fingierten Beobachtungen bezüglichen Verbesserungen e_1, $e_2, \ldots$ nicht unabhängig sind, muß man diese dem bei der Eggertschen Ausgleichung von Kettensystemen bekannten Verfahren entsprechend durch solche Verbesserungen ausdrücken, die voneinander unabhängig sind. Das läßt sich mit den entsprechenden

Gewichtskoeffizienten folgendermaßen lösen ([1], S. 109.):

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \sqrt{Q_{11}} = \lambda_1\,, \quad e_2 = \frac{Q_{12}}{\sqrt{Q_{11}}}\,\lambda_1 + \sqrt{Q_{22}\,1}\,\lambda_2\,,\\
e_3 &= \frac{Q_{13}}{\sqrt{Q_{11}}}\,\lambda_1 + \frac{Q_{23}\,1}{\sqrt{Q_{22}\,1}}\,\lambda_2 + \sqrt{Q_{33}\,2}\,\lambda_3\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e_r &= \frac{Q_{1r}}{\sqrt{Q_{11}}}\,\lambda_1 + \frac{Q_{2r}\,1}{\sqrt{Q_{22}\,1}}\,\lambda_2 + \ldots + \sqrt{Q_{rr}(r-1)}\,\lambda_r\,.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Wenn diese in Gleichung (24) eingesetzt werden und das entsprechende Ordnen durchgeführt wird, erhalten wir durch das Zusammenziehen der Absolutglieder in L:

$$
\begin{aligned}
&\left(a_1\sqrt{Q_{11}} + a_2\frac{Q_{12}}{\sqrt{Q_{11}}} + a_3\frac{Q_{13}}{\sqrt{Q_{11}}} + \ldots\right)\lambda_1 + \left(a_2\sqrt{Q_{22}\,1} + a_3\frac{Q_{23}\,1}{\sqrt{Q_{22}\,1}}\right)\lambda_2 +\\
&\qquad + (a_3\sqrt{Q_{33}\,2} + \ldots)\,\lambda_3 + \ldots + A_a\,\delta x + B_a\,\delta y + \ldots + L_a = 0\,,\\
&\left(b_1\sqrt{Q_{11}} + b_2\frac{Q_{12}}{\sqrt{Q_{11}}} + b_3\frac{Q_{13}}{\sqrt{Q_{11}}} + \ldots\right)\lambda_1 + \left(b_2\sqrt{Q_{22}\,1} + b_3\frac{Q_{23}\,1}{\sqrt{Q_{22}\,1}} + \ldots\right)\lambda_2 +\\
&\qquad + b_3\sqrt{Q_{33}\,2} + \ldots)\,\lambda_3 + \ldots + A_b\,\delta x + B_b\,\delta y + \ldots + L_b = 0\,.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Daraus erhalten wir mit den in der Fachliteratur üblichen Bezeichnungen folgende Normalgleichungen:

$$
\begin{aligned}
&\{\mathrm{I}\cdot\mathrm{I}\}\;k_a + \{\mathrm{I}\cdot\mathrm{II}\}\,k_b + \ldots + \{\mathrm{I}\cdot r\}\,k_r + A_a\,\delta x + B_a\,\delta y + \ldots + L_a = 0\,,\\
&\{\mathrm{I}\cdot\mathrm{II}\}\,k_a + \{\mathrm{II}\cdot\mathrm{II}\}\,k_b + \ldots + \{\mathrm{II}\cdot r\}\,k_r + A_b\,\delta x + B_b\,\delta y + \ldots + L_b = 0\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\{\mathrm{I}\cdot r\}\,k_a + \{\mathrm{II}\cdot r\}\;k_b + \ldots + \{r\cdot r\}\;k_r + A_r\,\delta x + B_r\,\delta y + \ldots + L_r = 0\,,\\
&\qquad A_a\,k_a + A_b\,k_b + \ldots + A_r\,k_r = 0\,,\\
&\qquad B_a\,k_a + B_b\,k_b + \ldots + B_r\,k_r = 0\,,\\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Es ist offensichtlich, daß der allgemeine Fall der Ausgleichung auch hier zur Lösung solcher Normalgleichungen führt, bei welchen einige quadratische Koeffizienten gleich Null sind, d. h., die Abwicklung ergibt gemäß der Choleskyschen Methode imaginäre Zahlen. Die Lösung des Problems ist ähnlich den früheren. Es ist zweckmäßig, wirtschaftlichkeitshalber die modernen und schnellen Verfahren in der Lösung der Gleichungen anzuwenden. Außer geodätischen Messungen begegnen wir auf gegenseitig abhängige Werte

bezüglichen Lösungen besonders bei den in der Photogrammetrie vorkommenden Ausgleichungsaufgaben (gegenseitige und absolute Orientierung, Aerotriangulation, usw.) [20]. Da unsere Beobachtungen vor der Hauptausgleichung einer Vorausgleichung oder der Bestimmung einer von den gemeinsamen Gleichungen herrührenden Unbekannten unterzogen wurden, ergibt daher die strenge Auflösung der weiteren Ausgleichung gegenseitig abhängige Werte, vorausgesetzt, daß die Unabhängigkeit der berechneten Werte aus dem vorhergehenden Rechnungsgang nicht zu sichern ist (z. B. bei der Ausgleichung der Schreiberschen Winkelmessung sind die berechneten Werte unabhängig). Wenn die Werte der die gegenseitigen Abhängigkeiten ausdrückenden Gewichtskoeffizienten auf die übrigen Gewichtskoeffizienten bezogen klein sind, ist es erlaubt, auf Grund von gewissen Erwägungen auf die Abhängigkeit zu verzichten.

*

Auf Grund des obigen können wir nun das Schema der auf den allgemeinen Fall der Ausgleichung (V. Ausgleichungsgruppe) bezüglichen Choleskyschen Gleichungsauflösung aufstellen (auch die gegenseitig abhängigen Werte miteinbegriffen, da das hinsichtlich der Normalgleichungen keine Änderung bedeutet). Die tabellenmäßige Lösung ist so zusammengestellt, daß die Berechnung von $[vv]$ bzw. $[pvv]$ sowie die Bestimmung der Gewichte, bezüglich auf die ungemessenen Unbekannten als auch auf die Funktionen der Beobachtungen und Unbekannten, möglich seien. Zur Bestimmung der Produktgewichtskoeffizienten bietet sich ebenfalls Möglichkeit. Die vielen Operationszeilen bzw. Spalten werden bei den Proben in Betracht gezogen. Die Methoden des allgemeinen Aufbaus der Tabelle verfolgt die in der Literatur bekannten Schemen [1, 2, 7, 8, 13, 14, 21, 22]. Gegenüber dem bishergesagten erscheinen die mit i multiplizierten Werte bei der Reduktion der Gleichungen mit quadratischen Koeffizienten mit Nullwerten. Um die Zahlenwerte leichter zu berechnen, sind auch die das i betreffenden Operationsformeln angegeben. Dasselbe bezieht sich auch auf die Bestimmung der Gewichtskoeffizienten. Außer der Bestimmung der Unbekannten der Normalgleichungen bietet sich Möglichkeit auch zur Berechnung der Gewichtskoeffizienten. Es ist selbstverständlich, daß in diesem Falle zu den Korrelaten keine Gewichtskoeffizienten bestimmt werden, da diese keine praktische Bedeutung haben. Durch die tabellenmäßige Abwicklung werden zugleich die Zuschläge der Funktionswerte sowie die zu diesen gehörigen Gewichtskoeffizienten bestimmt. Da gegebenenfalls nötig sein mag, ist auch die auf die Berechnung der Produktgewichtskoeffizienten bezügliche tabellenmäßige Rechnungsform angegeben. In die Proben wurden auch die auf die Funktionen bezüglichen Werte miteinbezogen. Doch können wir ruhig die diesbezüglichen Spalten an das Ende der Tabelle stellen und damit sind die Probegleichungen bloß auf das ursprüng-

liche Normalgleichungssystem zu beziehen. Am Ende der Zahlentabellen sind auch die Methoden der einzelnen Kontrollrechnungen sowie die Zusammenhänge der entsprechenden Berechnungen des mittleren Fehlers angegeben (Tab. I). Die auf die einzelnen Berechnungen bezüglichen Formeln und Zusammenhänge sind im theoretischen Teil angegeben, bzw. die Reihenfolge der Rechnungen der Tabelle ist demgemäß aufgebaut. Wenn zur Bestimmung der Näherungswerte der Funktion nicht die Beobachtungen als Grundlage

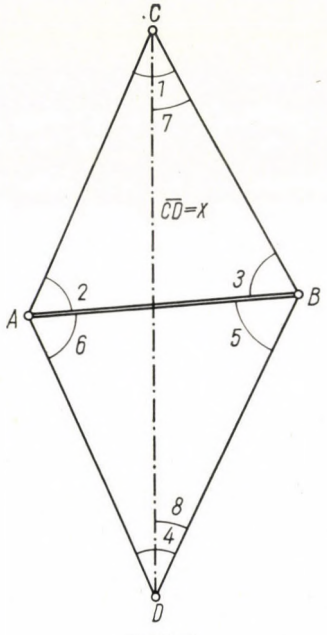

Bild 2

dienen, können wir an die Stellen 72 und 73 die Werte $[f_{\mathrm{I}}\, l']$ bzw. $[f_{\mathrm{II}}\, l']$ eintragen, so z. B. $l'_1 = o_1 - o_{1,0}$, $l'_2 = o_2 - o_{2\,0}$ (o_1, o_2, o_3 ... sind die Beobachtungen, $o_{1,0}$, $o_{2\,0}$, $o_{3,0}$, ... die eingeführten Näherungswerte). Da das von uns angewandte Verfahren viel üblicher ist, sind Nullwerte in die entsprechenden Stellen der Tabelle einzutragen, die Glieder mit $[ff]$ werden in den unteren, die Gewichtskoeffizienten enthaltenden Teil der Tabelle geschrieben (damit wegen der Produktglieder keine Schwierigkeiten entstehen). In der Studie von HÖNYI — da er keinen Produktgewichtskoeffizienten berechnet — findet sich das an der 72 und 73 entsprechenden Stellen, wenn $l'_1 = l'_2 = 0$, $[fl'] = 0$ ist. Wenn dieser letztere Zusammenhang nicht besteht, dann ist freilich auch die S-Probe dem entsprechenden Wert zu ergänzen, Auf Grund dieses allgemeinen tabellenmäßigen Aufbaues läßt sich natürlich ein jede beliebige, davon ableitbare Ausgleichungsgruppe betreffendes Schema zusammenstellen.

Tabelle I

k_a	k_b	k_c	δx	δy	L	Qk_1	Qk_2	Qk_3	Qx	Qy	$-F_{\mathrm{I}}$	$-F_{\mathrm{II}}$	S	Σ Probe
$[aa]$ 1	$[ab]$ 2	$[ac]$ 3	A_a 4	B_a 5	L_a 6	-1 7	0 8	0 9	0 10	0 11	$-[af_{\mathrm{I}}]$ 12	$-[af_{\mathrm{II}}]$ 13	$[aa]+[cb]+[ac]+ +A_a+B_a-1- -[af_{\mathrm{I}}]-[af_{\mathrm{II}}]$ 14	$1+2+3+4+5+ +6+7+8+9+ +10+11+12+13$ 15 = 14
	$[bb]$ 16	$[bc]$ 17	A_b 18	B_b 19	L_b 20	0 21	-1 22	0 23	0 24	0 25	$-[bf_{\mathrm{I}}]$ 26	$-[bf_{\mathrm{II}}]$ 27	$[ab]+[bb]+[bc]+ +A_b+B_b-1- -[bf_{\mathrm{I}}]-[bf_{\mathrm{II}}]$ 28	$2+16+17+18+19 +20+21+22+23 +24+25+26+27$ 29 = 28
		$[cc]$ 30	A_c 31	B_c 32	L_c 33	0 34	0 35	-1 36	0 37	0 38	$-[cf_{\mathrm{I}}]$ 39	$-[cf_{\mathrm{II}}]$ 40	$[ac]+[bc]+[cc]+ +A_c+B_c-1- -[bf_{\mathrm{I}}]-[bf_{\mathrm{II}}]$ 41	$4+18+30+31+32+ +33+34+35+36+ +37+38+39+40$ 42 = 41
			0 43	0 44	0 45	0 46	0 47	0 48	-1 49	0 50	$-\bar{f}_{\mathrm{Ix}}$ 51	$-\bar{f}_{\mathrm{IIx}}$ 52	$A_a+A_b+A_c-1- -f_{\mathrm{Ix}}-f_{\mathrm{IIx}}$ 53	$4+18+31+43+44+ +45+46+47+48+ +49+50+51+52$ 54 = 53
				0 55	0 56	0 57	0 58	0 59	0 60	-1 61	$-\bar{f}_{\mathrm{Iy}}$ 62	$-\bar{f}_{\mathrm{IIy}}$ 63	$B_a+B_b+B_c-1- -f_{\mathrm{Iy}}-f_{\mathrm{IIy}}$ 64	$5+19+32+44+55+ +56+57+58+59+ +60+61+62+63$ 65 = 64
					0 66	0 67	0 68	0 69	0 70	0 71	0 72	0 73	$L_a+L_b+L_c$ 74	$6+20+33+45+56+ +66+67+68+69+ 70+71+72+73$ 75 = 74
$\sqrt{1}$ 76	$\frac{2}{76}$ 77	$\frac{3}{76}$ 78	$\frac{4}{76}$ 79	$\frac{5}{76}$ 80	$\frac{6}{76}$ 81	$\frac{7}{76}$ 82	0 83	0 84	0 85	0 86	$\frac{12}{76}$ 87	$\frac{13}{76}$ 88	$\frac{14}{76}$ 89	$76+77+78+79+80 +81+82+83+84 +85+86+87+88$ 90 = 89
	$\sqrt{16-77^2}$ 91	$\frac{17-78\cdot77}{91}$ 92	$\frac{18-77\cdot79}{91}$ 93	$\frac{19-77\cdot80}{91}$ 94	$\frac{20-77\cdot81}{91}$ 95	$\frac{21-77\cdot82}{91}$ 96	$\frac{22}{91}$ 97	0 98	0 99	0 100	$\frac{26-77\cdot87}{91}$ 101	$\frac{27-77\cdot88}{91}$ 102	$\frac{28-77\cdot89}{91}$ 103	$91+92+93+94+95+ +96+97+98+99+ +100+101+102$ 104 = 103
		$\sqrt{30-78-{}^{2}92^2}$ 105	$\frac{31-78\cdot79-92\cdot93}{105}$ 106	$\frac{32-78\cdot80-92\cdot94}{105}$ 107	$\frac{33-78\cdot81-92\cdot95}{105}$ 108	$\frac{34-78\cdot82-92\cdot96}{105}$ 109	$\frac{35-92\cdot97}{105}$ 110	$\frac{36}{105}$ 111	0 112	0 113	$\frac{39-78\cdot87-92\cdot101}{105}$ 114	$\frac{40-78\cdot88-92\cdot102}{105}$ 115	$\frac{41-78\cdot89-92\cdot103}{105}$ 116	$105+106+107+108+ +109+110+111+ +112+113+114+115$ 117 = 116
			$i\sqrt{79^2+93^2+106^2}$ 118	$\frac{44-79\cdot80- -93\cdot94-106\cdot107}{118}$ 119	$\frac{45-79\cdot81-93\cdot95-10\cdot108}{118}$ 120	$\frac{46-79\cdot82-93\cdot96-106\cdot109}{118}$ 121	$\frac{47-79\cdot83-9\cdot97-106\cdot110}{118}$ 122	$\frac{48-106\cdot111}{118}$ 123	$\frac{49}{118}$ 124	0 125	$\frac{51-79\cdot87-92\cdot101- -106\cdot114}{118}$ 126	$\frac{52-79\cdot88-93\cdot102- -106\cdot115}{118}$ 127	$\frac{53-79\cdot89-93\cdot103-106\cdot116}{118}$ 128	$118+119+120+121+ +122+123+124+ +125+126+127$ 129 = 128
				$i\sqrt{80^2+94^2+107^2+119^2}$ 130	$\frac{56-80\cdot81-94\cdot95- -107\cdot108-119\cdot120}{130}$ 131	$\frac{57-80\cdot82-94\cdot96- -107\cdot108-119\cdot121}{130}$ 132	$\frac{58-94\cdot97-107\cdot110- -119\cdot122}{130}$ 133	$\frac{59-107\cdot111- -119\cdot123}{130}$ 134	$\frac{60-119\cdot124}{130}$ 135	$\frac{61}{130}$ 136	$\frac{62-80\cdot87-94\cdot101- -107\cdot114-119\cdot126}{130}$ 137	$\frac{63-80\cdot88-94\cdot102- -107\cdot115-119\cdot127}{130}$ 138	$\frac{64-80\cdot89-94\cdot103-107\cdot116- -119\cdot128}{130}$ 139	$130+131+132+133+ +134+135+136+ +137+138$ 140 = 139
					66 − 81² − 95² − 108² − 120² − 131² 141	67 − 81 · 82 − 95 · 96 − 108 · 109 − 120 · 121 − 131 · 132 142	68 − 95 · 97 − 108 · 110 − 120 · 122 − 131 · 133 143	69 − 108 · 111 − 120 · 123 − 131 · 134 144	70 − 120 · 124 − 131 · 135 145	71 − 131 · 136 146	72 − 81 · 87 − 95 · 101 − 108 · 114 − 120 · 126 − 131 · 137 147	73 − 81 · 88 − 95 · 102 − 108 · 115 − 120 · 127 − 131 · 138 148	74 − 81 · 89 − 95 · 103 − 108 · 116 − 120 · 128 − 131 · 139 149	$141+142+143+ +144+145+146+ 147+148$ 150 = 149
									Q_x	124^2+135^2 151	$135\cdot136$ 152	$124\cdot126+135\cdot137$ 153	$124\cdot127+135\cdot138$ 154	
										Q_y	136^2 155	$136\cdot137$ 156	$136\cdot138$ 157	
											F_{I}	$-[f_{\mathrm{I}}f_{\mathrm{I}}]+87^2+101^2+114^2+ +126^2+137^2$ 158	$-[f_{\mathrm{I}}f_{\mathrm{II}}]+87\cdot88+101\cdot102+ +114\cdot115+126\cdot127+ +137\cdot138$ 159	
												F_{II}	$-[f_{\mathrm{II}}f_{\mathrm{II}}]+88^2+102^2+115^2+ +127^2+138^2$ 160	

$-[vv] = 141$ $+Q_{xx} = 151$
$-k_a = 142$ $+Q_{xy} = 152$
$-k_b = 143$ $-Q_{x\,F_{\mathrm{I}}} = 153$
$-k_c = 144$ $-Q_{x\,F_{\mathrm{II}}} = 154$
$-\delta_x = 145$ $+Q_{yy} = 155$
$-\delta_y = 146$ $-Q_{y\,F_{\mathrm{I}}} = 156$
$-\delta_{F_{\mathrm{I}}} = 147$ $-Q_{F_{\mathrm{II}}} = 157$
$-\delta_{F_{\mathrm{II}}} = 148$ $-Q_{F_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{I}}} = 158$
$-Q_{F_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{II}}} = 159$
$-Q_{F_{\mathrm{II}}F_{\mathrm{II}}} = 160$

Zusammenhänge der Erklärung:

$\sqrt{-1} = i$
$1/i = -i$
$ii = i^2 = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = -1$
$i/i = +1$

Probe

$[vv] = -[Lk] = (142\cdot6 + 143\cdot20 + 144\cdot33) = 161$

Überprüfung sämtlicher ursprünglicher Normalgleichungen (I—V-ig) = 162

Berechnung von Unbekannten und mittleren Fehlern

$$x = x_0 + \delta_x = 163 \qquad y = y_0 + \delta_y = 164$$

$$F_{\mathrm{I}} = F_{\mathrm{I},0} + [af_{\mathrm{I}}]k_a + [bf_{\mathrm{I}}]k_b + \ldots + \bar{f}_{\mathrm{Ix}}\delta_x + \bar{f}_{\mathrm{Iy}}\delta_y + \ldots = F_{\mathrm{I},0} + \delta F_{\mathrm{I}} = 165$$

$$F_{\mathrm{II}} = F_{\mathrm{II},0} + [af_{\mathrm{II}}]k_a + [bf_{\mathrm{II}}]k_b + \ldots + \bar{f}_{\mathrm{IIx}}\delta_y + \bar{f}_{\mathrm{IIy}}\delta_y + \ldots = F_{\mathrm{II},0} + \delta F_{\mathrm{II}} = 166$$

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{r-2}} = 167$$

$$\mu_x = \mu\sqrt{Q_{xx}} = 168$$

$$\mu_y = \mu\sqrt{Q_{yy}} = 169$$

$$\mu_{F\mathrm{I}} = \mu\sqrt{Q_{F_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{I}}}} = 170$$

$$\mu_{F\mathrm{II}} = \mu\sqrt{Q_{F_{\mathrm{II}}F_{\mathrm{II}}}} = 171$$

So z. B. auch bei der Auflösung der vermittelnden Ausgleichungen mit Zwangsbedingungen ergeben sich quadratische Koeffizienten mit Nullwerten in den entsprechenden Normalgleichungen, allerdings mit dem Unterschied, daß bei dieser Ausgleichungsgruppe (IV. Gruppe) in den aus den Zwangsbedingungen hergeleiteten Normalgleichungen auch Absolutglieder vorkommen. Die Auflösung dieser Gleichungen, die Bestimmung der Gewichtskoeffizienten der Unbekannten und Funktionen auf Grund des obigen bedeutet keine Schwierigkeit.

An die Stelle 66. ist im Falle der II. und IV. Gruppen das Glied $[ll]$ oder $[pll]$ zu schreiben.

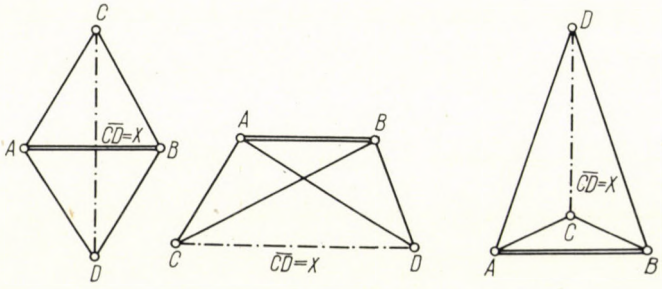

Bild 3

Als Beispiel wird die auf Grund der im Bild 2 bezeichneten Beobachtungen einer Grundlinie auszuführende Ausgleichung erwähnt [5]. Wir bemerken, daß die in [5] mitgeteilte, den vermittelnden Beobachtungen gemäße Auflösung nur bei der in Bild 3 entsprechenden einmaligen Übertragung in Frage kommt, da z. B. entsprechend der Form in Bild 4. wegen der vielen Unbekannten zu viel Normalgleichungen entstehen würden. Es sei vorausgesetzt, daß die Winkelmessungen mit unvermeidlichen Beobachtungsfehlern belastet sind, während die gemessene Länge $\overline{AB}$ als fehlerfrei betrachtet wird. Die Winkelmessungen sind für gleich genau angenommen. Die Beobachtungsergebnisse sind in Tabelle II enthalten. Wenn wir den mittleren Beobachtungsfehler der Grundlinie $\overline{AB}$ ermittelt hätten, könnten wir unter Berücksichtigung seines Gewichtes auch diese verbessern, doch um mit [5] besser vergleichen zu können, dürfen wir darauf verzichten. Wenn wir bei der der V. Ausgleichungsgruppe gemäßen Auflösung die entwickelte Seite $\overline{CD} = x$ als ungemessene Unbekannte einführen, müssen wir der Form entsprechend insgesamt 5 Bedingungsgleichungen aufschreiben:

$$\left.\begin{array}{lll} a) & 1 + 2 + 3 - 180^\circ & = 0 \\ b) & 4 + 5 + 6 - 180^\circ & = 0 \\ c) & 3 + 5 + 7 + 8 - 180^\circ & = 0 \end{array}\right\} \text{3 Winkelbedingungen}$$

$$d)\quad \frac{\sin 2 \sin 4 \sin 7}{\sin 1 \sin 6 \sin 8} = 1 \qquad \Big\} 1 \text{ Seitenbedingung}$$

$$e)\quad \overline{AB}\,\frac{\sin 2 \sin (3+5)}{\sin 1 \sin 8} - x = 0 \Big\} 1 \text{ Längenbedingung}$$

Tabelle II

Nr	Wert der gemessenen Winkel			Gewicht
1	47°	46′	12,36″	1
2	63°	12′	29,22″	1
3	69°	01′	19,31″	1
4	53°	51′	37,50″	1
5	55°	28′	26,26″	1
6	70°	39′	54,65″	1
7	27°	16′	50,14″	1
8	28°	13′	23,45″	1
Länge, der gemessenen Basis $\overline{AB} = 5\,879{,}989$ m				∞

Die Beobachtungswerte werden — um sie von den ausgeglichenen (1,2,3...) zu unterscheiden — mit 1′, 2′, 3′... usw., die Verbesserungen mit v bezeichnet. Die Gleichungen in *d)* und *e)* werden durch Logarithmieren in lineare Form gebracht, doch vorher wird ein Näherungswert für x auf Grund der Gleichung *e)* bestimmt. Durch Einsetzen der Beobachtungswerte in die Bedingungsgleichungen erhalten wir die Widersprüche der Gleichungen, die Absolutglieder. Tabelle III enthält die Verbesserunsghichungen in tabellenmäßiger Form. Demgemäß sind die Normalgleichungen wie folgt:

$$\begin{aligned}
+3\,k_a + 0\,k_b + 1\,k_c - 0{,}86\,k_d - 2{,}31\,k_e \quad &+ 0{,}79 = 0\,,\\
0\,k_a + 3\,k_b + 1\,k_c + 0{,}81\,k_d - 1{,}45\,k_e \quad &- 1{,}59 = 0\,,\\
+1\,k_a + 1\,k_b + 4\,k_c + 0{,}16\,k_d - 6{,}82\,k_e \quad &- 0{,}84 = 0\,,\\
-0{,}86\,k_a + 0{,}81\,k_b + 0{,}16\,k_c + 39{,}727\,k_d + 20{,}176\,k_e \quad &+ 2{,}14 = 0\,,\\
-2{,}31\,k_a - 1{,}45\,k_b - 6{,}82\,k_c + 20{,}176\,k_d + 24{,}381\,k_e - & \\
- 0{,}0352\,\delta x \quad &+ 0{,}05 = 0\,,\\
- 0{,}0352\,k_e \quad &= 0\,.
\end{aligned} \tag{29}$$

Tabelle IV enthält die zahlenmäßige Auflösung der Normalgleichungen durch die Choleskysche Methode. Demgemäß sind die Korrelaten und die unge-

Tabelle III

Tabellenmäßige Zusammenstellung der Verbesserungsgleichungen, sowie die Zahlenwerte der durch Ausgleichung zu erhaltenden Korrelaten und Winkelverbesserungen

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	δx	L	k
a	+1	+1	+1							+0,79	−0,3426
b				+1	+1	+1				−1,59	+0,4907
c			+1		+1		+1	+1		−0,84	+0,1746
d	−1,92	+1,06		+1,54		−0,73	+4,08	−3,92		+2,14	−0,0716
e	−1,92	+1,06	−1,45		−1,45			−3,92	−0,0352	+0,05	−0,0007
											$\delta_x = -71{,}7857$
v	−0,205″	−0,419″	−0,166″	+0,380″	+0,667″	+0,543″	−0,117″	+0,459″			

Tabelle IV

k_a	k_b	k_c	k_d	k_e	δ_x	L	Qk_a
+3	0	+1	− 0,86	− 2,31	0	+0,79	−1
	+3	+1	+ 0,81	− 1,45	0	−1,59	0
		+4	+ 0,16	− 6,82	0	−0,84	0
			+39,727	+20,176	0	+2,14	0
				+24,381	−0,0352	+0,05	0
					0	0	0
						0	0
+1,732	0	+0,5774	−0,4965	−1,3337	0	+0,4561	−0,5774
	+1,732	+0,5774	+0,4677	−0,8372	0	−0,9180	0
		+1,8256	+0,0967	−0,3491	0	−0,3140	+0,1826
			+6,2651	−3,2243	0	+0,4511	−0,0486
				+1,4861	−0,0238	−1,7086	−0,0038
					+0,0238i	+1,7086i	+0,0038i
						$[pvv] =$ $= -1{,}3528$	$-k_a =$ $= +0{,}3426$

Probe $[pvv] = -[Lk] = 1{,}3528 = 1{,}3528$
Überprüfung der Normalgleichungen: $0 = 0$

messenen Unbekannten:

$$k_a = -0{,}3426;\ k_b = +0{,}4914;\ k_c = +0{,}1758;\ k_d = -0{,}0720;$$

$$k_e = 0;\ \delta_x = -71{,}7899 \text{ mm};\ Q_{xx} = 1780{,}34,$$

also ihr Gewicht $P_x = 0{,}0005617$ l/mm². Die Quadratsumme der Verbesserungen: $[vv] = +1{,}3528$.

Wenn wir die in dieser Weise erhaltenen Ergebnisse mit denem in [5] vergleichen, ist die Übereinstimmung innerhalb der Abrundungsfehler festzustellen. Übrigens ergab die Auflösung in dieser Weise — im Vergleich zu der Ausgleichung mit den bedingten Beobachtungen — anstatt vier sechs Normalgleichungsauflösungen, allerdings erhielten wir die entwickelte Seite und deren Gewichtskoeffizienten. Aus der sechsten Normalgleichung ergibt sich

Q_{kb}	Q_{kc}	Q_{kd}	Q_{ke}	Q_x	S	Σ Probe
0	0	0	0	0	+ 0,62	+ 0,62
−1	0	0	0	0	+ 0,77	+ 0,77
0	−1	0	0	0	− 2,50	− 2,50
0	0	−1	0	0	+61,153	+61,153
0	0	0	−1	0	+32,9918	+32,9918
0	0	0	0	−1	− 1,0352	− 1,0352
0	0	0	0	0	− 0,45	− 0,45
					+ 0,3579	+ 0,3579
−0,5774					+ 0,4445	+ 0,4445
+0,1826	−0,5478				− 1,6232	− 1,6232
+0,0403	+0,0085	−0,1596			+ 9,7820	+ 9,7820
−0,0383	−1,1501	+0,3486	−0,6775		− 1,7941	− 1,7941
+0,0383i	+1,1501i	−0,3486i	+0,6775i	+42,0168i	+45,4725i	+45,4475i
$-k_b =$ $= -0{,}4914$	$-k_c =$ $= +0{,}1758$	$-k_d$ $= +0{,}0720$	$-k_e = 0$	$-\delta_x =$ $= +71{,}7899$	+69,5013	+69,4874
			Q_{xx}	$= +1780{,}3421$		

übrigens sofort, daß $k_e = 0$, k_e wurde doch in die weitere Berechnung einbezogen, um damit Grundlage zur Berechnung von δx und deren Gewicht zu gewinnen. Wenn wir mit mehreren Dezimalstellen gearbeitet hätten, wäre k_e infolge der Abrundungsfehler nicht ganz Null gewesen. Die auf Grund der Korrelaten zu berechnenden Verbesserungen sind in Tabelle II. enthalten. Wenn wir diese mit richtigen Vorzeichen zu den Beobachtungen addieren, bekommen wir die widerspruchfreien, ausgeglichenen Werte (Tabelle V). Durch die Bildung der Quadratsumme der Beobachtungsverbesserungen können die auf Grund von Tabelle IV erhaltenen Werte überprüft, weiter die mittleren Fehler der Gewichtseinheit (die mittleren Fehler der Winkelmessungen) berechnet werden:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{r-q}} = \sqrt{\frac{1{,}3528}{4}} = \pm 0{,}582'' \qquad (30)$$

und der mittlere Fehler der entwickelten Seite:

$$\mu_{\overline{CD}} = \mu_x = \mu_0 \sqrt{Q_{xx}} = 0{,}582 \sqrt{1780{,}34} = \pm 24{,}6 \text{ mm}. \qquad (31)$$

Um die Richtigkeit unserer Rechnung mit den ausgeglichenen Werten festzustellen, werden die ursprünglichen Bedingungsgleichungen noch einmal überprüft.

Die Zahlenwerte der Unbekannten und Gewichtskoeffizienten der Normalgleichungen wurden auch mit der modernisierten Gaußschen Auflösungsmethode bestimmt. Im Vergleich mit der vorhergehenden Lösung

Tabelle V

Nr. d. Winkels	Gemessener Winkel			+Verbesserung =	ausgeglichener Winkel			Entwickelte Seite
1.	47°	46′	12,26″	−0,20″	47°	46′	12,06″	
2.	63°	12′	29,22″	−0,42″	63°	12′	28,80″	$\overline{CD} = x_0 + \delta r =$
3.	69°	01′	19,31″	−0,17″	69°	01′	19,14″	$= 12\,353{,}663m$
4.	53°	51′	37,50″	+0,38″	53°	51′	37,88″	
5.	55°	28′	26,26″	+0,67″	55°	28′	26,93″	
6.	70°	39′	54,65″	+ 0,54″	70°	39′	55,19″	
7.	27°	16′	50,14″	−0,12″	27°	16′	50,02″	
8.	28°	13′	23,45″	+0,46″	28°	13′	23,91″	

gibt diese etwas mehr schriftliche Arbeit, die aber die Rechnungssicherheit gewissermaßen erhöht. Der Aufbau des Rechenschemas darf auf Grund [1] bzw. [10] als bekannt vorausgesetzt werden, so daß wir nur die mechanische Ausführung der Rechenarbeit mitteilen wollen (Tabelle VI). Die Choleskysche Lösung fordert etwas weniger schriftliche Arbeit, doch etwas mehr Aufmerksamkeit, was aber einem geübten Rechner keine Schwierigkeiten bedeuten dürfte. Im Hinblick auf die Abrundungsfehler ist das Choleskysche Verfahren etwas günstiger ([1], S. 162.; [23]). Die Untersuchungen von SALJNIKOW und TISCHTSCHENKO haben neuestens dasselbe bestätigt [24, 25].

Darüber hinaus ist die Choleskysche Methode besonders bei solchen Lösungen vorteilhaft, bei welchen die quadratischen Koeffizienten infolge der Reduktionen ziemlich kleine Werte haben (z. B. $\{mm\} = \sqrt{0{,}00010} = 0{,}01$). Die Umlegung der Dezimalstellen infolge der Quadratwurzelziehung mag das Rechenverfahren günstig beeinflussen, oft ist sie sogar die einzige Lösungsmöglichkeit ([11], S. 72).

Dieselben Normalgleichungen wurden auch mit der Reichenedereschen ([26, 1] und der Bjerhammerschen Methode [27, 1]) aufgelöst. Auf Grund der

in der Literatur angegebenen Rechenschemen ist nichts dagegen einzuwenden, daß diese bei der Auflösung der zur V. Ausgleichungsgruppe gehörenden Normalgleichung angewendet werden. Eigentlich sind diese die gewissermaßen modifizierten Auflösungen des Gaußschen Algorithmus, in welchen das Rechenverfahren Spalte mit Spalte aufgegeben wird, und darum die Ausführung einzelner Berechnungen etwas schwieriger anzueignen ist und mehr Aufmerksamkeit verlangt. Außer den Unbekannten ergeben sich die Ver-

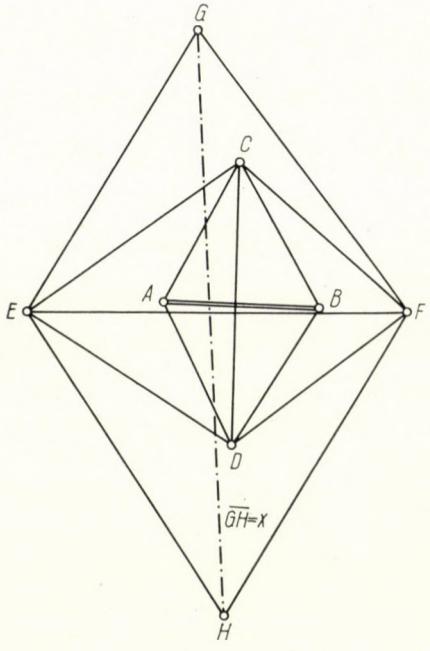

Bild 4

besserungsquadratsumme sowie die einzelnen Gewichtskoeffizienten direkt. Von der Anführung eines ausführlichen Zahlenbeispiels wird hier Abstand genommen. Das Ergebnis war innerhalb der Rechenschärfe mit den vorigen übereinstimmend.

*

Eine andere häufige Anwendungsform der V. Ausgleichungsgruppe kommt bei der Ausgleichung des Einrechnungszuges vor [31, 6]. Als Beispiel wird die Ausgleichung des in Bild 1. abgebildeten Einrechnungszuges angeführt, in welchem Fall der Orientierungs- bzw. Richtungswinkel ($A1$) als ungemessene Unbekannte eingeführt wird. Die im Bild 1. eingetragen Beobachtungen und Ausgangsdaten sind:

Ausgangskoordinaten:

$$A \begin{cases} x_A = +191{,}160 \text{ m}, \\ y_A = +342{,}527 \text{ m}; \end{cases}$$

$$B \begin{cases} x_B = +230{,}572 \text{ m}, \\ y_B = +522{,}591 \text{ m}. \end{cases}$$

Beobachtungsergebnisse:

$$\begin{aligned} s_1^\circ &= 27{,}901 \text{ m}, \quad \text{deren Gewichte} = 8{,}06, \\ s_2^\circ &= 54{,}661 \text{ m}, \quad \text{„} \qquad \text{„} \qquad = 4{,}12, \\ s_3^\circ &= 44{,}125 \text{ m}, \quad \text{„} \qquad \text{„} \qquad = 5{,}10, \\ s_4^\circ &= 89{,}386 \text{ m}, \quad \text{„} \qquad \text{„} \qquad = 2{,}52, \\ s_5^\circ &= 38{,}033 \text{ m}, \quad \text{„} \qquad \text{„} \qquad = 5{,}92, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1^\circ &= 118^\circ 37' 11'' \\ \beta_2^\circ &= 221^\circ 45' 27'' \\ \beta_3^\circ &= 88^\circ 57' 02'' \\ \beta_4^\circ &= 279^\circ 07' 44'' \end{aligned}\right\} \quad p_\beta = 1.$$

Der Näherungswert des Orientierungswinkels wird entweder durch magnetische Orientierung oder durch Berechnung bestimmt ($/A1/_0$). Nach Anwendung dieses Näherungswertes auf den Orientierungswinkel und nach Zuordnen von Zuschlägen ΔA werden die zwei linearen Koordinatenbedingungen mit den entsprechenden Verbesserungen und mit den ungemessenen Unbekannten (in mm Einheit berechnet):

$$\begin{aligned} &-0{,}6976v_1 + 0{,}2948v_2 - 0{,}4165v_3 + 0{,}9166v_4 - 0{,}5402v_5 - 0{,}7798\mathfrak{v}_1 - \\ &-0{,}5254\mathfrak{v}_2 - 0{,}3299\mathfrak{v}_3 - 0{,}1551\mathfrak{v}_4 + 0{,}8772\Delta A + 245 = 0 \text{ (in Richtung } x) \\ &+0{,}7165v_1 + 0{,}9556v_2 + 0{,}9091v_3 + 0{,}3998v_4 + 0{,}8416v_5 + 0{,}2854\mathfrak{v}_1 - \\ &-0{,}2083\mathfrak{v}_2 - 0{,}2979\mathfrak{v}_3 - 0{,}0996\mathfrak{v}_4 + 0{,}1911\Delta A + 17 = 0 \text{ (in Richtung } y), \end{aligned}$$

wo $v_1, v_2 \ldots$ die Verbesserungen der Längenmessungen, $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2 \ldots$ die der Winkelmessungen sind.

Nach Aufstellung der Koeffiziententabelle sind die Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} &+1{,}51528k_a - 0{,}41417k_b - 0{,}87723\Delta A + 245 = 0, \\ &-0{,}41417k_a + 0{,}85397k_b + 0{,}19107\Delta A + 17 = 0, \\ &-0{,}87723k_a + 0{,}19107k_b = 0. \end{aligned}$$

Tabelle VI

Hilfsgrößen zur Berechnung der Gewichtskoeffizienten	k_a	k_b	k_c	k_d	k_e	δ_x	L	S
0,33333	+3	∅ ∅	+1 −0,33333	−0,86 +0,28666	−2,31 +0,76999	∅	+0,79 −0,26333	− 1,62 + 0,53999
0,33333		+3 +3	+1 +1 −0,33333	+0,81 +0,81 −0,26999	−1,45 −1,45 +0,48333	∅	−1,59 −1,59 +0,52999	− 1,77 − 1,77 + 0,58999
0,29999			+4 +3,33334	+0,16 +0,17667 −0,05299	−6,82 −5,56668 +1,66995	∅	−0,84 −0,57334 +0,17199	+ 1,5 + 2,62998 − 0,78897
0,02548				+39,727 +39,25242	+20,176 +20,20028 −0,51470	∅	+2,14 +2,82612 −0,07201	−62,153 −62,27887 + 1,58687
0,45283					+24,381 + 2,20833	−0,0352 −0,0352 +0,01592	+0,05 −2,52225 +1,14215	−33,9918 0,35220 − 0,15948
$Q_{xx} = -1785{,}71428$						∅ −0,00056	∅ −0,04020 −71,78571	+ 0,0352 + 0,04081 +72,87499
	$k_a = -0{,}34262$	$k_b = +0{,}49079$	$k_c = +0{,}17462$	$k_d = -0{,}07165$	$k_e = -0{,}0007$	$\delta_x = -71{,}78571$	∅ $+ [vv] = +1{,}34784$	− 0,55 + 1,34823

$I = \frac{1}{(11)}$	$(11) = [aa]$	$(12) = [ab]$ $(I\,1) = -(12)\,I$	$(13) = [ac]$ $(II\,1) = -(13)\,I$	$(14) = [ad]$ $(III\,1) = -(14)\,I$	$(15) = [ae]$ $(IV\,1) = -(15)\,I$	$(16) = A_a$ $(V\,1) = -(16)\,I$	$(17) = L_a$ $(VI\,1) = -(17)\,I$	$(18) = S_a$ $(S1) = -(18)\,I$
$II = \frac{1}{(22 \cdot 1)}$		$(22) = [bb]$ $(22 \cdot 1) = (22) + (I\,1)(12)$	$(23) = [bc]$ $(23 \cdot 1) = (23) + (I\,1)\,(13)$ $(II\,2) = -II\,(23 \cdot 1)$	$(24) = [bd]$ $(24 \cdot 1) = (24) + (I\,1)\,(14)$ $(III\,2) = -II\,(24 \cdot 1)$	$(25) = [be]$ $(25 \cdot 1) = (25) + (I\,1)\,(15)$ $(IV\,2) = -II\,(25 \cdot 1)$	$(26) = A_b$ $(26 \cdot 1) = (26) + (I\,1)\,(16)$ $(V\,2) = -II\,(26 \cdot 1)$	$(27) = L_b$ $(27 \cdot 1) = (27) + (I\,1)\,(17)$ $(VI\,2) = -II\,(27 \cdot 1)$	$(28) = S_b$ $(28 \cdot 1) = (28) + (I\,1)\,(18)$ $(S2) = -II\,(28 \cdot 1)$
$III = \frac{1}{(33 \cdot 2)}$			$(33) = [cc]$ $(33 \cdot 2) = (33) + (II\,2)\,(23 \cdot 1) + (II\,1)\,(13)$	$(34) = [cd]$ $(34 \cdot 2) = (34) + (II\,2)\,(24 \cdot 1) + (II\,1)\,(14)$ $(III\,3) = -III\,(34 \cdot 2)$	$(35) = [ce]$ $(35 \cdot 2) = (35) + (II\,2)\,(25 \cdot 1) + (II\,1)\,(15)$ $(IV\,3) = -III\,(35 \cdot 2)$	$(36) = A_c$ $(36 \cdot 2) = (36) + (II\,2)\,(26 \cdot 1) + (II\,1)\,(16)$ $(V\,3) = -III\,(36 \cdot 2)$	$(37) = L_c$ $(37 \cdot 2) = (37) + (II\,2)\,(27 \cdot 1) + (II\,1)\,(17)$ $(VI\,3) = -III\,(37 \cdot 2)$	$(38) = S_c$ $(38 \cdot 2) = (38) + (II\,2)\,(28 \cdot 1) + (II\,1)\,(18)$ $(S3) = -III\,(38 \cdot 2)$
$IV = \frac{1}{(44 \cdot 3)}$				$(44) = [da]$ $(44 \cdot 3) = (44) + (III\,3)\,(34 \cdot 2) + (III\,2)\,(24 \cdot 1) + (III\,1)\,(14)$	$(45) = [de]$ $(45 \cdot 3) = (45) + (III\,3)\,(35 \cdot 2) + (III\,2)\,(25 \cdot 1) + (III\,1)\,(15)$ $(IV\,4) = -IV\,(45 \cdot 3)$	$(46) = A_d$ $(46 \cdot 3) = (46) + (III\,3)\,(36 \cdot 2) + (III\,2)\,(26 \cdot 1) + (III\,1)\,(16)$ $(V\,4) = -IV\,(46 \cdot 3)$	$(47) = L_d$ $(47 \cdot 3) = (47) + (III\,3)\,(37 \cdot 2) + (III\,2) \cdot (27 \cdot 1) + (III\,1)\,(17)$ $(VI\,4) = -IV\,(47 \cdot 3)$	$(48) = S_d$ $(48 \cdot 3) = (48) + (III\,3)\,(38 \cdot 2) + (III\,2) \cdot (28 \cdot 1) + (III\,1)\,(18)$ $(S4) = -IV\,(48 \cdot 3)$
$V = \frac{1}{(55 \cdot 4)}$					$(55) = [ee]$ $(55 \cdot 4) = (55) + (IV\,4)\,(45 \cdot 3) + (IV\,3)\,(35 \cdot 2) + (IV\,2)\,(25 \cdot 1) + (IV\,1)\,(15)$	$(56) = A_e$ $(56 \cdot 4) = (56) + (IV\,4)\,(46 \cdot 3) + (IV\,3) \cdot (36,2) + (IV\,2)\,(26 \cdot 1) + (IV\,1)\,(16)$ $(V\,5) = -V\,(56 \cdot 4)$	$(57) = L_e$ $(57 \cdot 4) = (57) + (IV\,4)\,(47 \cdot 3) + (IV\,3)\,(37 \cdot 2) + (IV\,2)\,(27 \cdot 1) + (IV\,1)\,(17)$ $(VI\,5) = -V\,(57 \cdot 4)$	$(58) = S_e$ $(58 \cdot 4) = (58) + (IV\,4)\,(48 \cdot 3) + (IV\,3)\,(38 \cdot 2) + (IV\,2)\,(28 \cdot 1) + (IV\,1)\,(18)$ $(S5) = -V\,(58 \cdot 4)$
$VI = \frac{1}{(66 \cdot 5)} = Q_{xx}$						$(66) = A_f$ $(66 \cdot 5) = (66) + (V5)\,(56 \cdot 4) + (V4)\,(46 \cdot 3) + (V3)\,(36 \cdot 2) + (V2)\,(26 \cdot 1) + (V1)\,(16)$	$(67) = L$ $(67 \cdot 5) = (67) + (V5)\,(57 \cdot 4) + (V4)\,(47 \cdot 3) + (V3)\,(37 \cdot 2) + (V2)\,(27 \cdot 1) + (V1)\,(17)$ $(VI\,6) = -VI\,(67,5)$	$(68) = S_f$ $(68 \cdot 5) = (68) + (V5)\,(58 \cdot 4) + (V4)\,(48 \cdot 3) + (V3)\,(38 \cdot 2) + (V2)\,(28 \cdot 1) + (V1)\,(18)$ $(S\,6) = -VI\,(68 \cdot 5)$
	$k_a = (VI\,1) + (V\,1)\delta_x + (IV\,1)k_e + (III\,1)k_d + (II\,1)k_c + (I\,1)k_b$	$k_b = (VI\,2) + (V\,2)\delta_x + (IV\,2)k_e + (III\,2)k_d + (II\,2)\,k_c$	$k_c = (VI\,3) + (V\,3)\,\delta_x + (IV\,3)k_e + (III\,3)k_d$	$k_d = (VI\,4) + (V\,4)\,\delta_x + (IV\,4)k_e$	$k_e = (V\,15) + (V\,5)\delta_x$	$\delta_x = (VI\,6)$	(77) = 0 $[vv] = (77) + (VI\,6)\,(67,5) + (VI\,5)\,(57,4) + (VI\,4)\,(47,3) + (VI\,3)\,(37,2) + (VI\,2) \cdot (27,1) + (VI\,1)\,(17)$	$(78) = S_L$ $(78 \cdot 6) = (78) + VI\,6)\,(68 \cdot 5) + (VI\,5) \cdot (58 \cdot 4) + (VI\,4)\,(48 \cdot 3) + (V\,I\,3)\,(38 \cdot 2) + (VI\,2)\,(28 \cdot 1) + (VI\,1)\,(18)$

Tabelle VII

k_a	k_b	ΔA	L	Qk_a	Qk_b	$Q_{\Delta A}$	S	Σ
+1,51528	−0,41417	−0,87723	+245,0	−1	0	0	+244,22388	
	+0,85397	+0,19107	+ 17,0	0	−1	0	+ 16,63087	
		0	0	0	0	−1	− 1,68616	
			0	0	0	0	+262,0	
+1,23096	−0,33646	−0,71263	+199,03165	−0,81237	0	0	+198,40115	... 15
	+0,86067	−0,05658	+ 97,55908	−0,31757	−1,16188	0	+ 96,88373	... 73
		+0,71487i	−206,12952i	+0,83495i	+0,09195i	+1,39885i	−203,08885i	... 85
			$-([pvv]+[p\mathfrak{v}\mathfrak{v}])=$ $=+6641,99277$	$-k_a=$ $+20,56133$	$-k_b=$ $=+94,39833$	$-\Delta A=$ $=-288,34427$	− 7077,38864	
						$-Q_{\Delta A}=$ $=-1,95678$		

Probe der Normalgleichungen:
1. 0,0035 ≒ 0
2. 0,0035 ≒ 0
3. 0,0035 ≒ 0

Ferner:
$[pvv] + [p\mathfrak{v}\mathfrak{v}] = 6642{,}10$
$-[Lk] = 6642{,}07$

Tabelle VII enthält die mit der Choleskyschen Methode ausgeführte Auflösung der Normalgleichungen. Die Rechnungsergebnisse sind, abgesehen von den Abrundungsfehlern, mit den in der Literatur angegebenen übereinstimmend. Durch die Bestimmung der Verbesserungen mit Hilfe der Korrelaten und nach deren Addierung zu den Beobachtungen erhält man die ausgeglichenen Werte und nach nochmaliger Durchrechnung die endgültigen Koordinaten der einzelnen Punkte des Polygonzuges. Bei dieser Rechnung können wir die nochmalige Durchrechnung vermeiden, wenn wir den Zuschlag der ungemessenen Unbekannten, sowie die den Verbesserungen entsprechenden Korrektionsglieder berechnen. Die endgültigen Koordinaten:

$$x_1 = +171{,}672 \text{ m}, \qquad y_1 = +362{,}484 \text{ m},$$
$$x_2 = +187{,}706 \text{ m}, \qquad y_2 = +414{,}716 \text{ m},$$
$$x_3 = +169{,}283 \text{ m}, \qquad y_3 = +454{,}794 \text{ m},$$
$$x_4 = +251{,}150 \text{ m}, \qquad y_4 = +490{,}620 \text{ m},$$
$$x_B = +230{,}572 \text{ m}, \qquad y_B = +522{,}591 \text{ m}.$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit:

$$\mu_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]+[p\mathfrak{v}\mathfrak{v}]}{r-q}} = \pm 81{,}5\,.$$

Der mittlere Fehler der ungemessenen Unbekannten:

$$\mu_{\Delta A} = \mu_{(A1)} = \pm \mu_0 \sqrt{Q_{A1A1}} \doteq 114{,}02''\,.$$

Damit ist unsere Aufgabe im wesentlichen gelöst. Als Ergebnis ist also nicht nur die ungemessene Unbekannte erhalten, sondern auch deren Gewichtskoeffizient. Gemäß dem allgemeinen Rechenschema ist auch der mittlere Fehler der Funktion ableitbar (z. B. wenn wir nach der Ausgleichung den mittleren Fehler irgendeiner Richtung oder Koordinate bestimmen wollen, der im Hinblick auf den Anschluß der abzweigenden Polygonzüge benötigt sein mag).

Eine derartige Anwendung der Choleskyschen Methode ist freilich besonders im Falle mehrerer Unbekannten vorteilhaft und wirtschaftlich.

*

Auf Grund des obigen ist der Vorteil der Auflösung der Normalgleichungen mit der Choleskyschen Methode ersichtlich. Darüber hinaus ist die Methode auch bei der V. und damit auch den IV. und VI. Ausgleichungsgruppen anwend-

bar. Außer der Bestimmung der Unbekannten können wir auch deren Gewichtskoeffizienten erhalten, es können sogar die Produktgewichtskoeffizienten berechnet werden. Die Rechentabelle mag auch mit den zur Berechnung des mittleren Fehlers der Funktion von Funktionen nötigen Reduktionen ergänzt werden, bei welcher Berechnung außer dem Zuschlag der Funktion auch die nötigen Quadrat- und Produktgewichtskoeffizienten zu ermitteln sind. Nötigenfalls kann auch der Gewichtskoeffizient des ausgleichungen Wertes $(o_i + v_i)$ berechnet werden, in welchem Falle $f_i = 1$ und alle übrigen Werte f und f_x gleich Null sind. Die nötigen Reduktionen können am Ende der Tabelle berechnet werden. Im Vergleich mit den übrigen Methoden erfordert diese die wenigste schriftliche Arbeit, und ihre Rechenschärfe ist in gewissen Fällen größer als bei den übrigen Lösungen.

In dieser Weise erlangt die Ausgleichung des Basisvierecks gemäß der V. Gruppe einen besonderen Vorteil, da sie neben der relativ einfachen Berechnung der mehrmaligen Entwicklung (Übertragung) eine sehr schnelle und wirtschaftliche Lösung der Normalgleichungen bietet. So ist auch die Frage beantwortet, die in der wertvollen Studie von MILASOVSZKY aufgeworfen wurde. Die wirtschaftliche Methode der Ausgleichung eines Basisnetzes von beliebiger Form ist unseren Erörterungen entsprechend die mit ungemessenen Unbekannten ausgeführte Auflösung der bedingten Beobachtungen, vorausgesetzt, daß bei der Berechnung der Unbekannten der Normalgleichungen die hier angeführte und zu diesem Zweck aufgeschriebene Choleskysche Methode angewendet wird.

Ähnlich ergibt sich die Lage im Falle der übrigen Ausgleichungsprobleme. Heute, da mit der Anwendung der elektronischen Rechenautomaten die Ausgleichung der Beobachtungswerte sowohl in der Geodäsie und Photogrammetrie als auch in anderen technischen und physikalischen Arbeiten weitgehend angewendet wird, gewinnt die V. Ausgleichungsgruppe gerade wegen ihrer Zweckmäßigkeit und besonderen Vorteilen an Bedeutung. So ist es nicht uninteressant, die mit dieser zusammenhängenden Fragen, mit besonderer Beachtung der Schnelligkeit, Wirtschaftlichkeit und Genauigkeit der Lösungen, etwas näher zu behandeln. Damit haben wir für die von HELMERT vor mehr als 90 Jahren aufgestellte sogenannte V. Ausgleichungsgruppe [28] eine den Lösungen der bedingten und ermittelnden Beobachtungen ähnliche, moderne Auflösung erhalten. Die etlichen angeführten Beispiele weisen auf die Bedeutung und weite Anwendungsmöglichkeit von allen diesen [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38] hin. Durch die in dem obigen gegebenen Ergänzungen zu den in der Literatur bisher erschienenen diesbezüglichen Studien [14, 22, 29, 30] betrachten wir die Auflösung der den allgemeinen Fall der Ausgleichung betreffenden Normalgleichung der Choleskyschen Methode als gegeben.

Auf weitere vereinfachende und vergleichende Untersuchungen werden wir im späteren zurückkehren.

SCHRIFTTUM

1. Dr. Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Hamburg, 1961.
2. Jordan—Eggert—Kneissl: Handbuch der Vermessungskunde. Bd. I. Dr. Näbauer, M.: Mathematische Grundlagen, Ausgleichungsrechnung und Rechenhilfsmittel. Stuttgart, 1961.
3. Dr. Tárczy-Hornoch, A.: Über die Verwendung der bedingten Beobachtungen mit ungemessenen Unbekannten zu Genauigkeitsuntersuchungen. (Vortrag, gehalten an der Berg- und Hüttenmännischen Tagung in Freiberg 1962.; im Erscheinen in den *Freiberger Forschungsheften.)*
4. Hoványi, L.: Az egercsehi bányaüzem alapvonalmérései (Die Basismessungen im Bergwerksbetrieb in Egercsehi). *Bányászati Lapok*, **92** (1959), 514—519.
5. Milasovszky, B.: On the adjustment of Base Quadrilateral. *Acta Techn. Hung.* **37** (1961), 139—173.
6. Dr. Tárczy-Hornoch, A.: Kiegyenlítőszámítás (Ausgleichungsrechnung). Budapest, Felsőoktatási Jegyzetkiadó, 1954.
7. Dr. Grossmann, W.: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate nebst Anwendung in der Geodäsie. 2. verb. Aufl. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1961.
8. Dr. Hazay, I.: Geodéziai kézikönyv (Geodätisches Handbuch). Bd. I. Budapest, 1956.
9. Dr. Wolf, H.: Der »modernisierte« Gaußsche Algorithmus zur Auflösung von Normalgleichungen. *Zeitschrift f. Vermessungswesen*, **75** (1950), 329—334.
10. Dr. Hönyi E.: Normális egyenletek megoldása a „korszerűsített" Gauss algoritmussal (Auflösung von Normalgleichungen mit dem „modernisierten" Gaußschen Algorithmus). *Földméréstani Közlemények*, **3** (1951), 141—144.
11. Dr. Zurmühl, R.: Matrizen. 3. umgearb. und verb. Aufl. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1961.
12. *Герасимов, И. М.:* Решение условних уравнений и уравнений поправок по способу добавления коэффициентов. *Геодезия и Картография*, 1959/2.
13. Dr. Hallert, B.: Ein Schema zur Lösung von Normalgleichungen. *Zeitschrift f. Vermessungswesen*, **84** (1959), 254—255.
14. Hőnyi E.: Az egymástól nem független kiegyenlített értékek közötti függvény középhibaszámításáról (Über die Berechnung des mittleren Fehlers der Funktion zwischen den voneinander nicht unabhängigen ausgeglichenen Werten). *Geodézia és Kartográfia*, **12** (1960), 236—238.
15. Dr. Zambó, J.: L'erreur moyenne des coordonnées d'un cheminement polygonal intercalé et la repartition la plus favorable des poids. *Acta Techn. Hung.* **9** (1954), 171—202.
16. Dr. Tárczy-Hornoch, A.: Eine weitere Ausgleichsgruppe. *A Bánya- és Kohómérnöki Oszt. Közl.* **17** (1948—49). 325—333.
17. Dr. Wolf, H.: Über eine allgemeine Form der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Bamberg, Institut f. Erdmessung, 1948.
18. Halmos, F.: A kiegyenlített érték függvényének középhibája egy különleges esetben (Der mittlere Fehler der Funktion des ausgeglichenen Wertes in einem Sonderfall). *Geodézia és Kartográfia*, **12** (1960), 115—117.
19. Tienstra, I. M.: An extension of the technique of the method of least squares to correlated observations. *Bulletin géodésique*, 1947. S. 301—335.
20. Roelofs, R.: Adjustment of aerial triangulation by the method of least squares. *Photogrammetria*, **10** (1951—52).
21. Dr. Hallert, B.: Über einige Verfahren zur Lösung von Normalgleichungen. *Zeitschrift f. Vermessungswesen*, **72** (1943), 238—244.
22. Hőnyi, E.: A Cholesky—Rubin eljárás a normális egyenletek számológéppel való megoldására (Das Cholesky—Rubin-Verfahren für die Auflösung von Normalgleichungen mit Rechenmaschine). *Geodéziai Közlöny*, **23** (1947), 6—12.
24. *Сальников, В. И.:* О точности решения нормальных уравнений. *Геодезия и Аерофотосьемка*, 1962/3.
25. *Тищенко, А. П.:* Обобщение схем Гаусса и Холецкого. *Геодезия и Аерофотосьемка*, 1962/3.
26. Reicheneder, K.: Fehlertheorie und Ausgleichung von Rautenketten in der Nadirtriangulation. Geodätisches Institut, Potsdam. Berlin, 1949.
27. Bjerhammer, A.: Application of calculus of matrices of methods of least squares. Stockholm, 1951.

28. HELMERT, F. R.: Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig—Berlin, 1924.
29. DR. TARICS, S.: A normális egyenletek megoldása krakovianokkal, számológéppel (Die Auflösung von Normalgleichungen mit Krakowianen, mit Rechenmaschine). *Geodéziai Közlöny*, **19** (1943), 98—111.
30. DR. HŐNYI E.: A normális egyenletek megoldási eljárásainak vizsgálata (Untersuchung der Auflösungsverfahren von Normalgleichungen). *Geodéziai Közlöny*, **24** (1948), 45—63.
31. DR. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Eine weitere Methode zur strengen Ausgleichung der Einrechnungszüge. *Berg- u. Hüttenmännische Monatshefte* **94** (1949), 115—122.
32. DR. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Fehlertheoretische Studien über das Schachtanschlußdreieck. *A Bánya- és Kohómérnöki Oszt. Közl.* **11** (1939), 33—80. Die günstigste Gewichtsverteilung im ausgeglichenen Schachtanschlußdreiek. *Berg- u. Hüttenmännische Monatshefte*, **93** (1948), 67—72.
33. ACKERMANN, F.: Ein Verfahren zur programmgesteuerten Ausgleichung von Triangulationsstreifen. *Bildmessung u. Luftbildwesen*, 1961. S. 108—123.
34. SCHMIDT, F.: Eine allgemeine analytische Lösung für die Aufgabe der Photogrammetrie. *Bildmessung u. Luftbildwesen*, 1958. S. 103—113 und 1959. S. 1—12 und 70.
35. RINNER, K.: Zur analytischen Behandlung photogrammetrischer Aufgaben. *Bildmessung u. Luftbildwesen*, 1956. S. 1—10 und 44—56.
36. HALMOS, F.: Fényképpárok kölcsönös tájékozási elemei analitikus meghatározása (Die analytische Bestimmung der gegenseitigen Orientierungselemente von Bildpaaren). *Geodézia és Kartográfia*, **14** (1962), 330—335.
37. HALMOS, F.: Zur Ausgleichung von Trilaterationsnetzen. *Acta Technica, Series Geodaetica et Geophysica*, **30** (1962), 243—259.
38. HALMOS, F.: A gázállandók meghatározása a legkisebb négyzetek elve alapján. (Die Bestimmung der Gaskonstanten auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate.) Manuskript. 1955.

QUICK SOLUTION OF NORMAL EQUATIONS IN GENERAL CASE OF ADJUSTMENT

F. HALMOS

SUMMARY

Author examines the normal equation solutions of adjustment referring to the case of unobserved unknowns of conditional observations. He states that this adjustment of observation values and so the up-todate solution of normal equations greatly increases the speed of computations.

By assuming imaginary reduction values derived from the squared coefficients with zero value, the difficulty concerning the determination of both the unknowns and the weight coefficients may be overcome. This accounts for the Cholesky solution not being applied to this adjustment group. His study is completed by problems referring to the computation of weight coefficients of the function values, moreover, the determination of product weight coefficients is also given. The complement of the function may also be taken directly from the table. The method of the corresponding checks is also given.

The adjustments referring to correlated observations may lead to a solution of this kind as well.

Comparison has been made with modernised Gauss, Bjerhammer and Reicheneder solutions.

It stands to reason that therewith the possible solutions are given for the adjustment of indirect observations with forced conditions (group IV.) and for the adjustment of conditional observations with unobserved unknowns, but merely in case of forced conditions existing among these latter ones (group VI.), as the problems here are similar.

UNE SOLUTION RAPIDE DES ÉQUATIONS NORMALES DANS LE CAS GÉNÉRAL DE LA COMPENSATION

F. HALMOS

RÉSUMÉ

L'auteur examine les solutions, par équation normale, de la compensation des observations conditionnelles en cas d'inconnues non mesurées. Il constate que ce groupe de compensation jouant un rôle de plus en plus grand dans la compensation des mesures, la possibilité d'une solution moderne des équations normales peut accroître considérablement la rapidité du calcul.

Par introduction des valeurs de réduction imaginaires reçues des membres absolus de valeur zéro, on peut, du double point de vue des inconnues et des coefficients de poids, surmonter la difficulté en raison de laquelle la méthode de Cholesky n'a pu être appliquée à ce groupe de compensation. L'analyse porte également sur les problèmes du calcul des coefficients de poids de la valeur de fonction, et l'auteur donne même la détermination des coefficients de poids à indices mixtes. La valeur complémentaire de la fonction peut être directement obtenue du tableau. Le mode des calculs de contrôle est également présenté.

Les compensations qui se rapportent à des valeurs présentant entre elles une relation fonctionnelle peuvent aussi aboutir à cette solution.

L'auteur compare la solution modernisée de Gauss â celles de Bjerhammer et de Reichenerder, puis offre un exemple numérique.

On peut résoudre ainsi, en principe, la compensation des observations intermédiaires conditionnelles à conditions nécessaires (IVe groupe) aussi bien que celle des observations conditionnelles à inconnues non mesurées. Pour le cas d'inconnues reliées par une relation fonctionnelle (VIe groupe), les possibilités de solution sont également données par l'auteur, les problèmes étant ici tout analogues.

УСКОРЕННОЕ РЕШЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ВЫРАВНИВАНИЯ

Ф. ХАЛЬМОШ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается вопрос о решении выравниваний для случая с неизмеренными неизвестными при условных наблюдениях, при помощи нормальных уравнений. Такие группы выравниваний приобретают все большее значение в выравнивании измеренных значений, в связи с чем возможность решения нормальных уравнений в значительной мере ускоряет вычисления.

Благодаря введению мнимых редукционных величин, получаемых за счет нулевых ведующих членов, в определении как неизвестных, так и весовых коэффициентов можно было преодолеть трудности, из-за которых до сих пор для этой группы выравниваний не применялось решение Холеского. Исследования описываются вместе с вопросами, связанными с вычислением весовых коэффициентов величины функции и приводится также и определение произведений весовых коэффициентов. Дополнительное значение функции также может быть определено непосредственно с таблицы. Описывается прием соответствующей проверки вычислений.

Выравнивания для взаимно зависимых величин приводят к получению подобного решения.

Дается сопоставление предлагаемого приема с усовершенствованными решениями Гаусса, Реихенердера и Бьергаммера и приводятся численные примеры.

Тем самым дается возможность решения вспомогательных наблюдений с принудительными условиями (группа IV) и выравнивания условных наблюдений с неизмеренными неизвестными и для случая принудительных условий, имеющих место только между последними (группа VI), ввиду того, что здесь речь идет о подобных проблемах.

DAS METEOROLOGISCHE PROBLEM DER ELEKTRONISCHEN ENTFERNUNGSMESSUNG

J. MITTER[1]

(BUNDESAMT FÜR EICH- UND VERMESSUNGSWESEN, WIEN)

[Eingegangen am 26. November, 1962]

Nach einer kurzen Charakterisierung der heute in Verwendung stehenden elektrisch-optischen und elektronischen Distanzmeßverfahren und der allgemeinen Ausbreitungsbedingungen ihrer Trägerwellen in der Atmosphäre, wird die Bestimmbarkeit der mittleren Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Trägerwellen diskutiert. Diese ist abhängig von der Bestimmbarkeit des herrschenden Brechungskoeffizienten, der eine Ortsfunktion der meteorologischen Verhältnisse längs des Wellenweges ist. Das Kernproblem liegt dabei für Licht- und Mikrowellen in der Bestimmbarkeit der richtigen Mitteltemperatur bzw. bei den Dezimeter- und Zentimeterwellen außerdem noch in der Bestimmbarkeit des mittleren Dampfdruckes. Bisher erfolgte die Bestimmung der meteorologischen Daten nur an den Streckenendpunkten und in Bodennähe. Ihr liegt die Annahme eines praktisch linearen Aufbaues des meteorologischen Feldes im Meßraum für alle Elemente zugrunde.

Es werden der Aufbau des Temperaturfeldes bei Tag und Nacht in Bodennähe und in der »freien« Atmosphäre und die zusätzlichen Einflüsse aus Luftbewegung, Relief und Bodenbedeckung besprochen.

Nördlich von Graz wurde, in Mittelgebirgslände ein Versuchsfeld für elektronische Distanzmeßverfahren eingerichtet und eine Reihe von Versuchsmessungen zur Klärung des Temperaturproblemes bei Nacht durchgeführt. Es wurden Geodimetermessungen mit Hubschraubermessungen längs des Lichtweges kombiniert. Es ergab sich, daß bei Endpunktmessungen Temperaturfehler bis zu 5° C auftreten können. Von besonderem Interesse ist der Vergleich zwischen Radiosondenmessungen bei Wien in 150 km Entfernung und den örtlichen Temperaturmessungen. Die Extrapolation liegt bei normalen Wetterverhältnissen noch wesentlich besser als das Mittel aus den Endpunktmessungen.

Für die Bestimmung des mittleren Luftdruckes reicht in allen Fällen, die Endpunktmessung aus.

Die Bestimmung der mittleren Luftfeuchtigkeit, wird wohl bei Endpunktmessungen durch die Bodennähe beeinträchtigt, die Hauptfehlerquelle dürfte aber hier nur zu oft in fehlerhaften Psychrometermessungen liegen.

Dr. REGŐCZI hat im Jahre 1959 in den *Acta Technica Hung.* [1] in einer Studie die Anwendungsmöglichkeiten der neuen physikalischen, elektronischen Entfernungsmeßverfahren in Ungarn untersucht. Er kam dabei zu den Schlüssen, daß angesicht der fertigen trigonometrischen Grundlagen und des dabei in Ungarn angewandten Triangulationsverfahrens: Herleitung der Netze höherer Ordnung aus Kleindreiecken, die Trilateration unwirtschaftlich ist und die elektronischen Entfernungsmeßverfahren nur dort mit Erfolg eingesetzt werden können, wo auch bisher Streckenmessungen zur Lösung der Aufgaben notwendig waren. Zu diesen Fällen gehören die Messungen von Grundlinien oder langseitigen Polygonzügen, die in schwierigem Gelände

[1] Dr. techn. Josef MITTER, Wien, VIII. Friedrich Schmidt Platz 3.

(Waldgebiete) einer kostspieligen, großräumig ausgreifenden Triangulation vorzuziehen sind oder Punkteinschaltungen erst möglich machen (enge Täler). Im Falle der Grundlinienmessung wird dabei unter Berücksichtigung des Genauigkeitsabfalles bei der Maßstabsübertragung durch das Basisentwicklungsnetz, sofort an die direkte Messung der abzuleitenden Hauptdreieckseite zu denken sein.

Diese Schlüsse gelten genauso für die österreichischen Verhältnisse und analog für alle Länder mit »klassischen« Vermessungsgrundlagen.

Die Entwicklung der elektronischen Distanzmeßverfahren hat, wie Ihnen bekannt, und wenn wir bewußt von den Impulsecho-Verfahren (Shoran- und Hiran-Verfahren) für die Vermessung großer Räume absehen, zur Ausbildung zweier, durch die verwendeten Trägerwellen charakterisierten Verfahren geführt, nämlich:

die *elektrisch-optischen Verfahren* mit Licht als Trägerwellen und

die *rein elektronischen Verfahren* auf der Basis der Dezimeter- oder Zentimeterwellen.

Die erste Verfahrensgruppe wird bis heute praktisch nur durch die verschiedenen Typen des von der Fa. AGA in Stockholm/Lidingö nach dem Prinzip von E. BERGSTRAND erzeugten *Geodimeters* vertreten. (Alle anderen Versuche auf diesem Gebiet, die der Ersetzung, der mit hohem elektrischen Energieaufwand arbeitenden Kerrzelle durch einen elektrisch einfacheren Modulator wie Kristall- oder Ultraschallmodulator dienten, sind bis heute fehlgeschlagen.)

Der zweiten Verfahrensgruppe gehören bekanntlich das *Tellurometer* von T. L. WADLEY auf der Basis der 10 cm — bzw. bei dem neuestem Modell auf der 3 cm — Welle an, dann das *Electrotape* der Cubic Corp. in San Diego in Californien und seit neuestem der *Distomat* der Fa. WILD in Heerbrugg/Schweiz. Die beiden letztgenannten Geräte benutzen ebenfalls Trägerwellen von rund 3 cm Wellenlänge.

Alle Verfahren sind Phasenmeßverfahren und ihre Arbeits- oder Distanzgleichungen gehen von der Zeit-Weg-Gleichung

$$2D = c\,\Delta t \tag{1}$$

aus, in der c die Ausbreitungsgeschwindigkeit des elektromagnetischen Trägers im Medium des Meßraumes und Δt das Zeitintervall zwischen dem Aussenden und Empfangen eines elektrischen oder optischen Signales ist. Die Distanz $2D$ ergibt sich, da alle Verfahren auf dem Reflexions- oder Relaisprinzip beruhen, aus dem Durchlaufen der doppelten Meßstrecke.

Da der Meßvorgang in der Atmosphäre vor sich geht, ist c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Trägerwellen in der Luft. Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Schwingung in einem Medium gilt

die MAXWELLsche Gleichung

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \tag{2}$$

worin ε die Dielektrizitäts- und μ die Permeabilitätskonstante der Luft und c_0 die universelle Konstante, die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. c_0 ist, wie bekannt, nach der Empfehlung der 11. Generalversammlung der IUGG in Toronto 1957 (Resolution Nr. 1) gleich

$$c_0 = 299\,792{,}5 \pm 0{,}4 \text{ km/s}$$

anzunehmen. Für die als Trägerwellen in Frage kommenden Spektralbereiche der Licht- bzw. der Dezimeter- und Zentimeterwellen wird der Ausdruck $\sqrt{\varepsilon\mu}$ gleich dem herrschenden Brechungskoeffizienten der Luft n und Gleichung (2) geht in die Form

$$c = \frac{c_0}{n} \tag{3}$$

über.

Da die *Ausbreitungsgeschwindigkeit der Lichtwellen* in der Atmosphäre wegen des Dispersionseffektes frequenzabhängig ist und die verwendete Trägerwelle keine mathematische Einzelschwingung ist, sondern immer, auch bei monochromatischem Licht aus einem Frequenzband, einer Wellengruppe besteht, ist ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit gleich der *Gruppengeschwindigkeit*. Diese kann als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch die laufende Interferenz der Einzelwellen der Wellengruppe entstehenden periodischen Energiezentren definiert werden. Zur Bestimmung der herrschenden Gruppengeschwindigkeit muß der Gruppenbrechungskoeffizient bekannt sein, mit dem die Gleichung (3) übergeht in

$$c_{Gr} = \frac{c_0}{n_{Gr}}. \tag{3a}$$

Der Gruppenbrechungskoeffizient für sichtbares Licht ist eine Ortsfunktion der Lufttemperatur, des Luftdruckes, der Luftfeuchtigkeit und betrifft die effektive, d. i. die auf den Empfänger schließlich wirksame mittlere Trägerfrequenz.

Der Brechungskoeffizient für den elektromagnetischen Trägerwellenbereich zwischen 0,03 und 1,00 m ist nur von der Temperatur, vom Druck und vom Wasserdampfgehalt der Luft abhängig. Eine Frequenzabhängigkeit (Dispersionseffekt) besteht nicht.

Von Wichtigkeit ist noch, daß dem Vakuumwert der Lichtgeschwindigkeit, aber auch dem jeweiligen aktuellen Wert derselben, geodätisch gesehen, der Charakter eines Maßstabsfaktors zukommt.

Auf der 12. Generalversammlung der IUGG in Helsinki 1960 wurden, um Einheitlichkeit in die Berechnung der elektronischen Distanzmessungen zu bringen, folgende Rechenformeln für den Brechungskoeffizienten empfohlen (Resolution Nr. 1):

a) *Für Licht als Trägerwellen*

Zur Berechnung des Gruppenbrechungsindex für Normalverhältnisse, d. s. trockene Luft bei 0° C, 760 mm Hg Druck und 0,03% Kohlendioxydgehalt, die als gleichwertig anzusprechenden Formeln von B. EDLEN und von H. BARRELL und J. E. SEARS. Ihre gegenseitige Unsicherheit für die wichtige Lichtwellenlänge $\lambda = 0{,}56$ μm (gelbgrün) beträgt rund $1{,}0 \cdot 10^{-7}$ [2], sie kann daher vernachläßigt werden. Die bekanntere Formel von BARRELL und SEARS sei zitiert, sie lautet für λ in μm:

$$(n_{Gr} - 1)\, 10^7 = 2876{,}04 + 3\,\frac{16{,}288}{\lambda^2} + 5\,\frac{0{,}136}{\lambda^4}\,. \tag{4}$$

Um von der Normalatmosphäre auf die tatsächlich herrschenden Verhältnisse überzugehen, dient die zweite Formel von BARRELL und SEARS, die Ihnen ebenfalls bekannt ist:

$$n_L = 1 + \frac{(n_{Gr} - 1)\, p}{(1 + \alpha\, t)\, 760} - \frac{5{,}5 \cdot 10^{-8}}{1 + \alpha t}\, e\,. \tag{5}$$

Darin ist

n_L Brechungskoeffizient bei den herrschenden äußeren Verhältnissen, t Lufttemperatur in ° C, p Luftdruck in Millimeter Hg, α Ausdehnungskoeffizient der Luft = 0,00367, e Partialdruck des Wasserdampfes der Luft in Millimeter Hg.

b) *Für Mikrowellen zwischen* $\lambda = 0{,}03$ *und* 1,00 *m als Trägerwellen* wurde die Formel von L. ESSEN und K. D. FROOME empfohlen:

$$n_M = \left[1 + \frac{103{,}49}{T}\,(p - e) + \frac{86{,}26}{T}\left(1 + \frac{5748}{T}\right) e\right] \cdot 10^{-6}. \tag{6}$$

Darin ist T die absolute Temperatur in °K oder $(273{,}16 + t)°$, p und e sind wieder in Millimeter Hg einzuführen.

Die Formeln können, nach allen bisherigen Erfahrungen, in den üblichen Meßbereichen als streng gültig angesehen werden.

Unter den hier auftretenden meteorologischen Elementen sind alle bis auf den Partialdruck des Wasserdampfes direkt instrumentell meßbar. Der Partialdruck kann nur mittelbar über Psychrometer- oder Hygrometermessungen berechnet werden. Im allgemeinen wird man die Messung mittels *Aspirations-Psychrometern mit Ventilatoren mit eichbaren Uhrwerken*, deren Wirkungsweise als bekannt vorausgesetzt werden kann, vorziehen, da sie,

instrumentell gesehen, die sichersten Werte geben. Die Berechnung des herrschenden Dampfdruckes erfolgt dann mit der Psychrometerformel von der allgemeinen Form

$$e = E' - Ap\,(t - t')\,. \tag{7}$$

In ihr sind

E' Sättigungsdampfdruck bei der Temperatur des feuchten Thermometers, A Psychrometerkonstante, t Temperatur des trockenen Thermometers, t' Temperatur des feuchten Thermometers.

Die Psychrometerkonstante A ist von der Windgeschwindigkeit, also von der Wirkung der Ventilation an der Quecksilberkugel des befeuchteten Thermometers abhängig. Am zuverlässigsten wird die benötigte Temperaturdifferenz $(t - t')$ erhalten, wenn beide Thermometer mit einer Luftgeschwindigkeit $v \geq 2$ m/s ventiliert werden.

Für die Konstante A werden heute folgende Werte benützt:

Nach F. LINKE [3] ist A bei einer Ventilationsgeschwindigkeit $v = 2{,}5$ m/s gleich 0,000 656 bzw. bei Vereisung der Kugel des feuchten Thermometers gleich 0,000 579.

Nach J. GUTMANN [4] und den Psychrometertafeln des ehemaligen Reichsamtes für Wetterdienst [5] ist A bei einer Luftgeschwindigkeit $v \geq 2{,}0$ m/s gleich 0,000 662 bzw. 0,000 583.

Es muß nachdrücklichst darauf hingewiesen werden, daß die *einfache* Form der Psychrometerformel (7) *allen* Ansprüchen genügt [2], und entgegen anderen Meinungen (Institut Géographique National, Paris [6]) das mit Uhrwehrksantrieb ventilierte Psychrometer den von Hand geschleuderten ohne Strahlungsschutz immer vorzuziehen ist.

Der Einsatz von Haarhygrometern zur Bestimmung der relativen Luftfeuchtigkeit bringt zwar wegen der größeren Trägheit zeitliche Mittelwerte, doch ist das Gerät unsicherer und ungenauer. Es wird aber eventuell als Kontrollgerät heranzuziehen sein. Die Bestimmung des Dampfdruckes erfolgt nach der Formel

$$e = \frac{fE}{100}\,. \tag{8}$$

Darin ist

f relative Luftfeuchtigkeit in Prozenten, E Sättigungsdampfdruck bei der Temperatur des trockenen Thermometers.

Die Auswirkung eines Fehlers bei der Bestimmung der mittleren herrschenden Ausbreitungsgeschwindigkeit bzw. des Brechungskoeffizienten auf die Distanz wird durch die bekannte Beziehung

$$\Delta D = -\frac{\Delta n}{n} D \sim -\Delta n \cdot D \qquad (n \sim 1) \tag{9}$$

wiedergegeben. Der mittlere Einzeleinfluß der meteorologischen Elemente ergibt sich aus der differentiellen Betrachtung der Formeln (4), (5) und (6) (siehe dazu [2]) mit

a) *Für Licht*

$$\Delta\lambda = \pm\, 0{,}000\ 1\ \mu\text{m} \ldots \Delta D \sim \pm\, 5{,}5 \cdot 10^{-9} \cdot D,$$
$$\Delta t = \pm\, 1^\circ\,\text{C} \quad \ldots \Delta D \sim \pm\, 1{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot D,$$
$$\Delta p = \pm\, 1\ \text{mm Hg} \quad \ldots \Delta D \sim \mp\, 0{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot D,$$
$$\Delta e = \pm\, 1\ \text{mm Hg} \quad \ldots \Delta D \sim \pm\, 5{,}3 \cdot 10^{-8} \cdot D\,;$$

b) *Für Mikrowellen*

$$\Delta t = \pm\, 1^\circ\,\text{C} \quad \ldots \Delta D \sim \pm\, 1{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot D,$$
$$\Delta p = \pm\, 1\ \text{mm Hg} \quad \ldots \Delta D \sim \mp\, 0{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot D,$$
$$\Delta e = \pm\, 1\ \text{mm Hg} \quad \ldots \Delta D \sim \mp\, 6{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot D.$$

Die Aufstellung zeigt, daß bei den Mikrowellen die gute Bestimmung des Dampfdruckes von größter Bedeutung ist, wozu beachtet werden muß, daß hier die Temperaturbestimmung — siehe Gleichung (7) — eine entscheidende Rolle spielt.

Für die Distanzmessung entscheidend ist nun die tatsächliche Bestimmbarkeit der meteorologischen Daten, also die Genauigkeit mit der die Mittelwerte der meteorologischen Elemente über den Wellenweg bestimmt werden können.

Der allgemein übliche Vorgang beim Ermitteln der meteorologischen Daten ist ihre gleichzeitige Messung an den Streckenendpunkten in Bodennähe, wobei die Annahme getroffen wird, daß das meteorologischen Feld des Meßraumes für alle Elemente linear bzw. gesetzmäßig aufgebaut ist. Während dies für die Luftdruck- und eventuell auch für die Luftfeuchtigkeitsverteilung im großen und ganzen zutrifft, liegen der Temperaturverteilung vielfältige und wechselnde Einflüsse zugrunde.

Der Aufbau des *Temperaturfeldes der Atmosphäre* wird bis in große Höhen durch die Rück- bzw. Ausstrahlungswirkung der Bodenoberfläche bestimmt. Neben Tages- und Jahreszeit und Wetter spielen Relief und Bodenbedeckung (Bewuchs) eine wesentliche Rolle. Die bodenbeeinflußte Luftschicht kann eine Dicke bis zu mehreren Hundert Metern erreichen. Die darüber lagernden Luftschichten haben nur noch einen begrenzten und mit wachsendem Bodenabstand abnehmenden tageszeitlichen Temperaturgang. Sie haben vorwiegend langzeitig konstante negative Temperaturgradienten von im Mittel 0,7 bis 1,0° C und werden als *freie Atmosphäre* bezeichnet. Innerhalb der bodenbeeinflußten Zone folgen die isothermen Flächen dem Boden-

relief ungefähr parallel. Der Aufbau der Temperaturschichtung in Bodennähe ist bei Tag und bei Nacht grundsätzlich verschieden, er muß daher für beide Fälle getrennt betrachtet werden.

Der *Tagesverlauf des Temperaturfeldes in Bodennähe* ist in fast allen Wetterlagen, auch bei völliger Bedeckung, durch den Einstrahlungseffekt bedingt. Durch Rückstrahlung des erwärmten Bodens wird auch die bodennächste Luftschicht mehr oder weniger stark erwärmt und teilt ihre Wärme durch turbulente Austauschvorgänge (Konvektion, Flimmererscheinungen) auch den darüber lagernden Luftschichten mit. Dabei kommt es zur Ausbildung zweier fallweise sehr ausgeprägter Zonen: der *labilen Unterschicht* (in den Sommermonaten etwa bis 30 bis 35 m Dicke ansteigend mit überadiabatischem Temperaturgradienten: $dt/dh < -1°$ C/100 m) und der wesentlich dickeren *adiabatischen Zwischenschicht* (im Durchschnitt mehrere Hundert Meter dick), die den Übergang zur freien Atmosphäre darstellt. Die Ausbildung beider Schichten ist aufs Engste mit dem Sonnenstand verbunden und erfolgt auch an bedeckten Tagen.

Das umgekehrte Bild zeigt der *Nachtverlauf der Temperaturschichtung in Bodennähe.* Durch die Wiederausstrahlung der während des Tages eingestrahlten und vom Boden gespeicherten Sonnenenergie wird eine Abkühlung des Bodens erzeugt, die auch die darüber lagernde Luft erfaßt. Der Abkühlungs- und Austauschmechanismus ist komplizierter und anders geartet als während des Tages und kann hier nicht besprochen werden. (Eine eingehende Darstellung wurde in [2] versucht.) Dieser Vorgang, der wegen der Umkehrung der Temperaturverhältnisse in Bodennähe gegen den Tagesverlauf und gegen den normalen Aufbau des Temperaturfeldes als *nächtliche Inversion* bezeichnet wird, führt, ähnlich wie bei Tage, ebenfalls zur Ausbildung zweier charakteristischer Schichten: der bodennahen *Inversions-Unterschicht*[2] und einer *Übergangs-Zwischenschicht.* Ihre Dicken erreichen im Laufe der Nacht einige Dekameter bzw. einige Hundert Meter. Die in der Inversions-Unterschicht auftretenden Temperaturgradienten sind jetzt positiv und zeigen sonst den gleichen Verlauf wie bei Tag.

Wichtig ist, daß Bodeninversionen ebenfalls *immer* auftreten. Die Stärke ihrer Ausbildung hängt außer vom allgemeinen Wettercharakter, vom Wind, vom Relief, vom Bodenbewuchs u. ä. ab. Bei klarem Himmel treten extreme Ausbildungen auf.

Diese beiden Zustände: Tagesschichtung und nächtliche Inversion gehen im Tagesrythmus ineinander über. Die Übergänge, die zugleich Wendepunkte des Gradientenverlaufes sind, treten etwa 1 ½ Stunden nach Sonnenauf-

[2] Das wesentliche Unterscheidungsmerkmal der labilen Unterschicht bzw. der Inversions-Unterschicht gegen die Zwischenschicht ist der mehr oder minder gesetzmässige Aufbau nach einer Potenzfunktion.

gang und $1^3/_4$ Stunden vor Sonnenuntergang ein, während gleichzeitig im ganzen Bereich des bodennahen Temperaturfeldes *Isothermie* herrscht. Dies verdient besondere Beachtung.

Das Diagramm im Bild 1. [7] zeigt neben der Ausbildung der Isothermie gut das Abklingen des Bodeneinflusses mit der Höhe. Bei 300 m über dem Boden ist kein systematischer Einfluß mehr erkennbar. Mit der gleichen Deutlichkeit kommt dies auch in den Diagrammen von N. K. JOHNSON und G. S. P. HEYWOOD in [8] zum Ausdruck.

Von großer Bedeutung für die Ausbildung der bodenbeeinflußten Luftschichtungen sind *Luftbewegungen — Wind.* Während der Einstrahlungs-

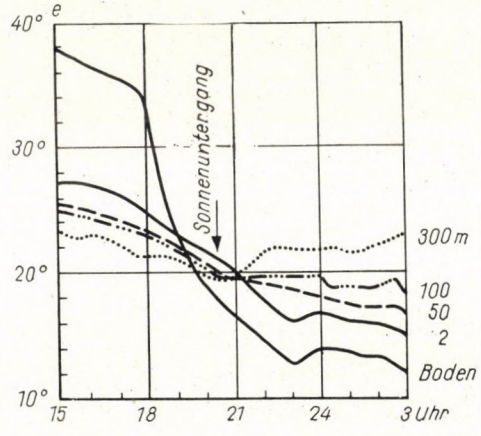

Bild 1. Temperaturgang, Rostock, 20.7.1925

vorgang das Auftreten von Wind direkt auslöst, führt die Abkühlung der Inversion zu einer stabileren Lagerung der Luftmassen und damit bei stabiler Witterung zu einer Abbremsung aller horizontalen Luftbewegungen bis zur Windstille. Wind führt zur Durchmischung der Luftschichtung, Windstille zu ihrer extremen Ausbildung.

Die bodenbeeinflußte Luftschicht, die wie gezeigt, sowohl bei Tage als auch bei Nacht eine Dicke von mehreren Hundert Metern aufweist, geht mehr oder weniger kontinuierlich in die Temperaturschichtung der freien Atmosphäre über, deren Tagesgang sehr gering ist. Er beträgt nach allen Erfahrungen bei stabilen Witterungsverhältnissen im Durchschnitt der Sommermonate in 500 bzw. 1000 m Höhe über dem Boden etwa 3 bzw. 2° C [9].

Wie schon erwähnt, spielt auch das Bodenrelief bei der Ausbildung der »gestörten« bodennahen Luftschichtung eine gewisse Rolle. So ist sowohl der Tages- als auch der Inversionseffekt auf Berggipfeln gering, da dort immer eine stärkere Ventilation herrscht, die kleinere Masse zu einer geringeren Wärmespeicherung führt und bei Nacht die Kaltluftmassen wegen ihrer

größeren Dichte absinken und an ihre Stelle wärmere Luft aus der umgebenden freien Atmosphäre einströmt und einen gewissen Temperaturausgleich herbeiführt.

Auf einen weiteren Effekt: das Absinken der Lufttemperatur in der Umgebung von hohen Berggipfeln bei stärkerem Wind ebenso wie auf den Aufbau des Temperaturfeldes über Wasserflächen soll nicht mehr eingegangen werden. Beide Erscheinungen wurden in [2] eingehend behandelt.

Faßt man die beschriebenen Effekte zusammen, so ergibt sich, daß der Verlauf der Temperaturschichtung in Bodennähe (= Instrumentenstände) nichtlinear mit den bodenfernen Schichten bzw. mit der sogenannten freien Atmosphäre zusammenhängt und nur in Sonderfällen, wenn der Wellenweg über homogenem Gelände bodenparallel verläuft, aus den Messungen an den Endpunkten repräsentative Mittelwerte folgen. Liegen *beide Streckenendpunkte auf Bodenerhebungen*, sodaß der Hauptteil des Wellenweges in größerem Bodenbestand verläuft, so werden die Mittelwerte aus den Temperaturmessungen an den Endpunkten bei *Tag immer höher* und *bei Nacht immer tiefer* als die wahre mittlere Temperatur liegen.

Bei *Streckenmessungen im Gebirge* muß zwischen Strecken bei denen ein Punkt im Tal und der andere auf einem Berggipfel liegt und Strecken wo beide Endpunkte Gipfelstationen sind, unterschieden werden. Im zweiten Fall wird der Mittelwert der gemessenen Temperaturen der wahren mittleren Temperatur wahrscheinlich sehr nahe kommen. Im ersten Fall wir die Temperatur des Talpunktes zu tief liegen.

Daß wahrscheinlich auch bei scheinbar günstigen Geländeverhältnissen wie sie bei trigonometrischen Basen vorliegen, immer noch systematische Temperaturfehler auftreten, geht aus einer Bemerkung im Bericht der Studiengruppe Nr. 19 der IAG für die 12. Generalversammlung der IUGG in Helsinki 1960 [10] hervor. Dort wurde aufgrund systematischer Differenzen bei der Nachmessung von Basen mittels Geodimetern und Tellurometern geschlossen, daß die Geodimetermessungen eine Vergrößerung des empfohlenen c_0-Wertes um $+ 0{,}2$ km/s, die Tellurometermessungen aber eine Verringerung um $-0{,}4$ km/s verlangten. Wie sich leicht aus der folgenden Beziehung

$$\Delta D = -\frac{D}{n}\Delta n = \frac{D}{c_0}\Delta c_0 \tag{10}$$

herleiten läßt, wird ein unerkannter, negativer Fehler Δt bei Geodimetermessungen (nächtlicher Inversionseffekt) nach einer kompensierenden positiven Verbesserung Δc_0 verlangen und umgekehrt ein positiver Fehler Δt bei Tellurometer-Tagesbeobachtungen nach einem negativen Wert von Δc_0. Während die Annahme systematischer Temperaturfehler bei den Geodimetermessungen große Wahrscheinlichkeit hat und auch die Abweichungen bei den Tellurometerfehlern erklären kann, liegt bei diesen aber auch noch ein

anderer, mit der elektrischen Bodenleitfähigkeit zusammenhängender Effekt vor. Dieser führt bei bodennahem Verlauf der Tellurometerkeule zu einer Verringerung der Ausbreitungsgeschwindigkeit, die eine Laufzeitverlängerung nach sich zieht. Wird dieser Effekt nicht erkannt und mit dem c_0-Standardwert gerechnet, so verlangen die Vergleichsergebnisse einen kleineren c_0-Wert [11].

Das hier skizzierte Temperaturproblem der elektronischen Distanzmessung, das, das sei vorweggenommen, *das äussere Hauptproblem* der elektronischen Verfahren ist, wurde in Österreich durch das Bundesamt für Eich-

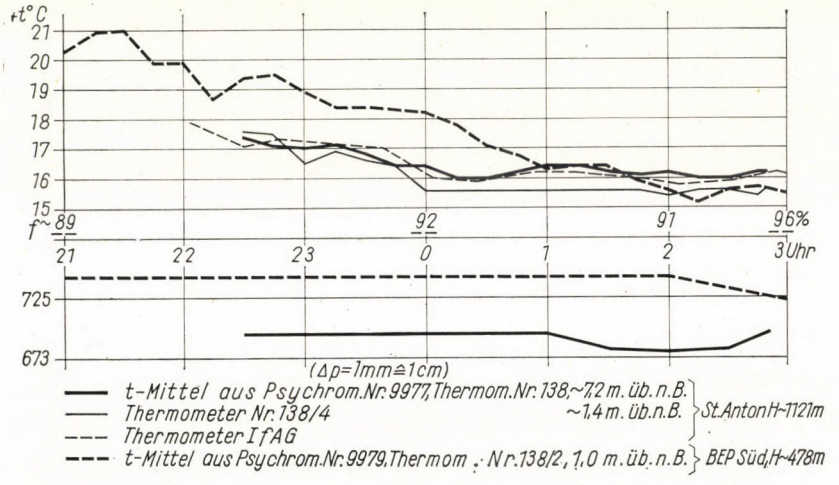

Bild 2. Seite St. Anton — BEP Süd, 18/19.6.1960. *D.*~.9,0 km [12]

Lage: St. Anton: auf einem flachen Rücken;
BEP Süd: auf dem ca 70 m über die Rheinebene aufragenden, isolierten Kalkstock des Montlinger Berges, am Rande eines Steilabfalles (Steinbruch) gegen Nord.
Wetter: sternklar und fast windstill.
Temperaturverlauf: starker und stetiger Temperaturrückgang auf BEP Süd; Temperatur auf BEP Süd schließlich um etwa 5° C zu tief, Fehler auf St. Anton geringer.

und Vermessungswesen zusammen mit der Technischen Hochschule Graz, II. Lehrkanzel für Geodäsie, Vorstand Prof. Dr. K. RINNER in einem Testnetz nördlich von Graz im Sommer 1962 eingehend studiert. Das österreichische Netz 1. Ordnung enthält nur eine moderne Basis; die Wiener Basis von 1941 und hat Anteil an der Entwicklungsseiten der Basis von Heerbrugg/Schweiz 1959 bzw. von Radovlijce (Jugoslawien) 1951. Der Maßstab des österreichischen Gebrauchsnetzes ist zwar unhomogen, kann aber aus begreiflichen Gründen nicht mehr geändert werden. Für die Einfügung des österreichischen Netzes 1 . O. in das europäische Dreiecksnetz ist jedoch eine Verbesserung des Netzmaßstabes notwendig, die durch direkte Messung von günstig verteilten Dreiecksseiten (bei Linz, Graz, Villach und Innsbruck) mittels des Geodimeters NSAM—2A erfolgen soll, wobei es sich fast durchwegs um Streckenmessungen in Mittelgebirgsgelände handelt. Temperaturbestimmun-

gen bei Versuchsmessungen im Basisnetz Heerbrugg 1960 und im Testnetz nördlich Graz 1961 zeigten eindeutig die verschiedenen, beschriebenen Inversionseffekte auf die folgenden Bilder 2. bis 4. und 7. zeigen dies für das Basisnetz Heerbrugg.

Analoge Bilder zeigen die nun folgenden Beispiele von den Messungen im Testnetz nördlich Graz, bei denen jeweils Widerstandsthermometer (Type Tempavi) so hoch als möglich über dem Boden und Quecksilberthermometer

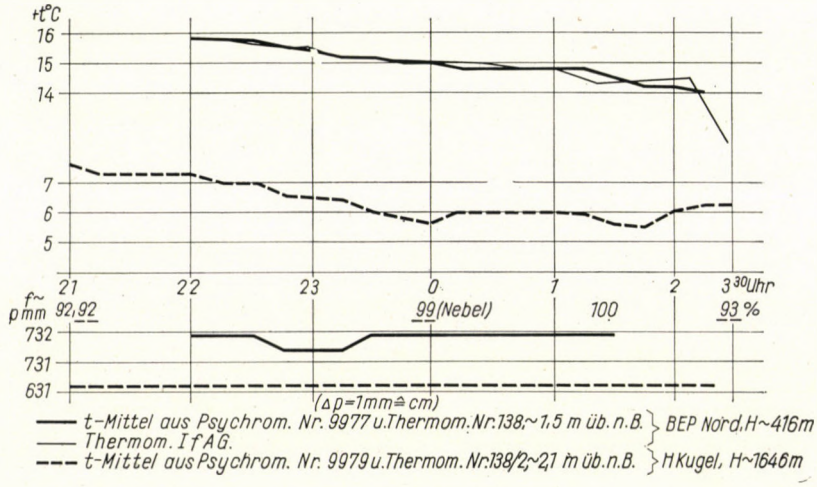

Bild 3. Seite BEP Nord — Hohe Kugel, 20./21.6. 1960. $D \sim 8{,}1$ km [12]

Lage: BEP Nord: an der Rheinbrücke bei Diepoldsau,
Hohe Kugel: grasiger, nach Westen — in Meßrichtung — und Osten steil abfallender, schmaler Rücken.
Wetter: bedeckt und windstill.
Temperaturverlauf: wesentlich verringerte Inversionseffekte.

in Visurhöhe zur quantitativen Erfassung der Inversionseffekte eingesetzt wurden (Bilder 5, 6 und 8 bis 15).

Zur Klärung des Temperaturproblems und um vor allem auch ein Bild über die Größenordnung der Temperaturfehler zu bekommen, wurden nun im Sommer 1962 im Testnetz Graz, dessen Mittelgebirgscharakter gute Rückschlüsse auf die Verhältnisse in den Profilen der geplanten Streckenmessungen 1.0. zuläßt, Versuche mit Hilfe von Fesselballonen und einem Hubschrauber durchgeführt. Sie erfolgten unter Mitwirkung der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik und des österreichischen Bundesheeres, das einen Hubschrauber der Type Bell H 13 H dafür einsetzte (Bilder 9 bis 15).

Die aus mehreren Polyäthylenschläuchen [13] gebildeten Ballone trugen das Radiosonden-Temperaturelement ML 419, einen NTK-Widerstand hoch, die Nylonhalteschnur war mit zwei Meßleitungen zusammengewickelt, die

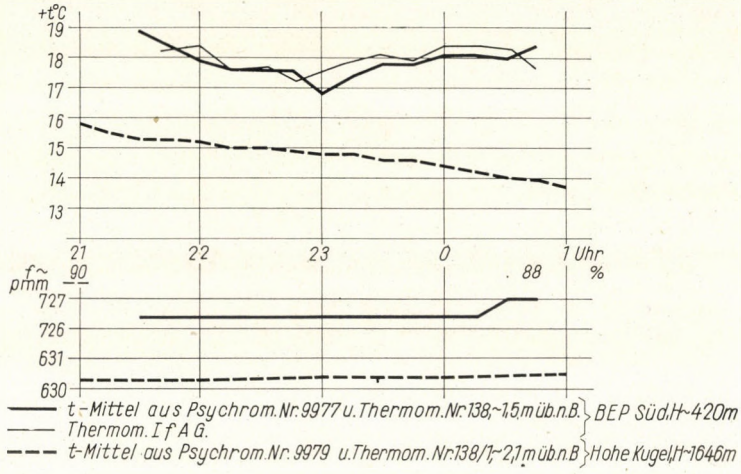

Bild 4. Seite BEP Süd A — Hohe Kugel, 23/24.6.1960. $D \sim 9{,}8$ km [12]

Lage: BEP Süd A: am Fuße des Montlinger Berges in der Rheinebene zwischen Gebäuden und Bäumen.

Wetter: BEP Süd: bis 23 Uhr windstill und sternklar, dann bedeckt; Hohe Kugel: bedeckt und leichter NW-Wind.

Temperaturverlauf: infolge Witterungsänderung auf der Hohen Kugel stark gegen Bild 3 verschiedene Absolutwerte der Lufttemperatur, Differenz ca 9° C; besonders bemerkenswert ist die Wirkung der über dem BEP Süd aufkommenden Bedeckung auf den Temperaturgang: Erwärmung durch Rückstrahlung.

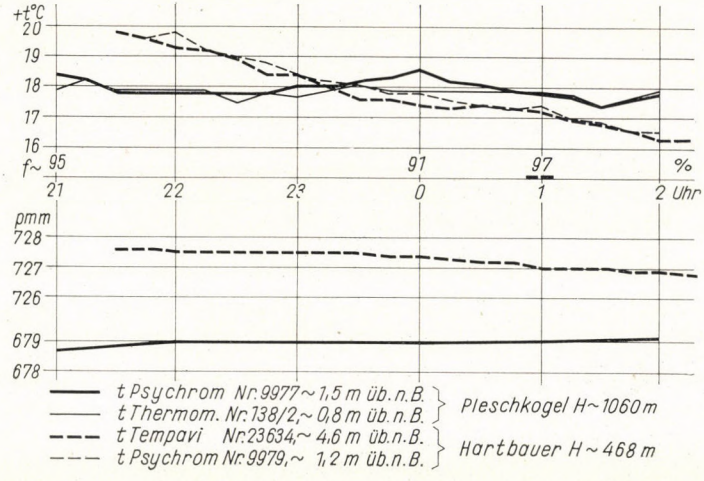

Bild 5. Seite Hartbauer — Pleschkogel, 24/25.6.1961. $D \sim 10{,}3$ km [12]

Lage: Hartbauer: flaches Ackerplateau,
Pleschkogel: nach Osten — in Meßrichtung — freier und stark abfallender Rücken.

Wetter: sternklar und windstill.

Temperaturverlauf: auf dem Pleschkogel sehr stabile Verhältnisse (Messung nur in Bodennähe, da das Widerstandsthermometer ausfiel). Trotz eines Höhenunterschiedes von rd. 600 m führt der starke Inversionseinfluß auf Hartbauer zur Gleichziehung der Temperaturen bzw. zur Umkehrung der »normalen« Verhältnisse. Wahrscheinlich starke Temperaturverfälschung auf beiden Stationen.

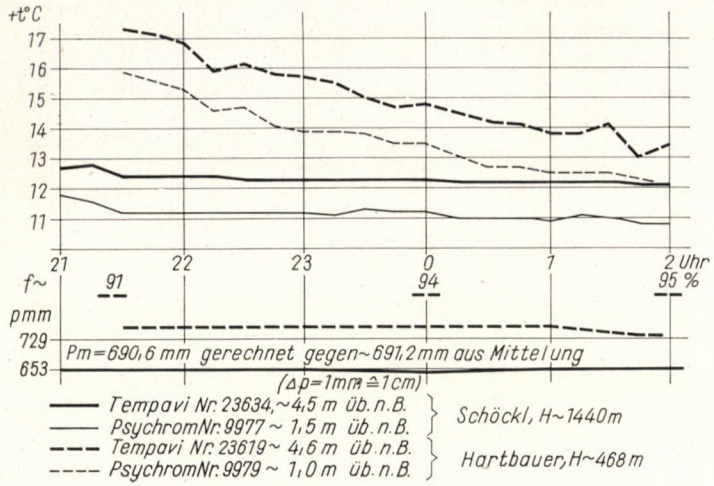

Bild 6. Seite Hartbauer — Schöckl W. 30.6/1.7. 1961. $D \sim 11{,}0$ km [12]

Lage: Schöckl: isolierter, plateauförmiger Kalkstock mit Almcharakter, Station an der Kante des Steilabfalles nach Südwesten — Meßrichtung.

Wetter: sternklar und leicht windig.

Temperaturverlauf: stabile Verhältnisse auf Schöckl bei gleichzeitiger starker Inversion: konstante Differenz von rd. 1° C/3 m zwischen den beiden Thermometern — stabile Lagerung der Luftmassen auch am Plateaurand. Starke Inversion auf dem Talpunkt Hartbauer; Temperaturen auf beiden Stationen verfälscht.

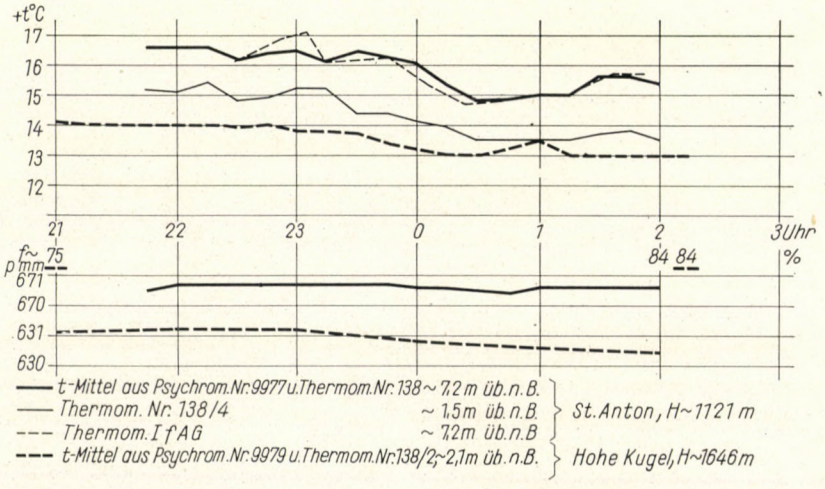

Bild 7. Seite St. Anton — Hohe Kugel, 22/23.6. 1960. $D \sim 16{,}3$ km [12]

Wetter: sternklar und windstill, zweite Nachthälfte leichter SO-Wind.

Temperaturverlauf: langsames, stetiges und konformes Absinken der Temperatur mit starker Inversionsausbildung auf St. Anton: konstante Temperaturdifferenz zwischen den beiden Thermometern rd. 1,5° C/5,7 m.

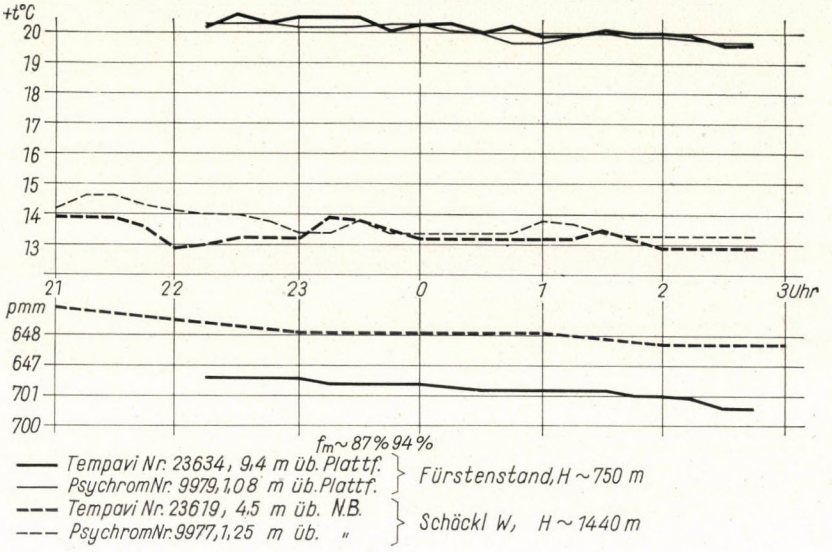

Bild 8. Seite Fürstenstand—Schöckl W. 11/12.8.1961. $D \sim 13{,}2$ km [12]

Lage: Fürstenstand: nach drei Seiten steil abfallender, mit Baumgruppen bestandener Rücken mit hochaufgemauerter Terrasse, einige nahe Baumwipfel höher als die Terrasse.

Wetter: wechselnde Bewölkung und schwacher Südwind.

Temperaturverlauf: stabile Verhältnisse auf beiden Stationen und gute Durchmischung der Luft im bodennahen Bereich. Die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Stationen entspricht einem noch möglichen Temperaturunterschied in der freien Atmosphäre: —0,96°/100 m

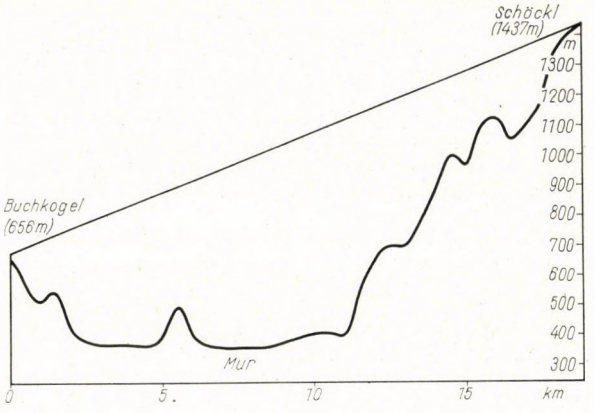

Bild 9. Seite Buchkogel — Schöckl W. $D \sim 18{,}9$ km. Profil der Seite

Messung erfolgte am Boden mittels einer Wheatstoneschen Brücke (Metrawatt »Metrapoint«-Meßbrücke). Die Ballonversuche versagten, da starke Hangab- und Talwinde in bodenferneren Zonen, die bisher von den Stationspunkten aus nie festgestellt worden waren, die Aufstiege dieser improvisierten Ballone bis in die Visurhöhen — Höheunterschiede bis 1000 m — verhinderten. Mit richtigen Ballonen mit Schwanzfinnen wären sie wahrscheinlich gelungen.

Dagegen brachte der Hubschraubeinsatz einen vollen Erfolg: das gleiche Temperaturmeßelement wurde an der außer Funkbetrieb gesetzten Heckantenne angebracht, das Meßgerät in der Kanzel aufgestellt. Eine Störung der Temperaturverhältnisse durch den Rotorstrahl trat nicht ein: die heißen Motorabgase werden nach unten weggedrückt, der Heckrotor beeinflußte die Messungen nicht. Die Hubschrauberflüge wurden während der Geodi-

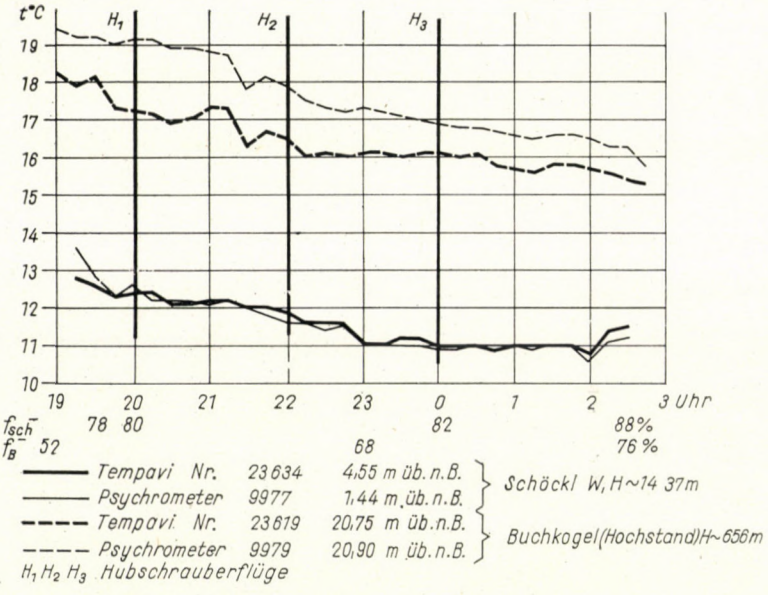

Bild 10. Seite Schöckl W. — Buchkogel. 24/25.7. 1962

Temperaturdiagramm der Bodenpunkte

Lage: Buchkogel: bewaldeter Rücken, die Reflektorstation auf einem Hochstand (auf Eisenwarte) einige Meter über dem Baumwipfeln.

Wetter: sternklar und leichter Wind.

Temperaturverlauf: auf beiden Endpunkten schwache Inversionsausbildung. Von Interesse ist aber die konstante Differenz zwischen dem Psychrometer und dem Widerstandsthermometer auf dem Buchkogel da beide in gleicher Höhe über der Plattform des Hochstandes angebracht. Überprüfungen des Widerstandsthermometers vor und nach dieser Messung ergaben seine einwandfreie Eichung. Die Ursache für die Differenz muß daher in örtlichen Einflüssen gesucht werden. Es sei hier nachdrücklich darauf hingewiesen, daß ähnliche Erscheinungen, die rein aus den lokalen Umgebungen der Thermometerstandorte stammen mußten, immer wieder nachgewiesen werden konnten. Auch Psychrometermessungen sind dagegen nicht gefeit. Der Ventilator wirkt nur auf seine nähere Umgebung und führt dadurch die gleiche Abhängigkeit vom Standort für die beiden Thermometer herbei. Die Dampfdruckbestimmung wird aber im allgemeinen richtig sein.

metermessungen in Zweistundenabständen ausgeführt, wobei die Meßstrecke in Visurhöhe, aber seitlich davon, hin und zurück abgeflogen wurde. An den Endpunkten wurde in kurzen schraubenförmigen Auf- und Abstiegen der Anschluß an die bodennahen Verhältnisse hergestellt. Bei den Nachtflügen ergaben sich zusätzlich flugnavigatorische Probleme. Für die Höhenbestim-

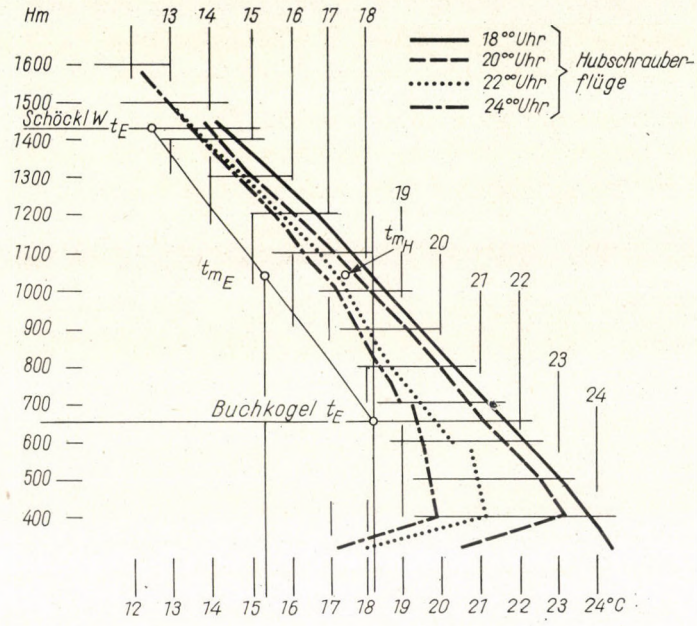

Bild 11. Seite Buchkogel — Schöckl W. 24.7. 1962. [13]

Hubschrauber-Temperaturdiagramm

Das Diagramm zeigt gut die fortschreitende Ausbildung und Höhenausbreitung der Bodeninversion und den geringen Temperaturgang der freien Atmosphäre sowie deren linearen Aufbau: konstanter negativer Temperaturgradient. Für den Meßtermin 20°° Uhr wurden die Mittelwerte aus den Hubschraubermessungen (tm_H): +17,4° C und aus den Bodenwerten (tm_E): +15,3° C berechnet. Die Differenz von —2,1° C ergibt einen Distanzfehler von +39,7 mm.

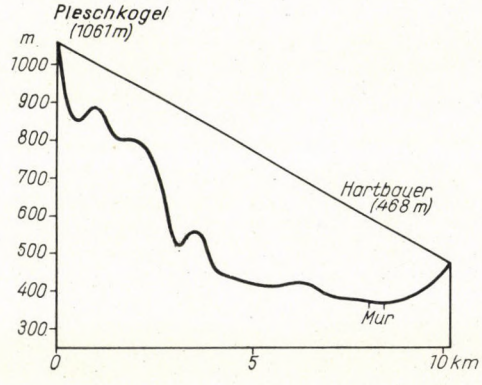

Bild 12. Seite Hartbauer-Pleschkogel. Profil der Seite

mungen wurde neben dem eingebauten Flughöhenmesser ein Präzisionsaneroid der Fa. F. Kroneis, Wien benützt.

Die bei den Hubschraubermessungen gewonnenen Erfahrungen decken sich mit den russischen Erfahrungen über die M. T. PRILEPIN [14] berichtet

und mit den englischen von I. C. C. MACKENZIE [15]. In Extremfällen werden noch größere Temperaturdifferenzen befürchtet werden müssen.

Nun wäre kurz über die Bestimmbarkeit des mittleren *Luftdruckes* und der *Luftfeuchtigkeit* zu sprechen.

Das *Druckfeld* kann innerhalb der Arbeitsdistanzen bei Geodimeter- und Tellurometermessungen als gesetzmäßig und homogen aufgebaut angesehen werden, wobei die geforderte Meßgenauigkeit von $\pm$ 0,5 mm mit guten und ständig geprüften Aneroiden leicht erreicht werden kann; bzgl. grösserer Höhenunterschiede siehe Formel (11) in [2].

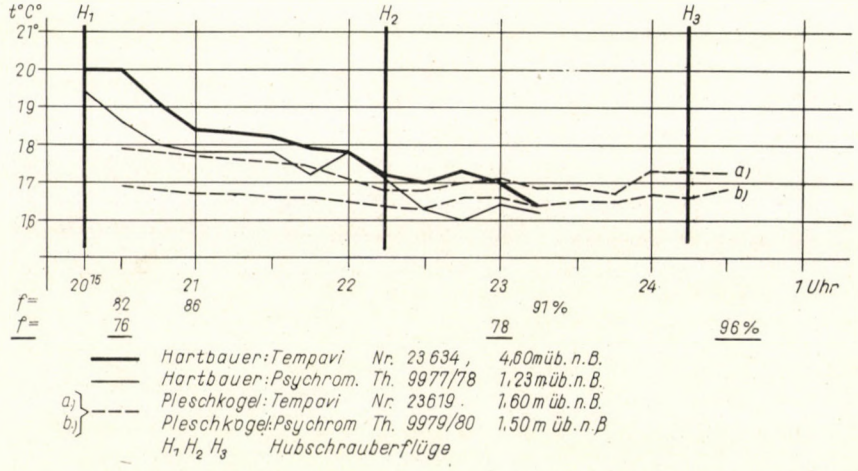

Bild 13. Seite Hartbauer — Pleschkogel 25/26.7. 1962. $D \sim 10{,}3$ km

Temperaturdiagramm der Bodenpunkte

Wetter: sternklar und windstill

Temperaturverlauf: zeigt einen fast konformen Verlauf mit dem Bild 5; Wetter und Jahreszeit gleich. Bodentemperaturen trotz 600 m Höhenunterschied fast gleich.

Zur Bestimmung der *Luftfeuchtigkeit* wurde bereits einiges gesagt. Die Verteilung der Luftfeuchtigkeit ist relativ gesetzmäßig und gleichartig über größere Räume. Obwohl man auch hier bei bodennahen Messungen mit Fehlern gegen die freie Atmosphäre rechnen muß, sind deren Ausmaße wahrscheinlich mehr durch fehlerhafte Psychrometermessungen bedingt, als durch die Schichtungsverhältnisse in der Atmosphäre. Dies wird durch die Betrachtung der schon erwähnten Forderung nach Verkleinerung des c_0-Wertes für Tellurometermessungen indirekt bestätigt, da eine Fehlerannahme, die dieser Forderung entspricht, physikalisch nicht möglich ist.

Bei den elektrisch-optischen Verfahren tritt auch noch der Dispersionseffekt ein, die Änderung der Lichtfarbe durch die wechselnde Extinktion der Atmosphäre (Dunst), der aber hier nicht besprochen werden kann. Siehe aber [2] bzw. [12].

Faßt man nun alle Erkenntnisse über die hier berichtet wurde zusammen, so läßt sich sagen, daß diese in erster Linie für lange Strecken, die mit höchster Genauigkeit gemessen werden sollen, wichtig sind. Dort wird man wohl mit Hilfe von Fesselsonden oder Hubschrauben direkt Messungen längs des Wellenweges vornehmen müssen. Für Polygonseiten und Trilaterationen niederer Ordnung sind die Erkenntnisse aber insoferne wichtig, als sie einiges über günstige Meßzeiten und Profilbedingungen aussagen. Bedeckter Himmel,

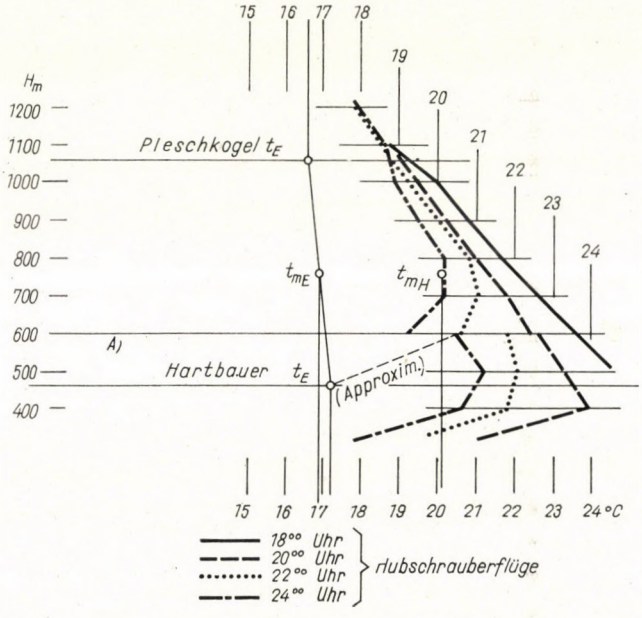

Bild 14. Seite Hartbauer Rohr N — Peschkogel SW 25.7. 1962. [13]

Hubschrauberbeobachtungen

Obwohl hier die Verhältnisse nicht über den ganzen Meßbereich einheitlich sind, zeigt sich, das analoge Bild wie bei der Strecke Buchkogel-Schöckl in der Vornacht. Der für den Meßtermin 22°° Uhr berechnete Mittelwert aus den Hubschraubermessungen (tm_H) beträgt etwa +20,1° C, aus den Messungen an den Endpunkten ergibt sich mit tm_E = +16,9° C. Die Differenz von —3,2° C ergibt einen Distanzfehler von +33,0 mm.

Von besonderem Interesse ist ein Vergleich der Hubschraubermessungen auf der Strecke Buchkogel — Schöckl um 0°° Uhr mit den Ergebnissen des Radiosondenaufstieges in Wien Hohe Warte (Bild 15). Er zeigt, daß fallweise die Extrapolation selbst über so große Entfernungen (über 150 km) geringere Fehler als die Bodenmessung verursachen kann.

Wind und die Zeiten um die Isothermiebereiche, neben der Vermeidung inhomogener Profilverhältnisse (= Zerlegung in homogene Teilstücke) werden bei Endpunktmessungen bei Arbeiten minderer Genauigkeit immer gut zum Ziele führen. Abgesehen davon, daß bei kurzen Streken auch extremere Fehler in der richtigen Bestimmung des Hauptfaktors, der Lufttemperatur nur eine geringe Rolle spielen.

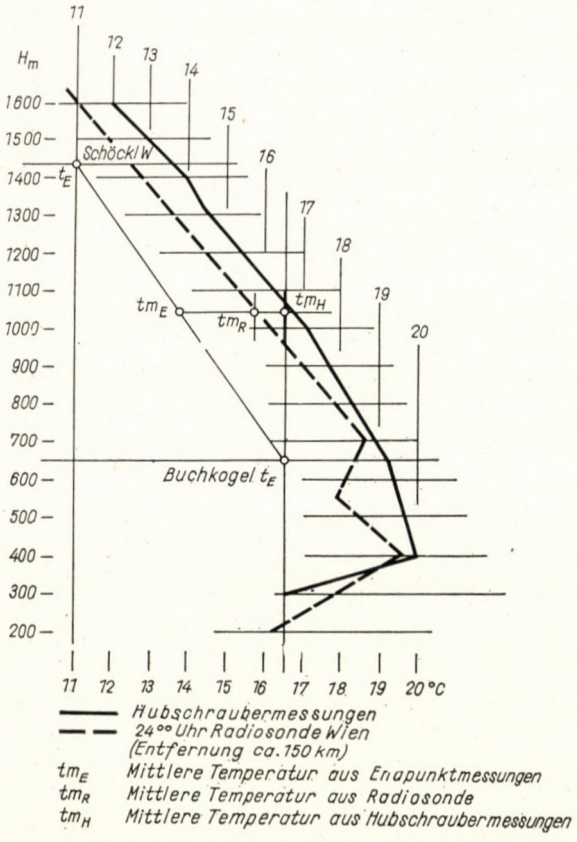

Bild 15. Radiosonde Wien — Hubschraubermessung

Zum Schluß sei der vollständigkeitshalber erwähnt, daß verschiedene Geräte und Verfahren zur direkten Messung oder zur Verbesserung der aus Endpunktmessungen gewonnenen Brechungskoeffizientenwerte entwickelt wurden, so die elektronischen Refraktometer [16] oder das auf der trigonometrischen Höhenmessung aufbauende Verfahren von J. SAASTAMOINEN [17], auf die hier nicht mehr eingegangen werden kann.

SCHRIFTTUM

1. REGŐCZI, E.: Möglichkeiten in Ungarn zur Anwendung der indirekten Entfernungsmessung auf physikalischer Grundlage. *Acta Techn. Hung.* XXIII (1959), 357—364.
2. MITTER, J.: Über die Bestimmbarkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Trägerwellen bei elektronischen Entfernungsmessungen. *Allg. Verm. Nachr.*, 1962, S. 139—158.
3. LINKE, F.: Meteorologisches Taschenbuch, V. Ausgabe, Leipzig 1939, Bd. V, S, 88 ff.
4. GUTMANN, J.: Beobachtungs- und Meßmethoden des Wetterdienstes. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Publ. Nr. 158, Wien 1948.
5. Aspirations-Psychrometer-Tafeln, herausgegeben vom Reichsamt f. Wetterdienst, Berlin, 2. erweit. Aufl., Braunschweig 1940.

6. Institut Géographique National, Paris. Untersuchungen über das Tellurometer aus den Jahren 1958 und 1959, DGK, Wissensch. Übersetzungsdienst, Heft 29, München 1961.
7. STEINER, O.: Entstehung von Bodeninversionen bei wolkenlosem Himmel und Landwind, *Wiss. Abhandlungen der Rostocker Luftwarte*, 1926.
8. JOHNSON, N. K.—HEYWOOD, G. S. P.: An investigation of the lapserate of temperature in the lowest 100 m of the athmosphere, *Geophys. Mem.* Nr. 77, London, 1938.
9. SÜRING, R.: Leitfaden der Meteorologie, Leipzig 1927.
10. EDGE, R. C. A.: Report of IAG Special Study Group No. 19 on »Electronic Distance Measurement using ground instruments«, vorgelegt der 12. Generalversammlung der IUGG in Helsinki 1960.
11. NOTTARP, K.: Bemerkungen zur Wellenausbreitung bei Tellurometermessungen *Allg. Verm. Nachr.*, 1962, S. 159—161.
12. MITTER, J.: Erfahrungen und Probleme bei Geodimetermessungen. Vortrag auf dem IV. Internationalen Kurs für Geodätische Streckenmessung in München, 8. Sept. 1961; Deutsche Geodät. Komm, Reihe B, Heft 95/I, S. 53—71. Frankfurt/M. 1963.
13. MAZANEC, L.: Probleme der Temperaturmessung bei elektrisch-optischen Entfernungsmessungen, Manuskript 1962.
14. PRILEPIN, M. T.: Die Bestimmung des Brechungskoeffizienten der Luft bei elektrisch-optischen Entfernungsmessungen, *Geodesija i Kartografija*, 1957.
15. MACKENZIE, I. C. C.: The Geodimeter Measurements of the Ridge Way and Caithness Bases 1953, Ordnance Survey, Professional Paper, New Series No, 19, London 1954.
16. HIRAO, K.: A new type refractive index variometer. Bericht für die 12. Generalversammlung der URSI in Boulder/ Colorado 1957, oder
THOMPSON, M. C. jr—VETTER, M. J.: The NBS airborne microwave refractometer Model 2, National Bureau of Standards, Boulder Laboratories, Boulder/Colorado, NBS-Report 5056, April 1957.
17. SAASTAMOINEN, J.: The effect of path curvature of lightwaves on the refractive index application to electronic distance measurement. *The Canadian Surveyor*, XVI (1962), 98—100.

THE METEOROLOGICAL PROBLEM OF ELECTRONIC DISTANCE MEASUREMENTS

J. MITTER

SUMMARY

After a short preliminary characterization of the electro-optical and electronic methods of distance measurements used nowadays, and of the general propagation conditions of their carrier waves in the atmosphere, the problem of all electronic methods is discussed, i. e. the determination of the mean propagation velocity. This velocity depends on the determinability of the prevailing refraction coefficient, representing for all used carrier waves a function of position of the meteorological conditions along the wave path. The essence of the problem for light- and micro waves lies in the determination of the correct mean temperature, for the decimeter- and centimeter waves besides that in the determination of the mean vapor pressure. Hitherto, the determination of meteorological data was generally performed only at the endpoints of the distance and near the ground, because of technical and economic reasons. Thus is based on the assumption of a practically linear construction of the meteorological field in the measuring region of all elements.

In order to gain a clearer insight, the construction of the temperature field by day and night, near the ground and in the "free" atmosphere, and the additional influences of air movement, relief and ground covering are discussed, and the difficulties of obtaining measurements free of systematic effects are pointed out.

In Austria, in mountainous terrain north of Graz, a test field for electronic distance measurements was established, and in 1961 and 1962 a series of tests was performed to elucidate the temperature problem at night. In 1962 geodimeter measurements were combined with measurements by helicopter along the light path, which confirmed all meteorological predictions and previous experiences with the base-line net of Heerbrugg, Switzerland. The result was that measurements at the endpoints could cause errors in the temperature of up to 5° C. Of specially interest is the comparison between measurements by radio balloons near Vienna

in 150 km distance, and the local temperature measurements. The extrapolation is still essentially better than the mean of the endpoint-measurements. The results are shown in a series of diagrams.

For the determination of the mean air pressure, the endpoint-measurements are sufficient for all possible cases, even for greater elevation differences.

The determination of the mean air humidity, which is of the greatest importance for microwaves, from endpoint-measurements is influenced near the ground, but the main source of errors might quite often lie in erroneous psychrometer measurements.

LE PROBLÈME MÉTÉOROLOGIQUE DE LA DÉTERMINATION ÉLECTRONIQUE DES DISTANCES

J. MITTER

RÉSUMÉ

L'étude décrit brièvement les procédés électro-optiques et électroniques de détermination des distances actuellement en usage et les conditions de propagation dans l'air des ondes porteuses, puis examine d'une façon détaillée la possibilité de détermination de la vitesse de propagation moyenne de ces dernières. Cette déterminabilité dépend de celle de l'indice de réfraction, qui est à son tour fonction des conditions météorologiques existant le long du trajet des ondes porteuses. Dans le cas d'ondes lumineuses et de micro-ondes, le problème consiste essentiellement dans la déterminabilité de la température moyenne exacte, et en cas d'ondes décimétriques et centimétriques, dans celle, en outre, de la pression de vapeur moyenne, Jusqu'à présent, on a déterminé les données météorologiques aux points terminaux de la ligne, à proximité du sol, en supposant que dans l'espace intéressé par les mesures, le champ météorologique est — pour tous les éléments — de composition linéaire.

L'auteur étudie la formation diurne et nocturne des zones de température à proximité du sol aussi bien que dans l'atmosphère «libre», ainsi que l'influence des courants atmosphériques, de la formation du terrain et de la couche végétale.

Au nord de Graz, un champ expérimental a été établi pour les mesures électroniques et des mesures nocturnes y ont été effectuées en vue de l'examen des problèmes de température. Les mesures au géodimètre ont été combinées avec celles faites sur hélicoptère, le long du trajet de la lumière. On a trouvé que les données relatives à la température, résultant des mesures effectuées aux points terminaux, peuvant être entachées d'erreurs de l'ordre de 5° C. Il est particulièrement intéressant de comparer les mesures obtenues par radio-sonde, à Vienne, avec les données de la température enregistrées sur un terrain situé à 150 km de distance. Dans des conditions météorologiques normales, l'extrapolation donne des résultats sensiblement meilleurs que les mesures faites aux points terminaux.

Pour la détermination de la pression de l'air, les mesures faites aux points terminaux sont suffisantes en tout cas.

La détermination de l'humidité moyenne de l'air est bien influencée par la proximité du sol, mais l'erreur est à imputer très souvent aux mesures faites au psychromètre.

О МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ ЭЛЕКТРОННОГО ДАЛЬНОИЗМЕРЕНИЯ

Й. МИТТЕР

РЕЗЮМЕ

В работе дается краткая характеристика применяющихся в настоящее время электро-оптических и электронных методов дальноизмерения, а также условий распространения несущих волн в воздухе. Затем подробно анализируются возможности определения средних скоростей распространения несущих волн. Эти возможности зависят от определяемости коэффициента преломления, что, в свою очередь, обуславливается метеорологическими условиями, характерными для пути волн. Для случая световых и микроволн сущность этой проблемы сводится к правильному определению средней темпера-

туры, а для дециметровых и сантиметровых волн — к определению кроме этого, среднего давления пара. До сих пор метеорологические данные определялись в конечных точках профилей, вблизи дневной поверхности и предполагалось, что в пределах участка измерения метеорологическое поле имеет — в отношении всех элементов — линейное строение.

Рассматривается образование днем и ночью температурных слоев как в близи дневной поверхности, так и в «свободной» атмосфере и изучается влияние движения воздуха, рельефа и почвенного покрова.

Севернее г. Граца создан экспериментальный участок для проведения электронных измерений и здесь были осуществлены ночные измерения для изучения проблемы температуры. Измерения геодиметром сопровождались измерениями, проведенными на вертолете по направлению света. Было выявлено, что данные температуры, полученные по измерениям на конечных пунктах профиля, могут иметь погрешности до 5° С. Обращает на себя внимание сопоставление результатов измерений, проведенных радиозондом в районе Вены с данными, полученными на 150 *км* от этого района. При нормальных метеорологических условиях экстраполяция приводит к значительно лучшим результатам, чем измерения, проводимые в конечных пунктах профиля.

Для определения среднего давления воздуха всегда достаточно проводить измерения в конечных пунктах.

Хотя и на определение средней влажности воздуха влияет близость почвы, но все же погрешности очень часто получаются за счет психрометра.

ÜBER DIE BERECHNUNG DER BASISNETZE MIT GEMESSENEN RICHTUNGEN

PROF. B. MILASOVSZKY

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

(Eingegangen am 17. Dez. 1962)

Bei den Triangulierungen spielen die Basisvergrößerungsnetze heute noch eine wichtige Rolle. Z. Z. werden nämlich meist noch mit Invardrähten verhältnissmäßig kürzere Basis linien gemessen und sodann aus diesen die Längen der „Vergrößerungsseiten" abgeleitet. Die Ausgleichung dieser Basisnetze erfolgt fast ausschließlich nach bedingten Beobachtungen.

Die Ansprüche der Genauigkeit und Wirtschaftlichkeit gleichzeitig vor Auge haltend, hat Verfasser schon bei anderer Gelegenheit [2] vier Alternativen der Berechnung der Basisnetze, unter Voraussetzung von Winkelmessungen, besprochen. Gegenwärtig war es seine Absicht, hier vier Lösungen der Ausgleichung des Basisvergrößerungsvierecks, unter Voraussetzung von *Richtungsmessungen*, kritischen Betrachtungen zu unterziehen. Zufolge Platzmangels konnte jedoch dieser Plan nur teilweise, und zwar insofern verwirklicht werden, daß diesmal bloß zwei Rechnungsmethoden besprochen und miteinander verglichen werden, während die Erörterung von zwei weiteren Möglichkeiten einer späteren Gelegenheit vorbehalten werden muß.

Bei der ersteren der hier besprochenen Methoden wird von der wohlbekannten Korrelatenmethode ausgegangen, dieselbe jedoch verbessert, indem die Ermittlung der Korrelaten mit der *gleichzeitigen* Bestimmung des Gewichtes der Vergrößerungsseite verbunden wird.

Die andere, hier gezeigte Rechnungsart beruht auf der Betrachtung des Verfassers, die Seitenvergrößerung als Doppelpunkteinschaltung aufzufassen und dementsprechend die Koordinatenausgleichung anzuwenden.

Seit den letzten 10—12 Jahren verbreiten sich die physikalischen Meßmethoden auch in der Geodäsie überraschend schnell. Wie durch Einführung der Triangulation vor rund 400 oder der Photogrammetrie vor etwa 50 Jahren, ist dadurch auf dem Gebiete der Instrumente und auch der Methoden der Weg einer grundlegenden Änderung eröffnet worden.

Die elektrooptische und die elektronische Entfernungsmessung ermöglichen das Errichten eines die Kontinente verbindenden, einheitlichen, internationalen geodätischen Netzes.

Das allernächste Anwendungsgebiet der physikalischen Entfernungsmessung scheint die Messung der Seitenlängen der Triangulationshauptnetze zu sein. Die Genauigkeit sowohl der elektronischen als auch der elektrooptischen Entfernungsmessung wird jedoch durch die atmosphärischen Verhältnisse beeinflußt. Zur Zeit gehört noch die zahlenmäßige Bestimmung der entsprechenden Faktoren zu den Hauptaufgaben der Forschung. Dazu bedarf es aber, im Sinne der klassischen Methoden, mit großer Exaktheit gemessener vergleichender Basislinien.

Abgesehen davon werden aber die klassischen, exakten Methoden der Entfernungsmessung voraussichtlich auch in Zukunft ihre Existenzberechtigung nicht verlieren, so daß die mit diesen zusammenhängenden Untersuchungen auch weiter aktuell erscheinen.

Die durchschnittliche Seitenlänge der europäischen Triangulationshauptnetze beträgt 30 km, während die mit Invardraht gemessene, durchschnittliche Länge der Basislinien 6,7 km ist [1]. Bei Basislinien dieser Größenordnung ist ein besonderes Basisvergrößerungsnetz notwendig, mit dessen Hilfe wir aus der gemessenen und im allgemeinen für fehlerfrei betrachteten Länge der Basislinie eine Seitenlänge des Hauptnetzes ableiten können. Da wir aus Gründen der Sicherheit und der Genauigkeit in jedem Fall für eine überschüssige Anzahl von Messungen Sorge tragen, unterwerfen wir das Basisvergrößerungsnetz, welches wir kurz »Basisnetz« nennen wollen, einer selbständigen Ausgleichung, mit dem Ziel, die eindeutige, widerspruchsfreie Erfüllung des zwischen den ausgeglichenen Werten aufzustellenden, beliebigen mathematischen Zusammenhänge zu sichern.

Jedem gemessenen Winkel bzw. jeder gemessenen Richtung in dem Basisnetz ordnen wir je eine Verbesserung zu, das Prinzip der kleinsten Quadratsummen dieser Verbesserungen vor Augen haltend. Bei Winkelmessungen muß die Ausgleichung im Sinne der Verbesserungen der Winkel, bei Richtungsmessungen im Sinne der Verbesserung der Richtungen durchgeführt werden.

In einer früheren Abhandlung, die sich mit der Ausgleichung der Basisnetze beschäftigt [2], haben wir *Winkelmessungen* angenommen, da so infolge der wenigeren Verbesserungen die Verhältnisse einfacher sind. Dies dürfte demnach, wenn es sich um das Vergleichen mehrerer Berechnungsmethoden handelt, vorteilhafter sein.

Wenn aber diesmal auch die Frage der *zweckmäßigsten Beobachtungsmethode* aufgeworfen wird, dann ist festzustellen, daß *die Beobachtung der vollständigen Richtungssätze* eine bedeutend innigere Verknüpfung der Netzrichtungen und eine bessere Elimination der Meßfehler als die *einfache Messung der benachbarten Winkel* bedeutet.

In veranschaulichender Weise äußert sich dieser Umstand z. B. im Falle einer freien Dreieckskette. Denn offenbar hängt dort jede einzelne Winkelverbesserung nur von dem Schlußfehler des entsprechenden Dreieckes ab, welch letzterer auf die entsprechenden drei inneren Winkel zu verteilen ist. Dagegen werden im Falle von Richtungsmessungen und dementsprechender Ausgleichung nach Richtungen, die einzelnen Winkelverbesserungen mit den Schlußfehlern sämtlicher Dreiecke in funktionellem Zusammenhang stehen. Es läßt sich ferner beweisen, daß im Falle der Ausgleichung nach Richtungen die ausgeglichenen Netzwinkel kleinere mittlere Fehler als nach einer Winkelausgleichung aufweisen werden.

Da man im Falle von Winkelmessungen aus dem Minimumprinzip der gewogenen Quadratsumme der Winkelverbesserungen, im Falle von Richtungsmessungen aber aus jenem der Richtungsverbesserungen auszugehen hat, so ist nicht zu erwarten, daß die Ergebnisse der beiden Lösungen völlig identisch sein werden.

Die aus der gleichen Basislinie und dem gleichen Basisnetz, nach Messung und Ausgleichung einmal der entsprechenden Winkel, das anderemal der denselben Winkeln entsprechenden Richtungen entwickelte Dreiecksseite (die »abgeleitete Vergrößerungsseite«) wird also nicht ganz identisch ausfallen.

Anläßlich der weiteren Berechnungsarbeiten des Hauptnetzes pflegt man die Länge der abgeleiteten Vergrößerungsseite als fehlerfrei zu betrachten, obwohl dies in Wirklichkeit nicht der Fall ist. Man muß vielmehr im Laufe der Basisnetzausgleichung auch den mittleren Fehler dieser Dreiecksseite ermitteln.

Des weiteren wird an Hand des Bildes 1 von der nach HELMERT [3] günstigsten, einfachen rhombischen Form des Basisnetzes ausgegangen.

Die der Basislinie gegenüber liegenden spitzen, sog. parallaktischen Winkel sind offenbar mit solcher Genauigkeit zu messen, damit der mit dem relativen Fehler von 2 mm/km angebbaren Genauigkeit der Basismessung gegenüber keine Genauigkeitsverminderung eintritt. Gleichzeitig läßt sich die beste erreichbare Winkelmessung mit dem mittleren Fehler von $\pm$ 0,3'' charakterisieren.

Um eine vorgeschriebene Genauigkeit des Hauptnetzes zu erreichen, ist unter solchen Umständen das Einschränken der Richtungslängen die einzige zur Verfügung stehende Möglichkeit. Aus diesen Überlegungen ausgehend stellt STRASSER ([1], S. 57.) fest, daß das Verhältnis der entwickelten Dreiecksseite zur gemessenen Basislinie nicht größer, als 2,55 : 1 sein soll.

Diese Verhältnisszahl nennt man die »Vergrößerung«. Wird also mit einem einfachen rhombischen Entwicklungsnetz gearbeitet, so ist zur Entwicklung der 30 km langen Hauptdreiecksseite unmittelbar eine 10—12 km lange Basislinie zu messen.

Die gründliche Studie von STRASSER [1] behandelt die mit der Messung, der Form und den Genauigkeitsverhältnissen der Längenübertragung der Basisnetze verbundenen hochwichtigen Fragen. In den folgenden Ausführungen dagegen wollen wir uns — Richtungsmessungen vorausgesetzt — mit der zweckmäßigen und gleichzeitig wirtschaftlichen Berechnung derartiger Netze befassen. Dabei sollen diesmal zufolge Platzmangel von den geplanten vier Berechnungsarten bloß deren zwei behandelt werden.

*

Wie bereits angedeutet, wird im Interesse der leichteren Übersicht im Laufe dieser Ausführungen von der diagonalen, einfachen rhombischen Form des Basisnetzes ausgegangen. An allen vier Ecken des Rhombus sollen volle Richtungssätze gemessen sein.

Es sei hier bemerkt, daß sich mit der Wiederholungszahl der in Basisnetzen auszuführenden Messungen und dementsprechend deren verwickelten Gewichtsverhältnissen nach den grundlegenden Untersuchungen von SCHREIBER [4] mehrere namhafte Forscher beschäftigt haben [5, 6, 1].

Zur besseren Veranschaulichung mögen konkrete Zahlenwerte dienen. Die Länge der Basislinie und die gemessenen Richtungswerte sind in der Tabelle I angegeben.

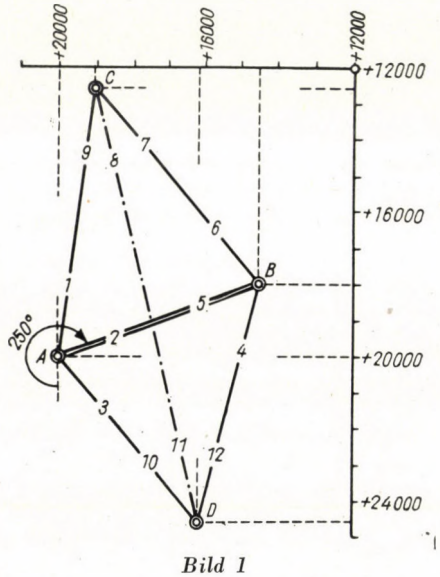

Bild 1

I. Lösungsart: Korrelatenausgleichung, erweitert mit der gleichzeitigen Berechnung des Gewichtes der Entfernungsfunktion F.

»Da die Ausgleichung eines Basisvergrößerungsnetzes fast ausnahmslos nach bedingten Beobachtungen ausgeführt wird« ([7], S. 645), soll zuerst über diese Methode die Rede sein. Abweichend von der üblichen Korrelatenmethode wollen wir jedoch — wie dies auch in unserer Studie [2] geschah — im gleichen Rechnungsgang der Basisnetzausgleichung gleichzeitig auch die Genauigkeit der abgeleiteten Vergrößerungsseite ermitteln. Es wird also nicht notwendig sein, das Gewicht dieser Dreiecksseite nach vollzogener Ausgleichung in einer besonderen Arbeitsphase zu bestimmen.

Sowohl in der Abbildung wie auch in den Tabellen sind die Richtungen des Basisnetzes mit den arabischen Zahlen von 1 bis 12 bezeichnet. Der

Tabelle I

Gemessene Richtungswerte. Verbesserungen. Ausgeglichene Richtungswerte

No.		Gemessen	Verbesserung	Ausgeglichen	No.		Gemessen	Verbesserung	Ausgeglichen
	1	0° 00′00,00″	+0,12″	0°00′00,12″		7	0°00′00,00″	+0,04″	0°00′00,04″
A	2	63 12 29,22	−0,32	63 12 28,90	C	8	27 16 50,14	+0,02	27 16 50,16
	3	133 52 23,87	+0,20	133 52 24,07		9	47 46 12,26	−0,05	47 46 12,21
	4	0 00 00,00	−0,29	359 59 59,71		10	0 00 00,00	−0,15	359 59 59,85
B	5	55 28 26,26	+0,28	55 28 26,54	D	11	25 38 14,05	−0,20	25 38 13,85
	6	124 29 45,57	+0,02	124 29 45,59		12	53 51 37,50	+0,35	53 51 37,85

Gemessene und als fehlerfrei betrachtete Basislänge: $\overline{AB} = 5879{,}989$ m

Tabelle II

Bildung der Absolutglieder der Winkelbedingungsgleichungen (2)

Richtungs No.	Winkelwerte	Richtungs No.	Winkelwerte	Richtungs No.	Winkelwerte
2—1	63°12′29,22″	3— 2	70°39′54,65″	6— 4	124°29′45,57″
6—5	69 01 19,31	5— 4	55 28 26,26	8— 7	27 16 50,14
9—7	47 46 12,26	12—10	53 51 37,50	12—11	28 13 23,45
	180 00 00,79		179 59 58,41		179 59 59,16
	$l_a = +0{,}79''$		$l_b = -1{,}59''$		$l_c = -\ 0{,}84''$

Zusammenhang der gemessenen wie auch der ausgeglichenen Richtungswerte und der Richtungsverbesserungen v gestaltet sich im Sinne »Messung + Verbesserung = Ausgleichung« folgenderweise:

$$1' + v_1 = 1;\ 2' + v_2 = 2;\ \ldots\ 12' + v_{12} = 12 \tag{1}$$

Die dem Bild 1 entsprechenden drei Gleichungen der Winkelbedingungen sind:

$$\begin{aligned} &a) && (2-1) + (6-5) + (9-7) - 180^\circ = 0; \\ &b) && (3-2) + (5-4) + (12-10) - 180^\circ = 0; \\ &c) && (6-4) + (8-7) + (12-11) - 180^\circ = 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Tabelle III

Logarithmische Linearisierung der Seitenbedingungsgleichung (3)

Zähler					Nenner				
Richtungs No.	Winkelwert			lg sin	Δ''	Richtungs No.	Winkelwert			lg sin	Δ''
2— 1	63°	12′	29,22″	9,950 68 107	+10,6	3— 2	70°	39′	54,65″	9,974 78 789	+ 7,3
8— 7	27	16	50,14	9,661 19 587	+40,8	9— 7	47	46	12,26	9,869 49 784	+19,2
12—10	53	51	37,50	9,907 18 695	+15,4	12—11	28	13	23,45	9,674 77 602	+39,2
				9,519 06 389						9,519 06 175	

Absolutglied: $l_d = +21{,}4$ (in Einheiten der 7. Dezimale des lg).

Die numerischen Werte der Absolutglieder dieser Winkelbedingungsgleichungen findet man in Tab. II. zusammengestellt.

Die Gleichung der Seitenbedingung:

$$d) \qquad \frac{\sin(2-1)\sin(8-7)\sin(12-10)}{\sin(3-2)\sin(9-7)\sin(12-11)} - 1 = 0\,. \tag{3}$$

Die Gleichung der Seitenbedingung wird in der üblichen Weise durch Logarithmieren in die folgende lineare Form gebracht:

$$\begin{aligned} d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3 + d_7 v_7 + d_8 v_8 + d_9 v_9 + d_{10} v_{10} + \\ + d_{11} v_{11} + d_{12} v_{12} + l_d = 0\,. \end{aligned} \tag{4}$$

In numerischer Form zeigt dies Tabelle III.

Um die Ausgleichung der gemessenen Richtungen des Basisnetzes mit der Berechnung des Gewichtes der abgeleiteten Vergrößerungsseite $\overline{CD}$ in

einem Guss durchführen zu können, schreibt man diese Entfernung $\overline{CD}$ mit Anwendung des Sinussatzes als Funktion der fehlerfreien Basislinie $\overline{AB}$ und der ausgeglichenen Richtungen auf. In Verfolg des Bildes:

$$f) \qquad \overline{CD} = \overline{AB}\,\frac{\sin(2-1)\sin(6-4)}{\sin(9-7)\sin(12-11)} = \overline{AB}.F\,, \tag{5}$$

wobei in der Entfernungsfunktion

$$F = \frac{\sin(2-1)\sin(6-4)}{\sin(9-7)\sin(12-11)}\,, \tag{6}$$

wie gesagt, die *ausgeglichenen* Richtungen figurieren müssen. Vorläufig sind diese jedoch noch nicht bekannt, weshalb wir den genäherten, mit den gemessenen Richtungswerten gebildeten Ausdruck F_0 gebrauchen. Auch ist die Entfernungsfunktion, genauso wie die Seitenbedingungsgleichung (3), zu linearisieren. Man könnte dies zwar ebenfalls durch Logarithmieren erreichen, diesmal wollen wir jedoch die Taylorsche Entwicklung verwenden, wobei die Richtungen als unabhängige Veränderliche erscheinen. Die partiellen Ableitungen gestalten sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial 1} = f_1 &= -\frac{\cos(2-1)\sin(6-4)}{\sin(9-7)\sin(12-11)} &&= -F_0\cot(2-1);\\
\frac{\partial F}{\partial 2} = f_2 &= \frac{\cos(2-1)\sin(6-4)}{\sin(9-7)\sin(12-11)} &&= +F_0\cot(2-1);\\
\frac{\partial F}{\partial 4} = f_4 &= -\frac{\sin(2-1)\cos(6-4)}{\sin(9-7)\sin(12-11)} &&= -F_0\cot(6-4);\\
\frac{\partial F}{\partial 6} = f_6 &= \frac{\sin(2-1)\cos(6-4)}{\sin(9-7)\sin(12-11)} &&= +F_0\cot(6-4);\\
\frac{\partial F}{\partial 7} = f_7 &= \frac{\cos(9-7)\sin(2-1)\sin(6-4)}{\sin^2(9-7)\sin(12-11)} &&= +F_0\cot(9-7);\\
\frac{\partial F}{\partial 9} = f_9 &= -\frac{\cos(9-7)\sin(2-1)\sin(6-4)}{\sin^2(9-7)\sin(12-11)} &&= -F_0\cot(9-7);\\
\frac{\partial F}{\partial 11} = f_{11} &= \frac{\cos(12-11)\sin(2-1)\sin(6-4)}{\sin(9-7)\sin^2(12-11)} &&= +F_0\cot(12-11);\\
\frac{\partial F}{\partial 12} = f_{12} &= -\frac{\cos(12-11)\sin(2-1)\sin(6-4)}{\sin(9-7)\sin^2(12-11)} &&= -F_0\cot(12-11).
\end{aligned} \tag{7}$$

Mithin die in lineare Form gebrachte Entfernungsfunktion:

$$F = f_1 v_1 + f_2 r_2 + f_4 v_4 + f_6 v_6 + f_7 v_7 + f_9 v_9 + f_{11} v_{11} + f_{12} v_{12} + F_0. \quad (8)$$

Zur zahlenmäßigen Ermittlung der Ableitungen $f_1, f_2, \ldots f_{12}$, wie auch des genäherten Wertes F_0 der Entfernungsfunktion verwenden wir jene Winkel, welche aus den gemessenen Richtungswerten gebildet und in Tab. II mit (2 — 1), (6 — 4), (9 — 7) und (12 — 11) bezeichnet wurden. Die Bildung der Funktion F ist sodann aus Tab. IV zu ersehen. Aus Gl. (8) erhält man, nach Weglassen des Absolutgliedes F_0, folgende fingierte Gleichung:

$$f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_4 v_4 + f_6 v_6 + f_7 v_7 + f_9 v_9 + f_{11} v_{11} + f_{12} v_{12} = 0. \quad (9)$$

Tabelle IV

Linearisierung der Entfernungsfunktion F unter (6)

Näherungsfunktion: $F_0 = 2{,}101$				Cotangenswerte der Richtungsdifferenzen							
				(2−1): +0,5050		(6−4): −0,6872		(9−7): +0,9077		(12−11): +1,8632	
f_1	−1,061	f_2	+1,061	f_3	0	f_4	+1,444	f_5	0	f_6	−1,444
f_7	+1,907	f_8	0	f_9	−1,907	f_{10}	0	f_{11}	+3,914	f_{12}	−3,914

Somit erhält die Seitenbedingungsgleichung (3) folgende numerisch-lineare Form:

$$-10{,}6\, v_1 + 17{,}9\, v_2 - 7{,}3\, v_3 - 21{,}6\, v_7 + 40{,}8\, v_8 - 19{,}2\, v_9 - 15{,}4\, v_{10} + 39{,}2\, v_{11} - 23{,}8\, v_{12} + 21{,}4 = 0.$$

Mithin ist die numerische Form der linearen Funktion (8):

$$F = -1{,}061\, v_1 + 1{,}061\, v_2 + 0\, v_3 + 1{,}444\, v_4 + 0\, v_5 - 1{,}444\, v_6 + 1{,}907\, v_7 + 0\, v_8 - 1{,}907\, v_9 + 0\, v_{10} + 3{,}914\, v_{11} - 3{,}914\, v_{12} - 2{,}101.$$

Werden die Koeffizienten der drei Winkelbedingungsgleichungen (2) mit a, b und c bezeichnet, und schreibt man noch die Seitenbedingungsgleichung (4) wie auch die fingierte Gleichung (9) dazu, so entsteht folgendes lineare System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
a)\quad & a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_5 v_5 + a_6 v_6 + a_7 v_7 + a_9 v_9 + l_a = 0; \\
b)\quad & b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4 + b_5 v_5 + b_{10} v_{10} + b_{12} v_{12} + l_b = 0; \\
c)\quad & c_4 v_4 + c_6 v_6 + c_7 v_7 + c_8 v_8 + c_{11} v_{11} + c_{12} v_{12} + l_c = 0; \\
d)\quad & d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3 + d_7 v_7 + d_8 v_8 + d_9 v_9 + \\
& \qquad + d_{10} v_{10} + d_{11} v_{11} + d_{12} v_{12} + l_d = 0; \\
f)\quad & f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_4 v_4 + f_6 v_6 + f_7 v_7 + f_9 v_9 + \\
& \qquad + f_{11} v_{11} + f_{12} v_{12} + 0 = 0.
\end{aligned} \quad (10)$$

Die Bildung der numerischen Koeffizienten dieser Gleichungen zeigen die Tabellen III und IV, deren Koeffizientensystem aber Tab. V.

Danach folgt die Aufstellung der Normalgleichungen. Hierbei ist darauf zu achten, daß im System (10) die fünfte Gleichung mit dem Koeffizienten f keine Bedingungsgleichung, sondern bloß eine fingierte Gleichung ist. Dementsprechend sind nicht fünf, sondern nur vier Normalgleichungen mit ebenfalls vier Korrelaten aufzustellen. Die Koeffizienten der Normalgleichungen werden durch die Produktensummen

$$\left[\frac{aa}{p}\right], \left[\frac{ab}{p}\right], \ \ldots \left[\frac{dd}{p}\right]$$

symbolisiert. Da wir jedoch gleichzeitig mit den vier Korrelaten auch auf den Wert des Gewichtsreziproks der Funktion F Anspruch erheben, sind mit unter Verwendung der f-Koeffizienten der fingierten Gleichung (9) zusätzlich auch die Produktensummen

$$\left[\frac{af}{p}\right], \left[\frac{bf}{p}\right], \ \ldots \left[\frac{ff}{p}\right]$$

zu bilden.

Es sei an dieser Stelle auf Formel (15) in [8] § 46, S. 143. verwiesen. Das Gewicht P_F irgendeiner Funktion F von Beobachtungswerten, welche nach der Korrelatenmethode ausgegleichen werden, wird demnach — unter Voraussetzung von 4 Bedingungsgleichungen — laut folgendem Ausdruck erhalten:

$$\frac{1}{P_F} = \left[\frac{ff}{p}\right] - \frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{bf}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{cf}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]} - \frac{\left[\frac{df}{p}\cdot 3\right]^2}{\left[\frac{dd}{p}\cdot 3\right]} = \left[\frac{ff}{p}\cdot 4\right]. \qquad (11)$$

Im Zusammenhang mit dieser Formel (11) sei hier an jene Art der Lösung von Normalgleichungen erinnert, die in der Fachliteratur als Choleskysche oder Cholesky—Rubinsche Methode [9] bekannt ist. Aus dem Aufbau dieser Methode ist es offenbar, daß die Glieder mit negativem Vorzeichen des Gewichtsausdruckes (11) nichts anderes, als die Quadrate der reduzierten Glieder der in die Choleskysche Lösung einbezogenen Funktion (6) bzw. (8) sind. Um also im Wege der numerischen Rechnung gleichzeitig mit den Korrelaten auch die Gewichtsreziproke der Funktion F zu erhalten, werden wir einerseits das nachfolgende »erweiterte« Koeffizientensystem der Normalgleichungen gemäß (12) aufstellen, andererseits dieses System nach der Choleskyschen Methode auflösen.

Tabelle V

Das Koeffizientensystem der Gleichungsgruppe (10). *Die Richtungsverbesserungen v*

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	l	k
a	−1	+1			−1	+1	−1		+1				+0,79	−0,0955
b		−1	+1	−1	+1					−1		+1	−1,59	+0,1835
c				−1		+1	−1	+1			−1	+1	−0,84	+0,1104
d	−1,06	+1,79	−0,73				−2,16	+4,08	−1,92	−1,54	+3,92	−2,38	+2,14	−0,0229
f	−1,06	+1,06	0	+1,44	0	−1,44	+1,91	0	−1,91	0	+3,91	−3,91	+2,10	
	Die Verbesserungen werden gemäß (17) berechnet													
v	+0,120	−0,320	+0,200	−0,294	+0,279	+0,015	+0,035	+0,017	−0,052	−0,148	−0,200	+0,348		

Kontrolle: $[pvv] = +0{,}5085$; $-[kl] = +0{,}5090$

Im Gegensatz zur klassischen Korrelatenausgleichung des Basisnetzes, ist unser Vorgehen, kurz gesagt, dergestalt, daß wir die Ermittlung der Korrelaten mit der gleichzeitigen Gewichtsberechnung der abgeleiteten Vergrößerungsseite $\overline{CD}$ verbinden. Diese Modifizierung wird durch die eingerahmte Kolumne F des Schemas (12) veranschaulicht.

Wir werden also die entsprechenden numerischen Glieder nach dem Schema (12) gruppieren und bei der Auflösung nach den Vorschriften der Choles-

Das erweiterte Koeffizientensystem der Normalgleichungen

k_a	k_b	k_c	k_d	l					F	$s-1$	Σ
$\left[\frac{aa}{p}\right]$	$\left[\frac{ab}{p}\right]$	$\left[\frac{ac}{p}\right]$	$\left[\frac{ad}{p}\right]$	l_a	-1				$\left[\frac{af}{p}\right]$		
	$\left[\frac{bb}{p}\right]$	$\left[\frac{bc}{p}\right]$	$\left[\frac{bd}{p}\right]$	l_b		-1			$\left[\frac{bf}{p}\right]$		
		$\left[\frac{cc}{p}\right]$	$\left[\frac{cd}{p}\right]$	l_c			-1		$\left[\frac{cf}{p}\right]$		
			$\left[\frac{dd}{p}\right]$	l_d				-1	$\left[\frac{df}{p}\right]$		
									$\left[\frac{ff}{p}\right]$		

(12)

Hierher gelangen in vier Zeilen die reduzierten Glieder

	$-[pvv]$	$-k_a$	$-k_b$	$-k_c$	$-k_d$			
Die Resultate:						$\frac{1}{P_F}$		

kyschen Methode vorgehen. Freilich werden dabei die Reduzierungen auch auf die Glieder der Kolumne F erstreckt, als würde es sich hier um eine weitere Unbekannte handeln. Als Ergebnis erhält man im unteren Teil des tabellenartigen Schemas einerseits mit negativem Vorzeichen die gewogene Quadratsumme der Verbesserungen und sämtliche Korrelaten, andererseits den Gewichtskoeffizienten der Entfernungsfunktion (6), d. h. den reziproken Wert von dessen Gewicht: $Q_F = 1/P_F$.

Die Anwendung auf unser Zahlenbeispiel zeigt Tab. VI. Nachdem hier durchweg gleichgewichtige Richtungswerte vorausgesetzt werden, so ist überall $p = 1$ zu schreiben.

Für die Länge der abgeleiteten Seite $\overline{CD}$ ist der Zusammenhang (5) gültig. Wäre in (5) auch die Basislinie $\overline{AB}$ ein mit dem mittleren Fehler μ_{AB}

Tabelle VI

Auflösung des erweiterten Normalgleichungssystems nach der Choleskyschen Methode. Mittlerer Fehler der abgeleiteten Vergrößerungsseite $\overline{CD}$

k_a	k_b	k_c	k_d	l					F	$s-1$	Σ
+6	−2	+2	+3,0900	+0,7900	−1				−3,1400	+5,7400	
	+6	+2	−3,3600	−1,5900		−1			−6,4100	−6,3600	
		+6	−0,0600	−0,8400			−1		−12,6100	−4,5100	
			+53,2614	+2,1400				−1	+27,1956	+81,2670	
									+44,2668	+44,7668	
+2,4495	−0,8165	+0,8165	+1,2615	+0,3225	−0,4083				−1,2819	+2,3433	+2,3433
	+2,3094	+1,1547	−1,0089	−0,5745	−0,1444	−0,4330			−3,2288	−1,9255	−1,9255
		+2,0000	+0,0375	−0,2200	+0,2501	+0,2500	−0,5000		−3,9175	−2,1000	−2,0999
			+7,1169	+0,1632	+0,0506	−0,0627	+0,0026	−0,1405	+3,6114	+10,7416	+10,7416
Zur Fehlerrechnung:			Resultate	−0,5091	+0,0955	−0,1835	−0,1104	+0,0229	+41,3740*	+40,6899	+40,6894
				$-[pvv]$	$-k_a$	$-k_b$	$-k_c$	$-k_d$**	+3,8094		

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{0{,}5091}{4}} = \pm\, 0{,}357$$

$$Q_F = \frac{1}{P_F}$$

* Bloß zur Zeilenkontrolle

$$\frac{1}{P_{CD}} - = \overline{AB}^2 \frac{1}{\varrho^2} \frac{1}{P_F} = \frac{5879{,}989^2}{206264{,}8^2}\, 3{,}8094 = 0{,}00310 \quad \ldots \text{ gemäß (15)}$$

$$\mu_{CD} = \mu_0 \sqrt{\frac{1}{P_{CD}}} = 0{,}357 \sqrt{0{,}00310} = \pm\, 0{,}0198 \text{ m} \quad \ldots \text{ gemäß (16)}$$

** Mit diesen Korrelaten werden die Verbesserungen berechnet (Tabelle V, unten).

behafteter Wert, während zur Funktion F der m. F. μ_F gehört, so würde sich im Sinne des Fehlergesetzes der m. F. der Seite $\overline{CD}$ folgendermaßen gestalten:

$$\mu_{CD}^2 = F^2 \mu_{AB}^2 + \overline{AB^2}\left(\frac{\mu_F}{\varrho''}\right)^2. \tag{13}$$

Nach unserem Übereinkommen ist jedoch $\mu_{AB} = 0$, d. h. $p_{AB} = \infty$ und so

$$\mu_{CD}^2 = \overline{AB^2}\left(\frac{\mu_F}{\varrho''}\right)^2, \tag{14}$$

bzw. auf die entsprechenden Gewichte übergehend:

$$\frac{1}{P_{CD}} = \overline{AB^2}\,\frac{1}{\varrho^2}\,\frac{1}{P_F}. \tag{15}$$

Mit dem m. F. μ_0 der Richtungsmessung ist jetzt der m. F. der abgeleiteten Vergrößerungsseite $\overline{CD}$

$$\mu_{CD} = \mu_0 \sqrt{\frac{1}{P_{CD}}}. \tag{16}$$

Die numerische Berechnung dessen befindet sich am unteren Teil der Tabelle VI.

Eine zunächst wichtigere Aufgabe aber ist die Berechnung der endgültigen Seitenlänge $\overline{CD}$, welche von den Normalgleichungen der Korrelatenausgleichung, auch nach deren Erweiterung, nicht geliefert wird. So muß man den endgültigen Wert $\overline{CD}$ aus dem mit den *ausgeglichenen* Richtungen gebildeten Zusammenhang (5) ermitteln.

Zu diesem Zweck sind vorher die Verbesserungen der beobachteten Richtungswerte zu berechnen, was jetzt — in Kenntnis der Korrelaten k gemäß den Korrelatengleichungen (17) erfolgt

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{a_1 k_a + b_1 k_b + c_1 k_c + d_1 k_d}{p_1}; \\
v_2 &= \frac{a_2 k_a + b_2 k_b + c_2 k_c + d_2 k_d}{p_2}; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_{12} &= \frac{a_{12} k_a + b_{12} k_b + c_{12} k_c + d_{12} k_d}{p_{12}}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Die derart gewonnenen numerischen Richtungsverbesserungen enthält die mit v-bezeichnete Reihe der Tab. V. Die ausgeglichenen Richtungen aber zeigt Tab. I.

Bekanntlich ist auch festzustellen, ob die Bedingungsgleichungen durch die ausgeglichenen Richtungswerte befriedigt werden.

Es sind also zwei weitere Tabellen, ähnlich wie Tab. II und III, jedoch unter Verwendung der ausgeglichenen und nicht der gemessenen Richtungswerte herzustellen. Diese beiden Tabellen sind hier nicht mehr dargestellt. Es sei bloß erwähnt, daß im vorliegenden Zahlenbeispiele alle drei Winkelbedingungen fehlerfrei auf 180°00′00,00″ abschließen, während bei den Seitenbedingungen die logsin-Kolumnen einen Schlußfehler von

$$9{,}519\ 06\ 411 - 9{,}519\ 06\ 412 = -0{,}000\ 00\ 001 \tag{18}$$

aufweisen.

Tabelle VII

Berechnung der endgültigen Entfernung $\overline{CD}$ gemäß (6) und (5)

Zähler von (6)			Nenner von (6)		
Richtungen	Winkelwert	sinus	Richtungen	Winkelwert	sinus
2—1	63°12′28,78″	0,892 64 873	9— 7	47°46′12,17″	0,740 45 335
6—4	124 29 45,85	0,824 16 501	12—11	28 13 24,00	0,472 90 962
		0,735 68 985	$\overline{CD} = \overline{AB} \cdot F$. . . laut (5)		0,350 16 751

$$F = \frac{0{,}735\ 68\ 985}{0{,}350\ 16\ 751} = 2{,}100\ 96\ 548 \qquad \overline{CD} = 5879{,}989 \cdot 2{,}100\ 96\ 548$$

$$\overline{CD} \pm \mu_{CD} = 12\,353{,}654 \pm 0{,}0198 \text{ m}.$$

Danach folgt zum Schluß gemäß (6) und (5) die Berechnung der Entfernungsfunktion F sowie der Seitenlänge $\overline{CD}$; dies zeigt Tab. VII. Demnach ist die ausgeglichene Länge der abgeleiteten Vergrößerungsseit

$$\overline{CD} = 12\,353{,}654 \pm 0{,}0198 \text{ m}. \tag{19}$$

Der hier angegebene, gemäß (16) gebildete mittlere Fehler von $\overline{CD}$ ist in Tab. VI, letzte Reihe links berechnet.

II. Lösungsart: Koordinatenausgleichung, in Erweiterung auf die Entfernungsbestimmung.

Die Berechnung des Basisnetzes kann man auch als Triangulierungsaufgabe auffassen und dementsprechend die Koordinaten der beiden Endpunkte der abgeleiteten Vergrößerungsseite im Wege der vermittelnden Ausgleichung bestimmen.

Im wesentlichen wird also die Aufgabe der Basisvergrößerung auf die der Punkteinschaltung zurückgeführt. Dem Verfasser ist es nicht bekannt, ob diese Berechnungsart des Basisnetzes schon verwendet wurde. Ein offen-

barer Vorteil des vorgeschlagenen Verfahrens dürfte es sein, daß die Sorge der Korrelatenausgleichung, die Seitenbedingungsgleichung in ihrer günstigsten Form aufzuschreiben, überhaupt nicht in Erscheinung tritt, weil hier eine solche Gleichung nicht vorkommt. Des weiteren wollen wir den üblichen Arbeitsgang in der Weise abändern, damit die Ausgleichung, gleichzeitig mit den Koordinaten der beiden Neupunkte, sowohl das Gewicht der abgeleiteten Seite wie auch deren endgültige Länge, d. h. das gesuchte Endresultat ergebe.

In dem auch bisher behandelten einfachen Falle unseres Bildes 1 werden wir also die Bestimmung der beiden Neupunkte C und D als eine Doppel-

Tabelle VIII

Berechnung der Näherungskoordinaten

Neue Punkte	Feste Punkte	y	x	δ	
	A	+20 000,000	+20 000,000	250°00′00″	$\sin \delta_{AB}$ = −0,939 6926
		5 525,382	−2 011,074		$\cos \delta_{AB}$ = −0,342 0201
	B	+14 474,618	+17 988,926		t_{AB} = 5879,989 m
	A	+20 000,000	+20 000,000	186 47 31	$\operatorname{tg} \delta_{AC}$ = +0,119 1002
	B	+14 474,618	+17 988,926	139 01 19	$\operatorname{tg} \delta_{BC}$ = −0,868 6145
					+0,987 7147
C		+19 123,103	+12 637,317		
	A	+20 000,000	+20 000,000	320 39 55	$\operatorname{tg} \delta_{AD}$ = −0,819 5030
	B	+14 474,618	+17 988,926	14 31 34	$\operatorname{tg} \delta_{BD}$ = +0,259 1039
					−1,078 6069
D		+16 197,834	+24 639,600		

punkteinschaltung durchführen. Als Grundlagen dienen wieder die beobachteten Richtungswerte der Tabelle I.

Die Koordinaten des einen Basisendpunktes A werden auf der Projektionsebene des Bildes 1 beliebig angenommen. Mit einem entsprechenden Richtungswinkel und der fest gegebenen Basislänge AB ist es leicht möglich, die endgültigen Koordinaten des anderen Basisendpunktes B polar zu berechnen. Auf Grund der endgültigen Punkte A und B wie auch der gemessenen Richtungswerte erhält man dann durch Vorwärtseinschnitt die genäherten Koordinaten y_0 und x_0 der beiden Endpunkte C und D der abgeleiteten Vergrößerungsseite. Diese Berechnungen enthält Tab. VIII.

Dabei zeigte es sich als angemessen, mit einem Richtungswinkel $\delta_{AB} = 250°00'00{,}00''$ zu arbeiten. Das Zusammenfallen der Basislinie AB mit der y-Achse würde nämlich zu unbequemen Zahlenwerten der Richtungskoeffizienten führen. Nachdem die Berechnung des Punktes B nur auf das

ganze Millimeter genau ist, ergibt die aus den Koordinaten mit einer Schärfe der Hundertstelsekunde durchgeführte Kontrollrechnung des Richtungswinkels:

$$\delta_{AB} = 250°00'00{,}02''.$$

Auf Grund der genäherten Koordinaten y_0 und x_0 können schon alle genäherten Richtungswinkel $\delta°$ wie auch alle Entfernungen t der Dreiecksseiten

Tabelle IX

Berechnung der genäherten Richtungswinkel $\delta°$ und Entfernungen t. Berechnung der Richtungskoeffizienten a und b

Richtung	Punkt		y		x	tg α	$\frac{\sin \delta_0}{\cos \delta_0}$	$\frac{\varrho''}{10} = 20\,626{,}48$
9	C	+	19 123,103	+	12 637,317	0,119 10 020	−0,118 26	$\delta_0 = 186°47'31{,}00''$
1	A	+	20 000,000	+	20 000,000		−0,992 98	$t = 7\,414{,}7$
		−	876,897	−	7 362,683			$a = -2{,}76$
						$\alpha = 6°47'31{,}00''$		$b = +0{,}33$
5	B	+	14 474,618	+	17 988,926	2,747 47 821	−0,939 69	$\delta_0 = 250°00'00{,}02''$
2	A	+	20 000,000	+	20 000,000		−0,342 02	
		−	5 525,382	−	2 011,074			
						$\alpha = 70°00'00{,}02''$		
10	D	+	16 197,834	+	24 639,600	0,819 50 297	−0,633 85	$\delta_0 = 320°39'55{,}00''$
3	A	+	20 000,000	+	20 000,000		+0,773 46	$t = 5\,998{,}5$
		−	3 802,166	+	4 639,600			$a = +2{,}66$
						$a = 39°20'05{,}00''$		$b = +2{,}18$
12	D	+	16 197,834	+	24 639,600	0,259 10 396	+0,250 82	$\delta_0 = 14°31'34{,}02''$
4	B	+	14 474,618	+	17 988,926		+0,968 03	$t = 6\,870{,}3$
		+	1 723,216	+	6 650,674			$a = +2{,}91$
						$\alpha = 14°31'34{,}02''$		$b = -0{,}75$
7	C	+	19 123,103	+	12 637,317	0,868 61 447	+0,655 77	$\delta_0 = 139°01'19{,}00''$
6	B	+	14 474,618	+	17 988,926		−0,754 96	$t = 7\,088{,}6$
		+	4 648,485	−	5 351,609			$a = -2{,}20$
						$a = 40°58'41{,}00''$		$b = -1{,}91$
11	D	+	16 197,834	+	24 639,600	0,243 72 605	−0,236 79	$\delta_0 = 346°18'09{,}29''$
8	C	+	19 123,103	+	12 637,317		+0,971 56	$t_0 = 12\,353{,}623$
		−	2 925,269	+	12 002,283			$a_{CD} = +1{,}62$
								$a_{DC} = -1{,}62$
						$a = 13°41'50{,}71''$		$b_{CD} = +0{,}40$
								$b_{DC} = -0{,}40$

des vorliegenden Basisnetzes berechnet werden. Dies ist aus Tab. IX zu ersehen.

Die Anwendung der strengen Koordinatenausgleichung beansprucht für jeden gemessenen Richtungswert die Aufstellung von je einer Verbesserungsgleichung folgender Form:

$$\delta = L + v + z. \tag{20}$$

Demnach ist der ausgeglichene Richtungswinkel δ jeder beliebigen Richtung gleich: gemessener Richtungswert L plus dessen Verbesserung v plus die Orientierungskonstante z des betreffenden Instrumentenstandpunktes. Der definitive Richtungswinkel δ aber läßt sich wie folgt auflösen:

$$\delta = \delta^\circ + d\delta\,. \tag{21}$$

Ebenso die Orientierungskonstante:

$$z = z^\circ + dz, \tag{22}$$

wo $d\delta$ die Änderung des Richtungswinkels, während dz die Änderung der Orientierungskonstante bedeutet. Diese zwei Änderungen sind vorläufig unbekannt, man muß dieselben anläßlich der Ausgleichung bestimmen. δ_0 und z_0 aber sind die entsprechenden Näherungswerte. Jener von z_0 wird zweckmäßig angenommen.

Die Verbesserungsgleichungen gebraucht man in der Form

$$v = d\delta - \mathrm{d}z + \delta_0 - L - z^\circ, \tag{23}$$

wobei jedoch $\mathrm{d}\delta$ selbst eine Funktion der Koordinatenänderungen $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}x$ der Neupunkte ist. Wir schreiben:

$$y = y_0 + \mathrm{d}y \quad \text{und} \quad x = x_0 + \mathrm{d}x\,, \tag{24}$$

wo y und x die endgültigen während y_0 und x_0 die genäherten Koordinaten des Neupunktes bedeuten.

Bezüglich der Gleichungen der Richtungsverbesserungen ergeben sich drei Fälle:

1. Auf einem Festpunkt wurde die Richtung nach einem zweiten Festpunkt beobachtet. In diesem Fall ist $\delta_0 = \delta$, also $d\delta = 0$. Die Verbesserungsgleichung des beobachteten Richtungswertes L ist also:

$$v = 0 - \mathrm{d}z + \delta - L - z^\circ. \tag{25}$$

Es sei an dieser Stelle betont, daß die einfache Art der Koordinatenausgleichung, welche in der geodätischen Praxis »mit vorher orientierten Richtungen« allgemein üblich ist, für die Basisnetzausgleichung als nicht ganz angebracht erscheint. Sie würde eine, von der exakten Lösung abwei-

chende, abgeleitete Vergrößerungsseite $\overline{CD}$ ergeben. Es würden nämlich bei der Näherungsmethode die Verbesserungsgleichungen der endgültigen Richtungen, welche also keine Richtungswinkeländerung enthalten (in unserem Bild die Richtungen No. 2 und 5), nicht zur Geltung gelangen. Beim Basisnetz ist also die strenge Methode der Koordinatenausgleichung anzuwenden, damit die Verbesserungsgleichungen vom Typ (25) nicht herausfallen.

2. Es wurde der Richtungswert von einem Festpunkt nach einem Neupunkt, oder von einem Neupunkt nach einem Festpunkt gemessen. In diesem Fall hängt die Richtungswinkeländerung $\mathrm{d}\delta$ mit den Koordinatenänderungen $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}x$ des Neupunktes folgenderweise zusammen:

$$\mathrm{d}\delta = a.\mathrm{d}y + b.\mathrm{d}x. \tag{26}$$

Mithin wird in diesem Falle die Verbesserungsgleichung (23) in folgende Form übergehen:

$$v = a.\mathrm{d}y + b.\mathrm{d}x - \mathrm{d}z + \delta^0 - L - z^0. \tag{27}$$

Die Faktoren a und b der Koordinatenänderungen in (26) und (27) nennt man Richtungskoeffizienten. Vom Standpunkt, von dem der Richtungswert L beobachtet wurde, ist auch in (27) der genäherte Richtungswinkel δ° in Richtung des Zielpunktes zu deuten.

3. Endlich sind noch die Fehlergleichungen für die beiden gegenseitigen Richtungen zwischen den Neupunkten C und D aufzustellen. In solchen Fällen ist die Richtungswinkeländerung $\mathrm{d}\delta$ Funktion der insgesamt vier Koordinatenänderungen der beiden Neupunkte. Es handle sich um den Richtungswert L_{CD}, der vom Standpunkt C nach dem Zielpunkt D beobachtet wurde. Der genäherte Richtungswinkel ist δ°_{CD}. Die Verbesserungsgleichung des Richtungswertes lautet:

$$v_{CD} = a_C\,\mathrm{d}y_C + b_C\,\mathrm{d}x_C + a_D\,\mathrm{d}y_D + b_D\,\mathrm{d}x_D - \mathrm{d}z_C + \delta^0_{CD} - L_{CD} - z^0_C. \tag{28}$$

Die Richtungskoeffizienten der Fälle (2) und (3) sind folgenderweise zu deuten:

$$a = -\frac{\varrho''}{10}\,\frac{\cos\delta_0}{t}, \tag{29}$$

$$b = +\frac{\varrho''}{10}\,\frac{\sin\delta_0}{t}. \tag{30}$$

Die genäherte Entfernung t ist in Metern zu substituieren. Infolge des Divisors 10 werden jedoch die zu ermittelnden Koordinatenänderungen $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}x$ in Dezimeter erhalten.

Um in den Vorzeichen der numerischen Werte a und b Fehler zu vermeiden, merke man sich die Regel, daß in (29) und (30) der genäherte Richtungs-

winkel δ^0 immer von dem Punkt zu deuten ist, um dessen Änderung es sich handelt, das heißt dessen Werte dy und dx mit a bzw. b multipliziert werden. Z. B.: Der Richtungswinkel δ° der beiden Richtungskoeffizienten, die mit den Koordinatenänderungen des Neupunktes C multipliziert sind, ist von C, in Richtung des anderen Endpunktes der entsprechenden Seitenlänge zu deuten.

Demnach sind in den beiden Verbesserungsgleichungen der Richtungen vom Festpunkt A nach dem Neupunkt C wie auch vom Neupunkt C nach dem Festpunkt A die Richtungskoeffizienten a und b mit δ°_{CA}, also mit demselben, von C nach A gedeuteten Richtungswinkel zu berechnen. Mit anderen Worten, es tritt in beiden Verbesserungsgleichungen dieselbe Richtungswinkeländerung

$$d\delta = a \,.\, dy_C + b \,.\, dx_C$$

auf. Die beiden hier angeführten Verbesserungsgleichungen werden nur in ihren drei letzten Gliedern voneinander abweichen, d. h.:

$$v_{AC} = a \,.\, dy_C + b \,.\, dx_C - dz_A + \delta^0_{AC} - L_{AC} - z^0_A \,; \tag{31}$$

$$v_{CA} = a \,.\, dy_C + b \,.\, dx_C - dz_C + \delta^0_{CA} - L_{CA} - z^0_C \,. \tag{32}$$

Dies ist übrigens auch verständlich, nachdem es sich ja in beiden Fällen um die Koordinatenänderungen desselben Neupunktes C handelt. Die von diesen hervorgerufene Richtungsänderung $d\delta$ ist sowohl bezüglich der Größe als auch der Richtung dieselbe.

Was die Verbesserungsgleichungen der gegenseitigen Richtungen zwischen den beiden Neupunkten betrifft, so gilt hier die gleiche Überlegung. Dieselben vier Koordinatenänderungen können sowohl dem Vorzeichen als auch der Größe nach nur genau dieselbe Richtungsänderung der Geraden C — D verursachen, unabhängig davon, ob die Richtung von C nach D, oder umgekehrt von D nach C bedeutet wird. In der Verbesserungsgleichung C → D ist der genäherte Richtungswinkel in den zwei Koeffizienten a bzw. b, die mit den zwei Koordinatenänderungen des Punktes C multipliziert sind, auch von C nach D zu deuten. Der Richtungswinkel der Koeffizienten a und b der Koordinatenänderungen im Punkt D derselben Gleichung zeigt aber umgekehrt von D nach C.

In den Fehlergleichungen der gegenseitigen beiden Neupunktsrichtungen sind die rechtsseitigen vier ersten Glieder, welche die Richtungsänderung ausdrücken, ganz gleich, nur die drei letzten Glieder δ°, L und z° weichen in den beiden Gleichungen voneinander ab.

Mit Rücksicht hierauf wie auch im Sinne der Vorzeichenregel der Richtungskoeffizienten in (29) und (30) bzw. im darauffolgenden Textteile gilt:

$$a_D = -a_C \quad \text{und} \quad b_D = -b_C \,, \tag{33}$$

also gestalten sich schließlich die Verbesserungsgleichungen der beiden Neupunktsrichtungen wie folgt:

$$v_C = a.\mathrm{d}y_C + b.\mathrm{d}x_C - a.\mathrm{d}y_D - b.\mathrm{d}x_D - \mathrm{d}z_C - \delta^0_{CD} - L_{CD} - z^0_C, \quad (34)$$

$$v_D = a.\mathrm{d}y_C + b.\mathrm{d}x_C - a.\mathrm{d}y_D - b.\mathrm{d}x_D - \mathrm{d}z_D - \delta^0_{DC} - L_{DC} - z^0_D. \quad (35)$$

Die Richtungskoeffizienten a und b nach (29) und (30) sind hier mit dem Richtungswinkel δ° von C nach D zu berechnen. Die numerische Rechnung zeigt Tab. IX.

Um die Vergleichsmöglichkeit mit der vorher ausführlich besprochenen ersten Berechnungsart zu bewahren, wurden auch diesmal gleichgewichtige Richtungsmessungen vorausgesetzt.

Die Absolutglieder $(\delta^\circ - L - z^\circ)$ der Verbesserungsgleichungen sind numerisch in der Tab. X vorzufinden. Hier erscheint die genäherte Orientierungskonstante eines jeden Standpunktes als einfaches arithmetisches Mittel aller Orientierungswinkel des betreffenden Standpunktes, d. h.:

$$z^0 = \frac{[\delta - L]}{n} = \frac{[\delta - L]}{3}. \quad (36)$$

Dies hat den Vorteil, daß bei der Bildung der Summengleichung der Verbesserungsgleichungen des Standpunktes das Absolutglied verschwindet.

Z. B. die *Verbesserungsgleichungen* der drei gemessenen Richtungen des Instrumentenstandpunktes A, sowie deren *Summengleichung* gestalten sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_1\,\mathrm{d}y_C + b_1\,\mathrm{d}x_C && - \mathrm{d}z_A + \delta^0_1 - L_1 - \frac{[\delta - L]_A}{3},\\
v_2 &= && - \mathrm{d}z_A + \delta^0_2 - L_2 - \frac{[\delta - L]_A}{3}, \quad (37)\\
v_3 &= && a_3\,\mathrm{d}y_D + b_3\,\mathrm{d}x_D - \mathrm{d}z_A + \delta^0_3 - L_3 - \frac{[\delta - L]_A}{3},
\end{aligned}$$

$$0 = a_1\,\mathrm{d}y_C + b_1\,\mathrm{d}x_C + a_3\,\mathrm{d}y_D + b_3\,\mathrm{d}x_D - 3\,\mathrm{d}z_A + ([\delta - L]_A - [\delta - L]_A). \quad (38)$$

Aus der nullwertigen Summengleichung (38) wird die Orientierungsunbekannte $\mathrm{d}z_A$ als Funktion der Koordinatenänderungen ausgedrückt:

$$\mathrm{d}z_A = \frac{1}{3}(a_1\,\mathrm{d}y_C + b_1\,\mathrm{d}x_C + a_3\,\mathrm{d}y_D + b_3\,\mathrm{d}x_D) + 0. \quad (39)$$

Tabelle X

Absolutglieder l der Verbesserungsgleichungen. — Genäherte und endgültige Orientierungswinkel: z_0, z. Verbesserungen. — Richtungswinkeländerungen

Stand-	Ziel-	Richtungs No.	Beob. wert L	Genäherte Richtwinkel δ^c	$\delta^\circ - L$	$\delta^\circ - L - z^\circ = l$	Endgültige Richtwinkel δ	$\delta - L$	Verbess. v	Richt. wink. änderung $d\delta$
punkt										
A	C	1	0°00′00,00″	186°47′31,00″	186°47′31,00″	+0,02	186°47′312,4″	186°47′31,24″	+0,12″	+0,24″
	B	2	63 12 29,22	250 00 00,02	186 47 30,80	−0,18	250 00 00,02	186 47 30,80	−0,32	0
	D	3	133 52 23,87	320 39 55,00	186 47 31,13	+0,15	320 39 55,19	186 47 31,32	+0,20	+0,19
				$z_0 = 92{,}93 : 3 = 30{,}98''$			$z = 93{,}36 : 3 = 31{,}12''$			
	D	4	0 00 00,00	14 31 34,02	14 31 34,02	+0,28	14 31 33,19	14 31 33,19	−0,29	−0,83
B	A	5	55 28 26,26	70 00 00,02	14 31 33,76	+0,02	70 00 00,02	14 31 33,76	+0,28	0
	C	6	124 29 45,57	139 01 19,00	14 31 33,43	−0,31	139 01 19,07	14 31 33,50	+0,02	+0,07
				$z_0 = 101{,}21 : 3 = 33{,}74''$			$z = 100{,}45 : 3 = 33{,}48''$			
	B	7	0 00 00,00	319 01 19,00	319 01 19,00	+0.04	319 01 19,07	319 01 19,07	+0,03	+0,07
C	D	8	21 16 50,14	346 18 09,29	319 01 19,15	+0,19	346 18 09,20	319 01 19,06	+0,02	−0,09
	A	9	47 46 12,26	6 47 31,00	319 01 18,74	−0,22	6 47 31,24	319 01 18,98	−0,06	+0,24
				$z_0 = 56{,}89 : 3 = 18{,}96''$			$z = 57{,}13 : 3 = 19{,}04''$			
	A	10	0 00 00,00	140 39 55,00	140 39 55,00	−0,59	140 39 55,19	140 39 55,19	−0,15	+0,19
D	C	11	25 38 14,05	166 18 09,29	140 39 55,24	−0,35	166 18 09,20	140 39 55,15	−0,19	−0,09
	B	12	53 51 37,50	194 31 34,02	140 39 56,52	+0,93	194 31 33,19	140 39 55,69	+0,35	−0,83
				$z_0 = 166{,}76 : 3 = 55{,}59''$			$z = 166{,}03 : 3 = 55{,}34''$			

$[vv] = 0{,}5057$

Durch Substitutieren dieses Ausdruckes (39) in die Verbesserungsgleichungen (37) läßt sich aus letzteren Gleichungen die Unbekannte dz_A eliminieren, wodurch die reduzierten Verbesserungsgleichungen (40) entstehen:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{2}{3}a_1\,dy_C + \frac{2}{3}b_1\,dx_C - \frac{1}{3}a_3\,dy_D - \frac{1}{3}b_3\,dx_D + l_1\,, \\ v_2 &= -\frac{1}{3}a_1\,dy_C - \frac{1}{3}b_1\,dx_C - \frac{1}{3}a_3\,dy_D - \frac{1}{3}b_3\,dx_D + l_2\,, \\ v_3 &= -\frac{1}{3}a_1\,dy_C - \frac{1}{3}b_1\,dx_C + \frac{2}{3}a_3\,dy_D + \frac{2}{3}b_3\,dx_D + l_3\,. \end{aligned} \tag{40}$$

In (40) erscheinen die Absolutglieder der ursprünglichen Verbesserungsgleichungen (37) mit den Symbolen l bezeichnet, d. h.:

$$(\delta^0 - L) - \frac{[\delta - L]}{3} = l\,.$$

Ihre Summe auf je einen Standpunkt wird aber Null, wie dies aus der Summengleichung (38) zu ersehen ist:

$$[l] = [\delta - L] - 3\,\frac{[\delta - L]}{3} = 0\,.$$

Um alle reduzierten Fehlergleichungen zu erhalten, sind in der unter (37) — (40) gezeigten Art aus den Verbesserungsgleichungen die Orientierungskonstanten dz_B, dz_C bzw. dz_D auch der übrigen drei Standpunkte zu eliminieren.

Die insgesamt zwölf ursprünglichen Verbesserungsgleichungen unseres Basisnetzes mit den aus Tab. X entnommenen Absolutgliedern sowie die vier Summengleichungen gestalten sich, entsprechend der Analogie von (37) und (38) folgendermaßen:

$$\text{A} \left\{ \begin{array}{l} v_1 = -2{,}76\,dy_C + 0{,}33\,dx_C \qquad\qquad\qquad\qquad - dz_A + 0{,}02; \\ v_2 = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - dz_A - 0{,}18; \\ v_3 = \qquad\qquad\qquad + 2{,}66dy_D + 2{,}18dx_D - dz_A + 0{,}15; \end{array} \right\} \tag{41}$$

$$0 = -2{,}76dy_C + 0{,}33dx_C + 2{,}66dy_D + 2{,}18dx_D - 3dz_A. \tag{42}$$

$$\text{B} \left\{ \begin{array}{l} v_4 = \qquad\qquad\qquad + 2{,}91dy_D - 0{,}75dx_D - dz_B + 0{,}28; \\ v_5 = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - dz_B + 0{,}02; \\ v_6 = -2{,}20dy_C - 1{,}91dx_C \qquad\qquad\qquad - dz_B - 0{,}31; \end{array} \right\} \tag{43}$$

$$0 = -2{,}20dy_C - 1{,}91dx_C + 2{,}91dy_D - 0{,}75dx_D - 3dz_B. \tag{44}$$

$$\text{C} \left\{ \begin{array}{l} v_7 = -2{,}20dy_C - 1{,}91dx_C \qquad\qquad\qquad - dz_C + 0{,}04; \\ v_8 = -1{,}62dy_C - 0{,}40dx_C + 1{,}62dy_D + 0{,}40dx_D - dz_C + 0{,}19; \\ v_9 = -2{,}76dy_C + 0{,}33dx_C \qquad\qquad\qquad - dz_C - 0{,}22; \end{array} \right\} \tag{45}$$

$$0 = -6{,}58dy_C - 1{,}98dx_C + 1{,}62dy_D + 0{,}40dx_D - 3dz_C. \tag{46}$$

$$D\left\{\begin{array}{l} v_{10} = \quad + 2{,}66dy_D + 2{,}18dx_D - dz_D - 0{,}59; \\ v_{11} = -1{,}62dy_C - 0{,}40dx_C + 1{,}62dy_D + 0{,}40dx_D - dz_D - 0{,}35; \\ v_{12} = \quad + 2{,}91dy_D - 0{,}75dx_D - dz_D + 0{,}93; \end{array}\right\} \qquad (47)$$

$$0 = -1{,}62dy_C - 0{,}40dx_C + 7{,}19dy_D - 1{,}83dx_D - 3dz_D. \qquad (48)$$

Tabelle XI zeigt die gemäß (37) — (40) reduzierten — und mit I, II, III, IV bezeichneten — Koeffizienten der Verbesserungsgleichungen, deren

Tabelle XI

Die reduzierten Verbesserungsgleichungen

Standpunkt	Richtungs No.	d_{yC}	d_{xC}	d_{yD}	d_{xD}		Summenglieder
		Die reduzierten					
		Koeffizienten				Absolutglieder	
	v	I	II	III	IV	l	s
A	1	−1,84	+0,22	−0,89	−0,73	+0,02	−3,22
	2	+0,92	−0,11	−0,89	−0,73	−0,18	−0,99
	3	+0,92	−0,11	+1,77	+1,45	+0,15	+4,18
B	4	+0,73	+0,64	+1,94	−0,50	+0,28	+3,09
	5	+0,73	+0,64	−0,97	+0,25	+0,02	+0,67
	6	−1,47	−1,27	−0,97	+0,25	−0,31	−3,77
C	7	−0,01	−1,25	−0,54	−0,13	+0,04	−1,89
	8	+0,57	+0,26	+1,08	+0,27	+0,19	+2,37
	9	−0,57	+0,99	−0,54	−0,13	−0,22	−0,47
D	10	+0,54	+0,13	+0,26	+1,57	−0,59	+1,94
	11	−1,08	−0,27	−0,78	−0,21	−0,35	−2,69
	12	+0,54	+0,13	+0,51	−1,36	+0,93	+0,75

Das Koeffizientensystem der Normalgleichungen.

	I]	II]	III]	IV]	l]	s]
[I	+10,7379	+2,2264	+ 6,7760	+2,0722	+1,3875	+23,2000
[II		+5,2216	+ 2,2920	−0,5293	+0,5137	+ 9,7244
[III			+13,0482	+2,7213	+2,1287	+26,9662
[IV				+8,0086	−1,9211	+10,3517
[l					+1,6518	+ 3,7606

Absolutglieder l wie auch die zur Kontrolle dienenden Summenglieder s dieser Koeffizienten. Im unteren Teil derselben Tabelle sind auch die Koeffizienten der Normalgleichungen zusammengefaßt.

Es ist offenbar eine derartige Lösung der Ausgleichungsaufgabe erwünscht, durch die gemeinsam und gleichzeitig neben den Koordinaten der beiden Neupunkte C und D namentlich auch die endgültige Länge der abgeleiteten Vergrößerungsseite CD samt deren Gewicht erhalten wird.

Deshalb ist die Funktion (49) dieser abgeleiteten Seite:

$$\overline{CD} = \sqrt{(y_D - y_C)^2 + (x_D - x_C)^2} = \varphi \tag{49}$$

in eine lineare Form zu bringen, was durch Reihenentwicklung geschehen kann:

$$\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_C} \mathrm{d}y_C + \frac{\partial \varphi}{\partial x_C} \mathrm{d}x_C + \frac{\partial \varphi}{\partial y_D} \mathrm{d}y_D + \frac{\partial \varphi}{\partial x_D} \mathrm{d}x_D \right) + \varphi_0 . \tag{50}$$

Oder mit kürzeren Symbolen:

$$\varphi = f_{y_C} \mathrm{d}y_C + f_{x_C} \mathrm{d}x_C + f_{y_D} \mathrm{d}y_D + f_{x_D} \mathrm{d}x_D + \varphi_0 = \mathrm{d}\varphi + \varphi_0 . \tag{51}$$

Die hier vorkommende Änderung

$$\mathrm{d}\varphi = f_{y_C} \mathrm{d}y_C + f_{x_C} \mathrm{d}x_C + f_{y_D} \mathrm{d}y_D + f_{x_D} \mathrm{d}x_D \tag{52}$$

der Entfernungsfunktion φ in (49) wird durch die gemeinsame Einwirkung der vier Koordinatenänderungen hervorgerufen. Der mit den genäherten Koordinaten erhaltene Wert von φ wird in (50), (51) mit φ_0 bezeichnet.

Die Differentiation laut (50) ergibt das Resultat:

$$\varphi = -\sin \delta^0_{CD} \mathrm{d}y_C - \cos \delta^0_{CD} \mathrm{d}x_C + \sin \delta^0_{CD} \mathrm{d}y_D + \cos \delta^0_{CD} \mathrm{d}x_D + \varphi_0 . \tag{53}$$

Die numerischen Werte von $\sin \overset{\circ}{\delta}_{CD}$, $\cos \overset{\circ}{\delta}_{CD}$ und $\varphi_0 = \overset{\circ}{t}_{CD}$ sind in der Tab. IX enthalten. Dementsprechend ist die numerische Form von (53):

$$\begin{aligned} \varphi = {} & +0{,}2368\, \mathrm{d}y_C - 0{,}9716\, \mathrm{d}x_C - 0{,}2368\, \mathrm{d}y_D + \\ & + 0{,}9716\, \mathrm{d}x_C + 123536{,}23 \ \mathrm{dm} . \end{aligned} \tag{54}$$

Im Sinne der Formel (13) von [8], § 31, S. 400, ist das Gewicht P der Funktion (51) aus folgendem Zusammenhang zu ermitteln:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{P} = 0 - \frac{f^2_{y_C}}{[p\,\mathrm{II}]} - \frac{[f_{x_C} \cdot 1]^2}{[p\,\mathrm{II\,II} \cdot 1]} - \frac{[f_{y_D} \cdot 2]^2}{[p\,\mathrm{III\,III} \cdot 2]} - \\ - \frac{[f_{x_D} \cdot 3]^2}{[p\,\mathrm{IV\,IV} \cdot 3]} = [0 \cdot 4] . \end{aligned} \tag{55}$$

Rechts hier ist das Glied Null bloß angeführt, um den Vergleich mit dem Gewichtsausdruck (11) der Korrelatenlösung zu ermöglichen. An Stelle von Null steht nämlich in (11): $\left[\frac{ff}{p}\right]$, ferner erscheint in (11) ein positives, in (55) dagegen ein negatives Gewichtsreziprok. Wesentlich ist, daß die Glieder von

(55) nicht anderes als die Quadrate der reduzierten Glieder der Funktion (52) sind, wenn diese Funktion in die Choleskysche Lösung der Normalgleichungen einbezogen wird.

*

Zur gleichzeitigen Bestimmung der vier Koordinatenänderungen, ferner der Längenänderung $d\varphi$ sowie deren fünf Gewichtskoeffizienten wollen wir auch diesmal die mit der Funktion φ erweiterten Normalgleichungen anwenden. Für die Auflösung nach dem Choleskyschen Verfahren schlagen wir hiezu folgendes Schema vor:

dy_C	dx_C	dy_D	dx_D	l					$-\varphi$	$s-1$	Σ
[pI I]	[pI II]	[pI III]	pI IV]	[pI l]	−1				$-f_{yC}$		
	[p II II]	[pII III]	[pII IV]	[pII l]		−1			$-f_{xC}$		
		[pIII III]	[pIII IV]	[pIII l]			−1		$-f_{yD}$		
			[pIV IV]	[p IV l]				−1	$-f_{xD}$		(56)
				[p l l]					0		

Hierher gelangen in vier Zeilen die reduzierten Glieder

Die Resultate sind:	[pvv]	$-dy_C$	$-dx_C$	$-dy_D$	$-dx_D$	$-d\varphi$		
		Q_{yC}	Q_{xC}	Q_{yD}	Q_{xD}	Q_φ		

Ganz rechts im Schema (56) stehen die beiden Kolumnen $s-1$ und Σ der numerischen Kontrolle. In den Werten $s-1$ ist selbstverständlich auch das entsprechende Glied der Kolumne φ zu berücksichtigen.

In Anwendung des bekannten Auflösungsverfahrens von CHOLESKY sind die Reduktionen auch auf die Glieder der Kolumne φ, gleich wie auf eine fünfte Unbekannte zu erstrecken.

Als Ergebnisse zeigen sich in der vorletzten Reihe von (56): die Quadratsumme der Verbesserungen, die vier Koordinatenänderungen mit negativem Vorzeichen und die Längenänderung $d\varphi$. In der letzten Reihe aber die fünf Gewichtskoeffizienten der fünf Unbekannten. Das heißt, der Gewichtskoeffizient Q_φ der Entfernung $\varphi = CD$ ergibt sich, indem man die Quadratsumme der reduzierten Glieder der Kolumne $(-\varphi)$ bildet. Im bekannten Zusammenhang des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit (hier sind alle Richtungswerte gleichgewichtig):

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}} \tag{57}$$

bedeutet n die Zahl von sämtlichen gemessenen Richtungswerten (gegenwärtig 12), u die Zahl der Unbekannten; diesmal sind in u vier Koordinatenänderungen und vier Orientierungskonstanten, jedoch nicht die Längenänderung $d\varphi$ zu berücksichtigen.

Der mittlere Fehler der abgeleiteten Vergrößerungsseite $\varphi = \overline{CD}$ ist im Sinne von

$$\mu_{CD} = \mu_0 \sqrt{Q_\varphi} \tag{58}$$

zu bilden. In ähnlicher Weise, mit den entsprechenden Gewichtskoeffizienten ergeben sich auch die mittleren Fehler der vier Neupunktkoordinaten y_C, x_C und y_D, x_D.

Als wichtigstes Ergebnis ergibt die Auflösung laut Schema (56) bereits die Längenänderung $d\varphi$ der abgeleiteten Vergrößerungsseite, woraus gemäß (51):

$$\overline{CD} = d\varphi + \varphi_0 \tag{59}$$

auch die endgültige Länge dieser Seite hervorgeht.

*

Im Falle unserer Basisnetzaufgabe ist es demnach vorteilhaft, die Choleskysche Auflösung in dem Sinne zu erweitern, wie es die Kolumne φ des Schemas (56) zeigt. Würde man diese Kolumne nicht einschalten, so ergäbe die normale Choleskysche Methode nur die vier Koordinatenänderungen und deren Gewichtskoeffizienten. Die abgeleitete Seitenlänge müßte man gemäß

$$\varphi = \overline{CD} = \sqrt{(y_D - y_C)^2 + (x_D - x_C)^2} \tag{60}$$

ermitteln. Das Gewicht dieser Seite aber, welches in diesem Falle als Gewicht einer im Wege der vermittelnden Ausgleichung zu bestimmenden Unbekannten gilt, wäre dann im Zuge einer besonderen Arbeitsphase in der üblichen Weise zu berechnen.

*

Die Anwendung des Schemas (56) auf unser Zahlenbeispiel zeigt Tab. XII. Demnach ist die endgültige Länge der Vergrößerungsseite:

$$\overline{CD} = 12\,353{,}653 \pm 0{,}020\ \text{m}. \tag{61}$$

Numerische Kontrolle der Koordinatenausgleichung

Nachdem die endgültige Länge der Vergrößerungsseite in Tab. XII bereits numerisch vorliegt, hat man die daselbst ausgerechneten Koordinaten-

Tabelle XII

Die Auflösung des erweiterten Normalgleichungssystems nach der Methode Cholesky. Endgültige Länge und mittlerer Fehler der abgeleiteten Vergrößerungsseite $\overline{CD}$

dy_C	dx_C	dy_D	dx_D	l					$-\varphi$	$s-1$	Σ
+10,7379	+2,2264	+6,7760	+2,0722	+1,3875	−1				−0,2368	+21,9632	
	+5,2216	+2,2920	−0,5293	+0,5137		−1			+0,9716	+ 9,6960	
		+13,0482	+2,7213	+2,1287			−1		+0,2368	+26,2030	
			+8,0086	−1,9211				−1	−0,9716	+ 8,3801	
				+1,6518					0	+ 3,7606	
+3,2769	+0,6794	+2,0678	+0,6324	+0,4234	−0,3052				−0,0723	+ 6,7024	+6,7024
	+2,1817	+0,4066	−0,4395	+0,1036	+0,0950	−0,4584			+0,4679	+2,3571	+2,3569
		+2,9338	+0,5428	+0,4128	+0,2019	+0,0635	−0,3409		+0,0668	+3,8808	+3,8807
			+2,6685	−0,8872	+0,0469	−0,0884	+0,0693	−0,3747	−0,2835	+1,1508	+1,1509
			Resultate:	+0,5043 = [*pvv*]	+0,0776 = $-dy_C$	−0,0572 = $-dx_C$	+0,2022 = $-dy_D$	−0,3324 = $-dx_D$	−0,2970 = $-d\varphi$	+0,0976	+0,0975
									−0,3090 = $-Q_\varphi$		

Fehlerrechnung

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{0{,}5043}{12-8}} = \pm 0{,}355$$

$$\mu_\varphi = \mu_0 \sqrt{Q_\varphi} = 0{,}355 \sqrt{0{,}3090}$$

$$\mu_\varphi = \pm 0{,}197 \text{ dm} = \pm 0{,}0197 \text{ m}$$

$$\varphi_0 = 12\,353{,}623 \text{ m}$$

$$d\varphi = +0{,}030 \text{ m}$$

$$\overline{CD} = \varphi = 12\,353{,}653 \pm 0{,}020 \text{ m}$$

änderungen der Endpunkte C und D im Prinzipe nicht mehr notwendig. Praktisch haben letztere aber auf dem Gebiet der umfassenden Kontrolle sämtlicher Berechnungen, mithin auch bei jenen des Endresultates (60) eine bedeutende Rolle. Wir kommen nun auf diese zu sprechen.

Die Verbesserungen der beobachteten Richtungen. Substituiert man die bereits bekannten Koordinatenänderungen in die reduzierten Verbesserungsgleichungen der Tab. XI, so erhält man sowohl für die Verbesserungen selbst

Tabelle XIII

Die Richtungsverbesserungen v. — Die Änderungen dδ der Richtungswinkel

Richtungs No.	$dy_C =$ $= -0{,}0776$	$dx_C =$ $= +0{,}0572$	$dy_D =$ $= -0{,}2022$	$dx_D =$ $= +0{,}3324$	$d\delta - dz$	l	$d\delta - dz + l = v$	dz	$d\delta$
	I. dy_C	II. dx_C	III. dy_D	IV. dx_D					
1	+0,144	+0,013	+0,180	−0,242	+0,095″	+0,020″	+0,115″	+0,140″	+0,235″
2	−0,072	−0,006	+0,180	−0,242	−0,140	−0,180	−0,320	+0,140	0
3	−0,072	−0,006	−0,358	+0,481	+0,045	+0,150	+0,195	+0,140	+0,185
4	−0,057	+0,036	−0,392	−0,166	−0,579	+0,280	−0,299	−0,259	−0,838
5	−0,057	+0,036	+0,196	+0,083	+0,258	+0,020	+0,278	−0,259	−0,001
6	+0,115	−0,072	+0,196	+0,083	+0,322	−0,310	+0,012	−0,259	+0,063
7	+0,001	−0,071	+0,109	−0,043	0	+0,040	+0,040	+0,068	+0,068
8	−0,044	+0,015	−0,218	+0,090	−0,157	+0,190	+0,033	+0,068	−0,089
9	+0,044	+0,056	+0,109	−0,043	+0,166	−0,220	−0,054	+0,068	+0,234
10	−0,044	+0,007	−0,053	+0,521	+0,431	−0,590	−0,159	−0,248	+0,183
11	+0,084	−0,015	+0,158	−0,070	+0,157	−0,350	−0,193	−0,248	−0,091
12	−0,042	+0,007	−0,103	−0,452	−0,590	+0,930	+0,340	−0,248	−0,838

$[vv] = 0{,}5041$

wie auch deren Quadratsumme $[pvv]$ numerische Werte. Für jeden Standpunkt müssen die im Sinne von (37) — (40) reduzierten Koeffizienten wie auch die Absolutglieder in ihren algebraischen Summen der Theorie nach Null ergeben. Das heißt, je Standpunkt soll sein: $[I] = 0$; $[II] = 0$; $[III] = 0$; $[IV] = 0$. Und bezüglich der Verbesserungen freilich auch $[v] = 0$.

Alle diese Kontrollrechnungen sind in Tab. XIII enthalten. In der Kolumne v findet man hier die einzelnen Richtungsverbesserungen, ganz unten deren Quadratsumme: $[vv] = 0{,}5041$. Wogegen in Tab. XII durch Lösung der Normalgleichungen $[vv] = 0{,}5043$ erhalten wurde. Über einen dritten Wert $[vv]$ wird noch im untenstehenden die Rede sein.

Die Orientierungskonstante. Im Besitz der vier Koordinatenänderungen der beiden Neupunkte kann aus den Summengleichungen (42), (44), (46) und (48) die Orientierungsunbekannte dz eines jeden Standpunktes ermittelt werden. Deren ausführliche numerische Ausrechnung ist hier nicht mehr

dargestellt. Die genäherten $z°$-Werte aber werden für jeden Standpunkt gesondert, bekanntlich gemäß (36) erhalten, wie dies aus der sechsten Kolumne der Tab. X zu ersehen ist. Die Auf diese Weise ermittelten Werte von $z_0 + + dz = z$ aller vier Instrumentstandpunkte sind in der zweiten, dritten und vierten Kolumne der Tab. XIV enthalten.

Die aus Tab. XII. in Dezimetern entnommenen Koordinaten werden in Meter überschrieben und sodann gemäß (24) die endgültigen Neupunkt-

Tabelle XIV

Die endgültigen Werte der Orientierungskonstanten und der Neupunktkoordinaten

Die Orientierungskonstanten der Instrumentenstandpunkte				
Punkt-Symbol	dz aus (62), (64), (66) und (68)			aus ($\delta - \delta j$)
	z_0	dz	z	z
A	186°47′30,98″	+0,14″	186°47′31,12″	186°47′31,12″
B	14 31 33,74	−0,26	14 31 33,48	14 31 33,48
C	319 01 18,96	+0,07	319 01 19,03	319 01 19,04
D	140 39 55,59	−0,25	140 39 55,34	140 39 55,34

Die endgültigen Koordinaten der beiden Neupunkte

C			D	
y	x		y	x
+ 19 123,103	+12 637,317		+16 197,834	+24 639,600
− 0,008	+ 0,006		− 0,020	+ 0,033
+19 123,095	+12 637,323		+16 197,814	+24 639,633

koordinaten gebildet. Dies ist in Tab. XIV, und zwar in deren unterem Teil ebenfalls angegeben.

Die endgültigen Richtungswinkel. — Die endgültige Entfernung $\overline{CD}$. Die Berechnung derselben wurde auf Grund der endgültigen Koordinaten in Tab. XV durchgeführt. Für die abgeleitete Vergrößerungsseite erhält man in dieser Weise den Wert:

$$\overline{CD} = 12\,353{,}6518 \text{ m}.$$

Durch Auflösen der Normalgleichungen ergab sich aber in Tab. XII die Entfernung $\overline{CD} = 12\,353{,}653$ m. Die Abweichung der beiden Längenwerte beträgt also bloß 1 mm, was für die Richtigkeit der Rechnungen spricht.

Die endgültigen Orientierungskonstanten. Abermals die Richtungsverbesserungen. — Die in Tab. XV. gewonnenen δ-Werte substituiert man in die Kolumne »Endgültige Richtungswinkel« der Tabelle X. Daselbst bildet

man in den unterstrichenen Zeilen nach Analogie von (36) die Orientierungskonstanten aller vier Standpunkte wie folgt:

$$\frac{[\delta - L]_A}{3} = z_A; \quad \frac{[\delta - L]_B}{3} = z_B; \quad \frac{[\delta - L]_C}{3} = z_C; \quad \frac{[\delta - L]_D}{3} = z_D.$$

Tabelle XV

Die endgültigen Richtungswinkel. — Die endgültige Entfernung $\overline{CD}$

Punkt Zeichen		y		x	tg δ, α	δ
C	+	19 123,095	+	12 637,323		186°47′31,24″
A	+	20 000,000	+	20 000,000		
	−	876,905	−	7 362,677	0,119 10 138	
					$\alpha =$ 6°47′31,24″	
B	+	14 474,618	+	17 988,926		250°00′00,02″
A	+	20 000,000	+	20 000,000		
	−	5 525,382	−	2 011,074	2,747 47 821	
					$\alpha =$ 70°00′00,02″	
D	+	16 197,814	+	24 639,633		320°39′55,19″
A	+	20 000,000	+	20 000,000		
	−	3 802,186	+	4 639,633	0,819 50 146	
					$\alpha =$ 39°20′04,81″	
D	+	16 197,814	+	24 639,633		14°31′33,19″
B	+	14 474,618	+	17 988,926		
	+	1 723,196	+	6 650,707	0,259 09 967	
					$\alpha =$ 14°31′33,19″	
C	+	19 123,095	+	12 637,323		139°01′19,07″
B	+	14 474,618	+	17 988,926		
	+	4 648,477	−	5 351,603	0,868 61 395	
					$\alpha =$ 40°58′40,93″	
D	+	16 197,814	+	24 639,633		346°18′09,20″
C	+	19 123,095	+	12 637,323		cos $\delta =$
	−	2 925,281	+	12 002,310	0,243 72 650	= 0,971 55 968
					$\alpha =$ 13°41′50,80″	$\overline{CD} =$ 12 353,6518

Im Besitze dieser Werte werden die Verbesserungen der beobachteten Richtungswerte gemäß (20) entstehen:

$$v_1 = \delta_1 - L_1 - z_A; \; v_2 = \delta_2 - L_2 - z_A; \; \ldots \; v_{12} = \delta_{12} - L_{12} - z_D.$$

Die numerischen Werte sind aus der vorletzten Kolumne v der Tab. X zu ersehen. In derselben Tabelle ganz unten rechts steht auch die Quadratsumme der Verbesserungen: $[vv] = 0{,}5057$, was mit den Werten 0,5043 der Tab. XII und 0,5041 in Tab. XIII befriedigend übereinstimmt.

*

Für die geschilderten Kontrollen könnte man anstatt der reduzierten Verbesserungsgleichungen auch die ursprünglichen Verbesserungsgleichungen (41), (43), (45) und (47) heranziehen. Letztere sind sogar insofern vorteilhafter, da sie die Änderungen $d\delta$ der genäherten und endgültigen Richtungswinkel unmittelbar liefern, die ebenfalls wichtige Kontrollen bieten. Z. B. im Falle der Richtung 1, aus der Verbesserungsgleichung v_1 unter (41):

$$d\delta = -2{,}76\,(-0{,}0776) + 0{,}33\,(0{,}0572) = +0{,}234''.$$

Während die tatsächliche Abweichung der Richtungswinkel im Sinne »endgültig minus genähert« nach Tab. X.

$$\delta - \delta^\circ = 186^\circ\,47'\,31{,}24'' - 186^\circ\,47'\,31{,}00'' = +0{,}24''$$

beträgt. Demgegenüber ergibt auf Grund der reduzierten Fehlergleichungen die Tab. XIII in der sechsten Kolumne

$$d\delta - dz_A = +0{,}095''.$$

Demnach ist

$$d\delta = 0{,}095 + dz_A = 0{,}095 + 0{,}140 = +0{,}235''$$

noch besonders zu bilden.

Unserseits wurden die Kontrollen an Hand der reduzierten Fehlergleichungen durchgeführt, und die Änderungen $d\delta$ in der letzten Kolumne der Tab. XIII als Summen der Werte der Kolumnen ($d\delta$ — dz) und dz ausgewiesen. Die so erhaltenen $d\delta$-Werte sind mit den $d\delta$-Werten der letzten Kolumne der Tab. X vergleichbar. Letztere sind im Sinne

$$d\delta = \delta_{\text{endgültig}} - \delta_{\text{genähert}}$$

zu deuten. Man ersieht aus den Tabellen, die entsprechenden $d\delta$ Werte beider Art weichen voneinander bloß um die Tausendstel Millimeter ab.

*

Schlußwort. Die Koordinatenausgleichung des Basisnetzes und namentlich die numerischen Kontrollen wurden vorliegend eigentlich ausführlicher behandelt, als dies der Fachmann beansprucht. Dies geschah deshalb, weil es sich hier um die erstmalige Anwendung einer ungewohnten Anschauungsweise handelte.

SCHRIFTTUM

1. Strasser, G.: Kritische Betrachtungen zur Messung und Vergrößerung von Grundlinien. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 4. 1953.
2. Milasovszky, B.: On the Adjustment of the Base Quadrilateral. *(Acta Techn. Hung.* XXXVII (1961).
3. Helmert, F. R.: Die Europäische Längengradmessung in 52° Breite von Greenwich bis Warschau. I. Heft. *Veröffentlichungen des kg. Preußischen Geodätischen Institutes*, Berlin, 1893.

4. SCHREIBER, O.: Die Anordnung der Winkelbeobachtungen im Göttinger Basisnetz. *Zeitschrift für Vermessungswesen.* 1882. S. 129—161.
5. JUNG, I.: Über die günstigste Gewichtsverteilung in Basisnetzen. Upsala, 1924.
6. GIGAS, E.: Entwurf, Gestaltung und Ausgleichung eines Basisnetzes. »Triangulation I. Ordnung und Basismessung« Berlin, 1937. S. 19—29.
7. JORDAN—EGGERT—KNEISSL: Handbuch der Vermessungskunde, 10. Auflage, Band IV. Erste Hälfte. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1958.
8. JORDAN, W.—EGGERT, O.: Handbuch der Vermessungskunde. Erster Band, Ausgleichungsrechnung. Stuttgart, Metzlersche Verlagsbuchhandlung, 1935.
9. BENOIT, Commandant: Note sur une étude de résolution des équations normales provenant de l'application de la méthode des moindres carrés *a* un système d'équation linéaires en nombre inférieur à celui des inconnues. Application de la méthode à la résolution d'un système défini d'équations linéaires (procédé du Commandant CHOLESKY). *Bulletin Géodésique*, 1924. p. 67—77.

ON THE CALCULATION OF THE BASE QUADRILATERAL IN THE METHOD OF SERIES

DR. B. MILASOVSZKY

SUMMARY

Producing the new triangulation nets the base extensions have still an important role. Considering the standpoints of exactitude and economy the author shows in this paper the examination of two alternatives, among the four newer possibilities of adjustment of base quadrilaterals *with direction* measurements: 1. Starting from the well-known correlate adjustment but with that corrective modification that simultaneously with the correlates in a uniform working process he also gives the weight of the extension dide. 2. The author traces determination of length of the developed main triangular side back to the coordinate adjustment as a double point joining problem by his individual reflection.

CALCUL DU RÉSEAU DE DÉVELOPPEMENT QUADRILATÈRE A MESURES DE DIRECTION

B. MILASOVSZKY

RÉSUMÉ

Dans les triangulations, les réseaux de développement de base jouent, aujourd'hui encore, un rôle important. L'auteur, tenant compte du double problème de la précision et de l'économie, choisit d'examiner l'alternative suivante: 1) partir de la compensation corrélée généralement connue, avec toutefois cette modification qu'outre les corrélées, l'auteur donne simultanément le poids du côté développé en résultat du même calcul; 2) ramener la détermination de la longueur du côté développé à une solution par compensation simultanée de deux points.

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОГО БАЗИСА ПЕЛЕНГАЦИИ

Б. МИЛАШОВСКИ

РЕЗЮМЕ

Сегодня ещё занимают важную роль формации, расширяющие основную линию, при создании новой триангуляционной сети. С точки зрения одновнимания чёткости и экономичности в настоящее время из четырёх новых возможностей уровнения пеленгационного четырёхугольного базиса в докладе показаны две проверки альтернативы: 1. Исходя из общеизвестного уровнения корреляции, но тем исправлением, что одновременно коррелятами в единственном ходе работы покажется вес развитого бока. 2. Автор индивидуально сводит определение длины развитого триангуляционного бока заданием с двойным точкоключением к уровнению координат.

DETERMINATION OF THE ADJUSTING STRAIGHT LINE WITHIN SEVERAL POINTS, AND THE MAJOR AND MINOR AXES OF THE TELLURIC STATION ELLIPSE

A. TÁRCZY-HORNOCH

MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received December 8, 1962]

The calculation of the adjusting straight line within several points is a problem of surveying and mining. This problem mathematically resembles the determination of the direction of the major axis of the telluric station ellipse in geophysics, or of the ellipse of inertia in mechanics, respectively. However in the latter cases, in addition to the direction of the major axis, the determination of the numerical values of both, of the major and minor axes is also required.

The present paper compares the solutions given in the enumerated branches of science completing them, particularly in respect to the calculation of both the major and minor axes, with additional, in practice expediently utilizable solutions. The paper also covers the investigations of the ambiguous situation of the major and minor axes, and completes the hitherto investigations in this field.

The solution and practical importance of the first problem propounded in the title was recently treated by FORRAI [1], joining with MILASOVSZKY's [2] and ZAMBO's [3] investigations concerning a related subject. Both have computed the tangent of the double bearing α of the adjusting straight line. MILASOVSZKY determined *e.g.* the tangent in question with the equation

$$\tan 2\alpha = \frac{2[p\xi\eta]}{[p\xi\xi] - [p\eta\eta]}, \tag{1}$$

where according to Fig. 1a ξ and η denote the coordinates of the points referring to the centre of gravity C of these points and p the weights of same. In connection with the problem in question the above formula has often played a role in the past, as has already been pointed out by MILASOVSZKY in an earlier paper ([4], equ. 15). In this formula — according to the notation of a sum introduced by GAUSS denote:

$$[p\xi\eta] = p_1\xi_1\eta_1 + p_2\xi_2\eta_2 + \dots,$$
$$[p\xi\xi] = p_1\xi_1^2 + p_2\xi_2^2 + \dots,$$
$$[p\eta\eta] = p_1\eta_1^2 + p_2\eta_2^2 + \dots.$$

In the following the second powers of sums will be denoted by an upper index 2 written above the brackets, thus *e.g.*:

$$[p\xi\eta]^2 = (p_1\xi_1\eta_1 + p_2\xi_2\eta_2 + \dots)^2.$$

From this equation that straight line, in respect to which square-sum of perpendicular differences is minimum, cannot immediately be obtained unambigouosly, because from the double bearing 2α that value which is perpendicular to it and for which the square-sum of differences is maximum, is also obtained.

If the points are situated close to a straight line, as in the case of a level drift location, the straight line giving the minimum can be determined from the above mentioned two solutions immediately and without any separate investigation. But the situation is different, if the points are either not plotted or are lying fairly scattered: then the unambiguous determination of the straight line giving the minimum is really important. This case occurs when determining the station ellipse of telluric currents, where a certain part of the maximal square-sum of perpendicular residual belonging to the points — in the case of points measured with the same accuracy the n-th part[1] — determines half of the major axis ot the ellipse, or the same broken part of the minimal square sum of same the half of the minor axis. Thus, the mathematical problem is here also the same.

The aforementioned question referring to the unambiguity had already been treated by MILASOVSZKY [2; pp. 193—200], and in connection with the determination of the telluric station ellipse also by VERŐ [5; pp. 259—260]. MILASOVSZKY from his formulae (30) and (31) computes the value of the minimum as well as that of the maximum, and determines with the aid of these values the straight lines pertaining to the minimum and maximum by using for this purpose his formula (39), from which the tangent of the onefold bearing can be computed. For the calculation of the double bearing according to formula (1), a diagram was published by VERŐ [5; p. 260, Fig. 2], this diagram is valid for a geodetical system of co-ordinates and can only be used for points having the same weight. Fromt he aforementioned diagram, according to the fact whether $[\xi\xi]$ is greater or smaller than $[\eta\eta]$, the position of the major axis can be determined. VERŐ's result can be completed and put into words as follows:[2] The line giving the minimum of the square sum of

[1] The difference between this station ellipse and the ellipse of inertia of mechanics consists in dividing by n, or in the case of measurements having different weights by $[p]$, respectively. (Compare with [4; p. 7]).

[2] This results from the signs of $\tan 2\alpha = \sin 2\alpha/\cos 2\alpha$. If the determinator of (1) is positive, *i.e.*, if $[p\xi\xi] - [p\eta\eta] > 0$, the angle 2α lies in the first or fourth quadrant; while for a negative denominator of (1) the angle in question lies in the second or third quadrant. Herefrom, for α the following limits result: in the first case $0°—45°$ and $135°—180°$, in the second case $45°—90°$ and $90°—135°$. For a straight line (but not for a direction) instead of $135°—180°$, $315°—360°$ might be written, too.

The mathematical proof of VERŐ's rule is given hereunder.

If the function (4), after making it for the determination of the limit values equal to zero, with the aid of the double angle is written in the form

$$\frac{d\,[pee]}{d\alpha} = 0 = 2\,([p\xi\xi] - [p\eta\eta])\sin 2\alpha - 2\,[p\xi\eta]\cos 2\alpha\,, \qquad \text{(a)}$$

differences runs for $[p\xi\xi] > [p\eta\eta]$ through the quadrant between 315° and 45°, while for $[p\xi\xi] < [p\eta\eta]$ through the quadrant between 45° and 135°. If $[p\xi\xi] = [p\eta\eta]$, thus $\tan 2\alpha = \infty$, than for $[p\xi\eta] > 0$ the value of α is 45°, while for $[p\xi\eta] < 0$ the same is 135°. Nevertheless, as will later be seen the otherwise simple equation (1) is in regard to the double angle not always the most suitable.

Contrary to the previously discussed methods, FORRAI starts his calculation with the determination of the tangent of the bearing, *i.e.*, of tan α, and starting out from the second differential quotient, and with the aid of his equations (16) — (26), he arrives after equation (26) finally to the rule which ensures the unambiguity of the straight line giving the minimum.

Here, it should immediately be mentioned that in geodetic calculations also mentioned by FORRAI — neither in respect to the telluric station ellipse — the problem is not quite the same if the coordinates of the given points were directly measured, then the condition consists in the minimum of the square-sum of corrections given to these measurements. This case has also been dealt with by MILASOVSZKY referring to the onefold bearing [2; pp. 191—193], and author also published solutions referring to this question [6; pp. 252—259]. At the end of this paper author will return to this subject. If the coordinates are not directly measured but computed, thus the individual coordinates are not independent of each other, then in the adjustments their correlated character should also be taken into consideration [7; pp. 332—335].

Now, the generally used case should be taken up, *i.e.* when starting out from the minimum of the weighted square-sum of perpendicular differences. Here, FORRAI computes instead of coordinates referring to the centre of gravity as used by MILASOVSZKY, with values referring to the original system of coordinates, because in the case on n points $2n$ subtractions can be omitted. As will be seen from the following, the use of a system of coordi-

---

then for the value of the second differential quotient > 0 at the place $d[pee]/d\alpha = 0$ a minimum arises. Therefore, the place of the minimum is determined by the relation

$$([p\xi\xi[- [p\eta\eta]) \cos 2\alpha + [p\xi\eta] \sin 2\alpha > 0 . \qquad (b)$$

Substituting for $\tan 2\alpha$ the expression (1) into the above inequality, this can also be written in the form

$$\cos 2\alpha \left\{ \frac{2[p\xi\eta]^2}{[p\xi\xi] - [p\eta\eta]} + ([p\xi\xi] - [p\eta\eta]) \right\} > 0 . \qquad (c)$$

If $[p\xi\xi] > [p\eta\eta]$, then condition (*c*) is satisfied for $\cos 2\alpha > 0$, and hereform for α the values 0°—45° and 135°—180° are obtained. On the other hand, if $[p\xi\xi] < [p\eta\eta]$ the satisfaction of condition (*c*) calls for the value $\cos 2\alpha < 0$, and in this case for α an angle between 45° and 135° is obtained. If $[p\xi\xi] = [p\eta\eta]$, then according to (1) 2α can be 90° or 270°. However, the minimum according to (*b*) — (as $\sin 90° = 1$ and $\sin 135° = -1$) — will arise: if $[p\xi\eta]$ is positive for $\alpha = 45°$; and if $[p\xi\eta]$ is negative for $\alpha = 135°$.

nates referring to the centre of gravity might be fairly advantageous, not only in the mathematical deduction, but in the calculation, too. In addition to the direction, one point of the straight line must also be known, and this can be the centre of gravity, therefore, the above mentioned surplus in computing might be motivated. Moreover, as the range of magnitude of coordinates referring to the centre of gravity is always smaller, therefore, to raise them to the second power and multiplications connected with them require less work, thus in a given case the aforementioned surplus in computation work might even become dubious.

Marking the coordinates of point i referring to the centre of gravity C by ξ_i and η_i, and the perpendicular difference from the straight line sought

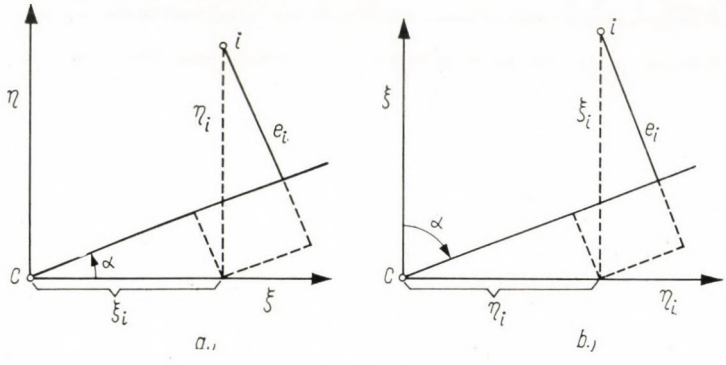

Fig. 1

for by e_i, then (see [2; p. 198 equ. (15)] taking over MILASOVSZKY's and FORRAI's mathematical (and not geodetical) system of coordinates the relation

$$e_i = \eta_i \cos \alpha - \xi_i \sin \alpha$$

holds. For the weight p_i of point i the weighted square of the residual is:

$$p_i e_i^2 = p_i \eta_i^2 \cos^2 \alpha - 2 p_i \xi_i \eta_i \sin \alpha \cdot \cos \alpha + p_i \xi_i^2 \sin^2 \alpha . \qquad (2)$$

However, it might be mentioned that in a geodetic system of coordinates for the square the same relation is obtained (Fig. 1b).

Expressing the sums by notations introduced by GAUSS, with the aid of (2) the starting function figuring in almost all deductions can be set up as follows:

$$F_{(\alpha)} = [pee] = [p\eta\eta] \cos^2 \alpha - 2 [p\xi\eta] \sin \alpha \cdot \cos \alpha + [p\xi\xi] \sin^2 \alpha . \qquad (3)$$

The angle α in the case of which $F_{(\alpha)}$ reaches the minimum is to be sought for. Instead of introducing the double angle, function (3) should immediately

be differentiated and set equal to zero:

$$\frac{d\,[pee]}{d\alpha} = 0 = -\,2\,[p\eta\eta]\cos\alpha\cdot\sin\alpha - \\ -\,2\,[p\xi\eta](\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2\,[p\xi\xi]\sin\alpha\cdot\cos\alpha\,. \tag{4}$$

Removing $\cos^2\alpha$ from the expression within braces and then reducing the equation

$$\frac{d\,[pee]}{d\alpha} = 2\cos^2\alpha\left\{([p\xi\xi]-[p\eta\eta])\tan\alpha - [p\xi\eta](1-\tan^2\alpha)\right\} = \\ = \frac{2}{1+\tan^2\alpha}\left\{[p\xi\eta]\tan^2\alpha + ([p\xi\xi]-[p\eta\eta])\tan\alpha - [p\xi\eta]\right\} \tag{4a}$$

is arrived at. It should be mentioned, that it might sometimes be expedient to write and to compute the value $([p\xi\xi] - [p\eta\eta])$ in the form $[p(\xi^2 - \eta^2)]$, because in this case the difference between the squares of coordinates pertaining to an individual point has to be multiplied with the weight of the point in question only once. Introducing the notation $\tan\alpha = a$ equation (4) can also be written in the following form:

$$\frac{d\,[pee]}{d\alpha} = \frac{2}{1+a^2}\left\{[p\xi\eta]\,a^2 + ([p\xi\xi]-[p\eta\eta])\,a - [p\xi\eta]\right\} = 0\,. \tag{4b}$$

The value of a product equals zero if one of the factors equals zero and the other is not infinite. As for the zero value of the first factor, *i.e.*, for $a = \infty$ the value of the second factor is infinite and according to L'Hospital's rule[3] the product is $2\,[p\xi\eta]$, the latter can only equal zero, if $[p\xi\eta] = 0$. Now the zero value of the second factor is to be investigated, for which the value of the first factor cannot be ∞:

$$[p\xi\eta]\,a^2 + ([p\xi\xi]-[p\eta\eta])\,a - [p\xi\eta] = 0\,. \tag{5}$$

Herefrom:

$$\tan\alpha_{1,2} = a_{1,2} = \frac{-([p\xi\xi]-[p\eta\eta]) \pm \sqrt{([p\xi\xi]-[p\eta\eta])^2 + 4\,[p\xi\eta]^2}}{2\,[p\xi\eta]}\,. \tag{6}$$

If $[p\xi\eta] = 0$, then $a = \infty$, thus in this case the value of a complies with the value which is obtained for the zero value of the first factor. So, this

[3] Denoting the reciprocal value of the first factor by f_1 and the second factor by f_2, then for $a = \infty$ the derivatives of same are:

$$f_1' = \frac{2a}{2}\,,\quad f_1'' = 1\,;\quad f_2' = 2\,a\,[p\xi\eta] + [p\xi\xi] - [p\eta\eta]\,,\quad f_2'' = 2\,[p\xi\eta]\,;$$

and from here

$$\frac{f_2''}{f_1''} = 2\,[p\xi\eta]\,.$$

circumstance is not to be considered separately. Formula (6), although on the base of other deductions, repeatedly appears in literature (compare with [4; equ. (16)]), but without investigating the value for which the minimum arises. This problem is treated by FORRAI. However, in his formula the original coordinates appear, and his proof and result is also different from that to be given in the following.

To determine the value for which the minimum arises, the second differential quotient of function (4b), which has to be greater than zero, is to be constituted:

$$\frac{d^2[pee]}{da^2} = \frac{2}{1+a^2}\{2[p\xi\eta]\,a+([p\xi\xi]-]p\eta\eta])\} - \\ - \frac{4a}{(1+a^2)^2}\{[p\xi\xi]\,a^2+([p\xi\xi]-[p\eta\eta])\,a-[p\xi\eta]\}. \tag{7}$$

As according to equation (5) the expression within the last braces on the right-hand side of equation (7) at the place $d[pee]/da = 0$ is zero, while the coefficients 2 and $(1 + a^2)$ of the expression within the first braces are always positive, therefore, it would be sufficient to investigate the existence of inequality

$$\{2[p\xi\eta[\,a+([p\xi\xi[-[p\eta\eta])\} > 0$$

as a condition of the minimum. Substituting equation (6) into same, this condition is given by the relation

$$2[p\xi\eta]\,\frac{-([p\xi\xi]-[p\eta\eta]) \pm \sqrt{([p\xi\xi]-[p\eta\eta])^2+4[p\xi\eta]^2}}{2[p\xi\eta]} + \\ +([p\xi\xi]-[p\eta\eta]) = \sqrt{([p\xi\xi]-[p\eta\eta])^2+4[p\xi\eta]^2} > 0\,. \tag{8}$$

Thus, when determining the place of the minimum, in equation (6), serving the calculation of $\tan\alpha = a$, *always the positive value of the expression computed from the square root should be taken into consideration.* The negative value of the square root of this expression determines the straight line giving the maximum of the quadratic sum of differences.

In respect to the fact that the wanted straight line or lines must run through the centre of gravity, and in addition to the direction at least one point of same must be known, the set problem is solved by expressing the coordinates of the centre of gravity with the aid of the original coordinates of the given points:

$$x_c = \frac{[px]}{[p]}, \quad y_c = \frac{[py]}{[p]}\,. \tag{9}$$

The here deduced rule is simpler than FORRAI's, but FORRAI merits appreciation

for his initiation for eliminating the ambiguity arising in the computation of the onefold angle. The course of development conduces to newer results sooner or later everywhere.

*

No doubt, the determination of the direction of the straight line by using equation (1) which gives the double bearing is even so simpler than the use of equ. (6). As VERÖ's rule here also ensures the unambiguity of the straight line, the computation according to equation (1) is with the aforementioned completion more expedient, if merely the direction of the best fitting straight line is sought for, and the bearing of same does not fall close to 45° or 135°. In this case it is better to compute cot 2α with the reciprocal value of Equ. (1).

However, if in addition the weighted square sums of differences is also required, as *e.g.*, when determining the station ellipse, one can proceed in various ways.

1. Again using equation (1) and VERÖ's rule, 2α and herefrom the angles α_1 by minimum and α_2 by maximum are to be computed. Starting out from equation (3) with the aid of the sin and cos of these angles half the major axis and half the minor axis of the station ellipse can be computed from formulae given hereunder:

$$A = \sqrt{\frac{[pee]_{\max}}{[p]}} = \sqrt{\frac{[p\xi\xi]\sin^2\alpha_1 - 2[p\xi\eta]\sin\alpha_1\cos\alpha_1 + [p\eta\eta]\cos^2\alpha_1}{[p]}};$$
$$B = \sqrt{\frac{[pee]_{\min}}{[p]}} = \sqrt{\frac{[p\xi\xi]\sin^2\alpha_2 - 2[p\xi\eta]\sin\alpha_2\cos\alpha_2 + [p\eta\eta]\cos^2\alpha_2}{[p]}}. \tag{10}$$

This calculation and the previous search for tan 2α requires the repeated use of trigonometric tables. Owing to interpolations this retards the computation, particularly in the case of *accurate* calculations. However, it is true that $\cos\alpha_2 = -\sin\alpha_1$ and $\sin\alpha_2 = \cos\alpha_1$, therefore the second equation can be computed more quickly. Thus, where in the calculation of the major and minor axes a relatively lesser accuracy is sufficient, as *e.g.*, in the case of the telluric station ellipse, the above described method might be suitable. In the calculation of the station ellipse especially for this very reason, as in the calculation of the so-called relative ellipse the values $\cos^2\alpha$ and $\sin^2\alpha$ are otherwise required, too (compare with [2; p. 267, equ. (1)]).

For points having the same weight the above equations take the form:

$$A = \sqrt{\frac{[\xi\xi]\sin^2\alpha_1 - 2[\xi\eta]\sin\alpha_1\cos\alpha_1 + [\eta\eta]\cos^2\alpha_1}{n}};$$
$$B = \sqrt{\frac{[\xi\xi]\sin^2\alpha_2 - 2[\xi\eta]\sin\alpha_2\cdot\cos\alpha_2 + [\eta\eta]\cos^2\alpha_2}{n}}. \tag{10a}$$

2. Computing the angles α_1 and α_2, the tangents of same respectively according to equation (6), furthermore, removing $\cos^2 \alpha$ from equation (10) and replacing it by $1/(1 + \tan^2 \alpha) = 1/(1 + a^2)$, then equations (10) can be written in the following form:

$$A = \sqrt{\frac{([p\xi\xi]\, a_1^2 - 2\,[p\xi\eta]\, a_1 + [p\eta\eta])}{[p](1 + a_1^2)}}\,,$$
$$B = \sqrt{\frac{([p\xi\xi]\, a_2^2 - 2\,[p\xi\eta]\, a_2 + [p\eta\eta])}{[p](1 + a_2^2)}}\,. \tag{11}$$

In this case the determination of the half-axes A and B does not require the use of trigonometric tables, and all the values figuring in the computation of equ. (11) have already appeared in the calculation of (6). Therefore, this method of calculation might be used quite well for computations to be made by using a computor, thus for obtaining accurate results.

For points having the same weight equations (11) can be written as follows:

$$A = \sqrt{\frac{([\xi\xi]\, a_1^2 - 2\,[\xi\eta]\, a_1 + [\eta\eta])}{n\,(1 + a_1^2)}}\,,$$
$$B = \sqrt{\frac{[\xi\xi]\, a_2^2 - 2\,[\xi\eta]\, a_2 + [\eta\eta])}{n\,(1 + a_2^2)}}\,. \tag{11a}$$

In the latter case equation (6) also becomes simpler:

$$\tan \alpha_{1,2} = a_{1,2} = \frac{-([\xi\xi] - [\eta\eta]) \pm \sqrt{([\xi\xi] - [\eta\eta])^2 + 4\,[\xi\eta]^2}}{2\,[\xi\eta]}\,. \tag{6a}$$

A drawback of this calculation is that for $\alpha = 90°$ or $270°$ values a_1 and a_2 becomes infinite, this making the calculation in the vicinity of the aforementioned angles inaccurate. On the other hand an advantage is given for controlling by the fact that for a positive value of

$$\sqrt{([p\xi\xi] - [p\eta\eta])^2 + 4\,[\xi\eta]^2}$$

the half minor axis, while for a negative value of the above expression the half major axis is obtained. The method is in the vicinity of $\alpha = 45°$ and at $135°$ also better than equation (1), but not better, as its reciprocal value.

3. It should be mentioned here that VERŐ as an additional development to his equation (3), to be found in [5; p. 260], simplified the formulae for the determination of A and B by eliminating $\tan 2\,\alpha$. These formulae are not

published yet, their forms extended for different weights are given hereunder:

$$A = \sqrt{\frac{[p\xi\xi]+[p\eta\eta] + \sqrt{([p\xi\xi]-[p\eta\eta])^2 + 4[p\xi\eta]^2}}{2\,[p]}},$$
$$B = \sqrt{\frac{[p\xi\xi]+[p\eta\eta] - \sqrt{([p\xi\xi]-[p\eta\eta])^2 + 4\,[p\xi\eta]^2}}{2\,[p]}}. \tag{12}$$

For measurements having equal weights formulae (12) take the following form:

$$\left.\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{[\xi\xi] + [\eta\eta] \pm \sqrt{([\xi\xi]-[\eta\eta])^2 + 4\,[\xi\eta]^2}}{2\,n}}. \tag{12a}$$

For the deduction of this formula equations (10) can expediently be used, if therein $[p\eta\eta]^2 \cos^2 \alpha$ is replaced by $[p\eta\eta]^2(1-\sin^2 \alpha)$ and $\sin^2 \alpha$ by $(1-\cos 2\,\alpha)/2$; then removing $\cos 2\,\alpha$ from the formula, in the expression within braces $\tan 2\,\alpha$ is to be expressed according to equation (1), while $\cos 2\,\alpha$ standing outside the braces is to be expressed by $1/\sqrt{1+\tan^2 2\alpha}$, finally $\tan^2 2\,\alpha$ to be found in the denominator of the latter fraction is also to be expressed with the aid of equation (1). These formulae are suitable for the calculation of the station ellipse, as owing to the elimination of $\tan 2\,\alpha$ they do not become inaccurate even for $2\,\alpha = 90°$ or $270°$.

2. Equations (12) can also be written in another form. As

$$[p\xi\xi]+[p\eta\eta] = 2\,[p\eta\eta]+([p\xi\xi] - [p\eta\eta])$$

therefore substituting the above expression into equ. (12) and removing $[p\xi\xi] - [p\eta\eta]$ herefrom, the following formulae are arrived at:

$$\left.\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{2\,[p\eta\eta] + ([p\xi\xi] - [p\eta\eta])\left\{1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{2\,[p\xi\eta])}{[p\xi\xi] - [p\eta\eta]}\right)^2}\right\}}{2\,[p]}}.$$

Substituting equ. (1) and then $1 + \tan^2 2\,\alpha = 1/\cos^2 2\,\alpha$ into the above equation, this will take the following form:

$$\left.\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{2\,[p\eta\eta] + ([p\xi\xi] - [p\eta\eta])\left(1 \pm \frac{1}{\cos 2\,\alpha}\right)}{2\,[p]}}. \tag{13}$$

From the two values the greater one gives the half major axis and the smaller one the half minor axis[4].

[4] If $[p\xi\xi] > [p\eta\eta]$, then according to VERŐ's rule $\cos 2\,\alpha > 0$, thus the minor axis is obtained for $-1/\cos 2\,\alpha$, while the major axis for $+1/\cos 2\,\alpha$. In the case of $[p\xi\xi] < [p\eta\eta]$ $\cos 2\,\alpha$ will be negative, but as the product $([p\xi\xi] - [p\eta\eta])(1/\cos 2\,\alpha)$ is henceforward positive, similarly the minimum arises for $-1/\cos 2\,\alpha$, and the maximum for $+1/\cos 2\,\alpha$.

For points having equal weights the above equation turns into the form

$$\left.\begin{matrix} A = \\ B = \end{matrix}\right\} \sqrt{\frac{2\,[\eta\eta] + ([\xi\xi] - [\eta\eta])\left(1 \pm \frac{1}{\cos 2\,\alpha}\right)}{2n}}\,. \tag{13a}$$

This is a very simple formula for the calculation of the station ellipse, although it is inconvenient for values of cos 2 α being near to zero. In this latter case the following method might be used.

5. For computations to be performed in using a computor, formulae (12) can still be transformed as given hereunder. This is particularly expedient, if one also requires the knowledge of the area of the ellipse, as in the case of telluric currents. As

$$([p\xi\xi] - [p\eta\eta])^2 = ([p\xi\xi] + [p\eta\eta])^2 - 4\,[p\xi\xi][p\eta\eta]\,,$$

therefore, replacing the expression on the right-hand side into equ. (12) and removing $[p\xi\xi] + [p\eta\eta]$, equ. (12) can be written in the form:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{[p\xi\xi] + [p\eta\eta]}{2\,[p]}\left\{1 + \sqrt{1 - \frac{4([p\xi\xi][p\eta\eta] - [p\xi\eta]^2)}{([p\xi\xi] + [p\eta\eta])^2}}\right\}}, \\ B &= \sqrt{\frac{[p\xi\xi] + [p\eta\eta]}{2\,[p]}\left\{1 - \sqrt{1 - \frac{4([p\xi\xi][p\eta\eta] - [p\xi\eta]^2)}{([p\xi\xi] + [p\eta\eta])^2}}\right\}}. \end{aligned} \tag{14}$$

For measurements having the same weights the area of the ellipse can be expressed *viz.* by the equation (compare with [5; p. 260, equ. (5)]:

$$T = \frac{\pi}{n}\sqrt{([\xi\xi][\eta\eta] - [\xi\eta]^2)}\,.$$

Formulae (14) offer still additional advantages, namely, the numbers figuring in computations are relatively small; the remaining values had already been computed when determining tan 2 α according to equ. (1); finally, as the formula in question is independent of 2 α, it gives good values everywhere.

The case referring to equally weighted measurements is obtained from the above formulae by the substitutions $p = 1$ and $[p] = n$.

6. The uncertainty taking place in equation (13), of $2\,\alpha = 90°$ and 270°, can also be eliminated in another way. Replacing therein $[p\xi\xi] - [p\eta\eta]$ according to equation (1) by $2\,[p\xi\eta]/\tan 2\,\alpha$, equation (13) turns into the form

$$\left.\begin{matrix} A = \\ B = \end{matrix}\right\} \sqrt{\frac{[p\eta\eta] + [p\xi\eta]\left(\frac{1}{\tan 2\,\alpha} \pm \frac{1}{\sin 2\,\alpha}\right)}{[p]}}\,, \tag{15}$$

or in the case of measurements having the same weight

$$\begin{matrix} A = \\ B = \end{matrix} \sqrt{\frac{[\eta\eta] + [\xi\eta]\left(\frac{1}{\tan 2\alpha} \pm \frac{1}{\sin 2\alpha}\right)}{n}} . \tag{15a}$$

For $2\alpha \underset{\to 270^\circ}{\overset{\to 90^\circ}{}}$ $1/\tan 2\alpha$ converges towards zero and $1/\sin 2\alpha$ towards one. Thus, if equations (13) or (13a) cannot be used, then in many cases equations

$$\begin{matrix} A = \\ B = \end{matrix} \sqrt{\frac{[p\eta\eta] \pm [p\xi\eta]}{[p]}} \tag{15b}$$

respectively

$$\begin{matrix} A = \\ B = \end{matrix} \sqrt{\frac{[\eta\eta] \pm [\xi\eta]}{n}} \tag{15c}$$

might already be appropriate, too.

The here deduced formulae are particularly suitable, if the area of the ellipse is not to be determined.

7. The half major and minor axes can still be computed in another way.

The right side expression within parantheses under the root-sign figuring in equations (15) and (15a) can also be transformed as follows:

$$\frac{1}{\tan 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \cot\alpha = -\tan(90^\circ + \alpha),$$

$$\frac{1}{\tan 2\alpha} - \frac{1}{\sin 2\alpha} = -\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -\tan\alpha.$$

Substituting the above values into equations (15) and (15a) in such a way that α should alternately denote the angle pertaining to the minor or major axis, then the aforementioned equations will take the form given hereunder:

$$\begin{matrix} A = \\ B = \end{matrix} \sqrt{\frac{[p\eta\eta] - [p\xi\eta]\tan\alpha}{[p]}} \tag{16}$$

or for points having equal weights

$$\begin{matrix} A = \\ B = \end{matrix} \sqrt{\frac{[\eta\eta] - [\xi\eta]\tan\alpha}{n}} . \tag{16a}$$

Of course, similar equations can also be set up with the aid of $[p\xi\xi]$ or $[\xi\xi]$.

In these cases A and B might merely be expressed by the tangent of one angle α. Thus, if α is the bearing of the major axis, then from formulae (16)

and (16a) the half minor axis, while from the following formulae (16b) and (16c) the half major axis is obtained, namely for points the weights of which are different

$$A = \sqrt{\frac{[p\xi\xi] + [p\xi\eta] \tan \alpha}{[p]}}, \tag{16b}$$

and for points having equal weights

$$A = \sqrt{\frac{[\xi\xi] + [\xi\eta] \tan \alpha}{n}}. \tag{16c}$$

It can easily be understood that by substituting $\tan \alpha$ according to (6) or (6a) into equations (16) or (16a), VERÖ's formulae given under (12) and (12a) are obtained.

If $\tan \alpha$ figuring in formulae (16) and (16a) is to be determined, it might often be more expedient first to determine the angle 2α from $\tan 2\alpha$ resulting from formula (1) with the aid of trigonometric tables, and then to search for in these tables the value of the tangent belonging to the half of the previously determined angle 2α.

The above formulae are not good in the vicinity of $\alpha = 90°$ and $270°$. In this case the use of formulae (13) and (13a) is more expedient.

As can be seen, for different calculations referring to this subject, different formulae are available. In a given case the most adequate one is to be chosen.

However, there is no obstacle either to compute in all aforementioned cases with original coordinates. If x and y denote the original coordinates, then according to STEINER's theorem [2; p. 199, equ. (23)]:

$$[p\xi\xi] = [pxx] - [p]\, x_C^2, \quad [p\eta\eta] = [pyy] - [p]\, y_C^2,$$
$$[p\xi\eta] = [pxy] - [p]\, x_C y_C.$$

Finally, it should be mentioned that in the case fairly scattered points, *e.g.*, when determining the station ellipse, it is expedient to perform one of the previously given calculations even then, if the adjustment is to be performed more accurately by adding corrections to the coordinates. Namely, in the latter adjustment a good approximate value of α is required, which might be computed, *e.g.*, according to (1) with an adequate accuracy.

According to Fig. 1a and 1b the condition equations given hereunder are valid:

$$\cot \alpha = z = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} = \ldots = \frac{x_n - x_1}{y_n - y_1}. \tag{17}$$

Introducing for z a fairly approximate value z_0, then

$$z = z_0 + \delta z .$$

Now adding to the coordinates residuals

$$v_{x,1} , \; v_{x,2} , \; \ldots \; v_{y,1} , \; v_{y,2}$$

then after reduction equation (17) can be written as follows (see [6, pp. 252—253]):

$$\begin{aligned} z_0 v_{y,2} - v_{x,2} &= z_0 v_{y,1} - v_{x,1} - (y_2 - y_1)\,\delta z - z_0 (y_2 - y_1) + (x_2 - x_1) , \\ z_0 v_{y,3} - v_{x,3} &= z_0 y_{y,1} - v_{x,1} - (y_3 - y_1)\,\delta z - z_0 (y_3 - y_1) + (x_3 - x_1) , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{18}$$

Introducing the following fictitious residuals λ:

Residuals λ_i:	Reciprocal values of the weight of λ_i:
$z_0 v_{y,1} - v_{x,1} = \lambda_1 ,$	$\dfrac{1}{p_{\lambda,1}} = \dfrac{z_0^2}{p_{y.1}} + \dfrac{1}{p_{x,1}} ,$
$z_0 v_{y.2} - v_{x,2} = \lambda_2 ,$	$\dfrac{1}{p_{\lambda.2}} = \dfrac{z_0^2}{p_{y.2}} + \dfrac{1}{p_{x,2}} ,$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	
$z_0 v_{y,n} - v_{x,n} = \lambda_n ;$	$\dfrac{1}{p_{\lambda,n}} = \dfrac{z_0^2}{p_{y,n}} + \dfrac{1}{p_{x,n}}$

(19)

residual equations given hereunder can be set up:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda_1 - (y_2 - y_1)\,\delta z - \{z_0 (y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)\}, \text{ its weight is } p_{\lambda,2} \\ \lambda_3 &= \lambda_1 - (y_3 - y_1)\,\delta z - \{z_0 (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)\}, \text{ its weight is } p_{\lambda,3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_n &= \lambda_1 - (y_n - y_1)\,\delta z - \{z_0 (y_n - y_1) - (x_n - x_1)\} \text{ its weight is } p_{\lambda,n} \\ \lambda_1 &= \lambda_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{its weight is } p_{\lambda,1} . \end{aligned} \tag{20}$$

From the above equations the two unknown δz and λ_1 can be computed, according to the method of indirect observations. Here, λ_1 is at the same time an unknown which has also to be determined. Herefrom residuals $v_{x,1}$ and $v_{y,1}$ belonging to the first point (compare with [6; pp. 245—246]) can be computed:

$$v_{x,1} = - p_{\lambda,1} \cdot \frac{1}{p_{x,1}} \lambda_1 , \; v_{y,1} = - p_{\lambda,1} \frac{z_0}{p_{y,1}} \lambda_1 . \tag{21}$$

The most reliable coordinates of the first point are obtained in this way. On the other hand, the most reliable value of one point and of the direction of the adjusting straight line, or the direction of the major axis, respectively, determine the latter in the plane. If the adjustment refers to measuring errors, there is reason for computing of the mean errors, and these could immediately be computed with the fictitious corrections by using the expression $[p\lambda\lambda]$.

REFERENCES

1. FORRAI, S.: Simple Determination of the Direct Bearing-Tangent of an Adjusting Straight Line Corresponding to the Principle $\Sigma pe^2 = \text{min.}$ *Acta Techn. Hung.* In print.
2. MILASOVSZKY, B.: The Theoretical Problems of Level Drift Location. *Acta Techn. Hung.* XXXVIII (1962), 189—219.
3. ZAMBÓ, J.: Bányászati telepítések analitikája (Analytics of the Siting in Mining Works). Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
4. MILASOVSZKY, B.: A kiegyenlítő egyenes szabatos meghatározása (The Exact Determination of the Adjusting Straight Line). Doktori értekezés, Budapest, 1943.
5. VERŐ, J.: Die Bestimmung der tellurischen Stationellipsen. *Gerlands Beiträge zur Geophysik*, 1960. 257—268.
6. Kiegyenlítő számítás (Adjustment of Errors). Sopron, 1960.
7. GROSSMANN, W.: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. II. ed., 1961.

ÜBER DIE BESTIMMUNG DER AUSGLEICHSGERADEN ZWISCHEN MEHREREN PUNKTEN BZW. DER GROSSEN UND DER KLEINEN ACHSEN DER TELLURISCHEN STATIONSELLIPSE

A. TÁRCZY-HORNOCH

ZUSAMMENFASSUNG

Die Berechnung der Ausgleichsgeraden zwischen mehreren Punkten ist ein Problem der Geodäsie und des Bergbaues. Mathematisch gleicht es der Bestimmung der Richtung der großen Achse der tellurischen Stationsellipse in der Geophysik bzw. der der großen Achse der Trägheitsellipse in der Mechanik. Bei den letzteren ist aber im Zusatze zur Richtung der großen Achse auch noch die Kenntnis des zahlenmäßigen Wertes der großen und der kleinen Achse notwendig.

Im vorliegenden Aufsatze werden die in den erwähnten Gebieten der Wissenschaft gegebenen Lösungen miteinander verglichen und besonders bezüglich der großen und der kleinen Achse durch weitere, auch praktisch gut verwendbare Lösungen ergänzt. Der Aufsatz erstreckt sich auf die Untersuchung der eindeutigen Lage der großen und der kleinen Achse und ergänzt die bisherigen Untersuchungen auch auf diesem Gebiete.

DE LA DÉTERMINATION DE LA DROITE DE COMPENSATION ENTRE PLUSIEURS POINTS, RESP. DES DEUX AXES DE L'ELLIPSE CARACTÉRISANT LA STATION D'OBSERVATION TELLURIQUE

A. TÁRCZY-HORNOCH

RÉSUMÉ

Le calcul de la droite de compensation entre plusieurs points est un problème intéressant la géodésie et l'industrie minière. Mathématiquement, il se rapproche, en géodésie, de la détermination de la direction du grand axe de l'ellipse caractérisant la station d'observation tellurique, et en mécanique de celle de la direction du grand axe de l'ellipse d'inertie. Dans ces cas cependant il faut connaître, en plus de la direction du grand axe, la valeur numérique du grand et du petit axe de l'ellipse.

L'étude compare les solutions données dans les spécialités énumérées, et les complète par des solutions applicables tout particulièrement dans le calcul du grand et du petit axe et fort utiles dans la pratique. L'étude s'étend aussi à l'examen de la position univoque du grand et du petit axe, et complète encore sur ce point les résultats de recherches connus.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ УРАВНИВАЮЩЕЙ ПРЯМОЙ МЕЖДУ НЕСКОЛЬКИМИ ПУНКТАМИ, Т. Е. ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ БОЛЬШОЙ И МАЛОЙ ОСЕЙ ЭЛЛИПСА ТЕЛЛУРИЧЕСКИХ СТАНЦИЙ

А. ТАРЦИ-ХОРНОХ

РЕЗЮМЕ

Вычисление уравнивающей прямой между несколькими пунктами представляет собой проблему геодезии и горного дела. Математически это подобно определению направления большой оси теллурического эллипса в геофизике или большой оси эллипса инерции в механике. Однако в указанных случаях необходимо знать не только направление большой оси, но и численные значения большой и малой осей.

В настоящей работе сопоставляются решения, применяющиеся в перечисленных отраслях науки и они дополняются дальнейшими, удобно применяемыми на практике решениями, касающимися главным образом вычисления большой и малой осей. Рассматривается также и однозначное определение положения большой и малой осей и проведенные до сих пор исследования дополняются и в этом отношении.

DIE AUSGLEICHUNG DER PUNKTEINSCHALTUNG DURCH LÄNGENMESSUNGEN MIT DER METHODE DER AUSGLEICHUNG DER BEDINGTEN BEOBACHTUNGEN

FRAU M. VERŐ-HETÉNYI

GEODÄTISCHES FORSCHUNGSLABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
SOPRON

[Eingegangen am 6. Mai 1963]

Zur Ausgleichung der Punkteinschaltung mit gleichen Gewichten wurde eine einfache Methode von A. TÁRCZY-HORNOCH mitgeteilt, bei der der THIELE'sche Satz angewendet wurde: durch die Einführung eines entsprechenden Hilfskoordinatensystems werden die Verbesserungen der beiden Koordinaten des Neupunktes voneinander unabhängig. Diese Studie weist darauf hin, daß eine ähnliche Berechnung auch bei verschiedenen Gewichten der Längen möglich ist. Die Untersuchung wird durch ein Zahlenbeispiel ergänzt.

Die elektronische und elektrooptische Entfernungsmessung gewinnt immer mehr an Bedeutung. Gleichzeitig werden die Längennetze auch immer häufiger. Mit der Ausgleichung solcher Netze haben sich schon viele Artikel beschäftigt. Unter anderen hatte der bulgarische Forscher ZONKOW in [1] ein Ausgleichsverfahren zur Punkteinschaltung durch Längenmessungen ausgearbeitet.

Es wird aber von TÁRCZY-HORNOCH in [2] ein wesentlich einfacheres Ausgleichsverfahren gezeigt. Das Wesentlichste der Methode ist die Einführung eines entsprechend ausgewählten Koordinatensystems. Dadurch werden die zwei Koordinaten des zu bestimmenden Punktes sog. freie Funktionen. Solche freie Funktionen können nach THIELE als voneinander unabhängige Werte ausgeglichen werden. (Siehe ausführlicher in den Erörterungen [2] und [3]). Die weitere Ausgleichung wird gemäß der Ausgleichung der bedingten Beobachtungen vollzogen.

Diese Methode, die sich ursprünglich auf Beobachtungen mit gleichen Gewichten bezieht, kann auch auf Beobachtungen mit verschiedenen Gewichten erweitert werden, die aber ein anders aufgenommenes Hilfskoordinatensystem erfordern. Letzteres soll erörtert werden.

Das Ausgleichsnetz sei nach Abb. 1.

Unsere Verbesserungsgleichungen sind nach der Ausgleichung der vermittelnden Beobachtungen die folgenden:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1\,\delta x + b_1\,\delta y\,, \\ v_2 &= a_2\,\delta x + b_2\,\delta y\,, \\ v_3 &= a_3\,\delta x + b_3\,\delta y + l_3\,, \\ v_4 &= a_4\,\delta x + b_4\,\delta y + l_4\,, \\ v_5 &= a_5\,\delta x + b_5\,\delta y + l_5\,. \end{aligned} \tag{1}$$

In den ersten zwei Gleichungen sind keine Widersprüche, da die Näherungskoordinaten des gesuchten Punktes P aus diesen bestimmt wurden. Aus diesen Gleichungen werden die Unbekannten δx und δy ausgedrückt, die mit dem Zuschlag der zwei Koordinaten des gesuchten Punktes übereinstimmen. Laut [2] gelangen wir so zu den folgenden Gleichungen:

$$\delta x = v_x = \frac{b_2 v_1 - b_1 v_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad \delta y = v_y = \frac{a_1 v_2 - a_2 v_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \tag{2}$$

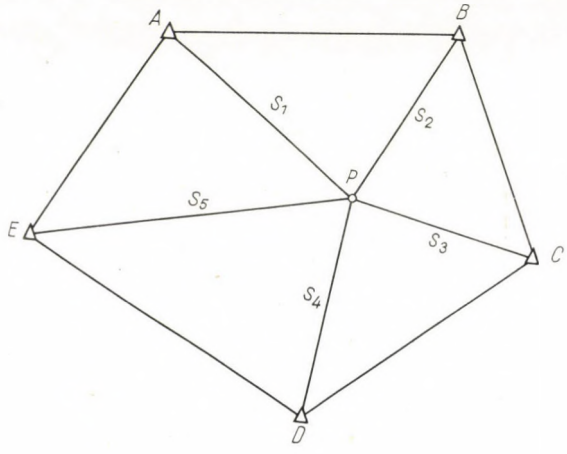

Abb. 1

Wenn der THIELEsche Satz $[ab] = 0$ gültig ist, so sind δx und δy voneinander unabhängig, was in unserem Falle und bei verschiedenen Gewichten folgendermaßen aufgeschrieben werden kann: (Die mit Strichen versehenen Werte sind die auf das Hilfskoordinatensystem bezogenen Werte).

$$p_1 a_1' b_1' + p_2 a_2' b_2' = 0. \tag{3}$$

In dieser Formel ist nach Abb. 3:

$$a_1' = \cos \alpha_1', \qquad a_2' = \cos \alpha_2',$$
$$b_1' = \sin \alpha_1', \qquad b_2' = \sin \alpha_2',$$

α_1' und α_2' sind im Hilfskoordinatensystem die Richtungswinkel der Richtungen (AP_0) und (BP_0), p_1 und p_2 sind die Gewichte der entsprechenden Längen. Der $\alpha_2 - \alpha_1 = \gamma = \alpha_2' - \alpha_1'$ Winkel ist bekannt, folglich kann Gl. (3) auch in dieser Form aufgeschrieben werden:

$$p_1 \cos \alpha_1' \cdot \sin \alpha_1' + p_2 \cos \alpha_2' \cdot \sin \alpha_2' = 0. \tag{3a}$$

Mit der Anwendung der Funktionen des doppelten Winkels und Einführung des Winkels γ gestaltet sich die Gleichung:

$$p_1 \sin 2\,(\alpha_2' - \gamma) - p_2 \sin 2\,\alpha_2' = 0\,. \tag{3b}$$

Aus dieser Gleichung kann man den mit der Richtung (P_0B) eingeschlossenen Winkel α_2' des Hilfskoordinatensystems berechnen:

$$\tan 2\,\alpha_2' = \frac{p_1 \sin 2\,\gamma}{p_2 + p_1 \cos 2\,\gamma}\,. \tag{4}$$

Mit α_2' wurde das Hilfskoordinatensystem, in dem $v_{x'}$ und $v_{y'}$ voneinander unabhängig behandelbare Werte sind, bestimmt. Vereinbarungsgemäß soll die Achse x' innerhalb des Bereiches des Winkels γ laufen.

Das Gewicht von $v_{x'}$ und $v_{y'}$ wird im Hilfskoordinatensystem aus der Gleichung (2) abgeleitet:

$$\mu_{x'}^2 = \frac{\mu_0^2}{p_{x'}} = \frac{b_2'^2}{(a_1' b_2' - a_2' b_1')^2} \cdot \frac{\mu_0^2}{p_1} + \frac{b_1'^2}{(a_1' b_2' - a_2' b_1')^2} \cdot \frac{\mu_0^2}{p_2}. \tag{5}$$

Die Formel ist vereinfachbar, wenn in Betracht gezogen wird, daß $a_1' b_2' - a_2' b_1' = \sin \gamma$, mit μ_0^2 reduziert und $p_{x'}$ ausgedrückt, die Gleichung sich folgendermaßen gestaltet:

$$p_{x'} = p_{v_{x'}} = \frac{p_1 p_2 \sin^2 \gamma}{p_2 b_2'^2 + p_1 b_1'^2}\,. \tag{6}$$

Und in analoger Weise:

$$p_{y'} = p_{v_{y'}} = \frac{p_1 p_2 \sin^2 \gamma}{p_2 a_2'^2 + p_1 a_1'^2}\,. \tag{6a}$$

Unsere weitere Berechnungen können mit deren Anwendung, gemäß der Ausgleichung der bedingten Beobachtungen vollzogen werden. Unsere Bedingungsgleichungen werden die folgenden:

$$\begin{aligned} a_3' v_{x'} + b_3' v_{y'} - v_3 + l_3 &= 0, \\ a_4' v_{x'} + b_4' v_{y'} - v_4 + l_4 &= 0, \\ a_5' v_{x'} + b_5' v_{y'} - v_5 + l_5 &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

wo, falls φ den mit der Formel

$$(BP_0) - \alpha_2' = \varphi \tag{8}$$

gegebenen Winkel zwischen dem Hilfskoordinatensystem und dem Haupt-

koordinatensystem bedeutet, die Koeffizienten die folgenden sind:

$$\begin{aligned} a'_3 &= \cos \alpha'_3 = \cos (\alpha_3 - \varphi)\,, \quad b'_3 = \sin \alpha'_3 = \sin (\alpha_3 - \varphi), \\ a'_4 &= \cos \alpha'_4 = \cos (\alpha_4 - \varphi)\,, \quad b'_4 = \sin \alpha'_4 = \sin (\alpha_4 - \varphi), \\ a'_5 &= \cos \alpha'_5 = \cos (\alpha_5 - \varphi)\,, \quad b'_5 = \sin \alpha'_5 = \sin (\alpha_5 - \varphi). \end{aligned} \tag{7a}$$

Die Ausgleichung kann mit Hilfe der bestimmten Werte $p_{v_{x'}}$ und $p_{v_{y'}}$ vollführt werden. Die berechneten $v_{x'}$- und $v_{y'}$- Werte werden aus dem Hilfskoordinatensystem in das endgültige Koordinatensystem zurücktransformiert ([2]; Gleichungen (6)).

Das ZONKOWsche Rechenbeispiel gab Möglichkeit zur Ausgleichung der bedingten Beobachtungen mit gleichem und verschiedenem Gewicht, da in seinem Beispiel die zu den Punkten B und D gehörenden Gewichte der Entfernungen gleich waren.

Die Daten von ZONKOW:

Triangulationspunkte	Koordinaten		s_i	Gemessene Längen (m)	Gewichte p_i
	y	x			
A	+1061,99	+548,30	1	331,60	5,41
B	+1420,30	+570,58	2	272,00	6,93
C	+1552,03	+297,72	3	247,10	5,16
D	+1276,00	+ 56,29	4	269,50	6,93
E	+ 896,99	+246,43	5	416,70	2,60

(Die Berechnungen wurden im Zentesimalsystem vollführt. Vergleichshalber berechnen wir die Werte auch in diesem System.)

I. Ausgleichung von den Punkten B und D ausgehend, falls die Gewichte gleich sind. (Abb. 2)

Die Näherungskoordinaten des Punktes P aus den Punkten B und D berechnet sind die folgenden:

$$x_0 = +\ 324{,}225\ \text{m}\,,$$
$$y_0 = +1305{,}004\ \text{m}\,.$$

Richtungswinkel:

$$\alpha_1 = (\text{AP}_0) = 147{,}4201^{\text{g}}\,,$$
$$\alpha_2 = (\text{BP}_0) = 227{,}8666^{\text{g}}\,,$$
$$\alpha_3 = (\text{CP}_0) = 306{,}8047^{\text{g}}\,,$$
$$\alpha_4 = (\text{DP}_0) = \quad 6{,}8646^{\text{g}}\,,$$
$$\alpha_5 = (\text{EP}_0) = \quad 88{,}0057^{\text{g}}\,.$$

Aus diesen berechnet ist $\gamma = \gamma_2 + \gamma_3$, das heißt $(P_0D) - (P_0B) = 178{,}9980^g$. Die Berechnung der Widersprüche:

$$l_1 = \overline{AP}_0 - s_1 = 330{,}553 - 331{,}600 = -1{,}047 \text{ m},$$
$$l_3 = \overline{CP}_0 - s_3 = 248{,}444 - 247{,}100 = +1{,}344 \text{ m},$$
$$l_5 = \overline{EP}_0 - s_5 = 415{,}364 - 416{,}700 = -1{,}336 \text{ m},$$

l_2 und $l_4 = 0$, da die Näherungskoordinaten des Punktes P aus den Punkten B und D bestimmt worden sind. Den Winkel zwischen den zwei Koordinatensystemen berechnen wir folgendermaßen:

$$200^g - (P_0D) + \gamma/_2 = \varphi = 82{,}6344^g.$$

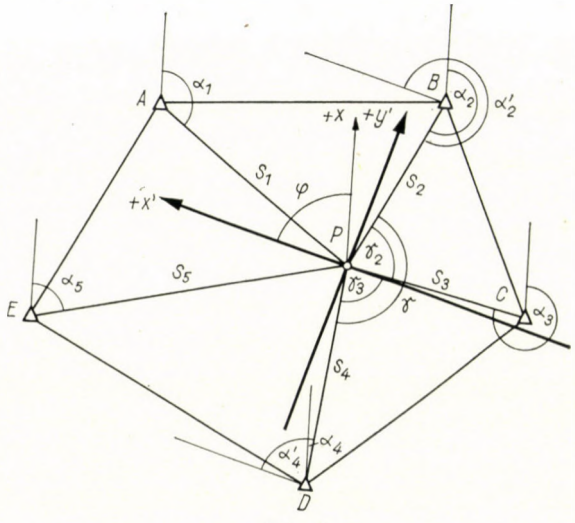

Abb. 2

Nun können schon die Koeffizienten a'_1, a'_3, a'_5, b'_1, b'_3, und b'_5 der Bedingungsgleichungen in dem Hilfskoordinatensystem berechnet werden:

$$a'_1 = \cos \alpha'_1 = \cos(\alpha_1 + \varphi) = -0{,}890617,$$
$$a'_3 = \cos \alpha'_3 = \cos(\alpha_3 + \varphi) = +0{,}986271,$$
$$a'_5 = \cos \alpha'_5 = \cos(\alpha_5 + \varphi) = -0{,}895526,$$

$$b'_1 = \sin \alpha'_1 = \sin(\alpha_1 + \varphi) = -0{,}454753,$$
$$b'_3 = \sin \alpha'_3 = \sin(\alpha_3 + \varphi) = -0{,}165130,$$
$$b'_5 = \sin \alpha'_5 = \sin(\alpha_5 + \varphi) = +0{,}445008.$$

Weiter die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
&-0{,}890617\, v_{x'} - 0{,}454753\, v_{y'} - v_1 - 1{,}047 = 0\,,\\
&+0{,}986271\, v_{x'} - 0{,}165130\, v_{y'} - v_3 + 1{,}344 = 0\,.\\
&-0{,}895526\, v_{x'} + 0{,}445008\, v_{y'} - v_5 - 1{,}336 = 0\,.
\end{aligned}$$

Die Gewichte der Koordinatenverbesserungen berechnen wir gemäß [2], Gln. (4a):

$$a' = a'_2 = a'_4 = 0{,}164202\,, \quad b' = -b'_2 = b'_4 = 0{,}986425\,,$$

$$p = p_2 = p_4 = 6{,}93\,,$$

$$p_{v_{x'}} = 2a' \cdot p = 0{,}373, \qquad p_{v_{y'}} = 2b' \cdot p = 13{,}486\,.$$

Durch Anwendung dieser Werte und der gegebenen Längengewichte können die Koeffizienten der Normalgleichungen bestimmt und die Normalgleichungen aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
&+2{,}343951\, k_1 - 2{,}368460\, k_2 + 2{,}140595\, k_3 - 1{,}047 = 0\,,\\
&-2{,}368460\, k_1 + 2{,}824820\, k_2 - 2{,}392558\, k_3 + 1{,}344 = 0\,,\\
&+2{,}140595\, k_1 - 2{,}392558\, k_2 + 2{,}566771\, k_3 - 1{,}336 = 0\,.
\end{aligned}$$

Aus diesen Werten ergeben sich die k_1-, k_2-, k_3-Werte der Korrelaten zu:

$$\begin{aligned}
k_1 &= -0{,}397699\,,\\
k_2 &= -0{,}415505\,,\\
k_3 &= +0{,}464862\,.
\end{aligned}$$

Die Berechnungen der Verbesserungen:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{a_1}{p_1} k_1 + 0 + 0 = +0{,}073511\,,\\
v_{x'} &= \frac{a_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2}{p_2} k_2 + \frac{c_2}{p_2} k_3 = -1{,}275402\,,\\
v_3 &= 0 + \frac{b_3}{p_3} k_2 + 0 = +0{,}080524\,,\\
v_{y'} &= \frac{a_4}{p_4} k_1 + \frac{b_4}{p_4} k_2 + \frac{c_4}{p_4} k_3 = +0{,}033825\,,\\
v_5 &= 0 + 0 + \frac{c_5}{p_5} k_3 = -0{,}178792\,.
\end{aligned}$$

Als Kontrolle der Berechnung dienen die Formeln:

$$[pvv] = -[kl], \text{ bzw. } [av] - l_1 = 0,\ [bv] - l_3 = 0 \text{ und } [cv] - l_5 = 0\,.$$

Falls die Werte von $v_{x'}$ und $v_{y'}$ aus dem Hilfskoordinatensystem in das endgültige Koordinatensystem zurücktransformiert werden, erhalten wir mit den gewonnenen δx und δy Werten die endgültigen Koordinaten des gesuchten Punktes P: (der Drehungswinkel ist $-\varphi$)

$$\delta x = v_{x'} \cos\varphi - v_{y'} \sin\varphi = -0{,}311029 \text{ m}\,,$$
$$\delta y = v_{x'} \sin\varphi + v_{y'} \cos\varphi = +1{,}237358 \text{ m}\,,$$
$$y_P = y_0 + \delta y = +1305{,}004 + 1{,}237 = +1306{,}241 \text{ m}\,,$$
$$x_P = x_0 + \delta x = +\,324{,}225 - 0{,}311 = +\,323{,}914 \text{ m}\,.$$

Die Längenverbesserungen sind die folgenden:

$$v_1 = +0{,}0735 \text{ m}\,,\quad v_3 = +0{,}0805 \text{ m}\,,$$
$$v_2 = -0{,}2427 \text{ m}\,,\quad v_4 = -0{,}1760 \text{ m}\,,$$
$$v_5 = -0{,}1787 \text{ m}\,.$$

Die Verbesserung v_2 und v_4 wurde folgendermaßen berechnet:

$$v_2 = a_2\,\delta x + b_2\,\delta y\,,$$
$$v_4 = a_4\,\delta x + b_4\,\delta y\,.$$

Verglichen mit den Längenverbesserungen in [1], weichen unsere v_2- und v_4-Werte um 3 bzw. 3 mm von den Werten von ZONKOW ab*. Diese Unterschiede ergeben sich daraus, daß die Form des Dreiecks BPD Δ sehr ungünstig ist, und so zu dem Näherungswert ein relativ sehr großer Zuschlag gewonnen wird. Bei so großen Verbesserungen können aber die Glieder zweiter Ordnung nicht vernachlässigt werden. Wenn die Glieder zweiter Ordnung berechnet werden:

$$s_i = s_0 + \frac{\partial s_0}{\partial x} v_x + \frac{\partial s_0}{\partial y} v_y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_0}{\partial x^2} v_x^2 + 2\,\frac{\partial s_0}{\partial x\,\partial y} v_x v_y + \frac{\partial s_0}{\partial y^2} v_y^2\right) \cdots\,,$$

ist die Summe der Glieder zweiter Ordnung bezüglich s_2 in unserem Falle

* Wegen eines Druckfehlers wurde bei Zonkow für v_2 anstatt des richtigen Wertes von $-0{,}239$ $-0{,}209$ angegeben, für v_4 ergab sich nach genauer Berechnung anstatt $-0{,}172$ $-0{,}173$.

3 mm, für s_4 gleichfalls 3 mm und dies ist der Grund der Abweichungen. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit:

$$\mu_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{r}} = \pm\sqrt{\frac{0{,}763\,092}{3}} = \pm 0{,}504.$$

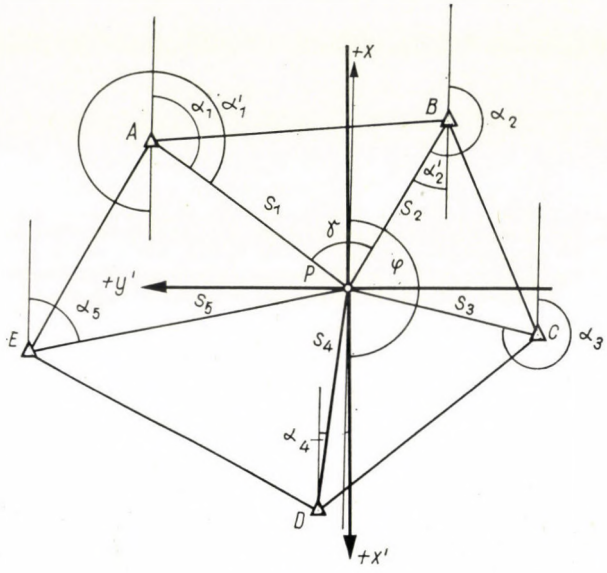

Abb. 3

II. Ausgleichung mit verschiedenen Gewichten

Die Näherungskoordinaten des Punktes P wurden, wie bei dem Rechenbeispiel von ZONKOW, aus den Punkten A und B berechnet (Abb. 3):

$$x_0 = +\ 323{,}761\ \text{m},$$
$$y_0 = +1306{,}000\ \text{m}.$$

Die Richtungswinkel:

$$\alpha_1 = (AP_0) = 147{,}3560^g, \quad \alpha_3 = (CP_0) = 306{,}7132^g,$$
$$\alpha_2 = (BP_0) = 227{,}6094^g, \quad \alpha_4 = (DP_0) = \quad 7{,}1106^g,$$
$$\alpha_5 = (EP_0) = 88{,}1040^g.$$

Hieraus berechnen wir γ, das gleich $\gamma_1 + \gamma_2$ ist, d. h.

$$\gamma = (P_0B) - (P_0A) = 80{,}2534^g.$$

Die Berechnung der Widersprüche:

$$l_3 = \overline{CP}_0 - s_3 = 247{,}404 - 247{,}100 = +0{,}304 \text{ m},$$
$$l_4 = \overline{DP}_0 - s_4 = 269{,}148 - 269{,}500 = -0{,}352 \text{ m},$$
$$l_5 = \overline{EP}_0 - s_5 = 416{,}256 - 416{,}700 = -0{,}444 \text{ m}.$$

l_1 und $l_2 = 0$, da die Näherungskoordinaten des Punktes P aus den Punkten A und B bestimmt wurden.

Die Berechnung des zu der Aufnahme des Hilfskoordinatensystems nötigen Winkels α_2' wird auf Grund der Gleichung (4) durchgeführt:

$$\tan 2\alpha_2' = 1{,}244033\,, \quad \text{woraus} \quad \alpha_2' = 28{,}4480^g\,,$$
$$\gamma - \alpha_2' = 51{,}8054^g, \quad \alpha_1' = 400^g - 51{,}8054^g = 348{,}1946^g\,.$$

Der Winkel zwischen den Koordinatensystemen gemäß Gleichung (8) ist:

$$\varphi = 199{,}1614^g\,.$$

Die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen im Hilfskoordinatensystem nach Gleichung (7a):

$$a_3' = -0{,}118345\,, \quad b_3' = +0{,}992972\,,$$
$$a_4' = -0{,}992214\,, \quad b_4' = -0{,}124541\,,$$
$$a_5' = -0{,}172817\,, \quad b_5' = -0{,}984954\,.$$

Die Bedingungsgleichung nach (7):

$$-0{,}118345\, v_{x'} + 0{,}992972\, v_{y'} - v_3 + 0{,}304 = 0\,,$$
$$-0{,}992214\, v_{x'} - 0{,}124541\, v_{y'} - v_4 - 0{,}352 = 0\,,$$
$$-0{,}172817\, v_{x'} - 0{,}984954\, v_{y'} - v_5 - 0{,}444 = 0\,.$$

Die Gewichte der Koordinatenverbesserungen können aus (6) bzw. (6a) gewonnen werden:

$$p_{v_{x'}} = 8{,}187\,, \quad p_{v_{y'}} = 4{,}152\,.$$

Mit Hilfe der Gewichte können die Normalgleichungen aufgeschrieben werden:

$$+0{,}433096\, k_1 - 0{,}015461\, k_2 - 0{,}233173\, k_3 + 0{,}304 = 0\,,$$
$$-0{,}015461\, k_1 + 0{,}268243\, k_2 + 0{,}050494\, k_3 - 0{,}352 = 0\,,$$
$$-0{,}233173\, k_1 + 0{,}050494\, k_2 + 0{,}622028\, k_3 - 0{,}444 = 0\,.$$

Und die Korrelaten:

$$k_1 = -0{,}409987\,,$$
$$k_2 = +1{,}201542\,,$$
$$k_3 = +0{,}462572\,.$$

Mit diesen sind die Verbesserungen zu berechnen:

$$v_{x'} = \frac{a_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1}{p_1} k_2 + \frac{c_1}{p_1} k_3 = -0{,}149401\,,$$

$$v_{y'} = \frac{a_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2}{p_2} k_2 + \frac{c_2}{p_2} k_3 = -0{,}243939\,,$$

$$v_3 = \frac{a_3}{p_3} k_1 + 0 \quad + 0 \quad = +0{,}079454\,,$$

$$v_4 = 0 \quad + \frac{b_4}{p_4} k_2 + 0 \quad = -0{,}173382\,,$$

$$v_5 = 0 \quad + 0 \quad + \frac{c_5}{p_5} k_3 = -0{,}177912\,.$$

Zu den Kontrollen dienen dieselben Zusammenhänge wie bei der vorherigen Lösung.

Aus dem Hilfskoordinatensystem in das ursprüngliche zurückgekehrt:

$$\delta x = +0{,}152601 \text{ m}\,,$$
$$\delta y = +0{,}241950 \text{ m}\,,$$
$$y_P = y_0 + \delta y = +1306{,}000 + 0{,}242 = +1306{,}242 \text{ m}\,,$$
$$x_P = x_0 + \delta x = +\ 323{,}761 + 0{,}153 = +\ 323{,}914 \text{ m}\,.$$

Die Längenverbesserungen sind die folgenden:

$$v_1 = +0{,}0747 \text{ m}\,, \quad v_3 = +0{,}0794 \text{ m}\,,$$
$$v_2 = -0{,}2401 \text{ m}\,, \quad v_4 = -0{,}1733 \text{ m}\,,$$
$$v_5 = -0{,}1779 \text{ m}\,.$$

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird:

$$\mu_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{r}} = \pm \sqrt{\frac{0{,}752\,938}{3}} = \pm 0{,}500\,.$$

Der Vergleich der Berechnungsarbeit zeigt offenkundig, daß die hier erörterten zwei Methoden viel einfacher als die ZONKOWsche sind.

SCHRIFTTUM

1. *Цонков, Н. Ц.:* Уравнивание вставки пункта в линейных триангуляционных сетях. *Изв. Высш. Учебных Заведений, Геодезия и Аэрофотосъемка* 1962/2. 37—49.
2. *Тарци-Хорнох, А.:* Об уравновешивании линейной засечки. *Изв. Высш. Учебных Заведений, Геодезия и Аерофотосъемка* 1963/2. 17—22.
3. HELMERT, F. R.: Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate II. Aufl. (1907) Teubner Verlag.

THE ADJUSTMENT OF FIXED POINT INTERPOLATION IN LINEAL MEASUREMENTS BY USING THE METHOD FOR THE ADJUSTMENT OF FICTITIOUS OBSERVATIONS

MRS. M. VERŐ

SUMMARY

Prof. A. TÁRCZY—HORNOCH elaborated a simple method for the adjustment of fixed point interpolation in lineal measurements having equal weights. The method in question utilizes THIELE's theorem. Introducing an auxiliary system of coordinates, the rectifications of the two coordinates of the new point become independent of each other. The present paper also contains the application of this principle to measurements the weights of which are different.

COMPENSATION DU RATTACHEMENT DES POINTS PAR MESURES DES LONGUEURS SELON LA MÉTHODE DE COMPENSATION DES OBSERVATIONS CONDITIONNELLES

Mme M. VERŐ

RÉSUMÉ

A. TÁRCZY-HORNOCH a élaboré une méthode de compensation simple pour la compensation du rattachement des points par mesures de longueur de poids égal. La méthode utilise le théorème de THIELE: par introduction d'un système de coordonnées auxiliaire, les deux corrections des coordonnées du nouveau point seront indépendantes l'une de l'autre. L'article contient l'application de ce principe en cas de poids différents.

ВЫРАВНЕНИЕ ПРИВЯЗКИ ПУНКТОВ ДАЛЬНОИЗМЕРЕНИЯ МЕТОДОМ ВЫРАВНЕНИЯ УСЛОВНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

М. ВЕРЁ

РЕЗЮМЕ

Профессором *А. Тарци-Хорнох* был разработан простой метод для выравнения привязки пунктов дальноизмерения с одинаковыми весами. В основе метода лежит теорема *Тиле* и благодаря введению вспомогательной системы координат две поправки координаты нового пункта будут независимыми друг от друга. В работе, кроме этого, описывается применение этого принципа при различных весах.

ÜBER DIE AUSGLEICHUNG DER STRECKENNETZE MIT KOORDINATEN NACH DER METHODE DER BEDINGTEN BEOBACHTUNGEN

A. TÁRCZY-HORNOCH

MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 18. September 1963]

Bekanntlich kann man die Gleichungen für die Ausgleichung des Streckenvierecks nach den vermittelnden Beobachtungen leicht aufstellen. Sie haben aber bei wenig überschüssigen Beobachtungen den Nachteil, daß die Koordinaten der Punkte als Unbekannte relativ viel Normalgleichungen erfordern. Werden aber durch entsprechende Gruppierung der Vermittlungsgleichungen aus je zwei Beziehungen die beiden Koordinaten der einzelnen Punkte als Funktionen der Seitenverbesserungen ausgedrückt und in die entsprechend gewählte Vermittelungsgleichung eingesetzt, so entsteht nur eine Bedingungsgleichung und somit auch eine Normalgleichung. Wir erhalten aus der Ausgleichung mit Hilfe der vorher erwähnten Beziehungen sogleich die Koordinaten der Punkte. Dies hat besonders bei größeren Entfernungen den Vorteil, daß dabei die Berechnung der sphärischen bzw. sphäroidischen Exzesse und der Punktkoordinaten im Projektionssystem entfällt.

Die Studie behandelt die Ausgleichung des Streckenvierecks nach Koordinaten *a)* in einem Hilfskoordinatensystem und *b)* im endgültigen Koordinatensystem. Es werden zum Schluß noch weitere Beispiele angeführt, wo diese Methode bei der Ausgleichung von Streckennetzen vorteilhaft verwendet werden kann.

Die Bedeutung der Streckennetze nimmt im Zeitalter der Geodimeter und Tellurometer ständig zu. Es kann daher uns nicht wundern, wenn eine immer größer werdende Literatur die Ausgleichsprobleme solcher Netze behandelt. Auch wir haben uns wiederholt mit der Ausgleichung der wohl wichtigsten Grundfigur der Streckennetze, des Streckenvierecks befaßt [1, 2, 3, 4] und nach der Methode der bedingten Beobachtungen einige Lösungen angegeben.

Die Ausgleichung nach den bedingten Beobachtungen hat bei Streckenvierecken bekanntlich den Vorteil (Abb. 1), daß zwischen 6 gemessenen Seiten nur eine Bedingungsgleichung besteht, die daher nur eine Normalgleichung erfordert. Die Bedingung besteht allerdings zwischen den aus den einzelnen Dreiecken berechneten Winkeln (die Summe der aus den entsprechenden Dreiecken gemessenen Winkel muß einem aus einem dritten Dreieck gerechneten entsprechenden Winkel gleich sein, z. B. $C_1 + C_2 = C_3$). So sind die Koeffizienten der Bedingungsgleichung nicht sehr einfach, und man braucht dabei die Tafeln der trigonometrischen Funktionen zu den Koordinatenberechnungen auch nach der Ausgleichung. Dieser Umstand ist für die Berechnung mit elektronischen Rechenmaschinen nicht günstig.

Bei der Ausgleichung nach den vermittelnden Beobachtungen sind die Koeffizienten der Vermittlungsgleichungen bekanntlich sehr einfach, und man

erhält als Ergebnis der Ausgleichung sofort die Koordinaten bzw. die Koordinatenzuschläge. Der große Nachteil besteht hier darin, daß man bei dieser Ausgleichung, wo die Koordinatenzuschläge der Punkte als Unbekannte auftreten, viel Unbekannte und so viel Normalgleichungen hat. Selbst in dem vereinfachten Fall, daß man ein Hilfskoordinatensystem mit dem Nullpunkt in dem einen Eckpunkt des Streckenvierecks einführt und die x-Achse durch einen anderen Eckpunkt legt, sind noch 5 Koordinaten zu bestimmen, wozu 5 Normalgleichungen erforderlich sind. Diese bedeuten im Vergleich zu der einen Normalgleichung der bedingten Beobachtungen eine ansehnliche Mehrarbeit in den Rechnungen.

Es erhebt sich die Frage, ob es nicht möglich ist, die Vorteile der beiden Ausgleichungsmethoden bis zu einem gewissen Grade zu vereinigen. Hierzu

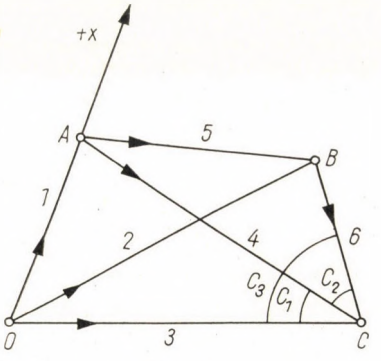

Abb. 1

gibt offenkundig das von uns schon wiederholt angewandte Verfahren [5, 6, 7] eine Möglichkeit, bei welchem die Gleichungen der vermittelnden Beobachtungen auf mathematischem Wege in Gleichungen der bedingten Beobachtungen umgewandelt werden.

Bezeichnen wir die Näherungskoordinaten der Punkte B und C mit einem Nullindex, die gemessenen und entsprechend auf die Horizont.ale umgerechneten Seiten mit einem Strichindex, so kann für die in der Abb 1 mit 6 bezeichnete Seite s_6 folgende Vermittlungsgleichung angeschrieben werden:

$$\overline{BC} = s_6' + v_6 = \sqrt{(x_C^0 + \delta x_C - x_B^0 - \delta x_B)^2 + (y_C^0 + \delta y_C - y_B^0 - \delta y_B)^2}. \quad (1)$$

Wird nun die den Näherungskoordinaten x_C^0, y_C^0 und x_B^0, y_B^0 entsprechende Seite mit s_6^0 bezeichnet, so erhält man aus Gl. (1) durch Reihenentwicklung und bei Vernachlässigung der kleinen Glieder höherer Ordnung folgende Vermittlungs- bzw. Verbesserungsgleichung:

$$v_6 = \frac{x_C^0 - x_B^0}{s_6^0}\delta x_C - \frac{x_C^0 - x_B^0}{s_6^0}\delta x_B + \frac{y_C^0 - y_B^0}{s_6^0}\delta y_C - \frac{y_C^0 - y_B^0}{s_6^0}\delta y_B + s_6^0 - s_6'. \quad (2)$$

Wir führen zur Abkürzung folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{x_C^0 - x_B^0}{s_6^0} = a_6\,, \quad \frac{y_C^0 - y_B^0}{s_6^0} = b_6\,, \quad s_6^0 - s_6' = l_6\,. \tag{3}$$

Dann kann Gl. (2) wie folgt geschrieben werden:

$$v_6 = a_6\,\delta x_C - a_6\,\delta x_B + b_6\,\delta y_C - b_6\,\delta y_B + l_6\,. \tag{4}$$

Grundsätzlich ähnlich können die Vermittlungsgleichungen der übrigen 5 gemessenen und auf die Horizontale umgerechneten Seiten angegeben werden. Hier muß aber noch in Betracht gezogen werden, daß bei aus O ausgehenden Seiten x_0^0, y_0^0 sowie δx_0 und δy_0 gleich Null sind, weiters, daß zur Bestimmung der Koordinaten die Richtung einer Seite bekannt sein muß. Ist dies nicht der Fall, so nimmt man zur Ausgleichung ein Hilfskoordinatensystem mit dem Ursprung in O und mit der x-Achse z. B. durch A an und bezieht die Berechnung auf dieses System. Wir wollen zuerst diesen Fall behandeln.

1. *Berechnung des Streckenvierecks in einem Hilfskoordinatensystem*

Entsprechend dem vorherigen sollen die Näherungskoordinaten von A mit s_1' ($x_A^0 = s_1'$, $y_A^0 = 0$), jene von B aus s_2' und s_5', endlich die von C aus s_3' und s_4' ermittelt werden. Dann sind die reinen Glieder l_1, l_2, l_3, l_4 und l_5 dieser Verbesserungsgleichungen gleich Null und man erhält folgende vereinfachte Beziehungen:

$$\begin{aligned} v_1 &= \delta x_A\,, \\ v_2 &= a_2\delta x_B + b_2\delta y_B\,, \\ v_3 &= a_3\,\delta x_C + b_3\delta y_C\,, \\ v_4 &= a_4\delta x_C - a_4\delta x_A + b_4\delta y_C\,, \\ v_5 &= a_5\,\delta x_B - a_5\delta x_A + b_5\delta y_B\,. \end{aligned} \tag{4a}$$

Aus den Gln. für v_1, v_2 und v_5 können δx_A, δx_B und δy_B, aus jenen für v_1, v_3 und v_4 aber δx_C und δy_C als Funktionen der Verbesserungen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \delta x_A &= v_1 \\ \delta x_B &= \frac{b_5\,v_2 - b_2(a_5\,v_1 + v_5)}{a_2\,b_5 - a_5 b_2}\,, \\ \delta y_B &= \frac{-\,a_5\,v_2 + a_2\,(a_5\,v_1 + v_5)}{a_2\,b_5 - a_5\,b_2}\,, \\ \delta x_C &= \frac{b_4\,v_3 - b_3(a_4\,v_1 + v_4)}{a_3\,b_4 - a_4\,b_3}\,, \\ \delta y_C &= \frac{-\,a_4\,v_3 + a_3(a_4\,v_1 + v_4)}{a_3\,b_4 - a_4\,b_3}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Wenn wir diese Werte in Gl. (4) einsetzen, so erhalten wir nach entsprechender Ordnung die einzige Bedingungsgleichung in folgender Form:

$$\left(\frac{a_4(a_3 b_6 - a_6 b_3)}{a_3 b_4 - a_4 b_3} - \frac{a_5(a_2 b_6 - a_6 b_2)}{a_2 b_5 - a_5 b_2}\right) v_1 + \frac{a_5 b_6 - a_6 b_5}{a_2 b_5 - a_5 b_2} v_2 -$$

$$- \frac{a_4 b_6 - a_6 b_4}{a_3 b_4 - a_4 b_3} v_3 + \frac{a_3 b_6 - a_6 b_3}{a_3 b_4 - a_4 b_3} v_4 - \frac{a_2 b_6 - a_6 b_2}{a_2 b_5 - a_5 b_2} v_5 - \tag{6}$$

$$- v_6 + l_6 = 0 .$$

Die weitere Auflösung kann sowohl im Falle von gleichen als auch bei verschiedenen Gewichten als bekannt vorausgesetzt werden.

Es sei hier bemerkt, daß Gl. (6) mit Ausschaltung einer jeden transzendenten Funktion hergeleitet wurde.

Gl. (6) ist nur scheinbar kompliziert: man hat z. B. nur zweierlei Nenner. Es ist auch von großem Vorteil, daß die langsame Interpolation in den trigonometrischen Funktionen selbst dann entfällt, wenn die Koeffizienten z. B. nach Gl. (3).

$$a_6 = \frac{x_C^0 - x_B^0}{s_6}$$

in der Form von cos 6 aus Tafeln (wobei 6 den Richtungswinkel der Seite 6 bezeichnet) aufgeschlagen werden, da für die Genauigkeit der Koeffizienten die Winkelfunktionen der auf 10″ abgerundeten Werte in der Regel schon zu genau sind. Der große Vorteil, daß man in Kenntnis der Seitenverbesserungen nach Gln. (5) sofort die Koordinatenzuschläge berechnen kann, kommt hier, bei Verwendung eines Hilfskoordinatensystems, nicht unmittelbar zur Geltung, da diese noch in das endgültige System umgerechnet werden müssen.

Gl. (6) kann noch weiter vereinfacht werden. Es ist nämlich:

$$\frac{b_3}{a_3 b_4 - a_4 b_3} = \frac{\sin 3}{\cos 3 \sin 4 - \cos 4 \sin 3} = \frac{\frac{y_C}{s_3}}{\cos 3 \frac{y_C}{s_4} - \cos 4 \frac{y_C}{s_4}} =$$

$$= \frac{s_4}{s_3 \cos 3 - s_4 \cos 4} = \frac{s_4}{s_1} .$$

Ähnlich wird:

$$\frac{\sin 2}{\cos 2 \sin 5 - \cos 5 \sin 2} = \frac{s_5}{s_1} , \quad \frac{\sin 5}{\cos 2 \sin 5 - \cos 5 \sin 2} = \frac{s_2}{s_1} ,$$

usw. Man kann deshalb Gl. (6) wie folgt schreiben:

$$\left(\frac{a_4(a_3 b_6 - a_6 b_3)}{b_3} \cdot \frac{s_4}{s_1} - \frac{a_5(a_2 b_6 - a_6 b_2)}{b_2} \cdot \frac{s_5}{s_1}\right) v_1 +$$

$$+\left(\frac{a_5 b_6 - a_6 b_5}{b_5} \cdot \frac{s_2}{s_1}\right) v_2 - \left(\frac{a_4 b_6 - a_6 b_4}{b_4} \cdot \frac{s_3}{s_1}\right) v_3 +$$

$$+\left(\frac{a_3 b_6 - a_6 b_3)}{b_3} \cdot \frac{s_4}{s_1}\right) v_4 - \left(\frac{a_2 b_6 - a_6 b_2}{b_2} \cdot \frac{s_5}{s_1}\right) v_5 - v_6 + l_6 = 0 . \qquad (6a)$$

Die Koeffizienten der Gl. (6) können durch Winkelfunktionen auch noch anders ausgedrückt werden. Diese haben bei der Berechnung mit elektronischen Rechenmaschinen nur wenig Bedeutung; sie sollen aber gewisser Vergleiche und der Vollständigkeit halber doch angeführt werden.

Wenn wir in Abb. 1. die den Seiten entsprechenden Richtungswinkel 1, 2, 3 usw. mit Pfeilen bezeichnen, so wird im Sinne der Gln. (3)

$$a_3 b_6 - a_6 b_3 = \cos 3 \sin 6 - \cos 6 \sin 3 = \sin (6-3)$$

usw. Man kann deshalb Gl. (6) auch wie folgt angeben:

$$\left(\frac{\sin(6-3)\cos 4}{\sin(4-3)} - \frac{\sin(6-2)\cos 5}{\sin(5-2)}\right) v_1 + \frac{\sin(6-5)}{\sin(5-2)} v_2 -$$

$$- \frac{\sin(6-4)}{\sin(4-3)} v_3 + \frac{\sin(6-3)}{\sin(4-3)} v_4 - \frac{\sin(6-2)}{\sin(5-2)} v_5 - v_6 + l_6 = 0 . \qquad (6b)$$

Im Falle, wenn $v_1 = 0$, $v_3 = 0$ und $v_4 = 0$ sind, d. h. wenn die Punkte O, A, und C als fehlerfreie gegebene Punkte angenommen werden, dann besteht die Aufgabe darin, aus diesen Punkten den Punkt B mit Hilfe der gemessenen Seiten s_2', s_5' und s_6' einzuschalten (Einschneiden aus drei Punkten mit gemessenen Längen; auch Bogenschnitt aus drei Punkten). Aus Gl. (6) entsteht für diesen Fall die Beziehung:

$$\sin(6-5)\, v_2 - \sin(6-2)\, v_5 - \sin(5-2)\, v_6 + \sin(5-2)\, l_6 = 0 . \qquad (6c)$$

Diese Beziehung entspricht sinngemäß der, vor Gl. (1) in [7] stehenden, für diesen Fall auf anderem Wege hergeleiteten Beziehung. Mit Rücksicht darauf, daß in Gl. (6c) überall die Differenzen von Richtungen auftreten, ist ihre Gültigkeit unabhängig vom Koordinatensystem und sie ist somit auch für das endgültige Koordinatensystem gültig. Aber nur Gl. (6c) für das Einschneiden und nicht auch Gln. (6a) u. (6b), denn es kommen in den letzteren auch die von der Annahme des Koordinatensystems abhängigen Werte cos 4, cos 5

weiters sin 2, sin 3 usw. vor. Eine Interpolation bei den Winkelfunktionen ist bei der erforderlichen Genauigkeit der Koeffizienten in der Regel auch hier nicht erforderlich.

Die Widerspruchsgleichung kann natürlich nicht nur für die Seite s_6, sondern auch für eine andere Seite, z. B. für s_3 angeschrieben werden. In diesem Falle bestimmen wir die Näherungskoordinaten von C mit den gemessenen Seiten s_4' und s_6' aus A und B, wobei δx_C und δy_C als Funktionen von v_1, v_2, v_4, v_5 und v_6 ausgedrückt werden.

2. *Berechnung des Streckenvierecks im endgültigen Koordinatensystem*

Die Berechnung im endgültigen Koordinatensystem hat bei nur einer Bedingungsgleichung noch den großen Vorteil, daß man mit Hilfe der Koor-

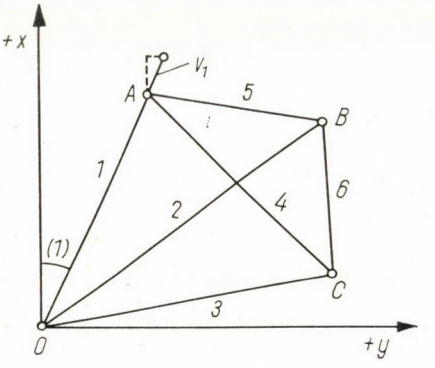

Abb. 2

dinatenzuschläge sofort auch die endgültigen Koordinaten erhält. Die Anwendung des endgültigen Systems setzt voraus, daß man den Richtungswinkel einer Seite, z. B. jenen der Seite 1 in Abb. 2, kennt.

Wenn wir nun der gemessenen Seite s_1' wieder die Verbesserung v_1 zuordnen, so werden die Koordinatenzuschläge der Näherungskoordinaten x_A^0 und y_A^0:

$$\delta x_A = v_1 \cos 1 = \frac{x_A^0}{s_1^0} v_1 = a_1 v_1 ,$$

$$\delta y_A = v_1 \sin 1 = \frac{y_A^0}{s_1^0} v_1 = b_1 v_1 . \tag{7}$$

Die Näherungskoordinaten beziehen sich nach Abb. 2 allerdings auf ein parallel verschobenes Koordinatensystem mit O als Nullpunkt. In diesem Falle müssen zu den Näherungskoordinaten der einzelnen Punkte nicht nur die entsprechenden Koordinatenzuschläge, sondern auch die entsprechenden

Koordinaten von O addiert werden. Die angegebenen Beziehungen gelten aber auch für das endgültige, parallel nicht verschobene Koordinatensystem, vorausgesetzt, daß die endgültigen Koordinaten von O gegeben sind.

Werden nun die Näherungskoordinaten von B mit Hilfe von s_2' und s_5', jene von C mit s_3' und s_4' berechnet, so sind l_2, l_3, l_4 und l_5 auch hier gleich Null, weshalb wir für $v_2 - v_5$ hier folgende Verbesserungsgleichungen erhalten:

$$\begin{aligned} v_2 &= a_2\,\delta x_B + b_2\,\delta y_B\,, \\ v_3 &= a_3\,\delta x_C + b_3\,\delta y_C\,, \\ v_4 &= a_4\,\delta x_C - a_4\,\delta x_A + b_4\,\delta y_C - b_4\,\delta y_A\,, \\ v_5 &= a_5\,\delta x_B - a_5\,\delta x_A + b_5\,\delta y_B - b_5\,\delta y_A\,. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gl. (7) können wir aus den Gln. für v_2 und v_5 die Zuschläge δx_B und δy_B, aus jenen für v_3 und v_4 die Zuschläge δx_C und δy_C wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} \delta x_B &= \frac{b_5\,v_2 - b_2\big((a_1\,a_5 + b_1\,b_5)v_1 + v_5\big)}{a_2\,b_5 - a_5\,b_2}\,, \\ \delta y_B &= \frac{-a_5\,v_2 + a_2\big((a_1\,a_5 + b_1\,b_5)v_1 + v_5\big)}{a_2\,b_5 - a_5\,b_2}\,, \\ \delta x_C &= \frac{b_4\,v_3 - b_3\big((a_1\,a_4 + b_1\,b_4)v_1 + v_4\big)}{a_3\,b_4 - a_4\,b_3}\,, \\ \delta y_C &= \frac{-a_4\,v_3 + a_3\big((a_1\,a_4 + b_1\,b_4)v_1 + v_4\big)}{a_3\,b_4 - a_4\,b_3}\,. \end{aligned} \tag{7a}$$

Werden nun die Beziehungen nach Gln. (7) u. (7a) in Gl. (4) eingeführt, so entsteht die folgende einzige Bedingungs- bzw. Verbesserungsgleichung im endgültigen System:

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{(a_3\,b_3 - a_6\,b_3)\,(a_1\,a_4 + b_1\,b_4)}{a_3\,b_4 - a_4\,b_3} - \frac{(a_2\,b_6 - a_6\,b_2)\,(a_1\,a_5 + b_1\,b_5)}{a_2\,b_5 - a_5\,b_2}\right\} v_1 + \\ &+ \frac{a_5\,b_6 - a_6\,b_5}{a_2\,b_5 - a_5\,b_2}\,v_2 - \frac{a_4\,b_6 - a_6\,b_4}{a_3\,b_4 - a_4\,b_3}\,v_3 + \frac{a_3\,b_6 - a_6\,b_3}{a_3\,b_4 - a_4\,b_3}\,v_4 - \\ &- \frac{a_2\,b_6 - a_6\,b_2}{a_2\,b_5 - a_5\,b_2}\,v_5 - v_6 + l_6 = 0\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Vergleichen wir nun diese Gl. (8) mit Gl. (6) im Hilfskoordinatensystems, so finden wir nur in dem Koeffizienten v_1 eine Abweichung. Daraus folgt aber, daß im Falle, wo $v_1 = 0$, $v_3 = 0$, $v_4 = 0$ sind, auch aus obiger Beziehung Gl. (6c) entstehen muß, was auf anderem Wege bereits festgestellt wurde.

Wenn die Näherungskoordinaten von A, B und C nicht mit den entsprechenden gemessenen Längen ermittelt wurden, so erscheinen in Gl. (8) mit den entsprechenden Koeffizienten auch die übrigen l-Glieder. Von einer eigenen Behandlung dieses Falles wollen wir Abstand nehmen, da das Nullwerden der reinen Glieder $l_1 - l_5$ leicht zu erreichen ist.

Die Berechnung nach Gl. (8) ist noch vorteilhafter als die mit Gl. (6), da nur der Koeffizient von v_1 etwas länger als in Gl. (6) ist. Man erhält aber dafür aus den Verbesserungen nach Gl. (7) und (7a) die Koordinatenzuschläge im endgültigen System.

Die Ausgleichung mit Hilfe der Gl. (8) ist besonders bei großen Entfernungen vorteilhaft, wo man die Kugel- bzw. Ellipsoidform der Erde berücksichtigen muß. Bei den bisherigen Methoden der Ausgleichung nach den bedingten Beobachtungen brauchte man in diesem Falle zur Ausgleichung auch die sphärischen bzw. sphäroidischen Exzesse und man muß nach der Ausgleichung mit den sphärischen bzw. sphäroidischen Längen die dem gewählten Projektionssystem entsprechenden Koordinaten eigens berechnen. In dem hier behandelten Fall sind lediglich die gemessenen und auf die Kugel bzw. auf das Ellipsoid sich beziehenden Längen mit Hilfe der, dem Projektionssystem entsprechenden Längenverzerrungsfaktoren (wozu man in der Ausgleichung nicht verwendbare erste Näherungskoordinaten braucht) umzurechnen, und man kann mit diesen Längen in der Ebene die (zweiten) Näherungskoordinaten, die Ausgleichung, die Koordinatenzuschläge und endlich die Projektionskoordinaten berechnen. Dies bedeutet eine beachtenswerte Vereinfachung der Berechnung. Hier müssen wir die Näherungskoordinaten mmer mit den ursprünglichen Koordinaten des Punktes O berechnen.

3. *Die Anwendbarkeit des angegebenen Verfahrens allgemein bei der Ausgleichung von Streckennetzen*

Das vorher angegebene Ausgleichsverfahren kann auch auf anschließende Streckenvierecke ausgedehnt werden. Wir können z. B. nach Abb. 3. folgende weitere Verbesserungsgleichungen anschreiben:

$$\begin{aligned} v_7 &= a_7\,\delta x_D - a_7\,\delta x_C + b_7\,\delta y_D - b_7\,\delta y_C\,, \\ v_{10} &= a_{10}\,\delta x_D - a_{10}\,\delta x_B + b_{10}\,\delta y_D - b_{10}\,\delta y_B\,, \\ v_8 &= a_8\,\delta x_E - a_8\,\delta x_C + b_8\,\delta y_E - b_8\,\delta y_C\,, \\ v_9 &= a_9\,\delta x_E - a_9\,\delta x_B + b_0\,\delta y_E - b_9\,\delta y_B\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Wenn in diese Gln. δx_B, δy_B, δx_C und δy_C nach Gln. (7a) als Funktionen der entsprechenden Längenverbesserungen eingeführt werden, so können aus den ersten zwei Gln. (10) δx_D, δy_D, aus den zwei weiteren Gln. δx_E, δy_E als Funk-

tionen der Längenverbesserungen ausgedrückt werden. Wenn diese in die für s_{11} geltende Verbesserungsgleichung

$$v_{11} = a_{11}\,\delta x_E - a_{11}\,\delta x_D + b_{11}\,\delta y_E - b_1\,\delta y_D + l_{11} \qquad (10a)$$

eingesetzt werden, erhalten wir die zweite Bedingungs- bzw. Verbesserungsgleichung des in Abb. 3 dargestellten Streckennetzes usw. Bemerkenswert ist der Umstand, daß auch hier die Koordinatenzuschläge als Funktionen

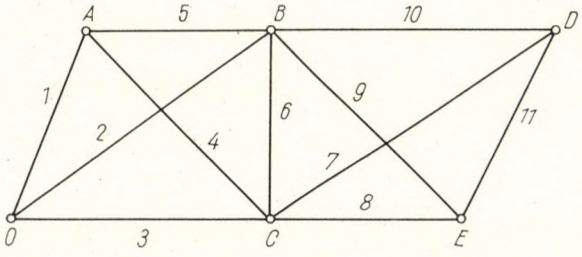

Abb. 3

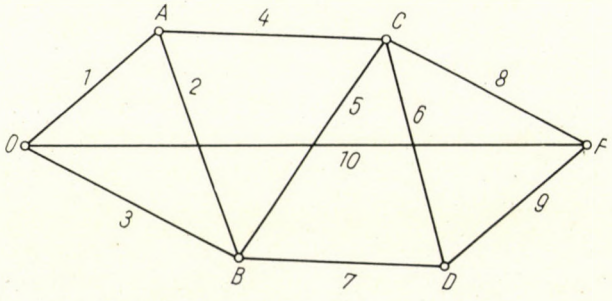

Abb. 4

der Längenverbesserungen aus je zwei Gleichungen, also einfach ausgedrückt werden können.

Das behandelte Verfahren ist aber bei diesen anschließenden Streckenvierecken nicht mehr so zweckmäßig, da deren Beziehungen immer länger werden. Wenn aber die Berechnung bereits an einem Ellipsoid erfolgen muß, dann ist das hier behandelte Verfahren infolge des Entfallens der sphäroidischen Exzesse und der Projektionsberechnungen auch in diesem Falle günstiger. Es ist übrigens gar nicht erforderlich, die Koordinatenzuschläge als Funktionen der Längenverbesserungen formelmäßig auszudrücken. Es genügt die einzelnen δx und δy Werte (hier aus Gln. (10)) mit zahlenmäßigen Koeffizienten als Funktionen der Längenverbesserungen zu berechnen und in die den Widerspruch enthaltenden Gln. (hier in (10a)) einzusetzen.

Das in dieser Studie behandelte Verfahren ist auch dann günstig, wenn man bei mehreren anschließenden Dreiecken außer den Dreiecksseiten auch deren durchschneidende Linie (in Abb. 4 die Länge OF) mißt. Es werden im Sinne der Gl. (7) in diesem Falle, falls O der gegebene Anfangspunkt und OA die orientierte Seite bedeutet:

$$\delta x_A = a_1 v_1 , \qquad \delta y_A = b_1 v_1 . \tag{11}$$

Weiters (die Näherungskoordinaten auch hier mit den gemessenen Längen berechnet):

$$\begin{aligned}
v_2 &= a_2 \delta x_B - a_2 \delta x_A + b_2 \delta y_B - b_2 \delta y_A , \\
v_3 &= a_3 \delta x_B - b_3 \delta y_B , \\
v_4 &= a_4 \delta x_C - a_4 \delta x_A + b_4 \delta y_C - b_4 \delta y_A , \\
v_5 &= a_5 \delta x_C - a_5 \delta x_B + b_5 \delta y_C - b_5 \delta y_B , \\
v_6 &= a_6 \delta x_D - a_6 \delta x_C + b_6 \delta y_D - b_6 \delta y_C , \\
v_7 &= a_7 \delta x_D - a_7 \delta x_B + b_7 \delta y_D - b_7 \delta y_B , \\
v_8 &= a_8 \delta x_F - a_8 \delta x_C + b_8 \delta y_F - b_8 \delta y_C , \\
v_9 &= a_9 \delta x_F - a_9 \delta x_D + b_9 \delta y_F - b_9 \delta y_D .
\end{aligned} \tag{11a}$$

Wir können hier mit Hilfe von (11) sowie der ersten zwei Gln. in (11a) die Werte δx_B und δy_B; mit diesen und den zwei folgenden Gln. δx_C und δy_C, mit den vorherigen δx und δy Werten sowie den für v_6 und v_7 angeschriebenen Gln. δx_D und δy_D, endlich mit den bisherigen δx und δy Werten und den zwei letzten Gln. in (11a) die δx_F und δy_F-Werte als Funktionen der Längenverbesserungen ausdrücken. Wenn diese letzteren in die Gl.

$$v_{10} = a_{10} \delta x_F + b_{10} \delta y_F + l_{10} \tag{11b}$$

eingesetzt werden (wobei sinngemäß $l_{10} = s^0_{10} - s'_{10}$ ist), erhalten wir hier die einzige Bedingungs- bzw. Verbesserungsgleichung. Diese Lösung ist bereits bei kürzeren Entfernungen, wo die Berechnung der sphärischen Exzesse und die Berücksichtigung der Projektion nicht nur bei der hier angegebenen Methode, sondern allgemein entfällt, empfehlenswert.

Das behandelte Verfahren ist besonders dann ratsam, wenn in den Gln. (6) bzw. (8) die Verbesserung v_1 Null ist, d. h. das Viereck schließt sich an zwei gegebene Punkte O und A an (Abb. 5). In diesem Falle ergibt sich aus Gl. (8) für die Bedingungs- bzw. Verbesserungsgleichung folgende Beziehung:

$$\frac{a_5 b_6 - a_6 b_5}{a_2 b_5 - a_5 b_2} v_2 - \frac{a_4 b_6 - a_6 b_4}{a_3 b_4 - a_4 b_3} v_3 + \frac{a_3 b_6 - a_6 b_3}{a_3 b_4 - a_4 b_3} v_4 - \tag{12}$$

$$- \frac{a_2 b_6 - a_6 b_2}{a_2 b_5 - a_5 b_2} v_5 - v_6 + l_6 = 0 .$$

Wenn sich an dieses Viereck ein weiteres Viereck anschließt, so werden natürlich auch in den weiteren Gln. v_1 bzw. δx_A und δy_A Null und diese verschwinden daher auch in den Bedingungs- bzw. Verbesserungsgleichungen der weiteren Vierecke.

Ganz besonders vorteilhaft wird das angegebene Verfahren, wenn die aus Vierecken bestehende Kette sich beiderseits an je zwei gegebene Punkte anknüpft, wie in Abb. 6 an die Punkte A und Q bzw. D und T. Wenn wir im folgenden die einzelnen Längenverbesserungen mit den Indizes ihrer Endpunkte bezeichnen, und die Näherungskoordinaten wieder mit den gemessenen Längen berechnen, so erhalten wir zunächst folgende Verbesserungsgleichun-

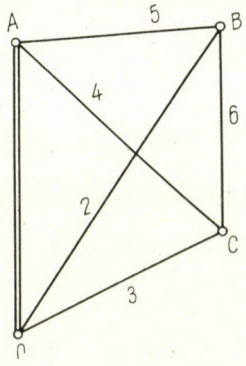

Abb. 5

gen (erste Gruppe):

$$\begin{aligned}
v_{AB} &= a_{AB}\,\delta x_B + b_{AB}\,\delta y_B\,,\\
v_{QB} &= a_{QB}\,\delta x_B + b_{QB}\,\delta y_B\,,\\
v_{AR} &= a_{AR}\,\delta x_R + b_{AR}\,\delta y_R\,,\\
v_{QR} &= a_{QR}\,\delta x_R + b_{QR}\,\delta y_R\,,\\
v_{DC} &= a_{DC}\,\delta x_C + b_{DC}\,\delta y_C\,,\\
v_{TC} &= a_{TC}\,\delta x_C + b_{TC}\,\delta y_C\,,\\
v_{DS} &= a_{DS}\,\delta x_S + b_{DS}\,\delta y_S\,,\\
v_{TS} &= a_{TS}\,\delta x_S + b_{TS}\,\delta y_S\,.
\end{aligned} \tag{13}$$

Man kann aus je zwei Gln. die Werte δx_B, δy_B, δx_R, δy_R, δx_C, δy_C, δx_S und δy_S als Funktionen der Längenverbesserungen in einfacher Form ausdrücken. Wenn diese in die folgende (zweite) Gruppe mit 6 Gln. eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
v_{BC} &= a_{BC}\,\delta x_C - a_{BC}\,\delta x_B + b_{BC}\,\delta y_C - b_{BC}\,\delta y_B + l_{BC}\,,\\
v_{BR} &= a_{BR}\,\delta x_R - a_{BR}\,\delta x_B + b_{BR}\,\delta y_R - b_{BR}\,\delta y_B + l_{BR}\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v_{BS} &= a_{BS}\,\delta x_S - a_{BS}\,\delta x_B + b_{BS}\,\delta y_S - b_{BS}\,\delta y_B + l_{BS}\,,\\
v_{CR} &= a_{CR}\,\delta x_R - a_{CR}\,\delta x_C + b_{CR}\,\delta y_R - b_{CR}\,\delta y_C + l_{CR}\,,\\
v_{CS} &= a_{CS}\,\delta x_S - a_{CS}\,\delta x_C + b_{CS}\,\delta y_S - b_{CS}\,\delta y_C + l_{CS}\,,\\
v_{RS} &= a_{RS}\,\delta x_S - a_{RS}\,\delta x_R + b_{RS}\,\delta y_S - b_{RS}\,\delta y_R + l_{RS}\,,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

so entstehen hier 6 Bedingungs- bzw. Verbesserungsgleichungen, deren Auflösung in der üblichen Form erfolgen kann.

Der Vorteil des für den in Abb. 6 dargestellten Fall angegebenen Verfahrens wird besonders bemerkbar, wenn wir dieses mit der von THORTON-SMITH für dieses Problem gegebenen Lösung [8] vergleichen. Bei ihm erscheinen

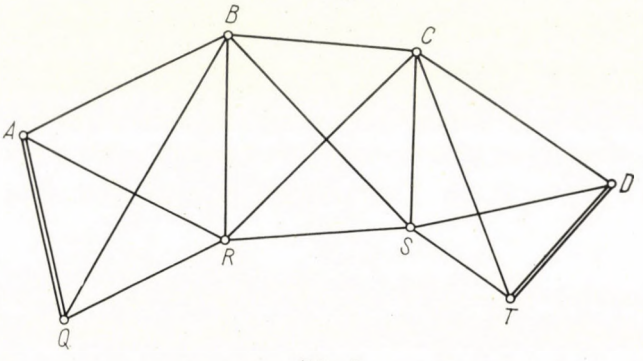

Abb. 6

folgende 6 Bedingungsgleichungen: Zunächst werden in den drei Vierecken je eine Winkelbedingungsgleichung (wie für die Winkel C in Abb. 1) angeschrieben. Dazu kommt eine in [8] als Azimutbedingungsgleichung bezeichnete Bedingung, daß man nämlich von der gegebenen Richtung QA ausgehend mit Hilfe der aus den verbesserten Längen gerechneten Winkeln die gleichfalls gegebene Richtung TD erhalten muß. Die zwei letzten Bedingungsgleichungen werden endlich in [8] dadurch erhalten, daß zu den geographischen Längen bzw. Breiten von A durch Addition der den verbesserten Seitenlängen und Richtungen entsprechenden geographischen Längen- bzw. Breitenunterschiede man jene des Punktes D erhalten muß. Die Linearmachung in bezug auf die Verbesserungen ist besonders bei den letzten drei Bedingungsgleichungen im Vergleich zu den hiesigen Gln. (13) u. (14) sehr verwickelt, wobei noch dazu bei uns die Ausgleichung mit den Koordinatenzuschlägen schon im Projektionssystem selbst vorgenommen wird. In dem in [8] behandelten Fall ist sogar die Ausgleichung unmittelbar nach den vermittelnden Beobachtungen zweckdienlicher, obwohl diese zu 8 Normalgleichungen führt. Bei unserer Umformung haben wir, wie wir sahen, 6 Normalgleichungen.

Im Gegensatz zu THORNTON-SMITH gleicht DONALD W. STIPP das in Abb. 7 dargestellte Streckennetz nach den vermittelnden Beobachtungen aus [9]. Hier können wir aber diese Lösung nicht mehr als vorteilhaft ansehen, da bei den gegebenen Punkten 10 und 12 und bei zwei überschüssigen Beobachtungen die Ausgleichung nach den vermittelnden Beobachtungen 6 Unbekannte (die Koordinatenzuschläge der Punkte 13, 14 u. 15) und so 6 Normalgleichungen erfordert, während man bei der Umwandlung in die bedingten Beobachtungen schon mit zwei Normalgleichungen zum Ziele kommt, wie dies auch die folgenden zeigen.

Wenn wir die Näherungskoordinaten der Punkte 13, 14 und 15 von 10 und 12 ausgehend auch hier mit den gemessenen Längen selbst berechnen, so

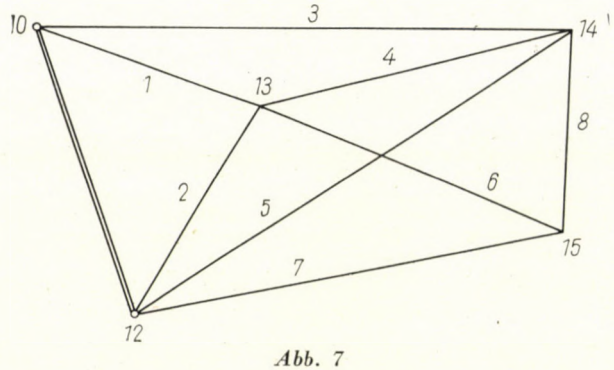

Abb. 7

entstehen zunächst die Verbesserungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= a_1\,\delta x_{13} + b_1\,\delta y_{13}\,,\\
v_2 &= a_2\,\delta x_{13} + b_2\,\delta y_{13}\,,\\
v_3 &= a_3\,\delta x_{14} + b_3\,\delta y_{14}\,,\\
v_4 &= a_4\,\delta x_{14} - a_4\,\delta x_{13} + b_4\,\delta y_{14} - b_4\,\delta y_{13}\,,\\
v_6 &= a_6\delta x_{15} - a_6\,\delta x_{13} + b_6\,\delta y_{15} - b_6\,\delta y_{13}\,,\\
v_7 &= a_7\,\delta x_{15} + b_7\,\delta y_{15}\,.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Aus den ersten zwei Gln. können δx_{13} und δy_{13}, aus den folgenden zwei Gln. δx_{14} und δy_{14}, endlich aus den zwei letzten Gln. δx_{15} und δy_{15} als Funktionen der Längenverbesserungen leicht ausgedrückt werden. Wenn diese in die folgenden zwei Verbesserungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
v_5 &= a_5\,\delta x_{14} + b_5\,\delta y_{14} + l_5\,,\\
v_8 &= a_8\,\delta x_{15} - a_8\,\delta x_{14} + b_8\,\delta y_{15} - b_8\,\delta y_{14} + l_8
\end{aligned}
\tag{16}
$$

eingesetzt werden, erhalten wir die zur Ausgleichung erforderlichen zwei Bedingungs- bzw. Verbesserungsgleichungen, die zu zwei Normalgleichungen führen. Von einer formelmäßigen Herleitung kann auch hier Abstand genommen werden, da es auch hier genügt, in Gln. (16) die zahlenmäßigen Koeffizienten einzusetzen.

Man kann die Näherungskoordinaten des Punktes 14 selbstverständlich auch aus 10 und 12 mit den gemessenen Strecken 3 und 5 berechnen, in welchem Falle die eine Bedingung sich auf die Strecke 4 beziehen muß.

*

Diese Untersuchungen zeigen auch, daß es in vielen Fällen zweckmäßig ist, die Gleichungen nach den vermittelnden Beobachtungen auf mathematischem Wege in jene der bedingten Beobachtungen umzuwandeln und dann diese zu lösen. Dies gilt besonders dann — wie auch in den hier behandelten Fällen —, wenn

a) im Vergleich zu den nicht gemessenen Unbekannten die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen gering ist,

b) wenn die Bedingungsgleichungen umständlich, die vermittelnden dagegen einfach sind, und endlich,

c) wenn die einzelnen nicht gemessenen Unbekannten leicht als Funktionen der Verbesserungen ausgedrückt werden.

Je mehr diese Umstände bestehen, um so entscheidender ist der Vorteil, der bei der Ausgleichung durch die Umwandlung der Beziehungen der vermittelnden Beobachtungen in jene der bedingten Beobachtungen entsteht.

SCHRIFTTUM

1. Über die Ausgleichung von Streckennetzen. *Acta Techn. Hung.* **VIII** (1954), 399—424.
2. Remarks on the Least-Squares Adjustment of Linear Dimensions in a Geodetic Quadrilateral. *Emp. Surv. Rew.* **XV** (1959), 22—29.
3. Further Remarks of Least Squares Adjustment of Linear Dimensions in a Geodetic Quadrilateral. *Emp. Surv. Rew.* **XVI** (1961), 229—308.
4. Weitere Beiträge zur Ausgleichung von Streckennetzen. Reihe B. Heft No. 95, Teil II. der Deutschen Geod. Kommission bei der Bayer. Akad. d. Wissenschaft. (1963), 109—121.
5. Über die Ausgleichung der Vorwärts- und Rückwärtseinschnitte nach dem Verfahren der bedingten Beobachtungen und deren Zurückführung auf vermittende Beobachtungen. *Acta Techn. Hung.* **43** (1963), 367—393.
6. A megmért hosszakkal történő pontkapcsolások kiegyenlítéséhez. *Geodézia és Kartográfia.* 1963, 86—89.
7. Zur Ausgleichung des Einschneidens mit gemessenen Längen nach der Methode der bedingten Beobachtungen. *Acta Techn. Hung.* **43** (1963), 339—347.
8. G. J. Thornton-Smith: Adjustment of a Chain of Doubly-Braced Quadrilaterals of Measured Sides in Projection-Co-ordinates. *The Australian Surveyor.* 1962, 164—177.
9. Donald W. Stipp: Trilateration Adjustment. *Surveying and Mapping.* 1962, 575—580.

THE ADJUSTMENT OF NETWORK WITH MEASURED SIDES BY COORDINATES ACCORDING TO THE METHOD OF CONDITIONAL OBSERVATIONS

A. TÁRCZY-HORNOCH

SUMMARY

As is well known, for quadrilateral with measured sides the indirect equations can easily be set up. However, in the case of only a few superabundant measurements it is disadvantageous that the coordinates of points, taking same as unknowns, give relatively many normal equations. But, if the indirect equations are appropriately grouped, and from each two equations the coordinates of one point each are expressed as a function of the residuals furthermore, if the so obtained relations are substituted into the last indirect equation, then the problem can be solved by one single normal equation and as a result the coordinates of these points can immediately be obtained. This is especially advantageous, in the case of large distances because the calculation of spherical or ellipsoidal angle-excesses respectively, and of projection coordinates becomes superfluous.

In the present paper the adjustment of quadrilaterals with measured sides to coordinates is dealt with in conformity with the method of conditional measurements in two variations, namely: *a)* in a system of auxiliary coordinates, and *b)* in the definitive system of coordinates. Finally, the paper also introduces examples for a further advantageous utilization of the method in equation to be used in the adjustment of network.

COMPENSATION PAR COORDONNÉES DES QUADRILATÈRES AUX CÔTÉS MESURÉ S SELON LA MÉTHODE DES OBSERVATIONS CONDITIONNELLES

A. TÁRCZY-HORNOCH

RÉSUMÉ

On sait qu'en cas de quadrilatères aux côtés mesurés, il est aisé de donner les équations intermédiaires pour les longueurs mesurées. Cependant, en cas de mesures surabondantes, cette méthode présente l'inconvénient que les coordonnées des points considérées comme inconnues donnent un nombre relativement grand d'équations normales. Mais si, en groupant convenablement par deux les équations intermédiaires, on exprime les coordonnées des points de chaque groupe, en fonction des corrections des côtés, et on les substitue dans la dernière équation intermédiaire convenablement choisie, le problème peut être résolu par une équation normale et les coordonnées des points sont alors obtenues directement. En cas surtout de grandes distances, cette méthode a l'avantage de dispenser du calcul de l'excès d'angle sphérique, resp. ellipsoïdique, et des coordonnées planes.

L'étude traite de la compensation par coordonnées des quadrilatères aux côtés mesurés, selon la méthode des observations conditionnelles *a)* dans un système de coordonnées auxiliaire, et *b)* dans un système de coordonnées définitif. Elle présente enfin des exemples d'autres applications avantageuses de la méthode pour compensation des quadrilatères aux côtés mesurés.

ВЫРАВНЕНИЕ КВАДРАТОВ СЕТИ ДАЛЬНОИЗМЕРЕНИЯ КООРДИНАТАМИ ПО МЕТОДУ УСЛОВНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

А. ТАРЦИ-ХОРНОХ

РЕЗЮМЕ

Как известно, в квадратах сети дальноизмерения нетрудно задать вспомогательные уравнения измеренных расстояний. Однако, при отсутствии достаточного количества дополнительных измерений, координаты точек, как неизвестные, приводят к сравнительно большому количеству нормальных уравнений. Но если путем соответствующей группировки вспомогательных уравнений брать по два вспомогательных уравнения и выразить координаты по одну точку в функции поправок расстояний и подставить их соответствующим образом в подобранное последнее вспомогательное уравнение, то задача решается одним нормальным уравнением и в качестве результата сразу получаются координаты пунктов. Особенно при больших расстояниях, преимущество такого приема заключается в том, что отпадает необходимость вычисления излишних сферических или эллиптических углов и проективных координат.

Выравнение квадратов дальноизмерения по координатам рассматривается в работе по методу условных измерений а) в системе воспомогательных координат и б) в окончательной системе координат. В заключении приводятся примеры дальнейшего эффективного применения предлагаемого метода для выравнения сетей дальноизмерения.

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЛОВАРЯХ

К. НЕКРАСОВА
УНИВЕРСИТЕТ КИШИНЁВ
[Поступило 10 октября 1963 г.]

Переводные и толковые отраслевые словари используются при чтении иностранной технической литературы широкими кругами специалистов и студентами высших и средних учебных заведений.

В Советском Союзе и в социалистических странах с каждым годом увеличивается количество переводных и толковых словарей по различным областям науки и техники. Составлением такого рода словарей занимаются разные издательства, а также отдельные лица и группы лиц. К сожалению, работа по составлению словарей все еще остается не вполне исследованной и координированной; отсутствуют даже обзоры вышедших в свет словарей.

В нашей статье мы даем обзор геодезических словарей, вышедших за последние 20 лет в СССР и отчасти в странах народной демократии.

I. Геодезические словари, изданные в СССР

В дореволюционной России геодезические переводные и толковые словари не издавались. Некоторое количество терминов по этой отрасли науки и техники можно было найти лишь в общих переводных технических (политехнических) словарях.

В советское время в СССР изданы следующие геодезические словари:

1. Немецко-русский геодезический словарь, составленный *Е. Лундом*, изд. 1940 г.

2. Англо-русский словарь по картографии, геодезии и аэрофототопографии, составленный *Г. Гальпериным*, изд. 1958 г.

3. Немецко-русский геодезический словарь, составленный *И. Пискуновой*, изд. 1961 г.

1

Немецко-русский геодезический словарь *Е. Лунда* содержит около 5500 заглавных слов. В предисловии Словаря указаны основные отрасли знания, нашедшие отражение в словаре (геодезия, картография, астрономия

и т. д.). Назначение словаря в основном учебное, т. к. он предназначен для студентов высших геодезических учебных заведений.

Словарь *Е. Лунда* — первый геодезический переводный словарь, вышедший в СССР. Ему были присущи некоторые недостатки, которые сводятся к следующему:

1. Неполный охват даже основной геодезической лексики.

2. Перегрузка общелитературной лексикой, около 16% данных в словаре Лунда заглавных слов можно найти в любом общем немецко-русском переводном словаре.

3. Перегрузка терминами, относящимися к химии и полиграфии.

4. Отсутствие ряда терминов практической астрономии, графики и математики, применяемых в геодезии.

5. Отсутствие в очень многих случаях указаний относительно области применения данных в словаре терминов.

6. Чрезмерная множественность переводов немецких слов на русский язык.

7. Отсутствие в словаре рисунков, схем, т. е. наглядных иллюстраций, которые имеют особо важное значение, в особенности в отношении терминов, относящихся к устройству, функционированию, поверке и исследованию геодезических приборов.

2

Англо-русский словарь по картографии, геодезии и аэрофототопографии, составленный *Г. Гальпериным*, содержит около 9300 слов и сосредоточивает в себе материал, относящийся к картографии, картоиздательскому делу, геодезии и аэрофототопографии. К англо-русской части имеется указатель русских слов и выражений, что делает возможным использование словаря и для перевода с русского языка на английский.

Словарь *Гальперина* является ценным пособием для советских специалистов и студентов, имеющих дело с геодезической (и картографической) литературой на английском языке. Охват геодезической терминологии английского языка вполне достаточен.

Следует упомянуть о некоторых недостатках словаря Гальперина:

1. Отсутствие указаний по произношению, несмотря на то, что словарь предназначен для использования в высших учебных заведениях, где овладение правильной устной речью настолько же важно, как и приобретение навыков правильного перевода.

2. Несколько своеобразный метод гнездования, при котором материал не сосредоточен в одной словарной статье под одним заглавным словом. Заглавное слово повторяется таким образом много раз.

3. Обилие слов общелитературного английского языка (напр., library, room, book, society).

4. Чрезмерная множественность русских переводов.

5. Отсутствие должного критицизма в подаче русских переводов.

6. Отсутствие грамматических помет.

7. Отсутствие рисунков и схем.

3

Немецко-русский геодезический словарь, составленный *И. Пискуновой*, содержит около 12 000 слов и претендует на исчерпывающую полноту охвата терминологии геодезии, а также картографии и фотограмметрии.

Несомненно, что словарь Пискуновой, появившийся через 20 лет после выхода в свет словаря Лунда, представляет собой шаг вперед по сравнению с этим словарем. Однако в словаре Пискуновой тоже много недостатков:

1. Отсутствие критического подхода к составлению словника, т. к. автор словаря как бы механически выписывал материал из ранее изданных словарей. Так бросается в глаза чересчур широкое, некритическое использование несколько уже устаревшего политехнического словаря *Белькинда* (1948 г.), благодаря чему в словарь были внесены слова — **Dualität, Skip, Aktion, Assortiment, Aufwand.**

2. Обилие общелитературных слов (напр., **aktiv, behufs, selbst**).

3. Значительное количество погрешностей в переводной, русской части.

4. Отсутствие рисунков и схем.

II. Геодезические словари, изданные в странах народной демократии

Насколько нам удалось выяснить, в странах народной демократии изданы следующие геодезические словари:

1. Русско-чешский геодезический словарь, 1954, авторы: **L. A. Hrabyna, N. V. Němčenko, K. Kučera, F. Brož.**

2. **Slownik geodesyjny w 5 jazykach (polskim, rosyjskim, niemieckim, angielskim, francuskim), 1955, Warszawa.**

3. Венгерский терминологический словарь по низшей геодезии, **„Általános geodézia"**, составленный доктором **Rédey I**, 1961 г.

1

Русско-чешский геодезический словарь содержит около 12 500 слов, причем они относятся не только к геодезии, но также к ряду других областей (физика, химия, геология, география и др.). Несмотря на доста-

точно положительные качества данного словаря, в нем имеется ряд недостатков, к которым можно отнести:

1. Обилие малоупотребительных слов.
2. Пропуск многих русских геодезических терминов.
3. Наличие неудачных переводов русских слов на чешский язык, на что указывал *Н. И. Модринский* (рецензия — «О русско-чешском геодезическом словаре» — в «Трудах МИГАиК», — 1957 г.).

2

Пятиязычный геодезический словарь, увидевший свет в Польше, содержит в себе геодезическую лексику языков польского, русского, немецкого, английского и французского. Всего в этом словаре около 5000 терминов. Несмотря на то, что польский словарь обладает значительными достоинствами, можно указать на недостатки, характерные и для вышеперечисленных словарей-двуязычных:

1. Обилие общелитературных слов (пролетать, пыль, полночь и др.).
2. Неполнота охвата геодезической лексики.
3. Неточность ряда переводов на различные языки.

3

«Általános geodézia» является толковым словарем по низшей геодезии и представляет собой один из выпусков большой серии толковых словарей, издаваемых Академией наук Венгрии. В словаре около 1500 терминов, расположенные в алфавитном порядке. Пояснительный текст к каждому термину достаточно краток. Особенность данного словаря состоит в том, что наряду с терминами венгерскими в большинстве случаев приведены соответствующие термины (без пояснительного текста) на немецком, английском и русском языках. Помимо основного текста в словаре имеются алфавитные указатели немецких, английских и русских геодезических терминов, приведенных в словаре, а также сводный алфавитный указатель венгерских терминов с указанием соответствующих им немецких, английских и русских эквивалентов.

Говоря о словаре д-ра *Редей*, мы должны с сожалением отметить, что в СССР до сего времени не издан толковый словарь, аналогичный словарю д-ра *Редей*.

Заключение

1. Геодезическим словарям везде уделяется достаточное внимание, причем наибольшее внимание подобным словарям уделено до сего времени в Польской и Венгерской народных республиках. В СССР еще не издавался толковый геодезический словарь или многоязычный геодезический словарь.

2. Исследование и обобщение опыта работы по составлению и изданию геодезических переводных и толковых словарей еще не привлекло к себе надлежащего внимания, благодаря чему в изданных до сего времени геодезических словарях наблюдаются существенные недостатки, устранение которых — дело ближайшего будущего.

ЛИТЕРАТУРА

Модринский, Н. И.: Геодезический словарь на пяти языках (рецензия в «*Трудах Московского института геодезии, аэрофотосъемки и картографии*, 1957).

Модринский, Н. И.: О русско-чешском геодезическом словаре (там же).

Некрасова, К. Ф.: Рецензия на книгу *Г. Л. Гальперина* «Англо-русский словарь по картографии, геодезии и аэрофототопографии» в журнале «*Геодезия и аэросъемка*», № 3, 1960.

BUCHBESPRECHUNG

Dr. A. Réthly—Dr. Z. Berkes

NORDLICHTBEOBACHTUNGEN IN UNGARN (1523—1960)

Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest 1963. 189 Seiten, 21 Bilder, 4 farbige Beilagen.

Die Forschung der Häufigkeit des Nordlichtes hat in Ungarn wohl der geographischen Breite wegen geringere Bedeutung als in anderen, nördlicher gelegenen Ländern. Der geschichtliche Wert der in diesem Buch beschriebenen Beobachtungen und die Ergebnisse die man bei ihrer Auswertung erhielt, zeigten jedoch, daß auch bei mittleren geographischen Breiten Beobachtungen für die Nordlichtforschung wertvoll sein können. Die hier angestellten Beobachtungen über die Bestimmung der Ausdehnung der Nordlichterscheinungen, die besonders in Jahren starker Sonnentätigkeit sehr intensiv sind, leisten bei der Bestimmung der Energie der das Nordlicht verursachenden Korpuskularstrahlungen wertvolle Dienste. Die Verfasser stellten sich die Aufgabe, durch Aufarbeitung des zur Verfügung stehenden Wahrnehmungsmaterials festzustellen, welche Gesetzmäßigkeiten der gebietsmäßigen und zeitlichen Häufigkeit des Nordlichtes in Ungarn gegeben sind, ferner, in welchem Zusammenhang diese Gesätzmäßigkeiten mit anderen geophysikalischen Erscheinungen sind. Mit Hilfe der Beobachtungen des Nordlichtes kann man auch in dem Fall auf die Änderungen der Korpuskularstrahlungen der Sonne zuverlässig folgern, wenn noch keine Beobachtungen über die Anzahl der Sonnenflecke und über magnetische Stürme zur Verfügung stehen.

Das Buch besteht aus zwei Teilen, der erste Teil geht auf 438 Jahre zurück und vermittelt für 224 Fälle katalogmäßig 242 Beschreibungen. Der Katalog berichtet über Zeit und Ort der Wahrnehmungen, die Stärke der Nordlichtstrahlung, beschreibt die beobachtete Erscheinung und nennt auch den Namen des Beobachters. In den Fällen, wo den Verfassern über Störungen des Erdmagnetfeldes Daten vorlagen, werden diese angegeben. Bis 1872 wurde zur Kontrolle der Beobachtungen der Katalog von *H. Fritz* benutzt, während für später die internationalen magnetischen Kennzahlen und die Untersuchung der Wirkung der siebenundzwanzigtägigen Wiederholungstendenz der Sonnentätigkeit verwendet wurden.

Der zweite Teil enthält die Aufarbeitung des im Katalog berichteten Wahrnehmungsmaterials, hier geben die Verfasser die Häufigkeit des Nordlichtes in Ungarn in Abhängigkeit von der geographischen Breite an. Außer der Untersuchung der täglichen und jährlichen Änderungen der Nordlichthäufigkeit auf Grund des zur Verfügung stehenden Materials beschäftigen sie sich auch mit der Häufigkeitsänderung des Nordlichtes mit dem Mondmonat. Der zweite Teil behandelt den Zusammenhang des Nordlichtes mit der Sonnentätigkeit, wobei als Ergebnis der genauen Analyse sowohl in der Nordlichtänderung als auch in der Sonnentätigkeit die Vielheit der Säkularperioden gefunden wird, die von der Haleschen Periode bis zu einer hundertsiebenundsiebzigjährigen Periode angegeben werden. Durch die Analyse der Planetenkonstellation geben die Verfasser auch eine sinngemäße Begründung dieser Periode.

Schließlich beschäftigen sich die Verfasser mit einem sehr komplizierten Problem. Sie untersuchen zur näherungsweisen Bestimmung der in den unteren und oberen Luftschichten vor sich gehenden Erscheinungen den Zusammenhang zwischen der Nordlichthäufigkeit und den Klimaschwankungen. Sie benutzen bei diesen Untersuchungen das Erscheinen des Nordlichtes als Indikator der oberen Luftschichterwärmungen, die eine Folge der Korpuskularstrahlung der Sonne sind. Diese Untersuchungen zeigen, daß das Studium der transienten Erwärmung der oberen Luftschichten durch die Korpuskularstrahlung bei der Klärung der Zusammenhänge zwischen oberer und unterer Luftschicht bessere Ergebnisse liefert als die langsamen, sich regelmäßig wiederholenden Änderungen.

Ein wesentlicher Teil des Buches besteht in einem Katalog der Nordlichterscheinungen in Ungarn von 1523 bis 1960 und hat deshalb auch geschichtlichen Wert. Die originalen Berichte über Beobachtungen von Nordlicht ermöglichen ein Studium der Entwicklung naturwissenschaftlicher Denkungsart. Die bunten Beilagen machen uns mit der frühen Darstellung des Nordlichtes bekannt. Die Arbeit wird durch ein großes Schrifttumregister ergänzt.

P. Bencze

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1964. III. 7. — Terjedelem: 23,25 (A5) ív, 75 ábra, 2 melléklet

64.58562 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

INDEX

Halmos, F.: Die einheitliche Untersuchung und Ausgleichung der Wildschen Sektorenmethode — The Uniform Analysis and Adjustment of Wild's Sector-Method — L'analyse et la compensation de la méthode des secteurs de Wild — *Хальмош, Ф.:* Единое рассмотрение и уравнивание секториального метода Вильда... 3

Alpár, Gy.—Somogyi, J. Über die Fehlerverteilung der räumlichen Aerotriangulation — — On the Error Distribution in Spatial Aerial Triangulation — De la distribution des erreurs de la triangulation aérienne spatiale — *Альпар, Д.—Шомоди, И.:* Распределение погрешностей при пространственной аэротриангуляции ... 29

Ádám, A.—Verő, J.: Ergebnisse der regionalen tellurischen Messungen in Ungarn — Results of the Regional Telluric Surveys in Hungary — Les résultats des mesures telluriques régionales en Hongrie — *Адам, А.—Верё, Й.:* О результатах региональной съемки, проведенной на территории Венгрии методом теллурических токов 63

Ádám, A.—Verő, J. Sonnenaufgangseffekt in den Erdströmen — Sunrise Effect on Earth Currents — L'influence du lever de soleil sur les courants telluriques — *Адам, А.— Верё , И.:* О влиянии восхода Солнца на земные токи 79

Bencze, P.: Über den täglichen und jährlichen Gang der luftelektrischen Unruhe — On the Daily and Annual Variation of the Atmospheric Electrical Agitation — Sur la variation diurne et annuelle de l'inquiétude électrique de l'atmosphère — *Бенце, П.:* О суточных и годовых вариациях атмосферного электрического беспокойства 87

Forrai, S.: Simple Determination of the Direct Tangent of the Bearing of an Adjusting Straight Line which Satisfies the Condition $\Sigma\, pe^2 = \min!$ — Die einfache und unmittelbare Bestimmung der Richtungstangente einer nach dem Grundsatze $\Sigma pe^2 = \min!$ eingeschalteten ausgleichenden Geraden — Détermination simple de la tangente de direction directe de la droite de compensation satisfaisant au principe $\Sigma pe^2 = \min!$ — *Форраи, Ш.:* Простой способ определения непосредственного углового коэффициента уравнивающей прямой по принципу $\Sigma\, pe^2 = \min!$... 97

Такач, Э.: Регистрирующий магнитометр для магнито-теллурических измерений — *Takács, E.* Recording Magnetometer for Magnetotelluric Measurements — Registrierender Magnetometer für magnotellurische Messungen — Magnétomètre enregistreur pour mesures magnéto-telluriques 109

Hazay, I.: Dimension of the Subsidiary Quantities of Adjustment — Dimensionen der Hilfsgrößen der Ausgleichung — La dimension des quantités auxiliaires de la compensation — *Хазаи, И.:* О размерности вспомогательных величин выравнения 123

Halmos, F.: Die rasche Auflösung der Normalgleichungen im allgemeinen Falle der Ausgleichung — Quick Solution of Normal Equations in General Case of Adjustment — Une solution rapide des équations normales dans le cas général de la compensation — *Хальмош, Ф.:* Ускоренное решение нормальных уравнений в общем случае выравнивания 131

Mitter, J.: Das meteorologische Problem der elektronischen Entfernungsmessung — The Meteorological Problem of Electronic Distance Measurements — Le problème météorologique de la détermination électronique des distances — *Миттер, Й.:* О метеорологической проблеме электронного дальноизмерения 159

Milasovszky, B.: Über die Berechnung der Basisnetze mit gemessenen Richtungen — On the Calculation of the Base Quadrilateral in the Method of Series — Calcul du réseau de développement quadrilatère à mesures de direction — *Милашовски, Б.:* О вычислении четырехугольного базиса пеленгации 181

Tárczy-Hornoch, A.: Determination of the Adjusting Straight Line within Several Points, and the Major and Minor Axes of the Telluric Station Ellipse — Über die Bestimmung der Ausgleichsgeraden zwischen mehreren Punkten bzw. der großen und der kleinen Achsen der tellurischen Stationsellipse — De la détermination de la droite de compensation entre plusieurs points, resp. des deux axes de l'ellipse caractérisant la station d'observation tellurique — *Тарци-Хорнох, А.:* Об определении уравнивающей прямой между несколькими пунктами, т. е. об определении большой и малой осей эллипса теллурических станций 213

Frau Verő-Heténi, M.: Die Ausgleichung der Punkteinschaltung durch Längenmessungen mit der Methode der Ausgleichung der bedingten Beobachtungen — The Adjustment of Fixed Point Interpolation in Lineal Measurements by Using the Method for the Adjustment of Fictitious Observations – Compensation du rattachement des points par mesures des longueurs selon la méthode de compensation des observations conditionnelles — *Верё-Хетени, М.:* Выравнение привязки пунктов дальноизмерения методом выравнения условных наблюдений 229

Tárczy-Hornoch, A.: Über die Ausgleichung der Streckennetze mit Koordinaten nach der Methode der bedingten Beobachtungen – The Adjustment of Network with Measured Sides by Coordinates according to the Method of Conditional Observations — Compensation par coordonnées des quadrilatères aux côtés mesurés, selon la méthode des observations conditionnelles — *Тарци-Хорнох, А.:* Выравнение квадратов сети дальноизмерения координатами по методу условных измерений 241

Некрасова, К.: О геодезических словарях — *Nekrassowa, K.* On Geodetic Dictionaries — Über geodätische Wörterbücher — Étude sur les dictionnaires de géodésie 257

Book review — Buchbespechung — Compte rendu de livres — Обзор книг

A. Réthly — Z. Berkes: Nordlichtbeobachtungen in Ungarn (1523—1960), *P. Bencze* . 263

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

67,— Ft

Index: 26.025

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT
A. GELEJI

TOMUS 47 FASCICULI 3—4

SERIES GEODAETICA ET GEOPHYSICA

TOMUS 5 *FASCICULI 3—4*

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1964

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Ungarn

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

ANALYSIS OF THE MERIDIAN METHOD OF TIME DETERMINATIONS

B. MILASOVSZKY

DR. OF TECHNICAL SCIENCES, TECHNICAL UNIVERSITY OF HEAVY INDUSTRIES, MISKOLC

[Manuscript received February 8, 1963]

This method has been in use for several decades on the Laplace-stations in Hungary.

Certain differences in the application of the method are possible, according to individual considerations, experiences taken over from predecessors, and instrumental equipment.

These differences may concern 1. the star program and the observation, 2. the instrument constants and personal errors, 3. the numerical evaluation.

Problems, resp. alternatives partly of observation, but mainly those of the numerical evaluation are investigated by the author. The essential problems are: selection of the star program, weighting of time transits, alternatives of the exact, resp. approximative determination of azimuth constant and clock correction, further of their mean square errors.

1. Foreword

Although for the absolute determination of position of terrestrial surface points has already reached the age of electronical methods, the use of procedures based on astronomical observations is still far from becoming obsolete. On the contrary: they will presumably not lose their well-based value even in the future. Therefore, to be occupied with these, does not seem a futile work.

In this age, the case of establishing not only continental but — beyond these — intercontinental triangulation networks interconnecting the former, have become timely. Today, however, only a single network of this kind exists: the totality of basic stations obtained through geographical position determinations — the so-called Laplace-stations.

On the other hand, it is a well-known fact that the absolute methods of position determination cannot cope, by the nature of the thing itself, with strictly geodetical, i.e. relative methods of position determination in respect to accuracy. It seems to be well placed, therefore, to examine and to promote all those possibilities which may be suitable to increase the accuracy of the absolute position determination methods. Of all the geographical coordinates, the determination of longitude is the most circumstantial one, being essentially an exact determination of time. Hence, the essential subject of the present investigations is a greatest possible increase of its accuracy.

On the one hand, the nature of time determinations, is of common knowledge; the respective basic notions, on the other, were already discussed in our study [1].

2. Exact methods of time determination

The determination of clock correction, also on the Laplace-stations of the primary triangulation network, can be made according to different methods. Among these, some experimental observations were made in Hungary, with the CINGER method in the years 1948 and 1949 [2]. As to the DOELLEN method [3], this was frequently applied in Hungary, mainly in azimuth observations and in determinations of latitudes. For the purpose of longitude determinations on the Laplace-stations, however, it is the meridian method that for decades has been used nearly exclusively. In the first place for this method, an Askania-type passage instrument, further Wild T4 type theodolites were used.

According to international experts' opinion, for determinations on field stations, the meridian method on account of its simplicity and perspicuity is the most suitable. In the following, the author wishes to give an analysis of the meridian method.

In 1952, P. N. DOLGOV published a volume of 400 pages in Russian, entitled "Time determinations with the passage instrument in the meridian" [4]. The high merit of DOLGOV is, apart from thoroughness and detail, that he collected the entire international literature referring to this subject, since he listed, in the literary list of his book, some 186 books and articles, all related to the subject in question.

The author of the present study already in 1941, carried out his own investigations, independently of the work mentioned.

3. Execution of the observation and reduction of time transits in the meridian method

As is known, an endeavour was made when setting up the instrument to bring the vertical sighting plane of the telescope as near as possible to the plane of the local meridian; that is, to keep the angle k in the formula (1), known as azimuth constant or azimuth error, as small as possible, but surely smaller than $1\,s = 15''$.

The transit time of each star is recorded on the chronograph tape. In "half-time", the telescope is lifted and reversed. In this way, partly the collimination error will be regarded as eliminated and partly the evaluation of the recorded transit times U^* by mean computation — from 10—10 symmetrical pairs of values — will be greatly simplified.

According to MAYER's reduction formula used in Hungary, the transit time U, referred to the instrument meridian, is

$$U = U^* + \sigma + Ii + K\,k\,. \tag{1}$$

Here, the member σ represents the added reductions arising from the finite width of the contacts of the impersonal micrometer, from the lost motion of its screw, also the daily aberration. Further, i means the inclination of the telescope axis to the horizontal. Inclination coefficient I and azimuth coefficient K can be formed according to the corresponding tables of ALBRECHT's book [5].

If the formula (1) of the reduced time transits is completed by a member $(U - E)g$ produced by the clock rate g, then the transit time of each observed star furnishes a value for clock correction ΔE, valid in the mean epoch E, in the following form:

$$\Delta E = a - \{U^* + \sigma + Ii + (U - E)g + Kk\}\,. \tag{2}$$

The members collected under the symbol σ can be reliably obtained by a large number of experimental observations. Due consideration of inclination i is ensured by an axial level of a constant $1''$. Finally, the clock rate g can be obtained with high accuracy by the reception of radio time signals.

On the other hand, azimuth constant k is a factor, the determination of which is relatively more uncertain. This is why here, trying to investigate the possibilities of increasing the accuracy of the meridian method, a considerable role must be given, beside the main problem of the clock correction ΔE, to the case of the azimuth constant k, too. Introducing the shorter expression

$$U' = U^* + \sigma + Ii + (U - E)g \tag{3}$$

in (2), n number of values will be obtained, in case of the observation of the time transit of n number of stars, in the following form:

$$\begin{aligned}
&\Delta E = (a_1 - U_1') - K_1 k\,; && (a_1 - U_1') = K_1 k + 1\cdot\Delta E\,;\\
&\Delta E = (a_2 - U_2') - K_2 k\,; && (a_2 - U_2') = K_2 k + 1\cdot\Delta E\,;\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots && \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots && \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Delta E = (a_n - U_n') - K_n k\,; && (a_n - U_n') = K_n k + 1\cdot\Delta E\,.
\end{aligned} \tag{4}$$

These are such observational equations, where k and ΔE are the two unknowns, further preliminary clock corrections $a_i - U_i'$ represent the observed values, and finally the azimuth coefficients K are the error-free parameters.

4. The principle of the selection of the star program

Since in the astronomical annual volume [6] a large choice of many times determined, so-called "fundamental stars" are at disposal, the question arises, what principle should be followed in the selection of the 12...20 stars to be observed from one evening to the other evening?

This is an intricate complex question in itself, in the settling of which, similarly to numerous other questions to be discussed later, also the subjective reasons, inevitably play a certain role. To a certain extent, therefore, it will always remain a matter of opinion, whether the evidence of one standpoint or the other should be accepted as strictly the one. The reason for this is that many such factors are involved which cannot be expressed mathematically, such as athmospherical anomalies.

The problem of the star program was discussed in a separate study [7]. Here, therefore, only so much is mentioned that, following the foreign practice, the principle of "azimuth balance" of the small zenith distance, so-called *time stars* have also become a rule in home relations. This principle was exchanged by the author, during the period of his practical astrogeodetical work in 1943—1950, for the principle of "zenith symmetry" of the time stars. The result of the investigation in [7] is reflected by the following comparison of the weight formulas of the unknowns k and ΔE sought for:

Case of azimuth balance:		Case of the zenith symmetry:	
$p_{\Delta E} = n\cos^2\varphi - [\sin^2 z]$	(5A)	$p_{\Delta E} = n\cos^2\varphi - [\sin^2 z]\cos^2\varphi$	(5Z)
$p_k \cong [zz]$	(6A)	$p_k \cong \dfrac{[zz]}{1 + \dfrac{[zz]}{n}\tan^2\varphi}$	(6Z)

The principle of zenith symmetry can be well approached by the principle

$$[z] \to 0 \tag{7}$$

of zenith balance, introduced by the author in 1943 on the Laplace-station called *Bugaci Füzeshegy*, since it assures, involving the same quantity of labour, a higher degree of accuracy for the clock correction the wanted ΔE, than the principle of azimuth balance,

$$[K] \to 0 \tag{8}$$

applied earlier.

"Classical" procedures for the determination of k and ΔE

Within the limits of the meridian method, three such procedures will be outlined, which can be accepted as not strict, but well approximating solutions of the observational equations (4).

According to the conception followed in numerous instances abroad too, it is assumed that equations (4) result exclusively from the observation of fundamental "time stars" of small meridian-zenith distance z. Their sum equation solved for ΔE is evidently:

$$\Delta E = \frac{[\alpha - U']}{n} - \frac{[K]}{n} k\,, \tag{9}$$

where, however, the azimuth constant k is still unknown.

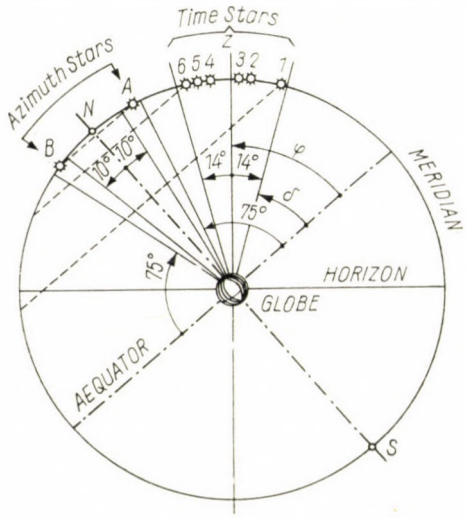

Fig. 1

In order to determine k, the programm will be completed, beside the time stars, with some *circumpolar stars* of wide zenith distances. Besides this, an effort was made to observe a part of these in upper, another part in lower culmination. This system is illustrated in outlines by Fig. 1, showing also 3 northern and 3 southern, i.e. altogether 6 time stars in the

$$-14° < z < +14°$$

sector, further one circumpolar star in each part of the $(80° > \delta > 75°)$ sector, one in the upper, one in the lower culmination.

In the following, the three alternatives to be denoted by *a)*, *b)* and *c)* are to be distinguished in the question of the determination of k.

In principle, *alternative a)* requires a single circumpolar star. To be observed are the instants U_u and U_l of its upper (u) and of its lower (l) culmination, adjoining chronologically. From the two equations

$$\Delta E = (\alpha - U)_u - K_u k \quad \text{and} \quad \Delta E = (\alpha \pm 12^h - U)_l - K_l k\,, \tag{10}$$

thus obtained, the value of the required azimuth constant usable in (9) is:

$$k = \frac{(\alpha \pm 12^h - U)_l - (\alpha - U)_u}{K_l - K_u} . \tag{11}$$

Since the transit times of one and the same star are involved, only the calculable influence of precession, nutation and aberration is in force in the difference $(\alpha_l - \alpha_u)$, but the error of right ascension falls out.

As against this advantage, the disadvantages are more serious, namely: partly the trend of the clock rate during the entire 12 hours interval must be known, partly the azimuth constant is assumed as constant for half a day, which is problematic.

According to the *second alternative, to be marked here by b)*, the time transits are employed, not of a single, but of two circumpolar stars the right ascensions of which differ by nearly 12 hours, i.e. one is observed in upper u, the other in lower l culmination. The value k of the azimuth constant is also given here by (11), but the indices u and l refer to two different stars. This method gives reliable results, but it is advisable to check these analogously against another similar pair of azimuth stars.

In the sense of *alternative c)*, also a few circumpolar stars are interspersed among the n number of time stars of the program, possibily alternatingly in both culminations. From the transit times of the altogether q number of circumpolar stars lettered A, B, $C \ldots$ Q, following intermediary equations will be derived to the analogy of (4):

$$\begin{aligned} \Delta E &= (\alpha_A - U'_A) - K_A k ; \\ \Delta E &= (\alpha_B - U'_B) - K_B k ; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta E &= (\alpha_Q - U'_Q) - K_Q k . \end{aligned} \tag{12}$$

From each of these the sum equation (9) is subtracted, and are solved for the already single unknown k, according to the following:

$$k = \frac{(\alpha - U') - \dfrac{[\alpha - U']_t}{n}}{K_A - \dfrac{[K]_t}{n}} \tag{13}$$

In this sense, values k_A, k_B, $\ldots k_Q$ of the azimuth constants are obtained. It is usual, in the alternative outlined, to accept the simple arithmetic mean value

$$k = \frac{k_A + k_B + \ldots + k_Q}{q} = \frac{[k]_P}{q} \tag{14}$$

obtained in this way, as the final azimuth constant and to apply it in (9). In this way, the final clock correction is:

$$\Delta E = \frac{[\alpha - U']}{n} - \frac{[K]_t}{n}\,\frac{[k]_P}{q}\,. \tag{15}$$

The corresponding fictitious corrections are then:

$$\begin{aligned} v_1 &= \Delta E - \{(\alpha_1 - U_1') - K_1 k\} = \Delta E - L_1 \\ v_2 &= \Delta E - \{(\alpha_2 - U_2') - K_2 k\} = \Delta E - L_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= \Delta E - \{(\alpha_n - U_n') - K_n k\} = \Delta E - L_n. \end{aligned} \tag{16}$$

It is usual to form the mean square error of such a fictitious observation L according to

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \tag{17}$$

while the weight, resp. the mean error of the adjusted clock correction according to

$$p_{\Delta E} = n\,, \quad \text{resp} \quad \mu_{\Delta E} = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_{\Delta E}}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{n}}\,. \tag{18}$$

The approximative solution *c)*, introduced on the basis of (12)—(18), was for decades followed, by the astrogeodetical group of the Hungarian State Surverying too, when interpolating 3...5 circumpolar stars among 12...16 time stars in their all-evening program. In addition, the circumpolar stars were used in alternating culminations, and in the presented way they were directly applied only in the formation of the azimuth constant. Here, as a common reference epoch E — the so called "mean epoch" — the algebraic mean of the transit times of only the time stars appears, in the form

$$E = \frac{U_1 + U_2 + \ldots + U_n}{n} = \frac{[U]_t}{n}\,, \tag{19}$$

disregarding the circumpolar stars.

5. The problem of weighting the transit times

The approximating evaluation alternative *c)* discussed was in use in Hungary as well as abroad without distinguishing between the accuracy of the transit times of the time stars on the one hand, and that of the circum-

polar stars on the other; that is, merely unit weight observations were assumed. Thus, in the thirties, the *Commission Géodésique Baltique* [8], when measuring the international longitude ring of the Baltic areas, that is, even in works of the highest order, still used unit weights in connection with the alternative *c)*. Later, the *Commission Géodésique Suisse* [9] introduced the use of different weights, so that they already evaluated the observation data of the meridian method according to the principle of least square sums.

No doubt, the actual situation is concluded more realistically, if the very essential differences existing between the accuracies of the transit times of stars observed under different declinations δ are considered. This circumstance is taken into consideration by weighting the transit times. In the derivation of the corresponding weight relation, the point of departure is that the right ascensions and the transit times in the expression for the clock correction,

$$\Delta U = \alpha - U\,, \tag{20}$$

are values independent of each other, consequently the law of error of a function of independent observed quantities may be applied to (20):

$$\mu_{\Delta U}^2 = \mu_\alpha^2 + \mu_U^2 \tag{21}$$

where each member represents the square of the mean square error of clock correction, right ascension and transit time, in succession. Further if the mean error of the right ascension of a star in the Equator, i.e. when $\delta = 0$, is denoted by μ_{AE}, mean error of the α of a star under any δ will be:

$$\mu_\alpha = \mu_{AE} \sec \delta\,. \tag{22}$$

As to the mean error μ_U of the observed transit times, the relation derived on page 21 of ALBRECHT's book [5], neglecting the influence of the inclination error i, can be applied:

$$\mu_U^2 = a^2 + \left(\frac{b}{V}\right)^2 \sec^2 \delta. \tag{23}$$

Here, a stands for the error arising from following the star with the moving wire of the impersonal micrometer, b represents the error in bisecting the star with the wire, finally V is the magnification of the telescope. Accordingly, the mean error of the clock correction, on the basis of (21), is:

$$\mu_{\Delta U}^2 = \mu_\alpha^2 + \mu_U^2 = \mu_{AE}^2 \sec^2 \delta + a^2 + \left(\frac{b}{V}\right)^2 \sec^2 \delta. \tag{24}$$

Data for the m. s. error μ_α of the right ascension are contained in the astronomical yearbooks. As to the mean error μ_U of the observed time transits

this can be determined in an elementary way according to the corresponding readings of the chronometer tape. The adjustment of the μ_U values on the basis of (23) furnishes a and b coefficients characteristic of the observer. As informatory data concerning the order of magnitude of the latters, it can be mentioned that these are usually values around

$$a = 0.02 \text{ and } b = 2.2,$$

i.e. factor a is insignificant as compared with b.

Hence, putting $a \sec \delta$ in (24), instead of a, is an insignificant neglection from the point of view of the problem of weighting. Thus, it will be:

$$\mu_{\Delta U}^2 \cong \left\{ \mu_{AE}^2 + a^2 + \left(\frac{b}{V} \right)^2 \right\} \sec^2 \delta \cong \frac{1}{F} \sec^2 \delta . \tag{25}$$

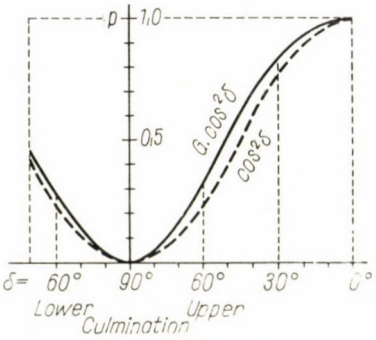

Fig. 2

Accordingly, the weight of the clock correction ΔU will be:

$$p_{\Delta U} \cong F \cos^2 \delta . \tag{26}$$

The approximative weight expression written as in (26) satisfies practical needs. In this way, the accuracy of each clock correction value $(a - U)$ can be estimated as an exclusive function of the declination of the star observed.

The weight expression which satisfies reality better is more complicated, since the more exact weights depend, beside the declinations of the stars observed, also from the meridian-zenith distances of the latters. Therefore, according to the conclusions drawn from numerous experimental observations, the actual reality is far better approximated by the weight expression

$$p_{\Delta U} = G \cos^2 \delta , \tag{27}$$

instead of (26). Factor G here was determined empirically, from the observation of numerous time transits extending over several years, namely, as a function

of declination δ and, at the same time, of zenith distance z, basing on the registration accuracy of each contact of the impersonal micrometer. According to the conclusions drawn from the experimental observations aiming at the determination of the weight function (27), the course of the variations of G is such, that the value of G is equal to the unit, when $\delta = 0$, and it increases, during the increase of the star declination from zero to 90°, from 1.0 to 1.5. This process is illustrated by Fig. 2, the latter being based on the observation results of stations on the latitudes 46°...48° of the northern hemisphere. Concerning stars observed in lower culmination, the curve falls more rapidly than it rises in upper culmination. At the same time, this process corresponds to the generally known experience, that exactly the observation of the meridian transit times of circumpolar stars is that which develops more accurately, than would correspond to the simple relation (26).

6. The azimuth constant expressed by centre of gravity coordinates

Let us assume that the transit times U^* of n number of time stars and q number of circumpolar stars of an observed evening program are reduced according to (3), and following l values, representing the observation results of different weights, were formed:

$$\begin{aligned} l_1 &= \alpha_1 - U'_1; \quad l_2 = \alpha_2 - U'_2; \quad \ldots \quad l_n = \alpha_n - U'_n; \\ l_A &= \alpha_A - U'_A; \quad l_B = \alpha_B - U'_B; \ldots \quad l_Q = \alpha_Q - U'_Q. \end{aligned} \tag{28}$$

In observational equations (4) and (12), these are the absolute terms, the weights of which are, according to (26):

$$\begin{aligned} p_1 &= \cos^2 \delta_1 ; \quad p_2 = \cos^2 \delta_2 ; \quad \ldots \quad p_n = \cos^2 \delta_n \\ p_A &= \cos^2 \delta_A ; \quad p_B = \cos^2 \delta_B ; \quad \ldots \quad p_Q = \cos^2 \delta_Q . \end{aligned} \tag{29}$$

The corresponding azimuth factors $K_1; K_2; \ldots K_n$, resp. $K_A; K_B; \ldots K_Q$ are to be computed according to

$$K = \sin(\varphi \pm \delta) \sec \delta \quad \left\{ \begin{matrix} \text{upper} \\ \text{lower} \end{matrix} \right\} \text{culm. case}. \tag{30}$$

In order to obtain a representation illustrating the time determination alternative *c)*, refined by weighting, the K and l values are to be considered as abscissas, resp. ordinates of a fictitious system of plane points. Let us group the data of small zenith distance time stars separately and form the coordinates

of these, as those of the centre of gravity S of a fictitious group of points:

$$K_{st} = \frac{p_1 K_1 + p_2 K_2 + \ldots + p_n K_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{[pK]_t}{[p]}; \tag{31}$$

$$l_{st} = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \ldots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{[pl]_t}{[p]}, \tag{32}$$

where indices s and t refer to the fact that the centre of gravity S furnished exclusively by time stars — disregarding the circumpolar stars — is in question.

If now all K and l, further K_{st} and l_{st} values are represented as abscissas and ordinates in a plane rectangular system of axes, then the picture drawn

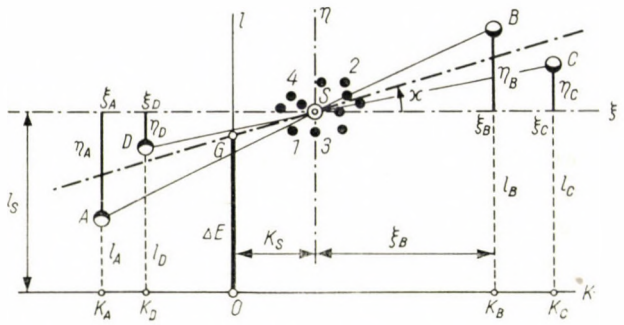

Fig. 3

in Fig. 3. will be obtained. In this, centre of gravity S is symbolized by two empty circles, the time stars by full circles, the circumpolar stars by half-full circles.

Let us put a cross of axes ξ, η parallel with the K, l system across the point S. The coordinates of the group of points relating to this, are:

$$\begin{aligned} &\xi_i = K_t - K_{st}; \quad \eta_i = l_t - l_{st} \quad \text{(time stars)} \\ &\xi_P = K_P - K_{st}; \quad \eta_P = l_P - l_{st}. \quad \text{(circumpolar stars)} \end{aligned} \tag{33}$$

The value of the azimuth constant, formed although in the sense of (14), but by considering the different weights (26), is:

$$k = \frac{1}{[p]_P}(p_A k_A + p_B k_B + \ldots + p_Q k_Q), \tag{34}$$

where

$$[p]_P = \cos^2 \delta_A + \cos^2 \delta_B + \ldots + \cos^2 \delta_Q = [\cos^2 \delta]_P \tag{35}$$

further, considering (13), (31) and (32):

$$k = \frac{1}{[p]_P}\left(p_A \frac{l_A - l_{st}}{K_A - K_{st}} + p_B \frac{l_B - l_{st}}{K_B - K_{st}} + \cdots + p_Q \frac{l_Q - l_{st}}{K_Q - K_{st}}\right). \tag{36}$$

In the (33) centre of gravity system:

$$k = \frac{1}{[p]_P}\left(p_A \frac{\eta_A}{\xi_A} + p_B \frac{\eta_B}{\xi_B} + \cdots + p_Q \frac{\eta_Q}{\xi_Q}\right). \tag{37}$$

Here, the individual quotients (η/ξ) represent direction tangents. Accordingly, azimuth constant (37) is nothing but the weighted mean value of the direction tangents (η/ξ) formed on the basis of time transit observations. In Fig. 3, the four straight lines of the four direction tangents resulting from the individual polar star observations, passing through point S, were drawn with thin full lines, the straight line of the direction tangent corresponding to the mean value k of the formers in (37) — with a heavier dash-and-dot line. The latter might also be called "clock-correction" line, since it passes through the centre of gravity S and the ordinate of any of its points represents a clock correction belonging to a certain azimuth factor K as to abscissa. The degree of accuracy of the clock correction obtained in this way depends on what measure of exactness can be attributed to the determination of point S and azimuth constant k.

The clock correction line discussed here may claim only an approximative character, because 1. merely the time stars of the observed evening program, and not all of its time stars and circumpolar stars were considered in the coordinates (31) and (32) of the point S, 2. Especially, the forming of (37) defining the azimuth does not correspond to the principles of exact adjusting computations.

For a given observation material, a single exact clock correction line, but several approximations of the latter can exist. Either the centre of gravity S or the directioornangent k will change, the clock correction ΔE, intercepted on the axis of ordinates by the clock correction line will, necessarily be different.

7. The accuracy of the azimuth constant k

(classical alternative: c)

In an analysis of the time determination methods, evidently an essential part must be played not only by the unknowns k and ΔE themselves, but also by their accuracy. As to the classical method in question, the exposition of the corresponding mean errors μ_k and $\mu_{\Delta E}$ according to the law of errors is wanted for the following to be made.

Departing from the azimuth constant relation written up in (36), this is to be rewritten, taking (32) into consideration, according to the following:

$$k = \frac{1}{[p]_P}\left(p_A \frac{l_A}{\xi_A} + p_B \frac{l_B}{\xi_B} + \cdots + p_Q \frac{l_Q}{\xi_Q}\right) - \frac{1}{[p]_P}\left[\frac{p}{\xi}\right] l_{st}. \qquad (38)$$

The first member in brackets contains only the circumpolar stars, while the straight brackets include the fictitious observations l of the time stars; consequently the law of error of a function of independent quantities can be applied to (38). Accordingly it is valid for the mean error μ_k of the azimuth constant

$$\mu_k^2 = \frac{1}{[p]_P^2}\left(p_A^2 \frac{\mu_A^2}{\xi_A^2} + p_B^2 \frac{\mu_B^2}{\xi_B^2} + \cdots + p_Q^2 \frac{\mu_Q^2}{\xi_Q^2}\right) + \frac{1}{[p]_P^2}\left[\frac{p}{\xi}\right]_P^2 \mu_{st}^2 \qquad (39)$$

Introducing the mean square error μ_0 of the unit weight:

$$\mu_P^2 = \frac{\mu_0^2}{p_P} \quad \text{and} \quad \mu_{st}^2 = \frac{\mu_0^2}{[p]_t}, \qquad (40)$$

according to which the expression (39) of the mean error of the azimuth will now be transformed as follows:

$$\mu_k^2 = \frac{\mu_0^2}{[p]_P^2}\left(\frac{p_A}{\xi_A^2} + \frac{p_B}{\xi_B^2} + \cdots + \frac{p_Q}{\xi_Q^2}\right) + \frac{1}{[p]_P^2}\,\frac{\mu_0^2}{[p]_t}\left[\frac{p}{\xi}\right]_P^2, \qquad (41)$$

or, passing over to the weight p_k of the azimuth constant and factoring out:

$$\frac{1}{p_k} \equiv \frac{\mu_k^2}{\mu_0^2} = \frac{1}{[p]_P^2}\left(\left[\frac{p}{\xi\xi}\right]_P + \frac{1}{[p]_t}\left[\frac{p}{\xi}\right]_P^2\right). \qquad (42)$$

This will then be, with fictitious observations $l = (a - U)$ of various accuracy, the expression of the weight reciprocal of the azimuth constant. Assuming an equal degree of accuracy of all observations, the formula (42) will evidently take the form:

$$\frac{1}{p_k} \equiv \frac{\mu_k^2}{\mu_0^2} = \frac{1}{q^2}\left(\left[\frac{1}{\xi\xi}\right]_P + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\xi}\right]_P^2\right). \qquad (43)$$

The resulting clock correction ΔE expressed by centre of gravity coordinates

(classical alternative: c)

Let us now pass on to the examination of the mean square error of the clock correction. Since, also now, observations of different weights are assumed, the formula of the clock correction ΔE, written in (9), will thus be changed:

$$\Delta E = \frac{[pl]_t}{[p]_t} - \frac{[pK]_t}{[p]_t} k = l_{st} - K_{st} k, \qquad (44)$$

where index t only refers to the summation of the time star data in question. Besides, the interpretation of ΔE according to Fig. 3 as the intercept OG cut off the axis of ordinates by the straight line SG, remains unchanged. Consequently, according to (44) and (38):

$$\Delta E = l_{st} - K_{st}\left\{\frac{1}{[p]_P}\left(p_A\frac{l_A}{\xi_A} + p_B\frac{l_B}{\xi_B} + \cdots + p_Q\frac{l_Q}{\xi_Q}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{[p]_P}\left[\frac{p}{\xi}\right]_P l_{st}\right\} \tag{45}$$

and after possible factoring out:

$$\Delta E = l_{st}\left(1 + \frac{K_{st}}{[p]_P}\left[\frac{p}{\xi}\right]_P\right) - \frac{K_{st}}{[p]_P}\left(p_A\frac{l_A}{\xi_A} + p_B\frac{l_B}{\xi_B} + \cdots + p_Q\frac{l_Q}{\xi_Q}\right). \tag{46}$$

The accuracy of the clock correction (classical alternative : c)

And now, taking (40) into consideration, for the mean error of the clock correction is obtained:

$$\mu^2_{\Delta E} = \frac{\mu_0^2}{[p]_t}\left(1 + \frac{K_{st}}{[p]_P}\left[\frac{p}{\xi}\right]\right)^2 + \mu_0^2\left(\frac{K_{st}}{[p]_P}\right)^2\left(\frac{p_A}{\xi_A^2} + \frac{p_B}{\xi_B^2} + \cdots + \frac{p_Q}{\xi_Q^2}\right). \tag{47}$$

Hence, the weight reciprocal of the clock correction is:

$$\frac{1}{p_{\Delta E}} \equiv \frac{\mu^2_{\Delta E}}{\mu_0^2} = \frac{1}{[p]_t}\left(1 + \frac{K_{st}}{[p]_P}\left[\frac{p}{\xi}\right]_P\right)^2 + \left(\frac{K_{st}}{[p]_P}\right)^2\left[\frac{p}{\xi\xi}\right]_P. \tag{48}$$

It is characteristic for the star programs used in practice, that the abscissa K_{st} of the centre of gravity has a very low numerical value, allowing for the neglection of the extreme right member of (48) and also to use the approximation

$$\frac{1}{p_{\Delta E}} \cong \frac{1}{[p]_t}\left(1 + \frac{K_{st}}{[p]_P}\left[\frac{p}{\xi}\right]_P\right)^2. \tag{49}$$

A further, but less fine approximation would be to neglect also the additive member standing beside the unit in (49). This would lead to a rather simple form

$$p_{\Delta E} \cong [p]_t = [\cos^2 \delta_t] \tag{50}$$

of the adjusted clock correction. Nevertheless, according to (44), weight formula (50) would be valid only if

1. k were equal to zero, i.e. the plane of direction of the instrument coincided with the meridian plane, or

2. accidentally it so happened to select the time star group with the result $[pK]_t = 0$.

In case of all observations having the same weights, (50) would be replaced by the very simple approximative weight expression

$$p_{\Delta E} = n \tag{51}$$

usually accepted in practice. Consequently, the weight of the clock correction sought for is equal to the number of time stars included in the evening program. Hence, the expression (18) of the mean error of the clock correction is justifiable.

The mean square error of the unit weight

Azimuth constant k as well as clock correction ΔE itself is obtained on the basis of the observation of time transits, so neither is free of errors. Consequently, instead of (17), the use of the expression

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[pvv]_t + [pvv]_P}{n + q - 2}} \,. \tag{52}$$

is considered more justified. In actual practice, however, the q number of transits of circumpolar stars, by reason of their insignificant weight, is usually left out. In this case, the formula will be reduced to the form

$$\mu_0 \simeq \sqrt{\frac{[pvv]_t}{n - 2}} \tag{53}$$

Moreover, in the latter, in case of mere small zenith angle time stars, the different p_t weights can eventually be disregarded.

8. Variations of the classical solution c discussed above

In possession of the time transits of each individual evening star program and also taking the evaluation principle just outlined for a base, as is already visible from the foregoing, several different computation variations are possible, according to whether

1. the individual time transits are weighted separately according to (26), or all of them are assumed to have the same degree of accuracy;

2. the transits of all stars observed or only those of small zenith distance time stars are considered in the forming of the centre of gravity coordinates; this latter being the case in (31) and (32);

3. the azimuth constant is treated as data free of error, or its unavoidability in error and subsequently whether its real variations during the observation period are considered or not.

The possible variations according to 1—3 were already extensively discussed in [1] on the basis of a numerical example, therefore these will not be treated in detail in the present summarizing discussion.

9. Exact evaluation of the observations of the time determination according to the meridian method, based on the principle of least square sums

The observational equations in (4) serve as a point of departure. The right ascensions α taken from the Yearbook as well as the transit times U' observed and reduced according to (3) are encumbered with unavoidable errors. There being an exact adjustment in question, the weighting of observation results $l = (\alpha - U')$ according to $p = \cos^2 \delta$ must not be neglected. Consequently, it is not necessary to distinguish in principle between the values of the small zenith distance time stars on the one hand, and the values of the large zenith distance circumpolar stars on the other. Namely, the weighting according to declinations already assures a due influence on each pair of values K, l.

Hence, in general, the correction equations of the time stars and circumpolar stars can be written in a single common group. The corresponding corrections themselves are denoted by symbols v_a, resp. v_u. Thus, after (4):

$$\left.\begin{aligned} K_1 k + 1 \cdot \Delta E &= a_1 + v_{a1} - U'_1 - v_{U1} \\ K_2 k + 1 \cdot \Delta E &= a_2 + v_{a2} - U'_2 - v_{U2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_n k + 1 \cdot \Delta E &= a_n + v_{an} - U'_n - v_{Un} \end{aligned}\right\} \; n \text{ number of equations}$$

$$\left.\begin{aligned} K_A k + 1 \cdot \Delta E &= a_A + v_{aA} - U'_A - v_{UA} \\ K_B k + 1 \cdot \Delta E &= a_B + v_{aB} - U'_B - v_{UB} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K_Q k + 1 \cdot \Delta E &= a_Q + v_{aQ} - U'_Q - v_{UQ}\,. \end{aligned}\right\} \; q \text{ number of equations} \qquad (54)$$

Since α and U' bear the character of observations independent of each other, it is permitted to unite the related v_a and v_u corrections in a single fictitious correction V, that is

$$\begin{aligned} V_1 &= v_{a1} - v_{U1}\,; & V_2 &= v_{a2} - v_{U2}\,; & V_n &= v_{an} - v_{Un} \\ V_A &= v_{aA} - v_{UA}\,; & V_B &= v_{aB} - v_{UB}\,; & V_Q &= v_{aQ} - v_{UQ}\,. \end{aligned} \qquad (55)$$

The fictitious correction equations with the different p weights will accordingly be:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= K_1 k + 1 \cdot \Delta E - l_1 ; \quad p_1 = \cos^2 \delta_1 \\ V_2 &= K_2 k + 1 \cdot \Delta E - l_2 ; \quad p_2 = \cos^2 \delta_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_n &= K_n k + 1 \cdot \Delta E - l_n ; \quad p_n = \cos^2 \delta_n \end{aligned}\right\} n$$

$$\left.\begin{aligned} V_A &= K_A k + 1 \cdot \Delta E - l_A ; \quad p_A = \cos^2 \delta_A \\ V_B &= K_B k + 1 \cdot \Delta E - l_B ; \quad p_B = \cos^2 \delta_B \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_Q &= K_Q k + 1 \cdot \Delta E - l_Q ; \quad p_Q = \cos^2 \delta_Q \end{aligned}\right\} q \qquad (56)$$

The normal equations with two unkowns, formed from $(n + q)$ number of correction equations, are:

$$\begin{aligned} [pKK]\, k + [pK]\, \Delta E - [pKl] &= 0 ; \\ [pK]\, k + [p]\, \Delta E - [pl] &= 0 , \end{aligned} \qquad (57)$$

the so-called controlling sum equation of which is:

$$- [pKl]\, k - [pl]\, \Delta E + [pll] = [pVV] . \qquad (58)$$

Hence, the two unknowns sought for are:

$$k = \frac{[p]\,[pKl] - [pK]\,[pl]}{[pKK]\,[p] - [pK]^2} ; \qquad (59)$$

$$\Delta E = \frac{[pKK]\,[pl] - [pK]\,[pKl]}{[pKK]\,[p] - [pK]^2} . \qquad (60)$$

The mean error of the unit weight is:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{[pVV]}{n + q - 2}} . \qquad (61)$$

The weights of the unknowns:

$$p_k = \frac{[pKK]\,[p] - [pK]^2}{[p]} = [pKK] - \frac{[pK]^2}{[p]} \qquad (62)$$

$$p_{\Delta E} = \frac{[pKK]\,[p] - [pK]^2}{[pKK]} = [p] - \frac{[pK]^2}{[pKK]} \qquad (63)$$

Consequently, the mean square errors of the unknowns can be formed according to

$$\mu_k^2 = \frac{\mu_0^2}{p_k}, \qquad \text{resp.} \qquad \mu_{\Delta E}^2 = \frac{\mu_0^2}{p_{\Delta E}}. \tag{64}$$

10. The first form of the exact expression of the azimuth constant in the centre of gravity system

In the following, the formulas of the exact solutions will be transformed in the sense that they should be comparable with our foregoing results.

First of all, the numerator of the azimuth constant k in (59) will be completed by a member $[pK][pl]$, its denominator, at the same time, by a member $[pK]^2$ in positive and negative sense. After dividing with $[p]$:

$$k = \frac{[pKl] - [pK]\frac{[pl]}{[p]} - \frac{[pK]}{[p]}[pl] + [p]\frac{[pK]}{[p]}\frac{[pl]}{[p]}}{[pKK] - 2\frac{[pK]}{[p]}[pK] + [p]\left(\frac{[pK]}{[p]}\right)^2}. \tag{65}$$

Here, the coordinates of the centre of gravity of the system of K, l values will be recognized. While, however, in (31) and (32) only the data of the small zenith distance time stars are present, here also the K, l data of the large zenith distance azimuth stars are included. That is:

$$K_s = \frac{(p_1 K_1 + p_2 K_2 + \cdots + p_n K_n) + (p_A K_A + p_B K_B + \cdots + p_Q K_Q)}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) + (p_A + p_B + \cdots + p_Q)} = \frac{[pK]}{[p]}; \tag{66}$$

$$l_s = \frac{(p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n) + (p_A l_A + p_B l_B + \cdots + p_Q l_Q)}{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) + (p_A + p_B + \cdots + p_Q)} = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{[pl]}{p_{ls}}. \tag{67}$$

With these, (65) will take the form:

$$k = \frac{[pKl] - [pK]\,l_s - [pl]\,K_s + [p]\,K_s\,l_s}{[pKK] - 2\,[pK]\,K_s + [p]\,K_s^2}. \tag{68}$$

The sum terms will be developed, the multiplications carried out. After reduction:

$$k = \frac{p_1(K_1 - K_s)(l_1 - l_s) + \cdots + \cdots + p_Q(K_Q - K_s)(l_Q - l_s)}{p_1(K_1 - K_s)^2 + \cdots + \cdots + p_Q(K_Q - K_s)^2}. \tag{69}$$

The members in brackets represents such coordinates of the K, l system, which refer to the ξ, η axes passing through their own centre of gravity S of the system and parallel to the original cross of axes K, l. With these and with the weight coordinates as in (33) the azimuth constant k will be:

$$k = \frac{(p_1 \xi_1 \eta_1 + \cdots + p_n \xi_n \eta_n) + (p_A \xi_A \eta_A + \cdots + p_Q \xi_Q \eta_Q)}{(p_1 \xi_1^2 + \cdots + p_n \xi_n^2) + (p_A \xi_A^2 + \cdots + p_Q \xi_Q^2)} = \frac{[p\xi\eta]}{[p\xi\xi]} . \quad (70)$$

11. Expression of the mean error and weight of the exact azimuth constant by means of the centre of gravity coordinates ξ, η

To (70), the error law will be applied. The situation is facilitated by the fact that the reduced azimuth factors $\xi = K - K_s$ are free of errors, and merely the fictitious observations $\eta = l - l_s$ are charged with unavoidable errors. The mean errors of these η values will be denoted by μ and by the corresponding indexes:

$$\mu_k^2 = \frac{1}{[p\xi\xi]^2} (p_1^2 \xi_1^2 \mu_1^2 + \cdots + p_n^2 \xi_n^2 \mu_n^2 + \cdots + p_Q^2 \xi_Q^2 \mu_Q^2) . \quad (71)$$

Introducing the mean error of the unit weight, for the analogy of (40):

$$\mu_k^2 = \frac{\mu_0^2}{[p\xi\xi]^2} (p_1 \xi_1^2 + \cdots + p_n \xi_n^2 + \cdots + p_Q \xi_Q^2) = \frac{\mu_0^2}{[p\xi\xi]} . \quad (72)$$

Thus, the weight of the azimut expression (69) is:

$$p_k = \frac{\mu_0^2}{\mu_k^2} = [p\xi\xi] . \quad (73)$$

Consequently, the exact weight of the azimuth is nothing but the weighted square-sum of the azimuth factors $\xi = K - K_s$, reduced to the centre of gravity cross of axes.

This illustratively simple weight expression can of course also be derived, from (59). Namely, after multiplication and division by $[p]$, further again considering (66) and (67):

$$k = \frac{[pKl] - [p] \dfrac{[pK]}{[p]} \dfrac{[pl]}{[p]}}{[pKK] - [p] \left(\dfrac{[pK]}{[p]} \right)^2} = \frac{[pKl] - [p] K_s l_s}{[pKK] - [p] K_s^2} . \quad (74)$$

Comparing this with (70), the correctness of the following two important relations, too, becomes manifest as an intermediary result:

$$[pKl] - [p]\,K_s\,l_s = [p\xi\eta] \quad \text{and} \quad [pKK] - [p]\,K_s^2 = [p\xi\xi]. \tag{75}$$

According to the theory of adjusting of indirect observations with independent unknowns, the denominator of (74) cannot be but the weight of the adjusted azimuth, i.e. with (75):

$$p_k = [pKK] - \frac{[pK]^2}{[p]} = [pKK] - [p]\left(\frac{[pK]}{[p]}\right)^2 = [p\xi\xi]. \tag{76}$$

12. Comparison of the classical and exact azimuth formulas

The strict azimuth formula (70), obtained above, cannot in any way be reduced to the approximating relation of the classical solution, as written in (37),

$$k = \frac{1}{[p]_P}\left(p_A\frac{\xi_A\eta_A}{\xi_A^2} + p_B\frac{\xi_B\eta_B}{\xi_B^2} + \cdots + p_Q\frac{\xi_Q\eta_Q}{\xi_Q^2}\right).$$

On the contrary, it is the strict formula (70) that is a simpler form. Hence, the justification of the approximating azimuth expression of the form (37):

$$k = \frac{1}{[p]_P}\left(p_A\frac{\eta_A}{\xi_A} + \cdots + p_Q\frac{\eta_Q}{\xi_Q}\right) = \frac{1}{[p]_P}\left(p_A\frac{\xi_A\eta_A}{\xi_A^2} + \cdots + p_Q\frac{\xi_Q\eta_Q}{\xi_Q^2}\right) \tag{37a}$$

and with equal weights respectively:

$$k = \frac{1}{q}\left(\frac{\eta_A}{\xi_A} + \cdots + \frac{\eta_Q}{\xi_Q}\right) = \frac{1}{q}\left(\frac{\xi_A\eta_A}{\xi_A^2} + \cdots + \frac{\xi_Q\eta_Q}{\xi_Q^2}\right) \tag{37b}$$

is not motivable, neither from the point of view of accuracy nor from that of economy.

13. The second form of the exact expression of the azimuth constant in the centre of gravity system ξ, η

The denominator of (69) contains only error-free azimuth factors, therefore the developing has to be restricted only to the numerator, i.e.:

$$k = \frac{p_1\xi_1(l_1 - l_s) + \cdots + p_n\xi_n(l_n - l_s) + \cdots + p_Q\xi_Q(l_Q - l_s)}{[p\xi\xi]}; \tag{77}$$

$$k = \frac{1}{[p\xi\xi]} \{(p_1 \xi_1 + \cdots + p_n \xi_n + \cdots + p_Q \xi_Q) l_s - (p_1 \xi_1 l_1 + \\ + \cdots + p_n \xi_n l_n + \cdots p_Q \xi_Q l_Q)\},$$

where, however, the first small-bracketed sum has zero value, since, according to (33):

$$[p\xi] = [pK] - [p] K_s = 0. \tag{78}$$

Namely, after dividing with $[p]$:

$$\frac{[p\xi]}{[p]} = \frac{[pK]}{[p]} - \frac{[pK]}{[p]} = 0.$$

In this way, remains as a remarkable newer relation of the azimuth constant:

$$k = -\frac{1}{[p\xi\xi]} (p_1 \xi_1 l_1 + \cdots + p_n \xi_n l_n + \cdots + p_Q \xi_Q l_Q) = -\frac{[p\xi l]}{[p\xi\xi]}. \tag{79}$$

In consequence, (69) can also be written in this way:

$$k = \frac{[p\xi\eta]}{p_k} = -\frac{[p\xi l]}{p_k}. \tag{80}$$

14. The exact expression of the clock correction in the centre of gravity system ξ, η

Similarly, the numerator of the ΔE expression (60) derived from the solution of the normal equation system (57) is completed by a member $[pl][pK]^2$, at the same time, throughout multiplying by $[p]$:

$$\Delta E = \frac{[p][pl][pKK] - [p][pK][pKl] - [pl][pK] + [pl][pK]^2}{[p]([p][pKK] - [pK]^2)}. \tag{81}$$

After factoring out and dividing each member by the denominator:

$$\Delta E = \frac{[pl]}{[p]} - \frac{[pK]}{[p]} \left\{ \frac{[pKl] - [p]\frac{[pK]}{[p]}\frac{[pl]}{[p]}}{[pKK] - [p]\left(\frac{[pK]}{[p]}\right)^2} \right\}. \tag{82}$$

Here, the coordinates (66) and (67) of the centre of gravity S of the K, l system of values again appear; on the right side, at the same time, the

expression (74) of the azimuth constant k can be recognized. Accordingly, the clock correction is

$$\Delta E = \frac{[pl]}{[p]} - \frac{[pK]}{[p]} k = l_s - K_s k . \tag{83}$$

Formally, this is the same relation as was previously presented — on the assumption of observations of equal weights — in (44). According to these, ΔE is equal to distance $\overline{OG}$ cut off by the adjusting straight line of the K, l system of values on the axis of ordinates l in Fig. 3. The clock correction formulas of the approximating, resp. of the strict adjustment are then formally the same, but the K_s and l_s coordinates of the centre of gravity S are different in both, further the interpretation of azimuth constant k is not the same even in principle. In the coordinates (31) and (32) of S, exclusively the data of small zenith distance time stars are included, but the corresponding data of the circumpolar stars are not considered. In (66) and (67), however, also the circumpolar stars come into their role in the measure of their weights. That the azimuth formulas (37) and (70) cannot be brought to a common base, has already been pointed out above.

15. Exact computation of mean square error and weight of the clock correction

Expression (83) is to be rewritten, in consideration of (69), in such a way that it should contain one by one the fictitious observations $l = a - U$, independent of each other:

$$\Delta E = \frac{1}{[p]} (p_1 l_1 + \cdots + p_Q l_Q) -$$

$$- \frac{K_s}{[p\xi\xi]} \{p_1 \xi_1 (l_1 - l_s) + \cdots + p_Q \xi_Q (l_Q - l_s)\} . \tag{84}$$

Inside the brackets, however, also this time can $[p\xi] = 0$ be factored out. Further, on the basis of (79) and (80):

$$\Delta E = \frac{1}{[p]} (p_1 l_1 + \cdots + p_Q l_Q) + \frac{K_s}{p_k} (p_1 \xi_1 l_1 + \cdots + p_Q \xi_Q l_Q) . \tag{85}$$

The mean error $\mu_{\Delta E}$ of this expression is obtained on the basis of the error law:

$$\mu_{\Delta E}^2 = \frac{1}{[p]^2} (p_1^2 \mu_1^2 + \cdots + p_Q^2 \mu_Q^2) + \frac{K_s^2}{p_k^2} (p_1^2 \xi_1^2 \mu_1^2 + \cdots + p_Q^2 \xi_Q^2 \mu_Q^2) . \tag{86}$$

The mean error $\mu_0^2 = \mu_i^2 p_i$ of the unit weight is introduced this time also:

$$\mu_{\Delta E}^2 = \frac{\mu_0^2}{[p]^2}[p] + \frac{K_s^2}{p_k^2}\mu_0^2[p\xi\xi]. \tag{87a}$$

In (87a), the first member of the right side is evidently nothing but the mean error μ_{ls} of the centre of gravity ordinate l_{st} in (32). In the second member, on the other hand, according to (73), $[p\xi\xi] = p_k$. Consequently, after reduction, the following exact and at the same time very simplex relation is obtained for the mean error $\mu_{\Delta E}$ of the clock correction:

$$\mu_{\Delta E}^2 = \mu_{ls}^2 + K_s^2\mu_k^2 \tag{87}$$

the evaluation of which will be taken up in (95). Here, μ_k is the mean error of the azimuth constant k.

On the other hand, the weight $p_{\Delta E}$ of the clock correction is, according to (73):

$$\frac{1}{p_{\Delta E}} \equiv \frac{\mu_{\Delta E}^2}{\mu_0^2} = \frac{1}{[p]} + \frac{1}{p_k}K_s^2. \tag{88}$$

With a common denominator on the right side, and according to (75):

$$\frac{1}{p_{\Delta E}} = \frac{[p\xi\xi] + [p]K_s^2}{[p]p_k} = \frac{[pKK]}{[p]p_k}. \tag{89}$$

Since unfailingly $[p\xi\xi] < [pKK]$, therefore it is always true, at the same time, that

$$p_{\Delta E} < [p]. \tag{90}$$

Expressed in words: the weight of the adjusted clock correction is — evidently — always less than the sum of the observation weights. With the corresponding mean errors, this can be written even in this way:

$$\frac{\mu_{\Delta E}}{\mu_k} = \sqrt{\frac{[pKK]}{[p]}} = \sqrt{\frac{[p][pKK]}{[p]}}. \tag{91}$$

That is, for the mean errors of the clock correction and azimuth constant the thesis of geometric means is valid.

But (89) follows immediately from the normal equation system (57) too. Namely, from here, according to (63):

$$p_{\Delta E} = [p] - \frac{[pK]^2}{[pKK]} = \frac{[p][pKK] - [pK]^2}{[pKK]}, \tag{92}$$

resp., considering (75) and (76):

$$p_{\Delta E} = [p]\,\frac{[pKK] - [p]\,K_s^2}{[pKK]} = [p]\,\frac{[p\xi\xi]}{[pKK]}\,. \tag{93}$$

Hence,

$$\frac{p_{\Delta E}}{p_k} = \frac{[p]}{[pKK]}\,, \tag{94}$$

i.e. the weights of the adjusted clock correction and azimuth constant are proportional to each other as the sum of the observation weights is proportional to the weighted square sum of the azimuth factors.

16. l_s and k as mutually "free" functions

The preliminary clock correction l_s figuring in the basic relation

$$\Delta E = \frac{[pl]}{[p]} - \frac{[pK]}{[p]}\,k = l_s - K_s\,k,$$

of the adjusted clock correction, written in (83), further azimuth constant k are evidently not independent of each other, since they were obtained, according to (67) and (68), from the same common fictitious observations $l = a - U$. If, in spite of these, still the law of error of functions of independent observed quantities is applied in order to derive the mean error of ΔE:

$$\mu_{\Delta E}^2 = \mu_{ls}^2 + K_s^2\,\mu_k^2 \tag{95}$$

or, remembering (67), passing over simultaneously from the mean errors to the corresponding weights:

$$\frac{1}{p_{\Delta E}} = \frac{1}{[p]} + \frac{K_s^2}{p_k}\,, \tag{96}$$

it is evident that the correct relations (87) and (88) were obtained.

Hereby the remarkable circumstance is established that the weight ordinate l_s and the azimuth constant k, in the expression (83) of the clock correction, can be treated, in respect of the mean error and weight computation, as fictitious observations independent of each other.

17. Simplification of calculation in the exact solution

As is known, the substantial mass work is represented by the calculation of the coefficients of the normal equations (57). A not comtemptible reduction of the calculation work can be attained, without the least disadvantage in

exactness, by the application of the well known thesis of the adjustment computation, according to which, if any observation value is multiplied by the square root of its own weight, the weight of the fictitious observation derived in this way will be equal to the unit. Starting out from this, it is advisable and economical to multiply the correction equations (56) of different weights by the square root of their own weights: $\sqrt{p_i} = \cos\delta_i$, whereby they are successively reduced to unit weights.

18. Introduction of average weights

As to the accuracy of time determination, the problem of weighting is not a decisive factor actually. The main point is only to distinguish between the different accuracies of the registration of transit times of small, resp. large zenith distance stars. Consequently, if no extreme accuracy is aimed at, and the program was selected, according to Fig. 1, so that the zenith distance of time stars does not exceed $\pm 14°$, the declinations of the circumpolar stars, on the other hand, lie between 75° and 80°, then, instead of the individual weighting of $\cos^2\delta$, the facility may be allowed that the weight of all time stars be considered with $\cos^2\varphi$ and that of all circumpolar stars with $\cos^2\delta_0$, where δ_0 means the average declination of the circumpolar stars. In this way, only two kinds of weights, instead of the original $(n + q)$ number of observation weights, will have to be dealt with, and even these can again be reduced to unit weights.

19. The problem of changes of the azimuth constant

Beside the decisive advantage of exactness, the application of the adjustment computation — in an interesting way — has also an unfavourable side in time determination calculations, as against the classical approximation methods introduced in the formulas (4), (9)—(19). Namely, it does not give any informations as to eventual changes in the azimuth of the instrument during the observation, since it furnishes the unknown k as a single, constant value valid for the whole period of observation. This circumstance puts emphasis on the main requirement of the meridian method: the necessity of a stable instrument setting. In case of an exact evaluation in a single group, no immediate knowledge is obtained of a change in the azimuth, resulting from any reason. This will be manifested only in mean errors of the unknowns, higher than usual. This, however, may have several other reasons beside changes in azimuth. For example: these other reasons are slackening of observing person's attention when following the star with the moving wire of the

micrometer, further the inconstancy of the clock rate, and — to a large extent — changes in the refraction conditions of the atmosphere.

The classical approximation method, on the other hand, furnishes, according to formula (13), several values for azimuth k itself, allowing notions to be obtained about changes of the instrument azimuth during the observation, as is illustrated in Fig. 4 for a concrete case.

On the axis U of abscissae of the figure, the transit times U of 11 time stars and 4 circumpolar stars of an earlier program in Hungary were repre-

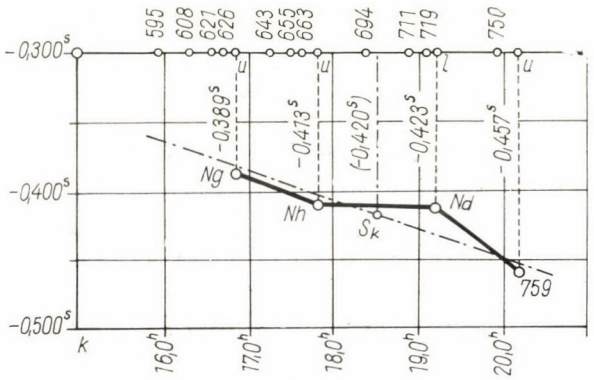

Fig. 4

sented with graphical precision. On the axis of ordinates, the four azimuth constant values k resulting from the transit time of the circumpolar stars Ng, Nh and 759, observed in upper culmination, and Nd, observed in lower culmination, were plotted according to the formula (13). The four points obtained in this way were marked by Ng, Nh, 759 and Nd in the figure; their connection by a marked line refers to an almost even negative increase of the instrument azimuth during the observation period, as the effect of a small pillar rotation presumably caused by a gradual summer-night cooling. The dotted line passing through the point S_k of the figure represents the adjusting straight line of the four "azimuth points", reflecting the most probable process of the azimuth variation. On the other hand, the exact adjustment computation would have yielded not four, but a single azimuth value k, lying near the ordinate of point S_k.

REFERENCES

1. MILASOVSZKY, B.: Clock correction and azimuth constant in astronomical time determination. *Publications of the Faculties of Mining and Geotechnics*, XIX. Technical University Faculties, Sopron, 1956.
2. *Цингер, Н. И.:* Об одпределении времени по соответствующим высотам различных звезд 1874.

3. DOELLEN, W.: Die Zeitbestimmung vermittels des tragbaren Durchgangsinstrumentes im Vertikale des Polarsternes. St. Petersburg, 1863.
4. *Долгов, П. Н.:* Определение времени пассажным инструментом в меридиане. (Москва, 1952)
5. ALBRECHT, TH.: Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen. Leipzig, 1908. IV. Auflage.
6. *Apparent Places of Fundamental Stars* 19.. Produced by international cooperation under the auspicies of the International Astronomical Union Heidelberg, Astronomisches Recheninstitut.
7. MILASOVSZKY, B.: Az optimális csillagprogram kérdése csillagászati hosszúság meghatározásoknál (The problem of optimal star program in astronomical longitude determinations). [*Publications of the Technical University of Heavy Industries in Miskolc*, V, (1960).]
8. Comptes rendus de la V. Session de la Commission Geodésique Baltique. Kopenhagen, 1929.
9. Procès-Verbal de la 81me Séance de la Commission Geodésique Suisse, Bern 31. Mars 1935.

ANALYSE DER MERIDIANMETHODE DER ZEITBESTIMMUNGEN

B. MILASOVSZKY

ZUSAMMENFASSUNG

Diese Methode findet auf den ungarischen Laplace-Punkten seit mehreren Jahrzehnten Verwendung.

Gewisse Unterschiede in der Anwendung der Methode können — abhängig von individuellen Erwägungen, von überlieferten Erfahrungen und von den instrumentellen Einrichtungen — auftreten.

Durch diese Unterschiede können 1. das Sternprogramm und die Beobachtung. 2. die Instrumentenkonstanten und die persönlichen Fehler, 3. die numerische Auswertung betroffen werden.

Vom Verfasser werden die Probleme bzw. die Alternativen der Beobachtung, hauptsächlich aber die der numerischen Auswertung untersucht. Die wesentlichen Fragen sind: Zusammenstellung des Sternprogramms, Gewichtsbildung der Zeitdurchgänge, Alternativen der exakten bzw. annähernden Bestimmung der Azimutkonstanten und der Uhrkorrektion sowie deren mittlere Fehler.

L'ANALYSE DE LA MÉTHODE MÉRIDIENNE DANS LES DÉTERMINATIONS DE TEMPS

B. MILASOVSZKY

RÉSUMÉ

Cette méthode est utilisée depuis plusieurs années sur les points Laplace de Hongrie. Selon les pondérations individuelles, les expériences héritées du passé et les instruments utilisés, certaines différences peuvent se présenter dans son application. Ces différences peuvent porter: 1° sur le programme d'étoiles et l'observation; 2° sur les constantes instrumentales et les erreurs personelles, enfin 3° sur l'évaluation numérique.

L'auteur examine les problèmes, les alternatives de l'observation et surtout de l'évaluation numérique. Les problèmes essentiels sont: la composition du programme d'étoiles, la pondération des passages des étoiles, l'azimuth instrumental et la constante de la garde de temps, ainsi que les alternatives de la détermination exacte et approchée de leurs erreurs moyennes quadratiques.

АНАЛИЗ МЕРИДИАННОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ

Б. МИЛАШОВСКИ

РЕЗЮМЕ

Этот метод используется в течение десятилетий на точках Лапласа, расположенных на территории Венгрии.

В отношении применения метода в зависимости от индивидуальных соображений, опыта, перенятого от предков, и данного прибора могут иметь место определенные отклонения.

Эти отклонения могут относиться к 1. звездной программе и обсервации, 2. постоянным прибора и 3. числовой оценке.

Автор исследует в основном вопросы и альтернативы числовой оценки, а частично обсервации. Важнейшими вопросами являются: составление звездной программы, взвешивание переходов времени, азимут прибора и показание часов, а также альтернативы строгого и приближенного определения их средних ошибок.

GEOTHERMAL MEASUREMENTS IN THE TWIN SHAFTS OF HOSSZÚHETÉNY

T. BOLDIZSÁR

DOCTOR OF TECHNICAL SCIENCES, GEOTHERMAL RESEARCH BOARD, BUDAPEST

[Manuscript received February 22, 1963]

A detailed geothermic measurement in the Southern part of Transdanubia in Hosszúhetény in two mine-shafts of 540 meters depth at a distance of 90 meters from each other is described here, according to which the value of terrestrial heat flow is:

$$(2.49 \pm 0.02) \cdot 10^{-6} \text{ cal/cm}^2\text{sec}$$

In a geologically similar area at a distance of 5 kms from Hosszúhetény, also in two mine-shafts 90 meters apart, according to the same kind of measurements taken in 1955, the value of terrestrial heat flow was:

$$(3.31 \pm 0.04) \cdot 10^{-6} \text{ cal/cm}^2\text{sec}$$

The average value of terrestrial heat flow in this territory can be given as

$$(2.9 \div 3.0) \cdot 10^{-6} \text{ cal/cm}^2\text{sec}$$

High heat flow is characteristic for the whole Hungarian Basin having values between 2 and $3 \cdot 10^{-6}$cal/cm^{2}sec. The high heat flow may be in connection with the positive Bouguer anomaly and the higher level of the Mohorovičić discontinuity in the Hungarian Basin.

I. Introduction

Based on geothermal measurements made at two places in Transdanubia the value of terrestrial heat flow is known since 1955. The measurement in the Mecsek Mountains, on the territory of Komló coal mines at the Zobák mine-shafts is remarkable for its reliability [1, 7] and also for its accuracy (Fig. 1). The fact that direct heat flow measurement was conducted at Zobák for the first time on the European continent, makes it even more significant.

With the same method used at the twin mineshafts of Zobák, it was possible to conduct another survey at Hosszúhetény 5 kms S. E. of Zobák. Hosszúhetény is situated in the Mecsek Mountains N. E. of the city of Pécs (Fig. 2). On the surface middle liassic marl occur with a thickness of about 600 m. At about 500 meters depth, there are trachidolerit sills. The mine shafts where the measurement was made did not reach the coal formation which belong to the Liassic (Hettangian-Sinemurian) level.

According to the investigations of L. Kovács the Mecsek Mountain is a saxonotipe-fractured-folded structure, built up on a Permian-Mesozoic

basement up to the lower Cretaceous, its top layer is a Neogene formation from the middle Miocene [8].

The mountain's south-western part — West of Hosszúhetény — is structurally a brachianticline, later to the North of Hosszúhetény the Kisújbánya periclinal basin was formed. The mine shafts themselves are situated in the border zone of these two strongly disturbed main structures. These

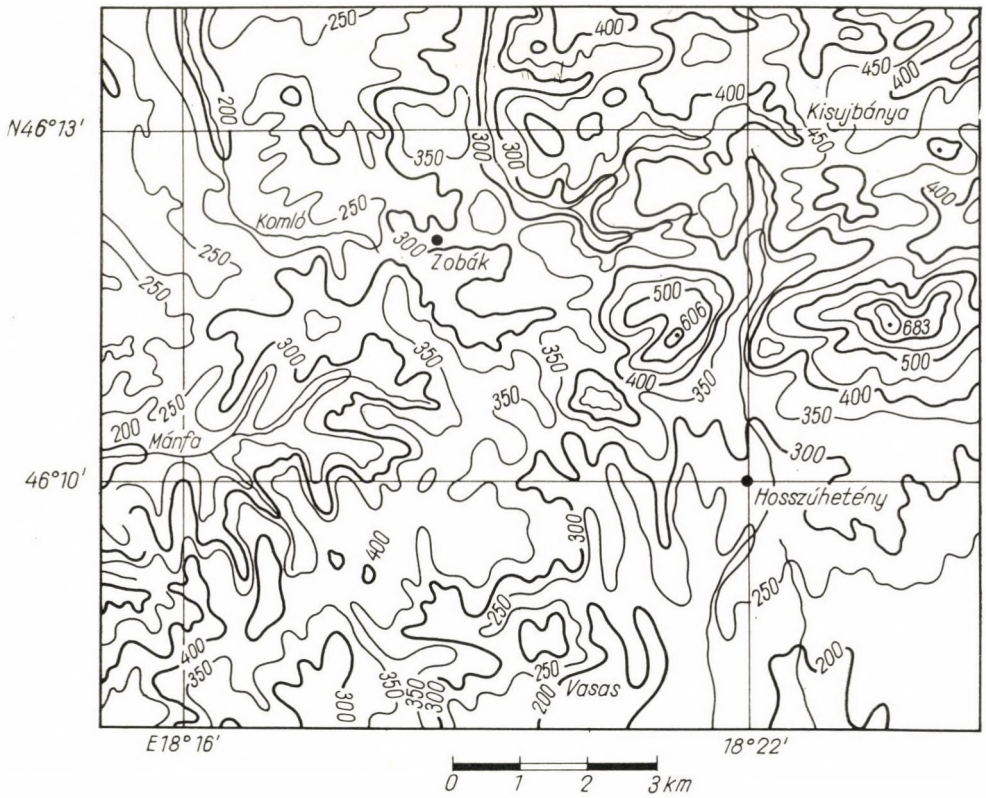

Fig. 1

structures can be associated with the Austrian (pregosau) phase of the Alpin orogenesis beginning in the upper Cretaceous. Then in the Laramyan and Styrian phases the Mecsek Mountain might have been influenced by some synorogene type of tectonic movements which created fissures, faults and horizontal thrusts (Fig. 2).

The basic geomorphological character of the Mecsek Mountain is the result of the denudation beginning with the younger lower Cretaceous and lasting till the lower Miocene.

The previous tectonic picture in the Pliocene was enriched with new structural forms under the synorogen influence of the Rhodanian cycle and the increased strain in the crust was relieved mainly by overthrusts.

Magmatism in the Mecsek Mts. is represented by phonolyte and trachidolerite, formed in the Autrivian (lower Cretaceous) and andesite from the middle Miocen (Figs. 2 and 3), the last volcanic activity took place about 25—30 million years ago.

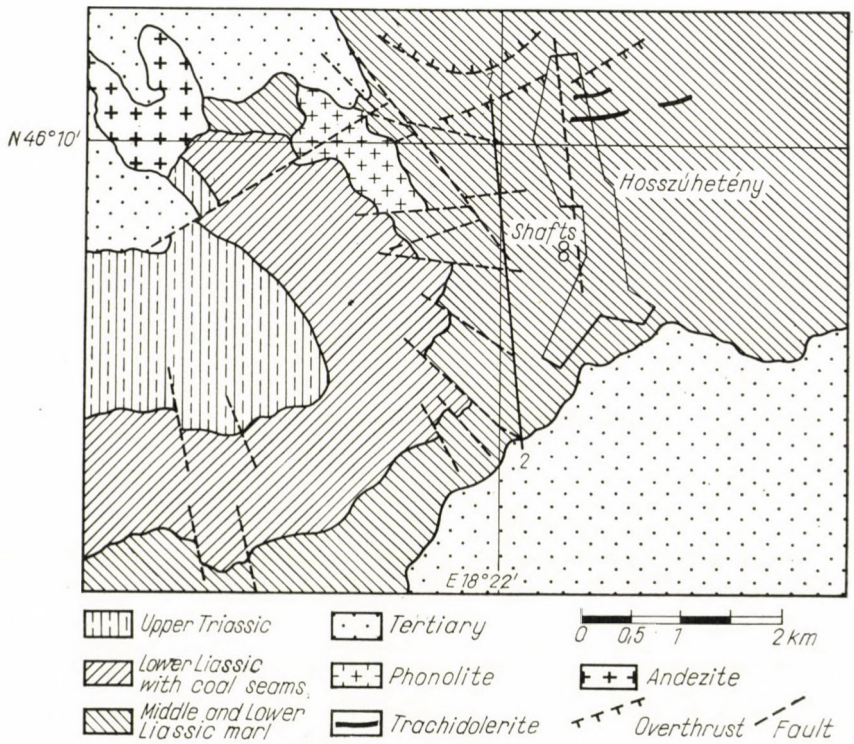

Fig. 2

In the vicinity of Hosszúhetény — the masses of the Mecsek (Zengő Hill) reaches from the level of the plains of about 120 m up to 682 meters; the shaft collars are lying 270 meters above sea level. The Paleozoic-Mezozoic rocks gradually sunk in stages and the Miocene-Pliocene transgression covered the basement rocks. It can be assumed that the Mesozoic rocks of the Mecsek Mountain were originally situated under the present sea level and the Mesozoic beds had lifted up during the Austrian mountain buildup, while the main features of the present topography was formed up to the Pliocene. The sinking of the base mountain had also been completed up to the Pliocene. The uplift

of the Mesozoic base mountain 70—80 million years ago, makes the Birch-correction [9] unnecessary, because since that time the heat flow has become practically stationary.

One cannot assume any relation between the magmatism and heat flow because on the one hand, a long time having passed since then and on the other the insignificant volume of its mass does not influence the regional value of heat flow coming from the depth.

Topographic corrections have not been made because the topography is to complicated (Fig. 1) and the structure of the strongly tectonized area is not quite well known.

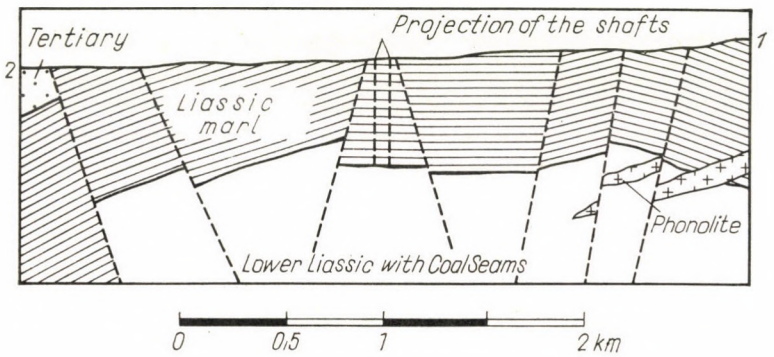

Fig. 3

II. Temperature measurements

The sinking of the shafts was done by blasting at about 2 meters deep sections. For measuring the virgin rock temperature a hole of 1—1.5 meter depth was drilled into the side of the shaft, right after mucking. To avoid any error by drilling heat, the hole was allowed to stand for 4—6 hours for the heat to disappear before making the measurements. The temperature of the rock was measured with a calibrated 0.1° C thermometer. The measurements were conducted only in dry rocks where water and expansion of gas were absent.

Figure 4 shows values of rock temperatures in the shafts 90 meters apart. At a depth of 200 meters the geoisotherms appeared to be definitely sloping to the South (Fig. 5). Although, in the vicinity of the shafts the terrain is flat, the neighbouring area is situated on a gentle slope on the side of the Mecsek Mountain. The orientation of the geoisotherms corresponds with that of the slope (Fig. 3). The probable error of the temperature measurement is about 0.2° C.

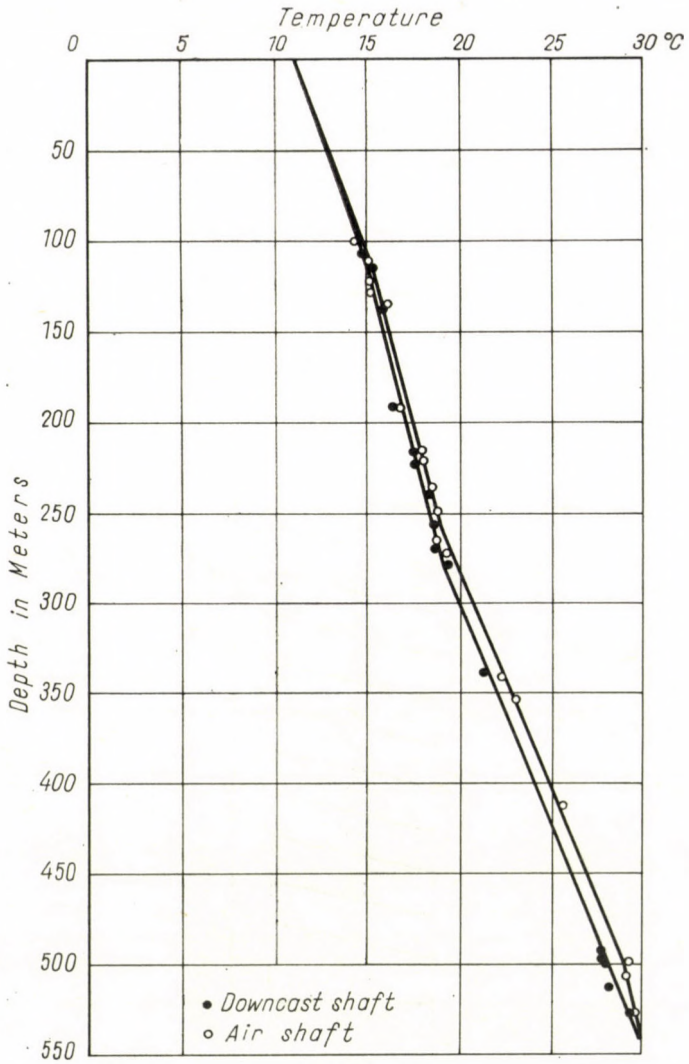

Fig. 4

III. Conductivity measurements

Measurements were made with the relative method, the so called "divided bar" method. To obtain the thermal conductivity of the rock samples, the thermal conductivity of the brass bars were compared with synthetic quartz crystals and to quartz etalons obtained from the National Physical Laboratory in Teddington.

For obtaining the temperature gradient in the brass bar, it is necessary to measure temperature differences very precisely. The measurement of

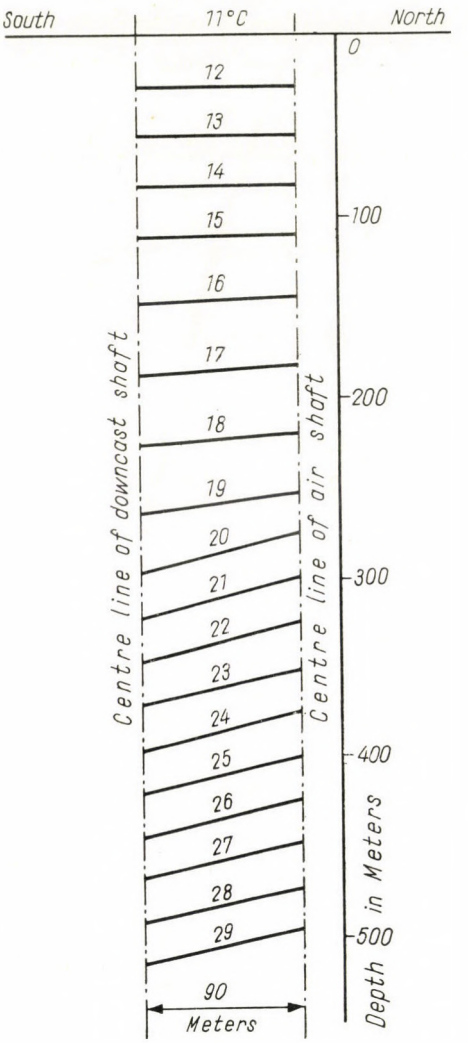

Fig. 5

temperature difference was done with a precision of 0.01° C with copper-constantan thermocouple. The thermoelectric voltage was measured by compensation. The thermal resistance of the air-films between the brass and specimen was also taken into account. To establish the film correction measurements were made with 3 discs of different thicknesses [1].

The rocks are dense, their porosity is between 0.5—1.5%. The measurement was made in dry condition. Because of small porosity, the difference between the *in situ* water content and water present at the measurement is so small that it was disregarded. Probable error of the measurement is 1.5%.

IV. Computation of the heat flow

Knowing the geological section of the shaft, with help of temperature and conductivity measurements, the terrestrial heat flow could be computed. In those thick beds where several samples were obtained, each value was considered to represent the conductivity of a rock section from the mid-depth between the previous and present sample to the mid-depth between the following and present sample. Within the same bed the conductivity was subject to considerable change. To compute the heat flow, the mid-depth temperatures were obtained from Fig. 4.

To compute the vertical component of the heat flow the following formula was employed:

$$q = \frac{\Delta T}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta h_i}{\lambda_i}}$$

where ΔT is the sum of temperature differences,

Δh_i is the thickness of the bed, having a thermal conductivity of λ_i.

The equivalent thermal conductivity of the formation surveyed was computed by the following formula:

$$\lambda_{eq} = q \frac{\sum_{i=1}^{h} \Delta h_i}{\Delta T} .$$

The most probable value of the heat flow with its standard deviation, computed in vertical direction as the two mine shafts is

$$q = (2.49, \pm 0.02) \cdot 10^{-6} \text{ cal/cm}^2\text{sec.}$$

The conductivity of the samples — having the same age, being mineralogically the same, greatly varied (e.g. in the Middle Liassic marl, between 0.00421—0.00928 CGS), so, that the sample did not represent the whole section from which the sample was taken. The insignificant difference in heat flow, computed independently in both shafts, shows that the average of the numerous random measurements almost completely compensated this possible misrepresentation.

Drying out of rock samples may cause errors, but this because of the small porosity (1—1,5%) could not be too great; drying out decreases the thermal conductivity, so by taking the value of the *in situ* water content into account would increase the heat flow. It is not probable, that the actual and measured heat flow deviate more than 4—5%.

V. Conclusions

Five kilometers from Hosszúhetény — the measurements at Zobák using the same method gave a heat flow of $3.3 \cdot 10^{-6}$ cal/cm² sec. Hosszúhetény and Zobák are in an area of the same geological structure. So the difference in heat flow can be explained either by topography or by thermal conductivity anomalies of unknown deep layers, but possibly both factors have an influence, since the territory is tectonically disturbed.

Both shafts at Hosszúhetény and Zobák are in the same Middle Liassic marl horizon. Although the marl at both places looks alike, their thermal conductivity deviate from each other. At Hosszúhetény the average conductivity for marl between 332—480 meters is:

$$\lambda = 0.00609 \text{ CGS},$$

at Zobák, between 316—518 meters is:

$$\lambda = 0.00663 \text{ CGS}.$$

In regards to the mountain building and shaping of the present topography, it is not necessary to employ any correction [9] because all these events happened in the Upper Cretaceous and Middle Miocene.

The volcanism — in connection with the mountain formation — also took place in the Upper Cretaceous and Miocene. The volcanic activity was small and for this reason the present high heat flow could not be brought into relation with the trachidolerite and andesite sills.

The territory of Hosszúhetény lies on a slope raising out of the plains of Mecsek Mts. so the plains of the geoisotherm are not horizontal. The measured values of heat flow recomputed in a direction perpendicular to the geoisotherms, gives so small a deviation that this would not explain the difference in heat flow of $3.3 \cdot 10^{-6}$ and $2.5 \cdot 10^{-6}$ CGS in Zobák and Hosszúhetény. It must be concluded that the difference in terrestrial heat flow between the two twin shafts is caused by the topography, and mainly by the deeper and yet unknown layers with unknown heat conductivity and orientation.

Considering the aforementioned it may be concluded that the relatively low heat flow of Hosszúhetény and the high heat flow of Zobák may be very near to the maximum and minimum heat flow of this area. The average can be accepted as the value of the regional heat flow coming from the depth.

So in the area of the Mecsek Mts. the heat flow is about

$$(2.9 \div 3.0) \cdot 10^{-6} \text{ cal/cm}^2\text{sec}.$$

1. Hosszúhetény
2. Nagylengyel
3. Kaba-Hajdúszoboszló
4. Lötschberg
5. Simplon
6. Gotthard
7. Arlberg
8. Tauern

Fig. 6

Table I

Virgin rock temperature values observed in the downcast shaft at Hosszúhetény

No.	Depth M	Measured Temperature °C	Correction °C	Virgin Rock Temperature °C
1	107,3	14,9	+0,05	14,95
2	113,2	15,3	+0,05	15,35
3	119,6	15,0	+0,05	15,05
4	138,5	16,1	+0,05	16,15
5	193,0	16,7	+0,05	16,75
6	215,0	17,8	+0,05	17,85
7	222,0	17,8	+0,05	17,85
8	239,0	18,4	+0,05	18,45
9	253,0	18,6	+0,05	18,65
10	269,0	18,8	+0,05	18,85
11	278,0	19,6	+0,05	19,65
12	338,0	21,3	0,0	21,30
13	489,0	28,0	−0,15	27,85
14	492,0	28,1	−0,15	27,95
15	495,0	28,1	−0,15	27,95
16	498,0	28,2	−0,15	28,05
17	513,0	28,3	−0,15	28,15
18	524,0	29,4	0,0	29,40

In Continental Europe — excluding measurements in Hungary heat flow is known according to CLARK and NIBLETT [11] and CLARK [12] in the tunnels of the Alps. Their results show many uncertainties and their values are between $1.4 \cdot 10^{-6}$ and $2.2 \cdot 10^{-6}$ CGS. Average heat flow values of the Swiss and Austrian Alps can be taken as $1.8 \cdot 10^{-6}$ CGS (Fig. 6).

Table II

Virgin rock temperature values observed in the upcast shaft at Hosszúhetény

No.	Depth M	Measured Temperature °C	Correction °C	Rock Temperature °C
1	100,0	14,3	0,0	14,30
2	112,4	15,2	+0,05	15,25
3	119,1	15,0	+0,05	15,05
4	127,0	15,1	+0,05	15,15
5	135,5	16,3	+0,05	16,35
6	190,7	16,7	+0,05	16,70
7	213,7	17,8	+0,05	17,85
8	219,2	17,8	+0,05	17,85
9	235,0	18,5	+0,05	18,55
10	249,0	18,6	+0,05	18,65
11	265,0	18,6	+0,05	18,65
12	272,0	19,2	+0,05	19,25
13	340,0	22,3	0,0	28,30
14	352,0	23,1	0,0	23,10
15	410,0	25,6	0,0	25,6
16	499,0	29,6	−0,3	29,3
17	506,0	29,5	−0,3	29,2
18	525,0	29,6	0,0	29,6

The latest measurements of present author East of the Danube — on the Hungarian Plain show thermal gradients of 50—70° C/km. This also points to large heat flow in the whole territory of Hungary which is confirmed by the latest conductivity measurements. In Hungary the heat flow is probably between 2 and 3 μ cal/cm^2 sec; Now it can safely be concluded that everywhere within the Carpathians the heat flow is high. Advancing towards the depth the temperature in Hungary increases at least twice as fast as anywhere in the neighbouring countries outside of the Carpathians.

Gravity measurements made in Hungary disclosed positive Bouguer anomalies in the whole territory of the country [13]. The Mohorovičić dis-

continuity is at a depth of 33—36 km that is, it is higher than in places bordering the outer side of the Carpathians (40—50 km). SCHEFFER brings heat flow and gravity as well as deep reflection surveys into relationship with each other and concludes that the high heat flow is caused by dense basic rocks elevated to a higher level [14]. He supports his interpretation by the heat flow anomalies of the Atlantic Ridge and Albatross Plateau in the Pacific Ocean which may also be connected with the elevated position of the Mohoro-

Table III

Rock conductivities in the downcast shaft at Hosszúhetény

Depth M	Description of the Rock	Thermal Conductivity cal/cm sec, Deg. C.
332,0	Middle Liassic Marl	0,00473
342,0	"	0,00928
353,0	"	0,00672
366,7	"	0,00479
377,0	"	0,00483
387,0	"	0,00571
392,0	"	0,00433
400,0	"	0,00552
477,0	"	0,00657
478,0	"	0,00654
479,0	"	0,00684
480,0	"	0,00724
507,0	Contact marl	0,00582
519,0	Trachidolerite	0,00664

ovičić discontinuity. According to BULLARD and GRIGGS [15] it is very possible that the Mohorovičić discontinuity is not a phase change but a change in material, which seems also to support this theory.

If the above-said can be taken as correct, then this fact can give a wholly new light to the conclusion of BULLARD and GRIGGS [15] concerning the relationship of terrestrial heat flow and the depth of Mohorovičić discontinuity.

In an investigation in 1960 [16] it was pointed out, that if the terrestrial heat flow originates partly from the inner heat and partly from the radioactive decay in the granitic crust (in varying amounts) then in about 10 km inactive sediments and in 20 km granite the temperature generally increases to 600° C, but in Hungary it increases to 1250°. In the first case $1.2 \cdot 10^{-6}$

CGS, in the second case $2.8 \cdot 10^{-6}$ CGS heat flow was taken into account. This too underlines the views of BULLARD and GRIGGS.

According to the present knowledge, the relation of heat flow and the structure of the crust — also considering radioactive heat production — cannot be formulated because:

1. Values of heat flow and its distribution on the surface of the Earth are not well known enough, still many more measurements are necessary.

Table IV

Rock conductivities in the upcast shaft at Hosszúhetény

Depth M	Description of the Rock	Thermal Conductivity cal/cm sec, Deg. C.
330,0	Middle Liassic Marl	0,00525
340,0	"	0,00678
351,0	"	0,00524
366,0	"	0,00421
373,0	"	0,00732
390,0	"	0,00683
409,1	"	0,00674
481,0	"	0,00624
507,0	Sandy-marl	0,01228
513,0	Sandstone	0,00802
523,0	"	0,00606
525,0	Marl	0,00633

Up to now on the European continent only the Zobák—Hosszúhetény measurements can be taken as being reliable. Beside these only a few indirect heat flow measurements are known of in the Alps.

2. The crustal structure of the earth, is not known without doubt, and it is also not known where the terrestrial heat originates from.

3. There is a great possibility that the anomalous values of heat flow — if the "anomaly" can be established at all, since the "normal" value is not known either — could not be explained with the same hypothesis everywhere on the earth.

4. The cause of the anomalously high regional heat flow can be the heat of radioactivity of the thickened crust, but it can also be in relation with the uplifted basic rocks.

The author believes that the variation in observed heat flow close to the surface of the crust cannot be explained by the same causes everywhere and for individual cases different explanations have to be sought for. The

value of heat flow obtained on the surface may be influenced by the diversity in crustal structure together with the changing amounts of radioactive materials.

Summing up all these, the Hungarian Basin with a territory of over 100 000 km² with its big geothermic gradient and large heat flow, stands out sharply from the normal geothermic surroundings and as far as it is known, it is a unique hyperthermal territory. The cause of the high heat flow over the whole territory within the Carpathians may be the elevated position of

Table V

Computation of terrestrial heat flow in the downcast at Hosszúhetény

Depth M	Thickness M	Rock	Thermal Conductivity cal/cm sec, deg. c	$10^{-6}\frac{\Delta h_i}{\lambda_i}$	Temperature °C
327,0					21,0
337,0	10,0	Marl	0,00473	0,2114	
347,5	10,5	"	0,00928	0,1131	
359,9	12,4	"	0,00672	0,1845	
371,9	12,0	"	0,00479	0,2505	
382,0	10,1	"	0,00483	0,2091	
389,5	7,5	"	0,00571	0,1313	
396,0	6,5	"	0,00433	0,1501	
438,5	42,5	"	0,00552	0,7699	
477,5	39,0	"	0,00657	0,5936	
478,5	1,0	"	0,00654	0,0152	
479,5	1,0	"	0,00684	0,0146	
490,0	10,5	"	0,00724	0,1450	27,9
498,0	8,0	Trachidolerite	0,00664	0,1204	
502,0	4,0	Contact marl	0,00582	0,0687	
506,0	4,0	Marl	0,00610	0,0656	
516,0	10,0	Contact marl	0,00582	0,1718	
524,0	8,0	Trachidolerite	0,00664	0,1205	29,4
$\Sigma\Delta h_i =$	197,0		$10^{-6}\,\Sigma'\frac{\Delta h_i}{\lambda_i} = 3{,}3353$		$\Delta T = 8{,}4$

The value of terretrial heat flow:

$$q = \frac{\Delta T}{\Sigma'\frac{\Delta h_i}{\lambda_i}} = \frac{8{,}4}{3{,}3353 \cdot 10^6} = 2{,}52 \cdot 10^{-6}\ \text{cal/cm}^2\ \text{sec}$$

Equivalent thermal conductivity of the formation:

$$\lambda_e = q\frac{\Sigma'\Delta h_i}{\Delta T} = 2{,}52 \cdot 10^{-6}\,\frac{197{,}0 \cdot 10^2}{8{,}4} = 0{,}00591\ \text{CGS}$$

the basic rocks of higher density. The upward movement of the basic rocks may have transported the excess heat. Another possibility is the higher than average content of radioactive material in the crust underlying the Carpathian basin but this assumption cannot yet be supported by any factual evidence.

Table VI

Computation of terrestrial heat flow in the upcast shaft at Hosszúhetény

Depth M	Thickness M	Rock	Thermal Conductivity cal/cm. sec, deg. c.	$10^{-6}\frac{\Delta h_i}{\lambda_i}$ cm sec °C/cal.	Temp. °C
325,0					21,9
335,0	10,0	Marl	0,00525	0,1905	
345,5	10,5	"	0,00678	0,1549	
358,5	13,0	"	0,00524	0,2481	
369,5	11,0	"	0,00421	0,2613	
381,5	12,0	"	0,00732	0,1639	
399,6	18,1	"	0,00683	0,2650	
437,1	37,5	"	0,00674	0,5564	
501,7	64,6	"	0,00624	1,0353	
508,2	6,5	Sandy marl	0,01228	0,0529	
518,7	10,5	Sandstone	0,00802	0,1309	
520,5	1,8	Marl	0,00600	0,0300	
523,3	2,8	Sandstone	0,00606	0,0462	
525,5	2,2	Marl	0,00633	0,0348	29,7
	$\Sigma\Delta h_i = 200,5$			$10^{-6}\,\Sigma'\frac{\Delta h_i}{\lambda_i} = 3,1702$	$\Delta T = 7,8$

The value of terrastrial heat flow:

$$q = \frac{\Delta T}{\Sigma'\frac{\Delta h_i}{\lambda_i}} = \frac{7,8}{3,1702 \cdot 10^{-6}} = 2,46 \cdot 10^{-6}\ \text{cal/cm}^2\text{sec}$$

Equivalent thermal conductivity of tke formation

$$\lambda_e = q\,\frac{\Sigma'\Delta h_i}{\Delta T} = 2,46 \cdot 10^{-6}\,\frac{200,5 \cdot 10^2}{7,8} = 0,00632\ \text{CGS}$$

BIBLIOGRAPHY

1. Boldizsár, T.: Measurement of Terrestrial Heat Flow in the Coal Mining District of Komló. *Acta Techn. Hung.* **XV.** (1956).
2. Boldizsár, T.: New Terrestrial Heat Flow Values from Hungary. *Geofisica pura e applicata.* Milano, **39** (1958), 102—125.
3. Boldizsár, T.: Geothermic Investigations in the Hungarian Plain. *Acta Geologica* **V.** (1958), 245—254.
4. Boldizsár, T.: Terrestrial Heat Flow in the Nagylengyel Oilfield. *Bányamérnöki Karok Közleményei.* **XX** (1959), 27—34.

5. BOLDIZSÁR, T.: Terrestrial Heat Flow in Selmecbánya (under print).
7. BOLDIZSÁR, T.—GÓZON, J.: Terrestrial Heat Flow Measurements at Zobak in the Twin Mineshafts of the Coal Mining District of Komló. *Acta Techn. Hung.* **43** (1963), 467—476.
8. KOVÁCS, L.: Die Mesozoische Paläographie Transdanubiens *Mitt. Fac. Techn. Univ. Sopron.* **XVIII** (1955), 53—82.
9. BIRCH, F.: Flow of Heat in the Front Range Colorado *Bull. Geol. Soc. Am.* **61** (1950), 584.
10. TSUNEJI RIKITAKE-KI-ITI HORAI: Terrestrial Heat Flows Related Possible Geophysical Events. *Bulletin of the Earthquake Research Institute* **38** (1960), 403—419.
11. CLARK, S. P.—NIBLETT, E. R.: Terrestrial Heat Flow in the Swiss Alps. *Roy. Astr. Soc. Not. Geophy. Suppl.* **7** (1956), 176—195.
12. CLARK, S. P.: Heat Flow in the Austrian Alps. *The Geophysical Journal Roy. Astr. Soc.* **6** (1961), 57—63.
13. SCHEFFER, V. Über einige regional-geophysikalische Probleme der Karpatenbecken. *Freiberger Forschungshefte* **C—124** (1963), 5—216.
14. SCHEFFER, V.: Geophysical Investigation of the Geothermal Zones of the Earth. *Acta Techn. Hung.* **44** (1964).
15. BULLARD, E. C.—GRIGGS, D. T.: The Nature of the Mohorovičić Discontinuity. *The Geophysical Journal, Roy. Astr. Soc.* **6** (1961), 118—126.
16. BOLDIZSÁR, T.: A Föld belső melegének eredete (Origin of the Earth's Heat) *NME Közlemények* 1962. 17—25.

MESSUNG DES IRDISCHEN WÄRMEFLUSSES, IN DER ZWILLINGSSCHACHT VON HOSSZUHETÉNY

T. BOLDIZSÁR

ZUSAMMENFASSUNG

Den ausführlichen Messungen gemäß, die in Hosszúhetény, auf dem südlichen Teil des transdanubischen Gebietes Ungarns, in zwei, voneinander um 90 m entfernten Schachten in etwa 540 m Tiefe vorgenommen wurden, ist der Wert des irdischen Wärmeflusses

$$(2{,}49 \pm 0{,}02) \times 10^{-6} \text{ cal/cm}^2\text{sec}.$$

In einer Entfernung von 5 km von Hosszúhetény, auf geologisch ähnlichem Gebiet, ebenfalls in zwei, voneinander um 90 m entfernten Schachten in 1955 ausgeführten Messungen gemäß ist der Wärmefluß

$$(3.31 \pm 0{,}04) \times 10^{-6} \text{ cal/cm}^2\text{sec}.$$

Der Wert des irdischen Wärmeflusses auf diesem Gebiet kann für

$$(2{,}9 \div 3{,}0) \times 10^{-6} \text{ cal/cm}^2\text{sec}$$

genommen werden. Das ganze Gebiet des ungarischen Beckens ist durch einen hohen — — zwischen 2 und $3 \cdot 10^6$ cal/cm²sec schwankenden — Wärmeflußwert charakterisiert. Die Ursache eines so großen Wärmeflusses mag mit einer Hochlage der basischen Erdkruste zusammenhängen, was übrigens auch durch die große positive Bouguer-Anomalie bestätigt zu werden scheint.

MESURES DU COURANT GÉOTHERMIQUE DANS LES PUITS JUMEAUX DE HOSSZÚHETÉNY

T. BOLDIZSÁR

RÉSUMÉ

A Hosszúhetény, dans la partie sud de la Transdanubie, des mesures précises effectuées en deux puits d'env. 540 m de profondeur, foncés à 90 m de distance, ont permis de relever un courant géothermique de

$$(2{,}49 \pm 0{,}02) \times 10^{-6} \text{ cal/cm}^2\text{sec}$$

A 5 km de Hosszúhetény, sur un terrain géologiquement semblable, le courant géothermique mesuré en 1955, dans deux puits également distants de 90 m, a été de

$$(3{,}31 \pm 0{,}04) \times 10^{-6} \text{ cal/cm}^2 \text{ sec}$$

La valeur moyenne du courant géothermique peut être évaluée, sur ce terrain, à

$$(2{,}9 + 3{,}0) \times 10^{-6} \text{ cal/cm}^2 \text{ sec}$$

Tout le territoire du bassin hongrois est caractérisé par un courant géothermique intense, variant entre $(2 \div 3)\ 10^{-6}$ cal/cm²/sec. Ce courant géothermique d'une valeur élevée pourrait avoir pour cause l'élévation de la croûte terrestre de caractère basique, hypothèse que semblent également confirmer les grandes anomalies positives de Bouguer.

О РАБОТАХ ПО ИЗМЕРЕНИЮ ГЕОТЕРМИЧЕСКИХ ПОТОКОВ, В СДВОЕННЫХ ШАХТАХ РАЙОНА ХОССУХЕТЕНЬ

Т. БОЛЬДИЖАР

РЕЗЮМЕ

По результатам детальных измерений, проведенных в шахтах глубиной около 540 *м* и находящихся на 90 *м* друг от друга в районе Хоссухетень, в южной части Задунайской области Венгрии, значение геотермического потока составляет

$$(2{,}49 \pm 0{,}02).\ 10^{-6}\ \textit{кал/см}^2\ \textit{сек}.$$

На 5 *км* от района Хоссухетень, в области, характеризующейся аналогичными геологическими условиями, в 1955 г. были проведены подобные измерения в двух шахтах, расположенных также на 90 *км* друг от друга. По данным этих измерений величина теплового потока равна

$$(3{,}31 \pm 0{,}04).\ 10^{-6}\ \textit{кал/см}^2\ \textit{сек}.$$

Следовательно, в данном районе геотермический поток имеет величину

$$(2{,}9 \div 3{,}0).\ 10^{-6}\ \textit{кал/см сек}.$$

Для территории всего Венгесркого бассейна характерно высокое значение геотермического потока, изменяющееся в пределах $(2 \div 3).\ 10^{-6}$ *кал/см² сек*. Причина такого высокого значения теплового потока может быть связана с приподнятым положением земной коры основного состава, что подтверждается и наличием здесь крупной положительной аномалии Буге.

ADJUSTMENT OF A DISCRETE VALUE SYSTEM BY A LINEAR FUNCTION

CS. ASSZONYI

TECHNICAL UNIVERSITY FOR HEAVY INDUSTRIES, MISKOLC (HUNGARY)

[Manuscript received on March 9th, 1963]

The paper deals with a problem frequently appearing in technical and economic practice. The problem in question arises, when a discrete system of values with n variables consisting of discrete points is to be approached by a linear function.

As basis of the approximation author choses the minimum of the square sum of weighted perpendicular residuals between the system of points and the linear function, because in this case the adjusting function is invariant in relation to the transformation of coordinates.

Author shows that the solution of the problem, i.e., the determination of the normal vector of the adjusting hyper-plane conduces to the establishment of the eigen-vectors belonging to the coordinate-matrix D, so interpreted by him. The paper enlightens the geometrical tense of the characteristic values, the so-called eigen-values of D, and using same ensures she uniqueness of the solution of the problem in question.

In the field of measurements performed in technical and economic practice the following problem frequently arises: to a value-system consisting of discrete values an adjusting function is to be attached, by which the given value-system is approached as well as possible.

Investigations to be made in this paper approach the value-system by a *linear function*. As a condition of the approximation the weighted quadratic sum of perpendicular residuals is chosen.

In the case of one variable, i.e., when the problem consists in the adjustment of a planar system of points by a straight line, the problem in question is well-known chiefly in mining — and geodetic practice [1], [2], [3]. However, to the best of author's knowledge the unambiguous solution of the case related to more than one variable, is heretofore not to be found in literature.

Phenomena occurring in engineering practice generally depend on many variables, and so it seems to be necessary to adapt to given function-points an approaching empirical function, the equation of which is known and properly approaches the phenomenon itself. In practice this always occurs by using a linear function, or a function that might be turned by transformation into a linear one, and heretofore the usual condition to be satisfied was that the square sum of weighted residuals of coordinates should be a minimum. As is well-known, in this case the solution depends on the chosen system of coordinates also, while the solution investigated in the paper, determined on the base of the condition of perpendicular residuals, is invariant in relation to the transformation of coordinates.

In the paper the adjustment of a general point system characterized by more variables is dealt with, using for this purpose a linear function with more variables, i.e., the so-called hyper-plane. The investigation, refers to both cases occurring in practice i.e., when:

1. the adjusting linear function is to be determined on the base of the minimum of weighted residuals;

2. the adjusting function should satisfy, in addition to the minimum condition also an accessory one, i.e., that same should run through a given starting point.

The square sum of weighted residuals

The value-system should be given in an orthogonal system of coordinates attached to variables $x, y, \ldots, v$.

The variables are included into a vector $\mathbf{r}$ having n elements,

$$\mathbf{r} = \{x\ y\ \ldots\ v\} \tag{1}$$

The direction of the axes of coordinates should be explained by the orthogonal unit-vectors

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \{1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0\} \\
\mathbf{e}_2 &= \{0 \quad 1 \quad \ldots \quad 0\} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\mathbf{e}_n &= \{0 \quad 0 \quad \ldots \quad 1\}.
\end{aligned} \tag{2}$$

The values of the discrete value-system belonging to each other should be marked by the vectors

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= \{x_1\ y_1 \quad \ldots \quad v_1\} \\
\mathbf{r}_2 &= \{x_2\ y_2 \quad \ldots \quad v_2\} \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\mathbf{r}_q &= \{x_q\ y_q \quad \ldots \quad v_q\},
\end{aligned} \tag{3}$$

calling same the points of an n-dimensional space expanded by the vectors $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_n$. The single points are taken with a not infinitely great positive weighing p_i $(i = 1, 2, \ldots q)$ into consideration.

The equation of the adjusting hyper-plane (according to HESSE) is

$$\mathbf{nr} - l = 0\,, \tag{4}$$

or

$$n_x x + n_y y + \ldots + n_v v - l = 0\,, \tag{4a}$$

where

$$\mathbf{n} = \{n_x\ n_y \quad \ldots \quad n_v\} \tag{5}$$

is the normal unit-vector of the hyper-plane, and l is the distance between the hyper-plane and the centre of the system of coordinates.

This distance of the i-th point from the hyper-plane is

$$e_i = \mathbf{nr}_i - \mathbf{nr} = \mathbf{nr}_i - l \qquad (i = 1, 2, \ldots, q) \tag{6}$$

thus, the square sum of weighted residuals is represented by the relation

$$S = \Sigma p_i e_i^2 = \Sigma p_i \ (\mathbf{nr}_i - l)^2 , \tag{7}$$

or expressed in the scalar form

$$S = \Sigma p_i (n_x x_i + n_y y_i + \ldots + n_q v_i - l)^2 . \tag{7a}$$

Application of the minimum principle

In compliance with the previous paragraph the problem consists in the determination of the extreme value (minimum) of the scalar-vector function

$$S = f(\mathbf{n}, l) , \tag{8}$$

under the condition

$$\mathbf{n}^2 = 1 , \tag{9}$$

namely, it should be taken into consideration, that the normal vector is a unit-vector, i.e. that the single components are not independent of each other.

Applying the method of LAGRANGE's multipliers (λ) the enlarged function takes the form

$$L = \Sigma p_i (\mathbf{nr}_i - l)^2 - \lambda (n^2 - 1) , \tag{10}$$

or fully written out

$$L = \Sigma p_i (n_x x_i + n_y y_i + \ldots + n_v v_i - l)^2 - \lambda (n_x^2 + n_y^2 + \ldots + n_v^2 - 1) . \tag{10a}$$

Constituting the first differential quotients and making them equal to zero:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial n_x} &= n_x \Sigma p_i x_i^2 + n_y \Sigma p_i x_i y_i + \ldots + n_v \Sigma p_i x_i v_i - \\
&\quad - l \Sigma p_i x_i - \lambda n_x = 0 \\
\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial n_y} &= n_x \Sigma p_i y_i x_i + n_y \Sigma p_i y_i^2 + \ldots + n_q \Sigma p_i y_i v_i - \\
&\quad - l \Sigma p_i y_i - \lambda n_y = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial n_v} &= n_x \Sigma p_i v_i x_i + n_y \Sigma p_i v_i y_i + \ldots + n_v \Sigma p_i v_i^2 - \\
&\quad - l \Sigma p_i v_i - \lambda n_v = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \lambda} = n_x \Sigma p_i x_i + n_y \Sigma p_i y_i + \ldots + n_v \Sigma p_i v_i - l \Sigma p_i = 0 \tag{12}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial l} = n_x^2 + n_y^2 + \ldots + n_v^2 - 1 = 0\,, \tag{13}$$

or set up in the vectorial way

$$\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n}\,\Sigma p_i (\mathbf{r}_i \circ \mathbf{r}_i) - l \Sigma p_i \mathbf{r}_i - \lambda \mathbf{n} = 0 \tag{11a}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \Sigma p_i (\mathbf{n}\mathbf{r}_i) - l \Sigma p_i = 0 \tag{12a}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{n}^2 - 1 = 0 \tag{13a}$$

where $\circ$ denotes the dyadic multiplication.

Expressing l from relation (12), replacing the result into (11) and reducing the following relations are arrived at:

$$\begin{aligned}
&n_x \{\Sigma p_i x_i^2 - (\Sigma p_i)^{-1} \cdot \Sigma p_i x^2 - \lambda\} + \\
&\quad + n_y \{\Sigma p_i x_i y_i - (\Sigma p_i)^{-1} \cdot \Sigma p_i x_i \Sigma p_i y_i\} + \\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&\quad + n_v \{\Sigma p_i x_i v_i - (\Sigma p_i)^{-1} \cdot \Sigma p_i x_i \Sigma p_i y_i\} = 0 \\
&n_x \{\Sigma p_i y_i x_i - (\Sigma p_i)^{-1} \cdot \Sigma p_i y_i \Sigma p_i x_i\} + \\
&\quad + n_y \{\Sigma p_i y_i^2 - (\Sigma p_i)^{-1} \cdot \Sigma p_i y_i^2 - \lambda\} + \\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&\quad + n_v \{\Sigma p_i y_i v_i - (\Sigma p_i)^{-1} \cdot \Sigma\, p_i y_i \Sigma p_i v_i\} = 0 \\
&\cdot\ \cdot \\
&\cdot\ \cdot \\
&\cdot\ \cdot \\
&n_x \{\Sigma p_i v_i x_i - (\Sigma p_i)^{-1} \cdot \Sigma p_i v_i \Sigma p_i x_i\} + \\
&\quad + n_y \{\Sigma p_i v_i y_i - (\Sigma p_i)_-^{1} \cdot \Sigma p_i v_i \Sigma p_i y_i\} + \\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&\quad + n_v \{\Sigma p_i v_i^2 - (\Sigma p_i)^{-1} \cdot \Sigma p_i v_i^2 - \lambda\} = 0\,,
\end{aligned} \tag{14}$$

or set up in the vectorial way:

$$\mathbf{n}\,\{\Sigma p_i (\mathbf{r}_i \circ \mathbf{r}_i) - (\Sigma p_i)^{-1} \Sigma p_i \mathbf{r}_i \circ \Sigma p_i \mathbf{r}_i - \lambda\} = 0 \tag{14a}$$

Let us introduce for the marking of the part of expressions excepting λ within braces $\{\ldots\}$ the latter symbols $D_{xx}, D_{xy}, \ldots, D_{xv}, \ldots, D_{vv}$, referring to which, due to symmetry, conditions $D_{xy} = D_{yx}$, $D_{xv} = D_{vx}, \ldots$ hold, then the necessary conditions for the existence of a minimum can be formularized as given hereunder:

$$\begin{aligned}
&(D_{xx} - \lambda)\, n_x + D_{xy}\, n_y + \ldots + D_{xv}\, n_v = 0 \\
&D_{yx}\, n_x + (D_{yy} - \lambda)\, n_y + \ldots + D_{yv}\, n_v = 0 \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&D_{vx}\, n_x + D_{vy}\, n_y + \ldots + (D_{vv} - \lambda)\, n_v = 0\,.
\end{aligned} \tag{15}$$

Introducing the coordinate matrix

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & \dots & D_{xv} \\ D_{yx} & D_{yy} & \dots & D_{yv} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{vx} & D_{vy} & \dots & D_{vv} \end{bmatrix} \tag{16}$$

(15) turns into the following matrix equation:

$$(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I})\,\mathbf{n} = \mathbf{0}\,, \tag{17}$$

where $\mathbf{I}$ is the unit matrix the size of which is identical with $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Summing up it can be stated that the determination of the normal vector of the adjusting hyper-plane conduces to a so-called principal axis problem, i.e., to the establishment of the roots of equation (17).

Determination of the pole-distance

Determining the normal-vector $\mathbf{n}$ from the available relations, then in compliance with equation (12a) the pole-distance can be computed from the equation

$$l = (\Sigma p_i)^{-1} \cdot \Sigma p_i (\mathbf{n}\mathbf{r}_i)\,, \tag{19}$$

or

$$l = \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i} n_x + \frac{\Sigma p_i y_i}{\Sigma p_i} n_y + \dots + \frac{\Sigma p_i v_i}{\Sigma p_i} n_v. \tag{19a}$$

Let us introduce the centre of gravity of the point system or its coordinates, respectively, which is represented by the location-vector pointing towards the centre of gravity:

$$\mathbf{r}_s = \{x_s \; y_s \; \dots \; v_s\}\,, \tag{20}$$

and is interpreted by relations

$$x_s = \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i}\,, \quad y_s = \frac{\Sigma p_i y_i}{\Sigma p_i}\,, \quad \dots, \quad v_s = \frac{\Sigma p_i v_i}{\Sigma p_i}\,, \tag{21}$$

then the pole-distance is

$$l = \mathbf{r}_s \mathbf{n} \tag{19b}$$

or

$$l = x_s n_x + y_x n_y + \ldots v_s n_v \tag{19c}$$

A transformation of coordinates

Let us perform the following transformation of coordinates

$$\varrho_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s \qquad i = (1,\ 2,\ \ldots,\ q), \tag{22}$$

or written in detail

$$\begin{aligned} \xi_i &= x_i - x_s \\ \eta_i &= y_i - y_s \\ &\ldots\ldots \qquad i = (1, 2,\ \ldots,\ q) \\ &\ldots\ldots \\ \omega_i &= v_i - v_s. \end{aligned} \tag{22a}$$

This transformation means the shift of the centre of coordinates into the centre of gravity. The transformation in question takes the coordinate matrix interpreted by the relation

$$\mathbf{D} = \Sigma p_i (\mathbf{r}_i \circ \mathbf{r}_i) - (\Sigma p_i)^{-1} \Sigma p_i \mathbf{r}_i \circ \Sigma p_i \mathbf{r}_i \tag{23}$$

into the matrix

$$\mathbf{D}_s = \Sigma p_i (\varrho_i \circ \varrho_i), \tag{24}$$

which is interpreted by relations

$$\begin{aligned} &D_{xx} = \Sigma p_i \xi_i^2, \quad D_{xy} = \Sigma p_i \xi_i \eta_i \ \ldots \quad D_{xv} = \Sigma p_i \xi_i \omega_i \\ &D_{yx} = \Sigma p_i \eta_i \xi_i, \quad D_{yy} = \Sigma p_i \eta_i^2 \ldots \quad D_{yv} = \Sigma p_i \eta_i \omega_i \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &D_{vx} = \Sigma p_i \omega_i \xi_i, \quad D_{vy} = \Sigma p_i \omega_i \eta_i, \quad \ldots, \quad D_{vv} = \Sigma p_i \omega_i^2. \end{aligned} \tag{25}$$

Comparing relations (19b) and (22) it can be seen that in the system of coordinates the centre of which complies with the centre of gravity, the pole-distance equals zero, thus, the adjusting hyper-plane comprises the centre of the system of coordinates. Consequently it follows: *the adjusting hyper-plane always includes the centre of gravity of the point-system.*

In the following investigations it is always assumed that the centre of the system of coordinates and that of gravity coincide with each other. This assumption does not mean a restriction of generality, as between matrices $\mathbf{D}$ belonging to the centre of the system of coordinates and $\mathbf{D}_s$ belonging to the centre of gravity the relation

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_S + \Sigma p_i (\mathbf{r}_s \circ \mathbf{r}_s)$$

holds.

In the transformed case the weighted square sum of residuals is given by the following relation:

$$S = \Sigma p_i \, e_i^2 = \Sigma p_i \, (\mathbf{n} \, \varrho_i)^2 = \Sigma p_i \, (n_x \, \xi_i + n_y \, \eta_i + \ldots + n_v \, \omega_i)^2.$$

Method for the solution of the normal unit-vector and the uniqueness of the solution

For the determination of the normal-vector of the adjusting hyperplane the system of equations

$$(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}) \, \mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{17}$$

$$\mathbf{n}^2 = 1 \tag{9}$$

is available. The equation system (17) has a solution deviating from the trivial solution $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ only then, if the determination of the system is equal to zero, thus

$$\det \, (\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \, , \tag{26}$$

i.e., if

$$\begin{vmatrix} D_{xx} - \lambda & D_{xy} & \ldots & D_{xv} \\ D_{yx} & D_{yy} - \lambda & \ldots & D_{yv} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{vx} & D_{vy} & \ldots & D_{vv} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{26a}$$

Relation (26) is the so-called characteristic equation of matrix $\mathbf{D}$, the roots of which are the eigen-values of the matrix. As the number of variables $x, y, \ldots, v$ is n, equation (26) gives an algebraic equation of the n-th order, namely:

$$\lambda^n - \lambda^{n-1} \, i_1 (\mathbf{D}) + \lambda^{n-2} \, i_2 (\mathbf{D}) - \ldots \pm i_n (\mathbf{D}) = 0 \tag{27}$$

where

$$\begin{aligned} i_1 (\mathbf{D}) &= \sum_{i=x}^{v} D_{ii} \\ i_2 (\mathbf{D}) &= \sum_{i=x}^{u} \sum_{i=x}^{v} \begin{vmatrix} D_{ii} & D_{ij} \\ D_{ji} & D_{jj} \end{vmatrix} \\ &\vdots \\ i_n (\mathbf{D}) &= \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} & \ldots & D_{xv} \\ D_{yx} & D_{yy} & \ldots & D_{yv} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{vx} & D_{vy} & \ldots & D_{vv} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{28}$$

are the scalar invariants of matrix $\mathbf{D}$.

As the matrix $\mathbf{D}$ is symmetrical all eigen-values of same are real. The eigen-vectors belonging to the eigen-values give the solutions of equations (17) and (9), thus, knowing eigen-values λ_k ($k = 1, 2, \ldots n$), the eigen-vector $\mathbf{n}_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) and its components $n_{kx}, n_{ky}, \ldots, n_{kv}$ can be computed from equations

$$\mathbf{D}\mathbf{n}_k = \lambda_k \mathbf{n}_k \tag{29}$$

$$\mathbf{n}_k^2 = 1 \tag{30}$$

or

$$\begin{aligned} D_{xx} n_{kx} + D_{xy} n_{ky} + \ldots + D_{xv} n_v &= \lambda_k n_{kx} \\ D_{yx} n_{kx} + D_{yy} n_{ky} + \ldots + D_{yv} n_v &= \lambda_k n_{ky} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_{vx} n_{kx} + D_{vy} n_{ky} + \ldots + D_{vv} n_v &= \lambda_k n_{kv} \end{aligned} \tag{29a}$$

$$n_{kx}^2 + n_{ky}^2 + \ldots + n_{kv}^2 = 1\,. \tag{30a}$$

As is well-known from literature, for a symmetrical matrix the eigen-vectors, which in pairs are orthogonal to each other and comply with the number of the rows or columns of the matrix, can always be chosen. Thus, the problem is always solvable.

Among these eigen-vectors the solution of the problem requires only that (or those) which ensures (or ensure) the best adherence. This statement is arrived at on the base of the following train of thoughts:

It is well-known that the element of the j-th row and the j-th column of a quadratic matrix — i.e., the j-th element of its principal diagonal — can be produced in the form

$$\mathbf{e}_j \mathbf{D} \mathbf{e}_j \qquad (j = 1, 2, \ \ldots, \ n)\,;$$

on the other hand, on the base of relation (25) it is conceivable that this element gives the weighted square sum of residuals taken from the hyper-plane, formed with the aid of coordinate-vector $\mathbf{e}_j$.

In the system of coordinates determined by eigen-vectors $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_n$ the coordinate-matrix $\mathbf{D}$ turns into the diagonal-matrix

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{31}$$

If the eigen-values are enumerated according to a decreasing range of magnitude, i.e.,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_n\,,$$

then

$$\lambda_n = \min \Sigma\, p_i\, e_i^2\,, \tag{32}$$

consequently, the eigen-vector belonging to the minimum eigen-value of λ_n gives the solution sought for.

If more than one, e.g., s eigen-values λ_n exist, the values of which are minimal and equal to each other, then $(s-1)$-times innumerable solutions exist, this indicating a particularly weighted symmetrical distribution of the point system.

The plane of adherence, formed by all vectors lying in the hyper-plane determined by the normal-vectors belonging to equal eigen-values, ensures an identical adherence.

Adjusting hyper-plane running through a given starting point

Upon the adjusting hyper-plane the condition might be imposed for it to run through a given point. Placing the centre of the system of coordinates into this point, the run of calculation will be identical with the previous one, merely the elements of **D** will take the form

$$\begin{array}{lll} D_{xx} = \Sigma p_i\, x_i^2 & D_{xy} = \Sigma p_i\, x_i\, y_i \;\ldots & D_{xv} = \Sigma p_i\, x_i\, v_i \\ D_{yx} = \Sigma p_i\, y_i\, x_i & D_{yy} = \Sigma p_i\, y_i^2 \;\ldots & D_{yv} = \Sigma p_i\, y_i\, v_i \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ D_{vx} = \Sigma p_i\, v_i\, x_i & D_{vy} = \Sigma p_i\, v_i\, y_i \;\ldots & D_{vv} = \Sigma p_i\, v_i^2 \end{array} \tag{33}$$

The elements of matrix **D** obtained in this way might also be explained as being the moments of inertia belonging to the multidimensional point system.

In this case the adjusting function is

$$\mathbf{nr} = 0\,. \tag{34}$$

Additional remarks

1. Knowing the eigen-values $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ the eigen-vectors are to be determined from equations

$$\mathbf{D}\mathbf{n}_k = \lambda_k \mathbf{n}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{29}$$

λ_i and λ_j should be two different eigen-values, i.e.,

$$\lambda_i \neq \lambda_j\,, \tag{35}$$

then on the base of (29)

$$\mathbf{D}\mathbf{n}_i = \lambda_i \mathbf{n}_i$$

$$\mathbf{D}\mathbf{n}_j = \lambda_j \mathbf{n}_j$$

and as the matrix $\mathbf{D}$ is symmetrical, if the first equation is multiplied with $\mathbf{n}_j$, the second one with $\mathbf{n}_i$, then the two equations substracted from each other, the following result is obtained:

$$(\lambda_i - \lambda_j)\,\mathbf{n}_i\,\mathbf{n}_j = 0\,.$$

From here it follows on the base of (35) that

$$\mathbf{n}_i\,\mathbf{n}_j = 0\,,$$

thus, eigen-vectors belonging to different eigen-values are orthogonal to each other in pairs.

2. To check the calculation the scalar invariants of the coordinate-matrix $\mathbf{D}$ can be used:

The scalar invariants of the matrix $\mathbf{D}$ set up in (28′) and those of the diagonal matrix $\mathbf{D}_0$ must comply with each other, i.e.:

$$\begin{aligned} i_1(\mathbf{D}) &= \Sigma\lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n\,, \\ i_2(\mathbf{D}) &= \sum_{i=x}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{vmatrix} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ i_n(\mathbf{D}) &= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n. \end{aligned} \tag{36}$$

REFERENCES

1. Zambó, J.: The Location of Level Drifts (Az irányvágatok telepítése). *Bányászati Lapok*, No. 6. (1957).
2. Milasovszky, B.: Über die exakte Bestimmung der ausgleichenden Geraden. *Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Bánya- és Kohómérnöki Osztály Közleményei*, Sopron, **X V** (1943).
3. Milasovszky, B.: The Theoretical Problems of Level Drift Location. *Acta Techn. Hung.* **XXXVIII** (1962),

DIE AUSGLEICHUNG EINES DISKRETEN WERTSYSTEMS MIT HILFE EINER LINEAREN FUNKTION

CS. ASSZONYI

ZUSAMMENFASSUNG

Im Aufsatze wird das in der technischen und nationalökonomischen Praxis oft auftauchende Problem behandelt, wenn ein aus diskreten Punkten bestehendes Wertsystem mit n Veränderlichen durch eine lineare Funktion anzunähern ist.

Der Verfasser wählt als Basis der Annäherung das Minimum der quadratischen Summe der mit einem Gewicht versehenen senkrechten Abweichungen zwischen dem Punktsystem und der linearen Funktion, da in diesem Falle die Ausgleichungsfunktion gegenüber der Koordinatentransformation invariant ist.

Es wird vorgeführt, daß die Lösung des Problems, d. h. die Bestimmung des Normalvektors der Hyper-Ausgleichsebene zur Feststellung der Eigenvektoren zu der vom Verfasser erläuterten Koordinaten-Matrix **D** führt. Es wird auf den geometrischen Inhalt der charakteristischen Werte der Matrix **D**, d. h. auf die sogenannten Eigenwerte hingewiesen, mit deren Hilfe die Einmaligkeit der Lösung des Problems sichergestellt ist.

COMPENSATION DES SYSTÈMES DE VALEURS DISCRÈTES PAR FONCTIONS LINÉAIRES

CS. ASSZONYI

RÉSUMÉ

L'étude traite d'un problème se posant assez souvent dans la pratique de l'ingénieur et de l'économiste, qui consiste à approcher par une fonction linéaire un système de valeurs à n variables composé de points discrets. Comme base de l'approximation, on choisit le minimum du carré pondéré des écarts verticaux entre le système de points et la fonction linéaire, vu que dans ce cas la fonction compensatrice est invariante à l'égard de la transformation des coordonnées.

L'étude démontre que la solution du problème, c'est-à-dire la détermination du vecteur normal du plan compensateur conduit à la détermination des vecteurs propres de la matrice de coordonnées **D** définie par l'auteur. Elle montre le contenu géométrique des valeurs caractéristiques — dites valeurs propres — de **D**, et assure, à l'aide de celles-ci, l'unicité de la solution du problème.

УРАВНИВАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ ЗНАЧЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Ч. АССОНИ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается та часто встречающаяся в технической и экономической практике проблема, когда при помощи линейного уравнения необходимо осуществить приближение системы значений с n переменными, состоящей из дискретных точек.

В работе за основу приближения выбирается минимум взвешенной суммы квадратов перпендикулярных отклонений между системой точек и линейной функцией, так как в этом случае функция уравнивания по отношению к преобразованию координат является инвариантной.

Показано, что решение проблемы, то есть определение нормального вектора уравнивающей гиперплоскости приводит, в конечном счете, к определению собственных векторов трактованной автором координатной матрицы **D** Далее указывается геометрический смысл характеристических значений **D**, т. е. так называемых собственных значений, и при помощи их обеспечивается инициативность решения.

CONTRIBUTION TO THE DETERMINATION OF THE TANGENT OF THE BEARING BELONGING TO AN ADJUSTING STRAIGHT LINE SATISFYING THE PRINCIPLE $\Sigma pe^2 = \min$

CS. ASSZONYI

TECHNICAL UNIVERSITY FOR HEAVY INDUSTRIES, MISKOLC (HUNGARY)

[Maniscript received on March 9th, 1963]

Heretofore in the literature the direction of an adjusting straight line had usually been given by determining the tangent of the double pole-angle or the double bearing of same. In this way the angle sought for could not be determined unanimously, because as a result two straight lines were obtained these being perpendicular to each other. S. FORRAI was the first, who in his paper [7] developed a method to solve the question of biworthiness.

For the adjustment of a planar point system author applies the general method expounded in his paper [8]. He also investigates both cases of adjustment, i.e.;

1. if the straight line should merely satisfy the minimum condition, and
2. in addition to 1. it should also run through a given point.

Finally author proves that FORRAI's condition is necessary and sufficient.

A problem frequently arising in geodetic, mining, economic etc. calculations and in the field of measurements as well consists in the attachment of an adjusting straight line to a system of points in such a way, that the weighted square sum of residuals in respect to same should be minimum.

In the literature the minimalization of the weighted sum of absolute values of residuals is also usual, moreover, the condition that the algebraic sum of signed weighted residuals should equal zero is also to be found.

According to experience the application of GAUSS' principle ensures the best adherence. Therefore, in the following the squares of residuals are to be taken into consideration.

In the mining literature MILLER von HAUENFELS was the first who in his book entitled "Die höhere Markscheidekunst" dealt with this problem. In Hungary, the application of the adjusting straight line in the analytics of the location of mining works was dealt with in papers [1], [2] and [3]. In accordance with ZAMBÓ's investigations [1], [4] the location of unbroken level drifts requires the solution of the problem in question. As he established, two cases are possible:

1. The adjusting straight line should merely satisfy the condition $\Sigma pe^2 = \min$.

2. In addition to 1. the adjusting straight line should also run through a given point.

In papers [1], [4] the problem is solved: in case 1 by determining the tangent of the double pole-angle of the adjusting straight line, while in case 2 the tangent of the double bearing.

In other papers to be found in the literature also the double angle [5], [6], or the onefold angle deduced from the double one [6], [7] appear.

As the relation $\tan 2\,\alpha = \tan 2\,(\alpha + k\,\pi)$, (where $k = 1, 2, \ldots$) holds, the angle α cannot be determined from $\tan 2\,\alpha$ unanimously, because two angles might be obtained which deviate from each other by 90°.

The problem related to biworthiness was first discussed by MILASOVSZKY [5], [6], while FORRAI advised a method for the solution of same [7].

In his paper [8] author investigated the adjustment of a general, n-dimensional, discrete value system. In the present paper he applies the therein propounded method to the case of a planar point system.

Though author's present paper proves that FORRAI's condition of uniqueness [7] cannot be generalized, however investigations carried out on the base of general principles involved in [7] verify the necessary and sufficient character of FORRAI's condition.

Adjustement of a discrete value system

I.

The system of points should be given in a planar orthogonal Cartesian system of coordinates, which is generated by the unit-vectors $\mathbf{i}$ and $\mathbf{j}$. With the aid of same the single points can be characterized by the relation

$$\mathbf{r}_i = x_i\,\mathbf{i} + y_i\,\mathbf{j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q). \tag{1}$$

To the single points belong the positive (not infinitely great) weights p_1, $p_2, \ldots, p_q$. The angles formed by the normal unit-vector of the adjusting straight line and the positive branche of the x and y axes chould be marked by α and β (Fig. 1). In this case

$$\begin{aligned} \mathbf{ni} &= \cos\alpha \\ \mathbf{nj} &= \cos\beta \end{aligned} \tag{2}$$

where $\mathbf{n}$ is the aforementioned normal unit-vector, which on the base of (2) can be expressed by the relation

$$\mathbf{n} = (\mathbf{ni})\,\mathbf{i} + (\mathbf{nj})\,\mathbf{j} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j}. \tag{3}$$

On the base of the above the *weighted square sum of residuals* can be set up in the form

$$S = \Sigma p_i\,(x_i\cos\alpha + y_i\cos\beta - l)^2, \tag{4}$$

or by notations used in vector arithmetics

$$S = \Sigma p_i\,(\mathbf{r}_i\,\mathbf{n} - l)^2, \tag{5}$$

where l denotes the pole distance.

Thus, the problem can be formularized as follows: the normal-vector and pole distance of the adjusting straight line are to be sought for, starting out from the condition that the function

$$S = \Sigma p_i \, e_i^2 \tag{6}$$

should be minimalized, and at the same time the accessory condition

$$\mathbf{n}^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1 \tag{7}$$

should also be satisfied, as angles α and β are not independent of each other — because $\alpha + \beta = 90°$.

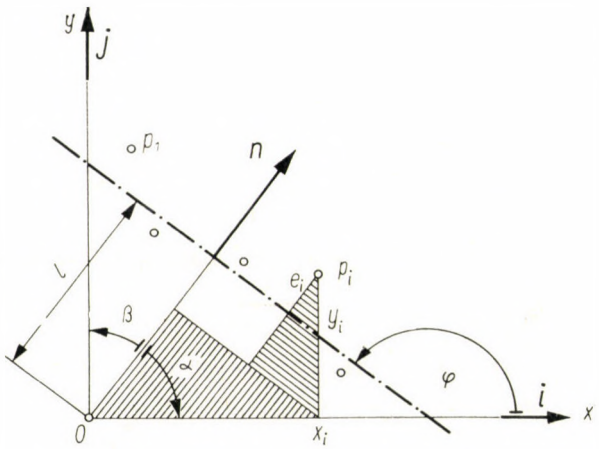

Fig. 1

Let us apply the classical method of the conditional Extremum Value Calculus, i.e., the method of LAGRANGE's multipliers. The function to be minimalized is

$$L = \Sigma p_i \, (\mathbf{r}_i \, \mathbf{n} - l)^2 - \lambda \, (\mathbf{n}^2 - 1), \tag{8}$$

or written in detail

$$L = \Sigma p_i \, (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta - l)^2 - \lambda \, (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 1). \tag{8a}$$

The function $L = L \, (\mathbf{n}, l, \lambda)$ defines a scalar space, the extreme value of which can only be there where the following conditions are satisfied:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{n}} = \Sigma p_i \, (\mathbf{r}_i \, \mathbf{n} - l) \, \mathbf{r}_i - \lambda \mathbf{n} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial l} = \Sigma p_i \, (\mathbf{r}_i \, \mathbf{n} - l) = 0 \tag{10}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{n}^2 - 1 = 0 \tag{11}$$

or

$$\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \cos\alpha} = \cos\alpha\,\Sigma p_i x_i^2 + \cos\beta\,\Sigma p_i x_i y_i - l\,\Sigma p_i x_i - \lambda\cos\alpha = 0$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \cos\beta} = \cos\alpha\,\Sigma p_i y_i x_i + \cos\beta\,\Sigma p_i y_i^2 - l\,\Sigma p_i y_i - \lambda\cos\beta = 0 \tag{9a}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial l} = \cos\alpha\,\Sigma p_i x_i + \cos\beta\,\Sigma p_i y_i - l\,\Sigma p_i = 0 \tag{10a}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1\,. \tag{11a}$$

Reducing equations (9a) and (10a) and introducing the symbols

$$\begin{aligned} D_{xx} &\equiv \Sigma p_i x_i^2 - (\Sigma p_i)^{-1}\,\Sigma p_i x_i^2 \\ D_{yy} &\equiv \Sigma p_i y_i^2 - (\Sigma p_i)^{-1}\,\Sigma p_i y_i^2 \\ D_{xy} &\equiv \Sigma p_i x_i y_i - (\Sigma p_i)^{-1}\,\Sigma p_i x_i\,\Sigma p_i y_i\,, \end{aligned} \tag{12}$$

the necessary condition for the existence of a minimum can be written in the following form:

$$\begin{aligned} (D_{xx} - \lambda)\cos\alpha + D_{xy}\cos\beta &= 0 \\ D_{xy}\cos\alpha + (D_{yy} - \lambda)\cos\beta &= 0 \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta &= 1 \end{aligned} \tag{13}$$
$$\tag{7}$$

Introducing — to the analogy of [8] — the coordinate-matrix

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{xy} & D_{yy} \end{bmatrix} \tag{14}$$

and with the aid of the unit matrix

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

the minimum condition can be formularized as follows:

$$(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{13a}$$
$$\mathbf{n}^2 = 1 \tag{7a}$$

II.

In the following merely the direction of the adjusting straight line or that of the normal to same will be dealt with, as knowing this direction the pole distance can be computed from relations (10) or (10a).

Knowing the centre of gravity of the point system

$$x_s = \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i} \quad \text{and} \quad y_s = \frac{\Sigma p_i y_i}{\Sigma p_i} \tag{16}$$

the elements of matrix **D** can be computed from relations

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \Sigma p_i x_i^2 - \Sigma p_i x_s^2 \\ D_{yy} &= \Sigma p_i y_i^2 - \Sigma p_i y_s^2 \\ D_{xy} &= \Sigma p_i x_i y_i - \Sigma p_i x_s y_s . \end{aligned} \tag{17}$$

Shifting the centre of the system of coordinates on the base of the law of transformation

$$\begin{aligned} \xi_i &= x_i - x_s \\ \eta_i &= y_i - y_s \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots q) \tag{18}$$

into the centre of gravity, equation (17) takes the following simpler form:

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \Sigma p_i \xi_i^2 \\ D_{yy} &= \Sigma p_i \eta_i^2 \\ D_{xy} &= \Sigma p_i \xi_i \eta_i \end{aligned} \tag{19}$$

III.

The determination of the normal vector of the adjusting straight line requires the solution of the system of equations

$$(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I})\,\mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{13a}$$

$$\mathbf{n}^2 = 1 . \tag{7a}$$

As is well-known from literature, the solution is given by the so-called eigen-vectors of the coordinate matrix **D**. In the system of coordinates of eigen-vectors matrix **D** turns into a diagonal matrix i.e.,

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \mathbf{n}_1 \mathbf{D}\, \mathbf{n} \;\; = \lambda_1 \\ D_{yy} &= \mathbf{n}_2 \mathbf{D}\, \mathbf{n}_2 = \lambda_2 \\ D_{xy} &= \mathbf{n}_1 \mathbf{D}\, \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2 \mathbf{D}\, \mathbf{n}_1 = 0 , \end{aligned} \tag{20}$$

i.e.,

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Here $\mathbf{n}_1$ and $\mathbf{n}_2$ are eigen-vectors, while λ_1 and λ_2 the so-called eigen-values which comply with LAGRANGE's multipliers of the problem in question.

In the case of the equation system (13a) the precedent condition of a solution differing from the trivial one $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ is

$$\begin{vmatrix} D_{xx} - \lambda & D_{xy} \\ D_{xy} & D_{yy} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{22}$$

or fully written out

$$\lambda^2 - (D_{yy} + D_{xx})\,\lambda + D_{yy}\,D_{xx} - D_{xy}^2 = 0\,,$$

wherefrom the eigen-values are obtained from relations

$$\lambda_1 = \frac{D_{yy} + D_{xx}}{2} + \sqrt{\left(\frac{D_{yy} - D_{xx}}{2}\right)^2 + D_{xy}^2} \tag{23}$$

$$\lambda_2 = \frac{D_{yy} + D_{xx}}{2} - \sqrt{\left(\frac{D_{yy} - D_{xx}}{2}\right)^2 + D_{xy}^2} \tag{24}$$

Observing relations (19) it can be seen that the elements of matrix **D** standing on the principal diagonal of the matrix represent the weighted square sum of residuals measured from the axes of coordinates. Consequently, as the matrix **D** is to be interpreted in the coordinate system of the eigen-vectors, examining an adjusting straight line running through the centre of gravity, λ_1 and λ_2 reflect the maximum and minimum of perpendicular residuals, thus,

$$\lambda_1 = \max \Sigma p_i\, e_i^2 \tag{25}$$

$$\lambda_2 = \min \Sigma p_i\, e_i^2\,, \tag{26}$$

accordingly, the eigen-vector belonging to the eigen-value λ_2 is the normal vector sought for.

Knowing λ_2 the normal of the adjusting straight line can simply be computed from equations

$$\mathbf{Dn} = \lambda_2\,\mathbf{n} \tag{27}$$

$$\mathbf{n}^2 = 1\,. \tag{7a}$$

IV.

Geometrically the problem can be interpreted as follows :

Let us regard the coordinate matrix **D** as being a quadratic form matrix, i.e., matrix **D** should determine a curve of the second order characterized by relations

$$\mathbf{rDr} = \text{const.} \tag{28}$$

and

$$D_{xx}\,x^2 + 2\,D_{xy}\,xy + D_{yy}\,y^2 = \text{const.} \tag{28a}$$

The above mentioned eigen-vectors constitute the principal axes of the curve of the second order in question, and eigen-values λ_1 and λ_2 are proportional to the squares of the lengths of the minor and major axes, respectively.

1. As

$$\Sigma x_i^2 \Sigma y_i^2 \geqq (\Sigma x_i y_i)^2 ,$$

it ensues from SCHWARTZ's equality that

$$D_{yy} D_{xx} - D_{xy}^2 \geqq 0 , \tag{29}$$

thus, the value of the relation

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ D_{yy} + D_{xx} \pm \sqrt{(D_{yy} + D_{xx})^2 - 4 (D_{yy} D_{xx} - D_{xy}^2)} \right\} \tag{30}$$

is always positive. Consequently, the curve of second order in question is an ellipse, and as follows from (25), (26) the direction of the normal of the adjusting straight line coincides with that of minor axis of the ellipse.

2. If the condition

$$D_{yy} D_{xx} - D_{xy}^2 = 0 \tag{31}$$

is satisfied, then

$$\lambda_2 = 0 .$$

Thus, the ellipse degenerates to a straight line and the points of the point system fall up on one and the same straight line.

3. If the condition

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

is satisfied, then the curve of the second order in question is a circle. Thus, the square sum of residuals, taken from each straight line running through the centre of gravity, is identical and minimal. Accordingly, innumerable adjusting straight lines exist. This depends on the satisfaction of the condition

$$D_{xx} = D_{yy} \qquad \text{and} \qquad D_{xy} = 0 ,$$

that relates to a special location of the points of the point system.

V.

To compare the obtained results with formulae related to the subject to be found in literature, let us determine the tangents of the pole angle and the bearing.

As can be seen from Fig. 1

$$\cos \beta = \sin \alpha ,$$

consequently, on the base of (13) the relations

$$\tan \alpha = \frac{\lambda_2 - D_{xx}}{D_{xy}} \tag{32}$$

$$\tan \alpha = \frac{D_{xy}}{\lambda_2 - D_{yy}} \tag{33}$$

hold. Comparing (32) to (24) the result

$$\tan \alpha = \frac{D_{yy} - D_{xx}}{2\,D_{xy}} \pm \sqrt{\left(\frac{D_{yy} - D_{xx}}{2\,D_{xy}}\right)^2 + 1} \tag{34}$$

is arrived at. Turning to the double pole angle the formula

$$\tan 2\,\alpha = \frac{2\,D_{xy}}{D_{yy} - D_{xx}} \tag{35}$$

is obtained, which is well-known from literature.

The $\pm$ sign to be found in formula (34) indicates that the value of D_{xy} might be positive or negative. Consequently, the division by D_{xy} influences the sign of the root.

Thus, the pole angle and bearing are given by the following formulae:

1. For $D_{xy} > 0$:

$$\alpha = \operatorname{arc\,tan} \frac{D_{yy} - D_{xx}}{2\,D_{xy}} - \sqrt{\left(\frac{D_{yy} - D_{xx}}{2\,D_{xy}}\right)^2 + 1} \tag{36}$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tan} \frac{D_{yy} - D_{xx}}{2\,D_{xy}} + \sqrt{\left(\frac{D_{yy} - D_{xx}}{2\,D_{xy}}\right)^2 + 1}\ . \tag{37}$$

2. For $D_{xy} < 0$:

$$\alpha = \operatorname{arc\,tan} \frac{D_{yy} - D_{xx}}{2\,D_{xy}} + \sqrt{\left(\frac{D_{yy} - D_{xx}}{2\,D_{xy}}\right)^2 + 1} \tag{38}$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tan} \frac{D_{yy} - D_{xx}}{2\,D_{xy}} - \sqrt{\left(\frac{D_{yy} - D_{xx}}{2\,D_{xy}}\right)^2 + 1}\ . \tag{39}$$

As can be seen on the base of (37) and (39), FORRAI's condition is not only necessary but also sufficient.

VI.

For the diagrammatical determination of an adjusting straight line MOHR's *circle of inertia* (Fig. 2) and MOHR—LAND's *circle of inertia* (Fig. 3), both usual in Mechanics, can also be used. (The figures refer to the case $D_{xy} = \Sigma p_i \xi_i \eta_i < 0$).

*

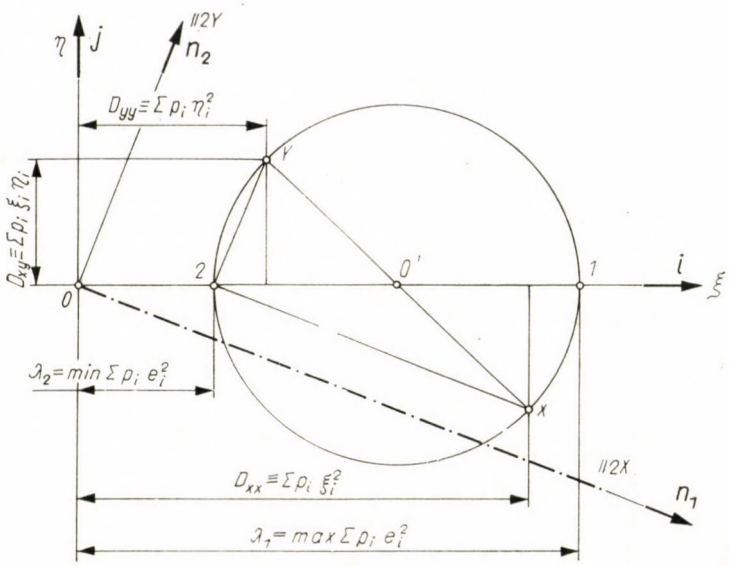
η
j
n2
D_yy=Σ p_i η_i^2
D_xy=Σ p_i ξ_i η_i
Y
2
0'
1
i
ξ
0
λ2=min Σ p_i e_i^2
X
D_xx=Σ p_i ξ_i^2
n1
λ1=max Σ p_i e_i^2

Fig. 2

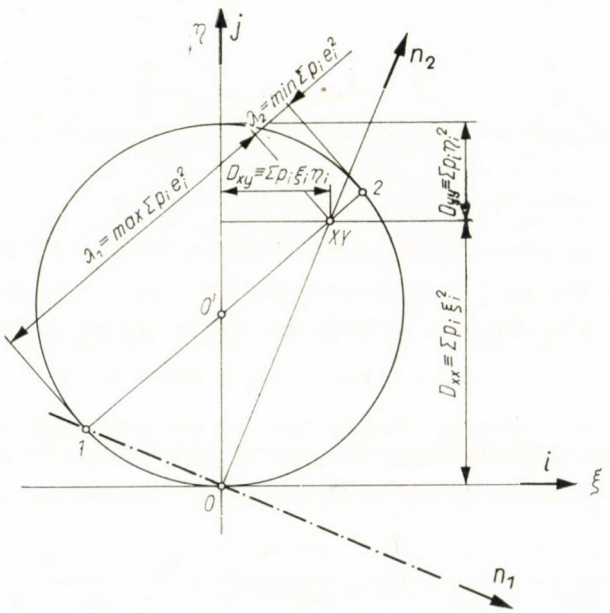
η
j
n2
λ2=min Σ p_i e_i^2
D_xy=Σ p_i ξ_i η_i
D_yy=Σ p_i η_i^2
λ1=max Σ p_i e_i^2
2
XY
0'
1
i
ξ
0
D_xx=Σ p_i ξ_i^2
n1

Fig. 3

A possibility for checking is given by using the *scalar invariants* of matrices $\mathbf{D}$ and $\mathbf{D}_0$, namely,

$$D_{yy} + D_{xx} = \lambda_1 + \lambda_2 \tag{40}$$

$$D_{yy} D_{xx} - D_{xy}^2 = \lambda_1 \lambda_2 . \tag{41}$$

Determination of an adjusting straight line running through a given point

For the sake of simplicity let us place the centre of the system of coordinates into the given point (Fig. 4). The system of points is given by points characterized by the relation

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} \quad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

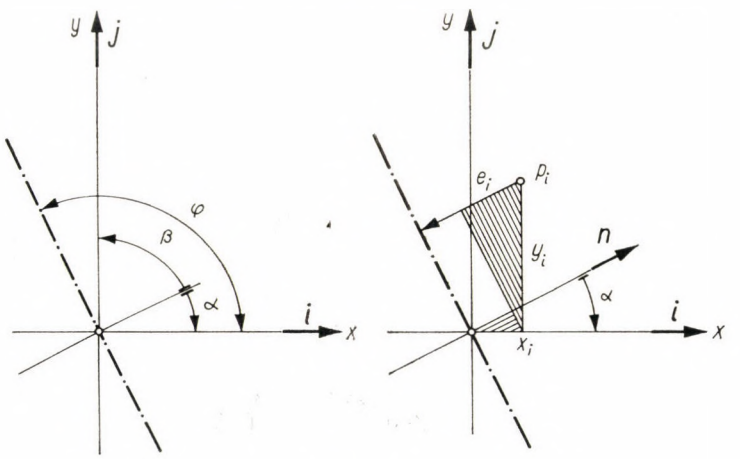

Fig. 4

As the weighted square sum of residuals can be set up in the form

$$S = \Sigma p_i e_i^2 = \Sigma p_i (\mathbf{r}_i \mathbf{n})^2, \tag{42}$$

the normal of the adjusting straight line and the pole angle and bearing of same can be determined by using the method given in the previous paragraph. However, the elements of matrix $\mathbf{D}$ are to be produced in the forms

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \Sigma p_i x_i^2 \\ D_{yy} &= \Sigma p_i y_i^2 \\ D_{xy} &= \Sigma p_i x_i y_i . \end{aligned} \tag{43}$$

It can easily be conceived that in this case the adjusting straight line does not run through the centre of gravity.

REFERENCES

1. ZAMBÓ, J.: Az irányvágatok telepítése (The Location of Level Drifts). *Bányászati Lapok*, 1957.
2. SÜTTI, J.: Az irányvágatok kitűzési szögének meghatározása (The Determination of the Azimuth of Level Drifts). *Bányászati Lapok*, 1960.
3. RICHTER, R.: Megjegyzések Sütti J. „Az irányvágatok kitűzése„ című cikkéhez (Comments on J. Sütti's Study entitled „The Determination of the Azimuth of Level Drifts). *Bányászati Lapok*, 1960.
4. ZAMBÓ, J.: Bányászati telepítések analitikája. (Analytics of the Siting of Mining Works), Mßszaki Könyvkiad*)*, Budapest, 1960.
5. MILASOVSZKY, B.: Über die exakte Bestimmung der ausgleichenden Geraden. *Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Bánya- és Kohómérnöki Osztály Közleményei*, Sopron **XV** (1943).
6. MILASOVSZKY, B.: The Theoretical Problems of Level Drift Location. *Acta Techn. Hung.* **XXXVIII** (1962),
7. FORRAI, S.: Simple and Direct Determination of the Tangent of the Bearing of an Adjusting Straight Line which Satisfies the Condition $\Sigma pe^2 = \min!$ *Acta Techn. Hung.*, **47.** (1964)
8. ASSZONYI, Cs.: Adjustment of a Discrete Value System by a Linear Function. *Acta Techn. Hung.*, **47.** (1964)

EIN BEITRAG ZUR BESTIMMUNG DER RICHTUNGSTANGENTE EINER DER DEM PRINZIP $\Sigma pe^2 = \min$ ENTSPRECHENDEN GERADEN

CS. ASSZONYI

ZUSAMMENFASSUNG

Bisher war es in der Literatur üblich, die Richtung einer ausgleichenden Geraden mit Hilfe der Tangente des zweifachen Pol- oder Richtungswinkels anzugeben. Hieraus konnte der gesuchte Winkel nicht eindeutig bestimmt werden, und als Ergebnis erhielt man zwei aufeinander senkrechte Geraden. Es war S. FORRAI, der in seinem Aufsatze [7] ein Verfahren zur Lösung der Zweiwertigkeit bekannt gab.

Vom Verfasser wird das in das in seinem Aufsatze [8] entwickelte allgemeine Verfahren zur Ausgleichung eines ebenen Punktsystems angewendet, und es werden beide Fälle der Ausgleichung untersucht, nämlich wenn:

1. die Ausgleichsgerade bloß dis Minimumbedingung zu erfüllen hat,
2. die Ausgleichsgerade auch noch durch einen gegebenen Punkt zu gehen hat.

Ferner wird auch nachgewiesen, daß die FORRAIsche Bedingung notwendig und hinreichend ist.

REMARQUES SUR LA DÉTERMINATION DE LA TANGENTE DE DIRECTION DE LA DROITE DE COMPENSATION SATISFAISANT AU PRINCIPE $\Sigma pe^2 = \min$

CS. ASSZONYI

RÉSUMÉ

Jusqu'à présent, la direction de la droite de compensation était généralement précisée par la tangente du double de l'angle polaire ou de l'angle de direction. De celle-ci, l'angle cherché n'a pas pu être déterminé d'une façon équivoque. On a, en effet, obtenu comme résultat deux droites perpendiculaires l'une à l'autre. S. FORRAI était le premier à présenter, dans son étude citée, une méthode permettant de résoudre cette ambivalence.

L'auteur applique la méthode décrite dans une étude antérieure [8] à la compensation du système de points dans le plan, et examine les deux cas de compensation si

1° la droite ne doit satisfaire que la condition minimum, et si
2° la droite doit aussi passer par un point donné.

Il démontre enfin la nécessité et la suffisance de la condition indiquée par FORRAI.

ЗАМЕЧАНИЯ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТАНГЕНСА УГЛА УРАВНИВАЮЩЕЙ ПРЯМОЙ, ИСХОДЯЩЕЙ ИЗ ПРИНЦИПА $\Sigma pe^2 = \text{мин}$

Ч. АССОНИ

РЕЗЮМЕ

В литературе до сих пор определение направления уравнивающей прямой обычно производилось при помощи тангенса двухкратной полюсного угла или направляющего угла. Используя эти данные, нельзя было однозначно определять искомый угол и в качестве результата получались две прямые, перпендикулярные друг к другу. Метод для решения двухзначности впервые был указан Шандор ФОРРАИ в работе, указанной в заглавии.

Автор применяет рассмотренный в работе [8] общий метод для уравнивания точечной системы в плоскости и исследует оба случая уравнивания при условии, что

1. прямая должна удовлетворять только условию минимума и
2. прямая должна также проходить через некоторую заданную точку,

и это доказывает необходимость и достаточность условия Форраи.

RELATIONS BETWEEN THE STANDARD ERROR ELLIPSE AND ADJUSTING STRAIGHT LINES

S. FORRAI

CANDIDATE OF TECHNICAL SCIENCES DEPARTMENT OF MINE EXPLOITATION, TECHNICAL UNIVERSITY OF HEAVY INDUSTRIES, MISKOLC (HUNGARY)

[Manuscript received March 19. 1963]

In geodetic and general error calculations as well as in economic correlative ones an adjusting straight line running in different directions and a so-called mean error ellipse is to be determined. The mean or standard error ellipse (8) is the contour line of the density function of the duodimensional normal distribution (equ. 18 and 34), while straight lines adjusting in different directions are the diameters of this error ellipse. The standard errors relating to the adjusting straight lines are the conjugated half diameters belonging to these diameters. The pairs of conjugated tangents of the standard error ellipse according to equation (34) give the standard error band which involves a probability of 68.26%. This standard error band is obviously the smallest, if the two diameters are parallel to the major axis of the ellipse, i.e., for a normally directed adjusting straight line. Using the method applied in this paper the mean error ellipse dealt with in [5] can also be determined, and not only in the case of a simple intersection as discussed in [5] as well as in the case of intersections made from more than two control points. The latter case is also verified by a numerical example.

A mathematical problem often arising in geodetic and general error calculations [1, 3, 5], in economic correlative calculations [4, 8, 10], as well as in mining in level drift location [6, 7] consists in the determination of an adjusting straight line best fitting a set of points which do not fall on one and the same straight line, or the determination of the so-called mean error ellipse surrounding the probable value of the point, respectively.

All these problems were solved on the base of the method of the least squares introduced by GAUSS. The base of this probability calculation is that the distribution of points is assumed as being normal, i.e., complying with the error distribution [4]. On the correctness of this assumption one might be convinced by the knowledge of the theorem of the central limit distribution [2]. It is well-known [2], that in the case of a normal point distribution the distribution-density function reaches its maximum at the centre of gravity of the point system. This is the very reason why adjusting straight lines always comprise the centre of gravity of the point system and why this point is also the centre of the mean error ellipse.

In the regressive analysis and the English scientific literature the mean error is usually named "standard" error. In accordance with this denomination the mean error ellipse is to be called in the following *standard mean ellipse*. It will also be proved that same is identical with the mean error ellipse dealt with in [5].

In his paper [9] author tried to develop the problem related to the adjusting straight line. In his revising opinion Academician Dr. h. c. Dr. A. TÁRCZY-HORNOCH expounded that he met with a similar mathematical problem connected with calculations related to the telluric station ellipse. The present paper wishes to elucidate the mathematical basis of this problem. In addition it will also be veryfied that the regressive straight line suggested in author's paper [8] entitled "Unambiguous Solution of Linear Correlative Calculation with Two Variables" can always give a better regressive straight line than the hitherto applied one. It will also be seen that by the use of

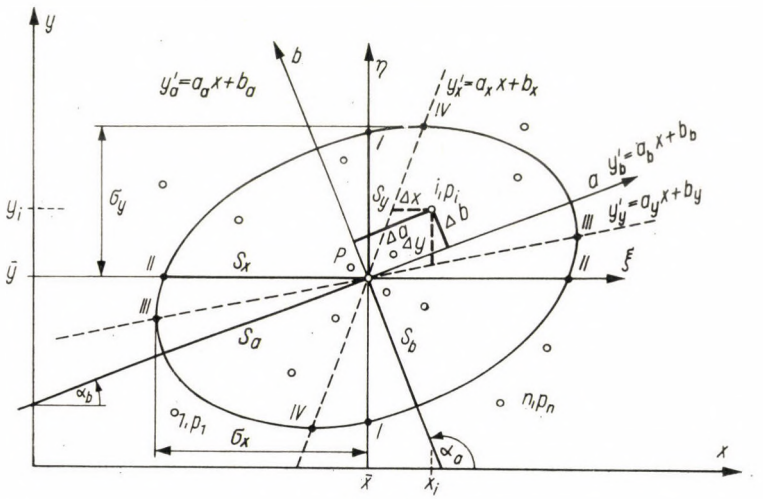

Fig. 1

relations to be deduced in this paper the problem dealt with in [5] can be solved simply also in the case of intersections starting out from more control points.

In Fig. 1 n points are depicted, each of same having a finite weight p_i. According to assumption the distribution of these points is normal in each direction, i.e., the distribution in question is a duodimensionally normal one. This case might be assumed in geodetic point determinations, if measurements are burdened merely by an accidental error, as well as in the well-known trajectory (bombing) problem [2].

On the base of the above the most probable coordinates of point P can be the following relation:

$$\bar{y} = \frac{\sum_1^n p_i y_i}{\sum_1^n p_i} \quad \text{and} \quad \bar{x} = \frac{\sum_1^n p_i x_i}{\sum_1^n p_i} . \tag{1}$$

The coordinates belonging to the individual points might also be given in the system of coordinates 0 (ξ, η) referring to the centre of gravity (e.g., in [4]) and then

$$\eta_i = y_i - \bar{y} = y_i - \frac{\sum_1^n p_i y_i}{\sum_1^n p_i}, \qquad \xi_i = x_i - \bar{x} = x_i - \frac{\sum_1^n p_i x_i}{\sum_1^n p_i}. \tag{2}$$

To write down of the following deductions in a briefer form, the notations used in formula (13) to be found in [9] should be introduced:

$$A = \sum_1^n p_i \sum_1^n p_i y_i^2 - \sum_1^n p_i y_i \sum_1^n p_i y_i \equiv \sum_1^n p_i \sum_1^n p_i \eta_i^2,$$

$$B = \sum_1^n p_i \sum_1^n p_i x_i^2 - \sum_1^n p_i x_i \sum_1^n p_i x_i \equiv \sum_1^n p_i \sum_1^n p_i \xi_i^2, \tag{3}$$

$$C = \sum_1^n p_i \sum_1^n p_i x_i y_i - \sum_1^n p_i x_i \sum_1^n p_i y_i \equiv \sum_1^n p_i \sum_1^n p_i \xi_i \eta_i.$$

The identity (3) obviously holds, as the summing of (2) up of i from 1 to n always gives zero.

The following calculations will require the knowledge of the different dispersion-squares and the correlation coefficient. Utilizing equations (1), (2) and (3) the dispersion-squares can be expressed, on the analogy of the dispersion pertaining to a set of points having the unit weight to be found in [4], by the following relations:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_1^n p_i (y_i - \bar{y})^2}{\sum_1^n p_i} = \frac{A}{\sum_1^n p_i \sum_1^n p_i}, \qquad \sigma_x^2 = \frac{\sum_1^n p_i (x_1 - \bar{x})^2}{\sum_1^n p_i} = \frac{B}{\sum_1^n p_i \sum_1^n p_i}. \tag{4}$$

The above relations give the x and y directed dispersion-squares belonging to the single points.

For the calculation of the correlation coefficient usually the symbol σ_{xy} is also introduced. This can be set up, similarly to equations (4), in the following form:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_1^n p_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_1^n p_i} = \frac{C}{\sum_1^n p_i \sum_1^n p_i} . \tag{5}$$

Denoting the correlation coefficient by r and utilising equations (4) and (5) after reduction the following relation is arrived at:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{C}{\sqrt{AB}} . \tag{6}$$

As is well known, the value of this coefficient is always between -1 and $+1$, i.e., $0 \leq |r| \leq 1$ If $r = 0$ then one can say that the probability variables x and y are not correlated, on the other hand, if $r^2 = 1$, then between variables x and y a linear functional relation exists. In the latter case the duodimensional normal distribution is singular, i.e., its explanatory region is restricted to one single straight line of the plane. It is easily conceivable that this degenerated duodimensional normal distribution is identical with the monodimensional normal distribution. This case occurs e.g., when making a geodetical measurement of length in a faultlessly by determined direction.

As in the case $r^2 = 1$ the duodimensional normal distribution degenerates into a monodimensional one, thus the case $r^2 = 1$ must be excluded from the investigation of the duodimensional normal distribution.

The generally known density function of the duodimensional normal distribution (e.g. see in [2,4]) set up in the system of coordinates given in Fig. 1 is:

$$z = \varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x \sigma_y \sqrt{1 - r^2}} \cdot \exp\left\{ - \frac{1}{2(1 - r^2)} \left[\frac{(x - \bar{x})^2}{\sigma_x^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{(y - \bar{y})^2}{\sigma_y^2} - 2r \frac{(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y} \right] \right\}. \tag{7}$$

Substituting relations (4) and (6) into equation (7) and then reducing, the equation

$$z = \varphi(x, y) = \frac{\sum_1^n p_i \sum_1^n p_i}{2\pi \sqrt{AB - C^2}} \cdot \exp\left\{ - \frac{AB \sum_1^n p_i \sum_1^n p_i}{2\pi (AB - C^2)} \left[\frac{(x - \bar{x})^2}{A} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{(y - \bar{y})^2}{B} - 2C \frac{(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{AB} \right] \right\} \tag{8}$$

is obtained.

The density function (8) reaches its maximal value where the exponent equals zero. As can be seen this occurs at point P where $x = \bar{x}$ and $y = \bar{y}$, and here the value of the maximum is obviously

$$z_p = \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\sum_1^n p_i \sum_1^n p_i}{2\pi\sqrt{AB - C^2}} . \tag{9}$$

The density function of probability corresponding to equation (8) is shown in Fig. 2. It can be proved that the projection of this surface to which-

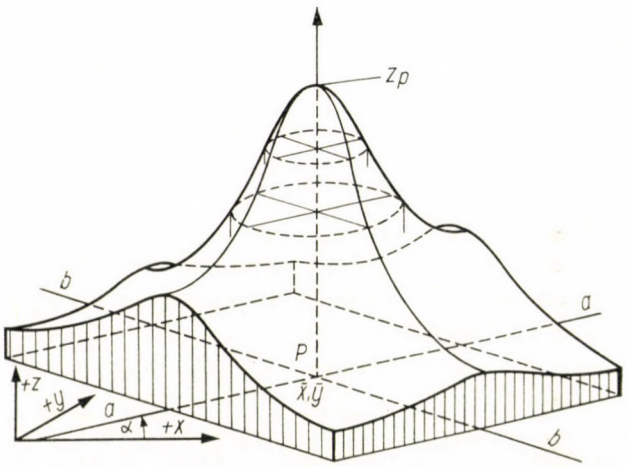

Fig. 2

ever plane, results in a monodimensional normal distribution. The projection is interpreted on the analogy of volume distribution, i.e., so the volume to be imagined is as large the volume is between the distribution-density function and the plane xy. The functions of projections in the x and y directions are called density functions of boundary distribution. On the base of the above the x directed density function of boundary distribution can be determined mathematically as follows:

$$\varphi_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\, dy . \tag{10}$$

By an appropriate substitution and utilizing relation (2) function (7) or (8), respectively, same cal also be written in the following form:

$$\varphi(\eta, \xi) = \delta \exp\left[-(\alpha\eta^2 + 2\beta\eta + \gamma)\right] . \tag{11}$$

Substituting function (11) into integral (10), the following integral is arrived at, in general:

$$\varphi_1(\xi) = \delta \int_{\eta_1}^{\eta_2} \exp\left[-(\alpha\eta^2 + 2\beta\eta + \gamma)\right] \mathrm{d}\eta =$$

$$= \delta \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \exp\left[-\left(\frac{\beta}{\alpha} - \gamma\right)\right] \int_{u_1=\sqrt{\alpha}\left(\eta_1+\frac{\beta}{\alpha}\right)}^{u_2} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

In this way a form of the error integral is arrived at. This cannot be solved in a closed form, but for its solution tables are available. Resubstituting the aforementioned constants and knowing the error integral, the density function corresponding to the boundary distribution (10) can be set up as follows:

$$\varphi_1(x) = \frac{\sum_1^n p_i}{\sqrt{2\pi B}} \exp\left[-\frac{\sum_1^n p_i \sum_1^n p_i}{2B}(x - \bar{x})^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}\right)^2\right]. \tag{12}$$

Now, if assuming the x — directed variables as being constant, the density functions of the y — directed boundary distribution, is obtained on the base of a similar consideration:

$$\varphi_2(y) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\,\mathrm{d}x = \frac{\sum_1^n p_i}{\sqrt{2\pi A}} \exp\left[-\frac{\sum_1^n p_i \sum_1^n p_i}{2A}(y - \bar{y})^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}\right)^2\right]. \tag{13}$$

For a projection in a general direction a distribution-density function can also be set up. This will similarly be a monodimensional normal distribution, i.e.:

$$\varphi(d) = \frac{1}{\sigma_d \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{d - \bar{d}}{\sigma_d}\right)^2\right]. \tag{14}$$

The dispersion in the direction of the straight line d is obtained by a simple transformation of coordinates. If the angle constituted by the pole of straight line d and the $+x$ axis is ε, then the dispersion square can be written in the form:

$$\sigma_d^2 = \frac{1}{\sum_1^n p_i \sum_1^n p_i} \left[A\cos^2\varepsilon + B\sin^2\varepsilon - 2C\sin\varepsilon\cos\varepsilon\right] \tag{15}$$

Utilizing equations (4), (5) and (6), the dispersion square belonging to the d directed distribution can also be expressed by the coordinate directed dispersions as given hereunder:

$$\sigma_d^2 = \sigma_y^2 \cos^2 \varepsilon + \sigma_x^2 \sin^2 \varepsilon - 2\,\sigma_{xy} \sin \varepsilon \cos \varepsilon = \\ = \sigma_y^2 \cos^2 \varepsilon + \sigma_x^2 \sin^2 - 2\,r\,\sigma_x\,\sigma_y \sin \varepsilon \cos \varepsilon. \tag{15a}$$

Of course, by the utilization of general projective formulae (14) and (15), the density-functions of boundary distribution (12) and (13) might also be obtained, if ε is replaced by the pole angles belonging to the axes of coordinates.

The density function of the duodimensional normal distribution can be produced from the density functions of boundary distribution only in that case, by a simple multiplication if the variables are not correlated, i.e., if $r = 0$. In this case based on the previous deductions

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(y). \tag{16}$$

On the base of the two figures it is easily conceivable, that by an appropriate rotation of coordinates two such dispersion components are to be found which are perpendicular to each other. In the system of coordinates constituted by these two components the points are not correlated, i.e., by using notation of Fig. 1:

$$\varphi(a, b) = \varphi_a(a)\,\varphi_b(b). \tag{17}$$

The aforementioned two directions are the directions of the major and minor axes belonging to the ellipse of equal probability.

The level-line of the density function to be seen in Fig. 2 is called ellipse of equal probability [4]. This denomination derives from the fact, that along this line, the value of density functions (7) or (8), are unvariable.

On the analogy of (9) the general equation of ellipses of equal probability is

$$\frac{(y-\bar{y})^2}{A} + \frac{(x-\bar{x})^2}{B} - 2\,C\,\frac{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{AB} = \text{const.} \tag{18}$$

In practice adjusting straight lines running in different directions are applied. The general equation of same is

$$y' = ax + b. \tag{19}$$

The constant term figuring in equation (19) can always be computed from that condition that the straight line must run through the centre of gravity, i.e.:

$$b = \frac{\sum_1^n p_i y_i - a \sum_1^n p_i x_i}{\sum_1^n p_i}. \tag{20}$$

Formula (20) is of general validity, thus, merely the tangent of the bearing pertaining to the different adjusting straight lines should be investigated.

Hitherto in the correlation calculus two adjusting straight lines were applied, these corresponding to the minimum of the square sum of x and y directed residuals, respectively.

In the case of weighted points the minimum of the square sum of y-directed residuals is ensured by the condition

$$\sum_1^n p_i (y_i - a_y x_i - b_y)^2 = \min. \tag{21}$$

From the differential quotient of equation (21), furthermore, utilizing equations (3), (4), (5) and (6) the tangent of the bearing belonging to the regressive straight line running in the y direction is obtained from the formula

$$a_y = \frac{C}{B} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} . \tag{22}$$

In the correlation calculus the dispersion related to the regressive straight line is called *standard error* [4] and is denoted by S:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_1^n p_i (y_i - y_i')^2}{\sum_1^n p_i}} = \sqrt{\frac{\sum_1^n p_i (y_i - a_y x_i - b_y)^2}{\sum_1^n p_i}} . \tag{23}$$

This value is to be computed tabularly point by point [4], and this means a cumbersome work. In paper [8] it is pointed out that this can be calculated briefly and with a simple formula (e.g., in the case of a perpendicular adjustment by formula (19).) The same can also be done here by substituting results (20) and (22) into formula (23). Finishing the operations and reducing, the value of S_y is obtained from formula

$$S_y = \frac{1}{\sum_1^n p_i} \sqrt{A - \frac{C^2}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sum_1^n p_i} \sqrt{1 - r^2} = \sigma_y \sqrt{1 - r^2} . \tag{24}$$

Using the above formula much work can be spared. Although this formula is known [4], the practical application of it has not been encountered yet.

The minimum of the square sum of x-directed residuals is ensured by the condition

$$\sum_1^n p_i (x_i - x_x')^2 = \min. \tag{25}$$

Searching for the extreme value of equation (25) and turning to the general form (19) [8], and using the previously applied notations, the tangent of the bearing of the regressive straight line running in x direction is given by the formula

$$a_x = \frac{A}{C} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{xy}} = \frac{1}{r}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}. \tag{26}$$

while the value of the standard error pertaining to same is

$$S_x = \frac{1}{\sum_1^n p_i}\sqrt{B - \frac{C^2}{A}} = \frac{\sqrt{B}}{\sum_1^n p_i}\sqrt{1 - r^2} = \sigma_x\sqrt{1 - r^2}. \tag{27}$$

Equations (22) and (26) indicate that in the case $r \neq 1$ two regressive straight lines exist. The angle constituted by them is the greater the smaller is the value of r. If $r = 0$ the two straight lines are perpendicular to each other. In this case the points are not correlated.

For an unanimous solution the adjusting straight line running in the normal direction is the most adequate [8], [10], if both variables are assumed to be variables of probability related to uniformly normal distributions.

Using notations to be seen in Fig. 1 the tangent of the bearing of this regressive straight line running in the b direction is obtained from the formula

$$a_b = \frac{1}{2C}[A - B + \sqrt{(A - B)^2 + 4C^2}] = \\ = \frac{1}{2r\sigma_x\sigma_y}[\sigma_y^2 - \sigma_x^2 + \sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4r^2\sigma_x^2\sigma_y^2}]. \tag{28}$$

On the other hand, the tangent of the bearing belonging to the regressive straight line, ensuring the minimum of the square sum of a directed perpendicular residuals is given by the formula

$$a_a = \frac{1}{2C}[A - B - \sqrt{(A - B)^2 + 4C^2}] = \\ = \frac{1}{2r\sigma_x\sigma_y}[\sigma_y^2 - \sigma_x^2 - \sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4r^2\sigma_x^2\sigma_y^2}]. \tag{29}$$

On the base of the above these two latter regressive straight lines are perpendicular to each other, this is clearly indicated by the tangents of their bearings.

The standard errors pertaining to the adjusting regressive straight lines can be computed in the simplest way from the general projective equation (15) by substituting into same the values of the tangents of bearings given by formulae (28) and (29), respectively.

By the utilization of the well-known trigonometrical relations, after the necessary transformation and reductions the standard error pertaining to the adjusting straight line running in the b direction is obtained from the formula

$$S_b = \frac{1}{\sum_1^n p_i} \sqrt{B - \frac{C}{a_b}} = \frac{1}{\sum_1^n p_i} \sqrt{A + \frac{C}{a_a}} \,. \tag{30}$$

The same written by coordinate directed dispersions and the correlation coefficient:

$$S_b = \sqrt{\sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}}{a_b}} = \sqrt{\sigma_y^2 + \frac{\sigma_{xy}}{a_a}} = \sqrt{\sigma_x^2 - r\frac{\sigma_x \sigma_y}{a_b}} = \sqrt{\sigma_y^2 + r\frac{\sigma_x \sigma_y}{a_a}} \tag{30a}$$

As will be seen the values resulting from the latter two formulae give the half minor axis of the standard error ellipse shown in Fig. 1.

The half major axis of the standard error ellipse is given by the standard error pertaining to the adjusting straight line running in the a direction. This can also be computed from formula (15) by using the method explained above:

$$S_a = \frac{1}{\sum_1^n p_i} \sqrt{B - \frac{C}{a_a}} = \frac{1}{\sum_1^n p_i} \sqrt{A + \frac{C}{a_b}} \,. \tag{31a}$$

The same written by dispersions and the correlation coefficient

$$S_a = \sqrt{\sigma_x^2 - \frac{\sigma_{xy}}{a_a}} = \sqrt{\sigma_y^2 + \frac{\sigma_{xy}}{a_b}} = \sqrt{\sigma_x^2 - r\frac{\sigma_x \sigma_y}{a_a}} = \sqrt{\sigma_y^2 + r\frac{\sigma_x \sigma_y}{a_b}} \,. \tag{31}$$

Hereafter, let us set up the equation of the standard error ellipse. In the system of coordinates (a, b) to be seen in Fig. 1 this equation has obviously the form:

$$\frac{b^2}{S_b^2} + \frac{a^2}{S_a^2} = 1 \,. \tag{32}$$

Related to the system of coordinates (x, y) the system (a, b) is shifted to distances $\bar{x}$ and $\bar{y}$ and rotated by the angle α_b.

Utilizing the well-known general orthogonal equations of transformation

$$\begin{aligned} a &= (x - \bar{x}) \cos \alpha_b + (y - \bar{y}) \sin \alpha_b \\ b &= (y - \bar{y}) \cos \alpha_b - (x - \bar{x}) \sin \alpha_b \,, \end{aligned} \tag{33}$$

after a somewhat lengthy computation the result

$$\sum_1^n p_i \sum_1^n p_i \left[\frac{(y - \bar{y})^2}{A} + \frac{(x - \bar{x})^2}{B} - 2C \frac{(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{AB} \right] = \frac{AB - C^2}{AB} \tag{34}$$

is arrived at.

With the aid of the coordinate directed dispersions and correlation coefficient equation (34) can also be written in the form

$$\frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2}+\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2}-2r\frac{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y}=1-r^2. \tag{34a}$$

In the system of coordinates (η, ξ) referring to the centre of gravity the equation of the ellipse in question obviously turns into the form

$$\frac{\eta^2}{\sigma_y^2}+\frac{\xi^2}{\sigma_x^2}-2r\frac{\eta\xi}{\sigma_x\sigma_y}=1-r^2. \tag{34b}$$

It can be seen that points I and II, determined by standard errors y and x resulting from equations (24) and (27), are also points lying on the standard error ellipse, because their coordinates (0, $\pm S_y$ and $\pm S_x$, 0) satisfy equation (34).

The regressive straight line $y'_y = a_y x + b_y$ intersects the standard error ellipse at points III, the coordinates of which are $\pm\sigma_x$, $\pm r\sigma_y$. The tangents of the standard error ellipse at points III is the straight line $\xi = \pm\sigma_x$.

The tangents of the standard error ellipse at points I are characterized by equations $\eta = a_y\xi \pm S_y$. Distances $\overline{\mathrm{P\,I}} = S_y$ and $\overline{\mathrm{P\,III}}$ are conjugated half diameters, because

$$S_b^2+S_a^2=S_y^2+\overline{PIII}^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2. \tag{35}$$

The correctness of equation (35) can simply be verified by substituting relations (24), (30), (31) and $\overline{\mathrm{P\,III}} = \sqrt{\sigma_x^2+r\sigma_y^2}$ into same.

Similarly, it can be proved that distances $\overline{\mathrm{P\,II}} = S_x$ and $\overline{\mathrm{P\,IV}}$ are also conjugated half diameters; thus, the equations of the tangents at points IV ($r\sigma_x$, σ_y) are $\eta = \pm\sigma_x$, while the equations of tangents at points II are

$$\eta = a_x\xi \pm \frac{S_x}{a_x}.$$

The fact that S_a and S_b represent the limit transition of the above is obvious, as they are the major and minor axes of the standard error ellipse, i.e., the special conjugated half diameters of same.

Knowing the law referring to conjugated diameters, the adjusting straight line running in any direction and the standard error referring to same can simply be computed or drawn.

It is well-known from the correlation calculus [4] that roundly 68% of all points are located within the band of the $\pm$ onefold standard errors, while roundly 95% within the band of the $\pm$ twofold ones (Fig. 3).

This obviously holds for any band of standard errors, as normalizing the general projective density function (14), for the distribution function the relation

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du \tag{36}$$

is obtained.

Consequently, knowing the error integral the probability v_1 related to points lying within the band of onefold errors can be computed as follows

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{+1} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du - \int_{-\infty}^{-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du \right] =$$

$$= 0{,}8413 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}6826 .$$

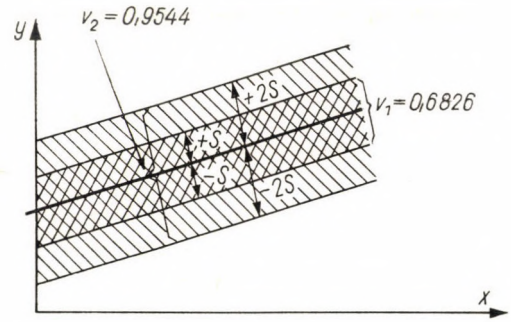

Fig. 3

The probability v_2 related to points located within the band of twofold errors can similarly be computed:

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{+2} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544 .$$

The error band is obviously the narrowest, if the conjugated diameters are exactly the axes of the ellipse, and the direction of the adjusting straight line complies exactly with the direction of the major axis.

It follows from this, if both variables are probability variables of normal distribution, the adjusting straight line ensuring the minimum of the square sum of residuals in the perpendicular direction (form. (28)] gives the „best" regressive straight line. Thus, the regressive straight line suggested in [8] is not only unambiguous, but also gives a better solution than adjusting straight lines running in the direction of coordinate axes.

If $r = 1$, then as has already been mentioned the doudomensional normal distribution degenerates into a monodimensional one and between

quantities x, y a linear functional relation exists. In this case equations (22), (26) and (28) conduce to an identical adjusting straight line, i.e.:

$$a_y = a_x = a_b = \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} .$$

The standard errors belonging to same resulting from formulae (24), (27) and (30) are:

$$S_y = S_x = S_o = 0 .$$

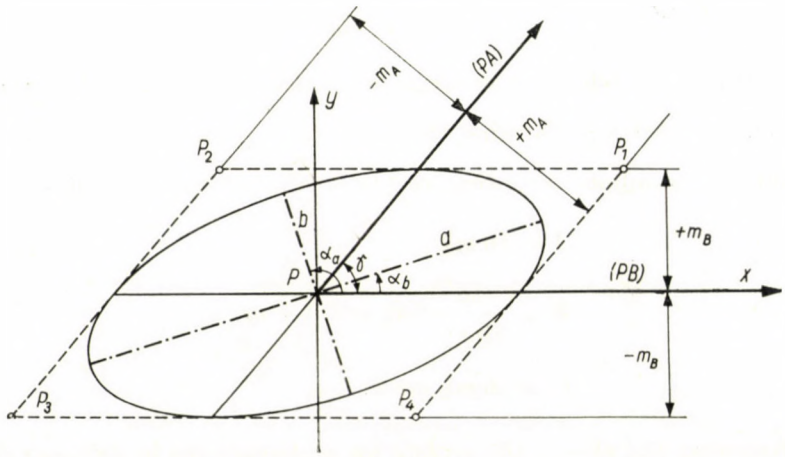

Fig. 4

In this case the dispersion ellipse characterized by relation (34) degenerates into a line with a length of $2\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$, which falls into the direction of the adjusting straight line. This can be proved by using equation (31).

The density function of distribution can be obtained by applying projective equation (14), this indicating that the duodimensional normal distribution really degenerated into a monodimensional one.

Hereafter, let us turn to the solution of the problem dealt with in [5] (which according to the foot-note was published in the *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 1957, pp. 395—411) by applying the method described in this paper.

According to Fig. 4 point P was determined by a simple intersection from directions A and B which from the angle γ. In the intersection errors $\pm m_A$ and $\pm m_B$ occured, consequently points P_1, P_2, P_3 and P_4 were obtained as results.

The coordinates of these points can be set up in any system of orthogonal coordinates. As the intention is to adhere to notations used in paper [5], the

coordinates should be written in the system of coordinates shown in Fig. 4.

$$P_1: y_1 = +m_B\,; \qquad x_1 = \frac{1}{\sin\gamma}(m_B\cos\gamma + m_A)$$

$$P_2: y_2 = +m_B\,; \qquad x_2 = \frac{1}{\sin\gamma}(m_B\cos\gamma - m_A)$$

$$P_3: y_3 = -m_B\,; \qquad x_3 = \frac{1}{\sin\gamma}(-m_B\cos\gamma - m_A)$$

$$P_4: y_4 = -m_B\,; \qquad x_4 = \frac{1}{\sin\gamma}(-m_B\cos\gamma + m_A).$$

In this case each point is taken into consideration with the unit weight $\sum_1^n p_i = n = 4$. After performing the necessary operations and simplifications the values of symbols according to (3) can be written as follows:

$$A = 16\,m_B^2\,,$$

$$B = \frac{16}{\sin^2\gamma}(m_B^2\cos^2\gamma + m_A^2)\,, \tag{3'}$$

$$C = 16\,m_B^2\cot\gamma\,.$$

Knowing the above, the setting up to dispersions in different directions on the base of equation (4) is unnecessary, as this is quite simple.

Substituting the obtained results into equation (28), after the adequate goniometrical transformations the direction of the major axis of the standard error ellipse is obtained from the formula given hereunder:

$$\tan\alpha_b = a_b = -\frac{m_A^2 + m_B^2\cos 2\gamma}{m_B^2\sin 2\gamma} + \sqrt{\left(\frac{m_A^2 + m_B^2\cos 2\gamma}{m_B^2\sin 2\gamma}\right)^2 + 1}\,, \tag{28'}$$

while the tangent of the bearing belonging to the minor axis results from equation (29) after similar transformation:

$$\tan\alpha_a = a_a = -\frac{m_A^2 + m_B^2\cos 2\gamma}{m_B^2\sin 2\gamma} - \sqrt{\left(\frac{m_A^2 + m_B^2\cos 2\gamma}{m_B^2\sin 2\gamma}\right)^2 + 1}\,. \tag{29'}$$

Knowing the formula related to twofold goniometrical functions, it can easily be understood that both relations satisfy formula (13) to be found in paper [5].

The half minor axis of the standard error ellipse is obtained from formula (30), e.g. by substituting the values of (3′) and (29′) into same. After

reduction the result

$$S_b = b = m_B \sqrt{1 + \frac{\cot \gamma}{a_a}} \tag{30'}$$

is arrived at.

The half major axis of the same standard error ellipse is to be computed from formula (31). Substituting the values of (3′) and (28′) and reducing the result

$$S_a = a = m_B \sqrt{1 + \frac{\cot \gamma}{a_b}} \tag{31'}$$

is obtained.

To check the correctness and utility of the formulae deduced in this paper, let us compute the example to be found in paper [5]: The angle of intersection $\gamma = 50°$, $m_A = \pm 5$ cm and $m_B = \pm 4$ cm.

The tangent of the bearing relating to the major axis of the standard error ellipse determined from formula (28′):

$$a_b = -\frac{25 - 16 \cdot 0{,}173648}{16 \cdot 0{,}984808} + \sqrt{\left(\frac{25 - 16 \cdot 0{,}173648}{16 \cdot 0{,}984808}\right)^2 + 1} =$$

$$= -1{,}410277 + 1{,}728838 = +0{,}318561,$$

and the bearing belonging to same:

$$a_b = 17° 40' 11''.$$

The tangent of the bearing pertaining to the minor axis of this ellipse determined from formula (29′)

$$a_a = -1{,}410277 - 1{,}728838 = -3{,}139115$$

and the bearing belonging to same:

$$\alpha_a = 107° 40' 11''.$$

Computing the length of the half minor axis from formula (30′):

$$b = 4 \sqrt{1 + \frac{0{,}839100}{-3{,}139115}} = 3{,}4239 \text{ cm},$$

while the length of the half major axis resulting from formuls (31′):

$$a = 4 \sqrt{1 + \frac{0{,}839100}{0{,}318561}} = 7{,}6252 \text{ cm}.$$

As can be seen, the standard error ellipse computed in this way coincides with the mean error ellipse determined in paper [5].

By the use of the method dealt with the mean error ellipse can be determined not only in the case of a simple intersection, but also in the case

of one starting out from several control points. Of course, in respect to inaccurate points a point-symmetrical location of these points is not to be assumed, i.e., it is unnecessary that the figure $P_1P_2P_3P_4$ should be a regular one. Strictly speaking such an assumption does not cover the actual situation, it might be a more or less good approximation of reality [5].

With regards to inaccurate points the deductions dealt with are based merely on the assumption that the density function of distribution is normal, which assumption is right in connection with measurements. According to author's opinion the here discussed principles might also be appropriate to be used for solving more complicated problems than that dealt with in this paper.

According to the final conclusion expounded in paper [3] the uncertainty related to a point manifests itself in two dimensions, thus, the characterization of same by one single quantity cannot be expected.

Author's opinion is that even this is unnecessary. Setting up the equations of the standard error ellipse referring to the point-uncertainty (formula (34)], the standard error related to the point in question, in other words the uncertainty of the point, can be read referring to any direction.

The equation of the standard error ellipse of the previously computed example, set up in the system of coordinates given in Fig. 4 is

$$\frac{o^2}{42{,}5979} + \frac{y^2}{12{,}6505} - \frac{xy}{25{,}3781} = 1 .$$

Knowing the above equation the length of any secant lying in the straight line $y = ax$ can be simply computed. On the base of what has been said this is exactly the standard error or uncertainty a belonging to the point in question.

For the characterization of the point-uncertainty the sole-point curve of the standard error ellipse is usually given. On the base of the interpretation referring to the sole-point curve it is easy to understand that same gives the distance between the pairs of conjugated diameters of the standard error ellipse. Therefore, values to be seen in Fig. 3 are valid for that part of the plane lying within the pair of tangents.

The probability interpreted by the area of the onefold standard error ellipse is obviously smaller than that represented by the standard error band. It can be computed simply and in closed form.

The probability represented by the area of a c-fold error ellipse can generally be computed by the formula

$$v\left\{\frac{b^2}{S_b^2} + \frac{a^2}{S_a^2} \leqq c^2\right\} = 1 - e^{-\frac{c^2}{2}} \tag{37}$$

(See [11])

The probability represented by the onefold error ellipse is $v_{c=1} = 0.39347$, while that interpreted by the twofold ellipse is $v_{c=2} = 0.86466$.

From equation (37) the error ellipse related to a given probability measure (v) can also be easily computed:

$$c(v) = 2{,}146 \sqrt{-\lg(1 - v)} \tag{38}$$

The constants of standard error ellipses representing probabilities which are equivalent to those represented by the standard error bands are $c(0.6826) \approx 1.50$ and $c(0.9544) \approx 2.47$, respectively.

It might be assumed that standard error bands given by the sole-point curve of the standard error ellipse are data referring to directional errors, while the error ellipse itself supplies data referring to the point. Thus, the two data differ from each other qualitatively too.

REFERENCES

1. Milasovszky, B.: Über die Bestimmung der ausgleichenden Geraden. *Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Bánya- és Kohómérnöki Osztály Közleményei*, Sopron, **XV** (1943).
2. Rényi, A.: Valószínűségszámítás. (Probability Calculus, in Hungarian). Tankönyvkiadó Budapest, 1954.
3. Homoródi, L.: A hibaellipszis és a ponthiba. (The Error Ellipse and Point Error, in Hungarian). *Geodézia és Kartográfia*, 1956.
4. Krekó—Párniczky—Pintér—Theiss: Korreláció és trendszámítás (Correlation and Trend Calculus). Közgazdasági és Jogi Könyvkiad*)*, Budapest. 1958.
5. Tárczy-Hornoch, A.: A középhibaellipszis kiszámításáról egyszerű előmetszésnél. (On the Computation of the Mean Error Ellipse in a Simple Intersection) *VI. Oszt. Közl.* **XXIV** (1959).
6. Zambó, J. Bányászati telepítések analitikája. (Analytics of the Siting of Mining Works). Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1960.
7. Milasovszky, B.: The Theoretical Problems of Level Drift Location. *Acta Techn. Hung.* **XXXVIII** (1962), 189.
8. Forrai, S.—Patvaros, J.: Anwendung der linearen Korrelationsrechnung mit zwei Veränderlichen im Bergbau. *Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei.* In print.
9. Forrai, S.: Simple and direct Determination of the Tangent of the Bearing of an Adjusting Straight Line which Satisfies the Condition $\Sigma pe^2 = \min!$ *Acta Techn. Hung.* **47** (1964).
10. Forrai, S.: Különleges, főleg centralizáci*)*s és rekonstrukciós bányászati és ipari létesítmények telepítésének műszaki-gazdasági analitikus vizsgálata. (Techno-economical Analytic Investigation of the Location of Special Mining and Industrial Works Chiefly Related to Centralization and Reconstruction). Candidature Thesis. Manuscript.
11. Forrai, S.: Egy zárt tartomány valószínűsége kétméretű normális eloszlás esetén. (The Probability of a Closed Interval at the Case of Normal Distribution in Two Dimensions.) Manuscript.

ZUSAMMENHÄNGE ZWISCHEN DER STANDARD-FEHLERELLIPSE UND DEN AUSGLEICHENDEN GERADEN

S. FORRAI

ZUSAMMENFASSUNG

In geodetischen und allgemeinen Fehlerberechnungen wie auch in der wirtschaftlichen Korrelationsrechnung taucht oft das Problem auf, in verschiedenen Richtungen eine ausgleichende Gerade und die sogenannte Mittelfehlerellipse zu bestimmen. Die Mittel- oder

Standard-Fehlerellipse (Gleichungen (18) und (34)] ist die Isohypse der im Aussatze (8) behandelten zweidimensionalen normalen Dichte-Funktion, während die in verschiedenen Richtungen laufenden ausgleichenden Geraden die Durchmesser dieser Ellipse sind. Die zu den ausgleichenden Geraden gehörigen Standardfehler stellen die zu diesen Durchmessern gehörigen konjugierten Halbmesser dar. Die konjugierten Tangentenpaare der durch die Gleichung (34) bestimmten Standard-Fehlerellipse ergeben das Standardfehlerband, zu dem eine Wahrscheinlichkeit von 68,26% gehört. Dieses Standardfehlerband ist offensichtlich dann am schmalsten, wenn die zwei Tangenten zur großen Achse der Ellipse parallel sind, d. h. im Falle der Anwendung einer normal gerichteten ausgleichenden Geraden. Unter Anwendung des hier behandelten Rechnungsverfahrens kann auch die im Aufsatze [5] behandelte Mittelfehlerellipse bestimmt werden und zwar nicht bloß im Falle des dort behandelten einfachen Vorwärtseinschnittes, sondern auch im Falle eines aus mehreren Punkten durchgeführten Vorwärtseinschnittes. Der letztere Fall ist auch durch ein Zahlenbeispiel bestätigt worden.

LES RELATIONS ENTRE L'ELLIPSE D'ERREUR STANDARD ET LES DROITES DE COMPENSATION

S. FORRAI

RÉSUMÉ

Lors du calcul d'erreur géodésique ou général et dans les calculs de corrélation économiques, des droites de compensation et des ellipses d'erreur moyenne doivent être déterminées dans différentes directions. L'ellipse d'erreur moyenne ou d'erreur standard est l'isophyse de la fonction 8 de répartition normale à deux dimensions (équations 18 et 34); les droites de compensation dans les différentes directions sont les diamèters de cette ellipse. Les erreurs standard correspondant aux droites de compensation sont les demi-diamètres appartenant à ces diamètres. Les couples de tangentes conjugués de l'ellipse d'erreur standard 34 donnent la zone d'erreur standard, à laquelle correspond une probabilité de 68,26%. Cette zone d'erreur standard est évidemment la plus petite quand les deux tangentes sont parallèles au grand axe de l'ellipse, c'est-à-dire quand on applique une droite compensatrice de direction normale. La méthode de calcul utilisée permet aussi de déterminer l'ellipse d'erreur moyenne (5) en cas non seulement de l'intersection simple étudiée, mais aussi d'intersections à partir de plusieurs points. Celle-ci a été démontrée par un exemple numérique.

ЗАВИСИМОСТИ ЭЛЛИПСА СТАНДАРТНЫХ ОШИБОК И ПРЯМЫХ УРАВНИВАНИЯ

Ш. ФОРРАИ

РЕЗЮМЕ

Расчет геодезических ошибок и общих погрешностей, а также экономический корреляционный расчет требуют определения прямой уравнивания в различных направлениях и т. н. эллипса средней ошибки. Эллипс средней или стандартной ошибки является изогипсой функции плотности нормального распределения (уравнения 18 и 34). А прямые, уравнивающие в различных направлениях, являются диаметрами этого эллипса ошибки. Стандартные ошибки, соответствующие прямым уравнивания, являются конъюгированными полудиаметрами, соответствующими этим диаметрам. Конъюгированные пары касательных 34-ого эллипса стандартной ошибки дают полосу стандартных ошибок, которым соответствует вероятность порядка 68,26%. Естественно, эта полоса стандартных ошибок является наименьшей тогда, когда две касательные параллельны большой оси эллипса, то есть используется уравнивающая прямая нормального направления. При помощи примененной методики расчета (5) можно определить также эллипс средней ошибки не только в случае рассматриваемой там простой прямой засечки, но также в случае прямой засечки из многих точек. Этот случай доказывается автором также числовым примером.

BESTIMMUNG DER CHARAKTERISTISCHEN FUNKTION DER WINKELTREUEN PROJEKTIONEN MIT HILFE DER GRUNDGLEICHUNG DER KONFORMEN ABBILDUNG

I. HAZAY

DOKTOR DER TECHN. WISSENSCHAFTEN LEHRSTUHL
FÜR HÖHERE GEODÄSIE.—TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR BAU- UND VERKEHRSWESEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 14. Mai 1963]

Die Grundgleichung der konformen Abbildung wird im allgemeinen dazu benutzt, die Grundfunktion einer winkeltreuen Projektion aufzunehmen, die ausdrückt, welche x-Koordinate dem Bilde des am Anfangsmeridian liegenden Originalflächenpunktes mit der geographischen Breite φ an der x-Achse des Bildflächen-Koordinatensystems entspricht, und die Reihen der x- und y-Koordinaten werden durch Reihenentwicklung auf Grund der Grundfunktion der Grundgleichung der konformen Abbildung bestimmt. Die Abhandlung des Verfassers sucht, von diesem abweichend, die unbekannte Grundfunktion in den einzelnen großen Gruppen (z. B. in der Gruppe der Azimutal-, Kegel- oder Zylinderprojektionen) mit Hilfe der Grundgleichung der konformen Abbildung, sucht durch diese die charakterisierende Funktion der winkeltreuen Projektion, die bei den einzelnen Projektionsgruppen die winkeltreue Projektion von anderen Projektionen der Gruppe, die durch andere Bedingungen gekennzeichnet sind, unterscheidet.

Es soll einleitend bemerkt werden, daß ich mit der Benennung »*charakterisierende Funktion*« nicht die Absicht hatte, einen neuen Begriff einzuführen, sondern ich wollte bloß mit einem zusammenfassenden Namen jene Funktionen benennen, die innerhalb jeder großen Projektionsgruppe die einzelnen Projektionen mit verschiedenen Bedingungen voneinander unterscheiden. Eine solche unterscheidende (charakterisierende) Funktion z. B. in der Gruppe der Azimutal- und reellen Kegelprojektionen ist *das Halbmessergesetz*, in der Gruppe der reellen Zylinderprojektionen die Funktion der Entfernung der Parallelkreis-(Hilfsparallelkreis)-Bilder, d. h. *die Funktion der x-Koordinate*, und in der Gruppe der Kugelprojektionen des Ellipsoides *die Funktion der geographischen Breite auf der Kugel* φ der Parallelkreisbilder. Innerhalb der einzelnen Projektionsgruppen ist nämlich die überwiegende Mehrheit der geometrischen Eigenschaften identisch, und die den einzelnen besonderen Bedingungen, wie z. B. Winkeltreue, Flächentreue oder Längentreue der Meridiane (Hilfsmeridiane), entsprechende Unterscheidung wird nur durch die obenerwähnten charakterisierenden Funktionen angegeben.

Eine beliebige Projektion ist nur dann winkeltreu, wenn der Linearmodul bloß die Funktion des Ortes und nicht der Richtung ist, d. h., wenn der Linearmodul in einem beliebigen Punkt nach jeder Richtung hin gleich ist, und somit die Tissotsche Indikatrix einen Kreis bildet. Die Konformität der Projektion wird dadurch bewiesen, daß sich an ingendeinem Punkt der Originalfläche, der sich nicht mit dem verzerrungsfreien Punkt deckt oder nicht auf der verzerrungsfreien Linie liegt, in zwei aufeinander senkrechten

Richtungen, deren Projektionsbilder ebenfalls aufeinander senkrecht fallen, den Linearmodul bestimmend, zwei identische Werte ergeben. Ist die Projektion nicht winkeltreu, so gibt es — den verzerrungsfreien Punkt oder die verzerrungsfreie Linie außer acht gelassen — in jedem beliebigen Punkt der Originalfläche bloß ein einziges rechtwinkliges Richtungspaar, dem entsprechende Richtungen auf der Bildfläche ebenfalls einen rechten Winkel bilden. Diese zwei Richtungen nennen wir *Projektions- (Verzerrungs-) Hauptrichtungen*, und in diese Richtungen fallen auch die *Tissotschen Indikatrixachsen*. Bezeichnet man die Länge der großen Halbachse mit a und die Länge der kleinen Halbachse mit b, so ergibt sich bei nicht winkeltreuen Projektionen $a > b$, während die winkeltreuen Projektionen dadurch charakterisiert werden, daß

$$a = b\,. \tag{1}$$

Bei winkeltreuen Projektionen bildet selbstverständlich das Bildflächenbild jedes rechtwinkligen Richtungspaares der Originalfläche ebenfalls einen rechten Winkel.

Die Beziehung (1) kann zweckmäßig zur Ableitung von Projektionsgleichungen winkeltreuer Projektionen angewendet werden. Zuerst muß nämlich in zwei aufeinander senkrecht fallenden solchen Richtungen, deren Bildflächengegenstücke ebenfalls aufeinander senkrecht sind, die Formel des Linearmoduls bezüglich irgendeines Punktes der Originalfläche, welcher sich nicht mit dem verzerrungsfreien Punkt bzw. mit den Punkten der verzerrungsfreien Linie deckt, aufgezeichnet werden. Danach sind beide Ausdrücke einander gleichzusetzen. Ist die Originalfläche eine Kugel oder ein Rotationsellipsoid, und wird eine normal angebrachte sogenannte reelle Projektion (eine azimutale, reelle Zylinder- oder reelle Kegelprojektion) erwünscht, so ist ein solches rechtwinkliges Richtungspaar in jedem beliebigen Punkte die Richtung des Meridians und die des Parallelkreises. (Unter normaler Anordnung verstehen wir, wenn der Anfangspunkt der azimutalen Projektion der Nord- oder Südpol ist, bzw. wenn die Achse des Zylinders oder Kegels sich mit dem die Drehachse der Erde darstellenden Durchmesser der Kugel bzw. mit der kleinen Achse des Ellipsoides deckt. In einer anderen Anordnung bilden nicht die reellen Gradnetzlinien, sondern bezüglich der Originalfläche der Kugel die sogenannten Hilfsmeridiane und Hilfsparallelkreise das zur Prüfung geeignete rechtwinkelige Reichtungspaar. Wenn die Originalfläche ein Ellipsoid ist, kann außer der normalen Anordnung im allgemeinen nur von einer transversalen Anordnung die Rede sein, bei welcher der Anfangspunkt sich auf dem Äquator befindet, bzw. die Achse des Zylinders oder Kegels irgendeinen Durchmesser des Äquators deckt. Keine einfache Aufgabe ist es, zu den nicht normal angeordneten Projektionen des Ellipsoides das zur Prüfung geeignete Richtungspaar auszusuchen.

Nachdem im weiteren nur eine Projektion des Ellipsoides erwähnt wird und diese auch normal angeordnet ist, wobei wir uns im allgemeinen mit den winkeltreuen Projektionen der Kugel befassen, da es ferner bezüglich der Kugelprojektionen zwischen der normalen und sonstigen Anordnung in unserer Abhandlung keinen Unterschied gibt, werden hier bloß die Fragen der normalen Anordnung geprüft.

Bei den Azimutalprojektionen der Kugel z. B. ist die allgemeine Formel des Meridian- bzw. Parallelkreis-Linearmoduls

$$l_m = \frac{dp}{Rd\beta}, \qquad l_p = \frac{p}{R \sin \beta}, \tag{2}$$

wo p das Halbmessergesetz ist, welches die Funktion der Poldistanz β ist und welches den Halbmesser des Bildes des Parallelkreises bestimmt:

$$p = f(\beta) \tag{3}$$

R ist der Halbmesser der Kugel. Bei einer winkeltreuen Azimutalprojektion müssen l_m und l_p identisch sein:

$$\frac{dp}{Rd\beta} = \frac{p}{R \sin \beta}. \tag{4}$$

Nach Ordnung der Gleichung und Integrierung beider Seiten ergibt sich:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\beta}{\sin \beta}, \qquad \ln p = \ln \tan \frac{\beta}{2} + \ln c, \tag{5}$$

wo ln c die Integrationskonstante ist. Zu den Numeri übergehend ist

$$p = c \tan \frac{\beta}{2}. \tag{6}$$

Soll im Projektionsanfangspunkt (wo $\beta = 0$) keine Längenverzerrung auftreten, dann muß ausgedrückt werden, daß an der Stelle $\beta = 0$ der Linearmodul 1 gleich sei. Aus der Formel (2) des Meridianlinearmoduls ergibt sich, den Wert (6) des Halbmessergesetzes beachtend:

$$l = \frac{dp}{R\,d\beta} = \frac{\frac{1}{2} c \frac{1}{\cos^2 \beta/2} d\beta}{Rd\beta}. \tag{7}$$

Mit Einsetzung von $\beta = 0$ und Gleichsetzung mit 1 wird

$$l_0 = \frac{c}{2R} = 1 \quad \text{und hieraus} \quad c = 2R. \tag{8}$$

Das Halbmessergesetz der winkeltreuen Azimutalprojektion ist demnach auf Grund von (6) und (8):

$$p = 2R \tan \frac{\beta}{2}. \tag{9}$$

Nachdem die winkeltreue azimutale bzw. stereographische Projektion eine perspektive Projektion ist, kann das Halbmessergesetz auch auf Grund der Betrachtung aufgezeichnet werden. Unsere Gleichung (9) stimmt vollkommen mit der auf Grund der Betrachtung aufgeschriebenen wohlbekannten Formel überein.

Die Beziehung (1) ist jedoch nicht dazu geeignet, die Gleichungen aller winkeltreuen Projektionen abzuleiten, nicht aus prinzipiellen Gründen, sondern infolge des verwickelteren Ausdruckes oder Ausdrückbarkeit der Linearmoduln. Aus diesem Grunde erwies sich ein anderer Ausdruck des Kriteriums der Konformität ebenfalls als notwendig. Eine solche Bedingung ist (die Ableitungen sollen hier vermieden werden), daß die Funktion

$$x = f_1(\varphi, \lambda), \qquad y = f_2(\varphi, \lambda) \tag{10}$$

der geographischen Breite und Länge φ und λ der Originalfläche der rechtwinkligen Koordinaten der Bildfläche nach der *isometrischen Breite* ψ bzw. geographischen Länge λ partiell differenziert werde, und die Differentialquotienten gleichzeitig die Bedingungen

$$+\frac{\partial x}{\partial \lambda} = +\frac{\partial y}{\partial \psi} \quad \text{und} \quad +\frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \lambda} \tag{11}$$

oder aber die Bedingungen

$$+\frac{\partial x}{\partial \lambda} = -\frac{\partial y}{\partial \psi} \quad \text{und} \quad +\frac{\partial x}{\partial \psi} = +\frac{\partial y}{\partial \lambda} \tag{12}$$

erfüllen.

Die sogenannte *isometrische Breite* ist eine Funktion der geographischen Breite φ, die durch die Differentialgleichung

$$d\psi = \frac{M}{N \cos \varphi} d\varphi \tag{13}$$

bestimmt wird. M ist der Meridian-, N der Querkrümmungshalbmesser. Nachdem bei der Kugel die beiden dem *Kugeldurchmesser* R gleich sind beträgt die Differentialgleichung bezüglich der Originalfläche der Kugel bzw. die sich hieraus ergebende isometrische Breite:

$$d\psi = \frac{d\varphi}{\cos \varphi}, \qquad \psi = \ln \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right), \tag{14}$$

Die Bedingung (11) oder (12) wird durch die komplexen Gleichungen

$$x + iy = F(\psi + i\lambda) \tag{15}$$

beziehungsweise

$$x + iy = F(\psi - i\lambda) \tag{16}$$

erfüllt ($i = \sqrt{-1}$). Die beiden Gleichungen werden mit dem gemeinsamen Namen *der Grundgleichung der Konformität* bezeichnet. Ihre praktische Anwendung erfolgt in Form einer Reihenentwicklung. Die Reihenentwicklung wird beim Anfangsmeridian ausgeführt, wo $\lambda = 0$ ist. Nachdem die x-Achse des Koordinatensystems der Bildfläche des Bild des Anfangsmeridians ist, beträgt $y = 0$, wenn $\lambda = 0$ ist.

Es werde nun bezüglich des Anfangsmeridians irgeneine beliebige Beziehung (Funktion)

$$x = F(\psi) \tag{17}$$

aus den Koordinaten (15) irgendeines Originalflächenbildes der geographischen Koordinaten φ und λ aufgenommen:

$$\begin{aligned} x &= F(\psi) - \frac{1}{2}\frac{d^2F(\psi)}{d\psi^2}\lambda^2 + \frac{1}{24}\frac{d^4F(\psi)}{d\psi^4}\lambda^4 - \dots \\ y &= \frac{dF(\psi)}{d\psi}\lambda - \frac{1}{6}\frac{d^3F(\psi)}{d\psi^3}\lambda^3 + \frac{1}{120}\frac{d^5F(\psi)}{d\psi^5}\lambda^5 - \dots \end{aligned} \tag{18}$$

Wenn aber die Reihenentwicklung bei der Beziehung (16) erfolgt, dann bleibt die Reihe von x unverändert gleich der in (18), während die Glieder der Reihe von y ihre Vorzeichen ändern.

Die Anwendung der Grundgleichung der konformen Abbildung haben wir anläßlich der Ableitung *der Gauß—Krügerschen Projektion* kennen gelernt, wo der den Anfangsmeridian betreffende x-Wert — die Funktion (17) — gegeben ist: er ist gleich der Bogenlänge des Ellipsoidmeridians vom Äquator bis zum Punkt der geographischen Breite φ. In diesem Falle besteht die Aufgabe der Grundgleichung der konformen Abbildung nur mehr darin, aus dieser gegebenen Funktion laut (18) die Reihen der Koordinaten zu entwickeln. *Der Zweck der vorliegenden Abhandlung weicht hiervon ab.* Ich gedenke nicht die Reihenentwicklung einer gegebenen Funktion $F(\psi)$ vorzuführen, sondern anhand einiger Beispiele zu prüfen, *wie mit dieser Grundgleichung*, die nicht viele kennen, *die Grundfunktion laut (17), d. h. der auf den Anfangsmeridian bezügliche Wert x, und durch diesen die die Projektion charakterisierende Funktion bestimmt werden kann.*

1. Es sei sofort das erste Beispiel die bereits erörterte *winkeltreue azimutale (stereographische) Projektion.* Wir wollen im voraus nur soviel wissen

— was die gemeinsame Eigenschaft aller azimutalen Projektionen ist —, daß die Abbildung der Parallelkreise ein um den Projektionsanfangspunkt gezogener Kreis ist und laut dem (3) entsprechenden Halbmessergesetz der Halbmesserwert p mit der Zunahme von β auch zunimmt. In dieser Projektionsgruppe wird die charakterisierende Funktion der Konformität, das Halbmessergesetz der winkeltreuen Projektion gesucht.

Die Lage der Abbildung A′ irgendeines Punktes A der Kugelfläche wird in Abb. 1 dargestellt. Der durch die Punktabbildung A′ gezogene Kreis ist die Abbildung des durch den Punkt A gehenden Parallelkreises mit der Polentfernung β. Die Koordinaten x und y können von der Abbildung mit

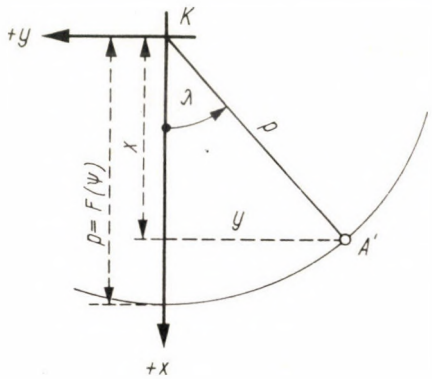

Abb. 1

einem unbekannten Werte p nach Betrachtung aufgezeichnet werden. Nachdem wir die vom Anfangsmeridian östlich liegenden geographischen Längen für positiv halten, entspricht diesen in dem dargestellten südlich orientierten Koordinatensystem eine negative y-Koordinate. Die durch Betrachtung bestimmten ebenen Koordinaten ergeben demnach, wenn die Bezeichnung $p = F(\psi)$ eingeführt wird:

$$x = F(\psi)\cos\lambda, \qquad y = -F(\psi)\sin\lambda. \tag{19}$$

Wenn wiederum die bekannte Reihe von cos λ bzw. sin λ eingesetzt wird, dann ist:

$$\begin{aligned} x &= F(\psi)\left(1 - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{24} - \ldots\right), \\ y &= F(\psi)\left(-\lambda + \frac{\lambda^3}{6} - \frac{\lambda^5}{120} + \ldots\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Aus der Form (15) der Grundgleichung der winkeltreuen Projektion ergeben die Reihen (18) die ebenen Koordinaten. Werden diese mit (20) ver-

glichen, so kann man feststellen, daß die zweierlei Arten von Gleichungspaaren nur dann zu einem identischen Ergebnis führen, wenn

$$F(\psi) = -\frac{dF(\psi)}{d\psi} = +\frac{d^2F(\psi)}{d\psi^2} = -\frac{d^3F(\psi)}{d\psi^3} =$$
$$= +\frac{d^4F(\psi)}{d\psi^4} = -\frac{d^5F(\psi)}{d\psi^5} = \ldots \tag{21}$$

Es muß demnach eine solche Funktion $F(\psi) = f(\beta)$ gefunden werden, welche die Anforderung (21) erfüllt, wobei p mit der Zunahme von β ebenfalls zunimmt.

In Anbetracht dessen, daß $\beta = 90° - \varphi$ ist, ergibt sich auf Grund von (14)

$$\frac{d\beta}{d\psi} = -\cos\varphi = -\sin\beta. \tag{22}$$

Laut des ersten Differentialquotienten ψ von $F(\psi)$:

$$\frac{dF(\psi)}{d\psi} = \frac{dF(\psi)}{d\beta}\,\frac{d\beta}{d\psi} = \frac{dF(\psi)}{d\beta}(-\sin\beta). \tag{23}$$

Mit dem ersten Differentialquotienten soll demnach laut (21) die Bedingung

$$-\frac{dF(\psi)}{d\psi}(-\sin\beta) = \frac{dF(\psi)}{d\beta}\sin\beta = F(\psi). \tag{24}$$

erfüllt werden. Die entsprechende Funktion $F(\psi) = f(\beta)$ kann nur eine trigonometrische Funktion sein, und zwar eine solche, wo nur in dem Nenner des Differentialquotienten nach β eine Winkelfunktion vorkommt. Es kann auch sofort festgestellt werden, daß die Bedingung (24) nur mit einem *Halbwinkel* und entweder mit einer *Tangenten- oder Cotangentenfunktion* erfüllbar ist. Diese letztere entspricht aber nicht der Forderung, daß mit der Zunahme von β auch p zunehmen soll. Die entsprechende Funktion lautet daher

$$p = F(\psi) = c\tan\frac{\beta}{2}. \tag{25}$$

Der Differentialquotient

$$\frac{dF(\psi)}{d\psi} = -c\tan\frac{\beta}{2}, \tag{26}$$

der laut (23) gebildet wurde, entspricht der Forderung (21). Man kann leicht einsehen, daß die weiteren Differentialquotienten in ihrem Absolutwert mit

dem Absolutwert von (26) übereinstimmen und ihr Vorzeichen sich der Reihe nach ändert, so daß sämtliche Differentialquotienten der Bedingung (21) entsprechen. Demzufolge ist (25) die gesuchte Halbmesserfunktion. Die Bestimmung der c-Konstante erfolgt nunmehr auf dieselbe Art wie zwischen (6) und (8). Schließlich stimmt die Halbmesserfunktion der azimutalen winkeltreuen Projektion — abgeleitet aus der Grundgleichung der konformen Abbildung — ebenfalls genau mit unserem Ausdruck (9) überein. Bei der Anwendung eines nördlich orientierten Koordinatensystems muß man aus der Form (16) der Grundgleichung der konformen Abbildung ausgehen.

2. Es sei im folgenden *die winkeltreue, reelle Berührungskegelprojektion* betrachtet. Hier sei auch nur soviel bekannt, wieviel die gemeinsame Eigenschaft der reellen Kegelprojektionen ausmacht, d. h., daß die Abbildung des Parallelkreises ein um die Kegelspitze gezogener Kreis ist, die *Halbmesserneigung* $\gamma = n\,\lambda$ beträgt, wo die Konstante n eine positive Zahl kleiner als eins ist, und daß bei der (3) entsprechenden Halbmesserfunktion mit der Zunahme von β auch der Halbmesser p zunimmt. (Als *Halbmesserneigung* nennen wir den Winkel, den der die Kegelspitze an der Bildfläche mit der Abbildung des projizierten Punktes verbindende Halbmesser und die Abbildung des Anfangsmeridians bilden).

Die Lage des Bildes B′ irgendeines Punktes B der Kugelfläche in dem bei den Kegelprojektionen üblichen rechtwinkeligen Koordinatensystem wird in Abb. 2 dargestellt. Der durch das Punktbild B′ gezogene Kreisbogen ist die Abbildung des durch den Punkt B gehenden Parallelkreises mit der Poldistanz β. Auf Grund der Betrachtung kann mit Hilfe des unbekannten Wertes p angeschrieben werden, daß

$$x = p_0 - p\cos(n\lambda), \qquad y = p\sin(n\lambda), \tag{27}$$

wo p_0 der Halbmesser der Abbildung des aufgenommenen Berührungsparallelkreises, also ein bekannter Wert ist, und

$$p = f(\beta). \tag{28}$$

Die Reihen cos $(n\,\lambda)$ und sin $(n\,\lambda)$ in (27) einsetzend, wird

$$\begin{aligned} x &= p_0 - p\left(1 - \frac{n^2\lambda^2}{2} + \frac{n^4\lambda^4}{24} - \ldots\right), \\ y &= p\left(n\lambda - \frac{n^3\lambda^3}{6} + \frac{n^5\lambda^5}{120} - \ldots\right), \end{aligned} \tag{29}$$

Die aus der Grundgleichung der konformen Abbildung entwickelten Reihen finden wir unter (18). Die zwei Ausdrucksarten können nur dann

zu einem gleichstimmigen Ergebnis führen, wenn

$$\frac{dF(\psi)}{d\psi} = +np \qquad \frac{d^2F(\psi)}{d\psi^2} = -n^2p \qquad \frac{d^3F(\psi)}{d\psi^3} = +n^3p,$$
$$\frac{d^4F(\psi)}{d\psi^4} = -n^4p \qquad \frac{d^5F(\psi)}{d\psi^5} = +n^5p\,. \tag{30}$$

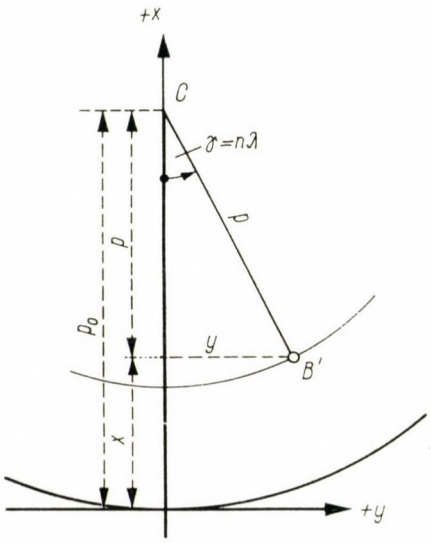

Abb. 2

Die entsprechende Funktion ist

$$p = c\tan^n\frac{\beta}{2} \tag{31}$$

bzw. das allgemeine Gesetz der x-Koordinaten der Kegelprojektionen verfolgend:

$$F(\psi) = p_0 - c\tan^n\frac{\beta}{2}\,. \tag{32}$$

Man bestimme den ersten Differentialquotienten:

$$\frac{dF(\psi)}{d\psi} = \frac{dF(\psi)}{d\beta}(-\sin\beta) = -\frac{\frac{1}{2}cn\tan^{n-1}\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}(-\sin\beta) =$$
$$= \frac{\frac{1}{2}cn\tan^{n-1}\frac{\beta}{2}\,2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}} = nc\tan^n\frac{\beta}{2}\,. \tag{33}$$

Wenn nun die weiteren Differentialquotienten gebildet werden, so erhält man offensichtlich der Gleichung (30) entsprechende Werte. Die Halbmesserfunktion beträgt demnach

$$p = c \tan^n \frac{\beta}{2} . \tag{34}$$

Man bestimmt den Wert c aus der Formel des nach Richtung des Parallelkreises gerichteten Linearmoduls so, daß die Daten des Berührungsparallelkreises eingesetzt werden und die Formel 1 gleichgesetzt wird. Der Berührungsparallelkreis ist nämlich verzerrungsfrei.

$$l_{p_0} = \frac{np_0}{R \sin \beta_0} = \frac{nc \tan^n \frac{\beta_0}{2}}{R \sin \beta_0} = 1 \tag{35}$$

und hieraus

$$c = \frac{R \tan \beta_0}{\left(\tan \frac{\beta_0}{2}\right)^n} . \tag{36}$$

Wird dies nun in (34) eingesetzt, so gelangen wir zur bekannten Formel der Halbmesserfunktion der winkeltreuen, tangentialen reellen Kegelprojektion:

$$p = R \tan \beta_0 \left(\frac{\tan \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\beta_0}{2}} \right)^n . \tag{37}$$

3. Unsere nächste Projektion sei *die winkeltreue Zylinderprojektion.* Es ist die gemeinsame Eigenschaft sämtlicher normal angeordneter reeller Zylinderprojektionen, daß die Abbildungen der Parallelkreise mit der y-Achse (mit der Projektion des Äquators) parallele Geraden sind; die Meridianprojektionen sind hierzu senkrechte Geraden, und wenn der Zylinder die Kugel berührt, liegen die Meridianprojektionen in derselben Entfernung voneinander, in welcher ihre Gegenstücke den Äquator auf der Kugel schneiden. Jetzt soll aus der Gruppe der reellen Zylinderprojektionen die Gleichung bestimmt werden, die die konforme Abbildung charakterisiert.

Abb. 3 stellt die Lage der Projektion C′ irgendeines Kugelflächenpunktes C im ebenen Koordinatensystem dar. Die zwei Geraden, die durch die Punktprojektion C′ gehen, sind die Abbildungen des Parallelkreises von der geographischen Breite φ des Punktes C bzw. dessen Meridians von der geographischen Länge λ. Auf Grund der obenerwähnten Eigenschaften gilt für jede Berührungszylinderprojektion:

$$y = R \lambda. \tag{38}$$

Man vergleiche dies mit der y-Reihe von (18). Diese und (38) führen nur dann zu gleichem Ergebnis, wenn

$$\frac{dF(\psi)}{d\psi} = R \tag{39}$$

ist, und die übrigen Glieder der Reihe gleich Null sind. Nachdem der Kugelhalbmesser R ein konstanter Wert ist, beträgt sein Differentialquotient Null; dies ist also schon der zweite Differentialquotient der gesuchten Funktion $F(\psi)$, der mit Null identisch ist. Dementsprechend folgt aus der x-Reihe von (18), daß

$$x = F(\psi) \tag{40}$$

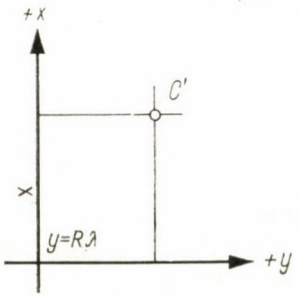

Abb. 3

ist. (39) ergibt den Differentialquotienten der Funktion; dem und (40) entsprechend wird demnach

$$x = R \int d\psi = R\psi + c. \tag{41}$$

Die Integrationskonstante c ist gleich Null, da ja auf dem Äquator x und ψ auch gleich Null sind. Wird in (41) der Wert (14) der isometrischen Kugelbreite eingesetzt, so erhält man die bekannte Gleichung der x-Koordinate der winkeltreuen Berührungszylinderprojektion:

$$x = R \ln \tan \left(45° + \frac{\varphi}{2}\right). \tag{42}$$

4. Schließlich erwähne ich bloß, daß die charakteristische Gleichung der winkeltreuen Projektionen in ähnlicher Weise auch *in der Schnittlage der Bilfläche* (ebener, Kegel- oder Zylindermantel) bestimmt werden kann, außerdem auch dann, wenn die Originalfläche keine Kugel, sondern ein *Rotationsellipsoid* ist, ja selbst dann, wenn *die Originalfläche ein Ellipsoid und die Bildfläche eine Kugel ist.* Im letzteren Falle ist das Verfahren dem sehr ähnlich, welches im Zusammenhang mit der Zylinderprojektion erwähnt worden ist. Nachdem das Gesetz der geographischen Länge (wenn die geo-

graphische Länge auf der Kugel mit λ, auf dem Ellipsoid mit Λ bezeichnet ist)

$$\lambda = n\Lambda \tag{43}$$

ist, wo n eine Verhältniszahl ist, erhalten wir die Gleichung

$$\psi_k = n \int d\psi_e = n\psi_e + c\,, \tag{44}$$

wo der Index k auf die Kugel, der Index e auf das Ellipsoid hinweist. Wenn aus (14) in die Gleichung die isometrische Breite auf der Kugel eingesetzt wird, sowie der in dieser Abhandlung noch nicht angeschriebene Wert der das Ellipsoid betreffenden isometrischen Breite, wird außerdem die Integrationskonstante c dem logarithmischen Charakter der isometrischen Breiten entsprechend in der Form $\ln k$ geschrieben, so erhalten wir die charakteristische Funktion der winkeltreuen Kugelprojektion des Ellipsoides. Diese ist, wenn die geographische Breite auf der Kugel mit φ, auf dem Ellipsoid mit Φ und die erste Exzentrizität des Ellipsoides mit e bezeichnet wird:

$$\ln \tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) = \ln \left\{\left[\tan^n\left(45° + \frac{\Phi}{2}\right)\right]\left[\frac{1 - e\sin\Phi}{1 + e\sin\Phi}\right]^{\frac{ne}{2}}\right\} + \ln k \tag{45}$$

bzw. in einer anderen Form:

$$\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) = k\ \left[\tan^n\left(45° + \frac{\Phi}{2}\right)\right]\left[\frac{1 - e\sin\Phi}{1 + e\sin\Phi}\right]^{\frac{ne}{2}}. \tag{46}$$

Die Konstanten n und k hängen neben Erfüllung der winkeltreuen Abbildung von weiteren erforderten Bedingungen ab.

SCHRIFTTUM

1. Jordan—Eggert: Handbuch der Vermessungskunde B. III/2. Stuttgart, 1948.
2. Hazay, I.: Földi vetületek (Erdprojektionen). Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.
3. Geodéziai Kézikönyv I. (Handbuch der Geodäsie). Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest, 1956.

DETERMINATION OF THE CHARACTERISTIC FUNCTION OF CONFORMAL PROJECTIONS BY MEANS OF THE FUNDAMENTAL EQUATION OF CONFORMALITY

DR. I. HAZAY

SUMMARY

The fundamental equation of conformality is generally used for adopting the fundamental function of a conformal projection expressing how extensive the x-coordinate is which complies with the projection of the base surface point of the latitude φ, lying at the initial meridian on the x-axis of the image surface coordinate system. The series of the x- and y-coordinates of the projection are determined by expanding the basic equation of conformality into series on the basis of the fundamental function. Contrary, author in his present study is seeking for the unknown fundamental function and by this means the characteristic function of the conformal projection in the individual groups of projections (e.g. in the azimuthal, conical or cylindrical projection groups). The characteristic functioning question distinguishes the conformal projection from those based on other conditions belonging to this group.

DÉTERMINATION DES FONCTIONS CARACTÉRISANT LES PROJECTIONS CONFORMES, AU MOYEN DE L'ÉQUATION FONDAMENTALE DE LA CONFORMITÉ

I. HAZAY

RÉSUMÉ

L'équation fondamentale de la conformité est employée, en général, pour l'adoption de la fonction fondamentale d'une projection conforme, exprimant quelle valeur de la coordonnée x correspond, sur l'axe x du système de coordonnées de la surface d'image, à l'image d'un point de la surface originale de latitude φ, situé sur le méridien d'origine, et pour la détermination des séries de coordonnées x et y de l'équation fondamentale de la conformité, par développement en série sur la base de la fonction fondamentale. Dans son étude, l'auteur utilise, par contre, l'équation fondamentale de la conformité pour chercher l'équation fondamentale inconnue dans de grands groupes de projections (projections azimutales, coniques ou cylindriques, par ex.), et à travers cette équation fondamentale inconnue, la fonction caractérisant la projection conforme, qui distingue dans les groupes de projection examinés la projection conforme des autres projections appartenant au même groupe, mais caractérisées par d'autres conditions.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ КОНФОРМНЫХ ПРОЕКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ КОНФОРМНОСТИ

И. ХАЗАИ

РЕЗЮМЕ

Основное уравнение конформности вообще используется для того, что для выражения некоторой конформной проекции принимается то основное уравнение, которое выражает, что какая координата x соответствует отображению точки основной поверхности с географической широтой φ, находящейся на начальном меридиане, на оси x системы координат поверхности изображения, и разложением в ряд основного уравнения конформности на основе основной функции определяются ряды координат x и y проекции. Автор в своей работе, отклоняясь от этого, ищет основную функцию при помощи основной функции конформности в некоторых больших семействах проекций (напр. в группе конусных, цилиндрических проекций) и посредством этого характеристическую функцию конформности, которая в отдельных группах проекций различает конформную проекцию от других поверхностных проекций, относящихся к группе.

KONSTRUKTION DER FUSSPUNKTKURVE DER MITTLEREN FEHLERELLIPSE BEI EINFACHEM BOGENSCHNITT

F. HALMOS

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
GEODÄTISCHES FORSCHUNGSLABORATORIUM
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, SOPRON

[Eingegangen am 4. Juli 1963]

Verfasser untersucht die Möglichkeiten einer einfachen Konstruktion der Fußpunktkurve der mittleren Fehlerellipse für die Fälle ohne überschüssige Beobachtungen. Das Verfahren von TÁRCZY-HORNOCH mit Hilfe der konjugierten Halbmesser der Ellipse wird auf den Bogenschnitt angewendet, der also mit Hilfe der in der Richtung der zwei Entfernungen bekannten mittleren Fehler die einzelnen Punkte der Fußpunktkurve ergibt. Ein gutes annäherndes einfaches Konstruktionsverfahren wird zur Bestimmung der Fußpunktkurve auf Grund ihrer zwei bekannten Punkte gezeigt. Endlich behandelt er die Unsicherheit der mittleren Fehler und die Berücksichtigung dieser Werte bei der Angabe der Punktunsicherheit.

Die Fehlerellipse verbreitete sich in der Geodäsie allmählich auf Grund von HELMERTS Untersuchungen von 1868 zur Bestimmung der Punktunsicherheit [1]. Vor ihm haben auch BRAVAIS und ANDRAE diesbezügliche Untersuchungen ausgeführt [2, 3]. Alle diese Methoden beruhen auf Berechnung, die im Zusammenhang mit der Ausgleichung der vermittelnden und bedingten Beobachtungen die entsprechenden Angaben der Fehlerellipse ergeben. Die von der Ausgleichung unabhängige Lösung der mittleren Fehlerellipse war kaum bekannt. In diesem Zusammenhang mögen nur JORDAN [4] und WERKMEISTER [5] erwähnt werden. Die mit Berechnung durchgeführte Bestimmung der mittleren Fehlerellipse ist oft ziemlich langwierig, während von der Größenordnung der vorkommenden Fehler abhängend die Fehlerfigur im allgemeinen sehr augenfällig dargestellt werden kann. So ist es selbstverständlich, daß die zweite Linie der Untersuchungen die auf graphische Weise durchgeführte Bestimmung der Fehlerellipse betraf. Von diesen sind die Methoden von BLASS [6], GELBKE [7] und GOTTHARDT [8] zu erwähnen sowie die mit Hilfe des MOHR—LANDschen Kreisdiagramms ausgeführte geistreiche Lösung von MILASOVSZKY [9, 10]. Neuestens hat TÁRCZY-HORNOCH zur einfachen Bestimmung der mittleren Fehlerellipse ein rechnerisches und graphisches Verfahren für die Fälle der verschiedenen Punkteinschaltungen ohne überschüssige Beobachtungen mitgeteilt [11, 12].

Es ist bekannt, daß die Lage des bestimmten Punktes in der Ebene, und daher seine in den verschiedenen Richtungen der Ebene auftretende Unsicherheit, nicht die mittlere Fehlerellipse, sondern deren Fußpunktkurve angibt. Es ist interessant zu bemerken, daß die Bestimmung dieser letzteren durch graphische Konstruktion kaum behandelt wurde. Die Fußpunktkurve

der graphischen Konstruktion wurde an die rechnerisch oder graphisch bestimmte mittlere Fehlerellipse gestützt angegeben. TÁRCZY-HORNOCH war der erste, der die Fußpunktkurve der mittleren Fehlerellipse durch Konstruktion angab, ohne damit die Einführung des Begriffs der mittleren Fehlerellipse und diese selbst, die Kenntnis der kleinen und großen Halbachsen nötig zu machen. Die Lösung stützt sich an die Kenntnis zweier konjugierter Durchmesser, die aus den Beobachtungen sofort angegeben werden können.

Neuestens haben SÜTTI und DRABANT in ihrem Artikel [13] Untersuchungen für den Fall des Bogenschnittes ohne überschüssige Beobachtun-

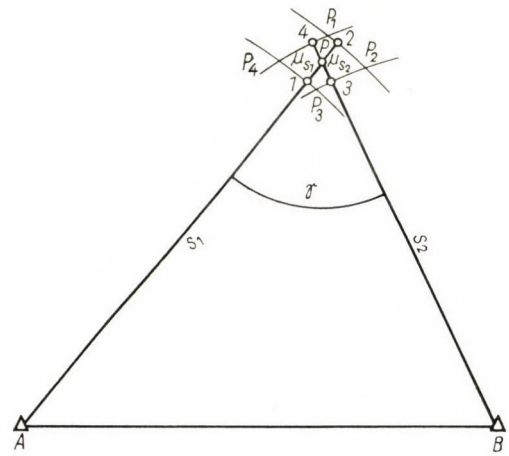

Abb. 1

gen ausgeführt, zur Bestimmung der mittleren Fehlerellipse und ihrer Fußpunktkurve durch Rechenverfahren. Wir wollen diesmal nach den in [12] auch für den Bogenschnitt angegebenen Richtlinien die sich auf den Bogenschnitt beziehende und die Punktunsicherheit in der Ebene bezeichnende Fußpunktkurve konstruieren. So können wir ohne besondere mathematische Ableitung unmittelbar das Ziel erreichen.

Bekanntlich spielen die Punkteinschaltungen durch Längenmessungen mit der steigenden Verbreitung der elektronischen, elektrooptischen, elektromagnetischen und anderen Geräte eine immer größere Rolle. In diesem Sinne wird es von Interesse sein, auch die sich auf diese beziehenden Genauigkeitsprüfungen eindringlicher zu behandeln.

Erstens haben wir den Einfluß der Fehler der bestimmenden Längen für den einfachen Bogenschnitt auf den Punkt zu untersuchen. Abb. 1 entsprechend werden die Koordinaten des Punktes P mit Hilfe der gemessenen Längen s_1 und s_2 in Kenntnis der Punkte A und B durch Bogenschnitt bebestimmt. Es sei vorausgesetzt, daß der mittlere Fehler von s_1 μ_{s_1} und der

von s_2 μ_{s_2} ist. Folglich wird die Lage des Punktes P unsicher. Durch Konstruktion erhält man den mittleren Fehler des Punktes, wenn Seitenlänge s_1 einmal mit Wert $s_1 - \mu_{s_1}$, dann aber mit Wert $s_1 + \mu_{s_1}$ als Kreishalbmesser vom Punkt A aufgetragen, und mit der Länge s_2 vom Punkt B in gleicher Weise verfahren wird. So wird die mit den entsprechenden Kreisbögen begrenzte, mit Eckpunkten $P_1P_2P_3P_4$ versehene Fehlerfigur erhalten (Abb. 1 entspricht Abb. 12 von [12]). Wenn wir erwägen, daß die mittleren Fehler μ_{s_1} und μ_{s_2} die Größenordnung von einigen Zentimetern nicht überschreiten und im Verhältnis dazu s_1 und s_2 gewöhnlich mehrere Kilometer betragen, dann mag die mit Punkten $P_1P_2P_3P_4$ bestimmte Figur — wie bekannt —

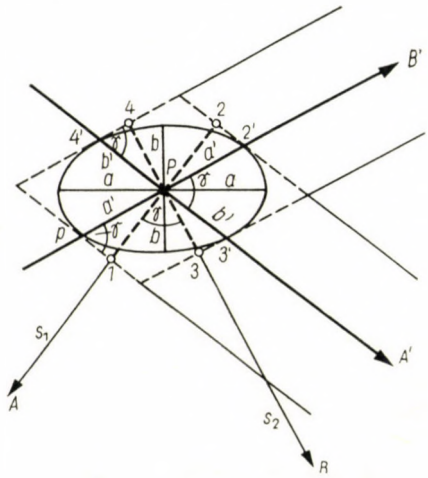

Abb. 2

praktisch als Parallelogramm betrachtet werden (Abb. 2). Der Abstand der zwei parallelen Seiten voneinander ist:

$$2\,\mu_{s_1} = \overline{12} \qquad bzw. \quad 2\,\mu_{s_2} = \overline{34}\,. \tag{1}$$

Sehen wir die Punkte 1, 2, 3, 4 näher an. Diese vier Punkte drücken im Verhältnis zum Mittelpunkt den mittleren Fehler in der Richtung der bestimmenden Längen $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$, d. h. die richtungsgebundene Punktunsicherheit aus. Die genannten vier Punkte sind daher die Punkte der Fußpunktkurve der zu konstruierenden mittleren Fehlerellipse, die durch die Punkte gehenden, rechtwinklig auf die bestimmenden Richtungen liegenden Geraden aber sind die Tangenten der mittleren Fehlerellipse. So sind die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Punkte die zwei Durchmesser der Fußpunktkurve. Die konjugierten Durchmesser der mittleren Fehlerellipse sind mit diesen letzteren zu konstruieren. Da jeder Bogenschnitt hinsichtlich

der Genauigkeitsprüfungen als ein auf dieselben Richtungen rechtwinkliger Vorwärtseinschnitt aufgefaßt werden kann, so werden, wenn $\overline{A'P}$ rechtwinklig auf $\overline{AP}$ sowie $\overline{B'P}$ rechtwinklig auf $\overline{BP}$ konstruiert werden, die Schnittpunkte mit den oben erwähnten Tangenten der mittleren Fehlerellipse die auf die Fehlerellipse bezogenen konjugierten Durchmesser ergeben ($\overline{1'2'}$, $\overline{3'4'}$). Zahlenmäßig sind die Werte dieser Durchmesser mit dem folgenden Zusammenhang zu bestimmen:

$$\frac{\mu_{s_1}}{\sin\varphi} = a' \qquad \text{und} \qquad \frac{\mu_{s_2}}{\sin\gamma} = b'. \tag{2}$$

Im weiteren, da die Unsicherheit des Punktes P in beliebiger Richtung nicht von der mittleren Fehlerellipse, sondern von deren Fußpunktkurve angegeben wird, werden die dazu gehörenden mittleren Fehlermaße durch die rechtwinklige Zusammensetzung der mittleren Fehleranteile im Sinne von [12] bestimmt.

Auf Grund der Abb. 2 sowie der Zusammenhänge (2) ist es leicht einzusehen, daß auch die Werte a' und b' eine Art mittlere Fehler und zugleich auch unabhängig voneinander sind. Wollen wir die zu den Entfernungen $\overline{AP}$ sowie $\overline{BP}$ rechtwinklig auftretenden Fehler bestimmen, muß man bloß die voneinander unabhängigen Durchmesser auf diese Richtungen projizieren (die rechtwinklige Projektion von b' auf $\overline{AP}$ ist Null, in dem anderen Fall gleichfalls), und so ergeben sich die die Punkte 1, 2, 3, 4 der die Fußpunktkurve bestimmenden Entfernungen:

$$\begin{aligned} \mu_{\overline{AP}} &= a' \cos(90° - \gamma) = a' \sin\gamma = \mu_{s_1} \\ \mu_{\overline{BP}} &= b' \cos(90° - \gamma) = b' \sin\gamma = \mu_{s_2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Beim Suchen des mittleren Fehlers für andere Richtungen wirken a' und b' zusammen. Wenn z. B. der mittlere Fehler, Abb. 3 entsprechend, in der Richtung $(BP) + \xi$ gesucht wird, sind die Werte a' und b' zu dieser Richtung rechtwinklig zu projizieren und diese muß man dem Fehlerfortpflanzungsgesetz gemäß addieren, ebenso wie in Gleichung [11, Gl. 11] bei dem Vorwärtseinschnitt:

$$\mu^2_{(BP)+\xi} = \mu^2_{a',(BP)+\xi} + \mu^2_{b',(BP)+\xi}, \tag{4}$$

wo $\mu_{(BP)+\xi}$ der mittlere Fehler des Punktes P in der Richtung $(BP) + \xi$, $\mu_{a',(BP)+\xi}$ die rechtwinklige Projektion von a' auf die Richtung $(BP) + \xi$ und $\mu_{b',(BP)+\xi}$ die Projektion von b' auf die Richtung $(BP) + \xi$ ist. Da

und

$$\begin{aligned} \mu_{a',(BP)+\xi} &= a' \cos\xi \\ \mu_{b',(BP)+\xi} &= b' \cos(\gamma - \xi), \end{aligned} \tag{5}$$

erhalten wir durch Einsetzung dieser Werte in Gleichung (4) den mittleren Fehler des Punktes P in der Richtung $(BP) + \xi$:

$$\mu_{(BP)+\xi} = \sqrt{a'^2 \cos^2 \xi + b^2 \cos^2 (\gamma - \xi)}\,. \tag{6}$$

Zweifellos ist dies eine viel einfachere Formel als die von SÜTTI und DRABANT [13; Gleichung 11 und die weiteren]. Eine zahlenmäßige Bestimmung ist aber nicht nötig, da der Wert in (6) — ähnlich wie in Abb. 5 von [11] — auch leicht zu konstruieren ist. Zu dem Endpunkt der einen Projektion $(\mu_{a',(BP)+\xi})$

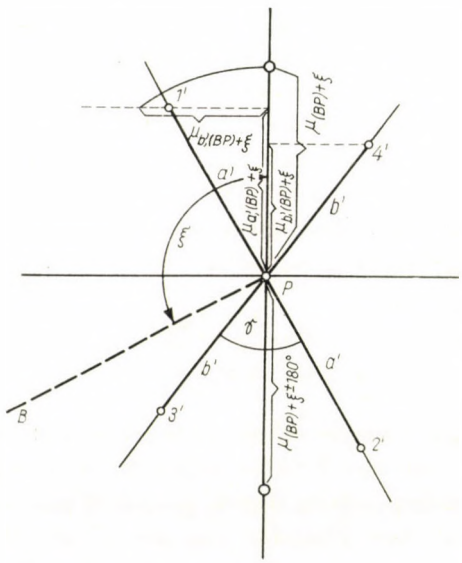

Abb. 3

wird rechtwinklig die andere Projektion $(\mu_{b',(BP)+\xi})$ gelegt, und die Entfernung des so erhaltenen Endpunktes von P ergibt den gesuchten mittleren Fehler in der Richtung $(BP) + \xi$ (Abb. 3).

Der Zusammenhang in (4) ist zugleich die Gleichung der Fußpunktkurve [11; Gl. 45], auf deren Grund — wie dort — auch die Richtungen der großen und kleinen Achsen der mittleren Fehlerellipse leicht zu bestimmen sind:

$$\frac{\mathrm{d}\mu^2_{(BP)+\xi}}{\mathrm{d}\xi} = -2\,a'^2 \cos\xi \sin\xi + 2\,b'^2 \cos(\gamma - \xi)\,\sin(\gamma - \xi) = 0\,. \tag{7}$$

Hieraus ist

$$\operatorname{tg} \xi_0 = \frac{b'^2 \sin 2\gamma}{a'^2 + b'^2 \cos 2\gamma} = \frac{\mu^2_{s_2} \sin 2\gamma}{\mu^2_{s_1} + \mu^2_{s_2} \cos 2\gamma}\,. \tag{8}$$

Das Ergebnis ist ähnlich dem des Vorwärtseinschnittes [11; Gl. 17a], was aber natürlich ist, da die Lösung des Bogenschnittes geometrisch auf den Vorwärtseinschnitt zurückgeführt wurde.

Da dem Zusammenhang (6) entsprechend, die Fußpunktkurve der Ellipse mit Hilfe der zwei konjugierten Durchmesser der Ellipse, also ohne Kenntnis der großen und kleinen Achsen, leicht zu konstruieren ist, ist es auch nicht nötig, die Richtung auf Grund von (8) zu bestimmen. Übrigens, in der Richtung der großen und kleinen Achsen, wenn die rechtwinkligen Projektionen der Durchmesser a' und b' dem Zusammenhang (6) entsprechend gezeichnet und addiert werden, werden genau die große und kleine Halbachse erhalten, da an diesen Stellen die mittlere Fehlerellipse und ihre Fußpunktkurve zusammenfallen (Abb. 4). Da der Wert des mittleren Fehlers $\pm$ ist, sind in der Abbildung dieselben Werte in um 180° abweichenden Richtungen zu zeichnen. Der Maßstab der Projektion wird zweckmäßig so gewählt, daß die entsprechenden Werte mit der gewünschten Genauigkeit von der Zeichnung abgenommen werden können.

Unter entsprechenden Bedingungen kann man die einzelnen mittleren Fehler der Entfernungen auch mit dem Gewichtseinheitsfehler ausdrücken:

$$\begin{aligned} \mu_{s_1} &= \mu_0 \sqrt{p_1}, \\ \mu_{s_2} &= \mu_0 \sqrt{p_2}, \end{aligned} \tag{9}$$

wo μ_0 der sich auf die Längeneinheit beziehende mittlere Fehler, p_1, p_2 die Gewichte der entsprechenden Entfernungen (z. B. $p_1 : p_2 = t_1 : t_2$) sind.

Wenn die mittleren Fehler durch Konstruktion in 8—10 Richtungen mit Hilfe der konjugierten Halbdurchmesser a' und b' bestimmt werden, erhalten wir durch Verbindung der entsprechenden Punkte die Fußpunktkurve der mittleren Fehlerellipse, welche also geeignet ist, die Unsicherheit des Punktes in jedweder Richtung zu bestimmen (Abb. 4).

Auch der richtungsgebundene mittlere Fehler kann leicht bestimmt werden, der nach [11] der $\sqrt{2}$te Teil des linearen mittleren Punktfehlers ist [19]:

$$M_r = \sqrt{\frac{\mu_x^2 + \mu_y^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \mu_0 \sqrt{\frac{[a_i\, a_i] + [a_i\, b_i]}{2\, D}}, \tag{10}$$

wo

$$\begin{aligned} a_i &= \cos\,(JP) = \cos \varphi_i. \\ b_i &= \sin\,(JP) = \sin \varphi_i. \\ D &= a_i\, b_{i+1} \quad = a_{i+1}\, b_i. \end{aligned}$$

μ_x = der mittlere Fehler in der Richtung der x-Achse.
μ_y = der mittlere Fehler in der Richtung der y-Achse ist.

Im Falle ohne überschüssige Beobachtungen gestaltet sich der Zusammenhang in (10) folgendermaßen:

$$M_r^2 = \frac{\mu_0^2}{2D}\{\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_2\} = \frac{\mu^2}{D}. \tag{11}$$

Mit Einsetzung des Wertes D:

$$M_r = \frac{\mu_0}{(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)} = \frac{\mu_0}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{\mu_0}{\sin\gamma}. \tag{12}$$

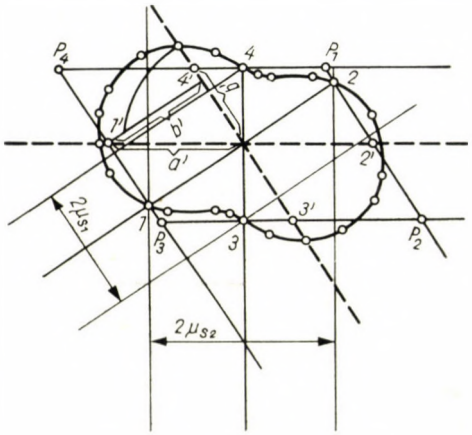

Abb. 4

Der Wert in (12) ist gleichfalls in einfacher Weise konstruierbar in Kenntnis des auf die Gewichtseinheit bezogenen mittleren Fehlers. Bisher wurde bei der Ableitung des richtungsgebundenen mittleren Fehlers vorausgesetzt, daß die einzelnen Beobachtungen gleichen Gewichts sind, d. h., daß die zwei gemessenen Entfernungen nahe gleich sind. Wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, so kann man unter Berücksichtigung von (9) anschreiben:

$$M_r^2 = \mu_0^2 \frac{[p_i a_i a_i] + [p_i a_i b_i]}{[p_i p_{i+1}(a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_{i+1})^2]}. \tag{13}$$

Wenn $i = 2$:

$$M_r^2 = \mu_0^2 \frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)} = \mu_0^2 \frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2 \sin^2\varphi} \tag{14}$$

bzw.

$$M_r = \frac{\mu_0}{\sin\gamma}\sqrt{\frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2}}. \tag{15}$$

Wenn $p_1 = s_1$, $p_2 = s_2$, dann ist

$$M_r = \frac{\mu_0}{\sin\gamma}\sqrt{\frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2}} = \sqrt{\frac{\mu_{s_1}^2 + \mu_{s_2}^2}{s_1 s_2 \sin^2\gamma}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s_1 s_2}}\sqrt{\frac{\mu_{s_1}^2}{\sin^2\gamma} + \frac{\mu_{s_2}^2}{\sin^2\gamma}} \,. \tag{16}$$

Falls $s_2 = ts_1$ ist, so ist

$$M_r = \frac{1}{s_1\sqrt{t}}\sqrt{\frac{\mu_{s_1}^2}{\sin^2\gamma} + \frac{\mu_{s_2}^2}{\sin^2\gamma}} = \frac{\mu_0}{\sin\gamma}\sqrt{\frac{s_1(1+t)}{s_1^2 t}} =$$

$$= \frac{\mu_0}{\sin\gamma}\sqrt{\frac{1}{s_1}\left(1 + \frac{1}{t}\right)}. \tag{17}$$

Auf Grund von Zusammenhang (12) bei gleichen Entfernungen s ist leicht zu bestimmen, welcher der günstigste Schnittwinkel ist:

$$\frac{\partial M}{\partial\gamma} = \frac{-\cos\gamma}{\sin^2\gamma}\mu_0 = \cos\gamma\left(-\frac{\mu_0}{\sin\gamma}\right) = 0. \tag{18}$$

Auf Grund des obigen ergibt sich die günstigste Lage hinsichtlich der Punktunsicherheit bei $\gamma = 90°$, was auch zu erwarten war. Bei kleinerem bzw. größerem Schnittwinkel ist die Punktunsicherheit wesentlich schlechter. Mit der Verlängerung der gemessenen Entfernungen wird freilich die Genauigkeit in steigendem Maße schlechter. Bei Schnittwinkel nahe 180° wird die Koordinate in der zu den Meßlinien rechtwinkligen Richtung genauer, während in der anderen weniger genau erhalten. Hier entsteht die ungünstige Lage, daß, wenn die Summe der zwei gemessenen Entfernungen größer ist als die zwischen den Festpunkten gegebene Entfernung, doch davon nur wenig abweicht, sich zwei Lösungen darbieten, und die Wahl des richtigen Wertes wird schwierig.

Über den richtungsgebundenen mittleren Fehler wurde von FÖRSTNER [20, S. 30] und HOMORÓDI [14] bewiesen, daß die Fläche des mit diesem als Halbmesser um den Punkt gezeichneten Kreises der von der Fußpunktkurve der Ellipse begrenzten Fläche gerade gleich ist. Der zwischen den beiden nachgewiesene geometrische Zusammenhang ist also der Beweis dafür, ob der richtungsgebundene mittlere Punktfehler in gewissen Fällen die Fußpunktkurve zu ersetzen geeignet ist.

*

Im weiteren wollen wir prüfen, ob die Konstruktion der Fußpunktkurve der mittleren Fehlerellipse mit ihren gegebenen vier Punkten 1, 2, 3, 4 — zwar mit annähernder Methode — doch in einer einfacheren Weise ausgeführt werden kann. Insofern auf Grund des Zusammenhanges (8) oder mit den in [8] bzw. [10] mitgeteilten graphischen Lösungen bei den vier gegebenen Punkten die Richtung der großen Achse der mittleren Fehlerellipse auf irgendeine gegebene Richtung bezogen bestimmt wird, wird auch ohne Angabe der einzelnen Punkte der mittleren Fehlerellipse sowie der Fußpunktkurve das Ziel erreicht. Es ist nämlich — auch ohne strenge mathematische Beweisführung — einzusehen, daß die Fußpunktkurve der mittleren Fehlerellipse durch zwei Kreise ersetzt werden kann, deren Mittelpunkt auf der großen Achse der Ellipse liegt. Nun fragt es sich bloß, in welcher Weise diese Mittelpunkte zu konstruieren sind. Wenn wir je zwei zu demselben Kreis gehörende Punkte der Fußpunktkurve verbinden und die Verbindungslinie als eine Sehne halbieren, wird der Mittelpunkt der zu konstruierenden Kreise im Schnittpunkte der halbierenden Linie und der großen Achse liegen. Der Halbmesser wird gleich dem Abstand zwischen dem Mittelpunkt und einem peripherischen Punkt. So sind die zwei, die Fußpunktkurve in sich schließenden Kreise bestimmbar. Da die mittlere Fehlerellipse ihre Fußpunktkurve bei den großen und kleinen Achsen berührt, ergibt der äußere Schnittpunkt der großen Achse mit dem Kreis einen Punkt der mittleren Fehlerellipse. Die Übergangskurve in der Richtung der kleinen Achse kann folgenderweise konstruiert werden. Da die eine Bedingung der Bestimmung der mittleren Fehlerellipse bzw. ihrer Fußpunktkurve ist, daß die Summe der Quadrate der in jedweden zweien zueinander rechtwinkeligen Richtungen entsprechenden mittleren Fehler konstant sei:

$$\mu_x^2 + \mu_y^2 = \mu_{\xi'}^2 + \mu_{\xi'+90^\circ}^2 = \overline{3,\mathrm{III}}^2, \tag{19}$$

wo μ_x und μ_y die mittleren Fehler in der Richtung der Koordinatenachsen sind, und $\mu_{\xi'}$ z. B. der gegebene mittlere Fehler in der Richtung der drei Punkte (ein Punkt der Fußpunktkurve) ist, ist $\mu_{\xi'+90^\circ}$ dazu rechtwinklig zu konstruieren (Abb. 5). Wenn man nun aus einem äußeren Endpunkt der großen Achse mit der Entfernung $\overline{3,\ \mathrm{III}}$ die dazu rechtwinkelige kleine Achse schneidet, wird der Punkt der mittleren Fehlerellipse bzw. der dazu gehörigen Fußpunktkurve auf der kleinen Achse erhalten. Nun kann man den zwischen den zwei Kreisen liegenden Teil der Fußpunktkurve mit ziemlicher Annäherung einzeichnen. Bei der erforderlichen Genauigkeit ist das in den meisten Fällen zulässig. Sollte das ungenügend sein, so können die Übergangspunkte in Kenntnis der großen und kleinen Achsen sogar mit rechtwinkligen Projektionen bestimmt werden. Übrigens können die Inflexionspunkte auch durch Konstruktion gezeichnet werden [14].

In Kenntnis der Fußpunktkurve mag die Punktunsicherheit in beliebiger Richtung bestimmt werden. So, unter anderen, wenn die mittleren Fehler μ_x und μ_y in der Richtung der zwei Koordinatenachsen gesucht werden, müssen wir einfach die Entfernung zwischen den in der Richtung des Mittelpunktes der Fußpunktkurve und der Achsen sich ergebenden Schnittpunkten abmessen (Abb. 5).

Im weiteren betrachten wir den Fall, wo der mittlere Fehler in der Richtung der einen Achse gleich Null ist. In diesem Falle tangieren die zwei konstruierten Kreise einander im Mittelpunkt der gesuchten Fußpunktkurve. In der Richtung der kleinen Achse kann man das durch die Methode der Konstruktion im Falle der einander berührenden Kreise überprüfen, wenn

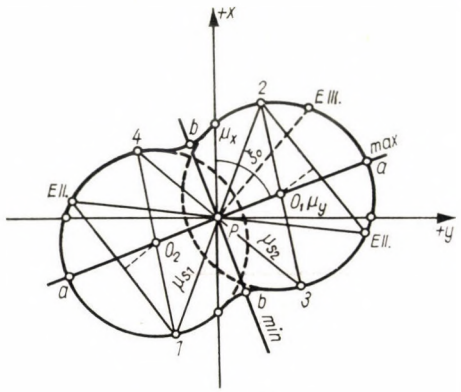

Abb. 5

wir wieder die Entfernung zwischen den Endpunkten der in zwei zueinander rechtwinkligen Richtungen auftretenden mittleren Fehler vom Endpunkt der großen Achse auftragen. Die Fußpunktkurve entartet in solchen Fällen in zwei einander berührende Kreise. Das stimmt übrigens mit den bisherigen Theorien völlig überein, da, wenn die Länge der einen Achse gleich Null ist, die Verbindungslinie der in die einzelnen Richtungen fallenden Projektionen einen Kreis ergibt (Abb. 6). Wenn der mittlere Fehler in der Richtung beider Achsen gleich ist ($a = b$, die Achsen der Ellipse sind gleich), übergehen die zwei Kreise in einen Kreis, und so entsteht anstatt einer Fehlerellipse ein Fehlerkreis, dessen Fußpunktkurve mit den eigenen peripherischen Punkten zusammenfällt (Abb. 7).

Auf Grund des obigen kann man auch im Falle überschüssiger Beobachtungen bei den zwei durch die Ausgleichung erhaltenen mittleren Fehlern der Koordinaten sowie bei in einer einfachen Weise berechenbaren oder konstruierbaren Achsenrichtung die Fußpunktkurve leicht angeben. Auch hier kann das oben Gesagte angewendet werden. Wenn die Achsen des Koordinatensystems mit den Achsen der mittleren Fehlerellipse bzw. ihrer Fuß-

punktkurve zusammenfallen, so kann man die vorige Konstruktionsmethode wieder anwenden, obwohl in diesem Falle — streng genommen — das die kleine Achse entlang gegebene Maß kein Punkt des zu konstruierenden Kreises

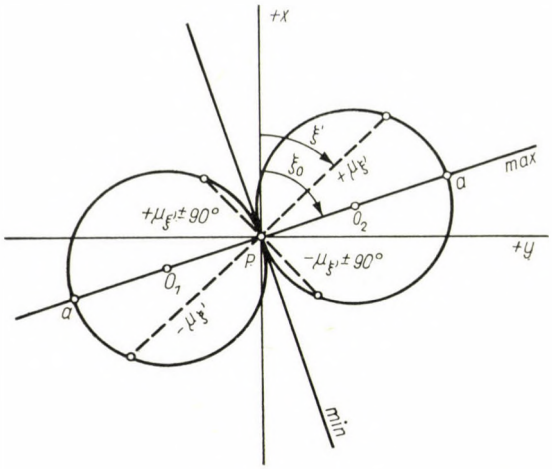

Abb. 6

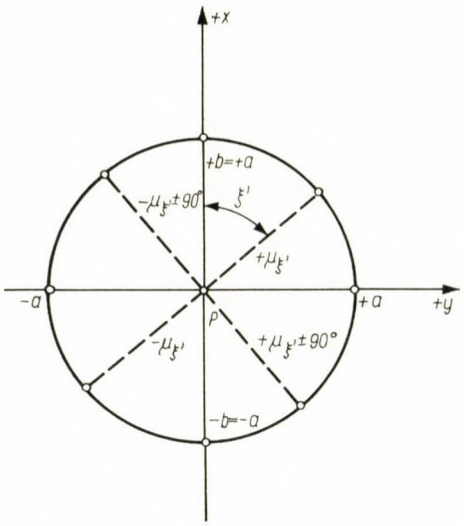

Abb. 7

ist, und kann bloß mit guter Annäherung als solcher aufgefaßt werden. Wenn größere Genauigkeit erforderlich ist, kann man auch hier das Ziel erreichen, wenn wir mit Hilfe der zwei Maße der Ellipse bzw. der Fußpunktkurve in einer beliebig ausgewählten Richtung durch rechtwinklige Projektion einen weiteren Punkt der Fußpunktkurve bestimmen, dann durch Verbindung

dieses Punktes mit dem Endpunkt der großen Achse der Fußpunktkurve wieder die Sehne des zu konstruierenden Kreises erhalten. Der Gang der Lösung ist schon damit gegeben.

Auf die mathematische Bestätigung der Frage werden wir in einer späteren Studie mit allen Einzelheiten zurückkehren. Das hier gegebene Konstruktionsverfahren ergibt jedenfalls auf einem sehr kurzen Wege die für die Punktunsicherheit bezeichnende Fußpunktkurve.

*

Endlich erwähnen wir kurz, daß in sehr vielen Fällen ziemlich wenig Beobachtungen zur Bestimmung der mittleren Fehler vorhanden sind. In solchen Fällen ist es zweckdienlich, die Genauigkeit unserer Meßergebnisse mit auf frühere zahlreiche Messungen gestützten mittleren Fehlern zu vergleichen. Auf Grund der neueren Forschungen [15, 16] bestimmt man mit STUDENTscher Verteilung die Vertrauensintervalle der mittleren Fehler, in welchen unter anderen auch die Zahl der überschüssigen Beobachtungen zum Ausdruck kommt. Eine derartige Bestimmung der Vertrauensintervalle macht aber den Gebrauch besonderer Tabellen nötig, die auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu verfertigen sind. Im Sinne unserer Untersuchungen [17] sind die auf solche Weise bestimmten Vertrauensintervalle gleich den Werten, welche erhalten werden, wenn wir den mittleren Fehler um seinen eigenen mittleren Fehler ändern, d. h. auch das Genauigkeitsmaß des mittleren Fehlers berücksichtigen. Auch in diesem letzteren nämlich, wie bei dem den Thesen der Wahrscheinlichkeitsrechnung entsprechenden Vertrauensintervall, kommt auch die Zahl der überschüssigen Beobachtungen zum Ausdruck. Daher ist also:

$$\overline{\mu}_s = \pm (\mu_s + \mu_{\mu_s}), \tag{20}$$

wo μ_s der auf Grund der Beobachtungen berechnete mittlere Fehler, μ_{μ_s} der mittlere Fehler des vorigen ist.

Der Einfluß dieser letzteren auf die Fußpunktkurve der mittleren Fehlerellipse könnte wohl auch untersucht werden, doch diesbezüglich verweisen wir auf unsere anderswo ermittelten Ergebnisse [17]. Man kann feststellen, daß im Falle von sehr wenigen überschüssigen Beobachtungen auch der mittlere Fehler selbst mit einer ziemlich großen Unsicherheit behaftet ist (z. B. im Falle einer überschüssigen Beobachtung der mittlere Fehler des mittleren Fehlers die Größe des mittleren Fehlers erreicht). Dies alles muß man auch bei der Bestimmung der für die Punktunsicherheit bezeichnenden Fußpunktkurve in Betracht ziehen.

SCHRIFTTUM

1. HELMERT, F. R.: Studien über rationelle Messungen im Gebiete der höheren Geodä-ie. *Zeitschrift f. Math. u. Physik* (1868) 73—142.
2. BRAVAIS: Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point. *Mém. Prês. par divers savants à l'Acad. r. des sc. de l'Inst. de France*, **IX** (1846), 255—332.
3. ANDRAE: Fehlerbestimmung bei d. Pothenot'schen Aufgabe mit dem Meßtische. *Astron. Nachr.* **47** (1857), No. 1117.
4. JORDAN: Handbuch der Vermessungskunde. Band I. 3. Aufl. (1888).
5. WERKMEISTER, P.: Untersuchung der Genauigkeit von trigonometrischen Punktbestimmungen durch Einschneiden vor Ausführung der Messung. *Zeitschrift f. Vermessungsw.* (1920), 561—573.
6. BLASS: Halbgraphische Bestimmung der mittleren Fehlerellipse. *Allg. Vermessungs-Nachrichten*, (1931), 760—766.
7. GELBKE: Die zeichnerische Darstellung der Fehlerellipse. *Zeitschr. f. Vermessungswesen*, (1938), 349—350.
8. GOTTHARDT, E.: Geometrische Konstruktion zur Fehlerellipse *Zeitschr. f. Vermessungswesen* (1943), 249—259.
9. MILASOVSZKY, B.: A hibaellipszis és talpponti görbéjének meghatározása szerkesztéssel. *Földméréstani Közl.* (1954).
10. MILASOVSZKY, B.: A hibaellipszist és annak talpponti görbéjét helyettesítő kördiagram. *VI. Oszt. Közl.* **XXIX** (1961), 237—268.
11. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Zur Berechnung der mittleren Fehlerellipse beim einfachen Vorwärtseinschnitt. *Zeitschr. f. Vermessungswesen* (1957), sowie A középhibaellipszis kiszámításáról egyszerű előmetszésnél *VI. Oszt. Közl.* **XXIV** (1959) 261—289.
12. TÁRCZY-HORNOCH, A.: A középhibaellipszis talpponti görbéjének egyszerű megszerkesztése, *Geodézia és Kartográfia* (1960), 159—165.
13. SÜTTI, J.—DRABANT, J.: Polchová presnost' bodov určených dlžkami. *Geodetický a Kartografický Sbornik* (1963), 91—97.
14. HOMORÓDI, L.: A hibaellipszis és a ponthiba. *Geodézia és Kartográfia* (1956), 5—15.
15. BÖHM, J.: Die Fehlerinterwallschätzungen in der Geodäsie. *Vermessungstechnik* (1961), 119—122.
16. HRISTOW, W. K.: Klassische und moderne Genauigkeitsabschätzungen in einigen Ausgleichungsfällen. *Acta Techn. Hung.* **XXIII** (1959), 16—43.
17. HALMOS, F.: Mérési eredmények kiértékelésével kapcsolatos gazdaságossági és pontossági vizsgálatok. Dissertation für Kandidatur. 1962.
18. HALMOS, F.: Mérési eredmények pontosságának meghatározása. *Geodézia és Kartográfia.* 1964/1.
19. VINCZE, V.: Önálló háromszöghálózatok optimális méretei. Budapest, 1955.
20. FÖRSTNER, G.: Ausgleichung und Genauigkeit von Polygonzügen im weitmaschigen Netz. (1933).

CONSTRUCTION OF PEDAL CURVE OF THE ELLIPSE OF ERROR WITH SIMPLE ARC SECTION

F. HALMOS

SUMMARY

Author examines the possibilities of a simple construction of the pedal curve of the ellipse of errors for cases without superfluous measurements. TÁRCZY-HORNOCH's procedure using conjugated halfdiameter of the ellipse is applied for arc section, which gives the single points of the pedal curve by means of known mean square errors in the direction of the two distances. A good approximate method of simple construction is shown for determining the pedal curve on the basis of its two known points. Finally the uncertainity of mean square errors and the consideration of these values at giving the uncertainty of a point are discussed.

CONSTRUCTION DE LA COURBE PODAIRE DE L'ELLIPSE D'ERREUR PAR SECTION D'ARC

F. HALMOS

RÉSUMÉ

Pour les cas sans observations surabondantes, l'auteur examine les possibilités de construction simple de la courbe podaire de l'ellipse d'erreur moyenne. Le procédé de TÁRCZY-HORNOCH, utilisant le demi-diamètre conjugué de l'ellipse, est appliqué au sectionnement de l'arc. A l'aide des erreurs moyennes connues en direction des deux distances, ce procédé détermine donc les différents points de la courbe podaire. Un intéressant procédé de construction, simple et assurant une bonne approximation, est présenté pour déterminer la podaire sur la base de deux points connus. L'auteur étend enfin son examen à l'incertitude des erreurs moyennes et à leur considération dans le calcul de l'incertitude des points.

ПОСТРОЕНИЕ КРИВОЙ ТОЧКИ ПОДОШВЫ ЭЛЛИПСА ОШИБКИ ПРИ ПОМОЩИ ПРОСТОЙ ЗАСЕЧКИ ДУГИ

Ф. ХАЛЬМОШ

РЕЗЮМЕ

Автор для случаев без избыточных наблюдений производит анализ возможностей простого построения кривой точки подошвы эллипса средних ошибок. Автор использует метод профессора *Тарци-Горноха*, выполняемый при помощи конъюгированного полудиаметра эллипса, для засечки дуги, который метод, таким образом, в направлении двух расстояний при помощи известных средних ошибок дает точки кривой точки подошвы. Демонстрируется удовлетворительно приближенный простой метод построения для определения кривой точки подошвы на основе двух известных точек. Наконец, автор рассматривает неопределенность средних ошибок и учет этих значений при указании неопределенности точки.

DIE ZURÜCKFÜHRUNG DER BEDINGTEN BEOBACHTUNGEN MIT UNGEMESSENEN UNBEKANNTEN AUF DIE REINEN BEDINGTEN BEOBACHTUNGEN

F. HALMOS

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
GEODÄTISCHES FORSCHUNGSLABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN-SOPRON

[Eingegangen am 16. August 1963]

Der Verfasser untersucht die Frage, wie die Ausgleichung der bedingten Beobachtungen mit ungemessenen Unbekannten (V. Ausgleichsgruppe) auf die reinen bedingten Beobachtungen zurückführbar ist, wenn anstatt der ungemessenen Unbekannten und deren Gewichtskoeffizienten, die gesuchten Unbekannten als Funktionen der ausgeglichenen Werte bestimmt worden sind. Er stellt fest, daß durch die Ergänzung der Auflösungstabelle mit den entsprechenden vertikalen Spalten und durch Reduktionen unmittelbar die Ergänzungswerte der Funktionen sowie die dazu gehörenden Gewichtskoeffizienten gewonnen werden können. Er untersucht den Fall, wenn man den F-Funktionswert liefernde Gleichung durch Logarithmierung linearisiert. In diesem Falle müssen die entsprechenden Reduktionen einfach mit den Reziprokwerten der dazu gehörenden Tafeldifferenzen bzw. deren Quadraten multipliziert werden. Die derweise durchgeführten Berechnungen sind etwas kürzer als die Berechnungen nach der V. Ausgleichsgruppe, außerdem kommt der Vorteil noch bei mehreren gesuchten Funktionswerten zum Vorschein. Als Rechenbeispiel wird die bekannte Lösung der Grundliniennetzentwicklung vorgeführt. Die Methode ist dann anwendbar, wenn die Funktion als die Funktion der ausgeglichenen Werte ausgedrückt ist, wofür die Kriterien ebenfalls untersucht werden. Dadurch wurde also neben der, auf den allgemeinen Fall der Ausgleichung bezogenen, auf die vermittelnden Beobachtungen durch fiktive Verbesserungen zurückgeführten Lösung, auch die Zurückführung auf reine bedingte Beobachtungen bewiesen.

Die Ausgleichung der bedingten Beobachtungen mit ungemessenen Unbekannten (der allgemeine Fall der Ausgleichung) findet neuestens eine immer größere Anwendung, da diese Ausgleichsgruppe häufig zur Lösung zahlreicher Probleme führt. So führen u.a. die bei den Messungen vorkommenden regelmäßigen Fehler, die Bestimmung der Instrumenten-Konstanten, die Einführung der ungemessenen Werte als Unbekannte in die Ausgleichung usw. zu dieser Methode. Diese Probleme wurden teilweise von TÁRCZY-HORNOCH bereits erörtert [1]. Dies hat auch den Vorteil, daß die ungemessenen Unbekannten und die mit diesen verbundenen Gewichtskoeffizienten unmittelbar gewonnen werden können. Die Voraussetzung hierfür ist, daß die ungemessenen Unbekannten als letzte Glieder in den Normalgleichungen angeschrieben werden, da die GAUSS'sche klassische Lösung nur in diesem Falle das Gewicht der entsprechenden Unbekannten sichert. Wenn mehrere Unbekannte vorhanden sind, muß die Auflösung der Normalgleichungen höchstens öfters wiederholt werden. Laut unseren, bereits in [2] erörterten Untersuchungen kann in diesen Fällen sowohl der modernisierte GAUSS'sche Algorithmus als auch die CHOLESKY'sche Lösung angewendet werden. So kann also die wiederholte Lösung der Normalgleichungen vermieden werden.

Die allgemeine Form der Bedingungsgleichungen mit ungemessenen Unbekannten ist:

$$\varphi_j(o_1 + v_1,\ o_2 + v_2, \ldots,\ o_n + v_n, x, y, z \ldots) = 0\,. \qquad (1)$$
$$j = a, b, \ldots r$$

Die linearen Verbesserungsgleichungen sind die folgenden:

$$\begin{aligned}
&a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n + A_a \delta x + B_a \delta y + C_a \delta z + \ldots + l_a = 0\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n + A_b \delta x + B_b \delta y + C_b \delta z + \ldots + l_b = 0\,, \qquad (2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n + A_n \delta x + B_n \delta y + C_n \delta z + \ldots + l_n = 0\,,
\end{aligned}$$

wo δx, δy, δz ... die durch Ausgleichung gewonnenen Zusatzwerte:

$$a_i = \frac{\partial \varphi_a}{\partial o_i}\,, \qquad b_i = \frac{\partial \varphi_b}{\partial o_i}\,, \ldots \quad i = 1, 2, \ldots n;$$

$$A_i = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\,, \qquad B_i = \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}\,, \ldots \quad x_0 = \varphi_x(o_1, o_2, \ldots o_n), \ldots$$

und

$$l_j = \varphi_j(o_1, o_2, \ldots o_n, x_0,\ y_0,\ z_0 \ldots) \qquad (4)$$

sind. Der weitere Lauf der Ausgleichung führt zur Lösung von $(r + q)$ Normalgleichungen (r ist die Zahl der Bedingungsgleichungen und q die Zahl der Unbekannten). Nach dem vorherigen ist es leicht ersichtlich, daß die Einführung von zuviel Unbekannten nicht zweckmäßig ist, weil sie die Zahl der zu lösenden Gleichungen stark erhöht (oft wächst die Zahl der Bedingungsgleichungen mit der Zahl der Unbekannten, jede neue Unbekannte erfordert das Aufstellen einer weiteren Normalgleichung).

Im weiteren soll untersucht werden, wann die obige Ausgleichung vereinfachbar ist:

1. Falls in jeder Gleichung mehrere Verbesserungen vorhanden sind, so daß die gleiche Verbesserung in einer anderen Gleichung nicht vorkommt, so können die Bedingungs- bzw. Verbesserungsgleichungen in allgemeiner Form folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
&a_1' v_1' + a_1'' v_1'' + a_1''' v_1''' + \ldots + A_1 \delta x + B_1 \delta y + \ldots + l_1 = 0\,,\\
&b_2' v_2' + b_2'' v_2'' + b_2''' v_2''' + \ldots + A_2 \delta x + B_2 \delta y + \ldots + l_2 = 0\,, \qquad (5)\\
&r_n' v_n' + r_n'' v_n'' + r_n''' v_n''' + \ldots + A_n \delta x + B_n \delta y + \ldots + l_n = 0\,.
\end{aligned}$$

In diesem Falle können bekanntlich sämtliche Verbesserungen in eine fiktive Verbesserung zusammengezogen werden:

$$\begin{aligned} a_1' v_1' + a_1'' v_1'' + a_1''' v_1''' + \ldots &= -\lambda_1, \\ b_2' v_2' + b_2'' v_2'' + b_2''' v_2''' + \ldots &= -\lambda_2, \\ &\vdots \\ r_n' v_n' + r_n'' v_n'' + r_n''' v_n''' + \ldots &= -\lambda_n. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Gewichte der einzelnen fiktiven Beobachtungen, falls die ursprünglichen Beobachtungen verschiedene Gewichte hatten ([5]; S. 262; [7]; S. 255; [8]; S. 106), sind wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_{\lambda_1}} &= \frac{a_1'^2}{p_1'} + \frac{a_1''^2}{p_1''} + \frac{a_1'''^2}{p_1'''} + \ldots = \left[\frac{a_1 a_1}{p_1}\right], \\ \frac{1}{P_{\lambda_2}} &= \frac{b_2'^2}{p_2'} + \frac{b_2''^2}{p_2''} + \frac{b_2'''^2}{p_2'''} + \ldots = \left[\frac{b_2 b_2}{p_2}\right], \\ &\vdots \\ \frac{1}{P_{\lambda_n}} &= \frac{r_n'^2}{p_n'} + \frac{r_n''^2}{p_n''} + \frac{r_n'''^2}{p_n'''} + \ldots = \left[\frac{r_n r_n}{p_n}\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

Durch Einführung der λ-Werte in die Gl(5) ergibt sich überall nur eine Verbesserung, und so kann die Lösung auf die vermittelnden Beobachtungen zurückgeführt werden. Dies ist vor allem dann vorteilhaft, wenn viele Bedingungen mit wenig Unbekannten vorhanden sind, da die Zahl der zu lösenden Normalgleichungen stark vermindert wird. Das Wichtigste wird hier die Ermittlung der Unbekannten, wo z.B. die zahlenmäßige Angabe der einzelnen v-Werte nicht so wesentlich ist (z.B. bei Ermittlung der Konstanten der Fadendistanzmeßgeräte, wo der mittlere Fehler der Gewichtseinheit auch nach den fiktiven Verbesserungen bestimmbar ist).

2. Die Einführung von fiktiven Verbesserungen kann auch in dem Falle angewendet werden, wenn in den einzelnen Verbesserungsgleichungen dieselben v_i-Werte vorkommen. In diesem Falle sind die einzelnen fiktiven Verbesserungen, da sie voneinander nicht unabhängig sind, in folgender Form anzuwenden [3]:

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n &= \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n, \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n &= \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 + \ldots + \beta_n \lambda_n, \\ &\vdots \\ r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n &= \varrho_1 \lambda_1 + \varrho_2 \lambda_2 + \ldots + \varrho_n \lambda_n. \end{aligned} \tag{8}$$

Falls die obigen Zusammenhänge (8) ähnlich wie bei der EGGERT'schen Netzausgleichung eingeführt werden, können mit Hilfe der Koeffizienten der ur-

sprünglichen Verbesserungsgleichungen (3) die Koeffizienten der λ enthaltenden Glieder ausgedrückt werden [4]:

$$[\alpha\alpha] = \left[\frac{aa}{p}\right], \qquad [\alpha\beta] = \left[\frac{ab}{p}\right], \ldots, \ [\alpha\varrho] = \left[\frac{ar}{p}\right],$$

$$[\beta\beta[= \left[\frac{bb}{p}\right], \ldots, \ [\beta\varrho] = \left[\frac{br}{p}\right], \tag{9}$$

$$[\varrho\varrho] = \left[\frac{rr}{p}\right].$$

Einige der Koeffizienten können auch frei gewählt [3] und können also alle nach (9) ermittelt werden. Durch ihre Einsetzung in die ursprünglichen Gleichungen (3), unter Berücksichtigung der Gl(8), bekommen wir die folgenden allgemeinen Bedingungsgleichungen mit den entsprechenden fiktiven Verbesserungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_3 + \ldots + \alpha_n\lambda_n + A_a\,\delta x + B_a\,\delta y + \ldots + l_a &= 0\,,\\
\beta_2\lambda_2 + \beta_3\lambda_3 + \ldots + \beta_n\lambda_n + A_b\,\delta x + B_b\,\delta y + \ldots + l_b &= 0\,,\\
\gamma_3\lambda_3 + \ldots + \gamma_n\lambda_n + A_c\,\delta x + B_c\,\delta y + \ldots + l_c &= 0\,,\\
&\vdots\\
\varkappa_{n-1}\lambda_{n-1} + \varkappa_n\lambda_n + A_k\,\delta x + B_k\,\delta y + \ldots + l_k &= 0\,,\\
\varrho_n\lambda_n + A_n\,\delta x + B_n\,\delta y + \ldots + l_n &= 0\,,
\end{aligned} \tag{10}$$

wo laut der HELMERT—EGGERT'schen Voraussetzung die Koeffizienten der fehlenden Glieder gleich Null sind. Falls laut der letzten Gleichung die als Funktion der Unbekannten ausdrückbare fiktive Verbesserung λ_n in die vorletzte Gleichung eingesetzt wird, bekommen wir eine die fiktive Verbesserung λ_{n-1} enthaltende Gleichung. Dieses Verfahren kann so lange fortgesetzt werden, bis nach stufenweisen Substitutionen sämtliche Gleichungen nur noch eine fiktive Verbesserung enthalten [4]:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= A'_1\,\delta x + B'_1\,\delta y + \ldots + l'_a\,,\\
\lambda_2 &= A'_2\,\delta x + B'_2\,\delta y + \ldots + l'_b\,,\\
&\vdots\\
\lambda_n &= A'_n\,\delta x + B'_n\,\delta y + \ldots + l'_n\,.
\end{aligned} \tag{11}$$

Das heißt, wir gelangten durch die Einführung der fiktiven Verbesserungen zur Ausgleichung der reinen vermittelnden Beobachtungen. Die Lösung ist dann vorteilhaft, wenn wir die einzelnen v-Werte nicht benötigen.

3. Eine dritte Lösung ergibt sich dann, wenn in den einzelnen Gleichungen dieselben Verbesserungen vorkommen, aber es gibt pro Gleichung wenig-

stens eine Verbesserung, die anderswo nicht vorkommt [5; S. 266.]. In diesem Falle können die gemeinsamen Verbesserungen als Unbekannte in die Ausgleichung eingeführt werden, und so kann die Lösung wieder auf die vermittelnden Beobachtungen zurückgeführt werden. Falls keine in einer anderen Gleichung vorkommende Verbesserung vorhanden ist, führt die Methode zu einer Zwangsbedingungsgleichung. Wenn die Zahl der gemeinsamen Verbesserungen klein ist, ist sie vorteilhaft anwendbar.

4. Wie bereits erwähnt, werden die ungemessenen Unbekannten in die Ausgleichung eingeführt, um die im weiteren nötigen unbekannten Werte sowie die zu diesen gehörenden Gewichtskoeffizienten unmittelbar zu erhalten (z.B. im Falle eines Grundlinienvierecks die entwickelte Seite, bei Einrechnungszügen der unbekannte Orientierungswinkel). So erhöht sich aber die Zahl der zu lösenden Normalgleichungen (z.B. im Falle des einfach entwickelten Grundlinienvierecks von vier auf sechs, bei den Einrechnungszügen von eins auf drei). Es ergibt sich die Frage, wie die Erhöhung der Zahl der Normalgleichungen vermeidbar ist. Wir wollen untersuchen, ob — die ungemessenen Unbekannten in Funktion der auszugleichenden Werte ausgedrückt — die Lösung auf die reinen bedingten Beobachtungen zurückgeführt werden kann. Die Aufgabe wurde in gewissen Fällen bisher so gelöst, daß die gesuchte Funktion bzw. Unbekannte in der Funktion der gesuchten Werte berechnet und dann auch deren Gewicht durch die für die Funktionsform bekannte Gewichtsformel bestimmt wurde. Durch die Zurückführung der Aufgabe auf die bedingten Beobachtungen und durch Ergänzung der Auflösungstabelle der Normalgleichungen mit der entsprechenden Spalte können die dazu gehörenden Werte bestimmt werden. Dadurch kann die Zahl der zu lösenden Normalgleichungen im Verhältnis zu dem allgemeinen Fall reduziert werden — was ein wesentlicher Vorteil ist — da die Rechenarbeit bekannterweise ungefähr mit der dritten Potenz der Zahl der zu lösenden Gleichungen zunimmt.

Zuerst muß festgestellt werden, daß die Zurückführung dann durchführbar ist, wenn die den ungemessenen Unbekannten entsprechende Funktionsform für die beobachteten Werte aufgeschrieben werden kann, u. z.:

a) Falls die ungemessene Unbekannte nur in einem der Bedingungsgleichungen vorkommt, so kann diese Gleichung unmittelbar so umgeformt werden, daß auf der einen Seite die gesuchte Unbekannte, auf der anderen die Funktionsform stehe:

$$x = F = F_x(o_1 + v_1, o_2 + v_2, \ldots o_n + v_n). \tag{12}$$

b) Falls unter den vielen Bedingungsgleichungen die einzige Unbekannte nur in zwei Gleichungen vorkommt, so kann aus beiden die Unbekannte ausgedrückt und die rechten Seiten miteinander gleichgestellt werden. Als Funktion wird von den beiden entwickelten Gleichungen jene zur Bestimmung

der mit der Unbekannten verbundenen Werte angewandt, die bezüglich der Fehlerfortpflanzung vorteilhafter ist:

$$x = F = F'_x(o_1 + v_1, o_2 + v_2, \ldots, o_n + v_n),$$
$$x = F = F''_x(o_1 + v_1, o_2 + v_2, \ldots, o_n + v_n). \tag{13}$$

Also:

$$F'_x(o_1 + v_1, o_2 + v_2, \ldots, o_n + v_n) - F''_x(o_1 + v_1, o_2 + v_2, \ldots, o_n + v_n) = 0. \tag{14}$$

So werden die zwei Bedingungsgleichungen in eine Gleichung zusammengezogen, zur Errechnung der Unbekannten wird aber eine der Gl. (13) verwendet.

Wenn ursprünglich zwei Bedingungen vorliegen, und die Unbekannte in beiden vorkommt, können wir dem obigen entsprechend vorgehen.

c) Wenn die ungemessene Unbekannte in mehreren Bedingungsgleichungen vorkommt, kann diese aus der einen ausgedrückt in die anderen der Reihe nach substituiert werden. Dadurch gelangen wir wieder zu Bedingungsgleichungen ohne Unbekannten, während zur Bestimmung der Unbekannten wieder jene Funktion verwendet wird, in welcher ihr Wert in der Funktion der Beobachtungen und Verbesserungen ausgedrückt ist.

d) Im Falle von zwei Unbekannten, wenn sie einzeln in einer Bedingungsgleichung vorkommen, nach dem vorherigen (Punkt *a*) können sie als Funktionen der auszugleichenden Werte ausgedrückt, also als Funktionsform bestimmt werden. Falls sie einzeln in mehreren Gleichungen vorkommen, so können wir dem Punkte *c)* entsprechend verfahren. Wenn die zwei Unbekannten gemeinsam vorhanden sind, so kann die eine als die Funktion der Beobachtungen und als Funktion der anderen Unbekannten ausgedrückt werden, sie wird aus den anderen Gleichungen stufenweise eliminiert, wodurch Bedingungsgleichungen gewonnen werden, die nunmehr nur eine Unbekannte enthalten. Diese Unbekannte kann nach dem obigen wieder eliminiert werden. Auf die gleiche Weise kann auch im Falle mehrerer Unbekannten verfahren werden. Allerdings muß man in solchen Fällen bei der mehrfachen Substitution auf die richtige Ausführung der Operationen bedacht sein.

e) In dem bisherigen sind wir davon ausgegangen, daß die Bedingungsgleichungen für den allgemeinen Fall der Ausgleichung (d.h. mit ungemessenen Unbekannten) aufgeschrieben worden sind. (z.B. bei der Bestimmung der regelmäßigen Fehler durch Ausgleichung.) Es können auch solche Fälle vorkommen, wo die entsprechenden Bedingungsgleichungen auch ohne die gesuchten ungemessenen Unbekannten aufschreibbar sind (z.B. bei der Ausgleichung des Grundlinienviereckes, da die entwickelte Seite nicht einbezogen wird), aber nach der Ausgleichung außer den Verbesserungen der gesuchte unbekannte Wert (Werte), und deren Gewichtskoeffizient (Koeffiziente) auch gesucht werden. In solchen Fällen kann die Unbekannte in der Funktion der beobach-

teten Werte und Funktionen der Verbesserungen ausgedrückt werden, und die gewünschten Daten können auf deren Grund nach dem im folgenden eingehend Erörterten bestimmt werden. Ebenso kann im Falle von mehreren Unbekannten vorgegangen werden. So kann beispielsweise im Falle der Ausgleichung des Grundlinienvierecks die entwickelte Seite mit der entsprechenden Sinus-Bedingung ausgedrückt werden. Naturgemäß ist bei der zahlenmäßigen Lösung die Einführung der Näherungswerte der Funktionen vorteilhaft.

In weiteren soll untersucht werden, wie der Funktionswert und dessen Gewicht unmittelbar auf Grund der bedingten Beobachtungen zu ermitteln ist. Bekannterweise bestehen zwischen den ausgeglichenen Werten und ihren Funktionen folgenden Zusammenhänge ([5]; S. 175; [6]; S. 203; [7]; S. 189; [8]; S. 89):

$$\begin{aligned} F &= F(o_1 + v_1, o_2 + v_2, \ldots, o_n + v_n) = \\ &= F(o_1, o_2, \ldots o_n) + f_1 v_1 + f_2 v_2 + \ldots + f_n v_n = \\ &= F_0 + f_1 v_1 + f_2 v_2 + \ldots + f_n v_n , \end{aligned} \tag{15}$$

wo

$$f_i = \frac{\partial F}{\partial o_i} \tag{16}$$

und

$$F_0 = F(o_1, o_2, \ldots, o_n)$$

sind. Falls der Näherungswert F_0 nicht o_1, o_2, ... o_n« entsprechend, sondern nach einem gewissen o_1', o_2', ... o_n' Wert angenommen wird, d.h.

$$F_0' = F(o_1', o_2', \ldots o_n') , \tag{17}$$

so gestaltet sich der Zusammenhang (1) folgendermaßen:

$$F = F_0' + [f' l] + f_1 v_1 + f_2 v_2 + \ldots + f_n v_n , \tag{18}$$

wo $l = o_1 - o_1$ ist.

Selbstverständlich ist wegen der praktischen Berechnungen die Ausführung laut (15) begründeter und zweckmäßiger, und wir werden im weiteren danach vorgehen. Die einzelnen Verbesserungen sind im Falle von Beobachtungen mit verschiedenen Gewichten:

$$v_i = \frac{a_i}{p_i} k_a + \frac{b_i}{p_i} k_b + \frac{c_i}{p_i} k_c + \ldots + \frac{r_i}{p_i} k_r , \tag{19}$$

wo a_i, b_i, c_i, ... r_i die in den Verbesserungsgleichungen vorkommenden entsprechenden Koeffizienten, p_i das Gewicht der einzelnen Beobachtungen, k_a, k_b, ... k_r die durch die Lösung der Normalgleichungen gewonnenen Korrelaten sind.

Die Gl(10) kann noch folgendermaßen aufgeschrieben werden:

$$F = F_0 + \left[\frac{af}{p}\right] k_a + \left[\frac{bf}{p}\right] k_b + \ldots + \left[\frac{rf}{p}\right] k_r , \tag{20}$$

oder der Gl(18) entsprechend:

$$F = F_0' + [f'\, l] + \left[\frac{af}{p}\right] k_a + \left[\frac{bf}{p}\right] k_b + \ldots + \left[\frac{rf}{p}\right] k_r . \tag{21}$$

Falls in der letzten Spalte der Auflösungstabelle diese Werte aufgezeichnet und die nötigen Reduktionen laut der üblichen Aufzeichnungsform der Normalgleichungen ermittelt werden, so ist ([8]; S. 92):

$$F = F_0 - \frac{\left[\frac{af}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}(l_a) - \frac{\left[\frac{bf}{p}\right]}{\left[\frac{bb}{p}1\right]}(l_b 1) - \ldots - \frac{\left[\frac{rf}{p}(r-1)\right]}{\left[\frac{rr}{p}(r-1)\right]}(l_r(r-1)), \tag{22}$$

wo l_a, l_b die reinen Glieder der entsprechenden Normalgleichungen sind. Es ist aber von der Fachliteratur aus bekannt, daß selbst das Gewicht des Funktionswertes unmittelbar mit der Auflösung bestimmbar ist:

$$Q_{FF} = \frac{1}{P_F} = \left[\frac{ff}{p}\right] - \frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{bf}{p}1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}1\right]} - \ldots - \frac{\left[\frac{rf}{p}(r-1)\right]^2}{\left[\frac{rr}{p}(r-1)\right]} = \left[\frac{ff}{p}(r)\right] \tag{23}$$

Bei der den bedingten Beobachtungen entsprechenden Lösung ergänzen wir also mit der dem Funktionswert entsprechenden Spalte die Normalgleichungen und erhalten unmittelbar den auf Grund der ermittelten Werte berechenbaren Funktionswert (als Reduktion) und dessen Gewicht. Falls durch die Bestimmung des mittleren Fehlers der vorhergegangenen Bedingungen nicht befriedigt worden sind, so sind die einzelnen l-Werte in der Gl. (22) gleich Null, und wird gelangen also zu dem auf Grund der unmittelbaren Fehlerfortpflanzung ableitbaren mittleren Fehler. Der mittlere Fehler vermindert sich hingegen mit der Einführung einer jeden neuen Bedingung, was gleichzeitig auf die durch Ausgleichung erzielbare Genauigkeitserhöhung hinweist.

Wenn der als Funktionswert angewandte Zusammenhang der Gl. (20) mit der Gleichung, welche mit der ungemessenen Unbekannten nach der V. Ausgleichsgruppe verwendet wurde und als Bedingungsgleichung aufschreibbar ist, verglichen wird, sehen wir, daß die Koeffizienten der so gewonnenen neuen

Normalgleichung mit denen in Gl. (20) übereinstimmend sind, und das Glied $[ff/p]$ würde das Quadratglied der neuen Normalgleichung bilden. In diesem Sinne würde also die Bestimmung der Koeffizienten des Funktionswertes in keinem Falle mehr Arbeit bedeuten als die Ermittlung der Koeffizienten der entsprechenden Normalgleichungen der V. Ausgleichsgruppe.

Hier sei bemerkt, daß im Falle, wenn die Linearisierung in Gl. (16) nicht durch Differenzierung, sondern mit Hilfe von Logarithmus vollführt wird, ergibt sich aus der letzten Reduktion, die zweckgemäß mit $\delta' F$ bezeichnet wird, der Ergänzungswert δF folgendermaßen:

$$\delta F = \delta' F \frac{F_0}{M} = \delta' F \frac{1}{\lambda_{F_0}}, \tag{24}$$

wo F_0 der Funktionswert an der Stelle des Annäherungswertes, M der logarithmische Modul, λ_{F_0} aber an der Stelle von F_0 die Tafeldifferenz in der Recheneinheit ist. Die Umrechnung ist nötig, da bei der Logarithmierung mit der Anwendung der Tafeldifferenz automatisch jedes Glied mit dem Wert M/F_0 multipliziert wird. Dementsprechend wird der Gewichtskoeffizient im Falle der mit Logarithmus abgeleiteten Koeffizienten folgendermaßen ermittelt:

$$Q_{FF} = \frac{1}{P_F} = Q'_{FF} \cdot \frac{F_0^2}{M^2} = Q'_{FF} \left(\frac{1}{\lambda_{F_0}}\right)^2, \tag{25}$$

wo Q'_{FF} der durch das bei den Reduktionen in der Reihenentwicklung in Betracht gezogene Multiplikationsglied gegebene Gewichtskoeffizient ist, welcher noch mit den in (24) vorkommenden bekannten Werten multipliziert werden muß, damit der der ursprünglichen Funktion entsprechende Koeffizient ermittelt werden kann. Falls die Linearisierung durch Differenzierung vollführt wird, so ergibt sich bei der Abtrennung der der Funktion entsprechenden Spalte unmittelbar der Zuschlag der Funktion und der wirkliche Gewichtskoeffizient.

Die derartige Ableitung der Ausgleichung ist dann zweckdienlich, wenn der Funktionswert unmittelbar als die Funktion der Verbesserungen der Meßergebnisse mit einer Gleichung ausdrückbar ist. In diesem Falle ist also die ergänzende neue Spalte der Auflösungstafel dieselbe, als die durch die ungemessene Unbekannte gewonnene neue Normalgleichung, wobei die durch die Einbeziehung der Unbekannten in die $[pvv]$ Minimum-Bedingung gewonnene Normalgleichung entfällt.

Es sei kurz bemerkt, daß auf diese Weise auch die Bestimmung der Werte der Funktion der Funktionen gelöst werden kann. Darauf wollen wir aber nicht mehr eingehen.

Zur zahlenmäßigen Veranschaulichung des bisher Erörterten seien folgende Beispiele erwähnt. In der neuesten Literatur wird bei der Ausgleichung

der Grundliniennetzentwicklung die bedingte Ausgleichung mit ungemessenen Unbekannten verwendet (V. Gruppe), bei der die entwickelte Seite die Unbekannte ist [9], 10, 11]. Die Tabelle I. enthält die Beobachtungsergebnisse gemäß der Anordnung der Abbildung 1. Die zur Ausgleichung dienenden bedingungsgleichungen sind die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} 1 + 2 + 3 - 180° &= 0 \\ 4 + 5 + 6 - 180° &= 0 \\ 3 + 5 + 7 + 8 - 180° &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 3 \text{ Winkelbedingungen} \tag{26}$$

$$\left.\frac{\sin 2 \sin 4 \sin 7}{\sin 1 \sin 6 \sin 8} = 1.\right\} \quad 1 \text{ Seitenbedingung}$$

Tabelle I

No.	Beobachtete Werte			Gewichte
1	47°	46′	12,26″	1
2	63°	12′	29,22″	1
3	69°	01′	19,31″	1
4	53°	51′	37,50″	1
5	55°	28′	26,26″	1
6	70°	39′	54,65″	1
7	27°	16′	50,14″	1
8	28°	13′	23,45″	1
$\overline{AB}$	Gemessene Grundlinie 5879,985 *m*			∞

Als Näherungswerte sollen die Ergebnisse der einzelnen Beobachtungen angeführt werden. Durch die Logarithmierung linearisierte Gl. (4) werden die folgenden Verbesserungsgleichungen gewonnen:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + 0{,}79'' &= 0, \\ v_4 + v_5 + v_6 - 1{,}59'' &= 0, \\ v_3 + v_5 + v_7 + v_8 - 0{,}84'' &= 0, \\ -1{,}92v_1 + 1{,}06v_2 + 1{,}54v_4 - 0{,}73v_6 + 4{,}08_7 - 3{,}92v_8 + 2{,}14 &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Um die Bestimmung des mittleren Fehlers der entwickelten Seite zu ermöglichen, wird die Funktion der ausgeglichenen Werte eingeführt:

$$\overline{CD} = \overline{AB}\,\frac{\sin 2 \sin (3 + 5)}{\sin 1 \sin 8} = \overline{AB} f' = F. \tag{28}$$

Die Beobachtungen an Stelle der einzelnen Winkel eingeführt, wird die Linearisierung dadurch erwirkt, daß ein jedes Glied mit dem Wert

$$\frac{M}{\overline{CD}_0} = \frac{M}{F_0} = \lambda_{F_0}$$

multipliziert wird.

$$F' = F_0 + f_1' v_1 + f_2' v_2 + f_3' v_3 + f_5' v_5 + f_8' v_8 + l_f', \tag{29}$$

$$F' = -1{,}92 v_1 + 1{,}06 v_2 - 1{,}45 v_3 - 1{,}45 v_5 - 3{,}92 v_8 + 12\,353\,735 + 0{,}05,$$

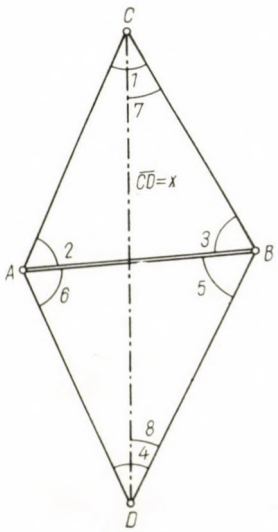

Abb. 1

wo $F_0 = 12\,353\,735$ mm, der Wert der Funktion durch Substituierung der Beobachtungen gegeben ist. Folglich

$$F = F_0 + \delta F = \overline{CD}_0 + \delta \overline{CD}, \tag{30}$$

und

$$\delta F = \delta' F \frac{1}{\lambda_{F_0}} = \delta' F \frac{\overline{CD}}{M}, \tag{31}$$

weiter der Gewichtskoeffizient:

$$Q_{FF} = Q'_{FF} \left(\frac{1}{\lambda_{F_0}} \right)^2 = Q'_{FF} \cdot \frac{\overline{CD}^2}{M^2}. \tag{32}$$

Die Normalgleichungen, die Gleichung zur Berechnung von $[pvv]$ und die zur Bestimmung der Funktionsdaten nötige Spalte ist die folgende:

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrr}
+3k_a & +0k_b & +1k_c & - & 0{,}86k_d & +0{,}79 = 0 & +2{,}31 & = & -[af'] \\
0k_a & +3k_b & +1k_c & + & 0{,}81k_d & -1{,}59 = 0 & +1{,}45 & = & -[bf'] \\
+1k_a & +1k_b & +4k_c & + & 0{,}16k_d & -0{,}84 = 0 & +6{,}82 & = & -[cf'] \\
-0{,}86k_a & +0{,}81k_b & +0{,}16k_c & + & 39{,}7273k_d & +2{,}14 = 0 & -20{,}176 & = & -[df'] \\
+0{,}79k_a & -1{,}59k_b & -0{,}84k_c & + & 2{,}14k_d & +0 = - & -24{,}381 & = & -[f'f'] \\
 & & & & & [pvv] & -0{,}05 & = & -l'_f = \\
 & & & & & & & & -[f'l] \quad (33)
\end{array}
$$

Die Lösung der Normalgleichungen und die zur Bestimmung des Funktionswertes und dessen Gewichtskoeffizienten nötigen Berechnungen (Daten) sind in der Tabelle II enthalten. Es sei bemerkt, daß das Glied $-l'_f = -[f'l]$ in der Praxis gleich 0 ist, da zur Bestimmung der Nährungswerte der Funktion die Beobachtungen selbst verwendet wurden. Der hier auftretende Wert $-0{,}05$ ergibt sich durch Abrundungen der Berechnungen. Da er so gering ist, könnte er auch vernachlässigt werden, aber er wurde vergleichshalber mit den Lösungen von [10] und [11] doch in Betracht gezogen. Die Normalgleichungen wurden mit der CHOLESKY'schen Methode gelöst. Es ist ersichtlich, daß die der Spalte F' entsprechenden Reduktionen unmittelbar die $\delta' F$- und Q'_{FF}-Werte ergeben, wodurch der Zuschlag der Funktion sowie der dazu gehörende Gewichtskoeffizient bestimmt werden kann. Am Ende der Tabelle II geben wir die Formel der Berechnungen für den Fall der durch Differenzierung ermittelten Koeffizienten. Hier ist die Funktions-Gleichung:

$$
\begin{aligned}
F &= F_0 + [af]k_a + [bf]k_b + [cf]k_d + \ldots + l_f = \\
&= 12\,353\,735 - 65{,}9k_a - 41{,}3k_b - 194{,}8k_c + 57{,}40k_d + 1{,}422
\end{aligned}
\qquad (34)
$$

Durch die Reduktion dieser Gleichung gewinnen wir unmittelbar den Zuschlagswert sowie das Gewicht der Funktion.

Bei der Lösung nach der III. Ausgleichsgruppe (Ausgleichung der bedingten Beobachtungen) erhalten wir

$$
k_a = -0{,}3425, \quad k_b = +0{,}4908, \quad k_c = +0{,}1759, \quad k_d = -0{,}0720,
$$

$$
\delta F = -71{,}6 \text{ mm},
$$

das heißt

$$
F = F_0 + \delta F = 12\,353{,}663\ m \qquad (35)
$$

und

$$
Q_{FF} = 1786, \quad [vv] = +1{,}3528.
$$

Die ausgeglichenen Werte und Verbesserungen sind in Tabelle IV enthalten. Falls die Ergebnisse mit den in [10] und [11] gefundenen verglichen werden, ist es offenkundig, daß in der Genauigkeit der Berechnungen eine vollkommene Übereinstimmung vorhanden ist.

Tabelle II

k_a	k_b	k_c	k_d	l	Q_a	Q_b	Q_c	Q_d	$-F'$	$s-1$	Σ	$-F$
+3	0	+1	— 0,86	+0,79	—1	0	0	0	+2,31	+5,24		+ 65,9
	+3	+1	+ 0,81	—1,59	0	—1	0	0	+1,45	+3,67		+ 41,3
		+4	+ 0,16	—0,84	0	0	—1	0	+6,82	+11,14		+194,8
			+39,7273	+2,14	0	0	0	—1	—20,176	+20,801		—574,0
				0	0	0	0	0	— 0,05	+ 0,45		— 1,422
+1,732	0	+0,5774	— 0,4965	+0,4561	—0,5774	0	0	0	+ 1,3337	+ 3,0254	+3,0254	+ 37,938
	+1,732	+0,5774	+ 0,4677	—0,9180	0	—0,5774	0	0	+0,8372	+ 2,1189	+2,1189	+ 23,815
		+1,8257	+ 0,0967	—0,3140	+0,1826	+0,1825	—0,5478	0	+ 3,0491	+ 4,4748	+4,4748	+ 86,733
			+ 6,2651	+0,4511	—0,0486	+0,0403	+0,0085	—0,1596	— 3,2243	+ 3,3327	+3,3325	— 91,717
				—1,3528	+0,3425	—0,4908	—0,1759	+0,0720	+ 2,5221	+ 0,9170	+0,9171	+ 71,54
									$\left.\begin{matrix}-24{,}381+\\+22{,}172\end{matrix}\right\}=-2{,}209$			$\left.\begin{matrix}-19726{,}83+\\+17941{,}07\end{matrix}\right\}=-1785{,}76$
								$-\delta F=+71{,}74$	$-Q_{11}=-1787{,}4$			

Berechnungsschema

k_a	k_b	k_c	k_d	l	Q_a	Q_b	Q_c	Q_d	$-F'$	$s-1$	Σ	$-F$
$[aa]$ 1	$[ab]$ 2	$[ac]$ 3	$[ad]$ 4	l_1 5	—1 6	0 7	0 8	0 9	$-[ax']$ 10	s_1-1 11		$-[af]$ 10
	$[bb]$ 12	$[bc]$ 13	$[bd]$ 14	l_2 15	0 16	—1 17	0 18	0 19	$-[bf']$ 20	s_2-1 21		$-[bf]$ 20
		$[cc]$ 22	$[cd]$ 23	l_3 24	0 25	0 26	—1 27	0 28	$-[cf']$ 29	s_3-1 30		$-[cf]$ 29
			$[ad]$ 31	l_4 32	0 33	0 34	0 35	—1 36	$-[df']$ 37	s_4-1 38		$-[df]$ 37
				0 39	0 40	0 41	0 42	0 43	$-[f'l]$ 44	s_5-1 45		$-[fl]$ 44
$\sqrt{1}$ 46	$\frac{2}{46}$ 47	$\frac{3}{46}$ 48	$\frac{4}{46}$ 49	$\frac{5}{46}$ 50	$\frac{6}{46}$ 51	0 52	0 53	0 54	$\frac{10}{46}$ 55	$\frac{11}{46}$ 56	$\left.\begin{matrix}46+47+48+49+50+\\+51+52+53+54+55\end{matrix}\right\}$ 57	$\frac{10}{46}$ 55
	$\sqrt{12-47^2}$ 58	$\frac{13-47\cdot 48}{58}$ 59	$\frac{14-47\cdot 49}{58}$ 60	$\frac{15-47\cdot 50}{58}$ 61	$\frac{16-47\cdot 51}{58}$ 62	$\frac{17}{58}$ 63	0 64	0 65	$\frac{20-47\cdot 55}{58}$ 66	$\frac{21-47\cdot 56}{58}$ 67	$\left.\begin{matrix}58+59+60+61+62+\\+63+64+65+66\end{matrix}\right\}$ 68	$\frac{20-47\cdot 55}{58}$ 66
		$\sqrt{22-48^2-59^2}$ 69	$\frac{23-48\cdot 49-59\cdot 60}{69}$ 70	$\frac{24-48\cdot 50-59\cdot 61}{69}$ 71	$\frac{25-48\cdot 51-59\cdot 62}{69}$ 72	$\frac{26-59\cdot 63}{69}$ 73	$\frac{27}{69}$ 74	0 75	$\frac{29-48\cdot 55-59\cdot 66}{69}$ 76	$\frac{30-48\cdot 56-59\cdot 67}{69}$ 77	$\left.\begin{matrix}69+70+71+72+\\+73+74+75+76\end{matrix}\right\}$ 78	$\frac{29-48\cdot 55-59\cdot 66}{69}$ 76
			$\sqrt{31-49^2-60^2-70^2}$ 79	$\frac{32-49\cdot 50-60\cdot 61-}{-70\cdot 71}$ 80	$\frac{33-49\cdot 51-60\cdot 62-}{-70\cdot 72}$ 81	$\frac{34-60\cdot 63-70\cdot 73}{79}$ 82	$\frac{35-70\cdot 74}{79}$ 83	$\frac{36}{79}$ 84	$\frac{37-49\cdot 55-60\cdot 66-70\cdot 76}{79}$ 85	$\frac{38-49\cdot 56-60\cdot 67-70\cdot 77}{79}$ 86	$\left.\begin{matrix}79+80+81+82+\\+83+84+85\end{matrix}\right\}$ 87	$\frac{37-49\cdot 55-60\cdot 66-70\cdot 76}{79}$ 85
				$39-50^2-61^2-71^2-$ $-80^2=-[pvv]$ 88	$40-50\cdot 51-61\cdot 62-$ $-71\cdot 72-80\cdot 81=$ $=-k_a$ 89	$41-61\cdot 63-71\cdot 73-$ $-80\cdot 82=-k_b$ 90	$42-71\cdot 74-80\cdot 83=$ $=-k_c$ 91	$43-80\cdot 84=-k_d$ 92	$44-50\cdot 55-61\cdot 66-$ $-71\cdot 76-80\cdot 85=$ $=-\delta' F$ 93	$45-50\cdot 56-61\cdot 67-$ $-71\cdot 77-80\cdot 86$ 94	$\left.\begin{matrix}88+89+90+\\+91+92+93\end{matrix}\right\}$ 95	$44-50\cdot 55-61\cdot 66-$ $-71\cdot 76-80\cdot 85=$ $=-\delta F$ 93
									$-[f'f']+55^2+66^2+$ $+76^2+85^2=-Q_{FF}$ 96			$-[ff]+85^2+66^2+76^2$ $+85^2=-Q_{FF}$ 96
								$-\delta F=-\frac{\delta' F}{\lambda_{F_0}}$ 97	$-Q_{FF}=-Q'_{FF}\left(\frac{1}{\lambda_{F_0}}\right)^2$ 98			

Falls in der Lösung derselben Aufgaben die Ausgleichung der bedingten Beobachtungen mit ungemessenen Unbekannten angewendet wird, wird durch Einführung der entwickelten Seite $\overline{CD}$ als ungemessene Unbekannte, außer den bereits gegebenen Bedingungen noch folgende Gleichung aufgeschrieben:

$$\overline{AB}\,\frac{\sin 2 \sin (3+5)}{\sin 1 \sin 8} - x = 0\,. \tag{36}$$

Bei der logarithmischen Reihenentwicklung gewinnen wir die lineare Gleichung mit dem der Gl. (29) entsprechenden Koeffizienten, das Glied mit δx (der Zuschlag des $x_0 = \overline{CD}$ Näherungswertes), in bekannter Weise abgeleitet. Der Koeffizient ist uns aus den vorherigen bereits bekannt: $M/\overline{CD} = M/F_0 = \lambda_{F_0}$ (Bei einer Linearisierung durch Differenzierung wäre der Wert dieses Koeffizienten offenbar eins).

Entsprechend der $[pvv]$ Minimumbedingung sind die Normalgleichungen die folgenden:

$$\begin{aligned}
&+3k_a &&+0k_b &&+1k_c &&-0{,}86k_d &&-2{,}31k_e &&&&+0{,}79 = 0,\\
&\;\;0k_a &&+3k_b &&+1k_c &&+0{,}81k_d &&-1{,}45k_e &&&&-1{,}59 = 0,\\
&+1k_a &&+1k_b &&+4k_c &&+0{,}16k_d &&-6{,}82k_e &&&&-0{,}84 = 0,\\
&-0{,}86k_a &&+0{,}81k_b &&+0{,}16k_c &&+39{,}727k_d &&+20{,}176k_e &&&&+2{,}14 = 0,\\
&-2{,}31k_a &&-1{,}45k_b &&-6{,}82k_c &&+20{,}176k_d &&+24{,}381k_e &&-0{,}0352\,\delta x &&+0{,}05 = 0,\\
&&&&&&&&&-0{,}0352k_e &&&&= 0,
\end{aligned} \tag{37}$$

Es ist klar, daß die Koeffizienten der hiesigen fünften Normalgleichung mit den Werten der F' Spalte der Lösung mit bedingten Beobachtungen übereinstimmen. Vergleichshalber sollen kurz die Tabellen der Lösungen der Normalgleichungen (Tabelle III) mitgeteilt werden, bei der mit Ableitung der immaginären Zahlen die CHOLESKY'sche Methode [2] anwendbar ist. Es sei aber bemerkt, daß alle anderen zeitgemäßen Gleichungslösungen auch in diesen Fällen zum Ziele führen. Nach unserer Meinung kann aber durch Ausdehnung der CHOLESKY'schen Methode auch auf diesen Fall die bisher öfter angewendete und bezüglich der vorkommenden Abrundungsfehler vorteilhaftere Methode angewendet werden. Es steht aber dem auch nichts im Wege, daß die Gewichte der Funktionswerte, falls es sich für nötig erweisen sollte, in die tabellenmäßige Berechnungen einbezogen werden. Die Tabelle III gibt die Lösungen der Normalgleichungen. In Fällen, wo der ungemessene Unbekannte nur in einer Normalgleichung vorkommt, kommt die ihr entsprechende Reduktionsgleichung an den entsprechenden zwei Stellen einmal mit reellen Werten, einmal aber mit immaginären Werten vor. Durch weitere Operationen entfällt der immaginäre Wert, wir gelangen also wieder zu reellen Zahlen.

Wenn die Zahl der Rechenoperationen der zwei Methoden mit einander verglichen wird (nach der III. u. V. Ausgleichsgruppe), besteht kein wesentlicher Unterschied, es ist höchstens bei der Lösung nach der dritten Gruppe

Tabelle III

k_a	k_b	k_c	k_d	k_e	δx	l	Q_a
+3	0	+1	—0,86	—2,31	0	+0,79	—1
	+3	+1	+0,81	—1,45	0	—1,59	0
		+4	+0,16	—6,82	0	—0,84	0
			+39,727	+20,176	0	+2,14	0
				+24,381	—0,0352	+0,05	0
					0	0	0
						0	0
+1,732	0	+0,5774	—0,4965	—1,3337	0	+0,4561	—0,5774
	+1,732	+0,5774	+0,4677	—0,8372	0	—0,9180	0
		+1,8256	+0,0967	—3,0491	0	—0,3140	+0,1826
			+6,2651	+3,2243	0	+0,4511	—0,0486
				+1,4861	—0,0238	—1,7086	—0,0038
					+0,0238i	+1,7086i	+0,0038i
						$-[pvv] =$ $= -1{,}3528$	$-k_a =$ $= +0{,}3426$

die Zahl der Reduktionsgleichungen um zwei Reihen weniger, es muß aber um eine vertikale Spalte mehr berechnet werden. Gleichzeitig fällt aber infolge weniger Normalgleichungen die Berechnung der entsprechenden Quadratglieder (Quadrierungen und Wurzelziehungen) fort. Die Rechenarbeit der Reduktionsglieder der vertikalen Spalte ist der Berechnung der Reduktionen ohne quadratisches Glied einer Reihe gleichwertig. Es ergibt sich noch der Vorteil, daß die der imaginären Reihe entsprechende Reduktionsgleichung nicht nocheinmal aufgeschrieben werden muß. Wenn aber die Zuschläge und Gewichtskoeffizienten nicht nur einer sondern mehrerer Funktionen nach der Ausgleichung gesucht werden, ist der Umfang der Tabellen und die Rechenarbeit bemerkenswert weniger. Außer der gewohnten Auflösung der Normalgleichungen wird aber allerdings auch die Anwendung der zur Bestimmung der ausgeglichenen Werte dienenden Gleichungen vorausgesetzt.

Wenn bei der Lösung nach der V. Ausgleichsgruppe die Linearisierung der Bedingungsgleichungen mit einem Sinusglied durch Differenzierung durchgeführt wird, so sind die Koeffizienten der fünften Normalgleichung in Gln(37) mit den F-Werten der II. Tabelle übereinstimmend, und das δx-Glied sowie infolgedessen der Koeffizient der k_e Korrelate der 6. Normalgleichung bei der gegebenen Bezeichnung der Bedingungsgleichung, wäre gleich —1.

Q_b	Q_c	Q_d	Q_e	Q_x	$s-1$	Σ
0	0	0	0	0	+0,62	
—1	0	0	0	0	+0,77	
0	—1	0	0	0	—2,50	
0	0	—1	0	0	+61,153	
0	0	0	—1	0	+32,9918	
0	0	0	0	—1	—1,035	
0	0	0	0	0	—0,45	
					+0,3579	+0,3579
—0,5774					+0,4445	+0,4445
+0,1826	—0,5478				—1,6232	—1,6232
+0,0403	+0,0085	—0,1596			+9,7820	+9,7820
—0,0383	—1,1501	+0,3486	—0,6775		—1,7941	—1,7941
+0,0383i	+1,1501i	—0,3486i	+0,6775i	+42,0768i	+45,4725i	+45,4775i
$-k_b =$ $= -0{,}4914$	$-k_c =$ $= -0{,}1758$	$-k_d =$ $= +0{,}0720$	$-k_e = 0$	$-\delta_x =$ $= +71{,}7899$	+69,5013	+69,4874
				$Q_{xx} =$ $= 1780{,}3421$		

Beide Lösungen liefern also für die gesuchten Korrelaten, die Funktion (ungemessene Unbekannten) und die entsprechenden Gewichtskoeffizienten innerhalb der Schärfe der Berechnung ein übereinstimmendes Ergebnis. Die ausgeglichenen Werte sowie die Resultate der Berechnungen der Funktionen sind in Tabelle IV zu finden.

Tabelle IV

No.	Beobacht. Winkelwerte	Verbesserung	Ausgeglich. Winkelw.	Ausgeglich. Entfernung u. deren mittl. Fehler
1	47° 46′ 12,26″	—0,20″	47° 46′ 12,06″	
2	63° 12′ 29,22″	—0,42″	63° 12′ 28,80″	$CD = F = F_0 + \delta F =$
3	69° 01′ 19,31″	—0,17″	69° 01′ 19,14″	$= 12\,353{,}663\ m$
4	53° 51′ 37,50″	+0,38″	53° 51′ 37,88″	
5	55° 28′ 26,26″	+0,67″	55° 28′ 26,93″	$\mu_{C\bar{D}} = \mu_F = \sqrt{\frac{[vv]}{f} Q_{xx}} =$
6	70° 39′ 54,65″	+0,54″	70° 39′ 55,19″	$= \pm 24{,}6\ mm$
7	27° 16′ 50,14″	—0,12″	27° 16′ 50,02″	
8	28° 13′ 23,45″	+0,46″	28° 13′ 23,91″	

Das Verfahren ist in allen Fällen anwendbar, wenn der Funktionswert in der Funktion der ausgeglichenen Werte ausgedrückt und dementsprechend in die Auflösungstabelle der Normalgleichungen einbezogen wird. Die Anwendung ist laut dem vorher Erörterten in allen Fällen überaus vorteilhaft, wenn die Bestimmung mehrerer Funktionswerte und Gewichtskoeffizienten in die Ausgleichung einbezogen wird. Bei einer einzigen abgeleiteten Funktion gibt sie aber auch eine mäßige Arbeitsverringerung.

Es sei von der Anwendung auf weitere Fälle sowie der Mitteilung von Rechenbeispielen hier abgesehen, es steht dem aber nichts im Wege, daß das Verfahren laut den obigen Schemen auf weitere Fälle ausgedehnt werde. Die Aufschreibung der richtigen Funktionsform ist aber unerläßlich. Es kann z.B. hier die Methode von GERASIMOV [12] auch angewendet werden, wonach nur die erste Normalgleichung in die Auflösungstabelle eingeführt werden muß, und es können danach unmittelbar die Koeffizienten der einzelnen reduzierten Normalgleichungen berechnet werden. Die Anwendung des CHOLESKY'schen Verfahrens ist auch deshalb zweckdienlich, weil sie gewissermaßen betreffs der Verläßlichkeit der letzten Ziffer der berechneten Werte vorteilhafter ist, und das tabellenmäßige Berechnungsschema in Verhältnis zu anderen Lösungen sehr kurz und leicht aneigenbar ist.

Im Zusammenhang mit der Zurückführung des allgemeinen Falles der Ausgleichung auf die reinen bedingten Beobachtungen, kommt die Frage der Programmierung auf Rechenautomaten zum Vorschein. Die der Funktion entsprechende Spalte kann unmittelbar in das Lösungsschema eingegliedert werden. Auch die der Funktion entsprechenden Reduktionen können durch Anwendung derselben Multiplikationskoeffizienten fortlaufend mit den Reduktionen der Normalgleichungen gebildet werden: So steht der Programmierung nichts im Wege. Die Lösung ist vermutlich auch in diesem Falle kürzer als im allgemeinen.

Die Erörterung der vergleichenden Untersuchungen wird in einer späteren Studie mitgeteilt.

SCHRIFTTUM

1. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Über die Verwendung der bedingten Beobachtungen mit ungemessenen Unbekannten in Genauigkeitsuntersuchungen. *Freiberger Forschungshefte* **A. 275** (1963), 5—18.
2. HALMOS, F.: A normálegyenletek gyors megoldása a kiegyenlítés általános esetében (Die rasche Lösung der Normalgleichungen im allgemeinen Fall der Ausgleichung) *Acta Techn. Hung.* **47** (1964), 3—27.
3. HELMERT, F. R.: Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 2. Auflage, 1907. S. 213—227.
4. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Weiteres zur Ausgleichung der kontinentalen Triangulierungsnetze. *Acta Techn. Hung.* **XXIII** (1959), 9—16.
5. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Kiegyenlítő számítás (Ausgleichungsrechnung.) Felsőoktatási Jegyzetellátó, Budapest, 1956.
6. HAZAY, I.: Geodéziai Kézikönyv (Handbuch der Geodäsie). Band I. Budapest (1956).

7. GROSSMANN, W.: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. II. Auflage. Berlin—Göttingen—Heidelberg, (1961).
8. WOLF, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Hamburg, (1961).
9. HOVÁNYI, L.: Az egercsehi bányaüzem alapvonalmérései (Die Grundlinienmessungen im Grubengebiete von Egercsehi). *Bányászati Lapok.* 1959/10.
10. MILASOVSZKY, B.: On the adjustment of the base quadrilateral. *Acta Techn. Hung.* **XXVII** (1961).
11. MILASOVSZKY, B.: Az alapvonal-négyszög kiegyenlítése (Die Ausgleichung des Grundlinien-Vierecks). *VI. Oszt. Közl.* XXVIII. 1961.
12. *Герасимов, И. М.:* Решение условных уравнений и уравнений поправок по способу добавления коэффициентов. *Геодезия и Картография* 1959/2.
13. MILASOVSZKY, B.: Az iránymméréses alapvonalfejlesztő hálózat számításának újabb változatai. (Neuere Lösungen der Basisnetz-Ausgleichung). *A Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei.* **VIII** (1962).

TRACING BACK OF CONDITIONAL OBSERVATIONS WITH UNMEASURED UNKNOWNS TO PURE CONDITIONAL OBSERVATIONS

F. HALMOS

SUMMARY

Author investigates the possibility of tracing back the adjustment of conditional observations with unmeasured unknowns (V-th group of adjustments) to that of pure conditional observations, when the unknowns sought for and their weight-coefficients are determined as a function of the adjusted values, instead of measuring them directly. He establishes that by completing the deductive table with the corresponding vertical columns, the complementary function values, allowances and the weight-coefficients belonging to same as well, are directly obtained as the result of reductions. The case when the equation expressing the function value with the aid of the logarithm is transformed into a linear one, is also investigated. In this case the corresponding reductions must be simply multiplied with the reciprocal value of the difference to be found in the table belonging to the function, or with the square of same respectively. The so performed computations are somewhat briefer than those according to solution V, their advantage becomes particularly evident if several function values are sought for. As numerical example author presents the well-known solution related to the network for basic extension. The method can be used if the function is expressed as a function of the adjusted values, the respective criterions also being investigated by the author. Thus, in addition to the solution referring to the general case of adjustment traced back to fictitious corrections of conditional observations, the tracing back to pure conditional observations is also verified.

LES RAPPORTS ENTRE LA COMPENSATION D'OBSERVATIONS CONDITIONNELLES A INCONNUES NON MESURÉES ET LA COMPENSATIONS D'OBSERVATIONS CONDITIONNELLES PURES

F. HALMOS

RÉSUMÉ

L'auteur examine comment la compensation à inconnues non mesurées des observations conditionelles (V^{e} groupe de compensation) peut être ramenée à la compensation des observations conditionnelles pures, quand les inconnues cherchées et leurs coefficients de poids sont déterminés en fonction des valeurs compensées. Il constate qu'en complétant le tableau d'algorithmes par les colonnes verticales correspondantes, on reçoit directement, par suite des réductions, la valeur complémentaire des fonctions et les coefficients de poids qui y correspondent. Il examine le cas où l'équation exprimant la valeur de fonction F est rendue linéaire

au moyen de logarithmes. Dans ce cas, les réductions correspondantes doivent être simplement multipliées par la valeur réciproque de la différence tabulaire appartenant à la fonction, resp. par le carré de cette valeur. Les calculs ainsi faits sont un peu moins longs que dans la solution selon le groupe V; leur avantage apparaît surtout en cas de plusieurs valeurs de fonctions, inconnues. Comme exemple, l'auteur présente la solution bien connue du réseau de développement de base. Le procédé peut s'appliquer quand la fonction est exprimée avec les valeurs compensées; les critères de l'expression sont analysés par l'auteur.

СВЕДЕНИЕ УСЛОВНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ С НЕИЗМЕРЕННЫМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ К ЧИСТЫМ УСЛОВНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

Ф. ХАЛЬМОШ

РЕЗЮМЕ

Автор исследует, каким образом можно свести уравнивание условных наблюдений с неизмеренными неизвестными (группа уравнивания V) к чистым условным наблюдениям в том случае, когда вместо неизмеренного неизвестного искомые неизвестные и их весовые коэффициенты определяются в качестве функции уравненных значений. Автор определяет, что дополнив таблицу развертки соответствующими вертикальными колоннами, вследствие редукций непосредственно получаются дополнительные значения функций, их наращивание, а также их весовые коэффициенты. Исследуется случай, когда уравнение, выражающее значение функции, при помощи логарифмов делается линейным. В этом случае соответствующие редукции необходимо просто помножить на обратное значение табличной разности, соответствующей функции, или же на квадрат этого значения. Таким образом получается некоторое сокращение времени расчетов по отношению к решению V; преимущество проявляется в особенности в случае определения ряда искомых функциональных значений. В качестве примера приводится известное решение развития базисной сети. Этот метод применим в том случае, если функция выражена в функции уравненных значений, критерии которой также анализируются автором. Следовательно, наряду со сведенным решением фиктивных поправок посреднических наблюдений, касающимся общего случая уравнивания, доказано также сведение к чистым условным наблюдениям.

ZUR GENAUEN BESTIMMUNG KLEINER NEIGUNGSWINKEL MITTELS SEKUNDENLIBELLEN

A. TÁRCZY-HORNOCH und GY. ALPÁR

GEODÄTISCHES FORSCHUNGSLABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN SOPRON

[Eingegangen am 16. August 1963]

Bei der Bestimmung der Neigungswinkel mit Hilfe von Sekundenlibellen ist in der Regel ein mittlerer Fehler von $\pm$ 0,1″ erforderlich. Nach unseren bisherigen Untersuchungen entstehen bei der Berechnung mit durchschnittlichem Parswert Fehler von 1,5″ und sogar noch größere Fehler. Wir gaben daher eine Methode zur wesentlichen Herabsetzung dieser Fehler an. SCHÄDLICH erkennt in seiner Abhandlung [1] die Forderung von 0,1″ an, doch mit Rücksicht darauf, daß die Temperatureinflüsse nicht minder große Fehler verursachen, hält er die Berechnung mit durchschnittlichem Parswert als zufriedenstellend. Nach unserer Meinung ist es jedenfalls vorteilhafter, die erfaßbaren Fehler auszumerzen, und für die bisher noch nicht erfaßbaren Fehler sind Methoden zu deren Ausmerzung oder wenigstens Verminderung zu suchen. Die Studie enthält Gesichtspunkte zur Ausmerzung bzw. Verminderung der Temperatureinflüsse.

Im Heft 8/1962 der »*Vermessungstechnik*« erschien eine Studie von M. SCHÄDLICH [1], in der der Verfasser sich auch auf unsere unter [2] und [3] angeführten Studien bezieht. Im Einklang mit diesen stellt auch SCHÄDLICH fest, daß die regelmäßigen Fehler der Winkelbestimmungen mittels Sekundenlibellen den Ablesefehler von etwa $\pm$ 0,1″ der Blasenlage nicht wesentlich überschreiten dürfen. Trotzdem hält er unser, für die Erfassung der Krümmungsfehler ausgearbeitetes Verfahren für übertrieben, mit der Begründung, daß es bei dem relativ großen Wert der bis jetzt noch nicht erfaßbaren, von der Temperaturverteilung des Libellenkörpers und der Metallfassung abhängigen Fehler genügend sei, durch eine einfachere Methode die Krümmungsfehler zu berücksichtigen.

Zunächst müssen wir auf einen grundlegenden Widerspruch in [1] hinweisen. Wenn wir bei den Winkelmessungen mittels Sekundenlibellen eine Genauigkeit von ungefähr $\pm$ 0,1″ sichern müssen, wie das SCHÄDLICH in der Einleitung seiner Studie von konkreten Genauigkeitsanforderungen ausgehend mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes begründet, dann wäre es entschieden ein Rückschritt auf die Eliminierung eines bedeutend größeren Fehlers zu verzichten, falls diese Eliminierung möglich ist. In den Studien [2] und [3] haben wir zahlenmäßige Werte über die Größe der Einflüsse der Krümmungsfehler bzw. über die Größe der bei der Rechnung mit durchschnittlichem Parswert auftretenden Fehler angegeben, wonach diese bei den meisten von uns geprüften Sekundenlibellen Abweichungen bis 1,5″ gaben.

Es ist daher offenkundig, daß die Krümmungsfehler bei den auch von SCHÄDLICH aufgestellten Anforderungen nicht vernachlässigbar sind.

Da die Genauigkeitsforderung von 0,1″ auch nach SCHÄDLICH gerechtfertigt ist, kann daher jene Methode nicht richtig sein, welche einen bedeutend größeren ausmerzbaren Fehler nur deshalb beläßt, weil man andere Fehler noch nicht erfassen kann. (Wir berücksichtigen ja z. B. das Run bei den Mikroskopen auch dann, wenn man die Seitenrefraktion nicht unschädlich machen kann.) Man muß eben bestrebt sein, Methoden zur Eliminierung auch der weiteren Fehler zu finden. Die genaue Kenntnis der Krümmungsfehlereinflüsse ist auch von diesem Gesichtspunkt von entschiedener Bedeutung, weil diese die Ruhelage der Blase primär beeinflussen, und die weiteren Fehler sich an diese überlagern. Auf diesen Umstand sind wir kurz schon in [2; S. 253] eingegangen und wir haben dort die Krümmungsfehlereinflüsse von Fehlern der Temperatur- und Luftdruckänderung gesondert bestimmt. Die Kenntnis der Krümmungsfehlereinflüsse erleichtert so offenbar die weitere Prüfung und Erfassung der anderen Fehlereinflüsse.

An Hand von diesen ist es verständlich, daß schon WANACH den Krümmungsfehlern eine große Aufmerksamkeit gewidmet hat [4] und er stellte — für die Hersteller von Sekundenlibellen nicht eben erfreulicherweise — so strenge Fehlergrenzen auf, daß die Anhäufung der Krümmungsfehlereinflüsse, bei Anwendung einer durchschnittlichen Libellenangabe, das durch die praktischen Anforderungen gegebene Fehlermaß nicht überschreiten dürfe. Diese Forderung ist deshalb so schwerwiegend, weil bei den Libellen mit veränderlicher Krümmung jeder *Blasenlänge* ein anderer durchschnittlicher Parswert entspricht. Unter solchen Umständen kann es uns nicht wundernehmen, daß etwa 50% von den durch WANACH bis 1926 geprüften 108 Libellen bei Rechnung mit durchschnittlichem Parswert nicht einmal der doppelten Fehlergrenze, also 0,2″ entsprach. Diese wichtige WANACHsche Feststellung ist aber SCHÄDLICHs Aufmerksamkeit wahrscheinlich entgangen. Bei den in [2] beschriebenen eigenen Untersuchungen war die Lage betreffs der geprüften Libellen noch viel ungünstiger, und es war keine einzige der geprüften 28 Libellen zur Rechnung mit durchschnittlichem Parswert geeignet, welche Rechnung auch nach unserer Meinung bei *entsprechenden* Libellen am zweckmäßigsten ist. (Vgl. [3; S. 363 u. 368]). Deshalb ist die Suche nach Meß- und Rechenverfahren, welche bei den ohnedies schwierig — einzelweise — herstellbaren Sekundenlibellen mäßigere Herstellungsanforderungen erlauben, naheliegend und auch praktisch wichtig, um dadurch die Anzahl der brauchbaren Libellen zu erhöhen. Da kann natürlich auch eine wesentliche Verbesserung der bisherigen Herstellungstechnik der Libellen helfen. Hier sei sogleich bemerkt, daß das von SCHÄDLICH empfohlene BREINsche Verfahren der Libellenprüfung [5] auch auf der Anwendung von einem Libellenparswert beruht, und so ist die erforderliche Herabsetzung

der Krümmungsfehlereinflüsse auch bei dieser Methode nur durch eine sehr strenge Auswahl der Libellen möglich. Übrigens bringt die von BREIN empfohlene Methode nur bei der Berechnung der Krümmungsfehlereinflüsse Neues, während der Libellenparswert selbst auch weiterhin mit dem Fehler des bekannten näherungsweisen einfachen (mittelbildenden) Verfahrens belastet ist. Disbezüglich stellte auch BREIN fest, daß der Libellenparswert mit der Methode von HIRVONEN genauer bestimmt werden kann; letztere ist aber der von WANACH schon früher angewandten Methode ähnlich, wie dies auch die redaktionelle Bemerkung am Ende von [6] feststellte. Man erhält übrigens diese Methode der Bestimmung des Parswertes auch aus der Ausgleichung nach den vermittelnden Beobachtungen bei äquidistanten Messungen, in welchem Falle man mit gleichen Gewichten arbeiten kann. Es ist immerhin erwähnenswert, daß man zu demselben Ergebnis auch mit Hilfe des JACOBIschen Satzes (vgl. [7; Bd. 22. 1841 Seite 285—312]) gelangen kann, in welchem Falle der Libellenparswert aus dem gewogenen Mittel von sämtlichen, bei den Libellenprüfungen beobachteten Blasenlagen ermittelten Parswerten berechnet wird. Wir halten die BREINsche Feststellung nur formal begründet, wonach im Gegensatz zu der von JORDAN veröffentlichten und von ihm angewendeten einfachen mittelbildenden Methode es sich bei WANACH um eine Mittelbildung mit ungleichen Gewichten handle. Das WANACHsche Verfahren ist jedenfalls inhaltlich wesentlich begründeter. Wir erwähnen abschließend zum Vergleich, daß bei der in [2] beschriebenen Achsenlibelle Nr. 83 für den Libellenparswert bei einer Blasenlänge von 40 Pars — die von BREIN angewandete Methode mit einfacher Mittelbildung 1,21″/Pars, die WANACHsche strengere Methode aber 1,18″/Pars lieferte. (Die äußeren Blasenlagen wurden wegen der dort vermutlich größeren Krümmungsfehler in den Berechnungen weggelassen.) Diese Differenz von 0,03″/Pars ist gar nicht zu vernachläßigen, da es sich um einen regelmäßigen Fehler handelt, und der durch diese verursachte Fehler schon bei einer Blasenabweichung von 3 Pars praktisch bis zur Fehlergrenze anwächst. Der von SCHÄDLICH übernommene BREINsche Vorschlag ist daher auch von diesem Gesichtspunkt beanstandbar.

Bezüglich der neuen Libellenprüfmethoden ist es nicht ohne Interesse, zu bemerken — wie dies bereits auch BREIN feststellte —, daß der theoretisch einwandfreie Weg darin bestehen würde, neben dem Libellenparswert noch eine Korrektionstabelle für die Krümmungsfehler zu berechnen, worüber er allerdings bemerkt, daß diese nur für eine bestimmte, der Berechnung zugrunde gelegte Blasenlänge gültig wäre. Dasselbe gilt aber für den Libellenparswert, weil zu jeder Blasenlänge — nach BREIN — eine andere Eichkurve und so im allgemeinen eine andere Eichgerade (d. h. Libellenparswert) gehört. BREIN fand aber diese Methode für die Praxis zu umständlich, und so ist es WYSS' Verdienst, daß er in seiner Studie [7] neue Wege zur Verwirklichung dieser Vorstellung zeigte. Die WYSSsche Methode kann jedoch wahrlich nur als

wegweisend betrachtet werden, weil die von ihm angewandte iterative Lösung — im Gegensatz zu seiner Annahme — nicht konvergent ist, wie wir das schon in der Studie [3] an einem praktischen Beispiel dargestellt und zuletzt in [9] auch mathematisch nachgewiesen haben. Bisher ist die einzige auch praktisch gut anwendbare Methode für die Erfassung der Krümmungsfehlereinflüsse unsere in [3] angegebene Lösung, welche zwar — wohl nur bei den Eichmessungen — mit beträchtlicher Mehrarbeit an Messung und Berechnung verbunden ist, dafür aber gewährt sie wesentlich mehr Exaktheit und Möglichkeit als die auf einem Parswert begründeten Methoden. Ohne unser Verfahren hier noch einmal erörtern zu wollen, möchten wir immerhin nochmals betonen, daß die Anwendung dieses Verfahrens bei den praktischen Messungen kaum, oder gar keine Mehrarbeit im Vergleich zu den früheren Methoden bedeutet. Diese Tatsache spricht auch vom Standpunkt der Wirtschaftlichkeit für die von uns vorgeschlagene Methode, weil wir nachher durch praktisch gleiche Arbeit eine wesentliche — und zugleich sehr *nötige* — Genauigkeitssteigerung erzielen können. Bezüglich der Eichmessungen und deren Berechnungen — die wir (von den Kontrollmessungen abhängig) nur in gewissen Zeitabschnitten durchführen müssen — weisen wir hier auf die in der Studie [3] erwähnten Vereinfachungsmöglichkeiten, wodurch die von SCHÄDLICH als maximal bezeichneten Meß- und Berechnungsarbeiten sich weitgehend vermindern und weniger Zeit in Anspruch nehmen als z. B. eine HEUVELINKsche Kreisteiluntersuchung, welche obendrein die Teilstrichverbesserungen nicht liefert und daher nur qualifizierend ist. Die Vereinfachungen sind in um so größerem Maße zulässig, je kleiner die Krümmungsfehler sind. Mit elektronischen Rechenmaschinen können die Berechnungen auch ohne Vereinfachungen sehr schnell erledigt werden. Bei großen Krümmungsfehlern — von den sogenannten Dämmen ganz abgesehen — können wir aber selbst von dieser Methode keine von regelmäßigen Fehlern freie Ergebnisse erwarten, wie wir dies, im Gegensatz zu WYSS, bereits in [3] festgestellt und neuerdings in [9] ausführlicher begründet haben.

Wir haben öfters, zuletzt in [9] darauf hingewiesen, daß auch zur Bestimmung bzw. Erfassung der Krümmungsfehlereinflüsse von Libellen noch gewisse Forschungsarbeiten erforderlich sind. Weiter müssen wir auch die Möglichkeiten der Erfassung bzw. Ausschaltung oder Verminderung der (bei den Feldmessungen zweifellos sehr wichtigen) sog. temperaturabhängigen Fehler prüfen. Bei unseren zur Erfassung von Krümmungsfehlern durchgeführten serienmäßigen Libellenuntersuchungen mußten wir schon u. a. auch die möglichst vollständige Ausschaltung der temperaturabhängigen Fehler sichern, und in diesem Zusammenhang auch die temperaturabhängigen Fehler prüfen. Hier bemerken wir, daß diese Untersuchungen zur Entstehung des in [10] beschriebenen automatischen Libellenprüfers mit Photoregistrierung führten, mit dem wir auch die Einwirkung der durch die Körperwärme des

Beobachters hervorgerufenen, ungleichmäßigen und veränderlichen Temperaturverteilung ausschalten konnten. Die sich bei den Libellenprüfungen bewährten Methoden können natürlich bei Feldmessungen nicht angewendet werden, sie können aber Auskünfte über die Quellen sowie den Verlauf und auch die Anhaltspunkte zur Erfassung von temperaturabhängigen Fehlern geben.

Im Laufe unserer bisherigen Untersuchungen haben wir die temperaturabhängigen Fehler in zwei Gruppen geteilt: u. z. in thermomechanische und thermohydrostatische Fehler. Unter thermomechanischen Fehlern verstehen wir jene Fehler, die durch Formveränderung in den Metallfassungen bei Temperatureinwirkungen verursacht werden. Weiter sollen die die Ruhelage der Blase beeinflussenden Erscheinungen, welche in der Flüssigkeit der Libellen durch die ungleichmäßige Temperaturverteilung verursacht werden, thermohydrostatische Fehler genannt werden. Die Benennungen sind vielleicht nicht die zutreffendsten, aber wir mußten während unserer Untersuchungen die Fehler verschiedenen Ursprungs voneinander unterscheiden, und so haben wir, als vorläufige Lösung, die obige Gruppierung der Fehler angewendet.

Die temperaturabhängigen Fehlererscheinungen sind in der Meßpraxis natürlich schon lange bekannt, und es ist deshalb nur die Suche nach ihrer Ursache und die Bestimmung der Größe der hervorgerufenen Fehler neueren Ursprungs. Diesbezüglich halten wir die Arbeit [11] von DRODOFSKY für die bedeutendste, welche die zur Erfassung der Wirkungsweise der Libellen erforderlichen physikalischen und chemischen Erscheinungen — eben auf den Fall der Libellen bezogen — erörtert. Der besondere Wert dieser Arbeit liegt darin, daß sie zahlreiche charakteristische Angaben und Tabellen enthält, mit deren Hilfe die sich in den Libellen abspielenden Erscheinungen auch quantitativ verfolgt werden können. Diese Daten sind allerdings in erster Linie für die Libellenhersteller wichtig, während die Geodäten und Astronomen die Güte und die Verläßlichkeit der Wirkungsweise an den fertigen Libellen selbst prüfen müssen. So wie wir uns bei den geodätischen Instrumenten mit den Prüfungen in den Fabriken nicht begnügen dürfen, sondern in der Regel aus den Kontrollmessungen im sog. endmontierten Zustand die charakteristischen Daten der Instrumente bestimmen: so ist es auch bei den Libellen unentbehrlich, ihre Funktionsfehler aus den in ihrem bestimmungsgemäßen Zustand durchgeführten Messungen zu ermitteln. In dieser Hinsicht hat die Forschung noch weite Aufgaben, weil besonders die experimentelle Bestimmung der thermohydrostatischen Fehler noch als ein ungelöstes Problem betrachtet werden muß.

Die thermomechanischen Fehler entstehen hauptsächlich durch die Dilatationsbewegungen der Libellenfassung. Im Sinne der in [2] bereits erwähnten Untersuchungen von SAMEL und PINKWART, weiter nach den

diesbezüglichen theoretischen Erwägungen von DRODOFSKY [11; S. 17] kann es als erwiesen angesehen werden, daß die Temperaturänderung bei der Anwendung von spannungsfreiem Glasmaterial keine nenneswerte Wirkung auf die Form des Glaskörpers der Libellen und so auch auf die Krümmung der Lauffläche ausübt. Die von der Temperaturänderung hervorgerufenen Deformationen beeinflussen daher die richtige Wirkungsweise der Libellen praktisch nur im Wege der Fassung, jedenfalls aber auch davon abhängig, ob die Temperaturverteilung der Libelle gleichmäßig ist, oder nicht.

Es kann schon bei gleichmäßiger Temperaturverteilung durch die verschiedene Dilatation von Glas und Fassung eine Spannung entstehen, welche die Krümmung der Lauffläche — von der Ausführung der Fassung abhängig — erfahrungsgemäß bedeutend verändern kann.

Im Falle einer ungleichmäßigen Temperaturverteilung superponiert sich die durch die verschiedenen Dilatationen der Einfassungs-, Befestigungs- und Aufhängungsstellen der Libellen hervorgerufene Entstellung auf die obige Erscheinung, und dies kommt in ihrer Endform einer Dejustierung gleich.

In solchen Fällen ist die Anhäufung der Fehler allerdings noch komplizierter, weil — wie wir darauf gleich eingehen wollen — die ungleichmäßige Temperaturverteilung sich noch auf andere Weise auswirkt. Zur Unterscheidung der Fehlerteile ist es aber wesentlich, die Fehlerquellen zu trennen.

Die thermohydrostatischen Fehler treten ausschließlich als Funktion der ungleichmäßigen Temperaturverteilung auf. Wie darauf auch bei der Einführung der Benennung dieses Fehlers hingewiesen wurde, werden hier jene Fehler untersucht, die durch die Summierung der die Gleichgewichtslage der Blase bzw. der Füllflüssigkeit gemeinsam beeinflussenden Gravitations- und thermischen Wirkungen entstehen. Solche Fehlereinflüsse sind auch schon lange bekannt, z. B. bei den Messungen mittels Sekundenlibellen beim Anhauch der Libelle in der Nähe eines Blasenendes. Mit einem Anhauch ganz aus der Nähe kann diese Fehlererscheinung vergrößert gezeigt werden, und z. B. bei den Achsenlibellen der Wild T4 Theodolite bewegt sich die Blase in solchen Fällen nicht selten um 2—3 Parswerte nach der wärmeren Stelle. Wenn wir die Ablesungen ins Feldbuch diktieren, wird sozusagen auf die Libelle »draufgesprochen«, und auch dies kann im kleineren Maße die obige Erscheinung hervorrufen. Darum schützen wir bei den Prüfungen die Libellen gegen die unmittelbare Wirkung der Körperwärme des Beobachters und besonders des erwähnten Anhauchs schon lange mit einer Glaswand, aber die beste Lösung, mindenstens für die Prüfung, ist die vollständige Ausschaltung des Beobachters mit Hilfe entsprechender Automatisierung der Beobachtungen.

Auf die zu erwartende Größe solcher Fehler hat DRODOFSKY auch eine mathematische Beziehung abgeleitet [11; Seite 23, Gl. 59], welche aber eher einen qualitativen Charakter hat, weil — von den kleineren Vernachlässigun-

gen abgesehen — die zahlenmäßigen Werte der darin auftretenden physiko-chemischen Konstanten bei den fertigen Libellen aus den Werten der schwierig abtrennbaren thermohydrostatischen Fehler bestimmt werden müßten. Es ist nämlich nicht üblich, daß diese physiko-chemischen Konstanten von den Hersteller-Firmen mitgeteilt werden. Hier bemerken wir, daß in den in [12] mitgeteilten ausführlichen Untersuchungen eine sog. Temperaturkonstante aus Feldmessungen abgeleitet wurde, welche für die *gemeinsame* Korrektion der thermomechanischen und thermohydrostatischen Fehler diente. Im Laufe der sehr umsichtigen Untersuchungen hat sich eine Temperaturkonstante von 2,0″/C° für die Horrebow-Libellen der Wild T4 Theodolite ergeben [12; S. 62], was so zu verstehen ist, daß zwischen beiden Enden des Libellenrohres 1° C des Temperaturunterschiedes einen Blasenausschlag von 2″ verursachte. Nach DRODOFSKY [11; S. 23] dagegen müßte man in ähnlichem Falle, allein wegen der thermohydrostatischen Fehler mit einem Blasenausschlag von etwa 10″ rechnen. Wir müssen dem noch hinzufügen, daß die thermomechanischen und thermohydrostatischen Fehler im gleichen Sinne wirken (die Blase bewegt sich immer nach der wärmeren Stelle), und so ist der zwischen beiden Ergebnissen erscheinende Widerspruch eigentlich noch größer. Es ist wahr, daß bei den in [12] beschriebenen Untersuchungen die *äußere* Temperatur an den Enden der Metallfassung der Libellen gemessen wurde, hingegen die Daten von DRODOFSKY auf die *innere* Temperaturverteilung der Libellenröhre sich beziehen, und so kann der oben festgestellte Widerspruch auch mit der Wärmeisolierung der Libellen erklärt werden. Dies deutet aber darauf, daß dieser zwischen den zweierlei Temperaturen bestehende Unterschied von SCHÄDLICH nicht berücksichtigt wurde, und so ist seine Interpretation der Untersuchungen von DRODOFSKY bezüglich der Größe der Temperaturfehlereinflüsse nicht ganz einwandfrei. Exakte Ergebnisse können wir aber auch hier nur aus den in Laboratorien durchgeführten Eichmessungen erwarten. Es steht aber außer Zweifel, daß man, zur Herabsetzung der Temperatureinflüsse, der Frage der Wärmeisolierung der Sekundenlibellen durch Anwendung von zeitgemäßen Isolierstoffen eine viel größere Sorgfalt widmen muß. Auch müssen die Sekundenlibellen vom Wind bedeutend besser als bis jetzt geschützt werden. Gegen diese Fehlereinwirkungen verspricht die Verwendung von mit Thermostat geschützten Libellen gute Erfolge. In Anbetracht der Wichtigkeit solcher Messungen ist die dadurch entstehende geringe Mehrbelastung durchaus tragbar.

In Verbindung mit den thermohydrostatischen Fehlern wollen wir auf einen bisher außer acht gelassenen Umstand hinweisen. Wenn wir eine Temperaturverteilung mit einem konstanten Temperaturgradienten entlang der Libelle voraussetzen — solche wurde auch von DRODOFSKY in seinen Untersuchungen erörtert —, dann hat der thermohydrostatische Fehler bei einer Libelle mit fehlerfreier Krümmung in derselben Libellenlage bei jeder Blasen-

lage denselben Wert. In solchem Falle werden die in einer Libellenlage durchgeführten Winkelmessungen, als Unterschiede von zwei Blasenlagen, durch die thermohydrostatischen Fehler nicht belastet. Dasselbe gilt im obigen Falle auch für die thermomechanischen Fehler. Mit den Sekundenlibellen müssen wir aber durchwegs in zwei Lagen messen und dann muß damit gerechnet werden, daß die Temperaturverteilung der Libelle in der zweiten (symmetrischen) Libellenlage entgegengesetzt wirkt. Die in der Libelle entstehende Temperaturverteilung wird nämlich, von der Körperwärme des Beobachters abgesehen, durch konstant annehmbare Wärmequellen hervorgerufen. Wenn sich die Lage der Libelle gegen diese verändert, ändert sich auch die Temperaturverteilung der Libelle dementsprechend. Wenn wir entsprechende Zeit zur Beruhigung der Libelle und für die Entstehung einer statischen Temperaturverteilung voraussetzen, so wird die Temperaturverteilung der Libelle in der symmetrischen Lage in bezug auf die Libelle selbst dem Sinne und der Größe nach entgegengesetzt sein, und die temperaturabhängigen Fehler belasten mithin den Neigungswinkelunterschied zwischen den zwei Libellenlagen mit dem doppelten Betrag. Diese auf der Hand liegende Feststellung kann man bereits in [11] bei DRODOFSKY vorfinden, und so ist die SCHÄDLICHsche Ansicht schwer zu verstehen, wonach der Einfluß der von uns als thermohydrostatisch bezeichneten Komponente der temperaturabhängigen Fehler durch Messung in zwei Libellenlagen vermindert werden kann. Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei bemerkt, daß wir hier unter Messungen in zwei Libellenlagen die Messungen mit einer um eine vertikale Achse drehbaren und damit verbundenen Libelle in zwei symmetrischen Lagen — vor und nach der Drehung — verstehen. Wenn die Libelle nicht durch Drehung, sondern mittels Umhängung in symmetrische Lage gebracht wird, dann müssen wir auch die mechanischen Unsicherheiten der Auflageänderungen in Rechnung ziehen. Diese ist gar nicht zu vernachlässigen, weil z. B. bei einer Hängelibelle mit einem Hakenabstand von 30 cm eine einseitige Höhenänderung im Aufliegen um 0,00015 mm (d. h. um etwa ein Drittel der Lichtwellenlänge) schon einen Winkelfehler von 0,1″ verursacht. Die Umhängung ist daher in unserem Falle keine entsprechende Lösung.

In der Praxis treten die temperaturabhängigen Fehler nicht in den obigen vereinfachten Formen auf und es ist darum die Ausarbeitung eines einfachen Meßverfahrens zu ihrer exakten Erfassung nicht leicht. Dies bedeutet aber nicht, daß wir auch auf dem Gebiet der Erfassung von temperaturabhängigen Fehlern mit Eichmessungen — ähnlich wie bei den Krümmungsfehlereinflüssen — oder durch bessere Ausschaltung dieser Fehlerquellen nicht vorwärts kommen könnten. Durch Erfassen der regelmäßigen Fehlerteile bekannten Ursprungs und durch Bestimmung deren Auswirkung — etwa durch Ausgleichung bzw. durch Verminderung der Fehlereinflüsse — kann nämlich die Genauigkeit bedeutend erhöht werden.

In unseren, die vorherigen einfachen Fälle behandelnden Erörterungen haben wir jedenfalls schon einige Gesichtspunkte unserer weiteren Untersuchungen angedeutet.

Schließlich gehen wir noch auf das von SCHÄDLICH gleichfalls aufgeworfene Problem ein: wie weit in der Zukunft Pendel-Einrichtungen für automatische Ziellinieneinstellung von Fernrohren bzw. Indexeinstellung von Ablesevorrichtungen die Libellen verdrängen werden. Auf Grund unserer bisher ziemlich umfassenden Erfahrungen auf dem Gebiete der Prüfung von automatischen Nivellierinstrumenten und Höhenindexen sind wir der Meinung, daß man bei Instrumenten mit einer angestrebten Genauigkeit von 0,1″ infolge der Schwingungsempfindlichkeit der pendelmäßigen Lösungen noch mit bedeutenden Schweierigkeiten rechnen muß. Der Wind ist nicht nur bei den Libellen eine Fehlerquelle (die der temperaturabhängigen Fehler), er verursacht auch bei den Pendelgeräten Fehler, da er sie in Schwingung bringen kann. Weiter müssen wir noch beachten, daß in den Pendelgeräten in der Regel Prismen, Spiegel oder andere optische Elemente angewendet werden, deren unvermeidliche Herstellungsfehler bei der Genauigkeitsforderung von 0,1″ schon in Erscheinung treten können. Es wäre noch verfrüht, in dieser Hinsicht ein endgültiges Urteil zu bilden, doch im Interesse der weiteren Forschungen halten wir es für angebracht, die diesbezüglichen Ansichten von SCHÄDLICH mit weiteren Gesichtspunkten zu ergänzen.

Auf Grund des bisherigen würde es schwer sein, vorauszusagen, wann die außerordentlich einfachen, verhältnismäßig kleinen und dabei relativ sehr genauen Libellen durch die erwähnten Pendelgeräte verdrängt werden. Bezüglich der Sekundenlibellen ist es andererseits anzunehmen, daß die rasche Entwicklung der Herstellungstechnologie und der Prüfmethoden auch zur Besserung der Qualität der Sekundenlibellen führen wird. Es dürfte weiter die elektronische Rechentechnik auch deren Anwendung erleichtern. So können die Sekundenlibellen noch lange für die geodätischen und astrogeodätischen Messungen nützliche Dienste leisten. Deshalb beschäftigen wir uns in unserem Laboratorium seit längerer Zeit auch mit den Libellenuntersuchungen, welche schon nach unserem ursprünglichen Plan stufenweise auch auf die Prüfung und möglichst auch auf die Unschädlichmachung der Temperatureinwirkungen bei den Sekundenlibellen ausgedehnt werden. Aus den schon erwähnten Gründen mußten wir aber mit den Prüfungen der Krümmungsfehlereinflüsse beginnen. Die hier angedeuteten Richtlinien der Prüfung von Temperatureinwirkungen mögen zeigen, daß unsere diesbezüglichen Pläne weit vor dem Erscheinen der SCHÄDLICHschen Studie [1] entworfen waren. Diese Aufgabe kann aber kurzfristig nicht gelöst werden und ihre Lösung erfordert sowohl Zeit wie auch, als Voraussetzung, die Erfassung der Krümmungsfehlereinflüsse der Libellen.

SCHRIFTTUM

1. SCHÄDLICH, M.: Bemerkungen zur Messung kleiner Neigungen mittels Sekundenlibellen. *Vermessungstechnik*, 1962, S. 212—215.
2. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Über die Ergebnisse der mehrjährigen Prüfungen von Sekundenlibellen. *Annales Academiae Scientiarium Fennicae Series A. III. Geologica-Geographica.* 1961, S. 249—261.
3. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Über die Messung mit Sekundenlibellen. *Vermessungstechnik*, 1961, S. 363—370.
4. WANACH, B.: Untersuchungen von Sekundenlibellen. *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, 1926, S. 221—238.
5. BREIN, R.: Beitrag zur Libellenprüfung. *Veröff. der Deutsch. Geod. Kommission bei der Bayer. Akad. d. Wiss.*; Reihe B. Heft 21. 1955.
6. HIRVONEN, R. A.: Bestimmung der Libellenempfindlichkeit und eines konstanten Verhältnisses im allgemeinen. *Zeitschrift f. Vermessungswesen*, 1950. S. 137—139.
7. JACOBI, C. G. J.: De formatione et proprietatibus determinantum. *Crelle's Journal*, **22** (1841), 285—312.
8. WYSS, N.: Neigungsbestimmung mit Berücksichtigung systematischer Libellenfehler. *Schweizerische Zeitschr. f. Vermessungsw. Kulturtechnik und Photogrammetrie*, 1957, S. 153—164.
9. ALPÁR, GY.: Weitere Untersuchungen über die Verwendung der Sekundenlibellen. *Acta Techn. Hung.* **43** (1963), 349—356.
10. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Ein neuer automatischer Libellenprüfer für Sekundenlibellen. *Geofisica pura e applicata.* 1961/I. S. 27—34.
11. DRODOFSKY, M.: Libellen mit Anzeige durch Gasblasen. *Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayer. Akad. d. Wiss.*; Reihe C. No. 17. 1956.
12. SÁRDY, A.: A műszer környezetében keletkező hőmérsékletkülönbség hatása a Horrebow—Talcott-módszer mérési eredményére. (Die Auswirkung des in der Nähe des Instrumentes entstehenden Temperaturunterschiedes auf die Meßergebnisse der Horrebow-Talcottschen Methode.) *Építőipari és Közl. Műsz. Egyetem Tudományos Közleményei*, **VII** (1961), No. 2. S. 37—78.

ON THE DETERMINATION OF SMALL SLOPE ANGLES BY USING A SECOND-SPIRIT LEVEL

A. TÁRCZY-HORNOCH and GY. ALPÁR

SUMMARY

As is well known, the accuracy (mean error) to be reached in the determination of slope angles by using a second-spirit level is 0.1″. Hitherto investigations proved that computing with the value of the average division an error of 1.5″ or even more should be taken into account. Therefore, a method was developed, by the use of which these errors could be considerably lessened. In his paper cited here SCHÄDLICH agrees with the demand referring to 0.1″. However, with regards to the fact that temperature effects conduce to errors which are even as great, he takes the computation based on the average value of a division as being satisfactory. According to our opinion it is more expedient to eliminate errors which can be checked, while related to those which so far cannot be checked yet, methods for their elimination or at least lessening of same should be sought for. The paper gives directives for the elimination or lessening of errors resulting from temperature effects.

DE LA DÉTERMINATION EXACTE DE PETITS ANGLES D'INCLINAISON AU MOYEN DE NIVEAUX DE HAUTE PRÉCISION

A. TÁRCZI-HORNOCH et GY. ALPÁR

RÉSUMÉ

Dans la détermination des angles d'inclinaison, les niveaux de haute précision doivent assurer, comme on sait, une précision (erreur moyenne) de 0,1″. Des recherches effectuées par les auteurs il ressort que dans le calcul utilisant les valeurs de graduation moyennes, il faut compter avec des erreurs de 1,5″ et même plus grandes. Une méthode proposée par l'étude permet une diminution considérable de ces erreurs. Dan son étude citée, SCHÄDLICH admet l'exigence d'une précision de 0,1″, mais en raison des erreurs non moins grandes causées par les effets de température, il se contente du calcul à valeurs de graduation moyennes. Selon l'avis des auteurs, il convient d'éliminer les erreurs déterminables, et de chercher de nouveaux procédés permettant d'éliminer si possible, ou du moins dimineur les erreurs qui ne peuvent pas encore être déterminées. Les auteurs indiquent enfin les diverses possibilités d'élimination ou de diminution des effets de température.

К ТОЧНОМУ ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕБОЛЬШИХ УГЛОВ НАКЛОНА С ПОМОЩЬЮ УРОВНЯ С ОТВЕСОМ, ИМЕЮЩИМ СЕКУНДНОЕ ДЕЛЕНИЕ

А. ТАРЦИ-ХОРНОХ и Д. АЛЬПАР

РЕЗЮМЕ

При помощи уровней с отвесом, имеющих секундное деление, как известно, необходимо достигать точности (средней ошибки) порядка 0,1″. Из проведенных до сих пор исследований следует, что в случае расчетов при помощи средних значений необходимо считаться с погрешностями порядка 1,5″ и даже более, и поэтому сообщается метод для значительного снижения влияния этих погрешностей. В цитированной работе *Шедлиха* он согласен с требованием точности порядка 0,1″, но, исходя из того, что температурные воздействия вызывают неменьшую погрешность, он считает достаточным производить расчеты при помощи средних значений. По нашему мнению установимые ошибки целесообразнее устранить, в то же время по неустановимым до сих пор ошибкам необходимо искать методы для их возможного устранения или же хотя бы снижения. В отношении устранения и снижения температурных воздействий в работе приведены определенные соображения.

GEOPHYSICAL INVESTIGATION OF THE GEOTHERMAL ZONES OF THE EARTH

V. SCHEFFER

DR. TECHN. SC.

HUNGARIAN OIL- AND GAS-INDUSTRIAL TRUST, BUDAPEST

[Manuscript received October 3, 1963]

Based on a study of the crustal thickness map of the Carpathian Basins, constructed on seismological data, the conclusion can be drawn that the regional variations of the geothermic gradient in this area follow the changes in the thickness of the Earth crust.

If the gravitational anomalies, seismological relations, heat flow values of the remaining geothermal zones of the Earth are investigated, it can be observed that in some places the abnormally high heat flow areas are related not to the elevated position of the Mohorovičič discontinuity, but to relative heights in the upper discontinuity surfaces.

Finally, some geothermal zones of the Earth, situated along deep faults of continental size, give a proof that certain geothermal zones were developed in areas of such deep faults.

Our geothermic investigations, carried out in the past few years, show that the geothermic gradient, in the central zone of the Carpathian Basins, has a regional minimum averaging about 20 m/°C, as represented in Fig 1 [1].

In order to study the position of the geothermic anomaly with relation to the variations in the thickness of the Earth's crust, Fig. 2 was drawn, showing the crustal thickness in the zone of the Carpathian Basins, based on seismological data.

On this map, the depth contours of the Mohorovičič discontinuity are shown at 10 km intervals.

For the construction of this map, the crustal thickness values of the Carpathian Basins and of the surrounding countries were considered, according to the sources listed below:

For Hungary, a 33 km value was obtained by E. BISZTRICSÁNY and D. CSOMOR [2] from the interpretation of the data of the 1956 Dunaharaszti earthquake. As a final interpretative conclusion, the authors mention, that "the granitic layer shows a thickening from Helgoland towards Haslach, and, according to our results, this seems to continue towards the Carpathian Basin".

Another determination of the crustal thickness in Hungary was made by D. CSOMOR and J. GÁLFY [3] on evaluting the Nógrád earthquake in 1951. According to this, "a crustal thickness of 34—39 km is given in the area of the Hungarian Basin". Another important statement in this work is that the thickness of the crust is much less within the basin, than beyond the Carpathians.

The data for the southern part of the Great Hungarian Plain, for the territory of the East and South Carpathians and for the Roumanian Plain

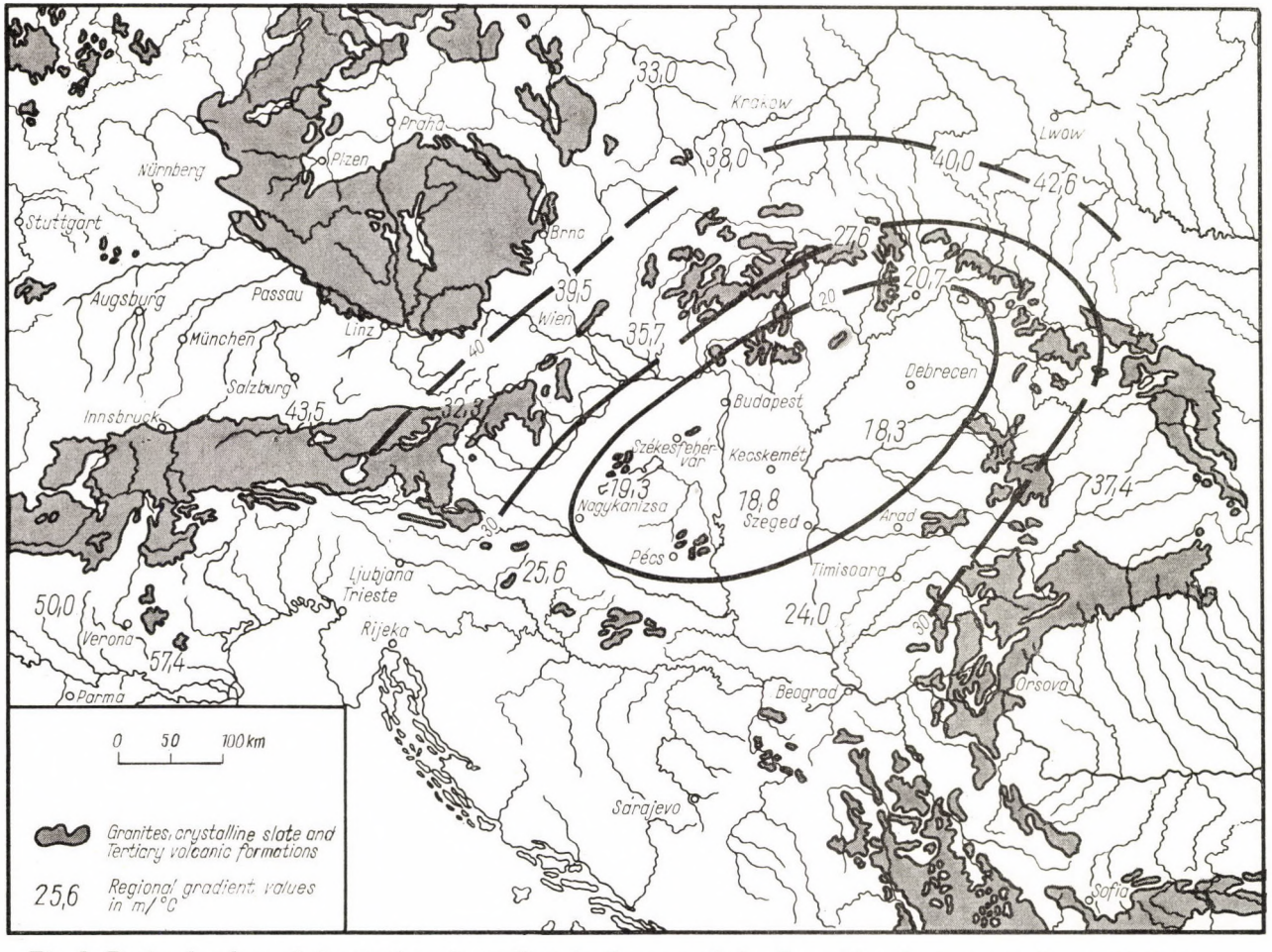

Fig. 1. Regional values of the geothermic gradient in the area of the Carpathian Basins, according to V. SCHEFFER.

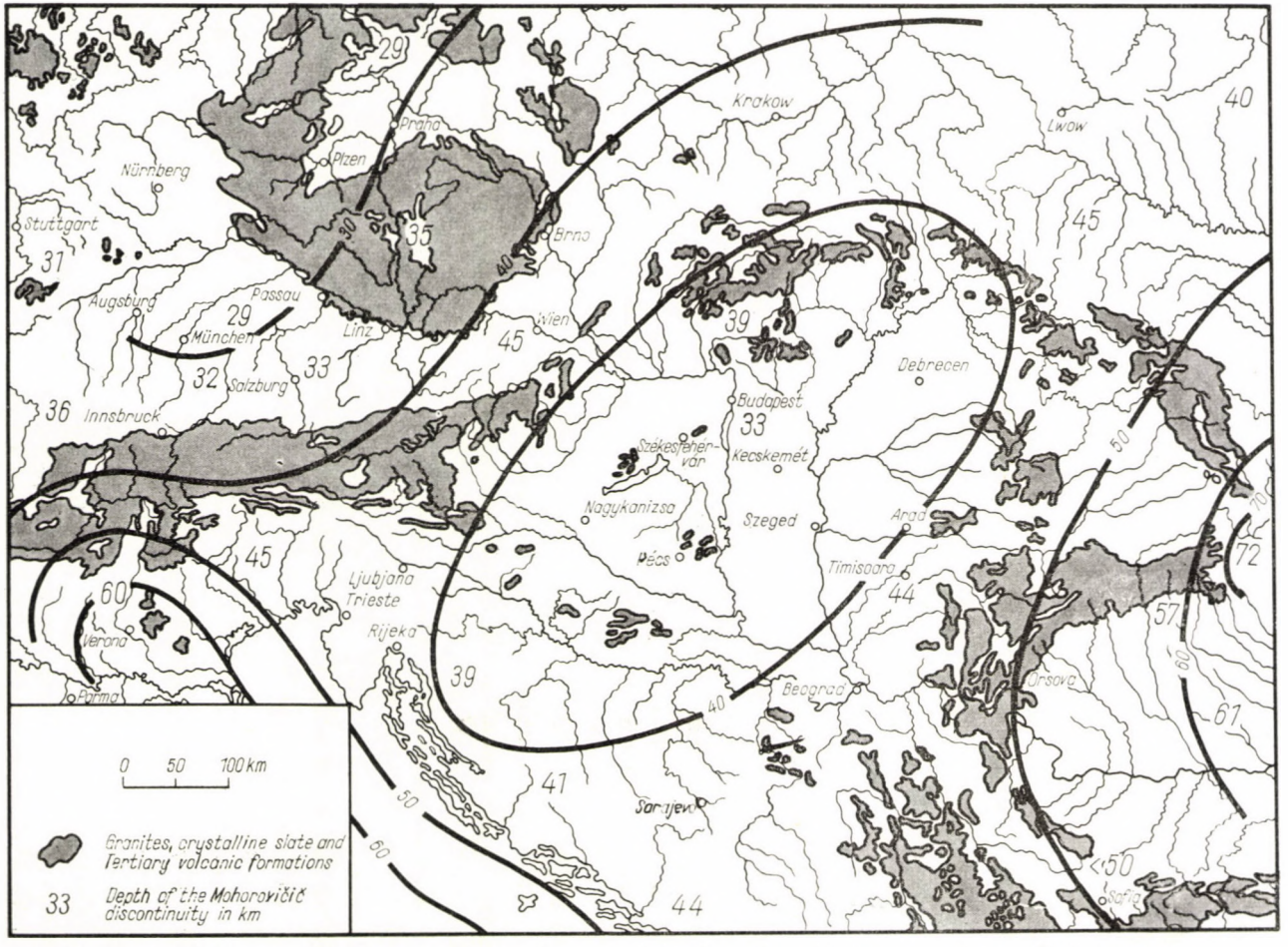

Fig. 2. The thickness of the Earth's crust in the zone of the Carpathian Basins, according to V. SCHEFFER.

were put at our disposal by the President of the Seismological Department of the Academy of Sciences of the Roumanian People's Republic, Prof. G. PETRESCU. These furnish the following crustal thickness data:

In the southeastern marginal zone of the Great Plain, the depth of the Mohorovičič discontinuity was determined as 44 km, from the data of the Timisoara earthquake in 1959 prepared by G. PETRESCU, C. RADU and P. IONESCU-ANDREI [4].

G. PETRESCU and C. RADU [5] assembled the crustal thickness values determined for Roumanian territory up to the present, for the C. E. S. (Commission Européenne Séismologique) congress hald in Jena in September 1962.

The depth of the Mohorovičič discontinuity:

Bucureşti zone,	mean	value	61	km	
Cîmpulung	„	„	„	57	„
Iasi	„	„	„	46	„ .

In the Vrancea-Focşani district, in the most eastern part of the South Carpathians and the most southern part of the East Carpathians, on the Southeast section of the Carpathian Arc, a mean value of 72 km was obtained. The literary sources used here are contained in our list of literature [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 4, 13, 14, 15, 16 and 17].

The crustal thickness value of < 50 km for the environment of Sofia, Bulgaria, was indicated on the basis of the work of I. PETKOV and E. GRIGOROVA [18].

The 40 km value for the Southwest corner of the Russian Platform and the 45 km value for the foreground of the North-East Carpathians were taken from the crustal section published in the study of A. A. BORISOV and G. I. KRUGLJAKOVA [19]. This section was drawn according to gravitational data; for the Precarpathians, it takes a depth of 35—40 km of the Mohorovičič discontinuity into account and considers a further rise towards the central zone of the Pannonian Basin as probable.

The 45 km value for around Vienna was taken from the interpretation of the 1927 Schwadorf earthquake data by V. CONRAD [20].

The 35 km value for South Bohemia is presented on the basis of the information by Prof. A. ZÁTOPEK [21].

The 29 km value, characteristic for the southern part of the German Democratic Republic is based on the information from the collaborator of the Institut für Bodendynamik und Erdbebenforschung der Deutschen Akademie der Wissenschaften in Jena, W. ULLMANN [22].

The crustal thickness values for Alz-Salzach (33 km), Hofkirchen-Schwindegg (29 km), Ostermünchen-Mangfall (32 km), Immenstadt (36 km) and Mindelheim Nord- Kaufbeuren Nord (31 km), indicated in the foreground of the Bavarian Alps, originate from a treatise by H. I. LIEBSCHER [23].

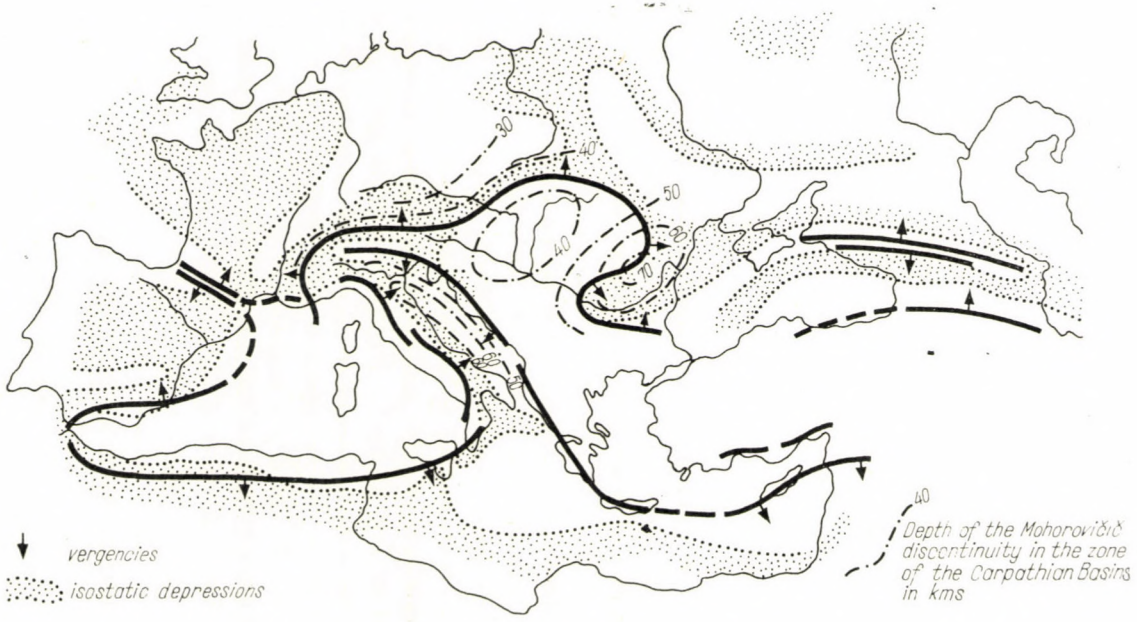

Fig. 3. Crustal thickness values of the Carpathian Basins in the Mediterranean Mountain belt.

The 45 km value for Cansiglio, North Italy, comes from a treatise by P. CALOI [24]. The depth values of 60 km for Salo, respectively, for Gran Sasso d'Italia (the latter not being indicated on the map, similarly to the value for Iaşi, Roumania) were taken over from an interpretation by D. DI FILIPPO and F. PERONACI [25].

The three thickness values for the coastal zone of Yugoslavia, 39 km for Cavtat, 41 km for the environments of Niksic and 44 km at Titograd, are values computed from gravitational anomalies by M. ROKSANDIČ [26].

If we study the crustal thickness map of the Carpathian Basins, constructed from seismological data, a considerable thinning-out of the Earth' crust can be observed in this area.

The depth of the Mohorovičič discontinuity in the central zone of the mantle high under the Hungarian Basin is, according to the seismological data, 33 km.

In every direction from this mantle high, a strong deepening of the Mohorovičič discontinuity is observable. The value of this deepening is about 40 km around Braşov, about 30 km on the Adriatic, 10 km in the foreground of the North-East Carpathians and in the Vienna Basin. From the latter, in the direction of the Bohemian Massive, to the North and the West, the surface of the mantle rises about 20 km. In the South-East, between the Balkan Mountains and the Adriatic, the relative high of the mantle extends at a constant depth of about 40 km towards the South-East.

From the study of this crustal thickness map of the Carpathian Basins zone, constructed from seismological data, the conclusion can be drawn that the regional variations of the geothermic gradient, observed in this area and represented in Fig. 1, follow the variations of the crustal thickness in a sense that the minimum zone of the geothermic gradient in the Carpathian Basins corresponds to the near-surface high of the mantle.

In Fig. 3, the 10 km depth contours of the mantle high are drawn into the outline of KOBER's Mediterranean range. The drawing immediately allows for the appreciation of the mantle high corresponding to the so-called "Median Mass", further the connection of the latter to the orogenetic vergencies.

The result of these studies make the assumption probable that there is a close connection between the procedure of orogenesis and the topography of the Earth' mantle.

The seismological investigations related to the western basin of the Mediterranean indicate the elevated position of the gabbro and peridotite in the eastern Italian zone of this area, surrounded by the Tyrrhenian. The geothermal zones around Larderello, Monte Amiata, Viterbo, Tolfa and in Sardinia lie over the East part of this mantle high [27, 28, 29, 30].

Geophysical explorations, made in the geothermal zones for natural steam or thermal water, aim, in many cases, at the detection of deep faults.

In general, however, it can be observed that the geothermal zones of the Earth lie over regionally elevated parts of the deeper section of the crust.

The regional highs of the mantle surface or of the discontinuity surfaces of the crust present themselves, as their density values are higher than those of their environment, as regional gravitational maxima.

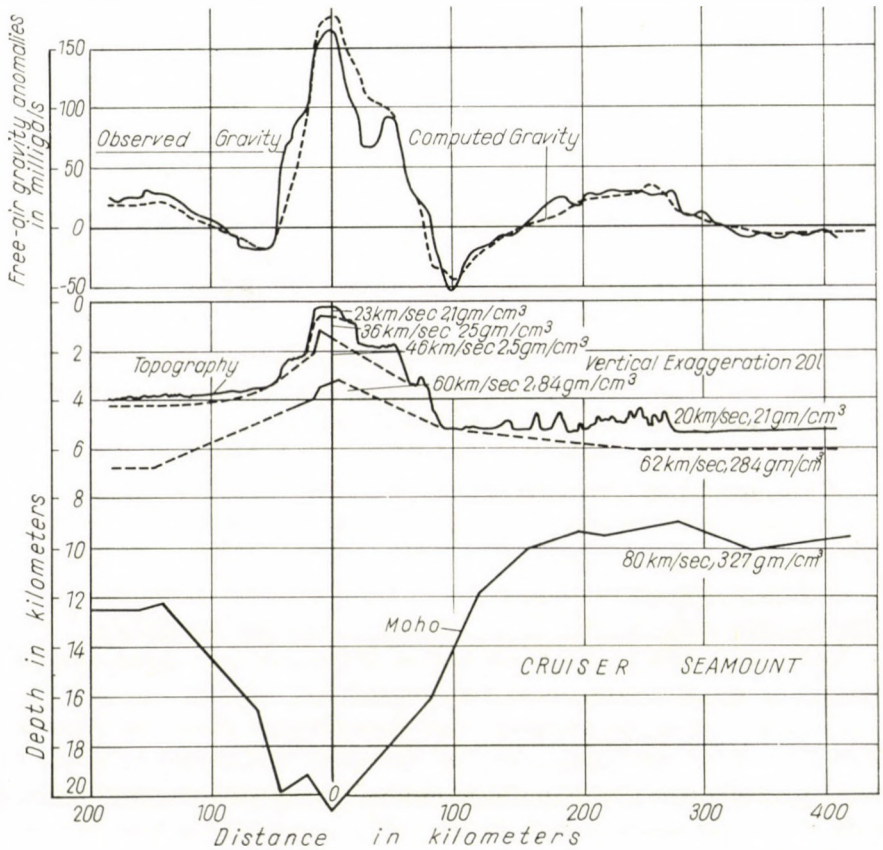

Fig. 4. Profile across the Atlantic Ridge, measured with Graf-type sea gravimeter

In our Fig. 4, profile surveyed with Graf-type sea gravimeter across the Atlantic Ridge is shown, together with its geological interpretation [31].

Since the thermal conductivity values of the deeper and generally more compact parts of the crust are higher than those of the layers nearer to the Earth's surface, the terrestrial heat flow is of higher value in the zone of the elevated parts of the deeper layers.

NASON and LEE [32] published in 1962 a heat flow section across 14 points of the Atlantic, from Martinique to the Canary Islands. The values

observed range from 0.3 to $6.5 \cdot 10^{-6}$ μcal/cm^2/sec. The higher values were found over the Atlantic Ridge, within a width of 200 km, the lower values, on the other hand, on the flanks of the Ridge, similarly to the East Pacific Rise, the eastern ridge of the Pacific Ocean.

In his cumulative report on the geothermal belts of the Earth, I. R. ELIZONDO [27], rapporteur at the geothermic conference of the United Nations, held in Rome, 1961, raised the following question:

"In areas with volcanic Pliocene to Recent rock, lacking superficial hydrothermal manifestations, what will be the possibilities of finding commercial steam in the subsurface?"

In the same report, G. BODVARSSON [33] establishes that, admitting a relation between the known hightemperature geothermal deposits of the Earth and zones of recent volcanic activity, the thermal activity is by far not so frequent as volcanism. To the relatively great number of volcanoes, only a surprisingly small number of significant thermal zones belong.

In the following we wish to answer the question raised by I. G. ELIZONDO, by the results of the geophysical investigations of the geothermal zones of the Earth, giving, at the same time, a geophysical criterion for the detection of presently unknown geothermal zones.

Based on our experiences gathered in the Carpathian Basins and in the western part of the Mediterranean, which was discussed in the foregoing, and to examine whether they are of general validity for the geothermal zones of the Earth or not.

In Fig. 5, the geothermal zones of the Earth are presented, according to the material collected by I. R. ELIZONDO and the Larderello Company.

URRY [35], in his work published in 1949, gives an explanation for the variations of the terrestrial heat flow as follows:

"The heat from the interior must flow through the outer crust and in so doing, it affects the temperature of the upper surface layers of the earth. This temperature will not be uniform but will vary with the thermal conductivities of the various materials in the surface and near-surface of the crust and with their geometric distribution."

As to the deeper parts of the crust, having density and thermal conductivity values higher than the layers nearer to the surface, it is the gravitational anomaly pattern that gives an informative view.

In Fig. 6, the map of the free-air anomalies of the Earth, determined up till 31 December, 1959, computed for a $5^\circ \times 5^\circ$ network is presented, constructed by the Hungarian State Geophysical Institute Roland Eötvös, and based on W. A. HEISKANEN's data [34], with 10 mgal intervals.

It is admitted that isostatic anomalies are more convenient for the delineation of the large structures of the Earth crust, than free-air anomalies are. However, the isostatic map of the Earth is not complete yet; for the

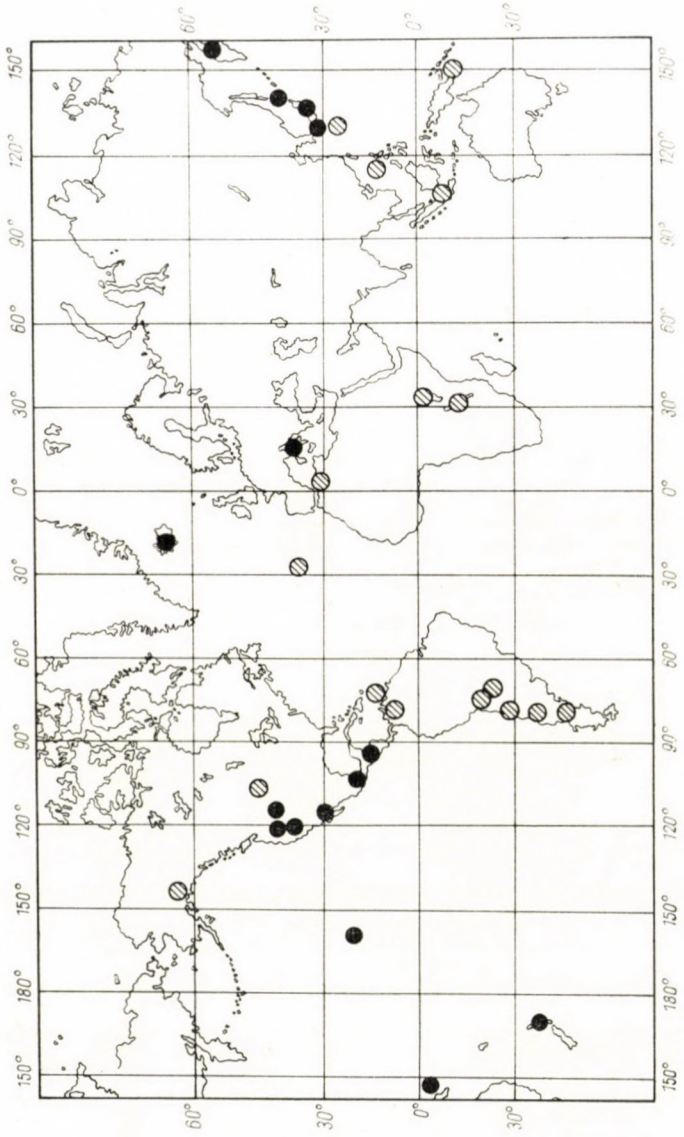

Fig. 5. Geothermal zones of the Earth.

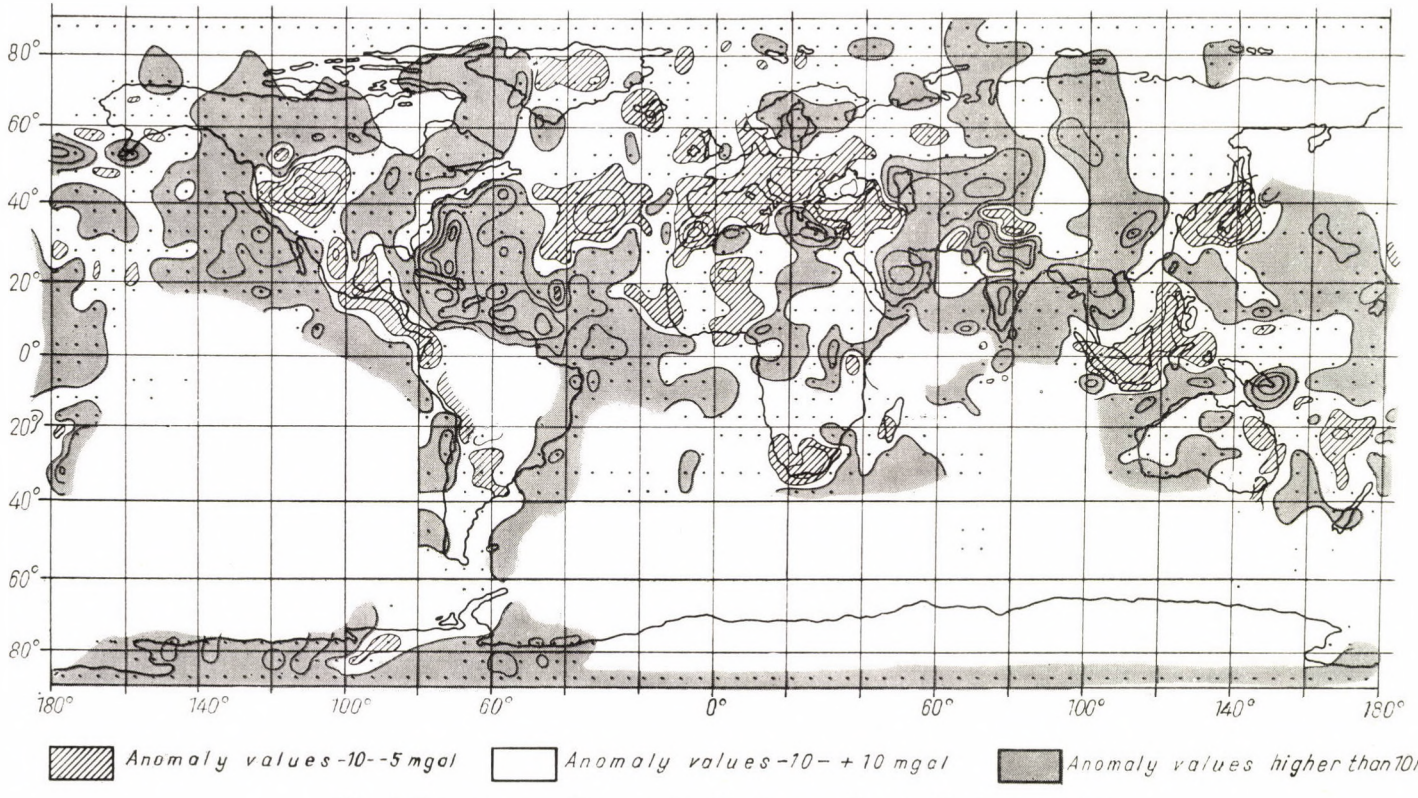

Fig. 6. Free-air anomalies over the Earth, according to W. A. HEISKANEN
(The text of the signes 1 and 3 as per legend have been exchanged by error.)

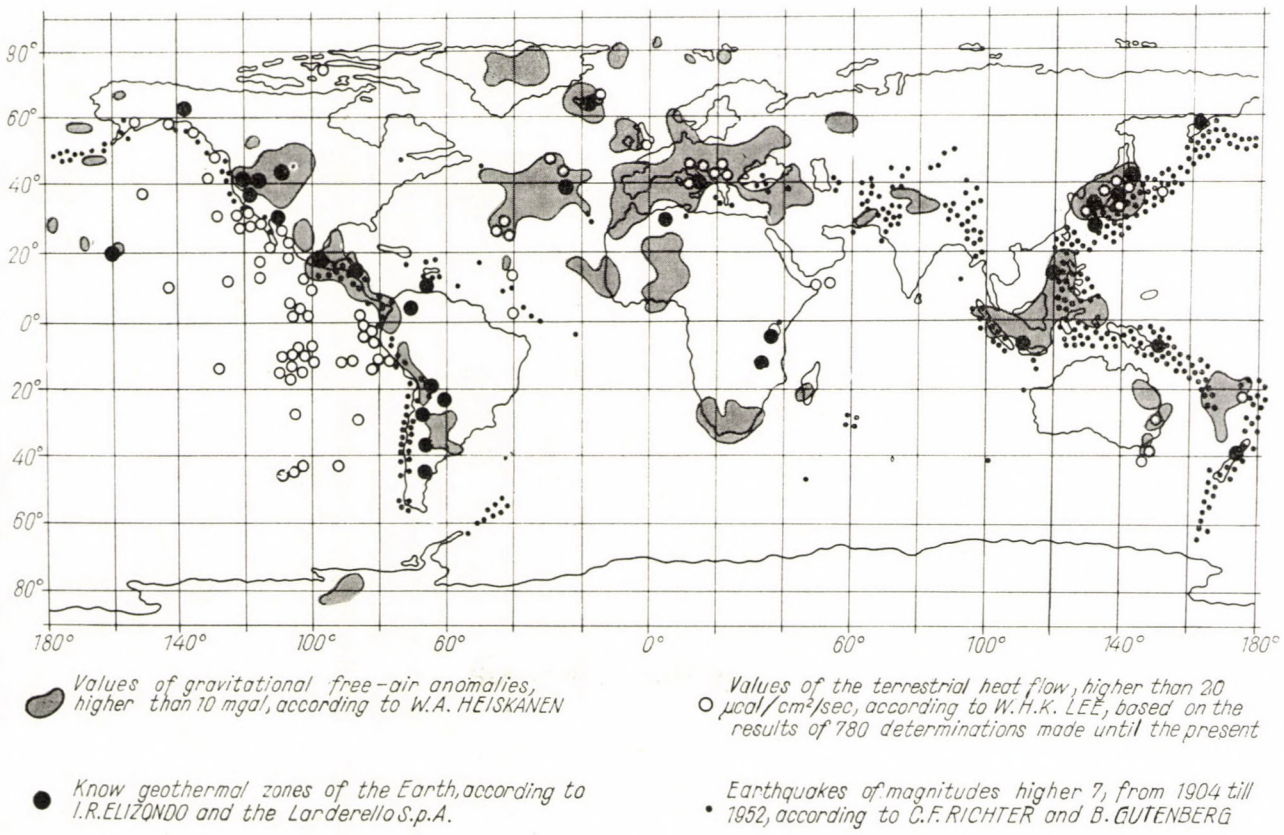

Fig. 7. **Geophysical data, characterising the geothermal zones of the Earth**

time being it is not possible to present the isostatic anomalies on a single map. For the investigation of the different areas we have thus taken various isostatic maps, of a local character from the regional point of view, into consideration.

In Fig. 7, showing the geothermal areas of the Earth, the following are represented:

the areas of the free-air anomalies of values higher than 10 mgals,

known geothermal zones of the Earth, on the basis of a collection by I. R. ELIZONDO and the Larderello Company,

terrestrial heat flow values higher than 2.0 μcal/cm^2/sec, according to the data of the 780 heat flow measurements gathered by W. H. K. LEE [36] up till the beginning of 1963, and

the epicenters of shallow-focus earthquakes having magnitudes greater than 7, recorded from 1904 to 1952, according to C. F. RICHTER and B. GUTENBERG [37].

A comparison and analysis of these data greatly contributes to the knowledge of the macrotectonical relations of the geothermal zones of the Earth.

If we compare the position of the geothermal zones of the American continent with the gravitational pattern, the conclusion may be drawn that all the 14 geothermal areas of the USA, Mexico and El Salvador as well as the South American geothermal zones lie over the very marked gravitational maximum, which passes along the whole of America. The comparison to the gravitational anomalies may also be made by using the isostatic anomaly maps published by the Isostatic Institute of the International Association of Geodesy [38].

The geothermal area of Hawai similarly lies on a gravitational maximum. The geothermal area of Iceland corresponds to a positive gravitational anomaly.

Besides the North African geothermal zone, belonging to the western basin of the Mediterranean, already referred to, we have to mention the thermal zone of Colli Euganei and Monti Berici, North Italy, lying on the ridge of an isostatic maximum [39].

The gravitational and seismological investigations carried out in this area indicate an elevated zone of the granitic crust of the Earth [40, 24, 25].

The very interesting isostatic anomalies of Japan have been studied and written up by HEISKANEN [41].

A comparison of these anomalies to the 20 geothermal zones in Japan shows a good areal correspondence.

The gravitational anomalies of the geothermal area of Kamchatka, USSR, are not published yet. From the results of the geophysical observations made in this area in 1957—1958 [42], however, it can be stated that an elevated zone of the granitic crust extends under the arc of the Kurili Islands, from the Japanese islands towards Kamchatka.

The geothermal zones of New Zealand and Rabaul, further the other geothermal areas of the West Indian archipelago are situated on significant gravitational anomalies and on their periphery.

The two well known East African geothermal areas are not characterized by marked gravitational anomalies, but are related to the deep faults of the known African trenches [43], shown in Fig. 8.

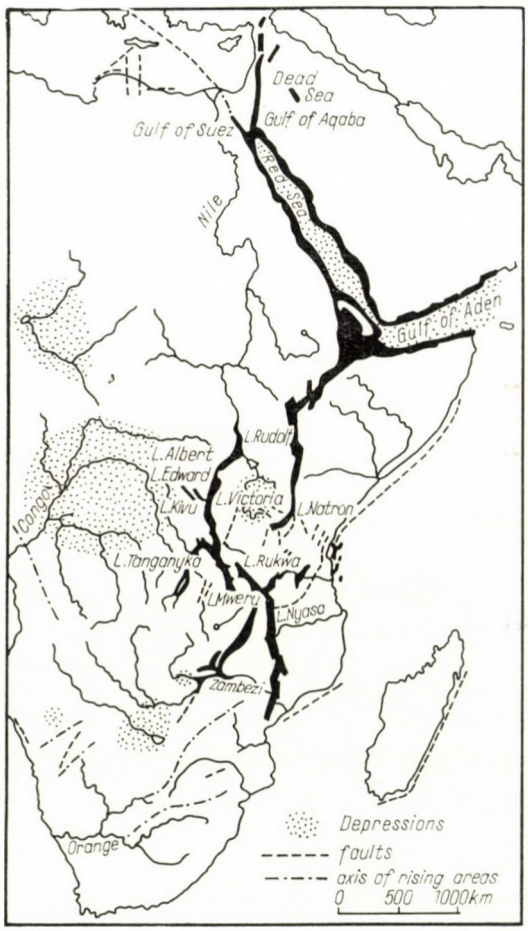

Fig. 8. The East African Rift System, according to R. W. GIRDLER

Earthquake epicenters and geothermic anomalies

According to GUTENBERG, the cause of earthquakes lies in thermal energy. The position of earthquake epicentres, in relation to geothermic anomaly zones, seems to strengthen this assumption (Fig. 9).

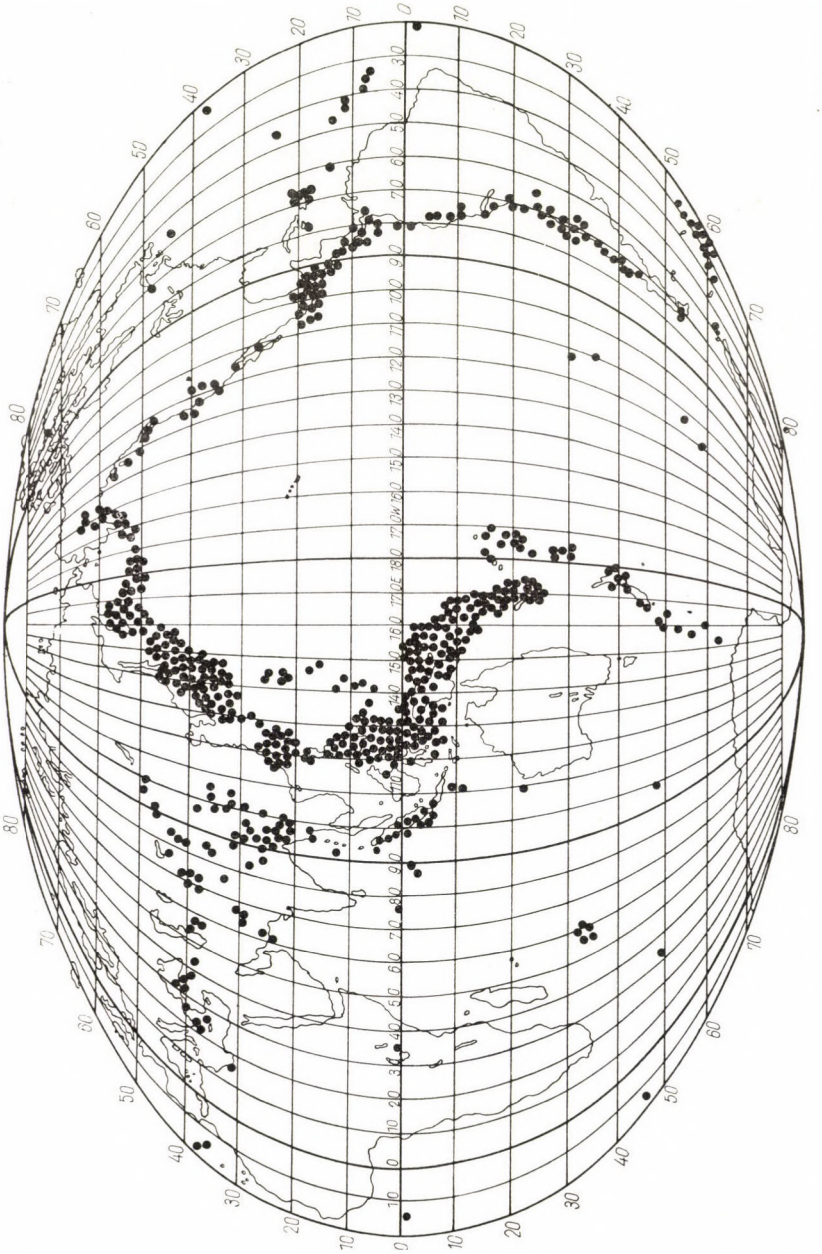

Fig. 9. Shallow-focus earthquakes of magnitudes higher than 7, from 1904 till 1952, according to RICHTER and GUTENBERG

In general, the earthquake epicentres lie on the flanks of regional highs of the Earth's crust.

The largest seismic belt of the Earth, the so-called "Circum-Pacific Belt", follows the western coasts of North and South America from Cape Horn to Alaska, then it borders the areas of geothermic anomalies along the eastern coast of the Asian continent, through Japan and Indonesia to New Zealand.

In Fig. 7, only the epicentres of earthquakes stronger than magnitude 7 are indicated. By considering the lesser magnitudes, it is possible to verify, that the seismic zone of the Pacific is followed by that broad East-West seismic belt — second in importance — which extends from the high mountains of South Asia through the Mediterranean to Gibraltar [44].

The third extended seismic belt passes from the Arctis to the Antarctis, along the Atlantic Ridge; the fourth, from the Middle Indian table-land to East Africa. Smaller earthquake zones surround the island-groups of the Atlantic and Pacific.

Even this simple descriptions points to the relation between geothermal zones and earthquake areas.

It must be mentioned that 80% of the earthquakes are released in the Pacific area and some 15% in the area of the Himalaya and in the mountain-system of the Alps.

Terrestrial heat flow observations

From the point of view of geothermics, great attention should be paid to the comprehensive works of W. H. K. LEE. Among these, "Heat flow data analysis", edited at the beginning of 1963, publishes the results of 634 heat flow observations — 73 continental and 561 oceanic.

According to LEE's analysis, the mean value of the terrestrial heat flow is

$$1.5 \pm 0.15 \ \mu\text{cal/cm}^2\text{/sec},$$

the continental mean value being 1.43 μcal/cm^2/sec and the oceanic mean value 1.65 μcal/cm^2/sec.

In June, 1963, LEE already had the data of more than 900 heat flow measurements at his disposal [45]. Out of these, 757 were used, 92 being the number of the continental and 665 the number of oceanic measurements. The areal distribution of these is shown in a $5^\circ \times 5^\circ$ network in Fig. 10.

We have no intention of giving a detailed account of this newest work, only to mention that according to this new material the arithmetic mean

Acta Techn. Hung. 47. (1964)

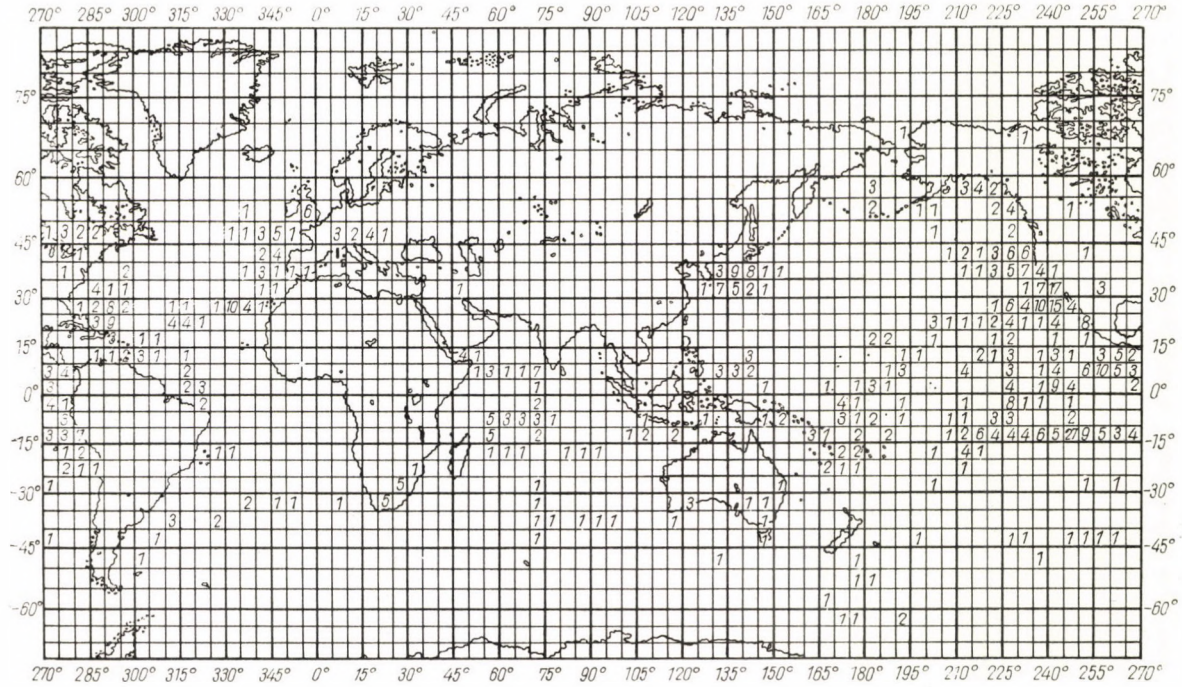

Fig. 10. Areal distribution of the 757 heat flow observations made on the Earth up till June 1963, in 5° × 5° sections, according to LEE and MACDONALD

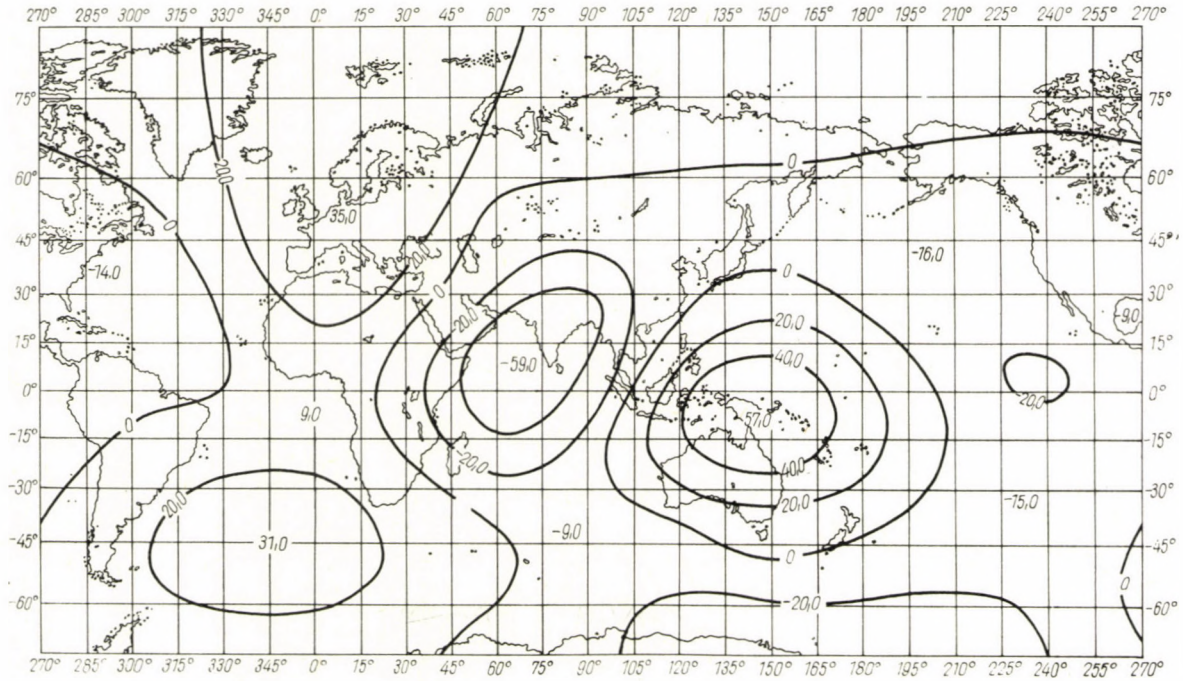

Fig. 11. Map of geoid undulations, constructed on the basis of satellite observations carried out untill 1963, according to KAULA

value of the terrestrial heat flow is

$$1.61 \ \mu\text{cal/cm}^2\text{sec},$$

1.48 being the continental and 1.63 the oceanic mean value.

In their present work, LEE and MACDONALD attempt to compare the heat flow with the undulations of the geoid. Failing to obtain any probable

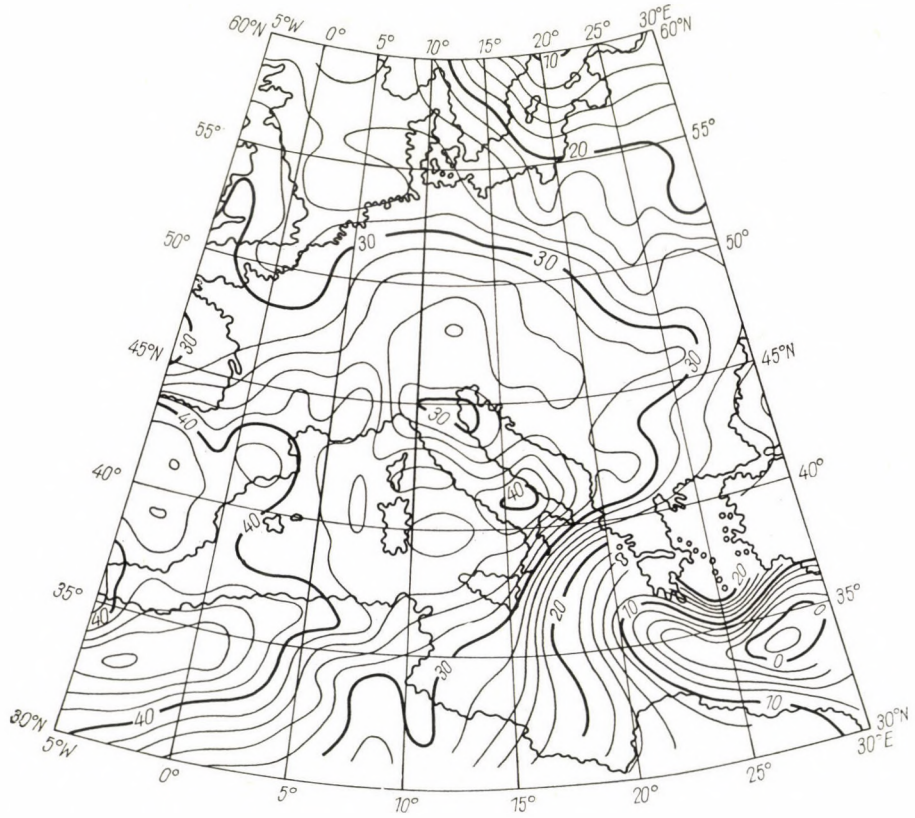

Fig. 12. The European geoid constructed in 2 m value intervals in Columbus (Ohio) in 1954—57 according to W. A. HEISKANEN

results, however, they finally remark, that it is possible that the terrestrial heat flow anomalies are smaller than the approximation applied.

That this is really so, is illustrated by the following example.

In our Fig. 11, the pattern of geoid undulations, drawn by KAULA according to satellite observations is given [46]. If we regard the European part of this map, then, on account of the 20 m interval of values, the geoid

highs of the Carpathian Basin, of the western basin of the Mediterranean, of North Africa and England, which refer to a great heat flow, are not obvious.

If, however, we regard the European undulations of the geoid constructed in Columbus, to be seen in Fig. 12 [47], the high heat flux areas, as local undulations, are well to be seen on it.

In Fig. 7, we represented the heat flow points exceeding 2 μcal/cm^2/sec of the Earth, that were known until the beginning of 1963, even in those parts of the Pacific Ocean, of which the gravitional anomalies are not known up to the present.

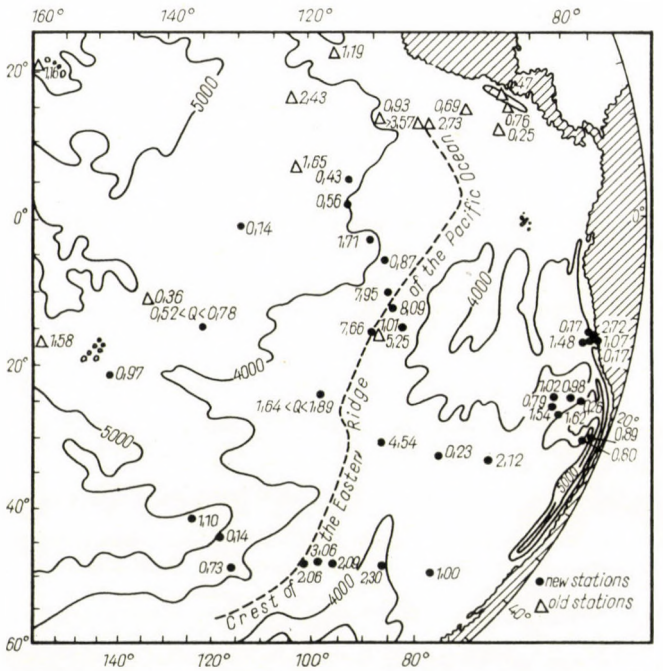

Fig. 13. High heat flow values of the East Pacific Rise, according to HERZEN

The high heat flow values of this area fall to the Easter Rise of the Pacific, as is known from HERZEN's data [48]. (See Fig. 13).

A comparison of the high heat flow spots of the Earth with the gravitational maximum areas opens the possibility of checking whether the geothermal zones lie over the highs of the crust.

It can be stated that the gravitational maximum, corresponding to the Atlantic Rise, at the same time indicates a maximal heat flow area.

The high flow value observed in England lies over an area of positive gravitational anomaly.

The high heat flow values observed in the Carpathian Basin, in East Australia and in the North of New Zeeland coincide with zones of gravitational maxima.

Finally, the high heat flow zones of the Indian Ocean may be related to the deep faults observable in this area.

REFERENCES

1. SCHEFFER, V.: The Regional Values of the Geothermic Gradient in the Area of the Carpathian Basins. *Acta Techn. Hung.* **43** (1963).
2. BISZTRICSÁNY, E.—CSOMOR, D.: Az 1956. jan. 12-i földrengés és a Föld kérgének felépítése a Magyar Medencében (The Earthquake of January 12, 1956, and the Structure of the Earth's Crust in the Hungarian Basin). *Geof. Közl.* (1962).
3. CSOMOR, D.—GÁLFI, J.: A Földkéreg felépítése a Magyar Medencében az 1951 febr. 20-i nógrádi földrengés adatai szerint (The Structure of the Earth's Crust in the Hungarian Basin, According to the Data of the Nógrád Earthquake of February 20, 1951. Manuscript). Budapest 1963.
4. PETRESCU, G.—RADU, C.—IONESCU—ANDREI, P.: Activitatea seismica teritoriul R. P. R. în 1959. Consideraţii asupra astenosferei şi structurii scoarţei in regiunea Vrancea. *Ac. Rep. Pop. Romîne, Studii si Cercetari de Astronomie şi Seismologie.* **VI.**, Bucuresti 1961.
5. PETRESCU, G. si RADU, C.: Structura scoartei terestre i nR. P. R. A. Rep. Pop. Rom. *Studii şi Cercetari de Astronomie şi Seismologie.* **VII** (1962).
6. DEMETRESCU, G.—PETRESCU, G.: Prima evaluare a adîncimii stratului intermediar în subsolul Munteniei şi Moldovei. *Revista Universtitaşii Bucuresti şi a Politechnicii Bucuresti.* 4—5 (1954).
7. DEMETRESCU, G.: Essai sur la détermination des épaisseurs des couches de la croûte. *Studia géoph. et géod.* 2 (1958).
8. DEMETRESCU, G.: Cutremurul de la 18 mai 1943 dîn muntii Vrancei. Date provizori, asúpra scoarţei terestre in regiunea Bucuresti. *Bul. Ştiinţ. Acad. R. P. R. Sectia St. mat. fis.* V. 2 (1953).
9. ENESCU, D.—RADU, C.: Structura scoartei terestre in regiunea Bucuresti, *St. Cerc. Astron. Seismol.* **III.** 1 (1958).
10. RADU, C.: Date asupra scoartei terestre în R. P. R. *St. Cerc. Astron. Seismol.* **III.** 2 (1958).
11. JOSIF, T.: Structura scoarţei terestre sub teritorul R. P. R. *St. Cerc. Astron. Seismol.* **III.** 2 (1958).
12. JOSIF, T.: Determinarea stratului sedimentar la statiile seismica romîne. *St. Cerc. Astron. Seismol.* **III.** 2 (1958).
13. JOSIF, T.: Determinarea aproximativa a adîncimii straturilor de discontinuitate in scoarţa terestre de subsolul Munteniei. *St. Cerc. Astron. Seismol.* **I** (1956).
14. JOSIF, T.: Focar seismic adinc in Cîmpia romîna. *St. Cerc. Astron. Seismol.* **V** 1 (1960).
15. DEMETRESCU, G.—ENESCU, D.: Grosimile straturilor scoarţei terestre dedúse dîn studiul cutremurului dîn 19 august 1949. *Com. Acad. R. P. R.* **X.** 10 (1960).
16. DEMETRESCU, G.—ENESCU, D.: Contribuţii la cunoaşterea scoarţei terestre in R. P. R. *St. Cerc. Astron. Seismol.* **V.** 1 (1960).
17. PETRESCU, G.—JOSIF, T.: Stúdiul cutremurului de la 15 octombrie 1953. *St. Cerc. Astron. Seismol.* **I.** 1 (1956).
18. PETKOV, I.—GREGOROVA, E.: Epizentren und seismisch aktive Linien in Bulgarien. Tagung der C. S. E. in Sept. 1962 in Jena.
19. *А. А. Борисов, Г. И. Круглякова:* О глубинной строении земной коры Закарпатья, Известия Академии Наук СССР Серия геофизическая 1962, II. Москва.
20. CONRAD, V.: Das Schwadorfer Beben vom 8. Oktober 1927. *Gerland's Beiträge zur Geophysik.* **VIII** (1932).
21. ZÁTOPEK, A.: A kind information in manuscript by the professor of the Karlovy University. Prague, 1963.
22. ULLMANN, W.: A kind information by the scientific collaborator of the Institut für Bodendynamik und Erdbebenforschung der Deutschen Akademie der Wissenschaften, Jena, 1963.

23. LIEBSCHER, H. I.: Reflexionshorizonte der tieferen Erdkruste im Bayerischen Alpenvorland, abgeleitet aus Ergebnissen der Reflexionsseismik. *Zeitschrift für Geophysik*, H. 4. (1962), Würzburg.
24. CALOI, P.: La crosta terrestre dagli Appennini all, Atlantico, ricostruita sulla base dei rilievi sismici. *Annali di Geofisica*, **XI**, N. 3—4 (1958).
25. DI FILIPPO, D.—PERONACI, F.: Struttura della crosta terrestre nelle Prealpi Lombardo-Venete, quale risulta dallo studio del terremoto del Garda del 19 febbraio 1960. *Annali di Geofisica*, **XIV**, N. 4 (1961).
26. ROKSANDIC, M. M.: Beleska o odnosu Bouguer-ovih anomalija i strukture Zemljine kore u Dinaridima jugozapadne Crne Gore. *Zavod. za Geoloska i Geofizicka Istrazivanja* V. II. Ser. C. T. II (1961).
27. ELIZONDO, I. R.: Prospection of Geothermal Fields and Investigations Necessary to Evaluate Their Capacity. United Nations Conference on New Sources of Energy. Rome, 1961.
28. ALFANO, L.: Geoelectrical Exploration for Natural Steam Near "Monte Amiata". *Quaderni di Geofisica Applicata.* **XXI** (1960).
29. VECCHIA, O.: Gravimetric Exploration for Natural Steam in Tuscany. *Quaderni di Geofisica Applicata.* **XXI** (1960).
30. CASSINIS, R.: Application of Seismic Methods to Geothermal Energy Exploration. *Quaderni di Geofisica Applicata.* **XXI** (1960).
31. LAMAR WORZEL, I. and TALWANI MANIK: Latest Results of Gravity Observations at Sea from Surface Ships. Symposium Geodesy in the Space Age. Ohio University, Columbus, Ohio. February 6—8, 1961.
32. NASON, R. D. and LEE, W. H. K.: Preliminary Heat-Flow Profile Across the Atlantic. *Nature*, **196**, N. 4858 (1962), 975.
33. BODVARSSON, G.: Utilization of Geothermal Energy for Heating Purposes, Etc. General Report for the United Nations Conference on New Sources of Energy. Rome, 1961. pp 20—21.
34. HEISKANEN, W. A.: Report on Gravimetric Computation of the Geoid and of the Gravity Anomaly Field and Related Quantities in Higher Elevations. *Travaux de l'Association Internationale de Géodésie.* **21**, Paris, 1962.
35. URRY, WM. D.: Significance of Radioactivity in Geophysics; Thermal History of the Earth. *Trans. Amer. Geophysical Union.* **30**, N. 2 (1949).
36. LEE, W. H. K.: Heat Flow Data Analysis. Department of Earth Sciences, University of California, San Diego, 1963. (Manuscript)
37. RICHTER, C. F. and GUTENBERG, B.: Seismicity of Southern California. California Institute of Technology, Division of Geological Sciences. Contribution N. 627 (1955).
38. TANNI, L.: On the Continental Undulations of the Geoid as Determined from the Present Gravity Material. *Annales Acad. Sc. Fennicae*, Ser. A. III. Geol.-Geogr. 16 (1948).
39. VECCHIA, O.: Sui principali caratteri strutturali dell'Italia Settentrionale dedotti dalle misure gravimetriche. *Riv. Geofisica Appl.* **XIII** (1952), N. 1, p. 37; 2 carte 1 : 4 000 000.
40. HOLOPAINEN, P. E.: On the Gravity Field and the Isostatic Structure of the Earth's Crust in the East Alps. *Ann. Acad. Sc. Fennicae, S. A. P.* **III** (1942), N. 12, p. 94.
41. HEISKANEN, W. A.: The Gravity Anomalies on the Japanese Island and in the Waters East of Them. *Ann. Acad. Sc. Fennicae, S. A.* **III**. Geol.-Geogr. 8 (1945).
42. VEITSMAN, P. S.—GALPERIN, E. I.—ZVEREV, S. M.—KOSMINSKAYA, R. M.—KRAKHSHINA. R. M.: The Stucture of the Earth's Crust in the Transition Zone from the Asiatic Continent to the Pacific Ocean. Intern. Geol. Congr. XXI. Session. Reports of Soviet Geologists. Moscow, 1960.
43. GIRDLER, R. W.: The Relationship of the Red Sea to the East African Rift System. *Quart. I. Geol. Soc.* London, **104** (1958), pp. 79—105.
44. LONGWEIL, CH. R. and FLINT, R. F.: Introduction to Physical Geology. Second Edition. New York, 1962. p. 402.
45. LEE, W. H. K. and MACDONALD, GORDON, J. F.: The Global Variation of Terrestrial Heat Flow. San Diego and Los Angeles, 1963.
46. KAULA, W. M.: Improved Geodetic Results from Camera Observations of Satellites. *J. Geophys. Res.* (1963) (In printing).
47. HERZEN, R. V.: Heat Flow Values from the South-Eastern Pacific. *Nature* **183** (1959), N. 4665, pp. 882—883.

GEOPHYSIKALISCHE UNTERSUCHUNG DER GEOTHERMISCHEN GEBIETE DER ERDE

V. SCHEFFER

ZUSAMMENFASSUNG

Die Karte der Erdkrustenmächtigkeiten der Zone der Karpatenbecken, welche auf Grund von seismologischen Daten zusammengestellt wurde, beweist, daß die regionalen Änderungen der geothermischen Tiefenstufe dieses Gebietes die Änderungen der Erdkrustenmächtigkeit widerspiegeln.

Die Untersuchung der Schwereanomalien, der seismologischen Verhältnisse, die Werte des Wärmestromes der anderen geothermischen Gebiete der Erde bringt uns zu der Feststellung, daß einige geothermische Gebiete nicht an eine Hochlage der Mohorovičičfläche, sondern an relative Erhebungen der über dieser liegenden Diskontinuitätsflächen gebunden sind.

Einige geothermische Zonen, welche sich auf Gebieten großer Bruchflächen von kontinentalem Ausmaße befinden, beweisen, daß sich dieselben entlang dieser Tiefbrüche gebildet haben.

INVESTIGATION GÉOPHYSIQUE DES ZONES GÉOTHERMIQUES DE LA TERRE

V. SCHEFFER

RÉSUMÉ

En étudiant la carte de l'épaisseur de la croûte terrestre dans la région des Bassins Carpathiques, construite sur la base de données séismologiques, ont peut constater que les variations du gradient géothermique suivent dans cette région les changements d'épaisseur de la croûte.

L'étude des anomalies de la gravitation, des relations séismologiques et des valeurs du flux géothermique des autres zones géothermiques de la Terre permet de constater que dans certains lieux, les régions à flux thermique plus élevé que le normal sont liées non pas à une profondeur modérée de la discontinuité Mohorovičič, mais à une élévation relative des surfaces de discontinuité supérieures.

Certaines zones géothermiques de la Terre, situées le long de fractures de dimensions continentales, prouvent que des zones géothermiques s'étaient formées dans les régions de telles fracteures profondes.

ГЕОФИЗИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ ГЕОТЕРМИЧЕСКИХ ЗОН ЗЕМЛИ

В. ШЕФФЕР

РЕЗЮМЕ

Изучение карты распределения мощностей земной коры, построенной для территории Карпатских бассейнов по данным сейсмологии, позволяет сделать вывод о том, что региональное изменение величины геотермического градиента, наблюдаемое в данном районе, следует изменению значений мощности земной коры.

Анализируя гравитационные аномалии, сейсмологические условия и величины теплового потока других геотермических зон Земли, можно установить, что районы с повышенными по сравнению с нормальными значениями теплового потока приурочены не к зонам с приподнятым залеганием горизонта Мохоровичича, а к относительным поднятиям более высоко залегающих границ разделов.

А некоторые геотермические зоны Земли континентального масштаба, располагающиеся по глубинным разломам, указывают на образование отдельных геотермических зон в зонах глубинных разломов.

ÜBER DIE ERDMAGNETISCHEN BEOBACHTUNGEN IM OBSERVATORIUM BEI NAGYCENK UND ÜBER DEREN AUSWERTUNG

Á. WALLNER

GEOPHYSIKALISCHES FORSCHUNGSLABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, SOPRON

[Eingegangen am 24. Okt. 1963]

Im bei Nagycenk liegenden Observatorium des Geophysikalischen Forschungslaboratoriums der Ungarischen Akademie der Wissenschaften finden seit 1960 regelmäßig erdmagnetische Registrierungen statt. Die Empfindlichkeit der beiden zur Registrierung der erdmagnetischen Elemente benützten Variometersysteme wurde so gewählt, daß diese für die nach Periodengruppen durchgeführten Ablesungen günstig sei. Die Absolutwerte der magnetischen Elemente werden vorläufig aus den im Erdmagnetischen Observatorium von Tihany des Geophysikalischen Institutes »Eötvös Lóránd« gemessenen Werten abgeleitet. Zwischen den beiden Observatorien werden jährlich zwei Verbindungsmessungen durchgeführt.

Zur Auswertung der erdmagnetischen Registrierungen wurde eine Methode entwickelt, die mit den Ergebnissen der Erdstromregistrierungen des Observatoriums b. N. einen guten Vergleich ermöglicht. Diese Methode gibt über die Verteilung der Variationen von verschiedenen Perioden ein gutes Bild. Zum Schluß werden einige Beispiele angeführt, um zu zeigen, im welchen Maße die magnetischen und tellurischen Ergebnisse vergleichbar sind.

*

Einleitung

Das bei Nagycenk liegende Observatorium des Geophysikalischen Forschungslaboratoriums der Ungarischen Akademie der Wissenschaften begann seine Arbeit im August 1957 zunächst mit Erdstromregistrierungen. Das Hauptziel des im IGJ erbauten Observatoriums ist die Lieferung von Daten zur Untersuchung des elektromagnetischen Feldes der Erde. Zu diesem Zweck war neben den Erdstrommessungen auch die Messung der erdmagnetischen Elemente und der atmosphärischen Elektrizität erforderlich. Als zweiter Schritt im Ausbau des Observatoriums begannen nach entsprechenden Vorarbeiten im Juni 1960 die regelmäßigen erdmagnetischen Registrierungen. Die regelmäßige Messung der Absolutwerte der erdmagnetischen Elemente wurde in der zweiten Hälfte des Jahres 1963 begonnen. Verbindungsmessungen mit dem Erdmagnetischen Observatorium in Tihany ermöglichten jedoch, daß die Absolutwerte auch in der Übergangsperiode mit noch brauchbarer Genauigkeit bestimmt werden konnten. Der Beginn unserer Messungen hat nicht nur die Genauigkeit erhöht, sondern auch zur gegenseitigen Kontrolle beigetragen.

Das Observatorium b. N. ($\varphi = 47°37{,}6'$ N; $\lambda = 16°43{,}2'$ *E Gr*) liegt im nordwestlichen Teil Ungarns, etwa 15 km östlich von Sopron, am Süd-

ufer des Fertő Sees. Über die bei der Auswahl des Ortes maßgebenden Bedingungen sowie über die allgemeine geophysikalische und geologische Lage berichteten ÁDÁM und VERŐ in ihrer Abhandlung [1].

Die Registriereinrichtungen

Die Variationen der erdmagnetischen Elemente werden durch zwei vom Dänischen Meteorologischen Institut gelieferte La Courschen Variometersysteme registriert. Die Empfindlichkeit des Ostsystems (No. 1) ist die gewöhnliche, die des Westsystems (No. 2) — insbesondere die der Variometer H und Z — ist größer. Die Empfindlichkeiten der einzelnen Variometer sind im ersten Teil der Tafel I angegeben. Die zwei Systeme mit

Tafel I

System	Empfindlichkeit			Temperaturgang der Basislinien		
	D'/mm (γ/mm)	H γ/mm	Z γ/mm	D	H γ/°C	Z γ/°C
No. 1 (Ost) ...	0,95 (5,69)	4,96	4,67	—	+1,37	−0,7
No. 2 (West) .	0,88 (5,26)	1,68	1,45	—	+5,0	+6,1

verschiedenen Empfindlichkeiten ergänzen einander gut. Die Auslesungen erfolgen bei größerer Aktivität von den unempfindlicheren, in ruhigen Abschnitten dagegen von den empfindlicheren Aufnahmen, wodurch die Arbeit schneller und genauer wird.

Das zur Unterbringung der Registriereinrichtungen dienende Variometerhaus (Bild 1) wurde mit dicken Wänden am Abhang eines Hügels aufgebaut. Dadurch kann darin der tägliche Temperaturgang auf einige Zehntel Grad herabgesetzt und kann so vernachlässigt werden. Der jährliche Gang in den beiden Jahren 1961 und 1962 war 15° C. Der Temperaturgang von 1° C verursacht bei den Variometern eine Änderung der Basislinien-Werte, deren Größe in dem zweiten Teil der Tafel I angegeben ist. Die La Courschen Variometer für die Horizontal- und Vertikalkomponenten sind mit einer optischen Temperaturkompensierung versehen. Ein Prisma ist auf eine Bimetallplatte befestigt und dieses bewegt sich proportional der Temperaturänderung. Es ändert dabei den Weg der vom Spiegel des Magnets reflektierten Lichtmarke derart, daß der Temperaturgang des Magnets dadurch kompensiert oder wenigstens vermindert wird. Bei dem System 1 ist die Kompensation ausreichend: Variometer Z_1 ist sogar etwas überkompensiert. Dagegen ist das System 2 nur im geringen Maße kompensiert und die Kompensation kann nicht mehr vergrößert werden, da in diesen Instrumenten für größere Bimetallplatten kein Platz vorhanden ist.

Bei den seit etwa 3 Jahren arbeitenden Variometern ist eine langsame Veralterung der Magnete bemerkbar, worauf man aus der Verminderung der Empfindlichkeiten um einige Prozente und aus dem langsamen Verschieben der Basislinien-Werte schließen kann. Diese Erscheinungen zeigen eine exponentiell abnehmende Tendenz.

Bild 1. Die beiden für magnetische Messungen bestimmten Gebäude im Observatorium bei Nagycenk. Im Vordergrund das Gebäude für Absolutmessungen

Die Bestimmung der Absolutwerte

Im Erdmagnetischen Observatorium des Geophysikalischen Institutes Loránd Eötvös ($\varphi = 46°\ 54{,}0'$ N; $\lambda = 17°53{,}6'$ *E Gr*) in Tihany werden seit 1954 die Absolutwerte der magnetischen Elemente regelmäßig (wöchentlich) gemessen[1]. Beim Entwurf der Instrumentation des Observatoriums b. N. wurde dieser Umstand in Betracht gezogen. Danach sollen die Bestimmungen der Absolutwerte mit Instrumenten QHM und BMZ aus Dänemark erfolgen (QHM soll auch als Deklinatorium dienen), und es ist geplant, diese Instrumente jährlich in Tihany, in größeren Zeitabschnitten auch in anderen Observatorien zu eichen. Dazu sei noch bemerkt, daß die magnetischen Arbeiten

[1] Von den Beobachtungen der zeitlichen Änderungen des erdmagnetischen Feldes in Ungarn ist eine geschichtliche Zusammenfassung in [2] enthalten.

in unserem Institut in erster Linie auf die Untersuchung der magnetischen Variationen selbst gerichtet sind und dazu eine Bestimmung der Absolutwerte mit einer Genauigkeit von einigen γ bzw. Sekunden nicht erforderlich und derzeit nicht beabsichtigt ist.[2] Die entsprechende magnetische Instrumentation des Observatoriums wird im laufenden Jahr beendet werden.

Die laufenden Messungen im Observatorium von Tihany ermöglichten es, daß auch in der Zwischenzeit die Absolutwerte von Nagycenk mit noch brauchbarer Genauigkeit ermittelt werden konnten. Die Umrechnung wurde jeden Tag für den Mittelwert der ersten Stunde nach Mitternacht mitteleuropäischer Zeit durchgeführt. Dieser Zeitpunkt schien darum der günstigste

Tafel II

Ergebnisse der Verbindungsmessungen zwischen Nagycenk und Tihany

Zeitpunkt Mittelwert der 1. Stunde	Deklination			Horizontal-Intensität in γ			Vertikal-Intensität in γ		
	N	T	N–T	N	T	N–T	N	T	N–T
10. 5. 1961	−0°24,5′	−0°00,5′	−0°24,0′	20 853	21 248	−395	42 071	41 741	+331
16. 11. 1961	−0°18,6′	+0°05,0′	−0°23,6′	20 831	21 223	−392	42 077	41 759	+318
27. 6. 1962	−0°18,8′	+0°04,9′	−0°23,7′	20 838	21 242	−404	42 091	41 767	+324
12. 12. 1962	−0°11,1′	+0°10,7′	−0°21,7′	20 813	21 210	−397	42 125	41 801	+328

N = in Nagycenk gemessene Werte
T = in Tihany gemessene Werte
N–T = die Differenzen zwischen den Messungen beider Observatorien

zu sein, weil zu dieser Zeit in jedem der Elemente die regelmäßige zeitliche Änderung die geringste ist.

Zur Bestimmung der Differenz zwischen den beiden Observatorien werden jährlich zweimal Verbindungsmessungen vorgenommen. Die Beobachtungen werden zu diesem Zwecke mit Hilfe von weiteren QHM und BMZ Instrumenten bzw. mit Hilfe eines magnetischen Reisetheodolites vom Typ Wild-Askania durchgeführt. Diese Instrumente werden in gegenseitiger Zusammenarbeit freundlicherweise vom Observatorium Tihany zur Verfügung gestellt. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse der bisherigen Verbindungsmessungen enthält Tafel II. Daraus ist zu entnehmen, daß die Streuung der Differenzen überall unter 15 γ bzw. 2,5′ ist. Bei der Deklination gilt die Ostabweichung als positiv.

[2] Die Absolutwerte der magnetischen Elemente im Observatorium b. N. werden von Stunde zu Stunde in Form eines Jahrbuches nicht veröffentlicht. Bei Anfrage stellt das Laboratorium diese Daten aber gerne zur Verfügung.

Die Auswertung der Registrierungen

Für die Erdstromregistrierungen entwickelten ÁDÁM und VERŐ [1] eine Auswertungsmethode, mit deren Hilfe man von den zeitlichen Änderungen in den Perioden und Amplituden der Variationen ein gutes Bild bekommen kann. Es schien zweckmäßg, auch für die Auswertung der magnetischen

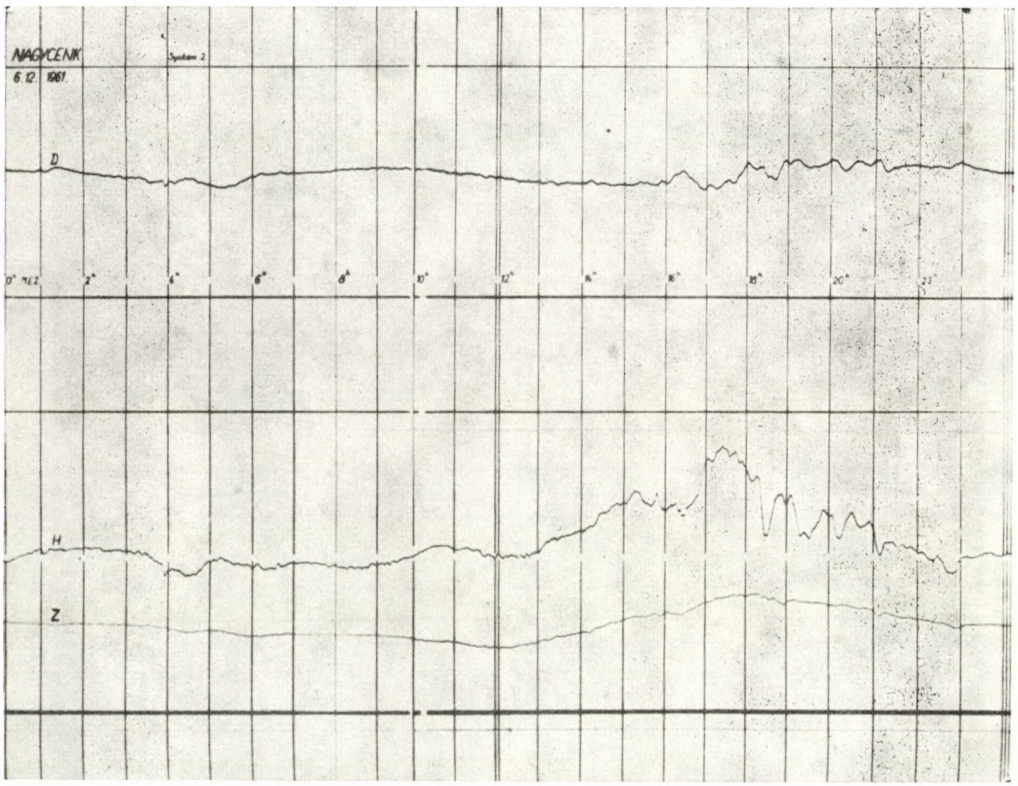

Bild 2. Magnetische Registrierung, aufgenommen im Observatorium b. N. am 6. 12. 1961

Registrierungen eine Methode mit derselben Zielsetzung auszuarbeiten, wodurch die Ergebnisse der tellurischen und magnetischen Auswertung miteinander vergleichbar und die Untersuchung der Eigenschaften der Variationen ermöglicht werden.

Im Bild 2 zeigen wir beispielsweise eine magnetische Registrierung, aufgenommen am 6. 12. 1961, Tafel III zeigt das Verarbeitungsblatt für denselben Tag.

Das Variationsspektrum wurde auf fünf Periodengruppen aufgeteilt, deren Grenzen (bei 2′, 6′, 12′, 24′ und 60′) mit denen der für die Erdströme

Tafel

Magnetisches

6. 12. 1961.

		0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11	11–12
D	1 (0′–2′)	1	—	1	1	1	1	—	—	1	—	1	1
	2 (2′–6′)	1	—	—	1	1	—	—	1	—	1	1	1
	3 (6′–12′)	—	—	—	4	1	1	—	—	1	2	—	—
	4 (12′–24′)	—	—	3	—	—	1	3	—	1	1	—	3
	5 (24′–1h)	10	18	—	12	20	38	—	—	—	4	8	8
	Stundenwerte System 2	380	378	395	415	419	427	393	389	379	373	385	400
	M		2			3			1			1	
	Stundenwerte System 1	268	265	283	300	305	317	280	276	266	268	272	289
H	1 (0′–2′)	—	—	—	1	1	1	1	—	—	2	2	2
	2 (2′–6′)	2	0	1	—	—	—	—	1	2	1	2	1
	3 (6′–12′)	—	—	2	4	2	4	2	2	2	3	—	—
	4 (12′–24′)	—	4	2	4	2	2	3	—	3	—	—	4
	5 (24′–1h)	38	—	4	20	60	28	20	7	15	—	22	15
	Stundenwerte System 2	948	929	926	958	1005	973	990	980	988	970	925	931
	M		0			1			0			1	
	Stundenwerte System 1	570	562	561	577	590	580	586	581	585	578	562	565
Z	1–3 (0′–12′)	1	—	1	1	2	1	—	—	1	1	1	1
	4 (12′–24′)	—	—	2	1	—	1	1	—	—	1	1	2
	5 (24′–1h)	—	3	—	5	12	12	8	—	—	—	2	7
	Stundenwerte System 2	331	328	328	320	303	295	289	290	289	285	269	252
	M		0			0			0			0	
	Stundenwerte System 1	361	360	360	359	352	350	349	350	349	349	343	339

Die Tabelle enthält die direkt

bestimmten fünf Periodengruppen identisch sind. Den magnetischen Registrierungen wird für jede Stunde in jeder vorhandenen Periodengruppe die mittlere Amplitude entnommen. Diese auf Zehntelmillimeter geschätzten Werte werden in die Reihen 1–5 (siehe Tafel III) eingeschrieben. In der Vertikalkomponente wurden die ersten drei Gruppen zusammengezogen. Den Grund dazu gibt das relativ ruhige Verhalten dieser Komponente, wodurch eine Schätzung der Werte in den niedrigen Perioden illusorisch sein würde. Dazu kommt

III

Verarbeitungsblatt

12–13	13–14	14–15	15–16	16–17	17–18	18–19	19–20	20–21	21–22	22–23	23–24	Mittelwert bzw. Summe
2	1	1	2	2	1	2	1	1	1	—	—	0,9
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	0,4
1	—	—	2	1	—	—	2	—	—	2	1	0,7
—	4	3	—	—	12	5	—	—	1	—	—	1,5
3	—	—	12	55	75	65	29	30	35	18	25	19,4
419	426	428	428	412	417	378	357	358	362	360	371	393,7
	1			6			5			3		22
302	312	315	316	299	304	269	247	245	251	249	261	281,6
3	3	1	3	2	1	2	1	2	2	1	—	1,3
1	—	1	1	2	—	—	—	—	1	—	2	0,7
4	2	2	—	4	—	—	7	—	4	—	1	1,9
—	—	—	12	—	20	12	2	—	—	12	—	3,4
12	20	30	60	110	60	170	140	100	45	65	15	44,8
942	881	795	740	740	577	745	815	830	913	967	942	892,1
	3			5			5			3		18
570	548	515	498	497	439	493	520	524	551	572	562	549,4
1	1	—	2	1	3	2	1	2	1	—	1	1,0
2	2	3	2	1	1	3	2	—	—	—	—	1,0
8	—	—	10	22	10	20	8	9	12	12	8	7,0
250	282	320	352	373	423	420	407	389	357	332	329	325,5
	1			1			0			0		2
338	346	357	370	374	390	390	385	379	368	360	358	359,8

ausgelesenen Werte in Zehntelmillimetern

noch, daß bei den Erdströmen keine Vertikalkomponente registriert wird, wodurch diese Komponente beim Vergleich zwischen Magnetik und Erdströmen eine kleinere Rolle spielt. Die Auslesungen der ersten Periodengruppe in H und D können auch teilweise nur geschätzt werden, und die Ergebnisse sind nur qualitativ. Auf dieses Problem kehren wir noch zurück.

Es muß hier darauf hingewiesen werden, daß die ins Verarbeitungsblatt eingeschriebenen mittleren Amplituden sich immer auf die volle Stunde

beziehen, auch dann, wenn die betreffende Periodengruppe nur in einem Teil der Stunde vorkommt. Z. B. wenn eine Gruppe nur in einem Drittel der Stunde auftritt, so wird ins Verarbeitungsblatt das Drittel der für diese Gruppe ausgelesenen mittleren Amplitude eingeführt.

In die Reihen 6 und 8 kommen die den Aufnahmen beider Variometersysteme entnommenen Stundenwerte, gemessen von der entsprechenden Basislinie. Der Parallelgang beider Systeme kann dadurch ständig kontrolliert werden.

Zur Charakterisierung der Aktivität der magnetischen Elemente bestimmen wir dreistündlich die Kennwerte M, die die Werte in ganzen Zahlen

Tafel IV

Die Grenzwerte der magnetischen Kennwerte M verglichen mit den internationalen magnetischen K-Werten

Kennwert	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Deklination ...	.. 7	..14	..21	..28	..35	.. 42	.. 49	.. 56	.. 63	..
H-Komponente	.. 7	..14	..21	..28	..35	.. 42	.. 49	.. 56	.. 63	..
Z-Komponente	..5,5	..11,0	..16,5	..22,0	..27,5	.. 33,0	.. 38,5	.. 44,0	.. 49,5	..
Internationale Skale der *K*-Werte für Niemegk	..5	..10	..20	..40	..70	..120	..200	..330	..500	..

Sämtliche Werte der Tafel sind in γ angegeben.

von 0 bis 9 annehmen können (Tafel III. Reihe 7). Für die Kennwerte M wurden die Grenzen (höchste und niedrigste Werte der Differenzen zwischen maximalem und minimalem Ausschlag) so gewählt, daß die Häufigkeit der M Werte mit denen der bei den Erdströmen bestimmten K_t Werte gut übereinstimme (Tafel IV). Die Kennwerte werden für jedes Element gesondert bestimmt. Die Werte sind überall in γ zu verstehen, wobei bei der Deklination $7\ \gamma = 1{,}17'$ sind. Die untere Reihe zeigt die Skala der internationalen magnetischen K-Werte für Niemegk bzw. Fürstenfeldbruck.

Es muß hier bemerkt werden, daß die Entnahme immer durch dieselbe Person erfolgte, wodurch der persönliche Fehler auf annähernd gleichem Niveau gehalten werden kann und in den Differenzen nicht wirksam wird. Dies gilt insbesondere für die Entnahme der mittleren Amplituden.

Der nächste Schritt der Verarbeitung ist die Zusammenfassung der Daten und die Bestimmung von Mittelwerten. Neben den täglichen Mittelwerten wird monatlich für jede Stunde die mittlere Amplitude berechnet. So bekommen wir für jeden Monat in den Periodengruppen einzeln die durch-

schnittliche Änderung der mittleren Amplituden. Ähnlich wird der monatliche Durchschnitt der Tagesgänge (durch Ermittlung der Mittelwerte aus den Reihen 6 bzw. 8 in Tafel III) gebildet. Die durchschnittliche Änderung der mittleren Amplituden in den einzelnen Periodengruppen sowie der Durchschnitt der Tagesgänge werden auch für das ganze Jahr und für die ausgewählten, als ruhig (Q) bzw. als gestört (D) bezeichneten Tage berechnet.

Für die Auswahl dieser ruhigen (Q) und gestörten (D) Tage gilt folgende Regel: Auf Grund der magnetischen und tellurischen Kennwerte bezeichnen wir einen Tag dann als gestört, wenn die größte der Charakterzahlen nur in einem dreistündlichen Abstand auf 3 sinkt, sonst aber überall größer ist. Als ruhig wird jener Tag bezeichnet, an welchem die größte der Charakterzahlen den Wert 3 nicht erreicht. Bestimmend für einen dreistündlichen Abstand ist immer der größte der fünf Charakterzahlen (2 tellurische und 3 magnetische). Mit dieser Methode der Auswahl bekamen wir für 1961, 13 D und 87 Q Tage.

Die für die Monate, für das Jahr, sowie für die gestörten und ruhigen Tage berechneten Mittelwerte werden in Tabellen zusammengefaßt und im Jahresbericht des Laboratoriums regelmäßig in Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Series Geodaetica et Geophysica veröffentlicht. Außer diesen Werten enthält der magnetische Teil des Berichtes die durchschnittlichen Tagesgänge für die Monate, für das Jahr sowie für die D und Q Tage und die ersten sechs Glieder deren harmonischer Analyse. Das Laboratorium veröffentlicht diese Daten erstmals für das Jahr 1961.

Vergleich zwischen den magnetischen und tellurischen Ergebnissen

In der Abhandlung [3] wurde versucht, die für die sieben Monate zwischen Juni und Dezember 1960 erhaltenen magnetischen Ergebnisse mit den entsprechenden tellurischen Resultaten zu vergleichen. Wir möchten hier diesen einige Beispiele entnehmen, um zu zeigen, wieweit ein Vergleich zwischen den entsprechenden Periodengruppen möglich ist.

Im Bild 3 sieht man den täglichen Verlauf der magnetischen und tellurischen dreistündlichen mittleren Amplituden im Durchschnitt der sieben Monate von 1960. Der induktive Zusammenhang zwischen Magnetik und Erdströmen wurde dabei in Betracht gezogen, so daß die tellurische Komponente E_x mit der magnetischen H_y (Deklination) verglichen wird (linke Kolonne des Bildes 3) und die tellurische E_y zur magnetischen H_x (Horizontalintensität) parallelgestellt ist (rechte Kolonne des Bildes 3).

Bei Betrachtung des Bildes 3 sieht man, daß in den Periodengruppen 1—3 und 5 die Kurven einen ähnlichen Verlauf zeigen, dagegen kann man in der Gruppe 4 keine Ähnlichkeit feststellen. Diese Unregelmäßigkeit kann darauf zurückgeführt werden, daß viele magnetische Variationen von größerer

Periode als 24, aber kleinerer als 48 Minuten, bei den Erdströmen als Ableitungen mit halber Periode in Erscheinung treten und deshalb in der 4. Gruppe ausgelesen werden. In der 5. Gruppe, wo die mittleren Amplituden wesentlich

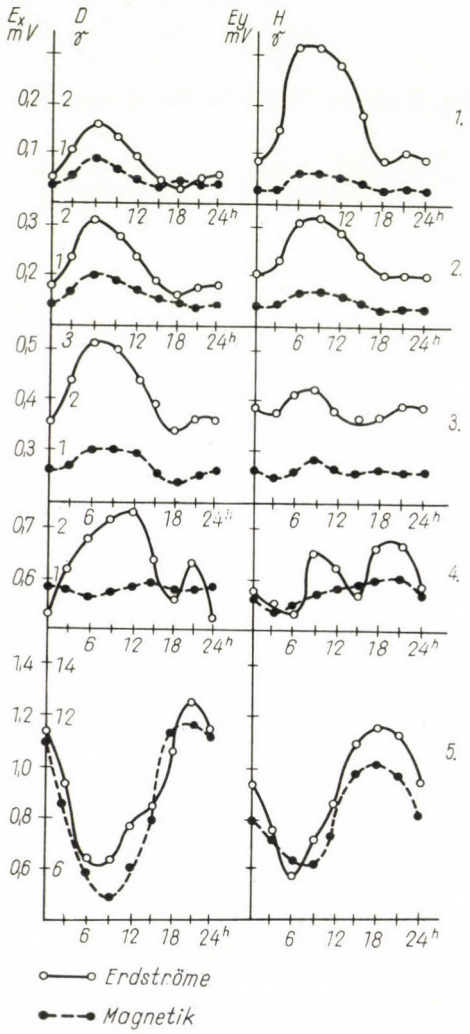

Bild 3. Täglicher Verlauf der magnetischen und tellurischen dreistündlichen mittleren Amplituden im Durchschnitt des Zeitabschnittes Juni—Dezember 1960, in den fünf Periodengruppen

größer sind (häufigere Variationen mit größeren Amplituden), ist diese Erscheinung kaum zu bemerken.

Wie schon oben erwähnt wurde, kann man bei der ersten Gruppe hauptsächlich über die Häufigkeit des Vorkommens ein qualitatives Bild bekommen. Die Amplituden sind nämlich meistens sehr klein und können

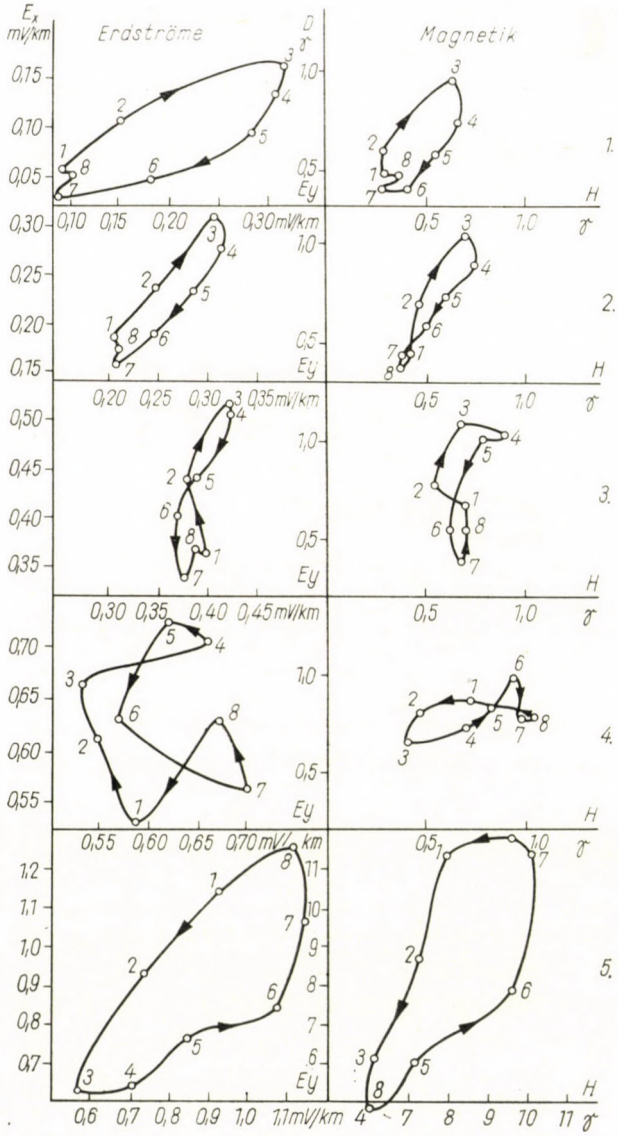

Bild 4. Quasivektordiagramm der magnetischen und tellurischen dreistündlichen mittleren Amplituden im Durchschnitt des Zeitabschnittes Juni—Dezember 1960

nur geschätzt werden. Die exaktere Bestimmung dieser Gruppe gehört in den Bereich einer Registrierung mit größerem Vorschub und empfindlicheren Instrumenten. Eine solche Art von Registrierung wird im Observatorium derzeit vorbereitet.

Man kann den Zusammenhang plausibler machen, wenn man die Werte der mittleren Amplituden von Bild 3 in der Form eines sogenannten Quasi-

vektordiagrammes zeichnet (Bild 4). Auch hier sind wegen des induktiven Zusammenhanges die magnetischen Komponenten miteinander vertauscht. Die Richtung der Umdrehung ist in beiden Fällen dieselbe, sie zeigen in den ersten zwei Gruppen in die Richtung des Uhrzeigers, in den Gruppen 3 und 4 sind Umschlingelungen bemerkbar, bis dann Gruppe 5 eine dem Uhrzeiger entgegengesetzte Richtung annimmt. Das bedeutet mit anderen Worten, daß in der ersten Tageshälfte allgemein E_x bzw. D mit relativ größerer Amplitude zum Vorschein kommt als E_y bzw. H; in der zweiten Tageshälfte

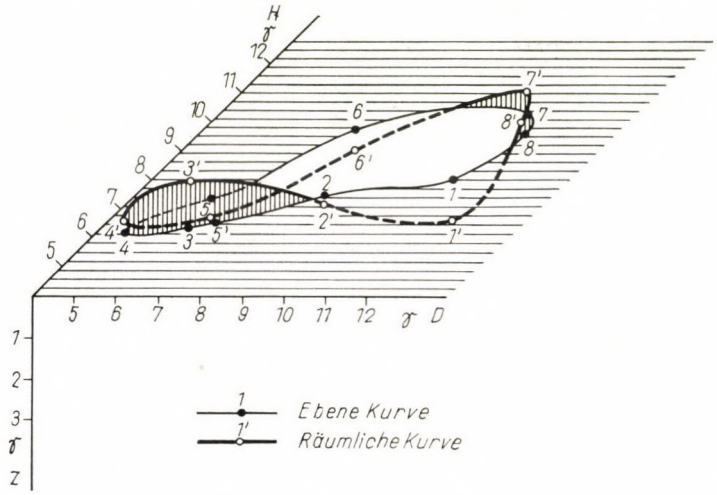

Bild 5. Räumliche Darstellung der mittleren Amplituden der 5. Periodengruppe (dicke Linie) sowie deren ebene Projektion (das Quasivektordiagramm H, D)

ist dieses Verhalten umgekehrt. In den Gruppen 1 und 2 fällt die maximale Aktivität in die Morgenstunden, in 5 dagegen vor Mitternacht.

Im Bild 5 wurde das räumliche Bild der mittleren Amplituden der Gruppe 5 dargestellt (dicke Linie). Die ebene Projektion (das Quasivektordiagramm H, D) wurde auf das Durchschnittsniveau der Vertikalkomponente aufgetragen (dünne Linie). Aus der Abbildung sieht man gut, daß die räumliche Kurve von ihrer ebenen Projektion nicht wesentlich abweicht, das heißt, daß die mittlere Amplitude von Z eine niedrigere Größenordnung hat als die von H und D. Man kann auch bemerken, daß die mittleren Amplituden von Z in den Vormittags- und Abendstunden kleiner, in den frühen Morgenstunden sowie nachmittags größer sind als ihr Durchschnittsniveau.

In unserem Laboratorium bilden die Untersuchungen des elektromagnetischen Feldes der Erde, namentlich die Untersuchung der Ähnlichkeiten und Abweichungen im primären Feld, sowie der erdphysischen Parameter, die auf das Entstehen des sekundären Feldes (Rückwirkung) einen Einfluß

haben, einen wichtigen Teil der Arbeiten. Die Verarbeitung der magnetischen Registrierungen mit Hilfe der hier erläuterten Methode kann zu diesen Arbeiten einen guten Beitrag leisten. Die Untersuchung der statistischen Verteilungen bzw. Häufigkeiten durch eine längere Periode (z. B. durch einen Sonnenfleckenzyklus von 11 Jahren) kann der Ausgangspunkt weiterer Forschungen sein.

SCHRIFTTUM

1. Ádám, A.—Verő, J.: Das Erdstromobservatorium bei Nagycenk, *Geofisica pura e applicata.* **39** (1958/I.), 126—151.
2. Barta Gy.: Földmágnesség (Erdmagnetismus). Akadémiai Kiadó, Budapest 1957.
3. Wallner Á.: A Nagycenk melletti obszervatórium földmágneses feldolgozási módszerei és az eredmények összehasonlítása a tellurikus adatokkal (Die magnetischen Verarbeitungsmethoden im Observatorium b. N. und der Vergleich der Ergebnisse mit den tellurischen Daten). *Magyar Geofizika* **4** (1963), 177—186.

ON OBSERVATIONS RELATED TO TERRESTRIAL MAGNETISM MADE IN THE OBSERVATORY NEAR NAGYCENK AND THE EVALAUATION OF SAME

A. WALLNER

SUMMARY

In the Observatory of the Geophysical Research Laboratory of the Hungarian Academy of Sciences near Nagycenk systematic observations related to terrestrial magnetism are in progress since 1960. To register variations of elements of terrestrial magnetism, variometer systems were set up, the sensitiveness of which is advantageous for reading off observations according to groups of periods. The absolute values of elements of terrestrial magnetism are for the time being deduced on the base of values measured in the observatory of terrestrial magnetism belonging to the "Eötvös Loránd Geophysical Institute" at Tihany.

For the evaluation of registrations related to terrestrial magnetism a system has been worked out, making a good comparison to results of registrations related to telluric currents, made by the observatory near Nagycenk, possible. This method gives a good picture on the distribution of variations of different periods. Figures presented at the end of this paper enlighten the question to which degree magnetic and telluric results could be compared to each other.

DE L'ÉVALUATION DES OBSERVATIONS GÉOMAGNÉTIQUES FAITES A L'OBSERVATOIRE DE NAGYCENK

Á. WALLNER

RÉSUMÉ

La Laboratoire de Recherches Géophysiques de l'Académie des Sciences de Hongrie effectue régulièrement, depuis 1960, des observations géomagnétiques dans son observatoire situé près de Nagycenk. En vue de l'enregistrement des variations des éléments géomagnétiques ont été établis des systèmes de variomètres, dont la sensibilité permet avantageusement la lecture des différents groupes de périodes. Les valeurs absolues des éléments géomagnétiques sont momentamément déduites des valeurs mesurées à l'observatoire géomagnétique de l'Institut Géophysique Lóránd Eötvös, à Tihany. Entre les deux observatoires, on effectue chaque année des mesures de liaison.

Pour l'évaluation des enregistrements géomagnétiques, on a élaboré une méthode dont les résultats sont facilement comparables à ceux des enregistrements de courant tellurique faits à l'observatoire de Nagycenk. Cette méthode donne une image fidèle de la répartition des variations de différentes périodes. Des figures présentées à la fin de l'étude montrent en quelle mesure les résultats magnétiques et telluriques sont comparables.

О НАБЛЮДЕНИЯХ ЗЕМНОГО МАГНЕТИЗМА В ОБСЕРВАТОРИИ В РАЙОНЕ НАДЬЦЕНК И ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

А. ВАЛЛНЕР

РЕЗЮМЕ

В обсерватории Геофизической исследовательской лаборатории Академии наук Венгрии, расположенной в районе Надьценк, начиная с 1960 г. производятся систематические наблюдения земного магнетизма. Для регистрации вариаций элементов земного магнетизма установлены такие системы вариометров, чувствительность которых является подходящей для отсчета по группам периодов. Абсолютные значения элементов земного магнетизма временно выводятся из значений, измеренных в обсерватории земного магнетизма Геофизического института им. „Eötvös Loránd" в Тихане. Между упомянутыми выше обсерваториями два раза в год проводятся связующие измерения.

Для оценки регистратов земного магнетизма разработан метод, который может быть хорошо сравнен с результатами регистраций земного тока в обсерватории в районе Надьценк. Этот метод дает подхоящий обзор о распределении вариаций различного периода. Приведенные в конце работы рисунки показывают, что в какой мере можно сравнить результаты магнитных и теллурических измерений.

RICHTUNGSABNAHMEN HOHER GENAUIGKEIT IM BERGBAUGEBIET

Prof. Dr. KARL NEUBERT

BERGAKADEMIE, FREIBERG

[Eingegangen am 16. November 1963]

Im bergbaulichen Einwirkungsgebiet finden Bodenbewegungen statt. Das trigonometrische Punktfeld ist deshalb Lageänderungen unterworfen. Es ist jedoch möglich, mit Methoden der Vorausberechnung die Horizontalverschiebung zu bestimmen. Diese Werte können zur Neuberechnung veränderter Winkel benutzt werden. Ferner läßt sich bei Kenntnis der Richtung und Größe der horizontalen Punktwanderung eine geeignete Auswahl von Punkten treffen, die zur Übertragung von Richtungen und Koordinaten nach unter Tage geeignet sind. Es werden die verschiedenen Möglichkeiten zur wirtschaftlichen Neubestimmung markierter Punkte und Richtungen mit Sekundentheodolit, Tellurometer und Kreisel untersucht.

Die dem Bergbau gestellten Aufgaben sind im Verlauf des 20. Jahrhunderts beachtlich schwieriger geworden als in früheren Zeiten. Die Ursachen hierfür sind mannigfaltiger Art. Die leicht greifbaren Lagerstätten sind meist abgebaut, so daß der Bergbau mit jedem Jahr in größere Teufen vorrücken muß. Auch erfolgt die Gewinnung bereits unter dem Meeresboden oder in Gebieten ewiger Eisbedeckung. Die Ansprüche in technischer und ökonomischer Hinsicht sind bedeutend entwickelt worden und die Rücksicht auf die Verwertbarkeit einer beachtlich größeren Zahl von Rohstoffen innerhalb der Erdrinde erschwert die bergbaulichen Arbeiten. Die Erstreckung der Grubenfelder wird immer größer, um den wirtschaftlichen Nutzen garantieren zu können und dergleichen mehr.

Im markscheiderischen Aufgabengebiet sind es die Orientierungsmessungen, die den Fachmann immer wieder vor neue Probleme stellen und ihn zu höheren Leistungen anspornen. Das Grubengebäude muß aus Sicherheitsgründen gegen die Erdoberfläche sowie die bergbaulichen Hohlräume sollen unter sich mit einer Genauigkeit orientiert werden, die den technischen Anforderungen entspricht [1]. In vielen Fällen der Praxis wird eine Maximalabweichung in Größenordnung einer halben Streckenbreite von der wahren Lage als ausreichend genau angesehen, die einem Betrag von 1,20 bis 1,60 m entspricht. Der mittlere Fehler dürfte dann im ungünstigsten Fall bis zu einem Drittel dieses Betrages, also 0,40 bis 0,53 m anwachsen. Er kann aber auch unter Beachtung des Grenzfehlers

$$m_g = m_0 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n-1}}\right),$$

wenn n sehr groß ist, bis an die Hälfte heranreichen, d. s. 0,60 bis 0,80 m. Für

die Richtungsangabe genügt im allgemeinen auch heute noch die von HAUSSMANN gestellte Forderung mit $\pm 2^c$ ($\pm 1'$), die jedoch keine Gültigkeit für spezifische Aufgabenstellungen besitzt. Der totale Orientierungsfehler setzt sich aus mehreren Gruppen von Fehlern zusammen, bestehend aus

1. übertägiger Triangulation,
2. Anschlußmessung,
3. Schachtlotung,
4. Polygonierung.

Die letzten drei Kategorien nehmen bereits einen so hohen Anteil des Gesamtfehlers für sich in Anspruch, daß für den ersten kein größerer Betrag übrig bleibt. Im folgenden wollen wir uns ausschließlich mit diesem Fehlereinfluß befassen.

Bei trigonometrischen Punkten des Landesnetzes darf nach den Ergänzungsbestimmungen von 1931 oder dem Festpunkterlaß von 1940 die Länge der großen Halbachse der Fehlerellipse 15 cm nicht überschreiten. Dieser Forderung ist dann entsprochen, wenn die mittleren Fehler für den Hoch- und Rechtswert unter 10 cm bleiben, während Punkteinschaltungen mittlere Richtungsfehler bis $\pm 25^{cc}$ zur Folge haben können [2]. Bei 3 km Entfernung der Grenzbaue vom Schachtansatzpunkt entstehen allein durch diese Richtungsunsicherheit Lagefehler von rund 12 cm. Dieses Beispiel zeigt die große Bedeutung einwandfreier Richtungsabnahmen aus dem trigonometrischen Festpunktfeld. Es kann deshalb nicht gleichgültig sein, wenn die Richtungsermittlung aus Punkten verschiedener Ordnung hergeleitet wird. Auch bestehen in mehreren Bergbaurevieren uneinheitliche Netze, die zeitabschnittsweise verdichtet worden sind. Bei Übergängen konnten Widersprüche bis zu 40 cm nachgewiesen werden. Es kommt hinzu, daß trigonometrische Punkte infolge unzureichender Gründung oder durch rezente Erdkrustenbewegung Lageveränderungen unterworfen sind. Es ist deshalb vor Ausführung von Vermarkungen ein geologisches Gutachten einzuholen. Erfahrungswerte für Wiederholung von Messungen zur Erfassung von Veränderungen bewegen sich bei Höhennetzen in Abständen von 30 Jahren, während sich bei trigonometrischen Punktsystemen eine Intermittenz von 90 Jahren herausgebildet hat. Diese Faustregel besitzt keine Gültigkeit für geologisch unruhige Gebiete der Erdkruste. In diesem Fall müssen entsprechend häufiger Messungen ausgeführt werden.

Auch in Bergbaurevieren ist eine Wiederholung in kurzen Zeitabständen erforderlich, da die bergmännische Hohlraumbildung den darüber befindlichen Gebirgskörper zerrüttet und das an der Erdoberfläche vorhandene Punktnetz sowohl in vertikaler wie auch in horizontaler Lage verändert.

Markscheiderische Messungen haben im Zwickau-Oelsnitzer Revier Punktwanderungen in der Vertikalen bis etwa 20 m und in der Horizontalen von mehreren Metern feststellen können. Ähnliche Beträge wurden auch in

anderen Steinkohlenrevieren nachgewiesen. Der Nullpunkt des lokalen sächsischen Steinkohlenbeckens Zwickau-Oelsnitz z. B. hat im Laufe eines knappen Jahrhunderts eine Horizontalwanderung von 3,6 m ausgeführt. Aber auch im Kali-, Braunkohlen- und Erzbergbau können Punktverschiebungen größeren Ausmaßes aufgezeigt werden. Obwohl der Kammer-Pfeilerabbau im Kalibergbau ursprünglich mit der Absicht ausgeführt wurde, das Hangende in seiner ursprünglichen Lage zu erhalten, sind horizontale Punktbewegungen bis zu einem Meter aufgetreten.

Umfangreiche markscheiderische Messungen zur Erfassung von Bodenbewegungen im bergbaulich beeinflußten Gebiet führten zur Erkenntnis von Gesetzmäßigkeiten. Heute ist die verhältnismäßig junge Wissenschaft der Bergschadenkunde soweit entwickelt, daß Größenordnung und Richtung der Horizontalverschiebungskomponente mit großer Zuverlässigkeit vorausberechnet werden können, wenn der Abbauzuschnitt und spezielle bergbauliche Angaben wie Mächtigkeit, Versatz, Gebirgszusammensetzung, Abbaufortschritt usw. feststehen. Mit den entwickelten Methoden läßt sich indirekt auch der Nachweis für die Richtigkeit der Vorausberechnung im Vergleich zu den nachträglich geodätisch gemessenen Werten erbringen.

Das bergmännische Riß-, Plan- und Kartenwerk ist Grundlage und Ausdruck für die Erfassung von Punktwanderungen im Bergbaugebiet. Mit dieser Kenntnis läßt sich eine geeignete Auswahl von trigonometrischen Punkten treffen, die der Aufgabenstellung Rechnung trägt. Inseln innerhalb des Bergbaufeldes, die infolge Vertaubung oder Verarmung nicht abgebaut werden, ausreichende Sicherheitspfeiler, sogenannte Bergfesten, ferner Reviere, die vom Abbau noch nicht beeinflußt sind, bieten Möglichkeiten, auch innerhalb des bergbaulichen Schutzgebietes trigonometrische Punkte in unveränderter Lage zu erhalten. Steht wenigstens ein derartiger Punkt zur Verfügung, so ließe sich z. B. ein Winkel, dessen Größe infolge Wanderung der beiden Zielpunkte verändert ist, im voraus errechnen und nachträglich durch Messung die Richtigkeit bestätigen (Bild 1). Die nach Methoden der Bergschadenkunde bestimmten Punktverschiebungen werden im Maßstab 1 : 1 dargestellt und auf die Richtungsstrahlen projiziert. Längenänderung und Querverschiebung mit anschließender Ermittlung der kleinen Verschwenkungswinkel $\Delta\beta$ führen zur Korrektur des ursprünglichen Winkels β_0, der vor Einwirkung des Bergbaus gemessen wurde. Schwieriger gestaltet sich die Umrechnung, wenn es sich nicht um Boden- sondern um Hochpunkte handelt. Durch Ermittlung der Schieflage ist noch eine weitere Korrektur anzubringen.

Auch die veränderten Entfernungen s lassen sich auf die angedeutete Weise korrigieren. Liegt die Bestätigung für die Richtigkeit vor, so können zwei auf diese Weise neu bestimmte Punkte als Grundlage für eine Neuorientierung verwendet werden. Weitere Kontrollpunkte steigern die Zuverlässigkeit der Angaben.

In jedem Falle läßt sich mit der Vorausberechnung der Horizontalverschiebung trigonometrischer Punkte die geeignete Auswahl der für Orientierungszwecke zu verwendenden Punkte treffen. Diese Voruntersuchung ist selbst dann wertvoll, wenn infolge komplizierter Lagerungsverhältnisse eine genaue Erfassung der horizontalen Punktwanderung nach den Methoden der Bergschadenkunde nicht möglich ist. Unkontrollierbar sind Auslagungszonen, die eine Voraussage über Punktbewegungen an der Erdoberfläche nur in Ausnahmefällen gestatten.

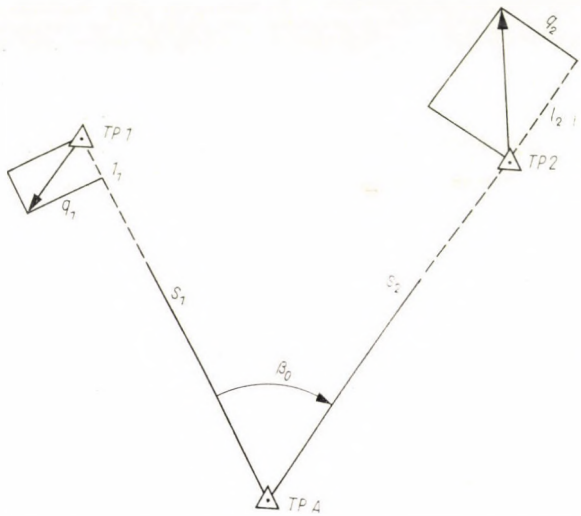

Bild 1. Vorausberechnung von Winkel- und Längenänderungen zwischen trigonometrischen Punkten im Bergbaugebiet. TPA — Punkt im bergfreien Gebiet. TP1, TP2 — Punkte im bergbaulichen Einwirkungsgebiet

$$\Delta\beta_1 = \frac{q_1 \cdot \varrho}{s_1 - l_1}$$

$$\Delta\beta_2 = \frac{q_2 \cdot \varrho}{s_2 + l_2}$$

$$\beta = \beta_0 + \Delta\beta_1 - \Delta\beta_2$$

Im folgenden ist vor allem die Frage der zuverlässigen Richtungsabnahme im Bergbauzentrum näher zu untersuchen, während die genaue Erfassung der Koordinaten erst an zweiter Stelle steht. Kontrollen oder Neubestimmungen sind mit

1. Sekundentheodolit durch Triangulation oder Polygonierung,
2. Tellurometer oder Geodimeter,
3. Gyrokompaß (Kreisel),
4. Azimutmessungen nach außerirdischen Zielen,
5. Photogrammetrie

durchführbar.

Die letzte Möglichkeit besteht nur in besonderen Fällen und soll hier nicht behandelt werden.

Zu 1

Neutriangulierungen großer Bergbaugebiete erfordern einen sehr großen Aufwand. Hinzu kommt, daß der diesen Arbeiten beizumessende Wert naturgemäß gering ist, da schon nach kurzer Zeit bzw. bereits während der Messung Bodenbewegungen eintreten. Ausgenommen wäre eine spezielle Richtungsübertragung aus dem bergbaufreien ins bergbaubeeinflußte Gebiet in Schachtnähe durch eine Dreieckskette geringer Erstreckung.

Zu 2

Eine andere Möglichkeit bietet sich durch Einsatz des Tellurometers zur Streckentriangulation in Diagonalviereck an. Der Vorteil besteht in der Anwendbarkeit unter allen meteorologischen Bedingungen. Die in Bergbaugebieten sich häufig bildenden Kondensationskerne haben keinen Einfluß auf eine erfolgreiche Durchführung der Messung. Ferner lassen sich systematische Fehlereinflüsse in einem Testfeld ausreichend genau erfassen. Es kommt hinzu, daß die Genauigkeit bis zu Entfernungen von 10 km etwa konstant bleibt. Umfangreiche Untersuchungen beim Markscheideinstitut der Bergakademie Freiberg führten zur Berechnung des mittleren Fehlers [3]:

$$m = \pm \sqrt{(2{,}0\ \text{cm})^2 + (4{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot E)^2},$$

worin E die Entfernung bedeutet.

Sind im Diagonalviereck sämtliche Seiten mit dem Tellurometer gemessen, so besteht eine Überbestimmung, wofür eine Bedingungsgleichung aufgestellt werden kann. Die Winkel $\beta_1 + \beta_2 = \beta_3$ werden durch die entsprechenden Strecken ausgedrückt. Am einfachsten gestaltet sich die Untersuchung in einem angenäherten Diagonalquadrat [4] (Bild 2). Es werden

$$w_a \approx w_b \approx w_c \approx w_d = w\,, \qquad w_e = w\sqrt{2} \approx w_f\,.$$

Bei einer Seitenlänge von angenähert 1,2 km wurde in einem praktischen Beispiel ein durchschnittlicher Widerspruch von $w = -10^{cc}$ erreicht, woraus geschlußfolgert werden kann, daß ein längenunabhängiger Streckenmeßfehler von ungefähr 1,5 cm nicht überschritten wird.

Als Endergebnis kann festgestellt werden, daß

$$d_w = -9{,}0\, ds$$

ist.

Zur weiteren Steigerung der Genauigkeit läßt sich die streckenmessende mit der winkelmessenden Triangulation sinngemäß verbinden, wodurch sich

bei gegebenen Voraussetzungen mit einfachen Figuren auf große Entfernungen wertvolle Richtungs- und Koordinatenkontrollen ausüben bzw. Berichtigungen angeben lassen.

Da jedoch in Bergbaugebieten nur selten Sichtverbindung zwischen zwei Punkten auf große Entfernungen ohne Trennwände durch Bodenerhebungen, Gebäude und dgl. besteht, ist der Praktiker vielfach gezwungen, auf kleinere Entfernungen von etwa 1 bis 2 km zu gehen, womit sich eine Polygonierung mit langen Seiten anbietet. Während die Winkel mit dem Sekundentheodolit bestimmt werden, lassen sich die Strecken sehr vorteilhaft mit dem Tellurometer ermitteln. Die Genauigkeit dieser Richtungs- und Koordinatenüber-

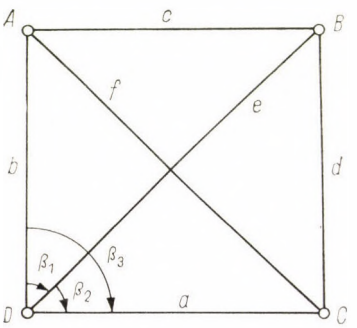

Bild. 2

$$a \approx b \approx c \approx d = s$$

$$e \approx f = s\sqrt{2}$$

$$dw_a = -\frac{\varrho}{s}\,da \quad \text{usw.}$$

$$dw \approx -\frac{1{,}17}{s}\,\varrho\; ds$$

für $s = 1{,}2$ km

wird $dw = -9{,}0\; ds$

tragung entspricht der gestellten Aufgabe. Der mittlere Querfehler in Zugmitte bei einseitigem Richtungsanschluß, jedoch beidseitigem Koordinatenan- und -abschluß beträgt nach GRUBER

$$m_q = \pm \frac{m}{\varrho} \cdot L \sqrt{\frac{(n-1)^2 + 2}{48\,(n-1)}} \approx \frac{m}{\varrho} \sqrt{\frac{L^3}{48\,s}}$$

und bei beiderseitigem Koordinatenanschluß und Richtungsan- und -abschluß

$$m_q = \pm \frac{m}{\varrho} \cdot L \sqrt{\frac{(n+1)\,(n^2+3)}{192\,n\,(n-1)}} \approx \frac{m}{\varrho} \sqrt{\frac{L^3}{192\,s}},$$

worin m der mittlere Fehler der Winkelmessung ist.

Zu 3

Die Zahl n der polygonometrischen Beobachtungsstandpunkte bestimmt den Grad der Genauigkeit und entscheidet darüber, ob evtl. eine Kreiselmessung bessere Ergebnisse liefern kann. Die Kreiselmeßstelle der Westfälischen Berggewerkschaftskasse gibt den mittleren Fehler einer Meridianweisermessung mit $m_R = \pm 17^{cc}$ an [2]. KRYGEL von der Kreiselmeßstelle der ČSSR in Ostrava [5] errechnet den mittleren Fehler der Kreiselorientierung mit dem MV1 mit $M = \pm 134^{cc}$, während als mittlerer Fehler des von der Fa. Fennel gelieferten, aber beim Markscheideinstitut der Bergakademie Freiberg mehrfach verbesserten Kreisels KT1 mit $\pm 80^{cc}$ angegeben werden kann. Dieser Wert konnte nach reichlich einem Jahr erzielt werden, nachdem eine Reihe von Veränderungen am gesamten Aufbau, wobei der Theodolit nicht ausgenommen ist, erfolgen mußte. Bei Lieferung des mit Sperrykreisel ausgerüsteten Kreiseltheodolits bewegte sich der mittlere Fehler zwischen $\pm 295^{cc}$ bis 580^{cc} mit der Tendenz einer dauernden Richtungsabgleitung, wobei Unterschiede bis zu 15^{c} aus 7 Urmitteln auftraten. Auch bei dem angegebenen Wert von $\pm 17^{cc}$ bleibt der Kreisel für Zwecke übertagiger Richtungskontrollen zur Orientierungsübertragung in ein weitgestrecktes Grubengebäude ungeeignet. Folglich kann der Nachweis für die Konstanz des Eichwertes an einer Linie im Bergbaugebiet nicht mit der erforderlichen Genauigkeit erbracht werden. Die Kontrolleichung muß deshalb an einer Linie außerhalb des bergbaulichen Einwirkungsgebietes erfolgen.

Eine andere Möglichkeit, Richtungen unverändert zu erhalten, besteht in der Übertragung auf die tiefste Sohle im Schachtsicherheitspfeiler [2] durch mechanische Lotung. Im Bedarfsfall kann eine Rückeichung nach der Tagesoberfläche mit Kreisel erfolgen. Dieses Verfahren ist aufwendig. Außerdem dürfte der Erfolg in Frage gestellt sein, da mit horizontalen Punktwanderungen in den meist unzulänglich bemessenen Pfeilern zu rechnen ist. Es kommt hinzu, daß auch bei ausreichenden Bergfesten die noch nicht abgebaute Kohle Gebirgsbewegungen auslöst.

Da nur in Ausnahmefällen mit unveränderten Punktlagen innerhalb des Bergbaugebietes gerechnet werden kann, wird eine Wiederherstellung des trigonometrischen Festpunktfeldes von bekannten Punkten außerhalb des Einwirkungsbereiches ausgehen müssen. Am günstigsten sind Einrechnungszüge zwischen unveränderten Punkten im Bergfreien und Verbindung quer durch das Bergbaugebiet mit Sekundentheodolit und Tellurometer, möglichst unter Verwendung des neuen Typs MRA 3. Der mittlere Richtungsfehler einer Seite in der Mitte des Zuges beträgt nach NIEMCZYK—EMSCHERMANN [6] bei einem gestreckten Einrechnungszug mit ungefähr gleich langen Seiten

$$m_{Rm} = \pm m \sqrt{\frac{n}{12} \frac{(n+2)}{(n+1)}},$$

während der Richtungsfehler der ersten oder letzten Zugseite mit

$$m_{R0} = \pm m \sqrt{\frac{n \quad (2n+1)}{6 \quad (n+1)}}$$

angegeben wird, wenn n die Anzahl der zu messenden Polygonwinkel bedeutet: Für eine Zuglänge von z. B. 30 km und Seitenlängen von 3 km wird $n = 10$. Bei einem Winkelfehler $m = \pm 3^{cc}$ beträgt

$$m_{Rm} = \pm 3 \sqrt{\frac{10(10+2)}{12(10+1)}} = \pm 2{,}9^{cc}$$

und

$$m_{R0} = \pm 3 \sqrt{\frac{10 \cdot 21}{6 \cdot 11}} = \pm 5{,}3^{cc}.$$

An dieses Ergebnis reicht selbst die Genauigkeit einer Kreiselmessung von $m = \pm 17^{cc}$ nicht heran.

Zu 4

Die Richtungsbestimmung mit Hilfe außerirdischer Ziele ist nur bei günstigen Witterungsverhältnissen möglich und erfordert einen größeren Meß- und Rechenaufwand. Außerdem lassen sich Koordinatenveränderungen durch geographische Ortsbestimmung nicht mit ausreichender Genauigkeit ermitteln.

Abschließend kann festgestellt werden, daß im bewegten Punktfeld des Bergbaus mehrere Möglichkeiten zur Richtungs- und Koordinatenkorrektion bestehen. Erforderliche Genauigkeiten und wirtschaftlich vertretbarer Aufwand werden mit Sekundentheodolit und Tellurometer erreicht. Einige andere Varianten sind ferner unter bestimmten Verhältnissen möglich und werden zur Anwendung empfohlen. Von besonderer Bedeutung ist jedoch die zuverlässige Vorausberechnung von Punktbewegungen innerhalb des bergbaulichen Einwirkungsgebietes, um Fehldispositionen bei geodätischen Arbeiten der Wiederherstellung des Punktfeldes zu vermeiden.

SCHRIFTTUM

1. NEUBERT, K.: Markscheiderische Fehlergrenzen im Spiegel technischer Entwicklung. *Freib. Forsch.-H.* A 185, S. 5 bis 32.
2. NIEMCZYK, O. und WESEMANN, H.: Beitrag zur Wiederherstellung des trigonometrischen Festpunktfeldes in geschlossenen, umfangreichen Bergbaugebieten. Forschungsbericht des Landes Nordrhein-Westf. Nr. 1189 Köln/Opladen: Westdeutscher Verl. 1963.
3. MEIXNER, H.: Untersuchung der Genauigkeit von Tellurometermessungen unter besonderer Berücksichtigung systematischer Einflüsse in Braunkohlentagebauen. (Autorreferat d. Diss. Freiberg 1962.) *Bergbautechn.* **13** (1963), 329—330.

4. Meixner, H.: Zur Ausgleichung elektrisch gemessener Strecken im Diagonalviereck. (Z. Z. noch unveröffentlicht.)
5. Černy, J. und Krygel, M.: Z kusenosti se sovětským gyrokompasem MV1 OKR (Erfahrungen mit dem sowjetischen Vermessungskreisel MV1 im Ostrau-Karviner Kohlenbecken). *Rudy*, Praha **10** (1962), 388—394.
6. Niemczyk, O. und Emschermann, E. Messungsgenauigkeiten und Fehlergrenzen im Markscheidewesen. *Mitt. Markscheidewes.* 1942, S. 80—98.

HIGHLY ACCURATE DETERMINATION OF DIRECTIONS IN MINING DISTRICTS

K. NEUBERT

SUMMARY

Owing to earth movements occurring in mining districts the position of trinagulation points also changes. The horizontal component of the displacement of these points can be determined in advance by calculation and by the so obtained values the angles which have undergone a change can be computed anew. Knowing the direction and magnitude of horizontal point displacements, those points might be selected, which are appropriate to the purpose, that with the aid of these points directions and coordinates could be transferred below the ground level. The paper also deals with the redetermination of fixed points by using a theodolite, a tellurometer or a gyroscope.

DÉTERMINATION DE HAUTE PRÉCISION DES DIRECTIONS DANS LES RÉGIONS MINIÈRES

K. NEUBERT

RÉSUMÉ

Dans les régions minières, la position des points de triangulation se trouve modifiée par suite des mouvements du sol. La composante horizontale du déplacement des points pouvant être déterminée à l'avance par voie numérique, les angles modifiés peuvent être calculés à nouveau avec les valeurs ainsi obtenues. En connaissance de la direction et de la grandeur des déplacements horizontaux des points, on choisit les points à l'aide desquels des directions et des coordonnées peuvent être reportées au niveau souterrain. L'article examine aussi, comment les points stabilisés peuvent être déterminés à nouveau d'une façon économique à l'aide de théodolites, de tellurомètres ou de gyroscopes.

ВЫСОКОТОЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ В РАЙОНАХ ГОРНЫХ РАЗРАБОТОК

К. НЕЙБЕРТ

РЕЗЮМЕ

В районах горных разработок из-за смещений грунта изменяется также положение триангуляционных точек. Горизонтальный компонент смещения триангуляционных точек при помощи расчетных методов можно определить заранее и, используя эти данные, можно вновь вычислить изменившиеся углы. Если известны направление и величина горизонтальных смещений точек, тогда можно выбрать те точки, которые подходят для того, чтобы с их помощью под земную поверхность спроектировать направления и координаты. — В статье рассматривается, каким образом можно экономично определить вновь стационированные точки при помощи теодолита, теллурометра или гироскопа.

ANWENDUNG DER NEUTRONEN-INDUZIERTEN REAKTION ZUR SCHNELLANALYSE VON BAUXIT

Dr. J. TATÁR

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
UNGARISCHES STAATLICHES GEOPHYSIKALISCHES INSTITUT LORÁND EÖTVÖS, BUDAPEST

[Eingegangen am 19. November 1963]

Bei den Vorgängen der Bauxitforschung, Produktion, Verwertung und Aufarbeitung erweist es sich als notwendig, eine große Anzahl von Aluminium- und Silizium-Gewichtsprozenten zu bestimmen. Die Ausführung der chemischen Prüfungen beansprucht mehrere Tage, wodurch die technischen Maßnahmen einer nachteiligen Verzögerung unterworfen sind, oder auf unbegründete Schätzungen basiert werden. Um Spesen zu vermeiden, die sich infolge des langen Wartens und nachträglicher Korrektionen ergeben, wurde ein einfaches analytisches Verfahren ausgearbeitet. Mit dem auf der Neutronenaktivierung beruhenden Verfahren wird das Gewichtsprozent des Aluminiums und Siliziums in der Probe binnen 9 Minuten bestimmt. Laut der statistischen Aufarbeitung der 300 Kontrollmessungen ergab sich als Mittelwert der Abweichungen zwischen der Aktivierungsanalyse und der chemischen Analyse bei Aluminiumoxyd $+1{,}12 \pm 2{,}43\%$, bei Siliziumdioxyd $-0{,}03 \pm 2{,}01\%$. Das hier vorgeführte Verfahren ist — dem langwierigen chemischen Verfahren gegenüber — eine Schnellmethode, die allen Ansprüchen der Industrie entgegenkommt.

Die Empfindlichkeit der in den Atomreaktoren ausgeführten Neutronenaktivierungsanalysen ist um mehrere Größenordnungen höher als die der klassischen chemischen Analysen. Vom Standpunkt der geologischen Anwendung aus stößt — abgesehen von den Kostenauswirkungen — die Inanspruchnahme des Atomreaktors auf Schwierigkeiten, nachdem infolge der Behandlung und Beförderung des aktivierten Probestückes nur die Prüfung solcher radioaktiver Isotope möglich ist, die eine längere Halbwertzeit haben. Bei den geologischen Arbeiten sind die Isotopen mit einer Halbwertzeit von einigen Minuten von großer Bedeutung, die Aktivierung und Messung muß demnach an der gleichen Stelle, in schnellem Nacheinander erfolgen. Die in großen Mengen durchzuführende Probemessung beansprucht oft Feldarbeiten. In der Bauxitindustrie, wo die Leitung der Forschung, Produktion, Klassifizierung, Beförderung und Aufarbeitung ausschlaggebend von der Qualifikation des Stoffes abhängt, ist es von besonderer Wichtigkeit, die Bestimmung der Hauptkomponenten unverzörgert, also an der Stelle des Betriebes durchzuführen. Beschränkt sich die Aufgabe auf die Bestimmung des Gewichtsprozentes von Aluminium und Silizium, dann sind die Neutronengeneratoren oder Neutronenmultiplikatoren [1, 2] sowie die mit Energiespektrometern kombinierten Meßgeräte viel zu kostspielig und auch deren Betrieb ist zu teuer, da sie die Mitarbeit von Fachleuten höherer Ausbildung erfordern.

Unpraktisch in der Auswertung ist die Interpretation der Zerfallskurven [3, 4], da infolge der kurzen Beobachtungszeiten der graphische Aus-

gleich und die Extrapolation der durch die statistischen Fluktuationen bedeutend belasteten Daten die Beurteilung der Messung in vielen Fällen subjektiv macht. Zur Lösung dieser Aufgabe muß demnach eine billige, leicht transportable und disponierbare, einfache Ausrüstung geplant werden, mit vollständiger Ausschaltung der chemischen Vorbereitung, mit Nomogrammauswertung und hauptsächlich mit einer Durchlaufzeit von einigen Minuten.

Technische Ausrüstung zur Bestimmung des Aluminiums und Siliziums

Der Zerfallsstand der bei der Neutronenaktivierung entstehenden Radionukleide beträgt nach einer Aktivierung von t Dauer im Zeitpunkt Θ

$$D_{t+\Theta} = \frac{\Phi m N_0 f \sigma}{A} \left(1 - e^{-0{,}693 \frac{t}{T}}\right) e^{-0{,}693 \frac{\Theta}{T}}$$

wobei

Φ = Neutronenfluß, Neutron/cm²sec,
m = die Masse des Elementes im Probestück, g,
N_0 = Avogadrosche Zahl, Atom/Grammatom,
f = Isotopenhäufigkeit des Targetkernes,
A = Atomgewicht des Elementes, g/Grammatom,
σ = Einfangsquerschnitt für Neutronen, cm²,
T = Halbwertzeit des aktiven Produktes.

Den Wert D mit Strahlungsmessung bestimmend, erhält man einen Meßwert, der dem Wert m proportional ist, wenn im Laufe der Analysenreihe die den Wert D beeinflussenden übrigen Faktoren konstant sind.

Der Zerfallstand der aktivierten Proben wurde nach Beta + Gammaaktivität gemessen, u. zw. mit einem aus Aluminium-GM-Röhren (Type NB—8024, Wanddicke 24 mg/cm²) zusammengestelten Röhrenkranz. Dieser Röhrenkranz gibt in einem 2,5 cm dicken, mit Kunststoff verkleideten Bleiturm einen Nulleffekt von 100 cpm an. Zu den Messungen wurden einfache Scaler angewandt.

Die Steigerung des Neutronenflusses ist im allgemeinen zwecks Steigerung des D-Wertes vorteilhaft.

Zur Durchführung der Aktivierungsaufgabe stand eine Po—Be Neutronenquelle zur Verfügung, deren Energiespektrum bis 11 MeV kontinuierlich ist; das Maximum ist bei 4,5 MeV. Die von der Po—Be Neutronenquelle stammende Neutronenintensität beträgt $2 \cdot 10^6$ Neutronen/Sec. C.

Die in der Probe befindliche Menge m kann durch Steigerung der Abmessungen des Probestückes erhöht werden. Bei kleinen Konzentrationen ist es daher zweckmäßig, das Meßsystem zur Aufnahme größerer Proben geeignet zu machen. Praktisch werden die Abmessungen des Probestückes durch die Größe der Detektoren und durch die in der Probe auftretende Selbstabsorption begrenzt.

Die Probe (pulverförmiges Gestein) wurde in einer Kunststofftube aktiviert. Diese Tube erwies sich nach gründlicher Prüfung der Aktivierung gegenüber neutral. Es wurden Versuchsreihen im Zusammenhang mit der Wirkung des Gewichtes und Volumens der Proben durchgeführt. Infolge der Absorptionsverhältnisse beeinflußte die Änderung des Volumens das Ergebnis ganz entscheidend, während das Gewicht (nach Ausfüllen des Volumens durch Verdichtung gesteigert) über 30 g einen unbedeutenden Einfluß auf das Ergebnis ausübte.

Tafel I

Kernprozesse der Neutronenaktivierung bei Aluminium und Silizium

Target	Isotopenhäufigkeit %	Neutronenenergie MeV	Querschnitt mbarn	Kernprozeß	Aktives Produkt	Halbwertzeit T	Energie Beta	MeV Gamma
Al^{27}	100	thermisch	212,0	(n, γ)	Al^{28}	2,3 Min.	2,80	1,78
Al^{27}	100	1	0,4	(n, γ)	Al^{28}			
Al^{27}	100	2,1	2,8	(n, p)	Mg^{27}	9,45 Min.	1,75	0,83
							1,59	1,01
Al^{27}	100	2,39	0,6	(n, α)	Na^{24}	14,8 Std.	1,39	1,37
								2,75
Si^{28}	92,27	3,9	3,0	(n, p)	Al^{28}			
Si^{28}	92,27	15,7		(n, 2n)	Si^{27}	4,5 Sek.	3,60	0,50
Si^{29}	4,68	3,9	2,7	(n, p)	Al^{29}	6,7 Min.	2,50	1,28
							1,60	2,43
Si^{30}	3,05	thermisch	120,0	(n, γ)	Si^{31}	2,7 Std.	1,48	1,26
Si^{30}	3,05	1	1,1	(n, γ)	Si^{31}			
Si^{30}	3,05			(n, α)	Mg^{27}			

Die Aktivierungszeit t wurde auf Grund der Halbwertzeit T des geprüften Isotops bestimmt. Experimentell erwies sich die Aktivierungszeit von 4,6 Minuten bei den Bauxitprüfungen am günstigsten.

Nach Abschluß der Aktivierung wurde die Wartezeit bis zu Beginn der Messung, bis zum Zeitpunkt Θ in 0,4 Minuten bestimmt. Während dieser Wartezeit zerfielen praktisch die bei der Aktivierung entstandenen störenden Isotope mit kurzer Halbwertzeit.

Tafel I faßt die Kenndaten der Kernprozesse zusammen, die im Zusammenhang mit der Neutronenaktivierung im Aluminium und Silizium bekannt sind.

Was die Aktivierung des Siliziums betrifft, so kommt die Reaktion Si^{28} (n, 2 n) Si^{27} nicht in Frage, nachdem die anzuwendende geschlossene Neutronenquelle keine Neutronen hoher Energie emittiert. Es kann auch

mit der Bildung eines aktiven Si^{31} Produktes nicht gerechnet werden, da die Halbwertzeit in Anbetracht der schnellen Analyse lang ist. Bei der Aluminiumanalyse kann sich Na^{24} — ebenfalls infolge der langen Halbwertzeit — im aktiven Produkt nicht anhäufen. Beim Entwurf soll daher nur mit dem, unter der Wirkung der thermischen und schnellen Neutronen entstehenden Isotop Al^{28}, und in geringem Maße mit den unter der Wirkung der schnellen Neutronen entstehenden Isotopen Al^{29} und Mg^{37} gerechnet werden.

Tafel II

Produkte der Neutronenaktivierung bei einer durchschnittlichen Bauxitprobe

Isotop		Target-Isotopenhäufigkeit f, %	Einfangsquerschnitt thermischer Neutronen σ, mb	Masse des Elementes in der Probe mg	Sättigungsaktivität D_∞	Halbwertzeit T, Min	Aktivität bei $t = 4{,}6$ Min Dt
Target	Aktives Produkt						
Al^{27}	Al^{28}	100	212,0	26,40	123 129	2,3	91 115
Si^{30}	Si^{31}	3,05	120,0	4,65	340	162,0	7
Ti^{50}	Ti^{51}	5,30	140,0	1,80	160	6,0	68
Ca^{48}	Ca^{49}	0,18	550,0	0,14	2	30,0	0,2
Ca^{48}	Ca^{49}	0,18	200,00	0,14	1	150,0	0,02
Mg^{26}	Mg^{27}	11,29	48,0	0,18	23	9,5	6
Mn^{55}	Mn^{56}	100	12 800,0	0,06	8 284	156,0	166
Cr^{54}	Cr^{55}	2,38	6,0	0,07	0,1	78,0	0,004
V^{51}	V^{52}	99,75	5 000,0	0,06	3 531	3,7	2 013
F^{19}	F^{20}	100	10	0,10	32	0,2	32
Na^{23}	Na^{24}	100	500	0,05	652	888,0	Ø
K^{41}	K^{42}	6,91	1 000	0,03	30	744,0	Ø
Ga^{69}	Ga^{70}	60,2	1 500	0,02	157	20,5	22
Ga^{71}	Ga^{72}	39,8	3 400	0,02	229	855,0	Ø
Zr^{96}	Zr^{97}	2,8	290	0,05	3	1020,0	Ø

Der Effekt des Einflusses der in der Bauxitprobe befindlichen Komponenten wurde mittels Berechnungen geprüft. Aus Daten der Literatur ausgehend, wurde in einer Einheit des thermischen Neutronenflusses bei einer Aktivierung von 4,6 Minuten der Zerfallsstand pro Komponent einer Bauxitprobe von Durchschnittszusammensetzung bestimmt (Tafel II). Den thermischen Neutronen gegenüber liegt der Neutroneneinfangsquerschnitt des Mangans 64fach höher, jedoch ist auch seine Halbwertzeit 68mal größer; somit würde bei einer gewählten Aktivierungszeit erst eine 1%-ige MnO_2-Konzentration einen 1% Al_2O_3 entsprechenden Zerfallsstand ergeben. Eine solch hohe MnO_2-Konzentration kommt jedoch im Bauxit nicht vor. Im Falle des Vanadiums erreicht bereits 0,1% des Zerfallsstandes von V_2O_5 1% des Zerfallsstandes von Al_2O_3, und dies entspricht der Größenordnung der in den Bauxitproben

befindlichen V_2O_5-Konzentration. Bei den verschiedenen Proben macht hingegen die Änderung der V_2O_5-Konzentration bloß um 0,01%, aus was unser Meßergebnis innerhalb der vorgeschriebenen Genauigkeit nicht stört.

Im Falle der Aktivierung mit schnellen Neutronen muß außer den für Aluminium und Silizium bekanntgegebenen Kernreaktionen auch mit den Reaktionen O^{16} (n, p) N^{16} und Fe^{56} (n, p) Mn^{56} gerechnet werden. Die Halb-

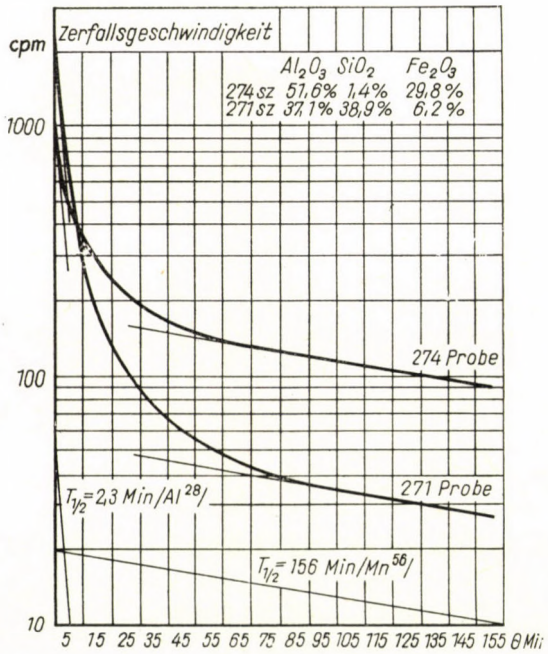

Bild 1

wertzeit des aktiven Produktes von Sauerstoff beträgt jedoch 7,5 Sekunden, zerfällt also praktisch während der zwangsmäßigen Wartezeit, die sich aus dem Ausheben der Probe ergibt. Das unter Einwirkung der schnellen Neutronen aus Fe^{56} entstehende Isotop Mn^{56} erreicht infolge der angewandten Aktivierungszeit von 4,6 Minuten nur 1% seiner Sättigungsaktivität; seine Wirkung zeigt sich daher in den Meßergebnissen nicht. Wird jedoch die Aktivierungszeit auf das Mehrfache der Halbwertzeit von Mn^{56} erhoben, so wird die Aktivierungsanalyse dazu geeignet sein, den Eisengehalt der Bauxitarten zu bestimmen (Bild 1).

Vom Obenerwähnten ausgehend, wurden beim Entwurf der Aktivierungsvorrichtung folgende Ziele ins Auge gefaßt:

1. Sie soll dazu geeignet sein, eine geschlossene Neutronenquelle aufzunehmen, die einen thermischen Neutronenfluß von 10^4 Neutronen/cm² sec

sichert. Zum maximalen Strahlenschutz soll das System anstelle der Neutronenquelle Po—Be auf die Neutronenquelle Ra—Be ausgelegt werden, welche eine bedeutend stärkere Gammastrahlung emittiert.

2. Sie soll dazu geeignet sein, die Proben, die dem Meßraum ($\varnothing = 20$ mm, $h = 150$ mm) des den Betazählungen dienenden Röhrenkranzes entspre-

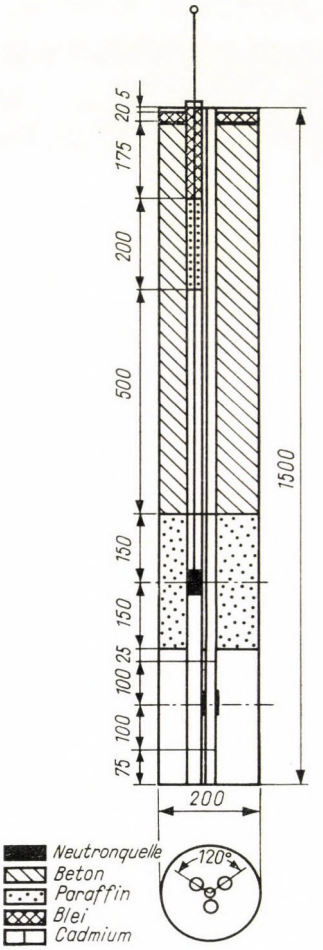

Bild 2

chen, sowohl einer thermischen wie auch einer schnellen Neutronenbestrahlung auszusetzen.

3. Sie soll dazu geeignet sein, die Probe von der inaktiven Zone in die aktive in weniger als 0,5 Sekunden, und von der aktiven Zone ins Meßhaus — bei dessen entsprechender Anlage — in weniger als 5 Sekunden zu versetzen.

4. Sie soll — nach Entfernung der Neutronenquellen — ohne Investitionsspesen zur Versetzung geeignet sein.

Diese Aufgaben wurden folgendermaßen gelöst:

Das äußere Gehäuse des Aktivierungsgefäßes ist ein am unteren und oberen Ende abgeschweißter Stahlzylinder ($\varnothing = 200$ mm, $h = 1500$ mm) (Bild 2). Die obere Abschlußplatte wird durch einen längs der Längenachse angebrachten Aktivierungskanal und durch die Öffnung der damit parallel laufenden drei Neutronenquellenträgerröhren durchbrochen. Außer Betrieb werden die Röhrenköpfe durch eine mit Schloß verschließbare Platte bedeckt.

Die Strahlenschutzausbildung des Systems wurde für einen erdversenkten Betrieb bemessen. Der innere Raum ist in drei Teile geteilt. Der obere Abschnitt wurde mit Beton gefüllt. Über dem Beton steigert eine 0,5 mm dicke Kadmium- und eine 20 mm dicke Bleischicht die Abschirmung. Im mittleren, mit Paraffin ausgefüllten Raum werden die Neutronen auf das thermische Niveau gebremst. Im Falle einer Aktivierung mit langsamen Neutronen sind demnach Quellen und Probe in der Mitte dieses Raumes, 1050 mm von der Oberfläche angeordnet. Den Weg der Strahlenbündel von den Quellen über die Tragrohre schließt ein Pfropfen von 400 mm ab, der halb mit Paraffin, halb mit Blei ausgefüllt ist.

Bei Anwendung der Neutronenquelle Po—Be beträgt der Nutzpegel des thermischen Neutronenflusses $5{,}55 \cdot 10^3$ Neutronen/cm^2 sec 10 000 mC, wobei auch die Verluste infolge des Meßwirkungsgrades in Betracht gezogen wurden. In dem Aktivierungskanal beträgt der effektive Neutronenfluß vermutlich etwa das Doppelte [5].

Eichung des Meßsystems

Auf Grund der Einfangquerschnitte und der natürlichen Isotopenhäufigkeiten kann die Aufgabe auf die Prüfung der Kernreaktionen

$$Al^{27}\,(n, \gamma)\,Al^{28}$$

$$Si^{28}\,(n, p)\,Al^{28}$$

vereinfacht werden. Es ist wahrscheinlicher, daß die erste Kernumwandlung unter dem Einfluß der thermischen Neutronen und nicht dem der schnellen Neutronen erfolgt. Zur zweiten Umwandlung werden Neutronen benötigt, die eine um 3,9 MeV größere Energie aufweisen. Die Energieverhältnisse der Neutronenquelle Po—Be ermöglichen es, daß auch im Raume der langsamen Neutronen Neutronen solcher Energie vorkommen, die sich zur Aktivierung von Si^{28} eignen. Ebenso gibt es auch im schnellen Raume thermische Neutronen, die das Isotop Al^{27} umwandeln. Dementsprechend wird das mit

der langsamen Neutronenaktivierung und mit der schnellen Neutronenaktivierung erhaltene Zerfallniveau dem Al_2O_3- und SiO_2-Gehalt proportional sein, die Proportionalitätsfaktoren werden jedoch verschieden sein:

$$A = ax + by$$

$$B = au + bv\,,$$

wobei

A = der mit der langsamen Neutronenaktivierung erhaltene Zerfallstand, Imp
B = der mit der schnellen Neutronenaktivierung erhaltene Zerfallstand, Imp
a = Al_2O_3 Gewichtsprozent aus der chemischen Bestimmung
b = SiO_2 Gewichtsprozent aus der chemischen Bestimmung
x, y, u, v sind Proportionalitätsfaktoren, Parameter des Aktivierungs- und Meßsystems.

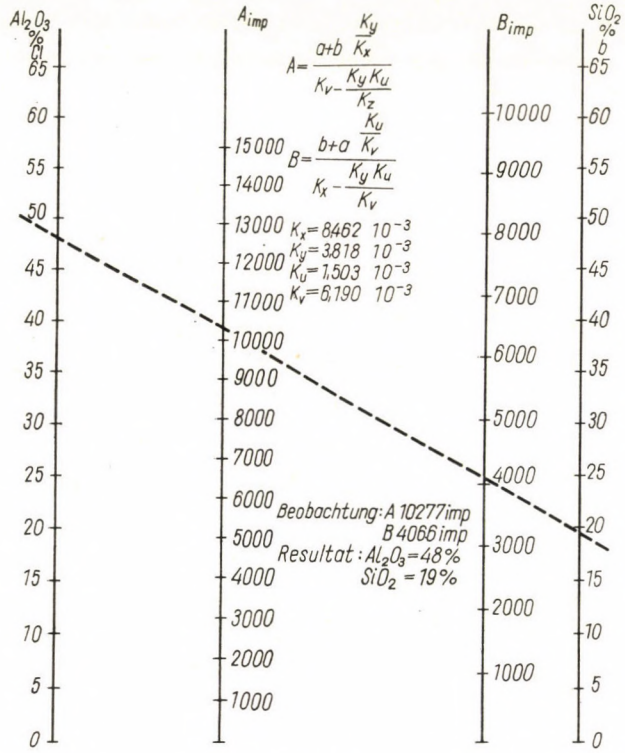

Bild 3

Nach Lösung der Gleichung erhält man:

$$a = A\frac{v}{xv - yu} - B\frac{y}{xv - yu} = AK_v - BK_y$$

$$b = B\frac{x}{xv - yu} - A\frac{u}{xv - yu} = BK_x - AK_u\,.$$

Die Ableitung der Werte K_x, K_y, K_u und K_v erfolgte mittels Ausgleichrechnung aus den durch die Aktivierung der chemisch analysierten Bauxitprobenreihe erhaltenen Zerfallspegeln als indirekten Beobachtungen gleichen Gewichtes. In dem mittleren Raume der Aktivierungsvorrichtung wird eine Po—Be-Neutronenquelle von 8,0 C und in dem unteren Raum eine von 9,0 C angebracht; nach Bestimmung der K Werte ergibt sich als Eichgleichung des Systems:

$$a' = (6{,}190\,A - 3{,}818\,B)\cdot 10^{-3}$$

$$b' = (8{,}462\,B - 1{,}503\,A)\cdot 10^{-3}\,,$$

wobei

a' = Gewichtsprozent Al_2O_3 aus der Aktivierungsbestimmung
b' = Gewichtsprozent SiO_2 aus der Aktivierungsbestimmung.

Die Eichgleichung ist selbstverständlich nur solange gültig, bis das Meßsystem unverändert bleibt.

Um die Auswertung zu erleichtern, wurde aus der Eichgleichung ein Nomogramm gezeichnet (Bild 3).

Aktivierungsanalyse von Bauxitproben in der Praxis

Das vorgeführte Verfahren wurde mit der Analyse von 300 Bauxitproben einer kritischen Prüfung unterworfen.

Die Unternehmung für Bauxitschürfung besorgte die Auswahl der einer Kontrollprüfung zu unterziehenden Gesteinsproben aus dem Lagerbestand der Bohrkerne.

Das Prüfmaterial stammte von acht regionalen Einheiten, aus 63 Bohrungen.

Die Unternehmung stellte uns die chemischen Analysen des Probematerials nach Abschluß der Aktivierungsanalyse zur Verfügung.

Es konnte festgestellt werden, daß in den Proben Al_2O_3 7—69%, SiO_2 0—68%, Fe_2O_3 4—31%, TiO_2 0—4%, der Glühverlust 6—24% betrug.

Die Meßvorbereitung der Proben wurde im Interesse der Schnelligkeit, Einfachheit und Wirtschaftlichkeit auf das Minimum beschränkt. Die stückigen, lufttrockenen Proben wurden nach einfachem Stampfen in den Kunststoff-Probenbehälter gefüllt. Die Proben stammten öfters von größeren Gesteinsstücken, so daß es keinen Beweis dafür gibt, ob eine mit der chemisch analysierten Substanz in ihrer chemischen Zusammensetzung völlig identische Substanz aktiviert worden ist.

Da die Proben enthaltende Kunststofftube bestimmt die Abmessungen der Proben, die Zeit beanspruchende Gewichtsmessung wurde vermieden.

Die ungarischen Bauxitarten enthalten eine bedeutende Menge radioaktiver Substanzen [6, 7, 8]. Ein Durchschnittswert kann die natürliche Aktivität der gepfrüften Bauxitproben nur ganz grob kennzeichnen, dennoch wurde aus wirtschaftlichen Gründen die Bestimmung der individuellen natürlichen Aktivität vernachlässigt. Aus der Prüfung von 100 Proben berechnet, kann die angewandte Näherung im Extremfall eine Abweichung von 1,5% in Al_2O_3 und 3,0% in SiO_2 verursachen.

Es wurden bei 217 Proben wiederholt Aktivierungsanalysen durchgeführt. Die Abweichung der reproduzierten Werte vom ersten Meßergebnis zeigt eine Gaußsche Verteilung an, u. zw. laut folgender Verteilungsdaten:

Streuungsgrenzen	Bei Prüfung von Al_2O_3	Bei Prüfung von SiO_2	Theoretisch erfordert
innerhalb ±2%	181 St.	177 St.	148 St.
innerhalb ±4%	214 St.	213 St.	206 St.
innerhalb ±6%	216 St.	217 St.	216 St.

Auf Grund der Reproduktionsprüfung wurde erfordert, daß der Streuungsmeßwert in der Häufigkeitsverteilung der Abweichung zwischen Aktivierungsanalyse und chemischer Analyse 2% nicht überschreiten soll. Alle Proben, die außerhalb der dreifachen Grenzen der so bestimmten Streuung fielen, wurden als Abfall betrachtet. Es ergaben sich auf diese Weise 17 Abfälle unter 300 Proben, teils infolge Abweichung in der Bestimmung des Aluminiumgehaltes, teils infolge Abweichung in der Bestimmung des Siliziumgehaltes, und bei vier Proben wegen Abweichung beider Bestimmungen. Die chemische Kontrollanalyse der als Abfall qualifizierten Proben bewies in vollem Maße die Richtigkeit der Aktivierungsanalyse. Die Häufigkeitsverteilung der Abweichungen gibt nach Annahme der Daten chemischen Kontrollanalyse — bei Erforderung der ±2%-igen Streuung — eine gute Annäherung der Gaußschen Verteilung.

Streuungsgrenzen	Bei Prüfung von Al_2O_3	Bei Prüfung von SiO_2	Theoretisch erfordert
innerhalb ±2%	193 St.	247 St.	205 St.
innerhalb ±4%	270 St.	289 St.	286 St.
innerhalb ±6%	300 St.	300 St.	299 St.

Nach der Korrektion auf Grund der chemischen Kontrollanalyse ergab sich als Ergebnis der Streuungsberechnung der Abweichungen, daß bei 300 Proben der mittlere Wert der Abweichungen und deren Streuung

bei Al_2O_3 $+1{,}12$ $\pm 2{,}43\%$
bei SiO_2 $-0{,}03$ $\pm 2{,}01\%$

ist.

Werden nun diese Ergebnisse der Reproduzierbarkeit der chemischen Analyse gegenübergestellt, so ergibt sich, daß die vorgeführte Schnell-

methode der Aktivierungsanalyse in seiner Zuverlässigkeit praktisch gleichwertig mit der in der Industrie angewandten chemischen Analyse ist, selbst in dem Falle, wenn im Interesse der Schnelligkeit der Einfluß der erwähnten Fehlerquellen zur Geltung kommen kann. Die bei der Bestimmung des Al_2O_3 auftretende +1,12%-ige Abweichung des mittleren Wertes zeigt bei der Auswertung einen beachtenswerten systematischen Fehler an. Aus diesem systematischen Fehler folgt, daß die zur Eichung benutzten Standard-Bauxitproben die geprüfte Probesubstanz nicht kennzeichneten.

Wirtschaftliche Auswertung des Verfahrens

Die Frage der Wirtschaftlichkeit kann anhand der Zuverlässigkeit, des Zeitbedarfes und der Kostenauswirkung abgemessen werden.

Die Frage der Zuverlässigkeit wurde schon besprochen, vom Zeitbedarf kann folgendes festgestellt werden:

Das Stampfen der Probe und das Füllen der beiden Meßtuben, die Aktivierung, Messung und Auswertung kann ein geübter Mitarbeiter in 25 Minuten ausführen. Bei einer Serienmessung mit der Zusammenarbeit zweier Laboranten überdecken sich jedoch die Arbeitsphasen. Als die eingehend behandelte kritische Prüfung ausgeführt wurde, konnten bei dieser Organisation in einer sechsstündigen Arbeitsschicht in 40 Proben Aluminium- und Silizium bestimmt werden. Die durchschnittliche Durchlaufzeit einer Probe beträgt demnach 9 Minuten.

Angesichts des praktisch bewiesenen Zeitbedarfes muß das vorgeführte Verfahren der Neutronenaktivierungsanalyse gegenüber der mehrtägigen chemischen Methode als eine Schnellmethode betrachtet werden.

SCHRIFTTUM

1. *Лоповок, П. А.:* Нейтронный размножитель для активационного анализа геологических образцов. *Ядерная геофизика,* 1960, стр. 174—180. Гостоптехиздат, 1960. Москва.
2. *Лейпунская, Д. И., Резванов, Р. А., Дрынкин, В. И.:* Применение нейтронного активационного анализа в геологии. *Ядерная геофизика,* 1960, стр. 162—173. Гостоптехиздат, 1960, Москва.
3. Brownell, G. M., Bramadat, K., Knutson, R. A., Turnock, A. C.: *Trans. Roy. Soc. Can.* **51** (1957), 19—31.
4. *Глассон, В. В., Тимохин, Е. В., Вязников, Е. П.:* Опыт применения экспрессного активационного анализа для определения алюминия, кремния и марганца в образцах горных пород. «Геофизические работы при решении геологических задач восточной Сибири». *Сборник статей по геофизическим исследованиям,* стр. 202—209. Гостоптехиздат, Москва, 1961.
5. Tatár, J., Béress, M.: Prace Przedstawione na Zjezdzie Geofizyków, Kraków **II** (1962), 459—481.
6. Dittler, E.: Berg u. Hüttenm. Jahrb. **78** (1930).
7. Méhes, K., Csókás, J.: *VI. Oszt. Közl.* **II** (1951), 271—274.
8. Varga, K.: M. Áll. Eötvös Loránd Geofizikai Intézet Jelentése (1953). (Bericht des Ung. Staatl. Geophys. Inst. Eötvös Loránd).

APPLICATION OF NEUTRON ACTIVATION FOR SPEEDY BAUXITE ANALYSIS

J. TATÁR

SUMMARY

The operations of bauxite research, production, utilization and processing require numerous determinations of aluminium and silicon weight per cent. Chemical analysis needing several days, the technical arrangements are disadvantageously delayed or based on unfounded estimations. In order to prevent costs resulting from delay and ulterior corrections, a simple analytical method was worked out. With the method based on neutron activation, the weight per cent of the aluminium and silicon sample is determined within 9 minutes. According to statistical data of 300 control measurements, the mean value of the difference between activation analysis and chemical analysis for aluminium oxide amounts to $+1.12 \pm 2.43\%$ and for silicon oxide to $-0.03 \pm 2.01\%$. The method presented is — opposite the lengthy chemical analysis — an "express" method satisfying all requirements of industry.

L'APPLICATION DE L'ACTIVATION PAR NEUTRONS A L'ANALYSE RAPIDE DES BAUXITES

J. TATÁR

RÉSUMÉ

Les procédés de recherche, de production, de classement qualitatif et de fabrication de la bauxite exigent un grand nombre de déterminations du pourcentage en poids de l'aluminium et du silicium. Les analyses chimiques demandant plusieurs jours, les dispositions techniques à prendre souffrent un retard désavantageux ou sont basées sur des estimations sans fondement. Afin d'éviter les frais provenant de l'attente et des corrections ultérieures, une méthode d'analyse simple fut élaborée. A l'aide de cette méthode basée sur l'activation par neutrons, la détermination de la concentration en aluminium et silicium de l'échantillon s'effectue en 9 minutes. Selon les données statistiques de 300 mesures de contrôle, la valeur moyenne des différences entre l'analyse par activation et l'analyse chimique est, pour l'alumine: $+1{,}12 \pm 2{,}43\%$, et pour l'oxyde de silicium: $-0{,}03 \pm 2{,}01\%$. En comparaison du procédé chimique long et fastidieux, le procédé présenté représente une méthode ultra-rapide répondant aux besoins de l'industrie.

О ПРИМЕНЕНИИ АКТИВАЦИИ НЕЙТРОНАМИ ДЛЯ УСКОРЕННОГО АНАЛИЗА БОКСИТОВ

Я. ТАТАР

РЕЗЮМЕ

Процессы разведки, добычи, использования и переработки бокситов требуют большого объема работ по определению содержания алюминия и кремния в образцах. Проведение химических исследований занимает несколько дней, в связи с чем необходимые технические меры принимаются с значительным опозданием или же опираются на соответствующим образом не обоснованные оценки. Для устранения затрат, возникающих за счет указанного опоздания или поправок, осуществляемых впоследствии, был разработан простой метод анализа. При помощи этого метода, в основе которого лежит активация нейтронами, определение содержания алюминия и кремния в образце проводится в течении 9 *мин.* Статистическая обработка 300 контрольных измерений показывает, что средняя величина отклонения активационного анализа от химического составляет $+1{,}12 \pm 2{,}43\%$ для окиси алюминия и $-0{,}03 \pm 2{,}01\%$ для окиси кремния. По сравнению с длительным химическим анализом предлагаемый прием представляет собой «скоростной» метод, удовлетворяющий требованиям промышленности.

BOOK REVIEW – BUCHBESPRECHUNG – COMPTE RENDU DE LIVRES – ОБЗОР КНИГ

Antal Tárczy-Hornoch :

MARKSCHEIDERISCHE STUDIEN

Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1963. 1010 Seiten.

Das umfangreiche Werk schließt 31 Abhandlungen in sich; die erste erschien zum ersten Mal im Jahre 1925, die letzte 1957. Trotz des Zeitabstandes, der also auch zum Beitrag jüngsten Datums vorliegt, hat man keineswegs den Eindruck, als ob einer der Gedanken dieses Buches an Aktualität eingebüßt hätte. Es wird wohl viele Jahre dauern bis der fachwissenschaftliche Wert dieser Sammlung durch die Zeit in ein wissenschaftshistorisches Material verwandelt wird. Diese Überzeugung gewinnt der Leser bereits beim Durchblättern des Bandes. Nehmen wir die Titel der einzelnen Kapitel der Reihe nach her:

I. Neue Gesichtspunkte zur rechnerischen Lösung der Markscheideraufgaben.
II. Das Verwerferproblem im Lichte des Markscheiders.
III. Der Vermessungskreisel.
IV. Beitrag zur Ausrichtung der Verwerfungen.
V. Zur Theorie der freischwebenden Stahlbandmessung.
VI. Über die exakte Behandlung des Verwerferproblems.
VII. Die Photogrammetrie im Dienste des Bergbaues.
VIII. Über die Ausgleichung der Einrechnungszüge.
IX. Genauigkeitsvoranschläge bei Durchschlagszügen.
X. Zur Berechnung der kürzesten Verbindung zweier sich kreuzender Grubenstrecken.
XI. Über die verknoteten Einrechnungszüge.
XII. Zur Fehlertheorie der offenen Polygonzüge.
XIII. Die durch den Einrechnungszug erzielbare Orientierungsgenauigkeit.
XIV. Die zeitgemäße Verbesserung des Schmidtschen Schachtlotgerätes.
XV. Der Einfluß der regelmäßigen Fehler auf die Orientierungsgenauigkeit der Einrechnungszüge.
XVI. Das markscheiderische Steilschachtproblem.
XVII. Über ein abgeändertes Csétisches Hängenivellier.
XVIII. Fehlertheoretische Studien über das Schachtanschlußdreieck.
XIX. Zur Entwicklungsgeschichte markscheiderischer Instrumente.
XX. Zu den Anfängen des höheren bergtechnischen Unterrichtes in Mitteleuropa.
XXI. Zur Geschichte des Grubenrißwesens.
XXII. Die Drehhülsenzwangszentrierung.
XXIII. Genauigkeitsvoranschläge bei Durchschlagsketten.
XXIV. Die günstigste Gewichtsverteilung im ausgeglichenen Einrechnungszug.
XXV. Die günstigste Gewichtsverteilung im ausgeglichenen Schachtanschlußdreieck.
XXVI. Eine weitere Methode zur strengen Ausgleichung der Einrechnungszüge.
XXVII. Über das Schachtlotproblem.
XXVIII. Zur Vereinheitlichung des Grubenrißwesens.
XXIX. Das Soproner Richtungsfixiergerät.
XXX. Zwangszentrierungen und ihre Bedeutung bei Tunnelabsteckungen.
XXXI. Die Drehprismenaufstellung, eine weitere genaue Zwangszentrierungsmethode.

Die oben aufgezählten Aufsätze sind ursprünglich in mehreren Ländern und in verschiedenen Sprachen veröffentlicht worden. Die Mehrzahl lag deutsch vor, daher wurde die Übersetzung der übrigen durch den Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften ebenfalls in diese Sprache veranlaßt.

Es ist nicht unsere Aufgabe, über den Inhalt dieses Buches ein Urteil abzugeben. Dies ist bereits früher durch zuständigere Personen, und nicht zuletzt durch den schärfsten Kritiker:

die Zeit, getan. Hier soll lediglich erwähnt werden, daß die erste, 110 Seiten umfassende Abhandlung (eine Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades aus dem Jahre 1924) mehr als eine Erinnerung an den Anfang darstellt; zahlreiche ausländische Zeitschriften haben sich auf sie berufen und ihre Ergebnisse sind in mehrere Fachbücher aufgenommen worden. So z. B. widmete Professor WILSKI (Technische Hochschule zu Aachen) im ersten Band seines Werks »Lehrbuch der Markscheiderkunde« (Berlin, 1929) 21 Seiten dieser ersten Abhandlung von TÁRCZY-HORNOCH unter dem Titel: »Hornochsche Aufgaben«. Aber auch andere Autoren übernahmen Teile davon, wie Professor HADDOCK aus Coalville (»Disrupted Strata«, London, 1929, Seiten 17—26 bzw. 85—96; und später in »The Basis of Mine-Surveying«, London, 1952, Seiten 267—297), oder Professor SEGUTI (»Topografia di Miniera«, Milano, 1939, Seiten 297—299 und 302—304).

Es kommt einem beinahe selbstverständlich vor, daß der 24jährige Bergingenieur und Markscheideringenieur die Geodäsie zur Lebensaufgabe wählte, zumal sein Erfolg eine vererbte Zuneigung angespornt hatte: sein Vater, ein Diplom-Ingenieur beschäftigte sich gleichfalls sehr viel mit der Geodäsie.

Neben den fachlichen Abhandlungen enthält dieser Band auch drei technisch-geschichtliche Aufsätze (Nr. XIX, XX u. XXI), unter denen die wertvollen Artikel des Autors über Leben und Arbeiten von MIKOVINY von Leser leider vermißt werden.

Das vorliegende reichhaltige Buch könnte durchaus die beachtliche Frucht eines langen, schöpferischen Lebens sein. Es handelt sich hierbei jedoch nur um den unvollzähligen Ertrag von 33 Lebensjahren, indem dieses Werk die Arbeiten des Verfassers über obertägige Geodäsie sowie Geophysik nicht einmal miteinschließt. Seine Veröffentlichungen auf dem Gebiet der Geodäsie dürften wohl noch zwei ähnliche Bände, die in der Geophysik noch einen weiteren Band ausfüllen. Wir hoffen die Richtigkeit dieser vorsichtigen Schätzung später einmal kontrollieren zu dürfen! So lange gilt diese mit Sorgfalt gesetzte und geschmackvoll gebundene Neuerscheinung als ein Gewinn für Wissenschaftler, Fachlehrer, Studenten und Markscheider.

DR. E. REGŐCZI

INDEX

Milasovszky, B.: Analysis of the Meridian Method of Time Determinations — Analyse der Meridianmethode der Zeitbestimmungen — L'analyse de la méthode méridienne dans les déterminations de temps — *Милашовски, Б.:* Анализ меридианного метода определения времени 265

Boldizsár, T.: Geothermal Measurements in the Twin Shafts of Hosszúhetény — Messung des irdischen Wärmeflusses in der Zwillingsschacht von Hosszúhetény— Mesures du courant géothermique, dans les puits jumeaux de Hosszúhetény — *Болдижар, Т.:* О работах по измерению геотермических потоков, в двоенных шахтах района Хоссухетень 293

Asszonyi, Cs.: Adjustment of a Discrete Value System by a Linear Function — Die Ausgleichung eines diskreten Wertsystems mit Hilfe einer linearen Funktion — Compensation des systèmes de valuers discrètes par fonctions linéaires — *Ассони, Ч.:* Уравнивание дискретной системы значений при помощи линейного уравнения 309

Asszonyi, Cs.: Contribution to the Determination of the Tangent of the Bearing Belonging to an Adjusting Straight Line Satisfying the Principle $\Sigma\, pe^2 = \min$ — Ein Beitrag zur Bestimmung der Richtungstangente einer der dem Prinzip $\Sigma pe^2 = \min$ entsprechenden Geraden — Remarques sur la détermination de la tangente de direction de la droite de compensation satisfaisant au principe $\Sigma pe^2 = \min$ — *Ассони, Ч.:* Замечания к определению тангенса угла уравнивающей прямой, исходящей из принципа $\Sigma pe^2 = \text{мин}$ 321

Forrai, S.: Relations between the Standard Error Ellipse and Adjusting Straight Lines — Zusammenhänge zwischen der Standard-Fehlerellipse und den ausgleichenden Geraden — Relations entre l'ellipse d'erreur standard et les droites de compensation — *Форраи, Ш.:* Зависимости эллипса стандартных ошибок и прямых уравнивания 333

Hazay, I.: Bestimmung der charakteristischen Funktion der winkeltreuen Projektionen mit Hilfe der Grundgleichung der konformen Abbildung — Determination of the Characteristic Function of Conformal Projections by Means of the Fundamental Equation of Conformality — Détermination des fonctions caractérisant les projections conformes, au moyen de l'équation fondamentale de la conformité — *Хазаи, И.:* Определение характеристической функции конформных проекций при помощи основного уравнения конформности 351

Halmos, F.: Konstruktion der Fußpunktkurve der mittleren Fehlerellipse bei einfachem Bogenschnitt — Construction of Pedal Curve of the Ellipse of Error with Simple Arc Section — Construction de la courbe podaire de l'ellipse d'erreur par section d'arc — *Хальмош, Ф.:* Построение кривой точки подошвы эллипса ошибки при помощи простой засечки дуги 365

Halmos, F.: Die Zurückführung der bedingten Beobachtungen mit ungemessenen Unbekannten auf die reinen bedingten Beobachtungen — Tracing Back of Conditional Observations with Unmeasured Unknowns to Pure Conditional Observations — Les rapports entre la compensation d'observations conditionnelles à inconnues non mesurées et la compensation d'observations conditionnelles pures — *Хальмош, Ф.:* Сведение условных наблюдений с неизмеренными неизвестными к чистым условным наблюдениям 379

Tárczy-Hornoch, A.—Alpár, Gy.: Zur genauen Bestimmung kleiner Neigungswinkel mittels Sekundenlibellen — On the Determination of Small Slope Angles by Using a Second-Spirit Level — De la détermination exacte de petits angles d'inclinaison au moyen de niveau de haute précision — *Тарци-Горнох, А.—Альпар, Д.:* К точному определению небольших углов наклона с помощью уровня с отвесом, имеющим секундное деление 397

Scheffer, V.: Geophysical Investigation of the Geothermal Zones of the Earth — Geophysikalische Untersuchung der geothermischen Gebiete der Erde — Investigation géophysique des zones géothermiques de la Terre — *Шеффер, В.:* Геофизическое изучение геотермических зон Земли 409

Wallner, Á.: Über die erdmagnetischen Beobachtungen im Observatorium bei Nagycenk und über deren Auswertung — On Observations Related to Terrestrial Magnetism Made in the Observatory Near Nagycenk and the Evaluation of Same — De l'évaluation des observations géomagnétiques faites á l'observatoire de Nagycenk — *Валлнер, А.:* О наблюдениях земного магнетизма в обсерватории в районе Надьценк и обработке данных наблюдений 431

Neubert, K.: Richtungsabnahmen hoher Genauigkeit im Bergbaugebiet — Highly Accurate Determination of Directions in Mining Districts — Détermination de haute précision des directions dans les régions miniéres — *Нейберт, К.:* Высокоточное определение направления в районах горных разработок 445

Tatár, J.: Anwendung der neutronen-induzierten Reaktion zur Schnellanalyse von Bauxit — Application of Neutron Activation for Speedy Bauxite Analysis — L'application de l'activation par neutrons á l'analyse rapide des bauxites — *Татар Я.:* О применении активации нейтронами для ускоренного анализа бокситов. 455

Book Review — Buchbesprechung — Compte rendu de livres — Обзор книг

A. Tárczy-Hornoch: Markscheiderische Studien. *E. Regőczi* 467

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki felelős: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1964. III. 25. — Terjedelme: 18 (A/5) ív; 53 ábra, 1 melléklet

64.58819 Akadémiai nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hungary

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultúra" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Hongrie

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Nádor u. 7.
Budapest V.
Венгрия

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

52,— Ft

Index: 26.025