

ACTA
TECHNICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXXV—XXXVI

**CONFERENCE ON DIMENSIONING AND STRENGTH CALCULATION
BUDAPEST, OCTOBER 24—28, 1961**



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1961

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY U. 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az Akadémiai Kiadónál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest I., Fő utca 32. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfangs. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultúra« (Budapest I., Fő utca 32. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXXV—XXXVI

**CONFERENCE ON DIMENSIONING AND STRENGTH CALCULATION
BUDAPEST, OCTOBER 24—28, 1961**



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1961

ACTA TECHN. HUNG.

P R E F A C E

The Committee of the *Conference on the Problems of Dimensioning and Strength Calculation*, organised by the Hungarian Academy of Sciences, wishes to present the original text of the lectures to be held during the Conference. This volume comprises all the papers published in the following official languages of the Conference: English, German and Russian. All the papers of the lectures to be held at the Conference are not in hand yet, therefore, this volume does not contain all of them. The still missing papers will be delivered to the participants, presumably in reproduced copies.

Prof. Dr. L. Gillemot
Corresponding Member of the Hungarian
Academy of Sciences
Chairman of the Committee

V O R W O R T

In diesem Bande wird der Originaltext der auf der seitens der Ungarischen Akademie der Wissenschaften veranstalteten *Konferenz für zeitgemäße Dimensionierung* zu haltenden Vorträge dargeboten. Der Band enthält den offiziellen Sprachen der Konferenz entsprechend die Aufsätze in deutscher, englischer und russischer Sprache. Mit Rücksicht darauf, daß nicht alle Manuskripte zum festgestellten Termin eingelaufen sind, enthält dieser Band nicht sämtliche Vorträge. Die noch ausstehenden Referate werden voraussichtlich in vervielfältigter Form als Zusatzheft den Teilnehmern der Konferenz ausgehändigt.

Prof. Dr. L. Gillemot
korresp. Mitglied der Ungarischen Akademie
der Wissenschaften
Vorsitzender des Organisationsausschusses

П Р Е Д И С Л О В И Е

В настоящем томе в распоряжение предоставляются тексты докладов *Конференции по вопросам современного расчета*, созываемой Академией Наук Венгрии. Том содержит труды на английском, немецком и русском языках, в соответствии с официально-принятыми языками конференции. Принимая во внимание, что к назначенному сроку не все рукописи были получены, том еще не содержит материала всех докладов. Недостающие доклады, повидимому, будут изданы в размноженном виде как приложение этого тома.

Профессор д-р Л. Жильмо
Член-корреспондент Академии Наук Венгрии
Председатель Организационного Комитета

Organizing Committee of the Conference on Dimensioning and Strength Calculation:

Chairman: Prof. Dr. L. GILLEMOT, D. Sc., Corresp. M. of the Hung. Ac. of Sciences

Deputy-Chairman: Prof. Dr. J. VARCA, D. Sc.

Members: Prof. Dr. G. RUDNAI, C. Sc.

Prof. Dr. I. SÁLYI, D. Sc.

Dr. I. S. SZÁNTÓ, C. Sc., Res. Eng.

Prof. R. VANKÓ

Prof. Dr. B. ZORKÓCZY, C. Sc.

L. EKÉS, Chief Engineer

Secretariat of the Conference:

Chief of the Secretariat: L. KISBOCSKÓI, Chief Res. Eng.

Members: E. CZOBOLY, Res. Eng.

Dr. T. KONKOLY, C. Sc., Lecturer of Techn. Univ.

Mrs. D. LOSONCZY, Secretary

Miss M. RÓNAY, Res. Assist.

Á. SZABÓ, Res. Eng.

**TESTING AND ESTIMATING OF FATIGUE-LIFE AND
FATIGUE-STRENGTH**

LEBENSDAUER UND ERMÜDUNGSFESTIGKEIT

**ИССЛЕДОВАНИЕ СРОКА СЛУЖБЫ И РАСЧЕТ
НА СРОК СЛУЖБЫ**

STATISTICAL ANALYSIS OF FATIGUE TEST RESULTS AND ITS APPLICATION TO NEW SERIES OF DATA

F. BASTENAIRE, M. BASTIEN and G. POMEY
ST. GERMAIN-EN-LAYE, FRANCE

1. Introduction

It is generally accepted, nowadays, that it is inherent to fatigue test results to be scattered, and it has often been stated that fatigue is a "statistical phenomenon".

Such a recognition appears clearly from the number of papers dealing with the statistical aspects of fatigue. We cannot name all of the contributors to the study of this subject and the reader who is interested by such a review is referred to ref. [1].

There are two main kinds of investigations into the statistical aspect of fatigue. Theoretical studies make the first kind and experimental ones the other.

Some works of WEIBULL [2], FREUDENTHAL [3], GUMBEL [4] for instance belong typically to the first kind, whereas the works of STULEN [5], RANSOM [6] and others [7, 8] belong to the second.

The better known statistical theories of fatigue have been thoroughly analysed in [1] so that it is unnecessary to discuss this subject here again. The conclusions were that most theories were unsatisfactory for either physical or even purely logical reasons. This analysis showed clearly that, for the time being, there was no need for further theoretical considerations that had gone too far, already, but for experimental facts to test them.

There followed in [1] an extensive study of a great mass of fatigue data with this idea in mind. It disclosed important results relating to the life and strength distributions and to the shape of the isoprobability curves but it all relied upon data from the literature, so that it was felt that some investigations had to be made to the end of confirming these results. Our object, in this paper, is to give an account of the statistical analysis of the results of fatigue tests on one steel in two conditions.

2. Materials and testing

2. a. — The material used was hot rolled CrMo steel 35 CD 4 in bars $\varnothing = 20$ mm. Its chemical composition was:

C	Si	Mn	S	P	Cr	Ni	Mo	Cu
0,337	0,330	0,650	0,006	0,010	1,20	0,195	0,26	0,124

2.b. — Heat treatments

The specimens were heat treated before the final grinding. Two heat treatments were chosen giving 80 kg/mm² and 150 kg/mm² U. T. S. respectively:

A — Heating Isothermal quenching Cooling Tempering
 850°C — ½ h 325°C — 1 h air 650°C — 1 h

B — Heating Oil quenching Tempering
 850°C — 1 h — 400°C — 5 h

These two treatments gave the following characteristics:

Heat treatment	Yield point (kg/mm ²)	Tensile strength (kg/mm ²)	Elongation %	Charpy impact KUF	Vickers hardness Hv 50	Fatigue limit (*) (kg/mm ²)
A	57,6	80,2	18,2	—	225	40,9
B	131,7	152,6	7,3	3,10	472	66,1

2.c. — A drawing of a specimen appears in Fig. 1. The specimens were tested under constant moment rotating bending on fatigue machines of M. E.

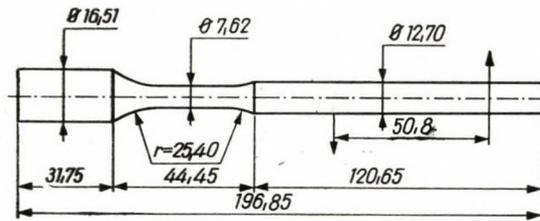


Fig. 1. Rotating bending fatigue specimen for MERL (Mechanical Engineering Research Laboratory) machine

R. L (Mechanical Engineering Research Laboratory — Glasgow) design built by IRSID. The tests were made at 6000 r. p. m. speed.

3. Experimental results — Preliminary study

The fatigue machines on which the two series of tests were made were newly built and had not yet been used before. Since they were to be used for fatigue studies involving large numbers of specimens, we deemed it necessary to check their homogeneity.

(*) These two fatigue limits determined by the staircase method with 21 specimens each.

This check was actually the object of the first series of tests with steel A. After some preliminary tests, six stress levels were chosen and it was decided to test nine specimens on each of the ten machines, except at the lowest stress level, where 13 specimens were tested on each machine.

We will not go into the statistical analysis of the machine differences which were shown to be practically negligible. This being so, the results were pooled and used to study the statistical distributions of fatigue life and strength.

3.a. — *Experimental results expressed in log life*

Before giving any interpretation to the results, some scale has to be used to get an overall graphical representation of them. The log scale is thought to fit the need since all results can be plotted on the same graph. Fig. 2 shows the cumulative frequency curves of $\log N$ on normal probability paper. This set of curves has the same aspect as found earlier in other cases ([1], Figs. 10, 15). At high stresses (54, 51, 48 kg/mm²) the cumulative frequency curves are practically linear, showing thereby, that $\log N$ is normally distributed. A slight curvature appears at 45 kg/mm² and increases at 42 and 40 kg/mm².

The cumulative frequency curves of $\log N$ for steel B specimens are shown on Fig. 3, which offers the same picture again. It can be noted that tests have been made at 11 different stress levels, from 52 to 72 kg/mm² included, with 100 specimens per level and from 74 to 82 kg/mm² with 50 specimens per level.

3.b. — *Stress distributions*

In a fatigue experiment, the stress S or load is obviously the independent variable and the life N , a dependent random variate whose distribution is defined by the value of the stress.

A random variate N is entirely defined by its cumulative distribution function or probability of observing a fatigue life smaller than or equal to N . This probability is the same as the probability of fracture before N cycles and since it depends also on S , we may write:

$$\text{Probability of fracture} = F(S, N) \quad (1)$$

The equation $F(S, N) = Cte$ defines a relation between S and N . The curve representing this relation is called an isoprobability curve. Each isoprobability curve is obviously the locus of some quantile of the life distributions.

Let us consider the variation of $F(S, N)$ as a function of S only, taking $N = N_0 \cdot F(S, N)$ is the probability of fracture of a specimen before N_0 cycles, under stress S . It can be estimated from the proportion of fractures in a sample of specimens subjected to this stress. Taking stresses S_1, S_2, \dots, S_n

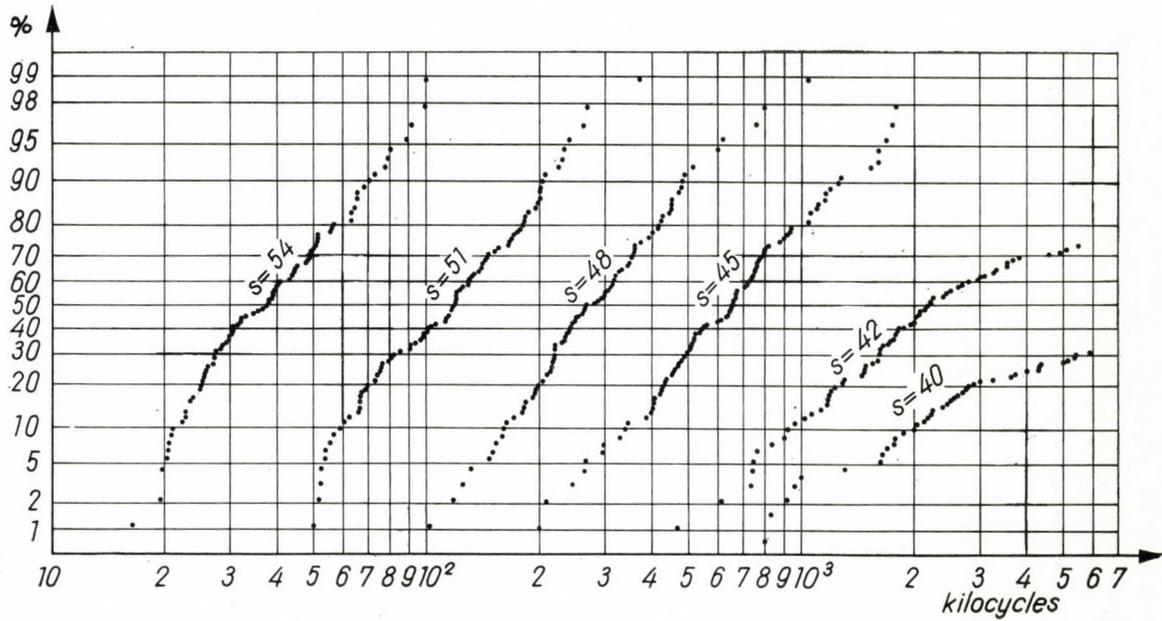


Fig. 2. Cumulative frequency curves of fatigue life on log scale and normal probability scale (Steel A specimens)

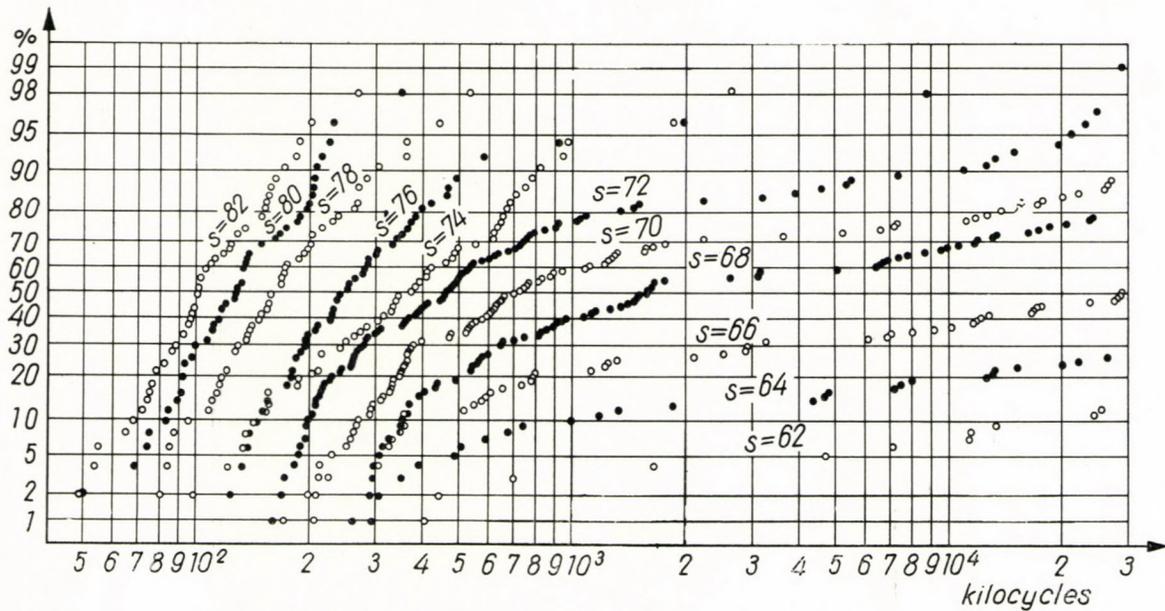


Fig. 3. Cumulative frequency curves of log life on normal scale for steel B specimens

and plotting the proportion of fractures versus S , a curve is obtained which represents the variation of $F(S, N_0)$. This curve is a dosage-response curve which, on the basis of experimental results, has been said by many authors to be a sigmoid curve.

Whatever $F(S, N_0)$ regarded as a function of S may be, it defines a scatter of S and since $F(S, N_0)$ is always non decreasing in S it is sometimes convenient.

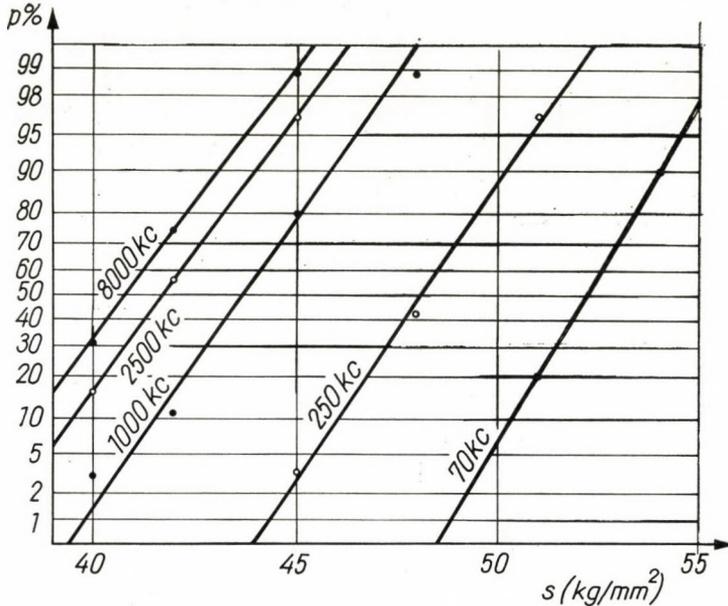


Fig. 4. Stress response curves of steel A specimens

to name it the “distribution of S for $N = N_0$ ” though it is clear that no such distribution exists.

Now, it is important to note that the stress response curve (or “distribution of S ”) often shows no appreciable changes in shape over a wide range of values of N and that its scatter is often constant, also.

In contrast with this, the statistical distributions of N , practically log-normal at high stresses, tend to be more and more skewed and some specimens may not even possess definite fatigue lives, if the scatter of S does not tend to zero as N tends to infinity (cf. [1] pp. 9–10).

As a statistical model of fatigue life under constant stress amplitude can be built and defined either from the S or the N distributions it seems worth studying the S distributions because they may turn out to have simple shapes.

The stress response curves of steel A specimens are shown on Fig. 4 for some values of N . Similar curves for steel B appear on Fig. 5. It can be seen that the experimental points are in good alignment in most cases. The proportion

of broken specimens being plotted along a gaussian scale, this shows that the stress-response curves can be regarded as sigmoid curves.

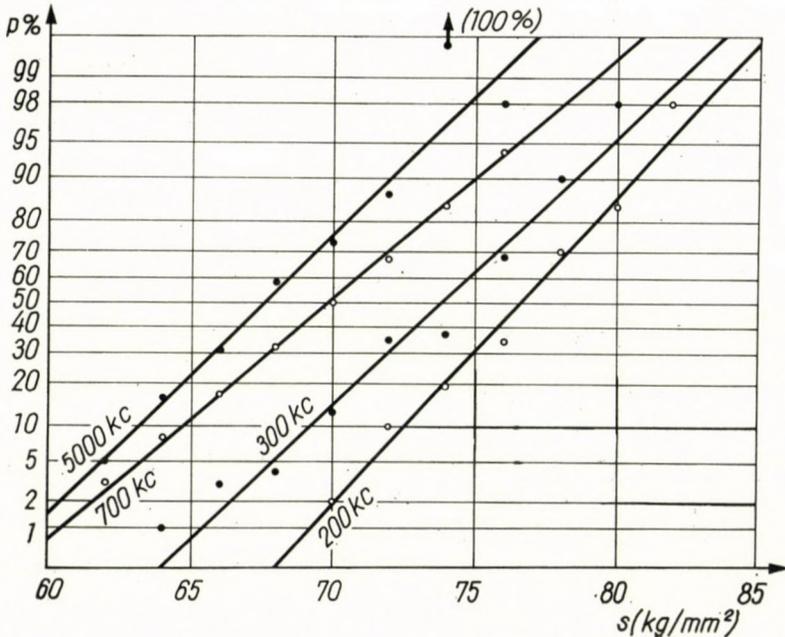


Fig. 5. Stress response curves of steel B specimens

3. c. — Distributions of fatigue life at low stresses

The cumulative frequency curves of Figs. 2 and 3 show that the distribution of $\log N$ is not normal at low stresses.

This can be explained easily by the shape of the isoprobability curves. Fig. 6 shows how the S and N distributions can be deduced from these curves. The vertical line of equation $N = N_0$ intersects the isoprobability curves $a, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, at points a, b, c, d, e , respectively. Then, plotting the probabilities which correspond to the curves $a, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, perpendicularly to the line $N = N_0$ from a, b, c, d, e , respectively, a series of points of the stress response curve for $N = N_0$ are obtained.

A cumulative distribution function of N can be obtained in a similar way by plotting the same probabilities vertically from the intersections of the horizontal line $S = S_0$ with the isoprobability curves a, β, γ, \dots . However, it can be seen that if the isoprobability curves have not only one common asymptote, some intersection points do not exist. The value of the cumulative distribution function of N then, does not tend to 1 when $N \rightarrow \infty$. Theoretically, in this case, some specimens do not break at the same stress under which others do break, however long the test is.

It is possible to express how the N distributions can be deduced from the S distributions if the shape of some isoproability curve is given. Some simplifying assumptions have to be made, but they are entirely justified by what has been said in section 2.c.

We shall assume that all stress distributions can be deduced from a reference one by translation and stretching along the S axis, or, in other words,

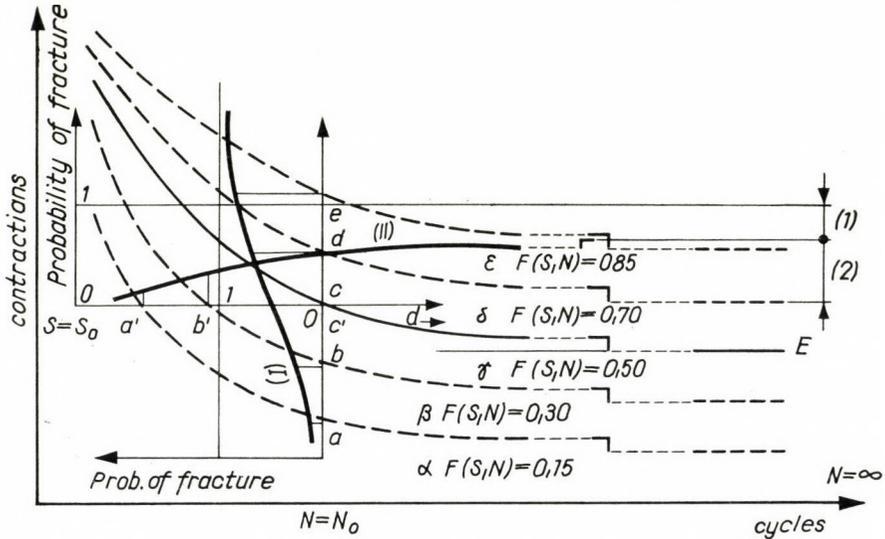


Fig. 6. Geometrical construction of stress response curves (I) and life distribution functions (II) from the set of isoproability curves

that these distributions can be represented by a two parameter equation:

$$R(S) = P \left(\frac{S - \mu}{\sigma} \right) \tag{2}$$

where $R(S)$ is the probability of fracture, N being assumed constant.

It is worth noting that P may be the c. d. f. of the standardized normal distribution, $N(0,1)$ or of any other such as a standardized extreme value distribution.

The preceding assumptions amount to saying that the stress distributions depend on N , through only two parameters μ and σ . Introducing two functions $\mu(N)$ and $\sigma(N)$, the probability that a specimen should fail under stress S before N cycles can be written as:

$$F(S,N) = P \left(\frac{S - \mu(N)}{\sigma(N)} \right) \tag{3}$$

We know that $\mu(N)$ is a decreasing function of N which is bounded by zero so that $\mu(N)$ possesses a limit $E \geq 0$.

Let us put:

$$\mu(N) = \varphi(N) + E \quad (4)$$

then

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi(N) = 0 \quad (5)$$

and

$$F(S, N) = P \left(\frac{S - \varphi(N) - E}{\sigma(N)} \right) \quad (6)$$

It can be seen from equation (6) that given the functions P , φ and σ , the distributions of N are then defined for all S .

If $\sigma(N)$ is constant or nearly so, as happens in many practical cases, equation (6) shows that $-\varphi(N)$ has, for given S , a probability distribution which differs from the distribution of S for given S by a translation only.

It may be noted that:

$$S = \varphi(N) + E \quad (7)$$

is the equation of the isoprobability curve

$$F(S, N) = P(0) \quad (8)$$

The function $\varphi(N)$ which converts the N distributions into stress distributions is then entirely related to the shape of the isoprobability curves.

One of us, started from WEIBULL's equation:

$$S - E = A(N + B)^{-c} \quad (9)$$

and found that the distributions of N^{-c} were not similar to those of S (cf. [1] p. 38). This indicated that equation (9) did not represent the isoprobability curves satisfactorily. He found also that if a convenient value of c was taken at each stress level, the distribution of N^{-c} and the distribution of S were then similar.

Moreover:

- 1) c is always ≤ 1
- 2) c decreases as S increases
- 3) $c = 1$ only at stresses where fatigue life is about several millions of cycles.

Figure 7 shows the cumulative frequency curves of $1/N$ for steel A specimens at 40, 42 and 45 kg/mm². At 40 and 42 kg/mm² these curves are practically straight lines. At 45 kg/mm² the curve is concave upward, showing that $1/N$ is no longer normally distributed.

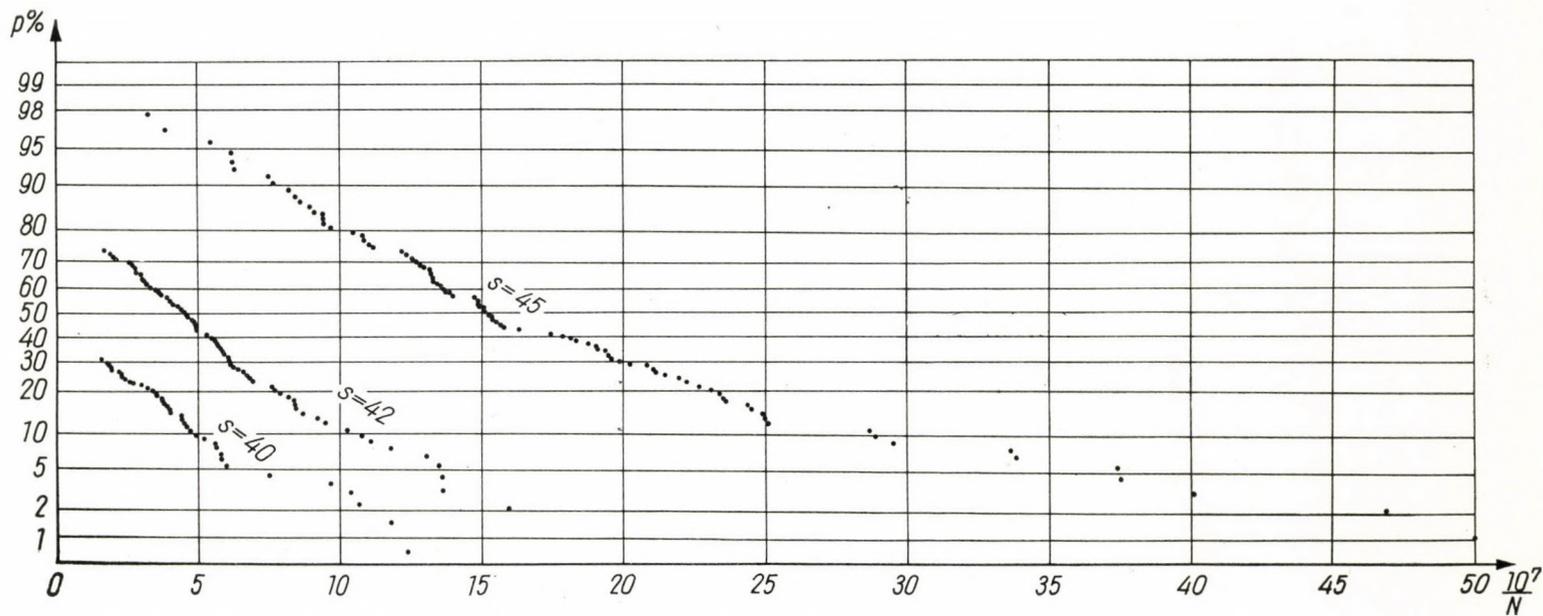


Fig. 7. Cumulative frequency curves of life reciprocal at 40, 42 and 45 kg/mm² (steel A)

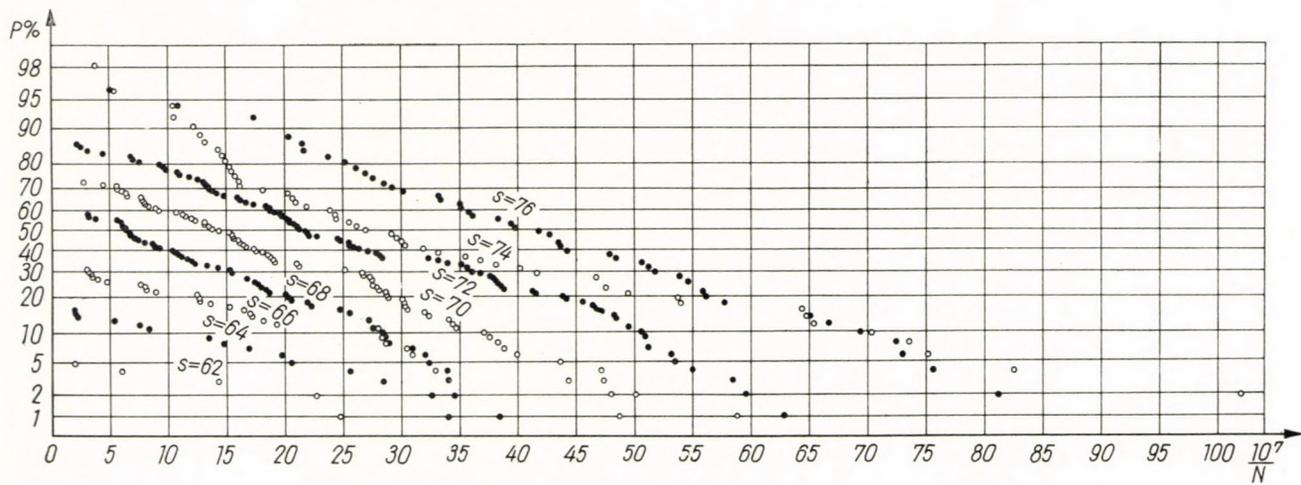


Fig. 8. Cumulative frequency curves of life reciprocal at stresses from 62 to 76 kg/mm^2 (steel B)

Figure 8 shows the cumulative frequency curves of $1/N$ for steel B specimens up to 76 kg/mm^2 . The curves are somewhat irregular but show no definite deviation from straight lines.

If we are right in our assumptions, the isoprobability curves should be represented by equations of the type:

$$S = E + A/N \quad (10)$$

in the stress range where $1/N$ is normally distributed.

This can be verified directly by plotting $1/N$ versus S but, of course, the many experimental results we have at each stress level must be condensed so as to find some "average" value.

Before solving this problem, it is important to mention that from the model we have taken, the distributions of $1/N$ are censored. In equation (6) which expresses this model in mathematical terms, $S - \varphi(N) - E$ increases when N increases (since $\varphi(N)$ is a decreasing function of N) but remains inferior to $S - E$ because :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi(N) = 0$$

Then it results from equation (6) that the probability of fracture under a given stress amplitude S is bounded by:

$$P\left(\frac{S - E}{\sigma(\infty)}\right) \quad (11)$$

This indicates that the statistical distribution of $1/N$ is censored. What would *actually* happen were the tests run on indefinitely, we cannot tell, since we are bound to stop them at some cycle number M . The adequacy of the theory, therefore, cannot be checked beyond M and the actual censoring occurs at $1/M$.

At each level where $1/N$ has been found normal (cf. Figs. 7 and 8), its mean and variance can be estimated by the statistical methods of estimation of the parameters of censored distributions. Knowing the means of the censored distributions of $1/N$, it is possible to see whether the median isoprobability curve can be represented by equation (10). (These means are better estimates of the true medians of $1/N$ than the experimental medians of the groups. When the stress is high and the distribution of $1/N$ no longer normal, the true median must however, be estimated by the empirical median). Fig. 9 shows the values of the medians of $1/N$ at 40, 42 and 45 kg/mm^2 for steel A specimens. Fig. 10 shows them for steel B. It can be verified that the shape of the median isoprobability curve agrees perfectly with our expectations. We started by assuming

that the S distributions were normal and found that $1/N$ was normal, wherefrom we deduced that $1/N$ should be a linear function of S (for a given proba-

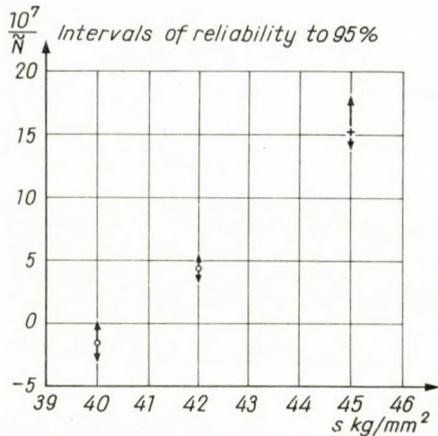


Fig. 9. Variation of $1/N$ versus S at low stresses (steel A) (Independent estimates of the mean of $1/N$ at 40 and 42 kg/mm² observed median at 45 kg/mm²)

bility of fracture). Now, considering these propositions in reverse order we may also state that since it has been verified that the median of $1/N$ is a linear function of S and that $1/N$ is normally distributed, S must be normally distributed too.

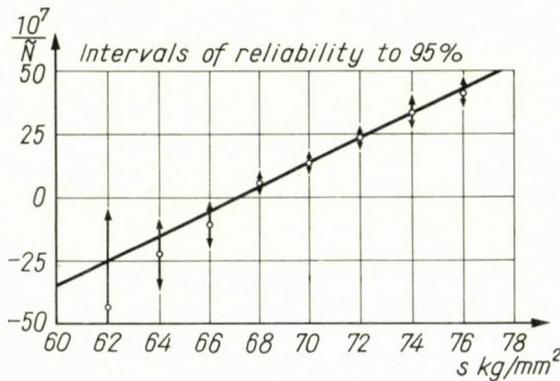


Fig. 10. Plot of independent estimates of median fatigue life reciprocal at stresses from 62 to 76 kg/mm² (steel B)

4. Study of the results at all stress levels

From the results of our last section, it is clear that a limiting condition is imposed on the model of fatigue life under constant stress amplitude.

If we consider only one isoprobability curve, the median curve for instance, and put:

$$\frac{1}{\tilde{N}} = f(S) \quad (12)$$

we may introduce a parameter E such that:

$$f(E) = 0 \quad (13)$$

Let us write the TAYLOR's expansion of $f(S)$:

$$f(S) = f(E) + (S - E)f'(E) + (S - E)\varepsilon(S - E) \quad (14)$$

where:

$$\varepsilon(S - E) \rightarrow 0$$

when

$$S \rightarrow E$$

From equations (12) and (13) we have:

$$\frac{1}{\tilde{N}} = (S - E)[f'(E) + \varepsilon(S - E)] \quad (15)$$

Equation (15) describes in mathematical terms what we found in the last section. If $S - E$ is small, $\varepsilon(S - E)$ may be neglected and we find the simple equation:

$$\tilde{N}(S - E) = \text{const.} \quad (16)$$

However, if $S - E$ does not remain small, $\varepsilon(S - E)$ cannot be neglected and its variations have to be studied.

4. a. — Steel A

In order to get a general picture of the isoprobability curves, six quantiles were chosen corresponding to the 13th, 26th, 39th, 52nd, 65th and 78th observations, respectively, at all levels where 90 specimens were tested. These order-statistics give estimates of the $1/7$, $2/7$, \dots , $k/7$, \dots quantiles. At the lowest level where 130 specimens were tested, the observations chosen to correspond to the preceding ones were the 19th and 38th. Fig. 11 illustrates two facts:

- 1) that $1/N$ increases rapidly as S increases,
- 2) that the scatter of the isoprobability curves measured along the stress axis is fairly constant.

In the present case, it is apparent that the $\varepsilon(S - E)$ term of equation (15) cannot be neglected even at the 45 kg/mm² stress level and still less at higher levels.

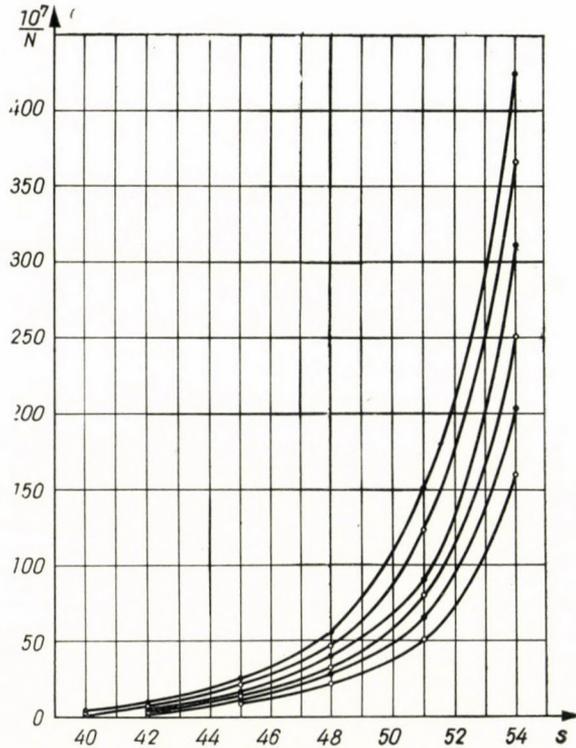


Fig. 11. Plot of life reciprocal quantiles versus stress (steel A)

From equation (15):

$$f'(E) + \varepsilon(S - E) = \frac{1}{\tilde{N}(S - E)} \quad (17)$$

so that a way to study the variations of $\varepsilon(S - E)$ is to study $\frac{1}{\tilde{N}(S - E)}$ or more simply $\tilde{N}(S - E)$.

An estimate of the parameter E can be obtained by linear interpolation between the values of the means of the censored distributions of $1/N$ at 40 and 42 kg/mm². This estimate was rounded off to 40 kg/mm². Fig. 12 shows the variations of $\tilde{N}(S - 40)$ versus S , \tilde{N} being the median life. This variation is surprisingly linear from 42 to 51 kg/mm² and some curvature appears only from 51 to 54 kg/mm². From 40 to 51 kg/mm², therefore, the equation

$$\tilde{N}(S - E) = a - \beta(S - E) \quad (18)$$

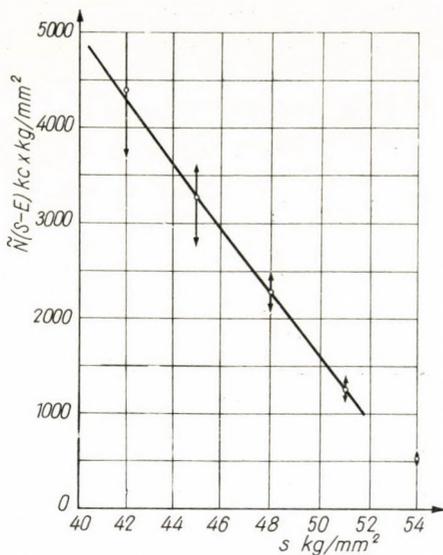


Fig. 12. Variation of $\tilde{N}(S - E)$ versus S (steel A)

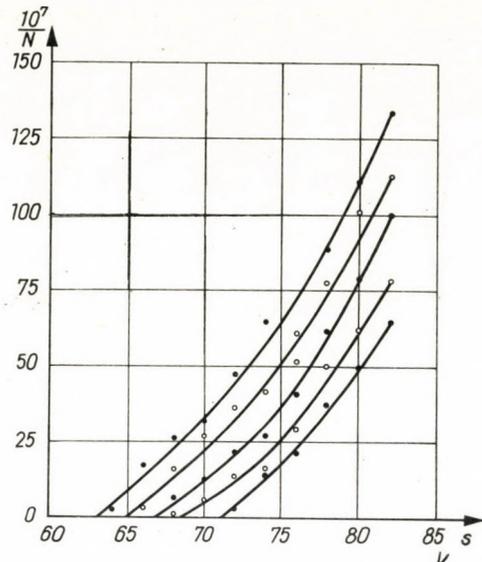


Fig. 13. Plot of life reciprocal quantiles versus stress (steel B)

gives a good representation of the median isoproability curve.

Equation (18) may also be written as:

$$\frac{1}{N + \beta} = \frac{1}{a}(S - E) \quad (19)$$

In other words, $\frac{1}{N + \beta}$ is a linear function of S . Fig. 13 shows the variation of $\frac{1}{N + \beta}$ versus S .

4.b. — Steel B

Figure 10 showed the variations of the reciprocal of median life from 62 to 76 kg/mm². In order to extend the study to the whole range of stress, we chose several quantiles of the N distributions and plotted them versus S . Fig. 13 shows the isoproability curves which were obtained graphically from these data. These curves do not depart so much from straight lines as did the curves of Fig. 11. Fig. 14 is intended to show the variation of the median life reciprocal with more precision. From the results of our preliminary study of section 3.c. it is reasonable to assume that the median life reciprocal is a quasi-linear function of S in the stress range from 62 kg/mm² to 76 kg/mm² and the standard deviation of $\frac{1}{N}$ constant within this same range. On the basis of these

assumptions, new estimates of the means and of the common standard deviation of the censored distributions of $\frac{1}{N}$ can be obtained by a statistical method adapted to this situation. These means are plotted on Fig. 14 together with their confidence intervals computed from the common estimate of the standard deviation. Above 76 kg/mm² the observed medians are plotted on the graph.

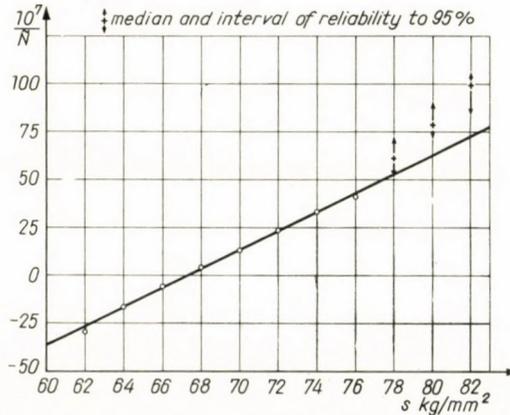


Fig. 14. Plot of median life reciprocal estimates under simultaneous estimation at all levels from 62 to 76 kg/mm². Observed median life reciprocals at higher levels

5. Conversion of life into strength distributions

As in section 3.c., let us designate by $\varphi(N)$ the function representing some typical isoprobability curve, the median curve, for instance. Instead of considering the fatigue life N , let us consider the random variate $\varphi(N)$. Then, if $\varphi(N)$ represents the median isoprobability curve, it is obvious that $\varphi(\tilde{N})$ (\tilde{N} is the median fatigue life) is a linear function of S .

In the most general case, the distribution of $\varphi(N)$ or the parameters of this distribution may depend on S , but, if the distributions of $\varphi(N)$ differ by translations only, the isoprobability curves of $\varphi(N)$ are parallel straight lines. Consequently, any two distributions of S differ by a translation only as do the $\varphi(N)$ distributions. In other words, if a function $\varphi(N)$ is suitable to represent the median isoprobability curve, and if it can be shown that the distributions of $\varphi(N)$ have the same shape and same scatter, it can be inferred that the distributions of S have this shape and a constant scatter.

Let us take the test results on steel A specimens as an example. We have seen in section 4.a. that the median isoprobability curve can be represented in this case by equation (18) or (19).

Equation (18) shows that $-\beta$ is the slope of the line representing the variation of $\tilde{N}(S - E)$ (Fig. 12). This variation, however, is not perfectly linear

and equation (18) holds from 40 kg/mm² to 50 kg/mm² only. From about this level upwards the curvature increases and a better approximation to the curve can be obtained on a limited range of stress by taking a tangent. This simply means that β must be taken different. Now, equation (19) shows that $\varphi(N)$ is equal to $\frac{a}{N + \beta}$ in the present case.

Let us consider, therefore, the statistical distributions of $\frac{1}{N + \beta}$ taking β equal to the slope of the curve of Fig. 12. From 40 to 48 kg/mm², β is practi-

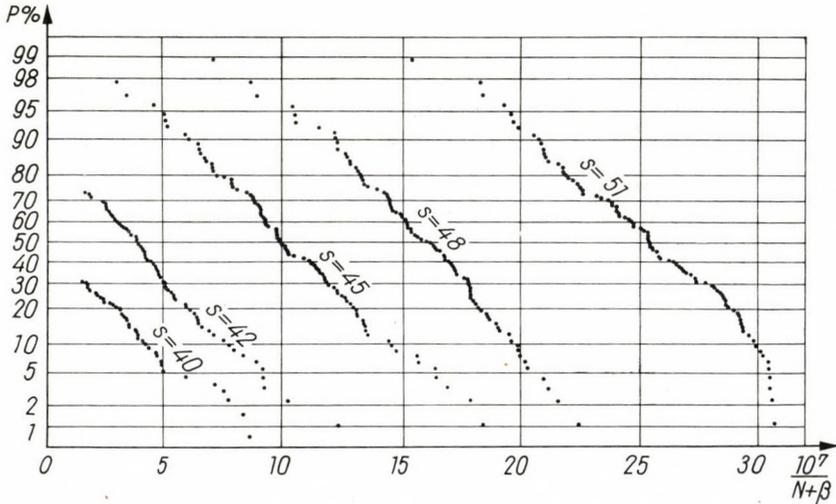


Fig. 15. Cumulative frequency curves of $\frac{1}{N + \beta}$ (steel A specimens) 40 to 51 kg/mm²

cally constant and we put it equal to 342 kilocycles. The cumulative frequency curves of $\frac{1}{N + 342}$ are plotted on Fig. 15 using the normal scale in ordinates. They show that this quantity is normally distributed and its standard deviation constant. At 51 kg/mm², β is appreciably different and must be put equal to 275 kc. The cumulative frequency curve of $\frac{1}{N + 275}$ for $S = 51$ kg/mm² is also plotted on Fig. 15 (last curve to the right). It is not quite as straight as the four first, but this is due to the fact that a linear approximation to the curve of Fig. 12 around 51 kg/mm² is not accurate enough.

It can be concluded, therefore, that the distributions of S are normal with constant standard deviation. The data from steel B specimens could be treated in a similar way. It would imply to fit a curve to the points plotted on Fig. 14

in order to possess a good representation of $\varphi(N)$ and then, to plot the cumulative frequencies of $\varphi(N)$ at all stress levels. This would mean rather long computations and would not add much to our knowledge since we have done a similar job using a function $E + A/N$ to represent the median isoprobability curve from 62 to 76 kg/mm², and since the distributions of $1/N$ have been found normal at these levels.

6. Conclusions

The fatigue properties of a CrMo steel treated to 80 kg/mm² and 150 kg/mm² U. T. S. have been studied in rotating bending with large numbers of specimens — 580 in the 80 kg/mm² U. T. S. condition and 850 in 150 kg/mm² U. T. S. condition — in order to check and to extend the results of a former statistical study.

The present study has led to the following conclusions:

1. Consider a given fatigue life quantile N_p and its reciprocal $1/N_p$. This quantity is a function of stress whose derivative is finite and positive when $1/N_p$ tends to zero, that is, when N_p tends to infinity. (It must be pointed out that this property may hold true for one power of N only. If different from zero for a given power of N , the derivative of any other power of N is either 0 or ∞).

2. The stress-response curve scatter is practically constant and tends to a finite positive value for larger and larger values of N .

3. It results from conclusion 1) that it is possible to introduce a parameter E_p which is the value of S for which $1/N_p$ is theoretically zero; E_p is the fatigue limit corresponding to the probability of fracture p . It follows from conclusion 1) also, that $N_p(S - E_p)$ tends to a limit as $S \rightarrow E_p$ and $N \rightarrow \infty$.

$N_p(S - E_p)$ is not constant, however. It is a decreasing function of S in the two cases studied here, but whereas $N_p(S - E_p)$ is nearly constant with heat treatment B (150 kg/mm² U. T. S.) it falls off quickly with heat treatment A (80 kg/mm² U. T. S.).

4. The proportion of fractures occurring before a given number of cycles is a function of stress represented by a sigmoid curve. This can be verified directly by plotting the observed fracture proportions versus S or indirectly by converting the life distributions into stress distributions.

In other words, the "distributions of stress" are normal.

It may be added that the present study was undertaken after it had been shown by a statistical investigation that the fatigue test results obtained on different machines were not appreciably different. Moreover, no correlation was detected between the fatigue life and the hardness of the specimens, showing that the variability in fatigue life could not be attributed to a variability in the heat treatment of the specimens.

REFERENCES

1. BASTENAIRE, F.: Etude statistique et physique de la dispersion des résistances et des endurances à la fatigue.
Thèse de Doctorat — Université de Paris — 29 Janvier 1960.
2. WEIBULL, W.: A statistical representation of fatigue failures in solids. Kungl Tekniska Hogskolans Handlingar — Stockholm (1949).
3. FREUDENTHAL, A. M.: The statistical aspect of fatigue of materials. Proc. of the Royal Soc. vol. 187 — Séries A (1946) p. 416—429.
4. GUMBEL, E. J.: Etude statistique de la fatigue des matériaux. Revue de statistique appliquée, vol. V, N° 4 (1957).
5. STULEN, F. B.: On the statistical nature of fatigue. Symposium on statistical aspects of fatigue (1951) ASTM Special Technical Publication N° 121.
6. RANSOM, J. T. and MEHL, R. F.: The statistical nature of the fatigue properties of SAE 4340 steel forgings. Symposium on fatigue with emphasis on statistical approach (1952). ASTM Special Technical Publication N° 137.
7. CAZAUD, R.: Contribution à l'étude statistique de la dispersion dans les essais de flexion rotative. Revue de Métallurgie (Avril 1953) 50, N° 4, p. 291—299.
8. BASTENAIRE, F., CAZAUD, R., WEISZ, M.: Essais de fatigue statistiques suivant la méthode de charge progressive. Colloque de fatigue de l'Union Internationale de mécanique théorique et appliquée (Stockholm 1955). Springer Verlag.

EVALUATION DE LA LIMITE DE FATIGUE A PARTIR D'UNE SEULE EPROUVETTE, PIÈCE OU ELEMENT D'ESSAI

R. CAZAUD*

Cette évaluation repose sur l'application de la méthode décrite pour la première fois, en 1955, par L. LOCATI, qui en a souligné l'intérêt pour le contrôle d'une fabrication et pour l'essai de pièces prototypes d'automobiles [1].

Dans le présent mémoire, en se limitant au cas des aciers, l'auteur a comparé les résultats d'essais de la méthode LOCATI avec ceux de la méthode classique de WÖHLER, pour des éprouvettes de fatigue, des pièces mécaniques ou des éléments de construction, dont certains, soudés, sont complexes et de grande dimension. [2, 3, 10]

I. Principe et avantages de la méthode LOCATI

Principe :

La méthode LOCATI consiste en un chargement progressif et par paliers de même durée échelonnés en croissant jusqu'à la rupture de l'éprouvette ou de l'ensemble essayé, dont on ne dispose que d'un seul exemplaire.

Chaque palier de charge correspond à un nombre de cycles constant (égal à 100 000, par exemple); l'échelonnement des charges étant lui-même constant et égal, en contrainte, à 2 kg/mm² par exemple, le palier initial se situant légèrement au-dessous de la limite de fatigue présumée.

On admet l'exactitude de l'hypothèse de MINER se rapportant aux dommages cumulés lors des paliers de charges successifs, et l'on suppose connue l'allure de la courbe de WÖHLER $S-N$ pour des éprouvettes ou des pièces identiques à celle qui est essayée, ou seulement analogues, dans le même acier.

On représente donc la courbe $S-N$ supposée de la pièce ou de l'acier. On trace ensuite deux autres courbes dont les asymptotes horizontales sont situées de part et d'autre de la première courbe; le «coude» de la courbe se situant entre 1 et 3 millions de cycles, ainsi qu'on peut l'admettre d'après

* Ingénieur-conseil à l'Institut de Recherches de la Sidérurgie, Saint-Germain en-Laye (France).

Vice-Président de la Commission XIII (essais de fatigue) de l'Institut International de la Soudure

l'expérience pour un grand nombre d'aciers. (Sur le même diagramme, on peut reporter la courbe définissant la loi d'accroissement de la charge appliquée).

On représente, en outre, les branches inclinées des courbes $S-N$ supposées avec une pente d'autant plus grande que les limites de fatigue sont plus élevées ou, simplement, avec une pente constante.

Ces conditions étant fixées, on considère les dommages cumulés n/N pour les différents niveaux de charge et par rapport à chacune des trois courbes supposées, n étant le nombre de cycles par palier de charge, et N le nombre de cycles correspondant à la rupture pour le niveau de charge considéré.

Si l'on porte sur une courbe la somme des dommages cumulés par rapport à chacune des courbes supposées, en fonction des valeurs des limites de fatigue, la limite de fatigue de la pièce ou de l'élément essayé est donné par interpolation sur la courbe pour $\sum \frac{n}{N} = 1$.

On a d'ailleurs trouvé [2, 3, 10] que les facteurs suivants ont peu d'influence sur la valeur de la limite de fatigue évaluée:

- a) durée des paliers de charge, entre 50 000 et 200 000 cycles.
- b) échelonnement $\Delta\sigma$ des contraintes, entre 2,5 et 5 kg/mm²; le niveau de contrainte initial σ_0 étant le même dans tous les cas.
- c) forme des courbes hypothétiques de départ, en ce qui concerne la pente de la branche inclinée de la courbe $S-N$, du moins entre certaines limites, de l'ordre de $\pm 10\%$.

Il est à noter que la région du coude de la courbe $S-N$ n'est généralement connue qu'avec une incertitude plus grande que les branches qui l'encadrent. Dans le calcul des dommages, il y a de ce fait avantage à faire intervenir cette région le moins possible, ce que l'on obtient aisément en choisissant des courbes $S-N$ hypothétiques dont les branches horizontales correspondent aux contraintes appliquées au cours des essais [4].

Avantages :

Il faut remarquer que la technique de l'essai par paliers de charge croissants est, somme toute, classique pour évaluer approximativement la limite de fatigue lorsqu'on ne dispose que d'une seule éprouvette. Mais, dans cet essai, où l'on néglige l'effet éventuel d'understressing, la durée de chaque palier correspond essentiellement au nombre de cycles définissant la limite ou la résistance à la fatigue. Il est, par exemple, de 2 millions conformément à la définition de la Commission XIII de l'Institut International de Soudure.

Dans la méthode LOCATI, la durée de chaque palier peut être seulement de 100 000 et même de 50 000 cycles, ce qui abrège considérablement la durée de l'essai.

Ainsi qu'il apparaît dans les divers résultats donnés plus loin, le nombre total de cycles est, en effet, de l'ordre de 1 million et souvent de 500 000.

Par ailleurs, si l'on essaie comparativement deux assemblages soudés suivant le même programme de chargement, celui qui permet d'atteindre le plus haut niveau de charge ou, pour le même niveau, le plus grand nombre de cycles, est incontestablement le meilleur du point de vue de l'endurance.

Enfin, on sait que la détermination de la limite de fatigue nécessite — quelles que soient les méthodes employées — un certain nombre d'éprouvettes semblables: environ une dizaine pour le tracé de la courbe $S-N$, 60 à 80 pour la détermination de la limite de fatigue statistique par la méthode des «probits», 15 à 20 par la méthode «stair-case».

L'avantage de la méthode LOCATI est de permettre l'évaluation de cette limite, avec une précision suffisante pour la pratique, avec une seule éprouvette.

Cet avantage ressort encore plus nettement dans le cas de pièces ou de structures prototypes dont l'exécution est toujours onéreuse.

II. Essais sur éprouvettes

Les éprouvettes essayées, de flexion rotative (fig. 1), avaient été prélevées dans des barreaux, et à raison de deux par barreau, dans des arbres de grande dimension.

La méthode LOCATI ayant permis d'évaluer la limite de fatigue sur l'une des éprouvettes de chaque barreau, on a ensuite vérifié avec l'autre éprou-

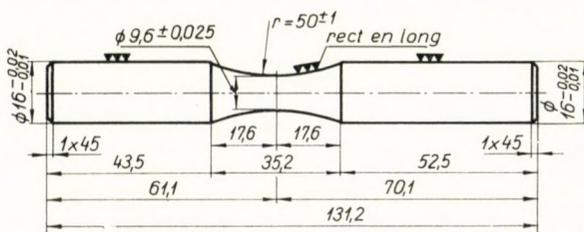


Fig. 1. Epreuve torique de flexion rotative

vette que cette valeur correspondait sensiblement à celle donnée par l'essai conventionnel sous amplitude de charge constante pour lequel, dans les cas de non-rupture, la durée a atteint 30 millions de cycles (à 2800 c/mn.).

L'acier étudié correspondant à de l'acier au carbone à $R = 55 \text{ kg/mm}^2$ ($H_v = 150-160$), les courbes hypothétiques de WÖHLER (courbes $S-N$) ont été représentées (fig. 2) avec des branches horizontales pour 25, 27 et 29 kg/mm^2 ; le genou a été situé à environ 2 millions de cycles; la pente de la branche inclinée des courbes $S-N$ a été tracée d'après celle relevée dans la littérature pour le même type d'acier.

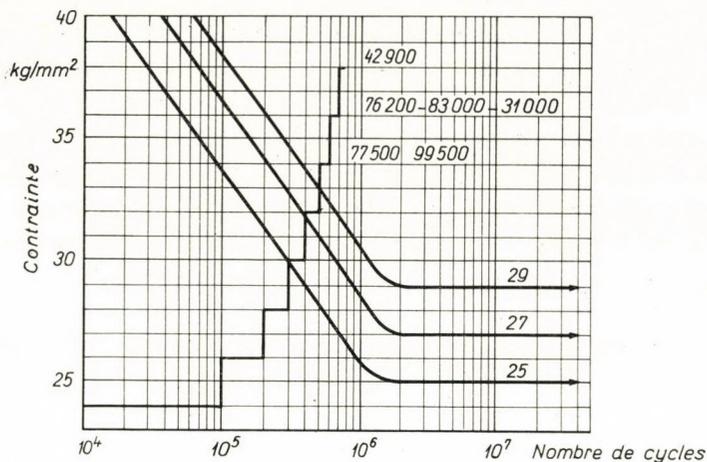


Fig. 2. Courbes S—N hypothétiques et succession des paliers de charge échelonnés avec l'indication du nombre de cycles correspondant à la rupture au dernier palier

Tableau I

Calcul des dommages cumulés pour l'éprouvette 3R4, essayée en flexion rotative

F kg/mm ²	n	f = 25		f = 27		f = 29	
		N	$\frac{n}{N}$	N	$\frac{n}{N}$	N	$\frac{n}{N}$
col. 1	col. 2	col. 3	col. 4	col. 5	col. 6	col. 7	col. 8
24	100 000	∞	0				
26	100 000	900 000	0,111	∞	0		
28	100 000	485 000	0,206	1 300 000	0,077	∞	0
30	100 000	260 000	0,385	660 000	0,151	1 300 000	0,077
32	100 000	150 000	0,666	380 000	0,260	680 000	0,147
34	100 000	80 000	1,250	215 000	0,460	390 000	0,256
36	31 000	45 000	1,450	130 000	0,238	225 000	0,138
	631 000		4,068		1,186		0,618

Le tableau I montre le calcul des dommages cumulés permettant l'évaluation de la limite de fatigue, pour l'une des éprouvettes essayées.

Dans la colonne 1 figurent les niveaux des contraintes successivement appliquées; dans la colonne 2, les nombres de cycles n à chaque niveau: soit 100 000; dans la colonne 3: les nombres de cycles N correspondant à la rupture sur la courbe S—N de limite de fatigue 25 kg/mm²; dans la colonne 4, le calcul du dommage $\frac{n}{N}$, dont la somme est portée en bas de la même colonne.

Le même processus est appliqué, colonnes 5 et 6, pour la valeur de la limite de fatigue 27 kg/mm² et, colonnes 7 et 8, pour 29 kg/mm².

Si l'on porte à présent les valeurs des dommages cumulés $\frac{n}{N}$ par rapport à chacune des 3 courbes supposées, en fonction des limites de fatigue correspondantes, on obtient (fig. 3) la valeur de la limite de fatigue recherchée pour $\sum \frac{n}{N} = 1$, soit 27,5 kg/mm².

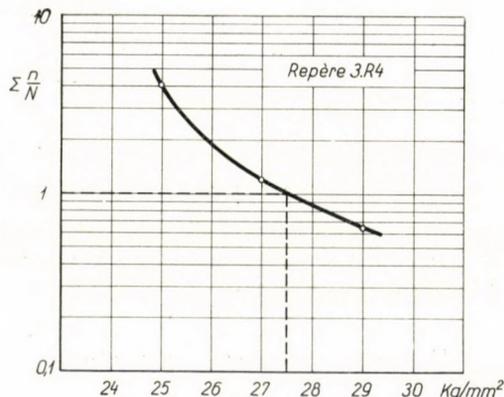


Fig. 3. Représentation de la somme des dommages cumulés en fonction de la contrainte, pour l'éprouvette 3 R 4 (Tableau I)

Tableau II

Valeurs des limites de fatigue obtenues par la méthode Locati et résultats d'essais sous charge d'amplitude constante, en flexion rotative

Repère	Méthode Locati			Méthode de charge constante		
	niveau de rupture kg/mm ²	nombre de cycles	limite calculée kg/mm ²	contrainte kg/mm ²	nombre de cycles	observations
1	34	77 500	26,7	—	—	
1	—	—	—	26,7	996 000	rompue
2	36	76 200	29	—	—	
2	—	—	—	29	1 626 000	rompue
2 B	34	99 500	27	—	—	
2 B	—	—	—	26	30 · 10 ⁶	non rompue
3	40	63 900	31,5	—	—	
3	—	—	—	28	30 · 10 ⁶	non rompue
3 .	38	42 900	29,5	—	—	
3 .	—	—	—	28,5	5 557 700	rompue
3 R2	36	83 000	29	—	—	
3 R1	—	—	—	29	30 · 10 ⁶	non rompue
3 R4	36	31 000	27,5	—	—	
3 R3	—	—	—	26,5	30 · 10 ⁶	non rompue

Le tableau II représente pour chaque barre les valeurs des limites de fatigue trouvées par la méthode LOCATI et le nombre de cycles correspondant à la rupture ou à la non-rupture pour la même contrainte — ou une contrainte très voisine — d'amplitude constante, suivant la méthode classique.

On observe que les limites de fatigue données par la méthode LOCATI se situent entre 26,7 et 31,5 kg/mm² et que l'on trouve, sous amplitude constante, des valeurs voisines des limites de fatigue comprises entre 26 et 29 kg/mm².

Il est à noter que, parmi ces valeurs, au nombre de 7, 4 correspondent à la non-rupture pour 30 millions de cycles et les 3 autres à la rupture pour des nombres de cycles de 996 000 à 1 626 000 et 5 557 000, donc situés vers le genou de la courbe *S—N* de la limite de fatigue réelle.

Compte-tenu de la dispersion que l'on peut rencontrer pour les éprouvettes prélevées dans une même pièce, on peut estimer que l'évaluation donnée par la méthode de LOCATI est acceptable.

III. Essais sur pièces mécaniques

Les pièces auxquelles la méthode LOCATI a été appliquée sont des pièces diverses de construction automobile: arbres de roues, roues, vilebrequins, fusées.

Nous résumerons, ici, les résultats les plus complets [2] qui se rapportent à des arbres de roues traités par trempé superficielle, essayés en flexion rotative sur une machine représentée fig. 4.

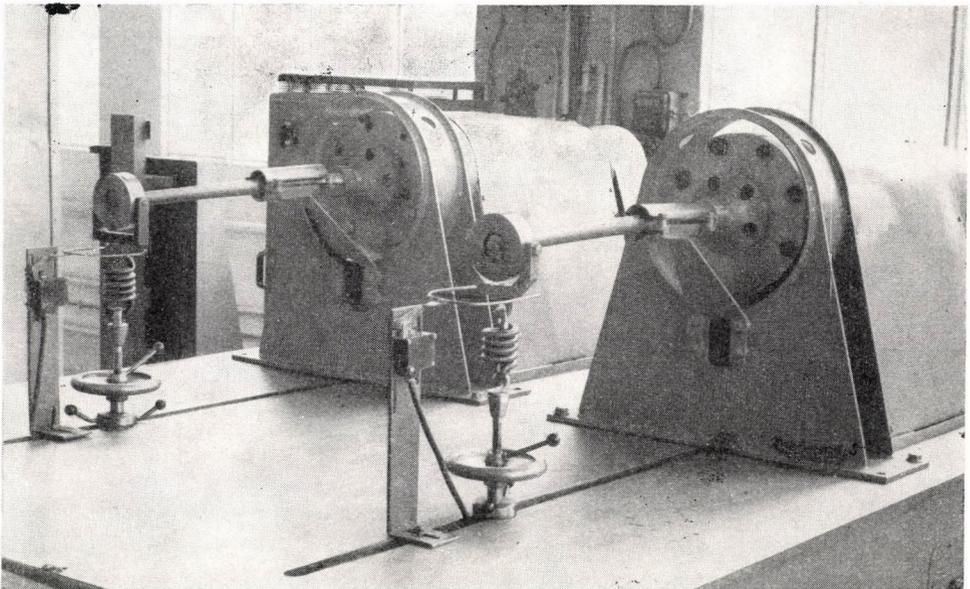


Fig. 4. Machine d'essai des arbres de roues en flexion rotative; vitesse: 750 t/mn

Dans une première série d'essais, on a déterminé la limite de fatigue et le domaine de dispersion des résultats avec 20 pièces prélevées dans la fabrication de série.

Ces résultats, traduits sur la figure 5, permettent de situer la limite de fatigue à 40 ± 3 kg/mm² et de tracer 3 courbes S—N, les deux courbes

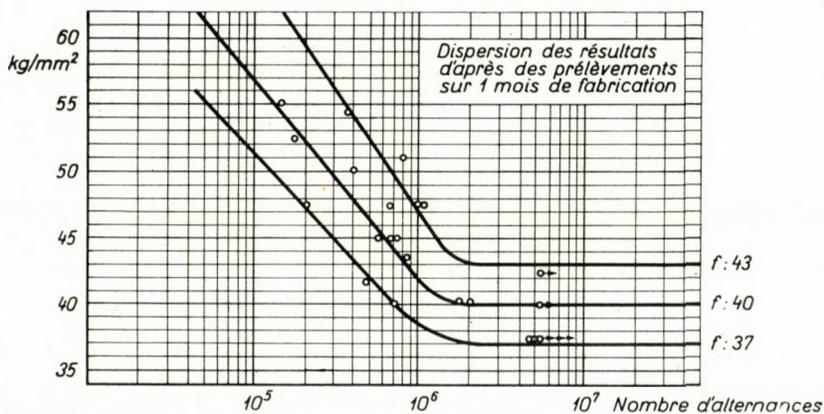


Fig. 5. Courbes S—N tracées d'après les résultats des essais de fatigue en flexion rotative, des arbres de roues (en acier demi-dur au carbone, et traités par trempe H. F.)

extrêmes représentant les limites du domaine de dispersion et la courbe centrale la médiane des deux autres courbes.

Dans une deuxième série d'essais, on a appliqué la méthode de LOCATI et étudié sur 6 arbres de roues l'influence des facteurs suivants:

- durée des paliers de charges avec $n = 50\ 000, 100\ 000$ et $200\ 000$ cycles.
- échelonnement $\Delta\sigma$ des contraintes: 2,5 et 5 kg/mm², le niveau de contrainte initial σ_0 étant, dans tous les cas, de 32,5 kg/mm².
- forme des courbes hypothétiques de départ, en ce qui concerne la pente de la branche inclinée de la courbe de WÖHLER.

On a ainsi obtenu les limites de fatigue données au tableau III, pour différentes durées n des paliers de charge et deux valeurs de $\Delta\sigma$ (facteurs a et b).

Tableau III

Conditions d'essais		Limite de fatigue trouvée kg/mm ²
n cycles	σ kg/mm ²	
$0,5 \cdot 10^5$	2,5	39,7
10^5	2,5	40,2
$2 \cdot 10^5$	2,5	41,5
$0,5 \cdot 10^5$	5	40,1
10^5	5	39,7
$2 \cdot 10^5$	5	41

Tableau IV

Calcul des dommages cumulés pour des arbres de roues essayés en flexion rotative suivant la méthode Locati :

$$n = 0,5 \cdot 10^5$$

$$\Delta\sigma = 2,5 \text{ kg/mm}^2$$

Sollicitations kg/mm ²	Nombre alternances n	Dommages cumulés					
		Courbe F = 37		Courbe F = 40		Courbe F = 43	
		N	n/N	N	n/N	N	n/N
32,5	50 000	∞	0				
35	50 000	∞	0				
37,5	50 000	1,6 · 10 ⁶	0,0313	∞	0		
40	50 000	0,7 · 10 ⁶	0,0714	1,8 · 10 ⁶	0,0278	∞	0
42,5	50 000	0,46 · 10 ⁶	0,1085	0,90 · 10 ⁶	0,0556	∞	0
45	50 000	0,3 · 10 ⁶	0,1670	0,62 · 10 ⁶	0,0807	1,3 · 10 ⁶	0,0385
47,5	50 000	0,195 · 10 ⁶	0,2560	0,43 · 10 ⁶	0,1165	0,95 · 10 ⁶	0,0526
50	50 000	0,135 · 10 ⁶	0,3700	0,28 · 10 ⁶	0,1785	0,67 · 10 ⁶	0,0746
52,5	50 000	0,08 · 10 ⁶	0,6250	0,19 · 10 ⁶	0,2630	0,49 · 10 ⁶	0,1020
55	34 000	0,053 · 10 ⁶	0,6400	0,14 · 10 ⁶	0,2425	0,36 · 10 ⁶	0,0944
Dommages cumulés			2,2692		0,9646		0,3621

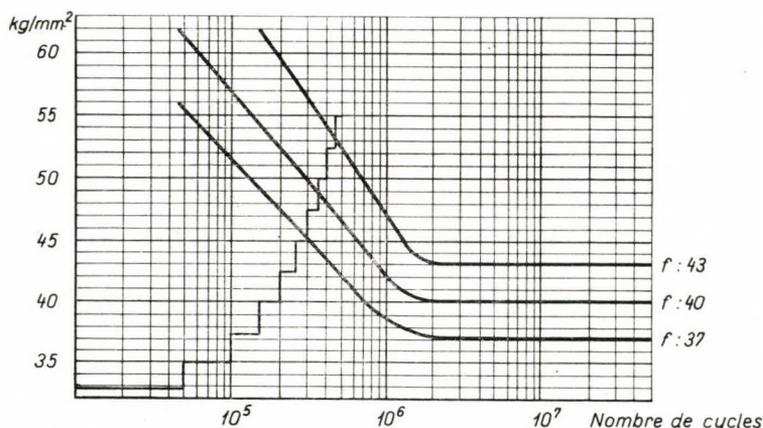


Fig. 6. Courbes S—N hypothétiques et succession des paliers de charge pour un arbre de roue essayé suivant la méthode LOCATI — $n = 0,5 \cdot 10^5$; $\Delta\sigma = 2,5 \text{ kg/mm}^2$

Le tableau IV et les figures 6 et 7 représentent, à titre d'exemple, le processus opératoire ayant permis la détermination de la limite de fatigue: 39,7 kg/mm² pour des paliers de charge de $0,5 \cdot 10^5$ cycles avec un échelonnement de 2,5 kg/mm².

Pour étudier le dernier facteur (c), on a modifié la branche inclinée des trois courbes S—N ayant pour asymptote $f = 37, 40$ et 43 kg/mm^2 et l'on

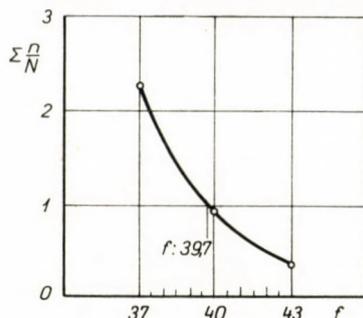


Fig. 7. Représentation de la somme des dommages cumulés en fonction de la contrainte dans l'essai LOCATI schématisé sur la fig. 6. — Valeur de la limite de fatigue trouvée: 39,7 kg/mm²

a calculé les dommages cumulés pour ces conditions d'essais différentes:

$$n = 0,5 \cdot 10^5 \text{ cycles} \quad \Delta\sigma = 5 \text{ kg/mm}^2$$

$$n = 2 \cdot 10^5 \text{ cycles} \quad \Delta\sigma = 2,5 \text{ kg/mm}^2$$

qui ont été choisies à dessein parce que l'une des conditions: $n = 0,5 \cdot 10^5$ cycles et $\Delta\sigma = 5 \text{ kg/mm}^2$ intéresse la partie supérieure des courbes S—N, de

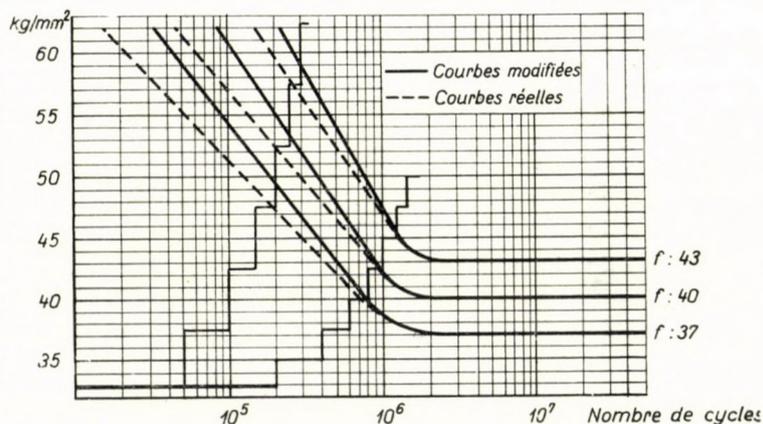


Fig. 8. Influence de la pente des courbes supposées sur la limite de fatigue trouvée

$$\begin{array}{ll} n = 0,5 \cdot 10^5 & n = 2 \cdot 10^5 \\ \text{avec} & \text{et} \\ \Delta\sigma = 5 \text{ kg/mm}^2; & \Delta\sigma = 2,5 \text{ kg/mm}^2 \end{array}$$

sorte que la modification correspond à une grande variation du nombre de cycles; l'autre condition intéresse le «genou» de la courbe S—N, et, de ce fait, la modification agit peu sur les nombres N de cycles, ainsi que le montre la figure 8.

Le résultat de la modification de la pente des courbes sur la limite de fatigue trouvée est indiqué sur la fig. 9 et le tableau VI, d'après les résultats du tableau V.

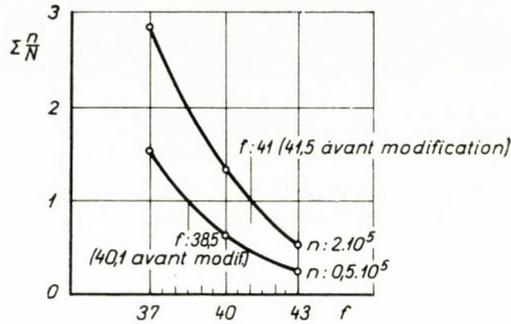


Fig. 9. Représentation de la somme des dommages cumulés en fonction de la contrainte. Influence de la modification de la pente

Tableau V

Calcul des dommages cumulés pour la pente modifiée des courbes $S-N$ et pour deux échelonnements différents des paliers de contrainte :

$$n = 2 \cdot 10^5 \text{ cycles}$$

$$\text{et } \Delta\sigma = 2,5 \text{ kg/mm}^2$$

σ kg/mm ²	n cycles	DOMMAGES					
		Courbe F = 37		Courbe F = 40		Courbe F = 43	
		N	n/N	N	n/N	N	n/N
32,5	200 000	∞	0				
35	200 000	∞	0	∞	0		
37,5	200 000	$1,6 \cdot 10^6$	0,125	∞	0		
40	200 000	$0,75 \cdot 10^6$	0,267	$2 \cdot 10^6$	0,100	∞	0
42,5	200 000	$0,52 \cdot 10^6$	0,385	$0,94 \cdot 10^6$	0,192	∞	0
45	200 000	$0,370 \cdot 10^6$	0,540	$0,70 \cdot 10^6$	0,286	$1,30 \cdot 10^6$	0,154
47,5	200 000	$0,26 \cdot 10^6$	0,770	$0,52 \cdot 10^6$	0,385	$1 \cdot 10^6$	0,200
50	140 000	$0,18 \cdot 10^6$	0,777	$0,38 \cdot 10^6$	0,369	$0,77 \cdot 10^6$	0,182
Dommages cumulés			2,864		1,332		0,536

et pour: $n = 0,5 \cdot 10^5$ cycles
et $\Delta\sigma = 5 \text{ kg/mm}^2$

32,5	50 000	∞	0				
37,5	50 000	$1,6 \cdot 10^6$	0,0313	∞	0		
42,5	50 000	$0,52 \cdot 10^6$	0,0965	$0,95 \cdot 10^6$	0,0526	∞	
47,5	50 000	$0,26 \cdot 10^6$	0,1925	$0,52 \cdot 10^6$	0,0965	$1 \cdot 10^6$	0,0500
52,5	50 000	$0,13 \cdot 10^6$	0,3850	$0,28 \cdot 10^6$	0,1785	$0,6 \cdot 10^6$	0,0833
57,5	50 000	$0,064 \cdot 10^6$	0,7700	$0,16 \cdot 10^6$	0,3120	$0,36 \cdot 10^6$	0,1390
62,5	1 500	$0,03 \cdot 10^6$	0,0500	$0,09 \cdot 10^6$	0,0167	$0,22 \cdot 10^6$	0,0068
Dommages cumulés			1,5253		0,6563		0,2791

Dans le cas le plus défavorable, la limite de fatigue pour la courbe modifiée diffère seulement de 1,6 kg/mm².

Tableau VI

Influence de la modification de la pente des courbes S—N

Conditions d'essais	Limite de fatigue, kg/mm ²	
	avant modification	après modification
$n = 0,5 \cdot 10^6$ cycles $\Delta\sigma = 5$ kg/mm ²	40,1	38,5
$n = 2 \cdot 10^6$ cycles $\Delta\sigma = 2,5$ kg/mm ²	41,5	41

IV. Eprouvettes soudées par points

Conditions des essais

E p r o u v e t t e s

Chaque éprouvette était constituée de deux plaques d'acier doux, l'une de 180 × 80 × 6 mm., l'autre de 180 × 80 × 9 mm., assemblées par un point de soudure électrique situé à 40 mm. du bord, dans l'axe de l'éprouvette.

Dans le but de situer les deux plaques dans le même plan pour le montage

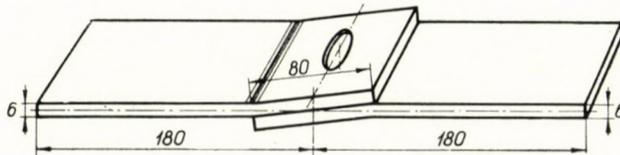


Fig. 10. Eprouvette avec un point de soudure

dans l'axe de la machine, un cambrage préalable avait été opéré avec un angle d'environ 8°, ainsi que le montre la figure 10.

Pour la commodité d'exécution des éprouvettes, celles-ci étaient découpées, par séries de 9, par sciage dans des larges plaques comportant 9 points de soudure équidistants (fig. 11).

Suivant les conditions de soudage: intensité, diamètre et forme des extrémités d'électrodes, pression d'accostage, les aspects macrographiques des soudures étaient légèrement différents, mais les sections des point demeuraient sensiblement les mêmes (fig. 12).

Cinq séries d'éprouvettes de fatigue ont été ainsi exécutées, dont les résultats sont reportés plus loin sur les diagrammes de WÖHLER.

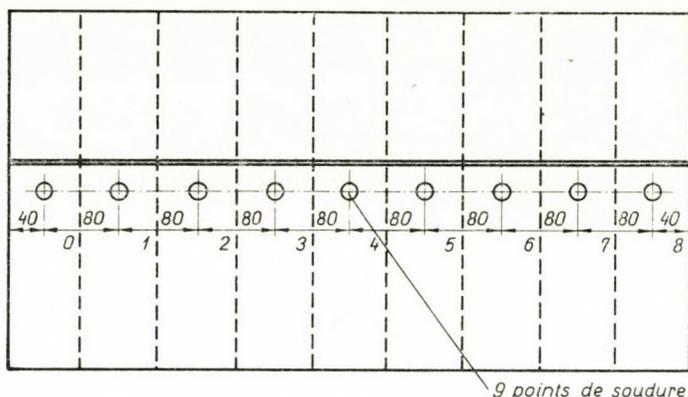


Fig. 11. Disposition des plaques pour l'exécution des points de soudure

Mode de sollicitation aux efforts axiaux

Fréquence: 2000 cycles/mn.; l'éprouvette étant sollicitée par traction axiale ondulée, avec une valeur de l'effort statique constante et égale à 1500 kg.

A l'effort de cisaillement appliqué sur le point de soudure se superpose un léger effort de flexion dû à l'angle formé par le cambrage de la tôle dans la région du point de soudure. Etant donné la faible obliquité (8°), on peut considérer que les points de soudure travaillent au cisaillement seul.

Position des cassures

Par suite de l'effet d'entaille à la jonction des deux tôles la rupture de fatigue s'amorce au ras du point dans l'axe de la tôle passant par le milieu du point (fig. 12).

Résultats des essais de fatigue suivant la méthode de Wöhler

Un certain nombre d'éprouvettes ont été essayées à deux niveaux de charge:

10 éprouvettes à 1500 kg \pm 1000 kg.

32 „ „ à 1500 kg \pm 750 kg.

En plus, 8 éprouvettes ont été essayées à différents autres niveaux. La figure 13 représente les résultats obtenus, sur le diagramme S—N.

La limite de fatigue à 10^7 cycles est voisine de 1500 \pm 585 kg.

Si l'on considère la sollicitation au cisaillement et la valeur moyenne de la section du point (diamètre 22 mm.), la limite de fatigue est de: 4,1 \pm 1,5 kg/mm².

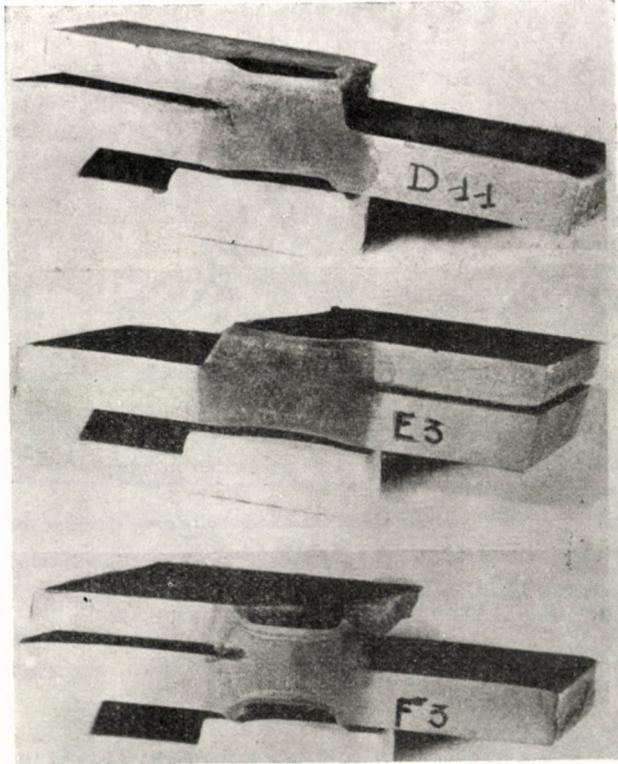


Fig. 12. Aspects macrographiques des points de soudures

Résultats des essais suivant la méthode de Locati

De part et d'autre de la courbe S—N réelle (fig. 13), on a tracé deux autres courbes hypothétiques, dont les branches horizontales diffèrent de

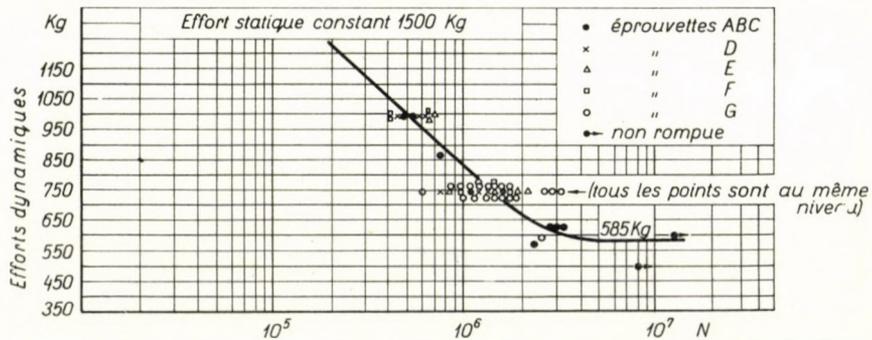


Fig. 13. Epreuves soudées par points. Courbes S—N d'après 50 épreuves

± 100 kg. et dont la branche inclinée a une pente un peu plus grande pour la courbe hypothétique supérieure (fig. 14).

On a procédé ensuite à des essais par paliers de charges échelonnées

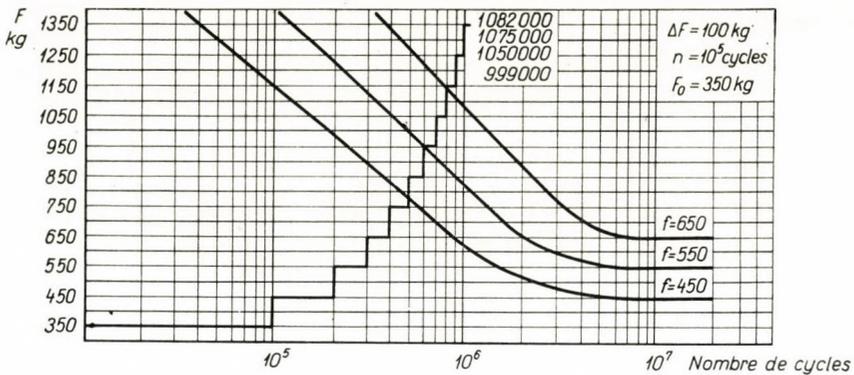


Fig. 14. Eprouvettes soudées par points. Courbes S—N hypothétiques et échelonnement des paliers

de 100 000 cycles pour la durée et de 100 kg. pour l'amplitude des charges dynamiques.

Le tableau VII représente les valeurs des dommages cumulés:

Tableau VII

Calcul des dommages cumués pour les éprouvettes soudées par points

Fd ± kg	n	f = 450		f = 550		f = 650	
		N	n/N	N	n/N	N	n/N
Col. 1	Col. 2	Col. 3	Col. 4	Col. 5	Col. 6	Col. 7	Col. 8
350	100 000	∞					
450	100 000	$5 \cdot 10^6$	0,020	∞			
550	100 000	$1,5 \cdot 10^6$	0,067	$5 \cdot 10^6$	0,020	∞	
650	100 000	900 000	0,112	$2 \cdot 10^6$	0,050	$8 \cdot 10^6$	0,012
750	100 000	575 000	0,175	$1,4 \cdot 10^6$	0,072	$3 \cdot 10^6$	0,033
850	100 000	375 000	0,268	925 000	0,110	$2,2 \cdot 10^6$	0,045
950	100 000	240 000	0,415	600 000	0,167	$1,6 \cdot 10^6$	0,062
1050	100 000	155 000	0,645	425 000	0,235	$1,2 \cdot 10^6$	0,083
1150	100 000	100 000	1	280 000	0,350	800 000	0,125
1250	100 000	50 000	1,670	190 000	0,525	550 000	0,182
1350	82 000	40 000	2,050	140 000	0,585	400 000	0,205
total cycles	1 082 000						
Dommages cumulés			6,422		2,114		0,767

Dans la première colonne, figurent les amplitudes des charges successivement appliquées, à partir de 350 kg. et, en regard, dans la 2ème colonne les nombres de cycles de chaque palier, soit 100 000, le dernier nombre de cycles étant celui correspondant à la rupture sous le dernier palier de charge.

Les nombres de cycles pour lesquels aurait eu lieu sous amplitude constante la rupture pour le palier de charge considéré sont donnés dans la 3ème colonne, en se référant à la courbe $S-N$ la plus basse, dont la limite de fatigue est de 450 kg.

Les dommages cumulés sont calculés dans la 4ème colonne, et leur somme figure au bas de cette colonne.

Le même processus est suivi, dans les colonnes 5 et 6, puis 7 et 8, en se référant aux courbes $S-N$ hypothétiques dont les limites de fatigue sont 550 kg. et 650 kg. respectivement.

La courbe, fig. 15, donne, à titre d'exemple, la représentation du dommage cumulé pour les 3 valeurs des limites de fatigue supposées.

Les charges et les nombres de cycles pour la rupture sont remarquable-

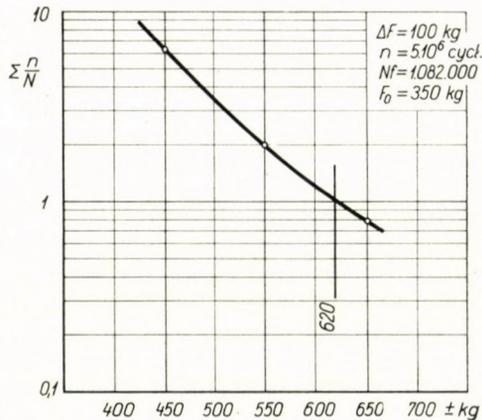


Fig. 15. Représentation des dommages cumulés en fonction des charges. Eprouvettes soudées par points

ment constants pour les 4 épreuves d'une même série essayées selon la méthode LOCATI:

1350 kg	—	1 082 000 cycles
1250 „	—	999 000 „
1350 „	—	1 075 000 „
1350 „	—	1 050 000 „

De la sorte, la somme des dommages cumulés $\sum \frac{n}{N}$ en fonction des charges se traduit par des courbes très voisines.

Les valeurs des limites de fatigue données par la méthode LOCATI sont ainsi de :

615 kg — 585 kg. — 615 kg. — 620 kg.

La limite de fatigue (à 10^7 cycles) que l'on peut déduire par interpolation de la courbe $S-N$ réelle (fig. 13) est de 585 kg., si l'on considère que les niveaux de contrainte les plus bas produisant la rupture sont de 600 kg. et de 575 kg. et que le niveau le plus élevé pour la non-rupture est de 600 kg. pour 18 millions de cycles.

Bien que la valeur de 585 kg. ne soit seulement déterminée que par deux points dans le domaine de non-rupture de la courbe $S-N$, on peut estimer, que les valeurs trouvées par la méthode de LOCATI sont du même ordre de grandeur que celles données par la méthode de WÖHLER.

V. Soudures bout à bout [10]

Les essais ont porté (*) sur des éprouvettes soudées à l'arc manuel ayant es dimensions suivantes :

épaisseur de la tôle	12	15	30 mm.
largeur uniforme	50	40	40 mm.
longueur totale	420	420	420 mm.

Les caractéristiques mécaniques des tôles sont données au tableau VIII qui comporte également la résistance à la fatigue d'après la définition de la Commission XIII/IIS (**).

Après soudage, les cordons de soudure des éprouvettes P. 1 et P. 2 ont été martelés au moyen du pistolet VON ARX à aiguilles multiples, les éprouvettes P de la même épaisseur restant intactes.

Ce martelage, ainsi qu'il a été établi par des essais antérieurs [5], a pour effet de relever notablement la résistance à la fatigue en créant des contraintes

* D'autres essais ont été effectués sur des soudures bout à bout sous argon, sur des soudures d'angles et sur des assemblages soudés complexes. Les résultats de ces essais ont été donnés récemment dans une Communication à l'American Welding Institute (session d'avril 1961, à New-York — [10]).

** Les essais de fatigue correspondent à des efforts ondulés axiaux de traction, à une fréquence de 600 à 1000 cycles/mn., avec une contrainte inférieure du cycle égale à 2 kg/mm².

Le nombre de cycles correspondant à la résistance à la fatigue est de 2 millions, après lesquels les éprouvettes non rompues subissent un essai de traction statique destiné à mettre en évidence les amorces éventuelles de fissuration progressive. La résistance à la fatigue de la soudure est définie comme la contrainte maximum du cycle que peuvent supporter sans fissuration 3 éprouvettes essayées successivement à ce même niveau de contrainte (méthode des 3 éprouvettes).

Tableau VIII

Repère	Nuance de l'acier	épais. mm.	Limite app. d'élasticité kg/mm ²	Résistance à la traction kg/mm ²	Allongement %	Résistance à la fatigue	
						méthode des 3 éprov. kg/mm ²	courbe S—N kg/mm ²
P	Martin						
	R = 60 kg/mm ²	12	43,4—43,5	60—59,9	—	17	17,5
P ₁	60 „	12	43,2—43,4	59—60	—	28	27
P ₂	60 „	12	43,4—43	60,1—59,5	—	27,5	27
J. 15	Thomas calmé						
	R = 50 kg/mm ²	15	37,2—37,2	55,5—55,5	24—20	20	20,5
J. 30	50 „	30	34,8—33,6	52,3—50,1	24—23	13	13,5

Les conditions de soudage étaient les suivantes :

Repère	Electrode:		Position	Observations
	nature	diamètre mm.		
P	basique		à plat	en V, à 60° avec reprise à l'envers.
P ₁	E—60	4		
P ₂	E—60			
J. 15	basique	3,2—4 et 5	„	en V, à 70°
	E—48			
J. 30	E—48	3,2—4 et 5	„	en X, à 70°

de compression favorables à la base des cordons de soudure, où habituellement se localise la rupture.

Tôles de 12 mm. — soudures non martelées —

Méthode de Wöhler:

La courbe S—N de la série d'éprouvettes P est donnée sur la figure 16. On retrouve sur cette courbe la valeur de la résistance à la fatigue portée sur le tableau VIII.

Méthode Locati:

Dans l'application de la méthode LOCATI, les conditions adoptées étaient les suivantes:

— pour la limite inférieure du cycle: 2 kg/mm²

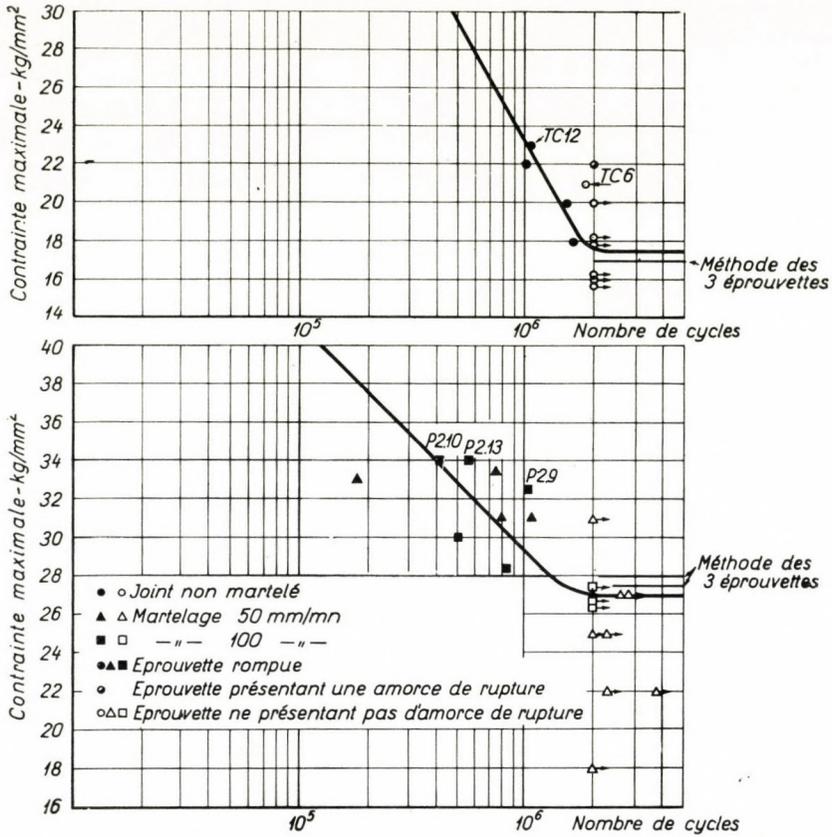


Fig. 16. Série P — Joint soudé bout à bout sans martelage
 Fig. 17. Séries P. 1 et P. 2 — Joints soudés bout à bout martelés

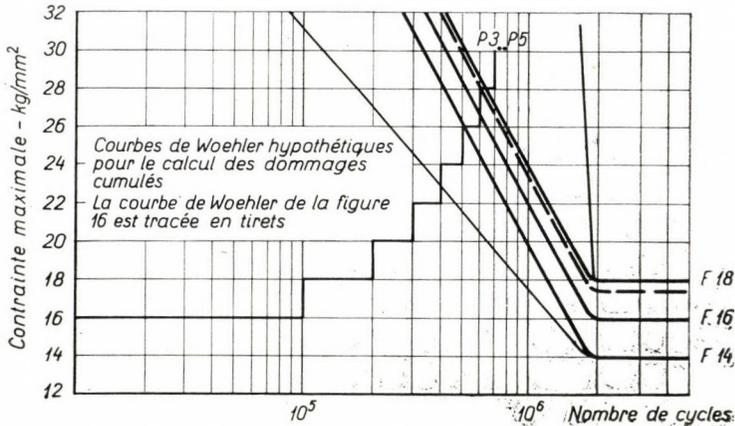


Fig. 18. Série P — Joint soudé bout à bout sans martelage

— pour la limite supérieure du cycle: échelonnement des paliers de charge de 2 en 2 kg/mm² ou de 1 en 1 kg/mm², selon l'essai; nombre de cycles à chaque palier: 100 000 ou 150 000.

Le diagramme de la figure 18 représente l'échelonnement des contraintes à partir de 16 kg/mm² et les courbes *S—N* hypothétiques pour le calcul des dommages cumulés. La courbe réelle représentée par ailleurs (fig. 16) est indiquée en traits interrompus.

Tableau IX

Série P — Joints soudés bout à bout en acier R = 60 kg/mm² non martelés. Calcul des dommages cumulés selon la méthode de Locati

Limite supérieure du cycle kg/mm ²	Nombre de cycles <i>n</i>	Dommages cumulés						Résistance à la fatigue
		Courbe F. 14		Courbe F. 16		Courbe F. 18		
		<i>N</i>	$\frac{n}{N}$	<i>N</i>	$\frac{n}{N}$	<i>N</i>	$\frac{n}{N}$	
	10 ³	10 ³		10 ³		10 ³		
<i>Eprouvette P. 3</i>								
16	100	1500	0,07	∞	—	∞	—	14,3 kg/mm ²
18	100	1220	0,08	1520	0,07	∞		
20	100	990	0,10	1230	0,08	1520	0,07	
22	100	790	0,13	990	0,10	1230	0,08	
24	100	640	0,16	790	0,13	990	0,10	
26	100	510	0,20	640	0,16	790	0,13	
28	100	410	0,24	510	0,20	640	0,16	
30	19	330	0,06	410	0,05	510	0,04	
	719		1,04		0,79		0,58	
<i>Eprouvette P. 5</i>								
16	100	1500	0,07	∞	—	∞	—	15 kg/mm ²
18	100	1220	0,08	1520	0,07	∞		
20	100	990	0,10	1230	0,08	1520	0,07	
22	100	790	0,13	990	0,10	1230	0,08	
24	100	640	0,16	790	0,13	990	0,10	
26	100	510	0,20	640	0,16	790	0,13	
28	100	410	0,24	510	0,20	640	0,16	
30	55	330	0,17	410	0,13	510	0,11	
	755		1,15		0,87		0,65	

Le tableau IX donne le calcul des dommages cumulés en utilisant des courbes hypothétiques parallèles à la courbe *S—N* réelle.

Ce calcul fournit pour la résistance à la fatigue les valeurs suivantes déduites (fig. 19 et 20), série P (éprouvettes non martelées):

éprouvette P3	14,3 kg/mm ²
éprouvette P5	15 „

sensiblement inférieures à celles de la méthode de WÖHLER: 17 et 17,5 kg/mm²,

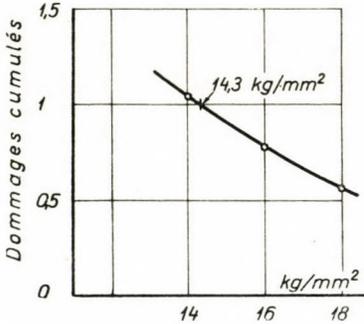


Fig. 19. Détermination de la résistance à la fatigue de l'éprouvette P.3 (d'après les courbes parallèles de la figure 5.)

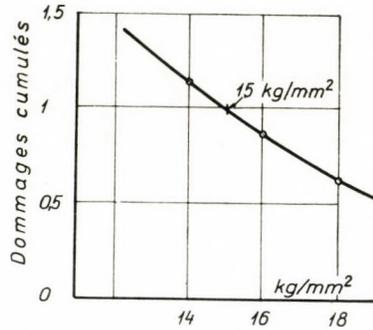


Fig. 20. Détermination de la résistance à la fatigue de l'éprouvette P.5 (d'après les courbes parallèles de la figure 5.)

suivant que l'on considère la méthode des 3 éprouvettes ou la branche horizontale de la courbe S—N.

Toutefois, avec un faisceau de courbes très divergentes, suffisamment ouvert pour couvrir tout le domaine de dispersion de la figure 16, le calcul conduirait aux valeurs légèrement plus élevées ci-après:

éprouvette P3	15,7 kg/mm ²
éprouvette P5	15,8 „

Tôles de 12 mm. — soudures martelées —

Méthode de W ö h l e r :

Les courbes S—N des éprouvettes des séries P1 et P2 sont données sur la figure 17, les résistances à la fatigue correspondantes étant celles du tableau VIII, peu différentes suivant la méthode considérée (3 éprouvettes ou branche horizontale de la courbe S—N):

28	et	27 kg/mm ²	série P1
27,5	et	27 „	„ P2

L'influence du martelage du cordon se traduit par un relèvement remarquable de la résistance à la fatigue, d'environ 60%. Ce relèvement est sensiblement le même quelles que soient les conditions de martelage utilisées: 50 mm/mn. ou 100 mm/mn., ainsi que l'indique la position des points sur le diagramme S—N (fig. 17).

Méthode Locati:

Les tableaux X et XI donnent les calculs des dommages cumulés à partir du faisceau de courbes S—N parallèles de la figure 21.

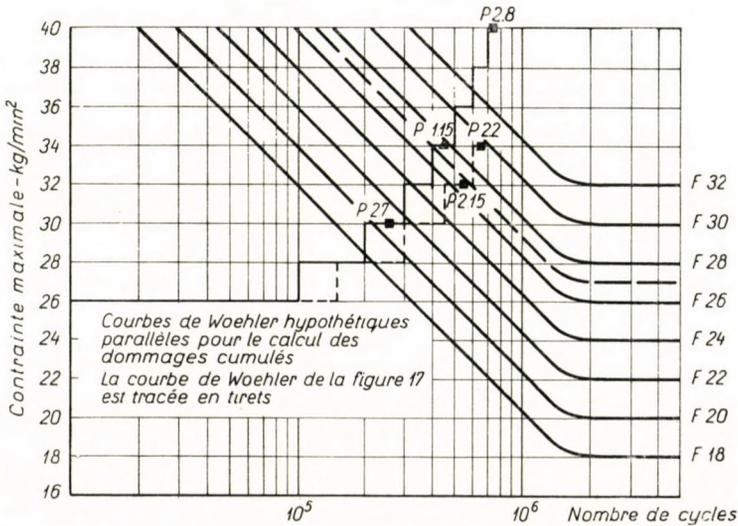


Fig. 21. Séries P. 1 et P. 2 — Joints soudés bout à bout martelés

Tableau X

Série P. 1 — Joints soudés bout à bout en acier Martin R = 60 kg/mm², martelés à 50 mm/mn.
 Calcul des dommages cumulés selon la méthode de Locati

Limite supérieure du cycle kg/mm ²	Nombre de cycles n	Dommages cumulés						Résistance à la fatigue
		Courbe F. 14		Courbe F. 16		Courbe F. 18		
		N	$\frac{n}{N}$	N	$\frac{n}{N}$	N	$\frac{n}{N}$	
	10 ³	10 ³		10 ³		10 ³		

Eprouvette P. 1—15

26	100	1050	0,10	∞	—	∞	—	24 kg/mm ²
28	100	710	0,14	1050	0,10	∞		
30	100	480	0,21	710	0,14	1070	0,09	
32	100	320	0,31	480	0,21	710	0,14	
34	56	220	0,25	320	0,18	480	0,12	
	456		1,01		0,63		0,35	Dommages cumulés

Tableau XI

Série P. 2 — Joints soudés bout à bout en acier $R = 60 \text{ kg/mm}^2$, martelés à 100 mm/mn. Calcul des dommages cumulés selon la méthode de Locati

Limite supérieure du cycle kg/mm ²	Nombre de cycles <i>n</i>	Dommages cumulés						Résistance à la fatigue
		Courbe F. 18		Courbe F. 20		Courbe F. 22		
		<i>N</i>	$\frac{n}{N}$	<i>N</i>	$\frac{n}{N}$	<i>N</i>	$\frac{n}{N}$	
	10 ³	10 ³			10 ³		10 ³	
<i>Eprouvette P. 2—7</i>								
26	100	320	0,31	480	0,21	720	0,14	18,7 kg/mm ²
28	100	220	0,46	320	0,31	480	0,21	
30	58	150	0,39	220	0,26	320	0,18	Dommages cumulés
	258		1,16		0,78		0,53	
<i>Eprouvette P. 2—8</i>								
		Courbe F. 28		Courbe F. 30		Courbe F. 32		
26 et 28	100	∞	—	∞	—	∞	—	29,3 kg/mm ²
30	100	1070	0,09	∞	—	∞	—	
32	100	710	0,14	1070	0,09	∞	—	
34	100	480	0,21	710	0,14	1070	0,09	
36	100	320	0,31	480	0,21	710	0,14	
38	100	220	0,46	320	0,31	480	0,21	
40	19	145	0,13	215	0,09	320	0,06	
	719	1,34	0,84		0,50		Dommages cumulés	
<i>Eprouvette P. 2—2</i>								
		Courbe F. 24		Courbe F. 26		Courbe F. 28		
26	150	1050	0,14	∞	—	∞	—	25,2 kg/mm ²
28	150	710	0,21	1050	0,14	∞	—	
30	150	480	0,31	710	0,21	1070	0,14	
32	150	320	0,47	480	0,31	710	0,21	
34	53	220	0,24	320	0,17	480	0,11	
	653		1,37		0,83		0,46	Dommages cumulés
<i>Eprouvette P. 2—15</i>								
		Courbe F. 22		Courbe F. 24		Courbe F. 26		
26	150	720	0,21	1050	0,14	∞	—	23,6 kg/mm ²
28	150	480	0,31	710	0,21	1050	0,14	
30	150	320	0,47	480	0,31	710	0,21	
32	87	220	0,40	320	0,27	480	0,18	
	537		1,39		0,93		0,53	Dommages cumulés

Ces résultats, portés en courbes sur la figure 22, fournissent, pour la résistance à la fatigue, les valeurs suivantes:

série P1:	éprouvette P1—15:	24	kg/mm ²
„ P2:	„ P2— 7:	18,7	„
	„ P2— 8:	29,3	„
	„ P2— 2:	25,2	„
	„ P2—15:	23,6	„

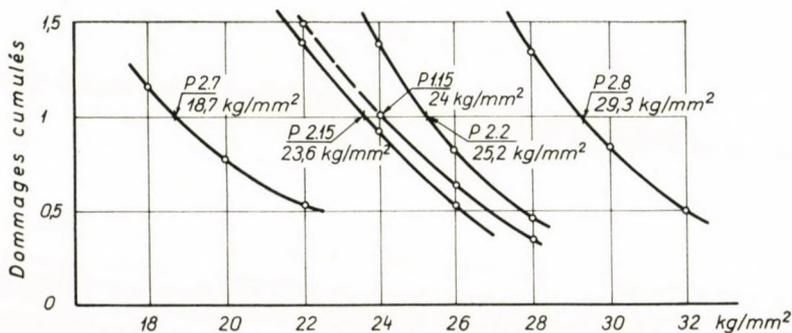


Fig. 22. Détermination des résistances à la fatigue des éprouvettes des séries P. 1 et P. 2 (d'après la figure 21.)

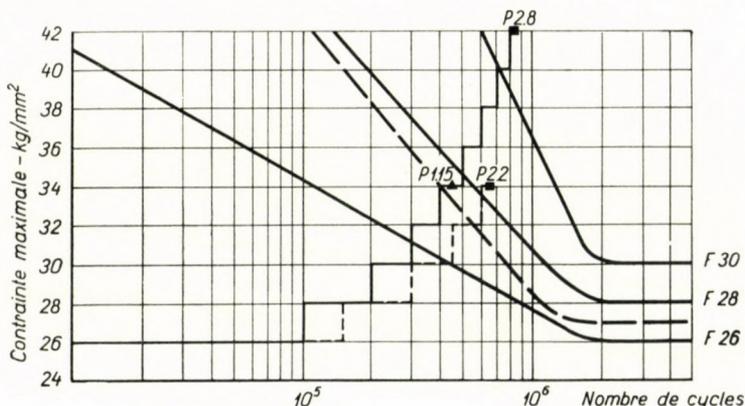


Fig. 23. Séries P. 1 et P. 2 — Joints soudés bout à bout martelés. Courbes de WOEHLER hypothétiques divergentes pour le calcul des dommages cumulés

Avec un faisceau de courbes $S-N$ divergentes, suffisamment ouvert pour couvrir tout le domaine de dispersion de la figure 17 représenté sur la fig. 23, on trouverait pour trois de ces éprouvettes prises à titre d'exemple, les valeurs plus élevées ci-après:

série P1:	éprouvette P1—15:	26,2	kg/mm ²
„ P2:	„ P2— 8:	28,9	„
	„ P2— 2:	26,7	„

qui se rapprochent davantage des valeurs données par la courbe $S-N$ et par la méthode des 3 éprouvettes.

Il est à noter que la résistance à la fatigue de l'éprouvette P. 2—7 est particulièrement faible. Son point représentatif sur la figure 21 et la figure 22 est d'ailleurs nettement séparé des autres.

Un examen attentif de cette éprouvette a montré que la fissuration progressive s'y est amorcée au fond d'un caniveau que le martelage n'avait pas atteint. Il n'est donc pas étonnant d'obtenir pour cette éprouvette une résistance à la fatigue voisine de celle des éprouvettes non martelées.

De l'ensemble des résultats sur les soudures bout à bout, il apparaît que si l'on prend pour base l'évaluation de la résistance à la fatigue que fournit la méthode des 3 éprouvettes, l'évaluation obtenue par la méthode LOCATI est le plus souvent par défaut; les écarts allant jusqu'à 16%.

Il apparaît également que cette méthode fournit de la résistance à la fatigue une évaluation qui se montre sensible à l'action des facteurs propres à modifier cette résistance, en particulier au martelage des bords des cordons de soudure, à l'aide du pistolet à aiguilles multiples.

VI. Eprouvettes prélevées dans des tubes soudés

Ces tubes, d'un diamètre intérieur de 600 mm. et d'épaisseur 9 mm., comportaient une soudure longitudinale effectuée à l'arc sous flux. Dans ces tubes, des éprouvettes du modèle de la figure 24 avaient été prélevées de manière à soumettre le cordon de soudure à des efforts de flexion ondulée; chaque éprouvette conservant dans sa partie centrale la courbure du tube d'origine, avait été redressée à ses extrémités, de façon à permettre l'encastrement d'un côté et l'application normale de la charge de flexion, du côté opposé.

Le sens de l'effort de flexion appliqué correspondait à la mise en tension de la fibre intérieure de l'éprouvette, c'est-à-dire du cordon intérieur de la soudure, avec une valeur minimale du cycle de 5 kg/mm², la fréquence étant de 750 cycles/mn.

La figure 25 indique les valeurs maximales du cycle pour 3 éprouvettes rompues et 1 éprouvette non rompue dans ces conditions. Les points correspondants, bien que peu nombreux, permettent, d'une part, d'assigner à la résistance à la fatigue une valeur de 30 à 32 kg/mm², pour 3 millions de cycles et, d'autre part, de tracer les courbes $S-N$ hypothétiques pour des asymptotes de 28, 30, 32 et 34 kg/mm².

Dans l'application de la méthode LOCATI, l'échelonnement des paliers de contrainte, pour la valeur maximale du cycle, a été de 2 kg/mm² en 2 kg/mm², la durée de chaque palier étant de 100 000 cycles, à partir de 28 kg/mm².

Dans ces conditions, on a obtenu la rupture finale de l'éprouvette unique essayée pour une contrainte de 36 kg/mm² et 36 000 cycles.

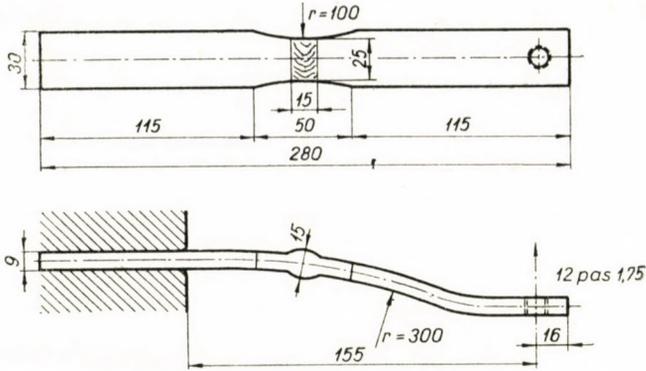


Fig. 24. Eprouvtes prélevées dans un tube soudé et mode d'application de l'effort

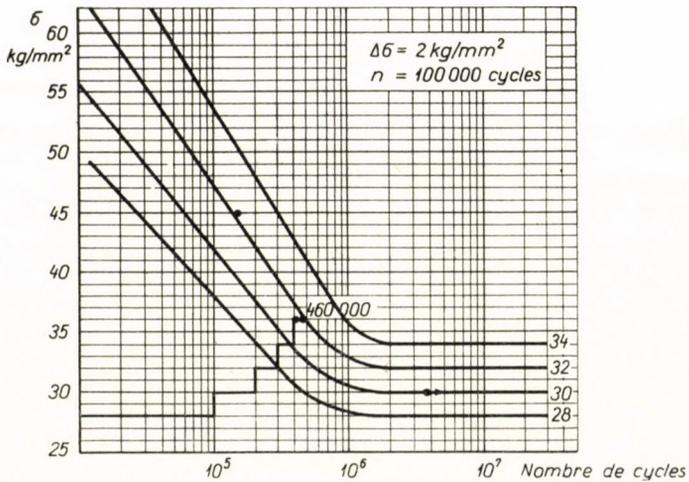


Fig. 25. Eprouvtes prélevées dans des tubes soudés. Points représentatifs des ruptures et de la non-rupture, et courbes S—N hypothétiques

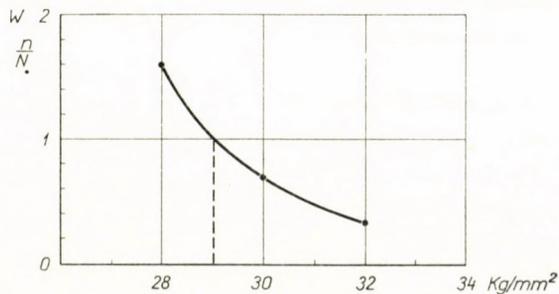


Fig. 26. Représentation des dommages cumulés en fonction de la contrainte appliquée pour les éprouvtes prélevées dans des tubes soudés

Le calcul des dommages cumulés (tableau XII) et sa représentation en fonction des contraintes appliquées permet d'assigner à la résistance à la fatigue une valeur de 29 kg/mm² (fig. 26).

Tableau XII

Calcul des dommages cumulés—Eprouvette prélevée dans un tube soudé

Contrainte maxi. du cycle kg/mm ²	Nombre de cycles n	Dommages cumulés					
		courbe F = 28		courbe F = 30		courbe F = 32	
		N	$\frac{n}{N}$	N	$\frac{n}{N}$	N	$\frac{n}{N}$
28	100 000	1,5 · 10 ⁶	0,065	∞	0	∞	0
30	100 000	480 000	0,208	1,5 · 10 ⁶	0,065	∞	0
32	100 000	300 000	0,333	360 000	0,178	1,6 · 10 ⁶	0,063
34	100 000	210 000	0,477	360 000	0,278	700 000	0,143
36	60 000	120 000	0,500	260 000	0,231	490 000	0,123
Nb. total de cycles	460 000		1,583		0,687		0,329

L'écart avec la valeur donnée par l'essai classique serait au plus de 10%, dans le cas présent.

Résumé et conclusions

L'application de la méthode LOCATI a été faite — en se limitant au cas des aciers — à des éprouvettes de fatigue usinées, à des pièces mécaniques diverses de construction automobile, à des assemblages élémentaires tels que des soudures par points, à des soudures à l'arc manuel bout à bout et en croix, à des assemblages soudés complexes.

Les sollicitations exercées ont correspondu à des sollicitations ondulées aux efforts axiaux et, également, ondulées à la flexion; enfin, à des sollicitations alternées de flexion rotative.

Les résultats obtenus par la méthode LOCATI montrent, en ce qui concerne la résistance à la fatigue, une concordance satisfaisante avec les résultats donnés par la méthode classique.

A cet avantage de permettre une évaluation suffisamment précise, pour la pratique, de la résistance à la fatigue sur une seule pièce ou élément s'ajoute celui d'abrèger sensiblement la durée de l'essai.

Il apparait enfin que la méthode LOCATI est sensible aux facteurs propres à modifier cette résistance, tels que le martelage des cordons de soudure.

BIBLIOGRAPHIE

1. LOCATI, L.: Le prove di fatica come ausilio alla progettazione ed alla produzione. *Metalurgia Italiana* — n° 9 (1955)
2. DAUBERTES, C., RENOUT, M., CAZAUD, R.: Détermination de la limite de fatigue suivant la méthode de L. LOCATI utilisant une seule pièce. *Revue de Métallurgie* — 55 — Nov. 1958 — p. 1048—1056
3. DAUBERTES, C., BEURET, J., RENOUT, M. et CAZAUD, R.: Application de la méthode de L. LOCATI au contrôle de la limite de fatigue de pièces d'automobiles. *Revue de Métallurgie* — Avril 1960 — p. 337—346
4. PARAVICINI: Communication verbale à la Commission XIII/IIS (réunion de Liège, Juillet 1960)
5. NACHER, A.: Indications sur la résistance à la fatigue des structures soudées. *Rivista Italiana della Saldatura* — n° 6 — 1954 — p. 272
6. PUCHNER, O.: *Schweisstechnik* — 1956 — vol. 6 — p. 109—114
7. GURNEY, T. R.: Influence of residual stresses on fatigue strength of plates with fillet welded attachments. *British Welding Journal* — June 1960 — p. 415—431
8. GURNEY, T. R. et NEKANDA TREPKA, L.: Influence of local heating on fatigue behaviour of welded specimens. *British Welding Journal* — Oct. 1959 — p. 491—497
9. DE LEIRIS, H.: Sur les moyens d'augmenter la résistance à la fatigue de certains assemblages soudés utilisés en construction navale. *Bull. A. T. M. A.* — n° 60 — 1960 — mémoire 1296
10. CAZAUD, R. et DE LEIRIS, H.: Evaluation of the fatigue limit using only one welded specimen or assemblies. *The Welding Journal* — à paraître en 1961

RELIABILITY ANALYSIS OF FATIGUE-SENSITIVE STRUCTURES

A. M. FREUDENTHAL
COLUMBIA UNIVERSITY, NEW YORK, USA

The designer of modern structure subject to complex operational conditions is caught in two conflicting cross-currents of design-philosophy: the conventional, non-probabilistic concept of design by criteria based on quasi-empirical safety factors, and the purely statistical concept of reliability based on a "mean time to failure". If he turns for guidance even to the more recent engineering literature he will find somewhat frustrating discussions concerning load-ratios and safety factors "on strength" (for ultimate load design) or "on life" (for fatigue design), with frequent references to such non-quantitative terms as "normal operating conditions", "reasonable safety margin", "extremely remote risk", etc. If, on the other hand, he turns to the "reliability" literature, he will either be overwhelmed by sophisticated statistical theories related to oversimplified physical models that have no bearing on his own structure or faced by oversimplified statistical methods based on nothing more than the simplest assumption of an exponential reliability function.

The increasing complexity of structural action as well as of operating conditions, and the rising demand for reliable estimates of expected service life of designed structures, which reflects the realization that modern structures can, in general, not be designed for infinite life, puts the designer into a frustrating position: he is aware of the inadequacy of the conventional engineering approach with respect to design for a specified operational life, but he is unable to use a purely statistical reliability approach because its basis and its measuring techniques are not relevant to the design of structures or parts that can neither be tested in sufficient replication to make reliability prediction based on tests rational, nor easily replaced in service to make it useful. It appears therefore that one of the most urgent tasks of engineering research is the development of an integrated approach to structural design that would combine the useful features of the (engineering) safety-factor and of the (statistical) reliability approaches and would result in relatively simple procedures for the estimation of usable service lives in terms of adequately specified operational conditions, and for the assessment of the effect on this service life of changes of those conditions as well as of modifications in structural action or in the structural material.

1. Probability approach to design criteria

A probabilistic approach to ultimate load design has been discussed in previous publications [1]: it was shown that such an approach permits the quantitative evaluation of the "probability of failure" associated with a specified "safety factor", and its representation in terms of a survivorship or "reliability" function. This approach represents a radical departure from conventional engineering design concepts; the introduction of a finite, however small, probability of failure as a necessary and therefore acceptable design criterion, replaces the tacit though unfounded assumption that a structure can be designed with zero probability of failure by the introduction of a "safety factor", and that therefore a reliability of 100 percent can be considered a rational design requirement. A probabilistic approach is therefore unavoidable even in ultimate load design, although a non-statistical approach is theoretically possible because of the relatively close relation between the performance of the structural material in a simple materials test and the actual carrying capacity of the structure, and because of the possibility of replacing the load history by a single maximum load associated with a non-statistically specified extreme condition.

In design for fatigue, on the other hand, a deterministic approach is excluded on purely theoretical grounds: fatigue damage is produced by most of the applied loads during the operational life of the structure and total damage must therefore be related to a statistical load-spectrum representing operational conditions. Fatigue failure depends, moreover, on the actual stress-history in a number of critical locations, and can thus be related to the external load history only by considering the rather complex interaction between applied loads and resulting stresses, which is strongly affected by load-history in terms of permanent deformation or consecutive local crack-formation in critical locations. The applied loads represented by a load-spectrum can therefore determine the "fatigue life" (number N of load cycles preceding failure) of a structure only in statistical terms.

The statistical character of the fatigue life of a structure is the sum of scatter associated with loading, material, and structural response. A single load spectrum itself can not be an adequate representation of the complex operating conditions of a real structure during its operational life; it is either one of an expected population of load spectra, or it may represent an average or most likely "reference" spectrum, in which case the range of statistical variation of the defining parameters must be specified. Thus a significantly different approach to the phenomenon of metal fatigue and to that of fatigue of metal structures or parts is made necessary by the fact that metal fatigue is a well-defined problem in metal physics, while structural fatigue can only be treated as a problem of the mechanical reliability of a complex system of particular design under specified operational conditions.

The problem is further complicated by the lack of clear differentiation between fatigue and ultimate load failure in all systems subject to loads of highly variable intensity. While it is well-known that the fatigue process under constant load-amplitude is terminated, under the N -th application of a load that has been sustained $(N - 1)$ times, by sudden failure of the critical section that has been weakened by the gradually developing fatigue crack, this fact acquires real significance only when fatigue damage proceeds under load-cycles of variable intensity. In this case "fatigue failure" will occur whenever a load cycle of sufficiently high intensity is applied to cause separation in any section that has been sufficiently weakened by a progressing fatigue crack; thus the concept of "fatigue failure" loses much of its meaning, since the load that produces failure, as well as the final failure mechanism are, in fact, characteristic of ultimate load failure.

The probability of fatigue failure in a structure subject to loads of highly variable intensity can therefore be considered to be roughly equal to the probability of "ultimate load" failure of the weakened structure. The "ultimate load" for this mode of failure is represented by that part of the load spectrum that contains load intensities high enough to produce failure of a moderately weakened structure, but of probabilities of occurrence too low to make any significant contribution of this part of the spectrum to fatigue damage itself. Only load-intensities below this range are then assumed to produce the fatigue-damage that finally causes ultimate failure under some high-intensity load provided the probability of fatigue failure due to loads within the low intensity range alone is made much smaller than the probability of "ultimate load" failure of the damaged structure, by suitably dividing the whole load spectrum into an "ultimate failure load" range and a "fatigue damage" range (Fig. 1). Obviously fatigue failure may also be produced by repeated application of load-intensities within the "fatigue damage" range alone; the probability of fatigue failure is then obtained by superposition of the probabilities of failure due to the two ranges. The total probability of failure and the associated reliability of the structure is obtained by combining the probability of ultimate load failure of the undamaged structure with the probability of fatigue failure.

When dealing with probabilities, a clear distinction should be made between conditions arising in design of inexpensive mass products in which the probability figures are derived by statistical interpretation of actual observations or measurements, a sufficiently large number of observations being actually obtainable, and conditions arising in design of structures or complex systems. In the latter, probability figures are used simply as a scale or measure of reliability that permits the comparison of alternative designs; the figures can never be checked by observations or measurement since they are obtained by extrapolations so far beyond any possible range of observation that such extrapolation can no longer be based on statistical arguments but could only

be justified by relevant physical reasoning [2]. Under these conditions the absolute probability figures have no real significance; however, if certain procedures of safety and fatigue analysis are agreed upon by which they should be arrived at, these probabilities provide a quantitative scale the use of which permits a rational comparison of alternative designs, as well as a rational assessment of the effects of changing operational conditions, material properties and structural action on the reliability of a structure. In the selection

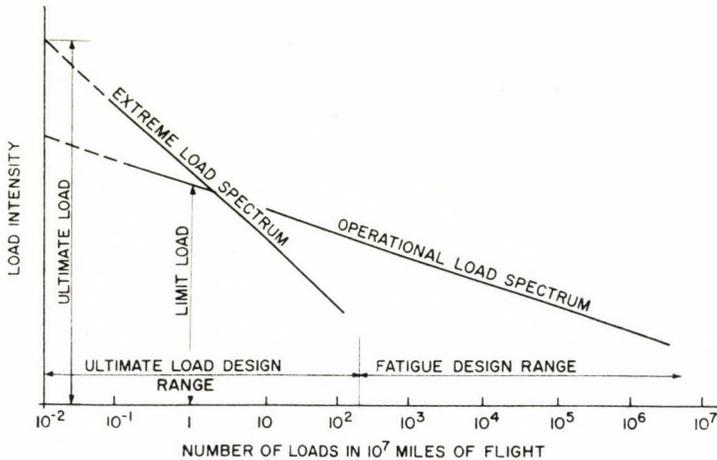


Fig. 1. Operational and Extreme Load Spectra

of the distribution functions to be used in these procedures, their physical relevance is the one important consideration. Usually, within the limited range of the actual data, more than one distribution can be fitted to the data; the goodness of this fit, however, provides no valid argument for the selection of a distribution to be used for extrapolation, unless it is also supported by a physical reasoning in favor of such selection.

With respect to this use of probabilities, the frequently voiced objections against the operation with probability figures that are far beyond the range of statistical observation are irrelevant. Reliability analysis of large structures or complex systems that can never be tested in sufficient numbers to provide an acceptable statistical foundation can only be based on probabilistic-physical arguments, not on statistical theory.

2. The nature of fatigue in structures

It is important to realize that the fatigue performance of a structure is significantly affected but not decisively determined by the fatigue performance of the material under conditions of laboratory fatigue tests. It has been estimated that more than 90 percent of fatigue failures in structures and machine

parts are primarily due to faulty design of details or to production defects; many of these failures could therefore be avoided by increased attention to design and design details, and by stricter control of production processes, without improving the fatigue performance of the material itself. On the other hand, it is unlikely that serious effects of faulty design or of inadequate surface treatment can be fully compensated by the selection of an alloy of better fatigue performance in laboratory tests.

Considering that it is usually impossible to avoid the initiation of small cracks in structural parts, unless stress-concentrations and tensile residual stresses are exceptionally mild, fretting fatigue and corrosion effects non-existent, and the predominant stress-amplitude well below the endurance limit, it appears that the most important fatigue performance characteristic of material and structure is a very slow rate of crack multiplication and propagation. A slow rate of crack propagation in the structure is, however, not only the result of the use of a metal in which fatigue cracks once formed, grow slowly, but also of a design in which built-in redundancies assure a multiple load-path, so that cracks can be stopped by stress redistribution before they reach "run-away" size. Thus, a single load-path-design must be compensated by the use of a metal with low notch-sensitivity in fatigue and exceptionally slow crack propagation; conversely, multiple-path design may permit the use of a metal that would be rejected for single-path-design.

The character of fatigue failures in various types of structures and structural parts depends on the relative significance of the different factors by which their fatigue performance is affected. Thus fatigue in axles, shafts, pins, etc. under relatively steady operating conditions, as in motors, machinery, ships and railroad equipment is dominated by the stress-concentrations associated with characteristic design-features, such as fillets, section-changes, key-ways, holes, corners, etc. As diameters increase, inhomogeneities in the metal and residual stresses arising in the forming process (cooling gradients, metallurgical transformations) become increasingly important. Fatigue in riveted structures is dominated by stress-concentrations and fretting in the connections; for structures under highly variable loading, it is significantly affected by the plastic redistribution of stresses under high load-amplitudes. Fatigue under acoustic noise is affected by the character of the noise spectrum as well as by panel geometry, by the damping of the excited modes of the structure and the intensity of the noise itself. Thus it is known that the same noise level applied to the same structure produces different fatigue lives depending on whether the energy is concentrated in a single frequency (siren noise) or distributed over a multitude of frequencies (jet-noise). Fatigue in welded structures is dominated by metallurgical changes in the weld-affected zone combined with excessive rigidity of and residual thermal stresses in the connections. Fatigue of parts or structures repaired or built-up by welding is invariably caused by the combined

metallurgical, thermal and mechanical effects associated with the welding. Fatigue of complex structures under variable operating conditions, such as airframes or high-temperature service equipment, can usually not be attributed to a dominant cause, unless failure is clearly due to faulty design of details.

It is to be expected that the smaller the number of contributing factors and the better they can be controlled, the easier is design information obtainable from specimen fatigue tests, and the more reliable the design for fatigue and the prediction of fatigue life on the basis of this information. The more the fatigue performance depends on a combination of several of the factors enumerated above, the more difficult the separate assessment of the effects of the individual factors. The more important therefore the full-scale fatigue test of the structure for the double purpose of eliminating the weakest spots by observation of the actual sequence of localized failures, and of predicting the order of magnitude of the fatigue life of the structure in which these spots have been adequately strengthened. However, accelerated fatigue tests, at constant high stress amplitude, in which the sequence and character of the service failures is not duplicated and a different type of failure is produced, are useful only as means of locating points of excessive initial damage; they do not provide information for the estimate of operational life.

The impossibility of analyzing the fatigue performance of complete structures by separation of individual dominant factors the interaction between which frequently overshadows the individual effects, is at the root of the difficulty to predict fatigue lives of structures quantitatively on the basis of reliability analysis based on laboratory tests of material specimens and typical structural connections alone. Nevertheless such tests have several very important functions to fulfil, mainly in the evaluation of the differences between the fatigue performance of different materials under identical conditions of stress, geometry and surface, or of different geometries (notches, shapes), or of different surface finishes or treatments of the same material under identical conditions; in the establishment of the rules of damage accumulation under variable loading for various metals under identical conditions and for the same material with different geometries, as well as in the comparison of the fatigue behavior of different materials in different environments and of the effect on fatigue performance of different processes of fabrication.

Thus if the fatigue life of a certain structural type has been roughly established by a small number of tests, and sufficiently numerous results of tests on the structural material itself and on structural connections under various loading conditions relevant to the particular structure are available, further tests on different materials and types of connections or surface treatments may provide the necessary information for the analysis of the effects of *changes* in specific design factors or criteria on the expected fatigue life and the reliability of the structure. The fact that material and model tests are

performed on relatively small specimens makes it possible to have sufficient test replications for an effective statistical evaluation of the results. Since the number of full-scale tests of complex structures is severely limited for economic reasons, the character and range of scatter on which the estimate of the fatigue life must be based can only be guessed; the results of the statistical evaluation of the laboratory tests provide the only rational guide for a crude estimate of the scatter that might be expected.

3. Aspects of fatigue design

The dependence of fatigue failure in structures on a combination of factors the effect of each of which can only be specified with a certain margin of uncertainty makes it unrealistic to attempt to predict the fatigue life of a structure even under rather closely defined operational condition in any but a statistical manner. Fatigue design of structures is therefore a problem of "reliability"-analysis rather than of stress- or strength-analysis. Fatigue design differs significantly from ultimate-load design by the complexity and resulting vagueness of the correlation of load, stress and carrying capacity. The large number of contributing factors, the combined effects of which determine the fatigue life of a structure, necessarily produce a rather wide scatter in the fatigue life even of nominally identical structures under nominally identical operating conditions.

The approach to fatigue design of structural parts and structures must be determined by their "fatigue-sensitivity", defined as a measure, at a specified service life, of the probability of the structure to fail in fatigue rather than under a single application of the "ultimate" load. As this probability will depend, among other, on operating conditions and the expected service life, the "fatigue-sensitivity" of a structure can not be specified independently of such conditions; the same structure may be "fatigue-insensitive" under one set of conditions and "fatigue-sensitive" under another. Under conditions of low fatigue-sensitivity it will be usually unnecessary to design for a specific operational life in fatigue; fatigue design may be simply limited to elimination, by constructive means, of the most obvious sources of crack initiation, so as to avoid a possible reduction of the expected fatigue life to within the range of the expected life with respect to the ultimate load. Specific design for fatigue, supplemented by extensive fatigue testing is necessary only for medium and high "fatigue-sensitivity" for which fatigue failure is the expected type of failure; tests of full-scale structures are an integral part of fatigue design. The prediction of the expected operational life of the structure and the prevention of catastrophic consequences of possible failure within this period (which can not be excluded because of the irreducible uncertainty of such prediction) is the dual purpose of such design.

Fatigue design for finite life as a problem of "reliability" must be concerned with a rational measure of reliability; an expedient measure is provided by the probability of failure-free operation during the specified service life L . Statistically this is the probability of survival as a function of service life, the survivorship-function, which is thus identical with the "reliability function" $R(L)$. It is the advantage of this statistical measure of reliability that it permits the quantitative correlation, under simplifying assumptions, of the reliability of the structure with the reliability of its components, as well as of the reliability under fatigue conditions with the reliability under ultimate load conditions.

The introduction of a quantitative measure or scale of "fatigue sensitivity" and a classification of structures or structural designs in terms of such a measure makes it possible to utilize the existing results of full-scale fatigue tests in the fatigue analysis of newly designed structures, by concentrating in this analysis on those factors by which the fatigue sensitivity of the new structure is expected to differ from that of previously designed structures of specified fatigue sensitivity, for which both testing and operating experience has been accumulated. Using the method of statistical superposition of the effects of the individual factors that influence fatigue life, the fatigue sensitivity and thus the order of magnitude of the expected service life of the new structure can be related to the service life of structures for which fatigue test results and operational experience are available. The contributing factors must be selected in a manner that permits the quantitative evaluation of their individual effects on fatigue life by representative model- or specimen-tests, by realistic analytical methods or by judicious application of service experience.

It seems expedient to arrange the significant factors that jointly determine fatigue life and performance and thus necessarily the fatigue sensitivity of a structure in the following form and order:

- (1) Operating loads.
- (2) Fatigue performance of material.
- (3) Basis of structural design.
- (4) Structural forms and connections.
- (5) Residual stresses.
- (6) Fretting and corrosion.
- (7) Temperature history and environment.

Each of these factors should be considered in terms of its effect on fatigue life and scatter, on the basis of results of comparative fatigue tests on material specimens or representative connections and of suitable analytical procedures. If this approach is impossible, the respective effects must be estimated on the basis of full-scale tests or performance records. An additional factor, which does not influence the inherent fatigue sensitivity of the structure but can alleviate the consequences of existing high sensitivity is the program of "main-

tenance" imposed on the structure, either in the form of periodic inspection and repair of cracks, or by automatic periodic replacement of sensitive parts without inspection.

With respect to the effect of "Operating Loads" on fatigue life and scatter, the relation between operating and design load-spectra and fatigue life must be based on a rule of accumulation of fatigue damage in structural materials the validity of which has been justified by relevant experiment [3]. With the aid of such a rule, fatigue lives associated with load spectra, specified by measures of intensity of stress amplitudes, of mean stress, and of dispersion and shape can be predicted for different materials, and the effects of different spectra compared in terms of the resulting fatigue lives. The effect of any change in fatigue design criteria or in operating conditions can thus be expressed in terms of the order of magnitude of the change in fatigue life.

The comparative "Fatigue Performance" of structural materials must be evaluated by fatigue tests under identical stress-spectra on notched specimens or, preferably, on representative models of connections of the respective materials, from which the effect of the material on fatigue life and on scatter is directly obtained. The results of constant load amplitude tests are less relevant than those of randomized spectrum tests. However, a representative two-level program test might be designed that would adequately reproduce the stress-interaction effect missing in the constant amplitude test, so that the complicated procedures of actual spectrum testing might be avoided.

The consideration of the "Basis of Structural Design" involves two principal aspects: (a) the ratio of the design stress intensity for ultimate load and that for maximum fatigue load, and (b) the degree of structural redundancy. While the maximum fatigue load is usually specified as the load intensity that is expected to occur between one and about 100 times during the design service life in a representative design spectrum, the ultimate load is specified in terms of an extreme load that the structure should be able to sustain in the case that operation under unlikely extreme conditions can not be avoided. Obviously, by extrapolating the operating load spectrum to this extreme limit, a "return period" might be associated with it, and the ratio established between this period and the return periods of the maximum fatigue load; the "return period" of the ultimate load, however, would be purely fictitious, as it is physically unrelated to the operational load spectrum.

It is assumed that in a balanced design the ratio of the static failure (collapse) load of the structure and the load at which its yield-limit is just attained (limit load) is roughly equal to the ratio of ultimate and limit load. If it is smaller, the design criterion should be the ultimate load (high yield point materials), if it is larger, the design criterion should be the limit load (low yield point materials). By selecting the limit load as a general design criterion, the fatigue sensitivity of high-yield-point structures is increased by reducing

the fatigue life associated with the stress-spectrum, since the spectrum intensity is raised in proportion to the yield limit, while the fatigue performance is unrelated to this limit.

It has been shown that the effect of redundancy of the structure on its long range fatigue life is relatively small [4]; the purpose of the redundancy is essentially to ensure the predicted fatigue life by alleviating the consequences of very unlikely but not impossible premature failures. It is therefore more closely connected with the specification of adequate inspection intervals than with long-range fatigue sensitivity.

The effect of "Structural Forms and Connections" on fatigue life can only be roughly evaluated by comparative fatigue tests on representative components, preferably under a representative load spectrum or at least an equivalent simplified two-level test. The unavoidable differences between the stress-distribution and its progressive change under repeated loads in the structure and in an isolated test-component does not permit the use of the results of component tests for absolute quantitative evaluation of their fatigue performance in the structure. Rather the test-results should be used in an evaluation, by comparison, of the relative changes in fatigue life produced by changes in structural forms and connections. Also fretting action and residual stress-effects will be different in the test of a connection and in its operation as part of a structure. Unless the results of full-scale structural tests are available these effects can, at best, be roughly estimated in terms of an order of magnitude reduction (through tensile residual stresses or fretting) or increase (through compressive residual stresses) of the expected fatigue life.

4. "Risk" of failure and fatigue sensitivity

The procedures of reliability analysis of mechanical systems under fatigue conditions are based on the concept of "risk" of failure after N load applications, $r(N)$, in terms of which a quantitative measure of "fatigue sensitivity" can be defined. Since failure of a structure or part can be caused either by chance coincidence of an extremely rare "ultimate load" with an initial resistance sufficiently low to produce instantaneous collapse, or by fatigue under repeated load-intensities significantly lower than the ultimate load, and represented by a spectrum of operational loads, a reasonable measure of fatigue sensitivity is the ratio of the risk of fatigue failure to that of "ultimate load" failure at any load application. This ratio

$$f(N) = \frac{r_F(N)}{r_u(N)} \quad (1)$$

where r_F denotes the risk of fatigue failure, r_u that of "ultimate load" failure, can therefore be designated as a "coefficient of fatigue sensitivity" of the

structure at a certain "age" (number of load repetitions) N ; since $r_F(N)$ may be assumed to increase with age by definition of the phenomenon of "fatigue" (or of any other "wear-out" process), the fatigue sensitivity of a structure will also tend to increase with age. The larger $f(N)$, the larger the probability, at any value of N , that the structure will fail in fatigue rather than by ultimate load collapse. If $N = N^*$ denotes the expected operational life of the structure, the value $f(N^*) = f^*$ characterizes the fatigue sensitivity of the structure at the end of this life rather than at any "age" N , and is therefore an important design parameter.

It is tentatively assumed that a rational classification of the fatigue sensitivity of systems or structures might be based on the following scale (5).

- | | | |
|-------|-------------------|---|
| (I) | $0 < f^* < 0.1$ | fatigue insensitive structures |
| (II) | $0.1 < f^* < 1.0$ | moderately fatigue sensitive structures |
| (III) | $1.0 < f^* < 10$ | highly fatigue sensitive structures |
| (IV) | $10 < f^*$ | fatigue critical structures |

Class (I) structures need be designed and tested for ultimate load only; Class (II) structures should be designed for ultimate load, but with careful consideration of details with respect to fatigue performance; they should be tested in full-scale for ultimate load, while only the critical components and connections are fatigue-tested by the accelerated procedure of repeated application of limit-load to eliminate fatigue-prone details. Class (III) structures should be both designed and tested for fatigue, with at least one full-scale fatigue test under a representative load spectrum, in addition to component and connection fatigue tests sufficient to estimate their usable minimum operational life. Class (IV) structures or parts, if they cannot be avoided, should be designed for fatigue alone and used only if a sufficient number of replications of full-scale fatigue test can be performed to permit a reliable statistical estimate of mean or median fatigue life and of the scatter range. However, important structures the failure of which would have serious consequences, should be designed so as not to fall into Class (IV). This may be done either by reducing the risk of fatigue failure or by limiting the operational life, or by imposing stringent procedures of inspection for fatigue cracks, the discovery and repair of which would make the maximum inspection period the "critical" operational life, to be used in evaluating the fatigue sensitivity.

The "risk" of failure or the "failure rate" $r(N)$ expresses the probability of failure at the $(N + 1)$ th load application with respect to those structures of the initial statistical population that have survived N load application and have thus reached the "age" N . Hence $r(N)$ is the probability of failure $p(N)$ between the N -th and $(N + 1)$ th cycle in the initial population, referred to the percentage of this population that has reached the "age" N . Because of

the relation between the probability density $p(N)$ and the "cumulative probability" or "reliability" function $L(N)$

$$p(N) = -dL(N)/dN$$

the "risk" function (6)

$$r(N) = \frac{p(N)}{L(N)} = -\frac{dL(N)}{dN} \frac{1}{L(N)} = -\frac{d}{dN} \log L(N). \quad (2)$$

Therefore by integration

$$L(N) = \exp - \int_0^N r(z) dz. \quad (3)$$

The "risks" of failure or "failure-rates" in a population are additive. This makes it possible to superimpose the risks of failure from various sources and to obtain the resulting reliability function with the aid of Eq. (2). Moreover, while the reliability function $L(N)$ is a statistical measure of dispersion, the risk function $r(N)$ is open to physical interpretation. Under conditions of "ultimate load" failure by chance-coincidence of an extreme load with an insufficient structural resistance, the risk r_{u0} of failure is independent of the "age" N of the structure and therefore constant, provided the deterioration, with N , of the resistance as a result of fatigue, creep or corrosion is not considered; otherwise $r_u(N) = r_{u0} + r'_u(N)$ where $r_{u0} = P_F$ and $r'_u(N) = P'_F(N)$ reflects the reduction by fatigue damage of the ultimate load resistance.

On the other hand the nature of fatigue implies a risk, $r_F(N)$, of failure that increases gradually with age. The total risk $r_F(N)$ can be analyzed by considering the various sources from which it arises, and the total risk $r_F(N)$ "partitioned" and attributed to the various causes $r'_F(N)$, $r''_F(N)$, ...; changes in operating conditions are reflected in changing risks and in changing reliability functions resulting from those risks. Expressing the fatigue sensitivity in the form

$$f(N^*) = \frac{1}{r_{u0}} [r'_F(N_1) + r''_F(N_2) + \dots] \quad r'_u(N^*) = (1/P_F) r'_F(p_1 N^*) + \quad (4) \\ + r''_F(p_2 N^*) + \dots r'_u(N^*)]$$

where $p_1 = (N_1/N^*)$, $p_2 = (N_2/N^*)$, ... denote the percentages of the total service life N^* under various risk conditions, a quantitative procedure is established with the aid of which the effect of variation in operating conditions on fatigue performance can be evaluated, and structures classified in terms of their design criteria and material performance.

5. Reliability analysis for ultimate load

(a) *Statically determinate structures*

The constant probability of failure under a single load application refers to a statistical "population" of nominally identical structures of (statistical) carrying capacity R , each of which has been subjected to one application of an extreme (statistical) load S : it represents the ratio of structures that are expected to fail, or the probability P_F of any one of those structures to fail, under the single load application. If the "safety-factor" of a structure within the considered "population" is defined as the ratio ν of its resistance R to the applied load S

$$\nu = R/S \quad (5)$$

this ratio is different for each structure of the "population"; being a statistical variable with probability density $p(\nu)$ and probability function $P(\nu) = \int_0^\nu p(\nu) d\nu$, it is completely determined by the probability densities of the carrying capacity $p_1(R)$ and of the extreme load population $p_2(S)$. (7) R denotes the carrying capacity of the structure or part, as determined by the relevant material properties and the geometric characteristics associated with the failure criterion, such as areas, section moduli, static moments and spans, as well as the effect of connections (stress-concentration factors); it has the same dimension as the load S .

Since failure occurs when $S > R$ or $\nu < 1$ the probability of failure P_F is identical with the probability that $\nu < 1$ or $P_F = P(1)$, the ordinate of the cumulative function $P(\nu)$ at $\nu = 1$. The relation

$$P_F = \int_0^1 p(\nu) d\nu = \int_0^1 p(R/S) d(R/S) = P(1) \quad (6)$$

determines the probability of failure directly in terms of the probability densities $p_1(R)$ and $p_2(S)$, without reference to a specific value of the "safety factor".

The definition of the safety factor ν in terms of a statistical distribution function $p(\nu) d\nu$ reduces the safety analysis of a structure or structural part to the determination of the function $p(\nu)$. Specific values ν acquire a meaning only as they represent a "measure of location" of the central range, such as the mean $\bar{\nu}$, mode $\tilde{\nu}$ or median $\check{\nu}$ of the distribution $p(\nu)$. A conveniently selected "measure of location" can be considered as a nominal or "central" safety factor ν_0 representing the ratio of the "central values" (R_0/S_0), the selection of which will depend on the character of the functions $p_1(R)$ and $p_2(S)$.

Considering two independent, non-negative continuous statistical variables R and S with probability densities $p_1(R)$ and $p_2(S)$ and (cumulative) probability functions $P_1(R)$ and $P_2(S)$, as well as the relations

$$R = \nu S \text{ and } dR/d\nu = S \quad (7)$$

the probability density $p(\nu)$ is obtained as the "marginal" distribution of $p(\nu, S)$

$$p_1(\nu S) p_2(S) (dR/d\nu) d\nu dS = p_1(\nu S) p_2(S) \cdot S d\nu dS \quad (8)$$

integrated over S between $0 \leq S \leq \infty$. Hence

$$p(\nu) = \int_0^{\infty} p_1(\nu S) p_2(S) \cdot S \cdot dS \quad (9)$$

and

$$P(\nu) = \int_0^{\nu} p(\nu) d\nu = \int_0^{\nu} \int_0^{\infty} S p_1(\nu S) p_2(S) dS d\nu. \quad (10)$$

Changing the order of integration

$$P(\nu) = \int_0^{\infty} \int_0^{\nu/S} p_2(S) p_1(\nu S) d(\nu S) dS = \int_0^{\infty} P_1(\nu S) p_2(S) dS = \int_0^1 P_1(\nu S) dP_2(S). \quad (11)$$

The probability or risk of failure is therefore

$$P_F = P(\nu)_{\nu=1} = \int_0^{\infty} P_1(S) dP_2(S). \quad (12)$$

A particularly simple illustration of the procedure of deriving $p(\nu)$ from $p_1(R)$ and $p_2(S)$ arises when $p_1(R)$ and $p_2(S)$ are both logarithmic-normal with median values \check{R} and \check{S} and standard deviations δ_R and δ_S of $\log R$ and $\log S$ respectively. Since $\nu = R/S$ and therefore $\log \nu = \log R - \log S$, it follows that $\log \nu$ is also normally distributed, with mean $\log(\check{R}/\check{S}) = \log \check{\nu} = \log \nu_0$ and standard deviation $\delta_\nu = \sqrt{\delta_R^2 + \delta_S^2}$. Therefore

$$P(\nu) = \Phi \left[\frac{\log(\nu/\nu_0)}{\delta_\nu} \right] \quad (13)$$

where $\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2) dt$. The probability of failure is thus obtained directly from tables of error functions at

$$P_F = \Phi \left[-\frac{\log \nu_0}{\delta_\nu} \right]. \quad (14)$$

A reduction of P_F requires an increase of ν_0 or a reduction of δ_p , or both; an increase of ν_0 alone remains ineffective if at the same time δ_p increases, as is frequently the case when structural materials of higher yield point are used that show an increased scatter in their strength properties.

In Fig. 2, Eq. (14) is presented for various combinations of the ratios σ_S/\bar{S} and σ_R/\bar{R} where σ_S and σ_R denote the standard deviations of S and R respectively.

When the considered structure has a single load-path and consists of n parts of "resistance" R , each of which is subject to the full load S , (Fig. 3)

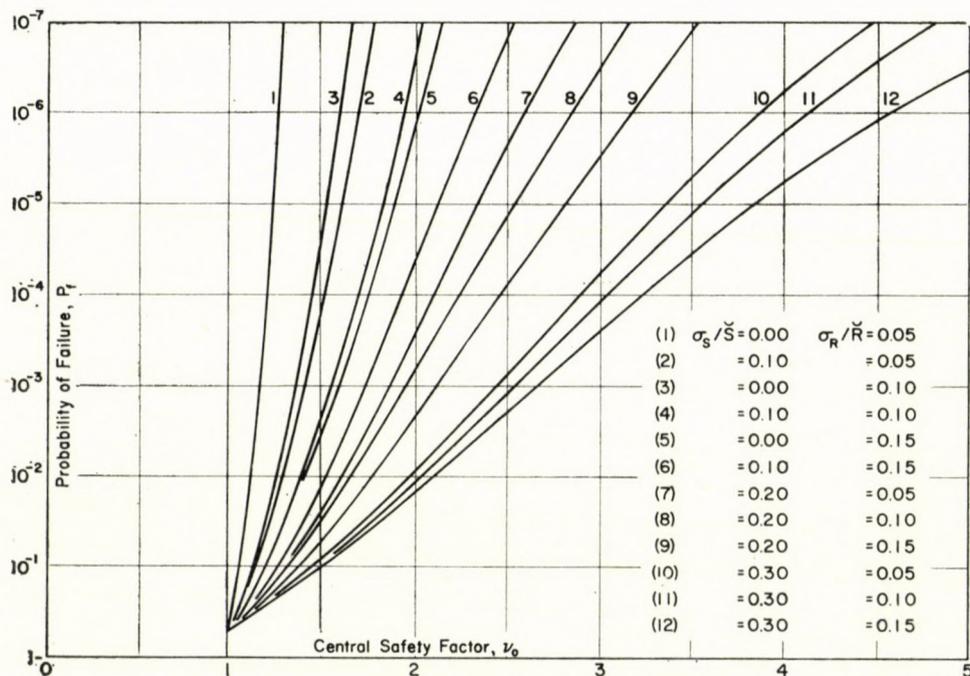


Fig. 2. Probability of Failure P_f versus Central Safety Factor ν_0 for various Combinations of (σ_S/\bar{S}) and (σ_R/\bar{R}) . (Log-Normal distributions.)

failure of the structure will occur when the weakest of the parts fails (non-redundant chain structure). Denoting by p_{FK} the probability of failure of the individual member, the probability of survival of all n members

$$L(n) = \prod_{k=1}^{k=n} (1 - p_{FK}) \sim 1 - \sum_{k=1}^{k=n} p_{FK}; \quad (15)$$

therefore the probability of failure of the structure

$$P_F = 1 - \prod_{k=1}^{k=n} (1 - p_{FK}) \sim \sum_{k=1}^{k=n} p_{FK}. \quad (16)$$

The survivorship function for N load repetitions

$$L(N) = \prod_1^n [\exp(-Np_{Fk})] = \exp(-NP_F) \quad (17)$$

which is identical with that for the single-member structure, provided the individual probabilities p_{Fk} fulfil the condition (16). When all members are of equal probability of failure p_{Fk} , this condition has the form $p_{Fk} = \frac{1}{n} P_F$. The individual members of a n -member chain-structure must therefore be

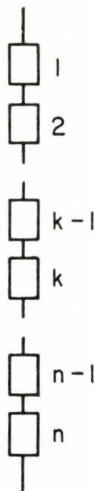


Fig. 3. Single Chain Structure

designed with a higher "central" safety factor ν_0 than an equivalent single-member structure.

(b) *Redundant structures*

When the considered structure is a multiple-load-path structure of n -members and m -load paths (Fig. 4) (where (m/n) is an integer) the probability of failure of each of the m -component chain structures subject to $(1/m)$ th of the total load is initially given by the expression

$$P_{F0} = 1 - L_0\left(\frac{n}{m}\right) = 1 - \prod_{k=1}^{k=\frac{n}{m}} (1 - p_{F0k}) \sim \sum_{k=1}^{k=\frac{n}{m}} p_{F0k} \quad (18)$$

Failure of the structure itself implies consecutive failure of the m -component chain-structures in the course of which the probabilities p_{FK} in members of

the unbroken chains are suddenly increased as one after another of the chains fails. This increase is due to the increase of the ratio of the total load S to be carried by the unbroken chains which, in turn, reduces the "central" safety factor of the chain members from their initial value $v_{0k} = R_{0k} m/S_0$ to $R_{0k} (m-1)/S_0$, $R_{0k} (m-2)/S_0, \dots, R_{0k}/S_0$. Assuming that the carrying capacity of all n members belongs to the same statistical population R so that $v_{0k} = v_0$ and p_{Fk} is constant, the increase of p_{Fk} from the initial values p_{F0k} for the n -members of the m chains to $p_{F1k} > p_{F0k}$ for the $n \left(1 - \frac{1}{m}\right)$ members after the first chain is broken, and subsequently to $p_{F2k} > p_{F1k}$, etc. can be

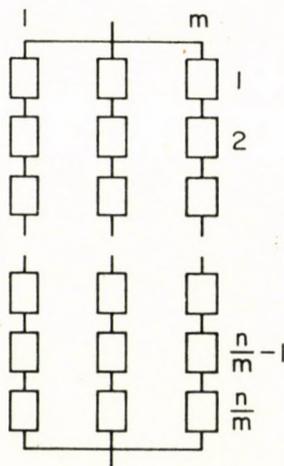


Fig. 4. Multiple chain structure

picked off the relevant diagrams $P_F(v_0)$ or, for logarithmic normal distributions of R and S , obtained from Eq. (14), introducing the step-wise decreasing values of v_0 associated with each chain failure.

As p_{F0k} increases to $p_{F1k}, p_{F2k}, \dots, p_{F(m-1)k}$ the probability of failure of the unbroken chains increases from P_{F0} according to Eq. (18) to

$$P_{F,(m-1)} = 1 - L_{m-1} \left(\frac{n}{m} \right) = 1 - \prod_{k=1}^{k=\frac{n}{m}} (1 - p_{F(m-1)k}) \sim \sum_{k=1}^{k=\frac{n}{m}} p_{F(m-1)k}. \quad (19)$$

The probability of failure of the structure is the probability of consecutive failure of all component chains $P_F = P_{F,0} P_{F,1} \dots P_{F,(m-1)}$ and the probability of survival of the m -load-path structure therefore

$$L(n) = 1 - P_F = 1 - P_{F,0} \cdot P_{F,1} \dots P_{F,(m-1)} \quad (20)$$

as compared to Eq. (18) for a single-load-path structure of the same total number of members.

Comparison of Eq. (20) with the probability $P_F = P_{F,0}$ of failure of a single load-path structure of (n/m) members suggests that the addition of alternative load-path reduces the probability of failure under a single load application significantly, provided at least $P_{F,1} \ll 1$. If already the failure of the first load-path (chain) brings the probability $P_{F,1}$ close to unity, very little is gained by the addition of an alternative load path.

The mortality function of the structure is obtained from the mortality functions of the component chains in the form of the product

$$P(N) = [1 - L_0(N)] \cdot [1 - L_1(N)] \cdot \dots [1 - L_{(m-1)}(N)] \quad (21)$$

o that the reliability function of the whole structure

$$L(N) = 1 - P(N) = 1 - [1 - \exp(-NP_{F,0})] \cdot \dots [1 - \exp(-NP_{F,m-1})] \quad (22)$$

which compares with Eq. (17) with $P_F = P_{k,0}$ for the single load path structure. Thus, for instance, for a three-load-path structure,

$$L(N) = e^{-NP_{F,0}} + (1 - e^{-NP_{F,0}})e^{-NP_{F,1}} + (1 - e^{-NP_{F,0}})(1 - e^{-NP_{F,1}})e^{-NP_{F,2}}$$

and the associated "risk" function

$$\begin{aligned} r(N) = -L'(N)/L(N) = & [P_{F,0}e^{-NP_{F,0}}(1 - e^{-NP_{F,1}})(1 - e^{-NP_{F,2}}) + \\ & + P_{F,1}e^{-NP_{F,1}}(1 - e^{-NP_{F,2}})(1 - e^{-NP_{F,0}}) + \\ & + P_{F,2}e^{-NP_{F,2}}(1 - e^{-NP_{F,0}})(1 - e^{-NP_{F,1}})]/L(N). \end{aligned}$$

For long lives for which $N \gg 1/P_{F,1}$ the risk of failure is independent of the redundancy of the structure since $r(N) \rightarrow P_{F,0}$. However for short lives, $1/P_{F,2} < N < 1/P_{F,1}$, the risk $r(N) < P_{F,0}$; in first approximation

$$r(N) \sim P_{F,0}(1 - e^{-NP_{F,1}}).$$

As lives tend towards zero ($0 < N < 1/P_{F,2}$) the risk also tends towards $r(N) \rightarrow 0$. Thus the redundancy of the structure practically eliminates the short-term risk of ultimate load failure while it does not affect the long term risk. The principal effect is that the multiple-load-path structure assures that the failure of one load-path still leaves a structure with a sufficiently high probability of short range survival, and thus achieves the principal purpose of "fail-safe" design.

6. Reliability analysis for fatigue

Two types of risk functions must be established for the analysis of reliability in fatigue:

(a) risk functions $r'_F(N)$, $r''_F(N)$... for fatigue failures under various types of operational loading;

(b) the risk function $r'_u(N)$ for failure under the action of extreme loads of the structure weakened by fatigue.

The risk-functions $r'_F(N)$, $r''_F(N)$... could be directly obtained from results of sufficiently large number of fatigue tests of characteristic components and connections, presented in the form of reliability functions $L'(N)$, $L''(N)$, ... In the absence of such tests, the central values of the reliability functions (modes, medians or means) can be estimated by combining the damaging effects of various load spectra with the aid of specific rules of fatigue damage accumulation [3]: the form of the increase of risk with "age" N must then be introduced on the basis of physically relevant assumptions and reasoning (2), and used for extrapolation from the observable central ranges of $L'(N)$, $L''(N)$... toward the significant "tails" of the distribution functions. Thus in order to discriminate between probability functions that can not be distinguished from each other within the (central) range of actual observation it is necessary to consider the "risk" of failure in the light of the physical and statistical aspects, and to base the differentiation between statistical functions on physical considerations.

When the risk of failure remains constant $r(N) = P_F = 1/T_u$, where T_u denotes the "return period" of or the mean interval between (ultimate load) chance failures, the survivorship function is exponential. On the other hand, fatigue as a process of progressive damage must necessarily be associated with a risk function that increases with "age" N . The simplest reliability-function that satisfies this condition and provides a good approximation of all test results is of the form

$$L(N) = \exp \left[- \left(\frac{N}{V} \right)^a \right] \quad (23)$$

known as the Third Asymptotic Distribution of Extreme Values [8] and associated with the "risk" function

$$r_F(N) = \frac{a}{V} \left(\frac{N}{V} \right)^{a-1} \quad (24)$$

where V denotes the "characteristic" life at $L(V) = e^{-1}$ (measure of central location) and a a scale parameter. The parameters V and a are estimated from straight-line plots, on extreme value probability paper, of recorded fatigue

lives under constant or variable load amplitude in repeated tests on nominally identical specimens under nominally identical loading conditions (8).

The Third Asymptotic probability function of extreme (smallest) values emerges as the survivorship function in fatigue associated with the simplest possible assumption that the failure risk increases as a power function of the number of load cycles or age. The scale parameter a is inversely proportional to the standard deviation δ of $(\log N)$, the rate of increase of the risk of failure is reflected in the scatter range of fatigue lives; the higher this rate the narrower the expected scatter range.

The values of a observed in material specimen fatigue tests usually are between $4 < a < 7$, depending on material and intensity of the stress-spectrum: with increasing intensity and decreasing life the power increases. The above range of a is associated with a range of variation of $0.14 > \delta > 0.08$, which is within the scatter range of N that has been observed in tests on full scale structures and components. Fig. 5 illustrates the observed trend of $\delta = \sigma(\log N)$ as function of the median life \check{N} for material specimens and structural parts (5).

Superposition of results of constant stress amplitude tests becomes possible by the application of the quasi-linear rule of damage accumulation [3]

$$V_R \sum_i \frac{\omega_i P_i}{V_i} = 1, \quad (25)$$

where p_i denotes the expected relative frequency of occurrence within a load spectrum of the stress amplitude S_i with an expected constant-amplitude fatigue life V_i , ω_i the "damage interaction factor" at this stress-amplitude and V_R the resulting expected spectrum fatigue life. Eq. (25) produces an estimate of V_R

$$V_R = \left(\sum_i \frac{\omega_i P_i}{V_i} \right)^{-1}. \quad (26)$$

Assuming now that $L(N)$ for the load spectrum is of the form of Eq. (23)

$$L(N) = \exp \left[- \left(\frac{N}{V_R} \right)^\beta \right] \quad (27)$$

the associated new scale parameter β may be directly estimated from Fig. 5 by assuming $V_R \sim \check{N}_R$.

Changes in the form of the spectrum, in the fatigue behaviour of the material, in the intensity of stress-concentrations, etc. is to be considered in the evaluation of V_R according to Eq. (25); they will directly affect p_i , V_i and ω_i . Jointly, all such changes will be reflected in the resulting modal operational

fatigue life V_R and in the estimate of the associated parameter β according to Fig. 5.

The effect of redundancy on the function $L(N)$ and thus on $r_F(N)$ is less significant than the effect on P_F . Since load-carrying elements of similar "age" approach their expected fatigue lives more or less simultaneously, and since the increase of stress in the surviving elements from failure of the first element reduces their expected fatigue life by one or several orders of magni-

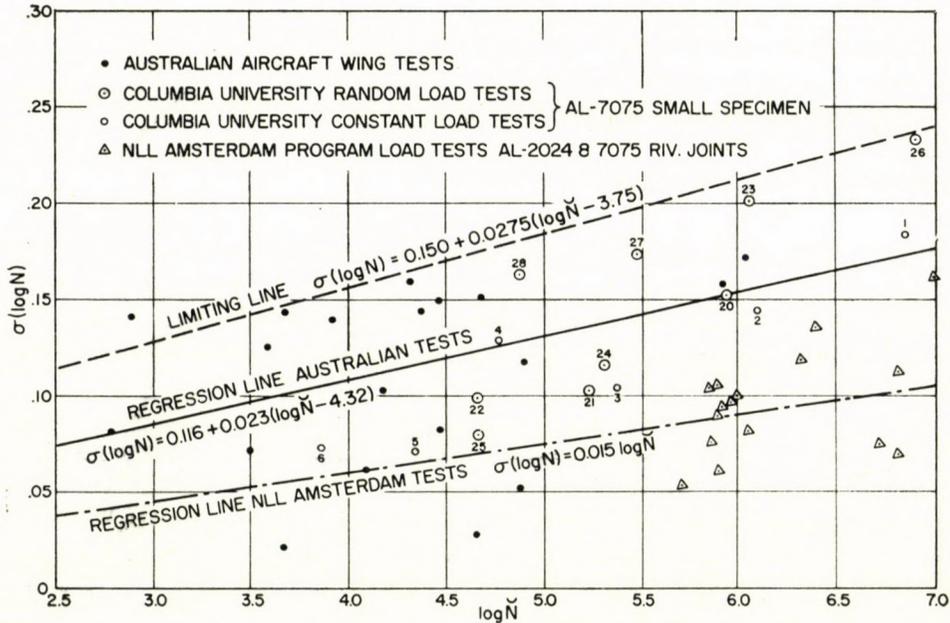


Fig. 5. Standard Deviation $\sigma(\log N)$ of $\log N$ for various Constant-amplitude, Program and Random Fatigue Tests

tude (depending on the degree of redundancy), the risk of fatigue failure in a redundant structure must be expected to increase more rapidly than the risk of ultimate load failure.

The shape of the risk function for ultimate load failure of the structure weakened by fatigue $r'_u(N)$ is determined by the relation between the expected value of the resistance to ultimate load \check{R} or \check{R} and the number N of load-cycles applied. The form of this relation can be derived on the basis of the observations of crack propagation in metal sheets and in structural parts under cyclic loading represented by the empirical relation $\ln(l/l_0) \cong \text{const} (N/V)^\gamma$ where V denotes the expected fatigue life, l and l_0 the momentary and initial crack length and $\gamma > 1$ (10). In single-load-path structures the risk function is obtained by considering that with decreasing $\check{R}(N)$ or $\check{R}(N)$ the central

safety-factor $\nu_0(N) = \nu_N$ decreases, so that an increasing function $r'_u(N) = P_F(N)$ is obtained from Eq. (12).

Considering that $\ln(l/l_0) = \ln[1 + \Delta l/l_0] \sim \Delta l/l_0$ for $(\Delta l/l_0) \ll 1$, and converting the relation between crack-length $\Delta l = (l - l_0) \sim (R_0 - R_N)$ and number of load cycles N into a relation between momentary resistance R_N and N of a form specified above

$$(R_0 - R_N)/R_0 = \Delta = (N/V_R)^\gamma, \quad \gamma > 1. \quad (28)$$

where R_0 denotes the resistance of the undamaged structure, Δ is a measure of damage and V_R the expected number of load cycles to complete separation ($R_V = 0$), the cycle-dependent safety factor

$$\nu_N = \nu_0(1 - \Delta) = \nu_0 [1 - (N/V_R)^\gamma]. \quad (29)$$

A value of $\gamma \sim 4$ has been found to represent observations of crack-propagation fairly well.

In multiple-load path structures the relations $\check{R}(N)$ or $\check{R}(N)$ have to be considered simultaneously for all elements. LUNDBERG [9] has already pointed out that in such a structure the individual elements must be expected to be weakened by fatigue simultaneously, so that when one element fails the remaining elements can not be relied upon to have their full initial strength, with the result that "fail-safe" structures are less safe with respect to fatigue than for ultimate load failure. This tendency is further magnified by the fact that the rate of crack-propagation is proportional to a power of the acting stress σ^m , where $m > 1$; the central safety factor ν_N thus decreases after failure of the first element much faster and the risk function increases much faster than before such failure.

The fatigue-sensitivity of the structure with respect to operational loads is obtained from Eqs. (2), (4) and (27):

$$f'(N) = \frac{r_F(N)}{r_{u0}} = \frac{1}{k} \frac{\beta}{(V_R P_F)^\beta} (N P_F)^{\beta-1} \quad (30)$$

since with reference to the population of N operational loads the risk $r_u = k P_F$, where $k \ll 1$ denotes the mean frequency of (extreme) loads that could cause ultimate load failure, in the total number N of operational loads. The reliability function for the combined ultimate load and operational fatigue failure criteria is obtained by adding the relevant risks

$$r(N) = r_u + r_F(N) = k P_F + \frac{\beta}{V_R} \left(\frac{N}{V_R} \right)^{\beta-1}. \quad (31)$$

Hence, according to Eq. (4)

$$L(N) = \exp \left[-kNP_F - \frac{1}{(V_R P_F)^\beta} (NP_F)^\beta \right] = \exp \left[- (kNP_F) - \frac{f_0}{\beta} (NP_F)^\beta \right] \quad (32)$$

where $(f_0/\beta) = (V_R P_F)^{-\beta}$ is a measure of the fatigue sensitivity of the design; it represents the fatigue sensitivity factor f^* for the fictitious operational life $N^* = P_F^{-1} = T_u$. Since $\ln L(N) = \ln [1 - P(N)] \doteq -P(N)$ within the range of the design values of $P(N) \ll 1.0$, Eq. (32) can be written in the form

$$\frac{P(N)}{k(NP_F)} - 1 = \frac{f_0}{k\beta} (NP_F)^{\beta-1} = y. \quad (33)$$

For specified values of $P(N)$ and k the above equation can be solved for $x = NP_F$. This solution gives the design operational life $N^* = xT_u$ (with $x \leq 1$) for the combined ultimate load and fatigue failure criterion in terms of the "return period" of ultimate failure $T_u = P_F^{-1}$, associated with the specified probability of failure $P(N^*)$ at the end of this life.

For fatigue-insensitive structures for which $V_R \gg T_u$ and therefore $(f_0/\beta) \rightarrow 0$ and $y \rightarrow 0$, the design criterion is ultimate load failure for which $P(N) = kNP_F$, since for this criterion the number (kN) of load cycles to be considered is not the total number N of operational loads but only that relatively small percentage of extreme loads for which there is a real chance of attaining the intensity of the ultimate load. Of the total number of operational loads every one of which contributes to fatigue, only loads arising under extreme operational conditions (see Fig. 1) may attain ultimate load intensity under particularly unfavorable circumstances. Hence, the total number of operational loads is reduced in proportion to the expected (mean) relative frequency k of occurrence of such conditions in order to determine the probability of failure under ultimate load according to Eq. (33) for $y = 0$. The value of k necessarily depends on the type of structure and the operation for which it is designed. For aircraft structures, for instance, it is higher for manoeuvre-critical structures, such as fighter or training planes, than for gust-critical transport planes and, for the latter, higher for low-flying than for high-flying aircraft. Comparing records of gusts due to thunderstorm turbulence with operational gust records for low altitude flight [10] a value of $k \sim 10^{-3}$ appears justified for thunderstorm conditions.

In Figs. 6a to 6d a graphical solution of Eq. (33) for $10 \leq (f_0/k\beta) \leq 10^{18}$ and $\beta = 2, 3, 4$ and 5 is presented. Plotting the two families of curves $y = [P(N^*)/kx] - 1$ and $y = (f_0/k\beta) x^{\beta-1}$ in double-logarithmic scale, the abscissae x of the points of intersection of individual curves represent solutions of this equation. The $x - y$ plane is divided into regions of different fatigue sensitivity $f^* = \frac{1}{k} f_0 x^{\beta-1} = \text{const.}$ by the horizontal lines $y = f^*/\beta$, where the

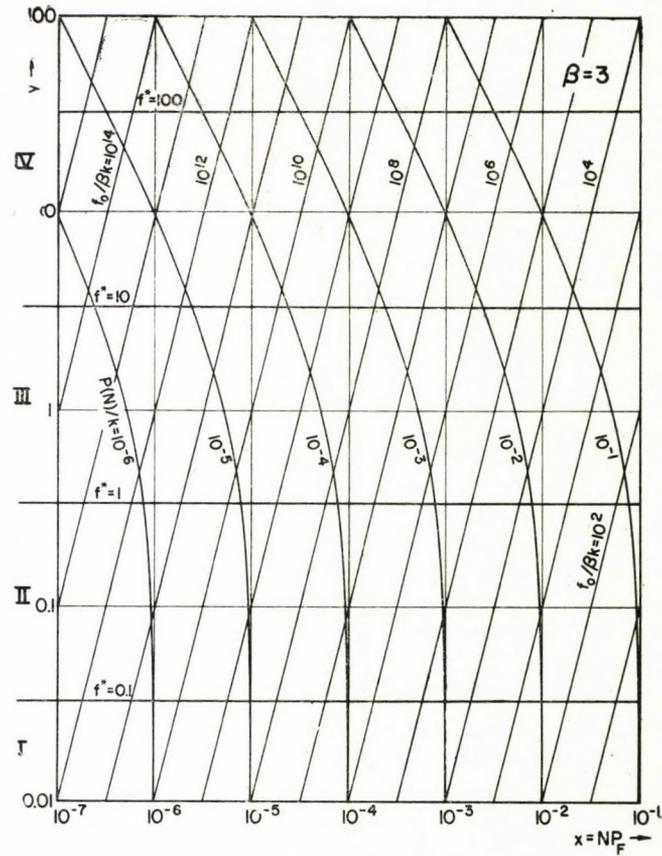
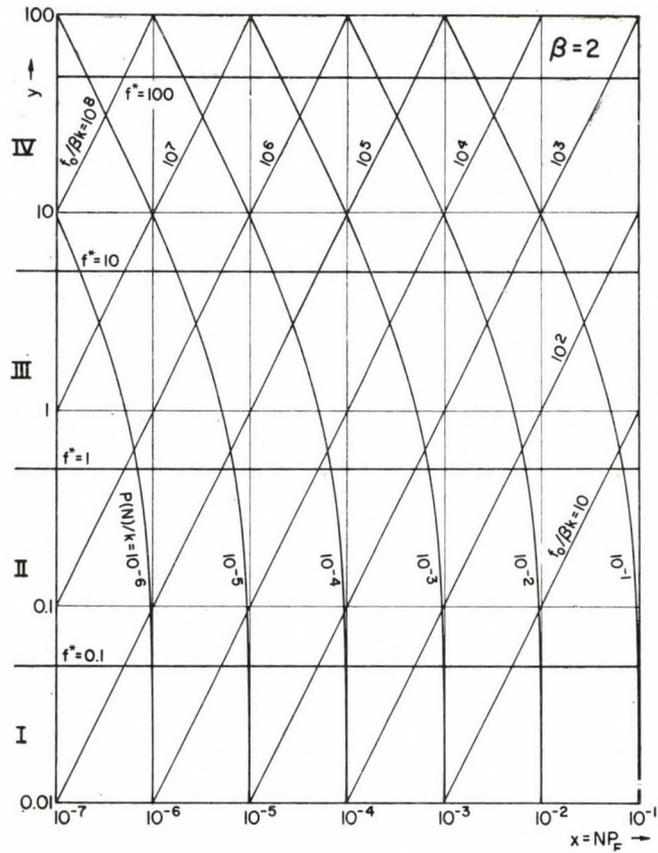
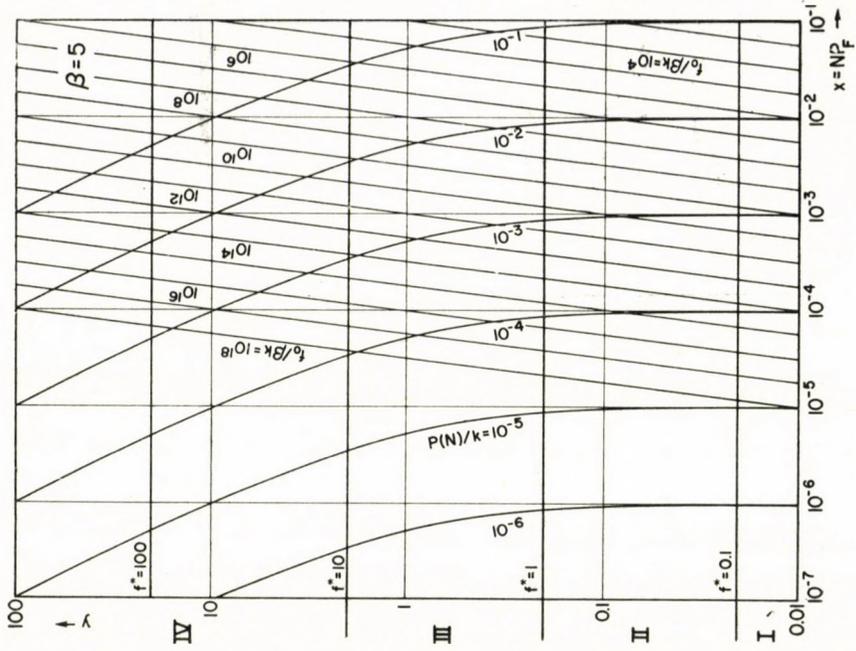


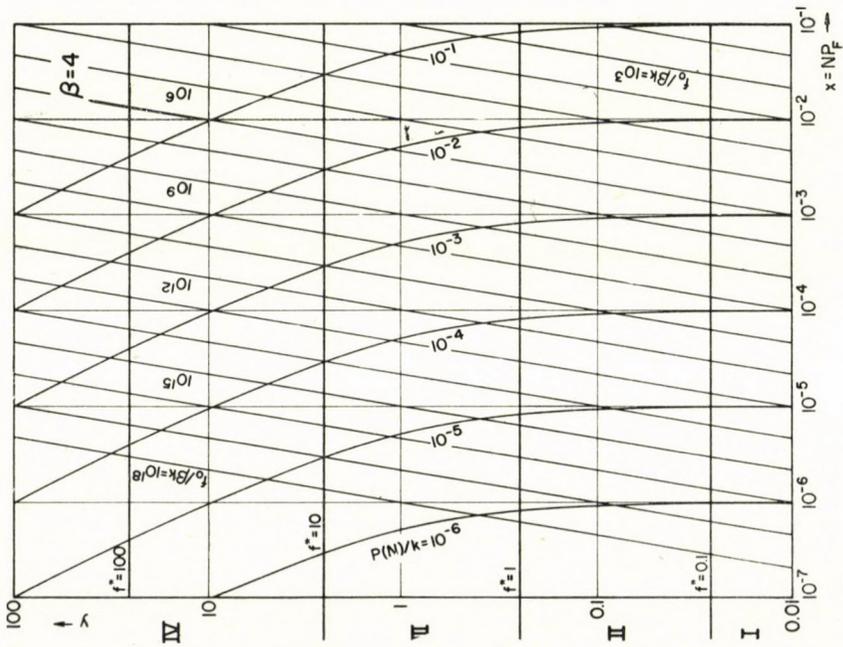
Fig. 6. Design Diagrams for Combination of Ultimate Load and Fatigue Failures for Different Values of the Parameter

a. $\beta = 2$

b. $\beta = 3$



d. $\beta = 5$



c. $\beta = 4$

four classes of fatigue sensitivity are delimited by $f^* = 0.1, 1$ and 10 . Thus for specified values of the parameters $P(N^*)$, k , (f_0/β) and β the fatigue sensitivity of the structure f^* (design class) and its design life $N^* = xT_u$ are determined by the point of intersection of the respective curves. It is easily seen that a desired reduction of fatigue sensitivity f^* at the same operational life requires a joint reduction of $P(N^*)/k$ and of $(f_0/k\beta)$. On the other hand, an increase of $(f_0/k\beta)$ at constant $P(N^*)$ causes a rapid change in the design class of the structure which can be compensated either by a reduction of the operational life or of the risk of failure in ultimate load design or both.

The values of the parameter $\beta = 2, 3, 4$ and 5 are associated with standard deviations $\sigma(\log N) \cong 0.28, 0.19, 0.14$, and 0.11 . Considering Fig. 5 it appears that these values of β are well within the range of values to be expected for specimens and structures.

The reliability function for ultimate load failure of a structure gradually weakened by fatigue is obtained from its risk-function $r'_u(N) = P_F(\nu_N)$ that can be determined point by point by introducing ν_N according to Eq. (29) into Eq. (12). Approximating these empirical curves by an integrable function and adding the risk functions $r'_u(N)$ and $r_F(N)$ the joint fatigue reliability function can be obtained with the aid of Eq. (3). The fatigue sensitivity of the structure with respect to ultimate load failure due to fatigue cracking therefore

$$f''(N) = r'_u(N)/r_{u0}. \quad (34)$$

Introducing, in first approximation, the expected fatigue sensitivity for ultimate load failure due to fatigue cracking (30)

$$f''(N) = \frac{1}{k} \frac{\alpha}{(V_R P_F)^\gamma} (NP_F)^\gamma = \frac{1}{k} f'_0 (NP_F)^\gamma \quad (35)$$

where $(f'_0/\alpha) = (V_R P_F)^{-\gamma}$ is a measure of the fatigue crack sensitivity of the design, the combined fatigue sensitivity for operational and ultimate load fatigue effects under a population of operational loads is obtained by adding the fatigue sensitivities

$$f'(N) + f''(N) = f(N) = \frac{1}{k} [f_0(NP_F)^{\beta-1} + f'_0(NP_F)^\gamma] \quad (36)$$

since the risks are additive.

Adding all risks

$$r(N) = r_{u0} + r'_u(N) + r_F(N) = kP_F + f_0(NP_F)^{\beta-1} + f'_0(NP_F)^\gamma \quad (37)$$

the associated reliability function

$$L(N) = \exp \left[-kNP_F - \frac{1}{(V_R P_F)^\beta} (NP_F)^\beta - \frac{\alpha}{(\gamma + 1) (V_R P_F)^\gamma} (NP_F)^{\gamma+1} \right] \quad (38)$$

combines the fatigue sensitivities with respect to operational loads and crack propagation. Considering that $\ln L(N) \doteq -P(N)$ for $P(N) \ll 1.0$, Eq. (38) can be written in the form

$$\frac{P(N)}{kx} - 1 = \frac{f_0}{k\beta} x^{\beta-1} + \frac{f'_0}{k(\gamma+1)} x^\gamma \quad (39)$$

where $x = NP_F$. This equation replaces Eq. (33). Its solution provides the design life $N^* = xT_u$ for the specified probability of failure $P(N^*)$ at its termination. For the special case $\gamma = \beta - 1$ the diagrams of Fig. 6 provide the solutions if the parameter $(f_0/\beta k)$ is replaced by $[(f_0/\beta + f'_0)(\gamma + 1)] k^{-1} = [(f_0 + f'_0)/\beta k]$. Alternatively, Eq. (39) can be used to evaluate the combined fatigue effects on the median life by setting the left side $L(N^*) = 0.5$, and numerically solving the equation for $x = (NP_F)$.

A procedure has thus been established for the analysis of the "fatigue sensitivity" and reliability of a structural design in terms of a few relevant basic parameters. The value of this procedure is less in the quantitative results that can be obtained than in the possibility to compare various designs in terms of structural reliability.

BIBLIOGRAPHY

1. A. M. FREUDENTHAL,
 - (a) Trans. Am. Soc. Civil Eng. vol. **121** (1956), p. 1337
 - (b) 6th Int. Congress Ass. Bridge & Struct. Eng., Stockholm, Prel. Publ. (1960) p. 655
 - (c) Proc. Am. Soc. Civil Eng., vol. **87**, (March 1961)
2. A. M. FREUDENTHAL, Journal Applied Physics, vol. **31** (1960) p. 2196
3. A. M. FREUDENTHAL and R. A. HELLER, Journal Inst. Aeron. Sciences, vol. **26** (1959) p. 433
4. loc. cit (1) c.
5. A. M. FREUDENTHAL, Fatigue Sensitivity and Reliability of Mechanical Systems, Especially Aircraft Structures, U. S. Air Force WADD Techn. Report 61-53 (1961)
6. loc. cit. (2)
7. loc. cit. (1) b, c
8. (a) A. M. FREUDENTHAL and E. J. GUMBEL, Advances in Applied Mechanics, vol. **4**, Academic Press, New York 1956. pp. 116-156
- (b) E. J. GUMBEL, Theory of Extremes, Columbia Univ. Press, New York (1959)
9. B. LUNDBERG, Aeron. Res. Inst. of Sweden, Rep. No. 76 (1958); Tech. Note No. HE-853 (1959)
10. A. J. McCULLOCH, Fatigue of Aircraft Structures, ASTM Spec. Techn. Publ. No. 274 (1959) p. 30 ff

КИНЕТИКА ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ*

Профессор-доктор Я. Б. ФРИДМАН

МОСКВА, СССР

Введение

Подобно многим областям наука о прочности долгое время развивалась на статической основе без учета времени (нагрузки вызывают определенные, не зависящие от времени перемещения; напряжение и сопротивление не меняются со временем и потому при расчетах достаточно сопоставить постоянную величину максимального напряжения с постоянной же величиной сопротивления).

Развитие многих новых областей техники сопровождается повышением напряженности; ростом неравномерности нагружения как по зонам, так и по времени; повышением рабочих температур и увеличением их неравномерности, применением новых материалов со сложной и неравновесной структурой. Все эти факторы способствуют усилению проявления временной зависимости не только при повышенных, но часто и при комнатных и пониженных температурах (например, при разрушении через несколько часов или дней после нагружения затянутых болтов, заневоленных пружин, баллонов под давлением и т. п.).

Поэтому все в большем числе вопросов прочности становится необходимым дополнять (а иногда и заменять) статический подход — кинетическим с учетом изменения характеристик и процессов во времени.

Возможны различные способы этого учета.

1. Оценка *суммарного времени* от начала нагружения до накопления определенной деформации или до полного разрушения. Такая оценка широко и успешно применяется, например, при измерении «длительности жизни» жаропрочных сплавов или числа циклов до усталостного разрушения.

2. *Раздельная* оценка продолжительности *пластической* деформации и процесса *разрушения* (развития трещин), например, время до выявления трещин при длительном статическом нагружении, число циклов до выявления усталостных трещин и т. п.

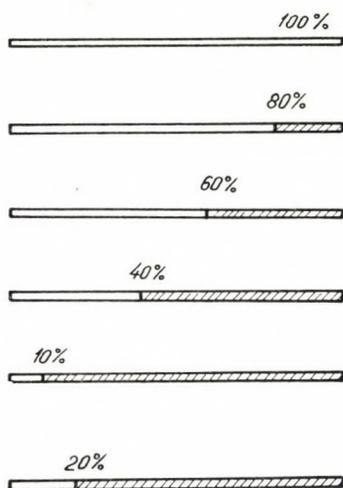
* Ударные нагрузки при очень высоких скоростях, при которых решающую роль играют инерционное сопротивление и волновые процессы, в этой работе не разбираются, соответственно не рассматривается и кинетика упругой деформации.

Несомненно, такая оценка является более желательной, чем предыдущая. Однако, имеются значительные методические трудности и условность в определении момента появления «первых» трещин.

3. Обе предыдущих оценки еще не дают полного представления о кинетике процессов, так как не позволяют судить о ходе изменения неравновесного состояния, т. е. о его скорости и о ее изменении, характеризующемся ускорением.

Поэтому для изучения кинетики процессов необходимо изучение скоростей и ускорений пластической деформации и разрушения.

Такое изучение позволяет выделить в процессе деформации и разрушения критические моменты (состояния), которые не соответствуют ни началу



Фиг. 7. Относительная продолжительность процесса усталостного разрушения. Штриховкой отмечено время развития трещины усталости в % по отношению к общей длительности жизни образца (по данным Л. А. Гликмана)

- а — предельный случай однородного материала и однородного нагружения
- б — гладкий образец на воздухе
- в — надрезанный образец на воздухе
- г — гладкий образец в пресной воде
- д — гладкий образец в 3%-ном растворе NaCl
- е — гладкий образец из чугуна на воздухе

ни концу процессов пластической деформации и разрушения, а отражают переход из устойчивого в неустойчивое состояние. При непостоянной величине нагрузки приходится рассматривать мгновенное состояние при «замороженной» нагрузке.

Определение величины и знака ускорений деформации и разрушения позволяет различать докритические механические характеристики от закритических.

Последние, ввиду наличия неравновесного состояния сильно зависят от свойств не только материала, но и нагружающей системы.

Для гладких (ненадрезанных) образцов и для макрооднородных напряженных состояний закритическое состояние имеет малое значение, так как составляет лишь очень небольшую долю от докритического.

Так как подавляющее большинство стандартных испытаний проводятся на гладких образцах, то распространено мнение о малом практическом и научном значении закритического состояния. Однако, если учесть, что с ростом неоднородности нагружения и сопротивления относительная длительность стадии разрушения увеличивается (фиг. 1) и в реальных изделиях достигает 90% и более (1), то станет очевидным очень большая важность оценки закритического поведения.

Между тем, большинство характеристик, оценивающих механические свойства и входящих в технические условия на поставку и приемку материалов, определяются либо в докритическом состоянии, например, твердость, либо суммарно в до и закритическом состоянии, например, ударная вязкость.

Исключение составляют лишь немногие характеристики: определение «вязкости в изломе» (2,3) и оценка характера ниспадающей ветви диаграммы изгиба [5, 4].

Целью настоящей работы является анализ ряда вопросов прочности с учетом кинетики пластической деформации и разрушения, при этом использованы опубликованные в последние годы статьи и книги автора совместно с его сотрудниками [6], [7], [8], [10].

В особенности следует назвать *Т. К. Зиллову*, *Б. А. Дроздовского* и *Н. Д. Соболева*, совместно с которым изучалось большинство нижеописанных вопросов.

В ряде случаев предварительно были развиты или разработаны специальные методики: метод накотанных сеток [13], оценка чувствительности к трещинам [10], профилографирование изломов [8] и некоторые другие. Ниже эти методы не излагаются, так как они достаточно подробно описаны в цитированной литературе. В настоящей работе рассматриваются в основном макроскопические закономерности, а не микроскопические и дислокационные. Последним посвящена очень большая литература (см. например, симпозиум «Fracture» [12], изданный в 1959 г. *Б. Авербахом*, *Д. Фелбеком*, *Г. Ханом* и *Д. Томасом* в США).

Связь между макроскопическим и более локальными аспектами еще очень невелика. Автор надеется, что данная работа может быть полезной и для понимания более локальных закономерностей.

Отметим, что объяснения многих явлений в области прочности могут быть параллельно даны как с помощью дислокационной теории, так и исходя из макроскопических представлений.

Так, есть известная преемственность между теориями упрочнения блокированием сдвигов (*П. Людви́к*, 1916), интерференцией скольжений (*Джеффрис* и *Арчер*, 1919) и современными представлениями о препятствии движе-

нию дислокаций вследствие скопления атомов примесей, частиц выделяющихся фаз, пересечения дислокаций и т. п.

Другим примером может служить оценка оптимального (для наибольшего повышения сопротивления сдвигу) размера препятствия движению дислокаций и давно известной «критической степени дисперсности» выделений при старении.

Необходимость сочетания классических и дислокационных теорий для хрупкого разрушения подчеркивалась недавно *Е. Орованом* [12].

Часто не учитывают трудности проведения четкого разграничения между характеристиками материала (прежде всего его «прочностью») и характеристиками формы и способа закрепления и нагружения.

Если бы такое разграничение было возможно, то механические свойства были бы «чистыми» характеристиками материала.

Иначе говоря, можно было бы разделить «свойства материала» от «характеристик нагружения», присущих испытательной машине или, шире, нагружающему устройству.

Иногда, например, при малых упругих деформациях (упругие характеристики E , G , μ) возможно выделить «чистые» свойства только материала, практически не зависящие от характеристик испытательной машины.

Большая же часть механических свойств отображает определенное сочетание свойств материала и характеристик испытательной машины (например, ее инерционности, жесткости, накопленного в ней запаса упругой энергии и т. п.).

Так, например, уже предел текучести при наличии площадки или зуба текучести не является ни только свойством материала (так как зависит от характеристик испытательной машины), ни только свойством испытательной машины [15], так как характер площадки и зуба текучести сильно зависит от состава и структуры материала.

Точно также многочисленные попытки определить сопротивление отрыву (*Trennfestigkeit*) как некоторую «константу» данного материала неизменно оказывались неудачными ввиду сильной зависимости от абсолютных размеров образца (его сечения, длины) и других факторов.

Нам кажется, что вопрос существенно проясняется при разделении механических характеристик на *докритические*, определяемые в состоянии, не имеющем существенных отклонений от равновесия; *критические* — при выходе из этого состояния и *закритические*, — определяемые в неравновесном состоянии (таб. 1).

Как для пластической деформации, так и для разрушения можно различать четыре кинетических периода:

- 1) инкубационный (начально-ускоренный),
- 2) торможение ввиду возрастания сопротивления материала от наклепа или дисперсионного твердения,

Таблица 1
Разделение механических характеристик по кинетическим признакам

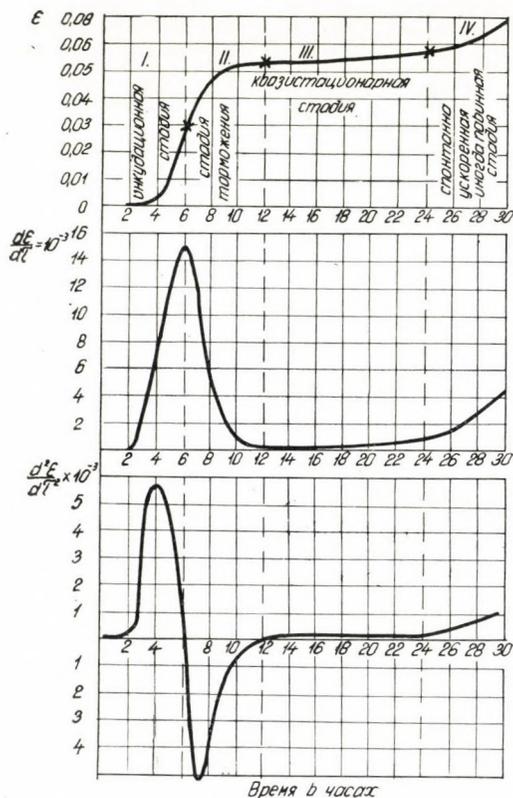
Тип нагружения	Область деформации	Докритические характеристики (зависят в основном от свойств материала и определяются без резкого нарушения равновесия)	Критические характеристики	Закритические характеристики
			(вследствие наличия неравновесного состояния сильно зависят от свойств не только материала, но и нагружающей системы, в особенности при быстрых заключительных стадиях процесса)	
1	2	3	4	5
Кратковременное	П	Предел упругости и текучести. Твердость, сопротивление смятию	Предел прочности при наличии шейки. Равномерная деформация	Сосредоточенное сужение. Истинное сопротивление разрушению
	Р	Нагрузка или деформация, соответствующая замедляющемуся развитию мелких трещин	Сопротивление отрыву. Предел прочности при отсутствии шейки, максимальная нагрузка и соответствующий ей прогиб при изгибе	Работа излома при изгибе надрезанного образца. Темп спадания нагрузки при изгибе за P_{max} . Строение излома
Длительное	П	Предел ползучести	Сопротивление устойчивости при наличии установившейся ползучести. Интервал времени, соответствующий установившейся ползучести	Скорость ползучести в заключительной стадии
	Р	Напряжение и время, соответствующие появлению мелких трещин, развивающихся замедленно	Интервал времени, соответствующий развитию трещин без ускорения при заданном напряжении	Скорость разрушения в заключительной стадии. Строение излома
Многократное	П	Напряжение и число циклов, при котором замедленно растущие петли гистерезиса достигают стабильной величины	Интервал числа циклов, при котором происходит увеличение ширины петель гистерезиса с постоянной скоростью	Напряжение и число циклов, при которых ускоренно растет ширина петель гистерезиса
	Р	Напряжение и число циклов, не снижающие предела выносливости материала	Напряжение и число циклов, соответствующее появлению магистральной трещины усталости	Напряжение и число циклов, при которых растет магистральная трещина. Скорость роста магистральной трещины. Строение излома

- 3) стационарный (макроскопически),
- 4) заключительно-ускоренный, иногда до лавинного.

Критическому состоянию соответствует переход от третьего к четвертому периоду (фиг. 2).

При хрупком разрушении и в некоторых других случаях возможен прямой переход первого в четвертый период.

Закритические характеристики сильно зависят от характера изменения неравновесного состояния со временем и потому более чувствительны:



Фиг. 2. Схема четырех периодов кинетики пластической деформации и разрушения

- I — инкубационный период
- II — период торможения
- III — стационарный период
- IV — заключительный ускоренный период

1) К кинетике внешнего нагружения (например, к запасу упругой энергии системы), чем докритические свойства.

2) К влиянию структуры материала.

Поэтому преимущественное измерение докритических свойств, принятое в современном испытании материалов, не отражает влияния ни запаса

упругой энергии, ни многих структурных факторов. Между тем в реальных условиях службы изделий закритический интервал часто занимает гораздо большее место, чем у гладких образцов и потому не отражаемые испытанием факторы приводят к расхождению (иногда очень резкому) результатов лабораторных испытаний и поведения в эксплуатации.

Таким образом, если докритические характеристики с определенными ограничениями и приближениями могут оценивать свойства материала, как такового, то закритические характеристики одновременно отображают свойства материала, форму и условия нагружения, подобно конструктивной прочности или сопротивлению продольному изгибу.

Оценка склонности к хрупкому разрушению

Абсолютно хрупкое разрушение (во всяком случае у металлов) не наблюдалось. Поэтому здесь хрупким разрушением, как обычно, обозначается разрушение, сопровождающееся малой макропластической деформацией. Предотвращение хрупкого разрушения является, повидимому, одной из главных проблем в новых областях техники.

Однако многочисленные методы оценки склонности к хрупкому разрушению плохо (или вовсе не) согласованы друг с другом.

В таб. 2 сделана попытка (10) разделить существующие методы на четыре группы:

1. Оценка сопротивления отрыву;
2. Оценка склонности к хладноломкости;
3. Оценка чувствительности к надрезу;
4. Оценка чувствительности к трещине.

Последняя группа методов, в свою очередь, может быть подразделена на три:

а) изучение развития возникшей в процессе нагружения трещины в макрооднородном материале. Сюда же относится количественная оценка «вязкости в изломе»,

б) изучение развития трещины из хрупкого слоя, например, нанесенного наплавкой,

в) испытания образцов с исходной искусственно созданной трещиной.

Еще недавно основное теоретическое и прикладное значение придавалось сопротивлению отрыву как «константе» материала, например, для оценки склонности к хрупкости и при расчетах на прочность изделий из хрупких материалов. Однако, можно показать что схеме одновременного разрушения по всему поперечному сечению должна соответствовать скорость разрушения, равная бесконечности (см. приложение). Известно, что скорость разрушения не превышает $0,5 C$ (где C — скорость звука в данной среде).

Очевидно, что хрупкое разрушение в реальных изделиях никогда не

Таблица 2

Основные методы оценки склонности к хрупкому разрушению

Методы оценки сопротивления отрыву	Методы оценки хладноломкости	Методы оценки чувствительности к надрезу	Оценка свойств материала при наличии трещины или в процессе ее развития		
			характеристика развития трещины в макрооднородном материале	характеристика развития трещины из хрупкого слоя	испытание образцов с заранее созданной трещиной
1	2	3	4	5	6
<p>Осевое растяжение гладких образцов при различных температурах [16], [17]</p> <p>Осевое растяжение надрезанных образцов с переменным углом надреза [18]</p> <p>Осевое растяжение образцов, надрезанных трещиной усталости [19]</p> <p>Поперечная прокатка с определением степени обжатия, при которой вскрывается полость [20]</p> <p>Осевое растяжение при комнатной температуре гладких и надрезанных образцов с определением предела текучести гладкого образца и разрушающего напряжения надрезанных образцов [21]</p> <p>То же с последова-</p>	<p>Определение температуры пересечения кривой разрушающего напряжения с кривой предела текучести при осевом растяжении гладких образцов [16]</p> <p>Сериальное ударное испытание надрезанных образцов с установлением критической температуры по достижении минимального значения работы</p> <p>То же, но при испытании образцов с трещинами</p> <p>Ударный изгиб надрезанных образцов с определением нижнего порога хладноломкости</p> <p>То же определение средней температуры между верхним</p>	<p>Испытание на ударный изгиб с определенной остротой надреза при данной температуре (ударная вязкость) [27]</p> <p>Статический изгиб образцов с кольцевым надрезом с определением величины разрушающей нагрузки [28]</p> <p>Статический изгиб призматических образцов с определением стрелы пластического прогиба [29]</p> <p>Определение уширения образцов при ударном испытании [30]</p> <p>Испытание на ударный изгиб серии образцов с различной остротой надреза или с различной шириной [31], [32], [33]</p>	<p>Оценка степени волокнистости излома стали</p> <p>Изгиб постоянной нагрузкой при наводораживании с определением нагрузки или времени до разрушения [28]</p> <p>Изгиб призматических надрезанных образцов с определением характера спадания нагрузки и работы излома [38], [4], [5]</p> <p>То же при эксцентричном растяжении плоских образцов [3], [39]</p>	<p>Ударный изгиб образцов с хрупкой наплавкой в растянутой зоне [40], [41]</p> <p>Взрывное нагружение листовых образцов с хрупкой наплавкой при различных температурах</p> <p>Определение трех переходных температур:</p> <p>а) нулевой пластичности;</p> <p>б) ограниченной пластичности;</p> <p>в) полной пластичности [41], [42]</p> <p>Растяжение плоских образцов с хрупкой наплавкой на боковые грани [43]</p> <p>Наварка валика в жестком контуре между отверстиями с острями. Критической температурой считается та,</p>	<p>Ударный изгиб призматических образцов с трещиной усталости [47], [48], [49], [50]</p> <p>Растяжение образцов с трещиной усталости [19], [53]</p> <p>Получение трещины испытанием на «раздирание», окрашивание ее и затем «раздирание» до разрушения [51]</p> <p>Получение хрупкой трещины заданной глубины ударом в жидком азоте и последующее испытание на эксцентричное растяжение [54]</p> <p>Получение трещины наводораживанием или циклическим нагружением от внутренних отверстий в плоском образце</p>

тельным измерением диаметра в надрезе в процессе деформации и построения кривых зависимости деформации от нагрузки [22]

Растяжение тонкой пластинки, приваренной к двум тягам из более твердого материала до разрушения [23], [24]

Отскакивание тонкой пластинки от тыльной стороны плиты в результате взрыва у лицевой

Напряжения определяются по скорости отскакивания [25]

Изгиб дисков, опертых по контуру при температуре жидкого азота [26]

и нижним порогами хладноломкости

То же, но с определением критической температуры по виду излома (начало появления кристалличности, появление полностью кристаллического излома или достижение определенного процента кристалличности)

Испытание дисков опертых по контуру при различных температурах

Испытание образцов с кольцевым надрезом на растяжение с перекосом [34], [35], [36]

Испытание на раздирание плоских образцов с эксцентричным надрезом [37]

при которой трещина при ударе перерезает металл между остриями отверстий [44]

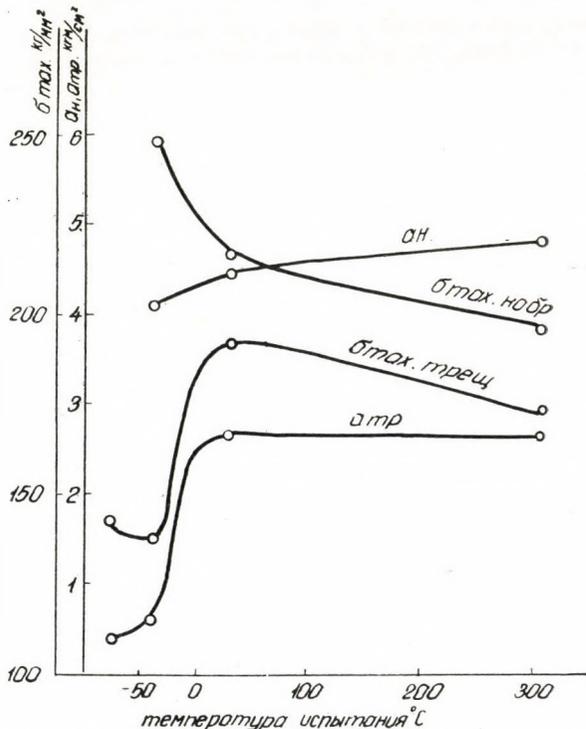
Растяжение плоских образцов с односторонним надрезом и создание температурного градиента по длине образца

Характеристиками служат напряжение растяжения и температура остановки хрупкой трещины, бегущей из наиболее охлажденного участка [45], [46]

Последующее испытание образца на растяжение [52], [55], [56].

идет по схеме одновременного отрыва, но всегда распространяется во времени от точки к точке тела.

Этим и объясняется, что оценка сопротивления отрыву при осевом растяжении гладких или надрезанных образцов, когда ввиду высокой одновременности разрушения время этого процесса близко к нулю, почти не нашла практического применения. Отсюда следует, что многочисленные попытки избежать при таких испытаниях эксцентриситета и осуществить строго осе-



Фиг. 3. Влияние температуры испытания на величину условного разрушающего напряжения σ_{\max} и удельную работу удара «а» образцов с трещиной

Сталь 25ХГСА после закалки и отпуска при 470°

Индекс «Н» образцы с надрезами

Индекс «ТР» — образцы с трещиной

вое растяжение не только не приближали, но, наоборот, удаляли условия испытаний от действительных хрупких разрушений, идущих всегда в неоднородном поле напряжений.

Отказ от измерения сопротивления отрыву (I группа методов в таб. 2) и оценка чувствительности к трещине (IV группа методов в той же таблице) означает переход от квазимгновенного акта разрушения (искусственно полученного при разрыве тщательно центрированного образца) к процессу раз-

Таблица 3

Стандартные свойства (σ_b , ψ , a_H) и чувствительность к трещине при ударном изгибе (a_{TP}) различных марок стали и алюминиевых сплавов. (Образцы продольные из катанных прутков)

Марка стали	Режим термической обработки	Стандартные свойства			a_{TP} кг/см ²	
		σ_b кг/мм ²	ψ %	a_H кг/см ²	миним.	средн.
30ХГСНА	Закалка с 890°, отпуск при 220° ...	162	54	8	1,5	1,70
„	Закалка с 890°, отпуск при 500°	127	56	4,6	0,77	0,86
„	Изотермическая закалка с 890° при 300°	152	52	9,3	2,3	2,52
40ХНМА	Закалка с 850°, отпуск при 200°	200	—	5,3	0,75	0,81
„	Закалка с 850°, отпуск при 500°	123	54	8,7	5,65	5,87
„	Изотермическая закалка с 850° при 350°	115	58	8,0	0,62	0,68
12Х5МА	Закалка с 950° в воде, отпуск при 200°	142	61	12,4	2,30	2,50*
„	Закалка с 950° в воде, отпуск при 540°	125	68	12,6	0,38	0,42**
Д16Т	Закалка с 500° в воде, естеств. старение	54	24	4,2	2,07	2,41
В95Т	Закалка с 475° в воде, старение при 140° 16 ч.	66	17	1,3	0,35	0,40
В96Т	Закалка с 475° в воде, старение при 135° 16 ч.	63	18	0,93	0,27	0,28

* Сварные сосуды, термически обработанные по этому режиму, выдержали давление близкое к расчетному.

** Сварные сосуды, термически обработанные по этому режиму, часто разрушались при давлении, доходившем до 0,3 от расчетного.

вития трещины в неоднородном поле напряжений (а часто и сопротивлений). Это соответствует переходу от статических к кинетическим представлениям.

В большинстве методов оценки чувствительности к надрезу (III группа методов) также возникает неоднородное поле напряжений, при котором разрушение развивается от точки к точке, но степень этой неоднородности гораздо меньшая, чем у образцов с трещиной.

В последнем случае возникает наибольшая локализация деформации и разрушения, с которой в значительной мере связана очень высокая чувствительность методов испытания образцов с трещиной (таб. 3).

Отсюда вытекает, что именно создание резкой исходной неоднородности напряженного и деформированного состояния позволяет наиболее чувствительно оценить кинетику выравнивания этой неоднородности при нагружении и сопоставить разные материалы по способности к этому выравниванию. Этим, в частности, объясняется высокая чувствительность метода (введенного в 1938 К. Маттаэсом [34]) испытания надрезанных образцов при растяжении с исходным перекосом.

Влияние многих факторов на прочность образцов с надрезом и с трещиной оказывается резко различным и даже противоположным.

Так, при понижении температуры испытания средняя прочность при статическом изгибе у образцов из стали типа хромансиль с надрезом $r = 1$ мм растет (после отпуска при 510°) или слегка падает (после отпуска при 200°), в то время как у образцов с трещиной прочность как после отпуска при 200° , так и после отпуска при 550° падает в 3—4 раза (фиг. 3) ввиду снижения локальной пластичности с понижением температуры.

Причины особого поведения образцов с исходными трещинами, вероятно заключаются в более высокой локальности и неравномерности, что ведет к росту относительной продолжительности стадии разрушения и увеличению скорости локальной деформации и разрушения.

Таким образом наличие исходной трещины еще дальше уводит от псевдоравномерности разрушения.

Поэтому после перехода от гладкого образца к надрезанному следующим шагом в сторону неравномерности является переход от надреза к трещине. Если при измерении «сопротивления отрыву» казалось, что оценивается одна из основных физических констант, то сведение чувствительности к трещине к каким-то «основным» свойствам пока не проведено и даже неизвестно возможно ли оно вообще. В то же время практическое значение оценки чувствительности к трещине совершенно бесспорно и обсуждению подлежит лишь выбор оптимальной методики.

Влияние двухосного растяжения и запаса упругой энергии

Ряд хрупких или лавинообразных разрушений крупных сооружений, описанных в литературе* (цельносварные суда типа Либерти в 1943—44 гг.; фюзеляжи самолетов «Комета»; резервуары и крупные трубопроводы, нагруженные внутренним давлением жидкости и особенно газа; корпуса ракет и др.) привлекли внимание к влиянию двухосности и запаса упругой энергии. Конечно эти два фактора могут рассматриваться и отдельно, однако в большинстве перечисленных случаев они действуют совместно.

Классические расчеты при двухосном растяжении приводят или к неизменяемости (по I теории) или даже к повышению прочности (по II теории прочности) при переходе от одноосного к двухосному растяжению.

Однако это верно лишь для касательного разрушения (среза) и для очень малых дефектов, что касается хрупких разрушений, то из опыта эксплуатации известны многочисленные случаи разрушения сосудов под действием внутреннего давления при нагрузках, значительно меньших расчетных.

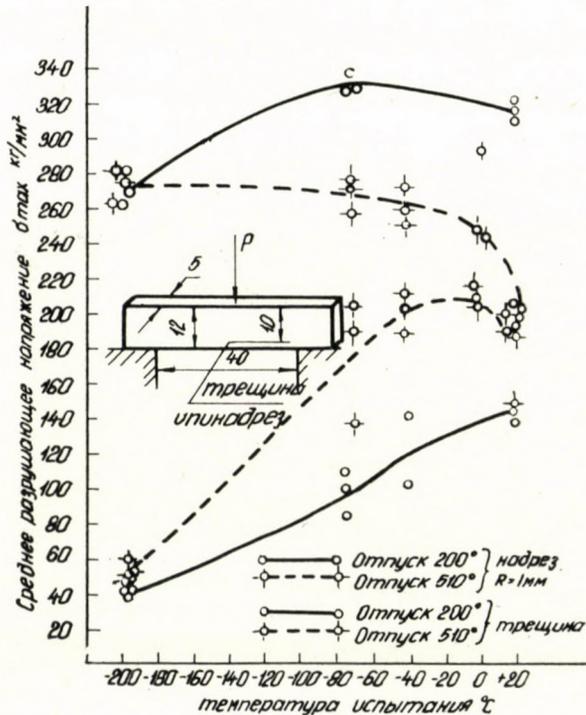
Если учесть, что последние обычно определяются на основе характеристик прочности при одноосном растяжении и при малых запасах упругой энергии, т. е. в более пластичном состоянии, то станет ясно, что для малопластичных состояний материала при больших запасах упругой энергии и

* Обзоры даны в [10], [11], [14], [58].

при критических размерах дефектов должна учитываться возможность снижения прочности при переходе от одноосного к двухосному растяжению. Это снижение может быть учтено либо статистическими теориями [59], [60], либо распространением теории Гриффитса на двухосное растяжение [61] (табл. 4).

Общим для всех названных теорий является учет исходной дефектности тела.

Это еще раз показывает непригодность для хрупкого состояния расчетов на разрушение, исходя из модели непрерывной среды (т. е. без учета ее



Фиг. 4. Зависимость условного разрушающего напряжения образцов с трещиной (две нижние кривые) и с надрезом $\zeta_H = 1\text{мм}$ (две верхние кривые) от температуры испытания. Сталь 30ХГСА. Закалка и отпуск при 200° (сплошные кривые). Закалка и отпуск при 510° (пунктирные кривые)

исходной дефектности) и на необходимость построения механики хрупкого разрушения на основе модели тела с исходными щелями (дефектами).

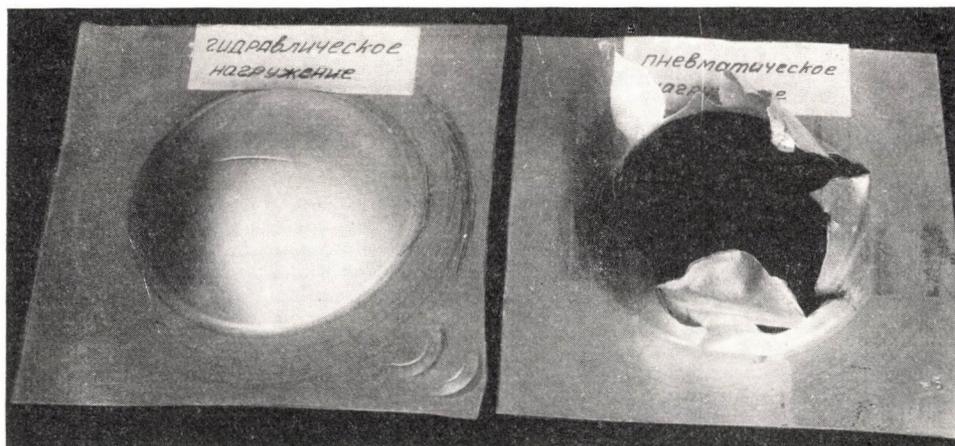
Сказанное является еще одним подтверждением принципиального различия закономерностей хрупкого (двухосность опасна) и вязкого разрушения (двухосность безопасна) [62].

Известно, что с ростом запаса упругой энергии, например, при увеличении объема жидкости, передающей давление [58], или при переходе от гидравлического к пневматическому источнику давления разрушение приобретает взрывной характер (фиг. 4).

Таблица 4

Соотношение хрупкой прочности при двух- и одноосном растяжении по разным теориям прочности

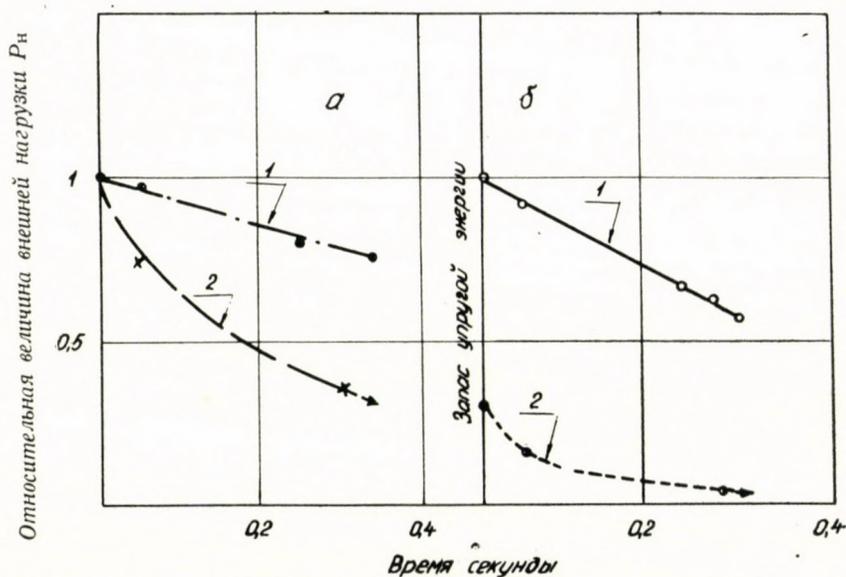
Отношение напряжений	По I теории прочности	По II теории прочности ($\mu = 0,3$)	По статистической теории (W. Weibull) (С. Д. Волков)	По теории Гриффитса ($\mu = 0,3$)
$\frac{\text{двухосн.}}{\text{одноосн.}}$	1	1,43	0,85	0,69



Фиг. 5. Плоские образцы из сплава АМЦМ после испытания на двухосное растяжение внутренним давлением:

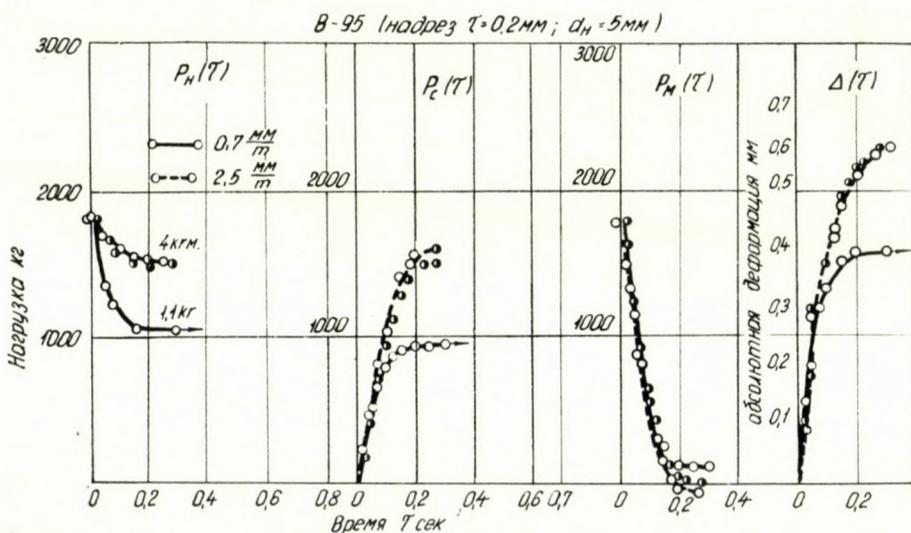
- а) гидравлическим
- б) пневматическим

Величина запаса упругой энергии определяет изменение нагружающего усилия во времени: чем больше запас упругой энергии, тем медленнее релаксирует это усилие (фиг. 5) и поэтому тем с большей перегрузкой и тем более лавинно заканчивается процесс разрушения (фиг. 6 и 7). Поэтому увеличение запаса упругой энергии особенно опасно при двухосном растяжении для материалов, чувствительных к влиянию дефектов (трещин).



Фиг. 6. Влияние податливости системы на характер изменения внешней нагрузки в процессе растяжения гладкого образца

- 1 — податливость 2,5 мм/т
- 2 — податливость 0,7 мм/т

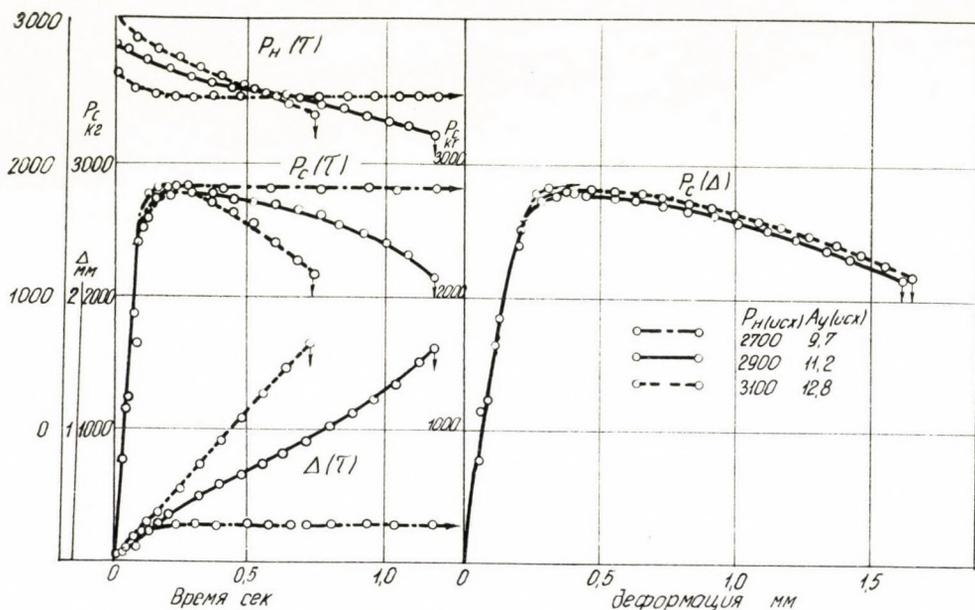


Фиг. 7. Влияние запаса упругой энергии на кинетику нагружения. Осевое растяжение образца из сплава В95 с кольцевым надрезом

- 1 — податливость 0,7 мм/т
- 2 — податливость 2,5 мм/т

Влияние дефектов на прочность

Помимо дефектов тонкой структуры, существующих во всяком реальном материале (что дало основание F. SEITZ'у назвать современную физику твердого тела *Physics of imperfections*, т. е. физикой несовершенств строения) и конструктивных концентраторов в большинстве реальных конструкций могут возникать дефекты и трещины как при изготовлении (в процессах



Фиг. 8. Влияние запаса упругой энергии на кинетику деформации. Испытание на растяжение гладких образцов в индукционной системе

Сталь X17H5M3 ($\sigma_B = 139 \text{ кг/мм}^2$)

- 1 — P_H исх. = 2700 кг
- 2 — P_H исх. = 2900 кг
- 3 — P_H исх. = 3100 кг

сварки, литья, обработки давлением, закалки, правки, травления), так и в условиях службы (повторные перегрузки, коррозионные воздействия).

Как показывает изучение методом сеток [63] деформированного состояния вблизи щелей, последние полностью передают сжимающие напряжения, вовсе не передают растягивающих и могут передавать (если щели очень тонки и по нормали к ним действует также сжатие) касательные напряжения (фиг. 8).

Отсюда вытекает важный вывод* о том, что после образования трещины симметрия цикла нагружения резко нарушается, так как образец с трещиной

* Сделанный Р. Д. Вагаповым применительно к усталостной прочности, но справедливый и в других случаях, в частности для ползучести при переменных напряжениях.

полностью сохраняет сопротивление сжимающему и сильно уменьшает сопротивление растягивающему напряжению.

Один и тот же дефект может оказаться весьма опасным в одних условиях и безвредным — в других.

При оценке опасности влияния дефектов (трещин) полезно различать [64]:

I. Детали без значительной конструктивной концентрации (поршневые пальцы, пружины, клапаны, перо турбинных лопаток и т. п.). В этом случае опасность дефекта зависит от его размеров и ориентировки относительно растягивающих напряжений, от чувствительности материала к дефекту и напряженностью зоны его расположения, например, для поршневых пальцев наиболее опасны продольные дефекты не внутренней поверхности; для лопаток — на входной и выходной кромках и на спинке.

II. Детали со значительной конструктивной концентрацией (коленчатые валы, шестерни, болты и т. п.). В этом случае особое значение получает удаленность дефекта от зоны концентрации.

Если эта удаленность достаточна, то дефект может практически не снижать прочности (например, продольные волосовины на теле болтов).

Следует учитывать, что кроме концентрации напряжений и локализации деформации влияние дефекта может проявляться в значительном повышении скорости деформирования и темпа энергоснабжения, т.е. в резком изменении кинетики процесса и в сокращении докритического состояния.

Сопоставление кинетики и разрушения при заданной нагрузке и при заданном перемещении

С уменьшением релаксации внешнего усилия скорость деформации возрастает (фиг. 7) [7], а полное время до разрушения уменьшается.

Это справедливо как для однократного, так и для повторного усталостного [65] и многократного статического [66] нагружения.

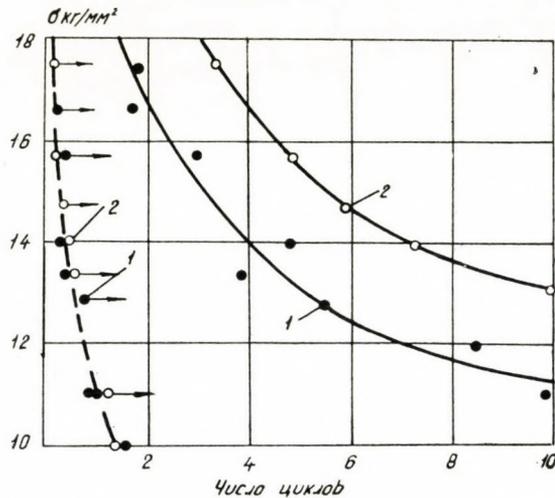
Так (фиг. 9), если число циклов до обнаружения начальной трещины было одинаковым для нагружения заданной величиной прогиба и заданным моментом, то число циклов на развитие трещин было значительно меньшим при заданном моменте, чем при заданной величине прогиба.

В последнем случае внешнее усилие (момент) релаксирует в процессе развития трещины. Этому соответствует большая средняя скорость развития трещины при заданном изгибающем моменте.

Для гладких образцов период до обнаружения начальной трещины обычно оказывался даже большим для нагружения заданным моментом, чем при заданном прогибе.

Это объясняется бóльшим упрочнением материала при заданном прогибе, так как при заданном моменте прогиб от цикла к циклу в стадии упрочнения уменьшается.

Известно, что в ряде усталостных испытательных машинах нагрузка после начала развития трещины не сохраняется постоянной, например, при испытании образцов на резонансных машинах после возникновения трещины приходится даже изменять режим, чтобы довести образец до разруше-



Фиг. 9. Кривые выносливости стали 45 по моменту обнаружения трещин (точки со стрелкой) и по окончательному разрушению (точки без стрелок) (Р. Д. Вагапов, Я. Б. Фридман)

1. — При заданной амплитуде изгибающего момента
2. — при заданной амплитуде прогиба

ния, что приводит к значительной неопределенности условий полного разрушения.

Поэтому желательно проводить при усталостных испытаниях запись изменения нагрузки и перемещения в процессе испытания (что осуществлено лишь в некоторых современных испытательных установках). Это позволит разграничить характеристики начального разрушения (зависящие г. о. от состояния поверхностного слоя: наличия в нем дефектов, остаточных напряжений и т. п.) от характеристик полного разрушения (зависящих в основном от состояния внутренних зон тела).

Принцип наименьшей работы разрушения

Успешное применение вариационных принципов в упругой и пластической областях естественно наводит на мысль о подобных же возможностях и для изучения разрушения. Хотя для области разрушения возникают допол-

нительные трудности (высокая «структурная чувствительность» процесса разрушения, определяющаяся его высокой локальностью; значительные изменения напряженного состояния в процессе развития трещины; и др.) можно в качестве первого приближения принять, что реализуемая в действительности трещина требует наименьшей затраты работы [67].

Если A работа образования трещины длиной l , то $A = \int_l F \cdot dl$ и тогда

$$\delta \int_l F dl = 0, \quad (1)$$

где F — некоторая функция, зависящая от напряженного состояния в окрестности элемента длины трещины dl .

В зависимости от принятой теории прочности функция F может быть пропорциональна наибольшему нормальному (I теория), касательным напряжениям (III теория) и т. д.

Этим учитываются свойства материала (например, разрушение путем отрыва для хрупких и путем среза для пластичных материалов).

Уравнение (1) определяет траектории трещины, как экстремали функционала работы, которые являются обобщенными геодезическими линиями на поверхности с метрикой, определенной соотношением

$$dS = Fdl.$$

С изменением напряженного состояния изменяется метрика пространства, а, следовательно, и вид траектории трещины.

Из разных семейств экстремалей, определенных из (1) осуществляется то, которое наиболее быстро снижает величину напряжений (деформаций) и приводит тело к равновесию. Расчеты для кручения конуса (фиг. 10) плоскости с круговым отверстием и др. случаев дали траектории трещин, удовлетворительно подтверждающиеся опытами.

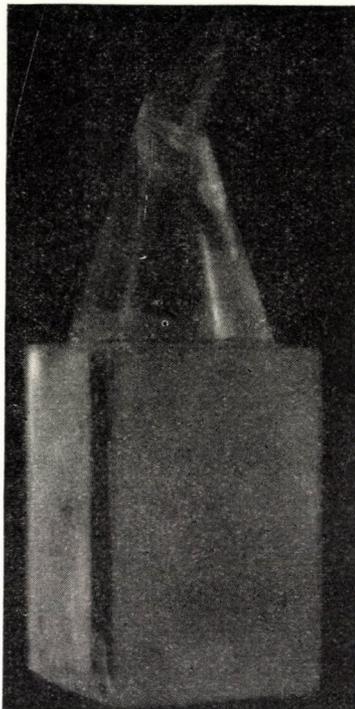
В частном случае однородного на поверхности тела напряженного состояния $F = \text{const}$ и трещины совпадают с обычными геодезическими на поверхности.

а) Для цилиндрической поверхности — винтовые линии, окружности и прямые образующие. Как хорошо известно, по всем этим линиям может происходить разрушение путем отрыва и путем среза.

б) В шаре трещины обычно располагаются по дугам больших кругов (фиг. 11) [68].

в) На плоской поверхности при однородном напряженном состоянии геодезические линии — прямые.

В этом случае угол между сходящимися трещинами должен составлять 90° (или 180°), либо 120° , что было ранее получено из условия равномерного



Фиг. 10. Хрупкое разрушение конического тела по геодезическим линиям



Фиг. 11. Хрупкое разрушение шарообразного тела по геодезическим линиям (дугам больших кругов). По З. Васютинскому

по поверхности снижения напряжений и что очень часто наблюдается, например, при растрескивании поверхности земли, фаянса, бетона и т. д. [68].

Можно надеяться, что предлагаемый принцип позволит определять наиболее выгодные размеры и формы конструкций, исходя из требования максимума длины трещины (наибольшего пути разрушения).

Конечно, при этом желательно учесть также нестационарность процесса и изменение напряженного состояния в процессе развития трещины.

Кинетическая трактовка повышения прочности изделий

Необходимо подчеркнуть различное развитие во времени упругих и неупругих (диссипативных) процессов.

Упругие волны, распространяясь со скоростью звука и отражаясь от свободной поверхности, с изменением знака быстро затухают.

Поэтому кинетика более медленных процессов (идущих минутами, часами и более длительно) определяется неупругими (диссипативными) процессами. При статическом нагружении, нагружающая сила P_H и сила сопротивления образца P_c равны, т. е. $P_H = P_c$.

Полагая, что в каждом реальном материале в той или иной степени имеет место параллельная работа структурных элементов в упругом и в неупругом состояниях (фиг. 12), получим, что

$$P_H = P_c = P_y + P_d$$

где: P_H — внешнее усилие;

P_y — упругое сопротивление;

P_d — диссипативное (неупругое) сопротивление.

P_d может, в свою очередь, состоять как из членов, связанных со скоростью деформирования (вязкое сопротивление), так и связанных с величиной остаточной деформации (пластическое сопротивление).

Или после дифференцирования

$$\dot{P}_H = \dot{P}_y + \dot{P}_d.$$

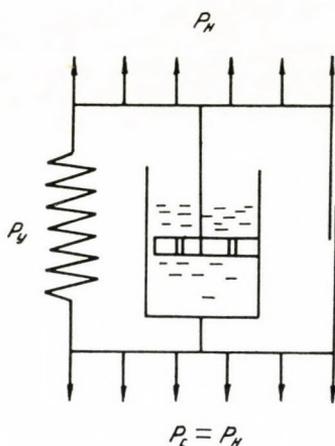
С ростом «перегрузки» над пределом упругости, которая может быть оценена разностью $P_H - P_y = P_d$ растет доля неупругого сопротивления и увеличивается скорость диссипативных процессов (т. е. временная зависимость становится более резкой).

По Прагеру [69] критическая нагрузка для идеально-пластических тел определяется из условия, что скорость совершения работы этой нагрузкой превышает скорость диссипации внутренней энергии, интегрированную по всему объему тела.

В таком случае различаются только два состояния: докритическое и критическое [69].

Нами предложено [6], [8], [10] различать докритическое, критическое и закритическое состояния (см. табл. 1), подобно тому как это практикуется в теории устойчивости (Post-buckling или after-buckling behavior).

При наличии временной зависимости, которая при прочих равных усло-



Фиг. 12. Схематическое изображение упругих P_y и диссипативных P_g сил, уравнивающих внешнее усилие P_H

виях проявляется тем в бóльшей степени, чем бóльшая доля нагрузки воспринимается диссипативным сопротивлением, т. е. чем бóльше отношение $\frac{P_d}{P_y}$; повышением прочности с одинаковым основанием можно считать:

1. увеличение несущей способности при том же времени нагружения;
2. увеличение ресурса по времени при той же несущей способности.

В предельном случае, когда $\frac{P_d}{P_y} \rightarrow 0$ и временная зависимость отсутствует (без учета физико-химических процессов) кинетический подход становится ненужным.

В этом случае — чисто упругого сопротивления — могут играть существенную роль факторы, мало существенные для пластического состояния, например, неучитываемые расчетом и не выравшиваемые местной пластической деформацией локальные перенапряжения.

Именно с этим связана плохая «приспособляемость к нагрузкам» и малая надежность изделий из очень хрупких материалов (керамики, закаленных и низкоуглеродистых сталей с повышенным содержанием углерода и т. п.).

А) Упрочнение за счет внутренних фактора (повышение P_y)

Из сказанного вытекает, что для уменьшения временной зависимости прочности (а это один из основных путей упрочнения изделий при длительном нагружении) следует повышать предел упругого сопротивления P_y как исходный (например, путем измельчения структуры, дисперсионного твердения и т. п.), так и *измененный* в результате нагружения (путем создания материалов, способных в процессе деформирования повышать величину P_y за счет, например, старения, распада твердого раствора, возникновения благоприятной текстуры и др.).

Если $P_n \leq P_y$, и в среднем и локально, то временная зависимость должна отсутствовать.

Б) Упрочнение за счет внешних факторов (понижение P_n со временем)

С уменьшением запаса упругой энергии возрастает темп убывания внешней нагрузки в процессе деформирования (см. фиг. 4а).

Следовательно, замедляются или вовсе останавливаются процессы пластической деформации и разрушения, что в кинетическом смысле и означает повышение прочности.

Выше речь шла о статическо-определимых случаях, в которых в процессе деформирования не происходит ни перераспределения напряжений (при внутренней статической неопределимости, например, при наличии надреза или изгиба), ни перераспределения сил (при внешней статической неопределимости, например, в ферменных конструкциях).

При наличии внешней или внутренней статической неопределимости упрочнение большей частью достигается стимулированием благоприятного перераспределения (в сторону выравнивания) напряжений и сил. В этих, по-видимому, наиболее многочисленных случаях повышение деформируемости (прежде всего повышение пластичности) обычно играет основную роль, упрочняя изделия, несмотря на понижение P_y .

Таким образом, высокая пластичность может повышать конструктивную прочность; если пластическая деформация изменяет:

- а) силовое состояние (распределение нагрузок) или
- б) напряженное состояние (распределение напряжений).

Если же нет ни того, ни другого, то макропластичность на прочность не влияет, например, при осевом растяжении стержня подвешенным грузом.

В тех многочисленных случаях, когда повышение пластичности (переход к материалам с более низкими пределами текучести) сопровождается снижением предела упругого сопротивления P_y — суммарный эффект упрочнения или разупрочнения будет зависеть от того что перевесит: упрочнение

Таблица 5
Факторы, способствующие торможению деформации и разрушения

Торможение деформации и разрушения за счет уменьшения внешнего энерго-снабжения (уменьшение R_D в процессе нагружения)	Торможение разрушения за счет увеличения энергопоглощения (уменьшение R_D)		Торможение общей деформации за счет повышения R_y и уменьшения R_d	
	внешние факторы	внутренние факторы (структура и свойства материала, повышающие локальную пластичность)	внешние факторы	внутренние факторы
1	2	3	4	5
<p>Уменьшение упругой энергии системы для усиления релаксации нагрузки в процессе деформации или разрушения:</p> <p>а) повышение модуля упругости деформируемого или разрушаемого материала;</p> <p>Переход от пневматического к гидравлическому нагружению</p> <p>б) уменьшение объема, являющегося источником упругой энергии (объем сосудов под давлением, сечение и длина напряженных элементов конструкций);</p> <p>в) уменьшение многослойности сбалчиваемых пакетов и повышение плотности поверхностей контакта для меньшего пружинения</p> <p>Уменьшение степени перегрузки и продолжительности ее действия</p> <p>Уменьшение величины среднего расчетного напряжения и длительности действия внешних нагрузок</p>	<p>Повышение температуры эксплуатации над критической температурой хладноломкости (определяется по уменьшению кристалличности излома)</p> <p>Уменьшение степени объемности растягивающих напряжений</p> <p>Уменьшение неоднородности полей напряжений и деформации</p> <p>Устранение и смягчение вершин надразов, трещин, резких переходов сечения, увеличение чистоты обработки поверхности)</p> <p>Применение статически неопределимых систем, элементы которых могут пластически деформироваться</p>	<p>Создание поверхностных или внутренних слоев повышенной пластичности или устранения хрупких поверхностных слоев</p> <p>Уменьшение степени неоднородности структуры или переход от бейнита к сорбиту при той же твердости</p> <p>Применение гомогенных твердых растворов (например, аустенита)</p> <p>Отпуск вне «зоны хрупкого отпуска» и увеличение скорости охлаждения после отпуска в интервале отпускной хрупкости</p> <p>Уменьшение твердости (предела прочности) путем повышения температуры отпуска вне интервала хрупкого отпуска</p> <p>Совмещение горячей механической деформации и нагрева под закалку[5]</p>	<p>Понижение температуры эксплуатации</p> <p>Увеличение степени объемности растягивающих напряжений</p> <p>Увеличение неоднородности полей напряжений и деформаций</p> <p>Увеличение жесткости конструкции путем местных усилений, ребер жесткости и др</p>	<p>Отход от гомогенного твердого раствора или чистых металлов и переход к легированию, вызывающему упрочнение путем:</p> <p>а) дисперсионного твердения;</p> <p>б) создания твердых растворов типа мартенсита;</p> <p>в) совмещения горячей механической деформации и охлаждения при закалке</p>

от выравнивания локальных напряжений вследствие повышения пластичности или уменьшение прочности ввиду понижения P_y .

Чаще в таких случаях перевешивает эффект упрочнения. Этим, по-видимому, объясняется наличие оптимумов величины σ_B , при которых достигается наибольшая конструктивная прочность. При меньшем σ_B слишком низко P_y , при большем — слишком мала пластичность.

Конечно, выравниванию напряжений может способствовать не только пластическая, но и упругая деформируемость (что используется, например, в статически неопределимых рамах или в так называемых упругих болтах).

При кинетическом подходе повышение прочности можно трактовать как увеличение одновременности деформации и разрушения.

Очень высокая прочность тонких нитей вероятно может быть объяснена, наряду с другими причинами повышением степени одновременности разрушения с уменьшением абсолютной величины поперечного сечения.

Вышеизложенные примеры, конечно, далеко не исчерпывают возможностей и перспектив применения кинетических представлений к вопросам прочности.

Так, например, наряду с обнаружением трещин, что составляет основную задачу современной дефектоскопии, необходимо изучать кинетику развития дефектов во времени как в процессе нагружения, так и при вылеживании.

Это может проводиться путем периодических «профилактических» осмотров (I). Для статистических характеристик (спектров нагрузки и свойств) не менее важен учет их изменения во времени.

Обобщение принципа равнопрочности

Одним из основных принципов конструирования является всемерное уменьшение неравномерности напряжений по опасным сечениям (смягчение концентрации напряжений, уменьшение доли изгиба при внецентренном растяжении и др.).

Можно показать [70], что это стремление является частным случаем принципа равнопрочности, обобщенного на неоднородные материалы.

Примем, что нарушение прочности определяется совпадением значения «поля напряжений σ_n » и «поля сопротивлений σ_c » в одной или нескольких точках, где σ_n и σ_c — обобщенные соответственно напряжение и сопротивление, выраженные через приведенные напряжения по одной из теорий прочности.

Тогда, например, для изгиба коэффициент использования прочности

$$\theta_n = \frac{M_u}{(M_u)_{\max}}, \quad (1)$$

где числитель — прочность данного изделия;

знаменатель — максимально достижимая прочность путем наибольшего нагружения и наибольшего удаления от нейтральной оси каждого элемента сечения.

Заменяя в (1) числитель на $\int_F dF \sigma_H \cdot y$ и знаменатель на $\int_F dF \sigma_c y_{\max}$ и умножая числитель и знаменатель на $\int_F dF \sigma_c y$, получим:

$$\Theta_n = \frac{\int_F dF \sigma_H y \int_F dF \sigma_c y}{\int_F dF \sigma_c y \int_F dF \sigma_H y_{\max}} = \Theta_p \cdot \Theta_\varphi. \quad (2)$$

Здесь коэффициент Θ_p оценивает степень совпадения эпюр σ_H и σ_c , а коэффициент Θ_φ — степень совершенства формы поперечного сечения (в данном случае при изгибе).

В частном случае тел постоянного сопротивления (которые обычно и изучаются в сопротивлении материалов и математической теории пластичности) $\sigma_c = \text{const}$ и вместо (1) получим:

$$\begin{aligned} \Theta_n &= \frac{M_u}{(M_u)_{\max}} = \frac{[(\sigma_H)_{\max} I_{H \cdot a}] : y_{\max}}{\sigma_c \cdot I_{\max} F} = \\ &= \frac{\sigma_c \cdot F \cdot i_{H \cdot O}^2}{\sigma_c y_{\max}^2 F} = \left(\frac{i_{H \cdot O}}{y_{\max}} \right)^2 = \frac{W_{H \cdot O}}{F \cdot y_{\max}} \end{aligned} \quad (3)$$

из (1), (2) и (3) имеем

$$M_u = \Theta_p \Theta_\varphi y_{\max} \frac{\int_F \sigma_c dF}{F} \cdot F = \Theta_p \cdot \Theta_\varphi y_{\max} \cdot \sigma_{cp} \cdot F. \quad (4)$$

В (4) первые два множителя оценивают равнопрочность по совпадению эпюр напряжений и сопротивлений (Θ_p) и по степени совершенства формы поперечного сечения (Θ_φ), величина y_{\max} характеризует удвоенное «плечо»;

$$\sigma_{cp} = \frac{\int_F \sigma_c dF}{F}$$

оценивает среднее сопротивление.

Подсчеты величин Θ_p и Θ_φ показывают, что чем совершеннее форма тела (чем выше Θ_φ), тем меньше влияет несовпадение эпюр σ_H и σ_c .

Поэтому выгодны не сама по себе равномерность полей σ_H и σ_c , как иногда полагают, но только степень их совпадения. Имеются случаи, когда

переход к более равномерным полям σ_n и σ_c понижает конструктивную прочность ввиду снижения величины Θ_p .

Подобный же подход был развит [72] и для анизотропных материалов, путем сопоставления полярных эпюр напряжения и сопротивления в каждом элементе тела.

Для анизотропных материалов было показано [73], что основное значение имеет ориентация волокон не «по конфигурации изделия», как часто принимают при обработке давлением, а взаимная ориентация волокон и траекторий главных напряжений, что давно известно в теории железобетона.

При изменении во времени полей напряжений и сопротивлений равнопрочность должна оцениваться по кинетике изменения соответствия этих полей. Основы теории для неоднородных упруго-пластических сред даны в [74].

Выводы

1. Особенности современных аппаратов и конструкций (высокая напряженность, неравномерность нагружения по зонам и по времени, повышение и неравномерность рабочих температур, применение новых материалов со сложной и неравновесной структурой) приводят к существенным изменениям во времени как напряженного состояния, так и сопротивления деформации и разрушению. Поэтому во многих вопросах прочности необходимо дополнить статический подход (напряжение и сопротивление не меняются со временем) — кинетическим.

2. Для понимания и управления кинетикой недостаточно изучения времени до разрушения, но необходимо знание закономерностей изменения скоростей и ускорений пластической деформации и разрушения в зависимости от различных внешних и внутренних факторов.

В общем случае при развитии пластической деформации и разрушения можно различать четыре кинетических периода:

1. Инкубационный (начально-ускоренный).
2. Торможения.
3. Стационарный.

4. Заключительно-ускоренный, иногда имеющий лавинный характер. Хотя в данной работе изучались макроскопические закономерности, они могут быть полезны и для понимания более локальных процессов.

3. Предложено различать три группы механических характеристик: *докритические* (зависят в основном от свойств материала и определяются без резкого нарушения равновесия);

критические и закритические (последние ввиду наличия неравновесного состояния сильно зависят от свойств не только материала, но и нагружающей системы).

С ростом неоднородности нагружения и неоднородности сопротивления относительная длительность стадии разрушения увеличивается (достигая в условиях службы более 90% от общей продолжительности жизни); при этом значение закритических характеристик возрастает.

Между тем, большинство определяемых в настоящее время механических свойств связано только с до- и с критическим состоянием. Закритическое состояние оценивается немногими испытаниями, например, по анализу заключительных зон излома с определением «вязкости в изломе»; по характеру ниспадающей ветви диаграммы изгиба.

Важной задачей механических испытаний является оценка закритического поведения материалов и конструкций с применением осциллографирования.

4. С ростом запаса упругой энергии нагружающей системы уменьшается релаксация нагрузки в процессе деформации и разрушения и потому увеличивается скорость этих процессов, иногда приближающихся по кинетике к взрыву. Изложены результаты испытаний с регулируемым исходным запасом упругой энергии и их анализ.

5. Существующие методы оценки склонности к хрупкому разрушению могут быть разделены на четыре группы:

1. Методы оценки *сопротивления отрыву* при однородном или осесимметричном растяжении гладких или имеющих круговой надрез образцов;

2. Оценка *склонности к хладноломкости*, обычно при снижении температуры испытания;

3. Оценка *чувствительности к надрезу* обычно при наличии изгиба.

4. Оценка *чувствительности к трещине*. Последняя группа методов, в свою очередь, может быть подразделена на три:

а) изучение развития возникшей в процессе нагружения трещины в макрооднородном материале, в частности количественная оценка «вязкости в изломе»;

б) изучение развития трещины из хрупкого слоя, например, нанесенного наплавкой;

в) испытания образцов с исходной искусственно созданной трещиной.

Схема разрушения путем отрыва при растяжении соответствует бесконечной скорости развития трещины, поэтому методы определения сопротивления отрыву, в которых стремятся достичь близкого к одновременному разрушению по кольцевым сечениям, не позволяют судить о способности материала к торможению трещины в условиях службы (обычно при резкой неоднородности механического состояния в разных зонах тела).

Способность к торможению разрушения наиболее тесно связана с чувствительностью к трещине и потому оценивается IV группой методов. Наличие исходных трещин сокращает докритическое состояние и потому более чувствительно оценивает закритическое поведение.

Создание резкой исходной неоднородности напряженного и деформированного состояния позволяет оценить кинетику выравнивания этой неоднородности при нагружении.

6. Распространение минимальных и энергетических принципов на разрушение, как процесс, приводящий к скорейшему приближению к равновесию путем «трещинной релаксации», приводит к условиям расположения трещин по геодезическим линиям на поверхности тела.

7. Управление кинетикой деформации и разрушения может осуществляться путем:

а) изменения *характера нагружения во времени*, например, при переходе от условий заданной (нерелаксирующей) нагрузки к заданному перемещению (и релаксирующей нагрузке) относительная продолжительность стадии разрушения резко возрастает.

Другим примером является изменение напряженности во времени вследствие выхода вершины трещины из зоны концентрации (нераспространяющаяся трещина);

б) изменения *исходной формы и размеров тела* (или системы тел) приводящих к изменению кинетики процесса, например, с ростом степени статической неопределимости увеличивается относительная длительность разрушения системы;

в) изменения *исходных свойств и структуры материала*, приводящих к изменению кинетики процесса, например, при наличии сильного упрочнения при распаде твердых растворов при нагружении, несмотря на сохранение постоянной нагрузки, а иногда даже при ее возрастании, пластическая деформация и разрушение могут замедлиться и даже остановиться вследствие роста упругого сопротивления от упрочнения.

8. Повышение прочности с учетом кинетики может быть достигнуто *торможением* (замедлением или полной остановкой) пластической *деформации и разрушения*. Это торможение при данной нагрузке может осуществляться:

а) путем повышения предела упругого сопротивления (в статически-определимых случаях);

б) путем повышения пластичности для уменьшения неоднородности распределения сил и напряжений (в статически-неопределимых системах).

В этом более общем случае упрочнение — это повышение степени одновременности в сопротивлении разных зон. При наличии временной зависимости 1) прочность и 2) длительность жизни взаимно связаны и потому упрочнением можно считать возрастание одного из этих факторов при заданной величине другого.

9. Равнопрочность с учетом кинетики заключается не только в возможно близком соответствии эпюр напряжений и сопротивлением, но и в сохранении этого соответствия при изменении обоих эпюр со временем.

10. Задача дефектоскопии с учетом кинетики заключается не только в обнаружении трещин и других дефектов, но и в изучении тенденции их развития в процессе нагружения и вылеживания. Поэтому недопустимость и опасность дефекта определяется этой тенденцией, в частности характером ускорения дефекта, в большей мере, чем его исходными размерами.

11. Необходимо расширение применения статистических характеристик нагружения (спектры нагрузок) и сопротивления (спектры свойств) с учетом их кинетики.

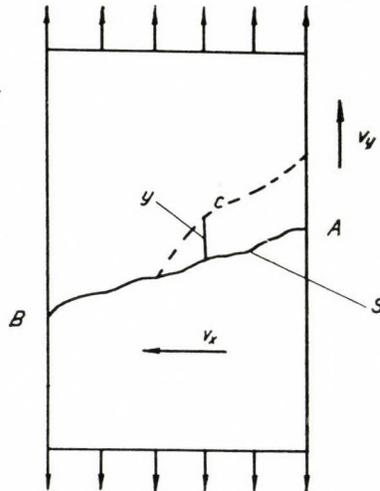
Приложение

Одновременное разрушение по сечению как предельный случай бесконечной скорости развития трещины.

Пусть в равномерно растягиваемой полосе (фиг. 13) в точке A возникает и начинает двигаться к точке B трещина с некоторой скоростью V_x .

Одновременно точки линии AB перемещаются параллельно оси Y со скоростью V_y .

В общем случае и V_x и V_y — *varia*, а траектория вершины трещины — некоторая кривая. Если уравнение движения вершины трещины по кривой



Фиг. 13

$AB s = f(t)$, то обратная зависимость запишется как $t = \psi(s)$, где t — время; s — расстояние от точки A .

В начальный момент $t = 0$ при $s = 0$.

Путь некоторой точки C к моменту времени $t > \psi(s)$ зададим как функцию от времени, в течение которого точка C участвует в движении:

$$[t - \psi(s)] \text{ или } y = \varphi[t - \psi(s)] \quad (1)$$

Начало отсчета величин Y от линии AB Y_p -ие (1) имеет смысл при

$$[t - \psi(s)] \geq 0$$

причем $\varphi(0) = 0$

1. При $S = \text{const}$ y -ие (1) характеризует движение точки, заданной величиной s вдоль оси y .

2. При $y = \text{const}$ y -ие (1) характеризует контур трещины в момент t .

Условие одновременного раскрытия трещины требует, чтобы при произвольном $t = \text{const}$

$$y = \varphi[t - \psi(s)] = \text{const} \quad (2)$$

Дифференцируя (2) по s , получим:

$$\frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{d\psi}{ds} = 0; \quad \text{здесь } \frac{d\varphi}{dy} = \frac{dy}{dt} = v_y \neq 0 \quad (3)$$

(в противном случае трещина бы отсутствовала)

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{v_x} = 0 \quad (4)$$

из (4) имеем $v_x = \infty$ как условие одновременного раскрытия трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. SPAULDING: Metal Fatigue, New York 1959, p 325—354.
2. Е. М. Шевандин: Жур. Техн. Физики, XII, 1946, вып 12.
3. N. KAHN and E. IMBEMBO: The Weld Journ 1949, 28 N° 4, p. 1695.
4. Б. А. Дроздовский: Зав. лаб., 1946 № 4—5, стр. 489.
5. J. C. SLATER, Fracturing of Metals, Cleveland Ohio, 1948, p. 68.
6. Я. Б. Фридман, Т. К. Зилова, Б. А. Дроздовский, Н. И. Петрухина: Зав. лаб. 1960, № 11.
7. Т. К. Зилова, Н. И. Петрухина, Я. Б. Фридман: Д. А. Н. СССР, 1959, том 124 № 6.
8. Я. Б. Фридман, Т. А. Гордеева, А. М. Зайцев: Строение и анализ изломов металлов, Машгиз 1960.
9. R. CAZAUD: Fatigue des Metaux, End 4, Dunod 1960
10. Б. А. Дроздовский, Я. Б. Фридман: Чувствительность высокопрочных сталей к трещине и хрупкому разрушению, Доклад на XIV Международном конгрессе по сварке, США, апрель 1961 г.
11. JAROSLAV NEMEC: Tuhost a pevnost ocelových časti, Praha 1961.
12. E. OROWAN: Fracture, 1959, Wiley and Sans.
13. Т. К. Зилова, Я. Б. Фридман: Зав. лаб. 3, 1951.
14. Б. А. Дроздовский, Я. Б. Фридман: Влияние трещин на механические свойства конструкционных сталей. Metallurgizdat 1960.
15. G. WELLNER: Metallwirtschaft, Tom 14, 1935, 1043.
16. A. JOFFE M. KIRPITSCHOVA и. М. LEVITSKAJA: Zeitschr. für Physik, 1924, Nr 22, S. 286.
17. Н. Н. Давиденков: Динамические испытания металлов, ОНТИ, 1936, 2 изд.
18. W. KUNTZE: Mitt. Deutsch. Materialprüfungsanstalten 1932, Nr. 2.
19. M. GENSAMER: Metal Progress, 1940, 37 No. 6 p. 59.

20. В. В. Смирнов: Заводская лаборатория, **14** № 3, 1948, стр. 326.
21. Г. В. Ужик: Сопротивление отрыву и прочность металлов. Из-во АН СССР, 1950 г.
22. Ю. И. Лихачев: Заводская лаборатория, **22**, № 10, 1956, стр. 1209.
23. А. Л. Немчинский: Заводская лаб., **19**, № 11, 1952, стр. 138.
24. N. BREDS and H. SCHWARTZVART: Weld. Journ., 1956, No. 12.
25. J. REINHART: Journ. Appl. Phys., 1951, **22**, No. 5
26. Я. Б. Фридман и И. М. Ройтман: Заводская лаб., 1948, **14**, № 10, стр. 1238.
27. G. CHARPY: Bull. Soc. Ingen. Civ., **6**, 1901, 213
28. Я. М. Потак: Хрупкие разрушения стали и стальных деталей, Оборонгиз, 1955.
29. Я. Б. Фридман, А. А. Бать, Т. А. Володина: Заводская лаб., 1960, № 6, № 8, стр. 966.
30. STRIBECK: V. D. J., 1915, **59**, ps. 57.
31. M. MOSER: St. und Eis., **42**, 1922, 90; *ibid.* 43, 1923, 935.
32. R. WECK; Fransact. Inst. of Weld., 1950, **13**, No. 2.
33. E. P. KLIER, F. G. WAGNER a. M. GENSAMER: Welding Journal, 1948, **2**, **27**, No. 2, p. 7 S.
34. K. MATTHAES: Luftfahrtforschung, 1938, **27**, No. 2, S. 28.
35. G. SACHS, J. Z. EBERT a. W. F. BROWN: Metals Technology, 1946, No. 8, p. 2110.
36. C. SACHS, J. D. LUBAHM, L.—J. EBERT a. E. Z. AUL: Transact of ASM, 1945, **34**, p. 517.
37. A. B. BAGSAR: Welding Journal, 1948, **27**, No. 3 p. 97S and 1949, **28** No. 10, p. 484S.
38. А. М. Драгомиров: 1917, ст. (17).
39. J. Z. STERN, N. A. KAHM a. H. NAGLER: Welding Journal **36**, 1957, No. 5, p. 2265.
40. H. M. SCHNADT: Nouvelles methods d'essai et d'étude des Metaux et leur application aux construction soudées 1944, Brussels
41. P. P. PUZAK, E. W. ESCHVACHER, W. S. PELLINI, Welding Journal, 1952, **31**, No. 12, p. 561 S.
42. P. P. PUZAK, M. E. SCHUSTER a. W. S. PELLINI: Welding Journal, 1954, **33**, p. 481 S.
43. T. NOREN: Den Nominella klerninshöllfasthetm hes Stal., Jernkontozets Annaler, 1955, **139**, No. 3.
44. А. Е. Аснис: Заводская лаб., 1947, **13**, № 9, стр. 1100.
45. T. S. ROBERTSON: Engineering, 1951, **172**, p. 445.
46. T. S. ROBERTSON: Journ. Iron and Steel Inst., 1953, No 12, p. 36.
47. Н. Н. Давиденков и Е. М. Шевандин: ЖТФ, 1931, 1 вып. 2/3, стр. 212.
48. F. OSHIBA: The Science Rep. Tohoku Imp. Univ. 1934, No. 4, 589.
49. J. M. LESSELS a. H. E. JACQUES: Welding Journal, 1948, No. 3, p. 132S
50. Б. А. Дроздовский, Я. Б. Фридман: Заводская лаб., 1955, № 5, стр. 529, 1959, № 3, стр. 320.
51. H. E. ROMINE: Welding Journal, 1955, **34**, No. 8, p. 369S.
52. J. E. SZAWLEY and C. D. BEACHEM: NRZ Report 5127, p. 9, 1958.
53. W. SOETE, HOUDREMONT: Lecture Mechanical Aspects of brittle fracture. J. J. W. Liege, 1960.
54. D. K. FELBECK a. E. OROWAN: Welding Journal, 1955, **34**, No. II., p. 570S.
55. H. BERNSTEIN: Metal Progress, **V78**, N2, 1960, p. 79.
56. J. R. LOW and others: ASTM Bulletin, N 243, 1960 p. 29, N244, 1960 p. 18.
57. W. SPÄTE: Physik der mechanischen Werkstoffprüfung Berlin 1938.
58. A. NÁDAI: The Theory of flow and rupture of solids Vol I, 1950.
59. W. Weibull: Proc. Roy. Swed. Inst. Eng. Res. 1939 N151
60. С. Д. Волков: Статистическая теория прочности, Машгиз, 1960.
61. Е. М. Морозов, Я. Б. Фридман: Научные доклады высшей школы 1958, № 2, стр. 29.
62. Я. Б. Фридман: Журнал Техн. 1941, I. II, том **XI**. 1945, 1946 г.
63. Т. К. Зилова: Физика металлов и металловедение № 1, вып. 3, 1955 г.
64. Т. К. Зилова, Н. И. Демина, Я. Б. Фридман: Сборник «Дефектоскопия металлов» Оборонгиз 1959 г.
65. Р. Д. Вагаров и Я. Б. Фридман: Заводская лаб., 1961 г., № 2, стр. 183.
66. И. М. Ройтман и Я. Б. Фридман: Заводская лаб., 1947 г., № 4
67. Е. М. Морозов и Я. Б. Фридман: Д. А. Н. СССР том **139** № 1, 1961 г.
68. Z. WASINTYNSKI: О форме поверхностных трещин, Rozprawy Inzynierskie, X Warszawa 1954 Polsku.
69. W. PRAGER: Proc. Inst. of Mech. Eng. 1955, p. 41.
70. Я. Б. Фридман и Н. Д. Соболев: Доклады А. Н. СССР, 1955 том **105**, № 6.
71. A. FREUDENTHAL: Reactor Handbook by Bonilla, CSA 1957.
72. Я. Б. Фридман и Н. Д. Соболев: Доклады А. Н. СССР 1956, том **106**, № 4.
73. В. К. Григорович, Н. Д. Соболев, Л. Б. Фридман, Доклады А. Н. СССР, 1952, том **86**, № 4.
74. W. OLSZAK: Arch. Mech. stos, 1954, 6.

EXPERIMENTAL STUDIES INTO THE BEHAVIOUR OF FATIGUE CRACKS

N. E. FROST, J. HOLDEN and C. E. PHILLIPS
 NATIONAL ENGINEERING LABORATORY, MATERIALS GROUP,
 GLASGOW, SCOTLAND

1. Introduction

There are many reasons for believing that a detailed study of the growth of fatigue cracks will lead to a better understanding of the behaviour of both specimens subjected to the various types of laboratory tests and components subjected to dynamic loads in service. For example, metallographic examination of the surface of suitably prepared plain fatigue specimens shows that markings form early during the course of the test; an example is the persistent slip bands observed by THOMPSON et al. [1] on copper. These markings indicate a progressive roughening of the surface and surface cracks eventually develop in the roughened bands. Such surface cracks do not necessarily always grow to failure, for example, both HEMPEL [2] and WADSWORTH [3] found with mild steel that cracks were present in slip bands at alternating stresses less than the fatigue limit. The fatigue limit, as normally defined, is thus determined by the alternating stress required to propagate a surface crack rather than the alternating stress necessary for its initiation. Also it is not possible to interpret the

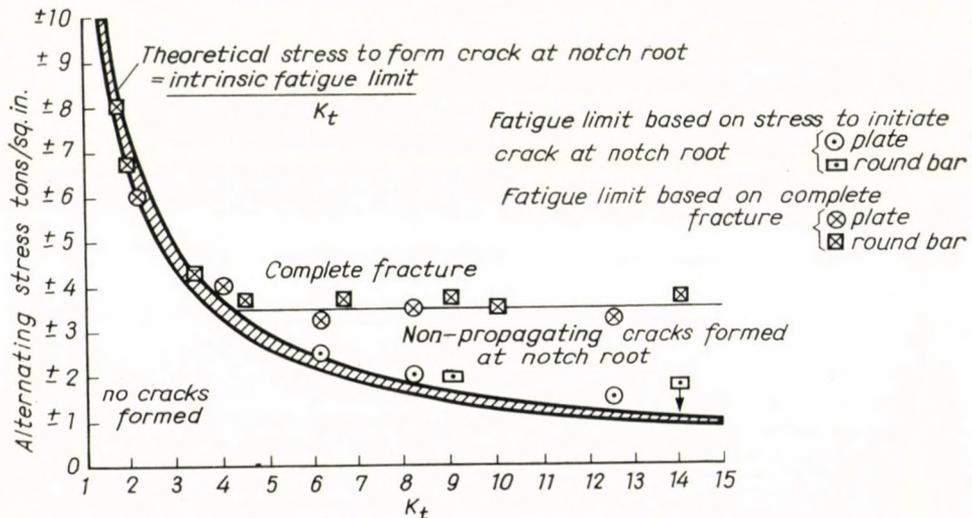


Fig. 1. Alternating stress v K_t for large notched mild steel specimens to reversed direct stress fatigue loading

results of notched fatigue tests solely from a knowledge of the plain fatigue limit and the elastic stress concentration factor (K_t) of the notch. Fig. 1 shows the results of fatigue tests [4] carried out on plate and round bar mild steel specimens containing edge or circumferential Vee notches, 0.2 inch deep, and of various root radii. It is seen that, above a certain K_t value, cracks may be initiated at the notch root which do not grow to cause complete failure of the specimen until a certain threshold alternating stress is applied. Thus the value of the conventional notched fatigue limit, when non-propagating cracks are present, depends on the alternating stress required to propagate such cracks.

The behaviour of fatigue cracks has been studied at the National Engineering Laboratory by both mechanical and physical methods. A brief description of this work is given in this paper.

2. Fatigue tests on cracked specimens

Fatigue tests on specimens containing cracks have been carried out for the purpose of determining

(a) the critical alternating stress required to cause a crack of given length or depth to grow;

(b) the laws governing the rate of growth of a growing crack.

Tests concerned with item (a) were mainly carried out on plate specimens, 2.5 inches wide by about 0.25 inch thick, containing two opposite sharp Vee notches, 0.2 inch deep. Specimens were subjected to a stress cycle such that cracks formed at the notch roots, the test being stopped when the cracks had reached the required depth. The specimens were then reprofiled so as to remove the notches leaving a plate specimen, 2.1 inches wide, containing two small edge cracks. They were then stress relieved (for materials which could not be stress-relieved without affecting the original mechanical properties, the initial cracking procedure was carried out with a compressive mean load superimposed on the alternating stress so that residual stresses would be minimized) and retested at zero mean load. For mild steel [4] and a 4½% Cu-aluminium alloy [5] the relationship between crack length and the critical propagation stress could be expressed by the equation

$$\sigma^3 l = C$$

where σ = nominal alternating stress based on gross area (tons per square inch),

l = edge crack length (inches),

C = 5.5 for mild steel,

C = 0.2 for the 4½% Cu-aluminium alloy.

Work in progress on a nickel-chromium alloy steel (0.3% C, 2.6% Ni, 0.7% Cr, tensile strength 60 tons/in²) and copper indicate that the results

also conform to the above equation. The value of C for the Ni—Cr steel appears to be not far removed from that for mild steel and for copper C has a value roughly equal to 0.5. If, in any given case, the stress (σ) applied to an edge crack of length l is such that $\sigma^3 l > C$ the crack will grow, if $\sigma^3 l < C$ the crack will remain dormant.

Tests concerned with item (b) have been carried out [6, 7, 8, 9] on 10-inch wide panels, approximately 0.1 inch thick, having a small central slit as detailed in Fig. 2. The materials investigated included 18/8 austenitic steel, mild steel, cold-rolled mild steel, copper, commercially pure aluminium and the

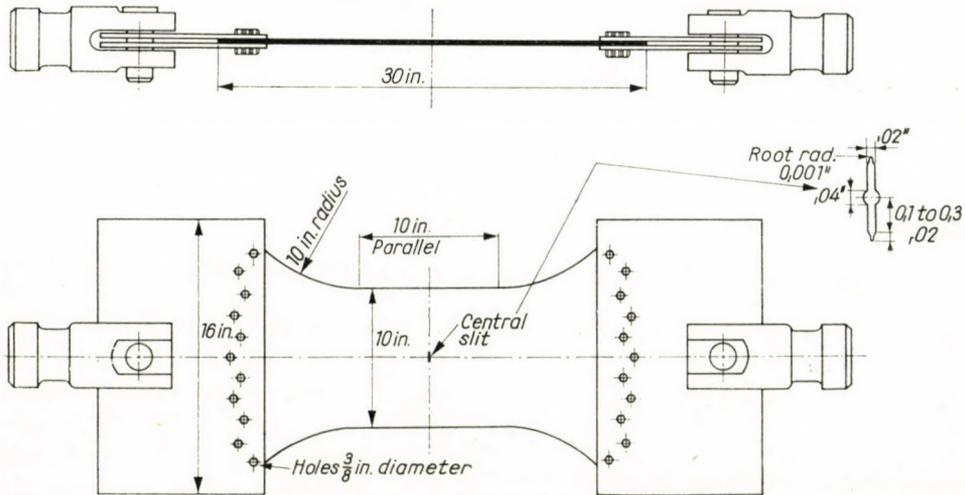


Fig. 2. Fatigue specimen and adaptors

4½% Cu (BS L71) and 5½% Zn (DTD 687A) aluminium alloys. The loading cycle consisted of an alternating stress with a superimposed tensile mean stress such that the loading was never compressive. Nominal stresses were based on the gross area of the specimen and crack lengths were measured from the centre line of the sheet. The values of alternating and mean tensile stresses used are given in Table 1. For each test $\log l$ (l = average half-crack length, inches) was plotted against N (N = number of cycles, millions) for values of l up to 1.0 inch. It was found that, in general, the results conformed to a linear relationship for values of l up to 0.5 to 0.7 inch, unless the mean stress was so high that the sheet yielded or failed by fast fracture at smaller values of l . Thus the initial rate of growth was given by

$$\frac{dl}{dN} = Kl, \quad \text{i. e.,} \quad \ln \left(\frac{l}{l_0} \right) = KN.$$

These growth equations were suggested by FROST and DUGDALE [6] and LIU [10] from geometrical similarity considerations. The value of K was, for a given

Table 1
Values of Mean and Alternating Stresses

Material	Low Mean Stress Tests		High Mean Stress Tests	
	Tensile Mean Stress tons/in ²	Alternating Stress tons/in ²	Tensile Mean Stress tons/in ²	Alternating Stress tons/in ²
Mild steel	2, 5, 7, 10	± 1 to ± 5	12½, 13	± 1½ to ± 3½
Copper	2, 3, 4, 5	± 1 to ± 3½	10, 10½, 11, 12	± 1 to ± 2
Aluminium	3	± ½ to ± 2	7, 7½, 8	± ½ to ± 1½
18/8 austenitic steel	5, 6, 7, 8, 9	± 2 to ± 6¼	15, 17	± 1½ to ± 5½
5½% Zn-Al alloy (Alclad DTD 687A)	2, 3, 4, 5	± ½ to ± 2	14, 15, 16	± ½ to ± 1½
Cold-rolled mild steel	2, 3, 5, 7, 10	± 2 to ± 5	15, 20, 25	± 1 to ± 4½
4½% Cu-Al alloy (BS L71)	2, 3, 4	± ¼ to ± 3	15, 17, 23	± ¼ to ± 1½

material and mean stress, given by [6, 7, 9]

$$K = A\sigma_{\text{alt}}^3$$

where σ_{alt} = nominal alternating stress (tons per square inch),

A = material constant which, for some materials, depended on mean stress.

Table 2
Values of A

Material	Tensile Mean Stress tons/in ²	A
Austenitic steel	5 to 9	0.058
	15	0.115
Mild steel	2 to 13	0.0865
Cold-rolled mild steel	5 to 7	0.116
	15 to 25	0.224
Copper	2 to 12	0.365
	Commercially pure aluminium	3
4½% Cu-aluminium alloy (BS L71) (unclad)	7 to 8	2.09
	2	1.28
	3 to 4	2.75
	15	11.5
5½% Zn-aluminium alloy (DTD 687A) (Alclad)	23	18 (approximate)
	2	11.5
	3	14
	4 to 5	18
	14 to 16	26.9
14¼ to 15 (transverse specimens)	64.5	

Some values of A are given in Table 2; they bear no relation to the static mechanical properties or the plain fatigue strengths of the materials. It is also seen for mild steel and copper that the rate of growth is independent of mean stress [9]. Fig. 3 shows the growth curves obtained from copper specimens

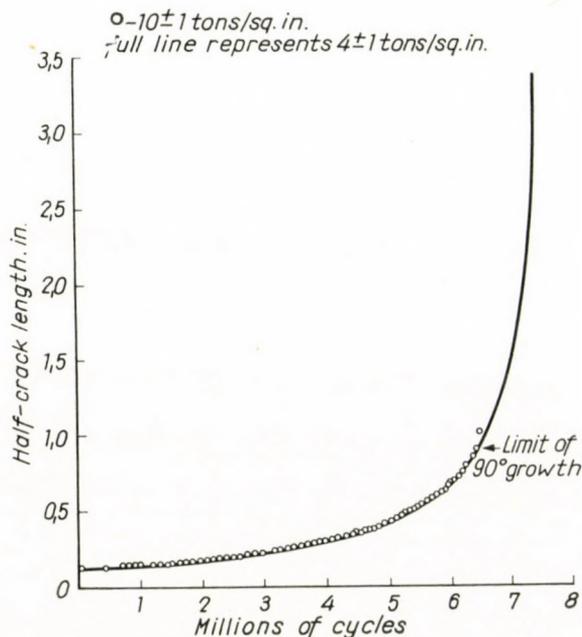


Fig. 3. Crack growth curves for copper

tested at 4 ± 1 tons/in² and 10 ± 1 tons/in². For tensile mean stresses greater than 2 tons/in² it appears [9] that to a sufficient degree of accuracy the rate of growth could be written as

$$\frac{dl}{dN} = \sigma_{\text{alt}}^3 l(P + Q\sigma_{\text{mean}})$$

where σ_{mean} = nominal tensile mean stress (tons per square inch) and

$$\sigma_{\text{mean}} \geq \sigma_{\text{alt}}$$

P and Q = material constants.

For mild steel and copper $Q = 0$.

It was considered [9] that the possible dependence of rate of crack growth on nominal mean stress was due to the variation of the actual mean stress in the material just ahead of the crack tip with nominal mean stress. Materials having stress-strain characteristics such that once plastic deformation occurs further plastic deformation follows with little or no increase in stress, will show little change in growth rate with increasing nominal mean stress.

Growth relationships of the type proposed apply only while crack growth

is continuous. The experimental results show that, even on a macroscopic scale, this is not the case and, while the crack length is small, it is possible for the rate of growth to decrease, sometimes to zero, for quite prolonged periods before continuing to grow again at the expected rate.

Once the stress dependence of the rate of growth of a crack, whose length is small compared to the sheet width, is known, the value of l at which the rate of growth becomes significantly dependent on the crack length/sheet width ratio can be estimated. FROST and DUGDALE [6] showed that, for a material in which the growth rate was not significantly dependent on mean stress, the crack could be considered as growing in a sheet of infinite extent provided the crack length/sheet width ratio was less than about $\frac{1}{8}$. In general, this was in agreement with the experimental results but, in certain tests, for example, on the cold-rolled mild steel, departure from linearity on the $\log lvN$ diagrams occurred at values of $l < 0.5$ inch, *i. e.* $\left(\frac{l}{b} < \frac{1}{10}\right)$.

Examination of the fractured faces of the sheet specimens showed that cracks grew initially on a plane through the thickness at 90° to the plane of the specimen and then for nearly all materials fracture continued on a plane through the thickness at 45° to the plane of the specimen. For a given material and mean stress the length of 90° growth increased as the alternating stress decreased. For a given material and alternating stress the length of 90° growth in general decreased slightly as the mean stress increased, the largest effect being with the high strength aluminium alloys. Of the materials indicated in Table 2, the longest length of 90° growth occurred with the austenitic steel; for a given loading condition the length of 90° growth was about four times greater with this material than with mild steel, although the growth rate characteristics were similar.

In addition to the materials listed in Table 2, a few tests carried out on zinc and titanium (each has a close packed hexagonal lattice) showed that crack growth occurred on a 90° plane throughout.

Tests [8] on mild steel specimens 0.3 inch and 1.0 inch thick but otherwise of similar shape to Fig. 2 indicated that although the rate of growth was unaffected by the specimen thickness (provided the crack front was sensibly straight through the thickness) the appearance of the fractured faces was different from the 0.1-inch thick specimens. Whereas with the latter specimens for a given loading cycle the fracture face, at some particular crack length, changed to a 45° plane, for the same loading cycle and at about the same crack length the fracture face for the 0.3-inch thick specimen changed only slightly to a plane through the thickness inclined at $80-85^\circ$ to the plane of the specimen. For the 1.0-inch thick specimens, growth occurred nominally on a 90° plane throughout.

Apart from the high-strength aluminium alloys no markings visible to the eye were present on the fracture faces except line markings occurring when a test was stopped and restarted. Such lines showed that the crack front was essentially a straight line. With the high-strength aluminium alloys, especially the 5½% Zn alloy alternate light and dark markings were clearly visible (Fig. 4). The dark areas represent fast fractures occurring in one cycle, while the light areas are periods of slow crack growth. This composite fracture mechanism

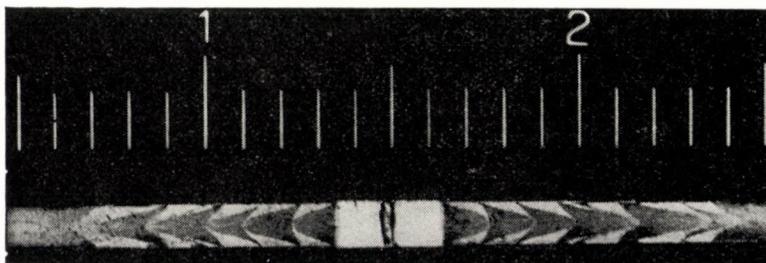


Fig. 4. Photograph of fracture face of Alclad (DTD 687A) specimen

probably accounts for the high rates of crack growth in these alloys compared to pure aluminium.

With the tests at high mean stresses on the softer materials considerable plastic deformation and dimpling occurred at the crack tip and the original slit opened up on application of the mean and alternating stresses. However, the crack grew without any appreciable opening and thinning down of the sheet thickness. Fig. 5 shows a sketch of a fracture face in the vicinity of the initial slit and the $\log l \vee N$ curve for a mild steel specimen tested at $12 \frac{1}{2} \pm 2 \frac{1}{2}$ tons/in².

The tests at high mean stresses indicated the possibility of a correlation between the crack lengths at which the change from 90° growth and departure from linearity on the $\log l \vee N$ diagram occurred. Fig. 6 shows the $\log l \vee N$ diagram for a cold-rolled mild steel specimen tested at 25 ± 1 tons/in². The higher the mean stress the more abrupt was the changeover from 90° to 45° growth and the more sharply did the experimental points depart from linearity on the $\log l \vee N$ diagram. However, there was no satisfactory correlation for tests at low mean stresses.

Finally, it is interesting to note that, although the experimental results have been plotted on $\log l \vee N$ axes, for the range of crack lengths considered the results plot equally well on the $l^{-\frac{1}{2}} \vee N$ axes suggested by HEAD [11]. HEAD presented an analysis based on a progressive strain hardening fracture

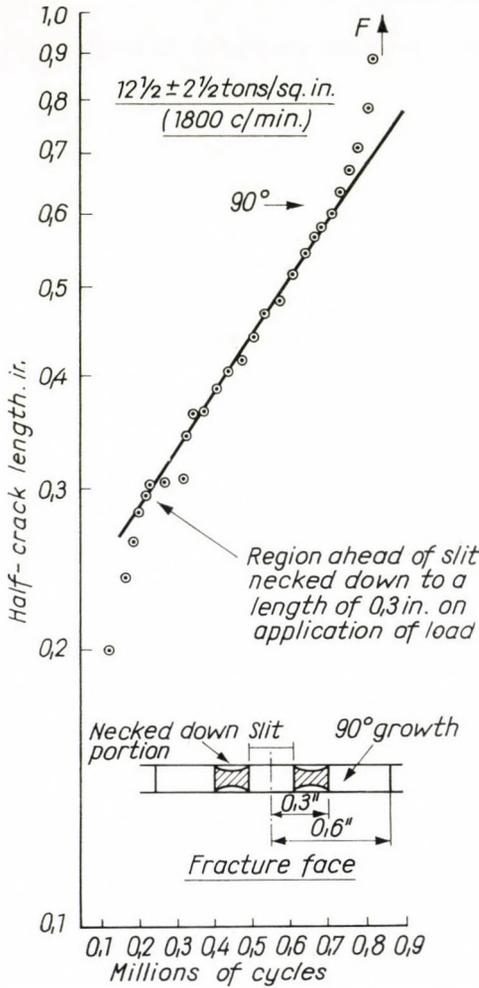


Fig. 5. Mild steel

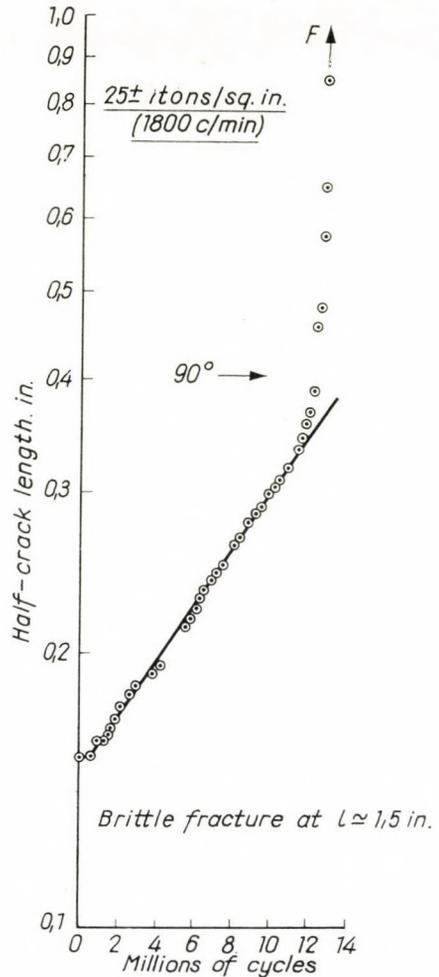


Fig. 6. Cold-rolled mild steel

hypothesis leading to the relationship

$$\frac{dl}{dN} = Bl^3.$$

Fig. 7 shows the results of a test on a specimen tested at $3 \pm 1 \frac{1}{4}$ tons/in², plotted on both $\log l \vee N$ and $l^{-\frac{1}{3}} \vee N$ axes. The results are seen to be equally well represented by a straight line for the initial period of growth. If, for a particular test, deviation from linearity on the $\log l \vee N$ plot occurred at a small value of l , then it did so on $l^{-\frac{1}{3}} \vee N$ axes. Again, for a given mean stress, B was also found to vary as the cube of the alternating stress. Thus the relative

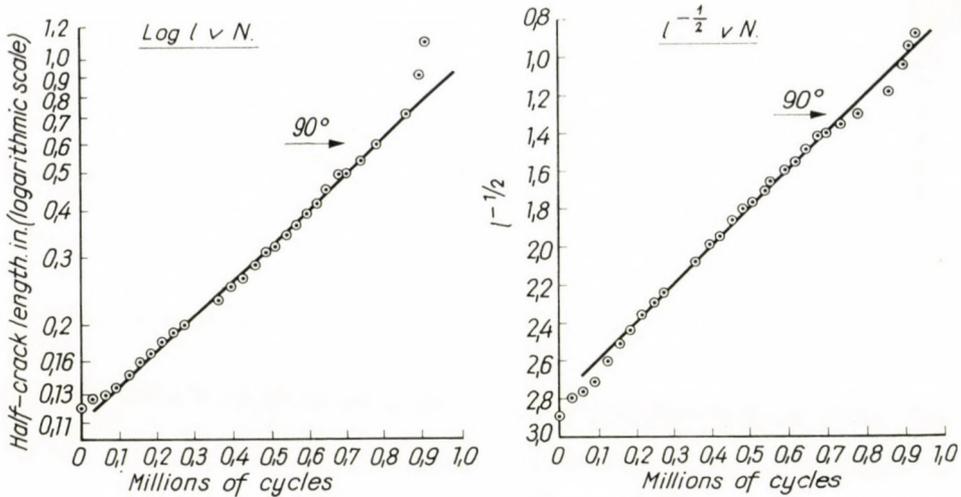


Fig. 7. Crack growth test in 10 in. wide aluminium specimen at $3 \pm 1/4$ tons/sq. in.

rates of crack growth given in Table 2 will be the same irrespective of whether the experimental results are plotted on $\log l \vee N$ or $l^{-1/2} \vee N$ axes.

3. Physical examination of crack growth specimens

The effects of slowly growing fatigue cracks upon structure were investigated by taking sections through crack fronts at right angles to the direction of propagation. In aluminium, copper and mild steel sheets, the crack fronts were characterized by micron scale irregularities (see Fig. 8). Sectioning through the fronts progressively showed that they were slightly bowed forward and suggested that the irregularities were elementary cracks. In the mild steel, a particular type of inclusion was a useful reference feature since it was known that, in brittle fracture conditions, the first micro-cracks formed either by fracture of the inclusion or at the inclusion metal interface, while ductile extension of the steel was characterized by break up of the inclusion. Sections of fatigue crack fronts showed that the irregularities of the front could develop within a few microns of the inclusions without producing the brittle or ductile effects. Micro-hardness surveys around the crack fronts did not lead to significant results. Variations of grain size and surface condition were found in different specimens of the same material but the fatigue crack propagation rate was insensitive to such features.

A characteristic state of the fracture surfaces formed by slow growing cracks in the sheet specimens was, however, brought out by the application of micro-beam X-ray techniques as developed by HIRSCH et al. [12, 13]. The fracture surfaces of aluminium and mild steel were found to possess a highly

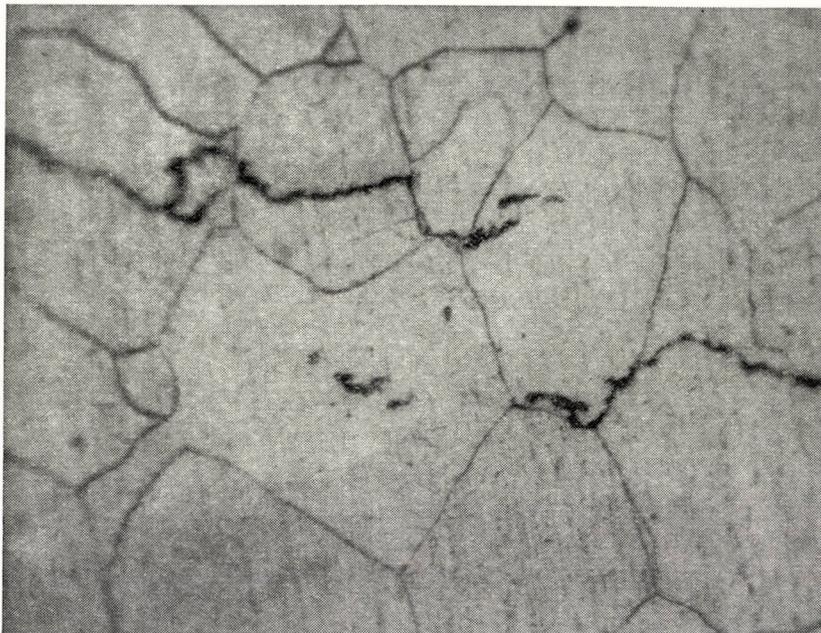


Fig. 8. Detail of crack $\times 1000$ front section, mild steel

developed sub-grain structure with an average sub-grain size characteristic of the metal and involving large misorientations [14]. Fig. 9 shows the change of the Debye-Scherrer ring structures for the original 99.8% Al rolled sheet and for the fracture face formed in such material by growing a fatigue crack at $3 \pm \frac{1}{2}$ tons/in². The structure was independent of the alternating stress range used to produce the fracture and of the initial state of working of the material. Prominent sub-grain development was also observed in zinc but not in the $4 \frac{1}{2}\%$ Cu-aluminium alloy. The sub-grain structure was localized within approximately 50μ of the fracture surface. Table 3 gives data on aluminium and mild steel. The structure was simulated by subjecting single crystals of aluminium to large ranges of cyclic plastic strain in torsion. In this way combinations of slip systems could be initiated and the resultant sub-grain boundaries observed by polarized light [14]; the large misorientation between sub-grains and the build-up of sub-grains from worked structures was confirmed. From both the crystallographic detail of sub-grain structures and direct tests at liquid air temperature, it was concluded that the sub-grains formed by glide and were not dependent upon diffusion mechanisms.

Although the emergence of a sub-grain structure during cyclic stressing of aluminium and silver chloride [15] is well established, the observations

*a**b*

Fig. 9. Detail of Debye—Scherrer ring structure, (Fe radiation line 16), from (a) original rolled sheet 99.8% Al; and (b) fracture surface formed by slow fatigue crack growth in the sheet

Table 3
Reflection

Specimen	Average Size of Sub- grain $\frac{1}{\nu} \mu$	Total Misorientation Range β	Mean Angle between Sub-grains $\alpha = \beta/3$
Fracture surface Al 99.8% $3 \pm \frac{1}{2}$ tons/in ²	4—6	> 40°	> 13°
Fracture surface Al 99.8% 3 ± 1 tons/in ²	4—6	> 40°	> 13°
Torsion specimen, Al 99.9% 6000 cycles at $\epsilon_{pl} = 10^{-2}$	4—8	> 40°	> 13°
Torsion specimen, Al 99.9% 80 000 cycles at $\epsilon_{pl} = 3 \times 10^{-3}$	4—8	> 40°	> 13°
Direct stress, Al 99.9% 30 000 cycles at $\epsilon_{pl} = 8 \times 10^{-3}$	5—8	25°—36°	8°—12°
Fracture surface mild steel $5 \pm 2\frac{1}{2}$ tons/in ²	1—2	25°—38°	8°—13°
Fracture surface mild steel 12 ± 3 tons/in ²	1—2	25°—38°	8°—13°
Direct stress, iron 30 000 cycles at $\epsilon_{pl} \sim 10^{-3}$	1—2	20°—28°	7°—9°

relate to surfaces where other prominent structural effects are competing. On the other hand, the prominent sub-grain effects found with crack-propagation specimens suggest a fracture mechanism based upon sub-grain formation.

4. Discussion

The physical examination suggests with regard to the mechanism of slow fatigue crack propagation that the cyclic strain at the crack tip (caused by the nominal stress cycle applied to the specimen) causes dislocations to take up energetically preferred positions in arrays. The misorientation at the array grows with increasing number of cycles and depends on the magnitude of the local plastic strain and it is not unreasonable to expect the sub-grain boundaries to be the sites of micro-cracks. Such micro-cracks would not be expected to propagate since the formation of the cyclic sub-grain structure is not a very effective hardening process. Thus, if the micro-cracks formed in the densely packed boundaries are unable to propagate, but serve only to advance the sub-grain structure, the progress of the main crack front will depend on the formation of a sufficient number of independent micro-cracks until the applied maximum tensile stress in the loading cycle pulls off the remaining necks of material between the micro-cracks. The transition of the 90° to 45° growth may be interpreted as being due to the gradually increasing effectiveness of the pulling-off stage.

In the high-strength aluminium alloys the first micro-cracks may propagate as brittle cracks which would lead to the relatively strong dependence of crack growth on mean stress for these alloys.

The suggested mechanism of crack growth is distinct from that responsible for surface crack initiation and discussion of the implications following such a statement have been given by HOLDEN [14] and FROST [16].

For example, it could be argued that as the relationship $\sigma^3 l = C$ determines whether or not a crack grows then if $\sigma^3 l < C$ the material at the crack tip does not form the characteristic sub-grain structure or, if it does, any micro-cracks which form are unable to join up to the main crack tip and the crack remains dormant. If the $\sigma^3 l = C$ relationship can be extrapolated to shorter crack lengths than actually tested (the smallest was about 0.004 inch) then for a plain specimen subjected to cyclic stresses greater than the plain fatigue limit it is necessary for surface grooves or cracks to penetrate by surface roughening phenomena to a depth $l = \frac{C}{\sigma^3}$, where σ is a cyclic stress greater than the plain fatigue limit, because the relationship implies a shorter crack will not grow to fracture the specimen. Taking the values of C , given earlier, the minimum crack lengths at stresses equal to the plain fatigue limits of the four materials are

Material	Plain fatigue limit tons/in ²	Minimum crack length $l = \frac{C}{(\text{plain fatigue limit})^3}$ inches
Mild steel	± 13.5	0.0022
Ni Cr alloy steel	± 32	0.00017
4.5% Cu-aluminium alloy	± 9	0.00027
Copper	± 4	0.0078

For similar percentage increases in stress above the plain fatigue limits of the materials tested, the largest crack depth occurs with copper. This implies that surface markings will have greater opportunity to become more numerous and pronounced on copper than with the other materials.

The stress to propagate cracks of equal length is about the same in both steels, irrespective of a 2.4 to 1 ratio in plain fatigue limits. Thus, for the two steels, differences in chemical composition and static mechanical properties have no significant effect on crack propagation, although they are known to have a significant effect on cyclic slip processes occurring on the surface, as they indeed do in the case of the static yield stress. This suggests that the scatter in results associated with the conventional S/N diagram for a batch

of nominally similar steel specimens is essentially related to the number of stress cycles required to form surface irregularities. As the higher plain fatigue limit of the alloy steel is due to surface slip processes not occurring until much higher cyclic stresses are applied than for the mild steel, then the inhibition of surface slip results in the fatigue properties of the specimen, as a whole, being increased. However, there is a limit to which the fatigue limit can thus be increased. For example, with plain fatigue specimens of very high tensile steels, surface slip processes may be so inhibited that cracks will grow from inherent flaws at a cyclic stress less than that necessary to cause surface slip. Cast-iron is another example of a material whose fatigue strength depends on the stress required to propagate inherent flaws present as graphite flakes.

To break a specimen at a nominal stress less than the plain fatigue limit it is necessary to either introduce a crack of appropriate length or to accentuate the surface roughening process. The latter occurs when the tests are carried out in a corrosive environment or a notch is introduced into the specimen. The interpretation of notched fatigue data has been discussed by FROST [17]. Briefly, the alternating stress required to break a notched specimen must lie between the plain fatigue limit and the alternating stress necessary to propagate a crack of length equal to the notch depth. The root radii of machined notches of practical interest are large compared to the radius at the tip of a crack and it is reasonable to postulate that crack initiation in the material at the notch root will be by surface roughening phenomena as on the surface of a plain specimen. Due to the presence of a stress gradient at the notch root, the surface layers of material are not subjected to a uniform stress distribution and the nominal alternating stress required to initiate a crack will be somewhat greater than given by $\frac{\text{plain fatigue limit}}{K_t}$ (where K_t is the geometric elastic stress concentration factor), the difference increasing as the notch sharpness increases. Once a crack has formed, its effective length will, for the usual Vee-type notch, be increased by the depth of the notch and whether or not it propagates depends on whether $\sigma^3 l_d$ is greater or less than C (where l_d is the length of crack plus notch depth). If, in a sharply notched specimen, the length of non-propagating crack formed at the conventional fatigue limit is small compared to the notch depth, then the critical alternating stress to break

the specimen is given approximately by $\sigma = \sqrt[3]{\frac{C}{d}}$ where d is the depth of notch.

Consider now a series of Vee-notched specimens, of the four materials for which values of C are known, having a notch 0.1 inch deep and of sufficient sharpness such that non-propagating cracks are present at the conventional fatigue limit, then

$$\sigma = \sqrt[3]{10C}$$

and the strength reduction factor

$$K_f = \frac{\text{plain fatigue limit}}{\sigma} = \frac{\text{plain fatigue limit}}{\sqrt[3]{10C}}$$

Values of σ and K_f are given below.

Material	σ , tons/in ² (conventional notched fatigue limit)	K_f
Mild steel	± 3.9	3.3
Ni Cr alloy steel	± 3.9	8.2
4.5% Cu-aluminium alloy..	± 1.25	7.2
Copper	± 1.7	2.3

The values of K_f are the maximum values that can be attained (at zero mean load) for the depth of notch considered, irrespective of the notch root radius. They clearly indicate why ignorance of the presence of non-propagating cracks has led to the nickel-chromium steel and the aluminium alloy being termed "notch sensitive" and the mild steel and copper being termed "notch insensitive".

For low endurance tests in which relatively large cyclic plastic strains are applied to plain specimens causing failure in less than 10^4 cycles it is known that the plastic strain amplitude is related to the specimen life. COFFIN [18] has suggested the relationship $N^{\frac{1}{2}} \epsilon_p = C$ (N = number of cycles to failure, ϵ_p = plastic strain amplitude, C = material constant) applies to various metallic materials, the lives over which such a relationship applies depending on material. On the other hand, when the stresses are in the vicinity of the fatigue limit, no such relationship holds between life and the width of the hysteresis loop. It could be argued that in the former tests cracks originate at sub-grain boundaries, whilst in the latter tests the sub-grain structure forms only locally at points of strain concentration created by surface roughening processes. For example, KEMSLEY [19] found that, with copper specimens tested at $\pm 25\,000$ lb/in², slip bands were virtually absent and cracks appeared to be intercrystalline, while at $\pm 15\,000$ lb/in² slip bands formed and cracks were transcrystalline. In the former case, it is not unreasonable to expect a relation to exist between the plastic strain amplitude and life; indeed HOLDEN [14] suggested that the random movement of dislocation into sub-boundary arrays leads to a relationship of the type found by COFFIN. In the latter case no relationship exists between the nominal applied stress and the locally formed sub-grain structure and such plain specimens could be considered to fail because surface roughening phenomena effectively turn them into notched specimens.

Acknowledgements

The work described has been carried out as part of the Research Programme of the National Engineering Laboratory and the paper is published by permission of the Director of the National Engineering Laboratory.

REFERENCES

1. THOMPSON, N., WADSWORTH, N. J. and LOUAT, N. *Phil. Mag.*, 1956, **1**, 113.
2. HEMPEL, M. *Inst. Mech. Engrs*, 1956, 543 "Int. Conf. on Fatigue".
3. WADSWORTH, N. J. *Phil. Mag.*, 1961, **6**, 397.
4. FROST, N. E.: *Proc. Inst. Mech. Engr*, 1959, **173**, 811.
5. FROST, N. E. *J. Mech. Eng Sci.*, 1960, **2**, 109.
6. FROST, N. E. and DUGDALE, D. S. *J. Mech. Phy. Solids*, 1958, **6**, 92.
7. FROST, N. E. *J. Mech. Eng Sci.*, 1959, **1**, 151.
8. FROST, N. E. and DENTON, K. *DSIR NEL Report AB Div. No 24/60*, 1960.
9. FROST, N. E. *DSIR NEL Report AB Div. No. 3/61*, 1961.
10. LIU, H. W. T. and A. M. *Report No 155*, 1959, Dept. of Theoretical and App. Mechanics, Univ. of Illinois.
11. HEAD, A. K. *Phil. Mag.*, 1953, **44**, 925.
12. HIRSCH, P. B. and KELLAR, J. N. *Acta Cryst.*, 1952, **5**, 162.
13. HIRSCH, P. B., GAY, P. and KELLY, A. *Acta Cryst.*, 1954, **7**, 41.
14. HOLDEN, J. *Phil. Mag.*, 1961, **6**, 547.
15. FORSYTH, P. J. E. *J. Inst. Met.*, 1952, **80**, 1340.
16. FROST, N. E. *J. Mech. Phy. Solids*, 1961, **9**, 143.
17. FROST, N. E. *DSIR NEL Report AB Div. No 35/60*, 1960.
18. COFFIN, L. F. "Internal stresses and fatigue of metals". *Elsevier*, 1959, 363.
19. KEMSLEY, D. S. *J. Inst. Metals*, 1957, **85**, 417.

К ВОПРОСУ ВЛИЯНИЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ И СТРУКТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ НА УСТАЛОСТНЫЕ КАЧЕСТВА ЖАРОПРОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ, В ОСОБЕННОСТИ ПРИ ПОВЫШЕННЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Я. КОУТСКИ и Я. БУЖЕК

КАНД. ТЕХН. НАУК

Относительно влияния металлургических факторов, в том числе и структуры, на усталостные качества металлических материалов при нормальной температуре опубликовано уже ряд работ, рассматривающих режим плавки [1—5], вид футеровки (мартеновская печь, электрические печи, вакуумные печи), способ раскисления [6] и связанные с ним до определенной степени количество, форма и распределение неметаллических включений и величина аустенитного зерна, влияние температуры разлива, разница между литым и обрабатываемым давлением видами [7, 8] и т. п.

Влияние неметаллических включений зависит, кроме прочих, от их положения по отношению к наиболее напряженным местам, равно как и от вида напряжения. У ферритных сталей, напр. в результате легирования церием, значения соотношения между пределом усталости при переменном напряжении и пределом прочности на растяжение упало с 0,48 (для молибденовой стали) до 0,385 [9]. Сталь с содержанием церия имела большое количество мелких включений (повидимому, окислов церия), которые у термоулучшенной молибденовой стали отсутствовали. Из включений более вредными считаются окислы и нитриды, чем сульфиды и силикаты [5], хотя неблагоприятное влияние недеформированных сфероидальных силикатных включений иногда может оказаться значительным [4].

Плавлением в вакууме улучшаются усталостные качества ферритных сталей. Причиной этого считается тот факт, что выплавляемые в вакууме стали имеют меньше включений, или же такие включения присутствуют в более тонкой дисперсии и имеют более низкое содержание газов [5].

Усталостные качества низколегированных конструкционных сталей в литом виде ниже, чем в обработанном давлением виде. Если выразить их соотношением $\frac{\sigma_{oc}}{\sigma_{pt}}$, то такое отношение в случае литых материалов снижается со значения 0,5—0,6 в обработанном давлением виде до 0,4—0,5, в первую очередь, из-за неоднородности литой структуры [7, 8].

Величина ферритного зерна для низколегированных сталей не имеет большого значения [10], но дело касается величины, очень малой по сравнению с зёрнами цветных сплавов.

Интересные результаты получились в работе Гемпела [5]. Согласно этим результатам усталостные качества сталей с основным содержанием $C = 0,24—0,35\%$, легированных хромом до $5,5\%$, ванадием до $2,0\%$ и молибденом до $2,5\%$, в значительной мере не зависят от изменений концентрации в данных пределах. В термоулучшенном виде, при выдержке предела прочности в пределах $110—120 \text{ кг/мм}^2$, разброс значений $\frac{\sigma_{oc}}{\sigma_{pt}}$ колеблется от $0,4$ до $0,5$.

В указанных пределах концентраций легирующих элементов после термоулучшения до одинаковой прочности, конечно, не будут иметь места принципиальные отклонения в структуре исследованных сталей: ее будут образовывать феррит и коагулированные карбиды.

Так как это условие не было соблюдено в случае наших испытаний, мы могли согласно им и богатым литературным данным разбить сталь на

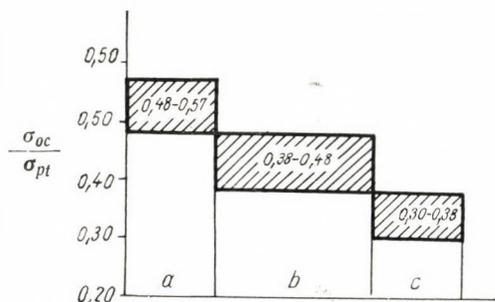


Рис. 1. Зависимость отношения $\frac{\sigma_{oc}}{\sigma_{pt}}$ для разных групп материалов:

- a) хромистые стали ($12\% \text{ Cr}$ и их модификации);
- b) ферритные стали (углеродистые);
- c) аустенитные сплавы.

три группы применительно к значениям величины отношения $\frac{\sigma_{oc}}{\sigma_{pt}}$, установленным при нормальной температуре (рис. 1):

- 1) хромистые стали ($12\% \text{ Cr}$ и их модификации)
- 2) ферритные стали (углеродистые)
- 3) аустенитные сплавы

На рис. 2 и 3 видны фотографии микроструктур углеродистой стали ($0,30\% \text{ C}$) и 12% хромистой стали с низким содержанием углерода (не более $0,15\%$) после нормализации и отпуска. Микроструктура углеродистой стали ферритная, с перлитными островками, между тем как микроструктура хромистой стали образуется типичным сорбитом. Влияние вида микроструктуры (расположение структурных составляющих) на предел усталости наглядно показывают в своих работах Клеснил и Рыш [14] и на основании этих результатов можно в определенной степени объяснить кажущуюся разницу между нашими результатами и результатами Гемпела.

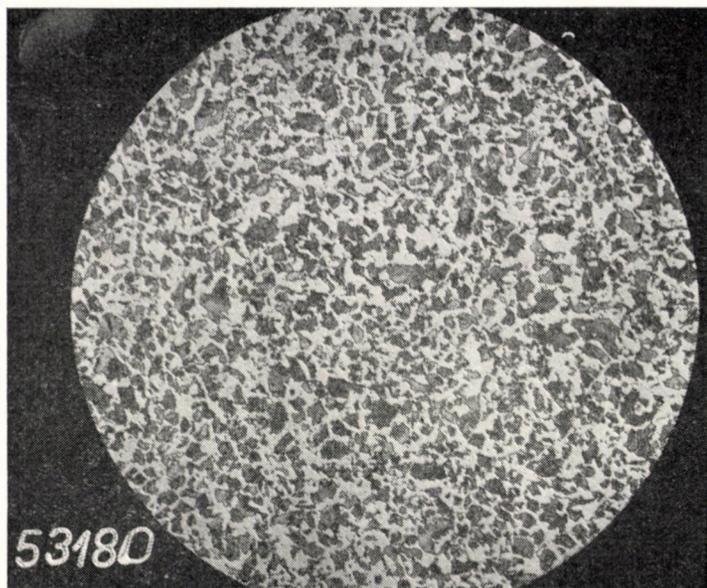


Рис. 2. Микроструктура углеродистой стали (0,30% С)

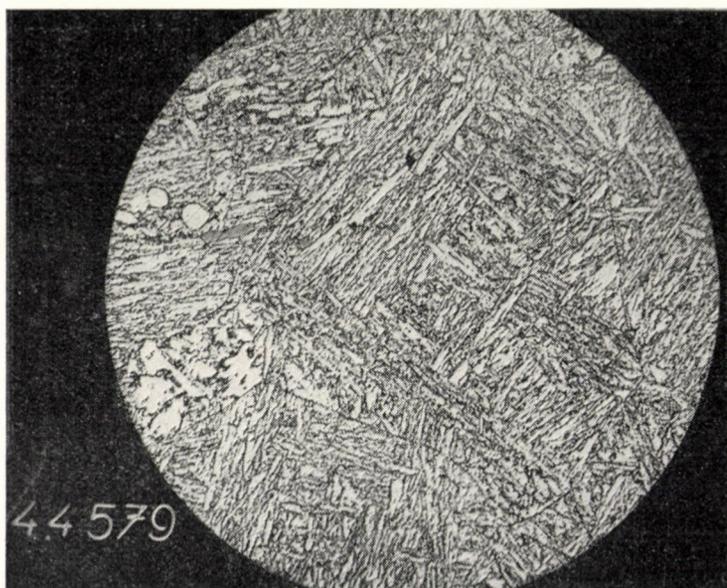


Рис. 3. Микроструктура 12% хромистой стали с низким содержанием углерода, макс. 0,15% после нормализации и отпуска

У аустенитных сталей и сплавов самая большая важность придается в большинстве случаев увязке между величиной аустенитного зерна и пределом усталости. Так как усталостное разрушение у этих материалов имеет преимущественно транскристаллический характер, то у более мелкозернистых структур получают более высокие усталостные значения. Ввиду того, что при длительных испытаниях ползучести при высоких температурах разрушение аустенитных материалов имеет как раз, наоборот, межкристаллический характер, то грубозернистая структура оказывается более выгодной. Решение, которому из обоих факторов при разработке аустенитных жаропрочных материалов следует отдать предпочтение, зависит от способа напряжения отдельных деталей в эксплуатации. Опыт показывает, что в случае лопаток газовых турбин сопротивление усталостному разрушению во многих случаях будет иметь, повидимому, первостепенное значение.

Влияние металлургических факторов у аустенитных материалов исследуется, в первую очередь, с учетом воздействия их на величину аустенитных зерен.

Поведение материалов в условиях усталостного напряжения при высоких температурах является весьма сложной проблемой, т. к. необходимо рассчитывать на действие ползучести. Большое значение приобретает фактор времени. Из исследований, проводимых в особенности на аустенитных сплавах, вытекает, что при высоких температурах при переменном напряжении количество циклов до разрушения является функцией частоты; при нормальной температуре усталостные значения не зависят от частоты.

Зависимость количества циклов до разрушения от частоты не является прямо пропорциональной, а, по всей вероятности, логарифмической.

Усталостная прочность (выносливость) для определенного количества циклов при одинаковой частоте при высоких температурах несколько выше, чем при нормальной температуре: это соотношение исследовалось в пределах от 2000 до 10 000 циклов в минуту.

Кривые Велера при высоких температурах не показывают явно выраженного предела усталости, как это имеет место при нормальной температуре; влияние крипа сказывается на снижении предела усталости даже выше количества 10^3 циклов.

Помимо указанных осложнений более методического характера необходимо рассчитывать также и на изменения структуры при высоких температурах, как-то: старение, твердение, преципитация карбидов, образование фазы σ и окисление и обезуглероживание и т. п.

Уже эти осложнения ограничивают возможность более широкого обобщения результатов, полученных при высоких температурах; более того, по сравнению с исследованием усталостных качеств при нормальной темпера-

туре, с которыми было бы возможно новые результаты сличить, имеется значительно меньше работ, посвященных данной теме.

В нашей статье рассматриваются некоторые аустенитные жаропрочные сплавы и модифицированные 12% хромистые жаропрочные стали.

Результаты исследования аустенитных сплавов

Более подробно мы рассматривали влияние структуры на усталостные качества аустенитных сплавов, химический состав которых показан в табл. 1.

Табл. 1

Химический состав аустенитных сплавов

Материал	C	Mn	Si	P	S	Cr	Ni	Fe	Ti	Al	Mo	W
AKNC	0,05	0,39	—	0,011	0,016	21,70	71,08	3,80	2,29	0,68	—	—
EI 612 L	0,08	1,72	0,43	0,003	0,009	14,48	35,82	ост.	1,12	—	—	3,08
EI 437	0,03	0,22	0,32	0,021	0,006	20,56	76,70	0,44	1,18	0,40	—	—
VZÚ 60 L	0,06	0,23	0,58	0,003	0,006	19,62	60,56	13,39	1,12	—	2,11	1,77
EI 612	0,10	1,78	0,48	0,020	0,014	14,16	36,4	ост.	1,27	—	—	2,80

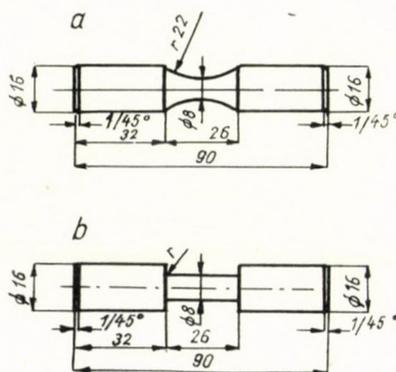


Рис. 4. Форма и размеры образцов а) гладких, б) с надрезом

Вид их микроструктуры и механические показатели, полученные после обычной их термообработки (закключающейся в гомогенизации с последующим дисперсионным твердением), даны в табл. 2. Испытания проводились нами на гладких образцах и образцах с надрезом, форма которых и размеры показаны на рис. 4. Для испытаний мы пользовались известной машиной фирмы Шенк — Флато 80 с динамометром на ± 7 кгм и устройством для напряжения в плоском изгибе. Число оборотов машины составляло 3000 об/мин.

Табл. 2

Микроструктура аустенитных сплавов + механические показатели

AKNC					E1 612L					E1 437					VZÚ 60L					E1 612				
VEL. ZRNKA: 5					4					3					2-3					2-3				
°C	σ_{oc}	β_{oc}	$\frac{\sigma_{oc}}{\sigma_p}$		°C	σ_{oc}	β_{oc}	$\frac{\sigma_{oc}}{\sigma_p}$		°C	σ_{oc}	β_{oc}	$\frac{\sigma_{oc}}{\sigma_p}$		°C	σ_{oc}	β_{oc}	$\frac{\sigma_{oc}}{\sigma_p}$		°C	σ_{oc}	β_{oc}	$\frac{\sigma_{oc}}{\sigma_p}$	
20°	44	—	0,34		20°	20	—	0,334		20°	33	1,22	0,319		20°	17	2,12	0,307		20°	20	—	0,33	
500°	40	—	—		500°	—	—	—		500°	30	1,3	—		500°	20	1,54	—		500°	18	—	—	
σ_c	σ_p	δ_2	ψ		σ_c	σ_p	δ_2	ψ		σ_c	σ_p	δ_2	ψ		σ_c	σ_p	δ_2	ψ		σ_c	σ_p	δ_2	ψ	
93,8	129,2	19,6	21,5		26,4	60,7	20	17		63,6	105,8	36,3	34,0		25,8	55,3	31,9	31,9		20,9	60,6	40,5	31,0	

Из табл. 1 очевидно, что испытанию мы подвергали аустенитные сплавы как в обработанном давлением, так и в литом виде (обозначение L). Кроме того, сплавы отличаются по величине аустенитного зерна, чистоте и однородности структуры. Эти отличия практически не сказываются на значении $\frac{\sigma_{oc}}{\sigma_p}$, устанавливаемом при нормальной температуре, которое колеблется в пределах от 0,307 до 0,34 (рис. 1). Отдельные плавки, однако, отличаются друг от друга по абсолютным значениям пределов усталости и прочности. Как уже сказано выше, у аустенитных сплавов часто подчеркивается преобладающее влияние величины аустенитного зерна применительно к значениям усталости. Результаты наших испытаний этому, по существу, не противоречат. Наиболее высокого значения σ_{oc} достигает сплав с наиболее мелким аустенитным зерном. Одинаковыми, и, быть может, еще более важными оказываются, однако, неоднородность (химическая) структуры, которая для сплава сравнительно мелкозернистой структуры (E1 612 L) является причиной низкого σ_o , чистота (наличие большого количества примесей в связи со сравнительно грубой зернистостью вызывает понижение σ_c в случае обрабатываемого давлением сплава E1 612, который содержит в общем 5,58% включений по сравнению с 1,92% того же сплава в литом виде) и наличие рыхлости и микропористости (VZÚ 60 L). Оказывается дальше, что обрабатываемый давлением сплав не всегда бывает мелкозернистее литого сплава.

Из упомянутых выше результатов можно также сделать вывод, что для повышения предела усталости аустенитных сплавов необходимо повышать их прочность.

Сопоставляя образцы сплавов E1 437 и VZÚ 60 L, видно, что причиной значительно более высокой чувствительности к концентраторам напряжения

в случае второго сплава должно быть наличие рыхлости и микропористости (оба сплава имеют аустенитную структуру практически с одинаковой по величине зернистостью). Поэтому технологические основы, направленные на устранение этих металлургических недостатков, будут влиять, в первую очередь, на возможность применения литых материалов также и с точки зрения усталостных качеств.

Предел усталости, установленный при 500° С после проведения 10⁸ циклов за исключением сплава VZÚ 60 L, несколько ниже. (В случае сплава VZÚ 60 L дело касается повидимому разницы качества пороков отдельных образцов. Также существенно более низкая чувствительность к концентрациям напряжений при 500° С будет наверняка обуславливаться тем же.)

Результаты исследования 12% хромистых сталей и их модификаций

Модифицированные 12% хромистые стали в последнее время стали предметом интенсивного исследования со стороны исследователей материала, т. к. они кажутся быть подающими надежду материалами при применении для изготовления роторов, корпусов и лопаток паровых турбин вплоть до температуры 600° С [12, 13]. Они представляют собой в сущности ферритные стали с максимальным содержанием углерода в большинстве случаев 0,2%, средним содержанием хрома около 12%, и помимо этого они легированы еще карбидообразующими элементами W, Mo, V, Nb или даже Co.

В термоулучшенном виде их микроструктура образуется или однородным сорбитом или же сорбитом и ферритом.

С учетом возможности их применения для изготовления рабочих лопаток необходимо исследовать также их усталостные качества при нормальной и повышенных температурах.

В рамках данной работы мы исследовали нижеследующие 3 плавки модифицированных 12-Cr сталей:

№№	C	Cr	W	Mo	V
84	0,19	11,80	2,02	0,10	0,15
89	0,15	12,83	2,68	0,07	0,21
63	0,13	11,40	2,22	0,03	0,16

Во всех случаях исследование проводилось на материале в обработанном давлением виде, у стали 63 в литом состоянии. В термоулучшенном виде отдельные плавки достигают нижеследующих механических показателей:

№№	σ_K	σ_p	ψ	θ_s	R (ударная вязкость)
84	64,6	83,9	56,1	18,8	7,5—7,8
89	68,6	89,5	49,2	17,0	4,9
63	62,3	77,9	37,8	16,8	3,1

Предел усталости при кручении при нормальной температуре для всех 3 плавки находится в пределах разброса этих показателей, установленных в ряде плавки обыкновенной 12% Сг стали (рис. 5).

Микроструктура плавки № 84 образуется сорбитом (рис. 6), плавки

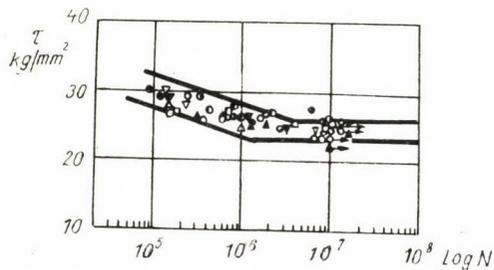


Рис. 5. Зона разброса кривых Велера обыкновенной 12% Сг стали, обнаруженная у 36 плавки при напряжении на кручение

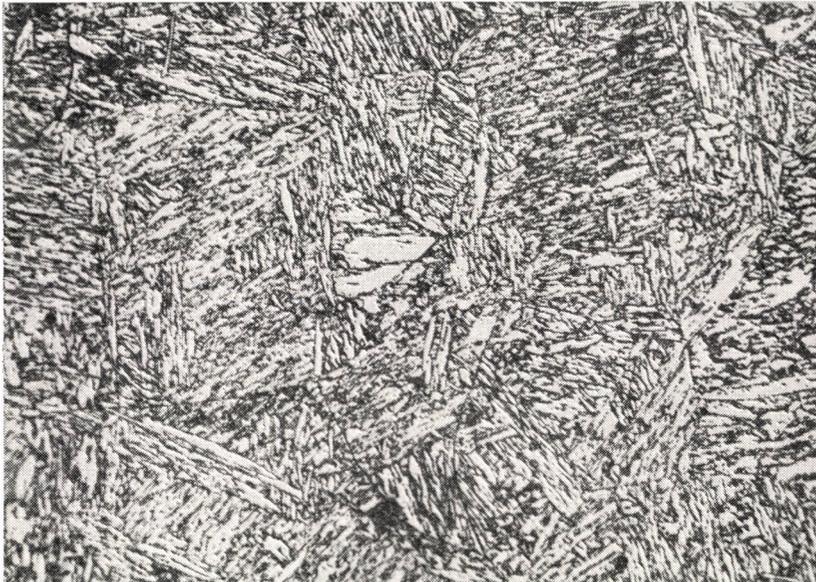


Рис. 6. Микроструктура 12% Сг стали (84)



Рис. 7. Микроструктура 12% Cr стали (89)



Рис. 8. Микроструктура 12% Cr литой стали (63)

№ 89 — сорбитом и большим количеством феррита (рис. 7) и плавки № 63 — сорбитом и большими зёрнами феррита (рис. 8).

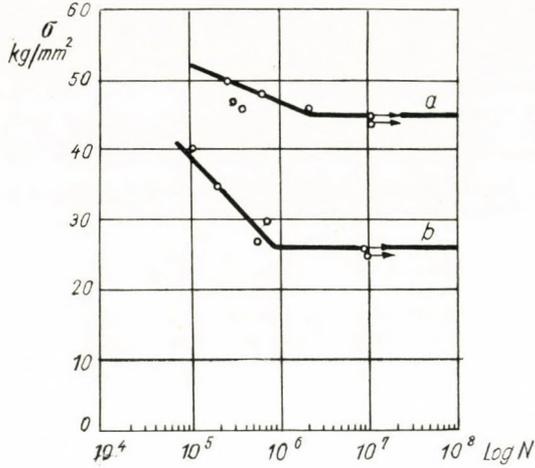


Рис. 9. Кривые Велера 12% Cr стали (84)

\varnothing образца: 8 мм
 т-ра: 20° С
 напряжение: плоский изгиб
 а — гладкий образец
 б — образец с уступом, $r = 0,8$ мм

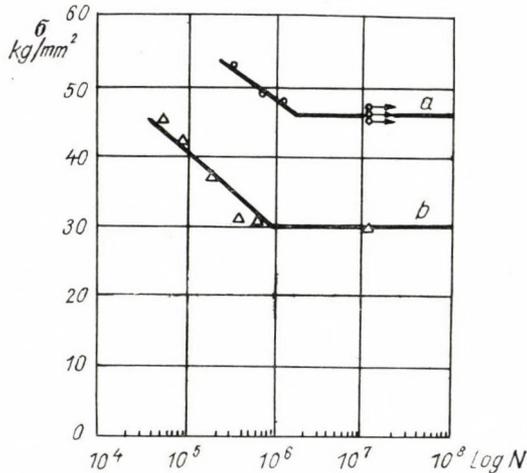


Рис. 10. Кривые Велера 12% Cr стали (89)

\varnothing образца: 8 мм
 т-ра: 20° С
 напряжение: плоский изгиб
 а — гладкий образец
 б — образец с уступом, $r = 0,8$ мм

Предел усталости на изгиб устанавливается тем же образом, как в случае аустенитных сплавов.

Результаты испытаний при нормальной температуре показаны на рис. 9, 10 и 11. Из них вытекает, что между плавками N°N° 84 и 89 нет практи-

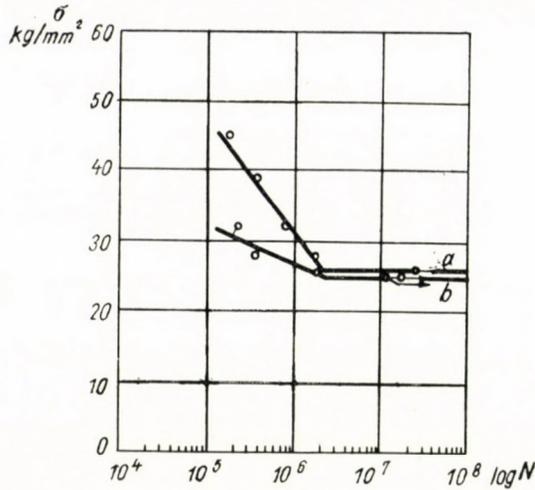


Рис. 11. Кривые Велера 12% Cr стали литой (63)

\varnothing образца: 8 мм
 т-ра: 20° С
 напряжение: плоский изгиб
 а — гладкий образец
 б — образец с уступом, $r = 0,8$ мм

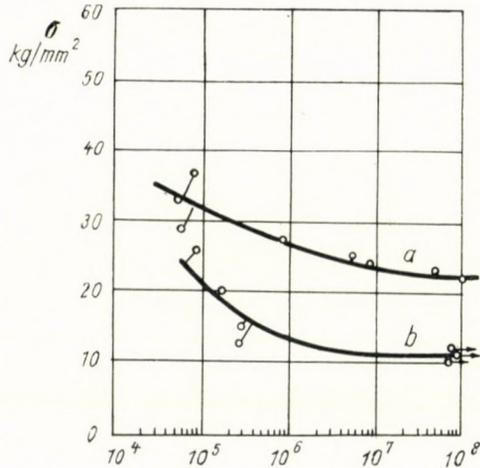


Рис. 12. Кривые Велера 12% Cr стали (84)

\varnothing образца: 8 мм
 т-ра: 500° С
 напряжение: плоский изгиб
 а — гладкий образец
 б — образец с уступом, $r = 0,8$ мм

чески различия ни по абсолютным показателям предела усталости, ни по склонности к чувствительности к концентраторам напряжения. В случае плавки № 63 нет практически различия между пределом усталости у гладкого образца и у образца с надрезом, но показатель предела усталости на гладком образце существенно ниже, чем в случае предыдущих двух плавков.

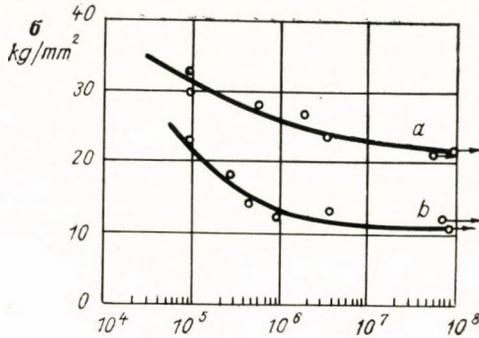


Рис. 13. Кривые Велера 12% Сг стали (89)

○ образца: 8 мм
 т-ра: 500° С
 напряжение: плоский изгиб
 а = гладкий образец
 б = образец с уступом, $\gamma = 0,8$ мм

При 500° С склонность к чувствительности к концентраторам напряжения в случае плавок №№ 84 и 89 несколько ниже. Но даже при этой температуре испытаний нельзя доказать, что наличие феррита может каким бы то ни было образом повлиять на усталостные качества (рис. 12, 13).

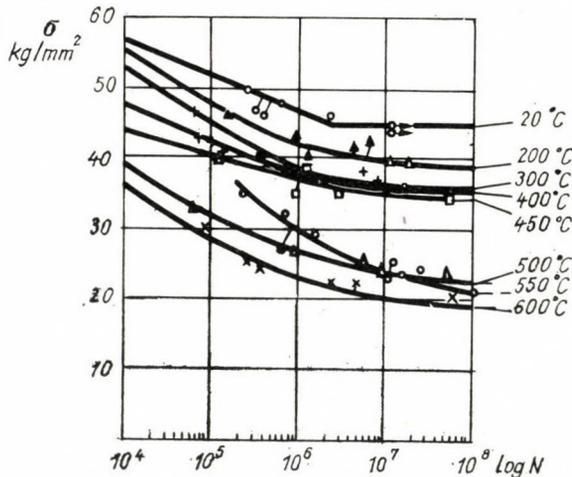


Рис. 14. Кривые Велера 12% Сг стали (84)

○ образца: 8 мм гладк.
 т-ра: 20—600° С
 напряжение: плоский изгиб

В случае стали, плавка № 84, мы исследовали усталостные качества на гладких образцах при температурах 200° С, 300° С, 400° С, 450° С, 500° С, 550° С и 600° С. Нами установлено, что кривые зависимости σ_{oc} на $\log N$ имеют приблизительно одинаковый сход, за исключением температуры 550° С, при которой данная кривая имеет гораздо более крутую форму (рис. 14). Если отложить σ до разрушения на кривой температуры для отдельного

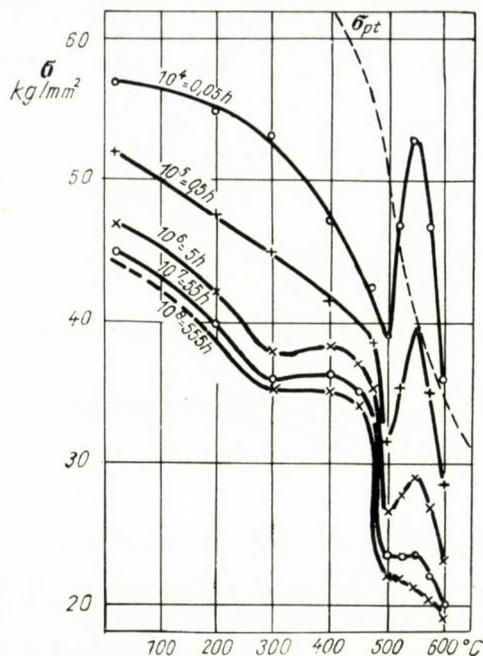


Рис. 15. Кривые 12% Cr стали (84) как зависимость напряжения от температуры всегда для определенного количества циклов

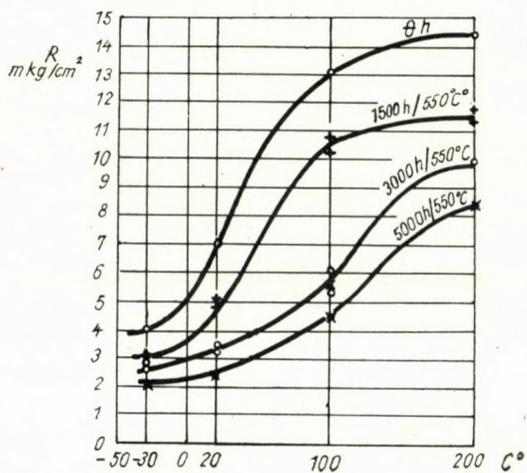


Рис. 16. Кривые изменения ударной вязкости с температурой

количества циклов, то получаем рис. 15. Из него следует, что в особенности при более низком количестве циклов при температуре 550°C получается явно выраженный максимум значения σ , и что это значение даже превышает статический предел прочности на растяжение, установленный при данной

температуре. Этот факт свидетельствует о том, что в области этой температуры в стали имеют место изменения структуры, приводящие к упрочнению материала в результате пластической деформации, но эти изменения ограничиваются только сравнительно коротким промежутком времени.

Ввиду того, что дело касается термоулучшенного материала, такие изменения должны были бы иметь обратимый характер.

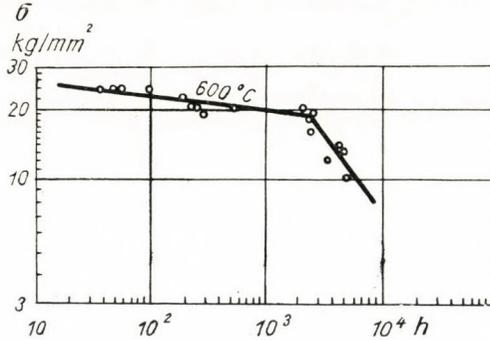


Рис. 17. Кривая предела прочности при ползучести (600° С)

Упомянутые изменения не отражаются выразительно на кривых, показывающих процесс изменения ударной вязкости в зависимости от температуры после отжига при критических температурах (рис. 16). Здесь дело касается, однако, процесса изменения через существенно более продолжительное

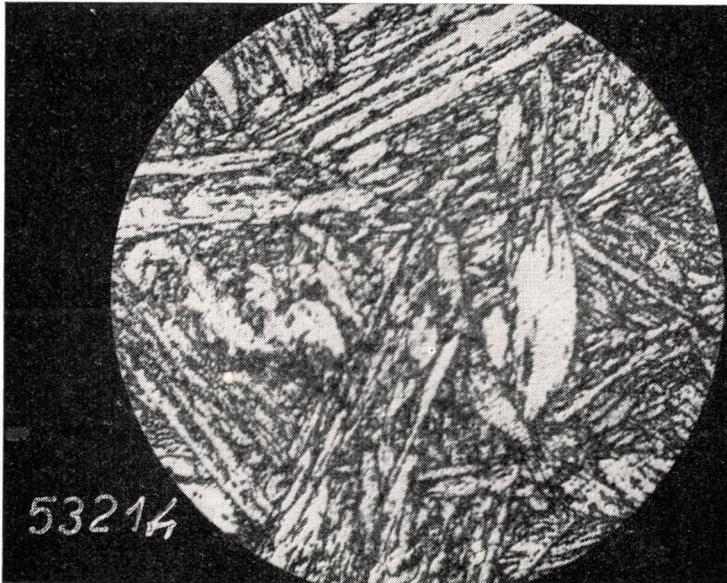


Рис. 18

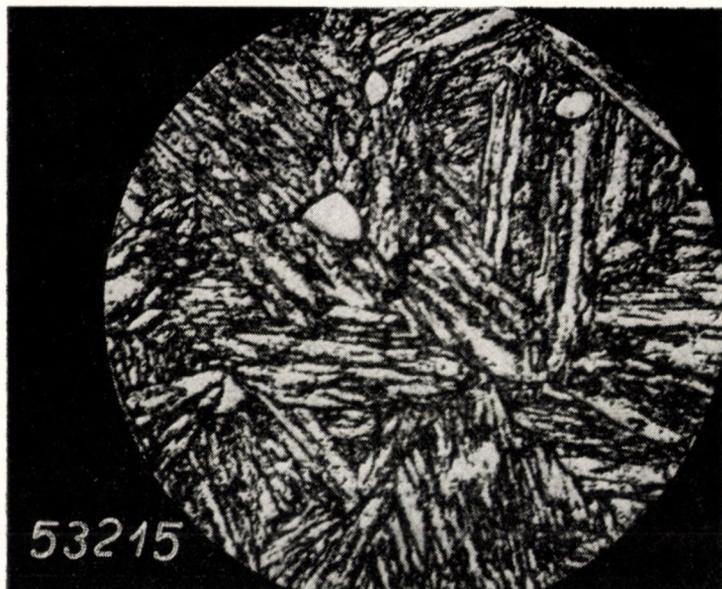
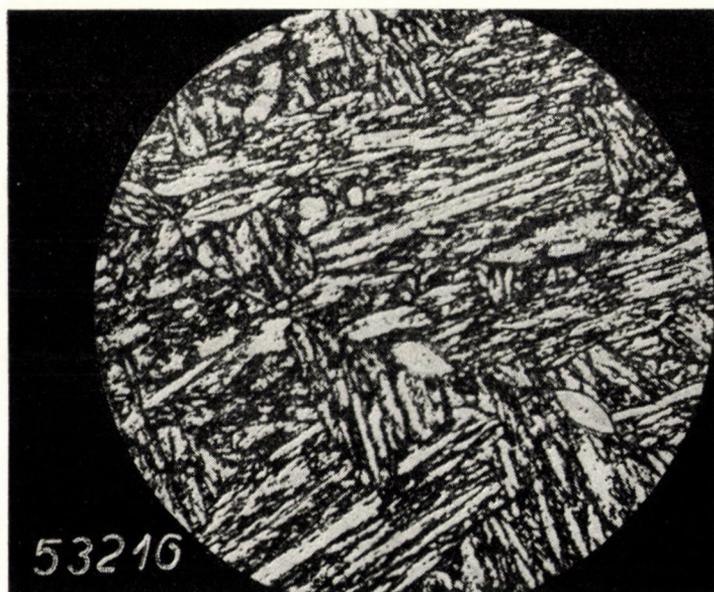
*Рис. 19**Рис. 20*

Рис. 18–20. Микроструктура после переменного напряжения 10^8 циклов — увеличение 1000 раз для стали (84)

время, чем те отрезки времени, при которых наблюдались усталостные аномалии. Равным образом невозможно искать связь между этими явлениями

и переламом кривой предела прочности при ползучести, который при 600° С имеет место по истечении порядка 1000 часов (рис. 17.). Среди образцов, отличающихся таким образом по усталостным качествам, нельзя обнаружить значительные отклонения на микроструктуре ни при большом увеличении в оптическом микроскопе (рис. 18, 19, 20).

Ввиду того, что структура этой стали образована однородным сорбитом и что преципитация межметаллической фазы Fe_2W сопровождается изменениями твердости, такое явление, может быть, пока объясняется только лишь процессами рекристаллизации, которые при этой температуре могут теоретически протекать.

Заключение

В настоящей статье в разделе, касающемся аустенитных сплавов, примерами показано что особенно у литых материалов в связи с усталостью необходимо рассматривать не только величину аустенитного зерна, но и химическую неоднородность, наличие включений и другие металлургические сопровождающие явления.

Во втором разделе дано описание результатов исследования усталостных качеств модифицированных 12% хромистых сталей при повышенных температурах, которые пока в литературе не были опубликованы. Они показывают, что даже для ферритных сталей процесс усталостных явлений может становиться весьма сложным процессом, не поддающимся однозначному объяснению, как это показало напр. исследование плавки № 84 в настоящей статье.

Некоторые наши результаты не отвечают полностью выводам, приведенным в перечне литературы в введении. Этот факт лишь подтверждает ограниченное применение имеющихся пока сведений и указывает на необходимость более подробного исследования усталостных явлений при высоких температурах.

ЛИТЕРАТУРА

1. SIME, C. E. a. DAHLE, F. B.: Proc. Amer. Soc. Test. Mater. **42** (1942), p. 532—55
2. FUNCK, A.: Acier, Stahl **23** (1958), 32—37
3. KREINER, H. u. WITTIG, H.: Stähle für Drehungsfedern. Vertr. Ber. VDEh, Ber. Nr. 66, Mai 1944
4. FRITH, P. K.: Iron Steel Inst. Spec. Rep. London Nr. **50** 1954, p. 1—30.
5. HEMPEL, W.: Symposium o únavě, září 1960, Praha, Симпозиум по усталости, Прага 1960
6. DOWELL, J. F.: Metal & Alloys (1940) Nr. 1, p. 27—32
7. SACHS, G., STEFON, P.: Trans. Amer. Soc. Met. **29** (1941) p. 373—401
8. EVANS, E. B. and others: Proc. Amer. Soc. Test. Mater. **56** (1956), p. 979—1011
9. FILLETT, H. W., MACK, E. L.: Proc Amer. Soc. Test. Mater. **24** (1924) II, p. 476—546.
10. MC ADAM, D. J.: Chem. & Metallurg. Engng. **25** (1921) p. 1081—87
11. LITHERLAND, P., TEDD: Fatigue a. Fracture of Metals Symposium held at The Massachusetts Institute of Technology, June 19—22, (1950), p. 252—291
12. GRANT, N. J.: ibidem, p. 292—301
13. KOUTSKY, J., NEID, J. JEZEK, J.: Hutnické listy **13** (1958), 199—205
14. KOUTSKY, J.: Hutnické listy **14** (1959), 1105—1107
15. KLESNIL, M., RYŠ, P.: Hutnické listy **13** (1958), 116—1122

ÜBER DIE METALLERMÜDUNG BEI EINEM BIHARMONISCHEN SPEKTRUM VON ERMÜDUNGSSPANNUNGEN

T. POREBSKI

TECHNISCHE HOCHSCHULE, WROCLAW

I. Vorwort

Die klassischen Arbeiten der Ermüdungsfestigkeitsfragen beruhen auf der Annahme, daß sich die Spannung im Zyklus sinusförmig ändert, und der Amplitudenwert in allen Lastwechseln konstant bleibt. In der Praxis erweist es sich jedoch, daß diese Voraussetzung in vielen realen Konstruktionen unerfüllt bleibt. Das in den realen Konstruktionen am häufigsten vorkommende Spannungsspektrum ist polyharmonisch oder »chaotisch«. Die Festigkeitsprüfung dieser Spektren, die man üblicherweise als nichtsinusförmige Spektren bezeichnet, wurde bereits von mehreren wissenschaftlichen Instituten unternommen. Die Notwendigkeit dieser Versuche wurde durch das Bestreben bedingt, möglichst ökonomisch zu konstruieren.

Die vorliegende, im Laboratorium für Materialprüfung an der Technischen Hochschule Wroclaw durchgeführte Arbeit, die lediglich einen Teil eines umfangreicheren Versuchsprogramms bildet, befaßte sich vorwiegend mit der begrenzten Ermüdungsfestigkeit bei der Belastung der Probestäbe mit biharmonischen Spektren von Ermüdungsspannungen.

II. Die Grundlagen eigener Versuche

Die Aufgabe des experimentellen Teils dieser Arbeit bestand darin, die Richtigkeit der Hypothese zu prüfen, wonach die Rollen der Zug- und Druckspannungen im Prozeß der Metallermüdung nicht identisch seien. Die Hypothese vom ausschlaggebenden Einfluß der Zugspannungen und ihrer Dauer im Zyklus beruht auf den Erfahrungen von CHRISTEN [1] und der Theorie über den Mechanismus der Ermüdungszerstörung [2].

Da die Durchführung dieser Versuche einer besonderen Apparatur bedurfte, wurde ein Ermüdungspulsator hergestellt, dessen Wirkungsweise auf der Verwertung der wirbelnden Schleuderkraft beruhte. Bei der Herstellung des Ermüdungspulsators wurde die Möglichkeit der Gewinnung von beliebigen biharmonischen Verläufen vorausgesetzt, da es festgestellt wurde, daß so manche biharmonischen Verläufe durch äußerst verschiedene Dauer der Druck- und Zugspannungen im Zyklus gekennzeichnet sind.

Die Spannungsmessungen wurden mit Widerstandstensometern durchgeführt, die Spektren mit Hilfe eines achtschleifigen Oszillographen registriert.

Die Probestäbe aus Messing wurden in der Weise hergestellt, daß die maximale Ähnlichkeit aller Prüfkörper gesichert werde. Alle Prüfkörper wurden aus der gleichen Schmelze hergestellt. Zur Vereinheitlichung ihrer Struktur wurden sie einer Wärmebehandlung unterworfen. Die Genauigkeit und Identität der Behandlung und die Prüfbedingungen wurden sorgfältig gesichert.

III. Meßergebnisse

Zur Prüfung der aufgestellten Hypothese wurden vier Serien von Messingprobestäben belastet, und zwar eine jede Serie mit einem anderen Spektrum der Ermüdungsspannung.

1. Zwei Belastungen hatten einen sinusförmigen Verlauf, jede von ihnen hatte aber eine andere Frequenz (15 Hz und 30 Hz).

2. Zwei Spannungsspektren hatten biharmonischen Verlauf und unterschieden sich voneinander durch die Dauer der Zugspannungen im Zyklus.

Der Spannungswert wurde derart gewählt, daß der Bruch innerhalb der Grenzen von 10^5 – 10^6 Schwingungsperioden erfolgte. Die Spannungswerte σ_{\max} und σ_{\min} waren in allen vier Belastungsfällen identisch.

Es wurden folgende Ergebnisse erhalten:

1. Für ein sich sinusförmig änderndes Spannungsspektrum (Oszillogramm 1):

$$(15 \text{ Hz}) \quad N_I = 110\,600 \pm 4500 \text{ Schwingungen.}$$

2. Für ein sich sinusförmig änderndes Spannungsspektrum (Oszillogramm 2):

$$(30 \text{ Hz}) \quad N_{II} = 108\,400 \pm 4500 \text{ Schwingungen.}$$

3. Für ein sich biharmonisch änderndes Spannungsspektrum welches die Resultante von zwei entsprechend gewählten, sinusförmig verlaufenden Spannungen ist, bei dem die Dauer der Zugspannungen im Zyklus geringer als die der Druckspannungen war, betrug

$$N_{III} = 176\,000 \pm 4500 \text{ Schwingungen.}$$

4. Für ein biharmonisch verlaufendes Spannungsspektrum (die Dauer der Druckspannungen im Zyklus war geringer als die der Zugspannungen):

$$N_{IV} = 96\,900 \pm 6200 \text{ Schwingungen.}$$

Der mittlere Fehler des mittleren Wertes der Periodenzahl für eine Serie

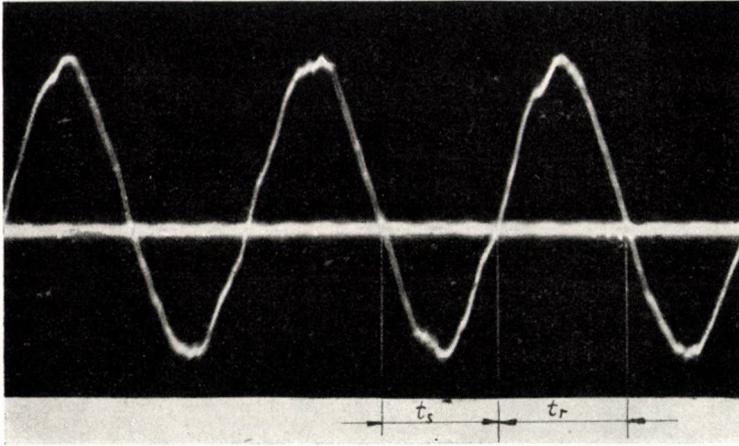


Abb. 1. Oszillogramm 1: sinusoidale Belastung 15 Hz

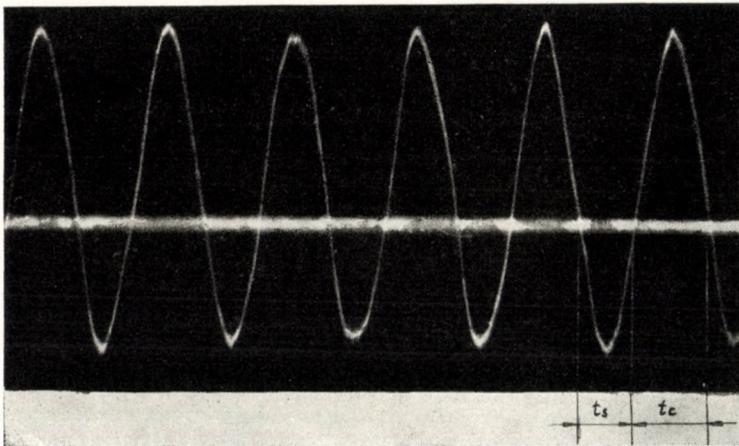


Abb. 2. Oszillogramm 2: sinusoidale Belastung 30 Hz

wurde nach dem Verfahren der kleinsten Quadrate, bei Annahme einer normalen Zerlegung, bestimmt.

Die Schwankung des einen Probestab belastenden Kraftwertes betrug $\pm 1\%$ (was durch die Apparaturverhältnisse bedingt wurde).

Die Ergebnisse der durchgeführten Versuche wurden in den Abbildungen 1—5 dargestellt.

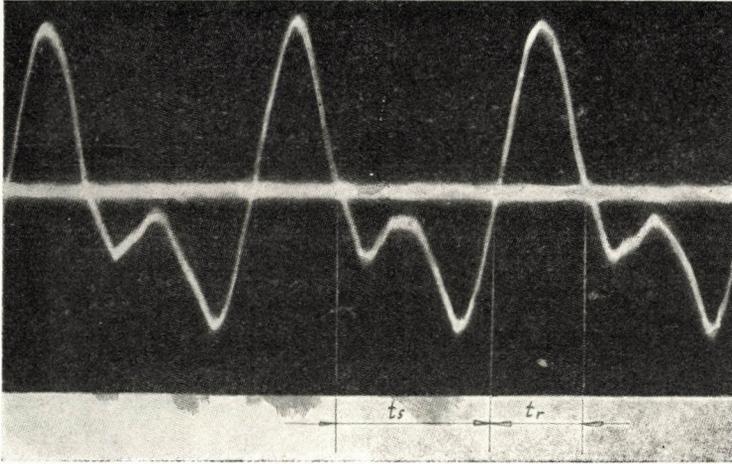


Abb. 3. Oszillogramm 3: biharmonische Belastung

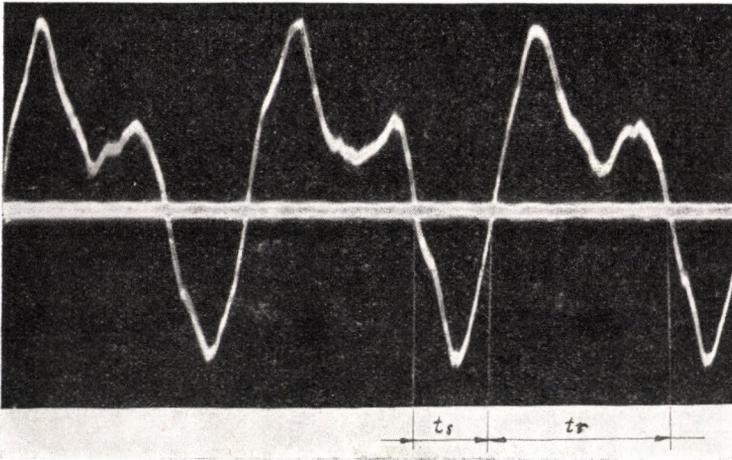


Abb. 4. Oszillogramm 4: biharmonische Belastung

IV. Schlußfolgerungen

1. Wie es aus den durchgeführten Versuchen deutlich hervorgeht, liegen die mittleren Periodenzahlen der einzelnen Probeserien verschieden hoch, trotz der in allen vier Belastungsfällen gleichen Werte von σ_{\min} , σ_{\max} und R .

Es ist interessant, daß die Anzahl der durch eine Probe übertragenen Schwingungen annähernd proportional der Dauer der Zugspannungen im Zyklus (t_r) ist. Mit dem Ansteigen dieses Zeitraumes verringert sich die zum Probebruch notwendige Periodenzahl.

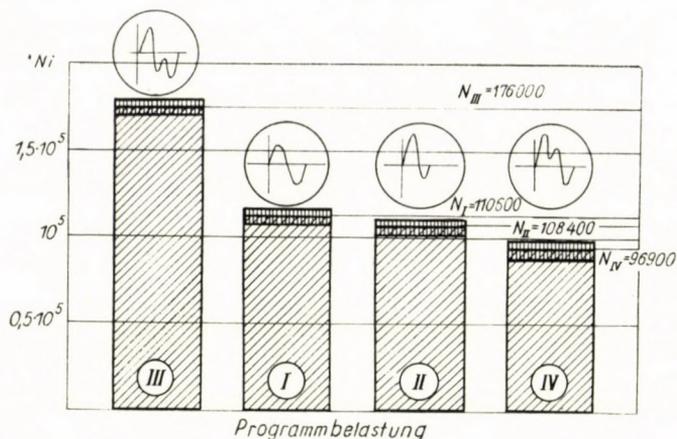


Abb. 5. Graphische Zusammenstellung der erhaltenen Ergebnisse

Unter Berücksichtigung des Wertes für die Zugspannungsdauer kann folgende Abhängigkeit angeschrieben werden:

$$N_I \cdot k_I \cong N_{II} \cdot k_{II} \cong N_{III} \cdot k_{III} \cong N_{IV} \cdot k_{IV} \cong C$$

wo

$$k = \frac{t_r}{t_r + t_s} \text{ ist}$$

Dabei bedeutet

t_r die Dauer der Zugspannung im Zyklus

und

t_s die Dauer der Druckspannung im Zyklus.

Die oben dargestellte Abhängigkeit soll mit großer Vorsicht betrachtet werden, obwohl sie die erhaltenen Ergebnisse absolut richtig wiedergibt. Die Anzahl der durchgeführten Versuche berechtigt jedoch keineswegs, die angeschriebene Gleichung als eine allgemein gültige Abhängigkeit zu betrachten, die die Erscheinungen für alle Fälle der biharmonischen Spannungsspektren erfaßt. Höchstwahrscheinlich wird der Wert C für verschiedene Metalle verschiedenartig ausfallen und wird sich in Abhängigkeit von den Belastungsbedingungen (σ_{\max} , σ_{\min} und R) ändern.

Es ist jedoch unstrittbar, daß je länger die Zugspannungen bei der Konstanz von σ_{\max} , σ_{\min} und R andauern, um so mehr wird sich die begrenzte Ermüdungsfestigkeit verringern. Hieraus ergibt sich die einfache Folgerung, daß die Zugspannungen die ausschlaggebende Rolle im Prozeß der Metallermüdung spielen.

Die Ergebnisse der durchgeführten Versuche können als eine Abhängigkeit für beiderseitige Belastungen formuliert werden.

$$N_i = [f \sigma_{\max} \sigma_{\min} R, t_r(\sigma_{\max})]$$

2. In den Fällen, wo die Konstrukteure einen Einfluß auf den Verlauf der komponenten Spannungssinusoiden ausüben wollen, sollte man die gegenseitige Lage und die Verhältnisse der letzteren zueinander (Größe der Amplitude und Winkel der gegenseitigen Verschiebung) derart wählen, daß die entstehende biharmonische Resultante nicht durch eine allzu lange Dauer der Zugspannung im Zyklus gekennzeichnet werde. Dies ist die erste praktische Schlußfolgerung aus den durchgeführten Versuchen.

Wenn das dargestellte nichtsinusförmige Spektrum der Belastungen (analytisch oder z. B. durch tensometrische Vermessungen dargestellt) bei den sich beiderseitig ändernden Spannungen dadurch gekennzeichnet wird, daß bei $\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}|$ die Dauer der Zugspannungen im Zyklus länger sein wird, dann wird die begrenzte Ermüdungsfestigkeit des derart belasteten Metalls ganz sicher geringer sein als bei dem sinusförmig verlaufenden Spektrum mit $\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}|$. Das ist die zweite praktische Folgerung. Somit dürfte es vorgeschlagen werden, den bisher erwogenen Faktoren, die auf die Metallermüdung einen Einfluß ausüben, noch einen weiteren Faktor hinzuzufügen, und zwar die Dauer der Zugspannungen im Zyklus.

SCHRIFTTUM

1. WAISMAN, I. L.: Factors Affecting Fatigue Strength, Metal Fatigue, 1959
2. ODING, I. A.: Teoria Dyslokacji w metalach i jej zastosowanie, 1961
3. POREBSKI, T.: Niektóre aspekty niesinusoidalnego widma naprężeń zmęczeniowych, dysertacja doktorska 1961, Politechnika Wroclawska

TESTS OF FATIGUE WITH CONSTANT AND PROGRESSIVE LOAD COMPARISON BETWEEN THE SCATTERINGS OF THE RESULTS

U. ROSSETTI
POLITECNICO DI TORINO

Aim of the research

The purpose of research is a systematic study of the methods in fatigue tests with progressive load, through the statistic analysis of results and in comparison with the scatterings remarked in the classic tests with constant load.

Materials used

About 400 test pieces have been prepared with the following materials:

1) Chromium Nickel Steel (38 NCD4):

C = 0,42%; Ni = 0,74%; Cr = 0,67%
Mn = 0,71%; Mo = 0,20%;

heat treated to a resistance of $95 \div 100 \text{ kg/mm}^2$

2) Light alloy (type Ergal 55) :

Cu = 1,70%; Zn = 5,60%; Fe = 0,25%,
Mg = 2,04%; Si = 0,16%;

heat treated to optimum hardness ($R = 55 \text{ kg/mm}^2$)

Experimental modalities

The tests were carried out on PROT-SOMEM rotating flexion machine at a speed of 2800 revolutions per minute.

The test-pieces used belong to the *F. R. 10* type with a 2,59 mm minimum diameter.

Test results

The results obtained in tests on both materials are synthetically illustrated in Fig. 1 and Fig. 2.

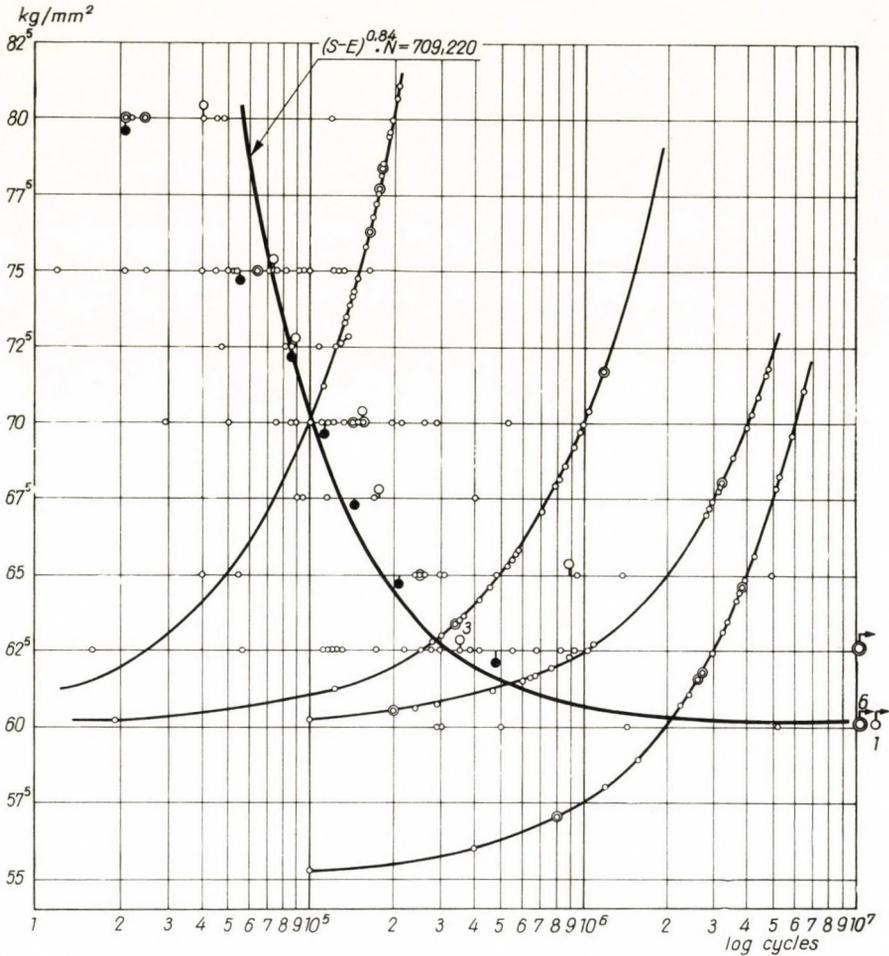


Fig. 1

In Fig. 1 in relation to steel the indications are as follows:

- Results of constant load tests,
- interpolating curve of average values,
- curves indicating the law of load increase and the results of progressive load tests.

The same indications are reported in Fig. 2 in relation to light alloy, to the exclusion of the interpolating curve.

On the whole the following tests were carried out:

Steel with constant load:

- No. 9 tests at 80 kg/mm^2 (for fatigue curve)
- No. 6 tests at 72,5 " "
- No. 5 tests at 67,5 " "

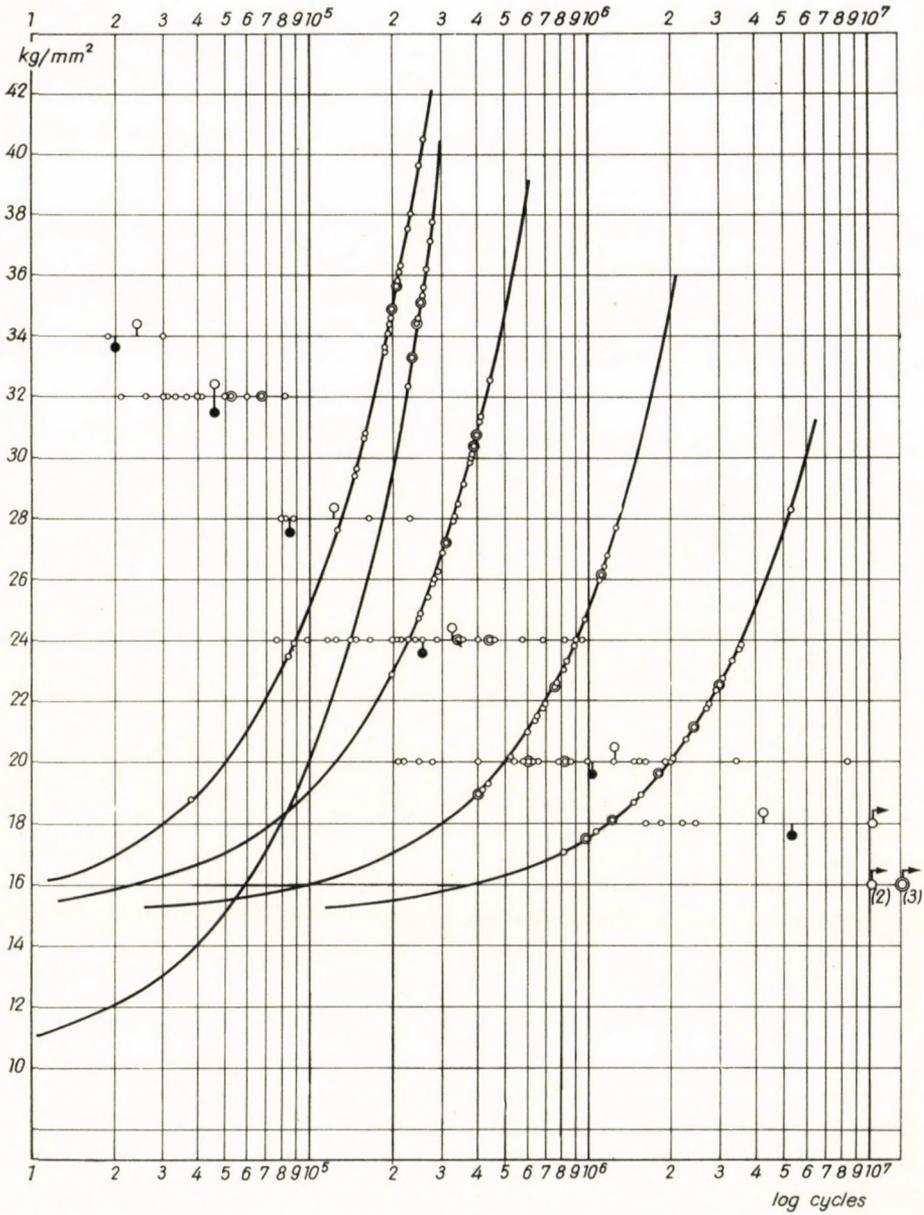


Fig. 2

No. 12 tests at 65,0	„	(for fatigue curve)
No. 12 tests at 60,0	„	„
No. 21 tests at 75,0	„	(for comparison of the scatterings)
No. 21 tests at 70,0	„	„
No. 21 tests at 62,5	„	„
with progressive load:		
No. 25 tests at a speed of 10^{-4} kg/mm ² cycle		(initial load: 60 kg/mm ²)
No. 25 tests at a speed of 10^{-5}	„	„
No. 25 test at a speed of 0.25×10^{-5}	„	„
No. 25 tests at a speed of 0.25×10^{-5}	„	(initial load: 55 kg/mm ²)

Light alloy with constant load:

No. 2 tests at 34 Kg/mm ²		(for fatigue curve)
No. 5 tests at 28	„	„
No. 5 tests at 18	„	„
No. 5 tests at 16	„	„
No. 15 tests at 32	„	(for comparison of the scatterings)
No. 24 tests at 24	„	„
No. 24 tests at 20	„	„
with progressive load:		
No. 24 tests at a speed of 10^{-4} kg/mm ² cycle		(initial load: 15 kg/mm ²)
No. 24 tests at a speed of 0.4×10^{-4} kg/mm ²		„
No. 24 tests at a speed of 10^{-5}	„	„
No. 24 tests at a speed of $0,25 \times 10^{-5}$	„	„
No. 15 tests at a speed of 10^{-4}	„	(initial load: 10 kg/mm ²)

Comment

First of all let us point out that this comment does not mean to be a conclusive interpretation of the studies done on the correlation between constant load and progressive load, but only intends setting forth the main findings obtained from the research.

a) A scattering rather noticeable of the results has been found, which may be due either to the scarce homogeneity of the materials, or to the small model of test pieces adopted in testing. (The size of the test piece also affects — as is known, — the value of the fatigue limit which in steel appears to be about 5% above the value obtained with bigger test pieces. In light alloy, on the contrary, this phenomenon is not noticed.)

b) Through progressive load tests an interesting selective phenomenon appeared. It had already been ascertained that steel shows effects of understressing in tests of low speed load increase, whereas the light alloys show a similar effect at high speed load increase. This research has proved that, by

adopting an initial load coinciding with the average fatigue limit, the steel test pieces, tested at low speed, bring about two different sets of results. A similar fact, though less evident, appears in light alloy test pieces tested at high speed load increase.

This phenomenon seems to express the capacity for a test piece to be "trained" or not, according to the proportion between the initial load and its own fatigue limit.

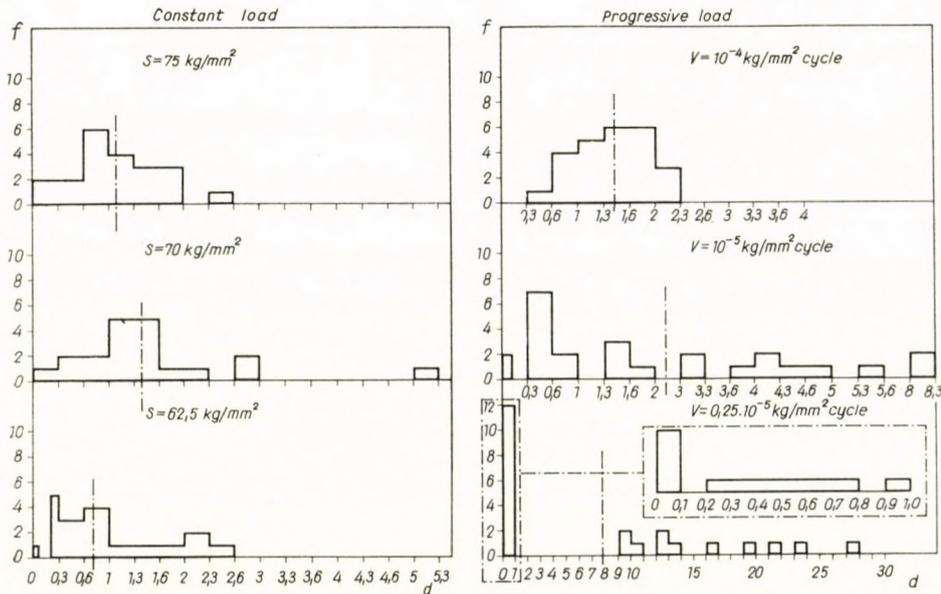


Fig. 3. Steel cumulative damages

It is confirmed by the fact that the steel initial load decreasing by 60 to 55 kg/mm² and the initial load of light alloy by 15 to 10 kg/mm² the phenomenon has a tendency of disappearing.

c) For the comparison between the scatterings remarked in such types of tests (with constant load and progressive load) both the cumulative damage, and the "fatigue limit reckoned E_c " were taken into consideration.

The best curve being adopted, of the type

$$(S - E)^m N = K$$

cumulative damage was reckoned, the statistic distribution of which for steel was indicated in Fig. 3.

On the contrary, assuming MINER's hypothesis (cumulative damage = 1) the corresponding fatigue limit which we called "fatigue limit reckoned E_c " can be reckoned for each test piece (Fig. 4).

From Fig. 3 we can tell the small scattering of progressive load test at high speed (10^{-4}) and at low speed the phenomenon of selection shows up.

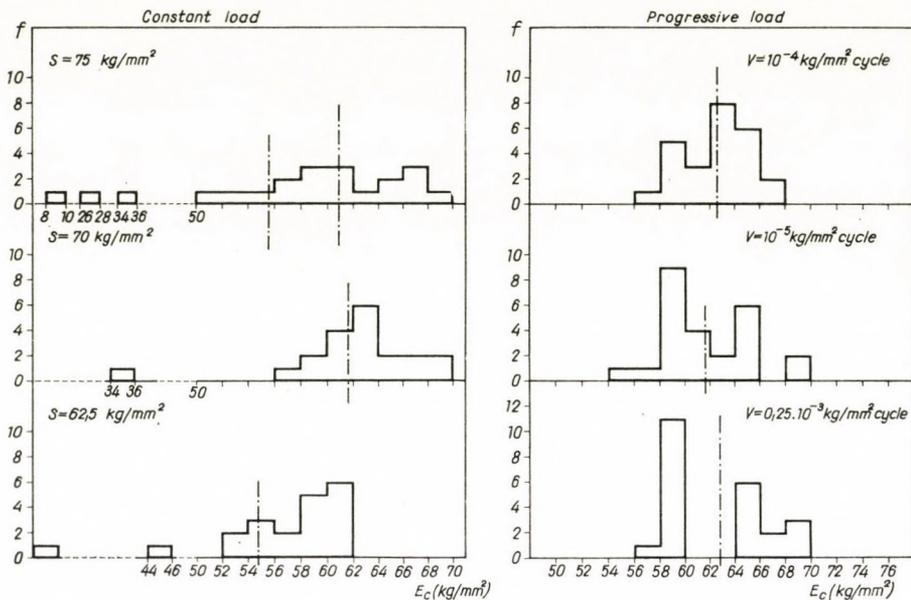


Fig. 4. Steel: E_c

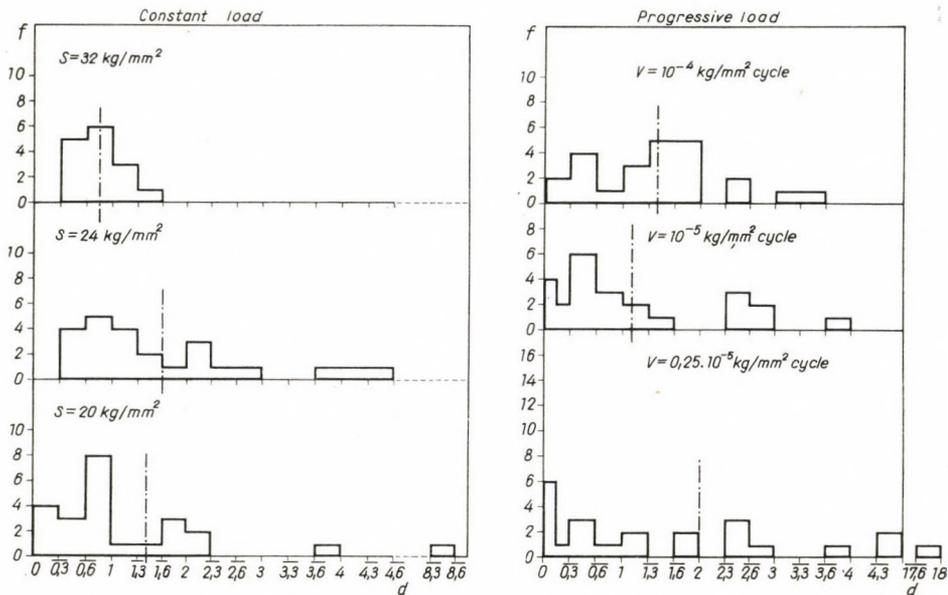
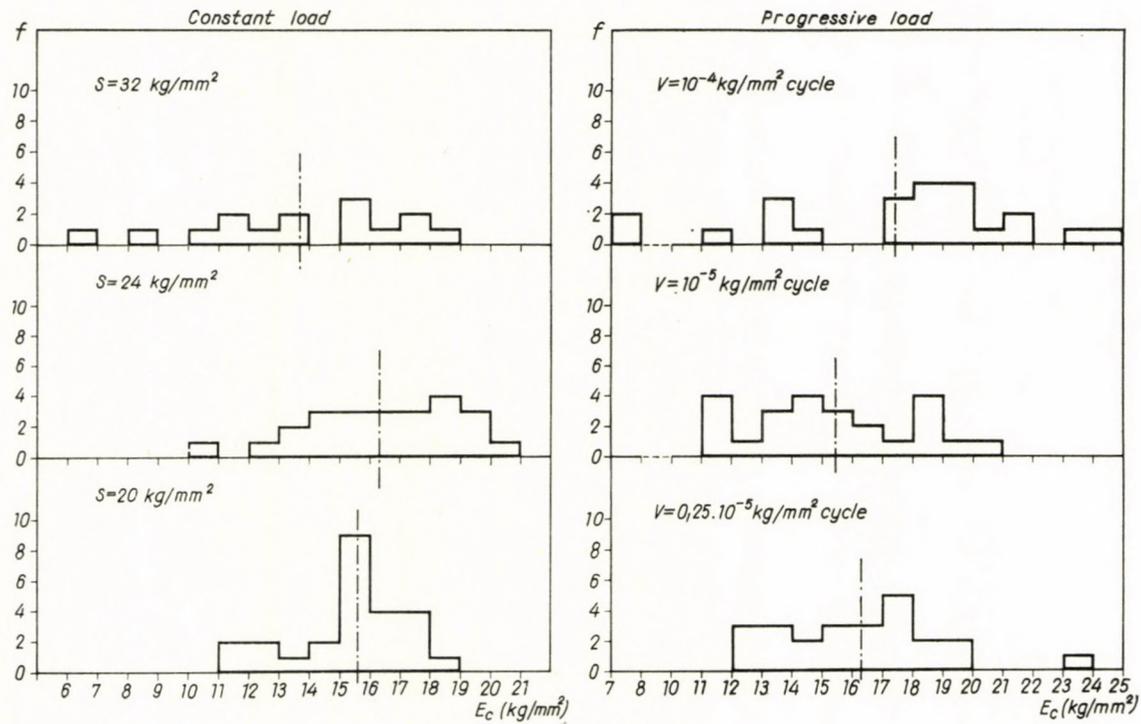


Fig. 5. Ergal cumulative damages

Fig. 6. Ergal: E_c

The scattering of the results (valued through the cumulative damages) in constant load tests increases with the decreasing of the load, whereas in progressive load tests it increases with the lowering of speed in the increasing of the load: no remarkable differences in the scattering have been noticed between the two testing methods.

Fig. 4 proves similar results: the use of " E_c ", however, seems very interesting, both because its own field of variation is more limited, and because it allows a more immediate interpretation of the result. In fact it translates into terms of fatigue limits, the effects of training and of scattering that were remarked (for instance the phenomenon of selection would consist in having singled out a group of test pieces with limit between 56—60, and a group with limit between 64—70 kg/mm²).

Fig. 5 indicates the distribution of cumulative damages of the light alloy: the scattering is not so very different in the two testing methods.

In high constant load testing the scattering is more limited only. It also shows the phenomenon of selection at high speed increasing of the load.

Finally Fig. 6 indicates the distribution of the " E_c " limits: it must be remarked that in the case of light alloy this illustration does not show the same advantages as in the case of steel.

Further studies on the two materials will allow us a deeper knowledge of the mathematical working out of the results and their statistic analysis.

To complete the present research we have foreseen for each material a new set of a hundred test pieces, besides 50 test pieces of a superior diameter on a SHENCK machine.

We think, however, that the results above mentioned may, even now, bring a contribution to the studies on the various fatigue testing techniques, and on the scattering of results.

EFFICIENT METHODS FOR EVALUATING DATA FROM FATIGUE TESTS

Prof. W. WEIBULL

BRÖSARPS STATION, SWEDEN

The purpose of a fatigue test is to determine the relationship between applied load (S), fatigue life (N), and probability of failure (P) within the whole or some specified part of the $S-N$ field. The data from such a test can be presented in different ways, the most convenient one consisting of an average $S-N$ curve and the distribution of the deviations from this curve.

This way of summarizing the results divides the analysis into two quite different evaluation procedures: 1. fitting a curve to given data points, and 2. estimating the parameters of a given or assumed distribution functions.

The first part of the analysis requires an $S-N$ equation and a method for estimating its parameters. An appropriate four-parametric equation and two methods, one graphical and one analytical, will be presented. The application of electronic digital computers to the evaluation problem, including the rational allotment of the specimens to the chosen stress levels and the accuracy of computed parameters, will be demonstrated.

The second part of the analysis requires a distribution function and efficient methods for estimating its parameters. Different functions will be examined. Various methods, including a new one called the method of uniformity, have been appraised with particular regard to bias and efficiency. Some of the results will be indicated. Modifications of the methods due to truncation of the samples and to suspended tests and runouts will be discussed. The advantage of using digital computers for estimation purposes will be illustrated by a few examples.

**IMPACT TESTING AND STRENGTH CALCULATION
AND PROBLEMS OF BRITTLE FRACTURE**

DYNAMISCHE BEANSPRUCHUNGEN UND SPRÖDBRUCH

ТЕОРИЯ ХРУПКОГО ИЗЛОМА

DER EINFLUSS MEHRACHSIGER UND UNGLEICHMÄSSIG VERTEILTER SPANNUNGSZUSTÄNDE AUF DIE WERKSTOFFEIGENSCHAFTEN

L. GILLEMOT

1. Einleitung

Unter jenen Faktoren, die den plastischen oder spröden Zustand eines Werkstoffes bestimmen, unterscheidet man zwei Gruppen. Die eine Gruppe umfaßt jene Faktoren, die durch die Gestalt der Konstruktionselemente und durch die Beanspruchung im Betrieb bestimmt werden. Es sind dies die Geschwindigkeit der Beanspruchung, die Temperatur und der Spannungszustand. Zur zweiten Gruppe gehören die aus der Technologie der Fertigung von Konstruktionselementen stammenden Faktoren, wie etwa die Einwirkung der chemischen Zusammensetzung, der Korngröße, der Kaltverformung, der Alterung usw.

Um also beurteilen zu können, ob ein Werkstoff spröd oder plastisch ist, muß er im selben Zustand geprüft werden, in welchem er als Konstruktionselement zum Einbau gelangt, und ebenso muß sich die Prüfung auf die Einflüsse erstrecken, die die Temperatur, die Formungsgeschwindigkeit und der mehrachsige Spannungszustand ausüben. Bei sonst plastischen Werkstoffen muß nicht notwendigerweise unter der Einwirkung des einen der drei Faktoren ein Sprödbruch eintreten. So haben ERDMANN—JESNITZER und HOFFMANN [1] nachgewiesen, daß es bei Zink durch Erhöhung der Geschwindigkeit allein zu Sprödbrüchen kommen kann, während SIEBEL und MENGES [2] an Stählen bei Zimmertemperatur selbst bei einer Geschwindigkeit von 10^7 kp/mm²/sec keinen Sprödbruch fanden.

Was den Einfluß der Temperatur anbelangt, so sei auf WELLINGER und HOFFMANN [3] verwiesen, die feststellten, daß sich bei Metallen mit kubischem und hexagonalem Raumgitter schon unter dem alleinigen Einfluß der Temperatur derartige Übergänge vom Plastischen zum Spröden finden, während sich bei Metallen mit flächenzentriert kubischem Raumgitter (γ -Eisen, Aluminium, Kupfer) unter der Einwirkung der Temperatur allein ein Sprödbruch nicht hervorrufen läßt.

Aus der Theorie folgt, daß es unter der Einwirkung einer dreiachsigen symmetrischen Zugspannung bei jedem Werkstoff nur Sprödbrüche geben kann, doch läßt sich eine dreiachsige symmetrische Zugspannung experimentell nicht verwirklichen. Die Wirkung mehrachsiger Spannungszustände an

Rohren, die durch Innendruck und gleichzeitig in Längsrichtung auf Zug, Druck oder Verdrehung beansprucht werden, wurde vielfach geprüft [4, 5, 6, 7, 8].

Bei Beurteilung der Sprödbrechneigung eines Werkstoffes pflegt man mindestens zwei der angeführten Faktoren, mitunter jedoch alle drei in Betracht zu ziehen. Den gemeinsamen Einfluß des mehrachsigen Spannungszustandes und der Temperatur prüfte in jüngster Zeit KRISCH [9] an unlegierten Stählen, während SIEBEL und MENGES [2] die gemeinsame Wirkung von Geschwindigkeit und Temperatur an Stählen St 37.11, C 15 und C 60 untersuchten. Ihren Experimenten gemäß tritt der Sprödbbruch bei einer Beanspruchungsgeschwindigkeit von 10^7 kp/mm².sec am Stahl C 15 bei -45°C , am Stahl C 60 bei -50°C und am Stahl 37.11 bei -5°C ein.

Bei Bestimmung des Einflusses der drei Faktoren sind es im allgemeinen die Einwirkungen der Temperatur und der Geschwindigkeit, deren Untersuchung die geringsten Schwierigkeiten verursacht. Als wesentlich komplizierter erweist sich dagegen die Prüfung des mehrachsigen Spannungszustandes, zu der man sich am häufigsten zweier Methoden zu bedienen pflegt. Das eine Verfahren besteht darin, ein unter innerem Druck stehendes Rohr axial auf Zug oder Druck zu beanspruchen, während man beim zweiten Verfahren eingekerbte Probestäbe benützt. In jedem eingekerbten Probestab entsteht jedoch außer dem mehrachsigen auch ein ungleichmäßig verteilter Spannungszustand. Zumeist verwendet man unter den eingekerbten Werkstoffproben den auf Biegung sowie den auf Zug beanspruchten eingekerbten Probekörper. Die bekanntesten Arten der gekerbten Biegeproben sind die CHARPYsche Kerbschlagprobe bzw. die aus dieser entwickelten verschiedenen Kerbschlaguntersuchungen. Ein äußerst großer Nachteil des CHARPYschen Kerbschlagversuchs besteht jedoch darin, daß für ihn das Proportionalitätsgesetz keine Gültigkeit hat, wie dies STRIBEK [10] früher nachgewiesen hat. Dennoch wird der CHARPYsche Kerbschlagversuch zur qualitativen Beurteilung der Werkstoffeigenschaften weit und breit angewendet.

Weit verbreitet sind auch die Kerbzerreißproben (wie etwa die TIPPER-Probe [11], die zur Beurteilung der Schweißbarkeit dient), die sich auch zur Prüfung der Einwirkung von Temperatur und Geschwindigkeit an eingekerbten Reißprobekörpern eignen. Zur Literatur der eingekerbten Reißprobekörper (statische und schlagende Beanspruchung) verweise ich auf den Aufsatz von FLÖßNER und MATTHAES [12].

Zweifellos bildet in der praktischen Werkstoffprüfung die Verwendung eingekerbter Probekörper die bequemste Methode zur Herstellung der mehrachsigen Spannungsverteilung, doch besteht hier stets die Schwierigkeit, daß das Proportionalitätsgesetz ebenso wie beim CHARPYschen Kerbschlagversuch keine Gültigkeit hat, daß man somit in den Ergebnissen zwar wertvolle Aufschlüsse über die Werkstoffeigenschaften erhält, ohne sie jedoch unmittelbar

mit den Ergebnissen von Versuchen an Probekörpern anderer Abmessungen vergleichen zu können. Ebenso wenig lassen sich aus ihnen zahlenmäßige Rückschlüsse für das zu entwerfende Konstruktionselement oder für einen Maschinenteil ziehen. Eben deshalb scheint es von grundlegender Wichtigkeit zu sein, für Zwecke der Untersuchung der Sprödbrucherscheinungen und zur Ermöglichung einer unmittelbaren Verwendung der Meßergebnisse in der Maschinenkonstruktionsarbeit eine Werkstoffkenngröße einzuführen, mit deren Hilfe aus den an einem Probekörper gegebener Größe ermittelten Daten auch Rückschlüsse auf Probekörper jeder beliebigen anderen Abmessung gezogen werden können.

2. Zur Kennzeichnung des Sprödbruchs geeignete Kenngrößen

Zur zahlenmäßigen Beschreibung der Sprödigkeit oder Zähigkeit eines Werkstoffes eignet sich die Kontraktion (Brucheinschnürung), hat doch diese bei einem Werkstoff, der spröde, d. h. ohne vorangehende Deformation zu Bruch geht, offenbar den Wert Null. Die Einführung der Kontraktion als Kenngröße zur Beurteilung der Sprödigkeit von Probekörpern geht auf einen Vorschlag von KUNTZE [13, 14] zurück. Zum Nachweis der Sprödigkeit bzw. Plastizität wurde die Kontraktion als Kenngröße auch von PEITER und ALTMAYER [15], von FLÖSSNER und MATHAES [12], ferner von LIESSNER [16] und SCHWINNING [17] verwendet.

Bei den eingekerbten, auf Zug bzw. bei den eingekerbten auf Kerbschlag beanspruchten Probekörpern pflegt man überdies zur Beschreibung des Überganges vom Plastischen zum Spröden auch die spezifische Arbeit in Betracht zu ziehen. Derartige Untersuchungen führten FLÖSSNER und MATHAES sowie SCHWINNING [12, 17] an eingekerbten, auf Zug beanspruchten Proben, MAURER und MAILÄNDER [18] hingegen an eingekerbten, auf Biegung statisch bzw. dynamisch beanspruchten Probekörpern durch. Die spezifische Arbeit gibt jedoch jeder dieser Autoren in mkp/cm^2 an. Die auf die Oberfläche bezogenen, d. h. in der Dimension mkp/cm^2 ausgedrückten Werte der spezifischen Arbeit können jedoch nur bei Verwendung ein und desselben Probekörpers miteinander verglichen werden. Jedes Meßergebnis hat mithin nur für diesen einen Probekörper Gültigkeit, gibt also für das Verhalten des Werkstoffes nur qualitative Aufschlüsse.

Einen weiteren Fortschritt auf diesem Gebiet bedeuten die Arbeiten von SCHNADT [19], der bei seinen Untersuchungen verschieden tief eingekerbte, auf Kerbschlag beanspruchte Proben benützte, die Meßergebnisse jedoch gleichfalls durch die auf die Oberfläche bezogene spezifische Arbeit ausdrückte. Solcherart lassen sich auch aus den SCHNADTSchen Probekörpern keine quanti-

tativen Rückschlüsse ziehen, und das Proportionalitätsgesetz hat auch für diese Proben keine Gültigkeit.

Eine andere Kenngröße des Sprödzustandes stammt von LUDWIK [20] bzw. von DAWIDENKOW [21]. Dieser Kenngröße zufolge kommt es zum Sprödbruch, wenn die Fließgrenze unter der Einwirkung irgendeines Faktors die Reißfestigkeit erreicht. Bezeichnet man die Reißfestigkeit mit σ_R , die Fließgrenze hingegen mit σ_S , dann kommt es also zum Sprödbruch sobald $\sigma_R - \sigma_S = 0$. Dieser Kriterien bedienen sich u. a. in ihren Arbeiten SIEBEL und MENGES [2] sowie KOCHENDÖRFER und SCHOLL [22].

Im weiteren will ich zur Erfassung der Sprödbruchneigung die auf die Volumeinheit bezogene plastische Deformationsarbeit als Kenngröße des Sprödbruchs einführen. Die auf die Volumeinheit bezogene Brucharbeit, die man beim Zugversuch auch als Kontraktionsarbeit bezeichnen kann, schreibt sich zu

$$A_c = \int_0^{L_1} \frac{P \, dL}{v} = \int_0^{L_1} \frac{P \cdot dL}{F_0 \cdot L_0} = \int_0^{\varepsilon_c} \sigma \cdot d\varepsilon. \quad (1)$$

Dieses Integral läßt sich berechnen, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind. Der einen Bedingung gemäß muß die Kontraktionabhängige mittlere wirkliche Spannung von der Grenze der gleichmäßigen Dehnung bis zum Bruch eine Gerade ergeben [23]. Die zweite Bedingung besteht darin, daß der Spannungsverlauf bis zur Grenze der gleichmäßigen Dehnung in Abhängigkeit von der spezifischen Dehnung annähernd eine Parabel beschreibt. Von diesen Bedingungen ausgehend, nimmt die Berechnung des Integrals gemäß (1) folgende Form an [24, 25]:

$$A_c = \frac{(\sigma_S + 2\sigma_B) \varepsilon_g}{3} + 2\sigma_B (1 + \varepsilon_g) \ln \frac{1 - \psi_c}{1 - \psi_g} - \sigma_B (1 + \varepsilon_g) \left[\frac{\psi_c - \psi_g}{1 - \psi_g} \right] \quad (2)$$

$$A_c = \frac{\sigma'_g \lambda_g}{1 + \lambda_g} + 2\sigma'_g (\lambda_c - \lambda_g) + \sigma'_g e^{\lambda_g} (e^{-\lambda_c} - e^{-\lambda_g}). \quad (3)$$

In Gleichung (2) bedeuten σ_S die Fließgrenze, σ_B die Bruchfestigkeit, ψ_c die Kontraktion beim Bruch, ψ_g hingegen die an der Grenze der gleichmäßigen Dehnungen auftretende Kontraktion und ε_g die gleichmäßige Dehnung selbst. In Gleichung (3) bezeichnen die Glieder σ' die mittlere wirkliche Spannung, λ die logarithmische Dehnung, während die Indizes die gleiche Bedeutung haben wie in (2). Die Formel wurde ursprünglich für glatte Zugversuchs-Probekörper eingeführt. Durch überaus zahlreiche Versuche an den verschiedensten Werkstoffen vermochten wir nachzuweisen, daß die zur Berechnung des Integrals unter (1) erforderlichen beiden Bedingungen auch bei eingekerbten Probekörpern erfüllt sind. Dies geht aus der hier bloß bei-

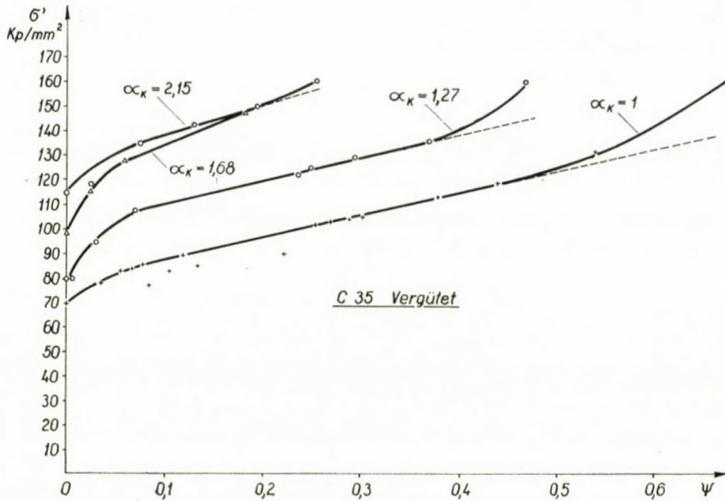


Abb. 1. Kurven der wahren Spannungscontraktion an gekerbten Probekörpern

spielsweise gezeigten Abb. 1 deutlich hervor, in der die Kurve der kontraktionsabhängigen wirklichen Spannung mit großer Genauigkeit gradlinig verläuft. Die Formeln (2) und (3) eignen sich mithin auch zur Berechnung der Kontraktionsarbeit eingekerbter Probekörper, bloß müssen in die Formeln sinngemäß die Festigkeits- bzw. Dehnungskenngrößen des eingekerbten Probekörpers eingesetzt werden.*

4. Kenngröße zur Kennzeichnung der Form des Probekörpers bzw. des als Folge der Einkerbung zustandekommenden mehrachsigen Spannungszustandes

Zur Beschreibung des mehrachsigen Spannungszustandes wurden verschiedene Kenngrößen in Vorschlag gebracht. So empfahl SCHNADT die Einführung einer Zahl π in der Form

$$\pi = \frac{\sigma_R}{\sigma_1},$$

worin σ_R die Vergleichsspannung, σ_1 hingegen die größte Hauptspannung bedeutet [26].

* Anmerkung: Unter Dehnung ist stets die effektive oder örtliche Dehnung zu verstehen, d. h.

$$\epsilon = \frac{L_1 - L_0}{L_0} = \frac{F_0}{F_1} - 1$$

$$\lambda = \ln \frac{L_1}{L_0} = \ln \frac{F_0}{F_1}.$$

Die Dehnungswerte lassen sich also durch Messung der eingekerbten Querschnitte ermitteln.

KOCHENDÖRFER [27] schlägt demgegenüber die Einführung eines Faktors \varkappa vor und schreibt diesen zu

$$\varkappa = 1 - \frac{\sigma_R}{\sigma_1}.$$

Substituiert man in diese Formel das σ_R der MOHRschen Hypothese gemäß, dann hat man

$$\varkappa = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}.$$

KOCHENDÖRFER gibt zugleich die Möglichkeit einer unmittelbaren Messung des Faktors \varkappa an, u. zw. nach folgendem Gedankengang.

Die Bedingungsgleichung für das Fließen im mehrachsigen Spannungszustand schreibt sich zu $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{F_0}$, worin σ_{F_0} die Fließgrenze des Werkstoffes bedeutet. Im mehrachsigen Spannungszustand kann das σ_1 , die größte Hauptspannung, als Maß der Fließgrenze angesehen werden. Ist also $\sigma_1 = \sigma_F$, dann gilt

$$\varkappa_F = 1 - \frac{\sigma_{F_0}}{\sigma_F}.$$

Auf dieser Grundlage hat man die Möglichkeit, den mehrachsigen Spannungszustand durch Messung der Fließgrenze eines glatten und eines eingekeirbten Probekörpers experimentell zu ermitteln.

Eine Mehrachsigenkeitskenngröße ähnlicher Art proponieren SACHS und LUBAHN [28], die zur Bestimmung der Mehrachsigenkeits die Maßzahl

$$\varkappa_{SL} = \frac{\sigma_{Bn} - \sigma_B}{\sigma_{Bn}}$$

in Vorschlag bringen, wobei σ_B die Bruchfestigkeit des glatten, σ_{Bn} hingegen diejenige des eingekeirbten Probekörpers bedeutet.

Zwischen den von KOCHENDÖRFER bzw. von SACHS und LUBAHN vorgeschlagenen Mehrachsigenkeitskenngrößen besteht unseren Messungen nach zumindest eine gewisse Korrelation, obschon – wie dies aus der Abbildung hervorgeht – \varkappa_F nicht gleich \varkappa_{SL} ist (Abb. 2). Beide Kenngrößen haben jedoch den Nachteil, daß sie für jeden einzelnen Fall gesondert experimentell ermittelt werden müssen. Es liegt daher auf der Hand, zur Kennzeichnung des Spannungszustandes die Einführung einer Kenngröße anzustreben, die lediglich nur von den geometrischen Abmessungen des Probekörpers hängt. Hierfür scheint sich die Formzahl am besten zu eignen.

Bekanntlich drückt die Formzahl die Beziehung zwischen der als Folge der ungleichmäßigen Spannungsverteilung auftretenden größten Spannung σ_{\max} einerseits und der nominellen Durchschnittsspannung andererseits aus. In mittelbarem Zusammenhang steht sie auch mit dem Gradienten der Span-

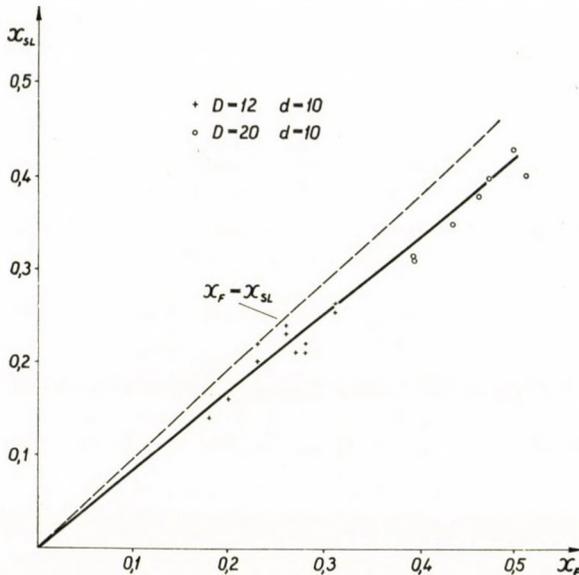


Abb. 2. Zusammenhang zwischen der von KOCHENDÖRFER vorgeschlagenen und der SACHS-LUBAHNSchen Mehrachsigeitszahl

nung. Ihre Anwendung als Kenngröße der Spannungsverteilung empfiehlt sich auch deshalb, weil der Bruch nach der Auffassung von SACHS an zwei verschiedenen Probekörpern nur dann bei gleichen Nennspannungen eintreten wird, wenn die Spannungsgradienten bei der Einkerbung an beiden Probekörpern den gleichen Wert haben und wenn die Einkerbungen kongruent sind. Unter Zugrundelegung dieses Grundsatzes erhielt LUBAHN [29] innerhalb einer 8%-igen mittleren Abweichung an einer mittig eingekerbten Scheibe und an einem flachen Zugversuchs-Probekörper die gleichen Ergebnisse. Die Tatsache jedoch, daß die Einkerbungen in Form und Spannungsverteilung genau übereinstimmen müssen, setzt der Anwendbarkeit des SACHSschen Prinzips enge Schranken.

Unter den hier beschriebenen Kenngrößen ist es also jedenfalls die Formzahl, die die bequemste Anwendungsmöglichkeit zu bieten scheint, u. zw. nicht zuletzt, weil sie sich für Einkerbungen jeder beliebiger geometrischer Form berechnen bzw. messen läßt, ja für die meisten in der Ingenieurpraxis üblichen Kerben bekannt ist und einfach Tabellen entnommen werden kann [30]. Ein weiterer Vorzug der Formzahl besteht darin, daß sie von den Werkstoffeigenschaften unabhängig ist, ja daß ihre Berücksichtigung bis zu einem gewissen Grad der Anwendung des SACHS-LUBAHNSchen Kongruenzprinzips gleichkommt.

Auf Grund solcher Überlegungen setzten wir uns also die Ausarbeitung einer Werkstoffprüfmethode zum Ziel, die es gestattet, die Resultate von Messungen an eingekerbten Zugversuchs-Prüfkörpern derart zu verallgemeinern,

daß sie für Konstruktionselemente jeder beliebigen anderen Größe Anwendung finden können. Zu diesem Zweck werden wir im Sinne obiger Erwägungen die Kontraktionsarbeit als Kenngröße der Plastizität benutzen, die geometrische Form der Probekörper hingegen durch die Formzahl a_K beschreiben.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich darauf, die Einwirkung der einkerbungsbedingten mehrachsigen und ungleichmäßigen Spannungsverteilung bei Zimmertemperatur zu untersuchen, ferner bei einzelnen Werkstoffen den gemeinsamen Einfluß der mehrachsigen und ungleichmäßigen Spannungsverteilung sowie der Temperatur zu prüfen.

4. Versuchsmaterial

Als Versuchsmaterial dienten uns Weichstahlbleche gemäß ungarischen Normen St 37, A 50.35.21, A 50.21, ferner weicher bzw. gehärteter Rundstahl C 35. Unsere eigenen Meßresultate ergänzten wir durch die aus Messungen an Titan gewonnenen Ergebnisse von G. W. GEIL und N. L. CARWILE [31], die bei ihren Experimenten zwar nicht die Kontraktionsarbeit bestimmten, jedoch die Ergebnisse ihrer an Titan vorgenommenen Zugversuche tabellarisch mit einer so hochgradigen Genauigkeit angegeben haben, daß aus diesen Tabellen die Werte der Kontraktionsarbeit anhand der Gleichung (3) rechnerisch ermittelt werden konnten.

Unsere eigenen Messungen nahmen wir an zylindrischen Probekörpern gemäß Abb. 3 vor. Ihr äußerer Durchmesser schwankte zwischen 12 und 27 mm,

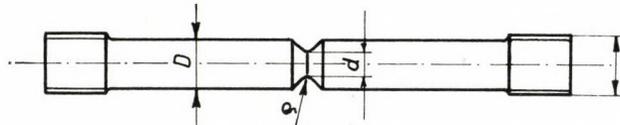


Abb. 3. Schematische Darstellung des bei den Versuchen verwendeten Probekörpers

ihr gekerbter Durchmesser zwischen 8 und 25 mm, der Abrundungsradius hingegen zwischen 100 und 0,2 mm. In je einer Prüfkörperserie mit konstantem Quotienten $\frac{D}{d}$ gelangten wir durch Variierung des Abrundungshalbmessers zu den benötigten unterschiedlichen Formzahlwerten. Auf diese Weise schwankten diese innerhalb der einzelnen Serien zwischen 1 und 6. Abrundungen mit kleinerem Halbmesser als 0,2 mm in die Experimente mit einzubeziehen schien uns wegen der Schwierigkeiten einer genauen Bearbeitung nicht ratsam.

GEIL und CARWILE hatten bei ihren Messungen an Titan einen konstanten Abrundungshalbmesser ($\varrho = 0,05$ inch), und ebenso war der Innendurchmesser d ihrer Probekörper mit 0,350 inch stets unverändert, wogegen der äußere

Durchmesser zwischen 0,360 inch und 0,990 inch schwankte. Bei ihren Versuchen bewegten sich die Formzahlwerte bloß innerhalb der Grenzen von 1–2,09.

Bei den in einem verhältnismäßig weiten Größenbereich veränderlichen Probekörpern unserer Versuche müssen je nach den geprüften Werkstoffen zwei Basisfälle unterschieden werden. Bei einzelnen Probekörpern und Werkstoffen erreichte die Spannung im ungekerbten Teil selbst unter der größten Krafteinwirkung die Fließgrenze nicht, während bei anderen Probekörpern und Werkstoffen auch im glatten Teil des Probekörpers Spannungen auftraten, die die Fließgrenze überschritten. Diese beiden Fälle müssen im weiteren voneinander scharf auseinandergehalten werden.

5. Verlauf der Kontraktionsarbeit in Abhängigkeit von der Formzahl

Aus den Weichstählen C 35, A 50.21, A 50.35.21, A 37.21 sowie aus dem gehärteten Stahl C 35 fertigten wir die bereits beschriebenen Probekörper mit unterschiedlichen Durchmessern und unterschiedlichen Kerbhalmessern an. Die Probekörper lagen mit einem verschraubten Spannkopf in einer Einspannvorrichtung mit Kugelgelenk.

Im Laufe der Experimente ermittelten wir die bei Zerreißversuchen üblichen Werkstoffkenngrößen, wie Fließgrenze, Bruchfestigkeit, gleichmäßige Dehnung und Kontraktion. Die Tatsache, daß die üblichen Festigkeitskenngrößen (z. B. das σ_B) oder die für die Plastizität kennzeichnende Kontraktion (ψ) Funktionen der Form des Probekörpers darstellen, soll durch Abb. 4 veranschaulicht werden. Wie aus dieser Abbildung ersichtlich, liefern die Probekörper mit gleichen Kerbdurchmessern je nach ihren Außendurchmessern ganz unterschiedlich verlaufende Kurven, u. zw. sowohl für die Bruchfestigkeit als auch für die Kontraktion. Abgesehen von der Streuung der Meßergebnisse fallen die an Probekörpern mit gleichen Kerb- und Außendurchmessern gemessenen Festigkeits- oder Kontraktionswerte auf eine bestimmte Kurve, wogegen der Verlauf der Kurven durch den eingekerbten Durchmesser weitgehend beeinflußt wird.

Für die weiteren Besprechungen ist es ferner bemerkenswert, daß sich am Probekörper mit einem Durchmesser von 27 mm eine geringere Festigkeit, jedoch eine größere Kontraktion ergab.

Weitgehend ähnliche Ergebnisse lieferten auch die Versuche am Stahl C 35. An den Probekörpern mit einem äußeren Durchmesser von 27 mm und einer lichten Weite von 20 mm bzw. mit einem äußeren Durchmesser von 27 mm und einem Innendurchmesser von 25 mm entsteht bereits bei verhältnismäßig niedrigem Abrundungsradius, d. h. bei relativ kleinen a_k -Werten im nicht eingekerbten Teil des Probekörpers eine die Fließgrenze des Werkstoffes

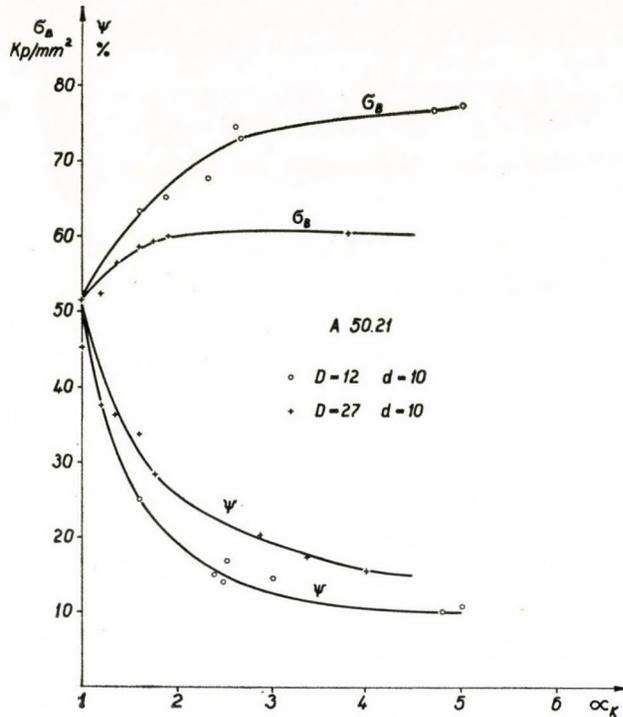


Abb. 4. Bruchfestigkeits- und Kontraktionskurven von Probekörpern mit unterschiedlichen Durchmessern in Abhängigkeit von der Formzahl (Werkstoff: A 50.21)

überschreitende Spannung. Die Diagrammkurven sind von diesem Punkt an gestrichelt ausgezogen. Besonders beachtenswert ist die Tatsache, daß die Kontraktion in diesen Fällen stark absinkt (Abb. 5).

Ähnliche Resultate ergaben auch die Versuche an den sonstigen geprüften Werkstoffen. Aus diesen Daten läßt sich die Schlußfolgerung ziehen, daß die Kontraktion oder irgend eine andere aus dieser abgeleitete Kenngröße, die effektive Dehnung oder die logarithmische effektive Dehnung bei eingekerbten Probekörpern keineswegs eindeutig durch die Formzahl des Probekörpers gekennzeichnet werden kann. Eben deshalb erstreckt sich die Gültigkeit jener Versuche [12, 15, 16 und 17], bei denen die Kontraktion als Kenngröße der Plastizität bzw. des Sprödzustandes diente, ausschließlich auf die geprüfte Probekörperform, die Ergebnisse dieser Versuche können also keineswegs verallgemeinert werden.

Da es sich um eine seit langem bekannte Tatsache handelt, erübrigt es sich, im einzelnen zu beweisen, daß die auf die Oberfläche bezogene Brucharbeit gleichfalls von den Abmessungen des Probekörpers abhängt. Demgegenüber stellt die Kontraktionsarbeit unseren Versuchen zufolge lediglich eine Funktion der Formzahl dar.

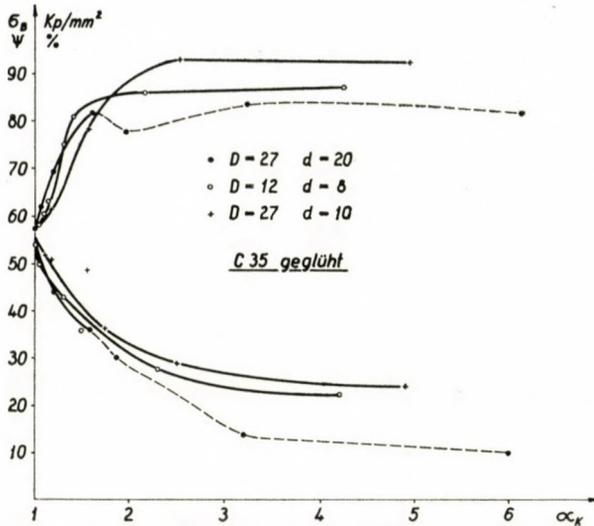


Abb. 5. Formzahlabhängiger Verlauf der Bruchfestigkeits- und der Kontraktionskurven an Probekörpern mit unterschiedlichen Durchmessern (Werkstoff: C 35 Rundstahl, gegläht)

Die Ergebnisse unserer Versuche am Stahl C 35 sind in Abb. 6 dargestellt. Wie diese Abbildung erkennen läßt, besteht zwischen Formzahl und Kontraktionsarbeit zumindest eine enge Korrelation. Die Meßpunkte, wie sie sich aus den in ihren Abmessungen unterschiedlichen Probekörpern ergeben, sind verschiedenartig eingetragen. Für die im angegebenen Bereich unterschiedlichen Probekörperabmessungen fallen die Meßpunkte mit einer sehr geringen Streuung auf ein und dieselbe Kurve, während der Abb. 5 zufolge die Festigkeits- bzw. Kontraktionswerte auf Kurven liegen, die einen vom Durchmesser des Probekörpers abhängigen, charakteristisch unterschiedlichen Verlauf nehmen. Auf der Abbildung sind mit einer gestrichelten Linie die Kontraktionsarbeitswerte jener Probekörper verbunden, bei denen im Verlauf der Versuche im nicht eingekerbten Teil eine die Fließgrenze überschreitende Spannung auftrat. Diese Probekörper lieferten charakteristisch abweichende Werte, weshalb im weiteren nur jene Meßergebnisse behandelt werden sollen, bei denen die Spannung im glatten Teil des Probekörpers die Fließgrenze nicht überschritten hat.

Völlig gleiche Ergebnisse wurden in dieser Hinsicht beim vergüteten Stahl C 35 (Abb. 7) sowie beim Weichstahl A 50.21 (Abb. 8) und auch beim Weichstahl A 37.21 (Abb. 9) registriert. Auf dieser letzteren Abbildung sind die am Stahl 37.21 in Längs- bzw. in Querrichtung gemessenen Werte der Kontraktionsarbeit aufgetragen.

Solcherart scheint also zwischen Kontraktionsarbeit und Formzahl innerhalb der bisher untersuchten Grenzen zumindest eine gute Korrelation zu

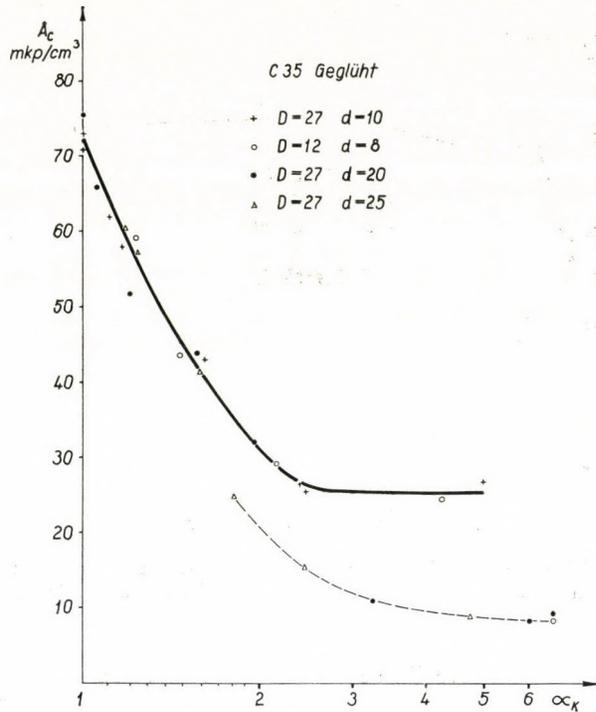


Abb. 6. Kontraktionsarbeitskurven in Abhängigkeit von der Formzahl, gemessen an Probekörpern mit unterschiedlichen Durchmessern (Werkstoff: C 35 Rundstahl, bei 700 °C geglüht)

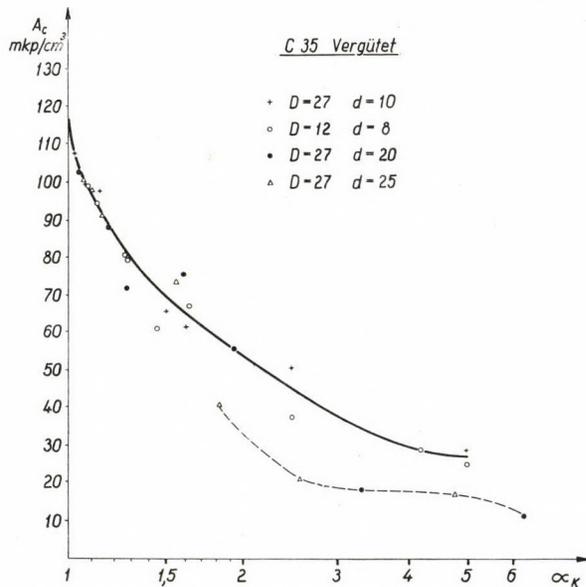


Abb. 7. Formzahlabhängiger Verlauf der Kontraktionsarbeitskurven von Probekörpern mit unterschiedlichen Durchmessern (Werkstoff: C 35 Rundstahl, von 840 °C in Wasser abgeschreckt, bei 650 °C angelassen)

bestehen. Da die Formzahl lediglich die Ungleichmäßigkeit und nicht die Mehrachsichtigkeit der Spannungsverteilung charakterisiert, bleibt gesondert zu untersuchen, welchen Einfluß die Mehrachsichtigkeit der Spannungsverteilung ausübt. Zur Beschreibung der Mehrachsichtigkeit will ich mich im weiteren der Kenngröße κ_{LS} bedienen, wie sie von SACHS und LUBAHN vorgeschlagen wurde. Zur Veranschaulichung des Einflusses der Mehrachsichtigkeit eignen sich besonders die an Titan gewonnenen Meßergebnisse von GEIL und CARWILE, zumal sie bei ihren Versuchen Probekörper mit konstantem gekerbtem Durchmesser und un-

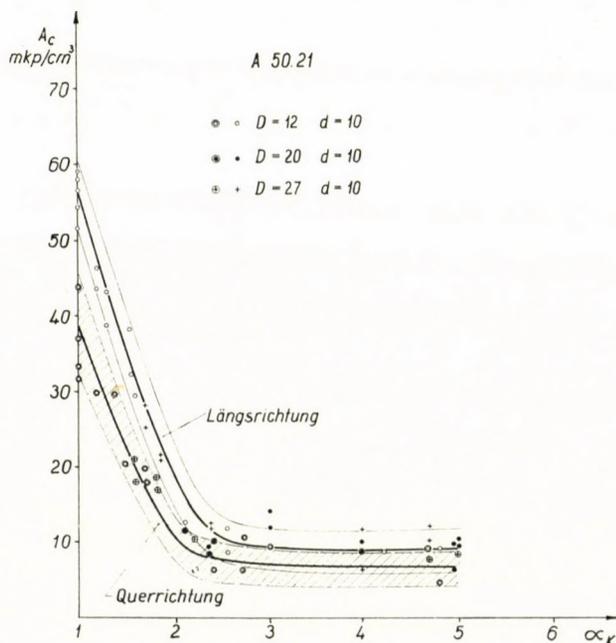


Abb. 8. Formzahlabhängiger Verlauf der Kontraktionsarbeitskurven von Probekörpern mit unterschiedlichen Durchmessern (Werkstoff: A 50.21 Blech, bei 700 °C geblüht)

verändertem Abrundungshalbmesser benützten und nur die Außendurchmesser der Probekörper variierten. Bei genügend großem Außendurchmesser erfährt die Formzahl kaum noch eine Veränderung, während die Mehrachsichtigkeit eine sehr bedeutende Änderung zeigt. In Abb. 10 ist der Verlauf der Kontraktionsarbeitskurve in Abhängigkeit von der Formzahl sowie die Kurve der von SACHS und LUBAHN vorgeschlagenen Mehrachsichtigkeitszahl (gestrichelte Linie) aufgetragen. Sie läßt eindeutig erkennen, daß die Kontraktionsarbeit bei Formzahlen zwischen 1,9 und 2,1 praktisch konstant bleibt, während der Faktor der Mehrachsichtigkeit bei Werten zwischen 0,24 und 0,39 steil ansteigt. Solcherart bleibt also der Wert der Kontraktionsarbeit selbst bei einem mehr als 60%igen Anwachsen des Mehrachsichtigkeitsfaktors unbeeinflußt.

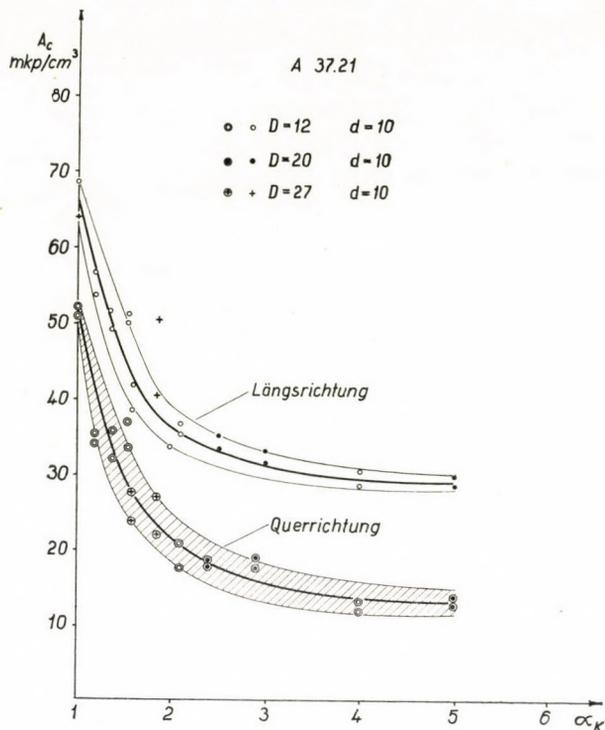


Abb. 9. Kurve der Kontraktionsarbeit von Probekörpern mit unterschiedlichen Durchmessern in Abhängigkeit von der Formzahl (Werkstoff: A 37.21 Blech, bei 700 °C gegläht)

Ein Gleiches beweisen auch unsere eigenen Versuchsreihen, bei denen in je einer Versuchsserie Probekörper mit gleichem Außen- und Kerbdurchmesser aber mit unterschiedlichen Formzahlen verwendet wurden, bei denen sich also nur der Halbmesser ρ änderte. Abb. 11 veranschaulicht den Verlauf der Kontraktionsarbeitskurve am Stahl A 37.21 u. zw. in voller Übereinstimmung mit Abb. 8, doch sind in der Abbildung mit gestrichelter Linie auch die Mehrachsigekeitszahlen der Probekörper mit den Durchmessern von 27/10 und 12/12 mm aufgetragen. Die α_{SL} -Werte der Probekörperserien mit den beiden unterschiedlichen Außendurchmessern ergeben zwei voneinander weitgehend abweichende Kurven, wogegen die die Kontraktionsarbeit anzeigenden Punkte mit einer ganz geringfügigen Streuung an der gleichen Kurve liegen.

Diese Ergebnisse gestatten also die Schlußfolgerung, daß der Wert der Kontraktionsarbeit bei einem gegebenen Werkstoff durch die Formzahl eindeutig bestimmt ist. Damit besteht die Möglichkeit, den Wert einer an einem Laboratoriums-Prüfstab mit gegebener Formzahl gemessenen Kontraktionsarbeit derjenigen jedes beliebigen anderen Probekörpers oder Konstruktionselementes gleicher Formzahl mit einer den praktischen Anforderungen genügenden Genauigkeit gleichzusetzen.

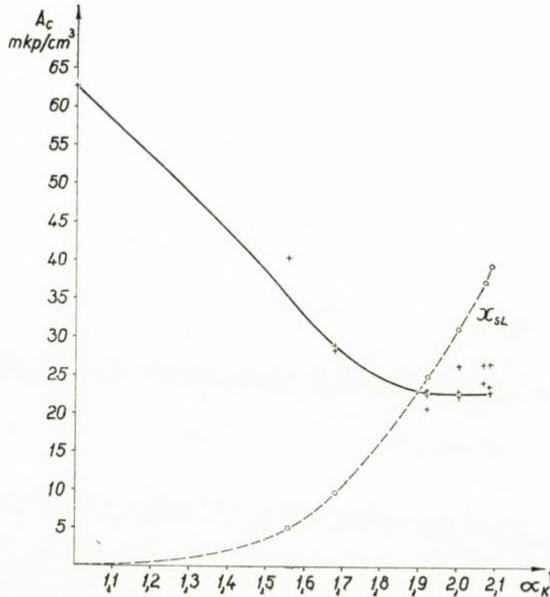


Abb. 10. Formzahlabhängiger Verlauf der Kontraktionsarbeitskurven von Probekörpern mit gleichbleibendem Kerbradius (Werkstoff: Titan). Berechnet aus den Ergebnissen der Versuche von GEIL und CARWILE

Da die Kontraktionsarbeit die Arbeit der plastischen Verformung darstellt, ist ihr Wert beim Sprödbruch offenbar gleich Null. Je größer also ziffernmäßig der Wert der Kontraktionsarbeit in einem durch die Formzahl gekennzeichneten mehrachsigen und ungleichmäßigen Spannungszustand ausfällt, desto kleiner ist die Gefahr eines Sprödbruches.

6. Einfluß der Wärmebehandlung

Die bei den Versuchen verwendeten Weichstähle wurden bei einer Temperatur von 700° C eine Stunde lang angelassen, während wir eine zweite Serie von der Austenisierungstemperatur in kaltem Wasser abschreckten. Den Verlauf der Kontraktionsarbeitskurve von geglühten und in Wasser gehärteten Weichstählen in Abhängigkeit von der Formzahl zeigt Abb. 12 und 13. Wie aus Abb. 12 und 13 erhellt, liegt die Kontraktionsarbeit der Stähle A 50.21 und A 50.35.21 schon bei Kerben mit verhältnismäßig niedriger Formzahl sehr nahe bei Null, bei diesen Stählen besteht mithin die Gefahr von Sprödbrüchen. Derartige oder annähernd ähnliche Abkühlungsgeschwindigkeiten können sich beispielsweise beim Schweißen der in Rede stehenden Stähle ergeben, weshalb bei diesen Stahlsorten z. B. in geschweißten Konstruktionen die Gefahr von Sprödbrüchen gegeben ist [32].

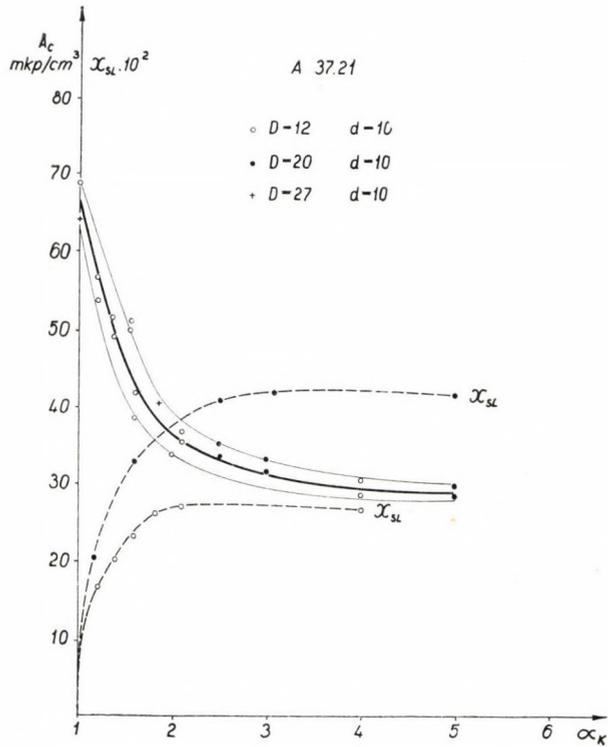


Abb. 11. Mehrachsichtigkeitzahlen in Abhängigkeit von der Formzahl, gemessen an Probekörpern mit Durchmessern von 27/10 und 12/8 mm (Werkstoff: A 37.21. Die Kontraktionsarbeitskurve ist der Abb. 9 entnommen)

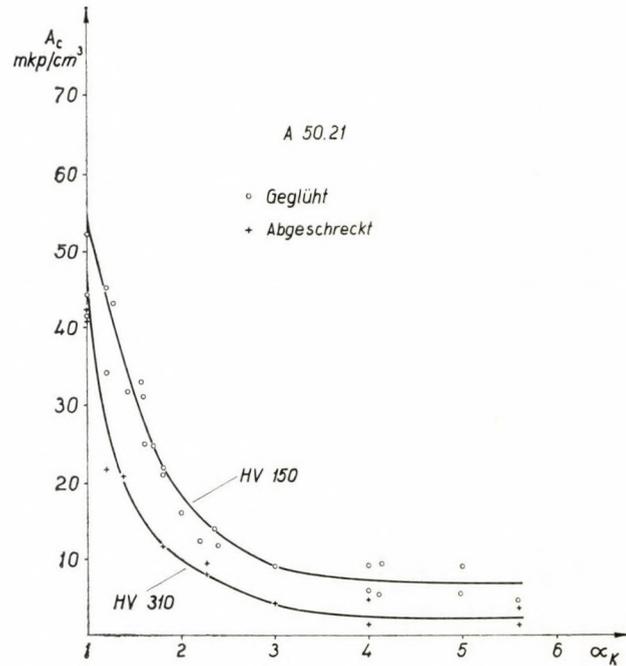


Abb. 12. Kontraktionsarbeitskurve weichgeglühten bzw. in Wasser abgeschreckten Stahles A 50.21 in Abhängigkeit von der Formzahl

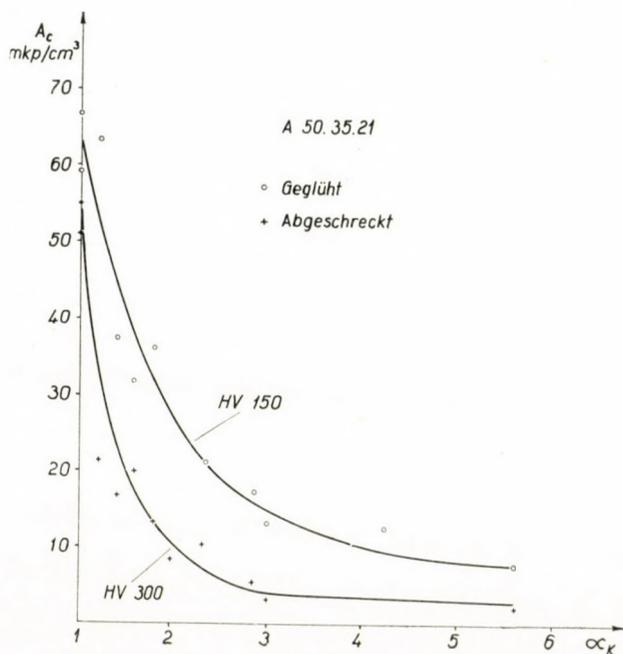


Abb. 13. Formzahlabhängiger Verlauf der Kontraktionsarbeitskurve weichgeglühten bzw. in Wasser abgeschreckten Stahles A 50.35.21

Als Beispiel für die Versuche an vergüteten Stählen seien die Experimente am Stahl C 35 erwähnt. Nach einer von 840 °C durchgeführten Härtung in Wasser wurden die Probekörper bei unterschiedlichen Temperaturen angelassen, worauf wir den Verlauf der Kontraktionsarbeitskurve in Abhängigkeit von der Formzahl auftrugen. Wie theoretisch zu erwarten war, sind die bei höheren Temperaturen angelassenen Stähle weniger kerbempfindlich (Abb. 14).

7. Einfluß der Temperatur

Den Einfluß der Temperatur auf die Kontraktionsarbeit untersuchten wir an Stahl C 45, der bei 840 °C gehärtet und bei 650 °C angelassen worden war. Die Versuchstemperaturen betragen +30, -20, -60 und -80 °C. Die Ergebnisse sind in Abb. 15 aufgetragen.

Die Kontraktionsarbeit glatter Probekörper sinkt in Abhängigkeit von der Temperatur um ein geringes ab, doch bleibt der Einfluß der Temperatur unbedeutend. Bei Formzahlen über 2 ist eine temperaturabhängige Änderung der Kontraktionsarbeit im untersuchten Temperaturbereich kaum zu beobachten, eine Feststellung, die qualitativ auch eine Übereinstimmung mit den Meßergebnissen KOCHENDÖRFERS [33] zeigt, der bei Weichstählen gleichfalls nachgewiesen hat, daß sich die Kontraktion bis -80 °C nur unbedeutend

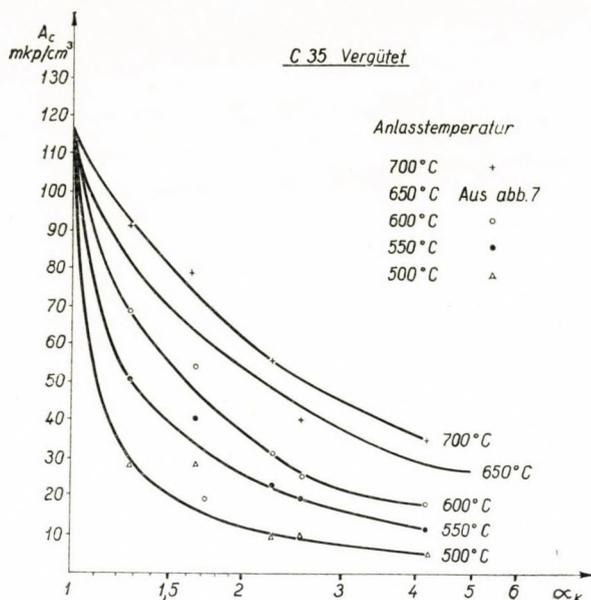


Abb. 14. Formzahlabhängiger Verlauf der Kontraktionsarbeitskurve (Werkstoff: Stahl C 35 von 840 °C in Wasser abgeschreckt und bei verschiedenen Temperaturen angelassen)

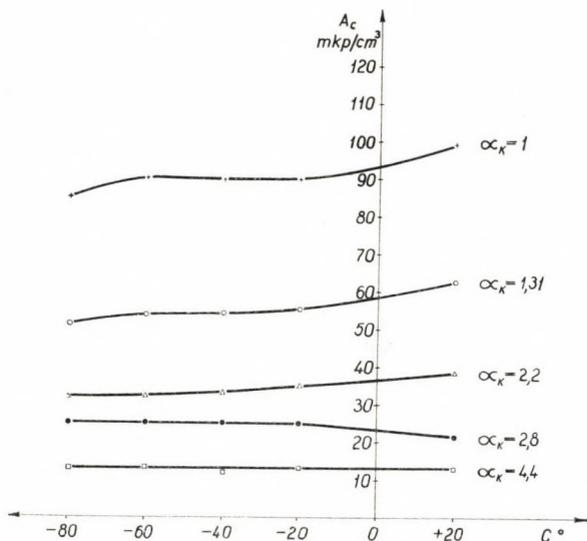


Abb. 15. Formzahl- und temperaturabhängiger Verlauf der Kontraktionsarbeitskurve (Werkstoff: C 35, von 840 °C in Wasser abgeschreckt und bei 650 °C angelassen)

ändert. Die Spröd-Übergangstemperatur des vergüteten Stahles C 35 liegt somit selbst bei einer Kerbe mit der Formzahl $\alpha_K = 4,5$ unter -80 °C.

Weit empfindlicher reagiert auf Temperaturunterschiede das Titan. GEIL und CARWILE [31] führten ihre Messungen auch bei -78 und -196 ° durch.

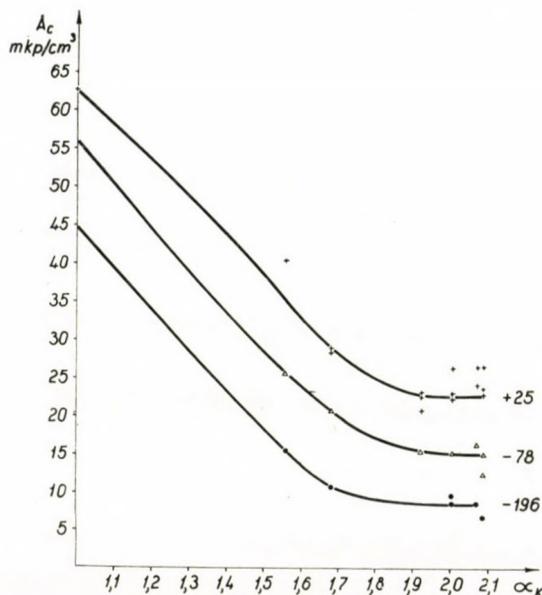


Abb. 16. Einkerbungs- und temperaturabhängiger Verlauf der Kontraktionsarbeitskurve. (Berechnet aus den Ergebnissen der Versuche von GEIL und CARWILE)

Rechnet man ihre Meßergebnisse auf die Kontraktionsarbeit um, dann ergeben sich in Abhängigkeit von der Formzahl drei annähernd parallele Kurven, was sich mit den Feststellungen über Metalle mit hexagonalem Raumgitter deckt [34, 3] (Abb. 16).

Metalle mit hexagonalem Raumgitter zeigen hinsichtlich der Sprödbruchneigung eine wesentlich höhere Temperaturempfindlichkeit als Metalle mit raumzentriert kubischem oder oberflächenzentriert kubischem Raumgitter.

8. Schlußfolgerungen

Die Ergebnisse der zur Untersuchung der Sprödbruchneigung entwickelten Verfahren lassen sich für gewöhnlich nicht verallgemeinern, weil die gewonnenen Zahlenwerte lediglich für einen bestimmten Probekörpertyp gültig sind. Gleichviel, ob man nun bei eingekerbten Zug- oder Biegeversuchs-Probekörpern die Kontraktion oder die auf die Oberfläche bezogene spezifische Arbeit als Kenngröße der Plastizität ansieht, die Ergebnisse lassen sich keineswegs für andere Probekörpergrößen verallgemeinern. Die auf die Volumeinheit bezogene spezifische Arbeit, die sogenannte Kontraktionsarbeit stellt jedoch im Falle eingekerbter Probekörper lediglich eine Funktion der durch die geometrischen Abmessungen bestimmten Formzahl dar. Wie groß auch immer der äußere bzw. der an der Kerbstelle gemessene Durchmesser, bzw. der Rundungsradius

ist, zwei Probekörper ergeben stets dieselbe Kontraktionsarbeit, wenn sie dieselbe Formzahl haben. Die Kerbempfindlichkeit eines Werkstoffes läßt sich durch die Kontraktionsarbeit eindeutig beschreiben. Da der Wert der Kontraktionsarbeit innerhalb der untersuchten Grenzen in erster Reihe eine Funktion der Formzahl darstellt, spielt die Mehrachsigkeit der Spannungsverteilung in diesem Rahmen eine ganz untergeordnete Rolle.

Die Kontraktionsarbeit von Stählen mit raumzentriert kubischem Raumgitter ändert sich mit der Temperatur nur sehr geringfügig, während die Kontraktionsarbeit des Titans mit hexagonalem Raumgitter mit sinkenden Temperaturen stark abnimmt.

SCHRIFTTUM

1. ERDMANN—JESNITZER, F., HOFFMANN, W.: Z. für Metallkunde **34**, (1942) 216, **35**, (1943) 211, **39**, 65 (1948).
2. SIEBEL, E.; MENGES, G.: Archiv f. Eisenhüttenwesen **28**, 31 (1957).
3. WELLINGER, K., HOFFMANN, Z.: Metallkunde **39**, 233 (1948).
4. LODE, W.: Univ. Illinois Bull. 85.
5. ROŠ, M., EICHINGER, A.: Eidg. Mat. Prüf. Anstalt, Zürich, Bericht 172 (1949).
6. LESSELS, J. M., MCGREGOR C. W.: 5th Int. Congr. Applied Mech. 201. (1939).
7. SIEBEL, E., MAIER, A.: Z. V. D. I. **77** (1933) 1345.
8. MARIN, J., HU, L. W.: ASTM Proc. 1098 (1952).
9. KRISCH, A.: Archiv f. Eisenhüttenwesen **31**, 113 (1960).
10. STRIBECK, R.: Z. V. D. I. **50**, 57 (1915).
11. TIPPER, C. F.: British Welding Journal **3**, 435 (1956).
12. FLÖSSNER, H., MATTHAES, K.: Schweizer Archiv 249 (1957).
13. KUNTZE, W.: Technik, **3**, 432 (1948).
14. KUNTZE, W.: Archiv Eisenhüttenwesen **22**, 387 (1951).
15. PEITER, A., ALTMAYER, G.: Archiv f. Eisenhüttenwesen **31**, 427 (1960).
16. LIESSNER, O.: Archiv f. Eisenhüttenwesen, **24**, 27 (1953).
17. SCHWINNING, W.: Z. V. D. I. **73**, 321 (1929).
18. MAURER, E., MAILÄNDER, R.: Stahl und Eisen **45**, 409 (1925).
19. SCHNADT, H. M.: Oerlikon Schweissmitteilungen **16**, 14 (1958).
20. LUDWIK, P., SCHEU, R.: Stahl und Eisen, **43**, 999 (1923).
21. DAWIDENKOW, N. N.: Dinamitscheskaja ispitania metallow. Moskau, 1936.
22. KOCHENDÖRFER, A., SCHOLL, H.: Stahl und Eisen **77**, 1006 (1957).
23. KÖRBER F., ROHLAND, W.: Mitt. K. W. Inst. für Eisenforschung, **5**, 55/68 (1924).
24. GILLEMOT, L., SINAY, G.: Acta Technica, Tomus **XXII.**, 150—173 (1958).
25. GILLEMOT, L.: Materialprüfung, (1961) Unter Druck.
26. SCHNADT, H. M.: Oerlikon Schweissmitteilungen **15**, 3 (1957).
27. KOCHENDÖRFER, A., SCHÜRENKÄMPER, A.: Schweizer Archiv **25**, 272 (1959).
28. SACHS, G., LUBAHN, J. D.: Trans. A. S. M. E. **67**, A. 240 (1945).
29. LUBAHN, J. D.: Proceedings A. S. T. M. **58**, 678 (1958).
30. PETERSON, R. E.: Stress concentration design factors, New-York, John Wiley and Sons Inc. 1953.
31. GEIL, G. W., CARWILE, N. L.: Journal of Research of the N. B. S. **59**, 215 (1957).
32. GILLEMOT, L.: Cép, 1961. Unter Druck.
33. KOCHENDÖRFER, A., WINK, W.: Archiv f. Eisenhüttenwesen, **28**, 41 (1957).
34. KOCHENDÖRFER, A.: Zeitschrift f. Metallkunde, **41**, 322 (1950).

GRUNDLAGEN VON STÄHLEN, IN DENEN DIE SPRÖDBRUCHNEIGUNG DURCH KALTVERFORMUNG NUR WENIG BEEINFLUSST WIRD

L. GILLEMOT und M. RÓNAY

Die seit langem bekannte Erscheinung, daß sich die Kerbempfindlichkeit von Stählen unter der Einwirkung der Kaltverformung weitgehend ändert, war Gegenstand zahlreicher Untersuchungen. So haben unter anderen GRAHAM und WORK [1] nachgewiesen, daß die Izod-Kerbschlagzähigkeit eines 0,22% C und 0,35% Mn enthaltenden Stahles unter dem Einfluß einer 2,2%igen Kaltverformung von 86 ftlb auf 8 ftlb absinkt. Über eine ähnliche Erscheinung berichtet MYLONAS [2, 3], der an eingekerbten Probekörpern nach einer vorangegangenen Druckeinwirkung gleichfalls eine bedeutende Versprödung beobachtete. Die gleiche Feststellung macht auch TURNER [4]. RIPLING und BALDWIN [5] behandeln den Einfluß einer vorangegangenen Kaltverformung qualitative ebenso als versprödenden Faktor wie die Einkerbung.

Die Wirkung vorangegangener verdrehender Beanspruchung beschreibt KUDRJAWZEW [6], der gleichfalls zu dem Ergebnis gelangt, daß sich die Kerbschlagzähigkeit des Stahles unter dem Einfluß der Verdrehung weitgehend vermindert.

Seit langem weiß man jedoch auch, daß Werkstoffe selbst bei sonst gleicher chemischer Zusammensetzung eine unterschiedliche Kaltverformungsempfindlichkeit zeigen. Eben deshalb setzten sich die hiesigen Untersuchungen die Klarstellung der Frage zum Ziel, welche Faktoren es sind, die die Empfindlichkeit von Stählen gegen eine vorangehende Kaltverformung bestimmen.

1. Der Einfluß von Verunreinigungen durch Einlagerungsatome kleinen Durchmessers

Nach Einführung der zum Bruch erforderlichen spezifischen Arbeit (Einschnürarbeit), d. h. der im Zugversuch zum Bruch des im eingeschnürten Querschnitt aufgenommenen Einheitsvolumens nötigen Arbeit als Werkstoffkenngröße [7] ließen sich für den Einfluß der Legierungselemente äußerst einfache Gesetzmäßigkeiten feststellen, so die Tatsache, daß die Einschnürarbeit (Brucharbeit) linear zwischen den Einschnürarbeiten der beiden Legierungs-

elemente verläuft, wenn die beiden Komponenten miteinander keine feste Lösung bilden. Unter dem Einfluß von Legierungselementen, die eine feste Lösung geben, wächst die Einschnürarbeit stets an. Am einfachsten lassen sich die Verhältnisse an der Eisen—Kohlenstoff-Legierungsreihe veranschaulichen (Bild. 1), in der die Einschnürarbeit von Stahl mit einem 0,1%igen C-Gehalt 75 mkp/cm³ beträgt, ein Wert, welcher der soeben erwähnten Regel entsprechend in Abhängigkeit vom C-Gehalt allmählich absinkt. Extrapoliert man diese übrigens in einem weiten Bereich gültige Regel auf das chemisch reine

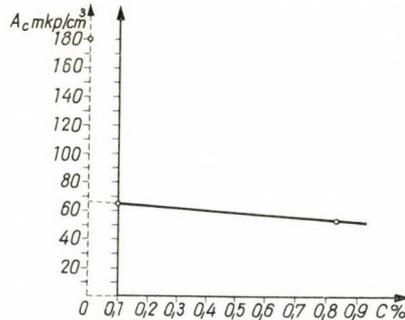


Bild 1. Die Einschnürarbeit der Eisen—Kohlenstoff-Legierungsreihe in Abhängigkeit vom C-Gehalt

Eisen, dann erhält man für die Einschnürarbeit einen Höchstwert von 80 mkp/cm³, trotzdem Messungen an chemisch reinem Eisen eine Einschnürarbeit von 180 mkp/cm³ ergeben.

Ähnliche Unterschiede lassen sich auch beim 99,99%igen und 99,5%igen Aluminium beobachten. Während die Einschnürarbeit bei ersterem 50 mkp/cm³ beträgt, erreicht sie bei letzterem 30 mkp/cm³. Legiert man das 99,99%ige Aluminium mit den laut Analyse im 99,5%igen Aluminium enthaltenen Legierungen (Si, Fe, usw.) in den analysengemäßen Mengen, dann ändert sich die Einschnürarbeit nur im Sinne der weiter oben erwähnten Regeln, d. h. nur sehr geringfügig, doch sinkt sie keineswegs auf den Wert von 30 mkp/cm³ des 99,5%igen Aluminiums herab.

Aus diesen Beobachtungen und Tatsachen läßt sich folgern, daß ganz geringe Mengen von Verunreinigungen eine besondere Wirkung ausüben, die sich nicht einfach mit den erwähnten Legierungsregeln erklären lassen [8]. Bei den untersuchten Stählen handelte es sich um die handelsüblichen Sorten, wie sie nach der gewohnten Stahlerzeugungstechnologie hergestellt werden, sie enthielten also außer den in der Analyse nachgewiesenen Legierungselementen C, Mn, usw. offenbar auch Sauerstoff, Stickstoff und Wasserstoff. Der Unterschied zwischen der Einschnürarbeit von 75 mkp/cm³ des 0,1% C enthaltenden Hüttenstahles einerseits und der Einschnürarbeit des chemisch reinen Eisens (180 mkp/cm³) läßt sich also auf den Sauerstoff, den Stickstoff und

auf die Kohlenstoffmenge laut Analyse zurückführen, und offenbar ist die Auswirkung der letzten wenigen hundertstel oder tausendstel Prozent des Kohlenstoffs nicht dieselbe wie diejenige des größeren Kohlenstoffgehaltes.

Schon COTTRELL und Mitarbeiter [9, 10] haben darauf hingewiesen, daß das Zustandekommen der Fließgrenze den durch die Einlagerungsatome blockierten Versetzungen zuzuschreiben ist. Trotzdem sowohl der Kohlenstoff als auch der Sauerstoff und der Stickstoff zu den Legierungselementen mit kleinem Atomdurchmesser gehören, steht ihnen im Gitter kein genügender Platz zur Verfügung, weshalb sie auf dem Wege der Diffusion die expandierten Teile der Versetzungen aufsuchen. Auf diese Weise bildet sich um die Versetzungen eine »Wolke« (oder Atmosphäre). Um die solcherart blockierten Versetzungen in Bewegung zu bringen, bedarf es einer größeren Gleitspannung, woraus sich das Entstehen der oberen Fließgrenze erklärt.

Aus den Tatsachen, daß die plastische Deformationsarbeit (Einschnürarbeit) des kohlenstoff-, sauerstoff- und stickstofffreien chemisch reinen Eisens wesentlich höher liegt als die der Hüttenstähle mit niedrigem Kohlenstoffgehalt und daß auch die plastische Deformationsarbeit des 99,99%igen Aluminiums wesentlich größer ist als die des Hüttenmetalls, aus diesen Tatsachen also läßt sich darauf schließen, daß die die Versetzungen blockierenden Verunreinigungen durch Einlagerungsatome mit kleinem Durchmesser nicht bloß die Fließgrenze, sondern auch den Mechanismus der plastischen Verformung entscheidend beeinflussen.

Da die endgültige Lage der gelösten Atome durch die Größe der Bindungsenergie in der Versetzungsatmosphäre oder in einer anderen, beispielsweise in einer chemischen Verbindung bestimmt wird, muß grundsätzlich eine Möglichkeit bestehen, die Verunreinigungen, die die Versetzung blockieren durch Legierungselemente etwa in solchen chemischen Verbindungen zu binden, in denen ihre Bindungsenergie größer ist als in der Versetzungsatmosphäre. Hierzu scheint sich das Titan besonders zu eignen, da es mit sämtlichen verunreinigenden Einlagerungsatomen, wie etwa mit C, N oder O äußerst stabile chemische Verbindungen eingeht. Den Messungen von THOMAS und LEAK [11] zufolge beträgt die Bindungsenergie des Stickstoffatoms an den Versetzungsstellen 0,75–0,8 eV, wogegen die Bindungsenergie des Titandioxyds bei 6,9 eV [12], also beträchtlich höher liegt. Für Titanitrid liegen zwar Meßergebnisse nicht vor, doch ist seine Bindungsenergie jedenfalls noch größer als die des Titandioxyds, da es aus diesem hergestellt werden kann.

Hieraus folgt nun offenbar, daß Stähle unter dem Einfluß von Titanmengen, die zur chemischen Bindung des C, O und N genügen, im Sinne der COTTRELLSchen Theorie keine ausgeprägte Fließgrenze haben können.

In der Tat ist es seit 1940 auf Grund der Messungen von EDWARDS, PHILLIPS und JONES [13] bekannt, daß die Fließgrenze bei Stählen verschwindet, sofern sie viermal mehr Titan als Kohlenstoff enthalten. Im weiteren wurde

diese Feststellung auch durch die Messungen von COMSTOCK [14] und DIES [15] bestätigt. Stahl mit hohem Titangehalt hat somit ebensowenig eine Fließgrenze wie das chemisch reine Eisen. Zu ähnlichen Ergebnissen gelangt man, wenn man dem Stahl seinen Kohlenstoff- und Stickstoffgehalt durch Behandlung in feuchter Wasserstoffatmosphäre bei mäßig hoher Temperatur entzieht [16]. So ist es auch experimentell nachgewiesen, daß die Fließgrenze weitgehend von dem im Ferrit gelösten Kohlenstoff und Stickstoff abhängt, da bekanntlich die Fließgrenze von Weichstahl mit der Entfernung dieser Elemente oder durch ihre Stabilisierung in Form unlöslicher Titanverbindungen gänzlich verschwindet.

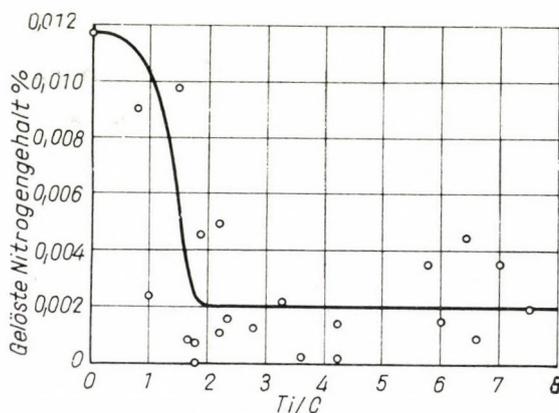


Bild 2. Der Wert des gelösten Stickstoffes in Abhängigkeit vom Ti/C Verhältnis.
Nach Comstock [17]

Den Messungen COMSTOCKS zufolge [17] ändert sich der Wert des gelösten Stickstoffes in Abhängigkeit vom Ti/C-Verhältnis gemäß Bild 2. Die Tatsache, daß der gelöste Stickstoff bereits bei einem Ti/C-Verhältnis von weniger als 2 — wenn also das Titan zur Stabilisierung des Kohlenstoffes noch nicht genügt —, praktisch seinen Mindestwert erreicht, kann als Hinweis darauf betrachtet werden, daß das Titan — zumindest teilweise — die Verbindung mit dem Stickstoff früher eingeht als mit dem Kohlenstoff.

Unter solchen Umständen läßt sich also die Feststellung machen, daß die als Verunreinigung gegenwärtigen, die Versetzung blockierenden Einlagerungsatome unter dem Einfluß der Legierung mit Titan chemisch gebunden sind, weshalb die ausgeprägte Fließgrenze verschwindet und die zum Bruch erforderliche plastische Deformationsarbeit, die Einschnürarbeit sprunghaft anwächst. So beträgt die Einschnürarbeit eines Kohlenstoffstahles mit $C = 0,19\%$ und $Ti = 0,72\%$ in weichgeglühtem Zustand $117,8 \text{ mkp/cm}^3$, diejenige eines Stahles mit $0,075\%$ C und $0,22\%$ Ti hingegen 128 mkp/cm^3 . Mit Recht darf also angenommen werden, daß sich durch Ausschaltung des Ein-

flusses der die Versetzung blockierenden Einlagerungsatome auch die nach Kaltverformungen beobachtete Kerbempfindlichkeit von Stählen vermindert wird, und daß man bis zu einem gewissen Grad ein Bild vom Mechanismus der plastischen Deformation gewinnen kann.

2. Beschreibung der Versuche

Die Zusammensetzung des bei den Versuchen benützten Stahles findet sich in Tabelle I.

Tabelle I

Ti/C	C%	Ti%	Mn%	Si%	P%	S%
5	0,15	0,75	0,86	0,31	0,024	0,004

Der Stahl gelangte mit einer Korngröße von 7 ASTM in normalisiertem Zustand zur Verwendung. Er wurde vor der Kaltverformung auf mechanischem Wege vom Zunder befreit. An den Stabstählen wurden Stangenzugversuche vorgenommen. Nach Phosphatbehandlung benützten wir Ziehringe, u. zw. bei kleineren Querschnittsverminderungen mit 16 gradigem, bei größeren Querschnittsverminderungen mit 12 gradigem Ziehwinkel. Als Kennzahl der Querschnittsverminderung diente im weiteren die spezifische Querschnittsverminderung

$$q = \frac{F_0 - F_1}{F_0} 100\%.$$

Ohne Weichglühen wurden Verformungen in Stufen von je 10% bis zu einer Querschnittsverminderung von 90% durchgeführt. Der Stahl überstand selbst die 90 prozentige Querschnittsverminderung ohne Risse, eine weitere Verformung über diesen Grenzwert hinaus unterblieb jedoch, weil sich an diesem Punkt bereits zu geringe, für die Untersuchung ungeeignete Durchmesser ergeben hatten.

Aus dem verschieden stark kalt verformten Versuchsmaterial wurden Zugproben, MESNAGERSche Kerbschlag-Biegeproben sowie KUDRJAWZEWSche Kerbschlag-Biegeproben mit kreisrundem Querschnitt angefertigt.

An dem kalt gezogenen Titanstahl wurden die Härte, die 0,2-Grenze, die Zugfestigkeit und die Einschnürung, die Einschnürarbeit sowie die Kerbschlagzähigkeit in Abhängigkeit von der Querschnittsverminderung, ferner die Diagramme der wahren Spannungen an den verschieden stark verformten Werkstoffen bestimmt.

Bild 3 zeigt den Verlauf der Härtekurve in Abhängigkeit von der Querschnittsverminderung. Bis zu der im Zugversuch ermittelten Grenze der

gleichmäßigen Dehnung, die einer rund 30prozentigen Querschnittsverminderung entspricht, steigt die Härte steil an, um von der 30prozentigen bis zu einer rund 65–70prozentigen Querschnittsverminderung praktisch unver-

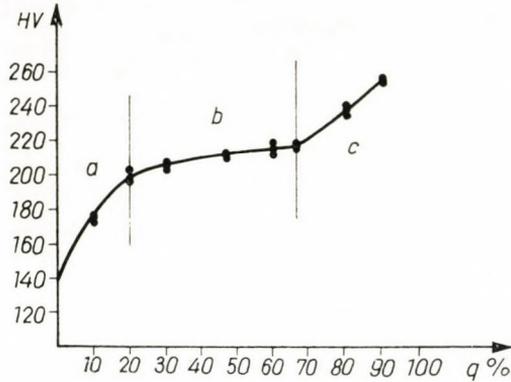


Bild 3. Verlauf der Härtekurve in Abhängigkeit von der Querschnittsverminderung

ändert zu bleiben und von da ab in Abhängigkeit vom Ausmaß der Kaltverformung neuerlich anzusteigen.

In Bild 4 ist der Verlauf der 0,2-Grenzen-, der Zugfestigkeits- sowie der Einschnürungskurven in Abhängigkeit von der Querschnittsverminderung auf-

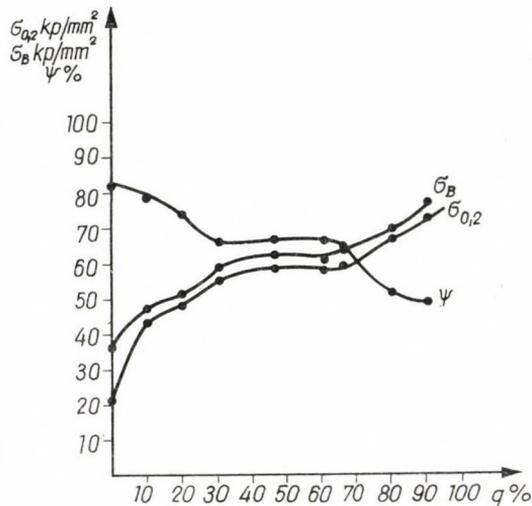


Bild 4. Verlauf der 0,2-Grenzen-, der Zugfestigkeits- sowie der Einschnürungskurven in Abhängigkeit von der Querschnittsverminderung

getragen. Von der Grenze der gleichmäßigen Dehnung bis zu der rund 65–70prozentigen Querschnittsverminderung ändern sich die Festigkeitseigenschaften und die Verformbarkeit nicht.

Bild 5 veranschaulicht den Verlauf der an zweierlei Probekörpern ermittelten Kerbschlagzähigkeits- bzw. Einschnürarbeitskurven gleichfalls in Abhängigkeit von der Querschnittsverminderung. Nach einem anfänglichen raschen Absinken bleibt die Kerbschlagzähigkeit in Abhängigkeit von der Verformung bis

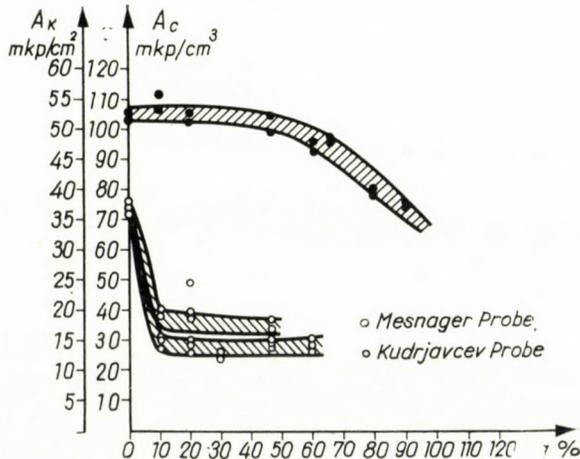


Bild 5. Verlauf der an zweierlei Probekörpern ermittelten Kerbschlagzähigkeits- bzw. Einschnürarbeitskurven in Abhängigkeit der Querschnittsverminderung

zur 65–70prozentigen Querschnittsverminderung konstant und zeigt auch bei derart starker Deformation noch Werte von 15–20 mkp/cm^2 . Demgegenüber hält sich die Einschnürarbeit bis zu den großen Querschnittsverminderungen auf konstantem Wert und beginnt erst bei einer Querschnittsverminderung um 70 Prozent abzunehmen.

Bild 6 zeigt die Diagramme der wahren Spannung—wahren Dehnung unverformter, ferner unterschiedlich stark kalt gezogener Stähle. Die gestrichelten Linien stellen die bis zur Reißfestigkeit reichenden Extrapolationen dar. Die Diagramme der wahren Spannung—wahren Dehnung von Werkstoffen, deren Verformung von der der Grenze der gleichmäßigen Dehnung entsprechenden Deformation bis zu einer rund 65prozentigen vorangegangenen Deformation reichte, decken sich innerhalb der Streuung der Beobachtungswerte.

Es hat sonach den Anschein, daß die Festigkeitseigenschaften in einem ziemlich weiten Verformungsbereich in Abhängigkeit von der Kaltverformung keine Änderung erfahren. Dieser Verformungsbereich erstreckt sich von einer Querschnittsverminderung, wie sie der im Zugversuch bestimmten Grenze der gleichmäßigen Dehnung entspricht, bis zur 65–70prozentigen Querschnittsverminderung.

Ein Vergleich der so gewonnenen mit den Ergebnissen der Versuche an ausgesprochen kerbempfindlichen Stählen [1] gestattet die Feststellung, daß sich die spezifische Kerbschlagzähigkeit der bei den Versuchen benützten

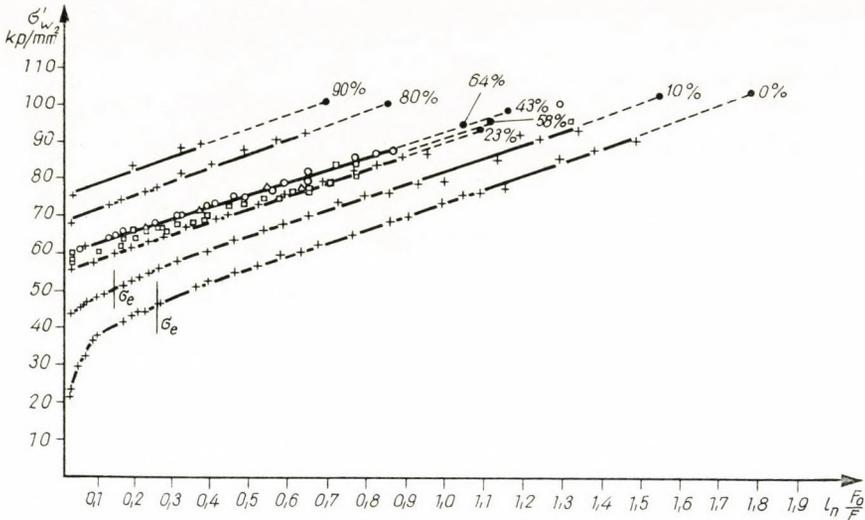


Bild 6. Diagramme der wahren Spannung—wahren Dehnung unterschiedlich stark kalt gezogener Stähle

Titanstähle bloß um 50% vermindert und in einem überaus weiten Verformungsbereich vom Ausmaß der vorangegangenen Kaltverformung unbeeinflusst bleibt. Gegen die Wirkung einer vorangehenden Kaltverformung empfindliche Stähle haben eine Kerbschlagzähigkeit, deren Wert bei 10–20 Prozent der ursprünglichen liegt, ja an einem Bessemer-Stahl mit einem Kohlenstoffgehalt von 0,08 Prozent konnte sogar ein Wert von etwa 10 Prozent gemessen werden. Der Absolutwert der Kerbschlagzähigkeit des Titanstahles beträgt auch nach der Kaltverformung 15–20 mkp/cm², bewegt sich also auf einer Höhe, die der Größenordnung der Kerbschlagzähigkeit nicht verformter Weichstähle entspricht.

Zu bemerken ist ferner, daß der Wert der Einschnürarbeit in Abhängigkeit von der Kaltverformung innerhalb weiter Grenzen (bis zu einer Deformation von 65–70 Prozent) konstant bleibt. In Versuchen an Aluminium und Kupfer hat SINAY [18] nachgewiesen, daß die Einschnürarbeit in Abhängigkeit von der Kaltverformung je nach deren Technologie veränderliche Werte annimmt. Es steht also zu erwarten, daß auch der Wert der Kerbschlagzähigkeit nicht ausschließlich eine Funktion des Querschnittsverminderungsgrades der Kaltverformung, sondern auch eine Funktion der Methode ist, nach der die Kaltverformung vorgenommen wird. Grundsätzlich gelangten auch GRAHAM und WORK [1] zu ähnlichen Ergebnissen; sie faßten den Einfluß der Technologie der Kaltverformung auf die nach der Kaltverformung meßbare Kerbschlagzähigkeit in einem Schema gemäß Bild 7 zusammen.

Unter Umgehung von Einzelheiten sei hier lediglich bemerkt, daß Aluminium und Aluminiumlegierungen — nach den Versuchen, die im Budapester

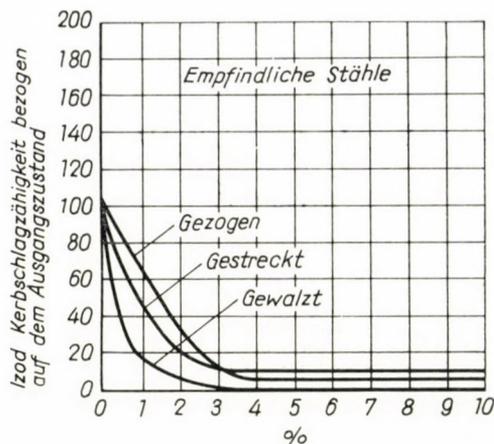


Bild 7. Einfluß der Technologie der Kaltverformung auf die nach der Kaltverformung meßbare Kerbschlagzähigkeit. Nach GRAHAM und WORK [1]

Forschungsinstitut für Nichteisenmetalle durchgeführt wurden — nach der Kaltverformung in gepreßtem Zustand eine wesentlich bessere Einschnürarbeit lieferten als nach dem Warmwalzen mit nachfolgender Kaltverformung. Demnach wird die Erscheinung nicht nur durch das Ausmaß, sondern auch durch die Technologie der Kaltverformung beeinflusst, doch sind die Ursachen hierfür noch nicht eindeutig geklärt.

3. Auswertung der Meßergebnisse

Die Erklärung der Versuchsergebnisse kann sich auf jene Feststellung YAMOGOUCHEIS [19] sowie COX' und CLENSHAW'S [20] stützen, derzufolge zwischen der Dichte der Gleitebenen einerseits und der durch die Kaltverformung des weichgeglühten Metalls verursachten Aufhärtung andererseits ein linearer Zusammenhang besteht. Den Zusammenhang zwischen der die Aufhärtung verursachenden Gleitspannung τ , ferner der beim Erscheinen der ersten Gleitebene, d. h. an der Elastizitätsgrenze auftretenden Gleitspannung τ_0 und schließlich der Zahl n der auf der Einheitslänge zustande gekommenen Gleitebenen beschreibt die Gleichung

$$\tau - \tau_0 = k \cdot n,$$

in welcher k eine Konstante mit der Dimension der Spannung bedeutet. Diese Gleichung läßt erkennen, daß die verformungsbedingte Aufhärtung ausschließlich mit der Dichte der Gleitebenen zusammenhängt und keineswegs mit der Menge des Abgleitens auf einer Fläche.

Nach FREUDENTHAL [21] ist es das Entstehen der neuen Gleitebenen, die in den Gleitvorgängen die Härtezunahme verursacht; das Gleiten an den

vorhandenen Gleitebenen erhöht die Härte nicht, vielmehr wächst nur die Dehnung an, ohne daß auch die Spannung anwüchse. Solcherart entstehen bis zur Grenze der gleichmäßigen Dehnung neue Gleitebenen, was eine bedeutende Aufhärtung verursacht, von da ab jedoch *löst das Abgleiten an den vorhandenen Gleitebenen keine weitere Härtezunahme aus, sofern keine Einlagerungsatome vorhanden sind, die das Abgleiten blockieren.*

Dieses Versuchsergebnis scheint das von COTTRELL entworfene einfache Bild zu bestätigen, demzufolge das Abgleiten eine Relativbewegung dünner Parallelschichten aufeinander darstellt und als »laminares« Abgleiten keine Aufhärtung verursachen kann. Die intensive Aufhärtung ist die Folge eines viel komplexeren »turbulenten« Abgleitens. Stets wurde jedoch das Verständnis durch den Umstand gestört, daß die Aufhärtung auch im »laminaren« Abschnitt der Deformation beobachtet werden konnte. Beim Fehlen von Verunreinigungen durch Einlagerungsatome, die das Abgleiten blockieren, scheint das von COTTRELL entworfene Bild vom laminaren und vom turbulenten Abgleiten zutreffend zu sein.

Solcherart lassen sich die drei Abschnitte an der Erhärtungskurve kaltgezogenen Titanstahles mit stabilisierten Kohlenstoff- und Stickstoffgehalt folgendermaßen zusammenfassen:

a) Von der 0%igen bis zu der Grenze der gleichmäßigen Dehnung entsprechenden Querschnittsverminderung entstehen neue Gleitebenen, was mit einer Aufhärtung einhergeht.

b) Mangels Verunreinigungen durch Einlagerungsatome, die die Versetzungen blockieren, oder wenn solche Einlagerungsatome nur in geringen Mengen gegenwärtig sind, kommt im Abschnitt b) das von COTTRELL als laminar bezeichnete Abgleiten an den vorhandenen Gleitebenen zustande, was jedoch keine weitere Aufhärtung verursacht.

c) Im Abschnitt c) hört dieses laminare Abgleiten vermutlich bereits auf, und als Folge der Verbiegung der Gleitebenen dürfte die Ausbildung neuer Versetzungsfronten einsetzen. Das Abgleiten nimmt also die von COTTRELL als turbulent bezeichnete Form an, womit eine neuerliche Aufhärtung beginnt.

4. Schlußfolgerungen

Die Versuchsergebnisse scheinen in Übereinstimmung mit der Theorie COTTRELLS die Auffassung zu bestätigen, daß die Kaltverformungsempfindlichkeit von Stählen, die sich in erster Linie im Absinken der Kerbschlagzähigkeit oder in der an anderen eingekerbten Probekörpern gemessenen Sprödbrechneigung äußert, auf die Verunreinigungen durch Einlagerungsatome zurückzuführen ist, die die Versetzungen blockieren. Dieser Einfluß läßt sich durch Bindung der geringen verunreinigenden Einlagerungselemente auf chemischem

Wege vermindern, so daß auf diese Weise auch weniger kaltverformungsempfindliche Stähle entwickelt werden können.

Die Festigkeit des beschriebenen, sehr geringfügig legierten Stahles bleibt bei einer Kaltverformung zwischen 25 und 65 Prozent praktisch konstant und hat einen Wert von rund 65 kp/mm², während die 0,2-Grenze 60 kp/mm² beträgt. Daneben liegt seine Kerbschlagzähigkeit, am MESNAGERSCHEN Probekörper gemessen, bei 15—20 mkp/cm². Bei Stählen mit derart hoher 0,2-Grenze und Festigkeit kann eine Kerbschlagzähigkeit von 15—20 mkp/cm² selbst im nicht kaltverformten Zustand als sehr hoch bezeichnet werden.

SCHRIFTTUM

1. GRAHAM, H. W.—WORK, H. K.: Proc. ASTM **39**, 571 (1939).
2. MYLONAS, C.: Weld. J. Resp. Suppl. 1957 Jan. 9s—17s.
3. MYLONAS, C.: Weld. J. Resp. Suppl. 1958 Oct. 473s—480s.
4. TURNER, C. E.: J. of the Iron and Steel Inst. **197**, Part 2. 131 (1961).
5. RIPLING, E. J., BALDWIN, W. M. Jr: Transactions of the ASM **44**, 1047 (1952).
6. KUDRJAWZEW, I. W., NAUMOWA, T. W., ROZENMANN, L. M.: Metallowedeniya i obrabotka metallov **3**, 2—6 (1958).
7. GILLEMOT, L., SINAY, G.: Acta Technica, Tom. **XXII**. 149—173 (1958).
8. GILLEMOT, L.: Freiburger Forschungshefte (unter Druck).
9. COTTRELL, A. H.: Report of a Conference on the Strength of Solids, p. 30 The Physical Society, London (1948).
10. COTTRELL, A. H., BILBY, B. A.: Proc. Phys. Soc. A **62**, 49 (1949).
11. THOMAS, Dr. W. R., LEAK, Dr. G. M.: Proc. Phys. Soc. Section B, Vol. **68**, Part 12, 1. Dec. 1955. pp 1001—1008.
12. LOWATER, F.: Proc. Phys. Soc. London, **41**, 557 (1929).
13. EDWARDS, C. A., PHILLIPS, D. L., JONES, H. N.: J. Iron and Steel Inst. **142**, 199P—236P (1940).
14. COMSTOCK, G. F.: Proc. Am. Soc. Testing Materials **43**, 521—546 (1943).
15. DIES, K.: Arch. Eisenhüttenw. **16**, 333—340 (1942—43).
16. LOW, J. R., GENSAMER, M.: Trans. Am. Inst. Mining Met. Engrs. **158**, 207—249 (1955)
17. COMSTOCK, G. F.: Metal Progress, **54**, 319—322 (1948).
18. SINAY, G.: GTE Kiadványsorozat (Publikationsreihe der Wissenschaftlichen Gesellschaft der Maschinenindustrie) **2**, 215 (1960).
19. YAMAGOUCHI, K.: Sci. Pap. Inst. Phys. Chem. Tokyo, **8**, 289 (1928). **11**, 223 (1929).
20. COX, H. L., CLENSHAW, W. J.: Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. **149**, 312 (1935).
21. FREUDENTHAL, A. M.: Encyclopedia of Physics, Vol. VI. Fatigue. p. 598. Springer Verlag, 1958.

SCHLAG-ZERREISSVERSUCH AN GEKERBTEN PROBEN

L. GILLEMOT

MECHANISCH-TECHNOLOGISCHES INSTITUT DER BUDAPESTER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT,

und

S. NADASAN

FORSCHUNGSSTELLE DER RUMÄNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, TIMIȘOARA

1. Einleitung

Zur Bestimmung der Spröbruchneigung von Werkstoffen bedient man sich seit langem sowohl der Schlag-ZerreiÙ- als auch der Schlag-Biegeproben, wobei man im allgemeinen die zum Bruch erforderliche, auf den Querschnitt des Probekörpers bezogene Arbeit mißt. Die so ermittelte Kennziffer hat die Dimension mkp/cm^2 , sie hängt mithin — wie allseits bekannt — von der Form und Größe des Probekörpers ab. Im Sinne dieser Formulierung stellt also die spezifische Schlagarbeit und die spezifische ZerreiÙarbeit eine Funktion der Form des Probekörpers dar und vermittelt über die Eigenschaften der Werkstoffe zwar wertvolle, aber bloÙ qualitative Informationen.

Seit langem ist man bestrebt, an Stelle der in mkp/cm^2 ausgedrückten spezifischen Arbeit in physikalisch richtigerer Weise die auf das Volumen bezogene spezifische Arbeit mit der Dimension mkp/cm^3 einzuführen. Sehr früh haben SHUELE und BRUMMER [1], MOSER [2] sowie SAUERWALD [3] nachgewiesen, daß die spezifische Arbeit, sofern man sie bei Schlag-Biegeproben auf das deformierte Volumen bezieht, weniger von den Abmessungen des Probekörpers abhängt.

Zu annähernd ähnlichen Ergebnissen gelangten KAHN und IMEMBO [4] im Verlauf ihrer Schlag-ZerreiÙproben, deren Resultate in Abb. 1 dargestellt sind. Die Abbildung enthält auch die Angaben über die Abmessungen der verwendeten Probekörper. Sie verwendeten, wie man sieht, zwei verschiedene Probekörper mit Durchmessern von 5 bzw. 7,5 mm. Die zum Bruch erforderliche Energie war bei den beiden Probekörpern natürlich verschieden, doch zeigte die auf die Volumeneinheit bezogene spezifische Arbeit ziemlich konstante Werte, wenn das Verhältnis zwischen Länge und Durchmesser des Probekörpers zwischen 3 und 7 lag.

Bei allen ihre Versuchen bezogen sie jedoch die Brucharbeit auf das gesamte verformte Volumen der Probekörper, ein Verfahren, welches bei Schlag-Biegeproben äußerst schwerfällig ist, weil die Bestimmung des deformierten Volumens nicht geringe Schwierigkeiten verursacht.

Bei Schlag-ZerreiÙproben vereinfacht sich die Aufgabe, doch fehlt auch für diese Art von Versuchen eine physikalisch richtige und gut definierte Kenn-

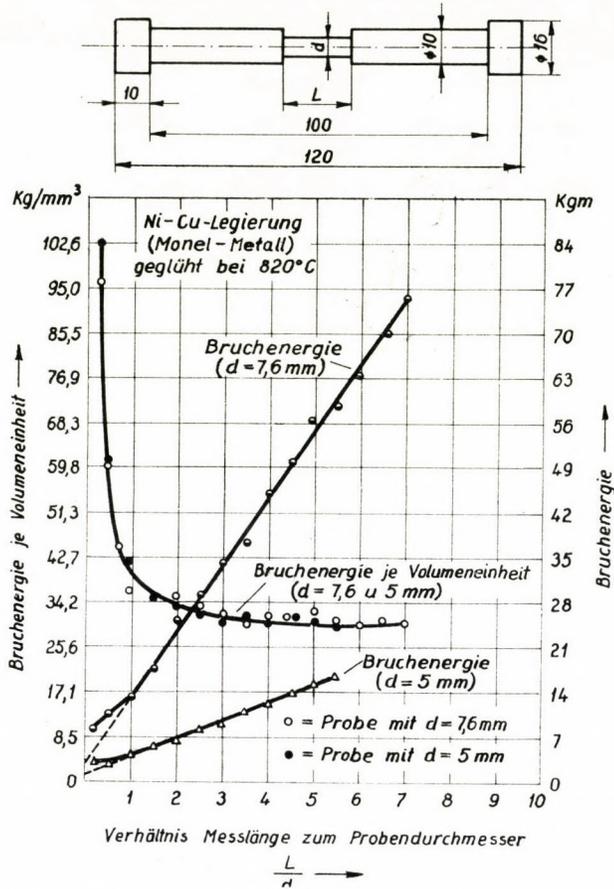


Abb. 1. Verlauf der mittleren spezifischen Deformationsarbeitskurve nach KAHN und IMEMBO

zahl. Je nach dem Maß der Verformung ändert sich die Arbeit im verformten Volumen von Punkt zu Punkt. Diese Tatsache soll das Schaubild der spezifischen Arbeit in der nächsten Umgebung der Bruchstelle veranschaulichen, wie sie sich aus den Ergebnissen eines statischen Reißversuches errechnet (Abb. 2).

Wählt man ein beliebiges, sehr dünnes Volumelement, dann schreibt sich die zur Verformung benötigte Arbeit zu

$$A_d = \int \frac{P dL}{V} = \int \frac{PdL}{F_0 \cdot L_0} = \int \sigma d\varepsilon, \tag{1}$$

worin P die Kraft, dL die Dehnung der gewählten, äußerst kleinen Ausgangslänge L_0 , F_0 den Ausgangsquerschnitt, σ die auf den Ausgangsquerschnitt bezogene Spannung, ε hingegen die auf die Ausgangslänge bezogene effektive oder örtliche Dehnung bedeutet.

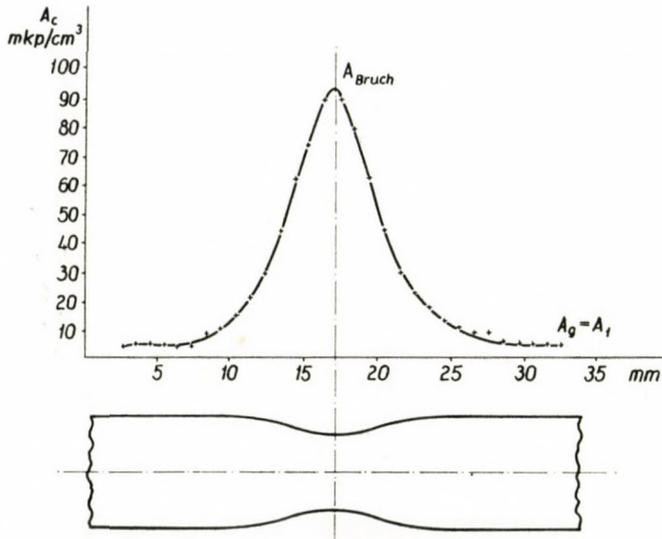


Abb. 2. Verteilung der Deformationsarbeit entlang der Längsachse eines Zugversuchs-Probekörpers

Durch Berechnung des obigen Integrals läßt sich die in der Umgebung der Kontraktion zur Verformung erforderliche Arbeit von Punkt zu Punkt ermitteln. Wie aus Abb. 2 ersichtlich, hat die Arbeit ihren Höchstwert im Bruchquerschnitt, um in Richtung der nicht kontrahierten Teile des Probekörpers allmählich abzusinken [5].

Der in den bisher zitierten Publikationen [1, 2, 3, 4] benützte Begriff deckt die Gesamtarbeit der Verformung, auf das gesamte deformierte Volumen bezogen. Er gibt damit den Durchschnittswert der Deformationsarbeit an und stellt mithin nichts anderes dar, als die Integration der örtlichen Verformungsarbeit auf das Gesamtvolumen, gebrochen durch dieses, es gilt somit

$$A_{dm} = \frac{1}{V} \int A_c dV, \quad (2)$$

wenn A_{dm} die mittlere spezifische Deformationsarbeit bedeutet.

Auf Grund der Arbeiten der zitierten Autoren kann also offenbar nur innerhalb eines gewissen Größenbereiches die Gültigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes erwartet, d. h. von einer Probekörperabmessung auf eine andere Probekörperabmessung geschlossen werden.

Im weiteren wird bei den hier zu beschreibenden Versuchen unter spezifischer Arbeit stets die auf die elementare Volumeinheit bezogene und durch Gleichung (1) definierte Kennzahl zu verstehen sein.

Die hiesigen Experimente setzten sich zum Ziel, die solcherart physikalisch richtig gedeutete spezifische Arbeit durch Schlag-Zerreißversuche an

gekerbten und glatten Probekörpern zu bestimmen. Das Ziel bestand also in der Entwicklung einer Methode zur Untersuchung der Sprödbbruchneigung, die es gestattet, den Einfluß der Geschwindigkeit und der Temperatur sowie der mehrachsigen und ungleichmäßigen Spannungsverteilung unter relativ einfachen, auch in der Ingenieurspraxis brauchbaren Bedingungen zu bestimmen.

2. Versuchsanordnung und Versuchsmaterial

Bei den Versuchen wurde das Pendelschlagwerk PSWO des VEB Werkstoffprüfmaschinen benützt, welches die dehnungsabhängige Bestimmung der Kraft ermöglicht. Die Form der so gewonnenen Diagramme gleicht also im

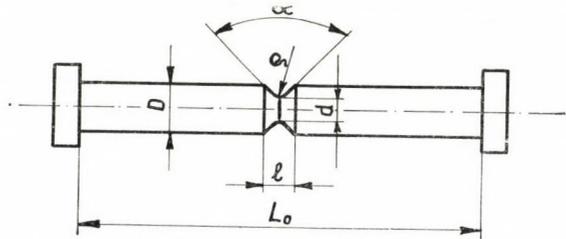


Abb. 3. Der bei den Versuchen benützte Probekörper

wesentlichen den Diagrammen, wie sie sich anhand der statischen Zerreißversuche auftragen lassen. Die Versuche wurden an Stahl OLC 35 gemäß rumänischer Norm durchgeführt.

Die eine der Versuchsreihen galt der statischen und dynamischen Prüfung bzw. Messung jener Wirkungen, die das Anlassen auf glatte und gekerbte Probekörper ausübt. Die Probekörper dieser Serie wurden von 840°C in Wasser abgeschreckt und sodann bei $500, 550, 600, 650$ und 700°C angelassen. Die glatten Probekörper hatten einen Durchmesser von $3,5\text{ mm}$, während die gekerbten Probekörper gemäß Abb. 3 gestaltet waren. Der Durchmesser D betrug bei jedem Probekörper 8 mm , der durch die Einkerbung verminderte Durchmesser hingegen 4 mm , während der Kerbradius bei den einzelnen Probekörpern der Reihe nach $6, 2, 1, 0,6$ und $0,2\text{ mm}$ betrug. Dementsprechend standen für jede Temperatur der Wärmebehandlung 6 verschieden gekerbte Probekörper mit Formzahlen von $1; 1,2; 1,54; 1,92; 2,33$ und $3,75$ gemäß den Diagrammen von PETERSON [6] zur Verfügung.

Bei den statischen Prüfungen wurden Probekörper mit einem Außendurchmesser von 12 mm und einem gekerbten Durchmesser von 8 mm verwendet, u. zw. mit denselben Kerbhalbmessern, wie sie bei den Schlag-Zerreißversuchen vorgesehen waren. Im Hinblick auf die Unterschiede in den Durchmessern ergaben sich hier Formzahlen, die von den soeben angeführten um

ein geringes abweichen. Die statischen Versuche wurden an Probekörpern mit den Formzahlen 1; 1,27; 1,68; 2,15; 2,6 und 4,2 durchgeführt.

An einer eigenen Serie von Probekörpern, die von 840° C in Wasser gehärtet und bei 650° C angelassen waren, wurde auch der Einfluß der Temperatur in einem Bereich von -70 bis +150° C geprüft.

3. Berechnung der spezifischen Schlagarbeit

Nach Berechnung des Integrals gemäß (1) läßt sich die spezifische Deformationsarbeit in der Form

$$A_c = \frac{(\sigma_S + 2\sigma_B)\varepsilon_g}{3} + 2\sigma_B(1 + \varepsilon_g) \ln \frac{1 + \varepsilon_c}{1 + \varepsilon_g} + \sigma_B(1 + \varepsilon_g)^2 \left[\frac{1}{1 + \varepsilon_c} - \frac{1}{1 + \varepsilon_g} \right] \quad (3)$$

schreiben [7]. In dieser Gleichung bedeutet σ_S die Fließgrenze, σ_B die Bruchfestigkeit, ε_g die gleichmäßige Dehnung, ε_c hingegen die im Kontraktionsquerschnitt auftretende effektive Dehnung, die aus der Formel $\varepsilon_c = \frac{\psi}{1 - \psi}$ bestimmt werden kann.

Die Gleichung ließe sich natürlich auch in einer einfacheren Form niederschreiben, in dieser Gestalt enthält sie jedoch bloß Kenngrößen, die im Reißversuch ohnehin bestimmt werden müssen, während die Ermittlung der σ_S - und σ_B -Werte anhand der Diagramme keinerlei Schwierigkeiten verursacht. Ebenso einfach lassen sich auch die ε_c -Werte bestimmen, da sowohl beim glatten als auch beim gekerbten Probekörper der Durchmesser vor und nach dem Bruch gemessen werden muß. Schwieriger gestaltete sich die Ermittlung des ε_g , da das bei den gegenständlichen Versuchen verwendete Pendelschlagwerk die Dehnung des ganzen Probekörpers mißt. An glatten Probekörpern konnte das ε_g durch Messung des nicht eingeschnürten Durchmessers ermittelt werden. Wenngleich die gleichmäßige Dehnung wegen der Fortpflanzung der Verformungswelle hier einen weniger eindeutigen Begriff darstellt als bei den statischen Versuchen, läßt er sich mit einer verhältnismäßig geringen Streuung dennoch bestimmen.

Nach den Versuchen von CLARK und WOOD [8] erfährt die volle Dehnung mit der Reißgeschwindigkeit keine Änderung, die Kontraktion hingegen bleibt nach NÁDAI und MANJOINE [9] praktisch unabhängig von der Verformungsgeschwindigkeit, was darauf schließen läßt, daß auch die gleichmäßige Dehnung unabhängig von der Verformungsgeschwindigkeit vor sich geht. Dazu beeinflußt die gleichmäßige Dehnung den Wert der spezifischen Deformationsarbeit ohnehin nur unwesentlich.

An der bei den Versuchen benützten Stahlsorte ermittelten wir anhand der Gleichung (3) die Werte der zum Bruch erforderlichen Arbeit in Abhängigkeit von der gleichmäßigen Dehnung (Abb. 4). Aus dem Diagramm geht hervor, daß die zum Bruch erforderliche Arbeit bei einer zwischen 10% und 30% schwankenden gleichmäßigen Dehnung höchstens Werte zwischen 114 und

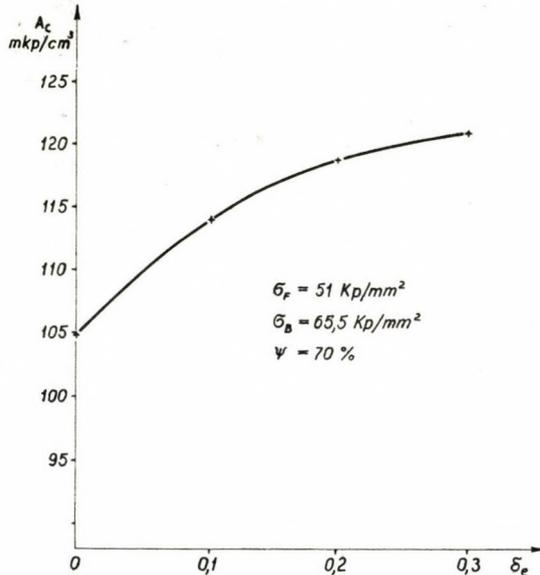


Abb. 4. Verlauf der Kontraktionsarbeitskurve in Abhängigkeit von der gleichmäßigen Dehnung

121 mkp/cm³ annimmt. Die beim Messen der gleichmäßigen Dehnung allenfalls vorgekommenen Fehler beeinflussen die Zahlenwerte der spezifischen Deformationsarbeit nur innerhalb äußerst enger Grenzen. Zur Bestimmung der spezifischen Arbeit würde sich eine Versuchseinrichtung, die die Kraft in Abhängigkeit von der Veränderung der Durchmesser mißt, offenbar besser eignen. Es ist deshalb beabsichtigt, die verwendete Einrichtung in diesem Sinne umzuändern.

Das Zerreißdiagramm eines glatten Probekörpers zeigt Abb. 5. Die gestrichelte Linie stellt die aufgenommene Kurve dar, während für Zwecke der Berechnungen die im Diagramm stark ausgezogene Kurve der Mittelwerte der Spannungsschwankungen verwendet wurden.

Abb. 6 veranschaulicht das charakteristische Diagramm der gekerbten Probekörper. Bei einzelnen Probekörpern ergab sich auch eine Diagramm-Art (Abb. 7), zu deren Auswertung sich die angegebene Gleichung nur annähernd eignet. Die anhand dieser Diagramme errechneten Meßpunkte zeigen in den im weiteren zu besprechenden Diagrammen eine Abweichung von 10–15 Prozent gegenüber den sonstigen gemessenen Werten.

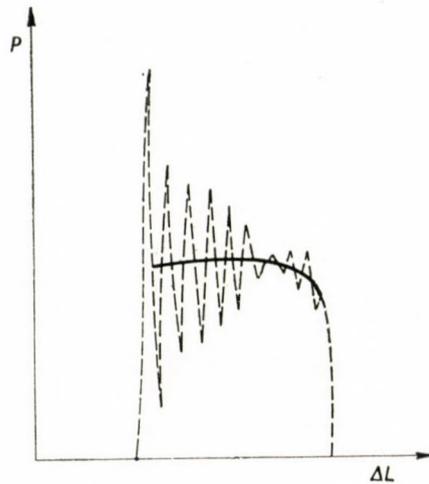


Abb. 5. Schlag-ZerreiB-Diagramm eines glatten Probekörpers

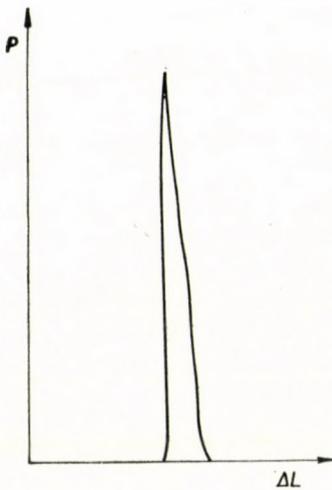


Abb. 6. Schlag-ZerreiB-Diagramm eines eingekerbten Probekörpers

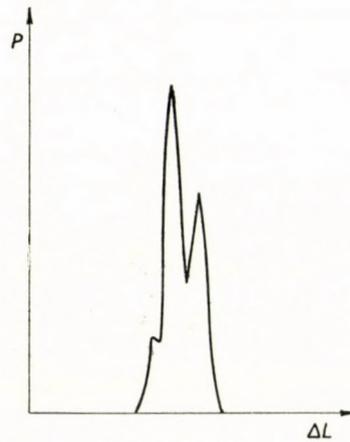


Abb. 7. Schlag-ZerreiB-Diagramm eines eingekerbten Probekörpers

4. Statische und dynamische ZerreiBversuche bei Zimmertemperatur

Die Ergebnisse der an glatten bzw. an verschiedenartig gekerbten Probekörpern durchgeführten statischen ZerreiBversuche sind in Abb. 8 zusammengefaßt. Die spezifische Arbeit der glatten Probekörper beträgt — in völliger Unabhängigkeit von der AnlaBtemperatur — mit äußerst geringfügiger Streuung 115 mkp/cm^3 und stimmt somit völlig mit jenen Zahlenwerten überein, die an den chemisch ähnlich zusammengesetzten ungarischen Stählen C 35 experi-

mentell ermittelt wurden [7]. Die Unabhängigkeit der zum Bruch erforderlichen Deformationsarbeit (Kontraktionsarbeit) von der Anlaßtemperatur wurde bereits früher bewiesen [7, 10]. An den gekerbten Probekörpern konnte

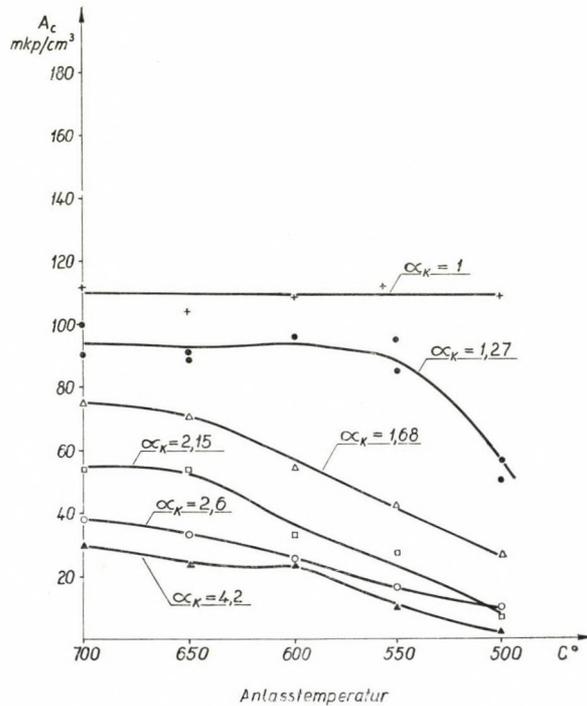


Abb. 8. Verlauf der Kontraktionsarbeitskurve in Abhängigkeit von Formzahl und Anlaßtemperatur (statischer Versuch)

demgegenüber in Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur eine mäßige Verminderung der Kontraktionsarbeit beobachtet werden. Bei Probekörpern mit der Formzahl $\alpha_k = 1,27$ kann die Kontraktionsarbeit bei Anlaßtemperaturen zwischen 700 und 550° C noch als praktisch konstant angesehen werden, während ihr Absinken erst bei niedrigeren Temperaturen einsetzt. Bei den Probekörpern mit Anlaßtemperaturen unter 650° C nimmt die Kontraktionsarbeit wesentlich ab.

Völlig ähnlichen Charakter haben auch die Ergebnisse der Schlag-Zerreißversuche (Abb. 9). In Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur bleibt die Kontraktionsarbeit der glatten Probekörper bei einem mittleren Wert von 158 mkg/cm³ konstant, doch zeigen die Versuchsergebnisse hier eine größere Streuung als bei den statischen Prüfungen. Die Abweichung zwischen dem statisch ermittelten Wert von 115 mkg/cm³ und dem dynamisch gemessenen Wert von 158 mkg/cm³ läßt sich sehr einfach erklären. Wie bereits nachgewiesen, spielt

die Änderung der gleichmäßigen Dehnung in Gleichung (3) keine wesentliche Rolle, während die Kontraktion praktisch die gleiche bleibt [9]. In jedem Glied der Gleichung figuriert jedoch die Bruchfestigkeit, folglich wird sich der Zah-

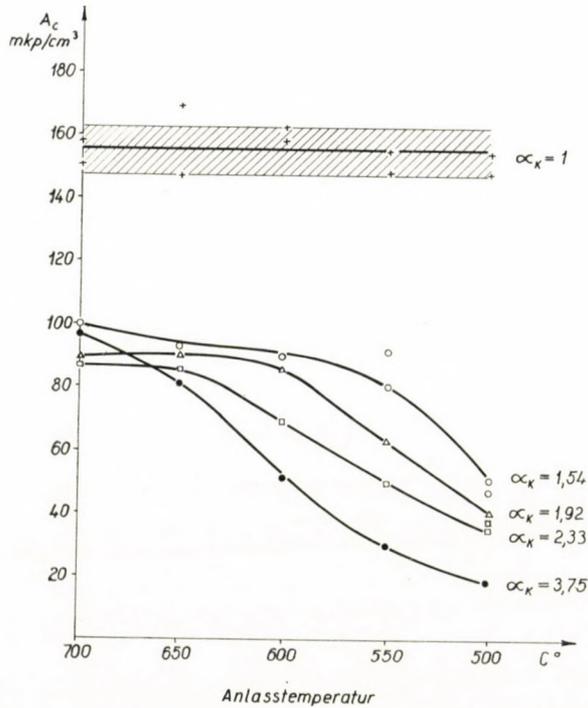


Abb. 9. Verlauf der Kontraktionsarbeitskurve in Abhängigkeit von Formzahl und Anlaßtemperatur (Schlag-Zerreiβversuch)

lenwert der Kontraktionsarbeit verhältnismäßig mit dem Wert von σ_B ändern. Theoretisch hat bereits PRANDTL [11] nachgewiesen, daß die Festigkeit eine Funktion der Verformungsgeschwindigkeit darstellt, eine Feststellung, die durch die bereits erwähnten Versuche von NÁDAI und MANJOINE [9] weitgehend bestätigt wurde. In jüngster Zeit publizierte BELL [12] ein Berechnungsverfahren, welches die rechnerische Ermittlung der dynamischen Spannungswerte aus den Ergebnissen der statischen Versuche gestattet. Verallgemeinert man seine Methode auf die Berechnung der Kontraktionsarbeit, dann hat man eine Möglichkeit, die Werte der in statischen bzw. in Schlag-Zerreiβversuchen ermittelten Kontraktionsarbeit mit guter Annäherung umzurechnen. Die Kurven der gekerbten Probekörper gleichen in ihrem Charakter denjenigen der statischen Versuche. Die Werte der Kontraktionsarbeit der Probekörper mit Formzahlen zwischen 1,54 und 3,75 zeigen nach einem Anlassen bei 700 °C kaum einige Unterschiede. Die Auswirkung der Einkerbungsschärfe tritt eher bei den niedrigeren Anlaßtemperaturen zutage. Trägt man die Kurve der

Kontraktionsarbeit von Probekörpern, die bei gleichen Temperaturen ange-
lassen wurden, in Abhängigkeit von der Formzahl auf (Abb. 10), dann zeigt
sich, daß die im dynamischen Versuch aufgenommene Kurve selbst bei ganz

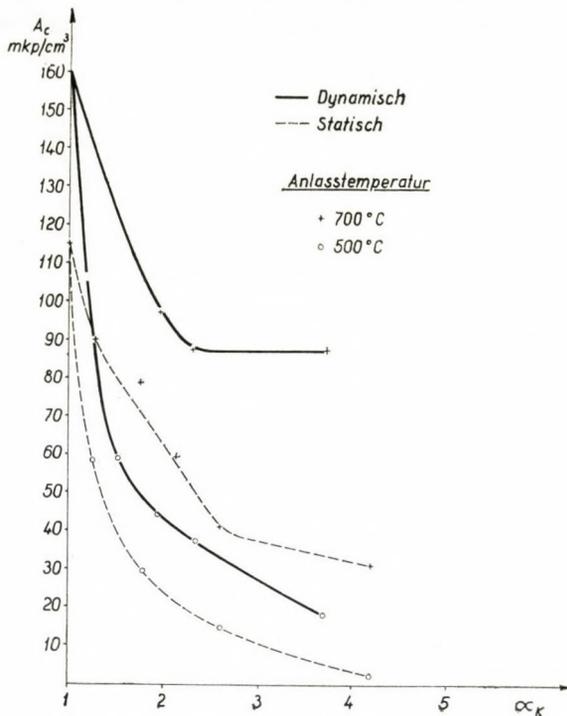


Abb. 10. Verlauf der Kontraktionsarbeitskurve in Abhängigkeit von der Formzahl im Zerreiß-
bzw. im Schlag-Zerreißversuch

kleiner Formzahl einem bestimmten Grenzwert zustrebt und im allgemeinen
bei jeder hier angewendeten beliebiger Formzahl oberhalb der statischen Kurve
verläuft.

5. Einfluß der Temperatur auf die Kontraktionsarbeit

Die Ermittlung der Kontraktionsarbeit an glatten und gekerbten Probe-
körpern im Temperaturbereich zwischen -70 und $+150^\circ\text{C}$ ergab die in Abb. 11
aufgetragenen Ergebnisse. Von geringen Streuungen der Beobachtungswerte
abgesehen, bleibt die Kontraktionsarbeit bei glatten Probekörpern mit einem
 $\alpha_k = 1$ konstant. Gleichfalls konstante Werte ergeben sich für die Kontrak-
tionsarbeit der Probekörper mit einer Formzahl von 1,2. Je höher die Form-
zahl, d. h. je schärfer die Einkerbung, desto höher liegen jene Temperaturen,
bei denen der Übergang zu den niedrigeren Werten der spezifischen Arbeit

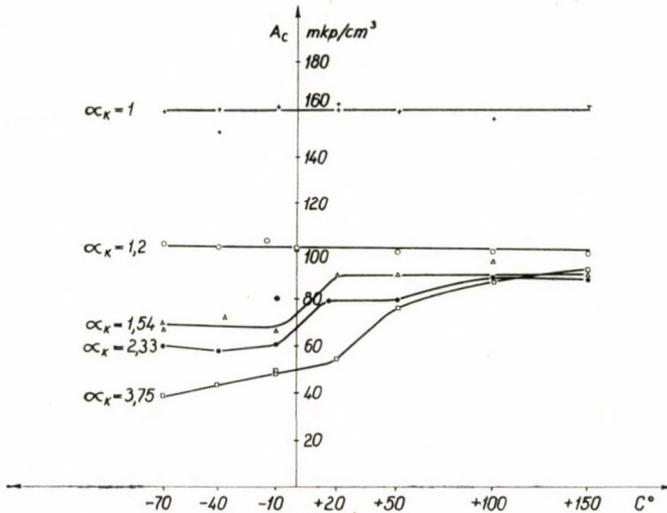


Abb. 11. Im Schlag-Zerreißversuch ermittelte Kontraktionsarbeitskurve in Abhängigkeit von Temperatur und Formzahl

beginnt. Ausgesprochene Sprödbrüche konnten an der gewählten Stahlorte und bei den gewählten Einkerbungen selbst bei -70°C nicht erzielt werden. Ihrem Charakter nach verlaufen jedoch die aufgetragenen Kurven ähnlich denjenigen des CHARPYschen Kerbschlagversuches. Ein wesentlicher Unterschied scheint aber insofern zu bestehen, als im Gegensatz zu den CHARPYschen Schlag-Biegeversuchen oder zu den bereits erwähnten Schlag-Zerreißversuchen, bei denen das Proportionalitätsgesetz keine Gültigkeit hat, die formzahlabhngige Auftragung der Kontraktionsarbeit die Aufstellung eines Proportionalittsgesetzes vermutlich ermöglichen dürfte.

Durch statische Versuche konnte eine Bestätigung dafür gefunden werden, daß die Kontraktionsarbeit eine eindeutige Funktion der Formzahl darstellt, bzw. daß zwischen Formzahl und Kontraktionsarbeit zumindest eine gute, die praktischen Erfordernisse befriedigende Korrelation besteht [13].

Die zur Verfügung stehende Versuchseinrichtung gestattete es nicht, die Probekörperabmessungen in einem weiteren Bereich zu variieren und diesen Satz auch in dynamischen Versuchen zu bestätigen. Mit Recht darf jedoch angenommen werden, daß sich im Falle unterkritischer Geschwindigkeiten für die Kontraktionsarbeit bei bestimmten Geschwindigkeitswerten und bei Einkerbungen mit gegebener Formzahl gleiche Zahlenwerte ergeben. Die in Abb. 11 aufgetragenen Kurven bleiben im Temperaturbereich zwischen 100 und 150°C von den unterschiedlich starken Einkerbungen im wesentlichen unbeeinflusst. Bei α_k -Werten von 1,54; 2,33 und 3,75 ergibt sich für die Kontraktionsarbeit der gleiche runde Wert von 87 mkg/cm^3 . Bei niedrigeren Temperaturen macht sich jedoch der Einfluß der Kerbungen bereits stark bemerkbar, eine Erschei-

nung, die ihre Erklärung in Abb. 12 findet. Die bei 150° C durchgeführte formzahlabhängige Auftragung der Kontraktionsarbeitskurve ergibt bei α_K -Werten zwischen 1,54 und 3,75 nahezu unabhängig vom Ausmaß der Einkerbung die

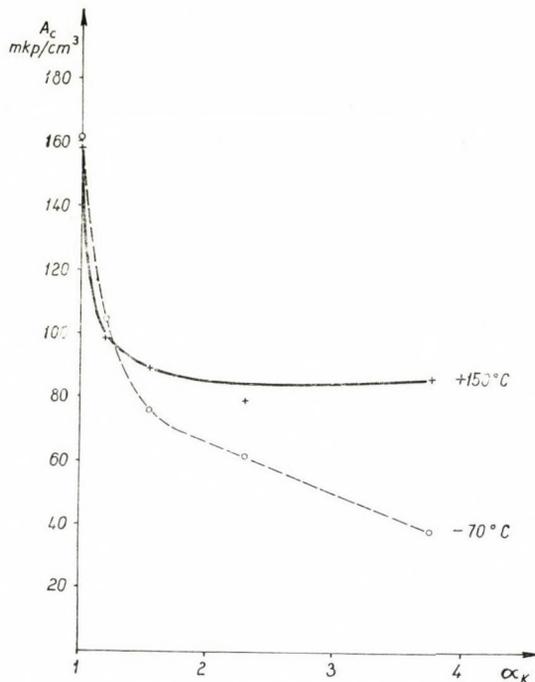


Abb. 12. Verlauf der Kontraktionsarbeitskurve im Schlag-Zerreißversuch in Abhängigkeit von der Formzahl bei Temperaturen von -70° C bzw. +150° C

gleichen Werte. Bei -70° C zeigt sich jedoch eine wesentlich stärkere Auswirkung der Einkerbung.

6. Schlußfolgerungen

1. Bei Bestimmung der Werte der Kontraktionsarbeit im Schlag-Zerreißversuch läßt sich feststellen, daß die spezifische Brucharbeit glatter Probekörper im untersuchten Bereich stets höher liegt als der Wert der auf statischem Wege ermittelten Kontraktionsarbeit.

2. Auch bei Schlag-Zerreißversuchen ist die Regel gültig, daß die Kontraktionsarbeit einen von der Anlaßtemperatur unabhängigen konstanten Wert hat.

3. Die statischen Versuche berechtigen zu der Annahme, daß Probekörper mit gleicher Formzahl auch gleiche Kontraktionsarbeitswerte haben, so daß zwischen den einzelnen Probekörper Typen ein Proportionalitätsgesetz besteht, was bei den CHARPYproben bekanntlich nicht der Fall ist.

4. Die vorgeschlagene Prüfmethode ermöglicht es, mit Hilfe eines geeigneten Schlagwerkes die mehrachsige und ungleichmäßige Spannungsverteilung sowie die Temperaturwerte zu variieren und auf diese Weise die Sprödbruchneigung von Werkstoffen in Abhängigkeit von den für sie entscheidendsten Zustandskenngrößen zu bestimmen. Einer weiteren Bestätigung bedarf jedoch die Frage, ob die Übergangstemperatur des auf diese Weise bestimmten Sprödbruches bei dynamischen Versuchen tatsächlich bloß von der Formzahl abhängt.

SCHRIFTTUM

1. SHUELE, F., BRUNNER, H.: Stahl und Eisen, **29**, 1453. (1909).
2. MOSER, M.: Stahl und Eisen **45**, 1879. (1925).
3. SAUERWALD, F., WIELAND, H.: Z. Metallkunde, **17**, 358, 392, (1925).
4. KAHN, N. A., IMEMBO, E. A.: Proc. Am. Soc. Test. Materials, **38**, II. S. 98. (1938).
5. GILLEMOT, L.: Materialprüfung, 1961. September. Im Druck.
6. PETERSON, E. R.: Stress concentration design factors. John Wiley and Sons, New-York, 1953.
7. GILLEMOT, L., SINAY, G.: Acta Technica, Tomus **XXII.**, 150—173. (1958).
8. CLARK, D. S., WOOD, D. S.: Trans Amer. Soc. Metals **42**, 45. (1950).
9. NÁDAI, A., MANJOINE: J. Appl. Mech. **8**, A. 77. (1941).
10. MATTHAES, K.: Z. f. Metallkunde, Bd **43**, 14—16. (1952).
11. PRANDTL: Z. Angew. Math. Mech. **3**, 85. (1928).
12. BELL, J. F.: Journal of Applied Phys. **31**, 2188. (1960).
13. GILLEMOT, L.: Acta Technica, Tomus **XXX.** 1961. 165.

BEITRAG ZUR FRAGE DER SPRÖDBRUCHBILDUNG AN KOHLENSTOFFHALTIGEN BAUSTÄHLEN

J. KERMES

C. Sc. PLZEŇ

Das Verspröden des Werkstoffes, hervorgerufen durch das Absinken der Temperatur bei gleichzeitigem Einfluß anderer Faktoren, je nach den Konstruktions- oder Betriebsbedingungen wird als Ursache der Zerstörung einer ganzen Reihe von Maschinenteilen bezeichnet.

Aus den veröffentlichten Vorschungsergebnissen geht hervor, daß die Frage der spröden Zerstörung ein immer weiteres Gebiet angeht, so daß Fragen von metallurgischen Einflüssen an bis zu den Fragen von Anwendungsbedingungen umfaßt werden müssen.

Die Kenntnis der Bedingungen, die zur Sprödbbruchbildung führen, ist heute von außergewöhnlicher Wichtigkeit, da in den modernen Anlagen die Maschinenteile sehr breiten Gebieten der Temperatur wie auch der Beanspruchungsgeschwindigkeit ausgesetzt werden. Gleichfalls das Streben nach Leistungserhöhung der Anlagen und die schweren Betriebsbedingungen erfordern größere Maschinenteile, was andererseits dringend die Lösung der Frage des Größeneinflusses auf die Sprödbbruchbildung hervorruft.

Dieses weitgehende Problem führt zur Tatsache, daß diese Fragen in der Metallurgie und bei den Werkstoffen sowie auch bei den Konstrukteuren in Erwägung gezogen werden müssen, um die Ermittlung von Berechnungsunterlagen auf Grund dieser Kenntnisse zu ermöglichen.

In den Lenin-Werken (Plzeň) wo der Maschinenbau mit eigener Stahlherzeugung verbunden ist, wurden wir genötigt, zu diesen Fragen im breitesten Umfang Stellung zu nehmen. Es wurden Arbeiten über metallurgische und technologische Einflüsse auf die Stahlversprödung durchgeführt [1, 2, 3]. Zur Werkstoffprüfung bei hohen Belastungsgeschwindigkeiten wurde eine spezielle Versuchseinrichtung gebaut [4]. In der letzten Zeit befassen wir uns mit der Einwirkung des Größenmaßtabes auf die Sprödbbruchbildung.

Versuchsergebnisse bei der Bestimmung des Größeneinflusses

Die Theorie des Sprödbrechens kann auf Grund eines vollkommen spröden elastischen Kontinuums mit einer linearen Deformationscharakteristik bis

zum Zerreipunkt aufgebaut werden. Für die praktische Anwendung bei Bauelementen ist man aber genötigt, wirkliche Stahleigenschaften in Rechnung zu ziehen und die theoretischen Zusammenhänge richtig anpassen.

Soll es bei Raumtemperatur und bei einer ruhenden Belastung zu einer spröden Konstruktionszerstrung kommen, muß in einem Bestandteil, neben einer hohen Spannungskonzentration im Bruchausgangspunkt auch eine genügend hohe elastische Spannungsenergie vorhanden sein, damit die freigewordene Energie imstande sei, alle Hindernisse, die das schnelle Fortschreiten des Risses bis zum Bruch hindern, zu überwinden. Dies ist auch der Grund, da für daß bei Versuchen, bei denen die Bedingungen für die Sprdbruchentstehung und Ausbreitung in Frage gestellt werden, Versuchsstäbe mit scharfen Kerben oder sogar mit Rissen benützt werden.

Die Sprdbruchbildung ist nähmlich immer durch mehrere Faktoren beeinflt, ob sie nun mechanische Faktoren, wie zum Beispiel die früher angefuhrte Spannungskonzentration, das Entstehen der dreiachsigen Spannung usw. oder die eigentlichen Werkstoffeigenschaften sind. Diese Tatsache wird sehr oft bei der üblichen Werkstoffprüfung durch gute Eigenschaften der Prüfstäbe, die eng an der spröden Bruchstelle entnommen wurden, bestätigt.

Gleichfalls kann der Größenfaktor allein nicht als Ursache zur Sprödbruchneigung bezeichnet werden. Wie aus den weiterangegebenen Versuchsergebnissen hervorgeht, ist bei der Sprdbruchbildung auch der Größenfaktor mit den früher genannten Faktoren eng verbunden.

Als Versuchswerkstoff haben wir einen gewöhnlichen Baustahl gewählt, der zu einer Dicke von 120 mm gewalzt wurde. Die chemische Zusammensetzung und die üblichen mechanischen Eigenschaften nach dem Aufwärmen auf 860°C und nach der Abkühlung an der Luft sind in der Tabelle 1 angefuhrte.

Tabelle 1

C	Mn	Si	P	S
0,24	1,20	0,54	0,027	0,021
σ_{Pt} kg/mm ²	σ_{Kt} kg/mm ²	δ %	ψ %	R kgm/cm ²
60	38	28	61	12

Wie aus der Tabelle 1 hervorgeht, steht bei diesem Stahl vom Standpunkt der üblichen Praxis aus, nach der Schlagarbeit, Einschnürung und Dehnung gemessen, eine genügend hohe Zähigkeit zur Verfügung.

Aus dem genannten Stahl wurden flache Versuchsstäbe mit verschiedenen Kerben gefertigt, die statisch in Biegung belastet wurden.

Die charakteristische Abhängigkeit zwischen der Spannung und Dehnung wurde mit Hilfe von Dehnungsmeßstreifen, die im elastischen Bereich der Prüfstäbe angebracht wurden, festgestellt. Die Meßstreifenwiderstandswerte wurden mittels einer Gleichstrombrücke an ein Schleifenoszilloskop, mit einer Registrierbandgeschwindigkeit bis zu 1 m/sec, geführt. Durch diese Versuchsanordnung wurde der Einfluß der elastischen Deformation der Prüfmaschine und der Einfluß des mechanischen Übersetzungsgetriebes der Schreibeinrichtung unterdrückt, und eine Verbreiterung der Grundbasis erzielt.

Die Versuchsproben hatten einen Quadratquerschnitt von 10, 30, 80 und 120 mm, wobei für jede dieser Dimensionen eine Reihe von flachen Kerben mit einem Verhältnis der Krümmung zur Kerbtiefe von 1; 0,2; 0,1; 0,05 und 0,02 vorhanden war, so daß die theoretische Spannungskonzentrationsformzahl nach NEUBER [5] errechnet das Gebiet von 1,54 bis 3,95 umfaßte.

In dem Bilde 1 sind Brüche der Versuchsstäbe in 2 Reihen mit Kerben im Verhältnis 1 und 0,02 abgebildet. Aus dem Bild sind die verschiedenen Größen der Proben und die Verschiedenheit der einzelnen Brüche gut ersichtlich.

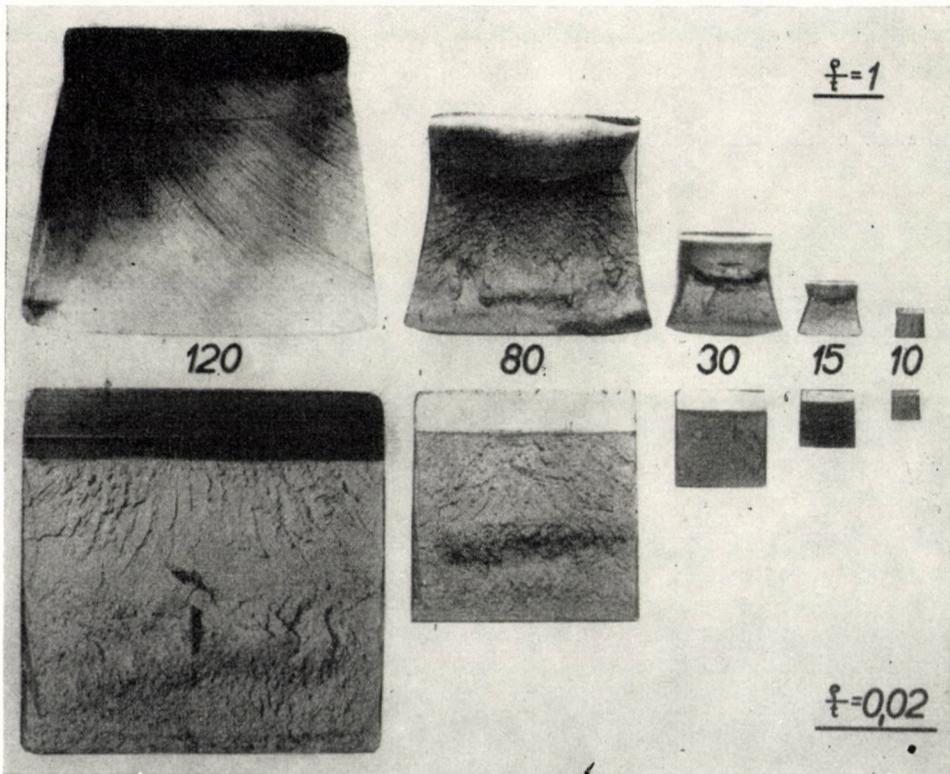


Bild 1

Außer der maximalen Belastungskraft, aus welcher, wie üblich, die maximale Nennspannung errechnet wurde, wurde aus dem Arbeitsdiagramm (Bild 2) durch die Flächenmessung auch die nötige Arbeit zur Hervorrufung der ersten Ribbildung festgelegt.

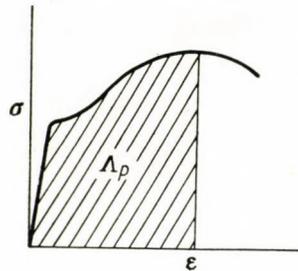


Bild 2

Die numerischen Ergebnisse sind graphisch im Verhältnis der maximalen Nennspannung oder der spezifischen Arbeit zu der Probengröße verarbeitet worden.

In diesen Schaubildern stellen die Isopleten das konstante Verhältnis zwischen dem Krümmungsradius und der Kerbtiefe dar. Im Bild 3 steht die maximale Nennspannung in Beziehung zur Probengröße, die durch das Querschnittswiderstandsmoment ausgedrückt ist. Aus dem Kurvenverlauf ist ersichtlich, daß der größte Spannungsrückgang bei allen Kerbzahlen im

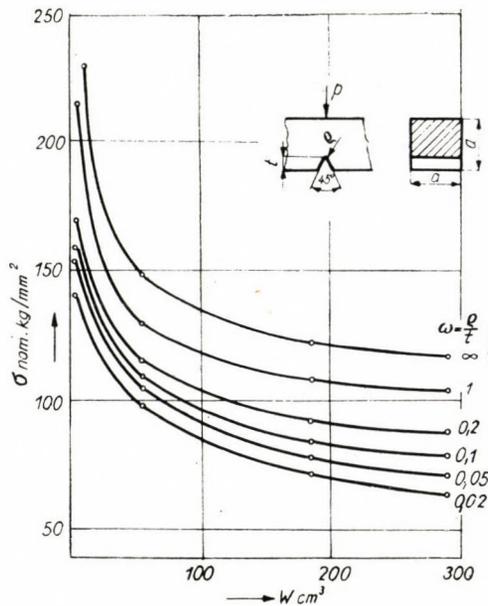


Bild 3

Größengebiet von 30×30 mm vorkommt, und daß bei dem Querschnitt 120×120 mm die Hälfte der Ausgangswerte erzielt wurde. Selbstverständlich vergrößert sich der Spannungsabfall durch die Kerbverschärfung.

Zu gleichen Schlüssen kommen wir auch bei dem Verhältnis der spezifischen Arbeit zu der Probengröße. Diese Ergebnisse sind in dem Bild 4 erfaßt.

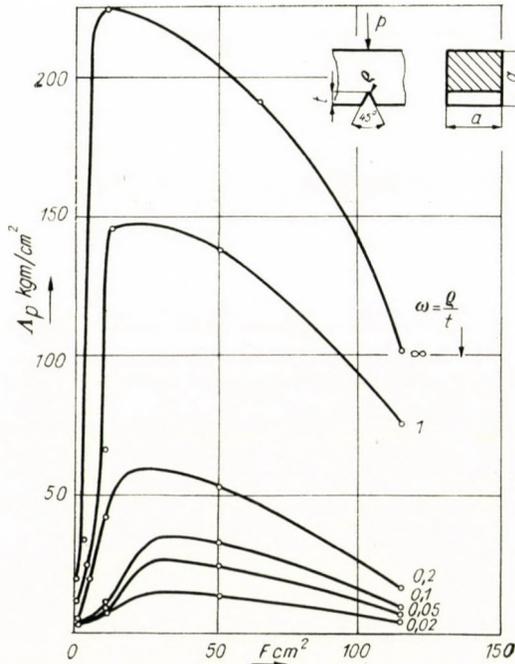


Bild 4

Die Tatsache, daß der Verlauf der Kurven praktisch im Gebiet der plastischen wie auch der spröden Brüche der Gleiche ist, spricht dafür, daß kein grundsätzlicher Unterschied zwischen dem Wesen des Entstehens des plastischen und spröden Bruches besteht, wie es auch die veröffentlichten röntgenographischen Arbeiten bestätigen, die auch bei Sprödbrüchen für die Existenz einer bildsam verformten Schicht sprechen.

Der Grenzwert der spröden Festigkeit ist dann als eine Funktion der Dicke dieser plastisch verformten Schicht anzusehen. Wenn wir die Schichtdicke in Beziehung zu der Kerbschärfe stellen (Bild 5), finden wir den gleichen Kurvencharakter wie bei der Beziehung der Dicke zur Temperatur.

Auch bei Versuchen an Proben von gleicher Größe, aber bei schlagartiger Biegebeanspruchung, kamen wir zu interessanten Ergebnissen.

Die veröffentlichten Resultate [6,7] die an geometrisch ähnlichen Probestäben bis zu einem Querschnitt von 40×40 mm erzielt worden waren,

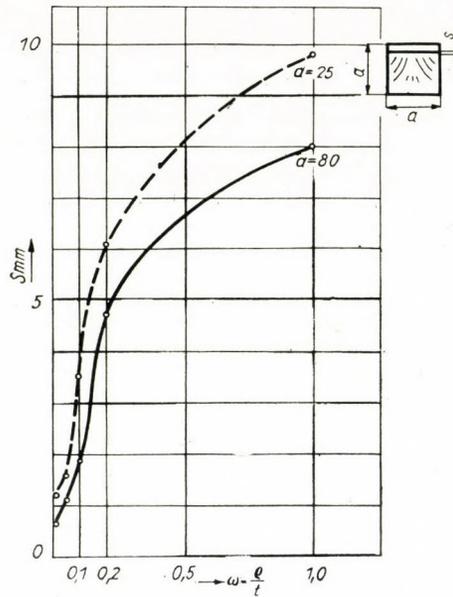


Bild 5

zeigen, daß die Schlagarbeit mit der zunehmenden Probengröße steigt. Es wurde jedoch vorausgesetzt, daß bei einem weiteren Vergrößern des Querschnittes bald ein schneller Abfall der absorbierten Energie eintritt. An den Ergebnissen, erzielt an Probengrößen bis zu 120×120 mm, konnten wir

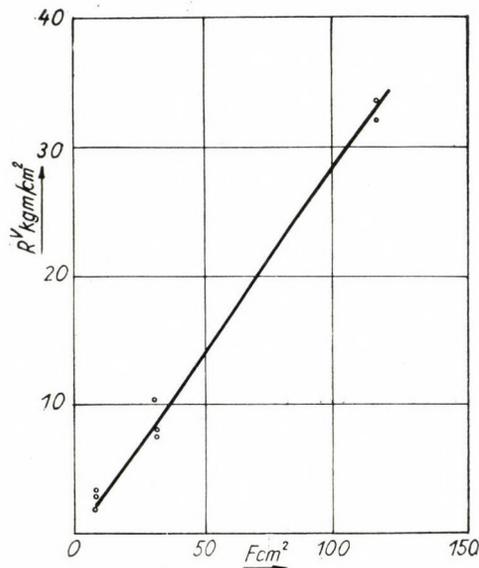


Bild 6

diesen Abfall nicht feststellen. Die graphische Auswertung zeigt das Bild 6. Die Schlagarbeit steigt praktisch linear mit der zunehmenden Probengröße.

Der Probestab 120×120 mm der mit einer Kerbart im Verhältnis der MESNAGERprobe (Ausgangsschlagzähigkeitswert von 12 kgm/cm^2) versehen wurde, konnte nicht mit einer Energie von 10 000 kgm, was einem Kerbschlagzähigkeitswert über 87 kgm/cm^2 entspricht, zerstört werden. Der Schlag wurde sechsmal bei zunehmender bildsamer Verformung wiederholt, ohne daß eine sichtbare Ribbildung wahrgenommen werden konnte.

Schlußfolgerungen

Die vorgelegten Versuchsergebnisse bestätigen den bedeutsamen Einfluß des Größenfaktors auf den Grenzzustand bei Stahlbauten, wobei aber die weiteren gleichfalls bedeutsamen Faktoren nicht vernachlässigt werden dürfen.

Da im Gebiet der elastischen Deformation die Möglichkeit besteht, modellartig einen Spannungsgradient darzustellen, bei der bildsamen Verformung aber bisher keine genügenden Angaben zur Verfügung stehen, ist es nötig, weiter die Aufmerksamkeit auf die Beziehungen bei gekerbten Probestäben zu lenken.

Versuchsmäßig erzielte Ergebnisse gestatten dann ein sicheres Ausbeuten der Werkstoffe bei den neuen anspruchsvollen Konstruktionen.

SCHRIFTTUM

1. KERMES: Strojirenství, SNTL, č. 8, 1955, 598.
2. KERMES: Technische Nachricht LZP, TIZ 377, 1954.
3. KERMES: Dissertationsarbeit, 1960.
4. KERMES: Strojirenství, SNTL, č. 6, 1961, 449.
5. NEUBER: Kerbspannungslehre, Verlag von J. Springer, Berlin 1937.
6. NĚMEC: Tuhost a pevnost ocelových částí, nakl. ČSAV, Praha 1961.
7. BRAUN, KOSTYRKO: Zavodskaja laboratorija, 3, 1961, 318.

DER SPANNUNGSZUSTAND IN GEKERBTEN PROBEN UND SEINE BEDEUTUNG FÜR DIE SPRÖDBRUCH- TEMPERATUR VON BAUSTÄHLEN

Prof. A. KOCHENDÖRFER

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR EISENFORSCHUNG, DÜSSELDORF

Die Erforschung der grundlegenden Gesetzmäßigkeiten der Sprödbrechneigung der Baustähle ist dadurch erschwert, daß Spannungszustände höherer Mehrachsigkeit nur als inhomogene Spannungszustände verwirklicht werden können, z. B. in gekerbten Proben. Bei solchen Spannungszuständen sind die Meßwerte der Spannungen und Dehnungen Mittelwerte der über den Querschnitt veränderlichen Werte, und es erhebt sich die Frage, welche physikalische Bedeutung diese Mittelwerte besitzen. Erst wenn diese Frage geklärt ist, kann beurteilt werden, wie das Werkstoffverhalten in Konstruktionen an Hand der Versuchsergebnisse zu bewerten ist.

Im folgenden wird zunächst ein Überblick über die bisherigen theoretischen und experimentellen Ergebnisse dieser Problemstellung gegeben [1—5]. Anschließend wird dargelegt, daß es die gewonnenen Erkenntnisse ermöglichen, die Sprödbrechtemperatur bei verschiedenen Probenformen und Beanspruchungsarten zueinander in Beziehung zu setzen [6]. An Schiffbaublechen erhaltene Meßergebnisse bestätigen die erhaltenen Folgerungen. Abschließend wird deren Bedeutung für das Sprödbbruchverhalten von Stählen in Konstruktionen erörtert.

Der Spannungszustand in gekerbten Proben bei elastischer Beanspruchung

Es könnte zunächst vermutet werden, ein Sprödbbruch erfolge im Bereich der elastischen Beanspruchung und daß dementsprechend der elastische Spannungszustand für seine Auslösung und Ausbreitung maßgebend sei. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt werden, daß dies nicht der Fall ist. Die Kenntnis des elastischen Spannungszustandes ist jedoch trotzdem von Bedeutung, denn er bestimmt den Eintritt und das Fortschreiten der örtlichen plastischen Formänderungen und steht deshalb in engem Zusammenhang mit dem Spannungszustand im vollplastischen Zustand. Gerade der Vergleich der Spannungszustände im elastischen und im vollplastischen Zustand beleuchtet das Problem des Sprödbruchs sehr treffend, wie später deutlich werden wird.

Eingehende Untersuchungen über den elastischen Spannungszustand gekerbter Proben sind von H. NEUBER [7] durchgeführt worden. In Fig. 1 ist der Verlauf der Hauptspannungen im Kerbquerschnitt einer zugbeanspruchten zylindrischen Probe in Abhängigkeit von der Halbmesserkoordinate r wiedergegeben. Die Bezeichnung der Koordinaten ist aus Fig. 2 zu ersehen. Bei einer zylindrischen Probe geben an: x die Koordinate in der Längsrichtung (Proben-

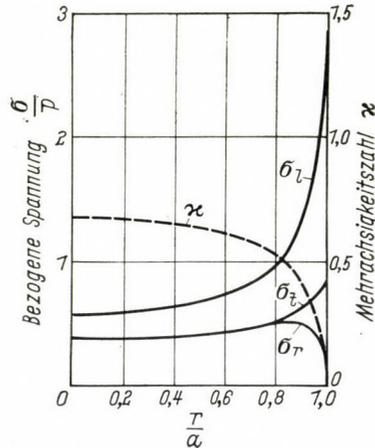


Fig. 1. Verlauf der Hauptspannungen σ_l , σ_r und σ_t , bezogen auf die mittlere Spannung p , und der Mehrachsigsigszahl α als Funktion der Halbmesser-Koordinate r , bezogen auf den Halbmesser a , einer gekerbten elastisch zugbeanspruchten zylindrischen Probe mit der Kerbziffer $k = a/\rho = 8$. Nach [7] und [1]

achse) und σ_l die Längsspannung; r die Halbmesserkoordinate und σ_r die Radialspannung; σ_t die Tangentialspannung (Umfangsspannung). Bei einer rechteckigen Probe haben x und σ_l dieselbe Bedeutung; y ist die Koordinate in der Verbindungsrichtung der Kerben, z die Koordinate senkrecht zu x und y . Der Durchmesser des Kerbquerschnitts oder seine Breite wird mit $2a$ bezeichnet, der Krümmungshalbmesser der Kerben (Kerbhalbmesser) mit ρ und der Flankenwinkel mit ω . Bei einer Zugbeanspruchung soll die Zugkraft in Richtung x wirken, bei einer Biegebeanspruchung das Kräftepaar um die z -Richtung. Die x, y -Ebene ist dann die Ebene der Biegung, und die neutralen Fasern liegen parallel zur x -Achse.

Der Spannungszustand einer gekerbten Probe ist im wesentlichen bestimmt durch die Kerbziffer

$$k = \frac{a}{\rho} .$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß die Kerben hinreichend tief sind. Für flache Kerben ist neben k auch die Kerbtiefe t von Einfluß. Der Spannungszustand hängt

ferner von der Probenform (zylindrisch oder rechteckig) und der Beanspruchungsart (Zug, Biegung) sowie vom Flankenwinkel ω ab. Dem Buch von H. NEUBER [7] sind Nomogramme beigelegt, aus denen diese Einflüsse zu entnehmen sind. Die Kurven in Fig. 1 gelten für unendlich tiefe hyperbolische Kerben, bei denen ω eine Funktion von k ist. Die auf diese Weise berechneten Spannungszustände geben recht befriedigend die in den üblichen gekerbten Proben bestehenden Spannungszustände wieder [1].

Wird von den genannten anderen Einflüssen abgesehen, so ist die Kerbziffer k ein Maß für die Mehrachsichtigkeit eines Spannungszustandes. Sie ist durch die geometrische Form der Probe bestimmt. Die Festigkeitstheorien gestatten es, die Mehrachsichtigkeit durch die Hauptspannungen zu kennzeichnen. Diese Kennzeichnung kann in verschiedener Weise erfolgen [8] und wird zweckmäßig entsprechend der zur Erörterung stehenden Fragestellung gewählt. Für die vorliegende Fragestellung hat sich die Mehrachsichtigkeitszahl

$$\kappa = 1 - \frac{\sigma_v}{\sigma_1} \quad (1)$$

als geeignete Größe erwiesen. σ_1 bezeichnet die größte Hauptspannung und σ_v die der benutzten Festigkeitshypothese entsprechende Vergleichsspannung. Nach der Gestaltänderungsenergiehypothese, die die Versuchsergebnisse bei homogenen Beanspruchungen am besten wiedergibt [9, 10], ist

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \quad (1a)$$

σ_1 , σ_2 und σ_3 geben die Hauptspannungen in abnehmender Größe an. Nach der weniger genauen Schubspannungshypothese ist $\sigma_v = \sigma_1 - \sigma_3$, also $\kappa = \sigma_3/\sigma_1$. Da $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ die maximale auftretende Schubspannung τ_{\max} angibt, besagt Gleichung (1), daß κ mit abnehmender Schubspannung, also Annäherung an den hydrostatischen Zugspannungszustand mit $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, zunimmt. Für diesen Zustand selbst ist $\sigma_v = 0$ und $\kappa = 1$. Für den einachsigen Spannungszustand mit $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ist $\sigma_v = \sigma_1$ und $\kappa = 0$. Die physikalische Bedeutung dieses Sachverhalts ergibt sich an Hand der im nächsten Abschnitt betrachteten Gesetzmäßigkeiten des Fließens.

Die nach den Gleichungen (1) und (1a) sich ergebende Mehrachsichtigkeitszahl ist in Fig. 1 in Abhängigkeit von der Halbmesserkoordinate mit eingezeichnet. Dabei ist $\sigma_1 = \sigma_l$, $\sigma_2 = \sigma_t$ und $\sigma_3 = \sigma_r$. Kennzeichnend für den elastischen Spannungszustand gekerbter Proben ist demnach, daß im Kerbgrund $r = a$ ein geringer Wert von κ mit einem hohen Wert der Längsspannung σ_l zusammenfällt, in der Probenmitte aber umgekehrt ein hoher Wert von κ mit einem geringen Wert von σ_l .

Der Spannungszustand in gekerbten Proben an der Fließgrenze

Bei einer gekerbten Probe beginnt das plastische Fließen im Kerbgrund schon lange, ehe die mittlere Spannung im Kerbquerschnitt den Wert σ_{F0} der Fließgrenze bei einachsiger Beanspruchung erreicht. Dies ergibt sich aus dem Fließgesetz, das besagt, daß das Fließen an einer Stelle eintritt, wenn

$$\sigma_v = \sigma_{F0} \quad (2)$$

ist. Gleichbedeutend damit ist nach Gleichung (1) für $\sigma_1 = \sigma_l$:

$$p = \frac{\sigma_{F0}}{\alpha(1 - \kappa)}, \quad \alpha = \left(\frac{\sigma_l}{p} \right) \quad (3)$$

p gibt die mittlere Spannung im Kerbquerschnitt an. Der maximale, bei elastischer Beanspruchung im Kerbgrund angenommene Wert von α wird als Formzahl α_k bezeichnet. Da im Kerbgrund $\kappa \sim 0$ ist, so beginnt dort das Fließen bei der Spannung

$$p = p_1 \sim \frac{\sigma_{F0}}{\alpha_k}. \quad (3a)$$

p_1 nimmt mit zunehmender Kerbziffer k rasch ab, da α_k stark anwächst. In Fig. 1 ist $\alpha_k \sim 3$, also $p_1 \sim \sigma_{F0}/3$.

Mit zunehmender Beanspruchung wird die Fließbedingung (2) an weiter innen liegenden Stellen erfüllt und die Fließzone breitet sich dementsprechend aus. Wenn sie die Probenmitte erreicht hat, ist der Zustand vollplastisch, und die mittlere Spannung ist gleich der Fließgrenze σ_F der gekerbten Probe.* Gleichung (3) ergibt dann

$$\frac{\sigma_F}{\sigma_{F0}} = \overline{\left(\frac{1}{\alpha(1 - \kappa)} \right)} = \frac{1}{1 - \kappa_F}, \quad (4)$$

wobei der Querstrich die Mittelwertbildung über den Querschnitt bezeichnet. Durch die rechte Seite von Gleichung (4) ist der Mittelwert κ_F von κ bestimmt, der die für die Fließgrenze maßgebende Mehrachsigekeitszahl des Spannungszustandes angibt.

Wäre die Art des Spannungszustandes, d. h. der Verlauf von α und κ über den Querschnitt, im vollplastischen Zustand dieselbe wie im elastischen

* Jede Größe mit dem Index F , aber ohne den Index Null bezeichnet bei einem mehrachsigen Spannungszustand den Mittelwert über den Querschnitt, also den Meßwert. Die Mehrachsigekeitszahl κ oder die Kerbziffer k werden nicht besonders als Index bezeichnet, außer, wenn sie gleich Null sind, durch den Index Null.

Zustand, so könnten die verhältnismäßig umfangreichen Ergebnisse der Elastizitätstheorie benutzt werden, um nach Gleichung (4) die Fließgrenze gekerbter Proben zu berechnen. Dies ist jedoch nicht der Fall. In Fig. 2 ist der qualitative Verlauf von σ_l in Abhängigkeit von r oder y für zug- und biegebeanspruchte, scharf gekerbte Proben dargestellt, wie er sich nach den Rechnungen von R. HILL [9] und von A. P. GREEN und B. B. HUNDY [11] ergibt. In der Nähe

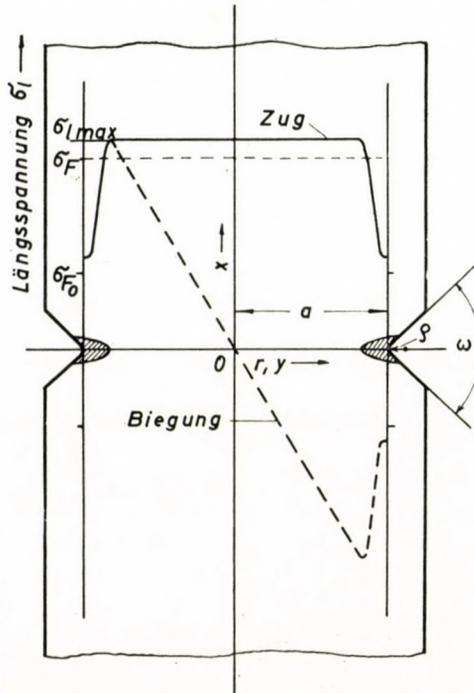


Fig. 2. Qualitativer Verlauf der Längsspannung σ_l längs eines Halbmessers (Koordinate r) einer zylindrischen oder der Breite (Koordinate y) einer rechteckigen Probe an der Fließgrenze bei Zugbeanspruchung (—) und Biegebeanspruchung (---). Nach [9] und [11]

des Kerbgrundes ist σ_l nur wenig größer als σ_{F0} , da dort der Spannungszustand nahezu einachsigt ist. Dann steigt σ_l rasch an, um am Ende der Fließzone, die sich in der Umgebung des Kerbgrundes bildet (siehe weiter unten), einen Höchstwert $\sigma_{l \max}$ anzunehmen. Dieser wird bei Zugbeanspruchung beibehalten, während bei Biegebeanspruchung ein Abfall zur neutralen Faser hin erfolgt. Da in der Fließzone die Fließbedingung (2) erfüllt ist, läßt sich κ aus Gleichung (1) berechnen. κ wächst mit zunehmendem σ_l und nimmt mit σ_l gleichzeitig den größten Wert κ_{\max} an. In Fig. 3 ist der Verlauf von $\sigma_{l \max}$ und von κ_{\max} in Abhängigkeit von der Kerbziffer k für verschiedene Probenformen und Beanspruchungsarten wiedergegeben. Der Einfluß der Versuchsbedingungen ist recht bedeutend.

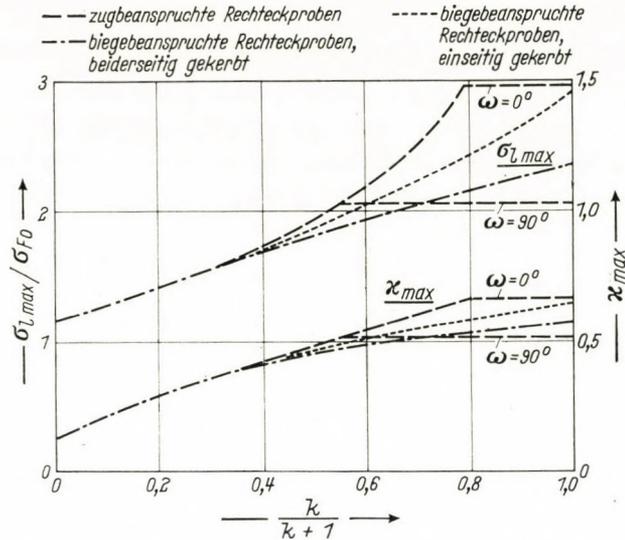


Fig. 3. Berechneter Verlauf der an der Fließgrenze bestehenden größten Längsspannung $\sigma_{I, \max}$, bezogen auf die Fließgrenze σ_{F0} bei einachsiger Beanspruchung, und der größten Mehrachsigsigkeitszahl κ_{\max} in Abhängigkeit von der Kerbziffer $k = a/\rho$ für die angegebenen Versuchsbedingungen. Nach [9], [11] und [2]

Vergleich der theoretischen und experimentellen Ergebnisse über die Ausbildung der Fließzonen und die Abhängigkeit der Fließgrenze von der Kerbziffer

Im Gegensatz zum elastischen Zustand fallen im vollplastischen Zustand an der Fließgrenze die größte Längsspannung und die größte Mehrachsigsigkeitszahl zusammen. Ehe dieser für die Sprödbruchneigung der Stähle entscheidende Umstand genauer untersucht wird, soll gezeigt werden, daß die Ergebnisse der Theorie [9, 11] durch die Versuchsergebnisse recht gut wiedergegeben werden, obwohl wesentliche Vereinfachungen eingeführt werden mußten, um die Grundgleichungen lösen zu können [2].

In Fig. 4 sind die berechneten Fließzonen und Gleitlinien für biegebeanspruchte rechteckige Proben mit einem schwachen und einem scharfen Kerb wiedergegeben [11]. Bei ersterem bildet die Fließzone einen ausgedehnten dreieckförmigen Bereich, der sich bis zum neutralen Punkt N erstreckt. Bei dem scharfen Kerb erstreckt sich die ausgedehnte Fließzone nur auf die Umgebung des Kerbs, im übrigen besteht sie aus zwei einzelnen Gleitlinien, die außerhalb des Kerbquerschnitts verlaufen. Die Werte $\sigma_{I, \max}$ und κ_{\max} werden an den Punkten N bzw. P angenommen. Fig. 5 zeigt die beobachteten Fließzonen an einer schwach und einer scharf gekerbten Biegeprobe, die beide bis zur Fließgrenze beansprucht worden waren. Die Grundzüge der berechneten Zonen sind deutlich ausgeprägt, wenn auch bei dem scharfen Kerb mehrere einzelne Gleit-

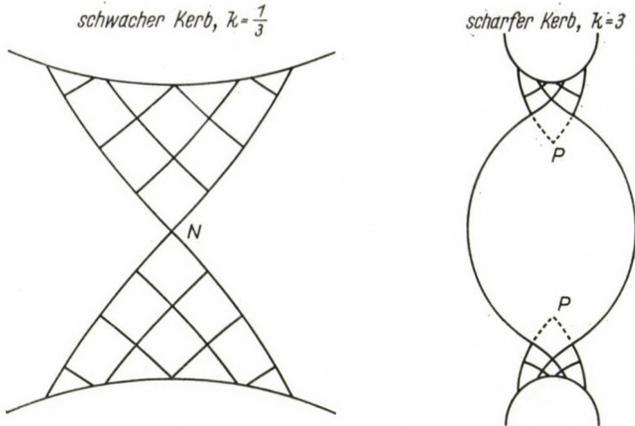


Fig. 4. Berechnete Fließzonen für biegebeanspruchte rechteckige Proben. Nach[11]

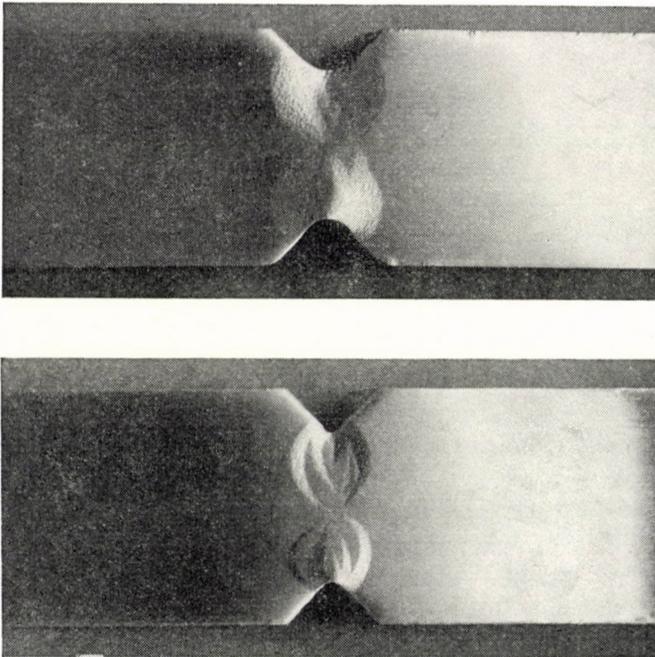


Fig. 5. Beobachtete Fließzonen an biegebeanspruchten rechteckigen Proben. Oben: schwach gekerbte Probe mit der Kerbziffer $k = a/\rho = 5 \text{ mm}/2 \text{ mm} = 2,5$. Unten: scharf gekerbte Probe mit $k = 5 \text{ mm}/0,65 \text{ mm} = 7,7$. Nach [2]

linien auftreten und beim schwachen Kerb die Neigung zur Bildung einzelner Gleitlinien deutlich zu erkennen ist.

In Fig. 6 ist der berechnete Verlauf der Fließgrenze σ_F bzw. der Mehrachsrigkeitszahl κ_F in Abhängigkeit von der Kerbziffer k für die angegebenen

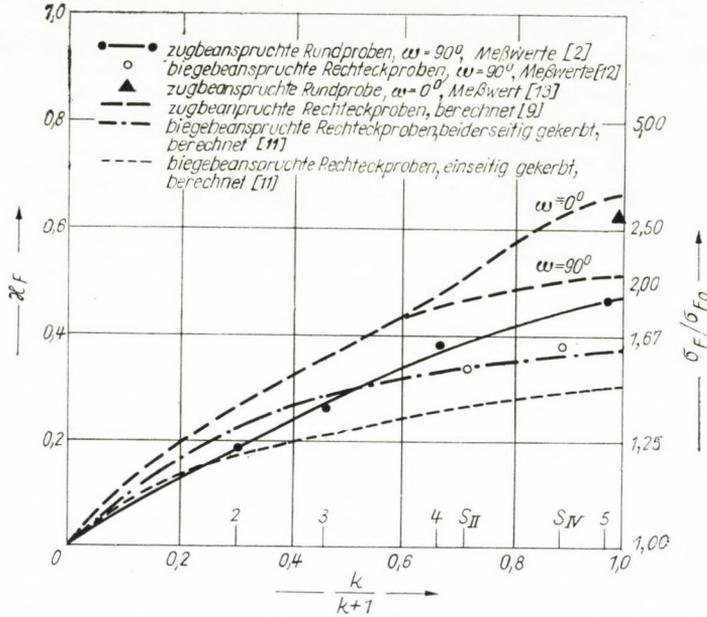


Fig. 6. Berechneter Verlauf und Meßwerte der Mehrachsigsiganzahl κ_F bzw. des Fließgrenzenverhältnisses σ_F/σ_{F0} in Abhängigkeit von der Kerbziffer $k = a/\rho$. Nach [2]

Probenformen und Beanspruchungsarten dargestellt. Die verfügbaren Meßwerte sind eingetragen. Die Meßpunkte für die beiderseitig gekerbten Rechteckproben liegen gut auf der berechneten Kurve. Bei den zugbeanspruchten zylindrischen Proben liegen die Meßpunkte etwas unter den für rechteckige Proben berechneten Kurven, zeigen aber, wie für $\omega = 90^\circ$ zu sehen ist, die berechnete Abhängigkeit von k . Hervorzuheben ist, daß die großen Fließgrenzerhöhungen bei scharfen Kerben, die bis nahe an den Faktor 3 reichen, auch gemessen werden.

Trotz der vereinfachenden Voraussetzungen der Theorie werden also die Folgerungen durch die Versuche bestätigt. Es darf daraus geschlossen werden, daß die berechneten Spannungszustände mit den in gekerbten Proben tatsächlich bestehenden in guter Näherung übereinstimmen. Insbesondere darf der in Fig. 3 wiedergegebene Verlauf von σ_{lmax} und κ_{max} als zutreffend angesehen werden.

Abhängigkeit der Spröbruchtemperatur von Probenform und Beanspruchungsart

Die Frage, unter welchen Bedingungen ein spröder Bruch auftritt, kann bei homogenen Spannungszuständen formal einfach beantwortet werden. Die Fließgrenze muß mindestens gleich der Reißfestigkeit sein. Durch diese Fest-

stellung ist das Problem nicht geklärt, denn die eigentliche Frage, durch welche Faktoren die Reißfestigkeit bestimmt ist, bleibt unbeantwortet. Erst in jüngerer Zeit ist es, besonders durch die Untersuchungen von A. N. STROH [14] und A. H. COTTRELL [15], gelungen, die Ribbildung durch Versetzungsreaktionen zu klären (vgl. die zusammenfassenden Darstellungen [16] und [17]). Die theoretischen Vorstellungen fußen auf der Voraussetzung, daß der Anrißbildung eine örtliche plastische Verformung vorausgeht. Aus der Verbreiterung der Röntgenreflexe von Bruchflächen spröde gebrochener Proben [18–20] ist dies schon früher geschlossen worden. Ein Spröbruch erfolgt daher nicht streng im elastischen Bereich, sondern ist stets von örtlichen plastischen Verformungen begleitet.

Die Theorie ergibt, daß für einen Spröbruch zwei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein müssen: Die Spannung muß so groß sein, daß die zur Bildung eines Anrisses erforderlichen Versetzungsreaktionen ablaufen können, gleichzeitig aber so groß, daß der Anriß sich ausbreiten kann. Die erste Bedingung hat den Charakter einer Fließbedingung, die entsprechende Spannung stimmt daher mit der Fließgrenze $\sigma_F = \sigma_F(T)$ bei der betrachteten Temperatur T (und der nicht besonders bezeichneten Mehrachsigekeitszahl κ des homogenen Spannungszustandes) überein. Die zweite Bedingung ist durch die elastischen Spannungen der Versetzungsanordnung und des Anrisses bedingt und daher die entsprechende Spannung in dem in Frage kommenden Temperaturbereich nahezu temperaturunabhängig. Oberhalb der Spröbruchtemperatur $T_s = T_s(\kappa)$, d. h. der Temperatur, bei der von höheren Temperaturen herkommend zum ersten Mal ein Spröbruch stattfindet, ist diese Spannung höher als die Fließgrenze σ_F . Es können dann zwar noch Anrisse entstehen, sich aber nicht ausbreiten. Bei der Spröbruchtemperatur selbst stimmen beide Spannungen überein. Die zweite Spannung ist daher die eigentliche Reißspannung σ_R . Da sie außer von T auch weitgehend von κ unabhängig ist, stimmt sie näherungsweise mit der Spannung $\sigma_{R0} = \sigma_R(\kappa = 0)$ überein. Die Spröbruchtemperatur ist also bestimmt durch

$$\sigma_F(T_s) = \sigma_{R0}. \quad (6)$$

Bei einem einachsigen Spannungszustand ($\kappa = 0$) wird

$$\sigma_{F0}(T_{s0}) = \sigma_{R0}. \quad (6a)$$

Wird die linke Seite von Gleichung (6) nach T entwickelt und σ_{R0} aus Gleichung (6a) eingesetzt, so folgt

$$\sigma_F(T_s) = \sigma_F(T_{s0}) - \left| \frac{\partial \sigma_F}{\partial T} \right| \Delta T_s = \sigma_{F0}(T_{s0}) \quad (7)$$

oder

$$\Delta T_s = T_s - T_{s0} = C \left(\frac{\sigma_F}{\sigma_{F0}} - 1 \right) \quad (8)$$

mit

$$C = \frac{\sigma_{F0}(T_{s0})}{|\partial\sigma_F/\partial T|} \quad (8a)$$

C ist für einen bestimmten Werkstoff näherungsweise eine Konstante; $\partial\sigma_F/\partial T$ hängt zwar von T und von ν ab, kann aber in den in Frage kommenden Bereichen beider Variablen durch einen Mittelwert ersetzt werden. σ_F/σ_{F0} ist nur eine Funktion von ν , aber unabhängig von T . Die ursprünglich angegebene Werkstoffkenngröße T_{s0} kann daher weggelassen werden.

Gleichung (8) soll hier nicht weiter erörtert werden. Es soll aus ihr vielmehr nur die Folgerung gezogen werden, daß bei einem bestimmten Werkstoff die Erhöhung der Sprödbbruchtemperatur T_s bei einem homogenen mehrachsigen Spannungszustand gegenüber der Sprödbbruchtemperatur T_{s0} bei einachsigem Spannungszustand durch σ_F/σ_{F0} bestimmt ist und mit diesem Verhältnis wächst. Ein Gütemaß für die Sprödbrechtsicherheit, also eine möglichst niedrige Übergangstemperatur, stellt demnach der Faktor

$$g_1 = \frac{1}{(\sigma_F/\sigma_{F0})} \quad (9)$$

dar.

Bei einer gekerbten Probe hat jede Stelle des Querschnitts ihre eigene Sprödbbruchtemperatur, die durch Gleichung (8) gegeben ist, wenn für σ_F die Längsspannung σ_l eingesetzt wird, bei der das Fließen an der betrachteten Stelle beginnt. Die Temperatur ist im Kerbgrund am niedrigsten, weil dort das Fließen zuerst beginnt. Sie steigt mit der Entfernung vom Kerbgrund an bis zu der Stelle, an der $\sigma_l = \sigma_{l \max}$ wird. Es könnte zunächst angenommen werden, daß diese Temperatur die Sprödbbruchtemperatur der Probe darstellt, da erst oberhalb derselben an keiner Stelle mehr die Bedingung für die Rißausbreitung erfüllt werden kann, ohne daß die Spannung die örtliche Fließgrenze überschreitet. Die Sprödbbruchtemperatur im Verhältnis zu der bei einachsiger Beanspruchung wäre dann durch $\sigma_{l \max}/\sigma_{F0}$ bestimmt oder die Sprödbrechtsicherheit durch den Faktor

$$g_2 = \frac{1}{(\sigma_{l \max}/\sigma_{F0})} \quad (10)$$

Dieser Grenzfall könnte jedoch nur bei beliebig kleiner Ausbreitungslänge eines Risses zutreffen, denn nur dann wären die örtlichen Bedingungen maßgebend. In Wirklichkeit ist die Ausbreitungslänge von der Größe einiger Korndurchmesser [21], d. h. ein Riß erstreckt sich über ein Gebiet veränderlicher Spannung. Im anderen Grenzfall, daß die Rißausbreitung durch die mittlere Fließspannung bestimmt ist, in Gleichung (8) σ_F also die Fließgrenze der Probe (mit inhomogenem Spannungszustand) bezeichnet müßte die Ausbreitungslänge größer sein, als sie tatsächlich ist. In diesem Falle wäre der Faktor g_1 nach Gleichung (9) das Gütemaß.

Die wirkliche Bedingung für die Sprödbruchtemperatur liegt zwischen diesen beiden Grenzfällen. Es ist naheliegend, anzunehmen, daß die Sprödbruchtemperatur durch den geometrischen Mittelwert der Faktoren beider Grenzfälle bestimmt ist, die Sprödbruchsicherheit also durch den Faktor

$$g_3 = \frac{1}{\sqrt{(\sigma_F/\sigma_{F0})(\sigma_{I\max}/\sigma_{F0})}} \quad (11)$$

Dieser Faktor berücksichtigt unmittelbar den Spannungsgradienten in gekerbten Proben, während der Faktor g_2 ihn nur mittelbar über σ_F enthält. Beim Übergang zu einem homogenen Spannungszustand, bei dem $\sigma_{I\max} = \sigma_F$ ist, wird $g_1 = g_2 = g_3$, wie auch zu fordern ist.

Die Kennzeichnung der Sprödbruchsicherheit bei einem inhomogenen Spannungszustand durch g_3 stellt zunächst eine qualitative Beschreibung dar, die noch der quantitativen Begründung bedarf. Sie wird aber durch die Versuchsergebnisse recht gut gestützt. In Tabelle 1 sind die Werte der Faktoren

Tabelle 1

Werte der Gütefaktoren g_i für die Sprödbruchsicherheit und der Sprödbruchtemperaturen T_{si} für ungekerbte und scharf gekerbte rechteckiger Proben unter verschiedenen Versuchsbedingungen. Die Werte von $\sigma_{I\max}/\sigma_{F0}$ sind Fig. 3, die von σ_F/σ_{F0} Fig. 6. entnommen

Versuchsbedingung	1	2	3	4	5
	Zug ungekerbt	Biegung		Zug Flankenwinkel	
		beiderseitig gekerbt	einseitig gekerbt	90°	0°
$\sigma_F/\sigma_{F0} = 1/g_1$	1	1,6	1,45	2,06	2,98
$\sigma_{I\max}/\sigma_{F0} = 1/g_2$	1	2,26	2,92	2,06	2,98
1000 g_1	1000	625	692	485	336
T_{s1} in °C	-200	-87	-107	-45	0
1000 g_2	1000	443	343	485	336
T_{s2} in °C	-200	-32	-2	-45	0
1000 g_3	1000	515	486	485	336
T_{s3} in °C	-200	-54	-45	-45	0

g_i unter den in den Fig. 3 und 6 angegebenen Versuchsbedingungen für ungekerbte und scharf gekerbte Proben ($k = 0$ bzw. $k \rightarrow \infty$) zusammengestellt. Außerdem sind die Werte der Sprödbruchtemperaturen T_{si} angegeben, die unter der Annahme erhalten werden, daß T_s linear von g abhängt und für ungekerbte Proben $T_s = -200^\circ\text{C}$, für scharf gekerbte Zugproben mit parallelen Kerbflanken ($\omega = 0^\circ$) $T_s = 0^\circ\text{C}$ ist. Versuche mit mehreren Stählen [2, 12] haben ergeben, daß T_s unter der Versuchsbedingung 1 um 120°C

bis 200° C tiefer ist als unter den Versuchsbedingungen 2 und 4, unter der Versuchsbedingung 2 um 21° C \pm 10° C tiefer als unter der Versuchsbedingung 4 und um etwa 7° C tiefer als unter der Versuchsbedingung 3. Diese Ergebnisse sind in qualitativer Übereinstimmung mit den unter Benutzung des Faktors g_3 berechneten, aber nicht mit denen unter Benutzung der Faktoren g_1 und g_2 erhaltenen. Mehr als eine qualitative Übereinstimmung ist unter den gemachten vereinfachenden Annahmen nicht zu erwarten.

Anwendung der Ergebnisse auf die Übergangstemperaturen von Schiffbaustählen

Mit den erhaltenen Ergebnissen wurden die Übergangstemperaturen $T_{\bar{u}}$ unter verschiedenen Bedingungen, wie sie zur Prüfung von Schiffbaustählen Anwendung fanden, abgeschätzt (Tabelle 2). Unter Übergangstemperatur wird

Tabelle 2

Berechnete Werte der Unterschiede ΔT_s in den Sprödbruchtemperaturen und beobachtete Werte $\Delta T_{\bar{u}}$ in den Übergangstemperaturen von Schiffbaustählen

Versuchsbedingung	a	b	c	d	e
	Biegung Charpy-Rundkerbproben dynamisch	Zug Platten innengekerbt parallele Kerbflanken statisch	Zug Proben nach N. A. Kahn statisch	Biegung ISO- (Charpy-) V-Kerbproben dynamisch	Zug Rundproben parallele Kerbflanken dynamisch
$k = a/q$	2,5	> 100	30	30	5
T_s von Tabelle 1, °C	-45	0	0	-45	0
Einfluß Geschw. ⁺ , °C	+ 50	0	0	+ 50	+ 50
Einfluß von k , °C	-50	0	0	0	-30
ΔT_s , °C	-45	0 ⁺⁺	0	+5	+20
$\Delta T_{\bar{u}}$, °C	-23 -28	0 ⁺⁺	0	+4	+8
nach Figur ⁺⁺⁺	8 10, 8	—	9	10, 8, 7	10

+ Geschw. = Beanspruchungsgeschwindigkeit.

++ Bezugswerte.

+++ Erläuterungen im Text.

die durch ein bestimmtes Kriterium im Übergangsbereich vom spröden zum zähen Bruch festgelegte Temperatur verstanden. Bei den Versuchen, deren Ergebnisse einer Zusammenstellung von K. RÜHL [22] entnommen und in den Fig. 7 bis 10 dargestellt sind, wurde dieses Kriterium verschieden gewählt. Es wurden benutzt:

- A) 1/4 der größten Formänderungsarbeit A_{\max} ,
- B) das Mittel $(A_{\max} + A_{\min})/2$ der größten und kleinsten Formänderungsarbeit,

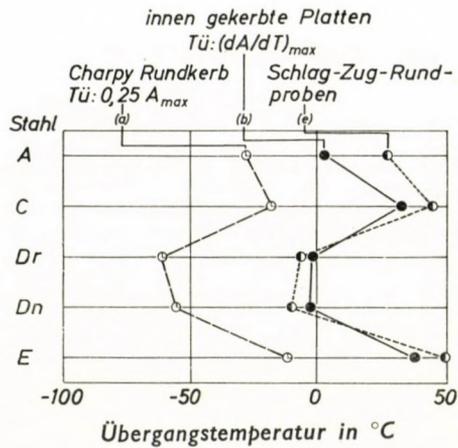
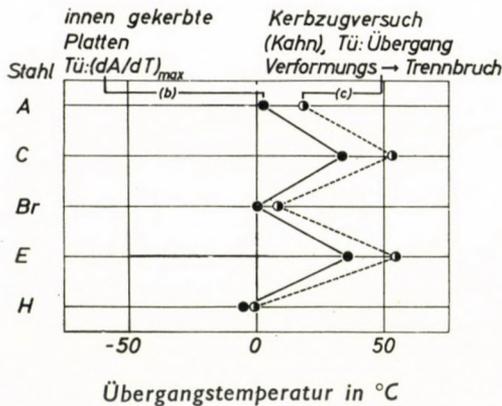
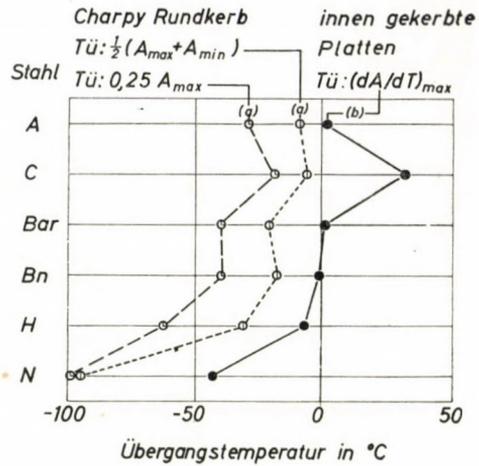
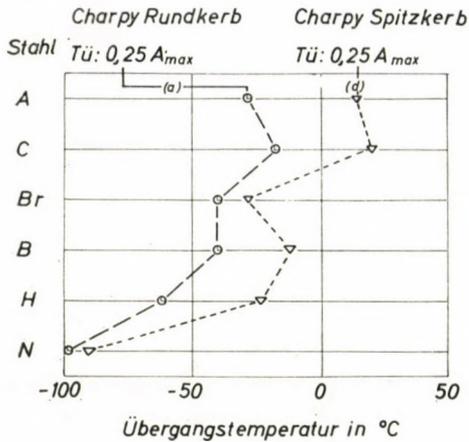


Fig. 7 bis 10. Übergangstemperaturen $T_{\bar{u}}$ für einige Schiffbaustähle unter den angegebenen Versuchsbedingungen und Festsetzungen von $T_{\bar{u}}$. Werte von $T_{\bar{u}}$ aus der Zusammenstellung [22] nach verschiedenen Verfassern

C) die größte Steigung $(dA/dT)_{max}$ der Arbeit-Temperatur-Kurve,

D) das metallographische Bild des Übergangs vom faserigen Verformungsbruch zum kristallinen Trennbruch durch je 50% Anteil.

$T_{\bar{u}}$ ist, mit Ausnahme der Kriterien B und C, unter sonst gleichen Bedingungen für die verschiedenen Kriterien verschieden. Aus Fig. 8 ist z. B. zu entnehmen, daß im Mittel für Charpy-Rundkerbproben $\Delta T_{\bar{u}}(a, B - a, A) = T_{\bar{u}}(a, B) - T_{\bar{u}}(a, A) = 21^\circ \text{C}$ ist und aus Fig. 9 für Platten bzw. Kerbzugproben $\Delta T_{\bar{u}}(c, D - b, C) = 13^\circ \text{C}$. Diese Werte entsprechen den allgemeinen Erfahrungen. Bei der ersten Mittelwertbildung ist Stahl N unberücksichtigt geblieben, da bei ihm der Unterschied in den Werten von $T_{\bar{u}}$ wesentlich kleiner ist als bei den übrigen Stählen. Dieses Vorgehen ist gerechtfertigt, da bei den

weiteren Versuchsreihen, zu deren Auswertung dieser Unterschied benutzt wird, Stahl *N* nicht enthalten ist. Der Unterschied würde unter Einbeziehung von Stahl *N* sich nur um 3° C erniedrigen, könnte im Rahmen der Genauigkeit also auch so benutzt werden. Bei den anderen Kriterien treten auch Unterschiede bei den einzelnen Stählen auf, aber nicht so ausgeprägt wie beim Kriterium *A* und Stahl *N*. Sie sind dadurch bedingt, daß die Übergangstemperatur außer von den beschriebenen, zum Spröbruch führenden Vorgängen auch vom Verfestigungsanstieg bzw. dessen Temperaturabhängigkeit beeinflusst wird und diese für die verschiedenen Stähle verschieden ist. Die Übergangstemperaturen verlaufen daher nicht parallel zu den Spröbruchtemperaturen. Da außerdem in Tabelle 1 die Abhängigkeit von T_s von der Stahlsorte nicht berücksichtigt ist, kann bei Anwendung der bisherigen Ergebnisse auf die Übergangstemperaturen nur eine Übereinstimmung in den mittleren Unterschieden der Temperaturen für die verschiedenen Stähle erwartet werden. Die Spröbruch- und Übergangstemperaturen werden daher auf diejenigen bei der Versuchsbedingung *b* von Tabelle 2 bezogen und die Unterschiede*

$$\Delta T_s = T_s (\text{betrachtete Vers. Bed.}) - T_s (\text{Vers. Bed. } b) \quad (12a)$$

bzw.

$$\Delta T_{\bar{u}} = T_{\bar{u}} (\text{betrachtete Vers. Bed.}) - T_{\bar{u}} (\text{Vers. Bed. } b) \quad (12b)$$

miteinander verglichen.

In Tabelle 2 sind in der zweiten Zeile die von Tabelle 1 übernommenen Werte von T_s für statisch beanspruchte scharf gekerbte Proben unter den bezeichneten Beanspruchungsbedingungen angegeben. An diesen sind entsprechend den unterschiedlichen Kerbziffern *k* und den unterschiedlichen Beanspruchungsgeschwindigkeiten, die am Kopf von Tabelle 2 angegeben sind, Korrekturen vorzunehmen. Diese sind auf Grund der früheren Versuchsergebnisse [12] in der dritten und vierten Zeile von Tabelle 2 angegeben. Die Summe aller Beiträge ergibt die berechneten Werte von ΔT_s in der fünften Zeile von Tabelle 2. In der sechsten Zeile sind die Mittelwerte von $\Delta T_{\bar{u}}$ aus den Fig. 7 bis 10 angegeben. Dabei ist das Kriterium B oder das gleichwertige Kriterium C für $T_{\bar{u}}$ zugrunde gelegt worden, so daß einwandfreie Vergleiche möglich sind. Soweit eins dieser Kriterien bei den Versuchen nicht benutzt wurde, kann aus den Versuchsreihen auf das Kriterium B umgerechnet werden. Die angegebenen Werte von $\Delta T_{\bar{u}}$ wurden folgendermaßen ermittelt: Aus Fig. 8 ergibt sich (ohne Berücksichtigung von Stahl *N*) unmittelbar der erste Wert $\Delta T_{\bar{u}}(a, B - b, C) = -23^\circ \text{C}$ von Spalte *a*. Dieselbe Figur zeigt, wie oben schon angegeben wurde, daß $\Delta T_{\bar{u}}(a, B - a, A) = 21^\circ \text{C}$ ist. Aus Fig. 10 ist $\Delta T_{\bar{u}}(a, A - b, C) = -49^\circ \text{C}$ zu entnehmen. Daraus ergibt sich der zweite Wert $\Delta T_{\bar{u}}(a, B - b, C) =$

* Vers. Bed. = Versuchsbedingung

= -28°C von Spalte *a*. Beide Werte stimmen innerhalb der zu erwartenden Genauigkeit überein. In Spalte *c* ist $\Delta T_{\bar{u}} = 0^{\circ}\text{C}$ angegeben, da, wie schon erwähnt wurde, der beobachtete Unterschied auf die Anwendung der beiden verschiedenen Kriterien zurückzuführen ist. Der Wert von $\Delta T_{\bar{u}}(d, B-b, C) = 4^{\circ}\text{C}$ in Spalte *d* ergibt sich aus dem zweiten Wert $\Delta T_{\bar{u}}(a, B-b, C) = -28^{\circ}\text{C}$ von Spalte *a* und dem Wert $\Delta T_{\bar{u}}(d, A-a, A) = 32^{\circ}\text{C}$ aus Fig. 7 unter der durch die Erfahrung gerechtfertigten Annahme, daß $\Delta T_{\bar{u}}(d, A-a, A)$ mit $\Delta T_{\bar{u}}(d, B-a, B)$ übereinstimmt, d. h. die Änderung von $T_{\bar{u}}$ beim Übergang vom Rundkerb zum V-Kerb unabhängig vom Kriterium, durch das die Übergangstemperatur festgelegt wird, ist. Die Werte von $T_{\bar{u}}$ der Schlag-Zug-Rundproben (Fig. 10) sind gegenüber denen der Platten teils positiv, teils negativ. Worauf dieser sonst nicht beobachtete Vorzeichenwechsel in $\Delta T_{\bar{u}}$ zurückzuführen ist, kann nicht gesagt werden. Der in Spalte *c* angegebene Mittelwert hat daher nur eine beschränkte Bedeutung.

Die Übereinstimmung der berechneten und gemessenen Werte von $\Delta T_{\bar{u}}$ ist gut. Dem Umstand, daß in Spalte *a* der berechnete Wert dem Betrag nach größer ist als der gemessene, ist keine besondere Bedeutung beizumessen, denn einerseits stellt die zugrunde gelegte lineare Abhängigkeit von ΔT_s von g_3 eine Näherung dar, die bei dem verhältnismäßig großen Temperaturunterschied nur roh zu sein braucht, und andererseits ist der mit -50°C berücksichtigte Einfluß der Kerbziffer ein Mittelwert von stark streuenden Einzelwerten [12], der durchaus auch mit -30°C hätte angesetzt werden können und entsprechend in Spalte *e* mit -10°C . Der Geschwindigkeitseinfluß von $+50^{\circ}\text{C}$ schwankt demgegenüber nur in engen Grenzen. Deshalb kann eine genaue zahlenmäßige Übereinstimmung nur in den Fällen erwartet werden, in denen kein unterschiedlicher Kerbschärfeneinfluß besteht. Dies trifft auch zu. Im ganzen ist wesentlich, daß die allgemeine Abhängigkeit der Übergangstemperatur von den Versuchsbedingungen richtig wiedergegeben wird. Tabelle 2 zeigt, daß in der Ordnung der Übergangstemperaturen dem Einfluß der Bedingungen von Tabelle 1 eine entscheidende Bedeutung zukommt. Die beschriebenen Vorstellungen über die Sprödbruch- bzw. Übergangstemperatur bei gekerbten Proben werden daher auch durch diese Ergebnisse gestützt.

Folgerungen für die Prüfung der Sprödbruchneigung von Baustählen im Hinblick auf ihr Verhalten in Konstruktionen

Wenn an Hand der mit Proben gewonnenen Versuchsergebnisse das Verhalten von Werkstoffen in Konstruktionen beurteilt werden soll, erhebt sich zunächst die Frage, ob die Übergangstemperatur in der betrachteten Konstruktion höher sein kann als die im Versuch beobachtete. Daß dies ohne nähere Kennzeichnung der Probe möglich ist, zeigen schon die unterschied-

lichen Übergangstemperaturen bei den verschiedenen Probenformen. Die Frage ist daher besser in der Form zu stellen, welche Probenform geeignet ist, auch ungünstigen Bedingungen in der Konstruktion Rechnung zu tragen. Eine Konstruktion kann zwar ihrer äußeren Form nach verhältnismäßig sprödbrechtsicher sein, aber infolge der Bearbeitungen (z. B. Schweißen) ist stets mit der Möglichkeit kleiner Risse zu rechnen. Diese werden wegen ihrer Kleinheit bei den bestehenden Spannungen zwar nicht zum Bruch führen, jedoch kann dies der Fall sein, wenn eine stoßartige Beanspruchung hinzukommt. Die Versuche von T. S. ROBERTSON [23] zeigen dies eindrucksvoll. Sie zeigen weiter, daß die in einem großen Bauteil gespeicherte elastische Energie ausreicht, um den Riß rasch auf eine hohe Ausbreitungsgeschwindigkeit zu bringen, auch wenn die mittlere Spannung nur einen Bruchteil der Fließgrenze beträgt. Unter diesem Gesichtspunkt betrachtet, ist eine Konstruktion nur dann sprödbrechtsicher, wenn die Temperatur so hoch ist, daß die rasche Ausbreitung eines Risses nicht möglich ist.

Die beschriebenen Verhältnisse sind am besten verwirklicht bei den großen Platten mit scharfen Kerben und parallelen Flankenwinkeln. Es ist daher nicht zu erwarten, daß eine Konstruktion sprödbrechgefährdet ist, wenn die bestehende Temperatur mindestens gleich der an solchen Platten beobachteten Übergangstemperatur ist. Die an Schiffen gewonnenen Erfahrungen bestätigen dies auch [22].

Für die Erzeuger und Verbraucher von Massenbaustählen ist jedoch ein Prüfverfahren erforderlich, das zur Abnahmeprüfung geeignet ist, d. h. einfach und mit geringem Werkstoffaufwand durchgeführt werden kann. In dieser Hinsicht ist der Kerbschlagbiegeversuch unübertroffen. Die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnitts zeigen, daß mit der ISO-V-Kerbprobe praktisch dieselbe Übergangstemperatur erhalten wird wie mit den Platten, dieser Versuch also den gestellten Forderungen genügt. Bei diesem Versuch ist es von Bedeutung, daß nach Spalte *d* von Tabelle 2 die Erniedrigung der Übergangstemperatur durch die Probenform gerade durch ihre Erhöhung infolge der hohen Beanspruchungsgeschwindigkeit kompensiert wird. Die theoretische Untersuchung des Einflusses des Spannungszustandes auf die Sprödbrechtemperatur findet hierbei eine wichtige praktische Anwendung.

Aus den genannten Gründen sind die Empfehlungen des IIW (International Institute of Welding), den Kerbschlagbiegeversuch mit der ISO-V-Kerbprobe als verbindlichen Abnahmeversuch einzuführen, zu unterstützen. Es wäre noch zu untersuchen, ob der vorgeschlagene Wert von 3,5 kpm/cm² zur Bestimmung der Übergangstemperatur geeignet ist, um die Sprödbrechtsicherheit ausreichend zu gewährleisten. Die Untersuchung dieser Frage erfordert jedoch ein Eingehen auf weitere Einzelheiten des Bruchvorgangs, als sie hier behandelt werden konnten. Sie hat ergeben [24], daß dieser Wert ausreichend ist.

Zusammenfassung

Es werden die bisherigen Lösungen der elastischen und plastischen Grundgleichungen erörtert und die Gesichtspunkte untersucht, die für einen spröden Bruch bei einem inhomogenen Spannungszustand von Bedeutung sind. Auf Grund der erhaltenen Ergebnisse wird ein Gütefaktor g für die Sprödbbruchsicherheit angegeben. Die Sprödbbruch- bzw. Übergangstemperatur ist um so kleiner, je größer g ist. Die auf diese Weise für verschiedene Proben und für große Platten bei verschiedenen Beanspruchungsarten berechneten Übergangstemperaturen stimmen gut mit den an Schiffbaustählen beobachteten überein.

Die Folgerungen, die sich hieraus im Hinblick auf die Sprödbbruchsicherheit von Konstruktionen für ein zur Abnahmeprüfung geeignetes Prüfverfahren zur Bestimmung der Übergangstemperatur ergeben, werden erörtert.

*

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die Förderung dieser Arbeit durch Unterstützung der im Max-Planck-Institut für Eisenforschung durchgeführten Untersuchungen.

SCHRIFTTUM

1. KOCHENDÖRFER, A. und SCHÜRENKÄMPER, A.: Spannungszustand und Mehrachsigekeitszahlen in gekerbten Zug- und Biegeproben bei elastischer Beanspruchung. Arch. Eisenhüttenwes., im Druck.
2. KOCHENDÖRFER, A. und SCHÜRENKÄMPER, A.: Spannungszustand und Ausbildung der Fließzonen in gekerbten Zug- und Biegeproben und ihr Einfluß auf das Festigkeits- und Formänderungsverhalten der Werkstoffe. Arch. Eisenhüttenwes., im Druck.
3. KOCHENDÖRFER, A. und SCHÜRENKÄMPER, A.: Der Einfluß des Spannungszustandes auf das Formänderungs- und Festigkeitsverhalten von Stählen. Schweiz. Arch. **25** (1959) S. 272—279.
4. KOCHENDÖRFER, A.: Die Festigkeits- und Formänderungseigenschaften der Metalle bei tiefen Temperaturen. Z. Metallkde **51** (1960) S. 73—80.
5. KOCHENDÖRFER, A. und SCHÜRENKÄMPER, A.: Der Spannungszustand in gekerbten Stäben und sein Einfluß auf die Fließgrenze und die Sprödbbruchneigung von Stählen. In: Stress Analysis, S. 88—91. Chapman & Hall, Ltd. und Reinhold Publ. Corp., London und New York 1961.
6. KOCHENDÖRFER, A.: The influence of the stress state on the embrittlement of steels. Vortragen auf einem Kolloquium über die Mechanik des Bruchs des Admiralty Advisory Committee on Structural Steel. London 27.—29. März 1961. — Die Beurteilung des Spannungszustandes in gekerbten Proben im Hinblick auf die Sprödbbruchsicherheit von Bauteilen. Vortragen auf einer Sitzung des Werkstoffausschusses des Vereins Deutscher Eisenhüttenleute. Düsseldorf, 3. Mai 1961. — Veröffentlichung im Archiv für das Eisenhüttenwesen, demnächst.
7. NEUBER, H.: Korbspannungslehre, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1961.
8. RÜHL, K.: Die Tragfähigkeit metallischer Baukörper. Ernst & Sohn, Berlin 1952.
9. HILL, R.: The mathematical theory of plasticity. Clarendon Press, Oxford 1950.
10. NADAI, A.: Theory of flow and fracture of solids, vol. I, 2nd edition. MacGraw—Hill, New York—Toronto—London 1950.
11. GREEN, A. P. and HUNDY, B. B.: Initial plastic yielding in notch bend tests. J. Mech. Phys. Sol. **4** (1956) S. 128—144.
12. KOCHENDÖRFER, A. und SCHOLL, H.: Die Sprödbbruchneigung von Stählen in Abhängigkeit von Spannungszustand und Temperatur. Stahl u. Eisen **77** (1957) S. 1006—1018.

13. OROWAN, E., NYE, J. F. and CAIRNS, W. J.: Notch brittleness and ductile fracture in metals. Ministry of Supply, Arm. Res. Dpt. Res. Rep. No. 16, 1945.
14. STROH, A. N.: A theory of the fracture of metals. *Phil. Mag. Suppl.* **6** (1957) S. 418—465.
15. COTTRELL, A. H.: Theory of brittle fracture in steel and similar metals. *Trans. AIME* **212** (1958) S. 192/203.
16. Fracture. Herausgegeben von AVERBACH, B. L., FELBECK, D. K., HAHN, G. T. und THOMAS, D. A. John Wiley & Sons Inc. und Chapman & Hall Ltd., New York und London 1959.
17. KOCHENDÖRFER, A.: Neuere Vorstellungen über den Mechanismus des spröden und des zähen Bruchs von Metallen. *Materialprüfung* **3** (1961) S. 266—274.
18. OROWAN, E.: Notch brittleness and the strength of metals. *Trans. Inst. Engrs. Shipbuilders Scotland* **89** (1945) S. 165—215. — FELBECK, D. K. und OROWAN, E.: Experiments on brittle fracture of steel plates. *Weld. J.* **34** (1955) S. 570s—575s.
19. WELLS, A. A.: Mechanism of notch brittle fracture. *Weld. Res.* **7** (1953) S. 34s—56s.
20. KOCHENDÖRFER, A. und SCHOLL, H.: Zwillingsbildung und Sprödbbruchneigung von Stählen. *Arch. Eisenhüttenwes.* **28** (1957) S. 483—488.
21. HAHN, G. T., AVERBACH, B. L., OWEN, W. S. and COHEN, M.: Initiation of cleavage microcracks in polycrystalline iron and steel. *Wie unter 16*, S. 91—116.
22. RÜHL, K.: Amerikanische Sprödbbruchversuche und die Folgerungen für die Sprödbbruchprüfung. *Arch. Eisenhüttenwes.* **25** (1954) S. 421—433.
23. ROBERTSON, T. S.: Propagation of brittle fracture in steel. *J. Iron Steel Inst.* **175** (1953) S. 361—374.
24. KOCHENDÖRFER, A.: Vergleichende Betrachtung der Prüfverfahren zur Ermittlung der Sprödbbruchneigung von Stählen. Vorgetragen auf einer Vortragsveranstaltung des Werkstoffausschusses des Vereins Deutscher Eisenhüttenleute. Berlin, 9. Juni 1961. Veröffentlichung im Archiv für das Eisenhüttenwesen demnächst.

ÜBER DIE ZERSTÖRUNGSFREIE BESTIMMUNG DER SPRÖDBRUCHNEIGUNG METALLISCHER WERKSTOFFE IM MASCHINENBAU

I. S. SZÁNTÓ*

DR. TECHN. BUDAPEST

Einleitung, Zielsetzung

Die Gefahr von Sprödbrüchen an Maschinenbauelementen ist im allgemeinen größer als man es nach den Ergebnissen von Prüfungen an Probestäben üblicher Form erwarten würde. Die eingehende Untersuchung dieser Abweichungen bildet eine der wichtigsten Zielsetzungen der Forschung über die Sprödbbruchneigung [1].

Jede Untersuchung der Frage muß von einer Zusammenfassung jener Faktoren ausgehen, die am Zustandekommen des Sprödbruchs entscheidend beteiligt sind.

Unter diesen Faktoren unterscheidet man äußere, u. zw.

- a) die Betriebstemperatur,
- b) die Geschwindigkeit der Belastungszunahme,
- c) die Ausgestaltung der Werkstücke und die Beschaffenheit ihrer Oberfläche,

und innere Faktoren, u. zw.

- d) die chemische Zusammensetzung,
- e) die Homogenität des Werkstoffgefüges und dessen Korngröße und schließlich,
- f) den inneren Spannungs- oder genauer den inneren Energiezustand.

Die Sprödbbruchneigung ist keine konstante und in reproduzierbarer Weise meßbare Eigenschaft der Metalle oder Legierungen, sie läßt sich vielmehr stets nur für ein bestimmtes Werkstück (für bestimmte Werkstücke) ermitteln, und eindeutig durch eine numerische Maßzahl erfaßbar wird sie erst dann, wenn man die angeführten Faktoren fixiert.

Das erste Problem stellt sich in diesem Zusammenhang aus der Frage, welches Kennzeichen man zur quantitativen Beschreibung der Sprödbbruchneigung am zweckmäßigsten zu benützen hat. Die Literatur enthält zahlreiche Vorschläge hierzu [2, 3, 4, 5], doch vermochte keiner derselben eine dominierende Verbreitung zu finden.

Die zweite Frage besteht ihrem Wesen nach darin, ob es überhaupt eine Möglichkeit gibt, eine auch praktisch brauchbare, hinreichend genaue Methodik

* z. Z. in Forschungsinstitut der techn. Physik. Ung. Akad. der Wissenschaften.

zur Bestimmung dieser Neigung zu entwickeln. Die Ergebnisse der konventionellen Verfahren der Werkstoffprüfung eignen sich nämlich in keiner Weise zur unmittelbaren Qualifizierung eines gegebenen Konstruktionsteiles.

Indirekte Methoden zur zerstörenden Prüfung des Werkstückes wurden in den fünfziger Jahren von vielen [6] ausgearbeitet; die geistreichste unter den vorgeschlagenen Verfahren scheint hierbei die von RÜHL [7] empfohlene zu sein. Dagegen ist uns nicht bekannt, daß an gegebenen konkreten Maschinenteilen oder Probestücken zerstörungsfreie Messungen solcher Art vorgenommen worden wären. Unseres Erachtens aber dürfte irgend eine der röntgenographischen Methoden am ehesten zum Ziele führen [8].

Der erste Problemenkreis soll hier nicht behandelt werden, vielmehr akzeptieren wir den neuerdings von KOCHENDÖRFER [1] eingeführten Behinderungsfaktor B als jene Werkstoffkenngröße, die speziell die Spröbruchneigung zu beschreiben geeignet ist. Der Faktor zeigt, genau genommen, den mit der Spröbruchneigung grundlegend zusammenhängenden mehrachsigen Spannungszustand an, wie er bei Beginn der makroskopisch wahrnehmbaren plastischen Deformation besteht. In der Praxis ist es eben die Kenntnis dieser Verhältnisse, die am meisten fraglich erscheint. Die sonstigen Faktoren gemäß a)–e) lassen sich im gegebenen Fall unschwer auf konstantem Wert halten, während der Faktoren B nach obigem durch die Formel

$$B = \frac{\sigma_F}{\sigma_{F0}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_1} \right)_F} \quad (1)$$

definiert ist, in der σ_F bzw. σ_{F0} die Fließgrenzspannung im Falle mehr- bzw. einachsiger Spannungszustände, σ_3 bzw. σ_1 hingegen die Werte der kleinsten bzw. größten Hauptspannung im Sinne der klassischen Deutung der MOHRschen Hypothese bedeuten. Der Faktor B kann jeden beliebigen Wert zwischen der Einheit und $+\infty$ annehmen. Bei $B = 1$ kann die plastische Deformation ungehindert vor sich gehen (dieser Fall entspricht der früheren Deutung gemäß einem $\nu = 0$). Hierbei ist die Gefahr eines Spröbruches am kleinsten. Im zweiten Randfall, wenn nämlich $B = \infty$, belastet der symmetrische räumliche Zugspannungszustand $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ das Gittergefüge derart, daß dessen bleibende Verformung in vollem Umfang behindert wird, und nur eine elastische Deformation in Frage kommen kann, wie groß auch immer die Beanspruchung ist. Erreicht der Werkstoff im Zuge des Anwachsens der Belastung von außen die der Kohäsionsfestigkeit entsprechende Grenzspannung, dann erfolgt der Spröbruch, ohne daß irgendeine bleibende Verformung vorangegangen wäre. (Der früheren Nomenklatur gemäß ist dies der Fall für $\nu = 1$, d. h. der Fall der maximalen Spröbruchneigung.)

Als wichtigste stellt sich im zweiten Problemenkreis die Frage, auf welche Weise die in der Praxis vorkommenden dazwischenfallenden Spannungszu-

stände mit Hilfe der röntgenographischen Messung des Faktors f) bestimmt werden können, der sich bekanntlich unter sämtlichen angeführten Kenngrößen am schwersten ermitteln läßt. Der vorliegende Vortrag soll einen Beitrag zur Lösung dieses Schlüsselproblems der Methodik liefern.

Röntgenographische Spannungsmessungen und die Grenzen ihrer Anwendbarkeit

Vor allem muß also die innere, d. h. die Eigenspannungsverteilung gemessen werden, was nach allen bisher bekannten Methoden nur in zwei Schritten möglich ist:

1. Ermittlung der durch die Spannungen ausgelösten Verformungen.
2. Umrechnung der so ermittelten Formveränderungen auf die gleichwertige Spannungskennzahl.

Hierin bildet auch das röntgenographische Verfahren keine Ausnahme. Ein Unterschied besteht nur insofern, als die nach dem tensometrischen Prinzip arbeitenden Methoden die relative Dehnung an makroskopischen Meßlängen zeigen, während die Beobachtung der Deformationen bei den röntgenographischen Verfahren auf Meßlängen der Größenordnung eines Ångströms erfolgt, daß man also damit die Möglichkeit hat, auch örtliche Spannungsänderungen mit steilen Gradienten zu beobachten. Diese hochempfindliche Messung bietet den großen Vorteil, auch die Beobachtung der innersten mikrostrukturellen Vorgänge im Werkstoff zu ermöglichen. Andererseits birgt sie insofern auch ernste Nachteile in sich, als sie zahlreiche Fehlerquellen enthält. Besonders problematisch ist die zweite Phase des Verfahrens, die Umrechnung.

Die klassischen Methoden der röntgenographischen Spannungsmessungen [9,10] pflegen die Meßergebnisse in der Dimension kp/mm^2 anzugeben. Die Anwendung dieser in der Kontinuumsmechanik üblichen Spannungsdimension vermag jedoch zu einer unangenehmen Alternative zu führen. Entweder verliert man die Möglichkeit die Meßergebnisse praktisch verwerten zu können, wenn man im Gegensatz zur gewohnten Betrachtungsweise, jedoch der physikalischen Realität folgend von Kristall zu Kristall abweichende Spannungswerte angibt, mit denen der Maschinenkonstrukteur nichts anzufangen weiß, oder man bedient sich der zweiten Möglichkeit, den Durchschnitt der Beanspruchungen sämtlicher Kristallite als maßgebend anzunehmen. Damit aber erhalte man irreführende Ergebnisse, denn eben jene für die Beanspruchung der Werkstücke besonders kennzeichnende Spannungsgradienten und Belastungsschwankungen würden sich auf diese Weise der Erfassung entziehen, die sich allein auf röntgenographischem Wege ermitteln lassen und die eine moderne Maschinendimensionierung ganz besonders zu berücksichtigen hätte.

Zur Überbrückung des Dilemmas haben wir die Einführung einer neuen Bewertungsmethode, die der Deformationsindizes vorgeschlagen [11]. Es han-

delt sich bei diesen nicht um eine konventionelle Angabe, sondern um eine physikalisch gedeutete rationale Zustandskenngröße, die den Mechanismus der Deformation, den Vorgang der Formveränderung anhand des Spektrums der Gitterverzerrungen beschreibt und diese durch zwei zusammengehörige Teilkalküle definiert. Der eine dieser Kalküle, die spezifische Hauptverzerrung (Δ'), gibt die durchschnittliche, in Promille angegebene Veränderung der in der Hauptrichtung der Belastung liegenden Netzebenenabstände an. Der zweite Teilkalkül, die örtliche Verzerrungsungleichheit (Zeichen Δ''), bestimmt die quadratische Durchschnittstreuung für die Zahl der gemessenen d -Werte, bezogen auf den meßbaren wahrscheinlichsten Grundwert d_{wo} des Anfangsspektrums, gleichfalls ausgedrückt in Promille. Näheren Aufschluß über die Einzelheiten des Verfahrens gibt eine frühere Publikation [12]. Auf diesem Wege ist es gelungen, die eigentümlichen Erscheinungskomplexe nachzuweisen, wie sie sich im einachsigen Spannungszustand von Stahlprobekörpern beim Übergang von der elastischen zur plastischen Verformung abspielt, u. zw. einschließlich der nach der mikroskopischen Betrachtungsweise gut deutbaren Anomalien [12, 13].

Verwickelter ist die Situation, wenn man mit dem Deformationsindex einen räumlichen Spannungszustand beschreiben will. Bei der Bestimmung des Faktors B aber handelt es sich eben darum. In diesem Falle nämlich ist die Indikation nicht immer eindeutig. Unter der Einwirkung zusammengesetzter, annähernd raumsymmetrischer Belastungen, wie etwa zueinander senkrecht orientierter gleich großer Zugbeanspruchungen, zeigt die mittlere Gitterverzerrung in den beanspruchten Bereichen ebenso vernachlässigbar kleine Werte, wie sie etwa im spannungslosen Zustand vorhanden zu sein pflegen, trotzdem in solchen Fällen den das Metall zusammenhaltenden Kohäsionskräften gegenüber beträchtliche äußere Angriffskräfte wirken. Nahezu identische Gitterparameter lassen sich beobachten, wenn sich der Werkstoff in stabilem spannungslosem Zustand befindet, aber auch dann, wenn die äußere Beanspruchung mit der Resultante des inneren Kraftfeldes auf einem erhöhten potentiellen Energieniveau im Gleichgewicht steht. Die Kenntnis der Gitterparameter kann in diesem Falle nicht die Grundlage für die allgemeine Ermittlung der mechanischen Beanspruchung bilden, sondern diese bloß ergänzen. Man wird deshalb das Problem in solchen Fällen umfassend zweckmäßig nach der energetischen Methode behandeln.

Energetische Kriterien

Zur plastischen Verformung von Metallen (wie sie mit der betriebsmäßigen Beanspruchung in mehr oder minder großem Ausmaß stets einhergeht) ist die Aufwendung einer gewissen Arbeitsmenge A_w erforderlich, die sich zum Großteil in Wärme umwandelt. Übereinstimmenden Schrifttumsangaben [14]

und Versuchsergebnissen [15] zufolge erfahren bis zu dem mit der plastischen Deformation einhergehenden Bruch rund neun Zehntel der Energie A_w eine Zerstreung in Form der Wärmeenergie Q , es gilt somit

$$Q \approx 0,9 A_w. \quad (2)$$

Der restliche Teil der zugeführten Verformungsarbeit W bleibt im deformierten Metall »stecken« und erhöht dessen innere Energie.

Liegen Umstände vor, die durch die konstanten Faktoren a, b, c, d und e beschrieben werden können, dann kann das Verhältnis zwischen den Energieanteilen Q und W eine für die Sprödbbruchneigung bzw. für die Verformungsfähigkeit eines Werkstoffes charakteristische Kenngröße sein. Der für die Verhältnisse maßgebende innere Parameter ist hier ein spannungsabhängiger Wert x , der angibt, wie weit der Vorgang der plastischen Deformation im betreffenden Werkstück fortgeschritten ist. Er zeigt uns also an, in wievielen (zahlenmäßig n_p) der im untersuchten Rauminhalt vorhandenen Gitterbereiche N die homogene plastische Verformung bereits eingetreten ist. Bei konstanter Korngröße läßt sich die durch die Eigenspannung 2. und 3. Art beanspruchte Substanz der Kristallit-Randzonen in erster Näherung durch eine Konstante C in der Form

$$x(\sigma_i) = \frac{\Sigma n_p + C}{N} \quad (3)$$

ausdrücken.

Das x dieser Gleichung kann zwischen 0 und 1 jeden beliebigen positiven Wert annehmen. Ist $x \approx 0$, dann treten im Metallkörper ausschließlich elastische Deformationen auf. Nach FASTOW [16] schreibt sich der Verfestigungsfaktor β auf dem Spannungs-Dehnungsdiagramm $\sigma - \epsilon$ definitionsgemäß zu

$$\beta = \frac{d\sigma}{d\epsilon}, \quad (4)$$

und es gilt in diesem Falle $\beta \approx E \simeq \text{konst.}$, wobei E den YOUNG'schen Modul bedeutet.

Als Differential-Ausdruck für die Energieverteilung erhält man nach obigem die Gleichung

$$dA_w = dQ + dW, \quad (5)$$

woraus folgt, daß die Energieverhältnisse, wie sie im Anfangsstadium der Verformung bestehen, im Zustand $x \approx 0$, durch die Gleichungen

$$\frac{dQ}{dA_w} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dW}{dA_w} = 1 \quad (6)$$

bzw.

$$W = \frac{\Delta\sigma^2}{2E} \quad (7)$$

beschrieben werden können.

Der zweite Randfall liegt vor, wenn man es mit einem Werkstoffzustand zu tun hat, bei dem es zur bleibenden Verformung keiner wachsenden äußeren Beanspruchung bedarf. In diesem Falle ist

$$\beta = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \approx 0,$$

ferner

$$\frac{dQ}{dA_w} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{dW}{dA_w} = 0. \quad (8)$$

Da der Werkstoff in solchen Fällen zur Gänze eine plastische Deformation erfährt, häuft sich keine Gitterenergie auf, und es gilt der Zustandskennwert $x = 1$.

Die im Maschinenbau üblichen Metalle und Legierungen nehmen zwischen diesen Randfällen eine Zwischenstellung ein, d. h. bei Beanspruchungen über die Elastizitätsgrenze hinaus ist $\beta \ll E$, und man hat im gegebenen Fall

$$\frac{dW}{dA_w} = \beta \frac{\omega(\sigma)}{\sigma} = \text{konst.}, \quad (9)$$

worin

$$\omega(\sigma) = \frac{\lambda}{E} \cdot \sigma \quad (10)$$

und

$$\Delta W = \frac{\lambda}{2E} \cdot \Delta\sigma^2. \quad (11)$$

Das λ ist hier eine dimensionslose Werkstoffkonstante, deren Wert für die am häufigsten gebrauchten Baustoffe zwischen 1 und 33 liegt, während die übrigen Größen im Sinne der oben gegebenen Deutung zu verstehen sind.

Für allgemeine Fälle lassen sich die Verhältnisse in vereinfachter Form, und für den ganzen Verformungsvorgang zusammengefaßt, durch

$$A_{wx} = Q_x + W_x \quad \text{im Bereich} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (12)$$

ausdrücken, worin

$$Q_x = 0,9 \cdot x \cdot A_{wx} \quad \text{und} \quad (13)$$

$$W_x = (1 - 0,9 \cdot x) \cdot [1 + x(\lambda - 1)] \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (14)$$

Korrelation zwischen Energiewerten und Deformationsindizes

Es taucht die Frage auf, ob zwischen der im Werkstück gespeicherten Deformationsenergie W_x einerseits und der röntgenographisch ermittelbaren Gitterenergie bzw. dem Gitterverzerrungsspektrum ein eindeutiger Zusammen-

hang besteht. Die Messungen von BOAS [17] sowie von BRINDLEY und RIDLEY [18] haben den Anschein, als bestünde eine derartige Verknüpfung tatsächlich. BARRETT [19] fügt ergänzend hinzu, der überwiegende Teil der Restenergie sei im gesamten Volumen in Form einer gleichmäßig verteilten Verzerrung zugegen, die jedoch zu klein ist, als daß sie eine Verbreiterung der Röntgeninterferenzlinien auszulösen vermöchte. Dies bildet den Grund dafür, warum die auf Grund von Röntgenevidenzen gewonnenen Energiewerte bloß einen Bruchteil jener Höchstwerte ausmachen, die man auf kalorimetrischem Wege ermittelt hat.

Diese Beobachtungen werden auch durch meine eigenen, noch zu beschreibenden Versuche bestätigt. All dies kann die Grundlage für jene Hypothese abgeben, daß sich beachtliche Verformungsenergien auch bei Vorhandensein geringer Gitterverzerrungen (geringer Verschiebungen der Linienmaxima oder Linienformverbreiterungen) anzuheufen vermögen, wenn der untersuchte Konstruktionsteil räumlich beansprucht wird, u. zw. wird die meßbare Verformung im Vergleich zur Größe der auslösenden Beanspruchung um so geringfügiger sein, je mehr sich der innere Spannungszustand dem raumsymmetrischen Hauptspannungsverhältnis $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ annähert.

Bei bekannter äußerer Beanspruchung kann mithin jene mechanische Energie A_{wx} ermittelt werden, durch die die Verformung des Werkstückes ausgelöst wurde. Einen Teil dieser Energie bildet das anhand der Gleichung (14) errechenbare W_x , welches die im Gitter gespeicherte nominelle Deformationsenergie ausdrückt. Auf röntgenographischem Wege läßt sich ferner jene Gitterenergie W' ermitteln, die sich aus den wegen des räumlichen Spannungszustandes mehr oder minder behinderten Deformationen in Wirklichkeit ergibt. Setzt man die beiden Energiewerte zueinander in Beziehung, dann hat man die Möglichkeit, auf die Größe des Behinderungsfaktors B zu schließen, u. zw. aus der Gleichung

$$W_x = B \cdot W' . \tag{15}$$

Zu klären bleibt, auf welche Weise aus den röntgenographisch gewonnenen Deformationsindizes die Ausgangsdaten der energetischen Berechnungen bestimmt werden können.

Nach BOAS [17] kann man sich zur Berechnung von W' auf die klassischen Formeln stützen, weil sich die hier indizierte spezifische Hauptverzerrung stets auf elastisch deformierte Gitterräume bezieht, man hat somit

$$W' = \sigma \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} \tag{16}$$

und

$$\sigma = \frac{3}{\nu} \cdot \varepsilon , \tag{17}$$

ferner

$$\kappa = \frac{3(1-2\nu)}{E}, \quad (18)$$

worin κ den kubischen Kompressibilitätsbeiwert bedeutet, während unter ν die *Poissonsche* Zahl zu verstehen ist.

Für einen gegebenen Werkstoff sind u. U. beide Kenngrößen konstant. Die spezifische Dehnung ε läßt sich anhand der Gleichung

$$\Delta' = \frac{(d_v - d_0)^*}{d_0} \cdot 10^3 = \varepsilon^* \cdot 10^3 = \frac{\varepsilon}{S} \cdot 10^3 \quad (19)$$

errechnen, worin d_v , d_0 und S Sensibilitätsfaktoren darstellen, während die Berechnung in [12] detailliert ist.

Der zweite Deformationsindex (Δ'') dient zur Ermittlung der Zustandskenngröße x . Gleichfalls auf Grund der Literatur [12] und der dort gegebenen Einzelheiten ergibt sich der hier zu benützende Zusammenhang

$$\Delta''(x) = a \cdot x^b \cdot e^{-cx}, \quad (20)$$

in welchen im Zuge der hiesigen Versuche folgende Kenngrößenwerte eingesetzt werden könnten: $a = 2$; $b = 2,5$ und $c = 0,48$. Die Lösung mußte auf x erfolgen, was wir durch sukzessive Approximation erreichten, indem wir die Funktion »ln x « mit entsprechender Genauigkeit in Reihe entwickelten. Demnach ergibt sich

$$x = \frac{-2b + c \pm \sqrt{(2b - c)^2 - 2b \left(\ln K \frac{\Delta''}{a} - 1,5b \right)}}{-b}, \quad (21)$$

worin die Versuchskonstante K in unserem Falle zu 0,1 angesetzt war.

Solcherart hat man aus Δ' das ε bzw. W' ,

aus Δ'' das x bzw. W_x ,

aus der Beziehung beider zueinander hingegen den Faktor B mit der benötigten Eindeutigkeit.

Die wichtigsten Eigentümlichkeiten der neuen Methodik

Die wichtigsten Züge der beschriebenen Methode lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

1. Sie gestattet es, die günstigen Möglichkeiten der röntgenographischen Messungen zu nutzen. Die Prüfung ist zerstörungsfrei, läßt sich in der nächsten Umgebung des gefährdeten Querschnittes am konkreten Werkstück vornehmen und überdies hat man die Möglichkeit, Meßpunkte in der benötigten Dichte auch an anderen Stellen zu wählen. Auf diese Weise können die Änderungen

in Abhängigkeit von den Meßstellen mit beliebiger Feinheit registriert werden und ebenso läßt sich die kritische Zone unschwer lokalisieren.

2. Es entfallen die heiklen Fehlerquellen der bisherigen Praxis in der Auswertung röntgenographischer Messungen. Den klassischen Methoden der Spannungsermittlung zufolge ist der Spannungszustand in einem gegebenen Punkt nur dann definiert, wenn man sämtliche im betreffenden Punkt wirkenden Hauptspannungen ihrer Größe und Richtung nach kennt. Aus diesem Grunde wurde die Messung zusammengesetzter Spannungen durch die außerordentlich verwickelten Probleme der Richtungsbestimmung sehr erschwert. Demgegenüber läßt sich die Deformationsenergie aus der Verzerrung des bestrahlten Gitterraumes unmittelbar berechnen. Das Energieniveau des untersuchten Punktes ist eine richtungsunabhängige Größe, zu deren Ermittlung die räumliche Verteilung der Spannungen nicht unbedingt bekannt sein muß. Dagegen scheint es durchaus zu genügen, die Verformungs-Reservekapazität, d. h. die Bruchsicherheit irgendeines Gitterraum Inhaltes zu beschreiben.

3. Eine zunehmende Vereinfachung erfährt auch die Aufnahmetechnik der röntgenographischen Messungen. Dem Lagenvektor, der je einen Meßpunkt des zu prüfenden Maschinenteiles definiert, muß nämlich der Energiewert, d. h. eine skalare Größe zugeordnet werden, wozu schon eine einzige Röntgenaufnahme die Möglichkeit bietet. Man ist also keineswegs gezwungen, durch mehrere Aufnahmen eine vektorielle Größenreihe zu ermitteln, die man übrigens ohnehin nur nach gründlicher Kritik verwenden könnte. Bekanntlich lassen sich auf röntgenographischem Wege in geeigneter Weise nur oberflächennahe, im großen und ganzen ebene Spannungszustände ermitteln. Drei zueinander senkrechte röntgenographische Messungen in einem gegebenen Punkt sind undurchführbar, doch bedarf es bei unserer Methode zur Beschreibung des vektoriell-skalaren Raumes erst gar nicht derartiger Messungen.

4. Die energetische Bedingungsgleichung des Bruches läßt sich unter unmittelbarer Benützung der Versuchsdaten prüfen, d. h. es besteht jederzeit die Möglichkeit zu einer quantitativen Beurteilung der Sprödbbruchneigung. Es gilt somit

$$A_c - A_w = A_p, \quad (22)$$

worin A_c die für den Werkstoff charakteristische sogenannte Kontraktionsarbeit (Brucharbeit) bedeutet, die u. U. den auf die ungünstigst beanspruchte Volumeinheit bezogenen spezifischen Wert jener Energie darstellt, die im Verlauf der Verformung insgesamt verbraucht werden kann, während unter

A_w die Verformungsarbeit zu verstehen ist, die von der im Betrieb tatsächlich wirksamen mechanischen Beanspruchung auf eine Raumeinheit des Werkstückes entfällt, und worin schließlich

A_p einen Wert auch mit Energie-Dimension bedeutet, der die poten-

tielle Deformationsfähigkeit ausdrückt, die der gefährdetsten Zone des gegebenen Maschinenteiles noch innewohnt, und der auch als Kennzahl der Bruchsicherheit angesehen werden kann.

Die Bedingung der absoluten höchsten Sprödbrechneigung schreibt sich demnach zu

$$A_c - A_w = 0. \quad (23)$$

Aus diesem Zusammenhang läßt sich unter Berücksichtigung der röntgenographisch ermittelten Werte von B und x und anhand der bekannten Werkstoffkenngrößen A_c und λ auf retrogradem Wege jene maximale Beanspruchung im Betrieb bestimmen, die an dem am meisten gefährdeten Punkt des Werkstückes noch zulässig ist. An der gleichen Stelle ergibt sich bei geringerer Beanspruchung der numerische Faktor der Bruchsicherheit.

Ist $A_c \geq A_w$, dann gilt unter Berücksichtigung der Gleichungen (13), (14), (15) und (23) die Ungleichung

$$A_c \geq 1 + x(\lambda - 1) \cdot B \cdot W', \quad (24)$$

aus welcher der zulässige Höchstwert der meßbaren Gitterdeformationsenergie W' als obere Grenze der noch als sicher zu betrachtenden Belastung im voraus berechnet werden kann.

Versuchsdurchführung

Zu den Messungen wurden Probekörper benützt, die aus einem bei 600°C im Vakuum spannungsfrei geglühten Federstahl gefertigt und mit verschiedenen Kerben versehen, die also dementsprechend durch unterschiedliche Kerbziffern $k = \frac{a}{\rho}$ definiert waren. (ρ bedeutet hier den Kerbradius, a die halbe Querschnittbreite.) Die Meßanordnung ist in Abb. 1 schematisch dargestellt.

Die 1 mm dicken Probekörper wurden zwischen die fixe Klemme B_m und die gelenkige Klemme B_c derart eingespannt, daß sich eine freie Meßlänge von 300 mm ergab. In der Mitte der Meßlänge waren die Probekörper jeweils durch eine Einkerbung auf eine Breite von $2a = 30$ mm herabgeschwächt. Die röntgenographischen Messungen erfolgten entlang des Querschnittes. Der entsprechend abgeblendete und parallel gebündelte Primärstrahl P tritt aus dem Rohr R aus und trifft auf einen der angemerkten Meßpunkte (0–15 mm) auf; diese liegen in der auf dem vergrößerten Bild der Querschnittszone A eingezeichneten Richtung v . Von hier wird das Röntgenlicht als sekundäres Strahlenbündel S_1 bzw. S_2 reflektiert, wobei die Durchschnittslinien der Strahlenkegel auf der registrierenden Planfilmkassette F , die die bekannten DEBYE-SCHERRER-Ringe bilden, als Grundlage für die Auswertung dienen. Die röntgeno-

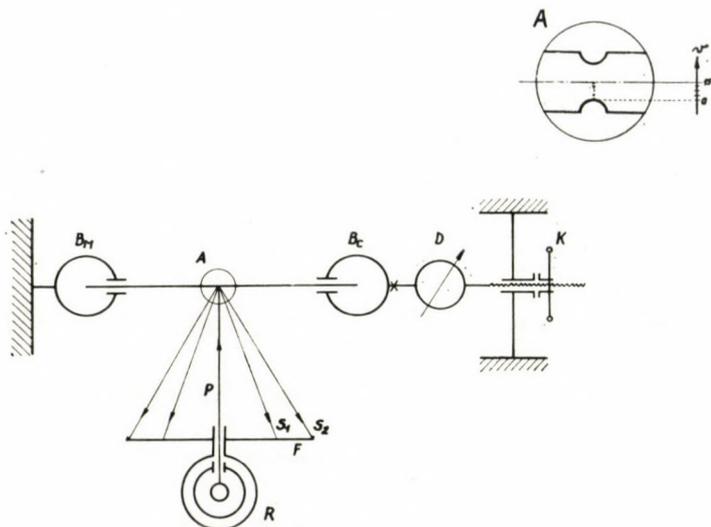


Abb. 1

graphische Prüfung der Probekörper ging während der durch das Handrad *K* eingestellten konstanten Beanspruchung auf Zug vor sich. Die Größe der zugeführten äußeren mechanischen Energie wurde an dem Federdynamometer *D* kontrolliert. Bei den Röntgenaufnahmen bedienten wir uns jenes von uns selbst konstruierten tragbaren Apparates, des sogenannten Deformographs, der es gestattet, jeden gewünschten Oberflächenteil eingespannter oder nicht verrückbarer, beliebig großer Werkstücke zu bestrahlen. Der Primärstrahl des Gerätes kann je nach Bedarf in verschiedene Richtungen eingestellt werden. Nach je einer Aufnahme erfolgt die Einregelung auf den neuen Meßpunkt parallel zur Fläche des Probekörpers einer Skala entlang, die die Entfernung mit einer Genauigkeit von 0,1 mm zu messen ermöglicht.

Die röntgenographischen Untersuchungen erfolgten mit Co-K_α -Strahlen, bei denen schon bei kleineren Deformationen nicht nur die Reflexverschiebung, sondern auch die Linienverbreiterung gut zu unterscheiden ist, ein Umstand, der sich auf die Deformations-Indizierung überaus günstig auswirkt. Zur Eichung des Abstandes zwischen Probekörper und Planfilm (Registrierfläche) benützten wir die (420)-Linie eines silbernen Etalons, während für die eigentlichen Gitterverzerrungsmessungen die Formveränderungen an reflexionsfähigen (310) Indikator-Kristalliten der Probekörper maßgebend waren.

Versuchsergebnisse

Eine alle Einzelheiten umfassende Erörterung der Versuchsergebnisse würde weit über den Rahmen dieses Vortrages hinausgehen. Aus diesem Grunde sollen hier statt einer tabellarischen Zusammenfassung der Teilergebnisse

lediglich einige Diagramme gezeigt werden, die zur graphischen Veranschaulichung der Meßergebnisse sowie der Zusammenhänge zwischen Deformationsindizes und dem Faktor B ausgewählt wurden. Die Abbildungen 2, 3 und 4 zeigen die zusammengehörigen Teilkalküle der Deformationsindizes. Hierbei beziehen sich die Abb. 2 und 3 auf Probekörper mit gleicher Einkerbung,

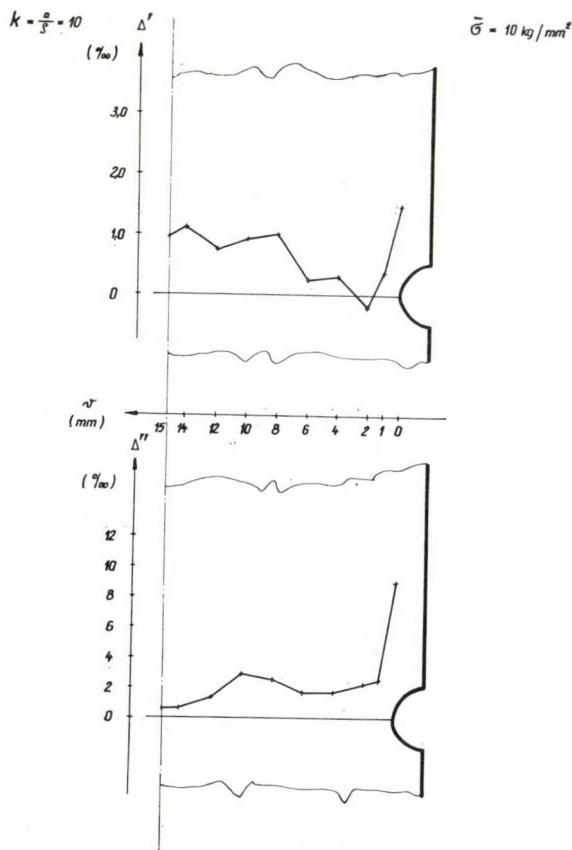


Abb. 2

jedoch wachsender nomineller Belastung, während das Diagramm in Abb. 4 die stellenabhängigen Verzerrungen an einem schärfer eingekerbten Probekörper darstellt. In allen drei Fällen erstreckten sich die Prüfungen auf den Abschnitt zwischen Kerbgrund und Mittellinie des Probekörpers. Da die Belastung symmetrisch verteilt war, erscheint diese Darstellungsweise zulässig.

Die stellenabhängigen Änderungen der für den mehrachsigen Spannungszustand charakteristischen Faktoren B lassen sich an den folgenden Abbildungen erkennen. Sie wurden auf Grund der Deformationsindizes anhand der

beschriebenen energetischen Berechnungsmethoden errechnet, wobei sich Abb. 5 aus der Versuchsreihe gemäß Diagramm 2, Abb. 6 aus jener gemäß Diagramm 3 und Abb. 7 aus der Versuchsreihe gemäß Diagramm 4 ergab. Grundbedingung war in allen Fällen die Annahme, daß sich die von außen zugeführte mechanische Energie im allgemeinen gleichmäßig auf die Raumelemente des

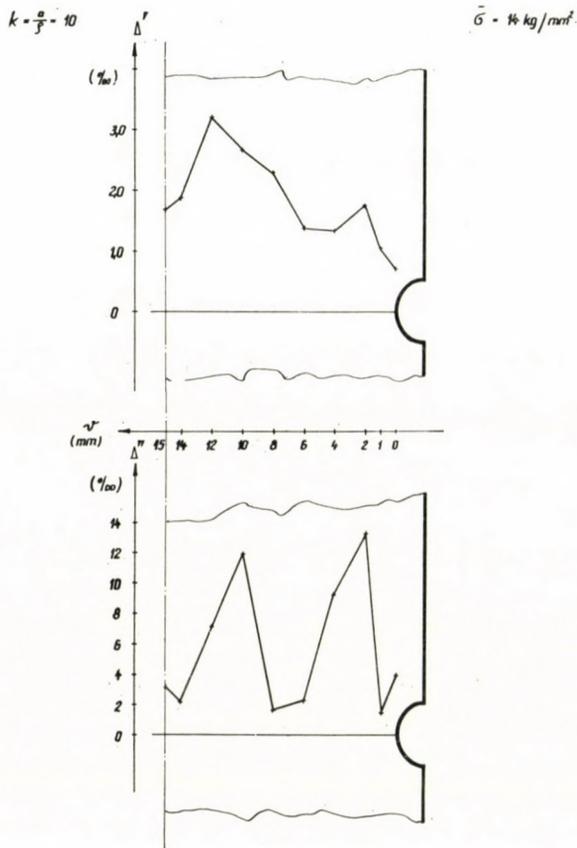


Abb. 3

Probekörpers verteilt. Zeigten sich im Verlauf der Versuche Abweichungen hiervon, so waren diese auf den durch die Kerbwirkung verursachten Mehrachsigenzustand zurückzuführen.

Es sei hier noch bemerkt: Die gestrichelte Kurve in Abb. 5 bildet zwar einen Hinweis darauf, daß die in den Meßpunkten ermittelten B -Werte um die Einheit liegen, eine genaue Bestimmung dieser Werte war jedoch im Hinblick auf die verhältnismäßig größere Streuung der kleinen Energiewerte nicht möglich.

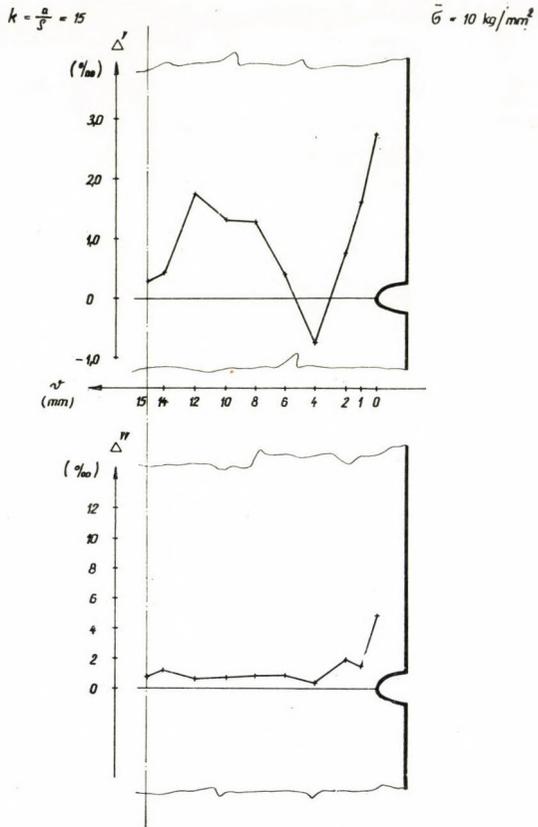


Abb. 4

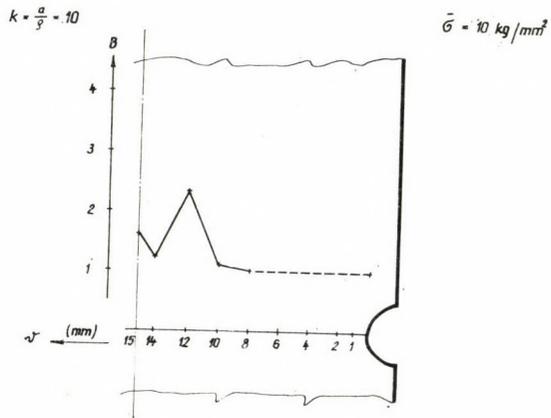


Abb. 5

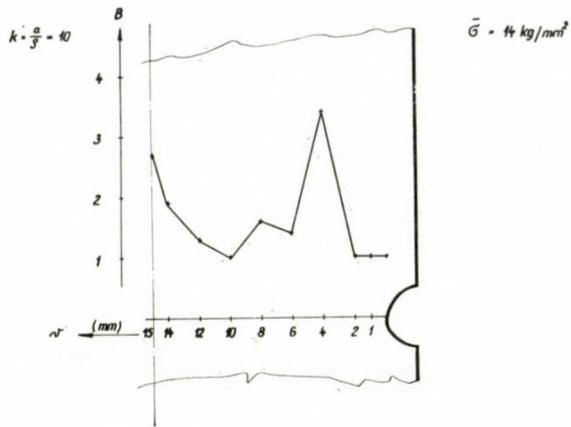


Abb. 6

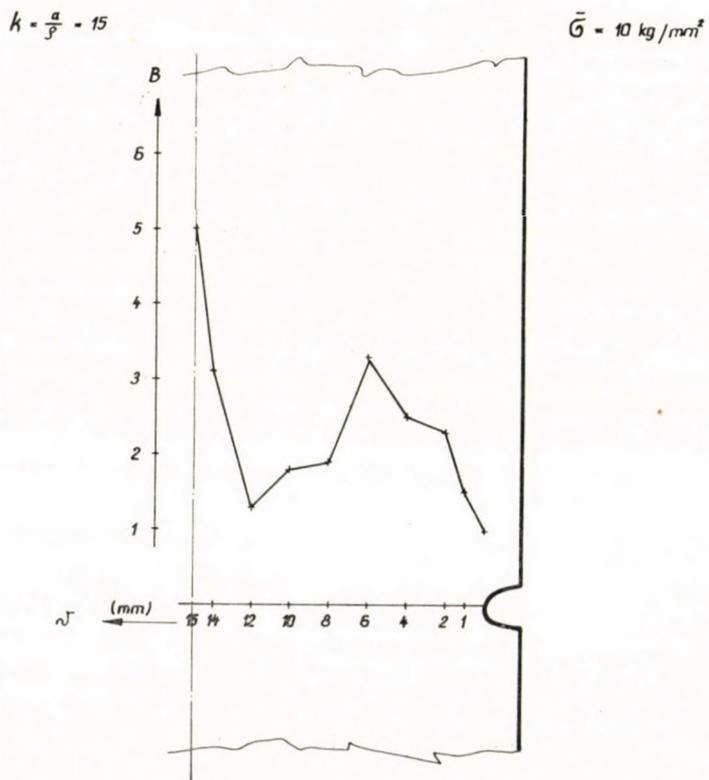


Abb. 7

Folgerungen

Wie aus den Diagrammen der Deformations-Teilkalküle deutlich hervorgeht, kommt im Kerbgrund die der einachsigen Spannungsspitze entsprechende größere Verformung ungehindert zustande. Die Diagramme lassen sogar erkennen, daß sich diese Spitze nach Eintritt des Fließens mit zunehmender Beanspruchung abbaut (siehe Abb. 3). In dieser Zone dominiert die einachsige Beanspruchung auf Zug, was der Wert $B = 1$ in dem Diagramm der gesamten Veränderung von B gut veranschaulicht. Bei einer Übersicht über sämtliche Diagramme fällt auf, wie sich unter dem Einfluß der Einkerbungsschärfe bzw. des Anwachsens der mechanischen Beanspruchung die die Deformation behindernde, zur Haupttrichtung senkrechte zusätzliche Beanspruchung entwickelt. Ihre gefährlichen Werte erreicht diese zusätzliche Beanspruchung zumeist in den der Mittellinie benachbarten Bereichen sowie in den Übergangszonen aus der elastischen zur plastischen Verformung (jeweils in den Meßpunkten 12, 4 und 6 der Abbildungen 5, 6 und 7).

Unsere Beobachtungen bestätigen die Annahme USHIKS [20], daß es der Übergangsabschnitt ist, in welchem es zum Sprödbbruch kommt. Es ist auch eine von uns empirisch bestätigte Tatsache, daß die Ungleichmäßigkeit der Gitterverzerrungen mit zunehmender Belastung steigt. Im Grunde genommen stimmen unsere Versuche auch mit jenen Feststellung KOCHENDÖRFERS [1] überein, derzufolge die Sprödbbruchneigung im Kern des eingekerbten Probekörpers keinesfalls unbeschränkt anwächst, sondern innerhalb endlicher Werte bleibt. Seines Erachtens liegt sie bei $\nu = 0,4$, mit unserer Nomenklatur bei $B_{\max} \leq 5$, was weit vom Grenzfall $B = \infty$ verbleibt. Im Vergleich zu den nach den Berechnungen von NEUBER [21] ermittelten theoretischen Verteilungen ergeben sich allerdings schon größere Abweichungen. Dies erklärt sich aus der Tatsache, daß NEUBER seine Formeln für das homogene Punktkontinuum erstellt hat, während wir unsere Messungen an polykristallinen Werkstoffen ausführten. Aus dem gleichen Grunde kann angenommen werden, daß es bei inhomogenen Werkstoffen niemals zum theoretischen Sprödbbruchzustand kommen kann, da sich die durch die Querspannungen verursachten lokalen Gitterverzerrungsschwankungen ausgleichen, bevor sich ein solcher Zustand entwickeln könnte.

Diskussion

Die Experimente zielten darauf ab, an eingekerbten Probekörpern die Behinderungsfaktoren B auf röntgenographischem Wege zu messen. Sie ermöglichten damit die Bestimmung der Sprödbbruchneigung in Abhängigkeit von der Lage entlang des gefährdeten Querschnittes. Die Prüfungen mußten an eingekerbten Probekörpern vorgenommen werden, um die gefährlicheren Fälle

des räumlichen Spannungszustandes produzieren zu können. Mit äußeren Belastungskräften lassen sich nämlich Werte von $\frac{\sigma_3}{\sigma_1} \geq 0,5$ praktisch kaum verwirklichen. Die Faktoren B wurden deshalb ermittelt, weil sie für sich allein anzuzeigen vermögen, wie groß die Deformationsfähigkeit und der Bruchwiderstand sind, die im betreffenden Punkt des untersuchten Werkstückes noch vorhanden sind. Diese in Spannungsdimensionen auszudrücken, hieße einen irrationalen Versuch unternehmen. Und schließlich bedienten wir uns des röntgenographischen Verfahrens, weil uns hierzu die geeignete Rückstrahl-Aufnahmetechnik und ein bewährtes Bewertungsverfahren, die Methode der Deformationsindizes, zur Verfügung stand.

Wir sind uns im klaren darüber, daß die bescheidenen Ergebnisse unserer Arbeit weit davon entfernt sind, als Lösung des aufgeworfenen Problems angesehen werden zu können. Es war uns auch nur daran gelegen, als Beitrag zur Lösung auf eine praktische Meßmethode hinzuweisen, u. zw. auf eine Möglichkeit, mit deren Hilfe sich in gewissen konkreten Fällen der quasi-antagonistische Widerspruch zwischen den Sicherheitsanforderungen einerseits und der Wirtschaftlichkeit andererseits numerisch auflösen läßt.

LITERATUR

1. KOCHENDÖRFER, A.: Z. Metallkunde **51**, 73 (1960).
2. KRISCH, A.: Stahl und Eisen **73**, 1215 (1953).
3. SCHNADT, H. M.: Oerlikon Schweißmitt. **31**, 14 (1958).
4. KOCHENDÖRFER, A., SCHOLL, H.: Stahl und Eisen **77**, 1006 (1957).
5. GILLEMOT, L.: Period. Polytechn. *M II/4* 251 (1958).
6. SELTENHAMMER, L.: Schweißtechnik, **13**, 37 (1959).
7. RÜHL, K. H.: Schweißen und Schneiden 107 (1956).
8. SZÁNTÓ, I. S.: Freiburger Forschungshefte *B* **50**, 52 (1960).
9. GISEN, F., GLOCKER, R., OSSWALD, E.: Zeitschr. techn. Phys. **17**, 145 (1936).
10. FROMMER, L., LLOYD, E. H.: J. Inst. Metals **70**, 91 (1944).
11. SZÁNTÓ, I. S.: Acta Techn. **XXXII**, 1—2, 65 (1960).
12. SZÁNTÓ, I. S.: Dissertation, Ung. Akad. d. Wissenschaften, Budapest (1959).
13. SZÁNTÓ, I. S.: Acta Techn. (zur Publikation angenommen) unter Druck.
14. LOZINSZKI, M. G.: Izzó fémek metallográfiai vizsgálata (Metallographische Untersuchungen in höheren Temperaturbereichen), Budapest, 1960. 114.
15. PROHÁSZKA, J., KATOR, L.: (1961) Versuchsergebnisse (nicht publiziert)
16. FASTOW, N. S.: Problems of Metallography and the Physics of Metals, Fourth Symposium (Edit. B. Ja. Ljubow) Consultants Bur. New York, 1957. 257.
17. BOAS, W.: Zeitschr. f. Kristallographie **96**, 214 (1937).
18. BRINDLEY, G. W., RIDLEY, P.: Proc. Phys. Soc. **51**, 432 (1939).
19. BARRETT, C. S.: Structure of Metals, New York—London, 1943. 366.
20. USHIK, G. W.: Isvestija Akad. Nauk. UdSSR. OTN. **10**, (1948).
21. NEUBER, H.: Kerbspannungslehre, 2. Aufl. Berlin, 1958.

GENERAL PROBLEMS OF ESTIMATING
ALLGEMEINE BEMESSUNGSPROBLEME
ГЕНЕРАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ РАСЧЕТА

SPANNUNGSFELDER ALS GRUNDLAGE DES FESTIGKEITSGERECHTEN KONSTRUIERENS

Prof. Dr.-Ing., Dr. agr. h. c. W. KLOTH

BRAUNSCHWEIG

Um dem Thema den richtigen Platz zu geben, sollte man es zunächst einmal von höherer Warte aus betrachten.

Geistiges und materielles Gestalten

Die primitivsten Regungen des Menschen sind ohne Zweifel, für das Fortbestehen des Lebens zu sorgen, d. h. für Nahrung, Kleidung, Wohnung usw. Wenn diese primitiven Forderungen aber erfüllt sind, regt sich sehr bald im Menschen der Drang zum Gestalten, Gestalten in der verschiedensten Hinsicht, auf geistigem oder materiellem Gebiete. Auf geistigem Gebiete können die Probleme aus dem Zusammenleben der Menschen entspringen und soziale, rechtliche oder ähnliche Fragen betreffen. Sie können aber auch religiöser Art sein oder künstlerische Dinge behandeln, je nachdem die Ideen des Menschen nach einem Ausdruck drängen.

Das materielle Gestalten knüpfte ohne Zweifel ursprünglich an die Probleme der Nahrung, Kleidung oder Wohnung an. Mit der Verfeinerung der Lebensbedingungen wuchs auch dieses Gebiet der menschlichen Betätigung. Ohne Zweifel hat der Mensch eine besondere Veranlagung zur materiellen Gestaltung seiner Umwelt. Geradezu lawinenartig wuchs dieses Gebiet an, als sich die zivilisatorischen und insbesondere die technischen Bedürfnisse ausbreiteten. Heute gestaltet der Mensch Gegenstände und Gebilde, die die Möglichkeiten seiner physischen Kräfte und seiner Sinne außerordentlich erweitert haben und die ihm auf Teilgebieten Aufgaben abnehmen, die zu den ureigensten Reservaten des Menschen gehörten. Ich denke z. B. an die moderne Kybernetik.

Biologisches Gestalten

Vorerst sei jedoch noch darauf hingewiesen, daß der Mensch auch biologisch gestalten kann. Er kann z. B. durch die Züchtung Lebewesen mit Eigenschaften schaffen, die seinen Zwecken in ganz besonderer Weise dienen. Diese

Züchtung geschieht insbesondere durch planmäßige Auslese oder eine Beeinflussung der Erbfaktoren. Man kann Lebewesen nicht von Grund auf schaffen, aber ihre Eigenschaften weitgehend verändern.

Technisches Gestalten

Kehren wir zurück zum materiellen Gestalten. Heute hat es sich immer mehr zu einem technischen Gestalten entwickelt, bei dem die Kenntnisse der Naturgesetze die Grundlage bilden. Das technische Gestalten kann die Funktion oder die Festigkeit betreffen. Das funktionelle Gestalten z. B. in strömungstechnischer, aerodynamischer oder elektrotechnischer Hinsicht hat eine gewisse Priorität, denn die Maschinen und Apparate werden ja gebaut, damit sie eine bestimmte Funktion erfüllen. Gleich hinterher kommt jedoch die Forderung, daß sie diese Funktion mit geringstem Aufwand und möglichst lange, also mit entsprechender Haltbarkeit, d. h. Festigkeit oder Steifigkeit ausüben können. Dieses festigkeitsgerechte Gestalten soll hier besonders behandelt werden.

Verformungs- und Spannungsfelder

Alle Überlegungen über Festigkeit und Steifigkeit kreisen um die Spannungen, die in den Bauteilen vorhanden sind. Die Kenntnis und Beherrschung dieser Spannungen ist also von grundlegender Bedeutung für eine vorteilhafte Bewältigung dieser Aufgabe. Wenn man dann noch das Verhalten der Werkstoffe unter solchen Spannungen kennt, so sind alle Voraussetzungen erfüllt.

Schon früh hat man sich Gedanken über die Spannungen gemacht, die in technischen Bauteilen auftreten. Aber die Vorstellungen, die man sich davon verschaffte, waren nach heutigen Ansichten zu einfach. Noch heute lernt jeder angehende Techniker, daß man die Spannung findet, wenn man die Kraft durch den Querschnitt dividiert, und daß die Spannung kleiner sein muß als die von dem Werkstoff ertragbare Spannung. Die so errechneten Spannungen täuschen über weite Bereiche des Bauteiles eine Gleichmäßigkeit und Gleichartigkeit vor, die in Wirklichkeit aber durchaus nicht vorhanden sind. Die Spannungen ändern sich oft von Millimeter zu Millimeter nach Art, Größe, Richtung, Gradient, Mehrachsigkeit usw. Bild 1 gibt hiervon für einen ganz einfachen flachen T-Knoten ein Beispiel.

Die Ermittlung der Spannungsfelder

Es stehen in der Hauptsache 2 Methoden zur Ermittlung solcher Spannungsfelder zur Verfügung. Einmal das bekannte spannungsoptische Verfahren und zum anderen das Verfahren mit Reißlack und Feindehnungsmes-

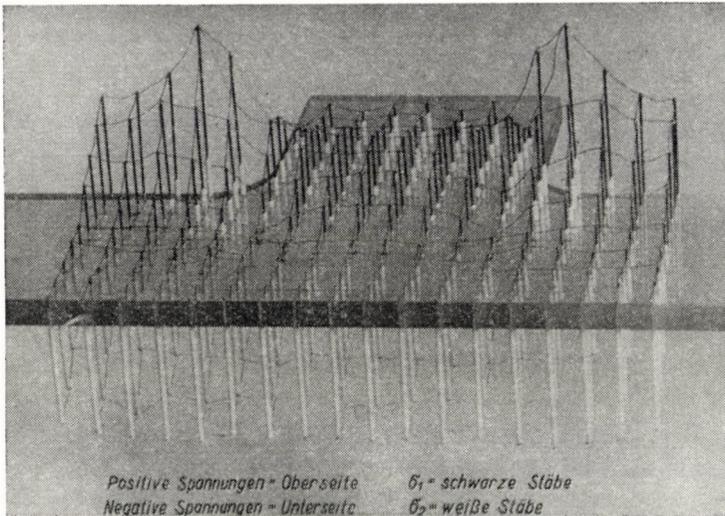


Bild 1. Spannungsgebirge in einem flachen Knoten, der auf Biegung beansprucht wurde. Die Enden des waagerechten Stabes sind aufgelegt und an den senkrechten Stab greift eine Kraft in seiner Richtung an. Man erkennt, daß die Spannungen eine recht verschiedene Größe haben. Die unterschiedliche Richtung geht hieraus noch nicht hervor

sern. Da das letztere weniger bekannt ist, sollen hier vor allen Dingen Beispiele mit dieser Methode gezeigt werden.

Die Bauteile werden mit einem spröden Lack überzogen, der bei der Belastung feine Risse bekommt (Bild 2). Es gibt Lacke, die man eichen kann, so daß das erste Auftreten der Risse (ab etwa 7 kp/mm^2 bei Stahl) zugleich Aussagen über die Größe der Dehnungen und damit auch der Spannungen gibt. Das sind die amerikanischen stresscoat-Lacke. Man kann aber auch einfachere Lacke verwenden, die man aus etwa 70 Teilen Kolophonium und 30 Teilen Dammar-Harz oder entsprechenden Kunststoffen zusammenschmilzt. Sie geben durch ihre Risse nur die *Richtung* der größten Dehnungen (ab etwa 1 kp/mm^2 bei Stahl bzw. Dehnungen von 10^{-4} mm/mm) auch der ersten Hauptspannung an. Die *Größe* der Dehnungen muß man dann jedoch mit Feindehnungsmessern (Bild 3) ausmessen. Da, wie erwähnt, die Dehnungen sich örtlich sehr stark ändern, muß man mit Meßlängen von 2 oder 1 mm arbeiten. Es handelt sich um kleine elektroinduktive Dehnungsmesser, die mit einer Trägerfrequenz von 500 Hz arbeiten, in Brückenschaltung liegen, deren Angaben verstärkt und gleichgerichtet werden, so daß sie von einem Zeigerinstrument abgelesen werden können. Die Dehnungsmesser werden einmal senkrecht zu den Dehnlinien aufgesetzt, um ϵ_1 und in Richtung der Dehnlinien um ϵ_2 zu messen. Nach dem Hooke'schen Gesetz und nach den Gesetzen des zweiachsigen Spannungszustandes werden daraus punktweise die Spannungen errechnet.

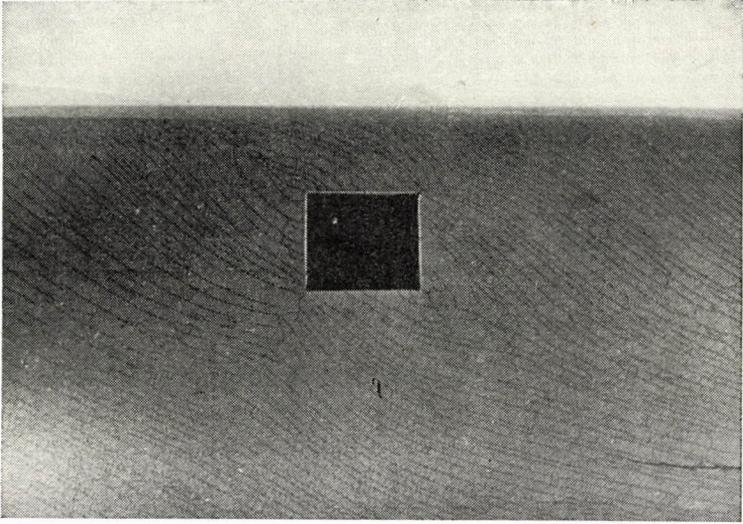


Bild 2. Dehnungslinien auf einem auf Drehung beanspruchten Rohr, das mit einem Ausschnitt versehen ist. Das Rohr wurde mit einem spröden Lack überzogen, der bei der Beanspruchung feine Risse bekommt. Das Bild zeigt die Originalrisse im stresscoat-Lack

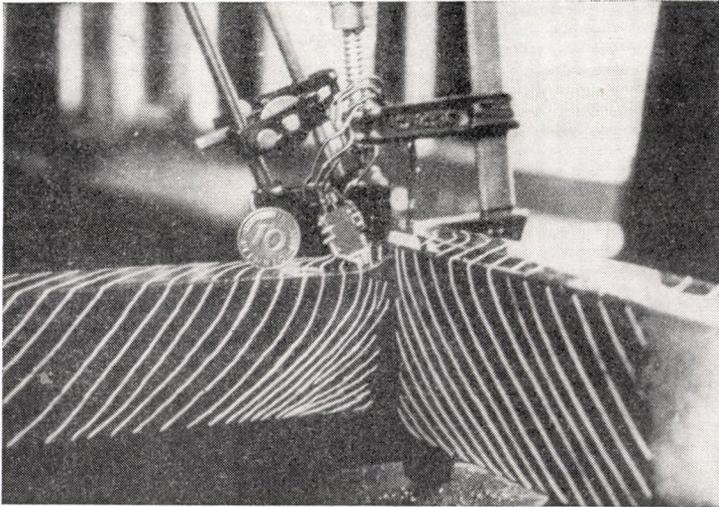


Bild 3. Dehnungsmesser. Von den Rißlinien ist eine Anzahl mit weißer Farbe nachgezeichnet worden. Sie geben die Richtung der Hauptdehnungen an. Zum Ausmessen ihrer Größe ist ein kleiner induktiver Dehnungsmesser von 1 oder 2 mm Meßlänge aufgesetzt worden. Seine Größe wird durch das Geldstück angedeutet

Die Auswertung von Dehnungs- und Spannungsfeldern

Bild 4 und 5 zeigen an einem einfachen T-Knoten aus leichten U-Profilen das Dehnungslinien- bzw. Spannungsfeld. Der Knoten ist in seinem waagerechten Teil an den beiden Enden aufgelegt und an den senkrechten Teilen durch eine nach unten wirkende Kraft belastet. Von den aufgetretenen feinen Rissen sind einige mit weißer Tusche nachgezeichnet worden. In dem senkrechten Teil laufen die Risse ringförmig um den Stab herum, und zwar in Ebenen

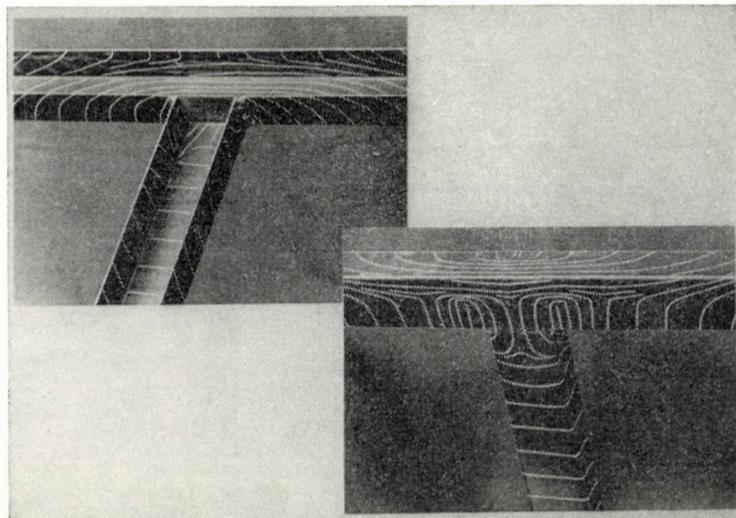


Bild 4. Dehnungslinienfeld auf einem Knoten von 2 leichten U-Profilen. Die Belastung erfolgte auf Biegung, wie auf folgendem Bild angegeben ist. Einige Dehnlinien sind wiederum mit weißer Farbe nachgezeichnet worden. Auf dem senkrechten Stab verlaufen sie ringförmig um die Stabachse herum, sie liegen senkrecht zur größten Dehnung. In dem waagerechten Stab zeigt die untere Kante ebenfalls Zuglinien, dagegen die obere Kante Drucklinien, die infolge der Querdehnung der Druckfasern aufreißen. An der Anschlußstelle sind Störungen im Dehnungslinienfeld zu sehen. Die äußeren Zugfasern des Biegebalkens wollen sich dehnen, werden aber durch den angeschweißten senkrechten Stab daran gehindert. Die Folge ist, daß sich die Zuglinien des Biegebalkens auch noch in dem angeschweißten senkrechten Stab fortsetzen

senkrecht zur Stabachse. In dieser Richtung herrscht ja die größte Zugdehnung. Der waagerechte Stab wird auf Biegung beansprucht, zeigt also in den unteren Fasern, senkrecht zur größten Dehnung, ebenfalls Zuglinien und in den oberen Fasern Drucklinien, die infolge der Querdehnung in diesen Gebieten gerissen sind. An der Anschlußstelle zeigen sich nun Unstetigkeiten. Die Zugfasern des Biegebalkens werden durch den angeschweißten senkrechten Stab an der Dehnung gehindert. Die Zuglinien des Biegestabes setzen sich etwas in den Zugstab fort. In dem oberen Flansch des waagerechten U-Profiles sind nicht reine Drucklinien vorhanden, sondern sie biegen über der Anschlußstelle etwas ab.

Das folgende Bild 5 zeigt an einigen Kanten die Spannungen. Zunächst fällt auf, daß sie in den Ecken des Anschlusses spitzenartig ansteigen. Dies gilt sowohl für den Biege- als auch für den Zugstab. In der Technik sind Kerbwirkungen an sich bekannt. Hier kann man aber aus dem Verformungsmechanismus auch etwas über das Zustandekommen der Spannungsspitzen und der Verformungsbehinderung erkennen. Weiterhin kann man erkennen, daß durch die Art der Krafteinleitung bzw. Abstützung besondere Rückwirkungen ausgeübt werden. Sowohl die Krafteinleitung als auch die Abstützung ist in diesem Beispiel in der Stegebene erfolgt, wie es in der Praxis oft geschieht. Für Biege-

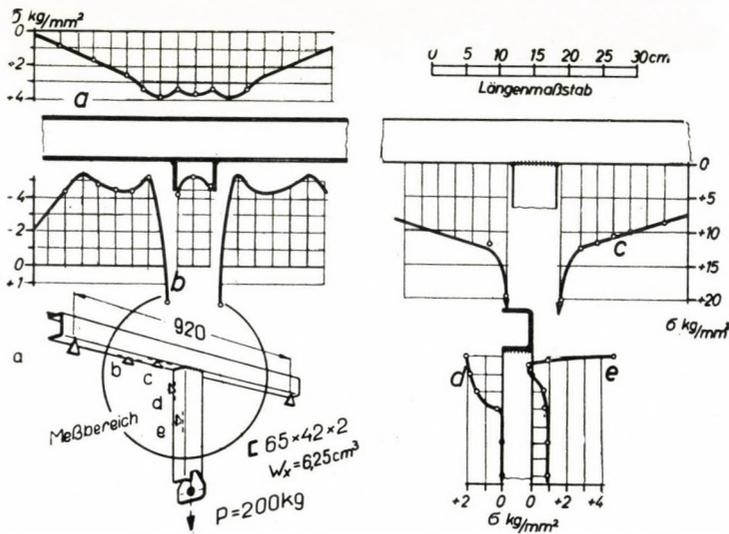


Bild 5. Spannungen an den Kanten des vorhergezeigten Knotens. Bemerkenswert sind die Spannungsspitzen in den Ecken des Anschlusses. An der freien Kante des oberen Flansches des Biegestabes sind nach der Mitte zu ansteigende Druckspannungen vorhanden. An der freien Kante des unteren Flansches dagegen ebenfalls Druckspannungen, die in der Nähe des Anschlusses in Zugspannungen übergehen

balken wäre eine Krafteinleitung im Schubmittelpunkt günstiger, denn im vorliegenden Beispiel werden infolge der Abweichungen vom Schubmittelpunkt Drehmomente zusätzlich ausgeübt, die bei den sehr torsionsweichen offenen Profilen Störungen ergeben.

In Bild 6 soll gleich einmal gezeigt werden, wie man bei Kenntnis der Zusammenhänge vorteilhafter konstruieren kann. Einmal sind hier die Abstützungen günstiger gewählt und zum andern ist der Anschluß des senkrechten Zugstabes in der neutralen Zone des Biegestabes erfolgt. Da hier keine Dehnungen auftreten, können auch keine Verformungsbehinderungen und keine Spannungsspitzen erscheinen. Eine Spannungserhöhung im Steg des Zugstabes in der Nähe des Anschlusses rührt daher, daß die Kraft in den Zugstab fälschlicherweise ebenfalls im Schubmittelpunkt eingeleitet wurde.

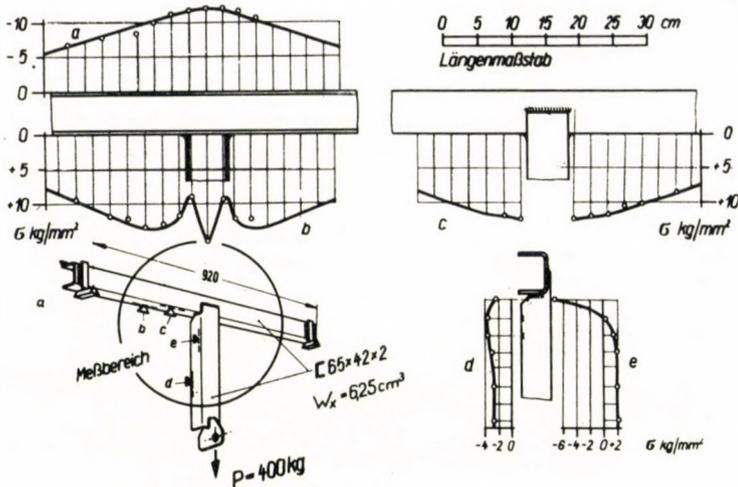


Bild 6. Guter Anschluß zweier U-Profile, bei denen in den Ecken keine Spannungsspitzen auftreten. Dies ist erreicht durch Lage des Anschlusses in der neutralen Zone und eine bessere Abstützung des Biegebalkens im Schubmittelpunkt

Wenn oben dargelegt wurde, daß die Größe der Spannungsspitze an der Anschlußstelle von der Verformungsbehinderung herrührt, so liegt die Frage nahe, ob sie umso größer ist, je größer die Verformungsbehinderung, also je

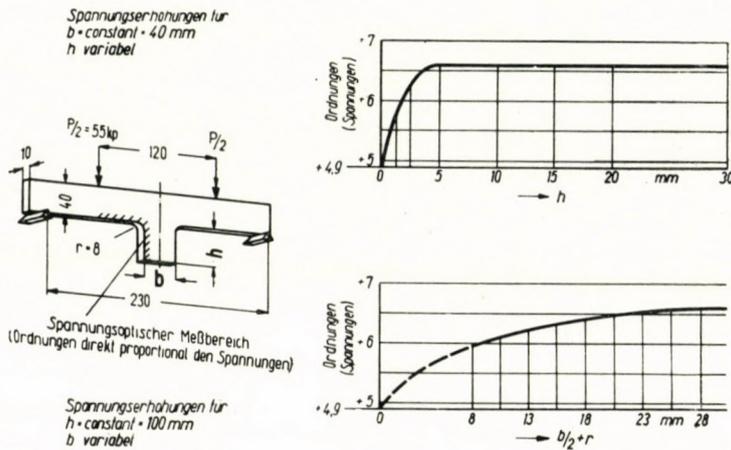


Bild 7. Einfluß der Vorsprungshöhe und Breite auf die Spannungsspitze. Die Kurven steigen zunächst stark, dann aber weniger stark an

breiter der Anschluß ist; in gewissen Grenzen trifft dies zu, wie auf Bild 7 dargestellt wurde. Es bestehen aber ziemlich verwickelte Zusammenhänge zwischen den Breiten und Höhen der beiden Stäbe und auch dem Ausrundungshalbmesser. In solchen ganz einfachen Fällen kann man die Spannungen mit

elektronischen Recheneinrichtungen bestimmen und dadurch auch gewisse Erkenntnisse gewinnen. Sobald es sich aber um verwickeltere Bauteile handelt, wie sie in der Technik alltäglich vorkommen, werden die Ansätze so kompliziert und die Zusammenhänge so unübersichtlich, daß die Voraussetzungen für mathematische Ansätze nicht mehr vorhanden sind. Auch mit elektronischen Rechenmaschinen kann man letzten Endes nur das rechnen, was sich mathematisch ausdrücken läßt. Aber die verwickelten Bauformen eines Maschinenteiles lassen sich nicht mehr in eine Formel pressen.

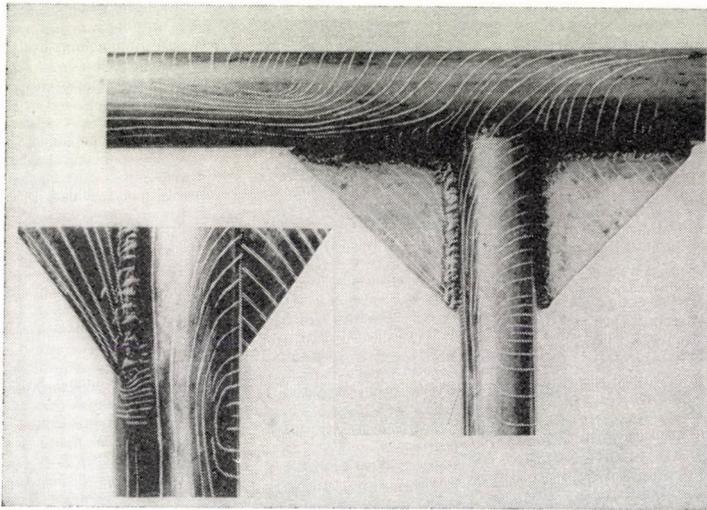


Bild 8. Dehnungslinienfeld auf einem Rohrknotten, der auf Biegung beansprucht wurde (s. Bild 9). In den ungestörten Bereichen sind reine Biegelinien vorhanden, jedoch in der Umgebung der Anschlüsse mit starken Störungen. In dicht nebeneinander liegenden Gebieten ändern sich die Spannungen nach Art und Richtung sehr stark

In den Bildern 8 und 9 sind die Dehnungs- und Spannungsfelder auf einem einfachen T-förmigen Rohrknotten dargestellt, der durch eine waagerechte Kraft auf Biegung beansprucht wurde. In den ungestörten Bereichen findet man Biegelinien, wie man sie erwartet. In der Umgebung der Anschlußstelle sind jedoch erhebliche Störungen vorhanden. Hier wechseln dicht nebeneinander die Spannungen nach Art, Größe, Richtung usw. Näheres zeigt die Spannungsverteilung. An den Ecken sind wiederum hohe Spannungsspitzen festzustellen. Hier sind die Spannungen auch zweiachsig, und zwar im Zug- und Druckbereich. Wenn man über der Differenz der Hauptspannungen σ_1 und σ_2 den Mohr'schen Kreis zeichnet, so bekommt man für jeden Punkt auch die Schubspannungen an dieser Stelle. Das Maximum der Schubspannungen deckt sich nicht mit dem Maximum der Normalspannungen. Die Richtung der jeweiligen Spannungen ist aus dem Dehnungslinienfeld zu ermitteln, d. h. die erste

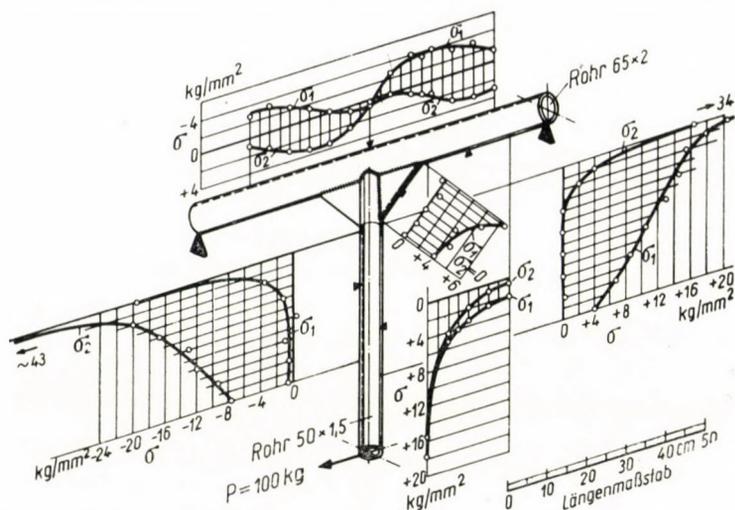


Bild 9. Spannungsverteilung auf dem Rohrknoten nach Bild 8. In den Ecken sind sehr hohe zweiachsige Spannungsspitzen vorhanden. An jeder Stelle lassen sich die Schubspannungen aus dem Mohrschen Kreis über der Differenz der jeweiligen Ordinaten ermitteln

Hauptspannung hat eine Richtung senkrecht und die zweite Hauptspannung in Richtung der Dehnlinien. Die Schubspannungen sind unter 45° dazu gerichtet.

Die Anforderungen an die Bauteile bzw. die Spannungsfelder

Bei dieser Gelegenheit sollen den Meßergebnissen die Anforderungen an Festigkeit und Steifigkeit gegenübergestellt werden.

Es wurde im vorhergehenden mehrfach auf die Spannungsspitzen hingewiesen. Nach der Erfahrung sind die Spannungsspitzen bei dauerbeanspruchten Maschinenteilen der Ausgangspunkt für Dauerbrüche. Spannungsspitzen treten nicht an glatten ungestörten Stellen auf, sondern immer in den Ecken, an den Kräfteinleitungen usw. Diese sind jedoch einer rechnerischen Ermittlung im allgemeinen nicht zugänglich. Man ist also in solchen Fällen auf eine versuchsmäßige Ermittlung der Spannungsfelder bzw. auf ein Vermeiden von Spannungsspitzen bei der Konstruktion auf Grund allgemeiner Erfahrungen angewiesen. Nach neueren Untersuchungen von KOCHENDÖRFER und HEMPEL und auch anderen muß man annehmen, daß für Dauerbrüche nicht die Normalspannungen, sondern die Schubspannungen entscheidend sind. Oft liegen an der Stelle der größten Normalspannungen auch die größten Schubspannungen. Man kann beide aus den Spannungsfeldern ermitteln.

Bei statischer Belastung eines Bauteiles sind die Spannungsspitzen weniger gefährlich, da sie erfahrungsgemäß durch plastische Verformungen abgebaut werden. Hohe örtliche Spannungen können für Gewaltbrüche erst dann

eine Bedeutung bekommen, wenn sie sich über größere örtliche Bereiche erstrecken. Auch das ist aus den Spannungsfeldern zu entnehmen.

Wenn für ein Bauteil die Gefahr plastischer Verformung besteht, so muß man die Schubspannungen besonders betrachten. Handelt es sich um elastische Verformungen, so wird man die Forderung stellen, daß möglichst alle Werkstoffteilchen gleichmäßig an der elastischen Verformung beteiligt werden. Sie darf natürlich die Streckgrenze nicht überschreiten. Ganz anders sind die Forderungen bei der Gefahr spröder Brüche. Diese werden begünstigt durch mehrachsige Zugspannungszustände. In diesen Fällen muß man also die Spannungsfelder wiederum ganz anders interpretieren.

Man erkennt aus diesen Überlegungen, daß der Konstrukteur sich zunächst einmal über seine Anforderungen an das Bauteil klar werden muß. Daraus ergibt sich erst, welche Ansprüche er an die Spannungsfelder stellen muß. Dann kommt aber die sehr schwierige Anforderung an den Konstrukteur, daß er die Gesetze zwischen Spannungsfeld und Gestalt souverän so beherrschen muß, daß er durch die Bildung der Gestalt Spannungsfelder entsprechend seinen Anforderungen bekommt. Die meisten Konstrukteure werden diesen Anforderungen noch nicht gewachsen sein. Bei dem immer mehr zunehmenden Wunsch nach Gewichtsverringering und besserer Ausnützung der Werkstoffe wird sich aber eine Außerachtlassung dieser Forderung von selbst verbieten. Aus dieser Situation ergeben sich dann bestimmte Forderungen für die Forschung und auch für die Lehre. Es ist nicht zu bestreiten, daß die Konstruktionslehre bei der Ausbildung der Ingenieure und insbesondere der Konstrukteure in den letzten Jahrzehnten recht vernachlässigt wurde. Ähnliches gilt auch für die Forschung. Nur auf Sondergebieten wurden Fortschritte gemacht, z. B. wurden im Stahlbau bei ruhigen Belastungen und in ungestörten Bereichen z. B. glatten Streben, glatten Schalen usw. die Rechenverfahren in beachtlicher Weise weiterentwickelt. Die dort im Vordergrund stehenden Probleme sind Knicken, Beulen usw. Wenn es sich jedoch, wie in weiten Gebieten des Maschinenbaues um ganz andere Belastungsarten und um andere Anforderungen nach Festigkeit und Steifigkeit handelt, können solche Verfahren nicht weiterhelfen. Auch die in solchen Fällen häufig verwendeten Formfaktoren, die angeben, wieviel mal höher die wirkliche Spannung gegenüber einer errechneten Nennspannung ist, können nur zum Teil weiterhelfen. Eine große Unsicherheit liegt z. B. in der Ermittlung der »Nennspannung«, weil der maßgebende Querschnitt oft nicht zu übersehen ist.

Die Werkstoffe im Spannungsfeld

Bei dem in Bild 8 und 9 dargestellten Rohrknoten soll noch auf Überlegungen hingewiesen werden, welche die Werkstoffe betreffen. In der landläufigen Technik ist es üblich, die im einachsigen statischen Zugversuch ermit-

telte Festigkeit als kennzeichnende Eigenschaft der Werkstoffe anzugeben. Wenn das betreffende Werkstoffteilchen nun aber an der kritischen Stelle eines dauerbeanspruchten Maschinenteiles liegt, also keine statische, sondern eine stark wechselnde Spannung auszuhalten hat, wo noch dazu die benachbarten Werkstoffteilchen ganz andere Spannungen nach Art, Größe, Richtung, Gradient usw. führen, so kann man im Zweifel sein, ob die im einachsigen statischen Zugversuch ermittelte Spannung überhaupt noch eine kennzeichnende Eigenschaft unter diesen Einsatzverhältnissen darstellt. Vielleicht muß man an die Werkstoffprüfung die Forderung stellen, daß sie eingehendere Äußerungen über die Eigenschaften der Werkstoffe macht, welche den jeweiligen Einsatzverhältnissen besser entsprechen.

Ein weiterer Punkt, den die Forschung noch besser klären muß, ist der Einfluß der Belastungsgeschwindigkeit, und zwar sowohl auf die Eigenschaften der Werkstoffe, als auch auf die Spannungsfelder. Wir ermitteln die Spannungsfelder im allgemeinen statisch. Werden sie aber bei größerer Belastungsgeschwindigkeit noch das gleiche Aussehen haben? Versuche haben gezeigt, daß unter solchen Verhältnissen Spannungswellen in den Bauteilen entstehen können, die die Verhältnisse zeitlich und örtlich erheblich abwandeln können. Außerdem weiß man, daß die Schubspannungen zu ihrer Auswirkung eine gewisse Zeit gebrauchen, während dies bei Normalspannungen weniger der Fall ist. Einige Versuche bei schlagartigen Beanspruchungen liegen vor. Sie haben z. B. gezeigt, daß dann die Spannungsspitzen niedriger sind als bei statischer Belastung. Ob solche Einflüsse aber auch schon im Tonfrequenzbereich, bei Fahrzeugen oder schnellaufenden Maschinen vorkommen, ist noch wenig bekannt.

Beispiele von Spannungsfeldern und ihrer planmäßigen Beeinflussung

Wenn von seiten der theoretischen Erarbeitung oder der Forschung noch manche Fragen offen sind, so kann man doch nach den bisherigen Erkenntnissen für die Konstruktion schon manchen Hinweis geben.

Bild 10 zeigt die Spannungen in der Umgebung von Laschen, die auf ein Flachmaterial geschweißt sind. Nach landläufiger Ansicht würden die Laschen eine Verstärkung des Querschnittes und damit eine Verringerung der Spannungen verursachen. Das Gegenteil ist jedoch der Fall, denn an den Stirnseiten der Lasche sind erhebliche Erhöhungen der Spannungen vorhanden. Insbesondere ist eine solche Erhöhung auch auf der Schweißnaht vorhanden, die bei dem heute üblichen Dimensionierungsverfahren der Schweißverbindungen überhaupt nicht beachtet wird.

Die Verhältnisse werden umso schwieriger und unübersichtlicher je kleiner die Wandstärken werden. Wenn man z. B. an einem dünnwandigen U-Trä-

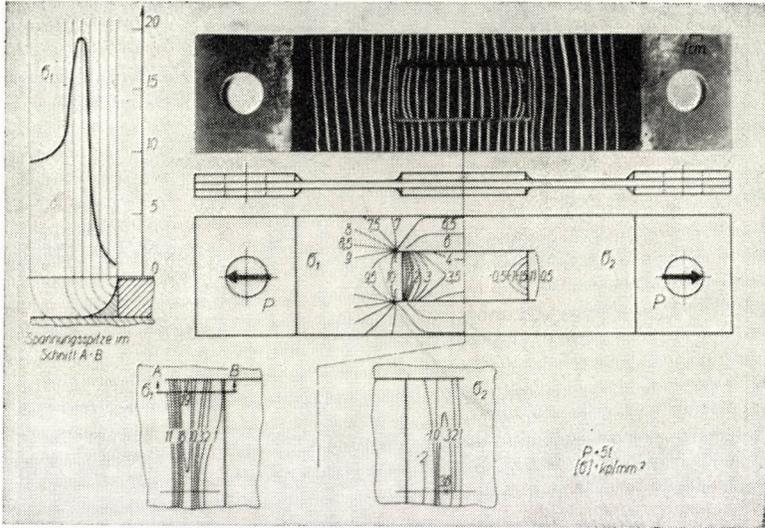


Bild 10. Spannungsverteilung auf einem Zugstab mit Laschen, die durch Quernähte aufgeschweißt sind. Die Spannungen sind durch Höhenlinien dargestellt und zeigen hohe Werte an den Kopfenden der Laschen. Auch auf der Schweißnaht selbst ist eine hohe Spannungsspitze vorhanden

ger eines Fahrzeuges eine Konsole anbringt, so können dadurch starke Spannungsspitzen hervorgerufen werden. Dies kann dadurch geschehen, daß der dünnwandige Steg des U-Trägers unzulässig verformt wird, weil eine örtliche Krafteinleitung erfolgt. Es kann weiterhin dadurch geschehen, daß die Kraft nicht im Schubmittelpunkt des U-Trägers eingeleitet wird, so daß ein zusätz-

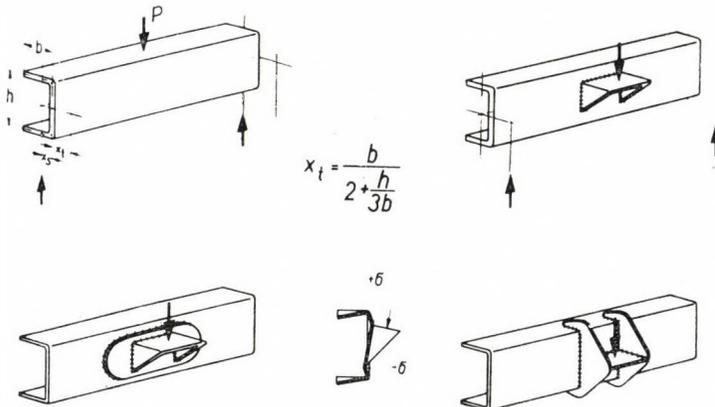


Bild 11. Krafteinleitungen in U-Profilen durch kleine Konsolen. Die Kraft soll im Schubmittelpunkt x_t eingeleitet werden. Die Übertragung der Kraft erfolgt jedoch in starker örtlicher Konzentration. Diese kann gemildert werden durch eine untergelegte Platte. Vorteilhaft ist es auch, wenn die Krafteinleitung möglichst große Teile des U-Profiles umfaßt. Dies soll aber so geschehen, daß keine Verformungsbehinderung durch Dehnungen der äußersten Fasern des U-Profiles eintritt

liches Drehmoment entsteht, oder es kann dadurch entstehen, daß der U-Träger durch eine Verformungsbehinderung stark gedehnter Fasern Spannungspitzen bekommt. Durch kleine konstruktive Änderungen, die in dem Bild 11 angedeutet sind, kann man solche Einflüsse vermindern.

Ein häufiger Fehler, der gerade bei Fahrzeugen gemacht wird, ist daß man verwindungsweiche offene Profile durch auf die Flansche geschweißte Platten usw., wie Bild 12 zeigt, auf einer kurzen Strecke in ein Rohr verwandelt.

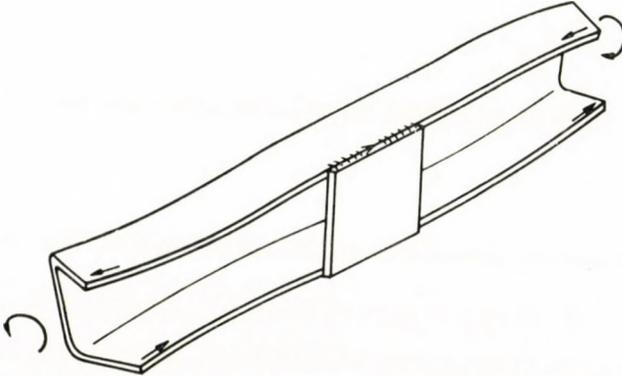


Bild 12. Verformungsmechanismus eines durch eine aufgeschweißte Platte versteiften U-Profils bei Torsionsbeanspruchung. An den Ecken dieser Platte entstehen hohe Spannungspitzen, die leicht zu Brüchen führen

Man bekommt also dann einen sehr starken Steifigkeitssprung von dem weichen U zu den steifen Rohr. Erfahrungsgemäß treten an den Ecken dieser Verbindung, wie bei allen Steifigkeitssprüngen, hohe Spannungsspitzen auf. Man kann sie durch andere Gestaltung des Teiles vermeiden. Spannungsspitzen treten immer auf, wenn man die Verformung eines Bauteiles in schroffer Weise ändert. Wenn z. B. ein offenes Profil, etwa ein Winkelleisen, gegen eine steife Platte geschweißt wird (Bild 13), so wollen sich bei der Verdrehung des Profils die Schenkel verschieben, woran sie jedoch durch die steife Platte gehindert werden. An diesen Stellen treten dann wiederum hohe Spannungsspitzen auf, die ein Mehrfaches der Torsionsspannung betragen. Ein entsprechender Fall tritt auch auf, wenn zwei offene Profile in einem Rahmen zusammenstoßen. Durch eine steife Ecke können ebenfalls derartige Verformungsbehinderungen eintreten.

Schon einfache Sicken, die zur Versteifung in eine Blechwand gedrückt werden, verändern das Spannungsfeld erheblich. Das Bild 14 zeigt, daß auf der oberen Mantellinie der Sicken bei Biegebeanspruchung hohe Spannungen entstehen.

Handelt es sich etwa um eine doppelte Blechwand, die durch aufgepunktete dünnwandige Profile versteift ist, so verformt sich die Wand nicht als

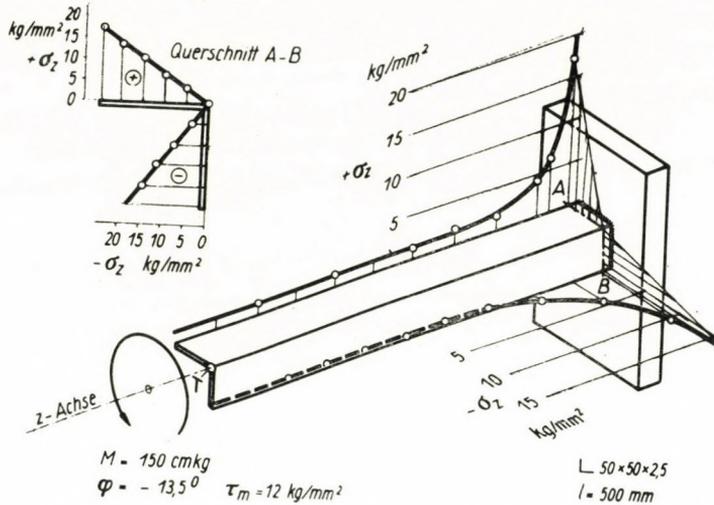


Bild 13. Hohe Spannungen durch Verformungsbehinderung in einem Winkelstab, der gegen eine steife Platte geschweißt wurde. Die Spannungsspitzen betragen das Mehrfache der Torsionsspannungen

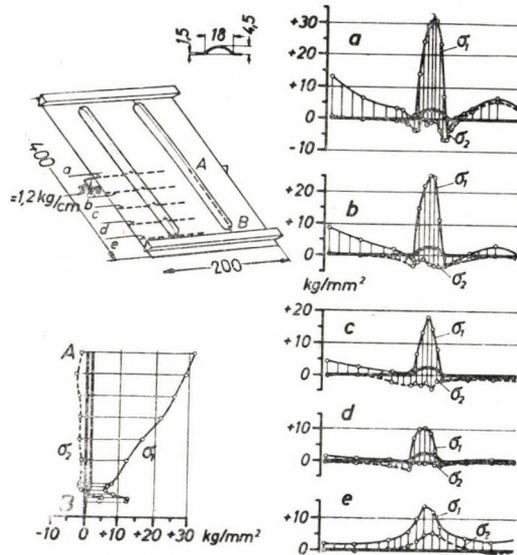


Bild 14. Spannungen in einem auf Biegung beanspruchten gesickten Blech. Auf der Mantellinie der Sicken sind die höchsten Spannungen vorhanden. Eine Erhöhung befindet sich auch an dem auslaufenden Ende der Sicke

Ganzes, sondern die einzelnen Teile haben die Neigung, sich entsprechend ihren Eigenheiten für sich zu verformen. In Bild 15 wollen sich die Z-Profile entsprechend ihren Hauptträgheitsachsen durchbiegen. Die Folge ist, daß auf den äußeren Blechwänden nur an den Stellen der Z-Profile nennenswerte Span-

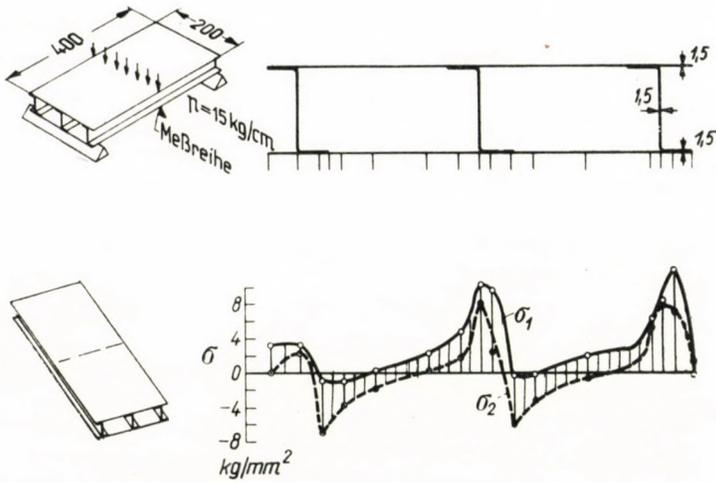


Bild 15. (Oben:) Dehnungslinienfeld auf einer Blechwand, die durch zwischengepunktete Z-Profile verstärkt wurde
 (Unten:) Biegebelastung nach Bild 16. Die Dehnlinien werden gestört durch die Schweißpunkte und durch die Durchbiegung der Z-Profile nach den Hauptträgheitsachsen, die sich an der linken Seite bemerkbar macht

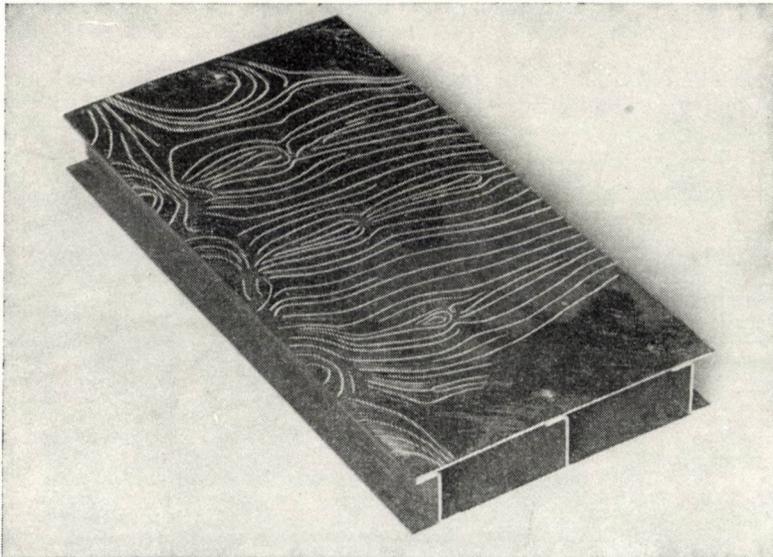


Bild 16. Spannungsverteilung zu Bild 15. Die Blechhaut führt nur über den Z-Profilen höhere (zachsige) Spannungen

nungen (Bild 16), und zwar zweiachsige, vorhanden sind. Wie das Dehnlinienfeld zeigt, sind die Spannungen an den Randprofilen jedoch wesentlich anders, da sie sich stärker auswirken können. Auch durch die punktweise Verbindung

werden die Spannungsfelder beeinflusst. Man sollte bei dünnwandigen Teilen alle punktförmigen Kräfteinleitungen vermeiden und flächenhaftere bevorzugen.

Die folgenden 3 Bilder 17, 18 und 19 zeigen Dehnungslinienfelder in Knotenpunkten vom Gestell eines Busses. Die Bilder sollen zeigen, daß die

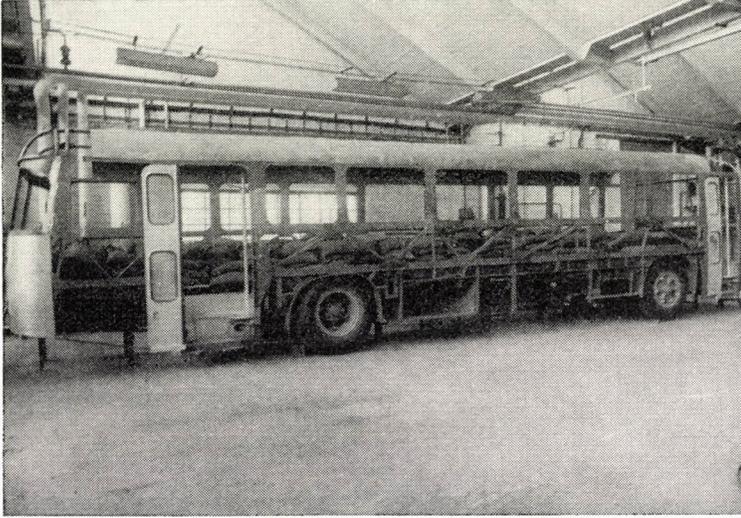


Bild 17. Gestell eines Busses in selbsttragender Bauweise. Von dem Gitterwerk und anderen Teilen wurden wichtige Stellen bei Biegung und Torsion des Fahrzeuges untersucht

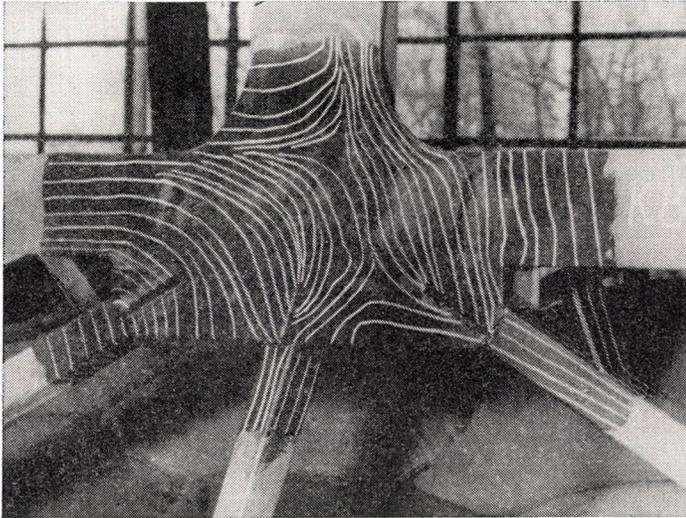


Bild 18. Dehnlinienfeld auf einem Knotenpunkt des Gitterwerkes bei Biegung. Man erkennt wohl die Art der Beanspruchungen in den anschließenden Stäben, aber nicht im Knotenblech. An einzelnen Punkten desselben wurde die Größe der Spannung gemessen

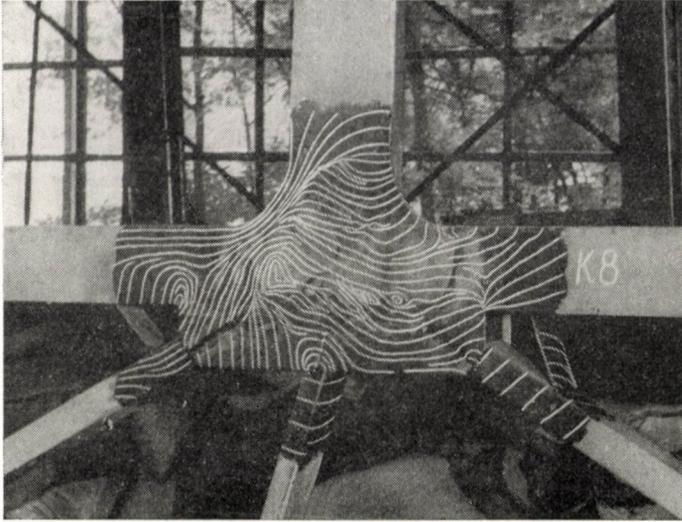


Bild 19. Dasselbe bei Torsion des Fahrzeuges. Das Dehnliniensbild ist noch unübersichtlicher als im vorhergehenden Bild. Eine rechnerische Ermittlung erscheint aussichtslos. Ähnliche Knotenpunkte können auch bei Kranen, Brücken usw. vorkommen und sind ähnlich zu beurteilen, wenn sie dauerfest sein sollen



Bild 20. Dehnlinien auf dem Graugußbrumpf eines Schleppers bei einseitig an einem Rad in Fahrtrichtung angreifender Kraft. Da Grauguß dem Hookeschen Gesetz nicht gehorcht, kann man nicht aus den gemessenen Dehnungen die Spannungen berechnen, aber man kann schon aus dem Dehnliniensfeld wichtige Schlüsse ziehen. Hier zeigten sich die Kanten des rechteckigen Ausschnittes als gefährdet, auch die kleinen Schraubenlöcher und die Ausbuchtungen

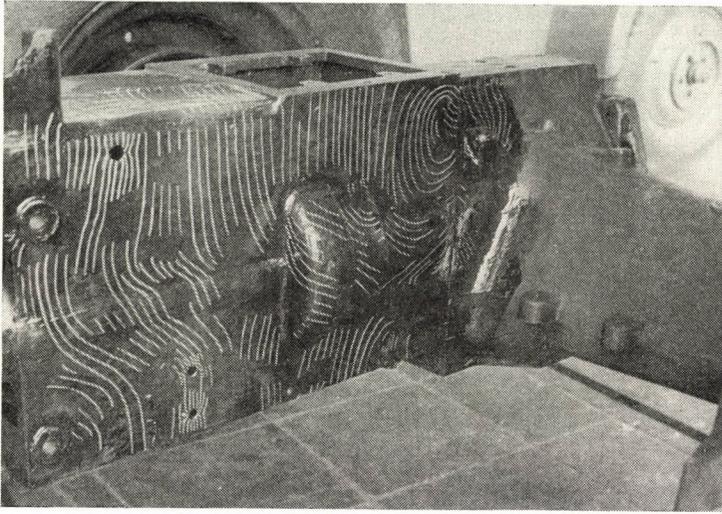


Bild 21. s. Bild 20

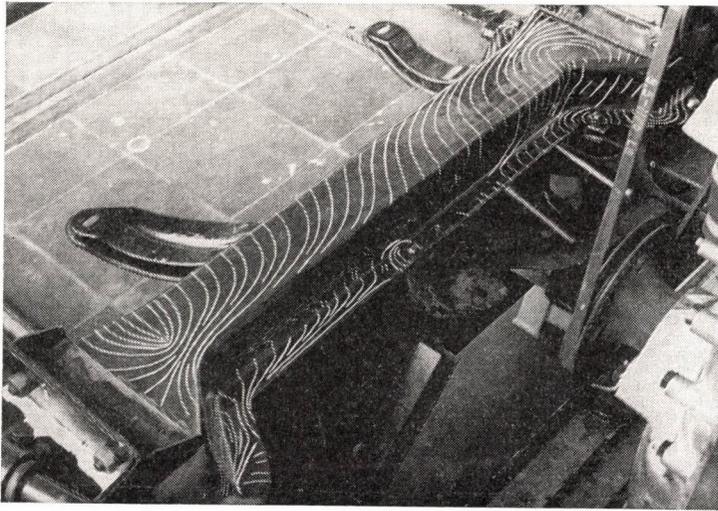


Bild 22. Vorderachsträger eines Fahrzeuges, bestehend aus hutförmigen Preßteilen, die oben und unten auf die Flansche der Längsträger genietet sind. Bei Verwindung des Rahmens verwinden und verbiegen sie sich, wie die Dehnlinien zeigen. Am Ansatz der Verbreiterung wurden hohe Spannungen gemessen, ebenso an dem dazwischengenieteten Verbindungsblech, das eine örtliche Versteifung darstellt

Dehnungs- und damit auch die Spannungsfelder recht unübersichtlich sind und wohl schwerlich einer rechnerischen Erfassung zugänglich sind. Ganz ähnliche Fälle können auch bei Hochbauten eintreten und wenn diese Dauerbeanspruchungen unterworfen sind, an den Spannungsspitzen auch zu Schäden führen.

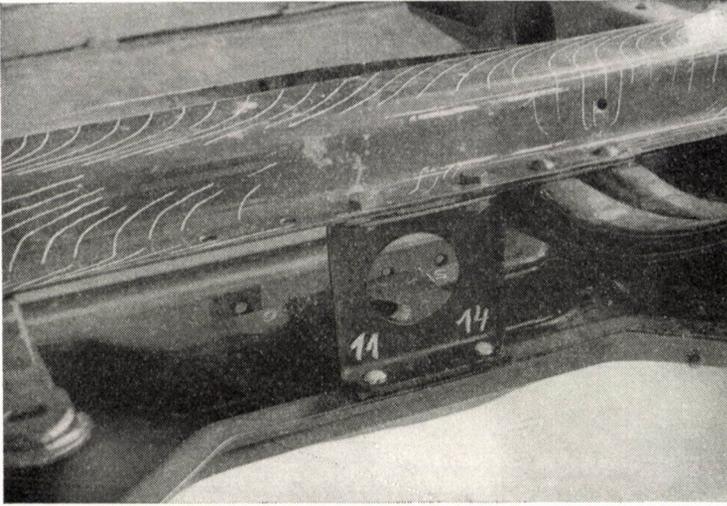


Bild 23. s. Bild 22

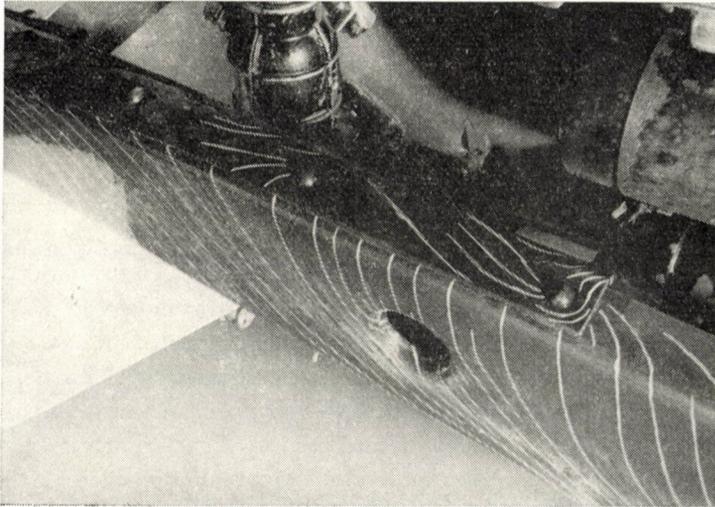


Bild 24. Versteifte Längsträger eines Fahrzeuges. An einer hochbeanspruchten Stelle wurde über den U-Träger ein anderer U-Träger schachtelförmig übergenietet. Dadurch entstand aber, trotz der Aussparung, eine starke örtliche Torsionsversteifung mit hohen Spannungen an den letzten Nieten. Sie rissen im Dauerversuch ab

In den Bildern 20 bis 25 sind noch einige andere Bauteile gezeigt, die darlegen sollen, wie verwickelt u. U. die Spannungsfelder sein können, aber auch welche Erkenntnisse man daraus ziehen kann, um die Dimensionierung treffsicherer durchzuführen, als es mit den heute üblichen Verfahren möglich ist.

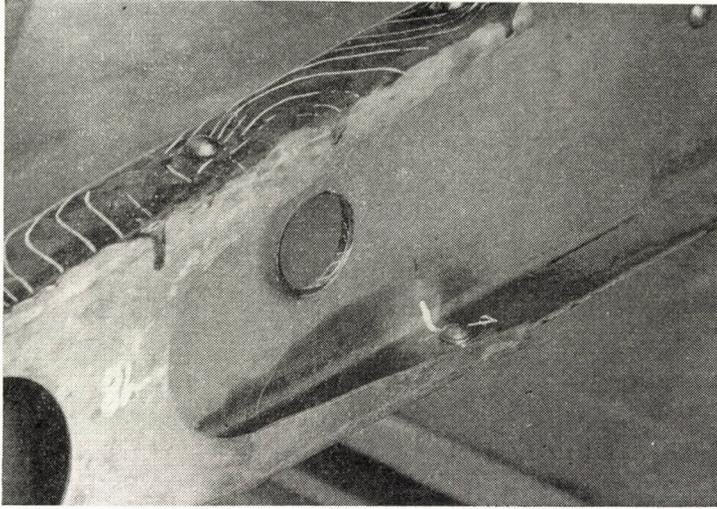


Bild 25. s. Bild 24

Schlußfolgerungen

Eine zuverlässige und wirtschaftliche Dimensionierung technischer Bauteile ist nur bei Kenntnis und Beherrschung der Spannungsfelder möglich. Bei den in der Technik üblichen verwickelten Bauformen ist eine rechnerische Ermittlung im allgemeinen nicht möglich. Dies geht nur in ungestörten Bereichen von glatten Stäben, Platten, Schalen usw. Insbesondere lassen sich nicht die Spannungsspitzen berechnen, die in Ecken, Knotenpunkten, Kraft-einleitungen und dergleichen auftreten, und die Ursachen von Dauerbrüchen sind. In solchen Fällen lassen sich Rechnungen nur hilfsweise zur Klärung grundsätzlicher Zusammenhänge oder von Tendenzen heranziehen. Dagegen kann man die Dehnungs- und Spannungsfelder unschwer experimentell ermitteln und wenn dies an zahlreichen und planmäßig variierten Bauteilen geschieht,¹ lassen sich auch gesetzmäßige Zusammenhänge zwischen Spannung und Gestalt und über den Verformungsmechanismus ermitteln. Auf jeden Fall lassen sich Arbeitsregeln für den Konstrukteur ableiten und läßt sich das Gefühl für die Zusammenhänge schulen. Die Ausbildung der Konstrukteure sollte sich diesen Erkenntnissen anpassen und die Konstruktionsforschung sollte Impulse daraus ziehen.

¹ KLOTH, W.: »Atlas der Spannungsfelder in technischen Bauteilen«, 1961. Stahl Eisen Verlag, Düsseldorf.

THEORETISCHE UNTERSUCHUNG DER INNEREN SPANNUNGSKONZENTRATIONEN

Prof. E. REUSS

TECHNISCHE UNIVERSITÄT, BUDAPEST

1. Die 28. Auflage des Taschenbuches Hütte S. 852—853 empfiehlt die Bemessung von Maschinenteilen auf Ermüdung auf Grund des bezogenen Spannungsgefälles. Das bezogene Spannungsgefäll wird mittels Gleichung

$$\chi = \frac{1}{\sigma_v} \frac{d\sigma_v}{dx} \quad (1.1)$$

definiert, wo σ_v die Vergleichsspannung bezeichnet. In der Formel kommt es nicht zum Ausdruck, aber aus dem Text der SIEBELSchen Originalarbeit geht hervor, daß in die Formel die Werte von σ_v und $\frac{d\sigma_v}{dx}$ an der Stelle O des Höchstwertes von σ_v einzusetzen sind, ferner im Falle, daß der Höchstwert von σ_v an der Körperoberfläche auftritt, die Koordinatenachse x senkrecht zur Oberfläche von innen nach außenweisend anzunehmen ist. Bedenkt man, daß die Bedingung des Maximums von σ_v in O als $\frac{\partial \sigma_v}{\partial s} = 0$ geschrieben werden kann, wo ds ein Linienelement der Umrißlinie bezeichnet, so ist es klar, daß der Gradient von σ_v im Punkte O in die Flächennormale fällt und nach außen weist. Gleichung (1.1) läßt sich also exakt so schreiben

$$\chi = \left[\frac{1}{\sigma_v} \text{grad } \sigma_v \right]_O . \quad (1.2)$$

Die Bemessung von Maschinenteilen erfolgt sodann auf Grund der Formel

$$\sigma_v(O) \leq \delta_w(\chi) \cdot \sigma_{zw}/S_B, \quad (1.3)$$

wo das Wechselfestigkeitsverhältnis $\delta_w(\chi)$ außer χ noch von der Werkstoffbeschaffenheit abhängt und aus Bild 21 von S. 852 [2] entnommen werden kann. σ_{zw} ist die Zug-Druck Wechselfestigkeit des Werkstoffes, S_B ein vom Spannungszustand und von der Werkstoffbeschaffenheit unabhängiger Sicherheitsbeiwert gegen Bruch, der noch von der Oberflächengüte des Werkstückes abhängt.

Arbeiten von E. SIEBEL und seinen Mitarbeitern haben gezeigt, daß dieses Verfahren dazu geeignet ist um mit demselben Werkstücke mit Spannungsspitzen auf der Oberfläche zu bemessen.

Tritt die Spannungsspitze im Inneren des Werkstückes auf, so ist dort $\chi = 0$, da $[\text{grad } \sigma_v]_0 = 0$ die Bedingung des Maximums von σ_v ist. Man sollte daher erwarten, daß in diesem Falle der Spitzwert der Vergleichsspannung in seiner ganzen Größe zur Auswirkung kommen wird. Diese Erwartung wird von der Erfahrung keineswegs bestätigt; im Gegenteil: Spannungsspitzen im Inneren können viel höher sein, als an der Oberfläche. Das in der Hütte empfohlene Bemessungsverfahren versagt also in diesen Fällen und seine Anwendung muß auf Spannungsspitzen an der Oberfläche beschränkt werden.

2. Es drängt sich nun die Frage auf, wie kann dieses Bemessungsverfahren weiterentwickelt werden, um es auch auf Spannungsspitzen innerhalb des Werkstückes anwenden zu können. Es kann als feststehend angenommen werden, daß das Spannungsgefälle dabei eine ausschlaggebende Rolle spielt, aber die Definition von χ soll geändert werden.

Allgemein gesprochen, muß neben dem Spannungstensor T mit seinen 6 Komponenten noch der Tensor des Spannungsgefälles ∇T beachtet werden. Letzterer ist ein Tensor dritter Stufe, ist in zwei Indizes symmetrisch, hat also insgesamt 18 Komponenten. Die Bemessung hätte also auf Grund einer Funktion dieser insgesamt 24 Größen zu erfolgen. Offenbar muß diese Funktion gegenüber Drehungen des Bezugssystems invariant sein. Sie ist also eine Invariante von T und ∇T , die noch Stoffwerte enthalten kann.

Die Aufsuchung aller Invarianten von T und ∇T ist eine mühsame Arbeit. Ich habe mich daher auf die Untersuchung einer der einfachsten Invarianten beschränkt. Bezeichnet

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad (2.1)$$

so ist die untersuchte Invariante

$$\chi_p = \left[\frac{1}{p} \text{grad } p \right]_O. \quad (2.2)$$

Es läßt sich zeigen, daß das Verhalten von χ_p eine weitgehende Parallelität mit dem von χ aufweist.

3. Wir beschränken uns vorerst auf das ebene Problem, halten aber schon die Verallgemeinerung auf den Raum im Auge. Wir führen krummlinige Koordinaten ein, die aus Parallelf lächen zur Oberfläche bestehen. Die Krümmungslinien und Normalen derselben bilden die Koordinatenlinien. Sind α und β die GAUSS'schen Koordinaten auf der Oberfläche, so ist das Linienelement

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\gamma}{R_\alpha}\right)^2 E d\alpha^2 + \left(1 - \frac{\gamma}{R_\beta}\right)^2 G d\beta^2 + d\gamma^2. \quad (3.1)$$

γ ist die entlang der Normalen gemessene Länge, nach außen wachsend, R_α und R_β sind die Hauptkrümmungshalbmesser, positiv, wenn die Oberfläche konkav ist, $\sqrt{E}da$ und $\sqrt{G}d\beta$ sind die Längen der Linienelemente auf der Oberfläche in den Richtungen der Hauptkrümmungslinien. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man für den Koordinatenanfangspunkt O $E = G = 1$ setzen. Ist die Oberfläche in diesem Punkte spannungsfrei, so sind in demselben die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial \gamma} + \frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2} \frac{\partial G}{\partial \alpha} + \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial E}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_\beta}{\partial \beta} + \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}}{\partial \gamma} + \frac{\sigma_\beta - \sigma_\alpha}{2} \frac{\partial E}{\partial \beta} + \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial G}{\partial \alpha} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{\sigma_\alpha}{R_\alpha} + \frac{\sigma_\beta}{R_\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Für den ebenen Formänderungszustand ist

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = 0, \tau_{\alpha\beta} = 0, \tau_{\beta\gamma} = 0, E \equiv 1, G \equiv 1, \frac{1}{R_\beta} = 0, \quad (3.3)$$

und es wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial \gamma} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{\sigma_\alpha}{R_\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dieselben Gleichungen gelten auch für den ebenen Spannungszustand.

Die Berechnungen sollen in Tabelle 1 weitergeführt werden. Die einzelnen Zeilen bedürfen keiner Erläuterung. Spalte 5 enthält in der ersten Zeile

$$2 \left[\sigma_v \frac{\partial \sigma_v}{\partial \gamma} \right]_{\text{Rand}} = \sigma_\alpha \left(2 \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \gamma} - \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} \right)$$

Da $\sigma_v \neq 0$ — sonst würde ja der Körper vollkommen spannungsfrei sein — kann man mit $2\sigma_v^2 = 2\sigma_\alpha^2$, dem Doppelten der Gleichung in Spalte 4 dividieren und erhält so

$$\frac{1}{\sigma_v} \frac{\partial \sigma_v}{\partial \gamma} = \frac{1}{\sigma_\alpha} \left(\frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} \right)$$

wo sich alles auf den Rand bezieht.

$\sigma_\alpha, \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \gamma}$ können mittels der Gleichungen aus den Spalten 7 und 8:

$$p = \frac{\sigma_\alpha}{3} \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial \gamma} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} \right),$$

Tabelle 1

		σ_v^2		$2\sigma_v \frac{\partial \sigma_v}{\partial \gamma}$	p		$\frac{\partial p}{\partial \gamma}$	c
		allgemein	am Rand	am Rand	allgemein	am Rand	am Rand	am Rand
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ebener Spannungszustand $\sigma_\beta = 0$	Gestaltänderungsarbeits-Theorie	$\sigma_a^2 + \sigma_\gamma^2 - \sigma_a \sigma_\gamma + 3\tau_{a\gamma}^2$	σ_a^2	$\sigma_a \left(2 \frac{\partial \sigma_a}{\partial \gamma} - \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} \right)$	$\frac{1}{3} (\sigma_a + \sigma_\gamma)$	$\frac{\sigma_a}{3}$	$\frac{1}{3} \left(\frac{\partial \sigma_a}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} \right)$	1,5
	Schubspannungstheorie $\text{sgn } \sigma_a = \text{sgn } \sigma_\gamma$	σ_a^2	σ_a^2	$2\sigma_a \frac{\partial \sigma_a}{\partial \gamma}$	$\frac{1}{3} (\sigma_a + \sigma_\gamma)$	$\frac{\sigma_a}{3}$	$\frac{1}{3} \left(\frac{\partial \sigma_a}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} \right)$	1
	$\text{sgn } \sigma_a = -\text{sgn } \sigma_\gamma$	$(\sigma_a - \sigma_\gamma)^2$	σ_a^2	$2\sigma_a \left(\frac{\partial \sigma_a}{\partial \gamma} - \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} \right)$	$\frac{1}{3} (\sigma_a + \sigma_\gamma)$	$\frac{\sigma_a}{3}$	$\frac{1}{3} \left(\frac{\partial \sigma_a}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} \right)$	2
ebener Formänderungszustand $\varepsilon_\beta = 0$	Gestaltänderungsarbeits-Theorie	$(1 - \nu + \nu^2) (\sigma_a^2 + \sigma_\gamma^2) - (1 + 2\nu - 2\nu^2) \sigma_a \sigma_\gamma + 3\tau_{a\gamma}^2$	$(1 - \nu + \nu^2) \sigma_a^2$	$\sigma_a \left[(21 - \nu \nu^2) \frac{\partial \sigma_a}{\partial \gamma} - (1 + 2\nu - 2\nu^2) \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} \right]$	$\frac{(1 + \nu)}{3} (\sigma_a + \sigma_\gamma)$	$\frac{(1 + \nu)}{3} \sigma_a$	$\frac{(1 + \nu)}{3} \left(\frac{\partial \sigma_a}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} \right)$	$\frac{3}{2} \left(\frac{1 + \nu}{1 + \nu^3} \right) = 1,5 \div 2$
	Schubspannungstheorie	$(\sigma_a - \sigma_\gamma)^2$	σ_a^2	$2\sigma_a \left(\frac{\partial \sigma_a}{\partial \gamma} - \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} \right)$	$\frac{(1 + \nu)}{3} (\sigma_a + \sigma_\gamma)$	$\frac{(1 + \nu)}{3} \sigma_a$	$\frac{(1 + \nu)}{3} \left(\frac{\partial \sigma_a}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} \right)$	2

ferner $\frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma}$ aus der zweiten Gleichgewichtsbedingung (3.4) eliminiert werden.

Man erhält

$$\frac{1}{\sigma_v} \frac{\partial \sigma_v}{\partial \gamma} = \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \gamma} + \frac{3}{2} \frac{1}{R_\alpha}.$$

Für die übrigen Fälle erhält man die ähnlichen Gleichungen

$$\frac{1}{\sigma_v} \frac{\partial \sigma_v}{\partial \gamma} = \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \gamma} + \frac{c}{R_\alpha}. \quad (3.5)$$

Die Konstante c ist in Spalte 8 der Tabelle 1 aufgezeichnet.

Dieser Beweisgang ist nur für die Gestaltänderungsarbeits-Theorie gültig, da ja im Falle der Schubspannungstheorie σ_α und σ_γ nur an der Oberfläche Hauptspannungen sein müssen. Bezieht man aber die Spannungen auf die Hauptspannungslinien, was im Falle des ebenen Spannungs- bzw. Formänderungszustandes immer möglich ist, so sind die Gleichungen der Tabelle streng richtig und wie leicht gezeigt werden kann, behält auch die zweite Gleichgewichtsbedingung (3.4) ihre Gültigkeit.

Um die Größen χ und χ_p in Gleichung (3.5) einzuführen, gehen wir gliedweise zum absoluten Wert über. Dies ist nur dann zulässig, wenn in (3.5) alle Glieder dasselbe Vorzeichen haben. Auf der linken Seite sind beide Faktoren positiv, das zweite Glied auf der rechten Seite ist positiv, falls die Krümmung von außen konkav ist. Unter der Hypothese, daß auch

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \gamma} > 0 \quad (3.6)$$

ist, folgt, wenn man noch beachtet, daß im Punkte O wegen des Maximums von σ_v , $\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} = 0$, also auch $\frac{\partial p}{\partial \alpha} = 0$ ist, in allen untersuchten Fällen

$$\chi = \chi_p + \frac{c}{R_\alpha} \quad (3.7)$$

besteht, wo c eine Konstante ist, die nur von der als Grundlage dienenden Berechnungsart der Vergleichsspannung abhängt. Hat man sich für eine Berechnungsart entschlossen, so kann man sagen, daß im Falle des ebenen Problems die Spannungsgefälle χ und χ_p sich nur in einem Gliede unterscheiden, die zum Krümmungsmaß der Randkurve bzw. zur Mittelkrümmung der Oberfläche proportional ist.

Die Ungleichheit (3.6) ließ sich bis jetzt nicht streng beweisen. Aber sie ist höchst plausibel. Einerseits muß p als eine harmonische Funktion ihre Extremwerte auf der Oberfläche annehmen, andererseits hat p , falls man nur die Werte an der Oberfläche zum Vergleich heranzieht, in O einen Extremwert.

An und für sich wäre es vorstellbar, daß p in O einen Sattelpunkt hat, aber dies widerspricht unserer Intuition.

4. Der dreidimensionale Fall werde nur auf Grund der Gestaltänderungsarbeits-Theorie untersucht. Es gilt allgemein

$$\sigma_v^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_\gamma^2 - \sigma_\beta \sigma_\gamma - \sigma_\gamma \sigma_\alpha - \sigma_\alpha \sigma_\beta + 3(\tau_{\beta\gamma}^2 + \tau_{\gamma\alpha}^2 + \tau_{\alpha\beta}^2). \quad (4.1)$$

An der Oberfläche ist $\sigma_\gamma = \tau_{\alpha\gamma} = \tau_{\beta\gamma} = 0$, daher

$$\sigma_v^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 - \sigma_\alpha \sigma_\beta + 3\tau_{\alpha\beta}^2 \quad (4.2)$$

und mittels Differentiation von (4.1) folgt

$$\begin{aligned} 2\sigma_v \frac{\partial \sigma_v}{\partial \gamma} &= 2\sigma_\alpha \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \gamma} - \sigma_\beta \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \gamma} + 2\sigma_\beta \frac{\partial \sigma_\beta}{\partial \gamma} - \sigma_\alpha \frac{\partial \sigma_\beta}{\partial \gamma} - \\ &- (\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} + 6\tau_{\alpha\beta} \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial \gamma}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ferner folgt aus (2.1) für die Oberfläche

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \quad (4.4)$$

und

$$\frac{\partial p}{\partial \gamma} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_\beta}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} \right). \quad (4.5)$$

Mit der Bezeichnung $\frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta} = H$ und $\frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\beta} = I$ läßt sich die letzte Gleichgewichtsbedingung (3.2) wie folgt schreiben

$$H(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) + I(\sigma_\alpha - \sigma_\beta) + 2 \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} = 0. \quad (4.6)$$

Gleichung (4.2) läßt sich

$$(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)^2 + 3[(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_{\alpha\beta}^2] = 4\sigma_v^2 \quad (4.7)$$

und Gleichung (4.3) läßt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_\alpha + \sigma) \left(\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_\beta}{\partial \gamma} \right) + \frac{3}{2}(\sigma_\alpha - \sigma_\beta) \left(\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \gamma} - \frac{\partial \sigma_\beta}{\partial \gamma} \right) - \\ - (\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} + 6\tau_{\alpha\beta} \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial \gamma} = 2\sigma_v \frac{\partial \sigma_v}{\partial \gamma} \end{aligned} \quad (4.8)$$

schreiben.

Eliminiert man aus den Gleichungen (4.4) bis (4.8) $\sigma_\alpha + \sigma_\beta$, $\frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_\beta}{\partial \gamma}$, so erhält man die Gleichungen

$$2\sigma_v \frac{\partial \sigma_v}{\partial \gamma} = \frac{9}{2} p \frac{\partial p}{\partial \gamma} + \frac{27}{4} p^2 H + \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} p I + \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \gamma} - \frac{\partial \sigma_\beta}{\partial \gamma} \right) (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) + 6\tau_{\alpha\beta} \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial \gamma} \quad (4.9)$$

$$2\sigma_v^2 = \frac{9}{2} p^2 + \frac{3}{2} [(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_{\alpha\beta}^2] \quad (4.10)$$

die miteinander dividiert die Gleichung

$$\frac{1}{\sigma_v} \frac{\partial \sigma_v}{\partial \gamma} = \frac{\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \gamma} + \frac{3}{2} H + \left[\frac{I}{2p} + \frac{1}{3p^2} \left(\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \gamma} - \frac{\partial \sigma_\beta}{\partial \gamma} \right) \right] (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) + \frac{4}{3p^2} \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial \gamma}}{1 + \frac{1}{3p^2} [(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + H \tau_{\alpha\beta}^2]} \quad (4.11)$$

liefern.

Von der Einfachheit und Durchsichtigkeit der Gleichung (3.7) ist nichts übriggeblieben. Die Gleichung (4.11) läßt sich auch

$$\frac{1}{\sigma_v} \frac{\partial \sigma_v}{\partial \gamma} = \frac{\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \gamma} + \frac{3}{4} H - \frac{1}{4p} \left(\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_\beta}{\partial \gamma} \right) + \frac{1}{12p^2} \left[3Ip + \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \gamma} - \frac{\partial \sigma_\beta}{\partial \gamma} \right] (\sigma_\alpha - \sigma_\beta) + \frac{\tau_{\alpha\beta}}{3p^2} \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial \gamma}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{12p^2} [(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_{\alpha\beta}^2]} \quad (4.12)$$

schreiben, wo allerdings auf die Elimination von $\left(\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \gamma} + \frac{\partial \sigma_\beta}{\partial \gamma} \right)$ verzichtet, dagegen der Vorteil erkaufte wurde, daß im Zähler, wenigstens im Falle des ebenen Spannungszustandes, die beiden ersten Glieder ausschlaggebend sind.

Zur Herleitung der Gleichungen (4.11) und (4.12) wurden die ersten beiden Gleichgewichtsgleichungen (3.2), die Bedingungen des Maximums von σ_v in 0, ferner die Verträglichkeitsgleichungen des Spannungszustandes nicht benutzt. Die Bestrebung, die Gleichungen (4.11) oder (4.12) mit ihrer Hilfe zu vereinfachen, hat bis jetzt keinen Erfolg gehabt.

Es sei noch darauf hingewiesen daß der Nenner von (4.11) auf Grund der Schubspannungstheorie als

$$1 + \frac{\sigma_v^2}{3p^2}$$

geschrieben werden kann. Bemerkenswert ist das Auftreten der Invariante $\frac{\sigma_v}{p}$, die auch für den Spröddbruch ausschlaggebend zu sein scheint.

5. *Beispiele und Anwendungen.* a) Für einen Biegestab von rechteckigem Querschnitt mit der Höhe b ist $\sigma_x = \frac{M}{J} \cdot z = 3p$, wo M das Biegemoment, J das Trägheitsmoment des Querschnittes bezeichnen. Die Oberflächenkrümmung ist Null. Man erhält durch unmittelbares Ausrechnen $\chi = \chi_p = \frac{2}{b}$.

b) Für eine unendliche Platte mit einem Loch vom Halbmesser a , die in ihrer Ebene auf Zug beansprucht ist, der fern vom Loch den Wert σ hat, gilt nach KIRSCH

$$\begin{aligned}\sigma_\vartheta &= \frac{1}{2} \sigma \left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\vartheta \right] \\ \sigma_r &= \frac{1}{2} \sigma \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left[1 + \left(1 - \frac{3a^2}{r^2} \right) \cos 2\vartheta \right] \\ \tau_{r\vartheta} &= \frac{1}{2} \sigma \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 + \frac{3a^2}{r^2} \right) \sin 2\vartheta,\end{aligned}$$

wo r vom Lochmittelpunkt und ϑ von der Richtung der Spannung an gemessen wird.

Für den ebenen Spannungszustand erhält man

$$\begin{aligned}p &= \frac{\sigma_r + \sigma_\vartheta}{3} = \frac{\sigma}{3} \left(1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\vartheta \right) \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= -\frac{4\sigma}{3} \frac{a^2}{r^3} \cos 2\vartheta.\end{aligned}$$

Der Höchstwert $\sigma_v = 3\sigma$ tritt für $r = a$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ auf. An dieser Stelle ist $p = \sigma$, grad $p = \frac{4\sigma}{3a}$, $\chi_p = \frac{4}{3a}$.

Da hier $R = a$ ist, folgt für die Gestaltänderungsarbeits-Theorie

$$\chi = \frac{4}{3a} + \frac{3}{2a} = \frac{17}{6a} = \frac{2,83}{a}.$$

Da für $r > a$ auch $\sigma_r > 0$ ist, so ergibt sich für die Schubspannungstheorie

$$\chi = \frac{4}{3a} + \frac{1}{a} = \frac{7}{3a} = \frac{2,33}{a}.$$

Im ebenen Formänderungszustand ist ebenfalls $\chi_p = \frac{4}{3a}$, und für die Gestaltänderungsarbeits-Theorie mit $\nu = 0,3$ ergibt sich

$$\chi = \frac{4}{3a} + \frac{1,90}{a} = \frac{3,23}{a},$$

und für die Schubspannungstheorie

$$\chi = \frac{4}{3a} + \frac{2}{a} = \frac{10}{3a} = \frac{3,33}{a},$$

Die unmittelbare Berechnung aus der Formel

$$\chi = \left| \frac{1}{\sigma_r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \right|$$

erfordert einen bedeutend größeren Aufwand an Rechenarbeit.

c) Für die Berührung eines Kreiszyllinders mit dem Halbraum berechnen HUBER und FUCHS mit der auf die Längeneinheit bezogenen Druckkraft F die Druckspannungen

$$\sigma_x = \frac{2Fy}{\pi a^2} \left[\sqrt{\frac{a^2 + u}{u}} \left(2 - \frac{a^2 y^2}{u^2 + a^2 y^2} \right) - 2 \right]$$

$$\sigma_y = \frac{2F}{\pi} \frac{y^3}{u^2 + a^2 y^2} \sqrt{\frac{a^2 + u}{u}}$$

$$\sigma_z = \frac{4\nu Fy}{\pi a^2} \left(\sqrt{\frac{a^2 + u}{u}} - 1 \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{2F}{\pi} \frac{xy^2}{u^2 + a^2 y^2} \sqrt{\frac{u}{a^2 + u}},$$

wo die y -Achse in der Normale zur Oberfläche nach Innen gerichtet ist, a die halbe Breite der Berührungsfläche bezeichnet und

$$u = \frac{1}{2} [x^2 + y^2 - a^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 4a^2 y^2}]$$

ist. Man berechnet

$$p = \frac{4(1 + \nu) Fy}{3\pi a^2} \left(\sqrt{\frac{a^2 + u}{u}} - 1 \right).$$

Die größte Schubspannung tritt für $\nu = 0,3$ bei $x = 0$, $y = 0,78a$ ein und beträgt $\tau_{\max} = 0,304 \frac{F}{a}$. Aus der Symmetrie ist es offensichtlich, daß an dieser Stelle $|\text{grad } p| = \left| \frac{\partial p}{\partial y} \right|$.

Man darf daher gleich $x = 0$ einsetzen und es folgt $u = y^2$

$$p = \frac{4(1 + \nu) F}{3\pi a^2} (\sqrt{a^2 + y^2} - y)$$

$$|\text{grad } p| = \frac{4(1 + \nu) F}{3\pi a^2} \frac{\sqrt{a^2 + y^2} - y}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

$$\chi_p = \frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}} = \frac{1}{a \sqrt{1 + 0,78^2}} = \frac{0,788}{a}$$

Im vorliegenden Falle ist $\chi = 0$, und es hat keinen Sinn, von einem Krümmungshalbmesser zu sprechen. χ_p dagegen hat, wie man sieht, auch in diesem Falle einen Sinn.

Für vergütbaren CrNi-Stahl mit $\nu = 0,3$, $E = 2,1 \cdot 10^6$ kp/cm², beträgt bei einer bezogenen Druckkraft von $F = 500$ kp/cm und einem Halbmesser $R = 1$ cm die halbe Breite der Druckfläche

$$a = 1,52 \sqrt{\frac{FR}{E}} = 0,02345 \text{ cm}$$

und die mittlere Druckspannung an der Berührungsfläche

$$q_0 = \frac{F}{2a} = 10660 \text{ kp/cm}^2,$$

somit die größte Druckspannung

$$q_{\max} = \frac{4}{\pi} q_0 = 13600 \text{ kp/cm}^2$$

und die Vergleichsspannung laut der Schubspannungshypothese [1] S. 382

$$\sigma_v = 2 \cdot 0,304 q_{\max} = 8270 \text{ kp/cm}^2.$$

Für χ_p erhält man

$$\chi_p = \frac{0,789}{a} = 33,61/\text{cm}.$$

Aus dem Diagramm von SIEBEL [2] ergibt sich hiermit

$$\delta_w = 1,04 \div 1,30,$$

also für

$$\frac{\sigma_{zw}}{S_B} > \frac{\sigma_v}{\delta_w} = 7950 \div 6370 \text{ kp/cm}^2.$$

Dieser Wert δ_w ist kleiner als der Erfahrungswert, der einen Höchstwert von $\delta_w = 2$ erreichen kann.

6. JANG CEN SEN hat mittels der Methode der Relaxation die Spannungen in einer dünnen elastisch-idealplastischen Platte untersucht, falls von beiden Seiten Rollen angedrückt werden [3]: 1. wenn die Fließgrenze nicht überschritten wird, 2. wenn die Rollen von beiden Seiten her senkrecht an die Platte angedrückt werden und das plastische Gebiet eben die Oberfläche erreicht hat, 3. wenn die Rollen die Platte entlang rollen und das plastische Gebiet wie unter 2 die Oberfläche eben erreicht hat.

Für rein elastische Spannungen errechnet sich

$$\chi_p = \frac{305}{434 a} = \frac{0,703}{a}.$$

Aus der Berechnung von JANG CEN SEN geht hervor, daß zu den Belastungsfällen 1, 2, 3 Belastungen gehören, die zu einander im Verhältnis von 1 : 1,075 : 1,09 stehen. Es ist höchst interessant, daß die Belastung im Rollen um ungefähr 1,35% größer sein kann bis das plastische Gebiet die Oberfläche erreicht, als beim senkrechten (statischen) Andrücken der Rollen.

Der idealplastische Körper berücksichtigt die Verfestigung nicht. Berücksichtigte man die Verfestigung, so würden die oben mitgeteilten Verhältnis-zahlen voneinander mehr abweichen. In derselben Richtung wirkt auch die Zulassung von plastischen Formänderungen auf der Berührungsfläche.

7. Da das Bemessungsverfahren auf Grund des bezogenen Spannungsfalles χ im Falle, daß die größte Vergleichsspannung im Inneren des Körpers und nicht an seiner Oberfläche auftritt, versagt, wurde allgemein die Frage gestellt, welche Invariante des Spannungstensors und dessen Gradienten für diesen Zweck anzuwenden ist. Es wurde $\chi_p = \left| \frac{1}{p} \text{ grad } p \right|$ untersucht. Für das

ebene Problem ergab sich der Zusammenhang

$$\chi = \chi_p + \frac{c}{R},$$

wo R die Randkrümmung bezeichnet und c je nachdem ob es sich um einen ebenen Spannungs- oder Formänderungszustand handelt und ob man auf Grund der Gestaltänderungsarbeits-Theorie oder der Schubspannungstheorie rechnet, konstante Werte zwischen 1 und 2 annimmt. Die Bemühung, diese Gleichung auf den Fall allgemeiner räumlicher Spannungszustände zu verallgemeinern, haben zu keinem brauchbaren Ergebnis geführt. χ läßt sich im ebenen Falle über χ_p leichter berechnen, als auf Grund seiner Definition. χ_p hat auch im Inneren des Körpers einen Sinn.

SCHRIFTTUM

1. TIMOSHENKO, S., GOODIER, J. N.: Theory of Elasticity 2. ed.
2. »Hütte« des Ingenieurs Taschenbuch 28. Aufl. Berlin 1955. W. Ernst & Sohn
3. JANG CEN SEN: Die beim Rollen auftretenden Spannungen im Falle des elastisch-plastischen Körpers. Dissertation, Budapest, 1961

KLASSIFIKATION VON BAUSTÄHLEN UND BAUKONSTRUKTIONEN MIT RÜCKSICHT AUF SPRÖDBRUCHGEFAHR

Dr. Ing. Prof. K. RÜHL

BUNDESANSTALT FÜR MATERIALPRÜFUNG, BERLIN-DAHLEM

Das Problem des verformungsarmen Bruches von Stahlbauteilen trat in den Jahren 1938 bis 1942 plötzlich, sozusagen mit einigen Donnerschlägen, in den Vordergrund. Einigen Schäden an Brücken in Deutschland und Belgien folgten zahlreiche, teilweise als Katastrophen zu bezeichnende Unfälle an Schiffen (Bild 1). Ganze Schiffe brachen, teilweise im Hafen liegend, auseinander. Diese Brüche waren nicht die ersten, aber diejenigen, die das größte Aufsehen erregten. Bis heute sind ähnliche Brüche nicht ausgeblieben. Ihre Kennzeichen sind: Brüche treten unter scheinbar geringen Spannungen mit geringen Verformungen in Stählen auf, die im einfachen Zugversuch hohe Festigkeiten und das Vielfache der Verformungen zeigen, die nachher beim Bruch beobachtet

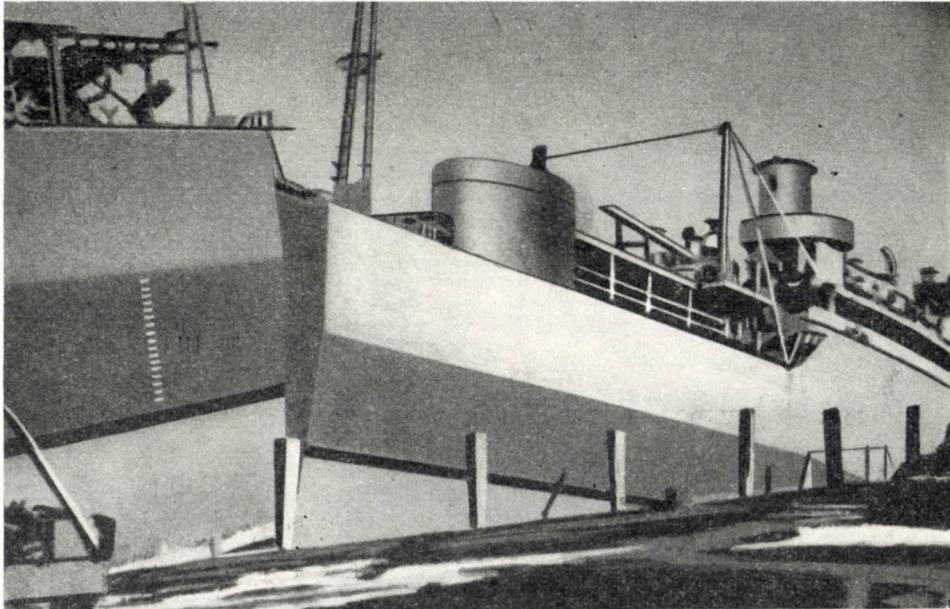


Bild 1. Spröder Bruch eines Schiffes

werden. Die Brüche sind also weder durch sorgfältige statische Berechnung zu vermeiden, da sie bei kleinen Nennspannungen entstehen, noch kündigen sie sich durch vorherige plastische Verformungen an, noch können sie durch eine Prüfung der Verformungsfähigkeit im Zugversuch vermieden werden. Darauf beruht ihre Gefährlichkeit. Dieses Problem teilt sich in drei Teilprobleme auf:

1. Was sind die werkstoffmechanischen Ursachen des Sprödbrechens? Woher kommt es, daß ein zweifellos normalerweise zäher Stahl plötzlich nahezu verformungslos bricht?

2. Wie kann man die Sprödbrechneigung eines Stahles prüfen, die Stähle einteilen und aus dem Prüfwert auf das Verhalten des Stahles am Bauwerk schließen?

3. Welche Regeln für die Stahlauswahl lassen sich daraus gewinnen?

1. Ursachen des Sprödbrechens

Die sehr umfangreichen Untersuchungen über die Mechanik dieser Vorgänge haben zu einer teilweisen, leider noch nicht zu einer vollständigen Klärung geführt [1]. Es ist bekannt, daß die plastische Verformung des Stahles durch Bildung von Gleitschichten, Bündeln von Gleitebenen entsteht, somit von der Schubspannung abhängt und folglich nicht eintritt, wenn bei Spannungszuständen mit räumlichen Spannungen, d. h. Zugspannungen in drei zueinander senkrechten Richtungen, hohe Normalspannungen ohne oder nur mit geringen Schubspannungen erscheinen. Erreichen und übersteigen die Normalspannungen die Trennfestigkeit des Werkstoffes, verursachen sie ohne vorherige plastische Verformungen einen verformungsarmen Trennbruch. Dieser Zusammenhang kann auf verschiedene Weise anschaulich dargestellt werden. Eine bekannte Darstellung ist diejenige mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises (Bild 2). Hierbei wird in einem Koordinatensystem σ, τ der Spannungszustand $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ durch 3 Spannungskreise über $\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_2 - \sigma_3, \sigma_1 - \sigma_3$ dargestellt und die Gleitgrenze (Schubfließgrenze) wie die Trennfestigkeit durch 2 Linien a und b (die manchmal ineinander übergehend gezeichnet werden) angegeben. Bleibt dann der größte Spannungskreis innerhalb der Linien, die die Gleitgrenze und die Trennfestigkeit angeben, tritt eine rein elastische Verformung ein (I), berührt er die Gleitgrenze (II) entsteht ein Fließen, berührt er die Linien der Trennfestigkeit, (III) folgt nach der elastischen Verformung Trennbruch ohne vorhergehende plastische Verformung. Eine andere bekannte Darstellung stammt von H. SCHNADT [2]. Er benutzt ein Koordinatensystem, dessen Abzissen die maximale Normalspannung σ_1 , dessen Ordinaten das Verhältnis σ_v/σ_1 darstellen, wobei σ_v die in Deutschland sogenannte Vergleichsspannung bedeutet, das heißt, einen Ausdruck von der Dimension einer Spannung, der aus den drei Spannungskomponenten so gebil-

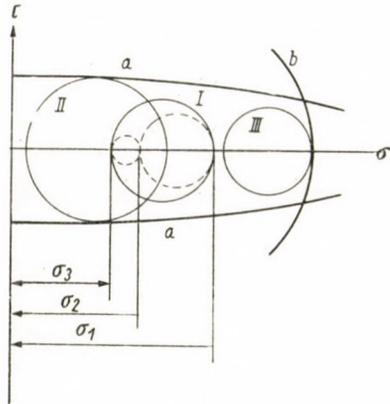


Bild 2. Darstellung der Bruch- und Fließgefahr mit Hilfe Mohrscher Spannungskreise

det ist, daß Fließen eintritt, wenn σ_v gleich der Zugfließgrenze bei einaxialer Belastung ist. Da σ_v von dem Räumlichkeitsgrad, dem Verhältnis der drei Hauptspannungen abhängt, ist also das Verhältnis σ_v/σ_1 einfach eine Funktion oder ein Maßstab für den Räumlichkeitsgrad. Weiter kann dann für jeden Räumlichkeitsgrad, also jedes σ_v/σ_1 , die beim Fließbeginn vorhandene größte Zugspannung eingetragen werden. Man hat also ein Diagramm der Fließnormalspannung als Funktion von $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$. Sie ist für σ_v/σ_1 , einaxialen Zu-

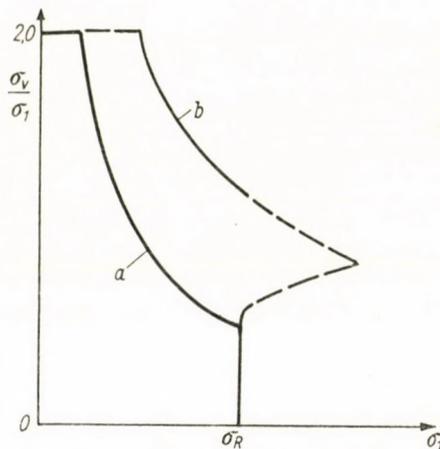


Bild 3. Darstellung der Fließ- und Bruchgrenzen mehraxialer Spannungszustände nach Vorschlag von H. Schnadt (schematisch)

stand, identisch mit der üblichen Streckgrenze, für größere Werte von σ_v/σ_1 kleiner, für kleinere größer. Außerdem können Kurven für die Trennfestigkeit eingezeichnet werden (Bild 3, Linien a, b). Rechnet man für ein gegebenes

Verhältnis $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ den Wert σ_v/σ_1 und geht von diesem Wert parallel zur Abszissenachse, ersieht man, ob man die Fließgrenze oder die Trennfestigkeit trifft, also Verformungsbruch oder Trennbruch zu erwarten ist. Herr SCHNADT benutzt hierbei σ_v nach der Gestaltänderungsenergiehypothese, die Auftragung wäre genau so gut bei Verwendung anderer Hypothesen möglich.

Diese Abhängigkeit der Verformungsfähigkeit von dem Spannungszustand ist jedoch bekanntlich nur einer von drei wichtigen Zusammenhängen. Außer durch den Räumlichkeitsgrad wird die Verformung durch hohe Belastungsgeschwindigkeit, also stoßartige Belastung, und durch sinkende Temperatur, durch Kälte, unterdrückt, — und das Zusammenwirken dieser drei Faktoren schafft das Sprödbruchproblem. Denn alle drei Faktoren beeinflussen sich gegenseitig. Infolgedessen sind bestimmte Spannungsbedingungen nur unterhalb einer bestimmten, ihnen zugeordneten Temperaturstufe gefährlich. Diese kritische Temperatur ist bei einem und demselben Stahl für verschiedene Spannungsbedingungen verschieden. Es ist also unmöglich zu sagen, daß ein Stahl eine bestimmte Übergangstemperatur habe. Man kann nur sagen, daß er eine bestimmte Übergangstemperatur, die genau auch nur durch eine in gewissen Grenzen willkürliche Definition festzulegen ist, in den und den Proben bei der und der Belastungsart habe. Wird er mit Charpy-V-Proben geprüft, so ist seine Übergangstemperatur eine andere als in Rundkerbproben. Die Unterschiede der Übergangstemperaturen hängen von den Spannungsbedingungen und anscheinend auch noch einigen weiteren wenig bekannten Umständen ab. Alle Versuche zeigen, daß im statistischen Mittel z. B. eine sehr klare Differenz zwischen den Übergangstemperaturen eines Stahles in Spitzkerb- und Rundkerbproben besteht, daß aber die Abweichungen von diesem Mittel erheblich sind. Bei Versuchen in der Bundesanstalt für Materialprüfung in Berlin, die von dem Deutschen Ausschuß für Stahlbau in Auftrag gegeben wurden [3], ergab sich bei 40 Proben nach statistischer Auswertung ein Mittelwert der Differenz (Übergangstemperatur Charpy-V) — (Übergangstemperatur DVM-Probe) von 20° , aber Grenzwerte für 90% aller Werte von $-2,5^\circ$ und $+40^\circ$, also eine erhebliche Streuung. Die Übergangstemperaturen waren beide durch Arbeitsaufnahme $a_k = 3,5 \text{ kgm/cm}^2$ definiert. Der Mittelwert stimmt mit ähnlichen Angaben von AUDIGÉ und SOETE durchaus überein.

Die Sprödbruchgefährdung ist also ein vielseitiges Problem. Hinzu kommt, daß die Sprödbruchneigung, die Versprödung des Werkstoffes, noch keineswegs zum spröden Bruch führen muß. Auch spröde Werkstoffe reißen erst bei bestimmten Belastungen, und ein spröder Anriß kann zum Stillstand kommen, ohne einen gefährlichen Bruch herbeizuführen. Hierfür ist besonders die im Bauwerk infolge von Eigenspannungen gespeicherte elastische Energie wichtig: Ist sie groß, treibt sie einen Anriß weiter. Über den Zusammenhang zwischen Rißgröße und der zur Rißausbreitung notwendigen Spannung bestehen übrigens zahlreiche Untersuchungen.

2. Die Sprödbruchprüfung und ihre Auswertung

Diese verwickelten Zusammenhänge bestimmen die nächste für die technische Praxis wichtige Seite des Sprödbruchproblems, die Frage nach der geeigneten Prüfung des Stahles und der Korrelation zwischen den Prüfwerten und dem Verhalten im praktischen Bauwerk. Für die Prüfung gibt es so viele Vorschläge, daß der Praktiker nur den kleinsten Teil davon anwenden kann, aber diesem Überfluß steht ein ebenso großer Mangel an Erkenntnis gegenüber, wie man diese Prüfungen für die Konstruktion auszuwerten hat. Z. B. hat G. M. BOYD in einem im April des Jahres an der Universität von Illinois gehaltenen Vortrag festgestellt: »Although monumental and extremely valuable experimental work has been done . . . , a satisfactory bridge between observation and prediction has not been constructed.« Ähnlich sagt A. A. WELLS in einem Bericht des International Institute of Welding: [4] »What steel should be selected to avoid brittle fracture? . . . it must be admitted, that a precise and widely applicable solution has not been found.« Man kann selbstverständlich durch die Prüfung die Gleichmäßigkeit des Stahles und das Vorhandensein bestimmter Zähigkeitseigenschaften kontrollieren, aber das Ergebnis ist kein Konstruktionswert. Der Konstrukteur sucht zunächst immer zulässige Spannungen, als Grundlage dafür also Festigkeitswerte, so wie er sie in der Festigkeitsprüfung, etwa dem normalen Zugversuch oder dem Dauerschwingversuch, erhält. Die Sprödbruchunfälle zeigen, daß er diese Festigkeiten im Bauwerk nicht mehr wiederfindet in Fällen, in denen die Verformungsfähigkeit nahezu verschwindet. Er sieht sich also veranlaßt, die Verformungsfähigkeit zu prüfen. Dazu braucht er nun, da im normalen Zugversuch erfahrungsgemäß auch bei sprödbruchanfälligen Stählen die Verformungsfähigkeit hoch liegt, verschärfte Prüfbedingungen, die er auf verschiedenen Wegen, durch Kerben, hohe Belastungsgeschwindigkeit und unter Umständen durch Verfestigung, nämlich Kaltverformung und nachfolgende Alterung, erhält.

Die Verformungsfähigkeit kann nun weiter durch sehr verschiedene Größen gemessen werden, die plastische Verformung selbst, also z. B. den Biegewinkel beim Aufschweißbiegeversuch, die Arbeitsaufnahme beim Kerbschlagversuch, die Brucherscheinung an der Bruchfläche, ob Trennbruch oder Scherbruch. Diese Vielzahl der Möglichkeiten verursacht die Vielzahl der Prüfvorschläge. Die Prüfung wird nun jedoch vereinfacht durch die allgemein gültige Tatsache, daß die Verformungsfähigkeit stets eine Hochlage bei höherer und eine Tiefelage bei niedrigerer Temperatur hat, dabei nicht kontinuierlich im ganzen Temperaturbereich ansteigt, sondern in einem bestimmten, oft sehr engen Temperaturbereich, der Übergangstemperatur, von der Tief- zur Hochlage übergeht (Steilabfall der Kerbzähigkeit). Damit wird diese Temperatur zum eigentlichen Prüfwert und zum Maßstab für die Klassifikation der Stähle. Der Stahl wird nicht durch die Größe der Zähigkeit, die nur ein Maßstab ist,

sondern durch die Übergangstemperatur, bei der die Zähigkeit abfällt, charakterisiert. Vergleiche zeigen, daß dabei durchaus ein Stahl mit größerer Kerbzähigkeit in der Hochlage eine höhere kritische Temperatur haben kann als ein anderer mit kleinerer Kerbzähigkeit, also bei Temperaturerniedrigung viel rascher seine Verformungsfähigkeit verliert, also eher zu Sprödbrüchen neigen wird als der zweite Stahl. Entsprechend dieser Erkenntnis sind heute in vielen Richtlinien über die Stahlgüte, z. B. in den sogenannten »Empfehlungen BONHOMME" des International Institute of Welding [5], in der britischen Norm British Standard 2762; 1956, der Notice 2166 des Lloyds Register of Shipping, die verschiedenen Stahlgüten vor allem durch eine Abstufung der kritischen Temperatur klassifiziert. Eine bestimmte gleiche oder nahezu gleiche Arbeitsaufnahme wird bei verschiedenen Temperaturen verlangt.

Damit ergibt sich nun auch eine Möglichkeit, eine Beziehung zwischen den Prüfwerten der Probe und dem Bauwerk herzustellen. Die Arbeitsaufnahme beim Bruch und das Bruchbild sind dafür von vornherein weniger geeignet, da ja schließlich Brüche vermieden werden sollen. Für jedes Bauwerk aber läßt sich angeben, welche tiefsten Temperaturen im Betrieb zu erwarten sind, die kritische Temperatur des Stahles im Bauwerk muß unterhalb dieser niedrigsten Betriebstemperatur liegen, darf also nicht über einen bestimmten Wert steigen, und damit sind also zwei Temperaturwerte vorhanden, die feststellbare Übergangstemperatur des Stahles in den Proben und die höchstzulässige Versprödungstemperatur des gleichen Stahles im Bauwerk. Beide sind, wie oben erwähnt, keineswegs identisch. Die Unterschiede zwischen ihnen sind selbstverständlich wiederum von der Art des Bauwerks und der Proben abhängig, und die theoretischen Grundlagen, sie zu berechnen, sind — wie im ersten Abschnitt dargelegt — noch lückenhaft.

Es ist aber zweifellos möglich, sich dem Problem zu nähern. Man kann einmal Unfälle danach auswerten, wie groß die Temperaturdifferenz zwischen der Temperatur beim Unfall und der Probenübergangstemperatur des im Bauwerk vorhandenen Stahles war. Man kann weiter durch Bruchbelastungen von praxisnahen Bauteilen bei immer niedrigeren Temperaturen feststellen, von welcher Temperatur an die Verformungen bis zum Bruch sich stark vermindern und kann dabei durch systematische Variation der wichtigen Eigenheiten, z. B. der Wanddicke, der Art der Schweißungen, der Konstruktionsform, z. B. der Ausrundungen, deren Einfluß oder auch durch Warmbehandlung, z. B. Spannungsfreiglühen, den Einfluß der Eigenspannungen ermitteln. Für die Auswertung von Unfällen hat die Kommission IX des International Institute of Welding vor kurzem eine neue Initiative ergriffen, einen Fragebogen ausgearbeitet und die Delegationen aller beteiligten Länder aufgefordert, falls ihnen Sprödbrüche bekannt sind, den Fragebogen auszufüllen und der Unterkommission D der Kommission IX (Obmann: z. Zt. Mr. J. E. ROBERTS, Colvilles Ltd., Technical Offices, Motherwell, Lanarkshire, Großbritannien)

zuzuleiten. Die Antworten stehen größtenteils noch aus. Aus einer Reihe deutscher Untersuchungen ist zu entnehmen, daß spröde Brüche eines stumpfgeschweißten Kranbahnträgers bei etwa 30° unterhalb der Übergangstemperatur der DVM-Probe auftraten, ebenso ein Bruch beim Kaltrichten eines Vollwandträgers.

Einige weitere Angaben lassen sich aus früheren Unfällen gewinnen. Beim Bruch eines Gasbehälters in Bremen, bei dem Flicker auf Schadensstellen des Mantels aufgeschweißt waren [1, Seite 88], lag die Unfalltemperatur etwa 10°C unter der Temperatur, bei der DVM-Proben (Rundkerb) eine Arbeitsaufnahme von $3,5\text{ mkg/cm}^2$ hatten. Aus Angaben von GÖTZLINGER [6]

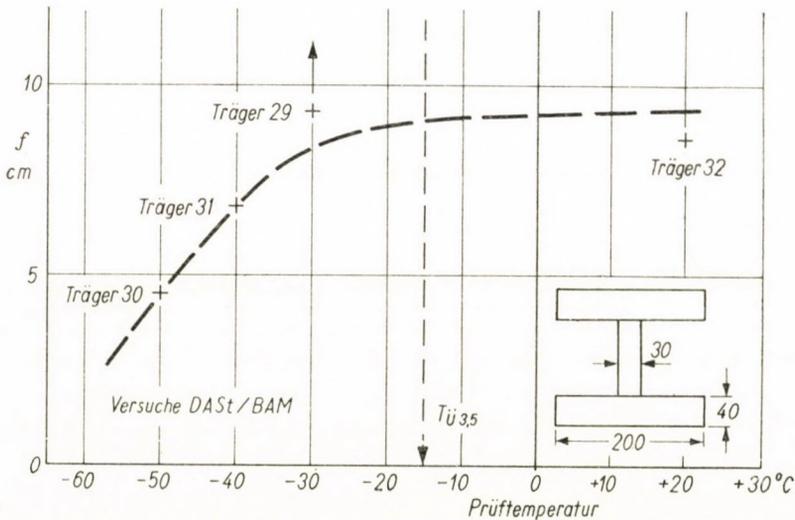


Bild 4. Durchbiegungen von geschweißten Trägern bis zum Bruch bei verschiedenen Temperaturen (Beispiel aus Versuchsreihen des Deutschen Ausschusses für Stahlbau in der Bundesanstalt für Materialprüfung, Berlin-Dahlem; Bericht veröffentlicht in [1])

ergibt sich, daß für Übergangstemperaturen der Charpy-V-Proben von $+10^\circ$ oder niedriger Bauwerke im Freien ohne Sprödbüche blieben. Nimmt man als Außentemperatur -30° , wäre also hier gegenüber Spitzkerbproben eine Temperaturdifferenz von -40° vorhanden gewesen. Alle diese Werte sind nicht sehr genau.

Weitere Anhaltspunkte lassen sich aus einigen Versuchen gewinnen. Laboratoriumsversuche auf diesem Gebiet haben allerdings einen Mangel. Bei Versuchen mit einwandfrei praxisnahen Bauteilen, wie sie im Auftrag des Deutschen Ausschusses für Stahlbau in der Bundesanstalt für Materialprüfung in Berlin-Dahlem durchgeführt wurden, trat eine klare Versprödung bei tiefer Temperatur ein, aber kein Abfall der Festigkeiten (Bild 4). Bei geschweißten Trägern mit Gurten von $200 \times 40\text{ mm}$ und Stegen bis zu 30 mm lag dabei die

kritische Temperatur um 30° unter der Übergangstemperatur des gleichen Stahles in Kerbschlag-Rundkerbproben (DVM-Proben mit 2 mm Kerbdurchmesser). Bei kleineren Abmessungen waren die Differenzen noch größer. Der in der Praxis so gefährliche gleichzeitige Abfall der Nennspannungen trat nicht ein, was dadurch zu erklären sein dürfte, daß bei größeren Bauwerken im gesamten größere Eigenspannungen und vor allem eine viel höhere aufgespeicherte elastische Energie auch nach dem ersten Anriß die Fortpflanzung des Risses erzwingt. Diese Beanspruchungen müssen bei kleineren Laboratoriums-

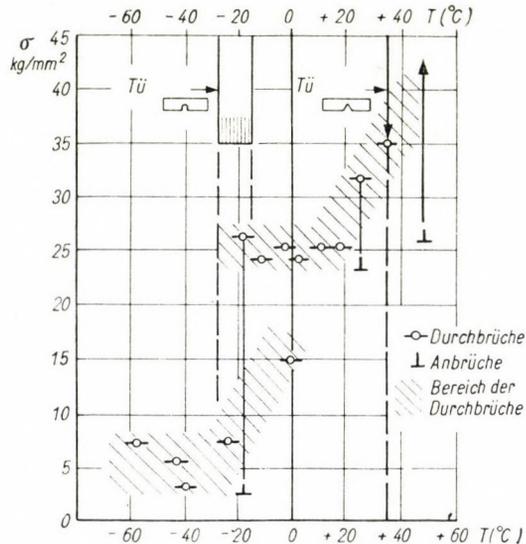


Bild 5. Bruchfestigkeiten von Platten $1000 \times 1000 \times 25$ mm mit Längsschweißung und Kerben mit Sägeschnitt für verschiedene Temperaturen (Beispiel aus Versuchen von Kihara und Mitarbeitern, Tokio [7])

proben von etwa 1200 mm Länge durch äußere Lasten ersetzt werden. In japanischen [7] und englischen [8] Versuchen mit etwa 1 qm großen längs- und kreuzweisgeschweißten Platten ist es gelungen, einen starken Abfall der Festigkeit bei kleinen Temperaturen z. B. bis zu 5 kg/mm^2 zu erhalten (Beispiel Bild 5). Hierbei lag die obere Grenze des spröden Bereiches, von einem herausfallenden Versuch abgesehen, um 30° bis 40° unter der Übergangstemperatur von Charpy-V-Proben, definiert als Temperatur für $2,6 \text{ mkg/cm}^2$. Diese Platten hatten jedoch Kerben mit Sägeschnitten. Es ist eine Frage, ob man solche Platten als praxisnah bezeichnen sollte. Im deutschen Stahlbau betrachtet man bisher einen Bauteil mit Anrissen als nicht ordnungsgemäß und würde eine Nachschweißung verlangen. In anderen Ländern gibt es jedoch viele Sachverständige, besonders im Schiffbau, die der Ansicht sind, daß das Auftreten von Anrissen nicht zu vermeiden ist. Dann wären natürlich solche Proben durchaus als praxisnah zu bezeichnen.

Selbstverständlich kann die Differenz zwischen Probenübergangstemperatur und Gefahrenbereich der Temperatur im Bauwerk auch gleich Null sein, oder man kann dahin streben, durch eine geeignete Auswahl der Proben sie zu Null zu machen. Während man im vorherigen Fall also eine bestimmte Probe zu wählen und dazu eine Reihe von Angaben zu machen hätte, wie groß die Temperaturdifferenzen von dieser Probe zu den verschiedenen Konstruktionen sind, z. B. schwierigen Schiffsbaukonstruktionen, dickwandigen und dünnwandigen Trägern, Druckleitungen mit zwei axialen Spannungszuständen usw., hätte man im zweiten Fall für die verschiedenen Konstruktionsformen gleich gefährliche Probenformen auszuwählen. Beide Wege sind theoretisch möglich und, wie vom Verfasser gezeigt, theoretisch gleich gut oder gleich unsicher begründet [9].

3. Empfehlungen für die Klassifikation von Baustählen

Unabhängig davon ist es klar, daß die oben angegebenen und einige weitere vorliegenden Unterlagen über die Temperaturdifferenzen zwischen Probenübergangs- und Bauwerkgefahrtemperatur nicht ausreichen, um für alle Möglichkeiten die notwendige Stahlgüte, definiert durch eine bestimmte Tieflage der Probenübergangstemperatur, festzustellen. Da die Baupraxis aber nicht warten kann, muß statt dessen eine Ersatzlösung gefunden werden. Der Ingenieur erhält heute nach den Normen, z. B. der deutschen DIN 17 100, der British Standard 2762, Stahlgüten, die alle gleiche Festigkeitswerte, gleiche Bruchdehnungen und Querkontraktionen besitzen, und nur in der Kerbzähigkeit — außerdem aber sehr wohl in den Preisen — verschieden sind. Er ist gezwungen, heute und jetzt für die verschiedensten Bauwerke, Brücken, Leitungen, Kessel, Schiffe, diejenige Stahlgüte auszuwählen, die so gut wie nötig und so wirtschaftlich wie möglich ist. Er braucht dazu, da nicht jeder Ingenieur ein Sachverständiger auf diesem Gebiete sein und den Fortschritt der Forschung verfolgen kann, einfache, vielleicht mit Unsicherheiten behaftete, aber praktisch anwendbare Richtlinien. Der Deutsche Ausschuß für Stahlbau hat deshalb, fußend auf Vorschlägen von Prof. KLÖPPEL, in einer langen Reihe von Sitzungen Empfehlungen zur Wahl der Stahlgütegruppen ausgearbeitet [10]. Darin ist folgendes vorgesehen: Der Bauteil erhält je nach Wanddicke, Lage und Empfindlichkeit der Schweißung, Temperaturabfall, Kaltverformung, möglicher Auswirkung eines örtlichen Bruches auf die Standsicherheit des ganzen Bauwerks, steigende Gefahrenzahl; ebenso erhalten die Stähle mit der Sprödbbruchgüte steigende Wertungen, z. B. ein Stahl nach DIN 17 100,

Güte 1,	die Werte	0 bis 14
Güte 2,	„	15 bis 21
Güte 3,	„	22 bis 26.

Zu wählen ist dann ein Stahl, dessen Gütezahl gleich oder größer als die Gefahrenzahl ist. Prof. BIERETT [11] hat dieses etwas verwickelte System dadurch vereinfacht, daß er erstens die Gefahrenwertungen, ausgenommen Einfluß der Wanddicke, Temperatur und Kaltverformung, in eine kleine von 0,5 bis 2,0 reichende Reihe von Faktoren zusammengezogen hat und dann diese Faktoren in ein Schaubild so einträgt (Bild 6), daß sie zusammen mit der Temperatur und Wanddicke Punkte in einem Feld festlegen, das nun seinerseits in einzelne Zonen eingeteilt wird, deren jede einer bestimmten Stahlgüte entspricht. Man geht also auf der linken Seite in die Temperaturspalte, sucht den nach Konstruktionsart zu wählenden Faktor auf, der hoch ist für schwie-

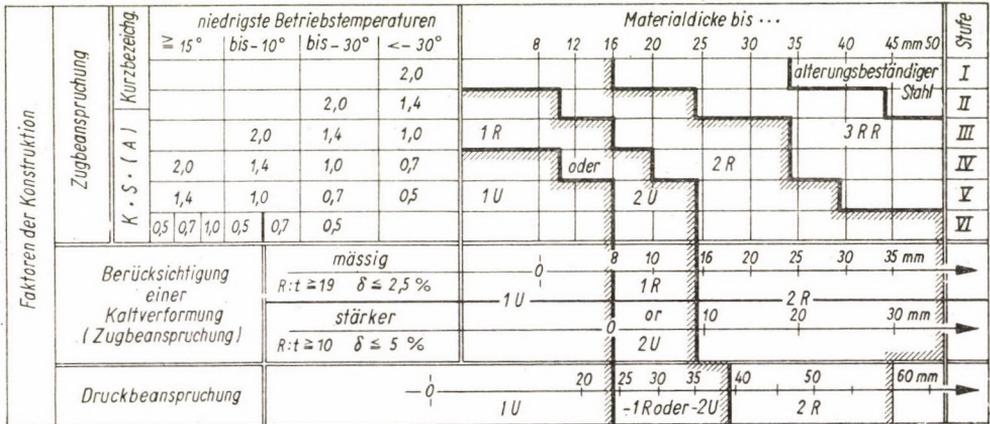


Bild 6. Diagramm für die Auswahl der Stahlgütegruppen für verschiedene Bauwerke nach BIERETT. 1, 2, 3 Gütegruppen nach DIN 17 100, U unberuhigt, R beruhigt, RR doppelt beruhigt

rige Konstruktionen, geht nach rechts bis unter die in Frage kommende Wanddicke und befindet sich damit in der Zone einer bestimmten Stahlgüte. Die Arbeitsgruppe 17 des Deutschen Verbandes für Schweißtechnik hat auf Grund dieser beiden, in ihren Ergebnissen übrigens weitgehend übereinstimmenden Methoden für eine ganze Reihe von Bauteilen einen Katalog aufgestellt, der dem Konstrukteur sofort den zu wählenden Stahl angibt. Die Stahlmarke, ob z. B. St 37, St 52, und die Bemessung richten sich dabei natürlich nach wie vor nach den Ergebnissen der statischen Berechnung.

SCHRIFTTUM

1. Eingehende Erläuterungen der ganzen Probleme in: K. RÜHL: Die Sprödbrechtsicherheit von Stahlkonstruktionen, Werner-Verlag, Düsseldorf, 1959
2. HENRI M. SCHNADT: Neue Prüfmethoden von Stählen und Schweißwerkstoffen für große Schweißkonstruktionen. Zug/Schweiß, 1957
3. RÜHL, K., SCHÖNHERR, W., TESKE, K.: Kerbschlagbiegeversuche an »Allgemeinen Baustählen«. Bericht aus der Bundesanstalt für Materialprüfung, Berlin-Dahlem. (In Vorbereitung zur Veröffentlichung)

4. Dokument IX-265-60 der Kommission IX des I. I. W.
5. Dokument des I. I. W. IIW/IIS-22-59 aus IX-230-58
6. I. GÖTZLINGER: Slagseghetsdata och sprödbrok Teknisk. Tidskrift **86** (1956) Nr. 15, S. 335/39
7. KIHARA, H., WATANABE, M., MASUBUCHI, K., SATOH, K.: Researches on Welding Stress and Shrinkage Distortion in Japan. Society of Naval Architects of Japan, 60th Anniversary Series, Vol. **9**, S. 50/60
KIHARA, H., YOSHIDA, T., OBA, H.: Initiation and Propagation of Brittle Fracture in Welded Steel Plate. Doc. X-217-59 des I. I. W. (April 1959)
KIHARA, H., MASUBUCHI, K., IIDA, K., OBA, H.: Effect of Stress Relieving on Brittle Fracture Strength of Welded Steel Plate. Doc. X-218-59 des I. I. W. (April 1959)
Zusammenfassender Bericht in: RÜHL, K.: Neuere ausländische Entwicklungen auf dem Gebiet des Sprödbrechens (Erscheint voraussichtlich in »Schweißen und Schneiden«, **13** (1961), Nr. 7)
8. Neueste Veröffentlichung (Brittle Fracture Strength of Welded Steel Plates) in »British Welding Journal« **8** (1961) Nr. 5, S. 259/277
9. RÜHL, K.: Sprödbrechtsicherheit und Sprödbrechprüfung geschweißter Konstruktionen. Vorbericht zum 6. Kongreß der Internationalen Vereinigung für Hochbau und Brückenbau. Stockholm 1960, S. 255/265
10. Vorläufige Empfehlungen zur Wahl der Stahlgütegruppen für geschweißte Stahlbauten, 2. Auflage. Herausgegeben vom Deutschen Ausschuß für Stahlbau, 1960
11. BIERETT, G.: Güteauswahl der Stähle für geschweißte Konstruktionen mit Hilfe eines einfachen Klassifizierungsschemas. »Bauingenieur« **34** (1959), Heft 6, S. 213/222 und Ergänzungen in »Bauingenieur« **35** (1960), Heft 8, S. 309/11.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ МАШИН

В. Н. ТРЕЙЕР

ЧЛЕН-КОРРЕСПОНДЕНТ АН БССР, ДОКТОР ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК, ПРОФЕССОР

В связи с широким внедрением в народное хозяйство Советского Союза многочисленных сложных машин, машин-автоматов и целых автоматических линий — одной из важнейших проблем успешного использования этой могучей, высокопроизводительной техники стала проблема обеспечения ее надежной, безотказной работы [1, 2].

Проведенное Институтом машиноведения и автоматизации АН БССР изучение опыта использования сложных машин и автоматических линий указывает на то, что из-за частых непредвиденных отказов в значительной мере утрачивается экономический эффект от их применения. Так, из-за отказа путевого выключателя лишь в одном из звеньев автоматической линии, останавливается целый производственный поток. Преждевременный выход из строя только одной из электронных ламп в системе автоматического управления производственными участками может расстроить весь нормальный производственный цикл предприятия.

Непредвиденные отказы современных сложных машин и автоматических систем, надо полагать, возникают, во-первых, из-за наличия в их составе большого числа изнашивающихся элементов и, во-вторых, потому, что при создании этих сложных машин специального проектирования и расчета их надежности до настоящего времени не производилось.

Так как прогресс современной высокопроизводительной машинной техники основан на использовании высоких скоростей, температур, давлений и напряжений, то для необходимого быстродействия управления работой этого оборудования необходимо применение ряда электрических и электронных приборов и аппаратов. Однако включение этих приборов и аппаратов в устройство технологических машин значительно усложняет их конструкцию и вызывает необходимость обратить особое внимание на обеспечение надежного взаимодействия электрических и электронных элементов с деталями механического комплекса.

Совершенно очевидным является то, что проектирование более усовершенствованных автоматических систем ближайшего будущего, в особенности, автоматических линий, оборудованных системами активного контроля, немыс-

лимо без специального расчета их надежности и без заблаговременного составления планов их планово-предупредительных ремонтов.

В связи с этой назревшей, исключительно актуальной проблемой, заслуживает особого внимания почин коллектива Минского подшипникового завода, который состоит в том, что на этом заводе путем проведения ряда организационно-технических мероприятий удалось значительно повысить долговечность, т. е. эксплуатационную надежность выпускаемых подшипников, без которых, как известно, не обходится ни одна современная машина.

Еще не совсем ясно, что же в настоящее время следует подразумевать под «надежностью» и что означает термин «долговечность». Для того, чтобы ответить на эти вопросы надо, прежде всего, отметить, что оба термина неразрывно связаны с проблемой утраты со временем работоспособности машинами и автоматическими системами, состоящими из большого числа изнашивающихся элементов.

Следует также установить, что исследования по теории надежности и долговечности машин автоматических систем только тогда принимают строго научное направление, если в основу их кладется диалектическое учение о различных формах непрерывного движения, изменения и преобразования материи во времени.

Как известно, во всем окружающем нас реальном мире, непрерывно происходит течение процессов как стихийных, так и организованных трудом людей, результаты которых выражаются в образовании различных материальных объектов, причем одновременно с появлением этих объектов начинается и постепенное их разрушение вследствие естественного распада, течение которого значительно ускоряется различными видами искусственного воздействия, связанными с их полезным использованием.

При полезном использовании изделий человеческого труда они могут подвергаться воздействию многочисленных факторов, из которых большое значение имеют напряжения механические и электрические, а также тепловые воздействия, которые, обычно, сопутствуют напряжениям механическим и электрическим.

Если оставить в стороне такие воздействия, которые сразу же выводят из строя рассматриваемые элементы и обратиться к таким, которые они могут выдерживать длительное время, то, следовательно, разрушение этих изделий будет происходить постепенно до достижения некоторого наинизшего предельного состояния работоспособности, после чего эти изделия уже не могут быть использованы [3].

Скорость истощения работоспособности деталей машин и элементов радиоэлектронной аппаратуры зависит от режима их использования, причем чем выше возникающие в них механические или электрические напряжения, тем скорее они достигают конечного предельного состояния.

Рассматривая вопрос о постепенной утрате работоспособности быстроизнашивающимися деталями, особый интерес представляет то, что износ их может происходить даже при отсутствии воздействия на их внутреннее строение механического или электрического напряжения. В этом случае мы имеем дело с явлениями естественного распада, старения или, иначе говоря, имеем дело с так называемым износом «неиспользования».

На рис. 1 приведены два примера — внезапной и постепенной утраты работоспособности при длительном хранении. На этом рисунке η — параметр, определяющий работоспособность элемента, а η_k — значение этого параметра при наименьшем допускаяемом предельном состоянии работоспособ-

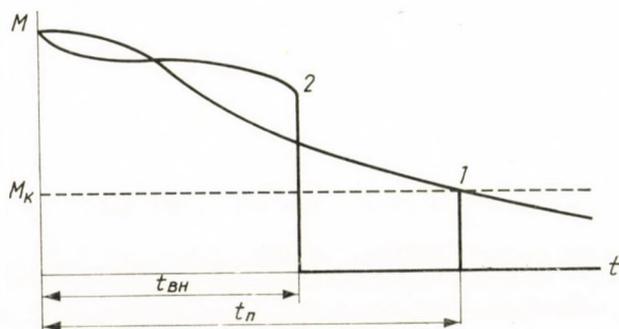


Рис. 1. Изменение параметра, характеризующего работоспособность элемента при хранении

1 — постепенный отказ;

2 — внезапный отказ;

t_{BH} , t_n время нахождения в исправном состоянии при внезапном и постепенном отказах;

ности элемента [4]. Параметрами, определяющими утрату работоспособности элемента, могут быть, например, для электронной лампы — уменьшение крутизны ее характеристики, а для шарикоподшипника — появление коррозии на его внутренних рабочих поверхностях или распад остаточного аустенита, нарушающий правильную геометрическую форму и сборку деталей подшипника.

В рабочем состоянии в металлических деталях машин, подвергающихся воздействию, так называемых «циклических» или переменных напряжений, естественный распад-разрушение значительно ускоряется в зависимости от величины переменных напряжений. В этом случае возникающие разрушения называют «усталостными».

В координатах «величина переменного напряжения» и «число выдержанных циклов напряжения» функция зависимости между этими величинами имеет вид, так называемой, «кривой усталости», представляющую собой гиперболу высшего порядка (рис. 2).

Нельзя, конечно, умолчать о том, что сделанное германским ученым Велером более ста лет тому назад заключение о том, что кривая усталости

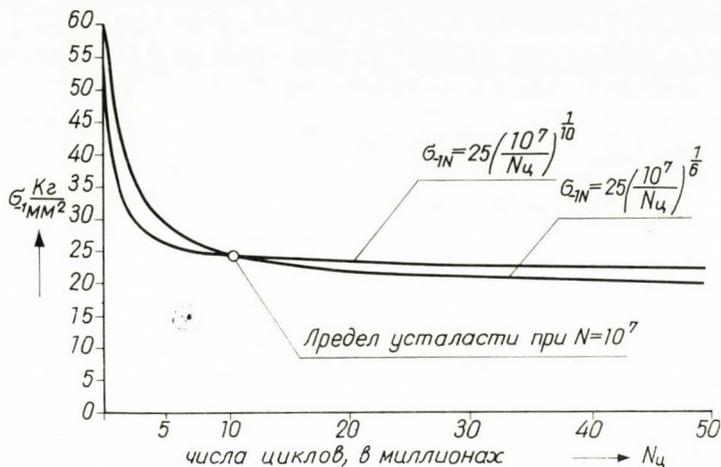


Рис. 2. Кривые усталости

имеет крутоспадающую часть, переходящую по достижении некоторого «предела усталости или выносливости» в прямую, параллельную оси выдержанных циклов, условно признается еще многими и до сих пор. Логическое развитие этого допущения приводит к утверждению, что предел выносливости — это переменное напряжение, которое детали машин могут воспринимать неограниченно долго или, иначе говоря, вечно. Это утверждение не подтверждается огромным опытом практического использования машин, в которых усталостные разрушения деталей, возникшие при переменных напряжениях ниже предела выносливости, являются обычной причиной выхода их из строя.

Такое расхождение теории с практикой постепенно устраняется путем применения при исследовании усталостных явлений более совершенной исследовательской аппаратуры (например, электронных микроскопов), путем развития новых теорий деформации и напряжений в металлах, например, теории дислокаций, а также путем перехода от испытания на долговечность полированных цилиндрических образцов к натурным испытаниям целых деталей, например, шарикоподшипников, зубчатых передач и других деталей.

Следует также отметить, что велеровское определение предела выносливости полностью исключает столь необходимое развитие теории долговечности деталей машин и надежности целых машин, поэтому это, безусловно, устаревшее определение должно быть решительно пересмотрено и исправлено.

Исключительно важный тезис, имеющий большое научное и практическое значение при рассмотрении проблемы надежности и долговечности изнашивающихся деталей состоит в признании общности течения во времени процессов утраты работоспособности различными видами изнашивающихся деталей, несмотря на различие природы физических воздействий их вызы-

вающих. Это значит, что течение всех процессов изнашивания, независимо от того, носят ли они характер течения усталостного разрушения или износа металла, или постепенного разрушения изоляции в конденсаторах и электродвигателях или постепенного истощения электронной эмиссии катодов в электронных лампах — независимо от того, в чем выражается истощение работоспособности — скорость течения всех этих видов изнашивания зависит от режима использования деталей. По существу, утрата работоспособности изнашивающимися деталями подобна истечению воды из резервуара, объем которого является моделью ресурса работоспособности рассматриваемой детали, причем время истечения, т. е. долговечность детали, зависит от скорости истечения и размера сечения струи.

Заслуживает внимания то, что формулы для определения сроков службы различных изнашивающихся деталей, постепенно теряющих свою работоспособность в зависимости от их режимов работы, имеют заметное сходство.

Формула усталостной долговечности может быть записана следующим образом

$$\sigma_{-1N} = \sigma_{-1} \left(\frac{N_{\delta}}{N_y} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad (1)$$

где: σ_{-1N} — расчетное знакопеременное, симметричное циклическое напряжение;

σ_{-1} — предел выносливости;

N_{δ} — срок службы, выраженный в числе выдержанных циклов при σ_{-1} ;

N_y — средний срок службы, выраженный в числе выдержанных циклов при σ_{-1N} .

Приблизительный расчет долговечности при трении может быть произведен при помощи следующего соотношения:

$$P_N = P_{\delta} \left(\frac{N_{\delta}}{N_y} \right)^{\frac{1}{f}}, \quad (2)$$

где: P_N — расчетное удельное давление;

P_{δ} — удельное давление, при котором производилось испытание данной изнашивающейся пары (сопряжения);

N_y — средняя расчетная долговечность в циклах трения при P_N ;

N_{δ} — базовое число циклов трения, до которого производилось испытание сопряжения при удельном давлении P_{δ} .

Формула долговечности бумажных конденсаторов (5)

$$U = U_H \left(\frac{h_H}{h_n} \right)^{\frac{k}{1}}, \quad (3)$$

где: U — расчетное напряжение постоянного тока;

U_H — номинальное напряжение;

h_η — средний расчетный срок службы в рабочих часах при U ;

h_H — срок службы в рабочих часах при номинальной величине U_H .

Если в выражениях (1) ÷ (3) определить допускаемые значения σ_{-1N} , P_N и U в зависимости от условий работы, конструкции и размеров изнашивающихся деталей в проектируемой машине или автоматической системе, то для каждого типоразмера изнашивающихся деталей может быть определен свой, так называемый, коэффициент работоспособности.

Дело в том, что (рис. 2) характер утраты материалом изнашивающейся детали работоспособности, в зависимости от величины воспринимаемых переменных напряжений (или удельных давлений), а также в зависимости от числа воспринятых циклов или продолжительности работы детали, может быть представлен в форме следующего гиперболического закона:

$$\sigma = \frac{W}{N_y \frac{1}{m}}, \quad (4)$$

где: σ — напряжение или удельное давление, характеризующее рабочий цикл напряжений или удельных давлений;

W — коэффициент, зависящий от особенностей рабочего цикла, возникающего во время работы данной детали и от ряда постоянных, для данных условий работы материала, величин.

При расчете какой-либо конкретной детали машин величина расчетного напряжения (или удельного давления) σ в общем виде может быть определена при помощи следующего выражения:

$$\sigma = (x D) \frac{1}{s}, \quad (5)$$

где: X — фактор, характеризующий нагрузку, воспринимаемую деталью (сила, моменты изгибающий и крутящий и т. п.);

D — величина, зависящая от конструкции детали, ее размера, формы, размерных соотношений ее частей, а также от тех свойств материала, которые влияют на возникновение в ней напряженного состояния под действием нагрузки.

Приравняв выражения (4) и (5) друг к другу, получим

$$\frac{W_1}{N_y \frac{s}{m}} = XD. \quad (6)$$

Если в данном выражении (6) перенесем неотъемлемо относящиеся к данному объекту расчета постоянные для него величины, т. е. характеризующие его форму, размеры и свойства материала, из которого он изготовлен,

в одну сторону, а величины, характеризующие условия использования детали, которые могут быть изменчивы, в другую сторону, то получим:

$$\frac{W_2}{D} = XN_4 \frac{s}{m} = C, \quad (7)$$

где: C — коэффициент, порознь равный обоим другим частям выражения (6), который принято называть «коэффициентом работоспособности» детали.

Приведение формул для расчета деталей машин на долговечность к унифицированным формулам типа (7), содержащим некоторый обобщенный коэффициент работоспособности, представляется весьма удобным при практической проектно-конструкторской работе.

Введение в расчет деталей машин на долговечность коэффициента работоспособности, по существу, разделяет этот расчет на два, производимых независимо друг от друга и с различными целями.

Первый расчет производится на специализированных заводах, изготавливающих стандартные массовые детали или целые конструктивные узлы (подшипники качения, редукторы и т. п.). Этот расчет заключается в том, что на основании размеров детали и механических свойств материалов, из которых они изготовлены, а так же на основании результатов массовых испытаний этих деталей на долговечность, определяется коэффициент работоспособности для каждого типоразмера данного вида деталей. Следовательно, в результате этого расчета определяется коэффициент, который в весьма сжатой форме (одним числом) характеризует работоспособность каждого типоразмера рассматриваемого объекта расчета.

Коэффициент работоспособности целесообразно вводить в техническую документацию (каталоги), характеризующую работоспособность отдельных типоразмеров продукции, выпускаемой заводом или заводами.

Другой расчет производится конструкторами машин, использующими при проектировании новой машины те или иные готовые детали, изготавливаемые на специализированных заводах. Этот расчет заключается в том, что на основании заданных условий использования детали — нагрузки и запроектированной долговечности — определяется та величина коэффициента работоспособности, которой должен обладать выбираемый типоразмер детали для того, чтобы обеспечить с заданной надежностью работу машины в целом.

По коэффициенту работоспособности подбирается необходимая по типу и размеру стандартная деталь согласно той технической документации или каталогу, где приведены коэффициенты работоспособности, которые определены на заводе-изготовителе этих стандартных деталей.

Этот метод расчета на долговечность был предложен автором в 1933 году применительно к подшипникам качения и он получил, как известно, широкое распространение в Советском Союзе [6].

Обратимся к явлению, которое также имеет огромное значение при рассмотрении постепенной утраты работоспособности изнашивающимися деталями со временем, а именно к так называемому «рассеиванию» их действительных сроков службы.

Как известно, отдельные объекты одной и той же партии изнашивающихся деталей одинаковой конструкции и размера, изготовленные из одного и того же материала, будучи поставлены в совершенно одинаковые условия работы, все же выходят из строя через различные сроки службы.

Причиной этого рассеивания сроков службы является неизбежное сочетание в каждом отдельном объекте многочисленных индивидуальных особенностей, из которых одни действуют в сторону повышения его долговечности, а другие — наоборот. Следовательно, срок службы каждого объекта зависит от случайного преобладания в нем тех или иных его индивидуальных особенностей.

Как показали многочисленные опыты по испытанию на долговечность, например, шарикоподшипников, — наиболее долговечный подшипник может достигнуть срока службы в 20—30 раз превышающего срок службы подшипника, вышедшего из строя первым.

Случайные индивидуальные особенности каждого изделия могут быть, в известной мере, управляемыми и подлинно случайными, т. е. неуправляемыми. К управляемым, неблагоприятным для долговечности изделий особенностям относятся те, влияние которых надлежащей постановкой технологического процесса и хорошей организацией контроля за его точным выполнением может быть сведено до минимума.

К чисто случайным особенностям относятся, например, внутренние неисправимые пороки материала, из которого изготовлено изделие.

На рис. 3 представлены результаты испытания на долговечность партии объектов, проведенные при форсированном режиме, состоящей из 25 шарикоподшипников.

Согласно техническим условиям, принятым в подшипниковой промышленности, 10% подшипников может выйти из строя до истечения гарантийного срока службы. Следовательно, если площадь, ограниченную кривой плотности распределения и абсциссой, принять за 100% и отделить 10% площади со стороны малых сроков службы, то можно графически или расчетным путем определить гарантийный срок службы для данной партии. В рассматриваемом случае гарантийный срок службы составил 224 часа.

С некоторым приближением результаты данной, так называемой, репрезентативной совокупности можно распространить на генеральную совокупность, т. е. на все шарикоподшипники данного типа и размера.

Наука о надежности машин и сложных автоматических систем состоит, по нашему мнению, во-первых, из изучения физической долговечности составляющих их изнашивающихся деталей, т. е. из изучения статистической зави-

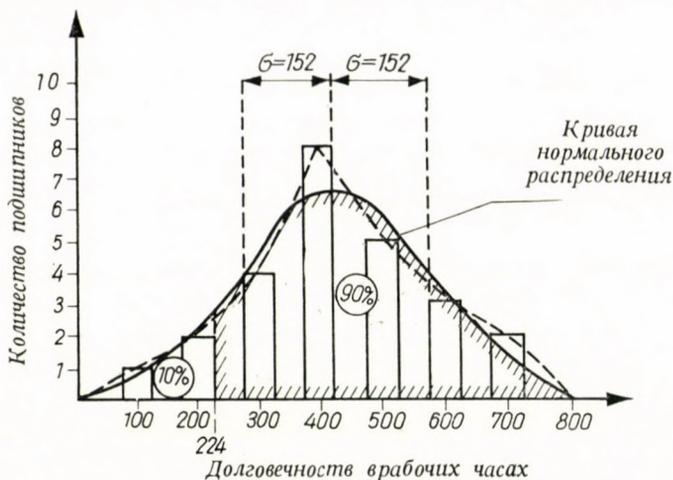


Рис. 3. Гистограмма, полигон и кривая плотности распределения

симости между их сроками службы (или количеством выдерживаемых циклов напряжений, переключений или других видов дискретных воздействий) и величиной интенсивности воспринимаемых ими воздействий.

Эти зависимости в прямоугольных координатах — интенсивность воздействия (ордината) и количество выдержанных часов или циклов воздействия до разрушения (абсцисса) — обычно имеют вид гипербол или наклонных прямых, потому что чем меньше интенсивность воздействия, тем больше долговечность изнашивающихся деталей, выраженная в часах или циклах (рис. 2). Во-вторых, наука о надежности машин и автоматических систем состоит из решения ряда задач такого оптимального сочетания составляющих их изнашивающихся деталей, характеристика физической долговечности которых известна, при которой безотказная работа этих систем наиболее вероятна.

В качестве примера графического изображения зависимости долговечности изнашивающихся образцов или натуральных деталей, от воспринимаемых переменных напряжений, можно привести «кривую усталости». При этом рассеивание долговечности образцов может быть учтено следующим образом. Согласно ГОСТ 2860—45 «Метод определения предела выносливости» — разность между величинами переменных напряжений двух последних образцов (разрушившегося и неразрушившегося по достижении базового числа циклов) может составлять 2 кг/мм^2 . Довольно пологий характер кривой усталости, в области предела выносливости, приводит к довольно большому рассеиванию чисел циклов напряжений, выдержанных объектами испытания при переменном напряжении, равном пределу выносливости, как это видно из рис. 4.

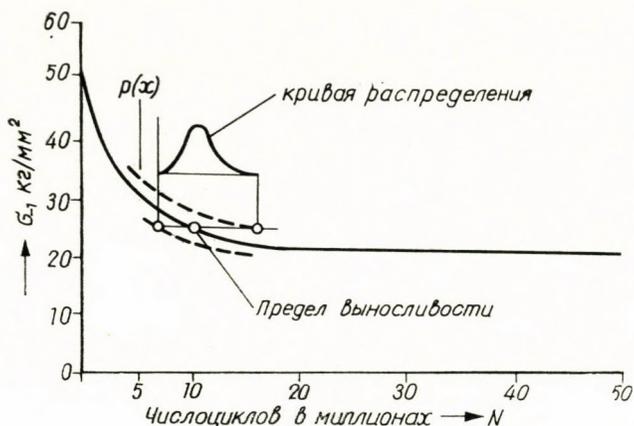


Рис. 4. Разброс сроков службы, выраженных в количестве выдержанных циклов напряжения

Это рассеивание количества циклов (или сроков службы), выдерживаемых образцами (а также деталями машин или радиоэлектронной аппаратуры) в лабораторной или эксплуатационной обстановке, может быть рассмотрено в качестве некоторой случайной изменчивости при помощи методов математической статистики.

Фактор долговечности может быть выражен, в числе выдерживаемых деталей циклах напряжений или трения $N_{ц}$, как это видно из формул (1) и (2), но может быть также определен и в зависимости от выдержанного срока службы в рабочих часах, т. е.

$$N_{ц} = 60 \cdot n \cdot h_m = 60 p x h, \quad (8)$$

где: n — число циклов в минуту;

h — гарантийный срок службы;

x — фактор надежности, служащий для перехода от гарантийного срока службы h к некоторому среднему расчетному h_m или к, так называемой, медиане, т. е. к такому среднему сроку службы, до истечения которого выходит из строя около половины объектов испытания. Одновременно x — это, по существу, долговечность, выраженная в гарантийных сроках.

Для составления методики проектирования надежности машин и автоматических систем, необходимо дать такое определение значения x , которое соответствовало бы любой заранее заданной части p от всей партии изнашивающихся деталей, могущей выйти из строя до истечения гарантийного срока h .

Для этого рассмотрим такую систему прямоугольных координат (рис. 5), в которой по ординатам отложены доли $p(x)$ всей совокупности рассматриваемых изнашивающихся деталей от 0 до 1, а по абсциссе откладывается их

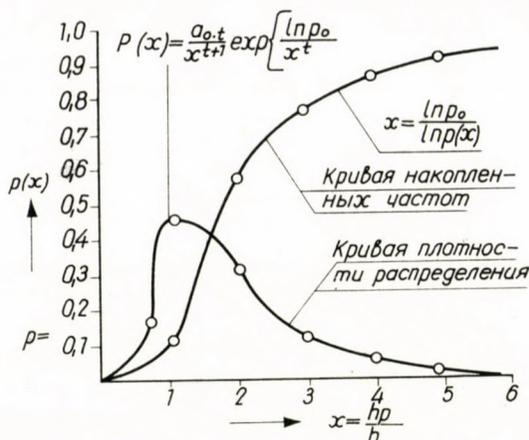


Рис. 5. Кривая несимметричных распределений

долговечность, выраженная в значениях $x = \frac{h_p}{h}$, где h_p — сроки службы, достигнутые объектами.

На основании многочисленных опытов по изучению долговечности изнашивающихся деталей установлено, что кривая, так называемой плотности распределения, обычно не бывает симметричной, а принимает несимметричный характер, как это показано на рис. 5.

Для дальнейших рассуждений необходимо рассмотреть кривую распределения, т. е. так называемую интегральную кривую или кривую накопленных частот, которая в нашем случае, в известной мере, будет носить условный характер и которая строится таким образом, что по ординатам откладывается общая суммарная часть всех объектов, вышедших из строя до достижения любой долговечности x .

Если обозначить через p ту часть совокупности изнашивающихся деталей, которая может выйти из строя до истечения гарантийного срока, то условная кривая накопленных частот может быть выражена аналитически в следующей форме

$$x = \frac{h_p}{h} = \left(\frac{\lg p}{\lg p(x)} \right)^{\frac{1}{t}} \tag{9}$$

Нетрудно заметить, что если при расчете изнашивающихся элементов на долговечность допустить, до истечения гарантийного срока службы, выход из строя до половины изнашивающихся деталей, т. е. допустить $p = 0,5$, то допущение такого большого преждевременного выхода из строя изнашивающихся деталей, практически привело бы к неопределенности расчета на долговечность, привело бы к низкой надежности всей машины или автоматической системы в целом.

Положив $p(x) = 0,5$, т. е. $h_p = h_m$, что наиболее удобно для практических расчетов на долговечность и надежность, получим

$$x = \left(\frac{\lg p}{\lg 0,5} \right)^{\frac{1}{t}}. \quad (10)$$

Величина t определяется опытным путем и, например, для шарикоподшипников составляет 1,125 или $\frac{9}{8}$.

При различных значениях t вид интегральной кривой изменяется, как это видно из рис. 6, причем чем больше t , тем меньше получается величина x , т. е. тем выше надежность и качество изнашивающихся элементов.

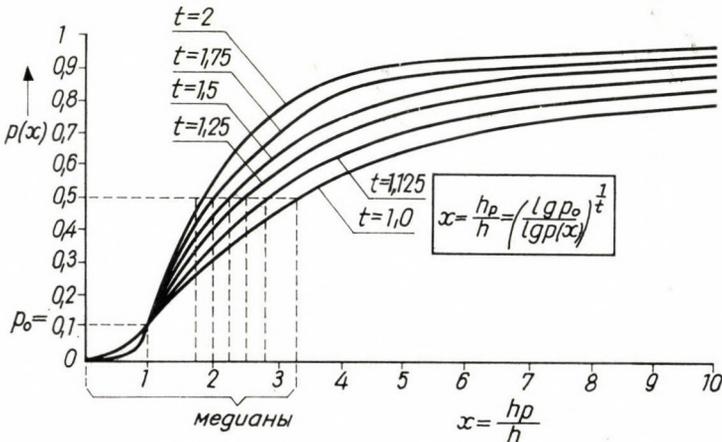


Рис. 6. Интегральные кривые при различных значениях t

При проектировании, например, сложной автоматической системы, практически может оказаться нецелесообразным вести расчет всех изнашивающихся деталей на долговечность по одному общему гарантийному сроку. Обычно общий комплект изнашивающихся деталей машины или автоматической системы приходится разбивать на несколько групп с различными гарантийными сроками службы, причем удобным является положить в основу этой разбивки гарантийный срок наиболее быстроизнашивающихся деталей. Тогда гарантийные сроки для других групп могут быть приняты кратными этому сроку, например $h_1 = 2h$, $h_2 = 4h$ и т. д.

Принятые гарантийные сроки отдельных групп изнашивающихся деталей могут быть положены в основу их выбора по коэффициентам работоспособности или для определения их конструктивных размеров другими способами расчета на долговечность.

Если расчет изнашивающихся деталей каждой группы вести по заданному для этой группы гарантийному сроку службы h_1, h_2, \dots, h_n , например,

кратному h и принять в расчет для каждой группы принятое для нее расчетное значение p , то соответствующее новое значение p' , для любого срока службы $h_i \ll h$, можно определить, воспользовавшись формулой (9) следующим образом

$$\lg p' = \lg p \left(\frac{h}{h_i} \right)^t. \quad (11)$$

Следовательно, исходя из любого срока службы $h_i \ll h$ для каждой группы изнашивающихся деталей, можно определить те части p' , p_1 , $p_2' \dots p_z'$ изнашивающихся деталей этих групп, которые могут выйти из строя до истечения срока h_i .

Вероятность преждевременного выхода части изнашивающихся деталей всей рассматриваемой автоматической системы определится тогда следующим образом:

$$p_s = \frac{p' \cdot n + p_1' \cdot n_1 + p_2' n_2 + \dots + p_z' \cdot n_z}{n + n_1 + n_2 + \dots + n_z}. \quad (12)$$

Средний интервал между двумя отказами в течение срока h_i

$$h_i' = \frac{h_i}{P_s N}, \quad (13)$$

где: $N = n + n_1 + n_2 + \dots + n_z$.

Вероятность же безотказной работы автоматической системы в течение срока $h_i \ll h$ составит

$$P_s = 1 - p_s \quad (14)$$

Для оценки надежности радиоэлектронной аппаратуры и сложных автоматических систем распространен также следующий, так называемый, экспоненциальный закон надежности, представляющий собой, по существу, первый член ряда Пуассона:

$$P_s = e^{-\lambda \cdot h_0}, \quad (15)$$

где: h_0 — интервал времени (в пределах $0 \div h$), для которого определяется вероятность безотказной работы аппаратуры или автоматической системы;

λ — так называемая *интенсивность отказов*, т. е. отношение числа отказавших деталей к произведению общего числа работавших на время, в течение которого велось наблюдение за работой всех деталей.

В соответствии с принятыми нами определениями и обозначениями

$$\lambda = \frac{P_s}{h_i}.$$

Из рассмотрения данного метода расчета надежности автоматических систем, можно заключить, что под *долговечностью* следует понимать надежную работу большинства изнашивающихся деталей в течение некоторого заранее заданного гарантийного срока службы, при заранее установленной допускаемой части деталей, могущей преждевременно выйти из строя до истечения этого гарантийного срока службы.

Под *надежностью* же следует понимать меру способности партии изнашивающихся деталей или целой автоматической системы безотказно работать в течение определенного интервала времени в заданных условиях эксплуатации. Эта мера может быть определена или вероятностью преждевременного выхода из строя некоторой части изнашивающихся деталей рассматриваемой партии или автоматической системы в целом, до истечения выбранного срока службы или же наоборот, вероятностью части изнашивающихся деталей безотказно, надежно работать в течение этого же срока службы.

Последовательность расчета надежности машин и автоматических систем, в течение первого срока h , основанная на данных о долговечности их изнашивающихся деталей, может быть представлена в следующем порядке:

1. На основании эскизного проекта машины или автоматической системы выделяются группы изнашивающихся деталей с проектными гарантийными сроками службы $h, h_1 \dots h_z$. Для этих групп должны быть известны значения нормативных вероятностей $p_H, p_{1H} \dots p_{zH}$ при соответствующих сроках службы $h_H, h_{1H} \dots h_{zH}$, а также значения t .

2. Для определения вероятности безотказной надежной работы машины или автоматической линии P_s необходимо нормативные значения $p_H, p_{1H} \dots p_{zH}$ привести к основному гарантийному сроку h , что может быть произведено при помощи следующих выражений:

$$\begin{aligned} \lg p &= \lg p_H \left(\frac{h_H}{h} \right)^t \\ \lg p' &= \lg p_{1H} \left(\frac{h_{1H}}{h} \right)^t \\ &\dots \dots \dots \\ \lg p'_z &= \lg p_{zH} \left(\frac{h_{zH}}{h} \right)^t \end{aligned} \quad (16)$$

3. Для определения величины P_s необходимо вычислить вероятность P_s ненадежной работы машины, пользуясь выражением (12), после чего

$$P_s = 1 - p_s$$

4. Пользуясь выражением (II), необходимо определить значение вероятностей выхода из строя деталей во всех группах (кроме основной), от-

Между тем, обеспечить довольно высокую надежность автоматических систем можно даже при наличии деталей, не обладающих высокой физической работоспособностью и долговечностью.

Этот способ повышения надежности, главным образом, радиоэлектронной аппаратуры заключается в *резервировании*, которое, в свою очередь, можно подразделить на следующие виды:

1. *Резервирование* путем переключения отказавшей системы, ее части или элемента на заранее подготовленный резерв.

2. *Резервирование* путем простого параллельного соединения нескольких элементов вместо одного.

3. *Резервирование* автоматическое, при котором в рабочей схеме резервные элементы не участвуют, а включаются в нее только в случае появления отказа, для чего предусматриваются соответствующие следящие и коммутирующие устройства.

Высшей формой обеспечения высокой надежности автоматической системы является кибернетическое построение ее рабочей схемы по аналогии с живыми организмами, т. е. когда предусматривается переключение функций отказавших элементов на оставшиеся исправными в виде дополнительной нагрузки для них.

Несомненно, однако, что перечисленные способы резервирования изнашивающихся элементов и кибернетической перестройки их функционирования в процессе работы могут обеспечить подлинно высокую надежность автоматических систем лишь в сочетании с рассмотренными нами методами проектирования их физической надежности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берг, А. И.: Надежность и технический прогресс, Журнал «Научно-технические общества СССР» №-5, 1960 г.
2. Трейер, В. Н.: Проблема долговечности машин, Журнал «Социалистическая реконструкция и наука», вып. 7, 1934.
3. Трейер, В. Н.: Расчет деталей машин по предельным состояниям, Белгосиздат, 1960 г.
4. Дружинин, Г. В.: К вопросу о расчете сохранности элементов и систем, Сб. «Надежность радиоэлектронной аппаратуры», изд. «Советское радио», 1960 г.
5. Хинней, К. и Уолш, К.: Радиодетали и проблема их надежности, Изд. «Советское радио», 1960 г.
6. Трейер, В. Н.: Нормализация грузоподъемности стандартных шарикоподшипников, Журнал «Вестник стандартизации» №-4, 1933 г.

MACHINE PARTS
MASCHINENELEMENTE
МАШИННЫЕ ЧАСТИ

ВЛИЯНИЕ МАТЕРИАЛА И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА ВЫНОСЛИВОСТЬ ШАТУНА ТРАКТОРНОГО ДВИГАТЕЛЯ

Канд. техн. наук Б. И. АЛЕКСАНДРОВ

и

Канд. техн. наук И. Б. КЛИБАНСКИЙ

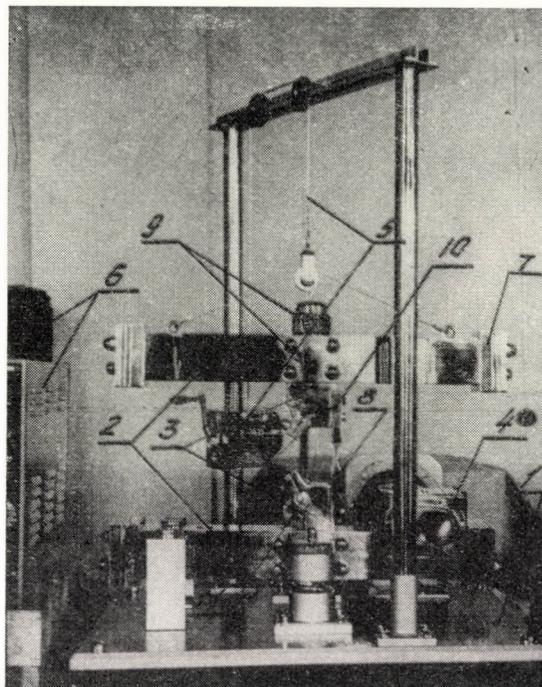
Опыт эксплуатации автомобильных и тракторных двигателей показывает, что несмотря на назначение высоких запасов прочности и выбор при расчете самой тяжелой комбинации возможных нагрузок, имеют место случаи поломок шатунов в работе, в основном носящие усталостный характер [1].

Имеющиеся в настоящее время теоретические и экспериментальные данные по исследованию факторов, влияющих на усталостную прочность деталей машин [2], недостаточны и совершенно отсутствуют сведения по влиянию упрочняющих обработок на выносливость шатунов.

В связи с этим проведены сравнительные испытания на выносливость при растяжении-сжатии шатунов тракторного двигателя Д-40, изготовленных из сталей марок 45, 40Х и боровой стали 40Р. Экспериментально устанавливалась эффективность дробеструйного упрочнения шатунов и была сделана попытка разработать методику определения запаса прочности шатунов с учетом характера обработки поверхности.

Испытания на выносливость при растяжении-сжатии проводились на машине типа УШ (фиг. 1), спроектированной специально для этой цели. Машина развивает знакопеременные усилия от ± 1000 до $\pm 30\,000$ кг при частоте нагружения от 1000 до 3000 циклов в минуту.

Машина состоит из следующих основных узлов: плиты 1, верхней и нижней балок 2, узла крепления и нагружения шатуна 3, инерционного направленного вибратора 4, механизма подъема верхней балки 5, пульта управления 6. Балки представляют собой стальные брусья квадратного сечения, по обеим сторонам которых размещены противовесы 7, обеспечивающие большой диапазон регулирования. На конце нижней балки установлен вибратор. Узел крепления и нагружения шатуна представляет собой две грузовые вилки, соединенные между собой упругой пластиной 8. Узел надежно зажимается в отверстия балок при помощи стяжных болтов и гаек 9. Упругость балок при затяжке обеспечивается продольными прорезами. Верхняя головка шатуна 10 при помощи поршневого пальца крепится в верхней вилке, а нижняя головка шатуна — в нижней при помощи специального пальца 11, диаметр которого соответствует диаметру шатунной шейки коленчатого вала двигателя.



Фиг. 1. Общий вид машины для испытания на выносливость шатунов типа УШ

Возмущающая сила масс вибратора вызывает угловые колебания балок в вертикальной плоскости, а так как шатун является одним из упругих звеньев колебательной системы, то в нем создаются попеременно растягивающие и сжимающие напряжения, амплитуду и частоту которых можно регулировать изменением скорости вращения приводящего вибратор электродвигателя и подбором сменных грузов на концах балок.

Электропривод в машине выполнен при помощи компаундного электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением и обеспечивает плавность регулирования скорости практически от 300 до 3000 об/мин.

Для определения действительных напряжений в шатуне был принят метод тензометрирования с помощью проволочных датчиков сопротивления с базой 20 мм, усилителя и осциллографа типа МПО-2. При тензометрировании непосредственно измерялась деформация участка стержня шатуна.

Тарировкой было установлено, что наибольшие напряжения возникают в стержне шатуна со стороны, противоположной упругому шарниру машины; это объясняется тем, что стержень шатуна при испытании в машине УШ помимо напряжений растяжения-сжатия испытывает переменные напряжения изгиба, величина которых составляет около 20% осевых напряжений. Поэтому для определения напряжений в процессе циклического нагружения

тензодатчики наклеивались на более нагруженную полку стержня шатуна, где чаще всего зарождались трещины усталости.

Если начало трещины соответствовало другим точкам стержня шатуна или изломы усталости обнаруживались на головках шатуна, то определение фактического напряжения в точке зарождения трещины проводилось расчетным путем или дополнительным тензометрированием.

Для определения предела выносливости шатунов и получения кривых выносливости в каждой серии испытывалось по 6—10 шатунов на базе 10^7 циклов. Кривые выносливости строились в полулогарифмических координатах.

Основные размеры шатуна следующие: расстояние между головками 260 мм, диаметр отверстия большой головки 82 мм, диаметр отверстия малой головки — 46 мм, поперечное сечение двухтаврового стержня — 550 мм^2 , разъем большой головки под углом 45° к оси стержня.

Шатуны изготавливались из сталей следующего химсостава:

Марка стали	Содержание в %						
	C	Mn	Si	S	P	Cr	Ni
45 селект	0,45	0,65	0,27	0,042	0,032	0,10	0,14
40X	0,41	0,59	0,32	0,014	0,035	0,95	0,13
40P	0,41	0,60	0,25	0,033	0,017	0,06	0,21

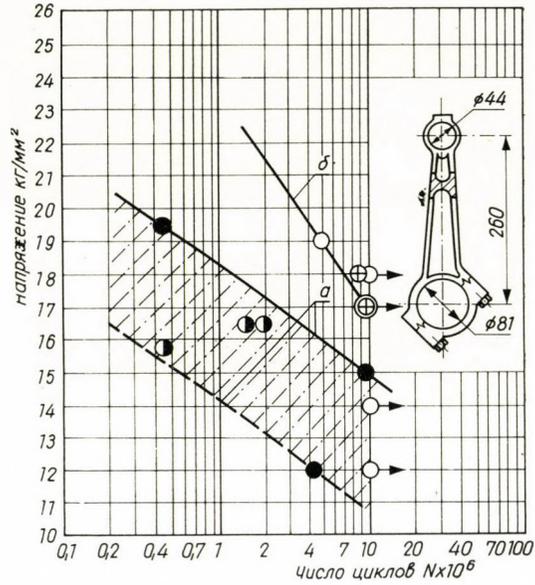
Из сталей марок 45 и 40P изготавливали по две серии шатунов: с наружной поверхностью после пескоструйной очистки и с наружной поверхностью дополнительно подвергнутой дробеструйному наклепу. В случае стали 40X кроме того испытывались шатуны с полированной поверхностью.

Все серии шатунов, подлежащие испытанию, обрабатывались по технологии, принятой для изготовления заводских шатунов из стали 45, за исключением термического улучшения, режим которого назначался в каждом случае различный, чтобы получить твердость в пределах 217—241 Н_В.

После термообработки шатуны подвергались испытанию на твердость, травлению, пескоструйной очистке, чеканке, магнитной дефектоскопии и последующей механической обработке. Дробеструйный наклеп или полировка наружной поверхности делались после окончательной механической обработки.

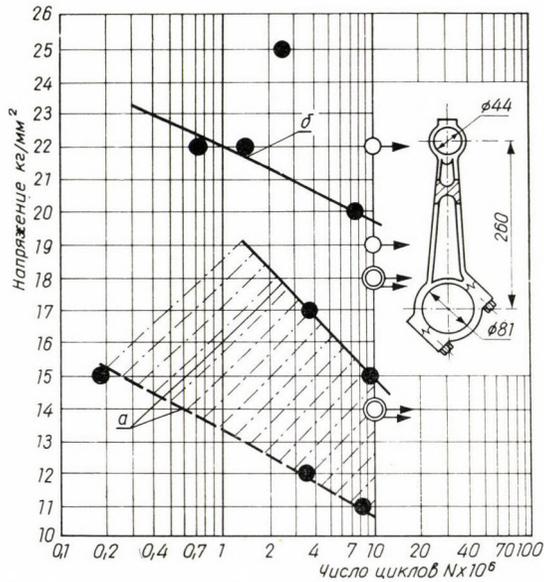
Полученные кривые выносливости приведены на фиг. 2, 3, 4. А значения предела выносливости при растяжении-сжатии на базе 10^7 циклов даны в таблице 1.

Металлографические исследования показали, что при штамповке и термической обработке шатунов происходит обезуглероживание поверхностного слоя на глубину 0,2—0,3 мм и его твердость на поверхности уменьшается



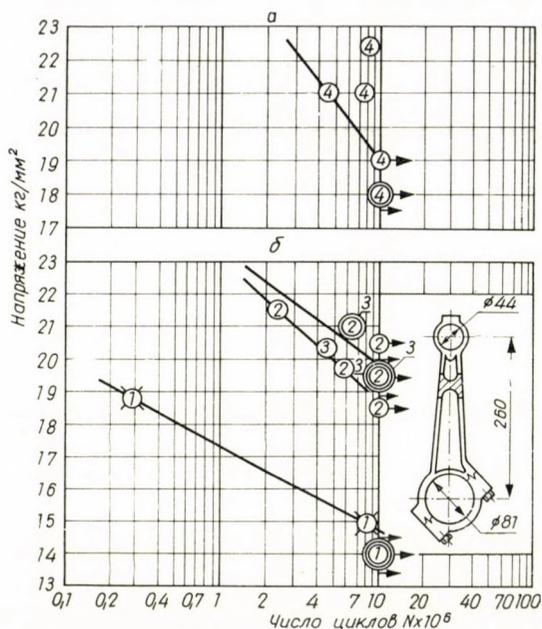
Фиг. 2. Кривые выносливости шатунов, изготовленных из стали 45

- а — пескочистка;
- б — дробеструйный наклеп;
- — разрушение по стержню;
- — разрушение по смазочному отверстию в верхней головке;
- ⊕ — разрушение по кривошипной головке



Фиг. 3. Кривые выносливости шатунов, изготовленных из стали 40P:

- а — пескочистка;
- б — дробеструйный наклеп;
- — разрушение по стержню



Фиг. 4. Кривые выносливости шатунов, изготовленных из стали 40X и 40P (разрушения по поршневой головке):

- а — сталь 40P;
- б — сталь 40X;
- 1 — пескочистка;
- 2 — полировка;
- 3 — дробеструйный наклеп;
- — разрушение с наружной поверхности головки;
- — разрушение с поверхности отверстия под втулку пальца

до 100—120 единиц Н_В. Это вызывает также уменьшение выносливости поверхностных наиболее напряженных слоев металла.

Вне зависимости от того, из какой стали сделан шатун, значения предела выносливости получены практически одинаковыми: 11—14 кг/мм². Причем, нижние значения предела выносливости относятся к шатунам с резкими концентраторами напряжений (в основном технологического происхождения).

Поверхностный упрочняющий наклеп дробью шатунов, двигателей внутреннего сгорания увеличивает их выносливость при действии циклических нагрузок и создает предпосылки к уменьшению веса шатунов, а следовательно, увеличению КПД двигателей. В результате дробеструйной обработки шатунов, изготовленных из стали 45, предел выносливости по стержню, при отсутствии резких концентраторов, увеличился на 21%, а при наличии резких концентраторов — на 54%. Дробеструйная обработка шатунов, изготовленных из боровой стали 40P, обеспечила повышение предела выносли-

Таблица 1

Значения предела выносливости при растяжении-сжатии шатунов дизельных двигателей из сталей марок 45, 40P и 40X

Материал шатунов	Характер обработки	Пределы выносливости шатунов кг/мм ²		Пределы выносливости образцов кг/мм ²	
		по стержню	по поршневой головке	$\sigma_{-1изг}$ кг/мм ²	$\sigma_{-1з} = 0,74\sigma_{-1изг}$ кг/мм ²
1	2	3	4	5	6
Сталь 45	Пескоочистка	11—14*	—	27,5	20,3
Сталь 45	Дробеструйный наклеп	17	—	—	—
Сталь 40P	Пескоочистка	11—14*	—	30,9	22,9
Сталь 40P	Дробеструйный наклеп	19	19	—	—
Сталь 40X	Пескоочистка	—	14**	34,0	25,1
Сталь 40X	Дробеструйный наклеп	—	19,6***	—	—
Сталь 40X	Полировка	—	18,5***	—	—

* Нижние значения пределов выносливости относятся к шатунам с резкими концентраторами напряжений.

** Разрушение с наружной поверхности поршневой головки.

*** Разрушение с внутренней поверхности поршневой головки.

вости стержня шатуна при отсутствии резких концентраторов на 36%, а при наличии их — на 72%.

Кроме общего повышения выносливости шатуна после дробеструйного упрочнения наблюдалось также относительное повышение выносливости стержня и усталостное разрушение переносилось на другие элементы шатуна: на шатунную или поршневую головку, где начиналось с поверхностей отверстий. Зная эти места концентрации напряжений, можно путем конструктивных или технологических мероприятий обеспечить дальнейшее повышение выносливости шатуна без существенного увеличения веса.

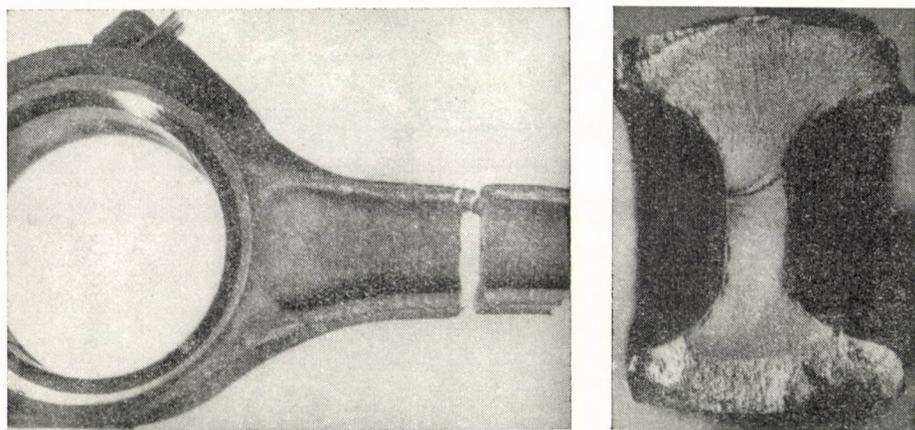
При испытании шатунов из стали 40X без упрочнения разрушения шатунов были по поршневой головке, причем усталостные трещины начались снаружи. Все разрушения полированных, а также дробеструйных шатунов происходили также по поршневой головке, причем усталостные трещины развивались с внутренней поверхности отверстия под втулку поршневого пальца.

Как показали испытания, основными очагами усталостных разрушений шатунов могут являться: а — на стержне шатуна — поперечные риски и задиры, получившиеся при снятии облоя, следы клеймения при штамповке, неровности наружной поверхности, возникшие от обгара штампа и зажима окалины, отпечатки шарика после испытания на твердость по Бринелю;

б — на поршневой головке: места контактной коррозии на поверхности отверстия под втулку поршневого пальца, острые кромки на торцах этого отверстия, получающиеся при эксцентричном снятии фаски; в — на кривошипной головке: места выхода наружных отверстий под шатунные болты.

Приводим несколько примеров характерных видов усталостных разрушений шатунов.

Шатун 1—3 из стали 45 после пескоочистки выдержал при напряжении 12 кг/мм^2 $4,23 \times 10^6$ циклов. Разрушение произошло по стержню (фиг.



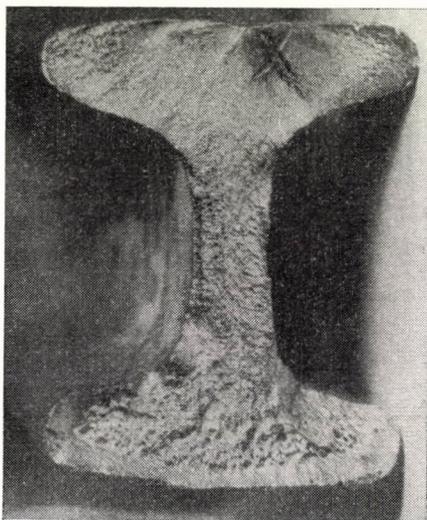
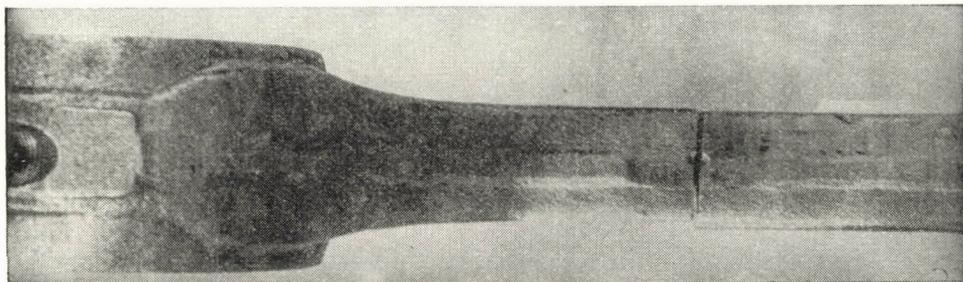
Фиг. 5. Усталостное разрушение шатуна из стали 45, $\sigma = 12 \text{ кг/мм}^2$, $N = 4,23 \times 10^6$ циклов:

а — разрушенный шатун;
б — фотография излома

5 а и б). Усталостная трещина началась со середины поперечного сечения в месте, где имелось одно из кольцевых углублений ковочного клейма диаметром около 4 мм, и распространялась в направлении полки тавра. Притертая зона составляет около 70% от всей площади поперечного сечения, что указывает на малую перегрузку этого шатуна.

Шатун БН-4 (фиг. 6) из стали 40Р после дробеструйного упрочнения выдержал при напряжении 2 кг/мм^2 818 000 циклов. Разрушение произошло по стержню шатуна. Усталостная трещина началась с поверхности отпечатка шарика после испытания на твердость по Бринелю.

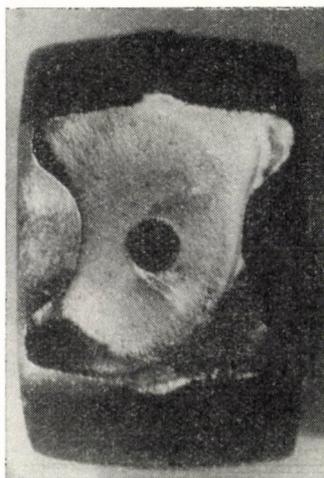
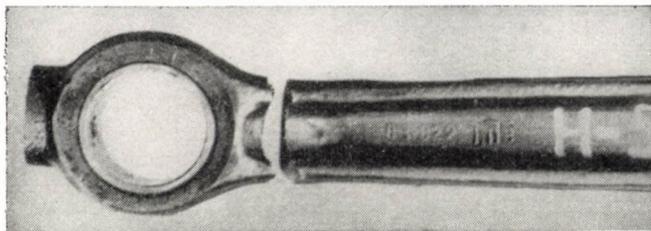
Шатун Н-5 (фиг. 7) из стали 45 после дробеструйного упрочнения выдержал при напряжении $16,5 \text{ кг/мм}^2$ $1,98 \times 10^6$ циклов. Разрушение произошло по стержню. Трещина началась с конца смазочного отверстия диаметром 8 мм в месте перехода цилиндрической части в коническую, соответствующую заборному конусу сверла.



Фиг. 6. Усталостное разрушение шатуна из стали 40P, $\sigma = 22$ кг/мм², $N = 818\,000$ циклов:
 а — разрушенный шатун;
 б — фотография излома

Шатун НІ (фиг. 8) из стали 45 после дробеструйного упрочнения выдержал при напряжении 18 кг/мм² (в стержне) $8,7 \times 10^6$ циклов. Усталостная трещина началась в месте сопряжения нарезанного отверстия под шатунный болт $М16 \times 1,5$ с наружной поверхностью головки. Притертая зона составляет около 60% сечения излома.

Шатун X-10 (фиг. 9) из стали 40X с полированной поверхностью выдержал при напряжении 19,7 кг/мм² $5,65 \times 10^6$ циклов. Усталостная трещина началась с поверхности отверстия поршневой головки под втулку поршневого пальца. В месте начала трещины обнаружены следы контактной коррозии в виде красно-бурого налета. Зона усталостного разрушения занимает около 70% поверхности излома, что указывает на малую величину перегрузки.

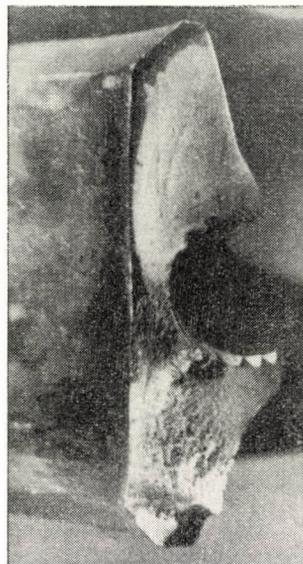
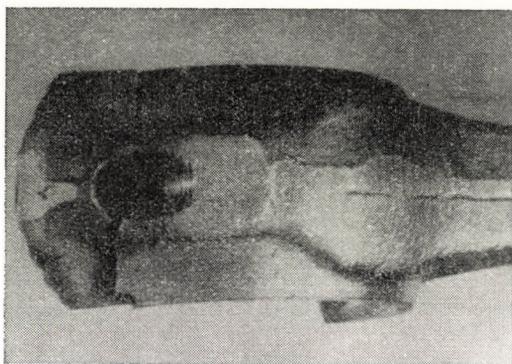


Фиг. 7. Усталостное разрушение шатуна из стали 45, $\sigma = 16,5 \text{ кг/мм}^2$, $N = 1,98 \times 10^6$ циклов
 а — разрушенный шатун;
 б — фотография излома

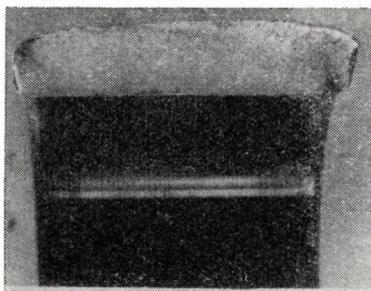
Влияние состояния поверхности при оценке запаса прочности принято учитывать поверхностным или технологическим фактором ϵ_σ , представляющим отношение пределов выносливости образца после данного вида обработки к пределу выносливости полированного образца. Более точно, определять запас прочности стержня шатуна можно, пользуясь коэффициентом выносливости стержня ϵ_c . Этот коэффициент представляет собой отношение предела выносливости стержня шатуна (σ_{-1cm}) с определенным видом обработки поверхности к пределу выносливости гладкого образца σ_{-1z} , изготовленного из такого же материала:

$$\epsilon_c = \frac{\sigma_{-1cm}}{\sigma_{-1z}}. \quad (1)$$

Величины ϵ_c , вычисленные по приведенным результатам испытаний, сведены в таблицу 2.



Фиг. 8. Усталостное разрушение шатуна из стали 45, $\sigma = 18 \text{ кг/мм}^2$ (в стержне)
 $N = 8,7 \times 10^6$ циклов:
 а — разрушенный шатун;
 б — фотография излома



Фиг. 9. Усталостное разрушение шатуна из стали 40X, $\sigma = 19,7 \text{ кг/мм}^2$, $N = 5,65 \times 10^6$
 циклов:
 а — разрушенный шатун;
 б — фотография излома

Таблица 2

Материал шатунов	Вид обработки стержня шатуна	ϵ_c
Сталь 45	Пескоочистка	0,54—0,69
Сталь 45	Дробеструйный наклеп	0,84
Сталь 40P	Пескоочистка	0,48—0,61
Сталь 40P	Дробеструйный наклеп	0,82

Поскольку проведенные исследования базировались на натуральных испытаниях шатунов и сопоставлении полученных данных с результатами испытаний образцов, то суммарное влияние концентрации напряжений, технологического и масштабного факторов учитывается коэффициентом ϵ_c .

Рассмотрение полученных значений коэффициента выносливости стержня шатуна ϵ_c (табл. 2) показывает, что для шатунов, изготовленных из стали марки 45, ϵ_c находится в пределах 0,54—0,69, а из стали 40P—0,48—0,61.

В обоих случаях нижние значения ϵ_c относятся к шатунам, имеющим резкие концентраторы напряжений, а верхние значения — к шатунам с обычными концентраторами напряжений, связанными с технологией штамповки шатуна. По мере увеличения прочности материала значение ϵ_c падает.

Для шатунов, изготовленных из сталей 45 и 40P и подвергнутых дробеструйному наклепу, величина ϵ_c значительно повышается и достигает значений 0,84—0,82, что соответствует коэффициенту ϵ_σ , применяемому в расчетах стержней шатунов при чистой обработке поверхности.

Запас прочности стержня шатуна с учетом коэффициента изменения выносливости ϵ_c можно определить по формуле:

$$n = \frac{\sigma_{-1z}}{\frac{\sigma_a}{\epsilon_c} + \alpha_\sigma \sigma_m}, \quad (2)$$

где: σ_{-1z} — предел усталости материала при симметричном цикле растяжения-сжатия;

σ_a — амплитуда цикла (переменное напряжение);

ϵ_c — коэффициент выносливости стержня шатуна;

α_σ — угловой коэффициент;

σ_m — среднее напряжение цикла.

Данная формула конструктивно не отличается от ранее предложенной формулы (3), однако введение коэффициента ϵ_c уточняет действительное значение величины запаса прочности стержня шатуна.

Полученные данные по пределам выносливости поршневых головок шатунов (табл. 3) аналогично могут быть использованы при определении запаса прочности головок.

Запас прочности поршневой головки шатуна подсчитывается по уравнению:

$$n = \frac{2\sigma_{-1z}}{\frac{\sigma_{aj} - \sigma_{ac}}{\varepsilon_T} + a\sigma(\sigma_{aj} + \sigma_{ac} + 2\sigma'_a)}, \quad (3)$$

где: σ_{aj} — напряжение на внутренней поверхности поршневой головки, возникающее от разрывающих сил инерции поршневой группы;

σ_{ac} — напряжение внутренних волокон поршневой головки от сил давления газов;

σ'_a — напряжение на внутренней поверхности поршневой головки, возникающее от запрессовки втулки.

Данные подсчета величины ε_T для поршневых головок шатунов приведены в таблице 3.

Таблица 3

Материал шатунов	ε_T
Сталь 40P	0,83
Сталь 40X	0,78—0,74

ЛИТЕРАТУРА

1. Михалин, Г. И.: Случаи обрыва шатунов на двигателях Шкода 8С230Р и мероприятия по их предупреждению, «Энергетический бюллетень» №-8, т. VIII, 1957.
2. Кудрявцев И. В.: Внутренние напряжения как резерв прочности в машиностроении, Машгиз, 1951.
3. Кинашвили, Р. С.: Определение запасов прочности при переменных нагрузках «Труды ЦИАМ» кн. 55, Оборонгиз, 1943.

ВЛИЯНИЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ И МАСШТАБНОГО ФАКТОРА НА ПРОЧНОСТЬ БОЛТОВ

Канд. техн. наук Б. И. АЛЕКСАНДРОВ

и

Младший научный сотрудник В. И. САМОЙЛЕНКО

При эксплуатации машин и конструкций иногда происходит разрушение деталей без достаточного развития пластических деформаций в них, так называемое хрупкое разрушение. Наиболее опасными в отношении возникновения хрупкого разрушения в деталях машин являются концентраторы напряжений: резьба, выточки, канавки и проч., так как эти места деталей обладают наименьшей прочностью при реальных условиях нагружения и разрушение происходит почти всегда по ним.

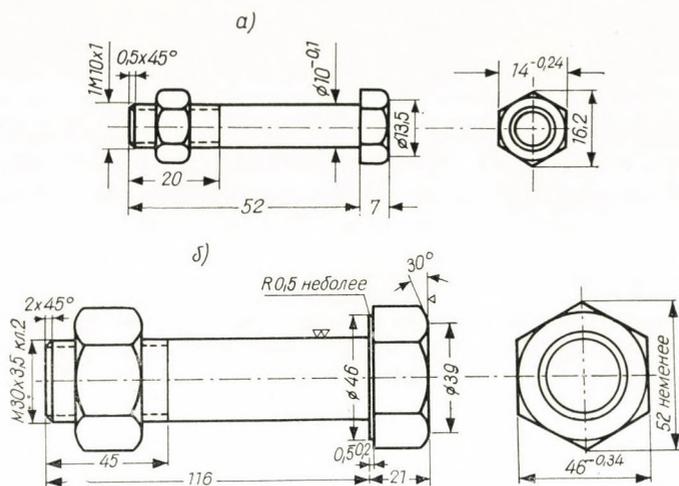
Для оценки чувствительности к надрезу материалов при статическом нагружении существуют несколько методов испытаний [1, 2, 3]. Различие их состоит в формах образцов, способах нагружения и критериях, положенных в основу оценки чувствительности к надрезу. Общими для всех методов являются следующие особенности:

1. Учет продолжительности нагружения при комнатной температуре. Это необходимо для предотвращения замедленного разрушения, проявляющегося в постепенном возникновении и развитии трещины.

2. Испытания надрезанных образцов дают обычно большой разброс, поэтому необходимо испытывать партию в несколько штук образцов. Величина разброса может быть определена по средне-арифметическому из суммы отклонений, суммированных без учета знака.

В настоящем исследовании изучалась склонность к хрупкому разрушению болтов из сталей марок 40ХН и 40Х. Были проведены также испытания болтов на склонность к замедленному разрушению. Работа была вызвана необходимостью рационального решения практических вопросов производства автомобильных болтов, выбора материала и термической обработки их с учетом масштабного фактора.

Объектом исследования являлись болты $1М10 \times 1$ и $М30 \times 3,5$ (фиг. 1а, б) из сталей марок 40ХН и 40Х. Шаг резьбы выбран в обоих случаях таким образом, чтобы обеспечить подобие геометрических размеров — отношение шага резьбы к наружному диаметру t/D_0 в обоих случаях равно $1/10$. Термическая обработка болтов производилась после изготовления их по следующему режиму: закалка-нагрев в конвейерной электропечи при темпера-



Фиг. 1. Чертежи болтов

- а — болт IM10 × 1
б — болт M30 × 3,5

туре 840° С в воздушной среде, охлаждение в масле; температуры отпусков выбирались в пределах от 180°С до 625°С в зависимости от требуемой твердости.

Испытания болтов IM10 × 1 на растяжение производились на универсальной разрывной гидравлической машине на 10 т. Для закрепления болтов в машине использовались специальные вкладыши. Испытания болтов M30 × 3,5 из сталей 40X и 40XH производились на универсальной разрывной гидравлической машине на 100 т с применением специальных захватов. Перекос при испытании болтов на растяжение создавался с помощью косо́й шайбы с углом 8°, которая при испытании подкладывалась под гайку.

По полученным данным для каждой партии болтов строили графики изменения разрушающего усилия в зависимости от твердости болтов. Для оценки разброса кроме кривой, проведенной по средним значениям, проводили кривые по полученным минимальным и максимальным значениям. В качестве критерия прочности были приняты величины номинального разрушающего напряжения, равные отношению максимальной нагрузки к исходной площади болта по внутреннему диаметру.

Испытания болтов IM10 × 1 из сталей 40X и 40XH на замедленное разрушение производились в приспособлении ПЗР-10 [4]. В основу конструкции приспособления положен принцип упругого динамометра. Величина нагрузки при испытании на склонность к замедленному разрушению принималась равной 80% минимального разрушающего усилия, полученного для болтов данной твердости. Время выдержки под нагрузкой принимали 1000—3000 час.

Помимо испытаний болтов были определены механические свойства сталей при растяжении на гладких образцах диаметром 8 мм.

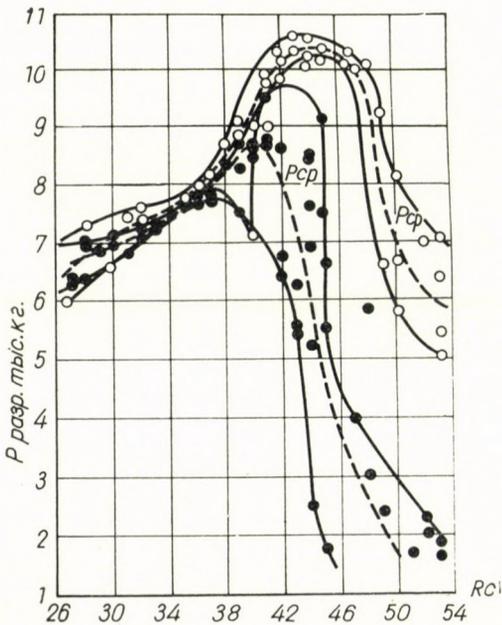
1. Прочность болтов из стали 40ХН

Результаты испытаний болтов из стали 40ХН: $М10 \times 1$ и $М30 \times 3,5$ без перекоса и с перекосом гайки косой шайбой 8° приведены на графиках фиг. 2. Разрушающее усилие болтов $М10 \times 1$ при испытании без перекоса гайки с увеличением твердости сначала растет, достигая максимума при твердостях около $44R_c$, а затем резко падает.

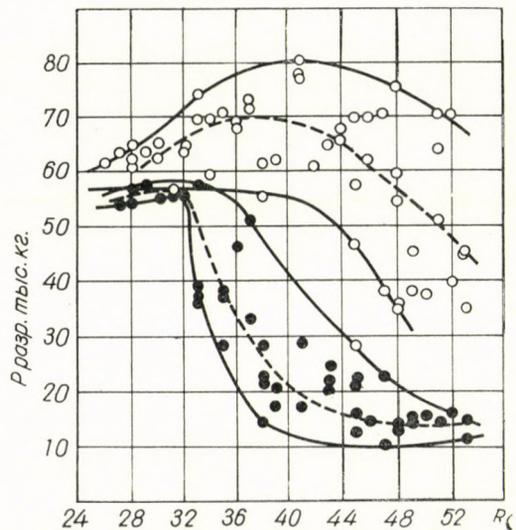
При испытании болтов $М10 \times 1$ на растяжение с перекосом гайки косой шайбой 8° при повышении твердости до $R_c = 37-43$ наблюдалось увеличение разрушающего усилия, а при дальнейшем повышении твердости следовало значительное снижение усилия. Наличие перекоса вызвало значительное усиление неблагоприятного влияния повышения твердости свыше оптимального значения.

Разрушающее усилие болтов из стали 40ХН диаметром $М30 \times 3,5$ при испытании без перекоса гайки так же как и у болтов $М10 \times 1$ сначала увеличивается, достигая максимума при твердости $38R_c$, а затем снижается. Однако эти изменения разрушающегося усилия, особенно его увеличение с ростом твердости, выражены намного слабее, чем у болтов $М10 \times 1$.

При перекоме гайки косой шайбой 8° при твердости в пределах $R_c = 26-32$ величина разрушающего усилия остается практически постоянной



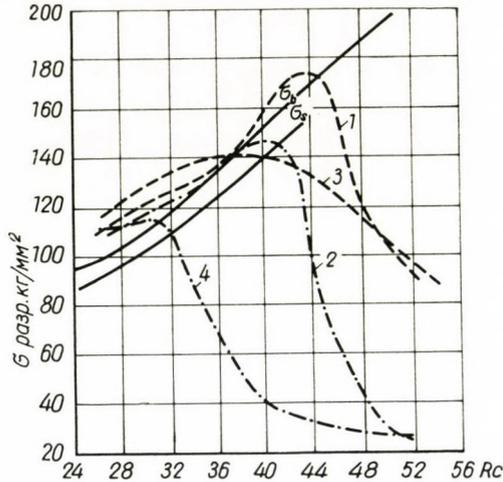
Фиг. 2а. Влияние твердости на разрушающее усилие болтов $М10 \times 1$ из стали марки 40ХН:
 ○ — испытание без перекоса гайки
 ● — испытание с перекосом косой шайбой 8°



Фиг. 2б. Влияние твердости на разрушающее усилие болтов $М30 \times 3,5$ из стали марки 40ХН:
 ○ — испытание без перекоса гайки
 ● — испытание с перекосом косой шайбой 8°

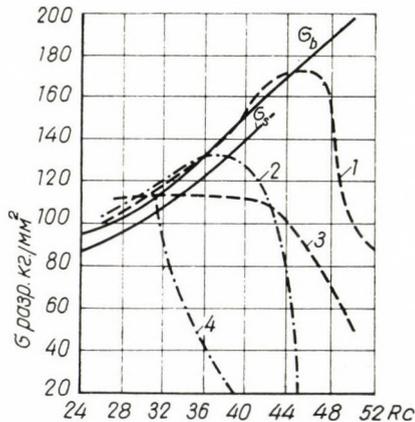
(среднее усилие с увеличением твердости в этих пределах повышается на 150—200 кг.). При дальнейшем увеличении твердости следует резкое снижение разрушающего усилия с 54000 до 10000 кг.

На суммарных графиках результатов испытаний (фиг. 3 и 4) построены также величины предела прочности и предела текучести стали 40ХН по



Фиг. 3. Зависимость номинального разрушающего напряжения от твердости для образцов из стали 40ХН (по средним значениям):

- 1 — болты М10 × 1 без перекоса гайки
- 2 — болты М10 × 1 с перекосом
- 3 — болты М30 × 3,5 без перекоса гайки
- 4 — болты М30 × 3,5 с перекосом



Фиг. 4. Зависимость номинального разрушающего напряжения от твердости для образцов из стали 40ХН (по минимальным значениям):

- 1 — болты М10 × 1 без перекоса гайки
- 2 — болты М10 × 1 с перекосом
- 3 — болты М30 × 3,5 без перекоса гайки
- 4 — болты М30 × 3,5 с перекосом

средним данным, полученным испытанием на растяжение стандартных гладких образцов диаметром 8 мм. Из этих фигур следует, что с повышением твердости предел прочности и предел текучести материала растут. Все болты дали характер кривой резко отличный от того, как ведут себя разрывные образцы, а именно: с повышением твердости вначале наблюдается увеличение разрушающего напряжения, затем оно достигает максимума, а при дальнейшем повышении твердости падает. До появления максимума кривых номинальное разрушающее напряжение болтов при одинаковых значениях твердости превосходит предел прочности материала, что объясняется наличием в надрезе сложного напряженного состояния.

Величина максимума прочности для различных партий образцов различна, она больше для образцов $IM10 \times 1$, чем для образцов $M30 \times 3,5$ и больше для испытаний без перекоса, чем для испытаний с перекосом. Аналогичные зависимости получены и для минимальных значений. Характер излома определяется твердостью болтов и не зависит от наличия перекоса — болты одинаковой твердости дали одинаковые изломы при испытании с перекосом и без перекоса.

При твердостях порядка $R_c = 32—36$ как при испытании без перекоса, так и при испытании с перекосом наблюдается значительное удлинение болтов.

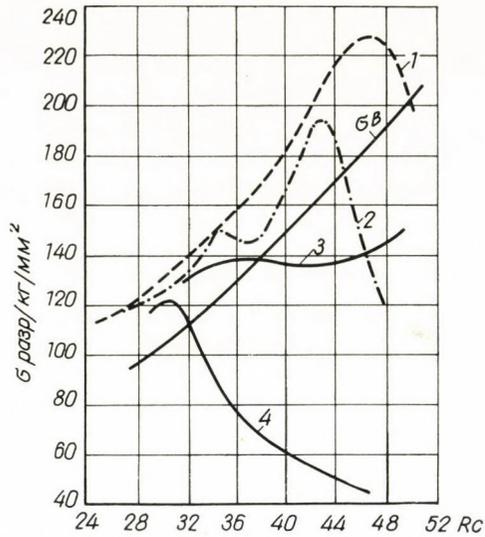
Болты $IM10 \times 1$ с твердостью $R_c = 36—40$ подвергались испытаниям на склонность к замедленному разрушению. Приложенная нагрузка была принята равной 7000 кг, что соответствует напряжению 120 кг/мм^2 или 80% от среднего разрушающего усилия. Длительность испытания составляла 1000 час. Всего было испытано 12 болтов. Ни один из болтов в течение периода испытания не разрушился.

2. Прочность болтов из стали 40X

Болты $IM10 \times 1$ и $M30 \times 3,5$ из стали 40X испытывались аналогично болтам из стали марки 40XH. На суммарных графиках 5 и 6 отражены результаты испытаний болтов на растяжение без перекоса и с перекосом гайки косой шайбой 8° . На этих же графиках построены величины предела прочности стали 40X по средним данным, полученным испытанием на растяжение стандартных гладких образцов диаметром 8 мм.

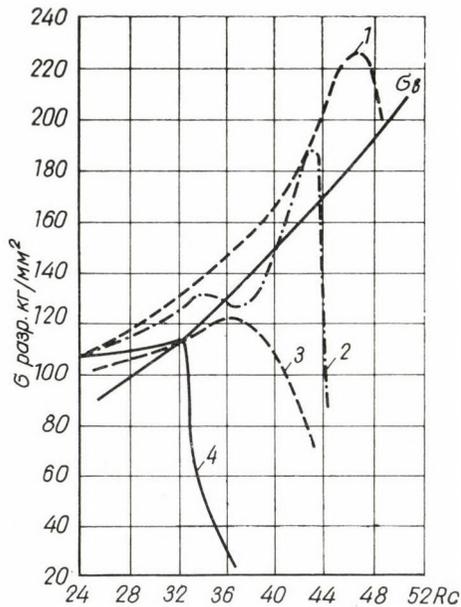
Для образцов $M30 \times 3,5$ наблюдается вначале увеличение разрушающего напряжения, затем оно достигает максимума, а при дальнейшем повышении твердости падает. До появления максимума на кривой при испытании болтов с перекосом (при R_c до 32) номинальные разрушающие усилия оказались выше предела прочности материала.

Болты $IM10 \times 1$ в отличие от болтов $M30 \times 3,5$ показали более сложную зависимость разрушающего усилия от твердости с зоной некоторого



Фиг. 5. Зависимость номинального разрушающего напряжения от твердости для образцов из стали 40X (по средним значениям):

- 1 — болты М10 × 1 без перекоса гайки
- 2 — болты М10 × 1 с перекосом
- 3 — болты М30 × 3,5 без перекоса гайки
- 4 — болты М30 × 3,5 с перекосом

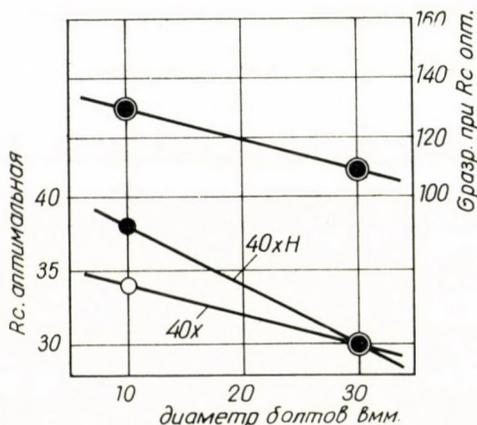


Фиг. 6. Зависимость номинального разрушающего напряжения от твердости для образцов из стали 40X (по минимальным значениям)

- 1 — болты М10 × 1 без перекоса гайки
- 2 — болты М10 × 1 с перекосом;
- 3 — болты М30 × 3,5 без перекоса гайки
- 4 — болты М30 × 3,5 с перекосом

снижения прочности в пределах $R_c = 36—40$. Изломы образцов из стали 40X имеют характер, аналогичный изломам образцов стали 40XН.

Испытанию на склонность к замедленному разрушению подвергались болты $M10 \times 1$ двух интервалов твердости: $R_c = 39—43$ и $R_c = 32—34$. Для болтов с твердостью $R_c = 39—43$ нагрузка была принята равной 8000 кг., что соответствует напряжению 138 кг/мм^2 или 80% от среднего разрушающего усилия болтов при данной твердости. Из испытанной партии болтов три из них с твердостью $R_c = 43, 43, 42$ разрушились через 43, 28, 13 час. (соответственно) после начала испытания. Остальные три болта имеющие твердость $R_c = 39—40$ выдержали 3000 час. без разрушения. Эти данные



Фиг. 7. Влияние диаметра болтов на оптимальную твердость и разрушающее напряжение при этой твердости:

- — болты из стали 40X
- — болты из стали 40XН.

показывают наличие склонности к замедленному разрушению у болтов стали 40X при твердости $R_c = 39—43$.

Для болтов с твердостью $R_c = 32—34$ нагрузка была принята равной 6000 кг, что соответствует напряжению 103 кг/мм^2 или 80% от среднего разрушающего усилия болтов данной твердости. Все болты выдержали 3000 час. и ни один не разрушился.

Значения оптимальной твердости, при которой получены максимальные напряжения и сами величины разрушающих напряжений для болтов из сталей 40XН и 40X приведены в таблице 1 и на фиг. 7.

Таблица 1

Оптимальная твердость и разрушающее напряжение для болтов этой твердости из сталей 40ХН и 40Х

Размер болта и вид испытания	40ХН				40Х			
	Средние значения		Минимальные значения		Средние значения		Минимальные значения	
	σ разр. кг/мм ²	R_e						
М10 × 1 без перекоса ...	173	43	165	45	222	46	215	36
М10 × 1 с перекосом	146	40	132	36	140	34	130	34
М30 × 3,5 без перекоса ...	141	37	113	37	138	37	121	37
М30 × 3,5 с перекосом	114	30	109	30	116	30	109	30

Выводы

В результате испытаний на растяжение с перекосом и без перекоса болтов М10 × 1 и М30 × 3,5 из сталей марок 40Х и 40ХН можно сделать следующие выводы:

1. Болты из стали 40ХН и 40Х при повышении твердости показали сначала увеличение разрушающего напряжения и его снижение при повышении твердости свыше оптимального значения.

Оптимальная твердость и разрушающее напряжение при этой твердости уменьшаются при наличии перекоса и увеличении диаметра болтов.

2. При оптимальной твердости болты обладают значительной пластичностью, а также отсутствует склонность к замедленному разрушению.

3. Болты оптимальной твердости из сталей марок 40Х и 40ХН обладают практически равной прочностью. Величины оптимальной твердости и допускаемых напряжений для них можно назначать пользуясь графиком фиг. 7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев, С. В.: Исследование прочности болтов при растяжении с перекосом, «Заводская лаборатория», №-6, 1945.
2. Sachs, G.: Steel 122. N5. 1948. pp 104—106
3. Потак, Я. М.: Хрупкие разрушения сталей и стальных деталей, Оборонгиз, Москва 1955.
4. Светлов, А. И.: Приспособление для испытания болтов на замедленное разрушение «Заводская лаборатория» №-3, 1960, стр. 378—379

TIME REDUCTION OF THE ENDURANCE TESTS AND DEVELOPMENTS IN FATIGUE TESTING MACHINES

B. BIRÓ

KERMI, BUDAPEST

1. Fatigue testing at constant and varying stress levels with reference to the theoretical considerations of Prot E.-Marcel

At the meeting of the French Metallographic Society, October 10, 1947, PROT E.-MARCEL presented a paper, in which on the basis of theoretical considerations and practical measurements he suggested the modification of the usual testing methods for endurance limits.

In the modern dimensioning the determination of the endurance limit is not satisfactory any longer, but also plotting of the stress-cycle diagram ($S-N$ diagram) is necessary to determine the fatigue life, *i.e.* the number of cycles for a given load, estimated with a predetermined factor of safety.

In his theoretical investigations the French researcher regarded the fatigue diagram as a hyperbola of second degree on cartesian co-ordinates, the abscissa of which is the number of cycles sustained and the ordinate is the value of the load.

The equation of the curve is

$$F_a \cdot L_t = C \quad (1)$$

where F_a — stress above the endurance limit,
 L_t — number of cycles sustained,
 C — constant.

PROT E.-MARCEL shifted the origin of co-ordinates by the value of the endurance limit. By this the asymptotes of the hyperbola were the ordinate axis of load and the straight lines in the height of the endurance limits going parallel to the abscissa axis (see Fig. 1).

By this

$$F_a = F_e - F_k \quad (2)$$

and so

$$(F_e - F_k) L_t = C \quad (3)$$

In this relation are

F_e — constant pulsating load,

F_k — endurance limit.

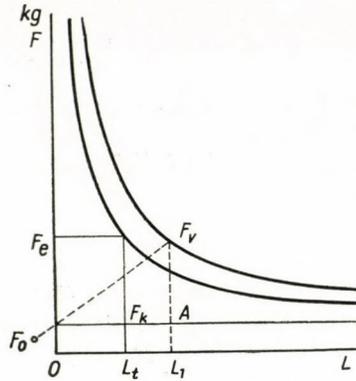


Fig. 1. Load vs number of cycles

Equation 3 shows the evidence of being constant, the surface area of rectangles made of relating values F_a and L_t .

In principle, for plotting the diagram no more than two points must be known. In practice this is not satisfying because of the great deviation in experimental results, especially near the endurance limit.

For this reason a great number of experiments are needed to obtain data of necessary precision and acceptable probability. To shorten the experiments a great many attempts were made without any useful result.

But a suggestion elaborated theoretically brought results which are proved by practice: instead of the former constant stress level a constantly varying load must be used. In this case the fatigue fracture F_v can be characterized by the load variation a , because

$$F_v = F_k + aL_1 \quad (4)$$

where a is the rate of the load increment, kg/number of load cycles,

L_1 is the number of cycles sustained.

In equation (4) instead of the varying part of the load aL_1 we can write F_r and so equation (1) can be written for the case of varying load as follows.

$$\int_0^{L_1} F_r dL_1 = C_0 \quad (5)$$

After substitution and integration

$$\frac{aL_1^2}{2} = C_1 \quad (6)$$

This means that the surface area of the triangle $F_k \cdot F_v \cdot A$ drawn in Fig. 1 is constant, i.e. the very F_v fits onto an equilateral hyperbola, the asymptotes of which are the endurance limit and the ordinate axis representing

the load; in other words these correspond to the asymptotes of a hyperbola characterizing the tests having a constant load level.

Though the asymptotes are coincident, however, in principle the two hyperbolas are not identical: some difference in constant value is possible. Here the theoretical result can be supported by practical experience, according to which the endurance limit has an increased value when a fatigue investigation is started with a load less than the endurance limit.

Before the investigation the value F_k is not known. We can thus start with an esteemed initial load which is less than the endurance limit, because according to present opinion the fluctuating load, even at the very worst, does not produce change, but, in general, it increases the endurance limit.

PROT E.-MARCEL practically proved the truth of his theory by rotating bar fatigue tests [2].

The advantages and suitability for the development of modern dimensioning methods of the suggested fatigue tests with varying load level can be most clearly seen in connection with rolling-contact bearings.

2. Comparison of the above two testing methods in the case of ball bearings

In the case of rolling bearings the dimensioning formula is almost identical with the relation occurring in the theoretical treatments of PROT E.-MARCEL. According to the dynamic dimensioning method for rolling bearings of G. LUNDBERG and A. PALMGREN, let us investigate the advantages offered by the suggestion of PROT E.-MARCEL: For rolling bearings the equation of dimensioning curve is:

$$F_m \cdot L^{\frac{1}{p}} = C \quad (7)$$

where F_m = the constant rated load (equivalent load) like (1),

L = bearing life expressed in million revolutions,

C = constant, the characterizing basic load rating (equivalent load),
on which the life of the bearing is just one million revolutions.

For ball bearings: $p = 3$

For roller bearings: $p = \frac{10}{3}$

According to theory the varying load must be converted into an equivalent load by means of the following relation:

$$F_m = \left(\frac{\int_0^L F^p dL}{L} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (8)$$

where F = the true varying load.

We wish here to point out the difference in results of PROT E.-MARCEL and G. LUNDBERG—A. PALMGREN. The dimensioning method of G. LUNDBERG and A. PALMGREN is a special one, because it only holds for repeated compression of hardened chromium steels.

When using incrementally varying loads according to the suggestion of PROT E.-MARCEL the equivalent load must be estimated by means of relation (8), which using the life term L_3 expressed in million revolutions gives

$$F_m = \left(\frac{\int_0^{L_3} F^3 dL_3}{L_3} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (9)$$

In case of smoothly increasing load $F = a L_3$, consequently

$$F_m = \left(\frac{\int_0^{L_3} a^3 L_3^3 dL_3}{L_3} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (10)$$

After solving the denoted operations we obtain

$$F_m = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} a L_3 \quad (11)$$

The result is put into equation (7). In the new equation calculated with the known bearing constant, because according to the LUNDBERG—PALMGREN theory no two hyperbolas or other constant exist (other basic load rating).

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} a L_3 L_3^{\frac{1}{3}} = C \quad (12)$$

It other words, in the case of hardened chromium steels rolling on each other, the constant and varying loads can be converted according to the base equation.

According to PROT's suggestion the testing time is reduced and the scattering improved. Let us analyse the question in such a way that the relation (11) will be put into that of (7). The basic load rating C is the same in both relations, so both the relations can be made equal

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} a L_3 L_3^{\frac{1}{3}} = F_m L^{\frac{1}{3}} \quad (13)$$

Let us cube and denote the one fourth power of the reduced constants with B

$$B = 1,41 \sqrt[4]{\left(\frac{F_m}{a} \right)^3} \quad (14)$$

by this

$$L_3 = B \sqrt[4]{L} \quad (14a)$$

To determine the value B or its mean, let us put the fractional part of the basic load rating C instead of the numerator or denominator of the quotient F_m/a . Namely, in the investigations the value F_m can be chosen between $C/3$ and $C/10$, and a between $C/10$ and $C/100$. By putting the extremes of F_m and a we obtain a quotient greater than 0,03 and maximum 1. Accordingly the value B varies from 1,41 to about 0,1, and can be esteemed as mean 0,8.

In the following table the constant load rating lives (L) for 100, 40, 30 and 1 million revolutions are converted into lives of incrementally varying load L_3 by means of the approximating value B .

L	$0,8\sqrt[4]{L}$	L_3	$\frac{L}{L_3}$
100	$0,8\sqrt[4]{100}$	2,53	~ 40
40	$0,8\sqrt[4]{40}$	2,0	~ 20
30	$0,8\sqrt[4]{30}$	1,87	~ 16
1	$0,8\sqrt[4]{1}$	0,8	$\sim 1,2$

As can be seen from the table the time requirement of the tests with smoothly varying loads is shortened to about 16–20 part of that investigated with constant load level.

In addition it is evident that the scattering of test will be better. The table can be realized as though its individual lines indicate the values of scattering. *E.g.* in the first case 100 million revolutions can be considered as the extent of test with constant load level for 30 specimens. In the same way, in case of the second line it may be assumed, that the extent of the test results is 40 and of the third line 30 million revolutions. On the other hand, the extent of the incrementally loaded tests are 2,53, 2, 1,87 and 0,8 million revolutions, respectively. It follows from the considerable reduction of the extent, that the interquartile extent of 90% safety similarly changes and with the varying load levels a greatly reduced number of tests are sufficient for the determination of mean values with the same safety factor.

Numerical results can be obtained by analyzing the scattering and, depending on the value a , these will be between one ninth and one fifth part of the number of tests with constant load level.

Summarizing the partial results: the test time will be reduced on the one hand, because of the 16-time reduction of the very test time and of the

5-time reduction of the number of tests needed for the same accuracy, on the other. The new method requires 80—100-time reduced test time as does the traditional bearing-life-test with constant load levels.

In the new method less testing machines and reduced testing times are needed, and the tests are more economic. The method is well applicable to the development of modern design methods, as it allows the fatigue of original machine components with incrementally increasing cyclic loads corresponding to their functional tasks. The theoretical results make the creation of new design formulae possible, by which the life of the individual machine components can be calculated with a probability proved in practice.

3. Set up of test equipments

- a) *Ball bearings*
- b) *Tooth wheels* and
- c) *Pulsator*

The tests require novel equipment to realize the new principles.

a) One of the oldest fatigue testing machines is that for rolling bearings, existing in various forms. The modern bearing testing machine works with hydraulic loading, its dimensions are reduced, the bearing under test is mounted on the free end of the axle. In the case of increased dimensions the bearing rotates between two supporting bearings.

In testing machines like this it is recommended to raise the load by steadily raising the liquid pressure. Its simple solution is the increase of load on the pressure regulating valve or diaphragm proportionally to r. p. m. The load can be set by a screw spindle.

b) The well-known gear life testing machines are complex and inaccurate. Their inaccuracy is due to the fact that mechanism giving the fatigue torque sets only after overcoming the initial static friction.

Fig. 2 shows the scheme of the back-driving fatigue device elaborated in the Department of Machine Parts, Technical University, Budapest. The stressing or load torque is set up by disconnecting the lower axle 1 and by turning it in the opposite direction.

On both ends of the disconnected shaft helical gears are fastened to wedges. The helical angles are opposite to each other. Facing the gears the stressing gear blocks are mounted on a common shaft. By their axial shifting both gears on the disconnected shaft will be turned towards each other. The stressing torque is dependent on the load applied on the shaft end. This load can be given by a lever arm and weight and the latter can be moved by a screw driven by the stressing gear shaft through a gear box. On the extended part of the lever arm an additional weight can be moved, and so the value a and the initial load can be changed.

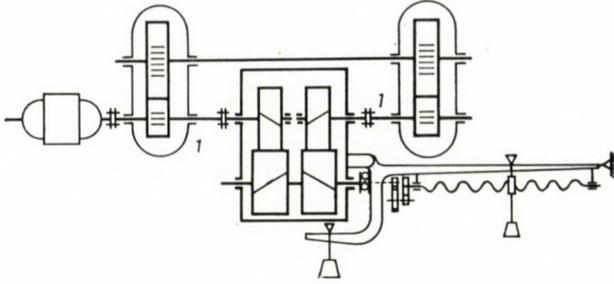


Fig. 2. Fatigue testing machine for tooth wheels

The advantages of the arrangement are as follows: except for the friction on the lever arm of the back-driving, the friction arising in any part of the device is overcome by the driving motor. The motion due to torque change of the contact surfaces causes no additional friction between other contacting surfaces when they are moving in other directions. The simplicity of the arrangement represents an additional advantageous feature.

c) Fig. 3 shows schematically the load increase device of an electronic pulsator. The magnet of the pulsator gives cyclic compression-and-tension load, which is measured by spring 1. The indication is through a light beam falling on a screen, where the load limits are represented by photocell gaps regulating the pulsator, in such a way, that the load is not to exceed the values

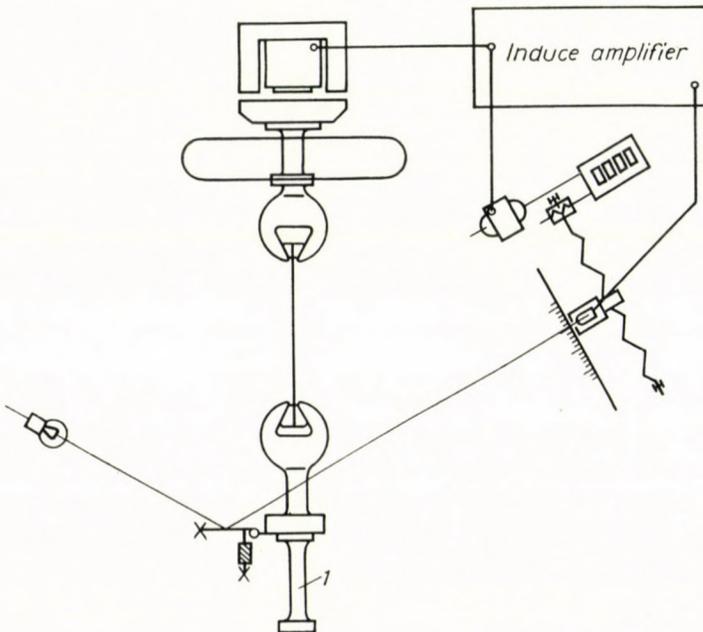


Fig. 3. Electronic pulsator

set up by the photocell gaps. The load cycles of the pulsator are counted by the synchronous motor driven by the a. c. current of the energizer magnet. The counter controls the position of the photocell gaps through a screw spindle or, when needed, rotates the output regulator of the loading magnet. Between the counter motor and screw spindle a pair of change wheels make the application of any preloading and any load increment a possible. The device is adaptable to all tests of pulsator type.

4. Possibilities of further development

Finally it is to be mentioned that all I have shown about the ball bearing estimation was proved by the investigation results of Dr. DINO SENIGALLIESI and Dr. L. GIULIETTI reported in No. 9, "La Rivista".

For the development of the test method it must be made clear that the dependence on each other of the two hyperbolas shown by PROT E.-MARCEL or, in other words, the greatness of increase in fracture load or life by the load less than the endurance limit.

Another objective for development could be an investigation of load increase according to other rules.

The method is applicable to determine equations for cyclic loads and constants as well as exponents in equation.

The development of the method can be very attractive for such institutes where a small research staff with few machines wishes to reach results and to complete or develop the results of those having a great apparatus and material background.

LITERATURE

1. SENIGALLIESI, D.: The endurance of antifriction bearings under progressive loading. *La Rivista*, no. 9, 1961.
2. PROT E.-MARCEL: L'essai de fatigue sous charge progressive une nouvelle technique d'essai des matériaux. *Revue de Metallurgie*, vol. 45, no. 12, 1948.
3. GIULIETTI, L.: Roulements à billes durée sous charge constante et durée sous charge croissant linéairement avec le nombre de tour. *La Rivista*, no. 9, 1960.
4. LUNDBERG, G. und PALMGREN, A.: Dynamische Tragfähigkeit von Wälzlager. *Acta Polytechnica. Mechanical Engineering series. Vol. 1. no. 3. Stockholm. Heft 7. 1947.*

SOME NOTES ON DIMENSIONING OF SHAFTS WITH KEYHOLES

I. KARSAI

TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

Machine parts can not be constructed in practice having the most suitable design for fatigue strength, they have to be processed with notches, shoulders and holes. All these induce stress concentration. The influence of this phenomenon was analyzed by several authors from different aspects and the constructors make calculations on the basis of various theories.

In Hungary the notch effect is still characterized with the shape-factor a_K and slot-coefficient β_K . Therefore, when solving a problem for the industry, the variation of the slot-coefficient β_K of two materials for workpieces of different shapes was determined, which is of special importance for the constructor.

For establishing keyed joints on shafts of electromotors, runout or sunk keyholes were manufactured at random. It seemed necessary for the sake of standardization to apply sunk keyholes in all cases. But this alteration of shaft construction is economical only when the application of sunk keyholes in comparison to the runout ones does not considerably decrease the fatigue strength.

The coefficient β_K is to be determined for different shaped keyholes. Experimental results were published by CAZAUD [1] and HÄNCHEN [2] on this subject. HÄNCHEN gives the stress coefficient of a normalized carbon steel with a tensile strength of about 56 kg/mm² and that of a hardened chrome-nickel steel. He determined a value of $\beta_K = 1,34$ for runout keyholes and $\beta_K = 1,73$ for sunk keyholes, using carbon steel and the values 1,63 and 2,1, respectively, using chrome-nickel steel.

FÖPPL and MAYER [3] noticed in the course of their analysis a decrease of about 22% and 47%, respectively. Similar experiments were also carried out by PETERSON [4].

In order to decide the question of the behaviour of the steels A 50.11 and A 70.11, used in Hungary, a rotating-bar fatigue test was carried out with the two kinds of keyholes on the shaft model of an electromotor type chosen by the factory. The motor shaft is subject to repeated bending and torsional stresses. The experiments were made with normalized materials produced without heat treatment.

The comparison of the rotating-bar fatigue of the shafts with runout and sunk keyholes was aimed at. For the sake of comparison there was an analogy between the section, *i. e.* the shape of the slots was the same in the section normal to the shaft. Main sizes of the shaft were so determined that the a_K shape coefficient of the given shaft and the slots in the specimen were equal.

With a given slot width and depth, the value of a_K is determined by the bend radius ρ existing between the bottom and the side of the slot. The value of the bend radius varies within a wide range. In the case of light shafts with slots, values $\rho = 0,5-0,2$ mm are prescribed as a function of slot width. For keyed joints there are no strict prescriptions, the value of the bend radius was determined by the shape of the tools used. In general values of 0,6–1,0 mm are indicated as informational data, the greater bending radius refers to maximum slot dimensions. The value of ρ relative to the examined shaft dimension is about 0,5 mm. Calculating with this value the shape coefficient a_K is equal to 2,8 in the case of torsional stress. This is only an approximation the available data published [5] — on the basis of LEVEN'S calculations — correspond to a slot width $b = d/4$ and slot depth $t = d/8$, the actual values deviated slightly.

A rotating-bar test with specimens manufactured as formerly described were carried out. The Wöhler curves for both kinds of keyholes were determined, they indicated the practical fatigue limit. Curves are shown in the two diagrams enclosed. With the fatigue limits obtained from the diagram the slot-coefficients can be determined:

$$\beta_K = \frac{\sigma_{kh \text{ polished}}}{\sigma_{kh \text{ notched}}}$$

The value of β_K in the case of the steel A 50.11 with runout keyhole is equal to 1,4, with slot keyhole 1,7 when using a steel A 70.11 1,57 and 1,87, respectively. The fairly large decrease of the value, when manufacturing the keyhole with a slotting end mill, is caused by the sharp slot ending. In the case of pure torsional load no such differences are caused by the two kinds of slots.

In the course of the experiments the influence of the circumferential slot transversing the keyhole and normal to it ensuring the runout of the abrasive stone had to be determined.

The traversing notches effect a very complicated stress condition which can be described only with great difficulties by theoretical calculations. The determination of the arising stress conditions was mentioned in NEUBER'S papers [6], but these calculations are valid only for special cases, giving only an approximation. Therefore, the change was determined by further experiments.

First the specimen with a bending radius of $\rho = 2$ mm and $\rho = 0,2$ mm with a circumferential transverse notch containing a sunk keyhole was loaded with a stress relative to the fatigue limit determined from the WÖHLER curve.

The sketch of the specimen is shown in Fig. 1. Owing to the $n = 3,5 \cdot 10^6$ times repeated stress the specimen broke. The load was successively varied till a $10 \cdot 10^6$ times repeated load could be attained without the breaking of

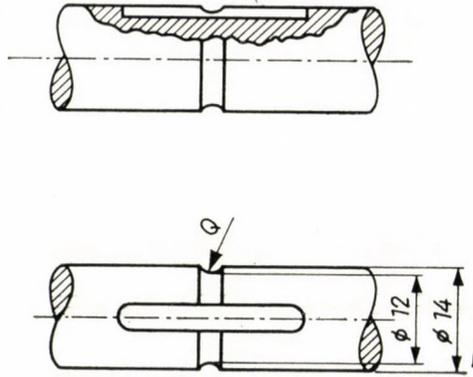


Fig. 1

the specimen. This stress value, practically the fatigue limit of a steel A 50.11 is equal to 12,8 kg/mm² for $\rho = 0,2$ mm 10 kg/mm² that of a steel A 70.11 9 kg/mm² and 7,8 kg/mm², respectively.

Test results are included in Table 1.

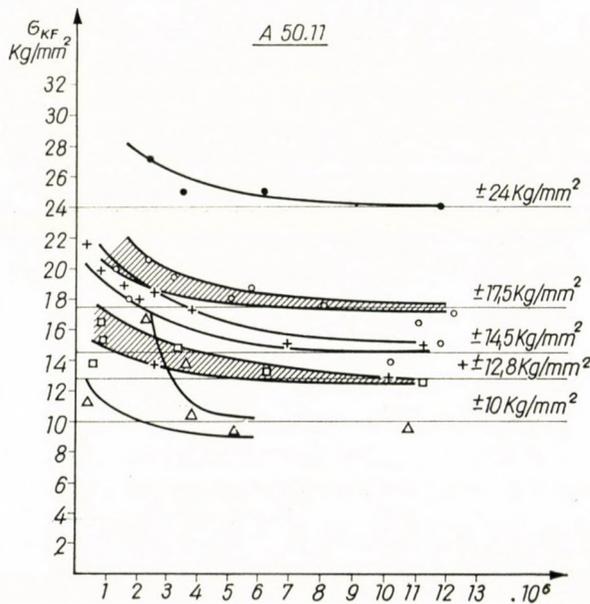


Fig. 2

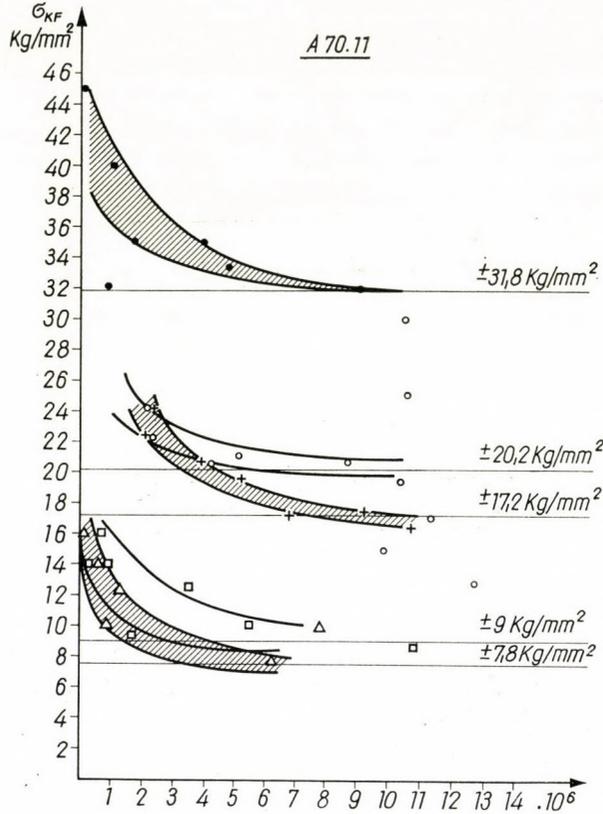


Fig. 3

Table I

	A 50.11	A 70.11
σ_F kg/mm ²	28	41
σ_B kg/mm ²	53	76
δ_{10} %	16	8
ψ %	45	28

	$\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$	$\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$
standard polished	$\sigma_{kh} = \pm 24$	$\sigma_{kh} = \pm 31,5$
runout keyhole	$\sigma_{kh} = \pm 17,5$,, $\beta_k = 1,4$	$\sigma_{kh} = \pm 20,2$,, $\beta_k = 1,57$
sunk keyhole	$\sigma_{kh} = \pm 14,5$,, $\beta_k = 1,7$	$\sigma_{kh} = \pm 17,0$,, $\beta_k = 1,87$
sunk keyhole with circumferential notch	$\sigma_{kh} = \pm 12,8$,, $\beta_k = 1,88$	$\sigma_{kh} = \pm 9,0$,, $\beta_k = 3,56$
sunk keyhole with circumferential notch	$\sigma_{kh} = \pm 10,0$,, $\beta_k = 2,04$	$\sigma_{kh} \sim \pm 7,8$,, $\beta_k \sim 4$

Our investigations demonstrated in accordance with the published data, that:

a) In the case of a repeated purely bending stress the application of sunk keyholes is not advantageous for the slot end made by the slotting end mill, because it is sharper. With the mentioned machine shafts this difference between the fatigue limit of the two kinds of keyholes is less pronounced, for the loading is only partly a bending stress.

In the given case the application of the steel A 70.11 although having a higher static strength is not justified, owing to the transverse stress cumulations this is a bad solution.

b) The transverse stress cumulations further decrease the fatigue limit, their application should if possible be eliminated. The effect of the shallow, rounded slot ensuring the runout of the abrasive stone is negligible.

c) Test data show that the application of highly reinforced carbon steels for attaining lighter structures was a failure due to the increase of notch sensitivity. For this purpose a steel with high fatigue limit and low notch sensitivity would be satisfactory. A steel with low titanium content elaborated at the *Institute of Mechanical Engineering of the Technical University of Budapest* seems to be suitable for this purpose. According to the tests carried out by Mrs. TÖMÖRY the fatigue limit of a notched, nitrided specimen had a value of 25 kg/mm² during a rotating-bar loading with a simultaneous impact energy of 12–14 mkg/cm².

REFERENCES

1. CAZAUD, R.: *Fatigue of Metals*. (translated by A. J. Fenner) Chapman and Hall Ltd. London, 1953.
2. HÄNCHEN, R.: *Neue Festigkeitsberechnung für den Maschinenbau*. Carl Hanser Verl. München, 1956.
3. FÖPPL, O., MAYER, W.: Die Dreh- und Biege-wechselfestigkeit genuteter Probestäbe und einer Keilverbindung und die Erhöhung der Dauerhaltbarkeit durch das Oberflächen-drücken. *Schweiz. Bauztg.* 105 (1935) 159.
4. PETERSON, R. E.: *Fatigue of Shafts Having Keyways*. *Proc. Am. Soc. Test. Mat.* 1932. 413.
5. PETERSON, R. E.: *Stress Concentration Design Factors*. John Wiley and Sons. Inc. New-York, 1953.
6. NEUBER: *Kerbspannungslehre*. Springer Verlag, Berlin, 1937.

DIE DAUER-PITTINGFESTIGKEIT DER ZAHNRÄDER UND WEGE ZU IHRER ERHÖHUNG*

G. NIEMANN

DR.-ING.,¹ PROFESSOR, TECHNISCHE HOCHSCHULE MÜNCHEN

Der FZG-Pittingtest zur Ermittlung der Dauerflankenfestigkeit von Zahnrädern.

Versuchsergebnisse über den Einfluß von Flankenrauheit, Umfangsgeschwindigkeit, Zahnform, Eingriffswinkel, Überdeckungsgrad, Werkstoffdaten, Ölzähigkeit und Ölart, Schrägungswinkel usw. auf die Dauerpittingfestigkeit der Zahnflanken nach Laufversuchen.

Deutung der Grübchenbildung auf Grund der Versuchsergebnisse.

* Auszug des nicht eingelangten Manuskripts des Verfassers.

DIE STATISCHE UNTERSUCHUNG VON DÜNNWANDIGEN ROHRLEITUNGEN UND ZYLINDERBEHÄLTERN

V. PANC
C. SC., PRAHA

Der vorliegende Beitrag enthält eine Zusammenfassung der Gleichungen und Formeln, die bei der Dimensionierung der durchlaufenden selbsttragenden Rohrleitungen mit elastisch oder plastisch nachgiebigen Stützen Anwendung finden, und eine Theorie der vertikalen und horizontalen Zylinderbehälter mit kugelförmigen Böden. Die abgeleiteten Formeln sind für die Beanspruchung der Konstruktion durch Eigengewicht, radialen gleichmäßigen und hydrostatischen Überdruck, beliebige stetige Belastung und einige Einzellasten arrangiert, und eignen sich auch zur Ermittlung des Einflusses der gleichmäßigen und linear veränderlichen Erwärmung.

Bei dem Verfahren der behandelten Probleme wird zuerst ein Membranzustand und seine Existenzmöglichkeit untersucht. Der Einfluß der Randstörungen dieses Zustandes in den versteiften inneren und gestützten Querschnitten wird dann nach einer Theorie, deren Ausgangshypothesen ein Membranzustand in den Längsschnitten und ein Biegespannungszustand in den Querschnitten der Schale sind, ermittelt.

Wenn die Bedingungen des Membranzustandes nicht erfüllt werden, ist es möglich, zur Lösung der Konstruktion die Theorie der dünnwandigen Stäbe anzuwenden. Im Falle der statisch unbestimmten Unterstützung und allerdings auch bei der Berechnung der Verformung muß man aber immer den Einfluß der Schubverzerrungen der Schalenmittelfläche in Betracht ziehen [2], [3].

1. Die Grundgleichungen des Problems

1.1 — *Der Membranzustand*

Die Lage eines beliebigen Punktes auf der Mittelfläche der behandelten Rotationsschale kann durch zwei dimensionslose Koordinaten

$$\zeta = \frac{z}{R}, \quad \varphi = \frac{s}{R} \quad (1.1)$$

bestimmt werden. Die Gleichgewichtsbedingungen des abgetrennten Elements der Schale (Abb. 1a) nehmen dann folgende Form

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} + \frac{R}{h} p_z = 0, \quad \frac{\partial \sigma_s}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau}{\partial \zeta} + \frac{R}{h} p_s = 0, \quad \sigma_s + \frac{R}{h} p_n = 0 \quad (1.2)$$

an. Hieraus folgt, daß für den Anwendungsbereich der Membrantheorie gewisse nötige Bedingungen, die die Eigenschaften der Belastungsfunktionen $p_z(\psi, \varphi)$,

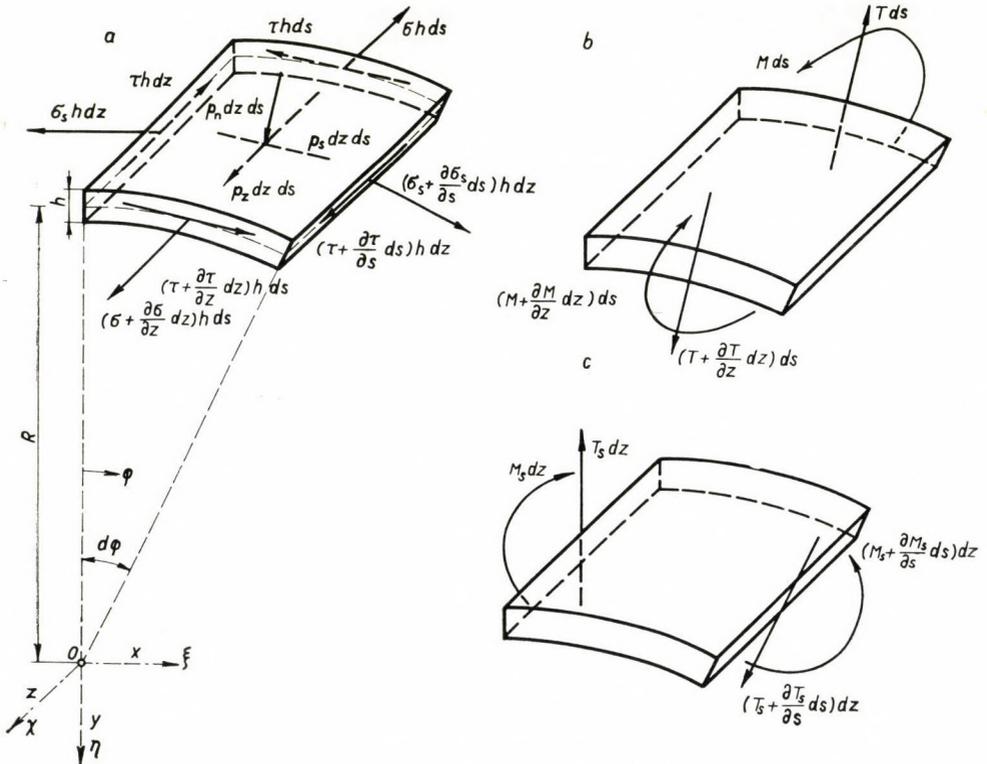


Abb. 1. Die Belastung des abgetrennten Schalelements

$p_s(\psi, \varphi)$ und $p_n(\psi, \varphi)$ betreffen, gelten müssen. In diesen Funktionen wird die Koordinate ζ durch die unabhängige Variable ψ mit derselben Bedeutung ($\psi = \zeta$) ersetzt. Jetzt kann man durch Integration der Gleichungen (1.2) alle inneren Kräfte der Schale bis auf die zwei beliebigen Anfangsfunktionen $\tau_0(\varphi)$ und $\sigma_0(\varphi)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= -\frac{R}{h} p_n, \quad \tau = \tau_0 + \frac{R}{h} \int_0^{\psi=\zeta} \left(\frac{\partial p_n}{\partial \varphi} - p_s \right) d\varphi, \\ \sigma &= \sigma_0 - \frac{d\tau_0}{d\varphi} \zeta - \frac{R}{h} \left[\int_0^{\psi=\zeta} p_z d\varphi + \frac{d}{d\varphi} \int_0^{\psi=\zeta} \left(\frac{\partial p_n}{\partial \varphi} - p_s \right) (\zeta - \psi) d\varphi \right]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Zur Ermittlung der unbekanntenen Anfangsfunktionen können nur im Falle der statisch bestimmten Unterstützung, die z. B. bei den auf zwei Stützen gelagerten vertikalen oder auch horizontalen Zylinderbehältern vorkommt [1], ausschließlich die statischen Randbedingungen gebraucht werden. Bei der Untersuchung der durchlaufenden Rohrleitungen muß man aber auch für die Ermittlung des Spannungszustandes die kinematischen Randbedingungen, die in den Stützenquerschnitten vorgeschrieben werden, in Betracht ziehen. Diese Stützenquerschnittsbedingungen können keinesfalls durch die Clapeyronsche Gleichung, die die Schubverzerrungen der Mittelfläche vernachlässigt, ersetzt werden.

Wenn wir die Bezeichnungen $u(\zeta, \varphi)$ [$v(\zeta, \varphi)$ und $w(\zeta, \varphi)$] für die Komponenten des Vektors der elastischen Verschiebung irgendeines Punktes der Schalenmittelfläche in der Richtung der Konstruktionsachse (der Tangente zur Querschnittsmittellinie und der inneren Normalen) einführen, dann gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \zeta} &= \frac{R}{E} (\sigma - \nu \sigma_s) + R \alpha^0 (t^0 + \Delta t^0 \cos \varphi), \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} - w &= \frac{R}{E} (\sigma_s - \nu \sigma) + R \alpha^0 (t^0 + \Delta t^0 \cos \varphi), \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} &= \frac{R}{G} \tau,\end{aligned}\tag{1.4}$$

wobei die Elastizitätsmodule E, G und die Querdehnungszahl ν durch die bekannte Formel

$$G = \frac{1}{2(1 + \nu)} E$$

verbunden sind. In den Gleichungen (1.4) bedeutet weiter α^0 den Temperaturausdehnungskoeffizienten des Materials und für die Temperaturparameter t^0 und Δt^0 gilt unter Voraussetzung der linear veränderlichen Erwärmung nach der Querschnittshöhe

$$t^0 = \frac{1}{2} (t_1^0 + t_2^0), \quad \Delta t^0 = \frac{1}{2} (t_1^0 - t_2^0); \tag{1.5}$$

hier bedeutet t_1^0 (t_2^0) die Erwärmung der oberen (unteren) Faser der Schalenmittelfläche.

Setzen wir die Funktionen (1.3) in die Gleichungen (1.4) ein, so erhalten wir durch Integration

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 + R\alpha^0 (t^0 + \Delta t^0 \cos \varphi) \zeta + \frac{R}{E} \left\{ \sigma_0 \zeta - \frac{1}{2} \frac{d\tau_0}{d\varphi} \zeta^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{R}{h} \left[\nu \int_0^{\psi=\zeta} p_n d\psi - \int_0^{\psi=\zeta} p_z (\zeta - \psi) d\psi - \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \int_0^{\psi=\zeta} \left(\frac{\partial p_n}{\partial \varphi} - p_s \right) (\zeta - \psi)^2 d\psi \right] \right\}, \\
 v &= v_0 - \frac{du_0}{d\varphi} \zeta + \frac{1}{2} R\alpha^0 \Delta t^0 \zeta^2 \sin \varphi + \frac{R}{E} \left\{ 2(1 + \nu) \tau_0 \zeta - \frac{1}{2} \frac{d\sigma_0}{d\varphi} \zeta^2 + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{6} \frac{d^2 \tau_0}{d\varphi^2} \zeta^3 + \frac{R}{h} \left[-\nu \frac{d}{d\varphi} \int_0^{\psi=\zeta} p_n (\zeta - \psi) d\psi + \right. \\
 &\quad + 2(1 + \nu) \int_0^{\psi=\zeta} \left(\frac{\partial p_n}{\partial \varphi} - p_s \right) (\zeta - \psi) d\psi + \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \int_0^{\psi=\zeta} p_z (\zeta - \psi)^2 d\psi + \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{6} \frac{d^2}{d\varphi^2} \int_0^{\psi=\zeta} \left(\frac{\partial p_n}{\partial \varphi} - p_s \right) (\zeta - \psi)^3 d\psi \right] \right\}, \tag{1.6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{dv_0}{d\varphi} - \frac{d^2 u_0}{d\varphi^2} \zeta - R\alpha^0 \left[t^0 + \Delta t^0 \left(1 - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \cos \varphi \right] + \\
 &\quad + \frac{R}{E} \left\{ \nu \sigma_0 + (2 + \nu) \frac{d\tau_0}{d\varphi} \zeta - \frac{1}{2} \frac{d^2 \sigma_0}{d\varphi^2} \zeta^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 \tau_0}{d\varphi^3} \zeta^3 + \right. \\
 &\quad + \frac{R}{h} \left[p_n - \nu \int_0^{\psi=\zeta} p_z d\psi - \nu \frac{d^2}{d\varphi^2} \int_0^{\psi=\zeta} p_n (\zeta - \psi) d\psi + \right. \\
 &\quad + (2 + \nu) \frac{d}{d\varphi} \int_0^{\psi=\zeta} \left(\frac{\partial p_n}{\partial \varphi} - p_s \right) (\zeta - \psi) d\psi + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \int_0^{\psi=\zeta} p_z (\zeta - \psi)^2 d\psi + \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{6} \frac{d^3}{d\varphi^3} \int_0^{\psi=\zeta} \left(\frac{\partial p_n}{\partial \varphi} - p_s \right) (\zeta - \psi)^3 d\psi \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Diese Formeln enthalten weitere zwei unbekannte Anfangsfunktionen $u_0(\varphi)$ und $v_0(\varphi)$, die die Verschiebungskomponenten u und v im Anfangsquerschnitt definieren. Der Membranspannungszustand und die diesbezügliche Verformung sind daher durch die Beziehungen (1.3) und (1.6) bis auf die vier unbekanntenen Anfangsfunktionen bestimmt.

Nach der Form der Funktionen (1.6) kann man eine notwendige Bedingung für die Existenzmöglichkeit des Membranzustandes feststellen: Die Ste-

tigkeit und Begrenztheit der Verformung erfordert offenbar auch die Stetigkeit und Begrenztheit der Funktionen

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} P_z(\psi, \varphi), \quad \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} P_s(\psi, \varphi), \quad \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} P_n(\psi, \varphi) \quad (1.7)$$

im ganzen untersuchten Bereiche.

1.1.1 — Die Randbedingungen bei dem Membranzustande

Zur Bestimmung der unbekanntenen Anfangsfunktionen $\tau_0(\varphi)$, $\sigma_0(\varphi)$, $u_0(\varphi)$ und $v_0(\varphi)$ des Membranzustandes benützt man die Randbedingungen, die in den gestützten oder freien Querschnitten vorgeschrieben werden.

Wir betrachten ein beiderseits vollkommen eingespanntes Rohrleitungsfeld. In diesem Falle müssen die Funktionen (1.6) in beiden Stützenquerschnitten a, b die Bedingungen

$$u_a \equiv 0, \quad u_b \equiv 0, \quad v_a \equiv 0, \quad v_b \equiv 0 \quad (1.8)$$

erfüllen. Die Identitäten (1.8) bieten offenbar die nötige und ausreichende Anzahl der Gleichungen zur Ermittlung der unbekanntenen Anfangsfunktionen. Wenn einer aus den beiden Randquerschnitten (z. B. b) so gelagert ist, daß seine Drehung um die Achsen O_x, O_y unmöglich, aber seine parallele Verschiebung (Dilatation) in Richtung der Rohrleitungsachse O_z möglich ist, dann nehmen die Randbedingungen folgende Form an:

$$u_a \equiv 0, \quad \oint \sigma_b d\varphi = 0, \quad \oint u_b \sin \varphi d\varphi = 0, \quad \oint u_b \cos \varphi d\varphi = 0, \quad v_a \equiv 0, \quad v_b \equiv 0. \quad (1.9)$$

Zur Vereinfachung der folgenden Beziehungen werden wir voraussetzen, daß die Resultante der gesamten äußeren Belastung in einer der Symmetrieebenen (z. B. O_{yz}) wirkt. Durch diese Voraussetzung wird zwar der Fall der Torsion ausgeschlossen, aber die Drillung kommt bei den untersuchten Konstruktionen allerdings nur selten vor und kann verhältnismäßig einfach ermittelt werden.

Wenn die Widerlager eines beiderseits eingespannten Feldes plastisch oder elastisch nachgiebig sind, so benützt man anstatt der zwei letzteren Bedingungen (1.8) bzw. (1.9) die Identitäten

$$v_a \equiv \eta_a \sin \varphi, \quad v_b \equiv \eta_b \sin \varphi. \quad (1.10)$$

Die elastische Nachgiebigkeit der Widerlager kann durch die Koeffizienten P_a, P_b

$$P_a = \frac{\eta_a}{Y_a}, \quad P_b = \frac{\eta_b}{Y_b} \quad (1.11)$$

der Herabdrückbarkeit charakterisiert werden, wobei für die Auflagerdrücke Y_a, Y_b beim Membranzustande die Formeln

$$Y_a = + Rh \oint \tau_a \sin \varphi d\varphi, \quad Y_b = - Rh \oint \tau_b \sin \varphi d\varphi \quad (1.12)$$

gelten.

Ähnliche Randbedingungen werden in den Stützenquerschnitten der durchlaufenden Rohrleitung vorgeschrieben. Wenn man mit dem Index l (r) die Größen von der linken (rechten) Seite des beliebigen inneren Stützenquerschnittes i bezeichnet, so müssen in diesem Querschnitt identisch die Gleichungen

$$\sigma_{i,l} \equiv \sigma_{i,r}, \quad u_{i,l} \equiv u_{i,r}, \quad v_{i,l} \equiv v_{i,r} \equiv \eta_i \sin \varphi \quad (1.13)$$

erfüllt werden. Für ein elastisch nachgiebiges Widerlager i nehmen die letzten zwei Bedingungen (1.13) die Form

$$v_{i,l} \equiv v_{i,r} \equiv p_i Rh \sin \varphi \oint (\tau_{i,r} - \tau_{i,l}) \sin \varphi d\varphi \quad (1.14)$$

an. Die vier Identitäten von der Form (1.13), die in jedem inneren Stützenquerschnitt vorgeschrieben sind, und zwei Bedingungen in beiden Randquerschnitten bieten die notwendige und ausreichende Anzahl der Gleichungen, die linear unabhängig sind und deshalb zur eindeutigen Bestimmung der unbekanntenen Anfangsfunktionen des Membranzustandes für die ganze Konstruktion führen.

Aus der Form der letzten Funktion (1.6) und auch aus den Beziehungen dieses Absatzes folgt, daß beim Membranzustande keine beliebigen Randbedingungen für die Verschiebung w erfüllt werden können. Die notwendige und ausreichende Bedingung für die Existenz des Membranzustandes kann man daher wie folgt formulieren: Im ganzen untersuchten Bereich müssen die Funktionen (1.7) stetig und begrenzt sein, die Auflagerung in den Stützenquerschnitten muß die Erfüllung der Randbedingungen für die Verschiebung w ermöglichen, während in allen inneren Stützenquerschnitten der durchlaufenden Rohrleitung oder Behälter die Funktion w stetig sein muß. Dabei ist allerdings nötig, daß die Konstruktion sich im stabilen elastischen Gleichgewichtszustande befindet.

1.2 — Der Halbmembranzustand

Bei den durchlaufenden Rohrleitungen, deren Belastung den nötigen Bedingungen des Membranzustandes genügt, kommen in der Regel im Bereich der versteiften Stützenquerschnitte gewisse Randstörungen des Membranzustandes vor, da hier die Randbedingungen der Verschiebung w nicht erfüllt sind. Diese Randstörungen werden durch spezifische Biegemomente M und Querkräfte T (Abb. 1b) charakterisiert und lassen sich mittels einer Theorie,

die einen Membranzustand in den Längsschnitten und einen Biegespannungszustand in den Querschnitten voraussetzt, ziemlich genau ermitteln. Den erwähnten Spannungszustand werden wir als einen Halbmembranzustand bezeichnen.

Wir betrachten die Gleichgewichtsbedingungen des nach Abb. 1a und 1b belasteten abgetrennten Elements. Dann nimmt die dritte Gleichung (1.2) die Form

$$\sigma_s + \frac{R}{h} p_n + \frac{1}{h} \frac{\partial T}{\partial \zeta} = 0 \quad (1.15)$$

an, während die zwei ersten Bedingungen (1.2) unverändert bleiben. Die Funktionen $M(\zeta, \varphi)$ und $T(\zeta, \varphi)$ sind allerdings durch die Beziehung

$$T = \frac{1}{R} \frac{\partial M}{\partial \zeta} \quad (1.16)$$

verbunden. Durch Integration der Gleichungen (1.15), (1.16) und (1.2) ergeben sich die Formeln

$$\sigma_s = -\frac{R}{h} p_n - \frac{1}{Rh} \frac{\partial^2 M}{\partial \zeta^2}, \quad \tau = F_1(\varphi) + \frac{R}{h} \int_0^{\varphi=\zeta} \left(\frac{\partial p_n}{\partial \varphi} - p_s \right) d\varphi + \frac{1}{Rh} \frac{\partial^2 M}{\partial \zeta \partial \varphi}, \quad (1.17)$$

$$\sigma = F_2(\varphi) - F_1'(\varphi) \zeta - \frac{R}{h} \left[\int_0^{\varphi=\zeta} p_z d\varphi + \frac{d}{d\varphi} \int_0^{\varphi=\zeta} \left(\frac{\partial p_n}{\partial \varphi} - p_s \right) (\zeta - \varphi) d\varphi \right] - \frac{1}{Rh} \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2}.$$

Diese Beziehungen enthalten nun zwei unbekannte Integrationsfunktionen $F_1(\varphi)$, $F_2(\varphi)$, für welche gilt

$$\tau_0 = F_1(\varphi) + \frac{1}{Rh} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial \zeta \partial \varphi} \right)_{\zeta=0}, \quad \sigma_0 = F_2(\varphi) - \frac{1}{Rh} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2} \right)_{\zeta=0}. \quad (1.18)$$

Wir betrachten jetzt solche Temperaturänderungen, bei welchen sich die oberen Fasern der äußeren Oberfläche um t_1^0 und die unteren um t_2^0 erwärmen, während an der Innenoberfläche der Rohrleitung die konstante Temperaturzunahme t_3^0 eintritt. Unter Voraussetzung der linear veränderlichen Temperatur nach der Querschnittshöhe und auch nach der Wanddicke gilt für die Erwärmung t_m^0 der Schalenmittelfläche

$$t_m^0 = t^0 + \Delta t^0 \cos \varphi, \quad (1.19)$$

wobei

$$t^0 = \frac{1}{4} (t_1^0 + t_2^0 + 2t_3^0), \quad \Delta t^0 = \frac{1}{4} (t_1^0 - t_2^0) \quad (1.20)$$

ist. Der Temperaturunterschied $\Delta_h t^0$ der äußeren und inneren Fasern ist durch die Formel

$$\Delta_h t^0 = \bar{t}^0 + \bar{\Delta} t^0 \cos \varphi \quad (1.21)$$

gegeben, wobei

$$\bar{t}^0 = \frac{1}{2} (t_1^0 + t_2^0 - 2t_3^0), \quad \bar{\Delta} t^0 = \frac{1}{2} (t_1^0 - t_2^0) \quad (1.22)$$

ist.

Bei dem vorausgesetzten Spannungszustande ($M_s \equiv 0$) sind die Funktionen der radialen Verschiebung w , des spezifischen Biegemoments M und des Einflusses der Erwärmung durch die Beziehung

$$M = - \frac{Eh^3}{12 R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \frac{Eh^2}{12} \alpha^0 (\bar{t}^0 + \bar{\Delta} t^0 \cos \varphi) \quad (1.23)$$

verbunden. Durch Substitution der zuständigen Ableitungen der Funktion (1.23) in die Formeln (1.17) ergibt sich für den Spannungszustand in der Schalenmittelfläche

$$\sigma_s = - \frac{R}{h} p_n + \frac{Eh^2}{12 R^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^4}, \quad (1.24)$$

$$\tau = F_1(\varphi) + \frac{R}{h} \int_0^{\psi=\zeta} \left(\frac{\partial p_n}{\partial \varphi} - p_s \right) d\psi - \frac{Eh^2}{12 R^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^3 \partial \varphi},$$

$$\begin{aligned} \sigma = F_2(\varphi) - F_1'(\varphi) \zeta - \frac{R}{h} \left[\int_0^{\psi=\zeta} p_z d\psi + \frac{d}{d\varphi} \int_0^{\psi=\zeta} \left(\frac{\partial p_n}{\partial \varphi} - p_s \right) (\zeta - \psi) d\psi \right] + \\ + \frac{Eh^2}{12 R^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^2 \partial \varphi^2} + \frac{Eh}{12 R} \alpha^0 \bar{\Delta} t^0 \cos \varphi \end{aligned}$$

und aus den Beziehungen (1.24) und (1.4) folgt für die Verschiebungskomponenten

$$\begin{aligned} u = F_3(\varphi) + R\alpha^0 \left[t^0 + \left(\Delta t^0 + \frac{h}{12 R} \bar{\Delta} t^0 \right) \cos \varphi \right] \zeta + \frac{R}{E} \left\{ F_2(\varphi) \zeta - \right. \\ - \frac{1}{2} F_1'(\varphi) \zeta^2 + \frac{R}{h} \left[\int_0^{\psi=\zeta} p_n d\psi - \int_0^{\psi=\zeta} p_z (\zeta - \psi) d\psi - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \int_0^{\psi=\zeta} \left(\frac{\partial p_n}{\partial \varphi} - p_s \right) (\zeta - \psi)^2 d\psi \right] \left. \right\} + \\ + \frac{h^2}{12 R^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \zeta \partial \varphi^2} - \nu \frac{\partial^3 w}{\partial \zeta^3} \right), \quad (1.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v = & F_4(\varphi) - F_3'(\varphi)\zeta + \frac{1}{2} Ra^0 \left(\Delta t^0 + \frac{h}{12R} \bar{\Delta} t^0 \right) \zeta^2 \sin \varphi + \\
& + \frac{R}{E} \left\{ 2(1 + \nu) F_1(\varphi)\zeta - \frac{1}{2} F_2'(\varphi)\zeta^2 + \frac{1}{6} F_1''(\varphi)\zeta^3 + \right. \\
& + \frac{R}{h} \left[-\nu \frac{d}{d\varphi} \int_0^{\psi=\zeta} p_n(\zeta - \psi) d\psi + 2(1 + \nu) \int_0^{\psi=\zeta} \left(\frac{\partial p_n}{\partial \varphi} - p_s \right) (\zeta - \psi) d\psi + \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \int_0^{\psi=\zeta} p_z(\zeta - \psi)^2 d\psi + \frac{1}{6} \frac{d^2}{d\varphi^2} \int_0^{\psi=\zeta} \left(\frac{\partial p_n}{\partial \varphi} - p_s \right) (\zeta - \psi)^3 d\psi \right] \left. \right\} - \\
& - \frac{h^2}{12R^2} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial \zeta^2 \partial \varphi} \right], \tag{1.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^4 w + \frac{12R^2}{h^2} w = & - \frac{12R^3}{h^2} \alpha^0 \left[t^0 + \Delta t^0 \left(1 - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \cos \varphi - \right. \\
& - \left. \frac{h}{12R} \bar{\Delta} t^0 \left(\nu + \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \cos \varphi \right] + \frac{12R^2}{h^2} [F_4'(\varphi) - F_3''(\varphi)\zeta] + \\
& + \frac{12R^3}{Eh^2} \left\{ \nu F_2(\varphi) + (2 + \nu) F_1'(\varphi)\zeta - \frac{1}{2} F_2''(\varphi)\zeta^2 + \frac{1}{6} F_1'''(\varphi)\zeta^3 + \right. \\
& + \frac{R}{h} \left[p_n - \nu \int_0^{\psi=\zeta} p_z d\psi - \nu \frac{d^2}{d\varphi^2} \int_0^{\psi=\zeta} p_n(\zeta - \psi) d\psi + \right. \\
& + (2 + \nu) \frac{d}{d\varphi} \int_0^{\psi=\zeta} \left(\frac{\partial p_n}{\partial \varphi} - p_s \right) (\zeta - \psi) d\psi + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \int_0^{\psi=\zeta} p_z(\zeta - \psi)^2 d\psi + \\
& + \left. \frac{1}{6} \frac{d^3}{d\varphi^3} \int_0^{\psi=\zeta} \left(\frac{\partial p_n}{\partial \varphi} - p_s \right) (\zeta - \psi)^3 d\psi \right] \left. \right\}, \tag{1.27}
\end{aligned}$$

wobei $F_3(\varphi)$ und $F_4(\varphi)$ weitere zwei Integrationsfunktionen bedeuten und mit ∇^4 der Laplacesche Operator vierter Ordnung in den Variablen ζ und φ bezeichnet ist

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial \zeta^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \zeta^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4}. \tag{1.28}$$

Die Beziehung (1.27) ist also eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung für die Verschiebung w . Diese Gleichung hat dieselbe Form wie die Grundgleichung der Plattenbiegung auf elastisch nachgiebiger Unterlage.

1.2.1 — Die Randbedingungen bei dem Halbmembranzustande

In jedem vollkommen eingespannten Querschnitt i müssen bei dem vorausgesetzten Halbmembranzustande vier kinematische Randbedingungen

$$u_i \equiv 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)_i \equiv 0, \quad v_i \equiv 0, \quad w_i \equiv 0 \quad (1.29)$$

erfüllt werden. Zur Vergleichung führen wir die Randbedingungen vor, die im freien Querschnitt i vorgeschrieben sind

$$\sigma_i \equiv 0, \quad \tau_i \equiv 0, \quad M_i \equiv 0, \quad T_i = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M}{\partial \zeta} \right)_i \equiv 0. \quad (1.30)$$

Die Identitäten (1.30) haben also den Charakter der rein statischen Bedingungen. Da aber bei dem Halbmembranzustande bereits die Belastung des abgetrennten Elements statisch unbestimmt ist, muß man auch im Falle der statisch bestimmten Auflagerung der Konstruktion in der Aufgabe der Spannungszustandsermittlung von dem allgemeinen Integral der Gleichung (1.27) ausgehen.

Wenn der Querschnitt i so gelagert ist, daß seine Verdrehung um die Achsen O_x, O_y verhindert, aber seine parallele Verschiebung in Richtung der Konstruktionsachse O_z möglich ist, so nehmen die Randbedingungen folgende Form an:

$$\oint \sigma_i d\varphi = 0, \quad \oint u_i \sin \varphi d\varphi = 0, \quad \oint u_i \cos \varphi d\varphi = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)_i \equiv 0, \quad v_i \equiv 0, \quad w_i \equiv 0. \quad (1.31)$$

Weiter werden wir wieder voraussetzen, daß die Resultante der gesamten äußeren Belastung in der Symmetrieebene O_{yz} wirkt. Wenn im Widerlager i eine Verschiebung η_i in der Richtung der Achse O_y vorkommt, so ersetzen wir die zwei letzten Identitäten (1.29) bzw. (1.31) durch die Bedingungen

$$v_i \equiv \eta_i \sin \varphi, \quad w_i \equiv \eta_i \cos \varphi. \quad (1.32)$$

Im Falle des elastisch nachgiebigen Widerlagers i gilt für die Verschiebung η_i

$$\eta_i = \pm p_i \left[Rh \oint \tau_i \sin \varphi d\varphi + \oint \left(\frac{\partial M}{\partial \zeta} \right)_i \cos \varphi d\varphi \right]. \quad (1.33)$$

Das positive (negative) Vorzeichen des Ausdruckes (1.33) benutzt man für den Stützenquerschnitt an der linken (rechten) Seite. Das zweite Glied der Größe (1.33) drückt den Einfluß der spezifischen Querkräfte $T(\zeta_i, \varphi)$ aus.

Wenn man wieder mit dem Index $l(r)$ die Größen auf der linken (rechten) Seite des beliebigen inneren Stützenquerschnittes i der durchlaufenden Rohr-

leitung bezeichnet, müssen hier acht Bedingungen

$$\begin{aligned} \sigma_{i,l} &\equiv \sigma_{i,r}, & \mathbf{u}_{i,l} &\equiv \mathbf{u}_{i,r}, & \mathbf{v}_{i,l} &\equiv \mathbf{v}_{i,r} \equiv \eta_i \sin \varphi, \\ M_{i,l} &\equiv M_{i,r}, & \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)_{i,l} &\equiv \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)_{i,r}, & \mathbf{w}_{i,l} &\equiv \mathbf{w}_{i,r} \equiv \eta_i \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.34)$$

erfüllt werden. Im Falle des elastisch nachgiebigen Widerlagers i setzen wir in die Identitäten (1.34) ein:

$$\eta_i = p_i \left\{ Rh \oint (\tau_{i,r} - \tau_{i,l}) \sin \varphi d\varphi + \oint \left[\left(\frac{\partial M}{\partial \zeta} \right)_{i,r} - \left(\frac{\partial M}{\partial \zeta} \right)_{i,l} \right] \cos \varphi d\varphi \right\}. \quad (1.35)$$

In den Stützenquerschnitten muß man gewöhnlich mächtige Versteifungen durchführen. Die Aufgabe einer solchen Versteifung besteht darin, daß mittels ihrer Biegesteifigkeit die konzentrierte Auflagerreaktion der Schale hauptsächlich in der Form des entsprechenden Schubflusses übergeben wird. Oft kann man annehmen, daß die Stützenquerschnittsversteifung gegen ihre Biegung und Drillung vollkommen starr ist. Dann gilt für die Verdrehung $\varphi_{x,i}$ des Stützenquerschnittes i um die Achse O_x

$$\varphi_{x,i} = - \frac{1}{\pi R} \oint \mathbf{u}_{i,l} \cos \varphi d\varphi = - \frac{1}{\pi R} \oint \mathbf{u}_{i,r} \cos \varphi d\varphi. \quad (1.36)$$

In diesem Falle benützt man daher anstatt der Identitäten (1.34) die Bedingungen

$$\begin{aligned} \sigma_{i,l} &\equiv \sigma_{i,r}, & \mathbf{u}_{i,l} &\equiv \mathbf{u}_{i,r}, & \mathbf{v}_{i,l} &\equiv \mathbf{v}_{i,r} \equiv \eta_i \sin \varphi, \\ \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)_{i,l} &\equiv \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)_{i,r} \equiv \varphi_{x,i} \cos \varphi, & \mathbf{w}_{i,l} &\equiv \mathbf{w}_{i,r} \equiv \eta_i \cos \varphi, \end{aligned} \quad (1.37)$$

wobei für die Verdrehung $\varphi_{x,i}$ die Formel (1.36) gilt. Den Unterschied zwischen den spezifischen Biegemomenten an der linken und rechten Seite muß dann allerdings die Stützenquerschnittsversteifung mittels ihrer Torsionssteifigkeit übernehmen.

Die Randbedingungen der Funktionen v und w drücken nach den vorstehenden Identitäten die Annahme der Nichtdeformierbarkeit der Aussteifungen in ihren eigenen Ebenen aus. Wenn wir diese Voraussetzung fallen lassen, erhöht sich allerdings die Mühseligkeit der numerischen Berechnung.

Wir bezeichnen $v_{i,v}$ und $w_{i,v}$ die auf die Schalenmittelfläche bezogenen Komponenten der elastischen Verformung der Stützenquerschnittsaussteifung i . Dann nehmen die Randbedingungen der Funktionen v und w die Form

$$\mathbf{v}_{i,l} \equiv \mathbf{v}_{i,r} \equiv \eta_i \sin \varphi + \mathbf{v}_{i,v}, \quad \mathbf{w}_{i,l} \equiv \mathbf{w}_{i,r} \equiv \eta_i \cos \varphi + \mathbf{w}_{i,v} \quad (1.38)$$

an. Die genaue Berechnung dieser Identitäten ist nur in speziellen Fällen möglich, wenn sich die Komponenten $v_{i,v}$ und $w_{i,v}$ in allgemeiner Form ausdrücken lassen. In komplizierten Randwertaufgaben ist es nötig, ein Iterationsverfahren zu benutzen.

1.3 — Die Stabilität der Konstruktion

Wenn die Rohrleitung so beansprucht wird, daß die überwiegenden Belastungskomponenten die Funktionen p_n und p_s bilden, so läßt sich der kritische Wert der Drucknormalspannung σ_s nach der Arbeit [4] aus der Formel

$$\sigma_{s,krit.} = E \left\{ \frac{h^2}{12R^2} (n^2 - 1) + \frac{\pi^4 R^4}{l^2 n^2 (n^2 - 1) [2(1 + \nu) \pi^2 R^2 + n^2 l^2]} \right\} \quad (1.39)$$

bestimmen, wo l die Entfernung der Aussteifungen bedeutet. In diese Formel, die im Falle der freien Deplanation der versteiften Querschnitte gilt, muß man einen Wert von n ($n \geq 2$) einsetzen, der zum Minimum der Spannung σ_s führt. Wenn die versteiften Querschnitte vollkommen eingespannt sind, so daß ihre Deplanation völlig verhindert wird, so läßt sich zur Ermittlung des kritischen Wertes $\sigma_{s,krit}$ eine transzendente Gleichung, die in der Arbeit [4] entwickelt wurde, anwenden. Weil diese beiden Formeln nach einer linearen Theorie abgeleitet wurden, verlangt man im Hinblick auf die experimentellen Ergebnisse wenigstens die dreimalige Beulsicherheit.

Eine genauere theoretische Ermittlung der Beulung läßt sich nach der Theorie der großen Durchbiegungen ausführen [5, 6, 7]. Die Lösung der Gleichungen dieser Theorie ist aber immer mühevoll und zeitraubend.

2. Die Beanspruchung und Verformung bei dem Membranzustande

2.1 — Die waagrechte Rohrleitung unter der Belastung durch Eigengewicht, radialen gleichmäßigen und hydrostatischen Überdruck

Wir bezeichnen mit p_0 den gleichmäßigen Innendruck, mit γ das Raumgewicht der Flüssigkeit, die die Rohrleitung oder den Behälter ausfüllt, und mit g das Eigengewicht der Wand je Einheit der Schalenmittelfläche. Im eingeführten Koordinatensystem nach Abb. 1a gilt dann

$$p_n = -p_0 - \gamma R(1 - \cos \varphi) + g \cos \varphi, \quad p_s = g \sin \varphi, \quad p_z \equiv 0. \quad (2.1)$$

Setzen wir die entsprechenden Ableitungen von den Funktionen (2.1) in die Formeln (1.3) ein, so erhalten wir für den Spannungszustand

$$\sigma_s = \frac{R}{h} [p_0 + \gamma R - (\gamma R + g) \cos \varphi], \quad \tau = \frac{R}{h} (\gamma R + 2g) (A - \zeta) \sin \varphi, \quad (2.2)$$

$$\sigma = B_1 + \frac{R}{h} (\gamma R + 2g) \left(B_2 - A\zeta + \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \cos \varphi.$$

Der Einfluß der Temperaturänderungen wird selbständig ermittelt werden. Dann ergibt sich aus den Beziehungen (1.6) für die Verschiebungskomponenten

$$u = \frac{R}{E} \left\{ C_1 + \left[B_1 - \nu \frac{R}{h} (p_0 + \gamma R) \right] \zeta \right\} + \frac{R^2}{Eh} (\gamma R + 2g) \left[C_2 + \right. \\ \left. + \left(B_2 + \nu \frac{\gamma R + g}{\gamma R + 2g} \right) \zeta - \frac{1}{2} A\zeta^2 + \frac{1}{6} \zeta^3 \right] \cos \varphi, \\ v = \frac{R^2}{Eh} (\gamma R + 2g) \left\{ D + [C_2 + 2(1 + \nu) A] \zeta + \frac{1}{2} \left(B_2 - 2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \nu \frac{\gamma R + 3g}{\gamma R + 2g} \right) \zeta^2 - \frac{1}{6} A\zeta^3 + \frac{1}{24} \zeta^4 \right\} \sin \varphi, \quad (2.3) \\ w = \frac{R}{E} \left[\nu B_1 - \frac{R}{h} (p_0 + \gamma R) \right] + \frac{R^2}{Eh} (\gamma R + 2g) \left\{ D + \nu B_2 + \right. \\ \left. + \frac{\gamma R + g}{\gamma R + 2g} + [C_2 + (2 + \nu) A] \zeta + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(B_2 - 2 - \nu \frac{g}{\gamma R + 2g} \right) \zeta^2 - \frac{1}{6} A\zeta^3 + \frac{1}{24} \zeta^4 \right\} \cos \varphi.$$

Die Formeln (2.2) und (2.3) enthalten die Integrationskonstanten A , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 und D , die wir mit Benutzung von Randbedingungen bestimmen können.

2.1.1 — Das beiderseits eingespannte Rohrfeld

Wir betrachten ein beiderseits eingespanntes Rohrfeld und nehmen an, daß sich die Stützenquerschnitte a , b um die Strecken η_a , η_b in Achsenrichtung O_y verschieben. Nach den Gleichungen (1.8) und (1.10) lauten nun die Randbedingungen

$$u_a \equiv 0, \quad u_b \equiv 0, \quad v_a \equiv \eta_a \sin \varphi, \quad v_b \equiv \eta_b \sin \varphi. \quad (2.4)$$

Die Stützweite sei l . Dann folgt aus den Beziehungen (2.2), (2.3) und (2.4) für den Spannungszustand

$$\tau = \left[\frac{12 ER^2}{24(1 + \nu) R^2 + l^2} \frac{\eta_b - \eta_a}{l} + \frac{\gamma R + 2g}{2h} (l - 2z) \right] \sin \varphi,$$

$$\sigma = \nu \frac{R}{h} (p_0 + \gamma R) + \left[\frac{6ER}{24(1+\nu)R^2 + l^2} \frac{\eta_b - \eta_a}{l} (l - 2z) + \frac{\gamma R + 2g}{12Rh} (l^2 - 6lz + 6z^2) - \nu \frac{R}{h} (\gamma R + g) \right] \cos \varphi, \quad (2.5)$$

während für die Normalspannung σ_s die erste Formel (2.2) gilt. Die zugehörigen Verschiebungskomponenten ergeben sich gemäß (2.3)

$$u = z(l - z) \left[\frac{6R}{24(1+\nu)R^2 + l^2} \frac{\eta_b - \eta_a}{l} + \frac{\gamma R + 2g}{12ERh} (l - 2z) \right] \cos \varphi,$$

$$v = \left\{ \eta_a + \frac{1}{24(1+\nu)R^2 + l^2} \frac{\eta_b - \eta_a}{l} z [z(3l - 2z) + 24(1+\nu)R^2] + \frac{\gamma R + 2g}{12ER^2h} z(l - z) [z(l - z) + 24(1+\nu)R^2] \right\} \sin \varphi, \quad (2.6)$$

$$w = - (1 - \nu^2) \frac{R^2}{Eh} (p_0 + \gamma R) + \left\{ \eta_a + \frac{1}{24(1+\nu)R^2 + l^2} \frac{\eta_b - \eta_a}{l} [z^2(3l - 2z) + 12(2+\nu)R^2z + 6\nu R^2l] + \frac{\gamma R + 2g}{24ER^2h} [z^2(l - z)^2 + 12(2+\nu)R^2z(l - z) + 2\nu R^2l^2] + (1 - \nu^2) \frac{R^2}{Eh} (\gamma R + g) \right\} \cos \varphi.$$

Aus den letzten Beziehungen (2.3) und (2.6) folgt, daß wir über keinen Freiwert verfügen, um auch die Bedingungen $w_a \equiv 0$, $w_b \equiv 0$ erfüllen zu können, die somit mit der Aufrechterhaltung des reinen Membranzustandes nicht verträglich sind. Diese Lagerungsbedingungen setzen gewisse Randverzerrungen voraus, die bereits von Biegewirkungen begleitet sind. Wenn das Verhältnis $\frac{R}{l}$ genügend klein ist $\left(\frac{R}{l} \leq 0,5 \right)$, wobei mit l die Stützweite oder die Entfernung der Spanten bezeichnet ist), klingt bei dünnwandigen Rohren $\left(\frac{R}{h} \geq 30 \right)$ der Einfluß dieser Randstörungen von den Spanten weg rasch ab, so daß in einiger Entfernung von diesen praktisch der Membranzustand besteht. Ein Verfahren zur Erfassung der von den Randstörungen verursachten Biegewirkungen wird im Absatze 3 vorgeführt werden.

Aus der zweiten Formel (2.6) findet man die größte Durchbiegung in der Feldmitte $z = \frac{l}{2}$

$$\max \eta = \frac{1}{2}(\eta_a + \eta_b) + \lambda_1 \frac{l^4}{384 ER^2 h} (\gamma R + 2g), \quad \lambda_1 = 1 + 96(1+\nu) \frac{R^2}{l^2}. \quad (2.7)$$

Der Koeffizient λ_1 drückt also die von den Schubverzerrungen verursachte Vergrößerung der maximalen Durchbiegung aus, die sich aus der technischen Theorie der Biegung ergibt. In der Tabelle 1 sind die Werte des Koeffizienten λ_1 für verschiedene Verhältnisse $\frac{R}{l}$ angegeben.

Tabelle 1

Die Werte des Koeffizienten λ_1 nach der Formel (2.7)
($\nu = 0,2963$)

$\frac{R}{l}$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05
λ_1	32,111	20,911	12,200	5,978	2,244	2,008	1,796	1,610	1,448	1,311

Wenn die beiden Widerlager elastisch nachgiebig sind, ergibt sich aus den Beziehungen (1.11) und (1.12)

$$\eta_i = \frac{1}{2} \pi p_i R l (\gamma R + 2g) \frac{24(1+\nu) R^2 l + l^3 + 24 \pi p_k E R^3 h}{24(1+\nu) R^2 l + l^3 + 12\pi(p_a + p_b) E R^3 h}. \quad (2.8)$$

In die Formeln (2.8) setzt man $i = a, b$; $k = b, a$ ein.

Im Falle der Auflagerung, die durch die drei ersten Bedingungen (1.9) und die Identitäten (1.10) gekennzeichnet wird, läßt man in der zweiten Formel (2.5) das erste Glied $\nu \frac{R}{h} (p_0 + \gamma R)$ aus, der ersten Beziehung (2.6) fügt man die Funktion $\Delta u = -\frac{\nu}{E} \frac{R}{h} (p_0 + \gamma R) z$ bei und im ersten Glied der dritten Formel (2.6) fällt ν^2 das Quadrat der Querdehnungszahl fort.

2.1.2 — Die durchlaufende Rohrleitung

Wir bezeichnen mit dem Index $i(i+1)$ die Integrationskonstanten, die in der Lösung des Feldes $l_i(l_{i+1})$ links (rechts) von der Zwischenstütze i vorkommen. Gemäß den Bedingungen (1.13) müssen in jedem inneren Stützenquerschnitt i die Gleichungen

$$B_{1,i+1} = B_{1,i}, \quad B_{2,i+1} = B_{2,i} - A_i \frac{l_i}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{l_i}{R} \right)^2, \quad C_{1,i+1} = C_{1,i} + \left[B_{1,i} - \nu \frac{R}{h} (p_0 + \gamma R) \right] \frac{l_i}{R},$$

$$C_{2,i+1} = C_{2,i} + \left(B_{2,i} + \nu \frac{\gamma R + g}{\gamma R + 2g} \right) \frac{l_i}{R} - \frac{1}{2} A_i \left(\frac{l_i}{R} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{l_i}{R} \right)^3, \quad (2.9)$$

$$D_i + [C_{2,i} + 2(1 + \nu) A_i] \frac{l_i}{R} + \frac{1}{2} \left(B_{2,i} - 2 - \nu \frac{\gamma R + 3g}{\gamma R + 2g} \right) \left(\frac{l_i}{R} \right)^2 - \\ - \frac{1}{6} A_i \left(\frac{l_i}{R} \right)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{l_i}{R} \right)^4 = \frac{Eh}{R^2(\gamma R + 2g)} \eta_i = D_{i+1}$$

erfüllt werden. Wenn alle Stützen (mit Ausnahme von einer) in der waagrechtlichen Richtung frei verschiebbar sind, dann gilt freilich

$$B_{1,i+1} = B_{1,i} = 0, \quad (2.10)$$

und in der dritten Gleichung (2.9) fällt die Konstante $B_{1,i}$ fort.

Für ein elastisch nachgiebiges Widerlager i setzt man in die zwei letzten Gleichungen (2.9) ein:

$$\eta_i = \pi p_i R^2 (\gamma R + 2g) \left(A_{i+1} - A_i + \frac{l_i}{R} \right). \quad (2.11)$$

Wenn sich die untersuchte Konstruktion unter der Belastung eines äußeren konstanten oder hydrostatischen Überdrucks befindet, so gelten die abgeleiteten Formeln mit dem umgekehrten Vorzeichen bei den Größen p_0 bzw. γ .

2.2 — Die schiefe Rohrleitung unter der Belastung des Eigengewichts und eines hydrostatischen Überdrucks

Wir betrachten eine Rohrleitung, deren Achse mit der Horizontale den Winkel α einschließt, unter der Belastung durch das Eigengewicht und den inneren hydrostatischen Überdruck der Flüssigkeit von Raumgewicht γ . Die Druckhöhe in bezug auf die Rohrachse sei d (Abb. 2). Im eingeführten Koordinatensystem gilt dann für die Belastungsfunktionen

$$p_n = -p_0 - \gamma R (\psi \sin \alpha - \cos \alpha \cos \varphi) + g \cos \alpha \cos \varphi, \quad (2.12)$$

$$p_s = g \cos \alpha \sin \varphi, \quad p_z = g \sin \alpha.$$

Das erste Glied p_0 der Funktion p_n drückt die Einwirkung des konstanten radialen Überdrucks aus, der durch die Formel

$$p_0 = \gamma d_0 = \gamma (d'_0 + R \cos \alpha) \quad (2.13)$$

gegeben ist, wobei d_0 (d'_0) die Druckhöhe in bezug auf die Rohrachse (obere Erzeugende) im Anfangsquerschnitt $\psi = \zeta = 0$ bedeutet.

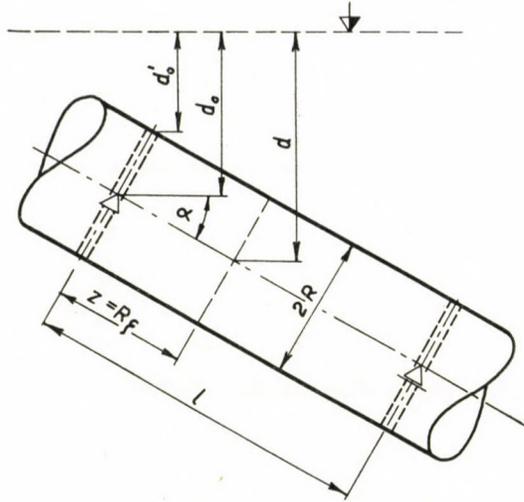


Abb. 2. Die schiefe Rohrleitung

Setzen wir die entsprechenden Funktionen gemäß den Beziehungen (2.12) in die Formeln (1.3) ein, so erhalten wir für den Spannungszustand

$$\begin{aligned}\sigma_s &= \frac{R}{h} [p_0 + \gamma R \zeta \sin \alpha - (\gamma R + g) \cos \alpha \cos \varphi], \\ \tau &= \frac{R}{h} (\gamma R + 2g) (A - \zeta) \cos \alpha \sin \varphi, \\ \sigma &= B_1 - \frac{R}{h} g \zeta \sin \alpha + \frac{R}{h} (\gamma R + 2g) \left(B_2 - A \zeta + \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \cos \alpha \cos \varphi\end{aligned}\quad (2.14)$$

und für die Verschiebungskomponenten ergibt sich aus den Beziehungen (1.6) unter Berücksichtigung von (2.12)

$$\begin{aligned}u &= \frac{R}{E} \left[C_1 + \left(B_1 - \nu \frac{R}{h} p_0 \right) \zeta - \frac{R}{2h} (g + \nu \gamma R) \zeta^2 \sin \alpha \right] + \frac{R^2}{Eh} (\gamma R + \\ &+ 2g) \left[C_2 + \left(B_2 + \nu \frac{\gamma R + g}{\gamma R + 2g} \right) \zeta - \frac{1}{2} A \zeta^2 + \frac{1}{6} \zeta^3 \right] \cos \alpha \cos \varphi, \\ v &= \frac{R^2}{Eh} (\gamma R + 2g) \left\{ D + [C_2 + 2(1 + \nu) A] \zeta + \frac{1}{2} \left(B_2 - 2 - \nu \frac{\gamma R + 3g}{\gamma R + 2g} \right) \zeta^2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{6} A \zeta^3 + \frac{1}{24} \zeta^4 \right\} \cos \alpha \sin \varphi,\end{aligned}\quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}
 w = & \frac{R}{E} \left[\nu B_1 - \frac{R}{h} p_0 - \frac{R}{h} (\gamma R + \nu g) \zeta \sin \alpha \right] + \\
 & + \frac{R^2}{Eh} (\gamma R + 2g) \left\{ D + \nu B_2 + \frac{\gamma R + g}{\gamma R + 2g} + [C_2 + (2 + \nu) A] \zeta + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left(B_2 - 2 - \nu \frac{g}{\gamma R + 2g} \right) \zeta^2 - \frac{1}{6} A \zeta^3 + \frac{1}{24} \zeta^4 \right\} \cos \alpha \cos \varphi .
 \end{aligned}$$

Die Formeln (2.14) und (2.15) enthalten wiederum die sechs unbekanntenen Integrationskonstanten und bilden eine Verallgemeinerung der Beziehungen des Absatzes 2.1, zu denen man nach Einsetzen $\alpha = 0$ übergehen kann.

2.2.1 — Das beiderseits eingespannte Rohrfeld

Wir betrachten ein beiderseits eingespanntes Rohrfeld und setzen voraus, daß sich die Stützenquerschnitte um die Strecken η_a, η_b in Achsenrichtung O_y (d. h. senkrecht zur Rohrleitungsachse) verschieben. Die betrachtete Unterstützung wird durch die Randbedingungen (2.4) gekennzeichnet, aus denen sich nach Einsetzen der Funktionen (2.15) die unbekanntenen Integrationskonstanten ergeben. Die Normalspannung σ_s ist durch die erste Formel (2.14) gegeben und für die Spannungen τ und σ gilt

$$\begin{aligned}
 \tau = & \left[\frac{12 ER^2}{24(1+\nu)R^2 + l^2} \frac{\eta_b - \eta_a}{l} + \frac{\gamma R + 2g}{2h} (l - 2z) \cos \alpha \right] \sin \varphi , \\
 \sigma = & \nu \frac{R}{2h} (2p_0 + \gamma l \sin \alpha) + \frac{g}{2h} (l - 2z) \sin \alpha + \\
 & + \left[\frac{6ER}{24(1+\nu)R^2 + l^2} \frac{\eta_b - \eta_a}{l} (l - 2z) + \right. \\
 & \left. + \frac{\gamma R + 2g}{12Rh} (l^2 - 6lz + 6z^2) \cos \alpha - \nu \frac{R}{h} (\gamma R + g) \cos \alpha \right] \cos \varphi .
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Aus den Beziehungen (2.15) erhalten wir die Verschiebungskomponenten

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{g + \nu \gamma R}{2Eh} z(l - z) \sin \alpha + z(l - z) \left[\frac{6R}{24(1+\nu)R^2 + l^2} \frac{\eta_b - \eta_a}{l} + \right. \\
 & \left. + \frac{\gamma R + 2g}{12ERh} (l - 2z) \cos \alpha \right] \cos \varphi , \\
 v = & \left\{ \eta_a + \frac{1}{24(1+\nu)R^2 + l^2} \frac{\eta_b - \eta_a}{l} z [z(3l - 2z) + 24(1+\nu)R^2] + \right. \\
 & \left. + \frac{\gamma R + 2g}{24ER^2 h} z(l - z) [z(l - z) + 24(1+\nu)R^2] \cos \alpha \right\} \sin \varphi ,
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
 w = & \frac{R}{2Eh} \left\{ -2(1-\nu^2)Rp_0 + [\nu g(l-2z) - \gamma R(2z - \nu^2 l)] \sin \alpha \right\} + \\
 & + \left\{ \eta_a + \frac{1}{24(1+\nu)R^2 + l^2} \frac{\eta_b - \eta_a}{l} [z^2(3l-2z) + 12(2+\nu)R^2 z + 6\nu R^2 l] + \right. \\
 & + \frac{\gamma R + 2g}{24ER^2 h} [z^2(l-z)^2 + 12(2+\nu)R^2 z(l-z) + 2\nu R^2 l^2] \cos \alpha + \\
 & \left. + (1-\nu^2) \frac{R^2}{Eh} (\gamma R + g) \cos \alpha \right\} \cos \varphi .
 \end{aligned}$$

Im Falle, daß die beiden Widerlager in Achsenrichtung O_y elastisch nachgiebig sind, ergibt sich für die Strecken η_a, η_b

$$\eta_i = \frac{1}{2} \pi p_i R l (\gamma R + 2g) \cos \alpha \frac{24(1+\nu)R^2 l + l^3 + 24\pi p_k ER^3 h}{24(1+\nu)R^2 l + l^3 + 12\pi(p_a + p_b)ER^3 h}, \quad (2.18)$$

wobei p_a, p_b die Koeffizienten der elastischen Herabdrückbarkeit in Achsenrichtung O_y bedeuten. In die Formeln (2.18) setzt man $i = a, b$; $k = b, a$ ein.

Wir nehmen jetzt an, daß im unteren Stützenquerschnitt b freie Dilatation möglich ist. Eine solche Auflagerung wird durch die drei ersten Bedingungen (1.9) und Identitäten (1.10) gekennzeichnet. Dann bleiben für die Spannungen σ_s und τ die abgeleiteten Formeln gültig, die zwei ersten Glieder der Formel für die Normalspannung σ werden durch die Funktion

$$\bar{\sigma} = \frac{g}{h} (l-z) \sin \alpha \quad (2.19)$$

ersetzt, und auch die ersten Glieder der ersten und dritten Beziehung (2.17) erhalten die veränderte Form:

$$\begin{aligned}
 \bar{u} &= \frac{1}{2Eh} z \{ [g(2l-z) - \nu \gamma R z] \sin \alpha - 2\nu R p_0 \}, \\
 \bar{w} &= \frac{R}{Eh} \{ [\nu g(l-z) - \gamma R z] \sin \alpha - R p_0 \}.
 \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.2.2 — Die durchlaufende Rohrleitung

Wir benutzen die gleiche Bezeichnung wie im Absatze 2.1.2. Die Stetigkeitsbedingungen von Spannung σ und Verschiebungen u, v liefern

$$B_{1,i+1} = B_{1,i} - \frac{l_i}{h} g \sin \alpha, \quad B_{2,i+1} = B_{2,i} - A_i \frac{l_i}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{l_i}{R} \right)^2,$$

$$\begin{aligned}
 C_{1,i+1} &= C_{1,i} + \left(B_{1,i} - \nu \frac{R}{h} p_{0,i} \right) \frac{l_i}{R} - \frac{R}{2h} (g + \nu \gamma R) \left(\frac{l_i}{R} \right)^2 \sin \alpha, \\
 C_{2,i+1} &= C_{2,i} + \left(B_{2,i} + \nu \frac{\gamma R + g}{\gamma R + 2g} \right) \frac{l_i}{R} - \frac{1}{2} A_i \left(\frac{l_i}{R} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{l_i}{R} \right)^3, \quad (2.21) \\
 D_i + [C_{2,i} + 2(1 + \nu) A_i] \frac{l_i}{R} + \frac{1}{2} \left(B_{2,i} - 2 - \nu \frac{\gamma R + 3g}{\gamma R + 2g} \right) \left(\frac{l_i}{R} \right)^2 - \\
 - \frac{1}{6} A_i \left(\frac{l_i}{R} \right)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{l_i}{R} \right)^4 &= \frac{Eh}{R^2 (\gamma R + 2g) \cos \alpha} \eta_i = D_{i+1}.
 \end{aligned}$$

In den Gleichungen (2.21) gilt allerdings für die Größen $p_{0,i}$, $p_{0,i+1}$

$$p_{0,i} = \gamma d_{0,i}, \quad p_{0,i+1} = \gamma (d_{0,i} + l_i \sin \alpha) = p_{0,i} + \gamma l_i \sin \alpha. \quad (2.22)$$

2.3 — Die vertikale Rohrleitung und kreiszylindrische Behälter unter der Belastung durch das Eigengewicht und einen radialen gleichmäßigen und hydrostatischen Überdruck

Bezeichnen wir mit p_0 den gleichmäßigen Innendruck im oberen Anfangsquerschnitt $\zeta = \varphi = 0$ der vertikalen Kreiszylinderschale, so gilt für die Belastungsfunktionen

$$p_n = -p_0 - \gamma R \varphi, \quad p_s \equiv 0, \quad p_z = g. \quad (2.23)$$

Nach Einsetzen in die Formeln (1.3) folgt für den Spannungszustand

$$\sigma_s = \frac{R}{h} (p_0 + \gamma R \zeta), \quad \tau = \tau_0, \quad \sigma = \sigma_0 - \left(\frac{d\tau_0}{d\varphi} + \frac{R}{h} g \right) \zeta, \quad (2.24)$$

wobei die Funktionen $\tau_0(\varphi)$ und $\sigma_0(\varphi)$ den Verlauf von Spannungen τ und σ im Anfangsquerschnitt angeben. Im Falle eines vertikalen Behälters lassen sich diese Funktionen aus den Gleichgewichtsbedingungen der Dachkonstruktion ermitteln.

Aus den Beziehungen (1.6) ergibt sich für die Verschiebungskomponenten

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 + \frac{R}{E} \zeta \left\{ \sigma_0 - \nu \frac{R}{h} p_0 - \frac{1}{2} \left[\frac{d\tau_0}{d\varphi} + \frac{R}{h} (g + \nu \gamma R) \right] \zeta \right\}, \\
 v &= v_0 - \frac{du_0}{d\varphi} \zeta + \frac{R}{E} \zeta \left[2(1 + \nu) \tau_0 - \frac{1}{2} \frac{d\sigma_0}{d\varphi} \zeta + \frac{1}{6} \frac{d^2 \tau_0}{d\varphi^2} \zeta^2 \right], \\
 w &= \frac{dv_0}{d\varphi} - \frac{d^2 u_0}{d\varphi^2} \zeta + \frac{R}{E} \left\{ \nu \sigma_0 + (2 + \nu) \frac{d\tau_0}{d\varphi} \zeta - \frac{1}{2} \frac{d^2 \sigma_0}{d\varphi^2} \zeta^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{6} \frac{d^3 \tau_0}{d\varphi^3} \zeta^3 - \frac{R}{h} [p_0 + (\gamma R + \nu g) \zeta] \right\}. \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

Die Benutzung der abgeleiteten Formeln wird an der allgemeinen Lösung eines Beispiels gezeigt.

2.3.1 — Der vertikale Behälter mit eingespanntem Mantelfuß

Die Höhe des Behälters sei l . Mit Hilfe der Randbedingungen im eingespannten Querschnitt ermitteln wir die Anfangsfunktionen u_0 und v_0 . Dann nehmen die Beziehungen (2.25) die Form an:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{l-z}{E} \left\{ \sigma_0 - \nu \frac{R}{h} p_0 - \frac{l+z}{2R} \left[\frac{d\tau_0}{d\varphi} + \frac{R}{h} (g + \nu\gamma R) \right] \right\}, \\ v &= -\frac{l-z}{E} \left[2(1+\nu)\tau_0 + \frac{1}{2R} \frac{d\sigma_0}{d\varphi} (l-z) - \frac{1}{6R^2} \frac{d^2\tau_0}{d\varphi^2} (2l^2 - lz - z^2) \right], \\ w &= -\frac{1}{E} \left\{ -\nu R\sigma_0 + \frac{d\tau_0}{d\varphi} [2(l-z) + \nu(2l-z)] + \frac{1}{2R} \frac{d^2\sigma_0}{d\varphi^2} (l-z)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6R^2} \frac{d^3\tau_0}{d\varphi^3} (l-z)(2l^2 - lz - z^2) + \frac{R}{h} [Rp_0 + (\nu\gamma R + \nu g)z] \right\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Wir nehmen nun an, daß die gegebene Belastung des Anfangsquerschnittes durch die Funktionen

$$\tau_0 = A_1 + A_2 \sin \varphi + A_3 \cos \varphi, \quad \sigma_0 = B_1 + B_2 \sin \varphi + B_3 \cos \varphi \quad (2.27)$$

ausgedrückt werden kann, deren Parameter folgende Bedeutung haben: A_1 drückt die Beanspruchung der Schale durch Drillung, A_2, A_3 durch Schub, B_1 durch Zug und B_2, B_3 durch Biegung aus. Dann gelten für die Spannungen σ_s und τ die Formeln (2.24) und für die Normalspannung σ erhält man

$$\sigma = B_1 - \frac{g}{h} z + \left(B_2 + \frac{1}{R} A_3 z \right) \sin \varphi + \left(B_3 - \frac{1}{R} A_2 z \right) \cos \varphi. \quad (2.28)$$

Die zugehörigen Ableitungen von Funktionen (2.27) in die Formeln (2.26) eingesetzt, entsteht

$$\begin{aligned} u &= -\frac{l-z}{E} \left[B_1 - \nu \frac{R}{h} p_0 - \frac{l+z}{2h} (g + \nu\gamma R) + \right. \\ &\quad \left. + \left(B_2 + \frac{l+z}{2R} A_3 \right) \sin \varphi + \left(B_3 - \frac{l+z}{2R} A_2 \right) \cos \varphi \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v = & -2 \frac{1+\nu}{E} A_1(l-z) - \frac{l-z}{E} \left\{ A_2 \left[2(1+\nu) + \frac{1}{6R^2} (2l^2 - lz - z^2) \right] - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2R} B_3(l-z) \right\} \sin \varphi - \frac{l-z}{E} \left\{ A_3 \left[2(1+\nu) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{6R^2} (2l^2 lz - z^2) \right] + \frac{1}{2R} B_2(l-z) \right\} \cos \varphi, \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w = & -\frac{1}{E} \left[-\nu R B_1 + \frac{R^2}{h} p_0 + \frac{R}{h} (\nu R + \nu g) z \right] - \frac{1}{E} \left\{ A_3 \left[2(l-z) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \nu(2l-z) + \frac{1}{6R^2} (l-z)(2l^2 - lz - z^2) \right] + \right. \\
 & \left. + B_2 \left[\nu R + \frac{1}{2R} (l-z)^2 \right] \right\} \sin \varphi + \frac{1}{E} \left\{ A_2 \left[2(l-z) + \nu(2l-z) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{6R^2} (l-z)(2l^2 - lz - z^2) \right] - B_3 \left[\nu R + \frac{1}{2R} (l-z)^2 \right] \right\} \cos \varphi.
 \end{aligned}$$

Am unteren Rande, wo die Bedingungen $w \equiv 0$, $\frac{\partial w}{\partial \zeta} \equiv 0$ nicht erfüllbar sind, treten allerdings die Störungen des Membranzustandes ein.

2.4 — Die waagrechte Rohrleitung unter dem Angriff von Einzellasten

Wenn sich die untersuchte Schale unter keiner stetigen Belastung ($p_n \equiv 0$, $p_s \equiv 0$, $p_z \equiv 0$) befindet, dann folgt aus den Formeln (1.3)

$$\sigma_s \equiv 0, \quad \tau \equiv \tau_0, \quad \sigma = \sigma_0 - \frac{d\tau_0}{d\varphi} \zeta \quad (2.30)$$

und die Funktionen (1.6) nehmen die folgende Form an:

$$\begin{aligned}
 u = & u_0 + \frac{R}{E} \zeta \left(\sigma_0 - \frac{1}{2} \frac{d\tau_0}{d\varphi} \zeta \right), \\
 v = & v_0 - \frac{du_0}{d\varphi} \zeta + \frac{R}{E} \zeta \left[2(1+\nu) \tau_0 - \frac{1}{2} \frac{d\sigma_0}{d\varphi} \zeta + \frac{1}{6} \frac{d^2\tau_0}{d\varphi^2} \zeta^2 \right], \quad (2.31) \\
 w = & \frac{dv_0}{d\varphi} - \frac{d^2u_0}{d\varphi^2} \zeta + \frac{R}{E} \left[\nu\sigma_0 + (2+\nu) \frac{d\tau_0}{d\varphi} \zeta - \frac{1}{2} \frac{d^2\sigma_0}{d\varphi^2} \zeta^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{6} \frac{d^3\tau_0}{d\varphi^3} \zeta^3 \right].
 \end{aligned}$$

Wir nehmen an, daß die Schale in ihrer Symmetrieebene O_{yz} durch die Einzellasten P_k ($k = 1, 2, \dots, n$), die in den Querschnitten $z_k = R \zeta_k$ angreifen, belastet wird, und daß diese Einzellasten durch konzentrierte Schubflüsse

$$t_k = \frac{P_k}{\pi R} \sin \varphi \quad (2.32)$$

in die Schalenwand eingeleitet werden sollen.

Wir bezeichnen mit τ_{k-1} (τ_k) die Funktion der Tangentialspannung links (rechts) vom Querschnitt z_k , und mit σ_{k-1} (σ_k) die Funktion der Normalspannung im Querschnitt z_{k-1} (z_k). Unter Berücksichtigung der dritten Beziehung (2.30) folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen im Querschnitt z_k

$$\tau_k = \tau_{k-1} - \frac{1}{h} t_k, \quad \sigma_k = \sigma_{k-1} - \frac{d\tau_{k-1}}{d\varphi} (\zeta_k - \zeta_{k-1}). \quad (2.33)$$

Die Form der Funktion (2.32) berücksichtigend, benutzen wir aus Symmetriegründen der Aufgabe zur Ebene O_{yz} die Beziehungen

$$\begin{aligned} \tau_{k-1} &= A_{k-1} \sin \varphi, \quad \tau_k = A_k \sin \varphi, \quad \sigma_{k-1} = B_{1,k-1} + B_{2,k-1} \cos \varphi, \\ \sigma_k &= B_{1,k} + B_{2,k} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Setzt man die Funktionen (2.32) und (2.34) in die Bedingungen (2.33) ein, so erhält man

$$A_k = A_{k-1} - \frac{P_k}{\pi R h}, \quad B_{1,k} = B_{1,k-1}, \quad B_{2,k} = B_{2,k-1} - A_{k-1} (\zeta_k - \zeta_{k-1}). \quad (2.35)$$

Durch Einführung der Anfangsparameter A_0 , $B_{1,0}$ und $B_{2,0}$ nehmen schließlich die Beziehungen (2.35) für einen beliebigen Querschnitt z_m ($k < m \leq k+1$) rechts von der Einzellast P_k die folgende Form an:

$$\begin{aligned} A_m &= A_0 - \frac{1}{\pi R h} \sum_{k=1}^m P_k, \quad B_{1,m} = B_{1,0}, \quad B_{2,m} = B_{2,0} - A_0 \zeta_m + \\ &+ \frac{1}{\pi R h} \sum_{k=1}^m P_k (\zeta_m - \zeta_k). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Der Verlauf von Verschiebungen u und v wird im beliebigen Querschnitt z_k durch die Funktionen

$$u_k = C_{1,k} + C_{2,k} \cos \varphi, \quad v_k = D_k \sin \varphi \quad (2.37)$$

gekennzeichnet, und unter Berücksichtigung der Beziehungen (2.31) und (2.34) folgt dann aus den Stetigkeitsbedingungen der Funktionen u und v im beliebigen Querschnitt z_k

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + \frac{R}{E} B_{1,k-1} (\zeta_k - \zeta_{k-1}),$$

$$C_{2,k} = C_{2,k-1} + \frac{R}{E} \left[B_{2,k-1} (\zeta_k - \zeta_{k-1}) - \frac{1}{2} A_{k-1} (\zeta_k - \zeta_{k-1})^2 \right], \quad (2.38)$$

$$D_k = D_{k-1} + C_{2,k-1} (\zeta_k - \zeta_{k-1}) + \frac{R}{E} \left\{ A_{k-1} \left[2(1 + \nu)(\zeta_k - \zeta_{k-1}) - \frac{1}{6} (\zeta_k - \zeta_{k-1})^3 \right] + \frac{1}{2} B_{2,k-1} (\zeta_k - \zeta_{k-1})^2 \right\}.$$

Durch Einführung der Anfangsparameter $C_{1,0}$, $C_{2,0}$, D_0 und mit Benutzung der Gleichungen (2.36) ergibt sich für einen beliebigen Querschnitt z_m ($k \leq m \leq k+1$)

$$C_{1,m} = C_{1,0} + \frac{R}{E} B_{1,0} \zeta_m, \quad C_{2,m} = C_{2,0} + \frac{R}{2E} \left[2B_{2,0} \zeta_m - A_0 \zeta_m^2 + \frac{1}{\pi Rh} \sum_{k=1}^m P_k (\zeta_m - \zeta_k)^2 \right], \quad (2.39)$$

$$D_m = D_0 + C_{2,0} \zeta_m + \frac{R}{6E} \left\{ 3B_{2,0} \zeta_m^2 - A_0 \zeta_m [\zeta_m^2 - 12(1 + \nu)] + \frac{1}{\pi Rh} \sum_{k=1}^m P_k (\zeta_m - \zeta_k) [(\zeta_m - \zeta_k)^2 - 12(1 + \nu)] \right\}.$$

Die Stetigkeitsbedingung der Verschiebung w liefert gemäß der dritten Beziehung (2.31)

$$D_k = D_{k-1} + C_{2,k-1} (\zeta_k - \zeta_{k-1}) + \frac{R}{E} \left\{ A_{k-1} \left[(2 + \nu)(\zeta_k - \zeta_{k-1}) - \frac{1}{6} (\zeta_k - \zeta_{k-1})^3 \right] + B_{2,k-1} \left[\nu + \frac{1}{2} (\zeta_k - \zeta_{k-1})^2 \right] \right\}. \quad (2.40)$$

Diese Gleichung widerspricht offenbar der dritten Beziehung (2.38), und daraus folgt, daß in jedem Querschnitt z_k die Membranzustandsstörungen hervortreten müssen.

2.4.1 — Das beiderseits eingespannte Rohrfeld

Zur Ermittlung der unbekanntenen Anfangsparameter der Beziehungen (2.36) und (2.39) benutzt man im Falle eines beiderseits voll eingespannten Rohrfeldes die Randbedingungen (1.8), die liefern

$$A_0 = \frac{1}{\pi R l h [l^2 + 24(1 + \nu) R^2]} \sum_{k=1}^n P_k (l - z_k) [(l - z_k)(l + 2z_k) + 24(1 + \nu) R^2],$$

$$B_{1,0} = 0,$$
(2.41)

$$B_{2,0} = \frac{1}{\pi R^2 l h [l^2 + 24(1 + \nu) R^2]} \sum_{k=1}^n P_k z_k (l - z_k) [l(l - z_k) + 12(1 + \nu) R^2],$$

$$C_{1,0} = 0, \quad C_{2,0} = 0, \quad D_0 = 0.$$

Die den Koeffizienten $(1 + \nu)$ enthaltenden Glieder dieser Formeln drücken den Einfluß der Schubverzerrungen der Schalenmittelfläche aus. Der Einfluß dieser Verzerrungen auf die Anfangsparameter ist nur in symmetrischen Aufgaben nicht bemerkbar. So z. B. für eine in der Feldmitte angreifende Einzelast P ergibt sich aus den Formeln (2.41)

$$A_0 = \frac{P}{2\pi R h}, \quad B_{2,0} = \frac{Pl}{8\pi R^2 h}, \quad B_{1,0} = 0, \quad C_{1,0} = 0, \quad C_{2,0} = 0, \quad D_0 = 0.$$
(2.42)

Der Wert des Parameters D_k gibt gemäß der zweiten Beziehung (2.37) die Durchbiegung der Konstruktion im Querschnitt z_k an. Nach Einsetzen der Größen (2.42) und $\zeta = \frac{l}{2R}$ in die dritte Formel (2.39) erhält man

$$\max \eta = \frac{Pl^3}{192 E \pi R^3 h} \left[1 + 96(1 + \nu) \frac{R^2}{l^2} \right] = \lambda_1 \frac{Pl^3}{192 E \pi R^3 h} \quad (2.43)$$

Der Koeffizient λ_1 drückt also wiederum die von den Schubverzerrungen verursachte Vergrößerung des technischen Wertes der maximalen Durchbiegung aus. Da dieser Koeffizient durch dieselbe Formel wie (2.7) gegeben ist, läßt sich zur Bestimmung seiner Werte die Tabelle 1 benutzen.

Wenn sich das eingespannte Rohrfeld unter dem Angriff einer Einzellast befindet, nehmen die Formeln (2.41) folgende Form an:

$$A_0 = \lambda_2 \frac{P_k}{\pi R h}, \quad \lambda_2 = \left(1 - \frac{z_k}{l} \right) \frac{\left(1 - \frac{z_k}{l} \right) \left(1 + 2 \frac{z_k}{l} \right) + 24(1 + \nu) \left(\frac{R}{l} \right)^2}{1 + 24(1 + \nu) \left(\frac{R}{l} \right)^2},$$
(2.44)

$$B_{2,0} = \lambda_3 \frac{P_k l}{\pi R^2 h}, \quad \lambda_3 = \frac{z_k}{l} \left(1 - \frac{z_k}{l} \right) \frac{1 - \frac{z_k}{l} + 12(1 + \nu) \left(\frac{R}{l} \right)^2}{1 + 24(1 + \nu) \left(\frac{R}{l} \right)^2}.$$

Tabelle 2

Die Werte der Koeffizienten λ_2, λ_3 , nach den Formeln (2.44)
($\nu = 0,2963$)

$\frac{R}{l}$	0,5		0,2		0,1		0,05		0	
	λ_2	λ_3								
0,0	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000
0,1	0,9082	0,0491	0,9321	0,0610	0,9549	0,0725	0,9668	0,0784	0,9720	0,0810
0,2	0,8109	0,0855	0,8428	0,1014	0,8732	0,1166	0,8891	0,1245	0,8960	0,1280
0,3	0,7096	0,1098	0,7374	0,1237	0,7641	0,1370	0,7779	0,1440	0,7840	0,1470
0,4	0,6055	0,1227	0,6214	0,1307	0,6366	0,1383	0,6445	0,1423	0,6480	0,1440
0,5	0,5000	0,1250	0,5000	0,1250	0,5000	0,1250	0,5000	0,1250	0,5000	0,1250
0,6	0,3945	0,1173	0,3786	0,1093	0,3634	0,1017	0,3555	0,0977	0,3520	0,0960
0,7	0,2904	0,1002	0,2626	0,0863	0,2359	0,0730	0,2221	0,0660	0,2160	0,0630
0,8	0,1891	0,0745	0,1572	0,0586	0,1268	0,0434	0,1109	0,0355	0,1040	0,0320
0,9	0,0918	0,0409	0,0679	0,0290	0,0451	0,0175	0,0332	0,0116	0,0280	0,0090
1,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Die Werte der Koeffizienten λ_2, λ_3 sind für verschiedene Verhältnisse $\frac{z_k}{l}, \frac{R}{l}$ in der Tabelle 2 angegeben. Zwecks Vergleichung wird hier auch der Fall $\frac{R}{l} = 0$ angezeigt, der der Vernachlässigung von Schubverzerrungen entspricht und also ebenfalls die technische Theorie der Biegung ausdrückt. Bezeichnen wir mit $T_{y,0}$ und $M_{x,0}$ die Querkraft und das Biegemoment im eingespannten Anfangsquerschnitt, so gilt für diese Größen gemäß den Formeln (2.34) und (2.44)

$$T_{y,0} = Rh \oint \tau_0 \sin \varphi d\varphi = \lambda_2 P_k, \quad M_{x,0} = -R^2 h \oint \sigma_0 \cos \varphi d\varphi = -\lambda_3 P_k l. \quad (2.45)$$

Aus diesen Beziehungen folgt, daß die Koeffizienten λ_2 und λ_3 als Einflußfunktionen der Auflagerreaktion und des Einspannungsmoments für ein beiderseits voll eingespanntes Rohrfeld betrachtet werden können.

Wenn sich die Stützenquerschnitte um die Strecken η_a, η_b verschieben, fügt man den Beziehungen (2.41) die Größen

$$\Delta A_0 = \frac{12 ER^2}{l^2 + 24(1 + \nu) R^2} \frac{\eta_b - \eta_a}{l}, \quad (2.46)$$

$$\Delta B_{2,0} = \frac{6ER}{l^2 + 24(1 + \nu) R^2} (\eta_b - \eta_a)$$

zu. Die Auflagerreaktionen ergeben sich aus den Formeln

$$Y_a = \pi R h A_0, \quad Y_b = \sum_{k=1}^n P_k - \pi R h A_0. \quad (2.47)$$

Im Falle der elastisch nachgiebigen Stützen gilt dann

$$\eta_a = \pi p_a R h A_0, \quad \eta_b = p_b \left(\sum_{k=1}^n P_k - \pi R h A_0 \right), \quad (2.48)$$

und hieraus erhalten wir schließlich

$$A_0 = \frac{1}{\pi R h [l^3 + 24(1 + \nu) R^2 l + 12\pi(p_a + p_b) E R^3 h]} \quad (2.49)$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^n (l - z_k) [(l - z_k)(l + 2z_k) + 24(1 + \nu) R^2] P_k + 12\pi p_b E R^3 h \sum_{k=1}^n P_k \right\},$$

$$B_{2,0} = \frac{l}{2R} A_0 - \frac{1}{2\pi R^2 l h} \sum_{k=1}^n P_k (l - z_k)^2.$$

2.4.2 — Die durchlaufende Rohrleitung

In jedem inneren Stützenquerschnitt i der horizontalen durchlaufenden Rohrleitung müssen die Stetigkeitsbedingungen (1.13) erfüllt werden, die nach Einsetzen der Beziehungen (2.36) und (2.39) liefern:

$$B_{1,i+1} = B_{1,i} = 0, \quad B_{2,i+1} = B_{2,i} - A_i \frac{l_i}{R} + \frac{1}{\pi R^2 h} \sum_{k=1}^n P_{k,i} (l_i - z_k),$$

$$C_{1,i+1} = C_{1,i} = 0, \quad C_{2,i+1} = C_{2,i} + \frac{l_i}{2E} \left[2B_{2,i} - A_i \frac{l_i}{R} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi R^2 l_i h} \sum_{k=1}^n P_{k,i} (l_i - z_k)^2 \right], \quad (2.50)$$

$$D_{i+1} = D_i + C_{2,i} \frac{l_i}{R} + \frac{l_i}{6ER^2} \left\{ 3B_{2,i} R l_i - A_i [l_i^2 - 12(1 + \nu) R^2] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi R l_i h} \sum_{k=1}^n (l_i - z_k) [(l_i - z_k)^2 - 12(1 + \nu) R^2] P_{k,i} \right\} = \eta_i.$$

In diesen Gleichungen werden mit dem Index i ($i+1$) die Werte der Anfangsparameter im Feld links (rechts) von der Zwischenstütze i bezeichnet. In die angedeuteten Summen treten allerdings alle Einzellasten ein, die das Feld links von der Stütze i angreifen.

Bei der elastisch nachgiebigen Stütze i setzen wir in die zwei letzten Gleichungen (2.50)

$$\eta_i = p_i \left[\pi R h (A_{i+1} - A_i) + \sum_{k=1}^n P_{k,i} \right] \quad (2.51)$$

ein.

In der untersuchten Aufgabe verschwinden also die Anfangsparameter $B_{1,i}$, $C_{1,i}$ und daher enthält die Lösung in jedem Feld vier unbekannte Parameter, die sich aus den Gleichungen (2.50) und aus den Bedingungen in den Randquerschnitten ergeben.

2.5 — Der Einfluß von Temperaturänderungen

Durch Berücksichtigung der Form der Funktion, die den Einfluß von Temperaturänderungen ausdrückt, können wir aus Symmetriegründen der Aufgabe zur Ebene O_{yz} nach den Formeln (1.3) für den Spannungszustand die Beziehungen

$$\sigma_s \equiv 0, \quad \tau = \tau_0 = A \sin \varphi, \quad \sigma = B_1 + (B_2 - A\zeta) \cos \varphi \quad (2.52)$$

annehmen, und gemäß den Gleichungen (1.6) ergibt sich für die Verschiebungs-komponenten

$$\begin{aligned} u &= C_1 + \frac{R}{E} (B_1 + E\alpha^0 t^0) \zeta + \frac{R}{E} \left[\frac{E}{R} C_2 + (B_2 + E\alpha^0 \Delta t^0) \zeta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} A \zeta^2 \right] \cos \varphi, \\ v &= \frac{R}{E} \left\{ \frac{E}{R} D + \left[\frac{E}{R} C_2 + 2(1 + \nu) A \right] \zeta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (B_2 + E\alpha^0 \Delta t^0) \zeta^2 - \frac{1}{6} A \zeta^3 \right\} \sin \varphi, \\ w &= \frac{R}{E} (\nu B_1 - E\alpha^0 t^0) + \frac{R}{E} \left\{ \frac{E}{R} D + \nu B_2 - E\alpha^0 \Delta t^0 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{E}{R} C_2 + (2 + \nu) A \right] \zeta + \frac{1}{2} (B_2 + E\alpha^0 \Delta t^0) \zeta^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} A \zeta^3 \right\} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.53)$$

2.5.1 — *Das beiderseits eingespannte Rohrfeld*

Aus den Symmetriegründen der Aufgabe zur Feldmitte werden durch die vorausgesetzten Temperaturänderungen keine Tangentialspannungen hervorgerufen, und deshalb betrachten wir nicht in diesem Fall die elastische Nachgiebigkeit der Stützen. Setzen wir die zugehörigen Funktionen (2.53) in die Randbedingungen (1.8) ein, so erhalten wir die Werte der Integrationskonstanten, und für den Spannungszustand folgt dann

$$\sigma_s \equiv 0, \quad \tau \equiv 0, \quad \sigma = -E\alpha^0 (t^0 + \Delta t^0 \cos \varphi). \quad (2.54)$$

Die Formeln (2.53) nehmen nach Einsetzen die Form

$$u \equiv 0, \quad v \equiv 0, \quad w = -(1 + \nu) R\alpha^0 (t^0 + \Delta t^0 \cos \varphi) \text{ an.} \quad (2.55)$$

Im Falle der Unterstützung, die durch die Randbedingungen (1.9) gekennzeichnet wird, ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_s \equiv 0, \quad \tau \equiv 0, \quad \sigma &= -E\alpha^0 \Delta t^0 \cos \varphi, \\ u &= \alpha^0 t^0 z, \quad v \equiv 0, \quad w = -R\alpha^0 [t^0 + (1 + \nu) \Delta t^0 \cos \varphi]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

2.5.2 — *Die durchlaufende Rohrleitung*

In jedem inneren Stützenquerschnitt i liefern die Stetigkeitsbedingungen (1.13)

$$\begin{aligned} B_{1,i+1} &= B_{1,i}, \quad B_{2,i+1} = B_{2,i} - A_i \frac{l_i}{R}, \\ C_{1,i+1} &= C_{1,i} + \frac{1}{E} (B_{1,i} + E\alpha^0 t_i^0) l_i, \\ C_{2,i+1} &= C_{2,i} + \frac{1}{E} (B_{2,i} + E\alpha^0 \Delta t_i^0) l_i - \frac{1}{2ER} A_i l_i^2, \\ D_{i+1} &= \pi p_i Rh(A_{i+1} - A_i), \\ D_i + \left(\frac{1}{R} C_{2,i} + 2 \frac{1 + \nu}{E} A_i \right) l_i + \frac{1}{2ER} (B_{2,i} + E\alpha^0 \Delta t_i^0) l_i^2 - \\ &\quad - \frac{1}{6ER^2} A_i l_i^3 = \pi p_i Rh(A_{i+1} - A_i), \end{aligned} \quad (2.57)$$

wobei t_i^0 und Δt^0 die Werte der Temperaturparameter (1.5) im Felde i bedeuten.

Wenn alle Stützen mit Ausnahme von einer in der Richtung der Konstruktionsachse O_z frei verschiebbar sind, dann gilt

$$B_{1,i+1} = B_{1,i} = 0 \quad (2.58)$$

und in der dritten Bedingung (2.57) fällt freilich die Konstante $B_{1,i}$ fort. Im Falle, daß diese Verschiebung der Stützenquerschnitte völlig verhindert wird, gilt für jedes Feld $C_{1,i} = 0$ und aus der dritten Bedingung (2.57) folgt

$$B_{1,i} = -E\alpha^0 t_i^0. \quad (2.59)$$

In diesem Fall fällt allerdings aus dem System (2.57) die erste Gleichung fort.

3. Die Randstörungen des Membranzustandes

3.1 — Die waagrechte Rohrleitung unter der Belastung durch das Eigengewicht, und einen radialen gleichmäßigen und hydrostatischen Überdruck

Benutzt man die gleiche Bezeichnung wie im Absatze 2.1, dann gelten für die Belastungsfunktionen wieder die Formeln (2.1). Unter Berücksichtigung der Form von Funktionen (2.1) können wir aus Symmetriegründen der Aufgabe zur Ebene O_{yz} die Integrationsfunktionen der Beziehungen (1.24) bis (1.26) in der Form

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &= A \sin \varphi, & F_2(\varphi) &= B_1 + B_2 \cos \varphi, \\ F_3(\varphi) &= C_1 + C_2 \cos \varphi, & F_4(\varphi) &= D \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.1)$$

ausdrücken, wobei A , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 und D die Integrationskonstanten bedeuten. Nach Einsetzen der zugehörigen Funktionen (2.1) und (3.1) in die Formeln (1.24), (1.23) und (1.16) ergibt sich für den vorausgesetzten Halbmembranzustand

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{R}{h} [p_0 + \gamma R - (\gamma R + g) \cos \varphi] + \frac{Eh^2}{12R^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^4}, \\ \tau &= \left[A - \frac{R}{h} (\gamma R + 2g) \zeta \right] \sin \varphi - \frac{Eh^2}{12R^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^3 \partial \varphi}, \\ \sigma &= B_1 + \left[B_2 - A\zeta + \frac{R}{2h} (\gamma R + 2g) \zeta^2 \right] \cos \varphi + \frac{Eh^2}{12R^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^2 \partial \varphi^2}, \\ M &= -\frac{Eh^3}{12R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}, & T &= -\frac{Eh^3}{12R^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \zeta^3} \end{aligned} \quad (3.2)$$

und aus den Beziehungen (1.25) bis (1.27) folgt

$$\begin{aligned}
 u = & C_1 + \frac{R}{E} \left[B_1 - \nu \frac{R}{h} (p_0 + \gamma R) \right] \zeta + \frac{R}{E} \left\{ \frac{E}{R} C_2 + \right. \\
 & + \left[B_2 + \nu \frac{R}{h} (\gamma R + g) \right] \zeta - \frac{1}{2} A \zeta^2 + \\
 & + \left. \frac{R}{6h} (\gamma R + 2g) \zeta^3 \right\} \cos \varphi + \frac{h^2}{12R^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \zeta \partial \varphi^2} - \nu \frac{\partial^3 w}{\partial \zeta^3} \right),
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
 v = & \frac{R}{E} \left\{ \frac{E}{R} D + \left[\frac{E}{R} C_2 + 2(1 + \nu) A \right] \zeta + \frac{1}{2} \left[B_2 - \right. \right. \\
 & - 2 \frac{R}{h} (\gamma R + 2g) - \nu \frac{R}{h} (\gamma R + 3g) \left. \right] \zeta^2 - \frac{1}{6} A \zeta^3 + \\
 & + \left. \frac{1}{24} \frac{R}{h} (\gamma R + 2g) \zeta^4 \right\} \sin \varphi - \\
 & - \frac{h^2}{12R^2} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial \zeta^2 \partial \varphi} \right],
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla^4 w + 12 \frac{R^2}{h^2} w = & 12 \frac{R^3}{Eh^2} \left[\nu B_1 - \frac{R}{h} (p_0 + \gamma R) \right] + \\
 & + 12 \frac{R^3}{Eh^2} \left\{ \frac{E}{R} D + \nu B_2 + \frac{R}{h} (\gamma R + g) + \right. \\
 & + \left[\frac{E}{R} C_2 + (2 + \nu) A \right] \zeta + \frac{1}{2} \left[B_2 - 2 \frac{R}{h} (\gamma R + 2g) - \right. \\
 & - \left. \left. \nu \frac{R}{h} g \right] \zeta^2 - \frac{1}{6} A \zeta^3 + \frac{1}{24} \frac{R}{h} (\gamma R + 2g) \zeta^4 \right\} \cos \varphi.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Wenn sich die untersuchte Konstruktion im stabilen elastischen Gleichgewichtszustande befindet, so kann man die allgemeine Lösung der Gleichung (3.5) in der Form

$$w(\zeta, \varphi) = Z_1(\zeta) + Z_2(\zeta) \cos \varphi \tag{3.6}$$

annehmen. Führen wir die dimensionslosen Parameter m , n und k mit Hilfe der Formeln

$$m = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{12 \frac{R^2}{h^2} + 1} + 1 \right)}, \quad n = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{12 \frac{R^2}{h^2} + 1} - 1 \right)}, \tag{3.7}$$

$$k = \sqrt{\frac{R}{h} \sqrt{3}}$$

ein, dann ergibt sich aus den Beziehungen (3.5) bis (3.7) für die Funktionen Z_1 und Z_2

$$Z_1 = L_1 \operatorname{sh} k\zeta \sin k\zeta + L_2 \operatorname{sh} k\zeta \cos k\zeta + L_3 \operatorname{ch} k\zeta \sin k\zeta + \\ + L_4 \operatorname{ch} k\zeta \cos k\zeta + \frac{R}{E} \left[\nu B_1 - \frac{R}{h} (p_0 + \gamma R) \right], \quad (3.8)$$

$$Z_2 = K_1 \operatorname{sh} m\zeta \sin n\zeta + K_2 \operatorname{sh} m\zeta \cos n\zeta + K_3 \operatorname{ch} m\zeta \sin n\zeta + \\ + K_4 \operatorname{ch} m\zeta \cos n\zeta + \frac{12R^3}{E(12R^2 + h^2)} \left\{ \frac{E}{R} D + \right. \\ + B_2 \left(\frac{2h^2}{12R^2 + h^2} + \nu \right) + \frac{Rh}{12R^2 + h^2} \left[12 \frac{R^2}{h^2} (\gamma R + g) - \right. \\ \left. - (1 + 2\nu)g - \frac{48R^2}{12R^2 + h^2} (\gamma R + 2g) \right] + \\ + \left[\frac{E}{R} C_2 + A \left(\frac{24R^2}{12R^2 + h^2} + \nu \right) \right] \zeta + \frac{1}{2} \left[B_2 - \nu \frac{R}{h} g - \right. \\ \left. - \frac{R}{h} \frac{24R^2}{12R^2 + h^2} (\gamma R + 2g) \right] \zeta^2 - \frac{1}{6} A \zeta^3 + \\ \left. + \frac{1}{24} \frac{R}{h} (\gamma R + 2g) \zeta^4 \right\}. \quad (3.9)$$

Diese Funktionen enthalten acht unbekannte Integrationskonstanten L_1 bis L_4 und K_1 bis K_4 . Der vorausgesetzte Halbmembranzustand ist also durch die abgeleiteten Formeln bis auf die vierzehn unbekanntenen Integrationskonstanten bestimmt. Mit Rücksicht auf den begrenzten Umfang dieses Beitrags können die Integrationskonstanten nur in einigen speziellen Fällen ermittelt werden.

3.1.1 — Die Rohrleitung und Zylinderbehälter unter gleichmäßigem radialem Überdruck

Wir betrachten eine Kreiszylinderschale mit geschlossenem Querschnitt, deren Mantel in der Querrichtung durch die in den Abständen l ausgeführten Spanten versteift wird. Alle abgeleiteten Formeln gelten für den Innendruck; bei dem Außendruck ist es nötig, das Vorzeichen der Größe p_0 umzukehren. In diesem Fall muß man allerdings zuerst die Stabilität der Konstruktion beglaubigen.

Aus Symmetriegründen der Aufgabe zu den Ebenen O_{yz} , O_{xz} und zur Feldmitte, in der der Anfang O gewählt wird, gilt

$$A = B_2 = C_1 = C_2 = D = L_2 = L_3 = K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 0. \quad (3.10)$$

und die allgemeine Lösung der Gleichung (3.5) nimmt gemäß den Formeln (3.6) und (3.8) die Form

$$w = L_1 \operatorname{sh} k\zeta \sin k\zeta + L_4 \operatorname{ch} k\zeta \cos k\zeta + \frac{R}{E} \left(\nu B_1 - \frac{R}{h} p_0 \right) \operatorname{an}. \quad (3.11)$$

Wir betrachten zuerst den Fall der in ihren Ebenen vollkommen starren Spanten und nehmen an, daß die Verschiebung u der versteiften Querschnitte völlig verhindert wird. Zur Bestimmung der drei unbekanntenen Integrationskonstanten L_1, L_4 und B_1 benutzt man dann die Randbedingungen

$$w \equiv 0, \quad \frac{dw}{d\zeta} \equiv 0, \quad u \equiv 0 \quad \text{für } \zeta = \pm \frac{l}{2R}. \quad (3.12)$$

Bezeichnen wir mit β das Argument

$$\beta = \frac{kl}{2R}, \quad (3.13)$$

folgt aus den Bedingungen (3.12)

$$\begin{aligned} B_1 &= \nu \frac{R}{h} p_0 \frac{l\sqrt{3} (\operatorname{sh} 2\beta + \sin 2\beta) - 2hk(\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta)}{l\sqrt{3} (\operatorname{sh} 2\beta + \sin 2\beta) - 2\nu^2 hk(\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta)}, \\ L_1 &= -2\sqrt{3} (1 - \nu^2) \frac{R^2 l}{Eh} p_0 \frac{\operatorname{sh} \beta \cos \beta - \operatorname{ch} \beta \sin \beta}{l\sqrt{3} (\operatorname{sh} 2\beta + \sin 2\beta) - 2\nu^2 hk(\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta)}, \\ L_4 &= +2\sqrt{3} (1 - \nu^2) \frac{R^2 l}{Eh} p_0 \frac{\operatorname{sh} \beta \cos \beta + \operatorname{ch} \beta \sin \beta}{l\sqrt{3} (\operatorname{sh} 2\beta + \sin 2\beta) - 2\nu^2 hk(\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Führt man die dimensionslosen Koeffizienten λ_4, λ_5 und λ_6 durch die Formeln

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= \frac{\beta(\operatorname{sh} 2\beta + \sin 2\beta) - (\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta)}{\beta(\operatorname{sh} 2\beta + \sin 2\beta) - \nu^2 (\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta)}, \\ \lambda_5 &= \beta \frac{\operatorname{sh} 2\beta - \sin 2\beta}{\beta(\operatorname{sh} 2\beta + \sin 2\beta) - \nu^2 (\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta)}, \\ \lambda_6 &= \beta \frac{\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta}{\beta(\operatorname{sh} 2\beta + \sin 2\beta) - \nu^2 (\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

ein, und bezeichnet man mit dem Index ν die statischen Größen in den versteiften Querschnitten, dann gilt

$$\sigma_{s,v} = \lambda_4 \nu^2 \frac{R}{h} p_0, \quad \tau_v = \tau \equiv 0, \quad \sigma_v = \sigma = \lambda_4 \nu \frac{R}{h} p_0, \quad (3.16)$$

$$M_v = \lambda_5 \frac{\sqrt{3}}{6} (1 - \nu^2) R h p_0, \quad T_v = \lambda_6 \frac{\sqrt{3}}{3} (1 - \nu^2) h k p_0.$$

Dem spezifischen Biegemoment M_v entsprechen die Normalspannungen

$$\tau_{M,v} = \pm \frac{6M_v}{h^2} = \pm \lambda_5 \sqrt{3} (1 - \nu^2) \frac{R}{h} p_0, \quad (3.17)$$

so daß in der Schalenwand die größte Normalspannung $\max \bar{\sigma}$

$$\max \bar{\sigma} = \sigma_v + |\sigma_{M,v}| = [\nu \lambda_4 + \sqrt{3} (1 - \nu^2) \lambda_5] \frac{R}{h} p_0 \quad (3.18)$$

hervorgerufen wird. Diese Spannung erreicht ihr Maximum,

$$\max \bar{\sigma} = 1,89839 \frac{R}{h} p_0, \quad (3.19)$$

für das Argument $2\beta = 4,05045$. Die größte Spannung $\bar{\sigma}$ kann also die Membranspannung um 90% übertreffen.

Wir bezeichnen mit l_p die Belastungsbreite eines Spantes bei seiner einseitigen Belastung durch den Konstruktionsmantel. Gemäß der letzten Formel (3.16) gilt dann für die spezifische einseitige Belastungsbreite

$$\frac{l_p}{l} = \frac{T_v}{l p_0} = \lambda_6 \frac{1 - \nu^2}{2\beta}. \quad (3.20)$$

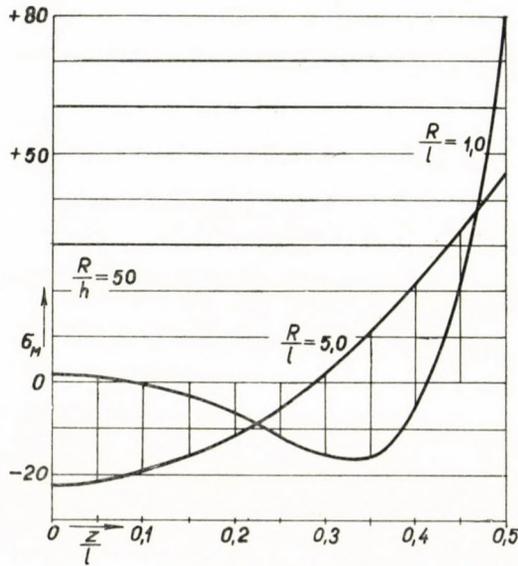
Die Spanten der Schale sollen offenbar auf die durch diese Formel gegebene Belastung dimensioniert werden. Es ist also weder richtig noch ökonomisch, den Spanten in allen Fällen die ganze Belastung aus der Breite $\frac{1}{2}l$ zuzuerkennen.

Im Falle, daß $\frac{R}{h} \geq 30$ und $\frac{R}{l} \leq 0,5$ ist, nehmen die Formeln (3.15) die vereinfachte Form

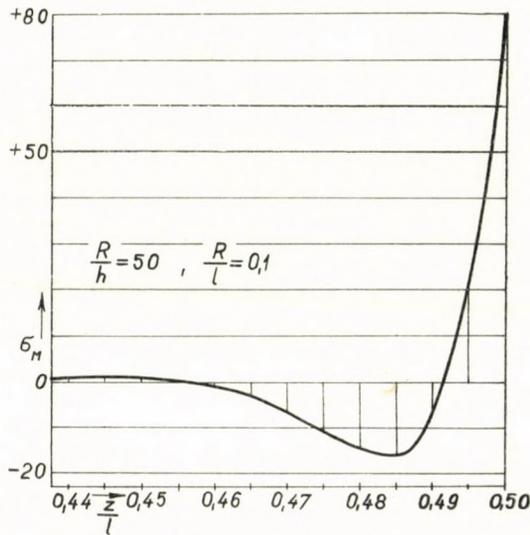
$$\lambda_4 \doteq 1 - \frac{1 - \nu^2}{\beta}, \quad \lambda_5 \doteq \lambda_6 \doteq 1 + \frac{\nu^2}{\beta} \text{ an.} \quad (3.21)$$

Die Abbildungen 3a und 3b zeigen den Verlauf der Normalspannung $\sigma_M(\zeta)$ für $\frac{R}{h} = 50$, $p_0 = 1,0 \text{ kg/cm}^2$ und für einige Verhältnisse $\frac{R}{l}$. Aus diesen

Abbildungen folgt, daß nur bei kleinen Entfernungen der Spanten $\left(\frac{R}{l} = 5,0\right)$ der Biegespannungszustand in das ganze Rohrfeld eingreifen kann. Mit der



a)



b)

Abb. 3. Der Verlauf der größten, den Biegemomenten entsprechenden Normalspannungen

wachsenden Entfernung l erwirbt die Funktion $\sigma_M(\zeta)$ und daher auch $M(\zeta)$ immer mehr den Charakter der Membranzustandsstörungen, deren Einfluß dann von den Spanten weg rasch abklingt.

Da gemäß den Formeln (3.15) und (3.20) offenbar $\lambda_4 + 2 \frac{l_p}{l} = 1$ gilt, können die Größen λ_4 und $\frac{l_p}{l}$ in einem Schaubild dargestellt werden (Abb. 4). Die den einzelnen Kurven beigefügten Zahlen bezeichnen das Verhältnis $\frac{R}{l}$. Die Tabelle 3 gibt die Werte der Koeffizienten (3.15) und der spezifischen einseitigen Belastungsbreite (3.20) für verschiedene Verhältnisse von $\frac{R}{l}$, $\frac{R}{h}$ an.

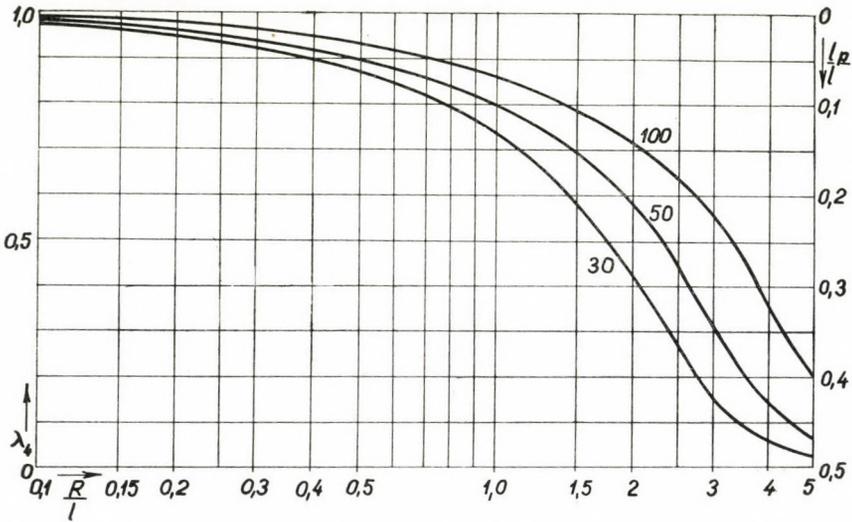


Abb. 4. Die Abhängigkeit des Koeffizienten λ_4 und der spezifischen einseitigen Belastungsbreite der Spanten von den Verhältnissen $\frac{R}{l}$ und $\frac{R}{h}$

Bei der untersuchten Aufgabe kann man verhältnismäßig leicht auch die elastische Nachgiebigkeit der Spanten in Betracht ziehen. Die erste Randbedingung (3.12) wird dann durch die Identität

$$w \equiv w_v \quad (3.22)$$

ersetzt. Wir nehmen an, daß die Spanten in der Form von Kreisrahmen mit dem Halbmesser R_v ausgeführt sind, und bezeichnen mit F_v , E_v ihre Querschnittsfläche und ihren Zugelastizitätsmodul. Dann gilt für die radiale elastische Verformung w_v des beiderseits belasteten Zwischenspantes

$$w_v = - \frac{R_v^2}{E_v F_v} 2T_v = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{E}{E_v} \frac{R_v^2 h^2 k}{R^2 F_v} [(L_1 - L_4) \operatorname{sh} \beta \cos \beta - (L_1 + L_4) \operatorname{ch} \beta \sin \beta]. \quad (3.23)$$

Tabelle 3

Die Werte der Koeffizienten $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ nach den Formeln (3.15) und der spezifischen einseitigen Belastungsbreite (3.20) für den Fall der vollkommen starren Spanten

$\frac{\vec{R}}{h}$	30				50				100			
$\downarrow \frac{R}{l}$	λ_4	λ_5	λ_6	$\frac{l_p}{l}$	λ_4	λ_5	λ_6	$\frac{l_p}{l}$	λ_4	λ_5	λ_6	$\frac{l_p}{l}$
10,0	0,00173	0,09473	0,39442	0,49913	0,00455	0,15731	0,50776	0,49772	0,01783	0,30934	0,70850	0,49108
5,0	0,02539	0,36760	0,77015	0,48730	0,06634	0,57999	0,95249	0,46683	0,20796	0,93443	1,14270	0,39602
4,0	0,05895	0,54925	0,92954	0,47052	0,14299	0,81082	1,09286	0,42850	0,35915	1,08539	1,15571	0,32042
3,0	0,15835	0,84447	1,10847	0,42082	0,31664	1,05820	1,16190	0,34168	0,55205	1,09348	1,07713	0,22398
2,0	0,42500	1,10792	1,13594	0,28750	0,58374	1,08042	1,06163	0,20813	0,71616	1,02565	1,02376	0,14192
1,0	0,74114	1,02250	1,02280	0,12943	0,80015	1,01919	1,01940	0,09993	0,85950	1,01352	1,01352	0,07025
0,75	0,80661	1,01865	1,01876	0,09669	0,85085	1,01435	1,01435	0,07457	0,89498	1,01011	1,01011	0,05251
0,50	0,87189	1,01233	1,01233	0,06405	0,90104	1,00952	1,00952	0,04948	0,93022	1,00671	1,00671	0,03489
0,25	0,93634	1,00613	1,00613	0,03183	0,95076	1,00474	1,00474	0,02462	0,96523	1,00335	1,00335	0,01739
0,10	0,97463	1,00244	1,00244	0,01269	0,98036	1,00189	1,00189	0,00982	0,98611	1,00133	1,00133	0,00694
0,05	0,98733	1,00122	1,00122	0,00634	0,99018	1,00094	1,00094	0,00491	0,99307	1,00067	1,00067	0,00347
0,00	1,00000	1,00000	1,00000	0,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,00000

Führen wir die bezogene Steifheit H_v durch die Beziehung

$$H_v = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{E}{E_v} \frac{R_v^2 h^2 k}{R^2 F_v} \quad (3.24)$$

und die dimensionslosen Koeffizienten $\lambda_{4,H,1}$, $\lambda_{4,H,2}$, $\lambda_{5,H}$, $\lambda_{6,H}$ des Spannungszustandes, die von den Verhältnissen $\frac{R}{h}$, $\frac{R}{l}$ und von der bezogenen Steifheit H_v abhängig sind, durch die Formeln

$$\begin{aligned} \lambda_{4,H,1} &= \frac{\beta(\operatorname{sh} 2\beta + \sin 2\beta) + (2H_v \beta - 1)(\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta)}{\beta(\operatorname{sh} 2\beta + \sin 2\beta) + (2H_v \beta - \nu^2)(\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta)}, \\ \lambda_{4,H,2} &= \frac{1}{\nu^2} \frac{\nu^2 \beta(\operatorname{sh} 2\beta + \sin 2\beta) + (2H_v \beta - \nu^2)(\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta)}{\beta(\operatorname{sh} 2\beta + \sin 2\beta) + (2H_v \beta - \nu^2)(\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta)}, \\ \lambda_{5,H} &= \frac{\beta(\operatorname{sh} 2\beta - \sin 2\beta)}{\beta(\operatorname{sh} 2\beta + \sin 2\beta) + (2H_v \beta - \nu^2)(\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta)}, \\ \lambda_{6,H} &= \frac{\beta(\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta)}{\beta(\operatorname{sh} 2\beta + \sin 2\beta) + (2H_v \beta - \nu^2)(\operatorname{ch} 2\beta - \cos 2\beta)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

ein, dann gilt in den versteiften Querschnitten

$$\begin{aligned} \sigma_{s,v} &= \lambda_{4,H,2} \nu^2 \frac{R}{h} p_0, \quad \tau_v = \tau \equiv 0, \quad \sigma_v = \sigma = \lambda_{4,H,1} \nu \frac{R}{h} p_0, \\ M_v &= \lambda_{5,H} \frac{\sqrt{3}}{6} (1 - \nu^2) R h p_0, \quad \sigma_{M,v} = \pm \lambda_{5,H} \sqrt{3} (1 - \nu^2) \frac{R}{h} p_0, \\ T_v &= p_0 l_{p,H} = \lambda_{6,H} \frac{\sqrt{3}}{3} (1 - \nu^2) h k p_0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

wobei $l_{p,H}$ die einseitige Belastungsbreite des Spantes bedeutet. Die Formel (3.20) nimmt offenbar die Form

$$\frac{l_{p,H}}{l} = \lambda_{6,H} \frac{1 - \nu^2}{2\beta} \quad (3.27)$$

an. Die Beziehungen (3.25) bis (3.27) bilden so eine Verallgemeinerung von Formeln (3.15), (3.16), (3.17) und (3.20), die sich aus ihnen für den Fall der vollkommen starren Spanten ($H_v = 0$) ergeben. Wenn die Spanten völlig nachgiebig $\left(\frac{1}{H_v} = 0\right)$ wären, so gälte $\lambda_{4,H,1} = \lambda_{4,H,2} = 1$, $\lambda_{5,H} = \lambda_{6,H} = 0$ und alle Formeln würden dann den reinen Membranzustand ausdrücken.

Da gemäß den Formeln (3.25) und (3.27) auch jetzt $\lambda_{4,H,1} + 2 \frac{l_{p,H}}{l} = 1$ gilt, kann die Abhängigkeit der Größen $\lambda_{4,H,1}$ und $\frac{l_{p,H}}{l}$ vom Verhältnis $\frac{R}{h}$ für $\frac{R}{h} = \text{konst}$ ($\frac{R}{h} = 50$) in einem Schaubild dargestellt werden (Abb. 5). Die Tabelle 4 gibt dann die Werte der Koeffizienten (3.25) und der spezifischen Belastungsbreite (3.27) für $\frac{R}{h} = 50$, verschiedene Verhältnisse $\frac{R}{l}$ und für einige Werte H_v an.

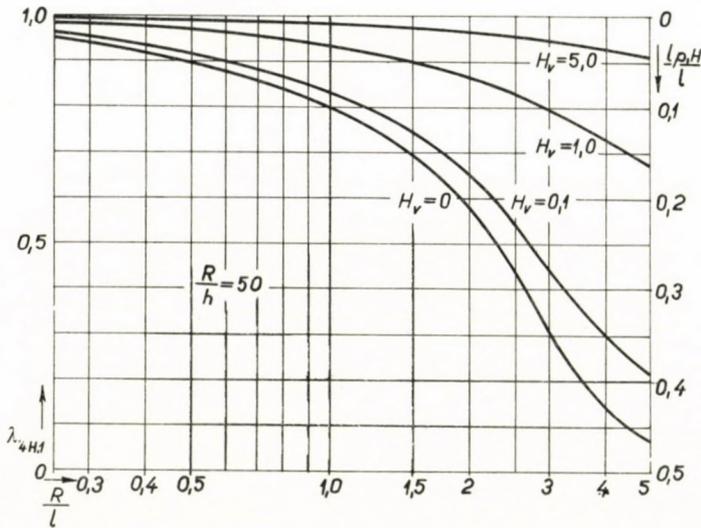


Abb. 5. Die Abhängigkeit des Koeffizienten $\lambda_{4,H,1}$ und der spezifischen einseitigen Belastungsbreite der Spanten von ihrer elastischen Nachgiebigkeit und Entfernung

Die Untersuchung der gegebenen Aufgabe vereinfacht sich wesentlich für den Fall der möglichen freien Dilatation der versteiften Querschnitte, der durch die Randbedingungen

$$w \equiv 0, \quad \frac{dw}{d\zeta} \equiv 0, \quad \sigma \equiv 0 \quad \text{für } \zeta = \pm \frac{l}{2R} \quad (3.28)$$

gekennzeichnet wird. Mit Bezeichnung (3.13) gilt dann

$$B_1 = 0, \quad L_1 = -\frac{2R^2}{Eh} P_0 \frac{\text{sh } \beta \cos \beta - \text{ch } \beta \sin \beta}{\text{sh } 2\beta + \sin 2\beta}, \quad (3.29)$$

$$L_4 = \frac{2R^2}{Eh} P_0 \frac{\text{sh } \beta \cos \beta + \text{ch } \beta \sin \beta}{\text{sh } 2\beta + \sin 2\beta}$$

Tabelle 4

Die Abhängigkeit der Koeffizienten nach den Formeln (3.25) und der spezifischen einseitigen Belastungsbreite (3.27) von der Entfernung und der elastischen Nachgiebigkeit der Spanten für $\frac{R}{h} = 50$

\vec{H}_0	0,1					1,0					5,0				
	$\lambda_{4,H,1}$	$\lambda_{4,H,2}$	$\lambda_{5,H}$	$\lambda_{6,H}$	$\frac{l_{p,H}}{l}$	$\lambda_{4,H,1}$	$\lambda_{4,H,2}$	$\lambda_{5,H}$	$\lambda_{6,H}$	$\frac{l_{p,H}}{l}$	$\lambda_{4,H,1}$	$\lambda_{4,H,2}$	$\lambda_{5,H}$	$\lambda_{6,H}$	$\frac{l_{p,H}}{l}$
10,0	0,09632	1,05425	0,14281	0,46095	0,45184	0,50611	5,74153	0,07805	0,25193	0,24695	0,83621	9,51734	0,02588	0,08355	0,08190
5,0	0,21574	1,87842	0,48718	0,80008	0,39213	0,67860	7,49252	0,19965	0,32788	0,16070	0,91129	10,31485	0,05511	0,09050	0,04436
4,0	0,29671	2,16049	0,66539	0,89684	0,35165	0,73098	7,86013	0,25452	0,34305	0,13451	0,92816	10,43591	0,06797	0,09162	0,03592
3,0	0,44550	2,40480	0,85866	0,94281	0,27725	0,79440	8,05903	0,31837	0,34957	0,10280	0,94585	10,51324	0,08386	0,09208	0,02708
2,0	0,65664	2,47649	0,89120	0,87570	0,17168	0,86672	7,93063	0,34593	0,33991	0,06664	0,96417	10,46048	0,09301	0,09139	0,01792
1,0	0,83400	2,59370	0,84659	0,84676	0,08300	0,93423	7,90566	0,33539	0,33546	0,03288	0,98215	10,44471	0,09105	0,09107	0,00893
0,75	0,87600	2,62847	0,84328	0,84328	0,06200	0,95075	7,91080	0,33491	0,33491	0,02462	0,98662	10,44498	0,09103	0,09103	0,00669
0,50	0,91766	2,66318	0,83993	0,83993	0,04117	0,96722	7,91628	0,33438	0,33438	0,01639	0,99108	10,44538	0,09099	0,09099	0,00446
0,25	0,95899	2,69764	0,83662	0,83662	0,02050	0,98364	7,92177	0,33386	0,33386	0,00818	0,99554	10,44580	0,09095	0,09095	0,00223
0,10	0,98364	2,71817	0,83465	0,83465	0,00818	0,99346	7,92504	0,33354	0,33354	0,00327	0,99822	10,44604	0,09093	0,09093	0,00089
0,05	0,99182	2,72498	0,83399	0,83399	0,00409	0,99673	7,92611	0,33344	0,33344	0,00163	0,99911	10,44611	0,09092	0,09092	0,00045
0,00	1,00000	2,73180	0,83333	0,83333	0,00000	1,00000	7,92721	0,33333	0,33333	0,00000	1,00000	10,44620	0,09091	0,09091	0,00000

und nach Einführung der Koeffizienten

$$\lambda_7 = \frac{\text{sh } 2\beta - \sin 2\beta}{\text{sh } 2\beta + \sin 2\beta}, \quad \lambda_8 = \frac{\text{ch } 2\beta - \cos 2\beta}{\text{sh } 2\beta + \sin 2\beta} \quad (3.30)$$

ergibt sich für die gesuchten Größen

$$\begin{aligned} \sigma_{s,v} &\equiv 0, \quad \tau_v \equiv 0, \quad \sigma_v = \sigma \equiv 0, \\ M_v &= \lambda_7 \frac{\sqrt{3}}{6} Rh p_0, \quad \sigma_{M,v} = \pm \lambda_7 \sqrt{3} \frac{R}{h} p_0, \\ T_v &= \lambda_8 \frac{\sqrt{3}}{3} hk p_0, \quad \frac{l_p}{l} = \lambda_8 \frac{1}{2\beta}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

In der Tabelle 5 sind die Werte der Koeffizienten (3.30) und der spezifischen einseitigen Belastungsbreite für verschiedene Verhältnisse $\frac{R}{l}$, $\frac{R}{h}$ angegeben.

Die Normalspannung $\sigma_{M,v}$ erreicht ihr Maximum

$$\max \sigma_{M,v} = 1,83138 \frac{R}{h} p_0 \quad (3.32)$$

für das Argument $2\beta = 3,92660$, so daß die größte von Biegemomenten hervorgerufene Spannung $\sigma_{M,v}$ in diesem Fall den Wert der Membranspannung um 83% übersteigen kann.

Bei den Randbedingungen (3.28) kommt allerdings die Änderung

$$\Delta l = - \frac{\nu}{E} \frac{Rl}{h} p_0 \left(1 - 2 \frac{l_p}{l} \right) \quad (3.33)$$

der ursprünglichen Rohrfeldlänge l vor. Das negative Vorzeichen dieses Ausdruckes zeigt, daß es sich beim Innendruck um Verkürzung handelt.

Betrachten wir auch die elastische Nachgiebigkeit der Spanten, so wird die erste Bedingung (3.28) durch die Identität (3.22) ersetzt und mit Bezeichnung (3.24) ergibt sich nach Einführung der Koeffizienten

$$\begin{aligned} \lambda_{7,H} &= \frac{\text{sh } 2\beta - \sin 2\beta}{\text{sh } 2\beta + \sin 2\beta + 2H_v (\text{ch } 2\beta - \cos 2\beta)}, \\ \lambda_{8,H} &= \frac{\text{ch } 2\beta - \cos 2\beta}{\text{sh } 2\beta + \sin 2\beta + 2H_v (\text{ch } 2\beta - \cos 2\beta)} \end{aligned} \quad (3.34)$$

für die gesuchten Größen

Tabelle 5

Die Werte der Koeffizienten λ_7 , λ_8 nach den Formeln (3.30) und der spezifischen einseitigen Belastungsbreite bei den Randbedingungen (3.28)

$\frac{\overrightarrow{R}}{h}$	30			50		
	λ_7	λ_8	$\frac{l_p}{l}$	λ_7	λ_8	$\frac{l_p}{l}$
10,0	0,08643	0,35985	0,49921	0,14356	0,46337	0,49792
5,0	0,33608	0,70411	0,48839	0,53217	0,87396	0,46957
4,0	0,50364	0,85235	0,47297	0,74904	1,00959	0,43395
3,0	0,78120	1,02541	0,42675	0,99290	1,09020	0,35145
2,0	1,04982	1,07638	0,29864	1,03881	1,02074	0,21937
1,0	0,99764	0,99793	0,13844	0,99996	1,00016	0,10747
0,75	1,00005	1,00016	0,10406	1,00000	1,00000	0,08059
0,50	1,00000	1,00000	0,06939	1,00000	1,00000	0,05373
0,25	1,00000	1,00000	0,03468	1,00000	1,00000	0,02686
0,10	1,00000	1,00000	0,01387	1,00000	1,00000	0,01075
0,05	1,00000	1,00000	0,00694	1,00000	1,00000	0,00537
0,00	1,00000	1,00000	0,00000	1,00000	1,00000	0,00000

$\frac{\overrightarrow{R}}{h}$	100			200		
	λ_7	λ_8	$\frac{l_p}{l}$	λ_7	λ_8	$\frac{l_p}{l}$
10,0	0,28263	0,64732	0,49186	0,53217	0,87396	0,46957
5,0	0,86825	1,06176	0,40338	1,05454	1,07002	0,28745
4,0	1,02233	1,08858	0,33086	1,03881	1,02074	0,21937
3,0	1,04829	1,03261	0,23538	1,00064	0,99630	0,16059
2,0	0,99838	0,99654	0,15144	0,99996	1,00016	0,10747
1,0	1,00000	1,00000	0,07598	1,00000	1,00000	0,05373
0,75	1,00000	1,00000	0,05699	1,00000	1,00000	0,04030
0,50	1,00000	1,00000	0,03799	1,00000	1,00000	0,02686
0,25	1,00000	1,00000	0,01900	1,00000	1,00000	0,01343
0,10	1,00000	1,00000	0,00760	1,00000	1,00000	0,00537
0,05	1,00000	1,00000	0,00380	1,00000	1,00000	0,00269
0,00	1,00000	1,00000	0,00000	1,00000	1,00000	0,00000

$$\begin{aligned} \sigma_{s,v} &= \lambda_{8,H} H_v \frac{R}{h} p_0, \quad \tau_v \equiv 0, \quad \sigma_v = \sigma \equiv 0, \\ M_v &= \lambda_{7,H} \frac{\sqrt{3}}{6} R h p_0, \quad \sigma_{M,v} = \pm \lambda_{7,H} \sqrt{3} \frac{R}{h} p_0, \\ T_v &= \lambda_{8,H} \frac{\sqrt{3}}{3} h k p_0, \quad \frac{l_{p,H}}{l} = \lambda_{8,H} \frac{1}{2\beta}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Der Einfluß der elastischen Nachgiebigkeit der Spanten ist hier also ganz analog wie im voranstehenden Fall.

Bei der Untersuchung von Druckbehältern ist es nötig, auch die Resultante des die beiden Böden angreifenden Überdruckes zu beachten. Dann wird die letzte Bedingung (3.28) durch die Identität

$$\sigma \equiv \frac{R}{2h} p_0 \quad (3.36)$$

ersetzt, aus welcher der gleiche Wert der Konstante B_1 folgt. Beide anderen Integrationskonstanten L_1 und L_4 nach den Formeln (3.29) werden jetzt mit dem Koeffizient $\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)$ multipliziert.

3.2 — *Das beiderseits eingespannte waagrechte Rohrfeld unter dem Angriff einer Einzellast in der Feldmitte*

Zur Untersuchung der gegebenen Aufgabe kann man die allgemeinen Formeln des Absatzes 3.1 nach Einsetzen $p_0 = 0$, $\gamma = 0$, $g = 0$ anwenden. Wenn die Schale den Bedingungen

$$\frac{R}{h} \geq 100, \quad \frac{R}{l} \leq 0,5 \quad (3.37)$$

genügt, kann man eine Näherungslösung benutzen, bei der man annähernd

$$m \doteq n \doteq k = \sqrt{\frac{R}{h}} \sqrt{3} \quad \text{setzt.} \quad (3.38)$$

Wir nehmen an, daß die Einzellast sich auf die Schalenwand mittels eines in der eigenen Ebene vollkommen starren Spantes überträgt. Die unbekanntenen Integrationskonstanten ergeben sich dann aus den Randbedingungen:

für $\zeta = 0$: $u \equiv 0$, $\frac{\partial w}{\partial \zeta} \equiv 0$, $v \equiv 0$, $w \equiv 0$,

$$Rh \oint \tau \sin \varphi d\varphi + \oint \frac{\partial M}{\partial \zeta} \cos \varphi d\varphi = \frac{P}{2}, \quad (3.39)$$

für $\zeta = \frac{l}{2R}$: $u \equiv 0$, $\frac{\partial w}{\partial \zeta} \equiv 0$, $v \cos \varphi \equiv w \sin \varphi$.

Bezeichnen wir mit dem Index m die im Absatze 2.4.1 nach der Membrantheorie festgesetzten Größen

$$\max \eta_m = \lambda_1 \frac{Pl^3}{192E\pi R^3 h}, \quad \tau_{m,0} = \frac{P}{2\pi R h} \sin \varphi, \quad \sigma_{m,0} = \frac{Pl}{8\pi R^2 h} \cos \varphi, \quad (3.40)$$

wobei mit dem Index 0 die inneren Kräfte im eingespannten Anfangsquerschnitt bezeichnet werden, so ergibt sich aus den Randbedingungen (3.39)

$$\begin{aligned} \max \eta &= \frac{\lambda_1^*}{\lambda_1} \max \eta_m, \quad \lambda_1^* = 1 + 96 \frac{R^2}{l^2} \left[1 + \left(1 - \frac{2+\nu}{4\sqrt{3}} \frac{h}{R} \right) \nu \right], \\ \tau_0 &= \left(1 - \frac{2+\nu}{2\sqrt{3}} \frac{h}{R} \right) \tau_{m,0}, \quad \sigma_0 = \left(1 - \frac{2+\nu}{k\sqrt{3}} \frac{2h}{l} \right) \sigma_{m,0}, \quad (3.41) \\ M_0 &= - \frac{2}{k\sqrt{3}} (2+\nu) h^2 \frac{R}{l} \sigma_{m,0}, \\ \sigma_{M,0} &= \pm \frac{4\sqrt{3}}{k} (2+\nu) \frac{R}{l} \sigma_{m,0}, \\ T_0 &= \frac{2+\nu}{\sqrt{3}} \frac{2h^2}{l} \sigma_{m,0}. \end{aligned}$$

Setzen wir in diese Formeln $\frac{R}{h} = 100$, $\frac{R}{l} = 0,5$ ein, so erhalten wir

$$\max \eta = 0,9993 \max \eta_m, \quad \lambda_1^* = 32,088, \quad \tau_0 = 0,993 \tau_{m,0}, \quad (3.42)$$

$$\sigma_0 = 0,999 \sigma_{m,0}, \quad \sigma_{M,0} = \pm 0,604 \sigma_{m,0}, \quad \max \bar{\sigma} = \sigma_0 + |\sigma_{M,0}| = 1,603 \max \sigma_{m,0}.$$

In unserer Aufgabe ist also der Einfluß der Membranzustandsstörungen nur im Werte der Normalspannung $\bar{\sigma}$ bemerkbar, die die größte Membranspannung $\sigma_{m,0}$ in der Schalenmittelfläche um 60% übertrifft.

SCHRIFTTUM

1. PANC, V.: Lösung von horizontalen zylinderförmigen, durch hydrostatischen Überdruck belasteten Behältern (tschechisch). Inženýrské stavby **8**, 338, 1955.
2. PANC, V.: Die Statik der dünnwandigen Stäbe und Konstruktionen (tschechisch). Verlag ČSAV, Prag, 1959.
3. PANC, V.: Neuzeitliche dünnwandige Stahlkonstruktionen und ihre statische Untersuchung. Die Schwerindustrie der Tschechoslowakei **6**, 3, 1959.
4. PANC, V.: Die Stabilität dünnwandiger Rohre und Gefäße mit versteiftem Mantel unter gleichmäßigem radialem Außendruck (tschechisch). Aplikace matematiky **5**, 376, 1956.
5. PANC, V.: Beitrag zur Theorie der Stabilität von Bogenträgern und Zylinderschalen (tschechisch). Die neuen Beiträge zur Theorie von Baukonstruktionen, 155, Verlag SAV, Pressburg, 1959.
6. LANGHAAR, H. L., BORESI, A. P.: Snap-Through and Post-Buckling Behavior of Cylindrical Shells Under the Action of External Pressure. University of Illinois Engineering Experiment Station Bulletin No. 443, 1957.
7. ИММЕРМАН А. Г.: О проверке устойчивости круговых цилиндрических оболочек при совместном действии продольной и поперечной нагрузок. Расчет пространственных конструкций. вып. IV, 525, Госстройиздат, Москва, 1958.
8. GIRKMANN, K.: Flächentragwerke. Springer-Verlag, Wien, 1956.

EINIGE GESICHTSPUNKTE ÜBER DIE BEMESSUNG VON MESSFEDERN UND MESSKÖRPERN AUF WIEDERHOLTE BEANSPRUCHUNGEN

M. RÁNKY

LEHRSTUHL FÜR FERTIGUNGSTECHNIK UND MASCHINENBAU, TECHNISCHE UNIVERSITÄT, BUDAPEST

Die Rolle und das Anwendungsgebiet der Federn nimmt im Bereich der Maschinenbauindustrie schnell zu. Dieses Anwachsen wird in jedem Bereich, d. h. auf dem Gebiet der Bearbeitungsmaschinen, der Meßgeräte, der Fahrzeugherstellung, usw. als natürlich angesehen, und hängt mit der Herstellungszahl der einzelnen Produkte bzw. mit den gegenüber den Erzeugnissen gestellten Qualitätsanforderungen zusammen. Es ist also eine notwendige Erscheinung, daß die technologischen Fragen der Herstellung von Federn in den Vordergrund getreten sind.

Auf Grund statistischer Vermessungen, die über die eingebauten Federn von verschiedenem Anwendungsbereich ausgeführt worden waren, ist festzustellen, daß die Verwendungsfähigkeit von Federn außer ihrer Herstellungstechnologie noch durch ihre Zuverlässigkeit bestimmt wird. Diese Zuverlässigkeit ist mit der Betriebssicherheit und Genauigkeit der Federn, d. i. mit der Stabilität der Federkonstante verbunden.

Die Ursachen der Brüche von eingebauten und inbetriebgehaltenen Federn sind nicht in jedem Fall geklärt. Neben den häufigen Ermüdungsbrüchen tritt auch eine Änderung der Federkonstante auf, die die Genauigkeit der Feder beeinflußt.

Es kann auf Grund der Untersuchung der einzelnen Phasen der verwendeten Herstellungstechnologie festgestellt werden, daß die Ursachen der Wirkungen, die die Verwendungsfähigkeit der Federn wesentlich beeinflussen, in der Materialbearbeitung, d. h. in der Formgebung der äußeren Oberfläche und in der angewandten Technologie zu suchen sind.

Das Stellen dieser Frage ist kein neues Problem. Viele Forscher und Praktiker haben sich mit Versuchen beschäftigt, die der Verbesserung der Verwendbarkeit des Materials dienen. Ihre Arbeit läßt sich an Hand ihrer Auffassung in zwei Gruppen einreihen:

- a) Verbesserung der Eigenschaften der Oberflächen,
- b) Verbesserung der inneren Materialeigenschaften.

Während die erste Gruppe sowohl experimentell wie auch theoretisch für ausgearbeitet anzusehen ist, beschränkt sich die Veränderung der inneren

Materialeigenschaften bisher zumeist auf die Variation der Legierungsbestandteile. In diesem Aufsatz wird die Gruppe b) behandelt.

Die meisten Konstrukteure vertreten bezüglich der Bemessungsfragen den Standpunkt, daß die verwendete Technologie und die Wärmebehandlung zwar bei der Entscheidung der Eignung des Federmaterials eine Rolle spielen, aber diese Rolle ist ohne Wichtigkeit.

Unter Berücksichtigung der Feststellung, daß die momentan benutzten klassischen Materialkennzahlen nicht ausreichen, da die Industrie Kennzahlen verlangt, auf deren Grund die Lebensdauer der Federn mit Hilfe einer eindeutigen und präzisen Abgrenzung der technologischen Vorgänge zunimmt und die Federkonstanten stabil wird, wird im weiteren der Zusammenhang zwischen den inneren Eigenschaften der Materialien und den Materialkonstanten untersucht.

1. Bei Meßfedern, Meßkörpern und Federn benützte Materialkennzahlen und deren Untersuchung

Eine Feder ist ein Konstruktionselement, das zwischen den vorgeschriebenen Belastungsgrenzen — dem Hookeschen Gesetz folgend — eine elastische Formänderung erleidet und nebenbei eine vernachlässigbare elastische Hysterese besitzt.

Dem Anwendungsgebiet nach sind folgende Arten von Federn zu unterscheiden:

Konstruktionselemente, die betriebsmäßigen Beanspruchungen unterworfen sind

Konstruktionselemente für betriebsmäßige meßtechnische Aufgaben
Eich- oder Meßgeräte für Laborzwecke.

Unter Berücksichtigung der Gegebenheiten, der zur Verfügung stehenden Möglichkeiten, ferner der Federn verschiedener Form, erschien es zweckmäßig, bei den zu beschreibenden Versuchen die Ringfeder als Meßfeder von den Federn unterschiedlicher Gestaltung auszuwählen. Von technologischem Standpunkt aus gesehen ist die Ringfeder einer der Federkörper von günstigster Gestalt. Oberflächengüte, Formtreue und Maßtoleranz können durch gewöhnliche maschinelle Einrichtung gesichert werden, und obwohl die Verteilung der im Ring durch die Belastungen herforderufenen Spannungen nicht gleichmäßig ist, läßt sie sich mit Berechnung und auch mit Messung ziemlich gut verfolgen, wie dies auch meine Messungen erwiesen haben.

Die als Versuchsstücke verwendeten Ringfedern bzw. Modelle von ähnlicher Gestalt wurden auch mit Dehnungsmeßstreifen und auch durch optische Spannungsmessung kontrolliert. Die Meßstellen sind in Abb. 1 zu sehen.

Die Dehnungsmeßstreifen No 1, 2, 3 wurden an die innere, No. 4, 5 an die äußere Seite des Ringes angeklebt. P bedeutet die Belastungskraft. A und B sind Auflageflächen.

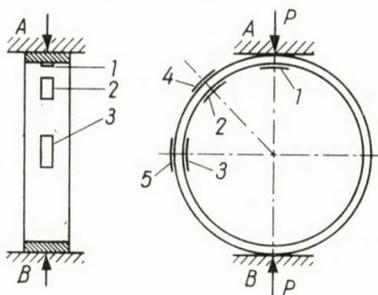


Abb. 1

Die Spannungsverteilung ist auch mit Hilfe von spannungsoptischer Untersuchung prüfbar. Zu diesem Zwecke wurden Experimente mit einem aus Kunstharz hergestellten Ringmodell durchgeführt.

Bei einem spannungsoptischen Modell, und so auch bei dem Modell von Ringfeder, ist es notwendig, die Kurvenscharen der Isoklinen und Isochromen

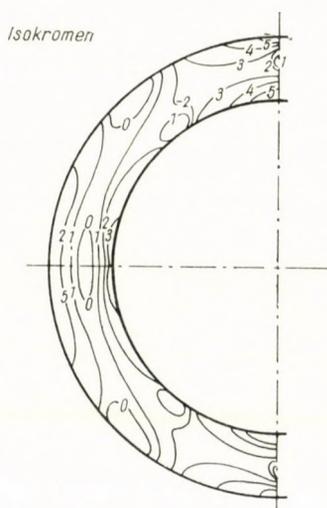


Abb. 2

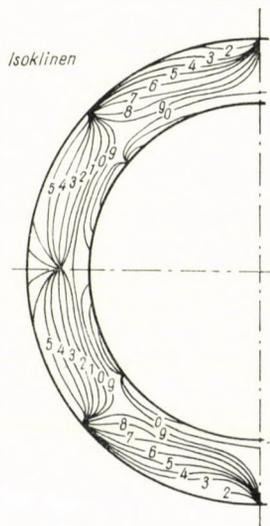


Abb. 3

für die Auswertung zu registrieren. Die Kurvenscharen sind in Abb. 2 und 3 dargestellt.

Die obigen Experimente wurden vorgenommen, um die, in der als Versuchskörper betrachteten Ringfeder erweckten Spannungen zu bestimmen. Die Kurve der Spannungsverteilung, die aus den Messungen erhalten wurde und mit den errechneten Werten ziemlich gut übereinstimmt, kann auch im Polardiagramm dargestellt werden.

Als Grundlage der Dimensionierung dienen die Spannungen, die in dem zu dimensionierenden Körper, im vorliegenden Falle im Federkörper, entstehen. In der Kenntnis der Spannungen benötigt man diejenigen vier wichtigsten Kennzahlen für die Charakterisierung des auszuwählenden Materials, die in der Praxis aus dem Zerreiβversuche erhalten werden, d. h. Streckgränze, Bruchfestigkeit, Dehnung und Kontraktion.

Die Bewertung eines Materials erfolgt auf der Grundlage, ob die vorgeschriebenen Bedingungen der vier Materialeigenschaften gleichzeitig erfüllt werden. Zwei von den Materialeigenschaften sind Kennzahlen für die Festigkeit, wieder zwei für die Verformbarkeit. Durch Veränderung der Mengen der Legierungsbestandteile zeigen die paarweise zusammengehörigen Werte in der Regel eine entgegengerichtete Änderung. Dehnung und Kontraktion verringern sich nämlich bei Zunahme der Festigkeit.

Diese sog. klassischen Materialkennzahlen sind aber nicht geeignet, um einen eindeutigen Hinweis auf die Dimensionierung zu bieten, es ist also begründet, einen neuen, auf die Technologie hinweisenden Kennwert einzuführen.

2. Änderung der Federkonstante unter Einwirkung wiederholter Beanspruchungen

Um die Einwirkung der statischen und wiederholten Beanspruchungen auf die Veränderung der Federkonstante untersuchen zu können, ließen wir zwei Ringfedern aus Chromstahl No. 1. und 2. anfertigen. Im Rahmen der Messungen wurden die Federkonstanten und deren Veränderungen nach der 1., 10 000. und 40 000. Beanspruchungen gemessen.

Die Kennzeichen (Bezeichnung, Mittelwerte der gemessenen Härten, Anlaßtemperatur) sind in Tabelle A zu finden.

Tabelle A

Ringfedern aus Material No 1

Nr.	Federbezeichnung	Härte HRC	Anlaßtemperatur C°	Bem. (Zone)
1.	5/1	51,2	300°	III
2.	5/2	51,4	260°	II
3.	5/3	53,6	200°	I
4.	5/4	50,2	330°	V
5.	5/5	51,0	300°	III
6.	5/6	50,8	320°	IV
7.	5/7	50,6	300°	III

Die Messungen wurden in den gegebenen Stufen nach der statischen Probelastung dreimal wiederholt; die Mittelwerte der Messungen an der Feder No 5/1, die der zahlreichen Meßreihen entrissen wurden, sind in dem Deformation-Kräfte-Diagramm in Abb. 4 zu sehen.

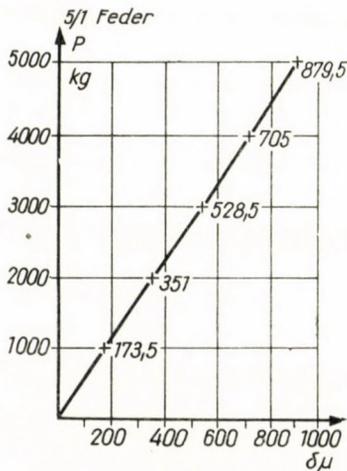


Abb. 4

Aus der Abbildung geht es hervor, daß der Zusammenhang zwischen Belastungskraft und Formänderung dem Hookeschen Gesetz folgt, d. h. in der gegebenen Zone ist die Formänderung mit der Belastungskraft proportional.

Der statischen Belastung folgten 10 000 wiederholte Beanspruchungen, dann eine neuere statische Messung, danach weitere 30 000 Beanspruchungen, und eine letzte statische Messung. Unter diesen Beanspruchungen traten einerseits gewisse Änderungen der Federkonstanten (Abb. 5, 6, 7, 8, 9, 10,

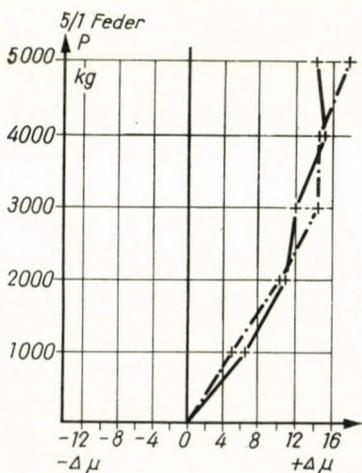


Abb. 5

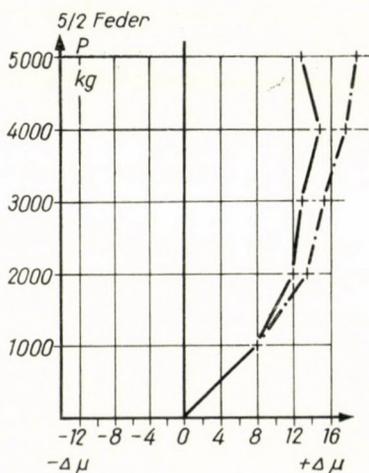


Abb. 6

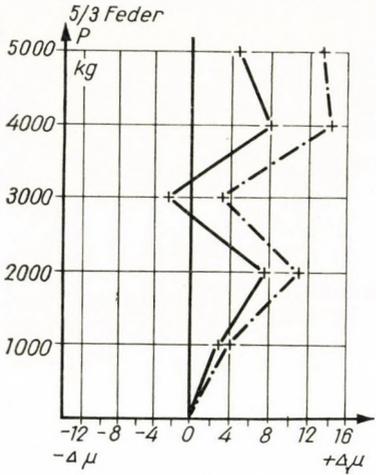


Abb. 7

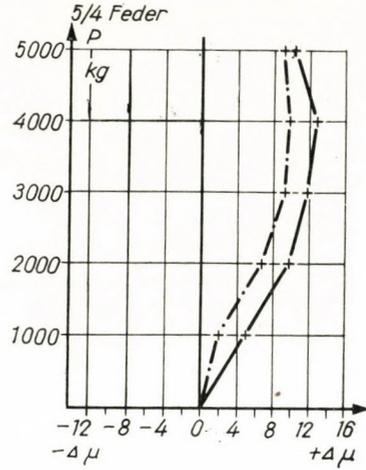


Abb. 8

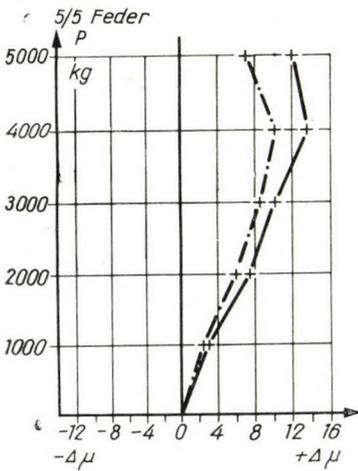


Abb. 9

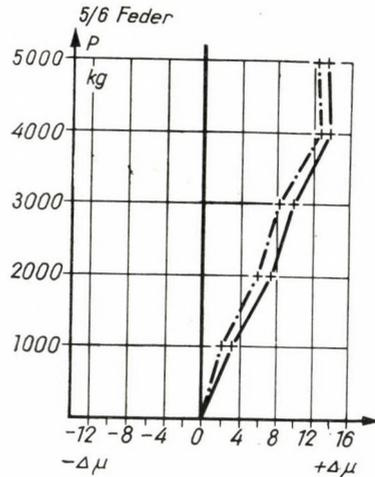


Abb. 10

11), andererseits auch eine Änderung in der Linearität der Federkonstanten (Abb. 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18) auf.

Die Änderungen der Federkonstanten der in Tab. A angegebenen Federn sind in Abb. 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 dargestellt. Abweichung zwischen Messung No. 1. und 2., also nach 10 000 Belastungen: — — — —

Abweichung zwischen Messung No. 1. und 3., also nach 40 000 Belastungen: — — — — — — — — — —.

Die Abweichungen der Federkonstanten von der jeweiligen Linearität sind derart festgestellt worden, daß der Ausgangspunkt 0 nach jeder Ermüdungs-

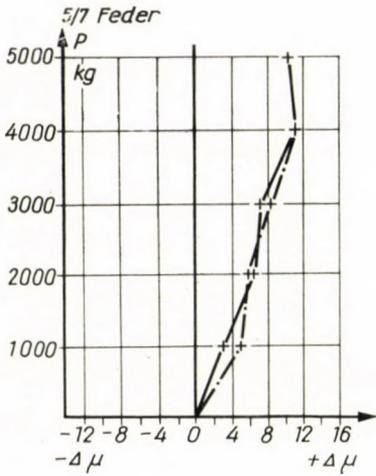


Abb. 11

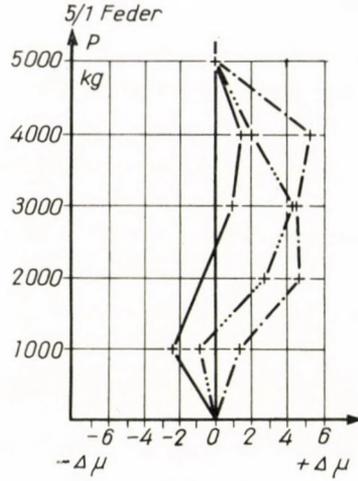


Abb. 12

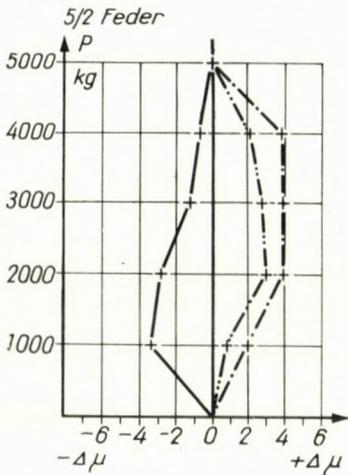


Abb. 13

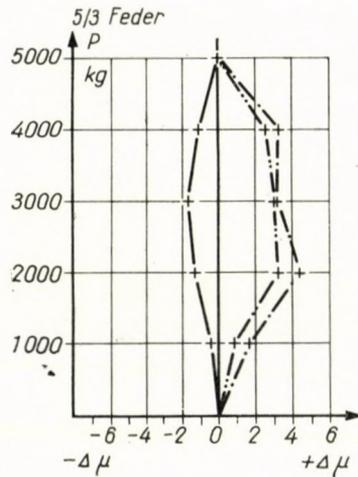


Abb. 14

serie auf Grund einer wiederholten statischen Meßreihe festgesetzt worden war (Abb. 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18).

In den obengenannten Diagrammen, die die Abweichungen von der idealen linearen Federkonstante nach 10 000 bzw. noch weiteren 30 000 Belastungen darstellen, sind folgende Bezeichnungen verwendet:

- nach der ersten Belastung: —————
- „ 10 000 Belastungen: - - - . - - - .
- „ 40 000 „ - - . - - . - - .

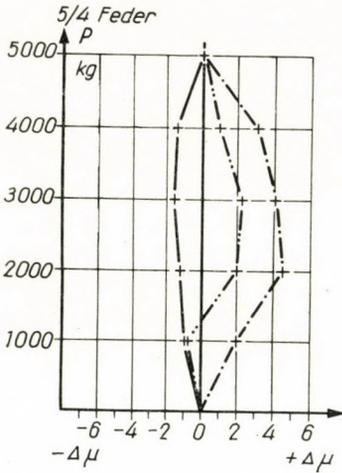


Abb. 15

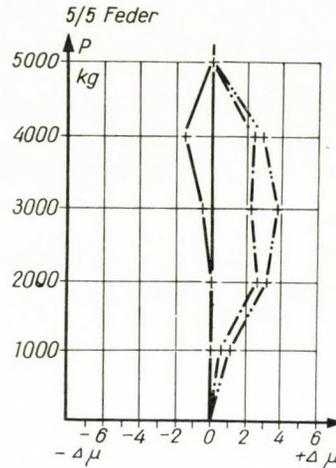


Abb. 16

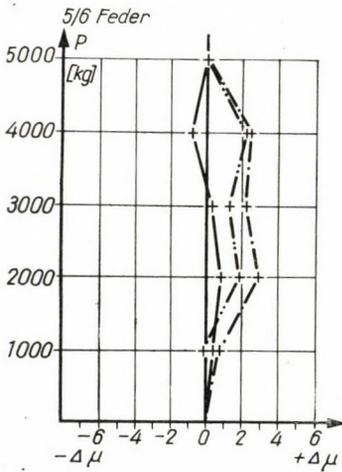


Abb. 17

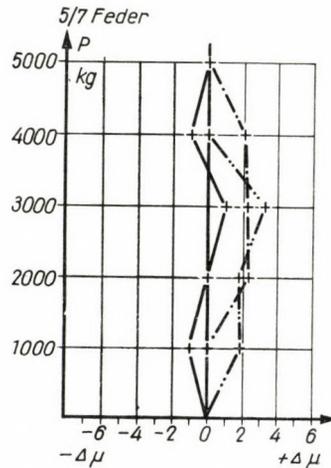


Abb. 18

Die Veränderung der Federkonstante bei Material No. 1 zeigt Abb. 19. Die Abweichung der Federkonstante von der Geraden ist in Abb. 20 dargestellt. Beide Diagramme enthalten die obengenannten Angaben als Funktion der Anlaßtemperatur und sind auf Grund unserer Versuche an den in Tab. A angeführten Ringfedern festgestellt.

Die Abszissen der Abb. 19 und 20 enthalten die Anlaßtemperaturen, während auf die Ordinaten die Abweichungen von der idealen Federkonstante und die Änderung der Federkonstante, in Mikron bestimmt, aufgetragen wurden. Die Kurven von Abb. 19 und 20 stehen in keinerlei Beziehung zu σ_B .

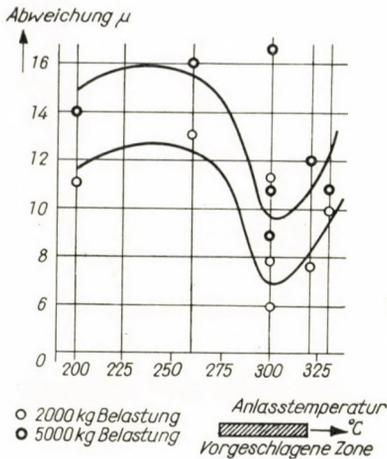


Abb. 19

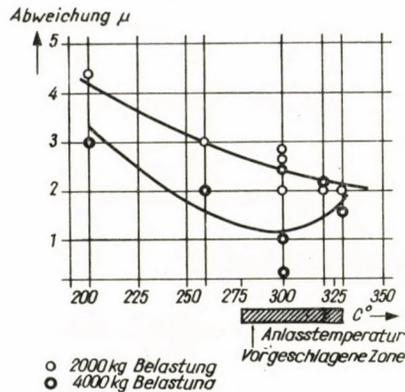


Abb. 20

3. Begründung der Einführung des neuen Zustandskennwerts

Zum Abstimmen der genannten Materialkennzahlen und zum Aufsuchen neuerer Kennwerte sind zahlreiche Versuche im Gange, im Rahmen dieses Artikels kann ich sie wegen ihrer großen Anzahl nicht behandeln. Anstatt dessen werde ich unsere Versuche beschreiben.

Nach unseren Versuchen und Angaben der Literatur hat sich die Kontraktionsarbeit A_c , die im Gegensatz zu den Erfahrungen mit unlegierten Stählen bei Legierungsstahl ebenfalls als ein Kennwert für die verwendete Wärmebehandlung dient, in unserem ausgewählten Thema als ein geeigneter Zustandskennwert erwiesen.

Die Kontraktionsarbeit als neuer Zustandskennwert ist von L. GILLEMOT in seinem Vortrag im Jahre 1958 an der Ungarischen Akademie der Wissenschaften eingeführt worden.

Die Festigkeitseigenschaften der Werkstoffe hängen von den Eigenschaften der Kristallstruktur ab. Die Größe der noch zugelassenen Belastung wird von den Eigenschaften der elementaren Kristalle und von den inneren Kräften, die sie zusammenhalten, bestimmt.

Mit Rücksicht darauf, daß sowohl die Kristallstruktur wie auch die sie zusammenhaltenden Kräfte sich während der Wärmebehandlung mit der Temperatur ändern, ist die Kontraktionsarbeit bei Legierungsstählen eine Folge der Anlaßtemperatur.

Unsere Versuche, die aus der Analyse der unter Einwirkung statischer und wiederholter Beanspruchungen entstandenen Änderungen bestanden, wurden sowohl an Versuchskörpern wie auch an Ringfedern durchgeführt.

Wir haben die folgenden Materialsorten untersucht:

Material No. 1: Rohrmaterial (Abb. 21),

„ No. 2: Rohrmaterial (Abb. 22),

Chromnickelstahl CrNi 35.69 (Abb. 23),

Manganchromstahl MCr 140 (Abb. 24),

Mangansiliziumstahl MS 140 (Abb. 25),

Chromvanadiumstahl CrVa 135.

Material No. 1. und 2. sind Chromstähle. Über die Zusammensetzungen bzw. Materialeigenschaften der weiteren Materialsorten geben die allgemeinbekannten entsprechenden ungarischen Normen eindeutige Angaben an.

Die Zugversuche wurden an normentsprechenden Zerreistben ausgeführt, deren Durchmesser, in Abhängigkeit von den Dimensionen des zur Verfügung stehenden Materials, so groß wie möglich gewählt worden waren.

Außer den Zerreistben wurden auch Ringfedern aus demselben Material, mit derselben Wärmebehandlung hergestellt.

Die Bearbeitung der Zerreistbe und Ringfedern wurde mit besonderer Sorgfalt durchgeführt. Dadurch wollten wir die Streuungsfehler, die auf die Unterschiede der Oberflächenrauigkeiten zurückgeführt werden können, möglichst verringern.

Im Laufe der Versuche wurden die Änderungen von Bruchfestigkeit (σ_B), Härte (HRC), Kontraktion (ψ_c) und Kontraktionsarbeit untersucht und gemessen.

Die Werte der obenstehenden Materialkennzahlen sind in Diagrammen zusammengefaßt dargestellt (Abb. 21, 22, 23, 24, 25).

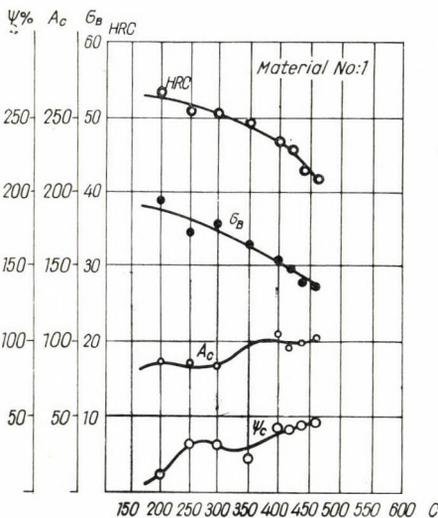


Abb. 21

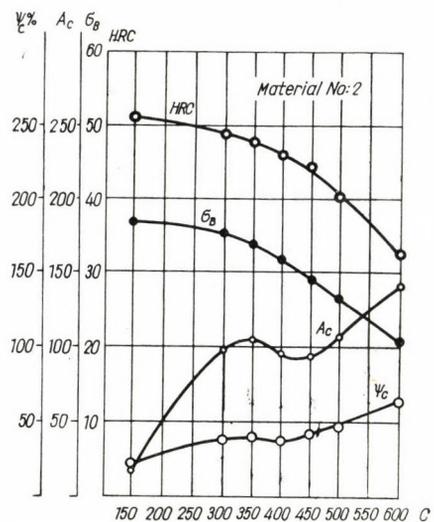


Abb. 22

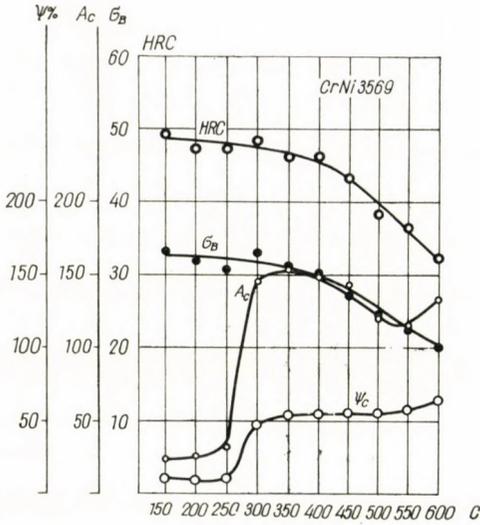


Abb. 23

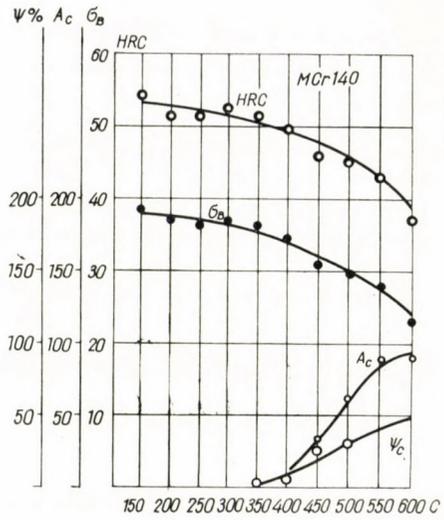


Abb. 24

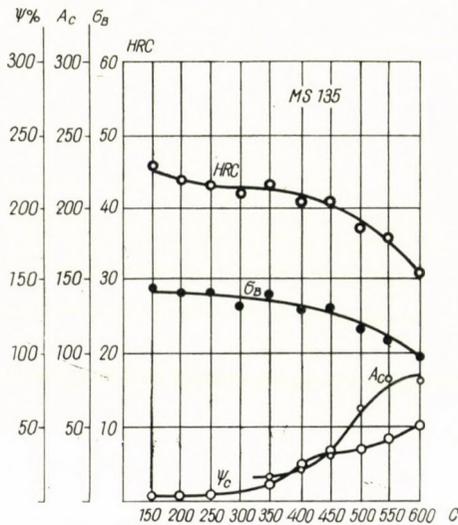


Abb. 25

Aus den Versuchen geht hervor, daß die Kontraktionsarbeit einiger Legierungsstähle, in Abhängigkeit von der Anlaßtemperatur, lokale Extremwerte aufweist. Dieses erste und lokale Maximum der Kurve ist als Arbeitspunkt auszuwählen und läßt sich auch zum Materialkennwert verwenden. Dieses Verfahren kann aber nur nach Durchführen gewisser Ermüdungsversuche in Frage kommen.

Vorausgesetzt, daß der kritische Bereich, wo die untersuchten Materialien sich gegen die wiederholten Beanspruchungen am günstigsten verhalten, in Beziehung mit der Kennkurve A_c ist, wurden Versuche in diesem Bereich ausgeführt, deren Resultate in Abb. 26 und 27 dargestellt sind.

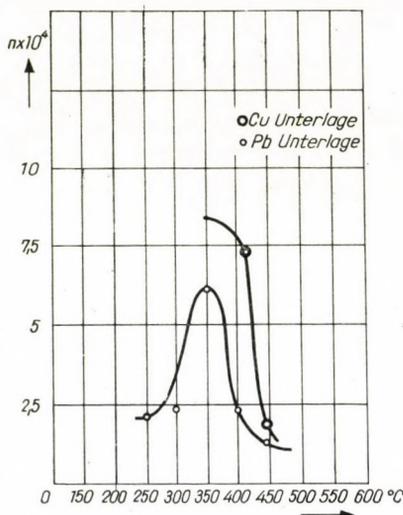


Abb. 26

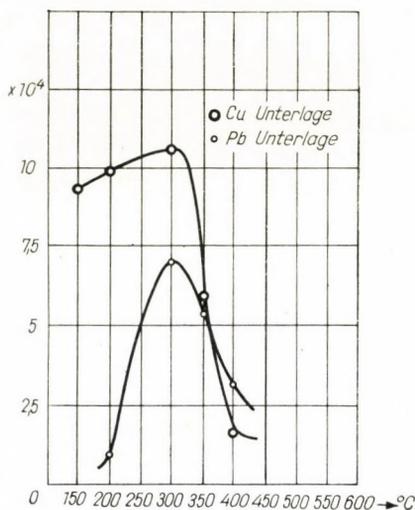


Abb. 27

Es ist aus diesen Diagrammen festzustellen, daß die Charakteristik der Kurven an einer bestimmten Stelle ein Optimum aufweist, das darauf hindeutet, daß für die untersuchten Legierungstähle eine Wärmebehandlungszone (zum Anlassen) zu finden ist, wo man bezüglich der Stabilität der Federkonstante die günstigsten Ergebnisse erreichen kann.

Es ist ferner auch festzustellen, daß diese optimale Anlaßtemperatur, wo die kleinste Änderung der Federkonstante auftritt, zwischen 250—350° C fällt.

Die Zone der Anlaßtemperatur übt also einen Einfluß auf die Brüche aus, die durch die wiederholten Beanspruchungen verursacht werden (Abb. 26, 27).

Vergleicht man die Höchstwerte der in Abb. 26 und 27 dargestellten Kurven mit den Kennlinien der Kontraktionsarbeit derselben Materialien, so ist eine gewisse Abweichung bemerkbar, d. h. man soll auch die Werte von σ_B neben A_c berücksichtigen.

4. Zusammenhang zwischen Kontraktionsarbeit, Bruchfestigkeit und Ermüdungsgrenze bei den untersuchten Materialien

Auf Grund der Auswertung der durchgeführten Versuche ist also festzustellen, daß es eine Wärmebehandlungszone gibt, wo die Meßfedern bzw. — in Erweiterung des Anwendungsgebietes — auch andere, aus legiertem Stahl hergestellte und wiederholten Beanspruchungen ausgesetzte Federn ihre Federkonstanten nur im geringen Maße verändern, und nebenbei weisen ihre Ermüdungsgrenzen günstige Eigenschaften auf.

Aus den Kennkurven der Änderungen der Federkonstanten, aus den Diagrammen, die die Ergebnisse der an Meßfedern ausgeführten Versuche

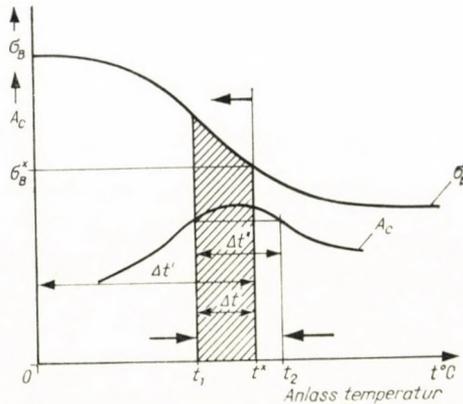


Abb. 28

zeigen, aus den Kennkurven der Kontraktionsarbeit derselben Materialien geht hervor, daß diese Kurven der untersuchten Materialien ihre Extremwerte in fast derselben Zone besitzen.

Zieht man die Genauigkeit der Messungen bzw. ihre Fehler, ferner die statistischen Fehler in Betracht, so kann man feststellen, daß sich die Randwerte der Kurven mit gewisser Vernachlässigung in der gleichen Zone befinden.

Die qualitative Veränderung der Bruchfestigkeit und Kontraktionsarbeit von Legierungsstählen ist in Abb. 28 dargestellt.

Die Diagramme können bei der Dimensionierung und Festlegung der Technologie von Federn als eine Grundlage bzw. als Hilfsmittel dienen.

Kennkurven σ_B und A_c sind je Material einmal festzusetzen. Im weiteren bestimmen diese zwei Kurven die zu verwendende Technologie.

Zur Auswertung des Obengesagten kann man feststellen, daß der Konstrukteur im Laufe der Dimensionierung in Kenntnis der Kennkurven σ_B und A_c in die Lage gerät, die zu verwendende Technologie zu übersehen. Diese zwei

Kennkurven können je Material bestimmt werden. Meiner Meinung nach darf die Größe von σ_B während der Wärmebehandlung nicht unter die Größe von σ_B^* (s. Abb. 28) fallen, als zulässiger Bereich mag also die Zone für Wärmebehandlung in Betracht kommen, die zwischen 0°C und der zu σ_B^* angehörigen Temperatur t^* liegt. Abb. 28 zeigt auch die Kurve der Kontraktionsarbeit. Diese Kurve besitzt einen Höchstwert in der Zone zwischen Temperaturen t_1 und t_2 . Es sind also die von den zwei Materialeigenschaften bestimmten Temperaturgrenzen

$$\Delta t' \text{ von } 0 - t^* \text{ } ^\circ\text{C für } \sigma_B$$

$$\Delta t'' \text{ von } t_1 - t_2 \text{ } ^\circ\text{C für } A_c.$$

Es gibt ein überdecktes Feld Δt zwischen den obigen Temperaturgrenzen, das sich von t_1 bis t^* ausdehnt. Die zulässige bzw. zu vorschreibende Wärmebehandlung soll nur in diesem Temperaturbereich durchgeführt werden, um eine maximale Lebensdauer zu erreichen.

Die Versuche habe ich mit fünf Stahlsorten angefangen; mit zwei davon bin ich schon fertig geworden. Die bisherigen Ergebnisse haben die Richtigkeit meiner Hypothese bewiesen. Die Wärmebehandlungs- bzw. Anlaßtemperaturzonen von Material No. 1 und 2 erstrecken sich nämlich zwischen $350 \pm 25^\circ\text{C}$ bzw. $300 \pm 25^\circ\text{C}$. Diese Forderung schreibt strengere Temperaturgrenzen vor als sie zur Zeit üblich sind.

Trotz all dieser Versuchsergebnisse wäre es noch zu früh, ohne weitere eingehende Untersuchungen die bisherigen Erfahrungen zu verallgemeinern.

Der Mehrbetrag an Lebensdauer bei wiederholten Beanspruchungen kann aber bei Bestandteilen aus obigen Materialien, insbesondere im Falle eines niedrigen Sicherheitsbeiwertes, eine Materialersparnis zur Folge haben.

EINIGE ERGEBNISSE VON VERSUCHEN MIT ZAHNRÄDERN AUS KUNSTSTOFF

Dr. techn. Prof. Z. TERPLÁN und J. FANCSALI
TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC, UNGARN

Der Kunststoff ersetzt das bisher übliche Material von immer weiteren Maschinenelementen. Die fachliterarischen Angaben sind aber sehr spärlich [1]. Aus diesem Grunde sind Versuche mit Zahnradpaaren aus Kunststoff und Stahl im Jahre 1960 auf dem Lehrstuhl für Maschinenelemente, Technische Universität für Schwerindustrie Miskolc, im Rahmen der Akademischen Forschungsgemeinschaft für Schwermaschinenbau mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften eingeleitet worden. Diese Stoffpaarung kommt häufig vor, dagegen stehen die für die Dimensionierung notwendigen Materialeigenschaftswerte kaum zur Verfügung.

Im folgenden sollen die Ergebnisse der ersten Versuchsreihe veröffentlicht werden.

Die Versuche wurden mit einer sog. leistungsrücktriebenen Ermüdungsmaschine (Abb. 1 und 2) durchgeführt, die nach unserem Entwurf in der Werk-

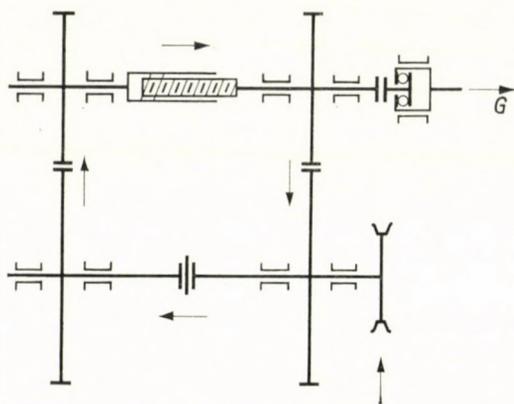


Abb. 1. Anordnung der Zahnradermüdungsmaschine

statt des Lehrstuhles hergestellt worden ist. Der Entwurf ist nach gründlicher Durchsicht der Fachliteratur [2, 3], unter Heranziehen der Kritik namhafter ungarischer Fachleute, ausgearbeitet worden [4].

Die Wirkungsweise der Ermüdungsmaschine ist in Abb. 2 zu verfolgen. Der Motor treibt die erste Welle über einen Keilriemenantrieb an, die die rückkehrende Leistung über ein Zahnradpaar empfängt. Diese Welle gibt die Leistung der folgenden Welle mit der Hilfe einer Oldham-Kupplung weiter, auf die wieder ein Zahnrad aus Stahl aufgekeilt ist. Das Stahlzahnrad greift in das Zahnrad aus Kunststoff ein. Auf dem rechten Ende der Welle des Kunststoffzahnrades sitzt eine Hülse mit Trapezgewinde fest. In das Muttergewinde paßt das linke, mit Trapezgewinde versehene Wellenende der Rücktriebwellen.

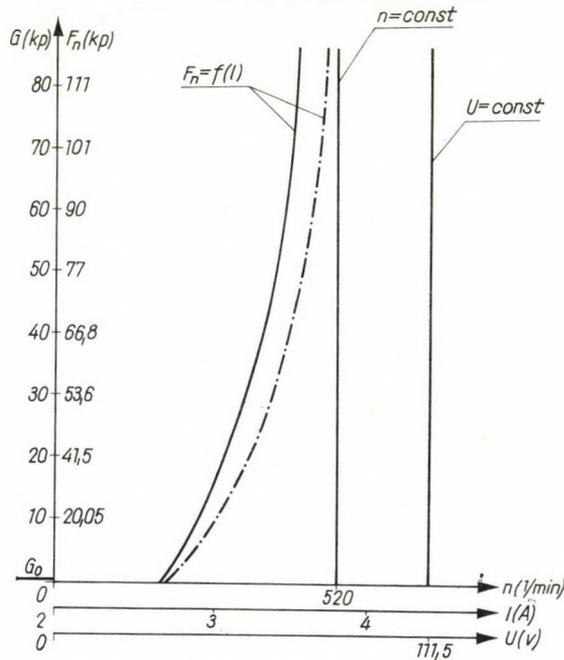


Abb. 3. Betriebscharakteristik der Zahnradermüdungsmaschine (—, —, —, zeigt den Zustand ohne Ölschmierung)

Die mit Gewinde gekuppelten Wellen geben die Belastung (die Einspannung) den zwei Zahnradpaaren nur in dem Fall über, und befördern die Leistung als eine Einheit (durch Reibung) weiter, wenn eine axiale Kraft auf sie wirkt. Zu diesem Zwecke wird das rechte Wellenende der letzten Welle mit Hilfe einer Gewindehülse mit einer Vorrichtung verbunden, die die von einer Gewichtslast hervorgerufene axiale Kraft über einen Doppelhebel derweise übergibt, daß sich die Verlängerungswelle in der nicht rotierenden Einspannvorrichtung mit Doppelhebel unverhindert verdrehen könne.

Die Messung [5] begann mit der Bestimmung der Charakteristik der Ermüdungsmaschine. Das Nomogramm, das in Abb. 3 dargestellt wird, zeigt den Zusammenhang zwischen der Gewichtsbelastung und den Normalkräften

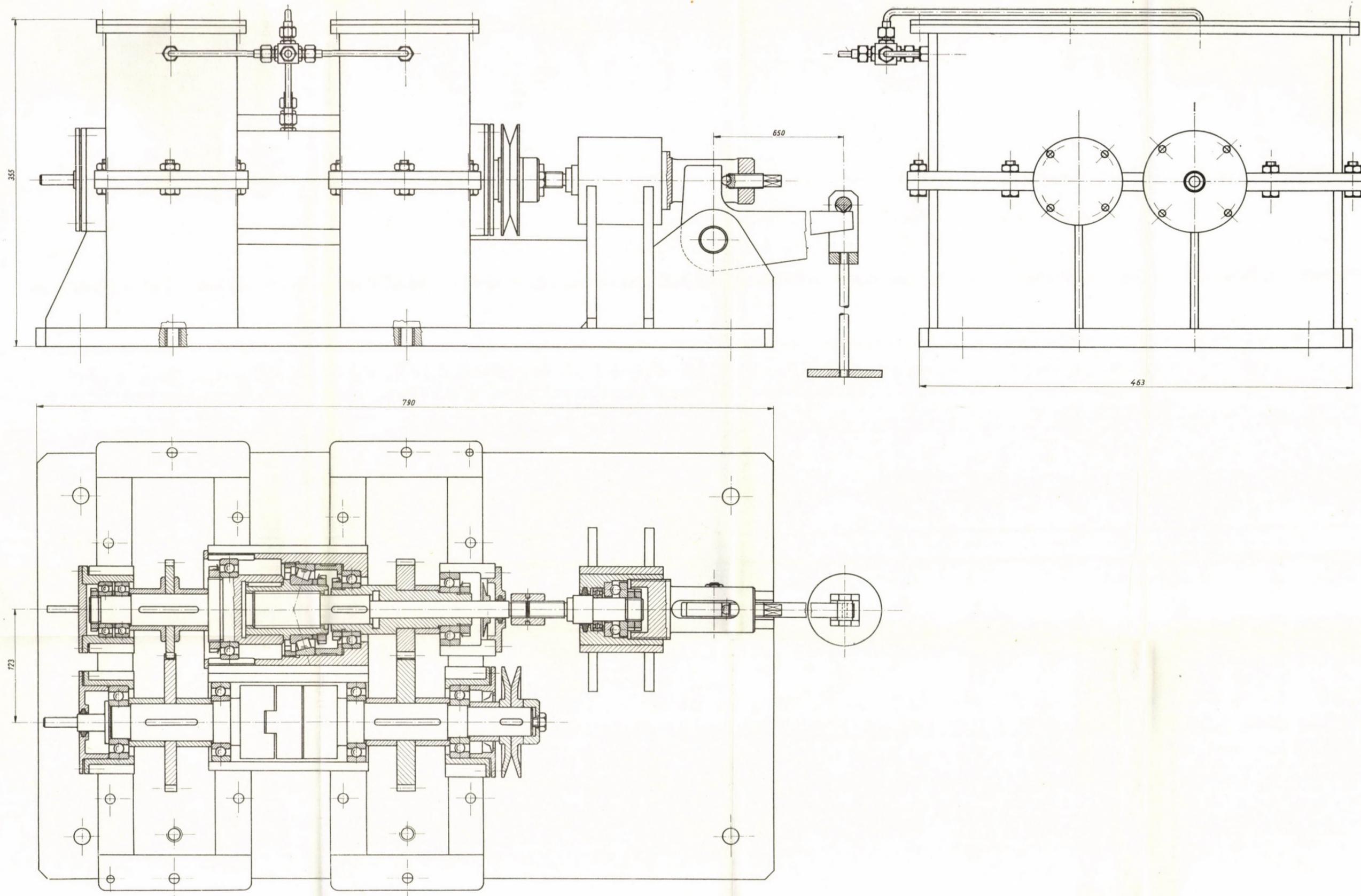


Abb. 2. Zusammenstellungszeichnung der Zahnradermüdungsmaschine.

des Zahneingriffes, ferner stellt es die Änderung der Normalkraft in Abhängigkeit von der Stromstärke, mit und ohne Ölschmierung, dar. In Abb. 4 wird dagegen die Eichung mit Federn gezeigt. Hier werden Naben mit Armen an Stelle des Versuchszahnradpaares einmontiert, geeichte Feder zwischen die

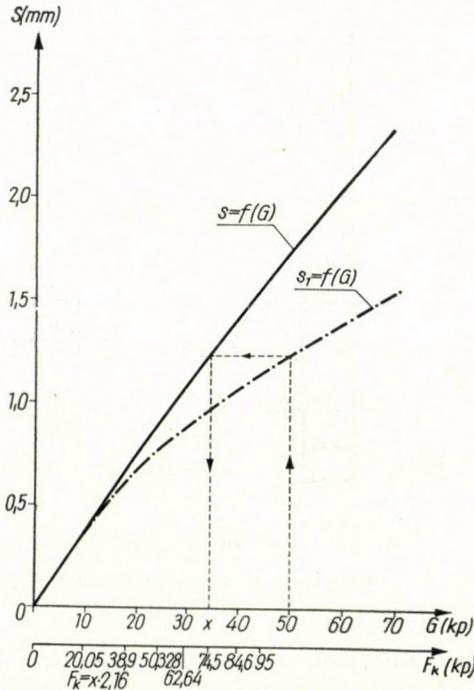


Abb. 4. Eichung der Zahnradermüdungsmaschine für statische Belastung nach dem Federverfahren. $s = f(G)$ Eichkurve der Feder; $s_1 = f(G)$ Federzusammendrückung in der Maschine unter Belastung

Arme eingelegt. Unter Vermeiden der geometrischen Umrechnungen ergibt sich die Abb. 4, in der die Umfangskraft, die von einer Gewichtsbelastung hervorgerufen wurde, sofort abzulesen ist.

Das Kunststoffzahnrad wird aus Textilien, mit Fenolformaldehydharz geschichtet, hergestellt. Festigkeitsangaben: $\sigma_{hj} \approx 1 \dots 2,4 \text{ Mp/cm}^2$; $\sigma_{ny} \approx 2 \dots 3,2 \text{ Mp/cm}^2$; $\sigma_B \approx 1,2 \dots 1,25 \text{ Mp/cm}^2$; $H_B = 3,5 \text{ Mp/cm}^2$; $E \approx (0,6 \dots 1,1) \cdot 10^3 \text{ Mp/cm}^2$.

Festigkeitsangaben vom Stahlzahnrade (Material: A 50.11) $\sigma_B = 5 \text{ Mp/cm}^2$; $H_B = 15 \text{ Mp/cm}^2$; $E = 2,1 \cdot 10^3 \text{ Mp/cm}^2$.

Werkzeichnungen der Versuchszahnräder sind in Abb. 5 und 6 zu sehen. Die Zahnräder wurden nach dem Abwälzverfahren mit Endfräser in der Werkstatt des Lehrstuhles für Maschinenbautechnologie der Technischen Universität für Schwerindustrie Miskolc (Ungarn) hergestellt.

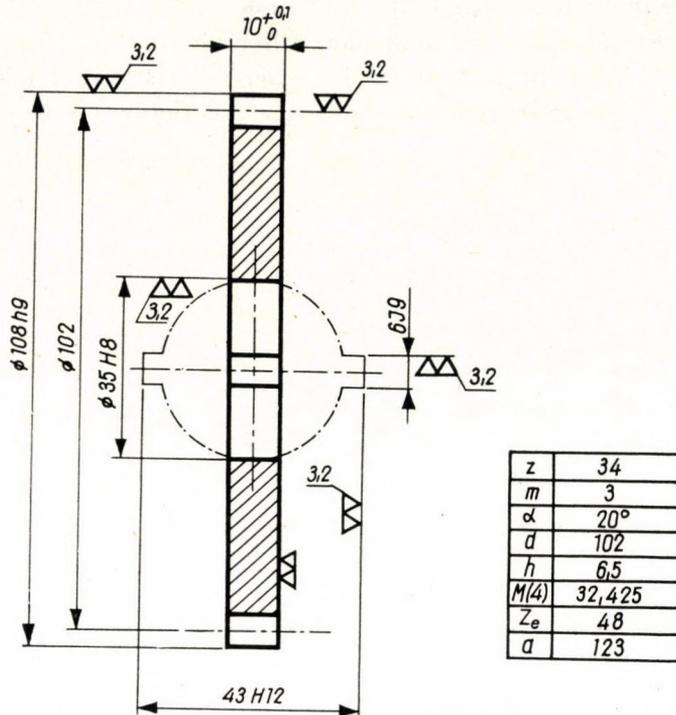


Abb. 5. Werkzeichnung des Versuchszahnrades aus Kunststoff (Verzahnungs-klasse B)

Die ersten Dauerprüfungen wurden bei einer ständigen Drehzahl von 700 U/min bei verschiedenen Gewichtsbelastungen bis zum Zahnbruch ausgeführt. Die Meßergebnisse sind in Abb. 7 zu sehen. Punkt *A* der Ermüdungskurve ergibt eine HERTZ-Pressung von 1210 kp/cm² (d. i. eben die Grenzbelastung) mit 53,6 kp Normalkraft (es bedeutet eine Kantenpressung von 53,6 kp/cm für 1 cm Breite), mit 3639915 Umdrehungen. Während der Dauerprüfung tritt eine Grübchenbildung in der Nähe des Teilkreisdruchmessers auf, die sich vor dem Bruch schnell vergrößert, wie es auch aus Abb. 8 ersichtlich ist. Abb. 8 stellt den Verlauf der Stromaufnahme bei konstanten Belastungen dar. Verbindet man die rasch zunehmenden Stellen der Stromaufnahmen mit einer ungestrichelten Linie, so erhält man eine Charakteristik ähnlich der Abb. 7. Es ist merkwürdig, daß jede Stromkurve aus drei Strecken besteht: einer degressiven (beifällige Reibung), einer ständigen (gleichmäßiger Verschleiß) und einer schnell steigenden (rascher Verschleiß, bald Bruch) Strecke. Der Wendepunkt fällt auf etwa 80% der Drehanzahl bis zum Bruch.

Abb. 9 zeigt den spezifischen Verschleiß (mm³/U) als eine Funktion der Belastung. Er läßt sich durch Planimetrierung der Verschleißkurven der Abb. 10 bestimmen.

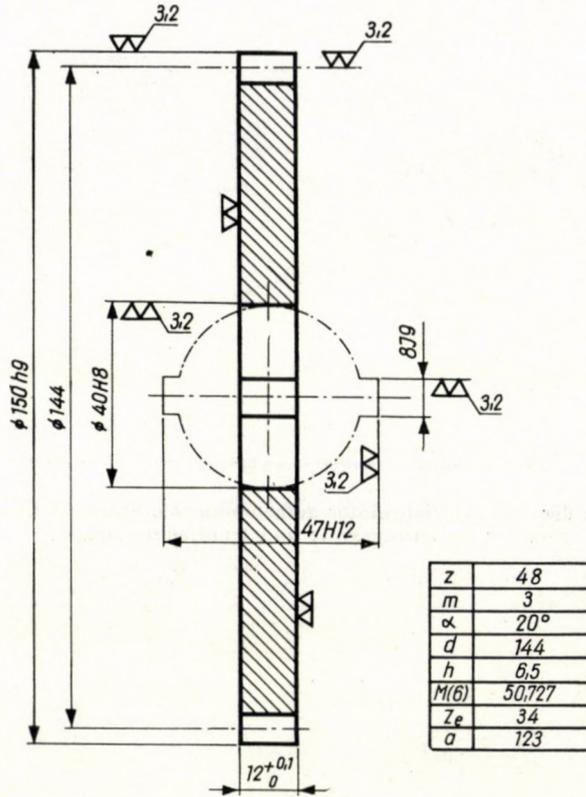


Abb. 6. Werkzeichnung des Zahnrades aus Stahl, das ins Versuchszahnrad eingreift (Verzahnungskategorie B)

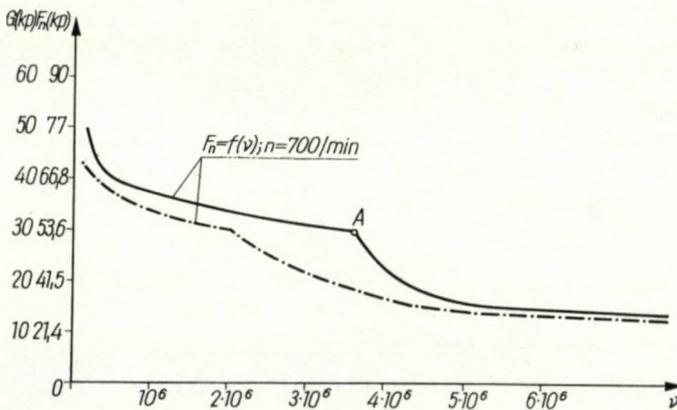


Abb. 7. Ermüdungskurve des Kunststoffzahnrades bei ständiger Drehzahl 700 U/min (die gestrichelte Kurve zeigt den ölschmierungs-freien Zustand)

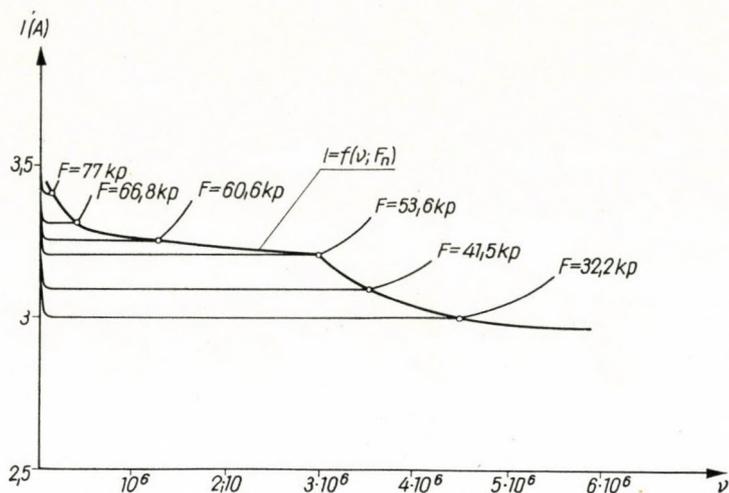


Abb. 8. Änderung der vom Antriebsmotor aufgenommenen Stromstärke in Abhängigkeit von der Belastungskraft und Umdrehungszahl

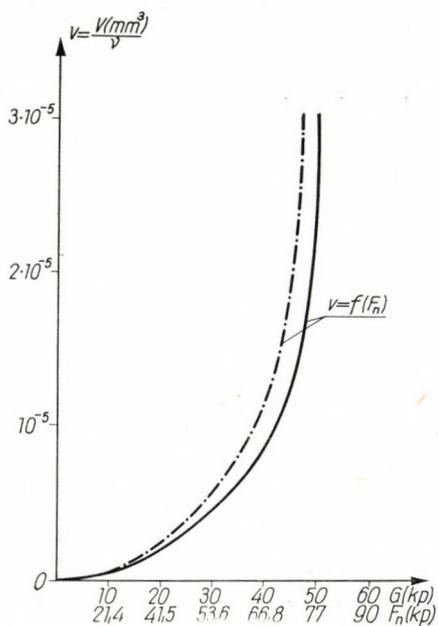


Abb. 9. Änderung des spezifischen Zahnverschleißes in Abhängigkeit von der Belastungskraft (— · — · — zeigt den ölschmierfreien Zustand)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b (mm)	10								
F_n (kp)	79,5	66,8	56,8	53,6	41,5	30,2	66,8	53,6	41,5
n (1/min)	700								
v	196000	484476	1567300	3639915	4176293	5449370	244494	2027016	3338572
V (mm ³)	5,75	3,75	10,234	17,5	7	5,2	2,75	11,25	7,74
$V = \frac{V}{v}$ (mm ³)	$2,933 \cdot 10^{-5}$	$0,774 \cdot 10^{-5}$	$0,653 \cdot 10^{-5}$	$0,4807 \cdot 10^{-5}$	$0,1676 \cdot 10^{-5}$	$0,0954 \cdot 10^{-5}$	$1,124 \cdot 10^{-5}$	$0,555 \cdot 10^{-5}$	$0,235 \cdot 10^{-5}$

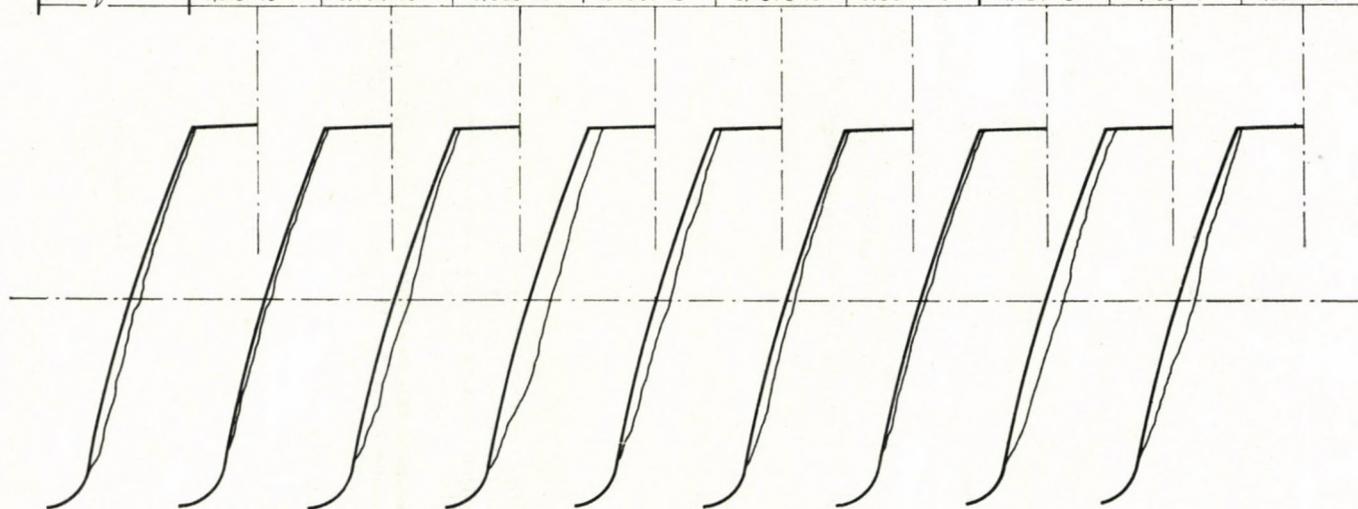


Abb. 10. Originale und verschlissene Profile der verschiedenen untersuchten Zahnradzähne (die drei Zähne rechts wurden ohne Ölschmierung ermüdet)

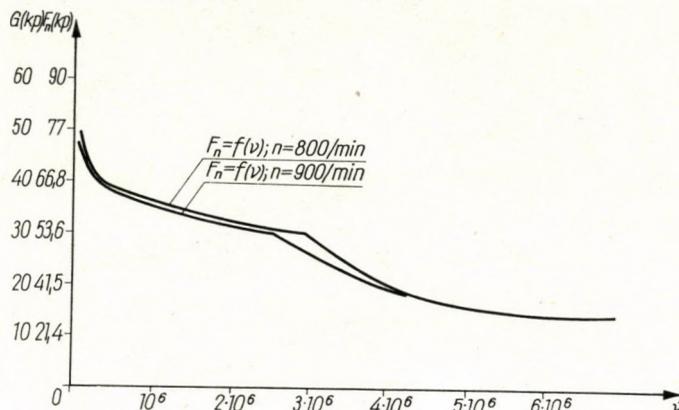


Abb. 11. Ermüdungskurven von Kunststoffzahnrad in ölgeschmiertem Zustand bei ständigen Drehzahlen von 800 und 900 U/min

In Abb. 11 werden die Ausdehnungen der in Abb. 7 dargestellten Versuche auf 800 U/min und 900 U/min gezeigt.

Aus den ersten Versuchen ist es festzustellen, daß die Kunststoffart, die für unsere ersten Versuche ausgewählt worden war, zum Verschleiß geneigt war. Wir wollen unsere Versuche an diesem Stoff auf den Einfluß weiterer Parameter, später auch auf weitere Kunststoffarten erstrecken.

SCHRIFTTUM

1. JACOBI, H. R.: Polyamide als Werkstoffe für Maschinenelemente. Industrie — Anzeiger 1956. Nr 103/104.
2. KUDRJASCHOW—CHLUNOV: Lánchajtásra vonatkozó laboratóriumi kutatások. (Fordítás oroszról). Újítók lapja 1950. III. évf. 15. sz. 39—41 o. Laboratoriumsversuche an Kettenantriebe. (Übersetzung aus russischer Sprache); Újítók Lapja. 1950. 3. Jahrgang. No 15. S. 39—41.
3. VÖRÖS, I.: Fogaskerekekre vonatkozó legújabb kutatások eredményei. (Kézirat.) Budapest, 1954. Mérnöki Továbbképző Intézet. — Ergebnisse der neuesten Forschungen in betreff der Zahnräder (Manuskript). Budapest 1954. Mérnöki Továbbképző Intézet.
4. TERPLÁN, Z.—FANCSALI, J.: Ein neuer Apparat zur Zahnräd ermüdung. (Unter Druck in den fremdsprachigen Mitteilungen der Technischen Universität für Schwerindustrie, Miskolc. Vol. XXII.)
5. FANCSALI, J.: Műanyag-acél párosítású homlokfogaskerekek fázasztó kísérleteinek első eredményei. Miskolc, 1961. Nehézipari Műszaki Egyetem Gépelemek Tanszékének közleményei. 47. sz. 10. o. Miskolc. Die ersten Ergebnisse der Ermüdungsversuche mit Zahnrädern aus Kunststoff und Stahl. — Mitteilungen des Lehrstuhles für Maschinenbau. Technische Universität für Schwerindustrie, Miskolc. No. 47. S. 10.

Bezeichnungen

a	mm	Achsenabstand	n	U/min	Drehzahl
b	cm	Zahnlänge	n	—	Anzahl der gemessenen
d	mm	Wälzkreisdurchmesser			Zähne bei Mehrzahnweiten-
h	mm	Zahnhöhe			messung
m	mm	Modul	p_v	kp/cm	Kantenpressung

s	cm	Federzusammenendrückung	I	A	Stromstärke
v	mm ³ /U	spezifischer Verschleiß	M_n	mm	Mehrzahnweite
z	—	Zähnezahl	U	V	elektrische Spannung
z_e	—	Zähnezahl des eingreifenden Zahnrades	V	mm ³	Rauminhalt des verschlissenen Teiles
E	Mp/cm ²	Elastizitätsmodul	α	°	Eingriffswinkel
F_k	kp	Umfangskraft	ν	—	Umdrehungsanzahl
F_n	kp	Normalkraft	σ_{hj}	Mp/cm ²	Biegefestigkeit
G	kp	Gewichtsbelastung	σ_{ny}	Mp/cm ²	Druckfestigkeit
G_0	kp	Selbstgewicht des Armes	σ_B	Mp/cm ²	Bruchfestigkeit
H_B	Mp/cm ²	Brinell-Härte	σ_H	Mp/cm ²	Hertzsche Pressung

ERMÜDUNGSVERSUCHE MIT SCHRAUBEN- VERBINDUNGEN

Prof. Dr. I. VÖRÖS

KAND. DER TECHN. WISS., KOSSUTH-PREISTÄGER, TECHNISCHE UNIVERSITÄT, BUDAPEST

Die Schraubenverbindungen sind meistens Zugbeanspruchungen ausgesetzt. Für ihre Dimensionierung diente anfangs die Zugfestigkeit σ_B , die an einem glatten Probestab festgestellt wurde, später die Fließgrenze σ_F als Grundlage gleich wie bei anderen Maschinenelementen. In beiden Fällen wurden Sicherheitsbeiwerte verwendet. Bei der praktischen Anwendung von Schraubenverbindungen war aber bald erkannt, daß die Güte bzw. die Lebensdauer der Schraubenverbindung auch von dem Herstellungsverfahren beeinflußt wird. Dieser Einfluß wurde durch entsprechende Wahl des Sicherheitsbeiwerts in Rechnung gezogen.

Die meisten Schraubenverbindungen sind der Dauerbeanspruchung ausgesetzt. Wird die Beanspruchung in dem Schraubenbolzen wie auch in den verbundenen Teilen nur bis zur Elastizitätsgrenze getrieben, so lassen sich die Verhältnisse im Spannungsschaubilde der Abb. 1. zeigen. Bei der Montie-

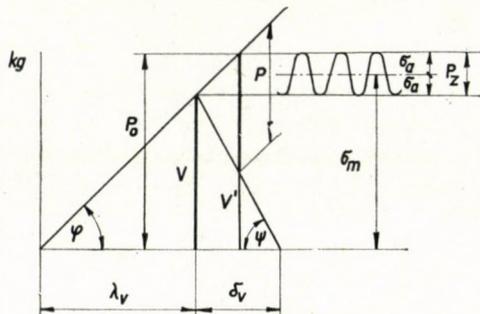


Abb. 1

rung wird die Schraubenverbindung mit einer Kraft V vorgespannt. Tritt nun die Betriebskraft P auf, so steigt die Schraubenbeanspruchung von V auf P_0 . Nach dem Aufhören der Betriebskraft P nimmt die Schraubenkraft auf V ab. Die Größe der Kraft P_2 , die die Ermüdung des Schraubenbolzens verursacht, ist gleich der Differenz zwischen V und P_0 . Die Beanspruchung des Schraubenbolzens ist also so anzunehmen, daß sich die Amplitude $\pm \sigma_a$ der Wechsel-

beanspruchung auf die statische Mittelfestigkeit σ_m , die aus dem Kernquerschnitt bestimmt wird, überlagert.

Um die spannungshäufenden Auswirkungen der Schraubengewinde zu untersuchen, haben MOORE und HENWOOD Schraubenbolzen mit Withworthgewinde Wechselbeanspruchungen unterworfen. Es wurden zwei Werkstoffsorten nach Tab. 1 untersucht. Die festgestellten Werte von Kerbwirkungszahlen sind in der letzten Kolonne der Tab. 1 angegeben. Bei Verbindungsschrauben darf man nicht mit Kerbwirkungszahlen von konstanter Größe rechnen, da die Dauerversuche, die von anderen Forschern, und zwar von

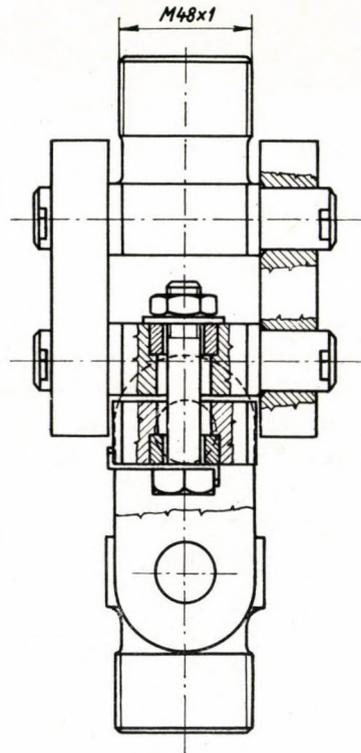


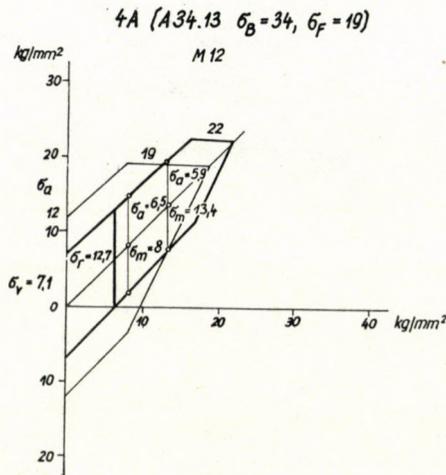
Abb. 2

F. DEBUS, H. WIEGAND, B. HAAS, W. STAEDEL, E. WEDEMAYER usw. ausgeführt worden waren, gezeigt haben, daß die Ermüdung der Schraubenspindel von sehr vielen Faktoren beeinflusst wird. Es mag die Gesamtwirkung dieser Faktoren nicht mit einer einzigen, nur von Materialqualität abhängigen Kerbwirkungszahl in Betracht gezogen werden, sondern soll das Dauerschraubbild der Schraubenverbindung gegen Ermüdung festgestellt werden, und das kann als Grundlage der Dimensionierung dienen.

Tabelle 1

Materialsorte	Glatter Stab		Gewindebolzen	
	Bruchfestigkeit σ_B kg/mm ²	Schwellfestigkeit σ_r kg/mm	Schwellfestigkeit σ_{ros} kg/mm ²	Kerbwirkungszahl β_k
Stahl von mittlerem Kohlenstoffgehalt	40	26	14,7	1,77
Vergütungsstahl von höherer Festigkeit	75	51	15,4	3,3

An dem Lehrstuhl für Maschinenelemente der Technischen Universität, Budapest wurde eine Einspannvorrichtung (s. Abb. 2) für den 10 Tonnen AMSLERSchen elektronischen Pulsator zur Untersuchung von Verbindungs-

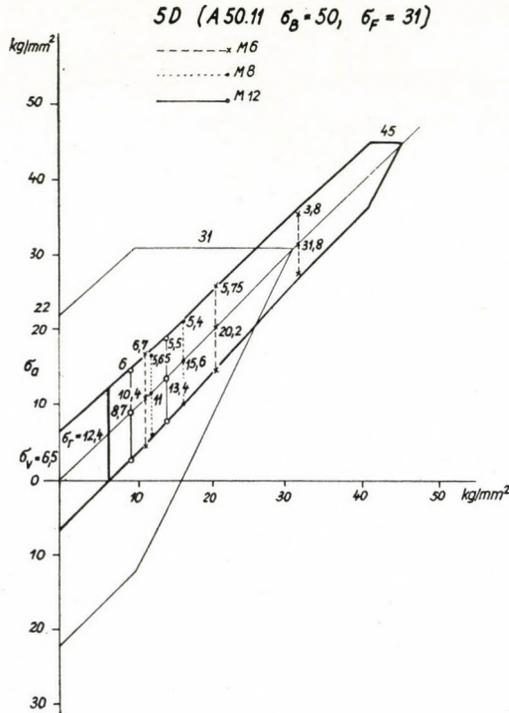


schauben ausgeführt, wo die reine axiale Belastung durch eine kardangelnkmäßige Einrichtung gesichert wurde. Dieselbe Einrichtung wurde auch zum statischen ZerreiBversuch von Schraubenverbindungen verwendet, wobei die Fließgrenze σ_{Fcs} und ZerreiBfestigkeit σ_{Bcs} von Schrauben mit Mutter bestimmt wurden.

I. Im ersten Teil unserer Versuche wurden handelsübliche, allgemein gebräuchliche Rohschrauben von niedriger Festigkeit ermüdet. Neben konstant gehaltener Mittelfestigkeit σ_m verschiedener Größe sind WÖHLER-Diagramme in bezug auf die Schwingungsamplitude σ_a aufgenommen worden. Mit Hilfe der Ermüdungsgrenzen aus den WÖHLERSchen Diagrammen wurden die SMITHSchen Diagramme, die das Sicherheitsgebiet zeigen, bezüglich der fraglichen Bindschraube gezeichnet.

Abb. 3. stellt das Diagramm der Rohverbindungs-schrauben aus Stahl 4A (A 34.11) mit kalt gewalztem Gewinde dar. Aus den gezeichneten Diagrammen

ist die Größe der Schwellfestigkeit betreffs der unteren Belastung 0 auswertbar. Einer größeren Schwellbelastung darf die Schraubenverbindung nicht ausgesetzt werden. Die obere und untere Grenzlinien des Diagrammes schneiden die Ermüdungsgrenze der Wechselfestigkeit σ_v aus, die für die Schraube bei Mittelfestigkeit 0 gültig ist. Dieser Wert läßt sich mit den Wechselfestigkeitswerten vergleichen, die für glatte Versuchsstäbe der Literatur entnommen



sind. Das Sicherheitsbereich, das dem glatten Versuchsstab entspricht, ist mit dünnen Linien gezeichnet. Die Ermüdungsverhältniszahl (Kerbwirkungszahl) der Wechselfestigkeit für die untersuchte Schraube aus Kohlenstoffstahl niedriger Festigkeit beträgt $\beta_k = 12/7,1 = 1,7$.

Abb. 4 führt die Ermüdungsversuche an Rohschrauben M6, M8, M12 aus Stahl 5D (A 50.11) höherer Festigkeit an. Bei diesen Schrauben ist der Schraubenkopf durch Kaltverformung hergestellt. Nach der Kaltverformung erfolgt eine Wärmebehandlung (Ausglühen), um die vom Pressen zurückgebliebenen Spannungen aus dem Material verschwinden zu lassen.

Das Gewinde wird nach dem Ausglühen kalt gewalzt. Es kann festgestellt werden, daß man ein SMITHSches Diagramm für die verschiedene Abmessungen besitzenden und mit verschiedenen Mittelspannungen ermüdeten

Schrauben zeichnen kann. Die Fließgrenze ergab sich nach Mittelwertbildung der bei den Schrauben verschiedener Abmessungen gefundenen Werte zu $\sigma_{Fcs} = 45 \text{ kg/mm}^2$. Die Ermüdungsverhältniszahl der extrapolierten Wechselfestigkeiten von glatten Versuchsstab und Schrauben beträgt $\beta_k = 22/6,5 = 3,38$. Dieser Wert ist größer als die Verhältniszahl bei Schrauben aus Werkstoff 4A.

Abb. 5 zeigt das SMITHSche Diagramm von Rohschrauben M6, M8, M12 wieder aus Stahl 5D. Bei diesen Schrauben fiel die entspannende Wärme-

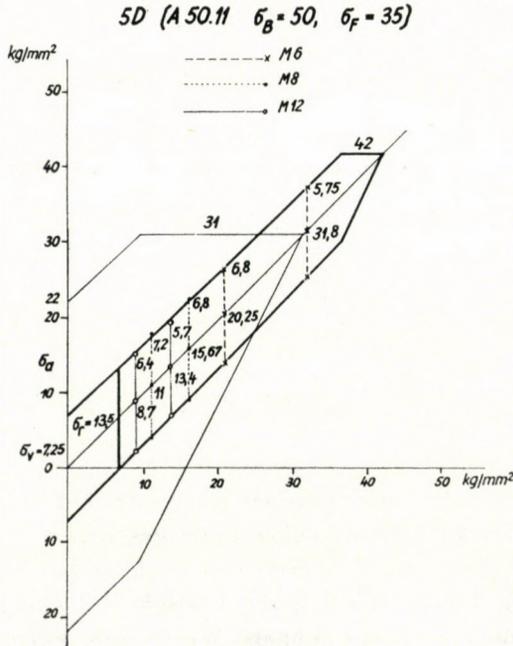
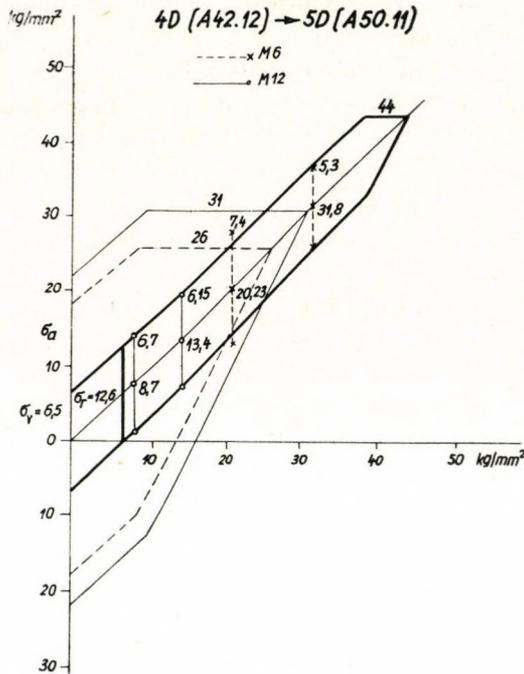


Abb. 5

behandlung nach der Kaltverformung des Schraubenkopfes fort. Das Entfallen der Wärmebehandlung durch Ausglühen hat sich als günstig erwiesen: die Ermüdungsgrenze im Diagramm liegt etwas höher, der extrapolierte Wert der Wechselfestigkeit erhöht sich von 6,5 zu 7,25, demzufolge verbessert sich auch die Verhältniszahl, $\beta_k = 22/7,25 = 3,04$.

Die in Abb. 6 dargestellten Schrauben sind aus Stahl 4D (A 42.11), also aus einer niedrigeren Qualität hergestellt. Der Bolzen der Schraube wird durch Drehen ausgeführt, ebenso wie bei blanken Schrauben, und das Gewinde ist kalt gewalzt. Die Wirkung der Kaltwalzung hat sich in der Verhärtung der Gewindeoberfläche gezeigt, infolgedessen stimmt das SMITHSche Diagramm der Schrauben aus Stahl 4D mit dem Diagramm nach Abb. 4 der Schrauben aus Stahl 5D fast vollkommen überein. In der Abbildung ist das Sicherheitsgebiet



des glatten Versuchsstabes aus Stahl 4D mit gestrichener Linie, dasselbe des Stabes aus Stahl 5D mit dünner, voller Linie gezeichnet.

Die Schraube der Abb. 7 wurde aus Stahl 5D (C35), mit gedrehtem Gewinde hergestellt. Infolge der höheren Festigkeit des angewandten Stahles weist das SMITHSche Diagramm höhere Werte auf: extrapolierte Wechselbeanspruchung $\sigma_v = 7,35 \text{ kg/cm}^2$. Diese Erhöhung ist aber nicht so groß, wie es von der Stoffqualität zu erwarten war. Die Verhältniszahl ergibt sich zu $\beta_k = 27/7,35 = 3,68$.

Die Schraube nach Abb. 8 wurde aus Stahl C 15 angefertigt. Das Gewinde ist kaltgewalzt. Nach Verformung wurde die Schraube einsatzgehärtet. Die gehärtete äußere Schicht hat die Ermüdungsgrenze wesentlich erhöht. Die extrapolierte Wechselbeanspruchung erhöhte sich zu $\sigma_v = 10$, die Verhältniszahl verminderte sich zu $\beta_k = 24/10 = 2,4$.

II. Im weiteren Teil unserer Untersuchungen wurde die Ermüdung der Schrauben aus legiertem Stahl höherer Festigkeit erforscht, die in heimische Lastwagenmotoren eingebaut waren. Die Dauerfestigkeitsschaubilder sind zweckmäßig nach der HAIGSchen Darstellungsweise dargestellt. Die dem glatten Versuchsstab entsprechenden Werte wurden auf dem Wege der Unterbrechung der Ordinate und der Verschiebung der oberen Grenzlinie dargestellt.

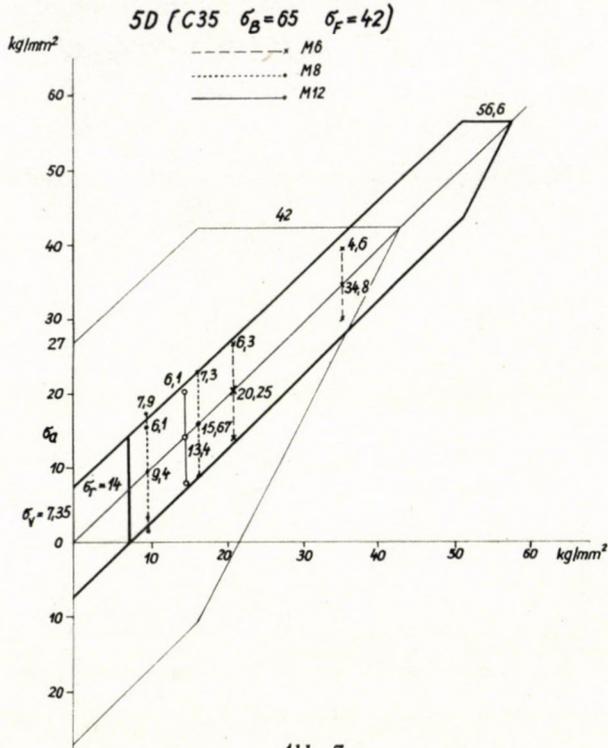


Abb. 7

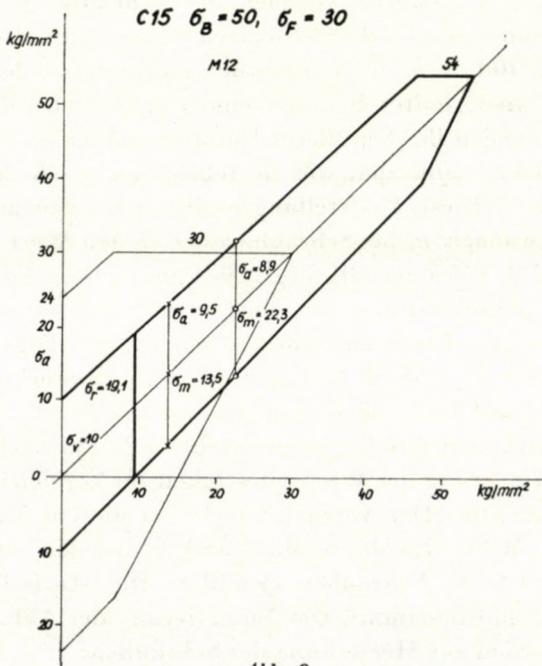


Abb. 8

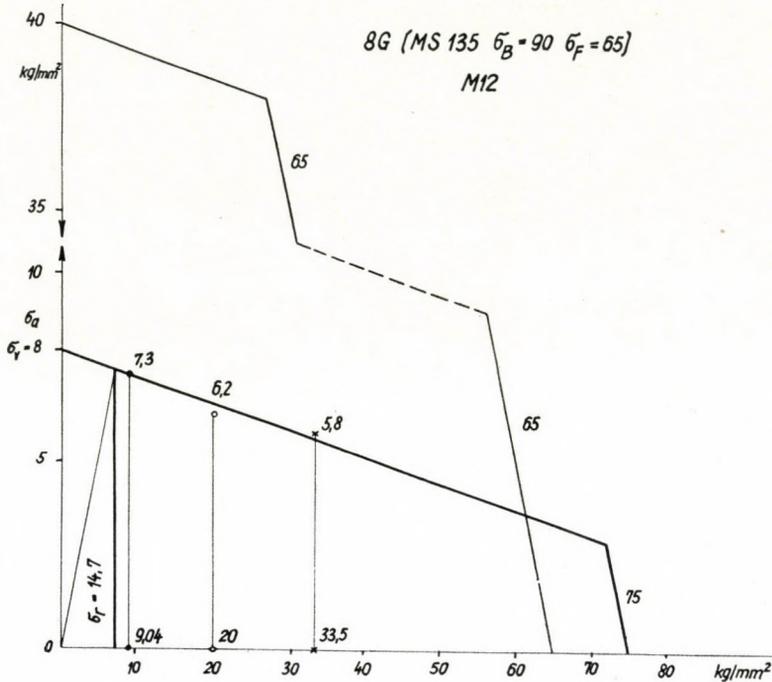


Abb. 9

Abb. 9 zeigt den Sicherheitsbereich der Schraube M12 aus Werkstoff MS135. Das Gewinde wurde durch Walzen hergestellt. Die Verhältniszahl ergibt sich zu $\beta_k = 40/8 = 5$, die beträchtlich größer ist als bei den unlegierten Stählen. Im Falle wiederholter Beanspruchungen sind also die Schrauben aus Legierungsstählen wegen ihrer größeren Empfindlichkeit gegenüber der Kerbwirkung nicht so sehr ausnützlich wie die Schrauben aus Kohlenstoffstahl von geringerer Festigkeit. Diese Feststellung ergibt sich auch aus dem Vergleich der Abb. 7 und 9 wonach σ_v bei Schraube aus C35 den Wert 7,35 beträgt, der dem Wert $\sigma_v = 8$ bei MS135 ganz nahe liegt. Die Verwendung der Legierungsstähle hoher Festigkeit für Verbindungsschrauben ist nur aus dem Grund als vorteilhaft anzusehen, da ihre Fließgrenze beträchtlich höher liegt. Z. B. die Fließgrenze der Schraube aus MS135 beträgt $\sigma_{FCS} = 75 \text{ kg/mm}^2$, während derselbe Wert bei Werkstoff aus C35 sich zu $56,6 \text{ kg/mm}^2$ ergibt.

Auch bei Schrauben aus Legierungsstahl Cr V 135 nach Abb. 10 haben wir eine große Verringerung der Wechselfestigkeit im Vergleich mit dem glatten Versuchsstab beobachtet. Der Versuch wurde bei diesem Material an Bolzen mit Feingewinde $M 14 \times 1,5$ ausgeführt, und es wurden mit verschiedenen Technologien hergestellte Schrauben ermüdet. Die statischen Fließgrenzen wurden gesondert nicht bestimmt. Der Numerierung der Abb. 10 entsprechend waren die Technologien zur Herstellung der Schrauben:

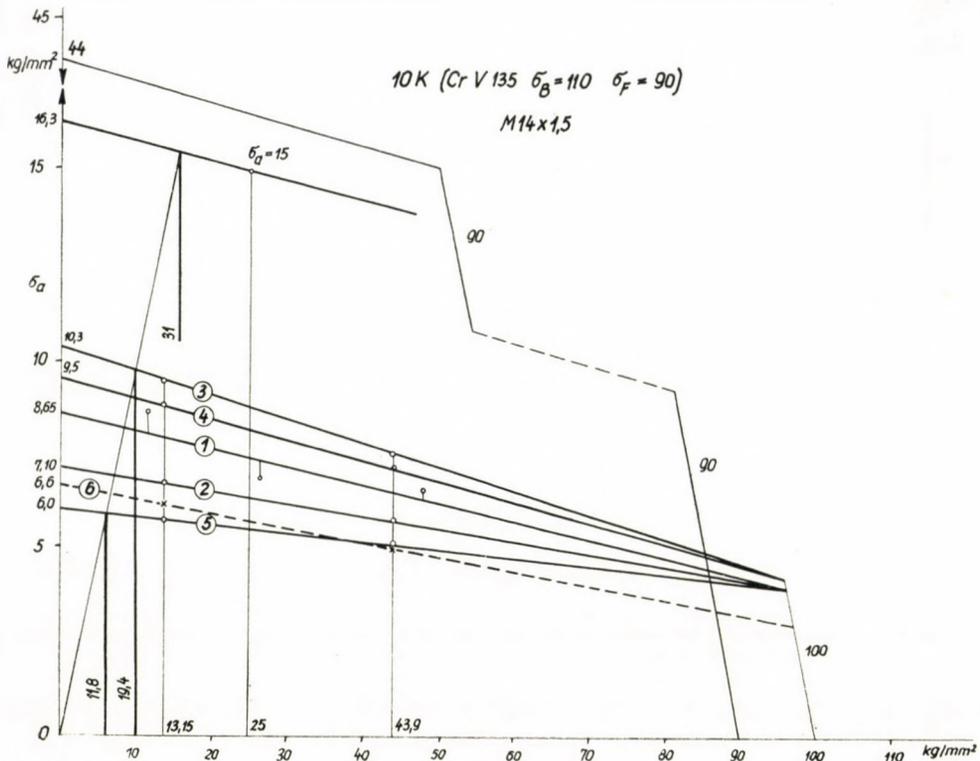


Abb. 10

- No. 1. Kaltgewalzt, dann vergütet und verkupfert $\sigma_v = 8,65 \text{ kg/mm}^2$
- No. 2. Kaltgewalzt, dann vergütet, ohne Verkupferung $\sigma_v = 7,10 \text{ kg/mm}^2$
- No. 3. Nach Vergütung Gewinde kaltgewalzt.. $\sigma_v = 10,3 \text{ kg/mm}^2$
- No. 4. Nach Vergütung Gewinde gedreht $\sigma_v = 9,5 \text{ kg/mm}^2$
- No. 5. Nach Vergütung Gewinde vorgedreht und anschließend geschliffen $\sigma_v = 6 \text{ kg/mm}^2$
- No. 6. Nach Vergütung wirbelndes Gewindefräsen (Rotomill-Verfahren) $\sigma_v = 6,6 \text{ kg/mm}^2$

Verfahren No. 3 hat sich als die beste Technologie erwiesen, wo das Gewindewalzen nach Kaltverfahren nach der Vergütung des Bolzens ausgeführt worden ist. Diese Technologie wird von dem Herstellerwerk nicht verwendet, weil das Gewindewalzen des auf 110—120 kg/mm² vergüteten Schraubenbolzens schwierig ist, ferner weil die Werkzeugabnutzung während der Herstellung zunehmen würde. Bei umgekehrter Reihenfolge aber, wo das Gewindewalzen nach der Wärmebehandlung durchgeführt wird, zeigt sich eine niedrigere

Dauerfestigkeit, da die nach dem Gewindewalzen ausgeführte Wärmebehandlung die durch das Kaltwalzen hervorgerufene günstige Auswirkung vernichtet. Das Diagramm No. 4 der Abb. 10, das sich auf die Schrauben mit nach Vergütung gedrehtem Gewinde bezieht, weist ein günstigeres Ergebnis auf als die Diagramme 1 und 2, die den gewalzten Gewinden entsprechen.

Die niedrigste Dauerfestigkeit zeigen die nach dem wirbelnden Gewindefräsverfahren (Linie No. 6) hergestellten und die geschliffenen (Linie No. 5)

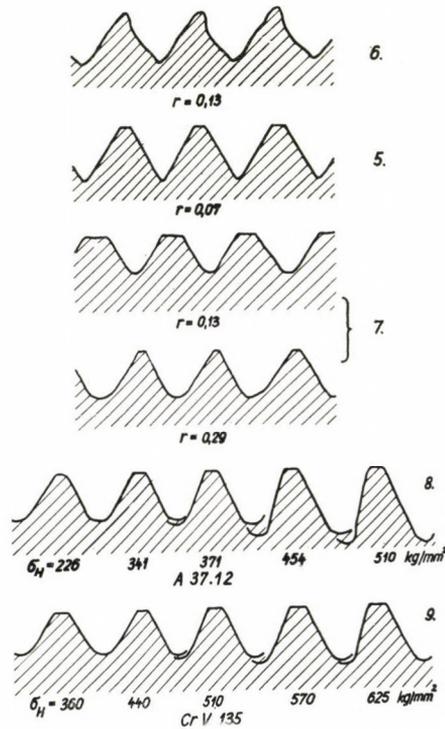
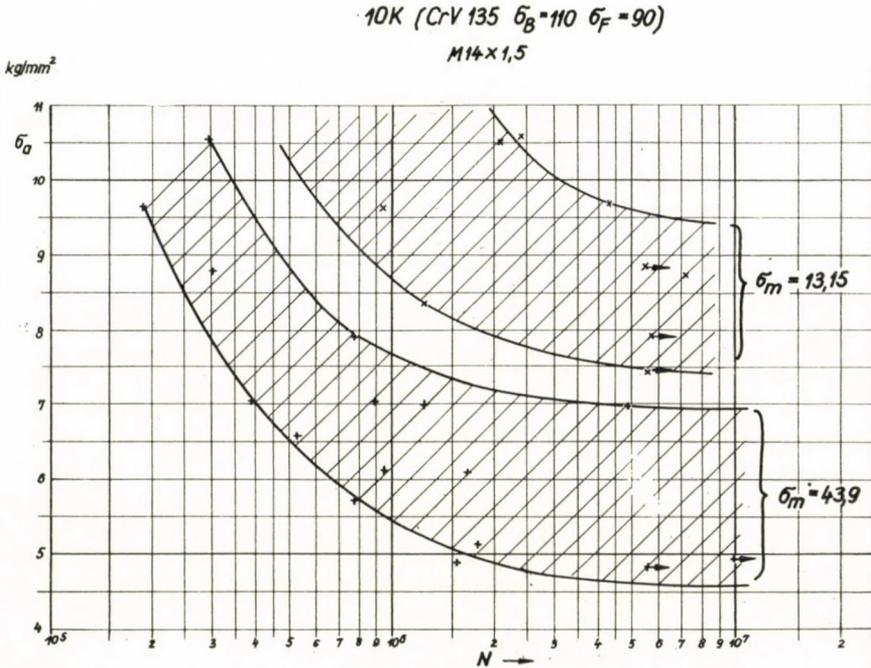


Abb. 11

Schrauben auf. Zu deren Untersuchung wurden Profilprojektor-Aufnahmen über die einzelnen Schrauben gemacht. Die zwei oberen Bilder in Abb. 11 zeigen die Profile obiger Schrauben. Wie ersichtlich, erfolgte das Einstellen der Fräser beim wirbelnden Gewindefräsen unrichtigerweise, demzufolge asymmetrische Gewindeprofile mit abgerissenen Umgrenzungslinien und mit kleinem Radius beim Gewindegrund entstanden, wodurch eine große Abnahme der Dauerfestigkeit verursacht wurde. Auch in der Praxis wäre es erwünscht, die durch wirbelndes Gewindefräsen erzeugten Profile mit Hilfe von Profilprojektor zu überprüfen. Die durch Profilprojektor erhaltenen Bilder des geschliffenen Gewindes No. 5 haben gezeigt, daß die Größe des Radius beim Kern anstatt des für das Feingewinde $M14 \times 1,5$ vorgeschriebenen Wertes $r =$

= 0,162 mm, durchschnittlich $r = 0,07$ mm beträgt, wodurch wieder eine starke Verminderung des Wertes der Dauerfestigkeit bedingt sein kann. Beim Gewindeschleifen wäre es auch nützlich, größere Sorgfalt auf die Formgebung der Schleifenscheibe zu legen.

Abb. 12 zeigt die Ermüdung der von Hand mit Gewindeschneideisen erzeugten Schraube. Dieses Herstellungsverfahren wies starke Streuungen auf, so daß man ein genaues WÖHLER-Diagramm nicht zeichnen konnte. Die Ursache



der großen Streuung besteht teils aus der geringen Genauigkeit des Handgewindeschneideisens, teils aus der Ungleichheit der Handarbeit. Die zwei Profilbilder No. 7 in Abb. 11 zeigen, daß einerseits die Profilhöhe nicht völlig ausgeformt worden ist, andererseits die Übergangsradien beim Gewindegrund eine Ungleichheit von $r = 0,13-0,29$ mm aufgewiesen haben.

Auf Grund obiger Versuche kann man feststellen, daß unsere Normen für Gewindetoleranzen lückenhaft sind, weil beim Kerndurchmesser des Bolzens nur die obere Grenze festgelegt ist, während die untere beliebig, oder das 1,3—1,5fache der Toleranz des Flankendurchmessers betragen kann. Diese Lückenhaftigkeit erlaubt eine sehr große Freiheit, infolge der der Übergangsradius einen unzulässigen Wert aufnehmen kann, der die Verminderung der Dauerfestigkeit der Schraube zur Folge haben kann. Im Vergleich zum Werte $\sigma_v = 9,5$ kg/mm² des gedrehten Gewindes nach Abb. 10 hat sich σ_v beim mit

kleinem Radius unrichtig geschliffenen Gewinde zu 6 kg/mm^2 ergeben, obwohl beim geschliffenen Gewinde ein günstiger Wert gegen das gedrehte Gewinde zu erwarten wäre. Zur Beseitigung dieser Unvollkommenheit wäre es zweckmäßig, bei Gewindespindeln geeignete Toleranzen für den Übergangsradius beim Gewindegrund vorzuschreiben.

III. Die Versuche an Schrauben aus hochfesten Stählen haben es gezeigt, daß die Dauerfestigkeit des glatten Probestabes infolge der Anfertigung des Gewindes sich stark vermindert, und die Größe der Amplitude der Wechselfestigkeit kann mit der bisher angewandten Technologie der Schraubenherstel-

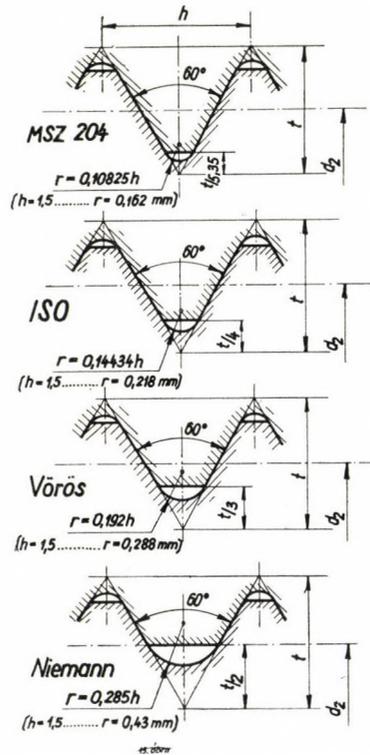


Abb. 13

lung kaum erhöht werden. Der gefundene höchste Wert bei den Versuchen nach Abb. 10 betrug $\sigma_v = 10,3 \text{ kg/mm}^2$, und mit dem Werte von 44 kg/mm^2 des glatten Probestabes verglichen, ergibt sich der Wert für die Kerbwirkungszahl zu $\beta_k = 44/10,3 = 4,27$. Die Kerbwirkungszahl beträgt $\beta_k = 44/6 = 7,33$ bei geschliffenem Gewinde mit kleinem Übergangsradius.

Zur Erreichung größerer Dauerfestigkeit bei Schraubenspindel sind mehrere Verfahren bekannt. Im folgenden soll die Verwendung drei solcher Methoden betrachtet werden.

Nach der ersten Methode wird der Übergangsradius beim Kerndurchmesser des Bolzens vergrößert. Die veraltete ungarische Norm für Metergewinde MSZ 204 schrieb nach Abb. 13 einen sehr kleinen Übergangsradius vor. Das neue Profil von ISO ist schon günstiger. NIEMANN schlägt die Verhältnisse nach dem untersten Bild in Abb. 13 vor, wo der Übergangsradius des betrachteten Gewindes $M14 \times 1,5$ $r = 0,43$ mm und die Mutterhöhe m gleich d ist.

Bei unseren Versuchen schritten wir nicht bis zur Grenze $t/2$ vor, sondern verwendeten wir einen Radius $r = 0,192 \cdot h$ in der Entfernung $t/3$, dessen Wert bei der betrachteten Schraube $r = 0,288$ mm beträgt. Mit dem Wert

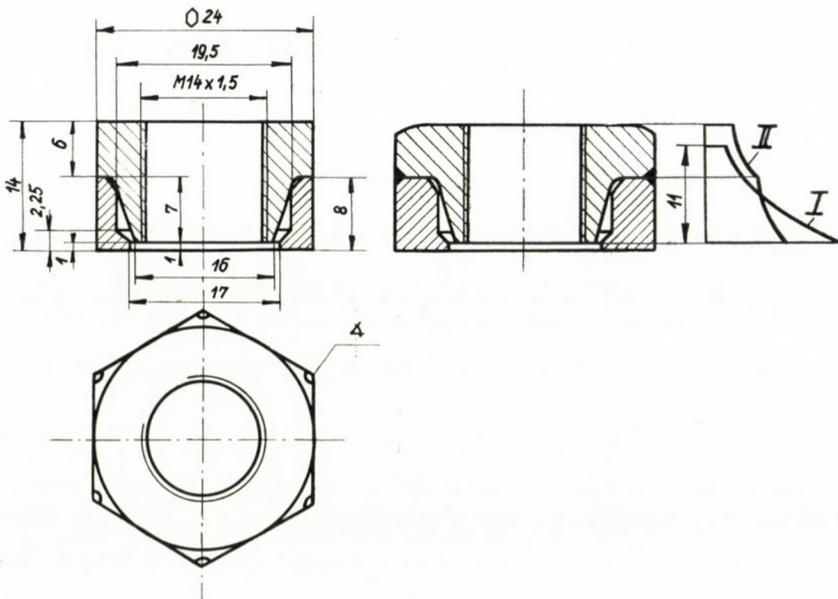


Abb. 14

$t/3$ ist die Flanke des Gewindeprofils noch nicht wesentlich vermindert, weshalb die Mutterhöhe zur Kompensierung der verminderten Tragfläche statt des genormten Werts von 11 mm, nur auf 12 mm vergrößert wurde.

Die zweite Verfahrensmethode besteht aus der dehnungsfähigeren Gestaltung der Mutter bei den unteren Gewinden. Zu diesem Zweck gestalteten wir die Mutter aus zwei Teilen nach Abb. 14. Die Muttern wurden aus Stahl A 50.11 erzeugt, beide Teile an Ecken der Sechskante mit leichter Schweißung zusammengeheftet. Der konische Unterteil der Mutter kann den Bolzen in seiner Dehnung verfolgen. Der größte Teil der Belastung wird bei Muttern von gleichmäßigem Querschnitt durch die unteren Muttergänge übernommen, der Bolzen ist also am stärksten an dieser Stelle beansprucht. Diagramm I an der rechten Seite der Abbildung zeigt die Belastungsübernahme bei Muttern von gleichmäßigem Querschnitt. In diesem Fall gibt der untere erste Muttergang eine

ungefähr fünffache Belastung des obersten Ganges über. Diagramm II zeigt die annähernde Verlaufslinie der Belastungsübergabe im Falle der zweiteiligen Mutter. Demgemäß ist der Bolzen bei den ersten Schraubengängen weniger beansprucht.

Zur Untersuchung des Einflusses der dehnungsfähigeren Mutter wurden die folgenden von den Schraubenbolzen nach Abb. 10 bei der mittleren Span-

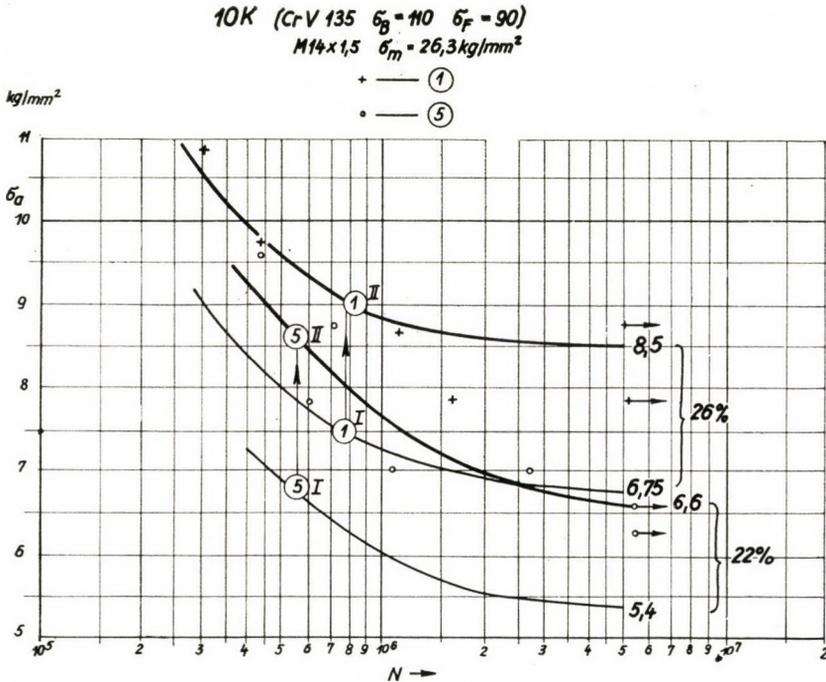


Abb. 15

nung $\sigma_m = 26,3 \text{ kg/mm}^2$ geprüft: No. 1 kaltgewalztes Gewinde; No. 5 geschliffenes Gewinde. In Abb. 15 sind verschiedene WÖHLER-Diagramme zu sehen: dünn gestrichen bei 11 mm hoher genormter und dick gestrichen bei zweiteiligen Müttern nach Abb. 14. Man kann eine Verbesserung der Ermüdungsgrenze um ung. 22–26% mit dehnungsfähigen Müttern bei dem hochfesten Legierungsstahl Cr V 135 erreichen.

Die dritte wirksame Methode zur Erhöhung der Dauerfestigkeit der Schraube besteht aus dem Rollen des Übergangsradius beim Gewindegrund. Zu diesem Zweck wird eine Vorrichtung angefertigt, wo die den Gewindegrund stemmenden Walzen unten in zwei gelenkartig verbundene, zu einander scheinmäßig gebogene Arme gegenüber einander untergebracht sind. Auf die oberen Enden der Arme wirkt die kalibrierte Feder, die die Walzen zusammendrückt. Die Walzen sind aus Werkzeugstahl, mit einem, der Spitzenweite $t/3$

entsprechenden Abrundungshalbmesser $r = 0,288$ mm angefertigt worden. Beim Rollen des Gewindegrundes wurde der Bolzen in ein Drehbankfutter eingespannt, an seinem Ende mit einem Reitstock gespreizt. Die Walzvorrichtung wurde in den Drehbankschlitten eingespannt und entlang der Gewindelänge von der Leitspindel der Drehbank bewegt.

Die Resultate des Rollens des Gewindegrundes läßt sich auf andere Schraubenabmessungen und Walzendurchmesser derweise umrechnen, daß die

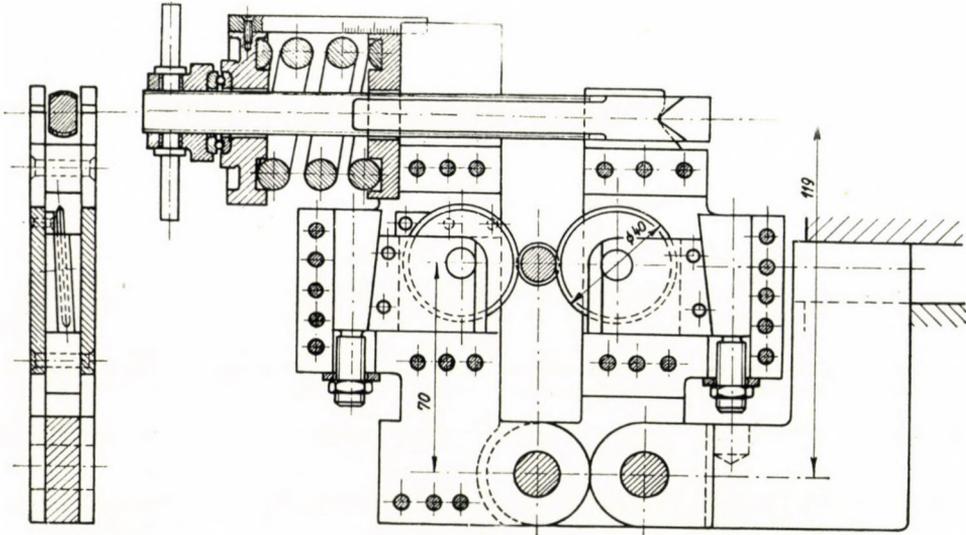


Abb. 16

an der gerollten Fläche erzeugte HERTZsche Pressung bestimmt wird. Da der Krümmungsradius dem Abrundungsradius der Walze indentisch ist, kann die HERTZsche Pressung einfach nach der Formel für das Zusammenpressen zweier Walzen errechnet werden:

$$\sigma_H^2 = 0,35 \frac{P}{b} \frac{\frac{1}{E_k}}{\frac{1}{E_k}}$$

In der Formel bedeuten: P Anpresskraft der Walze, b Berührungslänge. Letztere wird mit der Durchgangsbogenlänge, die zu dem dem metrischen Gewinde von 60° entsprechenden Mittelpunktswinkel von 120° gehört, berechnet. Bei dem verwendeten Übergangsradius $r = 0,288$ mm ist die Berührungslänge daher

$$b = \frac{2r\pi}{3} = \frac{2 \cdot 0,288 \pi}{3} = 0,62 \text{ mm}.$$

Der relative Krümmungshalbmesser ϱ_k ergibt sich bei Kerndurchmesser $d_1 = 12,306$ mm und Walzendurchmesser $D = 40$ mm zu

$$\frac{1}{\varrho_k} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{6,153} + \frac{1}{20} = 0,2125 .$$

Damit $E_1 = E_2 = 2,1 \cdot 10^4$ kg/mm² ist, ergibt sich die Größe für den relativen Elastizitätsmodul zu

$$\frac{1}{E_k} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} = \frac{2}{2,1 \cdot 10^4} .$$

Daher sind

$$\sigma_H = 36\sqrt[3]{P} \text{ kg/mm}^2 .$$

Die derweise errechneten Werte der HERTZschen Pressungen σ_H sind in der Abszisse der Abb. 17 dargestellt.

Die zum Rollen des Gewindegrundes erzeugten Schrauben besaßen gedrehtes Gewinde von M14 \times 1,5. Die Wirkung des Rollens wurde bei zwei Materialsorten untersucht, und zwar beim Kohlenstoffstahl 4D (A 37.12) und bei legiertem Stahl 10 K (Cr V135). Bei der letzteren Materialsorte wurde das Bolzengewinde nach Vergütung angefertigt. Zur Bestimmung der günstigsten Walzenpressung wurden Vorversuche durch Verwendung verschiedener Walzenpressungen ausgeführt. In jedem Falle wurden die Gewinde fünfmal durchgerollt. Nach dem Rollen des Gewindegrundes wurden die gerollten Schrauben bei gleicher Amplitude ermüdet, und es wurde die Zyklusanzahl N bestimmt. Betreffs der zweierlei Werkstoffsorten zeigen die Diagramme 8N und 9N in Abb. 17 den Zusammenhang zwischen der Anpressungskraft der Walzen bzw. den HERTZschen Pressungen und den Zyklusanzahlen, die die Ermüdung verursacht haben. Bei beiden Materialsorten betrug die Mittelspannung $\sigma_m = 25$ kg/mm². Die Amplitude der Wechselfestigkeit betrug bei der Schraube aus weicherem Werkstoff $\sigma_a = 8,35$ kg/mm², bei der Schraube aus Legierungsstahl $\sigma_a = 17,5$ kg/mm². Auf Grund der Diagramme N in Abb. 17 ist es festzustellen, daß die günstigste HERTZsche Pressung wegen der bei Dauerversuchen im allgemeinen auftretenden Streuung nicht eindeutig zu bestimmen war, man kann nur grob darauf schließen, daß die Kurve anfangs einen steigenden, später einen rasch sinkenden Verlauf aufweist.

Beim Rollen des Gewindegrundes wurden die Profile auch durch Profilprojektor abgeprüft. In den Bildern von Profilprojektor konnte die Grenze, wo eine stärkere plastische Deformation einsetzte, besser ermittelt werden. Die unteren zwei Bilder in Abb. 11 zeigen die Deformationen. Dementsprechend begann sich das Gewinde bei dem weicheren Stahl ungefähr nach $\sigma_H = 350$ kg/mm², bei Legierungsstahl nach $\sigma_H = 450$ kg/mm² stärker zu deformieren,

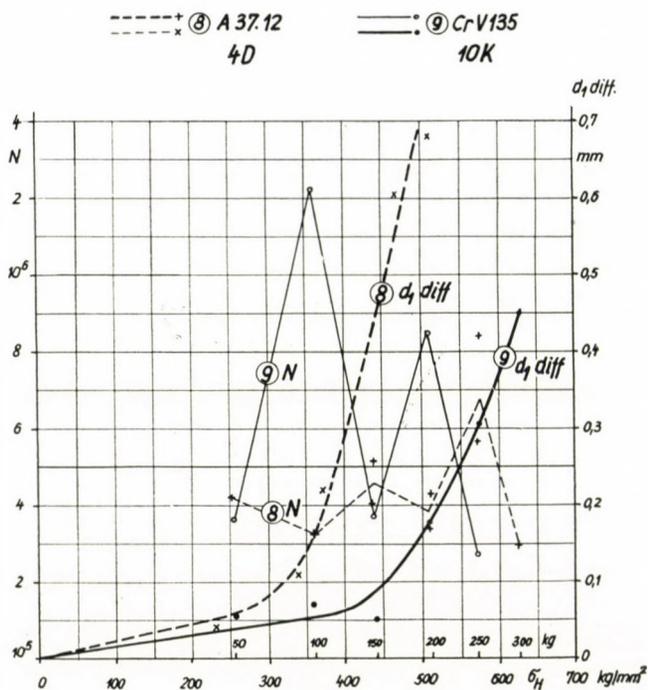


Abb. 17

was sich anfangs in der Verringerung des Kerndurchmessers, später, bei höheren HERTZschen Pressungen, in der Deformation des ganzen Gewindeprofils bemerkbar macht.

Im Vergleich mit den Bildern des Profilprojektors konnte eine größere Genauigkeit für die beim Rollen des Gewindegrundes auftretende plastische Deformation dadurch erzielt werden, daß die Differenz $d_1 \text{ diff.}$ zwischen den Werten des Kerndurchmessers d_1 vor und nach dem Rollen durch eine genaue Durchmesserbestimmung bestimmt wurde. Der Wert der Differenz ist an der rechtseitigen Ordinate des Diagramms (Abb. 17) abzulesen. Es ist zu sehen, daß eine starke Verminderung des Durchmessers von einer gewissen HERTZschen Pressung ab auftritt. Die beim Rollen des Gewindegrundes verwendbare größte HERTZsche Pressung bzw. Anpressungskraft sind aus dieser Abbildung zu ermitteln. Diese Größen ergeben sich

für Kohlenstoffstahl zu ung. $\sigma_H = 300 \text{ kg/mm}^2$

für Legierungsstahl zu $\sigma_H = 440 \text{ kg/mm}^2$.

Nach diesen Vorversuchen wurde die durch Rollen des Gewindegrundes erreichbare Verbesserung bei beiden Materialien durch Aufnahme von WÖHLER-diagrammen untersucht. Der Eindeutigkeit halber wird eine Anpressungskraft von $P = 150 \text{ kg}$ bei beiden Stoffen verwendet, obwohl diese Größe bei der

Schraube aus weicherem Material schon eine starke Gewindedeformation verursacht hat. Auch die mittlere Spannung beider Materialien war die gleiche, d. h. $\sigma_m = 25 \text{ kg/mm}^2$. Diese Größe war noch zulässig bei der Schraube aus weicherem Material, infolge der Erhöhung der Fließgrenze, die das Gewinde verursacht hat.

Das Ergebnis in bezug auf Schrauben aus Material 4D (A 37.12) wird in Abb. 18 gezeigt. Die Diagramme der Abbildung sind auf Grund folgender Daten gezeichnet:

$$4D (A 37.12 \quad \sigma_B = 37 \quad \sigma_F = 21)$$

$$M 14 \times 1,5 \quad \sigma_m = 25 \text{ kg/mm}^2$$

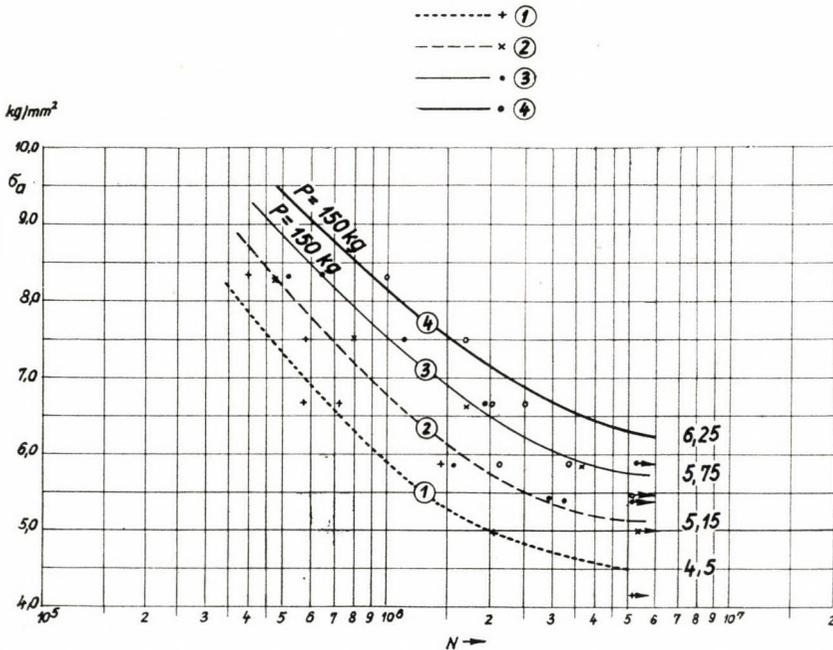


Abb. 18

1. Gewindegrund nach MSZ 204; Abrundungsradius $r = 0,162 \text{ mm}$; genormte Mutter.

2. Abrundungshalbmesser $r = 0,288 \text{ mm}$ in der Entfernung $t/3$; genormte Mutter.

3. Abrundungshalbmesser $r = 0,288 \text{ mm}$; Gewindegrund mit Kraft $P = 150 \text{ kg}$ gerollt; genormte Mutter.

4. Abrundungshalbmesser $r = 0,288 \text{ mm}$; Gewindegrund mit Kraft $P = 150 \text{ kg}$ gerollt; Mutter nach Abb. 14 aus zwei Teilen.

Aus den Diagrammen geht hervor, daß das Rollen des Gewindegrundes bei Schrauben aus weicheren Kohlenstoffstählen keine wesentliche Erhöhung der Dauerfestigkeit nach sich gezogen hat, es war nur eine Erhöhung von ung. 12% zu erreichen. Auch die zweiteilige Mutter erhöhte die Ermüdungsgrenze von 5,75 nur auf 6,25, welche Erhöhung nur eine ung. 10prozentige Mehrbelastung bedeutet.

Eine weit günstigere Wirkung zeigte sich bei den Schrauben aus Legierungsstahl 10K (Cr V135), die in Abb. 19 angegeben ist. Die Diagramme der Abbildung sind auf Grund folgender Daten gezeichnet:

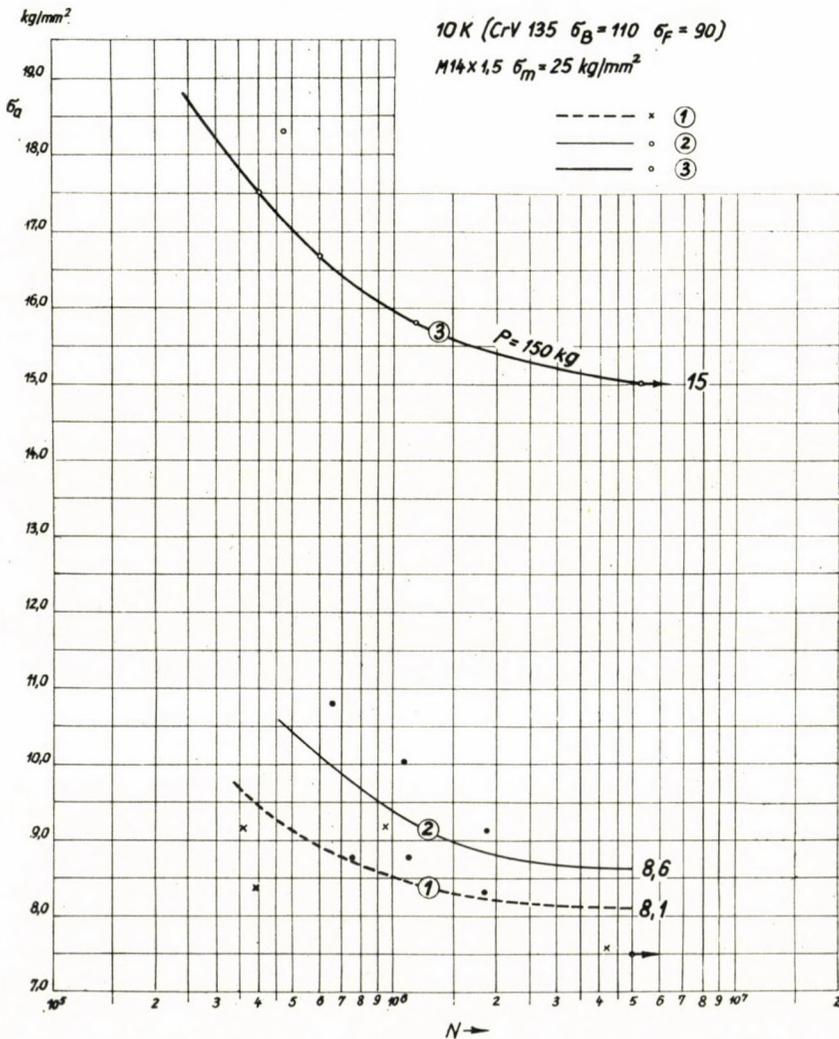


Abb. 19

1. Gewindegrund nach MSz 204; Übergangshalbmesser $r = 0,162$ mm; genormte Mutter.
2. Übergangshalbmesser $r = 0,288$ mm in der Entfernung $t/3$; genormte Mutter.
3. Übergangshalbmesser $r = 0,288$; Gewindegrund mit Kraft $P = 150$ kg gerollt; genormte Mutter.

Der kleinste Kerndurchmesser der Mutter wurde im Falle des größeren Übergangshalbmessers natürlich mit einer der Entfernung $t/3$ entsprechenden Abmessung erzeugt.

Aus Abb. 19 geht hervor, daß sich die Ermüdungsgrenze nach dem Rollen des Gewindegrundes auf $\sigma_a = 15$ kg/mm² erhöht hat. Dieser Wert wurde der mittleren Spannung $\sigma_m = 25$ kg/mm² entsprechend auch zur Ermüdungsgrenzkurve in Abb. 10 eingezeichnet und zur Ordinate der Wechselfestigkeit extrapoliert. Durch Extrapolieren ergibt sich σ_v zu 16,3 kg/mm², daher ist die Kerbwirkungszahl $\beta_k = 44/16,3 = 2,7$. Dementgegen beträgt die Kerbwirkungszahl $\beta_k = 44/9,5 = 4,64$ bei der dem gedrehten Gewinde entsprechenden Grenzkurve No. 4 in Abb. 10. Das Rollen des Gewindegrundes verbessert also die Ermüdungsgrenze des Gewindeprofils sprunghaft, die sich nach Abb. 19 von 8,6 auf 15 erhöhte, das ist eine Verbesserung von 75%. Diese Erhöhung war so groß, daß die Kopfschrauben trotz dem großen Abrundungshalbmesser stets bei dem Schraubenkopf zerrissen wurden, und das Diagramm No. 3 in Abb. 19 konnte man nur in der Weise aufnehmen, daß die Sechskantschrauben durch mit zwei Müttern versehenen Stiftschrauben mit an ihren beiden Enden mit 150 kg Kraft gerolltem Gewinde ersetzt wurden. Der gewindefreie Schaft der Stiftschraube wurde mit großem Querschnittsübergang bis zu dem dem Kerndurchmesser entsprechenden Durchmesser verjüngt.

Aus obigen Versuchen ist es festzustellen, daß das Rollen des Gewindegrundes, das in die Oberfläche des Stoffes durch plastische Verformung Druckspannung akkumuliert, zu der Erhöhung der Ermüdungsgrenze der Verbindungsschrauben als das wirksamste Verfahren zu betrachten ist. Eine ähnliche Wirkung kann man durch Wärmebehandlung der Oberfläche, wie Zementieren oder Nitrieren, erreichen. Auch im letzteren Falle ruft die Kontraktion bei Abkühlung in der Schicht der Gewindeoberfläche Druckspannungen hervor. Diese Wirkung wurde auch beim Einsatzstahl C15 in Abb. 8 beobachtet, da seine Ermüdungsgrenze einen relativ höheren und seine Kerbwirkungszahl einen niedrigeren Wert betrug. Für die Wärmebehandlung der Oberfläche sind die mit Titan legierten Stähle geeignet, deren Wärmebehandlung durch Weichnitrieren ohne Gefahr einer Verwerfung leicht durchgeführt werden kann. Durch Nitrieren läßt sich die, vom Gewinde hervorgerufene Spannungshäufung ausgleichen, und es zieht eine Vergrößerung des Dauerschaubildes der Schraubenverbindung gegen Ermüdung nach sich.

DÜNNE OBERFLÄCHENSCHICHTEN UND IHR EINFLUSS AUF DAS WERKSTOFFVERHALTEN GEGEN- ÜBER MECHANISCHEN BEANSPRUCHUNGEN

Prof. Dr. H. WIEGAND

DARMSTADT

1. Wesen und Aufgaben dünner Oberflächenschichten im Zusammen- hang mit dem betrieblichen Verhalten von Werkstoffen

Metallische Werkstoffe werden durch mechanische, thermische, chemische und andere Verarbeitungsverfahren nicht nur in ihrem inneren Aufbau und in ihrer äußeren Gestalt umgeformt, sondern auch gleichzeitig in den Randzonen so beeinflußt, daß ihr Betriebsverhalten in der Konstruktion selbst dadurch ganz wesentlich mitbestimmt wird. Werden aber darüber hinaus Verfahren angewandt, durch die gerade die Oberflächenzone, also diejenige Zone in der gewöhnlich die Betriebsbeanspruchungen eingeleitet werden, gezielt verändert wird, so ist es oftmals möglich, die Haltbarkeit, d. h. Leistungsausbeute und Lebensdauer der Konstruktionsteile beträchtlich zu verändern.

Durch die Erzeugung geeigneter Oberflächenschichten können z. B. Spannungsspitzen, die sich in der Randzone der Konstruktionsteile ergeben, in ihrer Wirkung gemildert bzw. unwirksam gemacht werden [1, 2, 3]. Die Widerstandsfähigkeit gegen Abrieb (Verschleiß) sowie die Beständigkeit gegen Korrosionsangriffe oder auch gegenüber Hochtemperaturbeanspruchung können weiterhin verbessert werden.

Dies ist z. B. für die Verfahren der Warmbehandlung, insbesondere der Oberflächenhärtung [1, 2, 3, 4, 5, 6 u. a.] sowie die Verfahren der Kaltverformung metallischer Oberflächenzonen [3, 7, 8, 9 u. a.] oft beschrieben worden.

In beiden Fällen werden sowohl die Härte, als auch die Streckgrenze und Zugfestigkeit, die Duktilität und somit alle übrigen mechanischen Werkstoffeigenschaften verändert. Als zweites werden aber in diese Schichten durch die Gefügeveränderung (Eindiffusion von Fremdatomen, Gefügeumwandlung durch Martensithärtung) Eigenspannungen eingebracht, die in zahlenmäßiger Hinsicht und in der Tiefenwirkung das Festigkeitsverhalten gegenüber wechselnden Betriebskräften z. T. erheblich verbessern können.

Da auf die näheren Umstände hier nicht eingegangen werden soll, sei in Bild 1 nur ein Beispiel gebracht. Es läßt erkennen, wie durch die Nitrierung des glatten und des gekerbten Probekörpers die Wechselfestigkeit verändert und jeweils bei einem bestimmten Verhältnis Nitrier- d. h. Diffusions- bzw. Beeinflussungstiefe der Oberflächenrandzone zum Gesamtquerschnitt ein Bestwert der Haltbarkeit erreicht werden kann. Ähnliche Ergebnisse werden

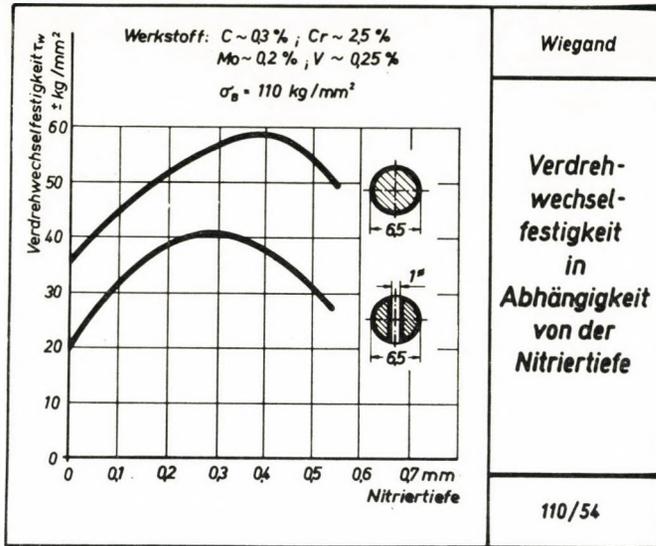


Bild 1. Einfluß der Nitriertiefe auf die Verdrehwechselfestigkeit eines Cr—Mo—V—Stahles von $\sigma_B = 110 \text{ kg/mm}^2$ Vergütungsfestigkeit ermittelt an glatten und quergebohrten Probe­stäben. (C \approx 0,3%; Cr \approx 2,5%; Mo \approx 0,2%; V \approx 0,25%)

auch bei der Kaltverformung von Oberflächenrandzonen erzielt [7, 8, 9, u. a.].

Weniger Beachtung als diese schon Bruchteile von mm oder bis zu mehreren mm Dicke umfassenden Schichten haben bisher sehr dünne Oberflächenzonen bei der Betrachtung des Werkstoffverhaltens unter mechanischen Beanspruchungen gefunden.

Zu diesen Schichten sind vor allem alle natürlich gewachsenen Oxydfilme von gewöhnlich nur einigen Å bis Bruchteilen von μ Dicke und andere durch chemische oder elektrochemische Behandlung verstärkten und erzeugten nichtmetallischen Schichten [10, 11, 12, 13] bis zu wenigen μ Dicke zu rechnen.

Zu diesen Schichten sind auch alle metallischen Schichten zu zählen, die durch Diffusion von Fremdmetallen in die Oberflächenzone, durch galvanische Prozesse, durch Tauchverfahren in Metallschmelzen oder durch Aufgießen von Metallen, durch Spritzverfahren oder durch Auftragschweißen und durch Walzplattieren aufgebracht werden. Schließlich sind hier nichtmetallische Schichten wie Kunststoff-, Anstrich- und Email-Überzüge nicht zu vergessen.

In den vorliegenden Betrachtungen sollen aber vor allem solche Dünnschichten Beachtung finden, die nicht in den oberen Abmessungsbereich gehören, also nicht dicker als etwa 50μ sind. Somit scheidet Oberflächenhärtungsschichten, die durch Warmbehandlung erzeugt werden, in Tauch-, Walz- und Gießverfahren aufgebraute Metallüberzüge sowie Kunststoff- und Email-Beläge hier aus.

Soweit dünne Schichten unbeabsichtigt oder beabsichtigt aufgebracht werden, dienen sie z. B. der Verbesserung des Korrosionsverhaltens der Werk-

stoffe, falls sie nicht sogar ausschließlich aus diesem Grunde angewandt werden. Auch die Absicht der Verbesserung des Gleit- und Verschleißwiderstandes spielt oftmals die ausschlaggebende Rolle, wie z. B. bei Gleitlagerschutzschichten.

Die Frage der richtigen Wahl einer Oberflächenbehandlung zur Erzeugung dünner, gut haftender und allen Beanspruchungen gerecht werdender Schichten ist besonders dann schwierig zu lösen, wenn es sich um kombinierte Beanspruchungen handelt, wie es das Beispiel von hoch schwingungsbeanspruchten Stahlfedern von Förderbändern zeigt, in denen oftmals stark verschleißende Schüttgüter (unter erhöhten Korrosionsangriffen durch Feuchtigkeit) fortbewegt werden. Metallische Überzüge auf den Blattfedern, die die Korrosion erfolgreich abweisen würden, versagen, da sie den ständigen Scheuerbeanspruchungen von staubigem und feinkörnigem Transportgut nicht gewachsen sind. Hochelastische, gegen Verschleiß widerstandsfähige Kautschukmassen können andererseits aus Gründen mechanischer Beanspruchungen durch Klemmwirkung in den Einspannhalterungen der Federn nicht angewandt werden. Der Konstrukteur steht daher vor der Frage, in einer der genannten Richtungen eine Kompromißlösung einzugehen, die Feder nur auf eine verhältnismäßig kurze Zeitbeanspruchung zu bemessen und sie dann erneut zu ersetzen oder eine meist kostenmäßig nicht tragbare und umständliche konstruktive Ausweichlösung zu suchen.

Es ist daher wertvoll, vor allem auch im Zusammenhang mit mechanischen Beanspruchungen das Verhalten dünner Oberflächenzonen einmal genauer zu betrachten.

2. Die wichtigsten mechanischen Beanspruchungen und einige Anwendungsbeispiele

Hinsichtlich des Einwirkens mechanischer Beanspruchungen auf Konstruktionsteile, insbesondere deren Oberflächenzone, sollen hier zwei Fälle unterschieden werden:

1. Mechanische Kräfte und Momente, die in der freien Randzone, d. h. in der von Nachbarteilen nicht berührten Oberflächenschicht Maximalbeanspruchungen hervorrufen.

2. Mechanische Beanspruchungen, die an der Oberfläche von Paarverbindungen durch Kraftübertragung von Konstruktionsteil zu Konstruktionsteil Höchstwerte erreichen.

Für den *ersten Fall* liegen die Anstrengungsverhältnisse hinsichtlich der Werkstoffoberfläche relativ einfach. Sind die wirkenden Kräfte bzw. die auftretenden Spannungen nach Art, Größe und Richtung bekannt, dann lassen sich im allgemeinen Werkstoffwahl und Behandlung der Oberfläche verhältnis-

mäßig leicht entscheiden. Dies gilt unter der Voraussetzung, daß man die mit der Art und Tiefe der Oberflächenzone verbundenen Eigenschaftsveränderungen des Werkstoffs kennt (Bild 1). Schwieriger läßt sich schon der Einfluß von Oberflächenschichten abschätzen, deren Entstehungsweise, Aufbau und Eigenschaften dem Konstrukteur weniger geläufig sind.

Hier ist vor allem an die Mikrogeometrie von Oberflächenzonen zu denken, die sich gewissermaßen auf natürliche Weise während der Fertigung der Konstruktionsteile einstellt.

In Beanspruchungsfällen der *zweiten Art* lassen sich die Verhältnisse weit schwieriger überblicken.

An einigen Beispielen sei dies kurz näher erläutert: Bei Gleitlagern bestehen die mechanischen Beanspruchungen *im Lagerzapfen* aus Umlaufbiegekräften, aus Flächendruck und aus Gleitreibungsbeanspruchung auf der Zapfenoberfläche. Der ersten Anforderung muß der Werkstoff durch eine entsprechende Biegewechselfestigkeit gewachsen sein, eine Forderung, die rein werkstofflich und konstruktiv gesehen gewöhnlich ohne Schwierigkeiten erfüllt werden kann.

Hinsichtlich der sich aus der Lagerbelastung ergebenden und auf die Oberflächenzone des Werkstoffs einwirkenden Normalspannungen und der Reibungsbeanspruchungen liegen die Verhältnisse schwieriger. Einer »Überbeanspruchung« der Oberflächenzone des Lagerzapfens versucht man durch ein Schmierschichtpolster bzw. durch Wahl eines geeigneten und für den Notfall als »Schmiermittel« dienendes Lagermetall zu begegnen. — (Auf die weiteren konstruktiven bzw. bemessungstechnischen Maßnahmen, z. B. bei der Anpassung der elastischen Betriebsverformungen des Lagerkörpers an den Lagerzapfen [14], soll hier nicht eingegangen werden). —

Inwieweit die Erhaltung der Lauffähigkeit eines Gleitlagers möglich ist, hängt aber nicht zuletzt von der Beschaffenheit der Randgebiete der gepaarten Werkstoffoberflächen Lagermetall—Zapfenwerkstoff und der zwischen beiden sich bildenden Zwischenzone ab.

Betrachtet man in Bild 2 dieses Grenzgebiet unter den gegebenen Beanspruchungsverhältnissen in schematischer Darstellung, so wird folgendes ersichtlich:

Obwohl man bei der Bearbeitung von Lagerzapfen und Lagermetall versucht, durch Feindrehen, Schleifen und Polieren die Oberflächen nach Möglichkeit zu glätten, verbleibt ein Oberflächenprofil auf beiden Seiten, das — in der Vergrößerung dargestellt — kleine Erhebungen und Täler hat. Im Ruhezustand werden sich die beiden Laufflächen an den Erhebungen berühren, die sich unter dem Lagerdruck N oder den an den Berührungsspitzen jeweils wirkenden spezifischen Druckkräften p elastisch und bei genügend großem p sogar plastisch verformen können. Damit kommt es einerseits zu örtlichen Verfestigungen (falls sich der Werkstoff dafür eignet) und vor allem zu Abflachun-

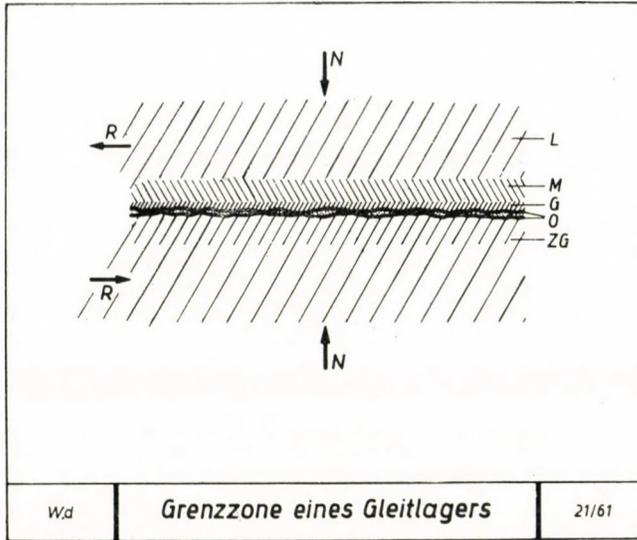


Bild 2. Schematische Darstellung der Beanspruchung in der Grenzzone eines Gleitlagers. N = Lagerdruck; R = Reibungskraft; M = Lagermetall; G = Gleitmetallüberzug (z. B. Indium); O = Oxydschichten; L = Lagerschale; ZG = oberflächengehärtete Randzone des Lagerzapfens

gen und zu breiteren Tragspitzen. Brechen aber, was noch einflußreicher ist, unter diesem Vorgang die dünnen Oxydhäutchen, die die beiden Metalle vorher voneinander isolierten, durch, dann kommt es unter genügend hohem Druck, womit auch örtliche u. U. sehr hohe Temperatursteigerungen eintreten, zu sogen. »Kaltschweißstellen«, d. h. zu einer Legierung zwischen Lagermetall und Zapfenwerkstoff [15], sofern Lagerzapfenwerkstoff und Lagermetall in der Lage sind, Mischkristalle zu bilden. Beim Drehen des Zapfens in der Lagerschale werden diese Kaltschweißstellen wieder voneinander getrennt (abgeschert). Es reißen Metallteilchen ab, die sich dann mit Oxydteilchen und dem Schmiermittel vermischen, so daß es zu Grenzschichten auf den gepaarten Oberflächen kommt, die man als Einlaufschichten bezeichnet.

Aus dieser Darstellung ist zu erkennen, daß diese Eingriffe in die Beschaffenheit der äußersten Grenzschichten umso milder werden, je geringer der Lagerdruck N wird und je mehr der Reibungsbeiwert $\mu = \frac{R}{N}$ nach Kleinstwerten tendiert, sodaß die Grenzflächenberührung an den Tragspitzen durch den dazwischen geschalteten Schmierfilm (Fett, Öl usw.) unterbunden wird. Dies ist gewöhnlich aber erst bei voller Drehzahl eines sachgemäß ausgelegten Lagers möglich.

Umso mehr kommt es darauf an, daß einerseits die Isolierschicht auf dem Lagerzapfenwerkstoff d. h. die Oxydhaut hohe Druckfestigkeit, hohe Kohäsionsfestigkeit, gute Haftung auf dem Untergrund hat und dieser selbst genü-

gend hohe Elastizitäts- und Streckgrenze bzw. Härte besitzt, um die Oxydschicht ausreichend abstützen zu können.

Andererseits wird von der Gegenseite, d. h. dem Lagerwerkstoff, mit Rücksicht auf die beim Anlauf und Einlauf des Lagers unvermeidlichen Spitzenberührungen verlangt, daß er sich dem Partner genügend anpaßt, ohne selbst zerstört zu werden. Dies ist durch die Auswahl eines Lagermetalls möglich, das den jeweiligen Flächendruck N aufzunehmen vermag, ohne daß es in zu weiten Bereichen plastifiziert wird und vor allem ohne daß seine Oxydhaut weitgehend zerstört wird. Von diesen Oxyden sind daher neben ausreichenden Haftkräften hohe Duktilität und nicht zu hohe Scherfestigkeit zu verlangen.

Eine große Bedeutung kommt in diesem Zusammenhang noch solchen Lagermetallen zu, die einerseits dichte gut haftende und feste Oxydfilme bilden und selbst keine Legierungspartner, also keine Mischkristallbildner, zum Lagerzapfenwerkstoff sind. Sie wirken dann besser als Notlaufschicht, ohne mit dem Lagerzapfenwerkstoff zu verschweißen (z. B. Pb).

Die neuere Lagertechnik versieht aus diesen Gründen ihre Lagermetalle mit dünnen Filmen aus geeigneten Weichmetallen, die diese Eigenschaften besitzen. Hier kommt z. B. dem Blei und Indium besondere Bedeutung zu.

Die Beanspruchungen in der Verzahnung von *Zahnradgetrieben und Schneckengetrieben* bieten außer rein konstruktiven Aufgaben Probleme geeigneter Werkstoffwahl und Oberflächenbehandlung in Sonderheit der Zahnflanken. Hier treten in der Paarverbindung Zahnflanke zu Zahnflanke außer Wechsel- bzw. Schwellbiegekräften (die hier nicht besprochen werden sollen) hohe Flächenpressung durch den Zahndruck und zusätzliche Gleitreibung auf den gepaarten Zahnflanken-Oberflächen auf, die in Verbindung mit den Zahnkräften in den Oberflächen ähnlich wie beim Gleitlager — hier nur in erschwertem Maße — Druck- und Scherbeanspruchungen bewirken.

Hinsichtlich Werkstoffauswahl und Behandlung bedeutet dies neben hoher Schwingungsfestigkeit des Werkstoffes die Forderung nach hohen zulässigen Flächenpressungen (hohe Oberflächen- und Kernhärte des Werkstoffes) und weiterhin nach Oberflächenschichten, die bei genügend hoher Eigenfestigkeit die Gleitreibung auf ein möglichst geringes Maß vermindern.

Hinsichtlich Flächenpressung sind genügend hoch vergütete Stähle, oder Einsatz- bzw. Nitrier- oder auch durch Flammen- bzw. Induktionshärtung behandelte Stähle üblich, hinsichtlich Reibungsminderung wird man durch Feinbearbeitung (Schleifen, Läppen) und zusätzlich durch dünne Gleitschichten große Verbesserung erzielen. Hier bewähren — natürlich neben den üblichen Schmiermitteln — sich Gleitschichten, die durch Phosphatieren erzeugt werden [13].

Im Gegensatz zum Gleitlager oder der Verzahnung soll bei *festen Paarverbindungen* wie z. B. bei einer Schrumpfverbindung Nabe auf Zapfen, Bild 3,

nach Möglichkeit das Gleiten zwischen den Kontaktflächen unterbunden werden. Dies erfordert sehr hohe Anpreß- bzw. Flächendrücke durch Schrumpfkkräfte, und, um diesen Anforderungen gerecht werden zu können, Werkstoffe hoher Elastizitäts- bzw. Streckgrenze.

Der verwickelte Beanspruchungszustand für eine solche Preßverbindung ergibt nach Bild 3 im Punkt *A* die höchstbeanspruchte Stelle im Zapfen. Er liegt etwas innerhalb der Einspannung, also in einem Abstand vom Nabenrand, der außer durch die Größe der Schrumpfspannungen im wesentlichen vom E-Modul des Zapfen- und Nabenwerkstoffes und von der Steifigkeit der Nabe

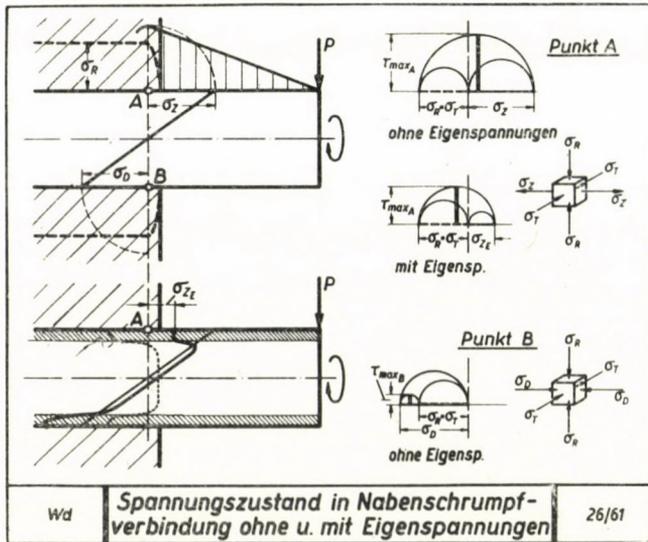


Bild 3. Spannungen in einer auf Umlaufbiegung beanspruchten Naben-Schrumpf-(Preß-)Verbindung. σ_z bzw. σ_D = aus Umlaufbiegung sich ergebende Spannungsamplituden. σ_R = radiale Druckspannung und σ_T = Tangentialspannung aus Schrumpfkkräften im Zapfen

im Verhältnis zum Zapfen — insgesamt demnach von den elastischen Eigenschaften der Verbindung bestimmt wird. Auch von der Rauheit der beiden gepaarten Oberflächen hängt die Lage von *A* ab. Je höher der *E*-Modul der Nabe, ihre konstruktive Steifigkeit (Federeinheitskraft), je glatter die Oberflächen sind, um so mehr rückt der Punkt *A* nach dem Nabenrand zu und um so ausgeprägter bilden sich Spannungsspitzen aus.

Der in *A* vorhandene 3-achsige Spannungszustand setzt sich aus einer Zugspannung σ_z (verursacht durch die Biegebeanspruchung des Zapfens) und den beiden radialen und tangentialen Druckspannungen σ_R und σ_T (verursacht durch Schrumpfkkräfte) zusammen. (Die Querkräfte durch Biegung seien hier vernachlässigt). Im qualitativen Bild ergibt das nach Mohrscher Darstellung eine maximale Schubspannung $\tau_{\max A}$ von beachtlicher Höhe. Diese darf hinsichtlich Dauerfestigkeit des Zapfens weder die für den Werkstoff zulässige

innere Grenzgleitfestigkeit noch — was hier interessiert — den Kohäsionsgleitwiderstand der Oberflächenrandzone und möglichst auch etwa vorhandener Schutzschichten überschreiten, wenn die Verbindung gegen Dauerbruch gesichert sein soll.

Der Mohrsche Kreis für den Gegenpunkt B wird sehr klein, da in der Randzone des Zapfens nur Druckspannungen herrschen. Hier besteht zufolge des geringen $\tau_{\max B}$ keine besondere Gefahr für eine Werkstoffzerstörung.

Für die Betriebssicherheit der Verbindung ist also neben einer ausreichenden Dauerfestigkeit des Zapfenwerkstoffes ganz besonders der geometrische und physikalisch-chemische Aufbau der gepaarten Oberflächen maßgebend.

Bei Umlaufbiegung treten infolge der elastischen Wechselverformungen auf der Ringzone $A - B$ der gepaarten Oberflächen kleine Relativverschiebungen zwischen Zapfen- und Nabenoberfläche auf, die zum Abscheren feiner Werkstoffteilchen des Mikro-Rauheitsgebirges bevorzugt dort führen kann, wo durch die hohen Flächendrucke hervorstehende Spitzen plastifiziert werden oder auch Rauheitsspitzen ineinandergreifen. Dieser Vorgang, sich bei jedem Umlauf des Zapfens wiederholend, kann zu Reiboxydation, d. h. Entstehung feiner Oberflächenkerben führen, wenn nicht dünne Oberflächenschichten (meist natürliche Oxydschichten), künstlich aufgebraachte Schichten (z. B. Phosphatschichten) oder dünne, nur wenige μ dicke Weichmetallschichten den metallischen Kontakt dadurch verhindern, daß sie ähnlich wie in den vorher geschilderten Fällen die beiden Oberflächen gegeneinander isolieren. Dies können sie allerdings nur dann tun, wenn ihre Plastifizierungsfähigkeit im Vergleich zu den auftretenden Druck-, Zug- und Scherspannungen und ihre Eigenfestigkeit genügend groß sind, so daß sie nicht völlig zerstört werden, da sonst ein Fressen der Naben auf dem Zapfenwerkstoff eintritt.

Besonders gut bewähren sich für solche Verbindungen Werkstoffpaarungen, die eine gewisse Schmierwirkung in sich tragen, wie z. B. Gußeisen-Stahl (Graphiteinschlüsse!) oder Bronze-Stahl (Bronze-Lagermetall). Auch Kunststoffbeilagen bzw. dünne Kunststoffolien eignen sich vorzüglich.

Die *Kaltumformung* von Werkstoffen kann als Beispiel aus der Fertigungstechnik herangezogen werden, um zu zeigen, daß dünne Oberflächenschichten für die erfolgreiche Durchführung dieser Verfahren unerlässlich sind [16, 17].

Auch hier handelt es sich um Paarverbindungen, bei denen hohe und höchste mechanische Beanspruchungen auf die Werkstoffe einwirken, sei es, daß man Werkstoffe zu Stangen und Drähten kaltziehen, Bleche zu Verkleidungen, Stahlkörper tiefziehen oder Massivteile durch Fließpressen herstellen will. In jedem Fall will man vermeiden, daß das Umformwerkzeug sich plastisch verformt. Der umzuformende Werkstoff dagegen soll weitgehend plastifiziert werden, ohne daß er zerstört wird oder Legierungsbildung bzw. Fressen zwischen Werkzeugoberfläche und umzuformendem Werkstoff eintritt.

Dabei spielt wiederum die Mikrogeometrie der beiden Partner Werkzeug- und Werkstoffoberfläche eine vorherrschende Rolle. In Bild 4 wird diese Paarung in schematischer Darstellung gezeigt, wobei hervorzuheben ist, daß die harte und sehr glatte Werkzeugoberfläche theoretisch nur elastisch, die Oberfläche des Umformwerkstoffes weit in die Tiefe hinein plastisch verformt werden soll. Dies ist nur möglich, wenn die beiden Partner weitgehend voneinander getrennt bleiben, was einerseits in den Bereichen F_1 durch hier auch während der Plastifizierung eingeschlossenes Schmiermittel und in den Bereichen F_2 sowohl durch teilweise anhaftendes Schmiermittel, besonders aber durch Oberflächenpassivschichten (natürliche Oxydschichten, chemisch erzeugte Schichten, Metalloxyde und -phosphate u. dgl. oder auch aufgebraute

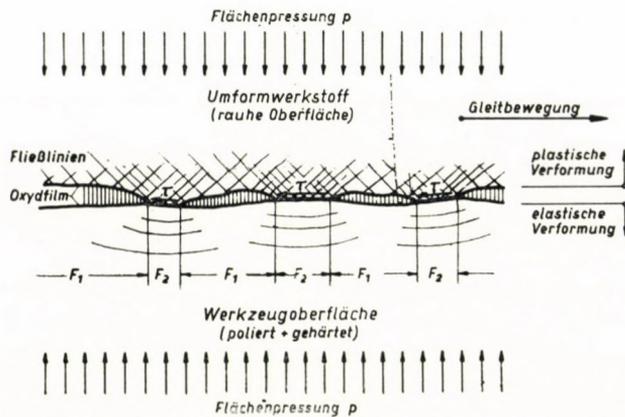


Bild 4. Oberflächenschichten bei der Kaltumformung von Werkstoffen (F_1 = Flächenbereiche ohne Festkörperberührung, F_2 = Flächenteile mit Festkörperberührung)

dünne Fremdstoffschichten wie z. B. Weichmetallüberzüge, Kunststoffüberzüge usw.) geschehen kann [18].

Auch die *Erosion* und die *Kavitation* sind zwei überwiegend durch mechanische Kräfte auf die Werkstoffoberfläche einwirkende Beanspruchungsarten.

Während erodierende Beanspruchung eine Abriebwirkung dadurch zur Folge hat, daß Trägermedien wie Luft und Flüssigkeiten feinverteilte harte Festkörperpartikelchen beim Benetzen von Werkstoffoberflächen mit sich führen, besteht Werkstoffkavitation letztlich in der Auswirkung von Dauerdruck-Wechselbeanspruchungen auf Werkstoffoberflächen. Da man von Kavitation dann spricht, wenn in Flüssigkeitsströmungen sich Hohlräume (z. B. Hohlzug, Gasblasen) bilden, bei deren Zusammenbruch Flüssigkeit mit hoher Geschwindigkeit und hohem Druck auf den Werkstoff einwirkt, geht mit der mechanischen Zerstörung gewöhnlich in gewissem Anteil auch ein Korrosionsangriff parallel [19]. So zeigt Bild 5 die Außenseite einer flüssigkeitsgekühlten Zylinderbuchse mit einer starken Kavitationszone (s. a. [20]). Es würde hier

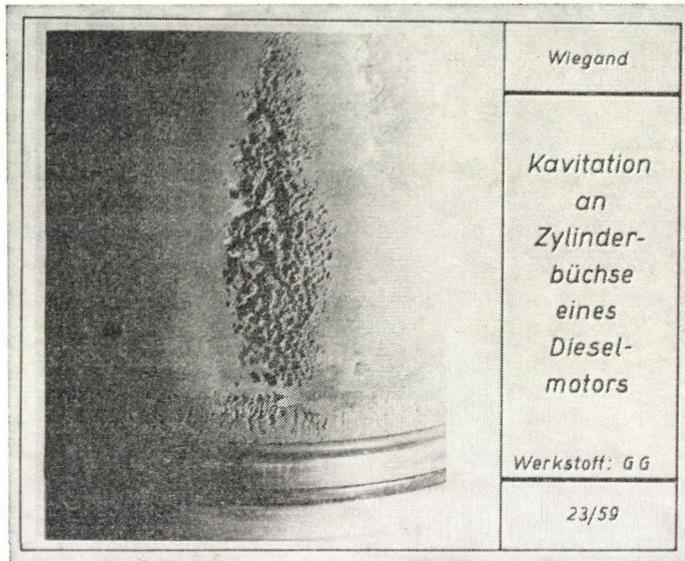


Bild 5. Kavitation auf der Kühlraumseite einer Zylinderlaufbüchse eines Dieselmotors

zu weit führen, auf die Ursachen dieses Schadens näher einzugehen. Aus dem Entstehungsmechanismus solcher Werkstoffzerstörungen, die ja von Schiffsschrauben, Pumpenläufern, Hochdruck-Einspritzaggregaten usw. ebenfalls bekannt sind, ist lediglich zu schließen, daß ebenso wie bei der Erosion überwiegend mechanische Beanspruchungen als Ursache in Frage kommen, während der Korrosionseinfluß dagegen zurücktritt. Dieses darf zwar nicht bei der Werkstoffauswahl bzw. bei der Wahl der Oberflächenbehandlung vernachlässigt werden. Im allgemeinen wirken aber mit Rücksicht auf mechanische Zerstörung ausgewählte Oberflächenschichten auch korrosionsbehindernd.

3. Schlußbemerkung

Es würde weit über den Rahmen dieses Referates hinausgehen, wenn man nun für die genannten Beispiele den Wert besonderer Oberflächenschutzüberzüge im einzelnen diskutieren wollte.

Bei kräftefreien Werkstoffoberflächen unter zügiger Beanspruchung wirken sich dünne Oberflächenschichten praktisch auf das Werkstoffverhalten nicht aus.

Bei schwingender und schlagartiger Beanspruchung gilt die Regel, daß Schichten, die für die Werkstoffoberfläche eine Verfestigung ergeben, wobei diese meist mit Druckeigenspannungen gepaart ist, sich in einer Steigerung der Schwingungsfestigkeit äußern.

Besitzen Oberflächenzonen jedoch geringe Eigenfestigkeit oder tragen sie Feinkerben (Risse, Poren und sonstige Fehlstellen) in sich bzw. weisen sie Zugeigenspannungen auf, dann bedeuten sie eine Gefahr für die Sicherheit der Konstruktion.

Der Einfluß dünner Oberflächenschichten an nicht kräftefreien Oberflächen ist nicht in zusammenfassender Darstellung kurz wiederzugeben.

Hier muß ein Unterschied gemacht werden zwischen verschiedenen Gruppen, die sich in ihrem chemischen Aufbau, in ihrem physikalischen Aufbau und in ihrer technologischen Beschaffenheit und vor allem infolge der dadurch bedingten Eigenschaften so verschiedenartig auswirken, daß ihr Einfluß auf das Werkstoffverhalten nur an speziellen Beispielen nachgewiesen bzw. erörtert werden kann.

Dazu sollen nur erwähnt werden die verschiedenen Möglichkeiten des mechanischen, chemischen und elektrochemischen Polierens, die gewisse Unterschiede im Verhalten der Werkstoffe gegenüber Wechselbeanspruchungen aber auch gegenüber Gleitreibungsbeanspruchungen, gegenüber anderen Nachbehandlungsverfahren wie z. B. dem galvanischen Aufbringen von Metallüberzügen oder der Feuerverzinkung oder Verzinnung ergeben. Ähnliches gilt für oxydische Deckschichten.

Will der Konstrukteur solche dünnen Schichten zur Beeinflussung der Leistungsfähigkeit bzw. zur Erhöhung der Lebensdauer der Konstruktion heranziehen, so muß er beachten, daß jedes Behandlungsverfahren nicht nur von vielen Einflußfaktoren gesteuert wird, sondern daß auch die Beschaffenheit des zu behandelnden Werkstoffs hinsichtlich chemischer Zusammensetzung, Gefügebau, Homogenität und Festigkeit von großem Einfluß auf den Schichtaufbau ist. Ihn auf diese Gegebenheit hinzuweisen, war Aufgabe dieses Berichtes.

SCHRIFTTUM

1. WIEGAND, H. u. SCHEINOST, R.: Einfluß der Einsatzhärtung auf die Biege- und Verdrehwechselfestigkeit von glatten und quergebörhten Probestäben. Archiv Eisenhüttenwesen **12** (1938/39), S. 445/448.
2. GRÖNEGREG, H. W.: Die Oberflächenhärtung mit der Leuchtgas-Sauerstofflamme. T. Z. f. prakt. Metallbearb. **47** (1937), S. 21/22.
3. WIEGAND, H.: Oberflächengestaltung und Behandlung dauerbeanspruchter Maschinenteile. Z. VDI **84** (1940), S. 505/510.
4. WIEGAND, H.: Nitrieren im Motorenbau. Härtereitechn. Mitt. **I** (1941), S. 166/85.
5. WIEGAND, H. u. KOCH, M.: Der Einfluß des Gas- und Salzbadnitrierens auf die Eigenschaften von Konstruktionsstählen. Metalloberfläche **12** (1958), S. 69/74, 97/101 u. 226/230.
6. GÖBEL, E. F. u. MARFELS, W.: Die Oberflächenhärtung und ihre Berücksichtigung bei der Gestaltung. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953.
7. THUM, A. u. BAUTZ, W.: Ursachen der Steigerung der Dauerhaltbarkeit gedrückter Stäbe, Forsch. Ing. Wes. **6** (1935), S. 121/128.
8. WIEGAND, H. u. HAAS, B.: Berechnung und Gestaltung von Schraubenverbindungen. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1951.

9. THUM, A. u. WUNDERLICH, F.: Die Reiboxydation an festen Paarverbindungsstellen und ihre Bedeutung für den Dauerbruch. *Z. Metallkunde* **27** (1935), S. 277/280.
10. FISCHER, H., HAUFFE, K. u. WIEDERHOLT, W.: Passivierende Filme und Deckschichten. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1956.
11. WIEGAND, H.: Die Oberfläche von metallischen Werkstoffen in ihrem Einfluß auf das Betriebsverhalten der Konstruktionsteile *Metalloberfläche* **12** (1958), S. 33/37 und S. 65/68.
12. KETTERL, H.: Das Alodine-Verfahren. *Aluminium* **28** (1952), S. 346/349.
13. KELLER, H.: Fortschritte auf dem Gebiet der Phosphatierung. *Metalloberfläche* **7** (1953), S. A 129/A 136.
14. BUSKE, A.: Lager für hohe Anforderungen. Preisausschreiben 1940 der Lilienthal-Gesellschaft f. Luftfahrtforschung Bericht S. II, S. 7/48.
15. NIEMANN, G. u. GLAUBITZ, H.: Zahnfußfestigkeit geradzahnter Stirnräder aus Stahl. *VDI-Z.* **92** (1950), S. 923/932.
16. WIEGAND, H. u. KLOOS, K. H.: Der Reibungs- und Schmierungsvorgang in der Kaltformgebung und Möglichkeiten seiner Messung. *Werkstatt und Betrieb* **93** (1960) S. 181/187.
17. WIEGAND, H. u. KLOOS, K. H.: Oberflächenvorgänge bei der Kaltformung. *Industrie-Anzeiger* **82** (1960), Nr. 70, S. 52/58.
18. WIEGAND, H.: Über die Bedeutung von Isolier-Gleitschichten bei der Kaltumformung metallischer Werkstoffe. *Werkstatt u. Betrieb* **93** (1960), S. 147/51.
19. PILTZ, H.: Kavitation — Versuch einer Begriffsbestimmung und Beschreibung einiger Erscheinungen. *Metalloberfläche* **13** (1959), H. 9, S. 285/288.
20. BULLNHEIMER, H.: Kühlwasserseitige Anfressungen an Zylinderbüchsen und Gestellen schnellaufender Dieselmotoren: MAN-Forschungsheft (1960), Nr. 9, S. 1/13.

VEHICLES

FAHRZEUGE

СРЕДСТВА ПЕРЕДВИЖЕНИЯ

THE APPLICATION OF HIGH-TENSILE STEEL WITH DANUBE-SEAGOING SHIPS

Prof. B. BALOGH

TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

With waterways of limited depth — as *e.g.* also in case of the Danube — the draught of the ship is determined by the given depth of water. In case of rivers the depth of water varies in function of the prevailing water level. The draught that allows the Danube-ships to communicate in the shipping season between Budapest and the Black Sea is abt. 2 m. The prevailing conditions of the waterway [1] impose certain limitations also onto the main dimensions of the ship, *i.e.* onto her length, beam and depth. In turn, the main dimensions determine the water displacement of the ship within a range of fairly close limits. Any excess of these limits would have a harmful influence on the economy of the ship, due to the rapid increase in resistance. Of course, the loading of the ship is proportional to her water displacement.

Accordingly, if one could succeed in reducing the weight of the ship, this would result in a correspondingly increased loading and with it also an improved economy. One possibility to achieve this aim consists in the reduction of the weight of the hull of the ship which represents the largest portion of the weight of the empty ship. The weight of the hull of one of our Danube-seagoing steel ships amounts to abt. 320—400 tons and thus a saving of 10 per cent would result in an increased loading equal to the capacity of abt. 3—4 waggons. Such an achievement would economically be utilizable both on the relative reach of the Danube and on the sea. *The gain thus achieved* in the loading *on the reach of the river* has to be considered as particularly valuable, since in addition to its percentage value which is higher on the river than on the sea — where these ships may run at an increased draught — also the transport charges amount to a multiple of those charged for sea transports, a condition which is due to a transport of goods without transshipment.

The basic point of departure for the designers who plan the hull of the ship and select the appropriate dimensional elements consists in the *heavy stresses to which the ship is subject to on sea*. With due regard to the bending moments imposed on the ship in a heavy sea, stresses approaching even a value of 1000 kg/sq.cm may be encountered at the deck, when assuming the most disadvantageous case, and the use of a material with the conventional tensile

strength of 41–50 kg/sq.mm, and these stresses will present themselves in the form of an alternating *tension* (+) and *compression* (–) stress reversing its sign abt. from 5 to 14 times per minute. However, even higher stresses are admissible, provided that either for those parts of the ship on which the highest stresses appear or for the building of the entire hull of the ship, materials of a higher tensile strength and especially of a higher yield point will be used instead of those ship steel grades which are of the conventional strength and have so far been used. Thus, the thickness of the applied structural elements may be considerably reduced, which condition then appears in a corresponding saving in weight.

Though this practice was even earlier followed by the building of warships the experiences gained thereby can hardly be found in the relative technical literature. With commercial ships the application of high-tensile steel represents a relatively new development. With the ocean liner “*Normandie*” high-tensile steel was used to a rather wide extent both for the deck and the deck beams [2]. In our domestic practice the first application of high-tensile steel, the chemical analysis and mechanical properties of which are shown in Table 1, looks back to 1935 when our ship building industry used it for the “*Szeged*” Danube-seagoing ship.

The “*Szeged*” was followed by the much larger “*Tisza*” and then by the “*Debrecen*”. Ever since the hull of all of our river- and seagoing ships is mostly made of high-tensile steel. With the first ships the alloying metals used also included Cr and Cu. The prototypes of these ships and especially those parts which were made of steel grades with a tensile strength of abt. 50–60 kg/sq.mm are shown in chronological order in Fig. 1. In our ships built during World War II and afterwards, the composition of the material was modified by our steel works, however, the required ultimate stress values have invariably been maintained. This measure had to be taken under the pressure of the prevailing circumstances as the necessary alloy materials were not available then. As Cr was not desirable from the viewpoint of weldability, the “*Simeiz*” series built after Hungary’s Liberation in 1945 had already comprised ship hulls which essentially were made of a carbon steel alloyed with manganese and silicon.

Obviously, even the institutes classifying the ships are inclined to make concessions — in spite of their strict prescriptions in relation to those structural elements of the hull which are subject to heavy stresses — if the yield point of the applied high-tensile steels exceeds that of the commonly used ship steel, which is equal to 24–25 kg/sq.mm. For instance, the possibility for reducing the thickness of the used material was determined by the rules set forth by the *Bureau Veritas* with the aid of the following formula [3]:

$$\frac{e}{E} = \frac{180 - 2,65 \cdot \sigma_F}{100} \quad (1)$$

where: e = the thickness of the structural element made of high-tensile steel; E = the minimum thickness specified by the rules on the assumption that a conventional material will be used; and σ_F = the yield point of the applied high-tensile material expressed in kg/sq.mm.

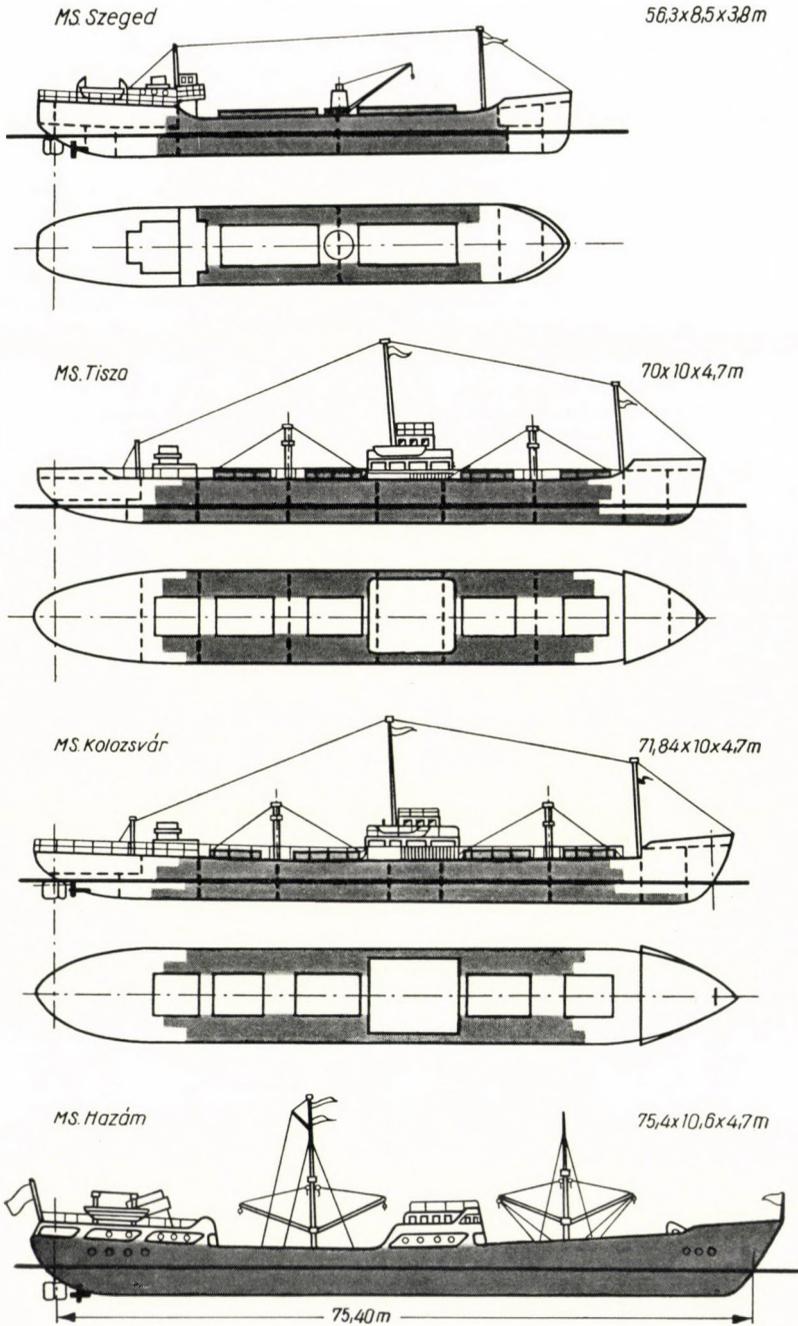


Fig. 1. Hungarian Danube-seagoing ships

Table 1
High-tensile steel grades for Danube-seagoing ships

Type	Analysis		Physical Properties	
Cr-Cu Steel "Szeged"—"Tisza"—"Kassa" 1935—1939	C = 0,13—0,19% Mn = 0,60—1,22% Si = 0,21—0,43%	P = 0,02—0,04% S = 0,03—0,04% Cu = 0,42—0,89% Cr = 0,26—0,50%	Tensile Strength Yield Point Elongation at 200 mm	$\sigma_B = 41—59 \text{ kg/mm}^2$ $\sigma_F = 35—41 \text{ ,,}$ $\delta = 18,5—27\%$
Steel H. 5 "Hazám"—"Tihany" 1957—1960	C = 0,14—0,20% Mn = 0,94—1,28% Si = 0,27—0,55%	P = 0,021—0,047% S = 0,018—0,048%	Tensile Strength Yield Point Elongation	$\sigma_B = 50—59 \text{ kg/mm}^2$ $\sigma_F = 35—41 \text{ ,,}$ $\delta_{10} = 20—30\%$
MTA-Steel	C = 0,12—0,17% Mn = 0,94—1,56% Si = 0,28—0,49% Ti = 0,02—0,05% Al = 0,02—0,09%	P = 0,028—0,043% S = 0,027—0,031% Cr = 0,09—0,13% Cu = 0,19—0,25%	Tensile Strength Yield Point Elongation	$\sigma_B = 53—60 \text{ kg/mm}^2$ $\sigma_F = 38—42 \text{ ,,}$ $\delta_{10} = 22—24\%$

When using a ship steel which has the same physical properties as that applied with our Danube-seagoing ships, the mechanical application of the relative specifications would allow to reduce the thickness of the sheet and structural steel parts by 13 per cent. In accordance with the agreement concluded between the shipyard and the *Bureau Veritas* — and in due consideration of both the route of our river- and seagoing ships and the frequency of the maximum stresses imposed — the designers were able to realize a size reduction up to 20 per cent. Accordingly, the weight of the hull, the achieved saving in weight and the calculated stress values have developed as shown in Table 2.

It is undeniable that such a view of designing had at first developed where the kind of stressing of the individual structural elements was left out of consideration. Though this view lends itself for the stress calculation of parts purely subject to tension, with those elements, however, to which compressive stresses are imposed *buckling stresses* may appear against which no satisfactory protection is offered by the increased tensile strength or yield point of the material. As already mentioned before, it is yet just with ship structures that also periodically alternating compressive stresses are imposed onto the mostly stressed elements as a result of the high sea waves. That is the very reason why much more detailed methods of calculation are specified by the relative rules of the *Soviet Register* issued in 1956 concerning sheet iron structures, where also a close control of the *stability (buckling) of the plates or sheets* is required [4].

However, the respective rules may be applied only at certain limitations, and this holds true especially then when the building of the hull has either partially or entirely been planned on the use of high-tensile steel. The favourable strength characteristics of the material cannot even be utilized with the conventionally applied transverse frame system, since due to the relatively large distance of the girders — equal to a multiple of the frame distance — an unfavourable aspect ratio would derive, considerably reducing that cooperating width of the plate which may be taken into account. Therefore, as it can be seen in Fig. 2 with the ship "*Hazám*" to reduce the buckling hazard we were compelled to install dummy girders both in the bottom and the deck in addition to those specified, though, as a result, the weight of the hull accordingly increased and the extent of saving reduced. At the same time, however, also the appearing stresses could be reduced essentially — to a certain extent even below the otherwise admissible maximum [8].

Our first ship partially built of high-tensile steel, the "*Szeged*" has been running on the line between Budapest and Alexandria for 25 years, and during this time no objections of any kind were raised against the hull. Smaller repairs became necessary with the "*Tisza*" type ships due to the high stresses imposed by the water ballast represented by the deep tank located at midship when a high sea was running. This is illustrated by our Fig. 3 which shows the results of the longitudinal strength calculation to which the "*Debrecen*" (ex *Kassa*), one of the sister ships has been subject [5]. The maximum moment encountered when travelling in ballast nearly approaches the value experienced at full load

Table 2

Serial No.	Name of Ship	Year of Manufacture	Main Dimensions L. B. H (m)	Weight of Hull (Tons)	Saving in Weight (Tons)	Computed Stress σ kg/cm ²		High-tensile Material Mark		Note General Overhaul in 1957
						At Bottom	At Deck	Application		
2	Szeged	1936	56,32 · 8,5 · 3,8	175	15	—	—	Cr-Cu	50%	General Overhaul in 1957
3	Tisza	1937	70 · 10 · 4,7	320	50	1130	1290	Cr-Cu	70%	General Overhaul in 1957
4	Debrecen (ex Kassa)	1939	74 · 9,8 · 4,7	320	50	1280	1460	Cr-Cu	70%	Sunk in 1941 (Struck a Mine)
5	Ungvár	1941	71,84 · 10 · 4,7	330	50	1240	1410	Cr-Cu	70%	
6	Ural (ex Kolozsvár)	1941—46	71,84 · 10 · 4,7	340	50	—	—	Cr-Cu	70%	Rebuilt in the Shipyard of Obuda
7	Desna (ex Komárom)	1941—46	71,84 · 10 · 4,7	340	50	—	—	Cr-Cu	70%	Rebuilt in the Shipyard of Obuda
8	Simeiz	1946	71,84 · 10 · 4,7	340	50	1240	1410	C-Mn-Si	70%	
9	Koreiz	1946	71,84 · 10 · 4,7	340	50	1240	1410	C-Mn-Si	70%	
10	Don	1947	71,84 · 10 · 4,7	340	50	1240	1410	C-Mn-Si	70%	
11	Kalmius	1948	71,84 · 10 · 4,7	340	50	1240	1410	C-Mn-Si	70%	
12	Massandra	1948	71,84 · 10 · 4,7	340	50	1240	1410	C-Mn-Si	70%	
13	Livadia	1948	71,84 · 10 · 4,7	340	50	1240	1410	C-Mn-Si	70%	
14	Hazám	1958	85,4 · 10,6 · 4,7	400	35	600	900	H. 5	80%	
15	Tokaj	1959	85,4 · 10,6 · 4,7	400	35	600	900	H. 5	80%	
16	Badacsony	1960	85,4 · 10,6 · 4,7	400	35	600	900	H. 5	80%	
17	Csepel	1960	85,4 · 10,6 · 4,7	400	35	600	900	H. 5	80%	
18	Tihany	1961	85,4 · 10,6 · 4,7	400	35	600	900	H. 5	80%	

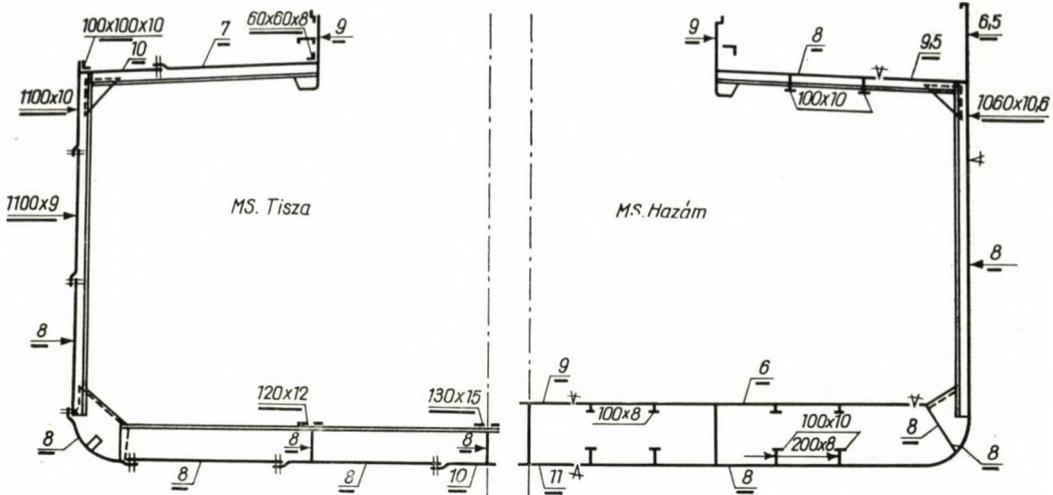


Fig. 2. Main frames of the ships "Hazám" and "Tisza"

conditions, and the magnitude of the admissible stress may attain $+1260$ kg/sq.cm at the bottom and -1440 kg/sq.cm at the deck. In calculating the moment of inertia and the moment of resistance of the mostly stressed cross section, due consideration has been given on basis of recently acquired knowledge to the buckling of plates with which we certainly had to reckon, and, correspondingly, the cooperating cross-sectional areas could sensibly be reduced. It is to be noted here that even at that time the effective areas were considered in adopting the PITZKER-method of calculation (60-fold plate thickness), and the largest stresses to be encountered were taken for 1350 kg/sq.cm. At full load conditions stresses amounting to abt. 1240—1460 kg/sq.cm may appear at the mostly stressed structural elements of these ships. According to the informations supplied by the respective technical literature, with ships of similar magnitude stresses of abt. 1000—1100 kg/sq.cm represent an acceptable value, provided that these ships are built of conventional steel with a tensile strength of abt. 41—50 kg/sq.cm [6].

The fate of these ships was observed and followed with special interest by our designers. According to received reports in the critical surrounding of the ballast tanks, several rivets *have yielded* and had to be replaced on the occasion of the first docking. The reason for this failure was that, up to the "Livádia" (built in 1948), these ships were of the *riveted shell design*. In turn, the internal structure, also including the connection of the frame and the longitudinal girders to the shell, was welded. Especially in unfavourable sea conditions cracks were to be seen in the welds of some highly stressed brackets; from these cracks the conclusion could be drawn that the welding was unsound and the cracks after having been repaired did not reappear again.

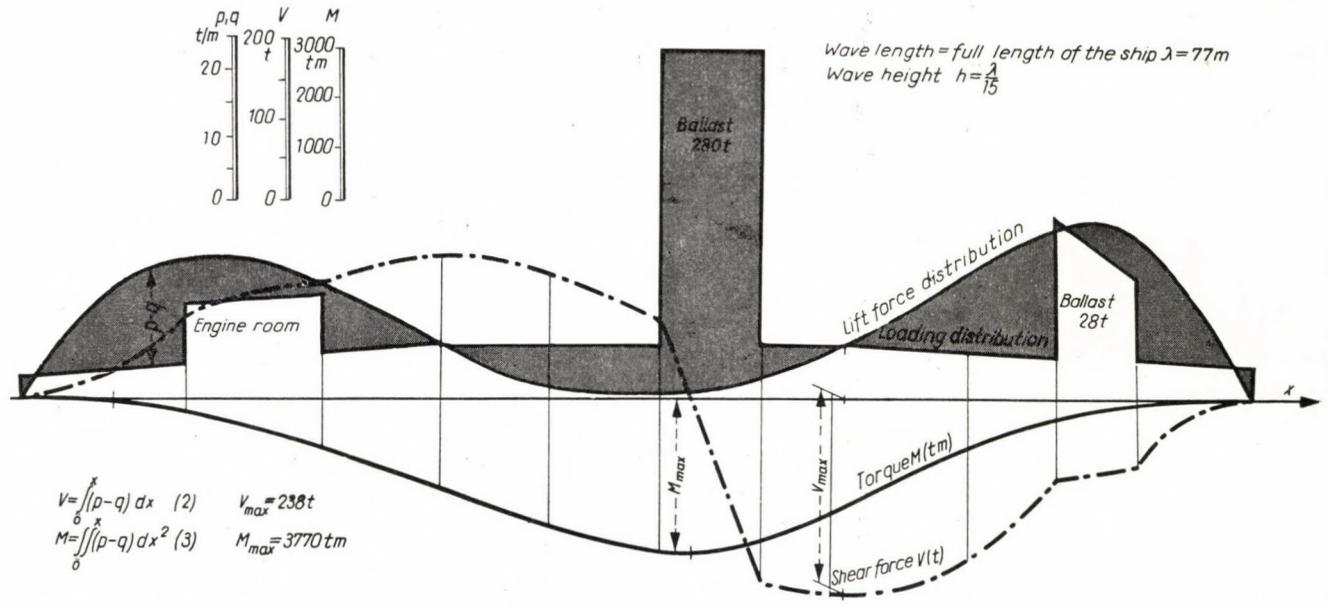


Fig. 3. Longitudinal stress calculation of the ship "Debrecen"

6 units from the series of "Tisza" type ships, supplied to the Soviet Union, are presently in service on the Black Sea. On demand of our customer, we had to provide these ships with a *bulwark* fastened to the sheer-strake of the shell all along the length of the hull. However, cracks have appeared both at the rim of the bulwark and at the welds as well as at those spots which were liable to a *stress concentration*. Such cracks have then repeatedly appeared with the ships of the type "Hazám" likewise provided with a bulwark. The magnitude of the computed stress amounted to 1800 kg/sq. cm and so even a minimum stress concentration may also lead to a failure. To eliminate this, we introduced a bulwark design with our 1200 ton ships in case of which the bulwark and the sheer-strake below it has all along been separated by a gap (the structure and the hull being connected to each other only by the brackets) and applied a sliding joint in the after third of the ship. This solution is to eliminate any considerable stress that may be encountered in the bulwark.

After Hungary's Liberation our shipbuilding industry gradually switched over to the *manufacture of all-welded hulls*. This new method of ship building involved a lot of technological problems even with the application of steel with a tensile strength of abt. 41—50 kg/sq.mm. The difficulties were, however, overcome with the building of our sea-going ships at the end of 1954. The task to be fulfilled seemed considerably more difficult, however, with the application of steel of a tensile strength of abt. 50—60 kg/sq.mm at all-welded hulls. Though, we knew well the unfavourable experiences gained abroad with structures made of St. 50 steel, we could not dispense with the saving in weight shown so far with our ships due to the use of high-tensile steel, and amounting to abt. 15 per cent of the weight of the hull which was equal to a 50 tons increase in the loading of each ship.

Our metallurgical works are able to produce a *silico-manganese carbon steel* specified by grade H. 5 within our Standard No. KGMSZ 12010 and though this material has proved in the course of laboratory tests as *suitably weldable*, a lot of defective welds were revealed by radiographic examination on the slipway, after welding the individual sections. These faulty welds had then to be chiselled out and rewelded with our first ship "Hazám". The problem could be solved then in close cooperation with the *Iron and Steel Research Institute* using the EB basic electrodes manufactured by the Csepel Iron and Steel Works.

The Iron and Steel Research Institute is continuously engaged in the study of low-alloy high-tensile steel suitable for ship-building purposes. The required yield point of 35 kg/sq.mm can easily be ensured with the steel grade *MTA* containing a percentage of abt. 0,02—0,05 *titanium and aluminium* and also in bulk manufacture. Binding of the nitrogen content due to the effect of titanium is highly advantageous from the aspect of weldability. This material shows no tendency to brittleness (especially important by ships running in icy water) as the transition temperature remains under -40°C and thus the *CHARPY* values are in excess of the required minimum (3,0 mkg/sq.cm) with any material the thickness of which exceeds 12 mm. As shown by established pulsating tension fatigue tests $\sigma_r = 16$ kg/sq.mm represents the admissible stress with unfinished welds at 10 per cent of reinforced welds [7].

From the structural viewpoint there are many deviations between the ship "Hazám" and the previously built river-and-seagoing ships. The applied *double-bottom* with compartments for ballast water and fuel oil running along under the holds helped us in avoiding the unfavourable load distribution at ballast condition experienced with previously built ships. Since the applied double-bottom structure has considerably increased the moment of inertia (J) and the moment of resistance (K) of the maximum cross section, the stresses possibly encountered have been decreased.

Another trouble occurred, however, in form of the vibrations caused by the propellers at the stern of the ship, which appeared at frequencies of 5, 15 and 32 cycles according to the speed of the propeller and at a multiple of that. Within 6 months cracks had appeared on the high-tensile shell plating immediately above the propellers, and we were compelled to replace some of the plates with thicker ones. Also dummy brackets had to be installed to avoid the resonance at some critical spots. As a result the vibration maximum could be reduced to under 200 microns, and since then no failure has occurred. Traces pointing to rolling faults were experienced at some of the replaced plates and these may have contributed to the occurrence of these premature cracks.

The effect of corrosion, highly unfavourable also from the aspect of strength, appearing during service presents another important factor with the application of high-tensile steel. Assuming that also the high-tensile steel will lose as usual 1 mm from its thickness every 5—10 years, at present there is no reason for another assumption on basis of the composition of the material, obviously we have to replace the shell plates sooner or one part of them, at least, as if we had employed the usual grade of steel plates of conventional thickness because of the *increased percentage in size reduction*, whereby also the buckling hazard will essentially be increased. At the recent docking of the "Hazám" an unusual heavy corrosion was experienced at some bottom and side plates and the reason of this needs a careful examination which is still going on. It will be of some interest to mention that no similar complaints emerged with previously built ships likewise made of high-tensile steel.

Finally we have to state that the initiative directed to the introduction of high-tensile material with our Danube-seagoing ships has proven a *fruitful measure*. According to plans our shipbuilding industry is making every effort to a further exploitation of the chances offered by the introduction of *longitudinal framing*, by the predetermination of the possible *vibrations* to be expected and by *stress measurements* aimed at the creation of a more sound basis for rating.

Unfortunately, the gained and detected unfavourable experiences involve the introduction of *new materials, new design and new technology*. Therefore, development instead of being uniform can be measured through the savings attained in weight. The more quickly the gained experiences can be realized, the more sound will be the theoretical and practical preparation of new introductions, the *more uniform rate of development* will be achieved. It is a common task of the designers and research workers to ensure a uniform development in all branches of industry and thus also in shipbuilding.

REFERENCES

1. ENÖKL, D.: Technical conditions of the economical inland navigation. Lecture note MTI. Budapest, 1955.
2. ARKEBOUT SHOKKER, IR. J. C.: The Design of Merchant Ships. Haarlem-Antwerpen, 1959.
3. Rules and Regulations for the Building and Classification of Steel Ships. — Bureau-Veritas, Paris, 1951.
4. Rules for the Classification and Building of Seagoing Ships. — SSSR Register, Leningrad, 1956.
5. MLADIATA, J.: Danube-seagoing ships. Werft-Reederei, Hafen, 1941.
6. JOHOW—FOERSTER: Manual for Shipbuilding. Berlin, 1928.
7. Unpublished annual report of the Iron and Steel Research Institute (1960) dealing with the topic No. 301—60—40.
8. Stress Standards of Seagoing Steel Ships. — SSSR Register, Leningrad. 1958.

DIE UNTERSUCHUNG VON AUTOBUSSEN MIT BODENRAHMEN ODER FAHRGESTELL AUF VERDREHUNG

Dr. P. MICHELBERGER

KAND. DER TECHN. WISS., TECHNISCHE UNIVERSITÄT, BUDAPEST

Zeichenerklärung:

- d — Abstand zwischen der Seitenwand und dem benachbarten Längsträger
- $e_k'; e_k$ — Verschiebung der Seitenwand bzw. des Längsträgers beim k -ten Querträger
- f — die Hälfte des Abstandes zwischen den beiden Längsträgern
- i — lfd. Nummer einer Unbekannten (des Schnittes)
- k — lfd. Nummer des Querträgers; der Abschnitt zwischen dem k -ten und dem $k-1$ -ten Querträger; lfd. Nummer einer Unbekannten
- l_k — Abstand zwischen dem k -ten und dem $k-1$ -ten Querträger
- n — Anzahl der Querträger
- o — Index der äusseren Belastung
- E — Elastizitätsmodul
- G — Gleitmodul
- F — Querschnitt eines Trägerelements
- I — Trägheitsmoment des Querträgers
- I' — Trägheitsmoment des Längsträgers
- I'' — Trägheitsmoment der Seitenwand
- GI_t — Verdrehsteifigkeit des Trägerschnittes
- L' — Achsabstand
- M — Biegemoment
- M' — Resultierendes Biegemoment auf den Längsträger
- M'' — Resultierendes Biegemoment auf die Seitenwand
- T — Verdrehungsmoment im Trägerelement
- M, Q, T — Durch die an den Schnitten wirkende Einheitslast im Stammträger hervorgerufene Beanspruchungen
- P — Äußere Belastung des Trägers
- Q — Querkraft im Trägerelement
- X — das Unbekannte Biege- oder Verdrehungsmoment an der Schnittstelle
- t — Index für das ganze Trägersystem

Die Dimensionierung des lasttragenden Systems der Autobusse auf Verdrehung* wurde in der letzten Zeit von einer Anzahl von Verfassern behandelt. So hatte z. B. BRŽOSKA [1] die Verdrehung von »rein« selbsttragenden Wagen (Abb. 1) einer Prüfung unterworfen, während OSCHNOKOW [2], BOTSCHAROW [3] und ERZ [4] die Verdrehung von Fahrgestellen (Abb. 2) untersuchten. Für Autobusse der Verbundbauweise gibt es jedoch noch keine Lösung. Auch die Dimensionierung der heutzutage meistverbreiteten Wagenkästen mit Bodenrahmen ist noch nicht ausgearbeitet. Die Dimensionierung beider Wagenarten führt statisch gesehen zur gleichen Aufgabe.

* Anmerkung: Unter Verdrehung ist eine Belastung zu verstehen, die durch bei der Vorder- und Hinterachse eingeführte entgegengesetzt wirkende reine Kräftepaare hervorgerufen wird.

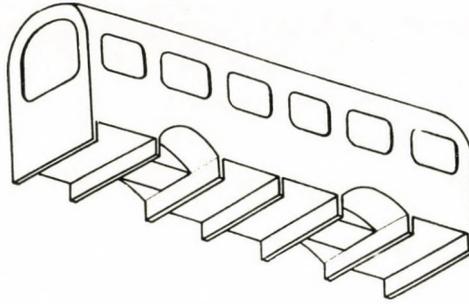


Abb. 1. Rein selbsttragender Autobus

Im Folgenden werden Autobusse mit Fahrgestell oder mit Bodenrahmen auf Verdrehung untersucht. Abb. 3 gibt die schematische Darstellung des tragenden Systems solcher Wagen. Die Längsträger und die Querträger sind

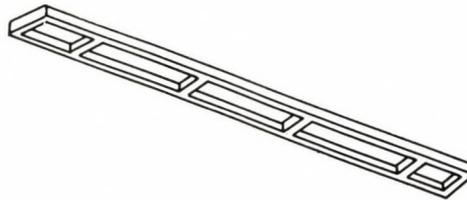


Abb. 2. Leiter-Fahrgestell

momentesteif, die Seitenwand und die Querträger jedoch gelenkig miteinander verbunden. Das ganze Trägersystem stützt sich an vier Punkten (die sich in den meisten Fällen an den Längsträgern befinden) auf die Grundfläche. Die

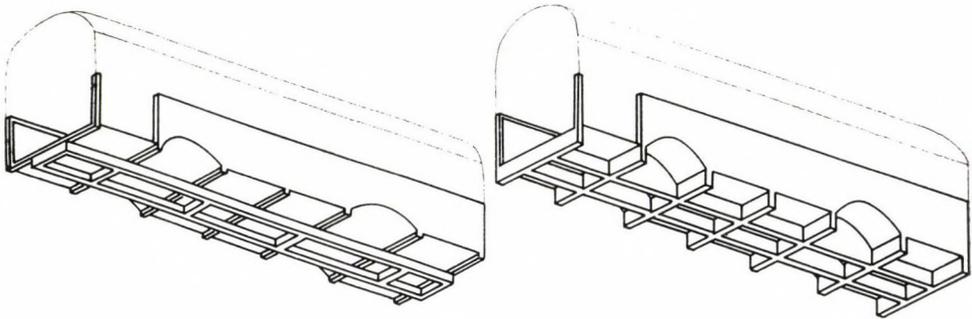


Abb. 3. Autobus mit Fahrgestell und mit Bodenrahmen

Verdrehung ergibt sich aus einer an diesen vier Punkten angreifenden anti-metrischen Belastung.

Wie aus den Abbildungen 2 u. 3 ersichtlich ist, stellt der Autobus mit Fahrgestell oder Bodenrahmen eigentlich den Spezialfall eines Trägerrostes dar; unsere Aufgabe ist daher die Untersuchung der Verdrehung eines Träger-

rotes mit vier Hauptträgern und einer beliebigen Anzahl (aber mindestens 6) Querträgern [5].

Bei Autobussen mit steifem Oberbau (Waggontype) wird die Drehbelastung beinahe vollständig vom Wagenkasten aufgenommen, da dessen Verdrehsteifigkeit — trotz des erweichenden Einflusses der Türen und Fenster — die eigene Drehsteifigkeit des Bodenrahmens bzw. des Fahrgestells wesentlich (um eine oder sogar mehrere Größenordnungen) übertrifft. Als gute Annäherung kann angenommen werden, daß der den Wagenboden bildende Trägerrost der Verdrehung des Wagenkastens in vollem Maße folgt. Unter dem Einfluß dieser Verdrehung treten aber in den einzelnen Elementen des Bodens beachtenswerte Spannungen auf.

Die nachstehend abgeleiteten Zusammenhänge können nicht nur auf Wagen mit weichem, sondern auch auf solche mit steifem Kasten angewandt werden. In solchen Fällen ist natürlich nicht der Wert der Drehbelastung sondern der des Verdrehwinkels gegeben, was jedoch in der Rechnung keinen nennenswerten Unterschied macht.

Da die Anzahl der Verschiebungsmöglichkeiten der Knotenpunkte des Systems den Grad seiner Unbestimmtheit übertrifft, ist es vorteilhaft, die Lösung nach dem Kräfteverfahren durchzuführen.

Würde man üblicherweise [6] voraussetzen, daß die sich kreuzenden Trägerelemente keine Verdrehungen auf einander übertragen, so wäre das System gegen Verdrehung (Stützpunktbewegung) labil. In Wirklichkeit ist dies jedoch nicht der Fall, so daß man die von den einzelnen Elementen auf einander übertragenen Drehbelastungen in der Berechnung nicht außer acht lassen kann.

Genaue Lösung

Der Arbeitsaufwand der Lösung nach dem Kräfteverfahren hängt sehr stark von der geeigneten Wahl des Stammträgers ab. Die Überdeckung der durch die einzelnen Unbekannten erzeugten Belastungen ist dann am kleinsten, wenn das System mit Hilfe von Schnitten und Gelenken in Glieder geteilt wird. (Dieses Verfahren hatte ERZ auf Fahrgestelle angewandt.)

Abb. 4. zeigt den auf diese Weise ausgebildeten Stammträger des Systems. Bei den Schnitten in der Seitenwand muß ein unbekanntes Biegemoment, bei

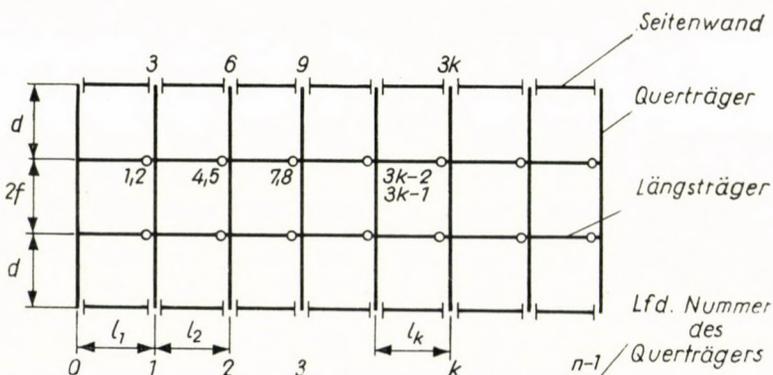


Abb. 4. Stammträger auf Verdrehung bei einem Autobus mit Fahrgestell oder mit Bodenrahmen

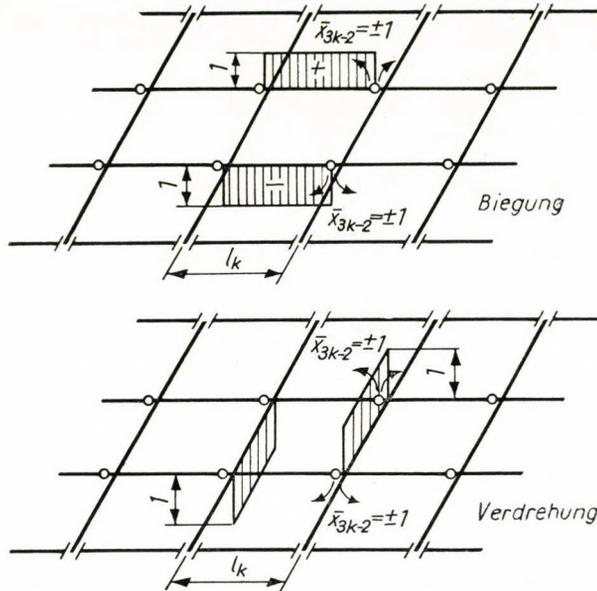


Abb. 5. Durch eine unbekannte Einheitskraft X_{3k-2} hervorgerufene Biege- und Verdrehmomente am Stammträger

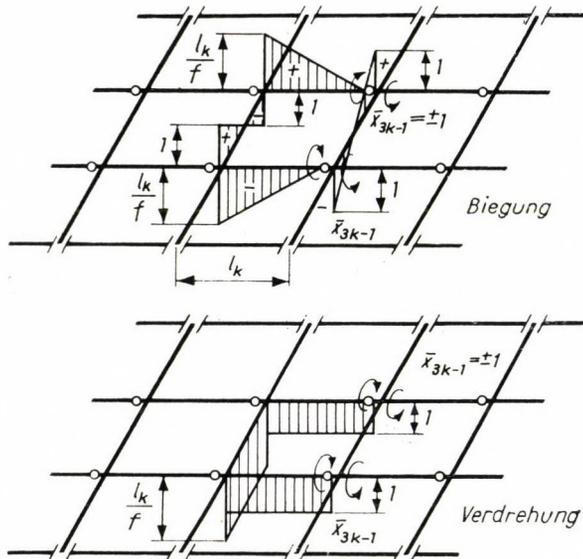


Abb. 6. Durch die unbekannte Einheitskraft X_{3k-1} hervorgerufene Biege- und Verdrehmomente am Stammträger

den Gelenken der Längsträger neben den Querträgern ein unbekanntes Biege- und Torsionsmoment angebracht werden. Auf den Abb. 5 bis 7 sind die am Stammträger durch die den einzelnen Unbekannten entsprechenden

Einheitskräfte hervorgerufenen inneren Kräfte, auf Abb. 8 die durch die äußere Belastung entstehenden inneren Kräfte angegeben. Die Anzahl aller inneren Kräfte ist im Falle von n Querträgern $3n - 4$, vorausgesetzt, daß die einzelnen Trägerelemente nirgends unterbrochen sind.

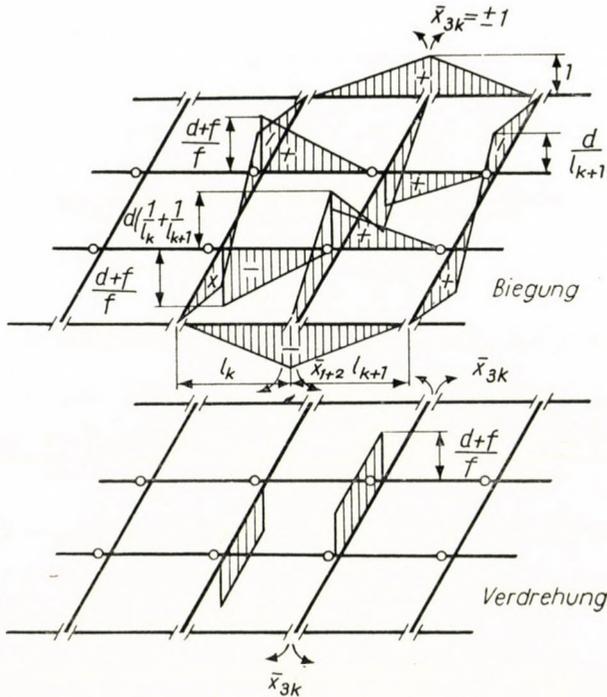


Abb. 7. Durch eine unbekannte Einheitskraft X_{3k} hervorgerufene Biege- und Verdrehmomente am Stammträger

Die Einheitsfaktoren erhält man, wie bekannt, mit Hilfe der Ausdrücke:

$$\delta_{ik} = \sum_{(t)} \int_{(s)} \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{JE} ds + \sum_{(t)} \int_{(s)} \frac{\bar{T}_i \bar{T}_k}{GI_t} ds + \sum_{(t)} \int_{(s)} \beta \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_k}{GF} ds \quad (1)$$

Die Integration muß sich natürlich auf alle Trägerabschnitte erstrecken, wo der Wert der inneren Kräfte nicht gleich Null ist. Auf ähnliche Weise können auch die Lastfaktoren berechnet werden:

$$\delta_{i0} = \sum_{(t)} \int_{(s)} \frac{M_i M_0}{IE} ds + \sum_{(t)} \int_{(s)} \frac{\bar{I}_i I_0}{GI_t} ds + \sum_{(t)} \int_{(s)} \beta \frac{\bar{Q}_i Q_0}{GF} ds \quad (2)$$

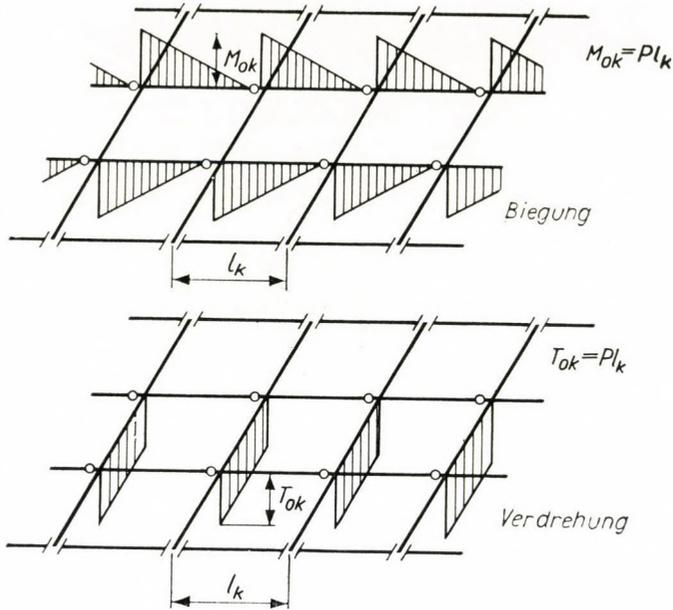


Abb. 8. Durch die äußere Belastung hervorgerufene Biege- und Verdrehmomente am Stammträger

Die an den Schnitten auftretenden unbekannt inneren Kräfte können aus dem Gleichungssystem berechnet werden, das das Beisammenbleiben der Schnitthälften ausdrückt:

$$\sum_{k=1}^{3n-4} \delta_{ik} X_k + \delta_{i0} = 0 \quad (3)$$

wo $i = 1, 2, 3, \dots, 3n - 4$.

Die resultierende Belastung des Trägersystems kann durch Superposition berechnet werden:

$$M = M_0 + \sum_{i=1}^{3n-4} X_i \bar{M}_i$$

$$T = T_0 + \sum_{i=1}^{3n-4} X_i \bar{T}_i \quad (4)$$

Das Schema des Gleichungssystems (3) zeigt Abb. 9. In diesem Schema entsprechen die (senkrechten) Kolonnen den unbekannt inneren Kräften und die (waagerechten) Reihen den Gleichungen. Die letzte, frei stehende Kolonne enthält die Lastfaktoren. Die den schraffierten Feldern des Schemas entsprechenden Koeffizienten δ_{ik} haben einen von Null abweichenden Wert, während die den leeren Feldern entsprechenden Koeffizienten gleich Null sind. Bei der Berechnung der den einfach schraffierten Feldern entsprechenden Koeffizien-

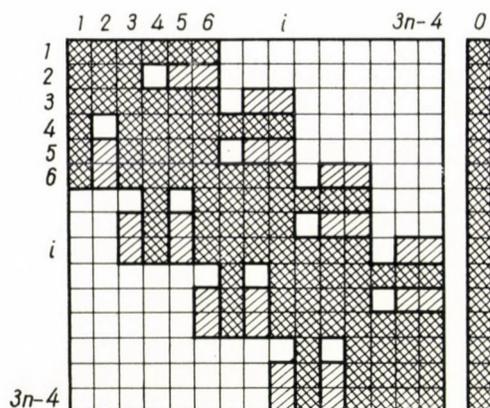


Abb. 9. Schema des genauen linearen Gleichungssystems für Verdrehung. (Die den doppelt schraffierten Feldern entsprechenden Koeffizienten stammen aus Biegung und Verdrehung, die den einmal schraffierten Feldern entsprechenden jedoch nur aus Biegung)

ten ist der Wert des sich aus dem Torsionsmoment ergebenden Integrals gleich Null.

Wie aus dem Schema ersichtlich ist, können in einer Gleichung höchstens 12 Unbekannte vorkommen. Trotzdem ist die genaue Lösung für die Zwecke der praktischen Rechnung wegen ihres großen Arbeitsaufwandes nicht geeignet.

Näherungsverfahren

Die Biegesteifigkeit der Trägerelemente der in der Praxis verwendeten Autobuskarosserien übertrifft ihre Verdrehsteifigkeit im allgemeinen um mindestens ein bis zwei Größenordnungen. (Im vorliegenden Falle genügt die Berechnung der Verdrehsteifigkeit auf freie Verdrehung nicht, man muß vielmehr das Anwachsen der Verdrehsteifigkeit infolge Behinderung der Querschnittsverwölbung mit in Betracht ziehen. Auf Grund der Versuche von ERZ mit Fahrgestellen kann man an den Enden der einzelnen Trägerabschnitte mit voller Einspannung rechnen. Die auf diese Weise berechnete Verdrehsteifigkeit ist bei Fahrgestellen im allgemeinen um eine Größenordnung größer als die Saint-Venantsche Verdrehsteifigkeit.)

Dieser Umstand kann für ein Näherungsverfahren ausgenützt werden. Auf Grund der Steifigkeitsverhältnisse können die Deformationen infolge Biegung der Träger neben den durch die Verdrehung hervorgerufenen vernachlässigt werden, d. h. sämtliche Trägerelemente können mit guter Näherung als unendlich steif gegen Biegung betrachtet werden. In diesem Falle verteilt sich die gesamte Torsionslast auf die einzelnen Trägerelemente im Verhältnis ihrer Verdrehsteifigkeit. Diese Annahme, die ERZ auf Fahrgestelle angewendet hat, kann auch auf Wagen in Verbundbauweise oder mit Bodenrahmen ausgebreitet

werden. Da diese Bauarten bei derselben Verdrehsteifigkeit sogar eine größere Biegesteifigkeit haben, ist die Näherungsannahme hier noch mehr begründet.

Das in den einzelnen Trägerelementen entstehende Verdrehmoment kann aus der nachstehenden Formel leicht berechnet werden:

$$T_i = \frac{P L' I_{ti}}{\sum_{k=0}^{k=n-1} I_{tk} + \frac{1}{f} \sum_{k=1}^{k=n-1} (I'_{tk} I_k)} \quad (5)$$

Hierdurch kann ein Drittel der statisch unbestimmten Größen bestimmt werden, da der Wert des in den Längsträgern abschnittsweise auftretenden Verdrehmomentes unmittelbar den Wert der Unbekannten X_{3k-1} ergibt. Aus der Größe des von den Querträgern aufgenommenen Torsionsmomentes können aber die Unbekannten von Typ X_{3k-2} und X_{3k} einzeln nicht bestimmt werden; man erhält nur ihren gekoppelten Wert:

$$Y_k = X_{3k-2} + X_{3k} \frac{d+f}{f} = X_{3k-2} + \gamma X_{3k} \quad (6)$$

(Physikalisch ist dies vollkommen verständlich: bei einer gegen Biegung unendlich steifen Konstruktion kann die Verteilung des Verdrehmomentes auf die Seitenwand und den Längsträger nicht berechnet werden.)

Es bleibt also die Frage, wie nach der Bestimmung von $Y_1, Y_2 \dots$ die in ihnen enthaltenen Unbekannten X getrennt werden können. Zu diesem Zweck betrachten wir die Längselemente wieder als elastisch gegenüber Biegungen, während die Querträger auch weiterhin als biegeungssteif gelten sollen. (Die eingehendere Untersuchung der Steifigkeitsverhältnisse ergibt, daß die Querträger im Vergleich zu den Längsträgern und den Seitenwänden auf Biegung als unendlich steif betrachtet werden können [5].)

Unter dem Einfluß der Torsion verdrehen sich die Querträger um die Symmetrieachse des Wagens, erfahren jedoch selbst keine Deformation. Dies bedeutet, daß zwischen der Verschiebung des Längsträgers und der Seitenwand in der Achse der einzelnen Querträger der nachstehende Zusammenhang besteht:

$$e''_k = e'_k \gamma \quad (7)$$

Diese Formänderungen sind Folgen des auf die Seitenwand bzw. den Längsträger wirkenden Biegemomentes, es ist also

$$e''_k = \frac{1}{E} \sum_t \int \frac{M'' \bar{M}_k}{I''} ds \quad \text{und} \quad e'_k = \frac{1}{E} \sum_t \int \frac{M' \bar{M}_k}{I'} ds \quad (8)$$

und hiermit ist

$$\sum_t \int_k \frac{M'' \bar{M}_k}{I''} ds = \gamma \sum_t \int_k \frac{M' \bar{M}_k}{I'} ds \quad (7')$$

Im Falle von n Querträgern kann man $2(n - 2)$ Verschiebungen aufschreiben. Setzen wir diese auf Grund des geometrischen Zusammenhanges (7) paarweise einander gleich, so können schließlich $n - 2$ Formänderungsgleichungen aufgeschrieben werden. Die Zahl der Unbekannten ist jedoch $2(n - 2)$. Die fehlenden Zusammenhänge können wir mit Hilfe der Glg. (6) unter Berücksichtigung der aus Glg. (5) bestimmten Werte Y_1, Y_2, Y_3 und X ermitteln.

Betrachten wir nun, wie sich die Werte von M' und M'' unter Berücksichtigung der Werte X und Y gestalten. Im Falle der Seitenwand ist

$$M'' = X_3 + X_6 + X_9 + \dots + X_{3k} + \dots = \sum_{k=1}^{n-1} X_{3k} \quad (9)$$

wo sich der Wert von X_{3k} längs der Seitenwand vom einen Querträger bis zum nächsten natürlich linear ändert (Abb. 7). Wenn man dies bei den einzelnen Querträgern untersucht, so erhält man aus dem Stammträger:

$$\begin{aligned} M''(0) &= 0 \\ M''(1) &= X_3 \\ M''(2) &= X_6 \\ &\vdots \\ M''(k) &= X_{3k} \end{aligned} \quad (10)$$

Im Falle des Längsträgers ist die Bestimmung des Momentes schon komplizierter. Glg. (4) ist jedoch auch hier gültig, und auf Grund dessen erhält man

$$M' = M_0 + X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 + X_3 \bar{M}_3 + X_4 \bar{M}_4 + \dots \quad (11)$$

Zieht man an Hand von Abb. 5 in Betracht, daß innerhalb des Abschnittes l_k des Längsträgers

$$\bar{M}_{3k-2} \equiv 1$$

und außerhalb des k -ten Abschnitts

$$\bar{M}_{3k-2} \equiv 0$$

so gilt

$$M' = M_0 + X_1 + X_2 \bar{M}_2 + X_3 \bar{M}_3 + X_4 + \dots \quad (11')$$

Die in der Gleichung vorkommenden Werte $X_2, X_5, \dots, X_{3k-1}$ sind bereits mit Glg. (5) bestimmt worden. Wenn man ferner Glg. (6) berücksichtigt, kann Gleichung (11) weiter umgestaltet werden:

$$M' = M_0 + Y_1 - \gamma X_3 + X_3 \bar{M}_3 + Y_2 - \gamma X_6 + \bar{M}_6 + \dots + Y_k - \gamma X_{3k} + X_{3k} \bar{M}_{3k} + X_2 \bar{M}_2 + X_5 \bar{M}_5 + \dots + X_{3k-1} \bar{M}_{3k-1} \quad (11'')$$

Hebt man den k -ten Abschnitt (der sich zwischen den Querträgern $k-1$ und k befindet) heraus, so erhält man für die Momentenwerte das Folgende:

Am Anfang des Abschnittes ist (siehe die Abb. 5 bis 8):

$$M'_0(k-1)_v = M_{0k} + Y_k + X_{3k-1} \frac{l_k}{f} - X_{3(k-1)} \gamma \quad (12)$$

Zur Erleichterung der Übersicht führen wir für den bereits bestimmten Wert X_{3k-1} die Bezeichnung

$$X_{3k-1} \equiv C_k$$

ein, womit

$$M'(k-1)_v = M_{0k} + Y_k + C_k \frac{l_k}{f} - \gamma X_{3(k-1)} \quad (12')$$

Am Ende des Abschnittes gilt

$$M'(k)_e = X_{3k-2} = Y_k - \gamma Y_{3k} \quad (13)$$

Wenn wir voraussetzen, daß die Durchbiegung auf die die rechts und links benachbarten Querträger verbindende Gerade bezogen ist, besitzt M_k nur zwischen je zwei Querträgern einen Wert (Abb. 10) und die Gln (8) können weiterentwickelt werden:

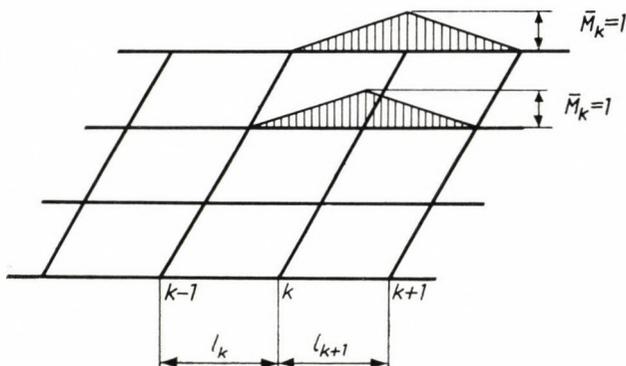


Abb. 10. Einheitsmoment an Längsträger und Seitenwand

$$e_k'' = \frac{1}{E} \sum_{k-1}^{k+1} \int_{(s)} \frac{M'' \bar{M}_k}{I''} ds = \frac{1}{E} \left(\frac{1}{I_k''} \int_{(l_k)} M'' \bar{M}_k ds + \frac{1}{I_{k+1}''} \int_{(l_{k+1})} M'' \bar{M}_k ds \right) \quad (8')$$

$$e_k' = \frac{1}{E} \sum_{k-1}^{k+1} \int_{(s)} \frac{M' \bar{M}_k}{I'} ds = \frac{1}{E} \left(\frac{1}{I_k'} \int_{(l_k)} M' \bar{M}_k ds + \frac{1}{I_{k+1}'} \int_{(l_{k+1})} M' \bar{M}_k ds \right) \quad (8'')$$

Mit den für M' und M'' abgeleiteten Zusammenhängen (10), (12) und (13) kann nach Integrierung geschrieben werden:

$$\left\{ \frac{l_k}{I_k'} [2M'(k)_e + M'(k-1)_v] + \frac{l_{k+1}}{I_{k+1}'} [2M'(k)_v + M'(k+1)_e] \right\} \gamma = \\ = \frac{l_k}{I_k''} [2M''(k) + M''(k-1)] + \frac{l_{k+1}}{I_{k+1}''} [2M''(k) + M''(k+1)] \quad (14)$$

Nach Einsetzen der Werte von X_k , X_{3k} , usw. erhält man

$$\left\{ \frac{l_k}{I_k'} \left[3Y_k + M_{0k} + C_k \frac{l_k}{f} - X_{3(k-1)} \gamma - 2X_{3k} \gamma \right] + \right. \\ \left. + \frac{l_{k+1}}{I_{k+1}'} \left[3Y_{k+1} + 2M_{0k+1} + C_{k+1} \frac{2l_{k+1}}{f} - 2X_{3k} \gamma - X_{3(k+1)} \gamma \right] \right\} \gamma = \quad (14') \\ = \frac{l_k}{I_k''} [2X_{3k} + X_{3(k-1)}] + \frac{l_{k+1}}{I_{k+1}''} [2X_{3k} + X_{3(k+1)}]$$

Durch Ordnen der Gleichung erhält man das folgende Endergebnis:

$$X_{3(k-1)} l_k \left[\frac{1}{I_k''} + \frac{\gamma^2}{I_k'} \right] + 2X_{3k} \left[l_k \left(\frac{1}{I_k''} + \frac{\gamma^2}{I_k'} \right) + \right. \\ \left. + l_{k+1} \left(\frac{1}{I_{k+1}''} + \frac{\gamma^2}{I_{k+1}'} \right) \right] + X_{3(k+1)} l_{k+1} \left[\frac{1}{I_{k+1}''} + \frac{\gamma^2}{I_{k+1}'} \right] = \quad (15) \\ = \gamma \left[\frac{l_k}{I_k''} \left(3Y_k + M_{0k} + C_k \frac{l_k}{f} \right) + \frac{l_{k+1}}{I_{k+1}''} \left(3Y_{k+1} + 2M_{0k+1} + C_{k+1} \frac{2l_{k+1}}{f} \right) \right]$$

Wenn für jedes k : $I_k'' = \eta_k I''$ und $I_k' = \eta_k I'$ ist (d. h. wenn das Verhältnis der Trägheitsmomente von Seitenwand und Querträger am ganzen Wagen entlang konstant ist), so gestaltet sich das Gleichungssystem wie folgt:

$$\left[X_{3(k-1)} \frac{l_k}{\eta_k} + 2X_{3k} \left(\frac{l_k}{\eta_k} + \frac{l_{k+1}}{\eta_{k+1}} \right) + X_{3(k+1)} \frac{l_{k+1}}{\eta_{k+1}} \right] \left(\frac{1}{I''} + \frac{\gamma^2}{I'} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\gamma}{I'} \left[\frac{l_k}{\eta_k} \left(3Y_k + M_{0k} + C_k \frac{l_k}{f} \right) + \right. \\
 &\left. + \frac{l_{k+1}}{\eta_{k+1}} \left(3Y_{k+1} + 2M_{0k+1} + C_{k+1} \frac{2l_{k+1}}{f} \right) \right] \quad (15')
 \end{aligned}$$

Die erhaltene Gleichung bzw. das Gleichungssystem (15) enthält nur mehr Unbekannte von Typ X_{3k} . Das Gleichungssystem läßt sich sehr einfach lösen, da in den einzelnen Gleichungen höchstens drei Unbekannte vorkommen, wie auch aus dem Schema des Gleichungssystems Abb. 11 ersichtlich ist. Wenn X_{3k} bekannt ist, kann X_{3k-2} schon aus Glg. (6) berechnet werden.

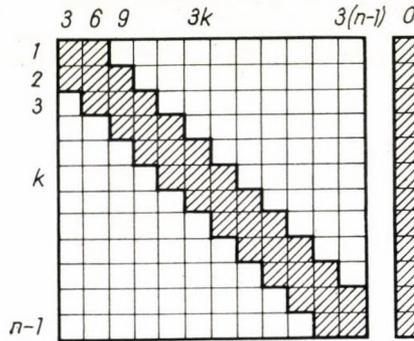


Abb. 11. Schema des Gleichungssystems zur Verteilung des Biegemoments zwischen Seitenwand und Längsträger

Schlusfolgerungen

Die genaue Untersuchung von Autobussen mit Bodenrahmen oder mit Fahrgestell auf Verdrehung ist wegen ihrer Kompliziertheit in der Praxis nicht anwendbar. Da die Verdrehsteifigkeit der einzelnen Trägerelemente um eine (oder mehrere) Größenordnungen kleiner ist als ihre Biegesteifigkeit, kann die bereits von mehreren Seiten abgeleitete Formel für die Dimensionierung des Fahrgestells auch bei solchen Autobussen gut gebraucht werden. Eine besondere Aufgabe stellt jedoch die Berechnung der auf die Seitenwände und auf die Längsträger wirkenden Biegemomente dar. Für die Trennung der beiden Momente wurde ein einfaches (pro Gleichung höchstens drei Unbekannte enthaltendes), dem Clapeyronschen ähnliches Gleichungssystem abgeleitet.

SCHRIFTTUM

1. BRŽOSKA, L.: Grundfragen der Statik selbsttragender Wagenkästen, Archiwum budowy maszyn. Band II (1955) Heft 4. p. 321–358 und Band III (1956) Heft 1, p. 3–33. Warszawa (Polnisch).
2. OSCHNOKOW, W. A.: Theoretische und experimentelle Untersuchung der Festigkeit von Fahrgestellen. Kandidaten-Dissertation. Moskau, 1954 (Russisch).

3. BOTSCHAROW, N. F.: Festigkeitsberechnung der Fahrgestelle von Lastkraftwagen. Kandidaten-Dissertation. Moskau, 1954 (Russisch).
4. ERZ, K.: Über die durch Unebenheiten der Fahrbahn hervorgerufene Verdrehung von Straßenfahrzeugen. ATZ, Band 59 (1957), p. 89–96, 163–170, 345–347 und 371–375. Dissertation an der Technischen Hochschule München, 1956
5. MICHELBERGER, P.: Das Kräftespiel in Autobuskarosserien, Kandidaten-Dissertation. Budapest, 1956 (Ungarisch).
6. PALOTÁS, L.: Die Berechnung von Trägerrosten. Közlekedési Kiadó, Budapest, 1953 (Ungarisch).

Zahlenbeispiel

Auf Abb. 12 ist das Schema des Tragsystems eines Autobusses und die auf dieses System wirkende Torsionslast zu sehen. Die mit dem Näherungsverfahren berechneten Werte der Unbekannten können mit den genauen Ergebnissen in der Tabelle 1 verglichen werden. Die annähernden und die genauen Werte der auf die Längsträger wirkenden Biege- und Torsionsmomente sind auf Bild 13 dargestellt.

Tabelle 1

i	X_i	
	annähernd	genau
1	+ 0,6066	+ 0,5946
2	+ 0,4853	+ 0,4653
3	+ 0,1211	+ 0,0901
4	+ 0,6300	+ 0,6300
5	+ 0,4853	+ 0,4753
6	+ 0,4777	+ 0,3987
7	+ 0,6100	+ 0,6160
8	+ 0,4853	+ 0,5053
9	+ 0,3333	+ 0,2480
10	+ 0,5150	+ 0,5000
11	+ 0,4853	+ 0,5053
12	+ 0,2318	+ 0,1738
13	+ 0,4700	+ 0,4460
14	+ 0,4853	+ 0,4973
15	+ 0,1135	+ 0,0745
16	+ 0,6460	+ 0,6460
17	+ 0,4853	+ 0,5113
18	– 0,0785	– 0,1085
Relaxationsrest	$R_{\max} = 0,030$ $\Sigma R \approx 0,15$	$R_{\max} = 0,006$ $\Sigma R \approx 0,04$

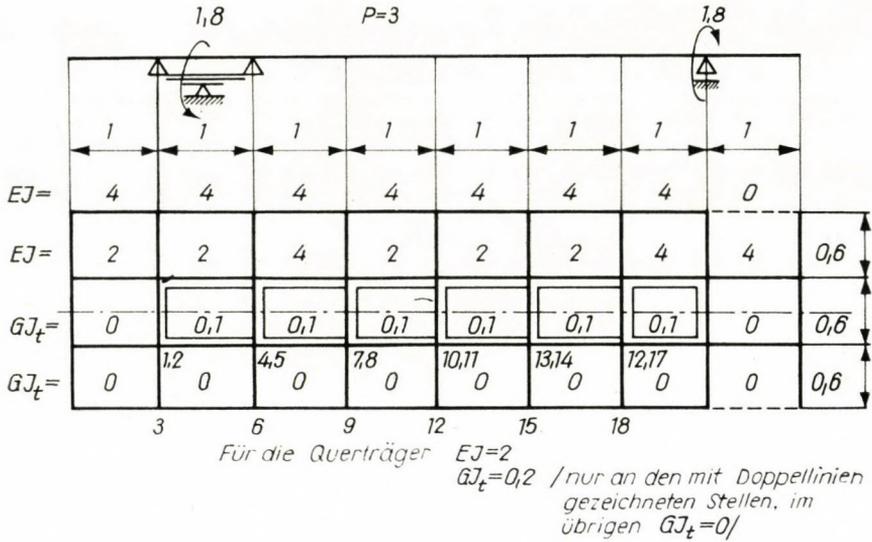


Abb. 12. Grundsätzlicher Aufbau eines Autobusses mit Bodenrahmen

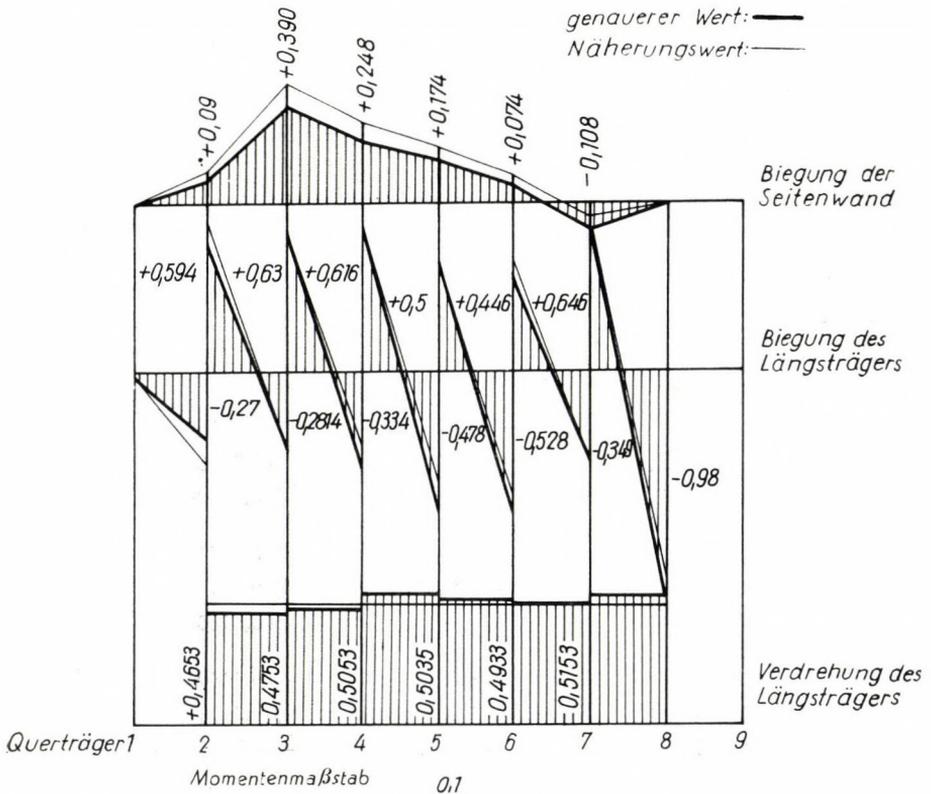


Abb. 13. Belastung des Längsträgers und der Seitenwände nach der Näherungs- und der genauen Rechnung

QUASISYMMETRISCHE DIMENSIONIERUNG ASYMMETRISCHER (FAHRZEUG-) KONSTRUKTIONEN

Dr. P. MICHELBERGER

KAND. DER TECHN. WISS., TECHNISCHE UNIVERSITÄT, BUDAPEST

Die Wagenkästen der Fahrzeuge sind meistens symmetrisch. Eisenbahnwagen haben im allgemeinen drei (aber mindestens zwei) Symmetrieachsen. Demgegenüber findet man an Autobuskarosserien streng genommen nicht einmal eine Symmetrieachse, obwohl sie auf den ersten Blick im großen auf ihre Längsachse symmetrisch zu sein scheinen. Die genaue Symmetrie wird — neben einer vernachlässigbaren, durch kleinere Einzelheiten verursachten Asym-

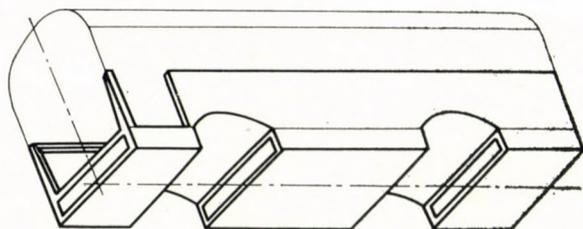


Bild 1. Schema eines infolge der Tür asymmetrischen Autobusrahmens

metrie — durch die einseitige Anordnung der Türen gestört (Bild 1). Die Auswirkung der durch die Türöffnungen hervorgerufenen Asymmetrie auf das Kräftespiel kann nicht außer acht gelassen werden. Die Türöffnungen stören nach unseren Untersuchungen [1] das Kräftespiel der sonst symmetrischen Konstruktion in bedeutendem Maße. Diese Störung ist natürlich in der Umgebung der Tür am stärksten, wenn man sich von der Tür entfernt, klingt die Störwirkung ab.

Trotzdem das Kräftespiel einer Konstruktion mit gestörter Symmetrie wesentlich von dem der symmetrischen Konstruktion abweichen kann, vermeiden die Verfasser wegen der Schwierigkeiten der Berechnung bewußt die genaue Untersuchung asymmetrischer Konstruktionen. So hat z. B. BRŽOSKA [2] das Kräftespiel der selbsttragenden Omnibuskarosserien sehr eingehend untersucht, den Einfluß der Türen hat er jedoch nicht in Betracht gezogen. Dieser Standpunkt ist verständlich, da die Berechnung von Fahrzeugkonstruktionen auch bei vorliegender Symmetrie eine ziemlich komplizierte Aufgabe ist.

1. Der Begriff der quasisymmetrischen Konstruktion

Solche Tragwerke, deren Aufbau im Grunde genommen symmetrisch ist, deren Symmetrie aber an einigen Stellen dadurch gestört ist, daß die Steifigkeit oder die geometrischen Abmessungen des Trägers von der Symmetrie abweichen, nennen wir quasisymmetrische Träger. Das Trägerelement, das die Asymmetrie hervorruft (das wir in Gedanken vom symmetrischen Träger losrennen) heiße Störträger; den Platz des Störträgers nennen wir im folgenden »Störabschnitt«. Die Steifigkeit des Störträgers sei entlang seiner Länge — in jedem Punkt — nur um einen konstanten Proportionalitätsfaktor von der des ungestörten (symmetrischen) Trägers verschieden. Dieser Proportionalitätsfaktor darf übrigens von -1 bis $+\infty$ einen beliebigen festgelegten Wert annehmen. Das im folgenden beschriebene Verfahren läßt sich gemäß dem Zahlenbeispiel auch in solchen Fällen mit guter Näherung anwenden, in denen sich der Proportionalitätsfaktor den Störabschnitt entlang mäßig ändert.

Die Reaktionskräfte der auf die Enden des Störträgers wirkenden Zwangskräfte — die auf den ungestörten Träger wirken — werden Störkräfte und das Gleichungssystem, das zu ihrer Bestimmung dient, System der Strgleichungen genannt.

Die Berechnung des Krftespiels der quasisymmetrischen Konstruktionen läßt sich auf die Untersuchung einer ungestörten (symmetrischen) Konstruktion und auf die Lösung eines nicht zu viel Unbekannte enthaltenden Störgleichungssystems zurückführen.

2. Das Grundprinzip der Untersuchung einer quasisymmetrischen Konstruktion Anwendung eines statisch unbestimmten Grundsystems

Das Verfahren läßt sich am besten an einem einfachen Beispiel erklären (Bild 2). Die Asymmetrie der Konstruktion sei im gezeichneten Fall durch ein elastisches Auflager verursacht.

Zunächst machen wir unsere Konstruktion durch Weglassen des elastischen Auflagers (des Störträgers) symmetrisch und bestimmen die inneren Kräfte des so gewonnenen symmetrischen Trägers (Bild 3a). Die Senkung des

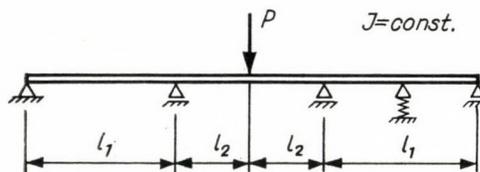


Bild. 2. Durch elastische Auflagerung asymmetrischer Träger

Trägers unter deren Wirkung beträgt in der Wirkungslinie des elastischen Auflagers δ_0 (Bild 3b). Sodann entfernen wir die äußeren Lasten und lassen an der Stelle des elastischen Auflagers eine vertikale Einheitskraft auf den Träger und auf das Auflager wirken. Die Verschiebung des Trägers in der Wirkungslinie

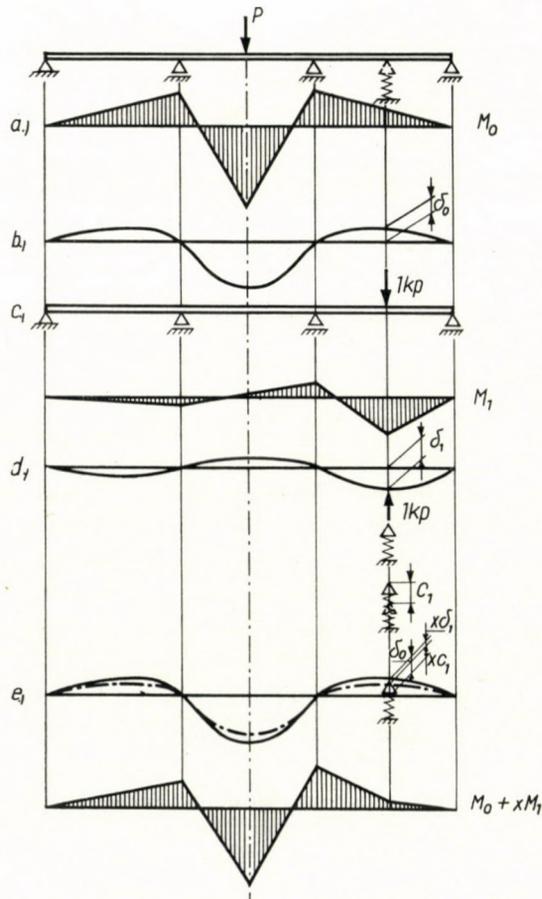


Bild 3. Gedankengang der Berechnung einer quasisymmetrischen Konstruktion

der Einheitslast sei δ_1 , die des elastischen Auflagers dagegen C_1 . Die Verschiebungen sind aus Bild 4 ersichtlich.

Beim ursprünglichen Träger trennt sich der Balken nicht von seiner elastischen Auflagerung, sondern nimmt unter Wirkung einer unbekannt Zwangskraft X die in Bild 3e dargestellte Lage ein. Anhand von Bild 4 ist offensichtlich, daß

$$X \delta_1 + C_1 = \delta_0 \tag{1}$$

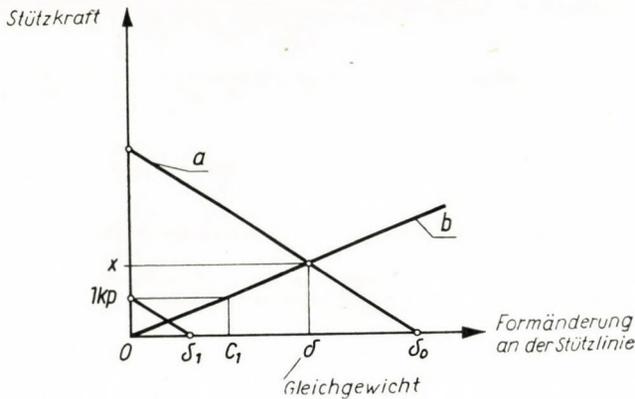


Bild 4. Gemeinsames Diagramm der Verformung von Träger und elastischem Auflager
 a — Verformung des Balkens b — Verformung der Feder

Die wirkliche Belastung kann man auf Grund des Superpositionsprinzips errechnen; sie ergibt sich zu

$$M = M_0 + XM_1 \quad (2)$$

Zur Lösung statisch unbestimmter Aufgaben mit der Kräfte­methode wurde auch bisher schon in gewissen Fällen ein statisch unbestimmtes Grundsystem verwendet. Den Grundgedanken dieser Lösung können wir auch auf quasisymmetrische Konstruktionen erweitern, in denen die Asymmetrie durch die Abweichung der Steifigkeit irgendeines Trägerabschnittes (z. B. des Trägheitsmoments bei Balkenträgern, des Elastizitätsmoduls, des Stabquerschnittes bei Fachwerken, der Blechstärke bei Schalen usw.) hervorgerufen wird.

Bei quasisymmetrischen Konstruktionen müssen wir zwei Belastungs­fälle untersuchen:

a) Auf den Störabschnitt wirken keine äußeren Lasten (konzentrierte oder verteilte Kräfte). In diesem Falle hat der Störträger keine eigene Belastung.

b) Auf den Störabschnitt wirkt eine äußere Belastung; auch der Stör­träger hat eine eigene Belastung.

3. Untersuchung der Konstruktion mit unbelastetem Störträger

Den quasisymmetrischen Träger trennen wir in Gedanken — ähnlich dem in Abschnitt 2 gezeigten Beispiel — in einen symmetrischen Träger und einen Störträger (Bild 5). Die Aufgabe besteht auch im vorliegenden Fall darin, die Deformationen der gedanklich getrennten Träger völlig zusammenzustimmen. Genügte es aber im 2. Abschnitt, die Deformationen nur an einem Berüh-

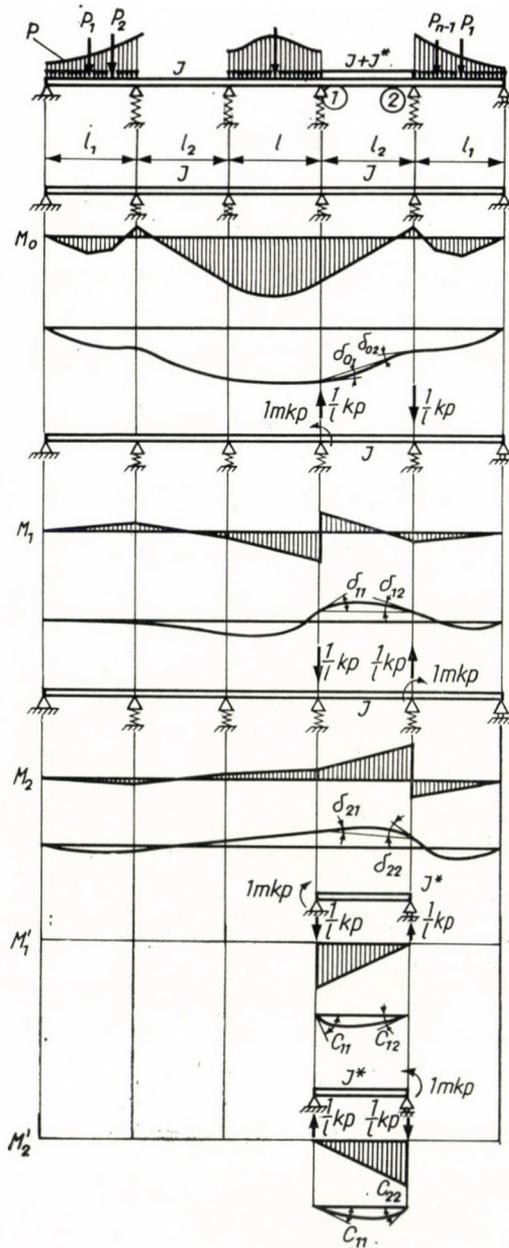


Bild 5. Berechnung einer asymmetrischen Konstruktion mit Störträger

rungspunkt zustimmen, so muß man jetzt längs der ganzen Berührungslinie (der vollen Länge der Störung) die gleiche Verformung sowohl an dem symmetrischen, als auch an dem Störträger entstehen lassen.

Ist das Verhältnis ihrer Steifigkeiten längs des Störabschnittes konstant, genügt es dem symmetrischen und dem störenden Träger nur an den Endpunkten des Abschnittes die gleiche Deformation aufzuzwängen; an sämtlichen Zwischenpunkten decken sich dann nämlich die beiden Träger zwangsläufig.

Zunächst bestimmen wir die inneren Kräfte M_0 des symmetrischen Trägers und die relativen Deformationen δ_{01} , δ_{02} , die auf deren Wirkung an den Endpunkten des Störabschnittes auftreten. Ferner bestimmen wir die infolge der an den Endpunkten des Störabschnittes wirkenden Einheitsbelastung entstandenen inneren Kräfte M_1 und M_2 , sowie die relativen Verdrehungen δ_{11} , δ_{12} , bzw. δ_{21} und δ_{22} , die durch ihre Wirkung zustandekommen.

Wir errechnen die Deformationen C_{11} , C_{12} , bzw. C_{21} und C_{22} , die die an den Endpunkten des Störträgers wirkenden Einheitsmomente M'_1 und M'_2 hervorrufen. Die Reaktionskräfte der auf den Störträger wirkenden Einheitsbelastungen werden vom symmetrischen Träger aufgenommen. (Auf den ursprünglichen Träger bezogen sind die Störkräfte als innere Kräfte zu betrachten.)

Die völlige Deckung ergibt sich, ähnlich dem Zusammenhang (1), statt einer linearen Gleichung jetzt durch ein lineares Gleichungssystem, da man ja die Bewegung von zwei Punkten (1 und 2) aufeinander abstimmen muß:

$$\begin{aligned} X_1(\delta_{11} + C_{11}) + X_2(\delta_{12} + C_{12}) &= \delta_{01} \\ X_1(\delta_{21} + C_{21}) + X_2(\delta_{22} + C_{22}) &= \delta_{02} \end{aligned} \quad (3)$$

Selbstverständlich gilt der Vertauschungssatz von MAXWELL auch im vorliegenden Falle, somit ist

$$\delta_{12} = \delta_{21} \quad \text{und} \quad C_{12} = C_{21}$$

Die endgültige Beanspruchung des Trägers beträgt

$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_1 M'_1 + X_2 M'_2 \quad (4)$$

4. Wirkung der eigenen Belastung des Störträgers

Wirkt auf den Störabschnitt eine äußere Belastung, so ergibt die laut Gleichung (3) zusammengestimmte Deformation der Endpunkte im allgemeinen keine gleiche Verformung der zwischenliegenden Punkte des Abschnittes bei dem symmetrischen und dem störenden Träger.

Man kann eine völlige Deckung auch in solchen Fällen erreichen, wenn man die auf den Störabschnitt wirkende Belastung zwischen dem symmetrischen und dem störenden Träger im Verhältnis ihrer Steifigkeiten verteilt. Natur-

lich werden die Reaktionskräfte der auf den Störträger wirkenden Belastung M'_0 auch im vorliegenden Falle vom symmetrischen Träger aufgenommen. Wenn man die Verteilung der Belastung am statisch unbestimmten Grundsystem durchgeführt hat, müssen beide (getrennte) Träger in der vollen Länge des Störabschnittes unter ihrer eigenen Belastung die gleiche Verformung erleiden.

Wir können die an den Endpunkten des Störabschnittes wirkende, durch die statisch unbestimmten Größen verursachte Belastung bereits auf Grund des 3. Abschnittes bestimmen. Zur Berücksichtigung der eigenen Belastung müssen natürlich die Gleichungen (3) und (4) abgeändert werden:

$$\begin{aligned} X_1(\delta_{11} + C_{11}) + X_2(\delta_{12} + C_{12}) + C_{01} &= \delta_{01} \\ X_1(\delta_{2k} + C_{21}) + X_2(\delta_{22} + C_{22}) + C_{02} &= \delta_{02} \end{aligned} \quad (5)$$

worin C_{01} bzw. C_{02} die Deformation der Endpunkte des Störträgers unter Wirkung der äußeren Belastung ist. Die endgültige Beanspruchung des Trägers ergibt sich zu

$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + M'_0 + X_1 M'_1 + X_2 M'_2 \quad (6)$$

Es ist zu bemerken, daß bei Fahrzeugen die eigene Belastung im allgemeinen als sekundäre Wirkung betrachtet werden kann, so daß in den meisten Fällen die Verwendung von Gleichung (3) und (4) völlig ausreicht.

5. Vermehrung der Anzahl der Störungen Zusammenhang mit der Perturbationsrechnung

Die Vermehrung der Anzahl der Störträger bedeutet prinzipiell kein neues Problem; in der Praxis kann dagegen der für die Lösung erforderliche Arbeitsaufwand erheblich zunehmen. Einerseits muß man das Kräftespiel des symmetrischen Trägers für die Einheitslast sämtlicher von den Endpunkten der Störabschnitte ausgehenden Kraftsysteme bestimmen; andererseits beeinflussen die einzelnen Störwirkungen einander mehr oder weniger. (Im allgemeinen enthält im Falle von k Störabschnitten das Störgleichungssystem $2k$ Unbekannte, die voneinander nicht unabhängig sind.)

Bis zu einem bestimmten Maße wird der Arbeitsaufwand dadurch vermindert, daß die Wirkung der Störung rasch abklingt, wenn man sich von der Störstelle entfernt. Falls daher mehrere Störabschnitte vorhanden sind, die weit genug voneinander liegen, üben die von den einzelnen Störstellen ausgehenden Perturbationskraftsysteme aufeinander keinen wesentlichen Einfluß aus. Die ausführlichere Untersuchung dieser Frage führt zu den klassi-

sehen Krafteinleitungs- und Kraftumleitungsaufgaben [3]; wir befassen uns deshalb hier nicht damit, und erwähnen nur eben, daß Kraftumleitungsaufgaben mit dem vorstehend beschriebenen Verfahren auch in allgemeineren Fällen gelöst werden können, als die Literatur behandelt. So kann man auf diese Weise Aussparungen behandeln, die in beliebigem Maße verstärkt sind, ja in gewissen Fällen kann man sich sogar eine negative Aussparung vorstellen, d. h. eine Stelle, die im Verhältnis zu ihrer regelmäßigen Umgebung nicht geschwächt, sondern verstärkt ist.

Zur Berechnung quasisymmetrischer Träger kann man die Methoden der Perturbationsrechnung (Differenzen- bzw. Differential-Gleichungen) natürlich ohne weiteres anwenden, wenn die Konstruktion selbst für diese Art geeignet ist. Dadurch wird hauptsächlich die Berechnung der Unbekannten erleichtert, die sich aus den Einheitskräften des Störsystems ergeben.

6. Der Arbeitsaufwand der Berechnung von quasisymmetrischen Konstruktionen

Mit den direkten Iterationsverfahren, wie z. B. dem Verfahren von CROSS befassen wir uns hier nicht, da diese bei Fahrzeugen (z. B. der versteiften Schalenbauart) nicht immer anwendbar sind. Wir bestimmen somit das Kräfte-spiel im allgemeinen durch Lösung eines linearen Gleichungssystems (nach der Kräfte sowohl als nach der Verschiebungs-Methode).

Die Arbeit der Lösung eines Gleichungssystems besteht aus zwei Teilen:

- a) Die Aufstellung des Gleichungssystems (Bestimmung der Einheits- und der Lastfaktoren);
- b) Die Lösung des Gleichungssystems.

Nehmen wir an, daß das Gleichungssystem der untersuchten quasisymmetrischen Konstruktion $2n$ unbestimmte Größen enthält; ferner, daß in jeder Gleichung des Systems sämtliche Unbekannten vorkommen. In Tabelle I verglichen wir die direkte (asymmetrische), die quasisymmetrische und die völlig symmetrische Lösung des Gleichungssystems hinsichtlich des Arbeitsaufwands miteinander. Die ersten zwei Spalten der Tabelle enthalten die Anzahl der Last- und Einheitsfaktoren, die dritte und vierte Spalte dagegen eine Zahl, die für den Arbeitsaufwand bei der Lösung des Gleichungssystems charakteristisch ist. Diese letzte Größe ist nur für die Lösung nach der bekannten Regel von CRAMER und dem Verfahren von GAUSS angegeben. Bei anderen Verfahren kommt man zu einem wohl abweichenden, aber grundsätzlich gleichen Ergebnis. In der letzten Spalte ist für den Fall eines Störträgers die für den Arbeitsaufwand der Lösung des Störgleichungssystems charakteristische Zahl angegeben. Aus den Angaben der Tabelle kann man feststellen, daß mit der Zunahme des Unbestimmtheitsgrades der Arbeitsaufwand der Berechnung schnell

Tabelle 1

	Anzahl der Einheits- u. Lastfaktoren		Charakteristische Zahl f. d. Arbeitsaufwand d. Gleichungssystems		Arbeitsaufwand d. Lösung d. Störgleichung
Asymmetrisch	$2n^2 + n$	$2n$	$(n + 1);$	$8n^3$	
Quasisymmetrisch . . .	$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + a$	$2n + b$	$\alpha 6(n + 1);$	$\alpha 6n^3$	3 (Cramer) 8 (Gauss)
symmetrisch	$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$	$2n$	$2(n + 1);$ Cramer	$2n^3$ Gauss	

a und b sind kleine ganze Zahlen

α — zwischen 0 und 1 fallender Faktor, der berücksichtigt, daß bei der wiederholten Lösung des Gleichungssystems ein Teil der Teilprodukte nicht nochmals errechnet werden muß

zunimmt, aber das quasisymmetrische Verfahren zugleich gegenüber der direkten Berechnung der asymmetrischen Konstruktion immer vorteilhafter wird. Wird die Zahl der Störträger vermehrt, so vermindert sich der Vorteil des Verfahrens, bzw. zeigt er sich nur bei sehr hochgradiger Unbestimmtheit. Im Falle vieler und nahe beieinander liegender Störträger kann der Arbeitsaufwand der quasisymmetrischen Konstruktion sogar soweit zunehmen, daß die direkte Lösung bereits einfacher wird.

Bei Omnibussen ist die Anzahl der Türen im allgemeinen nicht zu groß und sie liegen weit voneinander; deswegen ist das beschriebene Verfahren hier wesentlich einfacher, als die direkte Berechnung der asymmetrischen Konstruktion.

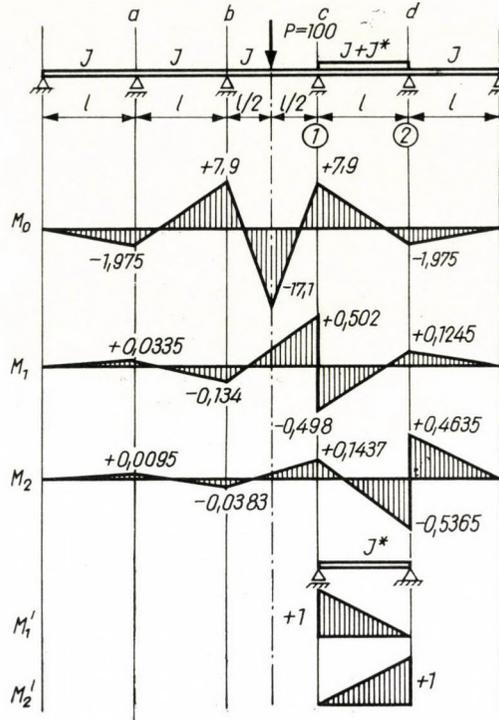
7. Zahlenbeispiel

Gegeben sei ein quasisymmetrischer Träger und seine Belastung nach Bild 6. Im Bild werden auch die im symmetrischen und dem Störträger entstehenden inneren Kräfte gezeigt. Aus dem Verlauf der inneren Kräfte können die Koeffizienten des Störgleichungssystems berechnet werden (Tabelle 2). Mit diesen aber läßt sich das Störgleichungssystem aufstellen und man erhält

$$X_1 \left(0,14525 + \frac{1}{6EJ^*} \right) + X_2 \left(0,0415 + \frac{1}{6EJ^*} \right) = 2,305$$

$$X_1 \left(0,0415 + \frac{1}{6EJ^*} \right) + X_2 \left(0,15488 + \frac{1}{3EJ^*} \right) = 0,659$$

Bei Annahme verschiedener Werte für die Steifigkeit des Störträgers (EJ^*) sind die Störkräfte (X_1 und X_2) und die über den einzelnen Auflagern entstehenden Biegemomente in Tabelle 3 zusammengestellt. Die vorletzte Reihe der Tabelle enthält die Näherungswerte für einen Störträger mit linear veränderlicher Steifigkeit, die mit dem neuen Verfahren gewonnen wurden, und die den in der letzten Reihe aufgeführten genauen Werten sehr nahekommen. Die Ergebnisse der Berechnung wurden der Anschaulichkeit halber auch zeichnerisch in Bild 7 dargestellt.



$$E=J=l=\text{constans}=1$$

Bild 6

Tabelle 2

$\delta_{01} = 2,305$	$\delta_{02} = 0,569$
$\delta_{11} = 0,14525$	$\delta_{12} = 0,0415$
$\delta_{22} = 0,15488$	$\delta_{21} = 0,0415$
$C_{11} = \frac{1}{3EJ^*}$	$C_{12} = \frac{1}{6EJ^*}$
$C_{22} = \frac{1}{3EJ^*}$	$C_{21} = \frac{1}{6EJ^*}$

Schlußfolgerungen

Bei der Bemessung von Fahrzeugkonstruktionen (insbesondere von Omnibussen) bereitet es eine gewisse Schwierigkeit, daß die zur Längsachse symmetrische Anordnung des Wagenkastens durch die nur an einer Seite angebrachten Türöffnungen gestört wird. Die meisten Autoren vernachlässigen in ihren Untersuchungen die Wirkung der Türöffnung. Die Berechnung einer

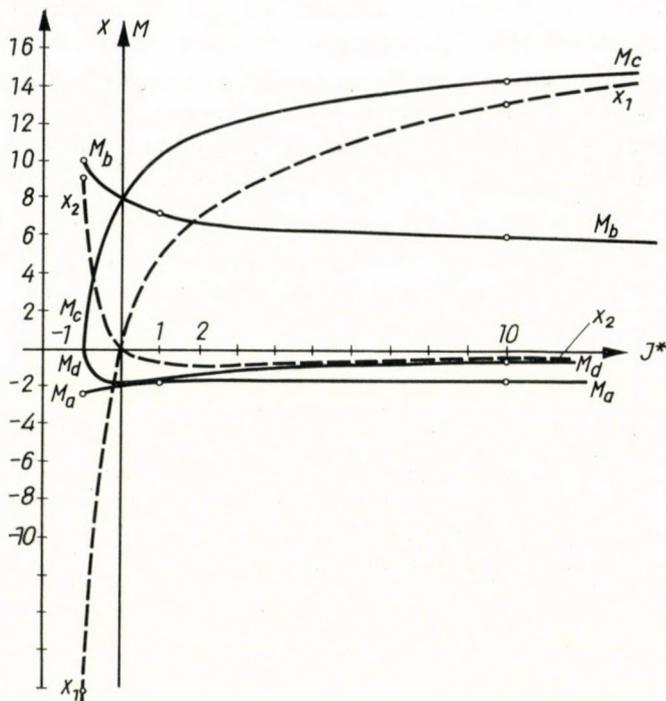


Bild 7. Werte der Biegemomente über den Auflagern sowie der Störkräfte bei verschiedener Steifigkeit des Störträgers

Tabelle 3

Steifigkeit d. Stör- trägers	Störkräfte		Biegemomente über den einzelnen Auflagern			
	X_1	X_2	a	b	c	d
EJ^*						
- 1	- 18,3	9,2	- 2,51	+ 10	0	0
0	0	0	- 1,975	+ 7,9	+ 7,9	- 1,975
+ 1	5,1922	- 86428	- 1,81	+ 7,24	+ 10,38	- 1,73
+ 10	13,1	- 0,538	- 1,542	+ 6,16	+ 14,43	- 0,595
+ ∞	15,9	0	- 1,45	+ 5,77	+ 15,85	0
$\frac{1}{2} \rightarrow 1$	3,56	- 0,551	- 1,861	+ 7,44	+ 9,6	- 1,787
	genaue Werte:		- 1,86	+ 7,43	+ 9,6	- 1,798

solchen, im Grunde genommen symmetrischen, aber an einigen wenigen Stellen von der Symmetrie — sogar wesentlich — abweichenden (quasisymmetrischen) Konstruktion kann bei geeigneter Annahme eines statisch unbestimmten Grundsystems auf die Untersuchung eines symmetrischen Trägers zurückgeführt werden. Der Arbeitsaufwand des Verfahrens ist bei Trägern von hohem

Unbestimmtheitsgrad bedeutend kleiner, als der der direkten Berechnung. Der Arbeitsaufwand der Berechnung läßt sich durch Anwendung der Perturbationsmethode noch weiter vermindern. Zu den Vorteilen des Verfahrens gehört auch, daß es zur Berichtigung einer vorhergehenden Berechnung genügt, ein nur 2 (bzw. bei mehreren Störträgern mehr) Unbekannte enthaltendes lineares Gleichungssystem zu lösen. Auch bei Trägern, die im strengen Sinne des Wortes nicht als quasisymmetrisch betrachtet werden können, kann bei nicht zu großer Abweichung die quasisymmetrische Berechnung nach dem Zahlenbeispiel wenigstens als gute Näherung betrachtet werden.

SCHRIFTTUM

1. MICHELBERGER, P.: Erőjáték autóbusz-karosszériákban (Kräftespiel in Autobuskarosserien) (Kand.-Diss.) Bp. 1959.
2. BRŽOSKA, Z.: Podstawowe zagadnienia statyki nadwozi samonosnych. Archivum budowy maszyn. Tom II. (1955) Zeszyt 4. p. 321—359. Tom III (1956) Zeszyt 1. p. 3—33 Warszawa
3. EBNER, H. und KÖLLER, H.: Über die Krafteinleitung in dünnwandige Zylinderschalen. Luftfahrtforschung. Vol. 13 (1937) No. 12. p. 606.

RECORDING THE LOAD-SPECTRA OF VEHICLES

Prof. Dr. G. RUDNAI

C. SC. TECHNICAL UNIVERSITY, BUDAPEST

Progress of science started with the registration of the objects and phenomena of nature; this was an indispensable preliminary condition for the analysis of their changings, motions and evolution. The science of design too had to start with the research of structures under static conditions.

Design of structures at rest could be performed by statics to a certain extent even in the antiquity. Besides primitive machines numerous buildings, immobile structures made mostly of stone and wooden beams, were erected with success. It is only natural that later on the mobile structures, now mostly of metal, *i. e.* the machines were also designed according to the already proved and accustomed rules of statics, first rather by intuition, later on by means of simple formulas. The dynamical loadings caused by inertia too were traced back to static forces by the aid of the D'Alembert principle.

Yet experience soon showed that design based on statical considerations is unsuitable for notably fluctuating loads, even when arising inertia forces were taken into account by "dynamical factors". From the view of statics there seemed some unexpected "mysterious" big forces to be working on the structure, which according to obvious considerations therefore had to be designed to several times the expected load, *i. e.* higher and higher "safety factors" were applied.

It has been known for a long time that in such cases there is no overload of a static character, but fatigue strain has been encountered. Fatigue is a far more serious problem of design than plain load-increase due to inertia forces (which of course can mostly be easily computed); it does not really increase the loads acting on the structure, but it decreases the resistance of materials in a special manner. The first systematical analysis of the effects of fatigue strain is due to WÖHLER. Naturally he did his best to produce as undisturbed test conditions as possible by eliminating all secondary factors. Accordingly he tried to observe this new phenomenon in a "state of rest", *i. e.* he kept the amplitudes of the fatigue loads constant, he analysed the stationary phenomenon. The influence of load-level and specimen shape on the fatigue strength with various materials under stationary loading conditions

has since then been studied very thoroughly. The results of these experiments are made easily applicable for designers by SMITH in the form of his diagrams. From these diagrams the tolerable values of stationary fatigue stresses to be superimposed on any given static load may be obtained for simple polished specimens with specified endurance requirements. A method for computing the loss of resistance with specimens of different shape was established by NEUBER.

But the stationary process is only a special marginal case of the actual phenomena, just as the static load is that of the stationary. The stationary aspect reflects reality quite adequately — except the starting and stopping periods — for constant speed motors and turbines, for machines automatically repeating simple cycles (where no single loads but series of them, *e. g.* cycles are repeated continually) and similar machine. The Smith diagram can not be applied however to mechanisms operating permanently under irregularly varying conditions, such as vehicles, lifting and transport machines, agricultural machinery, machine tools, and so on. These undergo strains of continually varying and irregular amplitudes, the fluctuations of which are influenced by several more or less independent factors of about equal importance, *e. g.* the course and quality of their track, the volume and distribution of their constant basic load (charge), their travelling speed, the accelerations affecting the mechanism or its parts, etc. The fatigue effect does not depend only on the values or the maximum of the strain amplitudes but on their frequency and sequence too.

While the rules of *static* loadings are thus functional ones and those of *stationary* dynamic loadings can be traced back to such, the load fluctuation in this most general case is a chance process depending on working conditions and following stochastic laws. They can be treated only by methods of mathematical statistics. The effect of the imposed strains on the loading capacity or the service life of the structure is determined by the process of cumulative damage which is not yet sufficiently cleared up. Considering its great importance it is by no means astonishing that this is at present the central problem of scientific research related to design.

But though this research is not yet settled and its results are to-day only of a tentative character, their application and the establishing of reliable rules of design necessitate anyhow an exact knowledge of the values and fluctuations of operational strains, *i. e.* the determination and analysis of service loads. According to mathematical statistics this may be done by collecting load spectra, *i. e.* frequency distribution curves of the load amplitudes met in regular service.

Practically instead of a continuous $N-S$ frequency-load function only an incontinuous curve, a *histogram* can be recorded, gradated according to specified levels of loading. Reliable load spectra are not often at our

disposal anyhow. Outside of aviation engineering there exist scarcely any design rules based on load spectra. This is due to the fact that very many data of loadings have to be measured and evaluated for a proper consideration of the character of the chance fluctuations.

These data were till now almost exclusively collected by registration of the whole process of load fluctuation. This way we can easily get a curve exactly reflecting the changes of values and frequency of the acting loads (Fig. 1)

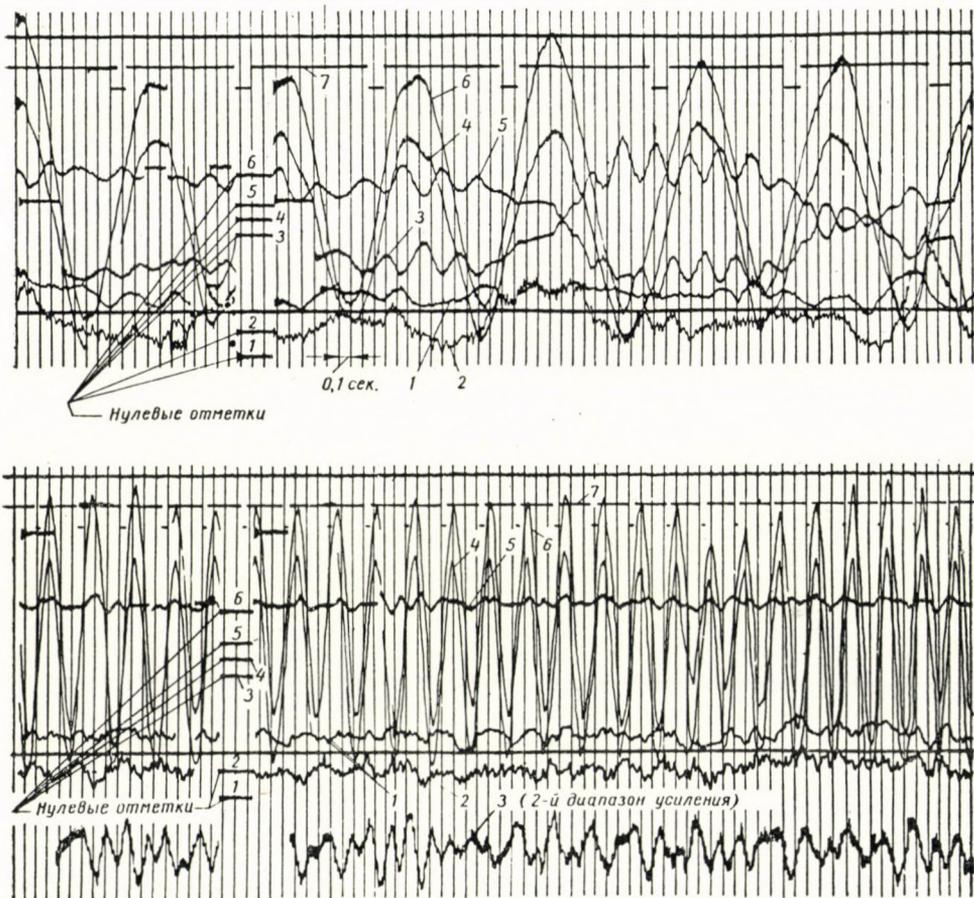


Fig. 1. Two examples of oscillograms taken for the determination of a load spectre (from the paper of SERENSEN et al)

including an immense quantity of information. This is very advantageous, as it is well known that the reliability of statistical calculations increases greatly with the number of the data considered. In order to increase the accuracy numerous data should be therefore taken. Yet the more the data, the longer and more tiring is their evaluation. It is therefore very difficult to draw the

essential lessons and to generalize them from such continuous registrations (*e. g.* oscillograms), and very much evaluation time is needed until results are available.

SERENSEN and his co-workers for instance — from whose paper* the two pieces of oscillograms of about 160 mm of Fig. 1 are taken — studied the service conditions of differential shafts of motor-lorries. They determined the dependence of the accuracy of the results from the quantity of data and found that 25 *m* of oscillograms per set are needed for an accuracy of 7–10 per cent. Since they analysed 3 loading conditions on each of 3 cars, they had to evaluate altogether at least 230 *m* of tape with 6 continuously fluctuating curves. They applied the method of level sections and calculated the frequency of exceeding of about 20 stress levels, *i. e.* they had to survey all tapes carefully 20 times. The “main time” of all the tests together was scarcely more than 3 hours, but the net working time spent on evaluation of one curve by hand may be estimated to be a hundred times more, the total of 6 curves requiring probably about 1800 hours = 250 whole working days. This amount of work rendered as result the load spectra under varying service conditions of a single structural point only.

The tendency to increase the accuracy of design rules and the difficulty to obtain the required data are thus strongly opposed. The solution of this contradiction is essential, as its existence hampers technical progress.

With high requirements of accuracy, *e. g.* in aviation engineering, where service conditions purely technically necessitate the utmost possible reduction of moving masses, the elimination of accidents is worth all efforts bestowed on the evaluation of an abundance of statistical data. But in all other branches of engineering, where the absence of precise data has no catastrophic consequences, the limiting of working time to a rational extent necessitates a vigorous reduction of the mass of worked up data. Therefore — if stress will be laid upon economical design anyhow — usually only few data are taken during a short run whose evaluation gives naturally only unreliable results.

The contradiction between the requirements of design and the exploration of service conditions can thus be solved only by a radical reduction of the labour consumption of evaluation. As we have seen, this is an inevitable condition not only for an increased reliability of the statistical analysis, but also for wide branches of machine industry to turn to the recording of load spectra and thus for the foundation of the design of their products on the firm basis of actual service conditions.

The work of evaluation can be effectively reduced only by automation. With the aid of modern electronics it is possible to construct a portable classifier of small enough size and weight to be accommodated in any vehicle or machine. Together and coupled with a suitable metering device this gives

* SERENSEN, BUCCHARIN, BUGLOV and SNITIN, *Vjestnik Mashinostroeniija*, Vol. 41 (1961) No 1. p. 16.

a statistical measuring instrument — a histometer — which directly furnishes the histogram of the analysed phenomenon without any need for the registration of intermediate data. The two instruments can be separated too; the measured data may be stored on an electromagnetic tape or so and the classifier can evaluate them into a histogram later on at a suitable time and place separately.

The histometer (Fig. 2) is composed of measuring, amplifier, classing and counting instruments, of a supply unit switched to the local network and of

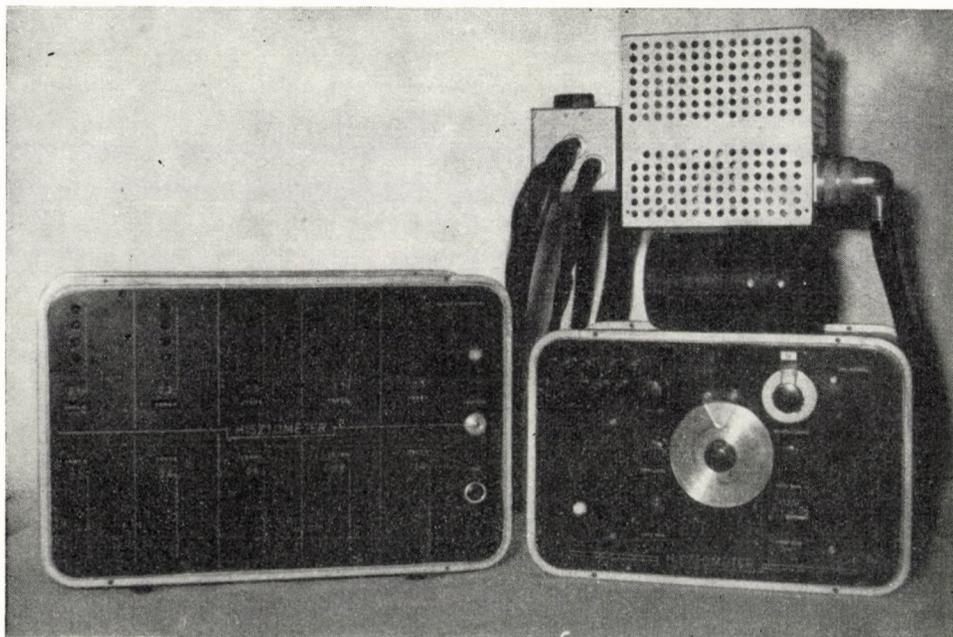


Fig. 2. The complete histometer

the loop wires. The 24 V direct current network of vehicles serves as local network.

The block diagram of the histometer is shown on Fig. 3. The load is registered by suitably placed strain gauges (*a*), but the instrument can be operated with sensing elements of other types — hydraulic, thermal, acoustical, electrical, electronical or others — the signals of which can be converted to electrical ones by a separate coder. These signals are processed by the histometer. The frequency limit of the signals of the shown instrument is within the range of 0...40 Hz.

The signals pass first to the measuring apparatus (*b*), in this case a customary WHEATSTONE bridge. Carrier current is led from the oscillator (*e*) through

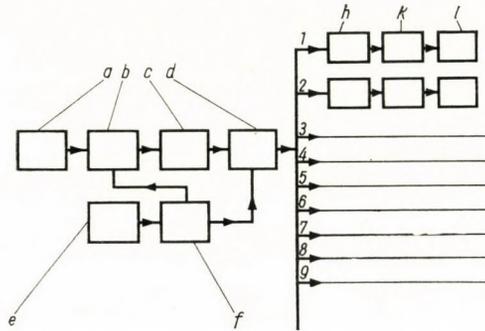


Fig. 3. Block scheme of the histometer (explained in the text)

the amplifier (f) to the bridge and is modulated with signals of a frequency and phase equal and an amplitude proportional to the measured data. In order to avoid reciprocal distortions the carrier frequency (2 kHz) is a multiple of the expected highest frequency of the signals. The modulated signal passes then through a carrier frequency amplifier (c) with a maximum amplification of 10^7 ; to avoid distortion this maximum is never fully utilized, only a value less by 1–2 orders of magnitude.

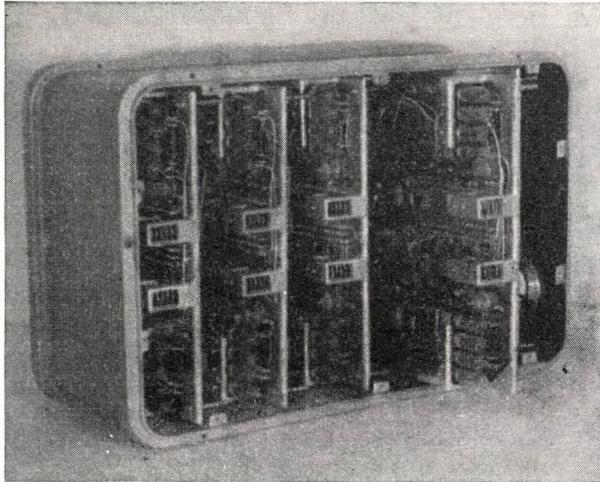


Fig. 4. Interior of the counting device of the histometer (a twin-marker is drawn out)

The amplified signals are rectified in a phase-sensitive rectifier (d) and pass by direct galvanic coupling to the counter units. The fluctuation of the detected signals thus corresponds in shape and also in phase with the variation of the measured quantity.

The counter instrument consists of as many markers as in strips the histogram is to be divided. By increasing the number of the markers the level density may be increased if required. Each marker consists of a comparator (*h*), an electronic counter — multivibrator — (*k*) and an electromechanic counter. The comparators divide the measuring range into as many stripes as there are markers; each comparator only transmits signals which exceed a preset value as countable impulses to the decadic multivibrator, which itself transmits only every tenth impulse to the electromechanic counter.

The prototype of the histometer is installed in two boxes. All the counters are housed in the first (Fig. 4), and all other equipment — except the supply unit — in the second (Fig. 5).

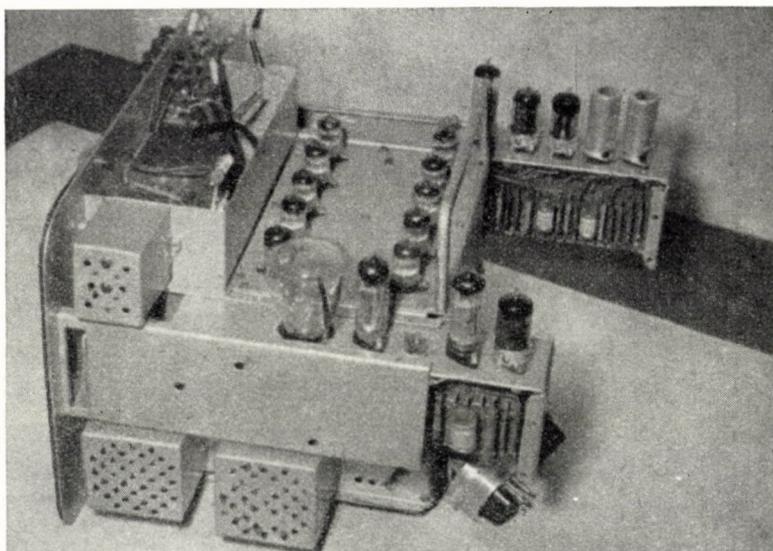


Fig. 5. The measuring amplifier and classifier case of the histometer (extended)

The advantages of the histometer over other known classing machines are the following:

1. Stability of operation owing to the application of carrier frequency amplification, by this the duration of recording and the attainable statistical accuracy can be increased practically without limits.

2. Due to the galvanic coupling any slow variations of data and the incidental increase and decrease of the static basic load can also be evaluated.

3. The electronic counters switched before the electromechanical counters increase both frequency and range of numbers of the markers by one order of magnitude.

4. Test results — also intermediate ones — can be read digitally or photographed at any time and traced into a histogram.

5. By variation of the amplification (bandspread) of the modulated signal the band width of the counting device can be filled before every set of tests and its measuring range can be covered with the expected amplitudes by tuning the bridge, so that the measuring capacity of the instrument may be utilized optimally.

6. Size and weight (completely only 56 kg) already of the prototype of the histometer are such, that measurements do not disturb the working conditions of the analysed machines, *e. g.* for vehicles — in their regular service — authentic load spectres can be obtained.

The histometer is especially suitable for the realistic statistical analysis of service loads of autocars, buses, railway carriages, aeroplanes and other vehicles. There is no need of taking oscillograms and it eliminates the long and troublesome work on their evaluation. From its test results more correct data can be directly obtained than before, which facilitate savings in weight of the machines tested, their close adaptation to actual working conditions, and render an increased economy of their operation. By measuring the strains of vehicles on different tracks correct and reproducible data about the characteristics of these tracks are also produced.

Oscillograms made by other instruments can be evaluated using the histometer with an optical sensing device. In the course of improvement size and weight can be further decreased by transistorizing and so its range of application may be extended further.

Conclusion

Different from loads of a static and periodic character the loads acting on vehicles and many other devices are stochastic. In such a case design has to be made with respect to structural life. The effect of chance loads on structural life is determined by the laws of cumulative damage, which are not sufficiently known yet. Loads themselves may be obtained from a statistical survey of service conditions and from the analysis of the so obtained histogram in the form of load spectra.

The histogram has to be based on as many data as possible. A measuring device is therefore necessary, superseding the long and tiresome evaluation work of the test data by hand, which due to its automatic operation is suitable for the instantaneous evaluation of an unlimited number of data. The author presents the working principles and structure of a histometer built by him with his collaborators. The processed values of the histogram may be read from the histometer immediately after completion of any series of measure-

ments or at any intermediate moment. The small size and weight of the instrument makes its application on vehicles in regular service possible. The histogram so obtained describes not only the service behaviour of the vehicles, but gives the characteristics of their tracks too. Load curves (oscillograms) obtained by other instruments can also be evaluated with the histometer. A further decrease of its size and weight may be attained in the course of its further development by transistorizing.

I express my thanks to L. SZILÁGYI, J. BENCZE, S. TÓTH, mechanical engineers and to A. ÉRDI and E. CZEINER mechanics for their devoted help in constructing the histometer.

BEMESSUNG UND WIRTSCHAFTLICHE GESTALTUNG DER FAHRGESTELLRAHMEN

B. SAMU

1. Einleitung. Zielsetzung

Die Aufgabe der Fahrzeugrahmen besteht in der Aufnahme der vom Fahrwerk übernommenen konzentrierten Kräfte und der mit ihnen im Gleichgewicht stehenden Massenkräfte, die aus dem Selbstgewicht und der Nutzlast des Fahrzeuges entstehen. Die zwei Hauptbelastungen sind die Biegung und Torsion. Die Bestimmung der Biegebeanspruchung und der am besten entsprechenden Gestaltung der Konstruktionen verursachen keine besonderen Schwierigkeiten. Das Verhalten des Rahmens unter Torsionsbelastung ist dagegen eine sehr zusammengesetzte Erscheinung [2, 6, 7]. Die günstige Gestaltung gegen Verdrehung wird durch zahlreiche ungelöste Fragen erschwert. Diese sind:

1. Die räumliche Wirkung der Kräfte und der Formänderung einerseits, die schwere Übersichtlichkeit des Systems andererseits, deren Ursache die statisch mehrfache Unbestimmtheit des Fahrgestellrahmens ist.

2. Die Größe der Torsionsbelastung hängt nicht nur von den Straßenunebenheiten ab, sondern es gibt eine gegenseitige Beziehung zwischen ihr und der Beanspruchung des Rahmens. Je weicher die Federung und der Fahrzeugrahmen sind, desto kleiner ist die Verdrehungsbelastung. Es scheint also am zweckdienlichsten für die Minderung der Torsionsbelastung, eine gegen Torsion ganz weiche Konstruktion zu gestalten. Es treten aber sehr hohe Spannungen in gewissen Punkten des Rahmens, sogar unter Einwirkung sehr kleiner Belastungen, auf, wo die freie Formänderung durch steife Rahmenelemente verhindert wird.

3. Bei einem statisch mehrfach unbestimmten System wird die Beanspruchungsverteilung durch das Verhältnis der Steifigkeit einzelner Bestandteile zueinander beeinflußt. Die Gesetzmäßigkeiten sind noch nicht festgelegt worden, die den Konstrukteuren beim zweckmäßigen Konstruieren einzelner Konstruktionselemente bzw. der Steifheit des ganzen Rahmens zur Hilfe wären, die vorteilhafteste Beanspruchungsverteilung, d. h. die wirtschaftlichste Formgebung zu verwirklichen [9].

4. Bei der Konstruktionsarbeit und Entwicklung der Rahmen stützt man sich auf praktische Erfahrungen, oder auf solche ungeschriebenen Regeln,

deren Richtigkeit durch wissenschaftliche Planmäßigkeit noch nicht bewiesen wurde. Es gibt Berechnungs- und Laboratoriumsverfahren, mit deren Hilfe sich die Beanspruchungen unter gegebenen Belastungen nachträglich bestimmen lassen [3, 4, 7], die aber relativ langwierig sind, folglich geben sie keine Richtlinien für die Entwicklung.

5. Bei Rahmengestaltung ist die weiche Gestaltung der Anschlußpunkte der Längs- und Querträger ein allgemein verbreiteter Brauch [1]. Die Auswertung solcher Lösungen bzw. die Untersuchung deren Auswirkung auf die Beanspruchungen anderer Bestandteile sind noch nicht klar.

Um die Schwierigkeiten aufzuklären hat das *Járműfejlesztési Intézet (Institut für Fahrzeugentwicklung)*, Budapest die Untersuchung der Gesetzmäßigkeiten der Erscheinungen, die unter Torsionsbelastung des Rahmens auftreten, vorgesehen. Das meistverbreitete Rahmensystem ist von Leiter-Typ (s. Abb. 1).

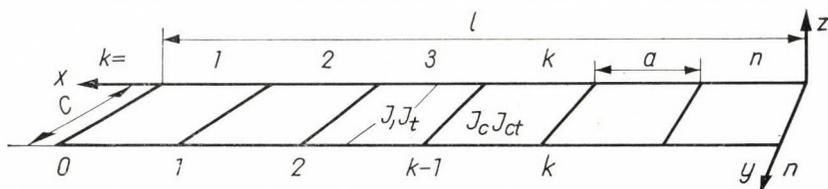


Abb. 1. Schema des Fahrgestellrahmens von Leitertyp

Nun beschäftigen wir uns mit seinem Verhalten unter Torsionsbelastung. Um die Gesetzmäßigkeiten festzustellen, mußte erstens eine diesem Fall angepaßte Berechnungsmethode ausgearbeitet werden, da die bisher bekannten Verfahren sich für diesen Zweck als ungeeignet erwiesen zu haben. An dieser Stelle beschränken wir uns ausschließlich auf die Darlegung der neuen Berechnungsmethode, der gegenüber die folgenden Anforderungen aufgestellt worden sind:

1. Es soll sich auf den allgemeinen Fall anwenden lassen, daß jedes Trägerelement (Längs- und Querträger), oder nur entweder der Längs- oder Querträger eine Steifheit gegen Verdrehung besitzt.

2. Die Methode soll — neben ihrer Genauigkeit — übersichtlich, anschaulich und in der Verwendung schnell sein.

3. Sie soll den Weg dem Konstrukteur nach der wirtschaftlichen Ausformung der Konstruktion weisen [9]; die günstige Beanspruchungsverteilung sei im voraus abschätzbar.

4. Sie soll eine gute Grundlage bieten, um die Gesetzmäßigkeiten in Zusammenhang mit den Steifheitsverhältnissen der Fahrgestellrahmen und den Beanspruchungsverteilungen bestimmen zu können.

5. Sie soll die Verdrehung (Steifheit) des Rahmens, als einer Ganzheit berechnen lassen.

6. Sie soll sich — nach einer kleinen Umformung — zum Ausrechnen der Fahrzeugrahmen von nicht steifen Knotenpunkten verwenden lassen.

7. Sie sei — nach gewisser Erweiterung — weiterentwickelbar für die Berechnung semiselbsttragender Aufbauten.

2. Beschreibung des untersuchten Fahrgestellrahmens.

Bezeichnungen

Der Fahrgestellrahmen nach Abb. 1 wird durch Querträger auf n -zählige Feldteilungen geteilt. Anzahl der Querträger ($n + 1$). In besonderem Fall mögen die zwei Längsträger verschiedene Verdrehungssteifheit besitzen, und auch ihre Biegesteifheiten sich voneinander zu unterscheiden. In diesem Fall ist das System elastizitätsgemäß unsymmetrisch auf die geometrische Mittellinie. Die Entfernung benachbarter Querträger (a), d. h. die Länge der Feldteilungen, kann sich von Teilung zu Teilung verändern.

Die Befestigung der Längs- und Querträger kann vollkommen steif oder elastisch sein. Das so bezeichnete System nennt man unregelmäßig. Ein System wird als regelmäßig angesehen, wenn die Elastizitätseigenschaften beider Längsträger, ebenfalls jeder Querträger geometrisch und elastizitätsgemäß identisch, die Länge der Feldteilungen gleich sind. Wir sind in erster Reihe — um die Gesetzmäßigkeiten zu finden — an dem regelmäßigen Fahrgestellrahmen interessiert. Auf die abweichenden Systeme weisen wir stellenweise hin.

Die Leiterrahmen sind nach Steifheit ihrer Trägerelemente in fünf Gruppen einzureihen. Rahmen,

1. wo die Verdrehungssteifheit der Querträger im Vergleich zur Verdrehungssteifheit der Längsträger sich vernachlässigen läßt;
2. wo die Verdrehungssteifheit der Längsträger im Vergleich zur Verdrehungssteifheit der Querträger sich vernachlässigen läßt;
3. wo es in der Größenordnung der Verdrehungssteifheit der Längs- und Querträger keinen Unterschied gibt;
4. wo die Verdrehungssteifheiten der Querträger verschieden sind;
5. wo die Längs- und Querträger gegen Verdrehung weich sind. Das Trägersystem ist in diesem Fall gegen antimetrische Belastung instabil.

Die Feldteilungen sind mit Ziffern bezeichnet. Die Numerierung eines Querträgers stimmt mit der Numerierung der von ihm links befindlichen Feldteilung überein. Der erster Querträger ist mit 0 numeriert. In den Berechnungen sind die folgenden Bezeichnungen verwendet:

- a Entfernung zweier benachbarter Querträger des Rahmens, Länge einer Feldteilung
- c Breite des Rahmens
- n Anzahl der Feldteilungen
- $l = n \cdot a$ Totallänge des Rahmens
- k Bezeichnung eines beliebigen Feldes bzw. Querträgers
- P Kraft im allgemeinen
- M Biegemoment im allgemeinen
- T Verdrehungsmoment im allgemeinen
- \bar{X}_k statisch unbestimmte, angenommene Größe
- X_k statisch unbestimmte, transformierte Größe

- J Trägheitsmoment der Längsträgerquerschnitte
 J_c Trägheitsmoment der Querträgerquerschnitte
 J_t polares Trägheitsmoment der Längsträgerquerschnitte, oder ein dementsprechender Kennwert, der für den Querschnitt bei Torsionsbeanspruchung bezeichnend ist
 J_{ct} polares Trägheitsmoment der Querträgerquerschnitte, oder ein dementsprechender Kennwert, der für den Querschnitt bei Torsionsbeanspruchung bezeichnend ist.

Biegungsbeanspruchungen sind positiv, wenn sie einen Zug in der oberen Randfaser verursachen. Verdrehungsmomente sind als positiv anzusehen, wenn sie in dem Koordinatensystem nach Abb. 1 eine Verdrehung des Querschnittes im Sinne des Uhrzeigers verursachen, der von der positiven Pfeilrichtung der Koordinatenachse aus betrachtet uns gegenüber liegt.

3. Allgemeine Darlegung des Verfahrens

Ein unsymmetrischer, aus n Strecken bestehender Fahrgestellrahmen ist $3 \cdot n$ -fach unbestimmt. Es wird ein statisch bestimmtes Hauptsystem — wie es in der Statik der Träger ein allgemeines Verfahren ist — derart entstehen, daß die statisch überzähligen Fachwerkelemente durchschnitten¹ gedacht,

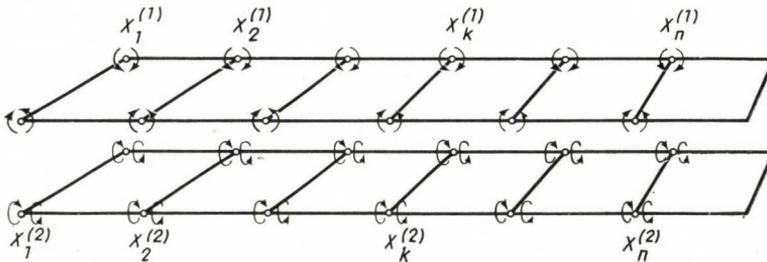


Abb. 2. Hauptsystem des Fahrzeugarahmens und die statisch unbestimmten Größen nach K. ERZ

oder Gelenke in Gedanken an zweckmäßig ausgewählten Stellen eingelegt werden. Man denkt die Längsträger der langen, räumlichen, aus mehreren Feldteilungen bestehenden Tragwerke durch einen Schnitt zerlegt, oder in sie Gelenke eingelegt zu haben, um ein regelmäßiges und einfaches Elastizitätsgleichungssystem zu erhalten. Dies ist der Fall auch beim Verfahren nach K. ERZ [4] (s. Abb. 2).

Es scheint eine Paradoxie zu sein, daß man — wie es später zu sehen sein wird — vorteilhaftere Ausfälle erhält, wenn man nicht die Längsträger, sondern die Mitte der Querträger gelöst denkt (s. Abb. 3). Dadurch werden die durch unbekannte Kräfte hervorgerufenen Biege- und Torsionsbeanspruchungen in den einzelnen Trägerelementen zweckmäßig getrennt, wie es sich später erweisen wird.

In dem allgemeinen Fall, daß sowohl die Längsträger, wie auch die Querträger zum Aufnehmen der Torsionsbeanspruchung fähig sind, wirken drei

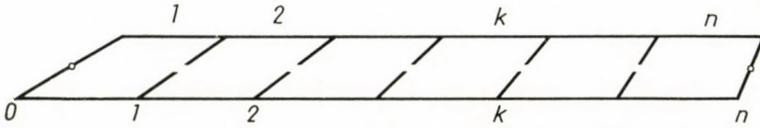


Abb. 3. Hauptsystem. Querträger, gegen Torsion weich; Längsträger, gegen Torsion steif

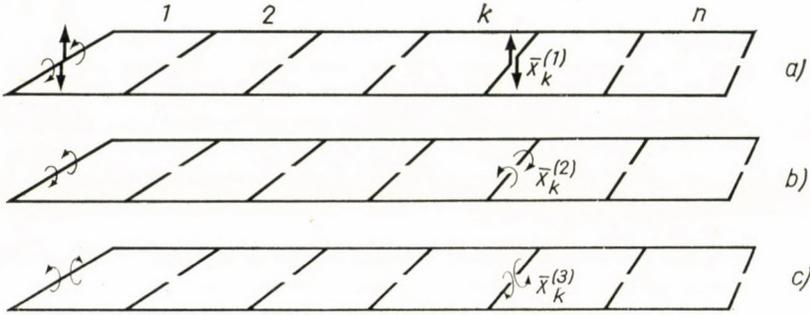


Abb. 4. Statisch unbestimmte Kräftegruppe $\lambda_k^{(1)}$, $\lambda_k^{(2)}$ und $\bar{X}_k^{(3)}$

statisch unbestimmte innere Kräfte auf die Schnittstelle jedes Querträgers k : Scherkraft $\bar{X}_k^{(1)}$, Verdrehungsmoment $\bar{X}_k^{(2)}$ und Biegemoment $\bar{X}_k^{(3)}$ (s. Abb. 4). Das Biegemoment ergibt sich bei einem symmetrischen Träger, oder wenn nur die Biegesteifigkeiten der zwei Längsträger voneinander abweichen, zu $\bar{X}_k^{(3)} = 0$. Durch die derart tendenziös ausgewählten Unbekannten wird erreicht, daß die durch sie hervorgerufenen Beanspruchungen in den einzelnen Rahmenelementen sich sondern: es entstehen

nur Biegung in den Querträgern bzw. Biegung und Verdrehung in den Längsträgern unter Einwirkung von $\bar{X}_k^{(1)}$;

nur Verdrehung in den Querträgern bzw. nur Biegung in den Längsträgern unter Einwirkung von $\bar{X}_k^{(2)}$;

nur Biegung in den Querträgern bzw. nur Verdrehung in den Längsträgern unter Einwirkung von $\bar{X}_k^{(3)}$.

Bei der Bildung des Hauptsystems denken wir nicht jeden Querträger durchschnitten. Besitzen die Längsträger nicht zu vernachlässigende Verdrehungssteifigkeiten, so legen wir ein Gelenk nach Abb. 3 in die Mitte des ersten (0) und des letzten (n) Querträgers ein. Lassen sich dagegen die Verdrehungssteifigkeiten der Längsträger vernachlässigen, so soll das Hauptsystem durch Behalten eines gegen Verdrehung steifen Querträgers gebildet werden (s. Abb. 5).

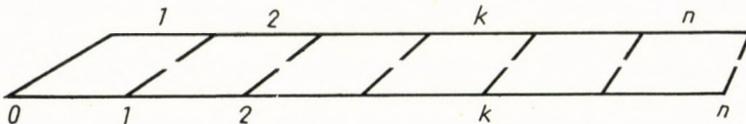


Abb. 5. Hauptsystem. Querträger besitzen Torsionssteifheit

Es sind als statisch unbestimmte Größen eigentlich nicht nur die einzelnen Kräfte $\bar{X}_k^{(\mu)}$ anzusehen, sondern auch ihre Stützdrücke in den nicht durchschnittenen Querträgern. Auf diesen Weise bildet jede statisch unbestimmte Größe ein nullwertiges Kräftesystem in sich selbst, das eine Wirkung auf fast die ganze Länge des Trägers ausübt. Es ist für unregelmäßige Systeme erwünscht, daß die Beanspruchungen, hervorgerufen von den unbekanntten Kräften, über eine möglichst kurze Strecke verteilt werden. Dagegen wird es bei regelmäßigen Systemen für vorteilhaft angesehen, wenn diese Kräfte symmetrisch und antisymmetrisch angreifen. Man ist also imstande, mit anderen Kräftegruppen zu arbeiten bei der Untersuchung unregelmäßiger und wieder mit anderen bei regelmäßigen Systemen.

Mit Rücksicht auf das Mitgeteilte, entsprechen keine gewählten Kräftegruppen unseren Gesichtspunkten. Wir besitzen doch die Möglichkeit, mit Hilfe einer Superposition der angenommenen Kräftegruppe $\bar{X}_k^{(1)}, \bar{X}_k^{(2)}, \bar{X}_k^{(3)}$ in neue, entweder den regelmäßigen oder unregelmäßigen Systemen entsprechende Kräftegruppen überzugehen, so daß die letzteren eine zweckentsprechende Trennung der Beanspruchungen sichern.

Wie es FLÜGGE bewiesen hat [5], sind wir imstande, durch eine Superposition bzw. lineare Transformation voneinander linear unabhängiger Kräftegruppen in neue Kräftegruppen

$$X_k^{(\mu)} = \sum_{k=1}^n C_{ik} \bar{X}_k^{(\mu)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

überzugehen. Eine Superposition der Kräfte ist richtig, wenn auch die entstandenen neuen Kräftegruppen voneinander linear unabhängig sind. Die nötige und genügende Bedingung dafür ist, daß der Wert der Determinante, die aus den Beiwerten C_{ik} gebildet wird, von Null verschieden ist.

Dieses Verfahren wird in den untenstehenden drei charakteristischen Steifheitsumständen erörtert:

1. Verdrehungssteifheit der Querträger läßt sich im Verhältnis zu der der Längsträger vernachlässigen.
2. Verdrehungssteifheit der Längsträger läßt sich im Vergleich mit der der Querträger vernachlässigen.
3. Größenordnungen der Verdrehungssteifheiten der Längs- und Querträger stimmen überein.

4. Die Verdrehungssteifheit der Querträger im Verhältnis zu der der Längsträger ist vernachlässigbar

Ist die Anzahl der Feldteilungen n , so ergibt die Anzahl der statisch unbestimmten Unbekannten $\bar{X}_k^{(1)}$ zu $(n - 1)$. Die neuen Unbekannten werden in einem regelmäßigen System nach der folgenden Transformation ermittelt:

$$X_k^{(1)} = -\bar{X}_k^{(1)} -_i + 2\bar{X}_k^{(1)} - \bar{X}_{k+1}^{(1)}.$$

Die Determinante der Gleichungen ist von $(n - 1)$ -ster Ordnung und ihr Wert

weicht von 0 ab ($n \neq 0$), die neuen Unbekannten sind also unabhängig voneinander. Eine lineare Transformation in dem unregelmäßigen System ist ähnlicherweise ausführbar.

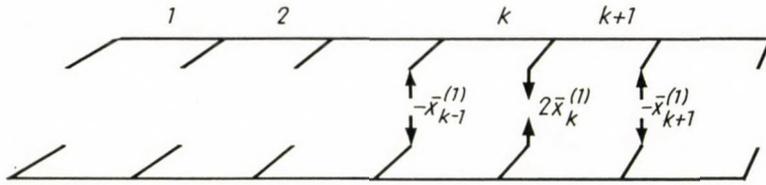


Abb. 6. Funktion der Kräftegruppe $X_k^{(1)} = -\bar{X}_{k-1}^{(1)} + 2\bar{X}_k^{(1)} - \bar{X}_{k+1}^{(1)}$

Die Wirkung der neuen Kräftegruppe $X_k^{(1)}$ mit Einheitskräften ist im regelmäßigen System in Abb. 6, die Verteilung der zugehörigen Beanspruchungen

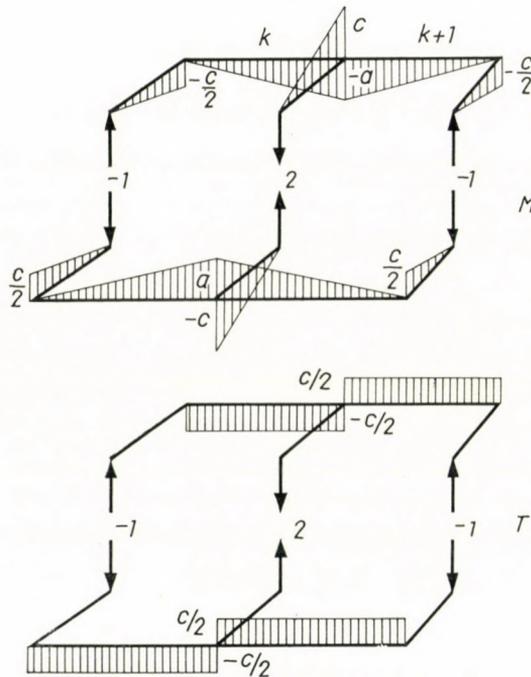


Abb. 7. Belastungen unter Einwirkung der Kräftegruppe $X_k^{(1)} = 1$
 M = Biegebeanspruchungen
 T = Torsionsbeanspruchungen

gen in Abb. 7 dargestellt. Beiwerte des Elastizitätsgleichungssystems lassen sich nach der Bestimmung der 0-Belastung des Hauptsystems berechnen (s. Abb. 8).

$$\delta_{kk}^{(11)} = 4 \frac{a^2}{3E} \frac{a}{J} + c^2 \left(\frac{1}{2E} \frac{C}{J_c} + \frac{1}{G} \frac{a}{J_t} \right)$$

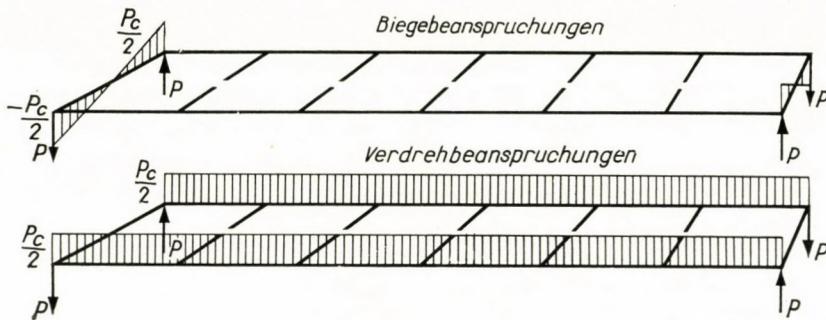


Abb. 8. Beanspruchung des Hauptsystems unter 0-Belastung. Biegebeanspruchungen (M), Verdrehbeanspruchungen (T)

$$\bar{\delta}_{k,k-1}^{(11)} = \bar{\delta}_{k,k+1}^{(11)} = \frac{a^2}{3E} \frac{a}{J} - c^2 \left(\frac{1}{3E} \frac{c}{J_c} + \frac{1}{2G} \frac{a}{J_t} \right)$$

$$\bar{\delta}_{k,k-2}^{(11)} = \bar{\delta}_{k,k+2}^{(11)} = \frac{c^2}{12E} \frac{c}{J_c}$$

$$\bar{\delta}_1^{(10)} = -\frac{Pc^2}{2} \frac{1}{6E} \frac{e}{J_c}$$

$$\bar{\delta}_k^{(10)} = 0 \quad [k = 2, 3, \dots, (n-2)]$$

$$\bar{\delta}_{n-1}^{(10)} = \frac{Pc^2}{2} \frac{1}{6E} \frac{c}{J_c}$$

Man dividiere die Verschiebungsbeiwerte durch $\frac{a^2}{E} \frac{a}{J}$:

$$\delta_{kk}^{(11)} = \frac{4}{3} + \frac{c^2}{a^2} \frac{1}{2} \frac{c/J_c}{a/J} + \frac{c^2}{a^2} \frac{E}{G} \frac{a/J_t}{a/J}$$

$$\delta_{k,k-1}^{(11)} = \delta_{k,k+1}^{(11)} = \frac{1}{3} - \frac{c^2}{a^2} \frac{1}{3} \frac{c/J_c}{a/J} - \frac{c^2}{a^2} \frac{1}{2} \frac{E}{G} \frac{a/J_t}{a/J}$$

$$\delta_{k-2,k}^{(11)} = \delta_{k+2,k}^{(11)} = \frac{c^2}{a^2} \frac{c/J_c}{a/J}$$

$$\delta_k^{(10)} = 0 \quad [k = 2, 3, \dots, (n-2)]$$

$$\delta_1^{(10)} = -\frac{P}{12} \frac{c/J_c}{a/J}; \quad \delta_{n-1}^{(10)} = -\delta_1^{(10)}$$

In den Ausdrücken der Beiwerte stellt

$\frac{c/J_c}{a/J} = B_c$ eine Zahl dar, die für das Verhältnis der Biegesteifigkeit der Quer- und Längsträger bezeichnend ist;

$\frac{E}{G} \frac{a/J_t}{a/J} = D$ eine Zahl, die für das Verhältnis der Torsions- und Biegesteifigkeit der Längsträger charakteristisch ist.

Mit Rücksicht hierauf:

$$\begin{aligned}\delta_{kk}^{(11)} &= \frac{4}{3} + \frac{c^2}{a^2} \frac{1}{2} B_c + \frac{c^2}{a^2} D \\ \delta_{k,k-1}^{(11)} &= \delta_{k,k+1}^{(11)} = \frac{1}{3} - \frac{c^2}{a^2} \frac{1}{3} B_c - \frac{c^2}{a^2} \frac{1}{2} D \\ \delta_{k,k-2}^{(11)} &= \delta_{k,k+2}^{(11)} = \frac{c^2}{a^2} B_c \\ \delta_k^{(10)} &= 0 \quad [k = 2, 3, \dots, (n-2)] \\ \delta_1^{(10)} &= -\frac{P}{12} \frac{c^2}{a^2} B_c \\ \delta_1^{(10)} &= \frac{P}{12} \frac{c^2}{a^2} B_c.\end{aligned}$$

Wie ersichtlich, hängt die Größe der Verschiebungsbeiwerte und dadurch auch die Beanspruchungsverteilung vom Verhältnis der Abmessungen a/c der Rahmenstrecke sowie von den Größen B_c und D , d. h. vom Steifigkeitsverhältnis der Trägerelemente ab.

Für die Berechnung der gewählten, statisch unbestimmten Werte erhielten wir sehr einfache Ausdrücke.

Zur Untersuchung der Gesetzmäßigkeiten der Beanspruchungsverteilung gibt es eine Gelegenheit dadurch, daß die Beanspruchungen, die unter Einwirkung einer einheitlichen äußeren Verdrehungsbelastung zu verschiedenen Werten von a/c , B_c und D als Parameter gehören, festgelegt werden.

Die ermittelten Werte sind in Diagramm darzustellen. Derart wird einerseits ein anschauliches Bild von der Wirkungsweise der Inneren Kräfte des Fahrgestellrahmens erhalten, andererseits läßt sich das Steifigkeitsverhältnis von B_c und D auswerten, mit dem die vorteilhafteste bzw. wirtschaftlichste Konstruktion ausgeführt werden soll. Die Diagramme sind auch noch zur unmittelbaren Ablesung der Beanspruchungen einer gegebenen Konstruktion anstatt langwieriger Berechnungen zu verwenden. Es sollen nur die Werte von zwei Parametern $\left(\frac{c^2}{a^2} B_c \text{ und } \frac{c^2}{a^2} D\right)$ von vornherein ermittelt werden. Zu den zusammengehörigen Parameterwerten gehören bestimmte Beanspruchungswerte.

Die unbekanntenen inneren Kräfte lassen sich übrigens aus dem Elastizitätsgleichungssystem in der gewöhnlichen Weise ermitteln.

Es ist in einem regelmäßigen System, wenn die Anzahl n der Feldteilungen gerade ist, beweisbar, daß in der Mitte des Rahmens

$$X_{n/2}^{(1)} = 0 \text{ ist.}$$

Dann haben wir also — auch die Symmetrie in Betracht gezogen — nur mit einer Anzahl der Unbekannten von $\frac{n-2}{n}$ zu rechnen. Ist zum Beispiel $n = 6$, so ergibt sich die Anzahl der Unbekannten nur zu 2.

5. Verdrehungssteifheit der Längsträger im Vergleich mit der der Querträger ist vernachlässigbar

Für ein symmetrisches System ist im allgemeinen mit einer Anzahl der Unbekannten von n zu rechnen. Das Hauptsystem wird erhalten, wenn man die Querträger — einen ausgenommen — in der Mitte durchschnitten denkt (s. Abb. 5). Der nicht durchschnitene Querträger ist nach Belieben auszuwählen. Im Querträger nach Abb. 5 ist zum Beispiel der Querträger 0

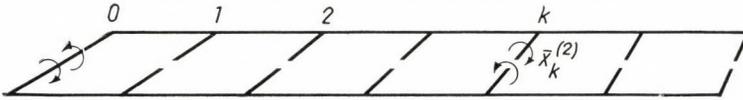


Abb. 9. Funktion der inneren Kräfte $\bar{X}_k^{(2)}$

unzerschnitten. Statisch unbestimmte Größen sind die Verdrehungsmomente $\bar{X}_k^{(2)}$, die an den Stellen des Schnittes angreifen und die Torsionsmomente, die sich im Gleichgewicht erhalten und an dem nicht durchschnittenen Querträger angreifen (s. Abb. 9). Die derart angenommenen inneren Kräfte $\bar{X}_k^{(2)}$ verursachen in den Querträgern nur Torsions-, in den Längsträgern nur Biegebeanspruchungen.

Ähnlich dem vorher vorgeführten Fall ist es auch hier zweckvoll, auf ein neues Kräftesystem $X_k^{(2)}$ überzugehen. Gegenüber dem neuen Kräftesystem stellen wir die Forderung, daß es über einer möglichst kleinen Strecke des Rahmens eine Beanspruchung verursacht. Die neuen Größen lassen sich nach der folgenden Transformation erhalten

$$X_k^{(2)} = -\bar{X}_{k-1}^{(2)} + \bar{X}_k^{(2)}.$$

Wert der Determinante des Gleichungssystems $1 \neq 0$.

Die Wirkung der durch die Transformation ermittelten $X_k^{(2)}$ Kräftegruppe ist in Abb. 10, die zugehörigen Beanspruchungen in Abb. 11, die von 0-Bela-

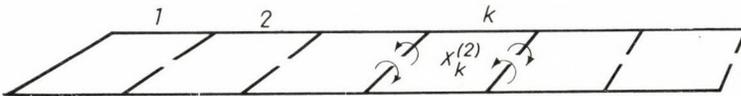


Abb. 10. Funktion der inneren Kraft $X_k^{(2)} = -\bar{X}_{k-1}^{(2)} + \bar{X}_k^{(2)}$

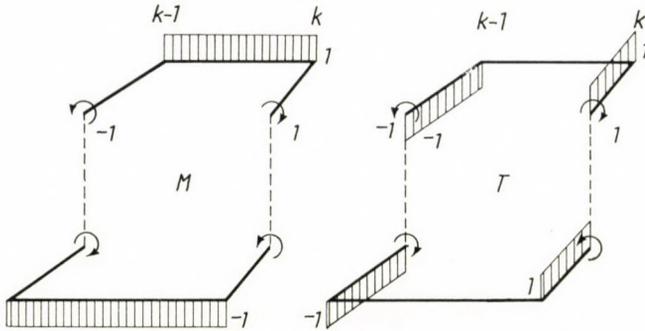


Abb. 11. Beanspruchungen unter Biegemoment $X_k^{(2)} = 1$
 M = Biegebeanspruchung
 T = Torsionsbeanspruchung

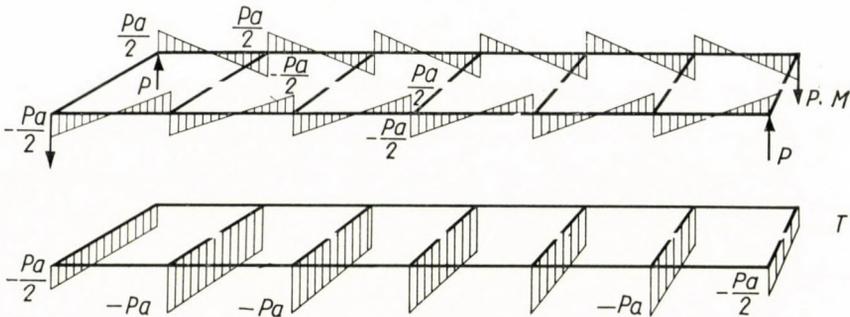


Abb. 12. 0-Belastung. Längsträger gegen Verdrehung weich;
 Quertträger gegen Verdrehung steif

stung hervorgerufenen Belastungen sind in Abb. 12 dargestellt. Verschiebungsbeiwerte des Gleichungssystems:

$$\bar{\delta}_{k,k-1}^{(22)} = \bar{\delta}_{k,k+1}^{(22)} = - \frac{1}{G} \frac{c}{J_{ct}}$$

$$\delta_{k,k-1}^{(22)} = \delta_{k,k+1}^{(22)} = - \frac{E}{G} \frac{c/J_{ct}}{a/J}$$

$$\bar{\delta}_{kk}^{(22)} = 2 \left(\frac{1}{E} \frac{a}{J} + \frac{1}{G} \frac{c}{J_{ct}} \right)$$

$$\delta_{kk}^{(22)} = 2 + 2 \frac{E}{G} \frac{c/J_{ct}}{a/J}$$

$$\bar{\delta}_1^{(20)} = \frac{Pa}{2} \frac{1}{G} \frac{c}{J_{ct}}$$

$$\delta_1^{(20)} = \frac{Pa}{2} \frac{E}{G} \frac{c/J_{ct}}{a/J}$$

$$\bar{\delta}_k^{(20)} = 0 \quad [k = 2, 3, \dots, (n-2)]$$

$$\delta_k^{(20)} = 0$$

$$\bar{\delta}_n^{(20)} = - \frac{Pa}{2} \frac{1}{G} \frac{c}{J_{ct}}$$

$$\delta_n^{(20)} = - \frac{Pa}{2} \frac{E}{G} \frac{c/J_{ct}}{a/J}$$

In diesen Ausdrücken der Beiwerte ist $\frac{E}{G} \frac{c/J_{ct}}{a/J} = D_c$ eine Zahl, die für das Verhältnis der Torsionssteifheit der Quertträger und der Biegesteifheit der Längsträger charakteristisch ist.

Durch Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned}\delta_{k,k-1}^{(22)} &= \delta_{k,k+1}^{(22)} = -D_c \\ \delta_{kk}^{(22)} &= 2(1 + D_c) \\ \delta_1^{(20)} &= \frac{Pa}{2} D_c \\ \delta_k^{(20)} &= 0 \quad [k = 2, 3, \dots, (n-1)] \\ \delta_n^{(20)} &= -\frac{Pa}{2} D_c.\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind noch einfacher als sie bei den vorigen Bedingungen, d. h. im Falle der gegen Verdrehung weichen Querträger, waren. Die Beanspruchungsverteilung hängt nur vom Verhältnis (D_c) der Verdrehungssteifigkeit der Querträger und Biegesteifigkeit der Längsträger ab.

Die Form einer allgemeinen Gleichung des Elastizitätsgleichungssystems lautet:

$$\delta_{k,k-1}^{(22)} X_{k-1}^{(2)} + \delta_{kk}^{(22)} X_k^{(2)} + \delta_{k,k+1}^{(22)} X_{k+1}^{(2)} = 0.$$

Ist die Anzahl der Feldteilungen n eine ungerade Zahl, so ergibt sich die in der Mitte des Systems angreifende Unbekannte zu

$$X_{\frac{n+1}{2}}^{(2)} = 0.$$

(Wir fanden bei Trägern, wo die Längsträger gegen Verdrehung steif sind, daß die mittlere Größe $X_{n/2}^{(1)}$ gleich Null ist, wenn die Anzahl der Feldteilungen gerade ist.)

6. Größenordnungen der Verdrehungssteifigkeiten der Längs- und Querträger stimmen überein

Dieses Verfahren ist durchführbar durch Vereinigung des bisher Dargelegten auch bei aus mehreren Feldteilungen bestehenden Systemen, wo die Verdrehungssteifigkeit der Längs- und Querträger beinahe gleich sind. Zum Beispiel ein aus $n = 6$ Strecken bestehender, unregelmäßiger und asymmetrischer Fahrgestellrahmen wäre 18-fach unbestimmt.

Wird das Hauptsystem nach Abb. 3 angenommen, so treten zwei Unbekannte $\bar{X}_k^{(1)}$ und vier Unbekannte $\bar{X}_k^{(2)}$ im regelmäßigen System auf. Die Bestimmung der 0-Belastung kann nach Abschnitt 4 erfolgen (s. Abb. 8). Die für uns günstigeren Kräftegruppen werden wieder durch lineare Transformation erhalten. In Ausdrücken der Verschiebungsbeiwerte erhält man nun neue Glieder

der $\delta_{ik}^{(12)}$. Diese sogenannten gemischten Beiwerte bringen die Wechselwirkung der verschiedenartigen Kräftegruppen $X_k^{(1)}$ bzw. $X_k^{(2)}$ zum Ausdruck, und ihre Merkwürdigkeit ist, daß sie nur die Steifheit der Längsträger $\frac{1}{E} \frac{a}{J}$ enthalten.

Dies ist dem Umstand zu verdanken, daß die Wirkung der unbekanntenen Kräftegruppen auf die Trennung der Biegungs- und Torsionsbeanspruchungen in den einzelnen Trägerelementen berücksichtigt wurde. Unter Belastung $X_k^{(1)}$ entstehen in den Querträgern nur Biegebeanspruchungen, unter $X_k^{(2)}$ dagegen nur Torsionsbeanspruchungen. Der Längsträger erhält eine Verdrehung nur durch die Belastung $X_k^{(1)}$. Aus den zwei Belastungen entsteht eine gleiche Beanspruchung — Biegung — nur in den Längsträgern. Eine Wechselwirkung von Verschiebungen kommt ausschließlich infolge der Formänderung der Längsträger unter Biegung zustande, die in der Form der gemischten Beiwerte $\delta_{ik}^{(12)}$ mit $\frac{1}{E} \frac{a}{J}$ zum Ausdruck kommt.

Im allgemeinen Fall, wenn sowohl die Längs- wie die Querträger gegen Torsion Steifheit besitzen, kommen keine neuen Kennziffern der Steifheit in die Rechnung. Mit Hilfe der in Abschnitten 4 und 5 eingeführten

$$\frac{c^2}{a^2} B_c = \frac{c^2}{a^2} \frac{c/J_c}{a/J} ; \quad \frac{c^2}{a^2} D = \frac{a/J_t}{a/J} \frac{c^2}{a^2} ; \quad \text{und} \quad D_c = \frac{E}{G} \frac{c/J_{ct}}{a/J}$$

drei Steifheitskennziffern als Parameter sind Rahmen von allen möglichen Dimensionen zu bestimmen. Werden zusammengehörige Parameter in genügender Anzahl angenommen, so mögen die Beanspruchungen des Rahmens von regelmäßigem Leitertyp im vorhinein ermittelt und in Diagramm bzw. Tabellen zusammengefaßt werden. Man kann mit Hilfe der derart ermittelten numerischen Werte bei der Verfolgung der in der Einleitung festgesetzten Ziele und Aufgaben weiter kommen. Die Einfachheit der ermittelten Zusammenhänge bietet eine Möglichkeit, sie für die nötigen Schlußfolgerungen heranzuziehen.

Die Unregelmäßigkeit offenbart sich bei nicht regelmäßigen Trägern als ein die regelmäßige Beanspruchungsverteilung störender Umstand, der durch Zusatzberechnung berücksichtigt werden kann. Diese Zusatzberechnung beschränkt sich auf die Bestimmung der durch Störung hervorgerufenen Zusatzbeanspruchungen. Übrigens soll man nach Regelmäßigkeit streben, nicht nur mit Rücksicht auf die Beanspruchungen, sondern auch aus Gründen der Herstellungstechnologie. In den meisten Fällen ist die Abweichung von der Regelmäßigkeit so gering, daß der Rahmen — natürlich nach sorgfältiger Erwägung — als regelmäßig betrachtet werden kann, und die derart erhaltenen Beanspruchungen weichen von den tatsächlichen nur in zulässigem Maße ab.

SCHRIFTTUM

1. BERGMANN, W.: Spannung und Gestalt bei Knotenpunkten, insbesondere bei verwindungsfähigen Konstruktionen, Düsseldorf 1951. Heft 1. S. 61/67.
2. BERGMANN, W.: Die Gestaltfestigkeit von Lastfahrzeugrahmen, insbesondere bei Verwindungsbeanspruchungen. ATZ Bd. 57 (1955), S. 1/6 und 37/41.
3. EBERHORST, E.: Über die Torsionssteifigkeit des Fahrzeugrahmens. ATZ Bd. 54 (1952) S. 161/162.
4. ERZ, K.: Über die durch Unebenheiten der Fahrbahn hervorgerufene Verdrehung von Straßenfahrzeugen. ATZ Bd 59 (1957). Heft 4, 6, 11, 12.
5. FLÜGGE, W.: Bemerkungen zur Theorie statisch unbestimmter Systeme. ZAMM. Bd. 15 (1935) S. 365/66.
6. ГЕЛЬФГАТ Д. Б. и ОШНОКОВ В. А.: Рамы грузовых автомобилей. Москва 1959 г.
7. HANKE, M.: Festigkeitsprobleme der Kraftfahrzeugrahmen. Kraftfahrzeugtechnik, Bd. 11, (1961). Heft 1. S. 15.
8. PETUR, A.: Festigkeit von Flugzeugen (Repülőgép szilárdságtan). Budapest, 1952.
9. RUDNAI, G.: Theorie des Leichtbaues. Periodica Polytechnica. Maschinen- und Bauwesen Vol. 2, No. 4, Budapest, 1958.
10. SCHARITZ, E.: Festigkeitslehre für den Leichtbau. Düsseldorf 1951.

PROBLEMS OF STRESS CONCENTRATION IN AIRCRAFT FATIGUE

E. W. C. WILKINS*

Introduction

The problem of metal fatigue has been with us for more than a hundred years: in fact, as we are consciously aware of it, since 1829, when ALBERT [1] a German mining engineer, carried out repeated-loading experiments on wrought-iron mine-hoist chains, which he had noted broke with a fracture not normally characteristic of static failures in wrought iron.

Twenty years later, a commission was set up by the British Government to investigate fatigue in railway structures, and in 1952 the French Government appointed a commission for a similar purpose.

It was about this time that WÖHLER, in Germany, began a systematic study of railway axle failures and also designed the first proper fatigue testing machine — the rotating-bending machine with which we are now all so familiar.

In 1930, the French Government decided to include fatigue tests in aircraft materials specifications. Specific reference is made to this because it will be referred to again later in this paper.

Since those early times, a considerable amount of work on fatigue has been done by investigators all over the world, and our knowledge of the subject has grown considerably, both experimentally and theoretically. It is, however, only since the end of World War II that fatigue has shown itself to be a serious problem in *aircraft* design.

It is not difficult to explain this. During the early postwar period there appeared a number of new types of civil transport, the main characteristics of which were larger size, greater speed, and longer operating lives. The increased size of these aircraft led, not unnaturally, to a demand for greater structural economy; this was achieved partly by more efficient detail design and partly by the use of stronger materials. The increased speed and longer operating lives of those aircraft meant, however, that they were subjected during their lifetime to a larger total number of atmospheric gusts which, we now know, are

*By: E. W. C. WILKINS, M. A. (Oxon.), B. Sc., F. R. Ae. S., A. F. I. A. S., F. B. I. S. M. Soc. Fr. de Mét., M. O. R. S. A., M. Meteor. Soc. Head, Aeronautical Consultants & Co., 1 New Square, Lincoln's Inn, London, W. C. 2, England, and Director, Technical Editing and Reproduction Ltd., 95 Great Portland Street, London, W. 1, England

the chief contributing factor to aircraft structural fatigue — at least so far as the primary structure of the wings and tail unit are concerned. Unfortunately, these new materials, although *statically* stronger than the earlier ones, showed little if any improvement in *fatigue* strength in the applicable region of the $S - N$ curve, and so it transpired that a structure designed in the new materials with increased *static* strength showed little if any improvement in fatigue strength, and actually in some cases even showed a *reduction* in *fatigue strength*.

Reference was just made to atmospheric gusts as being the main cause of fatigue in the primary structure of the wings and tail unit. A great deal of work has been done in recent years in the determination of gust intensities and frequencies [2, 3], and we know now that the frequency (although not generally the intensity) of gusts decreases with increasing altitude, the conditions in the stratosphere, for example, being relatively calm. This, of course, is one of the advantages of stratospheric flight, and there is probably no doubt that large civil transport aircraft of the future will perform most of their flying in the stratosphere as a matter of routine. However, this will not entirely solve the problem, for, in climbing to reach the stratosphere, and then in descending at the end of its flight, an aircraft will still have to spend a proportion of its time at the lower altitudes, where the frequency of gusts is worst, and so the problem remains with us to an extent.

As has already been said, a tremendous amount of data on fatigue have been acquired since the days of ALBERT and WÖHLER. Most of this information, however, refers to experiments carried out on relatively simple specimens — generally in steel or iron, and under conditions which, unfortunately from the aircraft designer's point of view, are quite unrepresentative of those obtaining in a practical aircraft structure. For one thing, the material for the primary structure of a modern aeroplane is mainly aluminium alloy; for another, its component details, far from being simple, are frequently very complex in form and contain many built-in stress concentrations. Again, an aircraft structure is subjected not to simple reversed stresses, as is the case — or at least as used to be the case — with ordinary laboratory specimens, but rather to a complex system of cycles of different frequencies and magnitudes, all superimposed about a mean stress which is rarely, in fact, zero. Consequently, the end of World War II marked the beginning of a new period in the history of fatigue testing — one might even call it the "aircraft-fatigue era", in which many new and complex difficulties presented themselves, and although since then metallurgical progress in the development of new materials has without doubt moved rapidly apace, it would probably be true to say that in its application to aircraft design this has most certainly not been the case.

The main object in this paper is to discuss certain of the more serious of these difficulties, and it is proposed to do this under the following headings:

1. The generally poor fatigue characteristics of the newer, high-strength aluminium alloys;
2. The extreme sensitivity of these high-strength alloys to the presence of a notch;
3. The large scatter which fatigue tests always show.

These headings cover, of course, only the metallurgical aspect of the subject; the field of detail design is an equally important one, however, most especially — from the fatigue point of view — in the matter of eliminating, or at least minimizing, the effect of stress concentration, and we shall have something to say about this also.

1. The development of new aircraft materials

Let us start then by saying something about the difficulties which the aircraft designer has experienced, arising from the poor fatigue characteristics of the newer aluminium alloys, for there is no doubt that the metallurgist could produce something better from the point of view of the aircraft designer, if he were given a clue as to just what the latter wanted, and this at least should not be too difficult.

First of all, so that we may start with a clear picture of the situation, we will look at a comparison between the fatigue strength of one of the most widely used materials in the early days of light alloy construction, viz., duralumin (an aluminium alloy containing about 4% copper) with a mild steel having

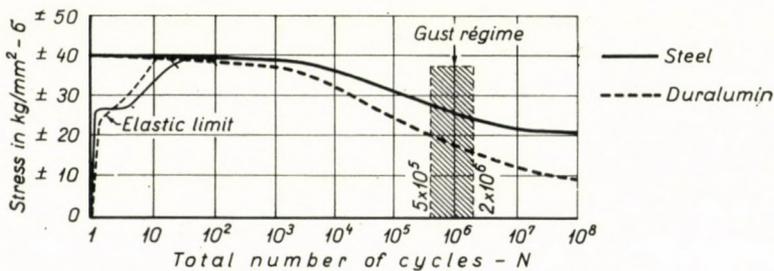


Fig. 1. Typical $S-N$ curves for steel and duralumin

the same ultimate static strength, viz., 40 kg/sq mm. This is done in Figure 1, from which it will be seen that the picture already starts a little gloomily inasmuch as the fatigue strength of the duralumin is everywhere less than for the steel. The $S-N$ curves in Figure 1 are for polished bar rotating-bending specimens subjected to completely reversed stress cycles. The region relevant to the main aircraft fatigue problem, shown by the two vertical lines, is from about half a million to two million cycles, and it is interesting to note that the fatigue strength in this region is not very different from the static yield

strength; this means that a structure in duralumin, designed on the basis of yield strength, would be good in fatigue for at least the right order of cyclic stresses, and for the earlier and smaller aircraft, with not such long operating lives, might well have been reasonably satisfactory. Not entirely though, because these curves take no account of any reduction in fatigue strength due to stress concentration, but more will be said about this later.

In the years that followed, the aircraft designer, as has already been said, began to look for stronger materials. Meanwhile, the metallurgists had already produced stronger aluminium alloys, and these were, quite naturally, seized upon by the aircraft designer. Before long, we had aluminium alloys with an ultimate strength of about 48 kg/sq mm. For some years yet, however — and this is quite an important point — the problem of fatigue in aircraft design had not arisen in any very serious way; primary structure was still designed mainly from static considerations, and the new alloys, 20–25% stronger than the earlier ones, more or less filled the need of the day. Things rarely remain stationary, however, and aircraft became still larger, speeds increased still further, competition became yet greater, forcing the aircraft designer to look for even stronger materials. Again the metallurgist met the need, and a new series of aluminium alloys became available.

First we had alloys with ultimate strengths of about 55 kg/sq mm, and before long the very high-strength aluminium alloys having an ultimate strength of the order of 60 to 70 kg/sq mm. These high strengths, between one-and-a-half and twice as much as those of the earlier copper-type duralumins, were obtained mainly by the addition of zinc and magnesium as alloying elements, and of course by special heat treatment.

By now, fatigue had become a really serious problem in aircraft design, due, as has already been said, to increased size, speed, and operating life. It was found however, unfortunately, that the increased strength of the new aluminium alloys was obtained only statically, or at least at relatively low numbers of cycles. At large numbers of cycles — of the order of say one or two million, which would correspond with the life of the primary wing structure of these larger and faster aircraft, these alloys were little if any better than the older types of duralumin. This is shown by the curves in Figure 2, which are for a duralumin bar — the copper-based aluminium alloy, an improved version of duralumin, and two of the newer, zinc-based aluminium alloys, in all cases for unnotched specimens. A structure designed on the basis of static yield strength of the newer alloys would now certainly not be strong enough in fatigue. This is clearly seen for example, in the case of, say, the material DTD 363, by drawing a horizontal line across from the yield stress of this material to cut the $S - N$ curve, from which it will be seen that the structure in this case — reading from the curve — is good for only 20,000 or so cycles; in order to produce a structure in this material which would be satisfactory from a fatigue point

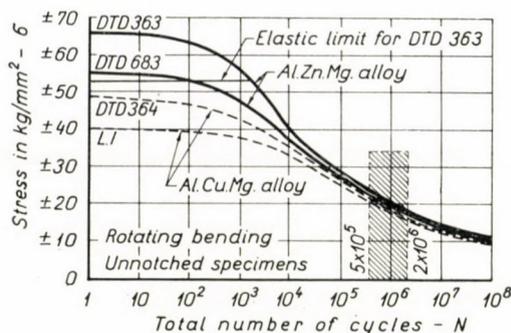


Fig. 2. Typical S—N curves for two copper-based aluminium alloys and two zinc-based aluminium alloys

of view the aircraft designer is forced to work to a static yield stress which is uneconomically low — *e. g.*, in the case just considered, considerably less than one-half of the yield strength. This virtually destroys the value of using the newer materials, except perhaps for components of the structure which are only subjected to a relatively small number of cycles, such as the undercarriage for example, and even here the situation is a doubtful one, because of the increased notch-sensitivity of these new materials, which is the next matter which we shall discuss.

Obviously, what the aircraft designer wants here is a material which will have considerably better *large-cycle* fatigue strength, even if this has to be at the expense of the very high static strength.

2. Stress concentration

The next point that needs to be discussed is stress concentration, and the extreme notch-sensitivity of the high-strength aluminium alloys in the presence of a stress concentration.

Structural failures — and this is especially true of fatigue failures — are more often due to the presence of stress concentrations, or 'stress raisers', as they are often referred to, than to faulty material or poor basic design. This is not to say, however, that either the material, or the design, is completely free from blame. The material, though not faulty in the sense of the quality of its manufacture, may yet have poor intrinsic fatigue characteristics — rendered poorer perhaps by the presence of a stress raiser, while the design, though basically good, may well be poor in its detail concept — it may, for example, have stress concentrations which are unnecessarily severe. Unfortunately, the complex structures of modern times just cannot be made entirely free from stress concentrations, and so all we can do is to design the detail parts of an article in such a way, and then to manufacture them from such

suitable material, that at least the effects of such stress concentrations as are inevitable will be reduced to a minimum. A better appreciation, therefore, of the way in which such stress-raisers affect the strength of the part should lead to an improvement in the detail design of a component and, consequently, in its fatigue life. These remarks then are addressed both to the metallurgist, to whom we look for materials with improved fatigue characteristics in the presence of a stress-raiser, and to the designer, who should do everything he can to produce a design in which the effect of stress concentration has been reduced to a minimum.

Stress concentration is a term which has been well understood by metallurgists and engineers for a long time; by it we mean the local concentration of stress which occurs in the region of holes, grooves, fillets, etc. The high stress in such regions often considerably exceeds the yield stress of the material, while the average stress in the part may be well below it, and it is at such points of localized high stress that a fatigue failure may begin.

The effect of a stress-raiser on the fatigue strength may be considered in two parts: primarily, there will be a reduction in fatigue strength due to the stress concentration which occurs in the immediate vicinity of the notch; the extent of this reduction in fatigue strength, however, will depend not only on the actual intensity of the stress concentration — which will depend, in turn, on the form and size of notch, and also, in fact, on the size of the part — but also on the way in which the material itself will react to the changed stress distribution in the region of the notch. Some materials, for example, are more sensitive to the presence of a notch than others (such materials are said to be more “notch-sensitive”), so that for an identically similar notch one material may suffer a greater reduction in fatigue strength than another. It is unfortunate, in this respect, that some of the higher-strength materials which have become available to the aircraft designer in recent years have turned out, as has already been remarked, to be more notch-sensitive than the earlier ones; this may well have been because the metallurgist has not perhaps been properly aware of what the aircraft designer really wanted in his materials. This is a point which will be referred to again later in this paper; in the meantime we shall just briefly review the quantities used in the subject of stress concentration in aircraft fatigue, viz., stress concentration factor, fatigue stress concentration factor, and notch-sensitivity factor, and then consider the effects of material and of detail design on them.

Stress-concentration factor

Consider first a simple flat plate subjected to a tensile load P , as shown in Figure 3. If the area of the cross-section is A , the stress is uniform and its value is

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

If the plate is notched (Fig. 3), the stress will clearly become more concentrated in the region of the plate in the way of the notches. There is, in fact, a small increase in *average* stress across the section here, due to the fact that the load P now has to pass across a slightly smaller cross-section than before, but this, of course, is not what we mean by stress concentration. A is depicted in the Figure, where the closeness of the lines of stress flow is intended to indicate

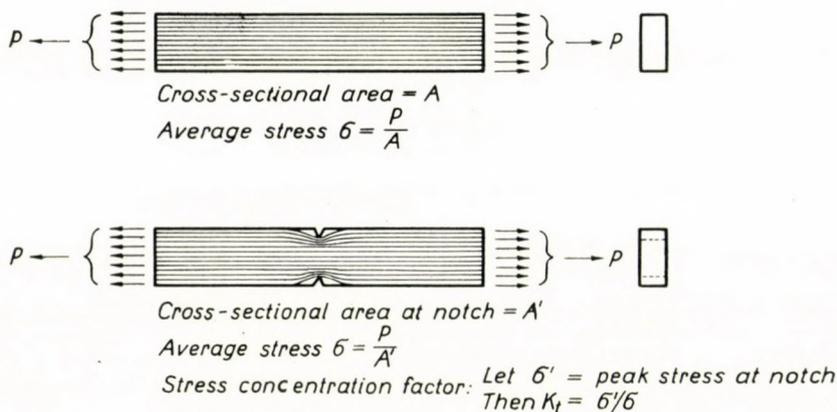


Fig. 3. Stress concentration factor

stress intensity, there is a much higher *local* concentration in the immediate neighbourhood of the notches. If we denote the peak value of the high stress here by σ' , then the ratio of this to the average stress is called the stress concentration factor; it is denoted by K_t , *i. e.*

$$K_t = \frac{\sigma'}{\sigma}$$

The local value of the stress σ' can be obtained in some cases, as we well know, from theory; in other cases it can only be found by experiment, *e. g.*, photoelastically; in either case, however, it is based on the usual assumptions of elasticity, *i. e.* on Hooke's law and on conditions of homogeneity, and because of this K_t is sometimes referred to as the theoretical stress concentration factor. It is clear that the value of σ' must depend on the shape and size of the notch; for this reason, K_t is also sometimes referred to as the geometric stress concentration factor. Frequently, however, it is referred to simply as the stress concentration factor, without further qualification.

The theoretical stress concentration factors for three kinds of stress-raiser, viz. (a) a hole, (b) a semi-circular notch, and (c) a shoulder fillet, for various sizes of the stress-raiser, are given by the curves in Figures 4, 5 and 6.

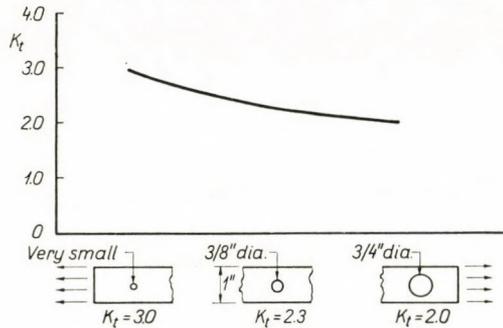


Fig. 4. Theoretical stress concentration factor for a single hole. Bar in tension

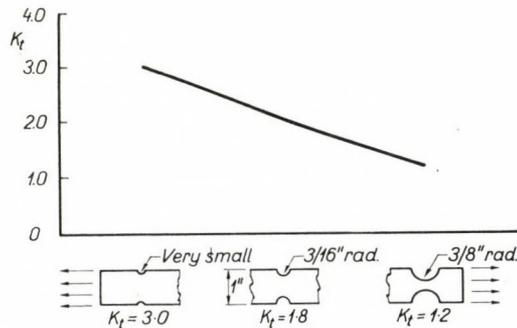


Fig. 5. Theoretical stress concentration factor for a semi-circular notch. Bar in tension

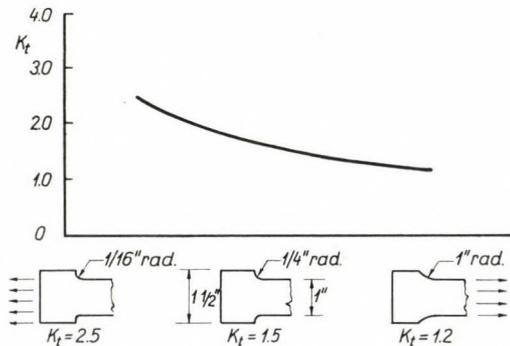


Fig. 6. Theoretical stress concentration factor for a circular fillet. Bar in tension

It will be noted that the larger the notch (as all kinds of stress-raisers are frequently referred to) in relation to the size of the part, *i. e.* the more gradual the change in section, the smaller the stress concentration factor, as we would expect.

Fatigue-stress concentration factor

The stress concentration factor K_t is a purely theoretical quantity appropriate to the application of a static load, and is, by itself, in no way related

to the fatigue properties of the material. It is interesting to note in passing that in the case of a simple static load a stress raiser may sometimes increase the strength. In fatigue, unfortunately, it always has an adverse effect, and the fatigue strength is reduced. This reduction in fatigue strength is, however, not in direct proportion to the value of the stress concentration factor. Fortunately, it is generally less. For example, the *theoretical* stress concentration factor in a particular case might be, say, 4 — which would mean that the maximum local value of the stress would be 4 times the average stress, if Hooke's law held throughout, but the fatigue strength might be reduced to only one-half, and not to one-quarter, as one might at first wonder. The reason for this is that the material in the immediate vicinity of the notch will in actual fact have become plastic, with consequent re-distribution of stress, before such high stresses are reached as would be suggested by the theoretical value of the stress concentration factor. The percentage reduction in fatigue strength in this hypothetical case, and in fact generally, is thus less than the percentage local increase in stress calculated on the theoretical basis of elasticity. In order to state this quantitatively, we use another factor which we call "fatigue-stress concentration factor", sometimes simply called "fatigue factor". This is denoted by K_f and is defined as follows:

$$K_f = \frac{\sigma}{\sigma_n}$$

where

σ = fatigue strength of unnotched specimen

and

σ_n = fatigue strength of notched specimen.

Generally speaking, for the reasons just given, K_f will be numerically less than K_t , but its actual value will depend on the material itself. In a brittle material, for example, as opposed to a ductile one, there will not be so much plastic flow in the vicinity of the notch, and therefore not so much re-distribution of stress: the maximum stress reached will be higher, and K_f for the brittle material will be greater, and the fatigue strength therefore lower, even though the notches may be identical geometrically. We say that the brittle material is more notch-sensitive than the ductile material. This is illustrated in Figure 7, which gives values of K_f for two different aluminium alloys, the one a relatively ductile alloy, the other a brittle one.¹

Notch-sensitivity factor

We have just seen that the effect of a notch on the fatigue strength of a part depends not only on the form and size of the notch, but also on the material; that some materials are, in fact, more sensitive to the presence of a notch than others. Gray cast iron, for example, is almost entirely insensitive to a

notch and the presence of one has hardly any effect at all on the fatigue strength.

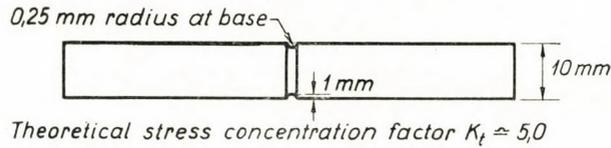


Fig. 7. Fatigue factor for two aluminium alloys in rotating bending

Endurance at 50×10^6 cycles :

1. Material: DTD. 390

- (a) Unnotched specimen $\pm 15.2 \text{ kg/mm}^2$
 - (b) Notched specimen $\pm 6.6 \text{ ,, ,,}$
- $K_f = 15.2/6.6 = 2.3$

2. Material: DTD. 363

- (a) Unnotched specimen $\pm 18.1 \text{ kg/mm}^2$
 - (b) Notched specimen $\pm 6.0 \text{ ,, ,,}$
- $K_f = 68.1/6.0 = 3.0$

It is not really possible to define this feature of notch sensitivity in absolute terms. A convenient way of quantitatively expressing it which is used, however, is as follows:

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1}$$

where q is defined as the notch-sensitivity factor.

This has the advantage of providing at least a rough guide to the relative merits of various materials from this aspect. It will be noted that if $K_f = 1$ (as is almost the case for gray cast iron, for example), $q = 0$, i. e. the material is completely notch-insensitive. If $K_f = K_t$ (a possibility under certain conditions), then $q = 1$, i. e. the material is fully notch-sensitive.

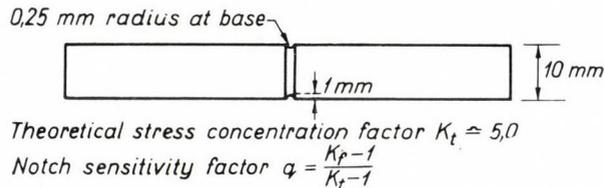


Fig. 8. Typical notch sensitivity factors for a notched bar in rotating bending

Material	Endurance at 50×10^6 cycles kg/mm ²		Fatigue factor factor (K_f)	Notch sensitivity factor (q)
	Unnotched	Notched		
DTD 363	± 18.1	± 6.0	3.0	.50
DTD 364	± 15.2	± 6.0	2.5	.35
DTD 330	± 15.2	± 6.6	2.3	.33
L. I.	± 11.8	± 5.7	2.1	.27

Figure 8 gives the notch-sensitivity factors, calculated in this way, for a number of materials. It will be seen that some are very poor in fatigue if a notch is present.

Figure 9 shows a set of $S-N$ curves for notched specimens, including one for a typical aircraft joint, with the $S-N$ curve for an aluminium alloy bar

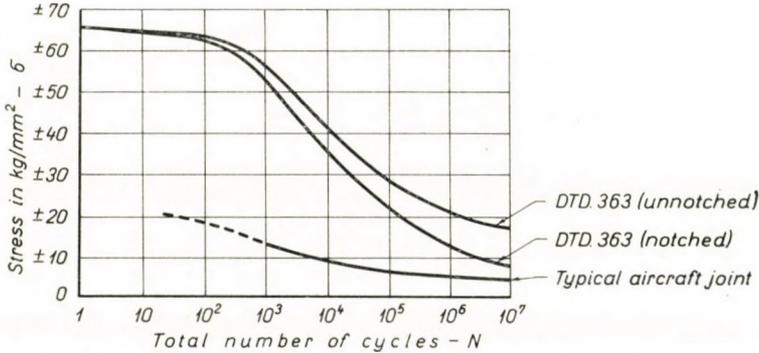


Fig. 9. Typical $S-N$ curves for notched specimens

again for comparison. It will be seen how far we have got now from the basic strength of the plain material.

Obviously, what the designer wants here are stronger materials which are no more notch-sensitive than the less strong ones.

3. Scatter

The third major point is concerned with scatter, the effects of which are, to the aircraft designer, really serious. One of the characteristic phenomena of fatigue is the enormous scatter in life of individual specimens which are otherwise, at least within the limits of design and manufacture, identical. This scatter is considerably greater than we get in static tests. In the laboratory, the amount of scatter will depend to an extent on the care with which

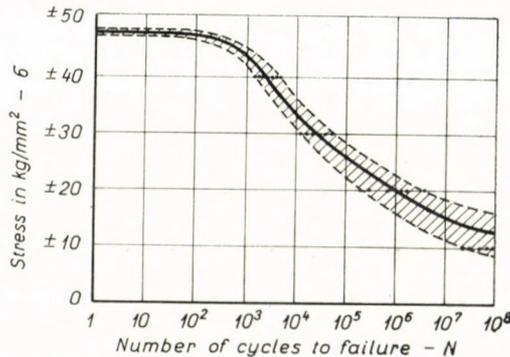


Fig. 10. Typical scatter of fatigue test results for an aluminium alloy

specimens are prepared and on the control exercised during the tests; the testing machine also may contribute to it considerably. With plain specimens, a scatter of 100 : 1 in life is quite common (see Figure 10). The presence of a notch seems to reduce scatter, but even with a notched specimen a scatter of 10 : 1 is quite typical, even with built-up specimens. Because of this, it is customary at present to take the safe life of an aircraft component as about one-third the average (in usual British practice, this is based on the logarithmic mean of about six tests [4]). Statistically this means that there should be a 1000 : 1 chance against failure in fatigue. Unfortunately, however, even this presents a rather optimistic view of the situation, for, as pointed out recently by W. TYE [4] and A. P. KENNEDY [5], because of the inadequacy of the information that a limited number of tests can provide, even with this estimate there is a large chance (namely 1 in 10) that the safe life corresponding to a 1000 : 1 chance against failure will be only one-sixth the average, instead of one-third. Another point that has to be taken into consideration is that, in the case of large components, such as a complete wing for example, and especially in the case of a whole aircraft, it is, on the score of both expense and time, impracticable to test more than one specimen, in which case it is virtually impossible to estimate the life with any high degree of confidence.

The British practice referred to above, viz., of estimating, with a given degree of confidence, the life of a structural component during which failure from fatigue will not occur, is known as the "safe-life" philosophy. There is another point philosophy extant — especially in America, in which failures in an individual part of the primary structure are permitted, provided that they can be found by inspection before the strength of the structure is reduced below a specific safe value. It is considered that incipient fatigue cracks are inevitable, and in this method (known as the "fail-safe" method) the structure is designed so that such cracks are prevented from propagating to the extent where they would become serious.

It is not part of the purpose of the paper to discuss the relative merits of these two philosophies. As pointed out recently by Sir Arnold HALL [6], each approach no doubt has its merit, and which one is adopted should perhaps depend on such factors as the role of the aeroplane and on the facilities available for proper inspection. There is in fact probably room for both methods, not only in different aeroplanes, but also in the same aeroplane.

What the aircraft designer wants here is simple — a material which will show less scatter.

Application of photoelasticity

As has already been said, the stress concentration can be calculated in some cases from theory. In the majority of instances which occur in practice, however, this is quite impossible and in such cases resort must be made to

experiment. There are, as is well known, a number of methods by which this may be done, but of them all, photoelasticity is one which is possibly at the same time the simplest and most readily available day to day technique.

A combined photoelastic fatigue programme of work which the author had the privilege to initiate some years ago in London, under the auspices of the Royal Aeronautical Society, will now be described. This research is concerned with the fatigue strength of bolted joints.

The inspiration for this work came from an analysis which the author had made of some axial-load fatigue tests on bolted joints that had been carried out by the N. A. C. A. in America [7]. The interesting result that came out of

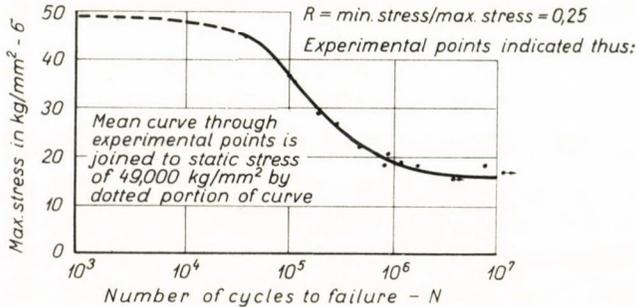


Fig. 11. S-N curve for basic material

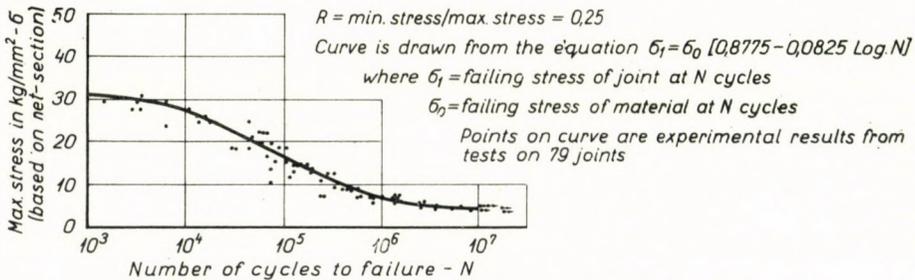


Fig. 12. S-N curve for a single-bolt lap joint in 0.102 inch thick aluminium alloy plate

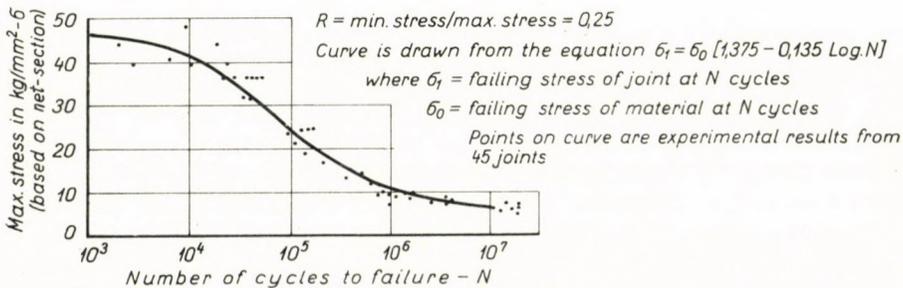


Fig. 13. S-N curve for 2 and 3-bolt lap joints in 0.102 inch thick aluminium alloy plate

this analysis was that if the ratio of the fatigue strength of the basic joint plate to that of the complete joint was defined by the quantity K_t (an analogous concept to that for a simple notched specimen), for the two end points of the range only, then it was possible to obtain a simple expression for the fatigue strength of the joint for a range of endurance from one thousand to ten million cycles — a relationship which fitted the whole series of experimental results reasonably well [8]. Figures 11, 12 and 13 show the results of this analysis. Figure 11 is the $S-N$ curve for the basic material. Figure 12 is the endurance curve for tests on 79 single-bolt lap joints in 0.102 inch thick aluminium alloy plate. Figure 13 is the $S-N$ curve for tests on 45 multi-bolt lap joints. These curves are not, incidentally, average curves drawn through the experimental points: the curves were, in fact, drawn first — from the K_t relationship obtained, and the experimental points superimposed afterwards.

The experimental programme which it was decided to launch at this stage consisted of two parts [8, 11]: one, a programme of photoelastic tests for the purpose of determining the stress distribution [9, 11]; the other, a parallel programme of metal fatigue tests on geometrically similar specimens [10, 11]. The object was to correlate the results of the two and obtain a relationship between the stress concentrations and the fatigue strength. The whole of this part of the programme is shown diagrammatically in Figure 14. In the photoelastic tests, the stress distribution has been obtained for a series of plates under various conditions: first for a specimen with an unfilled hole, then for the case where the hole was filled with a pin. Several sizes of hole and pin, and various degrees of pin fit, were investigated. In the case of the filled holes, three values of the ratio of Young's modulus for the pin and for the plate were incorporated, of approximately 1, 3 and 30, the first two to represent the cases of light alloy bolts and steel bolts respectively, in light alloy plate, the third being just an extra point on the curve. In some of the tests load was applied to the plate only, in others to the pin only, and in other tests to both plate and pin simultaneously. The last condition was intended to be preliminary to an extension of the programme to the case of multi-bolt joints. The initial series of photoelastic tests is completed and some of the results have been published [11–16]; the metal tests are still being done.

Incidentally, quite a large number of specimens are involved in this programme. So that the results can be analyzed statistically, there are 10 tests for each of about six points of any one endurance curve, including 10 static tests, so that altogether there will be from 10 000 to 15 000 specimens tested in the initial programme alone. Now it often happens in axial-load fatigue testing that a large percentage of the specimens fail in the fillets, due to the increased stress concentration that occurs here. We wished to avoid this in what was clearly already going to be an expensive programme. Furthermore, it was also very desirable in an investigation of this kind that the only stress

FATIGUE STRENGTH OF BOLTED JOINTS

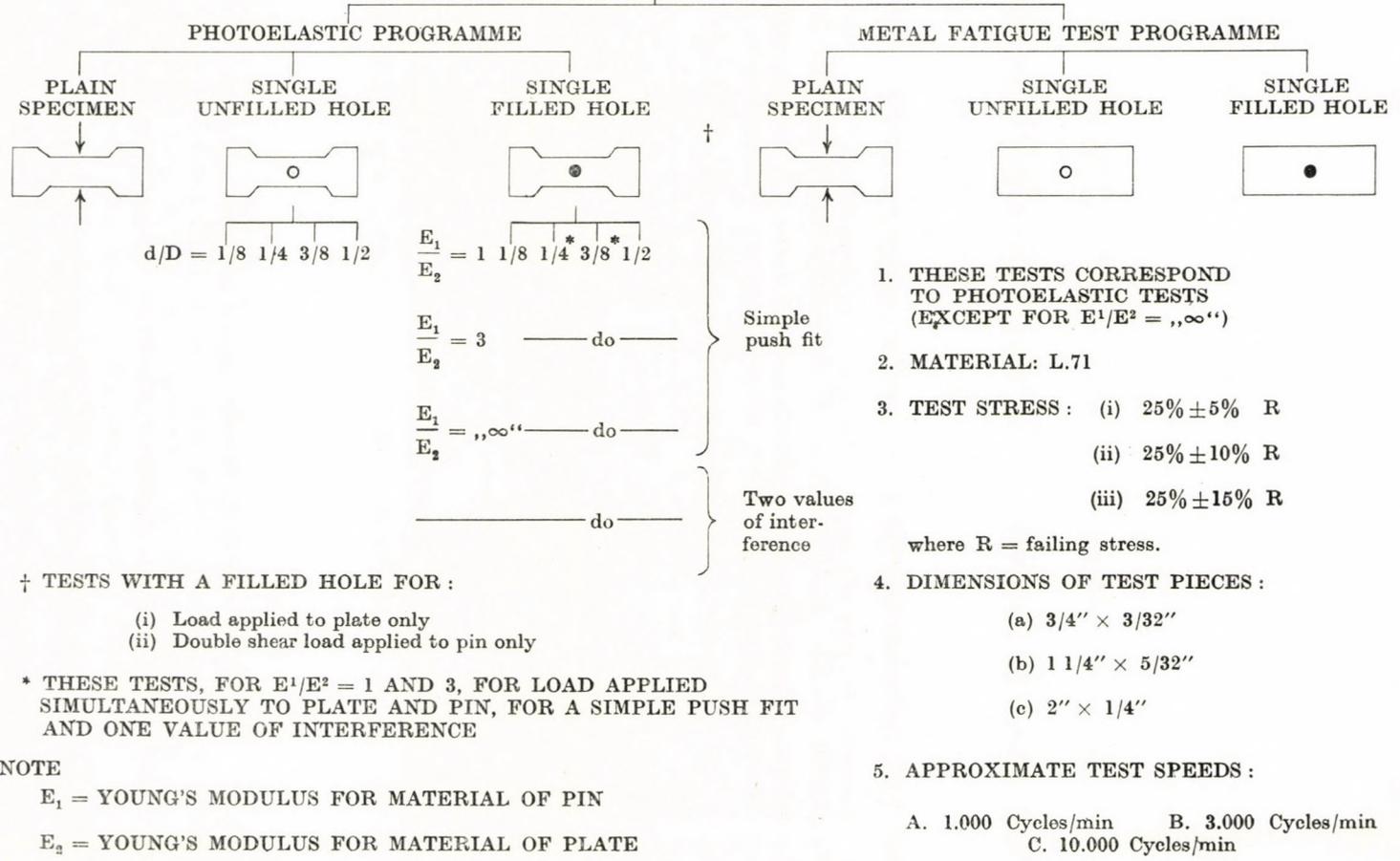


Fig. 14. Preliminary test programme in connection with the fatigue strength of bolted joints

concentrations should be those arising only from the joint itself, if the results were to be capable of being analyzed afterwards. Also, as was said earlier, it is hoped to be able to apply some statistical analysis to the results, although with only ten tests for each point this will obviously be somewhat limited. It was felt then that as large a volume as possible of the material of any single specimen should be involved in the test, requiring therefore a specimen in which the

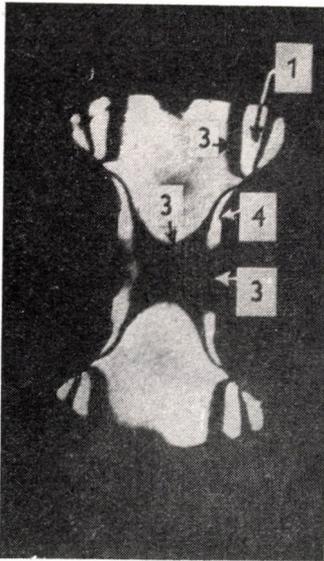


Fig. 15

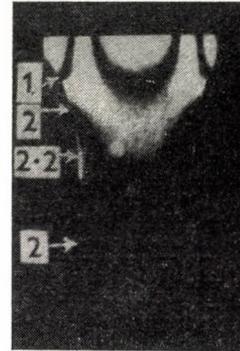


Fig. 16

test section should be parallel and long. Thus, right at the outset we were provided with an excellent opportunity of putting the photoelastic technique to good practical use in providing — for the metal tests — a basic specimen which would fulfil these requirements, and we took advantage of it. The results of this preliminary investigation are illustrated in Figures 15 and 16. Figure 15 shows the stress distribution for a short specimen, typical of the kind that is often used in fatigue testing. As will be seen, it starts off, unfortunately, with stress concentrations up to 4.0. Figure 16 shows the stress distribution for the case of a 2 inch radius circular fillet: in this, the maximum concentration

is 1.1, and occurs in the fillet. It also shows the finally developed specimen, in which the transition fillet between the parallel portion and the enlarged end takes the form of a sine-curve [11, 17, 18]. The stress-concentration in the fillet is, for all practical purposes, just 1.00. The fillet need not actually be a sine-curve: any mathematical curve which has zero rate of change of curvature at the transition point will do, and by suitable proportioning of the axes it is possible to achieve a value of the stress concentration factor in the fillet of even less than 1.0. It will be seen in Figure 16, in fact, that the second order of fringe is just beginning to appear at the edge of the parallel portion of the test piece while the fringe in the fillet is still of the first order.

Results of photoelastic tests

A brief summary of the results of these photoelastic tests will now be given.

1. Plate with single unfilled hole : load applied to plate[12]

The tests done in this case were for holes of $1/8$, $1/4$, $3/8$ and $1/2$ the width of the plate. Figure 17 shows how the stress concentration factor varies with the relative size of the hole. Araldite was used for the specimens and the tests

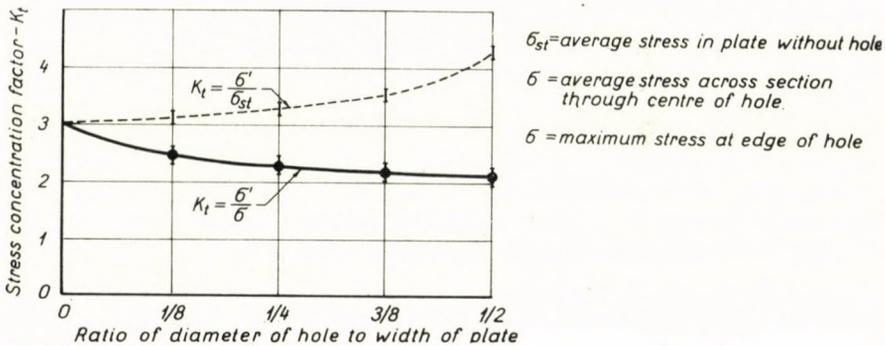


Fig. 17. Stress concentration factor for a plate with hole

were carried out with considerable care: the accuracy of the results is considered to lie between $\pm 2\%$ in the case of the largest hole and $\pm 5\%$ for the smallest hole.

2. Plate with single hole having a push-fit pin : load applied to plate[13]

In these tests, the test-piece was again made from Araldite, the pin being made from (a) Araldite, (b) a specially prepared Bakelite, and (c) brass. This gave three values of the ratio of Young's modulus of pin to modulus of

plate of 30, 2.15, and 1.0 respectively. The stress concentration factors for this case are given in Figure 18, from which it will be seen that they are everywhere slightly smaller than for the case of a plain hole.

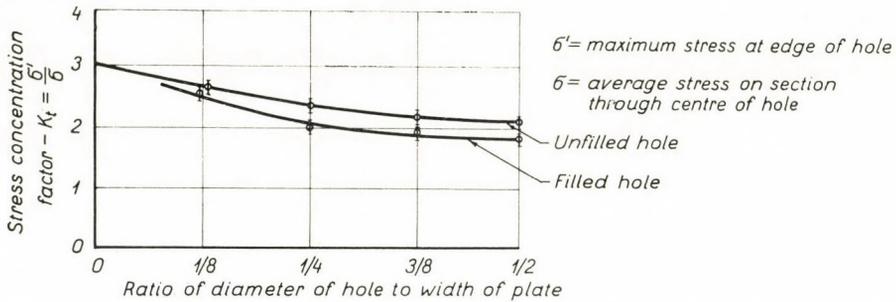


Fig. 18. Stress concentration factors on transverse diameter for filled holes. Pin with zero interference fit. Load applied to plate

3. Plate with single hole having an interference-fit pin : load applied to plate[14]

These tests were similar to those in which the pins were a push-fit, except that in this series the pins were given interference fits corresponding to initial stresses at the boundary of the hole of up to about 35 kg/sq mm.

The stress concentrations in this case were found to depend on the degree of interference as well as on the size of hole. Figure 19 shows the variation

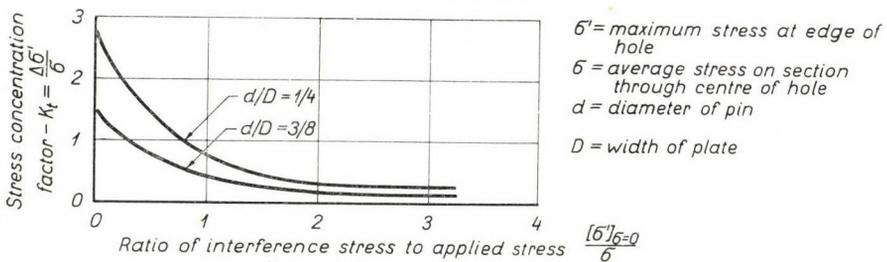


Fig. 19. Stress concentration factors for filled holes. Pins with interference fit. Load applied to plate

of stress concentration factor with interference stress and size of hole: the upper curve applies to the smallest hole and the lower curve to the largest hole tested. These particular curves relate to a point at the boundary of the hole, on a transverse diameter.

4. Plate with single filled hole : push-fit and interference-fit pins : load applied to pin[15]

In these tests it was found that there are high concentrations also at points on the hole boundary in a direction at 45° with the transverse diameter. The curves in Figure 20 show how the stress concentration factor varies with inter-

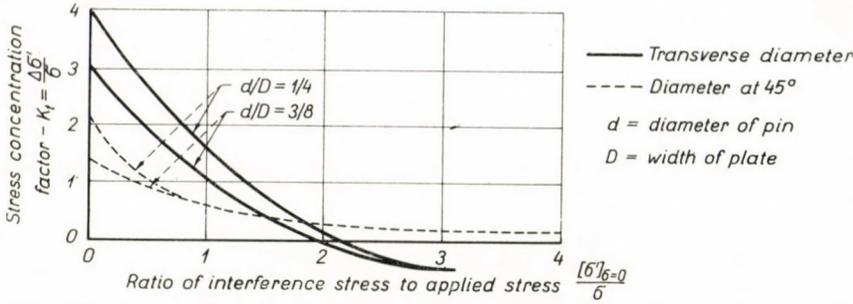


Fig. 20. Stress concentration factors for filled holes. Pins with interference fit. Load applied to pin

ference stress, for one of the holes: (a) on a transverse section; (b) on a section at 45° to this.

5. Plate with single filled hole: push-fit and interference-fit pins : load applied simultaneously to plate and pin[16]

It was found from these tests that the stress concentration factors for the combined-load condition lie between those for the separate pin-load and

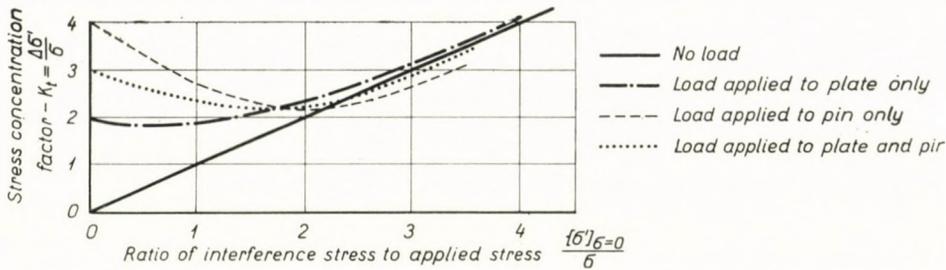


Fig. 21. Stress concentration factors for filled holes. Transverse diameter ($d/D = 1/4$)

plate-load cases. Figure 21 shows the variation of stress concentration factor for this case, and also gives a comparison with the separate pin-load and plate-load cases, for the transverse section.

6. "Frozen-stress" techniques

The photoelastic tests described so far in this paper are essentially 'two-dimensional' ones; they are eminently suitable for the determination of the stress distribution in thin plates, but give only approximate results if the plate is thick. This latter is a 'three-dimensional' problem, for which the now well known 'stress-freezing' photoelastic technique may be used. The frozen-stress method has the advantage that it can give the complete stress distribution in a solid body; its main drawbacks are that it is expensive and that the analysis of the results requires considerably more time, and skill, than in the case of thin plate tests.

Recently, the Royal Aeronautical Society sponsored what is perhaps the most comprehensive three-dimensional investigation of the stress distribution in tubes with transverse holes ever undertaken. Cylindrical tubes having transverse holes are commonly used in aircraft structures, and often these are subjected to large loads. Previous work on this type of problem has been restricted to the case of holes in solid bars, and even this is incomplete. The R. Ae. S. sponsored tests were intended to obtain a complete and systematic set of data covering the entire range of tube size, wall thickness, and hole diameter likely to occur in practice, for axial loading, bending, and torsion. The results clearly demonstrate the inadequacy of previous tests.

In all cases, the maximum stress seems to occur at the inside of the bore of the tube, whereas previously emphasis appears to have been laid on the surface stress. The tests also show that previous estimates of the stress concentration factor are possibly a little high in the case of axial loads, but low for the case of torsion, this latter being because earlier investigators did not measure peak stresses. Another interesting result from the tests is that the stress concentration factors do not follow similar trends in the three types of loading, *i. e.* axial, bending, and torsion, as previous results on solid bars had suggested, so that it is not possible to make deductions for one type of loading from results obtained for either of the others.

This programme of tests is described very fully in an article by JESSOP *et alii*, to which the reader is referred [19].

Conclusion

Reference was made at the outset to the fact that as far back as 1930 the French Government decided to include fatigue tests in their aircraft materials specifications. There is certainly no connection, but it was in that same year that the present author also suggested, in an article written on fatigue at that time [20], that the fatigue strength should be included in the actual material specifications, along with the other mechanical properties. It has been felt by some that there would be difficulties in doing this, although possibly these have been exaggerated. There is little doubt that it would provide an extremely valuable guide to the prospective user — to the aeronautical designer in particular. To be of greatest use the information should be included for both plain and notched specimens. It would not be necessary to include a complete $S-N$ curve; figures for say 10 or 20 million cycles in the case of steels, and 50 or 100 million cycles for light alloys, would probably suffice. There is one difficulty, arising from the large scatter in fatigue test results, and that is the question of how many tests should be done to provide this information. As a suggestion, the figures could be the average of, say, a hun-

dred tests. The form and size of notch for the 'notched' fatigue figure could be agreed upon with aeronautical or other engineers: probably a 60° V-notch providing a theoretical stress concentration factor of about 4 or 4.5 would be about right.

In conclusion, it might be useful to summarize the five points which have been emphasized in this paper:

1. The aircraft designer needs a material with considerably better large-cycle fatigue strength than the present high-strength light alloys of the copper-magnesium-zinc type have, even if this has to be at some expense of the static strength;

2. Equally as great a need is a reduction in the notch sensitivity of these materials;

3. A reduction in the scatter of test results, if this could be achieved, would be as valuable as an increase in the nominal fatigue strength of the material itself;

4. The inclusion in the material specification of the fatigue strength of the material, at say 10 or 20 million cycles for steels and 50 or 100 million cycles for light alloys, for both plain and notched specimens;

5. An extended use of photoelasticity, especially of the 'frozen stress' method, to determine peak stress concentrations in the early design stages would, without question, pay ample dividends.

Whether the first four suggestions can be brought about by varying the percentages of existing alloying elements, or by the addition of new ones, or by variation in the heat treatment, or by some combination of all three, can best be left to the metallurgist. In any case it is not likely to be a simple task, and in making the proposals the author is fully conscious of having chosen the easier part of the task. There is no doubt, however, that the aircraft designer would be unreservedly appreciative of anything that could be done along these lines.

As to the fifth point — concerning the extended use of photoelasticity, it is pleasing to note that, in Britain anyway, considerable interest is now being shown in this idea, an interest which will certainly grow during the next few years.

Acknowledgements

I should like to express my grateful appreciation to the Royal Aeronautical Society and also to University College London, for kindly providing me with the facilities for the preparation of this paper.

REFERENCES

1. ALBERT: "Albert's Experiments and Inventions." *Stahl und Eisen*, June 15, 1896, pp. 438—441
2. TAYLOR, J.: "Measurement of Gust Loads in Aircraft." *Journal of the Royal Aeronautical Society*, February 1953

3. TAYLOR, J.: "Gusts and Their Measurement." *Journal of the Royal Aeronautical Society* December 1954
4. TYE, W.: "The Outlook on Airframe Fatigue": Second Barnwell Memorial Lecture, Royal Aeronautical Society, April 1955
5. KENNEDY, A. P.: "A Method of Determining the 'Safe' Life of an Aircraft Wing from Fatigue Test Results." *Journal of the Royal Aeronautical Society*, May 1954
6. HALL, SIR ARNOLD A.: "Some Comments on Current Aviation Topics" (Twentieth Wright Brothers Lecture). *Journal of the Aeronautical Sciences*, March 1957
7. JACKSON, L. R. et alii: "The Fatigue Characteristics of Bolted Lap Joints of 24S-T Alclad Sheet Materials." NACA TN 1030
8. WILKINS, E. W. C.: "Notes on the Fatigue Strength of Joints." Royal Aeronautical Society Fatigue Report No. 1 (Issue 2), May 1953
9. WILKINS, E. W. C.: "Proposals for Initial Photoelastic Programme in connection with the Fatigue Strength of Bolted Joints." Royal Aeronautical Society Fatigue Report No. 2, June 1953
10. WILKINS, E. W. C.: "Proposed Initial Programme of Research on Metal Fatigue, in connection with the Fatigue Strength of Bolted Joints". Royal Aeronautical Society Fatigue Report No. 6, April 1954
11. WILKINS, E. W. C., JESSOP, H. T.: "A Photoelastic/Fatigue Programme of Experimental Research in connection with Bolted Joints". *Journal of the Royal Aeronautical Society* (Technical Note), June 1954
12. JESSOP, H. T., SNELL, C., JONES, I.: "Results of Photoelastic Investigation of Stresses in a Tension Bar with Unfilled Hole." *Journal of the Royal Aeronautical Society* (Technical Note), January 1955
13. JESSOP, H. T., SNELL, C., HOLISTER, G. S.: "Photoelastic Investigation in connection with the Fatigue Strength of Bolted Joints (Tension Bar with Hole having a Push-Fit Pin with Load Applied to Plate Only)". *The Aeronautical Quarterly*, August 1955
14. JESSOP, H. T., SNELL, G., HOLISTER, G. S.: "Photoelastic Investigation of Plates with Single Interference-Fit Pins with Load Applied to Plate Only". *The Aeronautical Quarterly*, November 1956
15. JESSOP, H. T.: "Results of Photoelastic Investigation of Stresses in Bolted Spar Joints — Filled Hole, Load Applied to Pin Only". Royal Aeronautical Society Fatigue Report No. 16, December 1956
16. JESSOP, H. T.: "Results of Photoelastic Investigation of Stresses in Bolted Spar Joints — Filled Hole, Simultaneous Loads on Pin and Plate". Royal Aeronautical Society Fatigue Report No. 17, February 1957
17. WILKINS, E. W. C.: "A Summary of Some Current Fatigue Problems Now under Investigation". Conference of the Committee on Aeronautical Fatigue, January 1955
18. STAMBLER, IRWIN: "Comet Crashes Spur Fatigue Research". *Aviation Age*, May 1955
19. JESSOP, H. T., SNELL, C., ALLISON, I. M.: "The Stress Concentration Factors in Cylindrical Tubes with Transverse Circular Holes". *The Aeronautical Quarterly*, November 1959
20. WILKINS E. W. C.: "Fatigue". *Journal of the Institute of British Engineers*, May 1930

LIGHT CONSTRUCTIONS
STAHLKONSTRUKTIONEN
СТАЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

DIE STABILITÄTSUNTERSUCHUNG GEDRÜCKTER DÜNNWANDIGER STÄBE

Ö. CSELLÁR und O. HALÁSZ

Der Verwendung dünnwandiger Konstruktionselemente im Stahlbau verlangt von Statikern die Durchführung solcher Stabilitätsuntersuchungen, die bei der Verwendung der konservativen Konstruktionselemente (Normal- oder dickwandige Profile) gar nicht nötig sind. Man soll nämlich neben der üblichen Knickberechnung auch die Biegedrillknickungs-, Kippungs- und Beulungsberechnungen durchführen. Diese Berechnungen sind in der Literatur u. a. in den Arbeiten [1, 2, 3] schon eingehend behandelt worden, wenigstens für den elastischen Bereich. Doch sind die Ergebnisse, die in der Literatur zu finden sind, für die Zwecke des einheimischen Brücken- und Hochbaues kaum anwendbar, da die Grundprinzipien (Dimensionierung auf Grund der Grenzspannung, Knicklastberechnung auf Grund einer Anfangskrümmung, usw.) der einheimischen Vorschriften von den Grundprinzipien der genannten Literatur ziemlich abweichen. Dadurch, daß die einheimischen Vorschriften für die Knickberechnung des geraden Stabes eine gewisse Anfangskrümmung vorschreiben, wird das Stabilitätsproblem in ein Gleichgewichtsproblem überführt. Dies ist das Problem des exzentrischen Druckes, das durch eine Theorie zweiter Ordnung behandelt werden soll. Also, anstatt des kritischen Wertes der Druckkraft wird man die Grenzknickkraft P_{KH} benutzen, die dadurch gekennzeichnet ist, daß sie in der äußersten Faser des gefährlichen Querschnittes die Grenzspannung hervorruft. Durch eine geeignete Wahl der Anfangskrümmung kann man erreichen, daß die durch die Formel $\sigma_{KH} = P_{KH}/F$ definierte Knickgrenzspannung ein Wert ist, der unabhängig von der Querschnittsgestalt ist und sich nur aus der Schlankheit des Stabes berechnen läßt. Die Kritik dieses Verfahrens, sowie die Aufzählung seiner Unvollkommenheiten sind aus der Literatur bekannt und werden hier nicht angeführt. Nur sein Vorteil sei hier erwähnt, der darin besteht, daß seine Anwendung jene Unbestimmtheit, welche im plastischen Bereich entsteht, schon von vornherein eliminiert.

In den ungarischen Vorschriften ist eine Anfangskrümmung nur für die gewöhnliche Stabilitätsuntersuchung des gedrückten Stabes vorgeschrieben. Hiedurch wird es wohl verständlich, daß die ungarischen Forscher bestrebt

sind, denselben Weg auch bei der Lösung anderer Stabilitätsprobleme zu verfolgen. So z. B. auf dem Gebiete der Beulungs- und Kippungsprobleme waren Ö. CSELLÁR, E. ÉLIÁS, O. HALÁSZ und F. HUNYADI tätig [4], [5], [6], [7].

Das Ziel der vorliegenden Abhandlung ist, das Biegedrillknickproblem des gedrückten Stabes unter der Berücksichtigung der Anfangskrümmung zu lösen. Dabei wird ein konstanter symmetrischer Querschnitt und eine gabelartige Stützung vorausgesetzt.

Bezeichnungen

l	die theoretische Länge des Stabes (cm)
F	die Querschnittsfläche des Stabes (cm ²)
J_y	das auf die y -Achse bezogene Trägheitsmoment des Querschnittes (cm ⁴)
J_ω	der auf den Schubmittelpunkt bezogene Wölbwiderstand (cm ⁶)
J_D	der Drillwiderstand (cm ⁴)
J_p und \bar{J}_p	das auf den Schwerpunkt bzw. Schubmittelpunkt bezogene polare Trägheitsmoment (cm ⁴)
y_ω	die Ordinate des Schubmittelpunktes (cm)
$i_p = \sqrt{\frac{J_p}{F}}$ und $i_\omega = \sqrt{\frac{\bar{J}_p}{F}}$	die polare Trägheitsradien (cm), wobei $i_\omega^2 = i_p^2 + y_\omega^2$ ist
ω	die Einheitsverwölbung (cm ²)
E	der Elastizitätsmodul (kg/cm ²)
G	der Schubmodul (kg/cm ²)
Ω	das Zeichen für den Schubmittelpunkt
S	das Zeichen für den Schwerpunkt

Der Strich bedeutet eine Differentiation nach x , z. B. $\frac{d\varphi}{dx} = \varphi'$.

Die Theorie

Den nachstehenden Erörterungen ist das in die Abb. 1 eingezeichnete Koordinatensystem zugrunde gelegt. Dem Charakter der gestellten Aufgabe

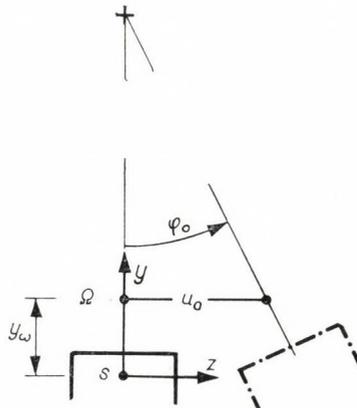


Abb. 1

entsprechend, sei die Anfangskrümmung durch die Anfangslage $u_0 = u_0(x)$ des Schubmittelpunktes und durch den Drehwinkel $\varphi_0 = \varphi_0(x)$ des Quer-

schnittes angegeben. Diese sind also die »Formänderungen« des unbelasteten Stabes. Die zentrische Druckkraft ruft weitere Formänderungen hervor. Somit wird die Verschiebung des Schubmittelpunktes $u_0 + u$ und der Drehwinkel des Querschnittes $\varphi_0 + \varphi$. Zuzufolge des Gleichgewichtes der äußeren und inneren Kräfte sind die Momentsummen

$$\begin{aligned} M_y^i + M_y^a &= 0 \\ M_x^i + M_x^a &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

M_y bedeutet das auf die y -Achse bezogene Biegemoment (die y -Achse ist die Symmetrieachse), M_x ist das Torsionsmoment. Wie man sieht,

$$M_y^a = P[u_0 + u + y_\omega(\varphi_0 + \varphi)]. \quad (1a)$$

Das Moment der Normalspannungen ist

$$M_y^i = E J_y u''. \quad (1b)$$

Das Torsionsmoment der äußeren Kräfte setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Der erste Teil wird durch die Scherkraft $T = P(u_0' + u')$ hervorgerufen und läßt sich durch die Formel

$$M_x^{a1} = T y_\omega = P(u_0' + u') y_\omega \quad (1c)$$

ausdrücken. Der zweite Teil entsteht daraus, daß die Längsfasern zufolge der Verdrehung des deformierten Querschnittes eine Schrägstellung annehmen

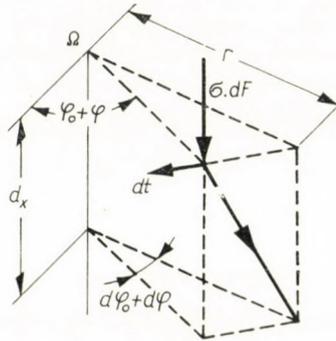


Abb. 2

(Abb. 2), und so die in die Querschnittsebene fallenden Kraftkomponenten $dt = \sigma(\varphi_0' + \varphi') r dF$ entstehen. Diese liefern den Torsionsmomentbeitrag

$$M_x^{a2} = \int_F r dt = \int_F \sigma(\varphi_0' + \varphi') r^2 dF = \sigma(\varphi_0' + \varphi') J_p = P(\varphi_0' + \varphi') i_\omega^2. \quad (1d)$$

Das Torsionsmoment der inneren Kräfte ist, wie es leicht zu sehen ist,

$$M_x^i = EJ_\omega \varphi''' - GJ_D \varphi'.$$

Unter der Benützung der soeben erhaltenen Formeln läßt sich die Formel (1) wie folgt anschreiben:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y u'' + Pu + Py_\omega \varphi &= -Pu_0 - Py_\omega \varphi \\ EJ_\omega \varphi''' - GJ_D \varphi' + Pu' y_\omega + P\varphi' i_\omega^2 &= \\ &= -Pu'_0 y_\omega - P\varphi'_0 i_\omega^2 \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Was die Annahme der Anfangskrümmung anbelangt, wollen wir, ebenso wie es in der Theorie der ebenen Knickung üblich ist, voraussetzen, daß die durch die Druckkraft hervorgerufene Formänderung mit der »Formänderung« des unbelasteten Stabes affin ist.

Die Formänderung, die die Knickung charakterisiert, ergibt sich als die Lösung des homogenen Teiles der Gleichungen (2), d. h. wenn dort $u_0 = \varphi_0 = 0$ gesetzt wird. Diese Lösung lautet

$$u = a \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$\varphi = b \sin \frac{\pi x}{l}$$

wobei a und b beliebig sind, nur ihr Verhältnis ist gebunden. Werden nämlich diese Funktionen in (2) eingesetzt und wird man dann durch $\sin \frac{\pi x}{l}$ dividieren, so erhält man die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} -EJ_y \frac{\pi^2}{l^2} a + Pa + Py_\omega b &= 0 \\ -EJ_\omega \frac{\pi^2}{l^2} b - GJ_D b + Pa y_\omega + Pb i_\omega^2 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3a)$$

Der Einfachheit halber führen wir die Bezeichnungen

$$P_y = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2} \quad (4)$$

und

$$P_\omega = \frac{1}{i_\omega^2} \left(\frac{\pi^2 EJ_\omega}{l^2} + GJ_D \right) \quad (5)$$

ein. P_y gehört zur ebenen Knickung um die y -Achse, P_ω gehört zur Drill-

knickung, und beide haben den Charakter einer Knickkraft. Die Verwendung dieser Bezeichnungen führt die Gleichungen (3) in die Gestalt

$$\left. \begin{aligned} (P_y - P)a - P y_\omega b &= 0 \\ -P \frac{y_\omega}{i_\omega^2} + (P_\omega - P)b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

über. Diese Gleichungen haben dann und nur dann Lösungen, die nicht alle gleich Null sind, wenn die Gleichung

$$(P_y - P)(P_\omega - P) - P^2 \frac{y_\omega^2}{i_\omega^2} = 0 \quad (3c)$$

erfüllt ist. Hieraus folgt die kritische Druckkraft des geraden Stabes:

$$P_{1,2} = \frac{i_\omega^2}{2i_p^2} (P_y + P_\omega) \pm \sqrt{\frac{i_\omega^4}{4i_p^4} (P_y + P_\omega)^2 - P_y P_\omega \frac{i_\omega^2}{i_p^2}}. \quad (6)$$

Damit sind zwei Werte errechnet. Der kleinere, den wir mit P_1 bezeichnen wollen, wird in den nachfolgenden Erörterungen zur Ermittlung des Vergleichschlankheitsgrades verwendet. Wird P_1 in (3b) eingeführt, so ergeben sich die Werte

$$b = \frac{P_y - P_1}{P_1 y_\omega} a \quad (7a)$$

$$a = \frac{P_\omega - P_1}{P_1} \frac{i_\omega^2}{y_\omega} b. \quad (7b)$$

Die affine Anfangskrümmung

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= a_0 \sin \frac{\pi x}{l} \\ \varphi_0 &= b_0 \sin \frac{\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ist also möglich nur wenn die Verhältnisse

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= \frac{P_y - P_1}{P_1 y_\omega} a_0 \\ a_0 &= \frac{P_\omega - P_1}{P_1} \frac{i_\omega^2}{y_\omega} b_0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

bestehen. Wird (8) in (2) eingeführt, und werden die Bezeichnungen (3), (4), (5) benützt, so entstehen die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (P_y - P)a - P y_\omega b &= P a_0 + P y_\omega b_0 \\ - P \frac{y_\omega}{i_\omega^2} a + (P_\omega - P)b &= P a_0 \frac{y_\omega}{i_\omega^2} + P b_0 \end{aligned} \right\} \quad (10a)$$

oder, mit Rücksicht auf (9),

$$\left. \begin{aligned} (P_y - P)a - P y_\omega b &= \frac{P P_y}{P_1} a_0 = \frac{P}{P_1 y_\omega} (P_\omega i_\omega^2 - P_1 i_p^2) b_0 \\ - P \frac{y_\omega}{i_\omega^2} a + (P_\omega - P)b &= \frac{P P_\omega}{P_1} b_0 = \frac{P}{P_1 y_\omega} \left(P_y - P_1 \frac{i_p^2}{i_\omega^2} \right) a_0 \end{aligned} \right\} \quad (10b)$$

Hieraus werden a und b berechnet. Ferner nimmt man in Betracht, daß die Determinante des Systems, zufolge der Beziehung (6), in der Gestalt

$$(P_y - P)(P_\omega - P) - P^2 \frac{y_\omega^2}{i_\omega^2} = \frac{i_p^2}{i_\omega^2} (P_2 - P)(P_1 - P)$$

geschrieben werden kann, und dabei benützt man die Gleichung

$$P_1 P_2 = P_y P_\omega \frac{i_\omega^2}{i_p^2}.$$

In dieser Weise gelangt man zu den Werten

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 \frac{P}{P_1 - P} \\ b &= b_0 \frac{P}{P_1 - P} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Nun sind wir imstande die im Stab entstehenden Spannungen zu untersuchen. Diese Spannungen sind die folgenden:

- a) Normalspannungen σ_N , die aus der Normalkraft N entstehen,
- b) Normalspannungen σ_M , die aus dem Biegemoment M entstehen,
- c) Schubspannungen τ_T , die aus der Scherkraft T entstehen,
- d) Schubspannungen τ_D , die aus dem reinen Verdrehungsmoment M_D entstehen
- e) Normalspannungen σ_ω , die aus dem Wölbzwang W_ω entstehen,
- f) Schubspannungen τ_ω , die aus dem Wölbkrafttorsionsmoment M_ω entstehen.

Aus diesen Definitionen folgen unmittelbar die folgenden Formeln:

$$N \sim P \quad (12a)$$

$$M_y = EJ_y u'' \quad (12b)$$

$$T = \frac{dM_y}{dx} = EJ_y u''' \quad (12c)$$

$$M_D = GJ_D \varphi' \quad (12d)$$

$$W_\omega = EJ_\omega \varphi'' \quad (12e)$$

$$M_\omega = -\frac{dW_\omega}{dx} = -EJ_\omega \varphi''' \quad (12f)$$

Diese Beanspruchungen werden unter der Benützung der Beziehungen (3) berechnet. Die so berechneten Werte der Beanspruchungen sind in der Abb.

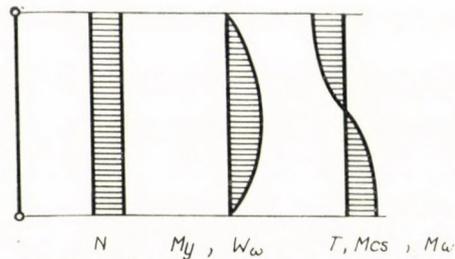


Abb. 3

3 veranschaulicht. Diese Abbildung zeigt, wie die Beanspruchungen sich entlang der Stabachse verändern. In dem maßgebenden mittleren Querschnitt entstehen nur N , M_y , W_ω . Aus diesen erhalten wir die Normalspannungen

$$\sigma_N = -\frac{P}{F} \quad (13a)$$

$$\sigma_M = \frac{M_y}{J_y} z = E u'' z \quad (13b)$$

$$\sigma_\omega = \frac{W_\omega}{J_\omega} \omega = E \varphi'' \omega \quad (13c)$$

Nach Einführung der Ausdrücke (3) und (11) erhält man für $x = \frac{l}{2}$

$$\sigma_N = -\frac{P}{F} \quad (14a)$$

$$\sigma_M = -E \frac{\pi^2}{l^2} z \frac{Pa_0}{P_1 - P} \quad (14b)$$

$$\sigma_{\omega} = -E \frac{\pi^2}{l^2} \omega \frac{P b_0}{P_1 - P}. \quad (14c)$$

Werden diese Werte summiert, so ergibt sich, unter Weglassung des Vorzeichens,

$$\sigma = \frac{P}{F} + E \frac{\pi^2}{l^2} \frac{P}{P_1 - P} (a_0 z + b_0 \omega). \quad (15)$$

Jetzt soll jener Punkt des Querschnittes aufgesucht werden, in welchem die Summe (15) ihren größten Wert annimmt. Um dies zu tun, fassen wir den in der Abb. 4 veranschaulichten Querschnitt ins Auge. Die Abbildung zeigt

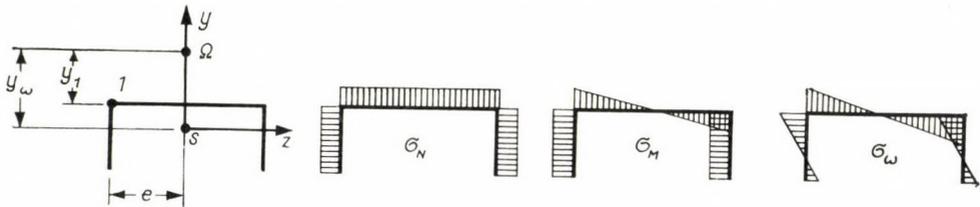


Abb. 4

auch die Verteilung der verschiedenen Spannungen. Maßgebend ist der Punkt 1. Daher soll

$$z = z_1 = e \quad \omega = \omega_1 = y_1 e$$

n die Formel (15) gesetzt werden. Dies führt zur Formel

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + E \frac{\pi^2}{l^2} \frac{P e}{P_1 - P} (a_0 + b y_1). \quad (16)$$

Der eingeklammerte Wert ist die auf die y -Achse senkrechte Anfangsexzentrizität, welche zufolge der Anfangskrümmung schon von vornherein besteht. Sie wird mit u_{10} bezeichnet (Abb. 1). (16) wird daher in der Form

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + E \frac{\pi^2}{l^2} \frac{P e}{P_1 - P} u_{10}. \quad (17)$$

geschrieben. Diese Gleichung ist geeignet zur Definition der Knickgrenzkraft: für $P = P_{KH}$ wird die größte Spannung gleich der Grenzspannung, d. h.

$$\sigma_{\max} = \sigma_H. \quad (18)$$

Es scheint zweckmäßig zu sein, statt P_{KH} den Wert

$$\sigma_{KH} = \frac{P_{KH}}{F} \quad (19)$$

einzuführen. Dieser Wert, der Grenzknickspannung heißt, soll also gesucht werden. Hierzu kann die Gleichung (17) verwendet werden, welche mit Rücksicht auf (18) und (19) in der Gestalt

$$\sigma_H = \sigma_{KH} + \frac{\pi^2 E}{l^2} \frac{\sigma_{KH}}{\frac{P_1}{F} - \sigma_{KH}} e u_{10} \quad (20)$$

geschrieben wird. Um die Aufgabe lösen zu können, müssen wir die Größe der Anfangsexzentrizität irgendwie annehmen. Die Vorschriften verlangen bei der ebenen Knickung den Wert

$$u_0 = c \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 k_y,$$

der sich auf den Schwerpunkt bezieht. In dieser Formel bedeutet k_y den Kernradius, der aus dem auf die y -Achse bezogenen Querschnittsmodul

$$K_y = \frac{J_y}{e} \quad (21)$$

durch die Formel

$$k_y = \frac{K_y}{F} \quad (22)$$

zu berechnen ist. Diese Formeln wollen wir für unsere Zwecke annehmen, und zwar mit einer kleinen Modifizierung, so daß wir

$$u_{10} = c \left(\frac{\lambda_y}{100} \right)^2 k_y \quad (23)$$

schreiben, und die Exzentrizität auf den Punkt 1 bezogen wird.

Wenn wir diese Annahme benützen und die in den Vorschriften übliche Verkürzung

$$\sigma_0 = c \frac{\pi^2 E}{100^2}$$

verwenden, erhalten wir für (20) die neue Form

$$\sigma_H = \sigma_{KH} + \frac{\sigma_{KH}}{\frac{P_1}{F} - \sigma_{KH}} \frac{e \lambda_y^2 k_y \sigma_0}{l^2}$$

oder, mit Rücksicht auf (21) und (22),

$$\sigma_H = \sigma_{KH} + \frac{\sigma_{KH}}{\frac{P_1}{F} - \sigma_{KH}} \sigma_0. \quad (24)$$

Und wenn der Vergleichsschlankheitsgrad λ_1 auf Grund der Formel

$$\frac{P_1}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_1^2} \quad (25)$$

eingeführt wird, gelangt man zur Formel

$$\sigma_H = \sigma_{KH} + \frac{\sigma_{KH}}{\frac{\pi^2 E}{\lambda_1^2} - \sigma_{KH}} \sigma_0, \quad (26)$$

woraus

$$\lambda_1^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{KH}} \frac{\sigma_H - \sigma_{KH}}{\sigma_H + \sigma_0 - \sigma_{KH}} \quad (27)$$

sicht ergibt. Dies ist die Beziehung, die geeignet ist zur Ermittlung jener Knickgrenzspannung σ_{KH} , welche zu dem Vergleichsschlankheitsgrad λ_1 gehört. Diese Formel hat dieselbe Gestalt, wie die auf die ebene Knickung gültige Formel der Vorschriften, nur λ_y soll darin durch λ_1 ersetzt werden.

Das Ergebnis unserer Erörterungen können wir also wie folgt zusammenfassen: Wird die auf die ebene Knickung vorgeschriebene Anfangsexzentrizität nicht auf den Schwerpunkt, sondern auf den oben definierten Punkt I bezogen, und wird statt λ_y der Vergleichsschlankheitsgrad λ_1 benützt, so läßt sich die Untersuchung der mit einer Drehung verknüpften räumlichen Knickung vermittels jener Beziehung (λ, σ_{KH}) durchführen, welche in den Vorschriften für die ebene Knickung angegeben ist.

Dieses Verfahren steht in Einklang mit den Vorschriften von DIN 4114. Der Vergleichsschlankheitsgrad λ_1 berechnet sich aus (6) und (25), und stimmt mit dem in DIN 4114 angegebenen Wert überein.

SCHRIFTTUM

1. BLEICH, FR.: Buckling strength of metal structures. Mc Graw-Hill Book Co. New York, 1952
2. BÜRGERMEISTER, G. und STEUP, H.: Stabilitätstheorie mit Erläuterungen zu DIN 4114. Akademie-Verlag, Berlin, 1957
3. Ягн, Й. И.: Изгибно-крутильные деформации тонкостенных стержней открытого профиля, Гостехиздат, Москва, 1952.
4. CSELLÁR, Ö. und ÉLIÁS, E.: Beulung von dünnen Platten im Falle einer Anfangskrümmung. (Ungarisch). Mélyépítéstudományi Szemle, Jg. 6, Nr. 5, 1956
5. CSELLÁR, Ö. und ÉLIÁS, E.: Voilement des plaques minces en cas d'une courbure initiale. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, 9, 1955
6. CSELLÁR, Ö. und HALÁSZ, O.: Die Verwendung der dünnwandigen Profile in der Bautechnik. (Ungarisch). Veröffentlichungen des Bauwissenschaftlichen Instituts zu Budapest, 1960
7. HUNYADI, F.: Die Kippung der Träger von konstantem oder veränderlichem Querschnitt. Veröffentlichungen der Universität für Bau- und Verkehrswissenschaft, Bd. 4, Nr. 1, 1958

STAHLROHRKONSTRUKTIONEN

V. DUNDROVÁ

C. SC., ČSAV-ÚTAM

Stahlrohrkonstruktionen haben gegenüber Konstruktionen aus üblichen Walzprofilen eine Reihe von Vorteilen, vor allem betragen die Gewichtersparnisse 30—40%. Infolge des niedrigen Gewichtes verringern sich selbstverständlich die Transportkosten und vereinfacht sich die Montage. Das geringere Gewicht ist besonders wichtig, wenn es sich um größere Spannweiten handelt. Die Rohre haben eine geringere Anstrichfläche als Profile offenen Querschnittes, weisen weniger für den Anstrich schwer zugängliche Stellen auf und sind deshalb widerstandsfähiger gegen Korrosion. Das runde Rohrprofil setzt dem Wind einen geringeren Widerstand entgegen als die üblichen Profile, was für die Bemessung von Masten und ähnlichen Konstruktionen, bei denen der Wind einen wesentlichen Teil der Belastung ausmacht, besonders wichtig ist. Bei einem Brand entsteht in den geschlossenen Rohren ein Überdruck, so daß Rohrkonstruktionen den Einwirkungen des Brandes besser widerstehen als Tragwerke aus übrigen Walzprofilen. Das schöne Aussehen der Rohrkonstruktionen fällt besonders bei Ausstellungshallen, Sporthallen, öffentlichen Gebäuden u. a. ins Gewicht. Ein Nachteil sind vorläufig die verhältnismäßig hohen Material- und Bearbeitungskosten, so daß trotz hoher Gewichtersparnisse der Gesamtpreis der Rohrkonstruktionen üblicher Ausführung nur um etwa 10—15% niedriger ist, als der von Tragwerken aus üblichen Walzprofilen. In Einzelfällen aber kann die Wirtschaftlichkeit beträchtlich größer sein (zum Beispiel bei Rundfunk und Fernsehmasten); dagegen können in ungünstigen Fällen die Rohrkonstruktionen auch teurer sein. Heute werden in der ČSSR cca 5000 t Stahlkonstruktionen aus nahtlosen Rohren hergestellt. Bis zum Jahre 1965 soll die Erzeugung auf den vierfachen Wert ansteigen. In diesem Referat werden wir uns mit einigen Ergebnissen befassen, die auf Grund theoretischer Untersuchungen und Versuchen an Rohrkonstruktionen in der ČSSR, wo diese Konstruktionen bereits eine langjährige Tradition besitzen, erzielt wurden.

Stahlrohrkonstruktionen unterscheiden sich von anderen gegliederten Tragwerken aus gewalzten Profilen hauptsächlich dadurch, daß die Stäbe meistens ohne Knotenbleche durch unmittelbares Verschweißen der Rohrwände verbunden werden. Dadurch entsteht eine sehr steife Verbindung.

Es handelt sich also darum, die tatsächliche Tragfähigkeit der Schweißverbindung festzustellen. Zudem haben Rohre einen beträchtlich größeren Trägheitshalbmesser als z. B. Winkelprofile gleichen Querschnittes (ungefähr den doppelten), sind verdrehungssteif und haben ungefähr eine doppelt so große Plastizitätsreserve wie das I Profil.

Bei unseren Untersuchungen haben wir uns mit folgenden Problemen beschäftigt:

1. Knoten von Rohrfachwerken,
2. Knicklänge der Stäbe von Rohrfachwerken,
3. Ausnützung der Plastizität von Rahmenträgern aus Stahlrohren.

1. Knoten von Rohrfachwerken

Wie bereits gesagt, werden die Stäbe von Rohrkonstruktionen meistens durch unmittelbares Verschweißen der Rohre verbunden. Abb. 1 zeigt einige charakteristische Knoten, Abb. 2 ein Beispiel eines ausgeführten Knotens. Beim Vergleich der Vorschriften und Gepflogenheiten der Knotenausbildung

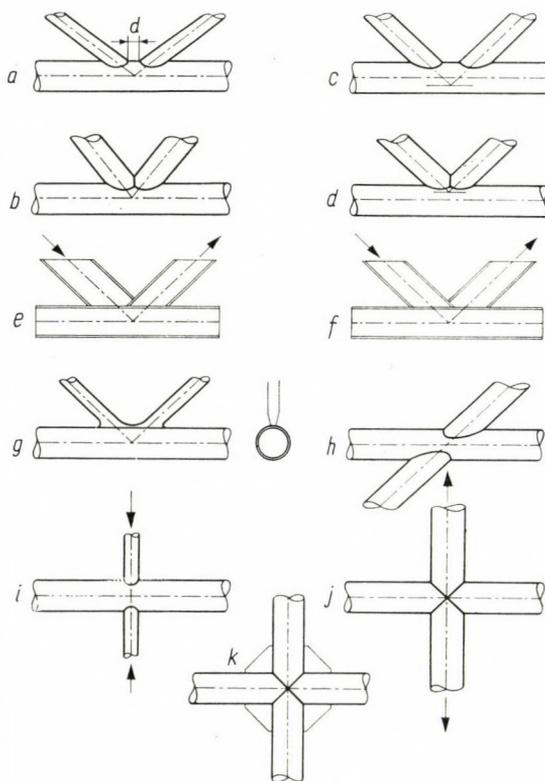


Abb. 1. Beispiele verschiedener Knotenpunkte

in verschiedenen Ländern erkennt man, daß sie sich voneinander beträchtlich unterscheiden. Das betrifft hauptsächlich den Anschluß sich übergreifender, gezogener und gedrückter Diagonalen, unterschiedlichen Durchmessers. Nach den deutschen DIN Vorschriften wird der gezogene Stab voll an den Gurt angeschlossen, der gedrückte Stab wird an den Gurt und die gezogene Diagonale angeschlossen und zu diesem Zwecke mit 2 Schnitten angearbeitet (Abb. 1e). Der Grund für diese Ausführung ist, daß die Schweißnaht des gezogenen Stabes möglichst lang sein soll. Der Nachteil ist, daß der Teil des gezogenen Stabes,

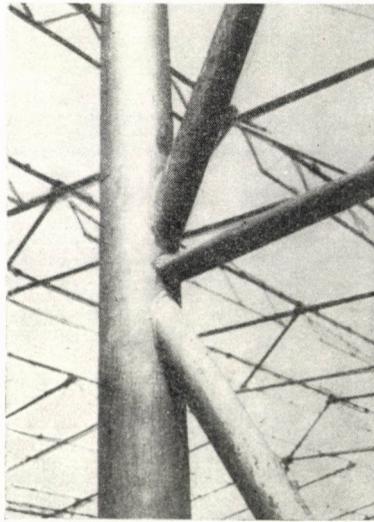


Abb. 2. Beispiel eines ausgeführten Knotenpunktes

der vom gedrückten Stab überdeckt wird, schon beim Heften voll angeschweißt werden muß, und daß die Bearbeitung des gedrückten Rohres verhältnismäßig schwierig ist, da dieser Stab gewöhnlich einen größeren Durchmesser hat. In England ist der umgekehrte Vorgang üblich. Zuerst wird der gedrückte Stab, dessen später nicht zugänglicher Teil nicht voll angeschweißt werden muß, angeschlossen und mit ihm und dem Gurt wird der durch 2 Schnitte bearbeitete Zugstab verbunden (Abb. 1f). In der ČSSR werden beide Verbindungsarten verwendet bzw. oft werden beide Stäbe mit zwei Schnitten angearbeitet.

In Deutschland werden außerdem Anschlüsse mit positiver oder negativer Excentrizität verwendet (Abb 1c und 1d), um entweder das Überdecken der Stäbe zu vermeiden oder es zu erzielen. Damit die Rohre nicht auf Sonderanrichtungen bearbeitet werden müssen, verwendet man auch Rohre mit flach zusammengedrückten Enden (Abb. 1g).

Außer dem Anschluß der Diagonalen an den Trägergurt kommt auch das Kreuzen von Stäben vor, wobei die angeschlossenen Rohre gezogen oder gedrückt sind (Abb. 1h, 1i, 1j bzw. 1k). Nach den deutschen Vorschriften dürfen gezogene Rohre nur auf $\frac{S}{F} 0,65$ der zulässigen Beanspruchung ausgenutzt werden. Eine 90%ige Ausnützung darf nur dann in Betracht gezogen werden, wenn das Werk einen Spezialtechnologien besitzt. Im Gegensatz hierzu, gestatten die englischen Vorschriften die volle Ansnützung der zulässigen Spannung. In der ČSSR rechnen wir, wie in England, mit dem vollen Werte der Tragkraft, was bei unserer langjährigen Anwendung noch zu keinen Unzuträglichkeiten geführt hat. Schon aus diesen kurz angeführten Grundsätzen für Ent-

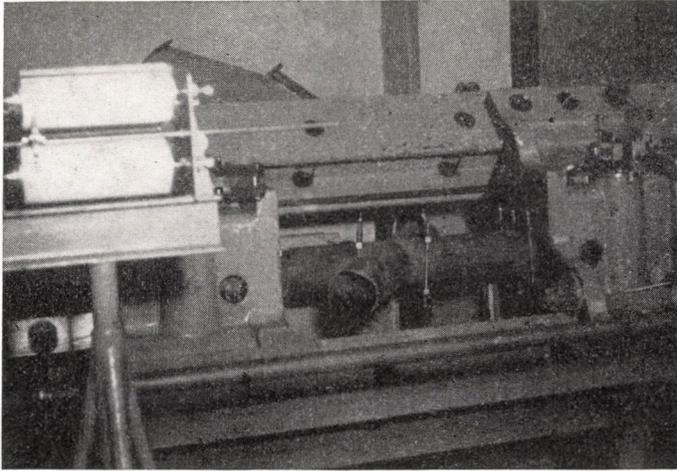


Abb. 3. Der Versuchskörper in der Prüfmaschine

wurf und Ausführung von Fachwerkknoten aus Rohren geht es hervor, daß dieses Problem recht schwierig ist. Das ganze Problem der geeigneten Anordnung des Knotens zur Erzielung seiner größten Tragfähigkeit wird noch durch die Beachtung der Herstellungsschwierigkeiten bzw. der Erzeugungskosten verwickelt.

Die theoretische Tragfähigkeit ist abhängig von der Spannungsverteilung in den einzelnen Teilen des Knotens. Gefährdet sind die Stellen, wo die Spannungskonzentration auftritt. Für den Fall gekreuzter Rohre gelang es uns, wenigstens teilweise, das Wirken des Knotens zu klären. Dieser Fall kommt manchmal bei Fachwerkträgern rhombischen Systems, manchmal bei Stützen und Verbänden und in der letzten Zeit bei räumlichen Konstruktionen, z. B. den Oktaplatten, Kuppeln usw. vor. Bei einer Reihe von Versuchen wurden

Rohre verschiedenen Durchmessers und verschiedenen Kreuzungswinkels erprobt. In Abb. 3 ist der Versuchskörper in der Prüfmaschine zu sehen, Abb. 4 zeigt die Prüfkörper nach der Erprobung. Die angeschweißten Rohre



Abb. 4. Die Prüfkörper nach der Erprobung

wurden mit einem Fräser angearbeitet und nachträglich abgeschrägt für die Schweißung. (Für die Bearbeitung werden jetzt Schneidbrennautomaten verwendet, die beide Operationen gleichzeitig ausführen; leider hatten wir keine



Abb. 5. Die Risse auf dem Prüfkörper

Gelegenheit, sie zu benützen.) Abb. 5 und 6 zeigen die zerstörten Prüfstücke im Falle senkrecht gekreuzter Rohre von gleichen Wanddicken und Durchmessern. Was die Tragfähigkeit anbelangt, erwies sich der Fall rechtwinkliger

Kreuzung als der ungünstigste. Bei diesen Versuchen betrug bei senkrechter Kreuzung gleicher Rohrprofile $159 \cdot 4,5$ aus Stahl 11 350 die Festigkeit im Durchschnitt 95% der theoretischen Tragkraft des Rohres; die geringste Trag-



Abb. 6. Die Risse auf dem Prüfkörper

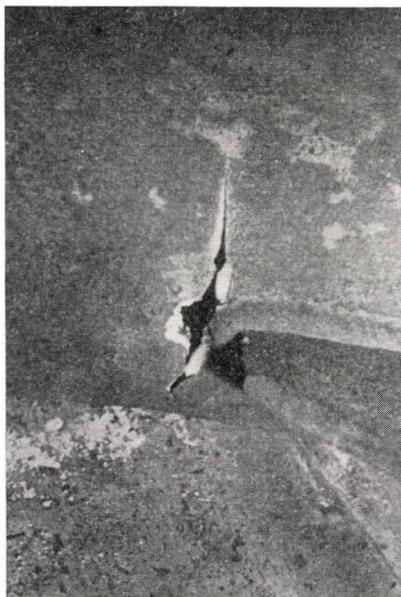


Abb. 7. Die Zerstörung eines mit Eckblech versteiften Prüfkörpers

festigkeit betrug 75% des theoretischen Wertes. Zur Zerstörung kam es entweder in der Wand des angeschlossenen Rohres an der Stelle *a* oder im durchlaufenden Rohr an der Stelle *b*. Gleichzeitig wurden durch Eckbleche versteifte

Prüfkörperversucht (Abb. 7). Durchschnittlich wurde zwar eine 100%ige Tragkraft erzielt, aber die Minimalwerte betragen nur 89%; zur Zerstörung kam es bei allen Prüfkörpern in dem Rohr an der Stelle, wo das Blech endet. Informativ wurden noch Prüfungen vorgenommen an Rohren, deren Wand nur gefräst und nicht mit Abschrägungen für die Schweißung vorbereitet waren. Die Tragkraft war dann sehr niedrig.

Wir beschäftigen uns mit der theoretischen Begründung der verminderten Tragkraft im Knoten. Es wurde die Spannungsverteilung in der Schweißnaht bzw. in der Wand des angeschlossenen Rohres ermittelt. Die Spannung $N_z(\varphi)$, die in der Wand des angeschlossenen Rohres parallel zur seiner Achse wirkt, muß den Randbedingungen einer Zylinderschale entsprechen, bei der in der Durchdringung die Größe einer Verformungsfunktion $U_r(\varphi)$ bestimmt wird und in einer bestimmten Entfernung von der Durchdringung der Bedingung einer gleichmäßigen Verformung und einer gleichmäßigen Spannungsverteilung $\frac{P}{F}$ genügen muß.

Dabei bedeuten:

P die Kraft, die die Verbindung belastet

F den Querschnitt des angeschlossenen Rohres

Die Verformung $U_r(\varphi)$ muß bis auf eine Konstante gleich der Verformung des durchlaufenden Rohres sein, das längs der Durchdringungskurve mit den Kräften $N_z(\varphi)$ belastet wird. Da die Rohre gewöhnlich eine Wandstärke größer als $1/30$ des Durchmessers haben, war es notwendig, die Berechnung nach der Biegetheorie dickwandiger Schalen vorzunehmen. Bei der Rechnung wurde die Theorie nach Wlassow angewandt. Wlassow drückt zur Überführung der üblichen dreidimensionalen Elastizitätstheorie in krummlinigen Koordinaten in ein zweidimensionales Schalenproblem die verhältnismäßigen Verformungen vor der Integrierung nach der Schalenstärke durch eine Potenzreihe

Tabelle 1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \nu \frac{\partial w}{\partial \alpha} - c^2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right) = \frac{1-\nu^2}{Eh} r^2 X$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{3-\nu}{2} c^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta} = \frac{1-\nu^2}{Eh} r^2 Y$$

$$\nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} - c^2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^3} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{3-\nu}{2} c^2 \frac{\partial^3 v}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + c^2 \left(\nabla^2 \nabla^2 w + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w \right) + w = - \frac{1-\nu^2}{Eh} r^2 Z$$

aus, von der er, im Gegensatz zu GOLDENWEISER, noch das zweite Glied verwendet. Gegenüber FLÜGGE, der einige Glieder erst nach der Integration entwickelt, ist die Integration nach dem Verfahren WLASSOW vereinfacht. Das Problem ist definiert durch ein System partieller Differentialgleichungen, die in Tab. 1 angeführt sind und durch Randbedingungen, die aber die Lösung wenig beeinflussen, da es sich um eine lokale Belastung handelt. Die Lösung dieses Gleichungssystems wurde durch die RITZsche Methode mittels einer Variationsgleichung von LAGRANGE durchgeführt. Die zulässige Funktion wurde in der Form von doppelten trigonometrischen Reihen gewählt. Die Funktion der Spannungen $N_z(\varphi)$ längs der Durchdringungskurve ist in Tab. 2 angeführt.

Tabelle 2

$$N_z(\varphi) = \frac{P}{2\pi R} \left(2 \frac{J_1}{J_2} \frac{1}{L - z_{\Gamma_2}} - 1 \right) - \frac{2EH}{L - z_{\Gamma_2}} \left[\sum_m \sum_n \omega_{mn} Z_{mn} \left(F_{mn}(\varphi) - \frac{I_{3mn}}{J_2} \right) \right]$$

Hier bezeichnen:

- P die Belastung der Versuchskörper,
 R, H den Halbmesser und die Wanddicke des durchlaufenden Rohres,
 E den Elastizitätsmodul,
 z_{Γ_2} die Koordinate der Durchdringung in der Richtung der Achse des angeschlossenen Rohres gemessen,
 $J_1, J_2, I_{1mn}, I_{2mni}, I_{3mn}, I_{4mn}$ die bestimmten Integrale,
 ω_{mn} einen von den Querschnittswerten der Rohre abhängigen Beiwert
 F_{mn} eine trigonometrische Funktion,
 Z_{mn} ist ein durch ein algebraisches Gleichungssystem (Tab. 3) bestimmter Wert.

Tabelle 3

$$Z_{mn} = C_{1mn} - \sum_i \sum_j C_{2mni} Z_{ij}$$

$$C_{1mn} = \frac{P}{2\pi R} \left(2 \frac{J_1}{J_2} I_{1mn} - I_{4mn} \right) \quad C_{2mni} = 2\omega_{ij} \left(I_{2mni} - \frac{I_{1mn} I_{3ij}}{J_2} \right) EH$$

Der erste Teil der Funktion $N_z(\varphi)$ drückt die Spannungsverteilung am Umfang des angeschlossenen Rohres aus, wenn das durchlaufende Rohr unendlich steif ist. Die Kurve der Spannungsverteilung hat in diesem Falle ein Maximum dort, wo sich für den Fall, daß das durchlaufende Rohr nachgiebig ist, ein Minimum befindet. Dieser Fall entspricht einer üblichen Rohrkonstruktion. In einer besonderen Berechnung wurde die Spannungsverteilung längs der Durch-

dringungskurve von Rohren 159,4,5 bei rechtwinkliger Kreuzung ermittelt. Der Maximalwert der Spannung tritt an einer Stelle auf, wo es tatsächlich zur Zerstörung des Versuchskörpers kam. Er ist um 13% größer als der Mittelwert. Dagegen ist der Mindestwert um 20% kleiner als der Mittelwert.

Aus vorstehender Untersuchung geht es hervor, daß die Verminderung der Tragkraft des Knotens durch die Verformung des durchlaufenden Rohres verursacht ist. Bei der Kreuzung von Rohren großen Durchmessers darf also der Einfluß der Verformung auf die Tragfähigkeit der Verbindung nicht vernachlässigt werden; es ist deshalb in solchen Fällen besser, starkwandige Rohre zu verwenden oder wenigstens das durchgehende Rohr durch eine örtliche, angeschweißte Manschette oder aufgeschweißte Rohrschale zu verstärken. Das bezeugen auch die Versuche, die Prof. BEER mit gleichen Versuchskörpern, aber starkwandigen Rohren 83,8 \varnothing durchgeführt hat. Risse entstanden bei diesen Prüfkörpern erst bei einer Belastung, die 108% der theoretischen Tragkraft der Rohre entspricht.

Bei dem Knoten nach Abb. 1a bis 1f ist der Einfluß der Verformung nicht so groß. Durch den Anschluß einer gezogenen und einer gedrückten Diagonale in einem Knoten, wird die Schale des durchlaufenden Rohres versteift. Immer ist die Spannung im durchlaufenden Rohr entscheidend.

2. Knicklänge der Stäbe von Rohrfachwerken

Wie bereits gesagt wurde, haben die Rohre einen verhältnismäßig großen Trägheitshalbmesser. Dieser Umstand ermöglicht bei Rohren die Verwendung von Stählen höherer Festigkeit auch für gedrückte Stäbe, zum Unterschied zu Stäben aus Winkelstählen, bei denen infolge der beträchtlichen Erhöhung der Knickbeiwerte bei Verwendung von Stählen höherer Festigkeit bei den gewöhnlich vorkommenden Schlankheitsgraden die Knicklast rasch mit steigender Schlankheit sinkt. Da ein kg Rohrkonstruktion 1,7mal teurer ist als 1 kg der Konstruktion aus üblichen Walzprofilen, ist die Ersparnis, die durch eine genauere Berechnung der Knicklänge erzielt wird, bei Rohrkonstruktionen wichtig.

Die Stäbe eines Rohrfachwerkes sind in den Knoten steif verbunden, so daß sie sich gegenseitig beeinflussen. Dazu erlaubt die Verdrehfestigkeit der Gurtrohre hinsichtlich des Ausknickens aus der Trägerebene teilweise mit einer Einspannung der Diagonalen in die Gurte zu rechnen, zum Unterschiede von den Konstruktionen mit Gurten aus offenen Profilen. Die kritische Belastung kann dargestellt werden durch die Formel

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 \hat{E} J}{(kl)^2} .$$

Dabei bedeuten:

E Elastizitätsmodul nach SHANLEY — ENGESSEK

J Querschnittsträgheitsmoment

l theoretische Stablänge

k Beiwert, der die Verkürzung der Knicklänge ausdrückt. Der Beiwert k nimmt folgende Werte an:

a) Druckgurt des Fachwerkträgers mit n gleichen Feldern, wenn man nach BLEICH annimmt, daß der Gurt als Durchlaufträger auf festen Stützen wirkt

$$k = \sqrt{1 - \frac{5}{4n}}$$

b) Im Knoten stoßen ein gedrückter Gurt (1) mit einem gezogenen Gurt (2) zusammen (nach BLEICH)

$$k = 0,700 + a\sqrt{\mu} + b\mu,$$

dabei bedeuten:

$$a = 0,173 - 0,050 \varrho$$

$$b = 0,028 - 0,011 \varrho$$

$$\mu = \frac{P_1 J_1 l_2 F_2}{P_2 J_2 l_1 F_1}$$

$$\varrho = \sqrt{\frac{P_2 l_2}{P_1 l_1}}$$

Dieser Beiwert k gilt für $0 \leq \varrho \leq 2$ und $0 \leq \mu \leq 4$, wobei P_1, P_2 die Gurtkräfte (1) und (2) und F_1, F_2 ihre Querschnittsfläche bedeuten.

c) Ausknicken der Diagonale in der Trägerebene (es wird nach OSOOD die Zusammenwirkung sämtlicher Stäbe, die mit dem betreffenden Stab direkt in Verbindung stehen, berücksichtigt)

$$k = \frac{\pi}{2u}$$

Der Wert $2u$ geht aus der Stabilitätsbedingung des Stabes ij hervor:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{J_{1i}}{\psi_{1i} l_{1i}} + \frac{J_{2i}}{\psi_{2i} l_{2i}} + \dots + \frac{J_{mi}}{\psi_{mi} l_{mi}} \right) \left(\frac{J_{1j}}{\psi_{1j} l_{1j}} + \frac{J_{2j}}{\psi_{2j} l_{2j}} + \dots + \frac{J_{nj}}{\psi_{nj} l_{nj}} \right) \\ & \left[\left(\frac{\psi_{ij} l_{ij}}{J_{ij}} \right)^2 - \left(\frac{\Phi_{ij} l_{ij}}{2J_{ij}} \right)^2 \right] + \left(\frac{J_{1i}}{\psi_{1i} l_{1i}} + \frac{J_{2i}}{\psi_{2i} l_{2i}} + \dots + \right. \\ & \quad \left. + \frac{J_{mi}}{\psi_{mi} l_{mi}} + \frac{J_{1j}}{\psi_{1j} l_{1j}} + \frac{J_{2j}}{\psi_{2j} l_{2j}} + \dots + \right. \\ & \quad \left. + \frac{J_{nj}}{\psi_{nj} l_{nj}} \right) \frac{\psi_{ij} l_{ij}}{J_{ij}} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Dabei gilt für gedrückte Stäbe

$$\Phi = \frac{6}{(2u)^2} \left(\frac{2u}{\sin 2u} - 1 \right) \quad \psi = \frac{3}{(2u)^2} (1 - 2u \cotg 2u)$$

und für gezogene Stäbe

$$\psi = \frac{3}{(2u)^2} (2u \cotgh 2u - 1).$$

Die Funktionswerte Φ und ψ sind zum Beispiel im Buche GOLDENBLAT-SISOW tabellarisch zusammengestellt, und die Werte ψ_{mi} bzw. ψ_{nj} werden durch Auswertung der Ausdrücke

$$2u_{mi} = l_{mi} \sqrt{\frac{P_{mi}}{E J_{mi}}} \quad \text{bzw.} \quad 2u_{nj} = l_{nj} \sqrt{\frac{P_{nj}}{E J_{nj}}}$$

bestimmt.

d) Ausknicken der Diagonale aus der Trägerebene (der Einfluß der gezogenen Diagonale ist vernachlässigbar)

$$k = \frac{\pi}{2u}.$$

Der Wert $2u$ folgt aus der Stabilitätsbedingung des elastisch eingespannten Stabes

$$4 \left(\psi(2u) + \frac{3\kappa_0 E J_d}{l_d} \right) \left(\psi(2u) + \frac{3\kappa_1 E J_d}{l_d} \right) - \Phi^2(2u) = 0.$$

Die Indexe $0, 1$ beziehen sich auf den Ober- bzw. Untergurt, der Index d betrifft die Diagonalen. κ ist die Konstante der elastischen Einspannung der Diagonale in den Gurt. Funktionen Φ und ψ sind wie oben bestimmt. Die Konstante der elastischen Einspannung kann angenähert wie folgt bestimmt werden:

$$\kappa = \frac{1}{I_d^2} \left(\frac{h^2}{A} + \frac{l_p^2}{B} \right).$$

Dabei bezeichnen

- l_p Feldweite des Fachwerkes,
- h Trägerhöhe,
- l_d theoretische Länge der Diagonale,
- $A = \sum_1^{l'} \frac{G J_k}{L_1}$ Verdrehfestigkeit des Gurtes,
- G Schubmodul,

- J_k Torsionssteifigkeit des Querschnittes (bei Rohren $J_k = 2J$),
 L_1, L_1' Entfernung des untersuchten Knotens von gegen Verdrehung vollgesicherten benachbarten Querschnitten, bezogen auf die betreffenden Gurtquerschnitte links und rechts vom Knoten,
 B Biegesteifigkeit des Gurtes aus der Trägerebene,
 N, N' über die Länge L_2, L_2' auftretende größte Axialkraft des Gurtes,
 L_2, L_2' Entfernung des untersuchten Knotens von den benachbarten Gurtquerschnitten links und rechts, die gegen Ausknicken aus der Ebene gesichert sind.

Die Gurtsteifigkeit B bestimmen wir aus den Gleichungen

$$[\psi(2u_1)L_2 + \psi(2u_2)L_2']M_2 + 3EJ\left(\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_2'}\right)y = -\frac{l_p}{l_d}\psi(2u_2)L_2'$$

$$\left(\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_2'}\right)M_2 + \left(\frac{N'}{L_2'} + \frac{N}{L_2}\right)y = -\frac{l_p}{l_d L_2'}\left(1 - \frac{(2u)^2}{3}\psi(2u)\right)$$

$$B = -\frac{l_p}{l_d} \frac{3EJL_2}{[3EJy + M_2L_2^2\psi(2u_1)]}$$

Die Funktionen Φ und ψ haben denselben Sinn wie früher. Nur zur Erleichterung sei angeführt, daß M_2 das Gurtbiegemoment infolge der Belastung durch die ausknickende Diagonale und y die waagrechte Durchbiegung des Obergurtes ist. Ist der Knoten gegen eine Verschiebung gehalten, dann ist $y = 0$ und der Wert B bestimmt sich aus dem einfachen Ausdrucke

$$B = 3EJ \sum_2^x \frac{1}{\psi(2u)L_2}$$

Das entspricht dem üblichen Fall eines Binderobergurtes, der gegen Ausknicken aus der Trägerebene durch Pfetten oder Betonplatten der Dachdeckung gesichert ist. Zur Erleichterung des Einflusses der Verkürzung der Knicklänge

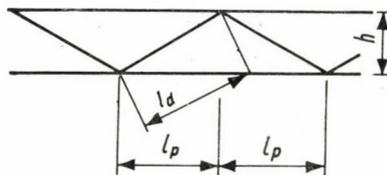


Abb. 8. Die mit Diagonale mitwirkenden Stäbe

führen wir weiter noch das Beispiel des Trägers in Abb. 9 an. Der Beiwert k , der die Verkürzung der Knicklänge ausdrückt, wurde in der vorher beschrie-

benen Art berechnet und ist

- beim gedrückten Gurt $k = 0,77$,
- bei der Diagonale aus der Trägerebene $k = 0,73$,
- bei der Diagonale in der Trägerebene $k = 0,61$.

Die Berechnung der verkürzten Knicklänge des Gurtes ist besonders bei verhältnismäßig kurzen und durchlaufenden Trägern von Bedeutung. Die Berech-

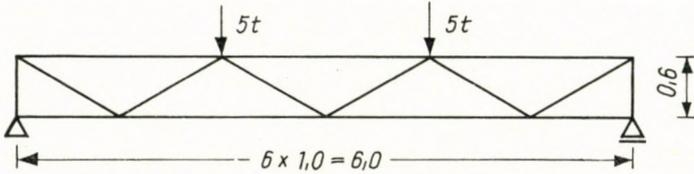


Abb. 9. Ein Beispiel des Fachwerkträgers

nung der verkürzten Knicklänge der Diagonalen ist besonders wirtschaftlich, wenn es sich um eine Diagonale in der Nähe der Stütze handelt oder im Falle beweglicher Belastung, wenn für die Bemessung der Gurte und der Diagonalen 2 unterschiedliche Laststellungen in Betracht kommen. Einige Normen (z. B. ČSN für gedrückte Gurte von Fachwerkträgern) schreiben die Knicklänge ohne Rücksicht auf die Steifheit der Stabverbindungen vor. Es wäre angezeigt, diese Vorschriften gemäß den Ergebnissen von Versuchen richtigzustellen, und für die praktische Berechnung durch Aufstellung von Tabellen die Arbeit des Projektanten zu vereinfachen.

3. Ausnützung der Plastizität von Rahmenträgern aus Stahlrohren

Das Widerstandsmoment der Rohre im plastischen Bereich ist

$$W_p = \frac{1}{6} (d_2^3 - d_1^3),$$

wobei d_1 den Innen- und d_2 den Außendurchmesser bezeichnen. Bedeutet W das Widerstandsmoment im elastischen Bereich und bezeichnet $a = \frac{W_p}{W}$, so kann man die Plastizitätsreserve einiger Querschnitte mit der von Rohren vergleichen.

	<i>a</i>
Rechteckquerschnitt	1,5
I Profil bezogen auf die Achse X	1,15
Winkelstahl bezogen auf die Achse X	2,08
Voller kreisförmiger Querschnitt	1,70
Rohrquerschnitt	1,31—1,34

Bei Biegung haben also Rohre eine 30%ige plastische Reserve. Wirkt im Querschnitt außer dem Biegemoment auch eine Normalkraft N , ist bei Rohren das Verhältnis des plastischen Momentes M_N , bei gleichzeitigem Wirken von Biegemoment und Axialkraft N , zum plastischen Momente M_p des nur durch Biegung beanspruchten Querschnitts

$$\frac{M_N}{M_p} = 1 - \frac{3}{4} \frac{(d_1 + d_2)^2}{[(d_1 + d_2)^2 - d_1 d_2]} \left(1 - \cos \frac{2N}{(d_2^2 - d_1^2)} \right).$$

Wir können also mit der abkürzenden Bezeichnung $s = \frac{N}{\sigma_t 2t}$ für den Konstruktionsentwurf direkt den Wert des erniedrigten Widerstandsmomentes im plastischen Bereich ableiten

$$W_N = 4 r^2 t \sin \frac{\pi r - s}{2r}$$

wobei

- σ_t Streckgrenze
- t Wanddicke
- r Mittelwert des Rohrhalbmessers bedeutet.

Rohre werden oft bei Vierendeelträgern verwendet, wenn Fachwerkträgern aus architektonischen Gründen nicht zulässig erscheinen. Ein derartiger Träger hat aber bei der Bemessung nach der Elastizitätstheorie ein mehr als 2faches Gewicht als ein Fachwerkträger gleicher Höhe. Beachten wir die ver-

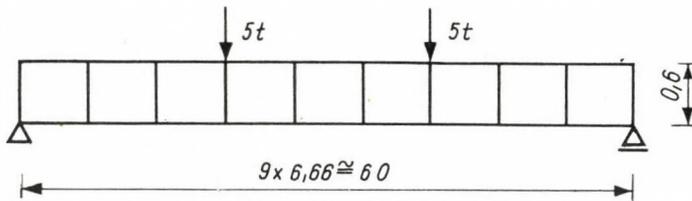


Abb. 10. Ein Beispiel des Vierendeelträgers

hältnismäßig hohe plastische Reserve der Rohre, so erkennen wir, daß die Bemessung nach der Plastizitätstheorie beträchtliche Ersparnisse bringen kann. So wurde der Träger nach Abb. 10 einmal nach der Elastizitätstheorie, zum andernmal nach der Plastizitätstheorie entworfen und das Trägergewicht und die Verformung mit den bezüglichen Werten des im Abschnitt 2 behandelten Fachwerkträgers nach Abb. 9 verglichen und in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	Gewicht	Elastische Verformung	
Fachwerkträger	100 %	100 %	L/466
Vierendeeltr. nach Elastizitätstheorie	233 %	91 %	L/510
Vierendeeltr. nach Plastizitätstheorie	150 %	225 %	L/208

Aus der Tabelle geht hervor, daß durch den Entwurf nach der Plastizitätstheorie beträchtliche Ersparnisse erzielt werden können. Berücksichtigen wir noch, daß wir bei den Fachwerkkonstruktionen die Knotensteifigkeit vernachlässigen (bei der Berechnung des Trägers nach Abb. 9 als System mit festen Knoten wird die zulässige Beanspruchung im Obergurt um 18% überschritten), so ist es vielleicht wirklich angezeigt, dem Entwurf des Rahmenbalkens nach der Plastizitätstheorie den Vorzug zu geben. Die zulässigen Beanspruchungen sind dann bei der Berechnung des Trägers nach Abb. 10 nach der Elastizitätstheorie bei den Pfosten um 33% und bei den Gurten um 30% überschritten. Die Berechnung des Vierendeelträgers nach der Elastizitäts-

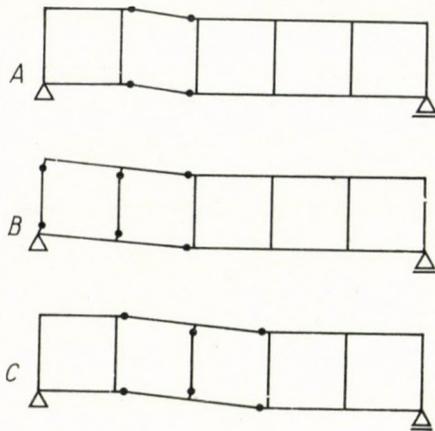


Abb. 11. Die Möglichkeiten von Zusammenbruch des Vierendeelträgers

theorie läßt sich hinsichtlich des Sicherheitsgrades mit den Fachwerkträgern üblicher Ausführung nicht vergleichen. Beim Vierendeelträger muß aber die Verformung kontrolliert werden. Mit dem eigentlichen Entwurf nach der Plastizitätstheorie wollen wir uns hier nicht weiter befassen, da er ähnlich ist, wie bei Konstruktionen aus normalen Walzprofilen bis auf den früher ermittelten Wert W_N . HENDRY beschreibt ausführlich, wie ein solcher Träger zu entwerfen ist. Nur zur Anschaulichkeit führen wir noch die Möglichkeiten des Zusammenbruches eines Vierendeelträgers (Abb. 11) an, von denen bei der Berechnung ausgegangen wird, und wofür die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden müssen. Es sind dies

A) die schiefwinklige Feldverformung durch Ausbildung plastischer Gelenke an den Enden der Gurtstäbe eines Feldes;

B) der Zusammenbruch der Pfosten und Ausbildung plastischer Gelenke an einer Stelle der Gurte;

C) die Ausbildung plastischer Gelenke in den Pfosten zwischen zwei Gelenken in benachbarten Feldern.

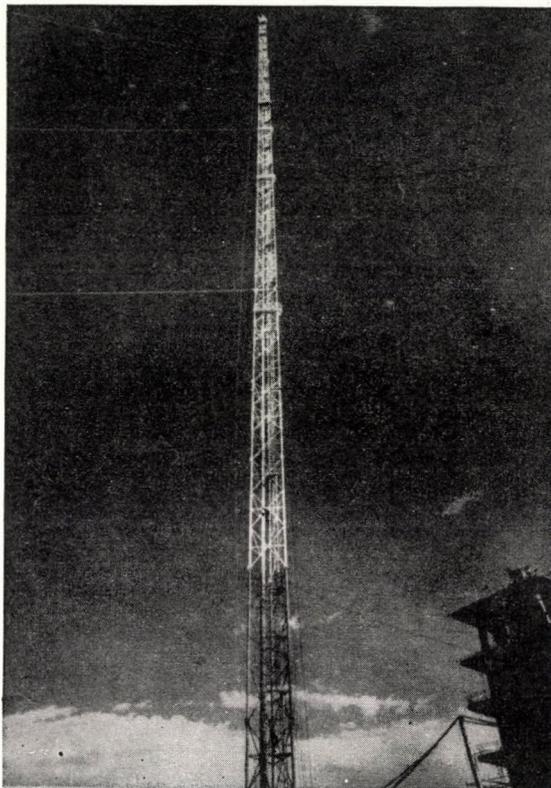


Abb. 12. Fernsehmast

Zum Schluß möchte ich noch einige Beispiele von Strahlrohrbauten anführen, die in den letzten Jahren in der ČSSR ausgeführt wurden und deren Autoren namentlich Prof. WANKE, Prof. LEDERER, DUNDR und andere sind.

1) Fernsehmast 322,4 m Höhe. Der Mastkörper wiegt ohne Abspannseite, Kabine und Aufzugzubehör 110 t (Abb. 12).

2) Winterstadion. — Hauptabmessungen des Stadions mit dem überhöhten Dach sind 60×60 m. Dachdeckung: Wellblech. Stahlkonstruktion wiegt 33 kg/m^2 (Abb. 13).

3) Ausstellungspavillon-Kuppel mit 93,5 m Durchmesser. Dachdeckung: Wellblech und Drahtglas. Stahlverbrauch ungefähr 33 kg/m^2 (Abb. 14).

4) Vierschiffige Industriehalle mit Spannweiten von 4×18 m. Dachdeckung: Calofrigplatten mit 90 kg/m^2 Gewicht. Aufgehängte Kranbahnen für eine Belastung 3,2 bzw. 2×1 t. Gewicht der Dachkonstruktion einschließlich Stützen, jedoch ohne Hängebahnen $29,0 \text{ kg/m}^2$ (Abb. 15).

5) Förderturm-Montage (Abb. 16).

6) Hängebahn im Freien für Katzen mit einer Tragkraft von 1 t (Abb. 17).

7) Nottreppe des Ausstellungspavillons der ČSSR in Brüssel (Abb. 18).



Abb. 13. Winterstadion

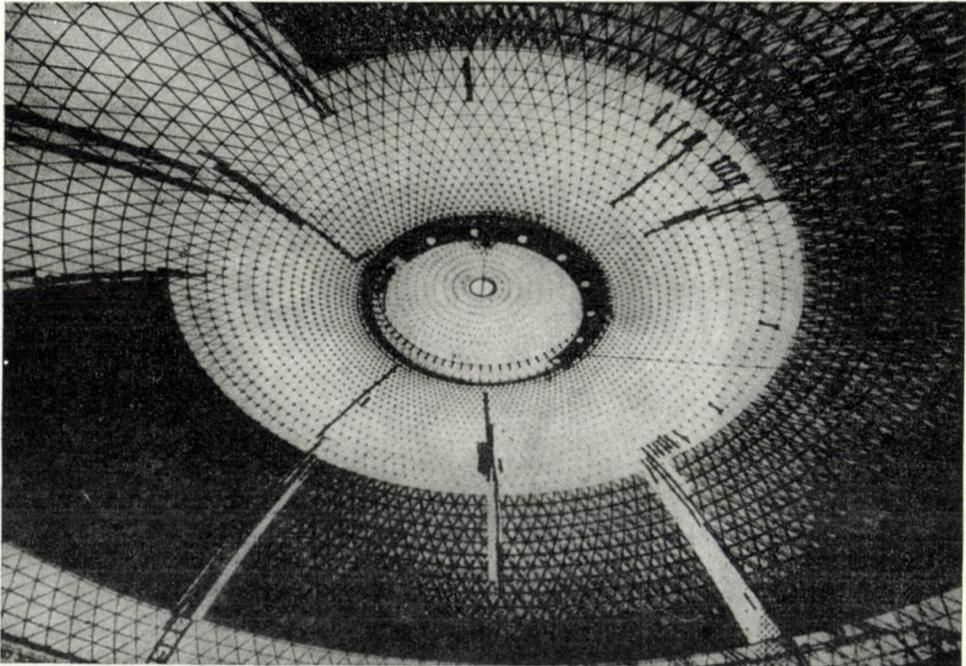


Abb. 14. Ausstellungspavillon

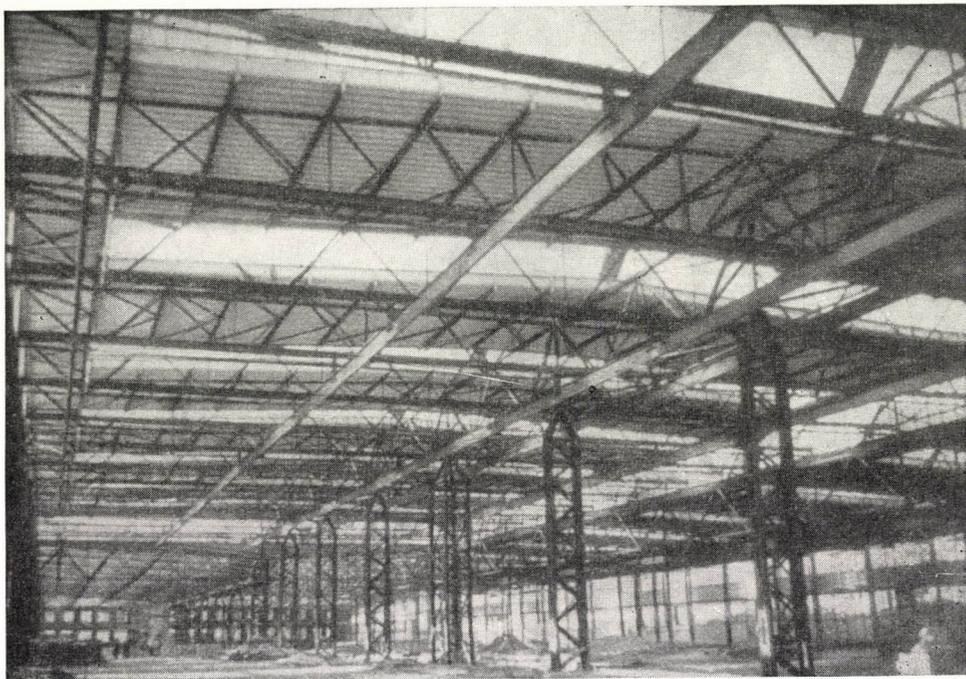


Abb. 15. Industrieballe

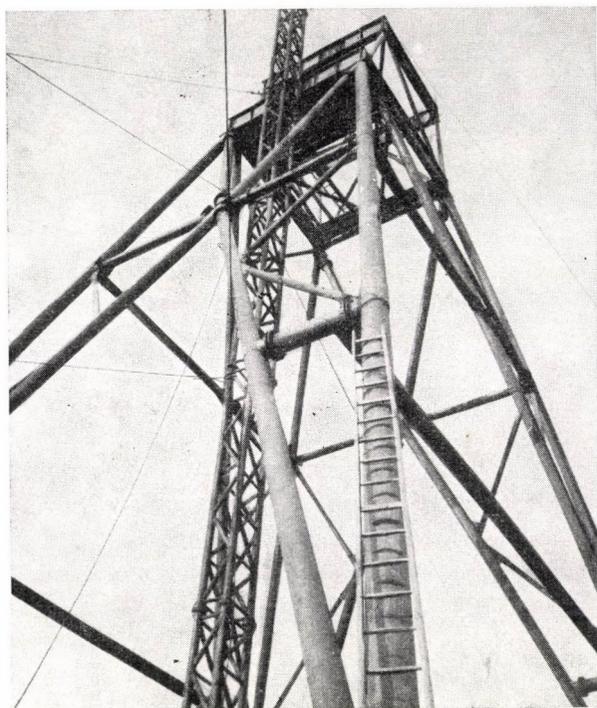


Abb. 16. Förderturm

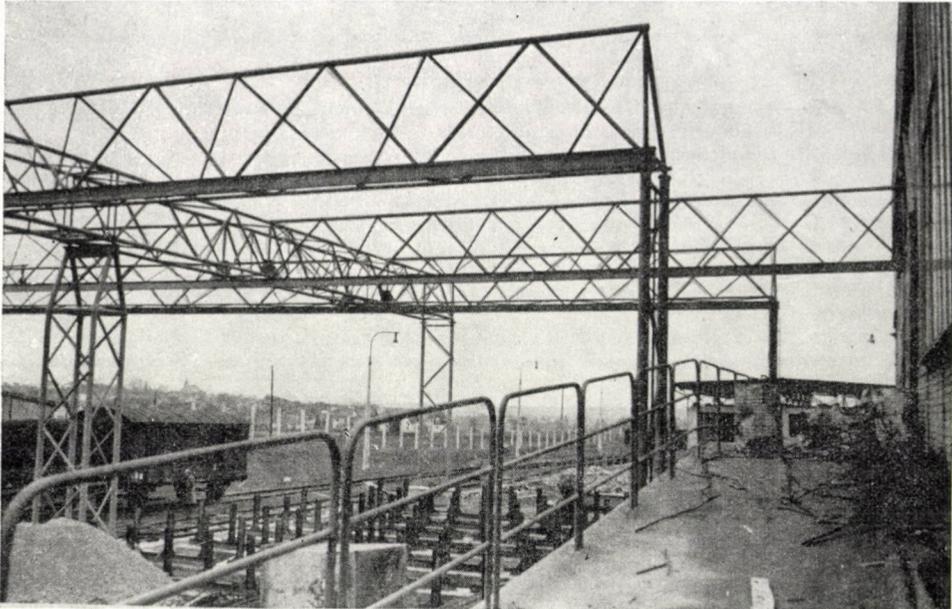


Abb. 17. Hängebahn

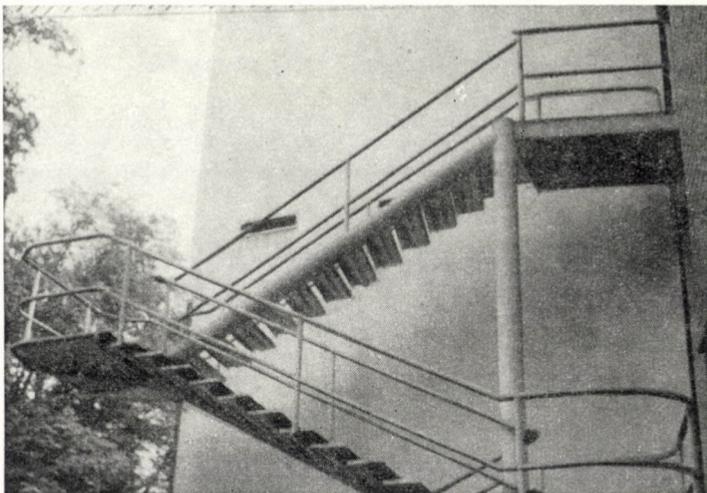


Abb. 18. Nottreppe des Ausstellungspavillons der ČSSR in Brüssel

SCHRIFTTUM

1. B. S. 449 — The Use of Structural Steel in Building.
2. DIN 4115 — Stahlleichtbau und Stahlrohrbau im Hochbau.
3. M-53—58 — Hinweise für Rohrfachwerk-Konstruktionen im Kranbau.
4. SAMMET: Rohrkonstruktionen im Stahlbau.
5. Geschweißte Stahlrohrkonstruktionen.
6. WANKE: Vývoj staveb z ocelových bežešvých trubek v ČSR- (Die Entwicklung der Bauten aus nahtlosen Rohren in ČSR) — Inženýrské stavby 1956, č. 2, 3.
7. BLEICH: Buckling Strength of Metal Structures 1952.
8. OSGOOD: Contribution to the Design of Compression Members in Aircraft — Research Paper PR 698, 1932.
9. GOLDENBLAT—SISOW: Die Berechnung von Baukonstruktionen auf Stabilität und Schwingungen 1955.
10. WLIASSOW: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik 1958.
11. HENDRY: Plastic Analysis and Design of Mild Steel Vierendeelgirders—Structural Engineer July 1955.
12. NEAL: Die Verfahren der plastischen Berechnung biegesteifer Stahlstabwerke 1958.
13. Stöße und Anschlüsse bei Rohrkonstruktionen — Der Bauingenieur H. 7, 1960.
14. Ausbildung von Stabanschlüssen bei Rohrkonstruktionen in England, Der Stahlbau, 4 1960.
15. BEER: Eine neuartige Ausstellungshalle mit Rohrfachwerkbindern—Schweizerische Bauzeitung 1958.
16. DUNDR: Ještě k problematice ocelových trubkových konstrukci — (Weiteres zur Problematik von Stahlrohrkonstruktionen) — Pozemní stavby č. 3, 1960.
17. DUNDOVÁ: Rozdělení napětí po proniku dvou trubek (Die Verteilung der Spannung nach der Dringung von zwei Rohren) — Kand. Disertation ČSAV-ŮTAM.
18. LEDERER: Mřížové skořápky rotačních bání na brněnském výstavišti — (Rotations-gitterschalen der Ausstellungshallen in Brünn) — Inženýrské stavby 1, 1960.
19. ZEMAN: Ocelová střešní konstrukce sportovní haly na Kladně — (Stahldachkonstruktion des Sportstadions in Kladno) — Inženýrské stavby 3, 1960.

ERFAHRUNGEN MIT DEM AUF DEM GRENZZUSTAND BERUHENDEN BEMESSUNGSVERFAHREN

Dr. techn. I. KORÁNYI

KOSSUTH-PREISTRÄGER, EMERIT PROFESSOR, DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

Abkürzungen :

EBV	= Eisenbahnbrücken-Vorschrift
SBV	= Straßenbrücken-Vorschrift
zS	= zulässige Spannung
GZ	= Grenzzustand
GB	= Grenzbeanspruchung
GZB	= auf dem Grenzzustand beruhendes Bemessungsverfahren
zSB	= auf der zulässigen Spannung beruhendes Bemessungsverfahren
SB	= Staatliche Bauvorschrift
MSZ	= Ungarische Staatsnorm

Unter Beanspruchung sind im folgenden immer die Schnittkräfte mit der Dimension t oder t_m zu verstehen, zum Unterschied von den durch sie hervorgerufenen und in kg/cm^2 dimensionierten Spannungen.

In den letzten 2—3 Jahrzehnten ist hinsichtlich der Bemessung der Ingenieur-Konstruktionen eine stille Revolution im Gange, die besonders heftig geworden ist, seitdem die auf dem plastischen Zustand beruhende Dimensionierung in den Vordergrund getreten ist, da der plastische Zustand einerseits ein unerwünschter, unzulässiger Zustand ist, andererseits außer der Gültigkeitsgrenze des HOOKEschen Gesetzes liegt und dadurch das zSB unlogisch macht. So rückte das GZB an seiner Stelle in den Vordergrund. Das GZB ermöglicht

1. die Bemessung mit Rücksicht auf den plastischen Zustand und
2. die Verwendung von Sicherheitsfaktoren, die den Belastungen verschiedenen Charakters entsprechend verschiedene Größen besitzen.

Diesem Verfahren können wir in Ungarn ein besonderes Interesse schenken, denn der, der die Aufmerksamkeit als erster auf die Anwendung dieser Methode — obwohl nicht in der heutigen reifen Form — lenkte, Dr. G. KAZINCZY, Privatdozent an unserer technischen Hochschule war [1, 2]. Wir besitzen eine Sonderlage auch von dem Standpunkt aus betrachtet, daß der sowjetische Ministerrat zwar am 13. Dezember 1946 eine Bauvorschrift zu schaffen angeordnet hat [8], der auf dem GZ fußen sollte, waren doch die in den Jahren 1950—52 erschienenen ungarischen Brückenbauvorschriften die ersten, die diese Methode auf den Antrag von I. MENYHÁRT und dem Verfasser konsequent durchführten und auf die Brücken zum erstenmal anwendeten. Nach den zwei

Brückenvorschriften stellte sich die die Festigkeitsberechnung der Hochbaukonstruktionen enthaltende Norm MSZ 15021 auf das GZB um, und zwar auf den Spezialfall, der das Prinzip der gleichmäßigen Sicherheit vor Augen hat.

Ich kann hier das GZB, das bei uns von den Bauingenieuren seit 11–12 Jahren angewandt worden ist, nicht eingehend besprechen. Unsere Maschineningenieure verwenden es aber nirgends, weil bei der Berechnung der Maschinen im allgemeinen die Ermüdung maßgebend ist, und auch die Belastung von den Lasten der Ingenieur-Konstruktionen abweicht. Die Maschineningenieure kennen demzufolge das GZB gewöhnlich nicht, aber ich weise nur auf die Fachliteratur [3–6] hin, wo eine ausführliche Behandlung der Frage zu finden ist.

Die seit der Einführung der neuen Vorschriften vergangenen 10–12 Jahre repräsentieren einen genügenden langen Zeitraum, um die Auswirkungen der Norm, die Vor- und Nachteile, die eventuellen Unvollkommenheiten des neuen Berechnungsverfahrens untersuchen zu können, um eine Bilanz über die Ergebnisse der neuen Methode aufzustellen und um auf die etwa nötigen Verbesserungs- oder Ergänzungsaufgaben hinzuweisen.

Im allgemeinen können wir sagen, daß die Erfahrungen über die neue Berechnungsmethode günstig sind, und die aufgetretenen Schwierigkeiten oder Mängel nicht aus der prinzipiellen Unvollkommenheit des neuen Verfahrens entstanden, sondern sie stammen aus mangelhafter Bestimmung einzelner Faktoren, aus der ungenügend folgerechten Anwendung des allgemeinen Grundsatzes, aus den unzureichend sorgfältigen Formulierungen der Vorschriften, also aus Detailversehen.

Der Übergang zu der neuen Methode verursachte anfangs eine zeitweilige Schwierigkeit, die sogar natürlich war. Unsere Ingenieure hatten sich an das zSB gewöhnt, lebten darin, dachten darüber nach. Diese Schwierigkeit wurde aber alsbald überwunden, was bei Stahlkonstruktionen verhältnismäßig leicht ging, weil die Spannung bis zur Grenzspannung proportional der Kraft ist, und aus diesem Grund unterschieden sich die Vorschriften formgemäß kaum von den alten, trotz der prinzipiellen Unterschiede: an Stelle der zS ist die Grenzspannung getreten, und die durch die verschiedenen Lasten hervorgerufenen Beanspruchungen sind mit einem zur Belastungsart gehörigen, vorgeschriebenen Faktor, dem *Sicherheitsfaktor*, zu multiplizieren. Es ist förmlich ein Neues, daß man nicht die von den Lasten hervorgerufene Spannung mit der Grenzspannung, sondern die maßgebende Beanspruchung mit der GB zu vergleichen hat. Die EBV ist eine Ausnahme, da sie nicht die Vergleichung der Beanspruchungen, sondern den Nachweis der Sicherheit verlangt. Das letztgenannte Verfahren war zu jener Zeit vollkommen neuartig und ist auch heutzutage einzig in der ganzen Welt, hat aber einen sehr großen Vorteil, wie wir es noch sehen werden. Die neuen Vorschriften bedeuteten eine völlig neue Berechnungsmethode bei den Stahlbetonkonstruktionen, deren Dimensionierung durch die SBV und MSZ 15021 von der alten Berechnungsart mit n d. h.

von dem Elastizitätszustand auf eine neue, n -freie Berechnungsart, d. h. auf den Bruchzustand umgestellt wurde. Infolge der neuen Vorschriften ist die Berechnung der Stahlbetonkonstruktionen nach einer ganz neuen Form durchzuführen. Die Umstellung war durch die Tatsache erleichtert, daß die n -freie Berechnung im Auslande schon vielerorts verwandt wird, und ausgearbeitete Theorien bzw. Tabellen zu unserer Verfügung stehen.

Der einzige, aber nur formelle Nachteil des neuen Verfahrens liegt darin, daß man die tatsächlichen Spannungen, die durch die Einwirkung der Betriebslasten entstehen, im Laufe der vorgeschriebenen Festigkeitsberechnungen nicht bestimmt. Sind wir neugierig auf sie, so sind sie besonders zu bestimmen, jedoch verlangen es die Vorschriften nicht.

Die Kollegen der älteren Generation, die gewöhnt sind, die Güte einer Konstruktion nach dem Verhältnis der zulässigen und der tatsächlichen Spannungen zu beurteilen, empfangen die neue Methode mit einiger Abneigung. Für die junge Generation aber, die sich mit dem neuen Verfahren schon an der Hochschule vertraut macht, verursacht es keine Schwierigkeiten mehr.

Der Anfangsschwierigkeiten unbeachtet ging die Umstellung auf die neuen Vorschriften glatt vor sich. Es wirkte fördernd, daß die neue Bemessungsart wirtschaftlicher ist als die alte. Der Ursprung der Wirtschaftlichkeit liegt im Prinzip der gleichmäßigen Sicherheit, die sich formal im folgenden äußert: bei Eisenbahnbrücken braucht nur die durch die Nutzlast, bei anderen Konstruktionen bloß die durch eine einzige zufällige (im allgemeinen nützliche) Last hervorgerufene Beanspruchung mit einem größeren Sicherheitsfaktor (1,4), während die anderen Beanspruchungen nur mit 1,0 oder 1,1 multipliziert zu werden. Die maßgebende Beanspruchung ist also kleiner, als sie nach Multiplikation aller Lasten mit dem einheitlichen Faktor, der für die Nutzlast gilt, wäre. Die Größe dieses Faktors wurde bei der Ausarbeitung der Vorschriften aus den Abmessungen vorhandener, bewährter, nach den alten Verfahren errechneter Konstruktionen nach rückwärts bestimmt, ausgehend von der Forderung, daß die Abmessungen nach dem neuen und alten Verfahren im großen und ganzen miteinander übereinstimmen sollen. Von den Sicherheitsfaktoren, die auf Grund der vorhandenen Konstruktionen bestimmt worden sind, wurden die Spitzenwerte ausgeschieden, und es wurde die kleinste noch annehmbare Größe vorgeschrieben. Man hat diesen kleinsten Wert bei Konstruktionen mit kleiner Spannweite und geringem Eigengewicht gefunden. Es folgt daraus, daß die Abmessungen der Tragwerke von größerer Spannweite, wo das Verhältnis des Eigengewichtes zur Nutzlast allmählich günstiger wird, kleiner als nach der alten Methode werden, und zwar desto kleiner, je günstiger das Verhältnis der ständigen Last zur Nutzlast, also je größer die Spannweite des Trägers ist.

Nach den Angaben der Konstrukteure des *IPARTERV-s** ergibt sich eine *Materialersparnis von 7—10% in den Trägern der Stahlbetonkonstruktionen.*

* *IPARTERV* ungarisches staatliches Konstruktionsbüro für Industrieanlagen.

bemessen nach den neuen Vorschriften. Ausnahmsweise kann sie auch 12% betragen. Bei größeren Stahlbrücken hat das neue Verfahren ebenfalls eine erhebliche Materialersparnis zur Folge. Aus den Daten der Hauptabteilung für Eisenbahnwesen des ungarischen Verkehrsministeriums war eine Ersparnis in Stahl bei stählernen Eisenbahnbrücken von ungefähr 1–10% je nach der Spannweite festzustellen, die in den Jahren 1952–57 jährlich 95 Tonnen Stahl betrug. Bei Straßenbrücken ist die Ersparnis noch größer, da sich das Verhältnis des Eigengewichtes zur Nutzlast günstiger gestaltet. Durch die Anwendung des Prinzips der gleichförmigen Sicherheit ist allein bei der Donaubrücke von Boráros-Platz (Budapest) eine Ersparnis von 77,6 Tonnen Stahl erreicht worden.

Einen weiteren Vorteil des neuen Verfahrens bedeutet die gleichmäßige Sicherheit selbst, infolge der nicht nur die überschüssige Sicherheit der Konstruktionsteile von großer Spannweite abgeschafft wird, vielmehr werden auch die leichten Bestandteile, die in der Nähe der Wirkungsstelle der beweglichen Last liegen, verstärkt. Ein hervorragendes Beispiel weisen die Eisenbahnbrücken auf, in deren Fahrbahnträgern und Stößen vorher starke Beschädigungen (Risse, Nietlockerungen) beobachtet wurden. *Nach der Einführung des Prinzips der gleichförmigen Sicherheit sind diese Beschwerden wie auf einen Zauberschlag verschwunden*, beziehungsweise sind die bei den Brücken, die nach der neuen EBV errechnet oder verstärkt wurden, vollkommen ausgeblieben; *der Grundsatz der gleichmäßigen Sicherheit hat die Fehler mit umfassender Kraft aufgedeckt und beseitigt.*

Das neue Verfahren hat bei Eisenbahnbrücken den unschätzbaren Vorteil, daß mit seiner Hilfe leicht entscheidbar ist, ob gewisse Speziallasten die Brücke überfahren dürfen, oder nicht. Nämlich die neue EBV unterscheidet sich von jeder Vorschrift der Welt darin, daß sie nicht den Ausweis der Beanspruchungen, sondern den der Sicherheit in bezug auf die Nutzlast erwünscht; dadurch stehen die Sicherheitswerte aller Bestandteile der Brücke zur Verfügung und zeigen den schwächsten Punkt der Konstruktion.

Natürlich traten auch Fehler bei der Umstellung auf das neue Verfahren unvermeidlich auf, die durch die Praxis aufgedeckt wurden. Darüber möchte ich jetzt sprechen.

Erstens erwähne ich eine Schwierigkeit, die bei der Bemessung der Träger von kompliziertem Kräftespiel auftritt. Sie stammt daraus, daß das GZB im Westen im allgemeinen entweder nicht benützt, oder wo es teilweise benützt wird, wie zum Beispiel im Falle der Untersuchung von Spanntägern oder bei der n -freien Bemessung der Stahlbetonträger, wird das Prinzip der gleichmäßigen Sicherheit mit Sicherheitsbeiwerten von verschiedener Größe nicht angewendet. Die Zahlenwerte der westlichen Vorschriften lassen sich also mit den Unsrigen unmittelbar nicht vergleichen, erst nach Umrechnung, wo man die Kenntnis des Verhältnisses der ständigen Last und der Nutzlast stets benötigt.

Da dieses Verhältnis bei Konstruktionen von bestimmtem Material als eine Funktion der Spannweite im allgemeinen bekannt ist, ist die Umrechnung und damit der Vergleich möglich. Das oben Gesagte gilt auch für die Auswertung der Ergebnisse ausländischer Versuche. Diese Schwierigkeit macht sich bemerklich besonders im Falle, wenn ungenügende Angaben für die Sicherheit eines verwickelteren Kräftespieles vorliegen und man auf die Ergebnisse ausländischer Versuche angewiesen ist. In diesen Fällen ist das GZB vorläufig umständlich. So ist es bei der Errechnung der orthotropen Platte, die gleichzeitig einen Teil von Brückenbahn und Hauptträger bildet. Aus diesem Grund mußte man das zSB bei der Berechnung der Elisabethbrücke* anwenden, wo die deutschen Vorschriften vor Augen zu halten waren — wegen Mangel an eigenen Versuchen.

Wegen des Unterschiedes zwischen zSB und GZB sind die der zS entsprechend errechneten Tabellen, wie beispielsweise die Tabellen von MÖRSCH für die Bemessung des Spannbetons, unmittelbar nicht zu gebrauchen. Das bedeutet eine zeitweilige Schwierigkeit oder Mehrarbeit. Die obigen Umstände dürften Schwierigkeiten machen, können aber keine Fehler heißen. Nun betrachten wir die Mängel.

Die Zahlenwerte, die in bezug auf das neue Verfahren gegeben sind, lassen sich in zwei Gruppen einteilen: Grenzspannungen (σ_G) und Sicherheitsbeiwerte (n). Gegen die Werte beider Gruppen wurden Einwürfe erhoben.

1. Die Grenzspannung ist ein mit gewissen Faktoren verringerter Wert der Streckgrenze bei Stahl bzw. der Bruchfestigkeit bei Beton. Diese Faktoren verstecken sich natürlich im vorgeschriebenen Werte von σ_G , die Konstrukteure haben also mit ihnen nichts zu tun, doch mußte man sie bei der Ausarbeitung der Vorschriften in Betracht ziehen. Diese Faktoren bedeuten diejenige Unbestimmtheit, die in der Größe des GZs enthalten ist, also gegen Lasten aller Sorten auftritt. Sie setzt sich aus vielen Komponenten zusammen: Streuung der Qualitätswerte des Materials (σ_B, σ_F), Maßtoleranz des Trägerquerschnittes, Montage- oder Bauungenauigkeiten, andere Unsicherheiten konstruktiver und bauzuständlicher Herkunft und endlich läßt sich auch der Unterschied hierher eingruppiieren — obwohl er den Grenzzustand nicht beeinflußt, aber sich auf jede Belastung bezieht — der zwischen der errechneten und der tatsächlichen Beanspruchung besteht und hauptsächlich aus der Abweichung der wirklichen Konstruktion von dem für die Berechnung zugrundegelegten Modell entsteht.

Es mögen und sollen diese Faktoren durch sorgfältige Beobachtungen und Sammeln von Daten festgesetzt werden. Meines Wissens hat sich dies mit gebührender Ausführlichkeit nur in Zusammenhang mit der EBV voll-

* Hängebrücke über der Donau bei Budapest (Spannweite 290 m), die am Ende des zweiten Weltkrieges auch gesprengt wurde und steht jetzt unter Wiederaufbau. — Bem. des Übersetzers.

zogen [5–7]. Die anderen Vorschriften haben dessen Angaben übernommen. Dadurch sind die Verschiedenheiten in Bau und die Funktion der Konstruktion vernachlässigt worden. Die Strenge der Qualitätskontrolle, ein eventuelles Fehlen der Qualitätsübernahme, die Sorgfältigkeit in Ausführung der Betonarbeiten, die in der Berechnung zu erzielende Genauigkeit, usw. alle beeinflussen den Wert von σ_G . Letztere hat deswegen Werte verschiedener Größe je nach den verschiedenen Funktionen der Konstruktionen, was im Falle einer einheitlichen Grenzspannung (σ_G) mit einem besonderen, sogenannten Funktionsfaktor zu berücksichtigen ist, wie es die sowjetischen Normen vorschreiben. Nur auf diese Weise ist es möglich, die Wirtschaftsvorteile des GZBs völlig auszunützen. Bei uns kennt bloß die SBV den Funktionsfaktor, die Hochbau-Norm vernachlässigt diese Frage und schreibt dieselbe Grenzspannung für jeden Fall vor.

Man soll auch bei richtig bestimmter σ_G auf der Hut sein, die aus ständiger Kontrolle der Komponenten besteht. Die Bruchfestigkeit, bzw. die σ_F verschiedener Materien soll mit beständiger Aufmerksamkeit durch die bei den Übernahmen erhaltenen Angaben verfolgt werden. Diese Daten sollten an einer Zentralstelle (z.B. ÉTI*) gesammelt, Mittelwert und Streuung bestimmt werden, einerseits um die Vorschriften zu korrigieren, andererseits um für Sicherung der Materialqualität bei den herstellenden Werken Schritte zu machen, bzw. um den Qualitätsverderb zu verhindern. Eine ebenso wichtige Frage ist die immerwährende Prüfung der Qualität von Beton, nicht nur in der üblichen Weise, sondern auch durch Sammeln der erhaltenen Resultate, durch Bestimmung der Mittelwerte und der mittleren Fehler. Die Notwendigkeit hierfür ist im Schlußbericht [9] des in 1948 in Liège abgehaltenen Kongresses für Brückenbau für erwünscht erklärt worden, worin es festgestellt wurde, daß die Herstellung in Kenntnis des mittleren Fehlers und des Mittelwertes wirkungsvoll kontrollierbar ist.

Ebenso wichtig ist die Bestimmung der Streuung der Querschnittsabmessungen von Stabstahl, die bei der Ausarbeitung der EBV auf Grund der durch die Walzwerke angegebenen Toleranzen festgestellt worden sind. Wegen der negativen Toleranzen mußte man einen ziemlich großen verringernden Faktor (10%) bei Festsetzung der σ_G des Stahles anwenden [5].

Sehr wesentlich und dabei eine offene Frage ist die σ_G des hochwertigen Stahles (A 50.35 und MTA). Sie ist seinerzeit aus Mangel an Daten im Verhältnis der vorgeschriebenen Fließspannung des Stahles A 36.24 zu deren Grenzspannung festgestellt worden. Diese Verfahrungsweise setzt voraus, daß das gleiche Verhältnis zwischen den Mittelwerten und mittleren Fehlern der Fließspannungen beider Materialien wie zwischen ihren normierten Fließspannungen besteht. Es ist aber nicht so. Während der Mittelwert der Fließspannung von Stahl A 36.24 an Hand von ungefähr 5000 Versuchen, die in den Jahren

* ÉTI = Bauwissenschaftliches Institut.

1941—56 gemäß der Abnahmen der ungarischen Staatsbahn ausgeführt worden waren, viel höher ist ($28,7 \text{ kg/cm}^2$) als der vorgeschriebene Wert, ist der vorgeschriebene Wert für Stahl A 50.35 kaum zu halten, ja was noch mehr ist, es ist die Rede davon, daß der Wert der normierten Fließspannung vermindert wird. Die Werte der in den Vorschriften angegebenen Grenzspannungen für hochwertigen Stahl sind *nicht befriedigend*, sie sollen auf Grund neuerer Daten hinsichtlich der Fließgrenze des Materials *dringend abgeändert werden*.

Es wäre sehr wichtig, die Abmessungen von Beton, die tatsächliche Lage der Armierungen durch ständige Messungen am Bauplatz zu überprüfen, und mit den Sollwerten zu vergleichen. Da nicht jeder der Faktoren mit der Genauigkeit bestimmt wurde, die die Festsetzung einer wirtschaftlicheren, doch die noch eben erforderliche Sicherheit bedeutenden Werteschar ermöglicht hätte, ist die Fortführung der Nachforschung in dieser Richtung und die Weiterentwicklung der Methode notwendig.

Auch die exakte Bestimmung der Unsicherheiten im Rechnungsgang dient zur Weiterentwicklung. Die EBV hat den einfachen Balken, der die kleinste Sicherheit besitzt, zugrunde gelegt. Die größere Sicherheit statisch unbestimmter Träger fungiert als eine verborgene Reserve, deren Enthüllung der nächste Schritt wäre. Die Ausnützung der plastischen Tragfähigkeitsreserve kann bis zu einem gewissen Grad in Anschlag kommen, obwohl die Rolle der beweglichen Last Schwierigkeiten verursacht. Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung soll es bestimmt werden, wie oft eine gewisse Überschreitung der Betriebslast während der Lebensdauer der Konstruktion auftreten wird. Ein schönes Beispiel dieser Rechnung gibt der Aufsatz von S. KALINSZKY und seinen Mitarbeitern [10], der die Möglichkeit der Ermäßigung des Sicherheitsfaktors der statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen erweist. Laut Beschluß der obenerwähnten Liègeer Tagung [9] würde es auch erstrebenswert sein, die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen auf die Beanspruchungen einwirkenden Komponenten zu beurteilen.

2. Die Sicherheitsfaktoren liefern die andere Gruppe der in den Normen angegebenen Zahlenwerte. Die meisten Einwände wurden in der Praxis eben gegen sie erhoben. Der eine Teil hält die 10%ige Streuung der ständigen Belastung für wenig, der andere hält den Sicherheitsbeiwert 1,4 der Nutzlast für zu viel, wieder ein dritter Teil bemängelt die Größe der Abweichung zwischen den Beiwertsgruppen [14].

Der Sicherheitsfaktor gibt einerseits eine Möglichkeit zum ungefährlichen Tragen des Belastungsüberschusses, der sich in der Streuung der Größe, der Richtung und des Angriffpunktes der Belastung äußert (daher die Benennung: Überlastungsfaktor), andererseits enthält er noch einen gewissen psychologischen Bestandteil, zunächst in bezug auf die Last, deren Aufnahme die Funktion des Trägers ist. Dieses psychologische Element wird von Prof. KLÖPPEL Darmstadt [11] im Wesen durch die Frage formuliert, ob man oberhalb eines

Abgerundetes auf einem Drahtfaden emporklettern würde, der das Körpergewicht infolge seiner genau bemessenen Zerreißfestigkeit noch eben tragen könnte?

Es sind ungleiche Streuungen möglich bezüglich der verschiedenen Belastungsgrößen. Diese Streuung für das Eigengewicht ist in der EBV als Funktion des Materials angegeben; EBV läßt es nur für die üblichen Brücken zu, mit einer Durchschnittsstreuung von $\pm 10\%$ zu rechnen. SBV hat für die stndige Belastung allgemein eine Streuung von $\pm 10\%$ vorgeschrieben, die später für die Hochbauvorschriften übernommen worden ist; und daraus stammen die Beschwerden. Im Hochbau erwies sich dieser mechanisch übernommene Faktor einerseits wegen der Art der Konstruktionen, andererseits infolge der geringeren Sorgfalt in der Ausführung als zu niedrig. Denken wir an die sehr häufig vorkommende Stahlbetonplatte von 6 cm Stärke, die nachlässig auf 7 cm angefertigt wird. Es bedeutet allein eine Streuung von 17%. Es ist wahr, daß die größere Abmessung eine höhere Tragfähigkeit nach sich zieht, doch nicht in jedem Fall. Ist auch die zweireihige Bewehrung um 1 cm näher aneinander gelegt worden, kann die Katastrophe eintreffen.

Das soll natürlich nicht die Erhöhung jedes Eigengewichtsfaktors bedeuten, man kann nicht jede Konstruktion des Landes berdimensionieren, weil irgendwo eine Decke eingestürzt ist, sondern es wird verlangt, daß der Streuungsfaktor des Eigengewichtes besser differenziert, den Materialien, oder wenigstens den üblichen Konstruktionen angepaßt vorgeschrieben, in Sonderfällen fallweise festgelegt werde. Bei Stahlbetonkonstruktionen darf man auch das durch das Eigengewicht erregte Kriechen nicht außer acht lassen, das mit dem Eigengewicht anwächst.

Die Größe des Sicherheitsfaktors der Nutzlast wird zu 1,4 für Brücken, aus Abmessungen vorhandener Brücken zurückgerechnet, bestimmt. Dieser Faktor ist auf keine Weise für groß zu halten, denn er steht im Zusammenhang mit dem Übergang zu einer stark neuartigen Berechnungsmethode, und insbesondere dann nicht, wenn man einen großen Teil der anderen Faktoren nur schätzungsweise festlegen konnte. berhaupt diese Vorsichtigkeit ermöglichte den Übergang zum GZB, dessen Stunde z. B. nach KLÖPPEL [11] — wegen Mangel an Kenntnissen bezüglich der Streuungen — noch nicht gekommen ist. Wir haben diesen Weg betreten und dadurch haben wir die Weiterentwicklung ermöglicht, die aus der genaueren Bestimmung der Faktoren, ferner aus der Herabsetzung der Sicherheit besteht. KLÖPPEL hat auch festgestellt, daß man auf dem Gebiet der Wirtschaftlichkeit nur diesen Weg fortsetzen kann, da die zS in Stahlkonstruktionen generell nicht mehr erhöht werden kann.

Was den großen Unterschied unter den Sicherheitsfaktoren betrifft, führe ich einige ausländische Vorschriften bzw. Vorschläge vor.

Die berlastungsbeiwerte der sowjetischen Hochbauvorschrift sind: für Eigengewicht 1,1; Schneelast 1,4; Windlast 1,2; Nutzlast der Decke der Wohn-

gebäude 1,3; Nutzlast der Industriegebäude 1,2; Kranlast 1,3; für hydrostatischen Druck der Flüssigkeiten 1,1. Wie zu sehen ist, hat die sowjetische Vorschrift fürwahr einen niedrigeren Wert für die Nutzlast vorgeschrieben als unser 1,4, es ist also zu überprüfen, ob der für den Brückenbau bestimmte und für den Hochbau mechanisch übernommene Faktor $n = 1,4$ dem Hochbau- und den Industriekonstruktionen entspricht?

Am Liègeer Kongreß hat Dr. MOE, der zum erstenmal die neue Methode ausführlich ausgearbeitet hat und sie in Vorschlag [12] brachte, für die ständige Last 1,2 und für die Nutzlast 1,8 vorgeschlagen; der Unterschied ist größer als bei uns.

A. PADUART, der den Vorschlag der internationalen Vorschrift für Spannbeton [13] ausgearbeitet hat, schlägt die folgenden Sicherheitsfaktoren gegen Bruch vor: für ständige Last 1,25, für zufällige Last 1,75. Dieselben Faktoren betragen Werte gegen Ausreißen bei der Kabelbrücke von *Tancarville* (Europas größte Kabelbrücke) bei der Kabelverankerung 1,0, bzw. 2,0.

Die erwünschten Sicherheiten im Fließgrenzzustand laut der im Jahre 1956 herausgegebenen französischen Stahlbauvorschriften: für ständige Last 1,0; Nutzlast 1,25; Windlast 1,5.

Das Verhältnis der Sicherheitsfaktoren der zufälligen und ständigen Last ist überall entweder größer als bei uns, oder bleibt nur wenig unter dem unseren ($1,4 : 1,1 = 1,27 > 1,25$). Dies alles bedeutet, daß unsere vorgeschriebenen Faktoren im großen und ganzen richtig sind, nur die Faktoren für Hochbau benötigen eine Revision.

Der letzte Einwand gegen die neuen Vorschriften betont, daß sie nicht genug einheitlich sind, und ein gewisses Durcheinander verursacht wird, da die verschiedenen Vorschriften in ähnlichen Fällen uneinig sind. Das ist wahr. Das ist aber kein Fehler der neuen Bemessungsmethode, sondern es ist ein Versehen der Vorschriften. Das Voraugenhalten der allgemeinen Grundprinzipien und die Eindringung ins Wesen der neuen Methode werden dem abhelfen. Ich beschäftige mich nicht mehr mit diesen Einwendungen, ich erwähne nur, daß das Bestreben der Vereinheitlichung zur Ausgabe des statischen Teiles der SB führte.

Schlußfolgerungen

Die neue Bemessungsmethode hat sich bei uns gut bewährt, sie ist wirtschaftlich, jedoch sollen einige Faktoren überprüft werden; durch lokale Messungen, Materialproben, Anwendung statistischer Methoden sollen einerseits die Faktoren, andererseits die Ausführung kontrolliert werden und wie es KLÖPPEL geschrieben hat: Aufgabe der nächsten Zukunft ist die ausführliche Nachforschung der Streuungsfaktoren, die sorgfältige Bestimmung deren Größe, um so mehr, weil die Aufdeckung der tatsächlichen und der nötigen Sicherheit unserer Konstruktionen nur auf diese Verfahrungsweise möglich ist.

SCHRIFTTUM

1. KAZINCZY, G.: Versuche mit eingemauerten Balken. — Betonszemle. 1914.
2. KAZINCZY, G.: Diskussionsrede zum Vortrag des Professors GEHLER. — Berichte über die II. Internationale Tagung für Brücken- und Hochbau. S. 251.
3. KORÁNYI, I.: Begriff der Sicherheit. III. Kongreß der IVBH, Liège, 1948. — Schlußbericht. S. 655.
4. KORÁNYI, I.: Sicherheit der Konstruktionen. — Magyar Közl. Mély- és Vízép. I. Jahrgang (1949). No 2. S. 76.
5. KORÁNYI, I.: Analyse der Grenzspannungen bei Stahl A 36. 24. — Az ÉKME Tud. Közl. 1958. No 5. S. 21.
6. KORÁNYI, I.: Analyse der Grenzspannung bei St. 37. — Acta Techn. Tom. XXVI. Fasc. 1—2. S. 135.
7. KORÁNYI, I.: Statistische Nachprüfung der Qualität bei Baustählen. — Ép. és Közlek. Tud. Közl. 1959. No 3—4. S. 321.
8. STRELETZKIJ, N. S.: Stahlkonstruktionen. — Tankönyvkiadó, Budapest, 1952. S. 62.
9. III. Kongreß der Internationalen Vereinigung für Brücken- und Hochbau. Schlußbericht. Liège, 1948. S. 131.
10. KALINSZKY, S., KORDA, J., KOLLÁR, L., und SOMOGYI, D.: Frage der Sicherheit bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen. A MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl. Band XV. (1955), No 1—4. S. 385.
11. KLÖPPEL, K.: Über zulässige Spannungen im Stahlbau. Köln, 1958. S. 31.
12. MOE, A. J.: Begriff der Sicherheit. III. Kongreß der IVBH, Liège, 1948. — Vorbericht. S. 625.
13. GY. HAVIÁR's Mitteilung
14. MIKLÓS J.: Über das Problem der Umstürzung der Konstruktionen beim Verfahren mit Sicherheitsfaktoren. Mélyép. Tud. Szemle. 1961, No 5. S. 227.

SOME NOTES ON THE SOLUTION OF SKEW ORTHOTROPIC PLATES

V. KOVAŘIK

C. SC., CZECHOSLOVAK ACADEMY OF SCIENCES, PRAGUE

Approximate methods, *i. e.* variational methods and finite differences, procedures afford powerful means of obtaining an approximate mathematical solution of two-dimensional boundary value problems in engineering which are intractable to exact analysis. Despite this significance no considerable exposition of these methods is to be found in standard reference texts on applied mathematics or in those covering a given domain of technical theory. This article is a survey of the approaches to approximate methods of analysis of skew orthotropic plates. Many of these methods are shown to be used for the first time in the theory of skew orthotropic plates.

1. Formulation of the problem in rectangular and oblique coordinates

1.1. Shape of the considered plate and the notation used

Consider a thin skew orthotropic plate (Fig. 1) and introduce the following notations

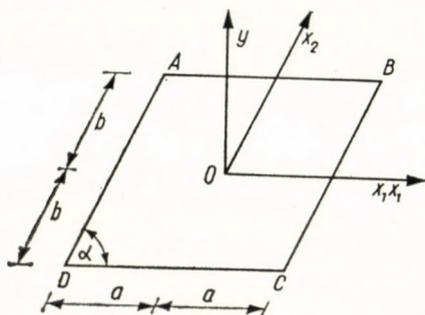


Fig. 1

x, y	Rectangular coordinates; principal axes of the orthotropy
x_1, x_2	Oblique coordinates
q	Intensity of a continuously distributed load

μ_x, μ_y	Poisson's ratios
D_x, D_y	Principal flexural rigidities of the plate
C	Twisting rigidity of the plate
H	Reduced twisting rigidity of the plate: $H = D_x \mu_y + 2C$
M_x, M_y	Bending moments per unit length in directions x and y resp.
M_{xy}	Twisting moment per unit length
M_n	Bending moment per unit length in n -direction
T_x, T_y	Shearing forces parallel to z -axis per unit length of sections perpendicular to x - and y -axes, respectively.
V_x, V_y	Reactions parallel to z -axis per unit length of sections perpendicular to x - and y -axes, respectively.
V_n	Reaction parallel to z -axis per unit length of sections perpendicular to n -direction
w	Deflection surface of the plate
R	Region of the middle plane of the plate
S	Subregion of R carrying the loading
$A(w)$	Linear differential operator characterizing the left-hand side of the differential equation of equilibrium
$A^*(w_k)$	Finite-difference equivalent to $A(w)$
$W(w)$	Potential energy of deformations of the plate
a	Skew of the plate
$2a, 2b$	Length of edges of the plate in x_1 - and x_2 -directions, resp.
h_1, h_2	Spacing of the net in two given directions and abbreviations, respectively
	$c = \cos a, s = \sin a,$
	$\lambda = \frac{h_2}{h_1},$
	$\varrho^4 = \frac{D_x}{D_y}, \quad \varkappa^2 = \frac{H}{\sqrt{D_x \cdot D_y}},$
	$K_1 = \varrho^4 s^4 + 2\varkappa^2 \varrho^2 s^2 c^2 + c^4,$
	$K_2 = \varkappa^2 \varrho^2 s^2 + c^2,$
	$K_3 = 2\varrho^2(1 - \sqrt{\mu_x \mu_y}) + \mu_x;$
	$K_3 = 2\varkappa^2 \varrho^2 s^2(1 - \sqrt{\mu_x \mu_y}) + \mu_x s^2 + c^2.$

1.2. Rectangular coordinates

The problem of bending of a thin skew orthotropic plate can be defined either as a boundary value problem for the differential equation*

$$A_r(w) \equiv D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y), \quad (1.1)$$

and the boundary conditions

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{along the built-in edge,} \quad (1.2)$$

$$w = 0, \quad M_n = 0 \quad \text{along the simply supported edge,} \quad (1.3)$$

$$M_n = 0, \quad V_n = 0 \quad \text{along the free edge;} \quad (1.4)$$

or as a variational problem for the functional

* Subscript r indicates rectangular coordinates.

$$\begin{aligned}
 W_7(w) \equiv & \frac{1}{2} \iint_R \left[D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_x \mu_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + 4C \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy - \iint_S qw dx dy,
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

and the boundary conditions (1.2)–(1.4).

1.3. Oblique coordinates

With the aid of the usual transformation of coordinates one can obtain from Sec. 1.2 the formulation of the given problem in oblique coordinates: Boundary value problem*

$$\begin{aligned}
 A_0(w) \equiv & \left[K_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - 4c K_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 2(K_2 + 2c^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - \right. \\
 & \left. - 4c \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} \right] \frac{D_y}{s^4} = q(x_1, x_2).
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Variational problem

$$\begin{aligned}
 W_0(w) \equiv & \frac{1}{2} \frac{D_y}{s^4} \iint_R \left[K_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 - 4c K_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + 2(K_2 + c^2 - \right. \\
 - \mu_x s^2) & \left. \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + 2(c^2 + \mu_x s^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - 4c \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 - \iint_S qw dx_1 dx_2.
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Boundary conditions have the same general form (1.2)–(1.4).

2. On the solution of the problem by finite difference procedures

Finite difference procedures deal with the numerical values of the significant variables at all stages of the computation. Formulas expressing the dependence of one variable on others are consequently not generally obtainable by these methods.

* Subscript *o* indicates oblique coordinates.

In the method of finite differences the differential equation $A(w) = f(x, y)$ is replaced by approximating difference equations $A^*(w_{ik}) = f(x_i, y_k)$ and the continuous region R by a set of discrete points. In this way the problem is reduced to the solution of systems of simultaneous algebraic equations.

2.1. The form of the net and its convenience

The usual procedure is to cover the region R by a net consisting of two sets of lines a distance h_1 and h_2 apart and mark off a polygonal contour Γ' so that it sufficiently closely approximates the boundary Γ . The domain R in which the solution of the difference equations is sought for is formed by the lattice points of the net contained within Γ' . The assigned boundary values of w on Γ are then transferred in some manner to the lattice points on Γ' . In numerical practice various shapes of meshes are used.

Introduce now formulas for finite difference equations for the most current shapes of mesh.

2.1.1. Rectangular net

The difference equivalent $A_r^*(w_{ik})$ is given in Fig. 2.

Boundary conditions (1.2)–(1.4) have in finite difference expressions the form shown in Figs. 3–5.*

2.1.2. Parallelogram net

Difference equivalent $A_0^*(w_{ik})$ for the differential operator (1.6) is given in Fig. 6.

Boundary conditions must be included in the number of difference equations because of the impossibility of expressing explicitly the values of w in external nodes by means of its values in inner nodes.

2.1.3. Triangle net

Choose a net formed by three sets of parallel lines (Fig. 7). Difference equivalent $A_0^*(w_{ik})$ has the same form as shown in Fig. 6. Accordingly the boundary conditions have to be discussed as in Sec. 2.1.2.

Substituting $a = \frac{\pi}{3}$, $\lambda = 1$ in Fig. 6 one obtains the expression for the net consisting of isosceles triangles (Fig. 8).

Boundary conditions in this case can be represented simply as shown in Figs. 9–11.

* These figures express schematically the dependence of values of w in external points (outside Γ') on values w in inner points and boundary points, respectively.

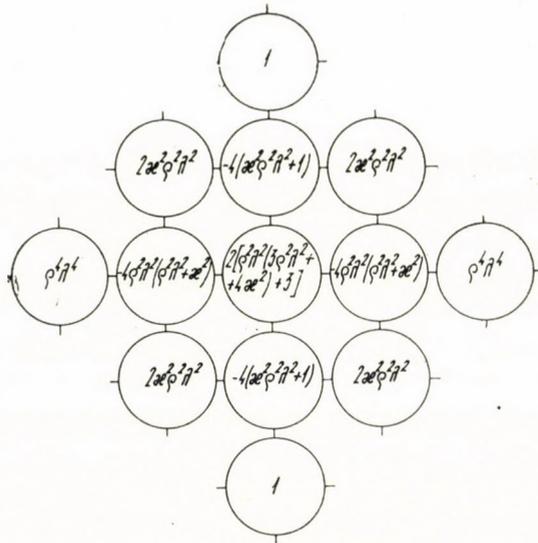


Fig. 2. $\frac{h_2^4}{D_y} A^* (w_{ik})$

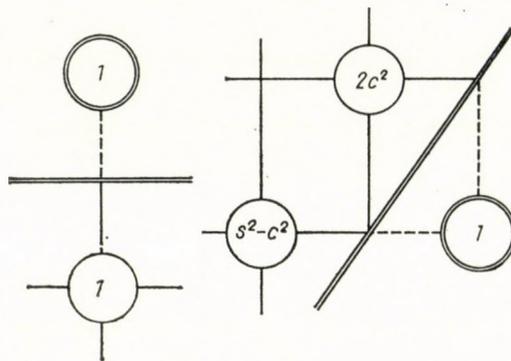
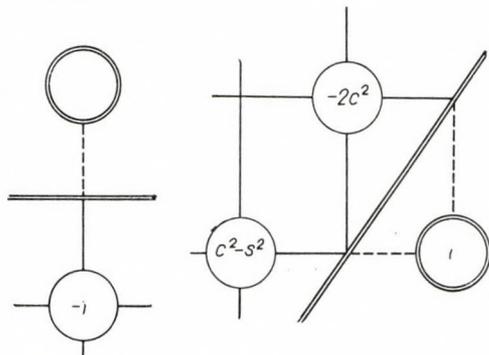
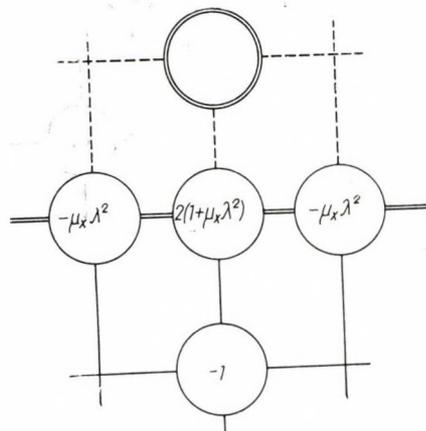
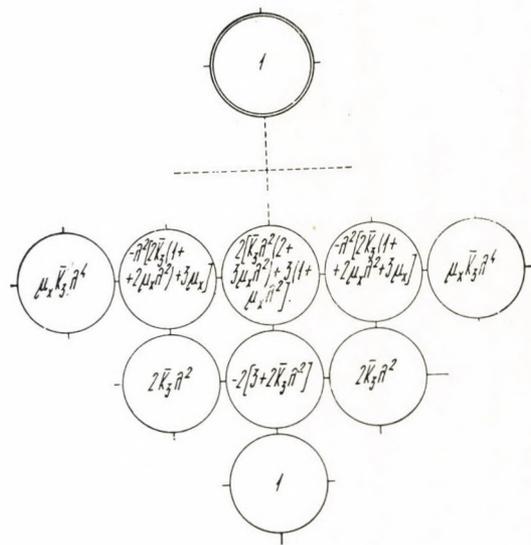


Fig. 3. $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$

Fig. 4. $M_n = 0$ Fig. 5a. $M_n = 0$; Free edgeFig. 5b. $V_n = 0$

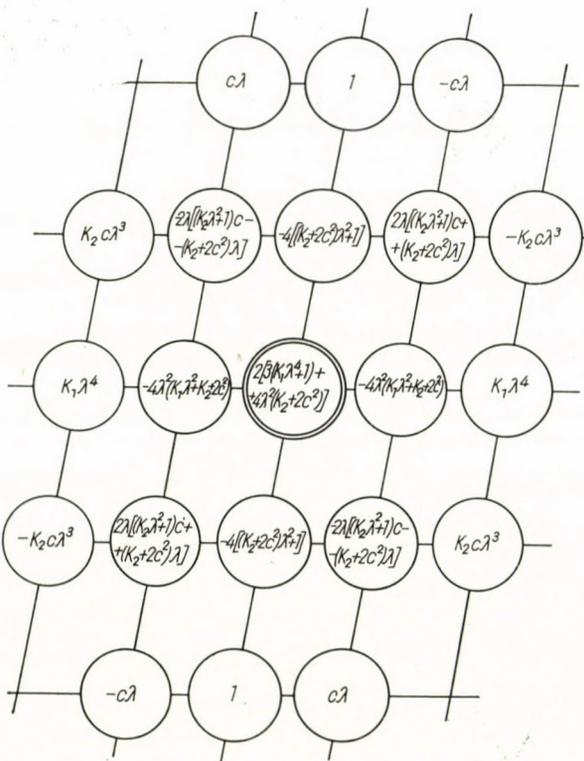


Fig. 6. $\frac{Dy}{h_2^4 s^4} A^* (w_{ik})$

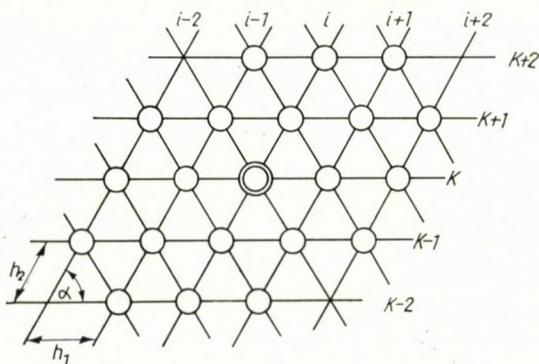


Fig. 7

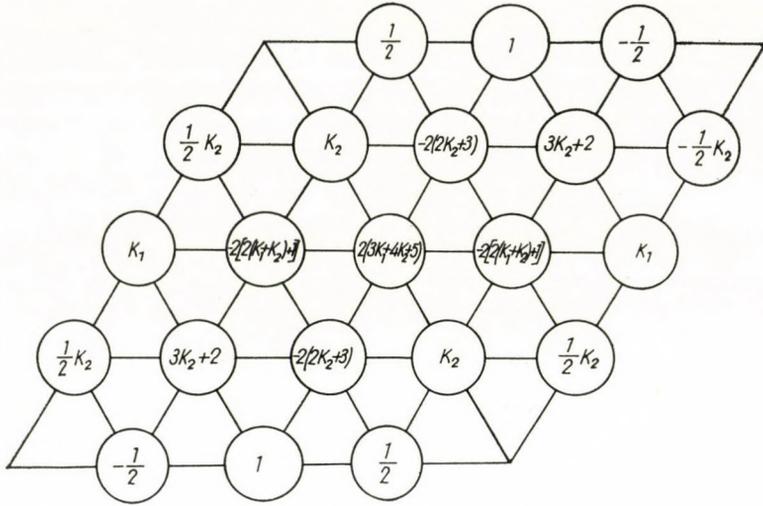


Fig. 8. $\frac{16}{9} \frac{D_y}{b_2^4} A^* (w_{ik})$

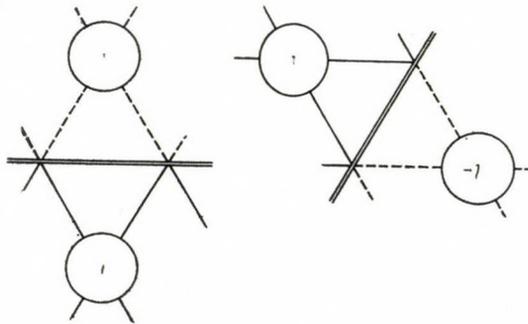


Fig. 9. $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$

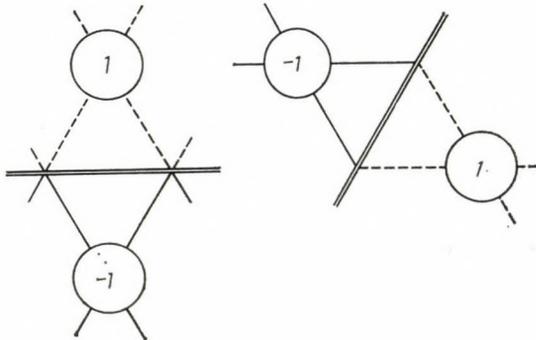


Fig. 10. $M_n = 0$

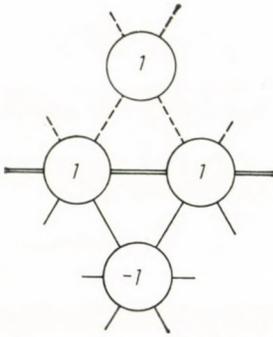


Fig. 11a. $M_n = 0$; Free edge

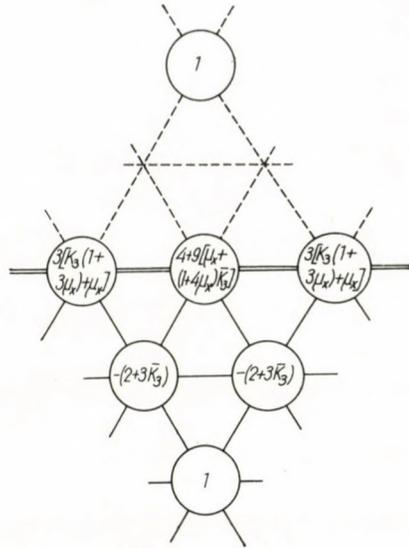


Fig. 11b. $V_n = 0$

2.1.4. A modification of triangle net due to V. P. Jensen

Express the derivatives of w in the direction of y by means of derivatives in directions of x, u, v (Fig. 12). Further replace these derivatives by difference

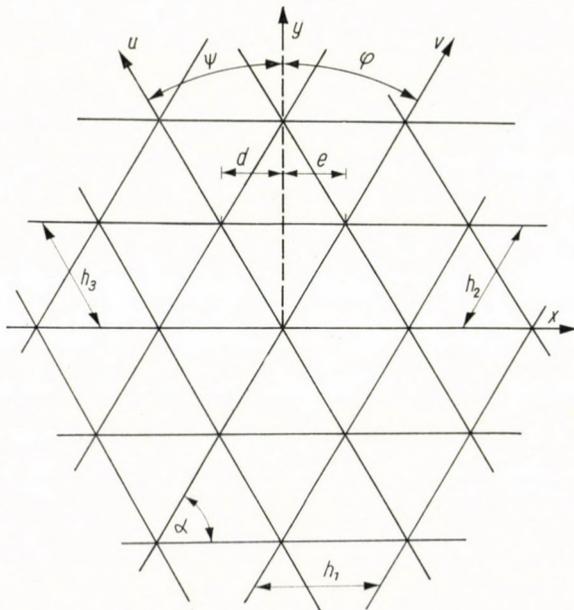


Fig. 12

quotients and put them in Eq. (1.1).

Thus we get finite difference equivalent to Eq. (1.1) (Fig. 13), where

$$A = \frac{e}{h_1}, \quad B = \frac{d}{h_1}, \quad A + B = 1.$$

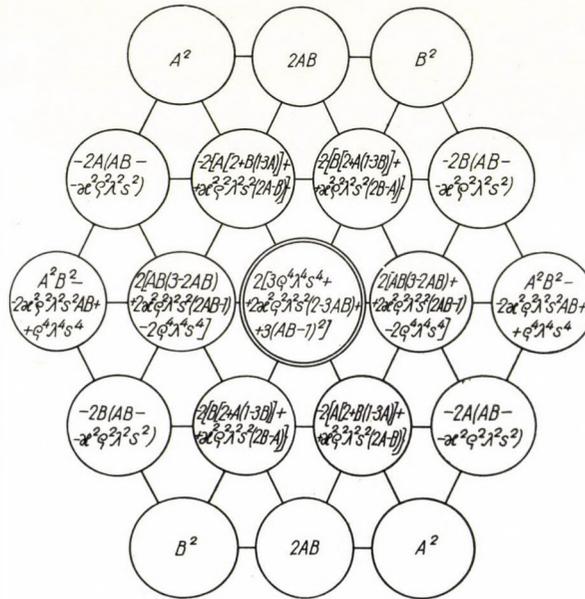


Fig. 13. $\frac{D_y}{h_2^2 s^4} A^*(w_{ik})$

Boundary conditions can be represented in their final form as shown in Figs. 14–16.

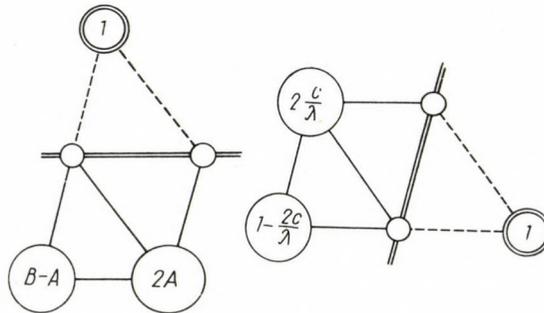


Fig. 14. $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$

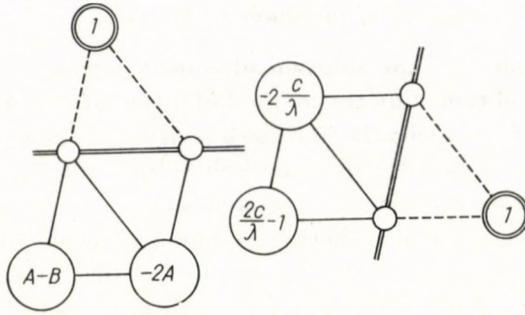


Fig. 15. $M_n = 0$

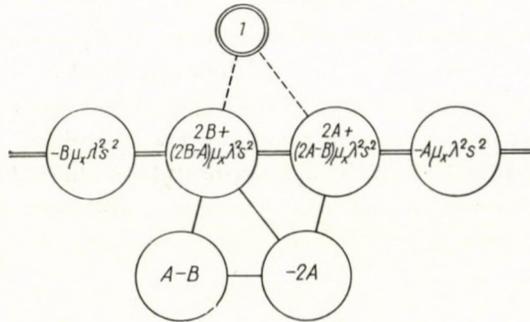


Fig. 16a. $M_n = 0$; Free edge

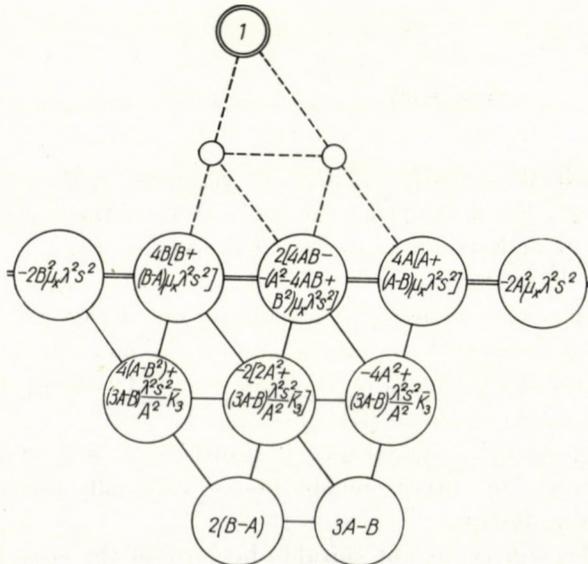


Fig. 16b. $V_n = 0$

2.1.5. Convergence. Suitability of the shape of the net

The acceptability of the solution obviously depends on the agreement between the values obtained by the method of differences and the exact values. It is assumed that if a sufficiently fine mesh is utilized, the approximate values will be in good agreement with the exact values and will converge to the exact values as the fineness of the mesh approaches zero.

However, determination whether or not a sequence of sets of approximate values will converge to the exact values as the fineness of the mesh approaches zero is often a difficult matter to establish. The convergence of approximate solutions of the difference equations was investigated by a series of excellent mathematicians. However, in general this question is not yet satisfactorily solved. Most of the papers on this subject deal with boundary value problems defined by linear partial differential equations of the second order and by simple boundary conditions. The case of bending of skew orthotropic plates still remains open.

The main part of the error in replacing the boundary value problem by a set of difference equations can be approximately evaluated like this:

Have two solutions w_1 and w_2 of the given problem obtained with two different sizes of mesh $h_1 = {}^{(1)}h_1$ and $h_2 = {}^{(1)}h_2$, and $h_1 = {}^{(2)}h_1$, $h_2 = {}^{(2)}h_2$, respectively.

Let further be

$${}^{(1)}h_1 = \gamma \cdot {}^{(2)}h_1, \quad {}^{(1)}h_2 = \gamma \cdot {}^{(2)}h_2,$$

where

$$\gamma > 1.$$

Then the error is

$$\varepsilon = w - w_2 \sim \frac{1}{\gamma^2 - 1} (w_2 - w_1).$$

We conclude this section with a few remarks on the suitability of the shape of the mesh. From the practical application of finite difference method to a series of skew orthotropic plates one can suppose that:

1. In general JENSEN's modification of the triangle net has better convergence than other shapes of net. The disadvantage of this modification is the more complicated form of the equation and of the boundary conditions.

2. Quite suitable seems to be the square net. The form of the equations is simple and the convergence sufficiently good.

3. Rectangular net gives acceptable results for $\lambda \rightarrow 1$. In the case $h_2 \ll h_1$ (or on the contrary) the convergence is slow — especially for the bending moments and shearing forces.

4. Parallelogram net is not suitable because of the complicated form of difference expressions and of worse convergence.

5. Equilateral triangle net is quite acceptable for plates with $\alpha = 60^\circ$. Simple form of boundary conditions represents a great advantage.

6. Equiangular hexagonal net is only a geometrical curiosity and is not to be utilized.

2.2. Acceleration of convergence

The source of error is in the representation of continuum problem by discrete points problem. One way of making errors smaller, due to this cause, is to use a more finely divided net. However, this means the increase of the number of equations and simultaneously the increase of effort required.

The speed of convergence depends upon the speed of solving the difference equations. Two main devices can be used for acceleration of this process: relaxation and extrapolation, respectively.

2.2.1. Relaxation methods*

The power of relaxation method is, in many modifications and devices, which are employed in its practice and whose judicious and appropriate use enables a large variety of equations to be solved with only a reasonable expenditure of time. All the devices which are now to be described are flexible and are used entirely at the computer's discretion.

a) Overrelaxation

Overrelaxation is useful whenever the available operations are such — and they most often are — that, in reducing one residual, the other residuals are automatically increased, and when at the same time the individual residuals are predominantly of one sign. The question how much it is appropriate to overrelax, in general, is impossible to say. It depends on the equations being solved, *i. e.* on the shape of the net, and a good decision is largely a matter of experience. As a rough rule it can be suggested that in the solution of the problem of skew orthotropic plates the overrelaxing operation to be used should be of a magnitude about ten-times greater than the operation which would be given by the basic rule of relaxation.

b) Block relaxation

Unit block relaxation consists in the use of simultaneous application of increments ± 1 to more than one of the unknowns at the same time.

One particular use of block operations deserves special mention: it is to use the block operation involving increments to all the unknowns, in the first step of the calculation, in order to reduce the total of all the residuals to zero in that one step.

* We shall consider henceforth that the iteration process is as usually, lead in an operation table by means of relaxation operators.

Introduce the notation

R = total of all the residuals,

δR = total of the changes of all the residuals produced by the increments $+1$ of all the unknowns, *i. e.* by the unit block operation $\delta w_1 = \delta w_2 = \dots = \delta w_n = +1$,

$$t = \frac{-R}{\delta R}$$

In this notation a block operation $\delta w_1 = \delta w_2 = \dots = \delta w_n = t$ must automatically reduce the total residual to zero. This fact means that the individual residuals are not of one sign and the subsequent convergence may be expected to be rapid.

c) Group relaxation

Group relaxation is a generalized block operation, differing from the latter in that the increments added to the various unknowns are not equal to one another.

The form of the group operator is found in that part of relaxation table which has already been recorded. One can get it by comparing the values of the residuals at two lines of the operation table and by taking into consideration all relaxation operations between those two lines.

d) Multiplying factors

In cases which are slowly convergent, *e. g.* the case of a plate under concentrated load, etc., it is usually fairly easy, at any stage in this calculation, to make the residual values approximately have ratios to one another, which are the same as the ratios in which they were initially.

In general at this stage, the residual values must each be the same fraction, say $1/n$ of their original values. Consequently each residual must have been reduced by a fraction

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

of its original value. The unknowns must have acquired that same fraction $\frac{n-1}{n}$ of their final values. The solution can immediately be completed by multiplying the values of the unknowns at this stage by the multiplying factor m_f . $m_f = \frac{n}{n-1}$.

2.2.2. Extrapolation

More accurate results could be obtained from difference equation solutions by extrapolating from the results of analyses with several different sizes

of net. The errors in replacing derivatives by differences are generally expressible as a series involving only even powers of the spacing

$$\varepsilon = h^2 \cdot \varphi_1(x, y) + h^4 \cdot \varphi_2(x, y) + \dots \quad (2.1)$$

where $\varphi_i(x, y)$ are the functions of x and y respectively, not depending on h .

Equation (2.1) can be used in this manner:

Suppose that we know the values $^{(1)}w_{ik}$, $^{(2)}w_{ik}$, $^{(3)}w_{ik}$ of the function w in the node-point (x_i, y_k) , obtained with the mesh sizes $^{(1)}h$, $^{(2)}h$ and $^{(3)}h$ respectively. Let exact value of the function w in this point be w_{ik} .

Neglecting in (2.1) additional terms, one can write

$$w_{ik} - {}^{(m)}w_{ik} = {}^{(m)}h^2 \cdot \varphi_1 + {}^{(m)}h^4 \cdot \varphi_2, \quad (2.2)$$

$$(m = 1, 2, 3),$$

where φ_1, φ_2 are certain constants which are obtained — together with w_{ik} — by solving the system (2.2).

2.2.3. Higher order approximations for derivatives by differences

Another way of making errors smaller, due to the representation of continuum problem by discrete points problem, is to use higher order approximations for derivatives by finite differences.

It is important to note that the foregoing substitution of $A(w)$ by $A^*(w_{ik})$ assumes that the differences from the fourth order exclusively are neglected. If the differences up to the sixth order inclusively are kept the difference equation for the case of rectangular net can be written in the form

$$A_r^*(w_{ik}) - B_r^*(w_{ik}) = q(x_i, y_k), \quad (2.3)$$

where $A_r^*(w_{ik})$ is given in Fig. 2, and

$$B_r^*(w_{ik}) \equiv \frac{D_y}{6h_2^4} [\lambda^4 \varrho^4 \Delta_x^6 w_{ik} + \varkappa^2 \varrho^2 \lambda^2 (\Delta_x^4 \Delta_y^2 w_{ik} + \Delta_x^2 \Delta_y^4 w_{ik}) + \Delta_y^6 w_{ik}]. \quad (2.4)$$

In (2.4) Δ^m denotes the difference of m -th order. The subscripts indicate the directions in which the differences are taken.

The solution of difference equation (2.3) can be represented in the form

$$w = {}^{(0)}w + {}^{(1)}w + {}^{(2)}w + {}^{(3)}w + \dots + {}^{(m)}w + \dots, \quad (x)$$

where ${}^{(0)}w$ is the solution of the usual difference equation

$$A_r^*({}^{(0)}w_{ik}) = q(x_i, y_k) \quad (y)$$

and ${}^{(m)}w$ one gets from the equation

$$A_r^* [{}^{(m)}w_{ik}] = B_r^* [{}^{(m-1)}w_{ik}], \quad (2.5)$$

$$(m = 1, 2, 3 \dots).$$

Functions ${}^{(m)}w$ fulfill the corresponding boundary conditions.

This modification has the advantage that the introduction of higher order differences does not mean increased number of terms in difference equations. It consists in successive solutions of a system of equations with the same left-hand member $A_r^*(w_{ik})$ and a variable right-hand member $q(x_i, y_k)$ and $B_r^*({}^{(m)}w_{ik})$, respectively.

3. On the variational methods in the theory of skew orthotropic plates

The equilibrium state of a body is characterized by certain broad minimum principles. It is well known that it is possible to construct certain functionals $F(x_1, x_2, w)$ and to show that they attain their minimum values when the distribution of stress in the body corresponds to the equilibrium state.

Variational methods are based on the use of direct methods in the calculus of variations. Functions $\tilde{w}(x_1, x_2)$ minimizing the considered functional are taken in the form

$$\tilde{w}(x_1, x_2) = w_n(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x_1, x_2) \quad (3.1)$$

where a_i are certain constants, and $\varphi_i(x_1, x_2)$ are selected admissible functions of x_1, x_2 having necessary derivatives and satisfying boundary conditions of the given problem. The constants are then determined from the condition

$$F(x_1, x_2, w_n) = F(x_1, x_2, a_1, a_2, \dots, a_n) = \min. \quad (3.2)$$

Applying this condition our problem is transformed to the problem of solving a system of simultaneous linear algebraic equations

$$\sum_{i=1}^n a_i \delta_{ik} = c_k, \quad (3.3)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

The difficult problem of estimating errors in successive approximations of w by w_n obtained by the variational methods was treated by a series of mathematicians. We quote only two of the most important monographs: L. V. KANTOROVICH and V. I. KRYLOV: Approximate methods of higher analysis (1952); S. G. MICHLIN: Variational methods in mathematical physics (1957). Both in Russian.

3.1. The Ritz method

The functional characterizing of the equilibrium state of the plate represents potential energy of deformations $W_0(w)$. From the conditions

$$\frac{\partial W_0(w_n)}{\partial a_k} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (3.4)$$

we obtain the coefficients of equations (3.3) in the form given in Table I.

3.2. The methods by Galerkin, Biezeno-Koch, the methods of collocation, of least squares

Define the error function $\varepsilon(w_n)$:

$$\varepsilon(w_n) \equiv A_0(w_n) - q(x_1, x_2). \quad (3.5)$$

All the methods of this section are special cases of the general procedure of minimizing the error function by making it orthogonal with respect to some function $D(\varphi_k)$, that is, by imposing the conditions

$$\int_R \varepsilon(w_n) \cdot D(\varphi_k) dR = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.6)$$

a) The GALERKIN method.

Put

$$D(\varphi_k) \equiv \varphi_k, \quad (3.7)$$

in the conditions (3.6). Upon substituting (3.7), (3.5) and (3.1) in (3.6) we get the coefficients of the equations (3.3) in the form given in Table I.

b) The BIEZENO—KOCH method.

Let the region R be divided into n subregions R_k and put

$$D(\varphi_k) \equiv \begin{cases} 1 & \text{in } R_k \\ 0 & \text{elsewhere in } R. \end{cases} \quad (3.8)$$

Thus, we obtain from (3.6) for the coefficients δ_{ik} and c_k , respectively, expressions given in Table I.

c) The method of collocation.

This method requires that the error function $\varepsilon(w_n)$ vanish at n specified points in the region R . In this procedure, which is the limiting case of BIEZENO—KOCH's procedure, the expressions for the coefficients δ_{ik} , c_k in (3.3) are obtained directly without integration (see Table I).

Table I
Coefficients of Eq. (3.3)

Method	δ_{ik}	c_k
RITZ	$\frac{D_y}{s^4} \iint_R \left[K_1 \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_1^2} - 2cK_2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \right.$ $+ 2(K_2 + c^2 - \mu_x s^2) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_1 \partial x_2} + (c^2 + \mu_x s^2) \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_1^2} + \right.$ $\left. + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_2^2} \right) - 2c \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \left. \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_2^2} \right] dx_1 dx_2$	$\iint_S q \varphi_k(x_1, x_2) dx_1 dx_2$
GALERKIN	$\frac{D_y}{s^4} \iint_R \left[K_1 \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x_1^4} - 4cK_2 \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x_1^2 \partial x_2} + 2(K_2 + 2c^2) \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 4c \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x_1^2 \partial x_2^3} + \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x_2^4} \right] \varphi_k dx_1 dx_2$	$\iint_S q \varphi_k(x_1, x_2) dx_1 dx_2$
BIEZENO—KOCH	$\frac{D_y}{s^4} \iint_{R_k} \left[K_1 \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x_1^4} - 4cK_2 \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x_1^2 \partial x_2} + 2(K_2 + 2c^2) \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 4c \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x_1 \partial x_2^3} + \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x_2^4} \right] dx_1 dx_2$	$\iint_{R_k} q(x_1, x_2) dx_1 dx_2$
Collocation ¹	$\frac{D_y}{s^4} \left[K_1 \frac{\partial^4 \varphi_i(B_k)}{\partial x_1^4} - 4cK_2 \frac{\partial^4 \varphi_i(B_k)}{\partial x_1^2 \partial x_2} + 2(K_2 + 2c^2) \frac{\partial^4 \varphi_i(B_k)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 4c \frac{\partial^4 \varphi_i(B_k)}{\partial x_1 \partial x_2^3} + \frac{\partial^4 \varphi_i(B_k)}{\partial x_2^4} \right]$	$q(B_k)$
Least squares	$\iint_R A(\varphi_i) \cdot A(\varphi_k) dx_1 dx_2$	$\iint_S q A(\varphi_k) dx_1 dx_2$

¹ B_k denote the points of collocation

d) The method of least squares.

Let $D(\varphi_k)$ in (3.6) be

$$D(\varphi_k) \equiv \frac{\partial \varepsilon(w_n)}{\partial a_k} = A(\varphi_k). \quad (3.9)$$

From (3.6) we deduce the expressions for δ_{ik} and c_k given in Table I.

3.3. The method of Kantorovich, the variational method of successive approximations

Another group of methods make the method of KANTOROVICH and the variational method of successive approximations. The essence of these methods consists in the reduction of integration of partial differential equations to the integration of systems of ordinary differential equations.

a) The method of KANTOROVICH.

The method of KANTOROVICH represents a generalization of the RITZ method. The function $w(x_1, x_2)$ minimizing the functional

$$W_0(w) = \iint_R L(w) dx_1 dx_2 \quad (3.10)$$

where

$$\begin{aligned} L(w) \equiv & \frac{D_y}{2s^4} \left[K_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 - 4cK_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + 2(K_2 + c^2 - \right. \\ & \left. - \mu_x s^2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + 2(c^2 + \mu_x s^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \right. \\ & \left. - 4c \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 \right] - qw, \end{aligned} \quad (3.11)$$

we shall seek in the form

$$w_n = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_1) \psi_i(x_2), \quad (3.12)$$

where $\varphi_i(x_1)$ and $\psi_i(x_2)$ are certain functions of only one variable x_1 and x_2 , respectively. Functions w_n given by (3.12) let have all necessary derivatives and satisfy boundary conditions (1.2)–(1.4) of the problem.

It can be shown that the equation $A_0(w) - q(x_1, x_2)$ of the plate is the EULER equation associated with the variational problem

$$W_0(w) = \min.$$

It follows from this fact that the condition for the minimum of the functional $W_0(w)$ can be expressed in the form

$$\int_R [A_0(w) - q(x_1, x_2)] \delta_w dx_1 \cdot dx_2 = 0, \quad (3.13)$$

where δ_w denotes the variation of the deflection surface w .

Now, let us choose one set of functions in the expression (3.12) — say $\psi_i(x_2)$ — so as to fulfill the edge conditions on the boundary of interval $(-b, +b)$.

Another set of functions, *i. e.* $\varphi_i(x_1)$, can be — with respect to (3.13) — determined by means of the criterion of GALERKIN

$$\int_{-b}^{+b} [A_0(w_n) - q(x_1, x_2)] \psi_k(x_2) dx_2 = 0, \quad (3.14)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

On applying the criterion (3.14) to the given problem and after integration we get

$$\frac{D_y}{2s^4} \sum_{i=1}^n \left(\delta_{ik}^{(1)} \cdot \frac{d^4 \varphi_i}{dx_1^4} + \delta_{ik}^{(2)} \cdot \frac{d^3 \varphi_i}{dx_1^3} + \delta_{ik}^{(3)} \cdot \frac{d^2 \varphi_i}{dx_1^2} + \delta_{ik}^{(4)} \cdot \frac{d\varphi_i}{dx_1} + \delta_{ik}^{(5)} \varphi_i \right) =$$

$$= c_k(x_1), \quad (3.15)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

where

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ik}^{(1)} &= K_1 \int_{-b}^{+b} \psi_i(x_2) \cdot \psi_k(x_2) dx_2, \\ \delta_{ik}^{(2)} &= -4cK_2 \int_{-b}^{+b} \frac{d\psi_i(x_2)}{dx_2} \cdot \psi_k(x_2) dx_2, \\ \delta_{ik}^{(3)} &= 2(K_2 + c^2 - \mu_x s^2) \int_{-b}^{+b} \frac{d^2 \psi_i(x_2)}{dx_2^2} \cdot \psi_k(x_2) dx_2, \\ \delta_{ik}^{(4)} &= -4c \int_{-b}^{+b} \frac{d^3 \psi_i(x_2)}{dx_2^3} \cdot \psi_k(x_2) dx_2, \\ \delta_{ik}^{(5)} &= \int_{-b}^{+b} \frac{d^4 \psi_i(x_2)}{dx_2^4} \cdot \psi_k(x_2) dx_2, \\ c_k &= \int_{-b}^{+b} q \cdot \psi_k(x_2) dx_2. \end{aligned} \right\}$$

b) The variational method of successive approximations.

This method shows to be a modification of the KANTOROVICH method. The extremal of two-dimensional functional (3.10) is again sought in the form

$$w = \varphi(x_1) \cdot \psi(x_2) \tag{3.16}$$

where φ and ψ resp. fulfill the same conditions as in Sec. a) of this paragraph.

Let one of the functions $\varphi(x_1)$ and $\psi(x_2)$ be known — say $\psi(x_2)$. By inserting the expression (3.16) (with the chosen function) in the formula (3.10) we get, after integration with respect to x_2 , one-dimensional functional

$$W(\varphi) = \int_{-a}^{+a} L_1(\varphi) dx_1 \tag{3.17}$$

where

$$L_1(\varphi) \equiv \int_{-b}^{+b} L(\varphi\psi) dx_2. \tag{3.18}$$

EULER equation associated with the variational problem

$$W(\varphi) = \min$$

has the form

$$\frac{\partial L_1}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx_1} \cdot \frac{\partial L_1}{\partial \varphi'} + \frac{d^2}{dx_1^2} \cdot \frac{\partial L_1}{\partial \varphi''} = 0. \tag{3.19}$$

If the substitution from (3.18) and (3.16) in (3.19) is made, we find

$$\varphi^{IV}(x_1) + 2\beta_1 \varphi^{II}(x_1) + \beta_2 \cdot \varphi(x_1) = \beta, \tag{3.20}$$

where

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{(c^2 + \mu_x s^2) \int_{-b}^{+b} \psi^{II} \psi dx_2 - 2(K_2 + c^2 - \mu_x s^2) \int_{-b}^{+b} \psi'^2 dx_2}{K_1 \cdot \int_{-b}^{+b} \psi^2 dx_2} \\ \beta_2 &= \frac{\int_{-b}^{+b} \psi^{II^2} dx_2}{K_1 \int_{-b}^{+b} \psi^2 dx_2} \\ \beta &= \frac{\int_{-b}^{+b} q\psi dx_2}{K_1 \int_{-b}^{+b} \psi^2 dx_2} \end{aligned} \right\} \tag{3.21}$$

in the interval carrying load,

$\beta = 0$ outside this interval.

Boundary conditions for $\varphi(x_1)$ are given by (1.2)–(1.4) in which (3.16) is inserted.

Thus, our problem can be solved, if we succeed in solving the ordinary differential equation (3.20). The form of this equation is very simple and the solution quite easy.

Upon inserting the solution $\varphi(x_1)$ of equation (3.20), together with the chosen function $\psi(x_2)$, in (3.16) we obtain the approximate solution of the variational problem $W_0(w) = \min$. The function $\psi(x_2)$ was chosen quite arbitrarily from the class of admissible functions. One can, therefore, get more accurate results when the selection of $\psi(x_2)$ will be more suitable.

Insert further the solution $\varphi(x_1)$ of Eq. (3.20) in

$$w = \varphi(x_1) \cdot \bar{\psi}(x_2), \quad (3.22)$$

and substitute the expression (3.22) in (3.10). After integration with respect to x_1 we again get one-dimensional functional

$$W(\bar{\psi}) = \int_{-b}^{+b} L_2(\bar{\psi}) dx_2 \quad (3.23)$$

where

$$L_2(\bar{\psi}) = \int_{-a}^{+a} L(\varphi \cdot \bar{\psi}) dx_1. \quad (3.24)$$

The extremal $\bar{\psi}(x_2)$ of the functional $W(\bar{\psi})$ satisfies the Euler equation

$$\frac{\partial L_2}{\partial \bar{\psi}} - \frac{d}{dx_2} \frac{\partial L_2}{\partial \bar{\psi}'} + \frac{d^2}{dx_2^2} \frac{\partial L_2}{\partial \bar{\psi}''} = 0. \quad (3.25)$$

Inserting (3.24) and (3.22) in (3.25) we find

$$\bar{\psi}^{IV}(x_2) + 2\gamma_1 \bar{\psi}^{II}(x_2) + \gamma_2 \bar{\psi}(x_2) = \gamma, \quad (3.26)$$

where

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{(c^2 + \mu_x s^2) \int_{-a}^{+a} \varphi^{II} \varphi dx_1 - (K_2 + c^2 - \mu_x s^2) \int_{-a}^{+a} \varphi^{I2} dx_1}{\int_{-a}^{+a} \varphi^2 dx_1}, \\ \gamma_2 &= \frac{K_1 \int_{-a}^{+a} \varphi^{II2} dx_1}{\int_{-a}^{+a} \varphi^2 dx_1}, \\ \gamma &= \frac{\int_{+a} \varphi dx_1}{\int_{-a} \varphi^2 dx_1}, && \text{in the interval carrying load,} \\ \gamma &= 0 && \text{outside this interval.} \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Upon solving Eq. (3.26) and substituting the solution in (3.22), we get the expression for the deflection surface $w(x_1, x_2)$ in the second approximation. Similarly higher approximations can be obtained.

Thus, the minimizing process for obtaining the lower limit of two-dimensional functional $W(w)$ in the class of functions $w = \varphi \cdot \psi$ consists in successive solutions of the variational problems for one-dimensional functionals $W(\varphi)$ and $W(\bar{\psi})$, respectively. In short, it means alternate solutions of Eqs. (3.20) and (3.26), respectively.

3.4. Modification of boundary conditions

It is obvious from the formulation of the variational problem that even the approximate solution of this problem is likely to present formidable mathematical difficulties because of the complicated form of boundary conditions. Frequently the variational method of successive approximations makes it possible to obtain the solution, if the boundary conditions — of the simply supported and free edges resp. — are somewhat modified.*

Consider a general edge $-l \leq \xi \leq +l$. The modification can be either

$$\int_{-l}^{+l} M_n d\xi = 0 \quad (v) \quad \text{or} \quad \int_{-l}^{+l} M_n \frac{\partial w}{\partial n} d\xi = 0 \quad \leftarrow,$$

for the simply supported edge, and

$$\int_{-l}^{+l} M_n d\xi = 0, \quad \int_{-l}^{+l} V_n d\xi = 0,$$

or

$$\int_{-l}^{+l} M_n \frac{\partial w}{\partial n} d\xi = 0, \quad \int_{-l}^{+l} V_n \cdot w d\xi = 0.$$

for the free edge, respectively.

The influence of these modifications is limited to the region near the considered edge of the plate. This region may be comparatively wide, but by solving the problem we are interested mostly in extreme values of deflection and stress, respectively. Both these phenomena will be at the centre of the plate.** It follows from the foregoing that one can expect these values to be only a little influenced by modifications of boundary conditions.

Another influence the modifications show on the speed of convergence of the process. As a rough rule it can be suggested that using the modification 2–3 times higher approximation is necessary.

* It is worth noting that in technological applications one can only approximate the mathematical formulation of the boundary conditions.

** Boundary conditions of simply supported and free edge as being considered.

4. Some remarks on the utilization of approximate procedures

At the conclusion of this paper we make a recapitulation.

The variational methods for approximate solution of skew orthotropic plates considered in Sec. 3 yield analytic expressions for the approximating functions. Although they have been successfully exploited in numerous problems of practical interest, there are serious limitations to their general use.

When the boundary conditions are not given by simple analytical expressions it is difficult to make a judicious choice of coordinate functions $\varphi_i(x_1, x_2)$.

From the practical utilization some results concerning the variational methods can be deduced:

1. In general the variational methods are suitable for the solution of plates with all edges built-in.

2. Besides the well-known and often used methods of RITZ and GALERKIN all the methods mentioned in Sec. 3 are quite acceptable for the solution of fixed plates.

3. The method of KANTOROVICH and the variational method of successive approximations yield very good convergence even for the components of stress.

4. For estimating maximum values of deflection and stress the variational method of successive approximations can be used for the solution of skew plates with more complicated boundary conditions.*

From the foregoing it is obvious that in the cases of plates with simply supported and free edges, one is mostly obliged to turn to methods of finite differences. Such cases may usually be considered quite readily by difference procedures. The difference equations are comparatively simple, though the number may often be of the order of 50—100. However, the new computing devices make it possible to carry out all the calculations. The main disadvantage of these methods is that they give numerical values for unknown functions at a set of discrete points instead of the analytical expressions defined over the initial region R . The question of the convenience of a certain shape of the mesh was discussed in Sec. 2.1.5.

We finish our conclusions concerning the method of differences with two remarks on the devices for speeding up the convergence:

1. Higher order approximations of derivatives by differences are very suitable especially for solving the system of difference equations by the method of elimination. The accuracy of results is quite satisfactory even with a comparatively large mesh-size.

* The principle of de Saint-Venant being accepted.

2. Relaxation method is practically the only method which can be used for the solving of systems of about one hundred equations without high-speed digital computers. The possibilities of this method for speeding up the convergence are excellent. The utilization of this method should be more extensive.

REFERENCES

1. ALLEN, D. N.: Relaxation methods, 1954.
2. BAJKOV, V. T.: Ob izgibe kosougolnoj plastiny, Tr. mosk. av. in-ta 69.
3. COLLATZ, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen 1951.
4. FAVRE, H.: Le calcul des plaques obliques par la méthode des équations aux différences, *Memoires* 7, 1943-44.
5. FROLOV, V. M.: O primenenii variacionnogo metoda L. V. Kantoroviča k zadačam prikladnoj teorii uprugosti, Inž. sb. XXIV.
6. GRINTER, L. E.: Numerical methods of analysis in engineering, 1949.
7. JENSEN, V. P.: University of Illinois Bulletin No. 332, 1941.
8. JENSEN, V. P., ALLEN, J. W.: University of Illinois Bulletin No. 8, Vol. 45, 1947.
9. JÁVOR, T.: Riešenie všeobecne šikmých dosiek aplikáciou metódy sietí, *Stavebnický časopis* VI, No. 6, 1958.
10. KANTOROVIČ, L. V., KRYLOV, V. I.: Približnyje metody vysšego analiza, 1952.
11. KOVAŘIK, V.: Přibližné metody v rovinné pružnosti, 1957.
12. KOVAŘIK, V.: Rešení pravoúhlých ortotropních desek variační metodou postupných aproximací, *Staveb. čas.* IX, 1, 1961.
13. MICHLIN, S. G.: Variacionnyje metody v matematičeskoj fyzike, 1957.
14. NAROUKA, M., YONEZAWA, H.: Über die Anwendung der Biegungstheorie orthotroper Platten auf die Berechnung schiefer Balkenbrücken, *Bauingenieur* 32, 1957
15. NIELSEN, N. J.: Skaevinkleda Plader, 1944.
16. SOKOLNIKOFF, I. S.: Mathematical theory of elasticity, 1956.
17. SOUTHWELL, R. V.: Relaxation methods in engineering science, 1949.
18. SOUTHWELL, R. V.: Relaxation methods in theoretical physics, 1946.

К ВОПРОСУ О НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК

М. М. КОЗАРОВ

БОЛГАРИЯ

Теория динамической устойчивости рассматривает вопросы, связанные с динамикой сооружений и их статической устойчивостью.

В то время, как элементарная теория статической устойчивости встречается еще в классических исследованиях Ойлера и получила свое целостное развитие за последние пятьдесят лет в связи со строительством, в широком смысле этого понятия, теория динамической устойчивости является одним из самых новых разделов механики деформируемых тел, разработанным Беляевым в 1924 г.

Теория динамической устойчивости все еще пробивает себе дорогу для непосредственного инженерного применения, тем не менее оценить практическое значение вопросов, связанных с динамической устойчивостью сооружений, в настоящий момент не представляет затруднений.

В современной технике трудно найти такую область, где вопросы динамической устойчивости не приобретали бы все большего практического значения.

Своеобразные явления, которыми занимается теория динамической устойчивости, требуют и соответствующего математического аппарата, который опять-таки, обособляет ее в самостоятельную дисциплину.

С точки зрения математики общность задач, рассматривающих динамическую устойчивость сооружений, проявляется в том, что все они приводят к дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами, т. е. к уравнениям типа Матие—Хил'а.

Теория динамической устойчивости упругих систем, основанная на линейных дифференциальных уравнениях, дает верный ответ на поставленные задачи, когда амплитуды еще малы. Однако, с увеличением амплитуд начинает все больше проявляться влияние нелинейности, что не было учтено при соответствующих линейных дифференциальных уравнениях, приводящих к решению поставленной задачи.

В виду этого линейная теория не может дать правильного и точного решения поставленной задачи. Это может быть достигнуто посредством нелинейной теории динамической устойчивости.

Если задачи механики деформируемого тела рассматривать подробнее, то большая часть этих задач — нелинейна. Обычное сведение этих задач к линейным дает приближенную схему, которую достаточно хорошо или совершенно удовлетворительно можно использовать для применения. Однако, имеется ряд задач, которые не допускают их линейного решения.

В нелинейных задачах часто встречаются существенно новые явления, которые принципиально невозможно охватить линейными методами. Поэтому при нелинейной постановке данной задачи, она может быть рассмотрена более целостно и всесторонне и правильно объяснены соответствующие явления.

Вместо этого, однако, приходится сталкиваться с трудностями математического характера, которые часто нельзя успешно преодолеть.

Исследований, которые относятся к динамической устойчивости пластин и оболочек при линейной постановке, — имеется совсем ограниченное количество. Автору неизвестно, имеются ли в литературе подобные задачи, решенные с применением нелинейной теории динамической устойчивости.

Цель настоящих исследований является желание частично заполнить этот пробел в связи с динамической устойчивостью пологих тонких упругих оболочек. Они проведены на основании технической теории В. З. Власова о пологих оболочках.

Часть первая

1. Постановка задачи и основные уравнения

Исходя из общей теории оболочек, В.З. Власов вывел общие уравнения для тонких упругих пологих оболочек двоякой кривизны в виде:

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + K_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\mathcal{D} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - Z(x, y) = 0.$$

Из этих уравнений не представляет трудности получить уравнения для оболочек, которые имеют начальные неправильности $w_H(x, y)$ на своих срединных поверхностях, т. е.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial x \partial y} \right]^2 + \\
 & - K_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w_H}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_H}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_H}{\partial y^2} = 0 \\
 & \mathcal{D} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial x^2} + \\
 & + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial x \partial y} - K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - Z(xy) = 0.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Из системы уравнений 1.1 и 1.2 получаются соответствующие уравнения для разных видов оболочек, включительно и для пластин.

Если оболочка до нагружения испытывает первоначальные напряжения, то указанные выше системы уравнений будут вида:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + K_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\
 & \mathcal{D} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \\
 & - K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + N_1^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} Z(x, y) = 0,
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

а для оболочек с начальной неправильностью на своих срединных поверхностях:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial x \partial y} \right]^2 + \\
 & + K_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_H}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_H}{\partial y^2} = 0 \\
 & \mathcal{D} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial x^2} + \\
 & + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial x \partial y} - K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \\
 & + N_1^0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + N_2^0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - Z(x, y) = 0.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Если желательно получить решение поставленной задачи для оболочек, имеющих упругие основания, то к этим уравнениям надо прибавить только член sw , характеризующий упругость основания.

Так как здесь исследуется динамическая устойчивость оболочек, то нагрузка, действующая по поверхности оболочки $Z(x, y)$ и, соответственно, N_1^0 , N_2^0 , S^0 , должны изменяться в функции времени по некоторому предварительно заданному периодическому закону.

Принято, что действующая на оболочку внешняя нагрузка изменяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 Z(x, y, t) &= \sigma_1 Z_0(x, y) + \sigma_2 Z_t(x, y) \Theta(t) = \\
 &= Z^*(x, y) (P_0 + P_1 \cos \Theta t) = Z^*(x, y) P(t) \\
 N_1^0(x, y, t) &= - [\sigma_1 N_{1,0}^0(x, y) + \sigma_2 N_{1,t}^0(x, y) \Theta(t)] = \\
 &= - N_1^{0*}(x, y) (P_0 + P_1 \cos \Theta t) = - N_1^{0*}(x, y) P(t) \\
 N_2^0(x, y, t) &= - [\sigma_1 N_{2,0}^0(x, y) + \sigma_2 N_{2,t}^0(x, y) \Theta(t)] = - \\
 &= - N_2^{0*}(x, y) (P_0 + P_1 \cos \Theta t) = N_2^{0*}(x, y) P(t) \\
 S^0(x, y, t) &= - \sigma_1 S_0^0(x, y) + \sigma_2 S_t^0(x, y) \Theta(t) = \\
 &= S_0^{0*}(x, y) (P_0 + P_1 \cos \Theta t) = S_0^{0*}(x, y) P(t)
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

где σ_1 и σ_2 — параметры, посредством которых определена соответствующая постоянная нагрузка и периодически изменяющаяся его составляющая, а $\Theta(t)$ — функция, по которой происходит периодическое изменение действующей нагрузки в зависимости от времени.

Итак, соответствующие основные системы уравнений 1.1, 1.2, 1.3 и 1.4, служащие для решения задач статической устойчивости, примут для соответствующих динамических задач следующий вид:

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + K_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x \partial y} - K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \\
 - K_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + cw + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z(x, y, t) = 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + K_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \\
 - K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + cw + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z(x, y, t) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial x \partial y} \right]^2 + \\
 & + K_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w_H}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_H}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\
 & \mathcal{D} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w - w_H)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w - w_H)}{\partial x^2} + \\
 & + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial x \partial y} - K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + cw + \\
 & + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z(x, y, t) = 0
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + K_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\
 & \mathcal{D} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \\
 & - K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + cw + N_1^0(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2^0(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\
 & + S^0(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z(x, y, t) = 0
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{Eh} \Delta^2 \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 (w - w_H)}{\partial x \partial y} \right]^2 + \\
 & + K_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w_H}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_H}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_H}{\partial y^2} = 0 \\
 & \mathcal{D} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w - w_H)}{\partial x^2} + \\
 & + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_H)}{\partial x \partial y} - K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + cw + \\
 & + N_1^0(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2^0(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 S^0(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\
 & + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z(x, y, t) = 0
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Решение этих систем нелинейных дифференциальных уравнений при соответствующих граничных условиях даст и решение соответствующей поставленной динамической задачи.

Отбрасывая нелинейные члены в вышеуказанных системах дифференциальных уравнений, получим соответствующие уравнения для линейных динамических задач.

2. Методы решения основных уравнений задачи динамической устойчивости

Решение вышеуказанных систем нелинейных частных дифференциальных уравнений не представляет затруднений в случае, если известны функции колебания $w(x, y, t)$ и напряжение $\varphi(x, y, t)$.

Для некоторых частных случаев пластин это возможно, но и для них, как и для оболочек, в общем случае решение нам неизвестно. По этим причинам в таких случаях прибегают к использованию вариационных методов, так как математический анализ не располагает точными методами для решения такой системы дифференциальных уравнений.

Если уравнения оболочек даны в форме перемещений, то можно искать решение в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_k U_k(t) \eta_k(x, y) \\ v(x, y, t) &= \sum_k v_k(t) \vartheta_k(x, y) \\ w(x, y, t) &= \sum_k w_k(t) \nu_k(x, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где фундаментальные функции удовлетворяют соответствующим граничным условиям. В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, решение которых даст возможность определить области динамической устойчивости оболочек.

Эта же задача может быть успешно решена и при помощи уравнения Лагранжа для движения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_{ik}} \right) - \frac{\partial}{\partial q_{ik}} (K - U) = \frac{\partial w}{\partial q_{ik}} \quad (i, K = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} U &= U_c + U_{or} \\ U_c &= \frac{h}{2E} \iint_F \left\{ \left(\nu^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 + \nu) \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \\ U_{or} &= \frac{\mathcal{D}}{2} \iint_F \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \\ K &= \frac{\gamma k}{2g} \iint_F \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$W = \frac{1}{2} \iint_{(F)} \left[N_1^0(x, y, t) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_2^0(x, y, t) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 S^0(x, y, t) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy + \iint_F Z(x, y, t) w(x, y, t) dx dy.$$

Используя выражение для $w(x, y, t)$ из 2.1 и первое дифференциальное уравнение из системы 1.1, 1.2, 1.3 и 1.4, определим соответствующие функции напряжения $\varphi(x, y, t)$, а после этого, посредством формул 2.3 и 2.2 снова сведем решение поставленной динамической задачи к решению соответствующей системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Этот способ решения динамической задачи часто имеет применение в инженерной практике.

Немало преимуществ имеет применение к задачам динамической устойчивости, данного В. З. Власовым в обобщенной форме метода Бубнова—Галеркина. Сущность и применение этого метода показаны в настоящем исследовании в задаче о динамической устойчивости оболочек.

Представим себе функцию напряжения $\varphi(x, y, t)$ и функцию нормального изгиба $w(x, y, t)$ посредством следующих двойных рядов:

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}^*(x, y) f_{mn}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_m(x) V_n(y) f_{mn}(t) \quad (2.4)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^*(x, y) f_{mn}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_m(x) Y_n(y) f_{mn}(t).$$

Таким разложением мы сводим вариационную задачу к подбору четырех функций $U_m(x)$, $V_n(y)$, $X_m(x)$, $Y_n(y)$, каждая из которых должна удовлетворять двум соответствующим граничным условиям для каждого ребра оболочки. Разлагаем в ряд и внешнюю нагрузку. Функции $f_{mn}(t)$ — периодическая и зависит от времени.

Эти четыре функции можем теперь представить в виде линейных комбинаций балочных фундаментальных функций, которые, как известно, удовлетворяют соответствующим граничным условиям.

Таким образом, мы имеем возможность удовлетворять произвольные заданные граничные условия, что подробно показано в одной из работ автора.

Используя теперь, с одной стороны, систему 1.6 и аналитическое выражение для $\varphi(x, y, t)$ и $w(x, y, t)$, данное посредством формулы 2.4, и, применяя, с другой стороны, принцип Лагранжа и Кастильяно, получим следующую систему уравнений, решающих поставленную динамическую задачу:

$$\iint_F \left[\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + K_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + K_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \varphi_{mn}^*(x, y) dx dy = 0 \quad (2,5)$$

$$\iint_F \left[\mathcal{D} \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \right. \\ \left. K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + c w + \frac{\gamma h}{y} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z_{mn}(x, y, t) \right] w_{mn}^*(x, y) dx dy + 0 \\ m = 1, 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots$$

Заменяя 2.4 с 2.5 и произведя соответствующее интегрирование и упрощение, получим в результате снова систему обычных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Решение этих уравнений даст возможность определить область динамической устойчивости исследуемой оболочки.

Все здесь сказанное по отношению к системе 1.6 можно отнести и к остальным системам дифференциальных уравнений 1.7, 1.8 и 1.9.

3. Нелинейная динамическая устойчивость оболочек с двоякой кривизной

Исследуем сейчас, в общем виде, нелинейную динамическую устойчивость оболочек, заданных системой дифференциальных уравнений 1.8, и предположение, что $S^0 = 0$, т. е.

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + K_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ \mathcal{D} \nabla^2 \nabla^2 w - K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c w - N_1^0(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_2^0(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ + \frac{\gamma h}{y} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z(x, y, t) = 0. \quad (3.1)$$

Решение этой системы произведем обобщенным вариационным методом Бубнова—Галеркина, предложенным В. З. Власовым, причем $\varphi(x, y, t)$ и $w(x, y, t)$ представим в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_m(x) V_n(y) f_{mn}(t) \\ w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_m(x) y_n(y) f_{mn}(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

где функции $U_m(x)$, $V_n(y)$, $X_m(x)$ и $Y_n(y)$ удовлетворяют соответствующим граничным условиям поставленной динамической задачи, а $f_{mn}(t)$ — периодическая функция, зависящая от времени.

Заменяя 3.2 на 3.1 и умножая соответственно на $\varphi^*(x, y)$ и $W^*(x, t)$, далее интегрируя в соответствующих границах, получим:

$$\begin{aligned} \iint_F \left[\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + K_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \varphi_{mn}^* dx dy = 0 \\ \iint_F \left[D \nabla^2 \nabla^2 w - K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_1^0(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_2^0(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + CW + \right. \\ \left. + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z(x, y, t) \right] W_{mn}^* dx dy = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Обозначим через

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1^* f_{mn}(f) = \iint_F \nabla^2 \nabla^2 \varphi \varphi_{mn}^* dx dy & m = 1, 2, 3 \\ & & n = 1, 2, 3 \\ I_2 &= I_2^* f_{mn}(t) = \iint_F \left(K_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + K_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \varphi_{mn}^* dx dy \\ I_3 &= I_3^* f^2(t) = \iint_F \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \varphi_{mn}^* dx dy \\ I_4 &= I_4^* f_{mn}(t) = \iint \nabla^2 \nabla^2 w_{mn}^* dx dy \\ I_5 &= I_5^* f_{mn}(t) = \iint_F \left(K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) w_{mn}^* dx dy \\ I_6 &= I_6^* f_{mn}^2(t) = \iint_F \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \right. \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial x \partial y}{\partial^2 w} \Big) w_{mn}^* dx dy \\
 I_7 = I_7^* f_{mn}(t) &= \iint_F \left[N_1^0(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2^0(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] w_{mn}^* dx dy \\
 I_8 = I_8^* f_{mn}(t) &= \iint_F c w w_{mn}^* dx dy \quad (3.4) \\
 I_9 = I_9^* f_{mn}''(t) &= \iint_F \gamma \frac{h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} W_{mn}^* dx dy \\
 I_{10} = I_{10}^* f_{mn}(t) &= \iint_F z(x, y, t) W_{mn}^* dx dy
 \end{aligned}$$

Тогда система 3.3 примет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Eh} I_1^* + I_2^* + f_{mn}(t) I_3^* &= 0 \quad (3.5) \\
 DI_4^* f_{mn}(t) - I_5^* f_{mn}(t) - I_6^* f_{mn}^2(t) - I_7^* f(t) + I_8^* f(t) + \\
 + I_9^* \frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} - I_{10}^* f_{mn}(t) &= 0
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \frac{f_{mn}}{I_9^*} \left\{ DI_4^* + \frac{Eh}{I_1^*} (I_2^* I_6^* + I_3^* I_5^* + I_3^* I_6^* f_{mn}) f_{mn} - \right. \\
 \left. - I_7^* \right\} + I_8^* - I_{10}^* &= 0 \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Если предполагается получить решение для дифференциального уравнения линейной задачи, достаточно приравнять к нулю нелинейные члены в системе 3.5, т. е.

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \left[(DI_4^* - P(I_7^* + I_{10}^*) + \frac{I_2^* I_5^*}{I_1^*} Eh) \frac{f_{mn}}{I_9^*} \right] = 0. \quad (3.7)$$

Критическое значение нагрузки P при статическом действии определяется из уравнений 3.7, предполагая, что $f_{mn}(t) = \text{const.}$, т. е.

$$P_{kp} = D \frac{I_4^*}{I_7^* + I_{10}^*} + Eh \frac{I_2^* I_5^*}{I_1^* (I_{10}^* + I_7^*)}. \quad (3.8)$$

Если в уравнении 3.7 предположим, что $f_{mn}(t) = K \sin \omega t$, получим общее выражение частоты принудительных колебаний

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{I_9^*} (DI_4^* - P(I_7^* + I_{10}^*) + Eh \frac{I_2^* I_5^*}{I_1^*}). \quad (3.9)$$

Внешняя периодическая нагрузка $P P_0 + P_1 \cos \Theta t$ обычно задается предварительно, и тогда остается определить критическое значение груза P_{kp} по формуле 3.8 и частоту принудительных колебаний Θ_{mn} по формуле 3.9. Для решения конкретных задач в связи с динамической устойчивостью оболочек надо знать τ, ω_{mn} и ε . Если примем во внимание 3.8 и 3.9 и введем следующие обозначения:

$$\tau = \frac{\Theta t}{2} \quad \varepsilon_{mn} = \frac{P_1}{R_{mn} - P_0}, \quad (3.10)$$

то 3.7 превратится в дифференциальное уравнение Мате

$$\frac{d^2 f_{mn}}{d\tau^2} + 4 \frac{\Theta_{mn}}{K^2} (1 - \varepsilon_{mn} \cos 2\tau) f_{mn} = 0, \quad (3.11)$$

что даст возможность установить область динамической неустойчивости рассмотренной оболочки. Уравнение 3.11 исследовано подробно в связи с динамической устойчивостью пластин и оказалось, что при данных значениях $\varepsilon_1 \frac{2\omega_{mn}}{\Theta}$ и $\tau \rightarrow \infty$ число решений этого уравнения возрастает неограниченно в области неустойчивости, ограниченной следующими значениями критической частоты:

$$\Theta_{kp} = \frac{2\omega_{mn}}{\sqrt{1 \pm \frac{\varepsilon}{2} + \frac{7}{32} \varepsilon^2 \pm \frac{55}{512} \varepsilon^3}} \quad (3.12)$$

$$\Theta_{kp} = \frac{2\omega_{mn}}{\sqrt{4 - \frac{1}{3} \varphi^2}}; \quad \Theta_{kp} = \frac{2\omega_{mn}}{\sqrt{4 + \frac{5}{3} \varepsilon^2}};$$

$$\Theta_{kp} = \frac{e \omega_{mn}}{\sqrt{9 + \frac{81}{64} \varepsilon^2 \pm \frac{9}{8} \varepsilon^3}}$$

Итак видно, что уравнение Мате 3.11 и формула 3.12 являются общими для различных видов оболочек, находящихся под влиянием периодически действующего внешнего груза $P(t)$.

4.1 Нелинейная динамическая устойчивость оболочек двоякой кривизны при втором приближении

Общие уравнения для поставленной задачи были вида:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + K_x \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + K_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0 \\ D \nabla^2 \nabla^2 w - K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial_x \partial_y} \frac{\partial^2 w}{\partial_x \partial_y} + cw - N_1^0(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_2^0(x, y, t) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ + \frac{\varphi h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z(x, y, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Поставленную задачу решим в общем виде при произвольных граничных условиях и, предполагая, что рассматриваемая оболочка представляет в плане квадрат.

Решение системы 4.1 произведем обобщенным Власовым методом Бубнова—Галеркина. Для этой цели решение ищем в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) = U_1(x) V_1(y) f_{11}(t) + U_2(x) V_2(y) f_{22}(t) \\ W(x, y, t) = X_1(x) Y_1(y) f_{11}(t) + X_2(x) Y_2(y) f_{22}(t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Применяя вариационный метод Власова к системе 4.1 и обозначив через $I_n^{1,2}$ двойные интегралы, зависящие от кривизны оболочки, размеров и действующих внешних грузов и соответствующих граничных условий, получим следующую систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned} DI_{12}^1 f_{11} + DI_{13}^1 f_{22} - [I'_{14} + I'_{16} f_{01} + I'_{17} f_{22} + I'_{20} f_{11} + I'_{21} f_{22} - \\ - I'_{24} f_{11} - I'_{25} f_{22} + I'_{15} + I'_{18} f_{11} + I'_{19} f_{22} + I'_{22} f_{11} - I'_{23} f_{22} - \\ - I'_{26} f_{11} - I'_{27} f_{22}] = 'I'_{28} + I'_{29} \frac{d^2 f_{11}}{dt^2} + ('I'_{30} + 'I'_{31} + \\ + "I'_{32}) f_{11} + "I'_{29} \frac{d^2 f_{12}}{dt^2} + ("I'_{30} + "I'_{31} + "I'_{32}) f_{22} \\ DI_{12}^2 f_{11} + DI_{13}^2 f_{22} - [I^2_{14} + I^2_{16} f_{22} + I^2_{17} f_{22} + I^2_{20} f_{11} + I^2_{21} f_{22} - \\ - I^2_{24} f_{11} - I^2_{25} f_{22} + I^2_{15} + I^2_{18} f_{11} + I^2_{19} f_{22} + I^2_{22} f_{11} + \\ + I^2_{23} f_{22} - I^2_{26} f_{11} - I^2_{27} f_{22}] = I^2_{28} + 'I^2_{29} \frac{d^2 f_{11}}{dt^2} + \end{aligned}$$

$$+ (I_{30}^2 + I_{31}^2 + I_{32}^2) f_{11} + I_{29}^2 \frac{d^2 f_{22}}{dt^2} + (I_{30}^2 + I_{31}^2 + I_{32}^2) f_{22}$$

$$I_1' = \iint_F (U_1^{IV} V_1 + 2U_1^{IV} V_1^{VI} + U_1 V_1^{IV}) U_1 V_1 dx dy$$

$$I_1^2 = \iint_F (U_1^{IV} V_1 + 2U_1^{II} V_1^{II} + U_1 V_1^{IV}) U_2 V_2 dx dy$$

$$I_2' = \iint_F (U_2^{IV} V_2 + 2U_2^{II} V_2^{II} + U_2 V_2^{IV}) U_1 V_1 dx dy$$

$$I_2^2 = \iint_F (U_2^{IV} V_2 + 2U_2^{II} V_2^{II} + U_2 V_2^{IV}) U_2 V_2 dx dy$$

$$I_3' = \iint_F (K_x X_1 Y_1^{II} + K_y X_1^{II} Y_1) U_1 V_1 dx dy$$

$$I_3^2 = \iint_F (K_x X_1 Y_1^{II} + K_y X_1^{II} Y_1) U_2 V_2 dx dy$$

$$I_4' = \iint_F (K_x X_2 Y_2^{II} + K_y X_2^{II} Y_2) U_1 V_1 dx dy$$

$$I_4^2 = \iint_F (K_x X_2 Y_2^{II} + K_y X_2^{II} Y_2) U_2 V_1 dx dy$$

$$I_5' = \iint_F X_1^{II} X_1 Y_1^{II} Y_1 U_1 V_1 dx dy$$

$$I_5^2 = \iint_F X_1^{II} X_1 Y_1^{II} Y_1 U_2 V_2 dx dy$$

$$I_6' = \iint_F X_2^{II} X_2 Y_2^{II} Y_2 U_1 V_1 dx dy$$

$$I_6^2 = \iint_F X_2^{II} X_2 Y_2^{II} Y_2 U_2 V_2 dx dy$$

$$I_7' = \iint_F X_1 X_2^{II} Y_2 Y_1^{II} U_1 V_1 dx dy$$

$$I_7^2 = \iint_F X_1 X_2^{II} Y_2 Y_1^{II} U_2 V_2 dx dy$$

$$I_8' = \iint_F X_1^{II} X_2 Y_1 Y_2^{II} U_1 V_1 dx dy$$

$$I_8^2 = \iint_F X_1^{II} X_2 Y_1 Y_2^{II} U_2 V_2 dx dy$$

$$I_9' = \iint_F X_1'^2 Y_1'^2 U_1 V_1 dx dy$$

$$I_9^2 = \iint_F X_1'^2 Y_2'^2 U_2 V_2 dx dy$$

$$I_{10}' = \iint_F X_1' X_2 Y_1' Y_2 U_1 V_1 dx dy$$

$$I_{10}^2 = \iint_F X_1' X_2 Y_1' Y_2 U_2 V_2 dx dy$$

$$I'_{11} = \iint_F X_2'^2 Y_2'^2 U_1 V_1 dx dy$$

$$I^2_{11} = \iint_F X_2'^2 Y_2'^2 U_2 V_2 dx dy$$

$$I'_{12} = \iint_F (X_1^{IV} Y_1 + 2 X_1^{II} Y_1^{II} + X_1 Y_1^{IV}) X_1 Y_1 dx dy$$

$$I^2_{12} = \iint_F (X_1^{IV} Y_1 - 2 X_1^{II} Y_1^{II} + X_1 Y_1^{IV}) X_2 Y_2 dx dy$$

$$I^1_{13} = \iint_F (X_2^{IV} Y_2 + 2 X_2^{II} Y_2^{II} + X_2 Y_2^{IV}) X_1 Y_1 dx dy$$

$$I^2_{13} = \iint_F (X_2^{IV} Y_2 - 2 X_2^{II} Y_2^{II} + X_2 Y_2^{IV}) X_2 Y_2 dx dy$$

$$I'_{14} = \iint_F (K_x U_1 V_2^{II} + K_y U_1^{II} V_1) X_1 Y_1 dx dy$$

$$I^2_{14} = \iint_F (K_x U_1 V_1^{II} + K_y U_1^{II} V_1) X_2 Y_2 dx dy$$

$$I'_{15} = \iint_F (K_x U_2 V_2^{II} + K_y U_2^{II} V_2) X_1 Y_1 dx dy$$

$$I^2_{15} = \iint_F (K_x U_2 V_2^{II} + K_y U_2^{II} V_2) X_2 Y_2 dx dy$$

$$I^1_{16} = \iint_F (U_1 V_1^{II} X_1^{II} Y_1 X_1 Y_1 dx dy$$

$$I^2_{16} = \iint_F U_1 V_1^{II} X_1^{II} Y_1 X_2 Y_2 dx dy$$

$$I^1_{17} = \iint_F U_1 V_1^{II} X_2^{II} Y_2 X_1 Y_1 dx dy$$

$$I^2_{17} = \iint_F U_1 V_1^{II} X_2^{II} Y_2 X_2 Y_2 dx dy$$

$$I^1_{18} = \iint_F U_2 V_2^{II} X_1^{II} Y_1 X_1 Y_1 dx dy$$

$$I^2_{18} = \iint_F U_2 V_2^{II} X_1^{II} Y_1 X_2 Y_2 dx dy$$

$$I^1_{19} = \iint_F U_2 V_2^{II} X_2^{II} Y_2 X_1 Y_1 dx dy$$

$$I^2_{19} = \iint_F U_2 V_2^{II} X_2^{II} Y_2 X_2 Y_2 dx dy$$

$$I'_{20} = \iint_F U_1^{II} V_1 X_1 Y_1^{II} X_1 Y_1 dx dy$$

$$I^2_{20} = \iint_F U_1^{II} V_1 X_1 Y_2^{II} X_2 Y_2 dx dy$$

$$I'_{21} = \iint_F U_1^{II} V_1 X_2 Y_2^{II} X_1 Y_1 dx dy$$

$$\begin{aligned}
 \lambda p x p^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X \int \int c &= {}_{11}^{30} I, \\
 \lambda p x p^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} X \int \int \frac{\delta}{\eta \lambda} &= {}_{12}^{62} I, \\
 \lambda p x p^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} X^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X \int \int \frac{\delta}{\eta \lambda} &= {}_{12}^{62} I, \\
 \lambda p x p^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} X \int \int \frac{\delta}{\eta \lambda} &= {}_{11}^{62} I, \\
 \lambda p x p^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X \int \int \frac{\delta}{\eta \lambda} &= {}_{11}^{62} I, \\
 \lambda p x p^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X (1, \lambda, x) Z \int \int \mathcal{Z} &= {}_{11}^{82} I \\
 \lambda p x p^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}} (1, \lambda, x) Z \int \int \mathcal{Z} &= {}_{11}^{82} I \\
 \lambda p x p^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} X^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} X^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} \int \int \mathcal{Z} &= {}_{12}^{27} I \\
 \lambda p x p^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} X^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} \int \int \mathcal{Z} &= {}_{11}^{27} I \\
 \lambda p x p^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} \int \int \mathcal{Z} &= {}_{12}^{92} I \\
 \lambda p x p^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} \int \int \mathcal{Z} &= {}_{11}^{92} I \\
 \lambda p x p^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} X^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} X^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} \int \int \mathcal{Z} &= {}_{12}^{92} I \\
 \lambda p x p^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} X^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} \int \int \mathcal{Z} &= {}_{11}^{92} I \\
 \lambda p x p^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} X^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} \int \int \mathcal{Z} &= {}_{12}^{92} I \\
 \lambda p x p^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} \int \int \mathcal{Z} &= {}_{11}^{92} I \\
 \lambda p x p^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} X^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} X^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} \int \int \mathcal{Z} &= {}_{12}^{82} I \\
 \lambda p x p^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} X^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} \int \int \mathcal{Z} &= {}_{11}^{82} I \\
 \lambda p x p^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} X^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} \int \int \mathcal{Z} &= {}_{12}^{22} I \\
 \lambda p x p^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} X^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} \int \int \mathcal{Z} &= {}_{11}^{22} I \\
 \lambda p x p^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} X^{\frac{2}{3}} \lambda^{\frac{2}{3}} X^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} \int \int \mathcal{Z} &= {}_{12}^{11} I
 \end{aligned}$$

$${}''I_{30}^1 = c \iint_F X_2 Y_2 X_1 Y_1 dx dy$$

$${}'I_{30}^2 = c \iint_F X_1 Y_1 X_2 Y_2 dx dy$$

$${}''I_{30}^2 = c \iint_F X_2^2 Y_2^2 dx dy$$

$${}'I_{31}^1 = - \iint_F N_1^0(x, y, t) X_1'' Y_1^2 dx dy$$

$${}''I_{31}^1 = - \iint_F N_1^0(x, y, t) X_1'' Y_2 X_1 Y_1 dx dy$$

$${}'I_{31}^2 = - \iint_F N_1^0(x, y, t) X_1'' Y_1 X_2 Y_2 dx dy$$

$${}''I_{31}^2 = - \iint_F N_1^0(x, y, t) X_2'' Y_2^2 dx dy$$

$${}'I_{32}^1 = - \iint_F N_2^0(x, y, t) X_1^2 Y_1'' dx dy$$

$${}''I_{32}^1 = - \iint_F N_2^0(x, y, t) X_2 Y_2'' X_1 Y_1 dx dy$$

$${}'I_{32}^2 = - \iint_F N_2^0(x, y, t) X_1 Y_1'' X_2 Y_2 dx dy$$

$${}''I_{32}^2 = - \iint_F N_2^0(x, y, t) X_2^2 Y_2'' dx dy$$

Полученная таким образом система дифференциальных уравнений 4.3 с периодическими коэффициентами дает возможность решать разнообразные случаи статической задачи, если принять, что $f_{11}(t) = \text{const}$ и $f_{22}(t) = \text{const}$ и динамическую задачу, если принять, что $f_{11}(t) = \kappa \sin \Theta t$ и $f_{22}(t) = \kappa \sin \Theta t$. Решив эти уравнения, мы можем получить и область динамической устойчивости соответствующей оболочки. Все эти задачи могут быть решены для оболочек и пластин по нелинейной и линейной теории при первом и втором приближении, при соответствующих граничных условиях, для которых определены числовые значения двойных интегралов $I_n^{1,2}$.

5. Нелинейная динамическая устойчивость сферических оболочек при втором приближении

Исходя из общих уравнений задачи динамической устойчивости оболочки двоякой кривизны 3.1 и, приняв, что $K_x = K_y = \frac{1}{R}$, получим соответствующие уравнения задачи динамической устойчивости сферических оболочек.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + \frac{1}{R} \nabla^2 \omega + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0 \\ & D \nabla^2 \nabla^2 \omega - \frac{1}{R} \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \\ & + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + c\omega - N_1(x, y, t) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \\ & - N_2^0(x, y, t) \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - Z(x, y, t) = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Поставленную так задачу, решим в общем виде и во втором приближении, применив вариационный метод В. З. Власова.

Предположим, что исследуемая сферическая оболочка в плане представляет собой квадрат. Применяя вариационный метод Власова, ищем решение в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) &= U_1(x) V_1(y) f_{11}(t) + U_2(x) V_2(y) f_{22}(t) = \\ &= \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} f_{11}(t) + \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} f_{22}(t) \\ W(x, y, t) &= y_1(x) y_1(y) f_{11}(t) + x_2(x) y_2(y) f_{22}(t) = \\ &= \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} f_{11}(t) + \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} f_{22}(t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Функции $U_1(x)$, $V_1(y)$, $U_2(x)$, $V_2(y)$, $X_1(x)$, $Y_1(y)$, $X_2(x)$, $Y_2(y)$ — фундаментальные балочные функции, удовлетворяющие граничным условиям.

$$\begin{aligned} W &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0; \quad x = a \\ W &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad y = a \end{aligned} \quad (5.3)$$

Применяя вариационный метод В. З. Власова к системе 5.1 при условии, что используем 5.2, и соответствующим образом преобразовав полученное выражение, получим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений с периодическим коэффициентом

$$\begin{aligned} DI_{12}^1 f_{11} - [(I_{14}^1 + I_{16}^1 f_{11} + I_{20}^1 f_{11} - I_{24}^1 f_{11}) + (I_{19}^1 + I_{23}^1 - I_{27}^1) f_{22}] = \\ = 'I_{29}^1 \frac{d^2 f_{11}}{dt^2} + 'I_{30}^1 f_{11} + 'I_{31}^1 f_{11} + 'I_{32}^1 f_{11} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}
 DI_{13}^2 f_{22} - [(I_{17}^2 + I_{21}^2 - I_{25}^2) f_{22} + (I_{15}^2 + I_{18}^2 f_{11} + I_{22}^2 f_{11} - I_{26}^2 f_{11})] = \\
 = I_{29}^2 \frac{d^2 f_{22}}{dt^2} + {}''I_{30}^2 f_{22} + {}''I_{31}^2 f_{22} + {}''I_{32}^2 f_{22},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{array}{ll}
 I_1^1 = \frac{\pi^4}{a^2} & I_9^2 = 0 \\
 I_1^2 = 0 & I_{10}^1 = 0 \\
 I_2^1 = 0 & I_{10}^2 = \frac{128 \pi^2}{225 a^2} \\
 I_2^2 = \frac{16 \pi^4}{a^2} & I_{11}^1 = \frac{16.196 \pi^2}{225 a^2} \\
 I_3^1 = -\frac{\pi^2}{2h} & I_{11}^2 = 0 \\
 I_3^2 = 0 & I_{12}^1 = \frac{\pi^2}{a^2} \\
 I_4^1 = 0 & I_{12}^2 = 0 \\
 I_4^2 = -\frac{2\pi^2}{R} & I_{13}^1 = 0 \\
 I_5^1 = \frac{16 \pi^2}{9a^2} & I_{13}^2 = \frac{16 \pi^4}{a^2} \\
 I_5^2 = 0 & I_{14}^1 = -\frac{\pi^2}{2R} \\
 I_6^1 = \frac{16.256 \pi^2}{225 a^2} & I_{14}^2 = 0 \\
 I_6^2 = 0 & I_{15}^1 = 0 \\
 I_7^1 = 0 & I_{15}^2 = -\frac{2\pi^2}{R} \\
 I_7^2 = \frac{4.256 \pi^2}{225 a^2} & I_{16}^1 = \frac{16 \pi^2}{9a^2} \\
 I_8^1 = 0 & I_{16}^2 = 0 \\
 I_8^2 = \frac{4.256 \pi^2}{225 a^2} & I_{17}^1 = 0 \\
 I_9^1 = \frac{4\pi^2}{9a^2} & I_{17}^2 = \frac{4.256 \pi^2}{225 a^2}
 \end{array}$$

$I_{18}^1 = 0$	$I_{27}^2 = 0$
$I_{18}^2 = \frac{4.256 \pi^2}{225 a^2}$	$I_{28}^1 = \frac{4a^2}{\pi^2} Z(x, y, t)$
$I_{19}^1 = \frac{16,256 \pi^2}{225 a^2}$	$I_{28}^2 = 0$
$I_{19}^2 = 0$	$'I_{29}^1 = \frac{a_2}{4} \gamma \frac{h}{g}$
$I_{20}^1 = \frac{16 \pi^2}{9a^2}$	$"I_{29}^1 = 0$
$I_{20}^2 = 0$	$'I_{29}^2 = 0$
$I_{21}^1 = 0$	$"I_{29}^2 = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\gamma h}{g}$
$I_{21}^2 = \frac{4.256 \pi_2}{225 a^2}$	$'I_{30}^1 = c \frac{a^2}{4}$
$I_{22}^1 = 0$	$"I_{30}^1 = 0$
$I_{22}^2 = \frac{4.256 \pi^2}{225 a^2}$	$'I_{30}^2 = 0$
$I_{23}^1 = \frac{16.256 \pi^2}{225 a^2}$	$"I_{30}^2 = c \frac{a^2}{4}$
$I_{23}^2 = 0$	$'I_{31}^1 = \frac{\pi^2}{4} N_1^0(x, y, t)$
$I_{24}^1 = \frac{8 \pi^2}{9a^2}$	$"I_{31}^1 = 0$
$I_{24}^2 = 0$	$'I_{31}^2 = 0$
$I_{25}^1 = 0$	$"I_{31}^2 = \pi^2 N_1^0(x, y, t)$
$I_{25}^2 = \frac{128 \pi^2}{225 a^2}$	$'I_{32}^1 = \frac{\pi^2}{4} N_2^0(x, y, t)$
$I_{26}^1 = 0$	$"I_{32}^1 = 0$
$I_{26}^2 = \frac{128 \pi^2}{225 a^2}$	$'I_{32}^2 = 0$
$I_{27}^1 = \frac{32.196 \pi^2}{225 a^2}$	$"I_{32}^2 = \pi^2 N(x, y, t)$

Полученная таким образом система дифференциальных уравнений 5.4, представляет собою систему с периодическими коэффициентами.

Решением этой системы дифференциальных уравнений, можно получить решения большого числа разнообразных частных случаев статической и динамической задач для оболочек и пластин по нелинейной и линейной теории, включая и случаи решений вышеуказанных задач для оболочек и пластин, лежащих на упругих основаниях.

Также могут быть определены и области динамической устойчивости при условии решения вышеуказанной системы дифференциальных уравнений для некоторых частных значений геометрических и упругих характеристик оболочки или пластины.

В зависимости от того решается и вышеуказанная задача при первом или втором приближении зависит и качественная сторона решения этих разнообразных статических и динамических задач, а это есть задача второй части настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Козаров: Изследване на устойчивост на полегатите тънки еластични черупки върху основата на нелинейната теория на В. З. Власов. Известия на техн. институт кн. 7—8 БАН, 1959.
2. О. Д. Онишвили: Некоторые динамические задачи теории оболочек, 1957.
3. В. В. Болотин: Динамическая устойчивость упругих систем.

ERMÜDUNGSFESTIGKEIT UND DIMENSIONIERUNG VON GESCHWEISSTEN MASCHINENELEMENTEN AUS STAHL UND ALUMINIUMLEGIERUNGEN

A. NEUMANN

ZENTRALINSTITUT FÜR SCHWEISSTECHNIK DER DDR IN HALLE (SAALE)

Einleitung

Der Vortrag umfaßt die Dimensionierung von statisch und dynamisch (schwingend) beanspruchten geschweißten Konstruktionen aus Stahl und Aluminiumlegierungen, wie sie für Maschinenelemente, z. B. bei Pressen, Landmaschinen, Fahrzeugen, Elektromaschinen usw. vorkommen. Ergänzend werden auch Angaben über die Dimensionierung von geschweißten Konstruktionen im Stahlbau, z. B. Kranbau, Brückenbau und Schiffbau gemacht.

1. Geschweißte Konstruktionen aus Stahl

1.1 *Allgemeines*

Die Dimensionierung von geschweißten Konstruktionen im Maschinenbau und Stahlbau ist verschiedene Wege gegangen. Dies ist in vielen Ländern zu beobachten.

Der Unterausschuß »Berechnung und Konstruktion« des Fachausschusses »Schweißtechnik« der Kammer der Technik hat in den letzten Jahren versucht, eine einheitliche Basis für die Berechnung von Schweißkonstruktionen aller Fertigungsgebiete zu schaffen.

Die Grundlagen für die Festigkeitsberechnungen sind Werkstoffkennwerte, die aus Versuchen an Proben ermittelt werden. Aus den vorliegenden Werkstoffkennwerten (z. B. der statischen Festigkeit, der Streckgrenze und der Dauerfestigkeit) können zulässige Spannungen festgelegt werden, die eine genügende Sicherheit gegenüber den auftretenden Belastungen bieten.

Die Wahl der Sicherheiten wird selbstverständlich für die verschiedenen Konstruktionsarten (im Maschinenbau sowie auch im Stahlbau) verschieden sein. Die hier geführten Betrachtungen beziehen sich ausschließlich auf unlegierte bzw. niedrig legierte Baustähle, wie z. B. St 37 und St 52.

1.2 *Werkstoffkennwerte*

Für die *statische Beanspruchung* wird als ertragbare Spannung für die obengenannten Stähle die Streckgrenze bzw. die entsprechenden Spannungs-

größen auf Schub bei uns zu Grunde gelegt. Das Versagen bei statischer Beanspruchung wird auf das Fließen bezogen.

Entsprechende Werte für Grundwerkstoff, aber auch für die Schweißverbindungen sind relativ leicht zu ermitteln und festzulegen.

Für die *dynamische Beanspruchung* legen wir zur Zeit noch die Werte der Dauerfestigkeit zu Grunde, wobei bei Stahl die 2 Mill.-Grenze als ausrei-

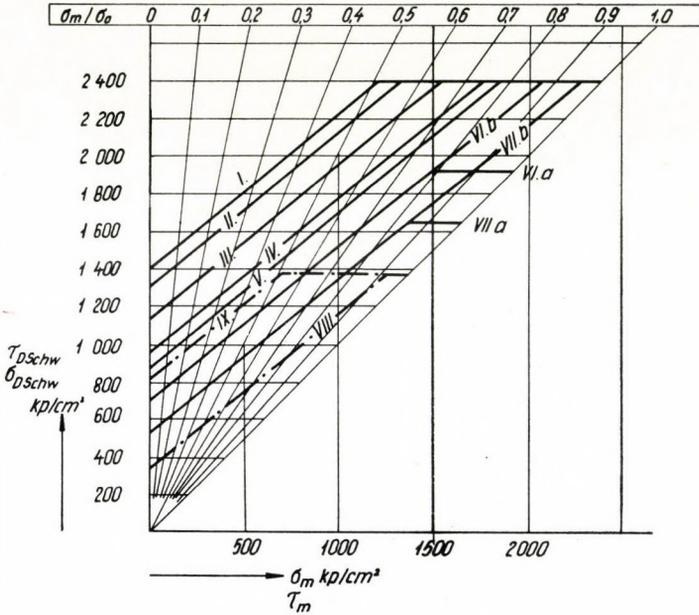


Bild 1. Ertragbare Spannungen St 38

chend angesehen wird. Für entsprechende Zeitfestigkeiten sind keine besonderen Werte festgelegt, sie werden im Bedarfsfalle durch Versuche bzw. durch Interpolation bei ausreichender Sicherheit festgelegt.

Für geschweißte Konstruktionen aller Art sind sehr viele Dauerfestigkeits-Versuchsergebnisse vorhanden aus vielen Versuchsreihen und vielen Ländern.

Die Versuchsergebnisse der letzten 15 Jahre aller erreichbaren Dauerfestigkeits-Untersuchungen an Schweißverbindungen der obengenannten Stähle wurden im ZIS (Zentralinstitut für Schweißtechnik der DDR) zusammengetragen und einheitlich ausgewertet. Hierbei spielen selbstverständlich die eigenen ZIS-Versuchsreihen mit über 1000 Proben, vorwiegend größere Bauteile, eine besondere Rolle. Aus den entsprechenden Veröffentlichungen, z. B. Dauerfestigkeitskatalog [1], Probleme der Dauerfestigkeit [2] und ZIS-Mittei-

lungen [3] sind die Versuchsergebnisse und einheitlichen Auswertungen zu ersehen.

Für die wichtigsten, in der Praxis auftretenden Schweißverbindungen und Bauelemente sind Dauerfestigkeits-Schaubilder aufgestellt worden. Als Beispiel zeigen die Bilder 1 und 2 die ertragbaren Spannungen — dargestellt im Smith-Dauerfestigkeits-Diagramm — (d. h. die Streckgrenze bzw. die Dauerfestigkeit) für Schweißverbindungen aus St 38 und St 52. In den Bildern

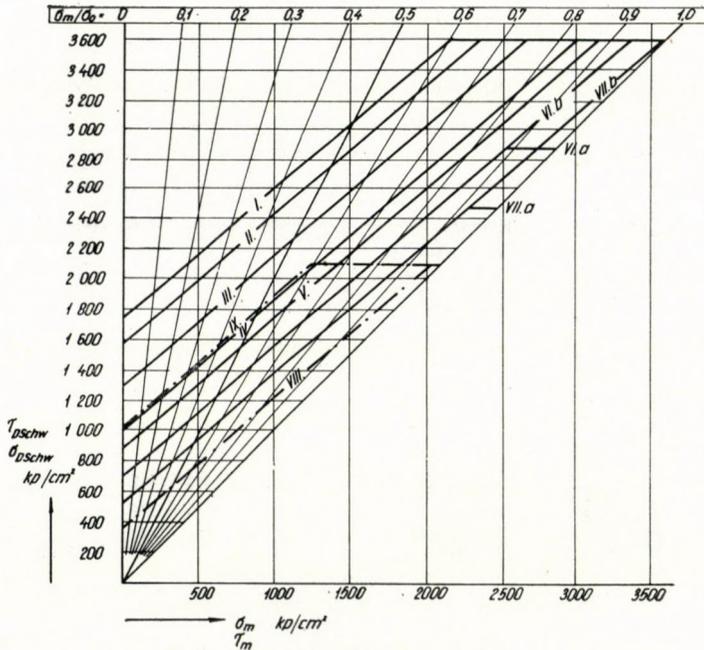
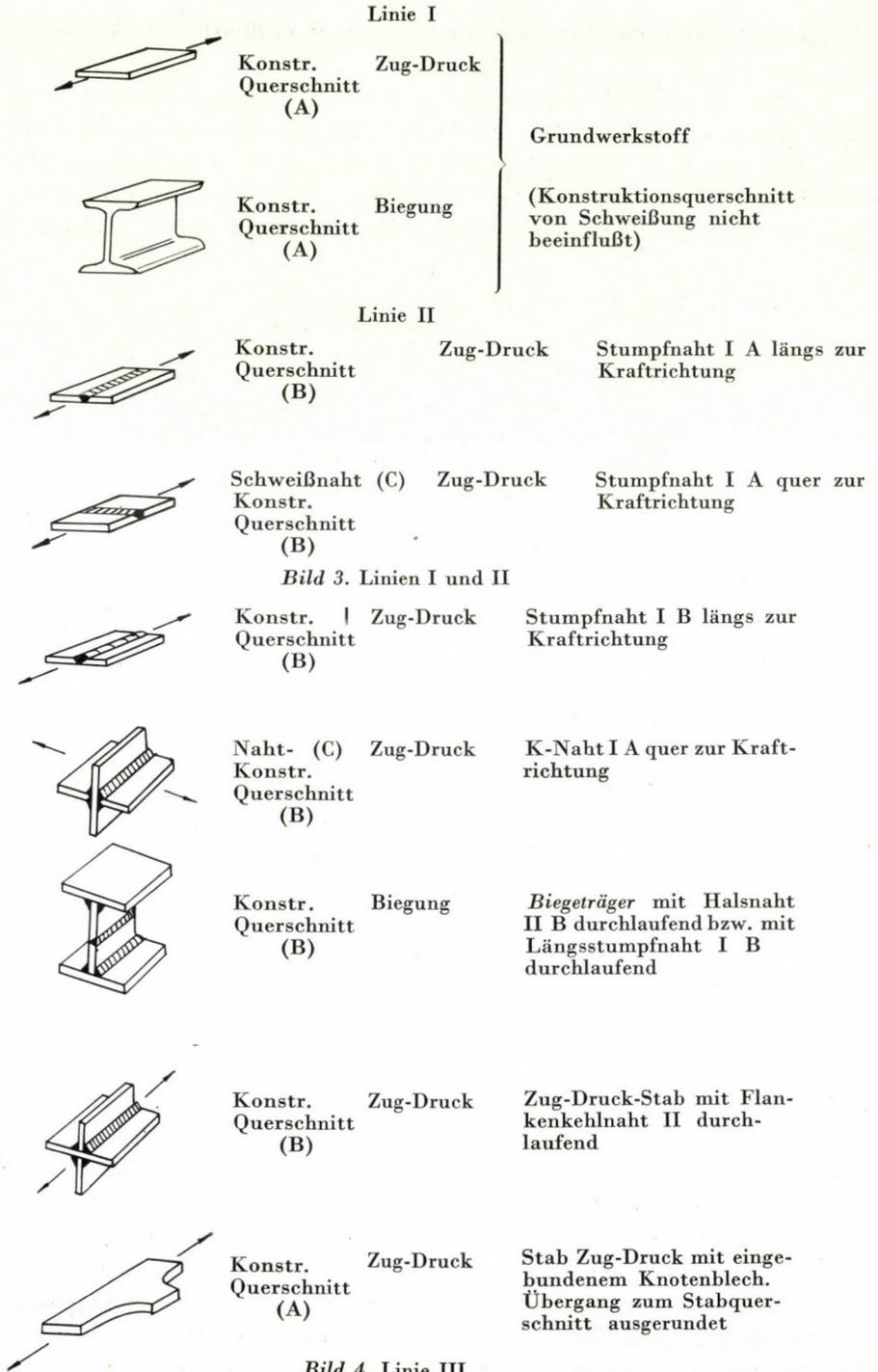


Bild 2. Ertragbare Spannungen St 52

4—10 sind die entsprechenden Dauerfestigkeitslinien den einzelnen Schweißverbindungen und Schweißkonstruktionen zugeordnet.

Bei der Festlegung der ertragbaren Spannungen wurde die Handschweißung mit einer erzsauern Elektrode in guter Schweißausführung ohne innere Fehler und ohne Einbrandkerben vorausgesetzt. Der Einfluß der verschiedenen Elektrodenarten auf die Dauerfestigkeit wird hier aus Zeitgründen nicht behandelt. Den genannten Werten entsprechen auch Schweißungen, die unter Pulver und mit CO_2 an den obengenannten Stellen durchgeführt werden.

Bei den Dauerfestigkeitswerten wurde einerseits die Tragfähigkeit der Schweißnaht-Querschnitte selbst sowie andererseits der von der Schweißung beeinflusste Querschnitt des Grundwerkstoffs berücksichtigt.



Stumpfnah I A längs zur Krafrichtung

Stumpfnah I A quer zur Krafrichtung

Stumpfnah I B längs zur Krafrichtung

K-Nah I A quer zur Krafrichtung

Biegeträger mit Halsnah II B durchlaufend bzw. mit Längsstumpfnah I B durchlaufend

Zug-Druck-Stab mit Flankenkehlnah II durchlaufend

Stab Zug-Druck mit eingebundenem Knotenblech. Übergang zum Stabquerschnitt ausgerundet

Bild 4. Linie III

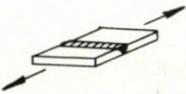
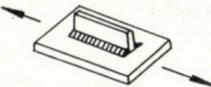
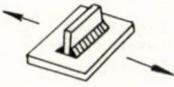
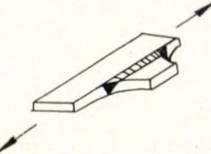
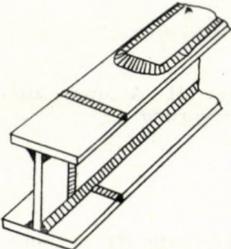
	Naht-(C) Konstr. Querschnitt (B)	Zug-Druck	Stumpfnahse I B quer zur Kraftrichtung
	Konstr. Querschnitt (B)	Zug-Druck	Stab mit Längsnahstenden (Kehlnahstenden) II A (bearbeitet)
	Konstr. Querschnitt (B)	Zug-Druck	Stab mit Quernahstenden (Kehlnähte) II A (bearbeitet)
	Konstr. Querschnitt (B)	Biegung	Biegeträger mit eingewweißten Aussteifungen Quernähte (Kehlnähte) II A (bearbeitet)
	Konstr. Querschnitt (B)	Zug-Druck	Zug-Druck-Stab am Ende des angeschweißten, ausgerundeten und bearbeiteten Knotenbleches
	Konstr. Querschnitt (B)	Biegung	Biegeträger am Ende einer aufgeschweißten Gurtplatte. Stirn- und Flankenkehlnähte II A (bearbeitet)
	Konstr. Querschnitt (B)	Biegung	Biegeträger mit versetztem Stoß. Stumpfnähte I B
	Naht- (C)		

Bild 5. Linie IV

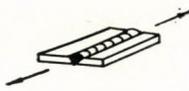
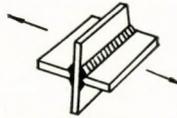
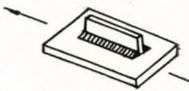
	Konstr. Querschnitt (B)	Zug-Druck	Stumpfnah II A längs zur Kraftrichtung
	Naht- (C) Konstr. Querschnitt (B)	Zug-Druck	K-Naht I B quer zur Kraftrichtung
	Konstr. Querschnitt (B)	Zug-Druck	Zug-Druck-Stab mit Längsnahtenden (Kehlnähte) II B
	Konstr. Querschnitt (B)	Zug-Druck	Zug-Druck-Stab mit Quernahtenden (Kehlnähte) II B
	Konstr. Querschnitt (B)	Biegung	Biegeträger mit einge- schweißten Aussteifungen. Quernahte (Kehlnähte) II B
	Konstr. Querschnitt (B)	Biegung	Biegeträger am Ende einer aufgeschweißten Gurt- platte. Stirn- und Flankenkehlnähte II B

Bild 6. Linie V

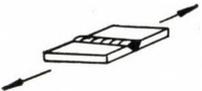
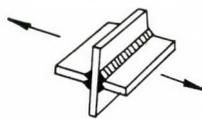
	Naht- (C) Konstr. Querschnitt (B)	Zug VIa	Stumpfnah II A quer zur Kraftrichtung
		Druck VIb	dto.
	Naht- (C) Konstr. Querschnitt (B)	Zug VIa	K-Naht II A quer zur Kraftrichtung
		Druck VIb	dto.
	Konstr. Querschnitt (B)	Zug-Druck VIb	Stirnkehlnah II A quer zur Kraftrichtung (Über- gang — bearbeitet)
	Konstr. Querschnitt (B)	Zug-Druck VIb	Flankenkehlnah II A (Nahtende — bearbeitet)

Bild 7. Linie VI

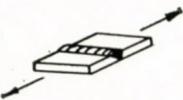
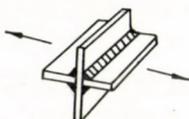
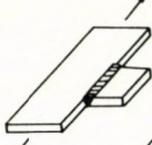
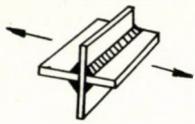
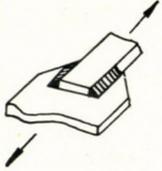
	Naht- (C) Konstr. Querschnitt (B)	Zug VIIa Druck VIIb	Stumpfnah II B quer zur Krafrichtung dto.
	Naht-(C) Konstr. Querschnitt (B)	Biegung VII	Profilträger — Totalstoß II B
	Konstr. Querschnitt (B)	Zug-Druck VIIb	Stirn-Kehlnah II B quer zur Krafrichtung (Übergang — unbearbeitet)
	Konstr. Querschnitt (B)	Zug-Druck VIIb	Flankenkehlnah II B (Nahende unbearbeitet)
	Konstr. Querschnitt (B)	Biegung VIIb	Biegeträger mit unter- brochener Halsnah II B
	Konstr. Querschnitt (B)	Zug-Druck	Zug-Druck-Stab mit ange- schweißtem Knotenblech; Übergang nicht ausgerun- det
	Konstr. Querschnitt. (B)	Zug-Druck	Zug-Druck-Stab mit aufge- schweißtem Knoten- oder Bindeblech

Bild 8. Linie VII



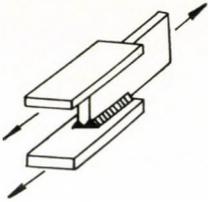
Nahtquerschnitt (C) Schub

Stirnkehlnaht II B quer zur Krafrichtung am Stabanschluß



Nahtquerschnitt (C) Schub

Flankenkehlnaht II B am Stabanschluß



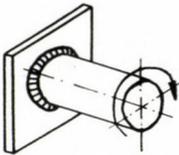
Nahtquerschnitt (C) Schub

K-Naht II A (am Stabanschluß)



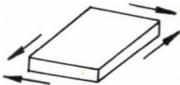
Nahtquerschnitt (C) Schub

Unterbrochene Halsnaht II B



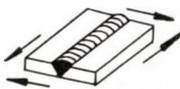
Nahtquerschnitt (C) Schub (aus Torsion) Kehlnaht II B

Bild 9. Linie VIII



Konstr. Querschnitt (A) Schub

Grundwerkstoff; Konstruktionsquerschnitt von Schweißung nicht beeinflusst



Naht- (C) Konstr. Querschnitt (B) Schub

Stumpfnah II B



Nahtquerschnitt (C) Schub

Durchgehende Halsnaht II B

Bild 10. Linie IX

Für Stumpf- und K-Nähte unterscheiden wir in der DDR nachstehende Ausführungsklassen:

- Ausführungsklasse I A — blecheben bearbeitet
100% geröntgt
- Ausführungsklasse I B — unbearbeitet, keine Einbrandkerben
100% geröntgt
- Ausführungsklasse II A — unbearbeitet, relativ kleine
Einbrandkerben,
Wurzel gegengeschweißt,
nicht geröntgt.
- Ausführungsklasse II B — unbearbeitet, relativ kleine
Einbrandkerben, Wurzel nicht
gegengeschweißt.
Nicht geröntgt.

Bei Kehlnähten unterscheiden wir nachstehende Ausführungsklassen:

- Ausführungsklasse II A — Kehlnahtenden quer zur Krafrichtung be-
arbeitet,
- Ausführungsklasse II B — unbearbeitet.

Die Bilder zeigen, welchen außerordentlich großen Einfluß die Gestalt der Schweißverbindung und die Herstellungsqualität auf die Werte der ertragbaren Spannungen und besonders der Dauerfestigkeitswerte haben.

1.3 Festigkeitsnachweise im Maschinenbau

Nach den in der DDR vorhandenen Richtlinien für die Berechnung von geschweißten Maschinenkonstruktionen gilt seit 1956 der Nachweis der erforderlichen Sicherheit. Auch die in diesem Jahr auf Grund neuester Forschungsergebnisse erneuerten Richtlinien behalten dieses Dimensionierungsprinzip. Zugrunde gelegt werden die soeben geschilderten ertragbaren Spannungen, die der Unterausschuß »Berechnung und Konstruktion« im Fachausschuß »Schweißtechnik« der Kammer der Technik in diesem Jahr nach einigen letzten Änderungen endgültig verabschiedete.

Der Sicherheitsnachweis wird mit den bekannten Formeln nach Bild 11 für einfache Beanspruchung geführt. Für zusammengesetzte Beanspruchung wurde vorläufig für Schweißverbindungen von uns nach Vorschlag ERKER die Ellipsengleichung festgelegt. Die entsprechenden Gleichungen sind aus Bild 12 zu ersehen. Für die Praxis eignet sich der Nachweis resultierender Sicherheit aus zwei Teilsicherheiten (ν_σ, ν_τ) mit der in Bild 13 angegebenen graphischen Methode. Es laufen zur Zeit Arbeiten, die die Fragen der zusammengesetzten Beanspruchung von σ und τ bei Schweißverbindungen in bezug auf die Dauer-

$$\nu_{\text{vorh}} = \frac{\sigma_{\text{Dschw}}}{\sigma_{\text{sohw}}} \geq \nu_{\text{erf}}$$

ν_{erf} = erforderl. Sicherheit (Mindestwert)

ν_{vorh} = vorhandene Sicherheit

σ_{Dschw} = ertragbare Spannung für gegebenen Wert $\frac{\sigma_m}{\sigma_0}$

σ_{schw} = Oberspannung

Erforderliche Sicherheiten:

bei statischer Belastung gegenüber Verformen

$\nu_{\text{erf}} = 1,5 \dots 2,0$ im Regelfall $\nu_{\text{erf}} = 1,5$

bei dynamischer Belastung gegenüber Dauerbruch

$\nu_{\text{erf}} = 2,0 \dots 3,0$, im Regelfall $\nu_{\text{erf}} = 2,0$

Bild 11. Sicherheitsnachweis Maschinenbau

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_{\text{zul}}} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{\text{zul}}} \right)^2 \leq 1$$

$$\nu_{\sigma} = \frac{\text{zul } \sigma}{\sigma}$$

$$\nu_{\tau} = \frac{\text{zul } \tau}{\tau}$$

$$\frac{1}{\nu_{\text{res}}^2} = \frac{1}{\nu_{\sigma}^2} + \frac{1}{\nu_{\tau}^2}$$

$$\nu_{\text{res}} = \frac{\nu_{\sigma}^2 \cdot \nu_{\tau}^2}{\nu_{\sigma}^2 + \nu_{\tau}^2} \geq \nu_{\text{erf}}$$

ν_{σ} = Teilsicherheit aus Normalspannungen

ν_{τ} = Teilsicherheit aus Tangentialspannungen

Bild 12. Sicherheitsnachweis—Maschinenbau bei zusammenges. Beanspruchung

festigkeit klären sollen. Es ist beabsichtigt, diese Ergebnisse für die Berechnungsgrundlage auszunutzen.

Als erforderliche Sicherheit für einfache oder zusammengesetzte Beanspruchung wurde bei uns seit 1956 für geschweißte Maschinenkonstruktionen festgelegt:

Bei statischer Belastung gegenüber Verformen:

$$\nu_{\text{erf}} = 1,5 \text{ bis } 2,0, \text{ im Regelfall } \nu_{\text{erf}} = 1,5$$

Bei dynamischer Belastung gegenüber Dauerbruch:

$$\nu_{\text{erf}} = 2,0 \text{ bis } 3,0, \text{ im Regelfall } \nu_{\text{erf}} = 2,0$$

Kann die Ermittlung der Belastungsgrößen sehr genau und wirklichkeits-

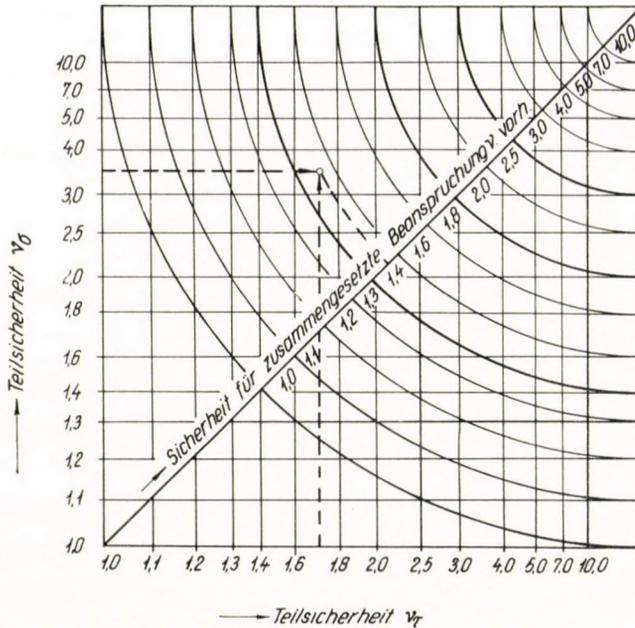


Bild 13. Resultierende Sicherheit

Graphische Ermittlung der vorhandenen resultierenden Sicherheit v_{res} für zusammengesetzte Beanspruchung (Beispiel: $v_{\sigma} = 3,5$ und $v_{\tau} = 1,7$ gibt $v_{res} = 1,5$)

entsprechend erfolgen, so können bei statischer sowie dynamischer Belastung in Ausnahmefällen die erforderlichen Sicherheiten bis 1,3 gesenkt werden. Dies wird jedoch im allgemeinen Maschinenbau nur selten zur Anwendung kommen können.

1.4 Festigkeitsnachweise im Stahlbau

Im Stahlbau werden bekanntlich in Deutschland die Nachweise für statische und dynamische Beanspruchung mit zulässigen Spannungen geführt. Gerade vor kurzem sind die für die DDR nunmehr maßgebenden zulässigen Spannungen festgelegt worden. Sie finden Eingang in alle Vorschriften des geschweißten Stahlbaues (Kranbau, Brückenbau, Hochbau, usw.).

In den Bildern 14 und 15 sind diese Linien der zulässigen Spannungen I bis IX im vereinfachten Dauerfestigkeits-Schaubild des Stahlbaues dargestellt.

Der Abhängigkeitsfaktor ist hier $\kappa = \frac{\min_{\sigma}}{\max_{\sigma}}$.

Die Linien I bis IX entsprechen den bereits vorher genannten Linien der ertragbaren Spannungen. Als Sicherheiten sind für den Stahlbau von uns gewählt worden:

$$\text{für } \kappa = +1 \quad v = 1,5$$

$$\text{für } \kappa = -1 \quad v = 1,1$$

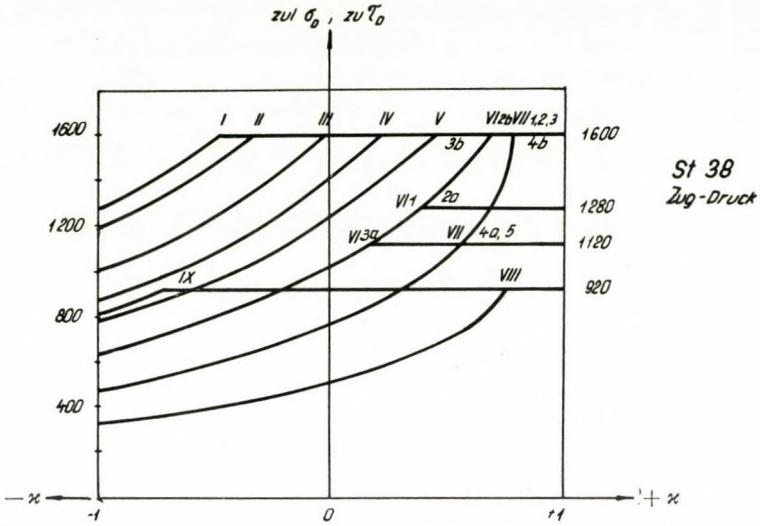


Bild 14. σ_{zul} — geschweißte Stahlbauten St 38

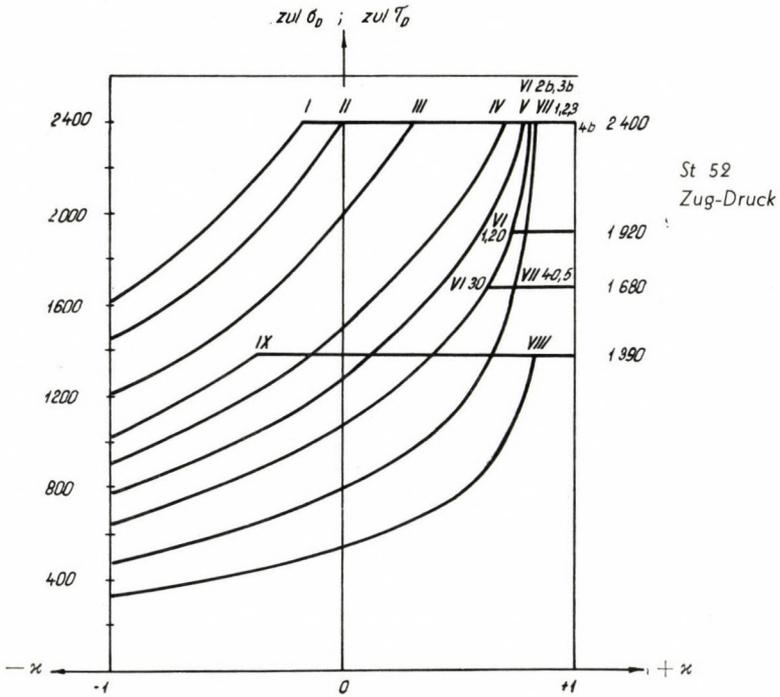


Bild 15. σ_{zul} — geschweißte Stahlbauten St 52

Die Zwischenbereiche sind interpoliert worden. Für die Berechnung der Linien der zulässigen Spannungen und die exakte Festlegung der Werte ist die Theorie von Strüssi weitgehend angewandt worden.

Die Berechnungsformel für einfache und zusammengesetzte Beanspruchung geht aus Bild 16 hervor. Für die zusammengesetzte Beanspruchung gilt

1. Einfache Beanspruchung

$$\sigma_{\text{schw vorh}} \leq \text{zul } \sigma_D$$

zul σ_D = zulässige Spannung für gegebenen Wert

$$\kappa = \frac{\min \sigma_{\text{schw}}}{\max \sigma_{\text{schw}}}$$

2. Zusammengesetzte Beanspruchung

$$\sigma_h = \frac{\sigma_{\text{schw}}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{\text{schw}}^2 + 4\tau_{\text{schw}}^2} \leq \text{zul } \sigma_D$$

zul σ_D = zul. Hauptspannung für den gegebenen Wert

$$\kappa = \frac{\min \sigma_{h \text{ schw}}}{\max \sigma_{h \text{ schw}}}$$

Bild 16. Dauerfestigkeitsnachweis—Stahlbau

in Deutschland für Schweißverbindungen (nach langen Diskussionen und Erörterungen aller Fachkreise) die Hauptspannungsformel. Auf eine nähere Erörterung dieses Problems wird zur Vermeidung einer allzu großen Ausweitung verzichtet.

Somit besteht nunmehr die erfreuliche Tatsache, daß bei Maschinen- und Stahlbauten als geschweißte Konstruktionen die gleichen Ausgangswerte für die Bemessung maßgebend sind. Es sind lediglich Unterschiede wegen der verschiedenartigen Belastungen in bezug auf die erforderliche Sicherheit und (was sehr unmaßgeblich ist) in bezug auf den formellen Nachweis zu verzeichnen,

2. Geschweißte Konstruktionen aus Aluminium-Legierungen

2.1 Allgemein

Für den Leichtmetallbau wird die Frage der Festigkeitsberechnung von hoch beanspruchten Konstruktionen immer aktueller. Dies zeigten auch die Vorträge und Diskussionen auf den Tagungen in Essen im Herbst 1960, in Leoben im Sommer 1961 und in Halle im Oktober 1961.

Schweißkonstruktionen aus Leichtmetalllegierungen stehen hier besonders im Vordergrund, da sie oft zu größeren wirtschaftlichen Vorteilen, besonders zu geringeren Gewichten führen und die Voraussetzungen für den Leichtbau bieten.

2.2 Werkstoff-Kennwerte

Für die *statische Belastung* sind für den ungeschweißten Grundwerkstoff die entsprechenden *Mindest-Werkstoff-Kennwerte* (Streckgrenze $-\sigma_{0,2}$; statische Festigkeit $-\sigma_B$) im Anhalt an die Festlegungen der DIN 4113 nach den Mittelwerten für die entsprechenden Halbzeuge der DIN 1743–1749 (1951) gewählt worden [9]. Diese Werte für den ungeschweißten Grundwerkstoff sowie die festgelegten Werte für Schweißverbindungen sind durch eigene Versuche belegt worden. Für den Schub ist nach DIN 4113 $\tau = 0,6\sigma$ gewählt worden.

Für Schweißverbindungen sind hier besonders die folgenden Probleme hervorzuheben:

Bei kalt ausgehärteten Aluminium-Legierungen (mit Ausnahme der selbst-ausgehärteten) ist an der Schweißverbindung eine Enthärtung festzustellen. Die statische Festigkeit der Schweißverbindung aus einer harten Aluminium-Legierung fällt deshalb auf den Wert der weichen Legierung ab. Dies gilt auch für Bauelemente (Grundwerkstoff) mit Schweißnähten (z. B. Rippenanschweißungen), die quer zur vorhandenen Belastung verlaufen.

In Bild 17 sind die gewählten Festigkeitswerte für *AlMg5* aufgeführt.

Festigkeitswerte von *AlMg5*

	<i>AlMg5</i> F 24 weich	<i>AlMg5</i> F 28 halbhart	<i>AlMg5</i> F 32 hart
$\sigma_{0,2}$ [kp/mm ²]	12,0	18,0	24,0
σ_B [kp/mm ²]	24,0	28,0	32,0

Bild. 17

Die Mindestdauerfestigkeitswerte [5] sind in Auswertung der erreichbaren in- und ausländischen Versuchsergebnisse [10] bis [14] sowie durch die bereits erwähnten eigenen umfangreichen Versuchsreihen als erste Anhaltswerte ermittelt worden. Die angeführten Werte beschränken sich:

in bezug auf das Schweißverfahren auf das WIG-Schweißen,

in bezug auf die Dicke auf 2–10 mm,

in bezug auf die Lastspielzahl auf $N = 10^7$,

in bezug auf die Lastspiel-Frequenz auf 500–1500/Min.

Die Werte berücksichtigen ausschließlich Schweißungen ohne Fehler.

Es wurden nachstehende Legierungen ausgewertet:

AlMg AlMgSi AlMgCu

In den Bildern 18 bis 22 sind einige Anhaltswerte für die reine Schwellfestigkeit

Grundwerkstoff mit Walzhaut	(kp/mm ²)	
	σ wechsel	σ schwell
 Biegung	 10 - 12	 18 - 22
 Zug Druck	5 - 9	10 - 17
$s \cong 2 \text{ bis } 10 \text{ mm}$	$N = 10^6 \text{ bis } 10^7$	

Bild 18. Anhaltswerte für die Dauerfestigkeit von Grundwerkstoff mit Walzhaut von AlMg, AlMgSi, AlMgCu

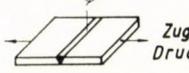
Stumpfnah blechen bearbeitet WIG-geschweißt	(kp/mm ²)	
	σ wechsel	σ schwell
 Biegung	 6 - 8	 10 - 12
 Zug Druck	4 - 5	6 - 7
$s \cong 2 \text{ bis } 10 \text{ mm}$	$N = 10^6 \text{ bis } 10^7$	

Bild 19. Anhaltswerte für die Dauerfestigkeit von Stumpfnähten, blechen bearbeitet, von AlMg, AlMgSi und AlMgCu

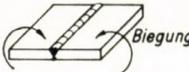
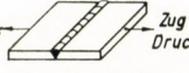
Stumpfnah unbearbeitet WIG-geschweißt	(kp/mm ²)	
	σ wechsel	σ schwell
 Biegung	 5 - 7	 8 - 10
 Zug Druck	3 - 4	5 - 7
$s \cong 2 \text{ bis } 10 \text{ mm}$	$N = 10^6 \text{ bis } 10^7$	

Bild 20. Anhaltswerte für die Dauerfestigkeit von Stumpfnähten unbearbeitet, von AlMg, AlMgSi, AlMgCu

und Wechselfestigkeit einiger wichtiger Schweißverbindungen wiedergegeben [4].

In diesen Anhaltswerten sind selbstverständlich Streuungen und Widersprüche mit enthalten. Zur Festlegung der Vorschläge für zulässige Spann-

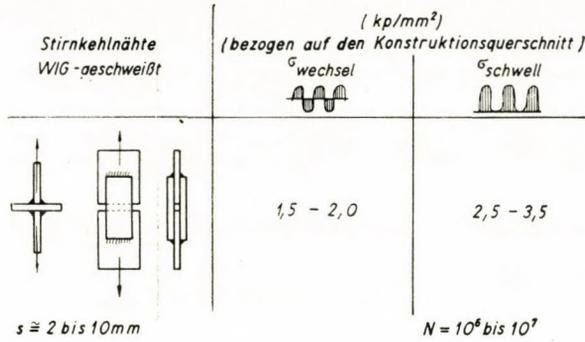


Bild 21. Anhaltswerte für die Dauerfestigkeit von Kehlnähten von AlMg, AlMgSi und AlMgCu

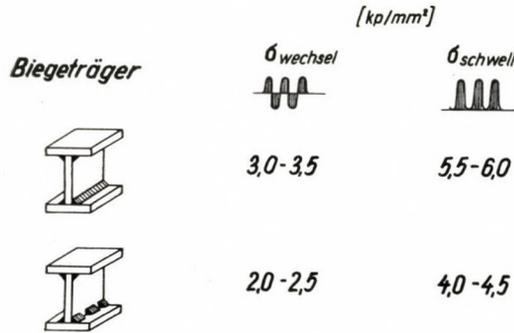


Bild 22. Anhaltswerte für die Dauerfestigkeit von Biegeträgern von AlMg, AlMgSi und AlMgCu (Spannungen, bezogen auf Trägerquerschnitt $\sigma = \frac{M}{W}$)

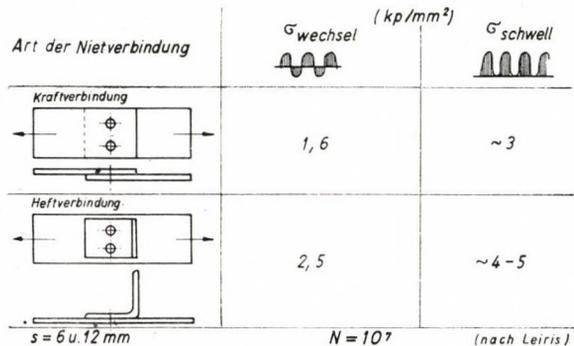


Bild 23. Anhaltswerte für die Dauerfestigkeit von Nietverbindungen einer AlMg-Legierung

gen für AlMg5 im Bereich der schwingenden Belastung wurden die Dauerfestigkeitswerte dieser Legierung berücksichtigt.

In Bild 23 sind zum Vergleich die Dauerfestigkeitswerte von Nietverbindungen angegeben, wie sie in Versuchen in Frankreich ermittelt wurden.

2.3 Sicherheiten

Die Wahl der Sicherheiten erfolgt auf Grund nachstehender Gesichtspunkte.

Der vorliegende Vorschlag für den Leichtmetallbau weicht bei der statischen Beanspruchung gering von den Festlegungen der DIN 4113 ab.

Das Verhältnis der Streckgrenze zur statischen Festigkeit $\left(\frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_B}\right)$ schwankt bei weichen und harten Legierungen erheblich.

Wählt man bei den Festlegungen der zulässigen Spannungen die Sicherheit nur in bezug auf die Streckgrenze ($\sigma_{0,2}$) nach DIN 4113 [7], dann kann für harte Werkstoffe eine zu geringe Sicherheit in bezug auf die statische Zugfestigkeit (σ_B) auftreten. Man wird mit entsprechenden Sicherheitswerten beide Werkstoff-Kennwerte ($\sigma_{0,2}$ und σ_B) nach den Schweizer Vorschlägen berücksichtigen müssen [6].

In Anlehnung an die neuen Festlegungen im Stahlbau (DIN 1050 und 4100) wird eine Sicherheit für Hauptkräfte (Lastfall 1) von $\nu = 1,5$ in bezug auf die Streckgrenze ($\sigma_{0,2}$) und $\nu = 2,4$ in bezug auf die statische Festigkeit (σ_B) vorgeschlagen. Der sich mit diesen Sicherheiten ergebende kleinere Wert wurde als maßgebend angesehen. Ein Unterschreiten des Sicherheitswertes $\nu = 2,4$ in bezug auf σ_B wird vom Verfasser als sehr bedenklich betrachtet.

Bei *dynamischer Beanspruchung* wird ebenfalls an die Anlehnung an die letzten Erörterungen im Stahlbau [8] eine Sicherheit in bezug auf die Mindest-Dauerfestigkeitswerte von $\nu = 1,2$ und $1,3$ im Leichtmetallbau, d. h. im Hochbau, Kranbau, Förderanlagenbau, Brückenbau u. ä. vorgeschlagen.

Für *geschweißte Maschinenelemente* wird man wegen der nicht exakt genug erfaßbaren Belastungsgrößen im Bereich der dynamischen Beanspruchung eine Sicherheit von mindestens $\nu = 2,0$ wählen müssen. Die hieraus resultierenden zulässigen Spannungen sind in diesem Vorschlag nicht berücksichtigt.

2.4 Anhaltswerte für zulässige Spannungen von Schweißkonstruktionen aus AlMg5

In den Bildern 24–31 sind erste Vorschläge für zulässige Spannungen bei statischer und dynamischer Beanspruchung für Hauptkräfte (Lastfall 1) im Leichtmetallbau gegeben. Sie berücksichtigen *einerseits* im Bereich der statischen Belastung die Schwankungen der Festigkeit je nach der Legierungsart (weich, halbhart, hart) und den Einfluß der Schweißung über den ganzen Querschnitt. *Andererseits* berücksichtigen sie die verschiedenen großen Kerbeeinflüsse der einzelnen Schweißverbindungen im Bereich der dynamischen Beanspruchung.

AlMg5

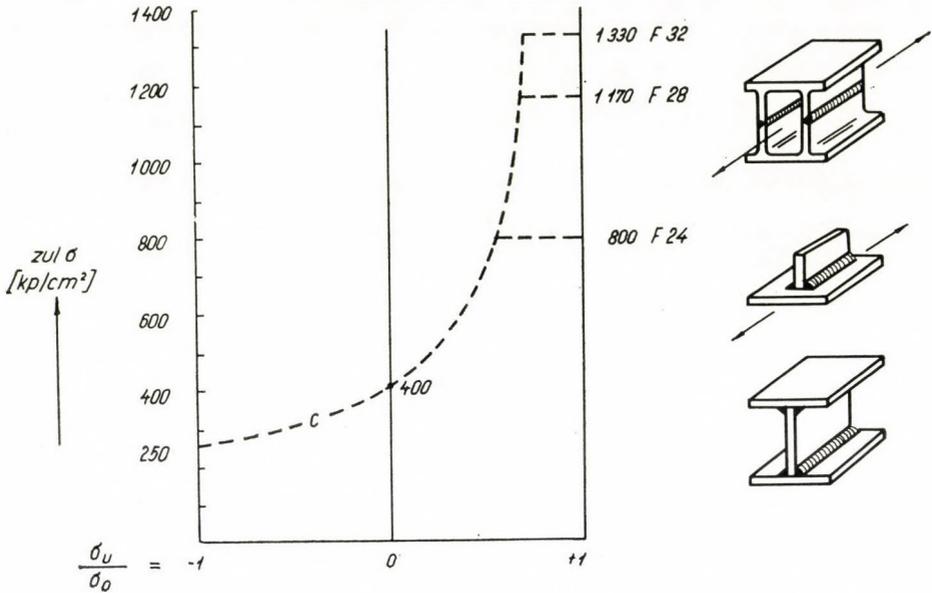


Bild 24. Vorschlag für zul σ , bezogen auf Konstruktionsquerschnitt — AlMg5 (c/2-Kurve)
 Zug-Druck-Stab mit durchlaufenden Längsnähten
 Zug-Druck-Stab mit Längsnähtenden
 Biegeträger mit durchgehenden Halsnähten

AlMg5

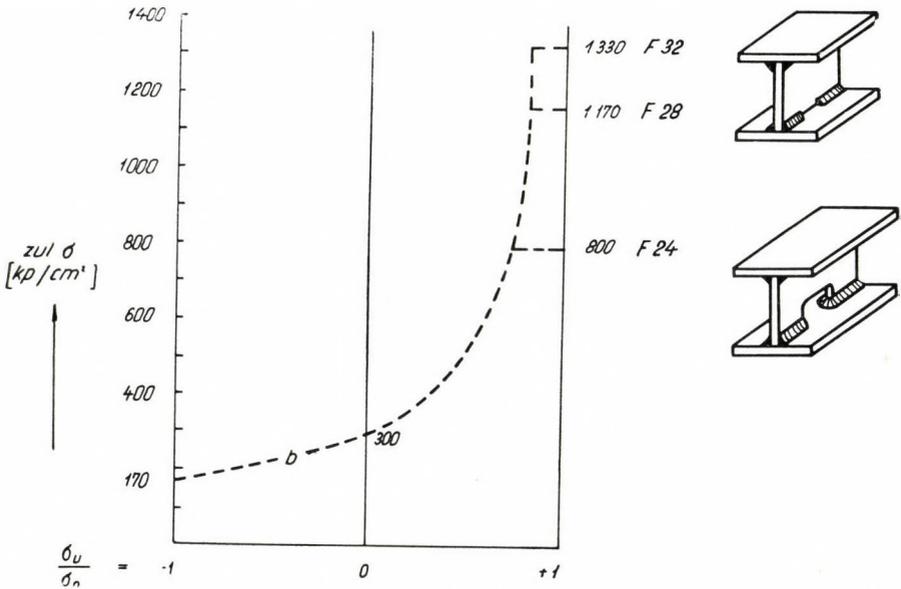


Bild 25. Vorschlag für zul σ , bezogen auf Konstruktionsquerschnitt — AlMg5 (b/2-Kurve)
 Biegeträger mit unterbrochenen Halsnähten
 Biegeträger mit rechteckigen Aussparungen

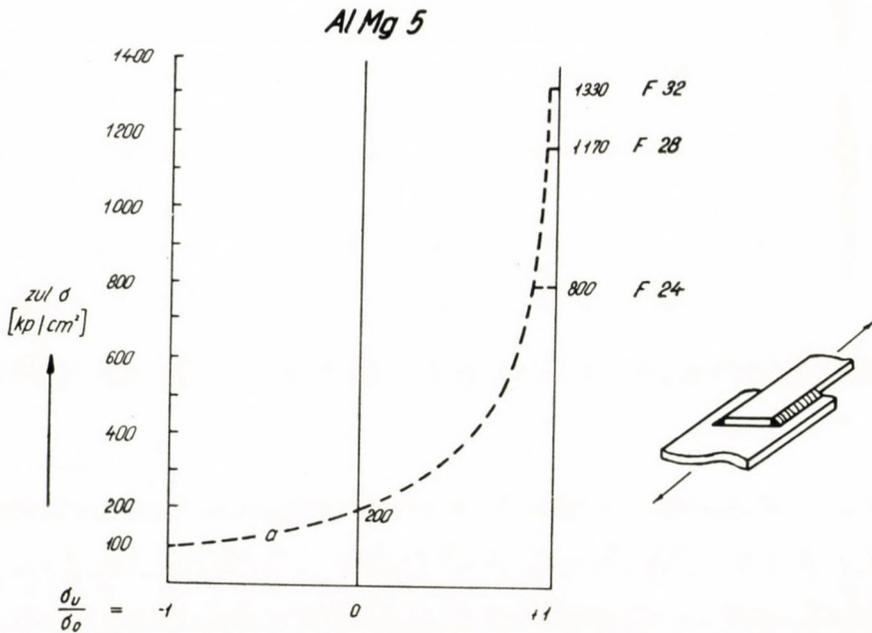


Bild 26. Vorschlag für zul σ , bezogen auf Konstruktionsquerschnitt — AlMg5 (a/2-Kurve)
Zug-Druck-Stab am Ende eines Flankenkehlnaht-Anschlusses

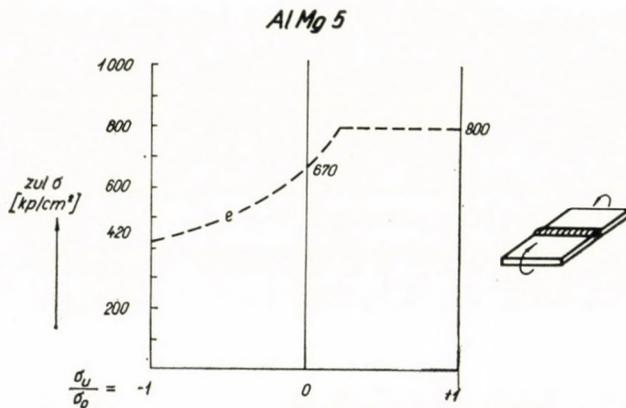


Bild 27. Vorschlag für zul σ , bezogen auf Konstruktionsquerschnitt — AlMg5 (e/1-Kurve)
Stumpfnah mit durchgeschweißter Wurzel
— fehlerfrei, unbearbeitet — Biegung

Das Bild 32 zeigt zum Vergleich die Zusammenfassung aller vorgeschlagenen Kurven der zulässigen (Normal-) Spannungen. Der Geltungsbereich beschränkt sich, wie oben bereits angegeben, auf Schweißkonstruktionen im Hochbau, Kranbau, Förderanlagen- und Brückenbau und Schiffbau aus AlMg5 in den Blechdicken 2–10 mm WIG-geschweißt. Für Maschinenelemente

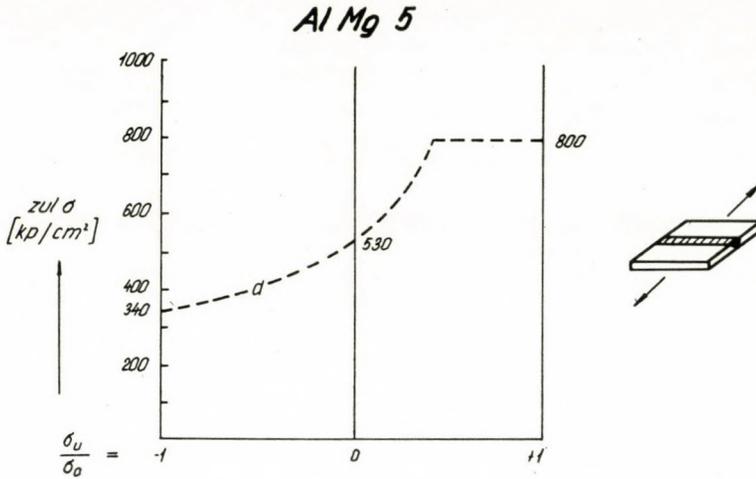


Bild 28. Vorschlag für zul σ , bezogen auf Konstruktionsquerschnitt — AlMg5 (d/l-Kurve)
 Stumpfnah mit durchgeschweißter Wurzel
 fehlerfrei, blecheben bearbeitet — Zug-Druck

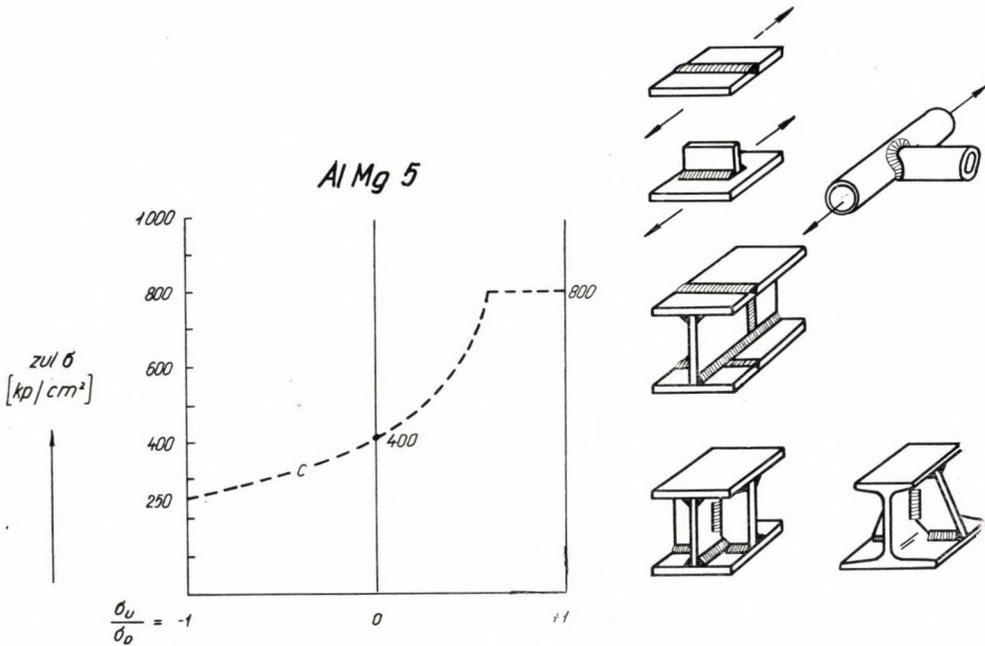


Bild 29. Vorschlag für zul σ , bezogen auf Konstruktionsquerschnitt — AlMg5 (c/l-Kurve)
 Stumpfnah mit durchgeschweißter Wurzel
 fehlerfrei, unbearbeitet, Biegung, nur Zug-Druck.
 Zug-Druck-Stab mit aufgeschweißter Querrippe.
 Biegeträger mit versetzten Stumpfstoßen — fehlerfrei.
 Geschweißte und ungeschweißte Biegeträger
 mit am Gurt angeschweißten Aussteifungen

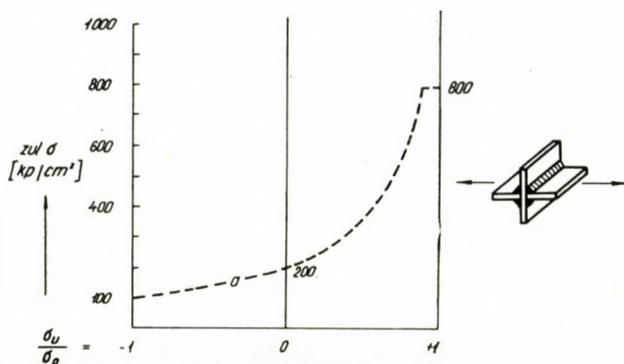


Bild 30. Vorschlag für zul σ . Stirnkehlnahtanschluß, bezogen auf den Konstruktionsquerschnitt — AlMg5 (a/1 Kurve)

AlMg 5

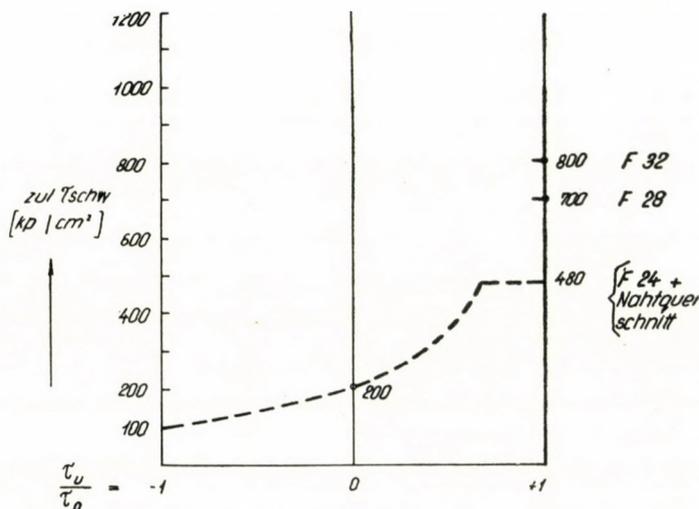


Bild 31. Vorschlag für zul τ für Schweißnahtquerschnitt — AlMg5 —

müßte eine weitere Abminderung in Abhängigkeit von der gewählten Sicherheit vorgenommen werden.

Stüssi [6] hat für hoch beanspruchte genietete Bauwerke Vorschläge für zulässige Spannungen unterbreitet. In Bild 33 sind zum Vergleich für hoch dynamisch beanspruchte Bauwerke die von Stüssi vorgeschlagenen Werte angegeben. Sie zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Werten für geschweißte Verbindungen, obwohl noch in bezug auf die Sicherheitswahl Abweichungen bestehen.

Der Vorschlag ist als Versuch anzusehen, dem Konstrukteur aus der Vielzahl von Festigkeits- und Dauerfestigkeitswerten, die in der Literatur zer-

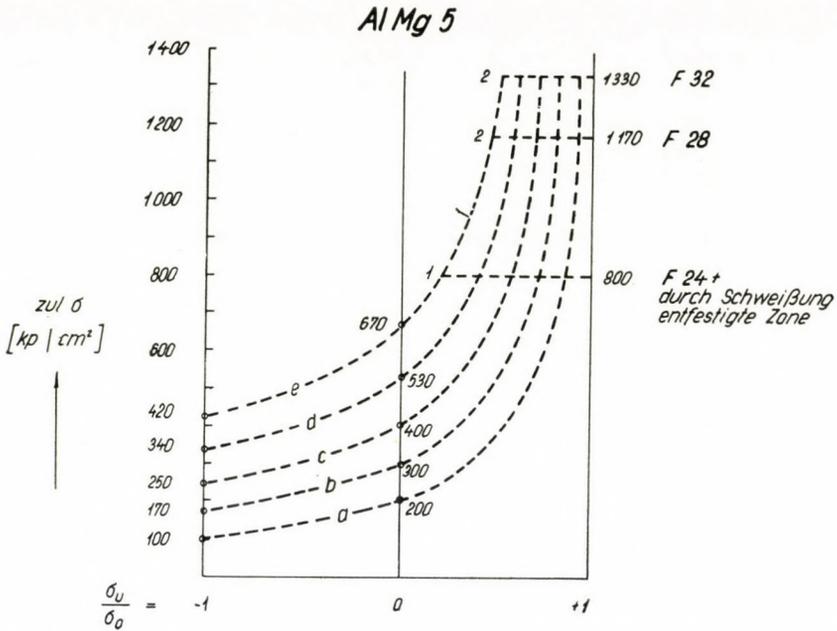


Bild 32. Zusammenfassung der Vorschläge für zul σ für Schweißverbindungen aus AlMg5

Al-Leg. 65 SWP. (AlMgSi vollvergütet)

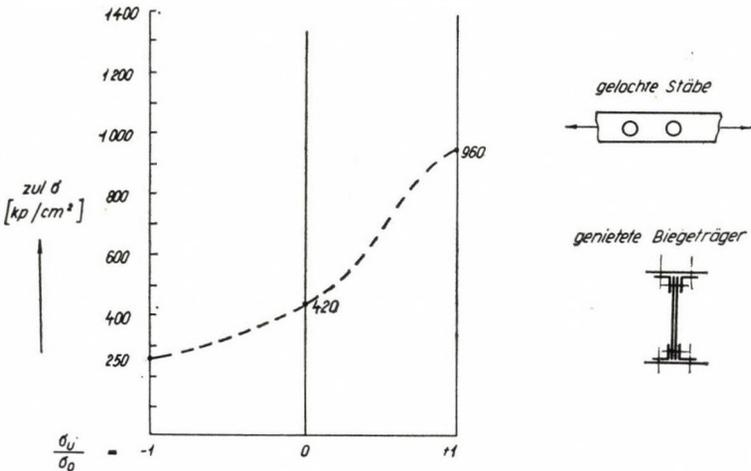


Bild 33. Zulässige Spannungen für gelochte Stäbe und genietete Biegeträger für Eisenbahnbrücken nach Strüßi (Alu-Legierung 65 SWP)

streut vorliegen, eine vorläufige Grundlage für die Festigkeitsberechnung zu geben. Dieser Vorschlag, beschränkt auf AlMg5, erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit auch im Bereich dieser Legierung. Er gibt lediglich einen Hinweis für die zukünftige Aufstellung genormter Berechnungsgrundlagen.

In diesen zukünftigen Vorschriften für die Festigkeitsberechnung von Alu-Konstruktionen müssen bei den zulässigen Spannungen viele weitere Einflüsse berücksichtigt werden, z. B.

die Legierungsart, das Schweißverfahren (WIG, MIG, ev. noch Autogen), Zusatzwerkstoffe, Materialdicke, Lastwechselzahl, Belastungsfrequenz, Belastungsprogramm.

Selbstverständlich müssen künftig auch weitere Arten von Schweißverbindungen und Konstruktionen berücksichtigt werden.

Die in großzügiger Weise auf internationaler Ebene in mehreren Ländern zur Zeit geführten Forschungen werden bald weitere Ergebnisse bringen und die Herausgabe einer solchen stark erwarteten Berechnungsgrundlage rechtfertigen.

3. Schlußbetrachtungen

Ich habe versucht, die gemeinsamen Grundlagen für die Dimensionierung von geschweißten Konstruktionen aus Stahl und aus Alu-Legierungen aufzuzeigen. Wenn auch bei Stahl wesentlich mehr Versuche und umfangreiche Ergebnisse vorliegen, so sind auch hier ebenfalls noch nicht alle Probleme geklärt. Bei den Alu-Legierungen handelt es sich um einen bescheidenen Anfang.

Es ist zu hoffen, daß durch eine noch exaktere Dimensionierung geschweißter Konstruktionen eine noch größere Wirtschaftlichkeit in Zukunft erzielt werden kann.

SCHRIFTTUM

1. NEUMANN, A., BADER, W.: Dauerfestigkeits-Katalog. ZIS-Verlag
2. NEUMANN, A.: Probleme der Dauerfestigkeit. VEB Verlag Technik, Berlin, 1960
3. ZIS-Mitteilungen. Jahrgänge 1960 und 1961
4. VDI-Zeitschrift (1960 Nr. 35)
5. NEUMANN, A.: Festigkeits- und Dauerfestigkeitsprobleme von Aluminium-Schweißverbindungen. »Schweißtechnik« Berlin 1961, Heft 7
6. STÜSSI, F.: Tragwerke aus Aluminium. Springer-Verlag 1955
7. DIN 4113 Aluminium im Hochbau. Richtlinien für Berechnung und Ausführung von Aluminium-Bauteilen
8. KLÖPPEL, K., WEIHERMÜLLER, H.: Dauerfestigkeitsversuche mit Schweißverbindungen aus St 52. »Der Stahlbau« 29 (1960) 5, S. 129—137
9. Aluminium-Zentrale. Alu-Taschenbuch. Alu-Verlag Düsseldorf 1955, 11. Auflage
10. LEIRIS, H. DE: Association Technique Maritime et Aéronautique. Session 1957 I, Boul. Haussmann, Paris. »Aperçu sur la Résistance à la fatigue des Assamblages élémentaires utilisés en construction navale« (Übersicht über die Dauerfestigkeit von Elementarverbindungen in der Schiffskonstruktion) par H. d. Leiris Ingénieur Général du Génie Maritime
11. HARTMANN u. a.: Welding Journal (1947) S. 129
12. NEWMAN: BWRA — Report CL(2)59
13. GUNN: »British Welding Journal« London 3/1960
14. MÜLLER—BUSSE: »Aluminium« 1953, Heft 3
15. NEUMANN, A.: ZIS-Mitteilungen 7/1961. Ein erster Vorschlag für zulässige Spannungen von statisch und dynamisch hoch beanspruchten Schweißkonstruktionen aus AlMg5-Legierungen im Leichtmetallbau

ÜBER DIE THEORIE EINES DURCHLAUFENDEN TRÄGERS BEI BELIEBIGEM VERFORMUNGSGESETZ

Prof. Dr. Techn. A. YLINEN
TECHNISCHE HOCHSCHULE, HELSINKI

1. Einleitung

Wir wollen einen auf starren Stützen aufgelegten Träger nach Abb. 1a betrachten. Die Stützen sollen am linken Ende des Trägers beginnend der Reihe nach mit $0, 1, 2, \dots, r, \dots, n$ und die Spannweiten der Öffnungen mit $l_1, l_2, \dots, l_r, \dots, l_n$ bezeichnet werden. Es sei angenommen, daß einer der Auflager ein unbewegliches Gelenk ist, während die übrigen eine waagerechte Verschiebung des Trägers zulassen. Liegen die äußeren Lasten in einer Ebene und greifen sie am Träger senkrecht zu dessen Achse an, dann ergeben die Gleichgewichtsbedingungen des Trägers nur zwei Gleichungen, die zur Bestimmung der $n + 1$ unbekanntenen Reaktionen an den Auflagern unzulänglich sind. Der durchlaufende Träger ist daher eine statisch unbestimmte Konstruktion

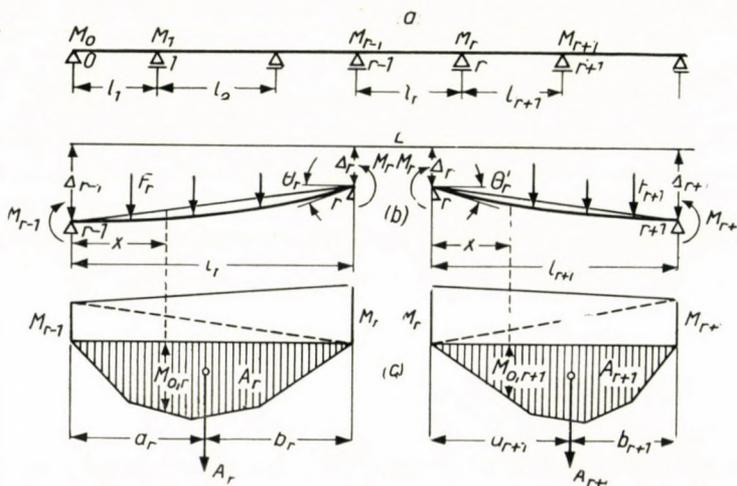


Abb. 1

mit $n - 1$ überzähligen Größen. Der Betrag dieser Überzähligen läßt sich nur berechnen, wenn die Verformungen des Trägers in Betracht gezogen werden. Falls das Material, aus welchem der Träger besteht, das HOOKESCHE Gesetz befolgt, können die fehlenden $n - 1$ Elastizitätsgleichungen mit Hilfe der

bekannten Dreimomentengleichung von CLAPEYRON¹ aufgestellt werden. Leistet dagegen das Material nicht dem HOOKESchen Gesetz Folge, so läßt sich die Dreimomentengleichung in folgender Weise verallgemeinern.

2. Die erweiterte Dreimomentengleichung

Der durchlaufende Träger wird in ein statisch bestimmtes Tragwerk verwandelt, indem man sich bei jeder Stütze einen Schnitt durch denselben geführt denkt. Als statisch bestimmtes Hauptsystem liegen dann ebensoviele einfache Balken vor wie der durchlaufende Träger Öffnungen hat. Die Überzähligen sind die Biegemomente bei den eingeschalteten Stützen, $n - 1$ an der Zahl. Abb. 1b mag zwei aufeinanderfolgende Öffnungen mit der Spannweite l_r bzw. l_{r+1} darstellen, wobei der Träger durch Schnitte bei den Stützen $r - 1$, r und $r + 1$ in die entsprechenden einfachen Balken zerlegt gedacht wird. Es bezeichne M_{r-1} , M_r bzw. M_{r+1} die Biegemomente bei diesen Stützen, positiv gezählt wenn sie eine Biegung mit abwärtsweisender Wölbung herbeiführen. Zur Berechnung der unbekanntenen Biegemomente M_{r-1} , M_r und M_{r+1} werden wir uns der Bedingung stetiger Neigung der Biegelinie bei der Stütze r bedienen. Diese Stetigkeitsbedingung ist erfüllt, wenn die Biegelinien der zwei aufeinanderfolgenden einfachen Balken bei der Stütze r eine gemeinsame Tangente besitzen, d. h. wenn die Neigung am rechten Ende des Abschnitts l_r derjenigen am linken Ende von l_{r+1} gleich ist.

Die Gesamtschräge Θ_r des linken Abschnitts l_r bei der Stütze r zur waagerechten Bezugslinie L ist die algebraische Summe der in diesem Punkt infolge der Biegemomentenverteilung über die Spannweite und der Senkung Δ_{r-1} bzw. Δ_r der Stützen $r - 1$ und r entstehenden Neigungswinkel. In den Abbildungen 1 und 2 sind die Biegemomentfiguren des durchgeschnittenen Trägers bzw. des durchlaufenden Trägers in üblicher Weise dargestellt.

Zwei benachbarte Querschnitte m und n des Trägers im Abstand ds voneinander schneiden sich nach erfolgter Biegung unter dem Winkel

$$d\theta = Kds, \quad (1)$$

worin $K = 1/R$ die Krümmung der Biegelinie bezeichnet. Bei Trägern in tatsächlichen Konstruktionen der Praxis sind nur sehr geringe Durchbiegungen und Neigungswinkel zulässig und wir können mit hinreichender Genauigkeit $ds \approx dx$ setzen.

¹ B. P. E. CLAPEYRON: *Comptes Rendus de la Société des Ingénieurs Civils*, vol. 45, p. 1076. Paris, 1857.

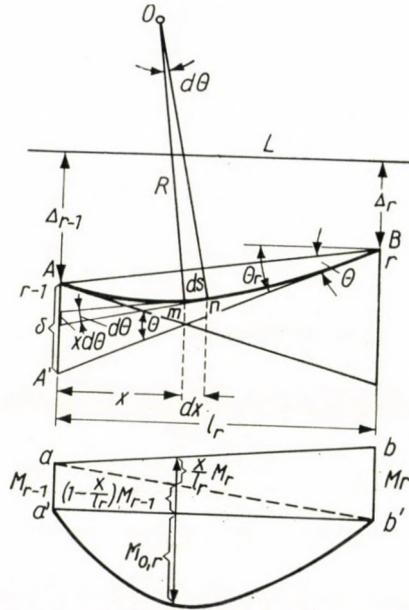


Abb. 2

Im Kapitel 3 wird gezeigt, daß die Krümmung bei einem Balken, der nicht das HOOKEsche Gesetz befolgt, in der Form

$$K = \frac{M}{EI} \varphi \left(\frac{M}{M_p} \right) \tag{2}$$

ausgedrückt werden kann. Dabei bedeutet E den Elastizitätsmodul des Balkenmaterials, I das Trägheitsmoment, M_p das volle plastische Moment des Balkenquerschnittes und $\varphi(M/M_p)$ eine dimensionslose Funktion.

Wenn wir diesen Ausdruck der Krümmung in der Gleichung (1) einführen und berücksichtigen, daß $ds \approx dx$ ist, finden wir

$$d\theta = -\frac{M}{EI} \varphi \left(\frac{M}{M_p} \right) dx. \tag{3}$$

Im Fall eines veränderlichen Querschnitts sind das Trägheitsmoment I sowie das volle plastische Moment M_p des Querschnitts Funktionen der Koordinate x . Das Multiplizieren und Dividieren des Ausdrucks im rechten Glied der obigen Gleichung mit dem konstanten Trägheitsmoment I_0 eines beliebig gewählten Querschnitts des Trägers und eine anschließende Integration ergibt für den Winkel zwischen den Tangenten in zwei beliebigen Punkten A und B

$$\theta = \frac{1}{EI_0} \int_A^B \frac{I_0}{I} M \varphi \left(\frac{M}{M_p} \right) dx. \tag{4}$$

Das Problem geht in dieser Weise auf dasjenige eines dem HOOKESchen Gesetz gehorchenden Trägers zurück, nur wird dem Einfluß der von den Abweichungen vom HOOKESchen Gesetz bewirkten Verformungen durch das Multiplizieren des Biegemoments mit der dimensionslosen Funktion $\varphi(M/M_p)$ Rechnung getragen. In geometrischer Deutung sagt die Formel (4) aus, daß bei einem Träger, dessen Material nicht das Hookesche Gesetz befolgt, der Winkel zwischen den in zwei beliebigen Punkten A und B zur Biegelinie gezogenen Tangenten gleich dem Inhalt der modifizierten Biegemomentfläche $I_0/I \cdot M \varphi(M/M_p)$ zwischen diesen Punkten, multipliziert mit $1/EI_0$, ist.

Wir betrachten alsdann den Abstand δ des Punkts A von der im Punkt B gezogenen Tangente BA' . Wegen der Zulässigkeit nur sehr kleiner Durchbiegungen und Neigungswinkel kann dieser Abstand längs der Vertikalen AA' gemessen werden. An Hand der Abb. 2 stellt man fest, daß die Biegung eines Elements mn des Trägers in diesem Abstand hierzu den Beitrag

$$x d\Theta = x \frac{M}{EI} \varphi\left(\frac{M}{M_p}\right) dx$$

liefert. Indem wir hier den Ausdruck auf der rechten Seite mit dem konstanten Trägheitsmoment I_0 multiplizieren und dividieren und anschließend integrieren, finden wir für die gesamte Durchbiegung

$$\delta = \frac{1}{EI_0} \int_A^B \frac{I_0}{I} M \varphi\left(\frac{M}{M_p}\right) x dx. \quad (5)$$

Dies kann derart gedeutet werden, daß bei einem gebogenen Träger, dessen Material nicht das Hookesche Gesetz befolgt, der Abstand eines Punktes A von der in einem anderen Punkt B gezogenen Tangente gleich dem statischen Moment der modifizierten Biegemomentenfläche $I_0/I \cdot M \varphi(M/M_p)$ zwischen A und B in bezug auf die durch A gelegte Vertikale, multipliziert mit $1/EI_0$, ist.

Die im obigen angegebenen Methoden zur Berechnung der Winkeländerungen und Durchbiegungen bei einem Träger, dessen Material nicht das HOOKESche Gesetz befolgt, können als Erweiterung des bekannten Flächenmomentenverfahrens² angesehen werden.

Wenn wir den Wert (5) der Durchbiegung benutzen, mit I_0 kürzen und berücksichtigen, daß der Drehungswinkel des Abschnitts l_r infolge der Stützensenkungen $(\Delta_r - \Delta_{r-1})/l_r$ beträgt, sowie ferner eine Drehung im Uhrzeigersinn als positiv anrechnen, ergibt sich der Neigungswinkel am rechten Ende des Abschnitts l_r gegen die waagerechte Bezugslinie L zu

² Das Flächenmomentenverfahren zur Berechnung der Durchbiegung von Trägern wurde entwickelt von O. MOHR, *Zeitschr. d. Architekten- u. Ingenieur-Vereins zu Hannover*, 1868, S. 10. — Ein ähnliches Verfahren wurde unabhängig von MOHR von CHARLES E. GREENE, University of Michigan, 1874, ausgearbeitet.

$$\Theta_r = -\frac{1}{E} \int_0^{l_r} \frac{M}{I} \varphi\left(\frac{M}{M_p}\right) \frac{x}{l_r} dx - \frac{\Delta_{r-1} - \Delta_r}{l_r}, \quad (6)$$

worin laut Abb. 2

$$M = M_{0,r} + \left(1 - \frac{x}{l_r}\right) M_{r-1} + \frac{x}{l_r} M_r \quad (7)$$

ist. Hier bezeichnet $M_{0,r}$ das im Abschnitt l_r (falls er als frei aufliegender Träger betrachtet wird) durch die darauf einwirkende Querlast bewirkte Biegemoment. In gleicher Weise finden wir für das linke Ende des Abschnitts l_{r+1}

$$\Theta'_r = \frac{1}{E} \int_0^{l_{r+1}} \frac{M}{I} \varphi\left(\frac{M}{M_p}\right) \left(1 - \frac{x}{l_{r+1}}\right) dx + \frac{\Delta_{r+1} - \Delta_r}{l_{r+1}}, \quad (8)$$

worin nun

$$M = M_{0,r+1} + \left(1 - \frac{x}{l_{r+1}}\right) M_r + \frac{x}{l_{r+1}} M_{r+1} \quad (9)$$

ist.

Die Bedingung stetiger Neigung der Biegelinie beim Auflager r verlangt, daß

$$\Theta_r = \Theta'_r. \quad (10)$$

Setzen wir hier die Ausdrücke für Θ_r und Θ'_r aus den Gleichungen (6) und (8) ein, so haben wir

$$\begin{aligned} \int_0^{l_r} \frac{M}{I} \varphi\left(\frac{M}{M_p}\right) \frac{x}{l_r} dx + \int_0^{l_{r+1}} \frac{M}{I} \varphi\left(\frac{M}{M_p}\right) \left(1 - \frac{x}{l_{r+1}}\right) dx = \\ = E \left(\frac{\Delta_r - \Delta_{r-1}}{l_r} + \frac{\Delta_r - \Delta_{r+1}}{l_{r+1}} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Es ist offensichtlich, daß eine ebensolche Gleichung für jedes innere Auflager angeschrieben werden kann. Sind die Trägerenden frei aufliegend, dann ist die Zahl dieser Gleichungen dieselbe, wie die der unbekanntem statisch unbestimmten Biegemomente bei den Auflagern. Wenn wir annehmen, daß das Gleichungssystem (11) endliche und eindeutige Lösungen besitzt, ist es möglich, aus demselben die Werte der statisch unbestimmten Stützenmomente zu ermitteln.

Ist eines der beiden Trägerenden, z. B. das linke, am Auflager 0 fest eingespannt, dann kommt die weitere Bedingung hinzu, daß der Neigungswin-

kel der Biegelinie am linken Trägerende Null sein muß. Auf Grund von Gleichung (8) erhält die Bedingung die Form

$$\int_0^{l_1} \frac{M}{I} \varphi \left(\frac{M}{M_p} \right) \left(1 - \frac{x}{l_1} \right) dx + E \frac{\Delta_1 - \Delta_0}{l_1} = 0 \quad (12)$$

mit

$$M = M_{0,1} + \left(1 - \frac{x}{l_1} \right) M_0 + \frac{x}{l_1} M_1.$$

Das fest eingespannte Trägerende führt somit ein weiteres unbekanntes Biegemoment M_0 ein, wofür aber zu gleicher Zeit eine weitere Gleichung (12) vorliegt. Daher ist die Zahl der Gleichungen abermals dieselbe wie die der Unbekannten. Es liegt auf der Hand, daß eine ebensolche Gleichung wie (12) auch für das rechte Ende des Trägers angeschrieben werden kann, falls dieses fest eingespannt ist.

Bei Trägern in Baukonstruktionen sind nur sehr geringe Durchbiegungen zulässig. Bezeichnen wir die Durchbiegung mit v , so können wir dann annehmen, daß die Krümmung mit hinreichender Genauigkeit durch den Ausdruck $K = -d^2v/dx^2$ angegeben wird. Setzen wir dies in Gleichung (2) ein, so finden wir für die Biegelinie des Trägers in einer beliebigen Öffnung l_r die Differentialgleichung

$$\frac{d^2v}{dx^2} = - \frac{M}{EI} \varphi \left(\frac{M}{M_p} \right). \quad (13)$$

Hier bezeichnet M das Biegemoment (7) in der Öffnung l_r . Integration der Gleichung (13) liefert die Durchbiegung des Trägers als Funktion von x .

Die Auflagerreaktionen bei einem durchlaufenden Träger, dessen Material das HOOKESCHE Gesetz nicht befolgt, sind in gleicher Weise wie bei Gültigkeit des HOOKESCHEN Gesetzes bestimmbar. Ebenfalls kann man in gleicher Weise wie bei einem Träger, der das HOOKESCHE Gesetz befolgt, dem Einfluß ungleichmäßiger Temperaturverteilung im Träger auf die Biegung eines durchlaufenden Trägers Rechnung tragen.

Im Fall von Gültigkeit des HOOKESCHEN Gesetzes ist $\varphi(M/M_p) = 1$ und die Gleichung (11) geht auf die Dreimomentengleichung von CLAPEYRON zurück. Sind die Abmessungen des Trägerquerschnitts in jeder einzelnen Öffnung konstant, in den verschiedenen Öffnungen aber verschieden, so kann die Gleichung (11) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} M_{r-1} \frac{l_r}{I_r} + 2M_r \left(\frac{l_r}{I_r} + \frac{l_{r+1}}{I_{r+1}} \right) + M_{r+1} \frac{l_{r+1}}{I_{r+1}} = -6 \frac{A_r a_r}{l_r I_r} - \\ - 6 \frac{A_{r+1} b_{r+1}}{l_{r+1} I_{r+1}} + 6E \left(\frac{\Delta_r - \Delta_{r-1}}{l_r} + \frac{\Delta_r - \Delta_{r+1}}{l_{r+1}} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Hier ist an Hand von Abb. 1

$$A_r a_r = \int_0^{l_r} M_{0,r} x dx$$

das statische Moment der von der Biegemomentenkurve des Feldes l_r infolge der auf diesen Trägerabschnitt (falls er als frei aufliegender Träger betrachtet wird) einwirkenden Querlast eingeschlossenen Fläche A_r in bezug auf die durch das Auflager $r - 1$ gelegte Vertikale. Die Bedeutung des Ausdrucks $A_{r+1} b_{r+1}$ in der Gleichung (14) kann in gleicher Weise gedeutet werden.

Den Ausdrücken (7) und (9) für M zufolge enthält die Gleichung (11) drei aufeinanderfolgende unbekannte Biegemomente M_{r-1} , M_r und M_{r+1} . Demgemäß kann die Gleichung (11) zur Berechnung der statisch unbestimmten Stützmomente eines durchlaufenden Trägers, dessen Material nicht das HOOKESCHE Gesetz befolgt, als Erweiterung der Dreimomentengleichung angesehen werden.

Es ist zu bemerken, daß in der Dreimomentengleichung (14) die unbekanntes Biegemomente M_{r-1} , M_r und M_{r+1} auf der linken Seite stehen, während die Größen $A_r a_r$ und $A_{r+1} b_{r+1}$, die von den Querlasten abhängig sind, rechts in der Gleichung erscheinen. Eine solche Trennung ist in der erweiterten Fassung (11) der Dreimomentengleichung nicht mehr möglich. Auf Grund der Gleichungen (7) und (9) kommen links in der Gleichung (11) sowohl die unbekanntes Momente M_{r-1} , M_r und M_{r+1} als auch die Größen $M_{0,r}$ und $M_{0,r-1}$ vor, die von den Querlasten abhängig sind.

3. Die Beziehung zwischen Krümmung und Biegemoment

Um die in dem vorigen Kapitel aufgestellte Theorie des durchlaufenden Trägers, dessen Material das HOOKESCHE Gesetz nicht befolgt, anwenden zu können, müssen wir den Zusammenhang zwischen Krümmung und Biegemoment klarmachen. Eine solche Beziehung bei Trägern mit Querschnitten beliebiger Gestalt ließe sich von dem Verformungsgesetz für einen einachsigen Spannungszustand unter der Annahme herleiten, daß anfangs ebene Balkenquerschnitte im Biegevorgang ihre ebene Gestalt beibehalten. Dieses Verfahren führt jedoch zu sehr umständlichen mathematischen Rechnungen. Um diesen großen rechnerischen Aufwand zu vermeiden, ziehen wir es vor, die experimentell ermittelte Beziehung zwischen Biegemoment und Krümmung mittels einer Näherungsformel zu approximieren. Der gewählte Ausdruck muß genügend viele freie Parameter enthalten, durch deren geeignete Wahl man die Werte der Funktion mit hinreichender Genauigkeit mit den Versuchsergebnissen in Einklang bringen kann.

Wir nehmen im folgenden an, daß im Fall einer bezüglich des Ursprungs symmetrischen Verformungskurve die Beziehung zwischen der Krümmung und dem Biegemoment bei jedem beliebigen einfach symmetrischen Balkenquerschnitt mit der Funktion

$$K = \frac{M}{EI} \frac{1 - c \left(\frac{M}{M_p} \right)^n}{1 - \left(\frac{M}{M_p} \right)^n} \quad (15)$$

approximiert werden kann. Dabei bedeutet der Exponent n eine ganze positive Zahl und c (≤ 1) einen dimensionslosen Parameter. Ist $c = 1$, so geht die obige Gleichung auf die bekannte Formel $K = M/EI$ zwischen der Krümmung und Biegemoment über. Wenn n eine ungerade Zahl ist, hat man den Absolutwert $|M|/M_p$ für den Momentenquotienten zu benutzen. Der Ausdruck im rechten Glied von (15) enthält fünf Parameter E , I , M_p , c und n , deren Werte derart festzulegen sind, daß sich ein geeigneter Einklang der Werte der Funktion mit der experimentellen Krümmungskurve ergibt. Von den Parametern haben E , I und M_p eine wohldefinierte physikalische Bedeutung. Für praktische Zwecke hinreichende Genauigkeit erzielt man, indem man $n = 1$ wählt, und zwar hat man dann

$$K = \frac{M}{EI} \frac{1 - c \frac{|M|}{M_p}}{1 - \frac{|M|}{M_p}} \quad (16)$$

Der Wert des Parameters c hängt von der Gestalt der Verformungskurve und von der Querschnittform ab. In der Tabelle 1 sind die Werte des Parameters c angegeben, die in Formel (16) im Fall von Stahlträgern (St 37, St 52) gewisser Querschnittformen anzuwenden sind.

Tabelle 1

Querschnittsform	c
Idealisierter doppelt bzw. einfach symmetrischer I-Querschnitt	0,997
Normaler I-Querschnitt	0,990
Rechteckquerschnitt	0,970
Kreisquerschnitt und elliptischer Querschnitt	0,947

Um einen allgemeinen Begriff vom Charakter des durch die Formel (16) dargestellten Zusammenhanges zwischen der Krümmung und dem Biege-

moment zu gewinnen, schreiben wir die Formel in dimensionsloser Gestalt, indem wir sie beiderseitig durch die Gleichung

$$K_p = \frac{M_p}{EI} \tag{17}$$

dividieren, die die dem vollen plastischen Moment entsprechende Krümmung bei einem, dem HOOKESCHEN Gesetz unbegrenzt gehorchenden Balken angibt. Dadurch erhalten wir

$$\frac{K}{K_p} = \frac{M}{M_p} \frac{1 - c \frac{|M|}{M_p}}{1 - \frac{|M|}{M_p}} \tag{18}$$

Im Vergleich mit (16) besitzt diese dimensionslose Form den Vorzug, daß die reduzierte Krümmung K/K_p lediglich eine Funktion des Momentenquotienten

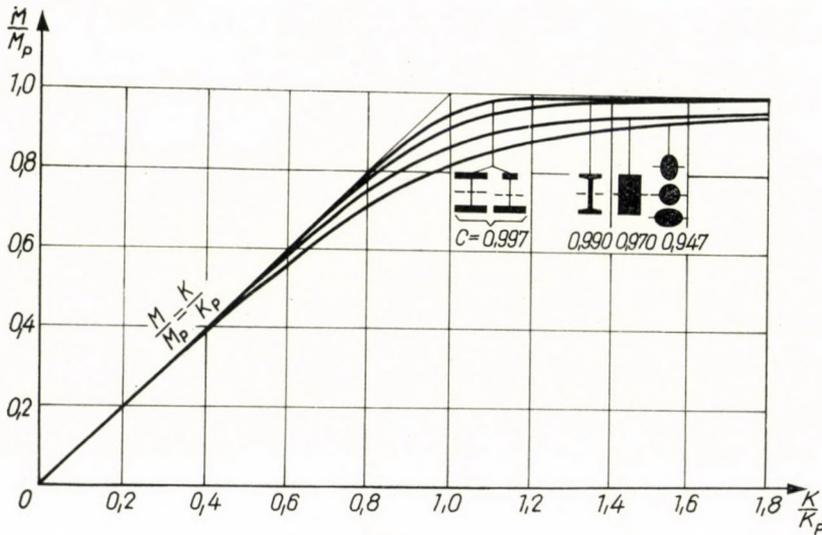


Abb. 3

M/M_p und des Parameters c ist, während im rechten Glied der Gleichung (16) vier veränderliche Größen E , I , M_p und c vorkommen. Die Krümmungskurven nach Gleichung (18) sind in Abb. 3 zu sehen, in der M/M_p als Funktion von K/K_p mit c als Parameter eingetragen ist. Aus der Abbildung kann man folgern, daß der Wert von c umso geringer ist, je größer der Anteil der Querschnittsfläche, der nahe der Neutralachse konzentriert ist.

Durch Vergleich der Formeln (2) und (16) kommen wir zu dem Schluß, daß die Biegemoment-Krümmungsbeziehungen von Trägern mit in der Praxis genügender Genauigkeit approximiert werden können, indem wir in der Formel (2) für $\varphi(M/M_p)$ den Ausdruck

$$\varphi\left(\frac{M}{M_p}\right) = \frac{1 - c \frac{|M|}{M_p}}{1 - \frac{|M|}{M_p}} \quad (19)$$

wählen.

4. Die Versuche von Maier-Leibnitz mit Durchlaufträgern

Als Anwendung der im obigen dargestellten Theorie können wir uns mit den Versuchen befassen, die MAIER-LEIBNITZ³ mit einem stählernen Durchlaufträger angestellt hat. Die Versuche bezogen sich auf einen frei auf vier Stützen in gleicher Höhe aufgelegten Träger von gleichbleibendem Querschnitt, wie es in Abb. 4 dargestellt ist. Das Mittelfeld hatte die Spannweite

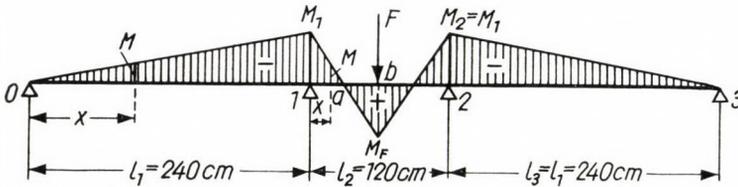


Abb. 4

$l_2 = 120$ cm, trug eine Punktlast F , während beide unbelasteten Außenfelder die Länge $l_1 = 240$ cm hatten. Der Träger war ein DIN-Träger IP 10 mit dem Trägheitsmoment $I = 453$ cm⁴, dem Widerstandsmoment $Z = 90$ cm³ und dem plastischen Widerstandsmoment $Z_p = 100,4$ cm³. Der Elastizitätsmodul des Stahls konnte mit $E = 2035000$ kg/cm² und die durchschnittliche Streckgrenze im Anlieferungszustand mit $\sigma_s = 2455$ kg/cm² angenommen werden. Im Verlauf der Versuche wurde der Träger wiederholte Male unter Last gebracht und entlastet. Diese Dehnung über die ursprüngliche Streckgrenze hinaus bewirkte im mittleren Teil des Trägers eine Erhöhung der Streckgrenze von $\sigma_s = 2455$ kg/cm² auf $\sigma_s = 3300 \dots 3600$ kg/cm². Unter Zugrundelegung des Mittelwerts $\sigma_s = 3000$ kg/cm² ergibt sich somit für den Träger das volle plastische Moment $M_p = Z_p \sigma_s = 100,4 \cdot 3000$ kgcm = 301 200 kgcm. Der Wert des Parameters c kann an Hand der Tabelle 1 mit $c = 0,99$ angesetzt werden.

Die Biegemomentenfläche für den Träger ist in Abb. 4 gegeben. Da der Träger ebenso wie auch die Belastung in bezug auf die durch die Mitte des

³ H. MAIER-LEIBNITZ, *Der Stahlbau*, Bd. 9 (1936), S. 153.

Mittelfeldes gelegte Vertikale symmetrisch ist, hat der Träger nur eine überzählige Größe, nämlich das Biegemoment bei den Auflagern 1 und 2. Zur Berechnung dieses Moments benutzen wir die erweiterte Dreimomentengleichung (11). Wegen der symmetrischen Belastung des Mittelfeldes ist der Neigungswinkel in der Feldmitte gleich Null, und das zweite Integralglied in Gleichung (11), welches die Neigung der Biegelinie am linken Ende des Feldes l_2 in bezug auf die Sehne 1—2 angibt, kann nach Gleichung (4) durch den Ausdruck

$$\int_0^{l_2/2} \frac{M}{I} \varphi \left(\frac{M}{M_p} \right) dx$$

ersetzt werden. Wenn wir mit dem konstanten Trägheitsmoment I multiplizieren und $\Delta_{r-1} = \Delta_r = \Delta_{r+1} = 0$ schreiben, erhalten wir demnach aus Gleichung (11)

$$\int_0^{l_1} M \varphi \left(\frac{M}{M_p} \right) \frac{x}{l_1} dx + \int_0^{l_2/2} M \varphi \left(\frac{M}{M_p} \right) dx = 0 . \tag{20}$$

Wie aus Abb. 4 hervorgeht, ist im Feld l_1

$$M = \frac{x}{l_1} M_1 \quad (0 \leq x \leq l_1)$$

und in der linken Hälfte des Feldes l_2

$$M = M_1 + \frac{1}{2} Fx . \quad \left(0 \leq x \leq \frac{l_2}{2} \right)$$

Nach Einsetzen dieser Werte in die betreffenden Integralglieder in Gleichung (20) und unter der Benützung des Ausdrucks aus Gleichung (19) für die Funktion $\varphi(M/M_p)$, haben wir

$$\int_0^{l_1} \frac{x}{l_1} M_1 \frac{1 - c \frac{|M_1| x}{M_p l_1}}{1 - \frac{|M_1| x}{M_p l_1}} \frac{x}{l_1} dx + \int_0^{l_2/2} \left(M_1 + \frac{1}{2} Fx \right) \frac{1 - c \frac{|M_1 + \frac{1}{2} Fx|}{M_p}}{1 - \frac{|M_1 + \frac{1}{2} Fx|}{M_p}} dx = 0 . \tag{21}$$

Die Auswertung der Integrale liefert schließlich

$$2M_1 l_1 + 3M_1 l_2 + \frac{3}{8} Fl_2^2 + 6 \frac{1-c}{c} M_p l_1 \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{l_2}{l_1} \right) - \right. \\ \left. - \frac{M_p}{M_1} \left[1 - \frac{M_p}{M_1} \ln \left(1 + \frac{M_1}{M_p} \right) \right] - 2 \frac{M_1}{Fl_1} \left[2 - \frac{M_p}{M_1} \ln \frac{1 + \frac{M_1}{M_p}}{1 - \frac{M_1}{M_p} - \frac{F}{4} \frac{l_2}{M_p}} \right] \right\} = 0. \quad (22)$$

Aus dieser Gleichung läßt sich das Biegemoment M_1 für jeden beliebigen Wert der Last F errechnen.

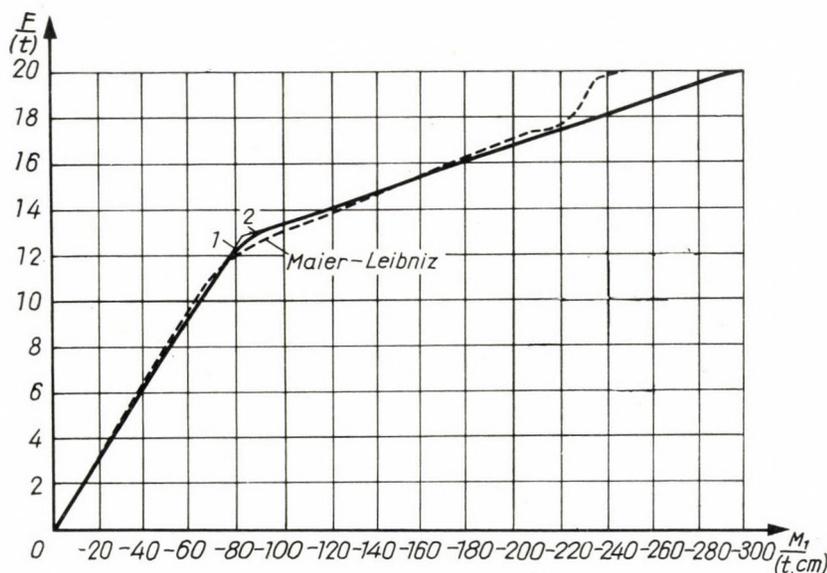


Abb. 5

In Abb. 5 gibt die voll ausgezogene Linie das Biegemoment M_1 nach Gleichung (22) wieder, wenn die Materialkonstanten die obengenannten Werte haben. Mit zunehmendem Parameterwert c der Momentkurve M_1 nähert sich diese der gebrochenen Linie, die sich aus der Geraden 1

$$M_1 = - \frac{3}{8} \frac{Fl_2^2}{2l_1 + 3l_2} = - 6,4286 F \quad \text{kgcm}$$

die laut Gleichung (22) M_1 im elastischen Bereich ($c = 1$) vertritt, und aus

der Geraden 2

$$M_1 = M_p - \frac{1}{4} Fl_2 = 301200 - 30 F \quad \text{kgcm}$$

zusammensetzt, welch letztere dem Biegemoment nach der Grenzlastmethode entspricht. Die Ergebnisse der von MAIER-LEIBNITZ ausgeführten Versuche sind durch die gestrichelte Kurve angezeigt. Die Abweichung der M_1 -Kurve von der gebrochenen Linie ist bei dem Eckpunkt der letzteren am größten. Man sieht, daß befriedigende Übereinstimmung zwischen Theorie und experimentellen Ergebnissen besteht.

Schlußfolgerungen

In dem Aufsatz wird die klassische Theorie des durchlaufenden Trägers auf den nichtlinearen Bereich erweitert. Zu diesem Zweck wird die Abhängigkeit der Krümmung des Trägers vom Biegemoment ermittelt. Die Biegung von Trägern mit verschiedenen Querschnittsformen wird untersucht. Die Theorie ergibt die Gleichung (11), in der drei aufeinanderfolgende unbekannte Biegemomente M_{r-1} , M_r und M_{r+1} vorkommen. Diese Gleichung dient zur Bestimmung der statisch unbestimmten Stützenmomente beim Durchlaufträger mit beliebigem Verformungsgesetz, und kann als eine Erweiterung der Dreimomentengleichung von CLAPEYRON betrachtet werden. Als Anwendungsbeispiel ist der Fall eines Stahlträgers zahlenmäßig ausgearbeitet, der den von MAIER-LEIBNITZ ausgeführten Versuchen zugrunde gelegt war. Die Berechnungsergebnisse stimmen mit den Versuchsergebnissen gut überein.

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
A kézirat nyomdába érkezett: 1961. VIII. 3.

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
Terjedelem: 58,75 (A/5) ív, 438 ábra, 1 melléklet

1961.53916 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

INDEX

Testing and Estimating of Fatigue-Life and Fatigue-Strength — Lebensdauer und Ermüdungsfestigkeit — Исследование срока службы и расчета на срок службы

BASTENAIRE, F., BASTIEN, M. and POMEY, G.: Statistical Analysis of Fatigue Test Results and its Application to New Series of Data	7
CAZAUD, R.: Evaluation de la limite de fatigue à partir d'une seule éprouvette, pièce ou élément d'essai	27
FREUDENTHAL, A. M.: Reliability Analysis of Fatigue-Sensitive Structures	55
Фридман, Я. Б.: Кинетика деформации и разрушения.....	83
FROST, N. E., HOLDEN, J. and PHILLIPS, C. E.: Experimental Studies into the Behaviour of Fatigue Cracks	115
Коутски Я. и Бузек, Я.: К вопросу влияния металлургических факторов и структурных изменений на усталостные качества жаропрочных материалов, в особенности при повышенных температурах	131
PORĘBSKI, T.: Über die Metallermüdung bei einem biharmonischen Spektrum von Ermüdungsspannungen	147
ROSSETTI, U.: Tests of Fatigue with Constant and Progressive Load Comparison between the Scatterings of the Results	153
WEIBULL, W.: Efficient Methods for Evaluating Data from Fatigue Tests (Short content)	161

Testing and Strength Calculation and Problems of Brittle Fracture — Dynamische Beanspruchungen und Spröbruch — Теория хрупкого излома

GILLEMOT, L.: Der Einfluß mehrachsiger und ungleichmäßig verteilter Spannungszustände auf die Werkstoffeigenschaften	165
GILLEMOT, L. und RÓNAY, M.: Grundlagen von Stählen, in denen die Spröbruchneigung durch Kaltverformung nur wenig beeinflusst wird.....	185
GILLEMOT, L. und NADASAN, S.: Schlag-ZerreiBversuch an gekerbten Proben	197
KERMES, J.: Beitrag zur Frage der Spröbruchbildung an kohlenstoffhaltigen Baustählen	211
KOCHENDORFER, A.: Der Spannungszustand in gekerbten Proben und seine Bedeutung für die Spröbruchtemperatur von Baustählen	219
SZÁNTÓ, I. S.: Über die zerstörungsfreie Bestimmung der Spröbruchneigung metallischer Werkstoffe im Maschinenbau	237

General Problems of Estimating — Allgemeine Bemessungsprobleme — Генеральные вопросы расчета

KLOTH, W.: Spannungsfelder als Grundlage des festigkeitgerechten Konstruierens	257
REUSS, E.: Theoretische Untersuchung der inneren Spannungskonzentrationen	277
RÜHL, K.: Klassifikation von Baustählen und Baukonstruktionen mit Rücksicht auf Spröbruchgefahr	289
Трейер, В. Н.: Основы теории надежности машин	301

Machine Parts — Maschinenelemente — Машинные части

<i>Александров, Б. И. и Клибанский, И. Б.:</i> Влияние материала и технологических факторов на выносливость шатуна тракторного двигателя.....	319
<i>Александров, Б. И. и Самойленко, В. И.:</i> Влияние термической обработки и масштабного фактора на прочность болтов	331
<i>BIRÓ, B.:</i> Time Reduction of the Endurance Tests and Developments in Fatigue Testing Machines	339
<i>KARSAI, I.:</i> Some Notes on Dimensioning of Shafts with Keyholes	347
<i>NIEMANN, G.:</i> Die Dauer-Pittingfestigkeit der Zahnräder und Wege zu ihrer Erhöhung (Auszug)	353
<i>PANC, V.:</i> Die statische Untersuchung von dünnwandigen Rohrleitungen und Zylinderbehältern	355
<i>RÁNKY, M.:</i> Einige Gesichtspunkte über die Bemessung von Meßfedern und Meßkörpern auf wiederholte Beanspruchungen	401
<i>TERPLÁN, Z. und FANCSALI, J.:</i> Einige Ergebnisse von Versuchen mit Zahnrädern aus Kunststoff	415
<i>VÖRÖS, I.:</i> Ermüdungsversuche mit Schraubenverbindungen	425
<i>WIEGAND, H.:</i> Dünne Oberflächenschichten und ihr Einfluß auf das Werkstoffverhalten gegenüber mechanischen Beanspruchungen	445

Vehicles — Fahrzeuge — Средства передвижения

<i>BALOGH, B.:</i> The Application of High-Tensile Steel with Danube-Seagoing Ships	459
<i>MICHELBERGER, P.:</i> Die Untersuchung von Autobussen mit Bodenrahmen oder Fahrgestell auf Verdrehung	471
<i>MICHELBERGER, P.:</i> Quasisymmetrische Dimensionierung asymmetrischer (Fahrzeug-) Konstruktionen	485
<i>RUDNAI, G.:</i> Recording the Load-Spectra of Vehicles	497
<i>SAMU, B.:</i> Bemessung und wirtschaftliche Gestaltung der Fahrgestellrahmen	507
<i>WILKINS, E. W. C.:</i> Problems of Stress Concentration in Aircraft Fatigue	521

Light Constructions — Stahlkonstruktionen — Стальные конструкции

<i>CSELLÁR, Ö. und HALÁSZ, O.:</i> Die Stabilitätsuntersuchung gedrückter dünnwandiger Stäbe	545
<i>DUNDOVÁ, V.:</i> Stahlrohrkonstruktionen	555
<i>KORÁNYI, I.:</i> Erfahrungen mit dem auf dem Grenzzustand beruhenden Bemessungsverfahren	575
<i>KOVAŘIK, V.:</i> Some Notes on the Solution of Skew Orthotropic Plates	585
<i>Козаров, М. М.:</i> К вопросу о нелинейной динамической устойчивости оболочек ..	611
<i>NEUMANN, A.:</i> Ermüdungsfestigkeit und Dimensionierung von geschweißten Maschinenelementen aus Stahl und Aluminiumlegierungen	631
<i>YLINEN, A.:</i> Über die Theorie eines durchlaufenden Trägers bei beliebigem Verformungsgesetz	655

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest I., Fő utca 32. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Compte courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest I., Fő utca 32. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

