

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXIX

FASCICULI 1—2



1960

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők :

Acta Technica
Budapest, V., Nádor utca 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V., Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-46), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest VI., Népköztársaság útja 21. Bankszámla : 43-790-057-181) vagy annak külföldi képviselőiteinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden

Acta Technica
Budapest, V., Nádor utca 7.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band : 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest VI., Népköztársaság útja 21. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

I N D E X

- Balla Á.* : La poussée des terres sur les murs de soutènement dans le cas de massifs complètement plastiques — Der Bodendruck auf eine Stützmauer im Falle eines vollkommen plastischen Erdkörpers — The Soil Pressure on a Sustaining Wall, in the Case of a Perfectly Plastic Earth Body — *Балла, А.*: Давление грунта, действующее на опорную стену, в случае совершенно пластичного тела грунта 99
- Csonka, P.* : On the Stress-Function of the Circular Cylindrical Shell — Über die Spannungsfunktion der Kreiszyinderschalen — Sur la fonction du voile cylindrique circulaire élastique — *Чонка, П.*: О функции напряжения эластичной цилиндрической оболочки 87
- Csonka, P.* : The Life and Activity of J. Csonka — Das Leben und Schaffen von J. Csonka — La vie et l'oeuvre de J. Csonka — *Чонка, П.*: Жизнь и труды Я. Чонка 235
- Csonka, P.* : Paraboloid Shell of Revolution over Equilateral Triangle Basis — Eine rotationsparaboloidförmige Schale über gleichseitigem Dreieckgrundri — Calotte de forme parabolöide de révolution, construite sur un triangle équilatéral — *Чонка, П.*: Оболочка в виде параболоида вращения над планом в виде правильного треугольника 313
- Csonka, P.* : Formulae for Controlling Stress Calculations of Calotte Shells — Kontrollformen zur Spannungsberechnung der Kappenschalen — Formules pour le contrôle de la tension des calottes — *Чонка, П.*: Формулы для проверки расчета напряжений куполообразных оболочек 355
- Domony, A.* : Untersuchung der die Werte der Brucharbeit beeinflussenden Faktoren, mit besonderer Rücksicht auf die metallischen und nicht metallischen Verunreinigungen des Aluminiums — Factors Affecting the Changes in Contraction Work Values with Special Regard to the Metallic and Nonmetallic Impurities of Aluminium — Examen des facteurs influant sur la variation des valeurs du travail de contraction, compte tenu des impuretés métalliques et non métalliques de l'aluminium — *Домонь, А.*: Исследование факторов, влияющих на изменение значений работы контракции, обращая особое внимание на металлические и неметаллические примеси алюминия 333
- Dulácska, E.* : Muschelförmige Schalenkonstruktion — Shell-structure Shaped Like a Scallop-shell — Des voiles minces valviformes — *Дулачка, Э.*: Оболочки в виде раковин 397
- Hangos, I., Toperczer, H. & Pozsgay, Gy.* : Influence of Binders upon Surface Brightness of Cathode-ray Tube Screens, III. — Einfluß des Bindemittels auf die Oberflächenhelligkeit von Kathodenstrahlröhrenschirmen, III. — L'effet du liant sur la brillante des écrans des tubes cathodiques, III. — *Хангош, И., Топерцер и Позгаи, Д.*: Влияние связующего вещества на поверхностный блеск экранов катодных трубок, III. 47
- Jurek, A.* : Verzweigung der Eingangsleitung in Planetengetrieben mit Doppelantrieb — Power Bifurcation in Planetary Gears with Double Input — Valeurs de la puissance bifurquée dans les engrenages planétaires simples — *Юрек, А.*: Отвод мощности с планетарной передачи двойного привода 441

- Kereszty, P.* : La capacité de gauchissage des véhicules de chemin de fer, III. — Die Verwindung von Eisenbahnwagen, III. — Twisting Capacity of Railway Carriage Structures, III. — *Керестти, П.* : Кручивание каркасов железнодорожных вагонов, III. 3
- Kézdi, Á.* : Contributions to the Bearing Capacity of Piles — Beiträge zur Frage der Tragfähigkeit von Pfählen — Contribution à l'étude de la capacité portante des pieux — *Кездю, А.* : К несущей способности свай 275
- Михневич, ш. В.* : Об автоматическом регулировании возбуждения синхронных машин в сложной энергетической системе — *Michnevitch, G. V.* : Über die automatische Regelung der Erregung einer in komplexem Energiezustand arbeitenden Synchronmaschine — *Mikhnevitch, G. V.* : On the Automatic Regulation of the Excitation of Synchronous Machines Working in Complex Energetic Systems — *Mihnevitch, G. V.* : Sur le réglage automatique de l'excitation des machines synchrones fonctionnant dans les systèmes compliqués de distribution d'énergie. 457
- Nagy, I.* : A Fast Response Magnetic Amplifier — Schnellwirkender Magnetverstärker — Amplificateur magnétique à fonctionnement rapide — *Надь, И.* : Быстродействующий магнитный усилитель 183
- Nemesdy, E.* : Die strenge Berechnung der verhinderten Drehung von Langschienen und lückenlosen Gleisen auf Grund experimenteller Gleiswiderstandskurven — The Exact Calculation of the Dilatation of Long and of Continuous Rails, on the Base of Experimental Track Resistance Curves — Calcul exact de la dilatation des rails longs et des voies ferrées sans joints, sur base des courbes expérimentales de résistance des voies ferrées — *Немешди, Э.* : Точный дилатационный расчет бесстыковых рельсовых путей на основе эмпирических кривых сопротивления рельсовых путей 117
- Perey, J.* : Die Planung wirtschaftlicher Tragwerke — Designing of Economical Load-bearing Structures — Établissement des projets de constructions économiques — *Переди, Й.* : Проектирование экономических несущих конструкций 251
- Rétháti, L.* : Capillary Properties of Soils — Die Kapillarität des Bodens — Les caractéristiques capillaires du sol — *Рэтхати, Л.* : Капиллярные свойства грунтов 153
- Sályi, B.* : Untersuchung der Kräfteverhältnisse an einem statisch dreifach unbestimmten Rahmen, der eine geschlossene ebene Kurve bildet, im Falle einer in die Ebene des Rahmens fallenden Belastung — Investigation into the Forces in a Triply Statically Indeterminate Frame, Forming a Closed Plane Curve, if the Load is in the Plane of the Frame — Recherches sur les conditions des forces agissant aux cadres triplement hyperstatiques et formant une courbe plane fermée, en cas de charges tombant dans le plan du cadre — *Шайю, Б.* : Анализ работы сил рамы, образующей статически трижды неопределенную замкнутую кривую на плоскости, в плоскости рамы в случае первой нагрузки 473
- Szeniczai, L.* : Konjugierte Zahnprofilpaare — Conjugate Teeth Profiles — Profils de dents conjugués — *Сенцицаи, Л.* : Конъюгированные профили зубьев 383
- Szidarovszky, J.* : Die Bemessung von Pfeilern — Strength Calculation of Piers — Dimensionnement des piliers — *Сидаровски, Я.* : Расчет устоев 407
- Szmodits, K.* : Determination of Limits in Solutions of Plate Problems — Die Bestimmung der Lösungsschranken von Plattenproblemen — Détermination des limites des solutions du problème des plaques — *Смодич, К.* : Определение пределов решений задачи пластин 245
- Szölke, B.* : Special Features of the Loadability of Lathes — Charakteristische Beziehungen der Belastbarkeit der Drehbank — Quelques spécialités concernant la capacité de charge des tours — *Секе, Б.* : Некоторые характерные черты нагружаемости токарного станка 57

- Szuk, G.* : Setting and Hardening of Hydraulic Materials. III. — Abbindung und Erhärtung hydraulischer Stoffe. III. — Prise et durcissement des matières hydrauliques. III. — Сук, Г.: Связывание и твердение гидравлических материалов, III. 419
- Szuk, G.* : Setting and Hardening of Hydraulic Materials. IV. — Abbindung und Erhärtung hydraulischer Stoffe. IV. — Prise et durcissement des matières hydrauliques. IV. — Сук, Г.: Связывание и твердение гидравлических материалов, IV. 429
- Tóth, G. und Örkényi, J.* : Über eine akustische Untersuchungsmethode der Faserrisse von Ledern — Acoustic Tests for Studying Hide Fibre Tearing — Étude de la rupture des fibres de cuir au moyen d'examen acoustiques — Тот, Г. и Эркеньи, Я.: Изучение акустическими исследованиями разрыва волокон кожи 369

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXIX.



1960

ACTA TECHN. HUNG.

LA CAPACITÉ DE GAUCHISSAGE DES VÉHICULES DE CHEMIN DE FER (ÉTUDE PRATIQUE DES DÉRAILLEMENTS)

PARTIE III*

P. KERESZTY

ATELIERS MÁV DE DUNAKESZI

[Manuscrit présenté le 14 novembre 1957]

E) Exemples pratiques

I. Examen du déraillement d'une voiture à quatre essieux

Dans la courbe d'une ligne secondaire, une voiture à quatre essieux a déraillé avec les roues avant de son bogie avant. C'était la deuxième voiture d'une rame Diesel, dont la vitesse n'était que de 20 km/h selon le diagramme du tachymètre de la voiture motrice.

La caisse de la voiture s'appuie, au lieu des glissières, sur les deux bogies. De ce point de vue, le mécanisme de l'appui est conforme au schéma „a” de notre fig. 31. Par un autre côté, il en diffère cependant, en tant que le pivotement entre le châssis et le bogie (dans le plan horizontal) ne se fait pas autour d'un pivot, mais autour d'un centre de rotation théorique, dont la position est déterminée par des appuis glissants latéraux d'une construction spéciale. Ceux-ci sont connus dans la littérature sous la dénomination d'«appui RÓNDI» [9, 10].** Nous ne nous en occuperons pas dans la suite, ces appuis n'intéressant pas de plus près notre étude.

a) La voiture

Les données numériques de notre voiture déraillée sont les suivantes:

Poids: $Q = 32\ 000$ kg; $Q_1 = Q_2 = 16\ 000$ kg; $G = 22\ 000$ kg.

Suspension: $f_1 = f_2 = 0,02$ mm/kg; $f_3 = 0,01$ mm/kg. — On a mesuré le facteur de gauchissage de ce type de caisse sur plusieurs voitures. Les chiffres ont montré une assez grande dispersion, les valeurs ayant varié entre 0,003 et 0,00127 mm/kg. Dans le cas présent, nous calculerons avec la valeur la plus défavorable de $\psi_3 = 0,00127$ mm/kg. On n'a pas mesuré le facteur de gauchissage des bogies soudés, il nous fallait donc le fixer par estimation à $\psi_1 = \psi_2 = 0,01$ mm/kg.

Les principales dimensions en mm sont: $a = b = e = 1,920$; $c = 1,500$; $d = 2,950$; $t = 15,200$. Avec ces chiffres, les facteurs figurant dans nos formules (voir partie supérieure de l'annexe VIII), seront:

* Les parties I et II de l'étude sont parues dans le tome XXVI, pp. 301—348, et le tome XXVII, pp. 171—203 de l'Acta Technica.

** [9, 10] Les chiffres arabes entre parenthèses renvoient à la bibliographie présentée à fin de la Partie II. de l'étude.

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2 = 0,61; \Theta_{10} = \Theta_{20} = 0,0225 \text{ mm/kg}; \Theta_{11} = \Theta_{21} = 0,02125 \text{ mm/kg};$$

$$\Theta_{30} = 0,04127 \text{ mm/kg}; \Theta_{32} = 0,12627 \text{ mm/kg}; \Theta_4 = 0,218; (1 - \Theta_4) = 0,782.$$

Comme on suppose, pour le moment, une disposition symétrique, le facteur de gauchissage total est, suivant l'annexe X:

$$Z = Q_1 \left(\frac{c}{b}\right)^2 \Theta_{10} (1 - \Theta_4) = 16000 \times 0,61 \times 0,0225 \times 0,782 = 171 \text{ mm}$$

et la décharge de la roue:

$$\varphi_1 = 1 - \frac{S_1 + \Theta_4 [S_2 + 2(t-d)\lambda]}{Z_1} = 1 - \frac{S_1 + \Theta_4 [S_2 + 2(t-d)\lambda]}{Z_1}$$

C'est cette dernière que nous avons représentée dans la partie inférieure de la fig. 34. Pour des raisons pratiques, nous effectuons l'examen sur du papier quadrillé.

b) La voie

Ayant déterminé les principales données de notre voiture, examinons maintenant la section de voie sur laquelle s'est produit le déraillement. Nous avons mesuré la voie avec un simple mesureur de surhaussement muni d'un niveau; nous avons procédé par étapes de deux mètres. Le diagramme supérieur de notre figure montre le résultat obtenu. En représentant le rail au côté extérieur de la courbe comme une ligne horizontale (ne figurant pas sur notre schéma), la courbe (A) nous montre le surhaussement (ou plus exactement l'abaissement) du rail du côté intérieur par rapport au précédent. Pour déterminer, de cette courbe, la déviation du plan au-dessous du bogie d'un entraxe de 2950 mm, nous soustrayons le surhaussement sous l'essieu arrière de celui sous l'essieu avant. C'est cette différence S_1 , c'est-à-dire la déviation du plan sous le bogie avant, qui est représentée dans le deuxième diagramme de notre figure, par une courbe au trait plein (cette courbe est le quotient des différences finies de la courbe de surhaussement). Partout nous avons fait figurer les valeurs S_1 appartenant au bogie avant sous le lieu correspondant de l'essieu monté *avant*.

La distance (non théorique) entre pivots, où s'effectue la transmission des charges, est de 15,200 mm. Sans tenir compte de cette distance des pivots, nous devons déterminer, suivant notre déduction théorique, la déviation du plan au-dessous de «l'entr'axe intérieur» $(t-d) = 15, 200 - 2950 = 12, 250$

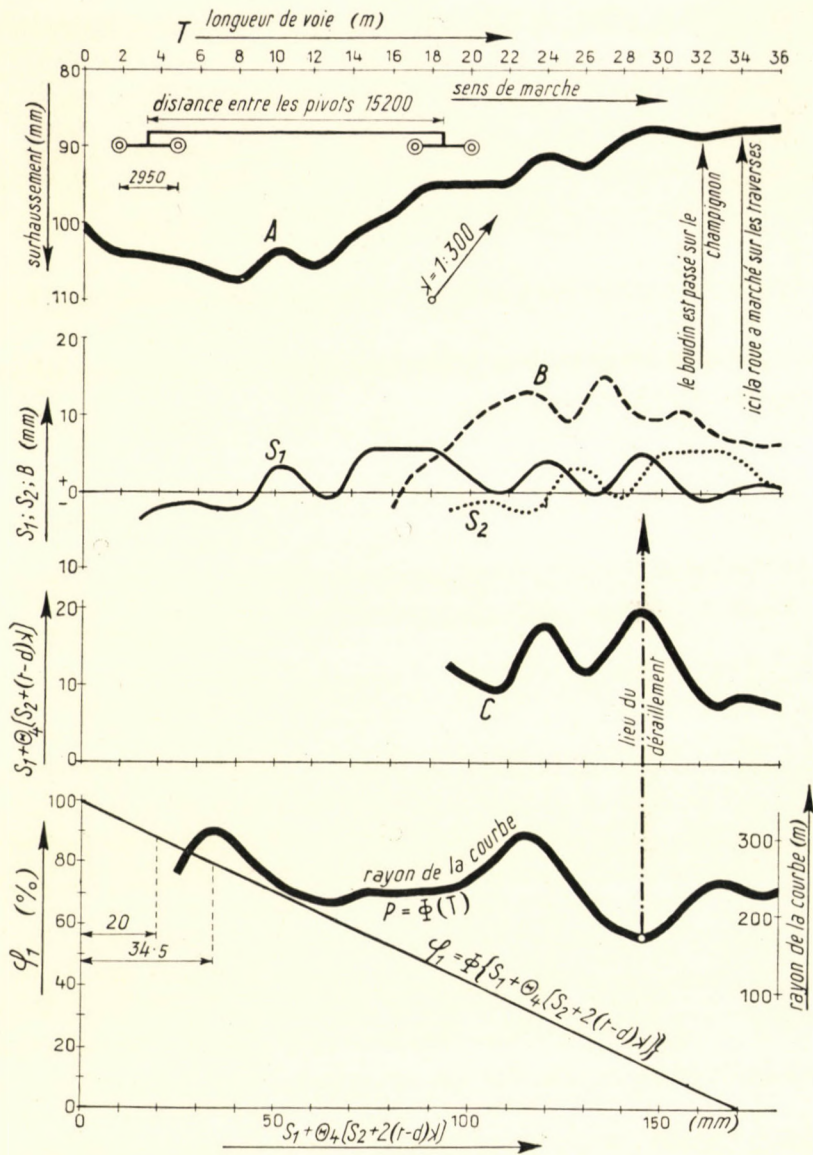


Fig. 34

mm, que nous avons marquée dans nos déductions théoriques par $(t-d)\lambda$. Nous la déterminons à partir de la courbe (A), comme nous l'avons déjà fait pour S_1 . Ici encore, nous avons fait figurer les valeurs de la déviation du plan sous les points correspondant à l'essieu avant du bogie avant, donc là où l'essieu avant se trouve quand la longueur $(t-d)$ de la voiture se trouve au-dessus de la déviation du plan donnée. Nous avons ainsi obtenu la courbe (B).

Nous avons ensuite dessiné la courbe S_2 des déviations du plan sous le bogie arrière. Quant à l'allure de cette courbe, elle est naturellement congruente avec la courbe S_1 , l'entr'axe du bogie arrière étant identique à celui du bogie avant. Ici encore, nous avons dessiné les valeurs S_2 là, où l'essieu avant du bogie avant se trouve quand le bogie arrière arrive sur la déviation du plan indiquée. Ainsi, nous avons pu dessiner la courbe S_2 en déplaçant simplement la courbe S_1 de 15,200 mm. Des courbes S_1 , S_2 et \textcircled{B} ainsi disposées, il serait bien difficile de déterminer le lieu de la voie présentant un danger pour notre voiture. Mais nous savons des déductions du chapitre *D*) III que, sous ce rapport, c'est la déviation «transformée» du plan qui importe. Aussi avons-nous déterminé par calcul les valeurs $2\theta_4 \textcircled{B}$ de la courbe \textcircled{B} , et les valeurs $\theta_4 S_2$ de la courbe S_2 . En additionnant ces trois valeurs, nous avons obtenu comme résultat la courbe \textcircled{C} de notre figure, c'est-à-dire la déviation «transformée» du plan.

c) Examen et résultats

Dans cette déviation «transformée» du plan, il y a deux maxima correspondant aux deux valeurs les plus défavorables pour notre voiture. De ces deux, la seconde est un peu plus grande et atteint 20 mm. Si nous regardons maintenant le diagramme $S-\varphi$ de notre voiture, au bas de la figure, nous y voyons que sur cette déviation de 20 mm, la charge de la roue dérailleuse diminuera à 88%, c'est-à-dire à 3520 kg, au lieu des 4000 kg originaux.

Mais nous savons aussi que notre voiture n'était pas d'une construction idéale, et qu'elle comportait certainement des asymétries provenant des projets et de la fabrication. Admettons pour celles-ci les valeurs estimées suivantes: $g = 80$ mm; $m = 160$ mm; $w_0 = 6$ mm. Avec ces chiffres, les facteurs énumérés en haut de l'annexe VIII seront:

$$\theta_{12} = \frac{80}{1500} 22000 \left(\frac{1}{2} - \frac{160}{15200} \right) = 575$$

$$\theta_{22} = -\frac{80}{1500} 22000 \left(\frac{1}{2} + \frac{160}{15200} \right) = -600$$

$$\theta_{31} = 0.04 \frac{160}{15200} \frac{80 \times 1500}{1920^2} = 13,7 \times 10^{-6}$$

avec ces valeurs

$$\begin{aligned} & [2(\theta_{10} - 2\theta_{11}\theta_4)\theta_{12} - 2f_2\theta_4\theta_{22} + 2\theta_{31}\theta_4G] \left(\frac{c}{b} \right)^2 = \\ & = [2(0,0225 - 0,0425 \times 0,218) 575 + 2 \times 0,02 \times 0,218 \times 600 + \\ & + 0,0000137 \times 0,418 \times 22000] 0,61 = 12,5 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$2 \frac{c}{e} \Theta_4 w_0 = 2 \frac{1500}{1920} 0,218 \times 6 = 2,05 \text{ mm}$$

L'asymétrie équivaut donc à 12,5 mm, et le gauchissage de la caisse à 2 mm de déviation «transformée» du plan. Ainsi, la déviation du plan de la voie augmente au total de 14,5 mm, et on peut lire du diagramme, qu'environ 79,5% de la charge de roue appartient à cette valeur. Mais le bogie avant supportera maintenant un poids plus petit, la charge étant déjà asymétrique. $Q_1 \neq Q_2$.

$$Q_1 = \frac{32000 - 22000}{2} + 22000 \left(\frac{1}{2} - \frac{160}{15200} \right) = 15767 \text{ kg}$$

Ainsi, la charge de roue diminuée est d'environ 3134 kg.

Il faut remarquer en passant que, dans les études du déraillement, on admet par approximation qu'une force directrice latérale horizontale n'est dangereuse que si elle équivaut à la charge verticale agissant sur la roue. Ainsi dans notre cas, une très grande force latérale avait dû agir sur la roue, pour que le déraillement pût avoir lieu. Nous avons dessiné, sous la courbe (C), le rayon de courbure de la voie, mesuré par une corde de 10 m de longueur. Nous voyons qu'à l'endroit de la deuxième plus grande valeur de la déviation «transformée» du plan, le rayon de la voie était minime. *Le déraillement s'est donc produit là, où les valeurs extrêmes des deux facteurs défavorables coïncident.* A première vue, il semblerait peut-être facile d'expliquer le déraillement par la coïncidence de ces deux facteurs défavorables, car plus le rayon est petit, plus la force directrice latérale est grande. Mais à cet endroit le plus défavorable, où le déraillement s'est en effet produit, le rayon de la courbe était de 170 m, et nous savons aussi que la vitesse de la voiture était seulement de 20 km/heure. En de pareilles circonstances, si les autres conditions avaient été normales, il ne pouvait pas se produire une force directrice de 3134 kg.

Pour résumer les résultats de notre examen, constatons d'abord que la voiture a bien déraillé sur la section de la voie qui était la plus défavorable pour elle, et dont les défauts horizontaux devaient aussi produire de grandes forces directrices latérales; mais comme tous ces défauts ne sont pas assez importants pour avoir pu causer, à eux seuls, le déraillement, il faudra compter avec un facteur non considéré jusqu'à présent et décisivement défavorable, qui devait intervenir et augmenter dans une grande mesure la force directrice horizontale.

En décrivant notre voiture, nous avons déjà mentionné que le châssis s'appuie sur les bogies à l'aide d'un mécanisme à glissières. La construction de ce dernier est telle qu'en négligeant l'entretien et le graissage, le frottement y devient considérable, et il faut alors une force relativement grande pour détourner le bogie horizontalement par rapport au châssis. C'est là la raison de

l'apparition de la grande force directrice qui était aussi la cause principale du déraillement [11]. Les glissières de la voiture déraillée avaient été, en effet, fortement rongées, faute de graissage.

Ce type de voiture a été d'ailleurs particulièrement instructif, au point de vue de notre étude des déraillements. A l'époque trouble d'après-guerre, quand l'entretien des véhicules aussi bien que de la voie laissaient beaucoup à désirer, ce type de voiture avait pour ainsi dire dépesté, pendant sa course, les sections défavorables de la voie. Les conduites glissantes latérales étaient très vite rongées et leur graissage ne pouvait pas être assuré de façon durable, en raison même de leur construction. Comme de simples modifications ne suffisaient pas pour changer la construction, et permettre ainsi un graissage durable des surfaces glissantes, il fallait recourir aux expédients suivants, pour assurer la circulation sans danger des véhicules:

1. Contrôle et graissage fréquents des glissières;
2. Comme les déviations permises de la voie (dans le plan vertical et horizontal) sont bien plus faibles sur les lignes principales que sur les lignes secondaires, le type de voiture en question a été exclu de la circulation sur les lignes secondaires.
3. Même sur les lignes principales, à l'entrée de certaines stations, remises, etc. . . , il peut y avoir des changements de voie de disposition défavorable, qui font que les longs véhicules modernes accouplés forment entre eux des angles trop grands; sur de telles dispositions de voie défavorables, les deux fronts des voitures accouplées se déplacent assez fortement l'un par rapport à l'autre. Dans ces cas, le bord du tampon mord pour ainsi dire sur le disque du tampon opposé. L'expérience montre que même sur une voie défavorable comme la nôtre, les deux disques de tampons glissent plus aisément l'un sur l'autre quand ils sont bombés, car ainsi le bord du disque ne peut pas venir au contact du disque opposé. Pour cela, il faut naturellement employer des disques bombés sur les deux voitures, au lieu d'un disque bombé du côté gauche, et d'un disque plat du côté droit. On peut éviter ainsi que la force transversale par rapport à la voiture, qui naît sur les disques de tampons, ne vienne augmenter excessivement la force directrice naissant sur la roue conductrice;
4. On contrôle les caisses des véhicules, lors des surveillances aux ateliers, et alors les gauchissages éventuels sont simplement éliminés (voir annexe II). Le fait que, selon le calcul, les déviations du plan provenant du gauchissage initial de la caisse et de la répartition asymétrique des poids n'atteignent que quelques mm, ne doit pas nous induire en erreur. La déviation «transformée» du plan sur laquelle notre voiture a déraillé, était également petite. Pourtant, le concours de tous ces facteurs avait pour résultat le déraillement du véhicule. Donc ceux

de ces facteurs dont la modification ne tient qu'à nous, doivent être déterminés de la façon la plus avantageuse. En mesurant le gauchissage, on s'assure aussi que celui-ci n'est pas trop grand dans la caisse.

Après avoir observé ces dispositions spéciales, on a pu constater que les déraillements, assez fréquents pour ce type, avaient cessé.

II. Surcharge provenant du gauchissage

Chaque fois que chez un véhicule roulant sur une déviation du plan, deux roues disposées sur une diagonale se déchargent, la charge des roues sur l'autre diagonale augmente. Comme à l'étude des projets des véhicules, on doit tenir compte aussi de cette surcharge, il sera utile de la calculer en pour cent, à propos de notre exemple numérique.

Jusqu'ici, nous nous sommes toujours intéressés à la roue qui était la plus déchargée. Maintenant, par contre, nous cherchons la roue la plus chargée. C'est pourquoi, au lieu du véhicule vide, nous devons:

1. compter avec les valeurs du véhicule chargé;
2. considérer le bogie arrière soumis à une plus grande charge, à cause de la répartition de poids asymétrique de la caisse;
3. partir, dans nos calculs, des conditions les plus défavorables de la voie déterminées au chapitre B. IV/b.;

ad 1. La voiture a 88 places, donc en prenant 100 kg de charge par voyageur assis, nous avons une charge utile de 8800 kg. Pour plus de simplicité, supposons cette charge utile symétrique, de sorte qu'il ne reste comme asymétrique que la tare G de la caisse. Ainsi, $Q = 32\ 000 + 8800 = 40\ 800$ kg;

ad 2. Chez le bogie arrière, nous calculons avec « $-m$ », et « g » aussi aurait une valeur négative. Cela signifie seulement qu'en regardant le bogie arrière par derrière, c'est maintenant la roue droite qui pourrait se décharger plus facilement, et non la roue gauche. Mais ce qui nous intéresse maintenant, c'est seulement le pour cent de la surcharge. Comme « m » figure avec un signe négatif, les facteurs θ_{12} , θ_{22} et θ_{31} plus haut calculés se modifient:

$$\theta_{12} = + 600; \theta_{22} = - 575; \theta_{31} = - 13,7 \times 10^{-6}$$

et ainsi

$$[2(\theta_{10} - 2\theta_{11}\theta_4)\theta_{12} - 2f_2\theta_4\theta_{22} + 2\theta_{31}\theta_4G] \left(\frac{c}{b}\right)^2 = 12,5 \text{ mm}$$

La charge totale du bogie est maintenant $Q = 20\ 633$ kg, et ainsi la capacité de gauchissage totale du véhicule au bogie arrière est

$$Z_2 = 20633 \times 0,61 \times 0,0225 \times 0,782 = Z_2 = 222 \text{ mm}$$

Pour la roue gauche de l'essieu arrière du bogie arrière, on peut écrire le rapport entre la décharge de roue et la déviation du plan

$$\varphi_2 = 1 - \frac{S_2 + \Theta_4 [S_1 + 2(t-d)\lambda]}{222} - \frac{12,5 + 2,05}{222}$$

ad 3. Les valeurs de la déviation du plan à considérer seront, suivant le chapitre B. IV/b.:

$$S_1 = S_2 = 2950 : 167 = 17,7 \text{ mm ;}$$

$$(t-d)\lambda = \frac{12250}{300} + 5 = 45,8 \text{ mm ; } S_2 + \Theta_4 [S_1 + 2(t-d)\lambda] = 39,35 \text{ mm}$$

La décharge φ_2 appartenant à la somme des déviations «transformées» du plan:

$$39,35 + 12,5 + 2,05 = 53,9 \text{ mm}$$

est de 75,75%. La deuxième roue de cet essieu recevra donc une surcharge de 24% env., ce qui est une valeur très élevée, puisqu'une valeur de même grandeur est prise en général comme facteur dynamique. Mais tandis que l'effet des oscillations dynamiques charge de façon *continue* la voiture pendant sa marche, la surcharge provenant du gauchissage ne touche que *rarement* le véhicule dans une mesure aussi grande, des sections de voie aussi défavorables ne se rencontrant, en effet, que très rarement. Par contre, le véhicule passera *souvent* au-dessus de déviations plus faibles, et notamment en montant et en descendant les surhaussements dans chaque courbe. Si à ces endroits, nous calculons en général avec $\lambda = 1/500$, alors:

$$S_1 = S_2 = 6 \text{ mm ; } (t-d)\lambda = 24,5 \text{ mm ; } S_2 + \Theta_4 [S_1 + 2(t-d)\lambda] = 18 \text{ mm.}$$

Avec ces chiffres, la valeur des déviations «transformées» du plan sera, au total: $18 + 14,55 = 32,55 \text{ mm}$, et le pour cent de la décharge $\varphi_2 = 85,4\%$. On doit donc calculer avec une surcharge fréquente d'env. 15%, provenant de la déviation du plan et de l'asymétrie du véhicule.

III. Examen du déraillement d'un wagon à quatre essieux

Examinons à présent le déraillement d'un autre wagon, celui-ci à quatre essieux. Il s'agit d'un wagon couvert, dont la caisse en tôle d'acier ne comporte pas les grandes portières usuelles, mais constitue une boîte soudée presque entièrement close. Le wagon sert au transport en vrac des terres alumineuses

(Al_2O_3), dont le chargement et le déchargement se font à travers cinq ouvertures pratiquées au plafond. On peut ainsi considérer la caisse comme une boîte relativement courte, et assez raide contre le gauchissage.

Les cadres des bogies du wagon sont en fer plat, du type diamond, et ne comportent que des ressorts secondaires. Les boîtes n'ayant pas de ressorts séparés, sont rigidement unis au cadre du bogie. Celui-ci diffère d'ailleurs de la construction usuelle de type diamond, les deux cadres latéraux étant reliés, à leurs extrémités, par des traverses de tête auxquelles sont suspendus les sabots à freins, puisque chaque roue est freinée par deux sabots.

La voie sur laquelle s'est produit le déraillement est un embranchement particulier, dont l'état d'entretien était bien plus mauvais que celui des voies ouvertes au trafic général. L'accident s'est produit pendant la manoeuvre, donc la locomotive avait poussé devant elle la rame sur la partie courbe de la voie, et le déraillement a eu lieu sur la rampe de surhaussement formant transition entre cette partie courbe et la partie droite de la voie. Chose singulière, le véhicule a encore une fois déraillé au même endroit, pendant l'enquête qui suivit le déraillement, ce qui n'arrive que très rarement. Le déraillement est, en effet, produit généralement par un ensemble de facteurs défavorables, qui n'agissent plus de la même façon ou n'agissent pas simultanément lors de l'enquête. Déjà ce fait laissait pressentir que quelques facteurs bien défavorables avaient dû causer le déraillement. A l'examen, on a pu encore observer que quelques autres véhicules de même type auraient bien déraillé au même endroit, sans la précaution qu'on avait prise de manoeuvrer très lentement sur la partie de la voie en question, ce qui a permis d'arrêter la manoeuvre encore à temps. On pouvait penser qu'il ne s'agissait pas ici d'un défaut particulier à un seul véhicule, mais d'une particularité de la construction caractérisant ce type de véhicules.

D'ailleurs, sur la section de voie considérée comme dangereuse, le jeu entre les glissières — qui devait être de 2 mm suivant les projets — s'est accru du côté de la roue dérailleuse, fait qui faisait encore conclure à l'extrême rigidité de la caisse. Chez quelques véhicules, le jeu entre les glissières a atteint 24 à 28 mm au-dessus de la roue dérailleuse, tandis que le jeu entre les glissières diagonalement opposées était de 1 à 6 mm. Entre les glissières situées sur l'autre diagonale, il n'y avait naturellement aucun jeu, celles-ci venaient au contact l'une de l'autre. La somme des jeux entre les glissières situées sur une même diagonale, c'est-à-dire la déviation du plan désignée au chapitre D par la lettre *L*, était de 27 à 34 mm.

a) Les caractéristiques du véhicule étaient d'ailleurs les suivantes: $Q = 22\ 300$ kg; $Q_1 = Q_2 = 11\ 150$ kg; $G = 12\ 620$ kg; $a = b = 1970$ mm; $c = 1500$ mm; $e = 1530$ mm; $t = 8000$ mm; $d = 1800$ mm. Comme les boîtes d'essieux n'avaient pas de ressorts primaires, $f_1 = f_2 = 0$; $f_3 = 0,00344$ mm/kg. La détermination par mesures du facteur de gauchissage de la caisse

et du cadre de bogie a donné $\psi_1 = \psi_2 = 0,0324$ mm/kg, et $\psi_3 = 0,00175$ mm/kg. La caisse et les bogies étaient de construction symétrique, donc $o_1 = o_2 = g = m = 0$. Avec ces chiffres, les facteurs des équations de l'annexe VIII deviennent:

$$\Theta_{10} = \Theta_{20} = 0,0081; \Theta_{11} = \Theta_{21} = 0,004; \Theta_{30} = 0,01292 \text{ mm/kg}$$

$$\Theta_4 = 0,328; 1 - \Theta_4 = 0,672; \left(\frac{c}{b}\right)^2 = 0,58; \Theta_{12} = \Theta_{22} = \Theta_{31} = 0$$

Suivant l'équation X du chapitre D.III, si nous prenons le jeu entre les glissières $v = 2$ mm,

$$\begin{aligned} Z &= 11150 \times 0,58 \times 0,0081 \times 0,672 + 2 \times 0,328 \frac{1500}{1530} 4 \times 2 = \\ &= 35,2 + 5,15 = 40,35 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 - \frac{S_1 + \Theta_4 \left[S_2 + 2(t-d) \lambda + 2 \frac{c}{e} w_0 \right]}{35,2} + \frac{2 \times 0,328 \frac{1500}{1530} 8}{35,2} = \\ &= 1,146 - \frac{S_1 + \Theta_4 \left[S_2 + 2(t-d) \lambda + 2 \frac{c}{e} w_0 \right]}{35,2} \end{aligned}$$

Nous avons représenté cette dernière relation, c'est-à-dire la décharge de roue du wagon en cas d'un jeu de glissières $v = 2$ mm, par la ligne «a», visible au bas de la fig. 35.

b) Nous examinons ensuite la voie, comme nous l'avons fait pour la voiture déraillée figurant dans notre exemple précédent. Dans la partie supérieure de la figure 35, nous avons dessiné la courbe (A) des surhaussements mesurés dans la voie. Nous avons aussi tracé, auprès de cette courbe, une ligne inclinée à 1:300, montrant clairement qu'il y avait des déviations du plan beaucoup plus grandes aux alentours du déraillement. L'entretien des embranchements particuliers étant bien plus mauvais que celui des voies ouvertes au trafic général, on doit aussi compter avec ce genre de défauts de la voie dans le cas des wagons à marchandises. Au-dessous de la courbe (A), nous avons de nouveau dessiné les courbes S_1 , S_2 et (B), ainsi que la courbe (C) des déviations «transformées» du plan. Comme nous savons, du chapitre D. III, que la formule φ_1 calculée ci-dessus pour le wagon n'est valable que si l'inégalité suivant la formule XVI existe, nous avons marqué aussi, dans la courbe (D), la somme

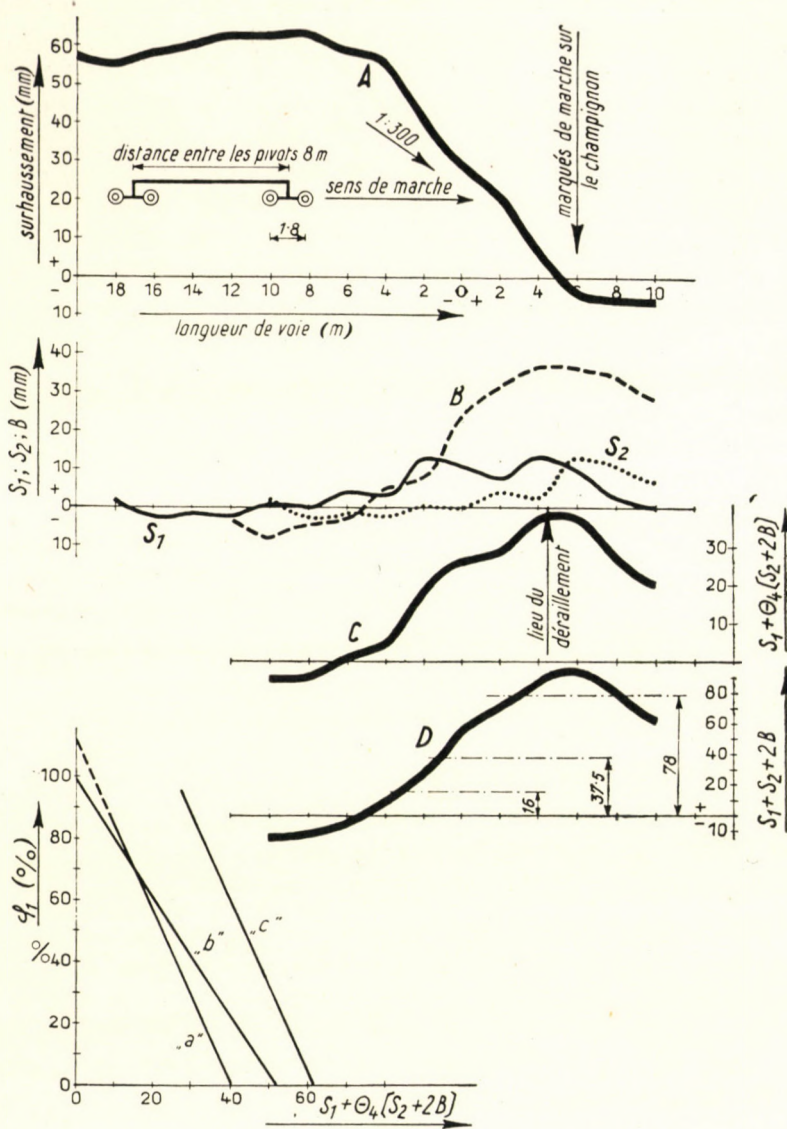


Fig. 35

$S_1 + S_2 + 2(t-d)\lambda$. Elle indique la limite à laquelle le pivotement relatif des deux bogies utilise totalement le jeu existant entre les glissières.

c) En cas du jeu de glissières $v = 2$ mm prescrit pour les voitures, la quantité $8 \frac{c}{e} v = 16$ mm. La courbe (D) dépasse presque partout la hauteur de 16 mm; nous pouvons donc calculer avec la formule ci-haut mentionnée de φ_1 aux alentours du déraillement.

En vertu de notre raisonnement, la courbe © montrerait clairement le lieu du déraillement. La valeur max. de la déviation «transformée» du plan est, en effet, presque 39 mm, et par contre, la capacité de gauchissage totale de notre wagon est $Z = 40,35$ mm, comme nous l'avons calculée ci-dessus. Sur ce point de la voie, la roue aurait été, pour ainsi dire, entièrement déchargée.

d) Cette méthode d'examen n'est cependant valable que dans les cas où le mécanisme du wagon fonctionne correctement. Dans le cas présent, il nous faut réfléchir sur le fait, constaté lors de l'enquête, que le jeu entre les glissières s'est augmenté à 20—30 mm à l'endroit du passage de la roue sur le champignon. Selon les règlements, il ne doit y avoir qu'un jeu de 2 mm entre les glissières latérales. Si la caisse s'incline sur un côté (ce qui se produit presque toujours, parce que le centre de gravité ne se trouve jamais exactement dans la ligne médiane des appuis, et de plus, les deux rails ne forment pas non plus un plan horizontal), le jeu peut y augmenter à 4 mm et disparaître de l'autre côté. Si le jeu est encore plus grand, il faut alors que le pivot se soit soulevé de la crapaudine. C'est là un nouveau point qu'il nous faudra examiner, avant d'arriver à un jugement définitif dans l'appréciation du déraillement.

La valeur de la déviation du plan des quatre glissières inférieures, qui forment les quatre appuis de la caisse, sera désignée par « L_s », et se trouve exprimée par la formule IX. b. Mais comme la caisse n'est pressée contre ces appuis que par son propre poids, le moment de torsion (marqué par « H » dans nos formules) ne peut pas être plus grand que $\frac{G}{4}e$. Si la déviation du plan formée par les appuis était si grande que le moment naissant dans la caisse dépasserait $\frac{G}{4}e$, la caisse se soulèverait simplement de son appui et basculerait autour d'une de ses diagonales. Ainsi, si la construction d'un wagon correspond par exemple au schéma «a» de la fig. 31, la caisse s'appuyera sur trois glissières seulement, et il y aura un jeu au quatrième appui. Si, par contre, nous avons affaire à un véhicule construit suivant le schéma «b» ou «c» de la même figure, la caisse s'appuyera sur deux glissières situées sur une diagonale, et les deux pivots (ou l'un seulement) se soulèveront de la crapaudine. C'est ce dernier cas qui devait se produire aussi chez notre véhicule, parce que la somme des jeux entre les glissières situées sur l'une des diagonales s'est accrue à plus de 20 mm, au lieu des 8 mm originalement prévus sur les projets du véhicule.

La caisse ne peut donc pas gauchir plus qu'une déviation du plan L_g , que nous pouvons facilement déterminer de la formule IX. a, si nous substituons $G/4$ à « H ». La différence $L_s - L_g$ donne le jeu existant entre les glissières, quand la caisse se soulève de sa traverse danseuse. Nous avons fait le calcul à l'annexe XIII, où nous avons reçu pour résultat final (en tenant compte des membres disparaissant par suite de la symétrie):

$$\frac{e}{a} (L_s - L_g) = \frac{e}{2c} [S_1 + S_2 + 2(t-d) \lambda] - \frac{e}{b} \Theta_{30} \frac{G}{4} - (4v - w_0)$$

Notons que le calcul restera identique, qu'il s'agisse des schémas «a» ou «b» de la fig. 31, parce que dans le premier cas, le moment de torsion maximum est $e \frac{G}{4}$, tandis que dans le deuxième, il est $\frac{e}{2} \cdot \frac{G}{2}$. Si nous augmentons progressivement la déviation du plan, nous arrivons avec $L_s = L_g$ à la position limite, où le pivot touche encore tout juste la crapaudine. Nous devons donc déterminer maintenant les conditions de la voie, où $L_s = L_g$. D'après l'équation ci-dessus, cela arrive quand

$$S_1 + S_2 + 2(t-d) \lambda = \frac{2c}{b} \Theta_{30} \frac{G}{4} + (4v - w_0) \frac{2c}{e}$$

En y substituant les chiffres du véhicule déraillé, et en supposant pour le moment un wagon de construction symétrique, où $w_0 = 0$,

$$S_1 + S_2 + 2(t-d) \lambda = \frac{2 \times 1500}{1970} 0,01292 \frac{12620}{4} + 4 \times 2 \simeq 62 + 16 = 78 \text{ mm}$$

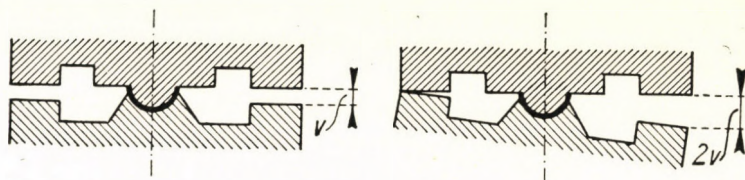
Nous avons tracé, en regard de la courbe (D), la hauteur de 78 mm, et vérifié numériquement qu'aux alentours du déraillement, le pivot et la crapaudine devaient forcément se séparer, même quand $w_0 = 0$ et le jeu entre les glissières $v = 2$ mm.

Cependant, nous n'avons considéré jusqu'ici que les facteurs les plus essentiels, et pourtant d'autres devaient aussi intervenir à coup sûr, lors du déraillement. Nous avons compté, en effet, avec un véhicule symétrique de construction et de fabrication idéales, et d'autre part l'enquête a prouvé que la roue directrice de quelques véhicules de ce type est montée sur le champignon, mais ce fait ne s'est pas reproduit dans chaque cas. Il y avait donc des différences de fabrication qui sont intervenues au moment du déraillement. Comme nous l'avons dit, la valeur de $\frac{e}{a} (L_s - L_g)$ mesurée sur les sections de voie les plus défavorables était, sur les véhicules les plus désavantageux, de 27 à 34 mm. Si nous comptons avec une moyenne de $\frac{e}{a} (L_s - L_g) = 30$ mm, nous obtenons pour ces véhicules, suivant notre précédente formule:

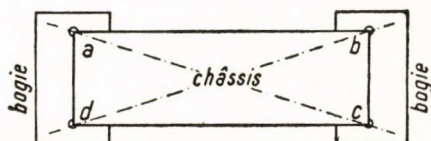
$$w_0 - 4v) = 30 - \frac{1530}{2 \times 1500} 96 + \frac{1530}{1970} 0,01292 \frac{12620}{4} = 30 - 49 + 31 = 12 \text{ mm}$$

au point maximum de la courbe \textcircled{D} (96 mm). Il devait donc y avoir aussi un gauchissage initial dans la caisse, et en outre les jeux entre les glissières n'étaient pas non plus observés au moment du montage de la caisse sur les bogies.

e) Le centre de gravité d'une caisse ne coïncide que très rarement avec le plan de symétrie des appuis. C'est pourquoi la caisse s'appuie toujours d'un côté sur les glissières. Aussi, dans les conditions ordinaires, le contrôle se limite généralement à savoir si la somme des jeux sous les deux glissières d'un même bogie équivaut au double du jeu prescrit. Mais il peut arriver qu'à cause du



a



b

Fig. 36

gauchissage de la caisse (rarement contrôlé pour les wagons), ou par suite de l'abaissement spécifique différent des ressorts, ou des tolérances de montage, la caisse s'appuie sur les deux bogies de façon qu'elle se repose sur des glissières diagonalement opposées. Ainsi, en utilisant les notations de la fig. 36, la caisse peut s'appuyer sur les glissières «a» et «c», par exemple, et alors les glissières «b» et «d» auront un jeu d'une valeur double.

C'est naturellement à éviter, car dans ces cas, il peut même arriver que la traverse danseuse du bogie, sur laquelle on met la caisse, est plus oblique que la traverse intermédiaire principale de cette dernière. De cette façon, la caisse du wagon subit un gauchissage même sur une voie horizontale, à cause de l'appui oblique, et dans ces cas, le jeu des glissières «v» prend un signe négatif dans les formules précédentes.

Au montage de la caisse sur les bogies, on doit donc veiller à ce que, même si la caisse s'incline sur un côté, et le jeu a ainsi, de l'autre côté, une valeur double, l'appui ne se produise jamais sur des glissières *en diagonale*. Le jeu pourra se doubler, par exemple, en «a» et «b» en même temps. De même, il peut se doubler en «d» et «c», mais il faut éviter le jeu double en «a» et «c», avec appui simultané en «b» et «d».

f) Revenons maintenant à l'exemple numérique de notre véhicule déraillé. Nous avons trouvé que la valeur de $(w_0 - 4v)$ y était de 12 mm. Avec cela, la limite à laquelle le pivot se soulève de la crapaudine, se modifie ainsi:

$$S_1 + S_2 + 2(t - d) \lambda = 62 - 12 \frac{2 \times 1500}{1530} \approx 37,5 \text{ mm}$$

Nous avons aussi inscrit cette valeur au-dessous de la courbe (D) de notre figure. Mais pour la partie supérieure à celle-ci, ce ne sont plus les formules du chapitre D. III, qui nous donneront la valeur de la décharge de roue. En effet, du moment que le pivot s'est déjà soulevé de la crapaudine, la cinématique de l'appui des charges se trouve changée, et ainsi la corrélation entre la charge de roue et la déviation du plan se modifiera à son tour.

La formule X du chapitre D. III. caractérise la situation cinématique *avant* la disjonction du pivot et de la crapaudine. Si l'on veut analyser la situation *après* cette disjonction, il faut remonter à la formule V et déduire une nouvelle relation cinématique. Le moment de torsion gauchissant la caisse a dans ce cas une valeur maximum et constante. Comme $\theta_{12} = 0$ et $H = \frac{G}{4}$ nous avons, selon la formule (V):

$$\varphi_1 = 1 - \frac{G}{Q_1} \frac{e}{2c} - \left(\frac{b}{c}\right)^2 \frac{S_1}{\theta_{10} Q_1} = 1 - \frac{12620}{11150} \frac{1530}{2 \times 1500} - \frac{13}{0,58 \times 11150 \times 0,0081} = 0,1745$$

Il en ressort, que le déraillement n'a pas eu lieu au maximum de la courbe (C), mais probablement un demi-mètre avant, au maximum de S_1 . A cet endroit, la charge de roue n'était que 17,5% de la valeur originale, c'est-à-dire 485 kg. Chez une rame poussée, quand il y a une longue file de véhicules devant le wagon en question, et le boudin de la roue directrice se presse fortement sur le côté du champignon, quand en outre aucun effort de traction n'agit sur le véhicule dont le composant, agissant en direction du milieu du cercle, pourrait décharger la force transversale sur la roue directrice du wagon remorqué, la charge de roue relativement faible ne peut plus empêcher le passage de la roue sur le champignon.

Pour éviter d'autres déraillements possibles, on a effectué sur ce type de véhicules une modification bien simple. Le jeu entre les glissières a été augmenté à 10 mm, au lieu des 2 mm prescrits. On pouvait le faire, car même quand la caisse s'est trouvée tout à fait inclinée sur les glissières d'un seul côté, le véhicule n'a pas dépassé le gabarit. Vu qu'il s'agit de wagons à marchandises, cette

position oblique n'est pas un défaut, contrairement aux voitures où le confort des voyageurs ne permettrait pas une telle inclinaison. Grâce à cette modification, les bogies avant et arrière se conforment, indépendamment les uns des autres, aux déviations du plan de la voie, jusqu'à la limite supérieure de $8 \frac{c}{e} v = 8 \frac{1500}{1530} 10 = 80$ mm, au lieu des 16 mm précédents. Si la valeur \textcircled{D} de la voie est plus petite, la formule (XIII) s'imposera, comme avant, pour la décharge de la roue. Ainsi, la charge de roue se modifie suivant

$$\varphi_1 = 1 - \left(\frac{b}{c}\right)^2 \frac{S_1}{\Theta_{10} Q_1} = 1 - \frac{S_1}{52,5}$$

(Voir ligne «b», au bas de la fig. 35). La capacité de gauchissage totale du véhicule s'en est accrue à 61 mm au lieu de $Z = 40,35$ mm; et la charge de roue est représentée, pour une déviation totale supérieure à 80 mm, par la droite

$$\varphi_1 = 1,73 - \frac{S_1 + \Theta_4 \left[S_2 + 2(t-d)\lambda + 2\frac{c}{e}w_0 \right]}{35,2}$$

désignée par «c» au bas de la fig. 35.

La limite de la déviation du plan, au-dessus de laquelle se séparent déjà les pivots et les crapaudines, s'est accrue aussi presque au double des 77,7 mm précédents, à

$$S_1 + S_2 + (t-d)\lambda = 62 + 78,7 = 140,7 \text{ mm}$$

Ainsi, on ne doit plus craindre que les pivots et crapaudines viennent se disjoindre sur la section de voie étudiée, car cette limite n'y était que de 96 mm. Comme à l'endroit le plus défavorable de la voie, la déviation «transformée» du plan est de près de 39 mm, selon la ligne «c» représentée au bas de la fig. 35, 65% env. de la charge restera encore sur la roue dérailleuse.

En vertu de ces résultats, nous pouvons déjà déterminer le gauchissage maximum qu'on peut permettre dans la caisse du véhicule, et le jeu minimum nécessaire entre les glissières. Pour y arriver, on devra faire abstraction de ce cas de déraillement particulier, et partir d'une constatation plus générale. Nous savons que l'entretien des embranchements particuliers est en général plus négligé que celui des voies ouvertes au trafic public, au point de vue des déviations du plan fixées au chapitre B. IV. b. D'autre part, nous savons que la majorité des wagons circulent encore sans difficulté sur ces embranchements particuliers et l'on peut, à plus forte raison, exiger que les nouveaux wagons puissent, eux aussi, circuler sur des sections de voie mal entretenues. En général,

les rails ayant une déviation du plan de $1:150 = \lambda$, sont rares même sur ces voies, aussi pouvons-nous choisir cette valeur comme base du contrôle des projets.

En général, les constructeurs ne comptent pas avec la possibilité que les pivots peuvent se soulever des crapaudines pendant le service. On peut donc poser comme condition, que le pivot ne se soulève pas de la crapaudine, même sur la déviation du plan la plus défavorable mentionnée ci-dessus.

Chez le wagon examiné, la somme des déviations du plan est

$$S_1 + S_2 + (t - d) \lambda = \frac{1800}{150} + \frac{1800}{150} + 2 \frac{6200}{150} = 106,5 \text{ mm.}$$

La limite pour la disjonction des pivots est, comme nous l'avons vu, $L_s - L_g = 0$, et il est utile qu'elle soit $L_s - L_g < 0$. De là, suivant ce qui précède:

$$\begin{aligned} 4v - w_0 &\geq \frac{e}{2c} [S_1 + S_2 + 2(t - d) \lambda] - \frac{e}{b} \Theta_{30} \frac{G}{4} = \\ &= \frac{1530}{2 \times 1500} 106,5 - 31 = 22,8 \text{ mm} \end{aligned}$$

Il est donc utile d'avoir $4v - w_0 \geq 22,8$ mm. Si l'on regarde, par exemple, le jeu des glissières de 10 mm, choisi comme un maximum (cette valeur figurant dans les règlements SMGS [13]), on devrait prescrire, comme minimum, un jeu des glissières de $22,8:4 = 5,7$ mm. Mais nous devons aussi prévoir une certaine tolérance de fabrication pour le gauchissage de la caisse, dont nous prendrons $w_0 = 7$ mm comme une valeur maximum. Ainsi, on obtient la tolérance du jeu des glissières

$$v = 10 \text{ mm}_{-2,5}^{+0}.$$

Nous venons d'étudier un wagon dont les défauts se sont déclarés pendant le service, et nous avons cherché à éliminer ceux-ci le plus simplement possible. Mais quand il s'agit des projets d'un wagon neuf, on cherchera plutôt à rendre les ressorts durs plus mous, ou à changer la caractéristique de la suspension, au lieu de trop accroître le jeu existant entre les glissières.

IV. Wagons de grande capacité

Nous allons examiner deux types de wagons au point de vue des surcharges causées par les déviations du plan, et aussi pour savoir si le jeu des glissières avait été choisi convenablement. L'usage était jusqu'ici de maintenir, chez les wagons aussi, un jeu des glissières $v = 2$ mm. Nous examinerons deux

wagons à quatre essieux, dont les bogies et les ressorts sont tout à fait identiques, les châssis et les caisses différant seulement les uns des autres.

a) *Wagon tombereau à quatre essieux*

Ce wagon a été construit pour une charge d'essieu de 21 tonnes. Le bogie est sans balancier, comme c'est général chez les wagons. Il n'y a donc pas de ressorts à balancier, seulement des ressorts à lames au-dessus des boîtes d'essieux. La caisse s'appuie par des crapaudines sphériques (schéma «b» de la fig. 31) sur les bogies.

La tare du wagon est $Q = 24\ 900$ kg, le poids de la caisse $G = 14\ 900$ kg, le poids brut à charge totale: $84\ 000$ kg. Dans les ressorts au-dessus des boîtes, $f_1 = f_2 = 0,00673$ mm/kg $\pm 8\%$, tandis que $f_3 = 0$. On a mesuré sur un wagon le facteur de gauchissage spécifique de la caisse, et le mesurage a donné $\psi_3 = 0,0077$ mm/kg. On a constaté en même temps que le gauchissage initial de la caisse était: $w_0 = 10$ mm.

$b = 2000$; $c = 1500$; $d = 2000$; $e = 1560$; $t = 9600$. Ces mesures sont données en mm.

On n'a pas procédé au mesurage du facteur de gauchissage spécifique du bogie, c'est pourquoi nous calculerons par estimation, chez ce bogie relativement raide et court, avec $\psi_1 = \psi_2 = 0,0024$ mm/kg.

A part ce qui précède, le plan et la construction du wagon peuvent être considérés comme symétriques, et ainsi $m = o_1 = o_2 = g = 0$, et par conséquent $\theta_{12} = \theta_{22} = \theta_{31} = 0$.

Quant aux ressorts de la boîte, nous calculons avec les ressorts les plus durs fixés par les tolérances, c'est-à-dire $f_1 = f_2 = 0,0062$, de sorte que les facteurs des équations seront:

$$\theta_{10} = \theta_{20} = 0,0062 + 0,0006 = 0,0068; \theta_{11} = \theta_{21} = 0,0065$$

$$\theta_{30} = 0,0077 \frac{2000}{1560} = 0,0099; \theta_{32} = \frac{2000}{1560} 0,0099 + 4 \times 0,0065 = 0,0387$$

$$\theta_4 = \frac{0,0068}{0,0387 - 0,0068} = 0,213; 1 - \theta_4 = 0,787$$

Suivant le chapitre D. III, en cas d'un wagon chargé, quand nous devons compter avec $Q = 42\ 000$ kg, la surcharge sur une roue sera

$$(1 - \varphi_1) = \frac{\{S_1 + \theta_4 [S_2 + 2(t - d) \lambda]\} + 2 \times 0,213 \frac{1500}{1560} (10 - 4 \times 2)}{42000 \times 0,0068 \times 0,787 \times 0,56}$$

$$(1 - \varphi_1) = \frac{S_1 + \theta_4 [S_2 + 2(t - d) \lambda]}{126} + 0,0065$$

Nous étudierons notre wagon sur les voies suivantes:

1. Voie industrielle, sur une déviation du plan $\lambda = 1 : 150$, comme à la fin de l'exemple précédent

1.1 Il y a encore du jeu entre les glissières latérales:

$$S_1 + S_2 + 2(t-d)\lambda = (2000 + 2000 + 2 \times 7600) \frac{1}{150} = 128 \text{ mm}$$

1.2 Les glissières latérales se touchent déjà:

$$S_1 + \Theta_4 [S_2 + 2(t-d)\lambda] = \frac{1}{150} [2000 + 0,213(2000 + 2 \times 7600)] = 37,8 \text{ mm}$$

2. Voie ouverte au trafic public, valeur rare suivant le chapitre B. IV. b.

2.1 Il y a encore du jeu entre les glissières latérales:

$$S_1 + S_2 + 2(t-d)\lambda = 2 \frac{2000}{167} + 2 \frac{7600}{300} + 5 = 24 + 50,6 + 5 \cong 80 \text{ mm}$$

2.2 Les glissières latérales se touchent déjà:

$$S_1 + \Theta_4 [S_2 + 2(t-d)\lambda] = 12 + 0,213(80 - 12) = 26,5$$

3. Voie ouverte au trafic public, valeur de $\lambda = 1 : 500$, suivant l'exemple du chapitre E. II.

3.1 Il y a encore du jeu entre les glissières latérales:

$$S_1 + S_2 + 2(t-d)\lambda = \frac{1}{500} 19200 = 38,4 \text{ mm}$$

3.2 Les glissières latérales se touchent déjà:

$$S_1 + \Theta_4 [S_2 + 2(t-d)\lambda] = 4 + 0,213 \frac{17200}{500} = 11,3 \text{ mm}$$

Étant donné que

$$8 \frac{c}{e} v = 8 \frac{1500}{1560} 2 = 15,4 \text{ mm}$$

et que les déviations du plan réunies, qui ont été calculées ci-dessus sous 1.1, 2.1, et 3.1, ont sans exception des valeurs plus grandes que celle-ci, la caisse du

véhicule gauchira sur les trois voies, et nous devons calculer, dans nos formules, avec les déviations «transformées» du plan. Sur les voies citées précédemment, les valeurs en pour cent de la surcharge de roue seront donc:

ad 1.2	$(1 - \varphi_1) = \frac{37,8}{126} + 0,0065 = 0,3065$	soit	30,65 %
ad 2.2	calculée de la même façon		21,65 %
ad 3.2	calculée de la même façon		9,65 %

Nous devons remarquer ici, que des fissures sont apparues sur les cadres des bogies. Celles-ci étaient dues à une surcharge plus grande que les précédentes, qui n'intéresse pas notre étude. Mais comme sur ces bogies, le bord de la crapaudine a aussi présenté des fissures sur de nombreux wagons, il a paru utile d'essayer de réduire la charge des bogies par tous les moyens possibles. L'un de ces moyens consiste, comme nous l'avons déjà vu, à augmenter le jeu entre les glissières latérales.

A la fin de l'exemple précédent nous avons déduit la formule suivante, permettant de déterminer le jeu minimum des glissières chez les wagons symétriques:

$$4v - w \geq \frac{e}{2c} [S_1 + S_2 + 2(t - d) \lambda] - \frac{e}{b} \Theta_{30} \frac{G}{4} = 66,5 - 28,7 = 37,8 \text{ mm}$$

Si on acceptait encore une fois, chez ce wagon, un gauchissage initial $w_0 = 7$ mm comme maximum de la tolérance de fabrication, on devrait prescrire un jeu minimum $v = 44,8 : 4 = 11,2$ mm. A ce jeu minimum on doit encore ajouter une certaine tolérance de fabrication, qui donnerait un jeu maximum d'environ 13,5 mm. Mais suivant les prescriptions en vigueur, on ne peut pas laisser un jeu aussi grand, les jeux supérieurs à 10 mm étant d'ailleurs à proscrire à cause du mouvement basculant. Ainsi, pour ce wagon encore, un jeu de glissières de 8 mm_{-0}^{+2} semble devoir être prescrit de préférence, étant entendu que sur les embranchements particuliers mal entretenus, le pivot se soulèvera de la crapaudine. D'ailleurs, on doit toujours construire la crapaudine de façon que la cheville ouvrière traversant son milieu ait le jeu nécessaire en sens vertical. (Voir ξ dans la fig. 37). Chez ce wagon, on devra donc veiller à ce que ce jeu ξ dépasse toujours une certaine valeur minimum. Nous pouvons donner facilement la valeur de ce jeu. Comme le jeu minimum des glissières était de 11,2 mm, et que, pour d'autres raisons, nous l'avons choisi 8 mm, ainsi la valeur ξ doit être de 3,2 mm au moins, pour que les vis retenant la crapaudine ne soient exposées à des forces ayant un sens inverse à la suspension ordinaire, c'est-à-dire soulevant le pivot de la crapaudine. Dans la pratique, en général, ce jeu n'est déjà pas inférieur à 10 mm, ainsi dans le cas présent, il importera seulement de le contrôler expressément.

Avec le jeu choisi $v = 8$ mm, $8 \frac{c}{e} v = 61,5$ mm, et ainsi la surcharge de la roue sur les voies 1. et 2. devra se calculer sur base de la déviation «transformée» du plan (donc selon 1.2 et 2.2), tandis que la surcharge sur la voie 3. dépendra seulement de S_1 . En cas d'un jeu de glissières augmenté, les surcharges auront les valeurs suivantes:

$$\text{ad 1.2} \quad (1 - \varphi_1) = \frac{37,8}{126} - 0,081 = 0,219, \text{ soit } 21,9 \%$$

$$\text{ad 2.2} \quad \dots \dots \dots 13 \%$$

ad 3.1 (sur base de la formule XIII):

$$(1 - \varphi_1) = \frac{S_1}{\left(\frac{c}{b}\right)^2 \Theta_{10} Q_1} = \frac{4}{160} = 0,025$$

c'est-à-dire diminue de près de 10 à 2,5% seulement. Il est en outre probable que la charge particulière, encore insuffisamment éclaircie, qui provoque la fracture des crapaudines, diminuera à son tour.

b) Wagon-citerne à quatre essieux

Les bogies, absolument identiques à ceux du wagon tombereau calculé plus tôt, ont été montés sous un wagon citerne à quatre essieux. Le châssis de ce wagon est entièrement soudé à la citerne, et est ainsi rendu rigide contre le gauchissage. Sur le premier wagon construit, on a mesuré $\psi_3 = 0,00283$ mm/kg, et le mesurage du même wagon a donné $w_0 = 2,5$ mm. La distance entre les pivots $t = 6600$ mm, la tare du wagon $Q = 21\ 850$ kg, le poids total du châssis et de la citerne $G = 12\ 750$ kg, le poids brut avec charge totale $72\ 000$ kg, les autres caractéristiques s'accordant avec celles du wagon tombereau. Les facteurs figurant dans nos formules restent aussi les mêmes, excepté les suivants:

$$\Theta_{30} = 0,00362; \Theta_{32} = 0,03065; \Theta_4 = 0,285; (1 - \Theta_4) = 0,715.$$

Aussi la formule servant au calcul de la surcharge de roue devient-elle, suivant le chapitre D. III:

$$(1 - \varphi_1) = \frac{S_1 + \Theta_4 [S_2 + 2(t - d) \lambda]}{98} + 0,0056 (w_0 - 4v); w_0 = 2,5 \text{ mm}; v = 2 \text{ mm}$$

$$(1 - \varphi_1) = \frac{S_1 + \Theta_4 [S_2 + 2(t - d) \lambda]}{98} - 0,0307$$

En examinant ce wagon citerne dans les mêmes conditions de voie que le wagon tombereau, on obtient comme résultats:

1. Sur embranchement particulier	1.1	88	mm
	1.2	34,7	mm
2. Sur voie ouverte au trafic public, valeur rare	2.1	59,65	mm
	2.2	25,6	mm
3. Sur voie ouverte au trafic public, valeur fréquente	3.1	26,4	mm
	3.2	8,8	mm

Comme précédemment, $8 \frac{c}{e} v = 15,9$ mm, nous devons donc calculer encore avec les déviations «transformées» 1.2, 2.2 et 3.2. Ainsi, la valeur en pour cent des surcharges sur une roue sera, sur ces déviations du plan:

$$\text{ad 1.2} \quad (1 - \varphi_1) = \frac{34,7}{98} - 0,0307 = 0,3243, \text{ soit } 32,4\%$$

$$\text{ad 2.2} \quad \dots\dots\dots 23,1\%$$

$$\text{ad 3.2} \quad \dots\dots\dots 5,9\%$$

Chez ce type, des fissures semblables à celles observées sur le wagon tombereau se sont produites sur le cadre du bogie et sur la crapaudine. Nous déterminerons donc, ici encore, les jeux de glissières minima.

$$4v - w_0 \geq \frac{1560}{2 \times 1500} 88 - \frac{1560}{2000} 0,00362 \frac{12750}{4} = 45,75 - 9 = 36,75 \text{ mm}$$

La caisse de ce wagon-citerne est presque trois fois plus rigide que celle du wagon tombereau, aussi serait-il utile de réduire ici le gauchissage initial, ou pour mieux dire le w_0 maximum du wagon. Voyons s'il est bien nécessaire de le faire, et si nous ne pouvons tout de même pas prescrire uniformément une tolérance maximum de $w_0 = 7$ mm pour le wagon-citerne aussi.

Dans le cas présent encore, $v_{\min} = 43,75 : 4 \approx 11$ mm, la valeur minimum est donc plus grande que 10 mm. A cause des prescriptions en vigueur, nous ne pouvons admettre qu'un jeu de $v = 8_{-0}^{+2}$ chez ce wagon. Ainsi, $8 \frac{c}{e} v = 61,5$ mm, et nous devons donc calculer avec les déviations 1.2, 2.1, et 3.1. Par un calcul identique à celui déjà décrit, nous obtenons pour la surcharge de la roue les chiffres suivants:

$$\text{ad 1.2} \quad \dots\dots\dots 21 \%$$

$$\text{ad 2.1} \quad \dots\dots\dots 8,8\%$$

$$\text{ad 3.1} \quad \dots\dots\dots 2,9\%$$

Comme nous voyons, ces valeurs ne sont pas plus défavorables que dans le cas du wagon tombereau, et en prenant une valeur w_0 plus petite, les surcharges de roues ne diminueraient que d'une façon insignifiante. Ainsi, nous pouvons aussi admettre la tolérance de fabrication maximum $w_0 = 7$ mm pour ce type de véhicule, mais naturellement dans le cas seulement, où le jeu des glissières a la valeur $v = 8_{-0}^{+2}$.

Par ce qui précède, nous avons voulu prouver que chez les wagons, on a des avantages effectifs à prendre le jeu des glissières un peu supérieur à la valeur normale. D'une part, nous diminuons ainsi les surcharges sur le mécanisme de suspension et les organes de roulement, et d'autre part, nous pouvons obtenir, sur les sections de voies défavorables, un roulement plus sûr du wagon.

V. Examen des défauts d'un type de wagon plat à six essieux

a) Avant transformation

Le wagon plat à six essieux, devenu défectueux, comportait les bogies décrits au chapitre C. II. Leur mécanisme de suspension rend instable la position du cadre. C'est ce qui explique probablement les fréquents heurts dans l'appareil de suspension, de sorte que l'idée s'imposait tout naturellement de transformer ce dernier de la façon la plus simple, selon le schéma décrit au chapitre C. III. Les crapaudines montées sur les bogies (voir fig. 37) sont aussi devenues défectueuses chez un assez grand nombre de wagons.

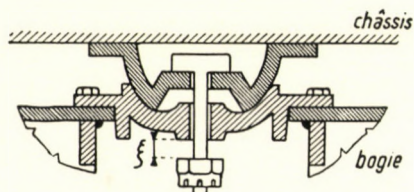


Fig. 37

Aussi a-t-on dû examiner avant la transformation, si celle-ci ne créait pas une situation plus mauvaise du point de vue de la disjonction des pivots et des crapaudines. D'ailleurs, cet examen a aussi semblé utile pour savoir si le jeu de 2 mm existant entre les glissières n'a pas été mal fixé, et n'a pu contribuer à produire cette défectuosité.

Comme nous l'avons dit au chapitre C. II., les traverses intermédiaires principales s'adaptent, pour ainsi dire, à la voie se trouvant au-dessous, c'est-à-dire la traverse intermédiaire principale est parallèle à l'essieu monté correspondant. Nous pouvons ainsi considérer le châssis comme s'appuyant sur quatre ressorts, au lieu des quatre glissières, tandis que ces quatre ressorts s'appuient

sans intermédiaire sur la voie. Naturellement, chacun de ces quatre ressorts représente la somme des forces des trois ressorts disposés sur un côté du bogie. Les bogies ne comportant pas de traverse danseuse, la seule modification dans le schéma de la fig. 28 sera, que la distance des ressorts sous les balanciers est «b» au lieu de «a», et que ce n'est plus le cadre du bogie, mais la voie, qui se trouve au-dessous des ressorts du balancier.

Les caractéristiques du wagon examiné sont les suivantes: poids du châssis $G = 10\,348$ kg, $a = b = 1970$, $e = 1280$, $c = 1500$, $t = 8160$ mm. L'abaissement spécifique d'un ressort $f_1 = f_2 = 0,0063$ mm/kg, de sorte qu'on doit calculer, pour les trois ressorts, avec un abaissement $f = 0,0021$ mm/kg. Nous avons mesuré sur un wagon $\psi_3 = 0,0082$ mm/kg et $w_0 = 7,5$ mm. Quoique nous sachions par expérience que ces valeurs présentent une grande dispersion, nous avons dû les utiliser, dans l'impossibilité de procéder au mesurage d'autres wagons.

La disposition du wagon est entièrement symétrique, et ainsi $\alpha_1 = \alpha_2 = m = g = \Theta_{31} = 0$. En vertu du chapitre C. II.:

$$Y_1 = Y_2 = \frac{b}{c} \frac{d}{2} \lambda, \quad \text{et ainsi} \quad Y_1 + Y_2 = d \frac{b}{c} \lambda$$

Notre formule IX. b. se simplifiera donc, et avec elle, la déduction complète de l'annexe XIII, de la façon suivante:

$$L_s = \frac{a}{c} t \lambda - 4 \frac{a}{e} v; \quad L_g = \Theta_{30} \frac{G}{4} - \frac{a}{e} w_0$$

$$\frac{e}{a} (L_s - L_g) = \frac{e}{c} t \lambda - (4v - w_0) - \frac{e}{a} \Theta_{30} \frac{G}{4}$$

Nous cherchons la valeur limite, où le pivot et la crapaudine se disjoignent. Comme nous le savons déjà, cela se produit en cas de $L_s - L_g = 0$. A cela appartient un angle maximum des deux files de rails de la voie, ou pour mieux dire sa valeur tangente, qui est

$$\lambda = \frac{c}{et} (4v - w_0) + \frac{c}{at} \Theta_{30} \frac{G}{4}$$

et en y substituant nos chiffres:

$$\Theta_{30} = 4 \frac{1280}{1970} 0,0021 + \frac{1970}{1280} 0,0082 = 0,018 \text{ mm/kg}$$

$$\lambda = \frac{1500}{1280 \times 8160} (4v - 7,5) + \frac{1500}{1970 \times 8160} 0,018 \frac{10348}{4} =$$

$$= 0,00325 + 0,000577 v$$

Avec le jeu prescrit, $v = 2$ mm, le pivot et la crapaudine se disjoignent déjà sur des sections de voies plus défavorables que $\lambda = 1 : 228$. Parmi les trois configurations de la voie, énumérées au chapitre E. IV., c'est donc sur l'embranchement particulier que la disjonction du pivot et de la crapaudine avait pu se produire. Dans le cas le plus défavorable, quand $\lambda = 1 : 150$, il faut un jeu minimum $v = 6$ mm entre les deux glissières.

Si le jeu des glissières était, par exemple, zéro à cause d'un défaut de montage, le jeu (au niveau de la cheville ouvrière de la crapaudine) désigné par ξ sur la fig. 37, devrait être d'au moins 6 mm sur une telle voie; ce jeu est néces-

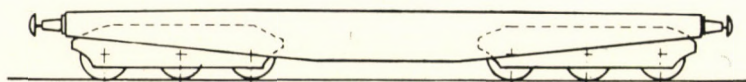


Fig. 38

saire pour que la cheville ouvrière ne soulève pas tout le bogie à l'aide de la crapaudine. Donc, avec un jeu de glissières $v = 2$ mm, la cheville ouvrière n'a pu soulever la partie inférieure de la crapaudine, en résultat du fort gauchissage survenu dans la caisse, que si le jeu désigné par ξ était plus petit que $6 - 2 = 4$ mm. Naturellement, le fait de ne pas avoir tenu compte du jeu de glissières prescrit lors du montage du wagon, ou le gauchissage initial trop grand du châssis pouvaient aussi y contribuer. Notons aussi que notre wagon plat de grande capacité a des longerons extérieurs qui enveloppent pour ainsi dire les bogies, de sorte qu'il est difficile de contrôler les jeux des glissières sur ce wagon. Ainsi, la possibilité d'un montage défectueux existait réellement, à cause de la difficulté du contrôle. Naturellement, à part les facteurs énumérés, une différence importante peut aussi se présenter, si la valeur du facteur ψ_3 diffère de celle déterminée par les mesures. Sur base du calcul de contrôle ci-dessus, les valeurs $v = {}_{-0}^{+2}$ mm, $(w_0)_{\max} = 7$ mm, et $\xi = 10_{+5}^{-0}$ mm, auraient dû être prescrites lors de la construction du wagon.

b) Après transformation

Comme nous l'avons déjà dit, on devait transformer le mécanisme de suspension comme décrit au chapitre C. III. Comme nous l'avons fait au chapitre E. III, nous calculerons encore pour cette construction le jeu nécessaire entre les glissières. Nous utiliserons les formules de Y_1 et φ_1 , déduites au chapitre C. III, mais il nous faut substituer $P_1 + G_1 + K_1$ à Q_1 , et $o_1 P_1 + g G_1 + e H$ à $-M_1$.

Comme le wagon est de construction et à charges symétriques, la tare des bogies est identique: $P_1 = P_2$, le poids réuni de la caisse et du châssis $2G_1 = 2G_2 = G$, et le poids total du wagon $2Q_1 = 2Q_2 = Q$. En outre, $o_1 = o_2 = g = 0$; $f_1 = f_2$. Avec ces conditions simplificatrices, suivant la déduction de l'annexe XIV:

$$\lambda = \frac{c}{et} (4v - w_0) + \frac{c}{bt} \frac{G}{4} \left(\Theta_{30} + \frac{4}{3} \frac{e}{b} f_1 \right)$$

Il ressort déjà de cette formule que le membre contenant le poids G du châssis s'est accru par rapport à celui calculé dans l'article *a*) précédent, et avec lui, la valeur de λ s'est augmentée parallèlement. Les doutes concernant la valeur de la transformation de l'appareil de suspension étaient donc sans fondement. Le calcul numérique de l'accroissement montre que le pivot et la crapaudine ne se disjoindront que sur des sections de voies plus défavorables que $\lambda = 1 : 175$. On devrait augmenter le jeu entre les glissières à $v = 4_{-0}^{+2}$ mm, pour que le pivot et la crapaudine ne se disjoignent pas même sur les embranchements particuliers caractérisés par la valeur $\lambda = 1 : 150$, que nous avons considérés jusqu'à présent comme les plus défavorables.

Voici donc les résultats de notre examen:

1. le jeu de glissières de 2 mm prescrit jusqu'ici est insuffisant;
2. en raison de la coïncidence d'inexactitudes défavorables de la fabrication et du montage, le pivot et la crapaudine ont pu se disjoindre; et contribuer ainsi à la détérioration de cette dernière;
3. pour éviter les défauts mentionnés, il est utile de prescrire l'observation des tolérances de montage: $v = 4_{-0}^{+2}$; $(w_0)_{\max} = 7$ mm; $\xi \geq 10$ mm; lors de la transformation de l'appareil de suspension;
4. la transformation de l'appareil de suspension, nécessitée pour d'autres raisons, n'altérera pas la construction au point de vue des sollicitations qui naissent dans le wagon roulant sur des embranchements particuliers.

Étant question de wagons, il convient de noter en parlant de l'augmentation du jeu des glissières, que celle-ci a aussi d'autres limites que les prescriptions SMGS déjà citées. Comme une de ces limites, nous avons déjà mentionné, pour les voitures, l'influence fâcheuse de cette augmentation au point de vue du confort des voyageurs, quand la caisse s'incline trop sur un côté. En cas de wagons (surtout lorsqu'il s'agit de marchandises chargées en hauteur), le jeu de glissières choisi trop grand risque de transgresser le gabarit de chargement. Les différences de dimensions entre le «gabarit d'obstacles» et le «gabarit pour véhicules» ne tiennent pas compte, en effet, d'un grand jeu des glissières.

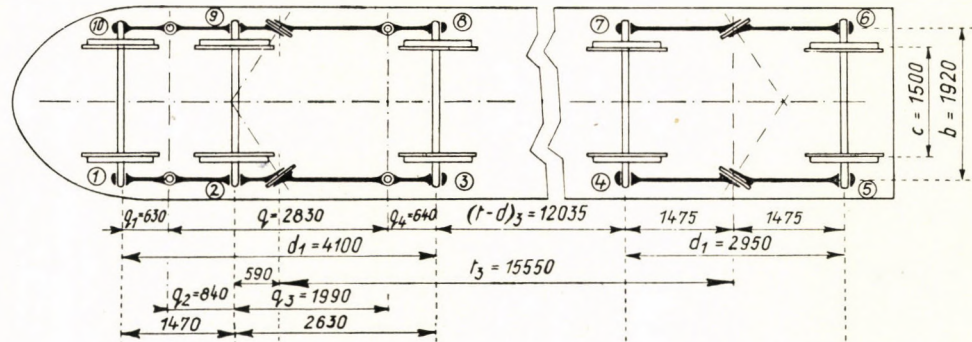
VI. Voiture motrice à cinq essieux

On a constaté que le déraillement d'une voiture motrice à cinq essieux, qui a eu lieu dès le premier parcours d'essai, fut causé par la mauvaise disposi-

tion de la transmission mécanique. Remarquons tout de suite que l'étude du déraillement d'un véhicule est déjà bien compliquée par elle-même. Mais en outre, on doit faire le plus souvent des recherches dignes d'un détective pour pouvoir élucider les faits réels, c'est-à-dire les conditions ayant existé dans le véhicule et dans la voie avant le déraillement. L'une des raisons en est, qu'en cas d'un trouble survenu dans l'exploitation du chemin de fer, lors d'un déraillement par exemple, il importe avant tout de rétablir le plus vite possible le trafic normal. Sous ce prétexte, on s'efforce souvent de remettre la voie en ordre avant l'enquête plus approfondie, faisant ainsi disparaître les défauts éventuels de la voie qui ont causé le déraillement. Il faut considérer aussi qu'après le déraillement, le véhicule subit l'action de forces différentes des forces normales, qui changent en général l'état du véhicule et rendent difficile à reconstruire l'état d'avant le déraillement. De plus, à toutes ces difficultés empêchant une enquête approfondie, se joint souvent le manque de données suffisantes, relatives par exemple à la capacité de gauchissage de la caisse. Or, la connaissance de ces données nécessite des mesures longues et onéreuses (détermination du centre de gravité, du facteur spécifique de gauchissage), que le manque de temps, d'argent, et même de compréhension rendent souvent très difficiles. Aussi le lecteur ne devra-t-il pas s'étonner de trouver souvent, dans nos exemples numériques, des valeurs estimées ou admises par hypothèse. Il arrive le plus fréquemment que l'enquête doit partir d'une masse de données incomplètes, dont il faut tirer des conclusions reflétant le mieux la réalité. Quant à obtenir ultérieurement les données nécessaires, il n'y faut généralement pas penser à cause du temps écoulé depuis le déraillement, durant lequel l'état de la voie aussi bien que celui du véhicule ont changé. Un des buts de cette étude consiste même à attirer l'attention sur des facteurs importants, dont il convient de déterminer quelques-uns dès le moment de la fabrication, et qu'il faut enregistrer parmi les autres données du véhicule. C'est ainsi que la situation actuelle pourra s'améliorer et que l'étude des déraillements pourra aussi serrer de plus près la réalité.

Les données de la voiture motrice examinée comportent aussi des lacunes que nous compléterons avec des données estimées. Par devant, la voiture motrice s'appuie sur un bogie moteur à trois essieux traité au chapitre C. IV, tandis que la partie postérieure de la caisse s'appuie sur un bogie porteur à deux essieux. La construction de ce dernier est identique à celle du bogie de la voiture à quatre essieux, calculé au chapitre E. I. Sur les deux bogies, la caisse s'appuie par l'intermédiaire des glissières, il n'y a donc pas de jeu entre celles-ci, $v = 0$.

Le bogie moteur ne comporte pas de traverse danseuse et donc de ressorts secondaires. Il y a seulement des ressorts primaires — paraissant assez durs — entre la poutre reliant par en bas les boîtes, et le cadre de bogie. Il y a aussi de grandes asymétries dans la répartition de poids de la caisse. Tous ces facteurs peuvent, à première vue, sembler avoir eu une part décisive dans le déraille-



	19625 kg 19625 "	⑩ = 6304 kg ① = 6304 "	⑨ = 6767 kg ② = 6767 "	⑧ = 6554 kg ③ = 6554 "	⑦ = 4180 kg ④ = 5500 "	⑥ = 4280 kg ⑤ = 5430 "	8460 kg 10930 "
$P_1 + G_1 + K_1 = 39250 \text{ kg}$	12608 kg	13534 kg	13108 kg	9680 kg	9710 kg	19390 kg = $P_2 + G_2 + K_2$	5000 " = $P_2 + K_2$
$P_1 + K_1 = 20000 \text{ "}$						14390 kg = G_2	
$G_1 = 19250 \text{ kg}$							
$P_1 = 13675 \text{ kg}$							
$G_1 = 19250 \text{ "}$							
$R_1 = 32925 \text{ kg}$							
$P_1 + K_1 = 20000 \text{ kg}$							
$P_1 = 13675 \text{ "}$							
$K_1 = 6325 \text{ kg}$							

2535 , 15 , $Q_5 = 1400$, $G_1 = 19250 \text{ kg}$, $G_2 = 14390 \text{ kg}$, $G = 33640 \text{ kg}$, $g = 98$, $g = 98$, $\alpha_3 = 41^\circ$, $m_1 = -165$

Les forces dessinées obliquement sont réellement perpendiculaires au plan du dessin.

Fig. 39

ment. Comme il fallait ainsi se demander si, la transmission mécanique de la voiture motrice non comprise, la voiture elle-même présentait la sécurité nécessaire contre le déraillement, il a semblé opportun d'effectuer, outre l'examen du déraillement, le contrôle de la capacité de gauchissage de la voiture. C'est ainsi qu'on peut éviter les nouveaux déraillements et découvrir l'élément de construction qu'il faudra modifier à cet effet. Nous commencerons par examiner d'abord la capacité de gauchissage.

La fig. 39 représente en plan les mesures principales du véhicule et des bogies. Nous y avons numéroté les fusées d'essieux de (1) à (10), pour pouvoir nous y reporter plus facilement. Nous avons inscrit, sous la figure, les charges des dix roues, déterminées par pesage du véhicule, dans l'ordre correspondant à la disposition des roues sur le plan dessiné au-dessus. Nous avons aussi marqué sur notre figure, les poids du véhicule et leur position asymétrique.

Le bogie moteur est un mécanisme sans traverse danseuse, tandis que le bogie porteur en comporte une, avec des ressorts secondaires. Les valeurs en mm/kg de l'abaissement spécifique des ressorts sont: $f'_1 = 0,0128$, $f''_1 = 0,02273$, $f'_2 = 0,02055$. Sur le bogie porteur, la suspension secondaire a la valeur $f''_3 = 0,01$, tandis que sur le bogie moteur qui ne comporte pas cette suspension, $f'_3 = 0$. La construction de la caisse étant identique à celle de la voiture calculée dans l'exemple E. I., on calculera encore, à défaut d'autres données, avec $\psi_3 = 0,0013$ et chez les bogies, avec une valeur de gauchissage $\psi_1 = \psi_2 = 0,01$.

Comme c'est le bogie moteur qui a déraillé, nous affecterons les données de celui-ci de l'index «1», et celles du bogie porteur de l'index «2». Les données de la caisse ont été marquées en général de l'index «3» (excepté la valeur « q_3 » se rapportant au bogie moteur).

a) Décharge de la roue (10).

Nous examinerons d'abord le bogie moteur, naturellement sur base des résultats déjà contenus dans l'annexe VI. Il nous faut substituer à présent « R_1 » à la place de « P », et « $o_1R_1 + eH$ » au moment $M_I = oP$; de même que « m_1R_1 » au moment $M_{II} = mP$. Nous négligerons encore la torsion initiale éventuelle des bogies, donc $w_{01} = 0$ et $w_{02} = 0$. Avec ces simplifications, on peut écrire, sur base de l'annexe VI:

$$(1 - \varphi_1) 2 Q_3 \frac{f^*}{q^*} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 \frac{q}{d_1} S_1 - \left(f^* + \frac{o_1}{c} \psi_1\right) \frac{m_1}{q} R_1 - \\ - \frac{2}{c} \left(f_1 + \frac{\psi_1}{4}\right) (o_1 R_1 - eH) \quad (\text{XVII})$$

Le membre

$$\frac{e}{c} \frac{m_1}{q} \psi_1 H$$

a été ici éliminé, car le couple de forces «eH» n'a un moment que dans son propre plan, mais pas perpendiculairement, dans la direction de «m₁». De la même façon, d'après l'annexe VI:

$$Y_1 = 2 \frac{c}{b} \frac{\psi^*}{q^*} Q_3 (1 - \varphi_1) + \psi^* \frac{c}{b} \frac{m_1}{q} R_1 + \\ + (o_1 R_1 - eH) \frac{\psi^* + f_1' + \frac{q_5}{q} \frac{m_1}{q} \psi_1}{b} + \frac{b}{c} q_4 \lambda \quad (\text{XVIII})$$

Les formules se rapportant au bogie arrière nous sont données à l'annexe III, mais on y doit substituer «P₂ + G₂» à «P», et «eH - gG₂» au moment «Po», et ainsi

$$S_2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \left(f_2 + \frac{\psi_2}{4}\right) Q_2 (1 - \varphi_2) + \left(\frac{c}{b}\right)^2 \left(f_2 + \frac{\psi_2}{4}\right) 2 \frac{gG_2 - eH}{c} \quad (\text{XIX})$$

La valeur du gauchissage se produisant dans le plan de l'appui de la caisse est prise du chapitre C. I., mais nous devons y faire aussi les substitutions mentionnées:

$$Y_2 = \frac{c}{b} \left(f_2 + \frac{\psi_2}{4}\right) \frac{Q_2}{2} (1 - \varphi_2) + 2 \left(f_2 + \frac{\psi_2}{8}\right) \frac{gG_2 - eH}{b} \quad (\text{XX})$$

Nous y ajoutons enfin les formules (IX) et (IXb) contenant la relation entre le gauchissage de la caisse et les moments gauchissants, et nous les réunissons tout de suite en une seule équation:

$$\frac{a}{b} (Y_1 + Y_2) + \frac{a}{c} (t - d) \lambda - \frac{a}{e} 4v = \left[2 \frac{e}{a} (f_3' + f_3'') + \frac{a}{e} \psi_3 \right] H + \\ + \left[f_3' - f_3'' + \frac{2m_3}{t} (f_3' + f_3'') \right] \frac{g}{a} G - \frac{a}{e} w_0$$

Les deux bogies comportent des appuis RÓNAI, où $e = a = b$ et $v = 0$. Désignons l'entr'axe intérieur de la voiture, c'est-à-dire la distance des essieux extrêmes opposés des deux bogies par $(t-d)_3$. Comme dans le bogie moteur il n'y a pas de ressorts secondaires, $f_3' = 0$. En outre, nous savons que

$$G \left(\frac{1}{2} - \frac{m_3}{t} \right) = G_2$$

et ainsi, la forme simplifiée de notre formule sera:

$$Y_1 + Y_2 + \frac{b}{c}(t-d)_3 \lambda = (2f_3^* + \psi_3)H - 2f_3^* \frac{g}{b} G_2 - w_0 \quad (\text{XXI})$$

Nous avons cinq équations avec sept inconnues, de même qu'au chapitre D., nous pouvons donc chercher la solution de la même façon qu'au chapitre D, c'est-à-dire à l'annexe VIII. Mais on peut aussi résoudre les équations avec des déterminants. A l'annexe XV, nous avons trouvé la valeur de φ_1 de cette manière. (L'expression des coefficients est parfois fort compliquée, et des erreurs peuvent facilement se glisser dans notre calcul. Aussi est-il utile de contrôler la solution trouvée au moyen des déterminants, par la méthode décrite à l'annexe VIII.).

Revenons à présent aux chiffres de notre voiture; nous les substituons et ainsi, les coefficients figurant dans la formule de φ_1 seront:

$$q^* = 0,572; Q_3 = 5754 \text{ kg}; \Theta_5 = 3,05 \text{ kg/mm}; \Theta_m = 0,0482$$

$$\psi^* = 0,0252 \text{ mm/kg}; f^* = 0,04053 \text{ mm/kg}$$

$$\Theta_{13} = 0,02523 \text{ mm/kg}; \Sigma' = 0,08978 \text{ mm/kg}$$

Enfin la charge de roue sera, suivant l'annexe XV:

$$5754 \varphi_1 = 6304 - 12,25 S_1 - 5 S_2 - 126\,700 \lambda - 7,83 w_0$$

Le gauchissage initial de la caisse (si nous prenons une valeur maximum de 7 mm pour w_0) ne peut produire qu'une décharge de roue de 56 kg (1%). Chez une voiture se trouvant sur deux rails absolument horizontaux, ou pour mieux dire parallèles, il se produit une surcharge de 9,5% (en ce cas, dans l'équation ci-dessus, la valeur de S_1 , S_2 et λ est zéro, mais nous avons pris aussi w_0 avec cette valeur); et si nous mettons la voiture sur deux rails d'une dénivellation $\lambda = 1 : 300$ ($S_1 = 13,67$ mm et $S_2 = 9,83$ mm), la charge diminue encore de 11,1% à 5609 kg, c'est-à-dire il reste encore 97,4% de charge sur la roue, ce qui est une valeur très favorable.

b) La charge des trois autres roues directrices

Nous n'avons étudié jusqu'ici que la roue avant gauche, et nous ne savons pas encore si, parmi les quatre roues directrices extrêmes du bogie moteur, c'est vraiment celle-ci qui est la plus dangereuse au point de vue du déraillement. Les données de la voiture et des bogies étant précisées, nous devons déterminer les voies les plus dangereuses pour chacune des quatre roues directrices. Nous examinerons à présent cette question, en supposant que le gauchissage initial de la caisse agit toujours dans un sens favorable à la décharge de la




roue étudiée. De cette façon, nous éliminons l'un des facteurs inconnus, w_0 , dont l'ordre de grandeur n'est d'ailleurs que de 1%, comme nous venons de le calculer.

Comme facteur inconnu de valeur variable il ne reste, dans la voiture, que le moment « eH » gauchissant la caisse. Nous choisissons donc toujours la voie de sorte, que le moment « eH » produise sur la roue étudiée la plus grande décharge possible. Sur la fig. 40, nous avons encore une fois esquissé en plan les essieux montés de la voiture. Sur les quatre plans, nous avons dessiné successivement les conditions de décharge de chacune des quatre roues directrices du bogie à trois essieux. Au-dessus de ces plans, nous avons fait figurer, en vue de devant, le déplacement angulaire des essieux ou, ce qui revient au même, la dénivellation des surhaussements de la voie sous le essieux des roues directrices. Nous avons aussi tracé au même endroit le déplacement angulaire des essieux du bogie porteur, dont l'étude serait ici sans intérêt.

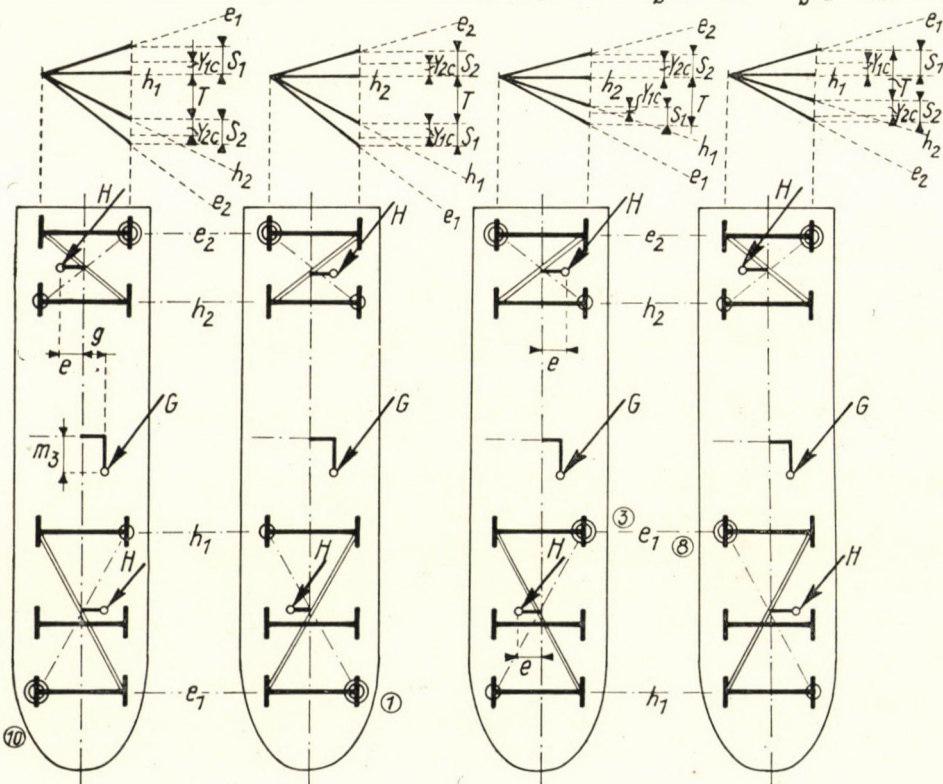
Nous expliquerons la disposition de la fig. 40 par le schéma du troisième plan choisi pour exemple. Nous partons toujours du bogie moteur étudié, et cherchons donc le genre de voie le plus défavorable pour la roue directrice (3). Nous avons marqué par un cercle la roue (3), ainsi que la roue directrice (10) située à l'autre extrémité de la même diagonale, parce que ce sont celles-ci que nous voulons décharger. Les deux roues sur l'autre diagonale du bogie reçoivent le surcroît de charge; nous avons marqué cette diagonale par une ligne double. Nous marquons l'angle (S_1) formé par les deux essieux montés directeurs (e_1 et h_1) au-dessus du plan, de sorte que la roue déchargée vienne se placer au-dessous du plan formé par les trois autres roues. Nous considérons ensuite, sur le même bogie, le moment « eH », comme agissant dans le sens où il continue à décharger la roue (3), en soumettant par conséquent la roue (10) à un surcroît de charge. Nous passons ensuite au bogie porteur, où nous traçons la réaction du moment « eH » ayant un sens inverse au moment « eH » pris ci-dessus. Nous prenons enfin, dans la figure de la section de voie, le déplacement angulaire relatif des deux bogies (h_1 et h_2) dans une direction telle que, parmi les quatre roues, ce soit encore la déviation du plan de la roue (3) qui se dirige vers le bas. (Cette dernière déviation a été désignée par $T=(t-d)_3 \searrow$). Des exemples précédents, il nous est en effet apparu déjà que cette valeur, c'est-à-dire le déplacement angulaire des deux essieux montés opposés des deux bogies, détermine décisivement la direction de la torsion se manifestant dans la caisse. Nous choisissons aussi le déplacement angulaire (S_2) de l'autre essieu (e_2) du bogie arrière, de sorte qu'il augmente encore le gauchissage déjà prévu de la caisse.

Pour les autres roues directrices, nous avons fixé, de la même façon, sur la fig. 40, la configuration de la voie la plus défavorable pour la roue en question. Nous avons, en outre, marqué sur le plan les charges asymétriques, car leur signe est également décisif pour le résultat de notre calcul.

Notations dans la figure

- e_1 = axe d'essieu avant du bogie moteur
- h_1 = " " arrière " " "
- e_2 = " " avant " " remorqué
- h_2 = " " arrière " " "
-  les deux roues sur la diagonale déchargée du bogie, marqué d'un cercle
-  = roue susceptible à dérailler (marqué d'un cercle seconde)
-  les deux roues sur la diagonale chargée du bogie, liées ensemble par deux lignes

$(t-d)_3 \lambda = T; \quad \frac{c}{b} Y_1 = Y_{1c}; \quad \frac{c}{b} Y_2 = Y_{2c}.$



Les forces dessinées obliquement sont réellement perpendiculaires au plan du dessin.

Fig. 40

c) La décharge de la roue ①

Les caractéristiques des voies I et II de la fig. 40 montrent bien que, pour la décharge de la roue ①, il faut une déviation de plan de sens justement inverse à celui avec lequel on devait calculer chez la roue ⑩. Mais outre la disposition de la voie, les moments agissant sur les bogies sont aussi de sens inverse par rapport à la roue ⑩. Nous pouvons donc appliquer les formules

employées à l'étude du déraillement de la roue (10), mais dans les formules XVII et XVIII, c'est-à-dire chez le bogie moteur, le moment oP sera maintenant remplacé par $o_1R_1 + eH$ (changement de signe), et dans les formules XIX et XX, par $gG_2 + eH$ (changement de signe). En examinant le gauchissage de la caisse, nous voyons que le moment eH aide la décharge de roue, tandis que le moment gG agit contrairement. Ainsi, dans la formule XXI, le signe du membre contenant G_2 changera à son tour. Comme tous ces changements ne produisent des transformations de signes que dans les facteurs U, V, W, E et F , nous pouvons reprendre sans modification notre déduction faite à l'annexe XV jusqu'à la formule XXII, puis en substituant les facteurs modifiés quant à leur signe, nous recevons pour résultat:

$$\frac{Q_3}{\Theta_5} (1 - \varphi_1) = \left[2 \frac{o_1}{c} (\Sigma' - \Theta_m) - \frac{m_1}{q} \left(\frac{\Sigma'}{\Theta_{13}} f^* - 2\psi^* + \frac{\Sigma'}{\Theta_{13}} \frac{\psi_1}{c} o_1 \right) \right] R_1 - \\ - 2 (f_2 + 2f_3) \frac{g}{c} G_2 + \left(\frac{b}{c} \right)^2 \left\{ \frac{\Sigma'}{\Theta_{13}} \frac{q}{d_1} S_1 + S_2 + 2 [(t-d)_3 + q_4] \lambda \right\} + 2 \frac{b}{c} w_0$$

Après substitution des valeurs numériques, on obtient comme décharge de la roue (1):

$$5754 \varphi_1 = 6304 - 12,25 S_1 - 5 S_2 - 126\,700 \lambda - 7,83 w_0$$

valeur identique à celle obtenue pour la roue (10).

d) *La décharge de la roue (3).*

Chez le bogie moteur, c'est l'essieu monté (3) — (8) que nous regardons maintenant comme essieu «avant», aussi ce sont les valeurs

$$q^* = \frac{q_3}{q_3 + q_4} = 0,757; \quad \psi^* = f' + \frac{q - q_5}{q} \frac{\psi_1}{2} = 0,0153;$$

$$\Theta_{13} = f_1' + \frac{\psi_1}{4} = 0,0153; \quad Q_3 = 7284 \text{ kg}$$

que nous devons substituer aux résultats de l'annexe VI. La charge agissant sur le bogie moteur a maintenant une direction où $mP = + m_1R_1$ et $oP = o_1R_1 + eH$ sont les valeurs des moments, et ainsi la forme des deux équations caractéristiques du bogie seront:

$$2 \frac{f^*}{q^*} Q_3 (1 - \varphi_1) = \left(\frac{b}{c} \right)^2 S_1 \frac{q}{d_1} + f^* \frac{m_1}{q} R_1 + 2 \Theta_{13} \frac{o_1 R_1 + bH}{c} - \frac{m_1}{q} \frac{\psi_1}{c} o_1 R_1$$

$$Y_1 = 2 \frac{c}{b} \frac{\psi^*}{q^*} Q_3 (1 - \varphi_1) - \psi^* \frac{c}{b} \frac{m_1}{q} R_1 - \frac{\Theta_m}{b} o_1 R_1 - (f'_1 + \psi^*) H + \frac{b}{c} q_1 \lambda$$

Mais dans ces formules

$$\Theta_m = f'_1 + \psi^* - \frac{q - q_5}{q} \frac{m_1}{q} \psi_1 = 0.0278$$

Le mode de chargement du bogie arrière, et la déviation du plan sur laquelle se trouve le bogie, sont ceux du schéma II de la fig. 40. Nous pouvons donc reprendre sans modification les deux équations appartenant à ce bogie, de l'étude relative à la roue (1). Le mode de gauchissage de la caisse est aussi conforme à celui que nous avons tracé dans notre schéma II de la fig. 40, mais la déviation formée par les traverses danseuses des deux bogies sera maintenant:

$$L_s = \frac{a}{b} Y_2 + \frac{a}{c} (t - d)_3 \lambda - \frac{a}{c} \left(S_1 - \frac{c}{b} Y_1 \right) = Y_1 + Y_2 + \frac{a}{c} [(t - d)_3 \lambda - S_1]$$

Nos cinq équations caractéristiques prendront ainsi la forme suivante:

$$2 \frac{f^*}{q^*} Q_3 (1 - \varphi_1) - 2 \frac{b}{c} \Theta_{13} H = \left(\frac{b}{c} \right)^2 \frac{q}{d_1} S_1 + \left[\frac{o_1}{c} 2 \Theta_{13} + \frac{m_1}{q} \left(f^* - \frac{\psi_1}{c} o_1 \right) \right] R_1 = U_2$$

$$\left(\frac{c}{b} \right)^2 \Theta_{20} Q_2 (1 - \varphi_2) - 2 \frac{c}{b} \Theta_{20} H = S_2 + 2 \frac{c}{b} \Theta_{20} \frac{g}{b} G_2 = V_2$$

$$2 \frac{c}{b} \frac{\psi^*}{q^*} Q_3 (1 - \varphi_1) - (f'_1 + \psi^*) H - Y_1 = \left(\frac{\Theta_m}{b} o_1 + \frac{c}{b} \psi^* \frac{m_1}{q} \right) R_1 - \frac{b}{c} q_1 \lambda = W_2$$

$$\frac{c}{b} \Theta_{20} \frac{Q_2}{2} (1 - \varphi_2) - (f_2 + \Theta_{20}) H - Y_2 = (f_2 + \Theta_{20}) \frac{g}{b} G_2 = E_2$$

$$(2f'_3 + \psi_3) H - Y_1 - Y_2 = \frac{b}{c} [(t - d)_3 \lambda - S_1] - 2f'_3 \frac{g}{b} G_2 + w_0 = F_2$$

Le côté gauche des cinq équations est resté encore identique à celui calculé chez les roues (10) et (1), mais au lieu de f''_1 , nous devons calculer à présent avec

f'_1 . Nous pouvons ainsi nous servir encore une fois de l'équation (XXII), où nous devons substituer à U , V , W , E et F les mêmes valeurs, mais marquées de l'index «2»; en même temps, les deux constantes ci-dessous se modifieront à leur tour:

$$\Sigma = f'_1 + f_2 + 2f'_3 + \psi_3 + \psi^* = 0,06995 \text{ mm/kg}; \quad \Theta_5 = 2,446 \text{ kg/mm.}$$

La formule de la décharge de roue sera:

$$\begin{aligned} \frac{Q_3}{\Theta_5} (1 - \varphi_1) = & \left[2 \frac{o_1}{c} (\Sigma - \Theta_m) + \frac{m_1}{q} \left(\frac{\Sigma}{\Theta_{13}} f^* - 2 \psi^* - \frac{\Sigma}{\Theta_{13}} \psi_1 \frac{o_1}{c} \right) \right] R_1 - \\ & - 2 (f_2 + 2f'_3) \frac{g}{c} G_2 + \left(\frac{b}{c} \right)^2 \left\{ \left(\frac{\Sigma}{\Theta_{13}} \frac{q}{d_1} - 2 \right) S_1 + S_2 + 2 [(t - d)_3 + \right. \\ & \left. + q_1] \lambda \right\} + 2 \frac{b}{c} w_0 \end{aligned}$$

et en substituant les valeurs numériques, nous avons comme résultat final:

$$7284 \varphi_1 = 6554 - 4,67 S_1 - 4 S_2 - 101\,700 \lambda - 6,3 w_0 \quad (\text{XXIII})$$

Le gauchissage initial de la caisse (7 mm) donne maintenant une décharge inférieure à 1%. Sur une voie où $\lambda = 1 : 300$, la charge de roue s'abaisse déjà, à présent, à 6068 kg, soit 83,5% par rapport à la répartition symétrique (7284 kg). C'est encore une valeur favorable, parce que cette roue avait une charge de base relativement grande. Celle-ci est la charge de roue se produisant sous charge symétrique de la voiture. Ainsi, même sur une voie aussi défavorable, il reste, sur cette roue, une charge aussi grande qu'était la charge de base des roues (4) et (10) (6068 kg). Il serait sans intérêt de calculer encore la roue (8), parce que nous recevrons le même résultat que pour la roue (3) ci-dessus.

Si nous considérons la décharge de roue en pour cent, celle-ci se montre la plus grande pour la roue (3). Ceci nous avertit que chez les constructions de véhicules ou charges asymétriques, il ne suffit pas d'examiner seulement les roues extrêmes, au point de vue de la sûreté contre le déraillement, mais il faut contrôler aussi les roues intermédiaires.

e) Résultat de l'examen du gauchissage de la voiture

En récapitulant notre étude sur la capacité de gauchissage du véhicule, nous pouvons qualifier les roues (10) et (4) des plus défavorables parmi les quatre roues directrices, car ce sont elles dont la charge de roue descend à la valeur la plus basse sur la section de voie la plus défavorable ($\lambda = 1 : 300$).

Mais puisque même sur cette voie la plus défavorable, nous n'avons pu constater qu'un abaissement de charge de roue de 16,5%, nous pouvons conclure que le mécanisme de la voiture motrice peut s'adapter convenablement aux inégalités de la voie.

f) Étude du déraillement

Les données de la voie, établies lors de l'enquête qui suivait le déraillement, sont représentées par la courbe inférieure de notre fig. 41. C'est de ces données de la voie et de celles de l'équation (XXIII) que nous avons déterminé

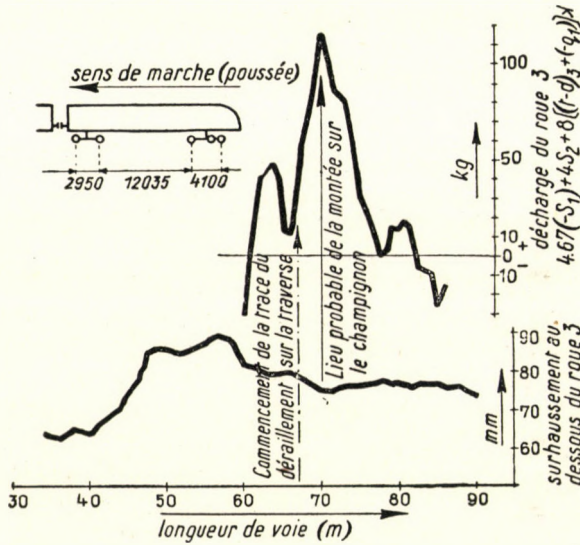


Fig. 41

les déviations «transformées» du plan se rapportant à la roue dérailleuse (3). Nous en avons ensuite calculé la décharge de roue, sur base de l'équation

$$\Theta_5 \left(\frac{b}{c}\right)^2 \left[\left(\frac{\sum q}{\Theta_{13} d_1} - 2 \right) S_1 + S_2 + (t - d)_3 \lambda + 2(-q_1) \lambda \right] = 4,67(-S_1) + 4S_2 + 101700 \lambda$$

et nous l'avons reportée au-dessus des déviations du plan, sur la fig. 41. Cette courbe représente donc la décharge de la roue (3) pendant que la voiture passe au-dessus des surhaussements de la voie. Si on ne regardait pas la valeur absolue de la décharge (qui n'était, selon la figure, que de 116 kg au maximum), il faudrait bien réfléchir à l'idée que cette valeur atteint son maximum au point même où devait survenir le déraillement. Il est possible que, pendant le pas-

sage sur la voie, une décharge subite se produisant sur une courte section puisse avoir des effets dynamiques. Mais la faiblesse de la valeur absolue montre que, même s'il y a eu un tel effet, il ne pouvait pas être décisif à cause de la faible vitesse de la voiture.

Selon d'autres calculs non détaillés ici, la roue (3) aurait été la plus défavorable des quatre roues directrices parce que, sur la section de voie examinée:

— la vitesse était plus petite que celle pour laquelle le surhaussement de la voie avait été construit, et ainsi la charge des roues (40) et (8) passant sur la file de rail intérieure de la courbe s'est accrue, tandis que celle des roues (1) et (3) a diminué;

— la force poussante produite par le fonctionnement du moteur se transmet par les appuis à la caisse, et le moment basculant de cette force diminue la charge des roues (8) et (3);

— enfin la charge de la roue (3) a aussi fortement diminué pendant le fonctionnement du moteur, à cause de la disposition particulière de la transmission mécanique.

La valeur statique (ne variant pas en fonction du temps) de ces trois facteurs énumérés est, au total, de 1,915 kg.

En résumant donc ce qui précède, la charge de 6,554 kg de la roue dérailleuse (3), pesée en palier, était de 1,915 kg plus faible quand la voiture passait dans la courbe. Par suite du gauchissage de la caisse, cette charge de roue a diminué encore, assez rapidement, de 116 kg, et c'est ainsi qu'une charge de 4,523 kg est restée en définitive. Cette charge de roue constitue encore une valeur très élevée, parce qu'une force directrice équivalente aurait été nécessaire pour produire le déraillement, et avec la faible vitesse de la voiture, il est tout à fait invraisemblable qu'une telle force ait pu surgir.

Nous pouvons donc établir, sur base de notre étude, que

— les ressorts durs et la construction du véhicule ne pouvaient pas causer le déraillement;

— la voie n'a causé qu'une décharge de roue relativement petite (on n'a pas non plus trouvé de défauts de courbure dans la voie);

— selon l'examen statique, il est resté encore assez de charge sur la roue pour que le déraillement ne se produise pas;

donc les effets non traités dans l'étude, de caractère probablement dynamique (provenant non seulement de la coopération du véhicule et de la voie, mais aussi du fonctionnement du moteur, du démarrage, du freinage, etc. . .) ont contribué à produire le déraillement. La preuve, c'est que sans avoir rien changé sur la voie ou dans la construction du véhicule, on n'a pas réussi à provoquer un nouveau déraillement de la voiture motrice (en queue d'une rame), remise sur la voie et passant plusieurs fois sur la même section après le déraillement.

En définitive, ce cas examiné semble encore prouver que, généralement, *le concours de plusieurs facteurs défavorables* est nécessaire pour provoquer le

déraillement. C'est pourquoi quand on cherche, après un tel déraillement, la solution permettant d'éviter la reproduction de l'accident, le mieux vaut de choisir, parmi les facteurs *les plus importants* au point de vue du déraillement, celui dont on peut diminuer l'action déchargeante par des moyens simples et dans une mesure essentielle. C'est ce qui a été fait aussi dans le cas de la voiture motrice examinée. L'effet du fonctionnement du moteur ayant diminué la charge de la roue (3) de près de 1200 kg, a pu être modifié moyennant un changement de la construction, de sorte que dans le nouvel arrangement, le fonctionnement du moteur ne diminue plus la décharge de la roue (3) que de 670 kg environ. Au point de vue de la charge de la roue, cet arrangement représente donc un avantage de plus de 500 kg. Nous avons vu plus haut que, par suite du gauchissage, la voiture n'avait allégé la roue dérailleuse que de 116 kg; c'est dire qu'en transformant éventuellement l'appareil de suspension, nous ne pourrions réaliser qu'une bien faible partie de l'amélioration obtenue par transformation de la transmission mécanique.

Postface

Toute étude tend à mettre en lumière un groupe particulier de problèmes, aux dépens d'autres laissés nécessairement dans l'ombre. C'est ce que nous avons fait aussi, en examinant les déviations par rapport au plan, et les gauchissages de la caisse des véhicules. Nous ne voudrions cependant pas commettre l'erreur de surestimer l'importance de leur rôle dans les déraillements, et de considérer ces deux facteurs comme étant les plus décisifs. Des exemples cités, il ressort en effet que ce n'est que sous certaines conditions extrêmes de la voie et de la construction du véhicule que le concours de ces deux facteurs a pu provoquer le déraillement (chapitre E. III).

Comme résultat, nous pourrions plutôt conclure, qu'il faut la coïncidence défavorable de beaucoup de facteurs pour produire le déraillement des véhicules de chemin de fer actuellement en usage. Le constructeur des véhicules doit toutefois compter avec tous les facteurs déjà connus, et éviter leurs effets désavantageux, pour ne pas s'exposer aux surprises désagréables que peuvent causer les actions dynamiques insuffisamment éclaircies.

ANNEXE XIII

(Augmentation du jeu entre les glissières)

Selon la formule (IX. b) :

$$L_s = \frac{a}{b} (Y_1 + Y_2) + \frac{a}{c} (t - d) \lambda - 4 \frac{a}{e} v$$

Selon la formule (IX. a), si $H = \frac{G}{4}$, alors

$$L_g = \Theta_{30} \frac{G}{4} \frac{a}{b} - \frac{a}{c} \Theta_{31} G - \frac{a}{e} w_0.$$

Les valeurs Y_1 et Y_2 sont exprimées par les formules (VII) et (VIII):

$$Y_1 = \frac{Q_1}{2} \frac{c}{b} \Theta_{10} (1 - \varphi_1) - \frac{2c}{b} \Theta_{11} \Theta_{12} - \frac{2e}{b} \Theta_{11} \frac{G}{4};$$

$$Y_2 = \frac{Q_2}{2} \frac{c}{b} \Theta_{20} (1 - \varphi_2) - \frac{2c}{b} \Theta_{21} \Theta_{22} - \frac{2e}{b} \Theta_{21} \frac{G}{4}$$

De celles-ci, nous devons d'abord exprimer les valeurs de φ_1 et φ_2 , à l'aide des formules (V) et (VI), à partir des données S_1 et S_2 de la voie. De là

$$\frac{Q_1}{2} (1 - \varphi_1) = \Theta_{12} + \frac{S_1}{2 \left(\frac{c}{b}\right)^2 \Theta_{10}} + \frac{e}{c} \frac{G}{4}; \quad \frac{Q_2}{2} (1 - \varphi_2) = \Theta_{22} + \frac{S_2}{2 \left(\frac{c}{b}\right)^2 \Theta_{20}} + \frac{e}{c} \frac{G}{4};$$

et ainsi

$$Y_1 = \frac{b}{c} \frac{S_1}{2} - \frac{e}{b} \frac{G}{4} (2 \Theta_{11} - \Theta_{10}) - \frac{c}{b} \Theta_{12} (2 \Theta_{11} - \Theta_{10})$$

$$Y_2 = \frac{b}{c} \frac{S_2}{2} - \frac{e}{b} \frac{G}{4} (2 \Theta_{21} - \Theta_{20}) - \frac{c}{b} \Theta_{22} (2 \Theta_{21} - \Theta_{20})$$

$$L_s = \frac{a}{2c} [S_1 + S_2 + 2(t-d)\lambda] - \frac{ae}{b^2} \frac{G}{4} [2 \Theta_{11} - \Theta_{10} + 2 \Theta_{21} - \Theta_{20}] - \\ - \frac{ac}{b^2} [\Theta_{12} (2 \Theta_{11} - \Theta_{10}) + \Theta_{22} (\Theta_{21} - \Theta_{20})] - 4 \frac{a}{e} v$$

Comme nous mesurons le jeu entre les glissières à l'endroit des glissières, nous devons encore multiplier par $\frac{e}{a}$. Ainsi,

$$\frac{e}{a} (L_s - L_g) = \frac{e}{2c} [S_1 + S_2 + 2(t-d)\lambda] - \left(\frac{e}{b}\right)^2 \frac{G}{4} [2 \Theta_{11} - \Theta_{10} + 2 \Theta_{21} - \Theta_{20} + \\ + \frac{b}{e} \Theta_{30} - 4 \frac{b^2}{ce} \Theta_{31}] - \frac{ec}{b^2} [\Theta_{12} (2 \Theta_{11} - \Theta_{10}) + \Theta_{22} (2 \Theta_{21} - \Theta_{20})] - (4v - w_0) \\ \frac{e}{a} (L_s - L_g) = \frac{e}{2c} [S_1 + S_2 + 2(t-d)\lambda] - \left(\frac{e}{b}\right)^2 \frac{G}{4} \left[f_1 + f_2 + \frac{b}{e} \Theta_{30} - 4 \frac{b^2}{ce} \Theta_{31} \right] - \\ - \frac{ec}{b^2} (\Theta_{12} f_1 + \Theta_{22} f_2) - (4v - w_0)$$

ANNEXE XIV

(Wagon plat à six essieux)

$$\varphi_1 = 1 - \frac{2}{c} \frac{o_1 P_1 + g G_1 + e H}{P_1 + G_1 + K_1} - \frac{3 S_1}{2 \left(\frac{c}{b}\right)^2 \left(f_1 + \frac{\psi_1}{3}\right) (P_1 + G_1 + K_1)}$$

$$Y_1 = \frac{c}{b} \left(f_1 + \frac{\psi_1}{6}\right) \frac{Q_1}{6} (1 - \varphi_1) - \frac{o_1 P_1 + g G_1 + e H}{b} \left(f_1 + \frac{\psi_1}{9}\right) + \frac{b}{c} \frac{d}{4} \lambda.$$

De l'équation ci-dessus, si

$$o_1 = o_2 = g = 0; \quad \frac{Q}{6} (1 - \varphi_1) = \frac{e}{c} \frac{H}{3} + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \frac{S_1}{4 \left(f_1 + \frac{\psi}{3}\right)}$$

alors

$$Y_1 = \frac{b}{c} \frac{S_1 + d \lambda}{4} - \frac{2}{3} \frac{e}{b} f_1 H$$

Comme notre disposition est tout à fait symétrique, l'expression de Y_2 sera entièrement semblable chez le bogie arrière, et ainsi, comme $S_1 = S_2$ et $Y_1 + Y_2 = 2Y_1$, selon l'annexe XIII:

$$\frac{e}{a} (L_s - L_g) = \frac{e}{b} 2Y_1 + \frac{e}{c} (t - d) \lambda - (4v - w_0) - G \left(\frac{e}{b} \frac{\Theta_{30}}{4} - \frac{e}{c} \Theta_{31}\right)$$

Nous y substituons la valeur de Y_1 reçue ci-haut, où $H = G/4$, et en résultat de la disposition symétrique, $\Theta_{31} = 0$. Ainsi

$$\frac{e}{a} (L_s - L_g) = \frac{e}{c} \left(t \lambda + \frac{S}{2} - \frac{d \lambda}{2}\right) - (4v - w_0) - \frac{G}{4} \frac{e}{a} \left(\frac{4}{3} \frac{e}{a} f_1 + \Theta_{30}\right)$$

$$\text{Quand} \quad \frac{e}{a} (L_s - L_g) = 0 \quad \text{et} \quad S = d \lambda,$$

$$\lambda = \frac{c}{et} (4v - w_0) + \frac{c}{bt} \frac{G}{4} \left(\frac{4}{3} \frac{e}{b} f_1 + \Theta_{30}\right)$$

ANNEXE XV

(Voiture motrice à cinq essieux)

$$2 \frac{f^*}{q^*} Q_3 (1 - \varphi_1) - 2 \frac{b}{c} \Theta_{13} H = \left(\frac{b}{c}\right)^2 \frac{q}{d_1} S_1 - \left[2 \frac{o_1}{c} \Theta_{13} + \frac{m_1}{q} \left(f^* + \frac{o_1}{c} \psi_1\right)\right] R_1 = U$$

(Formule XVII)

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2 \Theta_{20} Q_2 (1 - \varphi_2) - 2 \frac{c}{b} \Theta_{20} H = S_2 - 2 \frac{c}{b} \Theta_{20} \frac{g}{b} G_2 = V$$

(Formule XIX)

$$2 \frac{c}{b} \frac{\psi^*}{q^*} Q_3 (1 - \varphi_1) - (f_1'' + \psi^*) H - Y_1 = - \left(\frac{o_1}{b} \Theta_m + \frac{c}{b} \psi^* \frac{m_1}{q}\right) R_1 - \frac{b}{c} q_4 \lambda = W$$

(Formule XVIII)

$$\frac{c}{b} \Theta_{20} \frac{Q_2}{2} (1 - \varphi_2) - (f_2 + \Theta_{20}) H - Y_2 = - (f_2 + \Theta_{20}) \frac{g}{b} G_2 = E \quad (\text{Formule XX})$$

$$(2f_3'' + \psi_3) H - Y_1 - Y_2 = \frac{b}{c} (t - d)_3 \lambda + 2f_3'' \frac{g}{b} G_2 + w_0 = F \quad (\text{Formule XXI})$$

Pour simplifier, nous avons introduit dans ces formules les notations suivantes :

$$\Theta_{20} = f_2 + \frac{\psi_2}{4}; \quad \Theta_{13} = f_1'' + \frac{\psi_1}{4}; \quad \Sigma = f_1'' + f_2 + 2f_3'' + \psi_3 + \psi^*;$$

$$\Theta_m = 2f_1'' + \frac{q_5}{q} \psi_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{m_1}{q} \right);$$

et sur base de l'annexe VI :

$$f^* = \left(f_1' + f_1'' + \frac{\psi_1}{2} \right); \quad q^* = \frac{q_2}{q_1 + q_2} \quad \text{et} \quad \psi^* = f_1'' + \frac{q_5}{q} \frac{\psi_1}{2}$$

Dans ces cinq équations, nous considérons comme inconnues :

$$(1 - \varphi_1); (1 - \varphi_2); H; Y_1; Y_2$$

tandis que nous laissons les facteurs S_1 et S_2 également « inconnus » parmi les facteurs connus, au côté droit des équations. Nous avons désigné le côté droit des équations par des majuscules, afin de rendre plus simple le calcul des déterminants. Des coefficients du côté gauche de nos équations, nous formons le déterminant D_1 :

$$D_1 = \begin{bmatrix} 2 \frac{f^*}{q^*} Q_3 & 0 & -2 \frac{b}{c} \Theta_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{c}{b} \right)^2 \Theta_{20} Q_2 & -2 \frac{c}{b} \Theta_{20} & 0 & 0 \\ 2 \frac{c}{b} \frac{\psi^*}{q^*} Q_3 & 0 & -f_1'' - \psi^* & -1 & 0 \\ 0 & \frac{c}{b} \Theta_{20} \frac{Q_2}{2} & -f_2 - \Theta_{20} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2f_3'' + \psi_3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} 2 \frac{f^*}{q^*} Q_3 & 0 & -2 \frac{b}{c} \Theta_{13} \\ 0 & \left(\frac{c}{b} \right)^2 \Theta_{20} Q_2 & -2 \frac{c}{b} \Theta_{20} \\ -2 \frac{c}{b} \frac{\psi^*}{q^*} Q_3 & -\frac{c}{b} \Theta_{20} \frac{Q_2}{2} & \Sigma + \Theta_{20} \end{bmatrix}$$

$$D_1 = 2 \left(\frac{c}{b} \right)^2 \Theta_{20} Q_2 Q_3 \left[\Sigma \frac{f^*}{q^*} - 2 \Theta_{13} \frac{\psi^*}{q^*} \right]$$

Comme nous désirons déterminer $(1 - \varphi_1)$, nous avons aussi besoin du déterminant D_2 . Nous produisons ce dernier en écrivant le côté droit de nos cinq équations dans la première colonne du déterminant précédent:

$$D_2 = \begin{bmatrix} U & 0 & -2 \frac{b}{c} \Theta_{13} & 0 & 0 \\ V & \left(\frac{c}{b} \right)^2 \Theta_{20} Q_2 & -2 \frac{c}{b} \Theta_{20} & 0 & 0 \\ W & 0 & -f_1'' - \psi^* & -1 & 0 \\ E & \frac{c}{b} \Theta_{20} \frac{Q_2}{2} & -f_2 - \Theta_{20} & 0 & -1 \\ F & 0 & 2f_3'' + \psi_3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} U & 0 & -2 \frac{b}{c} \Theta_{13} \\ V & \left(\frac{c}{b} \right)^2 \Theta_{20} Q_2 & -2 \frac{c}{b} \Theta_{20} \\ F - E - W & -\frac{c}{b} \Theta_{20} \frac{Q_2}{2} & \Sigma + \Theta_{20} \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \Theta_{20} Q_2 \left[\Sigma U + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \Theta_{13} V + 2 \frac{b}{c} \Theta_{13} (F - E - W) \right]; (1 - \varphi_1) = \frac{D_2}{D_1};$$

d'où

$$\frac{Q_3}{\Theta_5} (1 - \varphi_1) = \Sigma \frac{U}{\Theta_{13}} + \left(\frac{b}{c}\right)^2 V + 2 \frac{b}{c} (F - E - W) \quad (\text{Formule XXII})$$

dans laquelle

$$\Theta_5 = \frac{\Theta_{13} q^*}{2 \Sigma f^* - 4 \Theta_{13} \Psi^*}$$

En y substituant à présent les valeurs de U, V, W, F, E :

$$\begin{aligned} \frac{Q_3}{\Theta_5} (1 - \varphi_1) = & - \left[2 \frac{\sigma_1}{c} (\Sigma - \Theta_m) + \frac{m_1}{q} \frac{\Sigma}{\Theta_{13}} \left(f^* + \frac{\sigma_1}{c} \psi_1 \right) - \frac{m_1}{q} 2 \psi^* \right] R_1 + \\ & + (2 f_3'' + f_2) 2 \frac{g}{c} G_2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \left(\frac{\Sigma}{\Theta_{13}} \frac{q}{d_1} S_1 + S_2 \right) + 2 \left(\frac{b}{c}\right)^2 [(t - d)_3 + q_4] \lambda + 2 \frac{b}{c} w_0 \end{aligned}$$

RÉSUMÉ

Dans la première et la seconde partie de notre étude, nous avons fait connaître le calcul de la capacité de gauchissage des véhicules de chemin de fer. Dans la suite, nous examinons dans le détail les données numériques de trois cas de déraillements, et démontrons la nécessité de compter avec la capacité de gauchissage des véhicules, lors du contrôle des nouvelles constructions.

En général, les facteurs qui entrent en jeu dans le déraillement des véhicules à plusieurs essieux sont nombreux. Dans notre étude des déraillements, ces facteurs ne pouvaient être mentionnés, jusqu'à présent, que du seul point de vue qualitatif. Quantitativement, on ne pouvait pas évaluer leurs effets, faute de recherches communiquées sur ce sujet par la littérature. La présente communication voudrait combler cette lacune.

DIE VERWINDUNG VON EISENBAHNWAGEN. TEIL III. UNTERSUCHUNG VON ENTGLEISUNGEN

P. KERESZTY

ZUSAMMENFASSUNG

Im ersten und zweiten Teil haben wir eine Methode über die Berechnung der Verwindung von Eisenbahnwagen veröffentlicht. Im folgenden behandeln wir ausführlich die numerische Untersuchung von drei Entgleisungen, die im Verkehr auftraten, um damit nachzuweisen, daß auch die Fahrzeugkonstrukteure die Verwindungsfähigkeit der Wagen bei der Kontrolle ihrer Neukonstruktionen beachten müssen.

Bei den Entgleisungen von mehrachsigen Wagen spielen viele Faktoren mit. Bisher waren diese Koeffizienten in der Untersuchung von Entgleisungen nur qualitativ erwähnt, ihre Wirkung konnte man aber quantitativ nicht ermitteln, denn die Forschungen hiezu fehlten in der eisenbahntechnischen Literatur. Die vorliegende Veröffentlichung bezweckt auch die Behebung dieses Mangels.

TWISTING CAPACITY OF RAILWAY CARRIAGE STRUCTURES.
PART III. EXPLORING OF DERAILMENTS

P. KERESZTY

SUMMARY

In the first and second part we have published a method for the calculation of the twisting ability of railway vehicles. In the following we treat exhaustively the numerical analysis of three derailments of vehicles, which occurred in traffic and this way we prove that the carriage-designers must not forget to take into consideration the twisting ability of vehicles when controlling their new constructions.

The derailment of multi-axled vehicles is usually caused by more than one factor. Investigating derailments these factors have been mentioned up to this day only qualitatively but their effect could not yet be valued out quantitatively, because the research in this line failed in the technical literature of railways. This publication aims to fill in this gap.

СКРУЧИВАНИЕ КАРКАСОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ВАГОНОВ.
III. ИССЛЕДОВАНИЯ СЛУЧАЕВ СХОДА С РЕЛЬС

П. КЕРЕСТИ

РЕЗЮМЕ

В первом и во втором сообщениях излагалась методика расчета скручивания каркасов железнодорожных вагонов. В дальнейшем дается детальный числовой анализ трех случаев схода с рельс в условиях эксплуатации и с этим одновременно дается доказательство того, что способность кручения подвижных средств должна быть учтена также проектантами при производстве проверок новых конструкций.

При сходе с рельс многоосных подвижных средств обычно играют роль ряд факторов. При исследовании случаев схода с рельс до сих пор эти факторы упоминались лишь качественно, но их действие нельзя было оценить количественно, т. к. не доставали соответствующие исследования в технической железнодорожной литературе. Для восполнения этого недостатка делаются попытки данным сообщением.

INFLUENCE OF BINDERS UPON THE SURFACE BRIGHTNESS OF CATHODE-RAY TUBE SCREENS

III.*

THE ROLE OF THE COAGULATOR

I. HANGOS, H. TOPERCZER and GY. POZSGAY

RESEARCH LABORATORIES FOR TELECOMMUNICATION, BUDAPEST

[Manuscript received February 12, 1958]

1. Introduction

In their previous papers the authors [1, 2] discussed the surface brightness of cathode-ray tube screens produced by the settling process. If binders are used to fix the screens, the surface brightness is inferior to that of screens produced without binders [1, 2, 3, 4]. If the nitrates of Ca, Sr or Ba are used as coagulators, a relationship may be found between the decrease of surface brightness and the concentration of the coagulator in the settling liquid.

The decrease in brightness of the screens is caused by the attenuating effect of the binder layer surrounding the grains. It may be assumed that if the concentration of the coagulator in the settling liquid is increased, either the thickness of this binder layer, or the amount of coagulator in the binder layer, or both will change. Measurements were therefore carried out to establish the dependence of the thickness of the binder layer and the quantity of coagulator in the binder layer on the composition of the settling liquid.

2. Measurement method, materials used

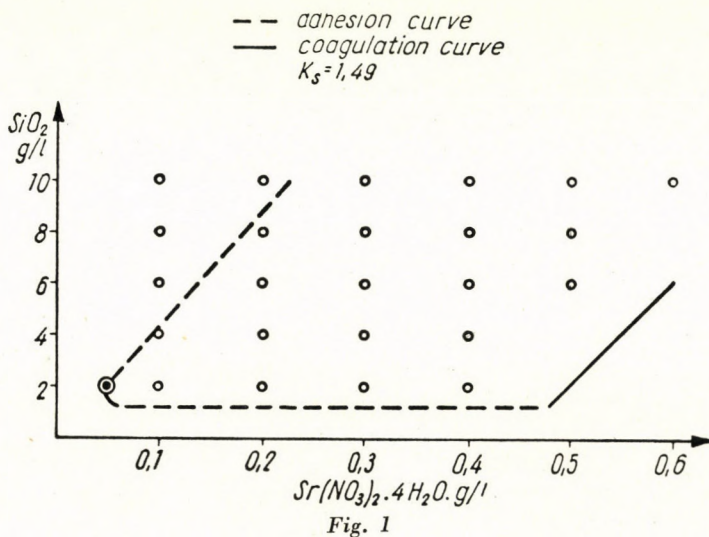
The coagulator was determined by a radioactive tracer method, similar to that described by BOER and EMMENS [5]. The phosphors were a $Zn_2SiO_4 \cdot Mn$ phosphor made by *Tungfram* (average grain size 4–5 μ) and a cub. $ZnS \cdot Ag$ phosphor made by *Tungfram*. For the former phosphor, which had already been used in previous experiments, the screen thickness was chosen to be 10 mg/cm², while for the $ZnS \cdot Ag$, because of the determination of the thickness of the binder layer, an optimal screen thickness of 5 mg/cm² was used.

The binder was a potassium waterglass solution produced by dissolving SiO_2 in a KOH solution. A parameter $K_S = \frac{SiO_2 \text{ g/l}}{KOH \text{ g/l}}$ was introduced to characterize the waterglasses.

* Part I of this paper has been published in *Acta Technica*, Tom. XIX, pp. 67–84. of this journal, Part II in Tom. XX, pp. 129–136.

The coagulator used was strontium nitrate, whose solution was activated by the Sr^{90} isotope. Due to the relatively long half period (22 years), the measurements did not need correction.

The experimental procedure was as follows: 4 mm thick, 25 mm dia. plexiglass discs were placed at the bottom of 25 ml cylindrical jars. The tops of the discs had a 1 mm deep, 18 mm dia. milled cradle into which a 16 mm dia. glass disc was placed. 10 ml of coagulator solution activated with Sr^{90} isotope were now poured into the jar. The phosphor was suspended in 10 ml waterglass solution and poured to the coagulator solution. After the settling



time (60 minutes) had elapsed, the liquid was removed from the vessel by suction and the layers of phosphor were desiccated. To determine the original activity 0,5 ml of the solution that had been activated by the Sr^{90} isotope were evaporated from an 18 mm dia. aluminium tray and measured under identical circumstances as the specimens. Knowing the activity of the specimens and the total activity, the amount of Sr in the binder layer could be calculated and was given with respect to 1 g of phosphor.

The measurements took place with an endwindow, 4,5 mg/cm² thick GEIGER—MÜLLER tube.

The thickness of the binder layers was determined from the attenuation of the cathode rays. The loss of energy of the electron rays may be found from the decrease in brightness due to the attenuating effect of the binder layers. The energy losses may be written according to the modified STINCHFIELD formula [6, 7]. The thickness of the attenuating layers may be calculated from the loss of energy of the cathode rays [7]. The experimental cathode-

ray tube described in the authors' previous paper [1] was used for the measurements. The results published are average values for 5 parallel measurements each.

3. Test results

It has been shown in the previous papers that for a given value Kt there is a relationship between the composition of the settling liquid and the screen preparation range, such as that shown in Fig. 1. The circles in the figure denote the settling liquid compositions with which measurements were taken in the case of Zn_2SiO_4 .

The results of the readings have been compiled in Table 1

Table 1

The dependence of the amount of coagulator in the binder layer on the composition of the settling liquid

Sr(NO ₃) ₂ · 4 · H ₂ O g/l	SrO · 10 ⁻⁴ g/g Zn ₂ SiO ₄ with a SiO ₂ concentration of				
	2 g/l	4 g/l	6 g/l	8 g/l	10 g/l
0,05	2,00	—	—	—	—
0,1	3,60	2,98	2,72	4,87	3,28
0,2	12,5	8,88	6,99	9,46	6,84
0,3	30,0	22,60	14,09	20,01	13,43
0,4	62,6	39,6	23,7	32,6	18,8
0,5	k	k	49,32	44,9	24,6
0,6	k	k	k	k	38,22

With a coagulator concentration of 0,05 g/l there is no adhesion between 4—10 g/l SiO₂. The coarse coagulation of the settling liquid commences at the places marked *k*, the coagulate settles on the screen and the results of measurement are thus falsified.

The amount of coagulator in the binder layer thus depends not only on the concentration of coagulator in the settling liquid, but also very pronouncedly on its SiO₂ concentration. For identical SiO₂ concentration the amount of Sr in the binder layer increases with increasing concentrations of coagulator in the settling liquid, right up to coagulation, while for an identical concentration of coagulator it decreases with increasing concentrations of SiO₂ in the settling liquid. This may be clearly seen in Fig. 2, where the results have been graphically displayed.

The horizontal axis represents the concentration of coagulator in the settling liquid, the vertical the concentration of Sr in the binder layer. Each curve is for a different concentration of SiO₂.

The curves of Fig. 2 may be divided into two sections of flat and steep curves. The section of flat curves terminates around 0,2 g/l and the amount of Sr in the binder layer is here hardly dependent on the concentration of SiO_2 in the settling liquid, being approximately identical for identical concentrations of electrolyte. For higher concentrations of coagulator the amount of Sr in the binder layer increases rapidly with constant SiO_2 .

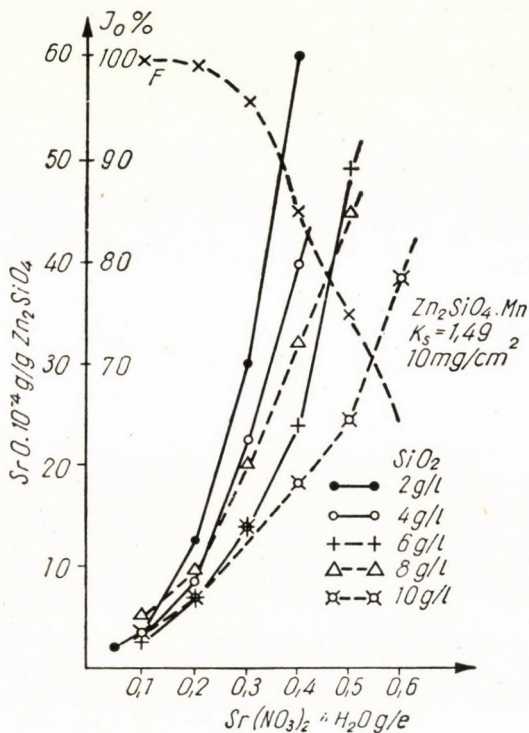


Fig. 2

It has been shown in the previous paper that the surface brightness changes with the concentration of coagulator in the settling liquid according to a similar curve. This has been shown in Fig. 2, marked F. It may be noted that the flat portion of this curve also lasts up to a value of 0,2 g/l and in this part the curves of Fig. 2 serve adequately to explain the empirical fact that the decrease in surface brightness is approximately independent of the SiO_2 concentration of the settling liquid. In the second section, however, the values belonging to the various concentrations of SiO_2 show considerable differences.

In the second series of experiments changes in the thickness of the binder layer and its Sr content as a function of the concentration of coagulator

in the settling liquid were examined, for an SiO_2 concentration of 2 g/l and 3 different values of K_s . The results are contained in Tables 2 and 3.

Table 2

The effect of K_s on the amount of coagulator in the binder layer

ZnS phosphor, 5 mg/cm ² · SiO ₂ 2 g/l			
Sr(NO ₃) ₂ · 4H ₂ O g/l	SrO · 10 ⁻⁴ g/g ZnS		
	$K_s = 1,49$	$K_s = 1,64$	$K_s = 2,0$
0,05	1,37	0,9	—
0,1	2,80	1,8	1,53
0,2	7,11	3,6	3,56
0,3	11,0	5,7	6,35
0,4	27,6	10,0	8,93
0,5	k	15,9	17,25
0,6	k	k	20,14

Table 3

The dependence of the thickness of the binder layer on the concentration of coagulator in the settling liquid for two different values of K_s

ZnS phosphor, 5 mg/cm ² · SiO ₂ 2 g/l		
Sr(NO ₃) ₂ · 4H ₂ O g/l	Thickness of binder layer in Å	
	$K_s = 1,64$	$K_s = 2,00$
0,1	121	99
0,2	169	108
0,3	252	115
0,4	322	260
0,5	404	397

The data of the tables are graphically displayed in Figs. 3 and 4. It may be seen from a comparison of the two figures that the thickness of the binder layer increases with increasing concentrations of coagulator in the settling liquid up to the coagulation point, while the strontium content of the binder layer also increases. If the increase in strontium content were only due to the increase in the thickness of the binder layer, then curves B and C of Figs. 3 and 4, respectively, would be parallel to each other. This, however, is only true for electrolyte concentrations up to about 0,3 g/l, after which the two curves diverge, showing that not only the thickness, but also the composition of the binder layer changes as a function of the composition of the settling liquid.

Discussion of the results

The experimental results may be summed up by stating that the surface brightness of cathode ray-tube screens prepared by the settling process decreases if a binder is used to fix the screen. In the case of strontium nitrate coagulator the reason for this phenomenon is that a binder layer of a certain thickness and composition is formed on the surface of the grains, which

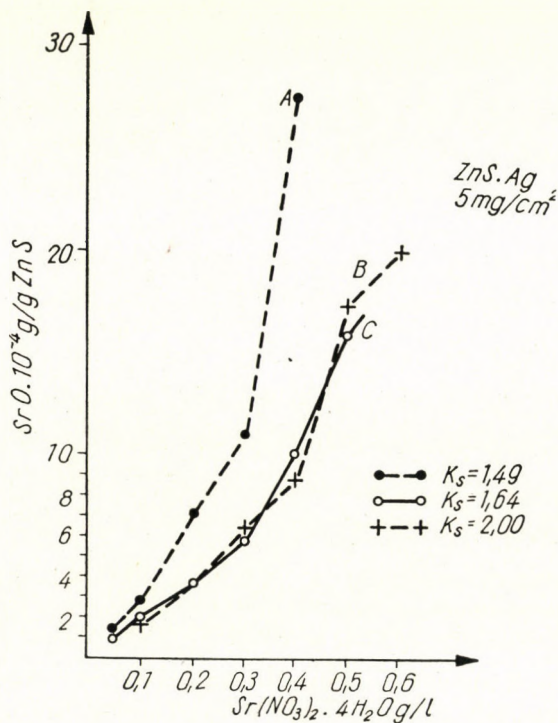


Fig. 3

absorbs part of the energy of the electron rays. A change in the composition of the settling liquid causes a change in the thickness of this binder layer so that the attenuation effect also changes. If the concentration of coagulator in the settling liquid is increased the thickness of the binder layer increases, right up to the coagulation point. At the same time the strontium content of the binder layer also changes as a function of the composition of the settling liquid. In general, all changes in the composition of the settling liquid that tend to shift the composition towards the coagulation point, involve a thickening of the binder layer.

Up to an electrolyte concentration of about 0,2 g/l the thickness and strontium content of the binder layer do not significantly depend on the SiO_2 concentration of the settling liquid. It is also up to about this concentration that the flat section of the curve for surface brightness [1, 2] extends, within which the surface brightness of screens prepared with binders depends only slightly on the concentration of coagulator in the settling liquid and hardly differs from the surface brightness of screens prepared without binders. For greater concentrations of coagulator, the surface brightness of the screen rapidly decreases with increasing coagulator concentrations in the settling

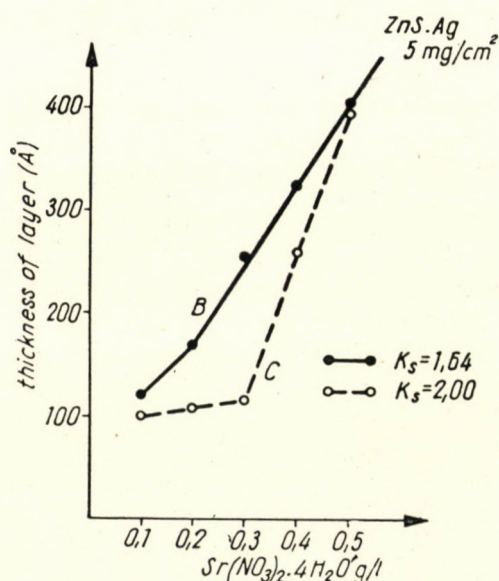


Fig. 4

liquid, and the thickness of the binder layer and the amount of strontium in the binder layer also increase rapidly. A change in the composition of the settling liquid, however, causes change not only in the thickness of the binder layer but also in its composition, depending on the K_s -value of the waterglass used, the composition of the settling liquid, the quality of the phosphor and the thickness of the screen. The thickness of the binder layer and its strontium content increase as K_s decreases. This explains the experimental fact [2] that the attenuation effect decreases with increasing values of K_s for identical concentrations of coagulator.

REFERENCES

1. HANGOS, I.: Acta Technica Hung. XIX, 1—2. 67 (1957).
2. HANGOS, I., POZSGAY, GY.: Acta Techn. Hung. XX, 1—2. (1958).
3. HOPKINSON, R. G.: Journ. I. E. E. 93, IIIA. 779 (1946).
4. BRIL, A., KLASSENS, H. A.: Phil. Res. Rep., 7, 401 (1952).
5. BOER, DE F., EMMENS, H.: Phil. Techn. Rundschau, 16, 9, 272 (1955).
6. SPEAR, W. E.: Proc. Phys. Soc. "B", 68, 991 (1951).
7. GARLICK, G. F. J.: Luminescent Materials, S. 194. Clarendon Press, Oxford (1949).
8. GERGELY, GY., HANGOS, I.: Z. f. angew. Phys. I., 5, 225 (1958).

SUMMARY

The decrease in surface brightness of cathode ray-tube screens settled with strontium nitrate coagulator was examined and its dependence on the thickness and strontium content of the binder layer adsorbed on the grains of phosphor was investigated. The amount of strontium in the binder layer was carried out by a radioactive tracer method and the thickness of the binder layer was determined from the attenuation of the cathode rays. The tests were carried out with $Zn_2SiO_4 \cdot Mn$ and $ZnS-Ag$ phosphors.

The results showed that the decrease in surface brightness depends partly on the thickness of the binder layer and partly on its composition. The thickness and composition of the binder layer adsorbed on the phosphor grains differs as a function of the composition of the settling liquid, depending on the concentration of coagulator and of SiO_2 in the settling liquid, the molar composition of the waterglass used, and the quality of the phosphor.

EINFLUSS DES BINDEMITELS AUF DIE OBERFLÄCHENHELLIGKEIT
VON KATHODENSTRAHLRÖHRENSCHIRMEN
III. DIE WIRKUNG DES KOAGULATORS

I. HANGOS, H. TOPERCZER und GY. POZSGAY

ZUSAMMENFASSUNG

Es wurde die Helligkeits-Abnahme der Leuchtschirme von Kathodenstrahlröhren untersucht, die mit Strontiumnitratkoagulator sedimentiert wurden. Ihr Zusammenhang mit der Dicke der auf die Leuchtstoffkörnchen adsorbierten Bindschicht und die Abhängigkeit vom Strontiumgehalt wurden auch untersucht. Der Strontium-Gehalt der Bindschicht wurde mit radioaktiven Isotopen, ihre Dicke auf Grund der Abbremsung der Kathodenstrahlen bestimmt. Die Untersuchungen erfolgten mit Zn_2SiO_4Mn und $ZnS-Ag$ Leuchtpulvern. Laut den Resultaten hängt die Abnahme der Helligkeit teils von der Dicke der Bindschicht, teils von ihrer Zusammensetzung ab. Die Dicke und die Zusammensetzung der Bindschicht änderten sich mit der Koagulatorenkonzentration der Sedimentationsflüssigkeit, der SiO_2 -Konzentration, der molaren Zusammensetzung des verwendeten Wasserglases und der Qualität des Leuchtstoffes.

L'EFFET DU LIANT SUR LA BRILLANCE DES ÉCRANS DES TUBES CATHODIQUES
III. LE RÔLE DU COAGULATEUR

I. HANGOS, H. TOPERCZER, GY. POZSGAY

RÉSUMÉ

Les auteurs ont examiné la réduction de la brillance des écrans des tubes cathodiques sédimentés par du nitrate de strontium, en fonction de l'épaisseur de la couche de liant adsorbé par les grains de la poudre luminescente, et de la teneur en strontium. Le strontium se trouvant dans la couche de liant à été déterminé par la méthode des traces radioactives, et l'épaisseur

de la couche de liant par le freinage des rayons cathodiques. Les recherches ont porté sur des poudres luminescentes de Zn_2SiO_4Mn et de $ZnS-Ag$. Suivant les résultats, la réduction de la brillance dépend en partie de l'épaisseur de la couche de liant, et en partie de sa composition. En fonction de la composition du liquide de sédimentation, l'épaisseur et la composition de la couche de liant adsorbée par les grains varient avec la concentration en coagulateur et en SiO_2 du liquide, la composition molaire du verre soluble utilisé, et la qualité de la poudre luminescente.

ВЛИЯНИЕ „БИНДЕРА” НА ЯРКОСТИ ЭКРАНОВ КАТОДОЛУЧЕВЫХ ТРУБОК, III. РОЛЬ КОАГУЛЯТОРА

И. ХАНГОШ, Х. ТОПЕРЦЕР и Д. ПОЖГАИ

РЕЗЮМЕ

Исследовалось уменьшение яркости экранов катодно-лучевых трубок, осаждаемых с использованием коагулятора нитрата стронция, и его зависимость от толщины адсорбированного на зерна люминесцентного материала связующего слоя и от содержания нитрата стронция. Количество в связующем слое стронция определяется при помощи радиоактивных меченных атомов, толщина связующего слоя — по торможению катодных лучей. Исследования проводились для случая люминесцентных материалов Zn_2SiO_4Mn и $ZnS-Ag$. Из полученных результатов следует, что снижение яркости зависит частично от толщины связующего слоя, и частично — от его состава. В зависимости от состава осаждающей жидкости получают различную толщину и различный состав связующего слоя, адсорбированного на зерна люминесцентного материала, оно изменяется далее в зависимости от концентрации коагулятора в осаждающей среде и концентрации SiO_2 молярного состава использованного жидкого стекла, и, наконец, качества люминесцентного порошка.

SPECIAL FEATURES OF THE LOADABILITY OF LATHES

B. SZÓKE

[Manuscript received March 2, 1959]

1. Advantages of the logarithmic co-ordinate system and practicability of the Cartesian one as regards lathes

The use of logarithmic co-ordinates in computation charts relating to lathes has been made almost all-dominant by a number of circumstances.

Contrary to many machine tools, lathes are not run at only one number of revolutions; recently their range of speeds comes to a regulability 1 : 200.

Work-pieces with $\frac{1}{2}$ metre diameter are to be made with tolerances expressible in hundredth millimetres (ratio of the orders of magnitude 10^5).

The successive speeds make a geometrical progressive which can be plotted with uniform scale on the logarithmic cross section paper.

Besides, this system of co-ordinates being suitable for plotting *very ample scales*, it makes possible *by straight lines to represent the power products* so much used in the theory of cutting.

The logarithmic co-ordinate system eminently complies with natural laws not only by its suitable representation of the WEBER—FECHNER law (i. e. that the increase of the intensity of any external phenomena according to a geometrical progressive is followed according to an arithmetical progressive by our perception) but also by the fact that differential quantities (e. g. tolerances) which may be incident to technically considerable qualitative variations will increase together with the order of magnitude, so that the consequences of possible reading errors are very much lessened.

In spite of the mentioned significant advantages it must be pointed out that description in the Cartesian co-ordinate system may give a far clearer picture of the operation features of the machine when *investigating specific qualities* of the lathe from a theoretical point of view. Reproducing spatial proportions some relationships can be made lucid, about which obscure notions have been developed, even by groups of experts.

This fact also seems to be supported by our following study.

2. Constitutional diagram of loadability

A well-arranged picture of the lathe's loadability is obtained by representing the main technical characteristics in a spatial co-ordinate system, one

horizontal axis of which means cutting speed v m/min, the other one means the diameters to be turned i. e. the corresponding R mm while the vertical one means the main cutting force P_f kg.

The power in h. p. produced on the faceplate is in the case of a motor of N h. p. and with a mechanical efficiency η of the machine:

$$N\eta = N_f = \frac{P_f v}{4500} \text{ h. p.} \quad (1)$$

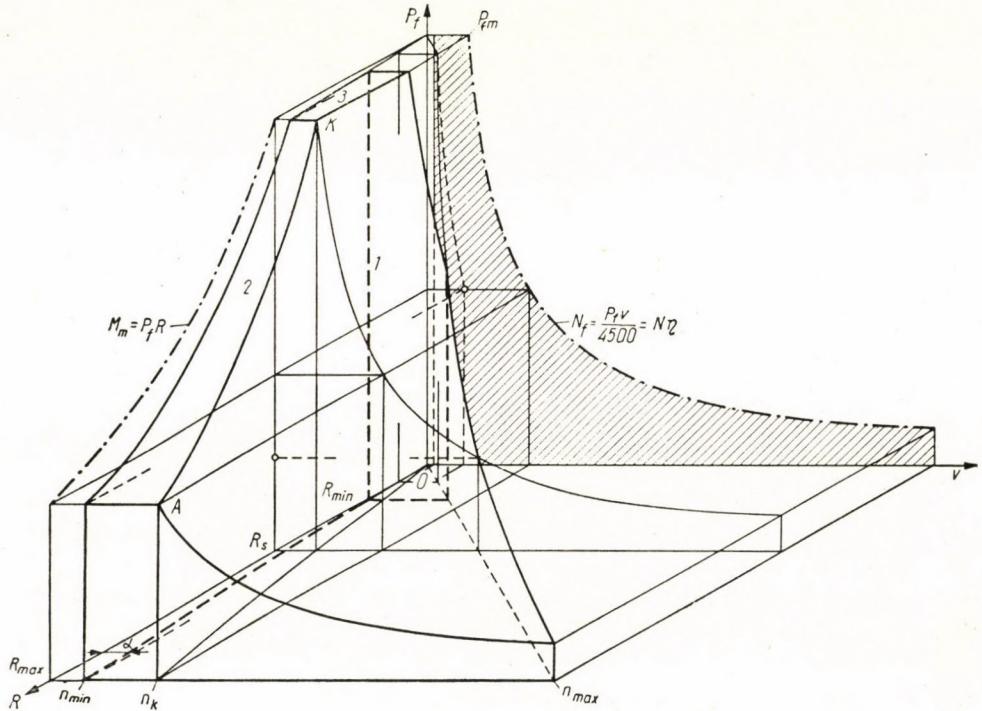


Fig. 1. Constitutional diagram of loadability

It appears as an equilateral hyperbola in the coordinate plane (v, P_f) and in the spatial co-ordinate system it is the leading curve of a round surface whose generatrices are parallel to R (Fig. 1).

The permissible maximum torque to be transmitted by the drive of the lathe is

$$M_m = P_f R = 716\,000 \frac{N\eta}{n_k} \text{ kg mm} \quad (2)$$

It appears as an equilateral hyperbola in the co-ordinate plane (R, P_f) and it is the leading curve of a round surface whose generatrices are parallel to the axe v .

The speeds of the main spindle

$$n = \frac{1000 v \text{ (m/min)}}{2\pi R \text{ (mm)}} = \frac{159 v}{R} = 159 \tan \alpha \quad (3)$$

compose a sequence of planes which are borne by the vertical co-ordinate axe P_f .

The surface of the cylinder on the equilateral hyperbola, meaning the output in h. p., is intersected by the plane of speeds in the form of an equilateral hyperbola, the constant of which is $1/\sin \alpha$ -times bigger than that of the curve N_f appearing in the plane (v, P_f) . The equilateral hyperbolas belonging to the speeds n_{\max} and n_k are reproduced in Fig. 1. The equation of such an equilateral hyperbola is

$$P_f \left(\frac{v}{\sin \alpha} \right) = \frac{4500 N_f}{\sin \alpha} = \frac{C}{\sin \alpha}$$

The equilateral hyperbolas corresponding to the planar sections of the various speeds projected upon the plane (R, P_f) again supply equilateral hyperbolas whose equation is

$$P_f \left(v \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = P_f \left(\frac{v}{\tan \alpha} \right) = \frac{4500}{\tan \alpha} N_f = \frac{C}{\tan \alpha}$$

i. e. taking (3) into consideration

$$P_f v \frac{R}{v} = P_f R = \frac{4500 \times 159}{n} N_f = 716\,000 \frac{N_f}{n} = M \quad (4)$$

The lower is the speed and the angle α of its plane the higher is the torque

$$M = P_f R = 716\,000 \frac{N_f}{n}$$

The cylinder of the highest permissible torque

$$M_m = 716\,000 \frac{N_f}{n_k}$$

intersects the cylinder of the cutting power N_f h. p. in the plane of the critical speed n_k .

The planes of speeds lower than the critical speed intersect the cylinder of the permissible maximum torque M_m also in equilateral hyperbolas which have the following bigger constant

$$\frac{M_m}{\cos \alpha} = P_f \frac{R}{\cos \alpha}$$

The projection of this equilateral hyperbola in the plane (v, P_f) is itself an equilateral hyperbola which, considering (2) and (3) has a constant with the diminished value

$$\begin{aligned} P_f \frac{R \sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{P_f R}{R} v = P_f v = M_m \tan \alpha = \\ &= \frac{716\,000}{159} \frac{N_f}{n_k} n = 4500 \frac{N_f}{n_k} n \end{aligned}$$

i. e.

$$\frac{P_f v}{4500} = N_a = \frac{N_f n}{n_k}$$

Therefore, the power necessary at this lower speed must be also lower than N_f according to

$$N_a = N_f \left(\frac{n}{n_k} \right) < N_f$$

to prevent the transmitting gear from being overloaded by a torque above the permissible one.

The space which represents the lathe's loadability in a spatial co-ordinate system is bordered by the following surfaces:

1. The cylindrical surface of the horse-power output
 $N_f = \text{const.}$
2. The cylindrical surface of torque
 $M_m = \text{const}$ transmittible by the gear.
3. The horizontal plane of the highest permissible main cutting force P_{fm} determined by the dimensions of the main spindle and its bearing support.
4. The plane of the minimum speed n_{\min} .
5. The plane of the maximum speed n_{\max} .
6. The reference plane $P_f = 0$ corresponding to idle running.
7. The plane of the radius R_{\max} of the biggest circle to be turned.
8. The plane of the radius R_{\min} of the smallest circle to be turned.

If we determine the plane of P_{fm} in such a way that at turning the circle with the maximum radius R_s which can revolve above the slide furthermore at turning with maximum speed a workpiece of the smallest

diameter to be clamped should be reached by exerting total power, then the space bounded has 11 angular points.

Should it not be possible to reach P_{fm} when exerting total power at n_{max} then 12 angular points would form.

It is justified to consider the point K of the concurrence of the surfaces N_f , M_m and P_{fm} as a *critical one* among these angular points.

The plane of the critical speed runs through this critical point; the *total cutting power* N_f , *exerting simultaneously the highest permissible torque*, can be employed at this speed.

The plane of the critical cutting speed, by which the total output of the motor can be employed at P_{fm} through this critical point. *The plane of the critical turning radius*, with which *the maximum permissible torque and the maximum permissible main cutting force* occur at the same time,* also runs through the point K .

This characteristic point K corresponds, therefore to that loading condition at which gear, main spindle and driving motor are totally exploited.

Surface 2 depending on the gear, and surface 3 depending on the main spindle, are fixed by the lathe's design features, while surface 1 is fixed by the motor output, supposing an efficiency independent of the speed. It follows from this that by changing the motor output also the location of the critical point K will change. Following statements are valid for these three fields:

Field	Full load on	Not under full load
1	Motor	Gear, main spindle
2	Gear	Motor, main spindle
3	Main spindle	Gear, motor

The cylindrical knee configuration in Fig. 1 gives accurate information about the changes of loadability also for the case of increasing the peak-height or modifying the speed range while simultaneously keeping the gear unchanged.

Taking characteristic data which correspond to inner points of the spatial configuration bounded by these 8 surfaces not a single part of the lathe's will be overloaded while with operational data corresponding to outer points one of them will be damagingly overloaded.

In the following special importance will be gained by the boot-shaped

* In the technical literature only the notion of critical r. p. m. has been mentioned. Nevertheless, the attribute "critical" is due with an equally good reason also to the notions of the cutting speed and of the turning radius resp. diameter as it is apparent from our constitutional diagram.

planar figure which is the projection of the spatial configuration on plane (v, P_f) . Its parts not covered by the spatial configuration are marked by hachure.

The co-ordinate-planes of Fig. 1 are shown spread out in Fig. 2 from which it appears that to any point of the constitutional diagram of loadability, taken in the plane (v, R) we can easily determine the other four characteris-

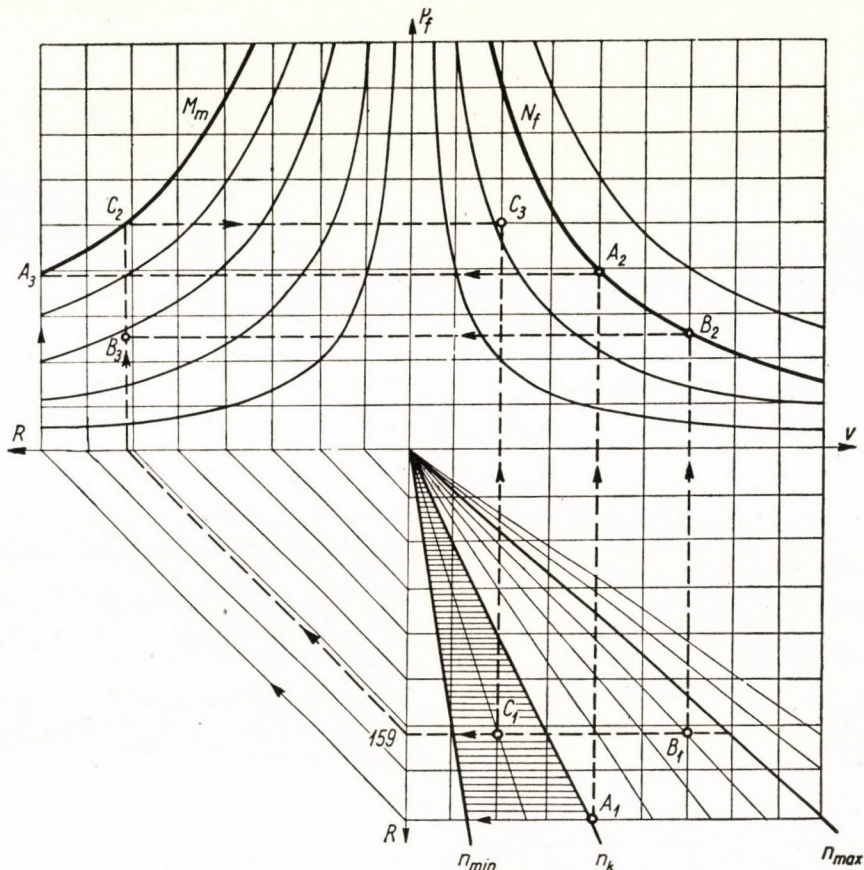


Fig. 2. Spread-out projections of the loadability diagram

tics (n , N_f , P_f , M) only we must mind to start with an adverse flow of arrows in the field under the critical speed as shown by the marking lines to points B_1 , B_2 , B_3 resp. C_1 , C_2 , C_3 .

3. The part of the tool

The question arises of the possibility of employing under real operational conditions the data characterized by the boundary surfaces in the loadability constitutional diagram.

In this respect the notions of the economical cutting speed and of tool life as determined by TAYLOR [1] play a leading part. Connections of these values, to be determined by experiments and calculations [2], to additional operational data are shown in Fig. 3. There are

V = stock-removal

q = chip area

v = cutting speed

$$t = \frac{V}{q \cdot v} = \frac{C}{v} = \text{net cutting time}$$

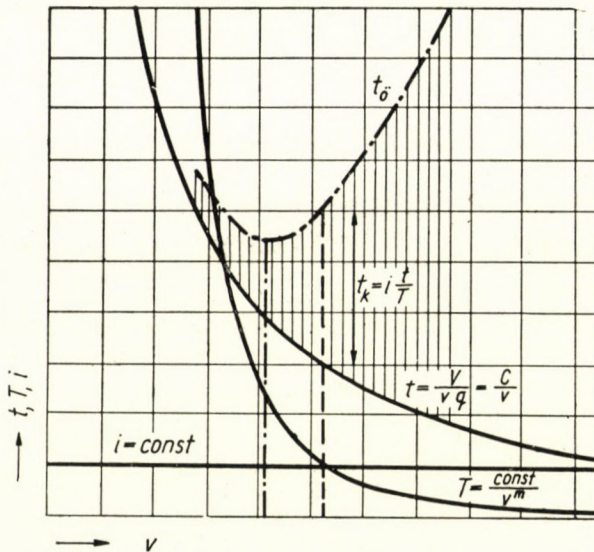


Fig. 3. Construction of the economical cutting speed and tool life

$$T = \frac{\text{const}}{v^m} = \text{tool life}$$

m = exponent depending on tool material

i = time for grinding one tool

$t_k = \frac{t}{T} i$ = waste time for an optional value of v . It is evident, of course,

that as many tool grindings are necessary on using any value of v as many times tool life T is comprised in the period t .

Experimental values of the economical cutting speed corresponding to the lowest point of the total time curve t_0 and related to high-speed steel and a tool life of 60 min are

$$v_{60} = \frac{49,9}{f^{0,25} e^{0,33}} \text{ m/min; when } e \leq 0,25 \quad (5)$$

$$v_{60} = \frac{31,6}{f^{0,25} e^{0,66}} \text{ m/min, when } e > 0,25 \quad (6)$$

where f is depth of cut and e is feed per revolution. For a carbid tool, at a tool life of 150 min

$$v_{150} = \frac{155}{f^{0,18} e^{0,2}} \text{ m/min, when } e \leq 0,3 \quad (7)$$

$$v_{150} = \frac{129}{f^{0,18} e^{0,35}} \text{ m/min, when } e > 0,3 \quad (8)$$

Considering the expression for the main cutting force, obtained from other experiments

$$P_f = Ce^{0,75} f \quad (9)$$

where C is a constant depending on the material to be turned and on the processing method (rough-cutting, finishing) we can write the expression (5) in the following way

$$v_{60} = \frac{49,9}{\left(\frac{P_f}{Ce^{0,75}}\right)^{0,25} e^{0,33}} = \frac{\text{const}}{P_f^{0,25} e^{0,14}}$$

In the case of a *given feed*, but *varying depth of cut*, the main cutting force also varies, and the economical speed is:

$$v_{60} = \frac{C_1}{P_f^{0,25}}$$

i. e.

$$v_{60}^4 P_f = \text{const} \quad (10)$$

For carbide tools it can be deduced with a constant similarly depending on the feed range

$$v_{150}^{5,5} P_f = \text{const} \quad (11)$$

Let us plot in the coordinate plane (v, P_f) e. g. the rough-cutting curve, belonging to the line $N_f = \text{const}$ in Fig. 1, for a carbide tool, according to the expression (11). We can see in Fig. 4 that these two intersecting curves divide the co-ordinate plane bound by the co-ordinate axes v and P_f into 4 fields and following summary notes are valid for these fields.

However, it is not quite sure that point A of the intersection of the two curves marking the simultaneous best utilization of both machine and tool will really be produced in the characteristic diagram of all lathes.

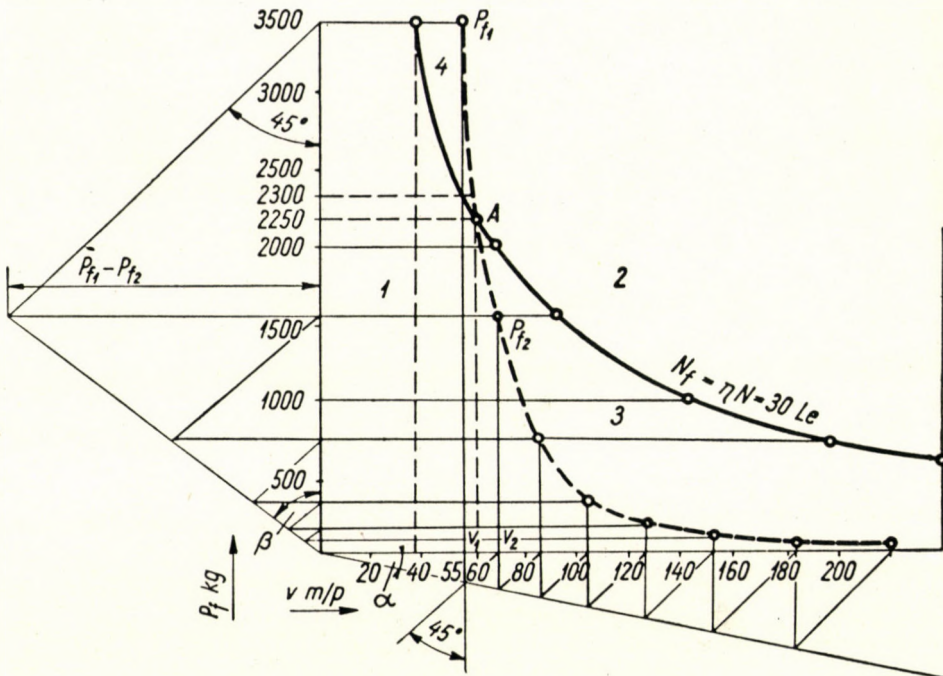


Fig. 4. Constructing the simultaneous utilization of machine and tool by means of Brauer's graphic method of polytrope curve construction

Field	Not fully utilized	Overloaded
1	the machine the tool	
2		the machine the tool
3	the machine	the tool
4	the tool	the machine

Regarding the problem, which kind of lathe may form by employing, beside carbide tools, also rough-cutting with high-speed steel, information is given in Fig. 5. Curve P_{fa} belonging to the high-speed steel can intersect the curve of constant power only at lower value of v than the curve P_{fk} of the carbide tool and the curve of tool life for high-speed steel passing through this point B slopes more gently than that of the carbide tool. This is evident from (10) and (11). Therefore it is certain to intersect the curve of tool life for carbide in a point C . These 3 curves will divide the whole operational field into 7 lots.

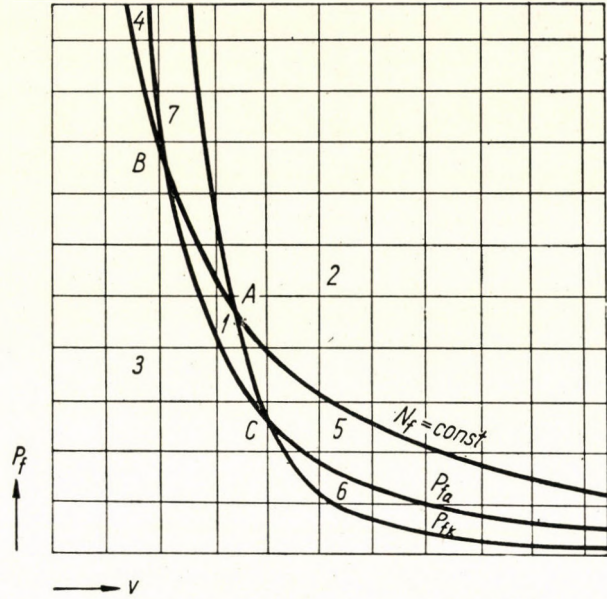


Fig. 5. Character of the operating fields

Field	Not fully utilized	Overloaded
1	the machine the carbide	the high-speed steel
2		the machine the carbide the high-speed steel
3	the machine the carbide the high-speed steel	
4	the high-speed steel the carbide	the machine
5	the machine	the carbide the high-speed steel
6	the machine the high-speed steel	the carbide
7	the carbide	the machine the high-speed steel

In point *B* machine and high-speed tool are both at the same time fully utilized. In point *C* both kinds of tools can be fully utilized economically but the machine is not fully utilized.

The question which kind of characteristic is found in the operational field of a certain machine depends on the fact which field sections fall into the mentioned boot-shape projection in Fig. 1 upon the plane (v, P_f).

It may arouse our interest, from a fully theoretical point of view, which kind of lathes will form on taking into consideration the tool-life curves at various operational conditions and for different kinds of tools.

4. The mosaic-like characteristic field

Tool life and economical cutting speed connected to it depend not only upon tool material, range of feed (roughing, finishing), but also on the fact, whether the cutting edge is cooled or not. Thus the following operational conditions must be taken into consideration.

Tool material	High-speed steel				Carbide			
	Roughing		Finishing		Roughing		Finishing	
Kind of operation								
Cooling	yes	no	yes	no	yes	no	yes	no

This means that on the base of the expressions (10) and (11) the equations of 8 different curves can be determined which differ from each other as regards the value of the constant or the exponent of v , or both. The line of the cutting power N_f must be still considered as the ninth curve, and the question can be put, into how many fields do these nine curves divide the plane (v, P_f). According to the former, it is certain that each field means its special operational conditions.

It has been mentioned in the introduction that the power expressions stated here can be represented by straight lines in the logarithmic co-ordinate system; these straight lines divide the plane of the logarithmic co-ordinate system into as many fields as the corresponding curves do the plane of the Cartesian co-ordinate system. The problem can thus be also put in the following way: into *how many parts* can a plane be divided by n straight lines?

This problem was solved [4] by JACOB STEINER (1796—1863), the greatest genius of geometrical science since APOLLONIUS (about 200—170 B. C.), by means of the following simple train of thought:

The greatest number of parts will be obtained if no parallels are among the straight lines and only two straights pass through any of the intersection points.

The plane is divided into S_n parts by n lines which give n points of intersection on the $(n + 1)$ -st line. These n points of intersection mean that the new straight line passes through $(n + 1)$ fields dividing each of them into two parts. After drawing the $(n + 1)$ -st straight line the number of fields will be therefore:

$$S_{(n+1)} = S_n + (n + 1)$$

Adapting this consideration for

$$n = 0, 1, 2 \dots$$

the following expressions can be put down

$$S_1 = 1 + 1$$

$$S_2 = S_1 + 2$$

$$S_3 = S_2 + 3$$

.....

$$S_n = S_{(n-1)} + n$$

And, after summing up we get

$$S_n = 1 + (1 + 2 + 3 + \dots + n) = 1 + n \frac{n + 1}{2}$$

Thus not more than

$$S_n = \frac{1}{2} (n^2 + n + 2) \quad (12)$$

fields will be obtained. In our case we have 9 straight lines, the number of operational fields is, therefore, not more than

$$S_9 = \frac{1}{2} (9^2 + 9 + 2) = 46 \quad (12a)$$

Disregarding that the eventual identity of exponents m of some tool life curves means a case of parallelity, the whole number of the calculated fields certainly cannot be present within the characteristic configuration plotted in the plane (v, P_f) of an optional lathe. It is nevertheless sure that the order of the number of characteristic fields having different operational

conditions is considerable, and this fact can account for the reason why the best specialists of the branch, real artists of their profession, do adhere to the lathe they had got to know and become used to.

5. Part of the efficiency depending on the speed

In the former chapters we confined ourselves to mean values of efficiency; supposed to be independent of speed. There are, nevertheless, machines the efficiency of which may differ by 30 and even 50% at various speeds. This can be partly explained by their eventual design i. e. driving through as many intermediate shafts at high speeds as at low speeds [7].

The concept according to Fig. 1 facilitates the plotting of a loadability constitutional diagram depending on the design features of any optional machine type.

Let the following notation be introduced:

N_0 = input power of the motor in h. p.

η_0 = efficiency of the electric motor

$N = N_0\eta_0$ = power output at the axle of the motor

η_n = mechanical efficiency valid for an optional speed (marked with the index number of the corresponding speed)

$\eta_{\delta n} = \eta_0 \cdot \eta_n$ = total efficiency at an optional speed

$N_{fn} = N \eta_n = N_0\eta_{\delta n}$ = cutting power measured on the main spindle, at an optional speed.

The characteristic surface of the cutting power ceases to be a cylindrical surface with straight generatrices, though it maintains its quality of being intersected by *any of the planes* of the set of planes of the co-ordinate axe P_f , *belonging to various speeds*, in such equilateral hyperbolas, the projection of which in the plane (v, P_f) means the curve of the power in h. p., that in the plane (R, P_f) means the curve of torque. From the power curves plotted by means of efficiencies at various speeds we can thus also construct backwards the equilateral hyperbolas of the speed planes. This characteristic surface of the power consisting of equilateral hyperbolas as generatrices can be, of course, a continuous surface only in case of having a stepless gear, while the generating curves of this surface in the various speed planes exist in case of a multi-stage speed range only.

a) *The level-line network of P_f and the characteristic direction*

This contorted surface of cutting power exerted on the face-plate is intersected by any horizontal plane corresponding to an optional $P_f = \text{const}$

in waved or zig-zag level lines (Fig. 6) indicating which cutting speeds are co-ordinated to various r.p.m. according to

$$v = \frac{4500}{P_f} N \eta_n = C \eta_n \tag{13}$$

while fully utilizing the disposable output N of the motor at a main cutting force P_f .

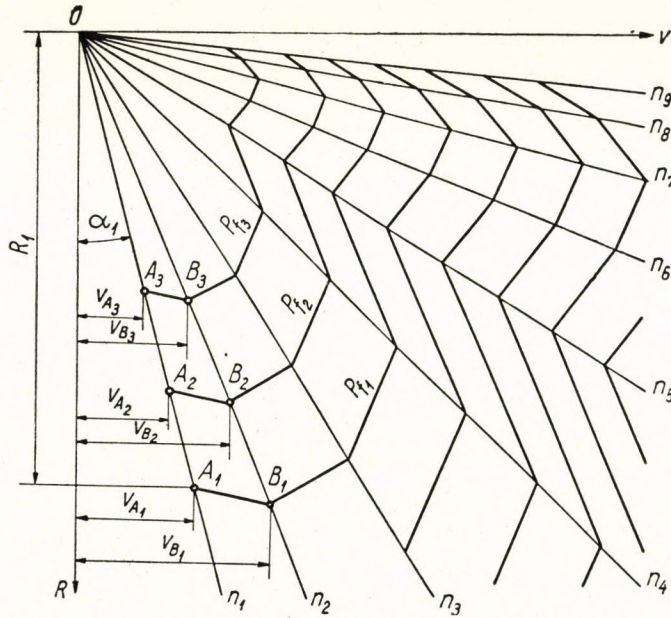


Fig. 6. Network of the level lines

To any value v of the level line, determined in this way belongs according to the expression

$$\frac{v}{R} = \tan a = \frac{n}{159} \tag{3a}$$

the value

$$R = \frac{v}{\tan a} = \frac{159 v}{n} = \frac{159 C \eta_n}{n} \tag{14}$$

The points $A_1, A_2, A_3 \dots$ of the values

$$\begin{aligned} v_{A1} &= \eta_1 C_1 \\ v_{A2} &= \eta_1 C_2 \\ v_{A3} &= \eta_1 C_3 \\ &\dots \end{aligned}$$

belonging to the values of the main cutting force $P_{f_1}, P_{f_2}, P_{f_3} \dots$ are lined-up, according to (13), along the straight of n_1 , while the points $B_1, B_2, B_3 \dots$ of the values

$$v_{B_1} = \eta_2 C_1$$

$$v_{B_2} = \eta_2 C_2$$

$$v_{B_3} = \eta_2 C_3$$

.....

along the straight of n_2 . It follows from the fact that the proportionality factors $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots$ are unvaried valid along the straight of the various speeds that the level line sections produced on the series of straights of speeds are parallel i. e.:

$$A_1 B_1 \parallel A_2 B_2 \parallel A_3 B_3 \dots$$

Therefore, the level line sections belonging to the main cutting force values $P_{f_1}, P_{f_2}, P_{f_3} \dots$, which occur between the straights of consecutive speeds, are of the same proportions, and thus the level lines themselves are similarly related to the point of similitude O .

Indicating the various level lines with the corresponding main cutting force values their singular points can give information concerning the turning radius, t. p. m. and cutting speed at which this force occurs.

This sort of level line which determines the cutting data for an *invariable main cutting force* may be called, in one word "*isofort*". The directions, presenting themselves at the singular points, also give very important information about the constitutional change of loadability and this direction therefore is called "*characteristic direction*". Variations of this direction, depending on loading conditions, are shown in Fig. 7, where power curves are given for three optionally selected r.p.m. n_1, n_2, n_3 . As efficiency can have different changes, it is possible that

$$N_1 \cong N_2 \cong N_3$$

therefore, the *figure* of the isofort can have *six different variations* according to the relative arrangement of points A, B and C . The figure also gives the manner of how to construct the torque values belonging to various points of the isofort.

Marking with φ the angle between the characteristic direction and that of the coordinate R (Fig. 8) we get for the directional tangent, taking the expressions (13) and (14) into consideration:

$$\tan \varphi = \frac{v_2 - v_1}{R_2 - R_1} = \frac{C_1 (\eta_2 - \eta_1)}{C_1 \left(\frac{\eta_2}{\tan \alpha_2} - \frac{\eta_1}{\tan \alpha_1} \right)} = \frac{\tan \alpha_1 \tan \alpha_2 (\eta_2 - \eta_1)}{\eta_2 \tan \alpha_1 - \eta_1 \tan \alpha_2} \quad (15)$$

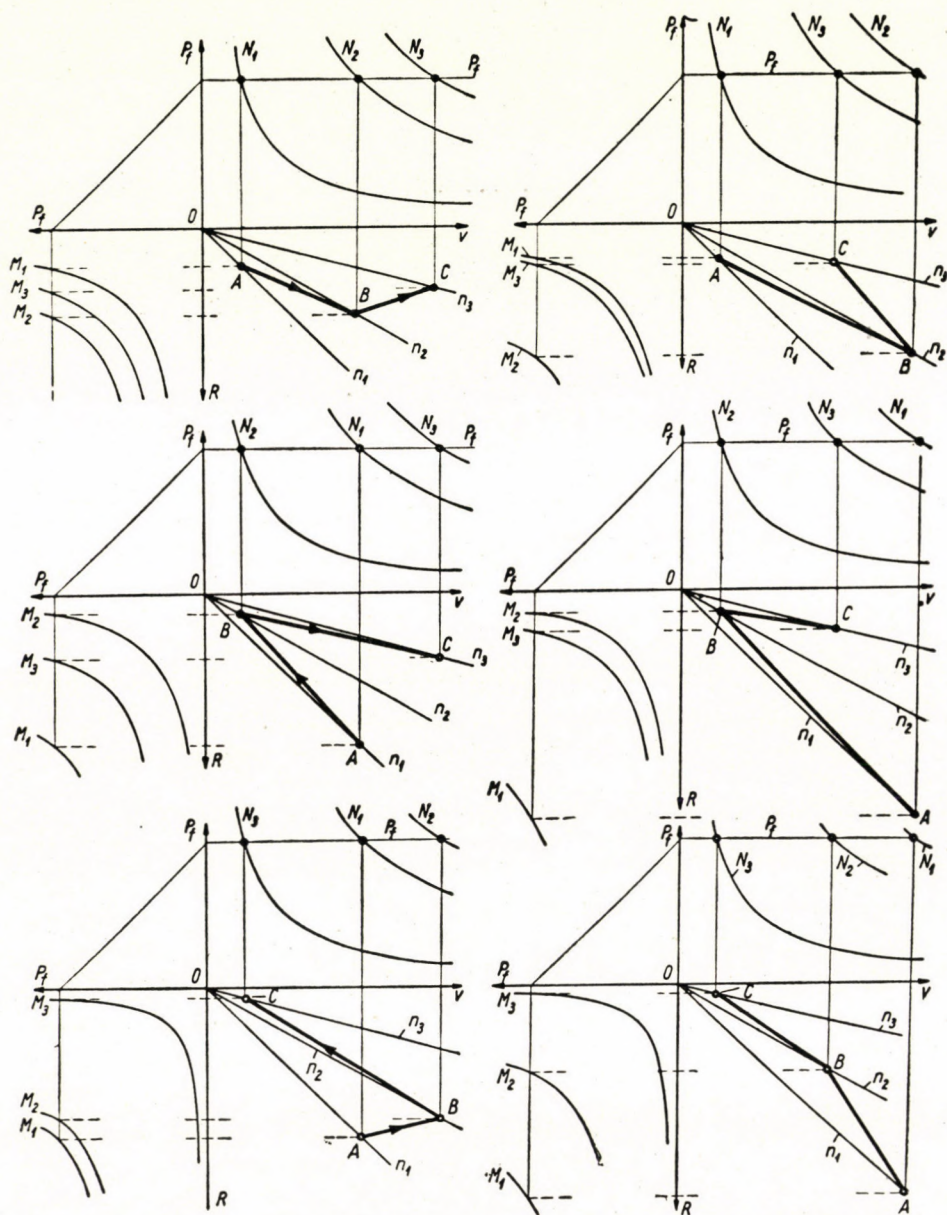


Fig. 7. Various cases of the characteristic direction

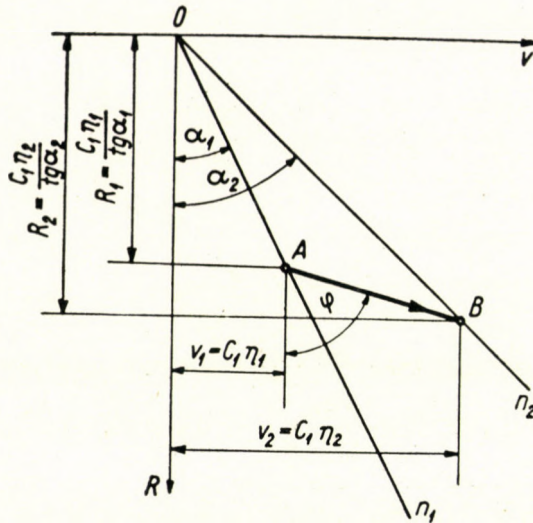


Fig. 8. Construction of the characteristic direction

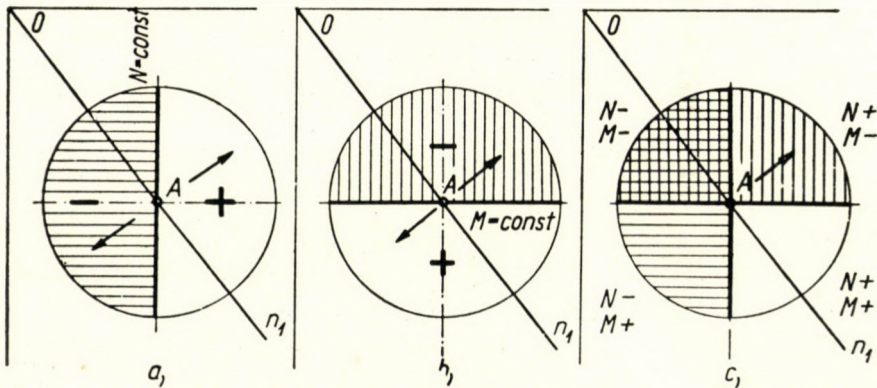


Fig. 8a-c. Explanation of the characteristic direction from the point of view of power and torque

and further utilizing the expression (3a)

$$\tan \varphi = \frac{1}{159} \frac{n_1 n_2 (\eta_2 - \eta_1)}{n_1 \eta_2 - n_2 \eta_1} \tag{15a}$$

If the value of the numerator is zero, then

$$\eta_2 = \eta_1$$

i. e. an isofort parallel to the coordinate R means an invarying cutting power N_f , a direction towards the right means its increase, that towards the left means its decrease.

If the denominator of $\operatorname{tg} \varphi$ is zero i.e. when the direction of the isofort is parallel to the co-ordinate axe v then

$$\frac{\eta_1}{n_1} = \frac{\eta_2}{n_2}$$

$$\frac{\eta_1 N}{n_1} = \frac{\eta_2 N}{n_2}$$

$$\frac{N_{f1}}{n_1} = \frac{N_{f2}}{n_2} = \text{const}$$

which means according to (2) an invariable torque as is also apparent from Fig. 7. An upward-directed isofort points to the decrease of the torque, a downward-directed one to its increase.

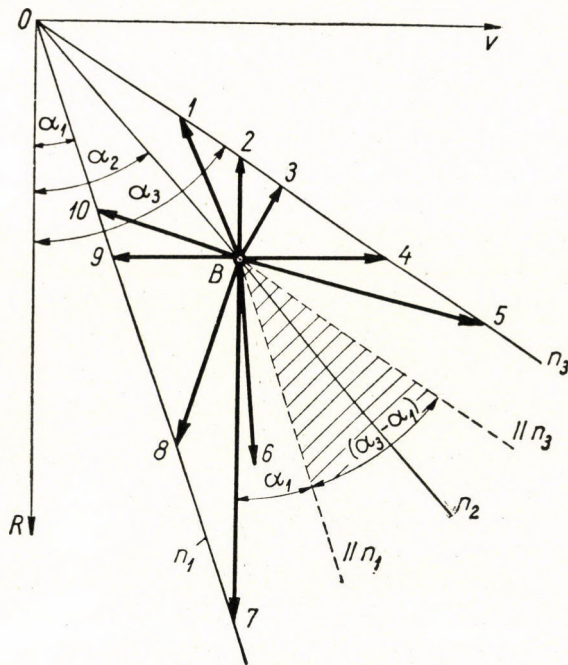


Fig. 9. Explanation of the characteristic direction in the *Cartesian* co-ordinate system

Fig. 8a shows that the characteristic direction starting to the right from the vertical, through any point A of the straight of the r.p.m. n_1 means the increase of the cutting power, while the left-directed level line means its decrease. Fig. 8b illustrates that in case of a characteristic direction going downward from the horizontal the torque increases, in case of an upward one it decreases. From Fig. 8c it is apparent e. g. that in case of a character-

istic direction going upward to the right the torque decreases with a simultaneous increase of power.

The possibility of the characteristic direction taking any values between the angles from 0 to 360 grades exists only in case of infinitely variable gears. In a multi-stage speed range a dead area will be formed which the characteristic direction cannot ever enter into under any condition. This is shown in Fig. 9 where the isofort directions starting from point *B* of the straight of speed n_2 are plotted against the straights of speed $n_1 < n_2$ and $n_3 > n_2$. The dead area is bounded by the straights starting from point *B* and parallel to n_1 and n_3 . An explanation of the 10 different characteristic directions, as sketched in Fig. 9, is summarized in the following table.

Explanation of the characteristic direction according to Fig. 9

Index number	Speed	Cutting power	Torque
1	increasing	diminishing	diminishing
2	„	invariable	„
3	„	increasing	„
4	„	„	invariable
5	„	„	increasing
($a_3 - a_1$)	dead area	dead area	dead area
6	diminishing	increasing	increasing
7	„	invariable	„
8	„	diminishing	„
9	„	„	invariable
10	„	„	diminishing

b) Critical values in case of efficiency varying with the speed and the reduced power

In case of a mean mechanical efficiency η supposed in Chapter 2 as being valid for all speeds, three surfaces concur in the critical point *K* of the loadability constitutional diagram: the hyperbolic cylinder representing the normal output of the electric motor, the hyperbolic cylinder corresponding to the highest permissible torque of the gear and the horizontal plane of the permissible main cutting force P_{fm} .

As mentioned in the introductory part of this chapter we may obtain, owing to efficiency variations depending on the r.p.m., different powers at different speeds, as is shown in Fig. 10 in the projections of the loadability constitutional diagram and in Fig. 10a in an axonometric illustration.

From the point of view of having the lathe delimited, it is important that the conjoint values P_f , n , R and v fixed by different points of the level

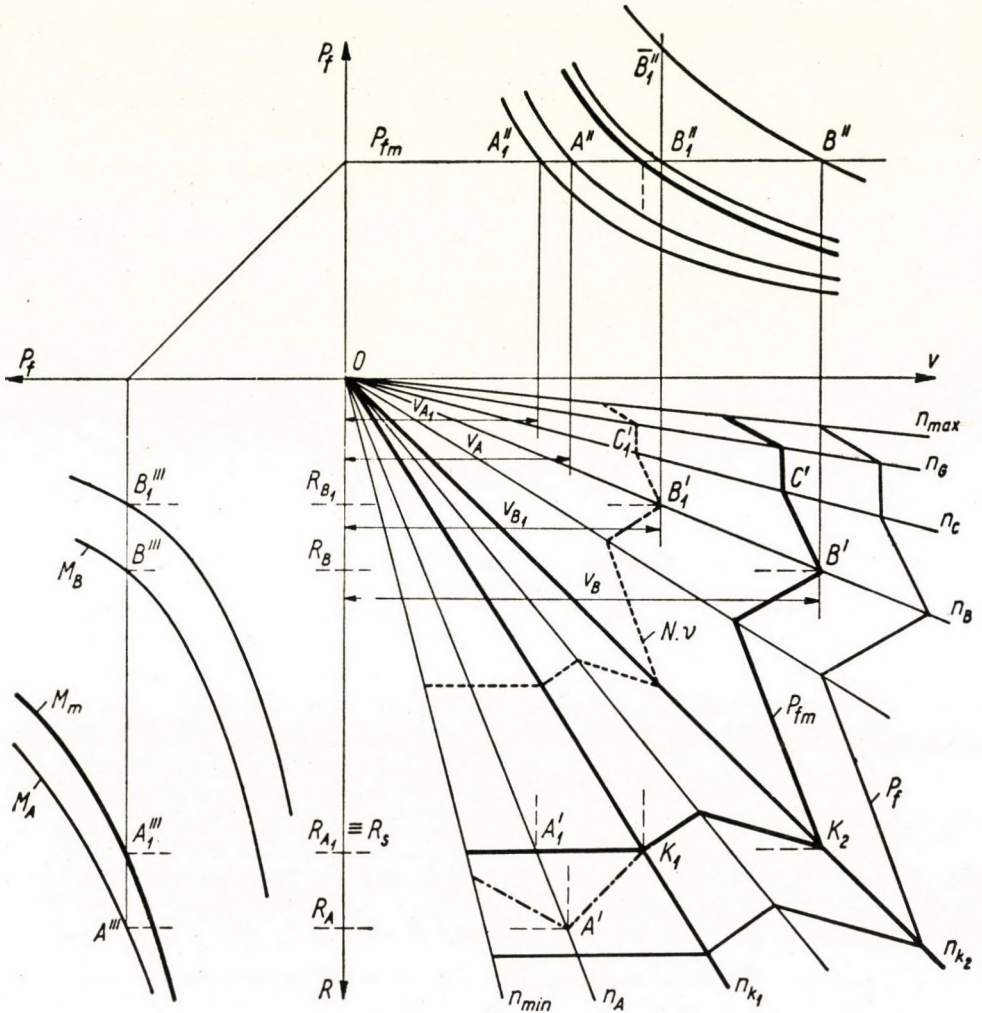


Fig. 10. Construction of critical values and of reduced power

lines, should never demand a power higher than the normal output N of the electric motor; to avoid the motor being overloaded. This condition is, of course, automatically answered by the level lines, as surely this normal output N was the basis of the calculation in expression (13) while computing the conjoint values of P_f , n and v .

At the points, wherein the horizontal plane of the permissible main cutting force P_{fm} intersects the power curves in the planes of speeds, both main spindle and electric motor are fully exploited. To these points *critical cutting speeds* are attached which must not be exceeded at any given n and

radius will be

$$R_k = \frac{M_m}{P_{fm}}$$

The critical radius, respectively, in case of appropriate dimensioning, the horizontal index line of R_s intersects the *critical r.p.m.* from the isofort of P_{fm} which will be, of course, lower than that calculable without considering the efficiency. It can follow from the efficiency varying with the speed that not only one but *several critical speeds* may exist related to the same part of the gear drive. In Fig. 10 the horizontal of R_s intersects the isofort line P_{fm} at point K_1 and passes through its point K_2 . The possibility of the existence of several critical speeds is still more apparent in Fig. 10a.

Between points K_1 and K_2 of Fig. 10, along the isofort P_{fm} , the motor is allowed to run with full power N . Should, nevertheless, the level line of P_{fm} run, in the field of critical speeds, across that part of the plane divided by the horizontal line R_s , which does not contain the starting-point of co-ordinates O , the power of the motor must be reduced in such a way that at value P_{fm} the part of the level line to the left from the point K_1 should be continued along the horizontal through R_s , i. e. ensuring the constant torque.

That part of the isofort P_{fm} which marks the *critical turning radii* fall into the field of critical speeds. If this part of the isofort falls from the horizontal of R_s to the origin of co-ordinate system, then only the main spindle runs under full load, while the gear drive does not. In the case, should it be required to "straighten" the isofort P_{fm} in the field of critical speeds by means of reducing the power attached to the various r.p.m., only the R_s belonging to this straight is to be looked upon as a critical turning radius. However, as has been mentioned, in this case both gear drive and main spindle run simultaneously under full load.

The method for constructing the *power reduction upon the permissible torque* M_m can be clearly seen in Fig. 10. Let any optional r.p.m. be marked by n_A and the mechanical efficiency belonging to it by η_A . The equilateral hyperbola of the speed plane with the track line n_A will pass, considering the efficiency which belongs to this r.p.m., through the spatial point A of the horizontal plane of P_{fm} . The projection of this equilateral hyperbola upon the plane (v, P_f) across point A'' is the h. p. curve, that upon the plane (R, P_f) across point A''' is the torque curve.

As the equilateral hyperbola of the torque, passing through point A''' , points according to

$$P_{fm} \cdot R_A > P_{fm} \cdot R_s = M_m$$

a torque which is higher than the permissible M_m , we reduce the power upon the equilateral hyperbola which is intersected by the plane of r.p.m. from

the hyperbolic cylinder with generatrix M_m . This cylinder of torque, further the projecting plane of speed n_A and the horizontal plane of $P_{fm} = \text{const.}$ define a point A_1 , through the projection A_1'' of which the h. p. curve of the reduced power will pass.

At non-reduced power

$$v_A P_{fm} = 4500 \eta_A N = C$$

At reduced power N_r

$$v_{A1} P_{fm} = 4500 \eta_A N_r = C_1$$

or

$$N : N_r = v_A : v_{A1} = OA' : OA_1'' = R_A : R_{A1}$$

and thus

$$N_r = N \frac{OA_1''}{OA'} = N \frac{v_{A1}}{v_A} = N\nu$$

where the factor of reduction is

$$\nu = \frac{v_{A1}}{v_A} = \frac{OA_1''}{OA'}$$

It appears from the construction that a reduction factor differing according to varying efficiency is attached to each r.p.m. within the range of the critical r.p.m.

A thoroughly different reduction of the motor power is needed when aiming to prevent damages of the main spindle and of the bearing support, in case of small turning diameters and in taking a too big chip area.

If we wish to utilize the full motor power at a turning radius R_{B1} and at some r.p.m. M_B , we may raise the main cutting power as high as point $\overline{B_1''}$ without reaching the permissible torque even when taking such a big chip area. The power of the motor must be, therefore, reduced to such a degree at which the h. p. curve will pass through point B_1'' of the horizontal of P_{fm}'' .

To simplify our discussion we suppose the efficiency valid at a certain r.p.m. to be independent of the loading

$$v_B P_{fm} = 4500 \eta_B N = C$$

$$v_{B1} P_{fm} = 4500 \eta_B N_r = C_r$$

whence

$$N : N_r = v_B : v_{B1} = OB' : OB_1'' = \nu$$

As long as the power of the motor

$$N_r = N\nu = N \frac{v_{B1}}{v_B} = N \frac{OB_1''}{OB'}$$

and together with it the factor ν remains constant, we can write for any r.p.m. n_g marked with G

$$(v_G \nu) P_{fm} = 4500 \eta_G N \nu = C \nu \quad (17)$$

At an identical reduction factor ν and supposing a reduced power of the motor $N_r = N \nu$ there will appear in the layer P_{fm} the reduced power

$$\text{for the speed } n_B \quad N_{rB} = N \eta_B \frac{OB'_1}{OB'} = N \eta_B \nu$$

$$\text{for the speed } n_C \quad N_{rC} = N \eta_C \frac{OC'_1}{OC'} = N \eta_C \nu$$

This means that, as long as the output of the motors is $N \nu$, the equilateral hyperbolas computed by using the efficiencies valid in the planes of the various speeds will be intersected by the plane of layer P_{fm} in such points

$$A_1, B_1, C_1 \dots \dots \dots$$

the level lines of which run parallel to the isoforts determined before.

Fig. 10a also shows that the plane of the *isofort* lies higher than P_{fm} , in the horizontal plane through point \bar{B}_1 when the workpiece of the radius R_{B1} is cut e. g. at an optional r.p.m. n_B with the normal power of the motor. This isofort is to be projected perpendicularly upon the horizontal plane of P_{fm} to get in the plane of n_B and at a turning radius R_{B1} in the plane of P_{fm} that point B_1 through which the hyperbola of the reduced h. p. is running.

The reduction factor

$$\nu = \frac{OB'_1}{OB'} = \frac{OC'_1}{OC'} = \dots$$

may also be called the *load coefficient* of the electric motor, as it clearly indicates in what proportion of the normal power the electric motor may be loaded at some turning radius R_{B1} and r. p. m. n_B .

The level lines of power grades which correspond to an identical load-coefficient of the motor but are different according to r. p. m. because of the varying efficiency marked with a dashed line and they may be called *isoeffects* (or simply *isofects*).

For the isofort line of any optional main cutting force P_f , according to the proportion of radii, that load coefficient ν may be determined at which the main cutting force rests at the value P supposing a given value of R or v .

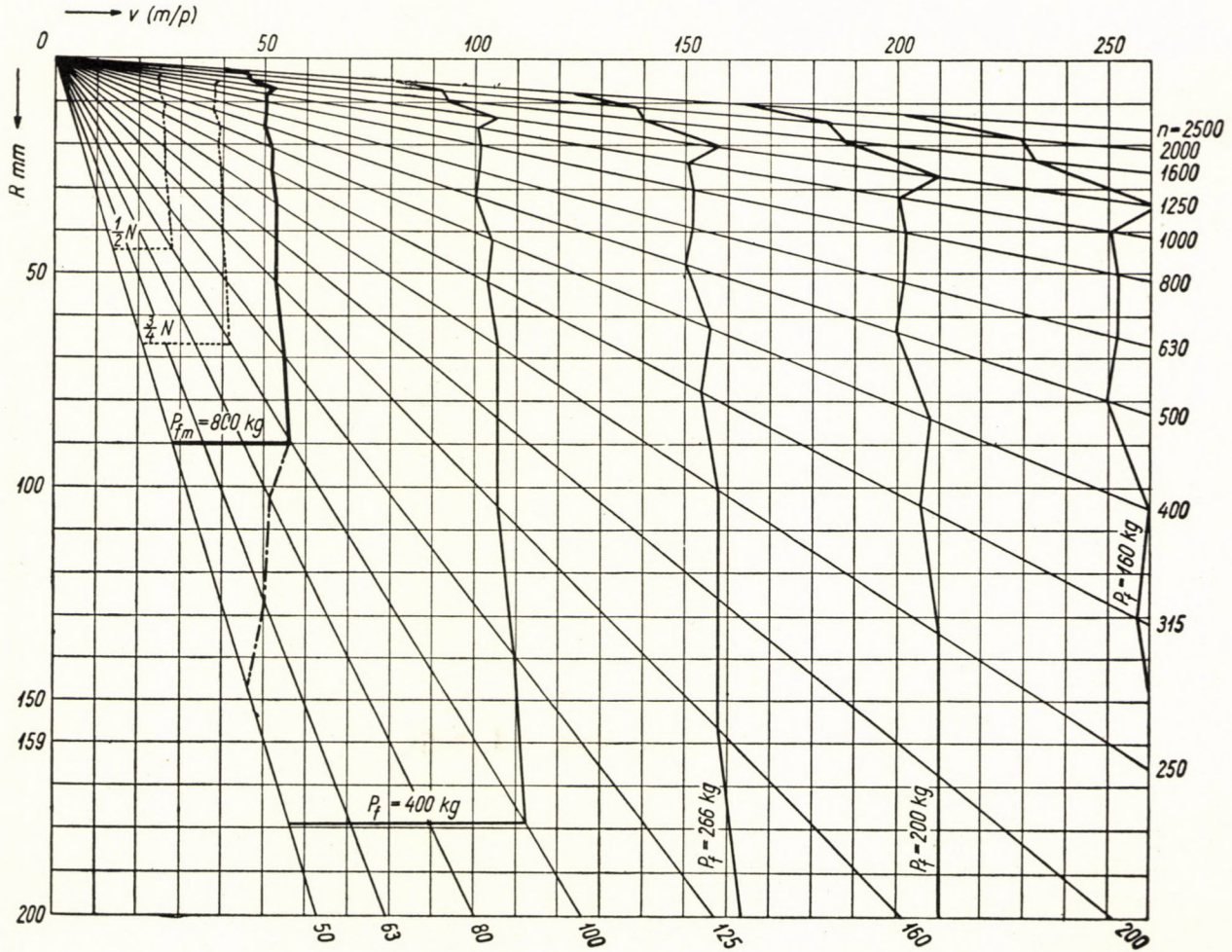


Fig. 11. Practical example of the level line network

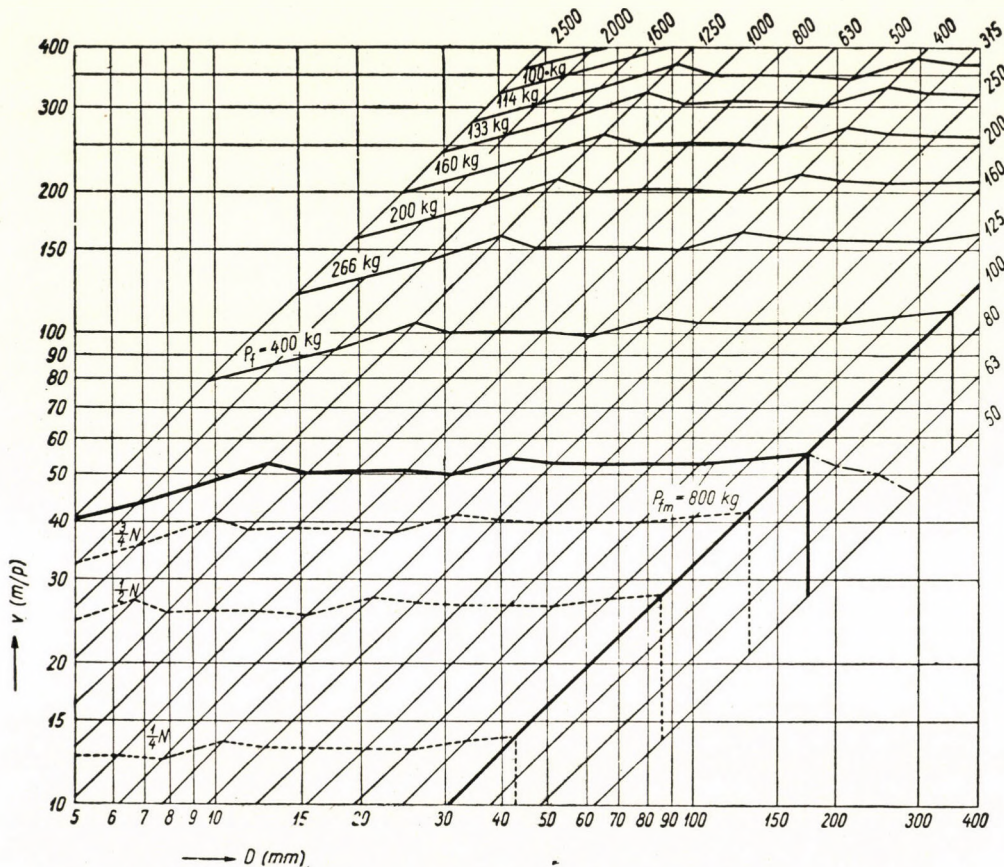


Fig. 12. Network of level lines in the logarithmic co-ordinate system

c) *Practical example*

At any lathe with the peak-height of 200 mm there are

input power	$N_{\delta} = 15,5 \text{ h. p.}$
highest permissible torque	$M_m = 80 \text{ kgm}$
„ „ main cutting force	$P_{fm} = 800 \text{ kg}$

The v and R values calculated according to the expressions (13) and (14) from the total efficiency measured at the singular r. p. m. are plotted along the speed straight lines in Fig. 11. The level line of the isofort $P_{fm} = 800 \text{ kg}$ intersects the line of r. p. m. $n = 100$ at $R = 90 \text{ mm}$. At this point the torque is

$$800 \text{ kg} \cdot 0.09 \text{ m} = 72 \text{ mkg}$$

The point of intersection on the line of r. p. m. $n = 80$ should, however, give, a torque higher than the permissible one.

The network of level lines is plotted in Fig. 12. in the usual logarithmic co-ordinate system, depending on the turning diameter D and the cutting speed v .

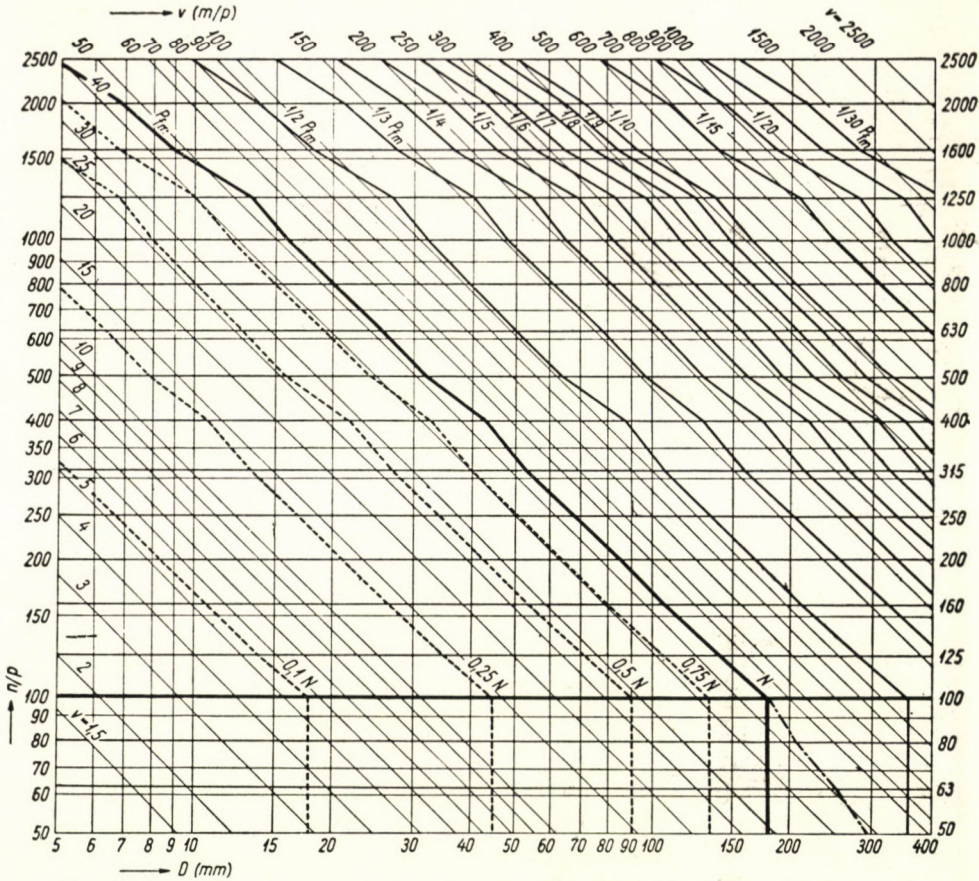


Fig. 13. Network of level lines in the transformed logarithmic co-ordinate system

The grade of isofort displacement in the direction of r. p. m. lines with a slope of 45° will be

$$\sqrt{2} \log 2, \sqrt{2} \log 3 \dots$$

and that of the isofects

$$\sqrt{2} (\log 10 - \log 7.5), \sqrt{2} (\log 20 - \log 5) \dots$$

The disadvantage of this usual logarithmic co-ordinate system consists of containing much disused area and of the diameter index lines not perpendicular to the speed index lines. To prevent these disadvantages author has transformed the service boards of the machine tools designed in 1940, namely into the co-ordinate system shown in Fig. 13 in which the plane of the board contains no disused area and also can be drawn up in one line with the horizontal index lines of r. p. m. the respective lever position.

In this system also the factor $\sqrt{2}$ is not needed in connection with the displacement of the isoforts and isofects.

Comparing Fig. 9 and Fig. 13 some statements can be made also in this logarithmic co-ordinate system, as regards the characteristic direction of the isofort. However, the direction of the transformed axe D is actually parallel to the sloping straights v and its scale is $\sqrt{2}$ -times

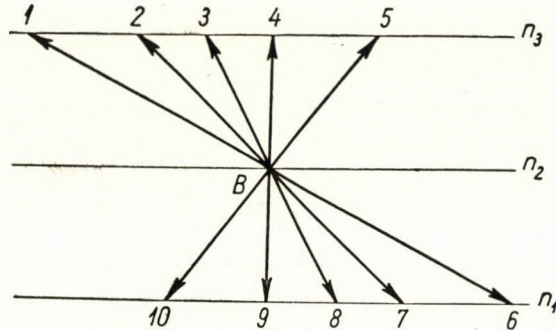


Fig. 14. Explanation of the characteristic direction in the transformed co-ordinate system

bigger must be taken into consideration. Nevertheless, this construction is not necessary as the vertical index lines D run through the identical index numbers of the horizontal scale.

The explanation of the characteristic direction in this transformed logarithmic co-ordinate system is given in Fig. 14. The directions which have the same sense as those in Fig. 9 have the same index number as in Fig. 9.

REFERENCES

1. TAYLOR, FRED, W.: "On the art of cutting metals." Philadelphia.
2. DR. KAZINCZY, L.: Investigation on the role of tool economical engineering manufacture. (Publication of the Institute for engineer's continuation course. Booklet G 69. Budapest 1945.)
3. DR. HORNING, A.: Present state of the theory of cutting. (Machine tool congress 1952. Publications of the Hungarian Academy of Science, Institute for Technical Science, Vol. XI., booklet 3—4, 1954.)
4. STEINER, J.: Einige Gesetze über die Teilung der Ebene und des Raumes (Crelles Journal Bd. I). The same is published by HEINRICH DÖRRIE: Triumph der Mathematik. Ferdinand Hirt in Breslau, 1933, further in Jacob Steiner's Gesammelte Werke I. Band S. 77. Herausgegeben von K. Weierstrass Berlin G. Reimer 1881.
5. SZŐKE, B.: Ideas in the sphere of lathe delimitation. (Edited by the Trade Union of Hungarian Iron- and Metal-workers and by the Ministerium for Metallurgy and Engineering.) Budapest 1959.
6. SZŐKE, B.: Loadability of the lathe. — The Machine Volume 1955. No. 10. Budapest.
7. SZŐKE, B.: Machine tools from the point of view of power economy. The Machine Vol. 1953. No. 8. p. 365. Budapest.

SUMMARY

In connection with nomograms for lathes a special service is rendered by using the logarithmic co-ordinate system. However, for plotting the constitutional diagram of loadability it is suitable and forcibly descriptive to use the spatial Cartesian co-ordinate system. With the system of axes (v , P_f , R) i. e. cutting speed, main cutting force, turning radius, we obtain such a perspicuous constitutional diagram of loadability which immediately shows three other technical data i. e. the values of cutting power (N_f h. p.), torque (M) and r.p.m. (n). The constitutional diagram is a spatial configuration which is bound by the elbow of two perpendicular hyperbolic cylinders and by four vertical and two horizontal planes. From the critical point K of this configuration three lines start out which bound the areas corresponding to the full load on the motor, the gear and the main spindle.

On the basis of plotting the curve of tool life in the co-ordinate plane (v , P_f) it can be stated that in case of using only one type of tool we obtain four fields of different character as regards utilization of tool and machine, while in the case of two kinds of tool (high-speed steel and carbide) we obtain 7 fields. Taking also the into consideration feed ranges of roughing,

finishing and cooling, 46 different fields can originate at the very most and only a fraction of them can fall within the characteristic figure of a certain lathe. This may be the explanation for the fact why just professional bigwigs who do their work with the perfection of an artist, stick to the machine which they have come to know perfectly and are accustomed to.

In a special chapter the problem was investigated as to how the constitutional diagram is influenced by the efficiency varying with the speed. We arrived at the conclusion that the level lines of constant cutting power, the *isoforts* are not only including the related technological data but it is also possible to conclude from their direction to constitutional variations of the load. From the point of view of sparing the machine also the *isofects*, characterizing the constant load coefficient of the motor, have an important part.

In connection with a practical example author shows the network of level lines in a transformed logarithmic co-ordinate system, too.

CHARAKTERISTISCHE BEZIEHUNGEN DER BELASTBARKEIT DER DREHBANK

B. SZÖKE

ZUSAMMENFASSUNG

Das logarithmische Koordinatensystem leistet ausgezeichnete Dienste bei den Nomoogrammen für Arbeiten an der Drehbank, jedoch es ist zweckmäßig und veranschaulichend, bei der Aufzeichnung des Zustandsdiagrammes der Belastbarkeit das Descartes'sche Raumkoordinatensystem zu benutzen. In dem Achsensystem (v, P_f, R) d. h. Schnittgeschwindigkeit, Hauptschnittdruck, Drehhalbmesser wird man ein so leicht übersichtbares Zustandsdiagramm der Belastbarkeit erhalten, welches noch drei weitere Betriebsdaten unmittelbar veranschaulichen kann, und zwar die Werte für Zerspannungsleistung ($N_f PS$), Drehmoment (M) und Drehzahl (n). Das Zustandsdiagramm ist eine räumliche Konfiguration, welche durch das Knie von zwei senkrechten hyperbolischen Zylinder sowie durch vier vertikalen und zwei horizontalen Ebenen begrenzt ist. Von dem kritischen Punkt K der Konfiguration gehen die drei Linien aus, welche die Vollastfelder des Motors, des Getriebes und der Hauptspindel voneinander begrenzen.

Nach Aufzeichnung der Kurve der Lebensdauer des Drehstahles in der Koordinatenebene (v, P_f) kann man feststellen, daß man 4 Felder von verschiedenem Charakter bezüglich der Ausnützung der Maschine und des Drehstahles bekommt, wenn nur eine Art des Drehstahles benützt wird, dagegen im Falle von zwei Arten des Drehstahles (Schnellstahl, Hartmetall) bekommt man 7 Felder. Wenn auch die Gebiete von Schruppen und Schlichten, sowie die Kühlung in Betracht gezogen werden, können höchstens 46 Betriebszonen entstehen, von welchen nur ein Teil in die Charakteristik einer gewissen Drehbank fallen kann. Dies kann auch die Tatsache erklären, warum gerade die besten Fachleute, die mit künstlerischer Vollendung arbeiten, ihrer erprobten und angewöhnten Maschine zugetan sind.

In einem speziellen Abschnitt wurde die Frage untersucht, wie ein mit der Drehzahl sich verändernder Wirkungsgrad das Zustandsdiagramm beeinflusst. Es konnte festgestellt werden, daß die Niveaulinien der konstanten Schnittleistung, die *Isoforten*, nicht nur die zusammenhängenden technologischen Daten in sich enthalten, sondern können wertvolle Folgerungen auch aus ihrer Richtung bezüglich der Zustandsänderungen der Belastung gezogen werden. Hinsichtlich Schonung der Maschine spielen auch die *Isofekten*, welche durch eine stetige Belastung des Motors charakterisiert sind, eine wichtige Rolle.

In Verbindung mit einem praktischen Beispiel hat der Verfasser das Netz der Niveaulinien auch in einem transformierten logarithmischen Koordinatensystem dargestellt.

QUELQUES CARACTÉRISTIQUES DE LA CAPACITÉ DE CHARGE DES TOURS

B. SZÖKE

RÉSUMÉ

Le système de coordonnées logarithmiques donne des résultats excellents dans les nomogrammes relatifs aux travaux de tour. Cependant, le système de coordonnées de Descartes reste pratique, et donne des résultats visuels dans les diagrammes d'état de la capacité de charge. Dans le système de coordonnées formé par la vitesse de coupe, la force de coupe

principale et le rayon de tournage (v, P_f, R), on obtient une surface caractérisant la capacité de charge de façon bien visible, et qui permet de se rendre compte directement de la valeur de trois données relatives au fonctionnement, à savoir la puissance de coupe ($N_f CV$), le couple tournant (M) et le nombre de tours par minute (n). Le diagramme d'état est une configuration située dans l'espace, limitée par le coude de deux cylindres hyperboliques perpendiculaires l'un à l'autre, ainsi que par quatre plans verticaux et deux plans horizontaux. Du point critique K de la configuration, partent les trois lignes qui délimitent les surfaces correspondant à la pleine charge du moteur, du dispositif d'entraînement et de la broche principale.

La courbe de durée de vie de l'outil de tour, dessinée dans le plan de coordonnées (v, P_f) permet d'établir que dans le cas d'une seule sorte d'outil, on obtient quatre champs de caractères différents, relatifs au degré d'utilisation de la machine et de l'outil, tandis que dans le cas de deux sortes d'outils (acier rapide et carbide), on obtient 7 champs. Si l'on tient aussi compte du cas de l'avance pour le dégrossissage et pour le polissage, il ne peut se produire que 46 champs d'utilisation au maximum, dont une partie seulement peut être réalisée par un tour donné. Ceci explique aussi, pourquoi justement les meilleurs ouvriers tourneurs, possédant à fond leur métier, s'attachent aux machines qu'ils connaissent bien, et auxquelles ils sont habitués.

On a examiné dans un chapitre à part la question de savoir comment le rendement, variant avec le nombre de tours, influe sur le diagramme d'état. On est arrivé à la conclusion que les courbes de niveau construites pour des puissances de coupe identiques, c'est-à-dire les *isofortes* contiennent non seulement les données techniques en connexion, mais permettent aussi de déduire, par leur direction, des renseignements essentiels relatifs aux changements d'état de la charge. Au point de vue du ménagement de la machine, les *isofectes* caractérisant les degrés de charge maintenus identiques du moteur, jouent un rôle important.

À propos d'un exemple pratique, l'auteur présente le réseau de courbes de niveau dans un système de coordonnées logarithmiques transformées.

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРНЫЕ ЧЕРТЫ НАГРУЖАЕМОСТИ ТОКАРНОГО СТАНКА

Б. СЭКЕ

РЕЗЮМЕ

Для номограмм токарного станка очень хорошо подходят логарифмические системы координат, однако для отображения эпюры нагружаемости целесообразно использовать систему пространственных координат Декарта, которые дают необходимую наглядность. В системе осей (v, P_f, R) скорости резания, силы резания и радиуса точения получается такая хорошо обозримая эпюра для нагружаемости, которая непосредственно иллюстрирует еще три дополнительных данных работы, значения а именно мощности резания ($N_f л. С.$), крутящего момента (M) и числа оборотов (n). Эпюра представляет собою такую пространственную форму, которая ограничивается двумя перпендикулярными друг к другу гиперболическими цилиндрами, четырьмя вертикальными и двумя горизонтальными плоскостями. Из K критической точки формы исходят три линии, которые ограничивают территории, соответствующие полной нагрузке мотора, приводного механизма и главного шпинделя.

На основе отображения в плоскости кривой стойкости резца (v, P_f) можно определить, что в случае применения резца одного типа получается четыре различных по характеру частей поля для используемости машины и резца, в случае двух видов резца (быстрорежущая сталь и твердый сплав) получается 7 полей. Если учитывать диапазон подачи при обдирке и чистовой отделке, а также охлаждение, тогда могут образоваться не более чем 46 различных участков режима работы, лишь определенная часть которых входит в кривую характеристики некоторого определенного токарного станка. И этот факт служит в качестве объяснения того, что почему сильнее всего стараются сохранить за собой тот станок, к которому они привыкли и освоили, именно лучшие мастерски работающие токаря.

В отдельной главе исследовался вопрос влияния к. н. д., изменяющегося с числом оборотов, на эпюру. Установлено, что *изофорты* охватывают не только согласующиеся технологические данные, но и по их направлению можно сделать существенные заключения в отношении изменения состояния нагрузки. С точки зрения бережного обращения со станком существенную роль играют также *изофекты*, характеризующие индентичную степень нагрузки мотора.

На крупном практическом примере показывает сетку слоевых линий также в системе в трансмированной системе логарифмических координат.

ON THE STRESS-FUNCTION OF THE CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL

P. CSONKA
D. ENG. SC.

WORKING COMMUNITY FOR STRUCTURAL AND TRANSPORT ENGINEERING OF THE HUNGARIAN ACADEMY
OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received March 16, 1959]

1. Introduction

It is known [1] that the calculation of the elastic circular cylindrical shell (Fig. 1) is outstandingly difficult owing to the complicated character of the differential equations of the problem.

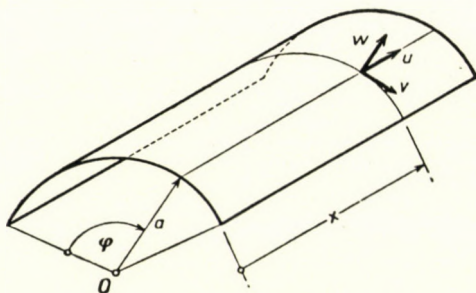


Fig. 1. Circular cylindrical shell

Therefore, several researchers [2-4] have tried to simplify the differential equations of this problem by omitting some of their less important members. The aim of these attempts is the simplification dealing with these equations from the view-point of calculation technique.

Several attempts have also been made to produce such a stress-function [5, 6] which would offer the possibility for a direct deduction of the shell's displacement-, strain- and stress-characteristics. Unfortunately, these efforts have not led to any objectionable results, complying with the differential equations of the problem, although it is desirable to obtain a solution which would be not contradictory.

Author has already dealt with the question concerning the stress-function of the problem on circular cylindrical shells during his spring lecture series held in 1949, at the Institute for Advanced Training in Engineering Sciences [7]; and later he also determined the stress-function pertaining to the accurate solution of this problem [8]. In addition to the above-mentioned studies, the present paper reports on stress-functions of several approximate

solutions. The knowledge of the functions in question, offers the possibility of eliminating contradictions appearing in the formula stock of the approaching methods used in practice.

2. Suppositions and notations

We will use in our paper notations applied by FLÜGGE, W. and for the indication of differential operations we shall also follow FLÜGGE's notation system, *i. e.* :

$$f' = a \frac{\partial f}{\partial x} \quad f^\bullet = \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

Furthermore, we agree to use the operation symbol Δ in conformity with the explanation

$$\Delta f = f'' + f^{\bullet\bullet}$$

In respect to the demands of reinforced concrete structure POISSON's number will be taken into consideration with the value

$$\mu = 0$$

Our paper only includes the case of a circular cylindrical shell loaded along its edges, thus, it does not deal with the general solution of the problem, but only with the solution of the problem's homogeneous equations.

3. The stress-function of the accurate solution

It is known that a circular cylindrical shell loaded along its edges [10, 11] has to fulfill the following equilibrium equations:

$$\left. \begin{aligned} N^1_x + N^{\bullet\bullet}_{\varphi x} &= 0 \\ aN^{\bullet\bullet}_{\varphi} + aN^1_{x\varphi} - M^{\bullet}_{\varphi} - M^1_{x\varphi} &= 0 \\ aN_{\varphi} + M^{\bullet\bullet}_{\varphi} + M^1_{x\varphi} + M^{11}_x + M^1_{\varphi x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Expressing the internal forces appearing in these formulae with the displacement-functions u , v , w pertaining to the points of the middle surface, and applying the abbreviation

$$k = \frac{\delta^2}{12a^2}$$

where δ is the shell-thickness, we obtain the following expressions:

$$\left. \begin{aligned}
 N_x &= \frac{D}{a} (u' + kw^{II}) \\
 N_\varphi &= \frac{D}{a} (v' + w + k(w + w^{**})) \\
 N_{x\varphi} &= \frac{D}{a} \left(\frac{u''}{2} + \frac{v'}{2} + \frac{k}{2} (v' - w^{I\bullet}) \right) \\
 N_{\varphi x} &= \frac{D}{a} \left(\frac{u''}{2} + \frac{v'}{2} + \frac{k}{2} (u'' + w^{I\bullet}) \right) \\
 M_x &= Dk (-u' + w^{II}) \\
 M_\varphi &= Dk (w + w^{**}) \\
 M_{x\varphi} &= Dk (-v' + w^{I\bullet}) \\
 M_{\varphi x} &= Dk \left(\frac{u''}{2} - \frac{v'}{2} + w^{I\bullet} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

By substituting these expressions into equations (1) we obtain FLÜGGE's differential equations of the circular cylindrical shell, that is:

$$\left. \begin{aligned}
 u^{II} + \frac{u''}{2} + \frac{v^{I\bullet}}{2} + k \left(\frac{u''}{2} - w^{III} + \frac{w^{I\bullet\bullet}}{2} \right) &= 0 \\
 \frac{u^{I\bullet}}{2} + \frac{v^{II}}{2} + v'' + w'' + k \left(\frac{3}{2} v^{II} - \frac{3}{2} w^{II\bullet} \right) &= 0 \\
 v'' + w'' + k \left(\frac{u^{I\bullet\bullet}}{2} - u^{III} - \frac{3}{2} v^{II\bullet} + \Delta \Delta w + 2w'' + w \right) &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

For the determination of such displacement-functions u , v , w , which should be in exact compliance with the above differential equations, we will introduce a stress-function $F(x, y)$ from which displacement-functions u , v , w could be deduced by simple differential operations. In accordance with the author's statement [8], the stress-function in question has to agree with the following differential equation:

$$\begin{aligned}
 &2(1 + 2k - 3k^2) F^{IIIIIIII} + (8 + 11k + 9k^2) F^{IIIIII} + \\
 &+ 12(1 + k) F^{IIIII} + (8 + 7k + 3k^2) F^{IIII} + 2(1 + k) F^{IIII} + \\
 &+ 12(1 + k) F^{IIII} + 2(8 + 7k + 3k^2) F^{III} + 4(1 + k) F^{III} + \\
 &2 \left(\frac{1}{k} + 4 + 3k \right) F^{IIII} + (8 + 7k + 3k^2) F^{III} + 2(1 + k) F^{II} = 0
 \end{aligned} \quad (4)$$

Displacement-functions u, v, w could be expressed with the help of the above stress-function $F(x, y)$ in the following way:

$$\left. \begin{aligned}
 u &= (-1 + 3k) F^{''''} : - (2 + 1,5k) F^{''''} : - F^{''''} : + \\
 &+ (1 + 3k) F^{''''} : - (2 + 1,5k) F^{''''} : - 2F^{''} : - F^{''} : \\
 v &= (2 - 2k) F^{''''} : + (5 + 3k) F^{''''} : + (4 + 1,5k) F^{''''} : + \\
 &+ (1 + k) F^{''''} : + 2 F^{''''} : + (6 + 1,5k) F^{''''} : + \\
 &+ (2 + 2k) F^{''''} : + 2 F^{''''} : + (1 + k) F^{''} : \\
 w &= 2 F^{''''} : + (2 + 1,5k) F^{''} : + \left(\frac{1}{k} + 3 \right) F^{''''} + \\
 &+ (2 + 1,5k) F^{''} :
 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Knowing displacement-functions u, v, w , internal forces can be computed from formulae (2), strain-characteristics, however, can be calculated using the following formulae:

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{a} u^{\cdot} & \varkappa_x &= \frac{1}{a^2} w^{''} \\
 \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{a} (v^{\cdot} + w) & \varkappa_\varphi &= \frac{1}{a^2} (w + w^{\cdot}) \\
 \gamma_{x\varphi} &= \frac{1}{a} (v^{\cdot} + u^{\cdot}) & \varkappa_{x\varphi} &= \frac{1}{a^2} w^{\cdot}
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

4. Stress-functions of some approximate solutions

As FLÜGGE's exact differential equations are very complicated, it became customary to neglect certain less important members of equations (4). This offers the possibility to produce different approximate solutions. In the following, we wish to present several of these approximate solutions, and we will also disclose the differential equation corresponding to the stress-function of the respective solution. These differential equations could be deduced by using the method disclosed in paper [8]. The accuracy of the disclosed formulae could be directly proved by substituting the formulae in question into the differential equation of the problem.

For a completion of the formula-stock referring to circular cylindrical shells, we will also present formulae relating to the plane disk and the plane slabs, furthermore, to circular cylindrical shells without flexural resistance. The knowledge of these formulae may provide an aid in certain cases.

1st approximation: plane disk

If we evolve the middle surface of a circular cylindrical shell into a plane, and suppose at the same time that the shell is only loaded with forces acting on its middle surface, then the equilibrium equations will have the following simple form:

$$\left. \begin{aligned} u^{11} + \frac{u^{**}}{2} + \frac{v^{1\cdot}}{2} &= 0 \\ \frac{u^{1\cdot}}{2} + \frac{v^{11}}{2} + v^{**} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1,3)$$

In this case the differential equation of the problem's stress-function $F(x, y)$ will obtain the form:

$$\Delta\Delta F = 0 \quad (1,4)$$

while the displacement-functions u, v, w are given by the following simple formulae:

$$\left. \begin{aligned} u &= F^{**} \\ v &= F^{111} \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1,5)$$

Internal forces and strain-characteristics can also be simply computed, that is

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{D}{a} F^{1\cdot\cdot} & \varepsilon_x &= \frac{1}{a} F^{1\cdot\cdot} \\ N_\varphi &= \frac{D}{a} F^{111\cdot} & \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{a} F^{111\cdot} \\ N_{x\varphi} = N_{\varphi x} &= -\frac{D}{a} F^{11:} & \gamma_{x\varphi} &= \frac{1}{a} (F^{1111} + F^{::}) \end{aligned} \right\} \quad (1,6)$$

If the solution of the problem does not require data on displacements, or strains, respectively, internal forces can be calculated directly from AIRY'S known stress-function.

2nd approximation: membrane-shell

If we disregard the flexural resistance of the shell, and in compliance with this omit the members with coefficients k expressing the flexural resistance of the shell, then formulae of the internal forces will obtain the following, considerably simpler form:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{D}{a} u^I \\ N_\varphi &= \frac{D}{a} (v^* + w) \\ N_{x\varphi} = N_{\varphi x} &= \frac{D}{a} \left(\frac{u^*}{2} + \frac{v^I}{2} \right) \\ M_x = M_\varphi = M_{x\varphi} = M_{\varphi x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2,2)$$

In such a case equilibrium equations expressed by displacement-functions will be the following:

$$\left. \begin{aligned} u^{II} + \frac{u^{**}}{2} + \frac{v^{I*}}{2} &= 0 \\ \frac{u^{I*}}{2} + \frac{v^{II}}{2} + v^{**} + w^* &= 0 \\ v^* + w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2,3)$$

It should be mentioned that in this case the two last members figuring on the left-hand side of the second equilibrium equation could be omitted with respect to the third equilibrium equation.

It can be proved by a simple calculation that the stress-function of the above equation-system has to fulfill the condition

$$F^{IIII} = 0 \quad (2,4)$$

while displacement-functions can be computed with the help of the stress-function according to the following formulae:

$$\left. \begin{aligned} u &= -F^{I*} \\ v &= F^{I*} + 2F^{II} \\ w &= -F^{I**} - 2F^{II*} \end{aligned} \right\} \quad (2,5)$$

In accordance to this, formulae of the internal forces and of the strain-characteristics are the following:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= -\frac{D}{a} F^{II*} & \varepsilon_x &= -\frac{1}{a} F^{II*} \\ N_\varphi &= 0 & \varepsilon_\varphi &= 0 \\ N_{x\varphi} = N_{\varphi x} &= \frac{D}{a} F^{IIII} & \gamma_{x\varphi} &= \frac{1}{a} 2F^{IIII} \end{aligned} \right\} \quad (2,6)$$

3rd approximation: plane slab

When evolving the middle surface of the shell into a plane, and taking into consideration only forces being perpendicular to the middle surface, the formulae for the internal forces will be the following:

$$\left. \begin{aligned} N_x = N_\varphi = N_{x\varphi} = N_{\varphi x} = 0 \\ M_x = Dkw^{II} \\ M_\varphi = Dkw^I \\ M_{x\varphi} = M_{\varphi x} = Dkw^I \end{aligned} \right\} \quad (3,2)$$

In this case displacement-function w can be regarded as being the stress-function itself. In accordance with the third equilibrium equation this function has to fulfill the condition

$$\Delta\Delta w = 0 \quad (3,3)$$

4th approximation: plane disk + plane slab + membrane-shell

If we omit from the formulae of the internal forces all the members not appearing either in the formulae referring to a plane disk, or in those relating to a plane slab, or to a membrane shell, formulae of the internal forces will have the following form:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{D}{a} u^I \\ N_\varphi &= \frac{D}{a} (v^I + w) \\ N_{x\varphi} = N_{\varphi x} &= \frac{D}{a} \left(\frac{u^I}{2} + \frac{v^I}{2} \right) \\ M_x &= Dkw^{II} \\ M_\varphi &= Dkw^I \\ M_{x\varphi} = M_{\varphi x} &= Dkw^I \end{aligned} \right\} \quad (4,2)$$

This simplification had been suggested — as far as is known — for the first time by the author in 1949. Since that time this possibility for simplification has been raised by a number of scientists; recently also by GRÜNING, G. [13], GIRKMANN, K. [10], FLÜGGE, W. [11], RÜDIGER, D. and URBAN J. [12].

In the case of the above-mentioned simplifications, equilibrium equations will obtain the following form:

$$\begin{aligned} u'' + \frac{u'}{2} + \frac{v'}{2} &= 0 \\ \frac{u'}{2} + \frac{v''}{2} + v' + w' &= 0 \\ v' + w + k \Delta \Delta w &= 0 \end{aligned} \quad (4,3)$$

Now the differential equation of the stress-function will be as follows:

$$\Delta \Delta \Delta \Delta F + \frac{F''''}{k} = 0 \quad (4,4)$$

The displacement-functions are also easily calculable:

$$\begin{aligned} u &= -\Delta \Delta F' \\ v &= \Delta \Delta F'' + 2 \Delta \Delta F''' \\ w &= \frac{F''''}{k} \end{aligned} \quad (4,5)$$

As a consequence of the afore-mentioned relations, the formulae of the internal forces and strain-characteristics will obtain the following form:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= -\frac{D}{a} \Delta \Delta F'' & \varepsilon_x &= -\frac{1}{a} \Delta \Delta F'' \\ N_\varphi &= -\frac{D}{a} \Delta \Delta F'''' & \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{a} \Delta \Delta F'''' \\ N_{x\varphi} = N_{\varphi x} &= \frac{D}{a} \Delta \Delta F'''' & \gamma_{x\varphi} &= \frac{1}{a} 2 \Delta \Delta F'''' \\ M_x &= D F'''' & \varkappa_x &= \frac{1}{a^2} \frac{F''''}{k} \\ M_\varphi &= D F'''' & \varkappa_\varphi &= \frac{1}{a^2} \frac{F''''}{k} \\ M_{x\varphi} = M_{\varphi x} &= D F'''' & \varkappa_{x\varphi} &= \frac{1}{a^2} \frac{F''''}{k} \end{aligned} \right\} \quad (4,6)$$

We have to mention that in cases when there is no need either of displacement-, or for strain-data, internal forces can be determined from the following simpler formulae:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= -\frac{D}{a} \Delta \Delta F^{..} \\ N_\varphi &= -\frac{D}{a} \Delta \Delta F^{11} \\ N_{x\varphi} &= N_{\varphi x} = \frac{D}{a} \Delta \Delta F^{1.} \\ M_x &= D F^{1111} \\ M_\varphi &= D F^{11.} \\ M_{x\varphi} &= M_{\varphi x} = D F^{111.} \end{aligned} \right\} \quad (4,7)$$

5th approximation

Omitting the members containing the k -fold values of the displacement components u and v , the formulae can be written in the following manner:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{D}{a} (u^1 - k w^{11}) \\ N_\varphi &= \frac{D}{a} (v^{\cdot} + w + k w^{..} + k w) \\ N_{x\varphi} &= \frac{D}{a} \left(\frac{u^{\cdot}}{2} + \frac{v^1}{2} - \frac{k}{2} w^{1.} \right) \\ N_{\varphi x} &= \frac{D}{a} \left(\frac{u^{\cdot}}{2} + \frac{v^1}{2} + \frac{k}{2} w^{1.} \right) \\ M_x &= D k w^{11} \\ M_\varphi &= D k (w^{..} + w) \\ M_{x\varphi} &= M_{\varphi x} = D k w^{1.} \end{aligned} \right\} \quad (5,2)$$

In this case equilibrium equations will be formed as follows

$$\left. \begin{aligned} u^{11} + \frac{u^{..}}{2} + \frac{v^{1.}}{2} + k \left(\frac{w^{1..}}{2} + w^{:\cdot} \right) &= 0 \\ \frac{u^{1.}}{2} + \frac{v^{11}}{2} + v^{..} + w^{\cdot} - \frac{3k}{2} w^{11.} &= 0 \\ v^{\cdot} + w + k (\Delta \Delta w + 2w^{..} + w) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5,3)$$

while the differential equation of the stress-function will be the following:

$$\begin{aligned} & \Delta\Delta\Delta\Delta F + 4F'''' + 6F'''' + 2F'''' + \\ & + \left(1 + \frac{1}{k}\right) F'''' + 2F'' + F'' = 0 \end{aligned} \quad (5,4)$$

At the same time the formulae of the displacement functions will be the ones below:

$$\left. \begin{aligned} u &= -F'''' - 2F'''' - F'''' + \\ & + 2F'''' - 2F'''' - 3F'' - \left(1 - \frac{1}{k}\right) F'' \\ v &= 2F'''' + 5F'''' + 4F'''' + F'''' + \\ & + 4F'''' + 8F'''' + 2F'''' + \\ & + 2\left(1 - \frac{1}{k}\right) F'' + \left(1 - \frac{1}{k}\right) F'' \\ w &= \frac{1}{k} \left(2F'''' + 2F'' + F'' \right) \end{aligned} \right\} \quad (5,5)$$

6. Evaluation of the approximate solutions

Among the previously discussed solutions, it is generally only the exact solution and the approximate solutions in 4 and 5 which offer the possibility of conforming to the boundary conditions, which could optionally be established at the shell's edge $\varphi = \text{const}$. Formulae disclosed in 1, 2 and 3 could be applied only in certain special cases.

Different approximate solutions will, of course, replace the exact solution, only then, when internal forces which could be calculated with their aid, would deviate only slightly from internal forces corresponding to the exact solution. The author wishes to deal with the elucidation of this question in a later paper.

REFERENCES

1. DISCHINGER, F.: Die strenge Theorie der Kreiszylinderschale in ihrer Anwendung auf die Zeiss-Dywidag Scalen. *Beton und Eisen* 34 (1935), pp. 257—264, 283—294.
2. FINSTERWALDER, U.: Die Theorie der zylindrischen Schalengewölbe System Zeiss-Dywidag. *Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau*. 1 (1932), pp. 127—152.
3. FINSTERWALDER, U.: Die querversteiften zylindrischen Schalengewölbe mit kreissegmentförmigem Querschnitt. *Ingenieur-Archiv*, 4 (1933) pp. 43—65.
4. SCHOEBER, H.: Line Load Action on Thin Cylindrical Shells. *Transaction of the American Society of Civil Engineers* 101 (1936/2), pp. 767—810.

5. AAS-JAKOBSEN, A.: Über das Randstörungsproblem der Kreiszyinderschalen. *Der Bauingenieur* 20 (1939), pp. 394—405.
6. EGGWERTZ, S.: Theory of Elasticity for Thin Circular Cylindrical Shells. *Transactions of the Royal Institute of Technology*. Stockholm (1947), No 9.
7. CSONKA, P.: Approximative Solutions for the Differential Equations of Thin Circular Cylindrical Shells (in Hungarian). 1949.
8. CSONKA, P.: Beitrag zur Theorie der elastischen Kreiszyinderschalen. *Acta Technica Ac. Sc. Hung.*, Tomus VI., Fasc. 1—2., pp. 167—176 (1953).
9. MOE, J.: On the Theory of Cylindrical Shells. Explicit Solution of the Characteristic Equation, and Discussion of the Accuracy of Various Theories. *Publication of the International Association for Bridge and Structural Engineering* 13 (1953), pp. 283—296.
10. GIRKMANN, K.: Flächentragwerke. Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke. 3. Aufl. Springer Verlag, Wien, 1954.
11. FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen, 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin (Göttingen), Heidelberg, 1957.
12. RÜDIGER, D.—URBAN, J.: Kreiszyinderschalen. Ein Tabellenwerk zur Berechnung kreiszyindrischer Schalenkonstruktionen beliebiger Abmessungen. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1955.
13. GRÜNING, G.: Die Berechnung von Kreiszyinderschalen ohne Benutzung von Randwerttafeln. *Bauplanung-Bautechnik* 11 (1957), pp. 297—300, 347—352.

SUMMARY

Instead of FLÜGGE's differential equations referring to the problem of circular cylindrical shells, different approximate differential equations are generally used in engineering practice.

The present paper deals with several, such approaching equation systems, as are used in practice. It is demonstrated that there is a possibility of establishing these approaching equation systems by a stress-function from which the shell's displacement-, strain- and stress-characteristics can directly be deduced by simple differential operations. Hereby, it becomes possible to achieve a perfect agreement between the formulae involved in the formula-stock referring to such shells on the one hand, and on the other hand, between these formulae and the simplified differential equations of the problem.

The paper does not touch upon the examination of the extent of the difference appearing between internal forces obtained by the discussed approaching solutions, and internal forces corresponding to the exact solution. The author wishes to clear up this question in a later paper.

ÜBER DIE SPANNUNGSFUNKTION DER KREISZYLINDERSCHALEN

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Die Ingenieurpraxis bedient sich allgemein an Stelle der FLÜGGE'schen Differentialgleichungen der Kreiszyinderschalen verschiedener annähernder Differentialgleichungen.

Der vorliegende Aufsatz befaßt sich mit einigen dieser in der Praxis gebräuchlichen Gleichungssysteme. Es wird nachgewiesen, daß es möglich ist, zu diesen annähernden Gleichungssystemen eine solche Spannungsfunktion darzustellen, aus welcher die Verschiebungs-, die Verformungs- und die Spannungskennwerte mit Hilfe einfacher Differentialoperationen unmittelbar abgeleitet werden können. Hiedurch kann man sowohl zwischen den Formeln des auf die Schale bezüglichen Formelnmaterials wie auch zwischen diesen Formeln und den vereinfachten Differentialgleichungen der Aufgabe eine vollkommene Übereinstimmung erreichen.

Der Aufsatz beschäftigt sich nicht damit, es zu untersuchen, wie weit die auf dem Wege der annäherungsweise Lösungen gewonnene Schnittkräfte von den der genauen Lösung entsprechenden abweichen. Diese Frage wünscht der Verfasser in einem späteren Aufsatz zu klären.

SUR LA FONCTION DE TENSION DU VOILE CILINDRIQUE CIRCULAIRE
ÉLASTIQUE

P. CSONKA

RÉSUMÉ

Au lieu des équations différentielles de FLÜGGE pour le voile cylindrique circulaire, on travaille, dans la pratique, avec différentes équations différentielles approchées.

L'étude traite de certains de ces systèmes d'équations différentielles utilisées en pratique, et démontre que l'on peut établir pour ceux-ci une fonction de tension, à partir de laquelle on déduit directement les déplacements, les déformations et les tensions du voile par des opérations différentielles simples. On obtient ainsi, que les formules concernant le voile soient en accord parfait entre elles et avec les équations différentielles simplifiées du problème.

L'auteur ne discute pas la question de l'écart entre les forces dans les sections calculées suivant la méthode approchée, et celles calculées selon la méthode exacte, cette question devant être élucidée dans un travail ultérieur.

О ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЯ ЭЛАСТИЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

Вместо дифференциальных уравнений Флюгге для цилиндрической оболочки в инженерной практике применяются различные приближенные дифференциальные уравнения.

Данная работа рассматривает используемые на практике некоторые такие приближенные системы. Показано, что для приближенных систем уравнений представляется возможным вывести такую функцию напряжения, которая представляет возможность непосредственно установить при помощи простых дифференциальных уравнений параметры сдвига, деформации и напряжения оболочки. Этим становится возможным достигнуть, чтобы формулы оболочки находились между собой в совершенном согласии, а также с упрощенными дифференциальными уравнениями задачи.

Работа не занимается анализом того, что насколько отклоняются силы разрезов, полученные на основе рассмотренных приближенных решений, от точных сил разрезов, соответствующих точному решению. Этот вопрос будет рассматриваться автором в другой его работе.

LA POUSSÉE DES TERRES SUR LES MURS DE SOUTÈNEMENT DANS LE CAS DE MASSIFS COMPLÈTEMENT PLASTIQUES

Á. BALLA

UNIVERSITÉ D'ARCHITECTURE ET DE COMMUNICATIONS A BUDAPEST, CHAIRE DE CONSTRUCTION
DES TUNNELS ET DE MÉCANIQUE DES SOLS

[Manuscrit présenté le 27. Avril 1959]

1. Introduction

La résistance au cisaillement des sols est donnée par la formule:

$$t = n \cdot \operatorname{tg} \Phi + c \quad (1)$$

Dans le cas où la résistance au cisaillement est indépendante de la tension normale ($\Phi = 0$), on a:

$$t = c \quad (2)$$

c'est-à-dire la résistance au cisaillement est constante.

Au cours du chargement des argiles saturées, les pressions se transmettent à l'eau interstitielle; et la tension normale qui charge les grains est pratiquement égale à zéro. Donc si le changement de la teneur en eau, c'est-à-dire la consolidation ne se produit pas, les sols saturés se comportent comme les sols qui possèdent seulement de la cohésion. Dans ce cas, l'application de l'hypothèse $\Phi = 0$ est valable.

Si la quantité d'eau incluse diminue avec le temps (l'argile se consolide), la résistance au cisaillement augmente. L'hypothèse $\Phi = 0$ représente donc, dans ce cas seulement, l'état qui règne immédiatement après la construction. L'application de l'hypothèse $\Phi = 0$ pour les sols en état de trois phases n'est juste d'aucune manière. Selon SKEMPTON [1], dans certains cas — compte tenu des limites d'application — l'hypothèse $\Phi = 0$ est une méthode bien utilisable dans les calculs d'ingénieur. Cette méthode rend possible la résolution *mathématique* exacte du problème.

2. Rapports fondamentaux

Il est connu que le long des surfaces de glissement, l'équation de KÖTTER est valable:

$$\frac{dt}{da} - 2t \operatorname{tg} \Phi = \frac{ds}{da} \gamma \sin \Phi \sin (a - \Phi) \quad (3)$$

JÁKY a prouvé que l'équation de KÖTTER est valable aussi dans le cas des sols cohérents. Pour le cas où $\Phi = 0$, il a trouvé l'expression suivante:

$$\frac{dn}{da} - 2c = \frac{ds}{da} \gamma \sin \alpha \quad (4)$$

Après intégration et transformation en coordonnées polaires, la tension normale qui s'exerce sur la surface de glissement s'explique comme suit:

$$n = r \gamma \sin \theta + 2c(\lambda - \theta) + K \quad (5)$$

A partir de la mise en équilibre du coin élémentaire, et par le cercle de MOHR, il est évident que les tensions sont:

$$\sigma_r = n + t \sin 2\lambda = n + c \sin 2\lambda \quad (6)$$

$$\sigma_\theta = n - t \sin 2\lambda = n - c \sin 2\lambda \quad (7)$$

$$\tau = t \cos 2\lambda = c \cos 2\lambda \quad (8)$$

En considérant l'équation (5), on trouve:

$$\sigma_r = r \gamma \sin \theta + 2c(\lambda - \theta) + c \sin 2\lambda + K \quad (9)$$

$$\sigma_\theta = r \gamma \sin \theta + 2c(\lambda - \theta) - c \sin 2\lambda + K \quad (10)$$

$$\tau = c \cos 2\lambda \quad (11)$$

Les équations d'équilibre sont:

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} = \gamma \sin \theta \quad (12)$$

$$\frac{2\tau}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = \gamma \cos \theta \quad (13)$$

En différentiant les expressions des tensions, et en les substituant dans les équations d'équilibre, on obtient de l'une comme de l'autre, l'équation différentielle suivante [3]:

$$\left(1 - \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}\right) \operatorname{tg} \lambda + r \frac{\partial \lambda}{\partial r} = 0 \quad (14)$$

La difficulté fondamentale des problèmes de pression des massifs de terre complètement plastiques réside dans la résolution de cette équation différentielle.

La *solution générale* de l'équation différentielle est, comme on peut s'en convaincre très facilement [3]:

$$r \sin \lambda = f(\theta - \lambda) \quad (15)$$

L'expression $r \sin \lambda$ est donc une fonction arbitraire, continue et différentiable, de l'expression variable $(\theta - \lambda)$

Remarquons que l'équation différentielle (14) a *deux solutions particulières* généralement connues; l'une est $\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = 1$; $\frac{\partial \lambda}{\partial r} = 0$; $\lambda = \lambda_0 + \theta$ et dans ce cas, *les surfaces de glissement sont planes*. Dans l'autre cas: $\text{tg } \lambda = 0$; $\lambda = 0$; $\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = 0$; $\frac{\partial \lambda}{\partial r} = 0$. A cette dernière solution correspond le cas des *surfaces de glissements circulaires concentriques*.

Jáky a surtout employé ces *deux dernières solutions particulières* pour des buts pratiques. Il a supposé des surfaces de glissement respectivement cylindriques et planes, et a étudié sur ces bases le problème de la poussée des terres sur les murs de soutènement, celui de la stabilité des talus, et celui de la rupture des sols sous les fondations.

Dans l'étude présente, nous avons l'intention d'employer la solution générale.

Supposons que les points particuliers ne sont pas situés sur des surfaces de glissement cylindriques. Dans ce cas, il ressort de la figure 3:

$$r \sin \lambda = y_0 \cos(\theta - \lambda) - x_0 \sin(\theta - \lambda) \quad (16)$$

Dans la formule, x_0 et y_0 sont les coordonnées du centre de la surface de glissement cylindrique, laquelle passe par le point examiné.

La forme de l'expression est analogue à la solution générale reprise à la formule (15), c'est-à-dire les *surfaces de glissement cylindriques avec centres variables constituent une solution possible du problème*. Le lieu géométrique des centres de ces cercles est une courbe arbitraire.

Examinons les lois de ces surfaces de glissement cylindriques. En transformant l'équation (16), on obtient:

$$r = y_0(\cos \theta \text{ ctg } \lambda + \sin \theta) - x_0(\sin \theta \text{ ctg } \lambda - \cos \theta) \quad (17)$$

En différenciant l'équation par rapport à θ on trouve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \theta} = & y_0 \left(-\sin \theta \text{ ctg } \lambda - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} + \cos \theta \right) - \\ & - x_0 \left(\cos \theta \text{ ctg } \lambda - \frac{\sin \theta}{\sin^2 \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} + \sin \theta \right) \end{aligned} \quad (18)$$

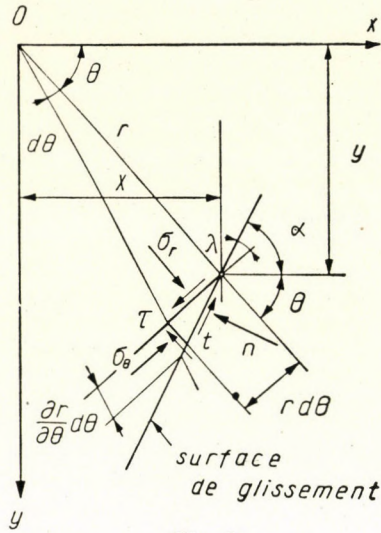


Fig. 1

De la Figure 1, il ressort que

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta} \tag{19}$$

Si l'on y substitue les valeurs r et $\frac{\partial r}{\partial \theta}$, et si on pose

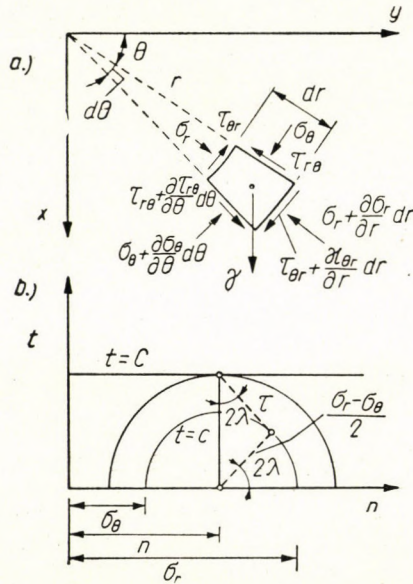


Fig. 2

En appliquant la formule $y_0 = x_0 \operatorname{tg} \delta$ on trouve:

$$R = \frac{1}{k} \frac{x_0}{\cos \delta} = \frac{\rho}{k} \quad (26)$$

C'est-à-dire le rapport entre le rayon vecteur (ρ) et le rayon (R) d'un centre de cercle quelconque est constant.

3. La poussée des terres s'exerçant sur un mur rigide tournant autour de son angle inférieur, et animé d'un mouvement vers le bas

Par suite des forces effectives, un mur de soutènement n'a pas seulement une rotation vers le vide autour de son arête inférieure (A), mais il s'enfonce aussi; c'est-à-dire le mur de soutènement complet (y compris son point d'angle inférieur) est animé d'un mouvement vertical vers le bas. Un tel mode d'enfoncement du mur exerce une influence sur la formation des surfaces de glissement qui sont convexes si on les regarde d'en haut.

Nous voudrions maintenant faire usage des rapports fondamentaux qui ont été discutés au paragraphe précédent, pour obtenir les valeurs des tensions s'exerçant sur un mur de soutènement.

A. La détermination des constantes

Si le terre-plein n'est pas chargé, on trouve:

$$\tau_0 = c \cos 2\lambda_0 = 0 \quad (27)$$

D'où il vient, si on prend en considération la forme de la surface de glissement, la situation du centre et l'interprétation de l'angle λ :

$$\lambda = -\frac{\pi}{4} \quad (28)$$

On trouve qu'au niveau du terre-plein, la tension verticale est zéro, c'est-à-dire:

$$\sigma_{y_0} = \sigma_{\theta_0} = 2c \left(-\frac{\pi}{4} \right) - c \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) + K = 0 \quad (29)$$

D'où il vient:

$$K = c \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \quad (30)$$

Au niveau du terre-plein ($\theta = 0$; $\lambda_0 = -\frac{\pi}{4}$) l'équation (23) donne:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} = k \sin(-\delta) \quad (31)$$

d'où

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sin \delta} \quad (32)$$

Ainsi:

$$\sin \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sin \delta} \sin(\theta - \delta) \quad (33)$$

B. Rapports géométriques

On doit expliciter la position du point qui est repéré par rapport à la face arrière du mur $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ par les coordonnées r_H et λ_H .

De la Figure 3, il s'ensuit que

$$y_0 = r_H + R \cos \lambda_H = \frac{1}{\sqrt{2}} R \quad (34)$$

$$x_0 = R \sin \lambda_H = \frac{1}{\sqrt{2}} R + r_0 \quad (35)$$

d'où les valeurs caractéristiques de la surface de glissement cylindrique, qui passe par un point quelconque de la face arrière du mur $\left(\theta = \frac{\pi}{2}; r = r_H\right)$

$$R = r_H \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2} \cos \lambda_H} \quad (36)$$

$$x_0 = r_H \frac{\sqrt{2} \sin \lambda_H}{1 - \sqrt{2} \cos \lambda_H} \quad (37)$$

$$y_0 = r_H \frac{1}{1 - \sqrt{2} \cos \lambda_H} \quad (38)$$

$$r_0 = r_H \frac{\sqrt{2} \sin \lambda_H - 1}{1 - \sqrt{2} \cos \lambda_H} \quad (39)$$

Nous désignons les valeurs caractéristiques du cercle qui passe par le point d'angle inférieur (A) de la face arrière du mur par les lettres $R_A, x_{0A}, y_{0A}, r_{0A}$. Dans ce cas, on doit écrire λ_A et H au lieu de λ_H et r_H .

C. Détermination de la situation des surfaces de glissement

Il ressort des paragraphes précédents que, le lieu géométrique des centres des surfaces de glissement cylindriques est une courbe.

Pour résoudre ce problème, on peut suivre deux méthodes:

a) On peut choisir à volonté la courbe qui constitue le lieu géométrique des centres de cercle. Dans ce cas, on obtient un état défini des contraintes sur les surfaces limites du corps.

b) Sur la base des expériences et des observations, nous construisons une hypothèse quelconque sur l'état de contrainte qui doit régner sur les surfaces limites. Dans ce cas, nous obtenons une courbe unique, c'est-à-dire le lieu géométrique des centres des cercles.

Dans notre étude, nous employons la deuxième méthode. Examinons comment varie, sur la face arrière du mur, l'angle λ_H qui caractérise l'intersection entre le mur de soutènement et la tangente à la surface de glissement.

Au niveau du sol, où ($r_H=0$), comme nous avons déjà vu: $\tau_H=0$, et $\lambda_H=\frac{\pi}{4}$.

En examinant la face arrière du mur de soutènement, et allant du haut vers le bas, on trouve que les déplacements relatifs diminuent de plus en plus, d'où il vient que les tensions grandissent avec la profondeur. Mais de ce fait, il s'ensuit que la pente des surfaces de glissement diffère de plus en plus de l'angle $\lambda/4$, et on peut supposer que celles-ci coupent le mur suivant des angles graduellement plus aigus, c'est-à-dire $\lambda_H > \pi/4$.

En désignant par λ_A la valeur λ_H , qui correspond au point d'angle A, et en supposant le cas le plus simple, à savoir que la variation de λ_H est linéaire suivant la profondeur, on trouve:

$$\lambda_H = \left(\lambda_A - \frac{\pi}{4} \right) \frac{r_H}{H} + \frac{\pi}{4} \quad (40)$$

Si on prend en considération l'équation (33), on obtient:

$$\sin \lambda_H = \sin \left[\left(\lambda_A - \frac{\pi}{4} \right) \frac{r_H}{H} + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x_0}{y_0} \quad (41)$$

Cette expression peut aussi se déduire des équations (37) et (38). Le rayon vecteur du centre du cercle est:

$$\rho^2 = x_0^2 + y_0^2 \quad (42)$$

Il ressort de la Figure 3, que

$$R \sin(\theta - \lambda) = y_0 - r \sin \theta \quad (43)$$

$$R \cos(\theta - \lambda) = x_0 - r \cos \theta \quad (44)$$

Si on élève au carré les deux membres de l'équation, et si on fait les calculs, on obtient:

$$r^2 - r \cdot 2(y_0 \sin \theta + x_0 \cos \theta) + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0 \quad (45)$$

Grâce à cette équation, il est possible de calculer le rayon r , vecteur d'un point se trouvant sur un cercle donné et caractérisé par un angle arbitraire θ .

En transformant cette équation en coordonnées orthogonales, on trouve:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0 \quad (46)$$

Cette équation est identique à l'expression (24).

Quand on a déterminé la situation des surfaces de glissement, c'est-à-dire quand on a posé l'hypothèse concernant la valeur de λ_H , on doit écrire des tensions qui règnent sur la surface de glissement et sur la face arrière du mur.

Sur la surface de glissement on a:

$$n = r\gamma \sin \theta + 2c(\lambda - \theta) + c\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \quad (47)$$

$$t = c \quad (48)$$

$$\sin \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sin \delta} \sin(\theta - \delta) \quad (49)$$

Sur la face arrière du mur, on obtient

$$\sigma_{\theta H} = r_H \gamma + 2c\left(\lambda_A - \frac{\pi}{4}\right) \frac{r_H}{H} - c \cos 2\left(\lambda_A - \frac{\pi}{4}\right) \frac{r_H}{H} - c(\pi - 1) \quad (50)$$

$$\tau_H = -c \sin 2\left(\lambda_A - \frac{\pi}{4}\right) \frac{r_H}{H} \quad (51)$$

Enfin on doit écrire la relation entre l'angle λ et l'angle que fait la surface de glissement par rapport à l'horizontale (Figure 1)

$$\lambda + \frac{\pi}{2} = \alpha + \theta \quad (52)$$

D. Le problème de l'équilibre

Dans nos résultats précédents, la valeur de l'angle λ_A joue un rôle. Cet angle, caractéristique à la surface de glissement qui passe par le point A, est inconnu au départ.

Le caractère du problème exige que non seulement les conditions de l'équilibre de translation soient satisfaites, mais aussi que la condition de l'équilibre de rotation sous l'effet des forces extérieures s'exerçant sur toute la masse glissante de terre, soit vérifiée. Ainsi nous écrivons que la somme des moments, par rapport aux centres des surfaces de glissement cylindrique, est égale à zéro:

$$M_G + M_K + M_{EN} + M_{ET} = 0 \quad (53)$$

Le moment dû à la masse glissante est:

$$M_G = H^3 \gamma \frac{1}{3} \frac{1}{(1 - \sqrt{2} \cos \lambda_A)^2} \left[\frac{1}{2} (1 - \sqrt{2} \sin \lambda_A) (1 + 2\sqrt{2} \sin \lambda_A) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \lambda_A - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \lambda_A \right) \right] \quad (54)$$

Le moment dû à la force de cohésion est:

$$M_K = cH^2 \frac{2 \left(\lambda_A - \frac{\pi}{4} \right)}{(1 - \sqrt{2} \cos \lambda_A)^2} \quad (55)$$

Le moment dû à la force normale qui s'exerce sur le mur est:

$$M_{EN} = \int_0^H (y_{0A} - r_H) \sigma_{\theta H} dr \quad (56)$$

$$M_{EN} = H^3 \gamma \frac{1}{6} \frac{1 + 2\sqrt{2} \cos \lambda_A}{1 - \sqrt{2} \cos \lambda_A} + cH^2 \left[\frac{1}{3} \left(\lambda_A - \frac{\pi}{4} \right) \frac{1 + 2\sqrt{2} \cos \lambda_A}{1 - \sqrt{2} \cos \lambda_A} + \frac{1}{2 \left(\lambda_A - \frac{\pi}{4} \right)} \frac{\sqrt{2} \cos \lambda_A}{1 - \sqrt{2} \cos \lambda_A} - \frac{1}{\lambda_A - \frac{\pi}{4}} \sin^2 \lambda_A \frac{\sqrt{2} \cos \lambda_A}{1 - \sqrt{2} \cos \lambda_A} - \frac{1}{4 \left(\lambda_A - \frac{\pi}{4} \right)^2} (1 - 2 \sin \lambda_A \cos \lambda_A) - \frac{1}{2} \frac{1 + \sqrt{2} \cos \lambda_A}{1 - \sqrt{2} \cos \lambda_A} \right] \quad (57)$$

Le moment dû à la force tangentielle qui s'exerce sur le mur est:

$$M_{ET} = - \int_0^H x_{0A} \tau_H dr = - cH^2 \frac{1}{2 \left(\lambda_A - \frac{\pi}{4} \right)} \frac{\sqrt{2} \sin \lambda_A}{1 - \sqrt{2} \cos \lambda_A} [1 - 2 \sin \lambda_A \cos \lambda_A] \quad (58)$$

En substituant les valeurs des moments dans l'équation (50) et en faisant les calculs et les simplifications, on obtient l'équation:

$$\frac{H\gamma}{c} F_1(\lambda_A) - F_2(\lambda_A) = 0 \quad (59)$$

où

$$F_1(\lambda_A) = \frac{1}{3} \left[\sqrt{2} \cos \lambda_A - \frac{1 - 2 \sin^2 \lambda_A}{1 - \sqrt{2} \cos \lambda_A} \right] \quad (60)$$

$$F_2(\lambda_A) = \frac{1}{2} [1 + \sqrt{2} \cos \lambda_A] - \frac{1}{3} \left[\lambda_A - \frac{\pi}{4} \right] [1 + 2 \sqrt{2} \cos \lambda_A] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin \lambda_A - \cos \lambda_A}{\lambda_A - \frac{\pi}{4}} + 2 \frac{\lambda_A - \frac{\pi}{4}}{1 - \sqrt{2} \cos \lambda_A} + \frac{1}{4} \frac{1 - 2 \sin \lambda_A \cos \lambda_A}{\lambda_A - \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2} \cos \lambda_A}{\lambda_A - \frac{\pi}{4}} \quad (61)$$

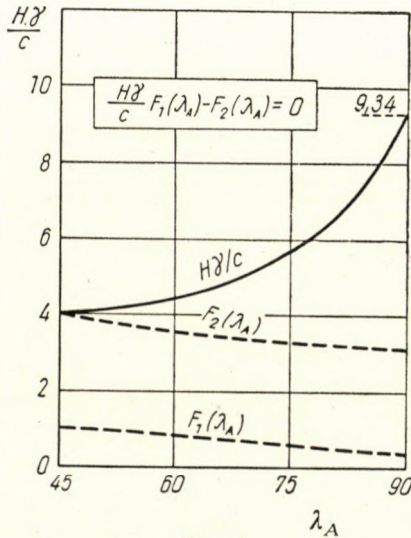


Fig. 4

Sur la base de ces expressions, on peut déterminer les valeurs correspondantes $\frac{H\gamma}{c}$ et λ_A , qui satisfont à la condition du moment. Nous avons fait les calculs nécessaires et le résultat en est donné à la Figure 4.

Nous remarquerons, que dans le cas où $\lambda_A = \frac{\pi}{4}$, les surfaces de glissement cylindriques se transforment en plans de glissement, qui font avec l'horizontale l'angle $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$, ce qui conduit au résultat bien connu

$$\frac{H\gamma}{c} = 4 \quad (62)$$

4. Détermination de la poussée des terres

La composante normale de la poussée des terres qui s'exerce sur le mur est:

$$E_N = \int_0^H \sigma_{\theta H} dr \quad (63)$$

De l'expression (54) on tire:

$$\frac{1}{cH} E_N = \frac{H\gamma}{c} \frac{1}{2} + \left[\lambda_A - \frac{\pi}{4} - 1 \right] + \frac{1}{2} \frac{1 - 2 \sin^2 \lambda_A}{\lambda_A - \frac{\pi}{4}} \quad (64)$$

La composante tangentielle de la poussée des terres est:

$$E_T = \int_0^H \tau_H dr \quad (65)$$

De l'expression (58) on tire:

$$\frac{1}{cH} E_T = -\frac{1}{2} \frac{1 - \sin 2 \lambda_A}{\lambda_A - \frac{\pi}{4}} \quad (66)$$

On peut déterminer le poids de la masse de sol glissant, de même que la force de cohésion:

$$\frac{1}{cH} G = \frac{H\gamma}{c} \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \sqrt{2} \cos \lambda_A} \left[\sqrt{2} \sin \lambda_A - 1 - 2 \frac{\left(\lambda_A - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(\lambda_A - \frac{\pi}{4} \right)}{1 - \sqrt{2} \cos \lambda_A} \right] \quad (67)$$

$$\frac{1}{cH} K = \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2} \cos \lambda_A} 2 \sin \frac{1}{2} \left(\lambda_A - \frac{\pi}{4} \right) \quad (68)$$

La composante verticale de la force de cohésion est:

$$\frac{1}{cH} K_v = 1 \quad (69)$$

La composante horizontale est:

$$\frac{1}{cH} K_h = \frac{\sqrt{2} \sin \lambda_A - 1}{1 - \sqrt{2} \cos \lambda_A} \quad (70)$$

La somme des projections verticales et la somme des projections horizontales de ces quatre forces donne les composantes de la force normale qui s'exerce sur la surface de glissement.

Nous avons déterminé ces quatre forces en fonction du rapport $\frac{H\gamma}{c}$ et nous les avons représentées sur la Figure 5.

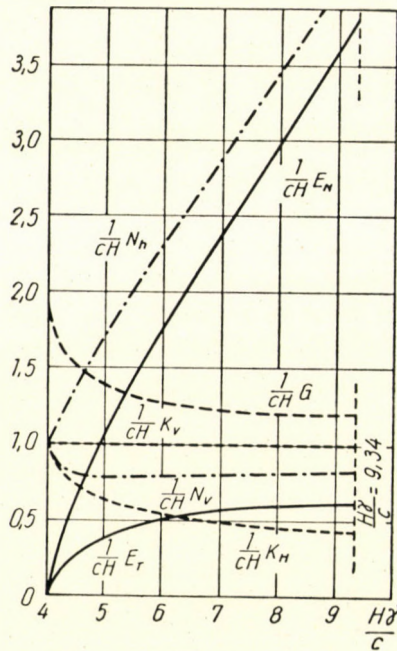


Fig. 5

Dans le cas où la hauteur du mur (H) et les caractéristiques du sol (c, γ) sont données, on doit former le rapport $\frac{H\gamma}{c}$. Les valeurs correspondantes λ_A peuvent être lues sur la Figure 4, et on peut chercher les valeurs correspondantes G, E_N , E_T , K_h , K_v , N_h et N_v sur la Figure 5.

Selon la Figure 5, dans le cas où $\frac{H\gamma}{c} = 9,34$, on a $\lambda_A = \frac{\pi}{4}$ et la surface de glissement aboutit tangentiellement au point A du mur.

Dans le cas où $\frac{H\gamma}{c} > 9,34$, la surface de glissement aboutit tangentielle-ment au point A_1 du mur, qui se trouve au-dessus du point A. Le long de la section AA_1 , la surface de glissement se confond avec la face arrière du mur $\left(\lambda_H = \lambda_A = \frac{\pi}{2}\right)$

Le long de cette section, on a :

$$n = \sigma_{\theta H} = r_H \gamma + \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) c$$

Il paraît enfin utile de résumer les limites de la méthode présentée.

Comme nous l'avons vu, le but du travail était d'examiner la poussée des terres sur un mur de soutènement, sur la base de la solution de Jáky. De ce fait subsisteront naturellement toutes les limites de la solution générale se basant sur l'équation de Kötter, laquelle n'est valable que pour l'une des surfaces de glissement. Nous n'examinerons pas le problème des autres surfaces de glissement.

Contre les surfaces de glissement obtenues par la solution (cercles a centres de position variable), il est possible de faire des objections du point de vue cinématique. La solution ne permet, en définitive, que la satisfaction de l'équilibre des moments. Il ne résulte pas nécessairement de cette méthode que la somme de la projection des forces soit zéro.

Il faut souligner toutefois, que toutes les méthodes servant à déterminer la poussée des terres ont plus ou moins ces limites. La méthode présentée, qui se base sur l'équilibre des tensions et sur la condition de rupture, est donc, malgré ses limites, une solution théoriquement rigoureuse. Dès lors, elle est sans doute bien outillée pour fixer une direction aux études ultérieures, et pour leur fournir aussi une base solide.

5. Exemple pratique

Examinons un mur de soutènement de 10 m de hauteur.

La cohésion est: $c = 3,5 \text{ t/m}^2$, le poids unitaire est $\gamma = 1,985 \text{ t/m}^3$.

En ce cas:

$$\frac{H\gamma}{c} = 5,67$$

On peut chercher la valeur correspondante de λ_A sur la Figure 4; elle est en ce cas 75° . A l'aide des formules (36)—(39), on obtient les résultats suivants, relatifs à la surface de glissement qui passe par le point d'angle inférieur:

$$R_A = 22,305 \text{ m}$$

$$X_{0A} = 21,544 \text{ m}$$

$$Y_{0A} = 15,773 \text{ m}$$

$$R_{0A} = 5,771 \text{ m}$$

On peut chercher sur la Figure 5 les valeurs des forces en présence. Ce sont:

$$G = 45,6 \text{ t}$$

$$K_v = 35,0 \text{ t}$$

$$K_h = 20,3 \text{ t}$$

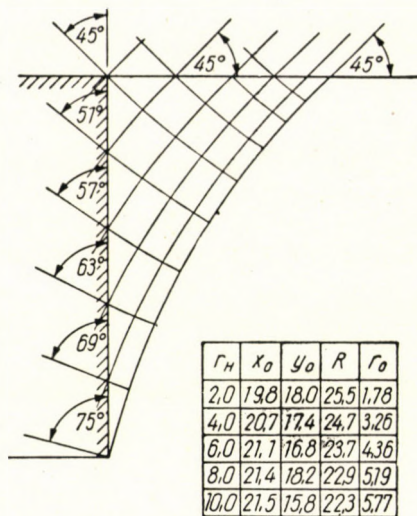


Fig. 6

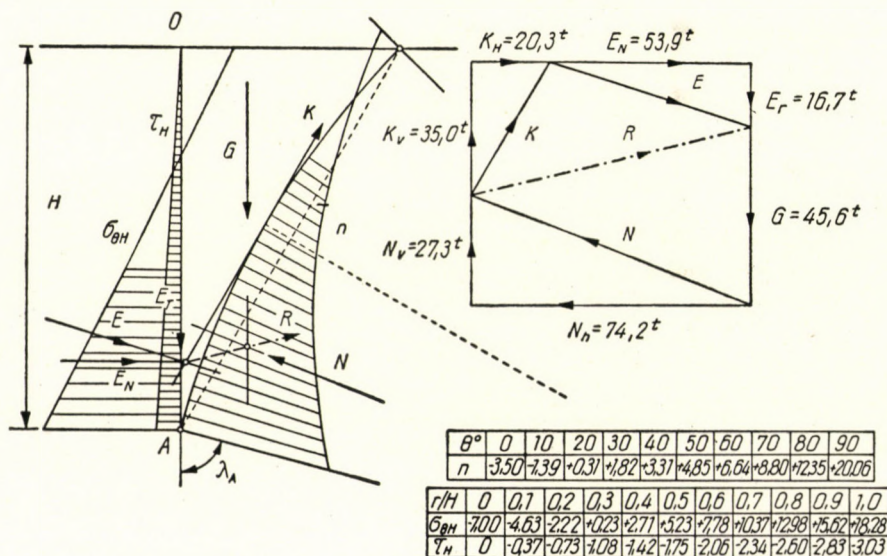


Fig. 7

$N_v = 27,3 \text{ t}$

$N_h = 74,2 \text{ t}$

$E_t = 16,7 \text{ t}$

$E_n = 53,9 \text{ t}$

Nous avons dessiné la surface de glissement, la position des forces et la répartition des tensions sur les Figures 6 et 7.

Il est visible que les résultats théoriques satisfont aux conditions de l'équilibre.

RÉFÉRENCES

1. SKEMPTON, A. W.: The $\Phi = 0$ Analysis of Stability and its Theoretical Basis. Proceedings of the IInd International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Rotterdam, 1948.
2. JÁKY, J.: Stability of Earth Slopes. Proceedings of the Ist International Conference on Soil Mechanics, Cambridge Mass. 1936.
3. JÁKY, J.: Sur la stabilité des masses de terres complètement plastiques. Műegyetemi Közlemények. Budapest 1947—1948.
4. JÁKY, J.: Minimum of Earth Pressure. Proceedings of the IInd Conference on Soil Mechanics and Foundation Eng. Rotterdam, 1948.
5. JÁKY, J.: Novel Theory of Earth Pressure. Proceedings of the IInd Conference on Soil Mechanics and Foundation Eng. Rotterdam 1948.

RÉSUMÉ

La littérature de la mécanique des sols étudie souvent, ces derniers temps, l'état de sols où la résistance au cisaillement est indépendante de la tension normale. Ce cas subsiste même si l'angle de frottement du sol est zéro ($\Phi = 0$). C'est l'état dit «parfaitement plastique», qui fait aussi l'objet de la présente étude. A partir des équations d'équilibre et de l'équation de Kötter, on peut écrire une équation différentielle. Selon la solution de celle-ci, les surfaces de glissement sont des cercles à centre variable (non concentriques).

La solution peut s'appliquer à de nombreux problèmes pratiques. L'étude présente le cas d'un mur de soutènement basculant autour de son point d'angle inférieur, et animé d'un mouvement vertical vers le bas. Les formules sont illustrées par un exemple numérique.

DER BODENDRUCK AUF EINE STÜTZMAUER IM FALLE EINES VOLLKOMMEN
PLASTISCHEN ERDKÖRPERS

Á. BALLA

ZUSAMMENFASSUNG

Die Fachliteratur der Bodenmechanik widmet neuestens große Aufmerksamkeit dem Zustand der Böden, in dem die Schubfestigkeit unabhängig von der Normalspannung ist. Dieser Fall besteht auch dann, wenn der Reibungswinkel des Bodens Null ist ($\Phi = 0$). Dies ist der sogenannte «vollkommen plastische Zustand», mit diesem beschäftigt sich die vorliegende Arbeit. Ausgehend von den Gleichgewichtsbedingungen und den Kötterschen Gleichungen kann eine Differentialgleichung angeschrieben werden, deren Lösung ergibt, daß die Gleitflächen Kreise mit veränderlichem Mittelpunkt (nicht konzentrische Kreise) sind.

Diese Lösung kann für Lösung von mehreren praktischen Aufgaben angewendet werden. Die Arbeit behandelt den Fall der Stützmauer, die um den nach unten sich verschiebenden unteren Eckpunkt kippt, und erläutert die Formeln durch ein numerisches Beispiel.

THE SOIL PRESSURE ON A SUSTAINING WALL, IN THE CASE OF A PERFECTLY
PLASTIC EARTH BODY

Á. BALLA

SUMMARY

During the last time, literature on soil mechanics devotes great attention to the state of the soil where the shear strength is independent from the normal stresses. This state occurs also if the angle of friction of the soils is zero ($\Phi = 0$); this is the so-called «perfectly plastic state», with which deals the present paper. On the base of the equilibrium equations and the Kötter equation, a differential equation can be established, the solution of which shows that the sliding surfaces are (non-concentric) circles of varying centres.

This solution can be applied to several practical cases. In the paper, the case of the sustaining wall, tilting around its lower edge sliding downwards, is shown and the formulae are illustrated by a numerical example.

ДАВЛЕНИЕ ГРУНТА, ДЕЙСТВУЮЩЕЕ НА ОПОРНУЮ СТЕНУ, В СЛУЧАЕ СОВЕРШЕННО ПЛАСТИЧНОГО ТЕЛА ГРУНТА

А. БАЛЛА

РЕЗЮМЕ

В последнее время в литературе по грунтовой механике уделяется большое внимание состоянию грунтов, при котором сопротивление сдвигу независит от нормального напряжения. Этот случай имеет место и тогда, если угол трения грунта равен полю ($\Phi = 0$). Это является т. н. состоянием «совершенной пластичности». Статья посвящена этому случаю. Исходя из уравнений равновесия и уравнения Кэттера, можно вывести дифференциальное уравнение. Решение дифференциального уравнения показывает, что плоскости скольжения представляют собою неконцентричные круги.

Это решение можно применить для случая ряда практических примеров. В работе рассматривается случай опорной стены, вращающейся вокруг нижнего угла, и формулы разясняются числовым примером.

DIE STRENGE BERECHNUNG DER VERHINDERTEN DEHNUNG VON LANGSCHIENEN UND LÜCKENLOSEN GLEISEN AUF GRUND EXPERIMENTELLER GLEISWIDERSTANDSKURVEN

Dr. techn. E. NEMESDY

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

LEHRSTUHL FÜR STRASSEN- UND EISENBAHNBAU DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE FÜR BAUINDUSTRIE
UND VERKEHRSWESEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 27. April 1959]

I. Einleitung und Zielsetzung

Mit der stürmischen Verbreitung der lückenlos verschweißten Gleise drängt sich in letzter Zeit die Untersuchung der Bewegung der Schienenenden und die Frage ihrer konstruktiven Lösung besonders im Falle veränderter Dehnung in den Vordergrund. Die Größenänderung der Bewegungen von Schienenenden kann abhängig von einer wechselnden und stetigen Temperaturänderung, gegebenenfalls bei Schienenbrüchen im Winter, am einfachsten und übersichtlichsten unter der Voraussetzung eines konstanten, von den Verschiebungen unabhängigen Bettungswiderstandes von der Größe p kg/cm berechnet werden. Dieses Berechnungsverfahren wurde nach der Initiative von DR. NEMESDY-NEMCSEK [1], WATTMANN [3] und GRUENEWALDT [4] nach einer entsprechenden Weiterentwicklung [5, 6, 7, 8, 14] ein allgemeingültiges Verfahren.

Durch inzwischen durchgeführte Versuche von Bettungswiderstandsmessungen (sowohl frühere [4] als auch die neuesten [13]) wurden Bettungswiderstands-Verschiebungskurven für mehrere Oberbauarten gewonnen. Die Abbildungen 1a und 1b stellen ihre charakteristische Form dar. Aus diesen geht hervor, daß der Gleiswiderstand in Längsrichtung (p kg/cm) von einem sehr kleinen Anfangswert schon während einer ersten Verschiebung von 4–5 mm bis zu seinem vollen Wert ansteigt, der sich jedoch bei einer weiteren Verschiebung nicht mehr wesentlich ändert, mithin also von hier an tatsächlich konstant ist (Abb. 1a). In einem anderen Fall konnte auch im zweiten Abschnitt eine langsame Widerstandszunahme festgestellt werden (Abb. 1b).

Teils auf Grund solcher Versuche, teils auf Grund rein theoretischer Überlegungen wurden diejenigen Dehnungsberechnungen entwickelt, die auf einer Berücksichtigung des *mit der Verschiebung sich ändernden Widerstandes* p kg/cm basieren. So stellt die Abb. 2a die Annahmen des Ungarn DR. NEMESDY-NEMCSEK [2], Abb. 2b die des Schweizer STÜSSI [9], 2c die des Japaners HOSHINO [10] und des Rumänen C. MIKLÓSI [11] bezüglich der Änderung des Bettungswiderstandes dar. Eine gemeinsame Charakteristik dieser über-

aus verwickelten Berechnungsverfahren ist die Tatsache, daß in ihren Endformeln ihre Verwandtschaft mit dem Berechnungsverfahren, das mit einem konstanten Gleiswiderstand arbeitet, verschwindet; infolgedessen könnte man im ersten Augenblick glauben, daß ihre Resultate von dem »Näherungsverfahren« stark abweichen und viel »genauere« Werte ergeben.

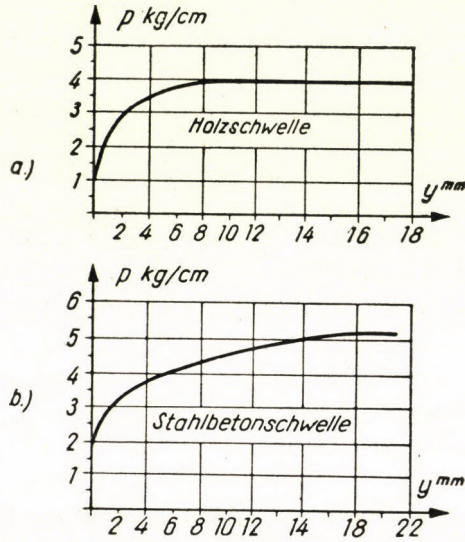


Abb. 1

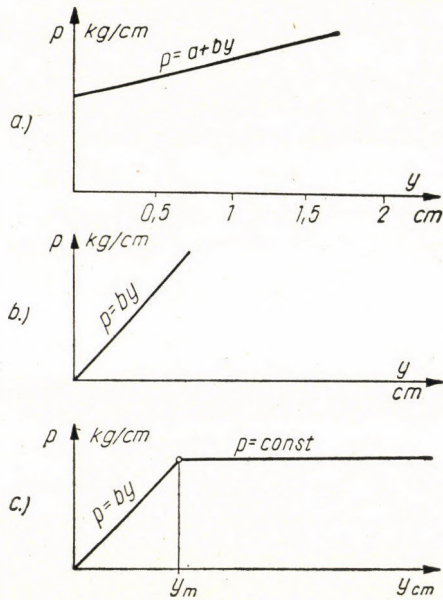


Abb. 2

Im folgenden soll eine »strenge« Dehnungsberechnung vorgeführt werden, die sich der Widerstands-Verschiebungskurve eng anschmiegt und nicht nur »genauer« als die vorhin erwähnten Verfahren ist, sondern auch in ihren Endformeln die Verwandtschaft mit dem »Näherungsverfahren« behält und gleichzeitig zeigt, wie groß die formel- und zahlenmäßige Abweichung zwischen dem »Näherungs-« und dem »strengen« Verfahren bzw. bei Berücksichtigung eines konstanten (p kg/cm) und eines veränderlichen Bettungswiderstandes ist.

Auf diese Weise kann also nach einem Vergleich entschieden werden, ob es bei Dehnungsberechnungen notwendig oder wert ist, »strenge« Berechnungsverfahren anzuwenden, oder ob man das »Näherungsverfahren« beibehalten kann, das mit einem konstantem Gleiswiderstand p kg/cm arbeitet, übersichtlich und einfach ist und außerdem die Wirkung der Temperaturschwankungen plastisch darstellt.

Deshalb werden im folgenden Kapitel II die Grundzusammenhänge der einen konstanten Gleiswiderstand voraussetzenden Näherungsberechnung kurz zusammengefaßt, um in Kapitel III die auf den experimentellen Widerstandskurven beruhende *strenge* Berechnung zu behandeln.

II. Die Berechnung der verhinderten Dehnung bei konstantem Gleiswiderstand

Es ist eine bekannte Tatsache, daß eine Temperaturänderung Δt° in einer in ihrer Ausdehnung *vollkommen* behinderten unbeweglichen Schiene eine innere Dehnungskraft $P = \alpha EF \Delta t$ hervorruft. Das Ende einer Langschiene kann sich wegen des Widerstandes (H kg) der Laschen und wegen des Längswiderstandes (p kg/cm) des Gleises nur in einer begrenzten — temperaturbedingten — Länge z verschieben. Das Ende einer sog. *Atmungslänge* befindet sich dort, wo die der Bewegung entgegenwirkenden passiven Kräfte gerade den Dehnungskräften gleich sind: $H + pz = \alpha EF \Delta t$.

Daraus ist die jeweilige Länge einer Atmungslänge:

$$z = \frac{\alpha EF \Delta t - H}{p} \quad (1)$$

In der Abb. 3a sind über dem Schienenende die waagrechte Komponente BC der Dehnungskraft P und die schiefe Gerade $AB'C$ der Widerstandskräfte dargestellt.

Vom Schnittpunkt C an findet gegen die Schienenmitte zu keine Bewegung mehr statt, weil die Summe der Widerstände schon größer ist als die die Bewegung hervorrufende Dehnungskraft; von Punkt C an dehnt sich die Schiene immer mehr, da sich der Widerstand verringert. Die größte Dehnbewegung vollführt natürlich der Querschnitt des Schienenendes: Δz . Die

tatsächliche Schienenendverschiebung Δz wird um den Betrag $\Delta z_{H,p}$, der durch die Widerstandskräfte hervorgerufen wurde und entgegengesetzt gerichtet ist, kleiner als die ungehemmte Dehnung $\Delta z_t = a z \Delta t$ des Abschnittes z sein: $\Delta z = \Delta z_t - \Delta z_{H,p}$. Die Längenänderung $d \Delta z$ eines Abschnittes von der Länge dz ist nach dem Hookeschen Gesetz unter der Einwirkung der Widerstandskräfte $(H + pz)$:

$$d \Delta z_{p,H} = dz \cdot \varepsilon = dz \frac{\sigma}{E} = \frac{H + pz}{EF} dz$$

und bei einem Abschnitt von der Länge z hingegen:

$$\Delta z_{p,H} = \int_0^z \frac{H + pz}{EF} dz = \frac{H}{EF} z + \frac{pz^2}{2EF} \quad \text{a.}$$

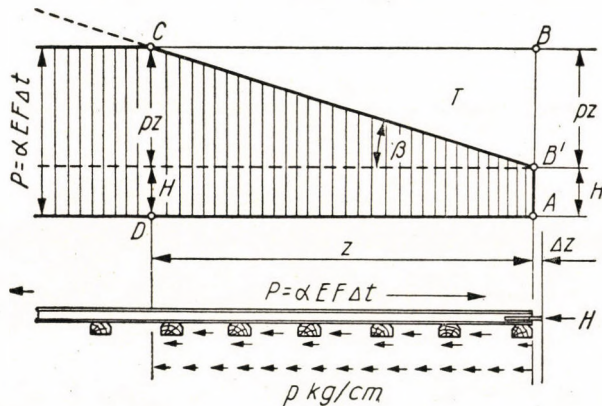


Abb. 3a

Die tatsächliche Verschiebung des Schienenendes ist somit:

$$\Delta z = \Delta z_t - \Delta z_{p,H} = a z \cdot \Delta t - \frac{H}{EF} z - \frac{pz^2}{2EF} \quad \text{b.}$$

Wird hier die Formel (1) der jeweiligen Länge z des Atmungsabschnittes eingesetzt, dann ist die Formel für die Verschiebung der Schienenenden, die besonders für die Untersuchung der Enden lückenloser Geleise angewendet werden kann:

$$\Delta z = \frac{(a EF \Delta t - H)^2}{2 EF p} \quad (2)$$

Daraus geht hervor, daß bei einer Temperaturzunahme die Atmungslänge (Formel 1) linear, die Schienenendverschiebung dagegen (Formel 2) *quadratisch* zunimmt.

Bei einer kürzeren Schiene kann sich die Atmungslänge höchstens auf eine *halbe Schienenlänge* l erstrecken (Abb. 3b):

$$z_{\max} = \frac{\alpha EF \Delta t_h - H}{P} = l$$

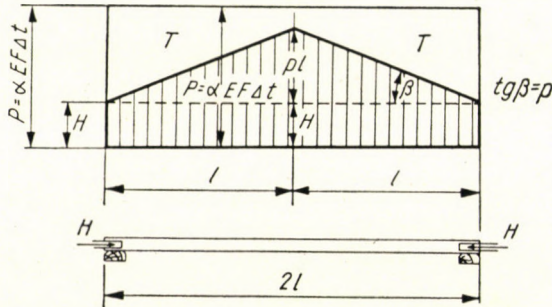


Abb. 3b

Daraus ist die Temperaturdifferenz Δt_h bei der eine Kurzschiene sich schon in ihrer ganzen Länge zu dehnen beginnt:

$$\Delta t_h = \frac{H + pl}{\alpha EF} \quad (3)$$

Die Verschiebung Δl des Endes einer kurzen Schiene liefert im Falle einer kleineren Temperaturdifferenz als Δt_h Formel 2 ($\Delta z = \Delta l$), während sie bei einer größeren durch die folgende Formel 4 gegeben ist, nachdem im obigen Zusammenhang b der nunmehr konstante Wert $z = l$ eingesetzt wurde:

$$\Delta l = \alpha l \Delta t - \frac{H}{EF} l - \frac{Pl^2}{2EF} \quad (4)$$

Eine kurze Schiene dehnt sich also nach der Überwindung der Widerstände bei gleichgerichteter Temperaturänderung *linear* aus.

Nun muß man den wichtigen Umstand zur Kenntnis nehmen, daß die Flächendifferenz zwischen der die Dehnungskraft P darstellenden Fläche

und der die Widerstandskräfte darstellenden Fläche T mit der Größe der Bewegung des Schienenendes unmittelbar proportional ist (Abb. 3a).

$$\Delta z \quad \text{bzw.} \quad \Delta l = \frac{T}{EF} \quad (5)$$

Die durch die Dehnungskraft $P = a EF \Delta t$ allein hervorgerufene Bewegung ist offensichtlich im Falle keiner Behinderung dem *Hookeschen* Gesetz entsprechend (Abb. 3a):

$$\Delta z_t = \frac{z \cdot a EF \Delta t}{EF} = \frac{T_{(ABCD)}}{EF}$$

Die durch die Widerstandskräfte allein verursachte Verschiebung $\Delta z_{p,H}$ kann im Hinblick auf den obigen Zusammenhang a und auf die Abb. 3a von neuem mit einer Fläche gemessen werden:

$$\Delta z_{p,H} = \int_0^z \frac{H + pz}{EF} dz = \frac{1}{EF} \int_0^z (H + pz) dz = \frac{T_{(AB'CD)}}{EJ}$$

Die tatsächliche Bewegung des Schienenendes ist also wieder:

$$\Delta z = \Delta z_t - \Delta z_{p,H} = \frac{T_{(ABCD)}}{EF} - \frac{T_{(AB'CD)}}{EF} = \frac{T_{(BCB')}}{EF}$$

Dadurch wurde der Zusammenhang 5 bestätigt, da T stets die zwischen der Dehnungskraftfläche und Widerstandskraftfläche herrschende *Flächendifferenz* bedeutet.

III. Die genaue Berechnung der verhinderten Dehnung auf Grund experimenteller Widerstandskurven

1. Ein strenges Berechnungsverfahren für die Bewegung der Schienenenden bei lückenlos verschweißten Gleisen

a) Die Berechnung einer Doppelabschnittsdehnung

Die beste und zweckmäßigste Näherung an die experimentellen Gleiswiderstands (p kg/cm) -Verschiebungs (y cm) -Kurven geschieht — wie LEV SACKMAUER [12] 1958 in Tatra-Lomnitz (Československo) auf der Kon-

ferenz für lückenlos verschweißte Gleise im Zusammenhang mit dem Referat von C. MIKLÓSI [11] hinwies — in zwei Abschnitten, wobei ein Anfangsreibungswert angenommen wird. Im ersten wächst der Gleiswiderstand von einem kleinen Anfangswert p_0 kg/cm linear bis zu einer Größe p kg/cm, um im zweiten — von der Verschiebung $y = y_1$ (z. B. von 5 mm) an — konstanten Charakter zu besitzen: p kg/cm = konst. Die den Gleislängswiderstand darstellenden Formeln sind also gemäß Abbildung 4:

Abschnitt I:

$$\begin{aligned} y \leq y_1: & \\ x \leq x_1: & P_x = p_0 + q \cdot y \end{aligned} \quad (6a)$$

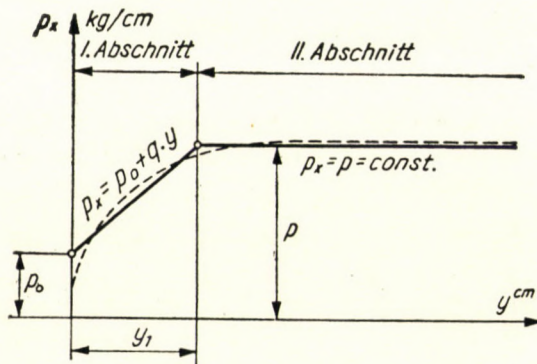


Abb. 4

Abschnitt II:

$$\begin{aligned} y \geq y_1: & \\ x \geq x_1: & P_x = p = \text{konst.} \end{aligned} \quad (6b)$$

worin also die Größen p_0 , q , y_1 gegeben sind.

Wenn sich ein Gleiselement von der Länge dx infolge der verhinderten Dehnung um den Betrag dy dehnt, dann gilt wieder nach dem Hookeschen Gesetz und Abb. 5:

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{T_x}{EF} = y' \quad (7a)$$

das heißt:

$$y' = \frac{1}{EF} \left[a EF \Delta t - H - \int_0^x P_x \cdot dx \right]$$

Die Gleichung wird nach x differenziert:

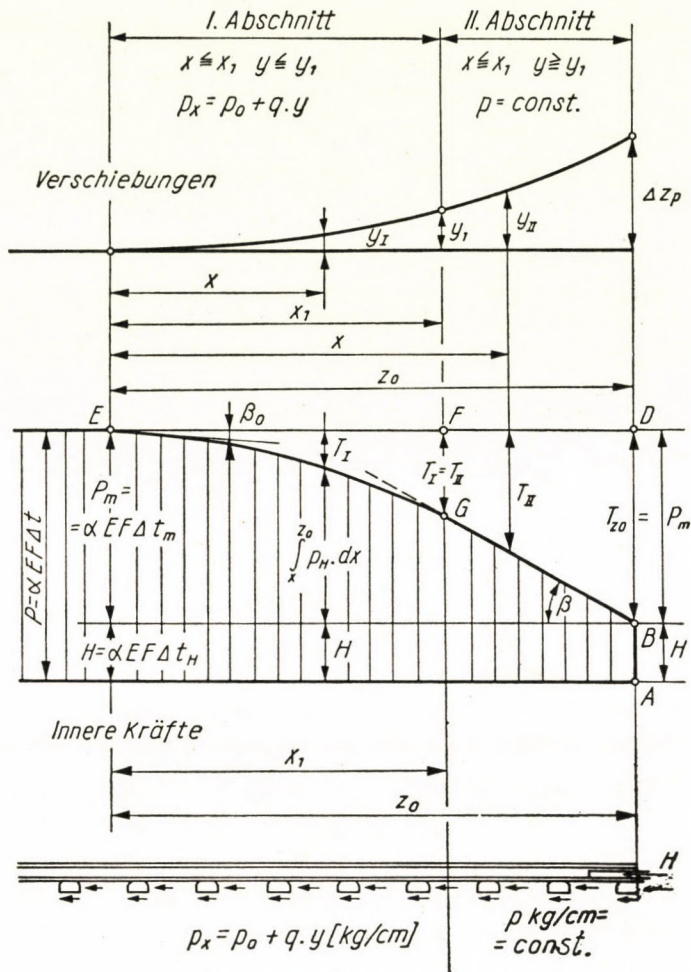


Abb. 5

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{P_x}{EF} \quad (7b)$$

Das ist die Differentialgleichung der verhinderten Dehnung, die für die voneinander abweichenden zwei Abschnitte getrennt gelöst werden muß.

a) *Abschnitt I.* In den zum ersten Abschnitt gehörenden Teil der kleinen Verschiebungen $y < y_1$ und des Atmungsabschnittes $x < x_1$ nimmt die Differentialgleichung infolge des linear anwachsenden Widerstandes p_x die Form:

$$y'' = \frac{P_x}{EF} = \frac{qy + p_0}{EF} = \frac{q}{EF} y + \frac{p_0}{EF} = Ay + B \quad \text{an.}$$

Ihre allgemeine Lösung ist:

$$y_I = C_1 ch ax + C_2 sh ax - b \quad (8)$$

worin:

$$a = \sqrt{A} = \sqrt{\frac{q}{EF}} \quad (8a)$$

$$b = \frac{B}{A} = \frac{P_0}{q} \quad (8b)$$

b) *Abschnitt II.* Im Abschnitt der größeren Verschiebungen $y > y_I$ und im zweiten Teil des Atmungsabschnittes $x > x_1$ ist der Gleiswiderstand bereits konstant: $p_x = p = \text{konst.}$ und dadurch die Differentialgleichung und ihre allgemeine Lösung jetzt:

$$y'' = \frac{P_x}{EF} = \frac{P}{EF}$$

das heißt:

$$y_{II} = \frac{px^2}{2EF} + C_3 x + C_4 \quad (9)$$

Die Integrationskonstanten C_1, C_2, C_3 und C_4 werden aus den folgenden vier Gleichungen berechnet, die ihrerseits aus den die Abschnittsanschlüsse zum Ausdruck bringenden Randbedingungen entstanden sind:

1. Bei $x = 0$ ist $y_I = 0$ (am Ende des Atmungsabschnittes tritt also keine Verschiebung auf).

2. Bei $x = x_1$ ist $y_I = y_{II}$ (im Anschlußpunkt der zwei Abschnitte ist die Verschiebung dieselbe).

3. Bei $x = x_1$ ist $y' = y'_{II}$ (d. h. im Anschlußpunkt der zwei Abschnitte hat die Verschiebungskurve — $y = F(x)$ — eine gemeinsame Tangente. Mit anderen Worten: im Sinne des Zusammenhanges 7a ist die Größe der Kraft T_x , die die Dehnung hervorruft, nach Abb. 5 im Anschlußpunkt gleich groß).

4. Bei $x = z_0$ ist

$$y'_{II} = \frac{T_{z_0}}{EF} = \frac{aEF \Delta t - H}{EF} = a \Delta t - \frac{H}{aEF} = a \Delta t_m$$

(beim Schienenende ist also die Größe der die Dehnung hervorruhenden Kraft $T_{z_0} = (aEF \Delta t - H)$ unmittelbar bekannt).

Aus diesen 4 Bedingungen kann das Gleichungssystem gelöst werden und es ergeben sich die gesuchten Integrationskonstanten

$$C_1 = b \quad (10a)$$

$$C_2 = \frac{\alpha EF \Delta t_m - p(z_0 - x_1)}{EF a \operatorname{ch} ax_1} - b \operatorname{th} ax_1 \quad (10b)$$

$$C_3 = \alpha \Delta t_m - \frac{Pz_0}{EF} \quad (10c)$$

$$C_4 = \frac{\alpha EF \Delta t_m - p(z_0 - x_1)}{EF a} \operatorname{th} ax_1 + b [\operatorname{ch} ax_1 - \operatorname{th} ax_1 \cdot \operatorname{sh} ax_1 - 1] - \left[\alpha \Delta t_m x_1 - \frac{pz_0 x_1}{EF} + \frac{px_1^2}{2EF} \right] \quad (10d)$$

In allen diesen Zusammenhängen (wie auch in den späteren) wird, um den Laschenwiderstand H einfacher berücksichtigen zu können, die Temperaturdifferenz Δt_m benützt, bei der gilt:

$$\Delta t_m = \Delta t - \Delta t_H = \Delta t - \frac{H}{\alpha EF} \quad (11)$$

Damit hätten wir das Gesetz der Dehnung theoretisch bestimmt, unbekannt ist dagegen noch die in den Zusammenhängen vorkommende Abszisse der Abschnittsgrenze x_1 und die Größe der Atmungslänge z_0 .

Die Länge der Atmungsstrecke kann aus der Bedingung berechnet werden, daß die die Dehnung hervorrufende Kraft am Anfang der Atmungsstrecke Null ist: $T_x = T_0 = 0$. Dann ist auf Grund des Zusammenhanges 7a offensichtlich:

$$\frac{T_x}{EF} = \frac{T_0}{EF} = y'_1 = 0$$

Die Bedingung ist also: bei $x = 0$ ist $y_1 = 0$. Wird die Funktion 8 also differenziert und im Punkt $x = 0$ gleich Null gesetzt:

$$C_1 \cdot a \operatorname{sh} 0 + C_2 a \operatorname{ch} 0 = 0$$

und daraus

$$C_2 = 0$$

Mit der Einsetzung von 10b

$$C_2 = \frac{\alpha EF \Delta t_m - p(z_0 - x_1)}{EF a \operatorname{ch} ax_1} - b \operatorname{th} ax_1 = 0$$

Daraus kann z_0 ausgedrückt werden:

$$z_0 = \frac{\alpha EF \Delta t_m}{p} + x_1 - \frac{ab EF}{p} \operatorname{sh} ax_1$$

Da man durch die Einsetzung der Formeln (8a) und (8b) $abEF = (p_0/a)$ erhält, so ist die Formel für die Länge des Atmungsabschnittes schließlich:

$$z_0 = \frac{\alpha EF \Delta t - H}{p} + x_1 - \frac{p_0}{ap} \operatorname{sh} ax_1 \quad (12)$$

Danach wird die Länge des Abschnitts x_1 aus derjenigen letzten Bedingung berechnet, daß die Kurve der inneren Kräfte (siehe Abb. 5) bei der Abschnittsgrenze nicht nur eine gemeinsame Ordinate, sondern auch eine gemeinsame Tangente besitzt. Mit einer neuerlichen Benützung des Zusammenhanges (7a)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{T_{x_1}}{EF} \right) \frac{d}{dx} (y') = y''$$

ist die letzte Bedingung somit: bei $x = x_1$ ist $y'_I = y''_{II}$. Die zwei Zusammenhänge (8) und (9) werden differenziert und einander gleichgesetzt:

$$C_1 a^2 \operatorname{ch} ax_1 + C_2 a^2 \operatorname{sh} ax_1 = \frac{P}{EF}$$

Werden nun die Konstanten C_1 und C_2 mit ihren in den Formeln (10a) und (10b) angegebenen Werten eingesetzt, so kann als Resultat wieder die Länge des Atmungsabschnittes z_0 ausgedrückt werden:

$$z_0 = \frac{\alpha EF \Delta t - H}{p} + x_1 - \frac{p_0}{ap} \left(\operatorname{sh} ax_1 - \frac{\operatorname{ch} ax_1}{\operatorname{th} ax_1} \right) - \frac{1}{a \operatorname{th} ax_1} \quad (12a)$$

Werden die beiden Ausdrücke 12 und 12a für diesen Atmungsabschnitt miteinander verglichen, so kann folgender Zusammenhang gewonnen werden:

$$\frac{p_0}{ap} \operatorname{sh} ax_1 = \frac{p_0}{ap} \left(\operatorname{sh} ax_1 - \frac{\operatorname{ch} ax_1}{\operatorname{th} ax_1} \right) + \frac{1}{a \operatorname{th} ax_1}$$

Die Gleichung kann gekürzt werden und es wird:

$$\operatorname{ch} ax_1 = \frac{p}{p_0}$$

Daraus entsteht die Formel für die gesuchte Abschnittslänge x_1 :

$$x_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arch} \frac{p}{p_0} \quad (13)$$

oder mit der Einsetzung von a aus der Formel 6a:

$$x_1 = \sqrt{\frac{EF}{q}} \cdot \operatorname{arch} \frac{P}{p_0}. \quad (13a)$$

Damit wurde die gestellte Aufgabe bereits gelöst, da es nunmehr möglich ist, für jeden beliebigen Schienenquerschnitt die verhinderte Dehnungsverschiebung zu berechnen. Bei der Berechnung der Verschiebung der Schienenenden müßte nach der Einsetzung von $x = z_0$ der Reihe nach mit den Formeln 8a, 8b, 13, 12, 11, 10b, 10c und 9 gerechnet werden. Dadurch würde sich die Berechnung außerordentlich langwierig gestalten und außerdem könnte man die Verwandtschaft mit dem Verfahren, das mit dem konstanten Widerstand p kg/cm arbeitet, nicht feststellen.

b) Die strenge Formel der Schienenendenbewegung für die Praxis

Im folgenden soll gezeigt werden, daß es möglich ist, die Schienenendenbewegung auch mit einer einzigen Formel genau darzustellen, ohne die oben erwähnten acht nacheinander ausrechnen zu müssen. Außerdem erhellt sie die Größe und das Wesen der Abweichung von Näherungsverfahren und deckt ihre Verwandtschaft mit diesem auf.

Man untersuche Abb. 6, in der die inneren Kräfte eines lückenlosen Schienenendes nach den oben gewonnenen Resultaten im Falle einer Dehnung in zwei Abschnitten dargestellt sind. Die inneren Kräfte sind entlang der Atmungslänge gleich den jeweiligen Summen R_x der Widerstände vom Schienenende an gerechnet. Dort, am Schienenende ist $R_x = H$. In Abschnitt II, wo der Widerstand die konstante Größe p kg/cm hat, werden die inneren Kräfte durch die Gerade BG , die unter dem Winkel $\operatorname{tg} \beta = p$ ansteigt, dargestellt. Entlang der Länge des Abschnitts I nimmt der Gleiswiderstand p kg/cm auf den Atmungsabschnitt zu stetig ab, bis er einen Wert p_0 erreicht; infolgedessen werden die inneren Kräfte von diesem Punkt an nicht durch die Gerade GC , sondern durch die Kurve GE dargestellt, deren Tangentenneigung von der Größe $\operatorname{tg} \beta = p$ allmählich bis zum Wert $\operatorname{tg} \beta_0 = p_0$ im Punkt E sinkt. Die Größe der Schienenendendehnung ist hier, ebenso wie in Formel (2), mit dem Hookeschen Gesetz:

$$z_p = \int_0^{x=z_0} \frac{T_x}{EF} dx = \frac{1}{EF} \int_0^{x=z_0} (P - R_x) dx = \frac{1}{EF} T_{(BDEGB)}$$

Die Schienenendenbewegung kann also durch die Fläche ($BDEGB$) der Abb. 6 dargestellt werden. Entsprechend den oben erwähnten Formeln (2) und

(5) beträgt die Verschiebung des Schienenendes bei *durchwegs konstantem* p kg/cm

$$\Delta z_k = \frac{1}{EF} T_{(BCDB)} = \frac{(\alpha EF \Delta t - H)^2}{2 EF p} \quad (2,5)$$

Die »genaue«, aus zwei Abschnitten bestehende, zum Teil mit veränderlichem Widerstand gerechnete Schienenendenbewegung Δz_p weicht also von dem leicht zu ermittelnden Näherungswert Δz_k um einen Betrag $\delta \Delta z$ ab. Diese »Korrektion« ist, wie vorhin gesagt wurde, der in Abb. 6 schraffierten Fläche

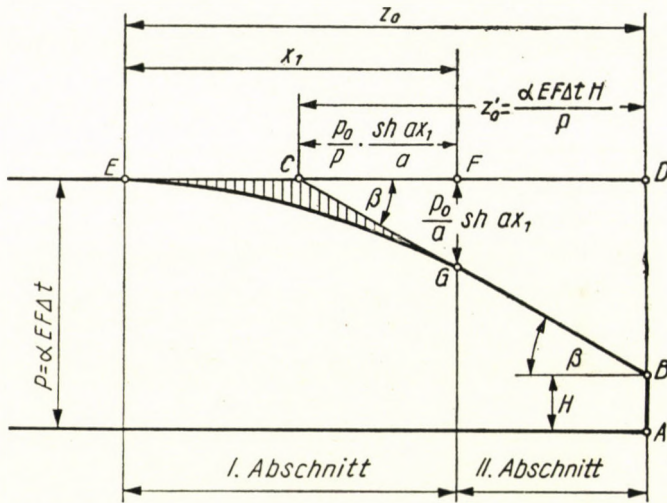


Abb. 6

(GCEG) proportional. Der genaue Wert kann also auch auf diese Weise zum Ausdruck gebracht werden:

$$\Delta z_p = \Delta z_k + \delta \Delta z = \frac{(\alpha EF \Delta t - H)^2}{2 EF p} + \frac{T_{(GCEG)}}{EF} \quad (a)$$

Berechnen wir nun den Flächeninhalt (GCEG). Wir wissen, daß an der Grenze der beiden Abschnitte die Verschiebung des Querschnittes $x = x_1$ gerade mit der bekannten Größe y_1 übereinstimmt (siehe Abb. 4). Die entsprechende Fläche ist in Abb. 6 (EGFCE), d. h. es ist

$$T_{(EGFCE)} = EF \cdot y_1 \quad (b)$$

Die zu subtrahierende Dreiecksfläche (CFG) können wir bereits berechnen, denn die Länge des Atmungsabschnittes z_0 ist nach der erwähnten Formel (12):

$$z_0 = \frac{\alpha EF \Delta t - H}{p} + x_1 - \frac{P_0}{ap} \operatorname{sh} ax_1$$

Das erste Glied $(\alpha EF \Delta t - H)/p$ ist nichts anderes als der Abstand DC in Abb. 6, während dem zweiten Glied x_1 die Entfernung EF entspricht. Das dritte Glied gibt demnach offenbar die Überdeckungsstrecke CF an:

$$CF = \frac{P_0}{ap} \operatorname{sh} ax_1$$

Die lotrechte Strecke FG ist wegen der Neigung $\operatorname{tg} \beta = p$ gleich $FG = CF \cdot p$. Demnach ist die Fläche des Dreiecks (CFG) :

$$T_{(CFG)} = \frac{CF \cdot FG}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_0^2}{a^2 p} \operatorname{sh}^2 ax_1 \quad (c)$$

Nun kann der Korrektionswert $\delta \Delta z$ mit den Zusammenhängen $a)$, $b)$ und $c)$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} \delta \Delta z &= \frac{1}{EF} T_{(GCEG)} = \frac{1}{EF} [T_{(EGFCE)} - T_{(CFG)}] = \\ &= \frac{1}{EF} \left[EF y_1 - \frac{P_0^2}{2 a^2 p} \operatorname{sh}^2 ax_1 \right] \end{aligned}$$

Zieht man in Betracht, daß nach Formel (6a) $a^2 = q/EF$ ist, dann wird:

$$\delta \Delta z = y_1 - \frac{P_0^2}{2 qp} \operatorname{sh}^2 ax_1$$

Hierin wird die Länge des Abschnitts x_1 durch die Formel (13) bestimmt

$$x_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arch} \frac{P}{P_0}. \quad (13)$$

Wird dieser Ausdruck in die obige Formel eingesetzt, so erhält man die Differenz zwischen dem »Näherungs-« und dem »strengen« Wert der Schienenendenverschiebung:

$$\delta \Delta z = y_1 - \frac{P_0^2}{2 qp} \operatorname{sh}^2 \left(\operatorname{arch} \frac{P}{P_0} \right) \quad (14a)$$

Benützt man den Näherungswert 3 für konstanten p kg/cm Gleiswiderstand, so sieht die Formel für den »strengen« Wert der Schienenendenverschiebung folgendermaßen aus:

$$\Delta z_p = \frac{(aEF\Delta t - H)^2}{2EFp} + y_1 - \frac{P_0^2}{2pq} \operatorname{sh}^2 \left(\operatorname{arch} \frac{P}{P_0} \right). \quad (14)$$

Ein äußerst großer Vorteil der obigen Formel ist es, daß an Stelle der im ursprünglichen strengen Verfahren zu berechnenden acht Formeln nur eine einzige, nicht komplizierte Formel gelöst werden muß. Der andere große Vorteil besteht darin, daß das erste Glied der Formel die annähernde Größe derjenigen Schienenendenbewegung darstellt, die mit dem durchwegs konstanten Widerstand berechnet worden war. Die Wirkung der Vernachlässigung des sich stark ändernden Anfangsabschnittes (Abb. 1 und 4) der Bettungswiderstand-Verschiebungskurve bzw. seine Berücksichtigung, also die endgültige Wahl des Näherungs- oder des strengen Verfahrens kann also erst bei der zahlenmäßigen Auswertung unmittelbar beurteilt werden.

Untersuchen wir nun den *Gültigkeitsbereich* des in a)–c) dargestellten strengen Verfahrens und damit offensichtlich den der obigen Formel (14).

Den obigen Berechnungen wurde nur eine *einseitige, also nicht schwankende* Temperaturänderung zugrunde gelegt. Wir wissen [2, 4, 8, 23], daß bei wiederkehrenden und schwankenden Zwischentemperaturen die vorangegangenen Schwankungen und Temperaturzwischenwerte die Größe der Bewegungen bereits beeinflussen und infolgedessen ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Temperatur und der Schienenendenbewegung immer nur bei solchen Grenztemperaturen entsteht, die seit dem Zeitpunkt der Gleisverlegung nicht vorgekommen sind; *es handelt sich nun um diese Grenztemperatur*. Die vorangegangenen Berechnungen einerseits und die Endformel (14) andererseits gelten also immer für den äußersten, seit der Verlegung entstandenen *größten bzw. kleinsten Temperaturwert*; eigentlich benötigt man immer diesen. Es ist selbstverständlich, daß, wenn das Schienenende z. B. in einer Laschenbindung liegt und sein Spiel über die Schließung oder die volle Größe der Stoßblücke nicht hinausgehen kann, die erwähnten Grenztemperaturen nicht größer bzw. kleiner als die Temperaturen der Lückenschließung bzw. der vollen Lückenöffnung sein können.

Die bisherigen Formel bezogen sich alle auf eine *Doppelabschnittsdehnung*. Δt muß deshalb mindestens eine so große Temperaturdifferenz sein, bei der die Schienenendenbewegung eine Verschiebung von y_1 cm erreichte (siehe Abb. 4), d. h. der volle Widerstand p kg/cm konnte beim Schienenende bereits minimal auftreten. Darum erhält man die Größe der die Gültigkeitsgrenze

bedeutenden Temperaturdifferenz $\Delta t_{1,2}$ aus Formel (14), indem die Verschiebung Δz_p durch y_1 ersetzt wird und die Formel nach Δt aufgelöst wird:

$$\Delta t_{1,2} = \frac{H}{\alpha EF} + \frac{P_0}{\alpha \sqrt{EF} q} \operatorname{sh} \left(\operatorname{arch} \frac{P}{P_0} \right). \quad (15)$$

Wird demnach die Bedingung

$$\Delta t \geq \Delta t_{1,2} \quad (15a)$$

erfüllt, dann besteht die Dehnung aus *zwei Abschnitten*, und die Formel (14) bzw. die vorangegangenen Berechnungen besitzen Gültigkeit.

c) Die Berechnung einer »Einabschnitts-Dehnung«

Wird die Bedingung (15a) nicht erfüllt, ist also

$$\Delta t \leq \Delta t_{1,2} \quad (15b)$$

dann erstreckt sich die Dehnung nur auf einen Abschnitt und es gilt nur der erste, linear ansteigende Teil der Widerstandskurve der Abb. 4. Dieser ziemlich selten vorkommende Sonderfall ist jetzt im wesentlichen identisch mit der in einer anderen Form von DR. JOSEF NEMESDY-NEMCSEK angegebenen Berechnung [2]; der einzige Unterschied ist, daß er den linearen Widerstandszuwachs nicht nur im Anfangsabschnitt, sondern während des ganzen Dehnungsvorganges als gültig annahm (siehe Abb. 2a an Stelle von Abbildung 4).

Die allgemeine Form der die Verschiebung der einzelnen Querschnitte darstellenden Verschiebungsfunktion wird auch jetzt der Zusammenhang (8) sein, nur werden sich jetzt die Integrationskonstanten C_1 und C_2 infolge der Veränderung der Randbedingungen in C'_1 und C'_2 verwandeln:

$$y = C'_1 \operatorname{ch} ax + C'_2 \operatorname{sh} ax_1 - b \quad (16)$$

worin in diesem Fall ebenfalls sein wird:

$$a = \sqrt{\frac{q}{EF}} \quad \text{und} \quad b = \frac{P_0}{P}. \quad (8a,b)$$

Von den vorigen 4 Randbedingungen (siehe Seite 125) bleiben infolge des entfallenen Abschnittsanschlusses nur zwei, und zwar die erste und die letzte übrig:

1. Bei $x = 0$ ist $y = 0$ (d. h.: am Ende der Atmungslänge tritt keine Verschiebung auf).

2. Bei $x = z_0$ ist $y'' = a \Delta t_m = a \Delta t - \frac{H}{EF} = \frac{T_{z_0}}{EF}$ (d. h.: beim Schienenende ist die Kraft, die die Dehnung $T_{z_0} = (P - Rz_0) = (a EF \Delta t - H)$ hervorruft, wieder unmittelbar bekannt).

Aus diesen beiden Bedingungsgleichungen ergeben sich leicht die neuen Integrationskonstanten:

$$C'_1 = b \quad (16a)$$

$$C'_2 = \frac{\alpha \Delta t_m - ab \operatorname{sh} \alpha z_0}{a \operatorname{ch} \alpha z_0} \quad (16b)$$

worin wieder

$$\Delta t_m = \Delta t - \frac{H}{\alpha EF} \quad (11)$$

bedeutet.

Die Formeln (16), (16a) und (16b) ergeben eine allgemeine Berechnungsmöglichkeit der Dehnung, wenn die Atmungslänge z_0 bekannt ist.

Diese Länge z_0 ergibt sich jedoch aus der Bedingung, daß am Anfang der Atmungslänge keine Dehnung vorhanden ist, die Kraft $T_0 = (P - R_0)$, d. h. die Differenz aus der Dehnungskraft und der Summe der Widerstände also Null ist, und somit bei

$$x = 0 \quad T = 0 \quad \text{ist, also} \quad \frac{T_0}{EF} = y' = 0$$

Dadurch ist:

$$y' = C'_1 a \operatorname{sh} 0 + C'_2 a \operatorname{ch} 0 = 0$$

und mit der Vereinfachung $C'_2 = 0$, also mittels (16b):

$$C'_2 = \frac{\alpha \Delta t_m - ab \operatorname{sh} \alpha z_0}{a \operatorname{ch} \alpha z_0} = 0$$

Der Zähler ist offenbar Null und daraus folgt:

$$\operatorname{sh} \alpha z_0 = \frac{\alpha \Delta t_m}{ab} \quad (17a)$$

und daraus schließlich die gesuchte Länge des Atmungsabschnitts: [2]

$$z_0 = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arch} \frac{\alpha \Delta t_m}{ab}. \quad (17)$$

Danach kann mit den Formeln (16), (16a) und (16b) durch die Einsetzung von $x = z_0$ die Größe der *Schienenendenverschiebung* Δz_p ausgedrückt werden:

$$\Delta z_p = y_{z_0} = b \cdot \operatorname{ch} az_0 + \frac{a \Delta t_m - ab \operatorname{sh} az_0}{a \operatorname{ch} az_0} \operatorname{sh} az_0 - b$$

Das Ganze wird auf einen gemeinsamen Nenner gebracht. Außerdem muß im Zähler bei der Kürzung der Grundzusammenhang $(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x) = 1$ der hyperbolischen Funktionen in Betracht gezogen werden; dann wird der genaue Wert der Schienenendenverschiebung:

$$\Delta z_p = \frac{a \Delta t_m \operatorname{sh} az_0 + ab (1 - \operatorname{ch} az_0)}{a \operatorname{ch} az_0}. \quad (18a)$$

Die Schienenendenverschiebung Δz_p kann jedoch auch unter Umgehung der hyperbolischen Funktionen ausgedrückt werden. Die Größe von $\operatorname{sh} az_0$ ist nämlich der Formel (17a) zu entnehmen; dann ist nach dem oben erläuterten Grundzusammenhang:

$$\operatorname{ch} az_0 = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 az_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{a \Delta t_m}{ab}\right)^2}.$$

Setzen wir die Werte von $\operatorname{sh} az_0$ und $\operatorname{ch} az_0$ in die Formel (18a) ein:

$$z_p = \frac{a \Delta t_m \frac{a \Delta t_m}{ab} + ab \left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{a \Delta t_m}{ab}\right)^2} \right]}{a \sqrt{1 + \left(\frac{a \Delta t_m}{ab}\right)^2}}.$$

Die hyperbolische Funktion ist damit verschwunden. Die Formel kann noch vereinfacht werden und sie nimmt dann folgende Form an:

$$\Delta z_p = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a \Delta t_m}{a}\right)^2} - b. \quad (18b)$$

Schließlich setzt man für die Koeffizienten a , b und Δt_m die in den Formeln (8a), (8b) und (11) angegebenen Werte ein; damit erhält man die praktische Formel für die Berechnung der *Schienenendenverschiebung*

$$\Delta z_p = \sqrt{\left(\frac{P_0}{q}\right)^2 + \frac{(\alpha EF \Delta t - H)^2}{EF q}} - \frac{P_0}{q} \quad (18)$$

Diese Formel gilt also für den Fall, wenn der von der Gleislegung an gerechnete Temperaturunterschied Δt relativ klein ist und kleiner bleibt als der Grenztemperaturunterschied $\Delta t_{1,2}$ aus Formel (13):

$$\Delta t \leq \Delta t_{1,2}$$

Dies bedeutet mit anderen Worten, daß auch der größte Wert der Schienenendenbewegung unter der in Abb. 4 dargestellten Verschiebung y_1 cm bleibt.

$$\Delta z_p \leq y_1$$

Die Bewegungen sind also im ganzen beweglichen Schienenende und im Atmungsabschnitt so beschränkt, daß von der Gleiswiderstandskurve $p - y$ nur der erste, linear ansteigende Abschnitt zur Geltung kommen kann (Abb. 4, Abschnitt I), und der endgültige konstante Gleiswiderstandswert p kg/cm sich noch nicht entfalten kann (Abb. 4, Abschnitt II).

d) Doppelabschnittsdehnung bei ständig zunehmendem Gleiswiderstand

Bereits in der Einleitung wurde im Zusammenhang mit Abb. 1b erwähnt, daß sich in einigen Fällen in der Gleiswiderstandskurve nach dem anfangs stark ansteigenden Abschnitt I kein horizontaler Abschnitt II mit einem konstanten Wert $p = \text{konst. (kg/cm)}$ bildet, sondern wie z. B. bei den BIRMANNschen Versuchen mit Stahlbetonschwellen [13], die Widerstandskurve auch im Abschnitt II ansteigt, aber natürlich viel flacher als in Abschnitt I (siehe die Abb. 1b und 7). In solchen Fällen entsteht auch bei größeren Bewegungen keine gleitende Reibung, sondern es tritt daneben immer eine weitere Stauchung auf, die einen zusätzlichen geringen ständigen Widerstandszuwachs verur-

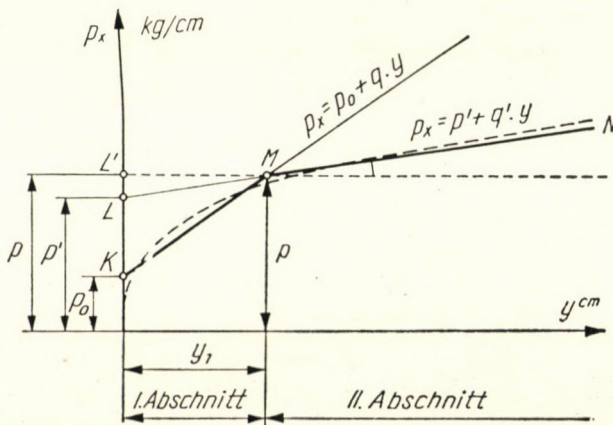


Abb. 7

sacht. Abb. 7 stellt diesen Fall dar. Die zwei Abschnitte wurden hier durch zwei ansteigende Gerade ersetzt, deren Gleichungen lauten:

$$\text{Im Abschnitt I: } p_x = p_0 + q \cdot y \quad (19a)$$

$$\text{Im Abschnitt II: } p_x = p' + q' \cdot y \quad (19b)$$

Werden diese zwei Geraden in die experimentelle Widerstandskurve eingetragen, so werden sich die Angaben p_0 , q , p' , q' bzw. die den Schnittpunkt M charakterisierenden, aus elementaren Zusammenhängen ableitbaren Werte

$$y_1 = \frac{p' - p}{q - q'} [\text{cm}] \quad (19c)$$

$$p = p_0 + q \cdot y_1 = p_0 + q \frac{p' - p}{q - q'} [\text{km/cm}] \quad (19d)$$

ergeben, bzw. bekannt werden. Mit diesen Angaben müßten, ähnlich dem Abschnitt III 1a, die Berechnungsformeln für den Fall der verhinderten Doppelabschnittsdehnung mit ständig wachsendem Widerstand (Abb. 7) abgeleitet werden. Die exakte Lösung würde auch hier, wie in Formel (6), für beide Abschnitte die Verschiebungsfunktion getrennt angeben — ebenso wie die Lösung der Differentialgleichung (5b) der verhinderten Dehnung:

$$y_I = C_{I} \cdot \text{ch } ax + C_{II} \text{ sh } ax - b$$

$$y_{II} = C_{III} \cdot \text{ch } ax + C_{IV} \text{ sh } ax - b$$

Bei der Durchführung der Ableitung kann aber festgestellt werden, daß der Ausdruck der vier Integrationskonstanten ($C_I - C_{IV}$) so kompliziert ist, daß auf diesem Wege auf keinen Fall praktische Endformeln gewonnen werden können.

Praktisch jedoch kann auf Grund der oben gegebenen Resultate und Berechnungsendformeln eine gute — wenn auch nicht exakte — Näherungs- und Informativlösung angegeben werden.

In Abb. 8 sieht man das Bild der inneren Kräfte am Ende einer lückenlosen Schiene bzw. im Atmungsabschnitt; mit anderen Worten: die Summe aller Gleiswiderstände (und Laschenwiderstände) für jeden Schienenquerschnitt vom Schienenende bis zum betreffenden Querschnitt. Die gestrichelte Linie $ABGE$ ist die in Abb. 4 dargestellte Widerstandskurve, die stark ausgezogene Linie $ABC'E'$ dagegen bezieht sich auf die in Abb. 7 dargestellte Dehnung, die sich auf Grund der jetzt zu behandelnden Widerstandskurve vollzog.

In erster Näherung sei vorausgesetzt, daß die Widerstandskurve während des ganzen Verschiebungsprozesses mit der Geraden $L - M - N$ aus Abb. 7 identisch ist. Dies gilt bis zum Schluß. Dann kann im allgemeinen von einer »Einabschnitts-Dehnung« gesprochen werden, im Falle eines zunehmenden Widerstandes, für dessen Schienenendenverschiebung die genaue Formel schon im vorangegangenen Punkt von neuem abgeleitet worden war [2], nur müssen freilich in Formel (18) an die Stelle von p_0 und q die Größen p' und q' eingesetzt werden:

$$\Delta z' = \sqrt{\left(\frac{p'}{q'}\right)^2 + \frac{(aEF\Delta t - H)^2}{EFq'}} - \frac{p'}{q'} \quad (20)$$

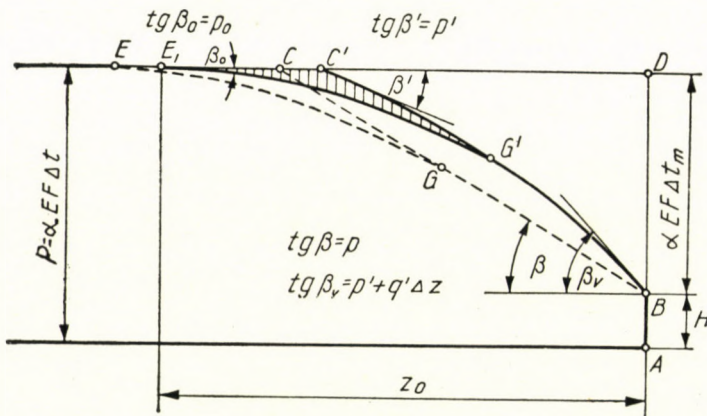


Abb. 8

In Abb. 8 entspricht dieser Schienenendenverschiebung die Fläche $BG'C'DB$. Die Linie der inneren Kräfte dagegen wird durch die Linie $BG'C'$ dargestellt, für die es charakteristisch ist, daß entsprechend einer vorausgesetzten Änderung des Gleiswiderstandes die Neigung der Linie im Anfangspunkt der Atmungslänge (in Punkt C') gleich $\operatorname{tg} \beta' = p'$ ist und daß diese Neigung allmählich etwas zunimmt. An Stelle der bei der Voraussetzung eines konstanten p kg/cm gültigen Geraden BGC ist also die flache Kurve $BG'C'$ maßgebend.

In der zweiten Näherung ziehen wir bereits in Betracht, daß die in Abb. 7 dargestellte flachere Widerstandslinie $p_x = p' + q'y$ nur im zweiten Abschnitt Gültigkeit besitzt, wenn $y > y_1$. Statt der bisher berücksichtigten Linie LM ist also KM gültig, im Falle von $y < y_1$ nach der Gleichung $p_x = p_0 + qy$. Die anfänglichen kleineren Widerstände verursachen eine Zunahme der Schienenendenverschiebung, deren Wert wir mit der Formel (14) für den Fall berechnet haben, daß im zweiten Abschnitt die Voraussetzung $p = \text{konst.}$ galt. Dann war die in Abb. 6 dargestellte Fläche $GCEG$ mit dem Verschiebungs-

zuwachs $\delta\Delta z$ proportional; dieselbe Fläche kommt als gestrichelte Linie ebenfalls mit den Buchstaben *GCEG*, in der Abb. 8 vor.

Es kann nunmehr vorausgesetzt werden, daß die Größe dieser Fläche sich kaum ändern wird, wenn sie sich nicht an die gerade Linie *CGB* des konstanten Gleiswiderstandes, sondern an die Kurve *C'G'B* (die im Abschnitt II ebenfalls ein wenig zunehmende Gleiswiderstandslinie) anschließt. Diese Näherung und Voraussetzung ist desto verständlicher, da im Abschnitt I der Abb. 7 (wenn also $y < y_1$) die Linien *LM* und *L'M* nur sehr wenig voneinander abweichen. Infolgedessen sind in Abb. 8 die Linien *CG* und *C'G'* fast parallel. Dann kann jedoch die Größe des vorhin in Formel (14) angegebenen Verschiebungszuwachses $\delta\Delta z$ hier ebenfalls als sehr gute Näherung betrachtet werden und damit wird mit den bisher abgeleiteten 18 Formeln eine *gute Näherungsformel der Schienenendenverschiebung für die Praxis* in diesem Falle folgendermaßen aussehen :

$$\Delta z'_p = \Delta z' + \delta\Delta z$$

Folglich:

$$\Delta z'_p = \sqrt{\left(\frac{p'}{q'}\right)^2 + \frac{(\alpha EF \Delta t - H)^2}{EF q'}} - \frac{p'}{q'} + y_1 - \frac{p_0^2}{2qp} \operatorname{sh}^2 \left(\operatorname{arch} \frac{p}{p_0} \right) \quad (21)$$

Die verhinderte Dehnung lückenloser Schienenenden kann damit auch im Falle eines Doppelabschnittes, aber ständig zunehmender Gleiswiderstände berechnet werden.

2. Eine strenge Dehnungsberechnung bei Schienen von der endlichen Länge $2l$

a) Die Doppelabschnittsdehnung bei einer Schiene von der Länge $2l$

Die Bewegungen der verhinderten Dehnung von Schienen von der endlichen Länge $2l$ m müssen mit von den vorigen abweichenden Formeln berechnet werden, da hier bei einer Zunahme der Temperaturdifferenz die Atmungslänge z_0 nicht, wie im Falle der lückenlosen Schiene mit der Temperatur nach Formel (10) stetig linear zunehmen kann, da die Atmungslänge bei einer größeren Temperaturdifferenz schon einen ständigen Wert annehmen wird: $z_0 = l$, d. h. gleich der halben Schienenlänge sein wird. Die Schiene dehnt sich somit in ihrer ganzen Länge nach beiden Richtungen, ein bewegungsloser Abschnitt existiert somit nicht, nur der Mittelpunkt der Schiene bleibt bewegungslos. Doch können die voranstehenden, für die stoßfreien

Schieneenden gültigen Berechnungen sehr wohl als Ausgangspunkt dienen und entsprechend den Verhältnissen von Schienen mit endlicher Länge umgeformt werden.

Diese Situation sieht man nun in Abb. 9a, in der neben der Linie FEF' der Dehnungskraft $P = a EF \Delta t$ die bei einer Schiene von der Länge $2l$ die von den Schieneenden gerechnete Summe der Widerstände, also die Linie der inneren Kräfte ($BCDC'B'$) dargestellt wurden.

Der Anfangspunkt der Abszissen x ist der die Schienenmitte bezeichnende Punkt 0. Von hier stellt bis zur Entfernung x_1 die Kurve DC bzw. DC' die Linie der inneren Kräfte nach beiden Seiten dar — entsprechend der Tatsache, daß die Größe des Gleiswiderstandes p_x in diesem Abschnitt veränderlich ist. Die Verschiebungen sind hier nämlich noch kleiner als y_1 und deshalb ist in der Widerstandskurve (Abb. 9b) noch der erste, linear ansteigende Abschnitt ($p_x = p_0 + q \cdot y$) gültig. Die Widerstandslinien CB bzw. $C'B'$ verlaufen bereits gerade und haben die Neigung $\operatorname{tg} \beta = p = \text{konst.}$ In diesen Abschnitten sind nämlich die Verschiebungen größer als y_1 und deshalb gilt hier der zweite Abschnitt, wo der Widerstand nach Abb. 9b bereits $p_x = p = \text{konst.}$ ist.

Für beide Abschnitte (I und II) sind die allgemeinen Verschiebungsfunktionen $y_I = f_I(x)$ und $y_{II} = f_{II}(x)$ auch jetzt dieselben wie sie es im Falle des lückenlosen Schienendes waren (Formel 8 und 9). Besonders da die auf Seite 125 behandelten 4 Randbedingungen (bei $x = 0$ $y_I = 0$; bei $x = x_1$ $y_I = y_{II}$ und $y'_I = y'_{II}$; bei $x = z_0$ $y'_{II} = a \Delta t_m$) auch jetzt unverändert bestehen bleiben, besitzen die Formeln (10a–10d) für die Integrationskonstanten $C_1 - C_4$ ebenfalls Gültigkeit, nur muß an die Stelle der Atmungslänge z_0 wegen $z_0 = l$ die halbe Schienenlänge eingesetzt werden. Deshalb nehmen die allgemeinen Verschiebungsfunktionen für Schienen von der Länge $2l$ mit den bekannten Bezeichnungen

$$a = \sqrt{\frac{q}{EF}}; \quad b = \frac{P_0}{q}; \quad \Delta t_m = \Delta t - \frac{H}{\alpha EF}$$

auf Grund der Formeln (8, 9, 10a–10d) folgende Gestalt an:

I. Im ersten Abschnitt ($x < x_1$ und $y < y_1$):

$$y_I = b \operatorname{ch} ax + \left[\frac{\alpha EF \Delta t_m - p(l - x_1)}{EF a \operatorname{ch} ax_1} - b \operatorname{th} ax_1 \right] \cdot \operatorname{sh} ax - b \quad (22)$$

II. Im zweiten Abschnitt ($x > x_1$ und $y > y_1$):

$$y_{II} = a \Delta t_m (x - x_1) - \frac{pl}{EF} (x - x_1) + \frac{p(x^2 - x_1^2)}{2EF} + C_4 \quad (23a)$$

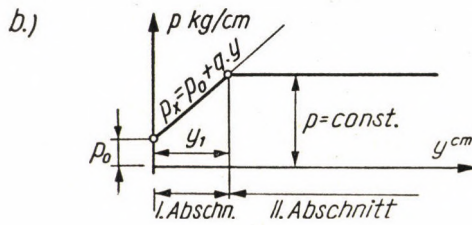
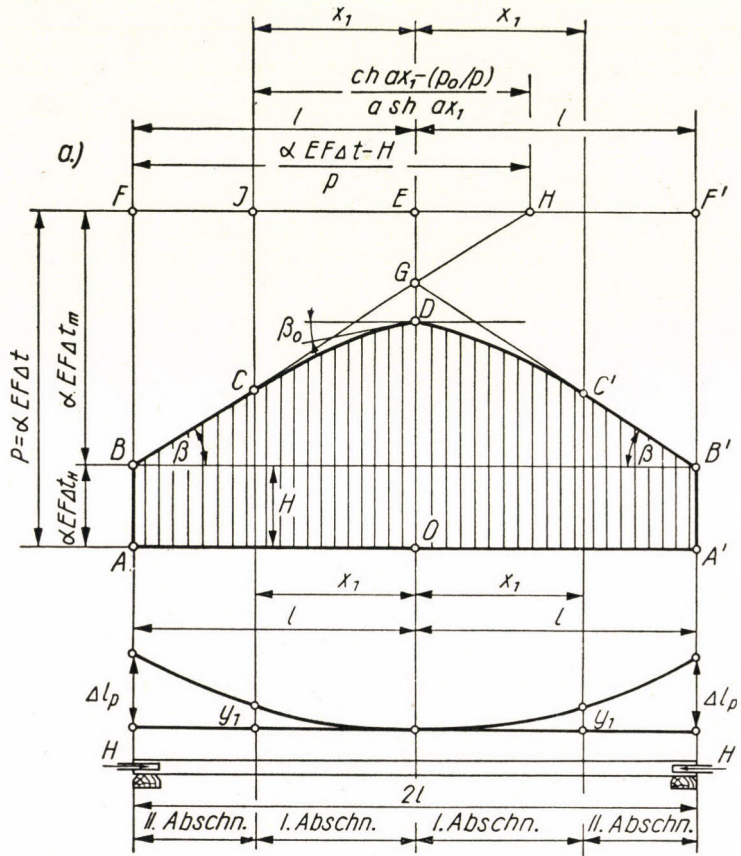


Abb. 9

worin

$$C_4' = \frac{\alpha EF \Delta t_m - p(l - x_1)}{EF a} \operatorname{th} ax_1 + b(\operatorname{ch} ax_1 - \operatorname{th} ax_1 \cdot \operatorname{sh} ax_1 - 1). \quad (23b)$$

Die Formel für die Schienenendenverschiebung aber wird ($\Delta l_p = y_{11}$ im Falle von $x = l$) sein:

$$\Delta l_p = \left(\alpha \Delta t_m - \frac{pl}{EF} \right) (l - x_1) + \frac{P(l^2 - x_1^2)}{2EF} + C_4' \quad (24)$$

In diesen Zusammenhängen ist jedoch die Abschnittslänge x_1 noch unbekannt. Diese berechnen wir nach der auf Seite 127 angegebenen Begründung wieder aus der Bedingung: bei $x = x_1$ ist: $y_1'' = y_{11}''$. Diese Bedingung liefert mit der Verwendung der Formel (22) und (23) folgende Gleichheit:

$$a^2 b \operatorname{ch} ax_1 + \frac{\alpha EF \Delta t_m - p(l - x_1)}{EF a} a^2 \operatorname{th} ax_1 - a^2 b \operatorname{th} ax_1 \cdot \operatorname{sh} ax_1 = \frac{P}{EF}$$

Daraus erhält man mit der Bezeichnung $a^2 = (q/EF)$ folgende Berechnungsformel nach x_1 aufgelöst:

$$x_1 = l - \frac{\alpha EF \Delta t - H}{p} + \frac{\operatorname{ch} ax_1 - \frac{P_0}{p}}{a \operatorname{sh} ax_1} \quad (25)$$

Leider kann mit dieser Formel (25) die Abschnittslänge x_1 bei der Schiene von der endlichen Länge $2l$ mit *Probieren, durch Iteration* bestimmt werden und nicht wie bei der stoßfreien Schiene mit der expliziten Formel (13a).

Nun könnten auch die Verschiebungsformeln (23) und (24) berechnet werden; doch ist ihre Gestalt wieder sehr unbequem und weist überhaupt nicht die Verwandtschaft mit den einfachen Formeln des konstanten Widerstandes auf. Deshalb müssen noch — ebenso wie bei der lückenlosen Schiene im Abschnitt III 1b — praktische und einfacher zu berechnende, vollkommen genaue Formeln, den vorangegangenen entsprechend, festgelegt werden.

b) Die strenge Formel der Praxis für die
Schienenendenbewegung bei Schienen von der
Länge $2l$

Den bisher besprochenen Abschnitten entsprechend wissen wir bereits (siehe z. B. Formel 5), daß die Größe der Schienenendenbewegung mit der Fläche, die von der Linie der Dehnungskraft $P = \alpha EF \Delta t$ und der Summenlinie der Widerstände begrenzt wird, proportional ist, daß also in unserem Falle für Abb. 9a gilt:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{T_x}{EF} dx = \frac{1}{EF} \int_0^l (P - R_x) dx = \frac{1}{EF} \cdot T_{(BFEDCB)} \quad (a)$$

In dieser Abbildung stellt also die Fläche BFEDCB die genaue Größe der Schienenendenbewegung dar. Da wir von der Abschnittsgrenze x_1 wissen, daß die Verschiebung dort eben dem bekannten y_1 entspricht, ist offenbar die Teilfläche CJEDC mit der Verschiebung proportional:

$$y_1 = \frac{T_{(CJDEC)}}{EF} \quad (b)$$

Wäre die Schiene sehr lang (lückenlos verschweißt) und gleichzeitig der Gleiswiderstand überall konstant $p = \text{konst.}$, dann ist nach den Formeln (2) und (5) bekannt, daß die Schienenendenbewegung dem Dreieck BFH (in Abb. 3 dem Dreieck (BCD) proportional sein wird und daß dementsprechend:

$$\Delta z_h = \frac{T_{(BFH)}}{EF} = \frac{(\alpha EF \Delta t - H)^2}{2 EF p} \quad (c)$$

Am Ende des letzten Abschnittes erhielten wir für die Abschnittslänge x_1 folgende Formel:

$$x_1 = l - \frac{\alpha EF \Delta t - H}{p} + \frac{\text{ch } \alpha x_1 - \frac{P_0}{p}}{a \text{ sh } \alpha x_1} \quad (23)$$

Aus Abb. 9a geht hervor, daß $x_1 = JE$ und $l = FE$ sind. Die Atmungslänge der lückenlos verschweißt gedachten Schiene, d. h. das zweite Glied $(\alpha EF \Delta t - H)/p$ der Formel entspricht FH. Offensichtlich ist dann das dritte Glied der obigen Formel die Länge JH, denn nur so wird der der Formel (25) entsprechende, der Abb. 9a zu entnehmende Zusammenhang möglich:

$$x_1 = JE = FE - FH + JH$$

Somit ist offensichtlich

$$JH = \frac{\text{ch } \alpha x_1 - \frac{P_0}{p}}{a \text{ sh } \alpha x_1}$$

Nun kann die Fläche des Dreieckes ebenfalls ausgedrückt werden:

$$T_{((HJCH))} = \frac{JH \cdot JH p}{2} = \frac{(JH)^2 p}{2} = \frac{p \left(\text{ch } \alpha x_1 - \frac{P_0}{p} \right)^2}{2 a^2 \text{ sh}^2 \alpha x_1} \quad (d)$$

Nun kann die mit der genauen Schienenendenbewegung Δz proportionale Fläche $BFEDCB$ als algebraische Summe der folgenden Teilflächen ausgedrückt werden :

$$T_{(BFEDCB)} = T_{(BFHB)} - T_{(HJCH)} + T_{(CJEDC)} \quad (e)$$

Somit kann mit den Zusammenhängen $a-e$ für die Schiene von der Länge $2l$ die präzise und praktische Berechnungsformel der Schienenendenverschiebung dargestellt werden :

$$\Delta l_p = \frac{(\alpha EF \Delta t - H)^2}{2 EF p} + y_1 - \frac{p \left(\operatorname{ch} ax_1 - \frac{P_0}{p} \right)^2}{2 q \operatorname{sh}^2 ax_1} \quad (26)$$

Hier wurde von neuem die Bezeichnung $a^2 = (q/EF)$ verwendet. Die Länge x_1 muß vorher mit der Formel (25) durch Iteration berechnet werden.

Obwohl hinsichtlich der praktischen Berechnung diese Formel die bequemste ist, zeigt sie nicht unmittelbar den Unterschied $\delta \Delta l$, der bei der Schienenendenverschiebung zwischen dem genauen Wert (Δl_p), der mit der Widerstandskurve berechnet worden war und dem »Näherungswert«, der mit der Voraussetzung eines konstanten p kg/cm berechnet worden war. Dieser Näherungswert ist nach Formel (4):

$$\Delta l = \alpha l \Delta t - \frac{H}{EF} l - \frac{p l^2}{2 EF} \quad (4)$$

Ihm entspricht in Abb. 9a die Trapezfläche $BFEDCB$. Die der genauen Schienenendenverschiebung Δl_p entsprechende Fläche $BFEDCB$ wird nun durch folgende Teilflächen ausgedrückt :

$$\Delta l_p = \frac{1}{EF} \cdot T_{(BFEDCB)} = \frac{1}{EF} [T_{(BFEGB)} - T_{(JEGCJ)} + T_{(CJEDC)}] \quad (f)$$

Hierin ist die Fläche $T_{(JEGCJ)}$ noch unbekannt. Da aus der Abb. 9a $EH = (\alpha EF \Delta t_m/p) - l$ und $EG = p \cdot EH$, ist mit Berücksichtigung des Zusammenhanges d :

$$T_{(JEGCJ)} = T_{(HJCH)} - \frac{EH \cdot EG}{2} = \frac{p \left(\operatorname{ch} ax_1 - \frac{P_0}{p} \right)^2}{2 a^2 \operatorname{sh}^2 ax_1} - \frac{(\alpha EF \Delta t - H - pl)^2}{2 p} \quad (g)$$

Damit nimmt der Ausdruck der genauen Größe der Schienenendenverschiebung mit den Zusammenhängen (f , $3b$, g und b) die Form

$$\Delta l_p = \left[\alpha l \Delta t - \frac{H}{EF} l - \frac{pl^2}{2EF} \right] + \left[\frac{(\alpha EF \Delta t - H - pl)^2}{2EFp} - \frac{p \left(\operatorname{ch} \alpha x_1 - \frac{p_0}{p} \right)^2}{2q \operatorname{sh}^2 \alpha x_1} + y_1 \right] \quad (27a)$$

Darin ist der Ausdruck der ersten eckigen Klammer der Näherungswert Δl , während der zweite Klammersausdruck den Korrektionswert $\delta \Delta l$ der 2 l-Schiene angibt:

$$\delta \Delta l = \frac{(\alpha EF \Delta t - H - pl)^2}{2EFp} + y_1 - \frac{p \left(\operatorname{ch} \alpha x_1 - \frac{p_0}{p} \right)^2}{2q \operatorname{sh}^2 \alpha x_1} \quad (27b)$$

Diese Formel verfügt nur über eine theoretische Bedeutung, weil die Formel (26) offenbar viel bequemer zu berechnen ist.

Nun müssen die Gültigkeitsgrenzen untersucht werden.

c) Die Gültigkeitsgrenzen und die »Einabschnittsdehnung«

Man kann sich besonders bei einer hohen Verlegungstemperatur und bei einer verhältnismäßig kleinen Verlegungslücke vorstellen, daß bei der untersuchten, genügend geringfügigen Temperaturschwankung Δt (z. B. bis zur Temperatur der Lückenschließung) auch die größte Schienenendenbewegung den Grenzwert y_1 cm nicht erreicht. Das bedeutet jedoch, daß in der ganzen Schiene von der Länge $2l$ die Dehnung aus einem Abschnitt besteht und daß ausschließlich der erste linear ansteigende Abschnitt ($p_x = p_0 + qy$) der Widerstandskurve gültig sein wird. Die Grenze zwischen der im vorigen Abschnitt behandelten Doppelabschnittsdehnung und der jetzt behandelten mit nur einem Abschnitt wird durch die Grenztemperaturdifferenz $\Delta t_{1,2l}$ bestimmt. Diese Differenz erhält man aus Formel (24) durch die Einsetzung von $\Delta l_p = y_1$ und $x_1 = l$:

$$\Delta t_{1,2l} = \frac{p \operatorname{ch} \alpha l - p_0}{EF a \operatorname{sh} \alpha l} - \frac{H}{\alpha EF} \quad (28)$$

Ist also $\Delta t > \Delta t_{1,2} l$, dann besteht die Dehnung aus zwei Abschnitten und muß dem letzten Punkt entsprechend berechnet werden, ist dagegen $\Delta t < \Delta t_{1,2} l$ dann besteht der Fall einer Einabschnitts-Dehnung. Die Berechnung der letzteren für den Fall eines lückenlosen Schienenendes wurde im vergangenen Abschnitt III 1c bereits behandelt und die für die Praxis interessante Größe der Schienenendenbewegung Δl kann mit der dort angeführten Formel (18a) berechnet werden, wenn an die Stelle der Atmungslänge z_0 die halbe Länge der Schiene l eingesetzt wird.

$$\Delta l_p = \frac{\alpha \Delta t_m \cdot \text{sh } al + ab(1 - \text{ch } al)}{a \text{ ch } al} \quad (29)$$

Die aus dieser Formel gewonnene Größe der Schienenendenverschiebung wird also immer kleiner oder höchstens gleich sein mit dem Verschiebungswert y_1 , der den Bruch der Bettungswiderstandskurve charakterisiert.

3. Die theoretische Auswertung und Zusammenfassung der Resultate

Den bisherigen Ausführungen entsprechend haben wir sowohl für das lückenlose Schienenende als auch für eine Schiene von der Länge $2l = 36$ m

Tabelle 1

Die Zusammenfassung der Resultate der Zahlenbeispiele

Beispiel	Gleis (48,3 kg/lm)	Dehnung	Angaben	Δz_p bzw. Δl_p mm	Δz bzw. Δl mm	$\delta \Delta$ bzw. $\delta \Delta l$ mm	p' kg/cm
1	Lückenloses Schienenende	In einem Abschnitt	$H = 10^t$ $\Delta t = 22^\circ$	3,8	2,4	1,4	5
2	"	In zwei Ab- schnitten	$H = 0$ $\Delta t = 45^\circ$	23,8	22,2	1,4	7,5
3	$2l = 36$ m lan- ge Schiene	In einem Abschnitt	$H = 10^t$ $\Delta t = 30^\circ$	4,2	3,8	0,4	5,4
4	"	In zwei Ab- schnitten	$H = 10^t$ $\Delta t = 45^\circ$	7,3	6,9	0,4	5,4

Die Hauptangaben der zugrunde gelegten Gleiswiderstandskurve (eine gut gesetzte Bettung):

$$y \leq 0,5 \text{ cm: } p_x = 3 + 10y; \quad y \geq 0,5 \text{ cm: } p_x = p = 8 \text{ kg/cm}$$

die genauen Werte der Schienenendenbewegung für charakteristische Fälle zahlenmäßig ermittelt (Δz_p bzw. Δl_p), den Näherungswert für einen vorausgesetzten konstanten Widerstand (Δz bzw. Δl), den Fehler der Näherungsberechnung ($\delta \Delta z$ bzw. $\delta \Delta l$) und schließlich die Größe desjenigen fiktiven konstanten Widerstandes p' , mit dem die Näherungsberechnung dasselbe Ergebnis liefert wie das strenge Verfahren (»der gleichwertige konstante Widerstand«). Die Ergebnisse der Zahlenbeispiele sind in der folgenden Tabelle 1 zusammengefaßt.

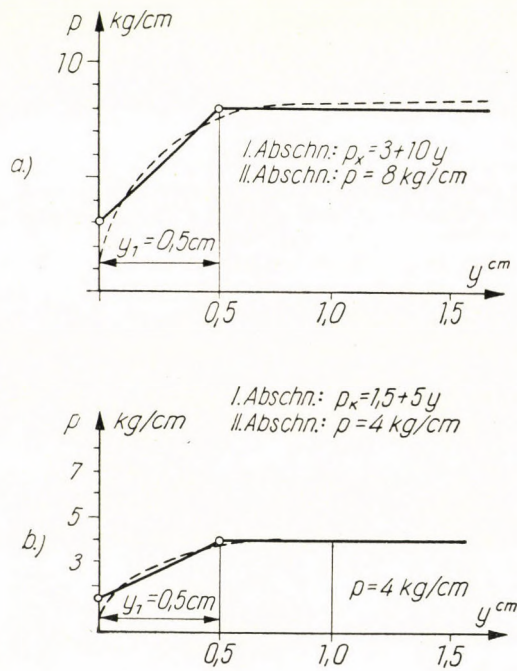


Abb. 10

Diese Resultate beziehen sich auf den relativ hohen Bettungswiderstand eines gut gesetzten Gleises (Abb. 10a). Für dieselben Fälle führten wir die Berechnung auf Grund der Widerstandskurven der Abb. 10b bei nur halben Widerstand durch, die für den Gleiswiderstand eines nach der Verlegung noch nicht gesetzten Gleises charakteristisch sein kann. Die Berechnungen und ihre Ergebnisse enthält Tabelle 2.

Tabelle 2

Bei- spiel	Gleis (48,3 kg/lm)	Dehnung	Angaben	Δz_p bzw. $\frac{\Delta l_p}{mm}$	Δz bzw. $\frac{\Delta l}{mm}$	$\delta \Delta z$ bzw. $\frac{\delta \Delta l}{mm}$	p' kg/cm
1a	Lückenloses Schienenende	In zwei Ab- schnitten	$H = 10^t$ $\Delta t = 22^\circ$	6,3	4,7	1,6	3,0
2a	"	"	$H = 0$ $\Delta t = 45^\circ$	45,8	44,2	1,6	3,9
3a	2 l = 36 m lan- ge Schiene	In einem Abschnitt	$H = 10^t$ $\Delta t = 30^\circ$	4,4	4,3	0,1	3,8
4a	"	In zwei Ab- schnitten	$H = 10^t$ $\Delta t = 45^\circ$	7,5	7,4	0,1	3,8

Die Hauptangaben der zugrunde gelegten Gleiswiderstandskurve (frische, noch nicht gesetzte Bettung):

$$y \leq 0,5 \text{ cm: } p_x = 1,5 + 5 y; \quad y \geq 0,5 \text{ cm: } p_x = p = 4 \text{ kg/cm}$$

Aus diesen Resultaten können folgende Konsequenzen gezogen werden:

1. Bei einem *Langschiengleis mit Stoßlücken* (z. B. bei Schienen von 36 m Länge) ist die Abweichung zwischen dem strengen und dem Näherungsverfahren verschwindend klein (nämlich kleiner als ein halber mm), obwohl der gleichwertige Widerstand $p' = 5,4 \text{ kg/cm}$ vom konstanten 8 kg/cm ungefähr 30% abweicht. Diese Tatsache beweist, daß bei Gleisen dieser Art (Schienenlängen von 30–60 m) bei der Ausbildung der Schienenendenbewegung mit veränderter Dehnung die Änderung des Bettungswiderstandes, ja sogar die Größe des absoluten Wertes auch des konstanten Widerstandes $p \text{ kg/cm}$ nur von geringer Bedeutung ist.

2. Sowohl bei Langschiengleisen als auch bei solchen aus kurzen Schienen mit Stoßlücken kann daher mit einer praktisch vollkommen befriedigenden Genauigkeit gerechnet werden, wenn man das einen konstanten Widerstand $p \text{ kg/cm}$ voraussetzende Näherungsverfahren wählt.

3. Bei *lückenlos verschweißten Gleisen* beträgt die Abweichung zwischen der genauen und der Näherungsberechnung der Schienenendenverschiebung ungefähr 5–6%, wenn der untersuchte Temperaturunterschied nicht zu klein ist (also bei einer Doppelabschnittsdehnung). Praktisch kann also auch in diesem Fall die einen konstanten Widerstand $p \text{ kg/cm}$ voraussetzende einfache Näherungsformel der Schienenendenverschiebung gut angewandt werden.

4. Ist die Temperaturdifferenz Δt bei der Berechnung der Bewegung des lückenlosen Schienenendes von einem kleinerem Wert (besteht also die Dehnung aus einem Abschnitt), dann ist die Abweichung zwischen den strengen und den Näherungsformeln bereits relativ viel größer, doch bedeutet dies absolut auch dann nur 1,5 Millimeter. Der gleichwertige Widerstand

p' ist hier 5 kg/cm, was ungefähr der Durchschnitt der Widerstände $p_0 = 3$ kg/cm und $p = 8$ kg/cm sein mag.

Die Näherungsformel kann daher praktisch auch hier mit sehr großer Genauigkeit angewandt werden, wenn die Größe des ständigen Widerstandes in der Berechnung auf den Durchschnittswert $(p_0 + p) : 2$ verringert wird. Dies entspricht der Durchschnittsordinate des ersten ansteigenden Abschnittes der Verschiebungswiderstandskurve. Doch sei wiederholt, daß der absolute Wert des Fehlers auch dann genügend gering bleibt, wenn in der Näherungsformel einfach der Wert p stehen bleibt.

5. Zusammenfassend kann daher gesagt werden, daß das einen konstanten Bettungswiderstand p kg/cm voraussetzende Näherungsverfahren und seine Formeln für die Praxis genügend genau sind und zwar sowohl bei der kurzen Schiene als auch beim lückenlosen Schienenende. Die Sicherheit wird noch gesteigert, wenn der Wert des Widerstandes p kg/cm ein wenig verringert in Betracht gezogen wird.

6. Das vorgeführte strenge Berechnungsverfahren folgt eng den experimentell gewonnenen Gleiswiderstands-Verschiebungskurven und berücksichtigt sie in einem hohen Maße, vielleicht genauer und theoretisch richtiger als z. B. das dasselbe Ziel verfolgende Verfahren des Japaners HOSHINO [10] und des Rumänen MIKLÓSI [11]. Außerdem hielten wir hinsichtlich der Form die Verwandtschaft mit dem Näherungsverfahren aufrecht. Dieser Umstand sicherte uns nicht nur eine leichtere Rechenarbeit, sondern bewies auch formelmäßig, daß die strengen Verfahren in ihren Ergebnissen von dem mit einem konstanten Widerstand arbeitenden Näherungsverfahren nicht allzusehr abweichen.

7. Das strenge Rechenverfahren muß dann unbedingt bevorzugt werden, wenn der ansteigende Anfangsabschnitt der Widerstandskurve ausgedehnter ist und der konstante Widerstand nur im Falle einer größeren Verschiebung y_1 (z. B. $y_1 = 1 - 1,5$ cm) entsteht. Diese Situation jedoch kann nur im Falle einer Bettung von minderwertiger Qualität und schlechter Schienenbefestigung maßgebend sein; z. B. bei Bettungen aus Sand oder taubem Gestein; dieses Material kommt jedoch für Langschienen bzw. lückenlose Gleise ohnehin nicht in Frage.

8. Schließlich muß beachtet werden, daß der Bettungswiderstand selbst oder seine Versuchskurve überhaupt nicht unveränderlich oder genau umrissen ist, und die in jedem Gleisabschnitt, bei jeder Schwelle immer die gleichen sind. Es kann vielmehr nur von einem statistischen Durchschnittswert die Rede sein. Tatsächlich ist offenbar die Streuung des Gleiswiderstandswertes ziemlich groß, da sowohl das Verdichtungsmaß als auch die Strenge der Schienenbefestigung manchmal kleine, manchmal jedoch große Abweichungen bei den einzelnen Querschwelen aufweisen kann. Wegen der im Gleiswiderstandswert bestehenden natürlichen Streuung dürfen die Resultate der »stren-

gen« Berechnungen nicht überschätzt werden. Die Unsicherheit bei den Ausgangsangaben erlaubt es praktisch in vollem Maße, die Dehnungsberechnung mit einem vorsichtig festgestellten *konstanten Gleiswiderstand* p kg/cm zu vollziehen, zumal oben gezeigt wurde, daß die Differenz zwischen den Ergebnissen des Näherungs- und des »strengen« Verfahrens nur äußerst gering ist.

SCHRIFTTUM

1. NEMESDY-NEMCSEK, J.: Die Ausdehnung der Schienen durch die Wärme. Organ, 1927 Nr. 16.
2. NEMESDY-NEMCSEK, J.: A hosszúsínes és hézagmentes vágányok elmélete (Die Theorie der lückenlosen und Langschienengleise) Budapest, 1934.
3. WATTMANN: Wärmewirkungen im Langschieneneroberbau. Organ, 1928 Nr. 10.
4. AMMANN—GRUENEWALDT: Versuche über die Wirkung von Längskräften im Gleis. Organ, 1929 Nr. 24.
5. MEIER: Kräfte und Spannungen im Langschienen-Oberbau. VDI-Zeitschrift, 1935 Nr. 12.
6. RAAB: Die Stabilität des Schienenweges unter neuen Gesichtspunkten. VDI-Zeitschrift, 1934 Nr. 13.
7. SCHAHUNJANC: Put' i putevoje hozajstvo. Moskau, 1949.
8. RUBIN: Betrachtungen über die Stoßlücken im Gleis. Der Eisenbahningenieur, 1955 Nr. 2.
9. STÜSSI: Zur Theorie der Schienenatmung. Schweizerische Bauzeitung, 1943 S. 153 ff.
10. HOSHINO, Y.: Thermal expansion of very long rails. Bulletin Railway Techn. Laboratory National Railways. Tokio, 1951.
11. MIKLÓSI, C.: Teorie bezstykové koleje jako základ výzkumu. Internationale Tschechoslovakische Konferenz für Eisenbahnbau. Tatranská Lomnica, Nov. 1958.
12. SACKMAUER, L.: Diskussionsbeitrag zur Internationalen Tschechoslowakischen Konferenz für Eisenbahnbau 1958 Nov. Tatr. Lomnica.
13. BIRMANN: Neuere Messungen an Gleisen mit verschiedenen Unterschwellungen. Eisenbahntechnische Rundschau, 1957, Nr. 7.
14. NEMESDY, E.: A sínvégek mozgása és kialakítása hézagmentes vasúti pályáknál (Die Bewegung und Ausbildung der Schienenenden bei lückenlosen Eisenbahngleisen). Mélyépítéstudományi Szemle, 1959, Nr. 3. (Budapest.)

ZUSAMMENFASSUNG

Die Berechnung der Ausdehnung und der Verschiebung der Enden von Langschienen und von lückenlosen Eisenbahngleisen erfolgt im allgemeinen auf Grund der von Dr. J. NEMESDY-NEMCSEK, WATTMANN und GRUENEWALDT schon 1928 begründeten Berechnungsverfahren, unter Zugrundelegung eines konstanten, also von der Bewegung unabhängigen Gleiswiderstands p kg/cm. Die bekannten Grundformeln für die Größe der Schienenendenbewegung sind für eine lückenlose Schiene bzw. eine Schiene von der Länge $2l$

$$\Delta z = \frac{(\alpha EF \Delta t - H)^2}{2 EF p}; \quad \Delta l = \alpha \Delta t l - \frac{H}{EF} l - \frac{pl^2}{2 EF}$$

Die vielerorts durchgeführten Gleiswiderstandsversuche zeigen, daß der Bettungswiderstand nur nach einer anfänglichen Grenzverschiebung $y_1 = 5-6$ mm ein konstanter Wert wird, während bei kleineren Verschiebungen der Widerstandswert p kg/cm von einem kleinen Anfangswert p_0 bis zu einem ständigen Wert p kg/cm wächst. In der gegenwärtigen Arbeit wird im ersten Abschnitt durch eine Gerade $p_x = p_0 + q \cdot y$ das Anwachsen berücksichtigt, im zweiten Abschnitt wird mit $p = \text{konst.}$ gerechnet. Aus der Differentialgleichung der behinderten Dehnung werden neben den komplizierten genauen Formeln auch solche genaue Werte der Schienenendenbewegung abgeleitet, welche die Abweichung von dem mit einem konstanten Widerstand p arbeitenden einfachen Berechnungsverfahren in exakten Formeln aufzeigen. Die genaue Verschiebung des lückenlosen Schienenendes ist z. B., wenn Δz größer ist als die obige Grenzverschiebung y_1 :

$$\Delta z_p = \frac{(\alpha EF \Delta t - H)^2}{2 EF p} + \left[y_1 - \frac{p_0^2}{2 pq} \operatorname{sh}^2 \left(\operatorname{arch} \frac{p}{p_0} \right) \right]$$

Ist hingegen $\Delta z_p < y_1$, dann ist:

$$\Delta z_p = \sqrt{\left(\frac{p_0}{q} \right)^2 + \frac{\alpha EF \Delta t - H)^2}{EF q}} - \frac{p_0}{q}$$

In der Arbeit wird nicht nur die Verschiebung des lückenlosen Schienenendes, sondern auch die genaue Ausdehnungsberechnung der Langschienen von der Länge $2l$ mitgeteilt für den Fall von $\Delta l < y_1$ und für den Fall $\Delta l > y_1$. Bei der zahlenmäßigen Auswertung der genauen Formeln zeigt es sich, daß die Ergebnisse der genauen Rechnung und der Rechnung mit konstantem Widerstand in praktischen Fällen sehr gut übereinstimmen, und daß der Wert der größten Abweichung ungefähr 1,5 mm ist, was vernachlässigbar ist.

Die Arbeit beweist daher exakt, daß die mit einem konstanten Widerstand arbeitende einfache Dehnungsrechnung für praktische Zwecke vollkommen genügende Genauigkeit bietet.

THE EXACT CALCULATION OF THE DILATATION OF LONG AND OF CONTINUOUS RAILS, ON THE BASE OF EXPERIMENTAL TRACK RESISTANCE CURVES

E. NEMESDY

SUMMARY

Usually, the dilatation and the displacement of the ends of long and of continuous railway tracks are calculated on the base of a constant track resistance p kg/cm independent of movement, according to a method established by Dr. J. NEMESDY-NEMCSEK, WATTMANN and GRUENEWALDT already about the year 1928. In the case of a continuous rail or of a rail of length $2l$, the known basic formulae are:

$$\Delta z = \frac{(\alpha EF \Delta t - H)^2}{2 EF p}; \Delta l = \alpha \Delta l - \frac{H}{EF} l - \frac{pl^2}{2 EF}$$

According to track resistance tests carried out in a great many places, the ballast resistance will become constant only after an initial limit displacement of $y_1 = 5-6$ mm, and for smaller displacements it raises from an initial small coefficient of friction p_0 to the constant value p kg/cm. In the present paper, the increase is taken into consideration by a straight line $p_x = p_0 + q \cdot y$ in the first section and in the second section, $p = \text{const}$. From the differential equation of the hindered dilatation the complicated accurate formulae as well as accurate values of the rail end displacement are deduced, which show by clear formulae what is the difference between the simplified method of calculation using $p = \text{const}$. and the exact method. E.g., the displacement of a continuous rail end is for Δz larger than the former limit displacement y_1

$$\Delta z_p = \frac{(\alpha EF \Delta t - H)^2}{2 EF p} + \left[y_1 - \frac{p_0^2}{2 pq} \operatorname{sh}^2 \left(\operatorname{arch} \frac{p}{p_0} \right) \right]$$

On the other hand, if $\Delta z_p < y_1$ then

$$\Delta z_p = \sqrt{\left(\frac{p_0}{q} \right)^2 + \frac{(\alpha EF \Delta t - H)^2}{EF q}} - \frac{p_0}{q}$$

The paper shows the exact calculation of the dilatation not only for the end of the continuous rail, but also for long rails of length $2l$, for both the cases of $\Delta l < y_1$ and of $\Delta l > y_1$. The numerical evaluation of the exact formulae shows that the results of the exact calculation and of the approximate calculation based on $p = \text{const}$. agree very well, and the value of the maximum discrepancy is about 1.5 mm, which value may be neglected.

Thus the paper proves exactly that the simplified calculation of dilatation using constant resistance is of completely satisfactory accuracy for practical purposes.

CALCUL EXACT DE LA DILATATION DES RAILS LONGS ET DES VOIES FERRÉES
SANS JOINTS, SUR BASE DES COURBES EXPÉRIMENTALES DE RÉSISTANCE
DES VOIES FERRÉES

E. NEMESDY

RÉSUMÉ

Les calculs de la dilatation et du déplacement des extrémités des rails longs et des voies ferrées sans joints, s'effectuent généralement par la méthode de calcul établie vers 1928, par MM. le Dr. J. NEMESDY-NEMCSÉK, WATTMANN et GRUENEWALDT, en se basant sur une résistance de la voie constante p kg/cm, indépendante du mouvement.

Les formules de base bien connues et donnant le déplacement de l'extrémité du rail pour les rails sans joints ou d'une longueur $2l$, sont:

$$z = \frac{(\alpha EF \Delta t - H)^2}{2 EF p} ; \Delta l = \alpha \Delta t l - \frac{H}{EF} l - \frac{pl^2}{2 EF}$$

D'après de nombreux essais de résistance des rails, la résistance du ballast ne sera constante qu'après un déplacement limite préliminaire $y_1 = 5-6$ mm. Pour les déplacements plus petits, la valeur de la résistance p kg/cm croît progressivement, d'une valeur de frottement p_0 jusqu'à la valeur constante p kg/cm.

Le calcul de l'accroissement est effectué en supposant une droite $p_x = p_0 + q \cdot y$ dans la première, et une valeur $p = \text{const.}$ dans la seconde période.

De l'équation différentielle de la dilatation retardée, nous déduisons les formules exactes compliquées, puis les valeurs exactes des déplacements des extrémités de rails, qui montrent bien la différence d'avec la méthode de calcul simple, basée sur la résistance constante p . Par exemple, si Δz est plus grand que le déplacement limite précédent y_1 , le déplacement exact de l'extrémité du rail sans joints sera, de cette manière:

$$\Delta z_p = \frac{(\alpha EF \Delta t - H)^2}{2 EF p} + \left[y_1 - \frac{p_0^2}{2 pq} \operatorname{sh}^2 \left(\operatorname{arch} \frac{p}{p_0} \right) \right]$$

Si par contre, $\Delta z_p < y_1$, alors:

$$\Delta z_p = \sqrt{\left(\frac{p_0}{q} \right)^2 + \frac{(\alpha EF \Delta t - H)^2}{EF q}} - \frac{p_0}{q}$$

L'étude présente le calcul exact de la dilatation non seulement pour les extrémités de rails sans joints, mais aussi pour les rails de longueur $2l$, dans les deux cas: $\Delta l < y_1$ et $\Delta l > y_1$.

L'évaluation numérique des équations exactes montre que les résultats du calcul exact et du calcul approché tenant compte de la résistance constante, présentent une bonne concordance dans les cas pratiques, et que le plus grand écart est d'environ 1,5 mm, valeur négligeable.

L'étude prouve donc d'une façon exacte que le calcul simple de la dilatation basé sur la résistance constante est d'une précision tout à fait suffisante pour les calculs se présentant dans la pratique.

ТОЧНЫЙ ДИЛАТАЦИОННЫЙ РАСЧЕТ

ДЛИННЫХ РЕЛЬС И БЕССТЫКОВЫХ РЕЛЬСОВЫХ ПУТЕЙ

НА ОСНОВЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ КРИВЫХ СОПРОТИВЛЕНИЯ РЕЛЬСОВЫХ ПУТЕЙ

Э. НЕМЕШДИ

РЕЗЮМЕ

Вообще расчет dilatации длинных рельс, а также бесстыковых железно-дорожных рельсовых путей и движения конца рельс обычно принято выполнять при помощи установленной уже в 1928 г. исследователями Немешди—Немчек, Ваттман и Грюневальд методики расчета, т. е. беря за основу при расчете сопротивление рельсовых путей в p кг/см величиной, независимой от движения. Известными основными фор-

мулами являются для величины движения конца рельс в случае бесстыковых, соответственно рельс длиной $2l$:

$$\Delta z = \frac{(\alpha EF \Delta t - H)^2}{2 EF p} ; \Delta l = \alpha \Delta t l - \frac{H}{EF} l - \frac{pl^2}{2 EF} .$$

На основе опытов по исследованию сопротивления рельсовых путей сопротивление постели становится постоянной величиной только после некоторого начального предельного сдвига $y_1 = 5-6$ мм, в случае, если сдвиг меньше этой величины, тогда величина сопротивления в p кг/см возрастает от некоторого начального значения трения p_0 до постоянной величины в p кг/см. В данной работе рост учитывается прямой $p_x = p_0 + q \cdot y$ на первом отрезке и на втором отрезке расчет производится величиной $p = \text{конст.}$ Из дифференциального уравнения торможенной дилатации выводится наряду со сложными точными формулами также такие точные значения движения концов рельс, которые хорошо и наглядно показывают отклонение от простой методики расчета, использующей постоянное сопротивление p . Например, точный сдвиг конца бесстыковых рельс будет соответствовать нижеприведенной формуле, если Δz больше, чем прежний предельный сдвиг y_1 .

$$\Delta z_p = \frac{(\alpha EF \Delta t - H)^2}{2 EF p} + \left[y_1 - \frac{p_0^2}{2 pq} \operatorname{sh}^2 \left(\operatorname{arch} \frac{p}{p_0} \right) \right]$$

а если же $\Delta z_p < y_1$,
тогда :

$$\Delta z_p = \sqrt{\left(\frac{p_0}{q} \right)^2 + \frac{(\alpha EF \Delta t - H)^2}{EF q}} - \frac{p_0}{q}$$

В работе сообщаются формулы не только для расчета дилатации конца бесстыковых рельс, но и для рельс длиной $2l$ также приводятся соответствующие формулы как для случая $\Delta l > y_1$, так и $\Delta l < y_1$. При числовом решении точных формул выясняется, что результаты точных расчетов и приближенных расчетов, исходящих из постоянного сопротивления, в практических случаях хорошо совпадают, и значение наибольшего отклонения составляет ок. 1,5 которым можно пренебречь.

Следовательно, работа строго доказывает, что простой дилатационный расчет, исходящий из постоянного сопротивления, для практических расчетов является вполне удовлетворительным в отношении точности.

CAPILLARY PROPERTIES OF SOILS

L. RÉTHÁTI
CAND. OF TECHN. SC.

UNDERTAKING FOR SURVEYING AND SOIL INVESTIGATION, BUDAPEST

[Manuscript received May 27, 1959]

Fundamental laws of capillary physics had already been established for a century (LAPLACE 1806, GAUSS 1830), when the first experiments of ATTERBERG initiated the systematical investigation into the capillary properties of the soil. Practical problems requiring solution were encountered first in agricultural chemistry, yet hydraulic engineering and soil mechanics were soon to follow. Protection of roads, foundations and of ice houses against damages by frost, watersealing of walls and subterranean rooms, seepage from earth canals, percolation below the surface, soil shrinkage and the apparent cohesion of soils are all subjects closely related to capillary phenomena.

Results of physics and chemistry cannot readily be applied to porous materials. In order to overcome the difficulties caused by the differences between the "individual capillary tube" and the soil of involved textural structure, the concept of the "ideal soil" — of regular structure and consisting of identical particles — has been introduced. This approach, however, does not seem to have proved satisfactory, and has in many instances even led to a departure from actual conditions and to the uniformized treatment of problems. Thus *e. g.* "the height of the capillary rise" is considered, to this very day, the most significant characteristic, although its value is different for various ducts in the soil, the degree of saturation of the cross sections being influenced also by their distance from the water surface. The reason for our inability to solve a very great number of problems is, that no information is as yet available on the changes in the ratio of active and passive forces during capillary flow, and on the relationships between this distribution of forces and the distribution of the water content.

An attempt has been made by the author to solve these problems, relying on the results of almost three hundred laboratory experiments, of which the evaluation and theoretical discussion are presented in the following. Thus, the relationships applying to the "closed" and "open" capillary ranges had to be established first (Sections 1 and 2) in order to obtain information therefrom on the laws governing the distribution of forces and percolation velocities (Section 3). In the parts relating to laboratory experiments (Section 4)

and to practical applications (Section 5) we endeavour to make use of the conclusions arrived at in the preceding Sections.

Granular soil samples of disturbed structure were used in these experiments. One of the soils (denoted by *A*) was a quartz-sand of alluvial origin, while the second (denoted by *B*) was a loess soil of macroporous texture and deposited by the wind. Several fractions and blends were prepared from soil *A* (Fig. 1). Data on the chemical composition determined by oxide-analysis of the soils have been compiled in Table 1.

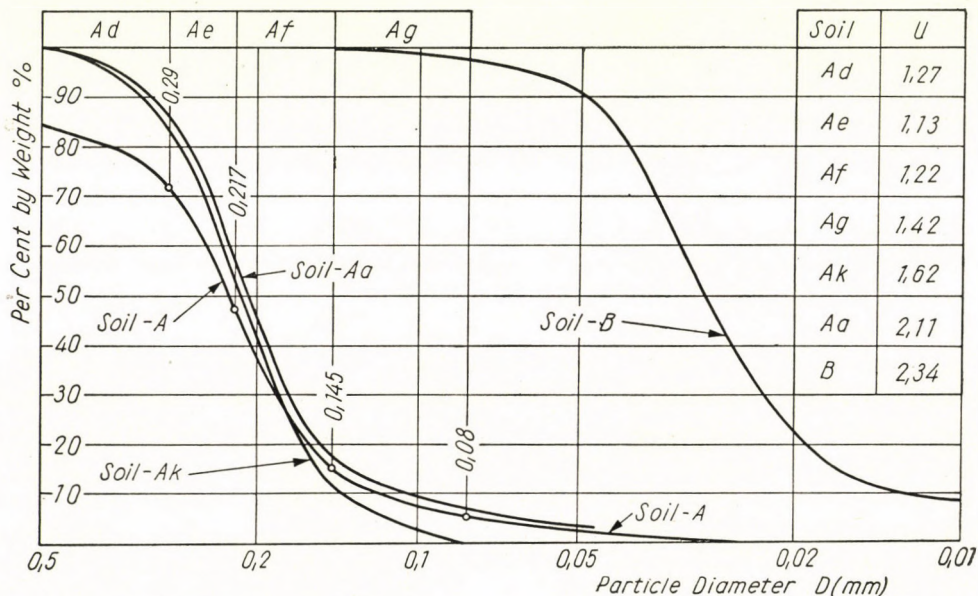


Fig. 1. Grain-size distribution curves, notation (*Ad*, *Ae*...) and uniformity coefficient (*U*) of soils investigated

Table 1
Chemical composition of soils investigated

Soil	Components present, %					
	volatiles	SiO ₂	R ₂ O ₃	CaO	MgO	(CaCO ₃)
<i>Ak</i>	4,91	87,24	2,68	3,42	0,98	4,32
<i>B</i>	17,79	58,89	6,67	9,19	3,37	11,79

Ordinary tap-water stored at laboratory temperature was used for the experiments. The temperature of water was 22,2 + 2,1 centigrades.

1. The degree of saturation of the closed capillary zone (S_e)

The definition of ZUNKER [29] introducing the concept of the closed capillary zone has left unanswered the question as to the extent to which this zone, bordering on the free water surface, is filled with water. Following a brief review of the literature on the subject, the corresponding laboratory experiments will be described.

a) *Conclusions published in the literature on the problem*

Dealing with the origin and development of soil water content, distinctions are usually made by the authors between the *water absorption* of dry soils and the *drainage* of previously saturated (inundated) soils. The unanimous opinion of all authorities concerned is that the amount of water remaining in the soil after drainage is in excess of that which can be absorbed by capillarity. The phenomenon can be demonstrated in physics by the JAMIN tube which has a varying cross section (Fig. 20). In the course of previous saturation water enters also into the large pores, more or less suitable for water retention, of the open zone, which are unable to draw water from the finer pores during the process of capillary rise.

Above the groundwater table three zones are distinguished by TERZAGHI [25] who regards the bottom one as complete saturated though, it must be remembered, he explains the development of zones by drainage. According to the interpretation given by WEILAND [27] to the definition of ZUNKER "every space, even the large pores, is completely filled with water" in this zone. Complete saturation is mentioned also by GOLDSTEIN [4], TERZAGHI and PECK [26], as well as by KÉZDI [7]. According to TAYLOR [24], the correctness of assuming saturation is questionable, while KRYNINE [12] is of the opinion that such an assumption is practically correct. In the experiments of LAMBE [13] on horizontal capillary movement in fine sand, 80 per cent of the soil voids became saturated, and the experiments on capillary rise yielded similar results (Fig. 2a). In his book published a year later [14] a schematic diagram of general validity is given according to which the relative moisture content (degree of saturation) of the closed capillary zone (h_{cn}) is almost without exception smaller than one (Fig. 2b).

Measurements of VASILEV [21, p. 304] carried out on undisturbed samples are noteworthy in this respect. These have revealed after water absorption a relative moisture content of 0,82 to 0,88 for the silt under consideration. Information on a *field* measurement by him is also available, in which the saturation of the same soil was observed. His conclusion is that complete saturation does not occur either above or below the groundwater table (Fig. 3).

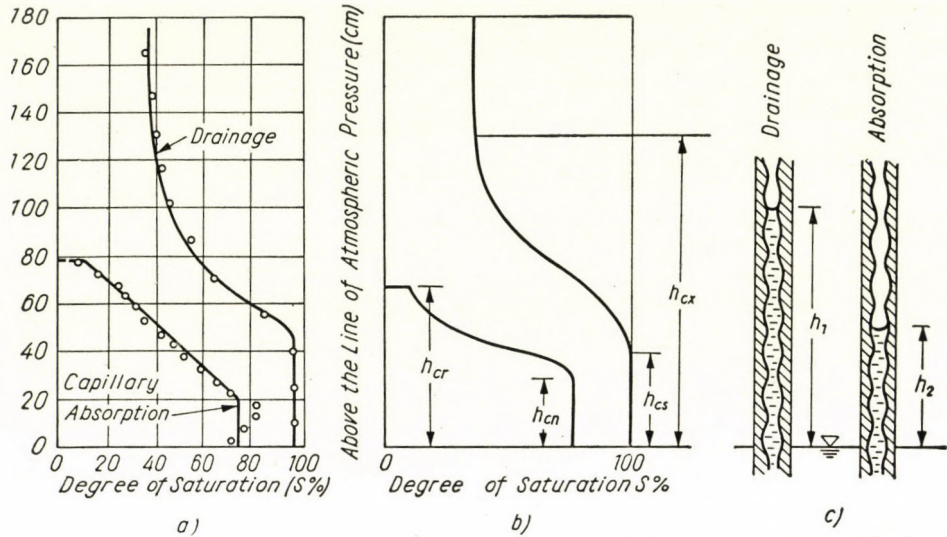


Fig. 2. Capillary absorption and drainage. Experimental (a) and theoretical (b) characteristic curves of LAMBE, with notations introduced by him. Demonstration of capillary hysteresis by means of a JAMIN tube (c)

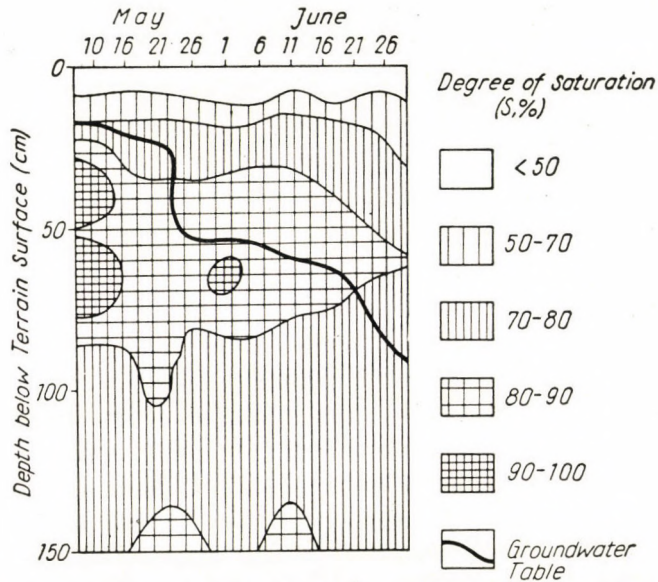


Fig. 3. Changes in the degree of saturation with time, at various depths below terrain surface (observations of VASILEV)

The above examples cited from the literature were included to illustrate the wide variety of contradictory opinions prevailing in this field. The thought that the ability of a soil for capillary saturation could depend on some physical property of the *soil itself*, did not occur even to the authors who observed partial saturation.

b) *Laboratory investigations into saturation*

The device constructed for this purpose is illustrated in Fig. 4. The sample is placed into a 4 cm diameter, 6 cm high metal cylinder which, in

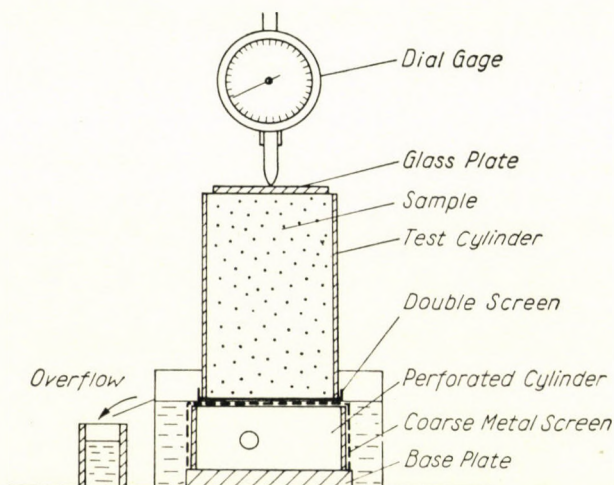


Fig. 4. Device constructed for determining the water content of the capillary zone above the water surface

turn, is supported on a second perforated cylinder standing in a water-filled vessel and covered with a rigid screen. Constant water level is ensured by means of an overflow. A double screen is used to support the sample. The upper screen serves as to protect the grains of the sample against scouring, while the purpose of the lower rigid screen is to prevent any deflection of the first. A glass-plate placed on top of the sample supports the indicator point of a dial gage, by the aid of which any change in volume due to water absorption can be observed with an accuracy of 0,01 mm. The water content of the sample, its degree of saturation and specific slump can be computed from the dry weight and the wet weight determined after water absorption, as well as from the cylinder volume corrected according to the dial reading.

Prior to starting the experimental work, the permissible accuracy limits of weight- and volume determinations were established. For this purpose

the relative moisture content (S) was expressed as a function of the specific weight (s), the volume of the sample (V), the absorbed water (ΔW) and the dry weight (W_0). Hereafter the partial differentials of S according to the above factors were formed. It could be established by this method that a deviation of $+0,01$ in relative moisture content may be caused by the errors of observation given below: $\partial s = -0,018$ g/cu.cm, $\partial V = -0,31$ cu.cm, $\partial(\Delta W) = +0,30$ g and $\partial W_0 = -0,47$ g.

Using a scale sensitive to centigrams, the accuracy limit of weight measurements can readily be observed. The measurement of ΔW is a more delicate task, because while being removed from the water, the sample is likely to loose some water. Cylinder volumes were determined by immersion and the condition that the volume of the sample should be identical with that of the cylinder was met by using the double screen, and checked by the dial gage. As far as specific weight is concerned, an error of the order of magnitude of $\pm 0,01$ had to be taken into account, owing to the miscellaneous composition of the material.

As revealed by control computations, the accuracy attained was generally within the desired limits. Standard errors computed by the method of least squares for individual experiments within some series and for the calculated averages are given in Table 2.

Table 2

Experiments for determining the saturation (S_e) of the closed capillary zone

Soil	Number of tests	Void ratios (e)	Standard error		Average S_e	U
			single test	average		
<i>Ad</i>	10	0,59—0,76	0,016	0,005	0,979	1,27
<i>Ae</i>	11	0,56—0,74	0,014	0,003	0,986	1,13
<i>Af</i>	10	0,58—0,79	0,012	0,004	1,008	1,22
<i>Ag</i>	7	0,73—0,86	0,021	0,009	0,975	1,42
<i>Ak</i>	12	0,56—0,72	0,017	0,005	0,977	1,62
<i>Aa</i>	14	0,60—0,78	0,015	0,004	0,849	2,11
<i>B</i>	4	0,80—0,97	0,019	0,009	0,840	2,34

Series comprising from 10 to 12 observations were designed with different soil densities in each experiment. Increments of $\Delta e = 0,20$ to $0,25$ were successfully attained by manual compacting and shaking. The majority of experiments were carried out on dry soil, in those with *Aa* soil *previously wetted* samples were also used.

c) *Experimental results*

The average relative water contents (S_e) together with the corresponding standard errors are compiled in Table 2 for the various fractions investigated. The limits of the void ratio (e) observed after the completion of the process of capillary rise can be seen in the same table.

As will be perceived from the data in the table, the degree of saturation of the soil fractions considered, at the end of the process of rising, attained values lying within the range $S_e = 0,84$ to 1,0 (in order to illustrate accuracy limits, the value 1,008 has also been included in the Table). It can be concluded therefrom that the degree of saturation of the closed capillary zone varies from soil to soil and can be partial and complete alike.

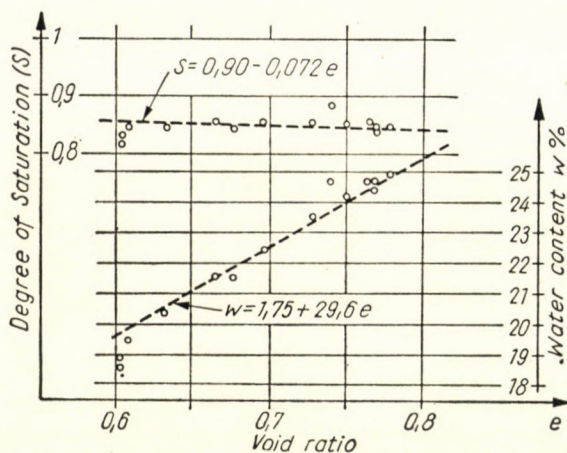


Fig. 5. Variation in the water content (w) and degree of saturation (S) of the lower capillary zone, plotted against the void ratio (e) observed after absorption (Soil Aa)

Let us examine now which of the physical soil properties is the one influencing capillary saturation.

The gradation of individual fractions is within very close limits, so that they may practically be replaced by a multitude of uniform grains of a size corresponding to the average particle diameter. In view of the fact that the four fractions within the particle range $D = 0,08$ to 0,50 mm have shown a value $S_e = 0,98$, it can be stated that within the range considered the degree of saturation is independent of particle size.

The same can be said about soil density. This fact seems to be corroborated by the circumstance that the standard error of individual measurements within a series of experiments, made with samples of different density, is hardly in excess of the accuracy limit mentioned above. The conclusion lies therefore close at hand: the fluctuation about the average value is of unpredictable character. Relative moisture contents of the Aa soil, together with the

analytically determined equalizing line thereof observed at various void ratios, have been plotted in Fig. 5. The change in relative moisture content over the entire void-ratio range investigated amounts to no more than 0,013, *i. e.* about 1,5 per cent.

The *water content* of the capillary fringe is not independent of density, and is thus a soil property not as unique and characteristic as the relative moisture content. This is clearly illustrated by Fig. 5 which shows that the water content increases by 25,9 per cent within the density range investigated, while S_e remains fairly constant.

An interesting result is obtained when S_e is plotted against the *uniformity coefficient* (Fig. 6), inasmuch as *the degree of saturation is seen to decrease*

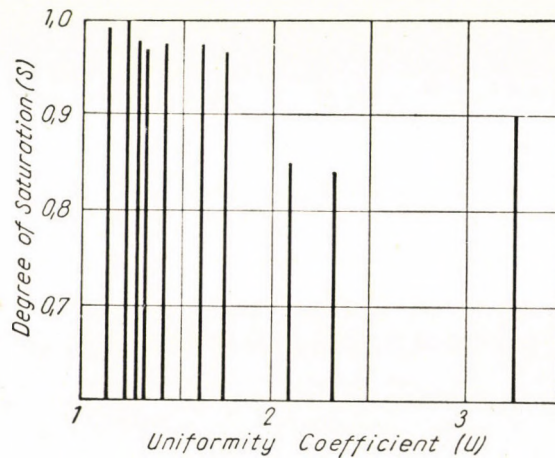


Fig. 6. Relation between the S_e value and uniformity coefficient (U) for the soils investigated

with increasing graduation. Having once recognized this trend, experiments were made with various *blends of different fractions* as well (Table 3). The

Table 3

Degree of saturation (S_e) of soil mixtures in the "closed" capillary zone

Blend	Number of tests	Void ratios (e)	Average S_e	U
$Ad + Ae$	5	0,60—0,72	0,972	1,32
$Af + Ag$	4	0,61—0,79	0,967	1,74
$Ad + Ag$	4	0,55—0,70	0,901	3,26

result was that components, which could be saturated separately, attained a saturation of only 90 to 97 per cent when blended. These results fit well

into the relationship presented in Fig. 6. The relatively high value observed with the $Ad + Ag$ blend can be attributed either to the stepped gradation curve that cannot be described by U , or to the circumstance that the components which could be saturated separately, were not blended completely. The series of experiments made with samples previously *wetted* to various degrees is represented graphically in Fig. 7. As to be seen therefrom, the degree of saturation of a soil soaked owing to capillarity *depends also upon the initial water content*. The extent of previous wetting may attain a limit value (S_h) beyond which the water absorption of the sample during the actual test becomes zero.

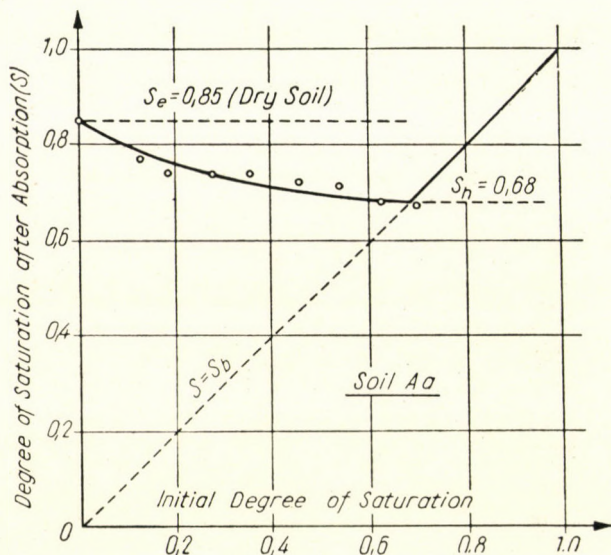


Fig. 7. Saturation of previously wetted soils

Consequently, these experiments have revealed the existence of two limit values characteristic for the degree of saturation of the closed capillary zone: 1. the relative moisture content of the initially dry soil (S_e), observed after water absorption, 2. the minimum relative moisture content (S_h) which may develop above a free water surface, regardless of the initial water content of the soil. Numerous data were obtained on the slump due to capillary water absorption as well. These will, however, be described in a separate paper.

d) Discussion of physics involved

A detailed examination of the problem is impossible without considering the results of material investigation in a wider sense, as well as of physics and chemistry in this fields.

According to the definition formulated by MANEGOLD [17], the soil is a polycapillary system in which the pore volume is built up of pores forming an open network or intercommunicating ducts as well as of bubbles (totally enclosed) and bags (open on one side). Obviously, the degree of saturation of any particular soil will depend on how the various pores can be filled, and on the ratio in which they are present in the entire pore volume.

Experiments by K. SCHULTZE [22] have shown the readiness of the capillary voids for being filled with water to depend upon the magnitude of surface tension (the smaller the former, the higher the latter), upon the position of the capillary void, upon the shape of the cross section, upon the degree to which the capillary space is enclosed, as well as on the cross section and position of the opening communicating with the adjacent system.

The experiments conducted by SMITH and BROWNING (1942) are noteworthy in this respect. They found the samples to contain 9 to 22 per cent air after the usual laboratory method of saturation. CHRISTIANSEN (1944) succeeded in completely removing the air content only at a vacuum approaching the atmospheric pressure. VASILEV attempted the saturation of the samples referred to in Section 1a, but could in no case observe any absorption of water.

A characteristic feature of water movement in the closed capillary zone is that the *large voids become filled* first, flow velocities in these being higher in the initial phases of rising. Small menisci supplied from these enter into the small pores, yet cannot drive out part of the entrapped air since the latter does not communicate with the outer atmosphere. Differences in velocity, which may be considered as the primary cause of entrapped air bubble formation, are evidently the greater, the *more varied* the gradation of the soil, inasmuch as the number of possible combinations as regards the length of ducts, the shape and diameter of cross sections, the degree of enclosedness of the pores, is much greater. In soils having a flat grain-size distribution curve there are numerous sack-like and bubble formations, and their number may be increased even by water, in an attempt to enter the pores, closing part of the narrower ports.

All these conditions may be described by the "pore distribution curve" of the soil. The flatness thereof is proportionate to that of the grain-size distribution curve of the soil, and the assumption that in the case of structureless soils this ratio is unaffected by the size of the grains, lies close at hand. Accordingly, this curve would be displaced parallel to itself during the compaction of the soil. If these assumptions are accepted as correct, this concept, abstract as it may seem for the time being, readily lends itself for the explanation of why the S_e value of various soils investigated failed to respond to changes in grain size and density, yet at the same time, reacted to gradation and similar wetting.

2. Distribution of water content in the open zone

The distribution curves shown in Fig. 2 after LAMBE, are similar to the distribution curves of capillary moisture, determined in laboratory test or in the field and published in the literature. The decrease of soil-moisture content with increasing distances from the free-water surface is a problem of great significance in technical, agricultural and agrochemical respects, yet the observation of this phenomenon is a prerequisite also for the study of the *distribution of the capillary forces*. It has been attempted to construct for this purpose a device permitting the rising height, velocity, and the relative moisture content of any arbitrary point of the wetted soil column to be computed already during the experiment.

a) Description of the device

The soil sample to be investigated is inserted into a glass tube of constant cross section and enclosed at its bottom by a screen. The glass tube may be introduced by the aid of a Bunsen rack into the water column of a vessel having a constant cross section and supported on the pan of a balance. The experiment is started by immersing the bottom of the tube, after compensation of the scale, into the water contained in the vessel. During the process of capillary rise, sufficient weight is always removed from the balance to keep the index of the scale between the two extreme marks. The height of the capillary rise, the weight balancing the vessel and the scale of the balance are read simultaneously. From these data the summation curve of the absorbed water quantity (x) can hereafter be computed and plotted in a co-ordinate system against the height (z) above the water surface.

With the porosity (n) known, the relative moisture content of the soil cylinder, having a cross-sectional area f and a height Δz , can be computed as

$$r = \frac{\Delta x}{f \Delta z n \delta} \quad (1)$$

where Δx = the water quantity absorbed over the path Δz
 δ = the density of water (= 1 in the following).

In case of a sample composed of discs placed upon one another, again Eq. (1) would have to be applied. A similar arrangement of the experiment would involve the disadvantage that, in order to attain the necessary degree of accuracy, each disc would have to have a considerable height, and the average degree of saturation related to their central plane would not reflect actual conditions, not to mention other sources of errors. Advantages resulting

from the continuity of the sample may be exploited best by computing the relative moisture content from the tangent ($\lim \Delta x / \Delta z = z'$) of the water absorption curve.

It is not possible to register the quantity (x) of absorbed water directly since the loss in weight (W) determined from the scale includes besides x the following factors as well: 1. the weight of the evaporated water (W_p), 2. the change in uplift acting on the tube and due to evaporation, as well as to 3. water absorption. If the uplift acting on 1 cm length of the tube is denoted by φ , and the cross-sectional area of the vessel by F , the *observed* loss in weight may be expressed as

$$W = x + \varphi \frac{x}{F} + W_p + \varphi \frac{W_p}{F},$$

whence the absorbed water quantity may be computed.

Readings taken on the scale of the balance should also be corrected since the force required for compensation is bound to overcome also the change in uplift due to displacement. The correct scale reading is obtained if the actual reading is divided by the displacement of the pan due to a change in load of 1 gram and expressed in scale graduation units. The latter may be determined at any arbitrary time of the rise. From these data, further from the length of the arm and of the index of the balance, as well as from the distance of scale graduations, also φ may be computed. W_p may be determined by continuously measuring the loss in weight of water stored in a vessel having a cross section identical with the original.

The derivation is based on the assumption that the entire water volume absorbed by the sample is used up to soak dry soil particles lying above the momentary contour line of wetting. This assumption seems acceptable, although, according to KRÜGER [11], "until equilibrium is reached, respectively until the completion of capillary saturation, more water enters into every tube section at the bottom than departs at the top". True enough there are some phenomena that seem to corroborate KRÜGER's statement (*e. g.* the wetted surface continues to rise slowly even after the sample has been removed from the water), yet this effect, which could be referred to as the "secondary saturation process", may probably be neglected in most cases.

b) *Conclusions from laboratory tests*

Absorption tests have been carried out with every material, except for soil *B*. A typical *absorption curve* is shown in Fig. 8, and the diagram of changes with height in the relative moisture content has also been plotted at the side thereof.

All experiments have confirmed uniformly that the first leg of the absorption diagram is *straight*, saying that the relative moisture content is constant up to a certain height. This height h_c (or h_{cn} according to the notation of LAMBE) increases as the grain size is reduced. It was found to be about 7 and 17 cm with the fractions *Ad* and *Ag*, respectively.

Decrease in water content (relative moisture content) in the range $z > h_{cn}$ are described by a *sigmoid curve*, which — in a manner similar to the corresponding section of the water-absorption diagram — emerges tangentially

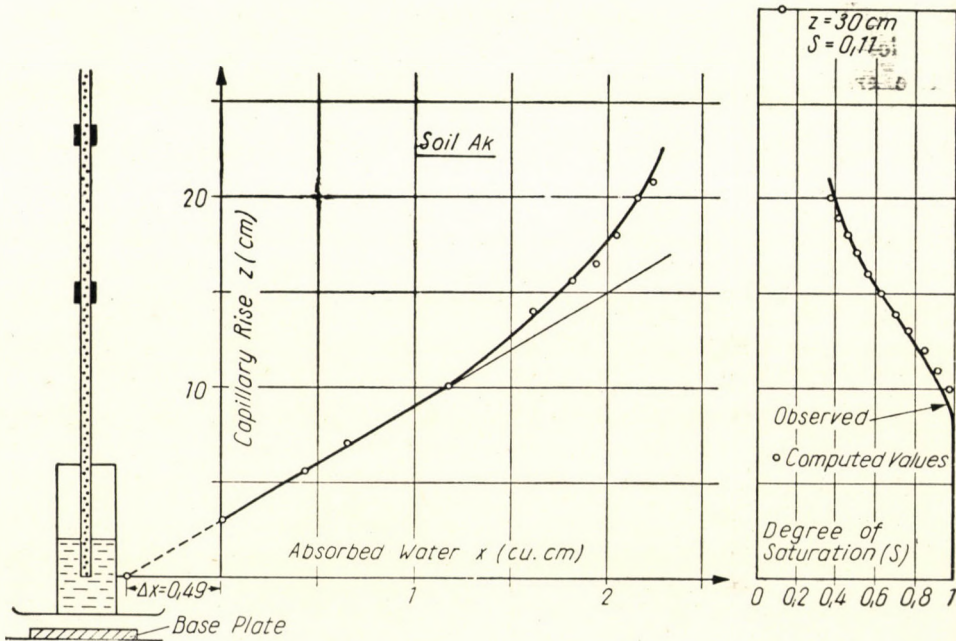


Fig. 8. Absorption diagram and moisture distribution determined therefrom for *Ak* soil

from the vertical $S_e = \text{constant}$. The moisture content decreases rapidly; the values observed at a height $z = 2h_{cn}$ were not higher than $S = 0,5$ to $0,6$. With coarse soils this means that the water content reduces to half of the original value over a distance of 7 to 8 cm.

c) *The analytical form of the distribution curve*

Data obtained from the literature, experimental evidence and certain theoretical considerations appear to point to the fact that the hydraulic gradient is very low in the open zone, the instantaneous lifting force (H) hardly exceeding the weight of the raised water column, *i. e.* $H \approx z$. As the distance above the water surface increases, the number of pores capable of lifting the

weight of a water column corresponding to the geometrical elevation becomes gradually less, the number of empty ducts increases and the relative moisture content gradually diminishes. The diameter of active pores varies according to a maximum curve; there exists a soil cylinder of height Δz , to the central plane of which a lifting force $H \sim z$ of most frequent occurrence, respectively a corresponding pore diameter pertains. The point of inflexion of the moisture distribution curve will be found at this height.

The trend of the distribution curve to resemble the form of a probability summation curve can be explained by the above considerations. Owing to the fact that the determination of the "pore distribution curve" in laboratory conditions is impossible for the time being, the qualitative relationship thereof to the *grain-size distribution curve* must be relied upon for the analytical definition of moisture distribution. The equation of the grain-size distribution curve is known to be expressed by most researchers on the basis of probability distribution. Modifying the equation given by JÁKY ([7], Eq. 30a), the following expression is obtained:

$$S = S_e e^{-\frac{1}{R^2} \ln^2 \left(\frac{z}{h_c} \right)} \quad (2)$$

wherein R is the distribution index characteristic of the elongation of the curve. According to the equation, for $z = h_c$, $S = S_e$, and for $z \rightarrow \infty$, $S \rightarrow \infty$ (the latter condition can be satisfied in the case of granular soils only).

As will be perceived from Fig. 8, the distribution curve determined at the laboratory is well described by the proposed expression, and, as far as the significance of the *possibility for extrapolation* is concerned, it should suffice to point out that, for attaining a height of $z = 30$ cm, capillary water would have required some 60 days.

d) The "state of ideal balance"

The distribution curve obtained by a capillary rise, test carried out at the laboratory on dry soil, is a reproduction of the state (distribution) of ideal balance. According to the curve a well-defined water content pertains to every height z . This water content (relative moisture content or capillary water capacity) is the *minimum value which is re-established sooner or later, if once reduced artificially*. If e. g. the specific water quantity withdrawn by evaporation or by the transpiration of plants is in excess of the capillary rising velocity (or water quantity) pertaining to the influenced depth, the soil becomes gradually drier. Yet the dry zone starts to refill immediately after the external influence has ceased to act. The rate of refilling will be governed by the height above the water surface.

The ideal distribution outlined above is not likely to occur frequently in nature. Infiltrating water, withdrawal by plants, evaporation, inhomogeneity and stratification of the soil, changes in temperature, thermic currents, rapid variations of the groundwater table, etc. may cause appreciable discrepancies.

According to experiments of KRISCHER [10], the moisture distribution depends also on the evaporation from the surface since, owing to changes in frictional resistance, the moisture gradient is increased. Any extended withdrawal of water can be expected to entail similar effects. No surplus water content in excess of that pertaining to the balanced state following drainage can prevail for longer periods as a result of infiltration, although the slow downward percolation caused thereby may temporarily increase the water volume that can be computed from the ideal distribution.

In spite of these considerations, the concept of the "ideal balanced distribution" can successfully be applied to a great number of practical problems. If the water supplied by capillary forces is consumed at a certain height above the water surface (*e. g.* freezing on the frost limit, entering into walls of buildings), the existence of a water quantity in excess of the ideal value at any level below this height is indifferent as far as *extended supply* is concerned, inasmuch as with the excess once consumed, the water will be supplied at a rate corresponding to the degree of saturation, respectively velocity, pertaining to the ideal distribution.

3. Velocity and limit height of capillary flow

a) *Review of the literature on the subject*

Definitions of *the upper limit of capillary rise* published in the literature are far from being uniform.

The boundary of the range above the open capillary zone is drawn by TERZAGHI [25] where the water filaments disintegrate into individual, hydrostatically independent droplets. According to LAMBE [14], the maximum rise is defined by the projection on the vertical of the longest capillary duct still communicating with the groundwater. KÉZDI [7] is of the opinion that the limit of the open zone is where the soil contains no more water than corresponding to its molecular water capacity. As to be concluded from the syphon analogy of ZUNKER [29], the practical limit is considered by him as a zone of minimum moisture content, the water-conveying capacity of which is almost zero. According to RODE [21], the water-content distribution curve becomes vertical above the maximum height (this statement is otherwise in no contrast to the opinion of LAMBE) (see Figs. 1 and 2). BRIGGS and LAPHAM [29, p. 100] observed the evaporation from the surface of wet samples of

different length, and adopted as the maximum rise the height at which a reduction in evaporation could be established.

Some of the definitions are likely to produce *identical* results, yet preference should be given to those enabling the *experimental determination* of the capillary rise. A definition may be found acceptable, according to which the upper limit of capillary water movement is the height above which *a)* no hydrostatical connection exists, *b)* the water content of the soil becomes fairly constant and *c)* the laws of capillary physics apply no longer.

Though several authors relate the height of boundaries of various capillary zones to the water content, respectively to the moisture gradient, it may be observed that the values of rise published in various papers are not accompanied by the corresponding *water-content* figures. A typical example for this is the compilation by BUSCH [2], containing "capillary rise values" obtained by some 20 investigators for various soils, without yielding information about whether these heights lie within or above the open zone.

It is a generally accepted principle that the "lifting force" and the "maximum height of rise" represent quantities differing only as far as their dimension is concerned, but being *interchangeable* and *constant* during the entire process of water movement ("lifting force" will hereafter be understood as the difference in surface pressure between the meniscus and the plane water surface). This is the principle underlying all theories on percolation velocity, thus the classic formula (3) of capillary rise, according to which $z = h_c$ at the time $t \rightarrow \infty$.

The more significant ones from among the theories concerning the time-distance relationship of capillary phenomena, namely the *percolation velocity*, may be classified into one of the following four groups:

1. Heat-transfer (diffusion) analogy,
2. Kinetic equation of EULER,
3. Theories founded on the POISEUILLE—DARCY law,
4. Approximating and empirical formulae.

The heat transfer analogy is employed by KRISCHER [10] using the concept of the pore distribution curve and the law of POISEUILLE as well. As admitted even by himself and pointed out *e. g.* by CRONEY [3], the actual cause of movement is not the moisture gradient, *i. e.*, the rate of change in water content with distance.

Considerations of KOŽENY [8] are based on the kinetic equation of EULER, yet some assumptions were found necessary concerning the lifting force. These were modified subsequently by ZUNKER. The derivation of MADGWICK [15, 16] rests on the same principle.

The formula founded on the POISEUILLE—DARCY law can be derived from the basic equations of MADGWICK as well, and is to-day the most widely accepted one:

$$t = \frac{n h_c}{k_r} \left[\ln \frac{h_c}{h_c - z} - \frac{z}{h_c} \right] \quad (3)$$

(The substitution $k = k_r$ has been suggested by LAMBE [13] with the explanation that, owing to the unsaturated condition of the pores, a "reduced permeability coefficient" may only be considered. As established in Section 1c, the condition $k_r = k$ may also arise.)

It can be demonstrated, either by starting from Eq. (3), or from derivations based on the fundamental equation of EULER, that *over the initial section the square of the distance is proportionate to time*, saying that the rise

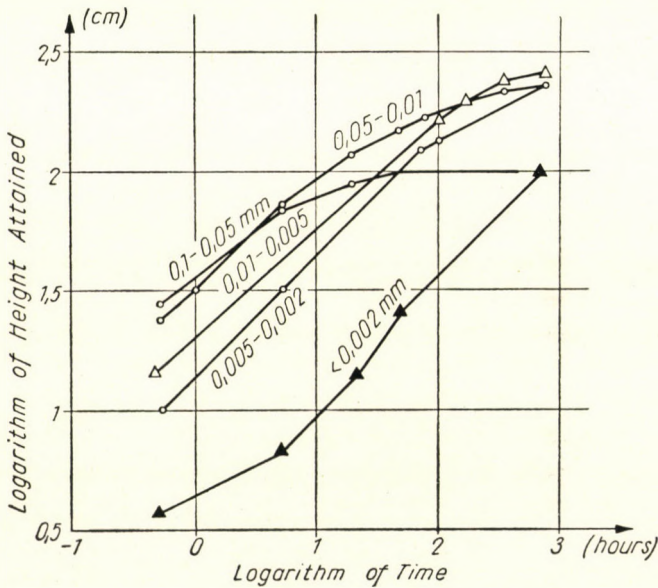


Fig. 9. Rising diagrams plotted in log-log chart for various fractions (experiments of NOVAK—PECHANĚK)

can be described for all soils by a *parabola of second degree*. This relationship could be corroborated by numerous experiments.

The above property of the soil has misled many investigators who attempted to describe the rising diagram by means of *empirical formulae*. NOVAK and PECHANĚK [21, p. 321] found the process of rising to follow an exponential parabola of the form

$$z = at^b \quad (4)$$

which, when plotted in a log-log chart, results in a straight line. The figure published by them to demonstrate this fact (Fig. 9) reveals, however, that the exact relation holds good for the colloid fraction only, and that the coarser

the soil, the sooner and the steeper the curve deviates from the initial straight line. An explanation is thereby given also for the fact that the coefficient b applying to initial branches approximates the value 0,5 for every soil.

The same applies to the formulae of DON KIRKHAM and FENG (1949), VASILEV and AGAPOV as well. The experiments failed to verify also the hyperbolic relation of VOGELER.

It was JÁKY [5] who has recognized that the rising diagram consists of two parabolical legs, and that the constants a and b of the second of these are characteristic of the soil. Although the discussion is not extended to the above properties of the first section, and the assumption of a direct connection

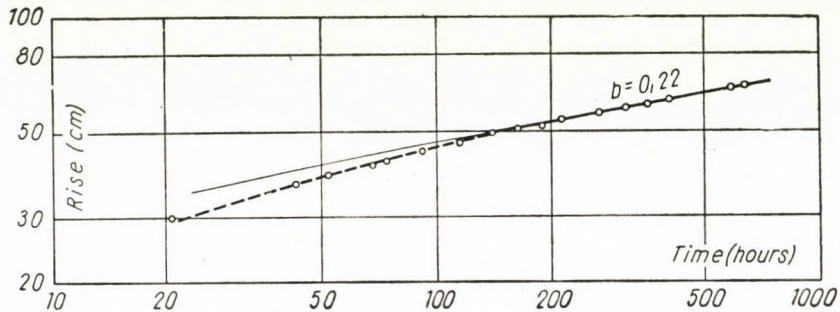


Fig. 10. Development of the linear branch of the rising diagram (experiment of JÁKY)

between the two parabolae having different constants is mechanically incorrect [19], his statements must be regarded as very valuable. The great number of experiments carried out by him, some of which exceeded 1000 hours in duration [6] have, verified with an astonishing accuracy the validity of Eq. (4) for the "second phase" of the rising process (Fig. 10).

However conflicting the various theories may be, they have one common feature that of using *constants* which maintain their validity for the entire rising process, implying thereby that the *same physical laws* prevail and the *same distribution of forces* applies during the entire process. It is proposed to demonstrate subsequently that the failure of solving satisfactorily the problem of describing, in an analytical form, the process of rising is due to this very reason.

b) *Experimental evidence on the subject*

Numerous experiments have been carried out with the aim of investigating the rising velocity. Dry soil placed in 8 to 10 mm diameter tubes has been used for these experiments.

Experimental evidence points uniformly to the fact that, when plotted in a log-log chart,

1. the first leg of the rising diagram is characterized by a *straight line* having a slope $b = 0,5$,

2. this is joined tangentially by a *convex curve*, while

3. the connecting final leg is again a *straight line*.

The first of these statements is in harmony with the theories outlined in the foregoing section. Observations concerning the linear trend in the final — or at least very wide — range agree with experimental results obtained by JÁKY. The exponent b was found to vary between 0,10 and 0,16 for sand fractions, whereas the rising diagram of soil *B* failed to become straight even at a height $z = 80$ cm. It is interesting to compare (Table 4) the results with some of JÁKY's experiments [6].

Table 4

Duration of some experiments of JÁKY and the observed capillary rise

No	Effective particle size	Duration of test	Highest rise observed	b
1.	0,188 mm	936 hours	49,0 cm	0,05
2.	0,161 mm	936 «	90,7 cm	0,17
3.	0,095 mm	1025 «	89,1 cm	0,15
4.	0,035 mm	1035 «	126,5 cm	0,17
5.	0,020 mm	845 «	75,5 cm	0,15

Let us examine now the trend expressed by the hydraulic relation based on the DARCY law. Expanding Eq. (3) into Taylor series, the following expression is obtained:

$$t = \frac{n}{2k} \left(\frac{z}{h_c} \right) z + \frac{n}{3k} \left(\frac{z}{h_c} \right)^2 z + \dots + \frac{n}{(i+1)k} \left(\frac{z}{h_c} \right)^i z + \dots \quad (5)$$

Three conclusions can be drawn from the structure of this expression:

1. If, h_c is small relative to z , that is, at the beginning of the rising process, members of an order higher than second may be neglected and the following well known expression is obtained:

$$z = \sqrt{\frac{2kh_c}{n}} \sqrt{t} \quad (6)$$

2. In later phases of the rising process the members of higher order may no longer be neglected, and — provided that the accuracy limit is maintained constant — the exponent of z increases gradually; the exponent 0,5 of t in Eq. (4) decreases gradually. Evidently, this applies also to the slope of a straight line joining at any point.
3. The higher h_c is, i. e., the smaller the grains composing the soil, the longer the range over which the diagram can be approximated by a parabola of second order, and the smaller the rate at which the exponent of t reduces. The diagrams of NOVÁK and PECHANEK should be remembered in this context: the finer the fraction examined, the higher lies the point where

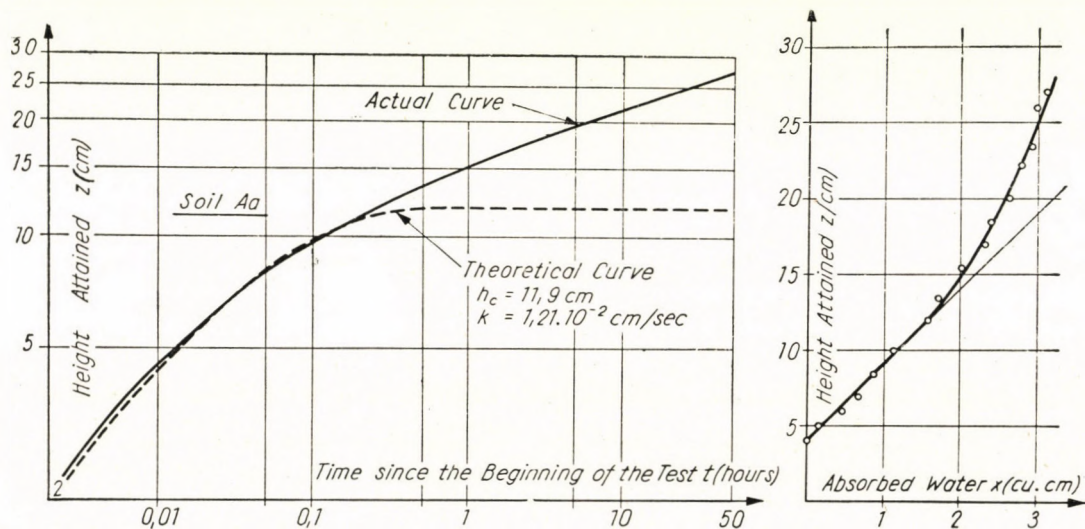


Fig. 11. Theoretical and experimental rising diagrams of soil Aa, compared to the absorption diagram

the diagram obtained departs from the straight line defined by Eq. (4). In case of a multitude of grains having a diameter of 0,002 mm (Fig. 9) this limit is beyond 200 cm (1000 hours).

As actually demonstrated by these experiments, the initial phase of rising can very well be described by the classical formula, Eq. (3). The time—distance curve obtained during an experiment with soil Aa is shown in Fig. 11. Two points of the curve suffice for the computation of the constants h_c and k_r in Eq. (3), and therewith the co-ordinates of the theoretical curve. Unless one of the two points lies on the “second” linear section, the experimental curve and the theoretical one can be made to coincide. The agreement comes to an abrupt end in the vicinity of $z = h_c$, inasmuch as the experimental curve continues in a mildly sloping straight line, while the theoretical curve tends towards a horizontal asymptote ($b \sim 0$).

The fact that the initial section of the theoretical curve and that of the experimental curve coincide, demonstrates that

1. capillary flow can be described in this range with the aid of the DARCY law,
2. within this range the *permeability coefficient* and thus necessarily
3. *the relative moisture content* are equally constant

Indeed, our experiments have demonstrated (Section 2) that immediately above the water surface there always ensues a range of constant water content, the height of which is characteristic of the soil, and increases as the particle size reduces. The diagram of capillary absorption is also shown for the soil *Aa* in Fig. 11 illustrating that the computed $h_c = 11,9$ cm value agrees fairly well with the height of the $S_e = \text{constant range}$ (even if the 1,5 centimetres or so corresponding to the immersion depth of the tube are subtracted).

Eq. (3) is based on an assumed proportionality between velocity and the hydraulic gradient:

$$v = \frac{k_r}{n} \frac{h_c - z}{z} . \quad (7)$$

In the above expression h_c represents the active, while k_r and z the passive forces: frictional resistance and gravity. The facts established hitherto lead to the conclusion that in case of a $h_c = \text{constant}$ value the hydraulic gradient decreases gradually.

What happens when the hydraulic gradient attains a *limit value*? How to explain the phenomenon found to be in sharp contrast to the physics of individual pipes, namely that instead of stopping, the capillary rise continues and the new section is characterized by a greater distance and longer duration?

The only explanation for the phenomenon is the fundamental change in the relation of active and passive forces beyond the height $z \sim h_c$. A water mass — bounded from above by menisci — is accumulated here and the force h_c characterizing the lifting capacity of the coarse pores is no longer sufficient to raise it further. This is the point where the fine pores become effective. In these pores menisci can develop which are of a curvature just capable of balancing a water column of the given height. Proceeding upward the number of passages meeting this conditions becomes gradually less — in these pores the menisci come to a standstill — and the relative moisture content and therewith the permeability coefficient decrease accordingly. In other words, the increase of the momentarily effective active force H is accompanied by a simultaneous increase of the passive forces: the dead weight of the water columns and frictional resistance.

c) Definition of the h_c value and of the capillary zones

Comparing the relationships governing the distribution of the water content as well as the ratio of active and passive forces, two characteristic and readily definable capillary zones may be established:

“The zone of uniform saturation” is a capillary range immediately above the water surface, in which the active force ($h_{cn} \cdot \delta$), the relative moisture content (S_e) and permeability (k_r) are constant, while the velocity of rising follows the DARCY law.

This range is followed by a “zone of decreasing saturation” which is characterized by the gradual increase of the effective active force (H) and of the frictional resistance and by a simultaneous reduction according to the probability law of the relative soil moisture (S). Corresponding to the combination of these, velocity can be described by an exponential parabola having a constant exponent.

The limit of the “closed” and “open” capillary zones defined by ZUNKER cannot be determined either at the laboratory or in the field, inasmuch as it is impossible to determine the level above which passages communicating with the atmosphere exist. Neither is this limit characteristic of the capillary properties of the soil, being not related closely to the degree of saturation (which commences to decrease, according to ZUNKER, even below this line) and to the distribution of forces and thus to the physics of capillary flow.

The value of h_c must, consequently, be defined in a manner differing from the conventional. Accordingly, h_c (or using the notation of LAMBE h_{cn}) is the height below which both S and k are constant. This, in turn, involves that the value h_c is the force ($h_c \cdot \delta$) that remains the constant active force effective over this zone. As soon as the hydraulic gradient attains a limit value ($z \sim h_c$), the surface pressure $h_c \cdot \delta$ is no longer sufficient for lifting, respectively balancing, the water column, and the active passages become gradually narrower. It should be noted that the height h_c is not an asymptote of lifting, and reference to it as the “capillary rise” would be inappropriate.

4. Laboratory determination of the capillary properties of soil

The most common laboratory methods may be classified into three groups, namely into those aiming at the determination of h_c , h_{cc} and moisture distribution, respectively.

1. The value of h_c can be measured, respectively computed, from
 - a) capillarimeters using a balancing force,
 - b) the state of stress due to capillary pressure,
 - c) deformations,
 - d) the velocity of capillary flow.

All of the above methods are *indirect, i. e.* instead of the lifting force (respectively, the corresponding height) one of the physical effects thereof is measured. In the opinion of the author, when applied to the same sample, *the afore-said methods are bound to yield different results.*

It is the specific pressure, required to disrupt the menisci formed previously in the sample, that is measured by capillarimeters. This is realized by air under pressure (JÜRGENSON), by vacuum (BESKOW), or simply by measuring the air pressure which prevents further capillary rise (BOLYCHEV, [23]). Most authors point to the fact that capillarimeters disrupt the water columns of the *coarse pores* first (or exclusively), thus the balancing force is equal to the lifting force that can be computed from the surface tension in them. As generally accepted [9, 14, 6] this value is nothing else than that corresponding to the closed capillary zone. No experimental evidence is available to support this theory which is by no means surprising since the definition of capillary zones did not render their laboratory determination feasible.

Menisci developing on the surface of the sample result in an apparent cohesion of the soil. This effect of capillary pressure is made use of by BERNATZIK [1] to compute the value of h_c . In a silty clay sample bounded by free surfaces the menisci of the evaporating surface withdraw slowly, under the action of capillary pressure, towards the interior of the sample. The static pressure resulting in the same reduction of the void ratio as shrinkage may be computed for any given case, by relying upon oedometer experiments. Some authors [9] are of the opinion that this force is exactly equal to the capillary force to be determined, respectively, in case of a sample having free lateral surfaces, to the modified value thereof [18]. No corroboration of this theory has as yet become known to the author.

Methods relying on the measurement of *flow velocity* give the closest approximation of actual conditions, provided the test is arranged properly.

At the 3rd International Conference PELTIER [19] described four methods of the "Laboratoire Central des Ponts et Chaussées". The product kh , which is characteristic of the soil, can be determined by the first of these. The horizontal capillary test suggested by CASAGRANDE rests on similar principles, yet should be regarded as the more reliable one since *a*) it is guaranteed in this case that the progress remains proportionate to the square root of time (Eq. 9), which cannot be expected with a 27,5 cm high vertical sample — especially if the latter is of coarse-grained soil; *b*) it is not necessary to remove the sample for weighing, which may result in numerous errors; *c*) as demonstrated by experiments of LAMBE, the coefficient k remains constant for horizontal flow, which does not always apply to vertical flow (of Section 2b). Similar problems arise in connection with the *second* method as well. PELTIER himself pointed out that the application of the latter is much more delicate than that of the first. With the two remaining methods,

difficulties are again encountered in assuming, respectively determining correctly, the value of frictional resistance (k_r). This applies especially to the *fourth* method where — two layers being superimposed — the problem of saturation is even less cleared.

Conventional laboratory methods in use for determining the value of h_c entail thus, in our opinion, the following fundamental shortcomings: *a*) the values observed or computed are not identical with the height of the *full* rise, and often not even with that of the "zone of uniform saturation"; *b*) consequently, the result is unsuitable for describing capillary phenomena in the soil; *c*) methods relying on velocity measurement appear to be suitable for the (purpose, yet only in the lower zone, and only if the relations governing moisture distribution and flow velocity in this zone are taken into consideration during the designing of the experimental device.

2. Three methods have been developed for measuring *the value of h_{cc}* :

a) Experiments with samples placed into transparent *tubes*, or into metal cylinders; sometimes free-standing samples are used;

b) methods based on *surface drying* of the sample; and

c) on *syphon* action.

Samples of disturbed grain structure are mostly investigated by *the first method*.

Many authors report to have observed *in dry soils* a rising height and velocity lower than in wet ones, especially in fine-grained soils, because of the large amount of wetting work required for hydration (see *e. g.* 9). Considerable significance was further attributed by ZUNKER to the absence of interstitial moisture. Dried-out soils do not possess the original *adsorption complex*, which results in an additional discrepancy from actual conditions. The initial water content has a bearing also as far as saturation is concerned (Section 1c).

It is stated by ZUNKER that flow velocities are influenced by the *resistance of air* as well, so that height of the soil column above the wetted surface is also of significance. As expressed in his formula, the resistance is highest at the beginning of rising, however experimental data are not published. The statement made by ZIMMERMAN [28], according to which the height of the capillary rise is greater in tubes having a greater diameter (Fig. 12), is of interest. Reference is made by him also to experiments of WADSWORTH and SMITH (Soil Science, 22, 199, 1926) carried out with fine sandy silt. They observed in a tube having a cross-sectional area of 25 sq. inches after 263 days a capillary rise higher by 65 per cent than in the tube having a cross-sectional area of 1 sq. inch only. None of the authors succeeded in finding an explanation for this phenomenon.

The second method consists essentially of measuring the evaporation from the surface of samples which have different lengths, adopting as maxi-

mum rise the height at which a reduction in evaporation can be experienced (BRIGGS and LAPHAM, 29, p. 100).

Syphon experiments of VOGELER carried out using U-shaped tubes yield the height at which the water quantity conveyed by capillarity becomes almost zero.

A serious shortcoming of data published in the literature is that no control tests are reported. Researchers omit to publish data on the moisture content of various layers within the sample, and on the moisture gradient. It can mainly be attributed to these deficiencies that no satisfactory definition has up to this date been found for the upper boundary of the "open" capillary zone, *i. e.* for the full capillary rise (cf. Section 3a).

Significant advances have been achieved during the last years as regards the capillary properties of *cohesive soils*. As demonstrated by both laboratory and field experiments, the full capillary rise usually remains below 3 to 5 metres [21] in both silt and clay soils.

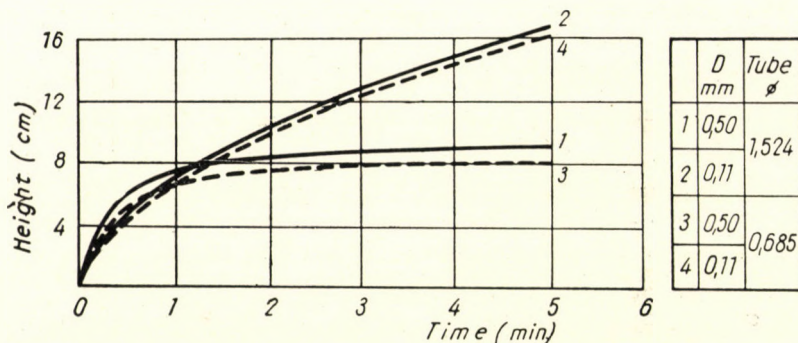


Fig. 12. Effect of diameter of test tube on rising velocity

3. KRISCHER [10] and ZIMMERMAN [28] designed ingenious devices for measuring the *moisture distribution*.

KRISCHER uses a container in which the water level is maintained constant by a float equipped with a needle valve. The quantity of absorbed water can be obtained from the calibrated feeding pipe; regular weighing of the sample yields the quantity of water retained in the sample, whereas the difference is the amount evaporated from the surface.

The essential arrangement of ZIMMERMAN'S "voidometer" can be described as follows: the test tube of glass is connected to a burette which, in turn, is filled with air-entrained fuel oil. Air displaced by capillary rising water accumulates in the burette above the oil. The quantity of water absorbed as well as the moisture content in any arbitrary section of the sample can be computed from simultaneous readings of the height attained and of air escaped into the burette.

The periodical method of measurement proposed by LAMBE and the one described in Section 2a can also be classified into this group.

5. Examples of results applied

It is intended to single out a few theoretical and practical problems, where the information gathered about the capillary properties of the soil can be utilized, respectively, where the statements made in this paper indicate the necessity of certain modifications.

a) Every formula and theory of *hydraulics* should be revised, where, regardless of the position of the point considered, the capillary lifting force is characterized by h_c , respectively, where flow velocities are to be computed with Eq. (3).

b) The permeability coefficient is constant up to a height of h_{cn} immediately above the free water surface only, and is even here not necessarily in agreement with the value determined at the laboratory, since the degree of saturation (S_e) of this zone is not necessarily equal to unity. Above the height h_{cn} , proceeding upward from the water surface, the coefficient k of the soil decreases rapidly, and this involves the necessity of considering increased frictional resistance should during seepage. Some evidence points to the fact (Fig. 3) that complete and constant saturation does not exist even below the ground-water table. All this leads to the conclusion that *permeability varies with depth even in homogeneous soils*.

c) The *Freiberg criterion* [9] of frost danger should also be modified. The *water volume supplied by capillarity* can be computed by Eq. (7) in the zone of identical saturation only. Above this height the actual velocity determined by laboratory experiments must be considered, with allowance being made in both cases to the reduced conveying cross section ($r \neq 1$).

d) A similar approach should be used in all other cases as well, for computing the supplied *water quantity*. As established in Section 2a, computations based on the concept of an "ideal moisture distribution" are likely to give a fair representation of actual conditions, this distribution being significant for extended supply. This principle can *e. g.* be applied for determining the water quantity that can be absorbed by the wall of a building from the soil.

e) The value of h_{cn} plays an important role also in *soil explorations*. As is well-known, *geolectric* measurements are suitable for determining the location of the groundwater table. Evidently, the approximating value of h_{cn} should be available for the soil, since the change in resistance should be expected at, or slightly above, this level. A change in *sounding resistance* also occurs as soon as the "saturated" layer is reached [26].

f) These experiments have shown that the disturbed structure of granular soils can be *reproduced*. This is indicated also by the series of experi-

ments in which the density of the samples varies. In spite of this, consistent relationships could be established between the void ratio and one of the physical properties, or identical results could be found for these properties if samples of identical density were examined. The conclusion lies therefore close at hand that in granular soils the structure of the soil, the dimensions, shape, and relation to each other of the capillary spaces are uniquely determined by the grain-size distribution curve. From this it may be assumed that the deformations caused by a given unit load are identical in both disturbed and undisturbed samples, provided they are of an identical density. It follows that settlement tests can be carried out with disturbed samples as well.

g) Experimental evidence has revealed the process of capillary saturation to be related to the relative moisture content rather than to the absolute water content. The concept of "capillary water capacity" should be modified accordingly, inasmuch as this depends also on density. Since relative moisture within a zone of uniform saturation is practically independent of soil density, the water capacity (w_{k2}) pertaining to e_2 can be computed from the water capacity (w_{k1}) pertaining to void ratio e_1 as

$$w_{k2} = w_{k1} \frac{e_2}{e_1} \quad (8)$$

Acknowledgement

The author is indebted to DR. ÁRPÁD KÉZDI Associate Professor, Department Head at the Technical University for Building and Communication, who made the Laboratory for Soil Mechanics available for the experiments and gave every possible assistance to my work.

REFERENCES

1. BERNATZIK, W.: Baugrund und Physik. SDV, Zürich, 1947.
2. BUSCH, K. F.: Die Kapillarität des Bodens. Wasserwirtschaft-Wassertechnik. 1956. No. 5.
3. CRONEY, D.—COLEMAN, J. D.: Soil Moisture Suction Properties and their Bearing on the Moisture Distribution in Soils. Proceedings of the 3rd Int. Conf. on Soil Mechanics. Zürich, 1953 Vol. I, pp. 13—18.
4. GOLDSTEIN, M. N.: Mechanical Properties of Soil. (In Russian.) Moscow, 1952.
5. JÁKY, J. DR.: Az altalaj fagyveszélyessége és térfogatváltozása. Beszámoló a II. magyar útügyi kongresszusról. (The Danger of Freezing and Deformation in the Subsoil. Report on the 2nd Hungarian Congress for Highways.) Published by the „Vállalkozók Lapja”, Budapest, 1936.
6. JÁKY, J. DR.: Kapilláris emelkedés vizsgálata. (Investigation on the Capillary Rise.) Manuscript.
7. KÉZDI, Á.: Talajmechanika I. (Soil Mechanics, Vol. I.) Tankönyvkiadó, Budapest 1952.
8. KOŽENY, J.: Über den kapillaren Aufstieg des Wassers im Boden. Der Kulturtechniker 27 (1924) p. 11—16.
9. KÖGLER, F.—SCHEIDIG, A.—LEUSSINK, H.: Beiträge zur Frostfrage im Strassenbau. Bodenmechanik und neuzeitlicher Strassenbau. Berlin 1936, p. 32—41.
10. KRISCHER, O.: Kapillarwasserbewegung und Wasserdampfdiffusion, Zeitschrift des VDI, 82 (1938) p. 373—378.

11. KRÜGER, E.: Über die Verteilung des Wassers im Boden bei Aufstieg (Kapillarität) und Abstieg (Versickerung). *Der Kulturtechniker* 28 (1925) p. 179—186.
12. KRYNINE, D. P.: *Soil Mechanics*. Mc Graw-Hill Book Comp. New York 1941.
13. LAMBE, T. W.: *Capillary Phenomena in Cohesionless Soils*. *Proceedings Amer. Soc. of Civil Eng.*, 1950, No. 4.
14. LAMBE, T. W.: *Soil Testing for Engineers*. J. Wiley, New York 1951.
15. MADGWICK, E.: A Theory of the Absorption and Transmission of Water by Porous Bodies. *Philosophical Magazin*, VII. Vol. 13 (1932) pp. 632—641.
16. MADGWICK, E.: The Determination of the Absorption Constants of a Homogeneous Specimen. *Philosophical Magazin*, VII. Vol. 13 (1932) pp. 641—650.
17. MANEGOLD, E.: Über Kapillarsysteme zur Systematik der Hohraumsysteme. *Kolloid-Zeitschrift* 80 (1937), Vol. 3, pp. 253—265.
18. ORNATSKY, N. V.: *Soil Mechanics* (in Russian). Moscow 1950.
19. PELTIER, R.: Mesure des caractéristiques capillaires des sols au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées. *Proceedings of the 3rd Int. Conf. on Soil Mechanics*. Zürich (1953) Vol. I, pp. 173—177.
20. RÉTHÁTI, L.: Kapilláris emelkedés törvényszerűségei kétrétegű talajban. (Capillary Rise in Double-Layer Soils.) *Mélyépitéstudományi Szemle* 1953, Nos. 8—9.
21. RODE, A. A.: *Soil Moisture* (in Russian). Publishing House of the Academy, Moscow 1952.
22. SCHULTZE, K.: Kapillarität und Benetzung. *Kolloid-Zeitschrift* 37 (1925), pp. 10—17. and 40 (1926), pp. 12—16.
23. SERGEEV, E. M.: *Soil Science* (in Russian). Moscow 1952.
24. TAYLOR, D. W.: *Fundamentals of Soil Mechanics*. J. Wiley, New York 1948.
25. TERZAGHI, K.: *Theoretical Soil Mechanics*. J. Wiley, New York 1943.
26. TERZAGHI, K.—PECK, R. B.: *Soil Mechanics in Engineering Practice*. J. Wiley, New York 1948.
27. WEILAND, H.: Die Vorgänge im Kapillarwasser des Bodens bei Veränderung der Grundwasserspiegelhöhenlage. *Der Kulturtechniker* 36 (1933) pp. 147—157.
28. ZIMMERMAN, B. G.: Determining entrapped air in capillary soils. *Engineering News-Record* 117 (1936) p. 186—187.
29. ZUNKER, F.: *Das Verhalten des Bodens zum Wasser*, *Handbuch der Bodenlehre*, Vol. VI. J. Springer, Berlin 1930.

SUMMARY

A zone of uniform saturation (h_{cn}) develops above the free water surface, the relative moisture content (S_e) of which may, depending upon the gradation of the soil, equal unity, yet may as well be significantly lower. The capillary water capacity (water content) decreases with increasing soil density, while S_e remains practically constant. Preliminary wetting tends to impair conditions for saturation of the soil; beyond a certain initial relative moisture content (if $S > S_h$) there is no additional capillary water absorption.

Flow velocities within this zone may be described by the DARCY law; the lifting force (h_c , or h_{cn}) and frictional resistance (k_r) are constant. As soon as the hydraulic gradient attains a lower limit value, water conveyance is continued by finer pores, and this role is transferred to gradually decreasing passages. The relative moisture content diminishes accordingly, while frictional resistance increases. The combination of active (H) and passive (z and k_r) forces follows in this zone of reducing saturation a relationship which can be described by the parabola of JÁKY.

The physical conditions of flow being thus closely related to the relative moisture content, *moisture distribution* should also be determined in each laboratory test. The height of the zone of uniform saturation (h_{cn}) is thus obtained. This is much more characteristic of the soil than the concept of a "closed range" which has no particular practical significance and cannot be determined experimentally.

Primarily characteristic of a given soil is the "ideal balanced distribution" which defines for every height above the water surface corresponding values of moisture content and velocity. The water quantity that can be delivered by capillarity for extended periods may be computed herefrom.

DIE KAPILLARITÄT DES BODENS

L. RÉTHÁTI

ZUSAMMENFASSUNG

Eine gleichmäßig gesättigte Zone (h_{cn}) entsteht über dem freien Wasserspiegel. Die relative Feuchtigkeit (S_e) dieser Zone kann, je nach der Körnung des Bodens den Wert eins, aber auch bedeutend niedrigere Werte erreichen. Mit zunehmender Verdichtung nimmt die kapillare Wasserkapazität (Wassergehalt) des Bodens ab, während S_e praktisch unverändert bleibt. Bei vorangehender Befeuchtung verschlimmern sich die Sättigungsmöglichkeiten des Bodens, und über einem gewissen Anfangswert der relativen Feuchtigkeit (wenn $S > S_h$) findet keine nachträgliche kapillare Wasseraufnahme mehr statt.

In diesem Bereich kann die Strömungsgeschwindigkeit mittels des Gesetzes von DARCY beschrieben werden; die »Hebekraft« (h_c oder h_{cn}) wie auch der Reibungswiderstand (k_r) sind konstant. Sobald der hydraulische Gradient einen unteren Grenzwert erreicht, wird die Wasserförderung von feineren Poren übernommen, wobei der Durchmesser der wasserführenden Gänge immer kleiner wird. Die relative Feuchtigkeit verringert sich dementsprechend, während der Reibungswiderstand zunimmt. Die Kombination der aktiven (H) und passiven (z und k_r) Kräfte folgen in dieser Zone abnehmender Sättigung einer Relation, die durch die JÁKYSche Parabel beschrieben werden kann.

Da die physikalischen Strömungsgesetze so eng mit der relativen Feuchtigkeit verbunden sind, muß während der Laboratoriumsversuche stets die *Feuchtigkeitsverteilung* mitbestimmt werden. So ergibt sich die Höhe (h_{cn}) des gleichmäßig gesättigten Bereiches, die viel mehr kennzeichnend für den Boden als der Begriff des »geschlossenen Bereiches« ist, der von wenig praktischer Bedeutung und außerdem versuchsstechnisch nicht zu bestimmen ist.

Am meisten kennzeichnend für einen gegebenen Boden ist die *ideale Gleichgewichtsverteilung*, wodurch bestimmte Wassergehalts- und Geschwindigkeitswerte zu jeder Höhe über dem Grundwasserspiegel zugeordnet werden; daraus kann die dauernd lieferbare kapillare Wassermenge berechnet werden.

LES CARACTÉRISTIQUES CAPILLAIRES DU SOL

L. RÉTHÁTI

RÉSUMÉ

Au-dessus de la surface d'eau libre, il se produit un domaine de saturation uniforme (h_{cn}), dont l'humidité relative (S_e) peut atteindre l'unité, mais aussi des valeurs considérablement plus faibles, suivant la graduation du sol. En compactant le sol, la capacité d'eau capillaire (la teneur en eau) diminue, tandis que S_e reste pratiquement invariable. En humidifiant préalablement le sol, les conditions de saturation s'empirent, et au-dessus d'une valeur initiale d'humidité relative ($S > S_h$), la réception supplémentaire d'eau capillaire n'aura plus lieu.

Dans cette zone, la vitesse d'écoulement est décrite par la loi de Darcy; la force levante (h_c ou h_{cn}) et la résistance de frottement (k_r) sont constantes. Dès que le gradient hydraulique atteint une valeur limite inférieure, le transport de l'eau s'effectue par les pores de plus en plus fines. Conformément, l'humidité relative diminue, et la résistance de frottement augmente. Les forces actives (H) et passives (z et k_r) varient selon une combinaison telle que la montée capillaire peut être décrite dans ce domaine — à saturation décroissante — au moyen de la parabole de JÁKY.

Les lois physiques de l'écoulement ayant une relation aussi étroite avec l'humidité relative, il faut toujours déterminer la répartition de l'humidité au cours des expériences de laboratoire. On reçoit ainsi la hauteur (h_{cn}) de la zone à saturation uniforme, laquelle est bien plus caractéristique pour le sol que la notion du «domaine clos», qui n'a guère d'importance pratique et ne peut pas être déterminé par des expériences.

La «répartition d'équilibre idéale», qui est la plus caractéristique pour un sol donné, adjoit à chaque hauteur au-dessus de la surface d'eau, des valeurs bien déterminées de la teneur en eau et de la vitesse, d'où se calcule le débit capillaire permanent.

КАПИЛЛЯРНЫЕ СВОЙСТВА ГРУНТОВ

Л. РЭТХАТИ

РЕЗЮМЕ

Над свободным горизонтом воды создается область с равномерной насыщенностью (h_{cn}), относительная влажность (S_e) которой в зависимости от градуированности грунта может быть равна единице, а также меньше ее. С уплотнением грунта содержание капиллярной воды падает, однако практически можно считать неизменным. При предварительном промачивании грунта ухудшаются условия насыщаемости, и после определенного начального значения начальной относительной влажности (если $S > S_h$) не имеет места дополнительного поглощения капиллярной воды. В этой зоне скорость движения потока можно описать формулой Дарси; «подъемная сила» (h_c или h_{cn}) и сопротивление трению (k_r) являются постоянными. Когда гидравлический градиент доходит до некоторой нижней граничной величины, передвижение воды осуществляется мелкими порами, передавая руководящую роль ходам со все уменьшающимся диаметром. Соответственно этому относительная влажность падает, сопротивление трению возрастает. Активные (H) и пассивные (z и k_r) силы изменяются по такой комбинации, что капиллярный подъем в этой области с падающей влажностью можно описать параболой $Y_{ки}$.

Поскольку физические законы движения потока находятся в тесной связи с относительной влажностью, необходимо определить в ходе лабораторных исследований *распределение влажности*. Таким образом получим высоту области с равномерной насыщенностью (h_{cn}), которая характернее для грунта, чем понятие т. н. «закрытой зоны», которая последняя не имеет особого практического значения, и нельзя ее определить исследованием.

Для данного грунта самым характерным является «идеальное равномерное распределение», которое относит определенное значение скорости и содержания воды к каждому уровню, имеющемуся над горизонтом воды; из этого можно подсчитать содержание капиллярной воды, подаваемой продолжительное время.

A FAST RESPONSE MAGNETIC AMPLIFIER

I. NAGY

CAND. OF TECH. SC.

RESEARCH GROUP FOR AUTOMATICS OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received May 28, 1959]

Introduction

The magnetic amplifier circuit published in the literature of the subject by SCORGIE, GEYGER and others and discussed in detail below, has been widely used especially in automatic controls and to measure small DC voltages. The circuit has been developed from the self-saturating magnetic amplifier with DC input and output (Fig. 1) by having rigid negative feedback applied to the input circuit from the whole or part of the output signal (Fig. 2). This circuit can, with certain additions, be used to construct a magnetic amplifier with theoretically infinite power gain and input impedance, operating within one period. These properties place it among the most developed and most valuable magnetic amplifier circuits.

In papers published hitherto, this circuit has been discussed on a qualitative basis and quantitative consideration has been based on figures obtained by evaluating experimentally-determined characteristic curves. A characteristic feature of these investigations was an approach based on mean values and the obscurity of processes taking place in the amplifier within the half period. In order to obtain a better understanding and to facilitate calculation and design, a detailed analysis of the operation of the circuit was undertaken. This led to quantitative relations with whose help, on the one hand, the effect of the various parameters of the circuit on the operation of the amplifier could be elucidated and on the other, the amplifier circuit could be numerically designed since the measured and computed values show good agreement.

Since the literature only deals with processes taking place within the half period for the cases of ordinary self-saturating magnetic amplifiers and not for those with negative feedback from the output signal, and because the changes in time of fluxes and of the control current are considerably different in the latter case, a detailed examination of the operation of the feedback amplifier was first undertaken.

As a result of this examination a clearer picture of the operating mechanism of the amplifier may be obtained than that afforded by the mean value approach used in the literature and, moreover, it became possible quantitatively to determine the static characteristics of the circuits and to elucidate dynamic relations.

The equations for the static characteristics, *i. e.* the expressions for load current, control voltage and input power as functions of the control current, differ considerably from those familiar for self-saturating magnetic amplifiers in general. As final conclusions of the discussion of the transient process in the amplifier, the expressions for the transfer function, the response and the

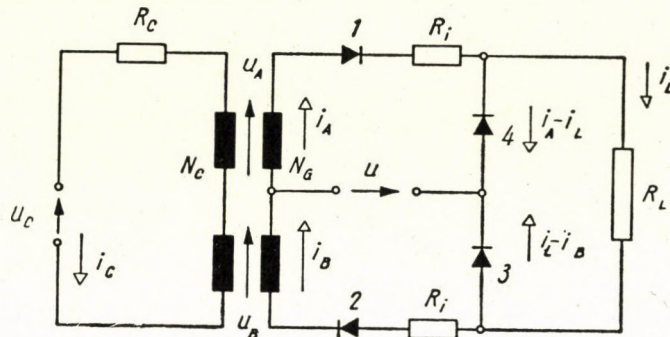


Fig. 1

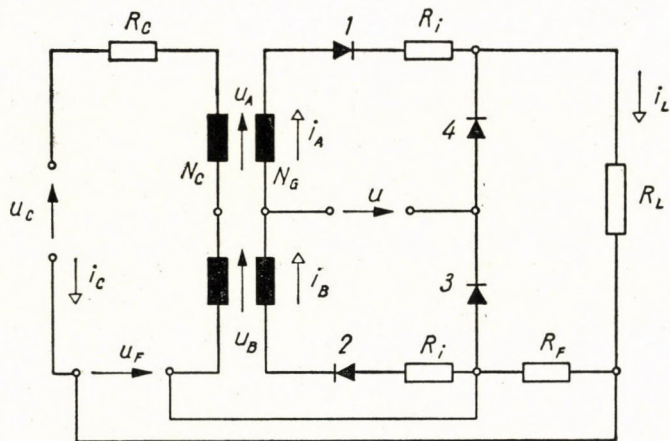


Fig. 2

time constant are found. A relation was also obtained for the criterion of operation within one period.

Considerations relative to the figure of merit showed that it was larger if negative voltage feedback was applied than in the case of ordinary self-saturating magnetic amplifiers and increased with increases in the feedback gain.

It has been known that the magnetic amplifier circuit concerned had a large input impedance and made it possible — according to the type of feedback used — to construct an amplifier with a large or small output impedance,

but the expression to determine these impedances was not known. As a result of the investigation now carried out, simple, and comparatively precise relations were obtained to calculate input and output impedances.

A construction and examination of the block diagram of the amplifier led to the very valuable conclusion that if the circuit of the self-saturated magnetic amplifier were supplemented by

a) positive feedback taken from the output voltage or current, of a magnitude which may be determined from the block diagram,

b) constant DC bias,

c) a small DC voltage to compensate the voltage drop on the feedback resistance caused by the minimum load current,

then it could theoretically be achieved that the control current should be zero over the entire range, without thereby changing the dynamic behaviour of the amplifier.

Finally, there are experimental results to substantiate the results obtained and to show that they can be used for numerical calculations.

I. Symbols

The instantaneous values of currents and voltages are designated by small letters, the constant, mean, r. m. s. and peak values by capitals. In the case of r. m. s. values, the letter r , in that of peak values the letter p have been used as suffixes. The Laplace transformation

$$L [F(t)] = f(p) = \int_0^{\infty} F(t) e^{-pt} dt$$

has been used in this paper. Letters with dashes symbolise the values of quantities reduced to the gate winding.

A	Gain of the self-saturating magnetic amplifier,
A^*	Gain of the self-saturating magnetic amplifier with feedback,
A_{Fe}	Cross section of magnetic material,
A_G	Winding area occupied by gate winding,
A_F	Gain of rigid feedback,
B	Induction,
f	Frequency,
H_{co}	Coercitive field strength,
I_{co}	Coercitive current (with respect to the gate winding),
I_L	Load current,
I_C	Control current,
J	Figure of merit,
K_p	Power gain,
l_G	Mean length of turn on gate winding,
l_{Fe}	Mean length of core,
N_G	Number of turns on gate winding,
N_C	Number of turns on control winding,
$s. m. a.$	Self-saturating magnetic amplifier,
P_o	Output power,
P_i	Input power,
p	Differential operator,
R_G	Resistance of gate winding,
R_C	Resistance of control winding,
t	Time,
T_e	Equivalent time constant,
U_L	Voltage across load,

U_G	Control voltage,
U_F	Feedback voltage,
$Y(p)$	Transfer function of s. m. a. without feedback,
Φ	Flux,
α	Firing angle,
ω	Angular frequency,
τ	Half the period of the supply frequency.

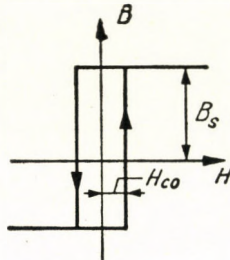


Fig. 3

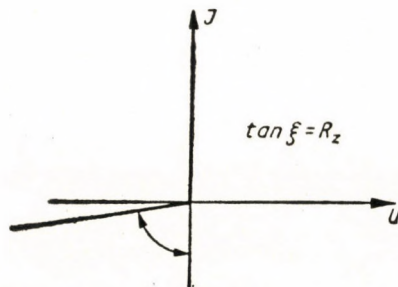


Fig. 4

II. Assumptions made in the course of the investigation

The following are the assumptions made in the course of the investigation :

a) The magnetic amplifier is electrically and magnetically symmetrical in construction. The dynamic hysteresis loop of the magnetic material used is rectangular (Fig. 3).

b) The dynamic characteristic of the rectifier is as shown in Fig. 4. The rectifier is treated in the equivalent circuit diagram as a resistance with zero value in the forward direction and constant value in the reverse direction.

c) The load is a pure ohmic.

d) The supply voltage is constant and sinusoidal.

e) Leakage flux from both the control and gate windings is neglected.

f) The control voltage is a positive DC voltage. We shall be limited to a positive control voltage in the sense of the direction of measurement of Fig. 1,

because in the case of rigid negative feedback from the output voltage U_c is always positive within the control range.

g) Discussion can be considerably simplified if it is confined to fast response magnetic amplifiers, *i. e.* those with "strong" feedback from the output voltage. For if it be presumed that the control voltage with feedback increases by at least one order of magnitude compared to that without feedback, then (since the order of magnitude of the control current belonging to a particular firing angle does not change) the DC voltages in the control circuit (Fig. 2) are approximately related by

$$U_c = I_c R_c + U_F \cong U_F. \quad (2,1)$$

It is presumed, moreover, that even the largest value of $I_c R_c$ is negligible compared to the maximum of the mean value ($U_{A, \max}$) of the induced AC voltage, in the control circuit.

The assumption that

$$R_c = 0, \quad (2,2)$$

which involves a considerable simplification of the investigation, may then be made, and is justified provided that the inequalities

$$U_c \gg I_c R_c \quad \text{and} \quad U_{A, \max} \gg I'_c R'_c \quad (2,3)$$

are fulfilled.

Equation (2,2) means that the magnetic amplifier is considered with ideal free even harmonic currents. Further assumptions are mentioned where they occur.

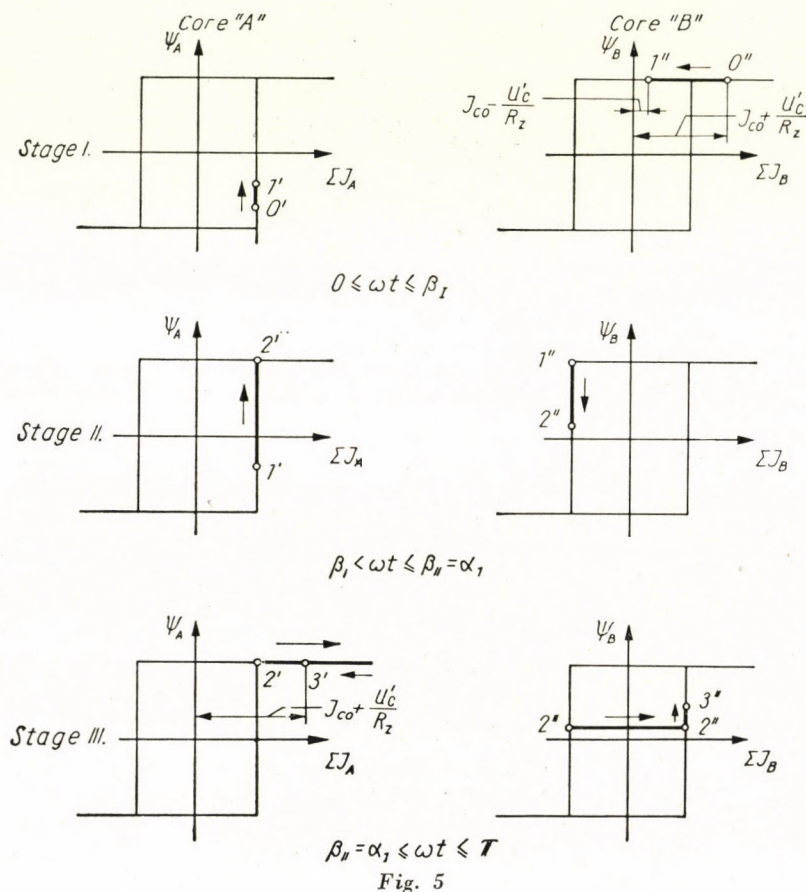
III. The self-saturating magnetic amplifier with free even harmonic currents

A) Principle of operation

The operation of the amplifier cannot be understood clearly without a knowledge of the processes occurring within the period, *i. e.* of the changes with time of the characteristic quantities. These must therefore first be determined. Since, if (2,2) is fulfilled, even the operation of the ordinary s. m. a. without feedback from the output signal is considerably different to that generally familiar for this amplifier [9], the first step must be to examine the behaviour of the amplifier without feedback (Fig. 1).

The examination of the operation of the s. m. a. during the half period may be undertaken in three stages, consecutive in time. Since both the rectifier and the core may within each stage — if the boundaries of the stages are suitably chosen — have linear elements substituted for them, the values of the

dependent variables and the validity ranges of the stages may be determined by elementary methods for each stage. A detailed mathematical discussion is presented in Appendix 1. The method used in Appendix 1 was that assumptions were made for the magnetic state of both the cores, and the functioning of all four rectifiers, within each stage. On the basis of these assumptions the equivalent circuit diagram of the magnetic amplifier, valid for each particular



stage, was constructed, all the unknowns were hence found, and finally the correctness of the assumptions was checked and the range of their validity determined.

On the basis of the Appendix, the movement of the point characterizing the magnetic state of the core was in Fig. 5 shown by stages on the dynamic hysteresis loops of both cores "A" and "B". The figure affords a good view of the operation of the magnetic amplifier. It shows that at the end of the half period considered, the flux of core "B" is nearer positive saturation than was

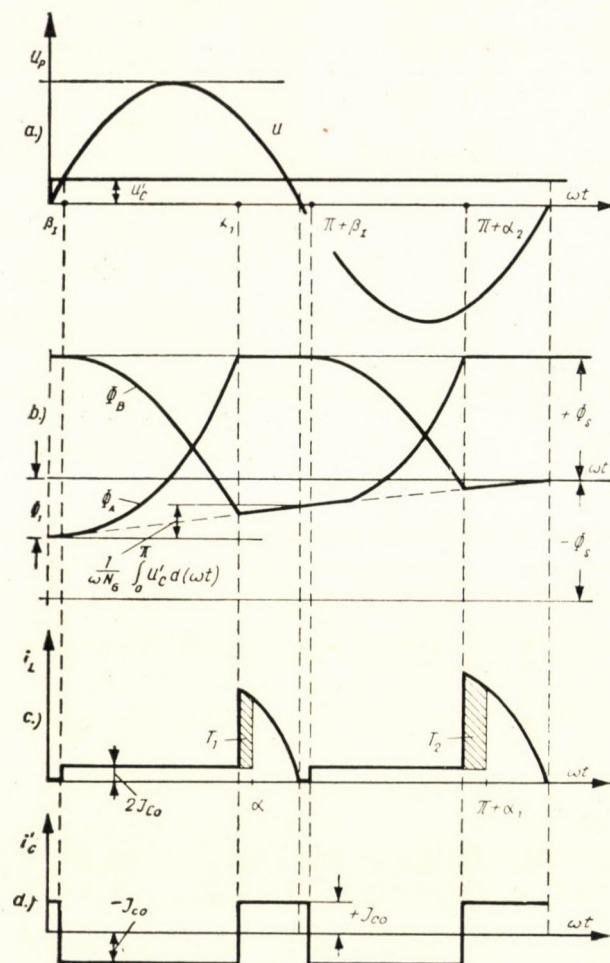


Fig. 6

that of core "A" at the beginning of the half period, or in other words, that the absolute value of the change of flux in "A" in a half period is larger than in core "B" (Fig. 6).

The change in flux in core "A" during a half period is, according to Fig. 5

$$\Delta \Phi_A = \frac{1}{\omega N_G} \left[\int_0^{\beta_I} u_{AI} d(\omega t) + \int_{\beta_I}^{\alpha_1} u_{AII} d(\omega t) \right] \quad (3,1)$$

and that in core "B"

$$-\Delta \Phi_B = \frac{1}{\omega N_G} \left[\int_{\beta_I}^{\alpha_1} u_{BII} d(\omega t) + \int_{\alpha_1}^{\pi} u_{BIII} d(\omega t) \right] \quad (3,2)$$

where u_{AI} and u_{AII} are the voltages on core "A" in stages I and II, and u_{BII} and u_{BIII} are those on "B" in stages II and III.

Substituting the equations (F,5), (F,11), (F,12) and (F,24) deduced in Appendix 1 in (3,1) and (3,2),

$$\Delta \Phi_A = \frac{1}{\omega N_G} \left\{ \int_{\alpha_1}^{\beta_1} U'_C d(\omega t) + \int_{\beta_1}^{\alpha_1} [u - 2 I_{c0} (R_L + R_i)] d(\omega t) \right\} \quad (3,3)$$

and

$$- \Delta \Phi_B = \frac{1}{\omega N_G} \left\{ \int_{\beta_1}^{\alpha_1} [-u + U'_C + 2 I_{c0} (R_L + R_i)] d(\omega t) + \int_{\alpha_1}^{\pi} U'_C d(\omega t) \right\} \quad (3,4)$$

In the half period subsequent to that examined, the flux of core "B" will have to change by

$$\Delta \Phi_A - \Delta \Phi_B = \frac{1}{\omega N_G} \int_0^{\pi} U'_C d(\omega t) \quad (3,5)$$

less flux to attain positive saturation than the flux of core "A" had to change in the first half period. It also follows from equation (3,5) that the output voltage is always changing with time, or, what amounts to the same thing, that the firing angle is different for each half period. The change in the mean value of the voltage across the load in the first half period after the control voltage is switched on is

$$\begin{aligned} \Delta U_{L1} &= \frac{R_L}{R_i + R_L} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha} [u - 2 I_{c0} (R_i + R_L)] d(\omega t) = \\ &= \frac{R_L}{R_i + R_L} \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_1} [U'_C - u + 2 I_{c0} (R_i + R_L)] d(\omega t) \end{aligned} \quad (3,6)$$

and for each subsequent half period, e. g. the n -th,

$$\Delta U_{Ln} = \frac{R_L}{R_i + R_L} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n-1}} [u - 2 I_{c0} (R_i + R_L)] d(\omega t) = \frac{R_L}{R_i + R_L} U'_C \quad (3,7)$$

where α is the firing angle in the half period previous to switching on the control voltage,

α_n is the firing angle in the n -th half period after switching on the control voltage.

The relations (3,6) and (3,7) are deduced in Appendix 2. The change in output voltage is, of course, — apart from coercitive current — limited by the zero value and the maximum value of the supply voltage.

Fig. 6, based on Appendix 1, shows the changes with time of the fluxes (Fig. 6b), the load current (Fig. 6c) and the control current (Fig. 6d) for the case when at a time $t = 0$ a DC step voltage of U'_C is switched on the control circuit (Fig. 6a).

Different scales were chosen, for ease of representation, for the load current before and after the firing angle in Fig. 6c. The change in load current in the first and second half period with respect to its value in the previous half period is shown by the shaded areas.

B) Response and transfer function

As a rule, when using the amplifier it is not the change in time of the instantaneous value of the voltage across the load, but only that of its mean value that is interesting. The change in the latter due to a step change of U_C in the control voltage, *i. e.* the response, may be illustrated by curves 1 of either Fig. 7a, or 7b. In Figs. 7a and b the change of U'_L in the first half period was neglected. This can be done to a fair degree of approximation if U'_C is small, compared to the supply voltage. In the second and each subsequent half period the change in U_L will — according to (3,7) — be $\frac{R_L}{R_i + R_L} U'_C$. Thus the approach according to which Fig. 7a illustrates the change in U_L , is that the total voltage change throughout the half period appears across the load suddenly at the beginning of the half period, while Fig. 7b corresponds to the idea that the change in voltage across the load through the half period takes place at a constant rate, with no step.

If the time τ is negligibly small compared to the duration of the transient process, then according to the approach illustrated in Fig. 7b the response may be approximated by the straight line 2 in Fig. 7b.

That of the two approaches is the more advantageous to use, which in the case of feedback from the output voltage leads to the more-easily manipulated expressions.

While the response curve gives a good physical picture of the dynamic behaviour of the amplifier, a quantitative description is best given by the transfer function. Corresponding to the three response curves of Fig. 7, three transfer functions may be determined.

They may, for instance, be found by determining the Laplace transforms of U'_C and of the voltage across the load (i. e. $L[U'_C]$ and $L[U_L]$ for a step change U'_C in control voltage), and finding the quotient of the two. For a step change in control voltage

$$L[U'_C] = \frac{U'_C}{p} \tag{3,8}$$

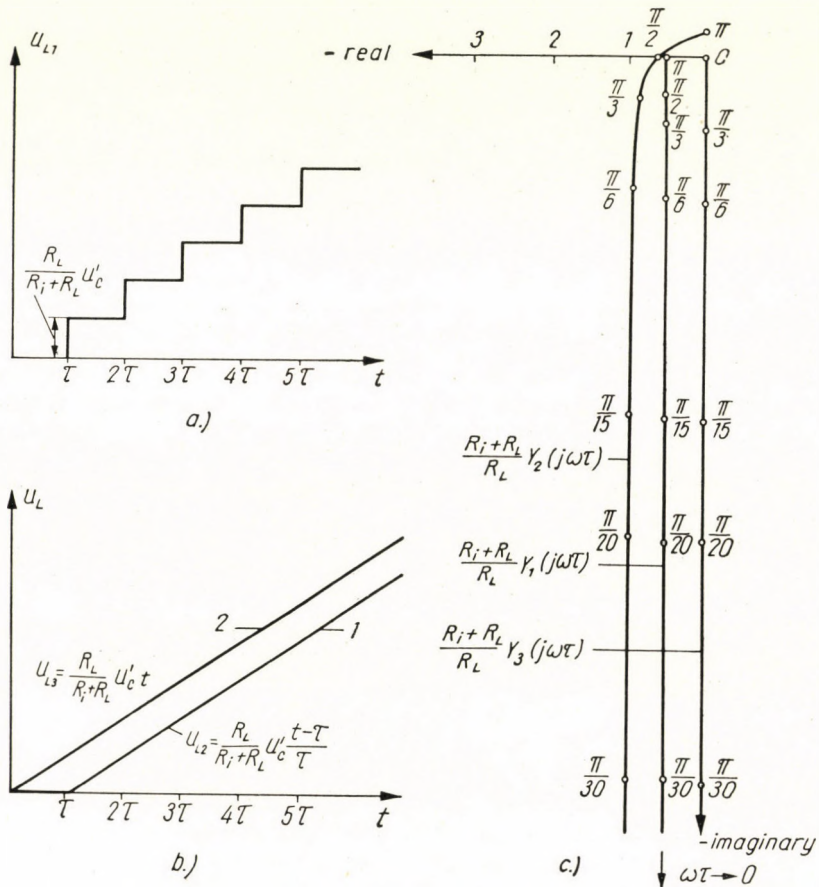


Fig. 7

Using the approach of Fig. 7a, U_L can be taken to be composed of step functions of magnitude $\frac{R_L}{R_i + R_L} U'_C$, following each other at intervals of τ . Correspondingly, since the Laplace transform of unit step shaped time functions with a time shift of $n\tau$ is $\frac{e^{-np\tau}}{p}$,

$$L[U_{L1}] = \left(\frac{e^{-p\tau}}{p} + \frac{e^{-2p\tau}}{p} + \frac{e^{-3p\tau}}{p} + \dots \right) \frac{R_L}{R_i + R_L} U'_C$$

Summing the infinite geometrical series,

$$L[U_{L1}] = \frac{R_L}{R_i + R_L} \frac{e^{-p\tau}}{1 - e^{-p\tau}} \frac{U'_C}{p} \quad (3,9)$$

is obtained.

For the approach of Fig. 7b, the Laplace transform of U_{L2} and U_{L3} is

$$L[U_{L2}] = \frac{R_L}{R_i + R_L} \frac{e^{-p\tau}}{p\tau} \frac{U'_C}{p} \quad (3,9a)$$

and

$$L[U_{L3}] = \frac{R_L}{R_i + R_L} \frac{U'_C}{\tau p^2} \quad (3,9b)$$

on the basis of the equations (3,8) and (3,9) the appropriate transfer functions are:

$$Y_1(p) = \frac{L[U_{L1}]}{L[U'_C]} = \frac{R_L}{R_i + R_L} \frac{e^{-p\tau}}{1 - e^{-p\tau}} \quad (3,11)$$

$$Y_2(p) = \frac{L[U_{L2}]}{L[U'_C]} = \frac{R_L}{R_i + R_L} \frac{e^{-p\tau}}{p\tau} \quad (3,11a)$$

and

$$Y_3(p) = \frac{L[U_{L3}]}{L[U'_C]} = \frac{R_L}{R_i + R_L} \frac{1}{p\tau} \quad (3,11b)$$

If the first two terms of the series around $p = 0$ are substituted for $e^{-p\tau}$ in the numerator of (3,11) then (3,11a) is obtained. For small values of $p\tau$, i. e. large ones of t/τ ,

$$Y_1(p) \cong Y_2(p), \quad (3,12)$$

if $|p\tau| \ll 1$.

The fulfillment of (3,12) may be well seen in Fig. 7c, where the NYQUIST diagrams have been drawn on the basis of equations (3,11).

The above solutions show that the s. m. a. may, if the criteria of (2,2) and (2,3) are fulfilled, be regarded as an integrating device.

The effect of U'_C is that the output voltage changes at a constant rate with time, until it reaches its limiting value. If, however, after the transient process has been started, U'_C is again reduced to zero before the output voltage has attained its limiting value, the change ceases. The condition for a steady state — here, as with all integrating devices — is that the input signal should be zero.

If, therefore, rigid negative feedback is applied from the output signal, the output voltage changes until the feedback voltage U'_F becomes equal to U'_C .

IV. The steady state operation of a self-saturating magnetic amplifier with feedback from the output signal

The above considerations permit the relatively simple determination of the changes with time of the characteristic quantities of a self-saturating magnetic amplifier with negative feedback from the output signal (Fig. 2), for the only difference to the preceding case is in stage III after the firing angle.

Previously to the firing angle, a maximum of twice the coercitive current flows through the load resistance. The voltage drop caused by this current across the resistance R_F is negligible compared to the control voltage, since the current through the load after the firing angle may be larger than that before firing, by several orders of magnitude.

The presence of feedback does not, therefore, influence the operation of the amplifier before the firing angle. What has been said in discussing the operation of the amplifier without feedback, and the relations deduced there, remain valid in unchanged form right up to the firing angle.

The movements of the points characterizing the magnetic states of the cores during the half period, have been inscribed in stages on the dynamic hysteresis loops of both cores "A" and "B", for the case of an amplifier with negative feedback from the output signal, in Fig. 8. In accordance with the preceding considerations, the diagrams for stages I and II in the figure, agree with those of stages I and II in Fig. 5.

After firing, in stage III, there are two possibilities:

IIIa

$$u'_F > U'_C \quad (4,1)$$

IIIb

$$u'_F < U'_C, \quad (4,2)$$

where

$$u'_F = \frac{R_F}{R_F + R_i + R_L} \frac{N_G}{N_C} u \quad (4,3)$$

is the voltage across the resistance R_F after firing, multiplied by $\frac{N_G}{N_C}$.

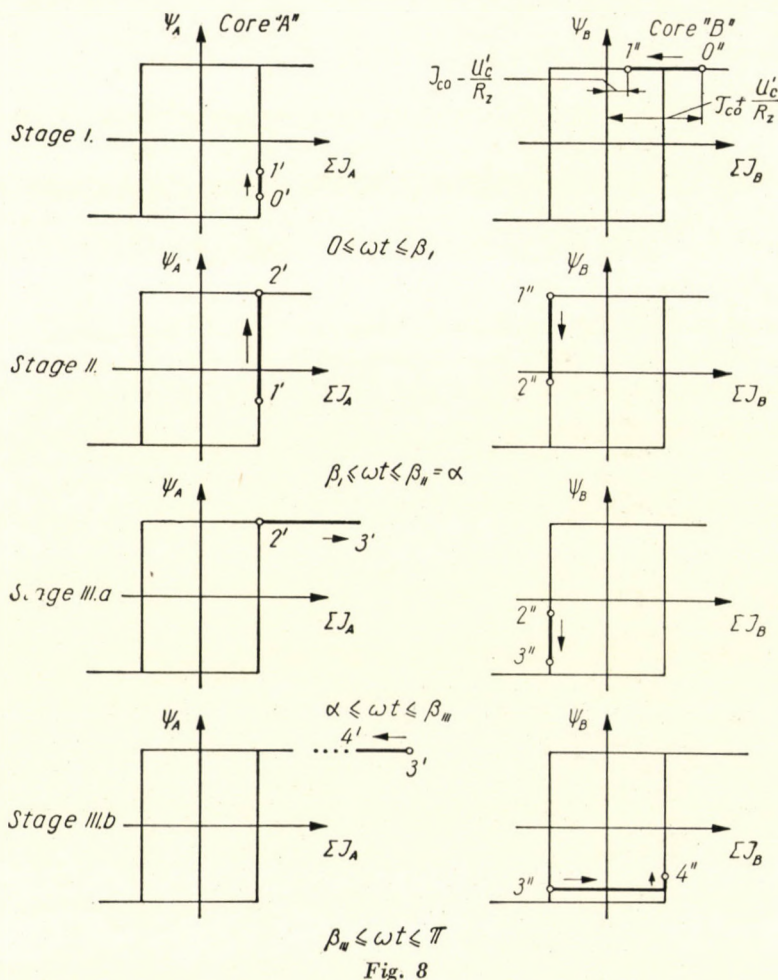
IIIa. The flux through core "A" remains unchanged after firing, while that in core "B" will — because of (4,1) — change in a negative direction (Fig. 8). This state continues right up to the angle β_{III} , which may be determined from the equation

$$u'_F = \frac{R_F}{R_F + R_i + R_L} \frac{N_G}{N_C} U_P \sin \beta_{III} = U'_C. \quad (4,4)$$

IIIb From angle β_{III} onwards the flux through core "B" increases positively right up to the end of the half period, while that in core "A" of course remains unchanged (Fig. 8).

The values of the variables for stage III if feedback is applied are contained in Appendix 3.

On the basis of the above considerations and of Appendix 3, the changes with time of the fluxes (Fig. 9b), the load current (Fig. 9c), and the control current (Fig. 9d) for feedback — in the steady state — have been constructed



in Fig. 9. For convenience of representation different scales have been used in Fig. 9c for the load currents before and after the firing angle. Compared to the case discussed in Chap. III, considerable differences can be observed in the time functions of the fluxes and of the control current (cf. Figs. 6 and 9). A steady state is also possible if $U_C \neq 0$. The flux change in core "A" in the half period is then of the same magnitude but opposite sense to that in core "B" (Fig. 9b).

The change in flux through core "A" during a half period is, according to (F,5) and (F,11), proportional to a voltage area of

$$\int_0^\pi u_A d(\omega t) = \int_0^{\beta_I} U'_C d(\omega t) + \int_{\beta_I}^{\alpha} [u - 2 I_{c0} (R_F + R_i + R_L)] d(\omega t) \quad (4,5)$$

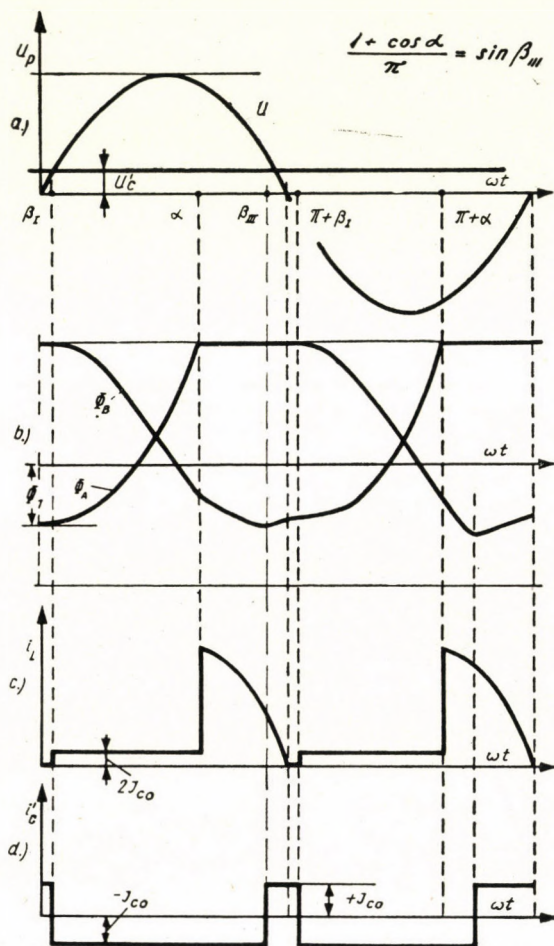


Fig. 9

while that in core "B" is, according to (F,12) and (F,39), proportional to a voltage area of

$$\int_0^\pi u_B d(\omega t) = \int_{\beta_I}^{\alpha} [-u + U'_C + 2 I_{c0} (R_F + R_i + R_L) + \left(U'_C - R_F \frac{N_G}{N_C} \frac{u}{R_F + R_i + R_L} \right) d(\omega t) \quad (4,6)$$

In the steady state (4,5) and (4,6) are equal. Hence the equation

$$\int_0^{\pi} U'_C d(\omega t) = \int_a^{\pi} R_F \frac{N_G}{N_C} \frac{u}{R_F + R_i + R_L} d(\omega t) \quad (4,7)$$

holds.

If the operations are performed,

$$U'_C = \frac{R_F \frac{N_G}{N_C}}{R_F + R_i + R_L} U \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad (4,8)$$

where U is the mean value of the supply voltage. The right hand side of equation (4,8) is no other than U_F , the mean value of the feedback voltage, so that the equation is identical with (2,1).

Naturally, the approach through instantaneous values yields the same result as that using mean values. The mean value of the voltage across the load resistance, neglecting the coercitive currents flowing in stages I and II, is

$$U_L = I_L R_L = U \frac{R_L}{R_F + R_i + R_L} \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad (4,9)$$

If U_L is regarded as the output signal, then, according to the two preceding expressions, its product with

$$A_F = \frac{R_F}{R_L} \frac{N_G}{N_C} \quad (4,10)$$

is feedback negatively. A_F is the feedback gain. The input and output voltages are related by the expression

$$U_L = \frac{1}{A_F} U'_C \quad (4,11)$$

The method of feedback shown in Fig. 2 may be advantageously used if $N_G \gg N_C$.

In this case the same value of A_F can be established with a far larger R_L/R_F ratio, which is advantageous in regard to the maximum power output to be obtained from the amplifier, and to the efficiency of the amplifier. If the ratio of windings is chosen to comply with the inequality

$$\frac{N_G}{N_C} \leq 1, \quad (4,12)$$

then it is preferable to feed back the total output voltage.

In this case the feedback gain is

$$A_F = \frac{N_G}{N_C}. \quad (4,13)$$

V. Static characteristics

The static characteristics of s. m. a. with negative feedback differ substantially from those of amplifiers without feedback. Despite the fact that the equations of these characteristics are important for use, they have hitherto partly not been known.

Based on the preceding discussion, let the changes in the mean values of the load current and the control voltage first be determined as functions of the mean value of the control current of a s. m. a. with negative feedback from the output signal. These are the functions $I_L = I_L(I_C)$ and $U_C = U_C(I_C)$.

According to Appendix 4 and Fig. 8c,

$$\begin{aligned} I_C &\cong \frac{1}{\pi} I_{c0} [\beta_I - (\beta_{III} - \beta_I) + \pi - \beta_{III}] = \\ &= \frac{1}{\pi} I_{c0} [\pi + 2(\beta_I - \beta_{III})]. \end{aligned} \quad (5,1)$$

According to (F, 18a), (F, 19) and (4,4) the following approximation may be made:

$$\beta_I \cong \sin \beta_I = \frac{U_C}{U_P} \quad (5,2)$$

$$\pi - \beta_{III} \cong \sin \beta_{III} = \frac{U_C}{U_P} \frac{R_F + R_i + R_L}{R_F \frac{N_G}{N_C}}. \quad (5,3)$$

Contracting (5,1), (5,2) and (5,3),

$$I_C \cong I_{c0} + \frac{2}{\pi} \frac{I_{c0}}{U_P} \frac{R_L + R_F \left(1 + \frac{N_G}{N_C}\right) + R_L}{R_F \frac{N_G}{N_C}} U_C. \quad (5,4)$$

Substituting U_C in (5,4) from equation (2,1) of the voltage equilibrium in the control circuit,

$$I_C \cong -I_{c0} + \frac{2}{\pi} \frac{I_{c0}}{U_P} \frac{R_i + R_F \left(1 + \frac{N_G}{N_C}\right) + R_L}{R_F \frac{N_G}{N_C}} R_F \frac{N_G}{N_C} I_L, \quad (5,5)$$

where

$$I_L = \frac{U}{R_F + R_i + R_L} \frac{1 + \cos \alpha}{2}. \quad (5,6)$$

Introducing the notation

$$S = \frac{1}{2/\pi \frac{I_{c0}}{U_P} \left[R_i + R_F \left(1 + \frac{N_G}{N_C}\right) + R_L \right]}, \quad (5,7)$$

the required relation between the control current and the load current may be written in the easily manipulated form of

$$I_L \cong S(I_{c0} + I_C). \quad (5,8)$$

From (5,4) the relation between the control voltage and the control current is

$$U_C \cong R_F \frac{N_G}{N_C} S(I_{c0} + I_C). \quad (5,9)$$

According to (5,9), the input power is

$$P_i = U_C I_C \cong R_F \frac{N_G}{N_C} S(I_{c0} I_C + I_C^2). \quad (5,10)$$

The validity of the last three equations, describing the static characteristics, is limited to the control range. The control range is limited with respect to the control current by the inequality

$$-I_{c0} \leq I_C' \leq I_{Cl} \quad (5,11)$$

and in respect to the control voltage by the inequality

$$0 \leq U_C \leq U_{Cl}. \quad (5,12)$$

For if the load current has reached its maximum value of $I_{L,max}$, then it is no use decreasing $|I_C'|$, or increasing U_C , the load current (and thus also the feedback voltage) will remain unchanged. The control current and voltage values corresponding to $I_{L,max}$ were in (5,11) and (5,12) respectively, marked I'_{Cl} and U'_{Cl} . From (5,8) and (5,9) these limiting values are

$$I'_{Cl} \cong -I_{c0} + \frac{1}{S} I_{L,max}$$

$$U'_{Cl} \cong R_F \frac{N_G}{N_C} I_{L,max}$$

Within the control range the assumption of $R'_C = 0$ was a good approximation, but at control voltages $U'_C > U'_{Cl}$ its use is no longer permissible, for the

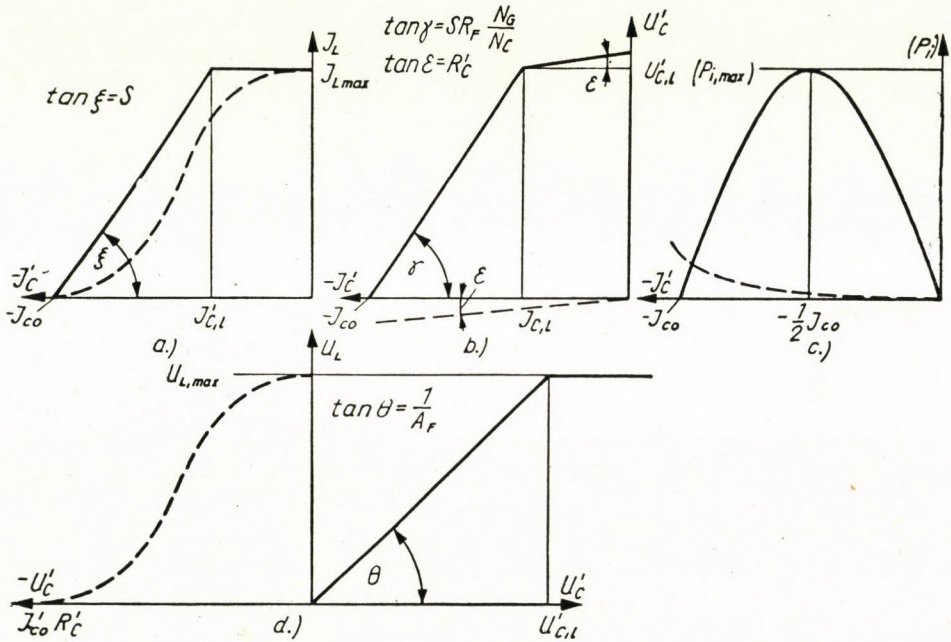


Fig. 10

voltage $(U'_C - U'_{Cl})$ develops entirely across R'_C , since the feedback voltage is now constant.

It was with regard to this fact that the relations

$$I_L = I_{L,max}, \tag{5,8a}$$

$$U'_C \cong U'_{Cl} + R'_C (I'_C - I'_{Cl}), \tag{5,9a}$$

and

$$P_i \cong (U'_{Cl} - R'_C I'_{Cl}) I'_C + R'_C I'^2_C \tag{5,10a}$$

to give the static characteristics in the range for $U'_C > U'_{Cl}$, were determined.

Based on the above considerations, the static characteristics of the s. m. a. with feedback were constructed in Fig. 10. For completeness' sake the figure also includes the characteristic $U_L = U_L(U'_C)$, obtained by use of equation (4,11).

The dotted lines in Fig. 10 also show the static characteristics for no feedback. The divergence between the cases with and without feedback is obvious.

The equations of the static characteristics of the amplifier are — within the limits of tolerable error — also suited to numerical calculations (see Chap. X).

VI. Power gain

Power gain is the quotient

$$K_p = \frac{P_{0,\max}}{P_{i,\max}}, \quad (6,1)$$

where

$P_{0,\max}$ is the greatest power developed on the load resistance,

$P_{i,\max}$ is the greatest input power.

According to (5,10) the input power has a maximum at a control current of either $I'_C = -\frac{I_{c0}}{2}$, or $I'_C = I'_{C1}$, according to whether $-\frac{I_{c0}}{2}$ falls within the control range or not.

Presuming that $-\frac{I_{c0}}{2}$ is within the control range, then the maximum input power, from (5,10), is

$$P_{i,\max} \cong -\frac{\pi^2}{16} U I_{c0} \frac{R_F \frac{N_G}{N_C}}{R_i + R_F \left(1 + \frac{N_G}{N_C}\right) + R_L}. \quad (6,2)$$

The negative sign has appeared because within the control range the control current is of opposite direction to U'_C . Henceforth the negative sign will not be used.

The maximum output power is

$$P_{0,\max} = I_{L,\max}^2 R_L = \frac{U^2}{(R_F + R_i + R_L)^2} R_L. \quad (6,3)$$

The power gain is

$$K_p \cong \frac{16}{\pi^2} \frac{U}{I_{c0}} \frac{1}{A_F} \frac{R_i + R_F \left(1 + \frac{N_G}{N_C}\right) + R_L}{(R_F + R_i + R_L)^2} \quad (6,4)$$

or

$$K_p \cong \frac{64}{\pi^2} \frac{1}{\varrho(1+\delta)} f \frac{B_p}{H_{c0}} \frac{A_{Fe} A_G}{l_{Fe} l_G} \frac{1}{A_F} \frac{1 + \frac{R_L}{R_i} \left[1 + A_F \left(1 + \frac{N_C}{N_G}\right)\right]}{\left[1 + \frac{R_L}{R_i} \left(1 + A_F \frac{N_C}{N_G}\right)\right]^2}. \quad (6,5)$$

In writing (6,5) the relations

$$U = 4f N_G B_p A_{Fe}, \quad (6,6)$$

$$I_{c0} N_G = H_{c0} l_{Fe}, \quad (6,7)$$

$$R_i = \varrho \frac{l_G N_G^2}{A_G} (1 + \delta) \quad (6,8)$$

and (4,10) were considered, where

B_p — the peak value of the maximum induction in the magnetic material [Vs/cm²].

l_{Fe} — the mean length of the lines of force in the core [cm].

l_G — the length of the turns of the gate winding [cm].

A_G — the window area occupied by the gate winding [cm²].

A_{Fe} — the cross section of the core [cm²].

δ — the ratio of the forward resistance of the rectifier to the internal resistance of the gate winding.

If the total output voltage is fed back [see equations (4,12) and (4,13)], the power gain is

$$K_p = \frac{16}{\pi^2} \frac{U}{I_{c0}} \frac{1}{A_F} \frac{R_i + R_L \left(1 + \frac{N_G}{N_C}\right)}{(R_i + R_L)^2} \quad (6,4a)$$

or

$$K_p = \frac{64}{\pi^2} \frac{1}{\varrho (1 + \delta)} f \frac{B_p}{H_{c0}} \frac{A_{Fe} A_G}{l_{Fe} l_G} \frac{1}{A_F} \frac{1 + \frac{R_L}{R_i} (1 + A_F)}{\left(1 + \frac{R_L}{R_i}\right)^2}. \quad (6,5a)$$

VII. The transient state operation of the self-saturating magnetic amplifier with feedback from the output signal

A) Transfer function, response, equivalent time constant

Given the transfer functions of the amplifier without feedback [equations (3,11)] and the gain of the feedback [equation (4,10)] the transfer function of the amplifier with feedback may be determined, using the familiar relation

$$Y_m^* = \frac{Y_m}{1 + A_F Y_m}.$$

From the expressions (3,11), (3,11a) and (3,11b) the transfer functions of the amplifier with feedback are

$$Y_1^*(p) = A \frac{e^{-p\tau}}{1 - (1 - AA_F)e^{-p\tau}}, \quad (7,1)$$

$$Y_2^*(p) = A \frac{e^{-p\tau}}{p\tau + AA_F e^{-p\tau}}, \quad (7,1a)$$

and

$$Y_3^*(p) = \frac{1}{A_F} \frac{1}{1 + p \frac{\tau}{AA_F}}, \quad (7,1b)$$

where

$$A = \frac{R_L}{R_F + R_i + R_L}. \quad (7,2)$$

The gain of the amplifier with feedback may be obtained from the transfer function by substitution of $p = 0$. It is

$$A^* = \frac{U_L}{U'_C} = \frac{1}{A_F} \quad (7,3)$$

[cf. expressions (4,11) and (7,3)].

In order to decide the use of which of the possible expressions for the transfer function is the more advantageous, let us determine the expression for the response in the case of a step change of control voltage $U'_C = \frac{1}{Ap}$, *i. e.* of magnitude $\frac{1}{A}$. Then, using the summing formula for an infinite geometrical series, the Laplace transforms of the response are

$$U_{L1}(p) = \frac{e^{-p\tau}}{p} [1 + (1 - AA_F)e^{-p\tau} + (1 - AA_F)^2 e^{-2p\tau} + \dots], \quad (7,4)$$

$$U_{L2}(p) = \frac{1}{\tau} \left[\frac{e^{-p\tau}}{p^2} - \frac{e^{-2p\tau}}{T_e p^3} + \frac{e^{-3p\tau}}{T_e^2 p^4} - + \dots \right], \quad (7,4a)$$

and

$$U_{L3}(p) = \frac{1}{AA_F T_e p^2} \left[1 - \frac{1}{T_e p} + \frac{1}{T_e^2 p^2} - + \dots \right], \quad (7,4b)$$

where

$$T_e = \frac{\tau}{AA_F}. \quad (7,5)$$

If (7,4) is transformed back term by term, it may be directly seen that the change in the output signal with time is — using the approach corresponding to Fig. 7a — that shown in Fig. 11.

The reverse transformation term by term of (7,4a), which corresponds to the approach of Fig. 7b, yields a time function that is very much more difficult to handle, for

$$U_{L_2}(t) = \frac{T_e}{\tau} \left[\frac{(t-\tau)}{T_e} - \frac{1}{T_e^2} \frac{(t-2\tau)^2}{2!} + \frac{1}{T_e^3} \frac{(t-3\tau)^3}{3!} + \right. \\ \left. + \frac{1}{T_e^n} \frac{(t-n\tau)^n}{n!} - + \dots \right], \quad (7,6)$$

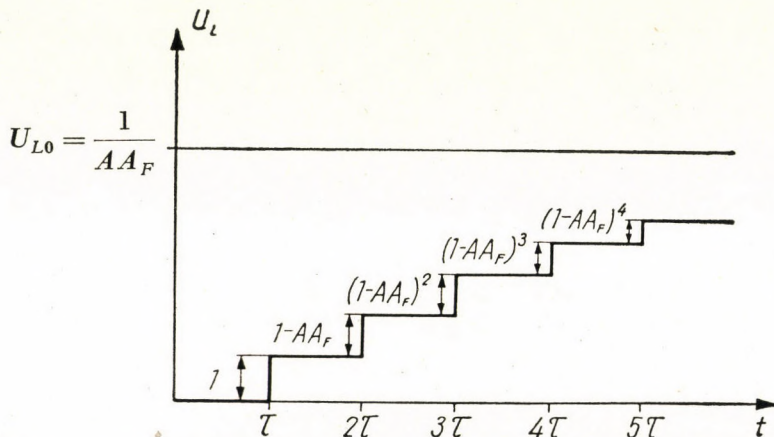


Fig. 11

where at a time t only those terms may be considered, which fulfil the inequality

$$(t - n\tau) > 0.$$

The expression for $U_{L_2}(t)$ may be considerably simplified, if only the times $t \gg n\tau$ are considered, *i. e.* if τ is negligibly small compared to the duration of the transient process being considered. In this case $n\tau$ may be neglected beside t in (7,6) and

$$U_{L_2}(t) = U_{L_3}(t) = \frac{T_e}{\tau} \left[\frac{t}{T_e} - \frac{1}{2!} \frac{t^2}{T_e^2} + \frac{1}{3!} \frac{t^3}{T_e^3} - + \dots \right] = \\ = \frac{1}{AA_F} (1 - e^{-t/T_e}), \quad (7,6a,b)$$

so that the same response is obtained as that given by (7,4b).

In regard to the use of the three expressions for the transfer function that have been given, the preceding considerations permit the statement to

be made that in the case of "fast" response amplifiers it is best to use expression (7,1), in the case of "slow" response (7,1b) for the transfer function, while the use of (7,1a) is not advantageous. The question of when to regard the magnetic amplifier as having a fast or a slow response will be elucidated later, in the discussion of Fig. 14.

Fig. 12 shows the NYQUIST diagrams based on expressions (7,1), (7,1a) and (7,1b) for a loop gain of $AA_F = 0,5$. Rigid feedback from the output signal puts an end to the integrating character of the amplifier. This effect of feedback can be clearly seen from a comparison of Figs. 7a, b and 11 or 7c and 12.

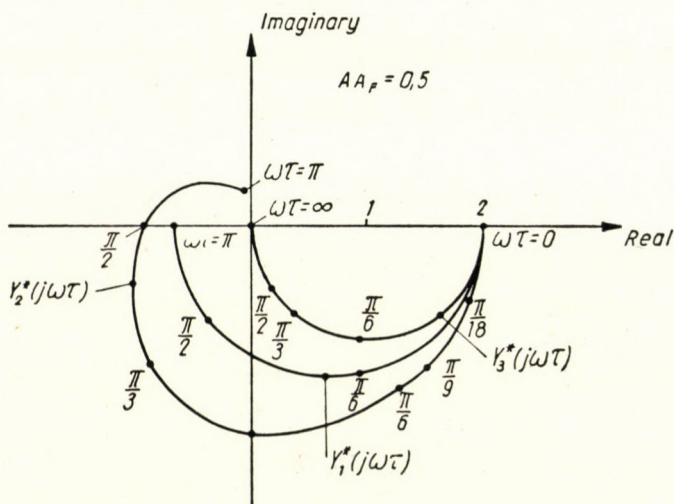


Fig. 12

Fig. 11 enables the following important statement to be made on the progress of the transient process in the feedback amplifier:

Apart from the first half period after the change in control voltage, the change in the mean value of the output voltage for any of the subsequent half periods compared to the ones preceding them is equal to the product of the mean value of the resultant control voltage applied to the control circuit in the preceding half period, and of the factor

$$A = \frac{R_L}{R_F + R_i + R_L} .$$

This statement is also true for the amplifier without feedback. [See equation (3,7) and Fig. 7a, b].

From the dynamic point of view the behaviour of the amplifier is similar to that of elements with single time constants. The speed of response may here also be characterized by a quantity, the so-called equivalent time constant.

Proceeding as with single-time constant members, the shaded area in Fig. 13 may be regarded as the equivalent time constant of the amplifier. According to the deduction of Appendix 4, the equivalent time constant is

$$T_e = \frac{\tau}{AA_F} = \frac{1}{2f} \frac{1}{AA_F} \quad (7,5)$$

for all three transfer functions.

The equivalent time constant decreases as A_F is increased. A suitable choice of A_F will permit U_L to reach its steady state value by the second half period after the application of a step change in the control voltage at the beginning of the first

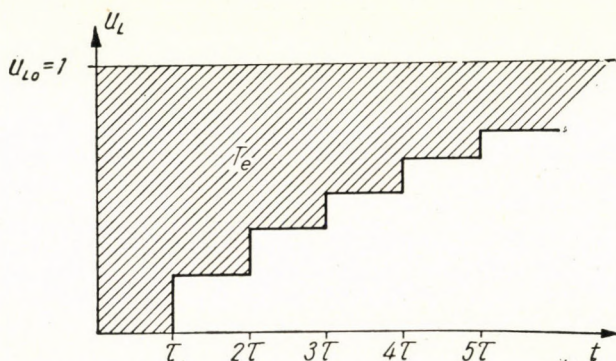


Fig. 13

half period. This leads to the theoretically attainable fastest response for a magnetic amplifier.

In this circuit

$$T_e = \tau \quad (7,7)$$

and

$$A_F = \frac{1}{A} \quad (7,8)$$

If (7,8) is fulfilled, Fig. 11 visibly shows the response of the amplifier within one period. The increase in output voltage is, because of (7,8), zero in the third and subsequent periods.

For compliance with (7,8) the transfer function is

$$Y^*(p) = \frac{R_L}{R_F + R_i + R_L} e^{-p\tau} \quad (7,9)$$

If feedback is from R_F , the value of R_F necessary for response within one period is, according to (7,8),

$$R_F = \frac{R_i + R_L}{\frac{N_G}{N_C} - 1} \quad (7,10)$$

It may be seen from the expression for R_F that response within one period may only be brought about if the ratio of turns in the windings is such that $\frac{N_G}{N_C} > 1$.

If feedback is from R_L , the ratio of turns has to be chosen so that

$$\frac{N_G}{N_C} = \frac{R_L + R_i}{R_L}, \quad (7,11)$$

for $AA_F = 1$ to be true.

It must be regarded as a considerable advantage to be attained by this circuit — as opposed to ordinary s. m. a. — that whereas T_e is here inversely proportional to the supply frequency, the time constant is in their case independent of the supply frequency.

A time constant defined in the following way might also have been introduced to characterize the speed of response of the amplifier with feedback: let the time constant be the time that elapses from applying the control voltage, till the mean value of the output value attains 63% of its final value.

The time constant obtained by this latter definition is, according to Appendix 5,

$$T_{63} = \frac{1}{2f} \left(\frac{\log 0,37}{\log (1 - AA_F)} - 1 \right). \quad (7,12)$$

Fig. 14 shows the changes in T_e and T_{63} as functions of the open loop gain AA_F . For an exponential response the two definitions of the time constant will, of course, yield identical results.

In the present case the numerical values of the two time constants show good agreement for small values of AA_F , since for small loop gain, *i. e.* slow response, the transfer function is approximately $Y_3^*(p)$, so that the response is exponential. For large values of AA_F , however, there is considerable divergence (Fig. 14). In the latter case it is best to use the transfer function given in (7,1). The choice of T_e from among the two types of time constant is justified partly by the fact that it is simple to determine, and partly by the fact that for values of AA_F near unity T_{63} as calculated from (7,12) is negative and cannot therefore be interpreted.

The increase in output voltage taking place in the first half period after application of the control voltage, which may be calculated from equation (3,6), has hitherto been neglected. In the case of amplifiers with very fast

response, particularly of those operating within one period, this omission is not justified. Its correction is, however, simple and does not essentially alter anything that has been said. For instance the change in the mean value of the output voltage for the m. a. operating within one period according to (3,6) is, in the first half period and neglecting the potential drop caused by coercitive current,

$$\Delta U_{L1} = A \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_1} (-u + U_C) d(\omega t) . \tag{7,13}$$

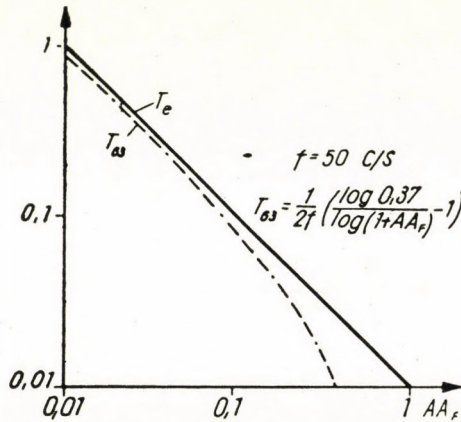


Fig. 14

The mean value of the control voltage in the first half period is

$$U_{C1} = U_C - \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_1} (-u + U_C) d(\omega t) . \tag{7,14}$$

As has been pointed out the change in the mean value of the output voltage compared to the previous half period is — from the second half period onwards — the product of the mean value of the resultant control voltage applied to the control circuit in the previous half period and of the factor *A*. The change in the mean value of the output voltage in the second half period is therefore

$$\Delta U_{L2} = A U_C - A \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_1} (-u + U_C) d(\omega t) \tag{7,15}$$

The mean value of the control voltage in the second half period is, from (7,13) and (7,15),

$$U'_{C2} = U'_C - A_F (\Delta U_{L1} + \Delta U_{L2}) = 0$$

The transient process thus ceases in the second half period.

B) Block diagram. Fast response self-saturating magnetic amplifier with "infinite" power gain

As a conclusion of the foregoing, the block diagram of the feedback amplifier has been drawn in Fig. 15a. The diagram does not include the effect

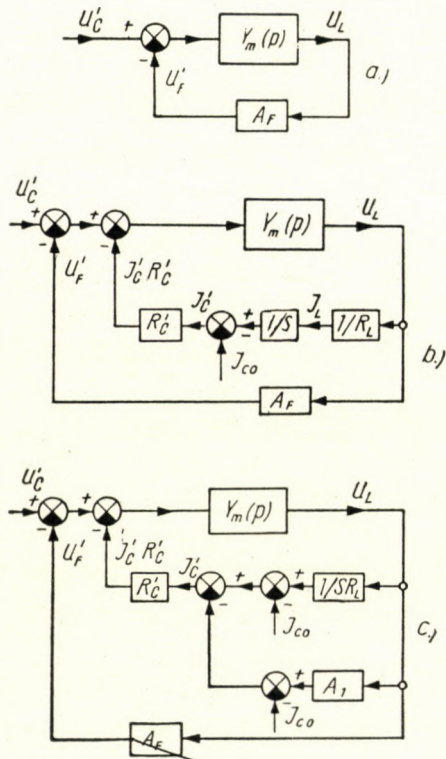


Fig. 15

of the voltage $I_C R'_C$ developing on the control circuit resistance. In order to obtain the resultant control voltage that causes changes in the voltage U_L , not only U'_F but also the voltage $I_C R'_C$ has to be subtracted from U'_C .

$I_C R'_C$ may easily be determined, using equations (4,9) and (5,8). The more precise block diagram thus obtained is shown in Fig. 15b.

According to the precise block diagram of Fig. 15b, the expressions for the transfer function, gain, response and equivalent time constant found for the feedback amplifier correspond to relations (7,1), (7,3), (7,4) and (7,5) above, with the difference that they have, instead of A_F , a feedback factor

$$A_{F1} = A_F + \frac{R'_C}{R_L S}$$

The block diagram of Fig. 15b shows that the amplifier has not only outside negative feedback, but also an inherent, internal negative feedback. *Compensation of this internal negative feedback makes it possible with zero control current to influence the value of the output signal by changing only the control voltage.*

This, in other words, means that it thus becomes possible to construct a magnetic amplifier with theoretically "infinite" power gain and "infinite" input impedance.

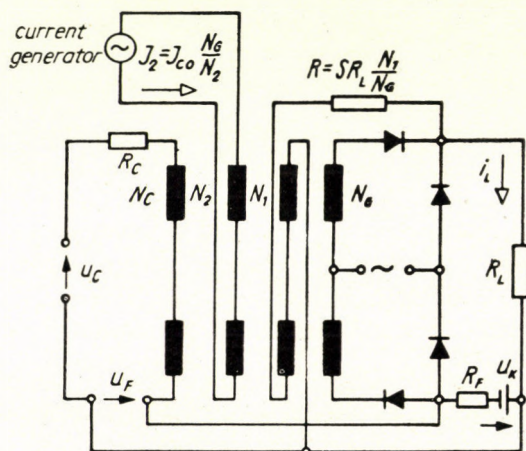


Fig. 16

The method of compensating the internal negative feedback is shown in the block diagram of Fig. 15c. It may here be seen that apart from the extant external negative feedback, the amplifier must be supplied on the one hand, with a bias of $-I_{co}N_G$ on a separate control winding and on the other, with a weak positive feedback on a third control winding.

The control current will be zero over the control range if the gain of this latter positive feedback is $A_1 = \frac{1}{SR_L}$.

A detailed circuit diagram constructed on the basis of Fig. 15c and the foregoing is shown in Fig. 16. The only part that has not been elucidated in the circuit diagram is that played by the constant DC voltage U_k . The need for it is shown by the following consideration: If $U_C = 0$ and $U_k = 0$, then whatever value of I_2 is chosen, the value of I_C cannot be reduced to zero, because the voltage $U_F = 2 I_{co}R_F$ caused by the minimal value ($2 I_{co}$) of the load current will always maintain some I_C current. In order, with the help of $-I_2$, to reduce the value of I_C to zero, even for zero or near zero values of the control

voltage, it is necessary to have a constant DC voltage of magnitude $U_k = 2 I_{c0} R_F$.

It should be emphasised that the circuit to compensate the internal negative feedback can, with relative ease be so constructed as not to alter the dynamic properties of the amplifier.

VIII. The figure of merit

The figure of merit is defined as the quotient

$$J = \frac{K_p}{T_e} . \quad (8,1)$$

In the case of the circuit of Fig. 16, where theoretically an "infinite" power gain may be obtained, the figure of merit is not a characteristic quantity. The figure of merit, however, provides useful information on the effects of the various quantities, insofar as the advantages of the circuit of Fig. 16 cannot — due to deviations of the magnetic material used from the ideal — be fully secured. Let the figure of merit therefore be determined for the circuit of Fig. 2.

For feedback from R_F the value of the figure of merit, using (6,5), (7,5) and (8,1), is

$$J = \frac{128}{\pi^2} \frac{1}{\varrho(1+\delta)} f^2 \frac{B_p}{H_{c0}} \frac{A_{Fe} A_G}{l_{Fe} l_G} \frac{R_L}{R_i} \frac{1 + \frac{R_L}{R_i} \left[1 + A_F \left(1 + \frac{N_C}{N_G} \right) \right]}{\left[1 + \frac{R_L}{R_i} \left(1 + A_F \frac{N_C}{N_G} \right) \right]^3} . \quad (8,2)$$

If the whole of the output voltage is fed back the value of J , according to (6,5a), (7,5) and (8,1) is

$$J = \frac{128}{\pi^2} \frac{1}{\varrho(1+\delta)} f^2 \frac{B_p}{H_{c0}} \frac{A_{Fe} A_G}{l_{Fe} l_G} \frac{R_L}{R_i} \frac{1 + \frac{R_L}{R_i} (1 + A_F)}{\left(1 + \frac{R_L}{R_i} \right)^3} . \quad (8,3)$$

For both feedback from R_F and from the whole of the output voltage, the figure of merit rises if A_F is increased. For the latter case this is directly observable in (8,3). Changes in the figure of merit as a function of A_F are shown in Figs. 17 and 18, constructed according to equations (8,2) and (8,3). The ordinates of the Figs. are calibrated in values of $\frac{J}{C_1}$, where

$$C_1 = \frac{128}{\pi^2} \frac{1}{\varrho(1+\delta)} f^2 \frac{B_p}{H_{c0}} \frac{A_{Fe} A_G}{l_{Fe} l_G} . \quad (8,4)$$

The value of A_F at which equation (7,8) — the condition for operation within one period — is fulfilled is different for each of the eight cases shown and the eight curves of Figs. 17 and 18 therefore also extend to differing values of A_F .

It follows from the figures that if the ratio $\frac{N_G}{N_C}$ is increased, the figure of merit rises. The reason is that as $\frac{N_G}{N_C}$ is increased, R_F and the power lost across

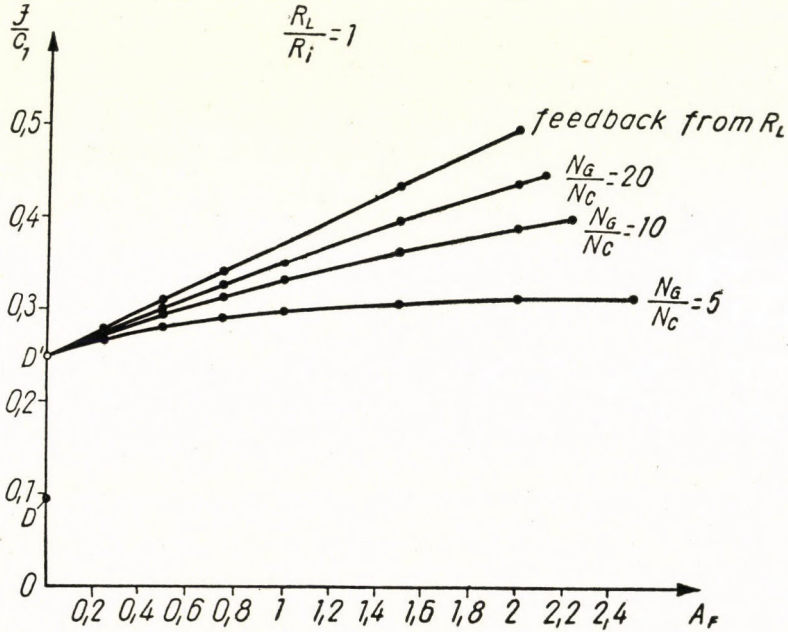


Fig. 17

it, decrease. Apart from increasing the maximum power output that can be taken from the amplifier, it is also desirable to use as large an $\frac{N_G}{N_C}$ ratio as possible to obtain a given value of A_F , in order to increase the figure of merit, for the circuit of Fig. 2. If feedback is from the whole of the output voltage then, since there is no power loss on the feedback resistance, the curve $R_F = R_L$ showing the figure of merit as a function of A_F , will everywhere be above the curves for feedback from R_F . In the boundary case, where $\frac{N_C}{N_G} \rightarrow 0$, equation (8,2) goes over into (8,3) and there is no difference as far as the figure of merit is concerned, between feedback from R_F or from the whole output voltage. A comparison of Figs. 17 and 18 shows that J decreases if $\frac{R_L}{R_i}$ is increased.

It is therefore correct to choose the value of $\frac{R_L}{R_i}$ as near unity as possible. It is also worth noting the f^2 term in the expression for J . (It is a familiar fact that for magnetic amplifiers with classical circuits and current transformers J is only proportional to f .)

The following should, moreover, be noted in respect of what has been set forth. Since the deduction of the expressions (8,2) and (8,3) for the figure of

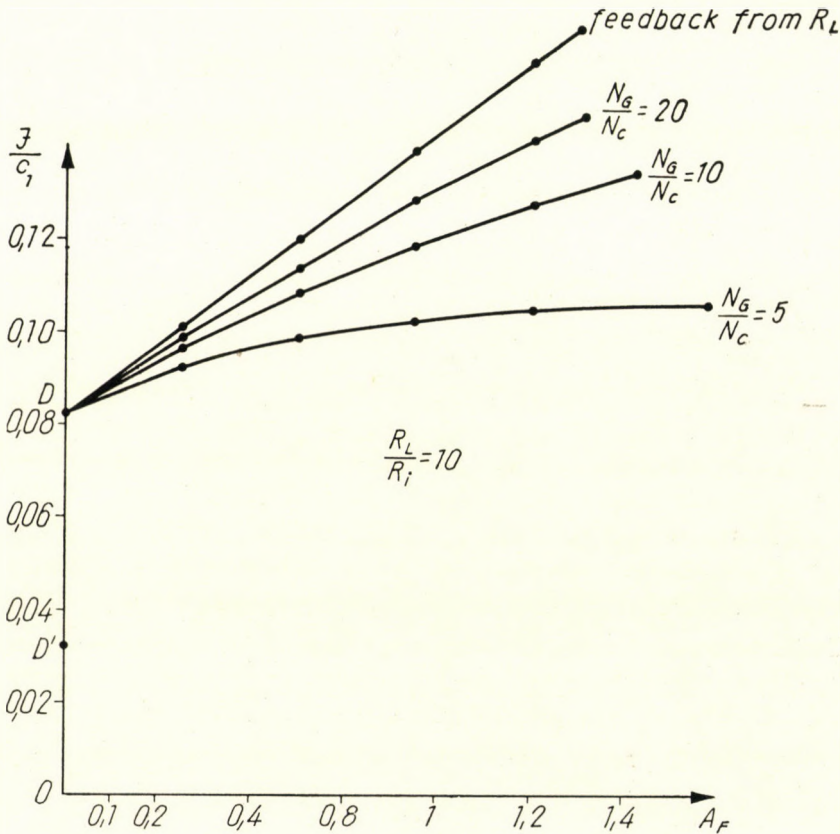


Fig. 18

merit ultimately rests on the condition (2,3), and since at the point $A_F = 0$ and within a certain distance from zero (2,3) is certainly not fulfilled, J should not be determined for these values of A_F , using (8,2) and (8,3).

For $A_F = 0$, i. e. the case of an ordinary s. m. a., the figure of merit should be calculated from the expression

$$J_1 = \frac{4^2}{\pi} \frac{1}{\rho(1 + \delta)} f^2 \frac{B_p}{H_{c0}} \frac{A_{Fe} A_G}{1_{Fe} 1_G} \frac{R_L/R_i}{(1 + R_L/R_i)^2}, \quad (8,5)$$

deduced in Appendix 6 (8,5) will give values of J that are $\frac{4^2 \pi}{128} = 0.393$ times smaller than those calculated from (8,2) and (8,3). Since in Figs. 17 and 18 $\frac{D' O}{D O} = 0.393$, the $J(A_F)$ curves will start from D' instead of D , and will approximate the curves shown faster, if the value of A_F at which (2,3) is fulfilled is smaller.

IX. Self-saturating magnetic amplifier with feedback as a DC "impedance transformer"

Often one of the most important considerations in selecting an amplifier circuit is the value of the input impedance that can be realised. In the case of automatic regulating equipment, for instance, amplifiers with a large input impedance are preferred as preamplifiers, for they have the following advantages:

a) Both the sensing element and the reference element can have low power levels;

b) for a given departure of the controlled quantity from the desired value — from the reference signal — the error signal will be largest, due to the fact that the error-measuring device will, for practical purposes, be operating in a no-load circuit;

c) rigid and frequency-dependent feedback can be easier and more advantageously effected to a place of high, than to one of low impedance;

d) it is far easier and cheaper to locate regulating loop stabilizing elements in places of high, than of low impedance levels.

If an electronic pre-amplifier is used, a large input impedance is automatically assured. Since, however, magnetic amplifiers are, on account of their numerous familiar advantages, frequently preferred to electronic amplifiers, magnetic amplifier circuits which permit a high input impedance to be attained are particularly important.

The magnetic amplifier circuit which has been discussed makes it possible to construct an amplifier with a large input impedance and, depending on the type of feedback used, with a small or a large output impedance. If an ideal magnetic material is used, then theoretically an infinitely great input impedance and either a zero, or an infinitely great output impedance can be achieved.

In cases, however, when the advantages offered by the circuit of Fig. 16 cannot be fully secured due to the departure of the magnetic material from the ideal, the following relations for the calculation of input and output impedance for the circuit of Fig. 2 will provide useful information on the effects of the various quantities.

Using (2,1) and (5,8), the input impedance for the circuit of Fig. 2 is

$$Z_i = \frac{\partial U'_C}{\partial I_C} = R'_C + R_F \frac{N_G}{N_C} S. \quad (9,1)$$

With (4,10), (5,7), (6,6) and (6,7), (9,1) can be brought to the form

$$Z_i = R_C + 9,85 f \frac{B_p}{H_{c0}} \frac{A_{Fe}}{1_{Fe}} A_F N_C^2 \frac{\frac{R_L}{R_i}}{1 + \frac{R_L}{R_i} \left[1 + A_F \left(1 + \frac{N_C}{N_G} \right) \right]} \quad (9,2)$$

(where Z_i is not a reduced value). If feedback is not from R_F but from R_L then the denominator of the second term of the right hand side of (9,2) will change to $\left[1 + \frac{R_L}{R_i} (1 + A_F) \right]$. In other respects (9,2) remains unaltered, (9,2) shows that to achieve a large value of Z_i a magnetic material with a high value of B_p/H_{c0} should be used. If B_p/H_{c0} is given, Z_i can be increased by increasing the number of turns on the control winding, the feedback gain, the supply frequency and the linear dimensions of the core. According to Appendix 7 the value of the output impedance for feedback from R_F is

$$Z_{0F} = \left| \frac{\partial U_L}{\partial I_L} \right| = R_i + R_L A_F \left(1 + \frac{N_C}{N_G} + \frac{\pi}{2} \frac{U_p}{R'_C I_{c0}} \right) \quad (9,3)$$

and for feedback from R_L

$$Z_{0L} = \left| \frac{\partial U_L}{\partial I_L} \right| \simeq \frac{2}{\pi} \frac{R_i}{A_F} \frac{R'_C I_{c0}}{U_p}. \quad (9,4)$$

Since U_p is generally larger by a few orders of magnitude than $R'_C I_{c0}$, (9,3) is a large and (9,4) a small impedance value compared to R_i .

A physical explanation for changes in the input and output impedances can easily be given. The input impedance increases, because the input voltage has not only to balance the ohmic voltage drop on the input circuit but also the feedback voltage, which is generally several times greater. The output impedance is large for feedback from R_F and small for that from R_L , because if U'_C is constant the voltage across R_F or R_L is also constant, so that the current through the load is constant despite changes in R_L , or, in the other case, the voltage across the load is constant, despite changes in R_L .

The amplifier in the first case therefore closely resembles an ideal current generator, in the second, an ideal voltage generator.

It may, furthermore, easily be seen from the foregoing that the output voltage will remain practically constant for changes within a wide range of the supply voltage and supply frequency. This may also be seen from equations

(F,52) and (F,52a) of Appendix 7, for R'_C in the denominator may usually be neglected beside $SR_F \frac{N_G}{N_C}$ or $SR_L \frac{N_G}{N_C}$. The impedance properties of the magnetic amplifier discussed agree with the well-known case of the electronic amplifier with negative feedback from the current. In the case of the electronic amplifier the input impedance also increases considerably as a result of feedback and the output impedance is large or small compared to the circuit without feedback, according as the feedback is done from the anode or the cathode.

Experimental results

In order to test the correctness of the theoretical line of thought involved and its utility for numerical calculations, readings were taken with a 10 W magnetic amplifier constructed with Permenorm 5000 Z type magnetic material, on a toroidal core. Its data were:

Supply voltage: 18 V (r. m. s.);

Supply frequency: 50 c/s;

$\frac{N_G}{N_C}$: 0.25 ;

I_{c0} : $3.36 \cdot 10^{-3}$ A;

R'_C : 18.8Ω .

The circuit diagram of the experiment is shown in Fig. 19. The instruments used for the readings were:

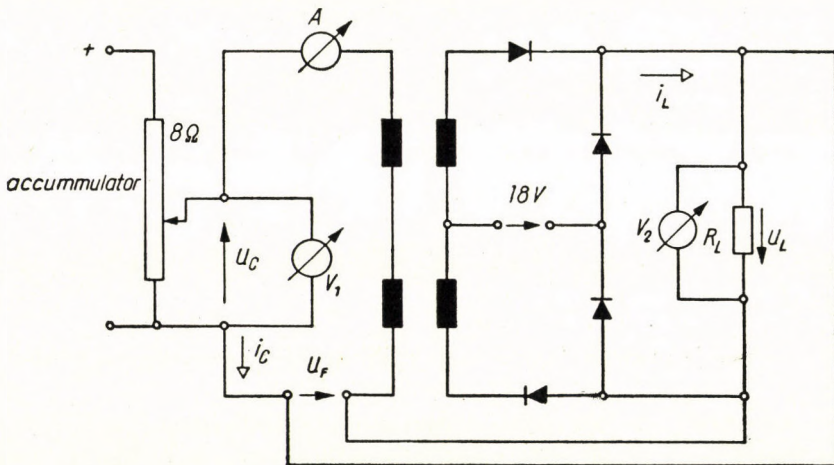
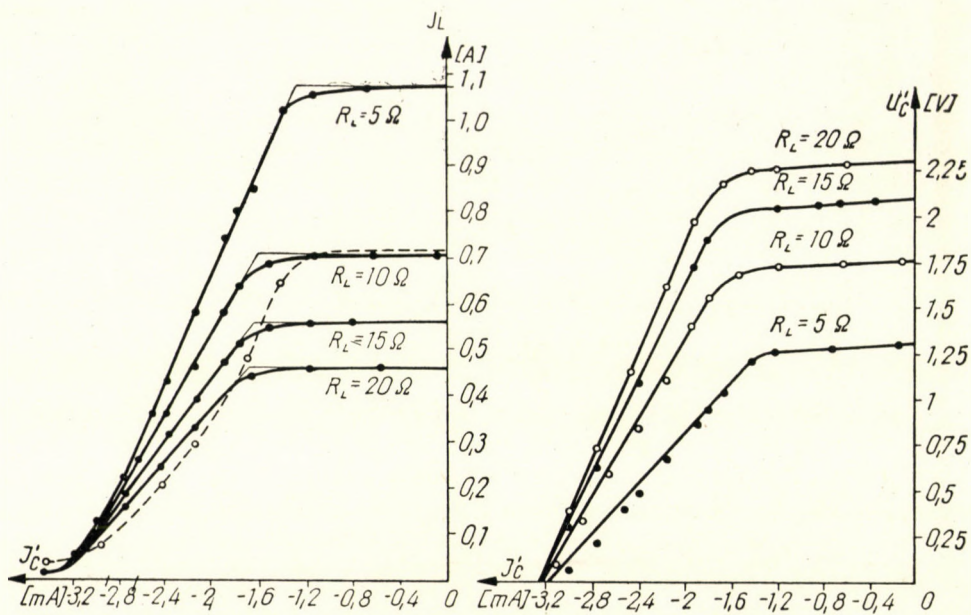
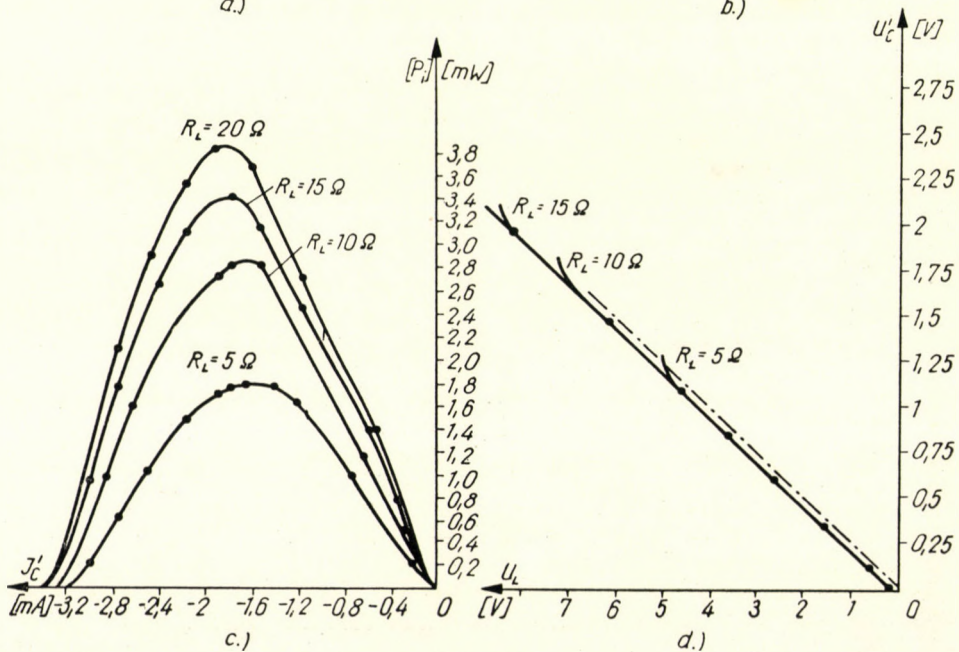


Fig. 19



The dotted line refers to the case without feedback
a.)

b.)



c.)

d.)

Fig. 20

Supply voltage: 18 V

Supply frequency: 50 c/s

$R_L = 20 \Omega$

For curves 1, 2, 3 and 4

$J_2' = 3, 4 \text{ mA}$

For curves 5, 6 and 7

$J_2' = 2, 3 \text{ mA}$

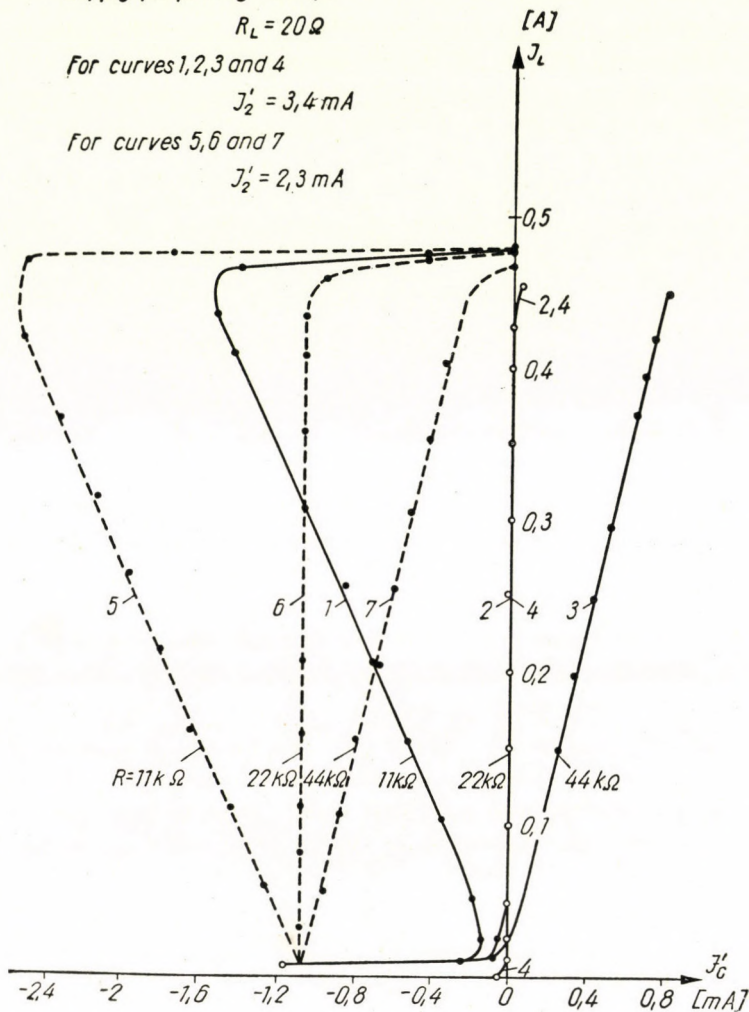


Fig. 21

V_1 and V_2 — \square 0.5 7.5, 15, 150V/150°, 10 000 Ω /V,

A — \square 0.2 45 mV — 10 Ω /150°.

The rectifiers were Konverta type selenium discs. For all readings two discs were connected in series in one branch of the GRAETZ circuit.

The curves for different values of R_L of $I_L = I_L(I_C)$, $U_C = U_C(I_C)$, $P_i = P_i(I_C)$, and $U_L = U_L(U_C)$ drawn according to the readings taken, are shown in Figs. 20a, b, c and d. A comparison of Figs. 10 and 20 will straight-

away show that the calculations and readings resulted in qualitatively identical curves. Some characteristic values of the magnetic amplifier circuit were calculated, — partly from the formula deduced in this paper, partly from the readings taken, and presented in the accompanying Table 1. The Table 1 also contains the percentage deviation between the calculated and the measured results. The second column of the table contains the values of R_i calculated from the readings, using the expression

$$R_i = \frac{U}{I_{L, \max}} - R_L.$$

All calculations are based on the corresponding values of R_i , taken from the second column.

One of the main reasons for the divergence between the calculated and the measured results is the finite value of the resistances of the selenium rectifiers in the reverse direction. This is proved by a comparison for $R_L = 5 \Omega$ of the calculated and measured results obtained with selenium rectifiers measuring $(50 \times 50) \text{ mm}^2$ and $(43 \times 43) \text{ mm}^2$ respectively, and by the fact that the calculated value of S is greater than the measured value, for it is well-known, that if the reverse resistance of the rectifier decreases, the gradient of the $I_L = I_L(I_C)$ characteristic will also decrease. (It should here be pointed out that all the characteristics of Figs. 20 for $R_L = 5 \Omega$ were taken with selenium rectifiers of $(50 \times 50) \text{ mm}^2$).

The dotted curve of Fig. 20a is the $I_L = I_L(I_C)$ characteristic of the same magnetic amplifier without feedback, for $R_L = 10 \Omega$. The difference between the characteristics with and without feedback is obvious. The dot-dash straight line of Fig. 20d shows the $U_L = U_L(U_C)$ relation for the ideal case, when $(R_C = 0)$. In actual fact $U_L = U_L(U_C)$ will — according to equation (2,1) — always be higher by the value of $I_C R_C$ corresponding to the instantaneous value of U_C . A larger value of R_L involves a “mildly” higher curve. This may also be understood from Fig. 20c.

According to the Table 1 the input impedance increases by about two orders of magnitude in consequence of the voltage feedback, and the output impedance decreases by about the same order.

To facilitate comparison of the figure of merit of the circuit discussed with the figure of merit J_1 of the ordinary s. m. a., the values of the latter — calculated from (8,5) — have also been presented in Table 1.

Readings were also taken with the same amplifier in the circuit of Fig. 16. Fig. 21 shows the $I_L = I_L(I_C)$ characteristics thus obtained. Curves 1, 2 and 3 which were measured with consecutively weaker positive feedback, refer to the case of $U_k = 0$. Because there is no compensating voltage, the control current in the case of these three curves assumes a “large” value for

Table 1

[Ω] R_L	[Ω] R_t	[mm ²] selenium rect. dimen- sions	$\tan \tilde{z} = S$ measurement	S calculation	percent- age error	[mW] $P_{i, \max}$		percent- age error	K_p		percent- age error	[Ω] Z_t		percent- age error	[Ω] Z_o calcula- tion	[sec] T_e calcula- tion	[sec ⁻¹] $J = \frac{K_p}{T_e}$ calcula- tion	[sec ⁻¹] J^1 without feed- back
						meas- ure- ment	calcula- tion		meas- ure- ment	calcula- tion		meas- ure- ment	calcula- tion					
5	10.4	50 × 50	0.564 10 ³	0.733 10 ³	23	1.745	2.52	30.8	3345	2320	44	1.095 10 ⁴	1.495 10 ⁴	27	0.0656	0.1204	19.250	6.770
	11.5	43 × 43	0.564 10 ³	0.679 10 ³	17	1.762	2.305	23.6	2725	2080	31							
10	12.85	43 × 43	0.442 10 ³	0.463 10 ³	4.6	2.84	3.26	12.8	1795	1564	14.6	1.706 10 ⁴	1.88 10 ⁴	9.5	0.0812	0.0914	17.100	5.930
15	13.7	43 × 43	0.348 10 ³	0.368 10 ³	5.5	3.37	3.83	12	1424	1250	14	2 10 ⁴	2.225 10 ⁴	10.5	0.0865	0.0765	16.350	5.560
20	14.9	43 × 43	0.298 10 ³	0.298 10 ³	0	3.8	4.15	8.4	1138	1042	9	2.285 10 ⁴	2.42 10 ⁴	5	0.0941	0.0699	14.900	5.015

zero control voltage. The most interesting is curve 2. Here the control current is — except for zero control voltage and its immediate vicinity — well nigh zero throughout the control range. (Its value was between $+10\mu\text{A}$ and $-10\mu\text{A}$.)

In the case of curve 2 a resistance of $R = 22\text{ k}\Omega$ was connected before the control winding for the positive voltage feedback. Theoretically, the value that would secure invaring control current is

$$R = SR_L \frac{N_1}{N_C} = 23.9\text{ k}\Omega.$$

If a compensating voltage of $U_k = 2I_{c0}R_L = 0.134\text{ V}$ is applied and a resistance of $R = 22\text{ k}\Omega$ used, curve 4 is obtained. Here the control current is zero even in the immediate vicinity of zero control voltage.

If the bias current is changed, the characteristics are shifted parallel to themselves. This is shown by curves 5, 6 and 7 which are obtained instead of 1, 2 and 3, if the bias current is decreased.

Appendix I

This Appendix contains the detailed mathematical discussion of the s. m. a. shown in Fig. 1, for the postulates previously mentioned.

Stage I

Range of validity: $0 \leq \omega t \leq \beta_1$.

The equivalent circuit diagram for this stage is shown in Fig. F1. In the equivalent circuit all quantities relating to the control winding have been reduced to the gate winding.

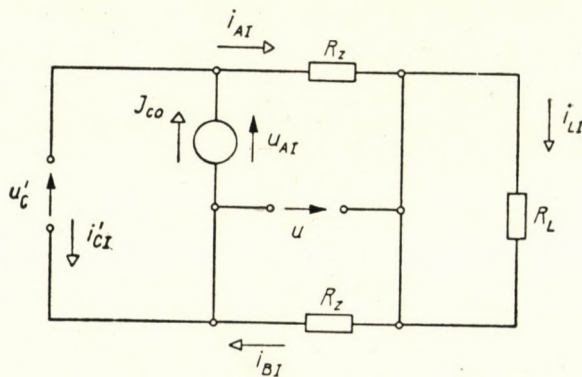


Fig. F1

The following assumptions were made in constructing the equivalent circuit diagram:

- The magnetic amplifier is to be examined in the positive half period;
- at the zero cross-over time of the supply voltage the point characteristic of the magnetic state of the cores will be at O' on the dynamic hysteresis loop of core "A" and at O'' on that of "B" (see Fig. 5);

- c) the flux in core "A" changes in the positive direction;
 d) the change of flux in core "B" is zero;
 e) the rectifiers "1" and "2" are used in the reverse, rectifiers "3" and "4" in the forward direction. On account of c), "A" may be substituted by a current generator $+I_{c0}$.
 According to Fig F1,

$$i'_{cI} = I_{c0} - \frac{u - U_C}{R_z} \cong I_{c0}, \quad (F,1)$$

$$i_{AI} = \frac{u - U_C}{R_z} \cong 0, \quad (F,2)$$

$$i_{BI} = -\frac{u}{R_z} \cong 0, \quad (F,3)$$

$$i_{LI} = 0, \quad (F,4)$$

$$U_{AI} = U_C. \quad (F,5)$$

The accuracy of the approximate expressions for the values of the unknown quantities depends on how closely the rectifiers used approach the ideal. The values of the unknown quantities for $R_z \rightarrow \infty$ are also given for stages II and III.

Let the correctness of the suppositions made, be checked. Since U_C is positive, the assumptions on the change of flux are correct.

The assumption on rectifiers "1" and "4" is correct if the inequality

$$U_C > u \quad (F,6)$$

is fulfilled.

The assumptions on rectifiers "2" and "3" are correct, because of (F,3) and (F,4). The equations of stage I describe the operation of the m. a. in the angular range

$$0 \leq \omega t \leq \beta_1$$

Due to (F,6), β_1 may be found from the relation

$$U_C = U_p \sin \beta_1. \quad (F,6a)$$

Stage II

The equivalent circuit diagram for this stage is shown in Fig. F2. The following assumptions were made in its construction:

a) The flux in core "A" changes in a positive, that in core "B" in a negative direction;

b) the rectifiers "1" and "3" are used in a forward, rectifiers "2" and "4" in a reverse direction. Because of a), the core "A" may be substituted by a current generator producing $+I_{c0}$, core "B" by one producing $-I_{c0}$.

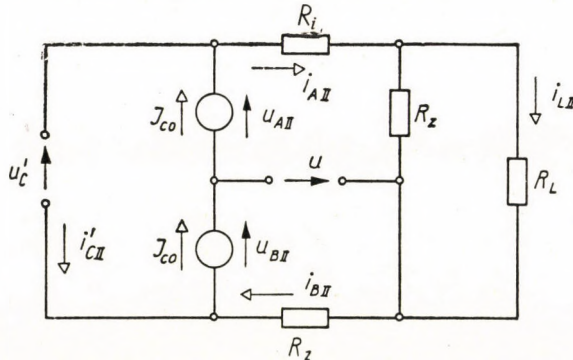


Fig. F2

In this stage the point characterizing the magnetic state of core "A" moves from 1' to 2', that for core "B" from 1" to 2" of Fig. 5.

According to Fig. F2, the values of the unknowns are:

$$i'_{CII} = \frac{U'_C (R_z + R_L) - I_{c0} [R_z^2 - R_i (R_z + R_L)]}{R^2} \cong - I_0 \tag{F,7}$$

$$i_{AII} = \frac{- U'_C (R_z + R_L) + 2 I_{c0} (R_z^2 + R_z R_L)}{R^2} \cong 2 I_{c0} \tag{F,8}$$

$$i_{BII} = - \frac{U'_C (R_z + R_L) + 2 I_{c0} [R_z (R_i + R_L) + R_L R_i]}{R^2} \cong 0, \tag{F,9}$$

$$i_{LII} = \frac{U'_C R_z + 2 I_{c0} R_z^2}{R^2} \cong 2 I_{c0}, \tag{F,10}$$

$$u_{AII} = u + \frac{U'_C [R_z (R_i + R_L) + R_L R_i] - 2 I_{c0} [R_z^2 (R_i + R_L) + R_z R_i R_L]}{R^2} \cong$$

$$\cong u - 2 I_{c0} (R_i + R_L), \tag{F,11}$$

$$u_{BII} = - u + \frac{U'_C R_z (R_z + R_L) + 2 I_{c0} [R_z^2 (R_i + R_L) + R_z R_i R_L]}{R^2} \cong$$

$$\cong - u + U'_C + 2 I_{c0} (R_i + R_L), \tag{F,12}$$

where

$$R^2 = R_z^2 + R_z (2R_L + R_i) + R_L R_i \cong R_z^2. \tag{F,13}$$

Let the assumptions made with regard to the magnetic states of the cores and the use of the rectifiers first be checked.

In regard to the assumptions on the direction of the change of flux the angles β_{AI} and β_{BI} must be found, starting from which u_{AII} and u_{BII} are positive and negative respectively. β_{AI} and β_{BI} may be obtained from equations (F, 11) and (F, 12) by substituting $u_{AII} = 0$ and $u_{BII} = 0$, giving

$$U_p \sin \beta_{AI} \cong 2 I_{c0} (R_i + R_L) \tag{F,14}$$

and

$$U_p \sin \beta_{BI} \cong U'_C + 2 I_{c0} (R_i + R_L). \tag{F,15}$$

Since $\beta_{BI} > \beta_{AI}$, stage II can ensue — as far as the magnetic state of the cores is concerned — from time β_{BI}/ω .

Let the assumptions with regard to the rectifiers next be checked.

Since R_z is generally large, from (F,8) it may be said with fair approximation that

$$i_{AII} \cong + 2 I_{c0}.$$

Hence i_{AII} is positive and rectifier "1" is really used in the forward direction.

Since, according to (F,9), $i_{BII} < 0$, the assumption on rectifier "2" is also correct. According to (F,9) and (F,10) i_{BII} is negative and i_{LII} positive, so rectifier "3" functions in the forward direction. In order that rectifier "4" be used in the reverse direction it is necessary that the inequality

$$i_{AII} > i_{LII} \tag{F,16}$$

be fulfilled. According to (F,8) and (F,10), (F,16) is fulfilled, since generally

$$I_{c0} \gg \frac{U'_C}{2R_z}.$$

On the basis of the foregoing, the range of validity of stage II is the angular interval

$$\beta_{BI} \leq \omega t \leq \pi - \beta_{BI}. \tag{F,17}$$

Since for the greater part of the s. m. a.-s that occur in practice $(R_i + R_L)$ varies within the order of magnitude of the reduced resistance of the control winding — for the area of the gate winding is chosen to be many times the area of the control winding, to ensure a high figure of merit — and since $I_{c0} = |I'_{C\max}|$, the expression (F,15) may, using (2,2) and (2,3) be simplified to become

$$U_p \sin \beta_{B1} \cong U'_C. \quad (\text{F},18)$$

From (F,6a) and (F,18) together,

$$\beta_1 \cong \beta_{B1}. \quad (\text{F},19)$$

According to (F,19) the conditions for stage II exist from the angle at which those of stage I cease. (F,15) shows that β_{B1} is, because of the voltage $2I_{c0}(R_i + R_L)$, somewhat larger than β_1 . The transitional phase thus arising between stages I and II is, however, according to the assumptions made, short so that neglecting it will cause no appreciable error. The jump of the point "1" Fig. 5 is due to neglecting this transitional phase.

Stage II extends over the angular range where

$$\beta_1 \leq \omega t \leq \pi - \beta_1. \quad (\text{F},17a)$$

Stage III

The equivalent circuit diagram for this stage is shown in Fig. F3. In constructing the diagram the following assumptions were made:

- Core "A" is saturated, its flux is constant, while that of core "B" is changing in a positive direction;
- rectifiers "1" and "3" are being used in the forward, "2" and "4" in the reverse direction.

In this stage, as shown in Fig. 5, the point characterizing the magnetic state of core "A" moves from 2' to 3', that for core "B" from 2" to 3".

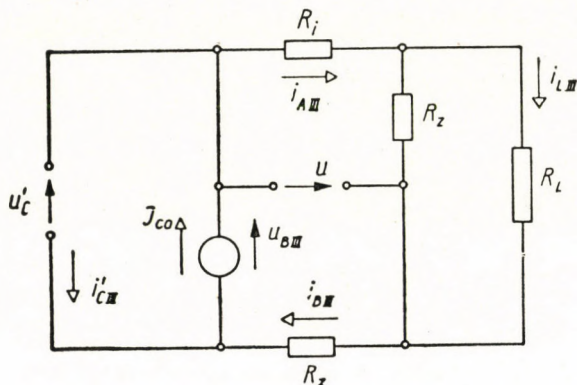


Fig. F3

According to Fig. F3, the values of the unknowns are:

$$i'_{CIII} = I_{c0} + \frac{u + U'_C}{R_z} \cong I_{c0}, \quad (\text{F},20)$$

$$i_{AIII} = u \frac{1 + R_L/R_z}{R_i + R_L + \frac{R_i R_L}{R_z}} \cong \frac{u}{R_i + R_L}, \quad (\text{F},21)$$

$$i_{BIII} = -\frac{u + U'_C}{R_z} \cong 0, \quad (\text{F},22)$$

$$i_{LIII} = u \frac{1}{R_i + R_L + \frac{R_i R_L}{R_z}} \cong \frac{u}{R_i + R_L}, \quad (\text{F},23)$$

$$u_{BIII} = U'_C. \quad (\text{F},24)$$

It may be directly seen from equations (F,20) . . . (F,24) that all assumptions are fulfilled from the time $\frac{\alpha}{\omega}$ of the saturation of core "A". The range of validity of stage III is

$$\alpha \leq \omega t \leq \pi.$$

Appendix 2

Let a control voltage U'_C be applied to the m. a. at the moment of the zero cross-over of the supply voltage. The magnitude of the change of voltage on the load must then be found in the first and in any subsequent n -th half period. Assume that in the half period previous to applying the control voltage core "A" was being reset and this took place according to (3,4) with a flux of

$$-\Delta \Phi_A = \frac{1}{\omega N_G} \int_0^{\alpha} [-u + 2 I_{c0} (R_i + R_L)] d(\omega t). \quad (\text{F},25)$$

A change of flux of the same size but opposite sense is necessary for the core "A" to become saturated in the first half period after switching on the control voltage. (3,3) shows this change of flux to be

$$\Delta \Phi_A = \frac{1}{\omega N_G} \left\{ \int_0^{\beta_I} U'_C d(\omega t) + \int_{\beta_I}^{\alpha_1} [u - 2 I_{c0} (R_i + R_L)] d(\omega t) \right\}. \quad (3,3)$$

Adding and suitably rearranging (F,25) and (3,3), the expression

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha} [u - 2 I_{c0} (R_i + R_L)] d(\omega t) = \int_0^{\beta_I} [U'_C - u + 2 I_{c0} (R_i + R_L)] d(\omega t)$$

is obtained. Since the change in the mean value of the voltage across the load in the first half period is proportional to the area T_1 of Fig. 6b, its value may be determined from the expression

$$\Delta U_{L1} = \frac{R_L}{R_i + R_L} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha} [u - 2 I_{c0} (R_i + R_L)] d(\omega t).$$

The voltage $2 I_{c0} (R_i + R_L)$ is to be found in the integrand because this voltage drop has either already been present in the previous half period, or will appear on the load resistance in the half periods subsequent to switching on the control voltage.

From the two latter expressions

$$\begin{aligned} \Delta U_{L1} &= \frac{R_L}{R_i + R_L} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha} [u - 2 I_{c0} (R_i + R_L)] d(\omega t) = \\ &= \frac{R_L}{R_i + R_L} \frac{1}{\pi} \int_0^{\beta_I} (U'_C - u + 2 I_{c0} (R_i + R_L)) d(\omega t). \end{aligned} \quad (3,6)$$

The change in flux in core "B" which is operating in a reset phase in the first half period, is, according to (3,4)

$$-\Delta\Phi_B = \frac{1}{\omega N_G} \left\{ \int_{\beta_I}^{\alpha_1} [-u + U'_C + 2 I_{c0} (R_i + R_L)] d(\omega t) + \int_{\alpha_1}^{\pi} U'_C d(\omega t) \right\}. \quad (3,4)$$

A similar but opposite change of flux is necessary in core "B" in the second half period, for it to become saturated. Similarly to (3,3) this change of flux is

$$\Delta\Phi_B = \frac{1}{\omega N_G} \left\{ \int_0^{\beta_I} U'_C d(\omega t) + \int_{\beta_I}^{\alpha_2} [u - 2 I_{c0} (R_i + R_L)] d(\omega t) \right\}. \quad (F,26)$$

The change in the mean value of the voltage across the load resistance in the second half period is, from (3,4) and (F,26)

$$\Delta U_{L2} = \frac{R_L}{R_i + R_L} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [u - 2 I_{c0} (R_i + R_L)] d(\omega t) = \frac{R_L}{R_i + R_L} U'_C. \quad (F,27)$$

The change in the mean value of the voltage across the load resistance in the n -th half period may be deduced by the same argument with which ΔU_{L2} was obtained. Hence

$$\Delta U_{Ln} = \frac{R_L}{R_i + R_L} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n-1}} [u - 2 I_{c0} (R_i + R_L)] d(\omega t) = \frac{R_L}{R_i + R_L} U'_C. \quad (3,7)$$

The firing angle is generally within the angular range of stage II [see inequality (F,17a)].

Even in the most critical case when the m. a. is completely closed ($\alpha = \pi$) before U_C is applied, the firing angle α_1 will already in the first half period fall near the boundary of the angular range of stage II. This statement may, on the basis of (3,6) be seen to be true for example for the case of $\alpha = \pi$ as follows.

According to what has been said of equation (F,18) the approximate relation

$$\int_{\alpha_1}^{\pi} u d(\omega t) = \int_0^{\beta_I} (U'_C - u) d(\omega t) \quad (F,28)$$

may be obtained from (3,6). It follows from (F,28) that while u can be substituted by its tangent at $t = 0$, $\pi - \alpha_1 = \beta_I$. The firing angle falls just on the boundary of the angular range of stage II.

Appendix 3

Let the values of the variables first be determined for the stage IIIa subsequent to firing.

The assumptions necessary to construction of the fundamental equations are:

a) The flux in core "A" remains unchanged, that in core "B" changes in a negative direction;

b) rectifiers "1" and "3" are used in the forward, rectifiers "2" and "4" in the reverse direction. On the basis of these assumptions and of Fig. 2, the following five equations can be written for the five unknowns:

$$U'_C - i_{LIII} \frac{N_G}{N_C} R_F = u_{BIII}, \quad (F,29)$$

$$u_{BIII} + i_{AIII} R_i + i_{LIII} (R_F + R_L) + i_{BIII} R_z = 0, \quad (F,30)$$

$$i_{AIII} R_i + (i_{AIII} - i_{LIII}) R_z = u, \quad (\text{F},31)$$

$$u + u_{BIII} + i_{BIII} R_z = 0, \quad (\text{F},32)$$

$$-I_{c0} = i'_{CIII} + i_{BIII}. \quad (\text{F},33)$$

From equations (F,29)...(F,33):

$$i'_{CIII} = -I_{c0} + \frac{U'_C}{R_z} + \frac{u}{R_z} \frac{R_i + R_F \left(1 - \frac{N_G}{N_C}\right) + R_L + \frac{R_i(R_F + R_L)}{R_z}}{R_i + R_F + R_L + \frac{R_i(R_F + R_L)}{R_z}} \cong -I_{c0}, \quad (\text{F},34)$$

$$i_{AIII} = u \frac{1 + \frac{R_F + R_L}{R_z}}{R_i + R_L + R_F + \frac{R_i(R_F + R_L)}{R_z}} \cong \frac{u}{R_i + R_F + R_L}, \quad (\text{F},35)$$

$$i_{BIII} = -\frac{U'_C}{R_z} - \frac{u}{R_z} \frac{R_i + R_L + \frac{R_i(R_F + R_L)}{R_z} + R_F \left(1 - \frac{N_G}{N_C}\right)}{R_i + R_F + R_L + \frac{R_i(R_F + R_L)}{R_z}} \cong 0, \quad (\text{F},36)$$

$$i_{LIII} = \frac{u}{R_i + R_F + R_L + \frac{R_i(R_F + R_L)}{R_z}} \cong \frac{u}{R_i + R_F + R_L}, \quad (\text{F},37)$$

$$\begin{aligned} u_{BIII} &= U'_C - R_F \frac{N_G}{N_C} \frac{u}{R_i + R_F + R_L + \frac{R_i(R_F + R_L)}{R_z}} \cong \\ &\cong U'_C - R_F \frac{N_G}{N_C} \frac{u}{R_i + R_F + R_L}. \end{aligned} \quad (\text{F},38)$$

The assumptions made are correct and the operation of the m. a. is described by equations (F,34)...(F,38) as long as the inequality

$$u'_F = u \frac{R_F \frac{N_G}{N_C}}{R_F + R_i + R_L + \frac{R_i(R_F + R_L)}{R_z}} \cong u \frac{R_F \frac{N_G}{N_C}}{R_F + R_i + R_L} > U'_C \quad (4,1)$$

is fulfilled according to (F,38).

The validity range of stage IIIa is

$$\alpha \leq \omega t \leq \beta_{III}, \quad (\text{F},39)$$

where β_{III} may be determined from relation (4,4). It may easily be seen that from angle β_{III} to π , *i. e.* within stage IIIb, where the inequality

$$u \frac{R_F \frac{N_G}{N_C}}{R_F + R_i + R_L} < U'_C \quad (4,2)$$

is satisfied, equations (F,34) and (F,38) remain in force, with the condition that $-I_{c0}$ must everywhere be substituted for $+I_{c0}$. The only difference compared to case IIIa is that the flux in core "B" changes in the opposite, *i. e.* positive direction. The reason for the change in direction of the change in flux is clear from a comparison of (F,38) and (4,2).

Appendix 4

It is known that the transfer function of single time constant element is

$$Y(p) = \frac{A}{1 + pT}$$

If the input signal is

$$x_i = \frac{1}{Ap}$$

then the area given by the difference between the steady state value of the output signal x_0 and its instantaneous value (see Fig. F,4) is

$$\int_0^{\infty} [1 - x_0(t)] dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t [1 - x_0(t)] dt = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} p \left[\frac{1}{p} - \frac{A}{1 + pT} \frac{1}{Ap} \right] = T, \quad (\text{F},40)$$

i. e. it is just equal to the time constant.

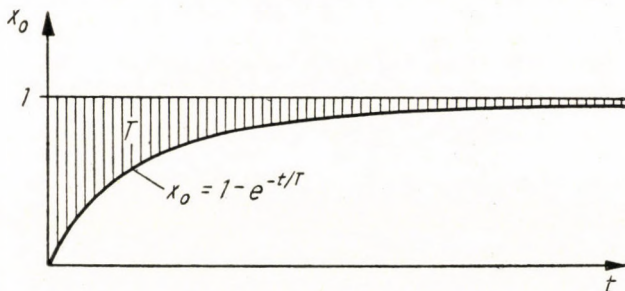


Fig. F4

Similarly to the single time constant element, the equivalent time constant of the voltage feedback m. a. is

$$T_e = \int_0^{\infty} [U_{L0} - U_L(t)] dt, \quad (\text{F},41)$$

where

$$U_{L0} = 1 \quad (\text{F},42)$$

is the steady state value of the output signal for an input of $U_C' = AF$.

If the transfer function (7,1) is used, the equivalent time constant, similarly to (F,40) is, from (F,41) and (F,42),

$$\begin{aligned} T_e &= \int_0^{\infty} [1 - U_L(t)] dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t [1 - U_L(t)] dt = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} p \left[\frac{1}{p} - A \frac{e^{-p\tau}}{1 - (1 - AA_F) e^{-p\tau}} \frac{AF}{p} \right]. \end{aligned} \quad (\text{F},43)$$

Developing the series of (F, 43) for $p = 0$, the value

$$T_e = \frac{\tau}{AA_F} \quad (7,5)$$

is obtained for the equivalent time constant.

If the transfer function expressions (7,1a) and, of course, (7,1b) are used, the expression from the equivalent time constant given by (7,5) is obtained.

Appendix 5

For a step change in control voltage of $U'_C = \frac{1}{A}$, the change in mean value of the output voltage — compared to the state preceding the transient process — is, in the n -th half period according to Fig. 11 and the summation formula for the geometric series

$$U_{Ln} = \frac{1 - (1 - AA_F)^{n+1}}{1 - (1 - AA_F)}, \quad (F,44)$$

while in the steady state the change, according to (7,3), is

$$U_{L0} = \frac{1}{AA_F}. \quad (F,45)$$

Supposing that the output voltage change reaches 63 percent of its ultimate value in the n -th half period,

$$\frac{U_{Ln}}{U_{L0}} = 1 - (1 - AA_F)^{n+1} = 0.63,$$

whence

$$n = \frac{\log 0.37}{\log (1 - AA_F)} - 1 \quad (F,46)$$

The time taken for the output voltage change to attain 63 percent of the ultimate value is given by the expression

$$T_{63} = \frac{n}{2f} = \frac{1}{2f} \frac{\log 0.37}{\log (1 - AA_F)} - 1 \quad (7,12)$$

Appendix 6

For an ordinary s. m. a. the largest control voltage is

$$U'_C = I_{c0} R'_C.$$

Therefore the maximum input power, using (6,7) is

$$P_{i,max} = I_{c0}^2 R'_C = \frac{H_{c0}^2 U_{Fe}^2}{N_G^2} R'_C. \quad (F,47)$$

The maximum output power, from (6,7) and (6,8) is

$$P_{0,\max} = U^2 \frac{R_L}{(R_L + R_i)^2} = 4^2 \frac{1}{\varrho(2 + \delta)} f^2 B_p^2 \frac{A_{Fe}^2 A_G R_L/R_i}{l_G (1 + R_L/R_i)^2}. \quad (\text{F,48})$$

The power gain is

$$K_p = 4^2 \frac{1}{\varrho(1 + \delta)} f^2 \frac{B_p^2}{H_{c0}^2} \frac{A_{Fe}^2 A_G}{l_{Fe}^2 l_G} \frac{N_G^2}{R_C} \frac{R_L/R_i}{(1 + R_L/R_i)^2}. \quad (\text{F,49})$$

The time constant of the m. a. [according to expressions (16,19) of reference [9]] is

$$T = \pi \frac{B_p}{H_{c0}} \frac{A_{Fe}}{l_{Fe}} \frac{N_G^2}{R'}. \quad (\text{F,50})$$

From (F,49) and (F,50) the figure of merit is

$$J_1 = \frac{K_p}{T} = \frac{4^2}{\pi} \frac{1}{\varrho(1 + \delta)} f^2 \frac{B_p}{H_{c0}} \frac{A_{Fe} A_G}{l_{Fe} l_G} \frac{R_L/R_i}{(1 + R_L/R_i)^2}. \quad (\text{8,5})$$

Appendix 7

First let the value of the output impedance for feedback from R_F be determined. The three equations needed are

$$U'_C = I'_C R'_C + R_F \frac{N_G}{N_C} I_L, \quad (\text{2,1})$$

$$I_L = S(I_{c0} + I'_C), \quad (\text{5,8})$$

$$U_L = I_L R_L, \quad (\text{4,9})$$

hence

$$I_L = (I_{c0} R'_C + U'_C) \frac{S R_L}{R'_C + S R_F \frac{N_G}{N_C}} \quad (\text{F,51})$$

and

$$U_L = (I_{c0} R'_C + U'_C) \frac{S}{R'_C + S R_F \frac{N_G}{N_C}}. \quad (\text{F,52})$$

From (F,51) and (5,7)

$$\left[\frac{\partial R_L}{\partial I_L} \right]_{U'_C = \text{const}} = - \frac{a^2}{\frac{2}{\pi} \frac{I_{c0} R'_C}{U_p} (I_{c0} R'_C + U'_C)}. \quad (\text{F,53})$$

From (F,52) and (5,7)

$$\left[\frac{\partial U_L}{\partial R_L} \right]_{U'_C = \text{const}} = (I_{c0} R'_C + U'_C) \frac{\frac{2}{\pi} \frac{I_{c0} R'_C}{U_p} \left[R_i + R_F \left(1 + \frac{N_G}{N_C} \right) \right] + R_F \frac{N_G}{N_C}}{a^2} \quad (\text{F,54})$$

where

$$a = \frac{2}{\pi} \frac{I_{c0} R'_C}{U_p} \left[R_i + R_F \left(1 + \frac{N_G}{N_C} \right) + R_L \right] + R_F \frac{N_G}{N_C}$$

From (F,53) and (F,54) the value of the output impedance is

$$Z_{0F} = \left[\frac{\partial U_L}{\partial I_L} \right] = \left| \left[\frac{\partial U_L}{\partial R_L} \right]_{U'_C = \text{const}} \right| \cdot \left| \left[\frac{\partial R_L}{\partial I_L} \right]_{U'_C = \text{const}} \right| =$$

$$= R_i + R_F \left(1 + \frac{N_G}{N_C} \right) + \frac{\pi}{2} \frac{R_F \frac{N_G}{N_C}}{I_{c0} R'_C \frac{U_p}{U_p}},$$

or, using (4,10),

$$Z_{0F} = R_i + R_L A_F \left(1 + \frac{N_C}{N_G} + \frac{\pi}{2} \frac{U_p}{I_{c0} R'_C} \right) \quad (9,3)$$

For feedback from R_L , since R_L must be substituted for R_F in (2.1), (F,51) and (F,52) become

$$I_L = (I_{c0} R'_C + U'_C) \frac{S}{R'_C + S R_L \frac{N_G}{N_C}} \quad (F,51a)$$

and

$$U_L = (I_{c0} R'_C + U'_C) \frac{S R_L}{R'_C + S R_L \frac{N_G}{N_C}}. \quad (F,52a)$$

The value of S , from (5,7) is

$$S = \frac{1}{\frac{2}{\pi} \frac{I_{c0}}{U_p} \left[R_i + R_L \left(1 + \frac{N_G}{N_C} \right) \right]} \quad (F,55)$$

From (F,51a), (F,55) and (4,13)

$$\left[\frac{\partial R_L}{\partial I_L} \right]_{U'_C = \text{const}} = - \frac{b^2}{\frac{2}{\pi} (1 + A_F) \frac{I_{c0} R'_C}{U_p} + A_F} \frac{1}{I_{c0} R'_C + U'_C}. \quad (F,53a)$$

From (F,52a), (F,55) and (4,13)

$$\left[\frac{\partial U_L}{\partial R_L} \right]_{U'_C = \text{const}} = (I_{c0} R'_C + U'_C) \frac{\frac{2}{\pi} \frac{I_{c0} R'_C}{U_p} R_i}{b^2}, \quad (F,54a)$$

where

$$b = \frac{2}{\pi} \frac{I_{c0} R'_C}{U_p} [R_i + R_L (1 + A_F)] + R_L A_F.$$

The value of the output impedance from (F,53a) and (F,54a) is

$$Z_{0L} = \left| \frac{\partial U_L}{\partial I_L} \right| = \left| \left[\frac{\partial U_L}{\partial R_L} \right]_{U'_C = \text{const}} \right| \cdot \left| \left[\frac{\partial R_L}{\partial I_L} \right]_{U'_C = \text{const}} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi} R_i \frac{\frac{I_{c0} R'_C}{U_p}}{\frac{2}{\pi} (1 + A_F) \frac{I_{c0} R'_C}{U_p} + A_F} = \frac{2}{\pi} \frac{R_i}{A_F} \frac{I_{c0} R'_C}{U_p} \quad (9,4)$$

In (9,4) the approximation

$$\frac{2}{\pi} (1 + A_F) \frac{I_{c0} R'_C}{U_p} \ll A_F$$

was used, which is justified because

$$U_p \gg I_{c0} R'_C.$$

REFERENCES

1. HARDER, E. L.—HORTON, W. F.: Response time of magnetic amplifiers. A.I.E.E. Transactions, part II (1950), pp. 1130.
2. HOUSE, C. B.: Flux preset high-speed magnetic amplifiers. A.I.E.E. Transactions, part II (1953), pp. 728.
3. SCORGIE, D. G.: Fast response with magnetic amplifiers. A.I.E.E. Transactions, part I (1953), pp. 741.
4. RAMEY, R. A.: On the mechanics of magnetic amplifiers operation. A.I.E.E. Transactions, part II (1951), pp. 1214.
5. GEYGER, W. A.: Magnetic amplifiers of the self-balancing potentiometer type. A.I.E.E. Transactions, part I (1953), pp. 383.
6. Городецкий: Сравнение некоторых типовых схем магнитных усилителей с внутренней обратной связью. Автоматика и телемеханика (1956) pp. 147.
7. CSÁKI, F.—FRIGYES, A.: Magnetic amplifiers with classical circuits. (Klasszikus kapcsolású mágneses erősítők.) Elektrotechnika (1958). pp. 294.
8. Йосифьян Каган: Основы следящего привода. (book) Госэнергоиздат 1954.
9. STORM, H. F.: Magnetic Amplifiers (book). John Wiley and Sons, New York (1955).

SUMMARY

The paper deals with the detailed qualitative and quantitative investigation of the static and dynamic behaviour of DC input and output self-saturating magnetic amplifiers with negative voltage or current feedback. The characteristic feature of the method of investigation used, was that the periodically changing quantities arising in the circuit which contains non-linear elements (cores, rectifiers), were determined by dividing the period up into stages within which the non-linear elements could be regarded as linear.

Since the processes taking place within the half-period are only familiar from the literature of the subject in respect to ordinary self-saturating magnetic amplifiers and not to those with feedback from the output signal, it was mainly the latter whose operation was investigated in detail.

These investigations resulted, on the one hand in a clear picture being obtained of the mechanism by which the amplifier operates, and on the other, in permitting the determination of the equations describing the static characteristics of the circuit.

Discussion of transient phenomena in the amplifier includes determination of the transfer function, the Nyquist diagram, the response and the time constant.

It was shown that the figure of merit of the amplifier increases if negative voltage feedback is applied.

The effect of feedback on the input and output impedance of the amplifier was investigated.

The construction of the block diagram of the amplifier led to the very valuable conclusion that with suitable additions a magnetic amplifier with theoretically unlimited power gain, operating within a period, could be built.

Finally, there are experimental results to substantiate the theoretical considerations.

SCHNELLWIRKENDER MAGNETVERSTÄRKER

I. NAGY

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz befaßt sich mit der eingehenden quantitativen und qualitativen Untersuchung des statischen und dynamischen Verhaltens eines ein- und ausgangseitig gleichstromgespeisten, selbstsättigenden Magnetverstärkers mit negativer Rückkoppelung von der ausgehenden Spannung bzw. dem Strom. Es ist charakteristisch für die angewendete Untersuchungsmethode, daß die periodisch wechselnden Größen in einem Stromkreis, der aus nichtlinearen Elementen (Eisenkern, Gleichrichter) besteht, so erfaßt werden, daß die Periode in Abschnitte unterteilt wird, innerhalb deren die nichtlinearen Elemente bereits als linear aufgefaßt werden können.

Da aus der Literatur die innerhalb einer Halbperiode stattfindenden Erscheinungen nur für die gewöhnlichen selbstsättigenden Magnetverstärker bekannt sind, die für die von Ausgangsgröße rückgekoppelten jedoch nicht, wurde zuerst deren Funktion eingehend untersucht.

Das Ergebnis der Untersuchung gab einerseits ein klares Bild über den Wirkungsmechanismus des Verstärkers, andererseits konnten die Gleichungen aufgestellt werden, die die statischen Kennlinien der Schaltung bestimmen. Bei der Besprechung der transienten Erscheinungen des Verstärkers wurden die Gleichungen der Übertragungsfunktion, Amplituden-Phasenkennlinie, Übergangsfunktion und Zeitkonstante bestimmt.

Es wurde bewiesen, daß bei der Rückkoppelung der negativen Spannung die Gütezahl des Verstärkers steigt.

Es wurde die Wirkung der Rückkoppelung auf die Eingangs- und Ausgangsimpedanz des Verstärkers untersucht.

Nach Aufzeichnung des Wirkschemas des Verstärkers ergab sich das sehr wertvolle Ergebnis, daß es die Möglichkeit besteht, durch zweckmäßige Ergänzung einen während einer Periode arbeitenden Magnetverstärker für theoretisch unendlich große Leistungsverstärkung zu bauen.

Die theoretischen Überlegungen wurden mit Meßergebnissen unterstützt.

AMPLIFICATEUR MAGNÉTIQUE À FONCTIONNEMENT RAPIDE

I. NAGY

RÉSUMÉ

Examen quantitatif et qualitatif détaillé du comportement statique et dynamique de l'amplificateur magnétique auto-saturant, à courant continu du côté entrant et du côté sortant, et à réaction négative à partir de la tension ou du courant sortant.

Ce qui caractérise la méthode d'examen employé, c'est que les quantités variant périodiquement et se présentant dans les circuits contenant des éléments non-linéaires (fer, soupape électrique), sont déterminées par décomposition de la période en des sections, à l'intérieur desquelles les éléments non-linéaires peuvent déjà être considérés comme linéaires.

Comme parmi les phénomènes se déroulant à l'intérieur de la demi-période, la littérature ne considère que le cas des amplificateurs magnétiques ordinaires, négligeant la réaction à partir du signal sortant, l'auteur effectue, avant tout, l'examen détaillé de ce dernier cas.

Au cours de la discussion du phénomène transitoire de l'amplificateur, l'étude détermine l'expression de la fonction de la transmission, de la courbe caractéristique amplitude/phase, de la fonction de transition et de la constante de temps.

L'auteur démontre que le facteur de qualité de l'amplificateur augmente avec la réaction de tension négative, et examine l'influence de la réaction sur l'impédance d'entrée et de sortie de l'amplificateur.

En traçant la courbe du rendement de l'amplificateur, on arrive à un résultat très intéressant, à savoir qu'avec un appoint convenable, il y a possibilité de construire un amplificateur magnétique fonctionnant sous période d'une amplification de puissance théoriquement infinie.

L'étude est terminée par la communication des résultats des mesures effectuées, appuyant les considérations théoriques de l'auteur.

БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩИЙ МАГНИТНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ

И. НАДЬ

РЕЗЮМЕ

Статья занимается подробными количественным и качественным исследованием статического и динамического поведения магнитного усилителя с внутренней обратной связью и входом и выходом на постоянном токе при отрицательной обратной связи по выходному напряжению или току. Применяемый метод исследования характерен тем, что периодически изменяющиеся величины цепи, содержащей нелинейные элементы (сердечник, выпрямители), определяются путем разделения периода на такие участки, в пределах которых нелинейные элементы можно считать уже линейными.

Ввиду того, что протекающие за полупериод явления известны из литературы только для обычных магнитных усилителей с внутренней обратной связью, но не известны для тех же усилителей с обратной связью по выходному сигналу, поэтому прежде всего выполнено подробное исследование работы последних.

В результате исследования, с одной стороны, получена ясная картина механизма работы усилителя, с другой стороны, определены уравнения, описывающие статические характеристики схемы.

При исследовании переходных процессов усилителя были определены передаточная функция, амплитудно-фазовая характеристика, переходная функция и выражение для постоянной времени.

Показано, что при отрицательной обратной связи по напряжению коэффициент добротности увеличивается.

Исследовано влияние обратной связи на импеданс входа и выхода.

После построения структурной схемы усилителя был получен тот очень важный результат, что, при соответствующих дополнениях имеется возможность построения магнитного усилителя с теоретически бесконечно большим усилением по мощности и быстродействием в пределах времени периода.

В конце, для подтверждения описанных рассуждения, приведены результаты измерений.

THE LIFE AND ACTIVITY OF J. CSONKA

P. CSONKA
D. ENG. SC.

[Manuscript received October 27, 1959]

This brief paper wishes to make known the life and activity of John CSONKA, the founder of the Hungarian Motor Industry, on the twentieth anniversary of his death.

J. CSONKA was born in Szeged January the 22nd, 1852. In his youth he worked in his fathers' smithy, and later, between 1871—77, in different factories, in Hungary, and abroad. He spent two years in Paris, and came back to Budapest in 1877. At that time he became the Leader of the training-shop of the Technical University.

J. CSONKA was making intensive experiments on perfecting the petrol and gas-motors which was at that time still at a primitive stage. He constructed, on the base of his experiments, a new type gas engine and obtained a patent for it entitled "*Gas- and petroleum-motor*" (1884).

Later on, together with D. BÁNKI, an engineer of the Ganz factory — his junior by 7 years — he continued his experiments. This collaboration resulted in a series of important inventions. The patents showing the results of this collective labour are: *Improvement on gas-motors* (1888), *Innovation on gas- and petroleum motors* (1888), *Control gear for four-cycle motors* (1889), *Gas- and petrol hammer* (1890), *Improvement on petrol motors* (1893), *Automatic tube-ignition for motors* (1896).

One of the most important results of the collaboration with D. BÁNKI was the so-called "*Bánki—Csonka motor*" (Figs. 1 and 2). On that were employed for the first time, two remarkable inventions of the collaborators: the carburetter and the ignition-tube.

The BÁNKI—CSONKA carburetter does not suck the petrol (gasoline) as gas, but dispersed and mixed with air, into the cylinder. The carburation happens similarly to the principle of the nozzle of a flower vaporiser — not by a blowing impulse — but by the engine's suction effect. The fixed fluid level is assured by a floating regulator. The engine's power-effect and the revolution-number can be regulated by a flap valve, and the most suitable explosive compound — also while working — by a needle valve.

The first specimen (Fig. 3) of the carburetter was already carried out

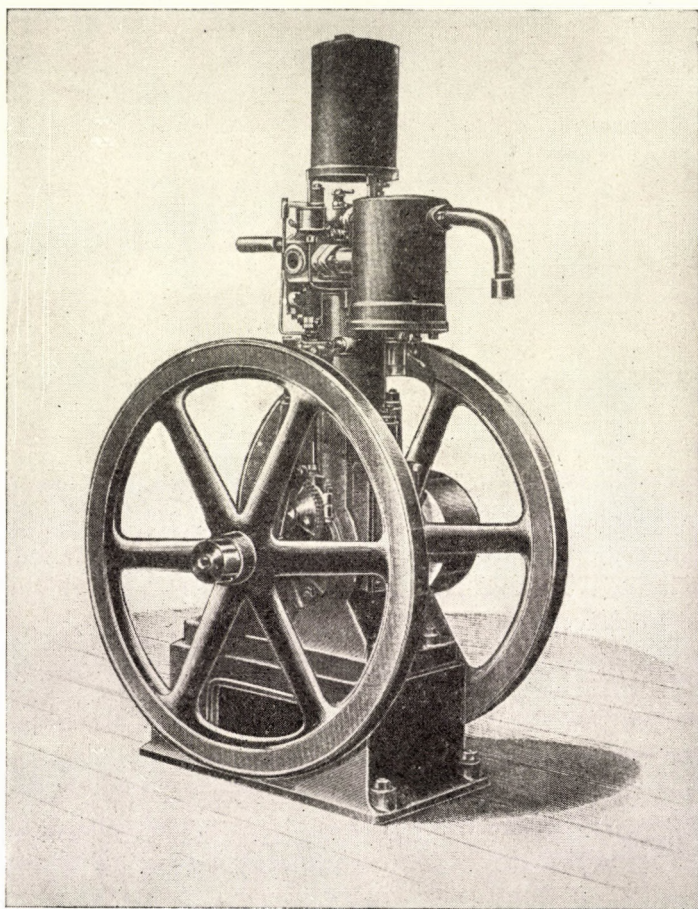


Fig. 1. Bánki—Csonka motor

by the collaborators in 1891, but the construction only got patented on February 11th, 1893, as one of the characteristic components of the Bánki—Csonka motor. The patent exactly described the working principle and the mechanism of the carburetter. This patent hindered W. MAYBACH — who was considered by many of people as being the inventor of the carburetter — to have his construction patented in Germany. In consequence of this W. MAYBACH could only get a French patent for his carburattor, only in August 17, 1893, it means half a year later than Bánki—Csonka's patent.

At that time the automatic *ignition-tube*, Bánki—Csonka type, was the most perfect ignition-construction. It consisted principally of a properly insulated copper tube, which had to be heated by a petroleum flame 5 minutes before starting the motor, after that, the lamp could be removed as the self-

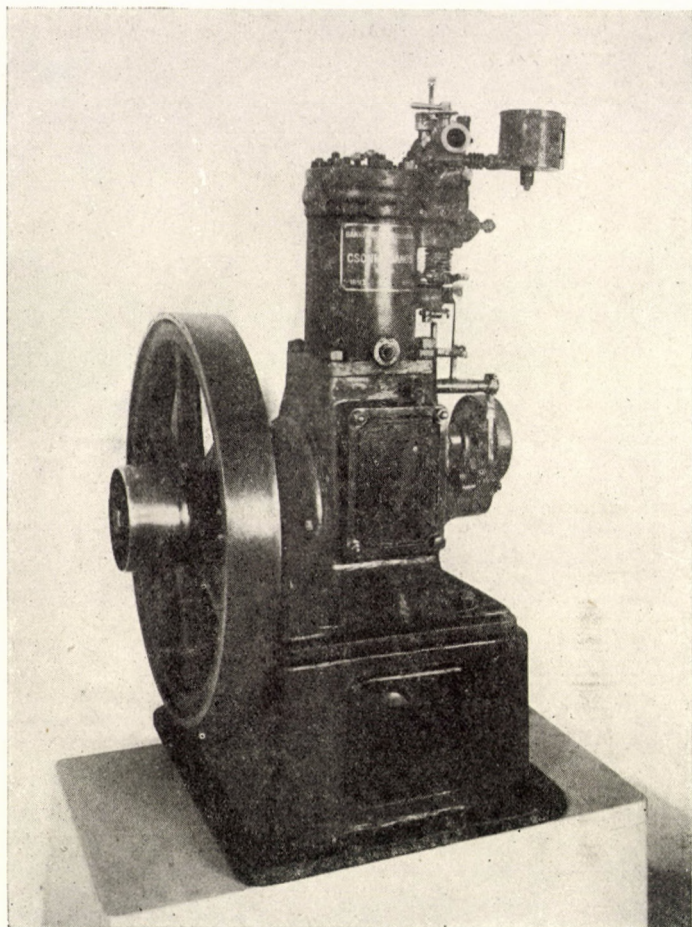


Fig. 2. Bánki—Csonka motor

heat of the explosions kept the ignition-tube constantly in a glowing state. The collaborators applied this construction, for the first time, in 1894. It was patented April 25th, 1896.

J. CSONKA had manufactured in the University's training-shop — by order of the Ganz Works—more than a hundred gasoline motors of the Bánki—Csonka type, brought on market by the Ganz Works, afterwards. These motors proved extremely good in practice.

D. BÁNKI and J. CSONKA were in collaboration until 1898. At this time the interest of J. CSONKA turned more and more towards motorcars. His experiments attracted the attention of the Hungarian Post. By the order of the Post he constructed — beginning from the year 1896 — several motorcars of the

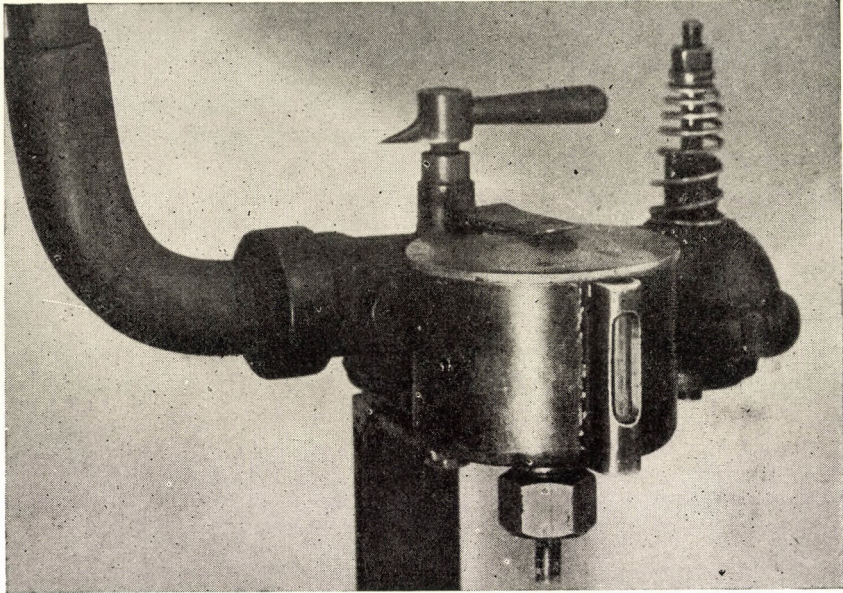


Fig. 3. The first carburettor of the world (1891). Patent BÁNKI—CSONKA

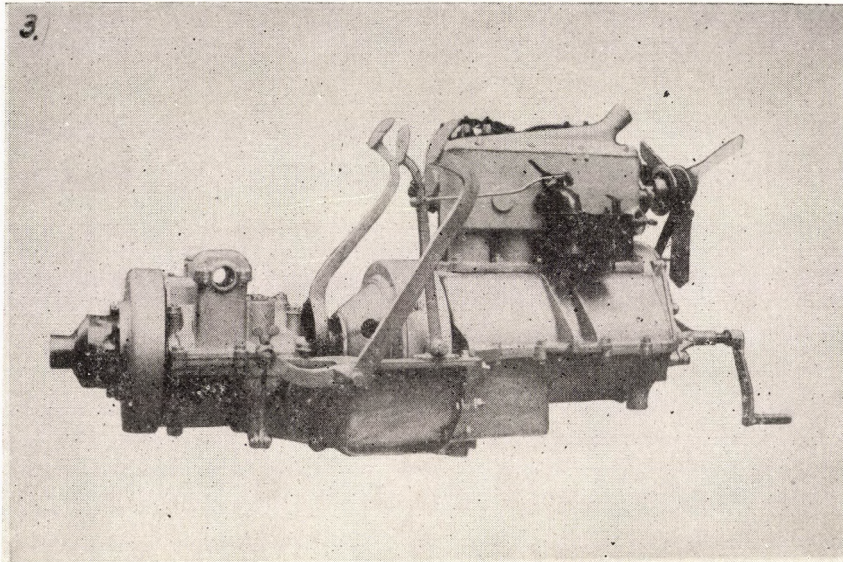


Fig. 4. The motor of the four-cylinder small car, system CSONKA (1911)

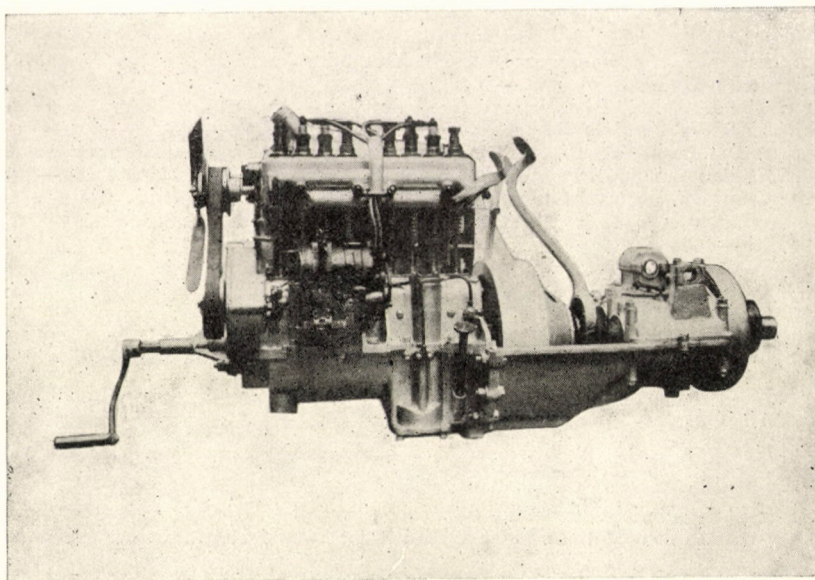


Fig. 5. The motor of the four-cylinder small car, system CSONKA (1911)

experimental kind. As these carriages proved to be very good, the Hungarian Post decided to organize the transport of parcels by automobiles, and ordered 8 pieces of these autocars designed by J. CSONKA. The driving-machinery of these was manufactured by J. CSONKA at the University's training-shop. He also drew up the plans for the further parcel-carrying postal motorcars and also for their motors. For the mail-collection in 1908 he constructed one-cylinder cars, and in 1912 four-cylinder ones.

The J. CSONKA motorcars were able to compete with any other motor of the time — yet they preceded them in many aspects. The motors were of shortstroke and high-speed, with blocks of cylinders cast in one. They were made, if possible, with ball-breaking supports. The clutch, gear box, and the brake of this small car, type 1912, were assembled in a common block. (Figs. 4 and 5.) The project and the manufacturing license was purchased by a Hungarian and also by a Canadian factory.

He retired from his technical post after working there for 48 years. At this time — at the age of 73 — he founded an independent work-shop (1924). This developed very rapidly, and in 1925, as "*John Csonka Engine Works*" went on to manufacturing small motors. The new type of these motors were designed in his old age by J. CSONKA himself. He applied for his last license in 1935, at the age of 84.

He met his death on October 27th, 1939, at the age of 88.

REFERENCES

- D. BÁNKI: Gas- und Petroleumhammer von Bánki und Csonka. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 38 (1894), pp. 582—584.
- E. MAYER: Die Gas- und Petroleummotoren auf den Landesausstellungen Genf u. Berlin. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 41 (1897), p. 422.
- N. FREYTAG: Die Explosionsmaschinen auf der Millenniums-Landesausstellung in Budapest 1896. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 41 (1897), pp. 357—363.
- P. CSONKA: Csonka János élete és munkássága (The Life and Activity of J. Csonka). *A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei*, 25 (1960) pp. 343—404.

DAS LEBEN UND SCHAFFEN VON J. CSONKA

P. CSONKA

Dieser kleine Bericht bezweckt das Leben und die Tätigkeit von JOHANN CSONKA, Gründer des ungarischen Motorenbaus, anlässlich der zwanzigsten Jahreswende seines Todes darzulegen.

J. CSONKA wurde am 22. Januar, 1852 in Szeged geboren. In seinen jungen Jahren arbeitete er in der Schmiede seines Vaters; in den Jahren zwischen 1871 und 1877 war er in verschiedenen in- und ausländischen Fabriken tätig. Er verbrachte zwei Jahre in Paris, von wo er in 1877 nach Budapest zurückkehrte. Da wurde er Leiter der Lehrwerkstatt der Technischen Hochschule Budapest.

Zur Vervollkommnung der damals noch im primitiven Stadium befindlichen Gas- und Petroleummotoren führte J. CSONKA in der Lehrwerkstatt der Technischen Hochschule eingehende Versuche durch. Als Ergebnis seiner diesbezüglichen Versuche konstruierte er einen neuartigen Gasmotor, den er unter dem Namen »Gas- und Petroleummotor« patentieren ließ (1884).

Später setzte er seine Versuche in Gemeinschaft mit dem um sieben Jahre jüngeren Ingenieur der Ganz-Fabrik, DONAT BÁNKI, fort. Diese Zusammenarbeit hatte eine ganze Reihe von bedeutenden Erfindungen zur Folge. Das Ergebnis der erfolgreichen Zusammenarbeit kennzeichnen die folgenden Patente: »Neuerungen an Gasmaschinen« (1888), »Neuerungen an Gas- und Petroleummotoren« (1888), »Steuerung für Viertaktmotore« (1889), »Gas- und Petroleumhammer« (1890), »Neuerungen an Petroleummotoren« (1893), »Automatischer Rohrzünder für Gas- und Petroleummotore« (1896).

Einer der schönsten Erfolge der Zusammenarbeit mit D. BÁNKI war der sogenannte Bánki—Csonka-Motor (Fig. 1 und 2). Zum erstenmal gelangten hier zwei bedeutsame Erfindungen der Arbeitsgenossen zur Anwendung: der Vergaser und der automatische Rohrzünder.

Durch den Bánki—Csonkaschen Vergaser wird das Petroleum (Benzin) nicht in Gasform, sondern in Form von aus Flüssigkeitströpfchen bestehenden Wolken dem Motor zugeführt. Die Zerstäubung erfolgt nach einem Prinzip, ähnlich dem der Spritzdüse eines Blumenberieslers, doch wird hier an Stelle der Blaswirkung die Saugwirkung des Motors herangezogen. Der Stand des Flüssigkeitsspiegels wird mit Hilfe einer Schwimmervorrichtung gesichert. Die Leistung des Motors und die Umdrehungszahl kann mit Hilfe eines Flatterventils, die günstigste Zusammensetzung des Explosionsgemisches mit Hilfe eines Nadelventils auch während des Betriebes geregelt werden.

Das erste Exemplar des Vergasers (Fig. 3) wurde von den Erfindern bereits im Jahre 1891 fertiggestellt, doch wurde die Konstruktion, als ein charakteristischer Bestandteil des Bánki—Csonkaschen Motors, erst zwei Jahren später, am 11. Februar 1893, patentiert. In der Patentanmeldung wird die Konstruktion und Wirkungsweise des Vergasers genau beschrieben. Durch diese Patentanmeldung wurde W. MAYBACH — der irrtümlicherweise von vielen für den Erfinder des Vergasers gehalten wird — daran verhindert, seine Konstruktion in Deutschland patentieren zu lassen. So konnte W. MAYBACH für seinen Vergaser nur den französischen Patentschutz erhalten, doch wurde auch dieses Patent erst am 17. Aug. 1893 erteilt, das heißt ein halbes Jahr nach erfolgter Erteilung des Bánki—Csonkaschen Patentschutzes.

Der automatische Rohrzünder von Bánki—Csonka war seinerzeit die vollkommenste Zündvorrichtung. Im Wesen bestand dieser Zünder aus einem geschlossenen und entsprechend isolierten Rohr aus Kupfer, das vor dem Anlassen des Motors 5 Minuten lang mit einer Petroleumflamme vorgewärmt werden mußte. Von nun an konnte die Lampe entfernt werden, da in der Folge das Zündrohr lediglich durch die Wärme der Explosionen in glühendem Zustand erhalten wurde. Diese Konstruktion wurde von den Erfindergenossen in 1894 zum erstenmale zur Anwendung gebracht. Die Anmeldung des Patentes erfolgte aber erst am 25. April, 1896.

JOHANN CSONKA verfertigte in der Lehrwerkstatt der Technischen Hochschule, im Auftrage der Ganz-Fabrik, mehrere hundert Stück Benzinmotore nach dem System Bánki—Csonka, die sodann von der Ganz-Fabrik abgesetzt wurden. Diese Motore bewährten sich in der Praxis ausgezeichnet.

Die Kooperation von D. BÁNKI und J. CSONKA dauerte bis 1898. Zu dieser Zeit wurde die Aufmerksamkeit von J. CSONKA immer mehr auf die motorisierten Fahrzeuge gelenkt. Seine Versuche erweckten das Interesse der ungarischen Postverwaltung. Im Auftrage dieser konstruierte er von 1896 an mehrere Versuchskraftwagen. Im Besitze der an diesen Versuchskraftwagen gewonnenen günstigen Erfahrungen beschloß die ungarische Postverwaltung, die Beförderung der Pakete mit Kraftfahrzeugen zu besorgen und bestellte zu diesem Zwecke acht Kraftwagen nach den Plänen von J. CSONKA. Die Getriebe dieser Kraftwagen wurden in der Lehrwerkstatt der Technischen Hochschule von J. CSONKA selbst verfertigt. Die Pläne der weiteren Kraftwagen für Paketenbeförderung und auch die Motore derselben wurden gleichfalls von ihm selbst verfertigt. Zur Einsammlung der Briefe konstruierte er für die Postverwaltung in 1908 einen Einzylinder-, in 1912 einen Vierzylinder-Kleinwagen.

Die Kraftwagenmotore von J. CSONKA waren den Motoren der damaligen Zeiten in jeder Beziehung ebenbürtig, sie gingen ihnen sogar in zahlreicher Beziehung voraus. Diese Motore waren schnellaufende Kurzhubmotore mit Einguß-Zylinderblöcken, und wo nur irgendmöglich, wurden Kugellager angewendet. Die Motore, Wellenkupplungen, Wechselgetriebe und Bremsen seiner Kleinwagen vom Jahre 1912 waren in einem gemeinsamen Block zusammengebaut (Fig. 4 und 5). Die Pläne und Baulizenz seines Motors wurden von einer inländischen und auch einer kanadischen Fabrik erworben.

Nach einer schaffenden Arbeit von 48 Jahren zog er sich von seinem Amte an der Technischen Hochschule in den Ruhestand zurück. Zu dieser Zeit — im Alter von 73 Jahren — gründete er eine selbständige Werkstatt (1924). Diese kam zu einer rapiden Entwicklung, und kehrte unter dem Namen »Maschinenfabrik von JOHANN CSONKA« bereits im Jahre 1925 zur Erzeugung von Kleinmotoren über. Die neuen Motorentype der Fabrik wurden von dem bejahrten J. CSONKA selbst konstruiert. Sein letztes Patent meldete er im Jahre 1935, in einem Alter von 84 Jahren, an.

Am 27. Oktober, 1939, in einem Alter von 88 Jahren, schloß ihm die Augen der Tod.*

LA VIE ET L'OEUVRE DE J. CSONKA

P. CSONKA

RÉSUMÉ

A l'occasion du vingtième anniversaire de la mort de JEAN CSONKA, pionnier de la fabrication des moteurs en Hongrie, nous donnons ici un court aperçu de sa vie et de ses travaux.

J. CSONKA naquit à Szeged le 22 janvier 1852. Dans ses années de jeunesse, il travailla dans la forge de son père, puis de 1871 à 1877, en différentes fabriques du pays et de l'étranger. Il passa deux ans à Paris, d'où il entra en 1877 à Budapest. On le nomma alors chef des ateliers d'études de l'Université Technique.

A son poste, J. CSONKA poursuivit des recherches approfondies en vue du perfectionnement des moteurs à combustion interne (à gaz et à pétrole), alors encore au stade primitif. Un moteur à gaz d'un système nouveau, breveté en 1884 sous le nom de «Moteur à gaz et à pétrole», fut le résultat de ces premières recherches. Plus tard, il continua celles-ci en collabora-

* *Schriftum* siehe am Ende des englischen Textes.

tion avec DONÁT BÁNKI, un ingénieur de l'usine Ganz, de sept ans plus jeune que lui. De cette collaboration est née toute une série d'inventions importantes. Les brevets marquant les étapes de cette coopération fructueuse sont les suivantes: *Innovation sur les machines à gaz* (1888), *Innovations sur les moteurs à gaz et à pétrole* (1888), *Organe de distribution pour moteurs à quatre temps* (1889), *Marteau à gaz et à pétrole* (1890), *Innovations sur les moteurs à pétrole* (1893), *Tube d'allumage automatique pour moteurs à gaz et à pétrole* (1896).

Un des résultats les plus brillants de son travail en commun avec D. BÁNKI fut le moteur dit *Bánki-Csonka* (figs. 1 et 2). C'est dans ce moteur que, pour la première fois, ont trouvé emploi les inventions importantes des deux associés: le carburateur et le tube d'allumage automatique.

Le *carburateur* de Bánki-Csonka introduit le pétrole (l'essence) non pas en état gazeux, mais sous forme d'un nuage de fines gouttelettes de liquide. La pulvérisation s'opère selon le principe de fonctionnement du pulvérisateur pour fleurs, mais utilisant au lieu soufflage de l'effet aspirant du moteur. Un flotteur assure le niveau constant du liquide. La puissance du moteur et le nombre de tours sont commandés par un papillon, la composition la plus appropriée du mélange détonant peut-être réglée, même pendant la marche, par un soupape à pointeau.

Le premier modèle du carburateur (figure 3) fut mis au point dès 1891 par les inventeurs, mais ce mécanisme ne fut breveté que deux ans plus tard, le 11 février 1893, comme un des organes caractéristiques du moteur Bánki-Csonka. Le brevet décrit de façon précise le mécanisme et le principe de fonctionnement du carburateur. C'est ce brevet qui empêcha W. MAYBACH — que d'aucuns tiennent, à tort, pour l'inventeur du carburateur — de faire breveter son mécanisme en Allemagne. W. MAYBACH ne réussit ainsi à obtenir pour son carburateur qu'une licence française délivrée en date du 17 août 1893, donc six mois après la délivrance du brevet de BÁNKI et CSONKA.

Le *tube d'allumage automatique* de Bánki-Csonka fut, à son époque, le plus perfectionné des dispositifs d'allumage. En principe, c'est un tube de cuivre fermé et dûment isolé, devant être chauffé à la flamme d'une lampe à pétrole pendant cinq minutes, avant le démarrage du moteur. A partir de ce moment, la lampe n'est plus nécessaire, car la chaleur produite par les explosions suffit, par la suite, à maintenir le tube d'allumage en incandescence permanente. Ce fut en 1894 que les deux inventeurs associés employèrent pour la première fois ce mécanisme, qui ne fut cependant breveté que le 25 avril 1896.

Dans les ateliers d'études de l'Université, J. CSONKA avait fabriqué, pour le compte des Usines Ganz, plusieurs centaines de moteurs à essence de type Bánki-Csonka. Ces moteurs, mis en vente par Ganz, avaient fait brillamment leurs preuves dans la pratique.

La collaboration de D. BÁNKI et J. CSONKA dura jusqu'à 1898. A cette époque déjà, l'intérêt de J. CSONKA s'était tourné de plus en plus vers les véhicules à moteur. Ses recherches éveillèrent l'attention de la direction, des P. T. T. Chargé par les postes hongroises, il construisit à partir de 1896, plusieurs véhicules à moteur à titre d'essai. Convaincu par les expériences favorables, faites avec ces véhicules, la direction des P. T. T. hongrois décida en 1904, d'organiser le service des colis par automobiles, et commanda huit voitures d'après les plans de J. CSONKA. Les mécanismes d'entraînement de ces voitures ont été exécutés aux ateliers d'études de l'Université Technique, par J. CSONKA lui-même. C'était également lui qui avait exécuté les projets et les moteurs des autres automobiles postales. Il a aussi construit, en 1908, une petite voiture à un cylindre, et en 1912 un autre type à quatre cylindres, destinés à l'enlèvement de la correspondance.

Les moteurs d'automobiles de J. CSONKA ont bien soutenu la concurrence des moteurs de l'époque, et les ont même devancés sous de nombreux rapports. Ses moteurs étaient à courte course et à l'allure rapide, avec cylindres coulés en un bloc, et munis partout, où cela s'avérait réalisable, de roulements à billes. Le moteur, le dispositif d'embrayage, la boîte de vitesses et le frein de ses petites voitures de 1912 ont été réunis en un bloc commun (figs. 4 et 5). Les plans et le droit de fabrication de son moteur ont été achetés par une entreprise hongroise et une autre, canadienne.

Après 48 ans de service, il prit sa retraite, abandonnant son poste à l'Université Technique. C'est alors, à l'âge de 73 ans, qu'il posa les fondements de sa propre entreprise (1924). Cet atelier prit bientôt un essor considérable, et sous le nom de »*Fabrique de machines Jean Csonka*«, se spécialisa dès 1925, dans la fabrication des petits moteurs. Les nouveaux types de moteurs de la fabrique ont été élaborés par le vieux J. Csonka lui-même, qui obtint son dernier brevet en 1935, à l'âge de 84 ans.

Il décéda le 27 octobre 1939, âge de 88 ans.*

* Pour la Bibliographie, se reporter à la fin du texte anglais.

ЖИЗНЬ И ТРУДЫ Я. ЧОНКА

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

Настоящая небольшая статья ставит целью ознакомить читателя с жизнью и трудами Яноша ЧОНКА, создателя моторостроения в Венгрии, по случаю 20-ой годовщины со дня его смерти.

Я. Чонка родился в Сегеде 22 января 1852 г. В юношеские годы он работал в кузнице своего отца, затем между 1871—1877 гг. на различных венгерских и зарубежных заводах. Два года он провел в Париже, откуда он в 1877 г. вернулся в Будапешт. Его в это время назначили начальником учебной мастерской Будапештского политехнического института.

Я. Чонка в учебной мастерской института проводил эксперименты по усовершенствованию газовых и керосиновых моторов, которые в то время были еще очень несовершенными. В результате проводившихся им экспериментов он сконструировал газовый мотор новой системы, который он запатентовал в качестве «Газового и керосинового мотора» (1884).

Позднее совместно с Д. Банки (который на 7 лет был моложе его и работал на заводе Ганз) он продолжал свои эксперименты. В результате этого сотрудничества был разработан целый ряд крупных изобретений. В итоге совместной работы им были выданы следующие патенты: Новаторское изменение газовых машин (1888), Новаторские изменения газовых и керосиновых моторов (1888), Управляющий механизм для четырехтактных моторов (1889), Газовый и керосиновый молот (1890), Новаторские изменения керосиновых моторов (1893), Автоматический трубчатый зажигатель для газовых и керосиновых моторов (1896).

Одним из наиболее выдающихся достижений сотрудничества с Д. Банки был т. н. мотор Банки—Чонка (рис. 1—2). На этом моторе впервые были применены крупные изобретения их коллектива: распылитель и автоматический трубчатый зажигатель.

Распылитель системы Банки—Чонка подает керосин (бензин) в мотор не в виде газа, а в форме облака, состоящего из мелких капель жидкости. Распыление производится по схожему с применением при орошении цветов распылителем принципу, но не нагнетающим эффектом, а всасывающим эффектом мотора. Постоянство уровня жидкости обеспечивается поплавком. Мощность мотора и число оборотов можно регулировать при помощи клапана с бабочкой, а наиболее выгодный состав горячей смеси иглочатого клапана также во время работы двигателя.

Первый образец распылителя (рис. 3) был изготовлен этим коллективом в 1891 году, но конструкция его была запатентована лишь через два года — 11 февраля 1893 г. в качестве одной основной характерной детали мотора Банки—Чонка. В патенте дается точное описание конструкции распылителя, а также принцип его работы. Этот патент помешал В. Майбаху запатентовать свою конструкцию в Германии (многие ошибочно считали, что распылитель был его изобретением). Таким образом, В. Майбаху удалось получить лишь французский патент, и даже его только 17 августа 1893 года, т. е. на полгода позднее патента Банки—Чонка.

Автоматический трубчатый зажигатель системы Банки—Чонка в свое время был наиболее совершенным зажигательным устройством. Он, по существу, состоял из закрытой и соответствующим образом изолированной трубки, изготовленной из красной меди. Эту трубку перед пуском мотора необходимо было подогревать керосиновым пламенем в течении 5 мин. По истечении этого времени керосиновую лампу можно было убрать, т. к. в дальнейшем тепло взрыву уже само собой постоянно накаляло медную трубку. Это приспособление изобретательский коллектив применили впервые в 1894 году. Запатентовано же оно было только 25 апреля 1896 года.

В учебной мастерской при политехническом институте, где начальником был Янош Чонка, по заказу завода Ганз было изготовлено несколько сот бензиновых моторов системы Банки—Чонка, которые затем были проданы заводом Ганз. Эти моторы отлично оправдались на практике.

Сотрудничество Доната Банки и Яноша Чонка продолжалось до 1898 года. С этого времени Я. Чонка все больше и больше уделяет внимание оснащенным мотором транспортным средствам. Его опыты обратили на себя внимание венгерской почты. По поручению почты, начиная с 1896 г. им было сконструировано ряд опытных моторных транспортных средств. Располагая положительным опытом, приобретенным при испытаниях экспериментальных образцов, венгерская почта решила, что перевозку посылок будет производить при помощи автомобилей, и почтовым управлением было заказано 8 автомашин по проектам Я. Чонка. Приводной механизм этих автомашин был изготовлен в

упомянутой уже учебной мастерской самим Я. Чонка. Им же были разработаны проекты остальных заказанных венгерской почтой автомашин для перевозки посылок и изготовлены моторы к ним. Для сбора почтой писем в 1908 им была сконструирована одноцилиндровая машина, а в 1912 году четырехцилиндровая.

Автомобильные моторы Я. Чонка с моторами того времени могли конкурировать во всех отношениях, более того его моторы во многих отношениях были лучше их. Его моторы имели небольшой ход поршня и были быстроходны, имели монолитный блок цилиндров, и где это только было возможно, изготовлялись на шариковых подшипниках. У разработанной им в 1912 г. конструкции малолитражной автомашины мотор, сцепление, коробка передач и тормоз были собраны в общий блок (рис. 4—5). Проект его мотора и лицензию на его изготовление были куплены одной венгерской и одной канадской фирмами.

Из института он ушел в пенсию после 48 лет работы. В это время ему исполнилось 73 года, и он организовал собственную мастерскую (1924). Эта мастерская начала бурное развитие и в 1925 г. как машиностроительный завод Янош Чонка начал выпускать маломощные моторы. Новые типы моторов завода были разработаны сами Яношем Чонка. Последний патент был им заявлен в 1935 г. в 84 летнем возрасте.

Он умер в 88 летнем возрасте 27 октября 1939 г.

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Budapest, V., Nádor utca 7.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante :

Acta Technica
Budapest, V., Nádor utca 7.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest VI., Népköztársaság útja 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу :

Acta Technica
Budapest, V., Nádor utca 7.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest VI., Népköztársaság útja 21. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные

INDEX

- Kereszty, P.* : La capacité de gauchissage des véhicules de chemin de fer III. — Die Verwindung von Eisenbahnwagen III. — Twisting Capacity of Railway Carriage Structures III. — *Керестю, П.* : Кручивание каркасов железнодорожных вагонов, III. 3
- Hangos, I., Toperczer, H. & Pozsgay, Gy.* : Influence of Binders upon Surface Brightness of Cathode-Ray Tube Screens III. — Einfluß des Bindemittels auf die Oberflächenhelligkeit von Kathodenstrahlröhrenschirmen III. — L'effet du liant sur la brillante des écrans des tubes cathodiques III. — *Хангоси, И., Топерцер, Х. и Позсгай, Д.* : Влияние связующего вещества на поверхностный блеск экранов катодных трубок, III. 47
- Szöke, B.* : Special Features of the Loadability of Lathes — Charakteristische Beziehungen der Belastbarkeit der Drehbank — Quelques spécialités concernant la capacité de charge des tours — *Секе, Б.* : Некоторые характерные черты нагружаемости токарного станка 57
- Csonka, P.* : On the Stress-Function of the Circular Cylindrical Shell — Über die Spannungsfunktion der Kreiszyinderschalen — Sur la fonction du voile cylindrique circulaire élastique — *Чонка, П.* : О функции напряжения эластичной цилиндрической оболочки 87
- Balla, Á.* : La poussée des terres sur les murs de soutènement dans le cas de massifs complètement plastiques — Der Bodendruck auf eine Stützmauer im Falle eines vollkommen plastischen Erdkörpers — The Soil Pressure on a Sustaining Wall, in the Case of a Perfectly Plastic Earth Body — *Балла, А.* : Давление грунта, действующее на опорную стену, в случае совершенно пластичного тела грунта 99
- Nemesdy, E.* : Die strenge Berechnung der verhinderten Drehung von Langschienen und lückenlosen Gleisen auf Grund experimenteller Gleiswiderstandskurven — The Exact Calculation of the Dilatation of Long and of Continuous Rails, on the Base of Experimental Track Resistance Curves — Calcul exact de la dilatation des rails longs et des voies ferrées sans joints, sur base des courbes expérimentales de résistance des voies ferrées — *Немешди, Э.* : Точный дилатационный расчет и бесстыковых рельсовых путей на основе эмпирических кривых сопротивления рельсовых путей 117
- Rétháti, L.* : Capillary Properties of Soils — Die Kapillarität des Bodens — Les caractéristiques capillaires du sol — *Рэтхати, Л.* : Капиллярные свойства грунтов 153
- Nagy, I.* : A Fast Response Magnetic Amplifier — Schnellwirkender Magnetverstärker — Amplificateur magnétique à fonctionnement rapide — *Надь, И.* : Быстродействующий магнитный усилитель 183
- Csonka, P.* : The Life and Activity of J. Csonka — Das Leben und Schaffen von J. Csonka — La vie et l'oeuvre de J. Csonka — *Чонка, П.* : Жизнь и труды Я. Чонка 235

ACTA
TECHNICA
ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT

A. GELEJI

TOMUS XXIX

FASCICULI 3-4



1960

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V. ALKOTMÁNY UTCA 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó”-nál (Budapest V. Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-44), a külföld számára pedig a „Kultúra” Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviselőinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

DETERMINATION OF LIMITS IN SOLUTIONS OF PLATE PROBLEMS

K. SZMODITS
CAND. TECHN. SC.

HUNGARIAN SCIENTIFIC INSTITUTE FOR STRUCTURAL ENGINEERING, BUDAPEST

[Manuscript received September 11, 1958]

A lower and an upper limit to the solution of linear boundary value problems are defined in this paper. These limits are values characteristic of the approximate solutions of the partial differential equations investigated. As it is known, the approximate solutions may be found in two ways: either by a linear combination $\sum_{v=1}^m a_v g'_v$ of the functions $g'_v(x, y)$ satisfying precisely the boundary conditions, at the same time satisfying the differential equation "as nearly as possible", or by a linear combination $\sum_{\mu=1}^n a_\mu g''_\mu$ of the functions $g''_\mu(x, y)$ which precisely satisfies the differential equation, satisfying also the boundary conditions "as nearly as possible". The constants a_v and a_μ may be determined from one of the systems of differential equations which express a minimum principle, or, in the case of orthogonal functions, from closed formulae. The first procedure is known as the domain method, the second as the boundary method.

The above linear combinations of the functions g'_v and g''_μ constitute series tending towards the required solution, though they must not be convergent series. It is sufficient if the variance integrals of the approximate solutions with successively increasing values of v and μ form monotonous series tending to zero. If the required solution is $u(x, y)$, the approximate solution is $u'(x, y) = \sum_{v=1}^m a_v g'_v$, the range of validity is V and φ is any integrable function, then

$$\int_V [\varphi(u')]^2 dV = \int_V [\varphi \sum_{v=1}^m (a_v g'_v)]^2 dV$$

tends towards the value $\int_V [\varphi(u)]^2 dV$ of the exact solution and $\int_V [\varphi(u')]^2 dV$ is a limit of $\int_V [\varphi(u)]^2 dV$ for any value of m .

The determination of a lower and an upper limit for $\int_V [\varphi(u)]^2 dV$ will

be discussed, the lower limit being the $\int_V [\varphi(u')]^2 dV$ value, the upper limit the $\int_V [\varphi(u'')]^2 dV$ value of the approximate solutions u' , obtained by the domain method and u'' , by the boundary method, respectively.

The solutions u' and u'' are lower and upper limits of the solution u if the following conditions are fulfilled. In this deduction the theory of function-spaces [1] is applied.

Let approximate solutions that may be produced by series composed of an infinite number of linearly independent functions, correspond to points in an infinite function-space and let these points be given as the ends of vectors

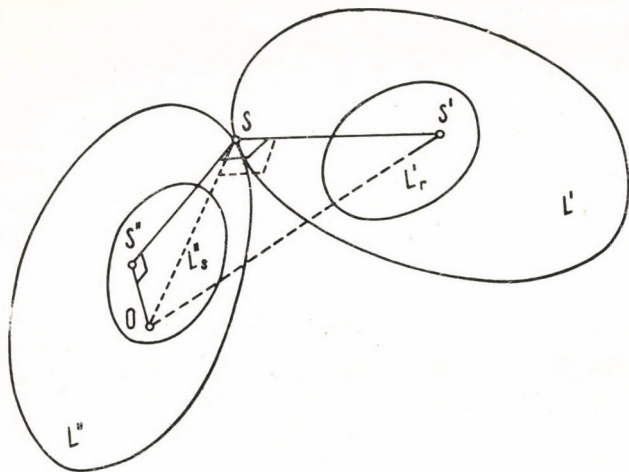


Fig. 1

beginning at point 0. Let the ends of the vectors S' of functions exactly satisfying the boundary conditions lie in an infinite subspace L' , and let the ends of the vectors S'' of functions exactly satisfying the differential equation lie in an infinite subspace L'' . It follows from the uniqueness of the solution that the subspaces L' and L'' have only one point in common, the end of the vector S of the function which is a solution of the problem. This is geometrically represented symbolically in Fig. 1.

Within range V , the scalar product of the function vectors $S_1 \leftrightarrow \varphi(u_1)$ and $S_2 \leftrightarrow \varphi(u_2)$ is defined by the value

$$S_1 \cdot S_2 = \int_V \varphi(u_1) \varphi(u_2) dV,$$

so that

$$S_1^2 = \int_V \varphi(u_1) \varphi(u_1) dV \quad (1)$$

and since the metric of the function-space is positive-definite, if $S^2 = 0$, $S = 0$.

The ends of vectors representing solutions obtainable by the domain method and a given r number of linearly independent functions are in the subspace L' and a linear portion of space of dimension L'_r , and thus define this portion of space. Similarly, the endpoints of vectors representing solutions obtainable by the boundary method and a given s number of linearly independent functions define the subspace L'' and a linear portion of space of dimension L''_s .

The constants of the terms of the function series giving the solutions S' and S'' are determined from the condition of optimum approximation to the solution S , so that the values $(S - S'')^2$ and $(S - S')^2$, *i. e.* the sum of the variance of the approximation should be a minimum. Hence it follows that the point S'' of the portion of space L''_s and the point S' of the portion of space L'_r are the points of these space portions that lie closest to S . Thus the vectors $S - S''$ and $S - S'$ are perpendicular to the portions of space L''_s and L'_r , respectively, *i. e.* according to the definition of orthogonality the vectors $S' - S''$ and $S - S'$ are perpendicular to all vectors in the portions of space L''_s and L'_r , respectively. The function φ should be chosen so that the subspaces L' and L'' should also be orthogonal and let us suppose that the vector 0 is in the portion of space L''_s . Since the hypotenuse of the right-angled triangle O, S'', S is a side of the right-angled triangle O, S', S , Fig. 1. permits the direct conclusion that

$$S''^2 \leq S^2 \leq S'^2.$$

Summing up the result, the following theorem may be established:

The values S''^2 and S'^2 of solutions obtained by the boundary and the domain methods of a function to solve a boundary value problem are lower and upper bounds, respectively, of the value S^2 as defined in Fig. 1, if (but not only if) the subspaces L' and L'' containing the endpoints of the vectors of all the possible solutions S' and S'' are orthogonal, and the approximate solutions S' and S'' approach S in compliance with the minimal error quadrature sense and finally the vector 0 is in the subspace L'' defined by the solution S'' .

The foregoing method may be applied to a solution of the boundary value problem

$$\Delta u = p(x, y); \quad (u)_B = f; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_B = g$$

of the inhomogeneous bi-potential equation. The function $\varphi_{(n)}$ has to be chosen so that the subspaces L' and L'' be orthogonal. Let the following tensor belong to the endpoint of the vector S [2]:

$$S \leftrightarrow u_{,ij} = \bar{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \bar{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \bar{jj} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Of the vectors $T' = S'_1 - S'_2$ and $T'' = S''_1 - S''_2$ in the subspaces L' and L'' , respectively, since they are the differences between the two solutions to $\Delta\Delta u = p$, T' satisfies the boundary conditions $f = 0$, $g = 0$, and T'' the inhomogeneous bipotential equation $\Delta\Delta u = 0$. Hence

$$\begin{aligned} \text{in } L', T' \leftrightarrow u'_{,ij}; (u')_B = 0; \left(\frac{\partial u'}{\partial n}\right)_B = 0 \\ \text{in } L'', T'' \leftrightarrow u''_{,ij}; u''_{,ij,ij} = \Delta\Delta u'' = 0. \end{aligned}$$

The scalar product of the vectors T' and T'' , with due attention to the boundary conditions and applying Green's formula that is

$$\int_V \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi dV \equiv - \int_V \varphi \Delta \psi dV + \oint \varphi \text{grad } \psi d\bar{B},$$

gives

$$T' \cdot T'' = \int_V u'_{,ij} u''_{,ij} dV = - \int_V u' u''_{,ij,ij} dV + \oint u' u''_{,ij} d\bar{B} = 0,$$

so that any vectors T' and T'' are orthogonal and thus the subspaces L' and L'' are also orthogonal.

The inequality $S''^2 \leq S^2 \leq S'^2$ is therefore

$$\int_V u''_{,ij} u''_{,ij} dV \leq \int_V u_{,ij} u_{,ij} dV \leq \int_V u'_{,ij} u'_{,ij} dV$$

or in greater detail

$$\begin{aligned} \int_V \left[\left(\frac{\partial^2 u''}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 u''}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u''}{\partial y^2} \right)^2 \right] dV &\leq \\ \leq \int_V \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right] dV &\leq \\ \leq \int_V \left[\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right)^2 \right] dV. &\quad (2) \end{aligned}$$

The relations deduced may be applied to the investigation of a rectangular elastic plate, with a constant load p , sides a and b , and freely supported along its edges.

The solution by the domain method may be the so-called Navier solution with the well-known double Fourier series

$$w'(x,y) = \frac{1}{K\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{16p}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

and the solution by the boundary method be the well known simple Fourier series expression [3]

$$w'' = \frac{4pa^4}{\pi^5 K} \sum_n \frac{1}{n^5} \left\{ 1 - \frac{2}{2 \operatorname{ch} \frac{ba_n}{2}} \left[\left(2 + \frac{ba_n}{2} \operatorname{th} \frac{ba_n}{2} \right) \operatorname{ch} \alpha_n y - \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y \right] \right\} \sin \alpha_n x ;$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a} ; n = 1, 3, 5, \dots$$

Both approximate solutions approach the required solution by the Fourier series, *i. e.* with the minimum variance integral and the trivial solutions obtained if the Fourier constants disappear, satisfy the equation $\Delta \Delta u = 0$, so that the vector 0 is in the portion of space L'' . The conditions for using the procedure are thus assured.

For instance let $a = b = 10$ m, $p = 1,0$ t/m² and $K = 100$ tm. Then taking the first four terms of the poorly convergent w' solution and the first term of the strongly convergent w'' solution into account, the limits defined by expression (2) are

$$24 \cdot 3752 \leq \int_V u_{,ij} u_{,ij} dV \leq 24 \cdot 8144.$$

The procedure here developed differs from the similar one by SYNGE [1] in that here the approximate solutions are the orthogonal series converging towards the required solution, familiar in the theory of plates, whereas the so-called pyramid functions giving the approximate solutions in Syngé's method are not orthogonal.

In the present procedure the interval of the limits may be diminished at will by considering further terms of the series, whereas in Syngé's procedure this interval cannot be diminished within a solution containing a given number of pyramid functions because this would require the calculation of a new solution containing more pyramid functions. Furthermore, the deduction of Syngé's theorem which was taken as our basis is here simpler.

REFERENCES

1. SYNGE, J. L.: *The Hypercircle in mathematical Physics*. Cambridge, University Press 1957.
2. LAGALLY, M.—FRANZ, W.: *Vorlesungen über Vektorrechnung*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1956.
3. GIRKMANN, K.: *Flächentragwerke*. Springer Verlag, Wien, 1954.

SUMMARY

The limits of boundary value problems in the theory of plates are determined, using functional spaces. The basic idea was set out by SYNGE, but his solutions do not include all the possible applications of the procedure. The method discussed extends the field of application of SYNGE's procedure to the method of expanding into series of eigenfunctions, while SYNGE's solutions resemble those obtained by the difference method.

DIE BESTIMMUNG DER LÖSUNGSSCHRANKEN VON PLATTENPROBLEMEN

K. SZMODITS

ZUSAMMENFASSUNG

Die Studie befaßt sich mit der Bestimmung der Schranken der in der Plattentheorie vorkommenden Randwertprobleme durch Anwendung von Funktionsräumen. Diese Methode wurde durch SYNGE eingeführt, doch erschöpfte er nicht sämtliche hierdurch gebotenen Möglichkeiten. Die hier behandelte Lösung wendet die SYNGE's Methode auf die Reihenentwicklung in Eigenfunktionen an, während SYNGE's Lösungen den durch das Differenzenverfahren berechneten Lösungen ähnlich sind.

DÉTERMINATION DES LIMITES DES SOLUTIONS DU PROBLÈME DES PLAQUES

K. SZMODITS

RÉSUMÉ

L'étude examine les possibilités de déterminer les limites des problèmes de valeurs au contour, connus de la théorie des plaques, par l'emploi des champs fonctionnels. L'idée fondamentale du procédé vient de SYNGE, dont les solutions n'ont cependant pas épuisé toutes les possibilités d'application de cette méthode. La solution examinée par l'auteur étend le champ d'application de la méthode de SYNGE à la méthode du développement en série dans les fonctions caractéristiques, tandis que les solutions de SYNGE ressemblent à celles obtenues par la méthode des différences finies.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ПЛАСТИН

K. СМОДИЧ

РЕЗЮМЕ

Работа посвящена определению пределов задач значений окружности, встречающейся в теории пластин, при помощи функциональных полей. Мысль метода была поднята Синге, однако сообщенные им результаты не исчерпывают все возможности применения метода. Рассмотренное здесь решение возможности применения метода Синге на метод разложения в ряд в собственные функции, в то же время решения Синге схожи с решениями, полученными при помощи дифференциального метода.

DIE PLANUNG WIRTSCHAFTLICHER TRAGWERKE

J. PEREDY

ARBEITSGEMEINSCHAFT FÜR BAU- UND VERKEHRSWESEN DER UNGARISCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN, FORSCHUNGSGRUPPE FÜR FESTIGKEITSLEHRE, BUDAPEST

[Eingegangen am 24. Dezember 1958]

Einleitung

Die Aufgabe des planenden Ingenieurs ist es, zur Aufnahme gegebener Lasten entsprechende und gleichzeitig möglichst wirtschaftliche Tragkonstruktionen zu verwirklichen. Die derzeitigen Methoden der Ingenieurpraxis fördern die Lösung dieser Aufgabe nur mittelbar. Dieselben entsprechen nämlich nur dem Zweck, die Kräfteverteilung eines sozusagen im Ganzen gegebenen Tragwerkes zu bestimmen und zu entscheiden, ob das Tragwerk im Hinblick auf die gegebene Belastung der Sicherheit entspricht, oder nicht. Unter diesen Umständen ist der Ingenieur gezwungen, seine Entwurfsarbeit gleichsam intuitiv zu vollführen, und die Berechnungen dienen im Grunde nur der Überprüfung seiner Vorstellungen.

Unter solchen Umständen erscheint es wünschenswert, möglichst einfache Berechnungsmethoden auszuarbeiten, welche die wirtschaftliche, gleichzeitig aber auch die Sicherheit gewährleistende Planung von Tragwerken ermöglichen. Ein solches Streben macht sich in der ganzen Welt bemerkbar, und die einheimische Fachliteratur befaßte sich ebenfalls mit dieser Frage [1, 2, 3, 5]. Der Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist die Erörterung einer Methode, die den Anforderungen der wirtschaftlichen Planung von Tragwerken entspricht und als eine Verallgemeinerung der in der angeführten Literatur behandelten Methoden angesehen werden kann, ferner die Klärung der auftauchenden grundsätzlichen Fragen.

Das vorzuführen Verfahren ist auf dem ganzen Gebiet der technischen Festigkeitslehre (für Durchlaufträger, Rahmen, Trägerroste, Fachwerke, ferner mit gewissen Einschränkungen auch für Platten, Schalen usw.) anwendbar. Das Verfahren ist sowohl für die Auswahl der wirtschaftlichsten statisch bestimmten Konstruktion wie auch für den Entwurf des wirtschaftlichsten, aus elastischem oder plastischem Material bestehenden, statisch unbestimmten Tragwerkes geeignet. Die vorliegende Studie behandelt ausführlich nur die auf statisch bestimmte Konstruktionen bezüglichen Anwendungen des Verfahrens.

1. Grundbegriffe und Bezeichnungen

1/1. Der Aufsatz befaßt sich mit einzelnen, auf statisch bestimmte Tragkonstruktionen bezugnehmenden Fragen. Irgendein Tragwerk kann dadurch beschrieben werden, daß man:

a) die Achse oder die Mittelfläche des Tragwerkes bzw. im allgemeinen den Bereich T der Raumpunkte P , und

b) in jedem einzelnen Punkt P innerhalb des Bereiches T die zu diesem Punkt gehörenden Querschnittsabmessungen, im allgemeinen die zur vollkommenen Bestimmung des Tragwerkes benötigten *sämtlichen Detailangaben* anführt. Diese Detailangaben können allgemein in den einzelnen Punkten P mit mehreren skalaren Meßzahlen (z. B. im Falle eines homogenen Viereckquerschnittes mit dessen Höhe und Breite) gekennzeichnet werden, die man in einer Vektorgroße* \bar{G} zusammenfassen kann. Die im allgemeinen Sinne genommene Funktion, die in jedem einzelnen Punkt des Bereiches die Detailangaben der Konstruktion liefert, bezeichnen wir mit $\bar{G} = \bar{G}(P)$.

1/2. Wenn auf eine Konstruktion eine Last wirkt, so entstehen infolge deren Wirkung in der Konstruktion innere Kräfte. Zur Beschreibung der Innenkräfte müssen in einem jeden einzelnen Punkt des Bereiches T im allgemeinen mehrere skalare Angaben angeführt werden (z. B. im Falle von Stabkonstruktionen drei Kraftkomponenten und drei Momentenkomponenten). Diese skalaren Angaben können wir als Koordinaten des verallgemeinerten Innenkraftvektors betrachten. Diese verallgemeinerte Innenkraft bezeichnen wir mit \bar{Y} , ihre einzelnen Koordinaten mit ${}_1Y, {}_2Y, \dots, {}_kY$ (oder wo dies unnötig ist, einfach mit Y). Jene Funktion $\bar{Y} = \bar{Y}(P)$, die in jedem einzelnen Punkt P des Bereiches T den Wert der Innenkraft liefert, nennen wir die *Innenkraftverteilung*. Die Konstruktion muß sowohl im Ganzen als auch in ihren Teilen im Gleichgewicht sein. Im weiteren werden nur solche Innenkraftverteilungen erörtert, welche das Gleichgewicht der Konstruktion entweder im Falle einer gegebenen Belastung oder im unbelasteten Zustande derselben gewährleisten.

Der Aufsatz geht von statisch n -fach unbestimmten Konstruktionen aus. Im Falle solcher Konstruktionen können sämtliche Innenkraftverteilungen, welche zusammen mit der gegebenen Belastung die Gleichgewichtsbedingungen befriedigen, in Gestalt der folgenden Summe

$$\bar{Y} = \bar{Y}(P) = \bar{Y}_0(P) + \sum_{i=1}^n y_i \cdot \bar{Y}_i(P) \quad (1)$$

* Im vorliegenden Aufsatz ist unter dem Wort Vektor nicht unbedingt ein dreidimensionaler Vektor zu verstehen. Die Sätze der Vektoranalysis, die an den dreidimensionalen Raum gebunden sind, gelangen hier nicht zur Anwendung.

dargestellt werden. Die Bedeutung der einzelnen Bezeichnungen ist die folgende:

$\bar{Y} = \bar{Y}_0(P)$ ist eine der gegebenen Belastung das Gleichgewicht haltende (im übrigen beliebige) Innenkraftverteilung;

$\bar{Y} = \bar{Y}_i(P)$ ist eine im unbelasteten Zustand der Konstruktion das Gleichgewicht gewährleistende Innenkraftverteilung, die in einem Teilbereich von gleicher Dimension des Bereiches T (z. B. in einem Abschnitte der Trägerachse) von Null abweicht. Solche Innenkraftverteilungen werden wir *Grundverteilungen* nennen. In der Formel (1) erscheinen n Grundverteilungen, diese müssen voneinander linear unabhängig sein (d. h. keine dieser darf als eine Linearkombination der übrigen darstellbar sein), im übrigen sind sie jedoch beliebig.

y_i ist ein freier Parameter. Die Formel (1) enthält n freie Parameter, eine entsprechende Wahl derselben ermöglicht die Darstellung jeder statisch möglichen Innenkraftverteilung.

Der Zusammenhang (1) kann selbstverständlich nach den Koordinaten Y der Innenkraft \bar{Y} aufgelöst werden, d. h.:

$$Y = Y(P) = Y_0(P) + \sum_{i=1}^n y_i \cdot Y_i(P). \quad (1a)$$

Die Untersuchungsergebnisse des Aufsatzes können auch im Falle solcher Konstruktionen angewendet werden, für welche die beliebige Funktion $\bar{Y} = \bar{Y}(P)$ nicht als die Summe aus einer endlichen, sondern aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern dargestellt werden kann.

1/3. In einer mit einer gegebenen Last belasteten Konstruktion wird von den nach Formel (1) möglichen unendlich vielen Innenkraftverteilungen nur eine einzige auftreten. Diese tatsächlich auftretende Innenkraftverteilung bezeichnen wir mit $\bar{Y} = \bar{Y}_E(P)$.

Die Aufgabe des planenden Ingenieurs besteht im Entwurf von der Sicherheit entsprechenden Konstruktionen. Eine Konstruktion wird als sicher bezeichnet, wenn die aus der tatsächlichen Innenkraftverteilung entstehende Innenkraft $\bar{Y} = \bar{Y}_E(P)$ in jedem einzelnen Punkt P innerhalb des Sicherheitsbereiches zu liegen kommt, der auf Grund der Kenntnis der zu dem fraglichen Punkte gehörenden Detailangaben bestimmbar ist. Z. B.: im Falle mittiger Beanspruchung muß die tatsächlich auftretende Kraft innerhalb der Grenzen liegen, die als Funktion der Querschnittsfläche auf Zug und auf Druck festgesetzt werden können; im Falle eines durch eine mittige Kraft und gleichzeitig auf Biegung beanspruchten elastischen Tragwerkes müssen die beiden Koordinaten M und N der Innenkraft \bar{Y} die den Sicherheitsbereich bestimm-

mende Ungleichung

$$\sigma \geq \frac{|N|}{F} + \frac{|M|}{K}$$

in jedem Punkte des Trägers befriedigen.

Die Erfüllung der soeben erwähnten Sicherheitsbedingung ist in jedem Falle notwendig, an sich selbst jedoch nicht in jedem Falle hinreichend. Einzelne Stabilitätsprobleme (unter anderen die Knickung von Stäben mit veränderlichen Querschnitt) können z. B. nicht so formuliert werden, daß ein punktweiser Vergleich der Innenkraft mit dem Sicherheitsbereich die Frage der Sicherheit entscheiden könnte. Solche Fragen werden aus den folgenden Erörterungen ausgeschlossen, und die im vorigen Absatz erwähnte Bedingung wird gleichzeitig auch als hinreichende Bedingung der Sicherheit angesehen.

1/4. Die Konstruktionen müssen im Falle einer gegebenen Belastung nicht nur die Sicherheit gewährleisten, dieselben müssen gleichzeitig auch entsprechend wirtschaftlich sein. Zur Messung der Wirtschaftlichkeit kann in jedem Punkte des Bereiches T eine nicht negative Zahl A als Funktion der Detailangaben \bar{G} derart angegeben werden, daß der Wert des Integrals

$$a = \int_T A dT$$

um so kleiner wird, je wirtschaftlicher die Konstruktion ist. Die Zahl A bezeichnen wir als die *spezifischen Kosten*, die Zahl a dagegen als die *Meßzahl der Wirtschaftlichkeit*. Bei der Bildung der spezifischen Kosten A können folgende Faktoren in Betracht kommen: der Materialbedarf (bei Konstruktionen aus homogenem Material kann A einfach die Querschnittsfläche sein), die verschiedenen Materialpreise (welche im Falle inhomogener Konstruktionen bedeutsam sind), wie auch einige Faktoren der Herstellung und der Instandhaltung (z. B. die Schalungsfläche, das Gewicht, welchem bei der Montagebauweise eine besondere Bedeutung zukommt, die Größe der gegen Korrosion zu schützenden Oberfläche und ähnliche). Es ist natürlich, daß die tatsächliche Wirtschaftlichkeit des Tragwerkes auch von solchen Faktoren abhängen kann, die durch die punktweise angegebenen spezifischen Kosten A bzw. mittels deren Integrals nicht ausgedrückt werden können. Von solchen Faktoren wird im weiteren Abstand genommen.

2. Die Planung wirtschaftlicher Konstruktionen

Das vorher erwähnte Problem, nämlich die Planung wirtschaftlicher und gleichzeitig Sicherheit gewährender Konstruktionen, bildet die Hauptaufgabe der Ingenieurpraxis. Im Falle statisch bestimmter Konstruktionen

bieten auch die gebräuchlichen Verfahren der Festigkeitslehre die Möglichkeit, den Gesichtspunkten der Wirtschaftlichkeit Geltung zu verschaffen. Hier sind nämlich nur der Bereich T der Konstruktion (die Trägerachse) und die Belastungen von vornherein festgesetzt, aus diesen kann die statisch einzig mögliche tatsächliche Innenkraftverteilung $\bar{Y} = Y_E(P)$ eindeutig bestimmt werden, und wir sind in der Lage, die Detailangaben (die Querschnittsabmessungen) so zu bestimmen, daß die Konstruktion einerseits in einem jeden Punkte den tatsächlichen Innenkräften entspreche und andererseits die spezifischen Kosten A überall die niedrigsten sein sollen. Es gibt jedoch kein entsprechend ausgearbeitetes Verfahren, welches zwischen mehreren Möglichkeiten die Auswahl der wirtschaftlichsten statisch bestimmten Konstruktion ermöglichen würde (z. B. die zweckmäßigste Anordnung der Gelenke eines Gerber-Trägers bei gegebener Belastung). Bei statisch unbestimmten Konstruktionen stößt man auf besonders große Schwierigkeiten; so muß man z. B. bei der gebräuchlichen Berechnung eines Durchlaufträgers das Trägheitsmoment der Querschnitte von einer Verhältniszahl abgesehen von vornherein festsetzen, was die Berücksichtigung der Gesichtspunkte der Wirtschaftlichkeit nur innerhalb sehr enger Grenzen ermöglicht. Es ist daher wünschenswert solche Entwurfsverfahren auszuarbeiten, die von möglichst wenig von vornherein festgesetzten Angaben ausgehend die Auswahl der entsprechenden wirtschaftlichen Konstruktionen auf eine womöglich einfache Weise gestatten. Die folgenden Erörterungen bezwecken die Darlegung eines solchen Verfahrens.

Diese Methode betrachtet den Bereich T der Konstruktion und deren Lasten als gegeben, und entwirft die Detailangaben auf eine solche Art, daß sowohl die Wirtschaftlichkeit wie auch die Sicherheit der Konstruktion gewährleistet wird. Dieses Verfahren ist für den wirtschaftlichen Entwurf eines großen Teiles der in der Praxis vorkommenden statisch bestimmten und unbestimmten Konstruktionen anwendbar, einerlei ob diese aus elastischem oder plastischem Material bestehen. Das Verfahren wurde in hohem Grade dadurch vereinfacht, daß die zwischen einigen Wirtschaftsgrundsätzen und den Grundprinzipien der herkömmlichen Trägerlehre bestehenden Relationen benützt wurden. Das vorgeschlagene Verfahren wird in der Folge eingehend beschrieben.

2/1. Der Bereich T der Konstruktion und deren Belastungen sind gegeben; ferner sind mit Hilfe der Grundverteilungen die die gegebenen Lasten im Gleichgewicht haltenden sämtlichen Innenkraftverteilungen $\bar{Y} = \bar{Y}(P)$ in der in Formel (1) angegebenen Weise angeschrieben. Man beschließt nun, nach welchen Grundsätzen die einzelnen Angaben der zu entwerfenden Konstruktion zu gestalten sind — im Falle einer Stabkonstruktion kann man beispielsweise die Bedingung stellen, daß die Querschnitte Rechtecke sein sollen, und daß man deren Höhe h und Breite b (oder nur eine dieser beiden Abmes-

sungen) den Grundsätzen der Wirtschaftlichkeit und der Sicherheit entsprechend zu entwerfen wünscht. Die zu den in Frage kommenden Detailangaben \bar{G} gehörenden spezifischen Kosten A und die Sicherheitsbereiche sind bekannt, wenn z. B. die spezifischen Kosten eines rechteckigen Stabes mit der Querschnittsfläche gemessen werden und die Beanspruchung reine Biegung ist, dann bestehen die Relationen

$$A = b \cdot h \quad \text{und} \quad |M| \leq \frac{\sigma}{6} \cdot bh^2.$$

2/2. In Kenntnis des obigen wird nun zu einem jeden, vom Gesichtspunkte der Aufgabe aus erdenklichen Wert \bar{Y} der Innenkraft aus den in Frage kommenden Detailangaben die »entsprechend wirtschaftlichste«, daher diejenige ausgewählt, bei der die betreffende Innenkraft \bar{Y} noch innerhalb des Sicherheitsbereiches liegt, die spezifischen Kosten A aber ihr Kleinstmaß erreichen. Auf diese Art wird jedem \bar{Y} ein \bar{G} , $\bar{G} = \bar{G}(\bar{Y})$ und ein A , $A = A(\bar{Y})$ zugeordnet, d. h. die zum Tragen der betreffenden Innenkraft \bar{Y} geeigneten wirtschaftlichsten Detailangaben und deren spezifische Kosten. Wenn man nun auf das im vorigen Absatz erwähnte Beispiel zurückgreift und voraussetzt, daß die Breite b des Querschnittes von vornherein gegeben ist, und nur die Höhe h bestimmt werden soll, dann entspricht in diesem Falle der Funktion

$$\bar{G} = \bar{G}(\bar{Y}) \quad \text{der Ausdruck} \quad h = \sqrt{\frac{6}{\sigma b}} \cdot \sqrt{|M|},$$

und der Funktion

$$A = A(\bar{Y}) \quad \text{der Ausdruck} \quad A = \sqrt{\frac{6b}{\sigma}} \cdot \sqrt{|M|}.$$

2/3. Im Falle einer gegebenen Belastung wählen wir von den statisch möglichen Innenkraftverteilungen

$$\bar{Y}(P) = \bar{Y}_0(P) + \sum_{i=1}^n y_i \cdot \bar{Y}_i(P)$$

diejenige aus, bei der das auf den Bereich T bezügliche Integral der spezifischen Kosten $A = A(\bar{Y})$ der in den einzelnen Punkten P zur Gewährleistung der Sicherheit unbedingt notwendigen wirtschaftlichsten Detailangaben — die Wirtschaftlichkeitsmeßzahl der Konstruktion im ganzen — ein Minimum wird, d. h.

$$a = \int_T A [\bar{Y}(P)] dT = \text{Min!}$$

Die Lösung des Extremwertproblems bedeutet die entsprechende Auswahl der beim Anschreiben der beliebigen statisch möglichen Innenkraftverteilungen

$\bar{Y}(P)$ auftretenden freien Parameter y_i , ($i = 1, 2, \dots, n$). Dieses Problem kann unbedingt gelöst werden; da die spezifischen Kosten nicht negativ sein können, so gibt es unter den zu den verschiedenen Innenkraftverteilungen $\bar{Y}(P)$ gehörenden a Werten unbedingt einen solchen Wert a_{\min} , daß unter sämtlichen a Werten kein kleinerer zu finden ist. Es ist selbstredend nicht sicher, daß die Lösung des Problems in einer einzigen Innenkraftverteilung $\bar{Y}(P)$ besteht; für zahlreiche praktische Fälle gibt es tatsächlich mehrere Lösungen. In der Folge bedeutet die Bezeichnung $\bar{Y} = \bar{Y}_A(P)$ die Lösung, oder falls mehrere Lösungen möglich sind, eine derselben. Die Innenkraftverteilung $\bar{Y} = \bar{Y}_A(P)$ als solche wollen wir die »wirtschaftlichste Innenkraftverteilung« nennen.

2/4. Anschließend werden die zu Beginn noch unbekanntes Detailangaben bestimmt. Dies erfolgt so, daß man zu den aus einer wirtschaftlichsten Innenkraftverteilung $\bar{Y} = \bar{Y}_A(P)$ stammenden Innenkräften mit Hilfe der schon früher angeschriebenen Funktion $\bar{G} = \bar{G}(\bar{Y})$ in allen Punkten P die entsprechenden und gleichzeitig die wirtschaftlichsten Detailangaben aus sucht. Die auf diese Weise gewonnenen Detailangaben werden mit $\bar{G} = \bar{G}_A(P)$ bezeichnet und die »wirtschaftlichsten Detailangaben« genannt.

Wenn man das auf dem obigen Gedankengang beruhende Verfahren (im weiteren »Wirtschaftlichkeitsverfahren«) durchstudiert, so wird man es selbstverständlich finden, daß es in jedem Falle die wirtschaftlichste Konstruktion ergibt, da es ja die Lösung einer hierauf bezüglichen Minimaufgabe liefert. Es mag jedoch, im Gegensatz hierzu, als fraglich erscheinen, ob die wirtschaftlichste Konstruktion auch als sicher anzusehen sei. Es ist zwar wahr, daß die Innenkraftverteilung $\bar{Y} = Y_A(P)$ mit der gegebenen Belastung im Gleichgewicht ist, und daß die Detailangaben $\bar{G} = \bar{G}_A(P)$ gerade so bestimmt wurden, daß sie den Innenkräften $\bar{Y} = \bar{Y}_A(P)$ in jedem Punkte entsprechen, es erscheint aber nicht als sichergestellt, daß die in dem mit Hilfe des Wirtschaftlichkeitsverfahrens entworfenen Tragwerk tatsächlich entstehende Innenkraftverteilung $\bar{Y} = \bar{Y}_E(P)$ mit $Y = Y_A(P)$ übereinstimmt. Ganz allgemein gesehen ist es auch nicht so (hierauf greifen wir an Hand von Abb. 8b noch zurück), da wir ja im Laufe der gemäß dem Wirtschaftlichkeitsverfahren durchgeführten Konstruktionsplanung nirgends darauf Rücksicht genommen hatten, daß die tatsächliche Innenkraftverteilung gerade $\bar{Y} = \bar{Y}_A(P)$ sein muß. Trotzdem kann für einen weiten Kreis der in der Praxis verwendeten Konstruktionen nachgewiesen werden, daß die tatsächliche Innenkraftverteilung der gemäß dem Wirtschaftlichkeitsverfahren entworfenen Konstruktion genau $\bar{Y} = \bar{Y}_A(P)$ ist, und daß diese Konstruktion demnach nicht nur wirtschaftlich ist, sondern auch die Sicherheit gewährleistet.

Das Wirtschaftlichkeitsverfahren ist auf verschiedenen Gebieten der Ingenieurpraxis anwendbar; so zum Entwurf

a) statisch bestimmter,

- b) statisch unbestimmter aus elastischem Material wie auch
- c) statisch unbestimmter aus plastischem Material herzustellender Konstruktionen.

Das Anwendungsgebiet und die die Anwendungsmöglichkeit sichernden theoretischen Erwägungen gestalten sich für diese drei Konstruktionstypen verschieden. Der vorliegende Aufsatz wünscht sich nur mit dem Fall a) zu befassen, die auf die Fälle b) und c) bezüglichen bisherigen Forschungsergebnisse werden den Gegenstand einer späteren Studie bilden.

3. Die Anwendung des Wirtschaftlichkeitsverfahrens beim Entwurf statisch bestimmter Konstruktionen

Für statisch bestimmte Konstruktionen ist es bekanntlich kennzeichnend, daß im Falle einer gegebenen Belastung nur eine einzige, das statische Gleichgewicht sichernde Innenkraftverteilung möglich ist, im Gegensatz zu statisch unbestimmten Tragwerken, bei welchen es mehrere solche Innen-

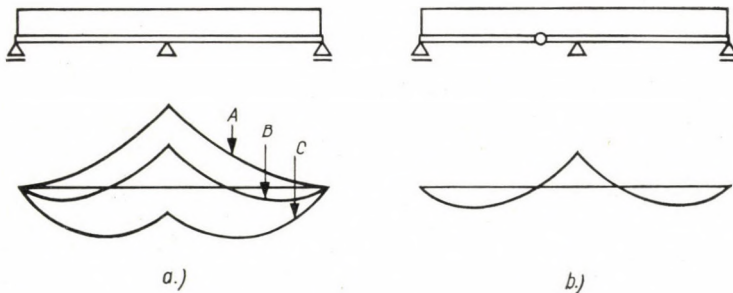


Abb. 1

kraftverteilungen gibt. Auf diese Weise können unter den statisch möglichen Innenkraftverteilungen einer unbestimmten Konstruktion die Innenkraftverteilungen zahlreicher statisch bestimmter Konstruktionen aufgefunden werden. So kann z. B. zwischen den statisch möglichen Momentenlinien des in Abb. 1a dargestellten statisch unbestimmten Durchlaufträgers auf drei Stützen auch die Momentenlinie des in Abb. 1b gezeigten Gerber-Trägers auf drei Stützen – wie auch diejenige sämtlicher Träger ähnlichen Typs – aufgefunden werden. Wir müssen aber auch gleich bemerken, daß unter den möglichen Innenkraftverteilungen der unbestimmten Konstruktion auch solche vorkommen können, denen keine statisch bestimmte Konstruktion zugeordnet werden kann. Solche sind beispielsweise die in Abb. 1a mit A und C bezeichneten Momentenlinien. Eine statisch unbestimmte Konstruktion kann nämlich grundsätzlich so in eine bestimmte umgewandelt werden, daß man den

Wert irgendeiner Koordinate der Innenkraft durch lokale Abänderungen in einzelnen Punkten fixiert. Durch Einsetzen entsprechender Konstruktionselemente (Gelenke, Gleitverbindungen usw.) kann man aber praktisch nur verwirklichen, daß irgendeine Koordinate der Innenkraft (z. B. Moment, Normalkraft) verschwindet. Infolgedessen kann eine Innenkraftverteilung nur dann als die Innenkraftverteilung irgendeiner statisch bestimmten Konstruktion angesehen werden, wenn dieselbe über die genügende Anzahl von Nullpunkten verfügt, die der statisch bestimmte Zustand benötigt. Wir wollen diese Frage nun ausführlicher erörtern.

Es sei $Y = \bar{Y}_B(P)$ eine der statisch möglichen Innenkraftverteilungen einer, mit einer gegebenen Last belasteten, n -fach statisch unbestimmten Konstruktion, d. h., sie gehöre zu den mit der Formel

$$\bar{Y} = \bar{Y}_0(P) + \sum_{i=1}^n y_i \cdot \bar{Y}_i(P)$$

ausdrückbaren Innenkraftverteilungen. Nach dem hier $Y_0(P)$ eine beliebige, die gegebene Belastung im Gleichgewicht haltende Innenkraftverteilung bedeutet, können wir hierfür gerade auch $\bar{Y}_B(P)$ wählen, daher können wir obige Formel auch in der folgenden Form anschreiben:

$$\bar{Y} = \bar{Y}_B(P) + \sum_{i=1}^n y_i \cdot \bar{Y}_i(P).$$

Im weiteren werden wir immer von dieser Form ausgehen, weil hier durch die Erörterung anschaulicher wird, z. B. dadurch, daß die zur Diskussion stehende Innenkraftverteilung $\bar{Y}_B(P)$ gerade durch die Parameterwerte $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$ dargestellt wird. Als *Nullpunkte* der Innenkraftverteilung $\bar{Y} = \bar{Y}_B(P)$ bezeichnen wir jene Punkte P des Bereiches T , in denen irgendeine Koordinate der Innenkraft $\bar{Y} = Y_B(P)$, sagen wir Y , gleich Null ist. Wenn in einem Punkte P gleichzeitig zwei, drei ... Innenkraftkoordinaten gleich Null sind, dann betrachten wir einen solchen Punkt als einen zwei-, drei- ... -fachen Nullpunkt. Es seien $P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_m$ die Nullpunkte von $\bar{Y}_B(P)$, und es seien weitere Nullpunkte ausgeschlossen. Durch eine entsprechende Gestaltung der Konstruktion (z. B. durch das Einsetzen von Gelenken) können wir erreichen, daß in den Nullpunkten die entsprechende Innenkraft gleich Null wird. Diesen Umstand formelartig ausdrückend erhalten wir das Gleichungssystem

$$0 = Y = Y_B(P_j) + \sum_{i=1}^n y_i \cdot Y_i(P_j), \quad (j = 1, 2, \dots, m);$$

bzw. mit Rücksicht auf den Umstand, daß die Punkte P_j Nullpunkte von $\bar{Y}_B(P)$ sind, daher $\bar{Y}_B(P_j) = 0$ ist, das Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^n y_i \cdot Y_i(P_j) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (2)$$

Dies ist ein homogenes, lineares Gleichungssystem, welches der Zahl der Nullpunkte von $\bar{Y}_B(P)$ entsprechend aus m Gleichungen besteht und n Unbekannte enthält, nämlich die Parameter y_1, y_2, \dots, y_n . Die Koeffizienten der Unbekannten sind die in den Nullpunkten angenommenen Werte der entsprechenden Koordinaten der Grundverteilungen. Das Gleichungssystem hat unbedingt eine Lösung, und zwar die Innenkraftverteilung $\bar{Y}_B(P)$ bzw. die dazugehörenden Werte der Parameter y , d. h. $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$. Die Innenkraftverteilung $\bar{Y} = \bar{Y}_B(P)$ kann nur dann zu einer statisch bestimmten Konstruktion gehören, wenn das Gleichungssystem (2) bloß eine einzige Lösung hat. In diesem Falle werden wir — der Kürze halber — auch die Innenkraftverteilung $\bar{Y} = \bar{Y}_B(P)$ selbst als (statisch) bestimmt bezeichnen.

Um es entscheiden zu können, ob die Innenkraftverteilung $\bar{Y} = \bar{Y}_B(P)$ bestimmt oder unbestimmt ist, muß man daher das Gleichungssystem (2) untersuchen. Wenn die Anzahl der Nullpunkte bzw. die der Gleichungen kleiner ist als die Anzahl der Unbekannten y_i , wenn daher $m < n$ ist, dann hat das Gleichungssystem (2) gewiß mehrere Lösungen. Die Bestimmtheit von $\bar{Y}_B(P)$ ist aber auch dann nicht sicher, wenn $m \geq n$ ist, da es vorkommen kann, daß die Nullpunkte bzw. die denselben entsprechenden Gleichungen auseinander folgen. Zur ausführlichen Erörterung ist es zweckmäßig, den Begriff der über einer Grundverteilung $\bar{Y}_i(P)$ liegenden Nullpunkte von $\bar{Y}_B(P)$ einzuführen. Als über $\bar{Y}_i(P)$ liegender Nullpunkt der Innenkraftverteilung $\bar{Y}_B(P)$ wird jeder Punkt P bezeichnet, in welchem irgendeine Koordinate $Y = Y_B(P)$ von $\bar{Y}_B(P)$ gleich Null ist, die entsprechende Koordinate $Y_i(P)$ dagegen von Null abweicht. Die Wichtigkeit dieses Begriffes wird offenbar, wenn man bedenkt, daß im Gleichungssystem (2) als Koeffizienten gerade die zu den Nullpunkten von $Y_B(P)$ gehörenden Werte der entsprechenden Koordinaten der Grundverteilungen erscheinen. Wenn $\bar{Y}_B(P)$ über der Grundverteilung $\bar{Y}_i(P)$ keinen einzigen Nullpunkt hat, dann erscheint der zu $\bar{Y}_i(P)$ gehörende Parameter y_i im Gleichungssystem (2) nur mit dem Koeffizienten Null. Demzufolge lassen die Gleichungen den Wert von y_i frei, und $\bar{Y}_B(P)$ kann nicht statisch bestimmt sein. Es folgt daher, daß die Zugehörigkeit einer Innenkraftverteilung $Y = \bar{Y}_B(P)$ zu einer statisch bestimmten Konstruktion an die notwendige Bedingung geknüpft ist, daß $\bar{Y} = \bar{Y}_B(P)$ über sämtliche Grundverteilungen mindestens einen Nullpunkt besitze.

Man kann aber leicht einsehen, daß die obige Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, d. h., daß die Innenkraftverteilung

$\bar{Y} = \bar{Y}_B(P)$ unbedingt statisch bestimmt ist, wenn sie über sämtlichen Grundverteilungen einen Nullpunkt besitzt. Falls nämlich $\bar{Y}_B(P)$ über allen Grundverteilungen wirklich über einen Nullpunkt verfügt, dann hat sie unbedingt einen Nullpunkt P_1 , nachdem bei einer statisch unbestimmten Konstruktion wenigstens eine Grundverteilung $\bar{Y}_i(P)$ vorliegt. Zu diesem Nullpunkt P_1 gehört eine Gleichung des Gleichungssystems (2), und zwar:

$$y_1 \cdot Y_1(P_1) + y_2 \cdot Y_2(P_1) + \dots + y_n \cdot Y_n(P_1) = 0. \quad (3)$$

Wenn die den Ausgangspunkt bildende statisch unbestimmte Konstruktion einfach unbestimmt war, dann hat die obige Gleichung nur eine einzige Lösung ($y_1 = 0$), und so ist $\bar{Y}_B(P)$ offensichtlich statisch bestimmt. Falls eine mehrfache statische Unbestimmtheit bestünde, hätte die obige Gleichung außer der Lösung $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$ noch weitere Lösungen, z. B.: $y'_1 = -Y_2(P_1)$, $y'_2 = Y_1(P_1)$, $y'_3 = y'_4 = \dots = y'_n = 0$. Wir wollen mit Hilfe der letzteren die Innenkraftverteilung

$$Y'(P) = -Y_2(P) \cdot \bar{Y}_1(P) + Y_1(P) \cdot \bar{Y}_2(P)$$

anschreiben. $\bar{Y}_1(P)$ und $\bar{Y}_2(P)$ sind linear unabhängige Grundverteilungen, d. h., sie können nicht durch Multiplikation mit einem Faktor auseinander dargestellt werden, sie haben in einem Teil identischer Dimension des Bereiches T einen von Null abweichenden Wert und sind im unbelasteten Zustand des Trägers, jede für sich, im Gleichgewicht. Daher wird auch $Y'(P)$ als eine Linearkombination von $\bar{Y}_1(P)$ und $\bar{Y}_2(P)$ in einem entsprechenden Teil des Bereiches T von Null abweichen und im unbelasteten Zustand des Trägers die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, d. h., $Y'(P)$ ist selbst eine Grundverteilung. Wenn $\bar{Y}_B(P)$ über sämtlichen Grundverteilungen einen Nullpunkt hat, so muß sie über $Y'(P)$ auch über einen verfügen, dieser kann jedoch nicht P_1 sein, da hier die entsprechende Koordinate von $Y'(P)$ selbst gleich Null ist:

$$Y'(P_1) = -Y_2(P_1) \cdot Y_1(P_1) + Y_1(P_1) \cdot Y_2(P_1) = 0.$$

Es gibt daher auch einen zweiten Nullpunkt P_2 , aber in diesem Punkte weicht die entsprechende Koordinate von $Y'(P)$ unbedingt von Null ab, d. h.

$$Y'(P) = -Y_2(P_1) \cdot Y_1(P_2) + Y_1(P_1) \cdot Y_2(P_2) \neq 0. \quad (4)$$

Zum Nullpunkt P_2 gehört selbsterständlich eine weitere Gleichung des Gleichungssystems (2), nämlich:

$$y_1 Y_1(P_2) + y_2 Y_2(P_2) + \dots + y_n Y_n(P_2) = 0. \quad (5)$$

Diese Gleichung (5) folgt nicht aus der Gleichung (3), weil das System der Unbekannten

$$y'_1 = -Y_2(P_1), y'_2 = Y_1(P_1), y'_3 = y'_4 = \dots = y'_n = 0$$

die Lösung der Gleichung (3) ist, wogegen es mit Rücksicht auf die Ungleichung (4) offensichtlich keine Lösung der Gleichung (5) darstellt. Wenn wir von einer zweifach unbestimmten Konstruktion ausgehen, so haben wir die Bestimmtheit von $\bar{Y}_B(P)$ schon bewiesen, da die Lösung der Gleichungen (3) und (5) im Falle zweier Unbekannten nur $y_1 = y_2 = 0$ sein kann. Wenn die Unbestimmtheit höheren Grades wäre, dann hätten die Gleichungen (3) und (5) abermals eine von $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$ abweichende Lösung. Mit Hilfe irgendwelcher dieser Lösungen können wir abermals eine Grundverteilung $\bar{Y}''(P)$ derart darstellen, daß weder P_1 noch P_2 Nullpunkte über der Grundverteilung $\bar{Y}''(P)$ sind, da hier die entsprechende Koordinate von $\bar{Y}''(P)$ auch selbst Null ist. So muß es nach den vorstehenden Ausführungen einen weiteren Nullpunkt geben, und die zu diesem gehörende neuere Gleichung wird abermals nicht aus den schon bestehenden folgen. Dieses Verfahren können wir so lange fortsetzen, bis wir eine dem Grade der Unbestimmtheit entsprechende Anzahl voneinander unabhängiger homogener Gleichungen erhalten, für welche offenbar nur eine einzige Lösung besteht. Auf diese Weise haben wir nachgewiesen, daß falls die Innenkraftverteilung $\bar{Y}_B(P)$ über sämtlichen Grundverteilungen einen Nullpunkt besitzt, $Y_B(P)$ unbedingt zu einer statisch bestimmten Konstruktion gehören kann.

Die obigen Erörterungen zusammenfassend können wir feststellen, daß eine statisch unbestimmte Konstruktion in dem Sinne als die Zusammenfassung mehrerer statisch bestimmter Konstruktionen aufgefaßt werden kann, daß unter den möglichen Innenkraftverteilungen der statisch unbestimmten Konstruktion die Innenkraftverteilungen zahlreicher statisch bestimmter Konstruktionen aufgefunden werden können. *Damit eine Innenkraftverteilung $\bar{Y}_B(P)$ die Innenkraftverteilung einer statisch bestimmten Konstruktion sein könne, ist es notwendig und auch hinreichend, daß $\bar{Y}_B(P)$ über jeder Grundverteilung einen Nullpunkt besitze.*

In Kenntnis dieser Tatsachen können wir auch die Frage beantworten, in welchen Fällen das Wirtschaftlichkeitsverfahren zur Planung wirtschaftlicher und gleichzeitig sicherer statisch bestimmter Konstruktionen anwendbar ist. *Offensichtlich dann und nur dann, wenn die wirtschaftlichste Innenkraftverteilung $\bar{Y}_A(P)$ über jeder Grundverteilung einen Nullpunkt hat.* In diesem Falle gibt es unbedingt eine statisch bestimmte Konstruktion, bei welcher die tatsächlich auftretende Innenkraftverteilung gerade $\bar{Y}_A(P)$ ist, und welchen Innenkräften die Konstruktion in jedem Falle entspricht, wurden doch die Detailangaben $\bar{G}_A(P)$ gerade so entworfen. Wir bemerken gleichzeitig, daß das Wirtschaftlich-

keitsverfahren in vielen Fällen automatisch zu derjenigen statisch bestimmten Konstruktion führt, deren tatsächliche Innenkraftverteilung gerade $\bar{Y}_A(P)$ ist. Wenn beispielsweise im Falle eines statisch unbestimmten Fachwerkträgers die Funktion $\bar{G} = \bar{G}(Y)$ einer Innenkraft gleich Null eine Querschnittsfläche gleich Null zuordnet, dann führt das Wirtschaftlichkeitsverfahren gleich zur Hingeweglassung der überzähligen Stäbe. In anderen Fällen dagegen, wenn man das Wirtschaftlichkeitsverfahren zur Gestaltung einer statisch bestimmten Konstruktion anzuwenden wünscht, muß für die statisch bestimmte Ausbildung separat gesorgt werden. Wenn man z. B. bei einem Durchlaufträger sowohl die Wirkung der Momente wie auch die der Schubkräfte berücksichtigt, so erhält man auch im Momentennullpunkt einen Querschnitt, und zwar gerade jenen, der die hier auftretende Schubkraft aufnehmen kann und dieser Querschnitt schließt auch die Möglichkeit der Aufnahme gewisser kleiner Momente nicht aus. In einem solchen Falle muß für die statische Bestimmtheit des Trägers durch das Einsetzen von Gelenken separat gesorgt werden. Nachdem aber die statische Bestimmtheit immer dieselbe Zahl von Gelenken erfordert, welche Art von Gerber-Träger man von den im ursprünglichen unbestimmten Durchlaufträger inbegriffenen Möglichkeiten auch wählen möge, so beeinflussen die Kosten der Gelenke die Auswahl des wirtschaftlichsten Gelenkträgers überhaupt nicht.

Die wirtschaftlichste Innenkraftverteilung $\bar{Y} = Y_A(P)$ hat nicht unbedingt über jeder Grundverteilung einen Nullpunkt, da wir während ihrer Auswahl diese Forderung nicht in Betracht genommen hatten. Im Laufe der Formulierung des Wirtschaftlichkeitsverfahrens war es deshalb zweckmäßig, diese Forderung außer acht zu lassen, da deren Berücksichtigung das Verfahren zu sehr kompliziert hätte. Die Außerachtlassung der obigen Forderung war dadurch ermöglicht, daß — wie wir dies in der Folge beweisen werden — die wirtschaftlichste Innenkraftverteilung $\bar{Y} = \bar{Y}_A(P)$ wenn auch nicht in jedem Falle, so doch in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle über die zur statischen Bestimmtheit nötigen Nullpunkte verfügt. Dem Erkennen der praktisch wichtigsten Fälle, in denen das Wirtschaftlichkeitsverfahren zur Planung statisch bestimmter Konstruktionen tatsächlich angewendet werden kann, dient ein in der Folge zu behandelnder Satz.

In diesem Satze werden wir bezüglich des Verlaufes der Funktion $A = A(\bar{Y})$ eine Einschränkung anwenden. Die Funktion $A = A(\bar{Y})$ beschreibt, wie erinnerlich, die Änderung der spezifischen Kosten der zur Aufnahme der Innenkraft \bar{Y} nötigen wirtschaftlichsten Detailangaben (Stabquerschnitt, Plattendicke usw.). Wenn der Innenkraftvektor \bar{Y} bloß über zwei Koordinaten verfügt, d. h. ein ebener Vektor ist, dann kann die Funktion $A = A(\bar{Y})$ in einem räumlichen Koordinatensystem durch eine Fläche dargestellt werden (siehe Abb. 2). Wenn die Innenkraft \bar{Y} ein Vektor von der Dimension k ist, und wir senkrecht zu dem durch ihre Koordinaten bestimmten Raum von der

Dimension k die Achse A aufnehmen, so erhalten wir einen Raum von der Dimension $(k + 1)$; und die Funktion $A = A(\bar{Y})$ kann mit dessen (im allgemeinen gekrümmtem) Unterraum von der Dimension k dargestellt werden. Der Anschaulichkeit halber werden wir den die Innenkraftvektoren \bar{Y} enthaltenden geraden Unterraum von der Dimension k des Raumes von der Dimension $(k + 1)$ als »Grundebene«, den die Funktion $A(\bar{Y})$ darstellenden gekrümmten Unterraum von der Dimension k dagegen »Fläche« nennen, wobei die Anführungszeichen darauf hinweisen, daß die obigen allgemeinen Begriffe nur im Falle $k = 2$ tatsächlich in eine Grundebene bzw. in eine Fläche über-

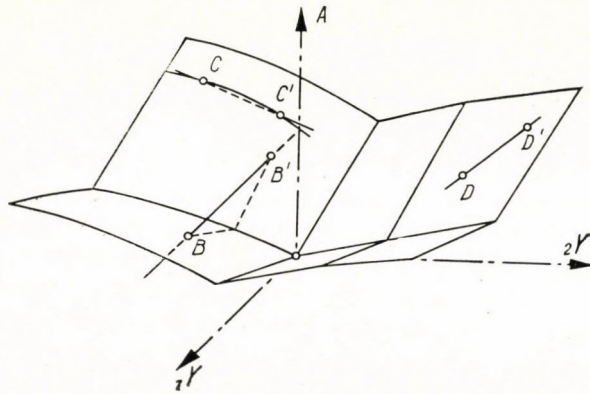


Abb. 2

gehen. Vor der Demonstrierung des Satzes bemerken wir noch, daß die spezifischen Kosten bei einem Anwachsen jeder beliebigen Koordinate der Innenkraft über alle Grenzen hinaus selbst über alle Grenzen hinaus anwachsen; diese Eigenschaft der Funktion $A = A(\bar{Y})$ wurde — als aus der Natur des Problems folgend — stets vorausgesetzt.

Der Satz : Das Wirtschaftlichkeitsverfahren ist zur Planung statisch bestimmter Konstruktionen dann anwendbar, wenn die die Funktion $A = A(\bar{Y})$ darstellende »Fläche« vom positiven Zweig der Achse A aus gesehen nirgends konkav ist, jene Punkte ausgenommen, in denen irgendeine Koordinate der Innenkraft \bar{Y} gleich Null ist. Genauer genommen bedeutet dies, daß der zwischen zwei Punkten der die Funktion $A = A(\bar{Y})$ darstellenden »Fläche« liegende Abschnitt der diese Punkte verbindenden Geraden unter der »Fläche« (siehe in Abb. 2 die Strecke $\overline{CC'}$) oder höchstens in der Fläche (siehe in Abb. 2 die Strecke $\overline{DD'}$) liegt, ausgenommen wenn die die »Flächenpunkte« verbindende Gerade eine der Koordinatenebenen durchsticht (siehe in Abb. 2 die Gerade $\overline{BB'}$, welche die durch die Achsen A und ${}_2Y$ bestimmte Koordinatenebene durchsticht).

Die Beweisführung. — Um den Satz beweisen zu können, müssen wir nachweisen, daß im Falle der Erfüllung obiger Forderung die wirtschaftlichste Innenkraftverteilung $\bar{Y} = \bar{Y}_A(P)$ (oder wenn es mehrere solche gibt, wenigstens eine von diesen) über jeder Grundverteilung einen Nullpunkt besitzt. Zu diesem Zwecke untersuchen wir vorerst, wie sich die Funktion

$$A = A(\bar{Y})$$

ändert, wenn hier

$$\bar{Y} = \bar{Y}_0(P_1) + y_i \bar{Y}_i(P_1)$$

bedeutet, d. h., wenn \bar{Y} die Linearkombination der aus der die gegebene Belastung im Gleichgewicht haltenden Innenkraftverteilung im festgesetzten

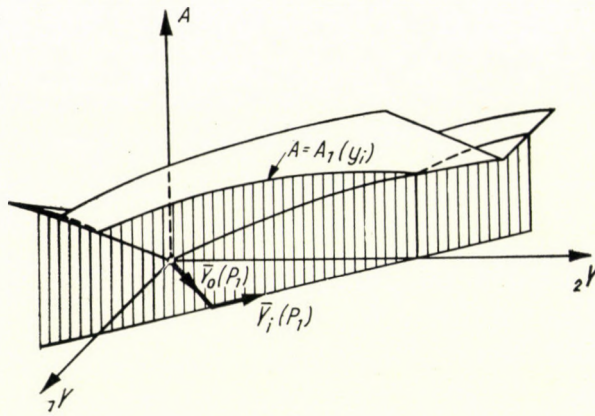


Abb. 3

Punkte P_1 entstehenden Innenkraft $\bar{Y}_0(P_1)$, und der dortselbst aus einer beliebigen Grundverteilung auftretenden Innenkraft $\bar{Y}_i(P_1)$ ist. Die die Änderung von \bar{Y} als Funktion des Parameters y_i bestimmende obige Formel ist die Gleichung einer in der »Grundebene« liegenden Geraden. Wenn wir durch diese Gerade eine mit der Achse A parallele Ebene legen, so schneidet diese Ebene die die Funktion $A = A(\bar{Y})$ darstellende »Fläche« in einer ebenen Kurve, und diese Kurve wird offenbar die Funktion

$$A = A[\bar{Y}_0(P_1) + y_i \bar{Y}_i(P_1)] = A_1(y_i)$$

darstellen (siehe Abb. 3, welche das Gesagte in jenem besonderen Falle darstellt, wenn \bar{Y} ein ebener Vektor ist). Aus der auf $A = A(\bar{Y})$ bezüglichen Bedingung, wie auch aus dem Umstand, daß die Funktion $A = A_1(y_i)$ eine ebene Kurve ist, können im Hinblick auf die weiteren Ausführungen einige wichtige

Schlüsse gezogen werden. Es ist vor allem offensichtlich, daß die die Funktion $A = A_1(y_i)$ darstellende ebene Kurve (siehe Abb. 4) in jenen Punkten, wo irgendeine Koordinate der Innenkraft \bar{Y} gleich Null wird, besondere Eigenschaften aufweisen wird (siehe in Abb. 4 auf der y_i -Achse die Punkte B, C, D), da hier die die Funktion $A(\bar{Y})$ darstellende »Fläche«, deren ebener Schnitt diese Kurve ist, selbst eine Singularität besitzt. Von diesen Punkten abgesehen kann jedoch die Kurve der Funktion $A = A_1(y_i)$ vom positiven Zweig der Achse A aus gesehen nirgends konkav sein, da in diesem Falle — weil sie ein ebener Schnitt der die Funktion $A(\bar{Y})$ darstellenden »Fläche« ist — die »Fläche« $A(\bar{Y})$ auch konkav sein müßte, was der Bedingung widerspricht.

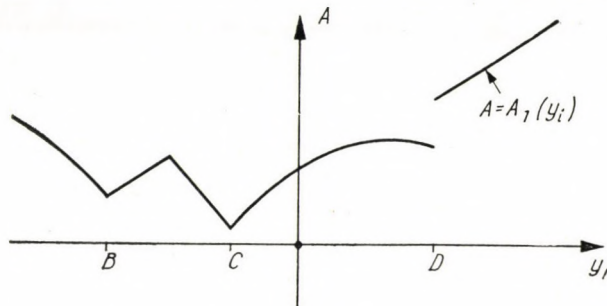


Abb. 4

Wenn daher der Punkt P_1 nicht geradezu der Nullpunkt von $\bar{Y}_0(P)$ über $\bar{Y}_i(P)$ ist, dann kann die Kurve $A_1(y_i)$ in der Umgebung des Wertes $y_i = 0$ nicht konkav sein.

Aus der zu einem einzigen Punkt P_1 gehörenden Veränderung der spezifischen Kosten A kann man auf das Integral der spezifischen Kosten wie auch auf die Veränderung der Wirtschaftlichkeitsmeßzahl α schließen. Es ist nämlich offenbar, daß die Summe nicht konkaver Kurven, wie auch allgemein deren mit positiven Faktoren gebildete Linearkombinationen ebenfalls nicht konkav sein können. So kann man von der das Integral

$$\alpha = \int_T A [\bar{Y}_0(P) + y_i \bar{Y}_i(P)] dT = \alpha_0(y_i)$$

von unten und von oben annähernden beliebigen Summe sagen, daß dieselbe in der Umgebung des Wertes $y_i = 0$ nicht konkav sein kann, wenn die Funktion $A = A(y_i)$ in keinem einzigen Punkt eine Singularität besitzt, d. h., wenn die Innenkraftverteilung $\bar{Y}_0(P)$ über der Grundverteilung $\bar{Y}_i(P)$ keinen Nullpunkt hat. Dieselbe Feststellung gilt auch für das Integral. Wenn daher die Innenkraftverteilung $\bar{Y}_0(P)$ über der Grundverteilung $\bar{Y}_i(P)$ keinen Null-

punkt hat, dann kann die Kurve der Funktion

$$a = \int_{\bar{T}} A [\bar{Y}_0(P) + y_i \bar{Y}_i(P)] dT = a_0(y_i)$$

in der Umgebung des Wertes $y_i = 0$ nicht konkav sein.

Zum Beweis des Satzes müssen wir nunmehr nur noch nachweisen, daß die Lösung $\bar{Y} = \bar{Y}_A(P)$ des Problems

$$\int_{\bar{T}} A [\bar{Y}(P)] dT = \text{Min} !$$

[oder falls mehrere Lösungen möglich sind, hiervon wenigstens eine, nämlich $Y = \bar{Y}_A(P)$] derart beschaffen ist, daß die Funktion

$$a = \int_{\bar{T}} A [\bar{Y}_A(P) + y_i \bar{Y}_i(P)] dT = a_A(y_i)$$

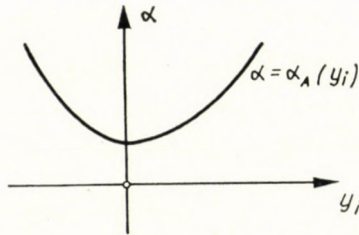


Abb. 5

in der Umgebung des Wertes $y_i = 0$ konkav ist, welche Grundverteilung $\bar{Y}_i(P)$ auch bedeuten möge. Wenn nämlich $a_A(y_i)$ im Falle jeder Grundverteilung $\bar{Y}_A(P)$ in der Tat konkav ist, dann hat $\bar{Y}_A(P)$ im Sinne der am Ende des vorigen Absatzes zusammengefaßten Feststellung über jeder Grundverteilung einen Nullpunkt, und zum Nachweis des Satzes ist gerade dies notwendig.

Nachdem $\bar{Y}_A(P)$ die Lösung einer Minimumaufgabe ist, kann man das konkave Wesen von $a_A(y_i)$ leicht einsehen. Wenn $\bar{Y}_A(P)$ die einzige Lösung des Problems ist, dann wird eine Veränderung von $\bar{Y}_A(P)$ um das y_i -fache einer beliebigen Grundverteilung $\bar{Y}_i(P)$ ein Anwachsen des Wertes von a zur Folge haben, d. h. die Funktion

$$a = \int_{\bar{T}} A [\bar{Y}_A(P) + y_i \bar{Y}_i(P)] dT = a_A(y_i)$$

ist in der Umgebung von $y_i = 0$ unbedingt konkav (Abb. 5). Wenn die Wirtschaftlichkeitsminimierung mehrere Lösungen hat, dann erfüllen nicht

unbedingt alle Lösungen die Bedingung der Konkavität, doch gibt es unbedingt eine, welche sie erfüllt. Die diesbezüglichen Erscheinungen werden gut veranschaulicht, wenn man die folgende Funktion

$$a = \int_T A [\bar{Y}_0(P) + y_1 \bar{Y}_1(P) + y_2 \bar{Y}_2(P)] dT = a(y_1, y_2),$$

d. h. den Verlauf der Wirtschaftlichkeitsmeßzahl einer statisch zweifach unbestimmten Konstruktion als Funktion der Parameter y_1 und y_2 darstellt (siehe Abb. 6). Wir müssen vor allem bemerken, daß wenn irgendein y_i über alle Grenzen hinaus anwächst, in einem Teilbereich gleicher Dimension des

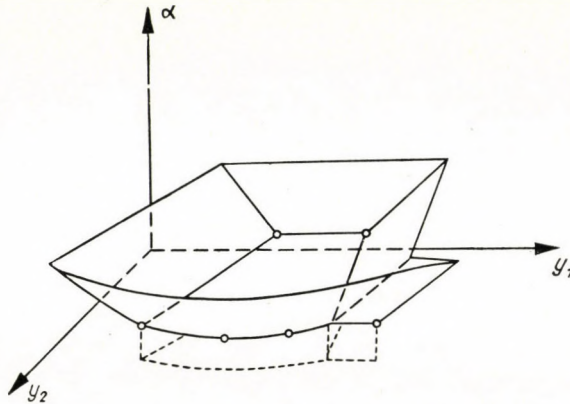


Abb. 6

Bereiches T dann auch die Innenkraft über alle Grenzen hinaus anwächst, was mit einem grenzenlosen Anwachsen der spezifischen Kosten A , und als deren Integral mit dem grenzenlosen Anwachsen der Wirtschaftlichkeitsmeßzahl a verknüpft ist. Hiernach liegen sämtliche Lösungen der Wirtschaftlichkeitsminimierungsaufgabe unbedingt im Endlichen. Es kann aber auch solche Lösungen geben (z. B. die in Abb. 6 mit einem schwarzen Punkt bezeichnete), in deren Umgebung die Funktion $a = a(y_1, y_2)$ konstant bleibt; da die auf die Konkavität bezügliche Bedingung in einem solchen Falle nicht erfüllt ist, ist eine solche Lösung zur Gestaltung einer statisch bestimmten Konstruktion nicht geeignet. Da aber sämtliche Lösungen im Endlichen liegen, sind am Rande des »Lösungsbereiches« unbedingt auch solche Punkte zu finden (in Abb. 6 einzelne hiervon mit kleinen Kreisen bezeichnet), in denen die Funktion

$$a = \int_T A [\bar{Y}_A(P) + y_i \bar{Y}_i(P)] dT = a_A(y_i)$$

aus dem konstanten Wert ins Wachsen übergeht, d. h. konkav ist, welche Innenkraftverteilung $\bar{Y}_i(P)$ auch bedeuten möge. Die durch diese Punkte

dargestellten Innenkraftverteilungen $\bar{Y}_A(P)$ entsprechen — wie schon früher nachgewiesen — wahrlich dem Zwecke der Gestaltung einer statisch bestimmten Konstruktion.

*

Der soeben bewiesene Satz umfaßt einen weiten Kreis der praktischen Fälle. Als Sonderfall enthält er die in den Studien [5] und [6] enthaltenen Feststellungen. Der Satz beweist, daß das im Aufsatz [4] mitgeteilte Rechnungsverfahren in allen Fällen, auf die es sich bezieht, zum Entwurf der wirtschaftlichsten statisch bestimmten Konstruktion anwendbar ist, da der Aufsatz [4] den Fall der zahlenmäßigen Lösung des Wirtschaftlichkeitsminimumproblems behandelt, in dem die Funktion $A = A(\bar{Y})$ folgende Struktur hat:

$$A = c_1 | {}_1Y | + c_2 | {}_2Y | + \dots + c_k | {}_kY |.$$

Eine Funktion $A = A(\bar{Y})$ dieser Struktur erfüllt aber offensichtlich die im vorigen Satz bezüglich der Funktion $A = A(\bar{Y})$ gestellte Bedingung. Es kom-

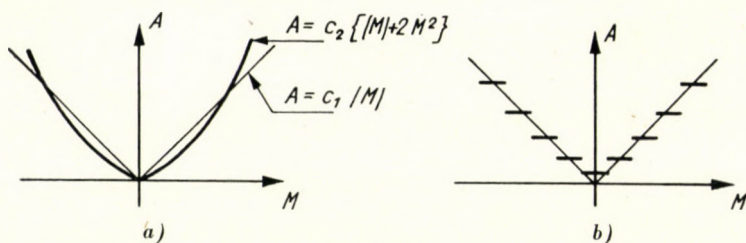


Abb. 7

men aber auch solche Probleme vor, für welche der Satz keinen Aufschluß gibt. Diesbezüglich ist es zweckmäßig, an Hand des folgenden Sonderfalles einige Gedanken zu erwähnen.

Wir wollen eine auf Biegung beanspruchte Stahlbetonkonstruktion mit rechteckigem Viereckquerschnitt untersuchen. Betrachten wir den Betonquerschnitt als gegeben und nur die Querschnittsfläche der Zugeiseneinlagen als veränderlich. Die Wirtschaftlichkeit sei einfach mit der Querschnittsfläche der Zugeiseneinlagen gemessen, daher ist $A = F_e$. In diesem Falle ist die das Verhältnis zwischen den spezifischen Kosten A und der Innenkraft (derzeit das Biegemoment M) ausdrückende Funktionskurve die in Abb. 7a fett ausgezogene Kurve; da ein Anwachsen des Momentes M eine Verminderung des Hebelarmes der Innenkräfte nach sich zieht, ist die Zunahme von F_e derjenigen von M nicht proportional, sondern steigt immer mehr an. Die in Abb. 7a dargestellte Kurve stellt aber offenbar nur eine theoretische Vorstellung dar, in der Praxis kann wegen der festgelegten Durchmesser der Rundeisenfabrikation, wie auch aus anderen Konstruktionsgründen nicht erreicht

werden, daß die Querschnittsfläche der Zugeiseneinlagen in jedem Querschnitt genau so groß sei, wie es zur Aufnahme des auftretenden Momentes gerade notwendig wäre. Aus diesem Grunde könnte die Beziehung zwischen den spezifischen Kosten und dem Momente eher mit der in Abb. 7b gezeigten stufenartigen Kurve dargestellt werden. Es ist jedoch offenbar, daß die Bedingung des Satzes weder im Falle der in Abb. 7a dargestellten »theoretischen« noch im Falle der in Abb. 7b gezeigten »tatsächlichen« Kurve erfüllt ist. Die »theoretische« Kurve ist von oben gesehen überall konkav, der Satz wäre aber nur im Falle einer, vom Mittelpunkt des Koordinatensystems abgesehen, nirgends konkaven Kurve anwendbar; die »tatsächliche« Kurve weist dagegen Unstetigkeiten auf; in der Bedingung des Satzes ist jedoch inbegriffen, daß die Kurve mit Ausnahme des Mittelpunktes des Koordinatensystems überall stetig zu sein hat. Es sieht daher so aus, als ob der Satz in einem praktisch so wichtigen Falle, wie der des auf Biegung beanspruchten rechteckigen Stahlbeton Viereckquerschnittes, unbrauchbar wäre. Aber sowohl die »theoretische« wie auch die »tatsächliche« Kurve können mit der in Abb. 7a bzw. in Abb. 7b durch eine dünne Linie angedeuteten gebrochenen Geraden $A = c|M|$ gut angenähert werden. Die Funktion $A = c|M|$ erfüllt aber schon die Bedingung unseres Satzes, und so wird die Lösung der mit ihrer Hilfe angeschriebenen Wirtschaftlichkeitsminimierungsaufgabe unbedingt eine solche Momentenverteilung ergeben, die über einen für die Gestaltung einer statisch bestimmten Konstruktion nötigen Nullpunkt verfügt. Dieser Umstand ist auch an sich selbst wichtig, denn er deutet an, daß wir aus dem Anwendungsbereich des Satzes nur dann herausfallen, wenn wir uns mit der Annäherung $A = c|M|$ nicht begnügen und die Gesichtspunkte der Wirtschaftlichkeit mit besonders großer Genauigkeit zu berücksichtigen wünschen. Dieser Umstand ist jedoch von einem anderen Gesichtspunkt aus gesehen ebenfalls bedeutend. Da die Lösung der mit Hilfe der Funktion $A = c|M|$ angeschriebenen Wirtschaftlichkeitsminimierungsaufgabe zu einer statisch bestimmten Konstruktion führt, erscheint es als sehr unwahrscheinlich, daß im Falle einer anderen, die Bedingung des Satzes zwar nicht erfüllenden, im übrigen aber der Funktion $A = c|M|$ naheliegenden Funktion $A = A(M)$, die wirtschaftlichste Konstruktion unbedingt statisch unbestimmt sei. Das ist auch wahrlich nicht der Fall. Die Bedingung des Satzes ist insoweit eine notwendige Bedingung, als beim Verlassen deren Gültigkeitsbereiches bereits Fälle vorkommen, in welchen die wirtschaftlichste Konstruktion statisch nicht bestimmt ist. Das erörterte Wirtschaftlichkeitsverfahren ist aber trotz alledem in einem großen Teil der Fälle zur Planung der wirtschaftlichsten statisch bestimmten Konstruktion auch dann geeignet, wenn die Bedingung des Satzes nicht erfüllt wird. Die Behandlung der auf diesem Gebiet auftauchenden zahlreichen Probleme würde zur übermäßigen Erörterung von Einzelheiten führen. Wir wollen eher die in den Abb.-en 8a und 8b dargestellten zwei charakteristischen Beispiele erör-

tern. Die Achse und die Stützung des Trägers ist in beiden Fällen dieselbe, nur die Belastung ist verschieden. Für beide Fälle sind je zwei Momentenlinien dargestellt. Die obere wurde mit Hilfe der Annäherung $A = c_1 |M|$, die untere dagegen auf Grund der Funktion $A = A(M) = c_2 \left\{ |M| + 2 \cdot M^2 \right\}$ aus der Wirtschaftlichkeitsbedingung bestimmt. Diese zwei Funktionen verhalten sich in der in Abb. 7a dargestellten Weise. Die obere, »annähernd wirtschaftlichste« Momentenlinie verfügt im Sinne des Satzes im Falle a) über eine bzw. im Falle b) über zahlreiche Nullstellen. An dieser, bzw. im Falle b) an einer dieser Nullstellen ein Gelenk einsetzend gelangen wir zur wirtschaftlichsten und gleichzeitig bezüglich der gegebenen Belastung sicheren statisch bestimmten Kon-

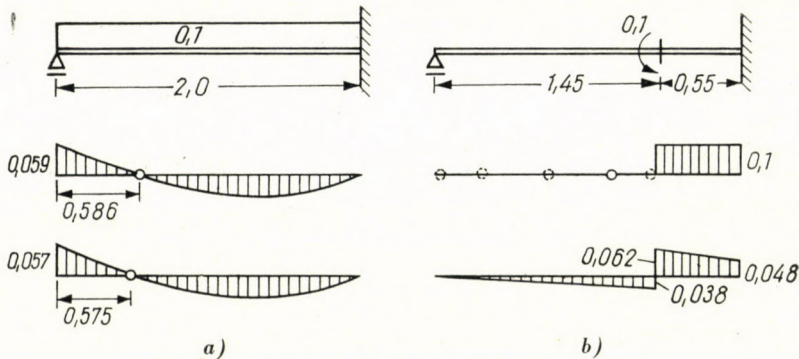


Abb. 8

struktion. Im Falle der unteren Momentenlinie ist die Bedingung des Satzes wegen der konkaven Natur der die Funktion $A = c_2 \left\{ |M| + 2 \cdot M^2 \right\}$ darstellenden Kurve nicht erfüllt. Im Falle a) erhielten wir trotzdem wieder solch eine Momentenlinie, die zu einer statisch bestimmten Konstruktion gehören kann und von der über ihr liegenden »annähernd wirtschaftlichsten« Momentenverteilung kaum abweicht. Im Falle b) verfügt bereits die untere Momentenlinie über keinen Nullpunkt, und demnach existiert auch kein solcher statisch bestimmter Gerber-Träger, dessen Momentenlinie im Falle der gegebenen Belastung die fragliche Form haben könnte. Der Grund dieser ungünstigen Erscheinung besteht darin, daß im Falle der gegebenen besonderen Belastung die Momentenverteilung nicht kontinuierlich ist. Aber auch zu dieser besonderen konzentrierten Momentenbelastung gehört nur dann eine statisch unbestimmte Momentenverteilung, wenn der Angriffspunkt in einen besonderen Abschnitt der Trägerachse zu liegen kommt. Die Länge dieses Abschnittes ist im ganzen nur etwa 5% der Spannweite.

*

Damit betrachten wir die auf die Anwendung des Wirtschaftlichkeitsverfahrens zum Entwurf statisch bestimmter Konstruktionen bezugnehmenden

Untersuchungen als abgeschlossen. Letzten Endes können wir feststellen, daß das Wirtschaftlichkeitsverfahren zur Auswahl der wirtschaftlichsten und gleichzeitig der Sicherheit entsprechenden statisch bestimmten Konstruktion im allgemeinen geeignet ist. Diese Behauptung wurde im Laufe der Beweisführung unseres Satzes, in dem sozusagen alle in der Praxis vorkommenden Fälle inbegriffen sind — gewisse Fälle allerdings nur dann, wenn die Gesichtspunkte der Wirtschaftlichkeit nicht mit besonders großer Genauigkeit geltend gemacht werden sollen — streng nachgewiesen. Die Anwendung des Verfahrens kann auch dann mit berechtigter Hoffnung auf Erfolg versucht werden, wenn der Satz für die gegebene Aufgabe nicht gültig wäre. Eine die Möglichkeit der Gestaltung einer statisch bestimmten Konstruktion ausschließende Innenkraftverteilung kann nur in außergewöhnlichen Fällen die Lösung der Wirtschaftlichkeitsminimierungsaufgabe sein.

SCHRIFTTUM

1. PELIKÁN, J.: The Plastic Calculation of Moments on Continuous Reinforced Concrete Beams. *Acta Technica Acad. Sc. Hung.* Tom. XV., Fasc. 3—4., pp. 373—380. (1956.)
2. PELIKÁN, J.: Theory of Highly Economical Reinforced Concrete Beams. *Acta Technica Acad. Sc. Hung.* Tom. XVII., Fasc. 1—2., pp. 39—56. (1957.)
3. VISY, Z.: Iterative Method for the Calculation of Moments on Highly Economical Reinforced Concrete Beams. *Acta Technica Acad. Sc. Hung.* Tom. XXII., Fasc. 1—2., pp. 12—26. (1958.)
4. PEREDY, J.: Über eine neue Minimaufgabe der technischen Festigkeitslehre. *Acta Technica Acad. Sc. Hung.* Tom. XXIV., Fasc. 3—4., pp. 329—346. (1958.)
5. BARTA, J.: On the Minimum Weight of Certain Redundant Structures. *Acta Technica Acad. Sc. Hung.* Tom. XVIII., Fasc. 1—2., pp. 67—76. (1957.)
6. SVED, G.: The Minimum Weight of Certain Redundant Structures. *Australian Journal of Applied Sciences*, Vol. 5, p. 1. (1954.)

ZUSAMMENFASSUNG

Die gebräuchlichen Berechnungsmethoden der Ingenieurpraxis bezwecken im allgemeinen die *Bestimmung der Innenkraftverteilung* einer gegebenen Konstruktion bzw. die *Kontrolle* eines gegebenen Tragwerkes. Der vorliegende Aufsatz behandelt die Grundsätze eines zur *Planung* wirtschaftlicher Konstruktionen geeigneten Verfahrens. Diese Grundprinzipien können auf allen Gebieten der technischen Festigkeitslehre (für Durchlaufträger, Rahmen, Trägerroste, ferner mit gewissen Beschränkungen auch für Platten, Schalen usw.) angewendet werden. Das Verfahren ist zur Auswahl der wirtschaftlichsten statisch bestimmten Konstruktion sowie auch zum Entwurf von aus elastischem oder plastischem Material bestehenden statisch unbestimmten Konstruktionen geeignet. Dieser Aufsatz befaßt sich ausführlich nur mit den auf statisch bestimmte Konstruktionen bezüglichen Fragen. Die Anwendung des erörterten Wirtschaftlichkeitsverfahrens zur Planung statisch unbestimmter Konstruktionen wünscht der Verfasser in einem folgenden Aufsatz zu behandeln. Die im Laufe der praktischen Anwendung des erörterten Verfahrens auftauchenden mathematischen Probleme bildeten bereits den Gegenstand mehrerer Abhandlungen [1, 2, 3, 4].

DESIGNING OF ECONOMICAL STRUCTURES

J. PEREDY

SUMMARY

The usual designing methods of engineering practice, generally try to determine the distribution of the interior forces of a given structure, or to control this structure, respectively. The present paper deals with the fundamental principles of a method suitable for designing economical structures. These basic principles can be applied in the whole field of the Theory on Strength of Materials (continuous beams, frame-works, beam-grids, furthermore, with some restrictions in the case of slabs, shells, etc.). The method in question can be used for selecting the most economical statically definite structures, as well as, for the design of statically redundant structures, consisting of elastic or plastic material. The present paper deals, in detail, with questions referring to statically definite structures only, the application of the presented economical method to the design of statically redundant structures, the author wishes to discuss in a further paper. Mathematical problems emerging when using the introduced method in practice, were already discussed in several studies [1, 2, 3, 4].

ÉTABLISSEMENT DES PROJETS DE CONSTRUCTIONS ÉCONOMIQUES

J. PEREDY

RÉSUMÉ

Les méthodes courantes, utilisées dans la pratique de l'ingénieur, visent en général la *détermination du jeu des forces intérieures*, ou le *contrôle* d'une construction donnée. La présente étude expose les principes généraux d'une méthode pour l'*établissement des projets* de constructions économiques. Ces principes fondamentaux peuvent s'appliquer dans tous les domaines de la résistance des matériaux (poutres continues, cadres, poutres à treillis, poutres à grillage, et avec certaines restrictions: tôles, voiles minces, etc. . .). La méthode permet le choix des constructions statiquement déterminées les plus économiques, ainsi que l'établissement des projets de constructions statiquement indéterminées les plus économiques, en matière élastique ou plastique. L'étude n'examine en détail que les problèmes concernant les constructions statiquement déterminées, l'examen de l'application de ces méthodes aux constructions statiquement indéterminées faisant l'objet d'une autre étude. Les problèmes mathématiques posés par l'application de la méthode ont déjà donné lieu à plusieurs publications [1, 2, 3, 4].

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧНЫХ НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ

И. ПЕРЕДИ

РЕЗЮМЕ

Обычные методы инженерной практики ставят перед собой цель *определения работы внутренних сил* некоторой данной конструкции, или же *проверки* некоторой данной конструкции. В данной работе описываются общие основы метода, пригодного для *проектирования* экономических конструкций. Эти принципы можно применять во всех областях технической теории сопротивления материалов (неразрезные балки, рамы, фермы, далее с определенными ограничениями пластины, оболочки и т. д.). Метод применим также для выбора наиболее экономичных статически определенных конструкций, далее для проектирования наиболее экономичных статически неопределенных конструкций из упругих или пластичных материалов. В данной работе разбираются детально только вопросы, связанные со статически определенными конструкциями, а применением иллюстрированного метода экономического проектирования для случая статически неопределенных конструкций автор будет заниматься в другой своей работе. В связи с математическими проблемами, возникающими при практическом применении описанного выше метода, было опубликовано уже ряд работ [1, 2, 3 и 4].

CONTRIBUTIONS TO THE BEARING CAPACITY OF PILES

Á. KÉZDI
D. ENG. SC.

INSTITUTE FOR TUNNEL CONSTRUCTION, EARTH-WORKS AND SOIL-MECHANICS,
TECHNICAL UNIVERSITY OF ARCHITECTURE, BUILDING, CIVIL AND TRANSPORT ENGINEERING,
BUDAPEST

[Manuscript received June 6, 1959]

Introduction

If the weight of a structure and the loads to be carried by it cannot directly be transferred to a layer of sufficient bearing capacity lying in a relatively not too great depth, then we have to use a *deep foundation*. The oldest method in deep foundations is piling: between the structure and the load-bearing layer such load-transmitting members are inserted, the length of which is great in comparison to their diameter. The loads to be carried by these members become transferred to the soil, partly on their lateral surface, and partly on their tip.

In the course of designing pile-foundations, as regards to statics, the following questions have to be solved:

- 1) *What should be the length and the diameter of piles to be used?*
- 2) *How great is the bearing capacity of an individual pile? What is the magnitude of the ultimate load, and what part of the latter could be considered as safe-load?*
- 3) *What relation exists between the bearing capacity of a pile-group and that of an individual pile?*

The afore-mentioned three questions are in close connection, and their solution demands taking interactions existing between them into consideration.

The first question, first of all, depends on the soil's strata, on the depth of the layer which can be termed as load-bearing, but the measurements of the foundation and the question of load-bearing also play a role. If the strata and the physical characteristics of the soil are known, the solution of this question becomes relatively easy.

It is the *second question* to which the most attention was paid in construction practice and in literature. Methods for determining the probable bearing capacity of piles are so far known more than a century. Before the development of soil-mechanics the solution of this question was chiefly sought for by empirical methods, but later, theoretical procedures gained an always increasing importance.

To clear up the *third question*, so far, only a few investigations were made.

Methods used at present for determining the bearing capacity of piles, in designing and construction practice, are usually divided into *three groups*. The first of these draws conclusions on the dynamic bearing capacity from the relationship between the measured penetration and the *impact-work* necessary to reach this, obtained during driving in a test-pile, or permanent piles, respectively. The second method determines the bearing capacity of a pile by *calculations*, based on the application of theories on *earth-pressure* and on the *failure of the ground*, and taking into consideration the physical characteristics of the soil surrounding the pile. Finally, the third one determines the penetration of a test-pile, carried out in situ, during its loading, continued — if possible — until the soil fails. In addition, *foundation specifications* and *tabulations of hand-books*, compiled on the base of theoretical considerations and practical experiences, also give an assistance for estimating the probable bearing capacity of piles during preliminary design.

The theoretical correctness of dynamic pile driving formulae may give rise to many objections. The elastic compression of a pile is calculated by these formulae on a *statical base*, although it is due to a dynamic effect. Newton's theory on impact, figuring in the deduction of many such formulae cannot be applied to piles, because Newton deduced it for such bodies, the deformation of which could freely develop during impact (balls hanging on a yarn), conversely to pile-driving, during which external forces hinder a free deformation. The combination of compressive and impact losses in the same formula means that we take certain losses into account twice. The supposition in all these formulae is that the entire resistance acts on the pile's tip; finally, their fundamental mistake is the identification of the pile's dynamic bearing capacity with its statical load-bearing; although in most cases there is no relation between these two values. So, the statical resistance of piles driven into clays and muds, the permeability of which is low, changes at a sudden loading, owing to stresses arising in pore water, to such a degree that skin-friction and tip-resistance behave quite differently during driving or in the case of statical loading, respectively. The dynamic penetration is also a function of the driving speed; and it can often be observed that an interruption in driving is followed by a considerable increase of resistance. The time factor has a very substantial effect in the case of such soils, formulae, however, cannot take this into account. Furthermore, only a part of the driving work is utilized for the pile's penetration, another part of it causes the lateral displacement of the soil. A natural limitation of this method is given by the fact that it can only be used for the determination of the bearing capacity of driven piles.

In spite of the many reasons advanced against dynamic pile-driving formulae, their use cannot be entirely refused; the only fact we have to bear in

mind is that these formulae cannot be utilized for determining the statical bearing capacity, but they may fairly well be used for a relative *comparison* of probable load-bearing of piles, driven on the same site, under identical driving conditions.

Researches led to such a negative result that *there is no possibility of establishing a mathematical relationship between statical and dynamical resistances*, and under the same conditions *empirical relations can only be used*.

The second method determines the ultimate load of a pile by calculation that is by applying the so-called *stability-method* used in soil-mechanics. In this respect many formulae are to be found in the literature, too. The principal mistake of these formulae is the separate calculation and subsequent addition of the bearing capacity's two fundamental factors, *i. e.* of the skin-friction and the point-resistance, although a close relationship between these two values exists, and both depend on the value of the *displacement* resulting from the pile's compression and penetration. Furthermore, these formulae do not allow for the fact that the development of effective sliding surfaces in soil masses below the pile's point, or in those surrounding the pile, can occur in the most exceptional cases and in extraordinarily dense granular soils only; a lateral directed compaction of the soil occurs rather around the pile's point. Many formulae calculate the skin-friction on such a basis that the skin of the pile is affected by an *active earth-pressure*, which assumption does not cover reality at all; normal stresses acting on the skin-surface of driven piles rather approach stresses belonging to passive earth-pressure, they even, in the case of bored piles do not fall below the limiting stresses belonging to the state at rest. Finally, values connected with earth-pressure are calculated by most theories on the basis of procedures referring to the plane state, the spatial effect being taken into consideration by not more than a coefficient; and this is also a grave mistake. Therefore, DÖRR's formula (1922), which was used for a long time, and formulae of a similar structure can to-day be regarded as unsatisfactory.

A new idea for calculating the bearing capacity of piles was developed by JÁKY (1945, 1948), who determined the point-resistance from the value of the *cleft-resistance*, a new concept developed by him. He was the first who introduced the form of the sliding surface returning to the pile's skin, and he determined the value of the member proportionate to the cohesion of the cleft-resistance, for a sliding surface composed from a plane and a logarithmic spiral.

This solution only meant the *first step* concerning questions on pile-loading because the above-mentioned value of the sliding resistance is valid for a cleft of infinite length, without lateral support and cut into a weightless medium; stresses acting on the pile's skin are not taken into consideration. This is the reason why we obtain such a result, that in the case $c = 0$, *i. e.*, in the case of a cohesionless soil, the value of the point-resistance is equal to zero.

L'HERMINIER's research (1953), who took into account that stresses arising on the skin of a pile are not perpendicular to its surface but δ -angled to its normal, is a logical continuation of JÁKY's idea.

The deduction for the specific value of the point-resistance belonging to failure gives a relation composed of three members,¹ similar to formulae referring to spread foundation:

$$q = cN_c + p_0 N_q + \gamma DN_\gamma,$$

where N_c , N_q and N_γ are dimensionless bearing capacity factors depending on the angle of internal friction of the soil and on the angle of lateral friction.

MEYERHOF in his investigations obtained (1955) a similar equation. Save the inadequacy for supposing a *plane state* in the course of his deduction, this solution may be considered as the last step of the *limit-equilibrium method* standing on bases which can be regarded as classic. This method is based on the assumption of the state of general failure; a local failure, the possibility of compaction and displacements are not taken — because they cannot be taken — into consideration. The interaction of skin-friction and point-resistance on each other appears only by the fact that different lateral friction-angles belong to different point-resistances; but in each case the general limiting state can only be determined; the process of pile-loading, the variation in distribution of the two load-bearing components during loading cannot be investigated. The effective development of a "*load-bearing bulb*" can be demonstrated in exceptional cases only. The development of a definite sliding surface could only be imagined, if the pile were embedded along its whole length into a compact granular soil; an upwards directed movement of the mass inside the sliding surface grating against the pile's lateral surface, however, would be possible only then, if the occurred failure were not followed by a loosening, and this is, on the other hand, in contradiction to the afore-mentioned demand on compaction. Therefore, a new solution should be searched for, taking into consideration not the limiting state only, but the entire process of pile-loading, displacements, and the interaction of the mantle-friction and the tip-resistance on each other.

According to present opinion, the *test-loading* is likely to be the most reliable method for determining the probable bearing capacity of piles. Although, there is no doubt, that for the time being no better method is known, it should be stated that this procedure does not supply complete information. In cohesive soils tests cannot be continued for such a long time, which would be necessary to obtain reliable data on consolidation; and this difficulty exists even if below the point of a pile standing in granular soil, a compressible layer of low permeability is to be found at a greater depth only. With regards to safety, loading cannot be continued until a total failure occurs, and this is the very reason, why just the wanted value can be determined only by extrapolation.

But even in the case of a complete test-loading diagram, we have always to examine which load should be regarded as permissible; relevant informations could only be obtained on the base of practical experiences and official specifications, respectively. It must be added that it is generally impossible to attain a general failure, *i. e.*, where the tangent of the curve becomes vertical, and so even the ultimate load itself, which should be taken as a basis, cannot be determined in a clear-cut manner.

Looking over the methods used for determining the bearing capacity, it can be established that as yet there is not method at our disposal, by the use of which the bearing capacity of piles could be solved as a complex problem, and which would offer the possibility to determine the pile-load pertaining to a given settlement, furthermore, that we know very little about questions referring to pile-groups.

The aim of the present paper is to promote the solution of the above problem by some ideas, theoretical and test results; bearing in mind that a total solution demands a still more profound knowledge of the laws on the strength and deformations of the soil. The study describes the theoretical determination of loading diagrams of friction- and point-bearing piles, by applying a new law on shear; furthermore, it presents results of model-tests referring to the determination of the ultimate load of individual piles.

1. The new law on shear

Loads on a pile embedded into a homogeneous soil are transferred to the ground lying around and below the pile, partly on the skin-surface and partly on the point of the pile. While there is no load on the pile, $P_1 = 0$, and the skin-surface is only affected by stresses normal to it, resulting from the own-weight of the soil. When a load is applied, the settlement of the pile begins, followed by shear-stresses developing on the skin-surface and a point-resistance occurring on the point. Both values are functions of the pile's settlement; the magnitude of the friction arising on the skin-surface is always adequate to the displacement, the point-resistance, however, is at the beginning in proportion to the magnitude of the settlement, but later, when the state of failure is approached, settlements grow more suddenly. Both components have separately an upper limit, on one hand the mobilization to the full of the friction on the skin-surface, on the other hand the ultimate bearing capacity of the soil on the point; but at the same time a close interaction exists between these two components. The force transferred onto the soil by skin-friction increases vertical normal stresses acting on the plane of the point, by this impeding the settlement; the force acting on the point, however, especially, when the state of failure is approached, reacts by the lateral displacement on the skin-friction. Thus, the

displacement has to be considered as to be the fundamental factor, both components depend on it as on a *common parameter* and exert a mutual action on each other.

First of all, let us deal with the question on *friction* arising on the boundary surface between the soil and the pile. In the case of piles embedded into granular soil a transmission of shearing forces on the pile's surface will only be possible, if a relative displacement between the two mediums occurs. The Theory of Elasticity supposes a *linear* relationship between displacement and shearing stress, this assumption, however, cannot be applied, if the investigation has to be extended to the state of failure, too. Consequently, it was neces-

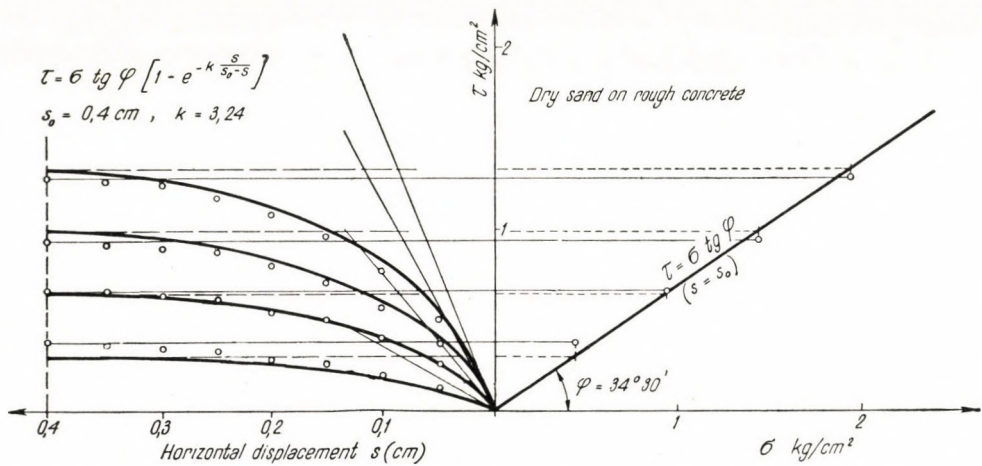


Fig. 1. Shear test with dry sand on rough concrete surface; Coulomb's line and displacement curves

sary to establish a new law on shear. For the formularization of this law we utilized test-data compiled in the laboratory of our Institute for determining angles of friction. Tests were made by using a shear-apparatus the area of which was 30/30 cm; into one half of the shear-box a filling specimen was put, made of some building material — wood, concrete, steel, bricks — while the other half was filled with soil; shearing stresses were measured at different normal stresses during pulling away the shear-frame at a constant rate, and in this way the stress-strain curve of shear was determined. Fig. 1 shows a characteristic result of these tests. The relation between σ and τ belonging to shear-failure is given by the known Coulomb's line — this is illustrated in the lower part of the Fig. —; displacement-curves, on the other hand, were without exception of such a nature that in the case of surface-shear they gave *identical values* for the maximum and for the ultimate shearing strength. It follows from this that in the case of surface-shear such an effect that the shear-stress after

reaching its maximum value decreases with a further increase of displacement and so the general shear occurs at a so-called ultimate value of the shearing stress does not take place even in cohesive soils. Displacement-curves — in the upper part of the Fig. — were plotted in the function of τ/σ ; and an unambiguous relation was obtained. Plotting the values of shearing stresses belonging to a certain horizontal displacement s in the function of the corresponding normal stresses, we also obtain a straight line, similarly as in the instance of values belonging to failure. According to this, the sought for relation must have the following form:

$$\frac{\tau}{\sigma} = Cf(s). \quad (1)$$

It was observed during tests that the absolute magnitude of displacement, necessary for the development of the total frictional resistance, varied between very close limits, and did not depend on the value of the normal stress. Denoting this limiting displacement by s_0 , the best way to approach these test-curves was attained by a law on shear expressed with the following formula:

$$\tau = \sigma \operatorname{tg} \varphi \left(1 - e^{-k \frac{s}{s_0 - s}}\right). \quad (2)$$

Herein τ means the shear-stress necessary for producing a displacement s at a normal stress σ ; φ is the angle of *lateral friction* pertaining to general shear that is to failure, k is a constant depending on the sort and the density of the soil.

Equation (2) fulfils all boundary conditions, namely:

- 1) At $\sigma = 0$ $\tau = 0$
- 2) If $s = 0$ then $\tau = 0$
- 3) If $s = s_0$ then $\tau = \sigma \operatorname{tg} \varphi$ (Coulomb's line)
- 4) At $s = s_0$ $\frac{\partial \tau}{\partial s} = 0$.

Boundary condition in 4) expresses the end-tangent of the strain-curve of shear being horizontal.

The determination of constants figuring in equation (2) is simple: the value of φ is equal to the slope-angle of Coulomb's line, s_0 can be read from the figure of the strain-curves, while k can be computed from the slope of the tangent at the starting point of the curve $\frac{\tau}{\sigma} = \operatorname{tg} \varphi f(s)$. That is (see Fig. 2)

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \left(\frac{\partial \tau}{\partial s} \right)_{s=0}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} = \sigma \operatorname{tg} \varphi \left[k e^{-k \frac{s}{s_0 - s}} \cdot \frac{s_0}{(s_0 - s)^2} \right];$$

and so

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{k}{s_0},$$

and herefrom

$$k = s_0 \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (3)$$

It should be mentioned that ROWE (1954) thought he had discovered the law on shear valid for granular soils on the base of the fact that the development of the general shearing resistance demands for a *specific strain* on the sliding surface; furthermore, that the value of the "angle of friction" also

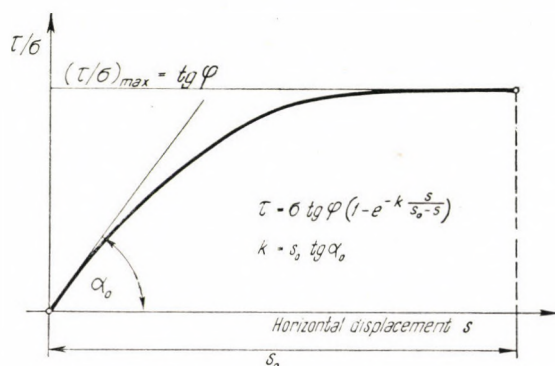


Fig. 2. Determination of constants figuring in the equation of the stress-strain curve of shea

depends on the specific strain. According to my opinion, the *absolute value of displacement* must unconditionally play a part in the development of the shearing resistance, because the grains of the original structure can settle or move only along a certain length in such a manner that the development of a continuous shearing strain could come into being. ROWE's tests really confirm this fact, too; the absolute values of the horizontal displacements measured during direct shearing tests and plotted in the function of the value τ/σ similarly to Fig. 1, proved the decisive part of the absolute strain also in this case.

2. Horizontal stresses on the mantle-surface of piles

The calculation of the shearing resistance arising on the skin-surface of piles demands the knowledge of horizontal stresses acting here. If a pile could be put into the ground in such a manner, which would cause no displacement in the surrounding soil, then its surface would be affected by stresses belonging to the so-called *earth-pressure at rest*, acting at all points of an earth-mass at the state of repose. These stresses are directly proportional to the depth, *i. e.*,

their distribution is hydrostatical. Neither bored, nor driven piles are in compliance with this condition: in the case of a bored pile the surrounding soil becomes loosened; in the course of boring — even if a shell tube is used — the grains will move to a small degree *towards the pile*, and this means that the value of the pressure at rest will decrease and will approach the *active limiting state* corresponding to the axial symmetrical state of stress. Instead of λ_0 another coefficient shall be effective; the value of this will perhaps not be constant; but the radial displacement of the soil due to boring is nearly constant along the whole length of the pile, and the strain conditions necessary for the development of an active earth-pressure are not fulfilled: therefore, there is no uniform deformation — a loosening — in the earth-mass.

In the case of a *driven pile* the situation will be quite different: the arising radial displacement is of an opposite sign — it is directed outwardly — and it is considerably greater; its magnitude is constant along the whole length of the pile and equal to the half of the pile's diameter. Thus, the stress-state occurring on the skin-surface approaches stresses belonging to the spatial passive earth-pressure; these stresses rapidly grow with increasing depth, as was established by BERESANTSEV (1958).

We investigated displacements taking place during the driving of a pile by model-tests: we produced painted vertical lines in a wet layer of sand, and after the driving of the pile was finished, the sand-layer was opened by a vertical plane going through the pile's axis; by this it became possible to determine the magnitude of the displacement.

The most important conclusion we could draw from several tests of this character was that *lines parallel to the pile's axis displace during driving parallel to themselves*, and henceforward remain *vertical*. This means that the particles of soil in the environment of the pile's shaft displace *horizontally*, in radial direction only, *i. e.*, horizontal planes which are normal to the axis of the pile, henceforward remain horizontal. The range disturbed by piling is represented by a cylinder having the same axis as the pile and the radius of which is the six-fold of the pile's radius.

Allowing for the above experiences we are able to determine, on one hand horizontal stresses acting on the lateral surface of an unloaded driven pile, on the other hand the compacting effect of pile-driving on the soil, furthermore the rate and the distribution of the decrease of the *void-ratio*.

Fig. 3 shows the pile to be investigated, the diameter of which is $2r$. Driving does not cause any displacement outside of an imagined cylinder with a radius $R = ar$ circumscribed around the axis of the pile; this means, that the surface of this cylinder is affected by the *earth-pressure at rest*, *i. e.*, the horizontal stress is $\sigma_x = \lambda_0 z \gamma$. The stress acting on the surface of an intermediate cylinder with radius ρ in the depth z is σ_x , while the stress on a cylinder-surface with an infinitesimally increased radius $\rho + d\rho$ is $\sigma_x + d\sigma_x$. Taking into ac-

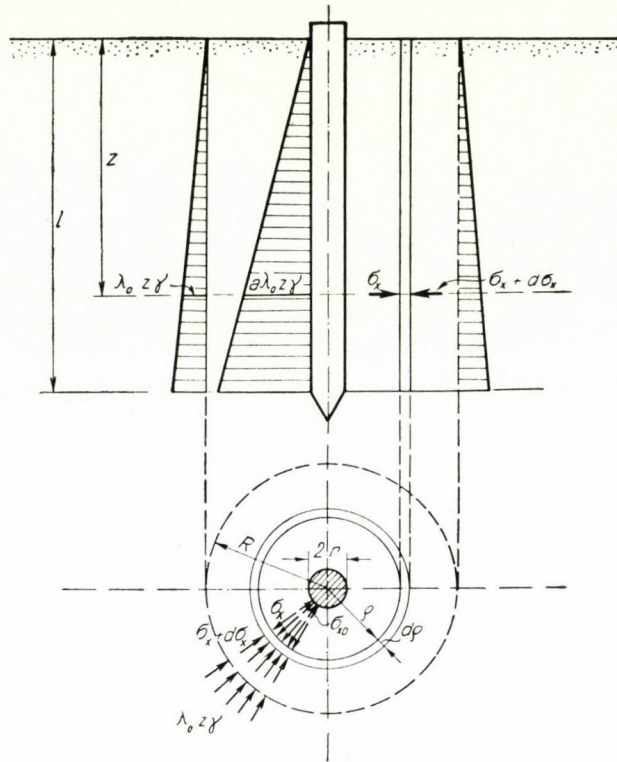


Fig. 3. Stresses on cylinder surfaces around the pile

count the demand on equilibrium we have:

$$2\pi\rho\sigma_x = 2\pi(\rho + d\rho)(\sigma_x + d\sigma_x);$$

that is

$$\rho d\sigma_x = -\sigma_x d\rho.$$

The solution of this differential equation is:

$$\sigma_x = \frac{c}{\rho}.$$

If $\rho = R = ar$, then in compliance with our start off we have $\sigma_x = \lambda_0 z \gamma$, consequently

$$\sigma_x = \lambda_0 z \gamma \frac{ar}{\rho}. \quad (4)$$

Hence, horizontal stresses are in an inverse ratio to the distance from the pile's axis, the normal stress acting on the surface of the pile ($\sigma = r$) is

$$\sigma_{x0} = a \lambda_0 z \gamma .$$

The stress-distribution is also shown in Fig. 3. The increase of σ_{x0} is in linear proportion to the depth, the stress-distribution diagram is the n -fold of the pressure at rest. This is the very reason, why *driven piles are more advantageous than bored ones*: the value of the skin-friction will be considerably *higher*, because it comes into being at a much higher normal stress.

During the driving of a pile considerable horizontal displacements occur, and so it can rightly be assumed that on the mantle-surface of a pile driven into sand the state of passive pressure comes into being. Moving away from the pile's mantle-surface the fulfilment of this condition becomes impossible, because displacements — in accordance with the afore-mentioned test-results — suddenly decrease and by this the same force is distributed over a greater surface. In compliance with this the relation between the lowest and the highest principal stresses acting on the skin-surface is:

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_x} = \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\Phi}{2} \right) = \lambda_a$$

that is

$$\frac{z \gamma}{a \lambda_0 z \gamma} = \lambda_a \quad \text{and} \quad a = \frac{\lambda_0}{\lambda_a} . \quad (5)$$

In the case of a given sand of medium density $\lambda_0 = 0,5$, $\lambda_a = 0,33$, thus $a = 6$, and this is in excellent agreement with test-results.

Giving heed to the fact that the compacting effect of a driven pile at a distance $R = ar$ from the pile-axis ceases to exist, the average decrease of the void ratio or of the specific compression, respectively, can also be determined:

$$\Delta e = \frac{1 + e_0}{a^2} \quad \text{and} \quad \varepsilon_x = \frac{1}{a^2} ,$$

or expressed in the term of porosity

$$\Delta n = \frac{1 - n_0}{a^2 - 1} .$$

If in the case of a given sand the relation between the density and the angle of friction is known, then the above formulae offer the possibility to determine the increase of the angle of friction due to the effect of piling.

According to the above assumption, stresses acting on the skin-surface attain a value which corresponds to the limiting value of the plane state of passive earth-pressure. This result was proved by IRELAND's tests (1957), who made pulling tests with piles 4—5 m long with a diameter of 36 cm, driven into sand. Supposing that the shearing strength during pulling was fully mobilized, furthermore, that the increase of normal stresses acting on the skin-surface was in a linear proportion to the depth, he determined the factors on lateral pressure; the obtained values were in compliance with RANKINE's plane passive state. MANSUR's and KAUFMANN's very substantial tests (1954) proved just the same fact.

It is important to point out that the assumed stress-state only indicates a limit of failure in the case of plane state: in the stress-state of *axial symmetry* — as known from BERESANTSEV's exact theoretical investigations (1952 and 1958) — horizontal stresses belonging to the limiting state are higher than the assumed ones. This is due to the arching-effect acting just inversely as in an active case: earth-pressure stresses arising on the walls of a cavity — if the earth moves towards it — are lower than in the instance of plane state; but in the case of an opposite directed displacement — just because of the arching-effect — higher stresses are necessary for producing the limiting state. Thus, the assumed state is not the limiting state of failure.

For this very reason, we suppose during the following investigations that stresses acting on the mantle-surface of piles driven into sand are the same as Rankine's stresses pertaining to the plane state of passive earth-pressure. The author wishes to revert to a more exact theoretical investigation of this question in a subsequent paper.

3. Theoretical determination of the loading diagrams of piles

The following deals with the determination of the settlement and the self-same compression of piles during their loading and in the function of it. The skin-surface of an unloaded pile is affected by horizontal stresses only. Conversely, in the case of a driven pile considerable vertical stresses arose during driving in the soil, not only hard by the pile, but also at a greater distance from it. After the driving is at end the soil becomes released, and so a statical loading essentially means a reloading, but the modulus of elasticity of the soil is then much higher than during the first loading. This circumstance, in addition to the considerable value of earth-pressure stresses acting on the skin-surface, emphasizes the advantage of driven piles again.

a) *The loading diagram of pure friction piles*

As first approximation let us consider the pile as being an infinitely stiff, weightless bar of circular cross section, and let us suppose that this ver

tical bar is embedded into a weighty medium being in a state of rest, between the pile's surface and the soil there is no adhesion and no resistance acts on the point; this is the case of a *pure friction pile*.

Then, if a given displacement s occurs, shearing resistances τ will develop on the skin-surface the circumference of which is K ; the sum of these must be equal to the total force P acting on the pile. In compliance with our assumptions the normal stresses arising on the skin surface are in direct proportion to the depth, consequently in a depth z a horizontal stress $\lambda z \gamma$ comes into being. Thus, we can write:

$$P = \int_0^l \tau K dz = \int_0^l K \lambda \gamma z \operatorname{tg} \varphi (1 - e^{-k \frac{s}{s_0 - s}}) dz$$

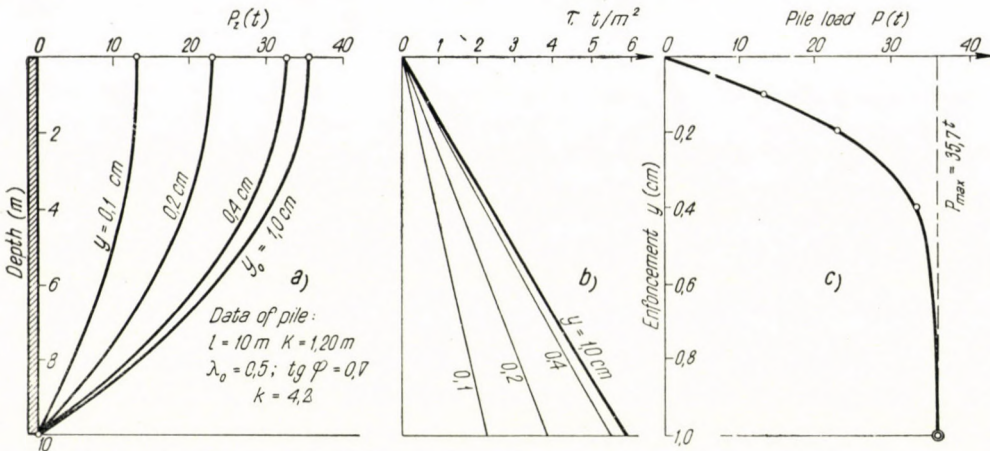


Fig. 4. Pure friction pile: a) forces arising in a pile at different displacements as a function of depth; — b) distribution of skin-friction; — c) loading diagram

Integrating we obtain:

$$P = K \lambda \gamma \operatorname{tg} \varphi \frac{l^2}{2} (1 - e^{-k \frac{s}{s_0 - s}}). \quad (6)$$

The limiting value will be attained at $s = s_0$, then:

$$P_0 = \frac{1}{2} K \lambda \gamma \operatorname{tg} \varphi l^2 = \frac{1}{2} \lambda \gamma \pi \operatorname{tg} \varphi D l^2, \quad (7)$$

and this means that the ultimate bearing capacity is proportional to the quadrate of the length and to the diameter of the pile.

Fig. 4 presents a numerical example referring to a pure friction pile. The pile in question is of circular cylindrical form, its length is 10 m, its diameter 0,38 m. Taking a certain settlement (displacement) $y = s$, the magnitude of the force belonging to this settlement can be calculated from equation (6), and the loading diagram can also be plotted. The shearing stress arising on the skin surface is in proportion to the normal stress; and increases — according to our assumption — in direct proportion to the increase of the depth.

It may be considered as interesting to know the decrease of force P transferred on the pile's head appearing on the lower cross sections of the pile. This relation can be determined on the basis of the formula

$$P_z = P - \int_{z=0}^z \tau K dz$$

that is

$$P_z = C \left[1 - \exp \left(-k \frac{s}{s_0 - s} \right) \right] (l^2 - z^2), \quad (8)$$

wherein

$$C = \frac{1}{2} \lambda \gamma \operatorname{tg} \varphi K. \quad (9)$$

Curves calculated on the basis of formula (9) are also shown in Fig. 4.

For controlling the presented theoretical issue, test-results of SEED, H. B. and REESE, L. C. (1955), referring to actual piles, may be used quite well. Electric strain-gauges were placed on steel piles of tubular cross section ($D = 15$ cm), about 4–5 m long and embedded into a soft clay (Bay Mud, $F = 41,5\%$, $P = 23,5\%$, $w = 40-50\%$), which was in the state of the liquid limit. Loading the piles, stresses arising in their walls were measured at different depths. The obtained data offered the possibility for calculating forces transferred on the individual cross sections. The overwhelming greater part of the force transferred on to the piles head was consumed by the skin-friction, because of the outstandingly disadvantageous consistency of the soil, and by this, the force transferred on to the pile's point was near to zero. On the basis of test-curves it could unanimously be established that in the case of a pile being longer, for $\Delta l = 22$ cm, the curves would give a tip-resistance $P = 0$; therefore, when comparing test-results with calculations, a pile-length of $l = 4,78$ m was chosen as basis. Results obtained by calculations, and by tests, respectively, are shown in Fig. 5; these show an agreement which could be considered as satisfactory. The extraordinarily low shearing stress of the soil was indicated by the fact that the numerical value of the factor $\lambda \operatorname{tg} \varphi$, which is characteristic for the soil (see equation (9)), was 0,3 only (at a specific weight $\gamma = 1,7$ t/m₃).

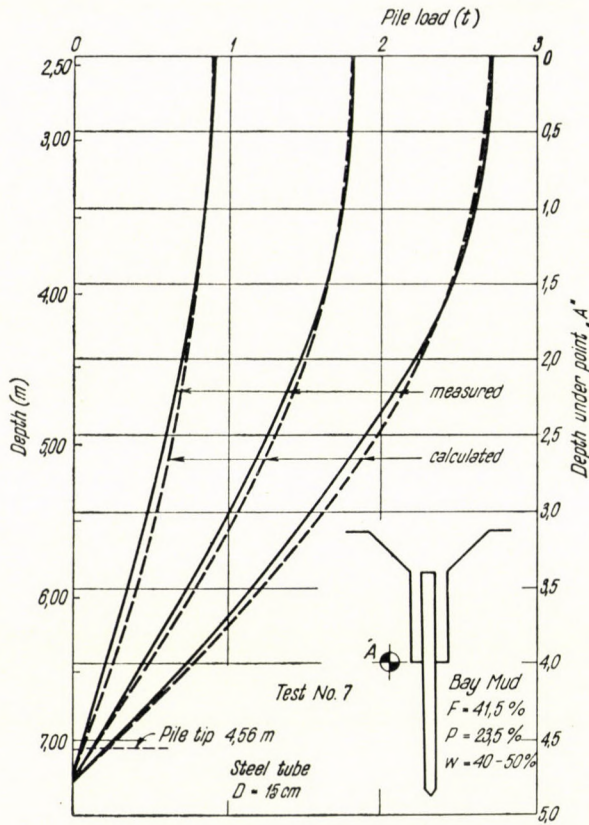


Fig. 5. SEED's and REESE's test on the determination of the pile-load

b) Pile with fixed tip

Let us now investigate the other limiting case, the behaviour of a pile perfectly fixed at its lower end, but at the same time compressible. This is the case of a *pure point-bearing pile*. The lateral surface of the pile is affected by normal stresses arising from earth-pressure, skin-friction, however, could exclusively come into being due to a relative displacement between the pile and the soil, caused by the pile's compression.

Let us denote the displacement of a point of this pile in the depth z by s (Fig. 6). The specific strain is

$$\frac{ds}{dz} = \frac{P}{EF};$$

that is

$$P = EF \frac{ds}{dz}; \quad (10)$$

where E is the modulus of elasticity and F the area of the cross section of the pile. Differentiating equation (10) we obtain:

$$\frac{dP}{dz} = EF \frac{d^2 s}{dz^2} \quad (11)$$

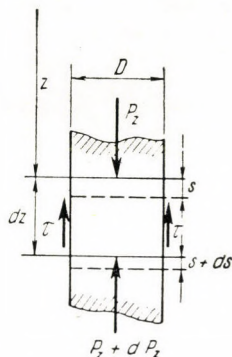


Fig. 6. Deformations (strains) occurring in piles

If the shearing stress belonging to the displacement z is denoted by $\tau(s)$ and K is the circumference of the pile, then:

$$dP = \tau(s) K dz$$

and

$$\frac{dP}{dz} = \tau(s) K \quad (12)$$

From a subtraction of equation (12) from equation (11) we obtain:

$$\frac{d^2 s}{dz^2} - \frac{K}{EF} \tau(s) = 0 \quad (13)$$

The value of $\tau(s)$ was obtained from equation (2); unfortunately, the solution of the differential equation resulting from a substitution of this value into equation (13) seems to be hopeless. In this case, however, we may choose a simpler way. The elastic compression of a pile is — as will be seen later — even in the instance of a wooden pile so small that within this range the relation between the shearing stress arising on the mantle-surface and the displacement may with good approximation be considered as *linear*.

That is, instead of equation (2), we will use the law on shear given below:

$$\tau = \sigma \operatorname{tg} \varphi \frac{s}{s_0} . \quad (14)$$

Then equation (13) can be written in the case of a bored pile (allowing for $\sigma = \lambda_0 \gamma z$) in the following manner:

$$\frac{d^2 s}{dz^2} = \frac{K}{EF} \lambda_0 \gamma \operatorname{tg} \varphi \frac{1}{s_0} s z . \quad (15)$$

Let us denote

$$\frac{K}{EF} \lambda_0 \gamma \operatorname{tg} \varphi \frac{1}{s_0} = a ;$$

then differential equation (15) will have the following form:

$$\frac{d^2 s}{dz^2} - a s z = 0 . \quad (16)$$

A particular solution of this differential equation is:

$$s = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_n z^n + \dots$$

After a repeated differentiation:

$$s'' = 2A_2 + 3 \cdot 2 A_3 z + 4 \cdot 3 A_4 z^2 + \dots + n(n-1) A_n z^{n-2} + \dots \quad (17)$$

$$a s z = a A_0 z + a A_1 z^2 + a A_2 z^3 + \dots + a A_n z^{n+1} + \dots \quad (18)$$

Equalizing coefficients of equations (17) and (18):

$$\begin{aligned} 2A_2 &= 0 \\ 3 \cdot 2 A_3 - a A_0 &= 0 \\ 4 \cdot 3 A_4 - a A_1 &= 0 \\ \vdots & \\ n(n-1) A_n - a A_{n-3} &= 0 \\ \vdots & \end{aligned}$$

From this system of equations:

$$\begin{array}{lll}
 A_2 = 0 & A_5 = 0 & A_8 = 0 \\
 A_3 = \alpha \frac{A_0}{2.3} & A_6 = \alpha^2 \frac{A_0}{2.3.5.6} & A_9 = \alpha^3 \frac{A_0}{2.3.5.6.8.9} \dots \\
 A_4 = \alpha \frac{A_1}{3.4} & A_7 = \alpha^2 \frac{A_1}{3.4.6.7} & A_{10} = \alpha^3 \frac{A_1}{3.4.6.7.9.10} \dots
 \end{array}$$

The general solution of this differential equation is:

$$\begin{aligned}
 s = & A_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2.3} z^3 + \frac{\alpha^2}{2.3.5.6} z^6 + \frac{\alpha^3}{2.3.5.6.8.9} z^9 + \dots \right) + \\
 & + A_1 \left(z + \frac{\alpha}{3.4} z^4 + \frac{\alpha^2}{3.4.6.7} z^7 + \frac{\alpha^3}{3.4.6.7.9.10} z^{10} + \dots \right) \quad (19)
 \end{aligned}$$

Boundary conditions, if force P acts on the head of pile, are:

$$a) \text{ at } z = 0, \quad \frac{ds}{dz} = \frac{P}{EF} = \varepsilon_0;$$

b) at $z = l$, $s = 0$ (the pile's tip does not move).

From condition a): $A_1 = \varepsilon_0$,

From condition b):

$$A_0 = -\varepsilon_0 l \frac{1 + \frac{\alpha}{3.4} l^3 + \frac{\alpha^2}{3.4.6.7} l^6 + \dots}{1 + \frac{\alpha}{2.3} l^3 + \frac{\alpha^2}{2.3.5.6} l^6 + \dots} \quad (20)$$

Consequently, the constant A_1 is the strain which occurs on the head of the pile, while A_0 is the vertical displacement of the pile's head surrounded by soil.

When, after the determination of these constants vertical displacements of the pile's individual points are calculated from equation (19), then shearing stresses arising on the skin-surface can be computed from equation (14); the knowledge of these gives the possibility of determining that part of force P , acting on the head of the pile, which will be transferred onto the pile's perfectly fixed tip.

In compliance with our assumptions (linear law on shear) the loading diagram will now be *linear*, compressions, on the other hand, will be very small. This method offers a practical possibility for the investigation of piles supported by *rocks*, or by *extraordinarily dense layers of gravel*, respectively.

A complete numerical example is shown in Fig. 7. We determined displacements of a wooden pile embedded into sand and fixed at the point, on the base of equation (19); the pile had a circular cross section with a diameter $D = 38$ cm, the load was $P = 40$ tons. Displacements are given in diagram (a) by the curve drawn with a full line, as the function of depth. The dotted line refers to a free-standing column loaded with the same load; both cases deviate from each other to a very small degree only. It can also be seen that the application of the linear law on shear is — with respect to the very low absolute values of displacement — justified throughout. The values of shearing stresses

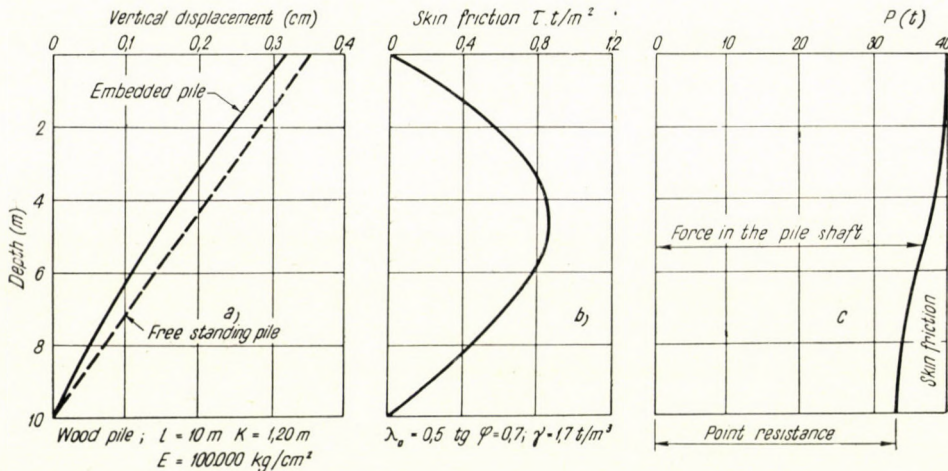


Fig. 7. Numerical example for determining the deformation and the pile-load of a fixed pile: a) displacements of individual pile-points; b) distribution of skin-friction; c) magnitude of the load transferred by the pile versus depth

ses, caused by the pile's compression, are shown in Fig. 7(b), they were calculated on the base of formula (14). The shearing stresses are very low, the force resulting from their integration, *i. e.*, the skin-friction scarcely reaches 8 per cents of the whole load.

For controlling the above-described theoretical result, let us examine measuring data obtained during the loading of a large-sized pile. The *Benoto* firm* in Paris submitted a pile, which was carried out by the "Colcrete" method, to a loading test. The length of this pile was 15,6 m, the diameter 1,0 m. The bore-hole prepared by using the "Benoto" method and supplied with a shell-tube was filled with aggregate of 5—10 cm in size, the voids between the grains were then filled up with an injecting pipe placed in the pile's axis. The

* The data on measurements were given to the authors' disposal by Mr. NOACK, M., representative and director of the "Benoto" firm in Paris; the author expresses his thanks for his kindness also in this place.

aim of this test was a separate determination of the skin-friction and the point-resistance. Therefore, a so-called "Vermiculite"-concrete stopper was placed at the bottom of the bore-hole, the thickness of which was 25 cm. Such a stopper is highly compressible and it was calculated that this stopper could only carry the weight of the aggregate. By this, until the stopper in question did not become compressed the whole load was to be carried by skin-friction, and so, the value of the latter could be determined. Later, after the total com-

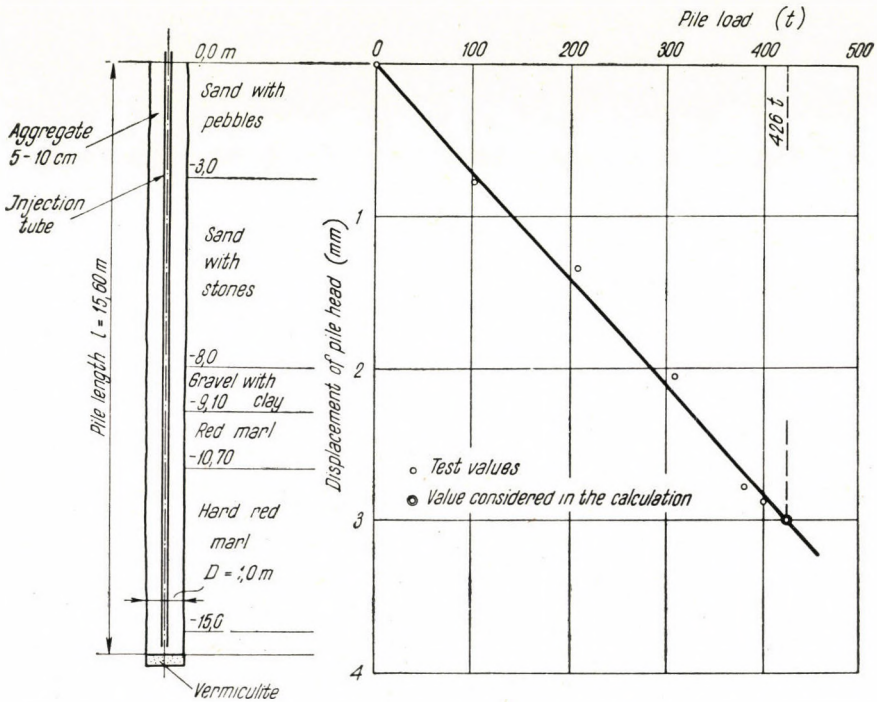


Fig. 8. Data and loading diagram of the BENOTO-firm's test pile

pression of the stopper, it seemed possible to determine the total bearing capacity. But the test could not be finished, because the compression of the stopper did not begin even at the greatest load that could be applied (560 tons); the pile-load was carried only by the skin-friction. Consequently, the tip of the pile was fixed; and by this, the respective measured data are eminently suitable for controlling the above theoretical result.

Fig. 8 shows the strata of the soil, the loading diagram and other data of the pile. The loading diagram can be regarded — as is to be seen — as being straight along a long section; this also complies with the theoretical result. Constants A_0 and A_1 , and the coefficient α , respectively, can be calculated from test-results; on the base of these the distribution of the skin-friction can also

be determined. Integrating skin-friction along the whole length and circumference of the pile, the force acting on the pile's head must be obtained. The course of the calculation is the following:

Displacement of the pile's head at a load of $P = 426$ tons:

$$A_0 = -0,3 \text{ cm}$$

$$A_1 = \frac{P}{EF} = 2,7 \cdot 10^{-4}$$

$$A_0 = 2,70 \cdot 10^{-4} \cdot 1560 \frac{1 + \frac{a}{12} 1560^3 + \frac{a^2}{504} 1560^6 + \dots}{1 + \frac{a}{6} 1560^3 + \frac{a^2}{180} 1560^6 + \dots} = -0,3.$$

From the above equation:

$$a = 2,55 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^3,$$

that is

$$a = \frac{K}{EF} \lambda_0 \gamma \operatorname{tg} \varphi \frac{1}{s_0} = 2,55 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^3$$

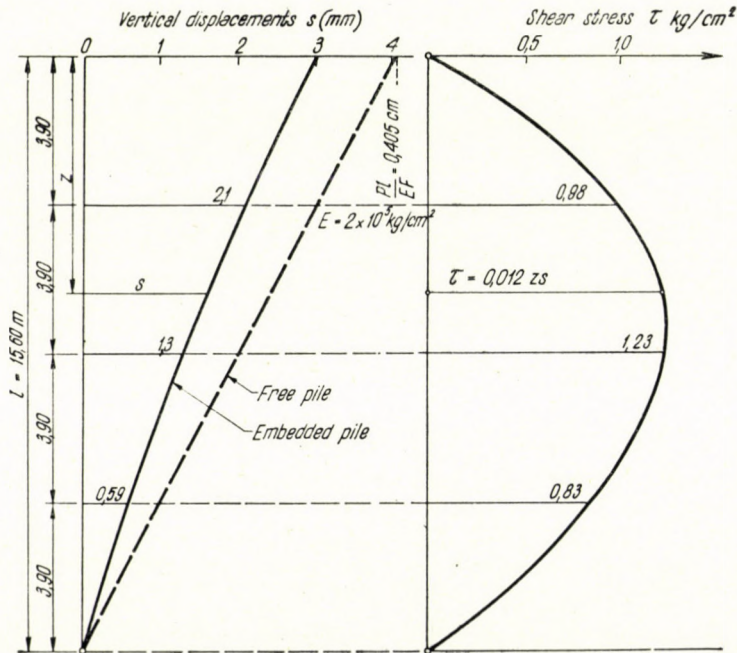


Fig. 9. Deformations (strains) and skin friction of the test pile

herefrom

$$\frac{\lambda_0 \gamma \operatorname{tg} \varphi}{s_0} = \frac{200\,000 \cdot 7580 \cdot 2,55 \cdot 10^{-9}}{314} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ kg/cm}^2$$

and the shearing stress:

$$\tau = \lambda_0 \gamma z \operatorname{tg} \varphi \frac{s}{s_0} = 1,2 \cdot 10^{-2} \cdot z \text{ s.}$$

Displacements can now be calculated from equation (19); knowing these the distribution of shearing forces can also be established. The result of this calculation is shown in Fig. 9. Now determining the sum of the frictional forces we obtain:

$$P = \int_0^l K \tau \, dz = 414 \text{ t (426 t)}$$

that is, the obtained stress distribution is right; the skin friction deviates from the total pile-load by a few per cents only.

c) *Stiff pile with point-resistance and skin-friction*

Let us investigate in the following the case of a pile penetrating into the soil at the point like a stiff bar. As regards to the examination, there is no difference between a pile embedded into a homogeneous soil and a pile supported at the point by a harder but not stiff soil; and it will be seen that merely the determination of the characteristic constants will be decisive. Conversely, to preceding theories based on the ultimate load of the soil, we will follow another route for expressing the pile's point-resistance. It was observed that during loading tests — carried out with piles of average measurements and usual ratios between the length and the diameter — a general failure of soil almost never occurred. This fact can be completely understood if we bear in mind that to reach a failure it would require the development of a bulb-like shaped sliding surface turning back to the pile's shaft, but if a failure should really occur, this would demand such a great displacement along the imagined sliding surface, which would by all means be detained, by the surface of the pile. Consequently, the penetration of the pile's tip does not occur either because of a lateral and upwards directed displacement of the grains, or due to an upwards directed displacement of the bulb-like shaped with sliding surfaces bordered solid along the surface of the pile, but owing to a lateral almost horizontal displacement of the grains of the soil below the point of the pile causing, hereby, a compaction of the soil. This statement was proved by

STUART, G.'s, FLEMING's and SCARLET's tests (Belfast, Queen's University, 1957), who tested pile-models placed into sand. Afterwards, the mass of sand shot through with coloured strips had been petrified and then opened up; by this the investigation of the displacements could be accomplished. In spite of high values of penetration a settlement was established only, but no lateral sliding surfaces were observed. Thus a failure of soil does not occur; and so the pile's loading diagram does not proceed towards a vertical tangent either, but thenceforward the limiting displacement is exceeded and by this the skin-friction reaches its maximum, the relation between the tip's penetration and the load will be linear.

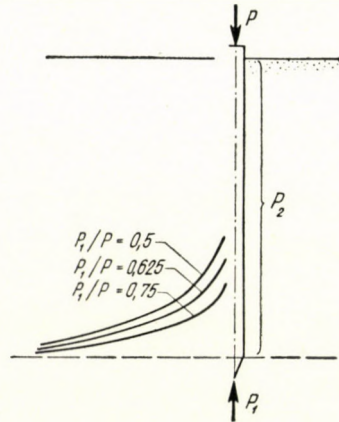


Fig. 10. Stresses on a horizontal plane laid across the pile's tip

The interaction between tip-resistance and skin-friction appears in this case also; the run of the investigation is the following.

The loading on a pile causes stresses in the surrounding soil, these are due partly to the skin friction and partly to the point resistance. These stresses can be calculated according to the Theory of Elasticity (KÉZDI, 1955), their values, of course, depend on the distribution of forces between the tip and the mantle. A horizontal plane laid across the tip of a pile is not affected by a geostatic pressure of the magnitude $l\gamma$ only, because vertical stresses also increase due to forces transferred to the soil by friction arising on the skin surface, and these forces are also distributed to deeper layers. Plotting vertical forces acting on a horizontal plane going through the point of the pile, we obtain the lines shown in Fig. 10. Thus, these vertical stresses will also hamper the penetration of the pile's point. Assuming now — on the basis of KEVERLING-BUISMAN's (1955) and our own tests — that the point-resistance is *directly proportional to the average value of these vertical stresses* and to the diameter of the pile, the calculation of the pile-load becomes possible. The afore-mentioned average value

can be determined by a uniform distribution of the value of skin-friction about an imagined circle around the pile's axis with the radius nr (see Fig. 11), the value of n can be assumed — on the basis of investigations dealt with in paragraph 2 — to be between 5 and 6. Thus, in compliance with conditions on equilibrium:

$$P = P_1 + P_2 = asD \left(l\gamma + \frac{4P_2}{n^2 D^2 \pi} \right) + P_2$$

wherein

$$P_2 = \lambda_0 D\pi \frac{l^2}{2} \operatorname{tg} \varphi \gamma \left[1 - e^{-k \frac{s}{s_0 - s}} \right].$$

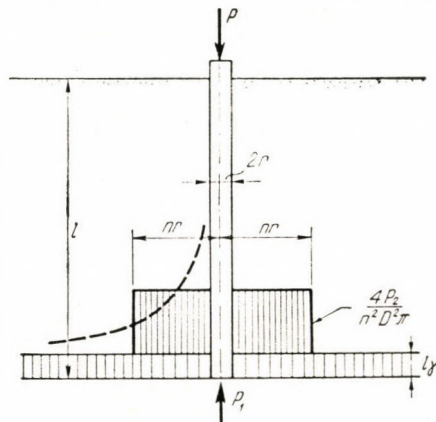


Fig. 11. Approximate assumption referring to the distribution of vertical stresses due to skin-friction

Consequently, the pile-load causing a given penetration s can be determined from the following relation:

$$P = \alpha\gamma lD + \beta\gamma l^2 \quad (21)$$

wherein

$$\alpha = as \quad \text{and} \quad \beta = \lambda \operatorname{tg} \varphi f(s) \left(\frac{2a}{n^2} + \frac{\pi}{2} D \right). \quad (22)$$

$f(s)$ expresses the relation referring to the frictional stress of the surface, *i. e.*:

$$f(s) = 1 - e^{-k \frac{s}{s_0 - s}}.$$

The most accurate determination of the coefficient a can be obtained by a loading test made on the bottom of a bore-hole, in such a way that the

skin-friction can be taken as entirely eliminated. An informative value, on the other hand, can be determined from the complete loading diagram, by using the nearly linear section of it.

In the case of driven piles in equation (22) instead of λ_0 the value λ_p should be used.

The loading diagram of the pile can now be calculated on the basis of equations (21) and (22); Fig. 12 shows a numerical example. In accordance

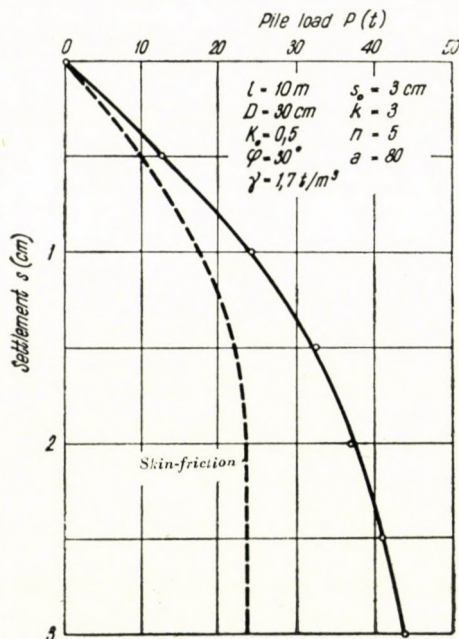


Fig. 12. Pile-loading diagram plotted on the base of a calculation allowing for the interaction between skin-friction and tip-resistance

with our starting principles, the curve does not keep to a vertical tangent, but to an *inclined* one. The equation clearly demonstrates that skin-friction and point-resistance are not independent of each other, both are functions of displacement. At values $s > s_0$ the skin-friction had already developed to the full, there was no possibility for a further increase; the point-resistance will subsequently be directly proportional to the penetration. The coefficient of proportion a is a pure number, a function of the internal friction and the modulus of elasticity; but our present knowledge gives no possibility for the establishment of a respective exact mathematical relation.

Plotting pile-loads belonging to a *certain defined settlement* — e. g., $s = 1\text{ cm}$ — as a function of the pile-length we obtain an interesting sketch (see Fig. 13). Allowing for numerical data to be seen in Fig. 12, the relation

between the pile-load and the pile-length is given by the following composite expression of the second degree:

$$P^{(t)} = 0,41l + 0,186l^2$$

The pile-force belonging to a specified settlement can be determined in this way. Part (b) of Fig. 13 also shows an interesting result which illustrates the

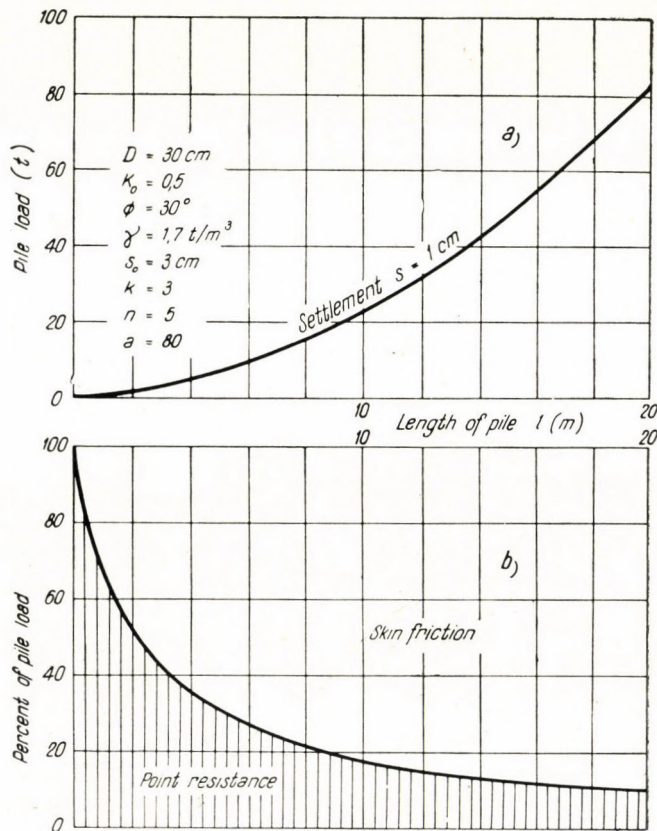


Fig. 13. a) Pile-load causing a penetration $s = 1 \text{ cm}$ plotted as a function of pile-length; b) distribution of pile-load between skin-friction and tip-resistance at a given penetration, plotted as the function of pile-length

distribution of the total pile-load between skin-friction and point-resistance in percents, plotted as a function of the length of the pile.

Finally, Fig. 14 gives the distribution in per cents of the total pile-load between skin-friction and point-resistance plotted as the function of the pile-load, valid for the loading diagram plotted in Fig. 12. While at small loads the value of the skin-friction is predominant, later, henceforward from a certain

load when the skin-friction became almost exhausted, the point-resistance will become the greater. It seems as likely that this Fig. expresses in the best way that fact that it is incorrect in principle to determine the permissible load of a pile in such a way that the value of the ultimate load — obtained by summing up the separately determined ultimate values of the skin-friction and of the point-resistance — should be divided with a certain factor of safety: *the distribution of the load between its two components depends on the magnitude of the load itself*, and by this, in the value resulting from the division by a common factor of safety the two components will appear with entirely different safeties.

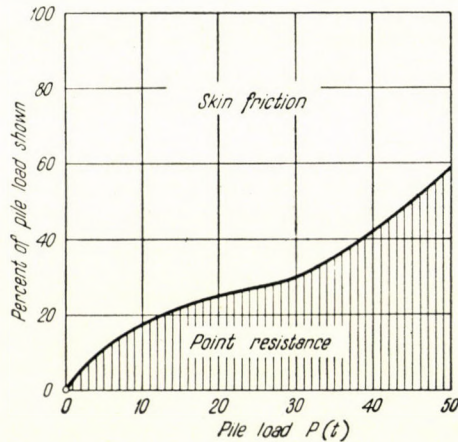


Fig. 14. Distribution of pile-load between skin-friction and point-resistance plotted versus pile-load

The only right way is a calculation based on the displacements and the settlements of the pile.

The above deduction and consideration can also be applied to such a case, if the tip of the pile stands on a harder, stiffer soil. The skin-friction can be calculated according to the foregoing ones, on the base of the properties of the soil surrounding the pile, only the value of a should be determined in compliance with the lower layers. The occasionally negative skin-friction can also be taken into consideration.

It should be mentioned that in accordance with the disclosed mental process it is also obvious that the value of the skin-friction is not equal to the magnitude of the force necessary for pulling out the pile. The upwardly directed pulling force diminishes the vertical geostatic pressure around the pile, consequently, the value of horizontal stresses must vary, too; this, on the other hand, already influences the value of the skin friction.

To prove the theoretical result illustrated in Fig. 14, Fig. 15 shows curves obtained on the basis of measurements made during the hitherto most far-

reaching pile-test. On the site *Low-Sill Structure* detailed pile-tests were carried out by MANSUR and KAUFMANN (1956); they measured displacements of piles with tubular and H-formed cross sections in different depths as function of the pile-load. In this way the skin-friction could separately be determined; the Figs.

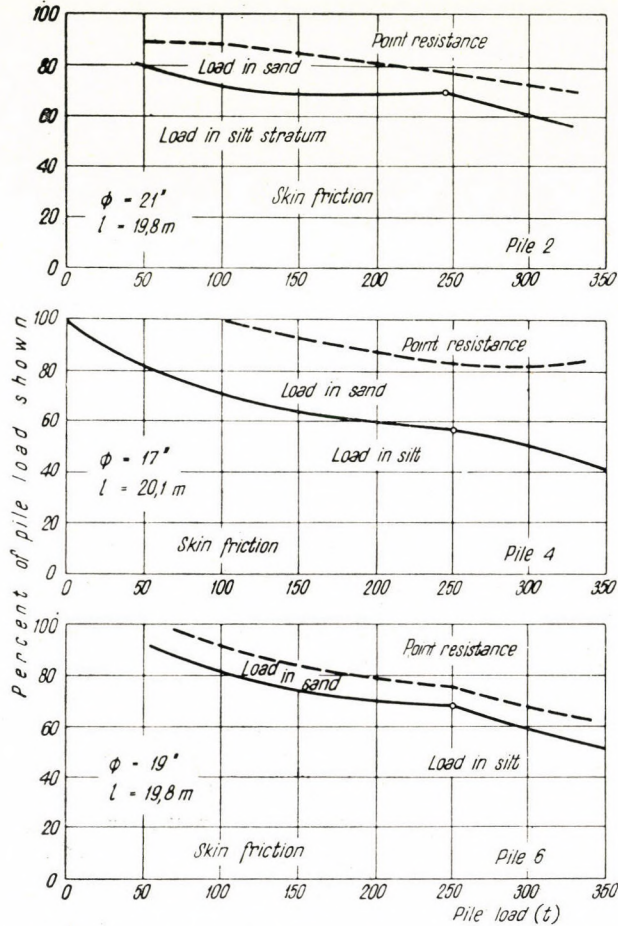


Fig. 15. MANSUR's and KAUFMANN's test; distribution of pile-load

show the magnitude of it expressed in percents of the total load. The character of these curves is accurately the same as that of the curves obtained by calculations shown in Fig. 14, and this proves the reliability of theoretical considerations. The skin-friction arising on parts of the pile embedded into silt or silty sand, respectively, and the value of the point-resistance are illustrated separately in the Fig.

The statement to be found in paragraph 2 of this paper, namely, that normal stresses acting on the skin of a pile can be computed on the base of

the relation $\sigma_s = \lambda_p z \gamma$, can also be verified by MANSUR's and KAUFMANN's tests.

In the case of such a load at which the skin-friction was mobilized to the full and reached its upper limit, in the curves showing the percentile distribution a break or an inflexion appeared, this can be seen in the Fig. Let us choose these inflection-points shown in Fig. 15, and let us determine the value of the factor of earth-pressure valid for the part of the pile embedded into silt (geometrical and other data of the piles are given in the Fig.).

Values of the skin-friction at inflection-points:

$$\text{at pile Nr. 2} - P_s = 0,70 \cdot 244 = 174 \text{ t,}$$

$$\text{at pile Nr. 4} - P_s = 0,56 \cdot 250 = 140 \text{ t,}$$

$$\text{at pile Nr. 6} - P_s = 0,68 \cdot 250 = 174 \text{ t.}$$

The length of those parts of the piles which were embedded into silt was in turn (thicknesses of the silt-layers): 14,46 m, 14,60 m and 15,00 m. On the basis of the expression

$$P_s = \frac{1}{2} \lambda \gamma \pi \operatorname{tg} \varphi D l^2$$

which is valid for the upper limiting value of the skin-friction we obtain

$$\lambda \operatorname{tg} \varphi = \frac{2 P_s}{D \pi l^2 \gamma}$$

The bulk density of the layers in question was according to data of the paper $\gamma = 0,89 \text{ t/m}^3$ (layers below ground-water level) and so the values of $\lambda \operatorname{tg} \varphi$ were in compliance with the above formula:

$$\text{in the case of pile Nr. 2} - \lambda \operatorname{tg} \varphi = 1,113,$$

$$\text{in the case of pile Nr. 4} - \lambda \operatorname{tg} \varphi = 1,032,$$

$$\text{in the case of pile Nr. 6} - \lambda \operatorname{tg} \varphi = 1,170;$$

i. e., the value of $\lambda \operatorname{tg} \varphi$ was on the average with a little dispersion $\lambda \operatorname{tg} \varphi = 1,122$. Assuming — in compliance with paragraph 1) — that the skin-surface of a driven pile is being acted upon by a normal pressure corresponding to the limiting state of passive earth-pressure, *i. e.*, $1,122 = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$; we obtain for φ the value $\varphi = 25^\circ$. With respect to the fact that authors on the

base of their tests obtained for φ an average value $\varphi = 28^\circ$ for the layers cut through by their piles — among which layers of silty sand were also be found — it can be said that the agreement between the two results may be considered as good.

4. Tests for the determination of the bearing capacity of individual piles

For investigating the bearing capacity of individual piles the Institute of Tunnel-construction, Earth-works and Soil-mechanics of the Technical University of Architecture, Building, Civil and Transport Engineering in Budapest carried out model-tests. The aim of these tests was the verification of theoretical results described in paragraph 3 of this paper.

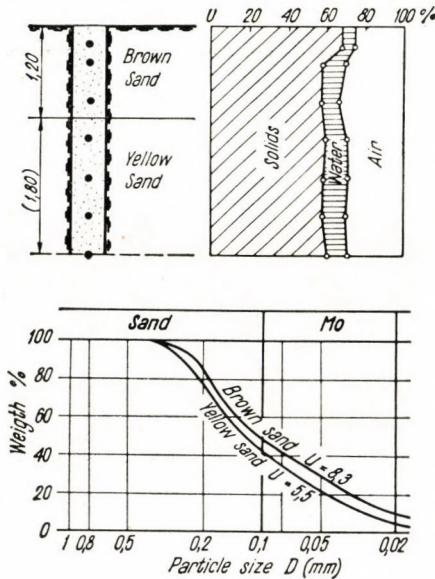


Fig. 16. Profile of ground of test area and grain size curves of the soil layers

The piles to be tested were made of concrete, their length was in turn 0,40, 0,80, 1,20, 1,60 and 2,00 m, their cross section 10/10 cm. The piles were formed in such a way that their steel-tip could be loaded separately. As regards to the applied pile-loads the piles could be taken as perfectly stiff, the elastic compression of the longest pile with a length of $l = 2,00$ m — if calculated as that belonging to a free bar — was at the greatest load of $P = 5$ tons: $\Delta l = 0,016$ cm only. Therefore, the selfsame compression of these piles could be neglected.

The ground of the test-area consisted of brown and yellow sand; the physical characteristics of it are to be seen in Fig. 16, where the variation of porosity and water-content according to depth, furthermore grain-size curves of the soil are also shown. The results of tests referring to the determination of the angle of internal friction and the angle of surface-friction in the case of a sliding on a concrete surface were the following:

angle of internal friction $\Phi = 36^\circ$,

cohesion $c = 0,08 \text{ kg/cm}^2$,

friction between concrete and sand $\varphi = 34^\circ$.

The porosity of the silty sand in question during tests was $n = 38\%$, the water content of it $w = 7,5\%$.

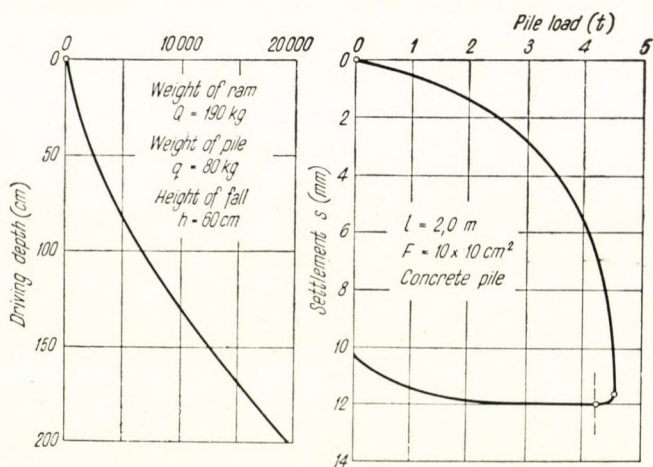


Fig. 17. Characteristic pile-driving and pile-loading diagram

The sand was an aeolian sedimentation with considerably rounded grains. The piles were driven into the ground, then loaded by a hydraulic press and at the same time the penetration diagram was also plotted. All in all 38 piles were loaded in such a manner; during these tests we measured the driving work necessary to reach the penetration, furthermore the force which was needed for pulling out a pile.

A characteristic pile-driving and pile-loading diagram is shown in Fig. 17.

We could establish from loading diagrams that it was not possible to reach a real ultimate load, the loading curve did not turn to a vertical tangent, but kept towards an inclined straight line. While plotting a sufficiently long section of this "failure" curve, at each test we applied a total release of loading.

Plotting results of all these tests in similar diagrams and compiling data on driving and on other circumstances in tabulations we could draw the following conclusions.

First of all, it appeared that even diagrams referring to piles of the same length showed a fairly significant *dispersion*. This dispersion could be explained by deviations occurring in the density of the soil, by small excentricities during the loading process and by other unmeasurable effects. The mentioned dispersions meant a difficulty while selecting curves to be considered as suitable for the purpose of a theoretical elaboration. Therefore, we proceeded in such a way that we utilized the *driving diagram* available in the case of each pile; looking

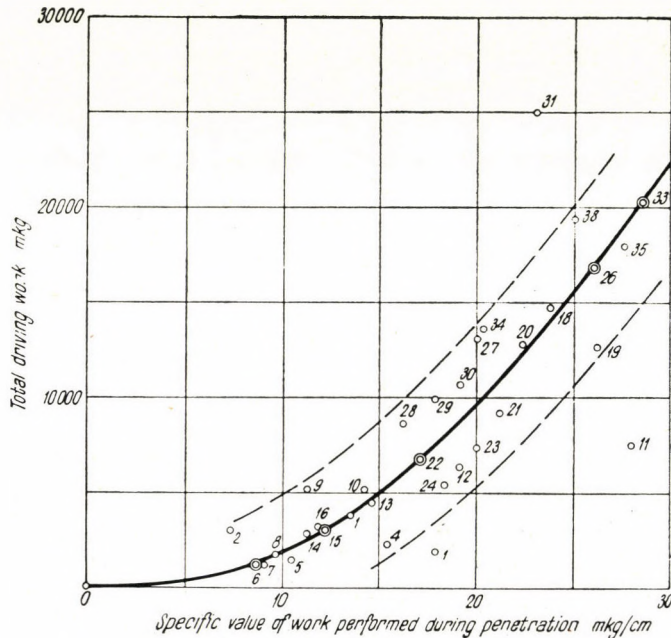


Fig. 18. Relation between works of pile-driving and of penetration; selection of an average pile-loading diagram

at the driving process as if it were a sounding, the result of which — the total work necessary for driving in the pile — is by all means characteristic for the relative comparison of the density of the layers which were cut through by the pile. For this reason, we determined the total *impact-work* on the basis of the *integrating pile-driving diagram*. This value, however, cannot be characteristic for the ultimate bearing capacity, it will only be competent with respect to the development of the skin-friction, or the lateral directed stresses, respectively, the state of the layers *below* the final depth of the pile's tip influences this value but to a small degree. For the characterization of this latter item we used *penetration-diagrams plotted during the separate loading of the pile's tip*. This value, as it appears from discussions in paragraph 3, cannot be used for the determination of the real value of the point resistance because this latter value

varies in the case of a loaded skin; as a so called *statical sounding*, however, it is adequate for supplying relative comparative data on the compaction of the soil below and around the point.

As basis of comparison we chose the *specific work of penetration*, i. e., the force which was necessary to attain a penetration (settlement) of 1 cm. Both values, the total driving work necessary for driving-in the pile, as well as the statical work performed during the settlement of 1 cm, are functions of the pile's length. These two works can also be plotted as a function of each other; the so obtained relation can be conceived as a quantity which is characteristic for the total bearing capacity.

The results of the accomplished 38 tests on pile-loading represented in accordance with the foregoing are shown in Fig. 18.

The existence of a relation leaps to the eye immediately; but there are several points lying far off the curve which may be traced through most of the points. The piles giving these points must thus be excluded from elaboration; the afore-mentioned deviation was due to some local effect.

When the extremely distant points (e. g. those pertaining to piles Nr. 3, 11 and 31) were left out, and then the curve fairly well averaging most points was plotted; it was possible to select those tests for each pile-length, which could be considered as to be of good *average values*. According to my opinion, the above-described procedure is by all means better than the mechanical computing of an average value, because it offers the possibility for eliminating such test-results, the offset of which may be due to some undeterminable local disturbing effect.

Using the described method it was possible to establish that for the individual pile-length the loading diagrams belonging to piles Nr. 6, 15, 22, 26 and 33 could be accepted as the most reliable average values, these are plotted in Fig. 19. The curves show the already known character: there is no "*ultimate load*"; the greatest measured penetration — at which each curve arrived at the inclined straight line — was about 10 mm; the slope of the initial tangent considerably decreases with an increase of the pile-length. Fig. 20 shows the variation of the total pile-load versus the pile-length, if the penetration was chosen as parameter.

The theoretical curve was in accordance with formula (21) a parabola of the second degree; formed

$$P = a\gamma lD + \beta\gamma l^2$$

this means that if $l = 0$, then $P = 0$. It can be established that although all these curves follow with sufficient accuracy the parabolic law, *none of them arrives to the zero point*. This circumstance can easily be understood: in the case of a pile-length $l = 0$ the bearing capacity is *not equal to zero*, but equal to the value of the *ultimate load on the surface*, which is also in the case of a small

pile-diameter a *finite* value. This ultimate load, however, was not taken into consideration during our deduction. The value of the latter, on the other hand, can be computed with a sufficient reliability: so *e. g.*, in the case of spread foundations MEYERHOF's theory (1954) can be fairly well applied, and all the more by the fact, as MEYERHOF verified his theory on ultimate bearing capacity by *laboratory model-tests* carried out with model specimens of small sizes, and so there is no great deviation between the measurements of model foundation specimens and those of our piles. Determining this limiting bearing capacity

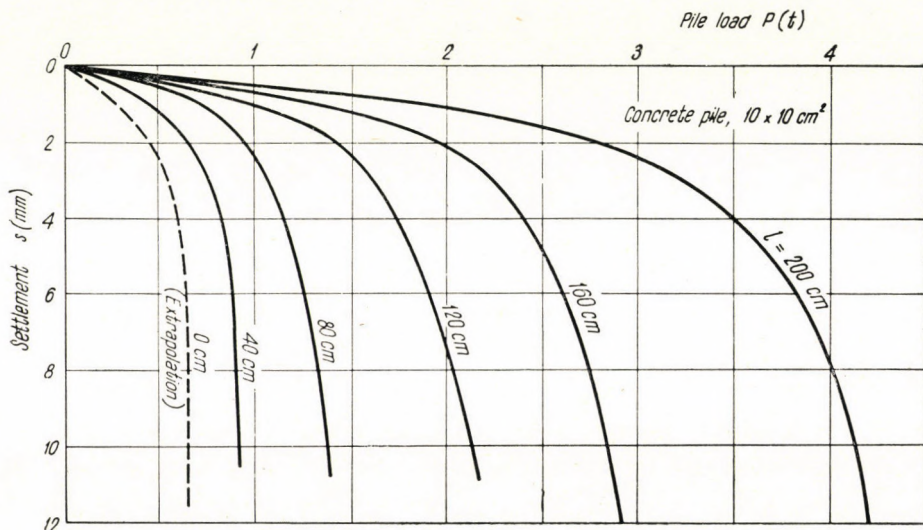


Fig. 19. Average pile-loading diagrams

ity — allowing for an angle of internal friction $\Phi = 36^\circ$ and a cohesion $c = 0,08 \text{ kg/cm}^2$ ($N_c = 52$, $N_\gamma = 60$) — the value

$$P_{0t} = F \left(cN_b + \frac{B\gamma}{2} N_g \right) = 825 \text{ kg}$$

was obtained; this result — with respect to the range of magnitude — excellently agrees with the value of 700 kg belonging to a penetration of 1 cm, extrapolated in Fig. 19. The variation of the value P_0 with the settlement — obtained on the basis of extrapolations — was plotted in Fig. 19 by punctuated lines; the obtained line was a characteristic *surface test-load diagram*.

In compliance with the above, if we wish to obtain the total bearing capacity of a pile, the value P_{0t} must be added to the bearing capacity belonging to a penetration of 1 cm. Allowing for this correction, we obtain such curves which verify our theoretical results perfectly; taking into consideration test-

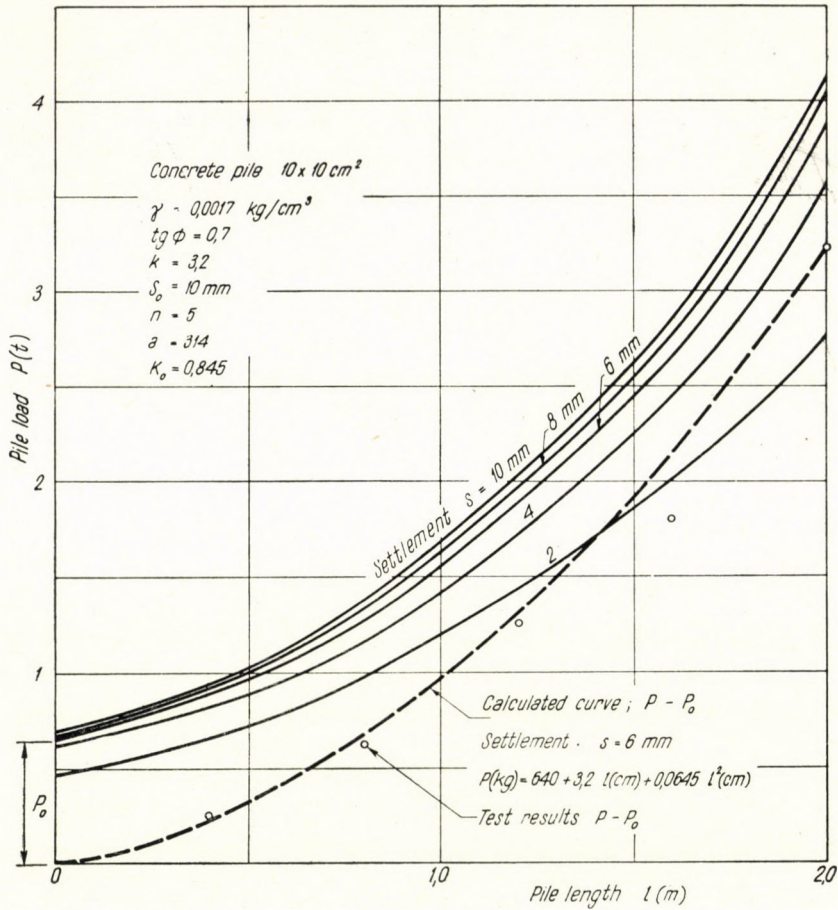


Fig. 20. Pile-loads versus pile-length and penetration (settlement)

data the relation between pile-length and pile-load can be expressed by the following formula: in the instance of a penetration $s = 6 \text{ mm}$

$$P^{(\text{kg})} = 640 + 3,2l + 0,0645l^2;$$

in the instance of a penetration $s = 8 \text{ mm}$

$$P^{(\text{kg})} = 680 + 4,27l + 0,0648l^2;$$

in the instance of a penetration $s = 10 \text{ mm}$

$$P^{(\text{kg})} = 700 + 5,33l + 0,065l^2.$$

Fig. 20 shows fundamental data on calculations, test-curves and in one case also results obtained from calculations.

Thus, the bearing capacity of a pile is a function of second degree of the length of the pile; all the three members are — in addition to the pile's diameter, the roughness of the surface and the physical properties of the soil — also functions of the penetration, *i. e.* of the settlement. At pile-measurements to be met in practice the importance of the quantity P_0 may be much less than in the case of piles used in model-tests: in the instance of a pile with a diameter of 30 cm and a length of 10—15 m the value of P_0 can either be neglected to the advantage of safety, or at penetrations above 5—10 mm this value may be regarded as being independent of the settlement, and it may — for instance — be taken as being equal to the surface ultimate load calculated on the basis of MEYERHOF's theory. Tests and theoretical results show a good agreement, regularities appear in the same way. From the view-point of practice the essence of our results may be defined therein, that the finished test-loading of a pile can be elaborated in a more realistic way than on the base of the so far known theories; all the factors which have an influence on the bearing capacity can be better investigated, and by this, more reliable data can be obtained for the final construction. We are relieved from an arbitrary determination of the factors of safety on the basis of the loading diagram of the pile; finally, deformations — which are of fundamental importance from the view-point of structure — can also be numerically examined.

*

The author wishes to express his sincere thanks to Research Engineer H. HERZOG for carrying out the experiments and supervizing the field tests and also to L. FARKAS for his valuable help in the tests.

REFERENCES

- BERESANTSEV, V. G.: Oszeszimetricznaja zadacsa teorii predel'nogo ravnoveszija szüpucej sztedü. Goszudarsztvennoe izdatelstzvo tehnikoteoreticeszkoy literaturü. Moszkva (1952).
- CHELLIS, R. D.: Pile Foundations. Theory-design-practice. McGraw-Hill Co., Inc. New-York, 1951.
- DÖRR, H.: Die Tragfähigkeit der Pfähle. Berlin, Wilhelm Ernst & Sohn (1922). (See also Die Bautechnik, 1933, pp. 447—450.)
- L'HERMINIER, R.: Remarques sur le poinçonnement continu des sables et graviers. Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publiques. Sixième Année, N^{os} 63—64, Paris (1953).
- IRELAND, H. O.: Pulling Tests on Piles in Sand. Proc. 4th Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Engg. London, Vol. II.
- DR. JÁKY, J.: Összetett nyomófeszültségi állapotok. Technika I. 246. füzet (1945). (In Hung.)
- DR. JÁKY, J.: On the Bearing Capacity of Piles. Proc. 2nd Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Engg., Rotterdam, Vol. I., p. 100 (1948).
- KARAFIÁTH, L.: Magyarországi cölöpalapozások. Mérnöki Továbbképző Intézet (1955). (In Hung.)
- KEVERLING-BUISMAN, A. S.: Vorträge der Baugrundtagung 1954 in Stuttgart. Hamburg, Deutsche Gesellschaft für Erd- und Grundbau. (1955).

- KÉZDI, Á.: Über die Tragfähigkeit und die Setzung von Pfahlgründungen. Gedenkbuch für Prof. Dr. J. Jáky. Budapest, Akadémiai Kiadó, pp. 41—55. (1955).
- MANSUR, C. I., KAUFMANN, R. J.: Pile Tests, Low-Sill Structure, Old River, La. Proceedings, American Society of Civil Engineers, Vol. 82, SM 4. October 1956, pp 1079—1133.
- MEYERHOF, G. G.: The ultimate bearing capacity of foundations. Géotechnique, 2. No. 4, pp. 301—332.
- ROWE, P. W.: A stress-strain theory for cohesionless soil with applications to earth pressure at rest and moving walls. Géotechnique 4, pp. 70—88.
- SCARLETT, P. H.: Investigation of the Bearing Capacity of Piles and Deep Foundations. M. Sc. Thesis, Queen's University, Belfast (1955). Manusc.
- SEED, H. B., REESE, L. C.: The Action of Soft Clay along Friction Piles. Proceedings, American Society of Civil Engineers, Vol. 81, Paper No. 842. (1955).
- STEINFELD, K.: Über den räumlichen Erdwiderstand. Mitteilungen der Hannoverschen Versuchsanstalt für Grundbau und Wasserbau. Franzius-Institut der Technischen Hochschule Hannover, H. 3. (1953).

SUMMARY

The range of application of piling. Questions to be solved during designing. Known methods for the determination of the load-bearing capacity and their insufficiencies. Dynamic and statical pile-driving formulae; test loading. Establishment of a new law on shear by empirical methods. Relation between displacement and shearing stress. Introduction of the idea on limiting displacement.

Investigation of the loading process upon an individual pile. The case of a pile embedded into a granular soil at a tip-resistance of zero value. Relation between pile-load and vertical displacement. The case of a pile fixed at the tip; the value of the available skin-friction as a function of the pile's elastic compression. Examination of normal stresses arising on the surface of driven and of bored piles. Determination of loading diagrams. Verification of theoretical results on the base of SEED—REESE's, MANSUR—KAUFMANN's and other test-results.

Expression of factors on bearing capacity versus displacement. Interaction between skin-friction and point-resistance. Tests with large-sized ($l = 200$ cm) model piles for investigating the bearing capacity of an individual pile. Pile-load versus pile-length and displacement. Elaboration and evaluation of test-loading diagrams of piles.

BEITRÄGE ZUR FRAGE DER TRAGFÄHIGKEIT VON PFÄHLEN

Á. KÉZDI

ZUSAMMENFASSUNG

Der Anwendungsbereich der Pfahlgründungen. Im Laufe der Planung zu lösende Fragen. Bekannte Methoden zur Bestimmung der Tragfähigkeit und deren Unzulänglichkeiten. Dynamische und statische Formeln; Probelastung. Die Bestimmung eines neuen Gesetzes für Schub auf empirischem Wege. Zusammenhang zwischen der Verschiebung infolge Schubwirkung und der Schubspannung. Einführung des Begriffes der Grenzverschiebung.

Untersuchung der Belastung des einzelnen Pfahles. Der Fall des in körnigen Boden eingebetteten Pfahles bei nullwertigem Spitzenwiderstand. Verhältnis zwischen der Pfahlkraft (Pfahllast) und der vertikalen Verschiebung (Setzung). Der Fall des an seiner Spitze eingespannten Pfahles; der Wert der annehmbaren Mantelreibung als Funktion der elastischen Pfahlkompression. Untersuchung der an der Oberfläche von Ramm- und Bohrpfählen auftretenden Normalspannungen. Bestimmung des Belastungsdiagramms. Kontrolle der theoretischen Ergebnisse auf Grund der Versuchsergebnisse von SEED—REESE, MANSUR—KAUFMANN und Anderer.

Ausdruck der Faktoren der Tragfähigkeit als Funktion der Setzung. Wechselwirkung zwischen der Mantelreibung und dem Spitzenwiderstand. Versuche mit grossen Modellpfählen ($l = 200$ cm) zwecks Untersuchung der Tragfähigkeit eines Einzelpfahles. Die vom Pfahl aufgenommene Last als Funktion der Pfahllänge und der Setzung. Auswertung von Probelastungsdiagrammen von Pfählen.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA CAPACITÉ PORTANTE DES PIEUX

A. KÉZDI

RÉSUMÉ

Terrain d'application des pieux. Questions à résoudre au cours de la construction. Méthodes connues et imperfections des méthodes de détermination de la capacité portante. Formules dynamiques et statiques; charge d'épreuve. Détermination empirique d'une nouvelle loi pour le cisaillement. Le rapport entre le déplacement de cisaillement et la tension de cisaillement. L'introduction de la notion de déplacement limite.

Examen du processus de chargement du pieu individuel. Cas d'un pieu se trouvant dans un sol granulé, si la résistance au point est zéro. Rapport entre le chargement du pieu et le déplacement vertical. Cas d'un pieu encastré au point; valeur limite du frottement latéral en fonction des compressions du pieu. Examen des tensions normales sur la surface du pieu battu et du pieu foré. Détermination du diagramme de charge. Vérification des résultats théoriques à l'aide des résultats expérimentaux obtenus par SEED—REESE, MANSUE—KAUFMAN, etc.

Expression des facteurs de la capacité portante, en fonction du déplacement. L'effet réciproque du frottement latéral et de la résistance au point du pieu. Essais sur modèles de pieux de grandes dimensions ($l = 200$ cm) pour l'examen de la capacité portante d'un pieu individuel. Le chargement porté par le pieu, en fonction de la longueur et du déplacement. Évaluation des diagrammes des charges d'épreuves des pieux.

К НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СВАЙ

A. КЕЗДИ

РЕЗЮМЕ

Область применения забивки свай. Вопросы, которые необходимо решать в процессе проектирования. Известные методы определения несущей способности и их недостатки. Динамические и статические формулы; опытная нагрузка. Определение одного нового закона среза эмпирическим путем. Зависимость между сдвигом среза и напряжением среза. Введение понятия предельного сдвига.

Анализ процесса нагрузки отдельной сваи. Случай сваи, опущенной в зернистый грунт, в случае пикового сопротивления величиной ноль. Зависимость между силой, действующей на сваю, и вертикальным сдвигом. Случай сваи, намертво зажатой на вершине; значение воспринимаемого трения оболочки в функции сжатий сваи. Анализ нормальных напряжений, возникающих на поверхности забитых и буренных свай. Определение диаграммы нагрузки. Проверка теоретических результатов при помощи экспериментальных данных Манзуер—Кауфмана, Зид—Ризе и др.

Выражение факторов несущей способности в функции сдвига. Взаимодействие между трением оболочки и сопротивлением вершины. Опыты при помощи крупных модельных свай ($l = 200$ см) для исследования несущей способности отдельной сваи. Сила, воспринимаемая свайей, в функции длины сваи и сдвига. Обработка и оценка диаграмм опытных нагрузок свай.

PARABOLOID SHELL OF REVOLUTION OVER EQUILATERAL TRIANGLE BASIS

P. CSONKA
D. ENG. SC.

WORKING COMMUNITY OF STRUCTURAL AND TRANSPORT ENGINEERING OF THE HUNGARIAN
ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received June 17, 1959]

1. Introduction

The present paper deals with the calculation of a membrane shell shaped according to a rotation paraboloid and centrally placed over an equilateral triangle basis (Fig. 1). The edges of the investigated shell are supported by

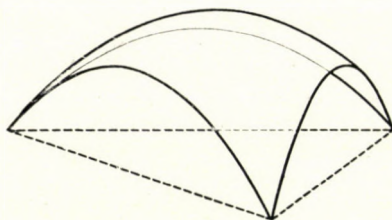


Fig. 1. Paraboloid shell of revolution over equilateral triangle basis (perspective view)

edge beams (*e. g.*, tie arches) lying in vertical planes, which do not resist to any laterally directed forces. The shells in question can fairly-well be used for the solution of different architectural problems, their calculation, however, is by the so far known methods, exceedingly difficult.

As matters stand, it would be of some interest to introduce a method of calculation, by the use of which the set problem could be solved within the range of basic assumptions on calculations, but at the same time, with an accuracy adequate from the view-point of practice.

2. Basic relations

During our investigations we disregard the flexural and the torsional resistance of the shell, and we also neglect the disturbing effects between the shell and the edge beams.

As a load upon the shell vertical distributed forces are only allowed for, circular-symmetrically arranged with respect to the rotation-axis of the shell's

middle surface. These forces are taken as being positive if pointing downwards. The values of their intensity related to the surface-unit of the plane projection area will be denoted by Z .

The shape of the shell's middle surface (Fig. 2) is defined by the equation

$$z = \frac{ka}{2} \varrho^2, \quad k = \text{const.} \quad (1)$$

Herein

$$\varrho \equiv \frac{r}{a}. \quad (2)$$

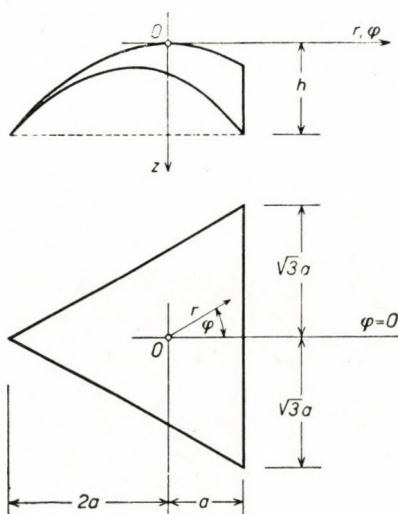


Fig. 2. Paraboloid shell of revolution over equilateral triangle basis (orthogonal projection)

For the solution of the problem, *i. e.*, for the determination of inner forces caused by given load $Z = Z(\varrho)$, we set out from the well-known differential equation of shells of revolution. In the case on hand, the latter may be written in the following form:

$$\Delta F \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial F}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = -\frac{a^3}{k} Z. \quad (3)$$

In the above formula $F = F(\varrho, \varphi)$ is Pucher's stress function of the problem [2]. Between the function F and the basis-projections of the shell's inner forces the

following relations are valid (Fig. 3a)

$$\left. \begin{aligned} n_\rho &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right), \\ n_{\rho\varphi} &= n_{\varphi\rho} = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right), \\ n_\varphi &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

In general, if x and y are two arbitrary directions of the basis-projection, but perpendicular to each other, then the intensity of the x - or y -directed projec-

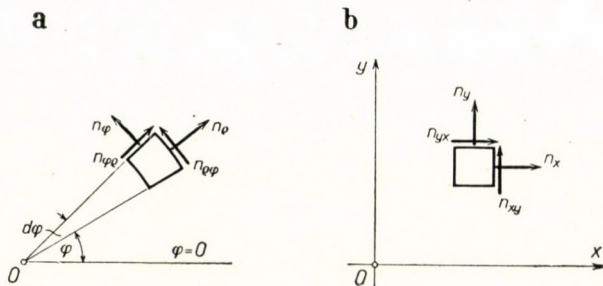


Fig. 3. Components of plane projection inner forces

tions of the inner forces, respectively, can be calculated in the following way (Fig. 3b):

$$\left. \begin{aligned} n_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ n_{xy} &= n_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \\ n_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Since the investigated shell cannot exert any lateral directed pressure on the edge beams, it is necessary that along the sides of the triangle basis the second derivative of the stress function, taken in the direction of the respective lateral edge, should vanish. It follows from this condition, as well as for reasons of symmetry, that along the sides of the basic triangle function F must be of constant value, *i. e.*:

$$F_{\text{contour}} = \text{constant}. \quad (6)$$

Allowing for the above, our task can be formularized as follows: we have to look for a function $F(r, \varphi)$ corresponding to differential equation (3), the value of which is constant at all points of the circumference of the basic triangle. If we could succeed in producing such a function, our problem could be taken as solved, because forces characteristic for the stress-distribution of the shell can already be computed from formulae (4) and (5).

3. Auxiliary functions to be applied

In the case of a given load function $Z = Z(\varrho)$ it is generally impossible to establish the exact stress function in a closed form. Therefore, we have generally to resort to an approximate solution, *i. e.*, instead of the exact stress function F we have to be satisfied with the establishment of some approximately exact stress function F^* . The latter will be produced as a combination of auxiliary functions exactly complying with boundary condition (6).

There exists an infinite number of functions corresponding to boundary condition (6). Such a function could be obtained, *e. g.*, by setting up equations of the three straight lines bordering the triangle basis in their form reduced to zero, and by a subsequent multiplication of these equations with each other. The equations of the three bordering straight lines are:

$$\begin{aligned}\varrho \cos \varphi - 1 &= 0, \\ \varrho \cos \left(\frac{2}{3} \pi - \varphi \right) - 1 &= 0, \\ \varrho \cos \left(\frac{4}{3} \pi - \varphi \right) - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Thus, the function in question is:

$$\psi = (\varrho \cos \varphi - 1) \left[\varrho \cos \left(\frac{2}{3} \pi - \varphi \right) - 1 \right] \left[\varrho \cos \left(\frac{4}{3} \pi - \varphi \right) - 1 \right] = 0.$$

Herefrom, after some transformation:

$$\psi = -1 + \frac{3}{4} \varrho^2 + \frac{1}{4} \varrho^3 \cos 3\varphi.$$

This function vanishes along the sides of the basic triangle. The following function has similar properties:

$$\Phi = -4 + 3\varrho^2 + \varrho^3 \cos 3\varphi. \quad (7)$$

Each function resulting from a multiplication of function Φ with some finite expression, will, of course, also comply with condition (6).

In the following we shall select from functions which could be produced according to the above, those functions, which put into differential equation(3) will give loading system independent of φ . Such functions are *e. g.*, the following:

$$\left. \begin{aligned}
 \Phi_0 &= \Phi, \\
 \Phi_1 &= (4 - 3 \varrho^2 + \varrho^3 \cos 3 \varphi) \Phi, \\
 \Phi_2 &= \left[\left(32 - 48 \varrho^2 + 18 \varrho^4 - \frac{1}{2} \varrho^2 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + (8 \varrho^3 - 6 \varrho^5) \cos 3 \varphi + \varrho^6 \cos 6 \varphi \right] \Phi, \\
 \Phi_3 &= [(256 - 576 \varrho^2 + 432 \varrho^4 - 116 \varrho^6 + 6 \varrho^8) + \\
 &\quad + (64 \varrho^3 - 96 \varrho^5 + 36 \varrho^7 - \varrho^9) \cos 3 \varphi + \\
 &\quad + (8 \varrho^6 - 6 \varrho^8) \cos 6 \varphi + \varrho^9 \cos 9 \varphi] \Phi, \\
 \Phi_4 &= \left[\left(2048 - 6144 \varrho^2 + 6912 \varrho^4 - 3552 \varrho^6 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 792 \varrho^8 - 54 \varrho^{10} + \frac{1}{2} \varrho^{12} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + (513 \varrho^3 - 1152 \varrho^5 + 864 \varrho^7 - 232 \varrho^9 + 12 \varrho^{11}) \cos 3 \varphi + \right. \\
 &\quad \left. + (64 \varrho^6 - 96 \varrho^8 + 36 \varrho^{10} - \varrho^{12}) \cos 6 \varphi + \right. \\
 &\quad \left. + (8 \varrho^9 - 6 \varrho^{11}) \cos 9 \varphi + \varrho^{12} \cos 12 \varphi \right] \Phi, \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

These functions were produced using the method of indefinite coefficients and exponents. In the course of the computation we allowed for the fact that

$$\cos m\varphi \cdot \cos n\varphi = \frac{1}{2} \cos (m + n)\varphi + \frac{1}{2} \cos (m - n)\varphi ;$$

and we also took into consideration that expressions of the form

$$\varrho^i \cos i \varphi$$

are potential functions, thus, put into differential equation (3), they give a result equal to zero.

For the purpose of further calculations formulae (8) will be transformed, that is, Φ will be replaced by expression (7) and the indicated multiplications will then be carried out. In this way we obtain the following formulae:

$$\left. \begin{aligned}
 \Phi_0 &= -4 + 3 \varrho^2 + \varrho^3 \cos 3 \varphi, \\
 \Phi_1 &= -16 + 24 \varrho^2 - 9 \varrho^4 + \frac{1}{2} \varrho^6 + \frac{1}{2} \varrho^6 \cos 6 \varphi, \\
 \Phi_2 &= -128 + 288 \varrho^2 - 216 \varrho^4 + 60 \varrho^6 + \frac{9}{2} \varrho^8 + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \varrho^9 \cos 9 \varphi, \\
 \Phi_3 &= -1024 + 3072 \varrho^2 - 3456 \varrho^4 + 1792 \varrho^6 - 420 \varrho^8 + \\
 &\quad + 36 \varrho^{10} - \frac{1}{2} \varrho^{12} + \frac{1}{2} \varrho^{12} \cos 12 \varphi, \\
 \Phi_4 &= -8192 + 30\,720 \varrho^2 - 46\,080 \varrho^4 + 35\,200 \varrho^6 - 14\,400 \varrho^8 + \\
 &\quad + 3024 \varrho^{10} - 280 \varrho^{12} + \frac{15}{2} \varrho^{14} + \frac{1}{2} \varrho^{15} \cos 15 \varphi, \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Thereafter, the auxiliary functions which have to be applied in the course of the approaching procedure will be set up in the following way:

$$\left. \begin{aligned}
 F_0 &= \frac{a^3}{12k} (-\Phi_0), \\
 F_1 &= \frac{a^3}{144k} (-8\Phi_0 + \Phi_1), \\
 F_2 &= \frac{a^3}{1728k} (-96\Phi_0 + 24\Phi_1 - \Phi_2), \\
 F_3 &= \frac{a^3}{17\,280k} \left(-1152\Phi_0 + 416\Phi_1 - \frac{100}{3}\Phi_2 + \Phi_3 \right), \\
 F_4 &= \frac{a^3}{151\,200k} (-13\,824\Phi_0 + 6272\Phi_1 - 720\Phi_2 + 42\Phi_3 - \Phi_4), \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Accomplishing the substitutions here indicated, the following formulae will be obtained for the auxiliary functions:

$$\left. \begin{aligned}
 F_0 &= \frac{a^3}{12k} (4 - 3 \varrho^2 - \varrho^3 \cos 3 \varphi), \\
 F_1 &= \frac{a^3}{144k} \left(16 - 9 \varrho^4 + \frac{1}{2} \varrho^6 - 8 \varrho^3 \cos 3 \varphi + \frac{1}{2} \varrho^6 \cos 6 \varphi \right), \\
 F_2 &= \frac{a^3}{1728k} \left(128 - 48 \varrho^6 + \frac{9}{2} \varrho^8 - 96 \varrho^3 \cos 3 \varphi + \right. \\
 &\quad \left. + 12 \varrho^6 \cos 6 \varphi - \frac{1}{2} \varrho^9 \cos 9 \varphi \right), \\
 F_3 &= \frac{a^3}{17280k} \left(\frac{3584}{3} - 270 \varrho^8 + 36 \varrho^{10} - \frac{1}{2} \varrho^{12} - \right. \\
 &\quad - 1152 \varrho^3 \cos 3 \varphi + 208 \varrho^6 \cos 6 \varphi - \\
 &\quad \left. - \frac{50}{3} \varrho^9 \cos 9 \varphi + \frac{1}{2} \varrho^{12} \cos 12 \varphi \right), \\
 F_4 &= \frac{a^3}{151200k} \left(12288 - 1512 \varrho^{10} + 259 \varrho^{12} - \frac{15}{2} \varrho^{14} - \right. \\
 &\quad - 13824 \varrho^3 \cos 3 \varphi + 3136 \varrho^6 \cos 6 \varphi - \\
 &\quad \left. - 360 \varrho^9 \cos 9 \varphi + 21 \varrho^{12} \cos 12 \varphi - \frac{1}{2} \varrho^{15} \cos 15 \varphi \right), \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

The above auxiliary functions were constructed in such a way that load functions complying with them according to diff. equation (3), namely the functions

$$\left. \begin{aligned}
 Z_0 &= 1, \\
 Z_1 &= \varrho^2 - \frac{1}{8} \varrho^4, \\
 Z_2 &= \varrho^4 - \frac{1}{2} \varrho^6, \\
 Z_3 &= \varrho^6 - \frac{5}{24} \varrho^8 + \frac{1}{240} \varrho^{10}, \\
 Z_4 &= \varrho^8 - \frac{37}{150} \varrho^{10} + \frac{7}{720} \varrho^{12}, \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

should have a structure as simple as possible.

4. Solution of the problem in general

In possession of the auxiliary functions introduced in paragraph 3, we wish to apply the function series

$$F^* = c_0 F_0 + c_1 F_1 + \dots + c_n F_n \quad (13)$$

as approximate stress function. Parameters c_i figuring here, of course, cannot be chosen at will. Their values must be determined in such a way that the loading system

$$Z^* = c_0 Z_0 + c_1 Z_1 + \dots + c_n Z_n \quad (14)$$

corresponding to stress function F^* should deviate as little as possible from the given loading system Z .

For the determination of the parameters c_i in question, we have to resort to some suitable adjustment. Since in accordance with our condition Z is only a function of ϱ , and the loading system Z^* also depends on ϱ only, it will be sufficient to accomplish the adjustment along one single radius, notably along the longest radius.

As adjustment different methods could be taken into consideration. In such cases, *e. g.*, if the Taylor-series of the loading system $Z(\varrho)$ is convergent, and the first members of the series approach the value of Z with sufficient accuracy, then a successive adaptation could give good results for the parameters c_i . This method could be applied in many cases also beyond the limit of convergence.

In other cases, the method of a sectionwise adaptation seems to be the most suitable for determining parameters c_i . If we apply this method, the longest radius branching off from the center has to be divided into $(n + 1)$ sections of equal length, and we have to set up the demand that the average value of Z^* should agree with the average value of Z along each of these sections, *i. e.* :

$$\int_{\varrho=0}^{\frac{2i}{n+1}} Z^* d\varrho = \int_{\varrho=0}^{\frac{2i}{n+1}} Z d\varrho. \quad i = 1, 2, \dots, n + 1.$$

In this way we obtain a system of linear equations consisting of $(n + 1)$ equations, and from this we can determine parameters c_0, c_1, \dots, c_n .

For the sake of a more simple calculation, it may be expedient to combine the above-described method with an adjustment point by point. This

compound method is particularly simple, if the adaptation has to be accomplished at locus $\varrho = 0$ only, thus, this being the only point at which an agreement between the average value of function Z^* and that of function Z is required. From condition

$$[Z^*]_{\varrho=0} = [Z]_{\varrho=0}$$

which can be written in this way, the value of the parameter c_0 can immediately be calculated, that is:

$$c_0 = [Z]_{\varrho=0}. \quad (15)$$

For the determination of parameters c_0, c_1, \dots, c_n still required, the longest radius has to be divided into n equal sections, and we have to establish the condition, that along each of these sections the average value of Z^* must agree with the average value of Z , *i. e.* :

$$\int_{\varrho=0}^{\frac{2i}{n}} Z^* d\varrho = \int_{\varrho=0}^{\frac{2i}{n}} Z d\varrho, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

From the so obtained n equations, the so far unknown parameters c_1, c_2, \dots, c_n can also be determined.

5. The solution of the problem in the case of snow load

In the above case, as well as in other cases, if the intensity of the projectional load upon the shell is

$$Z = p = \text{constant},$$

the form of the problem's stress function is exactly the same as in the case of a bar with a regular triangle cross section affected by pure torsion. According to this

$$F = p \cdot F_0. \quad (16)$$

Applying the substitution given in (11), the latter formula can also be written in this form:

$$F = \frac{pa^3}{12k} (4 - 3\varrho^2 - \varrho^3 \cos 3\varphi). \quad (17)$$

6. Solution of the problem in the case of dead load

In this case, as well as in other instances, if the intensity of the load upon the shell related to the surface-unit of the middle surface at all points is

$$g = \text{constant},$$

the intensity of the projection load can be expressed by the formula

$$Z = g \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2} = g \sqrt{1 + k^2 \varrho^2}.$$

In the following we introduce three alternatives for the calculation of this important case of loading. Among these alternatives, the solution to be given in *a*) is the least exact, while that to be found in *c*) is the most accurate.

a) Monoparametric solution

Under this circumstance the approximate stress function is produced using one single auxiliary function only. By so doing

$$F^* = c_0 F_0. \quad (18)$$

Substituting into the above formula the value of F_0 given in (11), we obtain

$$F^* = \frac{c_0 a^3}{12k} (4 - 3\varrho^2 - \varrho^3 \cos 3\varphi). \quad (19)$$

It is expedient to replace, in the above formula, the parameter c_0 by a value that the average value of the loading system Z^* should comply along the longest radius with the average value of the accurate load Z , *i. e.*:

$$\int_0^2 Z^* d\varrho = \int_0^2 Z d\varrho.$$

Carrying out this calculation for different values of k , as parameters c_0 the values compiled in Table 1, are obtained. The last column of this Table shows the relative values of the quadratic mean error. The value ζ of this error, as well as the values of errors figuring in the following are defined

by the formula

$$\zeta = \left[\frac{1}{2} \int_0^2 \left(\frac{Z^* - Z}{Z} \right)^2 d\rho \right]^{\frac{1}{2}}.$$

The integration above-indicated was numerically accomplished, and the same method will also be followed in the future when determining the value of ζ .

Table 1

Data belonging to the monoparametric solution

k	c_0	ζ
0,000	1,000 00 g	0,0000
0,125	1,010 32 g	0,0091
0,250	1,040 21 g	0,0337
0,375	1,087 10 g	0,0677

As is to be seen from the above tabulation, the here presented monoparametric solution gives results of sufficient accuracy for very oblate shells only.

b) Biparametric solution

The approximate stress function will now be produced using two auxiliary functions, *i. e.* :

$$F^* = c_0 F_0 + c_1 F_1. \quad (20)$$

Replacing F_0 and F_1 with the corresponding expressions to be found in (11) we obtain herefrom:

$$F^* = \frac{c_0 a^3}{12k} (4 - 3 \rho^2 - \rho^3 \cos 3 \varphi) + \frac{c_1 a^3}{144k} \left(16 - 9 \rho^4 + \frac{1}{2} \rho^6 - 8 \rho^3 \cos 3 \varphi + \frac{1}{2} \rho^6 \cos 6 \varphi \right). \quad (21)$$

For the determination of parameters c_0 and c_1 the radius branching off from the center should be divided into two equal parts and the *sectionwise adjustment* must be used.

Finishing the afore-mentioned calculation for different values of k , the values compiled in Table 2a, are obtained. The last column of this Table shows the relative value of the quadratic mean error due to the use of the approaching procedure.

Table 2a

Data belonging to the biparametric solution using a sectionwise adjustment

k	c_0	c_1	ζ
0,000	1,000 00 g	0,000 00 g	0,0000
0,125	0,998 79 g	0,012 35 g	0,0020
0,250	0,995 57 g	0,047 82 g	0,0069
0,375	0,991 33 g	0,102 61 g	0,0126
0,500	0,987 14 g	0,172 13 g	0,0177
0,625	0,983 95 g	0,252 30 g	0,0214
0,750	0,982 24 g	0,340 07 g	0,0238

If for the sake of a more simple calculation instead of the sectionwise adjustment the *compound adjustment* — presented in paragraph 4 — is applied for the parameters c_0 and c_1 , furthermore, for the value ζ of the relative error, the values shown in Table 2b are obtained.

Table 2b

Data belonging to the biparametric solution using a compound adjustment

k	c_0	c_1	ζ
0,000	1,0 g	0,000 00 g	0,0000
0,125	1,0 g	0,011 07 g	0,0023
0,250	1,0 g	0,043 08 g	0,0080
0,375	1,0 g	0,093 32 g	0,0144
0,500	1,0 g	0,158 35 g	0,0199
0,625	1,0 g	0,235 10 g	0,0236
0,750	1,0 g	0,321 05 g	0,0257

Between the two procedures introduced here, the first one is more precise, but, with respect to the requirements of practice, the accuracy of the second method is, in general, also perfectly satisfactory.

c) *Triparametric solution*

The approximate stress function will now be produced with the help of three auxiliary functions, *i. e.* :

$$F^* = c_0 F_0 + c_1 F_1 + c_2 F_2. \tag{22}$$

Replacing the terms F_0 , F_1 and F_2 with the corresponding expressions to be found in (11), the above formula will obtain the following form:

$$\begin{aligned}
 F^* = & \frac{c_0 a^3}{12k} (4 - 3 \varrho^2 - \varrho^3 \cos 3 \varphi) + \\
 & + \frac{c_1 a^3}{144k} \left(16 - 9 \varrho^4 + \frac{1}{2} \varrho^6 - 8 \varrho^3 \cos 3 \varphi + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \varrho^6 \cos 6 \varphi \right) + \\
 & + \frac{c_2 a^3}{1728k} \left(128 - 48 \varrho^6 + \frac{9}{2} \varrho^8 - 96 \varrho^3 \cos 3 \varphi + \right. \\
 & \quad \left. + 12 \varrho^6 \cos 6 \varphi - \frac{1}{2} \varrho^9 \cos 9 \varphi \right).
 \end{aligned} \tag{23}$$

Determining the parameters figuring in the foregoing formulae by *section-wise adjustment* in such a way that the longest radius branching off from the center should be divided into three equal parts, we obtain the values compiled in Table 3a.

Table 3a

Data belonging to the triparametric solution using a sectionwise adjustment

k	c_0	c_1	c_2	ξ
0,00	1,000 00 g	0,000 00 g	0,000 00 g	0,0000
0,25	1,000 76 g	0,024 29 g	0,010 01 g	0,0031
0,50	1,002 49 g	0,102 06 g	0,029 86 g	0,0079
0,75	1,005 07 g	0,233 59 g	0,045 68 g	0,0116
1,00	1,009 37 g	0,408 06 g	0,052 93 g	0,0146
1,25	1,016 25 g	0,612 66 g	0,052 30 g	0,0175

On the other hand, if the *compound adjustment* presented in paragraph 4 is applied, results shown in Table 3b are obtained.

Table 3b*Data belonging to the triparametric solution using a compound adjustment*

k	c_0	c_1	c_2	ζ
0,00	1,0 g	0,000 00 g	0,000 00 g	0,0000
0,25	1,0 g	0,028 99 g	0,007 85 g	0,0036
0,50	1,0 g	0,117 38 g	0,022 81 g	0,0095
0,75	1,0 g	0,264 48 g	0,031 50 g	0,0141
1,00	1,0 g	0,463 55 g	0,027 62 g	0,0182
1,25	1,0 g	0,705 90 g	0,010 08 g	0,0225

As can be established from these Tables, from the two methods the first one is the more exact, but the less accurate second procedure is also much more precise than is necessary.

Table 4*Accurate and approximate values of load*

q	Z	Z^*	100 ($Z^* - Z$)
0,00	1,00 000	1,00 000	$\pm 0,00$
0,25	1,00 778	1,00 737	-0,04
0,50	1,03 078	1,02 979	-0,10
0,75	1,06 800	1,06 792	-0,01
1,00	1,11 803	1,12 172	+0,33
1,25	1,17 925	1,18 878	+0,81
1,50	1,25 000	1,26 201	+0,96
1,75	1,32 877	1,32 662	-0,16
2,00	1,41 421	1,35 643	-4,09

7. Numerical example

Fig. 4 shows the middle surface of a paraboloid shell of revolution placed over an equilateral triangle basis. The radius of the circle inscribed into the triangle basis is $a = 10,0$ m, the total height of the shell is $h = 10,0$ m, and so the value of the coefficient k figuring in formula (1) of the middle surface is

$$k = \frac{h}{2a} = 0,5,$$

while the equation of the middle surface has the form

$$z = \frac{kr^2}{2a} = 0,025r^2.$$

The task to be solved is the determination of the stress function pertaining to the shell in question, furthermore, the establishment of formulae of projection inner forces in the case of a uniformly distributed snow load

$$p = 75 \text{ kg/m}^2,$$

and in the instance of a dead load

$$g = 180 \text{ kg/m}^2,$$

respectively.

a) *Snow load.* — Under such circumstances formula (17) of the stress function, after substituting the above numerical values into it, will have the following form:

$$F = \frac{75 \times 10,0^3}{12 \times 0,5} (4 - 3\rho^2 - \rho^3 \cos 3\varphi).$$

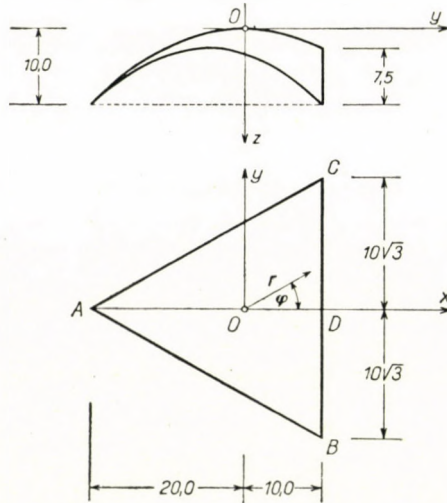


Fig. 4. Numerical example

Introducing orthogonal co-ordinates shown in Fig. 6 and using notations

$$\xi \equiv \frac{x}{a} \quad \text{and} \quad \eta \equiv \frac{y}{a}, \tag{24}$$

the above formula can be written in the following form:

$$F = 12\,500 (4 - 3\xi^2 - 3\eta^2 - \xi^3 + 3\xi\eta^2).$$

Projection inner forces can be calculated using formula (5). The result of the calculation is:

$$\begin{aligned} n_x &= -A(1 - \xi), \\ n_{xy} &= n_{yx} = -A\eta, \\ n_y &= -A(1 + \xi). \end{aligned}$$

Herein

$$A = \frac{pa}{2h} = \frac{75 \times 100}{2 \times 0,5} = 750 \text{ kg/m.}$$

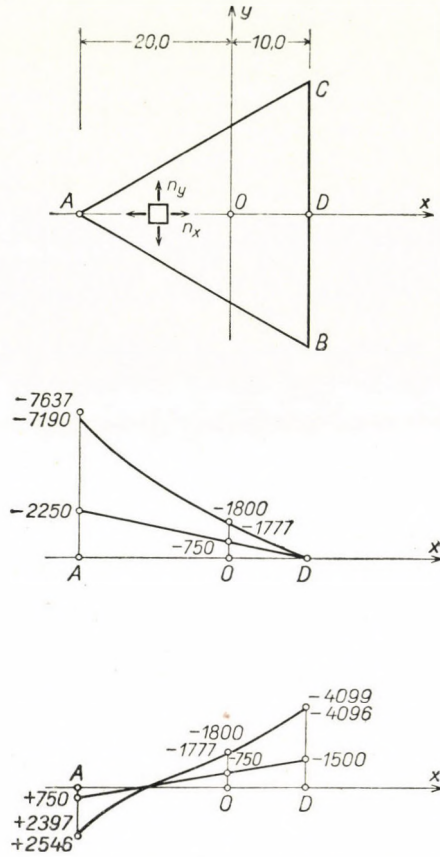


Fig. 5. Values of projection inner forces along central line AD; I. in the case of snow load; II. in the instance of dead load

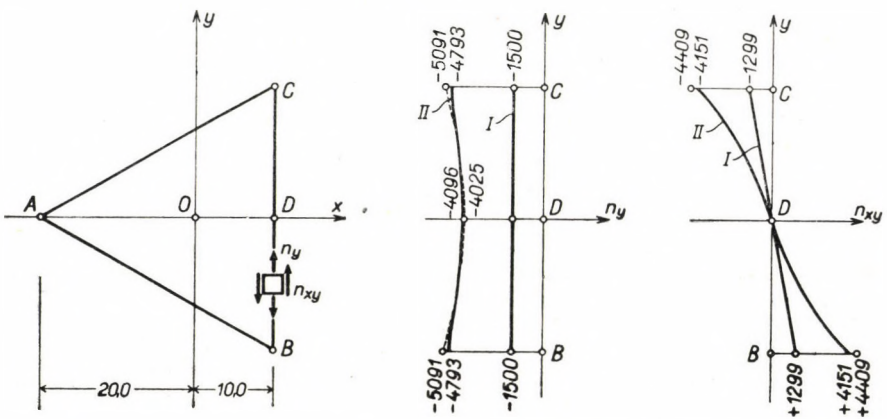


Fig. 6. Values of projection inner forces along lateral edge BC; I. in the case of snow load; II. in the instance of dead load

The values of the projection inner forces along the center-line AD , and along the lateral edge BC , respectively, are shown in Fig. 5, and by the curve marked with I in Fig. 6, respectively. As is to be seen, the corners of the shell are affected by considerable tension. The value of the greatest projection tensional force is 750 kg/m.

b) *Dead load.* — As the investigated shell is fairly convex, the accuracy of the mono-parametric solution would not be sufficient, therefore, the biparametric solution should be used. In the case on hand parameters figuring in formula (21) were taken into account, using values to be found in Table 2a, i. e.:

$$c_0 = 0,987\ 14 \times 180 = 177,68 \text{ kg/m}^2,$$

$$c_1 = 0,172\ 13 \times 180 = 30,98 \text{ kg/m}^2.$$

Substituting the above values and the geometric data of the shell into formula (21), the approximate stress function obtains the following form:

$$F^* = \frac{177,68 \times 10,0^3}{12 \times 0,5} (4 - 3\rho^2 - \rho^3 \cos 3\varphi) + \\ + \frac{30,98 \times 10,0^3}{144 \times 0,5} \left(16 - 9\rho^2 + \frac{1}{2} \rho^6 - 8\rho^3 \cos 3\varphi + \frac{1}{2} \rho^6 \cos 6\varphi \right).$$

Turning from polar co-ordinates to orthogonal ones and using notations (24), the formula of the approximate stress function may be written as follows:

$$F^* = 29\ 614 (4 - 3\xi^2 - 3\eta^2 - \xi^3 + 3\xi\eta^2) + \\ + 430 (16 - 8\xi^3 + 24\xi\eta^2 - 9\xi^4 - 18\xi^2\eta^2 - 9\eta^4 + \xi^6 - 6\xi^4\eta^2 + 9\xi^2\eta^4).$$

Projection inner forces can be calculated using formulae (5). Their values are:

$$n_x = -A(1 - \xi) - B(-8\xi + 6\xi^2 + 18\eta^2 + 2\xi^4 - 18\xi^2\eta^2), \\ n_{xy} = n_{yx} = -A\eta - B(8\eta - 12\xi\eta - 8\xi^3\eta + 12\xi\eta^3), \\ n_y = -A(1 + \xi) - B(8\xi + 18\xi^2 + 6\eta^2 - 5\xi^4 + 12\xi^2\eta^2 - 3\eta^4).$$

The value of terms A and B figuring in the above formulae are:

$$A = \frac{c_0 a}{2k} = \frac{177,68 \times 10,0}{2 \times 0,5} = 1776,8 \text{ kg/m},$$

$$B = \frac{c_1 a}{24k} = \frac{30,98 \times 10,0}{24 \times 0,5} = 25,8 \text{ kg/m}.$$

The values of projection inner forces computed by the above formulae and acting along the center line AD , and along the lateral edge BC , respectively, are illustrated in Fig. 5, and by the curve marked with II to be seen in Fig. 6, respectively.

To judge the accuracy of the accomplished calculation it would be expedient to compare the load-system Z^* corresponding to the approximate solution with the accurate dead load Z along different points of the longest radius. The results of this comparison are shown in Table 4. As can herefrom be established, the greatest deviation between the two values of load appeared at locus $\rho = 2,0$, that is on the corner points. The amount of the relative quadratic mean error here reached — 6,90 per cents. The calculated values of the projection inner forces pertaining to the corner points were, in consequence of this error by 6,90 per cents, lower than the effective accurate values. The latter are indicated in Figures 5 and 6 by small circles.

To judge the accuracy a further good opportunity is given by the fact that the accurate values of the projection normal forces parallel to the edge arches and acting along them can

be computed in a primary way. The exact values of the projection inner force n_y acting along the edge arch BC is shown in Fig. 6 by the parabola drawn with a dotted line. This curve does not considerably deviate from the curve drawn with a full line showing the result of the approximate calculation.

Acknowledgement

The data published in the Tables of the present paper were computed by Mr. J. PEREDY, scientific collaborator of the Research Group on Strength of Materials of the Hungarian Academy of Sciences. Author wishes here to express thanks for his kind efforts.

REFERENCES

1. AAS JACOBSEN, A.: Kugelschalen über vier- und vieleckigem Grundriß. *Abhandlungen. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau* 5 (1937/38), pp. 1—17.
2. PUCHER, A.: Die Berechnung der Dehnungsspannungen von Rotationsschalen mit Hilfe von Spannungsfunktionen. *Abhandlungen. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau* 5 (1937/38), pp. 275—299.
3. ORAVAS, G. A.: Stress and Strain in Thin Shallow Spherical Calotte Shells. *Publications. International Association for Bridge and Structural Engineering*. 17 (1957), pp. 139—160.
4. SZMODITS, K.: Háromszögalaprajz feletti gömbkupola (Spherical shell over a triangular base). *Magyar Építőipar* 7 (1958), pp. 167—168 (in Hungarian).
5. TOTTENHAM, H.: Approximate Solutions to Shell Problems. *Proceedings of the Second Symposium on Concrete Shell Roof Constructions* July 1—3, 1957. Teknisk Ukeblad Oslo, 1958., pp. 210—220.

SUMMARY

The present paper deals with the calculation of a paraboloid shell of revolution centrally placed over an equilateral triangle basis. The determination of the plane projection inner forces of the shell in question is in the case of a uniformly distributed vertical loading system exceedingly simple, but in the instance of another sort of loading serious mathematical difficulties are to be met with.

A relatively simple mode of calculation is dealt with, which can be applied in the case of circular—symmetrically-arranged vertical distributed loads — e. g., snow load, or dead load. Although the introduced method is approximate only, its accuracy completely satisfies practical requirements.

For producing the stress function of the problem, the paper sets out from auxiliary functions vanishing along the circumference of the triangle base. To each of these functions a circular—symmetrically-arranged loading system — independent of the central angle — can be attached. The approximate stress function is produced from a combination of these auxiliary functions in such a way that the approximate loading system corresponding to the approaching stress function should deviate as little as possible from the given loading. Therefore, the parameters belonging to the combination of functions in question are determined by a sectionwise, or by a partly sectionwise and partly point by point adjustment, respectively.

The paper was completed by a numerical example. The latter proved the plain possibility of the application and the sufficient accuracy of the method suggested.

EINE ROTATIONS-PARABOLOIDFÖRMIGE SCHALE ÜBER GLEICHSEITIGEM DREIECKGRUNDRIS

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Der vorliegende Aufsatz befaßt sich mit der Berechnung einer rotationsparaboloidförmigen, über einem gleichseitigen Dreieckgrundriß mittig aufgebauten Membranschale. Die Bestimmung der Schnittkraftprojektionen der zur Diskussion stehenden Schale ist im Falle eines vertikalen, über die Grundrißprojektion gleichmäßig verteilten Belastungssystem äußerst

einfach, wogegen man im Falle anderer Belastungen auf ernste mathematische Schwierigkeiten stößt.

In der Folge wird ein verhältnismäßig einfaches Rechnungsverfahren erörtert, welches für den Fall kreissymmetrisch verteilter Vertikallasten anwendbar ist. Das behandelte Verfahren ist zwar ebenfalls nur annähernd, doch entspricht dessen Genauigkeit weitgehend den Anforderungen der praktischen Anwendung.

Zur Herstellung der Spannungsfunktion des Problems wird im Aufsatz von Hilfsfunktionen ausgegangen, zu deren jeder ein kreissymmetrisch angeordnetes Belastungssystem zugeordnet werden kann. Die annähernde Spannungsfunktion wird aus der Kombination dieser Hilfsfunktionen auf solche Weise hergestellt, daß das der annähernden Spannungsfunktion entsprechende Belastungssystem vom gegebenen Belastungssystem so wenig als möglich abweiche. Aus diesem Grunde werden die Parameter der obengenannten Funktionskombination mit Hilfe einer abschnittweisen, bzw. mittels einer zum Teil abschnittweisen und zum Teil punktweisen Anpassung bestimmt.

Der Aufsatz ist durch ein Zahlenbeispiel ergänzt. Dieses rechtfertigt sowohl die einfache Anwendungsmöglichkeit wie auch die genügende Genauigkeit des vorgeschlagenen Verfahrens.

CALOTTE DE FORME PARABOLOÏDE DE RÉVOLUTION, CONSTRUITE SUR UN TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

P. CSONKA

RÉSUMÉ

L'étude donne le calcul d'une calotte de forme paraboloidé de révolution, d'une disposition concentrique, construite sur un triangle équilatéral. La détermination des forces intérieures projectives de la calotte en question est bien simple dans le cas d'un système de charges verticales régulièrement réparties sur la base, mais se heurte à de graves difficultés de calcul dans les autres formes de chargement.

L'étude propose une méthode de calcul relativement simple, applicable dans le cas de charges verticales de répartition circulaire-symétrique (charge de neige, poids mort, etc. . .). La méthode présentée n'a qu'un caractère approché, mais son exactitude satisfait entièrement les exigences de la pratique.

Pour établir la fonction de tension du problème l'étude part de fonctions auxiliaires disparaissant sur le contour de triangle, dont chacune peut être adjointe à un système de charge circulaire-symétrique (indépendant de l'angle central). La fonction de tension approchée est produite de la combinaison linéaire de ces fonctions auxiliaires, d'une façon telle que le système de charges correspondant à la fonction de tension approchée diffère le moins possible du système de charges donné. Dans ce but, on détermine les paramètres de la combinaison de fonctions par un ajustement d'étape en étape, c'est-à-dire un ajustement fait en partie par étapes, et en partie effectué sur certains points.

L'étude est complétée par un exemple numérique. Celui-ci démontre l'application simple et l'exactitude satisfaisante de la méthode proposée par l'auteur.

ОБОЛОЧКА В ВИДЕ ПАРАБОЛОИДА ВРАЩЕНИЯ [НАД ПЛАНОМ В ВИДЕ] ПРАВИЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

Данная работа занимается расчетом мембранной оболочки в виде параболоида вращения центрального размещения, построенного над планом в виде правильного треугольника. Определение проекционных сил натяжения рассматриваемой оболочки является относительно простым в случае отвесной системы нагрузок, равномерно распределенной на проекции основания, однако в прочих случаях нагрузок сталкивается с вычислениями с серьезными затруднениями при.

Данная работа знакомит читателя с относительно простым вычислительным методом, применимым в случае нагрузки отвесного распределения круговой симметричной схемы (например, снежная нагрузка, нагрузка от собственного веса). Иллюстрированный метод носит также приближенный характер, однако точность метода с избытком удовлетворяет требования практики.

Статья для вывода функции напряжения задачи исходит из таких вспомогательных функций, исчезающих на периметре треугольного основания, для каждой из которых можно придать систему нагрузок с круговой симметричной схемой (независимой от центрального угла). Приближенная функция напряжения выводится из линейной комбинации этих вспомогательных функций таким образом, чтобы система нагрузки, соответствующая приближенной функции напряжения, отличалась, по мере возможности, от данной системы нагрузки. Для этой цели параметры функциональной комбинации определяются сопряжением по участкам, соответственно частично сопряжением по точкам, а частично по участкам.

Работа дополняется числовым примером. Этот пример подтверждает простоту применения и соответствующую точность рекомендованного метода.

UNTERSUCHUNG DER DIE WERTE DER BRUCHARBEIT BEEINFLUSSENDEN FAKTOREN, MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE METALLISCHEN UND NICHTMETALLISCHEN VERUNREINIGUNGEN DES ALUMINIUMS

A. DOMONY

KANDIDAT DER TECHN. WISSENSCHAFTEN,
FORSCHUNGSINSTITUT FÜR DIE METALLINDUSTRIE, BUDAPEST

[Eingegangen am 18. Juni 1959]

Im Interesse einer genaueren Erkenntnis der Eigenschaften der Metalle besteht eine alte Tendenz der Materialprüfer darin, an Stelle der die wahren physikalischen Vorgänge nicht deckenden mechanischen Kennwerte (wie z. B. Zugfestigkeit, Fließgrenze, Dehnungsgrenze, Härte usw.) Maßzahlen zu entwickeln, die auf Grund der zeitgemäßen metallphysikalischen und in bezug auf die Feinstruktur der Materie erworbenen Kenntnisse definiert werden können. Maßzahlen dieser Art bieten ferner die Möglichkeit, auf einzelne, bisher unerschlossen gebliebene Zusammenhänge zwischen Struktur, Zusammensetzung und Eigenschaften der Metalle hinzuweisen.

Einer der Kennwerte die auf zeitgemäßen metallphysikalischen und metallstrukturellen Begriffen beruhen, wurde von GILLEMOT und SINAY [1] erörtert. Nach der Ansicht dieser Autoren kann die Brucharbeit zur genauen Ermittlung der bei der Zugfestigkeitsmessung in einem definiert geringen Querschnitt des Metalles vor sich gehenden Vorgänge herangezogen werden. Die an der Bruchstelle des Prüfkörpers geleistete Kontraktionsarbeit wurde dabei mit Hilfe der folgenden Formel berechnet:

$$A_c = \frac{\delta e}{3} [\sigma_F + 2\sigma_B] + 4,6\sigma_B \log \frac{1 + \delta}{1 + \delta_s} + \sigma_B (1 + \delta_e)^2 \cdot \left[\frac{1}{1 + \delta} - \frac{1}{1 + \delta_e} \right],$$

wo

A_c = Brucharbeit, mkg/cm²,

δ_e = gleichmäßige Dehnung, %,

$\delta = \frac{\psi}{1 - \psi}$; ψ = Kontraktion, %,

σ_B = Zugfestigkeit, kg/mm²,

σ_F = Fließgrenze, kg/mm².

Bei der Untersuchung des auf verschiedenem Wege bearbeiteten Aluminiums begegneten wir bereits bisher zahlreichen Fällen, wo die anomale Gestaltung einzelner Eigenschaften des Metalles (so z. B. Anomalien in der elektrischen

Leitfähigkeit, erhöhte Korrosionsempfindlichkeit, schwierige Entgasbarkeit usw.) durch mit chemischer Analyse nachweisbare Änderungen in der Zusammensetzung nicht erklärt werden konnten. Wir beobachteten ferner einen bedeutenden Unterschied zwischen dem Verhalten des mit metallischen Zusätzen künstlich legierten Reinstaluminiums und dem des Hüttenaluminiums mit ähnlicher chemischer Zusammensetzung. All diese Versuchsergebnisse ließen darauf schließen, daß das Hüttenaluminium bei seiner Herstellung oder Bearbeitung solche Verunreinigungen aufnehmen kann, die bisher mit Hilfe von analytischen Verfahren nicht nachgewiesen werden konnten. Diese geringfügigen Verunreinigungen können aber auf die Eigenschaften des Metalles einen entscheidenden Einfluß ausüben.

Die bezüglich der Brucharbeit entwickelten allgemeingültigen Feststellungen von GILLEMOT und SINAY versuchten wir nun auf Reinaluminium und schwach legiertes Aluminium anzuwenden. Auf Grund der auf die Brucharbeit bezüglichen theoretischen Erörterungen war es nämlich zu erhoffen, daß die sich bei der Bearbeitung der Leichtmetalle zeitweise bemerkbar machenden und bis zur Zeit noch nicht genügend aufgeklärten Anomalien durch die Anwendung der neuen Maßzahl eine Begründung oder mindestens eine näherungsweise Erklärung erhielten.

1. Die Wirkung einzelner geringfügiger metallischer Verunreinigungen auf die Brucharbeit des Reinstaluminiums, Hüttenaluminiums und der aus E. Al—Mg—Si-Legierungen hergestellten Drähte

Als die erste und ausführliche Verwendung der Maßzahl der Brucharbeit in der Aluminiumindustrie wurden zunächst die an Leichtmetall-Preßdrähten durchgeführten Messungen von GILLEMOT und SINAY [1] ergänzt. Zu diesem Zwecke wurden die Brucharbeiten der aus Aluminium verschiedenen Reinheitsgrades bzw. aus schwach legiertem Aluminium unter den gleichen Bedingungen hergestellten Drähte gemessen.

Die erste Serie wurde mit aus Reinstaluminium hergestellten Drähten vorgenommen. Die Legierungen mit Fe und Si wurden durch Zusatz von Al—Si 10% bzw. Al—Fe 3% Vorlegierungen durchgeführt.

Das zu den Proben verwendete Material wurde einheitlich, mit Hilfe eines halbkontinuierlichen Blockgießverfahrens zu Preßblöcken mit einem Durchmesser von 75 mm gegossen. Die Preßblöcke mit gefräster Oberfläche wurden bei einer Temperatur von 450° C 6 Stunden lang homogenisiert und anschließend in einer hydraulischen Strangpresse zu Stäben mit einem Durchmesser von 10 mm gepreßt. Ein Anteil der vorgepreßten Stangen wurde 3 Stunden lang einer Wärmebehandlung bei 320° C unterzogen und anschließend im Ofen langsam abgekühlt (segregierende Wärmebehandlung); ein zweiter

Anteil der Proben wurde 3 Stunden lang bei einer Temperatur von 520° C in einem Ofen mit Luftzirkulation homogenisiert und sodann in kaltem Wasser abgeschreckt. Der dritte Anteil der Proben wurde in gepreßtem Zustand weiterverarbeitet. Die Drahtproben wurden mit einer einheitlichen Ziehsteinreihe und auf einer Einzelziehmaschine zu Drähten mit 2,5 mm Durchmesser abge-

Tabelle 1

 Brucharbeiten von Drähten aus Reinstaluminium (A_c mkg/cm²)

Material	Wärme- behandlung	10 mm \varnothing	6—8 mm \varnothing	2,5—3 mm \varnothing
99,99 Al	— 320° C 500° C	52	53	52
99,99 Al + Fe 0,1	— 320° C 500° C	50	53	55
99,99 Al + Fe 0,23	— 320° C 500° C	52	—	58
99,99 Al + Fe 0,3	— 320° C 500° C	52	—	60
99,99 Al + Fe 0,5	— 320° C 500° C	53	—	60
99,99 + Si Spur.	— 320° C 350° C	—	53	58
99,99 + Si 0,02	— 320° C 500° C	— — —	64 60 66	61 55 65
99,99 + Si 0,20	— 320° C 500° C	— 50 50	— 47 60	55 51 64
99,99 + Si 0,40	— 320° C 500° C	48 48 48	50 48 55	78 53 80
99,99 + Si 0,67	— 320° C 500° C	54 52 47	51 45 57	64 57 74
99,99 + Si 0,93	— 320° C 500° C	— 52 41	— 45 61	60 64 77
99,99 + Si 0,08 + Fe 0,23	— 320° C 500° C	— 55 52	— — —	55 54 56

zogen. Die Brucharbeiten der Drähte verschiedener Zusammensetzung wurden bei Durchmessern von 8,4 und 6 mm bzw. 3 und 2,5 mm untersucht. Die Durchschnitte der Meßergebnisse sowie die Zusammensetzungen der untersuchten Proben sind in Tabelle 1 angeführt.

Aus der Tabelle 1 geht folgendes hervor:

1. Die Brucharbeit wird weder durch die Legierung mit geringen Mengen Fremdmetallen (0–0,5% Fe, 0–1,0% Si) noch durch die Wärmebehandlung — bei den Metallen, die bezüglich der Zusammensetzung innerhalb der oben angegebenen Grenzen liegen — in bedeutendem Maße beeinflusst. Eine Ausnahme bildet die homogenisierte Probe mit einem Gehalt an Si von 1%, wo — in Übereinstimmung mit den früheren Messungen von GILLEMOT und SINAY [1] — bei den Preßdrähten eine bedeutende Abnahme der Brucharbeit beobachtet werden konnte.

2. Durch das Kaltziehen der Preßdrähte aus Reinstaluminium werden die Werte der Brucharbeit bei Durchmessern von 10–2,5 mm nicht beeinträchtigt.

3. Bei mit Fe und Si legiertem Reinstaluminium wird die Brucharbeit bis zu Durchmessern von 10–2,5 mm durch das Kaltziehen im allgemeinen vergrößert.

4. Bei den mit Fe legierten Proben übt die Wärmebehandlung der Preßdrähte auf die Brucharbeit der kaltgezogenen Drähte keinen Einfluß aus.

5. Bei den mit Si legierten Metallen macht sich die Wirkung der Wärmebehandlung von Preßdrähten bei den kalt gezogenen Drähten bemerkbar. Die Brucharbeit der aus homogenisiertem Preßdraht gezogenen Drähte ist größer als die der heterogenisierten Drähte.

6. Durch das in fester Lösung befindliche Si wird die Brucharbeit der Metalle nach der Wärmebehandlung folgenden Kaltbearbeitung in höherem Maße als durch die Silizium- oder Eisenaluminidausscheidungen erhöht.

Tabelle 2

Brucharbeiten von Drähten aus Hüttenaluminium (A_c mkg/cm²)

Material	10 mm \varnothing gepreßter Stab	Fertiggezogener Draht mit Durchmesser zwischen 2 und 4 mm
99,99% Al	52	52
99,5% Al	44,5	48
99,5% Al in Vakuum geschmolzen	53,4	—
99,5% Al aus Aluminiumspänen gepreßter Stab (oxydischer Stab)	35,2	—

In Tabelle 2 wurden die Brucharbeiten der aus Reinstaluminium und aus Hüttenaluminium mit 99,5% Reinheitsgrad hergestellten Preßdrähte und der aus diesen durch Kaltziehen hergestellten Drähte mit Durchmessern von 2—4 mm miteinander verglichen. Die Untersuchungen wurden nicht nur mit Drahtproben, die in der oben beschriebenen Weise im Laboratorium hergestellt worden sind, sondern im Falle des Hüttenaluminiums auch mit Proben, die aus der Erzeugung im Großbetrieb hervorgingen, durchgeführt. Unsere Messungen wurden ferner auch mit den Meßergebnissen ergänzt, die wir an Preßdrähten erhielten, die einerseits aus einem in einem Vakuumofen umgeschmolzenen Hüttenaluminiumblock, andererseits aus oxydischen Spänen durch Warmpressen hergestellt worden sind.

Nach den in der Tabelle 2 zusammengefaßten Ergebnissen wird die Brucharbeit des Fertigdrahtes auch bei dem Hüttenaluminium durch das Kaltziehen erhöht. Die Brucharbeiten des Preßdrahtes sowie des kaltgezogenen Hüttenaluminiumdrahtes sind aber geringer als die des Reinstaluminiums. Die Brucharbeit des Preßdrahtes, der aus im Vakuum umgeschmolzenem Hüttenaluminium hergestellt worden ist, ist der des Reinstaluminiums gleich. Demgegenüber nimmt der Wert der Brucharbeit bei dem aus oxydischen Spänen gepreßten Draht bedeutend ab.

Wir untersuchten ferner auch die Ausbildung der Brucharbeit der aus mit verschiedenen Mengen an Mg_2Si legierten Hüttenaluminium hergestellten Preß- und Fertigdrähte. Bei den Proben wurden auch die bei der Herstellung der Al—Mg—Si-Leitungsdrähte üblichen Wärmebehandlungen zur Warmausscheidung mit berücksichtigt. Die Ergebnisse der teils aus dem Laboratorium, teils aus Großbetrieb stammenden Proben wurden in Tabelle 3 zusammengefaßt.

Aus der Tabelle geht hervor, daß durch eine größere Menge an Mg_2Si die Brucharbeit der Preßdrähte — unabhängig von der Wärmebehandlung —

Tabelle 3

Brucharbeiten von Al—Mg—Si-Drähten aus Hüttenaluminium-Basis (A_c mkg/cm^2)

Material	Zusammensetzung in %en			Gepreßter Draht 8—10 mm \varnothing		Fertig- gezogener Draht 2—3 mm \varnothing	Fertig- gezogener warm aus- gehärteter Draht 2—3 mm \varnothing
	Mg	Si	Fe	In ge- presstem Zustand	In homo- genisiertem Zustand		
Konduktal	0,16	0,10	0,23	45	—	47	51
Klassisches Aldrey	0,40	0,51	0,23	32	29	43	50
Aludur	0,65	0,62	0,25	—	—	38	46

im Vergleich zu dem Hüttenaluminium vermindert wird. Durch das Kaltziehen und die letzte Anlaßwärmebehandlung wird die Brucharbeit erhöht. Die die Brucharbeit erniedrigende Wirkung einer größeren Menge an Mg_2Si macht sich jedoch selbst nach dem der homogenisierenden Wärmebehandlung folgenden Kaltzug und Ausscheidungsglühen geltend. Das in Lösung gegangene Mg_2Si weist nach dem der Homogenisierung folgenden Kaltziehen eine dem gelösten Silizium entgegengesetzte Wirkung auf. Nach unserer Vorstellung dürfte diese Erscheinung auf die die Gitterspannung erhöhende Wirkung des in äußerst feiner Dispersion ausgeschiedenen Mg_2Si zurückgeführt werden. Für die Bekräftigung unserer Ansicht dürfte auch der Umstand sprechen, daß die Brucharbeit durch die Ausscheidungsglühung — die auf das Metall eine Anlaßwirkung und auf die Mg_2Si -Ausscheidungen eine in einem gewissen Grad agglomerierende Wirkung ausübt — zunimmt.

Bezüglich der bisher durchgeführten Untersuchungen wollen wir bemerken, daß in den Tabellen die Mittelwerte unserer Messungen angeführt worden sind. Die einzelnen Messungen wiesen untereinander eine starke Streuung auf (der Extremwert der Streuung betrug $\pm 10\%$). Aus diesem Grunde kann aus den angeführten Meßergebnissen mehr auf eine Tendenz der Erscheinungen als auf zahlenmäßige Werte geschlossen werden.

Aus einem Vergleich der Durchschnitte der Brucharbeiten, die an Preßdrähten aus Aluminium verschiedener Zusammensetzung und an kaltgezogenen Aluminiumdrähten gemessen wurden, können jedoch die folgenden Feststellungen gemacht werden:

1. Die Brucharbeit des Reinstaluminiums sowie die des mit geringen Mengen Eisen und Silizium (in der Größenordnung von 0,1%) legierten Reinstaluminiums ist sowohl in gepreßtem wie auch in gepreßtem und kaltgezogenem Zustande größer als die des in gleicher Weise behandelten Hüttenaluminiums. Durch die dem Reinstaluminium zugesetzten geringen Mengen einzelner Legierungsmetalle wird die Brucharbeit des kaltverformten Stoffes entweder erhöht oder aber nicht verändert.

2. Die Brucharbeit des Hüttenaluminiums wird in bedeutendem Maße durch diejenigen Verunreinigungen (wie z. B. Si oder Mg_2Si) beeinflusst, die sich im Gitter lösen bzw. in einer äußerst feinen Dispersion im Gitter ausgeschieden die Gitterspannung zu erhöhen vermögen.

2. Einfluß der Aluminiumoxyd-Verunreinigungen auf die Brucharbeit des Aluminiums

Im weiteren Verlaufe unserer Versuche wurden die Brucharbeiten untersucht, die an Stäben gemessen wurden, die aus Reinstaluminium sowie aus egalisierten Hüttenmetallchargen verschiedenen Ursprungs aber nahe der gleichen chemischen Zusammensetzung gegossen wurden und deren Durchmesser 7 mm

betrug. Bei allen Untersuchungen erfolgte das Schmelzen der Metalle in einem elektrischen Ofen mit Widerstandsheizung, bei einer Schmelztemperatur von $710-720^{\circ}\text{C}$ und bei einer Gießtemperatur von $690-700^{\circ}\text{C}$.

Die Proben wurden in eine kalte Kokille aus Gußeisen, nach Abb. 1, gegossen. Wegen der starken Streuung der an den einzelnen Probestäben gemessenen Werte beziehen sich die mitgeteilten Werte auf den Durchschnitt von 10–50 Einzelmessungen.

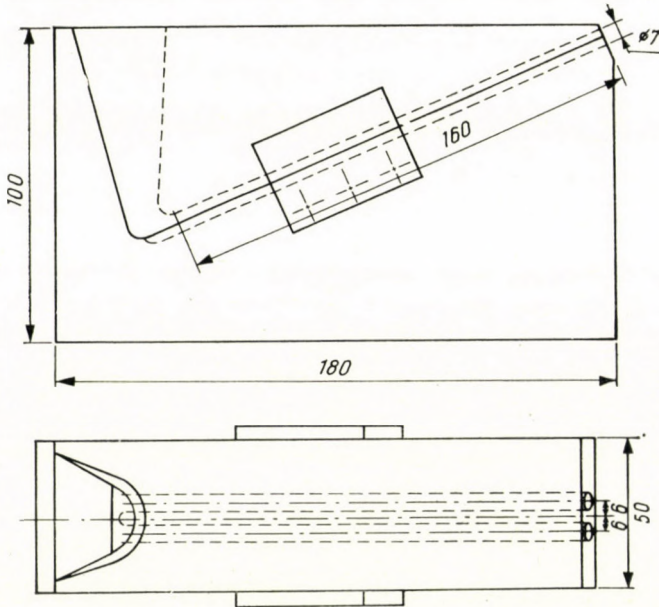


Abb. 1. Kokille aus Gußeisen für Probestäbe

Nach den Ergebnissen der Tabelle 4 ist die größere Brucharbeit des Reinstaluminiums sowie die des mit metallischen Zusätzen schwach legierten Reinstaluminiums im Vergleich mit dem Hüttenaluminium auch hier augenfällig. Es ist ferner auch interessant, in welchem Maße sich der Durchschnitt der Brucharbeiten von Hüttenaluminiumchargen verschiedenen Ursprungs ändert. Die Abweichungen in der Brucharbeit bei den einzelnen egalisierten Hüttenaluminiumchargen von nahezu gleicher chemischer Zusammensetzung können durch die analytisch ermittelte Zusammensetzung der Metalle nicht begründet werden.

Zur Erklärung der bei den Hüttenmetallen beobachteten großen Abweichungen in der Brucharbeit versuchten wir, die Metalle mit Aluminiumoxyd zu verunreinigen. Die Zuführung des Oxyds erfolgte in seiner reaktionsfähigsten Form, indem der Schmelze anodisch oxydierte Blechstücke zugeführt wurden. Die Schmelztemperatur sowie die Temperatur der Probenahme betrug

Tabelle 4

Brucharbeiten von aus Reinstaluminium sowie aus egalisierten Hüttenaluminiumchargen gegossenen Proben mit 7 mm Durchmesser (A_c mkg/cm²)

(Jede einzelne Charge im Laboratoriumsofen umgeschmolzen)				
	Zusammensetzung			Brucharbeit
	Fe	Si	Ti	
Umgeschmolzene Massel aus Reinstaluminium	0,003	0,002	—	26—30
Mit Fe + Si verunreinigtes Reinstaluminium	0,1	0,1	—	25
Mit Si verunreinigtes Reinstaluminium	0,006	0,4	—	25
Durchschnitt aus zehn verschiedenen egalisierten Hüttenmetallen mit einem Reinheitsgrad von 99,5% Al	—	—	—	19,5
Metall I (egalisiertes Hüttenmetall)	0,20	0,15	0,013	20
Metall U (egalisiertes Hüttenmetall)	0,22	0,18	0,010	18
Metall Y (egalisiertes Hüttenmetall)	0,18	0,20	0,010	16
Ein egalisiertes, ausländisches Hüttenmetall, das nach unserer Kenntnis 18 Stunden im Abstehofen verweilte	0,23	0,11	0,023	24,1

auch hier 720 bzw. 690° C. Die mit Oxyd verunreinigten Chargen wurden nach der Entnahme von Proben mit entsprechender Menge von oxydlösenden Reinigungssalzen (40% NaCl + 40% KCl + 20% Na₃AlF₆) gereinigt, eine Stunde abstehen gelassen, abermals mit Salz gereinigt, und die neueren Proben wurden nach dem Abschlacken bei einer Temperatur von 690° C entnommen.

Tabelle 5

Wirkung des Zusatzes von Verunreinigungen und des nachträglichen Reinigens auf die Brucharbeiten der aus Reinstaluminium und aus Hüttenaluminium gegossenen Probestäbe (A_c mkg/cm²)

	Ursprünglicher Guß	Mit Oxyd ver- unreinigtes Metall	Mit Oxyd ver- unreinigtes und nachträg- lich gereinigtes Metall
Reinstaluminium	26	26	30
Hüttenaluminium	16	10	12

Aus einem Vergleich der in Tabelle 5 angeführten Ergebnisse kann es festgestellt werden, daß durch den Zusatz von Blechen mit oxydierter Oberfläche bzw. durch das nachträgliche Reinigen die Brucharbeit des Reinstaluminiums kaum beeinträchtigt wurde. Die Ergebnisse lagen innerhalb der Streuungsgrenzen der Messungen. Demgegenüber wurde die Brucharbeit durch Versetzen des Hüttenmetalls mit oxydischen Blechen in bedeutendem Maße

erniedrigt. Die Verschlechterung der Brucharbeit konnte durch das Reinigen der Metallschmelze nicht kompensiert werden.

Die gegossenen Prüfstäbe wurden auch einer heterogenisierenden Wärmebehandlung unterzogen, indem sie 3 Stunden lang bei einer Temperatur von 320° C gehalten und anschließend langsam abgekühlt wurden. Während die Brucharbeit bei allen Proben des Reinstaluminiums ungefähr die gleiche blieb, wurden die Werte der Brucharbeit bei den Proben aus Hüttenaluminium durch die Wärmebehandlung verbessert, wobei jedoch die Wirkung der oxydischen Verunreinigungen und der nachträglichen Reinigung auch so zur Geltung kam.

Eine dem Maß der dem Hüttenaluminium zugesetzten Oxyd-Verunreinigung ähnliche Änderung der Brucharbeit wurde auch bei den einigen Proben beobachtet, die an einem Ofen mit normalem Gang oder aber einem überhitzten [2], verschlammten Ofen entnommenen Metallen bzw. an Proben gemessen wurden, die aus diesen Chargen nach der Egalisierung gegossen worden sind (siehe Tabelle 6).

Tabelle 6

Brucharbeiten, gemessen an Probestäben, die nach dem Umschmelzen von Rohmasseln aus 99,5% Aluminium gegossen worden sind. Das Aluminium stammte aus unter verschiedenen Bedingungen arbeitenden Öfen bzw. aus egalisierten Chargen (A_c mhg/cm^2)

	Rohmetall	Egalisiertes Metall
Metalle, die aus verschlammten Wannen mit unausgeglichenen Arbeitsbedingungen stammen	6,2	10,5
Metalle aus einer Wanne mit korrigierten Arbeitsbedingungen	14,3	17,6
Metalle aus einer Wanne mit normalem Arbeitsgang	15,3	19,5

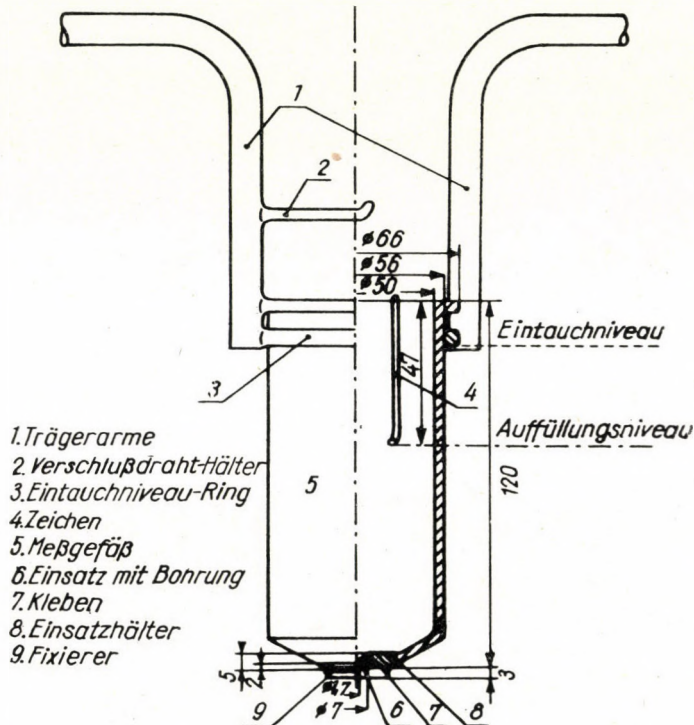
Auch die geringen Werte der Brucharbeit, die an dem einem Ofen mit unausgeglichenen Betriebsbedingungen entnommenen Metall gemessen wurden, scheinen dafür zu sprechen, daß das Aluminium — in ähnlicher Weise wie bei den früheren Versuchen — mit einem die Brucharbeit in hohem Maße erniedrigenden nichtmetallischen Stoff — mutmaßlicherweise mit irgendeinem im Metall fein dispergiertem Oxyd — verunreinigt wurde.

Größere Ausscheidungen oder sonstige metallische Verunreinigungen vermögen nicht — wie wir es bereits sahen — den Wert der Brucharbeit in diesem Maße zu verschlechtern.

Unsere Annahme, wonach die Brucharbeit des Hüttenaluminiums durch irgendeine in das Metall bereits bei seiner Herstellung hineingeschleppte nicht-

metallische Verunreinigung verringert wird, scheinen auch die Ergebnisse zu bekräftigen, die wir bei unseren in anderer Richtung vorgenommenen Untersuchungen erhielten.

Bei unseren früheren, der Verbesserung der elektrischen Leitfähigkeit des Aluminiums dienenden Arbeiten begegneten wir des öfteren solchen schlechten Werten, die weder durch die Zusammensetzung des Metalles noch durch erzeu-



gungstechnologische Vorgänge erklärt werden konnten [2, 3, 4]. Die bei der elektrischen Leitfähigkeit der einzelnen Chargen beobachteten Anomalien begründeten wir damit, daß »das im unausgeglichenen Ofengang hergestellte Metall äußerst fein verteilte, nahezu in fester Lösung befindliche Verunreinigungen (z. B. Oxyde, Karbide usw.) enthält, die die elektrischen Eigenschaften und auch die Festigkeit des Metalles beeinflussen« [3]. Beim Abstellenlassen bzw. bei der Reinigung mit Salz oder Schwefelchlorür der Schmelze beobachteten wir, daß diese »Verunreinigungen nachträglich entweder überhaupt nicht oder aber nur äußerst schwierig entfernt werden konnten« [2].

Unsere Annahme wurde auch durch die Ergebnisse der betrieblichen Untersuchungen bekräftigt. Nach den statistischen Daten über die elektrische

Leitfähigkeit und Festigkeit der aus verschiedenen Hütten und aus Metallen mit nahezu der gleichen Zusammensetzung mit der gleichen Technologie hergestellten Drähte ist die elektrische Leitfähigkeit der aus dem Betrieb mit ausgeglichenem Ofengang stammenden Metalle um 0,2–0,4 Siemens besser, wobei ihre Festigkeit um 1 kg/mm² geringer ist. Der Großteil der Metalle, deren schlechte Leitfähigkeit mit der Zusammensetzung der einzelnen Metallchargen nicht erklärt werden konnte, stammte aus überhitzten, verschlammten Öfen.

Nach unserer Vorstellung konnte das Metall in diesen Öfen in dem Moment seiner Entstehung mit irgendeiner Aluminiumoxyd-Modifikation unter

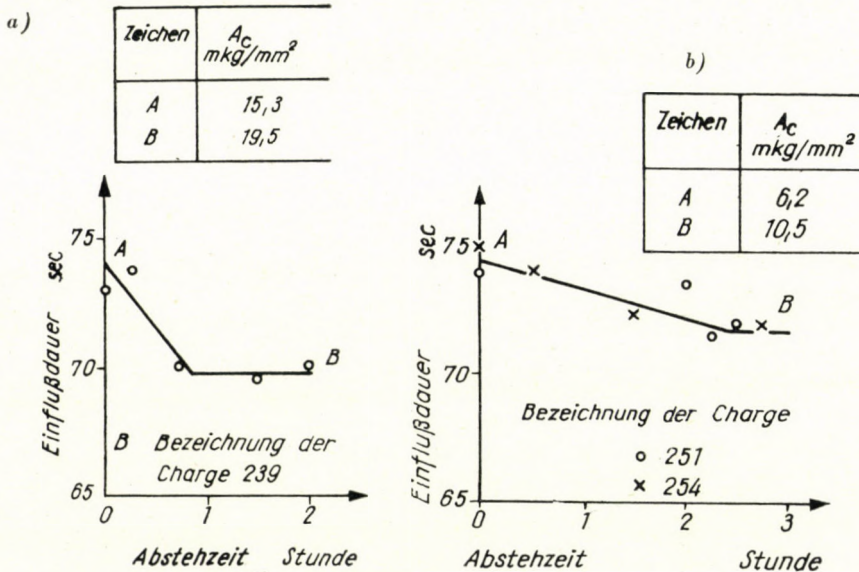


Abb. 3. Die mit Hilfe des in Abb. 2 dargestellten Apparates gemessenen Fließzeiten und die Werte der Brucharbeit in Abhängigkeit von der Abstehtzeit (nach LAÁR [5])

- a) Metall aus einer Wanne mit ausgeglichenem Ofengang
- b) Metalle aus Wannen mit unausgeglichenem Ofengang

anderen Bedingungen als in den Öfen mit ausgeglichenem, normalem Gang in Berührung kommen.

Ähnliche Erscheinungen wurden beobachtet, als die Viskosität [6] und die Entgasbarkeit der Hüttenmetalle in Abhängigkeit von der Abstehtzeit untersucht wurde. Die Dünflüssigkeit des geschmolzenen Metalls wurde von LAÁR [5] mit Hilfe einer dem umgekehrten Englerschen Viskosimeter ähnlichen Versuchsanordnung (siehe Abb. 2) gemessen. Die Festigkeitseigenschaften wurden von ihm an Probestäben, die in Kokillen nach Abb. 1 gegossen worden sind, gemessen.

Nach den Meßergebnissen können die aus den Aluminiumhütten erhaltenen Metalle — unabhängig von der scheinbaren chemischen Zusammensetzung

zung — in zwei Typen eingereiht werden. Bei der einen Art geht die Erniedrigung der Viskosität und die Verbesserung der gemessenen physikalischen und mechanischen Eigenschaften bei der Absteherung rasch vor sich. Bei der anderen Art gehen diese Veränderungen hingegen nur äußerst langsam vor sich. Es konnte im allgemeinen beobachtet werden, daß die Metalle, die den überhitzten Öfen mit unausgeglichenen Betriebsbedingungen entstammten, dem zweiten Typ angehörten (siehe Abb. 3).

Auch konnten wir beobachten, daß sich die gasvolumetrischen Mylius-Zahlen, die in einer 3,5%igen Salzsäure an aus rohen Hüttenaluminiummasseln ausgeschnittenen Prismen mit polierten Flächen und Abmessungen von $30 \times 10 \times 10$ mm gemessen wurden, voneinander in hohem Maße unterschieden, wenn die Blöcke mit nahe der gleichen Zusammensetzung aus Öfen mit unterschiedlichem Ofengang stammten.

Tabelle 7

Ursprung des Metalls	Rohes Prisma	Wärmebehandelt bei 380° C	Wärmebehandelt bei 500° C
	cm ³ H ₂ /60 Minuten		
Durchschnitt von Proben, die aus Wannen mit normalem Hüttengang stammen	18,4	1,8	1,2
Durchschnitt von Proben, die aus Wannen mit unausgeglichenem Ofengang stammen	35,9	4,3	3,2

In Tabelle 7 wurden die Ergebnisse der Mylius-Zahlen miteinander verglichen, die an den der gleichen Wärmebehandlung unterworfenen rohen Metallprismen mit nahe der gleichen Zusammensetzung gemessen wurden, die aber teilweise mit normalem, teilweise mit unausgeglichenem Ofengang hergestellt worden sind.

Aus der Tabelle geht es deutlich hervor, daß die den Öfen mit unausgeglichenen Betriebsbedingungen entstammenden rohen Metalle ein höheres Wasserstoffentwicklungsvermögen aufweisen. Nach der Wärmebehandlung geht jedoch das Wasserstoffentwicklungsvermögen in hohem Maße zurück, ein Zeichen dafür, daß bei der Wärmebehandlung in der Struktur des Metalls wesentliche Veränderungen vor sich gehen. Mit Hilfe des Lichtmikroskops konnten in der Struktur der Metalle weder in rohem noch in wärmebehandeltem Zustande irgendwelche Unterschiede sichergestellt werden, ob nun die Metalle aus Wannen mit normalem oder unausgeglichenem Ofengang herührten.

Auf Grund unserer Untersuchungen kamen wir zu der Schlußfolgerung, daß das Aluminium bei seiner Herstellung bzw. Bearbeitung mit analytisch noch nicht nachgewiesenen Stoffen verunreinigt werden kann. Bei der Prüfung

des Hüttenmetalls auf seinen Gehalt an S, N, F, C, P, K [4, 7] wurde es bestätigt, daß die Gegenwart dieser Stoffe (in Mengen von 0,001%) für das anomale Verhalten der einzelnen Aluminiumchargen nicht verantwortlich ist. Obschon die Ca- und Na-Analysen bei einzelnen Proben eine Anreicherung um eine Größenordnung aufwiesen, stand auch dieser Umstand mit dem anomalen Verhalten des Metalls in keinerlei enger Beziehung [4, 6]. Es konnte ferner nicht eindeutig sichergestellt werden, ob sich diese Verunreinigungen im Aluminium in metallischer Form oder in Form von Oxyden vorfinden. Im Falle des Kalziums wurde durch die spektroskopischen Untersuchungen die letztere Möglichkeit unterstützt [6].

Das metallische Aluminium kann im Laufe seiner Darstellung und Bearbeitung — unter den verschiedensten Bedingungen — mit Aluminiumoxyd- bzw. Aluminiumhydroxydverbindungen in Berührung kommen. Die Bestimmung der im Aluminium vorhandenen Oxyde wird aber zur Zeit mit Hilfe von nur recht unvollkommenen Verfahren vorgenommen. Bis zur Zeit stehen noch keine entsprechenden und zuverlässigen analytischen Verfahren zur Verfügung, mit Hilfe deren die Mengen der im Aluminium gegenwärtigen Oxyde mit recht unterschiedlichen Eigenschaften auch nur annähernd bestimmt werden könnten. Zu diesem Zweck sind die bekannten chemischen Methoden selbst nach der Ansicht der Autoren recht unsicher [8]. Auch die mikroskopischen Untersuchungen erwiesen sich zu diesem Zweck als ziemlich ungeeignet [9]. In jüngster Zeit wurde von NOVOTNY und PONAHO [8] der Versuch gemacht, durch die röntgenstrukturelle Untersuchung der nach dem Lösen des Metalls zurückbleibenden Oxydrückstände diese Frage zu klären. Der größte Nachteil dieser Methode besteht — selbst nach der eigenen Ansicht dieser Autoren — darin, daß die von der Oberfläche des Metalls herrührenden und die im Inneren des Metalles befindlichen fein dispergierten Oxyde nicht auseinandergehalten werden können. Eine weitere Schwierigkeit erwächst dadurch, daß die ursprünglichen Aluminiumoxyd-Modifikationen unter der Wirkung von chemischen und thermischen Energien ihre Struktur verändern. Novotny und Ponahlo konnten jedoch die folgenden Feststellungen machen:

1. Bei verschiedenen Proben des Hüttenaluminiums liegen in der Struktur und der Menge des Aluminiumoxyds bedeutende Unterschiede vor.

2. Das im Metall befindliche feinverteilte Aluminiumoxyd erwies sich im Großteil als eine reaktionsfähige Modifikation des Aluminiumoxyds.

3. Wurde der Metallschmelze fein verteilter α -Korund zugesetzt, so erschien neben amorphem Aluminiumoxyd und α -Korund auch eine geringe Menge γ -Aluminiumoxyd.

4. Die verschiedenen Aluminiumoxyd- und Oxyhydrat-Modifikationen erleiden im Kontakt mit dem flüssigen Metall strukturelle Veränderungen.

Es liegen jedoch keine Angaben darüber vor, ob das metallische Aluminium in festem Zustand, bei oder über seinem Schmelzpunkte, irgendwelche

Sauerstoffverbindungen des Aluminiums zu lösen oder in sein Gitter einzubauen vermag. Es fehlen ferner Beobachtungen auch darüber, in welcher Weise die OH-Ionen, die aus der Zersetzung der mit dem Aluminiummetall in Kontakt stehenden Aluminiumoxyhydrate entstehen, mit dem Metall reagieren und in welcher Weise sie die physikalischen und mechanischen Eigenschaften des Metalls verändern. In Ermangelung genauerer Daten bildete sich die allgemeine Auffassung aus, daß das geschmolzene Metall jegliche Art der mit ihm in Kontakt stehenden Aluminiumoxyde oder Oxyhydrate zu α -Korund umsetzt. Dabei liegt der α -Korund im Metall in Form von Einschlüssen als kleiner oder größerer Fremdkörper vor.

Diese Ansicht wurde zuerst von ZEERLEDER und IRMANN [10, 11] widerlegt, und zwar auf Grund der Erfahrungen, die genannte Autoren bei der ausführlichen Untersuchung der in der von ihnen entdeckten Pulvermetallurgie des gesinterten Aluminiums vor sich gehenden Reaktionen machten. Diese Autoren beobachteten nämlich bei der Untersuchung der Sinterung von mit Oxydhaut verschiedener Dicke und Struktur bedeckten Aluminiumpulvern, daß das Aluminium unter der Wirkung von Druck und Wärme mit der Oxydhaut in Reaktion tritt. Diese Erkenntnis diente als Grundlage zur Begründung der bei den gesinterten Aluminiumpulverkörpern beobachteten Erscheinungen. Bei dem dem Sintern folgenden Warmpressen kommt unter der Wirkung von Druck und Wärme — trotz der an der Oberfläche der einzelnen Aluminiumteilchen vorhandenen und dem metallischen Verschweißen entgegenwirkenden Oxydhaut — eine feste Bindung zustande. Die Oxydhaut der miteinander in Berührung befindlichen Teilchen reißt unter den Bedingungen der Sinterung auf. Das mit dem metallischen Aluminium in Berührung stehende, fein dispergierte Aluminiumoxyd zersetzt sich dabei unter der Wirkung von Druck und Wärme in eine Subverbindung des Aluminiums. Nach dem Aufhören der Einwirkung von äußeren Energien erfolgt eine Disproportionierung des Suboxyds in Aluminiumoxyd und metallisches Aluminium. Das metallische Zusammenschweißen wird durch das derart entstandene äußerst fein verteilte Aluminium gesichert. Die Vergrößerung der einzelnen Kristalle wird durch das an der Grenze der Aluminiumpulverteilchen in äußerst feiner Verteilung angelagerte Oxyd verhindert [11, 12]. Nach SEITH und LIPMANN [13] disproportioniert die die Oberfläche des Aluminiumpulvers deckende Oxydhaut unter der Wirkung von Druck und Wärme. Das äußerst fein verteilte Oxyd findet sich im Metall gleichsam als eine Lösung vor, wodurch die Rekristallisation der gesinterten Aluminiumpulverteile verhindert wird.

Unsere in Zusammenhang mit der Kaltschweißung des Aluminiums durchgeführten Versuche scheinen ebenfalls die obigen Ansichten zu bekräftigen.

Von VARGA [14] wurden Aluminiumstäbe mit einem Durchmesser von 10 mm mit Hilfe eines Werkzeuges nach Abb. 4 unter einem Druck von 50 kg/mm² durch Kaltschweißung vereinigt. Bei der Kaltschweißung von Stäben,

die an ihren Oberflächen mit einer natürlichen Oxydhaut bedeckt waren, konnten die feinverteilten Oxydteilchen, an Schliffen unter dem Mikroskop, in der Naht entdeckt werden. Unter der Wirkung einer 24stündigen Wärmebehandlung im Vakuum lösten aber die wachsenden Kristallite des rekristallisierenden Metalls die fein dispergierten Oxydteilchen entweder auf oder aber bauten sie diese in einen äußerst dispersen Zustand ein, so daß die Gegenwart der Oxyd-

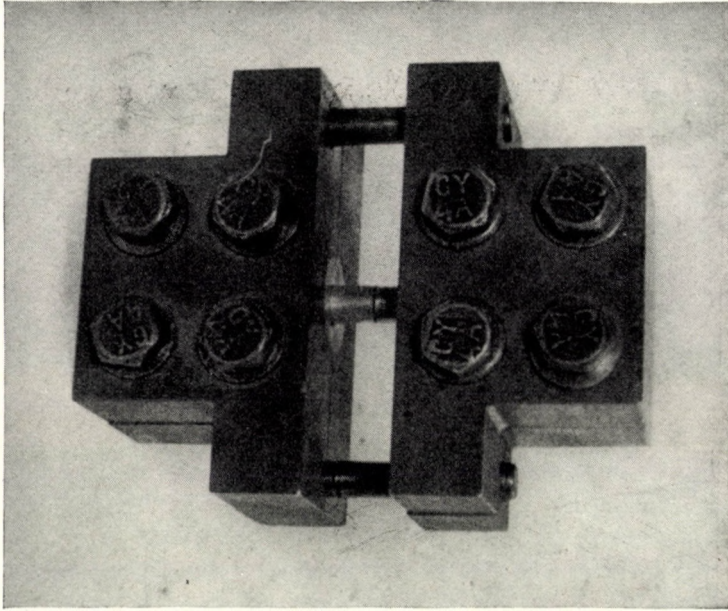


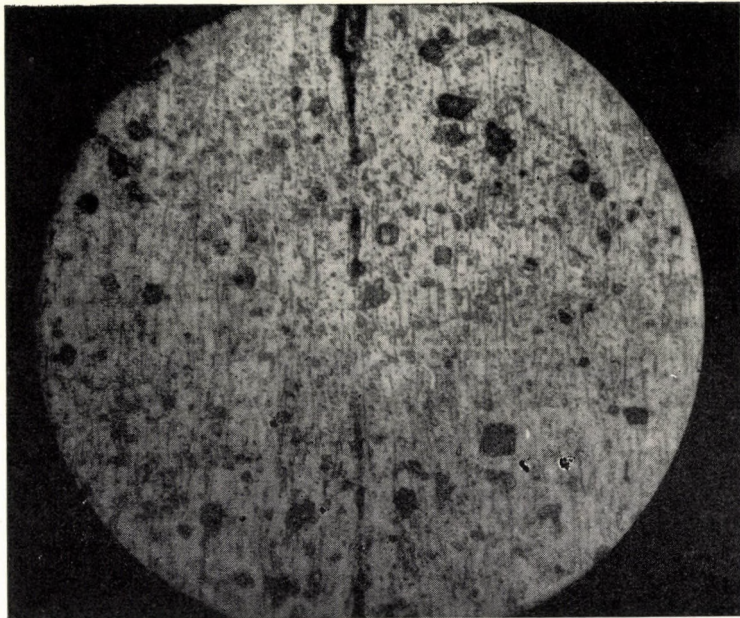
Abb. 4. Vorrichtung zur Kaltschweißung von Aluminiumstäben

teilchen mit Hilfe des Lichtmikroskops nicht mehr nachgewiesen werden konnte (siehe Abb. 5/a und 5/b).

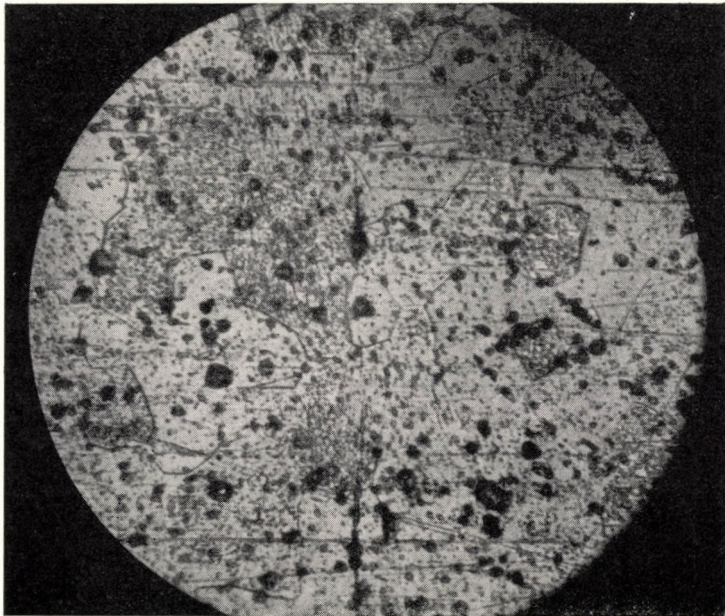
Demgegenüber konnten wir nach der Kaltschweißung von Stäben mit anodisch oxydierter Oberfläche die verhältnismäßig großen Plättchen der zerbrochenen Oxydhaut in den von der Naht gefertigten Schliffen unter dem Mikroskop entdecken (siehe Abb. 6).

Wurde der Schliff von der Naht der durch Kaltschweißen hergestellten Proben unter Vakuum und an der Luft bei einer Temperatur von 550°C 72 Stunden lang geglüht, so wurde weder die Form noch die Größe des Oxydplättchens verändert. Auch die obigen Versuche sprechen dafür, daß das Metall mit dem fein verteilten Aluminiumoxyd in Reaktion treten kann.

Auf Grund des vorangehenden kann in dem Metall auch eine äußerst fein verteilte Aluminiumoxyd-Modifikation, in gelöstem oder beinahe gelöstem



a)



b)

Abb. 5. Querschnitte der kaltgeschweißten Nähte von mit natürlicher Oxydhaut bedeckten Stäben

a) Nach kalter Schweißung und vor Wärmebehandlung (Vergrößerung 400 ×)

b) Nach Wärmebehandlung bei 500° C (Vergrößerung 400 ×)

Zustände, erscheinen, die sich in die Struktur des Metalls einbauen oder mit dem Metall in Reaktion treten kann. Es erscheint als wahrscheinlich, daß das Erscheinen des fein verteilten Oxyds durch die Gegenwart einzelner Legierungsmetalle befördert wird. Wir können dabei in erster Linie daran denken, daß beim Legieren mit dem Legierungsmetall geringe Mengen an Metalloxyd in die Metallschmelze hineingeschleppt werden. Das Metalloxyd kann hierbei mit dem Aluminium eine aluminothermische Reaktion eingehen, und als Ergebnis dieser

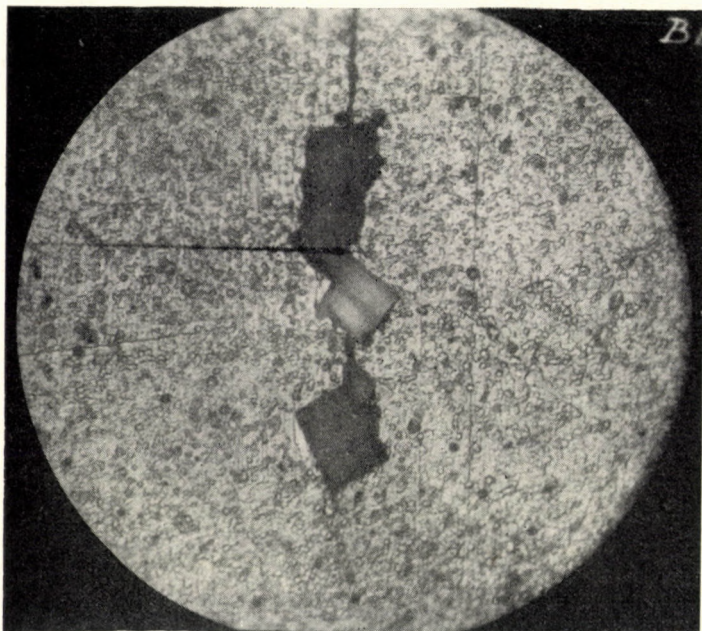


Abb. 6. Querschnitt der kaltgeschweißten Nähte von Stäben mit anodisch oxydierter Oberfläche (Vergrößerung 400 \times)

Reaktion kann irgendwelche Art eines äußerst fein verteilten Aluminiumoxyds auftreten. Der Verlauf ähnlicher Reaktionen bei der Sinterung von Aluminium- und Metallpulvern, unter der gleichzeitigen Einwirkung von Druck und mäßiger Wärme (400–600° C), wurde bereits von COKE [15] beobachtet.

Nach BELECKIJ [16] soll das Aluminium eine Tendenz haben, in sauerstoffarmer Atmosphäre zwei- bzw. einwertige Suboxyde zu bilden. Diese Suboxyde setzen sich erst in der Gegenwart von weiteren Mengen an Sauerstoff in Aluminiumtrioxyd um. Bei einem Mangel an Sauerstoff disproportionieren hingegen diese Suboxyde in Aluminium und Aluminiumtrioxyd. Die Reaktionsprodukte, die bei der Vakuumglühung eines Gemenges aus metallischem Aluminium und Aluminiumoxyd erhalten worden sind, wurden von HOCH und

JOHNSTON [17] untersucht, wobei auch die Gitterkonstanten der entstandenen Subverbindungen des Aluminiums (Al_2O és AlO) ermittelt wurden. Demgemäß beträgt die Gitterkonstante des bei niedrigerer Temperatur (zwischen $1050\text{--}1500^\circ\text{C}$) mit kubischer Struktur entstehenden Al_2O $4,98\text{ \AA}$, die von der Gitterkonstante des Aluminiums ($4,04\text{ \AA}$) um nicht ganz 25% abweicht. Durch die relativ geringe Abweichung der Gitterkonstanten wird es ermöglicht, daß sich das Suboxyd in das Gitter des Aluminiums einbaue oder aber entlang der Fehlstellen des Gitters anhäufe.

Bezüglich der Löslichkeit des Suboxyds im Aluminium fanden wir nur einen einzigen Hinweis. Nach den Erfahrungen von WEBB und FORGENG [18] weist das mit einer wenig Wasserdampf enthaltenden Wasserstoffatmosphäre in Berührung stehende metallische Aluminium bei 1300°C eine starke Sublimation auf und lagert sich an den kälteren Stellen der Versuchsapparatur mit samt den kleinen Aluminiumkugeln enthaltenden Aluminiumoxydkristallen (Saphir) ab. Der Verlauf der Reaktionen wird von Webb und Forgeng in der Weise erklärt, daß das metallische Aluminium unter der gleichzeitigen Wirkung von Wasserstoff und Feuchtigkeit Subverbindungen des Aluminiums bildet. Es wurde von den genannten Autoren auch festgestellt, daß das an den kälteren Stellen der Versuchsapparatur abgeschiedene metallische Aluminium auch Suboxydgase adsorbiert.

All diese neueren Erkenntnisse lassen die Schlußfolgerung zu, daß das metallische Aluminium und die sauerstoffhaltigen Aluminiumverbindungen — insbesondere bei höheren Temperaturen — eine Wechselwirkung aufeinander ausüben. Der genaue Verlauf der Reaktionen und die Wirkung dieser Reaktionen auf die Eigenschaften des Metalls sind — in Ermangelung entsprechender experimenteller Methoden — zur Zeit bis in die Einzelheiten noch unbekannt. Durch die unterschiedlichen Eigenschaften und Verhalten der zahlreichen Aluminiumoxyd und Oxyhydrat-Modifikationen wird das Problem noch weiter verwickelt.

Nach NOWOTNY und PONAHO [8] soll sogar das stabilste Aluminiumoxyd (α -Korund) zur Zersetzung neigen, obwohl seine Strukturformel, auf Grund einer Mitteilung von HEYD [19], dem wahren stabilen Sesquioxid des Aluminiums entspricht. Demgegenüber wird das γ - Al_2O_3 , das reaktionsfähiger als der Korund ist, von Heyd als ein Aluminiumaluminat mit ionischen Eigenschaften betrachtet; das heißt als eine Verbindung, die eine heteropolare Bindung des Kations AlO^+ und des Anions AlO_2^- darstellt. Diese Auffassung entspricht unter anderen der von DOUCET [20] entwickelten und auf die Löslichkeit der Tonerde im Kryolith bezüglichen Theorie.

Dieser Gedankengang wurde von Niderkorn [21] und seiner Schule übernommen, als die erste Phase der bei der Schmelzflußelektrolyse des Aluminiums verlaufenden Vorgänge die durch den Strom bedingte Wanderung des Kations AlO^+ und des Anions AlO_2^- betrachtet wird.

Nach DOUCET [20] soll die Menge der Kationen AlO^+ von den Bedingungen der Elektrolyse abhängen. Man könnte sich vorstellen, daß in einer überhitzten und verschlammten Wanne das Inlöslichwerden der Tonerde nur unvollständig vor sich geht. Aus diesem Grunde dürfte infolge der Wechselwirkung zwischen der Tonerde und dem Metall außer der Bildung von AlO^+ - und AlO_2^- -Ionen noch die Bildung von Suboxyden möglich sein. In diesem Falle dürfte das Metall mit einer über $950^\circ C$ liegenden Temperatur eine Modifikation der Aluminium-Sauerstoff-Verbindung in äußerst feiner Verteilung adsorbieren. Bei der Abkühlung aber kann diese Sauerstoffverbindung des Aluminiums in die Elementarzelle des Aluminiums als feste Lösung oder nahezu feste Lösung eingebaut werden.

Ähnliche Vorgänge können sich abspielen beim Schmelzen von Aluminiumabfällen. Auch hier kommt das geschmolzene Metall mit verschiedenen stabilen bzw. reaktionsfähigen, äußerst fein verteilten Aluminiumoxyden und Oxyhydraten in innigen Kontakt, wodurch die zwischen dem Metall und dem Oxyd verlaufenden Vorgänge befördert werden.

Schließlich dürfte es angenommen werden, daß bei der Bearbeitung (z. B. beim Warmwalzen oder beim Strangpressen) eine Wechselwirkung zwischen dem Aluminium und der die Oberfläche des Aluminiums deckenden Schutzhaut einsetzt. Je dicker und reaktionsfähiger die die Oberfläche des Aluminiums deckende Oxydhaut ist, um so größer ist die Möglichkeit dafür, daß sich eine Wechselwirkung zwischen dem Metall und der Oxydhaut ausbildet.

Wird die Richtigkeit der Vorstellungen angenommen, wonach die Aluminiumoxyd-Modifikationen in die Gitterstruktur des Aluminiums eingebaut werden oder aber in Form einer feinen Dispersion vorhanden sind, so können hierdurch auch die bei der Bearbeitung des Aluminiums beobachteten und bisher theoretisch nicht begründeten Anomalien (so z. B. die Anomalien der elektrischen Leitfähigkeit, der Entgasbarkeit, der Viskosität, der Korrosionsanfälligkeit und der Festigkeit) verständlich und erklärlich werden.

SCHRIFTTUM

1. GILLEMOT, L. und G. SINAY: Die Brucharbeit als Werkstoffkenngröße. *Acta Technica* **22** (1958) 149—173.
2. DOMONY, A., VASSEL, K. R., VÁRHELYI, R.: Az alumíniumhuzal villamos vezetőképességében mutatkozó rendellenességek megszüntetésére irányuló kísérletek (Versuche zur Behebung der Anomalien der elektrischen Leitfähigkeit von Aluminiumdrähten). *MTA Műsz. Tud. Közl.* **15**. 1955. 497—514 (ungarisch).
3. DOMONY, A.: Der Einfluß kleiner Mengen von Legierungskomponenten bzw. Verunreinigungen auf einzelne technologische Eigenschaften des Aluminiums. *Acta Technica* **16**. 1955. 153—161.
4. VASSEL, K. R.: Kohóalumínium villamos vezetőképességi rendellenességek vizsgálata (Untersuchung der Anomalien in der elektrischen Leitfähigkeit von Hüttenaluminium). *Fémip. Közl.* **2**. 1958. 148—153 (ungarisch).

5. LAÁR, T.: A tömböntödei technológia hatása a félfolyamatosan öntött alumíniumtuskók minőségére (Die Wirkung der Blockgießtechnologie auf die Qualität der halbkontinuierlich gegossenen Aluminiumblöcke). Fémip. Közl. **3**. 1959. Im Druck (Ungarisch).
6. DOMONY, A.: Verteilung der im Aluminium befindlichen Kalzium-Verunreinigungen und ihr Einfluß auf die elektrische Leitfähigkeit des Metalls. Acta Technica **21**. 1958. 295—307.
7. DOMONY, A., VASSEL, K. R.: Újabb eredmények a jó vezetőképességű alumíniumhuzalok nagyipari előállítására területén (Neuere Ergebnisse auf dem Gebiete der großindustriellen Darstellung von Aluminiumdrähten mit guter elektrischer Leitfähigkeit). Fémip. Közl. **1**. 1956. 182—194 (Ungarisch).
8. NOWOTNY, H., PONAHLÓ, H.: Über die Oxyde im Aluminium. Aluminium Ranshofen Sonderheft 3. 1955. 13—25.
9. SCHMITT, H., WITTNER, H.: Herkunft der nichtmetallischen Verunreinigungen im Aluminium. Erzmetall **9**. 1956. 417—421.
10. ZEERLEDER, A. V.: Tagung der deutschen Gesellschaft für Hüttenleute. 1949. Metall **4**. 1950. 57—59.
11. IRMANN, R.: Gesintertes Aluminium mit hoher Warmfestigkeit. Aluminium **27**. 1951. 29—36.
12. GREGORY, E., GRANT, J.: High temperature strength of wrought aluminium powder products. J. Inst. Metals Transactions Soc. **6**. 1954. No 2. 247—252.
13. SEITH, W., LIPMANN, G.: Über die Diffusion von Metallen in gesinterten Aluminium Proben. Z. für Elektrochemie **56**. 1952. 379.
14. VARGA, I.: Kísérletek a fémek erőhatással történő egyesítésére (Versuche zur Vereinigung der Metalle durch Kraftwirkung). Fémip. Közl. **3**. 1959. Im Druck (Ungarisch).
15. COKE, H. G.: Some experiments on the extrusion of magnesium and aluminium powders. J. Inst. Metals **88**. 1957. 29—35.
16. BELECKIJ, M. Sz.: Az alumínium felületén keletkező oxidok szerkezete (Über die Struktur der an der Oberfläche des Aluminiums entstehenden Oxyde). Dokl. Akad. Nauk S. S. S. R. **91**. 1953. 89—91 (russisch).
17. HOCH, M., JOHNSTON, H.: Formation, stability and crystal structure of the solid aluminium suboxides: Al_2O , AlO . J. Amer. Chem. Soc. **76**. 1954. 2560—2561.
18. WEBB, W., FORGENG, D.: Growth and defect structure of sapphire microcrystals. J. Applied Phys. **28**. 1957. 1449—1454.
19. HEYD, F.: Az alumínium és ötvözetei legfontosabb viselkedésének irányelvei (Die wichtigsten Richtlinien über das Verhalten des Aluminiums und seiner Legierungen). Chemický Obzor (Prag) **25**. 1950. X. 150—156 (tschechisch).
20. DOUCET, Y.: The electrolytic dissociation of alumina in solution in molten cryolith. J. Chim. Phys. **50**. 1953. 42—44.
21. NIEDERKORN, I.: A kriolit-alumíniumoxid olvadék elektrolízisének befolyásoló néhány körülmény (Über einige Bedingungen, die die Elektrolyse von Kryolith-Aluminiumoxydschmelzen beeinflussen). Cvetnie metalli **1957**. XII. 59—64 (ung.).

ZUSAMMENFASSUNG

Im Laufe unserer der Ermittlung der Brucharbeit dienenden Untersuchungen wurde es festgestellt, daß die Meßwerte beim Aluminium durch geringe Mengen Fremdmetalle, die im Aluminium in gelöstem Zustande oder in Form von groben Ausscheidungen vorliegen, in bedeutendem Maße nicht verändert werden. Demgegenüber wird die Brucharbeit durch fein dispergierte, nahezu in gelöstem Zustande befindliche Fremdkörper in hohem Maße beeinflußt. Nach unserer Annahme dürfte die Verunreinigung, die einzelne Eigenschaften des Aluminiums in entscheidendem Maße beeinflußt, irgendwelche Oxyd-Modifikation des Aluminiums darstellen, die sich im Grundmetall in äußerst feiner Dispersion oder nahezu in gelöstem Zustande vorfindet. In Ermangelung einer unmittelbaren experimentellen Methode bemühten wir uns, unsere Vorstellungen durch die Ergebnisse unserer Untersuchungen bezüglich der Brucharbeit sowie durch die Schlußfolgerungen zu unterstützen, die aus unseren anderweitigen Versuchen bezüglich der elektrischen Leitfähigkeit, Viskosität des geschmolzenen Metalls, Korrosionsverhalten und Kaltschweißung gewonnen wurden.

FACTORS AFFECTING THE CHANGES IN CONTRACTION WORK VALUES WITH SPECIAL REGARD TO THE METALLIC AND NONMETALLIC IMPURITIES OF ALUMINIUM

A. DOMONY

SUMMARY

On the basis of tests carried out with the aim of determining contraction work, it has been established that in the case of aluminium, the characteristic value will not be considerably modified by small quantities of metallic impurities dissolved in the metal or forming in it coarse segregations. Finely dispersed, almost solute foreign materials, however, affect the contraction work to a high extent. In the opinion of the author, the impurity is either some sort of oxide modification very finely dispersed in the basis metal or almost solute in it, which might decisively influence the features of the metal.

In lack of a direct test method we have endeavoured to support these ideas by the results of contraction work tests and by the conclusions drawn from tests on electric conductivity, viscosity of molten metal, corrosion and cold welding.

EXAMEN DES FACTEURS INFLUANT SUR LA VARIATION DES VALEURS DU TRAVAIL DE CONTRACTION, COMPTE TENU DES IMPURETÉS MÉTALLIQUES ET NON MÉTALLIQUES DE L'ALUMINIUM

A. DOMONY

RÉSUMÉ

D'après nos recherches tendant à la détermination du travail de contraction, en ce qui concerne l'aluminium, la valeur numérique de ce travail n'est pas influencée sensiblement par les impuretés répandues dans le métal, ou y formant des précipitations grossières. Par contre, les matières étrangères finement dispersées et presque dissoutes l'influencent notablement.

D'après nos suppositions, l'impureté influant d'une façon prépondérante sur certaines caractéristiques de l'aluminium, est celle qui provient de quelques modifications d'oxydes très finement dispersés ou presque dissous dans le métal de base. Dans l'absence de méthodes d'essais directes, nous avons cherché à justifier notre théorie par les déductions résultant de nos recherches sur le travail de contraction, ainsi que des divers essais concernant la conductibilité électrique, la viscosité du métal fondu, la corrosion et le soudage à froid.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФАКТОРОВ, ВЛИЯЮЩИХ НА ИЗМЕНЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ РАБОТЫ КОНТРАКЦИИ, ОБРАЩАЯ ОСОБОЕ ВНИМАНИЕ НА МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ И НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИЕ ПРИМЕСИ АЛЮМИНИЯ

A. ДОМОНЬ

РЕЗЮМЕ

По данным исследований, ставящих своей целью определение работы контракции, в случае алюминия параметр не изменяется в значительной мере присутствующие в нем в больших количествах металлические примеси, растворенные в металле или образующие в нем грубые выделения. Наоборот, на работу контракции оказывают большое влияние посторонние вещества, тонко диспергированные и также находящиеся в растворенном состоянии. По нашему предположению имеющаяся в алюминии оксидная модификация какого то вида очень тонкого распределения или же также растворяющаяся в основном металле является той примесью, которая решающим образом может изменять отдельные свойства металла. Наше предположение из-за отсутствия прямого опытного метода мы старались подтвердить как результатами исследования работы контракции, так и прочими выводами, сделанными на основе опытов электрической проводимости, вязкости расплавленного металла, коррозионных опытов, опытов холодной сварки.

FORMULAE FOR CONTROLLING STRESS CALCULATIONS OF CALOTTE SHELLS

P. CSONKA
D. ENG. SC.

WORKING COMMUNITY OF STRUCTURAL AND TRANSPORT ENGINEERING OF THE HUNGARIAN
ACADEMY OF SCIENCES, BUDAPEST

[Manuscript received June 22, 1959]

1. Introduction

Calotte shells, *i. e.*, cupola-like twice curved shells supported by edge beams (*e. g.*, tie arches) lying in a vertical plane are important roofing structures of reinforced concrete architecture (Fig. 1). The calculation of these shells generally encounters grave mathematical difficulties and this is the very reason why different approaching methods must usually be applied in practice.

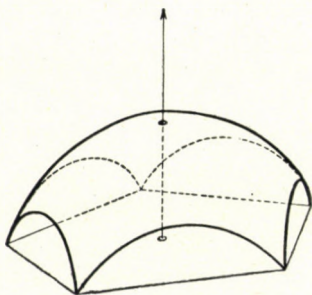


Fig. 1. Calotte shell

It would be helpful for forming an opinion on the accuracy of different approximate methods used for the calculation of calotte shells, if we could succeed in exactly determining — at least at certain points of the shell — the accurate values of inner forces without solving the differential equation of the problem. In the following we present several simple controlling formulae adequate for this purpose.

2. Basic relations

Our discussions are based on the well-known theory of membrane shells. We suppose a uniform distribution of the inner forces over the shell's thick-

ness, furthermore, that the deformation of individual particles of the shell can freely develop, independently of the deformation of the other particles.

The edge beams of the shell are assumed as being plane structures only resisting to forces acting in their own plane. We disregard conditions on a spaceless fitting at junctions of the shell and the edge beams.

Our discussions refer to an orthogonal system of co-ordinates the z axis of which is vertical and the positive branch of it points downwards. In this system of co-ordinates the shape of the shell's middle surface is characterized by the equation

$$z = f(x, y). \quad (1)$$

As loading only vertical forces, namely, downwards directed distributed forces are taken into consideration. The intensity of these forces related to the

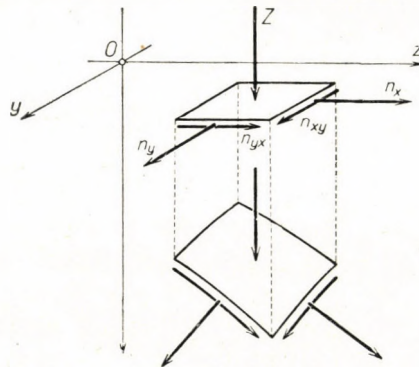


Fig. 2. Plane projections of inner forces

plane projection area is expressed by the load function

$$Z = Z(x, y). \quad (2)$$

For the characterization of the shell's stress state the plane projections of inner forces n_x , n_{xy} , n_{yx} and n_y are used (Fig. 2). These are not independent of each other, between them, with respect to reasons of equilibrium, the reciprocity

$$n_{xy} = n_{yx} \quad (3)$$

exists. A further connection between the plane projections of inner forces is given by the partial differential equation expressing the equilibrium between the arbitrary bordered elements of the shell:

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

$$n_x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + n_y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -Z. \tag{6}$$

If the projection forces n_x, n_{xy}, n_y of a certain shell are known, then the projection forces $\bar{n}_x, \bar{n}_{xy}, \bar{n}_y$ of a shell distorted on the base of affinity α -fold in direction x and β -fold in direction y can be calculated from formulae

$$\begin{aligned} \bar{n}_x &= \alpha^2 n_x, \\ \bar{n}_{xy} &= \alpha\beta n_{xy}, \\ \bar{n}_y &= \beta^2 n_y. \end{aligned}$$

The application of the above formula, however, depends on the preliminary condition, that the intensity of the load upon the distorted shell related to the plane projection area must be the same as it was on the corresponding points of the original shell.

3. Stress state on corner points of shells

Let us choose an arbitrary corner point B of the shell and investigate what statements of general validity could be established with respect to the stress state on the corner point in question.

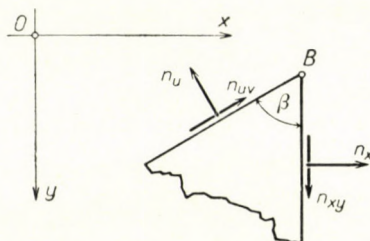


Fig. 3. Horizontal projection of the corner part

The plane projection of the middle surface of the corner to be investigated is shown in Fig. 3. For the sake of simplicity, the system of co-ordinates was placed in such a way that its x-axis should be perpendicular to the plane projection of one of the two edge lines intersecting at this corner point.

Since the edge beams do not resist to laterally directed forces, for the inner forces n_x and n_u shown in Fig. 3 relations

$$n_x = 0, \quad n_u = 0 \quad (7)$$

are valid.

For the recognition of the stress state on corner point B , let us cut out from corner part B of the shell the infinitesimal particle illustrated in Fig. 4, and let us set up the condition on equilibrium referring to the x -directed plane projections of inner forces. By this, and with respect to (3), we obtain the relation

$$n_{uv} = -n_{xy}.$$

According to the above, the intensity of plane projections of shearing forces acting along the two edges intersecting at corner point B is the same, and both forces point towards corner point B or off from it.

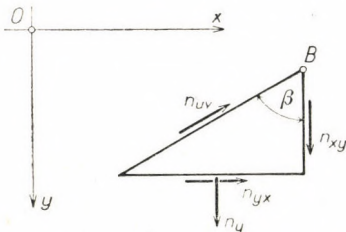


Fig. 4. Balancing of the cut-out corner part

With respect to the component n_y shown in Fig. 4, we can also arrive to an interesting statement. Namely, writing down the condition on equilibrium referring to the y -directed components of projection forces, we obtain the relation

$$n_y = -\frac{2n_{xy}}{\operatorname{tg} \beta}. \quad (8)$$

Since along the two lateral edges joining at corner B shearing forces are transferred to the shell only, the bisectrix of the angle at corner B , as well as the straight line normal to this bisectrix, are the principal directions of projection forces belonging to corner point B (Fig. 5). The principal values of the projection forces are

$$n_{\text{I}} = n_{xy} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad (9)$$

$$n_{\text{II}} = -\frac{n_{ny}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}. \quad (10)$$

For the determination of the real values of the projection forces, condition on equilibrium (6) can be used. By substituting relations (7) and (8) into the latter we obtain the equation

$$2n_{xy} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{2n_{xy}}{\operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -Z$$

and herefrom

$$n_{xy} = \frac{Z}{2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|} \quad (11)$$

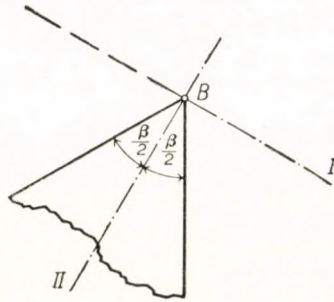


Fig. 5. Principal directions of inner forces belonging to corner point B

Thereafter, using relation (8) we obtain

$$n_y = \frac{Z}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \operatorname{tg} \beta - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} \quad (12)$$

In the particular case, if the denominator of the fraction written on the right hand side of equation (11) is equal to zero, the value of n_{xy} will grow beyond measure. This case occurs, *e. g.*, on corners of common shells of translation over a rectangular basis, supposing, that on these loci the value of $\partial^2 f / \partial y^2$ is finite.

4. Stress state on the shell's edge

Let us choose an arbitrary straight side of the horizontal projection of the boundary line, and place the system of co-ordinates in such a way, that its *x*-axis should be perpendicular to the horizontal projection of the side in question (Fig. 6).

Since the edge beams cannot transfer to the shell forces being normal to the edge lines, thus, along the lateral edge in question, relation

$$n_x = 0 \quad (13)$$

is valid.

In the case of shells of translation the generating curves of which are parallel to the planes of co-ordinates xz and yz , referring to the investigated

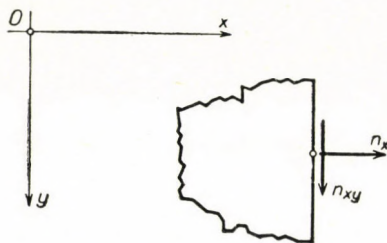


Fig. 6. Horizontal projection of the shell's part joining the edge line

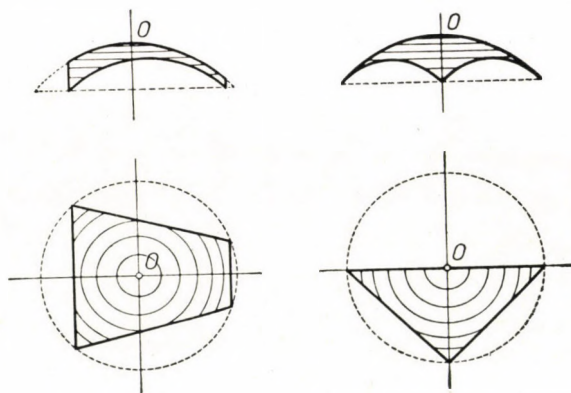


Fig. 7. Calotte shells shaped like a paraboloid of revolution

lateral edge, further interesting statements can be established. Namely, in such a case relation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad (14)$$

is valid, consequently, normal forces parallel to the lateral edge in question can directly be computed from equation (6) by using relations (13) and (14), that is

$$n_y = - \frac{Z}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} \quad (15)$$

If the shell's middle surface is a paraboloid of revolution then condition (14) will be fulfilled for each of the two directions normal to each other. In such a case, a formula similar to formula (15) can be written for all sides of the shell's basis. Two interesting examples of such shells are shown in Fig. 7. In both cases all corners are placed at the same height, formula (15), however, also remains valid, if the corners are placed at different heights.

Finally, we have to deal with those bisecting points of the lateral edges which are placed in the common symmetry plane of the shell and of the system of the loading forces. At such points of the lateral edges, for reasons of symmetry, relation

$$n_{xy} = 0 \tag{16}$$

is valid, so that at these loci all three characteristics of the stress state can be calculated by simple formulae.

5. Stress state of the axis point

As *axis point* of a shell such a point is to be understood, across which at least three planes can be laid, which are symmetry planes of the shell's middle surface, and at the same time, also symmetry planes of the system of the loading forces upon the shell. The shell is at such a point — due to the multifold symmetry — in hydrostatical stress state, consequently here is

$$n_x = n_y, \quad n_{xy} = 0. \tag{17}$$

Since at the same place for reasons of symmetry relation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

is valid, n_x can directly be computed from relation (6), *i. e.*:

$$n_x = - \frac{Z}{2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} \tag{18}$$

Rotation shells illustrated in Fig. 8 may be mentioned as an example for the application of the above formula. The axis point of such shells is the point of intersection of the middle surface and the rotation axis.

As special case, shells produced from multifold symmetrical shells by transformation based on affinity, shall also be dealt with. If on a point of these

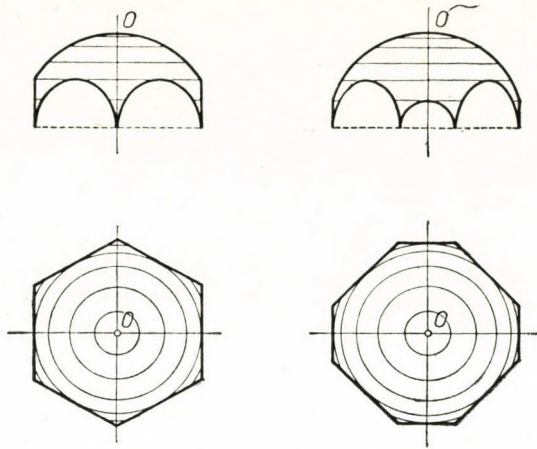


Fig. 8. Multifold symmetrical rotation shells

shells, corresponding and affined to the original axis point, the principal directions of curvature are x and y , then the values of projection forces acting on the point in question are:

$$n_x = -\frac{Z}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad n_{xy} = 0, \quad n_y = -\frac{Z}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad (19)$$

6. Example of application

Let us illustrate the application of the afore deduced relations in the case of a shell shaped like a paraboloid of revolution centrically placed over a regular n -gon and loaded by its own weight.

The zero point of the system of co-ordinates should be the center 0 of the basis, and the x -axis the bisecting normal straight line of the horizontal projection of one of the lateral edges (Fig. 9). In this system of co-ordinates the equation of the shell's middle surface is:

$$z = f(x, y) = \frac{h}{b^2} (x^2 + y^2).$$

The intensity of the shell's own weight related to the surface unit of the middle surface should be $g = \text{constant}$. In such a case the intensity of the projection load related to the surface unit of the basis will be

$$Z = g \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2},$$

that is

$$Z = \frac{g}{b^2} \sqrt{b^4 + 4h^2(x^2 + y^2)} .$$

The vertex angle of the regular n -gon is

$$\beta = (n - 2) \frac{\pi}{n} ,$$

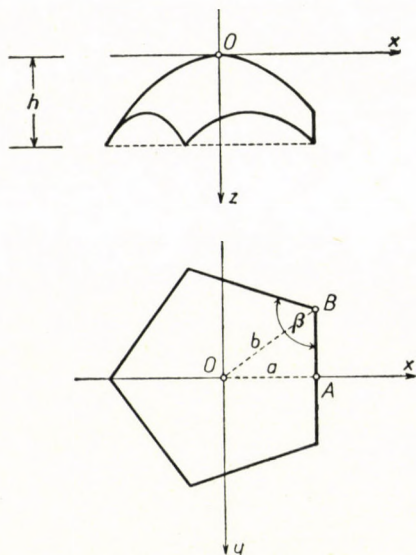


Fig. 9. Shell formed like a paraboloid of revolution over regular pentagonal basis

and so

$$\operatorname{tg} \beta = - \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{n} \right) .$$

After these we can begin the calculation of the plane projections of the inner forces. On the base of relations (7), (11) and (12) we obtain for the forces in question acting on corner point B the formulae:

$$n_x = 0 ,$$

$$n_{xy} = - \frac{gb}{4h} \sqrt{b^2 + 4h^2} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{n} \right) ,$$

$$n_y = - \frac{gb}{2h} \sqrt{b^2 + 4h^2} ,$$

while calculating on the base of relations (13), (15) and (16) we obtain for the forces acting on the bisecting point A of the lateral edge the formulae:

$$\begin{aligned}n_x &= 0, \\n_{xy} &= 0, \\n_y &= -\frac{g}{2h} \sqrt{b^4 + 4h^2 a^2}.\end{aligned}$$

The calculation of projection forces acting on *axis point 0* can also be simply carried out. Here we obtain on the basis of relations (17) and (18)

$$\begin{aligned}n_x &= -\frac{gb^2}{4h}, \\n_{xy} &= 0, \\n_y &= -\frac{gb^2}{4h}.\end{aligned}$$

In addition to the above, concerning the stress state of the shell, we can also establish further statements. With respect to symmetry it is obvious that no shearing forces can act along the axes of symmetry, thus, e. g., *along the symmetry axis* $y = 0$

$$n_{xy} = 0,$$

while *along the lateral edge* $x = a$, according to formulae (13) and (15), we obtain

$$\begin{aligned}n_x &= 0, \\n_y &= -\frac{g}{2h} \sqrt{b^4 + 4h^2 (a^2 + y^2)}.\end{aligned}$$

As is to be seen, the projection forces being parallel to the lateral edges vary along the respective lateral edge parabolically.

7. Inner forces of the cupola shell over a Fair-pavilion in Belgrade

To verify the useful nature of the disclosed formulae, let us check statical calculations referring to the magnificent cupola shell over a Fair-pavilion in Belgrade, built in 1957. The mode of calculation of this famous cupola was described by KRSTIĆ, M. [4].

The base of the shell in question is a square (Fig. 10). The half length of its sides is $a = 23,75$ m. The middle surface is spherical, its radius is $R = 56,2$ m. The shell's thickness — inside the circle inscribed into the basic square — is 9 cm, advancing from here towards the corners the thickness increases, reaching 20 cm at the corners. As total load upon the 9 cm thick parts of the shell $0,435$ t/m² was taken into consideration. Over the corner parts this value might be higher — according to the author's estimation — by about 60 per cents.

In compliance with the published diagrams the values of the projection forces were the following.

At axis point $x = 0, y = 0$:

$$n_x = -11,9 \text{ t/m}, \quad n_{xy} = 0, \quad n_y = -11,9 \text{ t/m}. \quad (20)$$

At side bisecting point $x = a, y = 0$:

$$n_x = 0, \quad n_{xy} = 0, \quad n_y = -26,1 \frac{R}{\sqrt{R^2 - a^2}} = -28,8 \text{ t/m}. \quad (21)$$

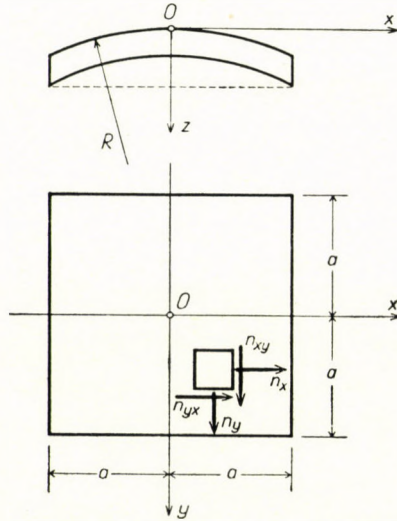


Fig. 10. Middle surface of the calotte shell over the Fair-pavilion in Belgrade

At corner point $x = a, y = b$:

$$n_x = 0, \quad n_{xy} = -35,7 \text{ t/m}, \quad n_y = 0. \quad (22)$$

Several small errors, however, slipped into this calculation. After their correction, the approximate values of projection forces are the following:

At axis point $x = 0, y = 0$:

$$n_x = -11,9 \text{ t/m}, \quad n_{xy} = 0, \quad n_y = -11,9 \text{ t/m}. \quad (23)$$

At side bisecting point $x = a, y = 0$:

$$n_x = 0, \quad n_{xy} = 0, \quad n_y = -21,6 \frac{R}{\sqrt{R^2 - a^2}} = -23,8 \text{ t/m}. \quad (24)$$

At corner point $x = a, y = b$:

$$n_x = 0, \quad n_{xy} = -31,8 \text{ t/m}, \quad n_y = 0. \quad (25)$$

Conversely to the above numerical values, the *accurate* values resulting from formulae published in the present paper are the following.

At axis point $x = 0, y = 0$:

$$n_x = -\frac{gR}{2} = -12,2 \text{ t/m}, \quad n_{xy} = 0, \quad n_y = -\frac{gR}{2} = -12,2 \text{ t/m}. \quad (26)$$

At side bisecting point $x = a, y = b$:

$$n_x = 0, \quad n_{xy} = 0, \quad n_y = -gR = -24,4 \text{ t/m}. \quad (27)$$

At corner point $x = a, y = b$:

$$n_x = 0, \quad n_{xy} = -1,6 \frac{gR(R^2 - 2a^2)^{3/2}}{2a^2} = -56,5 \text{ t/m}, \quad n_y = 0. \quad (28)$$

The factor 1,6 to be seen in formula (28) of projection force n_{xy} expresses the surplus in weight due to the increase of the shell' thickness.

As is to be seen, approaching values of projection forces given in (23)—(25) deviate to a considerable extent from the accurate values to be found in (26)—(28). So *e. g.*, the exact value of force n_{xy} valid for the corner point is higher by about 80 per cents, than the value resulting from the approximate calculation.

In the given case the demonstration of the error committed in the course of the approximate calculation was very simple. This fact also clearly verifies the useful and expedient nature of the published controlling formulae.

REFERENCES

1. LAFAILLE, B.: Mémoire sur l'étude général des surfaces gauches minces. *Mémoires. Association International des Ponts et Charpentes* 3 (1935), pp. 295—332.
2. MENYHÁRD, I.: Héjszerkezetek elmélete (Theory of Shell Structures. A Mérnöki Továbbképző Intézet Kiadványai. Part I.: Vol. 3. (1942), Fasc. 11; Part. II.: Vol. 19., pp. 197—236) (In Hungarian).
3. CSONKA, P.: On Shells Curved in Two Directions. *Proceedings. The Second Symposium on Concrete Shell Roof Construction: July 1—3, 1957. Teknisk Ukeblad, Oslo 1958*, pp. 203—209.
4. KRSTIĆ, N.: Die Verwendung von Schalen aus vorgespanntem Beton an der neuen Messe in Belgrad. *Der Bauingenieur* 33 (1958), pp. 299—301.

SUMMARY

The calculation of calotte shells is usually carried out in practice by different *approaching* methods. For the control of these calculations such formulae might be very helpful, by the use of which stresses arising in calotte shells — at least on certain characteristic points of these structures — could be calculated in an *exact* manner. The present paper introduces formulae adequate for this purpose.

The formulae published here offer the possibility for the direct calculation of characteristics of stresses arising on corner points of arbitrary shaped and loaded calotte shells. By their use the characteristics of stresses belonging to the centres of the edge lines can also be calculated directly, supposing, that these points are placed in a common symmetry plane of the shell's middle surface and of the loads upon the shell. Normal stresses arising along the edge lines of shells of translation can also be computed directly, if the plane of the edge line is parallel to the plane of one of the generating curves.

For the verification of the adequacy of the published formulae author shows the calculation of stress characteristics at certain points of a shell formed like a rotation paraboloid over a regular polygone basis.

As a further example the case of cupola shells over the Fair-Pavilion in Belgrade is also mentioned. In this instance, the error made during designing by the use of approximate calculations could be demonstrated in a simple way.

KONTROLLFORMELN ZUR SPANNUNGSBERECHNUNG DER KAPPENSCHALEN

P. CSONKA

ZUSAMMENFASSUNG

Die Berechnung der Kappenschalen erfolgt in der Praxis mit Hilfe verschiedener Annäherungsmethoden. Zur Kontrolle derselben können Formeln gute Dienste leisten, mit deren Hilfe die in den Kappenschalen auftretenden Spannungen — wenigstens an gewissen charakteristischen Punkten — genau berechnet werden können. Vorliegender Aufsatz veröffentlicht einfache, diesem Zweck entsprechende Formeln.

Die hier mitgeteilten Formeln ermöglichen die unmittelbare Bestimmung der Kennwerte der in den Eckpunkten beliebig gestalteter und belasteter Kappenschalen auftretenden Spannungen. Ihr Gebrauch ermöglicht ferner die Bestimmung der in den Mittelpunkten der Randlinien auftretenden Spannungen, vorausgesetzt, daß die genannten Punkte in einer gemeinsamen Symmetrieebene der Schalenmittelfläche und der die Schale belastenden Kräfte liegen. Die entlang der Randlinien der Translationschalen auftretenden Normalspannungen können ebenfalls unmittelbar berechnet werden, wenn die Randlinie der Schale parallel zur Ebene der einen Leitkurve verläuft.

Zum Nachweis der Zweckmäßigkeit der bekanntgegebenen Formeln wird die Berechnung der Spannungskennwerte in einzelnen charakteristischen Punkten eines Rotationsparaboloides über einem regelmäßigen vieleckigen Grundriß gezeigt.

Als weiteres Beispiel wird der Fall der Kappenschalen der Messehalle in Belgrad erwähnt. Hier konnten mittels der im Aufsatz bekanntgegebenen Kontrollformeln die im Laufe der annähernden Entwurfsberechnung begangenen Fehler auf einfache Weise nachgewiesen werden.

FORMULES POUR LE CONTRÔLE DE LA TENSION DES CALOTTES

P. CSONKA

RÉSUMÉ

Dans la pratique, le calcul de la calotte se fait par différentes méthodes approximatives. Pour contrôler celles-ci, on peut se servir de formules par lesquelles la tension de la calotte est déterminable avec exactitude, du moins dans certains points caractéristiques. La présente étude propose des formules simples pouvant être utilisées à cet effet.

Les formules proposées permettent la détermination directe des caractéristiques de tension dans les coins d'une calotte de forme et à charge données, ainsi que les caractéristiques de tension des centres des bordures, à condition que les points mentionnés se trouvent sur le plan de symétrie commun de la surface moyenne de la calotte et des forces chargeant cette dernière. On peut aussi déterminer directement, par elles, les tensions normales se produisant le long des bordures des voiles de translation, lorsque la bordure du voile est parallèle au plan de l'une des directrices.

Pour démontrer l'utilité des formules qu'il propose, l'auteur présente le calcul, en certains points caractéristiques, des caractéristiques de tension d'une calotte de forme paraboloides de révolution, construite sur un polygone régulier.

Un autre exemple pratique est fourni par les calottes du pavillon de la foire de Belgrade, où l'erreur du calcul approximatif, effectué au cours de la construction, pouvait être démontrée de façon simple par les formules de contrôle proposées dans l'étude.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕНИЙ КУПОЛООБРАЗНЫХ ОБОЛОЧЕК

П. ЧОНКА

РЕЗЮМЕ

На практике расчет куполообразных оболочек производится при помощи различных приближенных методов. Для проверки приближенных методов дают большую пользу такие формулы, при помощи которых напряжения куполообразных оболочек возможно точно вычислить хотя бы в отдельных характерных местах. В данной работе приведены пригодные для этой цели простые формулы.

Приведенные здесь формулы позволяют непосредственно определять показатели напряжения в угловых точках куполообразных оболочек произвольной формы и нагрузки. При помощи этих формул представляется возможным просто вычислять также показатели напряжения центров периметральных линий, исходя из предположения, что упомянутые точки лежат на общей плоскости симметрии центральной поверхности оболочки, а также нагружающих оболочку сил. Могут быть непосредственно определены также нормальные напряжения, возникающие вдоль периметров трансляционных оболочек, если периметр оболочки параллелен с плоскостью одной основной кривой.

Автор для подтверждения целесообразности рассмотренных формул демонстрирует для характерных точек расчет показателей напряжения оболочки в виде параболоида вращения, построенного над правильным многоугольным основанием.

В качестве дополнительного примера упоминается случай куполов в виде оболочек павильона бельградской ярмарки. На этом примере при помощи изложенных в статье формул можно было показать допущенные в процессе проектирования ошибки примененного приближенного метода.

ÜBER EINE AKUSTISCHE UNTERSUCHUNGSMETHODE DER FASERRISSE VON LEDERN*

G. TÓTH

DOKTOR DER CHEM. WISSENSCHAFTEN

und

J. ÖRKÉNYI

LABORATORIUM DER PÉCSER LEDERFABRIK

[Eingegangen am 2. Juli, 1959]

Im vergangenen Jahr führten wir Ermüdungsversuche mit Hilfe von Dauerbelastungen sowie dynamischen Beanspruchungen bei Treibriemen durch, und setzten dabei voraus, daß die Lederfasern unter der Wirkung von Spannungen, die die Reißfestigkeit um vieles unterschreiten, nacheinander zerreißen. Diese Voraussetzung konnte im Laufe unserer Versuche bestätigt werden, indem mit Hilfe eines Schallverstärkers das Knallgeräusch der Fasern beim Reißen wahrgenommen werden konnte. Wir dachten dabei daran, daß das stundenlang andauernde Auseinanderziehen des Reißprozesses und die Beobachtung der Anzahl und Stärke der Faserrisse zur Erkenntnis der Faserstruktur des Leders beitragen dürfte.

Das Zerreißen der Fasern ruft Schwingungen im Leder hervor, die mit Hilfe eines empfindlichen Mikrophons hörbar gemacht werden können. Der durch das Mikrophon angezeigte Schall wurde mit Hilfe eines Dreiröhrenverstärkers — dessen Schaltschema in Abb. 1 dargestellt wurde — auf etwa das 10 000-fache verstärkt. Selbstredend wirkt bei dieser hohen Verstärkung jedes äußere Geräusch äußerst störend, und das Mikrophon muß bei diesen Versuchen mit einem schalldämpfenden Material umhüllt werden. In der jüngsten Zeit konnten wir auf diese Weise erreichen, daß bei einzelnen Ledern bereits bei 35—40% der Zerreißfestigkeit Knallgeräusche wahrgenommen werden können, deren Lautheit (3) und Häufigkeit äußerst verschieden sind. Bei niedrigen Belastungen sind lediglich einige Knallgeräusche je Minute hörbar, deren Intensität sich — noch bei einer 10 000-fachen Verstärkung — auf dem Niveau der Hörbarkeitsgrenze befindet. Bei Belastungen in der Nähe der Reißfestigkeit wächst nicht nur die Häufigkeit, vielmehr auch die Lautheit der Knallgeräusche in hohem Grade an. Der Reißprozeß im Leder wurde auch auf Magnettonband aufgenommen.

Die durch das Mikrophon angezeigten und verstärkten Knalle können entweder mit einem Kopfhörer oder mit Hilfe eines Oszillographen wahrgenom-

* Vorgetragen auf der Sitzung des Wissenschaftlichen Vereines für die Lederindustrie am 2. Oktober 1959. Im Laufe des Vortrages wurden auch die Magnetophonaufnahmen über den Reißprozeß der Fasern vorgeführt.

men werden. Bei unseren ersten Versuchen wurde ein Oszillograph Typ Orion SP 20981 verwendet.

Beide Perzeptionsmethoden weisen gewisse Vorteile auf. Mit Hilfe des Kopfhörers können wir durch die Tonfarbe die Faserrisse von dem etwaigen äußeren Geräusch leicht unterscheiden, und so kann die Anzahl der Knalle leicht festgestellt werden. Ein Nachteil des Kopfhörers besteht jedoch darin, daß die Beurteilung der Lautheit der Knalle recht subjektiv ist. Demgegenüber kann am Oszillographen aus der Größe der Strahlenbewegung (aus der Amplitude des Strahles) auf die Schallintensität gefolgert werden, wobei jedoch die Störgeräusche und die durch die Fasern des Leders bedingten Knallgeräusche nicht auseinandergehalten werden können. Aus diesem Grunde kann die Häu-

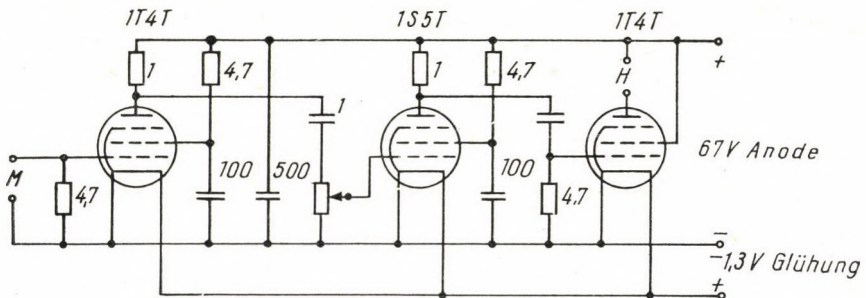


Abb. 1. Widerstände sind in Megohm, Kapazitätswerte in Nanofarad angegeben
H = Kopfhörer M = Mikrophon

figkeit der Knallgeräusche in Ermangelung eines stillen Arbeitsraumes mit Hilfe dieses Instruments nicht mit der Sicherheit wie beim Kopfhörer festgestellt werden. Bei gleichzeitiger Beobachtung des Kopfhörers und des Oszillographen kann sowohl die Anzahl wie auch die Stärke der Knallgeräusche gemessen werden. Mit Hilfe des technischen Oszillographen vom Typ Orion AF können die Strahlenbewegungen auch photographiert werden, wobei deren Amplituden und Häufigkeiten aus der Photographie genau bestimmt werden können.

Abb. 2 und 3 zeigt die oszillographische Aufnahme einer an einem kalt geschmierten Treibriemencroupen vorgenommenen Dauerermüdung, wobei die Belastung 160 kg/cm^2 bzw. 200 kg/cm^2 betrug. Jeder Knall kann als eine geringere oder größere Strahlenbewegung gesondert wahrgenommen werden.

Zur Untersuchung des Reißprozesses müssen wir den Zusammenhang zwischen dem zerrissenen Faserquerschnitt und der Strahlenbewegung des Oszillographen kennen. Die Konstruktion unserer Vorrichtung ist derart beschaffen, daß auf eine Proportionalität dieser Beziehung gefolgert werden kann. Der Abstand des Membrans vom Elektromagneten des Mikrophons ist nämlich im Vergleich zu der Amplitude der Schwingungen ziemlich groß, und aus diesem Grunde sind die Deviation des Membrans und die induzierte Stromstärke einander annähernd proportional. Zwischen der im Mikrophon induzierten Strom-

stärke und der Strahlenbewegung am Oszillographen besteht ebenfalls eine Proportionalität.

Die Proportionalität zwischen der Größe des zerrissenen Faserquerschnittes und der Strahlenbewegung am Oszillographen wurde experimentell auf die folgende Weise bestätigt. In einem Abstände von 20 cm vom Mikrophon wurde

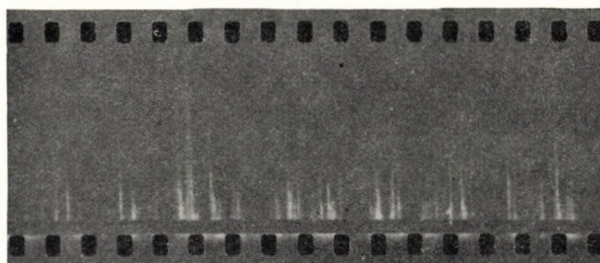


Abb. 2

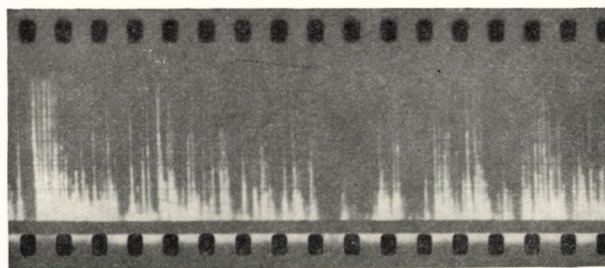


Abb. 3

ein Textilfaden mit einem Gewicht von 37 mg/m bzw. 748 mg/m zerrissen, wobei die Strahlenbewegung am Oszillographen über den Schallverstärker gemessen wurde. Beim Zerreißen des zweiten Garns, bei welchem 20-mal mehr Textilfäden zerrissen werden mußten, wurde eine 20–25-fach größere Strahlenbewegung als beim dünneren Garn beobachtet. Die erwähnte Proportionalität kann aus diesem Grunde zwischen bestimmten Grenzen vorausgesetzt werden.

Zur Untersuchung des Reißprozesses wollen wir die am Schirm des Oszillographen gemessenen Strahlenbewegungen, die den bei kleinen Belastungen eben noch auftretenden schwächsten Knallgeräuschen entsprechen, als Einheit wählen und die Größen der bei den höheren Belastungen entstehenden Verrückungen in dieser Einheit ausdrücken. Bezeichnen wir die Amplituden der am Schirm des Oszillographen erscheinenden Verrückungen mit A_1, A_2, A_3 , usw., und beträgt die Anzahl der Knallgeräusche mit Verrückung A_1 je Minute n_1 , die

der Knalle mit Verrückung $A_2 n_2$, die der Knalle mit Verrückung $A_3 n_3$, usw., so können wir als einen für den zerrissenen Faserquerschnitt charakteristischen Index die folgende Summe nehmen: $n_1 A_1 + n_2 A_2 + n_3 A_3 + \dots = \Sigma A$.

Betrag nämlich die Größe der dem am schwächsten hörbaren Knall entsprechenden Verrückung am Schirm des Oszillographen A_1 , so gibt das Verhältnis

$$\Sigma A : A_1 \quad (1)$$

an, wievielfach der in einer Minute zerrissene Faserquerschnitt den den Ausschlag A_1 bedingenden und als Einheit gewählten Faserquerschnitt übertrifft. Erfolgt der Riß in t Minuten, so gibt der Ausdruck

$$t \frac{\Sigma A}{A_1} \quad (2)$$

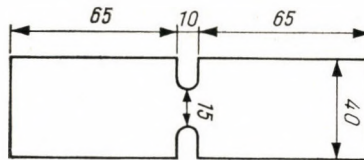


Abb. 4

an, wievielfach der zerrissene Faserquerschnitt des ganzen Leders den als Einheit gewählten Faserquerschnitt übertrifft.

Ist der Wert von ΣA veränderlich, so muß an Stelle des Produktes $t \cdot \Sigma A$ das Integral $\int_0^t \Sigma A$ und an Stelle des Ausdrucks (2) der Ausdruck

$$\frac{\int_0^t \Sigma A}{A_1} \quad (3)$$

gesetzt werden.

Es empfiehlt sich, die Verstärkung des Oszillographen derart einzuregeln, daß die bei den geringen Belastungen noch gerade wahrnehmbaren Faserrisse am Schirm des Oszillographen eine Verrückung von etwa 1 mm bedingen. In diesem Falle ist $A_1 = 1$ mm.

Die Messung von ΣA erfolgte in der Weise, daß nach Einstellung der Belastung die Anzahl der mit einem Kopfhörer hörbaren Knalle je Minute mit einer Stopperuhr verfolgt wurde, und gleichzeitig wurden auch die am Oszillographen verursachten Verrückungen beobachtet. Die Lichtsignale des Oszillographen werden an Stelle des auseinandergezogenen Zustandes mit Vorteil in stehendem Zustand gemessen.

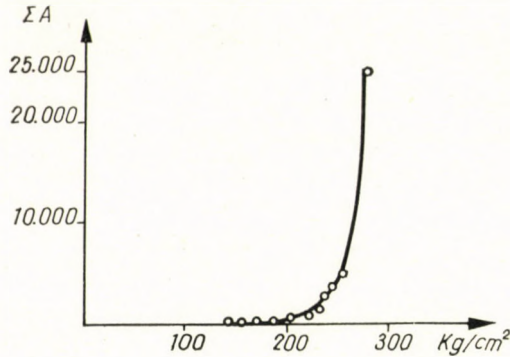


Abb. 5. Zusammenhang zwischen der Belastung und dem je Minute zerrissenen Faserquerschnitt

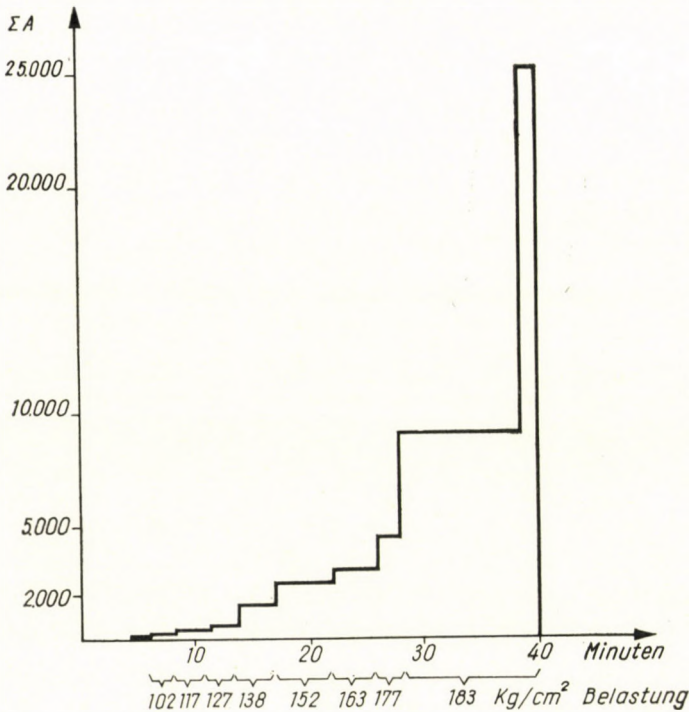


Abb. 6. Darstellung des je Minute zerrissenen Faserquerschnittes in Abhängigkeit von der Zeit

Um mit dem Reißquerschnitt den Querschnitt des Prüfkörpers je enger anzunähern, wurde an Stelle der üblichen 8-er Förmlinge ein Prüfkörper nach Abb. 4 verwendet, bei dem der Reiß stets an der meist verjüngten Stelle erfolgt, wobei an den übrigen Stellen des Prüfkörpers kaum 40% der auf den verjüngten Querschnitt entfallenden Zugspannung auftritt.

Zur Messung der Werte von ΣA wurden die Vorversuche mit einem Oszillographen vom Typ SP 20981 durchgeführt. Auf Grund dieser Versuche

wurde der Zusammenhang zwischen den Werten von ΣA und den Belastungen bei den kalt geschmierten Treibriemencroupen in Tabelle I angeführt bzw. in Abb. 5 dargestellt. Wie aus der Figur ersichtlich, steigt die Kurve bei Annäherung der Reißfestigkeit äußerst steil an. In Tabelle II und Abb. 6 werden die

Tabelle I

Ermüdung eines kalt geschmierten Treibriemens mit einem Querschnitt von 0,75 cm²

Dauerbelastung		Knallgeräusche		$n \cdot A = \Sigma A$	$m \cdot \Sigma A$	Berechnete Reißzeit in Minuten $t = \frac{1,3 \cdot 10^5}{\Sigma A}$	log t.
durch Minuten m	durchschnitt- liche Anzahl je Minute n	durch- schnittlicher Ausschlag am Oszillo- graphen in mm A					
135	2	4	1 (A ₁)	4	8	33 000	4,52
150	2	6	2	12	24	11 000	4,05
170	2	11	4	44	88	3 000	3,47
185	2	18	3	54	108	2 400	3,38
200	3	35	4	140	420	930	2,97
210	3	52	5	260	780	500	2,70
220	3	160	7	1 120	3 360	116	2,06
230	3	150	12	1 800	5 400	73	1,86
240	4	180	11	2 000	8 000	65	1,81
250	4	170	18	3 050	12 200	43	1,52
260	10	180	28	5 000	50 000	26	1,41
260	2	200	40	8 000	16 000	16	1,21
270	1	500	50	25 000	25 000	5	0,70
Zusammen:	41	—	—	—	1,3 · 10 ⁵	—	—

Werte von ΣA in Abhängigkeit von der Zeit bei verschiedenen (statischen) Dauerbelastungen eines kalt geschmierten Treibriemencroupens mit einem Querschnitt von 0,75 cm² dargestellt. Durch Integration der Werte von ΣA wird der gesamte zerrissene Faserquerschnitt in Werten des als Einheit gewählten Faserquerschnittes erhalten. Als die Reißdauer noch mehr verlängert wurde (siehe Tab. III und Abb. 7), konnten wir beobachten, daß sich die Werte von ΣA mit der Zeit verringerten, wobei nicht nur die Häufigkeit der Knallgeräusche, doch auch ihre Intensität abnahm. Diese Erscheinung kann darauf zurückgeführt werden, daß sich während der Ermüdung Faserbelastungen ausbilden können, bei denen infolge der gleichmäßigeren Beanspruchung der Fasern weniger Faserbündel bis zur Bruchdehnung belastet sind. Diese Erscheinung hängt auch mit der Relaxation zusammen. In den dem Reiß des Leders unmittelbar vorangehenden Minuten wurden derartige der Relaxation ähnliche Erschei-

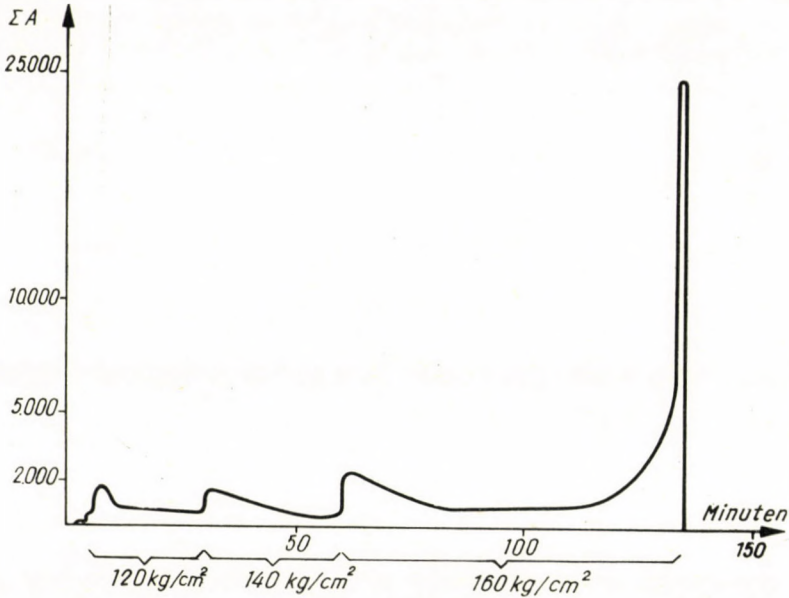


Abb. 7

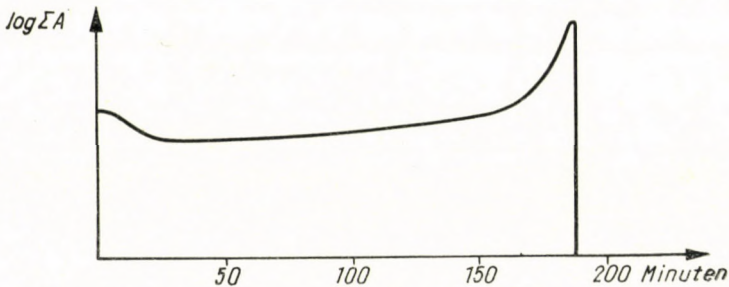


Abb. 8. Logarithmus des je Minute zerrissenen Faserquerschnittes in Abhängigkeit von der Zeit, bei einer Belastung von 215 kg/cm²

nungen nicht mehr beobachtet, vielmehr nahm die Intensität und auch die Häufigkeit der Knallgeräusche stufenweise zu, wie es aus den Tabellen III und IV sowie aus den letzten Abschnitten der Abb. 7 und 8 ersichtlich ist.

Bei dynamischer Ermüdung kommt die Abnahme der Geschwindigkeit der Faserrisse seltener vor, da die schwankende Belastung dem Ermüdungsvorgang über den Stillstand der Risse hinweghilft. Hierauf dürfte teilweise auch der Umstand zurückgeführt werden, daß bei der dynamischen Ermüdung die Dauerlinie des Leders steiler verläuft.

Auf Grund der mit einem Oszillographen vom Typ 20981 durchgeführten Messungen führte in Tab. I die Summierung der Werte von $m \cdot \Sigma A$, auf einen Lederquerschnitt von 1 cm² bezogen, zu einem Ergebnis von der Größenordnung

Tabelle II

Ermüdung eines kalt geschmierten Treibriemens mit einem Querschnitt von $0,75 \text{ cm}^2$

Dauerermüdung		Knallgeräusche		$n \cdot A = \Sigma A$	$m \cdot \Sigma A$	Berechnete Reißzeit in Minuten $t = \frac{1,65 \cdot 10^5}{\Sigma A}$	log t.
kg/cm ²	durch Minuten m	durch- schnittliche Anzahl je Minute n	durch- schnittlicher Ausschlag am Oszillo- graphen in mm A				
75	1	3	1	3	3	55 000	4,44
82	2	12	2	24	48	6 900	3,84
92	3	20	5	100	300	1 650	3,21
102	2	30	7	210	400	790	2,90
117	3	60	5	300	900	550	2,74
127	3	70	7	490	1 500	340	2,52
138	3	120	12	1 440	4 300	120	2,15
152	5	170	15	2 550	12 800	65	1,81
163	4	180	17	3 060	12 200	54	1,73
173	2	200	22	4 400	8 800	37	1,57
183	11	300	30	9 000	100 000	19	1,28
183	1	400	60	24 000	24 000	—	—
Zusammen:	40	—	—	—	$1,65 \cdot 10^5$	—	—

von $1,7 \cdot 10^5$. Bei verschiedenen Treibriemen wurde der Wert dieser Summe von der Größenordnung von $1,3 - 2,7 \cdot 10^5$ gefunden. Aus Abb. 6 geht hervor, daß bei einer nur wenige Minuten andauernden geringen Belastung der zerrissene Faserquerschnitt nur einen vernachlässigbaren Anteil des gesamten Lederquerschnittes ausmacht. Die Prüfung bei diesen geringen Belastungen kann somit berechtigt als zerstörungsfrei bezeichnet werden.

Bei der Fortsetzung unserer Versuche wurde ein Oszillograph vom Typ Orion AF 9916 verwendet, bei dem die Strahlenbewegung mit Hilfe eines Photo Recorders photographiert werden kann. Die Größe und Häufigkeit der Strahlenbewegung kann mit Hilfe dieses Apparates viel genauer gemessen werden. Die Empfindlichkeit der Vorrichtung kann dadurch weiter erhöht werden, daß das Mikrophon über einen Resonator mit der Lederprobe in Kontakt gebracht wird. Mit dieser Anordnung erhöhte sich der Wert der Formel (3) bereits auf einen Wert von der Größenordnung $6 \cdot 10^5$.

Nach MICHALOV [4] sollen die Durchmesser der Faserbündel des Kollagens 30—130 Mikron, die der einzelnen Fasern 7—10 Mikron betragen. Nehmen wir noch in Betracht, daß infolge der Porosität der zerrissene Faserquerschnitt nur etwa 50% des Lederquerschnittes ausmacht, so beträgt die Anzahl der

Tabelle III

Ermüdung eines kalt geschmierten Treibriemens mit einem Querschnitt von 0,75 cm²

Dauerbelastung		Knallgeräusche		n · A = ΣA	m · ΣA
kg/cm ²	durch Minuten	durch- schnittliche Anzahl je Minute	durch- schnittlicher Ausschlag am Oszillo- graphen in mm A		
	m	n			
85	2	10	1	2	20
100	3	60	7	420	1 300
120	3	200	8	1 600	4 800
120	2	160	6	960	1 900
120	2	140	5	700	1 400
120	10	120	4	480	4 800
120	8	100	3	300	2 400
140	3	200	7	1 400	4 200
140	3	180	7	1 250	3 800
140	2	170	7	1 190	2 380
140	5	160	6	960	4 800
140	5	140	5	700	3 500
140	12	100	5	500	6 000
160	5	200	11	2 200	11 000
160	5	200	10	2 000	10 000
160	5	170	9	1 520	7 600
160	5	150	6	900	4 500
160	30	140	5	700	21 000
160	10	170	8	1 520	15 200
160	3	200	10	2 000	6 000
160	4	250	15	3 750	15 000
160	3	300	15	4 500	13 500
160	3	350	20	7 000	21 000
160	1	400	50	20 000	20 000
Zusammen:	134	—	—	—	1,86 · 10 ⁵

Tabelle IV

Ermüdung eines kalt geschmierten Treibriemens mit einem Querschnitt von 0,90 cm²

Dauerbelastung		Knallgeräusche		n · A = ΣA	m · ΣA	log ΣA
kg/cm ²	durch Minuten	durch- schnittliche Anzahl je Minute	durch- schnittlicher Ausschlag am Oszillographen			
	m	n	in mm A			
215	10	150	6	900	9 000	2,96
215	10	120	3	360	3 600	2,55
215	40	60	4	240	9 600	2,38
215	60	120	4	480	29 000	2,68
215	50	150	4	600	90 000	2,78
215	10	200	10	2 000	20 000	3,30
215	6	300	30	9 000	54 000	3,95
215	1			50 000	50 000	4,00
Zusammen:	187				2,05 · 10 ⁵	

Faserbündel in dem scheinbaren Querschnitt des Leders von 1 cm²

$$\frac{0,5 \cdot 4}{0,013^2 \cdot \pi} = 3800 \quad \text{und} \quad \frac{0,5 \cdot 4}{0,003^2 \cdot \pi} = 70000.$$

Die Anzahl der einzelnen Fasern beträgt laut ähnlicher Rechnungen 640 000 — 1 300 000. Bei unseren Versuchen wurden für die verschiedenen Leder Zahlenwerte zwischen diesen Grenzen gefunden (siehe Tab).

Aus diesen Berechnungen können wir darauf schließen, daß bei der langsamen Ermüdung des Leders stufenweise Faserquerschnitte nacheinander zerreißen, die geringer als die der Faserbündel sind und die die Querschnitte der einzelnen Fasern annähern. Zwischen der Zugbeanspruchung und der Ermüdung des Leders besteht somit der Unterschied, daß bei der Bestimmung der Zugfestigkeit Aggregate der Faserbündel zerreißen, wobei die Knalle an der Anzahl verhältnismäßig gering, doch starker Intensität sind; die Häufigkeit der Knalle nimmt rasch zu, und der volle Querschnitt des Leders zerreißt gleichsam detonationsartig während einiger Sekunden. Demgegenüber zerreißt bei der Ermüdung des Leders die einzelnen Fasern, wobei die Knalle zwar hoch an der Anzahl, doch von geringer Intensität sind. Es ist für die Ermüdung kennzeichnend, daß die Fasern mit einer nahezu konstanten Geschwindigkeit zerreißen. Der Reißprozess kann somit mit der Fläche eines sich entlang der Ordinate erstreckenden, während die Ermüdung mit der Fläche eines sich entlang der Abszisse erstreckenden äußerst schmalen Streifens charakterisiert werden.

Die Zerreißzeit (t) kann für jede Belastung auf Grund der folgenden Formel berechnet werden:

$$\frac{\int_0^t \Sigma A : A_1}{\Sigma A : A_1} = \frac{\int_0^t \Sigma A}{\Sigma A} \sim t.$$

Wird nämlich von dem durch die Relaxation bedingten Nachlassen der Knalle sowie den dem Riß unmittelbar vorangehenden stärkeren Knallen abgesehen, und werden die Faserrisse über die volle Ermüdungsdauer als gleichmäßig verteilt vorausgesetzt, so wird der Quotient aus dem zerrissenen gesamten Faserquerschnitt (siehe Formel 3) und dem auf eine Minute entfallenden durch-

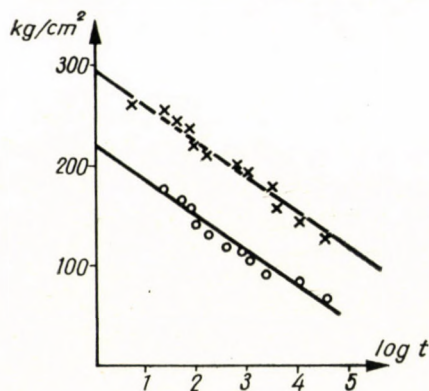


Abb. 9

schnittlichen Faserquerschnitt (siehe Formel 1) die Reißzeit in Minuten ergeben. Die Logarithmen der derart berechneten Reißzeiten und die Belastungen stehen miteinander in einer linearen Beziehung. In Abb. 9 wurden die Dauerlinien der in den Tabellen I und II angeführten Leder dargestellt. Unsere frühere Beobachtung, daß die Logarithmen der Dauerbelastungen und die der Reißzeiten auf einer Geraden liegen — die wir als Dauerlinie bezeichneten — erhielt hierdurch von einer anderen Seite ihre theoretische Bestätigung.

Unsere Apparatur dürfte zur Zeit zu Routinetesten noch nicht genügend geeignet sein, wir hoffen aber, daß mit der Vervollkommnung der Apparatur auch die akustische Methode der Qualitätsprüfung der Leder gute Dienste leisten wird, wie auch der Elektrokardiograph zur Zeit eine unentbehrliche Hilfe der inneren Medizin bei der Aufstellung der Diagnosen leistet.

Der Ungarischen Akademie der Wissenschaften sei unser Dank auch auf diesem Wege für die Oszillographen ausgesprochen, die sie durch ihren Instrumentenanleihdienst zu unserer Verfügung stellte. Auch danken wir unserem Kollegen József ELTER für seine wirksame Hilfe bei der Aufnahme der Photographien. Schließlich wollen wir noch erwähnen, daß unser Kollege

János ZILLES im Laufe unserer Versuche zu unserer Kenntnis brachte, daß er es bereits im Jahre 1953 vorschlug, einen Apparat zu konstruieren, mit Hilfe dessen eine Beziehung zwischen der Farbe der beim Zerreißen des Leders entstehenden Töne und der Qualität des Leders ermittelt werden kann. Obschon sein Vorschlag nicht verwirklicht wurde, trugen doch seine Ideen auch zu den Ergebnissen unserer Arbeit fruchtbar bei.

SCHRIFTTUM

1. TÓTH, G., WAIGAND, F.: A M. Tud. Akad. Műsz. Tudományok Oszt. Közleményei Band XXII., S. 107. — Acta Technica Ac. Sc. Hung. Band XXI., S. 197.
2. TÓTH, G.: Bőr és Cipőtechnika, 1959., S. 50.
3. Auf Grund der Nomenklatur nach MNOSZ 3391—51 und 3392—54.
4. MIHAJLOV, A.: A bőrgyártás fiziko-kémiai alapjai. Bp. 1951., S. 61.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Reißprozeß des Leders wurde von den Autoren bei einer 10 000-fachen Schallverstärkung studiert. Die Faserisse können mit einem Kopfhörer gut wahrgenommen werden; die Knalle können auf ein Magnettonband aufgenommen oder mit Hilfe eines Oszillographen auch fotografiert werden (siehe Fig. 2 und 3). Auf Grund der Photographien können die Größen der zerrissenen Faserquerschnitte miteinander verglichen werden. Der je Minute zerrissene Faserquerschnitt nimmt mit zunehmender Belastung in hohem Maße zu (siehe Fig. 4 und 5). Bei auf lange Zeitdauer erstreckten Ermüdungsprozessen kann eine der Relaxation ähnliche Erscheinung beobachtet werden. Zwischen den Logarithmen der Reißzeiten und den Belastungen besteht eine lineare Beziehung. Auf Grund der Versuchsergebnisse besteht zwischen der Ermüdung und Zugbeanspruchung ein Unterschied, indem im Laufe der Ermüdung nacheinander Querschnitte zerreißen, die geringer als die Faserbündel sind, während bei der Bestimmung der Zerreißezeit Aggregate der Faserbündel mit einer zunehmenden Geschwindigkeit zerreißen.

ACOUSTIC TESTS FOR STUDYING HIDE FIBRE TEARING

G. TÓTH and J. ÖRKÉNYI

SUMMARY

The authors have investigated the tearing process of hides, using a 10 000-fold sound amplification. Hide fibre tears can be well heard by means of earphones; the cracks might either be recorded on tape or else might be photographed with the help of an oscillograph (Figs. 2—3). The photos permit to compare the fibre cross sections having been torn per minute. With growing loads the fibre cross section torn per minute will increase considerably (Figs. 4—5). In the case of a prolonged fatigue process relaxation-like phenomena are observed. There is a linear relation between the loads and the logarithms of the tearing time. On the basis of the experiments it has been established that the difference between tearing and fatigue consists of the following: during fatiguing the cross sections being torn subsequently are smaller in size than the fibre bundles, whereas in the case of tensile strength determination groups of fibre bundles are torn at an increasing speed.

ÉTUDE DE LA RUPTURE DES FIBRES DE CUIR AU MOYEN D'EXAMENS
ACOUSTIQUES

G. TÓTH et J. ÖRKÉNYI

RÉSUMÉ

Les auteurs ont examiné le processus du déchirement du cuir au moyen d'une amplification de 10 000 du son. Les ruptures des fibres peuvent être bien entendues au moyen d'un écouteur, les crépitements peuvent être enregistrés sur le ruban du magnétophone ou bien photographiés au moyen d'un oscillographe (Fig. 2 et 3). Sur la base des photos, on peut comparer la grandeur des sections des fibres rompues par minutes. La section des fibres rompues en une minute s'accroît très rapidement lorsque la charge augmente (Fig. 4 et 5).

Avec les essais de fatigue de longue haleine, on peut observer des phénomènes semblables à la relaxation. Il y a une relation directe entre les logarithmes des temps de rupture et les charges. Sur la base des essais, on a constaté que la différence entre la fatigue et la rupture consiste en ce que durant l'essai de fatigue, de petites sections sont rompues successivement dans les faisceaux de fibres, tandis que durant la détermination de la résistance à la rupture, es ensembles de faisceaux de fibres se rompent avec une vitesse accélérée.

ИЗУЧЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИМИ ИССЛЕДОВАНИЯМИ РАЗРЫВА ВОЛОКОН КОЖИ

Г. ТОТ и Я. ЭРКЕНЬИ

РЕЗЮМЕ

Авторы изучали процесс разрыва кожи при условиях 10 000 кратного усиления звука. Разрыв волокон можно хорошо прослушивать при помощи наушников; трески можно записывать на магнитофонную ленту, или же они могут быть сфотографированы при помощи осциллятора (рис. 2—3). На основе снимков возможно сравнить величину площадей поперечного сечения волокон, разорвавшихся за минуту. Площадь поперечного сечения волокон, разорвавшихся за минуту, при возрастающей нагрузке растет очень быстро (рис. 4—5). В случае процесса испытания на усталость, растянутого на длительное время, наблюдается явление, схожее с релаксацией. Между значениями времени разрыва и значениями нагрузки существует прямая зависимость. На основе опытных данных между испытанием на усталость и разрывом существует то отличие, что при процессе испытания на усталость разрываются друг за другом меньшие сечения пучков волокон, в то же время при определении сопротивления разрыву с возрастающей скоростью разрываются множества пучков волокон.

KONJUGIERTE ZAHNPROFILPAARE

L. SZENICZEI †

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 7. Juli 1959]

Im Laufe der Entwicklung der Technik kommt es gleichsam alltäglich vor, daß erfinderische Konstrukteure, aber noch öfters findige Technologen, neue Ideen verwirklichen und neue Verfahren einführen, die durch die Praxis zwar bestätigt werden, deren theoretische Begründung jedoch noch aussteht. In solchen Fällen, und insbesondere, wenn der neuen Methode eine hohe wirtschaftliche Bedeutung zukommt, werden in der Regel neue Theorien geschaffen oder aber die alten mit einer neuen Deutung ergänzt. Es kommt aber auch vor — und leider nicht einmal so selten —, daß die Theorie die neuen Ergebnisse der Praxis nicht zur Kenntnis nimmt und sie in die eigenen Rahmen einzu-fügen sich nicht bemüht. Insbesondere tritt der letztere Fall ein, wenn die vorherrschende Theorie ein »geschlossenes System« bildet, das nur schwer auf-gespaltet werden kann.

Die Geometrie der Verzahnungstheorie stellt ein typisches Beispiel eines solchen Systems dar, das das Ergebnis einer Entwicklung von etwa zweieinhalb Jahrhunderten darstellt. Während dieser langen Zeitspanne wurde sie selbstredend außerordentlich verfeinert und ist aus diesem Grunde auch ein wenig starr geworden. Es bildete sich eine gewisse skolastische Behandlungsart aus, von welcher abzuweichen eine immer schwierigere Aufgabe ist, da die alten vollkommenen Formen stets eine große Gebundenheit bedeuten, insbesondere im Bereich des technischen Unterrichts. Es seien im folgenden die Gründe dieser Gebundenheiten analysiert.

Die theoretischen Grundlagen der Verzahnungsgeometrie wurden von dem französischen Astronomen DE LA HIRE [1] am Ende des 17. Jahrhunderts niedergelegt. Auf dieser Grundlage wurde von einer langen Reihe der Wissen-schaftlern eine wunderbare Theorie ausgebaut, die etwa bis zum ersten Welt-krieg, das heißt zwei Jahrhunderte hindurch immer mehr entwickelt wurde, wobei jedoch ihre bereits bewiesenen Sätze unberührt blieben, da doch während dieser zwei Jahrhunderte der Begriff »Zahnrad« ausschließlich das zylindrische Rad bedeutete. Den Kegel- und Schneckenrädern kam dabei eine völlig untergeordnete Rolle zu, und so war es ganz natürlich, daß die Theorie ganz auf den Leib der zylindrischen Räder zugeschnitten wurde. Es wurde nachgewiesen,

daß die vollkommenste Profilkurve durch die Evolvente dargestellt wird, und als Pfand hierfür wurde das geradlinige Grundprofil betrachtet.* In den Lehrbüchern um die Wende des Jahrhunderts — so z. B. bei HERRMANN [2] und BACH [3] — wurde sogar bei den Kegel- und Schneckenrädern als Grundprofil die Evolvente aufgefunden und nachgewiesen. Dies stellt jedoch lediglich eine Eigenschaft der zylindrischen Getriebe mit parallelen Achsen dar, da bei diesen sowohl das Satzräderproblem wie auch das geradkantige Abwälzwerkzeug mit Hilfe des Grundprofils der Evolvente gelöst werden konnte. Aber eben aus diesem Grunde ist es überflüssig bei Getrieben, bei denen der Bedarf nach Satzrädern garnicht auftreten kann, das heißt bei den Getrieben mit sich schneidenden oder kreuzenden Achsen. Vor den Fachleuten der Praxis ist es bereits seit langem bekannt, daß das Zahnprofil der *nicht* parallelachsigen Getrieberäder nie eine Evolvente darstellt, nicht einmal, wenn sie mit Hilfe des Abwälzverfahrens hergestellt werden.

Als Grundlage zur Theorie der geradverzahnten Kegelräder dient heute bereits das »ideale« Planrad, dessen Teilkegelwinkel 90° beträgt und bei denen die Profilflächen der Zähne — aus technologischen Gründen — Ebenen darstellen. Die Profilflächen der Planräder bei Kegelgetrieben mit einem theoretisch möglichen Kugelevolventenprofil stellen nämlich gekrümmte Inflexionsflächen dar, zu denen entsprechende zeitgemäße Abwälzwerkzeuge nicht hergestellt werden können.

Es wurde bereits am Anfang beobachtet, unter anderen auch von Dr. VIDÉKY [4], daß die Eingriffslinie der auf ein Planrad mit ebener Profilfläche abgewälzten Kegelräder keine ebene Kurve, vielmehr eine 8-förmige Raumkurve darstellt, die wegen ihrer Form als *Oktoid* benannt wurde. Es wurde auch nachgewiesen, daß das Profil der Kegelräder aus diesem Grunde keine Kugelevolvente darstellt. Heute bereits wird in den meisten Lehrbüchern die Oktoidverzahnung erwähnt, und zwar als die einzige, die nicht nach der Profilkurve, sondern nach der Eingriffslinie benannt wurde, wobei jedoch auch mitgeteilt wird, daß die »ganz unbedeutende« Abweichung von der Kugelevolvente in der Praxis vernachlässigt werden kann. Dies trifft auch zu, die Geometrie der Kegelräder wurde aber dennoch durch die TREGOLDSche Transformation [5] für die Theorie auf das Gebiet der Geometrie der zylindrischen Getriebe hinübergerettet. Es bedurfte lediglich der Einführung einiger neuer Begriffe (Ergänzungskegel, Ergänzungszähnezahl, mittlere Module, usw.), und mit Hilfe dieser Begriffe konnten die Kegelgetriebe in der gleichen Weise wie die zylindrischen behandelt werden, wobei den beiden auch eine gemeinschaftliche Geometrie zukam. Es sei betont, daß diese Transformation für die Praxis vollkommen

* Unter Grundprofil wird entsprechend der internationalen Konvention stets das *Zahnstangenprofil ohne Kopfspiel* verstanden, ob nun die Konturen der Profile symmetrisch oder asymmetrisch, geradlinig oder krumm sind, also auch jene, mit denen Satzräder *nicht* angefertigt werden können.

richtig und berechtigt war, die Entwicklung der Theorie wurde jedoch durch sie in hohem Maße gehemmt. Die allgemeine Gültigkeit der auf die zylindrischen Räder zugeschnittenen Theorie blieb dabei, samt der Evolventenzahnkurve und dem Grundprofil, erhalten.

Durch das Erscheinen der bogenverzahnten Kegelradgetriebe in den Zwanzigerjahren und insbesondere durch die Verbreitung der europäischen Systeme mit konstanter Zahnhöhe wurden die Grundlagen dieser Betrachtungsweise stark erschüttert, da doch das Grundprofil an den Zahnrädern dieser Getriebe nicht mehr aufzufinden war. Die Form des am Umfang dieser Räder erscheinenden Stirnprofils stellt nämlich eine Funktion des Schrägungswinkels dar und ist somit als Grundprofil ungeeignet, wobei das Normalprofil — insbesondere bei den mit Messerkopf abgewälzten Rädern — nicht definiert werden konnte. Die bogenverzahnten Getriebe besitzen aus diesem Grunde kein Grundprofil mehr (mit Ausnahme des KLINGELNBERGSchen Systems), und als einzige Grundlage der Theorie blieb das Planrad. Das Ausfallen des Grundprofils bei den Kegelrädern fällt deshalb nicht auf, weil es keine Kegelsatzräder gibt.

Die Hypoidgetriebe mit sich kreuzenden Achsen wurden *trotz* aller Theorie von den Technologen entwickelt. Bei den schrägverzahnten Hypoiden konnte der Begriff des Planrades noch beibehalten werden, obschon jedes Rad des Getriebes ein anderes Planrad besitzt; aber die bogenverzahnten Hypoidräder, wie es von WILDHABER [6] nachgewiesen wurde, besitzen keine Planräder mehr, vielmehr kommt ihnen eine außerordentlich schwer zu deutende Schraubenfläche zu, die von ihm als »Platoid« bezeichnet wurde. Bei den Hypoidgetrieben fehlt somit auch das das Grundprofil ersetzende Planrad, obwohl die einzelnen Räder des Getriebes — aus technologischen Gründen — noch je ein Planrad besitzen. Eben aus diesem Grunde wurde in der Theorie der alte Satz noch weiter beibehalten: »Das Abwälzwerkzeug verkörpert einen Zahn des Planrades und ist ihm gleichwertig.«

In den Dreißigerjahren wurde von der Fabrik Gleason die »Formate« Verzahnung entwickelt, die sowohl bei den klassischen wie auch bei den hypoiden Kegelradgetrieben verwendet werden konnte. Dies war in der Tat eine revolutionäre Neuerung, da in der Technologie der Formateverzahnung die Planräder nicht mehr verwendet werden. Das Tellerrad wird nicht mehr abgewälzt, sondern ausgeräumt, das Ritzel wird aber auch bei dieser Methode mit Hilfe des Abwälzverfahrens hergestellt. Das Abwälzwerkzeug jedoch ist nicht mehr das Planrad, es »verkörpert« vielmehr die Zähne des Tellerrades. Sie wird aus diesem Grund auch als »halbabgewälzte« Verzahnung bezeichnet. Im System Formate kommt es aber darüber hinaus auch mit der Evolvente zum offenen Bruch, da die »Profilkurven« der Zähne des Tellerrades *gerade* Linien darstellen. So ist das Profil des Ritzels auch keine Evolvente mehr, es weist vielmehr eine »geringe Abweichung« von der Evolvente auf. Wenn wir noch erwäh-

nen, daß die Formate-Verzahnung mit dem Oktoid nicht einmal dann in irgendwelche Beziehung gebracht werden kann, wenn es sich um kein Hypoidgetriebe handelt, so müssen wir einsehen, daß die klassische Behandlungsweise in eine Sackgasse geriet. Die Evolvente, das Grundprofil und das Planrad stellen keine allgemeingültigen Begriffe mehr dar.

Die allgemeine Lösung der Verzahnungstheorie liegt für die zylindrischen Getriebe im Evolventenprofil, für die übrigen Typen aber in den *konjugierten Profilen* vor, worauf im nachstehenden ausführlich eingegangen werden soll.

Es dürfte interessant sein, daß, wenn wir die Forderung nach den Satzrädern aufgeben, die konjugierten Profile auch von den bekannten Sätzen der Verzahnungstheorie abgeleitet werden können, ein Zeichen dafür, daß die Grundlagen der Theorie richtig sind, wenn nur offen eingestanden wird, daß sich die Gültigkeit der bisher verallgemeinerten Sätze auf die zylindrischen Getriebe beschränkt.

Den dritten Satz des Lehrganges der nunmehr klassisch verstarreten Verzahnungstheorie stellt der Satz von REULEAUX dar, nach dem die Eingriffslinie in Kenntnis des Teilkreises und der Profilkurve auf Grund des Satzes der Zahnnormalen konstruiert werden kann. Diese Konstruktion wird auch in den meisten Lehrbüchern vorgeführt, wobei in der Regel auch hinzugefügt wird, daß die Profilkurve »beliebig« gewählt werden kann.

Hier aber stellt sich im Lehrgange ein Knick ein! Die REULEAUXsche Konstruktion wird nämlich im weiteren zu nichts verwendet, vielmehr wird nach dem Aufwerfen des Problems der Satzräder als die »zweckmäßigste Art« der zentralsymmetrischen Angriffslinie die schräge Gerade, die Evolvente und das Grundprofil eingeführt.

Im nachstehenden wollen wir diese Begriffe nicht einführen, vielmehr wollen wir die REULEAUXsche Konstruktion verwenden und den ursprünglichen Gedankengang ungebrochen weiterführen.

Zunächst wollen wir die erste Hälfte der REULEAUXschen Konstruktion einer näheren Untersuchung unterziehen. Die Regel sagt aus, daß die Eingriffslinie in Kenntnis des Teilkreises und bei Aufnahme eines beliebigen Profils (s. Abb. 1) konstruiert werden kann. Dieses beliebige Profil muß aber eine stetige Kurve von der Art darstellen, daß der Teilkreis von der in einem beliebigen Punkte errichteten Normalen geschnitten wird (s. Abb. 1b). Im Sinne des Satzes der Zahnnormalen kann sich jedoch ein beliebiger Punkt P_1 des Profils nur dann im Eingriff befinden, wenn die im Punkte P_1 errichtete Normale durch den Wälzpunkt F geht. Aus diesem Grunde muß das Dreieck $P_1N_1O_1$ (s. Abb. 1c) soweit um den Punkt O_1 als Mittelpunkt des Rades verdreht werden, bis der Punkt N_1 in den Wälzpunkt F zu liegen kommt. In dieser Lage stellt der Punkt K_1 einen Punkt der Eingriffslinie dar. In Bezug auf den innerhalb des Teilkreises liegenden Punkt P_2 (s. Abb. 1d) ist dasselbe maßgebend, nur muß hier das Dreieck $P_2N_2O_1$ im entgegengesetzten Sinne verdreht werden.

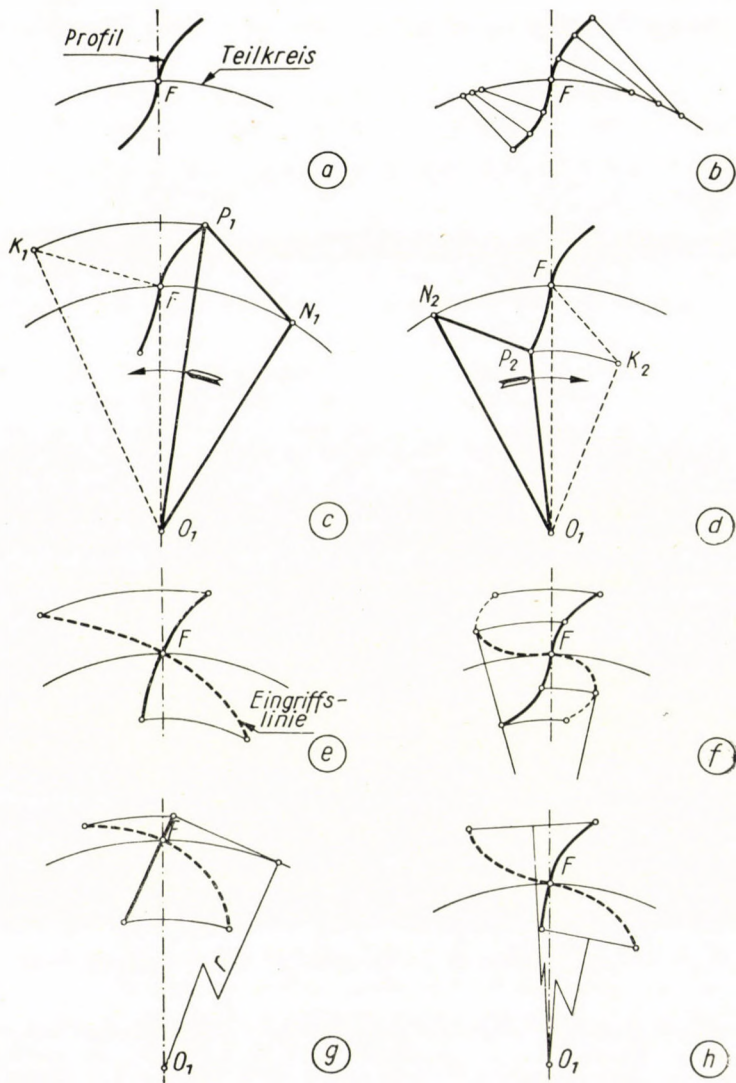


Abb. 1

Auf diese Weise erhalten wir den Berührungspunkt K_2 . Wird nun diese Konstruktion für einige weitere Punkte des aufgenommenen Profils durchgeführt, so können wir die Eingriffslinie genau konstruieren (s. Abb. 1e).

Wurde eine Profilkurve aufgenommen, deren Eingriffslinie an ihren Enden zurückbiegt (s. Abb. 1f), so kann die Eingriffslinie — und damit auch das Profil selbst — nur zwischen den Punkten verwendet werden, in welchen sie von den Teilkreisradien berührt wird. Die zurückbiegenden Äste können nicht mehr verwendet werden, da doch ein Radprofil in zwei Punkten gleichzeitig nicht eingreifen kann.

Das Profil kann auch eine Gerade darstellen (s. Abb. 1g), wobei aber zu beachten ist, daß die im äußersten Punkt errichtete Normale eine Tangente des Teilkreises darstellt.

Wenn sowohl das Profil wie auch die Endpunkte der Eingriffslinie (s. Abb. 1h) bekannt sind, so schneiden sich die Halbierungsnormale der die korrespondierenden Punkte verbindenden Geraden im Punkte O_1 , und der Teilkreisradius $O_1F = r_1$ kann somit bestimmt werden. Dies bedeutet, daß wenn von den drei Kurven zwei bekannt sind, und eine der beiden Kurven das Profil darstellt, die dritte Kurve durch Konstruktion ermittelt werden kann; das Profil kann jedoch aus der Eingriffslinie und dem Teilkreis nicht konstruiert werden, die REULEAUXsche Konstruktion kann somit nicht umgekehrt werden.

Diese Konstruktion weist zwei wichtige Eigenschaften auf, auf die in Ungarn Universitätsprofessor Dr. Imre Vörös [7] als Erster hinwies:

1. Durch ein Profil und einen Teilkreis ist eine einzige Eingriffslinie gegeben, die Konstruktion ist somit eindeutig;
2. bei der Bestimmung der Eingriffslinie bedarf es nicht des Gegenprofils.

In der Folge wollen wir nun die zweite Hälfte der REULEAUXschen Konstruktion untersuchen. Der Punkt P'_1 des dem Punkt P_1 des Profils entsprechenden Gegenprofils wird erhalten (s. Abb. 2a), wenn das Dreieck K_1O_2F um den Punkt O_2 um eine Bogenlänge FN'_1 verdreht wird, die gleich der Bogenlänge FN_1 ist, um die das Dreieck $P_1N_1O_1$ um den Punkt O_1 in der ersten Hälfte der Konstruktion verdreht wurde. Das heißt, die zwei Bogenlängen FN_1 und FN'_1 sind einander gleich. Wird nun diese Konstruktion für zahlreiche Punkte der Eingriffslinie durchgeführt, so kann das Gegenprofil genau konstruiert werden (s. Abb. 2b).

Wenn die Eingriffslinie von irgendeinem Kreise des Gegenrades zweimal geschnitten wird (s. Abb. 2c), so kann die Eingriffslinie — und damit auch das ursprünglich aufgenommene Profil selbst — nur bis zu dem Punkte verwendet werden, in dem sie von einem Kreise des Gegenrades eben berührt wird. Der Teil jenseits dieses Punktes kann nicht mehr verwendet werden, da doch kein Punkt des Profils zweimal nacheinander eingreifen kann. Dies kommt des öfteren bei geraden oder konkaven Profilen vor, bei konvexen Profilen jedoch seltener.

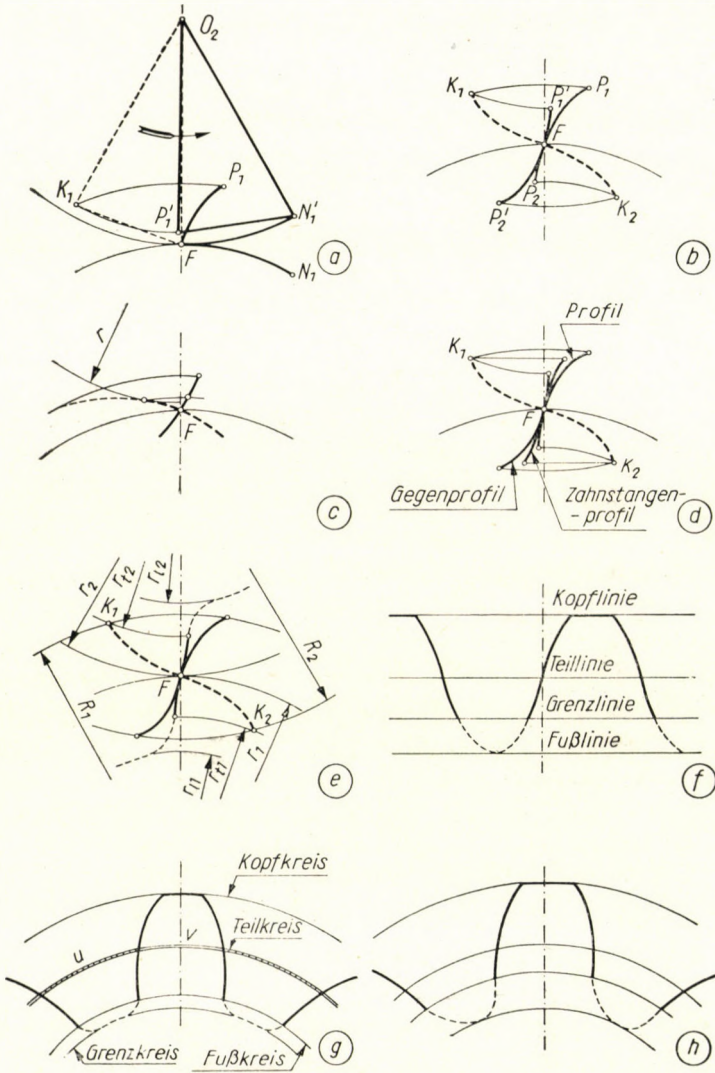


Abb. 2

Mit Hilfe dieser Konstruktion kann nicht nur das Gegenprofil, vielmehr auch das Zahnstangenprofil konstruiert werden, wobei dies als eine Folge der Konstruktion das gemeinsame Zahnstangenprofil der beiden Räder darstellt (s. Abb. 2d).

Auch aus dieser Konstruktion können wertvolle Schlüsse gezogen werden.

1. Die beiden Profile — die nunmehr als konjugierte Profile bezeichnet werden — reichen nie bis zu den Fußkreisen, sondern nur den Grenzkreisen herab (s. Abb. 2e), deren Radien durch die Punkte K_1 und K_2 , die Endpunkte der Eingriffslinie, bestimmt sind.

2. Durch die nämlichen Punkte werden auch die Radien der Kopfkreise bestimmt, woraus folgt, daß bei konjugierten Profilen der Kopfkreis des Rades und der Grenzkreis des Gegenrades* einander stets im Punkte K schneiden.

3. Dieser Satz gilt selbstredend auch dann, wenn die Anzahl der Zähne des Gegenrades unendlich ist, wenn es somit eine Zahnstange darstellt (s. Abb. 2f). Zwischen Fuß- und Grenzlinie der Zahnstange fehlt somit das Profil; dies kann mit Hilfe der REULAUXschen Konstruktion *nicht* bestimmt werden. Das gleiche gilt auch für das Rad und Gegenrad: zwischen dem Fußkreis und Grenzkreis fehlt das Radprofil. Das volle Grundprofil kann somit mit Hilfe der REULAUXschen Methode nicht bestimmt werden, woher die Aussage, daß die konjugierten Profile *kein* Grundprofil besitzen.

Es sei jedoch bemerkt, daß die Übergangskurve zwischen dem Grenzkreis und Fußkreis, die am Eingreifen nicht beteiligt ist, mit Hilfe der etwas modifizierten JUREK—BIROschen Zeichenmaschine konstruiert werden kann [8].

Der Umstand, daß die konjugierten Profile kein Grundprofil besitzen, stört uns aber nicht, da wir doch die Forderung nach Satzrädern bereits zu Beginn unserer Erörterungen fallen ließen.**

Nebenbei wollen wir hier bemerken, daß eine beliebige Verzahnung nur in dem Falle ein Grundprofil besitzen kann, wo das Grundprofil selbst zunächst aufgenommen und die Verzahnung hiervon abgeleitet wird.

Soll ein Getriebe mit konjugierten Profilen konstruiert werden, so muß die Teilung konstant gehalten werden, wobei jedoch die Zahndicke und die der Zahnlückenbreite nicht mehr gleich sein müssen (s. Abb. 2g), und auch die beiden gegenüberstehenden Profile müssen keine Spiegelbilder voneinander darstellen (s. Abb. 2h). Obschon dies für den ersten Augenblick als äußerst ungewöhnlich erscheint, sind die Verzahnungsfachleute sich dessen jedoch wohl bewußt, daß auch Kegelradgetriebe hergestellt zu werden pflegen, bei denen der rechte

* Der Grenzkreis stellt jenen Kreis dar, bis zu dem das Eingriffsprofil reicht und erzeugt werden kann. Der Radius des Grenzkreises übertrifft stets den des Fußkreises, auch bei Evolventenverzahnung mit Grundprofil. S.: SZENICZEI LAJOS: »Az általános fogazás« (Die allgemeine Verzahnung), Budapest, I. Auflage, 1941, S. 164; II. Auflage, 1955.

** Die Verzahnungsfachleute staunen oft darüber, daß ein Getriebe kein Grundprofil besitzt. Bei den seit lange her üblichen konjugierten Profilen — beim Abwälzen von Kettenrädern, Korb- und Vielkeilwellen — denkt hingegen niemand daran, ein Grundprofil zu suchen

und linke Profilwinkel einander nicht gleich sind. Selbstredend stellen die beiden Profile auch bei diesen Systemen keine Spiegelbilder zueinander dar.

Es darf dabei nicht vergessen werden, daß auch bei den Getrieben mit konjugierten Profilen die wichtige Regel der Verzahnung einzuhalten ist, daß der zur Eingriffsstrecke gehörende Eingriffsbogen größer als die Teilung, das heißt die Eingriffsdauer größer als 1 sein muß (s. Abb. 3).

Für den Fachmann ist selbstredend in erster Linie die Frage von Interesse, wie die konjugierten Profile, in Ermangelung des Grundprofils, konstruiert werden können. Wird nun das Profil des einen Rades als Werkzeugschneide ausgebildet, so wird diese mit dem wohlbekannten Abwälzverfahren am Gegen-

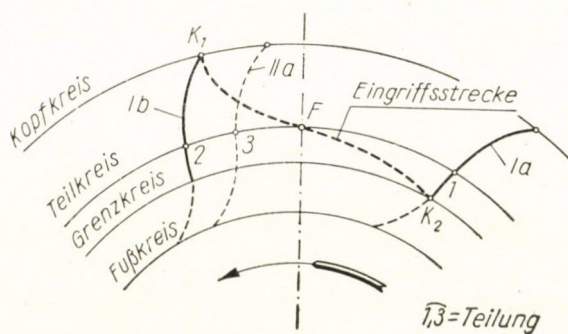


Abb. 3. I. a. Das Profil greift ein; I. b. dasselbe Profil tritt aus dem Eingriff aus; II. a. die Lage des Profils des vor dem Zahn I. liegenden Zahns II., als der nächste Zahn in Eingriff tritt; 1, 2 der Eingriffsbogen; 1, 3 die Teilung, die kleiner als der Eingriffsbogen sein muß

rad die notwendige volle Zahnücke selbst erzeugen, und zwar nicht nur das am Eingreifen beteiligte Profil, sondern auch die Übergangskurven zwischen dem Grenzkreis und Fußkreis des Gegenrades; genau so, wie die Übergangskurve unter dem Grenzkreis des Rades auch durch das genormte Fellows-Werkzeug erzeugt wird.

Wir wollen hier auch den wichtigen Umstand betonen, daß wenn die Form der Eingriffslinie den vorgeschriebenen Bedingungen genügt, das heißt, wenn die Eingriffslinie von keinem Radius des Rades (s. Abb. 1f) und keinem Kreis des Gegenrades zweimal geschnitten wird (s. Abb. 2c), so kann im Getriebe weder ein Unterschnitt noch eine Interferenz anderer Art entstehen, und das ungehinderte Abrollen ist unbedingt gesichert.

Offenbar wird vor jedem die Frage auftauchen, welcher Sinn überhaupt den konjugierten Profilen zukommt. Es bedarf doch zu beiden Rädern des Getriebes der Anfertigung von speziellen Abwälzwerkzeugen mit Konturen, die dem Profil des anderen Rades entsprechen. Dazu kommt noch, daß die Schnei-

den dieser besonderen Abwälzwerkzeuge krumme Linien darstellen, weshalb ihre Anfertigung einen hohen Aufwand an Arbeit erfordert und so äußerst kostspielig ist.

Dieses Bedenken ist unbedingt stichhaltig, insofern es sich um die Fabrikation einzelner Werkstücke handelt, doch im Falle einer Serienfabrikation liegt die Sache anders. Es möge nur daran erinnert werden, daß die konjugierten Profile in der Praxis bereits allgemeine Verwendung finden, insbesondere zum Abwälzen von Kettenrädern, Vielkeilwellen, manchmal aber auch von Klinkenrädern, Vielecken und anderen zu diesem Zweck geeigneten Formstücken, all dies selbstredend nur in Serienfabrikation. Dabei handelt es sich in der Regel darum, zu geraden Profilen Abwälzwerkzeuge zu verfertigen, die dem krummlinigen Gegenprofil entsprechen.*

Es tauchte noch nie der Gedanke auf, zylindrische Getriebe mit konjugierten Profilen herzustellen, wenn es sich um Serienfabrikation handelt und wenn die Forderung nach Satzrädern entfällt. Das ist aber durchaus nicht ausgeschlossen, und dürfte erforderlichenfalls sicherlich herangezogen werden. Im folgenden wollen wir diesen Versuch im Gedanken durchführen, um die Gleasonsche Formate-Verzahnung besser verstehen zu können.

Wir wollen uns vorstellen, daß zylindrische Getriebe mit großer Übersetzung in großer Menge erzeugt werden sollen. Bei der Arbeit mit dem klassischen Evolventenprofil müßten beide Räder abgewälzt werden, ein Verfahren, das bei dem großen Rad besonders viel Arbeit beansprucht. Die gleiche Lage liegt vor, wenn wir die Getriebe mit *beliebigen* krummlinigen konjugierten Profilen anfertigen wollten. Wird aber das Profil des großen Rades als eine schräge gerade Linie angenommen, wofür die Möglichkeit, wie wir es wissen (s. Abb. 1g), eben besteht, so können wir das große Rad schon ohne Abwälzung, durch Profilierung — durch Fräsen oder Räumen — anfertigen; beide Verfahren übertreffen vielfach die Abwälzung an Produktivität.

Den konjugierten Profilen kommt somit insbesondere dann eine hohe Bedeutung zu, wenn das Profil des großen Rades eine Gerade darstellt, und eine große Übersetzung vorliegt. Offenbar stellen die Schneiden des Profilierungswerkzeuges gerade Linien dar und können somit leicht verfertigt werden.**

Das Ritzel muß aber abgewälzt werden. Dazu muß ein geradlinig profiliertes Schneiderad mit einer Zähnezahl gleich der des großen Rades angefertigt werden, und dieses wird das Profil des Ritzels nach den Gesetzen der konjugierten Profile einwandfrei abwälzen. Wenn auch die üblichen Fellowschen

* Sehr interessante Ergebnisse erzielte auf diesem Gebiet bereits im Jahre 1936 der sowjetische Ingenieur SCHEWTSCHENKO [9], nur bestimmte er noch das »wirksame Zahnprofil«, da er den Begriff des Grundprofils in seinen Abhandlungen nicht ausgeschlossen hatte.

** Es sei hier bemerkt, daß wenn das Profil des großen Rades keine Gerade, sondern einen Kreisbogen darstellt, die Werkzeuge auch in diesem Falle leicht angefertigt werden können, da die Kreisbewegung leicht zu steuern ist.

Stoßmaschinen ein derart großes Werkzeug nicht ertragen, so sind jedoch die Planetary-Maschinen dieser Aufgabe bereits gewachsen.

All dies erscheint selbstredend ein wenig schwerfällig, doch stand es nicht in unserer Absicht, dieses Verfahren genau auszuarbeiten, vielmehr wollten wir am Beispiel der zylindrischen Getriebe lediglich demonstrieren, daß bei einem geradlinigen Profil des großen Rades *beide* Räder mit einem geradschneidigen Werkzeug hergestellt werden können, wobei nur das Ritzel, nicht aber das große Rad, abgewälzt werden muß. Es sei betont, daß diese Methode um so wirtschaftlicher, je größer die Übersetzung ist.

Die Formate-Verzahnungsmethode der Gleason Werke ist die gleiche, die hier beschrieben worden ist, nur wird sie für Kegelradgetriebe angewendet.

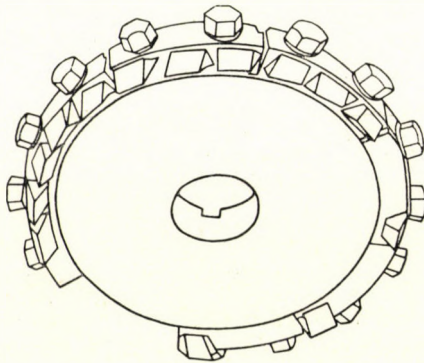


Abb. 4. Single-cycle-Messerkopf

Die Übersetzung der Ergänzungszähnezahlen ist auch so ziemlich groß (i^2), das Erübrigen der Abwälzung bedeutet somit eine bedeutende Ersparung.

Das große Rad wird mit einem besonderen *single-cycle* Messerkopf gefertigt (s. Abb. 4), an dessen Umfang mehrere geradschneidige Messer in Gruppen angebracht sind. Die Höhen und Verstellungen sind dabei unterschiedlich, gerade so wie die der Räumwerkzeuge. Die vorderen Messergruppen schneiden vor und schrappen, die anderen schlichten. Das letzte und erste Messer befinden sich in einem Abstände voneinander, bei dem die Maschine — während sich das Werkzeug in der Zwischenzeit weiter dreht — schnell auf den nächsten Zahn teilen kann. Der Messerkopf kann sich auf diese Weise mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit drehen. Seine Umdrehungszahl beträgt 7—12 je Minute, die Ausarbeitung einer Zahnücke wird somit während einer einzigen Messerkopfumdrehung in 5—8 Sekunden vollendet. Diese Zeitspanne beträgt in Abhängigkeit von der Übersetzung $1/3$ — $1/8$ der klassischen Abwälzzeit.

Auf einer normalen Gleason-Maschine werden die Kegelräder mit dem üblichen Messerkopf abgewälzt, und zwar nach der einseitigen Methode, das heißt mit einer Einstellung für die linke und mit einer weiteren Einstellung für

die rechte Profilfläche. Die Schneiden der Messer stellen Geraden dar, und aus diesem Grunde muß der Messerkopf nicht das Planrad, sondern das Tellerrad ersetzen. Wie bei den zylindrischen Getrieben nicht das Profil des Kammstahles, sondern das des Schneiderades geradlinig ist, so sind es auch hier nicht die Profile des Planrades, vielmehr die des Tellerrades, die Geraden darstellen, womit eine volle Analogie besteht.

Für den ersten Augenblick dürfte die Lösung des Problems als schwer erscheinen, wie der Messerkopf die Rolle des Tellerrades übernehmen kann. Dabei ist die Lösung äußerst einfach. Die relativen Lagen des abwälzenden Kegelrades und des Messerkopfes sind die gleichen, ob nun das Planrad oder das Tellerrad den Grund des Abwälzens darstellt; die einzige Änderung besteht

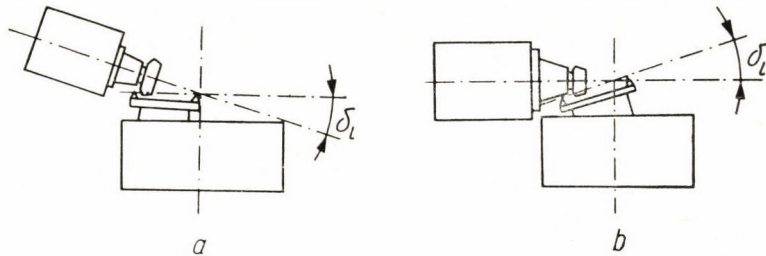


Abb. 5. Schema einer Unitool-Verzahnungsmaschine a. Abwälzen des Evolventenprofils, b. Formate-Profil am Ritzel

darin, daß in der kinematischen Kette des Abwälzens die Übersetzung beim Planrade z_p/z_1 , beim Tellerrade aber z_2/z_1 beträgt. Die Fachliteratur ist bei der Behandlung dieser Frage — vielleicht mit Absicht — ein wenig unklar [10], [11], denn obschon es richtig ist, daß die Werkzeugachse der neuen Gleason-Maschinen für die Zwecke des unitool-Verfahrens auch unter einem Winkel eingestellt werden kann (s. Abb. 5), dies dient aber einem anderen Zwecke.

Bei der Anfertigung der bogenverzahnten Kegelradgetriebe wird das Formate-Verfahren sowohl bei den sich kreuzenden wie auch bei den sich schneidenden Wellen laufend verwendet, und es kann angenommen werden, daß auch geradverzahnte Kegelgetriebe mit Hilfe dieses Verfahrens hergestellt werden könnten, nur sollte ein kühner Technologe die entsprechenden Versuche durchführen.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß auch das Profil der Schneckengetriebe ein konjugiertes Profil darstellt, nur wird es zur Zeit noch nicht so benannt, da diese Begriffe noch nicht verbreitet sind.

SCHRIFTTUM

1. HIRE, DE LA: De l'usage des epicycloïdes. Memoires de l'Acad. Royal des Sciences 1666—1699. Band IX.
2. HERRMANN, M.: Maschinenelemente, Budapest, 1924 (ungarisch).
3. BACH, C.: Maschinenelemente, Leipzig, 11. Ausgabe, 1913.
4. VIDÉKY, E.: Zahnräder, Budapest, 1912.
5. TREDGOLD: A practical essay on the strength of cast iron, London, 1882.
6. WILDHABER, E.: Basic relationships of bevel gears, American Machinist, 1945.
7. VÖRÖS, I.: Zahnräder, Budapest, 1956.
8. VÖRÖS, I.: Die neuesten Forschungen über Zahnräder und deren spezielle Fabrikationsmethoden, Budapest, 1955.
9. SCHEWTSCHENKO, N. A.: Berechnung des Profiles von Abwälzfräsern für beliebige geradflankige Profile, Werkstatttechnik und Werksleiter, 1936.
10. KECK, K. F.: Zahnradpraxis, München, 1958.
11. KECK, K. F.: Das Gleason-Unitool-Verfahren, Werkstatt und Betrieb, 1956.

ZUSAMMENFASSUNG

Wenn wir die Forderung nach Satzrädern bei Getrieben, wo sie auch ohnehin nicht angewendet werden können, fallen lassen, so können wir auf Grund der bereits bekannten Verzahnungsgesetze die konjugierten Profile einführen. Diese sind durch das *Fehlen des Grundprofils* charakterisiert.

Die besonderen Vorteile dieser konjugierten Profile werden erst merklich, wenn das Profil des großen Rades eine gerade Linie darstellt, denn in diesem Falle muß nur das Ritzel abgewälzt werden, das große Rad kann jedoch durch Fräsen oder Räumen mit dem Profilierverfahren angefertigt werden, das vielfach produktiver als die Abwälzung ist. Wenn das Profil des einen Rades eine Gerade darstellt, so kann auch das Gegenrad mit einem geradschneidigen Werkzeug abgewälzt werden, das heißt, beide Räder des Getriebes können mit geradschneidigen Werkzeugen hergestellt werden. Durch das konjugierte Profil werden für den Technologen neue Möglichkeiten und neue Perspektiven eröffnet.

CONJUGATE TEETH PROFILES

L. SZENICZEI†

SUMMARY

If we put aside the requirement of intermating series with drives where they cannot be employed anyhow, we can introduce, on the base of the already known laws of gearing, conjugate tooth profiles. These are characterized by their lacking a basic profile. Their special advantage will show itself only in case of the wheel having a straight-line tooth profile. In this case, namely, only the pinion must be produced by generating while the wheel can be made by profile milling, breaching or any other forming process, displaying a many times higher productivity than the generating process. If one of the gears has a straightline tooth profile, the counter wheel can be generated by a straight-edged tool, i. e. both wheels of the drive can be made by straight-edged tools. Conjugate profiles offer new possibilities and open a new prospect for production engineers.

PROFILS DE DENTS CONJUGUÉS

L. SZENICZEI†

RÉSUMÉ

Les profils conjugués peuvent être appliqués, sur la base des lois bien connues des engrenages, si nous ne tenons pas compte des conditions imposées aux roues échangeables dans ces transmissions, où leur application est de toute façon impossible. Les profils conjugués sont caractérisés par l'absence de profil de base. Leurs avantages spéciaux ne se présentent

que si le profil de la grande roue est une ligne *droite*, car alors seul le pignon doit être taillé par génération, la grande roue pouvant être exécutée par fraisage, ou par brochage de forme, qui sont de beaucoup plus économiques. Si le profil de l'une des roues est droit, la denture de l'autre roue engrenant avec elle peut être aussi générée avec un outil à arête tranchante droite, par conséquent les deux roues de l'engrenage peuvent être fabriquées avec un outil à tranchant droit.

Le profil conjugué offre de grandes possibilités et ouvre des voies nouvelles aux techniciens de la fabrication.

КОНЬЮГИРОВАННЫЕ ПРОФИЛИ ЗУБЬЕВ

Л. СЕНИЦЕИ†

РЕЗЮМЕ

Если требования сменных шестерен упустить в случае тех приводов, у которых они невозможны, тогда на основе уже известных законов зацепления становится возможным ввести конъюгированные профили. Эти профили характеризуются тем, что они не имеют основного профиля. Специальные преимущества становятся очевидными только тогда, когда профиль большой шестерни представляет собой прямую, т. к. тогда только малые шестерни необходимо изготовлять при помощи метода обкатки, а большие шестерни могут изготовляться фрезерованием или протяжкой, профилизирующим методом, которые являются во много раз более производительными, чем обкатка. Если профиль одной шестерни прямой, тогда другая шестерня пары может быть обработана обкаткой при помощи инструмента с прямой режущей кромкой, следовательно обе шестерни привода можно изготовить с помощью инструмента с прямой режущей кромкой. Конъюгированный профиль предоставляет для технологов новые возможности и новые перспективы.

MUSCHELFÖRMIGE SCHALENKONSTRUKTION

E. DULÁCSKA

PLANUNGSUNTERNEHMEN »BUVÁTI«, BUDAPEST

[Eingegangen am 9. Juli 1959]

Einleitung

Muschelschalentragwerk nennen wir in der Folge eine über einem regelmäßigen Vieleckgrundriß aufgebaute, an eine Seemuschel erinnernde, kuppelartige Schalenkonstruktion (s. Abb. 1) [1].

Bei der Berechnung dieser Art von Schalen kann als Randbedingung die Biegungslosigkeit der inneren Rippen benützt werden. Die Berücksichtigung dieser Bedingung ermöglicht die Bestimmung der Membrankräfte der Schale für eine beliebig verteilte Belastung. Im weiteren werden wir bezüglich der Form der Schalenfläche gewisse Einschränkungen einführen und werden unter Berücksichtigung der Biegungslosigkeit der in den Mulden liegenden Rippen die Form der Schale an die vorausgesetzte einfache Kräfteverteilung anpassen.

In der Folge wollen wir einen über einem Ausschnitt des Vieleckgrundrisses liegenden Schalenausschnitt untersuchen. Durch eine Verdrehung des Koordinatensystems können wir die Fläche der übrigen Vieleckausschnitte wie auch die Schnittkraftprojektionen erhalten.

Grundbedingungen

Die verwendeten Bezeichnungen sind aus den Abbildungen 2a und 2b ersichtlich.

1. Die Belastung der Schale bilde eine vertikale, gleichmäßig verteilte Last q . Diese Voraussetzung ist eine gute Annäherung der Wirklichkeit, da das Eigengewicht über den steileren Flächenteilen zwar größer, die Schneelast dagegen kleiner ist, weil der Schnee von den steileren Flächen eher abrutscht.

2. Das Eigengewicht der inneren Rippe sei durch den Zusammenhang

$$g(t) = g_0 \cdot t$$

gekennzeichnet. Diese Bedingung wird durch den in der Richtung der anwachsenden Rippenkräfte zunehmenden Betonquerschnitt erfordert.



Abb. 1

3. Die Schale ist im Zustande der Membranspannung. Die aus dem Verformungszwang entstehenden Randstörungen werden wir bei der Bestimmung der Membranspannungen vernachlässigen.

4. Das Verhältnis $\frac{f(x)}{h(x)} = A$ sei konstant. Hier sind $f(x)$ und $h(x)$ vorläufig unbekannte Funktionen, und zwar $f(x)$ diejenige der Rippenachse, $h(x)$

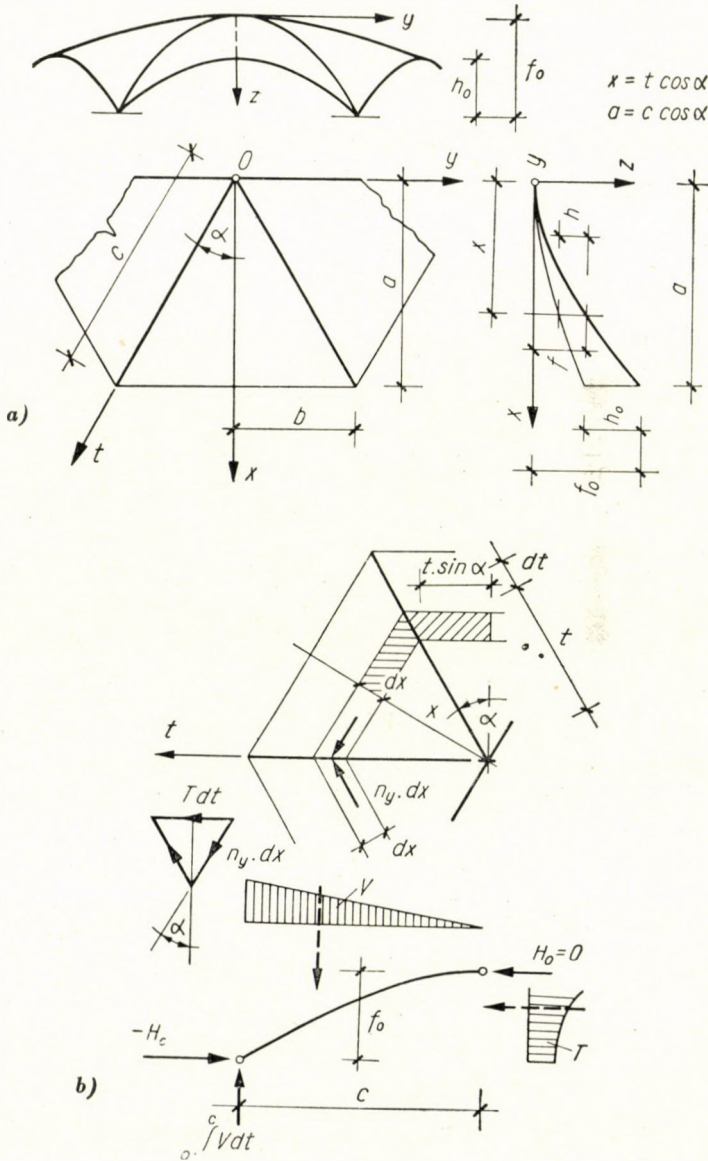


Abb. 2

dagegen diejenige der in der Richtung y liegenden Bogenhöhe der Schalenfläche. Zwischen den Koordinaten t und x kann der Zusammenhang $x = t \cdot \cos a$ angeschrieben werden. Die Funktion $h(x)$ werden wir auf Grund der Bedingung bestimmen, daß die in der Ebene (t, z) liegenden Rippen die Seilpolygone der von der Schale übertragenen Kräfte sein sollen.

5. Die Gleichung der Schalenfläche sei:

$$z(x, y) = h(x) \left(A - 1 + \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 a \cdot x^2} \right). \quad (1)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen

Die Schnittkraftprojektionen seien n_x , n_y , und n_{xy} (im Sinne des Reziprozitätssatzes ist $n_{xy} = n_{yx}$). Die Gleichgewichtsgleichungen der Schale sind mit Rücksicht auf die in 1. und 3. erörterten Voraussetzungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} &= 0; \\ n_x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2n_{xy} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + n_y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -q \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

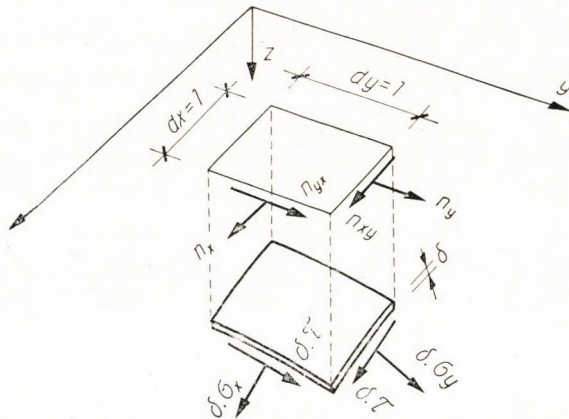


Abb. 3

Wenn $n_{xy} = n_x = 0$ ist, und n_y nur eine Funktion von x ist, dann sind die zwei ersten Gleichungen befriedigt, aus der dritten folgt unter Berücksichtigung des Zusammenhanges

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2h(x)}{\operatorname{tg}^2 a \cdot x^2}$$

für den Wert von n_y die Formel

$$n_y = \frac{-q \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot x^2}{2h(x)}. \quad (3)$$

Die Schnittkraft ist im Falle von Zug positiv.

Die Bestimmung der Funktion $h(x)$

Wenn V die in der Richtung z liegende Komponente des auf die Bogenförmige Rippe wirkenden verteilten Kräftesystems, und T dessen in der Richtung t liegende Komponente ist, dann haben wir auf Grund der Abb. 2b und unter Berücksichtigung des Zusammenhanges (3):

$$V = 2qt \sin \alpha \frac{dx}{dt} + g_0 t = 2q \sin \alpha \cos \alpha \cdot t + g_0 t,$$

und

$$T = -2 \sin \alpha \cdot n_y \frac{dx}{dt} = \frac{q}{h(x)} \cdot \sin^3 \alpha \cos \alpha \cdot t^2.$$

Die Integro-Differentialgleichung der Seilkurve des Bogens lautet:

$$\frac{df}{dt} = A \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{\int_0^t V dt}{\int_0^t T dt}. \quad (4)$$

Die für die Differentialquotienten zu benützenden Bezeichnungen sind:

$$\frac{dh}{dt} = h' \quad \text{und} \quad \frac{d^2 h}{dt^2} = h''.$$

Wenn wir die Gleichung (4) in der Form

$$\int_0^t T dt = \frac{\int_0^t V dt}{Ah'}$$

anschreiben, diese nach t differenzieren, nachher ordnen und vereinfachen, so erhalten wir die folgende gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten, die nicht linear und homogen ist:

$$(2q \sin \alpha \cos \alpha + g_0) h \cdot h' - \left(q \sin \alpha \cos \alpha \cdot t + \frac{g_0 t}{2} \right) h \cdot h'' - Aq (\sin^3 \alpha \cos \alpha) \cdot t \cdot (h')^2 = 0. \quad (5)$$

Wir wollen nun versuchen, diese Differentialgleichung mit Hilfe des Zusammenhanges

$$h(x) = h_0 \left(\frac{t}{c} \right)^m = h_0 \left(\frac{x}{a} \right)^m \quad (6)$$

zu lösen.

Wird letzterer in die Gleichung (5) eingesetzt und die Differenzierung durchgeführt, so entfallen die veränderlichen Glieder und wir erhalten für den Wert von m die Formel

$$m = \frac{3 + \frac{3g_0}{2q \sin \alpha \cos \alpha}}{1 + \frac{g_0}{2q \sin \alpha \cos \alpha} + A \sin^2 \alpha}. \quad (7)$$

So lautet die Gleichung der Schalenfläche unter Berücksichtigung der Gleichungen (1) und (6)

$$z(x, y) = h_0 \left(\frac{x}{a} \right)^m \cdot \left(A - 1 + \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot x^2} \right), \quad (8)$$

während wir für den Wert der Schnittkraftprojektion n_y die Gleichung

$$n_y = \frac{-q \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot a^m \cdot x^2}{2h_0 \cdot x^m} \quad (9)$$

erhalten.

Im Falle $m > 2$ ist der Wert der Schnittkraftprojektion n_y an der Stelle $x = 0$ unendlich groß, nimmt jedoch außergewöhnlich schnell ab, so daß dieser Umstand praktisch belanglos ist.

Die Horizontalprojektion der im Rippenbogen auftretenden Kraft ist:

$$H = \int_0^t T dt = \frac{-Aq \sin^3 \alpha \cos \alpha c^m \cdot t^{(3-m)}}{f_0(3-m)}. \quad (10)$$

Bemerkungen und Konstruktionsgrundsätze

a) Eine gleichmäßig verteilte Last q gibt bis zu einer Neigung von etwa 45° eine gute Annäherung.

b) Entlang der Rippenanschlüsse entstehen infolge des Verformungszwanges Biegemomente. Der Rand der Schalenplatte muß dementsprechend verstärkt werden.

c) Zwecks Sicherstellung der Knickfestigkeit muß am Rande $x = a$ ein versteifender Randträger angebracht werden, und die in den Mulden liegenden Rippen müssen auch über die entsprechende Biegesteifigkeit verfügen.

d) Mit Hilfe einer affinen Transformation kann der Grundriß der Schalenkonstruktion auch in ein verzerrtes Vieleck umgewandelt werden [2].

Zahlenbeispiel

Wir wollen die in Abb. 4 dargestellte kreuzgewölbeartig geformte Schalenkonstruktion untersuchen.

Die Angaben der Schale:

$$a = 10,0 \text{ m}, c = 14,1 \text{ m},$$

$$h_0 = f_0 = 5,0 \text{ m}, \text{ daher ist } A = 1,$$

$$a = 45^\circ, \text{ daher ist } \sin a = \cos a = 0,707,$$

$$q = 0,3 \text{ t/m}^2, g_0 = 0,02 \text{ t/m}^2.$$

Auf Grund der Gleichung (8) ist die Gleichung der Schalenfläche:

$$z(x, y) = 5 \cdot \left(\frac{x}{10}\right)^m \cdot \frac{y^2}{x^2}.$$

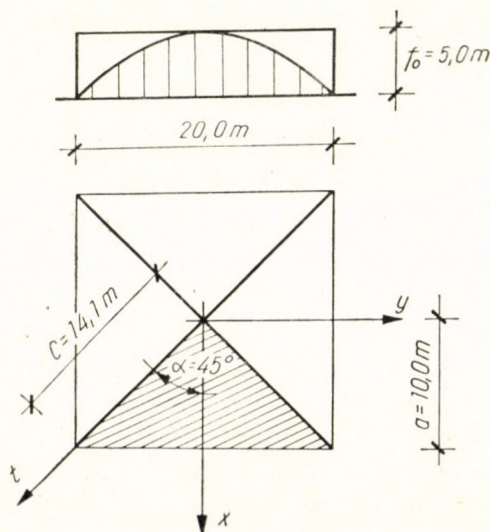


Abb. 4

Der Wert von m ist nach Formel (7):

$$m = \frac{3 + \frac{0,06}{0,6 \times 0,5}}{1 + \frac{0,02}{0,6 \times 0,5} + 0,50} = 2,04.$$

Aus Formel (9) ergibt sich für den Wert von n_y :

$$n_y = \frac{0,3 \times 10,0^{2,04} \cdot x^2}{2 \times 5,0 \cdot x^{2,04}} = \frac{3,31}{x^{0,04}} \text{ t/m.}$$

Aus der obigen Formel ergeben sich für n_y die folgenden Werte in t/m:

x	0	0,01	0,1	1,0	2,0	6,0	10,0
n_y	∞	4,02	3,66	3,31	3,20	3,07	3,00

Wie ersichtlich, ist n_y im Punkte $x = 0$ unendlich groß, aber im Abstand $x = 1$ cm nur mehr 4,02 t/m, was bei einer 6 cm dicken Schalenplatte eine Spannung $\sigma = 6,7 \text{ kg/cm}^2$ verursacht.

Die Größe der Kraft H ist an der Stelle $t = c$ nach Formel (10):

$$H = - \frac{0,3 \times 0,25 \times 14,1^3}{5(3 - 2,04)} = - 43,30 \text{ t.}$$

SCHRIFTTUM

1. ROYAN: Covered Market. *Prefabrication* 602. (1958).
2. DISCHINGER, F.: Der Spannungszustand in affinen Schalen und Raumfachwerken unter Anwendung des statischen Massenausgleiches. *Der Bauingenieur* 17., H. 23—28 (1936).

ZUSAMMENFASSUNG

Der Aufsatz befaßt sich mit den Fragen der Gestaltung muschelförmiger Schalenkonstruktionen. Es wird ferner die Bestimmung der Schalenfläche behandelt, bei der, unter Berücksichtigung der Biegeungslosigkeit der Innenrippen, gleichmäßig verteilte Vertikallasten in der Schalenplatte nur in der Richtung der Schalenkrümmung wirkende Druckkräfte erzeugen.

SHELL-STRUCTURE SHAPED LIKE A SCALLOP-SHELL

E. DULÁCSKA

SUMMARY

The author dealt with questions on the forming of shell-structures resembling the shape of a scallop-shell. He also determined, that surface of this kind of shells which is characterized by the fact, that taking into consideration the flexureless nature of the interior ribs, a uniformly distributed vertical load in the slab of such a shell only produces compressive forces acting in the direction of the shell's curvature.

LES VOILES MINCES VALVIFORMES

E. DULÁCSKA

RÉSUMÉ

L'auteur traite des problèmes de construction des voiles minces valviformes, et détermine la surface de voile dont l'application assure qu'il ne se produisent pas de moments de flexion dans les nervures intérieures, et que des charges uniformément réparties dans la paroi du voile ne font naître des forces de pression que dans la direction des arcs.

ОБОЛОЧКИ В ВИДЕ РАКОВИН

Э. ДУЛАЧКА

РЕЗЮМЕ

Рассматривались вопросы оформления оболочек в виде раковин, и определена та поверхность, на которой с учетом отсутствия изгиба внутренних ребер под воздействием нагрузки, распределяющейся равномерно в пластине оболочки, образуются давящие усилия только в направлении дуги.

DIE BEMESSUNG VON PFEILERN

J. SZIDAROVSKY

UVATERV — ENTWURFSBÜRO FÜR STRASSEN UND EISENBAHNEN, BUDAPEST

[Eingegangen am 23. April 1958]

Einleitung

Zur Bestimmung der in Pfeilern entstehenden Zug- und Druckspannungen hat die Praxis zwei Verfahren entwickelt. Beim ersten erfolgt zuerst die Ermittlung der Stützlinie, um dann die Spannungen in jenen Querschnitten zu berechnen, bei denen die relative Abweichung dieser Stützlinie von der Schwerelinie des Querschnittes am größten ist. Beim zweiten werden in mehreren, ziemlich dicht aufeinander folgenden Querschnitten die Spannungen berechnet, und die auf diese Weise gewonnenen größten Werte als Maximalwerte angesehen. Falls bei der Bestimmung der Spannung, die im Pfeiler entsteht, die Wirkung des Bodenseitendruckes ebenfalls berücksichtigt wird, erfordern die obigen zwei Verfahren eine praktisch kaum zu bewältigende Rechenarbeit.

Deshalb soll im folgenden ein analytisches Verfahren zur Bemessung von Pfeilern vorgeführt werden, das mit einem verhältnismäßig kleinen Arbeitsaufwand auch die durch den Verfasser in seiner unter [1] angezogenen abgeleiteten Bodenspannungen berücksichtigt.

1. Die Stelle der maximalen Spannung

Die Spannung σ in der äußersten Faser wird durch den Quotienten aus dem sich auf den der untersuchten Faser gegenüberliegenden Kernpunkt beziehenden Moment M und dem Widerstandsmoment W bestimmt:

$$\sigma = \frac{M}{W}. \quad (1,1)$$

Die Spannung hat dort einen Maximalwert, wo

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{M'W - MW'}{W^2} \text{ ist,}$$

also — weil $W^2 \neq 0$ — dort, wo

$$M'W - MW' = 0 \text{ ist.} \quad (1,2)$$

2. Die Untersuchung des Mauerwerks

Die Änderung der Querschnittsfläche und des Kernhalbmessers des Mauerwerkes wird, ebenso wie der Ort des Schwerpunktes und des Kernpunk-

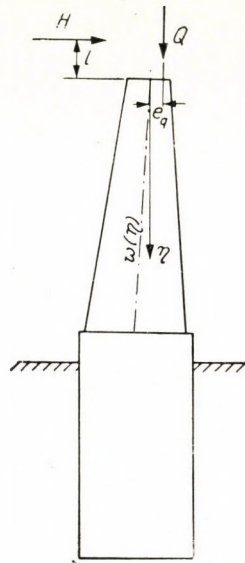


Abb. 1

tes, mit hinreichender Genauigkeit durch einen Ausdruck ersten Grades dargestellt. Die Querschnittsfläche ist als Funktion von η dargestellt (Abb. 1).

$$F(\eta) = F_0 + F_1 \eta \quad (2,1)$$

Die Schwerpunktsordinate ist

$$w(\eta) = w_0 + w_1 \eta. \quad (2,2)$$

Der Kernradius hat die Größe

$$k(\eta) = k_0 + k_1 \eta \quad (2,3)$$

und die Ordinate des untersuchten Kernpunktes ist

$$m(\eta) = m_0 + m_1 \eta \quad (2,41)$$

beziehungsweise

$$m(\eta) = w(\eta) \pm k(\eta). \quad (2,42)$$

In der Praxis ist es zweckmäßig, die Größen F , w und k in der obersten, mittleren und unteren Ebene des Mauerwerkes zu berechnen, und mit ihnen die einen guten Ersatz bildenden linearen Funktionen zu bestimmen.

Ist der Pfeiler auf beiden Seiten in einem Verhältnis 20 : 1 ausgebildet, dann ist

$$F(\eta) = F_0 + \frac{s}{10} \eta$$

und

$$k(\eta) = k_0 + \frac{1}{60} \eta$$

worin s die Pfeilerbreite ist.

Die über dem Querschnitt $\eta = 0$ wirkenden Kräfte sind:

die lotrechte Kraft Q mit der Exzentrizität \bar{e}_q und

die waagrechte Kraft H mit dem Hebelarm l .

Unterhalb der Ebene $\eta = 0$ wirkt noch das Eigengewicht

$$\int_0^{\eta} g F(\eta) d\eta.$$

In dieser Formel stellt g die Wichte dar.

Das Kernpunktmoment an der Stelle $\eta = z$ beträgt

$$M(z) = -Q[m(z) - \bar{e}_q] + H(l + \eta) - \int_0^z g[m(z) - w(\eta)] F(\eta) d\eta.$$

Mit den Zusammenhängen (2,1)–(2,42) wird, wenn die Bezeichnungen.

$$A = Q(\bar{e}_q - m_0) + Hl \quad (2,51)$$

$$B = H - Qm_1 - gF_0(m_0 - w_0) \quad (2,52)$$

$$C = g \left[\frac{1}{2} F_1(m_0 - w_0) - F_0(w_1 - m_1) \right] \quad (2,53)$$

$$D = \varepsilon F_1 \left(\frac{m_1}{2} - \frac{w_1}{3} \right) \quad (2,54)$$

eingeführt werden:

$$\left. \begin{aligned} M(z) &= A + Bz + Cz^2 + Dz^3 \\ M'(z) &= B + 2Cz + 3Dz^2 \end{aligned} \right\} \quad (2,6)$$

Das Widerstandsmoment ist

$$W(z) = F(z) k(z) = W_0 + W_1 z + W_2 z^2 \quad (2,7)$$

und

$$W'(z) = W_1 + 2W_2 z,$$

worin

$$W_0 = F_0 k_0 \quad (2,81)$$

$$W_1 = F_0 k_1 + F_1 k_0 \quad (2,82)$$

$$W_2 = F_1 k_1 \text{ ist.} \quad (2,83)$$

Werden diese in den Ausdruck (1,2) eingesetzt, so gewinnt man die Gleichung vierter Ordnung

$$\begin{aligned} (BW_0 - AW_1) + 2(CW_0 - AW_1)z + (3DW_0 + CW_1 - BW_2)z^2 + \\ + 2DW_1z^3 + DW_2z^4 = 0 \end{aligned} \quad (2,9)$$

zur Bestimmung der Stelle der maximalen Spannung z . Im Zusammenhang (2,9) ist der Koeffizient der Glieder dritten und vierten Grades klein, deshalb gewinnt man als erste Näherung einen Wert, bei dem nur solche Glieder berücksichtigt worden sind, die kleiner als dritten Grades sind. Wird der unbekannte, soeben bestimmte Näherungswert in die Glieder dritten und vierten Grades eingesetzt, so erhält man eine verbesserte Gleichung zweiten Grades, deren Wurzel bereits einen korrigierten Wert darstellt. Da es sich darum handelt, einen Maximalwert zu bestimmen, genügt es, die Größe von z auf dm Genauigkeit zu bestimmen. Deshalb führt dieses Näherungsverfahren rasch zum Ziel.

Ist die Tiefe bekannt, so kann die Maximalspannung in der äußersten Faser mit der Formel (1,1) berechnet werden.

3. Die Untersuchung des über dem Boden befindlichen Fundamentteiles

Der Querschnitt des über dem Boden befindlichen Fundamentteiles ist konstant, somit verschwinden die mit dem Index 1 und 2 versehenen Größen ($C = D = W_1 = W_2 = 0$) und dadurch wächst sowohl die Druck- als auch die Zugfaserspannung linear an. In diesem Abschnitt tritt also die größte Span-

nung im unteren Querschnitt auf. Diese Spannung ist jedoch bereits der obere Grenzfall des unter dem Boden befindlichen Fundamentteiles (s. Abschnitt 4). In diesem Abschnitt tritt die größte Spannung in einem tiefer gelegenen Querschnitt auf. Dadurch ist der über dem Boden befindliche Fundamentteil, vom Standpunkt der Spannung aus betrachtet, nicht maßgebend.

4. Die Untersuchung des im Boden befindlichen Fundamentteiles

Der Querschnitt des Fundamentes ist konstant und sein Schwerpunkt fällt in die y -Achse.

In den folgenden Bezeichnungen bedeuten

F die Querschnittsfläche

k den Kernradius

$W = F \cdot k$ das Widerstandsmoment.

Die oberhalb des Punktes $y = 0$ wirkenden Kräfte sind: Q die lotrechte Kraft mit der Exzentrizität e_q (diese ist nicht identisch mit \bar{e}_q im Abschnitt 2!), H die waagrechte Kraft am Hebelarm h .

Unterhalb des Punktes $y = 0$ wirkt noch das Eigengewicht

$$\int_0^z g F dy = g F z$$

und der waagrechte Bodendruck

$$s \int_0^z \sigma(y) dy$$

(wenn die Mantelreibung vernachlässigt wird).

Das Kernpunktmoment an der Stelle $y = z$ hat die Größe

$$M(z) = Q(e_q - k) + Hl + [H - g F k] z - s \int_0^z \int_0^z \sigma(y) dy dy. \quad (4.1)$$

In der im Schrifttum erwähnten Abhandlung [1] ist nach Formel (3,34) jedoch

$$\sigma(y) = C_t \delta(t_0 - y) \mathfrak{E}_y,$$

worin $\sigma(y)$ den auf die Seitenflächen des Fundaments wirkenden Bodendruck in der Tiefe y , C_t den seitlich gerichteten Bettungskoeffizienten in der Grundfläche des Fundamentes, $\mathfrak{E}_y = \frac{C_y}{C_t}$ den Quotienten aus der Größe des in der Tiefe y auftretenden waagrechten Bettungskoeffizienten C_y und des in der Tiefe

t auftretenden Wertes C_t , δ den Verdrehungswinkel des Pfeilers und t_0 die Tiefe des Drehungspunktes unterhalb des Geländes bedeuten. Alle diese Werte werden bei der Bemessung von Pfeilern auf Grund der erwähnten Abhandlung als bereits bekannt vorausgesetzt.

Damit wird

$$M(z) = Q(e_q - k) + Hl + [H - gFk]z - sC_t \delta t_0 \varrho_2(z) + sC_t \delta \varrho_3(z). \quad (4,2)$$

Weil

$$s \int_0^z \sigma(y) dy dy = sC_t \delta t_0 \varrho_2(z) - sC_t \delta \varrho_3(z)$$

ist, worin

$$\varrho_2'(z) = \int_0^z \mathfrak{G}_y dy \quad (4,3)$$

$$\varrho_3'(z) = \int_0^z y \mathfrak{G}_y dy \quad (4,4)$$

$$\varrho_2(z) = \int_0^z \int_0^y \mathfrak{G}_y dy dy \quad (4,5)$$

$$\varrho_3(z) = \int_0^z \int_0^y y \mathfrak{G}_y dy dy \text{ ist.} \quad (4,6)$$

Für den Fall, daß $C_1(y)$ konstant oder der Tiefe proportional ist oder aber bis zu einer Grenztiefe t_v der Tiefe proportional und darüber hinaus konstant ist oder der Quadratwurzel der Tiefe proportional angenommen worden war, wurden die bestimmten Integrale $\varrho_2(z)$, $\varrho_2'(z)$, $\varrho_3(z)$ und $\varrho_3'(z)$ bestimmt und in der Tabelle zusammengefaßt. Übrigens können diese sowohl graphisch als auch mit anderen Näherungsverfahren immer bestimmt werden.

Ein Grenzwert tritt dort auf, wo

$$M'(z) = H - gFk - sC_1(t) \delta t_0 \varrho_2'(z) + sC_1(t) \delta \varrho_3'(z) = 0 \text{ ist.} \quad (4,7)$$

Aus dem Zusammenhang (4,7) ist die Formel

$$t\varrho_2'(z) - \varrho_3'(z) = \frac{H - gFk}{sC_t \delta} \quad (4,8)$$

bereits geeignet, die Tiefe z , und damit den Ort der maximalen Faserspannung zu bestimmen.

Ist nämlich die Form der Funktionen $\varrho_2'(z)$ und $\varrho_3'(z)$ bekannt, so kann z mit der Formel (4,8) ausgedrückt oder durch iterative Näherung bestimmt werden.

Tafel

$C_1(y)$ \mathfrak{G}_y	$\varrho_2(z)$	$\varrho_3(z)$	$\varrho_2(z)$	$\varrho_3'(z)$
$C_1(y) = \text{Konst}$ $\mathfrak{G}_y = 1$	$\frac{z^2}{2}$	$\frac{z^3}{6}$	z	$\frac{z^2}{2}$
$C_1(y) = Cy$ $\mathfrak{G}_y = \frac{y}{t}$	$\frac{z^3}{6t}$	$\frac{z^4}{12t}$	$\frac{z^2}{2t}$	$\frac{z^3}{3t}$
$C_1(y) = Cy$ $\mathfrak{G}_y = \frac{y}{t} \left. \begin{matrix} y \leq t_b \\ y \geq t_b \end{matrix} \right\}$	$\frac{z^3}{6t_b}$ $\frac{z^2}{2} - \frac{t_b z}{2} + \frac{t_b^2}{6}$	$\frac{z^4}{12t_b}$ $\frac{z^3}{6} - \frac{t_b^2 z}{6} + \frac{t_b^3}{12}$	$\frac{z^2}{2t_b}$ $z - \frac{t_b}{2}$	$\frac{z^3}{3t_b}$ $\frac{z^2}{2} - \frac{t_b^2}{6}$
$C_1(y) = C\sqrt{y}$ $\mathfrak{G}_y = \frac{\sqrt{y}}{t}$	$\frac{4z^{5/2}}{15t^{1/2}}$	$\frac{4z^{7/2}}{35t^{1/2}}$	$\frac{2z^{3/2}}{5t^{1/2}}$	$\frac{2z^{5/2}}{5t^{1/2}}$

Ist die Form dieser Funktionen nicht bekannt, so kann die Größe

$$t\varrho_2'(z) - \varrho_3'(z) \quad (4,9)$$

als Funktion von z graphisch dargestellt werden. Die Lösung liefert derjenige Wert von z , wo die Summe von (4,9) dem Wert

$$\frac{H - gFk}{sC_t \delta}$$

gleich ist, der bereits eine von der Tiefe z unabhängige Konstante darstellt.

Nach der Lösung von z kann das Kernpunktmoment nach Formel (4,2) bestimmt werden, und die Spannung in der äußersten Faser nach (1,1) berechnet werden.

Ändert sich die Breite s , oder wirken auch verteilte waagrechte Kräfte (z. B. einseitige Boden hinterfüllung) oder ist die Querschnittsfläche des Fundaments nicht konstant, so können den obigen ähnliche Zusammenhänge abgeleitet werden.

Fällt die Maximalspannung oberhalb oder unterhalb des untersuchten Mauerteiles, so tritt das Maximum in dessen oberster oder unterster Ebene auf.

5. Die Formeln von Sonderfällen

Bei den verschiedenen Fällen der Praxis vereinfachen sich die abgeleiteten Formeln. Dies sei nun gezeigt.

5,1 Die Untersuchung des Mauerwerkes

Ist das Mauerwerk eines Pfeilers an den beiden Seitenflächen im Verhältnis 20 : 1 geneigt, und sind die zwei Endflächen senkrecht, so ist

$$\begin{array}{lll} F_0 = sb & F_1 = \frac{s}{10} & F(\eta) = F_0 + \frac{s}{10} \eta \\ k_0 = \frac{b}{6} & k_1 = \frac{s}{60} & k(\eta) = k_0 + \frac{1}{60} \eta \\ w_0 = 0 & w_1 = 0 & \\ m_0 = \frac{b}{6} & m_1 = \frac{1}{60} & \\ w_0 = \frac{sb^2}{6} & w_1 = \frac{sb}{30} & w_2 = \frac{s}{600} \end{array}$$

$$A = Q(\bar{e}_q - m_0) + Hl = Q \left(\bar{e}_q - \frac{b}{6} \right) + Hl$$

$$B = H - Qm_1 - gF_0(m_0 - w_0) = H - \frac{Q}{60} - \frac{gb^2 s}{6}$$

$$C = g \left[\frac{1}{2} F_1(m_0 - w_0) - F_0(w_1 - m_1) \right] = \frac{gbs}{40}$$

$$D = gF_1 \left(\frac{m_1}{2} - \frac{w_1}{2} \right) = \frac{gs}{1200}$$

Nach Einsetzung der Zahlenwerte kann die Gleichung (2,9) bereits angeschrieben und mit Hilfe des skizzierten Verfahrens leicht gelöst werden.

5.2 Die Untersuchung des Fundamentes

Bei der Untersuchung des Fundaments ist die Gleichung (4,8), wenn $C_1(y)$ der Tiefe proportional ist,

$$\frac{z^3}{3} - t \frac{z^2}{2} + \frac{H - gFk}{sC_1 \delta} = 0$$

dritten Grades, die bereits schnell gelöst werden kann. Die graphische Lösung nach (4,9) führt auch jetzt rasch zum Ziel.

6. Zahlenbeispiel

Es ist in der erwähnten Abhandlung die größte Druckspannung im Fundament des im Beispiel vorkommenden Pfeilers zu bestimmen. Die notwendigen Angaben sind dort angegeben.

Es wird vorausgesetzt, daß der Bettungskoeffizient bis zur Tiefe $t_v = 10,0$ m ihr proportional ist, darunter jedoch konstant ist (Abb. 2).

6.1. Im Abschnitt $z \leq t_v = 10,0$ m

Auf Grund der Tabelle 1 ist

$$\varrho'_2(z) = \frac{z^2}{2 \cdot 10} = 0,05z^2$$

$$\varrho'_3(z) = \frac{z^3}{3 \cdot 10} = 0,033z^3.$$

Auf Grund von (4,7) ist, bezogen auf den auf der Seite der waagrechten Kraft befindlichen Kernpunkt (auf die Druckspannung!);

$$\begin{aligned} M'(z) &= 45,9 + 2,2 \cdot 13,82 \cdot 6,0 \cdot 1,0 - 7,23 \cdot 14 \cdot 0,05z^2 + 7,23 \cdot 0,033z^3 = \\ &= 229 - 5,05z^2 + 0,241z^3 = 0. \end{aligned}$$

Es ist nämlich
und

$$k = 1,0 \text{ m}$$

$$F = 83 \text{ m}^2$$

Die Wurzel der Gleichung ist im Abschnitt $0 \leq z \leq 10 \text{ m}$

$$z = 8,9 \text{ m}$$

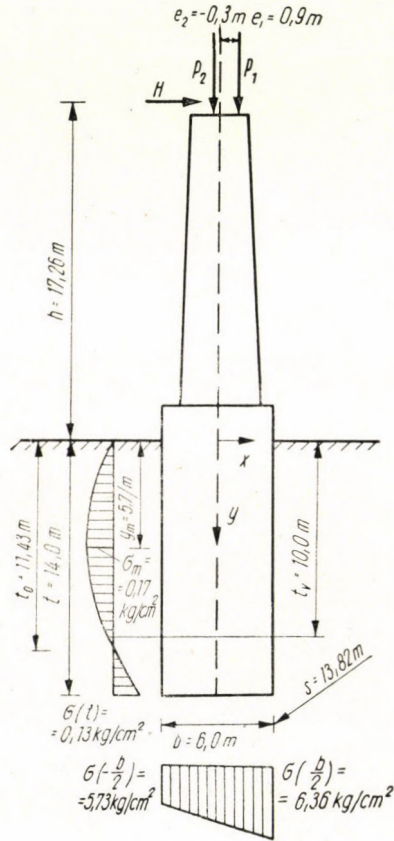


Abb. 2

(Der zweite Differentialquotient $M(z)$ ist hier negativ, also besteht hier ein Maximum.)

$$\varrho_2(8,9) = \frac{8,9^3}{6,0 \cdot 10} = 11,7 \text{ m}^2$$

$$\varrho_3(8,9) = \frac{8,9^4}{12 \cdot 10} = 52,2 \text{ m}^3$$

$$e = \frac{438 \cdot 0,9 - 307 \cdot 0,3}{2290 + 438 + 307} = 0,1 \text{ m}$$

Nach (4,2) ist

$$M(8,9) = 3035(0,1 + 1,0) + 45 \cdot 9 \cdot 1726 + (45 \cdot 9 + \\ + 2,2 \cdot 83 \cdot 1,0) 8,9 - 7,23 \cdot 14 \cdot 11,7 + 7,23 \cdot 52,2 = 5400 \text{ tm}$$

und die Druckspannung in der äußersten Faser ist

$$\sigma(8,9) = \frac{5400 \cdot 10^5 \text{ kg cm}}{83 \cdot 10^6 \text{ cm}^3} = 6,51 \text{ kg/cm}^2.$$

6.2. Im Abschnitt $z > 10,0 \text{ m}$

$$\varrho_2'(z) = z$$

$$\varrho_3'(z) = \frac{z^2}{2}.$$

Gemäß (4,7) ist

$$M'(z) = 229 - 7,23 \cdot 14 \cdot z + 7,23 \frac{z^2}{2} = 229 - 101 \cdot z + 3,615z^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat im untersuchten Abschnitt keine Wurzel; deshalb stellt die unter (6.1) dargestellte Spannung ein Maximum dar.

SCHRIFTTUM

1. SZIDAROVSKY, J.: Die Bestimmung von auf Pfeilerfundamente wirkenden Bodendrücken. Acta Technica, Tom. XXVII, Fasc. 3—4, Budapest, 1960.

ZUSAMMENFASSUNG

Die üblichen Methoden zur Bestimmung der maximalen Spannungen in Pfeilern erfordern — besonders, wenn der Bodenseitendruck berücksichtigt werden soll — eine sehr umfangreiche Arbeit. Die vorliegende Abhandlung empfiehlt ein analytisches Verfahren, bei dem auch der erwähnte Seitendruck leicht in Betracht gezogen werden kann.

STRENGTH CALCULATION OF PIERS

J. SZIDAROVSKY

SUMMARY

Methods generally used for calculating max. stresses in piers, especially when the effect of lateral earth pressure is taken into account, require a good deal of reckoning work.

This paper presents an analytical method with the aid of which the above mentioned effect of lateral earth pressure can easily be considered.

DIMENSIONNEMENT DES PILIERS

J. SZIDAROVSKY

RÉSUMÉ

La détermination, par les méthodes usuelles, des tensions maxima se produisant dans les piliers, exige un travail considérable, surtout si l'on veut tenir compte de l'effet de la pression latérale du sol.

L'étude propose un procédé analytique, à l'aide duquel l'effet de la pression latérale peut être facilement déterminé.

РАСЧЕТ УСТОЕВ

Я. СИДАРОВСКИ

РЕЗЮМЕ

Определение возникающих в устоях наибольших напряжений на основе применяемых обычно для этой цели методов особенно при условии учета также бокового давления грунта связано с очень большой вычислительной работой.

Данная работа предлагает аналитический метод, при помощи которого влияние упомянутого бокового давления можно легко учесть.

SETTING AND HARDENING OF HYDRAULIC MATERIALS

III. DETERMINATION OF SETTING OF CEMENT PASTES AT ELEVATED TEMPERATURES UNDER ISOTHERMIC CONDITIONS BY A CONDUCTOMETRIC METHOD

G. SZUK

LABORATORY OF THE HUNGARIAN INSTITUTE FOR BUILDING RESEARCH, BUDAPEST

[Manuscript received August 21, 1959]

In a previous study [1] a conductometric analysis of setting of cement pastes under isothermic conditions at normal temperature has been published. The tests have been executed under exact isothermic conditions at a temperature of 20° C. After these tests the development of the setting of cement pastes having different water contents have been examined at elevated temperatures (between 20° C and 90° C).

It is well-known that by increasing the temperature the setting and hardening process of hydraulic materials is accelerated. This experience is often applied to accelerated hardening methods as steam curing, treatment by Joule effect etc. These methods are known in the literature and in practice but lacking a method of measurement, experiments were seldom performed to control the physicochemical changes occurring during the treatment.

First SHIMIZU [2] applied in 1928 the conductometric method for the determination of the setting time of slaccement paste. His results could be considered as preliminary experiments in this field. In 1950 CALLEJA proved [3] that this method is better than any other classical one. Our tests at a temperature of 20° C confirmed his statements. CALLEJA examined the setting period in an almost adiabatic condition and in the electrical resistance-time graph established two well-defined minima, indicating beginning and end of setting. Our isothermic experiments showed three minima in the diagram of which the first signified a great ion-concentration at the beginning (proved by p_{H^+} -measurement), the second beginning and the third end of the setting period (identified by the thermic method). It was possible to draw an inference from the wave form concerning physicochemical processes occurring in the paste during setting. At elevated temperatures, from 20° C to 90° C, the minima mentioned above appeared nearly in every case *i. e.* the beginning and the end of the setting could both be exactly determined. In a few cases, especially above 70° C the values which made the reading impossible were indefinite on account of the rapidity of physicochemical changes.

Table 1

Test temperature °C	First				Second				Third			
	minima											
	26%	28%	30%	32%	26%	28%	30%	32%	26%	28%	30%	32%
90	0h15m	0h16m	0h15m	0h15m	1h13m	1h14m*	1h14m	1h14m	1h32m	1h33m	1h33m	1h33m
80	0h21m	0h20m	0h22m	0h20m	1h12m*	1h14m*	1h15m*	1h15m*	1h26m	1h27m	1h29m	1h33m
70	0h23m	0h23m	0h23m	0h23m	1h12m	1h12m	1h13m	1h14m	1h34m	1h35m	1h35m	1h35m
60	0h25m	0h30m	0h30m	0h30m	1h28m	1h29m*	1h30m	1h33m	1h45m	1h47m	1h37m	1h47m
50	0h35m	0h40m	0h45m	0h50m	1h45m	1h47m*	1h50m	1h52m*	2h11m	2h12m	2h12m	2h13m
40	0h45m	0h50m	0h45m	0h45m	2h25m	2h27m*	2h30m	2h40m	3h00m	2h55m	3h00m	3h05m
30	0h45m	0h50m	1h07m	1h15m	3h15m	3h17m	3h20m	3h22m	4h00m	4h03m	4h05m	4h07m
20	1h15m	0h30m	1h37m	1h45m	4h10m	4h12m	4h15m	4h17m	5h35m	5h42m	5h45m	5h55m

(The values denoted by an asterisk showed no minima)

Test method

Cement pastes made of cement brand Tata-C-600 Portland and 26, 28, 30 and 32 p. c., respectively, water added were used for tests. Below 70° C the measuring cells were of plastics and above 70° C of porcelain, having a cubic shape of 20×20×20 mm³. The copper electrodes 0.3 mm thick formed two opposite sides of the open cell. The filling and compacting was done in the same way as in previous experiments [1]. An ultrathermostat of HÖPPLER, limit of error 1/100° C ensured the required isothermic condition. In a separate cell, thermic setting time measurements were made. After mixing, all the cells were placed in the open waterbath of the thermostat. This occurred in the 15th minute. Measuring was continued after the last minimum appeared, for half an hour. An electronic resistance meter bridge with instrument reading was used as measuring device (accuracy 0.5%) with a frequency of 50 c. p. s. at 6.3 V a. c. As mentioned above the minima could be seen but a short time, so a multipole switch was used between the cells and an instrument for quick switching over. This device ensured a nearly simultaneous measurement of test specimens with different water contents.

Results

The test temperatures were between 20° C and 90° C at a rate of 10° C. The three minima appeared in the following way (see Table 1.) According to Table 1, the setting times are:

Table 2

Test Temperature °C	Water content			
	26%	28%	30%	32%
90	19m	19m	19m	19m
80	14m	13m	14m	18m
70	22m	23m	22m	21m
60	17m	18m	17m	14m
50	26m	25m	22m	21m
40	35m	28m	30m	25m
30	45m	46m	45m	45m
20	1h25m	1h30m	1h30m	1h28m

The minima shown in Table 1 are plotted in Fig. 1.

The boundary curves referring to pastes with watercontents of 26 p. c. to 32 p. c. approach and diminish with time, that means that in our tests the ion-concentration in the solution of Ca and OH increases between 20° C to 90° C on account of the hydrolysis of Ca-silicates and alcali compounds in the paste. The behaviour of the curve belonging to the second minimum is quite different, namely the values, indicating the beginning of setting, up to 70° C decrease more vigorously if the test temperature is rising, as it may be seen from the diagram and displacement — however small — occurs to the right

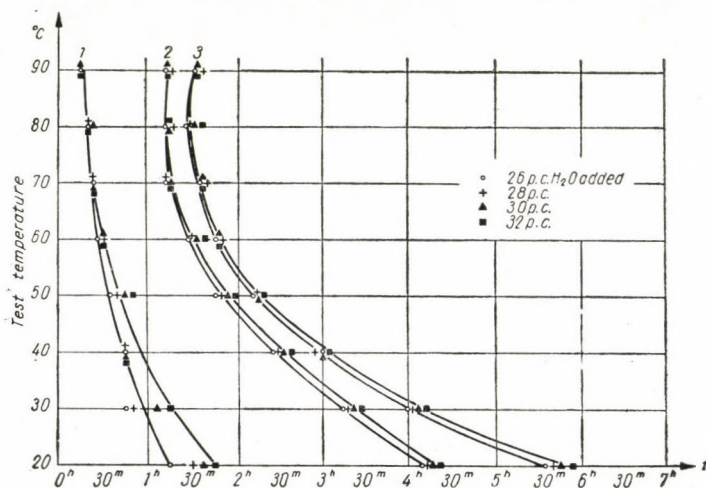


Fig. 1

from this point *i. e.* the beginning of the setting is postponed. At the third minimum boundary curves signifying the end of setting, this displacement is more conspicuous. At 90° C the end of setting occurs later than at 80° C. This means a prolongation of the setting time, which could be explained at higher temperatures by a quicker drying of the paste. Above 50° C the sudden rise of the resistance diagram refers to the same phenomenon.

It is known that the temperature of the paste rises from the beginning of setting in consequence of exothermic reaction. In our isothermic experiments at 20° C it was shown that in spite of excellent heat exchange the temperature of the paste rises until the end of setting and at this point it reaches the maximum. This point coincides with the third minimum of the R-t graph. In recent tests thermic setting time determinations have been carried out. Compared with the electrical results we get:

Table 3

Test temperature °C	Beginning	End	Beginning	End	Difference, against R-t graph	
	of setting				Beginning	End
	in R-t graph		in T-t graph			
90	1h14m	1h33m	1h00m	1h15m	-14m	-18m
80	1h15m	1h29m	—	—	—	—
70	1h13m	1h35m	1h13m	1h33m	0m	0m
60	1h30m	1h47m	1h30m	1h45m	0m	-2m
50	1h50m	2h12m	1h45m	2h12m	-5m	0m
40	2h30m	3h00m	2h30m	3h00m	0m	0m
30	3h20m	4h05m	3h15m	4h05m	-5m	0m
20	4h15m	5h45m	4h15m	6h00m	0m	+15m

It is obvious that singular points of both methods agree well. Tests could be reproduced. The results are plotted in Fig. 2. When the setting time of a cement

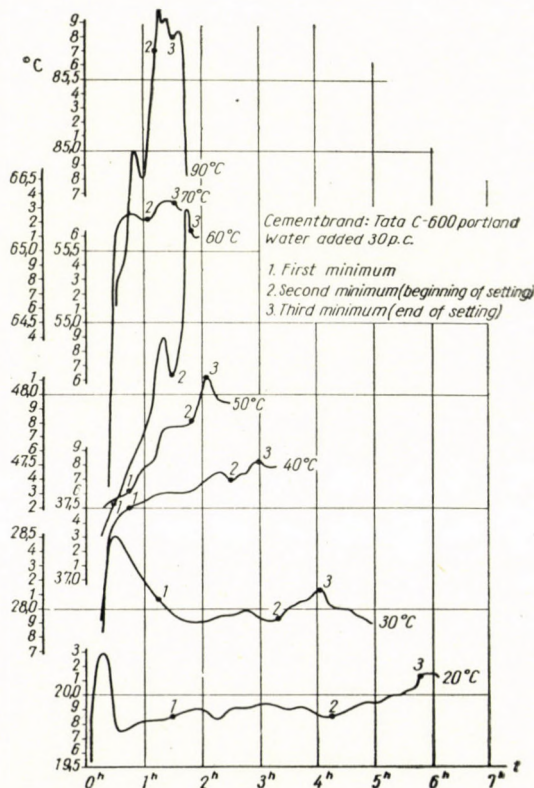


Fig. 2

is being determined, the temperature of the mixing water and the atmosphere is rarely taken into consideration, nevertheless, from a technical point of view these circumstances sometimes alter decisively concreting, considering the fact for example that the time of workability of the cement C-600 Portland of Tata at a temperature between 20° C and 30° C is 55 minutes shorter. Previously it was shown that at 20° C a temperature rise of 5° may hasten the end of setting by 2 hours [1]. The climate, the place of concreting, the temperature of the season, etc. individually influence the setting time and herewith the time of workability.

The characteristic oxide analysis of the cement brand Tata C-600 Portland is as follows:

Water loss	0.74 p. c.
SiO ₂	20.40 p. c.
Al ₂ O ₃	6.54 p. c.
FeO ₃	2.92 p. c.
CaO	63—93 p. c.
MgO	2.85 p. c.
SO ₃	2.03 p. c.

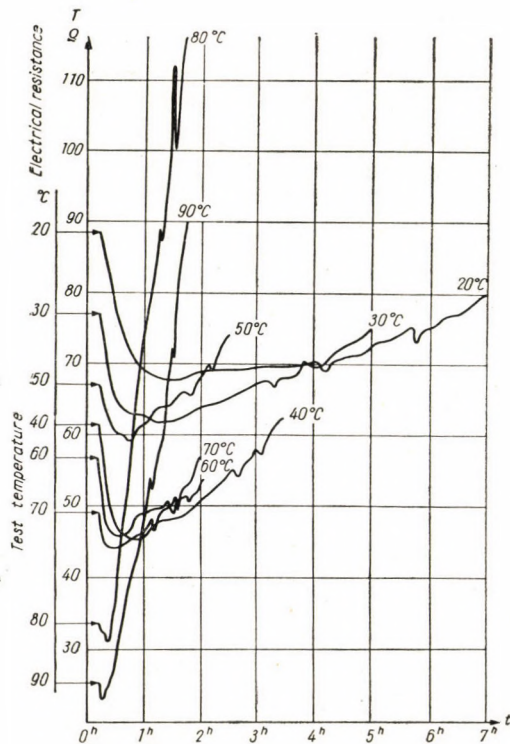


Fig. 3

Analysing the graphs in Fig. 3 it is obvious that

1. the higher the test temperature the greater the solubility of the easily soluble compounds of the cement and herewith the speed of solvation. By analogy the speed of hydration of the hydraulic materials increases. At the beginning the graph of resistance is sloping and this is more indicative the higher the temperature. In the next table this decrease is given from the beginning of the mixing, to the appearance of the first minimum. It is obvious that till the appearance of the first minimum the resistance drop diminishes (except in tests of 60° C temperatures). Compared to the first minimum in Table 1 it can be seen that the minimum gets sharper with rising temperatures.

Table 4

Test temperature °C	Decrease of resistance in ohms			
	26	28	30	32
	pc. water added			
90	0,0	0,1	0,0	0,0
80	0,9	1,0	2,5	0,6
70	1,0	5,6	4,8	4,7
60	11,1	11,2	10,6	9,4
50	4,7	4,7	7,7	1,8
40	19,0	17,8	14,3	15,7
30	20,3	18,4	15,2	13,0
20	16,8	22,7	20,7	20,7

2. With rising test temperatures the solubility gets greater, consequently the concentration increases. This means an increase of the conductivity of the solution *i. e.* decrease of its electrical resistance. From the graphs it is clear that the higher the temperature, the smaller are the initial resistance values. Diagrams of rising temperatures have been situated beneath each other in the course of tests.

3. Examining the graphs in the function of humidity-time it can be seen clearly that by increasing the test temperature the times of the first minima as well as the beginning and the end of setting become shorter (Fig. 4).

Altogether the tests proved that

a) the conductometric method can be applied to setting — time determinations at higher than normal temperatures.

b) The determination of the beginning and the end of setting could be carried out with great accuracy.

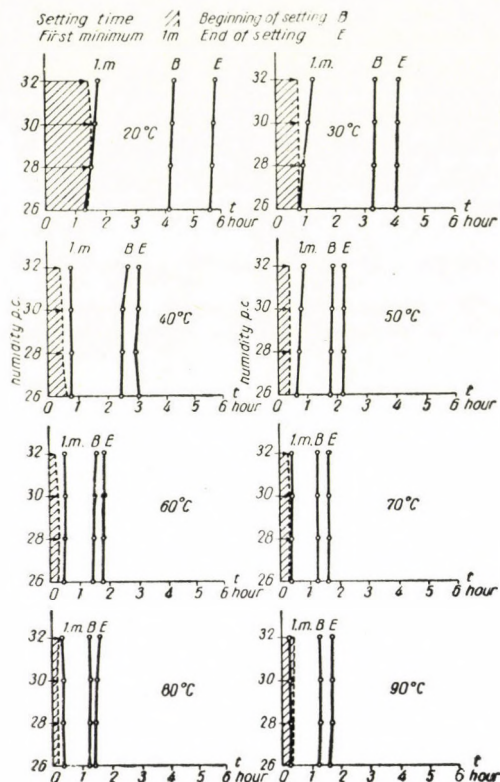


Fig. 4

c) This method is suitable to demonstrate the physico-chemical changes which occur during the setting time at higher temperatures too.

d) It might be used for examination of the steam curing procedure.

REFERENCES

1. SZUK, G.—NÁRAY-SZABÓ, I.: Conductometric analysis of setting of cement pastes under isothermic conditions. Act. Techn. Tom. XXII. Fasc. 1—2, pp. 83—100, 1958.
2. SHIMIZU, Y.: Concrete Cements, 1928 May, p. 111 and 1929 may p. 109.
3. CALLEJA, Y.: Nuevas tecnicas para el estudio del fraguado de los aglomerantes hidraulicos. Ann. Real Soc. Esp. Fis. Quim. July 1951.

SUMMARY

Conductometric analyses of the setting of cement pastes at higher than normal temperatures (20° C to 90° C) were performed: the shape of the waves in the electric resistance — time diagrams has proved to be similar to the course of the curves obtained from isothermic tests made at a temperature of 20° C. The initial high OH-ion concentration, as also the beginning and the end of the process of setting, are manifesting themselves through marked minima in the resistance diagram, so that the method enables us to follow the physico-chemical phenomena which occur in the cement paste during hydration even at higher temperatures.

The present experiments serve to pave the way for examinations concerning the process of steam curing.

ABBINDUNG UND ERHÄRTUNG HYDRAULISCHER STOFFE

III. BESTIMMUNG DER ABBINDUNGSZEIT VON ZEMENTBREI BEI HOHER TEMPERATUR UNTER ISOTHERMISCHEN BEDINGUNGEN DURCH DAS KONDUKTOMETRISCHE SYSTEM

G. SZUK

ZUSAMMENFASSUNG

Die Wellenformen des elektrischen Widerstand-Zeit-Diagrammes der bei über der Normaltemperatur (20° C—90° C) durchgeführten konduktometrischen Abbindungszeituntersuchungen für Zementbrei sind den Kurven der bei 20° C durchgeführten isothermischen Versuche ähnlich. Die große Anfangskonzentration der OH-Ionen sowie Anfang und Ende des Abbindens sind im Widerstandsdiagramm durch klar definierte Minima charakterisiert. Mittels dieser Methode kann man also während der Hydratation, die sich im Zementbrei abwickelnden physiko-chemischen Phenomene auch über der Normaltemperatur deutlich erkennen.

Diese Versuche dienten als Vorstudien zu den Untersuchungen des Wärmebehandlungsverfahrens.

PRISE ET DURCISSEMENT DES MATIÈRES HYDRAULIQUES

III. DETERMINATION, PAR LA MÉTHODE CONDUCTOMÉTRIQUE, DU TEMPS DE PRISE DE LA PÂTE DE CIMENT À UNE TEMPÉRATURE ÉLEVÉE, DANS DES CONDITIONS ISOTHERMIQUES

G. SZUK

RÉSUMÉ

Les recherches conductométriques du temps de prise de la pâte de ciment, effectuées à un température au-dessus de la normale (de 20° C à 90° C), offrent des diagrammes résistance électrique-temps en forme d'ondes, analogues aux courbes des essais isothermiques exécutés à 20° C. La grande concentration initiale d'ions OH, le début et la fin de la prise sont caractérisés dans le diagramme de résistance par des minima bien définis. La méthode permet donc de bien suivre pendant l'hydratation même à un température au-dessus de la normale, les phénomènes physico-chimiques se produisant dans la pâte de ciment.

Les essais ont servi d'étude préliminaire à l'examen du processus du traitement par la chaleur.

СХВАТЫВАНИЕ И ТВЕРДЕНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

III. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ СХВАТЫВАНИЯ ЦЕМЕНТНОГО РАСТВОРА ПРИ БОЛЕЕ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ И ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ КОНДУКТOMETРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Г. СУК

РЕЗЮМЕ

Форма волн диаграмм электрического сопротивления — времени анализа времени схватывания цементного раствора, выполненного кондуктометрическим методом при более высоких температурах (20° C — 90° C), чем нормальная, является аналогичной изменению кривых изотермических опытов, проведенных при температуре 20° C и сообщенных здесь. Начальная высокая концентрация OH-ионов, начало процесса схватывания и его конец отражается хорошо выраженными на диаграмме сопротивлений минимумами, таким образом при помощи предлагаемого метода можно хорошо проследить и при температурах выше нормальной физико-химические явления, происходящие в цементном растворе.

Опыты служили в качестве предварительной работы при исследовании процесса теплового созревания.

SETTING AND HARDENING OF HYDRAULIC MATERIALS

IV. DETERMINATION OF THE OPTIMAL STEAM CURING OF CEMENT PASTES AND CONCRETE AT A GIVEN TEMPERATURE BY A CONDUCTOMETRIC METHOD

G. SZUK

LABORATORY OF THE HUNGARIAN INSTITUTE FOR BUILDING RESEARCH BUDAPEST

[Manuscript received August 21, 1959]

The conductometric analysis of concrete and hydraulic building materials which is based on the variations of electrical resistance during the period of setting and hardening has been found suitable for the demonstration of structural changes, *i. e.* — expressed in terms of electricity — for the demonstration of the variations in the electric cross section [3,4]. The electrical resistance-time graphs (called „R-t” in the following) offer many data and much information revealing the phenomenon of development in the different phases, especially in the boundary region of the examined specimens.

It was with this method that we determined the optimal water—cement ratio of concrete in 1954 [1,2]. We examined subsequently the setting period of cement pastes under isothermic conditions at normal and elevated temperatures [4, 5, 6]. During these investigations the idea arose that the structural changes in the cement pastes and concretes during steam curing might be ascertained which would enable us to determine the optimal time of steam curing at a given temperature.

Two series of experiments were made with the same cement paste, while later different concretes were tested. The time of steam curing for cement pastes was 8 hours in the first and 15 hours in the second series. Concrete was cured until the characteristic point of the optimal time appeared. This characteristic point appeared in the R—t graph at a well-defined maximum and coincides with the specimen's maximal crushing strength at 28 days.

Method

Cement pastes

The same cement paste was examined throughout our investigations. It consisted of cement (brand Tata C-600 Portland) and 26, 28, 30, 32, 35, 40, 45 and 50 p. c. (by weight) of water. The test temperatures were 60, 70, 80 and 90° C respectively. The cube shaped cuvettes (with 2 cm edges) were of plastics and, at higher temperatures, of porcelain. Two copper electrodes (0,3

mm thick, each) formed two opposite sides of the open cell. After a mixing for one minute, the measuring cell was filled in 3 layers, each layer being compacted by 20 strokes of a metal stick, the diameter of which was 8 mm.

Concrete

Different kinds of concrete, with different gradings and made of different cement brands, were examined. Generally, measuring was performed in cubic-shaped steel cells, the size of which varied between 10 and 20 cm edges. A radiant electric field was thus obtained, since the other electrode was the conductive steel cell itself. To ensure the desired experimental conditions, the bottom of the cell was insulated by a solution of plexiglas. To control the propagation of the effect of steam curing, it was measured in a few cases by means of a special electrode, formed by several cylindrically shaped and coaxially mounted bodies, insulated from each other. This arrangement made it possible to take progressive measurements from cm to cm. The final measurements were made with two flat copper electrodes of 1×5 cm, immersed into the specimens at right angles to their surface. The measuring distance varied according to the maximum particle size.

General

All the measurements were carried out in a nearly isothermic condition, ensured by a Höppler ultrathermostat. A copper vessel containing water, intended to produce the necessary steam, was placed into the water bath of the device. The steam area was closed by a rubber-sealed cover. Underneath, a grid was mounted on which the measuring cells were placed. To ensure better contact, the electrodes of the cells were soldered to the terminals of the measuring cables (Fig. 1). The measuring device was an electronic-resistance meter-bridge with an instrument for zero indication (accuracy $\pm 0,5$ p. c.). Measuring voltage came to 6,3 V a. c. at a frequency of 50 c. p. s.

Results

1. *Cement pastes.* Test series No. I. Cement brand: Tata C-600 Portland. Water added: 26, 28, 30 and 32 p. c., respectively.
Temperature of steam: 60, 70, 80 and 90° C, respectively.
Introduction into the steam area at the 15th minute.
Time of curing: 8 hours.

The measurement of the electrical resistance of the examined paste began the moment it was placed into the steam area. This provided an opportunity

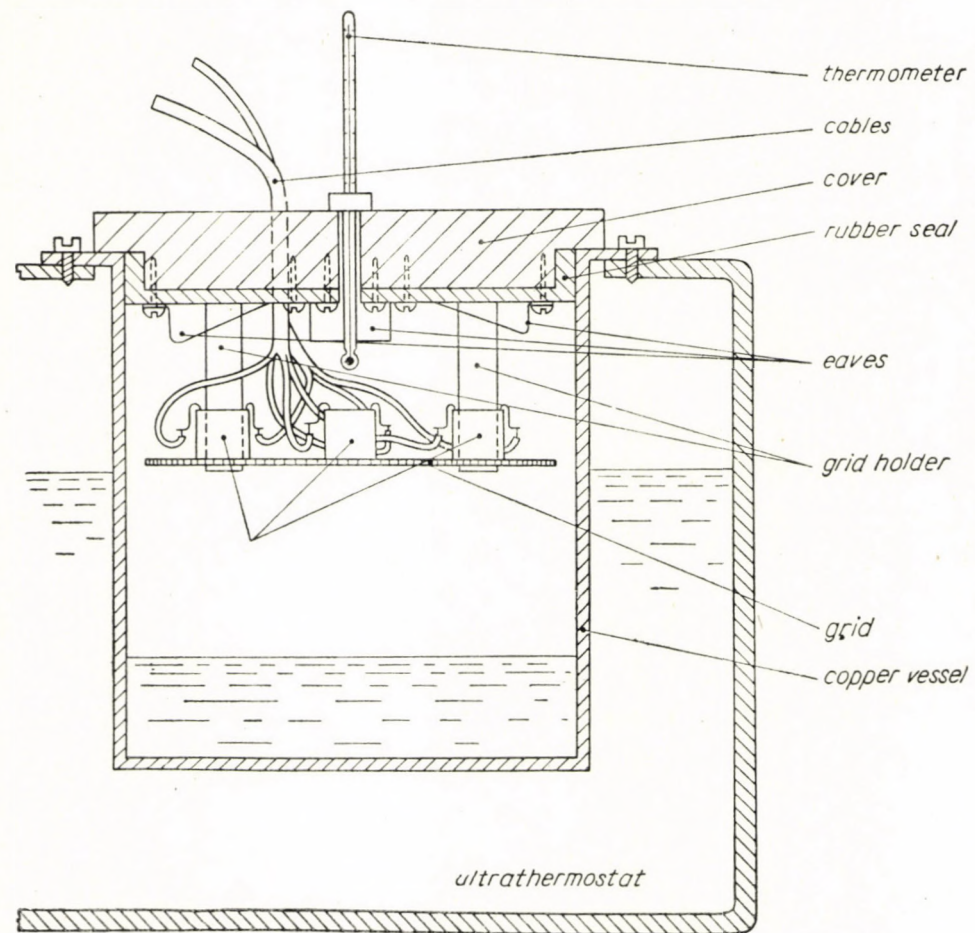


Fig. 1

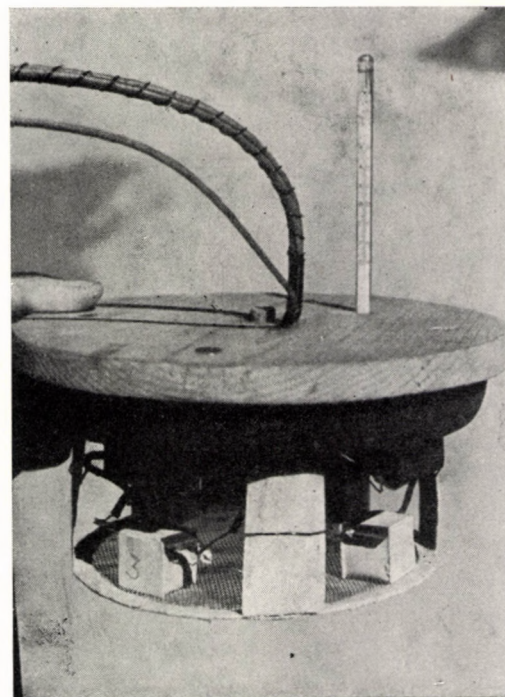


Fig. 1/a

to observe the formation of the minima occurring during the process of setting, as established in the course of an earlier investigation [3,4]. After these characteristic singular points, the R-t curves rise always (Fig. 2). This rise, irrespective of small fluctuations, is almost linear until a certain point, which means that the hardening process advances at an accelerated but constant rate. After this marked rise, a new section follows where the resistance values increase with essentially smaller values for time than in the previous section. The course of the curve is flatter. The change in the rate of resistance-increase justifies the

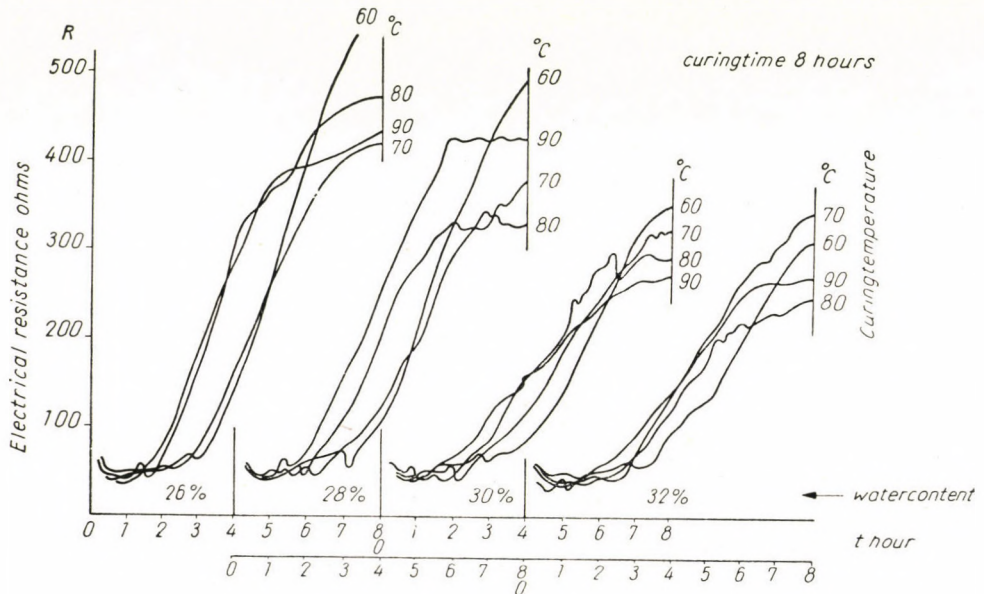


Fig. 2

conclusion that a new structural transformation begins in this section. The paste made with 26 p. c. of water shows the most characteristic deviation at 90° C. This was the first graph from which the possibility of a physicochemical change, due to steam curing, could be concluded. It is further obvious from the graphs that if the water content increases 1) the curves become flatter, 2) and that later, the singular point begins to fluctuate.

Test series No. II

Cement brand: Tata C-600 Portland.

Water added: 26, 28, 30, 32, 35, 40 and 45 and 50 p. c., respectively.

Temperature of steam: 60, 70, 80 and 90° C, respectively.

Introduced into the steam area at the 15th minute.

Time of curing: 15 hours.

The results obtained in the preliminary tests demonstrate that — during the period of hardening — the curve of resistance gradually becomes flatter after a certain point has been reached. For this reason, and also in order to obtain further information, it was necessary to prolong the time of curing. From the graphs for 15 hours curing, especially at higher temperatures, it is clear that there really exists a singular point where the increase of resistance stops and its decrease begins (Fig. 3). This section of the diagram has a great resemblance to the one of crushing strength plotted against isothermic curing, developed by MAROSSZÉKI and KUNSZT. It is well known in practice that while the strength of the specimen increases for a certain time at a given temperature structural changes will cause it to decrease slowly after having passed a certain point of maximum; in consequence of a new structural transformation, the crushing strength will increase once more after a certain time.

That some structural change does occur at the point of the maximum electrical resistance cannot be doubted, for — as has been noted — the conductance ceases to increase and begins to decrease after having reached the singular point at the greater electrical resistance cross section. According to this, the maximum of resistance means a certain moment in the process of steam-curing after which a decrease of strength follows. This phenomenon is confirmed by comparisons with strength standards. The results refer to 2 cm cubes, they are surely valid for larger test specimens also.

On examination of the R-t graphs it was found that — in the case of all pastes — the diagrams for 90° C and 80° C invariably show maxima, while only 35 per cent of the diagrams for 70° C do so; on the other hand, no maxima can be observed in the diagrams for 60° C. This means that 15 hours of steam curing were not enough in the latter case. The graph for 80–90° C — and 35 p. c. shows the most marked wave form. It may be noted that the wave form is smooth up to 35 p. c. but becomes unsteady at a higher water content. This phenomenon needs further investigation. When the steam curing is stopped and the cooling period sets in, the electrical resistance will suddenly rise, of course. The rate of this increase becomes slower between the 20th to the 25th hour, and the pattern of the curve becomes subsequently similar to that of pastes hardened at atmospheric conditions.

Concrete

After concrete mixing there is a liquid phase, which is gradually transformed into a solid one. Owing to alkali compounds, the electrical resistance in the initial liquid phase differs essentially from the narrower electrical cross section of resistance in the solid phase. In the presence of water, hydration begins during storage. The concentration of Ca and OH-ions increased in cement pastes on account of the solvation of alkali compounds and the hydration of

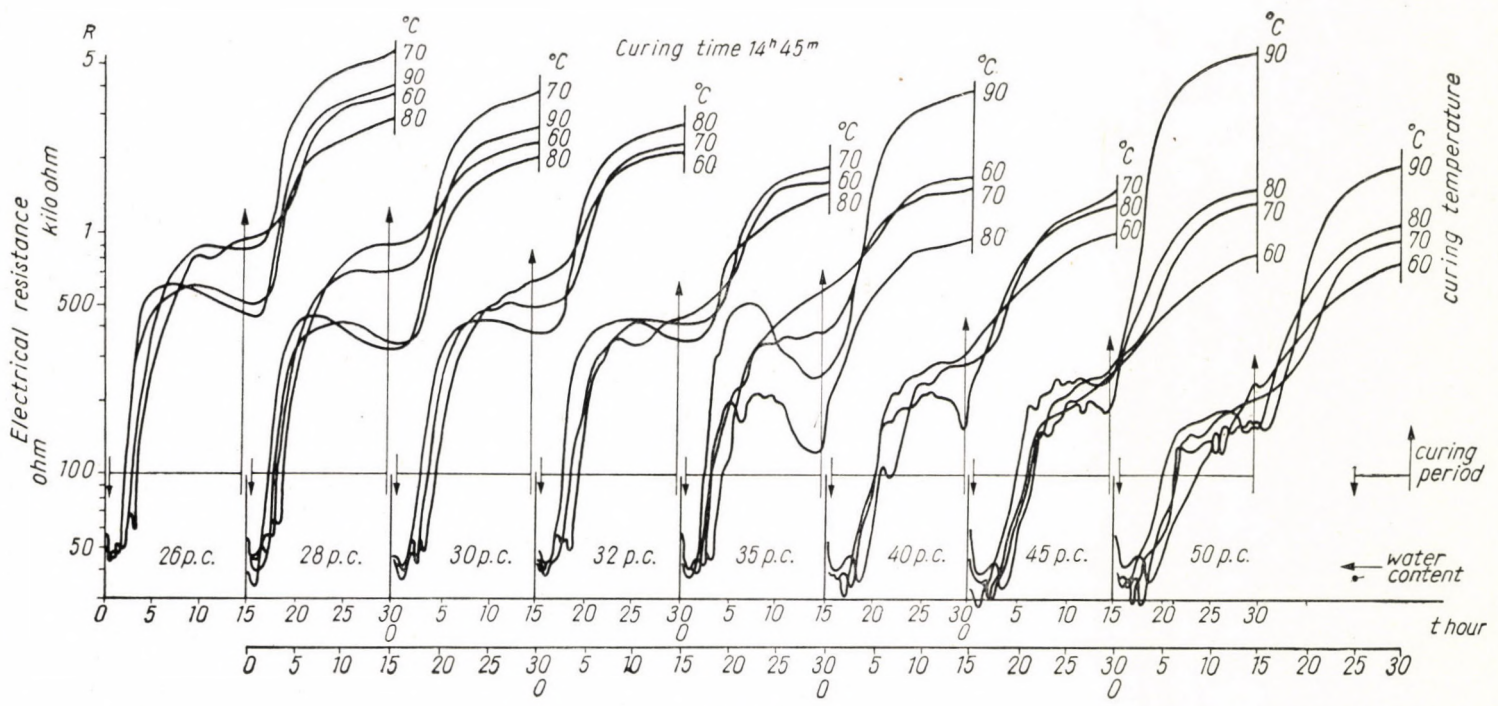


Fig. 3

Ca-silicates. This was demonstrated by our cement-paste investigations [4] where the pH-value of the solution was known. In case of concrete, this phenomenon develops during the period of setting because the initial electrical resistance begins to drop. On the other hand, the preheating begins at the same time. It is well-known, however, that electrical resistance is very heat-dependent; therefore, the decrease in resistance is due to the superposition of the above-mentioned phenomenon and the warming-up of the specimen (Figs. 4, 5). In this section it would be interesting to measure the pH-value of the specimen. On account of the homogeneity of the mix this was possible with cement pastes,

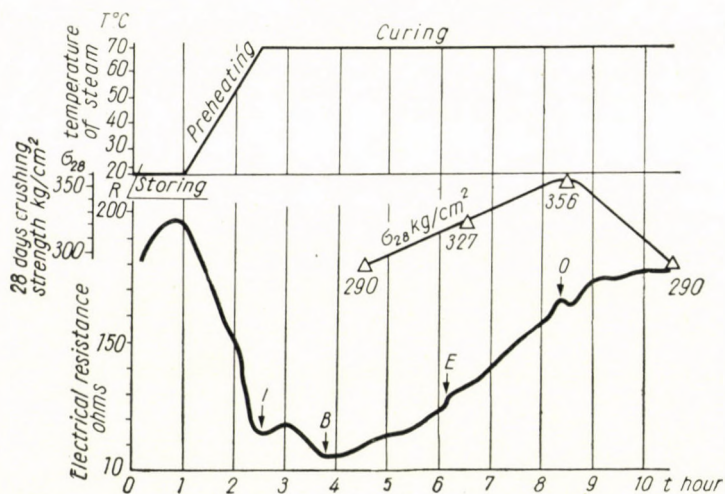


Fig. 4

but is impossible in the case of concrete because of its heterogeneity. We have found no report on such measurements in the available literature. The ion concentration reaches a point of maximum conductivity. At this point of smallest resistance, the unstable system begins to change into a stable one. This means the beginning of the formation of a new system or a new process of crystallization; consequently electrical resistance increases from this point onward. The second minimum of the R-t curve indicates a new section in the change of structure. In cement pastes, this point means the beginning of the setting. Henceforth, resistance increases vigorously for a short time after which the rate of increase slows down. This point probably coincides with the third minimum seen in the curves for cement pastes, indicating the end of the setting time; however, we did not find any third minimum during our recent investigation. After this point, the resistance curve either rises and assumes a constant value, or decreases. According to our tests of rupture, this singularity signifies

the optimal curing time giving the maximum crushing strength of the concrete at 28 days.

Results

In the following, some test results are presented.

Test "F"

Grading of the aggregates:

0 — 0,2 mm	10 p. c.
0,2— 0,5 mm	10 p. c.
0,5— 1,0 mm	10 p. c.
1,0— 5,0 mm	25 p. c.
5,0—10,0 mm	45 p. c.

Cement brand: Tata C-500 Portland.

Dosage of cement: 300 kg/m³.

Water/cement ratio: 0,50.

Time of storage: 1^h00^m.

Preheating: 1^h30^m.

Steam space: 70° C.

Measuring cell: iron.

Dimension of measuring cell: 10 × 10 × 10 cm.

Electrode: Cu, 10 × 50 mm.

Intervals between measurements: 5 to 15 min.

The electrodes were immersed at right angles to the upper surface at measuring distances of 40 mm.

From the diagram in Fig. 4 it is obvious that the zero point of the R-t graph coincides with the maximum of the σ -t strength graph. Point I (first minimum) indicates the initial OH-ion concentration. The second, point B, is the beginning of the setting. At point E, setting is finished.

Test "H"

Grading of the aggregates:

0,2— 1,0 mm	10 p. c.
1,0— 2,5 mm	19 p. c.
2,5— 5,0 mm	27 p. c.
5,0—10,0 mm	44 p. c.

Cement brand: Sowiet Portland.

Dosage of cement: 450 kg/m³.

Water/cement ratio: 0,34.

Time of storage: 1^h30^m.

Preheating: 1^h00^m.

Steam space: 80° C.

Measuring cell: iron.

Dimension of measuring cell: 7 × 7 × 7 cm.

Electrode: Cu, 10 × 50 mm.

The electrodes were placed as described above.

Measurements at 30 min. intervals.

The diagram (Fig. 5) shows a deep wave (ion-concentration) in the initial section but — after a curing time of one hour — the graph rises markedly. The intervals between measurements were 30 minutes; therefore, the circum-

stances of setting could not be observed. It is interesting, however, that there is a striking change in the direction of the graph after a curing of 8 1/2 hours. From this point, the curve takes a flatter shape and decreases after having reached a maximum. The results for strength after 28 days, referring to an average of 3 cubes $7 \times 7 \times 7 \text{ cm}^3$ each, clearly show the coincidence of the two methods (12 hours). A further analysis of the diagram reveals that when the change in the R-t graph occurs (8 1/2 hours) the strength is nearly at a maximum, but reaches the real maximum only after 4 hours of further curing.

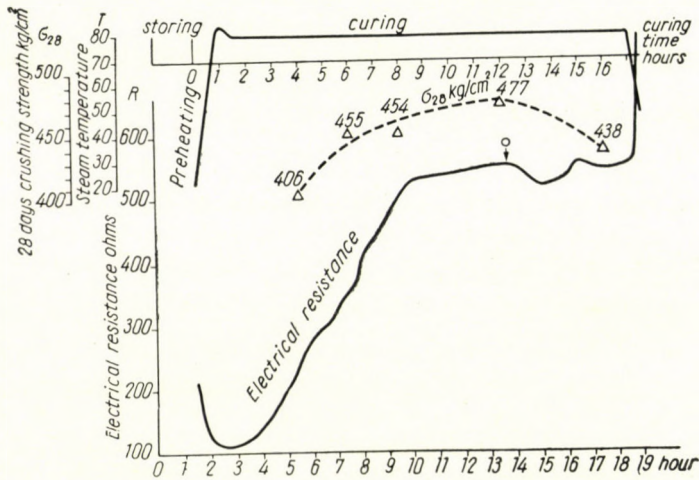


Fig. 5

Taking the economical side of the problem into consideration, it would be useless to continue steam curing after 8 1/2 hours, as the further increase of strength is not more than 23 kg/cm^2 .

Conclusions

The tests prove that the conductometric method is suited for the determination of the optimal steam curing time of cement pastes or any kind of concrete at a given temperature. The R-t graph obtained for steam curing has a marked point (0) which is always characteristic for a given individual case. This point is indicated by the stop or the slowing down of the rate of the increase in resistance in the second section of the diagram. According to our tests, this is the point where the maximum crushing strength at 28 days was obtained.

REFERENCES

1. NÁRAY-SZABÓ, I., SZUK, G.: The determination of the optimal water—cement ratio of concrete by electrical means. Acta. Geol. Tom. III. Fasc. 1—3 pp. 105—114, 1953.
2. NÁRAY-SZABÓ, I., SZUK, G.: A beton optimális vízcementtényezőjének meghatározása elektromos úton ÉTI Sci. Bull. No. 5. 1955. Budapest (In Hungarian).
3. SZUK, G.: Determination of the setting period of cement pastes and mortars by electrical means (Hungarian) ÉTI Budapest 1955 (unpublished).
4. SZUK, G., NÁRAY-SZABÓ, I.: Conductometric Analysis of Setting of Cement Pastes under Isothermic Conditions. Act. Techn. Tom. XXII. Fasc. 1—2, pp. 83—100, 1958.
5. SZUK, G.: Determination of the setting period of cement pastes by conductometric method at higher than normal temperatures ÉTI, Budapest 1957 (unpublished).
6. SZUK, G.: Determination of setting of cement pastes at elevated temperature under isothermic conditions with conductometric method. Act. Techn. Tom. XXIX. 3—4, pp. 419—427.

SUMMARY

Experiments have proved that the conductometric method is suitable for the determination of the optimal duration of steam curing for cement pastes and any kind of concrete at a given temperature. Curves showing the values of electric resistance against time during the process of steam curing reach a point in their later ascending portion where electric resistance ceases to increase or the rate of increase begins to slow down: this indicates the time at which the test specimen reaches the maximum, *i. e.* 28-day, crushing strength. Simultaneously performed breaking tests confirmed the reliability of the conductometric method.

ABBINDUNG UND ERHÄRTUNG HYDRAULISCHER STOFFE

IV. BESTIMMUNG DER OPTIMALEN DAMPFBEHANDLUNGSZEIT VON ZEMENTBREI UND BETON BEI GEGEBENER TEMPERATUR, DURCH DAS KONDUKTOMETRISCHE SYSTEM

G. SZUK

ZUSAMMENFASSUNG

Nach den Experimenten kann die optimale Dampfbehandlungszeit von Zementbrei und jeder beliebigen Betonart bei einer bestimmten Temperatur durch die konduktometrische Methode bestimmt werden. Das während der Wärmebehandlung aufgenommene elektrische Widerstand-Zeit-Diagramm zeigt, in einer späteren ansteigenden Phase, durch Abnahme oder Aufhören der Widerstandszunahme den Zeitpunkt an, bei welchem der Probewürfel die 28 tägige maximale Härte aufweist. Dieser durch das konduktometrische System angezeigte Zeitpunkt wurde durch parallel durchgeführte Bruchversuche ebenfalls bestätigt.

PRISE ET DURCISSEMENT DES MATIÈRES HYDRAULIQUES

IV. DÉTERMINATION, PAR LA MÉTHODE CONDUCTOMÉTRIQUE, DE LA DURÉE OPTIMUM DU TRAITEMENT À LA VAPEUR DE LA PÂTE DE CIMENT ET DU BÉTON, À UNE TEMPÉRATURE DONNÉE

G. SZUK

RÉSUMÉ

D'après les essais, la méthode conductométrique permet de déterminer la durée optimum du traitement à la vapeur à une température donnée de la pâte de ciment, ou de n'importe quelle espèce de béton. Le diagramme résistance électrique-temps enregistré pendant le traitement à la vapeur, indique le moment où le cube d'essai atteint la dureté maximum de 28 jours, par l'arrêt de l'augmentation de la résistance à un point de la section ascendante de la courbe. Ce moment indiqué par les mesures conductométriques a été vérifié par des essais d'écrasement exécutés parallèlement.

СХВАТЫВАНИЕ И ТВЕРДЕНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ,
IV. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ ПРОПАРКИ ЦЕМЕНТНОГО РАСТВОРА И
БЕТОНА ПРИ ДАННОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ КОНДУКТОМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Г. СУК

РЕЗЮМЕ

На основе опытов при помощи кондуктометрического метода возможно определить оптимальное время пропарки цементного раствора и любого сорта бетона при данной температуре. Прекращение или спад роста сопротивления на позднем возрастающем участке диаграммы электрического сопротивления — времени, снятой в период теплового созревания, сигнализирует тот период, при котором образец дает максимальную 28 дневную прочность. Эту точку кондуктометрических измерений подтвердили проводившиеся параллельно испытания на излом.

VERZWEIGUNG DER EINGANGSLEISTUNG IN PLANETENGETRIEBEN MIT DOPPELANTRIEB

Prof. A. JUREK

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN,
LEHRSTUHL FÜR GASMASCHINEN UND KRAFTFAHRZEUGE, TECHNISCHE UNIVERSITÄT BUDAPEST

[Eingegangen am 14. September, 1959]

Die derzeitige Entwicklungsstufe im Maschinenbau ist durch die weitgehende Verwendung von Planetengetrieben gekennzeichnet; dieser Umstand läßt sich dadurch erklären, daß durch diese Bauart manche Probleme gelöst werden können, für welche man mit Hilfe von starren Getrieben nur durch Anwendung von äußerst komplizierten Konstruktionen eine Lösung finden könnte. Diese Arbeit behandelt die mechanischen Verhältnisse des einfachen Planetengetriebes, u. zw. mit doppeltem Antrieb, also in jenem Fall, wo das bei der normalen Bauart ruhende Reaktionsglied auch angetrieben wird. Dieser

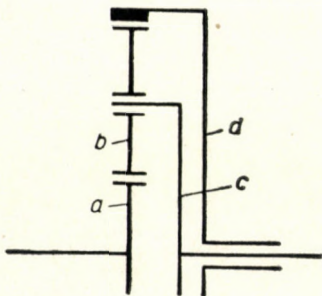


Abb. 1

Doppelantrieb im Planetengetriebe ist durch zwei Antriebs-elemente und ein Abtriebs-element gekennzeichnet; mit anderen Worten haben wir es hier mit dem Fall einer Verzweigung der Eingangsleistung zu tun. Diese Leistungsverzweigung beim Doppelantrieb besteht aus einer primären und einer sekundären Teilleistung. In der primären Abzweigung ist das eigentliche Antriebs-element wirksam, in der sekundären wird durch das Reaktionsglied — das nicht in Ruhelage gehalten wird — eine Änderung der Drehzahlverminderung, ja eventuell eine Drehzahlerhöhung erwirkt.

Ein einfaches Planetengetriebe ist in Abb. 1. dargestellt, wo
a das Sonnenrad,

b das Planetenrad,
c den Steg und
d das Ringrad bedeutet.

Zur Aufnahme der Eingangsleistung und zur Abgabe der Ausgangsleistung können drei Elemente dienen:

das Sonnenrad *a*,
 der Steg *c* (samt Planetenrädern), und
 das Ringrad *d*.

Diesen Hauptelementen entsprechend ist bei antreibendem Sonnenrad *a*, und dem Ringrad als Reaktionsglied, der Steg *c* (samt Planetenrädern) das angetriebene Element; ist der Steg *c* der Antrieb, und das Sonnenrad *a* das Reaktionsglied, so wird das Ringrad *d* zum Abtrieb, usw.

In der Praxis kommen sechs Variationen des einfachen Planetengetriebes in Betracht, die in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind:

Bauart:	I	II	III	IV	V	VI
Antrieb:	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>
Abtrieb:	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>c</i>
Reaktionsglied:	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>

Zunächst nehmen wir an, daß in allen sechs Fällen das Reaktionsglied ruht; in der Praxis wird es durch eine Bremsvorrichtung festgehalten; in allen sechs Fällen erreicht man eine bestimmte Übersetzung des Planetengetriebes, die wir als Grundübersetzung definieren, und deren Zahlenwert durch das Durchmesserverhältnis der Elemente *a* und *d* (und natürlich das Element *c* mit inbegriffen) festgelegt ist. Praktisch aber gibt es gewisse gebundene, dem Konstrukteur durch die Bauart der Innenverzahnung aufgezwungene Maßverhältnisse:

— Der Durchmesser des Sonnenrades ist immer kleiner als der Durchmesser des Ringrades:

$$a < d,$$

— der Durchmesser des Ringrades ergibt sich als Summe aus dem Durchmesser des Sonnenrades und denen der beiden Planetenräder:

$$d = a + 2 \cdot b,$$

— der Durchmesser des Steges ist gleich der halben Summe aus Sonnerraddurchmesser und Ringraddurchmesser:

$$c = \frac{(a + d)}{2}$$

(Bemerkung: einfachheitshalber bezeichnen die Buchstaben a, b, c und d zugleich die Durchmesser der mit denselben Buchstaben bezeichneten mechanischen Elemente.)

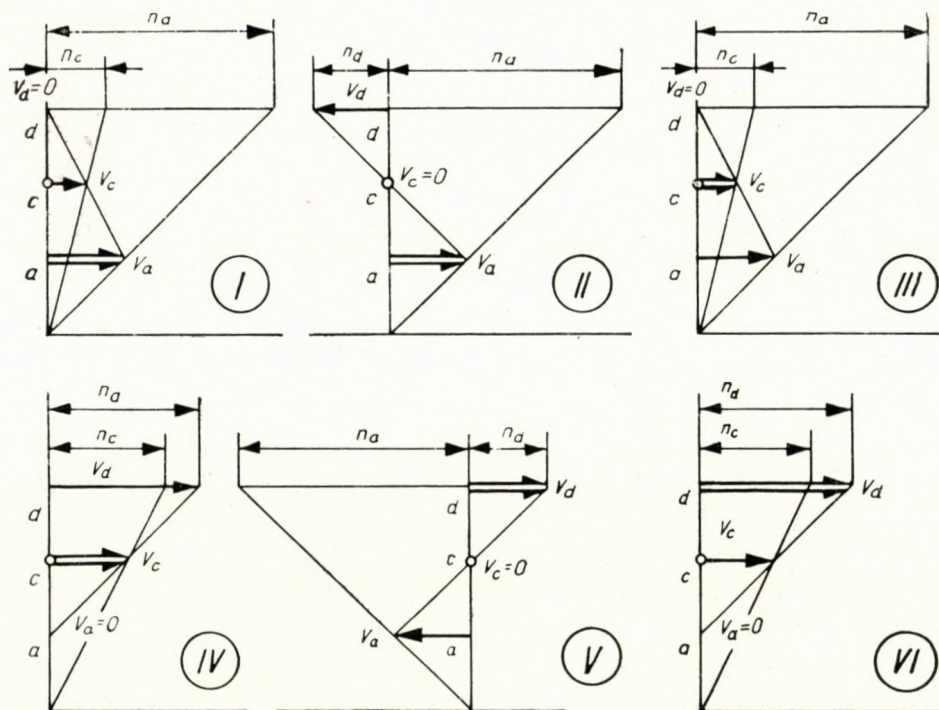


Abb. 2

Das Übersetzungsverhältnis des Planetengetriebes kann durch irgendein bekanntes Verfahren rechnerisch ermittelt werden; es ist aber einfacher, den Geschwindigkeitsplan und auf dessen Grund auch den Drehzahlplan aufzuzeichnen.

In der Abb. 2 sind für die oben angeführten sechs Fälle die Geschwindigkeits- und die Drehzahlpläne aufgezeichnet. Wie ersichtlich, sind in den Fällen I und III bzw. IV und VI die Diagramme paarweise in ihren Linienzügen identisch, da das Durchmesserverhältnis a/d zwischen Sonnenrad und Ringrad unverändert ist; der Unterschied besteht lediglich darin, daß Antrieb und Abtrieb unter sich vertauscht sind. Bezeichnend ist für die Fälle I, III, IV u. VI die gleiche Drehrichtung des Antriebs und des Abtriebs. Das Übersetzungsverhältnis kann aus dem Drehzahlplan leicht bestimmt, oder auch errechnet werden.

Fall I :

Sonnenrad a treibt an,
 Steg c wird angetrieben;
 Geschwindigkeiten:

$$V_a = r_a \cdot \omega_a$$

$$V_c = r_c \cdot \omega_c$$

$$V_a = 2 \cdot V_c$$

Übersetzungsverhältnis:

$$i_I = \frac{\omega_a}{\omega_c}$$

$$\omega_a = \frac{V_a}{r_a} \quad \text{und} \quad \omega_c = \frac{V_c}{r_c}$$

$$i_I = \frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{V_a r_c}{V_c r_a}$$

und da $r_c = (r_a + r_d)/2$, und $V_a = V_c/2$, ist $i_I = \frac{r_a + r_d}{r_a}$.

Setzen wir an Stelle der Halbmesser die Durchmesser ein:

$$2r_a = a, \quad 2r_d = d$$

so erhalten wir die bekannte Formel der Untersetzung:

(ins Langsamere)

$$i_I = \frac{a + d}{a}$$

Fall III :

dieser Fall ist die Umkehrung des Falles I, d. h.
 Steg c treibt an,
 Sonnenrad a wird angetrieben;
 Übersetzungsverhältnis:

$$i_{III} = \frac{a}{a + d}$$

(ins Schnelle).

Fall IV :

Steg *c* treibt an,
 Ringrad *d* wird angetrieben;
 Übersetzungsverhältnis:

$$i_{IV} = \frac{d}{a + d}$$

(ins Schnelle).

Fall VI :

(Umkehrung des Falles IV)
 Ringrad *d* treibt an,
 Steg *c* wird angetrieben;
 Übersetzungsverhältnis, eigentlich Untersetzung:

$$i_{VI} = \frac{a + d}{d}$$

(ins Langsamere).

Die Fälle II und V weichen von den oben behandelten ab, da in diesen Fällen der Abtrieb eine dem Antrieb entgegengesetzte Drehrichtung hat; diese Fälle, wo in beiden Fällen der Steg *c* in der Ruhelage bleibt, erscheinen als Wendegetriebe und sind dadurch gekennzeichnet, daß sich die Planetenräder nur um die eigene Achse drehen, so daß das Umlaufgetriebe ins einfache Zahnradgetriebe ausartet; das Übersetzungsverhältnis ist ein einfacher Bruch aus den Durchmessern *a* und *d*:

Fall II :

Antrieb: Sonnenrad *a*,
 Abtrieb: Ringrad *d*,
 Untersetzung:

$$i_{II} = \frac{d}{a}$$

(Wendegetriebe, ins Langsamere).

Fall V :

Antrieb: Ringrad *d*,
 Abtrieb: Sonnenrad *a*,

Übersetzung:

$$i_V = \frac{a}{d}$$

(Wendegetriebe, ins Schnelle).

Wir wollen bei allen sechs Bauarten die durch die angeführten Formeln definierten Übersetzungen — nämlich unter der definitionsmäßigen Voraussetzung eines ruhenden Reaktionsgliedes — als *Grundübersetzungen* bezeichnen.

In unserer allgemeinen kritischen Betrachtung wollen wir die Typen I und VI, also die beiden durch *Untersetzung* ($i > 1$) und durch die gleichbleibende Drehrichtung im Antrieb und Abtrieb charakterisierten Grundfälle besprechen, indem wir die Variationen der auf irgendeine Art modifizierten Übersetzung analysieren. In der Praxis wird dies mit Hilfe eines vorgeschalteten Umlaufgetriebes verwirklicht, es gibt aber auch andere Lösungsarten. Dieses Problem der effektiven Modifizierung bildet jedoch nicht Gegenstand unserer Arbeit.

Die Modifizierung der Grundübersetzung entsteht, indem man auch das Reaktionsglied antreiben läßt. Das Maß dieser Modifizierung wollen wir mit Hilfe eines Übersetzungskoeffizienten x , d. h. durch die Verhältniszahl zwischen Grundübersetzung und modifizierter Übersetzung ausdrücken. Laut unserer Definition ist also $x = i/i_x$ (anders geschrieben: $i_x = i/x$), worin i = Grundübersetzung, x = Übersetzungskoeffizient und i_x = modifizierte Übersetzung ist.

Es soll hier sofort bemerkt werden, daß wir uns in der Analyse der Fälle I und VI auf einen Bereich beschränken wollen, für welchen $x \geq 1$ als Voraussetzung gilt; anders formuliert: $i_x \leq i$.

In der speziellen Betrachtung wird es zweckmäßig sein, konkret die Variationen der Grundbauart I zu analysieren, weil dieser Typ in der Praxis am meisten vorkommt; wir werden in einem Zahlenbeispiel die Koeffizienten mit Werten $x = 1, 2, 3, 4$ usw. der Reihe nach einsetzen; hierzu wollen wir eine Konstruktion annehmen, bei welcher $d = 3a$, also $i_1 = 4$ ist (laut Formel $i_1 = (a + d)/a = 1 + d/a$).

In diesem Beispiel wird bei $x = 1$, $i_x = 4$; es ist definitionsmäßig selbstverständlich, daß bei $x = 1$ keine wirkliche Modifizierung der Grundübersetzung auftritt; eine andere interessante Variation finden wir in der Annahme $x = i$, in unserem Beispiel $x = 4$; in diesem Fall wird nämlich $i_x = i/x = 4/4 = 1$, mit anderen Worten ergibt hier die Modifizierung einen »direkten Gang«, Antrieb und Abtrieb haben dieselbe Drehzahl, d. h. die Planetenräder führen keine rollende Bewegung aus, das ganze Getriebe bewegt sich als eine starre Verbindung.

Nun kann man durch eine spezielle Hilfskonstruktion den Wert x weiter erhöhen, so daß $x > i$ wird; in diesem Bereich erhalten wir eine modifizierte

Übersetzung mit $i_x < 1$, d. h., es entsteht eine Übersetzung ins Schnelle. Wir kommen darauf noch zurück.

Nun kehren wir auf den konkreten Fall der Bauart I zurück (mit dem Maßverhältnis $d = 3 \cdot a$, und $x = 1$).

In Abb. 3 sehen wir den Geschwindigkeits- und den Drehzahlplan und auch die Umfangskräfte für den Fall I. Bekanntlich ist hier das Sonnenrad a antreibend, der Steg c angetrieben und das Ringrad d als Reaktionsglied in Ruhelage fixiert. Im gewählten Fall ist das Verhältnis der Halbmesser:

$$r_a = 1, r_c = 2, r_d = 3,$$

demgemäß:

$$a = b, c = 2a, d = 3a,$$

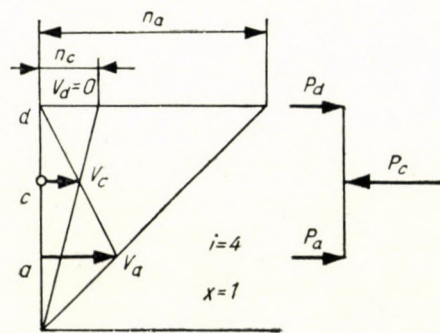


Abb. 3

und die Grundübersetzung

$$i_1 = n_c/n_a = 4 \quad (= i_1)$$

oder auch:

$$i_1 = \frac{a+d}{a} = 4.$$

Der Vollständigkeit halber sollen auch für diesen einfachen Fall die Umfangsgeschwindigkeiten, Drehzahlen, Umfangskräfte, Drehmomente und die übertragenen Leistungen in relativem Maß zur gewählten Einheit angeführt werden.

Umfangsgeschwindigkeiten:

$$V_a = 1, \quad V_c = V_a/2 = 0,5, \quad V_d = 0$$

Drehzahlen:

$$n_a = 1, \quad n_c = n_a/4 = 0,25, \quad n_d = 0$$

Umfangskräfte:

$$P_a = 1 \quad P_c = 2P_a = 2, \quad P_d = P_a = 1$$

Umfangsgeschwindigkeiten:

$$V_a = 1, \quad V_c = 1, \quad V_d = 1$$

Drehzahlen:

$$n_a = 1, \quad n_c = 0,5, \quad n_d = 0,33$$

Untersetzung:

$$i_x = i_2 = n_a/n_c = 2$$

oder auch:

$$i_x = i_2 = \frac{i}{x} = \frac{4}{2} = 2.$$

Vorderhand sind uns die Umfangskräfte und die Leistungen unbekannt; hingegen können wir die Momente bestimmen. Wir können als Ausgangspunkt folgenden Zusammenhang aufschreiben:

$$N_a + N_d = N_M \quad (= N_c).$$

Bekannt ist auch das Ausgangsmoment am Steg c :

$$M_c = i_x \cdot M_M = 2 \cdot 1 = 2,$$

wo das Moment des Antriebsmotors, M_M , die Einheit darstellt.

Für das Verhältnis der Momente gilt das Folgende:

$$M_a : M_c : M_d = 1 : 4 : 3$$

$$M_a = M_c/4 = 2/4 = 0,5$$

$$M_d = 3 \cdot M_c/4 = 6/4 = 1,5$$

$$\text{d. h. } M_c + M_a = M_c.$$

Daher berechnen sich die Umfangskräfte:

$$P_a = M_a/r_a = 0,5/1 = 0,5$$

$$P_c = M_c/r_c = 2/2 = 1 \quad (= 2P_a)$$

$$P_d = M_d/r_d = 1,5/3 = 0,5 \quad (= P_a).$$

und die Leistungen:

$$N_a = M_a \cdot n_a = 0,5 \cdot 1 = 0,5,$$

$$N_d = M_d \cdot n_d = 1,5 \cdot 0,33 = 0,5,$$

$$N_c = M_c \cdot n_c = 2 \cdot 0,5 = 1,$$

primäre Eingangs-Teilleistung

sekundäre Eingangs-Teilleistung

Ausgangsleistung.

In Worten: bei einem Übersetzungskoeffizienten $x=2$ wird die Motorleistung N_M im Eingang auf zwei gleiche Teilleistungen aufgeteilt; hiervon ist N_a die primäre, N_d die sekundäre Abzweigung.

In Formeln:

$$N_a + N_d = N_M \quad (0,5 + 0,5 = 1)$$

und

$$N_a + N_d = N_c.$$

Es folgt die Variation mit $x = 3$.

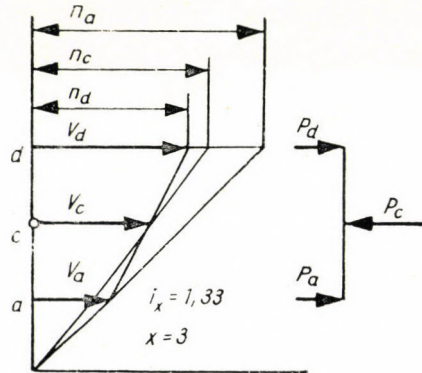


Abb. 5

In Abb. 5 sind Geschwindigkeitsplan, Drehzahlplan und Umfangskräfte für den Fall $x = 3$ dargestellt.

Antreibende Elemente sind

das Sonnenrad a ,

das Ringrad d ;

angetrieben wird der Steg c .

Umfangsgeschwindigkeiten:

$$V_a = 1, \quad V_c = 1,5, \quad V_d = 2.$$

Drehzahlen:

$$n_a = 1, \quad n_c = 0,75, \quad n_d = 0,66.$$

Die modifizierte Übersetzung:

$$i_x = i_3 = n_a/n_c = 1/0,75 = 1,33$$

oder auch:

$$i_x = i/x = 4/3 = 1,33.$$

Ausgangsmoment am Steg c :

$$M_c = i_x \cdot M_M = 1,33 \cdot 1 = 1,33,$$

wobei das Moment des Antriebmotors als Einheit gilt: $M_M = 1$.

Um die Momente zu bestimmen, schreiben wir die folgende Gleichung an:
(Eingangs- und Ausgangsleistung sind einander gleich):

$$N_c = N_M = 1 \quad \text{und} \quad N_c = M_c \cdot n_c$$

$$\text{d. h. } M_c = N_c/n_c = 1/0,75 = 1,33,$$

und weil das Momentenverhältnis im Planetengetriebe unverändert bleibt:

$$M_a = M_c/4 = 1,33/4 = 0,33$$

$$M_d = 3 M_c/4 = 1,00$$

$$M_a + M_d = M_c.$$

Die Umfangskräfte werden aus den Momenten errechnet:

$$P_a = M_a/r_a = 0,33$$

$$P_c = 2P_a = 0,66$$

$$P_d = P_a = 0,33.$$

Die übertragenen Leistungen:

$$N_a = M_a \cdot n_a = 0,33 \cdot 1 = 0,33 \quad \text{primäre Eingangs-Teilleistung;}$$

$$N_c = M_c \cdot n_c = 1,33 \cdot 0,75 = 1 \quad \text{Ausgangs-Leistung;}$$

$$N_d = M_d \cdot n_d = 1 \cdot 0,66 = 0,66 \quad \text{sekundäre Eingangs-Teilleistung.}$$

Es gilt also der Zusammenhang:

$$N_a = 0,33 N_M,$$

und selbstverständlich:

$$N_d = 0,66 N_M$$

und

$$N_a + N_d = N_c = N_M.$$

Nun folgt die Variation mit einem Übersetzungskoeffizienten $x = 4$.

In unserem Zahlenbeispiel ist $i_1 = 4$, d. h. $x = i$, daher ist $i_x = i/x = 1$; das ist der bereits erwähnte Grenzfall des direkten Ganges, mit Planetenrädern, die keine rollende Bewegung ausführen.

In Abb. 6 sind die mechanischen Verhältnisse in einem modifizierten Planetengetriebe dargestellt, wenn $x = i$ (im gegebenen Fall $x = i = 4$). In der Praxis wird dieser Grenzfall mittels eines Kraftschlusses, meistens mit Hilfe einer lösbaren Achsenkupplung verwirklicht. Im Seitenbild der Abbildung

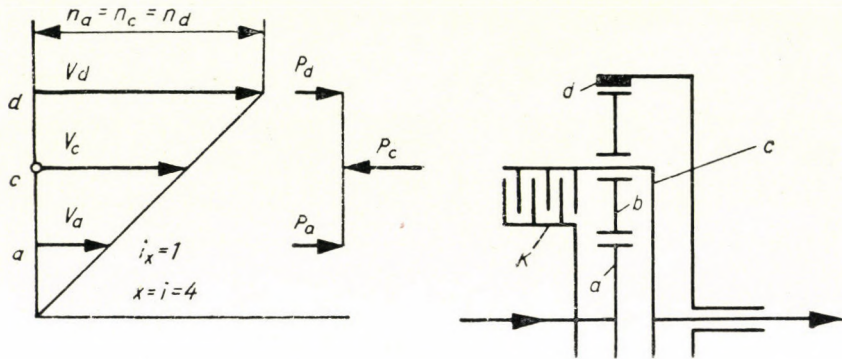


Abb. 6

sehen wir die sogenannte Kurzscluß-Kupplung K , eingebaut zwischen Sonnenrad a und Steg c . Bei dieser Modifizierung lassen sich folgende Werte bestimmen:

Umfangsgeschwindigkeiten:

$$v_a = 1, \quad v_c = 2, \quad v_d = 3$$

Drehzahlen:

$$n_a = 1, \quad n_c = 1, \quad n_d = 1$$

Momente:

$$M_c = N_c/n_c = 1$$

$$M_a = M_c/4 = 0,25$$

$$M_d = 3M_c/4 = 0,75$$

Umfangskräfte:

$$P_a + M_a/r_a = 0,25, \quad P_c = 0,5, \quad P_d = 0,25$$

Leistungen:

$$N_a = M_a n_a = 0,25,$$

$$N_c = M_c n_c = 1,$$

$$N_d = M_d n_d = 0,75,$$

primäre Eingangs-Teilleistung

Ausgangsleistung

sekundäre Eingangs-Teilleistung

Summe der Eingangs-Teilleistungen:

$$N_a + N_d = N_c \quad (= N_M)$$

(gleich der Motorleistung).

Als letzte Variation wollen wir den Fall besprechen, wo wir über den Grenzfall $x = i$ hinausgehen; das ist die Variation einer Übermodifizierung, die mit Hilfe einer besonderen Vorrichtung, z. B. mittels eines zwischen der primären Antriebswelle und dem Ringrad eingebauten Zahnradgetriebes, ausgeführt wird.

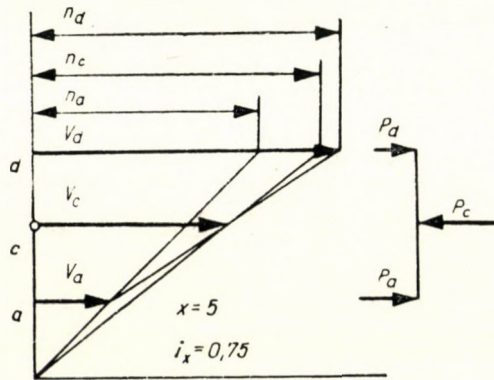


Abb. 7

Abb. 7 zeigt den Geschwindigkeitsplan, den Drehzahlplan und die Umfangskräfte einer Übermodifizierung. In gegebenem Fall ist $x > i$, u. zw. bei $i = 4$, $x = 5$. Die Verhältniszahl der Übermodifizierung kann als ein Faktor λ ausgedrückt werden, nämlich als ein Quotient des Übersetzungskoeffizienten x zu der Grundübersetzung i , d. h. $\lambda = x/i$. In unserem Fall ist $\lambda = 5/4 = 1,25$. Die modifizierte Übersetzung ist also $i_x = i/x = 4/5 = 0,8$. Aus den Vektorplänen ist folgender Zusammenhang ersichtlich:

$$V_d > V_c > V_a$$

und

$$n_d > n_c > n_a$$

Wir wollen jetzt die Gestaltung der Leistungswerte im untersuchten Gebiet überblicken. Die angeführten Beispiele stellen es klar, daß die primäre Eingangs-Teilleistung immer den x -ten Teil der Motorleistung ausmacht. In Formel ausgedrückt ist der Wert der über das Sonnenrad a übertragenen Eingangs-Teilleistung:

$$N_a = N_M/x$$

Die Summe der beiden Teilleistungen:

$$N_a + N_d = N_c = N_M,$$

daher ist die sekundäre Teilleistung über das Ringrad d :

$$N_d = (1 - 1/x) N_M.$$

Verallgemeinert werden die Abzweigungs-Leistungen im modifizierten Planetengetriebe wie folgt ausgedrückt:

$$N_{\text{primär}} = N_M/x$$

$$N_{\text{sekundär}} = (1 - 1/x) N_M$$

$$N_p + N_s = N_M.$$

Mit Hilfe der angeführten Gleichungen können wir die Abzweigungsleistungen für das als Beispiel gewählte Planetengetriebe, für verschiedene Werte des Übersetzungskoeffizienten x , der Reihe nach errechnen; es ergibt sich folgende Tabelle: (Ausgangswert: $i = 4$)

x	i_x	N_a	N_d	
1,00	4	1,00	0,00	↑ Übersetzung ↓
1,10	3,64	0,91	0,09	
1,25	3,2	0,80	0,20	
1,33	3,00	0,75	0,25	
1,50	2,66	0,66	0,33	
2,00	2,00	0,50	0,50	
3,00	1,33	0,33	0,66	
4,00	1,00	0,25	0,75	
5,00	0,75	0,20	0,80	
10,00	0,40	0,10	0,90	

$N_M = N_a + N_d = 1$
 $N_a = N_M/x$
 $N_d = [1 - 1/x] \cdot N_M$

• direkter Gang

Die Tabellenwerte der Teilleistungen sind funktionsmäßig in den Kurven des Bildes (a) der Abb. 8 dargestellt. Die Kurve der Leistungswerte in der primären Abzweigung, ausgedrückt als N_M/x , entspricht einer Funktionsform von

$$y_1 = 1/x,$$

und die Kurve der sekundären Leistungsabzweigung, ausgedrückt als $[1 - 1/x] \cdot N_M$, entspricht einer Funktionsform von

$$y_2 = 1 - 1/x.$$

Beide Gleichungen sind Hyperbelgleichungen, für welche x nur die Werte $x \geq 1$ annehmen kann. Bei einem Koeffizientenwert $x = 2$ sind die Teilleistungen einander gleich (d. h. je die Hälfte der Motorleistung). Bei Zunahme des Koeffizienten x nimmt auch die Sekundärleistung zu, ohne je den vollen Wert der

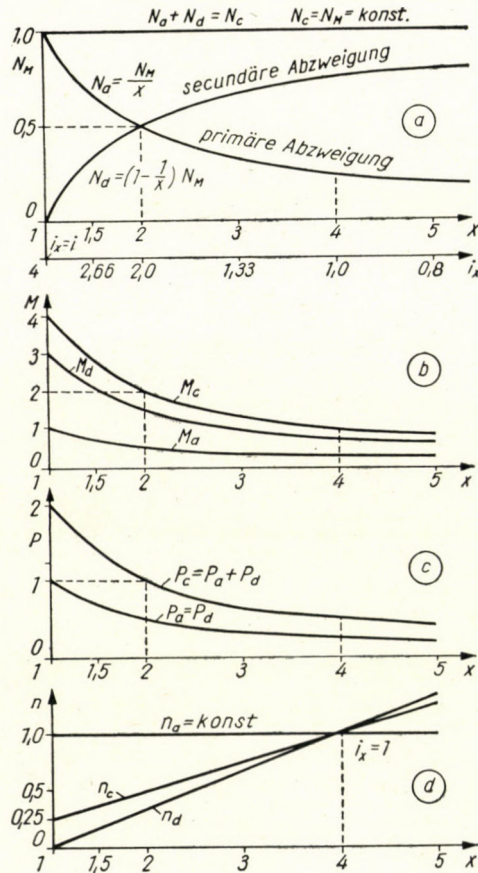


Abb. 8

Motorleistung zu erreichen; in ähnlicher Weise wird mit zunehmendem x die primäre Zweigleistung immer kleiner, ohne aber den Nullwert je zu erreichen. Die Summe der beiden Teilleistungen ist immer der Motorleistung gleich.

ZUSAMMENFASSUNG

Für Planetengetriebe mit doppeltem Antrieb schlägt der Verfasser die Einführung des Begriffes eines Übersetzungskoeffizienten x vor, mit der Definition $x = i/i_x$, und entwickelt eine neue Methode zur Untersuchung der Leistungsabzweigung. Dieses Verfahren ist nicht nur im Falle eines einfachen Planetengetriebes interessant, sondern auch in Fällen von mehre-

ren, aneinander gekoppelten Getrieben. Das Verfahren führt zu einem raschen Ermitteln der gesuchten Werte, insbesondere bei der Untersuchung der Leistungsabzweigungen bei besonders komplizierten Umlaufgetrieben.

POWER BIFURCATION IN PLANETARY GEARS WITH DOUBLE INPUT

A. JUREK

SUMMARY

As proposed by the author, a modification factor expressed by $x=i/i_x$ may be introduced for double drive type planetary gears, and leads to a new method for the investigation of bifurcated power-input. The method is highly interesting not only for simple planetary gears but also for the case of more gears coupled together, and a very quick evaluation of power bifurcation is possible for the especially complicated types of coupled planetary gears.

VALEURS DE LA PUISSANCE BIFURQUÉE DANS LES ENGRENAGES PLANÉTAIRES SIMPLES

A. JUREK

RÉSUMÉ

L'introduction d'un facteur de modification du rapport $x = i/i_x$, pour les engrenages planétaires simples à double action, constitue une nouvelle méthode pour l'examen de la bifurcation de la puissance introduite. La méthode intéresse aussi les engrenages planétaires accouplés. Elle permet également d'obtenir des résultats très rapides à l'examen des bifurcations de la puissance des engrenages planétaires plus compliqués.

ОТВОД МОЩНОСТИ С ПЛАНЕТАРНОЙ ПЕРЕДАЧИ ДВОЙНОГО ПРИВОДА

А. ЮРЕК

РЕЗЮМЕ

Введение в случае планетарных передач рекомендуемого автором коэффициента передачи $x = i/i_x$ является новым методом при анализе отводов мощности. Этот метод интересен не только в случае простых планетарных передач, но и во всех таких случаях, когда работают совместно ряд соединенных между собой планетарных передач. Этот метод очень быстро приводит к результату при анализе отвода мощности очень сложно соединенных планетарных передач.

ОБ АВТОМАТИЧЕСКОМ РЕГУЛИРОВАНИИ ВОЗБУЖДЕНИЯ СИНХРОННЫХ МАШИН В СЛОЖНОЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Г. В. МИХНЕВИЧ

КАНД. ТЕХН. НАУК

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ Г. М. КРЖИЖАНОВСКОГО АН СССР

[Поступило 15. ноября 1959 г.]

Необходимость передачи мощности на дальние расстояния вызвала развитие исследований в области средств повышения устойчивости: повышения напряжения передачи, продольной компенсации, автоматического регулирования возбуждения, асинхронного хода и ресинхронизации, промежуточных синхронных компенсаторов, электрического и механического торможения [Л. 1]. В результате этих исследований стало возможным включение в технические проекты ряда новых устройств, которые в настоящее время проверяются в эксплуатации. Некоторые из этих устройств, вызванные к жизни сооружением дальних передач, оказались эффективным средством улучшения свойств энергосистем и могут быть рекомендованы для широкого использования в объединенных энергосистемах.

Отличительной особенностью объединения энергетических систем является наличие относительно слабых связей. Надежность их работы может быть повышена путем использования вышеперечисленных средств. В связи с относительно небольшими затратами на систему автоматического регулирования возбуждения, использование возможностей, которые появляются при правильном ее построении, следует считать целесообразным и в случае применения других средств повышения устойчивости.

Системы сильного регулирования возбуждения как средство улучшения динамических свойств энергосистемы

К числу средств активного воздействия на систему параллельно работающих синхронных генераторов следует отнести регуляторы возбуждения «сильного» действия, т. е. такие регуляторы, в которых основное регулирование осуществляется в функции отклонения режимных величин генераторов, а для стабилизации используются производные этих величин. Эти регуляторы обладают большим быстродействием. Идея использования производных для предотвращения самораскачивания систем регулирования возбуждения высказывалась еще в конце 30-х годов [Л. 2, 3], но первый

промышленный регулятор сильного действия был создан в последние годы [л. 4].

Одной из существенных особенностей систем сильного регулирования является требование большого быстродействия к элементам схем возбуждения. Желательно запаздывание в возбудителе иметь порядка нескольких сотых долей секунды. В наибольшей степени этому требованию удовлетворяют ионные схемы возбуждения [Л. 8]. Благодаря малой мощности управления ионных схем появляется возможность упрощения конструкции регулятора. В результате исследовательских работ последних лет появилась возможность выполнить регуляторы возбуждения сильного действия без электронных ламп на базе магнитных усилителей и полупроводниковых триодов.

Теоретические и экспериментальные исследования систем сильного регулирования, а также испытание их на электростанциях показали большое преимущество этих систем в сравнении с системами пропорционального регулирования без производных, в которых основное регулирование выполняется на основе тех же принципов, а стабилизация осуществляется за счет увеличения эквивалентного запаздывания в элементах цепи возбуждения.

Использование системы сильного регулирования позволяет достичь предела устойчивости, определяемого из условия постоянства напряжения на зажимах генератора или постоянства напряжения в какой-то точке системы за зажимами генераторов, осуществляя автоматический контроль напряжения в этой точке. Сильное регулирование возбуждения позволяет увеличить предел динамической устойчивости на 8—12% [Л. 5] и активно воздействовать на качество переходных процессов. В системах сильного регулирования возбуждения логарифмический декремент затухания может достигать величины порядка 3—4, а при некоторых условиях можно получить апериодический переходный процесс [Л. 6, 7]. Системы пропорционального регулирования характеризуются слабым демпфированием колебаний. Значение логарифмического декремента затухания в этих системах имеет величину порядка 1,1—1,2.

Развитие энергетического оборудования идет по линии увеличения единичной мощности генераторов. Этому процессу будет способствовать объединение энергетических систем. Благодаря прогрессу в решении проблем непосредственного охлаждения обмоток появляется возможность создания турбогенераторов 500 МГВТ и более. Системы сильного регулирования возбуждения могут содействовать созданию экономически наиболее целесообразных конструкций сверхмощных турбогенераторов с непосредственным охлаждением. Для повышения к. п. д. таких машин необходимо идти на увеличение реактивностей турбогенераторов. Для этих машин характерно пониженное значение постоянной инерции. Использование регуляторов возбуждения сильного действия на таких крупных генераторах позволяет

компенсировать ухудшение параметров этих машин и обеспечить улучшение их динамических свойств, как в отношении увеличения пределов устойчивости, так и в отношении увеличения интенсивности демпфирования колебаний.

Некоторые особенности анализа статической устойчивости при систем наличии регуляторов возбуждения сильного действия

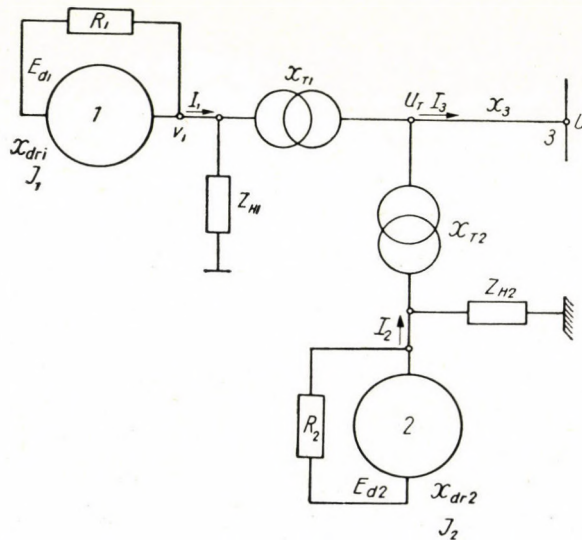
В расчетах устойчивости систем, содержащих генераторы с регуляторами возбуждения, работающими в функции отклонения режимных величин без зоны нечувствительности [Л. 2], принято учитывать эффект регулирования путем замещения генераторов его переходной реактивностью (x'_d) и введения условия постоянства э. д. с. за этой реактивностью ($E'_d = \text{const}$). При такой схеме замещения генераторов могут быть использованы упрощенные критерии устойчивости, разработанные для нерегулируемых систем [Л. 9]. По аналогии эти же критерии могут быть использованы для систем, содержащих регуляторы сильного действия, полагая, что они обеспечивают постоянство напряжения на зажимах генераторов.

Такие расчеты позволяют получить представление о запасе устойчивости при правильно выбранных режимах регуляторов. Однако использование упрощенных критериев не позволяет вскрыть специфических особенностей рассматриваемых систем регулирования и дать рекомендации по конструированию и эксплуатации таких систем. Такие расчеты не позволяют получить ответ на вопрос — какие следует выбрать параметры регулирования и режимы регуляторов, чтобы обеспечить устойчивость системы и высокое качество переходных процессов.

Существующие методы анализа устойчивости систем автоматического регулирования могут быть использованы для энергетических систем, в которых имеются регуляторы сильного действия, но при увеличении числа генераторных единиц в анализируемой системе задача получается весьма сложной. Без использования электронных вычислительных машин эти методы позволяют анализировать устойчивость систем сильного регулирования возбуждения только при очень больших упрощениях практически при условии, что систему можно свести к одному генератору, работающему через линию электропередачи на шины бесконечной мощности. До последнего времени эта схема была основной для изучения свойств системы сильного регулирования возбуждения.

Значительно большие возможности открываются при использовании современных средств исследования: электродинамических моделей и электронных вычислительных машин [Л. 6, 10, 11, 14]. Исследование устойчивости параллельной работы одинаковых генераторов станции, снабженных

регуляторами возбуждения сильного действия показало, что замещение группы генераторов одним эквивалентным может привести к ошибочным результатам в расчете устойчивости [Л. 10, 11, 12, 13]. Для получения правильного результата необходимо n генераторов станции замещать двумя генераторами, эквивалентными этой группе по статическим характеристикам. Для расчета устойчивости в этом случае принципиальное значение имеет учет малых запаздываний в регуляторе. Необходимость усложнения расчетной схемы объясняется тем, что при наличии регуляторов сильного действия следует учитывать взаимодействие систем регулирования парал-



Фиг. 1. Система двух параллельно работающих генераторов

лельно работающих генераторов, т. е. рассматривать систему, характеризующуюся несколькими степенями свободы. В такой системе роторы генераторов в общем случае совершают сложное движение, имеющее для группы одинаковых машин две составляющих: колебание в фазе и в противофазе. Исследование устойчивости составляющих сложного движения можно проводить порознь на схемах замещения группы генераторов одним. Такая возможность появляется в результате разложения характеристического уравнения на множители. Регулятор сильного действия, активно воздействуя на систему, при правильной настройке может вызвать интенсивное демпфирование колебаний обоих видов, а при ошибочной настройке самораскачивание системы в фазе или в противофазе.

Сложное движение в системе генераторов с различными режимами и параметрами имеет ту же природу, но анализ свойств такой системы проводить значительно сложнее. Для качественного анализа процессов в такой

системе в некоторых случаях может быть использована ближайшая кратная система, т. е. такая система, в которой строго выдерживаются соотношения между параметрами, входящих в нее генераторов. Для системы двух машин (фиг. 1), работающих на мощную приемную систему, условия кратности можно записать следующим образом:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{\dot{Y}_{13}}{\dot{Y}_{23}} = \frac{x_{dr2}}{x_{dr1}} = \frac{x'_{dr2}}{x'_{dr1}} = \frac{1}{m}, \delta_1 = \delta_2, T_{d01} = T_{d02}, \quad (1)$$

а также требуется равенство параметров возбудителей и регуляторов. Здесь приняты следующие обозначения:

- $M_1; M_2$ — постоянные инерции генераторов,
 $P_1; P_2$ — активная мощность,
 $D_1; D_2$ — демпферные коэффициенты,
 $\dot{Y}_{13}; \dot{Y}_{23}$ — взаимные проводимости,
 $x_{dr1}; x_{dr2}$ — синхронные реактивности генераторов,
 $x'_{dr1}; x'_{dr2}$ — переходные реактивности генераторов,
 $T_{d01}; T_{d02}$ — постоянные времени роторов,
 $\delta_1; \delta_2$ — углы смещения осей роторов генераторов относительно вектора U .

Условия кратности всегда выполняются для машин, имеющих одинаковые параметры и режимы. Основной особенностью кратных систем является то, что их характеристические уравнения расщепляются на множители по числу степеней свободы. Это дает возможность самостоятельного рассмотрения условий устойчивости каждой из составляющих сложного движения системы n -кратных генераторов. Рассмотрим систему из двух кратных машин (фиг. 1), для которых выше приведены условия кратности. Уравнение системы можно записать следующим образом:

$$(M_1 p^2 + D_1 p + S_{\delta 11}) \Delta \delta_1 + S_{\delta 12} \Delta \delta_2 + S_{E11} \Delta E_{d1} + S_{E12} \Delta E_{d2} = 0 \quad (2)$$

$$S_{\delta 21} \Delta \delta_1 + (M_2 p^2 + D_2 p + S_{\delta 22}) \Delta \delta_2 + S_{E21} \Delta E_{d1} + S_{E22} \Delta E_{d2} = 0 \quad (3)$$

$$F_{11}(p) \Delta \delta_1 + F_{12}(p) \Delta \delta_2 + G_{11}(p) \Delta E_{d1} + G_{12}(p) \Delta E_{d2} = 0 \quad (4)$$

$$F_{21}(p) \Delta \delta_1 + F_{22}(p) \Delta \delta_2 + G_{21}(p) \Delta E_{d1} + G_{22}(p) \Delta E_{d2} = 0 \quad (5)$$

Здесь:

$$F_{11}(p) = N_{11} p + \frac{1}{(1 + T_v p)(1 + T_f p)} \left[K_{\delta 11} + \frac{K'_{\delta 11} p}{1 + T_1 p} + \frac{K''_{\delta 11} p^2}{(1 + T_2 p)^2} \right] \quad (6)$$

$$F_{12}(p) = N_{12} p + \frac{1}{(1 + T_v p)(1 + T_f p)} \left[K_{\delta 12} + \frac{K'_{\delta 12} p}{1 + T_1 p} + \frac{K''_{\delta 12} p^2}{(1 + T_2 p)^2} \right] \quad (7)$$

$$G_{11}(p) = 1 + T_{d11} p + \frac{1}{(1 + T_v p)(1 + T_f p)} \left[K_{E11} + \frac{K'_{E11} p}{1 + T_1 p} + \frac{K''_{E11} p^2}{(1 + T_2 p)^2} \right] \quad (8)$$

$$G_{12}(p) = T_{d12} p + \frac{1}{(1 + T_v p)(1 + T_f p)} \left[K_{E12} + \frac{K'_{E12} p}{1 + T_1 p} + \frac{K''_{E12} p^2}{(1 + T_2 p)^2} \right] \quad (9)$$

$$S_\delta = \frac{\partial p}{\partial \delta}, \quad S_E = \frac{\partial p}{\partial E_d},$$

а индексы указывают какому генератору принадлежит данная величина.

T_d и N — коэффициенты, определяемые параметрами и режимами систем [Л. 12].

T_v, T_f, T_1, T_2 — постоянные времени обмотки возбудителя и фильтров, звеньев получения первой и второй производной.

$K_\delta, K'_\delta, K''_\delta; K'_E, K''_E, K'''_E$ — коэффициенты регулирования по отклонениям и производным углов δ_1, δ_2 и э. д. с. E_{d1}, E_{d2} .

Значение операторных коэффициентов $F_{22}(p), F_{21}(p)$; и $G_{22}(p), G_{21}(p)$ могут быть получены соответствующей заменой цифровых индексов в уравнениях (6), (7), (8) и (9).

Матрицу системы уравнений (2)—(5) представим состоящей из четырех субматриц:

$$\begin{vmatrix} J & S_E \\ F & G \end{vmatrix} \quad (10)$$

Субматрицы J, S_E, F, G могут быть легко преобразованы к треугольной форме. Предварительно умножая уравнения (2) на m , прибавляем к первому столбцу матрицы (10) второй, а к третьему четвертый, затем из второй строки вычтем первую, а их четвертой третью. После этого получаем:

$$\|J\| = \begin{vmatrix} m(J_1 p^2 + S_{\delta 11} + S_{\delta 12}) & mS_{\delta 12} \\ 0 & J_2 p^2 + S_{\delta 22} - mS_{\delta 12} \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$\|S_E\| = \begin{vmatrix} mS_{E11} + S_{E12} & mS_{E12} \\ 0 & S_{E22} - mS_{E12} \end{vmatrix} \quad (12)$$

$$\|G\| = \begin{vmatrix} G_{11}(p) + G_{12}(p) & G_{12}(p) \\ 0 & G_{22}(p) - mG_{21}(p) \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$\|F\| = \begin{vmatrix} F_{11}(p) + F_{12}(p) & F_{12}(p) \\ 0 & F_{22}(p) - F_{21}(p) \end{vmatrix} \quad (14)$$

Определитель системы (2)—(5) находится по формуле:

$$\Delta = |JG - JFJ^{-1}S_E|, \quad (15)$$

Определитель (15) распадается на множители. Приравнивая каждый из них к нулю, получим характеристические уравнения для составляющих сложного движения в фазе и противофазе:

$$(J_1 p^2 + S_{\delta 11} + S_{\delta 12}) [G_{11}(p) + G_{12}(p)] - (S_{E11} + S_{E12}) [F_{11}(p) + F_{12}(p)] = 0 \quad (16)$$

$$(J_2 p^2 + S_{\delta 22} - mS_{\delta 12}) [G_{22}(p) - mG_{21}(p)] - (S_{E22} - mS_{E21}) [F_{22}(p) - mF_{21}(p)] = 0 \quad (17)$$

Характеристические уравнения (16) и (17) можно представить как решение соответствующих систем уравнений, написанных для генераторов, которые являются эквивалентными для двух кратных генераторов при раздельном анализе составляющих сложного движения в фазе и в противофазе. Уравнению (16) соответствует система:

$$(J_1 p^2 + S_{\delta 11} + S_{\delta 12}) \Delta \delta_f + (S_{E11} + S_{E12}) \Delta E_{df} = 0 \quad (18)$$

$$[F_{11}(p) + F_{12}(p)] \Delta \delta_f + [G_{11}(p) + G_{12}(p)] \Delta E_{df} = 0, \quad (19)$$

а уравнению (17) соответствует система:

$$(J_2 p^2 + S_{\delta 22} - mS_{\delta 12}) \Delta \delta_n + (S_{E22} - mS_{E12}) \Delta E_{dn} = 0 \quad (20)$$

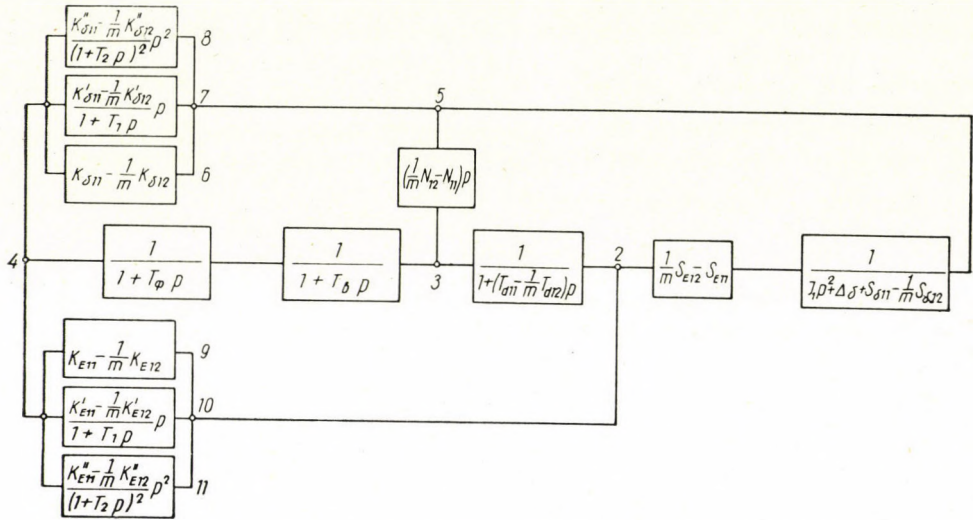
$$[F_{22}(p) - mF_{12}(p)] \Delta \delta_n + [G_{22}(p) - mG_{21}(p)] \Delta E_{dn} = 0 \quad (21)$$

Уравнения (18), (19) и (20), (21) позволяют построить обобщенную структурную схему регулирования возбуждения для каждого вида движения. Эти схемы могут быть весьма полезны для изучения свойств систем сильного регулирования. На фиг. 2 изображена обобщенная структурная схема системы регулирования возбуждения для движения в противофазе двухкратных генераторов. Эта схема построена на основе уравнений (20) и (21).

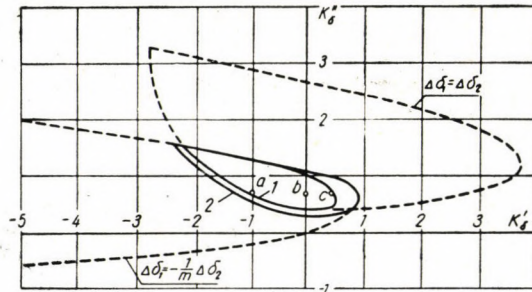
Полученные выводы о разложении определителя системы двухкратных генераторов на множители могут быть распространены на систему с любым числом кратных машин.

Уравнения (18), (19) и (20), (21) позволяют отдельно изучать устойчивость движения в фазе и устойчивость движения в противофазе. Система регулирования возбуждения должна удовлетворять условиям устойчивости, полученным для обеих пар уравнений. Поскольку основной задачей расчета устойчивости систем сильного регулирования является определение коэффициентов регулирования по производным, при которых обеспечивается

устойчивость системы, то весьма удобным бывает использование метода построения областей устойчивости в плоскости коэффициентов регулирования по производным. Область устойчивости выделяет все значения коэффициентов регулирования по производным, при которых система оказывается



Фиг. 2. Структурная схема системы регулирования возбуждения для движения в противофазе двух параллельно работающих кратных генераторов



Фиг. 3. Область устойчивости системы кратных генераторов

1 — $\Delta p = f(\Delta U_1, p\delta, p^2\delta)$. 2 — $\Delta U_p = f(\Delta U_1, p\delta, p^2\delta)$.

устойчивой. Если имеется система двухкратных генераторов, область устойчивости системы будет общий участок областей устойчивости движения в фазе и в противофазе.

На фиг. 3 представлены области устойчивости в плоскости коэффициентов регулирования по первой и второй производным угла δ для кратных генераторов. Пунктиром изображены области устойчивости движения в

фазе ($\Delta\delta_1 = \Delta\delta_2$) и в противофазе ($\Delta\delta_1 = -\frac{1}{m}\Delta\delta_2$), которые друг относительно друга смещены, поэтому их общий участок, представляющий область устойчивости сложного движения, имеет значительно меньшие размеры. Область сложного движения 1 относится к случаю, когда основное регулирование осуществлялось в функции отклонения напряжения на зажимах (U_T), а 2 — к случаю, когда основное регулирование осуществлялось в функции напряжения в общей точке (U_T).

Область устойчивости сложного движения имеет характерную структуру. Правая и верхняя часть границы области сложного движения совпадает с границей области устойчивости движения в противофазе, а левая и нижняя части границы — с границей области устойчивости движения в фазе. Структура границ области устойчивости сложного движения позволяет оценивать характер свободного движения по тому, где расположена точка, соответствующая настройке регуляторов. В точке *a* преобладающим будет движение в фазе, а в точке *c* — в противофазе. В точке *b* будут существовать обе составляющие. Таким образом, изменяя настройку, можно изменять качество переходного процесса в системе. Для успешного решения задачи повышения устойчивости и улучшения качества переходных процессов необходимо иметь достаточно большие размеры областей устойчивости, которые могут быть обеспечены путем выбора правильной структуры закона регулирования.

Полученные выводы об особенностях анализа устойчивости системы двухкратных генераторов могут быть распространены на систему с любым числом кратных машин.

Проведенный анализ свойств систем, в которых нарушаются условия кратности, показал, что отклонения в значениях основных параметрах в пределах 10—20% не оказывает существенного влияния на результаты расчета устойчивости. Нарушение кратности системы вследствие отклонения параметров возбудителей и регуляторов оказывает незначительное влияние на условия устойчивости.

Анализ работы системы некрatных генераторов затруднен тем, что определитель системы не расщепляется на множители. Анализ ближайшей кратной системы может оказать помощь для получения качественной характеристики процессов в некрatной системе.

О синтезе оптимальной структуры закона регулирования сложной системы

Для реализации возможностей, которые открывает использование регуляторов сильного действия, необходимо иметь методику синтеза структуры закона регулирования.

В основу синтеза должны быть положены обобщенные характеристики, отражающие структурные особенности систем сильного регулирования.

Сигналы первой и второй производных режимных величин генераторов, которые используются для стабилизации, содержат несколько составляющих, пропорциональных соответствующим производным э. д. с. E_d и угла δ генераторов системы. Число этих составляющих определяется числом генераторов в системе. Установлено, что величина верхнего предельного значения коэффициентов регулирования по производным зависит от относительной величины этих составляющих в сложном сигнале производных режимных величин. Правильным выбором величин этих составляющих можно в десятки раз изменить верхнее предельное значение коэффициентов регулирования, а тем самым увеличить размеры областей устойчивости. Это положение особенно легко проследить для систем кратных генераторов. Задача синтеза оптимальной структуры кратных генераторов значительно упрощается, т. к. согласно уравнениям (18), (19) и (20), (21) сигналы первой и второй производной в схемах замещения для каждого нормального колебания имеют только две составляющих, пропорциональных э. д. с. E_d и углу δ некоторого эквивалентного генератора для данного вида движения. В этом случае легко получить обобщенные кривые, которые дают зависимость максимально допустимого значения коэффициента регулирования по второй производной (K_m'') от соотношения коэффициентов усиления в контуре вторых производных э. д. с. $E_d(K_E''$) и угла $\delta(K_\delta'')$:

$$K_{\delta m}'' = f\left(\frac{K_E''}{K_\delta''}\right) = f(a''). \quad (22)$$

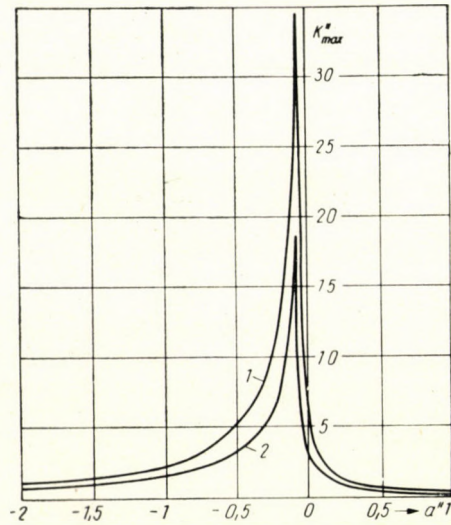
Применительно к схеме, изображенной на фиг. 2:

$$K_E'' = K_{E11}'' - \frac{1}{m} K_{E12}'' \quad (23)$$

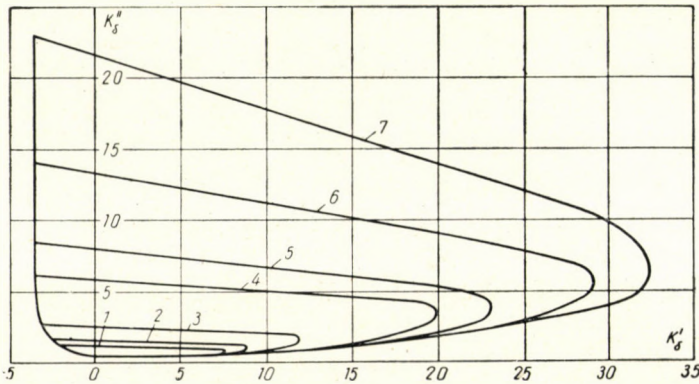
$$K_\delta'' = K_{\delta 11}'' - \frac{1}{m} K_{\delta 12}'' \quad (24)$$

На фиг. 4 приведены зависимости $K_\delta'' = f(a'')$ для движения в фазе и в противофазе для конкретной системы из двух кратных генераторов. Эти кривые имеют характерный ярковыраженный максимум, которому соответствует оптимальное значение a'' для данного вида движения. Эти кривые подтверждают, что правильным выбором режимов контуров вторых производных угла δ (1,5, 7, 8, 4, 3, 2, 1 фиг. 2) и э. д. с. E_d (2, 10, 11, 4, 3, 2 фиг. 2) можно во много раз увеличить верхнее предельное значение коэффициентов регулирования по производным и соответственно этому размеры областей

устойчивости. На фиг. 5 изображены области устойчивости в плоскости K'_s, K''_s для той же системы при различных значениях a'' . Большие размеры областей устойчивости позволяют успешно решить задачи увеличения предела статической устойчивости и обеспечения интенсивного демпфирования колебаний сложного движения. Наибольшее значение для получения раз-



Фиг. 4. Обобщенные зависимости $K''_m = f(a'')$. 1 — движение в фазе; 2 — движение в противофазе



Фиг. 5. Области устойчивости движения в фазе при различных значениях a''

№ области	1	2	3	4	5	6	7
Значение a''	0,3	0,2	0,1	0	-0,02	-0,04	-0,05

меров областей устойчивости имеет обеспечение оптимального значения a'' . К величине a' предъявляются менее жесткие требования. Поэтому можно полагать $a' = a''$.

При использовании производных одной режимной величины значение a'' фиксировано. Оно определяется как отношение суммы (разности) производных этой величины по э. д. с. E_d генераторов к сумме (разности) производных по углу δ генераторов. Так, например, для схемы, изображенной на фиг. 2, при использовании производных напряжения на зажимах U_1 .

$$K''_E = K''_U \left(\frac{\partial U_1}{\partial E_{d1}} - \frac{1}{m} \frac{\partial U_1}{\partial E_{d2}} \right) \quad (25)$$

$$K''_\delta = K''_U \left(\frac{\partial U_1}{\partial \delta_1} - \frac{1}{m} \frac{\partial U_1}{\partial \delta_2} \right) \quad (26)$$

Для того, чтобы изменить в требуемом направлении величину a'' необходимо использовать сочетание двух режимных величин. Выбирая соответствующим образом коэффициенты долевого участия режимных величин, можно обеспечить оптимальное значение a''_n .

Определение коэффициентов долевого участия может производиться для кратной системы с помощью простых аналитических формул. В качестве примера рассмотрим определение коэффициента долевого участия при использовании сочетания производных напряжением U_1 и тока I_1 для движения в противофазе кратной системы из двух машин (фиг. 2). Величина a''_n будет определяться по уравнению:

$$a''_n = \frac{K''_I \left(\frac{\partial I_1}{\partial E_{d1}} - \frac{1}{m} \frac{\partial I_1}{\partial E_{d2}} \right) - K''_U \left(\frac{\partial U_1}{\partial E_{d1}} - \frac{1}{m} \frac{\partial U_1}{\partial E_{d2}} \right)}{K''_I \left(\frac{\partial I_1}{\partial \delta_1} - \frac{1}{m} \frac{\partial I_1}{\partial \delta_2} \right) - K''_U \left(\frac{\partial U_1}{\partial \delta_1} - \frac{1}{m} \frac{\partial U_1}{\partial \delta_2} \right)} \quad (27)$$

Здесь K''_I и K''_U — коэффициенты регулирования по производным тока и напряжения. Полагая коэффициент долевого участия производной напряжения за единицу, коэффициент долевого участия тока:

$$n''_I = \frac{K''_I}{K''_U} \quad (28)$$

Значение n''_I определится по уравнению, полученному из (27) с учетом (28):

$$n''_I = \frac{\left(\frac{\partial U_1}{\partial E_{d1}} - \frac{1}{m} \frac{\partial U_1}{\partial E_{d2}} \right) - a''_n \left(\frac{\partial U_1}{\partial \delta_1} - \frac{1}{m} \frac{\partial U_1}{\partial \delta_2} \right)}{\left(\frac{\partial I_1}{\partial E_{d1}} - \frac{1}{m} \frac{\partial I_1}{\partial E_{d2}} \right) - a''_n \left(\frac{\partial I_1}{\partial \delta_1} - \frac{1}{m} \frac{\partial I_1}{\partial \delta_2} \right)} \quad (29)$$

Для определения n''_l , обеспечивающего оптимальное значение a''_r , достаточно в уравнение (29) подставить значение a''_n , определенное по обобщенной зависимости $K''_m(a''_n)$ (фиг. 4).

Если ограничиваться использованием производных двух режимных величин, то вышенайденное значение n''_l будет для движения в фазе определять некоторое значение a''_f , которое будет отличным от оптимального.

Величину a'' можно найти по уравнению:

$$a''_f = \frac{n''_l \left(\frac{\partial I_1}{\partial E_{d1}} + \frac{\partial I_1}{\partial E_{d2}} \right) - \left(\frac{\partial U_1}{\partial E_{d1}} + \frac{\partial U_1}{\partial E_{d2}} \right)}{n''_l \left(\frac{\partial I_1}{\partial \delta_1} + \frac{\partial I_1}{\partial \delta_2} \right) - \left(\frac{\partial U_1}{\partial \delta_1} + \frac{\partial U_1}{\partial \delta_2} \right)}. \quad (30)$$

Таким образом, при использовании производных двух режимных величин нельзя обеспечить одновременно оптимальное значение для a''_f и a''_n . Поэтому необходимо выбирать n''_l из соображений обеспечения приемлемых величин a'' для обеих составляющих сложного движения. Если имеется необходимость одновременно обеспечить оптимальные значения a''_f и a''_n , то необходимо взять производные большего числа режимных величин (Л. 7).

Синтез оптимальной структуры закона регулирования для системы некратных генераторов представляет задачу значительно более сложную, которая требует своего решения в дальнейшем.

Заключение

Системы регулирования возбуждения синхронных генераторов с использованием производных режимных величин являются средством активного воздействия на переходные режимы энергетических систем. Они позволяют повысить предел статической, динамической устойчивости и значительно улучшить качество переходных процессов. Значительное улучшение динамических свойств систем открывает возможности создания более экономичных синхронных машин.

Правильное построение системы регулирования возбуждения с использованием производных режимных величин требует развития методов анализа устойчивости и переходных процессов в сложных системах. Задача значительно упрощается для системы кратных машин, в которой анализ устойчивости может проводиться с помощью эквивалентирования кратных машин одной машиной для каждой из составляющих сложного движения системы. Качественный анализ процессов в сложной системе можно проводить по схеме ближайшей кратной системы.

Для системы кратных машин может быть предложена методика синтеза оптимальной структуры закона регулирования. Эта методика основана

вается на использовании обобщенных зависимостей верхнего предельного значения коэффициента регулирования по производным от величины отдельных составляющих сложного сигнала регулирования. Методика синтеза позволяет отказаться от сопоставления свойств случайно выбранных вариантов структуры закона регулирования и путем расчета определить оптимальную структуру, которая в наилучшей степени отвечает задаче увеличения предела устойчивости и обеспечения высокого качества переходных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Брук, П. И. Зубков, А. А. Крюков, М. С. Либкинд, И. М. Маркович, С. А. Сова-лов: Дальние передачи переменного тока, изд. АН СССР 1958 г.
2. С. А. Лебедев: Исследование искусственной устойчивости. Труды Всесоюзного электротехнического института им. Лэни на, вып. 40, ГЭИ, 1940 г.
3. М. М. Ботвинник: О влиянии колебаний напряжения возбуждения на малые колебания роторов синхронных машин Электричество, № 6, 1938 г.
4. Г. Р. Герценберг, Я. Н. Штрафун: Автоматический регулятор возбуждения гидрогенераторов Куйбышевской гидроэлектростанции № 5, 1955 г.
5. В. И. Горушкин, Л. И. Карнеев: Предел динамической устойчивости генератора с регулятором возбуждения. Известия АН СССР, ОТН, № 1, 1951.
6. М. П. Костенко: Исследование проблем автоматического управления электроэнергетическими системами с применением методов электродинамического моделирования. Изд. АН СССР, М. 1957 г.
7. Г. В. Михневич, Г. Ф. Козловский: Об оптимальной структуре закона регулирования возбуждения синхронных генераторов. Электричество, № 5, 1959.
8. Е. Л. Эттингер, Г. В. Чалый, Е. М. Глух, Я. Н. Штрафун, П. М. Ипатов, Ю. А. Шмайн: Вентильное возбуждение синхронных генераторов и компенсаторов. «Вестник электропромышленности», № 7, 1959 г.
9. И. М. Маркович: Энергетические системы и их режимы, ГЭИ, 1957 г.
10. В. А. Веников: Электромеханические переходные процессы в электрических системах. ГЭИ, 1958 г.
11. Г. Ф. Козловский, Г. В. Михневич: Анализ статической устойчивости при помощи электронного моделирующего устройства. Вестник электропромышленности, № 1, 1959 г.
12. Г. В. Михневич: Регулирование возбуждения группы параллельно работающих синхронных генераторов электростанции. Известия АН СССР, ОТН, № 6, 1957 г.
13. В. М. Матюхин: О статической устойчивости электропередачи при наличии нескольких генераторов на передающей станции, Известия АН СССР, ОТН, № 7, 1957 г.
14. Л. В. Цукерник и Н. А. Качанова: Анализ статической устойчивости сложных энергосистем при помощи электронных счетных машин. Электричество, № 7, 1957 г.

РЕЗЮМЕ

Теоретические и опытные исследования современных регуляторов возбуждения синхронных генераторов, состоящих из электрических элементов, а также их испытания на электростанциях показали преимущества данных регуляторов по сравнению с регуляторами, которые не используют пропорциональные с производным сигналы. Их применение, с одной стороны, позволит значительно повысить статическую и динамическую стабильности, а с другой стороны, облегчит постройку более экономичных сверхмощных синхронных генераторов (500 мвта), обладающих более высоким к. п. д.

Показано, что если энергосистема состоит из пропорциональных синхронных генераторов, тогда роторы могут колебаться не только синфазно, но и противофазно.

Поэтому при исследовании стабильности регулятора нельзя замещать электростанцию просто одним генератором, а только двумя «эквивалентными» генераторами, соответственно возможности колебания в фазе и противофазно.

Работа кроме изложенного занимается на основе вышеизложенных результатов оптимальным выбором параметров регулятора возбуждения, использующего производные сигналы.

ÜBER DIE AUTOMATISCHE REGELUNG DER ERREGUNG EINER IN KOMPLEXEM ENERGIEZUSTAND ARBEITENDEN SYNCHRONMASCHINE

G. V. MICHNEVITS

ZUSAMMENFASSUNG

Die mit den aus modernen elektrischen Elementen konstruierten Synchrongenerator-Erregungsreglern durchgeführten theoretischen und experimentellen Untersuchungen und Versuchsproben haben die großen Vorteile dieser Regler gegen diejenige bewiesen, die keine mit dem Differentialquotienten verhältnismäßige Signale anwenden. Die Anwendung dieser Regler sichert eine bedeutende Verbesserung in der statischen und dynamischen Standfestigkeit und erleichtert die Konstruktion von Synchrongeneratoren, die einen besseren Wirkungsgrad, höhere Leistung, (500 MVA) aufweisen und auch wirtschaftlicher sind.

Vorliegender Aufsatz weist darauf hin, daß — falls das Energiesystem aus »verhältnismäßigen« Synchrongeneratoren besteht — die Rotoren nicht nur zusammen, in Phase, sondern auch in Gegenphase miteinander schwingen können.

Aus dem Obigen geht es klar hervor, daß bei der Stabilitätsuntersuchung des Reglers die Kraftanlage keinesfalls einfach mit einem Generator ersetzt werden kann, sondern es müssen — der Möglichkeit des Schwingens sowohl in Phase wie in Gegenphase entsprechend — zwei »gleichwertige« Generatoren angewandt werden.

Auf Grund der obigen Resultate befaßt sich vorliegender Aufsatz weiterhin ausführlich mit der optimalen Auswahl der Parameter eines Erregungsreglers, der die Differentialquotientensignale anwendet.

ON THE AUTOMATIC REGULATION OF THE EXCITATION OF SYNCHRONOUS MACHINES WORKING IN COMPLEX ENERGETIC SYSTEMS

G. V. MIKHNEVITCH

SUMMARY

The theoretical and experimental tests as well as the mechanical tests carried out with the field regulators of synchronous generators constructed of the most up to date electric components have proved the advantages of these regulators against the ones which do not utilize signals proportional to the differential quotient. The application of these regulators renders a possibility of considerably improving both static and dynamic stability and facilitates the construction of synchronous super generators (output 500 MVA) with a higher efficiency and better economy.

The paper proves that if the energy system consists of "proportional" synchronizing generators, the rotors might oscillate not only together, in phase, but in antiphase as well.

Thus when testing the stability of the regulator, the generating station can not be simply substituted by a generator but — in compliance with the possibility of oscillation both in phase and in antiphase — two "equivalent" generators have to be used.

On the basis of the above results the paper presents a detailed analysis on the optimal selection of the parameters of a field regulator using the differential quotient signals.

SUR LE RÉGLAGE AUTOMATIQUE DE L'EXCITATION DES MACHINES SYNCHRONES FONCTIONNANT DANS LES SYSTÈMES COMPLIQUÉS DE DISTRIBUTION D'ÉNERGIE

G. V. MIHNEVITCH

RÉSUMÉ

Les recherches théoriques et les essais concernant les régulateurs de générateurs synchrones, modernes et composés d'éléments électriques, de même que leur utilisation dans les centrales ont prouvé leur grande supériorité par rapport aux régulateurs n'utilisant pas les signaux proportionnels au coefficient différentiel.

Leur utilisation permet d'une part, l'amélioration notable des stabilités statiques et dynamiques, et facilite, d'autre part, la construction de générateurs synchrones à très grande puissance (500 MVA), plus économiques et de meilleur rendement.

L'étude démontre que si le système de distribution d'énergie se compose de générateurs synchrones «proportionnels», les rotors peuvent osciller ensemble non seulement en phase, mais aussi en opposition de phase.

C'est pourquoi en examinant la stabilité d'un régulateur, on ne peut pas remplacer tout simplement une centrale électrique par un générateur, mais il faut le faire avec deux générateurs «équivalents», en tenant compte de la possibilité d'oscillation en phase et en opposition de phase.

Sur la base de ces résultats, l'étude examine en détail le choix optimum des paramètres du régulateur d'excitation utilisant les signaux à coefficient différentiel.

UNTERSUCHUNG DER KRÄFTEVERHÄLTNISSE AN EINEM STATISCH DREIFACH UNBESTIMMTEN RAHMEN, DER EINE GESCHLOSSENE EBENE KURVE BILDET, IM FALLE EINER IN DIE EBENE DES RAHMENS FALLENDEN BELASTUNG

B. SÁLYI

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BUDAPEST, III. LEHRSTUHL FÜR TECHNISCHE
MECHANIK

[Eingegangen am 22. Dezember 1959]

Bei der Untersuchung der Kräfteverhältnisse an statisch unbestimmten Konstruktionen ergeben sich neben den zur Verfügung stehenden statischen Gleichgewichtsgleichungen die fehlenden Gleichungen aus den Zusammenhängen, die sich für die Bedingungen der Formänderung anschreiben lassen. Die Zahl dieser Gleichungen muß mit der Größe der statischen Unbestimmtheit übereinstimmen. Wird diese Zahl mit n bezeichnet, so ergeben sich die unbekanntes — äußeren oder inneren — Kraftwirkungen durch Lösung des aus $n + 3$ Gleichungen bestehenden Gleichungssystems. Durch die allgemeinen Lösungsmethoden läßt sich die Bestimmung der einzelnen Unbekannten im allgemeinen nicht voneinander trennen, d. h. zur Bestimmung jeder beliebigen Unbekannten ist die Lösung des gesamten Gleichungssystems notwendig.

Bei den Rahmentypen, deren Untersuchung den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildet, wird zur Klärung der Kräfteverhältnisse allgemein die sog. σ -Punkt-Methode angewendet, bei der das Gleichungssystem in Gleichungen mit je einer Unbekannten zerlegt wird, d. h., die Bestimmung der Unbekannten wird voneinander unabhängig ermöglicht.

Die in der gegenwärtigen Arbeit angewandte Methode führt auf Grund anderer Überlegungen zu einem ähnlichen Ergebnis, wobei in ihrem Gedankengang — entsprechend der allgemein eingeführten Gewohnheit — die durch Scher- und Normalbeanspruchungen bewirkten Formänderungen neben den durch Biegung bewirkten Formänderungen vernachlässigt werden.

Die Bestimmung der unbekanntes Kräftewirkungen durch Berechnung

Der in Abb. 1 angegebene geschlossene Rahmen wird durch ein in der Rahmenebene wirkendes — sonst aber beliebiges — im Gleichgewicht befindliches Kräftesystem belastet (das belastende Kräftesystem ist in der Abbildung nicht angedeutet). In bezug auf die inneren Kräfte ist der Rahmen sta-

tisch dreifach unbestimmt. Um diese Unbestimmtheit zu beseitigen, wird der Rahmen in einem beliebigen Punkt A aufgeschnitten und die Unterbrechung der materiellen Kontinuität durch entsprechende Kraftwirkungen ersetzt, damit sich die Kräfteverhältnisse nicht ändern (Abb. 2). Werden die Richtun-

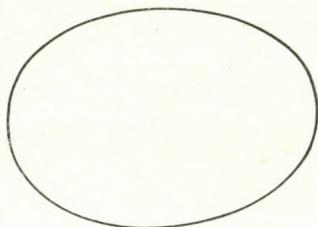


Abb. 1

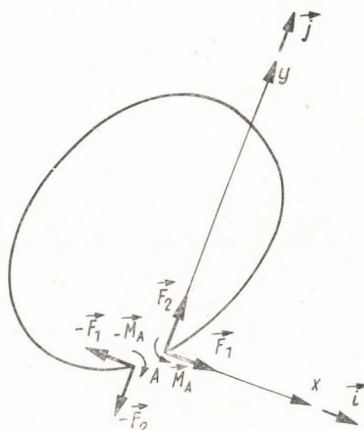


Abb. 2

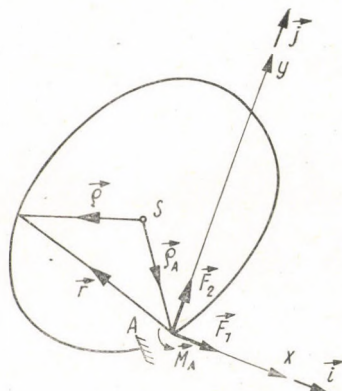


Abb. 3

gen der Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 so gewählt, daß sie aufeinander senkrecht stehen, so bestimmen die Richtungen des Vektors der drei unbekannt Kraftwirkungen die Richtungen der Achsen des im Punkte A angenommenen rechtwinkligen Koordinatensystems. Zum Ansatz der Funktion der Biegemomente \vec{M} wird die Durchlaufrichtung nach Abb. 3 angenommen. Durch die Durchlaufrichtung wird es zugleich festgesetzt, welcher von den beiden Stabenden als Anfang bzw. Ende des gekrümmten Stabes zu betrachten ist. Das letztere wird als eingespannt betrachtet, wodurch sich die Kraftwirkungen nicht ändern. Die unbekannt Kraftwirkungen am freien Stabende können im angenommenen Koordinatensystem folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\vec{F}_1 = F_1 \vec{i} \quad \vec{F}_2 = F_2 \vec{j} \quad \vec{M}_A = M_A \vec{k}.$$

Unter Benützung der Superposition kann man die Funktion der Biegemomente folgendermaßen ansetzen:

$$\vec{M} = \vec{M}_K + \vec{m}_1 F_1 + \vec{m}_2 F_2 + \vec{m}_3 M_A. \tag{1}$$

\vec{M}_K ist das Biegemoment der ursprünglichen äußeren Belastung, $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3$ sind die Biegemomente der am Orte der unbekanntenen Kraftwirkungen angreifenden Einheitskräfte (die positive Richtung der Biegemomente wird durch die Richtung des positiven \vec{k} bezeichnet).

Die relative Verschiebung der beiden Stabenden beträgt Null. Es soll angenommen werden, daß der Querschnitt und der Elastizitätsmodul des Stabes gleichmäßig ist. Unter Anwendung des Satzes von CASTIGLIANO lassen sich dann folgende Gleichungen anschreiben, die die gegenseitige Unveränderlichkeit der beiden Stabenden ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial F_1} &= \int_0^s \vec{M} \frac{\partial \vec{M}}{\partial F_1} ds = 0 = \int_0^s \vec{M} \vec{m}_1 ds \\ \frac{\partial L}{\partial F_2} &= \int_0^s \vec{M} \frac{\partial \vec{M}}{\partial F_2} ds = 0 = \int_0^s \vec{M} \vec{m}_2 ds \\ \frac{\partial L}{\partial M_A} &= \int_0^s \vec{M} \frac{\partial \vec{M}}{\partial M_A} ds = 0 = \int_0^s \vec{M} \vec{m}_3 ds \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

da nach (1)

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial F_1} = \vec{m}_1, \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial F_2} = \vec{m}_2, \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial M_A} = \vec{m}_3.$$

Mit den Bezeichnungen der Abb. 3 ist

$$\left. \begin{aligned} \vec{m}_1 &= \vec{i} \times \vec{r} \\ \vec{m}_2 &= \vec{j} \times \vec{r} \\ \vec{m}_3 &= \vec{k} \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

Die so erhaltenen Werte werden in (2) eingesetzt, wobei folgende Gleichungen erhalten werden:

$$\left. \begin{aligned} \vec{i} \int_0^s \vec{r} \times \vec{M} ds &= 0 \\ \vec{j} \int_0^s \vec{r} \times \vec{M} ds &= 0 \\ \vec{k} \int_0^s \vec{M} ds &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

Durch diese drei Gleichungen wird ausgedrückt, daß das entlang der Kurve s angreifende, aus parallelen Vektoren zusammengesetzte Biegemoment-Vektorsystem \vec{M} ein Gleichgewichts-Vektorsystem bildet. Nachfolgend wird eben diese Tatsache zur Bestimmung der unbekanntenen Kraftwirkungen herangezogen.

Das Vektorsystem \vec{M} wird entsprechend der Gleichung (1) in vier Vektorsysteme zerlegt und ihre Resultierende sowie ihr Angriffspunkt jeweils getrennt festgestellt (Abb. 3):

$$\left. \begin{aligned} \vec{Q}_K &= Q_K \vec{k} = \int_0^s \vec{M}_K ds \\ \vec{Q}_1 &= Q_1 \vec{k} = \int_0^s \vec{m}_1 ds = \vec{i} \cdot \int_0^s \vec{r} ds = s \vec{\varrho}_A \cdot \vec{i} \\ \vec{Q}_2 &= Q_2 \vec{k} = \int_0^s \vec{m}_2 ds = \vec{j} x \int_0^s \vec{r} ds = s \vec{\varrho} x \vec{j} \\ \vec{Q}_3 &= Q_3 \vec{k} = \int_0^s \vec{m}_3 ds = \vec{k} \cdot \int_0^s ds = s \vec{k}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

s ist die volle Länge des Stabes, S der Schwerpunkt des als krumme Linie aufgefaßten Stabes, $\int_0^s \vec{\varrho}_A ds = \vec{0}$ das statische Moment der krummen Linie, bezogen auf den Schwerpunkt.

Was den Angriffspunkt der Resultierenden betrifft, ist es klar, daß der Angriffspunkt von \vec{Q}_K von der jeweiligen äußeren Belastung abhängt, während die Wirkungslinie von \vec{Q}_3 durch den Schwerpunkt S hindurchgeht. Die Lage von \vec{Q}_1 und \vec{Q}_2 muß aber weiter untersucht werden.

Die Frage soll allgemein folgendermaßen gestellt werden:

Wo wird sich die Resultierende \vec{Q}_F des Momentenvektorsystems $\vec{M}_F = \vec{F} \times \vec{r}$ der am Punkt A angreifenden Kraft \vec{F} befinden oder mit anderen Worten: wie ergibt sich der den Angriffspunkt der Resultierenden festlegende Ortsvektor $\vec{\varrho}_F$?

Nach Gleichung (5) ist

$$\vec{Q}_F = s \vec{\varrho}_A \times \vec{F}. \quad (5')$$

Zur Bestimmung von $\vec{\varrho}_F$ schreibt man das Moment des Vektorsystems \vec{M}_F am Schwerpunkt S auf:

$$\vec{\varrho}_F \times \vec{Q}_F = \int_0^s \vec{\varrho} \times [\vec{F} \times (\vec{\varrho} - \varrho_A)] ds = \mathbf{J}_s \vec{F}. \quad (6)$$

\mathbf{J}_S ist der auf den Schwerpunkt bezogene Trägheitstensor der krummen Linie. Aus der Gleichung folgt sofort, daß

$$\varrho_F \mathbf{J}_S \vec{F} = 0 \quad (7)$$

d. h., die Richtungen von $\vec{\varrho}_F$ und \vec{F} sind einander konjugiert zugeordnet. Man multipliziert Gleichung (6) vektoriell von links mit \vec{k} :

$$\vec{k}(\times \vec{\varrho}_F \times \vec{Q}_F) = Q_F \vec{\varrho}_F = \vec{k} \times \mathbf{J}_S \vec{F},$$

sodann nochmals skalar mit dem Vektor $\vec{\varrho}_A \mathbf{J}_S$:

$$Q_F \vec{\varrho}_A \mathbf{J}_S \vec{\varrho}_F = (\vec{k} \times \mathbf{J}_S \vec{F}) \vec{\varrho}_A \mathbf{J}_S = \vec{k}(\mathbf{J}_S \vec{F} \times \vec{\varrho}_A \mathbf{J}_S) = -\vec{k} J_{II} (\vec{\varrho}_A \times \vec{F}).$$

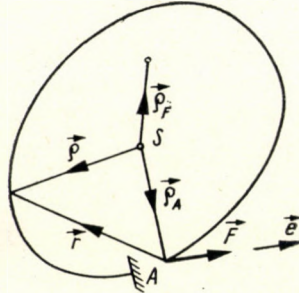


Abb. 4

J_{II} ist die zweite skalare Invariante des Tensors \mathbf{J}_S ; nach Gleichung (5') ist

$$\vec{k}(\vec{\varrho}_A \times \vec{F}) = \frac{Q_F}{s}.$$

Setzt man diesen Wert in obige Gleichung ein, führt die möglichen Kürzungen durch und reduziert die Gleichung auf Null, so erhält sie die folgende Form:

$$\vec{\varrho}_A \mathbf{J}_S \vec{\varrho}_F + \frac{J_{II}}{s} = 0. \quad (8)$$

Wenn man in Gleichung (8) an Stelle des konstanten $\vec{\varrho}_F$ das veränderliche $\vec{\varrho}$ setzt, stellt sie die Gleichung der Antipolaren a_A des Punktes A als Antipol dar. Gleichung (8) besagt also, daß die Resultierende \vec{Q}_F des zur Kraft \vec{F} — die am Punkte A angreift — gehörenden Momentenvektorsystems an der Antipolaren a_A des Punktes A als Antipol angreift. Dieses Ergebnis ist von der Größe der Kraft unabhängig, und hängt auch von ihrer Richtung nur insofern

ab, als sich der Endpunkt von \vec{Q}_F mit einer Änderung der Richtung der Kraft auf der Antipolaren a_A verschiebt.

Dieses Ergebnis bedeutet, daß auch die den Kräften \vec{F}_1 und \vec{F}_2 zugeordneten Resultierenden $\vec{Q}_{F1} = \vec{Q}_1 F_1$ und $\vec{Q}_{F2} = \vec{Q}_2 F_2$ ebenfalls auf der Antipolaren a_A des Punktes A liegen. Daraus folgt wiederum weiters, daß die Unbekannten F_1 und F_2 im Moment des Vektorsystems \vec{M} auf die Gerade a_A nicht vorkommen, d. h., M_A kann unmittelbar aus der Momentengleichung bestimmt werden.

Rechnet man an Stelle der Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_2 unmittelbar mit ihrer Resultierenden \vec{F} , so kann man das Vektorsystem \vec{M} als eine Summe aus drei Gliedern anschreiben:

$$\vec{M} = \vec{M}_K + \vec{M}_F + \vec{m}_3 \vec{M}_A \quad (\vec{M}_F = \vec{F} \times \vec{r}).$$

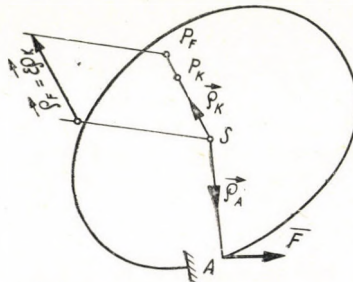


Abb. 5

Statt F_1 und F_2 erscheint hier die Unbekannte \vec{F} . Die Resultierenden der drei Vektorsysteme \vec{Q}_K , \vec{Q}_F und $M_A \vec{Q}_3$ halten einander das Gleichgewicht, ihre Angriffspunkte liegen also notwendigerweise auf einer Geraden. Andererseits befindet sich der Angriffspunkt von \vec{Q}_F nach den vorangehenden Überlegungen auf der Antipolaren a_A . Wenn der Angriffspunkt von \vec{Q}_K mit P_K und dessen Ortsvektor mit \vec{Q}_K bezeichnet wird (Abb. 5), so ergibt der Schnittpunkt P_F der Geraden a_A und der Wirkungslinie von \vec{Q}_K den Angriffspunkt des Vektors \vec{Q}_F . Wenn man weiter in Betracht zieht, daß $\vec{Q}_F = \varepsilon \vec{Q}_K$, so wird im Sinne der Gleichung (7)

$$\vec{Q}_K \mathbf{J}_S \vec{F} = 0,$$

woraus sich die Richtung von \vec{F} bestimmen läßt, während aus den für die Punkte S und P_F angesetzten Momentengleichungen die Werte von F und M_A berechnet werden können:

$$\left. \begin{aligned} F &= - \frac{Q_K}{\varepsilon s \vec{Q}_A (\vec{e} \times \vec{k})} \\ M_A &= \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{Q_K}{s} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Über die Verhältnisse ergibt sich ein vollständigeres Bild, wenn man nicht festlegt, daß sich Punkt A auf dem Rahmen befinden soll, sondern dieser Punkt nur mittels eines starren, krummen Stabes an den entsprechenden Punkt A' des Rahmens angeschlossen gedacht wird (Abb. 6). Die bisher aufgestellten Gleichungen werden auch in diesem Falle gelten, wozu man noch hinzufügen muß, daß das Vektorsystem \vec{M} auch weiterhin nur auf die Linie s , die die wirkliche Lage des Rahmens bezeichnet, bezogen werden muß. Die starre Verbindung durch Stäbe ändert nämlich nichts an den mechanischen Verhältnissen des Rahmens und das am starren Stab befindliche Vektorsystem \vec{M} fällt aus den Gleichungen aus.

Nach der Klärung dieser Tatsachen können folgende Aussagen gemacht werden:

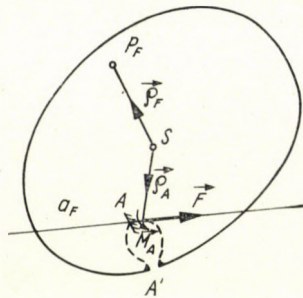


Abb. 6

Aus Gleichung (8) ist es klar, daß die früheren Behauptungen über die gegenseitige Lage der Punkte A und P_F auch umgekehrt richtig sind: Punkt A liegt auf der Antipolaren a_F des Punktes P_F (Abb. 6). Aus Gleichungen (7) und (9) ist es ferner offensichtlich, daß \vec{M}_A und \vec{F} unabhängig sind von der Lage des Punktes A auf der Geraden a_F , d. h., Punkt A kann auf der Geraden a_F verschoben werden, ohne daß sich \vec{M}_A und \vec{F} ändern.

Die obige Behauptung ergibt sich auch aus einer einfachen mechanischen Überlegung:

Die im Punkt A' auftretenden inneren Kraftwirkungen sind nämlich von der Annahme des Punktes A unabhängig, das heißt, daß auch \vec{F} selbst davon unabhängig ist, während \vec{M}_A sich mit der senkrecht auf die Richtung von \vec{F} gemessenen Entfernung der Punkte A und A' linear ändert. Verschiebt sich also Punkt A auf einer zur Richtung von \vec{F} parallelen Geraden, so ändert sich auch \vec{M}_A nicht. Nun ist die Gerade a_F zu \vec{F} parallel gerichtet, da ihre Richtung zu der Richtung des den Ort des Antipols bestimmenden Ortsvektors \vec{r}_F konjugiert ist, was nach Gleichung (7) auch für die Richtung von \vec{F} zutrifft.

Auf Grund der Gleichung (9) wird der Wert von \vec{M}_A Null, falls der Wert von $\varepsilon = 1$ ist, d. h., die Punkte P_F und P_K fallen zusammen. Dies ist aber der Fall, wenn Punkt A auf der Antipolaren a_K des Punktes P_K liegt.

Bei einer derart angenommenen Lage des Punktes A wird zugleich mit M_A auch $M_A \vec{Q}_3$ gleich Null und aus den Gleichgewichtsbedingungen ergibt sich

$$\vec{Q}_F + \vec{Q}_K = \vec{0}$$

d. h.,

$$\vec{Q}_F = -\vec{Q}_K.$$

Wenn man noch in Betracht zieht, daß $\vec{Q}_F = \vec{Q}_K$ ist, so läßt sich aus Gleichung (6) für \vec{F} die folgende Gleichung aufstellen:

$$\vec{Q}_K \times \vec{Q}_K = \mathbf{J}_S \vec{F}.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit dem Tensor \mathbf{J}_S^{-1} ergibt sich \vec{F} unmittelbar:

$$\mathbf{J}_S^{-1}(\vec{Q}_K \times \vec{Q}_K) = \vec{F}. \quad (10)$$

Aus Gleichung (5') ist jedoch

$$\vec{Q}_A \times \vec{F} = \frac{\vec{Q}_F}{s} = -\frac{\vec{Q}_K}{s}, \quad (11)$$

also eben das Moment der Kraft \vec{F} , bezogen auf den Schwerpunkt S . Offensichtlich wird \vec{M}_A diesen Wert erreichen, wenn der Punkt A — entsprechend der σ -Punkt-Methode — im Schwerpunkt S angenommen wird.

Graphische Lösung

Die unbekanntes Kraftwirkungen lassen sich auch graphisch bestimmen. In Gleichung (10) werden die Werte $\vec{Q}_K = Q_K \vec{k}$ und $\vec{Q}_K = Q_K \vec{n}$ eingesetzt (Abb. 7):

$$Q_K Q_K \mathbf{J}_S^{-1}(\vec{k} \times \vec{n}) = -Q_K Q_K \mathbf{J}_S^{-1}(\vec{n} \times \vec{k}) = \vec{F}. \quad (12)$$

Wenn man den Mohrschen Kreis des symmetrischen Tensors $-Q_K Q_K \mathbf{J}_S^{-1} = \mathbf{U}$ konstruiert, so kann man auf diesem den zum Einheitsvektor $\vec{n} \times \vec{k}$ gehörigen Vektor \vec{F} ablesen. Der ausführliche Gang der graphischen Ermittlung gestaltet sich nach Abb. 7 wie folgt:

Im entsprechend gewählten Schwerpunkts- (x, y) -Koordinatensystem werden die Vektoren $\vec{i} \mathbf{U} = \vec{U}_x$ und $\vec{j} \mathbf{U} = \vec{U}_y$ ermittelt. In Kenntnis dieser

Größen — und nach Festsetzung der Kraftmaßeinheit N_k und der Längemaßeinheit N_l — wird der Mohrsche Kreis in dem durch die Einheitsvektoren $\vec{n} \times \vec{k}$ und \vec{n} festgelegten Koordinatensystem (ξ, η) konstruiert. Die Punkte X und Y sind die zu der x - bzw. y -Achse gehörenden Bildpunkte. Y' ist das auf die ξ -Achse bezogene Spiegelbild des Punktes Y . Zieht man durch diesen Punkt Y' eine Parallele zur x -Achse, so schneidet diese Gerade den Kreis in dem zur ξ -Achse gehörenden Bildpunkt Ξ . Nach der Abbildung ist

$$\overline{S\xi} = \vec{F}.$$

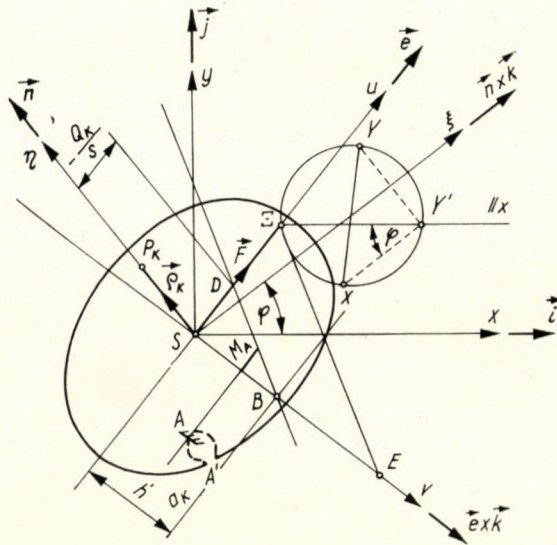


Abb. 7

Die Lage der Antipolaren a_K kann auf Grund der Gleichung (11) konstruiert werden. Multipliziert man die Gleichung skalar mit \vec{k} , so erhält man

$$\vec{\varrho}_A(\vec{F} \times \vec{k}) = F \vec{\varrho}_A(\vec{e} \times \vec{k}) = Fh = -\frac{Q_K}{s},$$

woraus sich ergibt, daß

$$-\frac{Q_K}{sh} = F = \frac{F}{1} \text{ ist.} \tag{13}$$

Nach Annahme der Momenteneinheit N_m trägt man auf die u -Achse den vorzeichengerechten Wert von $-\frac{Q_K}{s}$, auf die v -Achse die dimensionslose Einheit

auf. Der Maßstab N der letzteren ergibt sich aus (13) durch die früher schon angenommenen übrigen Einheiten eindeutig:

$$N = \frac{N_l N_k}{N_m}.$$

Zieht man nun aus Punkt D eine Parallele zur Geraden $\bar{E}E$, so schneidet diese die v -Achse in Punkt B , durch welchen die mit der Richtung von $-\bar{F}$ parallele Antipolare $-a_K$ hindurchgeht. Die Gerade BD veranschaulicht zugleich auch die Änderung des Momentes M_A . Man nimmt Punkt A beliebig an und zieht durch ihn eine zur u -Achse parallele Gerade. Die Länge der durch die v -Achse und durch die Gerade BD auf ihr ausgeschnittenen Strecke ergibt — nach der Momentenskala gemessen — den Wert von M_A .

Anwendung bei veränderlichem Querschnitt und veränderlichem Elastizitätsmodul

Im Laufe der bisherigen Überlegungen wurde der Einfachheit halber vorausgesetzt, daß der Querschnitt des Stabes des Rahmens und sein Elastizitätsmodul konstant sind. Bei dieser Annahme wurde der Schwerpunkt S und der Trägheitstensor \mathbf{J}_S lediglich durch die geometrischen Verhältnisse der durch die Mittellinie des Rahmenstabes gegebenen krummen Linie bestimmt.

Bei veränderlichem Querschnitt und veränderlichem Elastizitätsmodul (d. h. veränderlichen Biegesteifigkeit IE , wobei unter I das Moment zweiten Grades des Stabquerschnittes auf die Biegeachse zu verstehen ist), führt man die Bezeichnung

$$\frac{ds}{IE} = d\mu$$

ein. $d\mu$ bezeichnet die »elementare Masse« der schweren Linie. Bei einer derartigen Bezeichnungsweise bedeuten Punkt S und Tensor \mathbf{J}_S den Schwerpunkt bzw. den auf den Schwerpunkt bezogenen Trägheitstensor der schweren Linie mit inhomogener Massenverteilung. Der Gang der Berechnung bleibt im übrigen unverändert.

*

Abschließend folgt ein Rechenbeispiel. Der in Abb. 8 dargestellte geschlossene Rahmen mit konstantem Biegewiderstand soll in Punkt A' aufgeschnitten und die unbekannt inneren Kraftwirkungen bestimmt werden. Für die Berechnungen soll das auf der Abbildung dargestellte Koordinatensystem (x, y) angenommen werden, dessen Achsen zugleich die auf den Schwerpunkt bezogenen Trägheitshauptachsen des Rahmens darstellen.

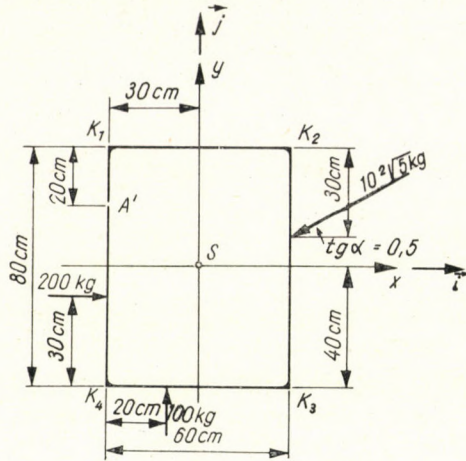


Abb. 8

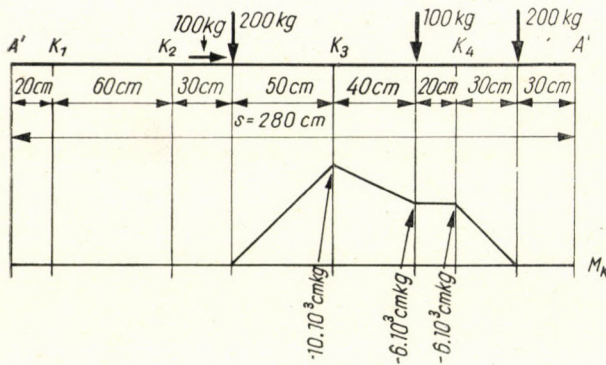


Abb. 9

In Abb. 9 wurde am ausgerichteten Stab die durch die äußere Belastung bedingte Funktion des Biegemoments M_K dargestellt. Mit ihrer Hilfe bestimmt man die Vektoren \vec{Q}_K und \vec{Q}'_K

$$Q_K = -78 \cdot 10^4 \text{ cm}^2\text{kg}$$

$$\vec{Q}'_K = 7,6845\vec{i} - 33,505\vec{j} \text{ cm}$$

d. h., $\vec{Q}_K \times \vec{Q}'_K = (-2613,39\vec{i} - 599,39\vec{j}) 10^4 \text{ cm}^3\text{kg}.$

Die Matrix des Tensors \bar{S}^{-1} beträgt

$$J_S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{83,2 \cdot 10^4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{18 \cdot 10^4} \end{pmatrix},$$

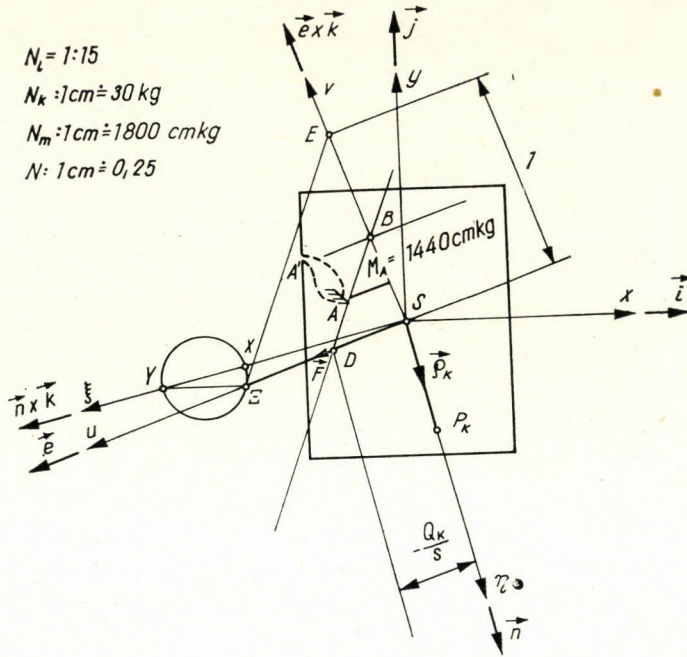


Abb. 10

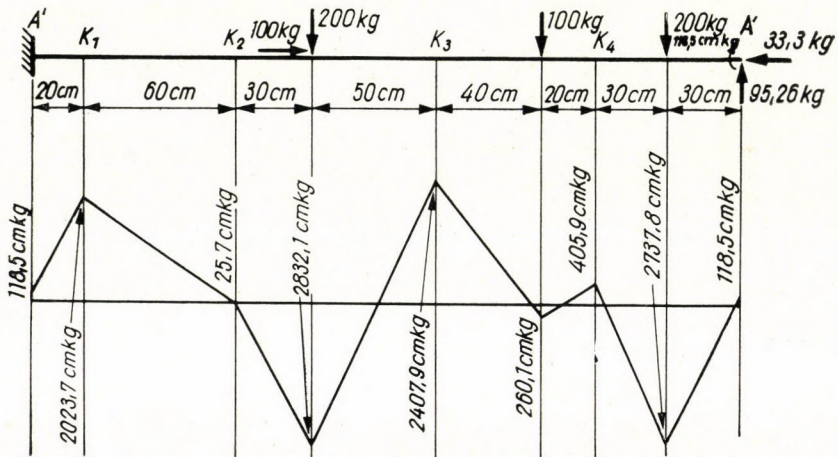


Abb. 11

da die auf die x - bzw. y -Achse bezogenen Trägheitsmomente des Rahmens:

$$I_x = \frac{83,2 \cdot 10^4}{3} \text{ cm}^3 = I_1 \quad \text{und}$$

$$I_y = 18 \cdot 10^4 \text{ cm}^3 = I_2 \quad \text{sind.}$$

Mit diesen Werten ergibt sich

$$\vec{F} = J_S^{-1}(\vec{Q}_K \times \vec{e}_K) = -95,26\vec{i} - 33,3\vec{j} \text{ kg.}$$

Wird Punkt A im Schwerpunkt angenommen, so ist der Wert von M_A :

$$M_A = -\frac{Q_K}{s} = 2785,7 \text{ cmkg.}$$

Der Gang der graphischen Lösung wird in Abb. 10 veranschaulicht. Der Wert von e_K wird in der Abbildung abgemessen:

$$e_K = 34,37 \text{ cm}$$

$$Q_K e_K = -26,8086 \cdot 10^6 \text{ cm}^3\text{kg.}$$

Die Matrix des Tensors U beträgt:

$$U : \begin{pmatrix} -96,66 & 0 \\ 0 & -148,9 \end{pmatrix},$$

d. h., $\vec{U}_x = -96,66\vec{i} \text{ kg}$, $\vec{U}_y = -148,9\vec{j} \text{ kg}$.

Bei der Konstruktion des Mohrschen Kreises ergibt sich, daß die Punkte X und Y auf der ξ -Achse liegen, d. h., die Punkte Y und Y' fallen zusammen. Legt man eine zur x -Achse parallele Gerade durch Punkt Y , so erhält man den Endpunkt Ξ des Vektors \vec{F} . Das Momentendiagramm der Konstruktion ist aus Abb. 11 ersichtlich.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Arbeit befaßt sich mit der Untersuchung der Kräfteverhältnisse an statisch dreifach unbestimmten Rahmen, die eine geschlossene, ebene Kurve bilden, im Falle einer in die Ebene des Rahmens fallenden Belastung und führt eine Methode zur voneinander unabhängigen Bestimmung der unbekanntenen Kraftwirkungen vor. Die Methode beruht auf der Erkenntnis, daß das am Rahmen angreifende Biegemoment-Vektorsystem ein Gleichgewichts-Vektorsystem bildet, und ermöglicht (durch Anwendung des Mohrschen Kreises für symmetrische Tensoren) eine einfache graphische Bestimmung der unbekanntenen Kraftwirkungen.

INVESTIGATION INTO THE FORCES IN A TRIPLY STATICALLY INDETERMINATE FRAME, FORMING A CLOSED PLANE CURVE, IF THE LOAD IS IN THE PLANE OF THE FRAME

B. SÁLYI

SUMMARY

This paper deals with the forces acting on a triply statically indeterminate frame, forming a closed plane curve, if the load is in the plane of the frame. A method is shown by which the unknown force effects may be determined independently from each other. The method is based on the recognition that the vector system of bending moments is an equilibrium vector system, allowing a simple graphical determination of the unknown force effects by use of Mohr's circle representing symmetrical tensors.

RECHERCHES SUR LES CONDITIONS DES FORCES AGISSANT AUX CADRES TRIPLE-
MENT HYPERSTATIQUES ET FORMANT UNE COURBE PLANE FERMÉE, EN CAS
DE CHARGES TOMBANT DANS LE PLAN DU CADRE

B. SÁLYI

RÉSUMÉ

L'auteur examine les forces agissant aux cadres triplement hyperstatiques et formant une courbe plane fermée, en cas de charges tombant dans le plan du cadre. Il indique une méthode pour la détermination des effets de force inconnus, considérés indépendamment les uns des autres. La méthode est basée sur la considération que le système vectoriel des moments de flexion représente un système vectoriel en équilibre, et permet une détermination graphique simple des effets de force inconnus, par utilisation du cercle de Mohr représentant les tenseurs symétriques.

АНАЛИЗ РАБОТЫ СИЛ РАМЫ, ОБРАЗУЮЩЕЙ СТАТИЧЕСКИ ТРИЖДЫ НЕ-
ОПРЕДЕЛЕННУЮ ЗАМКНУТУЮ КРИВУЮ НА ПЛОСКОСТИ, В ПЛОСКОСТИ
РАМЫ В СЛУЧАЕ ПЕРВОЙ НАГРУЗКИ

Б. ШАЙИ

РЕЗЮМЕ

В работе дается анализ статически трижды неопределенных замкнутых рам, образующих кривую на плоскости, в случае нагрузки, падающей в плоскости рам, и иллюстрируется метод определения неизвестных действий сил независимо друг от друга. Метод основывается на том факте, что векторная система изгибающего момента рамы образует равновесную векторную систему и с использованием круга Мора, отображающего симметричные тензоры, становится возможным простое определение при помощи построения неизвестных действий сил.

INDEX

- Szmodits, K.* : Determination of Limits in Solutions of Plate Problems — Die Bestimmung der Lösungsschranken von Plattenproblemen — Détermination des limites des solutions du problème des plaques — *Смодич, К.*: Определение пределов решений задачи пластин 245
- Peredy, J.* : Die Planung wirtschaftlicher Tragwerke — Designing of Economical Load-bearing Structures — Établissement des projets de constructions économiques — *Переди, Й.*: Проектирование экономичных несущих конструкций 251
- Kézdi, A.* : Contributions to the Bearing Capacity of Piles — Beiträge zur Frage der Tragfähigkeit von Pfählen — Contribution à la capacité portante des pieux — *Кезди, А.*: К несущей способности свай 275
- Csonka, P.* : Paraboloid Shell of Revolution over Equilateral Triangle Basis — Eine rotationsparaboloidförmige Schale über gleichseitigem Dreieckgrundriß — Calotte de forme parabolique de révolution, construite sur un triangle équilatéral — *Чонка, П.*: Оболочка в виде параболоида вращения над планом в виде правильного треугольника 313
- Domony, A.* : Untersuchung der die Werte der Brucharbeit beeinflussenden Faktoren, mit besonderer Rücksicht auf die metallischen und nicht metallischen Verunreinigungen des Aluminiums — Factors Affecting the Changes in Contraction Work Values with Special Regard to the Metallic and Nonmetallic Impurities of Aluminium — Examen des facteurs influant sur la variation des valeurs du travail de contraction, compte tenu des impuretés métalliques et non métalliques de l'aluminium — *Домонь, А.*: Исследование факторов, влияющих на изменение значений работы контракции, обращая особое внимание на металлические и неметаллические примеси алюминия 333
- Csonka, P.* : Formulae for Controlling Stress Calculations of Calotte Shells — Kontrollformen zur Spannungsberechnung der Kappenschalen — Formules pour le contrôle de la tension des calottes — *Чонка, П.*: Формулы для проверки расчета напряжений куполообразных оболочек 355
- Tóth, G. und Örkényi, J.* : Über eine akustische Untersuchungsmethode der Faserrisse von Ledern — Acoustic Tests for Studying Hide Fibre Tearing — Étude de la rupture des fibres de cuir au moyen d'examen acoustiques — *Тот, Г. и Эркеньи, Я.*: Изучение акустическими исследованиями разрыва волокон кожи 369
- Szeniczai, L.* : Konjugierte Zahnprofilpaare — Conjugate Teeth Profiles — Profils de dents conjugués — *Сеницеи, Л.*: Конъюгированные профили зубьев 383
- Dulácska, E.* : Muschelförmige Schalenkonstruktion — Shell-structure Shaped Like a Scallop-shell — Des voiles minces valviformes — *Дулачка, Э.*: Оболочки в виде раковин 397
- Szidarovszky, J.* : Die Bemessung von Pfeilern — Strength Calculation of Piers — Dimensionnement des piliers — *Сидаровски, Я.*: Расчет устоев 40
- Szuk, G.* : Setting and Hardening of Hydraulic Materials. III. — Abbindung und Erhärtung hydraulischer Stoffe. III. — Prise et durcissement des matières hydrauliques. III. — *Сук, Г.*: Связывание и твердение гидравлических материалов, III... 419

- Szuk, G.* : Setting and Hardening of Hydraulic Materials. IV. — Abbindung und Erhärtung hydraulischer Stoffe. IV. — Prise et durcissement des matières hydrauliques. IV. — Сук, Г.: Связывание и твердение гидравлических материалов, IV. 429
- Jurek, A.* : Verzweigung der Eingangsleitung in Planetengetrieben mit Doppelantrieb — Power Bifurcation in Planetary Gears with Double Input — Valeurs de la puissance bifurquée dans les engrenages planétaires simples — Юрек, А.: Отвод мощности с планетарной передачи двойного привода 441
- Михневич, Г. В.*: Об автоматическом регулировании возбуждения синхронных машин в сложной энергетической системе — *Michnevits, G. V.* : Über die automatische Regelung der Erregung einer in komplexem Energiezustand arbeitenden Synchronmaschine — *Mikhnevitch, G. V.* : On the Automatic Regulation of the Excitation of Synchronous Machines Working in Complex Energetic Systems — *Mihnevitch, G. V.* : Sur le réglage automatique de l'excitation des machines synchrones fonctionnant dans les systèmes compliqués de distribution d'énergie ... 457
- Sályi, B.* : Untersuchung der Kräfteverhältnisse an einem statisch dreifach unbestimmten Rahmen, der eine geschlossene ebene Kurve bildet, im Falle einer in die Ebene des Rahmens fallenden Belastung — Investigation into the Forces in a Triply Statically Indeterminate Frame, Forming a Closed Plane Curve, if the Load is in the Plane of the Frame — Recherches sur les conditions des forces agissant aux cadres triplement hyperstatiques et formant une courbe plane fermée, en cas de charges tombant dans le plan du cadre — Шайи, Б.: Анализ работы сил рамы, образующей статически трижды неопределенную замкнутую кривую на плоскости, в плоскости рамы в случае первой нагрузки 473

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes. Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI. Népköztársaság útja 21. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes. On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante :

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу :

Acta Technica
Budapest V., Nádor u. 7.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» — 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

