ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ,
K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT
A. GELEJI

TOMUS XXIII FASCICULI 1—3

SERIES GEODAETICA ET GEOPHYSICA
TOMUS 1 FASCICULI 1—3

AKADÉMIAI KIADÓ
BUDAPEST
1959

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST, V. ALKOTMÁNY UTCA 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok, géppel írva, a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest, V. Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-44), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer und russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Aussenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest, VI. Népköztársaság útja 21. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

INDEX

Arnold, K. (Potsdam): Betrachtungen zur Bestimmung des Einflusses der Lotkrümmung auf astronomische Positionsbestimmungen 291

Diskussion:

Hristow, W. K. (Sofia) 298
Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 298

Bendefy, L. (Budapest): Niveauänderungen im Raum von Transdanubien auf Grund zeitgemässer Feineinwägungen 167

Diskussion:

Böhm, J. (Praha) 187
Durnjew, A. I. (Moskwa—Dresden) 187
Károlyi, Z. (Budapest) 188
Bendefy, L. (Budapest) 189

Böhm, J. (Praha): Einige Erfahrungen beim Ausbau des trigonometrischen Grundnetzes in der Tschechoslowakei 59

Diskussion:

Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 68
Homoródi, L. (Budapest) 68

Böhm, J. (Praha): Einige Erfahrungen bei der Entwicklung des Nivellementgrundnetzes in der Tschechoslowakei 153

Böhm, J. (Praha): Allgemeiner Ausdruck für die Nivellierungs- und tachymetrische Refraktion 157

Diskussion:

Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 163
Peschel, H. (Dresden) 163
Hristow, W. K. (Sofia) 164
Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 164
Bendefy, L. (Budapest) 165

Buchholtz, A. (Dresden): Der photogrammetrische Gerätebau und Hochschulunterricht in der Deutschen Demokratischen Republik 207

Diskussion:

Hankó, G. (Budapest) 218

Durnjew, A. I. (Moskwa—Dresden): Метод построения геодезических сетей с помощью воспомогательных пунктов 101

Diskussion:

Peschel, H. (Dresden) 120
Durnjew, A. I. (Moskwa—Dresden) 120
Peewsky, V. (Sofia) 120

Egyed, L. (Budapest): Die Änderung der Dimensionen der Erde auf Grund paläogeographischer Daten und ihre geodätischen Konsequenzen 243

Diskussion:

Eilingzfeld, F. (Sopron) 247
Egyed, L. (Budapest) 247

Erdey-Grúz, T. (Budapest): Eröffnungsansprache 7

Halmos, F.; Bestimmung des mittleren Fehlers durch Verbesserungen der Beobachtungsergebnisse — Determination of Mean Errors with the Correction of Results of Observations — Calcul de l'erreur moyenne sur base de la correction des résultats de mesures — *Халмош Ф.*: Об определении средней ошибки на основании введения поправок в результаты измерений 341

Hazay, I. (Sopron): Über die Probleme der Projektion zwischen zwei Ellipsoiden.... 121

Diskussion:

Böhm, J. (Praha) 124
Arnold, K. (Potsdam) 127
Hristow, W. K. (Sofia)..... 127
Hazay, I. (Sopron) 128

Hazay, I.: Ausführung der statischen Koordinatenausgleichung — Execution of Static Adjustment of Co-ordinates — Exécution de la compensation statique selon la méthode des variations de coordonnées — *Хазаи, И.*: О выполнении статического уравнения координат 397

Hazay, I.: Ausführung der statischen Koordinatenausgleichung, II. — Execution of Static Adjustment of Co-ordinates, II. — Exécution de la compensation statique selon la méthode des variations de coordonnées, II. — *Хазаи, И.*: О выполнении статического уравнения координат, II. 431

Homoródi, L. (Budapest): Die Deutung des Punktfehlers 45

Diskussion:

Reissmann, G. (Dresden) 53
Vincze, V. (Budapest) 53
Durnjew, A. I. (Moskwa—Dresden) 56
Hristow, W. K. (Sofia) 57

Hristow, W. K. (Sofia): Klassische und moderne Genauigkeitsabschätzungen in einigen Ausgleichungsfällen 17

Diskussion:

Böhm, J. (Praha) 39
Arnold, K. (Potsdam) 40
Reicheneder, K. (Potsdam) 40
Peschel, H. (Dresden) 41
Böhm, J. (Praha) 41
Durnjew, A. I. (Moskwa—Dresden) 41
Hristow, W. K. (Sofia) 43

Irmédi-Molnár, L. (Budapest): Aus der Vergangenheit der ungarischen Kartographie.. 261

Diskussion:

Odlanicki, M. (Krakow) 265
Bendefy, L. (Budapest) 269
Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 270

Kaspar, J. (Praha): Das Bild der Kurve bei der Abbildung einer beliebigen Fläche auf eine andere..... 131

Klatsmányi, Á. (Budapest): Die Verwendung von Quarzuhren zur geographischen Ortsbestimmung 277

Diskussion:

Reicheneder, K. (Potsdam) 290
Hristow, W. K. (Sofia) 290
Krajci, J. (Bratislava) 290

Meisser, O. (Freiberg/Sa): Experimentelle Dichtebestimmung für Schwerekorrektionen 249

Meisser, O. (Freiberg/Sa): Die Behandlung von dünnen Wolframtorsionsdrähten für die Eötvössche Drehwaage 257

Meisser, O. (Freiberg/Sa): Die Weiterentwicklung der Freiberger Schlauchwaage 203

Diskussion:

Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 204
Kowalczyk, Z. (Krakow) 204
Fazekas, K. (Budapest) 204
Hristow, W. K. (Sofia) 205

Milasovszky, B. (Miskolc): Über einige Fragen der Astrogeodäsie in Ungarn 1948—55 299

Diskussion:

Krajci, J. (Bratislava) 304
Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 304
Rédey, I. (Budapest) 304

Müller, I. (Budapest): Vorschlag zur Berechnung der orthometrischen Höhen der Präzisionsnivellement-Hauptpunkte 191

Diskussion:

Májay, P. (Budapest) 196
Peschel, H. (Dresden) 198
Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 198
Hristow, W. K. (Sofia) 199
Durnjew, A. I. (Moskwa—Dresden) 199
Bendefy, L. (Budapest) 199
Müller, I. (Budapest) 201

Odlanicki, M. (Krakow): Die Entwicklung der polnischen Geodäsie-Wissenschaft in den Jahren 1945—1956 93

Diskussion:

Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 99
Jasnorzewski, J. (Warszawa) 99

Prosen, D. (Beograd): Quelques remarques concernant l'étalonnage du grand cadran des gravimetres Norden 259

Diskussion:

Meisser, O. (Freiberg/Sa) 259
Prosen, D. (Beograd) 259
Meisser, O. (Freiberg/Sa) 259
Prosen, D. (Beograd) 260
Meisser, O. (Freiberg/Sa) 260
Odlanicki, M. (Krakow) 260
Prosen, D. (Beograd) 260
Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 260
Prosen, D. (Beograd) 260
Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 260

Regőczi, E. (Budapest): Die wissenschaftlichen und wirtschaftlichen Ergebnisse des ungarischen Triangulierungsverfahrens 71

Diskussion:

Durnjew, A. I. (Moskwa—Dresden) 92
Jasnorzewski, J. (Warszawa) 92

Regőczi, E.; Möglichkeiten in Ungarn zur Anwendung der indirekten Entfernungsmessung auf physikalischer Grundlage — Possibilities for the Application of Indirect Electronic Distance Measurement in Hungary — Possibilités d'application de la mesure électronique indirecte de distance en Hongrie — *Регеци, Э.*: Возможности приме ения в Венгрии косвенных методов измере ия расстояний физической основы 341

Reicheneder, K. (Potsdam): Zur Neubestimmung der absoluten Schwere in Potsdam 258

Diskussion:

Jasnorzewski, J. (Warszawa) 254
Hristow, W. K. (Sofia) 254
Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 254

Renner, J. (Budapest): Schwerkraftsuntersuchungen in Ungarn seit Roland Eötvös' Tätigkeit 227

Diskussion:

Kádár, I. (Budapest) 240

Renner, J. and *Szilárd, J.*; Gravity Network of Hungary — Das Schwerebasisnetz von Ungarn — Réseau fondamental gravimétrique en Hongrie — *Реннер, Я.* и *Силард, И.*: Опорная грав иметрическая сеть Венгрии 365

Sébor, J. (Sopron): Untersuchungen über Photogrammetrie 219

Diskussion:

Hankó, G. (Budapest) 225

Szádeczky-Kardoss, Gy. (Sopron): Die Berechnung der ellipsoidischen Bogenlänge von Meridianschnitten und Normalschnitten mittels Rechenmaschine 147

Takács, J. (Budapest): Eine neue Methode der ungarischen Kartographie und die Karte der Zukunft 271

Diskussion:

Kuska, Fr. (Bratislava) 273
Hristow, W. K. (Beograd) 273
Maácz, E. (Budapest) 276

Tárczy-Hornoch, A. (Sopron): Weiteres zur Ausgleichung der kontinentalen Triangulierungsnetze 9

Diskussion:

Kuska, F. (Bratislava) 16

Tárczy-Hornoch, A. (Sopron): Die Ergebnisse der Beobachtungen des bei Nagycenk errichteten Geophysikalischen Observatoriums von Juni bis Dez. 1957 307

Empfehlungen des Geodätischen Kongresses 306

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, K. P. KOVÁCS, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT
A. GELEJI

TOMUS XXIII

SERIES GEODAETICA ET GEOPHYSICA

TOMUS 1 *FASCICULI 1—3*

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1959

ZUM GELEIT

Die seit 1951 erschienenen Bände der *Acta Technica Acad. Scient. Hung.* enthalten viele geodätische und geophysikalische Veröffentlichungen. Sie sind jedoch mit einer sehr grossen Anzahl von Studien anderer Richtung so vermischt, dass sie der geodätischen und geophysikalischen Fachwelt schwer zugänglich sind. Dies bewog die Geodätischen und Geophysikalischen Kommissionen der Ung. Akademie der Wissenschaften, in ihren Vorschlägen die Klasse der Technischen Wissenschaften zu ersuchen, die geodätischen und geophysikalischen Arbeiten in einer eigenen, und eigens beziehbaren »Series Geodaetica et Geophysica« der Acta Technica herauszugeben.

Wir danken der Klasse der Technischen Wissenschaften für die günstige Erledigung unseres Vorschlages, die nunmehr das Erscheinen dieser Serie ermöglichte.

Es soll jährlich ein Band in zwei Heften in einem Gesamtumfang von etwa 480 Seiten erscheinen.

Budapest—Sopron, 1. Juli 1958.

Prof. Dr. Ing. h. c. A. TÁRCZY-HORNOCH
o. Mitglied d. Ung. Akademie der Wissenschaften
Vorsitzender der Kommissionen für Geodäsie und Geophysik

INTRODUCTION

The volumes of the *Acta Technica Acad. Scient. Hung.*, which are being published since 1951, contain many geodetical and geophysical papers. Anyhow, these papers are mixed to a great number of publications concerning other fields of science and thus are of difficult accessibility to specialists in geodesy and geophysics. For this reason, the Geodesy and Geophysics Commission of the Hungarian Academy of Sciences has proposed to the Class of Technical Sciences, to publish the geodetical and geophysical papers in a special series of the Acta Technica, the »Series Geodaetica et Geophysica«, which can be subscribed separately.

We thank the Class of Technical Sciences for favorably deciding on this question and making thus possible the edition of this series.

Publication of one yearly volume, consisting of two numbers and of a total 480 pages, is intended.

Budapest—Sopron, July 1, 1958.

Prof. Dr. Ing. h. c. A. TÁRCZY-HORNOCH
Member of the Hungarian Academy of Sciences,
Chairman, Geodesy and Geophysics Commissions

INTRODUCTION

Les volumes parus depuis 1951 des *Acta Technica Acad. Scient. Hung.* contiennent beaucoup de publications géodésiques et géophysiques. Pourtant, ces études sont mélangées à un grand nombre de travaux concernant d'autres sujets et ainsi elles sont difficilement accessibles aux spécialistes géodètes et géophysiciens. En conséquence, la Commission de Géodésie et de Géophysique de l'Académie des Sciences de Hongrie a décidé de prier la Classe des Sciences Techniques, d'éditer les travaux géodésiques et géophysiques dans une série spéciale, pouvant être abonnée à part, la »Series Geodaetica et Geophysica«.

Nous remercions la Classe des Sciences Techniques d'avoir donné suite à cette proposition, ce qui permet de faire paraître la présente série.

Annuellement doît paraître un volume consistant de deux numéros, d'une étendue totale d'environ 480 pages.

Budapest—Sopron, le 1 juillet 1958.

Dr. Ing. h. c. A. TÁRCZY-HORNOCH
Professeur d'Université, Membre de l'Académie des Sciences,
Président des Commissions de Géodésie et de Géophysique

ВВЕДЕНИЕ

В вышедших с 1951 года томах журнала *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* было опубликовано ряд геодезических и геофизических сообщений. Несмотря на это эти сообщения столь сильно смешаны с работами другого направления, что эти сообщения очень трудно доходят до специалистов геодезии и геофизики. Такое положение вещей заставило внести предложение Геодезической и Геофизической Комиссией Академии наук Венгрии Отделению технических наук о издании геодезических и геофизических работ в одном специальном издании журнала Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae под названием «Серия по геодезии и геофизике» (Series Geodaetica et Geophysica), которая предназначена специально для этой области.

Мы благодарны Отделению технических наук Академии наук Венгрии за благоприятное решение нашего предложения, в результате которого стало возможным выпустить эту серию.

Ежегодно предполагается издавать по одному тому из двух тетрадей с общим объемом в 480 печатных страниц.

Будапешт—Шопрон, 1-го июля 1958 года.

Профессор, д-р тех. наук

А. ТАРЦИ-ГОРНОХ

Академик АН Венгрии
председатель комиссии по геодезии и геофизике

VORTRAGSFOLGE DES GEODÄTISCHEN KONGRESSES
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER
WISSENSCHAFTEN
18.—21. SEPTEMBER 1956.

*

SUBJECTS OF THE GEODESY CONGRESS,
HELD SEPT. 18—21, 1956
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

*

SUJETS DU CONGRES DE GÉODÉSIE,
TENU DU 18 AU 21 SEPTEMBRE 1956,
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE HONGRIE

*

МАТЕРИАЛ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО КОНГРЕССА
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ
(18—21 СЕНТЯБРЯ 1956 Г)

ERÖFFNUNGSANSPRACHE

T. ERDEY-GRÚZ
MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Die ungarische geodätische Wissenschaft hat eine ruhmvolle Vergangenheit. Einen der frühen ungarischen Geodäten, Professor Samuel MIKOVINYI — dessen Name auch heute noch oft erwähnt wird — hatte die Berliner Wissenschaftliche Gesellschaft vor zweihundertundzwanzig Jahren zum Mitglied erwählt. Wir können uns auch auf Loránd EÖTVÖS berufen, den bedeutenden ungarischen Physiker, dessen geodätische Untersuchungen betreffs Gestalt der Erde vor der Geodäten der ganzen Welt wohlbekannt sind.

Seit der Befreiung unseres Vaterlandes entwickelte sich neben den anderen Zweigen der Wissenschaften auch die Geodäsie in grossem Masse. Neben den hervorragenden Gelehrten der Geodäsie können auch unsere jungen Geodäten zahlreiche wissenschaftliche Erfolge verzeichnen. Die Akademie hatte vor zwei Jahren das Geodätische Forschungsinstitut der Ungarischen Akademie der Wissenschaften ins Leben gerufen und ist seitdem ohne Unterlass bemüht, die Ausrüstung des Institutes weiter zu entwickeln. Die Zukunftspläne der geodätischen Forschung nehmen im 2. wissenschaftlichen Fünfjahresplan der Akademie einen wichtigen Platz ein. Die Akademie befasst sich unermüdlich damit, die geodätischen wissenschaftlichen Beziehungen auch mit fernen Ländern auszubauen.

Dieser Kongress ist ein neuer Meilenstein auf dem Wege der Entwicklung der geodätischen Wissenschaft, dessen Bedeutung umso grösser ist, als die ungarischen Geodäten gerade jetzt ein dreifaches Jubiläum feiern. Vor hundert Jahren begann die systematische und organisierte staatliche Landesvermessung in Ungarn, vor achtzig Jahren wurde im Vorfahr der Ungarischen Optischen Werke die Fabrikation der geodätischen Instrumente begonnen und vor fünfzig Jahren fand die Sitzung des Internationalen Landesvermessungs-Kongresses in Ungarn statt.

Im Namen der Akademie gebe ich der Hoffnung Ausdruck, dass auch der ungarische geodätische Kongress zum Erfolg des im nächsten Jahr stattfindenden grossen Kongresses der Internationalen Geodätischen und Geophysikalischen Union, sowie der Internationalen Geodätischen Gesellschaft beitragen wird.

I. Ausgleichungskolloquium

WEITERES ZUR AUSGLEICHUNG DER KONTINENTALEN TRIANGULIERUNGSNETZE

Prof. Dr. Ing. h. c. A. TÁRCZY-HORNOCH
O. MITGLIED D. UNGAR. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, SOPRON

Über die Ausgleichung der kontinentalen Triangulierungsnetze haben wir am Budapester Geodätischen Kongress in September 1956 einen Vortrag gehalten. Dieser wurde in einem vorläufigen Bericht [1] veröffentlicht. Im folgenden sollen als dessen Fortsetzung und darauf aufbauend einige Ergänzungen angegeben werden, die über dem gehaltenen Vortrag hinausgehen und auch die inzwischen erschienene wertvolle Arbeit von WOLF [2] berücksichtigen.

Auf unsere Untersuchungen [1] zurückgreifend nehmen wir an, dass in den einzelnen abzuleitenden übergeordneten Dreiecken von etwa 150—200 km Seitenlängen genähert dem Schwerpunkt entsprechend je eine Grundlinie gemessen wurde, wie dies Abb. 1 zeigt. Dann können durch sinngemässe Erweiterung der Helmert—Eggertschen Gedankengänge die drei Winkel A, B, C und die drei Seiten S_1, S_2, S_3 des Grossdreiecks mit Hilfe der fingierten Verbesserungen $\lambda_1 \ldots \lambda_6$ folgend ausgedrückt werden. (Mit dem Index I wollen wir die Zugehörigkeit zu Dreieck I zum Ausdruck bringen.)

$$
\begin{aligned}
A_I &= A'_I + \alpha'_{1/I}\lambda_{1/I} + \alpha'_{2/I}\lambda_{2/I} + \alpha'_{3/I}\lambda_{3/I} + \alpha'_{4/I}\lambda_{4/I} + \alpha'_{5/I}\lambda_{5/I} + \alpha'_{6/I}\lambda_{6/I} \\
B_I &= B'_I \qquad\qquad + \beta'_{2/I}\lambda_{2/I} + \beta'_{3/I}\lambda_{3/I} + \beta'_{4/I}\lambda_{4/I} + \beta'_{5/I}\lambda_{5/I} + \beta'_{6/I}\lambda_{6/I} \\
C_I &= C'_I \qquad\qquad\qquad\qquad + \gamma'_{3/I}\lambda_{3/I} + \gamma'_{4/I}\lambda_{4/I} + \gamma'_{5/I}\lambda_{5/I} + \gamma'_{6/I}\lambda_{6/I} \qquad (1) \\
S_{1/I} &= S'_{1/I} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \delta'_{4/I}\lambda_{4/I} + \delta'_{5/I}\lambda_{5/I} + \delta'_{6/I}\lambda_{6/I} \\
S_{2/I} &= S'_{2/I} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \varepsilon'_{5/I}\lambda_{5/I} + \varepsilon'_{6/I}\lambda_{6/I} \\
S_{3/I} &= S'_{3/I} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \xi'_{6/I}\lambda_{6/I}
\end{aligned}
$$

Die Werte A'_{I}, B'_{I}, C'_{I}, $S'_{1/\mathrm{I}}$, $S'_{2/\mathrm{I}}$, und $S'_{3/\mathrm{I}}$ sind aus der Ausgleichung des Grossdreieckes I im Sinne der Abb. 1 entstanden und werden daher voneinander nicht unabhängig. Wenn wir daher bei der Ausgleichung des Grossdreiecksystems diesen Werten weitere Verbesserungen λ zuordnen, so können die aus der ersten Ausgleichung erhaltenen Werte A'_{I}, B'_{I}, ... nur dann als voneinander unabhängige Beobachtungen behandelt werden, wenn die Koef-

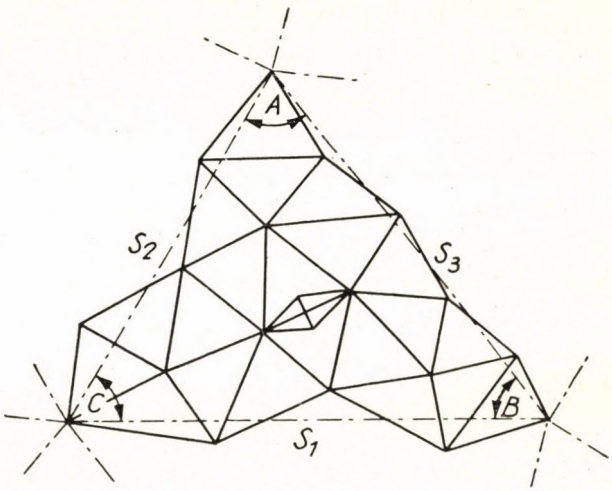


Abb. 1

fizienten $\alpha'_{1/\mathrm{I}}$, $\alpha'_{2/\mathrm{I}}$, ... $\beta'_{2/\mathrm{I}}$, $\beta'_{3/\mathrm{I}}$, ... usw. bestimmten Bedingungen entsprechen. Bezeichnen wir die aus der Ausgleichung des Grossdreieckes erhaltenen reziproken Gewichte wie folgt:

$$\frac{1}{P_{A'}} = [\alpha_{\mathrm{I}}\,\alpha_{\mathrm{I}}] \qquad \frac{1}{P_{B'}} = [\beta_{\mathrm{I}}\,\beta_{\mathrm{I}}] \qquad \frac{1}{P_{C'}} = [\gamma_{\mathrm{I}}\,\gamma_{\mathrm{I}}]$$

$$\frac{1}{P_{S1/\mathrm{I}}} = [\delta_{\mathrm{I}}\,\delta_{\mathrm{I}}] \qquad \frac{1}{P_{S2/\mathrm{I}}} = [\varepsilon_{\mathrm{I}}\,\varepsilon_{\mathrm{I}}] \qquad \frac{1}{P_{S3/\mathrm{I}}} = [\xi_{\mathrm{I}}\,\xi_{\mathrm{I}}] \tag{2}$$

weiters:

$$\frac{1}{P_{A'B'}} = [\alpha_{\mathrm{I}}\,\beta_{\mathrm{I}}] \qquad \frac{1}{P_{A'C'}} = [\alpha_{\mathrm{I}}\,\gamma_{\mathrm{I}}] \quad \ldots \text{ usw.} \tag{3}$$

so müssen hierzu die Gleichungen bestehen:

$$
\begin{array}{lll}
[\alpha'_{\mathrm{I}}\,\alpha'_{\mathrm{I}}] = [\alpha_{\mathrm{I}}\,\alpha_{\mathrm{I}}] & [\alpha'_{\mathrm{I}}\,\beta'_{\mathrm{I}}] = [\alpha_{\mathrm{I}}\,\beta_{\mathrm{I}}] & [\alpha'_{\mathrm{I}}\,\gamma'_{\mathrm{I}}] = [\alpha_{\mathrm{I}}\,\gamma_{\mathrm{I}}] \\
[\alpha'_{\mathrm{I}}\,\delta'_{\mathrm{I}}] = [\alpha_{\mathrm{I}}\,\delta_{\mathrm{I}}] & [\alpha'_{\mathrm{I}}\,\varepsilon'_{\mathrm{I}}] = [\alpha_{\mathrm{I}}\,\varepsilon_{\mathrm{I}}] & [\alpha'_{\mathrm{I}}\,\xi'_{\mathrm{I}}] = [\alpha_{\mathrm{I}}\,\xi_{\mathrm{I}}] \\
[\beta'_{\mathrm{I}}\,\beta'_{\mathrm{I}}] = [\beta_{\mathrm{I}}\,\beta_{\mathrm{I}}] & [\beta'_{\mathrm{I}}\,\gamma'_{\mathrm{I}}] = [\beta_{\mathrm{I}}\,\gamma_{\mathrm{I}}] & [\beta'_{\mathrm{I}}\,\delta'_{\mathrm{I}}] = [\beta_{\mathrm{I}}\,\delta_{\mathrm{I}}] \\
[\beta'_{\mathrm{I}}\,\varepsilon'_{\mathrm{I}}] = [\beta_{\mathrm{I}}\,\varepsilon_{\mathrm{I}}] & [\beta'_{\mathrm{I}}\,\xi'_{\mathrm{I}}] = [\beta_{\mathrm{I}}\,\xi_{\mathrm{I}}] & \\
[\gamma'_{\mathrm{I}}\,\gamma'_{\mathrm{I}}] = [\gamma_{\mathrm{I}}\,\gamma_{\mathrm{I}}] &]\gamma'_{\mathrm{I}}\,\delta'_{\mathrm{I}}] = [\gamma_{\mathrm{I}}\,\delta_{\mathrm{I}}] & [\gamma'_{\mathrm{I}}\,\varepsilon'_{\mathrm{I}}] = [\gamma_{\mathrm{I}}\,\varepsilon_{\mathrm{I}}] \\
[\gamma'_{\mathrm{I}}\,\xi'_{\mathrm{I}}] = [\gamma_{\mathrm{I}}\,\xi_{\mathrm{I}}] & & \\
[\delta'_{\mathrm{I}}\,\delta'_{\mathrm{I}}] = [\delta_{\mathrm{I}}\,\delta_{\mathrm{I}}] & [\delta'_{\mathrm{I}}\,\varepsilon'_{\mathrm{I}}] = [\delta_{\mathrm{I}}\,\varepsilon_{\mathrm{I}}] & [\delta'_{\mathrm{I}}\,\xi'_{\mathrm{I}}] = [\delta_{\mathrm{I}}\,\xi_{\mathrm{I}}] \\
[\varepsilon'_{\mathrm{I}}\,\varepsilon'_{\mathrm{I}}] = [\varepsilon_{\mathrm{I}}\,\varepsilon_{\mathrm{I}}] & [\varepsilon'_{\mathrm{I}}\,\xi'_{\mathrm{I}}] = [\varepsilon_{\mathrm{I}}\,\xi_{\mathrm{I}}] & \\
[\xi'_{\mathrm{I}}\,\xi'_{\mathrm{I}}] = [\xi_{\mathrm{I}}\,\xi_{\mathrm{I}}] & &
\end{array}
\tag{4}
$$

Diese Gleichungen geben 21 Beziehungen zwischen den ursprünglichen 36 Koeffizienten $\alpha \ldots \xi$ der Gl.-en (1) an. Wir können daher bei Erfüllung der Bedingungen (4) noch folgende vereinfachende Annahmen machen:

$$
\begin{array}{lll}
\beta'_{1/\mathrm{I}} = 0 & \gamma'_{1/\mathrm{I}} = 0 & \gamma'_{2/\mathrm{I}} = 0 \\
\delta'_{1/\mathrm{I}} = 0 & \delta'_{2/\mathrm{I}} = 0 & \delta'_{3/\mathrm{I}} = 0 \\
\varepsilon'_{1/\mathrm{I}} = 0 & \varepsilon'_{2/\mathrm{I}} = 0 & \varepsilon'_{3/\mathrm{I}} = 0 \\
\varepsilon'_{4/\mathrm{I}} = 0 & \xi'_{1/\mathrm{I}} = 0 & \xi'_{2/\mathrm{I}} = 0 \\
\xi'_{3/\mathrm{I}} = 0 & \xi'_{4/\mathrm{I}} = 0 & \xi'_{5/\mathrm{I}} = 0
\end{array}
\tag{4a}
$$

Dadurch können die in den Gl.-en (4) erscheinenden übrigen Koeffizienten $\alpha'_{1/\mathrm{I}}, \alpha'_{2/\mathrm{I}}, \ldots \beta'_{2/\mathrm{I}}, \beta'_{3/\mathrm{I}}, \ldots \gamma'_{3/\mathrm{I}}, \gamma'_{4/\mathrm{I}}, \ldots$ usw. von $\xi'_{6/\mathrm{I}}$ angefangen berechnet werden. So wird aus $[\xi'_{\mathrm{I}}\,\xi'_{\mathrm{I}}] = \xi'^{2}_{6/\mathrm{I}} = [\xi_{\mathrm{I}}\,\xi_{\mathrm{I}}]$ sofort $\xi'_{6/\mathrm{I}} = \sqrt{[\xi_{\mathrm{I}}\xi_{\mathrm{I}}]}$ weiters: aus

$$[\varepsilon_{\mathrm{I}}\,\xi_{\mathrm{I}}] = [\varepsilon'_{\mathrm{I}}\,\xi'_{\mathrm{I}}] = \varepsilon'_{6/\mathrm{I}}\,\xi'_{6/\mathrm{I}}$$

ergibt sich

$$\varepsilon'_{6/\mathrm{I}} = \frac{[\varepsilon_{\mathrm{I}}\,\xi_{\mathrm{I}}]}{\xi'_{6/\mathrm{I}}} \tag{5}$$

und aus

$$[\varepsilon_{\mathrm{I}}\,\varepsilon_{\mathrm{I}}] = [\varepsilon'_{\mathrm{I}}\,\varepsilon'_{\mathrm{I}}] = \varepsilon'^{2}_{5/\mathrm{I}} + \varepsilon'^{2}_{6/\mathrm{I}}$$

wird

$$\varepsilon'_{5/\mathrm{I}} = \sqrt{[\varepsilon_{\mathrm{I}}\,\varepsilon_{\mathrm{I}}] - \varepsilon'^{2}_{6/\mathrm{I}}}$$

usw.

So sind die Koeffizienten der unter (1) angegebenen Beziehungen bestimmbar, in denen die Werte $A'_{\mathrm{I}}, B'_{\mathrm{I}}, C'_{\mathrm{I}}, S'_{1/\mathrm{I}}, S'_{2/\mathrm{I}}$, und $S'_{3/\mathrm{I}}$ nunmehr als voneinander unabhängige Werte behandelt werden können.

Ähnlich verfährt man in den Grossdreiecken II, III usw.

Betrachtet man nun das Grossdreiecksystem nach Abb. 2 so ist die Anzahl Z der überschüssigen Beobachtungen leicht zu bestimmen. In jedem Grossdreieck sind alle Seiten und Winkel durch fingierte (hergeleitete) Beobachtungen gegeben. Bei n Punkten gibt dies $(n-2)$ 6 Beobachtungswerte. Zur eindeutigen Bestimmung von n Punkten sind — da ein Punkt und eine Richtung angenommen werden muss — $2n$—3 Beobachtungen erforderlich. Die Anzahl Z der überschüssigen Beobachtungen wäre mithin bei Dreiecksketten :

$$Z_k = 4n - 9 \tag{6}$$

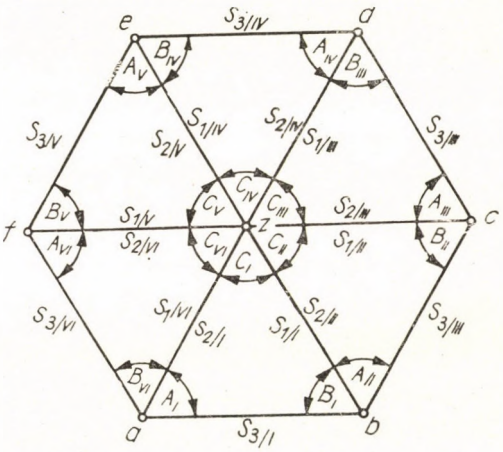


Abb. 2

Die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen erhöht sich in einem zentralen System mit jedem Zentrum um 6, da das letzte Dreieck im zentralen System durch die übrigen bereits bestimmt erscheint, daher alle seine Grössen als überschüssige gelten. Bei C Zentren gibt dies 6 C weitere überschüssige Beobachtungen. Mithin ist die Anzahl Z_c der überschüssigen Beobachtungen in zentralen Netzen :

$$Z_c = 4n - 9 + 6C \tag{6a}$$

Die entsprechenden Gleichungen zur Ausgleichung nach dem Verfahren der bedingten Beobachtungen haben wir in [1] bereits angegeben. Es soll daher hier die Anwendbarkeit des Verfahrens der vermittelnden Beobachtungen genauer geprüft werden, da dieses bei n Punkten nur $2n - 3$ Unbekannte erfordert.

Nach dem Verfahren der vermittelnden Beobachtungen entstehen in Verbindung mit den Gl.-en (1) nach Reihenentwicklung folgende Beziehungen (Wir nehmen an, dass der Punkt a und die Richtung (ab) gegeben sind) :

$$A'_{\mathrm{I}} + \alpha'_{1/\mathrm{I}}\lambda_{1/\mathrm{I}} + \alpha'_{2/\mathrm{I}}\lambda_{2/\mathrm{I}} + \alpha'_{3/\mathrm{I}}\lambda_{3/\mathrm{I}} + \alpha'_{4/\mathrm{I}}\lambda_{4/\mathrm{I}} + \alpha'_{5/\mathrm{I}}\lambda_{5/\mathrm{I}} + \alpha'_{6/\mathrm{I}}\lambda_{6/\mathrm{I}} =$$

$$= A_{\mathrm{I}} = \varepsilon \operatorname{arc\,tg}\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y_z - y_a}{x_z - x_a} =$$

$$= \varrho\frac{\sin(az)_0}{\overline{az}_0}\delta x_z - \varrho\frac{\cos(az)_0}{\overline{az}_0}\delta y_z + (ab) - (az)_0$$

$$B'_{\mathrm{I}} + \beta'_{2/\mathrm{I}}\lambda_{2/\mathrm{I}} + \beta'_{3/\mathrm{I}}\lambda_{3/\mathrm{I}} + \beta'_{4/\mathrm{I}}\lambda_{4/\mathrm{I}} + \beta'_{5/\mathrm{I}}\lambda_{5/\mathrm{I}} + \beta'_{6/\mathrm{I}}\lambda_{6/\mathrm{I}} =$$

$$= B_{\mathrm{I}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{y_z - y_b}{x_z - x_b} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y_a - y_b}{x_a - x_b} = -\varrho\frac{\sin(bz)_0}{\overline{bz}_0}\delta x_z +$$

$$+ \varrho\frac{\cos(bz)_0}{\overline{bz}_0}\delta y_z + (bz)_0 - (ba)$$

$$C'_{\mathrm{I}} + \gamma'_{3/\mathrm{I}}\lambda_{3/\mathrm{I}} + \gamma'_{4/\mathrm{I}}\lambda_{4/\mathrm{I}} + \gamma'_{5/\mathrm{I}}\lambda_{5/\mathrm{I}} + \gamma'_{6/\mathrm{I}}\lambda_{6/\mathrm{I}} =$$

$$= C_{\mathrm{I}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{y_a - y_z}{x_a - x_z} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y_b - y_z}{x_b - x_z} =$$

$$= \varrho\left\{\frac{\sin(za)_0}{\overline{za}_0} - \frac{\sin(zb)_0}{\overline{zb}_0}\right\}\delta x_z - \varrho\left(\frac{\cos(za)_0}{\overline{za}_0} - \frac{\cos(zb)_0}{\overline{zb}_0}\right)\delta y_z +$$

$$+ \varrho\frac{\sin(zb)_0}{\overline{zb}_0}\delta x_b - \varrho\frac{\cos(zb)_0}{\overline{zb}_0}\delta y_b + (za)_0 - (zb)_0 \qquad (7)$$

$$S'_{1/\mathrm{I}} + \delta'_{4/\mathrm{I}}\lambda_{4/\mathrm{I}} + \delta'_{5/\mathrm{I}}\lambda_{5/\mathrm{I}} + \delta'_{6/\mathrm{I}}\lambda_{6/\mathrm{I}} =$$

$$= S_{1/\mathrm{I}} = \sqrt{(x_z - x_b)^2 + (y_z - y_b)^2} = \frac{x_{z_0} - x_{b_0}}{\overline{zb}_0}\delta x_z + \frac{y_{z_0} - y_{b_0}}{\overline{zb}_0}\delta y_z -$$

$$- \frac{x_{z_0} - x_{b_0}}{\overline{zb}_0}\delta x_b - \frac{y_{z_0} - y_{b_0}}{\overline{zb}_0}\delta y_b + \overline{zb}_0$$

$$S'_{2/\mathrm{I}} + \varepsilon'_{5/\mathrm{I}}\lambda_{5/\mathrm{I}} + \varepsilon'_{6/\mathrm{I}}\lambda_{6/\mathrm{I}} =$$

$$= S_{2/\mathrm{I}} = \sqrt{(x_z - x_a)^2 + (y_z - y_a)^2} =$$

$$= \frac{x_{z_0} - x_a}{\overline{za}_0}\delta x_z + \frac{y_{z_0} - y_a}{\overline{za}_0}\delta y_z + \overline{za}_0$$

$$S'_{3/\mathrm{I}} + \xi'_{6/\mathrm{I}}\lambda_{6/\mathrm{I}} =$$

$$= S_{3/\mathrm{I}} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} =$$

$$= \frac{x_{b_0} - x_a}{\overline{ab}_0}\delta x_b + \frac{y_{b_0} - y_a}{\overline{ab}_0}\delta y_b + \overline{ab}_0.$$

Dabei besteht für die Koordinaten x_b, und y_b, die Bedingung :

$$\operatorname{tg}(ab) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{\delta y_b}{x_{b_0} - x_a} - \frac{y_{b_0} - y_a}{(x_{b_0} - x_a)^2}\,\delta x_b + \frac{y_{b_0} - y_a}{x_{b_0} - x_a} \tag{7a}$$

und daraus :

$$\delta y_b = \operatorname{tg}(ab)\,\delta x_b + (x_{b_0} - x_a)\operatorname{tg}(ab) - (y_{b_0} - y_a) \tag{7b}$$

Ordnen wir die Gl.-en (7) u. (7a) so haben wir den Fall der Bedingungsgleichungen mit ungemessenen Unbekannten vor uns, wobei zwischen den Unbekannten noch die in Gl. (7a) bzw. (7b) ausgedrückte Zwangsbedingung besteht. Wir haben über die Lösung dieser Ausgleichsgruppe 1949 berichtet [3]. Erst später erfuhren wir, dass eine andere Lösung dieses Problems H. Wolf in einer schwer zugängigen Schrift 1948 veröffentlichte [4]. Es mag hier bemerkt werden, dass auch unsere Untersuchung noch in 1948 der Schweizerischen Zeitschrift für Vermessung und Kulturtechnik eingesandt wurde, dort aber wegen Materialanhäufung noch später hätte veröffentlicht werden können. Im vorliegenden Fall kann δy_b leicht nach Gl. (7b) in den Gl.-en (7) ersetzt werden, in welchem Falle wir die Bedingungsgleichungen mit ungemessenen Unbekannten zu lösen haben.

Letzteres Problem ist neuerdings von H. Wolf in systematischer Form und übersichtlich behandelt worden [2 ; unter B. u. E.]. Man erhält in diesem Falle hier $(4n - 9 + 6\,C) + (2n - 3) = 6(n - 2 + C)$ Normalgleichungen, weshalb die Ausgleichung nach den reinen bedingten Beobachtungen, wie unter [1] angegeben wurde, zunächst günstiger erscheint.

Bedenkt man aber, dass man aus der letzten der Gl.-en (7) sofort die nur eine Verbesserung $\lambda_{6/I}$ enthaltende Verbesserungsgleichung anschreiben kann :

$$\lambda_{6/I} = \frac{x_{b_0} - x_a}{\xi'_{6/I}\,\overline{ab}_0}\,\delta x_b + \frac{y_{b_0} - y_a}{\xi'_{6/I}\,\overline{ab}_0}\,\delta y_b + \frac{\overline{ab}_0 - S'_{3/I}}{\xi'_{6/I}} \tag{8}$$

Ersetzt man darin δy_b durch Gl. (7b) so wird daraus :

$$\begin{aligned}\lambda_{6/I} = {} & \left(\frac{x_{b_0} - x_a}{\xi'_{6/I}\,\overline{ab}_0} + \frac{(y_{b_0} - y_a)\operatorname{tg}(ab)}{\xi'_{6/I}\,\overline{ab}_0}\right)\delta x_b + \\ & + \left\{\frac{(x_{b_0} - x_a)(y_{b_0} - y_a)\operatorname{tg}(ab)}{\xi'_{6/I}\,\overline{ab}_0} - \frac{(y_{b_0} - y_a)^2}{\xi'_{6/I}\,\overline{ab}_0} + \frac{\overline{ab}_0 - S'_{3/I}}{\xi'_{6/I}}\right\}.\end{aligned} \tag{8a}$$

Führt man den Wert von $\lambda_{6/I}$ in die vorletzte der Gl. (7) ein, so kann unmittelbar $\lambda_{5/I}$ als Funktion der Unbekannten δx und δy erhalten werden. Setzt

man die Werte $\lambda_{5/I}$ und $\lambda_{6/I}$ in die drittletzte der Gl.-en (7) ein, so ergibt sich daraus eine Gl. mit der einzigen Verbesserung $\lambda_{4/I}$ usw. Ähnlich verfährt man in allen anderen Grossdreiecken, nur mit dem Unterschied, dass im Falle, wo an Stelle von a andere Punkte erscheinen, auch diese zu berechnende Koordinatenzuschläge δx und δy erhalten.

Man erhält füglich die bekannten Gl.-en der reinen vermittelnden Beobachtungen, deren Auflösung bekannt ist. Wir haben somit den Fall der Ausgleichung mit fingierten Beobachtungen nach der Methode der vermittelnden Beobachtungen vor uns. Auch die Genauigkeitsuntersuchungen bereiten keine Schwierigkeiten. Diese Methode dürfte auch bei der Lösung des Gleichungssystems (5) von [2] gut anwendbar sein.

Wann ist nun die Lösung nach den vermittelnden Beobachtungen günstiger? Nach der Ausgleichung der bedingten Beobachtungen haben wir $4n - 9 + 6C$, nach der der vermittelnden Beobachtungen $2n - 3$ Normalgleichungen. Ist somit

$$4n - 9 + 6C > 2n - 3$$

oder

$$2n - 6 + 6C > 0$$

d.h. bei $n \geq 3$ wird die Ausgleichung bezüglich der Anzahl der Normalgleichungen nach den vermittelnden Beobachtungen, bzw. durch Einführung der Punktkoordinaten als Unbekannte günstiger. Praktisch ist aber in Erwägung zu ziehen, dass die Herleitung der Verbessergunsgleichungen mit nur je einer Verbesserung auch einige Rechenarbeit erfordert, so dass in diesem Falle n etwa in 5 angenommen werden kann. Dies bedeutet aber, dass man praktisch in allen Fällen, wo sämtliche Seiten und Winkel der hergeleiteten Dreiecke in die Ausgleichung eingeführt werden, vorteilhaft nach den Koordinaten der Punkte ausgleicht. Werden die Winkel und Seiten unmittelbar gemessen, so trifft dies schon von $n = 3$ angefangen, d. h. in noch erhöhtem Masse zu. Dadurch gewinnt die von MAREK in 1875 empfohlene [5 ; S. 204—215], aber seinerzeit von JORDAN noch abgelehnte (Zeitschr. f. Vermessungswes. 1877. S. 45) Ausgleichung von Netzen nach Koordinaten eine erhöhte Bedeutung.

SCHRIFTTUM

1 A. TÁRCZY-HORNOCH : Zur Ausgleichung der kontinentalen Netze. Acta Technica Hungarica, Bd. XVI. S. 429—435.
2. H. WOLF : Beitrag zur Ausgleichung von untereinander abhängigen Beobachtungen. Zeitschr. f. Vermessungswes. 1958. S. 113—120.
3. A. TÁRCZY-HORNOCH : Eine weitere Ausgleichsgruppe. Soproner Mitteil. Bd. 1948—49, S. 325—332.
4. H. WOLF : Über eine allgemeine Form der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Arbeiten aus dem Institut für Erdmessung. Bamberg, 1948.
5. J. MAREK : Technische Anleitung zur Ausführung der trigonometrischen Operationen des Katasters. Budapest, 1875.

DISKUSSION

Prof. Dr. FR. KUSKA, BRATISLAVA

Die im Vortrage beschriebenen theoretischen Untersuchungen sind sehr wichtig und für die Ausgleichung der kontinentalen Netze von grosser Bedeutung.

Im Interesse der praktischen Anwendung wäre es aber geboten, die gewonnenen Erkenntnisse auch auf die Theorien der kontinentalen Netze unterschiedlicher Gewichte auszudehnen.

KLASSISCHE UND MODERNE GENAUIGKEITS-ABSCHÄTZUNGEN IN EINIGEN AUSGLEICHUNGSFÄLLEN

Dr. W. K. HRISTOW
KORRESPONDIERENDES MITGLIED DER BULGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, SOFIA

Ausser der Geodäsie — und in einem gewissen Grade der Astronomie — gibt es kaum eine andere Wissenschaft, in der so reichlich die Ausgleichung anhand überzähliger Beobachtungen benutzt wird. Diese Ausgleichung geschah immer nach der klassischen Methode der kleinsten Quadrate von GAUSS, wobei auch die Genauigkeitsabschätzungen mittels der sog. mittleren Fehler analogisch immer nach der klassischen Methode, von Gauss vererbt, erfolgten.

Die klassische Methode zur Ausgleichung nach den kleinsten Quadraten wurde von eminenten Geodäten weiter entwickelt, wobei auch sehr komplizierte Fälle betrachtet worden sind. Die ganze geodätische Literatur, einschl. der gegenwärtigen, namentlich Lehrbücher, Abhandlungen und Aufsätze, in Bezug auf die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, fusst auf klassischer Grundlage.

Wir können auf eine oder andere Weise Näherungswerte der gesuchten Grössen finden und die Frage nach dem Grade der Abnäherung, der Genauigkeit, stellen. Wir wollen uns die Frage konkret stellen: ist die klassische Theorie der Abschätzung der Genauigkeit der ausgeglichenen Werte richtig oder unrichtig? Die Antwort, die die heutige mathematische Statistik gibt, ist dass die klassische Theorie unrichtige Genauigkeitsabschätzungen gibt in dem Sinne, dass die errechneten Abschätzungen täuschend von einem genaueren Ergebnis sprechen, als dies der Wirklichkeit entspricht. Dabei ist der Fehler der Genauigkeitsabschätzung um so grösser, als die Anzahl der Beobachtungen kleiner ist, wobei aber bei sehr grosser Anzahl von Beobachtungen die klassischen Methoden schon praktisch richtige Genauigkeitsabschätzungen geben.

In der Praxis sind jedoch die Fälle mit einer kleinen Anzahl von Beobachtungen überwiegend, sodass wir Geodäten gewöhnlich nach den klassischen Methoden stets unberechtigt genaue Beobachtungsergebnisse erhalten. Daraus ist es ersichtlich, wie dringend erforderlich es ist, dass die Ausgleichungen bei den verschiedenen geodätischen Aufgaben einer Revision unterzogen werden. Demnach müssen wir Geodäten nicht nur offen gestehen, dass wir bis zu diesem Moment die Errungenschaften der heutigen mathematischen Statistik zu wenig benutzt haben, obwohl wir unaufhörlich ausgleichen und verschiedene

mittlere Fehler berechnen, sondern wir müssen auch die bisherigen unrichtigen Genauigkeitsabschätzungen beseitigen und sie durch richtige ersetzen.

Die grossen Beiträge zur Klärung der richtigen Anwendung der Ausgleichungsrechnung sind von Gelehrten gegeben, die ausserhalb dem geodätischen Kreise stehen. In der Tat fusst die Erklärung der für die Geodäten so wichtigen normalen Verteilung von MOIVRE—LAPLACE—GAUSS auf dem zentralen Grenztheorem von A. M. LJAPUNOV (1901), in welcher Verbindung es angebracht ist die Namen von P. L. TSCHEBISCHEV (1887), A. A. MARKOV (1898), S. N. BERNSTEIN (1926) und dem amerikanischen Mathematiker W. FELLER (1935) zu nennen. Die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate wurde von A. A. MARKOV (sein Lehrbuch 1900) gegeben, zu wessen Ehre F. N. DAVID und J. NEYMAN ihr Theorem das verallgemeinerte Theorem von Markov (1938) nennen.

In Zusammenhang mit der normalen Verteilung muss auch die Verteilung von STUDENT (1908) erwähnt werden und in Zusammenhang mit der Abschätzung der gesuchten Grössen, die Methode von Maximum Wahrhaftigkeit von R. A. FISHER (1912). Besondere Beachtung verdienen die Arbeiten von A. N. KOLMOGOROV (1942) und von W. J. ROMANOVSKY (1943), die auf die Bearbeitung der Ergebnisse bei einer kleinen Zahl von Beobachtungen aufmerksam gemacht haben, was, wie bereits betont, sehr wesentlich für die Geodäsie ist.

W. J. ROMANOWSKY schreibt z. B. in seinem kleinen Buch »Grundaufgaben der Fehlertheorie«, Moskau 1947, S. 5 : »Die klassischen Methoden sind nur bei einer grossen Zahl von Messungen anwendbar und bei einer kleinen Zahl von Messungen geben sie ungenaue Ergebnisse, und dabei um so ungenauere, je kleiner die Zahl der Messungen ist. Wenn daher die Aufgaben der Verteidigung und der Industrie möglichst genaue Antwort auf ihre Fragen verlangen, so sind wir verpflichtet zu genaueren und rationaleren Methoden der Bearbeitung der Messungen überzugehen.«

Natürlich muss endlich an genauere und rationalere Methoden auch für die geodätischen Messungen gedacht werden. Beispielsweise werden bei einer präzisen Basismessung auch noch die kleinsten Korrektionen berücksichtigt, wogegen die Ausgleichung auf einem gewöhnlichen Wege stattfindet und gewisse ungeklärte, mittlere Fehler berechnet werden.

Nach Auffassung des Vortragenden ist es erforderlich, um die Einführung der richtigen Weise der Ausgleichung und Genauigkeitsabschätzung — bei der grossen Routine die in den geodätischen Kreisen besteht — zu ermöglichen, dass gerade Wissenschaftler aus geodätischen Kreisen die Idee für die Revision der bisherigen Arbeitsmethode zu ihrer Aufgabe machen. Selbstverständlich stehen wir vor einer grossen Pionierarbeit und die Ergebnisse werden erst nach einer geraumen Zeitspanne in Erscheinung treten.

Die folgende Beschreibung wird sehr bekannte Sachen für den Mathematiker-Statistiker, jedoch weniger bekannte für den Geodäten enthalten. Das

Gewicht liegt nicht so sehr an der Mitteilung originaler Beiträge, als an der Darstellung der Idee für die Revision der bisherigen fehlerhaften Praxis der Schätzung der Genauigkeitsergebnisse bei einer kleinen Anzahl von Beobachtungen, d. h. in den meisten Fällen, in einer annehmbaren Form.

Es sei noch bemerkt, dass der Verfasser sich die Mühe gegeben hat, einen Artikel für Geodäten zu verfassen. Er wollte sich eines einfacheren mathematischen Apparates bedienen und auch das den Geodäten aus der Theorie der kleinsten Quadrate Bekannte benutzen. Der Fachmann wird hier jedoch die originale Betrachtungsweise des Materials ersehen.

Zuerst geben wir einige Begriffe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik.

Eine typische *zufällige Grösse* X ist das zufällige Ereignis, das zahlenmässig ausdrückbar ist. Die *integrale Verteilung* $F(x)$ gibt die Wahrscheinlichkeit

$$P(X < x) = F(x) \tag{1}$$

Typische Verteilungen der zufälligen Grössen sind die *diskrete* und die *kontinuierliche*. Bei kontinuierlichen zufälligen Grössen können wir von einer *differentiellen Verteilung*, nämlich von der Dichte $f(x)$ der Wahrscheinlichkeit

$$f(x) = F'(x) \tag{2}$$

sprechen, im Sinne

$$P(x < X < x + dx) = f(x)\,dx = F'(x)\,dx = dF(x). \tag{3}$$

Wichtige Begriffe sind der *apriorische Mittelwert* von X

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) = a = \overline{X}, \tag{4}$$

und die *apriorische Dispersion* σ^2

$$D(X) = M(x-a)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2\,dF(x) = \sigma^2 \tag{5}$$

welche die wesentlichen Merkmale, die zu einem gewissen Grade die Verteilungsfunktionen ersetzen, sind.

Die Quadratwurzel aus der Dispersion heisst *Standard* σ.

Für uns ist es sehr wichtig, dass eine *Beobachtungsgrösse*, nämlich *das mögliche Ergebnis* von einer Messung, eine zufällige Grösse ist. Bei symmetrischer Verteilung und bei Mangel an systematischen Einflüssen fällt der Mittelwert a mit dem *wahrscheinlichsten Wert (Mode)* und dem *wahren Wert* zusam-

men, und der Standard $\sigma +$ mit dem sog. *mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen*, berechnet jedoch aus einer sehr grossen Anzahl von Beobachtungen.

Der empirische oder *Wahl-Mittelwert* $\bar{x}$ ist das arithmetische Mittel aus n ausgeführten Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots x_n$

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^n (x_1 - \bar{x}^2)}{n} \tag{6}$$

Dieser entspricht dem apriorischen Mittelwert.

Die empirische oder *Wahl-Dispersion* s^2 ist

$$s^2 = \frac{\sum_1^n (x_1 - \bar{x})^2}{n} . \tag{7}$$

Sie entspricht der apriorischen Dispersion.

Wenn wir nicht an eine Serie von tatsächlich ausgeführten Beobachtungen denken, sondern an *möglich* ausgeführten Beobachtungen $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ welche natürlich zufällige Grössen sind, so sprechen wir von einem *möglichen Wahlmittelwert* $\widetilde{X}$

$$\widetilde{X} = \frac{\sum_1^n X_i}{n} \tag{8}$$

und von *möglicher Wahldispersion* S^2

$$S^2 = \frac{\sum_1^n (X_i - \widetilde{X})^2}{n} \tag{9}$$

welche natürlich zufällige Grössen sind und ihre Mittelwerte und Dispersionen haben.

Da

$$M(\widetilde{X}_i) = a \tag{10}$$

$$D(\widetilde{X}_i) = \frac{\sigma}{n} , \tag{11}$$

gilt, so bekommen wir sofort aus (8)

$$M(\widetilde{X}) = a \tag{12}$$

$$D(\widetilde{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{13}$$

Es kann aus (9)

$$M(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \tag{14}$$

abgeleitet werden, sodass mit Rücksicht auf (9)

$$M\left[\frac{\sum_1^n (X_i - \widetilde{X})^2}{n-1}\right] = \sigma^2 \tag{15}$$

geschrieben werden kann.

Also in $\bar{x}$ gemäss (12) haben wir den *unverschobenen Schätzungswert* für

$$a \approx \frac{\sum_1^n x_i}{n} = \bar{x}, \tag{16}$$

jedoch haben wir in (12) nicht den unverschobenen Schätzungswert für a, und müssen gemäss (15)

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{17}$$

schreiben, den sog. mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungen.

Aus (17) erhält man

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = s_{\bar{x}} \tag{18}$$

den sog. mittleren Fehler des arithmetischen Mittels.

An dieser Stelle wollen wir auf eine Aussage hinweisen, die so unzulässig unrichtig wie auch in der ganzen geodätischen Literatur, besonders in den Lehrbüchern für Ausgleichung, vebreitet ist, nämlich, dass der wahrscheinlichste Wert der gesuchten Grösse a das arithmetische Mittel $\bar{x}$ sei. Richtig ist gerade das Umgekehrte : der wahrscheinlichste Wert des möglichen arithmetischen Mittels $\widetilde{X}$ ist der wahre Wert a. In der Tat ist der wahre Wert a eine konstante Grösse und kann infolgedessen keine Verteilung besitzen, von der wir sagen könnten, dass diese oder jene konstante Grösse sei ihr wahrscheinlichster Wert /Mode ; um so weniger dürfen wir als solchen wahrscheinlichsten Wert irgend ein konkretes arithmetisches Mittel $\bar{x}$ nehmen. Dagegen hat das mögliche arithmetische Mittel $\widetilde{X}$, da es eine zufällige, also veränderliche

Grösse ist, einen wahrscheinlichsten Wert, Mode, und bei der Abwesenheit von systematischen Fehlern fällt dieser, wie wir schon gezeigt haben, mit dem wahren Wert a zusammen.

Aus diesem Beispiel sieht man zur Genüge, wie unbegründet schwach der Einfluss der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Geodäsie ist, wenn die Verbreitung dieses konfusen Fehlers in der Geodäsie möglich war, dass die wahren Werte wahrscheinlichste Werte hätten, die durch die Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet würden.

*

Nehmen wir nun an, dass die Voraussetzungen des zentralen Grenztheorems von LJAPUNOV erfüllt sind, was z. B. der Fall mit den Elementarfehlern von HAGEN ist. In diesem Falle haben wir die sog. normale Verteilung von MOIVRE—LAPLACE—GAUSS, für die

$$P(x < X < x + dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} l^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \tag{19}$$

gilt, wo a und σ gerade die Bedeutung des apriorischen Mittelwertes bzw. des apriorischen Standardes haben.

Solche *normale Verteilung* bezeichnet man kurz mit (a, σ) und die zufällige Grösse selbst nennt man *normale Grösse.* Normale Grössen mit Verteilung (0,1) heissen *normierte Grössen.*

Wenn wir zwei Normalgrössen X, Y, mit der Verteilung

$$P(x < X < x + dx) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} l^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}} dx \tag{20}$$

$$P(y < Y < y + dy) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} l^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2}} dy \tag{21}$$

haben, so gilt für die Wahrscheinlichkeit der vereinigten Verteilung

$$P\begin{pmatrix} x < X < x + dx \\ y < Y < y + dy \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} lxp\left\{\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\right.$$
$$\left.\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\varrho(x-a)(x-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} dx\,dy, \tag{22}$$

wo ϱ der sog. *Korrelationskoeffizient* ist

$$\varrho = \frac{M[(X-a)(Y-b)]}{\sigma_1\sigma_2}. \tag{23}$$

Interessant ist Folgendes : wenn die Grössen X und Y normal sind und der Korrelationskoeffizient 0 ist, so sind die Grössen voneinander unabhängig :

$$P\begin{pmatrix} x < X < x + dx \\ y < Y < y + dy \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_1} l^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_1^2}} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_2} l^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_2^2}} dy \tag{24}$$

Nun definieren wir die sog. χ^2-*Verteilung*. Es seien $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ unabhängig zufällige normierte Grössen (0,1). Dann hat die Grösse

$$\chi^2 = \sum_1^n X_1^2 \tag{25}$$

die Dichte der Wahrscheinlichkeit

$$\left.\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, x^{\frac{n}{2}-1} l^{-\frac{n}{2}}, \quad x > 0 \\ K_n(x) &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad x \leqq 0 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

im Sinne

$$P(x < \chi^2 < x + dx) = K_n(x)\, dx \tag{27}$$

Wenn die Grössen $X_1, X_2, \ldots X_n$ unabhängige zufällige normale Grössen (a, σ) sind, so lässt sich folgendes ableiten : $x > 0$.

Grösse	Dichte der Wahrscheinlichkeit bei $x > 0$
$\sum_1^n X_i^2$	$\frac{1}{\sigma^2} K_n\left(\frac{x}{\sigma^2}\right)$
$\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2$	$\frac{n}{\sigma^2} K_n\left(\frac{nx}{\sigma^2}\right)$
$+\sqrt{\sum_1^n X_i^2}$	$\frac{2x}{\sigma^2} K_n\left(\frac{x^2}{\sigma^2}\right)$
$+\sqrt{\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2}$	$\frac{2nx}{\sigma^2} K_n\left(\frac{nx^2}{\sigma^2}\right)$

(28)

Sehr wichtig ist die sog. *t-Verteilung* oder *Verteilung von* STUDENT. Es seien $X_1, X_2, \ldots, X_n, X$ unabhängige normale Grössen $(0, \sigma)$. Wir führen die Grösse

$$Y = +\sqrt{\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2} \tag{29}$$

ein.

Die Verteilung der zufälligen Grösse

$$T = \frac{X}{Y} = \frac{X}{+\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i^2}} \tag{30}$$

ist namentlich die t-Verteilung oder Verteilung von STUDENT mit der Dichte der Wahrscheinlichkeit

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n\,\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \tag{31}$$

im Sinne

$$P(t < T < t + dt) = s_n(t)\,dt \tag{32}$$

Das Wesentliche hier ist, dass der Standard σ wegfällt.

Interessant ist auch, dass

$$\lim_{n=\infty} s_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, l^{-\frac{t^2}{2}} \tag{33}$$

gilt.

Folglich geht die Verteilung von STUDENT bei sehr grossem in die jedem Geodäten bekannte normale Verteilung (0,1) über.

*

Nach dieser Vorbereitung wollen wir zur Ausgleichungsrechnung übergehen. Die möglichen Fälle sind: direkte Beobachtungen, vermittelnde Beobachtungen, bedingte Beobachtungen, vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten, und bedingte Beobachtungen mit Unbekannten, welch letzterer Fall der Allgemeinste ist und die ersten vier als Sonderfälle enthält. Es ist bekannt, dass alle Fälle in der Ausgleichungsrechnung auf vermittelnde oder bedingte Beobachtungen, richtiger Ausgleichungen, reduziert werden können. Wir wollen annehmen, dass wir unseren Fall auf eine vermittelnde Ausgleichung zurückgeführt haben, indem wir uns der Kürze halber unbeschadet der Allgemeinheit auf zwei Unbekannte beschränkt haben.

So haben wir für jeden Geodäten verständliche Beobachtungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y - l_1 &= v_1 \\ a_2 x + b_2 y - l_2 &= v_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\

welche bei der klassischen Minimumbedingung — sie steht auch mit der Methode von Maximum Wahrhaftigkeit in Übereinstimmung

$$w = [p\,v\,v] = \text{Min} \tag{35}$$

zu den Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned} [paa]\,x + [pab]\,y &= [pab] \\ [pab]\,x + [pbb]\,y &=]pbb] \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

führen.

Wir wollen nun statt der gegebenen konkreten Serie von Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots, l_n$ überhaupt die *möglichen* Beobachtungen $L_1, L_2, \ldots, L_n$ betrachten, welche foglich zufällige, also veränderliche Grössen sind, und welche wir als normal und unabhängig, dabei frei von systematischen Fehlern voraussetzen.

Demnach werden wir anstatt (34), (35) und (36)

$$\left.\begin{aligned} a_1 X + b_1 Y - L_1 &= V_1 \\ a_2 X + b_2 Y - L_2 &= V_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_n X + b_n Y - L_n &= V_n \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

$$W = [p\,V\,V] = \text{Min} \tag{38}$$

$$\left.\begin{aligned} [paa]\,X + [pab]\,Y &= [paL] \\ [pab]\,X + [pbb]\,Y &= [pbL] \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

haben.

Die apriorischen Mittelwerte der zufälligen Grössen L_1 werden mit den wahren Werten zusammenfallen, denen wir den Index Null beifügen

$$\left.\begin{aligned} M(L_1) &= \bar{L}_1 = L_1^0 \\ M(L_2) &= \bar{L}_2 = L_2^0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ M(L_n) &= \bar{L}_n = L_n^0 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Für die apriorischen Dispersionen setzen wir

$$\left.\begin{aligned} D(L_1) &= \frac{\sigma^2}{p_1} \\ D(L_2) &= \frac{\sigma^2}{p_2} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ D(L_n) &= \frac{\sigma^2}{p_n} \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

worin wir, wie gewöhnlich, die sog. Gewichte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ als bekannt und die Konstante σ^2 als unbekannt voraussetzen.

Gemäss (41) gilt

$$D(\sqrt{p_1}L_1) = D(\sqrt{p_2}L_2) = \ldots = D(\sqrt{p_n}L_n) = \sigma^2 \tag{42}$$

Es ist angebracht neben (37) auch

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{p_1}a_1 X + \sqrt{p_1}b_1\ Y - \sqrt{p_1}L_1 &= \sqrt{p_1}V_1 \\ \sqrt{p_2}a_2 X + \sqrt{p_2}b_2\ Y - \sqrt{p_2}L_2 &= \sqrt{p_2}V_2 \\ \cdots\cdots\cdots\

einführen, so erhalten wir aus (44) und (45)

$$\left.\begin{aligned} g_{11}\,\delta X + g_{12}\,\delta Y &= \Omega_1 \\ g_{12}\,\delta X + g_{22}\,\delta Y &= \Omega_2 \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Die Auslösung von (50) führt zu

$$\left.\begin{aligned} g\,\delta X &= g_{22}\,\Omega_1 - g_{12}\,\Omega_2 \\ g\,\delta Y &= g_{12}\,\Omega_1 + g_{11}\,\Omega_2 \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Aus (51) erhalten wir durch Multiplikation mit Ω_1, Ω_2, δX und δY:

$$\left.\begin{aligned} g\,\delta X\,\Omega_1 &= g_{22}\,\Omega_1^2 - g_{12}\,\Omega_1\,\Omega_2 \\ g\,\delta X\,\Omega_2 &= g_{22}\,\Omega_1\,\Omega_2 - g_{12}\,\Omega_2^2 \\ g\,\delta Y\,\Omega_1 &= -\,g_{12}\,\Omega_1^2 + g_{12}\,\Omega_1 \\ g\,\delta Y\,\Omega_2 &= -\,g_{12}\,\Omega_1\,\Omega_2 + g_{11}\,\Omega_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

$$\left.\begin{aligned} g\,\delta X\,\delta X &= g_{22}\,\delta X\,\Omega_1 - g_{12}\,\delta X\,\Omega_2 \\ g\,\delta X\,\delta Y &= g_{22}\,\delta Y\,\Omega_1 - g_{12}\,\delta Y\,\Omega_2 \\ g\,\delta Y\,\delta X &= -\,g_{12}\,\delta X\,\Omega_1 + g_{11}\,\delta X\,\Omega_2 \\ g\,\delta Y\,\delta Y &= -\,g_{12}\,\delta Y\,\Omega_1 + g_{11}\,\delta Y\,\Omega_2 \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Wir quadrieren in (49) $\Omega_1, n\,\Omega_2$ und multiplizieren sie miteinander, worauf wir die Mittelwerte nehmen. In Anbetracht von (42) erhält man sofort

$$\left.\begin{aligned} M\,(\Omega_1^2) &= g_{11}\,\sigma^2 \\ M\,(\Omega_1\,\Omega_2) &= g_{12}\,\sigma^2 \\ M\,(\Omega_2^2) &= g_{22}\,\sigma^2 \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

(54) anwendend, nehmen wir die Mittelwerte von (52)

$$\left.\begin{aligned} g\,M\,(\delta X\,\Omega_1) &= (g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2)\,\sigma^2 = g\,\sigma^2 \\ g\,M\,(\delta X\,\Omega_2) &= (g_{12}\,g_{22} - g_{12}\,g_{22})\,\sigma^2 = 0 \\ g\,M\,(\delta Y\,\Omega_1) &= (-\,g_{12}\,g_{11} + g_{12}\,g_{11})\,\sigma^2 = 0 \\ g\,M\,(\delta Y\,\Omega_2) &= (-\,g_{12}^2 + g_{11}\,g_{22})\,\sigma^2 = g\,\sigma^2 \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Nun (55) anwendend, nehmen wir die Mittelwerte von (53)

$$\left.\begin{aligned} g\,M\ (\delta X^2) &= \ \ g_{22}\,\sigma^2 \\ g\,M\,(\delta X\,\delta Y) &= -\,g_{12}\,\sigma^2 \\ g\,M\,(\delta Y^2) &= \ \ g_{11}\,\sigma^2 \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Wenn g_{12} Null wäre, so könnte (56) geschrieben werden

$$\left.\begin{aligned} g_{12} &= 0 \\ g_{11} M(\delta X^2) &= \sigma^2 \\ M(\delta X \, \delta Y) &= 0 \\ g_{22} M(\delta Y^2) &= \sigma^2 \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

d. h. $\sqrt{g_{11}}\,\delta X$ und $\sqrt{g_{22}}\,\delta Y$ sind normale Grössen $(0, \sigma)$ und damit unabhängig, da nach (23) der Korrelationskoeffizient Null ist. Wie wir (57) erreichen können, werden wir weiterhin sehen.

Gehen wir zur Funktion (38) über

$$W = [p \cdot (aX + bY - L)^2] \tag{58}$$

Wenn wir (37) für die wahren Werte geschrieben hätten, so würden wir

$$a_i X^0 + bY^0 - L_i^0 = 0, \tag{59}$$

haben, was mit (58)

$$\begin{aligned} W &= [p \cdot (a\,\delta X + b\,\delta Y - \delta L)^2] = \\ &= [p\,(a\,\delta X + b\,\delta Y - \delta L)\,(a\,\delta X + b\,\delta Y - \delta L)] = \\ &= \delta X \cdot [pa\,(a\,\delta X + b\,\delta Y - \delta L)] + \\ &\quad + \delta Y \cdot [pb\,(a\,\delta X + b\,\delta Y - \delta L)] - \\ &\quad - [p\,\delta L\,(a\,\delta X + b\,\delta Y - \delta L)] \end{aligned} \tag{60}$$

ergibt.

In (50) setzen wir die rechten Seiten links und schreiben alles in entwickelter Form

$$\begin{aligned} i \sum (p_i a_i a_i \,\delta X + p_i a_i b_i \,\delta Y - p_i a_i \,\delta L_i) &= 0 \\ i \sum (p_i a_i b_i \,\delta X + p_i b_i b_i \,\delta Y - p_i b_i \,\delta L_i) &= 0 \end{aligned} \tag{61}$$

womit die zwei ersten Glieder in (60) verschwinden und damit erhalten wir

$$\begin{aligned} W &= -[p\,\delta L\,(a\,\delta X + b\,\delta Y - \delta L)] = \\ &= [p\,\delta L\,\delta L] - \delta X\,\Omega_1 - \delta Y\,\Omega_2, \end{aligned} \tag{62}$$

wo wir die Abkürzung (49) benutzt haben.

Gemäss (42) gilt

$$M\{[p\,\delta L\,\delta L]\} = i \sum M(p_i \,\delta L_i \,\delta L_i) = n\,\sigma^2 \tag{63}$$

Indem wir noch (55) berücksichtigen, bekommen wir endlich durch Mittelbildung aus (62)

$$M(W) = (n-2)\,\sigma^2 \tag{64}$$

Wenn wir statt zwei Unbekannten mehrere hätten, so würde (64) zu

$$\sigma^2 = \frac{M\{[pVV]\}}{n-m} \tag{65}$$

führen.

Folglich dürfen wir im gegebenen konkreten Fall als Schätzungswert für die Dispersion σ^2 bzw. dem Standard

$$\sigma^2 \approx \frac{[p\,vv]}{n-m} \tag{66}$$

bzw.

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{[p\,vv]}{n-m}} \tag{67}$$

annehmen; die letzte Grösse führt den Namen *mittlerer Fehler für die Gewichtseinheit.*

Wir setzen in (62) δX und δY gemäss (51) ein

$$W = [pVV] = [p\,\delta L\,\delta L] - \frac{g_{22}}{g}\,\Omega_1^2 - \frac{g_{11}}{g}\,\Omega_2^2, \tag{68}$$

Wir schreiben noch dazu (51) und (49)

$$\delta X = \frac{g_{22}}{g}\,\Omega_1 = \frac{g_{12}}{g}\,\Omega_2 \tag{69}$$

$$\delta Y = -\frac{g_{12}}{g}\,\Omega_1 + \frac{g_{11}}{g}\,\Omega_2 \tag{70}$$

$$\frac{\Omega_1}{\sqrt{g_{11}}} = \frac{\sqrt{p_1}\,a_1}{\sqrt{g_{11}}}\cdot\sqrt{p_1}\,\delta L_1 + \ldots + \frac{\sqrt{p_n}\,a_n}{\sqrt{g_{11}}}\,\sqrt{p_n}\,\delta L_n \tag{71}$$

$$\frac{\Omega_2}{\sqrt{g_{22}}} = \frac{\sqrt{p_1}\,b_1}{\sqrt{g_{22}}}\cdot\sqrt{p_1}\,\delta L_1 + \ldots + \frac{\sqrt{p_n}\,b_n}{\sqrt{g_{22}}}\,\sqrt{p_n}\,\delta L_n \tag{72}$$

Wie ersichtlich sind die Grössen $[pvv]$ und die Fehler δX u. δY durch Ω_1 und Ω_2 und damit auf eine klare Weise durch die Beobachtungsfehler δL_i ausgedrückt: Die Grössen W,δX, δY, Ω_1 u. Ω_2 erscheinen nicht als unab-

hängig voneinander. Wir wollen aber von den Unbekannten X, Y mittels

$$\left.\begin{aligned} X &= \cos\varphi \cdot X' - \sin\varphi \cdot Y' \\ Y &= \sin\varphi \cdot X' + \cos\varphi \cdot Y' \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

oder auch mittels

$$\left.\begin{aligned} X' &= \cos\varphi \cdot X + \sin\varphi\ Y \\ Y' &= \sin\varphi \cdot X + \cos\varphi\ Y \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

zu neuen Unbekannten X', Y' übergehen.

Das führt bei der Bedingung

$$a\,X + b\,Y = a\,X' + b'\,Y' \tag{75}$$

zu

$$\left.\begin{aligned} a' &= a\cos\varphi - b\sin\varphi \\ b' &= -\,a\sin\varphi + b\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} a &= a'\cos\varphi - b'\sin\varphi \\ b &= a'\sin\varphi + b'\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Aus (76) erhält man

$$[pa'a'] = [paa]\cos^2\varphi + 2\,[pab]\cos\varphi\sin\varphi + [pbb]\sin^2\varphi \tag{78}$$

$$\begin{aligned}[pa'\,b'] = &-[paa]\cos\varphi\sin\varphi + [pab](\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \\ &+ [pbb]\cos\varphi\sin\varphi\end{aligned} \tag{79}$$

$$[pb'\,b'] = [paa]\sin^2\varphi - 2\,[pab]\cos\varphi\sin\varphi + [pbb]\cos^2\varphi \tag{80}$$

Wir können immer einen solchen Wert von φ finden, dass wie bei (57) herauskommt, nämlich

$$g''_{12} = [pa''\,b''] = 0 \tag{81}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\,[pab]}{[paa] - [pbb]} \tag{82}$$

Wir wollen (71) und (72) in der neuen Form aufschreiben

$$\frac{\Omega'_1}{\sqrt{g'_{11}}} = \frac{\sqrt{p_1}\,a'_1}{\sqrt{g'_{11}}} \cdot \sqrt{p_1}\,\delta L_1 + \ldots + \frac{\sqrt{p_n}\,a'_n}{\sqrt{g_{11}}} \cdot \sqrt{p_n}\,\delta L_n \tag{83}$$

$$\frac{\Omega'_2}{\sqrt{g'_{22}}} = \frac{\sqrt{p_1}\,b'_1}{\sqrt{g'_{22}}} \cdot \sqrt{p_1}\,\delta L_1 + \ldots + \frac{\sqrt{p_n}\,b'_n}{\sqrt{g'_{22}}} \cdot \sqrt{p_n}\,\delta L_n \tag{84}$$

In (83) und (84) sind die Grössen $\sqrt{p_i}\,\delta L_i$ normal (a, σ). Da es gilt

$$\left.\begin{aligned} \frac{i\sum(\sqrt{p_i}\,a_i')^2}{g_{11}'} &= 1 \\ \frac{i\sum(\sqrt{p_i}\,b_i')^2}{g_{22}'} &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

so folgt aus dem Quadrieren von (83) und (84) und Mittelbildung, dass auch $\frac{\Omega_i}{\sqrt{g_{11}'}}$ und $\frac{\Omega_2'}{\sqrt{g_{22}'}}$ normale Grössen $(0, \sigma)$ sind.

Wir wollen das Produkt (83) mit (84) bilden und den Mittelwert finden. Indem wir berücksichtigen, dass die Grössen δL unabhängig voneinander sind

$$M(\sqrt{p_i}\,\delta L_i \cdot \sqrt{p_j}\,\delta L_j) \left.\begin{aligned} &= \sigma^2, \quad i = j \\ &= 0 \qquad i \neq j \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

und auch noch (82) berücksichtigen, so finden wir

$$M(\Omega_1' \cdot \Omega_2') = 0 \tag{87}$$

gemäss (23), ist der Korrelationskoeffizient Null. Da aber Ω_1 und Ω_2 normale Grössen sind, so sind sie *unabhängig*. Unabhängige Grössen sind auch $\delta X'$ und $\delta Y'$, die nach (69) und (70) so geschrieben werden können

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{g_{11}'}\,\delta X' &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}'}}\,\Omega_1' \\ \sqrt{g_{22}'}\,\delta Y' &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}'}}\,\Omega_2' \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Dies war eigentlich nach (50) und (57) zu erwarten, und eben deswegen nahmen wir die betreffende Transformation vor.

Wir schreiben (83) und (84) in der folgenden Form

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g_{11}'}}\,\Omega_1' &= c_{11}\cdot\sqrt{p_1}\,\delta L_1 + c_{12}\cdot\sqrt{p_2}\,\delta L_2 + \ldots + c_{1n}\cdot\sqrt{p_n}\,\delta L_n \\ \frac{1}{\sqrt{g_{22}'}}\,\Omega_2' &= c_{21}\cdot\sqrt{p_1}\,\delta L_1 + c_{22}\sqrt{p_2}\,\delta L_2 + \ldots + c_{2n}\cdot\sqrt{p_n}\,\delta L_n \end{aligned}\right\} \tag{89a}$$

$$\left.\begin{aligned} \Omega_3' &= c_{31}\cdot\sqrt{p_1}\,\delta L_1 + c_{32}\cdot\sqrt{p_2}\,\delta L_2 + \ldots + c_{3n}\cdot\sqrt{p_n}\,\delta L_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Omega_n' &= c_{n_1}\cdot\sqrt{p_1}\,\delta L_1 + c_{n2}\cdot\sqrt{p_2}\,\delta L_2 + \ldots + c_{nn}\cdot\sqrt{p}\,\delta L_n \end{aligned}\right\} \tag{89b}$$

wo wir mit willkürlichen Koeffizienten die Gleichungen (89b) hinzugefügt haben, die alle eine Orthogonaltransformation darstellen

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{j=n} c_{lj} \cdot c_{nj} &= 1, \; i = K \\ &= 0, \; l \neq K \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{j=n} c_{ji} \cdot c_{jK} &= 1, \; i = K \\ &= 0, \; i \neq K \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Es folgt aus der Orthogonalität sofort, dass alle Ω_i^1 unabhängige Normalgrössen (a, σ) sind.

Wir quadrieren und addieren alle Gleichungen (89)

$$\frac{1}{g'_{11}} \Omega_1^{12} + \frac{1}{g'_{22}} \Omega_2^{12} + \Omega_3^{12} + \ldots + \Omega_n^{12} = [p\,\delta L\,\delta L]. \tag{91}$$

Anderseits folgt aus (68)

$$[pVV] = [p\,\delta L\,\delta L] - \frac{1}{g'_{11}} \Omega_1'^2 - \frac{1}{g'_{22}} \Omega_2'^2. \tag{92}$$

Indem wir (91) in (92) einsetzen, erhalten wir

$$[pVV] = \Omega_3' + \ldots + \Omega_n'^2 \tag{93}$$

d. h. $[pVV]$ hat, wie man sagt, $n - 2$ Freiheitsgrade.

Man sieht auch, dass $[pVV]$ unabhängig von $\delta X'$ und $\delta Y'$ ist.

Indem wir X weiters $\frac{1}{\sqrt{g'_{11}}} \Omega_1'$ und $\frac{1}{\sqrt{g'_{22}}} \Omega_2'$ einführen und Ω_3' bis Ω_n' mit X_1 bis X_{n-2} bezeichnen, finden wir nach (30), dass die Grösse

$$T' = \frac{\sqrt{g'_{11}}\,\delta X'}{+\sqrt{\frac{1}{n-2}[pVV]}}, \quad \frac{\sqrt{g'_{22}}\,\delta Y'}{+\sqrt{\frac{1}{n-2}[pVV]}} \tag{94}$$

die Verteilung von STUDENT mit $K = n - 2$ Freiheitsgrade hat.

Uns interessiert aber die Verteilung von δX und δY. Für δY haben wir nach (73)

$$\delta Y = \sin\varphi \cdot \delta X' + \cos\varphi \cdot \delta Y', \tag{95}$$

worin wir (88) substituieren

$$\delta Y = \frac{\sin\varphi \cdot \Omega_1'}{\sqrt{g'_{11}}\sqrt{g'_{11}}} + \frac{\cos\varphi\,\Omega_2'}{\sqrt{g'_{22}}\sqrt{g'_{22}}} \tag{96}$$

Da $\Omega' \; \Omega'_2$ und $[pVV]$ in (93) unabhängige Grössen sind, so sind auch δY — die nur von Ω'_1 und Ω'_2 abhängt — und $[pVV]$ in (93) unabhängige Grössen.

Da die Dispersionen von (88) gleich σ^2 sind, so ist die Dispersion von (96)

$$D(\delta Y) = \left(\frac{\sin^2\varphi}{g'_{11}} + \frac{\cos^2\varphi}{g'_{22}}\right)\sigma^2, \tag{97}$$

Da auch hier die Dispersion σ^2 erscheint, müssen wir δY durch die Quadratwurzel vom Koeffizienten von σ^2 in (97) dividieren, so dass wir als Zähler von (94) zu schreiben haben

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2\varphi}{g'_{11}} + \frac{\cos^2\varphi}{g'_{22}}}}\,\delta Y = \frac{\sqrt{g'_{11}\,g'_{22}}}{\sqrt{g'_{11}\cos^2\varphi + g'_{22}\sin^2\varphi}}\,\delta Y. \tag{98}$$

Wegen der Herleitung des Koeffizienten, von δY schreiben wir (78), (79) und (80) in folgender Form

$$g'_{11} = g_{11}\cos^2\varphi + 2\,g_{12}\cos\varphi\sin\varphi + g_{22}\sin^2\varphi \tag{99}$$

$$0 = -\,g_{11}\cos\varphi\sin\varphi + g_{12}\cos^2\varphi - g_{12}\sin^2\varphi + g_{22}\cos\varphi\sin\varphi \tag{100}$$

$$g'_{22} = g_{11}\sin^2\varphi - 2\,g_{12}\cos\varphi\sin\varphi + g_{22}\cos^2\varphi \tag{101}$$

Indem wir (99) mit (101) multiplizieren und das Quadrat von (100) substitutieren, bekommen wir

$$g'_{11}\,g'_{22} = g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2. \tag{102}$$

Indem wir (99) mit $\cos^2\varphi$, (101) mit $\sin^2\varphi$ multiplizieren und (100) multipliziert mit $2\cos\varphi\sin\varphi$ substrahieren, bekommen wir

$$g'_{11}\cos^2\varphi + g_{22}\sin^2\varphi = g_{11}, \tag{103}$$

So erhalten wir für den Koeffizienten von δY

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{g'_{11}\,g'_{22}}{g'_{11}\cos^2\varphi + g'_{22}\sin^2\varphi}} &= \sqrt{\frac{g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2}{g_{11}}} = \sqrt{g_{22}\,\frac{g_{12}^2}{g_{11}}} = \\ &= \sqrt{[pbb] - \frac{[pab]^2}{[paa]}} = \sqrt{[pbb\cdot 1]} = \sqrt{pY}\end{aligned} \tag{104}$$

nämlich die Quadratwurzel vom sog. Gewicht p_y, Y.

Indem wir das gleiche auf X beziehen und das Resultat auf mehr als zwei Unbekannte verallgemeinern, kommen wir zu dem ausserordentlich wichtigen Satz, dass die Verhältnisse

$$T = \frac{\sqrt{p_x}\,(X - X^0)}{\sqrt{\frac{1}{n-m}\,[pVV]}} \quad , \quad \frac{\sqrt{p_y}\,(Y - Y^0)}{\sqrt{\frac{1}{n-m}\,[pVV]}} \quad , \quad \ldots \tag{105}$$

die Verteilung von STUDENT haben, mit $n - m$ Freiheitsgraden, wo n die Anzahl der Beobachtungen, und m die Anzahl der Unbekannten sind.

Wir wollen zu (32) zurückkommen, was in der Integralform so aufgeschrieben werden kann

$$P\,(t_1 < T < t_2) = \int_{t_1}^{t_2} s_K\,(t)\,dt\,, \tag{106}$$

woraus bei $-t_1 = t_2 = t$ folgt

$$P\,(-t < T < +t) = \int_{-t}^{+t} s_K\,(t)\,dt = 2\int_0^t s_K\,(t)\,dt\,. \tag{107}$$

So haben wir beispielsweise für $\delta X = X - X^\circ$

$$P\left(-t < \frac{\sqrt{p_x}\,(X - X^0)}{\sqrt{\frac{1}{n-m}\,[pVV]}} < t\right) =$$

$$= P\left(-\frac{1}{\sqrt{p_x}}\sqrt{\frac{[pVV]}{n-m}}\,t < X - X^0 < \frac{1}{\sqrt{p_x}}\sqrt{\frac{[pVV]}{n-m}}\,t\right) = \tag{108}$$

$$= P\left(-X - \frac{1}{\sqrt{p_x}}\sqrt{\frac{[pVV]}{n-m}}\,t < -X^0 < -X + \frac{1}{\sqrt{p_x}}\sqrt{\frac{[pVV]}{n-m}}\,t\right) =$$

$$= P\left(X - \frac{1}{\sqrt{p_x}}\sqrt{\frac{[pVV]}{n-m}}\,t < X^0 < X + \frac{1}{\sqrt{p_x}}\sqrt{\frac{[pVV]}{n-m}}\,t\right) =$$

$$= 2\int_0^t s_{n-m}\,(t)\,dt\,.$$

Oder für konkret ausgeführte Beobachtungen haben wir

$$P\left(X - \frac{1}{\sqrt{p_x}}\sqrt{\frac{[pVV]}{n-m}}\,t < X^0 < x + \frac{1}{\sqrt{p_x}}\sqrt{\frac{[pVV]}{n-m}}\,t\right) =$$

$$= 2\int_0^t s_{n-m}\,(t)\,dt, \tag{109}$$

wo X^0, wie betont, der wahre Wert, und x der von der Ausgleichung erhaltene Wert sind.

Bei den klassischen Begriffen heisst

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\,vv]}{n-m}} \tag{110}$$

mittlerer Fehler der Gewichtseinheit, und

$$\mu_x = \frac{\mu}{\sqrt{p_x}} \tag{111}$$

heisst, *mittlerer fehler der Unbekannten.*

Die wahre Formel für die Genauigkeitsabschätzung des Ergebnisses ist also

$$\begin{aligned} P(x - tm_x < X^0 < x + tm_x) &= 2\int_0^t s_{n-m}(t)\,dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{(n-m)\,\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)} \int_0^t \left(1 + \frac{t^2}{n-m}\right)^{-\frac{n-m+1}{2}} dt \end{aligned} \tag{112}$$

Hier heisst das Intervall $x - tm_x$ bis $x + tm_x$ *fiduziarisches Intervall*, und die betreffende Wahrscheinlichkeit, — *fiduziarische Wahrscheinlichkeit.*

Die klassische Formel für den Fall ist aber

$$P(x - tm_x < X^0 < x + tm_x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t l^{-\frac{t^2}{2}}\,dt. \tag{113}$$

Von ganz besonderer Bedeutung ist die Vergleichung zwischen (112) und (113) : die Differenz in den rechten Seiten zwischen (112) und (113) stellt gerade den Fehler der klassischen Formel (113) dar. Die wahre Formel (112) geht aber bei sehr grosser n, wie aus (33) ersichtlich ist, in die klassische Formel (113) über.

Das besagt, dass bei einer grossen Anzahl von Beobachtungen die Genauigkeitsabschätzungen nach der klassischen Formel gerechtfertigt sind.

Bei einer kleinen Anzahl der Beobachtungen und grossen Anzahl der Unbekannten ist dies aber durchaus unzulässig.

Beispielsweise: welchen Wert hat die Ableitung der Genauigkeitsabschätzung der klassischen Methode für eine Länge aus Hin- und Rückmessungen, als wir $n = 2$, $m = 1$, d. h. $K = 1$ haben? Oder welchen Wert hat die Ableitung der Genauigkeitsabschätzung nach der klassischen Methode bei der Winkelausgleichung eines Dreiecks, als wir $n = 3$, $m = 2$, d. h. $K = 1$ haben? Diese klassischen Genauigkeitsschätzungen sind äusserst ungenau im Sinne, dass sie unberechtigt genaue Resultate angeben, wogegen in Wirklichkeit die Genauigkeit viel niedriger ist.

Damit wir ein klares Bild für den Unterschied zwischen der klassischen und der modernen Methode der Genauigkeitsschätzung erhalten, wollen wir den einfachsten Fall, nämlich die direkten gleichwertigen Beobachtungen betrachten.

Indem wir

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \tag{114}$$

$$m_x = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + x_n - \bar{x})^2}{n\,(n-1)}} \tag{115}$$

schreiben, haben wir nach der modernen Methode, als Sonderfall von (112)

$$P\,(\bar{x} - ts_{\bar{x}} < a < \bar{x} + ts_{\bar{x}}) = 2 \int_0^t s_{n-1}(t)\,dt =$$

$$= \frac{2\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\left((n-1)\,\pi\,\Gamma^2\frac{n-1)}{2}\right)}} \int_0^t \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} dt, \tag{116}$$

und nach der klassischen Methode

$$P\,(\bar{x} - ts_{\bar{x}} < a < \bar{x} + ts_{\bar{x}}) = \frac{2}{\sqrt{2\,\pi}} \int_0^t l^{-\frac{t_2}{2}}\,dt. \tag{117}$$

Als Illustration sei nach (115) der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels $\bar{x}$ berechnet. Wir fragen, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert a zwischen den Grenzen (arithmetisches Mittel plus minus dem

mittleren Fehler) liegt? Zu diesem Zwecke soll in (116) $t = 1$ gesetzt werden und man erhält :

n	$p(\bar{x} - m_{\bar{x}} < a < \bar{x} + m_{\bar{x}})$
2	0,500
3	0,577
4	0,608
5	0,626
6	0,636
7	0,644
8	0,650
9	0,654
10	0,656
15	0,666
20	0,669
25	0,671
30	0,673
40	0,674
50	0,676
100	0,679
∞	0,683

(118)

Anderseits wollen wir, nachdem wir den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels berechnet haben, den wahrscheinlichen Fehler des arithmetischen Mittels finden. Zu diesem Zweck setzen wir in (116) $p = \frac{1}{2}$ und berechnen t, womit wir den wahrscheinlichen Fehler wie folgt erhalten :

n	Wahrscheinliche Fehler :
2	1,000 $m_{\bar{x}}$
3	0,816 $m_{\bar{x}}$
4	0,765 $m_{\bar{x}}$
5	0,741 $m_{\bar{x}}$
6	0,727 $m_{\bar{x}}$
7	0,718 $m_{\bar{x}}$
8	0,711 $m_{\bar{x}}$
9	0,706 $m_{\bar{x}}$
10	0,703 $m_{\bar{x}}$
15	0,692 $m_{\bar{x}}$
20	0,688 $m_{\bar{x}}$
25	0,685 $m_{\bar{x}}$
30	0,683 $m_{\bar{x}}$
40	0,681 $m_{\bar{x}}$
50	0,680 $m_{\bar{x}}$
100	0,678 $m_{\bar{x}}$
∞	0,674 $m_{\bar{x}}$

(119)

Wie man sieht, gibt die klassische Methode zur Schätzung der Genauigkeit der Beobachtungen tatsächlich eine zu hohe Genauigkeit. So gilt nach der klassischen Methode *in allen Fällen*, dass dem von dem mittleren Fehler bestimmten Intervall die Wahrscheinlichkeit 0,683 (siehe 118) entspricht ; wogegen die letztere zu 0,500 sinken kann.

Ebenfalls gilt nach der klassischen Methode, dass der wahrscheinliche Fehler in allen Fällen des 0,674 = 2/3 des mittleren Fehlers sei, wogegen dieser in Wirklichkeit sogar dem mittleren Fehler gleich werden kann.

Abgesehen von allem ist es angebracht die Frage zu stellen, was wir eigentlich meinen, wenn wir beispielsweise schreiben, dass das Ergebnis einer Längenmessung 1275,42 m $\pm$ 0,06 m ist? Eine wenigstens annähernd befriedigende Antwort kann schwer gegeben werden, weil die Behauptung, dass der wahre Wert im Intervall 1275,36 m bis 1275,48 m liegt, einer *von der Anzahl der Beobachtungen* abhängigen Wahrscheinlichkeit von 50% bis 68% entspricht.

Aus dem oben dargelegten ist es klar, dass die klassische Methode zur Genauigkeitsschätzung bei einer grossen Anzahl von Beobachtungen etwa über 30 angebracht ist, wogegen bei einer kleinen Anzahl von Beobachtungen fortgelassen werden soll, indem man die gesagte richtige Methode anwenden soll.

Es wäre am Platze von einer fiduziarischen Wahrscheinlichkeit etwa $P = 0{,}90$ auszugehen und das entsprechende fiduziarische Intervall durch Angabe von $t$mal dem mittleren Fehler anzugeben.

n	Fiduziarisches Intervall $P = 0{,}90$
2	6,31 $m_{\bar{x}}$
3	2,92 $m_{\bar{x}}$
4	2,35 $m_{\bar{x}}$
5	2,13 $m_{\bar{x}}$
6	2,02 $m_{\bar{x}}$
7	1,94 $m_{\bar{x}}$
8	1,90 $m_{\bar{x}}$
9	1,86 $m_{\bar{x}}$
10	1,83 $m_{\bar{x}}$
15	1,76 $m_{\bar{x}}$
20	1,73 $m_{\bar{x}}$
25	1,71 $m_{\bar{x}}$
30	1,70 $m_{\bar{x}}$
40	1,68 $m_{\bar{x}}$
50	1,67 $m_{\bar{x}}$
100	1,66 $m_{\bar{x}}$
∞	1,65 $m_{\bar{x}}$

(120)

Bei dem betrachteten Beispiel und bei $P = 0{,}90$, wenn wir 10 Beobachtungen durchgeführt haben schreiben wir 1275,42 m $\pm$ 0,11 m, wenn wir aber 3 Beobachtungen haben, 1275,42 m $\pm$ 0,18 m.

Mit diesem Vortrag hoffe ich ein Interesse in den geodätischen Kreisen für die so wichtige Frage der Genauigkeitsabschätzung erweckt zu haben, damit die bisherige für kleine Anzahl von Beobachtungen unrichtige klassische Methode fortgelassen werde, und damit mit der Anwendung der modernen Methode zur Genauigkeitsabschätzung durch fiduziarisches Intervall und fiduziarische Wahrscheinlichkeit begonnen werde. Ich denke, dass es bei der reichlichen Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate in der Geodäsie angemessen ist auch die betreffende Genauigkeitsabschätzungen richtig zu berechnen, was nur von Nutzen für die geodätische Wissenschaft sein kann.

DISKUSSION

Prof. Dr. J. BÖHM, PRAHA

Die statistische Theorie hat anfangs viel von der Fehlertheorie übernommen, in der letzten Zeit hat sie aber, durch die Arbeiten der hervorragenden Theoretiker (FISHER, PEARSON, GOSSET-STUDENT u. a.) die Fehlertheorie überholt und die Zeit ist gekommen, wo man von ihrer Entwicklung schöpfen und manche statistische Methoden in die Ausgleichsrechnung einführen soll. Dies bedeutet hauptsächlich, sich in der Fehlertheorie nicht mehr nur auf die GAUSS'sche Verteilungsfunktion zu beschränken.

Deswegen ist das Referat des Herrn Prof. HRISTOW über die modernen Arten der Genauigkeitsbetimmung der Messergebnisse sehr merkwürdig und umso merkwürdiger, als er z. B. die ursprünglich für die Kollektive der direkten Messungen abgeleitete STUDENT'sche Verteilungsfunktion auch für den allgemeineren Fall der vermittelnden Beobachtungen erweitert.

Die STUDENT'sche Funktion ist allgemeiner als die GAUSS'sche, die nur einen besonderen Fall der ersten für die grosse Zahl der Beobachtungen ($n \to \infty$) bildet. Ihre Anwendung in Fällen mit kleiner Beobachtungszahl ist richtiger, mathematisch eleganter und eindeutiger als der »mittlere Fehler des mittleren Fehlers« zum rechnerischen Ausdruck der Unsicherheit der Messergebnisse. Es ist zu empfehlen sie auch in der geodätischen Praxis einzuführen.

Wir dürfen jedoch die Bedeutung der STUDENT'schen Funktion nicht überschätzen und denken, dass nun die Genauigkeitsbestimmung in den kleinen Kollektiven der Messungen vollkommen gelöst ist. Wie jede Verteilungsfunktion, wird auch diese Funktion nur den mittleren Wert von allen möglichen Verteilungen geben und niemals die w i r k l i c h e Verteilung in den e i n z e l n e n Fällen ausdrücken. Und was die sehr kleine Kollektive der Messergebnisse betrifft, so hören da überhaupt alle mathematisch ausdrückbare Gesetzmässigkeiten auf zu gelten.

Leider ist auch die STUDENT'sche Verteilungsfunktion nicht von der Hypothese frei, die voraussetzt dass die Messfehler normal verteilt sind, also eine Auswahl aus einem GAUSS'schen Kollektiv bilden. Dies bedeutet mit anderen Worten, dass die Messfehler rein zufälligen Charakters sind. Diese Voraussetzung trifft in der Natur nicht genau zu. Durch die Verfeinerung der heutigen Messinstrumente ist der Einfluss der zufälligen Fehler auf ein Minimum herabgesetzt worden, wodurch bei den im Gelände durchgeführten Messungen vor allem die systematischen Fehler (z. B. die Refraktion) hervortreten. Für diese gilt jedoch keine Verteilung mehr.

Man kann also auch die STUDENT'sche Funktion nur mit allen Vorbehalten, die für die auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung begründeten Resultate allgemein gelten, benützen.

Ich möchte schliesslich noch auf die Definition des mittleren Fehlers hinweisen. Bei normaler Verteilung und unendlich grossem Kollektiv enthält sie in ihren Grenzen 68 % der Fehler. In Wirklichkeit hängt die relative Anzahl der Fehler in ihren Grenzen von der Form der Verteilungskurve ab. Diese Definition von 68 % gilt weder in den kleinen Kollektiven (wie Prof. HRISTOW in der Tabelle gezeigt hatte) noch in den ungleichartigen Kollektiven (mit der änderlichen Messgenauigkeit, noch beim Einfluss der systematischen

Fehler und auch nicht bei den mehrdimensionalen Fehlern (z. B. Lagefehlern). Dagegen ist die Definition des wahrscheinlichen Fehlers in dessen Grenzen 50% Fehler liegen, vollkommen unabhängig von der Form der Verteilungskurve. Man sollte dieser Genaugkeitscharakteristik mehr Aufmerksamkeit als bisher widmen.

Dr. KURT ARNOLD, POTSDAM

Wenn ich es richtig verstanden habe, wirft HRISTOW die Frage nach der Zuverlässigkeit der mittleren Fehler auf. Ich möchte darauf hinweisen, dass die klassische Theorie der Methode der kleinsten Quadrate und die Fehlertheorie für den mittleren Fehler des mittleren Fehlers folgenden Ausdruck liefern :

$$\mu_{\mu^2} = \frac{\mu}{\sqrt{2\,n}}$$

Ich möchte fragen, welche Beziehungen bestehen zwischen der von Professor HRISTOW angegebenen Formel und dieser Formel? Es dürfte ferner interessant sein zu untersuchen, unter welchen Voraussetzungen sich diese beiden Formeln ineinander überführen lassen.

Prof. Dr. KARL REICHENEDER, POTSDAM

Herr Professor HRISTOW hat hier ein Problem aufgeworfen oder besser gesagt sehr genau ausgeführt, das die Geodäten seit sehr langer Zeit beschäftigt. Über die Unzulänglichkeit der Fehlerangaben bei einer geringen Zahl von Beobachtungen habe ich selbst vor etwa 15 Jahren in der Zeitschrift für Vermessungswesen ein Beispiel gebracht, in dem Aufsatz »Sicherheit einer Punkteinschaltung« [1].

Es handelte sich dabei um einen Vorwärtseinschnitt aus vier je um 90° verschiedenen Richtungen. Obwohl eine Richtung ausgefallen war, hatte man für den aus drei übrigen Richtungen bestimmten Punkt »P« Koordinatenfehler angegeben, was rechnerisch ohne weiteres möglich ist. Wie aber leicht einzusehen, könnte die Ost—Westrichtung (siehe [1] Bild 1) und damit der Punkt »P« grob falsch sein, ohne dass diese Fehlerangaben sich wesentlich ändern würden. Durch einen neu eingeführten Begriff »Sicherheit« suchte ich damals diesem Übelstand zu begegnen. (In der Querrichtung ist überhaupt keine Kontrolle vorhanden. Handelt es sich hier um einen groben Fehler, so kann man es nicht feststellen. Bei kleineren Fehlern kann man dann aus drei Richtungen den Fehler berechnen.)

Jedenfalls sieht man aus dem Beispiel, wie vorsichtig man gegenüber Fehlerangaben sein muss und ich glaube, die Geodäten sollten sich mehr mit der Korrelationsrechnung und der mathematischen Statistik beschäftigen, weil es natürlich viel besser ist, das Verfahren mit dem Verfahren der statistischen Mathematik zu ersetzen. Es ist wirklich zu begrüssen, dass sich die Geodäten etwas mehr mit Korrelationsrechnung und statistischen Methoden befassen.

[1] Karl REICHENEDER : Die Sicherheit einer Punkteinschaltung, ein Beitrag zur Fehlertheorie. Zeitschrift für Vermessungswesen. XX Band (1941, Stuttgart), pp. 386—395, 496.

Prof. Dr. HORST PESCHEL, DRESDEN

Ich möchte dem Kollegen HRISTOW für seine Ausführung den Dank der Geodäten aussprechen. Er hat in seinem Vortrag den immer wieder auftretenden Zweifel der Genauigkeitsberechnungen behandelt. Bei einer Beobachtungszahl kleiner als 10 verlangt die Praxis keine Formel. Es wäre vielleicht von Nutzen, die HRISTOW'sche Formel (113) zu gebrauchen, diese ist aber noch etwas kompliziert und für die Praxis ungeeignet. Diese wäre durch eine einfachere Annäherungsformel zu ersetzen, die der Praxis besser dienen würde. Hier steht der praktische Geodät gegen den Mathematiker. Wir arbeiten nach den Gesetzen der Ökonomie und müssen so verfahren können, dass wir recht schnell Ergebnisse erhalten, um auch die Genauigkeit richtig abschätzen zu können. Aus der Zusammenstellung von HRISTOW geht hervor, dass bei 30 Beobachtungen der Genauigkeitsgrad nur um 4—5%, bei 10 Beobachtungen um etwa 10% verfälscht wird. Diese 10prozentige Ungenauigkeit in der Darstellung wird der Praktiker noch gerne hinnehmen. Ich würde also vorschlagen, auf Grund der Ausführungen von Professor HRISTOW weitere Annäherungsformeln zu entwickeln, um auch unterhalb der Grenze von 10 Beobachtungen genaue Werte für die Genauigkeitsabschätzungen zu erhalten.

Prof. Dr. JOSEF BÖHM, PRAHA

Ich möchte noch zum zweitenmal das Wort ergreifen, um eine kleinere Bemerkung nachzutragen. Im Vortrag von Professor HRISTOW war die Definition des mittleren Fehlers meiner Ansicht nach nicht ganz klar. Er sagte, dass dem von den mittleren Fehlern bestimmten Intervall die Wahrscheinlichkeit 0,683 entspricht und dass der wahrscheinliche Fehler in allen Fällen um $^2/_3$ vom mittleren Fehler abweicht.

Ich denke, das stimmt bei zu spitzigen und platten Kurven nicht. Auch in den Fallen von kleineren Kollektiven der Messungen sind die Verhältnisse wahrscheinlich anders. Vielleicht sollten wir diesen Differenten mehr Aufmerksamkeit widmen.

Prof. ANDREJ I. DURNJEW, MOSKAU—DRESDEN

Die Frage der richtigen Genauigkeitsabschätzung beschäftigt die Geodäsie in grossem Masse.

Wird der Fehler der Funktion

$$m_F = \frac{m}{\sqrt{p_F}}$$

untersucht, wobei m der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist, und wird dies mit folgender Formel berechnet:

$$m = \frac{\Sigma pvv}{n-k}$$

wobei n die Anzahl sämtlicher Messungen ist und k die Anzahl der notwendigen Messungen, dann ist die Bestimmung der Verlässlichkeit von m in der oberen Funktion eine sehr wichtige Frage.

Wie ist die Verlässlichkeit, mit der dieser Fehler bestimmt werden kann, wie gross ist die Abweichung in diesem Ausdruck? GAUSS gibt eine Formel an, mittels deren diese Abweichung ausgewertet werden kann :

$$\sigma_{(m^2)} = m \sqrt{\frac{2}{n-k}}$$

wobei $n - k$ die Anzahl der überflüssigen Messungen im Netz ist. Die Frage der Anzahl der Messungen innerhalb eines Netzes ist von grosser Bedeutung. Und wir legen hierauf oft keinen genügenden Wert. Oft bauen wir einfach konstruierte Netze aus, bei denen die Anzahl der überflüssigen Messungen sehr gering ist und wenn dann aus diesem Netz der mittlere Fehler der Gewichtseinheit abgeleitet wird, dann weist schon dieser selber einen grossen Fehler auf, wovon auch Prof. HRISTOW bei der Bestimmung der Fehlerabschätzung gesprochen hatte. Z. B. bei einer 200 km langen einfachen Triangulierungskette, wobei die Winkel mit einem Fehler von 0,4 Sek gemessen werden und $n - k = 16$ ist, falls 16 Dreiecke nebeneinander sind, beträgt unser Wert

$$\sigma_{(m^2)} = \pm 0\,2''$$

während der Grenzwert im Falle einer Verlässlichkeit von 0,997 — gemäss der Untersuchungen sowjetischer Geodäten — den Wert von

$$0{,}063\,m < mL < 2{,}10$$

erreichen kann. Die Distanz in der Verlässlichkeit ist demnach nicht sehr gross. Wir pflegen diesen Wert mit m_F als Konstante zu ersetzen, wobei wir innerhalb des gegebenen Grenzwertes bleiben. Eben deshalb ist die Genauigkeitsabschätzung bei uns nur approximativ.

Eine andere bedeutende Frage, die von HRISTOW berührt wurde, ist, dass man sich mehr in die Untersuchung der Natur der Fehler vertiefen soll. Er geht von der GAUSS'schen Grenztheorie aus, wir wissen jedoch alle sehr gut, dass — wenn die Fehler normal verteilt sind, worauf GAUSS so ausgezeichnet hingewiesen hatte — diese nicht messbaren Fehler mathematisch zur Null führen. Sie sind gewissen Gesetzmässigkeiten unterworfen. Bei den modernen grossen Messungen, bei den staatlichen Triangulationen ergeben sich auch konstante und regelmässige Fehler. Ist in einem Fehler ein konstanter Fehler inbegriffen, wie wird dann dieser konstante Fehler vom variablen abgesondert? Oft wissen wir nicht, wie gross die Streuung ist, bei der Basismessung z. B., wenn der Wind weht, erscheint die Entfernung im Falle einer gewissen Entfernung länger. Dieser konstante Wert jedoch kann ebenfalls schwanken, da die Länge grösser geworden ist.

Gerade aus diesem Grunde warf A. M. LJAPUNOW den Gedanken auf, dass die Verteilung der bei grossen Messungen auftretenden konstanten Fehler normal und gesetzmässig ist. Dieser wertvolle Gedanke wurde dann von Prof. HRISTOW weiterentwickelt.

WLADIMIR K. HRISTOW's Antwort

Ich möchte zunächst darauf hinweisen, dass wir die apriorischen Standards und die empirischen Standards verglichen haben. Wir arbeiten mit Mittelwerten und befassen uns mit symmetrischen Fehlern. Es gibt einen apriorischen Standard, hier haben die Fehler schon eine kleine Verteilung. Der Mittelwert kommt als empirischer Wert, als ein empirisches Mittel

$$a \rightarrow x$$

$$\sigma \rightarrow \mu$$

Es gibt hier Grössen, die eine Verteilung haben, es handelt sich um Schätzungswerte von a und σ. Diese Schätzungswerte müssen gewissen Bedingungen genügen und sollen einen unterschobenen Wert besitzen, der hauptsächlich in meinem Vortrag folgende Rolle spielte: Wenn wir das Ergebnis

$$1254{,}23\,m \pm 0{,}18\,\text{m}$$

haben, stellt sich die Frage, was sollen wir unter dieser Angabe verstehen? Der mittlere Fehler sei das rechtsstehende Glied. Wenn wir dieses mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung vergleichen und umsetzen wollen, fragen wir, wie gross die Anzahl der Beobachtungen ist. Ohne diese Anzahl zu kennen kann man nicht arbeiten. Nehmen wir das Intervall

$$\text{berechneter Wert } t \text{ — Mittelwert, also}$$

$$1254{,}05 \text{ — } 1254{,}41$$

Wir fragen, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Fehler in dieses Intervall fällt? Das ist eine sehr interessante Frage. Eine Antwort können wir nicht geben, ohne dass wir die Zahl n der Beobachtungen angeben. Es könnten verschiedene Wahrscheinlichkeitswerte angegeben werden, je nach der Anzahl der Beobachtungen. Hier macht man den Fehler, dass man diesen mittleren Fehlerwert subtrahiert und eine bestimmte Wahrscheinlichkeit annimt. In Wirklichkeit kann eine bestimmte Wahrscheinlichkeit nicht gebildet werden. Diese Wahrscheinlichkeit hängt wesentlich von der Anzahl der Beobachtungen ab.

Man könnte aber von vornherein sagen, wir gehen von einer Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}90$ aus.

Die einzelnen Fehler bedeuten vielleicht weniger, aber wenn sich diese Genauigkeitsabschätzungen summieren, kann ein schlechtes Ergebnis herauskommen. Deshalb muss man bei wichtigen Abschätzungen behutsam vorgehen. Die Schwierigkeit liegt eigentlich hier, denn der Geodät arbeitet meistens nach gewissen Schemen, gewissen Mustern und die Arbeit ist ziemlich gross, kann schwer von einem Geleise in das andere übergehen. Die Schwierigkeit liegt also darin, dass man sich eine andere Denkungsweise angewöhnt. Wenn man sich guter Methoden bedient, ist die Sache leicht.

DIE DEUTUNG DES PUNKTFEHLERS

L. HOMORÓDI,
KAND. D. TECHN. WISSENSCHAFTEN, BUDAPEST

Es ist bekannt, dass die Verlässlichkeit der mittels Koordinatenausgleichung bestimmten Triangulationspunkte statt der von der Richtung der Koordinatenachsen abhängenden mittleren Koordinatenfehler μ_x und μ_y oft mit einer einzigen Angabe, dem mit der Beziehung

$$M = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2} \tag{1}$$

interpretierten *Punktfehler* charakterisiert wird, dessen Wert bereits unabhängig ist von der Richtung der Koordinatenachsen. Aus diesem Grunde kann auch

$$M = \sqrt{\mu_{\min}^2 + \mu_{\max}^2} \tag{2}$$

geschrieben werden, wenn $\mu_{\min}$ bzw. $\mu_{\max}$ die Länge der halben Klein-, bzw. halben Grossachse der *Fehlerellipse* bedeutet.

Es ist ausserdem bekannt, dass die Unsicherheit des Punktes in einer durch den Punkt gehenden beliebigen Richtung durch den Wert μ_φ bestimmt ist, den wir so erhalten, dass sowohl die halbe Grossachse als auch die halbe Kleinachse der Fehlerellipse in die fragliche Richtung projiziert und die Quadratwurzel der Quadratsumme dieser Projektionen gebildet wird :

$$\mu_\varphi = (\mu_{\min}^2 \cdot \sin^2 \varphi + \mu_{\max}^2 \cdot \cos^2 \varphi)^{1/2} \tag{3}$$

Hier ist φ der mit der positiven Richtung der Grossachse abgeschlossene Winkel der gegebenen Richtung. Dieser Wert ist übrigens nichts anderes, als der halbe Durchmesser der sogenannten Fusspunktkurve der Fehlerellipse in der φ Richtung.

Gegen die Deutung (1) bzw. (2) des Punktfehlers wurden wiederholt Einwände erhoben, da in dem Spezialfall, wo

$$\mu_{\min} = \mu_{\max} = \mu \tag{4}$$

ist, d. h. wo die Fehlerellipse zum Kreis wird,

$$M = \mu\sqrt{2}$$

wird, was einen höheren Wert dartstellt, als der in einem beliebig gewählten Koordinatensystem vorkommende mittlere Koordinatenfehler des Punktes.

Um diesen Widerspruch zu eliminieren, erschien es als notwendig, dem Punktfehler eine neue Deutung zu geben, die mit den geometrischen Daten der Fehlerellipse bzw. Fusspunktkurve in Zusammenhang steht. Es wird hier bemerkt, dass dieser Gedanke von Prof. TÁRCZY-HORNOCH aufgeworfen wurde.

I. Im ersten Teil unserer diesbezüglichen Prüfungen suchten wir nach einem einfachen Verfahren, um die Fusspunktkurve, bzw. deren unter (3) im Halbdurchmesser beliebiger Richtung angegebenen Länge zu konstruieren, für den Fall, wenn die Länge der Gross- und Kleinachse der Fehlerellipse schon bekannt ist. In dieser Beziehung schlossen wir uns den Untersuchungen Prof. DR. MILASOVSZKY an, der in einer früheren Arbeit ein einfaches graphisches Verfahren zur Konstruktion der Achsen der Fehlerellipse demonstriert hatte.

Es seien also die Achsen der Fehlerellipse bekannt und — um die Bezeichnungen zu vereinfachen — sei a die Länge der halben Grossachse (μ_{max}) und b die Länge der halben Kleinachse (μ_{min}).

Die Tangente des Ellipsenpunkten Q, die mittels Kreise mit den Radien a bzw. b und durch den Mittelpunkt 0 der Ellipse in Richtung β verlaufende Gerade konstruiert wurde, wird von der vom O-Punkt auf die Tangente gerichteten Senkrechten im Punkt P geschnitten (Abb. 1). Dieser Punkt P ist — wie bekannt — ein Punkt der oben erwähnten Fusspunktkurve. Die Entfernung OP, weiters der Richtungswinkel φ können, gemäss der bekannten analytischen Beziehungen von HESSE, in Anbetracht dessen, dass die Koordinaten des Punktes Q durch die Beziehungen

$$\xi = a\cos\beta \quad \text{und} \quad \eta = b\sin\beta$$

bestimmt sind, aus den Formeln

$$OP = p = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta}} \tag{5}$$

bzw.

$$\sin\varphi = \frac{a\sin\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta}}$$

und

$$\cos\varphi = \frac{b\cos\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta}}$$

berechnet werden. Als Quotient dieser zwei letzteren Ausdrücke folgt unmittelbar, dass

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi \tag{6}$$

ist, d. h. mit trigonometrischen Umformungen

$$\cos^2\beta = \frac{a^2\cos^2\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)} \tag{7}$$

und

$$\sin^2\beta = \frac{b^2\sin^2\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)}$$

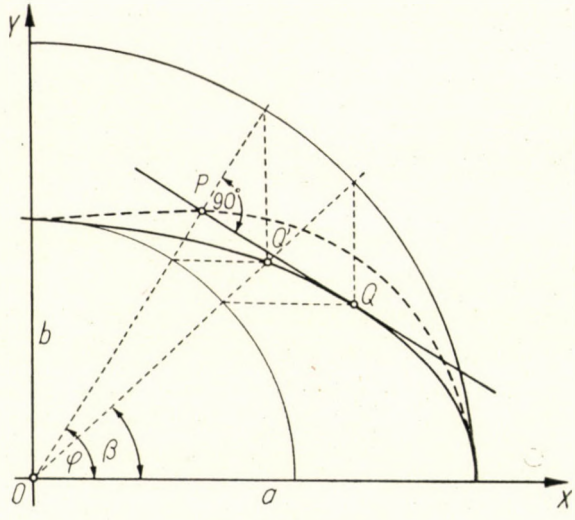


Abb. 1

Wenn nun die Ausdrücke (7) in (5) eingesetzt werden, ergibt sich

$$p = (a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^{1/2} \tag{8}$$

d. h. tatsächlich der Wert μ_φ von (3). Die Beziehung (8) hat für uns jedoch noch eine andere richtige geometrische Bedeutung. Konstruieren wir mit der Gerade, — deren Richtungswinkel φ ist, — den Punkt Q' der Ellipse. Die Koordinaten von Q' werden

$$x' = a\cos\varphi \qquad \text{und} \qquad y' = b\sin\varphi$$

die Entfernung OQ' wird demnach

$$OQ' = (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$$

sein, d. h. die Länge eines beliebigen Halbdurchmessers der Fusspunktkurve ist identisch mit der vom Mittelpunkt gemessenen Entfernung jenes Ellipsenpunktes, der zu diesem Halbdurchmesser als einer den Mittelpunkt der Ellipse schneidenden Gerade konstruiert werden kann. Und da

$$\frac{y'}{x'} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi$$

ist, folgt auf Grund von (6), dass der Richtungswinkel dieser Geraden denselben β-Wert hat, mit welchem mittels der charakterisierten Richtung jener Punkt Q konstruiert wurde, dessen Tangente gleichzeitig den Punkt P der Fusspunktkurve angegeben hatte.

Aus diesen Beziehungen ergibt sich ein einfaches Konstruktionsverfahren der Fusspunktkurve, d. h. der graphischen Herstellung des mittleren Fehlers (3). Die Fehlerellipse an sich wird nun nicht benötigt, bloss ihre Klein- und Grossachse, d. h. die Kreise mit den Radien a und b. Wird nun zu der gewünschten Richtung mit dem üblichen Verfahren der Ellipsenpunkt Q' konstruiert, so ergibt die Entfernung OQ' den Wert von (3), d. h. wenn dieser vom O-Punkt in die gegebene Richtung aufgetragen wird, erhalten wir in P einen Punkt der Fusspunktkurve.

II. Sucht man nun für den Punktfehler eine der bisherigen entsprechendere Interpretation, dann liegt es ziemlich nahe, diese an irgendeinen mittleren Durchmesser der Fusspunktkurve zu knüpfen. Man kann hier dreierlei Möglichkeiten aufwerfen :

a) der Punktfehler sei der einfache arithmetische Mittelwert der Halbdurchmesser der Fusspunktkurve ;

b) der Punktfehler sei der geometrische Mittelwert der Halbdurchmesser der Fusspunktkurve ;

c) der Punktfehler sei die Länge des zu $\varphi = 45°$ gehörenden Halbdurchmessers.

Es ergibt sich von selbst, dass es in den Fällen a) und b) wegen der Symmetrie genügt, die Mittelbildung auf ein Viertel der Fusspunktkurve, d. h. auf den Abschnitt

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

zu beschränken. Es sei hier bemerkt, dass die Möglichkeit b) auch so definiert werden könnte, dass der Punktfehler der Radius jenes Kreises wird, dessen Fläche identisch ist mit der Fläche der Fusspunktkurve.

Zur Bildung der Mittelwerte wird der Ausdruck (8) des Halbdurchmessers der Fusspunktkurve in der mittels Einführung der Exzentrizität der Ellipse

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

ungeänderten Form

$$p = a\,(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \tag{9}$$

verwendet.

Dem Fall a) entsprechend wird dann der Punktfehler

$$k^2 = \frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} a\,(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}\; d\varphi$$

während er laut b)

$$K^2 = \left[\frac{1}{\pi/2} \int_0^{\pi/2} a^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi)\, d\varphi \right]^{1/2}$$

wird.

Der Ausdruck k ist ein elliptisches Integral, deren Reihe (d. h. die Bogenlänge der Viertelellipse) zwar bekannt, unseren gegenwärtigen Zwecken jedoch nicht entsprechend ist. Daher wird der Wert K^2 gemäss der bekannten Rekursionsformel aufgestellt und hier erhalten wir nach entsprechenden Ersetzungen

$$K^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \tag{10}$$

Wird nun der Wert a und b beachtet und auch der Ausdruck (1) und (2) des Punktfehlers, dann ist

$$K = \sqrt{\frac{\mu_{\max}^2 + \mu_{\min}^2}{2}} = \frac{M}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\mu_x^2 + \mu_y^2}{2}} \tag{11}$$

Die Aufschreibung des auf diese Art interpretierten Punktfehlers wird durch das lezte Glied von (11) sehr vereinfacht. Diesen auf die neue Art interpretierten Punktfehler nennen wir im Folgenden den *durchschnittlichen mittleren Fehler*. Es ist ersichtlich, dass dieser im Falle eines Fehlers frei ist von dem in der Einleitung erwähnten Widerspruch, denn selbst im Spezialfall (4) gelangen wir zum richtigen Wert

$$K = \mu .$$

Prüfen wir nun noch die zur Interpretation aufgenommene Möglichkeit c). Wird nun im Ausdruck (8) $\varphi = 45°$ eingesetzt, dann wird

$$p = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

d. h. der durchschnittliche mittlere Fehler unter (11) ist nichts anderes, als der zur Fusspunktkurve $\varphi = 45°$ gehörende Halbdurchmesser.

Der Fall c) führt demnach zum selben Ergebnis als b).

Nach all dem wird vorgeschlagen, in der Zukunft in allen Fällen, wo die Verlässlichkeit eines Punktes mit einer einzigen Angabe charakterisiert werden soll, den mit der Beziehung (11) interpretierten durchschnittlichen mittleren Fehler anzuwenden.

III. Wird die Verlässlichkeit des Punktes mit dem Punktfehler oder mit dem durchschnittlichen mittleren Fehler bestimmt, dann wird in beiden Fällen die Fusspunktkurve, d. h. das *Diagramm des mittleren Punktfehlers* mit einem Kreis mit dem Radius M bzw. K ersetzt. Um nun den Grad der Näherungen zu illustrieren und einander gegenüberzustellen, befassten wir uns schliesslich mit der Frage der Form der Fusspunktkurve. Diese Prüfung erfolgt mit den üblichen Methoden der analytischen Geometrie, die Einzelheiten werden demnach nicht bekanntgegeben, bloss die Ergebnisse zusammengefasst.

Die Fusspunktkurve ist der Cassinis-Ovale verwandt, die zwei normale und zwei entartende Formen besitzt. Wird die Exzentrizität der Fehlerellipse wieder mit e bezeichnet, können diese Formen mit folgenden Kriterien charakterisiert werden :

$$1 > e > \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

in diesem Falle ist die Kurve lemniskatenähnlich und hat vier Inflexionspunkte ;

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \geqq e > 0 \tag{2}$$

hier ist die Kurve »oval« und besitzt keine Inflexionspunkte ;

$$e = 0 \tag{3}$$

die Kurve entartet zu einem Kreis mit Radius a und Mittelpunkt O ;

$$e = 1 \tag{4}$$

die Kurve zerfällt in zwei Kreise mit den Radien $a/2$ und den Mittelpunkten $x = a/2$ und $y = 0$, bzw. $x = -a/2$ und $a = 0$.

Die erste Form ist auf Abb. 2 ersichtlich.

Es sei hier bemerkt, dass die Fusspunktkurve als Diagramm des mittleren Fehlers die Form (4) nicht annehmen kann. Dies könnte nämlich nur dann erfolgen, wenn der Punkt aus den unter 0° und 180° schneidenden Richtungen bestimmt sein würde, was offensichtlich unmöglich ist. Die Exzentrizität nimmt übrigens zu, wenn die Verteilung der den Punkt bestimmenden Richtungen nicht gleichmässig ist, oder die Richtungen von verschiedener Länge sind.

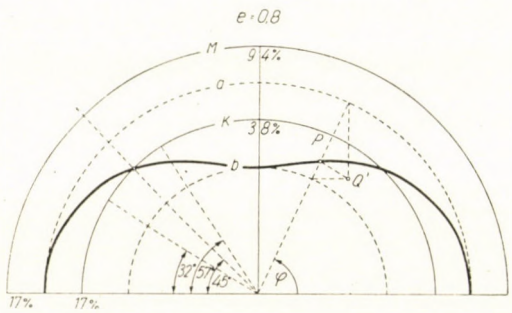


Abb. 2

Wird nun das Diagramm des mittleren Fehlers mit dem Kreis mit dem Radius K genähert, dann ist die Näherung, solange die Exzentrizität 0,5 oder noch kleiner ist, besser als 10%, d. h. der mittlere Fehler weicht in keiner Richtung um mehr als 10% von dem Wert K ab. Bei einer Exzentrizität von mehr als 0,5 nimmt die Abweichung offenbar in der Gegend der Achsenpunkte zu, um 45° herum bleibt die Näherung noch immer annehmbar. Wird nun erneut eine Vernachlässigung von 10% gestattet, dann fällt der brauchbare Abschnitt bei verschiedenen e-Werten zwischen folgende Werte von φ_1 und φ_2 :

e	φ_1	φ_2
0,6	8°	75°
0,7	25°	63°
0,8	32°	57°
0,9	36°	53°
1,0	39°	50°

d. h. es gibt sogar bei sehr ungünstig gestalteten Fusspunktkurven gut anzunähernde Abschnitte, wenn diese auch nicht lang sind.

Der Kreis mit dem Radius M läuft immer ausserhalb der Fusspunktkurve, die Näherung ist demnach offensichtlich in der Gegend der Grossachse besser. Solange jedoch die Exzentrizität kleiner ist als 0,9, ist die Näherung immer schlechter als 10%. Selbst bei der Exzentrizität 0,9 bleibt die Näherung nur bis zum Wert $\varphi = 13°$ unter 10%.

Diese Daten machen es genügend klar, dass der durchschnittliche mittlere Punktfehler — wenn die Verlässlichkeit des Punktes mit einer einzigen Angabe charakterisiert wird — den Wert des zu einer beliebigen Richtung gehörenden mittleren Fehlers viel besser annähert, als der bisher angewandte Punktfehler.

Der durchschnittliche mittlere Fehler ist demnach nicht nur in Spezialfällen frei von Widersprüchen, sondern charakterisiert auch im allgemeinen die Wahrscheinlichkeit des Punktes viel besser, als der Punktfehler.

DISKUSSION

G. REISSMANN, DRESDEN

Betrachtet man das Problem vom Gesichtspunkte der Wahrscheinlichkeitstheorie aus, dann kommt man zu anderen Schlußfolgerungen als sie HOMORÓDI angibt.

Man kann nachweisen, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Neupunkt im Innern der bisherigen sogenannten »mittleren Fehlerellipse« liegt, 39,3% beträgt.

In allen anderen Fällen der Fehlertheorie aber, wo es sich um sogenannte *mittlere* Fehler handelt, besagt dieser mittlere Fehler, daß mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3% der wahre Wert innerhalb der Grenzen liegt, die eben der mittlere Fehler angibt.

Um bei der Fehlerellipse auf die gleiche Wahrscheinlichkeit zu kommen, braucht man ihre Achsen nur mit $\sqrt{2}$ zu multiplizieren. Man hat dann neben der wahrscheinlichkeitstheoretischen Übereinstimmung noch den geometrischen Gewinn, daß der bekannte Widerspruch zwischen dem Radius der zum Kreis ausgearteten Fehlerellipse und dem ebenfalls als Kreisradius aufgefaßten bisherigen mittleren Punktfehler wegfällt.

Man sollte also besser die bisherige Definition des mittleren Punktfehlers beibehalten und dafür die Fehlerellipse vergrößern.

V. VINCZE, BUDAPEST

Die Besprechung der Frage des Punktfehlers auf dem Budapester Geodätischen Kongress ist — neben seiner wissenschaftlichen Bedeutung — um so mehr begründet, als, wie dies auch L. HOMORÓDI betonte, gegen die gegenwärtige Interpretation des Punktfehlers wiederholt Bemerkungen laut wurden.

In meiner im Herbst vergangenen Jahres besprochenen Kandidatendissertation (1) habe ich mich auch mit diesem Problem befasst ; unter deren Thesen steht geschrieben, dass es richtiger wäre, anstelle des Punktfehlers (dort Linearfehler genannt)

$$M = \sqrt{\mu_x^2 + \mu_y^2} \tag{1}$$

bei gewissen Untersuchungen den Begriff des mittleren oder durchschnittlichen Mittelfehlers

$$M_k = \sqrt{\frac{\mu_x^2 + \mu_y^2}{2}} \tag{2}$$

einzuführen. Im Falle eines Fehlerkreises ist nämlich der Punktfehler grösser, als der mittlere Fehler des Punktes in jeder beliebigen Richtung, während der mit der Gleichung (2) charakterisierte durchschnittliche mittlere Fehler das korrekte Resultat ergibt. Ich habe dort auch erwähnt, dass W. JORDAN (2) der seine Untersuchung mit Hilfe des Punktfehlers ausgeführt hatte, darauf folgerte, der günstigste Schnittwinkel wäre 109°28′. Bei einem mit zwei

Richtungen bestimmten Punkte kann nämlich das Minimum des Punktfehlers nicht bei 90°, sondern bei 109°28′ sein.

Gelegentlich der Besprechung meiner Dissertation wurde auch jener Vorschlag von A. TÁRCZY-HORNOCH vorgetragen, den auch L. HOMORÓDI erwähnte, nämlich, dass es ratsam wäre, zur Eliminierung der im Zusammenhang mit dem Punkfehler auftretenden Widersprüche irgendeinen neuen Begriff zur Bestimmung des Punktes einzuführen. Dies könnte seines Erachtens der durchschnittliche Radiusvektor der Fehlerellipse oder der Fusspunktkurve sein, oder aber die Grösse der durch diese Kurven begrenzten Fläche.

Das Problem auf dieser Basis weiterführend, hielt ich es vor allem für das Wichtigste festzustellen, warum die gegenwärtige Art der Bildung des Punktfehlers kein genaues Resultat ergibt. Man kann sich nicht mit der Behauptung zufrieden geben, dass der Punktfehler in einem Spezialfall zu einem ungenauen Resultat führt.

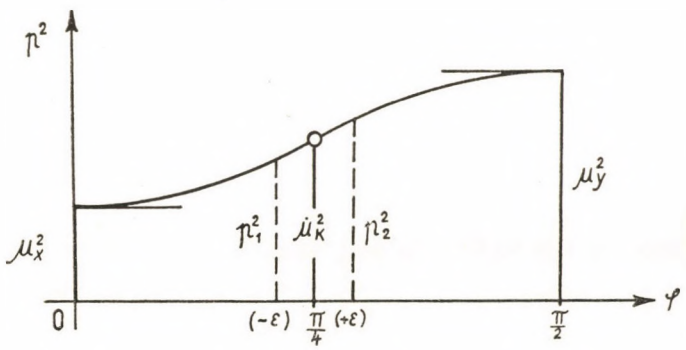


Abb. 1

Es ist bekannt, dass der mittlere Fehler der Koordinate $\pm\mu_x$ und $\pm\mu_y$ irgendeines Punktes P (im Weiteren wird bloss das eine Vorzeichen beachtet) nichts anderes ist, als die Entfernung der zwei aufeinander senkrechten — mit den Koordinatenachsen x und y parallelen — Tangenten der Mittelfehlerellipse von dem Punkte. Zu zwei Tangenten gehören zwei Ellipsen, demzufolge kann ein Punkt P gleichzeitig nicht einen mittleren Koordinatenfehler μ_x und μ_y haben und somit kann auch deren Vereinigung nicht richtig sein. Der sich aus der Vereinigung ergebende Fehler ist selbstverständlich dann am auffallendsten, wenn die Mittelfehlerellipse zu einen Kreis entartet.

Es ist schon deshalb nicht richtig, den gegenwärtigen Punktfehler als irgendeine Art von mittleren Fehler zu betrachten, da wir in diesem Fall zwei aufeinander senkrecht gerichtete mittlere Fehler so zu vereinigen wünschen, als ob diese in einer Geraden wirken würden. Denkt man an den Satz des mittleren Fehlers des Funktionswertes, so ist der gegenwärtige Punktfehler nichts anderes, als der mittlere Fehler der Summe der Koordinaten $x+y$ des Punktes P, wenn x und y sich in einer Geraden befinden würden.

Die erwähnten Widersprüche hören aber auf, wenn die zwei aufeinander senkrechten mittleren Fehler zuerst auf eine den Punkt P schneidende Gerade beliebiger Richtung projiziert werden. Nachdem die Projektion der beiden

mittleren Fehler jetzt in einer Geraden wirkt, können diese auf die übliche Art vereinigt werden. So kommen wir auf die Gleichung

$$p^2 = \mu_x^2 \cos^2 \varphi + \mu_y^2 \sin^2 \varphi \tag{3}$$

die nichts weiter ist, als die Zentralgleichung einer Ellipse, deren halbe Klein- bzw. Grossachse μ_x bzw. μ_y ist. Mit derselben Überlegung geraten wir zur Gleichung der mittleren Fehlerellipse, wenn wir in der Gleichung (3) μ_x und μ_y mit der Länge a und b der Halbachse der mittleren Fehlerellipse ersetzen.

Gleichung (3) kann übrigens auch folgendermassen dargestellt werden: (Da die Funktion (3) periodisch ist, genügt es sich mit dem Abschnitt $\varphi = 0$ bis $\frac{\pi}{2}$ zu beschäftigen.)

In meiner Kandidatendissertation schlug ich vor, als mittleren oder durchschnittlichen Mittelfehler von (1) den mit der Gleichung (3) definierten Radiusvektor zu nehmen, den wir erhalten, wenn wir φ mit $\frac{\pi}{4}$ erstzen.

L. Homoródi bewies, dass dieser Wert das quadratische Mittel der Funktion (3) ist. Ich meinerseits habe auch dasselbe Ergebnis erhalten, jedoch, m. E., auf einfacherer Weise.

Die zwei identischen Varianten der Gleichung (3) nämlich, wenn hier zuerst anstelle von $\cos^2 \varphi$ $(1 - \sin^2 \varphi)$ und anstelle von $\sin^2 \varphi$ $(1 - \cos^2 \varphi)$ eingesetzt wird, lauten folgendermassen:

$$p^2 = \mu_x^2 + (\mu_y^2 - \mu_x^2) \sin^2 \varphi \tag{4}$$

$$p^2 = \mu_y^2 - (\mu_y^2 - \mu_x^2) \cos^2 \varphi \tag{5}$$

Wird nun in der Gleichung (4) $\varphi = \left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right)$ und in der Gleichung (5) $\varphi = \left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right)$ eingesetzt, so erhalten wir zwei Funktionswerte, die im Verhältnis dem zu $\varphi = \frac{\pi}{4}$ gehörenden Wert symmetrisch sind (Abb. 1). So:

$$p_1^2 = \mu_x^2 + (\mu_y^2 - \mu_x^2) \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right) \tag{6}$$

und

$$p_2^2 = \mu_y^2 - (\mu_y^2 - \mu_x^2) \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right) \tag{7}$$

Da bekanntlich

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right)$$

ist, wird der quadratische Mittelwert des Funktionswertes (6) und (7) bei jeder Grösse von ε

$$\frac{p_1^2 + p_2^2}{2} = \frac{\mu_x^2 + \mu_y^2}{2} \tag{8}$$

Demzufolge ist der Wert (8) auch bei der Funktion (3) der quadratische Mittelwert. Es folgt aus dem Begriff der mittleren Fehlerellipse, dass

$$\mu_x^2 + \mu_y^2 = a^2 + b^2$$

und somit

$$\frac{\mu_x^2 + \mu_y^2}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2} = \mu_\mu^2 \tag{9}$$

ist.

Der hier erhaltene durchschnittliche mittlere Fehler μ_k hat die vorteilhafte Eigenschaft, dass hier die Kenntnis der Länge der Klein- und Grossachse der mittleren Fehlerellipse nicht notwendig ist, da auch die mittleren Koordinatenfehler dasselbe Resultat ergeben. Die mit der Gleichung (3) dargestellte Fehlerellipse ersetzt demnach — von diesem Standpunkt aus — die mittlere Fehlerellipse.

Besonders wertvoll sind die im III. Teil des Vortrages angeführten Untersuchungen, die den Vorteil des mittleren Punktfehlers gegenüber dem gewöhnlichen Punktfehler sehr gut darstellen, sowie auch die Tatsache, dass dieser in den meisten praktischen Fällen auch die mittlere Fehlerellipse sehr gut ersetzen kann. Es muss jedoch bemerkt werden, dass auch dieser mittlere Fehler nicht bei jeder Untersuchung entspricht, da er ja von dem Punktfehler nur insofern abweicht, als er mit $\sqrt{2}$ dividiert ist, sein Minimum demnach bei der als Beispiel schon erwähnten JORDANschen Untersuchung genau dort zu finden ist, wo der des gewöhnlichen Punktfehlers. Hierauf hat übrigens auch schon Prof. HAZAY hingewiesen.

Abschliessend sei noch bemerkt, dass — die Erzeugung des durchschnittlichen mittleren Fehlers in Betracht nehmend, der der quadratische Mittelwert der mittleren Koordinatenfehler μ_x und μ_y ist — es an der Hand liegt, diesen mittleren Fehler evtl. *mittleren Koordinaten-Mittelfehler* zu nennen.

SCHRIFTTUM

VINCZE, VILMOS: Optimalmasse der selbständigen Triangulierungsnetze. (Kandidaturendissertation. Budapest 1955.)

W. JORDAN: Handbuch der Vermessungskunde. I. Bd. 3. Aufl. 1888. S. 302.

Prof. A. I. DURNJEW, MOSKAU—DRESDEN

Im Rahmen der Geodäsie wurde die Fehlerellipse schon vielen Untersuchungen unterworfen. Es wurde die grosse und kleine Halbachse studiert. Die Geodäten befassen sich schon seit fast hundert Jahren mit diesem Problem. Es muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass man die Fehlerellipse bei den Schnittpunkten konstruiert, und dabei die gegebenen Punkte auch als fehler-

frei annimt. Unsere ganze Aufmerksamkeit wird diesen Schnittpunktmessungen zugewandt und die Fehler der Ausgangspunkte werden ausser Acht gelassen, obwohl dies eines der bedeutendsten Faktoren ist. Nehmen wir an, dass die Triangulierung von der ersten bis zur fünften Ordnung ausgeführt wird. (Die sowjetischen Markscheider verrichten Triangulierungen bis zur siebenten Ordnung.) Beim Übergang von der einen Ordnung in die andere ergeben sich innerhalb der Dreiecke neue Dreiecke, bis man den Punkt erreicht, mit dessen Fehlerellipse man sich befasst ; hier häufen sich die Fehler der Ausgangspunkte nur noch mehr an und steigern die Fehler des Punktes auf das Mehrfache. Es sei angenommen, dass bei der Triangulation der letzten Ordnung im Falle moderner staatlicher Triangulierungen ein Fehler von ± 10 cm besteht. Gemäss der direkten Messungen beträgt der Fehler desselben Punktes zur selben Zeit bloss ± 2 cm. Warum behandeln wir nun eigentlich den Fehler von ± 2 cm so viel und sprechen nicht vom Fehler von ± 10 cm? Es ist schon an der Zeit, die Theorie der Fehlerellipse unter Beachtung der Ausgangsdaten auszuarbeiten. Die sowjetischen Geodäten befassen sich gegenwärtig mit dieser Frage. Es erschienen schon mehrere Arbeiten in diesem Themenkreis, so z. B. von MUZAFER, G. A. TSCHEBOTAREW und anderen.

Prof. W. K. HRISTOW, SOFIA

Ich möchte über gewisse Widersprüche einige Bemerkungen machen. In der Wirklichkeit gibt es hier keine Widersprüche, man muss nur die Sache richtig verstehen.

Wir fragen nach der Dichte der Wahrscheinlichkeit, wir können nach dem quadratischen Mittelwert der Abweichung fragen. Dieser quadratische Mittelwert der Abweichung ist natürlich eine Funktion der Richtung. Auf diese Weise kommen wir auf Fusspunktkurven.

Wir müssen nicht die Dichte der Ellipse, sondern die Dichte der Fusspunktkurve nehmen. Wir werden bemerken, dass bei rechtwinkligen Richtungen jene Werte senkrecht sind, die voneinander abhängen, aber bei anderen Richtungen sind die Werte voneinander unabhängig.

Es ist aber möglich, einen rechten Winkel zu nehmen und den rechten Winkel so zu drehen, dass die beiden Seiten sich berühren. Dann beschreibt dieser Punkt einen Kreis. Also wenn man die Begriffe scharf voneinander trennt, dann verschwindet jeder Widerspruch. Hier müsste man also nicht von einem mittleren Fehler sprechen. Man müsste erst eine x Grösse haben und dann von einem Fehler der mittleren Grösse sprechen.

II. Triangulierungskolloquium

EINIGE ERFAHRUNGEN BEIM AUSBAU DES TRIGONOMETRISCHEN GRUNDNETZES IN DER TSCHECHOSLOWAKEI

Prof. Dr. J. BÖHM
DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN, PRAHA

Der Autor benützt die seltene Gelegenheit der ersten wissenschaftlichen Konferenz der befreundeten Länder in Mitteleuropa und USSR, um ihre Teilnehmer mit den Methoden und Ergebnissen der Triangulierungen in der ČSR bekanntzumachen. Einige Methoden sind neuartig und können zu einer fruchtbaren Diskussion führen.

Bei der Entstehung der tschechoslowakischen Republik (1918) haben viele Vermessungsaufgaben und die mangelhaften und ungleichartigen trigonometrischen Grundlagen die tschechischen Geodäten gezwungen, rasch ein neues trigonometrisches »Einheitsnetz« über das ganze Land zu entwickeln. Dazu wurden der Netzmassstab, die Netzlage und Orientierung auf dem Besselschen Ellipsoid und teilweise auch die Ergebnisse der Stationsmessungen von der österreichischen Militärtriangulation vom Ende des XIX. Jahrhunderts übernommen. Der Rest wurde mit der SCHREIBERschen Methode vom Gewicht 24—36 eingemessen. Das Grundnetz mit 559 Dreieck- und Seitengleichungen wurde nach der Methode der kleinsten Quadrate in einem Guss im Jahre 1927 ausgeglichen. Der leitende Geodät Ing. J. KŘOVÁK hat dazu die Methode der schrittweisen Annäherung benutzt. Die Konvergenz der Korrelatenwerte wurde mit künstlichen Eingriffen (Abschätzungen der Limiten der Korrelationswerte nach ihrer Entwicklung) beschleunigt. Die nötigen genäherten Korrelationswerte wurden durch eine vorangehende Ausgleichung der Dreiecksblöcke gewonnen ; dazu entwickelte ING. KŘOVÁK eine eigenartige Methode (1923), die der BOLTZschen Methode ähnlich ist. Dieses Netz wurde nicht mit den Netzen der Nachbarländer verbunden, und der mittlere Richtungsfehler aus der Ausgleichung hatte einen ziemlich grossen Wert, $\pm 0{,}87''$.

Es folgte darauf eine intensive Verdichtung des Netzes. Der Vorgang war grundsätzlich »vom Grossen ins Kleine«, was dem bergigen Gelände mit weiten freien Sichten in der ČSR am besten entspricht. Der umgekehrte Vorgang der Entwicklung der grossen Dreiecke aus den kleinen wurde in der ČSR schon im Jahre 1931 in der Literatur diskutiert und nicht angenommen. In der ČSR nimmt nämlich bei den erwähnten Geländeverhältnissen der mittlere Winkelfehler nicht mit der Sichtlänge ab. Dieser Standpunkt wurde im Jahre 1943

wissenschaftlich überprüft durch die Einmessung einer doppelten Quadratkette, deren Achse in die Grundlinie bei Podiebrad gelegt wurde. Diese Linie wurde auf 12 ungefähr 1 Kilometer lange Abschnitte geteilt, deren Längenverhältnisse aus den Messungen mit 8 Invardrähten praktisch mit absoluter Genauigkeit bekannt wurden. Man konnte jetzt eine beliebige Abschnittslänge von einer beliebigen anderen Abschnittslänge auch trigonometrisch ableiten und so die wirklichen Fehler der Triangulation bestimmen. Man hat eine gewisse ungünstige Fehleranhäufung festgestellt, die auch durch die ruckartig erfolgenden periodischen Bewegungen der Signalbauten im Laufe des Tages verursacht wurden.

Ende 1956 wurde auf dem ganzen Gebiet der ČSR die Entwicklung des trigonometrischen Detailnetzes beendet — das ganze Gebiet wurde mit Dreiecken von 2 km durchschnittlicher Seitenlänge bedeckt. Dieses Netz wurde mit möglichst hoher Genauigkeit entwickelt. Man forderte womöglich beiderseitige Visuren, 5 Bestimmungsrichtungen und verwendete ausnahmslos die Theodoliten Wild T 3. Als Erfolg dieser Massnahmen beträgt bei uns der mittlere Koordinatenfehler (Achse der Fehlerellipse) ± 1 cm, was also den relativen Lagefehler eines Detailpunktes gegen die Nachbarpunkte darstellt. Diese hohe Genauigkeit des Detailnetzes ist unser Stolz ; sie entspricht den höchsten Ansprüchen bei Bauabsteckungen oder wissenschaftlichen Zwecken und man muss bei uns nirgends spezielle selbständige Netze mit Basen u. dgl. für Ingenieurbauten errichten.

Seit 1935 wurde mit dem Ausbau eines neuen Grundnetzes mit möglichst grossen Dreiecken angefangen. Dieses Netz sollte den wissenschaftlichen Zwecken und der internationalen Netzverbindung dienen und man wollte es mit möglichst höchster Genauigkeit einmessen. Die ersten Jahre hat man den Versuchen über die Methoden und Instrumentenprüfungen gewidmet ; die eigenen Messungen der Grundlinien und Winkel wurden im Jahre 1955 beendet, heute wird nur die Ergänzung der Laplaceschen Punkte fortgesetzt. Das Netz zählt 144 Punkte, 6 Grundlinien, 227 Dreiecke und bisher 56 Laplace-Punkte. Unser Ziel liegt darin, auf jedem Punkte mindestens solche astronomische Messungen, die zur Bestimmung der Lotabweichung genügen, durchzuführen.

Für die Beobachtungen wurden zuerst gemauerte Türme gebaut. Das geschah aus der Überzeugung, dass die Messungen im Grundnetz nie vollendet sein werden. Die nachkommenden Generationen werden sie immer wiederholen — vielleicht mit anderen Mitteln — um die wichtigen wissenschaftlichen Fragen über die geologischen Bewegungen, Wanderung der Kontinente u. a. beantworten zu können. Es zeigte sich aber, dass die Anhäufung von Massen in den Türmen ungünstige Refraktionserscheinungen erweckt. So kehrte man zu den klassischen luftigen hölzernen Signalbauten zurück.

Von den Theodoliten wurden die Typen Chasselon, Askania, Fennel, Wild T 3 und T 4 benützt. Die Ergebnisse haben gezeigt, dass auch Wild T 3

zu den Messungen I. Ordnung geeignet ist ; das betrifft aber nur die aus einer grösseren Anzahl von neuen Instrumenten ausgewählten besten Exemplare, die man überprüfen und dann sorgfältig behandeln muss. Die unbestreitbaren Vorteile liegen in der Transportfähigkeit und in der Geschwindigkeit der Einmessung einer Gewichtseinheit. So konnte man z. B. auch mehrere Nachbarwinkel in der kurzen Zeit einer Stunde nacheinander einmessen, eine grosse Zahl (60) der Gewichtseinheiten für jeden Winkel wählen und ihre Messung besser auf verschiedene atmosphärische Verhältnisse verteilen. In den letzten Jahren wurden auf einer Station 3 Wild-Theodolite und 2 Beobachter eingesetzt.

Als Gewichtseinheit für Wild T 3 wurde die Messung in einer Doppelgruppe (4 Reihen) gewählt ; dabei sollten alle Instrumentenfehler oder Fehler die durch die Manipulation mit dem Instrument entstehen, womöglich eliminiert werden. Die Anordnung der Messung war folgende :

Gruppe :	I.	II.
Folge der Zielpunkte .	ABBA	BAAB
Drehungsrichtung	rechts	links
Fernrohrlage	I.	II.
Kreislage	$x_i = i \cdot 180^\circ/2n$	$x_i + 90^\circ\,30'30''$

Die Drehungsrichtung wurde während der ganzen Gruppe nicht geändert.

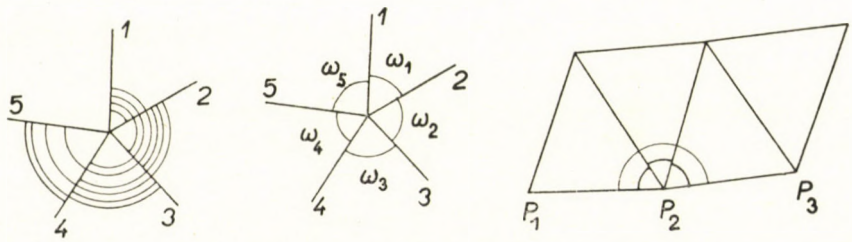


Bild 1

Die Anordnung der Winkelmessungen auf der Station wurde nach der SCHREIBERschen Methode (in allen Kombinationen) nicht durchgeführt. Es wurden nur isolierte Scheitelwinkel 12, 23,... $n1$ (siehe Bild 1) gemessen. Die Schreibersche Methode scheint vollkommen zu sein, weil sie gleiches Gewicht für jeden ausgeglichenen Winkel oder Richtungswinkel (Winkelsumme) auf der Station gibt. Dagegen sollte das bei der zweiten Methode nur für die einzelnen Scheitelwinkel gelten, während bei ihren Summen (die man bei der Azimutübertragung im Netze bilden muss) das Gewicht sinkt. So erscheint die SCHREIBERsche Methode als eine sehr elegante und die zweite als eine etwas primitive und unvorteilhaftere Anordnung der Winkelmessungen.

Diese Gründe gelten aber nur dann, wenn wir die Winkelmessung als eine rein mathematische Angelegenheit betrachten. Wenn wir aber die wirklichen,

nicht im Laboratorium, aber im Gelände geltenden Bedingungen betrachten, wenn wir von dem formalistischen Begriff des Gewichtes ablassen und im Messen nur das Streben zur Fassung der Wirklichkeit, zur Annäherung der Wahrheit sehen — kurz gesagt, wenn wir die Messung als eine physikalische, statistische und zuletzt auch ökonomische Angelegenheit betrachten —, dann erscheinen beide Methoden in ganz anderem Licht und die komplizierte SCHREIBERsche Methode weist gegen die einfache Scheitelmethode bedeutende Nachteile auf:

1. Die Zielpunkte der annähernd 180° betragenden Winkelkombination sind seltener gleichzeitig sichtbar, als bei den spitzen Scheitelwinkeln 12, 23, ... Das verlängert den Aufenthalt auf der Station.

2. Bei den Kombinationen mit grossen Winkelwerten verlaufen beide Schenkel üblich in Luftschichten von verschiedener Wärme und dadurch auch Dichte (z. B. über dem südlichen und nördlichen Abhang). Das führt zu grösseren Refraktionsverschiedenheiten und Schwankungen, während die Schenkel eines spitzen Winkels in der Zeitspanne der Messung im annähernd homogenen Milieu verlaufen.

3. In der einfachen Scheitelmethode können die Kreislagen vollkommen symmetrisch verteilt werden, was bei der SCHREIBERschen Methode nicht der Fall ist und so der periodische Teilungsfehler nicht so gut eliminiert werden kann.

4. Bei der SCHREIBERschen Methode ist eine Stationsausgleichung nötig, z. B. bei der Anzahl von 5 Richtungen ist der ausgeglichene Wert des Winkels (12)

$$[12] = \frac{1}{5}\{2\,(12) + (13 - 23) + (14) - (24) + (15) - (25)\} \qquad (1)$$

Nach der Fehlertheorie hört die Unabhängigkeit der ausgeglichenen Winkelwerte auf, die jetzt in die Netzausgleichung eingeführt werden sollen. Eine »schlechte« Richtung mit grösseren Refraktionsschwankungen entwertet alle anderen Richtungen. Die gleichen Gewichte sind nur formal — eine solche Richtung hat in der W i r k l i c h k e i t ein kleineres Gewicht als die anderen. Schon der Gründer der Fehlertheorie und der Methode der kleinsten Quadrate, C. F. GAUSS warnte vor der mechanischen Anwendung des Gewichtsbegriffes und sagte, dass man jeden Winkel so lange messen soll, »bis er sein Recht bekommen hat«. In der Scheitelmethode bleibt der Winkelfehler lokalisiert und man kann einen »schlechten« Winkel leicht mit mehreren Wiederholungen messen und so mit den tatsächlichen Gewichten (die nicht nur mit der Zahl der Wiederholungsmessungen ausgedrückt sind) ausgleichen. Das halbe Gewicht der Summen oder der Unterschiede von 2 Winkeln fliesst vom Fehlerfortpflanzungsgesetz, der nur in Fällen der normalen Fehlerverteilung gilt und

auch dann nur durchschnittlich für viele Fälle. Niemals gilt dieses Gesetz für einzelne Fälle, wie da angewendet wurde. So werden die Messungsergebnisse modifiziert durch Belastung mit Hypothesen, die hier nicht berechtigt sind (z. B. in der Summe der Winkel wird die konstante Refraktionskomponente bei dem gemeinsamen Schenkel eliminiert). In einzelnen Fällen der Gleichung (1) können sich auch die Fehler systematisch in einem grösseren Fehler anhäufen, als es bei der direkten Messung des Winkels (12) vorkäme.

5. Am schlimmsten erscheint die SCHREIBERsche Methode vom statistischen Standpunkt aus. Die ursprünglichen Messungsergebnisse sind in eine

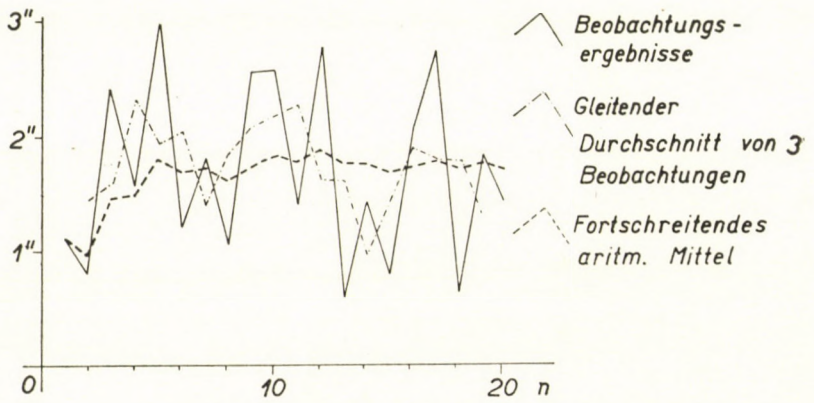


Bild 2

Menge von Kombinationen zersplittert und geben so nur kleine Kollektive mit 4—6 Werten. Die gekuppelten Werte sind nicht mehr ursprünglich, sie werden von den erwähnten nicht geltenden Hypothesen beeinflusst. Dagegen werden bei der Scheitelmethode alle Gewichtseinheiten auf wenige Winkel konzentriert. Für jeden Winkel bekommen wir ein grösseres Kollektiv der ursprünglichen gleichartigen Werte, die man statistisch untersuchen kann (Prüfung der normalen Verteilung, der Momentenverhältnisse) und auf welche besonders dynamische Kriterien verwendet werden können, z. B. ein graphisches Wertenpolygon, ein gleitender Durchschnitt, Entwicklung des arithmetischen Mittels. Diese Kriterien (siehe Bild 2) zeigen mit ihren mehreren extremen Werten und Inflexionspunkten am verlässlichsten, ob die Refraktionsverhältnisse schon gut abgewechselt und zufällig durchgemischt wurden, d. h. man kann aus solchem Verlauf schliessen, ob weitere Messungen das schon erzielte Ergebnis praktisch nicht mehr weiter ändern können und ob man die Beobachtung des Winkels beendigen kann. Das wäre nicht der Fall, wenn das arithmetische Mittel noch eine deutliche (steigende oder sinkende) Tendenz aufweist; in solchem Falle muss man die Beobachtung weiter fortsetzen. So kommen wir zu einem besseren Ausgleich der

gesuchten wirklichen Genauigkeiten bei allen Stationswinkeln als mit den formal gleichen vorgeschriebenen »Gewichtsanzahlen«, die nur mit der Zahl der wiederholten Messungen definiert werden.

Bei der benutzten Scheitelmethode wurden die Kreislagen so geordnet, dass sie immer gleich für eine Richtung waren, wenn die bestimmte Richtung der rechten Schenkel des einen oder den linken Schenkel des benachbarten Winkels bildete, also mit den Kreislagen für den linken Schenkel des Winkels $w_1, w_2, \ldots$.

$$x_i = i\,\frac{180^\circ}{2\,n}, \qquad y_i = x_i + w_1, \qquad z_i = x_i + w_1 + w_2, \ \ldots$$

So eliminieren sich bei den Winkelsummen die Teilungsfehler der inneren Schenkel, die ungefähr von derselben Grösse als die Zielungs- und Ablesefehler zusammen sind. Das gilt auch für die länger dauernden Refraktionsfehler, die in gleichem Sinne bei der Messung beider Nachbarwinkel wirkten. Zuletzt gilt das besonders für den mittleren Wert der Refraktionsschwankungen bei jedem Winkel, der nicht annulliert wird, wenn wir auch das ganze Jahr den Winkel messen. Es handelt sich da um eine wahre systematische Fehlerkomponente, die von den topographischen und klimatischen Verhältnissen der Stationsumgebung abhängt, also um einen »topographischen« oder »Netz«-Fehler. Sein Wert ist im Durchschnitt grösser als allgemein gedacht wird. Dies wird auch dadurch bewiesen, dass der wirklich gefundene mittlere Dreieckschlusswert in allen Netzen Europas grösser ist als der von den mittleren Stationsfehlern abgeleitete mittlere Dreieckschlusswert.

Z. B. die sorgfältig gemessenen deutschen trigonometrischen Grundnetze weisen folgende Werte des mittleren Winkelfehlers m_s (aus der Stationsausgleichung) oder m_Δ (aus den Dreieckschlüssen) aus:

	m_s	m_Δ	$c = \sqrt{m_\Delta^2 - m_s^2}$
vom Ende des XIX. Jahrhunderts.	0,31″	0,41″	0,27″
moderne Netze	0,17″	0,33″	0,28″

Die Verfeinerung der Instrumente hat nur den Einfluss der zufälligen Fehler vermindert, die systematischen »topographischen« Fehler sind unverändert geblieben.

Nach den statistischen Untersuchungen im tschechoslowakischen Grundnetz wächst der mittlere Fehler der Winkelsummen nicht im Verhältnis $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} \ldots$, sondern nur im Verhältnis $1 : 1{,}1 : 1{,}2 \ldots$, was noch weiter nach der Stations- oder Netzausgleichung vermindert wird. So wird das aus den ausgeglichenen Scheitelwinkeln gebildete Richtungsbündel praktisch dem direkt gemessenen Richtungsbündel äquivalent. Sehr kleine Gewichtsunterschiede

stammen nur vom Einfluss der zufälligen Fehler (besonders Zielungs- und Ablesungsfehler), deren Einfluss durch eine grosse Anzahl von wiederholten Beobachtungen fast annulliert wurde.

Im Randgebiet von Böhmen, wo nur die SCHREIBERsche Methode verwendet wurde, ist der mittlere Dreieckschluss $\pm 0{,}94''$. In der inneren Slowakei, wo man nur die Scheitelmethode benutzte, macht er $\pm 0{,}52''$, für das ganze Gebiet $\pm 0{,}67''$ aus. Nach dem Fehlergesetz erwartete man in der Slowakei

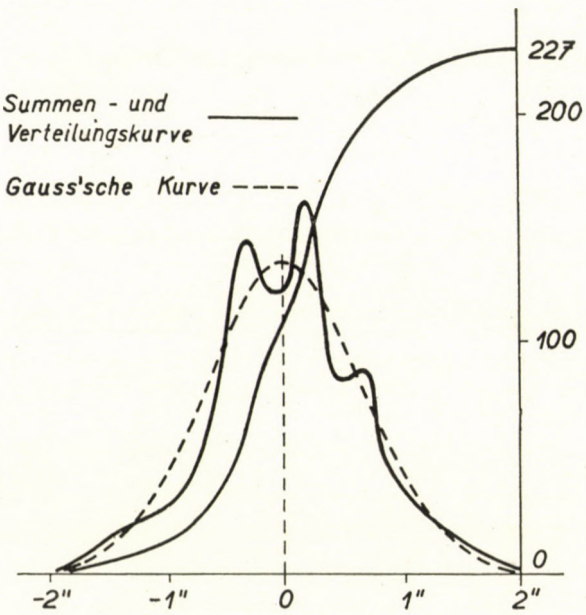


Bild 3

einen mittleren Winkelschluss auf 360° (bei durchschnittlich 5 Stationswinkeln) von $\pm 0{,}52 . \sqrt{5:3} = \pm 0{,}67''$. In Wirklichkeit macht er nur $\pm 0{,}26''$ aus, was die Ausscheidung der grossen Teiles der Fehler beim Zusammenzählen der Winkel bestätigt.

Der grösste Vorteil der Scheitelmethode ist die Konzentrierung aller Arbeit auf die direkte Messung der Scheitelwinkel, mittels derer man die trigonometrischen Seitenlängen ableitet (die Grundlinien sind ziemlich entfernt, die Laplaceschen Punkte mit den gemessenen Azimuten ausgenommen).

Die statistische Untersuchung der 227 Dreieckschlüsse gab einen guten symmetrischen, nur wenig spitzigen Verteilungspolygon. Im Bilde 3 wurde zuerst (nach dem alten Helmertschen Verfahren) die Summenkurve gebildet, davon die Verteilungskurve als Derivierte abgeleitet. In dieser Weise wird ihr

Verlauf von der Wahl der Klassenbreite unabhängig. Die Momentenwerte

$$m_1 = [\Delta] : n = + 0{,}004'', m_2 = [\Delta^2] : n = 0{,}44'', m_3 = - 0{,}05, m_4 = + 0{,}65,$$
$$(m_4 : m^4) - 3 = + 0{,}29$$

zeigen keinen Einfluss der systematischen Fehler ; das Verhältnis des 4. und 2. Momentes zeigt nur eine milde Mischung der Messungen verschiedener Genauigkeit.

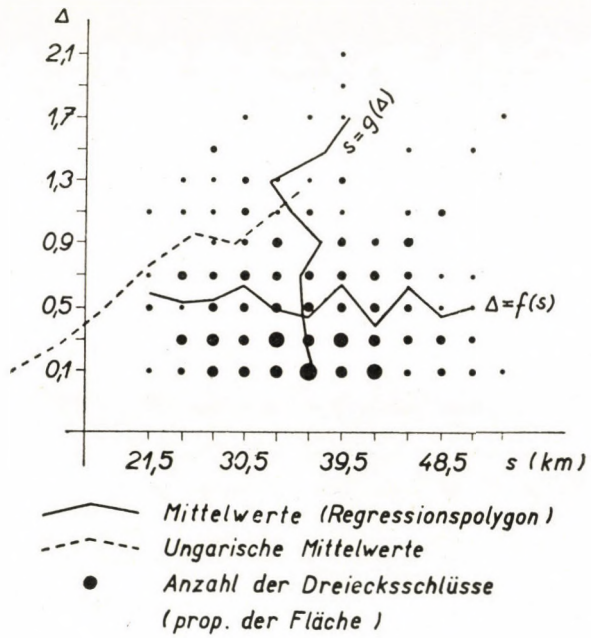


Bild 4

Nach dem zunehmenden mittleren Dreieckschluss wurden auch die zugehörigen mittleren Seitenlängen, Meereshöhen und Winkelschlüsse auf 360° geordnet :

Mittl. Dreieckschluss (″) .	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1
Mittl. Seitenlänge (Km) .	37	36	36	35	38	35	33	38	40	39	39
Mittl. Meereshöhe (hm) .	8,4	8,3	7,2	8,9	7,0	7,8	6,0	9,5	5,2	9,5	10,5
Mittl. Winkelschluss auf 360°	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	(0,2)	(0,3)	(0,5)	(0,5)	

Man findet keine Korrelation zwischen dem ersten und irgendwelchem anderen Argument.

Im Bild 4 ist die Abwesenheit einer Korrelation zwischen den ersten zwei Argumenten deutlich — in Gegensatz zu den Ergebnissen der ungarischen Triangulation, wo Kollege Regőczi (siehe Vermessungstechnik, 1954) eine deutliche Korrelation gefunden hat. Das kann man leicht erklären : In der ungarischen Ebene nähert sich die Sicht mit steigender Länge dem Boden und die Refraktion wirkt immer stärker. Aus dem tschechoslowakischen Messungsmaterial geht wieder hervor, dass in einem bergigen Gelände der Refraktionsfehler fast ausschliesslich das Ergebnis der topographischen und klimatologischen Verhältnisse in der unmittelbaren Umgebung der Station ist.

Der schönste Zweck des tschechoslowakischen Grundnetzes liegt darin, dass es der Vereinigung der geodätischen Grundlagen der befreundeten Ländern dienen wird. Bei den Verbindungsmessungen ist es zu einer schönen und fruchtbaren Zusammenarbeit zwischen den Geodäten der befreundeten Nachbarländer gekommen.

DISKUSSION

Prof. A. TÁRCZY-HORNOCH, SOPRON

Ich glaube, dass es allen Zuhörern ausserordentlich interessant war, den Vortrag von Professor BÖHM zu hören und zu erfahren, wie die Tschechoslowakei, von 1918 angefangen, systematisch ein zeitgemässes trigonometrisches Netz entworfen hat und es war zwar dem Vortrag nicht unmittelbar zu entnehmen, aber ich bin sicher, dass der sehr verehrte Kollege BÖHM selbst daran massgebend beteiligt war.

Die in Ungarn angewendete Methode ist interessanterweise nicht nur in Ungarn, sondern unabhängig davon auch in Polen entwickelt worden, während man unter ganz anderen Verhältnissen in der Tschechoslowakei nach anfänglichen Versuchen von 1931 des Professors F. BASTL einen anderen Weg einschlug. Professor BÖHM hat auf die Gründe der Verschiedenheit hingewiesen, in Ungarn gibt es meist Ebene, in der Tschechoslowakei sind die Geländerverhältnisse anders.

Wir sammelten wichtige Erfahrungen und es wird interessant sein, weitere praktische Ergebnisse kennenzulernen.

L. HOMORÓDI, BUDAPEST

Prof. BÖHM hatte erwähnt, dass auch sie sich auf dem Gebiete der Triangulation mit dem Gedanken des Fortschreitens vom Kleinen zum Grossen befasst hatten, von dieser Lösung jedoch auf Grund ihrer Studien abgekommen sind. Er bezog sich auf die längs der Podiebrader Basis entwickelte Doppelkette. Hier erhob sich die Frage, ob die Erfahrungen nicht anders gewesen wären und ob sie nicht zu einem anderen Ergebnis geführt hätten, wenn in dieser Kette die Seitenlängen dort, wo offensichtlich die Unsicherheiten der Punkteinstellung am stärksten ihre Wirkung fühlen lassen, nicht 1 km, sondern 6—7 km betragen hätten, wie in dem polnischen und ungarischen Netz, und das Prinzip des Fortschreitens vom Kleinen zum Grossen verfolgt worden wäre.

Bei der Aufarbeitung der Resultate der Winkelmessungen des ungarischen Netzes sind wir zu dem Ergebnis gelangt, dass die Winkelschlussfehler mit den Seitenlängen des Dreiecks, also mit der Grösse des Dreiecks zunehmen, während sich im tschechoslowakischen Netz keine solche Korrelation zwischen den beiden Daten gezeigt hatte.

Zwischen den beiden Arten des Dreiecks besteht jedoch nicht bloss in der Messmethode ein Unterschied, sondern auch darin, worauf Prof. TÁRCZY-HORNOCH vorher hingewiesen hatte, nämlich, dass die Geländeverhältnisse wesentlich voneinander abweichen. Wenn es also als Vorteil der »Scheitel-Methode« genannten Winkelmessmethode betrachtet werden kann, dass die zwei Winkelarme eines spitzen Dreiecks eine fast identische Luftschicht durchqueren, während die Arme der um 180° voneinander abweichenden Winkeln unter andere Refraktionsverhältnisse gelangen, so bezieht sich dies meines Erachtens eher nur auf gebirgige Gegende. Dort kann nämlich tatsächlich ein bedeutender Unterschied zwischen den Refraktionsverhältnissen der sich auf die Nord- und Südseite erstreckenden Richtungen festgestellt werden. Demgegenüber kann sich bei uns auf der Tiefebene ein viel bedeutenderer Unter-

schied zwischen den zwei Richtungen zeigen, selbst wenn diese voneinander bloss um die minimalen 30° abweichen, jedoch die eine ein offenes Feld überschreitet, die andere wiederum einen Wald — was bei Netzen in der Tiefebene sehr häufig vorkommt. Deshalb sind wir der Meinung, dass die Refraktionswirkungen auch bei Anwendung der Scheitel-Methode nicht hätten besser eliminiert werden können, als dies mit der SCHREIBERschen Winkelmessung der Fall war. Wir bestätigen selbstverständlich auch jene Nachteile der Schreiberschen Methode, die Professor BÖHM erwähnt hatte, meinen jedoch, dass bei uns, selbst wenn wir zur Winkelmessung die Scheitel-Methode eingeführt hätten, jene Reduktion des Genauigkeitsmasses, die Prof. BÖHM im Falle der tschechischen und slowakischen Gebiete angegeben hatte, wo die eine 0,94″, die andere 0,52″ beträgt, nie hätte erreicht werden können. In unserem Netze ist derselbe Mittelfehler als Ergebnis der SCHREIBERschen Winkelmessung 0,64″, kaum etwas höher, als der in der Slowakei erhaltene Wert, was bezeugt, dass die Refraktionswirkungen, wenn die SCHREIBERsche Winkelmessung entsprechend auf mehrere Tage und mehrere Tages- und Nachts-Tageszeiten verteilt wird, ebenfalls ganz gut eliminiert werden können.

DIE WISSENSCHAFTLICHEN UND WIRTSCHAFTLICHEN ERGEBNISSE DES UNGARISCHEN TRIANGULIERUNGS-VERFAHRENS

E. REGŐCZI
DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN, BUDAPEST

Ich denke annehmen zu dürfen, dass es sich hier erübrigt jene Umstände zu schildern, die uns dazu bewegten, das Ausfüllnetz der ungarischen Rahmenketten erster Ordnung in einer von der klassischen Methode abweichenden Weise herzustellen. Es dürfte ebenfalls nicht notwendig sein jenen Gedankengang zu schildern, der zu der im J. 1951 publizierten Lösung führte ; denn diese Umstände wurden in ungarischer, deutscher und französischer Sprache eingehend besprochen [1], [2], [3], [4]. Ich beschränke mich deshalb auf eine kurze prinzipielle Zusammenfassung des Verfahrens.

Das von den Kettenrahmen eingeschlossene Gebiet erhielt keine besondere Netze erster, zweiter und dritter Ordnung. Dafür wurde ein einheitliches Dreiecksnetz von 7—8 km Seitenlänge errichtet. Sämtliche Dreieckswinkel wurden mit Richtungsbeobachtungen in 12 Sätzen mit Theodoliten Wild T 3 gemessen. (In Hinsicht auf den abweichenden Wortgebrauch der internationalen Fachliteratur sei hier bemerkt, dass bei uns unter »Satz« die Beobachtung sämtlicher Richtungen in beiden Fernrohrlagen verstanden wird.) Diagonale Richtungen werden nicht gemessen. Im wesentlichen erhält man somit ein besonderes Netz dritter Ordnung.

Dieses Netz wird dann nach dem Grundprinzip jener Methode ausgeglichen, welche die Professoren HAZAY und TÁRCZY-HORNOCH zur Ausgleichung der kontinentalen Dreiecksnetze angegeben haben.

Zu diesem Zwecke hat man sich ein derartiges fingiertes Dreiecksnetz vorzustellen, welches aus voneinander etwa 30 km entfernten Punkten von dominanter Lage der soeben erwähnten kleinen Dreiecke zusammengestellt ist. Als fingiertes Netz muss dies deshalb gelten, weil es unmittelbar nicht gemessen wurde.

Längs jener Seiten, welche die dominierenden Punkte verbinden, werden dann die gemessenen Dreiecke zu kleinen, in je einem grossen Dreiecke liegenden Netzen abgesondert. Diese kleinen Netze werden nun jedes für sich ausgeglichen. Auf dieser Weise wird die gegenseitige Lage der dominierenden Punkte, also der drei Eckpunkte je eines Grossdreiecks festgelegt und auch die

drei Winkel des Grossdreiecks berechnet. Erstreckt man diese Berechnung auf alle abgeleiteten Dreiecke, so erhält man sämtliche Winkel des fingierten Netzes. Es folgt dann — unter Berücksichtigung des Zwanges, der aus dem Rahmen herrührt — die Ausgleichung des fingierten Netzes erster Ordnung innerhalb des Kettenrahmens. Derart gelangt man zu endgültigen Koordinaten der abgeleiteten Punkte erster Ordnung.

Nachher erfolgt eine erneute Ausgleichung jener Punkte, welche innerhalb der abgeleiteten Dreiecke liegen. Offenbar ist dabei der aus letzteren herrührende Zwang in Rechnung zu ziehen.

Dieses neue Rechenverfahren bedeutet die einheitliche Behandlung einer grossen Anzahl von Punkten. Es sichert deshalb die Harmonie benachbarter Punkte unbedingt mindestens ebensogut, wie das alte Rechenverfahren, welches jeden Punkt einzeln behandelt. Die Verschiebung der einzelnen Gruppen wird mittels des abgeleiteten Netzes erster Ordnung hintangehalten.

Auf Grund theoretischer Untersuchungen dürften die Winkel des derart erhaltenen fingierten Netzes erster Ordnung zumindest dieselbe Genauigkeit besitzen, wie die des unmittelbar gemessenen Netzes. Ich erlaube mir hier auf die letzten diesbezüglichen Ausführungen von SCHOEPS hinzuweisen [5].

Unseres Erachtens sind diesem Triangulierungsverfahren folgende Vorteile zuzuschreiben.

Die Erkundung geht hier erheblich rascher und einfacher, als bei der alten Methode, nachdem es sich um gegenseitige Sichten von nur 7—8 km Länge handelt, wobei auch die Feststellung der notwendigen Pyramidenhöhen bedeutend sicherer, als bei grossen Entfernungen erfolgen kann.

Die Punkte liegen näher zueinander, demnach hat vom Standpunkte der gegenseitigen Sichten die Erdkrümmung keine Bedeutung und somit reichen niedrigere Pyramiden aus. Dies ermöglicht die Verwendung zerlegbarer Pyramiden, die wiederholt aufgestellt werden können.

Die Beobachtungen gehen erheblich rascher vor sich. Denn erstens sind die atmosphärischen Verhältnisse zur Messung von 7 km Sichten bedeutend öfter günstig, als für solche von 30 km Länge, und zweitens werden Scheinwerfergeräte nicht benötigt.

Der in grossen Dreiecken zufolge Seitenrefraktion auftretende regelmässige Fehler kann in dem aus Kleindreiecken aufgebauten Netze einen zufälligen Charakter annehmen.

Bei entsprechender Organisation kann die Triangulation höherer Ordnung den Charakter eines Grossbetriebes gewinnen.

Nach Beendigung der Arbeit steht ein dichtes Netz zur Verfügung, woraus sich das untergeordnete Netz IV-ter Ordnung schon leicht entwickeln lässt. Letztere Arbeit wird auch dadurch beschleunigt, dass die Betonfundamente der Punkte höherer Ordnung im Erdboden zurückbleiben, wo die Pyramiden der späteren Arbeiten jederzeit wieder aufgestellt werden können.

Aus allen diesen Ausführungen geht auch offenbar hervor, dass diese Triangulierungsmethode erheblich billiger als die klassische Methode zu stehen kommt.

Wir wollen nun ganz kurz den praktischen Ablauf der Arbeiten überblicken.



Bild 1

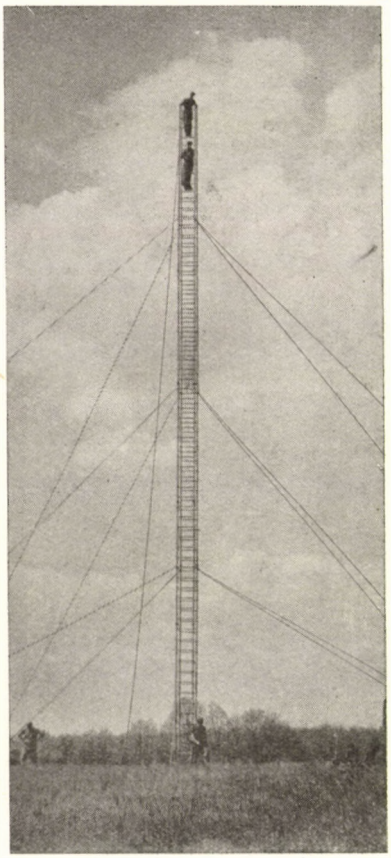


Bild 2

Bekanntlich wird nach Projektierung des Netzes die Erkundung vorgenommen. Hiezu dienen Erkundungsgerüste und provisorische Signale.

Das Erkundungsgerüst besteht aus zwei Leitern, die aus 3 m langen Röhren zusammengestellt sind. Als Material dient hiezu eine sehr leichte Aluminium—Magnesium—Silizium-Legierung. Die Leiter wird bei einer Gesamthöhe von 24 m durch 4 Arbeitern in 4 Stunden aufgebaut und in 2 Stunden wieder abgebrochen (Bild 1 und 2).

Die leichtmetallenen provisorischen Signale sind ebenfalls zerlegbar. Bei einem Gesamtgewicht von 45 kg beträgt deren grösste Höhe 22 m; Auf- und Abbauzeit für drei Arbeitern 1 bzw. ½ Stunde (Bild 3).

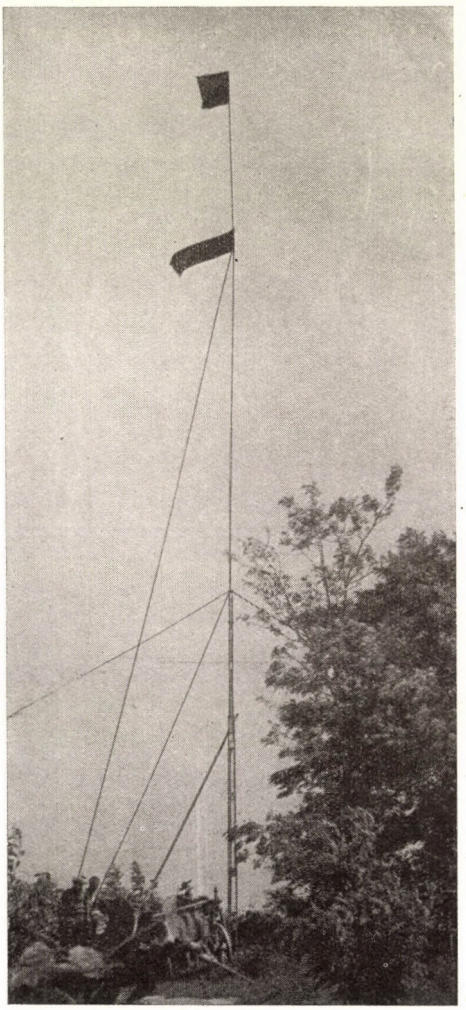


Bild 3

Als nächste Arbeitsphase wird das Betonfundament der Pyramidengerüste hergestellt. Ein Betonfundament erhält bloss die Streben des Instrumentengerüstes. Diese Arbeitsgruppe umfasst einen Techniker und 6 Arbeiter. Fundamente und Festlegung beanspruchen 10 Stunden Arbeitszeit.

Nun folgt der Signalbau. Zur Verwendung gelangen zerlegbare, wiederholt aufstellbare Pyramiden. (Die Pläne der zerlegbaren Pyramidengerüste

hat Ing. I. ILLÉS konstruiert.) Das Pfeilergerüst wird aus Fichtenholz, das vollständig unabhängige Beobachtergerüst aus Winkeleisen gebaut.

Das Pfeilergerüst wird am Erdboden liegend fertigmontiert und mittels Hebewinde in einem Stück aufgestellt (Bild 4, 5, 6, 7, 8). Nachher werden am Pfeiler Rollen befestigt und damit die Teile des Beobachtergerüstes auf ihren richtigen Platz gehoben (Bild 9, 10).

Bild 11 und 12 zeigen einen fertigen Hochstand von 24 m Höhe.

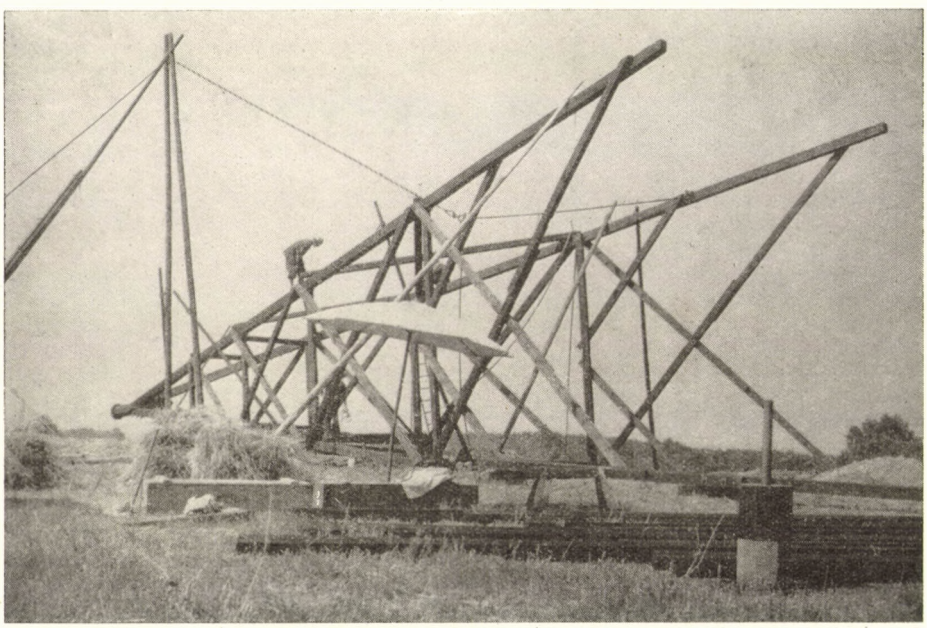


Bild 4

Den Auf- und Abbau leitet ein Techniker, dessen Arbeitsgruppe aus 2 Facharbeitern und 6 eingeübten Arbeitern besteht. Die Bauzeit richtet sich nach der Höhe wie folgt :

8	m	Höhe	.....	10	Stunden
12	«	«	.....	20	«
16	«	«	.....	30	«
20	«	«	.....	45	«
24	«	«	.....	60	«

Der Abbau beansprucht bloss die entsprechende halbe Zeitdauer.

Die Abnutzung der Pyramiden dauert lange. Mehrere wurden bereits zehnmal aufgestellt und sind noch brauchbar. Die Eisenkonstruktion zeigt kaum irgend eine Abnutzung.

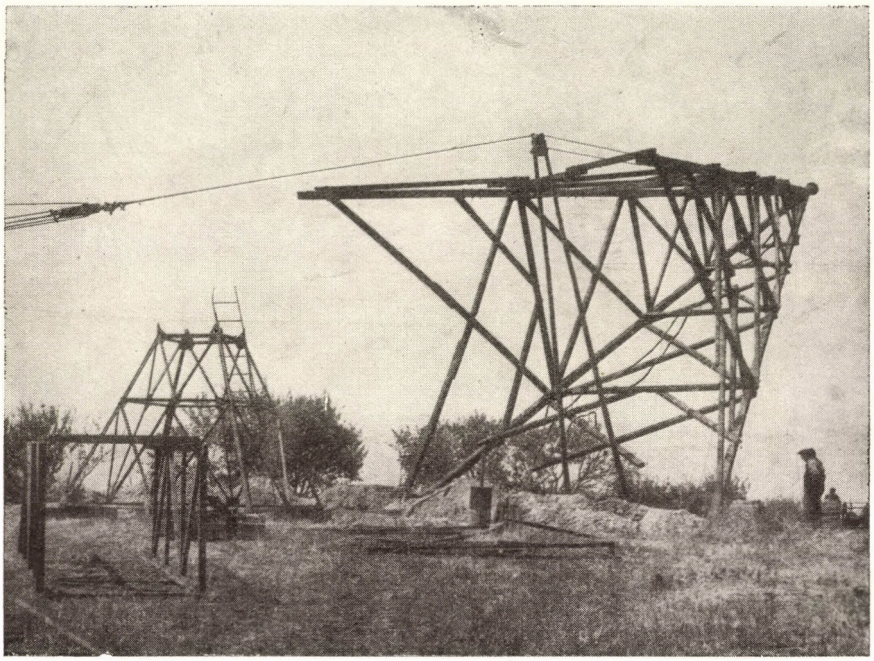


Bild 5

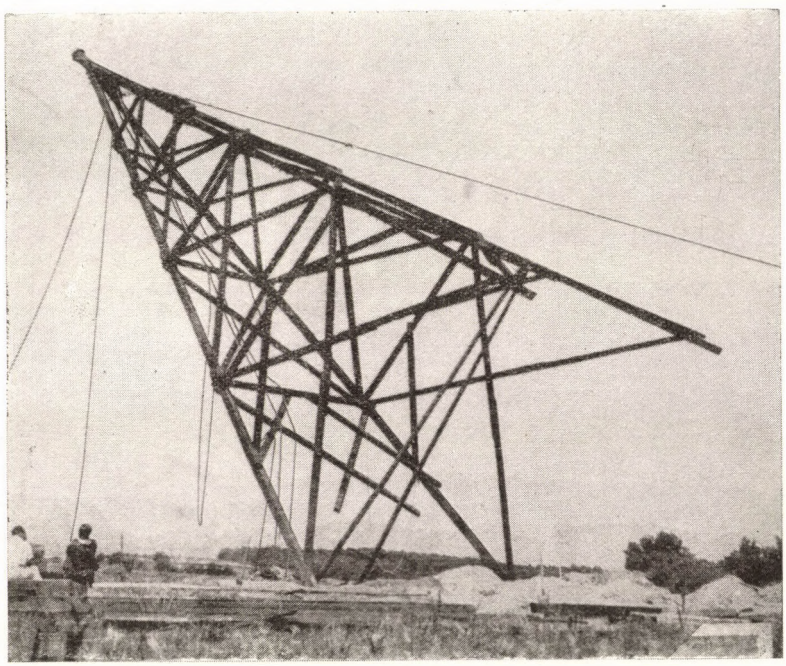


Bild 6

Für jede Arbeitsphase : Erkundung, Fundierung, Bau und Beobachtung ist freilich je eine besondere eingeübte Arbeitsgruppe eingestellt. Die Erkunder haben einen mehrmonatigen Zeitvorsprung. Ihnen folgt die Fundiergruppe

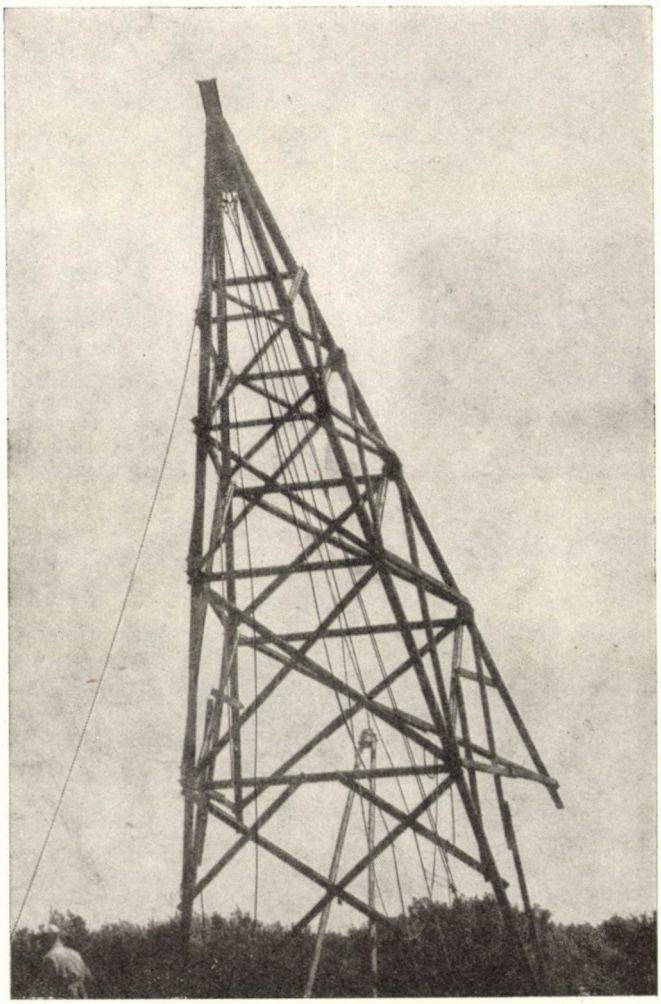


Bild 7

Die Baugruppe errichtet auf einem breiten Landesstreifen die Signale und baut diese je nach dem Fortschritt der Beobachtung wieder ab, transportiert sie weiter vorwärts und stellt sie abermals auf (Bild. 13). Die Arbeit geht also fortlaufend vor sich. Es stehen gleichzeitig etwa 80 Pyramiden, während sich 20—30 im Auf- bzw. Abbau befinden.

Bis September 1956 wurden in 1216 Dreiecken sämtliche Winkel gemessen. Die Genauigkeit der Beobachtungen ist aus folgenden Daten ersichtlich

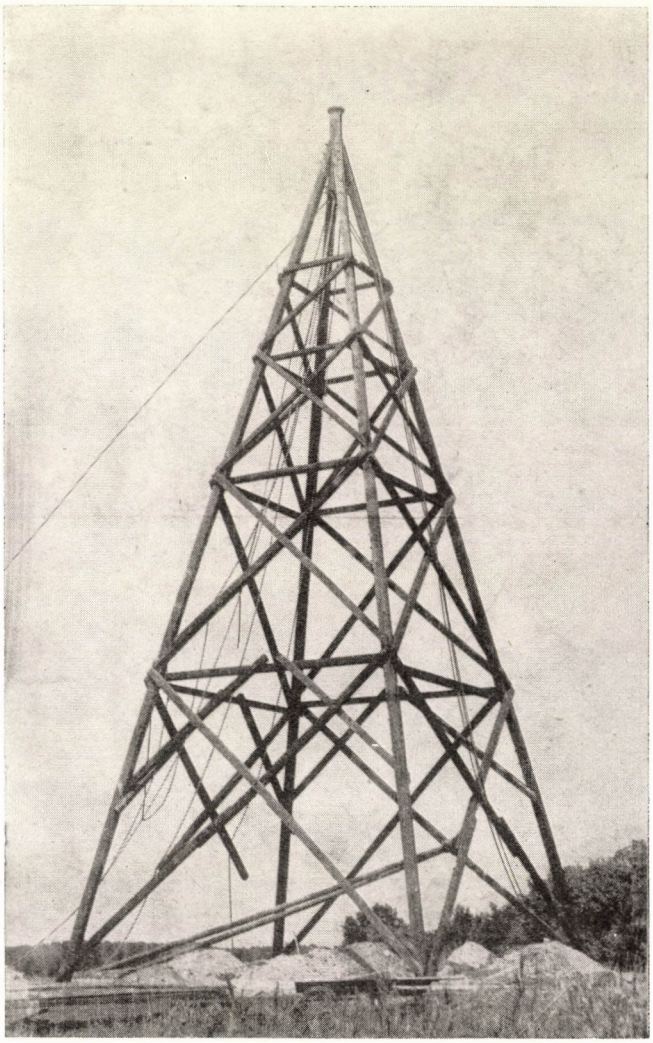


Bild 8

Die Winkelschlussfehler der Dreiecke zeigen im Durchschnitt Absolutwerte wie folgt:

$$d = \frac{[|\omega|]}{n} = \pm 0{,}90''$$

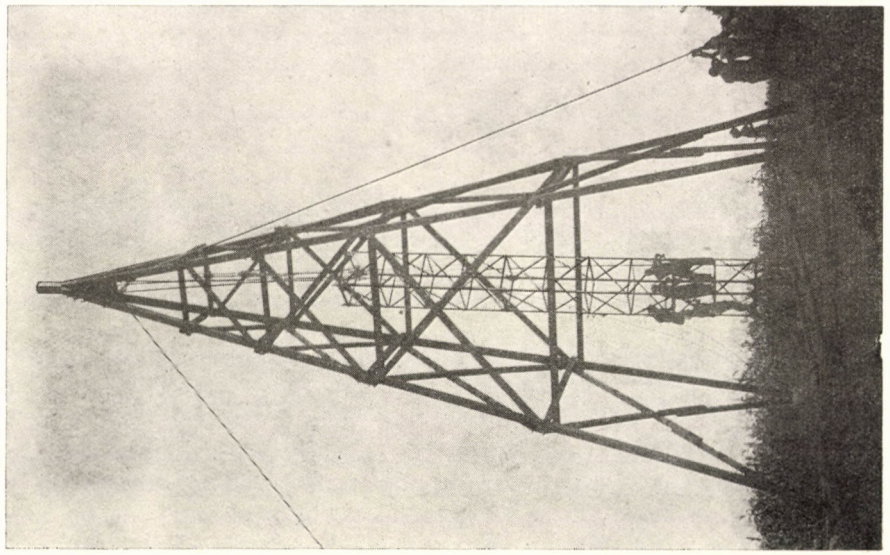


Bild 10

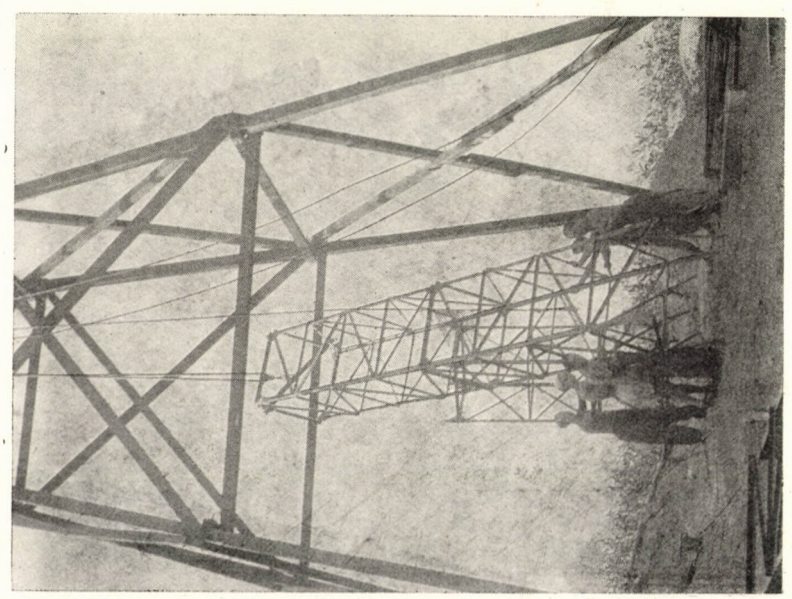


Bild 9

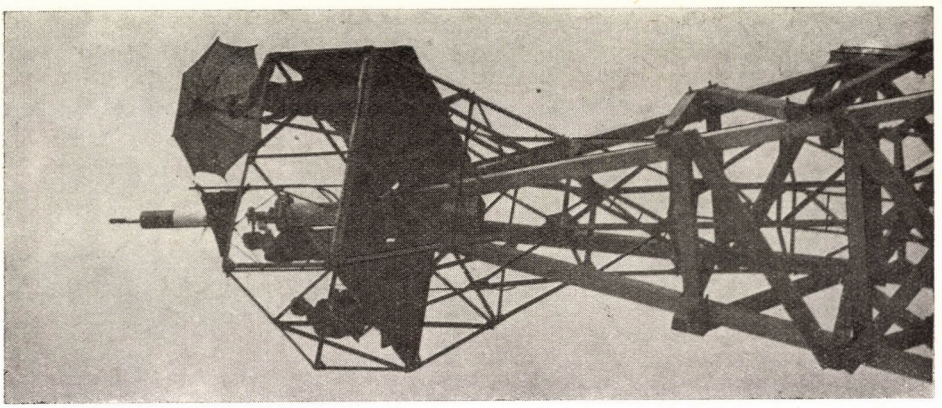


Bild 12

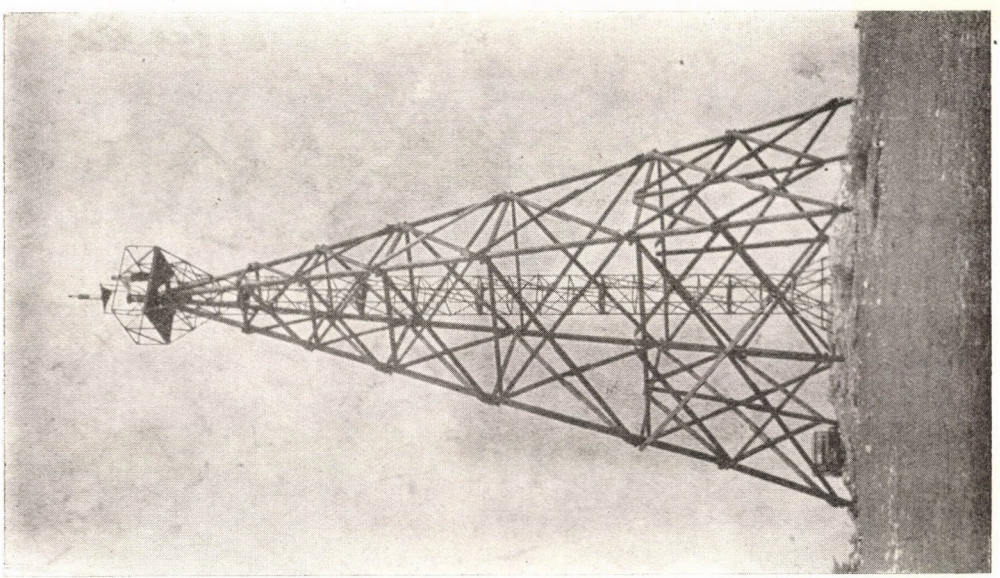


Bild 11

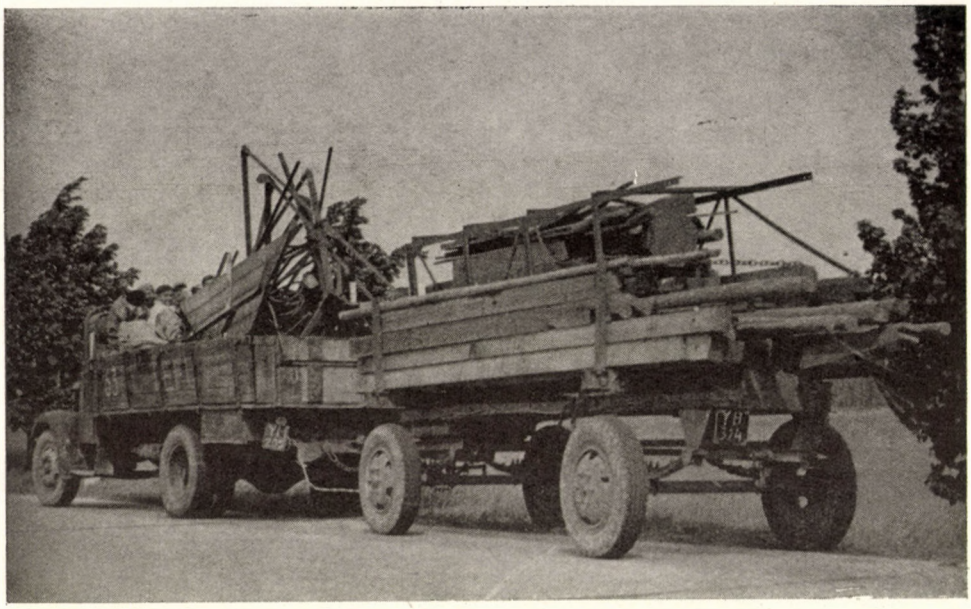


Bild 13

Der quadratische Mittelwert dieser Winkelschlussfehler ist :

$$m = \sqrt{\frac{[\omega\,\omega]}{n}} = \pm 1{,}09''$$

Der wahrscheinliche Schlussfehler der Dreiecke, als Mittelwert der nach Grössenordnung zusammengestellten Schlussfehler :

$$w = \pm 0{,}84''$$

Der Ferrerosche mittlere Winkelfehler :

$$\mu = \sqrt{\frac{[\omega\,\omega]}{3\,n}} = \pm 0{,}63''$$

Die Häufigkeit der Winkelschlussfehler zeigt, dass die erhaltenen Winkelfehler der Gaussschen Fehlerkurve entsprechen (Tafel I).

Tafel I

	+	—
0″—0,50″	194	198
0,51″—1,00″	166	167
1,01″—1,50″	133	137
1,51″—2,00″	83	84
2,01″—2,50″	27	20
2,51″—3,00″	3	4
Zusammen	606	610

Die positiven und negativen Winkelschlussfehler zeigen auch der triangulierten Fläche nach eine gleichmässige Verteilung.

All dies deutet darauf hin, dass die Genauigkeit der Winkelmessungen den üblichen Anforderungen entspricht und das Netz keine regelmässigen Fehler enthält.

Die aus dem ungarischen Beispiel einer Triangulierung mit Kleindreiecken gezogenen Folgerungen besitzen jedoch insofern keinen allgemein gültigen Charakter, nachdem mehrere Netzpunkte hier Kirchtürme sind. Der Verwendung von Kirchtürmen zu Dreieckspunkten steht man in mehreren Ländern abneigend gegenüber. Deshalb wurde die Untersuchung noch mit 977 solchen Dreiecken wiederholt, die keinen einzigen Gebäudeturm als Dreieckspunkt enthalten. In diesem Netz war :

$$d = \pm 0{,}88''$$
$$m = \pm 1{,}07''$$
$$w = \pm 0{,}80''$$
$$\mu = \pm 0{,}62''$$

Die Häufigkeit der Winkelschlussfehler gestaltet sich hier — wieder nach der Grösse geordnet — folgendermaßen :

Tafel II

	+	—
0″—0,50″	164	166
0,51″—1,00″	135	130
1,01″—1,50″	100	108
1,51″—2,00″	66	65
2,01″—2,50″	19	17
2,51″—3,00″	3	4
Zusammen	487	490

Wenn wir die Untersuchung noch mit den 239 Dreiecken durchführen, die auch Gebäudetürme als Dreieckspunkte enthalten, bekommen wir folgende Angaben :

$$d = \pm 0{,}98''$$
$$m = \pm 1{,}14''$$
$$w = \pm 0{,}98''$$
$$\mu = \pm 0{,}66''$$

Obwohl die berechneten Genauigkeitsdaten dieses letzteren Netzes etwas grösser sind als die des zweiten, können wir folgendes feststellen : Der Umstand, dass sich unter den Dreieckspunkten auch Gebäudetürme befinden, übt auf

die Genauigkeit des Netzes keinen wesentlichen Einfluss aus. Und dies gilt auch, trotzdem die Beobachtung in Türmen meist ungenauer als auf Pyramiden vor sich geht, weiters Kirchtürme nicht immer so gut wie Pyramidenspitzen anzuvisieren sind, dabei sich noch auch Zentrierungsungenauigkeiten geltend machen können. Die hier und da auftauchenden Befürchtungen gegenüber Türmen in der Triangulierung höherer Ordnung scheinen also vom praktischen Gesichtspunkt aus nicht ausreichend begründet zu sein.

Nachher wollen wir kurz die Berechnungsarbeiten überblicken.

Wie gesagt, waren von den Punkten des aus Kleindreiecken gebildeten Netzes voneinander etwa 30 km entfernte Punkte ausgewählt und diese als Punkte eines fingierten Dreiecksnetzes erster Ordnung betrachtet. Die erste Aufgabe besteht demnach in der Berechnung der fingierten Dreieckswinkel. Hierzu wird die Kleindreiecksgruppe eines jeden fingierten Grossdreiecks separat ausgeglichen. Aus den ausgeglichenen Werten werden dann die Koordinaten der drei Eckpunkte des Grossdreiecks und aus den Koordinaten wieder die fingierten Dreieckswinkel erster Ordnung berechnet.

Die Ausgleichung der einzelnen Gruppen von Kleindreiecken verursacht eine bedeutende Arbeit. Um diese nach Möglichkeit zu vermindern, werden nach Vorschlag von Dr. Hőnyi nicht die Richtungen, sondern die aus diesen gebildeten Winkel ausgeglichen [6]. Dieser Vorgang kann zwar nicht als exakte Ausgleichung gelten, nachdem die aus den gemessenen Richtungswerten hervorgehenden Winkel voneinander nicht unabhängig sind. Um diese Frage zu prüfen, fanden im Herbst 1954 Versuchsberechnungen statt. Undzwar wurden 6 fingierte Grossdreiecke unseres Ausfüllnetzes sowohl nach Richtungen, wie auch nach aus diesen Richtungen gebildeten Winkeln ausgeglichen. Diese Proberechnungen erstreckten sich somit auf 369 Winkel. Die Abweichungen dieser Ausgleichungen beider Art sind aus Tafel III ersichtlich.

Tafel III

Abweichung	Anzahl der Fälle	%
0,00″—0,10″	164	44,5
0,11″—0,20″	108	29,3
0,21″—0,30″	65	17,6
0,31″—0,40″	25	6,7
0,41″—0,50″	6	1,6
0,51″—0,52″	1	0,3

Man sieht also, dass die Abweichungen geringer sind, als die Beobachtungsungenauigkeiten an sich. In den aus den ausgeglichenen Werten berechneten Koordinaten hat man demnach zufolge vereinfachter Ausgleichung keine

wesentlichen Unstimmigkeiten zu erwarten. Hierbei ist zu bemerken, dass im »Buchholz-Heft« Kollege F. TÖPFER dieselbe Vereinfachung vorgeschlagen hat [7]. Zweifellos konnten jedoch TÖPFER und HŐNYI von der Identität ihrer Vorstellungen keine Kenntnis haben.

Es dürfte sich erübrigen, vor meinen hier anwesenden hochgeehrten Zuhörern die Vorteile dieser Vereinfachung zu betonen. Ich beschränke mich auf die Mitteilung, dass nach unseren Erfahrungen dies eine 40%ige Arbeitsersparnis bedeutet.

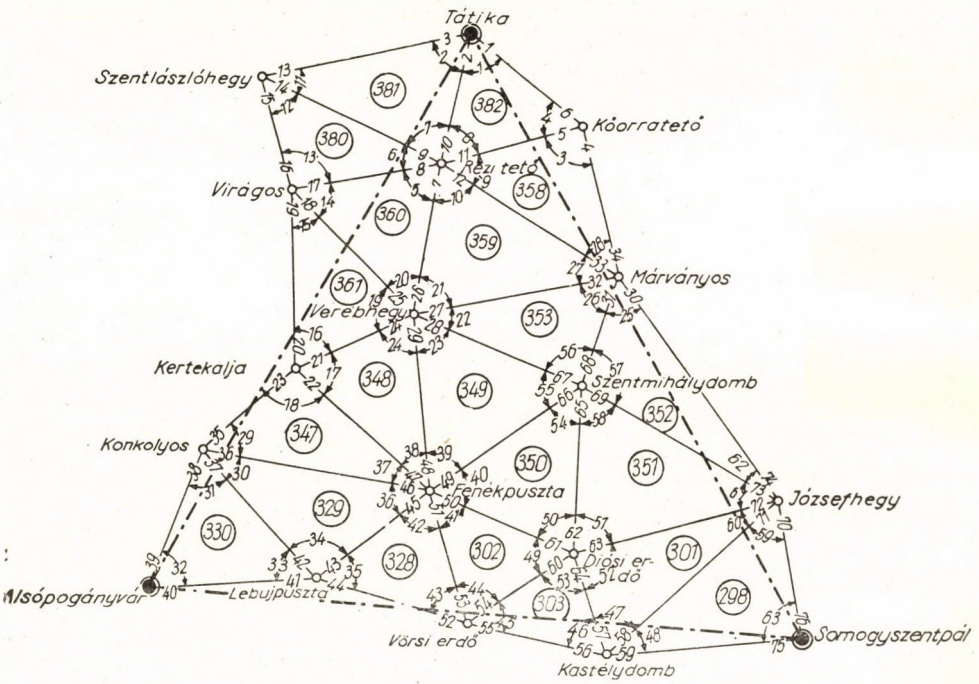


Bild 14

Das Bild 14 zeigt als Beispiel die Kleindreiecksgruppe eines unserer fingierten Dreiecke erster Ordnung. Es ist dies die Photographie der Rechnungsskizze.

Nachdem die ausgeglichenen Winkel der Kleindreiecke bekannt sind, wird für eine der Seiten ein Näherungswert angenommen. Damit werden dann von Punkt zu Punkt fortschreitend, — auch die Spitzpunkte der fingierten Grossdreiecke inbegriffen — mittels Vorwärtseinschnitt die Koordinaten sämtlicher Dreieckspunkte berechnet. Aus den Koordinaten lassen sich nun auch die Winkel des fingierten Dreiecks ermitteln. Jener Umstand, dass die genaue Länge der angenommenen Dreiecksseite unbekannt ist, übt auf die Winkelwerte offenbar keinen Einfluss aus.

Sobald dann diese Rechnung für alle in einem gemeinsamen Punkte sich treffenden fingierten Dreiecke durchgeführt ist, lässt sich dort auch der Horizontschluss berechnen. Der Schlussfehler wird auf die einzelnen Winkel in der üblichen Weise verteilt. Nachdem dann der Horizontschluss sämtlicher Punkte fertig ist, wird die Winkelsumme der einzelnen fingierten Dreiecke nunmehr von 180° abweichen.

Bemerkt sei, dass es bei der Ausgleichung des ungarischen Ausfüllnetzes möglich ist, den Horizontschluss für jeden fingierten Punkt I. Ordnung zu berechnen, nachdem die äussersten Punkte dieses Netzes mit entsprechenden Punkten des umschliessenden Kettenrahmens I. Ordnung identisch sind.

Es sei mir erlaubt, hier einige praktische Daten zu geben.

Die bisher ausgeglichenen fingierten Dreiecke enthielten durchschnittlich 20 Kleindreiecke. Es gab im Durchschnitt 28 Bedingungen (Winkel-, Stations- und Seitengleichungen).

An der Ausgleichung je eines fingierten Dreiecks (die Berechnung der fingierten Winkel inbegriffen) hatten ein Ingenieur und ein Techniker etwa 75 Stunden zu arbeiten.

Auf 41 fingierten Punkten haben wir auch den Horizontschluss berechnet und dafür im Durchschnitt

$$\frac{\Sigma |\omega|}{n} = \pm 1{,}29''$$

gefunden. Das Maximum war 3,17″ und das Minimum 0,08″.

Der Ferrero'sche mittlere Winkelfehler aus 59 fingierten Dreiecken, nach dem Horizontschluss berechnet, ergab $\pm 0{,}32''$. Bemerkenswert ist der Umstand, dass dieser Wert kleiner ist als der Ferrero'sche mittlere Winkelfehler des Kettenrahmens ($\pm 0{,}46''$). (Die durchschnittliche Seitenlänge des letzteren ist 29 km und die Winkelmessungen erfolgten nach der Schreiberschen Methode mit dem Gewicht 24, neben Verteilung der Repetitionen sowohl auf die Tages-, als auf die Nachtzeit. Als Instrumente dienten Theodolite vom Typ Wild T 3. Gemessen wurden immer Lichtsignale.)

Als nächster Schritt gilt die Ausgleichung des fingierten Netzes I. Ordnung innerhalb des Kettenrahmens. Dies wollen wir nach der Koordinatenmethode ausführen. Als Ergebnis erhält man dann die endgültigen Koordinaten sämtlicher fingierten Punkte erster Ordnung.

Nun folgt die abermalige Ausgleichung der im fingierten Grossdreieck enthaltenen kleinen Dreiecke, jedoch diesmal unter den Bedingungen, dass die fingierten Seitenlängen und fingierten Winkel schon unverändert bleiben müssen. Für diese Ausgleichung hat Dr. Hőnyi eine Methode vorgeschlagen, die ich nun an Hand eines einfachen Beispieles vorführe.

Gegeben sei das fingierte Dreieck des Bildes 15. Zur Verfügung stehen die definitiven Koordinaten der Punkte A, B und C. Also werden die Winkel I, II, III, wie auch die Seiten AB, BC und AC berechnet.

Aus den Koordinaten der ersten Ausgleichung gehen die Winkel α_1, α_2, β_2, β_2, γ_1 und γ_2 hervor. Mithin die drei Winkelbedingungsgleichungen:

$$\delta_{\alpha_1} - \delta_{\alpha_2} + v_1 = I - I' = l_I$$
$$\delta_{\beta_2} - \delta_{\beta_1} + v_{14} = II - II' = l_{II}$$
$$\delta_{\gamma_2} - \delta_{\gamma_1} + v_{27} = III - III' = l_{III}$$

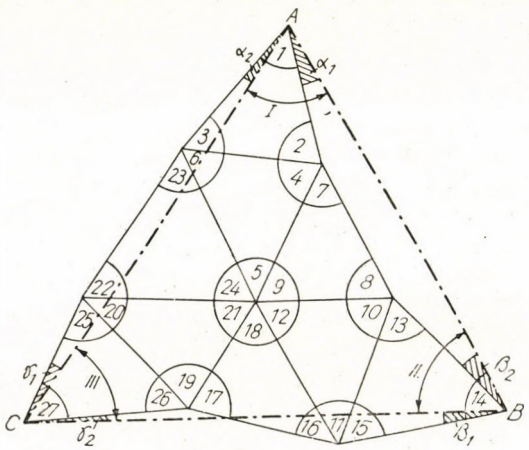


Bild 15

worin die mit δ bezeichneten Werte die Verbesserungen der ungemessenen Unbekannten sind, und

$$I' = (\alpha_1 + (1) - \alpha_2)$$
$$II' = (\beta_2 + (14) - \beta_1)$$
$$III' = (\gamma_2 + (27) - \gamma_1)$$

Wir möchten erwähnen, dass aus diesen Winkelbedingungsgleichungen nur 2 voneinander unabhängig sind.

In diesen Gleichungen kommen noch 6 ungemessene Winkel vor. Schreibt man weitere 3 Gleichungen auf und drückt aus denen 3 ungemessene Winkel aus, substituiert dieselben in die drei Bedingungsgleichungen, so erreicht man ein doppeltes Ziel:

a) von nun an kommen nur 3 ungemessene Winkel vor,

b) es gehen in die Ausgleichung alle jene Winkel ein, die an der Peripherie des fingierten Dreiecks liegen.

Diese drei Gleichungen lassen sich auf jenes geschlossene Vieleck aufschreiben, welches von je einer Seite des Grossdreiecks und dem Verbindungspolygon deren beiden Endpunkte gebildet wird.

$$\delta_{\alpha_1} + \delta_{\beta_2} - v_2 - v_4 - v_7 - v_8 - v_{10} - v_{13} = l_{IV}$$

$$-\delta_{\beta_1} + \delta_{\gamma_2} - v_{11} - v_{15} - v_{16} - v_{17} - v_{19} - v_{26} = l_V$$

$$-\delta_{\alpha_2} - \delta_{\gamma_1} - v_3 - v_6 - v_{20} - v_{22} - v_{23} - v_{25} = l_{VI}$$

In die Ausgleichung gehen wir mit 2 Winkelbedingungsgleichungen und mit 2 noch aufzuschreibenden Seitenbedingungsgleichungen ein. Die Ausgleichung erfolgt nach der Methode der ungemessenen Unbekannten. (In der Quadratsumme $[pvv]$ spielt nämlich die Verbesserung der ungemessenen Unbekannten keine Rolle.)

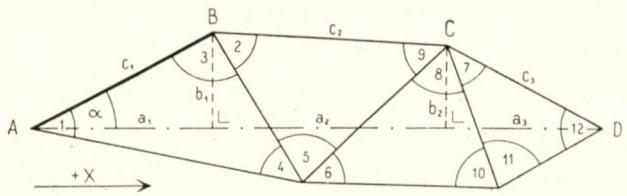


Bild 16

Dieses Verfahren erwies sich in der Praxis als etwas schwerfällig, deshalb hat Dr. Hőnyi eine andere Lösung entwickelt. Da somit die erste Lösung ihre Aktualität verloren hat, ergänzen wir jetzt unseren Vortrag mit der neuen Lösung. Hier wird als Zwangsbedingung die Unveränderlichkeit der endgültigen Länge der die abgeleiteten Punkte erster Ordnung verbindenen Seiten aufgestellt. (Beim ersten Verfahren war die Unveränderlichkeit der Winkel der fingierten Dreiecke erster Ordnung die Zwangsbedingung.) Da die Seite des fingierten Dreiecks erster Ordnung im Netz der Kleindreiecke eine Diagonale ist, haben wir es hier eigentlich mit einer Diagonalbedingung zu tun. Für jede Gruppe können drei solche Diagonalbedingungen aufgeschrieben werden. Wir möchten das auf einem einfachen Beispiel demonstrieren.

Gegeben seien vier Dreiecke mit je einer gemeinsamen Seite (Bild 16). Die bekannte Diagonale ist $\overline{AD}$. Auf diese sei die Projektion des Polygons A—B—C—D aufgezeichnet. Nehmen wir nun an, dass die Laufrichtung auf der Diagonale $\overline{AD}$ die $+x$-Achse ist, und wenn diese in die Richtung $\overline{AB}$ gedreht wird, dann ergibt sich als Seitenprojektionswinkel von c_1 $(360° - \alpha)$,

während die übrigen Projektionswinkel dementsprechend berechnet werden können. Demnach ist

$$c_1 \cos(360° - \alpha) + c_2 \cos(180° - \alpha - 2 - 3) + \\ + c_3 \cos(-\alpha - 2 - 3 - 7 - 8 - 9) = \overline{AD} \tag{1}$$

Es sollen nun die Seiten c_2 und c_3 auch mit der Seite c_1 ausgedrückt werden:

$$c_2 = c_1 \frac{\sin 1 \cdot \sin 5}{\sin 4 \cdot \sin 9}$$

und

$$c_3 = c_1 \frac{\sin 1 \cdot \sin 2 \cdot \sin 6 \cdot \sin 11}{\sin 4 \cdot \sin 9 \cdot \sin 10 \cdot \sin 12} \tag{2}$$

Mit diesen Werten wird nun (1)

$$c_1 \cos(360° - \alpha) + c_1 \frac{\sin 1 \cdot \sin 5}{\sin 4 \cdot \sin 9} \cos(180° - \alpha - 2 - 3) + \\ + c_1 \frac{\sin 1 \cdot \sin 2 \cdot \sin 6 \cdot \sin 11}{\sin 4 \cdot \sin 9 \cdot \sin 10 \cdot \sin 12} \cos(-\alpha - 2 - 3 - 7 - 8 - 9) = \overline{AD} \tag{3}$$

Damit wurde erreicht, dass in der Gleichung bloss eine Dreiecksseite vorkommt. Da die Seitenlänge nicht gemessen wurde, wird diese Länge in der Ausgleichung als ungemessene Unbekannte behandelt.

In der Gleichung sind Winkel und Ausgangsseite die Veränderlichen. Nach der Reihenentwicklung der Gleichung ergibt sich:

$$(a_2 + a_3) \operatorname{ctg} 1 \cdot v_1 + (b_1 + a_3 \operatorname{ctg} 2)\, v_2 + b_1 v_3 - (a_2 + a_3) \operatorname{ctg} 4 \cdot v_4 + \\ + a_2 \operatorname{ctg} 5 \cdot v_5 + a_3 \operatorname{ctg} 6 \cdot v_6 + b_2 v_7 + b_2 v_8 + \left[b_2 - (a_2 + a_3) \operatorname{ctg} 9\right] v_9 - \\ - a_3 \operatorname{ctg} 10 \cdot v_{10} + a_3 \operatorname{ctg} 11 \cdot v_{11} - a_3 \operatorname{ctg} 12 \cdot v_{12} + \\ + \frac{1}{c_1}(a_1 + a_2 + a_3)\, v_c + (\overline{AD'} - \overline{AD}) = 0 \tag{4}$$

wobei die wahrscheinlichsten Verbesserungen mit v bezeichnet wurden.

Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass die Koeffizienten die Koordinaten der Brechpunkte des Polygonzuges A—B—C—D auf die Gerade AD als x-Achse (und auf die hierauf senkrechte Richtung als y-Achse) sind. Ihren numerischen Wert können wir demnach durch die einfache Koordinatentransformation der vorläufigen Koordinaten der Brechpunkte erhalten. Die

Vorzeichen hängen von der Aufnahme der positiven Richtung der x-Achse und davon ab, ob die aus dem fraglichen Brechpunkt abzweigenden Richtungen die Diagonale schneiden oder nicht.

Es ergibt sich die Frage, wie der als vorletztes Glied der linken Seite der Gleichung (4) aufgezeichnete $\overline{AD'}$-Wert bestimmt wird. Da die Ausgangsseite c_1 kein Ergebnis von Messungen, sondern ein angenommener Wert ist, hängt der Wert von $\overline{AD'}$ davon ab, welchen Wert wir c_1 geben. Die aus den vorläufigen Koordinaten der Punkte A und B berechnete Länge von c_1 steht uns zur Verfügung. Hieraus kann auch der Wert von $\overline{AD'}$ bestimmt werden. Ausserdem steht uns jedoch auch noch die endgültige Länge von $\overline{AD}$ zur Verfügung. Wird c_1 mit der Verhältniszahl $\overline{AD}/\overline{AD'}$ multipliziert, so erhalten wir einen Wert für c_1, aus welchem $\overline{AD'}$ berechnet werden kann und mit $\overline{AD}$ identisch wird. Das Absolutglied unserer Gleichung $(\overline{AD'} - \overline{AD})$ wird somit Null sein. Unseren Überlegungen entsprechend scheint diese Lösung die günstigste zur Berechnung der Seitenlänge c_1 zu sein und in die Ausgleichung wird diese Länge c_1 — als ungemessene Unbekannte — als vorläufiger Wert eingeführt.

Die Frage ist nun, was zu tun ist, wenn nicht das einfache Gebilde gemäss Fig. 16 ausgeglichen wird, sondern eine Dreiecksguppe? Hier ergeben sich drei Diagonalbedingungen. Die Absolutglieder der einzelnen Diagonalbedingungsgleichungen können jetzt nicht so aufgestellt werden, wie wir das oben beschrieben hatten, da wir als Verhältniszahl der endgültigen Länge der fingierten Seiten und der aus der angenommenen Ausgangsseite berechneten vorläufigen Länge (mit dieser Verhältniszahl müsste die Ausgangsseite multipliziert werden) bei allen drei Seiten andere Werte erhalten. Wir gehen dann zweckmässig vor, wenn wir das arithmetische Mittel der drei Verhältniszahlen nehmen und — die Länge der Ausgangsseite mit diesem Werte multiplizierend — die Länge der fingierten Seiten bestimmen. In diesem Fall wird das Absolutglied sämtlicher Diagonalbedingungsgleichungen von Null abweichen. Diese Art der Bestimmung des Absolutgliedes gibt für die Praxis befriedigende Ergebnisse.

Mit guter Annäherung kann das Absolutglied auf noch einfacherer Weise berechnet werden. Nach erster Ausgleichung der Dreiecksgruppe steht der vorläufige Wert der fingierten Seite zur Verfügung. Dieser Wert weicht kaum von dem der Ausgangsseite des Dreiecks und der gemessenen, jedoch mit noch nicht ausgeglichenen Winkeln berechneten Länge ab. Somit können die beiden Daten praktisch miteinander vertauscht werden. Wenn dies in Betracht genommen wird, kann der Näherungswert des Absolutgliedes folgendermassen berechnet werden: der entsprechende endgültige Wert wird mit dem aus der ersten Ausgleichung erhaltenen vorläufigen Wert der fingierten Seiten (d. h. Diagonalen) dividiert. Man nimmt das arithmetische Mittel der erhaltenen drei Verhältniszahlen und multipliziert damit den vorläufigen Wert der Diagonalen.

Wird nun aus den so erhaltenen Werten die endgültige Länge der entsprechenden Diagonalen (der fingierten Seiten erster Ordnung) subtrahiert, so ergeben sich bis auf das Vorzeichen genau die Absolutglieder der Diagonalbedingungen. Wird nun ausserdem auch die aus den vorläufigen Koordinaten der Punkte A und B bestimmte Länge c_1 mit der Verhältniszahl multipliziert, so erhält man schliesslich jenen Wert von c_1, welcher in der Ausgleichung als ungemessene Unbekannte vorkommt.

Nun werden die im dritten Teil der Berechnung — in der endgültigen Ausgleichung — zu unternehmenden Schritte zusammengefasst.

1. Die Diagonalbedingungsgleichungen werden zu den Winkel-, Seiten- und Stationsbedingungsgleichungen hinzugeschrieben. Dem folgt die Ergänzung der Reihen und Kolonnen der zum ersten Ausgleich der Dreiecksgruppen aufgezeichneten Normalgleichungen mit den aus den neuen Bedingungen zu berechnenden neuen Gliedern. Somit wächst unser Normalgleichungssystem (wenn die Normalgleichungen nach dem Verfahren von CHOLESKY gelöst werden) gemäss der drei neuen Korrelaten und der ungemessenen (vierten) Unbekannten mit drei Reihen und vier Kolonnen, und damit verändert sich auch die Summenkolonne.

2. Die sich aus der ersten Ausgleichung ergebende Lösung der Normalgleichungen wird ergänzt, die Reduktion erstreckt sich nun auch auf die neuen Glieder der Reihen und eine neue Kontrollen- und Summenkolonne wird berechnet. Nach Ausführung dieser ergänzenden Rechnungen wird die Reduktion der drei neuen Reihen der Normalgleichungen ausgeführt, es werden die Korrektion der ungemessenen Unbekannten und hiernach, dem V. Ausgleichungsverfahren entsprechend, die neuen Korrelaten bestimmt. Mit diesen werden die endgültigen Korrektionen ausgeführt.

3. Zur Berechnung der endgültigen Koordinaten muss die Ausgangsseite orientiert werden. Die Orientierung erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird der nach der ersten Ausgleichung der Ausgangsseite berechnete Richtungswinkel mit der Abweichung im Vorzeichen des vorläufigen und endgültigen Richtungswinkels der fingierten Seite (Diagonale) neben der Ausgangsseite korrigiert. Mit dem so korrigierten Richtungswinkel werden die ausgeglichenen endgültigen Richtungen orientiert. (Dies ist die vorläufige Orientierung.) Der eine Endpunkt der Ausgangsseite ist der eine bekannte dominante Punkt. Die Koordinate des anderen Endpunktes und die Koordinaten eines der beiden dominanten Punkte über einige intermediäre Punkte hindurch müssen mit den vorläufigen Werten der Orientierung und der endgültigen Länge der Ausgangsseite berechnet werden. Die so erhaltene Koordinate des zweiten dominanten Punktes wird nicht mit der endgültigen Koordinate des Punktes übereinstimmen. Aus dieser neueren Koordinate und aus der endgültigen Koordinate des dominanten Ausgangspunktes wird der Richtungswinkel der hier behandelten fingierten Seite berechnet, und hiernach dieser Wert von dem end-

gültigen Richtungswinkel dieser fingierten Seite subtrahiert. Auf diese Weise erhält man jene Winkelverbesserung, mit deren Hilfe die obigen vorläufigen Werte der Orientierung der Richtungswinkel korrigiert und die endgültigen Richtungswinkel erhalten werden.

Nun folgt der zweite Schritt : mit dem endgültigen Wert der Orientierung und der endgültigen Länge c_1 der Ausgangsseite werden — von den Koordinaten des den einen Endpunkt der Ausgangsseite bildenden dominanten Punktes ausgehend — von Dreieck zu Dreieck die endgültigen Koordinaten der Punkte berechnet.

Die längs der Seiten der Grossdreiecke liegenden Dreieckspunkte erhalten aus zwei fingierten Dreiecken ihre Koordinaten. Deren arithmetisches Mittel wird als endgültiger Wert angenommen.

Laut der klassischen Methode wurden die Punkte zweiter, namentlich aber jene der dritten Ordnung in gewisser Reihenfolge separat, oder aber in kleineren Gruppen berechnet. Bei fortschreitender Rechnung wurden so auch Zwänge mitgeführt. Bei einer anderen Reihenfolge würde man für die Punkte etwas abweichende Koordinaten erhalten. Bei der erörterten neuen Methode erhalten einige Punkte Doppelkoordinaten. Indem man diese mittelt, wird die Unsicherheit wahrscheinlich auch nicht grösser ausfallen, als jene der klassischen Methode wegen der verschiedenen Rechnungsfolge.

Die in Ungarn im Gange befindlichen Triangulierungsarbeiten können für einen grossen Versuch des in [1] bzw. [2] und [3] vorgeschlagenen Triangulierungsverfahrens betrachtet werden. Wir hoffen nicht unbescheiden zu sein, wenn wir auf Grund der mitgeteilten Angaben der Meinung Ausdruck geben, dass die Praxis die Richtigkeit der Theorie bewiesen hat.

SCHRIFTTUM

1. Regőczi E.: Takarékos felsőrendű háromszögelés (Földméréstani Közlemények, 1951).
2. Regőczi E.: Harmadrendű háromszögelési hálózatból levezetett elsőrendű hálózat (A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei, 1952).
3. Regőczi E.: Réseau primordial déduit d'un réseau trigonometrique de troisième ordre (Acta Technica Academia Scientiarum Hungaricae, 1952).
4. E. Regőczi : Über das Ausfüllnetz des Kettenrahmens der Triangulation erster Ordnung in Ungarn (Vermessungstechnik, 1954).
5. D. Schoeps : Ein Beitrag zur Frage der Genauigkeit eines mittelbar bestimmten Dreiecksnetzes I. Ordnung (Vermessungstechnik, 1956).
6. E. Hőnyi : Megjegyzések az iránykiegyenlítéshez (Geodézia és Kartográfia, 1955).
7. F. Töpfer : Dreiecksnetzausgleichung nach Winkeln oder Richtungen? (Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Dresden, 1954/55).

DISKUSSION

Prof. A. I. DURNJEW, MOSKAU—DRESDEN

Interessant ist jener Einfall REGŐCZIS, dass man aus dem System der kleinen Dreiecke mit entsprechender Genauigkeit grosse Dreiecke erhalten kann. Die ungarischen Geodäten wendeten sich zwangsweise an dieses Verfahren, da sie als Erbschaft bloss moderne Triangulierungen niedrigerer Ordnung erhalten hatten. Aus kleinen Dreiecken grosse zu bilden und damit die Genauigkeit des abgeleiteten grossen Dreiecks zu lösen : das ist wirklich ein interessanter Gedanke. Die Genauigkeitsprüfungen der sowjetischen Geodäten führten ebenfalls zu ähnlichen Folgerungen. Wird ein einfaches Triangulierungsnetz genommen und die Genauigkeit der Gewichtseinheit entsprechend bestimmt, dann wird die Genauigkeit im zusammenhängenden Netz bei derselben genauen Winkelmessung auf das 2,5—3fache gesteigert, was eben der Stabilität des gesamten Netzaufbaues zu verdanken ist. Professor WORONJIN hatte zur Prüfung der Genauigkeit des ganzen Netzes eine strenge Methode ausgearbeitet. Der Grundgedanke ist bei beiden Systemen der gleiche und auch dies bekräftigt REGŐCZIS Idee. Daneben ist das ungarische Netz zusammenhängend, was letzten Endes eine grosse Genauigkeit garantiert.

Die Herstellung der kleinen Dreiecke darf nicht mit geringer Genauigkeit erfolgen, sondern so, dass die möglichst höchste Genauigkeit erreicht wird. Nehmen wir an, dass ein Triangulierungsnetz erster Ordnung zur Verfügung steht. Aus diesen zusammenhängenden Dreiecken kann man, mittels Aufstellung von Basispunkten auf entsprechenden Stellen, grössere Dreiecke bilden und mit dem auf feste Dreiecke aufgebauten Netz Ausgleichungen ausführen. Dies muss noch im weiteren geprüft werden. Der Einfall REGŐCZIS, aus kleinen Dreiecken grosse zu entwickeln, ist sehr interessant und stellt das Problem der Aufarbeitung der Dreiecke in ein ganz neues Licht.

Ich mache hier auf die Arbeit der Universitätsprofessoren PROPPER und BERCELEV aufmerksam, die die Wirksamkeit dieses Gedankens klar bewiesen haben.

JERZY JASNORZEWSKI, WARSZAWA

L'ambition de tous les géodésiens c'est d'atteindre le plus grand précision des résultats basés sur les mesures fondamentales.

Dans la plupart des cas nous tâchons de trouver une loi des erreurs accidentelles. Cependant une seule loi qui regne dans ce domaine est l'accident et s'il nous semble que nous trouvons une loi nous ne trouvons que les moyens d'éliminer une partie d'erreurs systematiques.

C'est très difficile de trouver ces moyens d'une manière théorique. Les résultats de ces recherches seront toujours approximatifs et les corrections auront le caractére accidentel. Leur grandeur sera limitée par la grandeur des erreurs accidentels des mesures.

Selon mon opinion, pour obtenir le succés dans ces recherches il est absolument nécessaire de développer simultanément les calculs tabellaires des travaux de la géodésie expérimentale.

C'est la géodésie expérimentale qui peut donner la solution des problèmes d'augmenter la haute précision des mesures ; elle peut simplifier les principes des calculs géodésiques et l'appréciation des erreurs moyennes.

DIE ENTWICKLUNG DER POLNISCHEN GEODÄSIE-WISSENSCHAFT IN DEN JAHREN 1945—1956

Prof. MICHAL ODLANICKI, Kraków

Bei der Erörterung der wissenschaftlichen Ergebnisse der polnischen Geodäsie und Kartographie in den Jahren 1945—1956 muss man zunächst die organisatorischen und technischen Bedingungen sowie den Stand der Kader beachten.

Organisationsprobleme

Im Zeitabschnitt 1945—1956 wurden hinsichtlich der Organisation auf dem Gebiet der Wissenschaft und des Hochschulwesens weite Entwicklungsmöglichkeiten geschaffen.

Bereits im Jahre 1945 wurden in Warszawa und Kraków zwei Zentren für höhere Geodäsie-Studien ins Leben gerufen. Nach mehreren Reorganisierungen sind nun in diesen Zentren selbständige Fakultäten tätig. Es sind dies die Geodäsie- und Kartographie-Fakultät des Warschauer Polytechnikums, 2 Lehrstühle mit 16 Lehranstalten umfassend, sowie die Berggeodäsie-Fakultät der Krakauer Berg- und Hütten-Akademie, 4 Geodäsie-Lehrstühle mit 6 Lehranstalten umfassend. Ausserdem wurden 14 Lehrstühle auf verwandten Fakultäten der Polytechnika und landwirtschaftlichen Hochschulen errichtet. Im ganzen sind derzeit im Land 27 Geodäsie-Lehrstühle mit 37 Lehranstalten gegenüber 10 Lehrstühlen in der Vorkriegszeit tätig. Der Personalstand der Lehrstühle beträgt ca. 40 selbständige Hochschullehrer und über 100 wissenschaftliche Hilfskräfte.

Ab 1. September 1954 wurde ein einheitliches fünfjähriges Studienprogramm eingeführt, welches sich auf 6 Spezialstudien verteilt, undzwar: Geodätische Hauptvermessungen, Kartographie, Phototopographie, landwirtschaftliche und Forst-Geodäsie, technisch-industrielle Geodäsie, Markscheidekunde.

Ausser regulären täglichen Studien wurden in Warszawa und Kraków auch höhere Korrespondenz- und externe Studien sowie zeitweise Abendkurse in Lódz und Stalinogród organisiert.

Bereits im Jahre 1945 entsteht beim Zentralamt für Geodäsie und Kartographie das dem Ressort unterstehende Geodätische und Kartographische Institut (bis zum Jahre 1955 unter dem Namen Geodäsie-Institut für wissenschaftliche Forschungen), welches im Rahmen aktueller Probleme wissenschaftliche Forschungen der geodätischen Praxis vornimmt. Ausserdem wurde im Hauptinstitut für Bergwesen eine geodätische Abteilung errichtet. Es werden auch geodätische Arbeiten in anderen ressortierenden Instituten durchgeführt, wie im Forschungsinstitut für das Forstwesen (Anwendung der Photogrammmetrie im Forstwesen), Institut für die Binnenfischerei (Tiefenvermessungen von Seen) u. s. w.

Als Ergebnis der Arbeiten des Ersten Kongresses der Polnischer Wissenschaft entsteht im Jahre 1951 die Polnische Akademie der Wissenschaften (PAN). Am 27. Dezember 1952 wird das Geodäsie-Komitee bei der Abteilung III der Polnischen Akademie für Wissenschaften errichtet. Diese Abteilung umfasst folgende Wissenschaften : Mathematik, Physik, Chemie, Astronomie und die sogenannten Wissenschaften über die Erde, also Geologie, Geophysik, Geodäsie und Geographie.

Aufgabe des Geodäsie-Komitees der PAN ist die Anregung, Planung und Koordinierung der Geodäsie, Forschungen im ganzen Lande sowie die Durchführung eigener Forschungen, die unter den Lehrstühlen vorläufig auf Grund von Aufträgen verteilt werden. Gegenwärtig wird an der Vorbereitung einer Geodätischen Forschungsstelle der Polnischen Akademie der Wissenschaften gearbeitet.

Einen grossen Einfluss auf die Entwicklung der Forschungen übt auch die Organisierung des staatlichen Unternehmens kartographischer Ausgaben aus, das sowohl Karten als auch geodätische Publikationen herausgibt.

Eine rege wissenschaftlich-technische Tätigkeit wird von der gesellschaftlichen Organisation »Wissenschaftlich-Technischer Verein Polnischer Geodäten« geführt, der der Hauptorganisation der Techniker (NOT) angeschlossen ist.

Im Rahmen der Kommission der PAN für Angelegenheiten des Internationalen Geophysikalischen Jahres wurden letztens unter anderen Astronomie-, Geodäsie- und Gravimetrie-Gruppen geschaffen. (Zeitdienst, Längen- und Breiten-Vermessungen, gravimetrische Arbeiten, geodätische Arbeiten während der Forschungsreise auf Spitzbergen.)

Bemerkenswert ist endlich die erhebliche organisatorische Leistung der Wissenschaftlich-Technischen Landeskonferenz der Geodäten, die 1956 vom Wissenschaftlich-Technischen Verein Polnischer Geodäten unter Beteiligung des Geodäsie-Komitees der Polnischen Akademie der Wissenschaften und des Zentralamtes für Geodäsie und Kartographie zwecks Erörterung der Probleme von geodätischen Forschungen im Rahmen des Fünfjahrplanes 1956—1960 organisiert wurde. Diese Konferenz führte zur Übereinstimmung der Anschau-

ungen über die Planung weiterer geodätischer und kartographischer Forschungen, sowie der zur Realisierung dieser Forschungen unentbehrlichen technischen Mittel und Organisationsformen.

Seit dem 1951 abgehaltenen Ersten Kongress der Polnischen Wissenschaft wurde eine Reihe von Organisationsarbeiten bezüglich der Planung der wissenschaftlichen Forschungen durchgeführt. Nach zahlreichen Versuchen, die sich nicht als fehlerlos erwiesen, sind wir nun zur Korrelation der hauptsächlichen Forschungsprobleme, mit welchem die einzelnen Lehrstühle und Institutionen sich befassen sollten, gelangt, wobei den einzelnen wissenschaftlichen Bearbeitern die Freiheit der Initiative gelassen wurde.

Wissenschaftliche Ergebnisse

Die besten Resultate wurden auf dem Gebiet der *Anwendungen von tabellarischen Rechnungen* in der Ausgleichsrechnung und geodätischen Berechnungen erzielt u. zw. dank der schnellen Entwicklung der Krakowian Algebra (Prof. BANACHIEWICZ), Entstehung und Entwicklung der Kern-Algebra (Prof. KOCHMANSKI) sowie der weiteren Ausbreitung der tabellarischen Rechnungen durch Einführung sogenannter Hilfssymbole (Prof. HAUSBRANDT).

Die Einführung und Entwicklung neuer Berechnungsmethoden in der Geodäsie trug wesentlich zur Vereinfachung der Analyse vieler theoretischer Probleme sowie zur Ausführung von Berechnungen bei, die mit früher angewandten gewöhnlichen Methoden schwer zu lösen waren. Es muss unterstrichen werden, dass diese neuen Methoden bereits eine allgemeine Anwendung in unserer geodätischen Praxis sogar bei der älteren Generation der Geodäten, die an die Anwendung der Ausgleichsrechnung in der Gauss-Technik gewohnt waren, gefunden haben. Die Verbreitung neuer Methoden war möglich dank ihrer vorteiligen Eigenschaften wie : Schnelligkeit, Abkürzung der Aufschreibungen, Kontrolle, Übersichtlichkeit, einheitliche Form, Bündigkeit und Verringerung der Denkanstrengung im Vergleich zu den älteren Methoden.

Es wurden die grundliegenden Arbeiten der Schöpfer neuer Methoden sowie eine Reihe von Arbeiten hinsichtlich der Anwendungen dieser Methoden publiziert. Eine ausführliche Erklärung dieser neuen Methoden gibt die Arbeit des Trägers des Staatlichen Wissenschaftspreises vom Jahre 1955, Prof. HAUSBRANDT unter dem Titel : »Die geodätischen Rechnungen« (Warszawa 1953). Im Druck befindet sich die Monographie Prof. BANACHIEWICZ' über die Krakowian-Rechnung.

In der *höheren Geodäsie* entwickelten sich die theoretischen Arbeiten hinsichtlich der Probleme der Referenzfläche. Es wurden Versuche theoretischer Bearbeitungen des Problemes der Geoid-Bestimmung unternommen. Prof. BANACHIEWICZ entwickelte seine neue Konzeption der Bestimmung der

Erdgestalt auf Grund von Beobachtungen der Sterneverdeckungen durch den Mond, die bereits in den letzten Jahren in wissenschaftlichen Forschungen schwedischer, finnischer und amerikanischer Expeditionen angewendet wurde. Diese Methode erschliesst neue Möglichkeiten bezüglich Ausbreitung der geodätischen Forschungen im Vergleich mit der bis jetzt angewandten klassischen Triangulation.

In den letzten Jahren erschienen die ersten in polnischer Sprache verfassten Lehrbücher der höheren und dynamischen Geodäsie.

Auf dem Gebiet *der Kartographie* wurden grundsätzliche theoretische Arbeiten wie auch solche von wesentlicher praktischer Bedeutung bezüglich Abbildung sowie Karten-Bearbeitung und Reproduktion veröffentlicht. Die Aktion der Herausgabe von Karten von kleinem Massstab wurde entwickelt, wenn auch in einem den Bedarf noch nicht deckenden Grade. Unter den letzten Ausgaben bilden die bereits publizierten drei ersten Hefte des Atlasses Polens (allgemeine und physiographische Karten) eine wichtige Gruppe.

In der *grundlegenden Geodäsie* wurde eine neue Konzeption der sogenannten grundlegenden Triangulation, die von den alten klassischen Lösungen abweicht, bearbeitet und in der Praxis verwertet. Das ganze Land wurde mit einem einheitlichen Guss bestehend aus dem Haupt-, Füll- und Verdichtungsnetz bedeckt. Das Hauptnetz mit Dreieckseiten von ca 25 km wurde mit höchster Genauigkeit den modernen wissenschaftlichen Grundsätzen gemäss unter Ausnützung geodätischer, astronomischer und gravimetrischer Vermessungen bestimmt. Dieses Hauptnetz hat die Eigenschaften eines modernen Netzes und kann zu Geoid-Forschungen ausgenützt werden. Das Füllnetz (Oberflächennetz) mit 7 bis 9 km langen Seiten deckt die Fläche des Landes in einem Guss. Demnach ist das ein kleines Dreiecknetz, jedoch mit einer Genauigkeit die an die Genauigkeit des Hauptnetzes grenzt. Die praktischen Ergebnisse und wissenschaftlichen Untersuchungen bestätigen die Richtigkeit dieser neuen Konzeption, in welcher auf den Bau eines Staatsnetzes etappenweise, mit sukzessiver Bestimmung einzelner Netzreihen mit klassischen Mitteln verzichtet wurde. Es hat sich gezeigt, dass aus kleinen Dreiecken bestehende Netze genauer sind als diejenigen, die mit Hilfe von grossen Dreiecken angelegt werden. Das Verdichtungsnetz erhält man auf Grund von Einschnitten aus den Punkten des Füllnetzes. Das Verdichtungsnetz umfasst Punkte von je 3 bis 4 km und gibt eine definitive Triangulationsverdichtung des Landes.

Es wurden im Bereich der Triangulation von bemessenen Seiten (Trilateration) theoretische Arbeiten betreffend Netzausgleichung sowie Interferenzanwendung zur Längenbemessung ausgeführt.

Ebenso wurden beim entstehenden Nivellierungsnetz hoher Präzision Untersuchungen mit einem Mittelfehler von maximal 0,6 mm pro km angestellt, deren Ergebnisse in der Praxis verwertet wurden.

In *der geodätischen Astronomie* wurden neue Methoden der Azimutbestimmung sowie der geographischen Koordinaten bearbeitet. Besonders interessant ist die Methode, welche auf parallaktischer Winkelmessung des Polarsternes mit Hilfe eines zweiten Hilfssternes beruht.

Im Bereiche der *Gravimetrie und des Erdmagnetismus* wurde zum ersten Male in Polen eine gravimetrische Karte sowie eine Isogonenkarte aufgenommen.

In der *allgemeinen Geodäsie* wurde eine Reihe von Ergebnissen von praktischer Bedeutung in der Erörterung der Probleme hinsichtlich eingehender Triangulation, präziser Polygonierung und neuzeitlicher Entfernungsmessung gewonnen.

Dagegen mussten in den Lehranstalten die Forschungen auf dem Gebiete der *Photogrammetrie* und insbesonders der Phototopographie mangels moderner Instrumente in gewissen Grenzen gehalten werden. Nichtsdestoweniger wurden eine Reihe theoretischer Arbeiten sowie Konstruktionsversuche von Instrumenten durchgeführt.

In der *wirtschaftlichen Geodäsie* entwickelten sich in der ersten Etappe nach der Befreiung des Landes die wissenschaftlichen und technischen Arbeiten bezüglich der Vermessungen für Aufbauzwecke und Behebung der Kriegsschäden, der landwirtschaftlichen Geodäsie und der Bergvermessungen (neue Methoden und Instrumentenprojekte). Weiterhin wurden in Zusammenhang mit den Studien Forschungen der Methoden von technisch-industriellen Messungen sowie Projektierung, und Realisierung der Investierungen des Sechsjahrplanes unternommen. Besondere Kapitel bilden die wissenschaftlichen und praktischen Errungenschaften auf dem Gebiete der Messungen der Bewegungen und Deformationen von Boden und Bauten unter dem Einfluss des Bergbaus, industrieller Objekte und von Staudämmen.

Ein originelles Ergebnis zeitigen die neuen Methoden der genauen Inventarisationsmessungen zwecks Untersuchung architektonischer Denkmäler (im Drucke befindet sich eine Arbeit über Vermessungsergebnisse eines Denkmals des Barockbaues). Bei der Anlage von Produktivgenossenschaften wurden neue Methoden von Vermessungs- und Regulierungsarbeiten geschaffen.

Schliesslich wurden die ersten Forschungsversuche *der polnischen Geodäsie- und Kartographiegeschichte* unternommen. Unter anderen wurde bearbeitet und in Druck gegeben das ausgezeichnete Handbuch von GRZEBSKI: »Die Geometrie, eine Vermessungslehre«, das ein wertvolles Dokument vom Jahre 1566 ist. Es ist das erste in polnischer Sprache herausgegebene technische Buch.

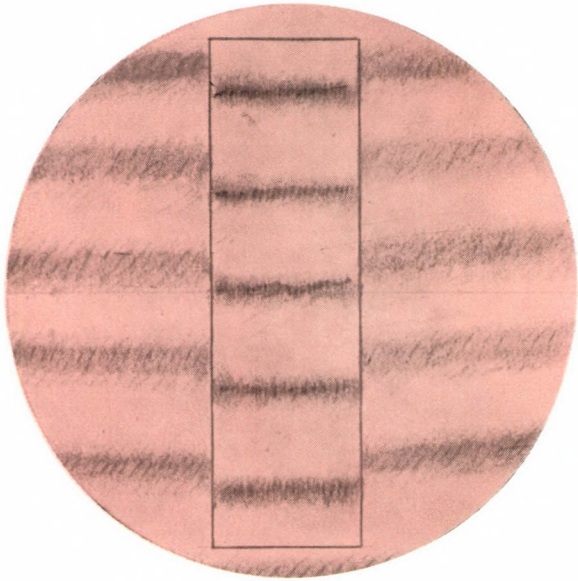
Auf allen Gebieten der Geodäsie stieg die Zahl der wissenschaftlichen Publikationen gewaltig an. In den Jahren 1945—1956 wurden ca. 250 Positionen von Buchausgaben gedruckt, gegenüber den ca. 120 Positionen, die in dem 20jährigen Vorkriegszeitabschnitt herausgegeben wurden. Ausserdem erschei-

nen: eine wissenschaftliche Vierteljahrsschrift des Geodäsie-Komitees der PAN unter dem Titel: »Geodäsie und Kartographie«, zwei unregelmässig erscheinende wissenschaftliche Geodäsieschriften des Warschauer Polytechnikums und der Berg- und Hüttenakademie in Kraków sowie eine wissenschaftlich-technische Monatsschrift des Geodätenvereines unter dem Titel: »Die geodätische Revue«.

An Geodäten wurden für ihre Verdienste vier wissenschaftliche, vom Staat fundierte Preise, sowie ein Preis im Bereiche des technischen Fortschrittes verliehen.

In unseren weiteren Plänen wissenschaftlicher Arbeiten beabsichtigen wir die besondere Aufmerksamkeit auf experimentelle Forschungen in der Geodäsie und Kartographie unter Ausnützung der neuesten Errungenschaften der Experimentalphysik zu lenken.

$\lambda_r = 0{,}65\ \mu$



$\lambda_i = 0{,}45\ \mu$

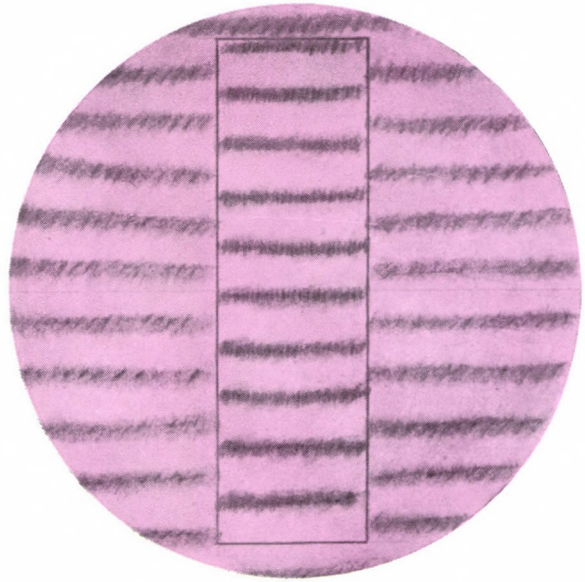
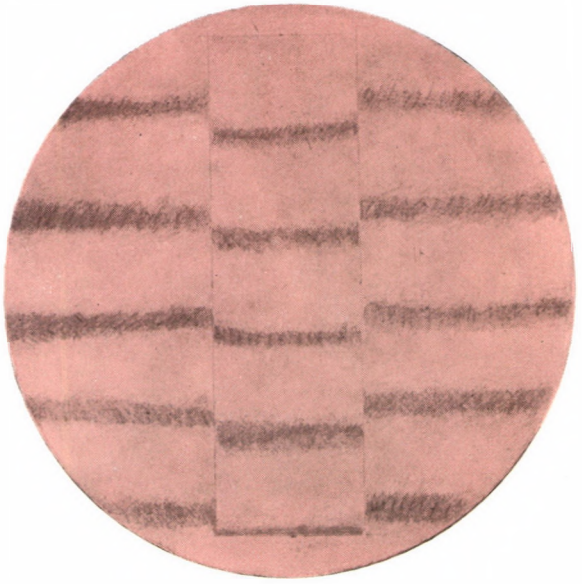


Fig. 2

$\lambda_r = 0{,}65\ \mu$



$\lambda_i = 0{,}45\ \mu$

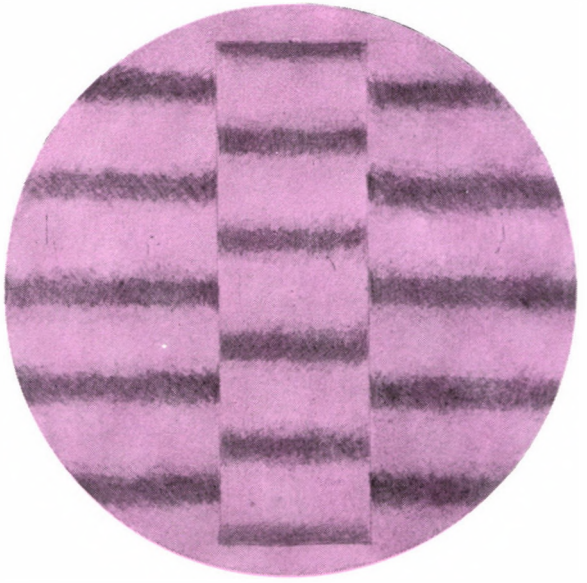


Fig. 3

DISKUSSION

Prof. A. TÁRCZY-HORNOCH, SOPRON

Ich glaube, dass es allen Zuhörern ausserordentlich interessant war, die beiden Vorträge von Herrn Prof. BÖHM und von Prof. ODLANICKI zu hören und aus den Vorträgen zu erfahren, welche Fortschritte auf den betreffenden Gebieten in den beiden befreundeten Staaten zu verzeichnen sind.

Nun war es besonders interessant festzustellen, dass voneinander unabhängig in Ungarn und in Polen eine und dieselbe Methode der Netzentwicklung und Verdichtung entwickelt wurde.

Polen hat ebensoviel ebenes Land, als Ungarn, damit kann diese auffallende Parallelität des Triangulationsverfahrens erklärt werden.

Um auf den Vortrag ODLANICKIS zurückzukommen, sind die Forschungsergebnisse in Polen und in der Tschechoslowakei uns nicht unbekannt und ich glaube, dass der Gedankenaustausch zur weiteren Entwicklung unserer Wissenschaft beitragen wird.

L'APPLICATION D'UNE PRISME SEMI-ARGENTÉE DANS LE DISPOSITIF DE MICHELSON

J. JASNORZEWSKI, WARSZAWA

La géodésie contemporaine se sert de plus en plus souvent des méthodes optiques de mésurer. Parmi ces méthodes l'interférence des ondes electromagnétiques et l'interférence de la lumière jouent un rôle important.

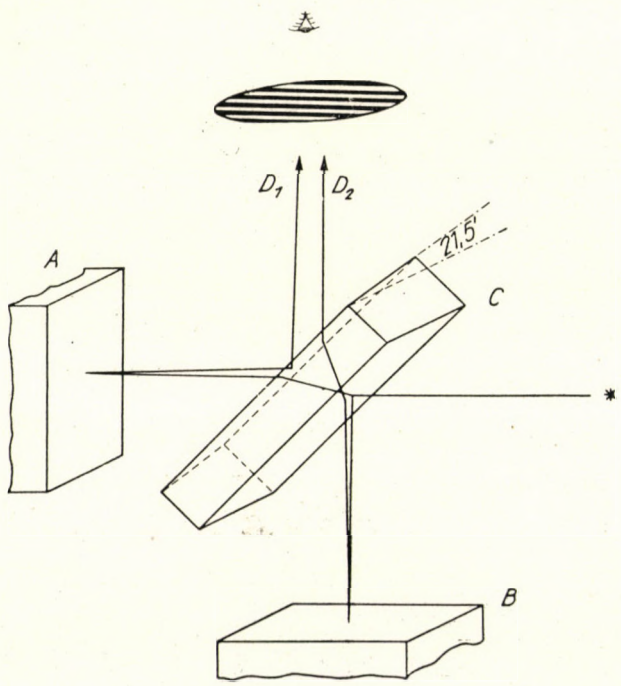


Fig. 1

C'est pourquoi je viens d'annoncer un communiqué tout petit mais peut-être interessant.

En utilisant les ondes lumineuses dans les mesures interférencielles nous nous servons des franges d'interférence des différentes lumières descendant de la lumière rouge jusque à l'indigo. Si nous ne changeons pas les angles parmi les plans de référence A et B (fig. 1) dans le dispositif optique de MICHELSON, la largeur des franges diminue de plus en plus (fig. 2).

Pour éviter ce phénomène j'ai substitué la lame semi-argentée plan-parallèle par une lame prismatique C (fig. 1) d'un angle de 21,5′.

L'angle entre les rayons D_1 et D_2 (fig. 1) varie grâce aux divers indices de refraction de la lame pour les couleurs differentes.

La largeur des franges est constante (fig. 3) étant égale environs 6,3 mm pour des lumières des toutes couleurs si les indices de refraction du verre utilisé pour la lame semi-argentée sont de $n_r = 1{,}51475$ pour la lumière rouge et $n_i = 1{,}52672$ pour la lumière indigo.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПУНКТОВ (МЕТОД ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАСЕЧЕК)

Проф. др. техн. наук А. И. ДУРНЕВ
гость техн. высш. школы Дрезден

Для современной геодезии является актуальной задача: изыскание и разработка быстрых, оперативных методов создания геодезических сетей. В настоящее время очень часто требуется быстро, оперативно выполнять геодезические работы, причем с достаточно высокой точностью, при государственных съемках, при изысканиях и строительстве инженерных сооружений, в городском строительстве и др. Особенно актуально развитие методов, обеспечивающих сгущение геодезических сетей между пунктами государственной триангуляции, с достаточно высокой точностью, порядка 1 : 15 000—1 : 25 000, т. е. соответствующей точности современной полигонометрии I—II класса. Конечно, можно и должно предложить и разрабатывать различные методы решения указанной задачи. Многообещающим является метод световой локации, который в настоящее время стремительно разрабатывается в разных странах. Как известно, успех здесь есть и как всякое новое прогрессивное в науке, этот метод в ближайшем будущем проложит себе дорогу в производство для широкого применения как в государственных сетях, так и в сетях сгущения и специальных сетях. Но нельзя забывать изыскивать и другие реальные возможности в данный момент. Одной из таких возможностей является разработанный мною в СССР метод создания геодезических сетей с помощью вспомогательных пунктов, названный «методом геодезических засечек». Сущность этого метода, его теоретические и практические обоснования, проверенные на опыте широкого применения в геодезическом производстве в СССР, детально изложены в моей опубликованной монографии: «Новые системы построения геодезических сетей» (Геодезиздат, 1952 г.) В данной статье кратко изложим сущность этого метода и рекомендации по его применению в различных случаях практики.

Но сначала кратко укажем на особенности и недостатки широко известных методов создания геодезических сетей.

1. *Особенности и недостатки известных методов*

Метод полигонометрии (рис. 1-а) имеет то достоинство, что при его применении хода прокладываются по удобно выбранному маршруту. В то же время громоздкие, дорогостоящие линейные измерения в полигонометрии сильно снижают достоинство этого метода, делают его неоперативным и трудно применимым в сложных условиях местности. Известно, что переход к дальномерной полигонометрии (оптические дальномеры) хотя и более

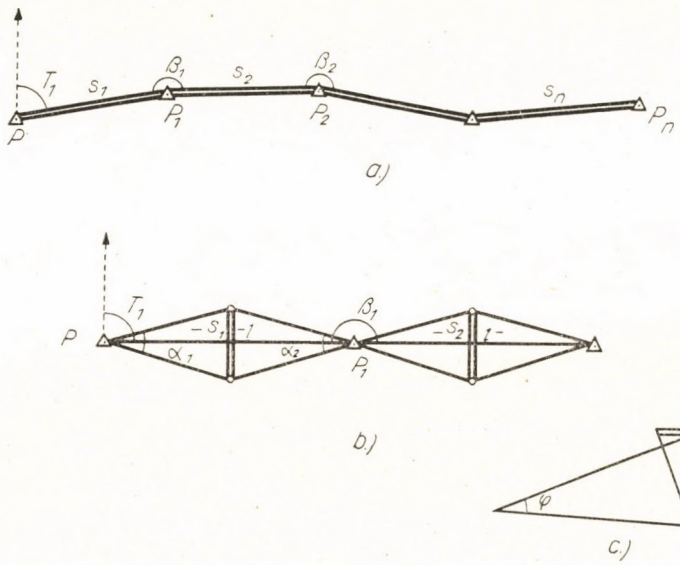


Рис. 1

оперативен, но он не достиг пока необходимых показателей точности (точность обеспечивается только в пределах 1 : 1000—1 : 5000 вместо необходимой для указанных сетей 1 : 15 000—1 : 25 000). В параллактической полигонометрии (по методу проф. Данилова — рис. 1-б, или в коротко-базисной полигонометрии) хотя и достигается необходимая точность, но организация работ также сложна.

Метод триангуляции (рис. 2) имеет то достоинство, что он освобождает нас от громоздких линейных измерений, но в то-же время он имеет существенный недостаток — громоздкие, дорогостоящие постройки сигналов, что снижает ценность метода для оперативных сетей.

Метод засечек с твердых пунктов (рис. 3) оперативен, но и здесь имеется существенный недостаток : очень часто не имеются в наличии удобно расположенные *твердые пункты* сети более высших классов в достаточном коли-

честве, да еще с сохранившимися на них наружными знаками-сигналами (они все-же быстро утрачиваются на местности со временем).

Поставим так вопрос : нельзя ли использовать наиболее выгодные особенности всех трех рассмотренных методов в каком-либо новом четвертом

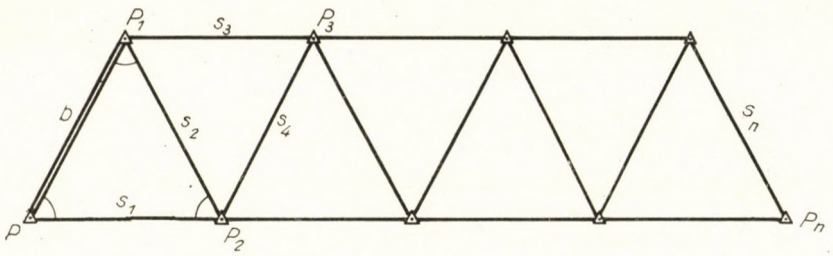


Рис. 2

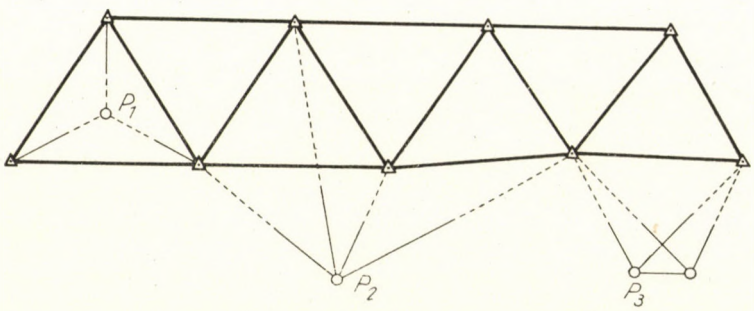


Рис. 3

методе создания геодезических сетей? Ответ на этот вопрос приводит нас к новому методу — к построению сетей с помощью вспомогательных пунктов — методу геодезических засечек.

2. *Сущность метода геодезических засечек*

Пусть требуется определить координаты пунктов P_1, $P_2 \ldots P_n$ (рис. 4) по маршруту (как и в полигонометрии). Измерим на пунктах маршрута $P_1, P_2 \ldots P_n$ только углы α_1, β_1, α'_1, $\beta'_1 \ldots$ (как в триангуляции), образованные пунктами направлений с пунктов маршрута на какие-либо предметы местности — ориентиры M_1, N_1, M_2, $N_2 \ldots\ldots$ (шпили зданий и церквей и др., или переносные пирамиды, или штативы, или даже вехи), расположенные сбоку по обе стороны маршрута, или по одну сторону от него, в случае препятствий (например, точки M_n, N_n). На боковых засекаемых точках M_1, $N_1 \ldots$

угловых измерений, понятно, не ведется (как и в методе обычных прямых многократных засечек), причем эти боковые точки не имеют координат, они не являются твердыми пунктами; это только *вспомогательные точки* — видимые с пунктов маршрута боковые предметы местности — ориентиры.

Будем называть: пункты маршрута P_1, $P_2 \ldots P_n$ — *пунктами хода*, боковые точки M_1, N_1 ..... — *вспомогательными пунктами*, серии направлений на вспомогательные пункты с пунктов хода — *пучками засечек*. Если будут известны: исходная сторона P_1, $P_2 = s_1$ и ее азимут T_1 (из специаль-

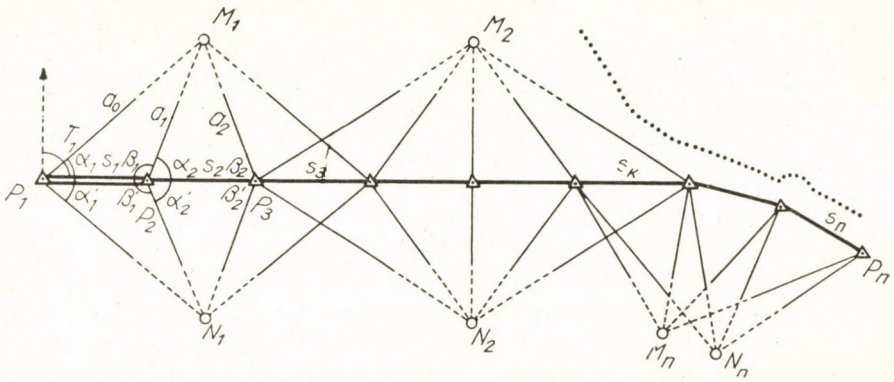


Рис. 4

ных измерений, или из геодезической сети более высшего класса), то, используя два угла в каждом треугольнике, образованном пучками направлений, можно последовательно решить треугольники по обычным правилам и формулам, вычислить стороны хода s_2, $s_3 \ldots$ s_n расстояния до боковых вспомогательных пунктов a_1, $a_2 \ldots$ a_n и дирекционные углы всех направлений, в том числе и дирекционные углы сторон хода T_2, $T_3 \ldots T_n$. Этих данных вполне достаточно, чтобы вычислить координаты пунктов хода, а также одновременно и координаты вспомогательных пунктов. Из чертежа (рис. 4) ясно видно, что каждая сторона хода s_2, s_3 .... определяется *дважды* и *независимо*: первый раз — из решения системы треугольников, образованных пунктами хода P_1, $P_2 \ldots\ldots$ P_n и *первыми вспомогательными* пунктами M_1, $M_2 \ldots$ M_n, а второй раз — теми-же пунктами хода и *вторыми* вспомогательными пунктами (дублерами) N_1, $N_2 \ldots$ N_n.

Таким образом достигается вполне независимый контроль определения длин сторон по ходу, что аналогично контролю измерения длин сторон в полигонометрии в прямом и обратном ходе. При независимом измерении углов α_1, β_1, α'_1, β'_1, α_2, β_2, α'_2, β'_2, понятно, обеспечивается независимая двойная передача азимутов дирекционных углов сторон по ходу. Таким образом достигается независимый контроль определения координат пунктов хода.

3. *Формулы для вычислений*

Полагаем, что вычисления сети ведутся на плоскости в системе координат Гаусса—Крюгера. Из чертежа (рис. 4) ясно видно, что для вычисления длины сторон s_2 хода будем иметь формулы:

Первое определение (через вспомогательный пункт M_1):

$$s_2' = s_1 \frac{\sin \alpha_1 \sin (\alpha_2 + \beta_2)}{\sin (\alpha_1 + \beta_1) \sin \beta_2} \tag{1}$$

Второе независимое определение (через вспомогательный пункт N_1)

$$s_2'' = s_1 \frac{\sin \alpha_1' \sin (\alpha_2' + \beta_2')}{\sin (\alpha_1' + \beta_1') \sin \beta_2'} \tag{2}$$

Окончательное значение s_2 берется или как среднее из 2-х результатов, или как средне-весовое.

Для дирекционного угла T_2 этой же стороны будем иметь формулы (полагая T_1 — дирекционный угол стороны P_1, P_2):

Первое определение (через п. M_1):

$$T_2' = T_1 + (\alpha_2 + \beta_1) \pm 180^\circ \tag{3}$$

Второе определение (через п. N_1):

$$T_2'' = T_1 - (\alpha_2' + \beta_1') \pm 180^\circ \tag{4}$$

Окончательное значение T_2 берется как среднее из 2-х передач. Для вычисления s_3, s_4 ... и T_3, T_4... формулы аналогичные. Зная длины сторон и дирекционные углы, легко вычислить приращения координат пунктов хода по формулам:

$$\Delta x_K = s_K \cdot \cos T_K \tag{5}$$

$$\Delta y_K = s_K \cdot \sin T_K \tag{6}$$

Координаты вспомогательных пунктов M_1, N_1 вычисляются после определения координат пунктов хода, или по формулам прямой многократной засечки, или же по формулам (5) и (6), зная длины сторон a_0, a_1, a_2 ... (из решения треугольников) и дирекционные углы этих сторон; из всех значений координат каждого вспомогательного пункта окончательно берется среднее значение.

4. *Особенности метода*

Переход от одного пучка засечек к другому пучку совершается через *связующие* стороны s_3, s_{n-1} ..... и их дирекционные углы T_3, T_{n-1} (см. рис. 4). Ход в своем конце может опираться на известные (или измеренные) сторону s_n и ее дирекционный угол T_n (для контроля). Но ход также может прокладываться *между двумя твердыми пунктами* P_1 и P_n, координаты которых известны из государственной триангуляции. В этом случае ход сначала вычисляется с *условной* длиной стороны s_1' и условным дирекционным углом ее T_1', а затем, зная вычисленные условные координаты пункта P_n (путем передачи по ходу от пункта P_1), вводится поправка в масштаб сети и в ее ориентировку (по известным правилам). Тогда совсем отпадают линейные измерения в ходах по методу геодезических засечек.

Этот случай также находит широкое применение на практике, т. к. обременять полевую партию приборами для линейных измерений исходных сторон в оперативных сетях также нецелесообразно.

Длины сторон ходовых линий s_1, s_2 .... и расстояния до вспомогательных пунктов a_0, a_1, a_2..... могут колебаться от 0,5 км до 10 км и более, в зависимости от условий местности и задания.

Пучки засечек могут образовывать с каждым вспомогательным пунктом *две фигуры* (два треугольника), как, например, с вспомогательными пунктами M_n и N_n (это будут двухфигурные засечки), или *три фигуры* (с вспомогательными пунктами M_1, N_1 — рис. 4), *четыре фигуры* (с вспомогательными пунктами M_2, N_2), *пять фигур* и более, — в зависимости от условий местности и расположения удобных для наблюдений вспомогательных пунктов, размещаемых как по обе стороны хода (п. M_1, N_2), так и по одну сторону хода (п. M_n, N_n).

Вариации в длинах сторон, количестве фигур в пучках засечек, расположение вспомогательных боковых пунктов то по одну, то по обе стороны хода направлены к тому, чтобы обеспечивалась с пунктов хода P_1, P_2.... P_n *видимость с земли* по всем направлениям, *не прибегая к постройке знаков*, ведя наблюдения *со штатива теодолита* (по известной в полигонометрии трехштативной системе, или даже с четырьмя штативами, для ускорения работ).

Для метода геодезических засечек из измерительных инструментов требуется только теодолит. Лучше всего применять *оптические теодолиты*, обеспечивающие быстрое исполнение наблюдений и высокую их точность при малом числе приемов, что выгодно для оперативных сетей. Следовательно, для метода геодезических засечек взяты наиболее выгодные особенности от 3-х известных методов :

от полигонометрии — принцип хода по маршруту, прокладываемому выгодно в физико-географическом и транспортном отношении ;

от триангуляции — принцип тригонометрической передачи длин сторон по ходу ;

от обычного способа засечек — пучки направлений с каждого пункта хода и оперативность исполнения работ.

Отвергнуты в методе геодезических засечек :

громоздкие линейные измерения полигонометрии,

громоздкие постройки сигналов триангуляции

и необходимость иметь заранее сеть твердых пунктов для обычного способа засечек.

Метод геодезических засечек является как бы *полигонометрией без линейных измерений* и, в равной мере, *триангуляцией с угловыми наблюдениями только на пунктах маршрута.* Отметим еще одно достоинство нового метода : вдоль маршрута получается *широкая полоса определяемых пунктов* (вместе с вспомогательными пунктами), даже в 2 раза более широкая, чем в триангуляции (при двухстороннем размещении вспомогательных пунктов).

Точность ходов по методу геодезических засечек, как будет показано далее, получается весьма высокая, что подтвердилось большим опытом работ в СССР. Метод геодезических засечек отличается исключительной гибкостью, позволяющей преодолевать препятствия в открытой, полуоткрытой (залесенной до 50%) и в горной местности. Этот метод теперь освещается в новых учебниках и рекомендуется в технических инструкциях СССР. Геодезисты разных стран в своих работах ранее близко подходили к идее метода геодезических засечек : в Англии при прокладке «быстрых триангуляций», в США — при контроле линейных и угловых измерений в полигонометрии (траверсах), в России в XIX столетии — при прокладке топографами мензуальных ходов графическими засечками. Однако, в этих прежних работах, засечки делались только с твердых пунктов (прямые засечки), или на твердые пункты (обратные засечки), определенные из триангуляции полигонометрии ; засечки только сопутствовали триангуляции или полигонометрии — и совсем не возникал тогда вопрос о применении геодезических засечек в качестве самостоятельного метода создания геодезических сетей.

В предложенном виде, в качестве самостоятельного метода создания геодезических сетей, насколько нам известно из опубликованной геодезической литературы, этот метод геодезических засечек нигде не предлагался.

5. *Оценка точности сетей, построенных по методу геодезических засечек*

Приведем готовые формулы, выведенные в моей книге, упомянутой выше :

1. *Точность передачи длин сторон*

Формула для средней квадратической ошибки стороны имеет вид:

$$m^2_{\lg s_n} = m^2_{\lg s_1} + m^2 \sum_1^r \left(Q + \frac{k-2}{2} R\right)^* \tag{7}$$

Формула для обратного веса стороны имеет вид:

$$\frac{1}{P} m_{\lg s} = \sum_1^r \left(Q + \frac{k-2}{2} R\right)^* \tag{7а}$$

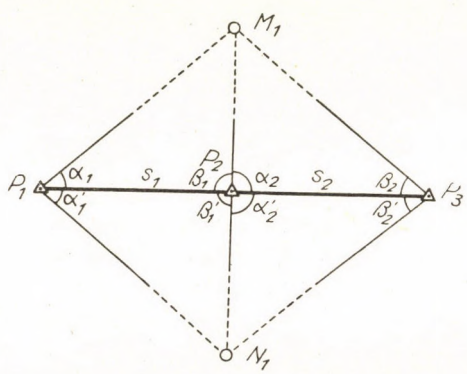


Рис. 5

где $m_{\lg s}$ — ср. кв. ошибка логарифма исходной стороны s_1;
m — ср. кв. ошибка измерения углов α, β, α'_1, β'_1.....
r — число пучков засечек в ходе
k — число фигур (треугольников) в пучках засечек в одной передаче (через один вспомогательный пункт);

причем

$$Q = \delta^2_\alpha + 2\,\delta^2_{(\alpha+\beta)} - 2\,\delta_\alpha\,\delta_{(\alpha+\beta)} \tag{8}$$

$$R = \delta^2_\alpha + \delta^2_\beta \tag{9}$$

где δ_α, δ_β, $\delta_{(\alpha+\beta)}$ — перемены логарифмов синусов углов при изменении углов на 1″. Для величин Q и R составлены мною специальные таблицы и опубликованы в упомянутой книге.

Для двухфигурных засечек, где $k = 2$ (черт. 6), формула (7-а) принимает вид для фигур правильной симметричной формы

$$\frac{1}{P_{\lg s_n}} = r\,Q \tag{10}$$

* Эти формулы действительны для передачи через 2 вспомогательных пункта

Для трехфигурных засечек, где $k = 3$ (черт. 7), формула (7-а) принимает вид, тоже для фигур правильной симметричной формы

$$\frac{1}{P_{\lg s_n}} = r\left(Q + \frac{R}{2}\right) \tag{11}$$

и т. д. Очевидно, для сети с комбинированными пучками засечек необходимо подсчитывать «обратный вес» по формуле (7-а). Для пучков засечек с фигу-

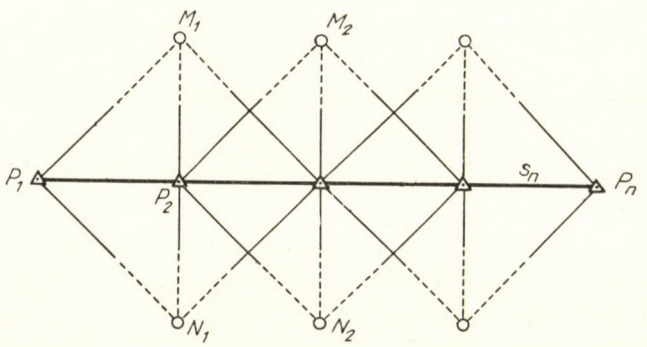


Рис. 6

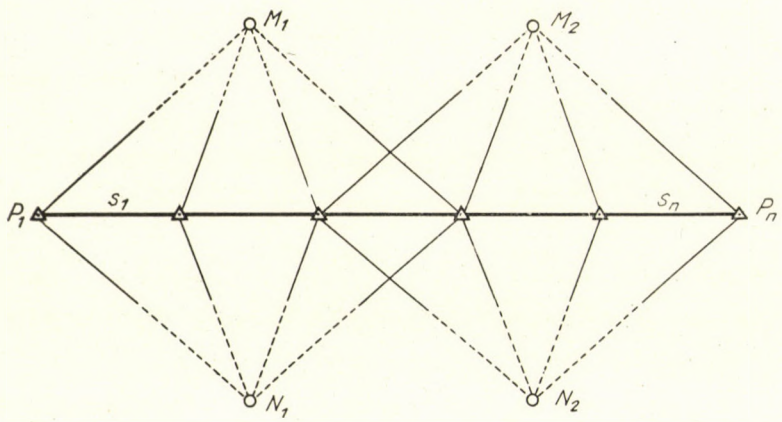


Рис. 7

рами произвольной формы лучше всего величины Q и R брать по таблицам и вычислять обратный вес $\frac{1}{P_{\lg s}}$ для каждого пучка засечек, а затем уже находить «обратный вес» $\frac{1}{P_{\lg s}}$ для всего хода по формуле

$$\frac{1}{P_{\lg s}} = \sum_{1}^{r} \frac{1}{P_{\lg s}} \tag{12}$$

Подсчеты показывают, что точность передачи длин сторон сохраняется в ходах по методу засечек почти одинаковой, независимо от количества фигур в пучках засечек. Отметим при этом, что чем бóльший излом имеет ход, тем большую он имеет точность, т. е. противоположно, чем в ходах полигонометрии. Имеем:

А) *для прямолинейных ходов* (типа черт. 6 и 7), принимая $s = 5$ км, длину хода $a = 35$ км, $k = 2$

$$\frac{m_{s_1}}{s_1} = \frac{1}{70\,000}$$

где m_{T_1} — ср. кв. ож. исходного азимута;
m — ср. кв. ож. измерения угла;
r — число пучков засечек в ходе;
k — число фигур в пучках засечек в одной передаче.

Для комбинированных пучков засечек надо подсчитывать «обратные веса» для каждого пучка по формуле:

$$\frac{1}{p_a} = (k - 1) \qquad (14)$$

Ср. кв. ошибка угла m	Ср. относ. ошибка слаб. стор.
2″	1 : 30 000 — 1 : 36 000
5″	1 : 12 000 — 1 : 15 000

Б) для ломаных ходов (при одностороннем размещении вспомогательных пунктов $k = 2$), при тех же данных (черт. 7) при продвиге с каждым новым пунктом на 85%, излом хода 15% (рис. 8) будем иметь:

Ср. кв. ошибка угла m	Ср. относ. ошибка слаб. стороны
2″	1 : 60 200 — 1 : 67 500
5″	1 : 24 100 — 1 : 27 000

При измерении углов с точностью $m = \pm 20''$, т. е. взамен обычных теодолитных ходов, которые имеют точность 1 : 1500 — 1 : 2000, точность ходов по методу засечек обеспечивается от 1 : 3000 — 1 : 3770 (прямолинейные хода) и до 1 : 6000 — 1 : 6750 ломаные хода на 15%, что подтверждено на практике во многих работах.

Из этих расчетов ясно, что хода по методу засечек точнее, чем хода полигонометрии в 1 1/2—2 раза, при одинаковой точности угловых измерений в том и другом случае.

2. *Точность передачи азимутов*

Формула ошибка азимута T_n имеет вид :

$$m^2_{T_n} = m^2_{T_1} + m^2 r (k - 1) \qquad (13)$$

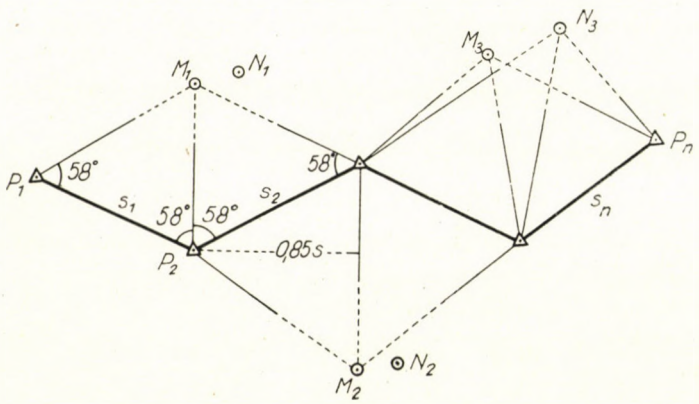


Рис. 8

и затем брать суммарный «обратный вес» по формуле

$$\frac{1}{P_a} = \sum_1^r \frac{1}{p_a}$$

от изломанности ходов точность передачи азимута не зависит (как и следовало ожидать).

Ошибки в азимутах T_n в ходах при тех же данных ($s = 5$ км, $L = 35$ км и $m_{T1} = \pm 1''$) будут :

Ср. ош. изм. угла «m»	Ср. ош. опред. азим. слаб. ст.
2″	± 4″,9
5″	± 12″,2

Продольные и поперечные сдвиги в ходах подробно рассмотрены в упомянутой моей книге и формулы здесь не будут приводиться.

Одно ясно, что высокая точность передачи длин сторон и азимутов в ходах определяет высокую точность и передачи координат пунктов в них. Все эти расчеты многократно проверены и подтверждены практикой работ в СССР.

6. *Системы построения ходов по методу геодезических засечек в различных случаях*

1. *В государственных съемках*

Строятся хода по методу засечек прямолинейные и ломанные, как при одностороннем так и двухстороннем расположении вспомогательных пунктов. При государственных съемках следует по возможности пункты располагать вблизи рамок трапеций, как показано на рис. 9.

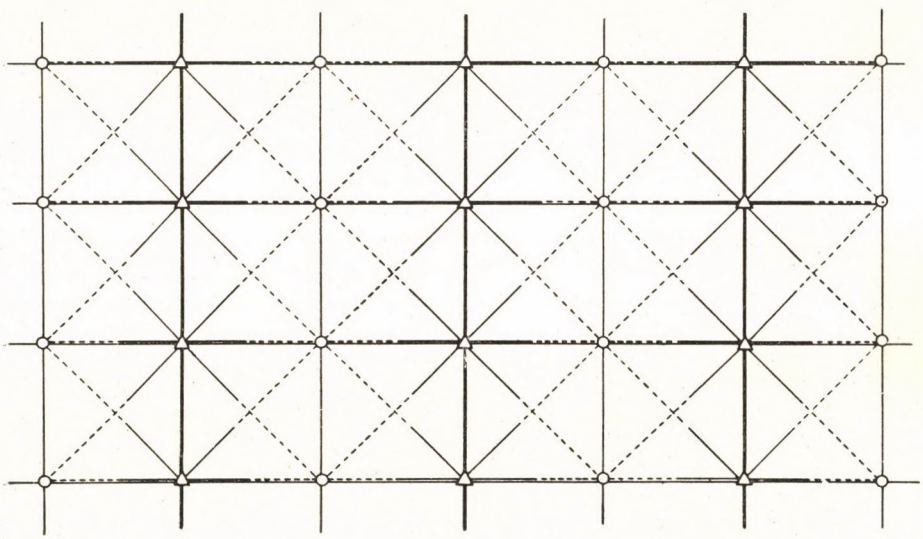


Рис. 9

2. *На гидротехнических сооружениях*
   а) На каналах (рис. 10).
   б) В пойме рек (рис. 11).
3. *В горно-маркшейдерских работах* (рис. 12)
4. *В геолого-географических экспедициях* (маршрутные съемки) (рис. 13)
5. *В городских съемках*
   а) Хода первого разряда (рис. 14).

По опыту работ в СССР хода I разряда в городах, прокладываемые по методу засечек, при $s = 0{,}5 - 1{,}5$ км, $m = \pm 2''$ (4 приема измерения углов средним теодолитом, оптическим) имеют ср. относительную ошибку в определении длин сторон (наиболее слабых в ходе):

$$\frac{m_s}{s} = \frac{1}{70\,000} - \frac{1}{80\,000}$$

(вместо 1/50 000 в высокоточной полигонометрии и 1/30 000 в полигонометрии I разряда в городах — по инструкции).

б) Хода II разряда (по улицам города); (рис. 15)

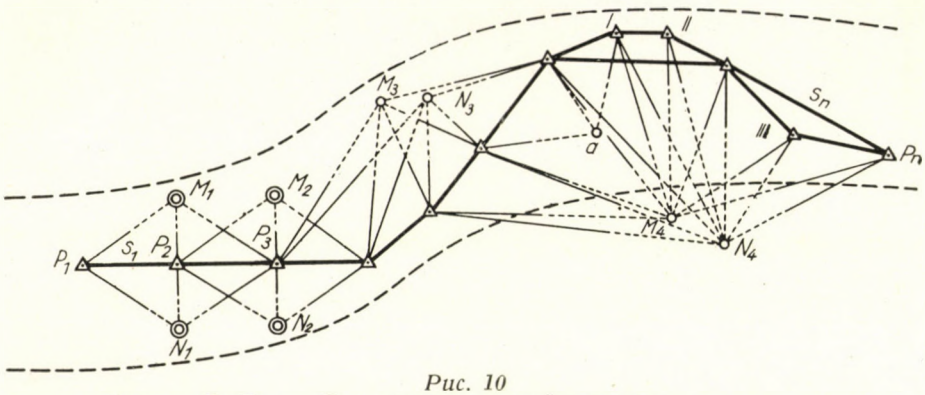


Рис. 10

△ ... $P_1, P_2 \ldots P_n$ — пункты хода I порядка
△ ... I, II, III — пункты хода II порядка
◎ ... M_1, N_1, M_2, N_2 — вспомогательные пункты — упрощенные пирамиды, вехи
○ ... M_3, N_3, M_4, N_4 — вспомогательные пункты — местные предметы (шпили высоких зданий)
— a — дополнительн. пункт, определяемый прямой засечкой с пунктов хода

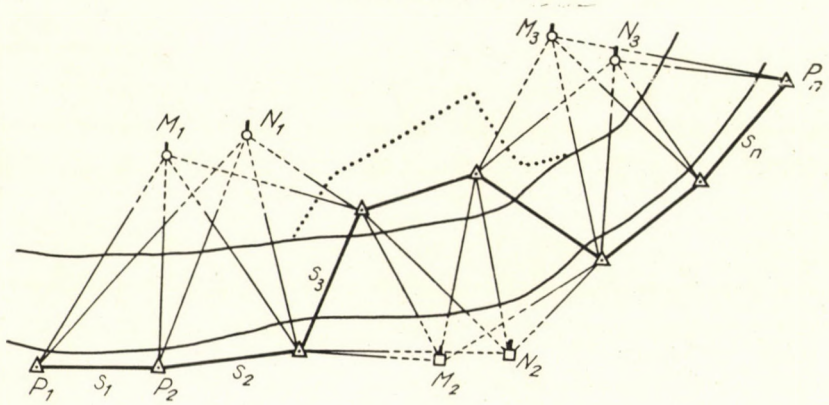


Рис. 11

△ ... $P_1, P_2, \ldots P_n$ — пункты хода набл. со штативов
... M_1, N_1, M_3, N_3 — вспомогательн. пункты — вехи на деревьях
□ .... M_2, N_2 — вспомогательн. пункты — шпили зданий
$S = 1$ — 5 км

При $m = 3''$ (2 приема) и длине хода $L = 1{,}0 — 1{,}5$ км;
$m_s/s = 1:20\,000 — 1:15\,000$.

Полигонометрические хода II разряда в городах должны иметь среднюю квадратическую относительную ошибку $m_s/s = 1:15\,000$, а III разряда $m_s/s = 1:8000$.

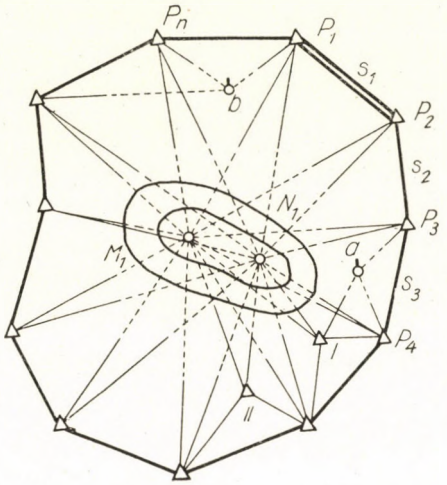


Рис. 12

S_1 — базис
△ ... P_1, P_2 — пункты хода I пор.
△ ... I, II — пункты хода II пор.
○ ... M_2, N_1 — вспом. пункты (упрощ. пирамиды, установл. на горе)
⊙ ... a, b — дополнительн. пункты, определяемые прямой засечкой с пунктов хода
S = 1—5 км

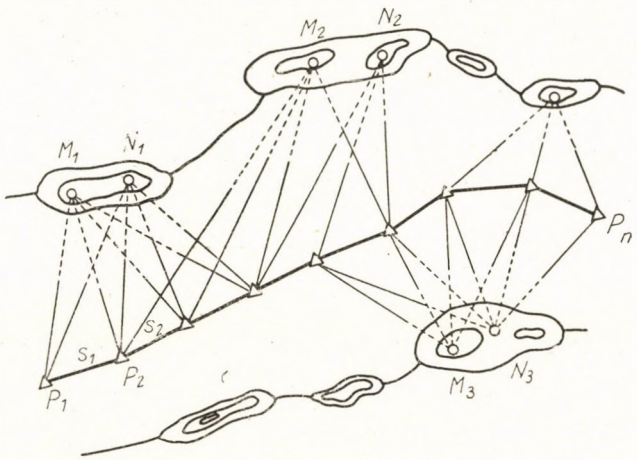


Рис. 13

△ ... P_1, P_2, ... P_n — пункты маршрута
○ ... M_1, N_1, M_2, N_2, — вспомогательные пункты — пики гор
S = 5—10 км

Таким образом, хода по методу геодезических засечек вполне удовлетворяют требованиям инструкции по городским съемкам.

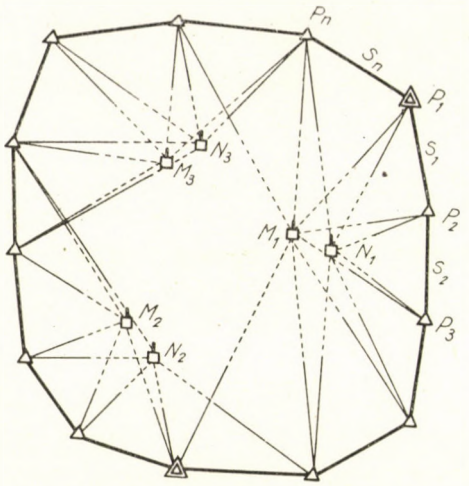


Рис. 14

△ ... P_2, ... P_3, ... P_n — пункты хода, располаг. на улицах, площадях и на крышах зданий
□ ... M_1, N_1, M_2, N_2 — вспомогательн. пункты — шпили высоких зданий
⩓ ... P_1, P_2 — пункты городской триангуляции
S = 0,5—1,5 км

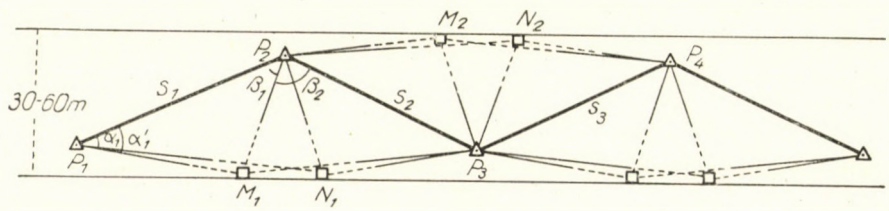


Рис. 15

△ ... P_1, P_2, P_n — пункты хода (на тротуарах — штативы теодолита)
□ ... M_1, N_1, M_2, N_2 — вспомогательные пункты — знаки настенной полигонометрии (устанавливаются на стенах зданий, на высоте 2,5—3 м над тротуаром)
S — стороны хода длинной 100—150 м
углы α — порядка 7° и более

Они избавляют от громоздких, трудно-исполнимых линейных измерений по улицам города, в условиях оживленного движения транспорта и пешеходов по улицам.

Для метода геодезических засечек движение по улицам города в общем не является помехой.

7. *Видоизмененный метод засечек*

При проложении ходов по методу геодезических засечек в сложных условиях местности могут встретиться непреодолимые препятствия к установлению взаимной видимости между смежными пунктами хода (лес, гора и др.). В этом случае можно построить ход без промежуточных пунктов ходовой линии, передав длины сторон и азимуты по ходу через связующие стороны (см. рис. 16) s_2, s_3, s_n.

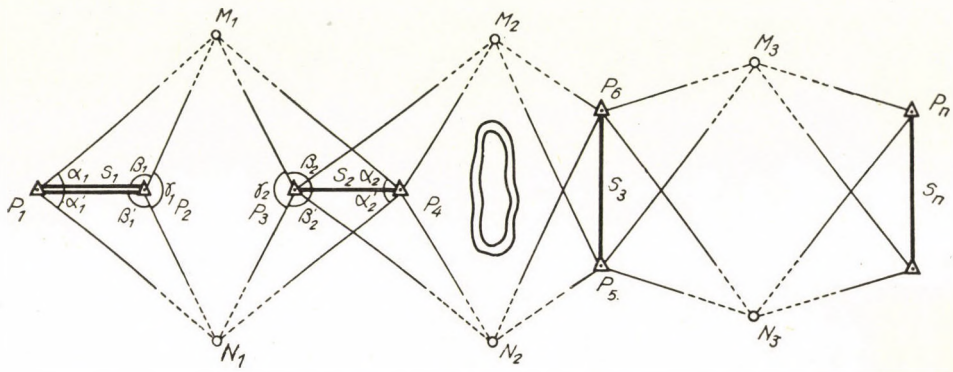


Рис. 16

I тип сети II тип сети

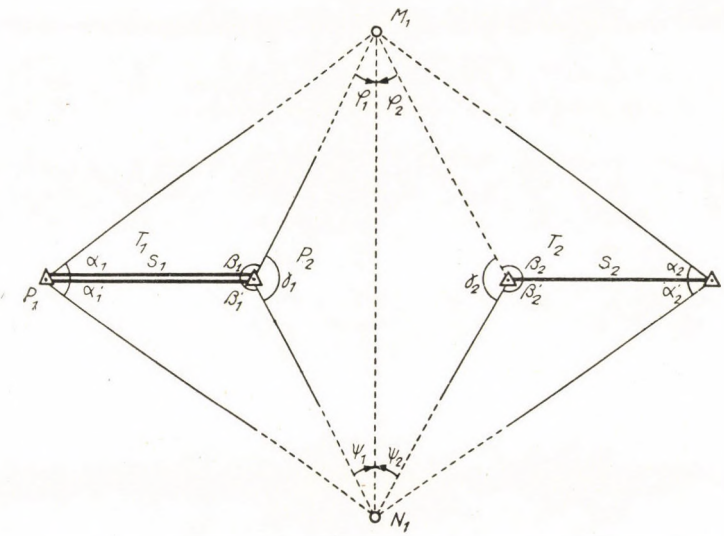


Рис. 17

Если будут известны координаты пункта P_1, а также длина s_1 и дирекционный угол T_1 стороны P_1, P_2 (рис. 17), то измерив с пунктов хода P_1, P_2, P_3, P_4,... P_n направления на вспомогательные пункты M_1, N_1, M_2, N_2..., можно вычислить стороны s_2, s_3... s_n и их дирекционные углы T_2, T_3... T_n.

а) *Формулы для вычислений*

$$s_2 = s_1 \frac{\sin\alpha_1 \sin\gamma_1 \sin(\alpha_2+\beta_2)\sin\psi_2}{\sin(\alpha_1+\beta_1)\sin\gamma_2 \sin\alpha_2 \sin\psi_1} = \\ = s_1 \frac{\sin\alpha_1' \sin\gamma_1 \sin(\alpha_2'+\beta_2')\sin\varphi_2}{\sin(\alpha_1'+\beta_1')\sin\gamma_2 \sin\alpha_2' \sin\varphi_1} \tag{15}$$

Входящие в формулу (15) вспомогательные углы s_1, s_2, Ψ_1, Ψ_2 вычисляются по формулам :

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}\varphi_1 &= \operatorname{ctg}\lambda_1 - \operatorname{ctg}\gamma_1 \\ \operatorname{ctg}\psi_1 &= \operatorname{ctg}\lambda_1' - \operatorname{ctg}\gamma_1 \\ \operatorname{ctg}\varphi_2 &= \operatorname{ctg}\lambda_2 - \operatorname{ctg}\gamma_2 \\ \operatorname{ctg}\psi_2 &= \operatorname{ctg}\lambda_2' - \operatorname{ctg}\gamma_2 \end{aligned} \tag{16}$$

Входящие в формулу (16) вспомогательные величины ctg λ вычисляются по формулам

$$\operatorname{ctg}\lambda_1 = \frac{\sin\alpha_1 \sin(\alpha_1'+\beta_1')}{\sin\alpha_1 \sin(\alpha_1+\beta_1)\sin\gamma_1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1' \sin\gamma_1}$$

$$\operatorname{ctg}\lambda_1' = \frac{\sigma_1'}{\sigma_1 \sin\gamma_1}$$

$$\operatorname{ctg}\lambda_2 = \frac{\sin\alpha_2 \sin(\alpha_2'+\beta_2')}{\sin\alpha_2' \sin(\alpha_2+\beta_2)\sin\gamma_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2' \sin\gamma_2} \tag{17}$$

$$\operatorname{ctg}\lambda_2' = \frac{\sigma_2'}{\sigma_2 \sin\gamma_2}$$

Контроль вычисления углов φ и ψ (при вычислении сети на плоскости)

$$\varphi_1 + \psi_1 + \gamma_1 - 180^\circ \quad \varphi_2 + \psi_2 + \gamma_2 = 180^\circ$$

Зная s_2, по аналогичным формулам от него вычисляется s_3 и т. д. Дирекционный угол T_2 стороны s_2 вычислится от дирекционного угла T_1 стороны s_1 по формулам :

$$T_2 = T_1 + (\beta_1+\beta_2) - (\varphi_1+\varphi_2) + 180^\circ = \\ = T_1 - (\beta_1'+\beta_2') + (\psi_1+\psi_2) + 180^\circ \tag{18}$$

Зная T_2, по аналогичным формулам от него вычисляется дирекционный угол T_3 и т. д.

Зная длины сторон и азимуты, вычисляются координаты пунктов (через вспомогательные пункты M, N). Как видно, формулы для вычислений в видо-

измененном способе усложняются, но полевые работы заметно облегчаются, и метод приобретает еще более оперативный характер. Вывод формул (15), (16), (17), (18) дан в моей книге : Вспомогательные пункты в видоизмененном способе засечек могут быть в виде подвижных визирных целей (на самолетах). Это будет динамическая триангуляция с подвижными визирными целями.

б) *Оценка точности в видоизмененном способе засечек*

В упомянутой книге также дан вывод формул для оценки точности определения длин сторон и дирекционных углов в видоизмененном методе засечек.

Приведем их здесь без вывода.

$$\left(\frac{m_{S_n}}{s_n}\right)^2 = \left(\frac{m_{s_1}}{s_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{\varrho}\right)^2 \sum_{k=1}^{k=2n} \left\{ \frac{1}{(\operatorname{ctg}\varphi_k + \operatorname{ctg}\psi_k)} \left[Q_k \operatorname{ctg}^2 \varphi_k + Q'_k \operatorname{ctg}^2 \psi_k + 1\right] \right\}$$

$$m_{T_n}^2 = m_{T_1}^2 + m^2 \left\{ \sum_{1}^{2n} \sin^2 \psi_k \left[\frac{\sin^2 \varphi_k}{\sin^2 \gamma_k} (Q_k + Q'_k) + \frac{\cos^2 \varphi_k}{\sin^2 \gamma_k} \mp \right. \right. \tag{19}$$

$$\left. \left. \mp 2 \frac{\sin \varphi_k}{\sin \psi_k \sin \gamma_k} \operatorname{ctg}\,(\alpha'_k + \beta'_k) \right] + 1 \right\} \tag{20}$$

где обозначения даны в соответствии с рисунками 16 и 17, причем

$$\begin{aligned} Q_k &= \operatorname{ctg}^2 \alpha_k + 2 \operatorname{ctg}^2 (\alpha_k + \beta_k) - 2 \operatorname{ctg} \alpha_k \operatorname{ctg} (\alpha_k + \beta_k) \\ Q'_k &= \operatorname{ctg}^2 \alpha'_k + 2 \operatorname{ctg}^2 (\alpha'_k + \beta'_k) - 2 \operatorname{ctg} \alpha'_k \operatorname{ctg} (\alpha'_k + \beta'_k) \end{aligned} \tag{21}$$

$2n$ — число фигур сети (по типу рис. 17) ; n = равно номеру определяемой стороны. Для величин Q_k составлены таблицы и приведены в моей книге Как видно из формулы (20), точность передачи азимута в видоизмененном способе зависит также и от формы фигур, в отличие от триангуляции и метода геодезических засечек.

Подсчеты показывают, что точность сетей по видоизмененному способу несколько ниже, чем в методе геодезических засечек и она зависит также от формы фигур, от величин Q. Для двойной независимой передачи длин сторон и азимутов по ходу целесообразно вводить на каждом участке 3 вспомогательных пункта. Тогда увеличивается также надежность и точность построения сети. Надо отметить, что II тип сети по видоизмененному методу засечек известен в литературе и называется он геодезическим шестиугольником.

Геодезический шестиугольник запроектирован был для связи дуг градусного измерения по 30 меридиану Европы и Африки через Крит 23 года тому назад (на расстояние 250 км). Теория геодезического шестиугольника

рассматривалась в 1941 году Хинтеркайзером (Германия)* и в 1949 Величко (СССР) в связи с динамической триангуляцией.

Но в этих работах теория геодезического шестиугольника и оценка точности рассмотрены без учета необходимости введения 3 вспомогательных пунктов (для контроля и повышения точности сети) и общих формул для оценки точности не было дано.

В заключение отметим, что метод геодезических засечек может быть применен не только в рассмотренном случае *измерения углов* на пунктах хода P_1, $P_2 \ldots P_n$ (см. рис. 4), но также и в случае *измерения* с помощью световой локации *расстояний*, как между пунктами хода P_1, $P_2 \ldots\ldots P_n$, так и *расстояний* до вспомогательных пунктов M_1, N_1, M_2, $N_2 \ldots$

Если установить на вспомогательных пунктах M_1, N_1, M_2, $N_2 \ldots\ldots$ триппельпризмы, отражающие пучок света к наблюдателю, посылающему от себя свет на них, то очевидно, можно оперативно развивать геодезические сети по методу засечек с помощью световой локации.

При построении сетей по методу засечек с помощью световой локации будет обеспечен не только хороший контроль в передаче длин сторон и азимутов по ходу, причем более надежный, чем в трилатерации и светодальномерной полигонометрии, но также представится возможность свести к минимуму в этих сетях угловые измерения, или даже совсем их отбросить, что также важно именно для оперативных сетей, в которых не следует как-либо усложнять организацию работ и оборудование.

Желательно выполнить в дальнейшем детальные исследования по вопросу построения геодезических сетей методом засечек с помощью световой локации.

DIE ENTWICKLUNG GEODÄTISCHER NETZE MIT HILFE VON ORIENTIERUNGSPUNKTEN

A. I. DURNJEW (MOSKAU—DRESDEN)

Zusammenfassung

Die polygonometrische Methode hat wesentliche Vorteile, weshalb sie neuerdings auch zum Ersatz von Teilen der Triangulierung verwendet wird. Die Messung der Längen der Polygonseiten verursacht allerdings Schwierigkeiten. Der Verfasser schlägt daher vor, die Seitenlängen durch trigonometrische (geodätische) Einschnitte aus bekannten bzw. bestimmbaren »Orientierungspunkten« zu berechnen, während die Polygonwinkel unmittelbar gemessen werden. Dadurch werden die Vorteile der Polygonierung und Triangulierung vereinigt. Zur vorteilhaften Anwendung werden mehrere Beispiele angeführt.

* HINTERKEUSER: Über eine Punktbestimmung nach beweglichen Hochzielen und ihre Verwendung zum Aufbau einer weiträumigen Triangulation, 1941.

DISKUSSION

Prof. Dr. HORST PESCHEL, DRESDEN

Sie haben nicht über die Genauigkeit gesprochen, die auf der ersten Strecke erreicht werden kann.

Prof. ANDREJ I. DURNJEW, MOSKAU—DRESDEN

Die Frage Professors PESCHEL beantwortend, kann der durchschnittliche Fehler auf den Extrempunkten der Triangulierung 1/70 000 sein, im Innern 1/20 000, und bei der bei Winkelmessungen angewandten Grundbestimmung 1/30 000.

Prof. Ing. V. PEEWSKY, SOFIA

Diese Methode ist in Bulgarien bekannt. Wir haben schon früher Versuche gemacht u. zw. immer mit Triangulierungspunkten, also nicht mit Linienmessungen. Die Ergebnisse sind so viel präziser als bei den Poligonmessungen.

III. Projektionsrechnungs-Kolloquium

ÜBER DIE PROBLEME DER PROJEKTION ZWISCHEN ZWEI ELLIPSOIDEN

Prof. I. HAZAY
DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN, SOPRON

In Ungarn wurden bisher zur Darstellung geodätischer Ergebnisse stereographische oder schrägachsige Zylinderprojektionen verwendet. Die Grundfläche dieser ist die das BESSELsche Ellipsoid berührende GAUSSsche Kugel, berechnet auf die durchschnittliche geographische Breite des Landes. Bei der jetzt im Gange befindlichen Triangulierung I. Ordnung geht man in Ungarn zu der GAUSS—KRÜGERschen Darstellung über, wobei als Grundfläche das KRASSOWSKYsche Ellipsoid gewählt wurde. Eines der wichtigsten Probleme hierbei ist, den Zusammenhang zu finden, mit dem man die im alten System dargestellten Punkte niederer (vierter) Ordnung auf das neue Projektionssystem umrechnen kann.

Zu den Umrechnungen wurde bei entsprechender Gestaltung des Reduktionssystems ein verhältnismässig einfaches, aber genaues Verfahren ausgearbeitet. Ursprünglich wurde es für die Umrechnung zwischen zwei benachbarten GAUSS—KRÜGERschen Projektionsstreifen entwickelt, nachher auch auf die Umrechnung von GAUSS—KRÜGERschen Streifen von verschiedener Breite ausgedehnt, später zur Umrechnung zwischen Zylinderprojektionssystemen umgearbeitet und schliesslich daraus das zur Umrechnung von der stereographischen bzw. von der Zylinderprojektion auf die GAUSS—KRÜGERsche Projektion geeignete Verfahren entwickelt. Bei dem letzteren Verfahren wurde in Betracht gezogen, dass die Grundfläche der stereographischen und Zylinderprojektion eine Kugel ist, die zu einem anderen Ellipsoid gehört als die zum GAUSS—KRÜGERschen Projektionssystem gehörige Grundfläche.

Zur Umrechnung ist es notwendig, dass man für die am rundgradigen Meridian des BESSELschen Ellipsoids aufgenommenen Anschlusspunkte die geographischen Koordinaten auf dem KRASSOWSKYschen Ellipsoid kenne. Hier ist das zweite Projektionsproblem mit dem ersten verknüpft. Es muss die Lage der zwei Ellipsoide zueinander bestimmt werden, das heisst es ist festzustellen um wieviel die zwei Ellipsoide zueinander verschoben und verdreht sind.

Zur Lösung dieses Problems wurden zuerst die plausiblen Variationen der Projektionsbeziehungen zwischen den zwei Ellipsoiden untersucht. Beson-

ders genau wurden die winkeltreuen Projektionsmethoden analysiert. Auch bei diesen kann man mit verschiedenen Bedingungen arbeiten. So kann man z. B. die Bedingung stellen, dass :

1. die geographische Breite eines Normalparallelkreises sich nicht ändern und dass dieser auch längentreu bleiben soll ;

2. der Normalparallelkreis längentreu und der Linearmodul so klein wie möglich sein soll ;

3. sich die geographische Breite des Normalparallelkreises nicht ändern und jede geographische Länge unverändert bleiben soll ;

4. sich die geographische Breite des Normalparallelkreises um den gegebenen Wert von $\Delta \varphi_0$ ändern soll.

Die Projektionsgleichungen können für jede Variation aufgestellt werden, auch für den Fall, wo die Mittelpunkte und Achsenrichtungen der zwei Ellipsoide nicht übereinstimmen, d. h. die zwei Ellipsoide nicht konzentrisch angeordnet sind. Die Verschiebung wird durch die Koordinatenänderung eines beliebig gewählten Anfangspunktes $\Delta \varphi_A$, $\Delta \lambda_A$ und durch die Verdrehung ε der von diesem Anfangspunkt ausgehenden geographischen Linien charakterisiert. Den wahrscheinlichsten Wert dieser Grössen ermittelt man durch ein Ausgleichsverfahren, u. zw. so, dass auch die Konstanten der Projektionsgleichungen aus dieser Ausgleichung erhalten worden.

Die Ausgleichung lässt sich an verschiedene Bedingungen knüpfen. So z. B.:

1. wenn man für einzelne Punkte des Triangulierungsnetzes eine geographische Ortsbestimmung durchgeführt hat, so kann man ausbedingen, dass a) die von einem Ellipsoid auf das andere umgerechneten Koordinaten den auf astronomischem Wege ermittelten Koordinaten möglichst nahekommen sollen ; b) die Quadratsumme der Lotabweichungen, die durch die Koordinaten bei Umrechnung von einem Ellipsoid auf das andere bestimmt werden, ein Minimum sein soll ;

2. wenn zwischen den zwei Ellipsoiden nur die gemeinsamen Punkte des alten und neuen Triangulierungsnetzes eine Verbindung herstellen (wobei die Koordinaten an beiden Ellipsoiden bekannt sind), kann man ausbedingen dass a) die von einem Ellipsoid auf das andere umgerechneten Koordinaten den am anderen Ellipsoid ermittelten Koordinaten möglichst nahekommen sollen; b) dass die Quadratsumme der linearen Abweichungen zwischen den berechneten und den umgerechneten Koordinaten auf dem anderen Ellipsoid ein Minimum sein soll ; c) die Quadratsumme der Winkel zwischen den Normalen, die einerseits zu den aus der Umrechnung gewonnenen Punkten gehören, anderseits auf dem anderen Ellipsoid bestimmt wurden, ein Minimum sein soll.

Infolge der vielen möglichen Variationen der Projektionen einerseits und infolge der verschiedenen möglichen Ausgleichsbedingungen, die die Lage der Ellipsoide bestimmen anderseits, haben die Faktoren eine mehrfach relativen

Wert. Das entsprechendste Verfahren ist jenes, bei dem sich nach der Ausgleichung die kleinsten Abweichungen zeigen.

In den in Fussnote angeführten drei Abhandlungen* findet sich die detaillierte Erörterung dieser Methode. Es ist zu hoffen, dass die neuesten Daten des neuen Triangulierungsnetzes — bezogen auf das KRASSOWSKYsche Ellipsoid — je früher zur Verfügung stehen werden, so dass mit der praktischen Anwendung der theoretisch ausgearbeiteten Methode begonnen werden kann.

* HAZAY I.: Die Umrechnung von der stereographischen Projektion und der konformen Zylinderprojektion auf die Gauss—Krügersche Projektion. Acta Technica Bd. X., S. 139—154.

HAZAY I.: Untersuchungen über die Projektion zwischen Ellipsoiden und über die Bestimmung der relativen Lage der Ellipsoide durch Projektion. Acta Technica Bd. XIV., S. 165—194.

HAZAY I.: Beiträge zur Bestimmung der Konstanten bei der Projektion zwischen Ellipsoiden und der Lage der Ellipsoide. Acta Technica Bd. XIV, S. 401—424.

DISKUSSION

Prof. DR. J. BÖHM, PRAHA

In der geodätischen Literatur letzter Zeit kann man Artikel finden,die eine Abbildung eines Referenzellipsoids auf ein anderes mit ähnlichen bestimmten mathematischen Bedingungen, wie bei den kartographischen Abbildungen, behandeln. Diese Arbeiten können der mathematischen Ansicht nach interessant sein ; für das auf das neue Ellipsoid überführte trigonometrische Netz bedeuten sie aber einen Zwang und man d a r f n i c h t solche Methoden in diesem Falle benützen. Das wird in weiterem bewiesen, vorhinein genügt es sich zu merken, dass in unseren Breiten das mittlere Krümmungsradius R vom KRASSOWSKY-Ellipsoid 1,00013mal grösser als dasselbe vom BESSELschen Ellipsoid ist.

Um das erwähnte Prinzip zu erklären, analysieren wir, wie die geographischen Koordinaten der trigonometrischen Punkte auf dem alten Ellipsoid entstanden sind. Man hat die Winkel mit den Theodoliten und die Grundlinien mit den Invardrähten gemessen, die mit dem Normalmeter verglichen wurden ; von den Dimensionen eines Referenzellipsoids war bei den Messungen keine Rede. Bei der Reduktion der Grundlinienlänge macht sich vor allen die gemessene Meereshöhe d. h. die Höhe über dem G e o i d geltend. In der Formel $\Delta s = -s \cdot H : R$ kommt zwar der ellipsoidische Krümmungsradius vor und die Wahl des neuen Ellipsoids würde die Reduktion um 0,013% vermindern. Dieselbe ist aber so klein (bei $H = 320$ m ist $\Delta s = -5$ cm/km), dass sich die Änderung des Ellipsoids praktisch nicht geltend macht ($ds = \Delta s \cdot dR : R = +0{,}007$ mm/km $= +7$ mm/1000 km). Dasselbe gilt für die winzigen Korrektionen auf die geodätische Linie und von der Zielmeereshöhe.

Die trigonometrischen Seitenlängen wurden mittels des Sinussatzes abgeleitet, wobei jeder Winkel um $\frac{1}{3}$ Exzess vermindert wird. Dieses wird aus der Formel $e = \textit{Fläche} : R^2$ berechnet. Mit der Änderung des Ellipsoids sollte der Nenner um 0,027% grösser sein. Für mittleres $s = 30$ km, $e = 2''$ bedeutet das eine Änderung $de = -0{,}0006''$ und für einen Winkeln $-0{,}0002''$, was aber die Winkel im Zähler sowohl wie im Nenner des Sinussatzes betrifft. So können wir folgendes erklären :

»die gemessenen und abgeleiteten Seitenlängen und die gemessenen und ausgeglichenen Winkel in einem trigonometrischen Netz sind das Produkt der Triangulation allein und von der Wahl der Dimensionen des Referenzellipsoids, auf dessen Fläche das Netz berechnet wurde, praktisch unabhängig.«

Von den gegebenen Seitenlängen und Winkeln werden jetzt die zugehörigen Differenzen der geographischen Koordinaten und Azimute auf dem gewählten Ellipsoid berechnet. Wir sehen also, dass die für das Geoid geltenden Werte (in den Grenzen der Messungsfehler) treu auf das Ellipsoid übertragen wurden. Die Wahl anderer Ellipsoiddimensionen würde nur die Koordinatenunterschiede und Azimute (wegen der verschiedenen Meridiankonvergenz) *bei unveränderten Seitenlängen und Winkeln ändern.*

Jetzt wird das Prinzip einer Übetragung des trigonometrischen Netzes vom alten auf das neue Ellipsoid klar. Theoretisch wäre das richtigste, wieder vom Zentralpunkt auszugehen und die Koordinatenunterschiede fortlaufend auf der neuen Fläche durchzurechnen. Wir wollen eine raschere und bequemere

Koordinatentransformation benützen, wobei die auf dem alten Ellipsoid geltenden Seitenlängen und Winkel wenn möglich unverändert bleiben sollen. Dann werden auch die Koordinaten auf dem neuen Ellipsoid die geoidischen Angaben geben und so — in den Grenzen der Messungsfehler — die Wirklichkeit darstellen.

Bei dem Bestreben die geoidischen Angaben am treuesten darzustellen, müssen wir jede »Abbildung« eines Ellipsoids auf das andere, die mit den fühlbaren Längen- und Formänderungen im trigonometrischen Netze verbunden ist, ablehnen. Ein ganz anderer Fall ist die kartographische Abbildung auf die Kugel, Kegel, oder andere fiktive Flächen. Man weiss dabei, dass man zu den sphärischen oder ebenen Angaben Korrektionen hinnehmen muss um die wahren, im Terrain geltenden (oder auch »ellipsoiden«) Werte zu bekommen. Was für einen Sinn hätte es aber, die Tafeln der Längenverzerrungen für die Angaben auf dem neuen Ellipsoid, das die Wirklichkeit so gut wie möglich darstellen soll, zusammenzustellen, um die richtigen geoidischen Angaben zu bekommen?

Zu solchen Deformationen führen jedoch die eingeführten mathematischen Bedingungen der sogenannten Abbildungen ; z. B. weist die konforme Abbildung des BESSELschen auf das KRASSOWSKYsche Ellipsoid, wobei die Normalparallele $\varphi_0 = 49°30'$ unverändert und längentreu abgebildet wird, auf der Parallele 51°30′ (also in Entfernung 220 km) eine Längenverlängerung um + 6 mm/km und auf der Parallele 47°30′ eine Verkürzung um — 5,4 mm/km auf. Das macht aber ± 30 cm bei einer 50 km langen trigonometrischen Seite aus (als ob wir ausser Signal messen würden) und eine Ausdehnung des nördlichen und ein Schrumpfen des südlichen Netzrandes um 6 m/1000 km! Die Konformität gilt nämlich nur für kleine Flächen. Die Längenverzerrungen sind sogar viel grösser als bei der konformen Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel und wirken eine unerträgliche Deformation des Netzes aus.

Auch die Bedingung $\varphi'_{0,Kr} = \varphi_{0,Bess}$ bedeutet eine Verbiegung des Netzes gegen die Wirklichkeit. Die Punktreihe, die die Parallele φ_0 auf dem alten Ellipsoid abbildet, hat einen Radius der geodätischen Krümmung $N_0 \cdot \operatorname{cotg} \varphi_0$, auf dem neuen Ellipsoid $N'_0 \cdot \operatorname{cotg} \varphi_0$, also ein um 0,013% grösseren. Das Netz wird dadurch verbogen, z. B. um 170 cm in der Entfernung 400 km von Zentralpunkte (Fall des tschechoslowakischen Netzes). Einen Beweis, dass eine Parallele nicht wieder als Parallele auf das neue Ellipsoid transformiert werden darf, gibt die Legendresche Reihe für die Koordinatenunterschiede:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{\varrho''}{M_0} s \cdot \cos A_{01} - \frac{\varrho'' \cdot \operatorname{tg} \varphi_0}{2 M_0 N_0} s^2 \sin^2 A_{01} + \ldots,$$

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \frac{\varrho''}{N_0 \cos \varphi_0} s \cdot \sin A_{01} + \ldots$$

wo sich M_0, N_0 ändern und s, φ_0, A_{01} unverändert bleiben. Dasselbe gilt also auch für die Meridiane und die Bedingung bedeutet für das Netz einen weiteren Zwang. Das geographische Netz des alten Ellipsoids soll nicht wieder als geographisches Netz auf das neue Ellipsoid transformiert werden. Dasselbe gilt auch für die geodätischen Linien, die überhaupt von der Flächenkrümmung abhängen.

Eine Abbildung im kartographischen Sinne würde nur in den Fällen in Betracht kommen, wo alle geographischen Koordinaten astronomisch bestimmt werden oder nach der Ausgleichung eines (Radar?)-Netzes auf der ganzen Erdoberfläche.

Jetzt wird klar sein, dass wir für die Überführung des Netzes auf das neue Ellipsoid solche Methoden wählen müssen, die die Seitenlängen und Winkel vom alten Ellipsoid am meisten bewahren. Solche sind z. B.:

a) die HELMERTsche Methode, wo die Längen der Verbindungslinien der Punkte mit einem Zentrum unverändert bleiben. Auf dem Kreisumfang in der Entfernung s entstehen die Längenvergrösserungen $1{,}1 \cdot 10^{-12} \cdot s^2$ (km), z. B. $+ 0{,}1$ mm/km bei $s = 300$ km, treu sind die Längen nur bei dem Zentrum. Die Winkeländerung macht da $\pm 0{,}02''$ (für $s = 300$ km) aus ;

b) die Projektion der ellipsoidischen Fläche auf die Fläche des neuen Ellipsoids längs der Normalen. Die Längen sind treu im Zentrum, weiter $\Delta s = 1{,}6 \cdot 10^{-12} \cdot s^2$ (km) $= 0.16$ mm/km bei $s = 300$ km ; die Projektion ist praktisch konform ;

c) die Bedingung der unveränderten Differenzen der ebenen Koordinaten bei der benützten konformen Abbildung beider Ellipsoide in dieselbe Ebene. Längentreu bleibt die ganze Abbildungsachse. Diese Methode ist konform und kann zu den minimalen Längendeformationen führen (wurde in der ČSR angewandt mit max. $\Delta s = 0{,}1$ mm/km).

Weitere Einzelheiten hat der Autor in der geodätischen Zeitschrift »Zeměměřictví« (Prag, 1953) in zwei Artikeln veröffentlicht.

Zuletzt erwähnen wir, dass es nach dem Ausgleich des neuen internationalen Grundnetzes eine Reihe von Punkten geben wird, wo die Koordinaten auf den beiden Ellipsoiden vorhanden sein werden und dabei es sich auch um zwei verschiedene Triangulationen handeln wird. Dann können wir die Transformation des vorhandenen verdichteten trigonometrischen Netzes auf zwei Etappen teilen :

1) Die Koordinatenänderungen von der Ellipsoidsdimensionenänderung, Drehung und Verschiebung des Netzes und dessen Massstabanpassung, die auf dem erwähnten Gebiet fliessend durchlaufen. Man kann sie analytisch für die Ecke des Grad- oder Hundertkilometernetzes bestimmen und zu ihrer Bestimmung für alle anderen trigonometrischen Punkte die Differenzrechnung (Interpolieren) benützen. Zuerst kann man das ursprüngliche Eckpunktnetz mit beiden Koordinatenarten weiter verdichten (z. B. auf 10×10 km) um den Einfluss der höheren Differenzen der Flächeninterpolation zu beseitigen oder zu vermindern. Diese Etappe kann auch unter der Bedingung der kleinsten Quadratsumme der Unterschiede zwischen den berechneten und transformierten Koordinaten der Grundnetzpunkte durchgeführt werden, was die mittleren Werte der nötigen Drehung, Verschiebung und Massstabänderung des alten Netzes geben wird und das alte Netz möglichst nahe dem neuen annähern wird. Diese Etappe kann auch gleich in der Ebene (mit ebenen Koordinatenänderungen) durchgeführt werden.

2) Es muss aber noch die zweite Etappe folgen (die Prof. HAZAY in seinem Referat nicht angeführt hat), wodurch man mit weiteren Koordinatenzusätzen überhaupt auf die neuen Koordinaten der Grundnetzpunkte voll übergeht. Diese Koordinatenänderungen werden klein und unregelmässig sein, ohne jeden funktionellen (mathematischen) Charakter, da sie aus den verschiedenen Messungsfehlern und aus der verschiedenen Netzausgleichung ent-

stehen. Wegen ihrer Kleinigkeit kann man sie rasch und einfach auf alle anderen Punkte — fliessend über das ganze Gebiet — verteilen. Werden sie klein sein, so wird dazu eine einfache lineare sogar graphisch durchgeführte (affine) Transformation genügen. Bei grösseren und gegenseitigen Änderungen sollte man zuerst das Netz der Punkte mit beiden Koordinatenarten durch den Netzausgleich oder mittels einer konformen Transformation verdichten.

Nun noch eine Bemerkung. Auf der zweiten Seite des Referates von HAZAY steht, dass man auf verschiedene mathematische Bedingungen basiert arbeiten kann und es sind schon Arbeiten erschienen im Zusammenhang mit dem neuen Ellipsoid.

So eine mathematische Abänderung eines Ellipsoids auf ein anderes kann nur dann vorkommen, wenn alle Koordinaten gemessen sind, oder wenn das ganze Triangulierungsnetz ausgearbeitet werden soll, so dass alle Koordinaten trigonometrisch bestimmt sind. Diese Ergebnisse müssen also an das Ellipsoid angepasst werden.

Man kann nicht zulassen, dass solche mathematische Methoden von einem Ellipsoid auf das andere übergehend ohne genügende mathematische Grundlagen durchgeführt werden.

Auch die Konformität zwischen beiden Ellipsoiden ist eine Frage. Das gilt nur für ganz kleine Flächen, aber nicht für das gesamte trigonometrische Netz.

Dr. K. ARNOLD, POTSDAM

Wenn wir die Punkte auf die Meereshöhe projizieren, haben wir die sogenannte translative Methode.

Nehmen wir aber eine andere Position an, so haben wir verschiedene Abstände. Die können 3 Meter überschreiten, und das ist gerade die Grenze der Toleranz.

Wenn wir die projektive Methode anwenden, und 3 m vorschreiben, so ändern sich auch die Längenverhältnisse in dem Netz. Der Azimut wird sich ähnlicherweise auch etwas ändern, aber natürlich nicht viel.

Ehemalig hat man auf dem BESSELschen Ellipsoid gearbeitet, dann hat man das KRASSOVSKYsche Ellipsoid gefunden und einen neuen Ausgleich vorgenommen. Eine einfache Projektion muss man vornehmen. Und es wäre ein Problem zu untersuchen, wie weiter die Differenzen sind.

Prof. Dr. W. K. HRISTOW, SOFIA

Was die Aussagen von Prof. BÖHM anbelangt, möchte ich bemerken, dass ausser dieser Änderung der Grundlinie und ausser neuen Messungen auch infolge der Projektion eine Änderung entsteht. Ich habe dieses technische Verfahren genau untersucht, was für Änderungen es bei der Länge gibt. Die geodätische Linie geht von einem Punkt A aus auf den Punkt B. Es stellt sich heraus, dass Änderungen in den Längen eintreten, die bei einer Entfernung von 200 km vom Zentralpunkt die Grössenordnung von Zentimetern haben, so dass von einer Anwendung die Rede sein kann.

Nun stellt sich die Sache in der Praxis etwas anders. Es lässt sich hier nicht alles durch Transformationsformeln erledigen. Bei dem Zusammenschluss der Nachbarnetze wird alles geändert und diese Änderungen befolgen nicht ein

mathematisches Gesetz. Es wird ja alles ausgeglichen, und wir wollen dann die Netze höherer Ordnung anders festlegen und ganz gut anpassen. Das lässt sich nicht mehr durch Transformationen streng erledigen. Die Transformation ist eine erste Annäherung. Weiter muss dann eine richtige neue Ausgleichung erfolgen und bei einer Ausgleichung zweiter oder dritter Ordnung kann man dann genau das Netz erster Ordnung anpassen. Immerhin kann die Transformation sehr gute Dienste leisten. Diese Transformation von stereographischen Koordinaten in GAUSSsche Koordinaten muss die Ausgangswerte der Koordinaten geben.

Die Schritte sind die folgenden : zuerst die Transformation, damit man Ausgangswerte bekommt. Die Transformation wird in der Ausgangsebene ausgeführt. Bei der Ausgleichung kann man erst von kleinen Sachen sprechen. Im grossen kann man von einem analytischen Gesetz nicht sprechen, im kleinen ja. Die affine Transformation ist hier am besten geeignet. Man kann dann die Ausgleichung zur Hilfe nehmen, statt der vierten Transformation.

Auch hier ist die vorangehende Transformation von stereographischen Koordinaten sehr am Platz, denn man wird dann kleine Korrektionen anbringen und auch das Gebiet, das man durch eine Transformationsformel ergreifen kann, kann grösser sein, wenn man die Koordinaten auf Gauss—Krügersche Koordinaten transformiert.

Prof. I. HAZAY, SOPRON

Ich teile vollkommen die Ansicht all derer, die an der Diskussion teilgenommen haben nämlich dass es sinnlos wäre, ein Haupttriangulierungsnetz auf ein anderes Ellipsoid zu projizieren. Ich stimme mit ihnen auch darin vollkommen überein, dass das Haupttriangulierungsnetz auf dem neuen Ellipsoid auszugleichen ist. Wir wünschen ja gar nicht unser altes Haupttriangulierungsnetz, das man seinerzeit auf dem BESSELschen Ellipsoid entwickelt hat, auf das KRASSOWSKYsche Ellipsoid zu projizieren. Das neue Haupttriangulierungsnetz auf dem KRASSOWSKYschen Ellipsoid wird vom alten Netz ganz unabhängig ausgeglichen und aufgetragen.

Das Missverständnis entstand infolge der durch die beschränkte Zeit bedingten Kürze meines Vortrages : ich konnte offenbar nicht ausführlich genug den Zweck und die praktische Anwendungsmöglichkeit meiner Projektionsuntersuchungen erklären.

Es handelt sich darum, dass unser neues Haupttriangulierungsnetz auf Grund von zeitgemässen Messungen zusammengestellt und mit neuen Ausgleichungen auf das KRASSOWSKYsche Ellipsoid aufgetragen wurde. Auf Grund des alten Haupttriangulierungsnetzes (das auf dem BESSELschen Ellipsoid liegt) wurden aber im Laufe der verflossenen Jahrzehnte etwa 100 000 Triangulierungspunkte niederer (vierter) Ordnung bestimmt und diese möchten wir bei der Verfertigung unserer topographischen Karten im Massstabe 1 : 10 000 bezw. 1 : 5000 verwenden.

Zwischen dem alten Haupttriangulierungsnetz und dem neuen Haupttriangulierungsnetz gibt es aber keinen mathematischen Zusammenhang und einen solchen kann man nur auf der Grundlage finden, dass viele Punkte des alten und des neuen Haupttriangulierungsnetzes in der Natur identisch sind. Man muss also einen Zusammenhang suchen, der es ermöglicht, dass man die erwähnten Triangulierungspunkte niedriger Ordnung mit einer Genauigkeit von

einigen Dezimetern dem neuen, auf dem neuen Ellipsoid liegenden Netz anpasst.

Es gelang mir für die Zwecke der Umrechnung eine ziemlich schnelle Methode auszuarbeiten, die in einer der zitierten drei Studien ausführlich behandelt wurde. Zur Durchführung dieser Methode ist es notwendig, dass man die Koordinaten der im Gebiete des Landes systematisch angesetzten Anschlusspunkte auf beiden Ellipsoiden (in beiden Triangulierungsnetzen) in guter Annäherung kennt, oder mit anderen Worten: dass man für die Anschlusspunkte, die wir im alten Netz auf dem BESSELschen Ellipsoid aufgenommen haben, die dem neuen Netz angepassten Koordinaten auf dem KRASSOWSKYschen Ellipsoid mit einer Genauigkeit von einigen Dezimetern bestimmt. Die Zusammenhänge von guter Annäherung möchten wir nun mit der gemeinsamen Anwendung der Verfahren der Projektion und des Ausgleichens feststellen. Da, wie schon erwähnt, zwischen dem alten und dem neuen Netz ein mathematischer Zusammenhang nicht besteht, würden wir auf Grund der identischen Punkte in beiden Netzen Relationen erhalten, die einander widersprechen. Mit der Anwendung der Projektionsprinzipien und des Ausgleichens kann man aber über die Verschiebung, die Verdrehung der beiden Netze gegeneinander und über eine ziemlich gute Anpassung der Anschlusspunkte in das neue Netz so gut annähernde Werte erhalten, auf Grund deren bereits nicht durch Projektion und Ausgleichung, sondern durch die in meiner oben erwähnten Studie geschilderte Umrechnungsmethode die Punkte der alten Triangulierung niederer Ordnung auch im neuen Netz auf dem neuen Ellipsoid bei der Kartierung im Massstabe 1 : 10 000, bez. 1 : 5000 verwendet werden können, u. zw. mit der Genauigkeit, die bei solchen Arbeiten erforderlich ist.

Um aber die Projektionsprinzipien und dieAusgleichung für die Erkenntnis der Relationen entsprechenderweise gleichzeitig verwenden zu können, mussten wir die verschiedenen Möglichkeiten der Projektion ausführlich untersuchen.

Ich möchte wiederholen, dass es sich nicht darum handelt, ein vorhandenes, ausgeglichenes Haupttriangulierungsnetz auf ein anderes Ellipsoid zu projizieren, sondern es ist nur davon die Rede, eine solche gut annähernde Relation zwischen dem alten und neuen Netz, die miteinander in keinem mathematischen Zusammenhange stehen, festzustellen, die beim neuen Netz eine Anpassung der in einer grossen Anzahl vorhandenen alten Triangulierungspunkte niederer Ordnung von einer Genauigkeit von einigen Dezimetern ermöglicht. Für diese Zweck ist die geschilderte Methode offenbar geeignet.

DAS BILD DER KURVE BEI DER ABBILDUNG EINER BELIEBIGEN FLÄCHE AUF EINE ANDERE

Dr. J. KAŠPAR
PRAHA

Einleitung

In der Geodäsie und in der Kartographie werden Formeln für die Richtungs- und Längenkorrektion angewandt, die von J. LABORDE für die konforme Abbildung der Fläche in die Ebene abgeleitet wurden. Der Vorteil dieser Lösung liegt in einer leichten und raschen Errechnung — besonders wenn die Tabellation der Koeffizienten zweckmässig durchgeführt ist — und in einer einheitlichen theoretischen Wiedergabe. Nicht in letzter Reihe kann diese Methode auch für die Lösung geodätischer Aufgaben durch Abbildung angewandt werden.

Ich versuchte diese Methode auf die allgemeine Kurve und auf die allgemeine Abbildung einer beliebigen Fläche auf eine andere zu erweitern. Von einer Kurve nehme ich an, dass ihre geodätische Krümmung als eine Funktion der Länge auf einer ursprünglichen Fläche gegeben ist. Von den angeführten Potenzreihen habe ich schweigend angenommen, dass sie im gegebenen Bereich konvergent sind. Wenn wir nun die geodätische Krümmung identisch gleich Null setzen, bekommen wir die für das Bild der geodätischen Linie geltenden Beziehungen.

Die Errechnung zerfällt in vier Teile:

Im ersten Teil ist die geodätische Krümmung des Bildes der Kurve in beliebiger Abbildung einer allgemeinen Fläche auf eine andere abgeleitet, wobei ein passendes System parametrischer Linien angewandt wird, deren Richtungen mit denen der extremen Vergrösserungsverhältnissen entsprechenden identisch sind.

Im zweiten Teil sind die rechtwinkligen Koordinaten der Bildebene für eine Kurve, welche auf der zweiten Fläche liegt, parametrisch ausgedrückt. Dazu ist eine allgemeine konforme Abbildung unter der Voraussetzung angewandt, dass ihr Längenverhältnis bekannt ist.

Im dritten Teil sind die resultierenden Gleichungen für die Bestimmung der geodätischen Polarkoordinaten des Bildes einer Kurve auf eine andere Fläche angewandt.* Von hier aus ist ein leichter Übergang zur Bestimmung der

* In Gegensatz zu den üblichen Arten der Ableitung wird hier eine Komplexform von Gleichungen angewandt, wo angesichts der Rotation und der Verschiebung in der darstellenden Ebene invariante Ausdrücke eingeführt sind, wodurch eine Ausdruckvereinfachung erzielt wird. Die von LABORDE abgeleitete Differentialgleichung ermöglicht auch die systematische Einführung des Gauss'schen Krümmungsmasses.

Längenkorrektion, wobei die Richtungskorrektion unmittelbar gegeben ist. Aus den angeführten Gleichungen können wir auf den Einfluss der Flächenkrümmung bei der Berechnung der Richtungs- und Längenkorrektion der Kurve schliessen.

Im letzten — *vierten* — *Teil* sind auf ähnlicher Weise rechtwinklige halbgeodätische Koordinaten desselben Bildes als Funktion der Kurvenlänge bestimmt. Dadurch ist — im wesentlichen — der Verlauf des Kurvenbildes bekannt.

I. Die geodätische Krümmung des Kurvenbildes bei der allgemeinen Darstellung der ersten Fläche auf eine andere

Bei der allgemeinen Abbildung einer Fläche auf eine andere ist das Längenverhältnis $m = \frac{ds'}{ds}$ von der Lage des Punktes und von der angenommenen Richtung abhängig. In jedem Punkte gibt es zwei, dem maximalen Längenverhältnis entsprechende entgegengesetzte Richtungen, die in derselben Geraden liegen. Senkrecht dazu sind zwei Richtungen des minimalen Längenverhältnisses. Diese Richtungen können als Tangenten zu zwei Systemen gegenseitig senkrechter Kurven angesehen werden. Dasselbe gilt für die entsprechenden Richtungen im Bild, so dass auch hier die Bilder der ursprünglichen Kurvensysteme ebenfalls orthogonal sind.

Nehmen wir nun an, dass diese Kurven parametrische Kurven der beiden Flächen gemeinsamen Parameter u, v sind. Der positive Sinn der Kurven sei im Sinne der zunehmenden Parameter angenommen und der Richtungswinkel α soll positiv sein, wenn er die Tangente der positiven v = const.-Kurve in die Tangente der positiven u = const.-Kurve überführt.

Nehmen wir nun auf der ersten Fläche die Kurve k an, die sich als krumme Linie k' darstellt. Wählen wir an ihr zwei differential nahe Punkte P_1 und P_3. Führen wir durch diese Punkte Kurven des Systems (u, v), die das differentiale Viereck $P_1P_2P_3P_4$ auf der Fläche des Originals bilden. Auf ähnlicher Weise bilden wir auf der Bildfläche das Viereck $P_1'P_2'P_3'P_4'$ (s. Bild 1/a u. 1/b). Nehmen wir jetzt an, dass in der Richtung der Kurve v = Konst. das erste extreme Längenverhältnis m_1 ist, ähnlich in der Richtung der Kurve u = Konst. das zweite Längenverhältnis m_2 beträgt. Die dementsprechenden Längenelemente sind ds_1 und ds_2. Die geodätischen Krümmungen der entsprechenden Koordinatenlinien sind γ_1, γ_2. Ähnlicherweise sind auf den differential nahen Kurven der Parameter $v + dv$ u. $u + du$ die Längenverhältnisse $\overline{m}_1$ u. $\overline{m}_2$. Die entsprechenden Längenelemente sind dann $\overline{ds}_1$, $\overline{ds}_2$ und die geodätischen Krümmungen $\overline{\gamma}_1$ und $\overline{\gamma}_2$. Das Längenelement der Kurve k sei ds und die geodätische Krümmung γ. Diese Kurve bildet mit der Richtung des ersten extremen Verhältnisses den Richtungswinkel α in Punkt P_1 u. $\alpha + d\alpha$ in

Punkt P_3. Ähnlich sind auf der zweiten Fläche die entsprechenden Längendifferentiale ds_1' u. ds_2' und die geodätischen Krümmungen Γ_1' u. Γ_2', bzw. $\overline{ds}_1'$, $\overline{ds}_2'$, Γ_1 u. Γ_2. Für das Kurvenbild k' sind ds' u. Γ'. Weiter werden wir den Vorgang verfolgen, der dem von LABORDE für die konforme Darstellung angewandten

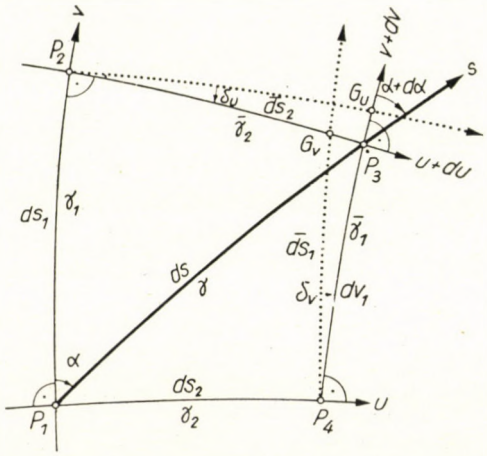


Bild 1/a

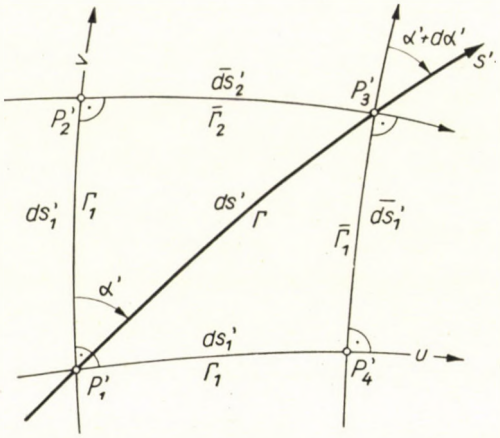


Bild 1/b

ähnlich ist. Die Längenverhältnisse in den differentialnahen Linien können wir erstens aus den entsprechenden Ausdrücken in den ursprünglichen Linien

$$\overline{m}_1 = m_1 + \frac{\partial m_1}{\partial v} \cdot dv = m_1 + \frac{\partial m_1}{\partial v} \cdot \frac{dv}{ds_2} \cdot ds_2 = m_1 + \frac{\partial m_1}{\partial s_2} \cdot ds_2 \qquad (1)$$

$$\overline{m}_2 = m_2 + \frac{\partial m_2}{\partial u} \cdot du = m_2 + \frac{\partial m_2}{du} \cdot \frac{du}{ds_1} \cdot ds_1 = m_2 + \frac{\partial m_2}{\partial s_1} \cdot ds_1 \quad (2)$$

errechnen; weiter auch mit Hilfe ihrer geodätischen Krümmungen. Um das durchführen zu können, führen wir geodätische Parallele mit den Linien $v = \text{Konst.}$ u. $u = \text{Konst.}$ durch die Punkte P_2 u. P_4. Diese bestimmen uns die Punkte G_u u. G_v auf den differential nahen Kurven. Die Winkel, welche die geodätischen Parallelen mit den Linien $u + du = \text{Konst.}$ bilden, bezeichnen wir δ_u, bzw. δ_v und rechnen sie von den Parallelen im positiven Sinne von α. Wenn wir das Bild in die Tangentenebene projizieren, bleiben die geodätischen Krümmungen unverändert und es gelten mit ausreichender Präzision die Formeln

$$d\bar{s}_1 = ds_1(1 - \gamma_1 \cdot ds_2), \quad d\bar{s}_2 = ds_2(1 + \gamma_2 \cdot ds_1) \quad (3)$$

$$d\bar{s}'_1 = ds'_1(1 - \Gamma_1 \cdot ds'_2), \quad d\bar{s}'_2 = ds'_2(1 + 1\Gamma_2 \cdot ds'_1) \quad (4)$$

Durch Vergleich bekommen wir nach Umformung

$$\Gamma_1 = \frac{1}{m_2}\left(\gamma_1 - \frac{1}{m_1} \cdot \frac{\partial m_1}{\partial s_2}\right) \quad (5)$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{m_1}\left(\gamma_2 + \frac{1}{m_2} \cdot \frac{\partial m_2}{\partial s_1}\right) \quad (6)$$

dadurch haben wir die geodätische Krümmung der Bilder koordinierter Kurven als die Funktion der geodätischen Krümmungen der ursprünglichen Kurven, der extremen Längenverhältnisse und ihrer Ableitungen in senkrechter Richtung bestimmt. Aus den Ausdrücken ist ersichtlich, dass sie nicht von der Wahl der Parameter u und v abhängen, soweit es sich um dieselben parametrischen Kurven handelt. Darauf bestimmen wir die Änderung des Richtungswinkels α, die dem Differential der Länge ds der Kurve k angehört und die Änderung des Richtungswinkels α', die dem Differential ds' der Länge s' der Kurve k' angehört. Wir logarithmieren die bekannte Beziehung

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{m_2}{m_1} \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (7)$$

und bilden das vollständige Differential

$$\frac{d\alpha'}{\sin \alpha' \cdot \cos \alpha'} = d \ln\left(\frac{m_2}{m_1}\right) + \frac{d\alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \quad (8)$$

Die Differentiale $d\alpha'$, $d \ln \frac{m_2}{m_1}$ und $d\alpha$ mögen den Änderungen du, dv und $d\alpha$

entsprechen, welche auf das Differential der Kurvenlänge ds entfallen. Darum gilt

$$d \ln\left(\frac{m_2}{m_1}\right) = \left(\frac{\partial \ln\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}{\partial s_1} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial \ln\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}{\partial s_2} \cdot \sin\alpha \right) \cdot ds \tag{9}$$

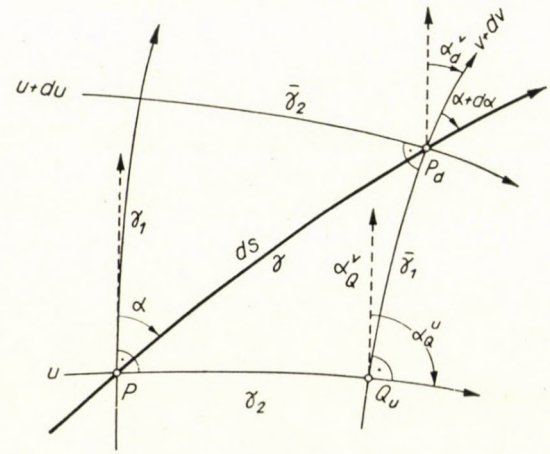


Bild 2

Aus Bild 2 ergibt sich ferner — für die Krümmungen der Projektionen von Kurven in die Tangentenebene — die Gleichung

$$\alpha + d\alpha = (\alpha + \gamma \cdot ds) - \left(\frac{\pi}{2} + \gamma_2 \cdot ds_2 - \frac{\pi}{2} + \bar{\gamma}_1 \cdot d\bar{s}_1\right) \tag{10}$$

welche nach durchgeführtem Dividieren die bekannte Beziehung

$$\frac{d\alpha}{ds} = \gamma - \gamma_1 \cdot \cos\alpha - \gamma_2 \cdot \sin\alpha \tag{11}$$

ergibt. Ähnlich besteht auf der zweiten Fläche die Gleichung

$$\frac{d\alpha'}{ds'} = \Gamma - \Gamma_1 \cdot \cos\alpha' - \Gamma_2 \cdot \sin\alpha' \tag{12}$$

Wenn wir nun die errechneten Werte der Differentiale in die Gleichung (8) einsetzen und sie umformen, bekommen wir die Endbeziehung (I).

$$\Gamma m^3 - \gamma m_1 m_2 = (m_1^2 - m_2^2)\left\{\gamma_1 \frac{m_1}{m_2} \cdot \cos^3\alpha - \gamma_2 \frac{m_2}{m_1} \cdot \sin^3\alpha\right\} -$$

$$- \frac{\partial m_1}{\partial s_1} m_2 \cdot \cos^2\alpha \sin\alpha -$$

$$- \frac{\partial m_1}{\partial s_2}\left(\frac{m_1^2}{m_2} \cdot \cos^3\alpha + 2 m_2 \cdot \cos\alpha \sin^2\alpha\right) +$$

$$+ \frac{\partial m_2}{\partial s_1}\left(\frac{m_2^2}{m_1} \cdot \sin^3\alpha + 2 m_1 \cdot \cos^2\alpha \sin\alpha\right) + \qquad \text{(I)}$$

$$+ \frac{\partial m_2}{\partial s_2} m_1 \cdot \cos\alpha \sin^2\alpha .$$

$$m^2 = (m_1^2 \cos^2\alpha + m_2^2 \sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}$$

Wenn wir die Elemente auf der zweiten Fläche einführen und die Ableitungen der Logarithmen der Längenverzerrungen anwenden, bekommen wir (II).

$$\Gamma - \gamma \cdot m_1 m_2 \frac{1}{m^3} = \Gamma_1\left(1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}\right)\cos^3\alpha' + \Gamma_2\left(1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}\right)\sin^3\alpha' -$$

$$- \frac{\partial \ln(m_1)}{\partial s_1'} \cdot \cos^2\alpha' \sin\alpha' -$$

$$- \frac{\partial \ln(m_1)}{\partial s_2'}\left(\frac{m_2^2}{m_1^2} \cdot \cos^3\alpha' + 2\cos\alpha' \sin^2\alpha'\right) +$$

$$+ \frac{\partial \ln(m_2)}{\partial s_1'}\left(2\cos^2\alpha' \sin\alpha' + \frac{m_1^2}{m_2^2} \cdot \sin^3\alpha'\right) + \qquad \text{(II)}$$

$$+ \frac{\partial \ln(m_2)}{\partial s_2'} \cdot \cos\alpha' \sin^2\alpha' .$$

$$\frac{1}{m^3} = \left(\frac{1}{m_1^2}\cos^2\alpha' + \frac{1}{m_2^2}\sin^2\alpha'\right)^{\frac{3}{2}}$$

Die Formeln gestalten sich einfacher, wenn es sich um eine geodätische Linie im Original handelt, wo $\gamma = 0$. Für die winkeltreue Abbildung setzen wir $m_1 = m_2 = m$ und die Formel (II) geht in die bekannte *Schols*'sche

Beziehung über. Die Formel wird ebenfalls wesentlich einfacher, wenn es sich um eine flächentreue Abbildung handelt, in der $P = m_1 \cdot m_2 = \text{Konst.}$ u. $Q = \dfrac{m_2}{m_1}$ (Form. III).

$$
\begin{aligned}
\Gamma - \gamma \cdot \frac{1}{\sqrt{P}} \left\{ Q \cos^2 \alpha' + \frac{1}{Q^2} \sin^2 \alpha' \right\}^{\frac{3}{2}} = \\
= \left\{ \Gamma_1 (1 - Q^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln Q}{\partial s_2'} \cdot Q^2 \right\} \cos^3 \alpha' + \\
+ \left\{ \Gamma_2 (1 - Q^{-2}) + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln Q}{\partial s_1'} \cdot Q^{-2} \right\} \sin^3 \alpha' + \\
+ \frac{3}{2} \left\{ \frac{\partial \ln Q}{\partial s'} \right\} \sin \alpha' \cos \alpha' .
\end{aligned}
\tag{III}
$$

II. Das Kurvenbild in der allgemeinen winkeltreuen Abbildung der zweiten Fläche auf die Ebene

Nehmen wir an, das Bild der Kurve k' auf der zweiten Fläche sei durch einen Punkt P_1, weiter durch die Richtung der ihn berührenden Tangente und durch die geodätische Krümmung Γ, die als Funktion der Entfernung s' von dem Anfangspunkt P_1' bestimmt ist, gegeben. Ihr Bild ist in der weiteren konformen Abbildung auf die Ebene eindeutig festgestellt, wenn wir die Lage des Bildes vom Anfangspunkt P_1, die vom ebenen Richtungswinkel A_1 bestimmte Richtung der ihn berührenden Tangente und das Längenverhältnis m^r als die Funktion der ebenen Koordinaten kennen. Dann ist die Krümmung des ebenen Bildes dieser Kurve Γ^r durch die bekannte Beziehung

$$
\Gamma^r = \frac{1}{m^r} \left(\Gamma + \frac{\partial m^r}{\partial_N} \right)_{(r-index)} \tag{13}
$$

bestimmt, wo $\dfrac{\partial m^r}{\partial N}$ die Ableitung des Längenverhältnisses in der Richtung der Normale ist. Gemäss der Definition ist $\Gamma' = \dfrac{dA}{dS}$, wo S die Länge des ebenen

Bildes der Kurve darstellt. Die Ableitung des Richtungswinkels nach der Kurvenlänge s' auf der zweiten Fläche ist

$$A' = \frac{dA}{ds'} = \frac{dA}{dS} \cdot \frac{dS}{ds'} = \Gamma^r \cdot m^r = \Gamma + \frac{\partial m^r}{\partial N} = \tag{14}$$

$$= \Gamma + \frac{\partial m^r}{\partial X} \cdot \sin A - \frac{\partial m^r}{\partial Y} \cos A$$

In diesen Ausdruck führen wir die komplexe Exponentialfunktion des Richtungswinkels A ein, so dass wir bekommen:

$$A' = \Gamma - i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m^r}{\partial X} - i\frac{\partial m^r}{\partial Y}\right)e^{iA} + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m^r}{\partial X} + i\frac{\partial m^r}{\partial Y}\right)e^{-iA} \tag{15}$$

Um eine mehr übersichtliche Form zu erhalten, bilden wir den Komplexausdruck μ_1 und den damit verbundenen Ausdruck $\bar{\mu}_1$ gemäss den Beziehungen

$$\mu_1 = \frac{\partial m^r}{\partial X} + i\frac{\partial m^r}{\partial Y} \qquad \bar{\mu}_1 = \frac{\partial m^r}{\partial X} - i\frac{\partial m^r}{\partial Y} \tag{16}$$

so dass wir

$$iA' = i\Gamma + \frac{1}{2}(\bar{\mu}_1 \cdot e^{iA} + \mu_1 \cdot e^{-iA}) \tag{17}$$

schreiben können. Ähnlich erhalten wir die Ableitung des Längenverhältnisses in der Ebene nach der Kurvenlänge s auf der Fläche

$$(m^r)' = \frac{1}{2} m^r (\bar{\mu}_1 \cdot e^{iA} + \mu_1 \cdot e^{-iA}) \tag{18}$$

Nun stellen wir die erste Ableitung des Komplexausdruckes fest, die aus den Koordinaten des Kurvenbildes in der Ebene ihrer Länge nach gebildet ist

$$\boxed{Z' = X' + iY' = m^r e^{iA}} \tag{19}$$

Die zweite Ableitung Z'' ist durch die Gleichung

$$Z'' = m^r e^{iA}(i\,\Gamma + \bar{\mu}_1 e^{iA}) \tag{20}$$

gegeben. Bei der Errechnung der dritten Ableitung berücksichtigen wir noch die Differentialgleichung

$$m^r\left(\frac{\partial^2 m^r}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 m^r}{\partial Y^2}\right) = K + \left(\frac{\partial m^r}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial m^r}{\partial Y}\right)^2 \tag{21}$$

die wir auf eine für das eingeführte μ_1 verwendbare

$$m^r\left(\frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial X} + i\frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial Y}\right) = K + \mu_1 \cdot \bar{\mu}_1 \tag{22}$$

Form umschreiben. Wenn wir als ein weiteres Komplexausdruck

$$\bar{\mu}_2 = \frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial X} - i\frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 m^r}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 m^r}{\partial Y^2}\right) - i2\frac{\partial^2 m^r}{\partial X\,\partial Y} \tag{23}$$

bezeichnen, ist die Ableitung durch die Gleichung

$$Z''' = m^r e^{iA}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{2}K - \Gamma^2\right) + i\,\Gamma' + (i\,3\,\Gamma\bar{\mu}_1)\cdot e^{iA} + \\ \quad + \left(\frac{3}{2}\bar{\mu}_1^2 + \frac{1}{2}m^r\bar{\mu}_2\right)\cdot e^{i\,2A}\end{array}\right\} \tag{24}$$

gegeben. Wir bestimmen noch die vierte und die fünfte Ableitung (25) und (26),

$$Z^{(IV)} = m^r e^{iA}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}m^r\varkappa_1\cdot e^{-iA} + (-3\,\Gamma\Gamma' + i\,(-\Gamma^3 + \Gamma'' + \\ +2\,\Gamma K)) + \left(-7\,\Gamma^2\bar{\mu}_1 + 2\,K\bar{\mu}_1 + \frac{1}{2}m^r\bar{\varkappa}_1 + \right. \\ \left. +i\,(4\,\Gamma'\bar{\mu}_1)\right)\cdot e^{iA} + i\,(9\,\Gamma\bar{\mu}_1^2 + 3\,\Gamma m^r\bar{\mu}_2)\cdot e^{i2A} + \\ +\left(3\,\bar{\mu}_1^3 + \frac{11}{4}m^r\bar{\mu}_2\cdot\bar{\mu}_1 + \frac{1}{4}m^{r2}\bar{\mu}_3\right)\cdot e^{i3A}\end{array}\right\} \tag{25}$$

$$
Z^{(V)} = m^r e^{iA} \left\{ \begin{aligned}
&\left(\frac{1}{4} m^r \varkappa_1 \mu_1 + \frac{1}{8} m^{r2} \varkappa_2\right) \cdot e^{-iA2} + (i\, \Gamma m^r \varkappa_1) \cdot e^{-iA} + \\
&+ \left(\Gamma^4 - 3\,\Gamma'^2 - 4\,\Gamma\Gamma'' - \frac{11}{2}\,\Gamma^2 K + K^2 + \frac{5}{4} m^r \varkappa_1 \bar{\mu}_1 + \right. \\
&\left. + \frac{3}{8} m^{r2} \cdot \Delta K_2\right) + i\,(-6\,\Gamma^2 \Gamma' + \Gamma''' + 4\,\Gamma' K) + \\
&+ \left(-25\,\Gamma\Gamma'\bar{\mu}_1 + i\left(-15\,\Gamma^3 \bar{\mu}_1 + 5\,\Gamma''\bar{\mu}_1 + 15\,\Gamma K \bar{\mu}_1 + \right.\right. \\
&\left.\left. + \frac{7}{2}\,\Gamma m^r \bar{\varkappa}_1\right)\right) \cdot e^{iA} + \left(\left(-\frac{75}{2}\,\Gamma^2 \bar{\mu}_1^2 - \frac{25}{2}\,\Gamma^2 m^r \bar{\mu}_2 + \right.\right. \\
&\left.\left. + \frac{15}{2} K \bar{\mu}_1^2 + \frac{5}{2} K m^r \bar{\mu}_2 + \frac{13}{4} m^r \bar{\varkappa}_1 \cdot \bar{\mu}_1 + \frac{3}{8} m^{r2} \bar{\varkappa}_2\right) + \right. \\
&\left. + i\,(15\,\Gamma' \bar{\mu}_1^2 + 5\,\Gamma' m^r \bar{\mu}_2)\right) \cdot e^{i2A} + i\left(30\,\Gamma \bar{\mu}_1^3 + \frac{55}{2} m^r \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_1 \Gamma + \right. \\
&\left. + \frac{5}{2}\,\Gamma m^{r2} \bar{\mu}_3\right) e^{i3A} + \left(\frac{15}{2}\,\bar{\mu}_1^4 + \frac{51}{4} m^r \bar{\mu}_2 \cdot \bar{\mu}_1^2 + \frac{11}{8} (m^r \bar{\mu}_2)^2 + \right. \\
&\left. + \frac{9}{4} m^{r2} \bar{\mu}_3 \cdot \bar{\mu}_1 + \frac{1}{8} m^{r3} \bar{\mu}_4\right) \cdot e^{i4A}
\end{aligned} \right\} \tag{26}
$$

wo die weiteren eingeführten Ausdrücke durch die Beziehungen

$$
\bar{\varkappa}_1 = \frac{\partial K}{\partial X} - i\,\frac{\partial K}{\partial Y}\,; \quad \bar{\varkappa}_2 = \left(\frac{\partial^2 K}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial Y^2}\right) - i\,2\left(\frac{\partial^2 K}{\partial X\,\partial Y}\right);
$$

$$
\Delta K_2 = \frac{\partial^2 K}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial Y^2} \tag{27}
$$

$$
\bar{\mu}_3 = \frac{\partial \bar{\mu}_2}{\partial X} - i\,\frac{\partial \bar{\mu}_2}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^3 m^r}{\partial X^3} - 3\,\frac{\partial^3 m^r}{\partial X\,\partial Y^2}\right) - i\left(3\,\frac{\partial^3 m^r}{\partial X^2\,\partial Y} - \frac{\partial^3 m^r}{\partial Y^3}\right) \tag{28}
$$

$$
\bar{\mu}_4 = \frac{\partial \bar{\mu}_3}{\partial X} - i\,\frac{\partial \bar{\mu}_3}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^4 m^r}{\partial X^4} - 6\,\frac{\partial^4 m^r}{\partial X^2\,\partial Y^2} + \frac{\partial^4 m^r}{\partial Y^4}\right) -
$$

$$
- i\,4\left(\frac{\partial^4 m^r}{\partial X^3\,\partial Y} - \frac{\partial^4 m^r}{\partial X\,\partial Y^3}\right) \tag{29}
$$

gegeben sind. Die Gleichung des Kurvenbildes in der Ebene ist durch die Reihe

$$Z_2 = Z_1 + Z_1^I \cdot s_2' + \frac{1}{2} Z_1^{II} \cdot s_2'^2 + \frac{1}{6} Z_1^{III} \cdot s_2'^3 + \frac{1}{24} Z_1^{(IV)} \cdot s_2'^4 + \\ + \frac{1}{120} Z_1^{(V)} \cdot s_2'^5 + 6.0. \tag{30}$$

gegeben, deren Ableitung wir soeben festgestellt haben.

III. Die geodätischen Polarkoordinaten des Kurvenbildes auf der anderen Fläche

Die Ableitung wird unter der Voraussetzung gegeben, dass wir die geodätische Krümmung des Bildes der Kurve k' in einem ihrer beliebigen Punkte bestimmen können, d. h., dass wir die Ableitung dieser Krümmung nach der

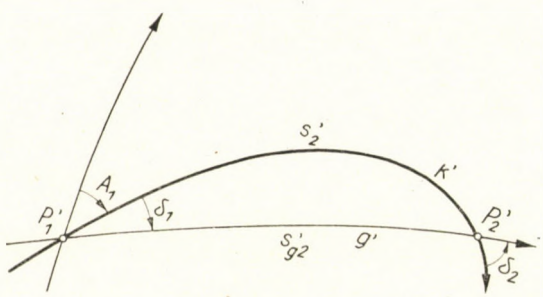


Bild 3/a

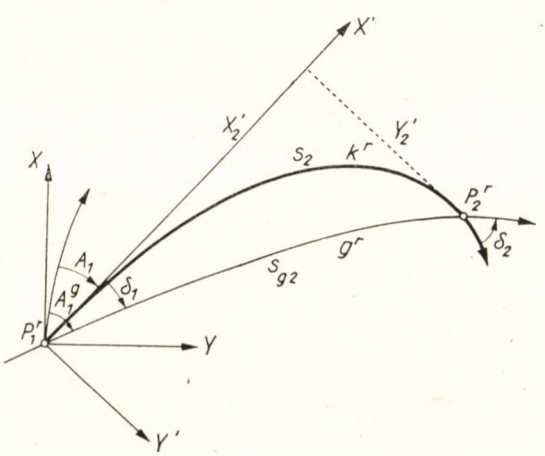


Bild 3/b

Länge des Kurvenbildes kennen. Wir definieren die Richtungskorrektion δ_1 als einen Winkel (eine Polarkoordinate), der von der Tangente zum Bild der Kurve k' im Punkte P_1' zur Tangente der geodätischen Linie g' gemessen wird, welche den Punkt P_1' mit dem Punkt P_2' des Bildes der allgemeinen Kurve verbindet, deren Länge s_g' (zweite Polarkoordinate) ist. Diese beiden Grössen bestimmen wir als die Funktionen der Länge des Bildes der allgemeinen Kurve s' als Parameter (s. Bild 3a, 3b).

Der Grundgedanke ist folgender: Vom Punkt P_1^r geht das Ebenbild der allgemeinen Kurve k' und der geodätischen Kurve g' aus. Die Bilder bilden zwischeneinander einen ebenso grossen Winkel wie die Grösse der Richtungskorrektion auf der zweiten Fläche, und schneiden sich im Punkt P_2^r, der das Ebenbild des Schnittpunktes P_2' der Kurve k' und g' auf der zweiten Fläche darstellt. Demzufolge müssen die Koordinaten dieses Punktes für beide Kurven identisch sein.

Die Gleichung des zweiten Bildes k^r der Kurve k' ist durch das Verhältnis (30) gegeben. Wenn wir das koordinierte System $(X'Y')$ in der Ebene so wählen, dass die Achse X' die Tangente zum Kurvenbild k^r und der Nullpunkt der Koordinaten im Punkt P_1^r ist, gilt $X_1 = Y_1 = 0$ und $A_1 = 0$. Für das Bild der geodätischen Kurve gelten ähnliche Gleichungen:

$$Z_{g2} = Z_{g1} + Z_{g1}' \cdot s_g' + \frac{1}{2} Z_{g1}^{II} \cdot s_g'^2 + \frac{1}{6} Z_{g1}^{III} \cdot s_g'^3 + \frac{1}{24} Z_{g1}^{(IV)} \cdot s_g'^4 + \tag{31}$$

$$+ \frac{1}{120} Z_{g1}^{(V)} s_g'^5 + 6.\,0.$$

In den Ableitungen sind die geodätische Krümmung und ihre Ableitung gleich Null. Als den Richtungswinkel des Bildes der geodätischen Kurve setzen wir dann die Richtungskorrektion δ_1. Dann gilt natürlich $Z_{g1} = 0$. Die Grundbedingung ist

$$Z_2 + Z_{g2} \tag{32}$$

Nach Kürzung mit m_1^r bekommen wir eine Beziehung, aus der wir nur die Anfangsglieder anführen:

$$s_2' + \frac{1}{2}(i\,\Gamma + \bar{\mu}_1)_1 \cdot s_2'^2 + \ldots = e^{i\delta_1} \cdot s_g' + \frac{1}{2}(\bar{\mu}_1)_1 \cdot e^{i2\delta_1} \cdot (s_g')^2 + \ldots \tag{33}$$

In dieser Komplexgleichung haben wir die Unbekannten δ_1 und s_{g2}'. Wir stellen sie durch sukzessive Approximation fest, wobei wir stets den realen Teil vom imaginären scheiden und mit notwendiger Präzision die exponentialen Funktionen entwickeln. So bekommen wir (IV) und (V).

$$s'_g = s'_2 - \frac{1}{24}\Gamma_1^2 s_2'^3 - \frac{1}{24}\Gamma_1\Gamma_1^I s_2'^4 + \frac{1}{120}\left(\frac{1}{16}\Gamma^4 - \right.$$
$$\left. - \frac{4}{3}\Gamma^{I2}\frac{3}{2}\Gamma\Gamma^{II} - \frac{1}{2}\Gamma^2 K\right)_1 s_2'^5 + \ldots \qquad \text{(IV)}$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2}\Gamma_1 s'_2 + \frac{1}{6}\Gamma_1^I s_2'^2 + \frac{1}{24}(\Gamma^{II} + \Gamma K)_1 s_2'^3 +$$
$$+ \frac{1}{120}\left(\Gamma^{III} - \frac{1}{6}\Gamma^2\Gamma^I + \frac{7}{3}\Gamma^I K + 2\Gamma K'\right)_1 s_2'^4 + \ldots \qquad \text{(V)}$$

Dann können wir das Element der Originalkurve k mit

$$ds = \frac{1}{m} \cdot ds' \qquad (34)$$

ausdrücken ; nach Entwicklung und Integration bekommen wir die Länge der Originalkurve s als Funktion des s'_2 :

$$s_2 = \frac{1}{m_1} \cdot s'_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)_1^I \cdot s_2'^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{m}\right)_1^{II} \cdot s_2'^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{m}\right)_1^{III} \cdot s_2'^4 +$$
$$+ \frac{1}{120}\left(\frac{1}{m}\right)_1^{IV} \cdot s_2'^5 + gl.\,6.\,0.\,in\,s' \qquad \text{(VI)}$$

IV. Das Kurvenbild im rechtwinkligen halb-geodätischen System der Koordinaten

Bestreben wir uns jetzt noch die Lage des allgemeinen Punktes P' auf der zweiten Fläche durch die rechtwinkligen geodätischen Koordinaten u' und v' zu bestimmen, wobei v' die Länge der geodätischen Senkrechten und u' die vom Punkt P_1' zum Fusspunkt Q' dieser Senkrechten gemessene Entfernung ist (s. Bild 4a, 4b). Die Tangente zur Richtung g' in Q' geht in die Tangente zum positiven Sinn der geodätischen Senkrechten durch Drehung um $\frac{\pi}{2}$ über. Dieses System bilden wir — wie vorher — konform in die Ebene ab. Wenn wir annehmen, dass die Endpunkte P_1' u. P_2' fest sind und der Punkt P' sich auf der Kurve k' bewegt, können wir die Koordinaten des Punktes P' auf zweifache Weise bestimmen. Erstens direkt, als die Koordinaten des Punktes auf der

Kurve k^r und zweitens als Summe der Koordinatenunterschiede zwischen den Punkten P_1^r und Q^r auf dem Bilde der geodätischen Hauptlinie g^r und den Punkten Q^r u. P^r auf dem Bilde der senkrechten geodätischen Linie n^r. So können wir für die aus den Koordinaten des Punktes P^r bestehende Komplexzahl

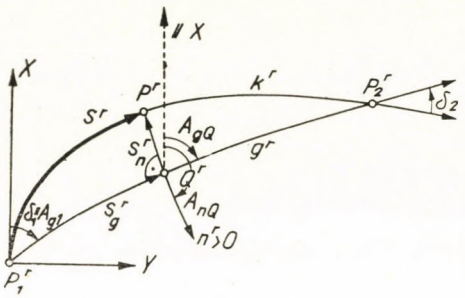


Bild 4/a

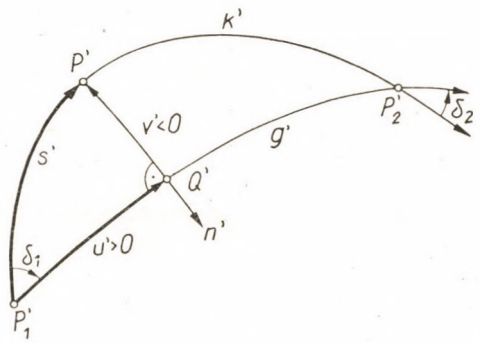


Bild 4/b

die aus den Gleichungen (36a), (36b), (36c) bestimmte Beziehung (35) schreiben,

$$Z = Z_{gQ} + \Delta Z_n \tag{35}$$

$$Z = Z_1^I \cdot s' + \frac{1}{2} Z_1^{II} \cdot s'^2 + \ldots \tag{36a}$$

$$Z_{gQ} = Z_{g1}^I \cdot \mu' + \frac{1}{2} Z_{g1}^{II} \cdot \mu'^2 + \ldots \tag{36b}$$

$$\Delta Z_n = Z_{nQ}^I \cdot v' + \ldots \tag{36c}$$

wo bei derselben Wahl des Koordinatensystemes die Ableitungen durch die Gleichungen

$$Z_1^I = m_1^r; \quad Z_1^{II} = m_1^r (i\,\Gamma + \bar{\mu}_1)_1; \quad \ldots \tag{37a}$$

$$Z_{g1}^I = m_1^r \cdot e^{i\delta_1}; \quad Z_{g1}^{II} = m_1^r (\bar{\mu}_1)_1 \cdot e^{i2\delta_1}; \quad \ldots \tag{37b}$$

$$Z_{nQ}^I = i\, m_Q^r\, e^{iAgQ}; \quad \ldots \tag{37c}$$

bestimmt sind, denn $A_1 = 0$, $A_{g1} = \delta_1$ und $A_{nQ} = A_{gQ} + \frac{\pi}{2}$. Wir entwickeln

noch die Elemente in den Ableitungen für den Punkt Q und ersetzen sie durch Ausdrücke für den Punkt P_1'. Durch sukzessive Approximation bekommen wir die Gleichungen (VII) und (VIII).

$$
\begin{aligned}
u' = {} & s' + \frac{1}{24}\Gamma_1^2(-4s'^3 + 6s_2's'^2 - 3s_2'^2 s') + \\
& + \frac{1}{24}\Gamma_1\Gamma_1^I(-3s'^4 + 2s_2's'^3 + 2s_2'^2 s'^2 - 2s_2'^3 s') + \\
& + \frac{1}{96}\left\{\begin{aligned}
& + \Gamma_1\Gamma_1^{II}\left(-\frac{16}{5}s'^5 + 2s_2's'^4 + \quad\cdot\quad + 2s_2'^3 s'^2 - 2s_2'^4 s'\right) \\
& + \Gamma_2^{I2}\left(-\frac{12}{5}s'^5 \quad\cdot\quad + \frac{8}{3}s_2'^2 s'^3 \quad\cdot\quad - \frac{4}{3}s_2'^4 s'\right) \\
& + \Gamma_1^4\left(+\frac{4}{5}s'^5 - 2s_2's'^4 + 2s_2'^2 s'^3 - 1\cdot s_2'^3 s'^2 + \frac{1}{4}s_2'^4 s'\right) \\
& + \Gamma^2 K\left(+\frac{28}{5}s'^5 - 14s_2's'^4 + 8s_2'^2 s'^3 + 2\cdot s_2'^3 s'^2 - 2s_2'^4 s'\right)
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}
\tag{VII}
$$

$$
\begin{aligned}
v' = {} & \frac{1}{2}\Gamma_1(s'^2 - s_2's') + \frac{1}{6}\Gamma_1^I(s'^3 - s_2'^2 s') + \\
& + \frac{1}{24}\left\{\begin{aligned}
& + \Gamma_1^{II}(s'^4 - s_2'^3 s') \\
& + \Gamma_1^3\left(-s'^4 + 2s_2's'^3 - \frac{3}{2}s_2'^2 s'^2 + \frac{1}{2}s_2'^3 s'\right) \\
& + \Gamma_1 K_1(-s'^4 + 2s_2's'^3 \quad\cdot\quad - 1s_2'^3 s')
\end{aligned}\right\} + \\
& + \frac{1}{120}\left\{\begin{aligned}
& + \Gamma_1^{III}(s'^5 \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad - s_2'^4 s') \\
& + \Gamma_1^2\Gamma_1^I\left(-6s'^5 + \frac{15}{2}s_2's'^4 + \frac{5}{6}s_2'^2 s'^3 - 5s_2'^3 s'^2 + \frac{8}{3}s_2'^4 s'\right) \\
& + \Gamma_1^I K_1\left(-s'^5 \quad\quad + \frac{10}{3}s_2'^2 s'^3 \quad\quad - \frac{7}{3}s_2'^4 s'\right) \\
& + \Gamma_1 K_1^I(-3s'^5 + 5s_2's'^4 \quad\quad - 2s_2'^4 s')
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}
\tag{VIII}
$$

Schlussfolgerung. Aus den Gleichungen (IV) und (V) ist ersichtlich, dass das Gaussche Krümmungsmass bei der Richtungskorrektion schon im Glied der 3. Ordnung zum Vorschein kommt, seine Änderung aber erst in der 4. Ordnung. Das hat seine Bedeutung bei der Entscheidung, ob es möglich ist mit Formeln zu rechnen, die für eine Ebene, eine Kugel oder für ein Ellipsoid gelten. Die Formeln (VII) und (VIII) können für die Analyse des Verlaufes des Kurvenbildes angewandt werden. In den Formeln treten keine Konstanten der angewendeten oberen Abbildung auf. Es scheint, dass die angeführte Formulation der allgemeinen winkeltreuen Abbildung mit den eingeführten Ausdrücken μ_1, $m\mu_2$ usw. auch für andere Aufgaben von grossem Nutzen ist.

Die Endgleichungen sind von Interesse bei Auswertung geodätischer Aufgaben bei längeren geodätischen Linien unter Benützung der Abbildung auf eine einfachere Abbildungsfläche, z. B. Kugel.

SCHRIFTTUM

L. Driencourt—J. Laborde: Traité des projections des cartes géographiques. Paris, 1932.
Frant. Fiala: Matematická kartografie. Praha, 1955.
F. Biernacki: Teorie odwzorowań powierchni dla geodetów i kartografów. Warszawa, 1949.
C. F. Bäschlin: Einführung in die Kurven- und Flächentheorie. Zürich, 1947.
C. F. Bäschlin: Lehrbuch der Geodäsie. Zürich, 1948.
V. K. Christov: Allgemeine Formeln für die Richtungs- und Entfernungsreduktion für eine beliebige Fläche und eine beliebige konforme Abbildung. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1938.
V. K. Christov: Weitere allgemeine formeln für die Richtungs- und Entfernungsreduktion für eine beliebige Fläche und eine beliebige konforme Abbildung. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1940.
H. M. Dufour: Étude générale de la correction angulaire finie (réduction à la corde). Bulletin géodésique, 1952.
Ch. M. Schols: La courbure de la projection de la ligne géodésique. Annales de polytechniques de Delft, 1886.
Jan Kašpar: Směrová a délková korekce v obecném zobrazení plochy. Sborník fakulty zeměměřického inženýrství. Praha, 1955.

DIE BERECHNUNG DER ELLIPSOIDISCHEN BOGENLÄNGE VON MERIDIANSCHNITTEN UND NORMALSCHNITTEN MITTELS RECHENMASCHINE

GY. SZÁDECZKY-KARDOSS
SOPRON

Bei den neuerdings erscheinenden, vielstelligen trigonometrischen Tafeln sind deren Verfasser von dem Ziel geleitet, die Funktionenwerte für mehr Dezimalstellen anzugeben als dies bisher geschah. Sie geben diese Werte jedoch nicht mit jener Häufigkeit an, als sie dies bei den früheren Tabellen taten. Die aus den Tabellen gesuchten Werte müssen daher in jedem Falle durch Interpolation mit höheren Differenzen bestimmt werden.

Auf diese Weise bieten die zur Berechnung der Meridianbogenlänge vom Equator bis zu der geographischen Breite φ bisher (z. B. [1]—[4]) gebrauchten Formeln

$$B = \frac{a^2}{b}\int \frac{d\varphi}{V^3} = A_0\varphi + A_2 \sin 2\varphi + A_4 \sin 4\varphi + \\ + A_6 \sin 6\varphi + A_8 \sin 8\varphi + \ldots \tag{1}$$

bzw. jene der auf demselben Meridian liegenden, von P_1 und P_2 begrenzten Bogenlänge

$$b = A_0 \Delta\varphi + A_2(\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) + A_4(\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1) + \\ + A_6(\sin 6\varphi_2 - \sin 6\varphi_1) + A_8(\sin 8\varphi_2 - \sin 8\varphi_1) + \ldots \tag{2}$$

wegen des vielen Funktionswertsuchens keine bequeme Lösung.

Wir können eine neue, die Vorzüge des Rechnens mittels Rechenmaschine besser ausnutzende und weniger Funktionswertsuchen beanspruchende Formel ableiten, indem wir die Reihenentwicklung der Hilfsgrösse des elliptischen Integrals :

$$\frac{1}{V^3} = 1 - \frac{3}{2}e'^2\cos^2\varphi + \frac{15}{8}e'^4\cos^4\varphi - \frac{35}{16}e'^6\cos^6\varphi + \\ + \frac{315}{128}e'^8\cos^8\varphi - \ldots \tag{3}$$

nicht zur Fourier-Reihe entwickeln, wie dies bei den bisherigen Ableitungen getan wurde, sondern unmittelbar die sogenannte Rekursionsformel-Kosinus :

$$\int \cos^n \varphi \, d\varphi = \frac{1}{n} \sin \varphi \cos^{n-1} \varphi + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} \varphi \, d\varphi \tag{4}$$

anwenden, wobei wir zuerst das Integral des $\cos^2 \varphi$ und dann der Reihe nach jenes der Werte der übrigen Potenzen berechnen. So ergibt sich für die Formel der Meridianbogenlänge :

$$\begin{aligned} B = D_0 \varphi + \sin \varphi (D_1 \cos \varphi + D_3 \cos^3 \varphi + D_5 \cos^5 \varphi + \\ + D_7 \cos^7 \varphi + D_9 \cos^9 \varphi + \ldots) \end{aligned} \tag{5}$$

bzw. für die von den Punkten P_1 und P_2 begrenzte Bogenlänge :

$$\begin{aligned} b = B_{\varphi_2} - B_{\varphi_1} = D_0 \Delta \varphi + \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 (D_1 + D_3 \cos^2 \varphi_2 + \\ D_5 \cos^4 \varphi_2 + D_7 \cos^6 \varphi_2 + \ldots) - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 (D_1 + D_3 \cos^2 \varphi_1 + \\ + D_5 \cos^4 \varphi_1 + D_7 \cos^6 \varphi_1 + \ldots) \end{aligned} \tag{6}$$

Die Koeffizienten D_0 — D_9 enthalten die mit bestimmten Bruchwerten multiplizierten geradzahligen Potenzen der zweiten numerischen Exzentrizität und den vor dem Integralzeichen figurierenden Multiplikator a^2/b.

Zu den Formeln der Länge eines begrenzten Meridianbogens können auch bis zu bestimmten Grenzen brauchbare Näherungsformeln angewendet werden.

Bei den Näherungsformeln können wir den Krümmungshalbmesser eines der beiden Punkte bzw. deren verschiedene Mittelwerte anwenden und dabei folgende Näherungsformeln einführen :

Für kurze Bogenlängen (bei $\varphi_1 = 47°$, bei Berechnungsverfahren bis 3,6 km) mit cm-Schärfe brauchbar :

$$b \doteq \Delta \varphi R_1 \tag{7}$$

für Bogen von mittlerer Länge $\left(\text{bei } \varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 47° \text{ bis zu } 152{,}0 \text{ km}\right)$:

$$b \doteq \frac{1}{2} \Delta \varphi (R_1 + R_2) \tag{8}$$

$$b \doteq \Delta \varphi \sqrt{R_1 R_2} \tag{9}$$

$$b \doteq \Delta \varphi R_0 \tag{10}$$

schliesslich für lange Strecken (im Falle von $\varphi_0 = 47°$, wenn die Berechnung bis zur cm-Schärfe erfolgt, bis zu 1534,6 km) :

$$b \doteq \frac{1}{6} \Delta\varphi (R_1 + 4R_0 + R_2) \tag{11}$$

Von den aufgezählten Näherungen ist die Lösung (7) und (10) in der Fachliteratur vorzufinden ([3], Seite 268), auch die Anwendbarkeit derselben ist angegeben laut Potenzreihe der geographischen Breitendifferenz bis zur vierten Potenz des $\Delta\varphi$. Um sie mit den weiteren Ergebnissen vergleichen zu können, haben wir die Reihen von neuem entwickelt und bis einschliesslich der Potenz $\Delta\varphi^2$ des Gliedes fünfter Ordnung von η^2 erweitert.

Die Untersuchungen ergaben folgendes Resultat : Die statt der Näherungen (7)—(11) bis zur entsprechenden fünften Potenz entwickelten Formeln sind folgende :

$$b = \Delta\varphi R_1 \left[1 + \frac{\eta_1^2}{V_1^2} t_1 \frac{3}{2} \Delta\varphi + \frac{\eta_1^2}{V_1^4} (1 - t_1 + \eta_1^2 + 4 t_1^2 \eta_1^2) \frac{\Delta\varphi^2}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\eta_1^2}{V_1^6} t_1 (-4 + 7\eta_1^2 - 15 t_1^2 \eta_1^2) \frac{\Delta\varphi^3}{8} - \frac{\eta_1^2}{V_1^8} (1 - t_1^2) \frac{\Delta\varphi^4}{10} + \ldots \right] \tag{12}$$

$$b = \frac{1}{2} \Delta\varphi (R_1 + R_2) \left[1 - \frac{\eta_0^2}{V_0^4} (1 - t_0^2 + \eta_0^2 + 4 t_0^2 \eta_0^2) \frac{\Delta\varphi^2}{4} + \right.$$
$$\left. + \frac{\eta_0^2}{V_0^8} (1 - t_0^2) \frac{\Delta\varphi^4}{40} + \ldots \right] \tag{13}$$

$$b = \Delta\varphi \sqrt{R_1 R_2} \left[1 - \frac{\eta_0^2}{V_0^4} \left(1 - t_0^2 + \eta_0^2 - \frac{1}{2} t_0^2 \eta_0^2\right) \frac{\Delta\varphi^2}{4} + \right.$$
$$\left. + \frac{\eta_0^2}{V_0^8} (1 - t_0^2) \frac{\Delta\varphi^4}{40} + \ldots \right] \tag{14}$$

$$b = \Delta\varphi R_0 \left[1 + \frac{\eta_0^2}{V_0^4} (-t_0^2 + \eta_0^2 + 4 t_0^2 \eta_0^2) \frac{\Delta\varphi^2}{8} - \frac{\eta_0^2}{V_0^8} (1 - t_0^2) \frac{\Delta\varphi^4}{160} + \ldots \right] \tag{15}$$

$$b = \frac{1}{6} \Delta\varphi (R_1 + 4R_0 + R_2) \left[1 + \frac{\eta_0^2}{V_0^8} (1 - t_0^2) \frac{\Delta\varphi^4}{240} + \ldots \right] \tag{16}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die aus dem Krümmungshalbmesser eines der Endpunkte P_1 des Bogens abgeleitete Formel (7) von der richtigen Formel um das Glied zweiter Potenz der Breitendifferenz abweicht, und wenn $\varphi_1 > 45°$

ist, erhalten wir weniger als den genauen Wert. Zwischen den aus dem arithmetischen Mittel der beiden Krümmungshalbmesser gebildeten Werten (8) und dem richtigen Wert (13) weicht sie um das Glied $\Delta\,\varphi^3$ ab, im Falle von $\varphi_0 > 45°$ erhalten wir weniger als den richtigen Wert. Das Abweichen von dem richtigen Wert ist bei der aus dem geometrischen Mittel des Krümmungshalbmessers gebildeten Näherungsgleichung (9) von derselben Grössenordnung und Tendenz wie vorher. Bei der Formel (10) des die Mittelbreite betreffenden R_0 Krümmungshalbmessers ist die Abweichung ungefähr die Hälfte der obenerwähnten. Schliesslich weicht die Differenz zwischen der aus der Formel (11) gebildeten Näherung und der richtigen Formel (16) nur um die fünfte und höhere Potenz der geographischen Breitendifferenz ab. Wenn $\varphi_0 > 45°$ ist, so ist der berechnete Wert mehr als der richtige Wert. Aus der Gleichung (16) können wir auch die obere Grenze der Brauchbarkeit der Formel mit der für die verschiedenen geographischen Breiten erforderlichen Genauigkeit bestimmen, z. B. bei $\varphi_0 = 47°$ ist die bei mm-Schärfe bis zu 1046,9 km anwendbar.

Zum Schluss wollen wir uns noch mit jenem Falle der Bogenlängenberechnung beschäftigen, in welchem die Stellung der beiden Punkte beliebig ist und die dem — die Normale des einen Punktes durchquerenden — Normalschnitt entlang messbare Bogenlänge untersuchen.

Wenn auf dem Rotationsellipsoid die beiden Punkte P_1 und P_2 nicht auf einem Meridian liegen, sondern auf der Normale des P_1 und in der — den Punkt P_2 durchquerenden — Normalschnittebene, so sind die Gleichungen (6) bzw. (12)—(16) auch in diesem Falle anwendbar, jedoch muss hier statt der geographischen Breite der Punkte der durch die Achse der Schnittellipse eingeschlossene Φ_1, bzw. Φ_2, der sogenannte Neigungswinkel der in der Schnittebene liegenden Normalen eingesetzt werden. Ferner verwenden wir statt der in den erwähnten Formeln figurierenden ellipsoidischen Dimensionen und der numerischen Exzentrizität die Achsendimensionen der Schnittellipse und deren numerische Exzentrizität. Geometrisch auf die gleiche Weise entwickelte, aber andere Formeln gibt BOMFORD bekannt ([5] p. 89) ; er gebraucht bei diesem Verfahren jedoch nicht die Neigungswinkel der Normalen, sondern die exzentrischen Anomalien und seine Formeln sind nicht bloss durch die geographischen Koordinaten gegeben, sondern es kommt in denselben sogar das Azimut der Normalschnittebene vor.

Wie wir es in einem unserer Studien ([6], Formeln 83, 118, 130) untersucht haben, können wir den Neigungswinkel der Normalen der Punkte P_1 und P_2 aus den Formeln :

$$\operatorname{tg}\Phi_1 = \operatorname{tg}\varphi_1 \sqrt{1 + H^2 \sec^2 \varphi_1} \tag{17}$$

$$\operatorname{tg}\Phi_2 = \operatorname{tg}\varphi_2 \frac{1 + H^2 \left(e^2 \dfrac{T_1}{T_2} + L \right)}{(1 + H^2 \sec^2 \varphi_1)^{1/2} (\cos \Delta\lambda + H \operatorname{tg}\varphi_1 \sin \Delta\lambda)} \tag{18}$$

die zweite numerische Exzentrizität der Schnitt-Ellipse aus der Formel:

$$e_0'^2 = e'^2 \frac{1 + H^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_1}{1 + H^2 \sec^2 \varphi_1} \tag{19}$$

bestimmen. Den zur Berechnung der Bogenlänge notwendigen Multiplikationsfaktor gewinnen wir aus den Formeln der Studie [6; Formeln 80—81].

$$\frac{a_0^2}{b_0} = \frac{a^2}{b} \left(\frac{1 + H^2 K}{1 + H^2 \sec^2 \varphi_1} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

In diesen Formeln sind K, L, T_1 von der geographischen Breite des Punktes P_1 abhängige Faktoren; T_2 hängt von der geographischen Breite des Punktes P_2 ab; ihren Ausdruck können wir ebenfalls aus der Formel [6; p. 260, 59—61] berechnen; aber diese Werte können für ein bestimmtes Ellipsoid in der Funktion der geographischen Breite auch in eine Tabelle gefasst werden. Der Wert des H, bzw. B hängt von den geographischen Koordinaten beider Punkte ab; sie können auf Grund von [6; p. 260, (58) bzw. p. 258, (51)] bestimmt werden.

Nehmen wir ein Zahlenbeispiel zur Demonstration der Rechnung nach (6), bzw. nach Näherungsformeln (7)—(11) und nach Gl. (16) an. Gegeben sind zwei Punkte (P_1 und P_2) mit ihren geographischen Koordinaten, bezogen auf das Krassowskysche Ellipsoid:

P_1 ($\varphi_1 = +\ 47°41'\ 00{,}00000''$ $\quad \lambda_1 = -\ 16°35'\ 00{,}00000''$)

P_2 ($\varphi_2 = +\ 38°42'\ 30{,}00000''$ $\quad \lambda_2 = +\ 8°56'\ 10{,}00000''$)

Die Neigungswinkeldifferenz zwischen den Normalen der zwei Punkte ist ziemlich gross, etwa 20,5°. Zuerst werden wir die Bogenlänge mit der Gl. (6) berechnen. Für den zu P_1 gehörenden Normalschnitt bekommen wir die folgenden Werte:

$K = 2{,}199\ 640\ 747\ 470$ $\quad T_2 = +\ 26{,}732\ 893\ 021\ 11$

$L = 2{,}199\ 665\ 333\ 536$ $\quad B = +\ 0{,}188\ 816\ 546\ 968$

$T_1 = +\ 31\ 626{,}105\ 237\ 90$ $\quad H = +\ 2{,}281\ 671\ 754\ 489$

Aus diesen Werten berechnen wir:

$e_0'^2 = 0{,}003\ 928\ 984\ 798$ $\quad \Phi_1 = 75°33'05{,}542\ 274''$

$a_0^2/b_0 = 6390\ 729{,}883\ 28$ $\quad \Phi_2 = 55°01'26{,}191\ 172''$

Die Bogenlänge zwischen den Punkten P_1 und P_2 aus Formel (6) ist:

$$s = 2\ 287\ 184{,}3076 \text{ m}$$

Zur Auflösung der Näherungsformeln haben wir noch folgende Werte berechnet:

$\eta_1^2 = 0{,}000\ 244\ 597\ 972$ $\quad R_1 = 6\ 388\ 385{,}8606$ m

$\eta_2 = 0{:}001\ 291\ 052\ 883$ $\quad R_2 = 6\ 378\ 373{,}6707$ m

$\eta_0^2 = 0{,}000\ 686\ 689\ 803$ $\quad R_0 = 6\ 384\ 152{,}8560$ m

Aus Gl. (7) $s = 2\,288\,793{,}6060$ m

aus Gl. (8) $s = 2\,287\,000{,}0515$ m

aus Gl. (9) $s = 2\,286\,999{,}3482$ m

aus Gl. (10) $s = 2\,287\,277{,}0298$ m

aus Gl. (11) $s = 2\,287\,184{,}7037$ m, und schliesslich

aus Gl. (16) $s = 2\,287\,184{,}3035$ m.

Ähnlicherweise bekommt man für den zu P_2 gehörenden Normalschnitt:

$K = +\ 1{,}635\,514\,775\,154$ $\quad T_2 = +\ 26{,}735\,893\,021\,11$

$L = +\ 1{,}635\,532\,341\,833$ $\quad B = -\ 0{,}374\,000\,585\,803$

$T_1 = +\ 31\,626{,}105\,237\,90$ $\quad H = +\ 1{,}151\,916\,329\,414$

$e'^2_0 = 0{,}003\,925\,949\,737$ $\quad \Phi_1 = 75°32'28{,}864\,957''$

$a^2_0/b_0 = 6\,390\,729{,}575\,58$ $\quad \Phi_2 = 55°00'49{,}513\,858''$

Die nach Gl. (6) berechnete Bogenlänge zwischen Punkten P_2 und P_1 ergab:

$$s = 2\,287\,184{,}3081 \text{ m}$$

und

$\eta^2_1 = 0{,}000\,244\,746\,480$ $\quad R_1 = 6\,388\,384{,}1303$ m

$\eta^2_2 = 0{,}001\,290\,712\,441$ $\quad R_2 = 6\,378\,376{,}6169$ m

$\eta^2_0 = 0{,}000\,686\,689\,671$ $\quad R_0 = 6\,384\,152{,}5495$ m

Die aus den Näherungsformeln berechneten Werte der Bogenlänge zwischen Punkten P_2 und P_1 ergeben:

aus Gl. (7) $s = 2\,288\,792{,}9860$ m

aus Gl. (8) $s = 2\,287\,000{,}2693$ m

aus Gl. (9) $s = 2\,286\,999{,}5666$ m

aus Gl. (10) $s = 2\,287\,276{,}9199$ m

aus Gl. (11) $s = 2\,287\,184{,}7030$ m, und schliesslich

aus Gl. (16) $s = 2\,287\,184{,}3033$ m.

SCHRIFTTUM

1. Helmert, Fr. R.: Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie. 1. Teil. Leipzig, 1880, B. G. Teubner.
2. Baeschlin, C. Fr.: Lehrbuch der Geodäsie. Zürich, 1948. Orell Füssli Verl.
3. Jordan—Eggert: Handbuch der Vermessungskunde. III. Bd. 1. Halbbd. 9. Aufl. Leipzig, 1948. J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung.
4. Hristow, W. K: Die Gaussschen und geographischen Koordinaten auf dem Ellipsoid von Krassowsky. Berlin, 1955. VEB Verlag Technik.
5. Bomford, G.: Geodesy. Oxford, 1952. Clarendon Press.
6. Szádeczky-Kardoss, Gy.: Forgási ellipszoid normálmetszetének egységes vizsgálata (Einheitliche Untersuchung des Normalschnittes des Rotationsellipsoids). A Magyar Tudományos Akadémia Müszaki Tudományok Osztályának Közleményei, Band XVIII., 1—4., pp. 247—275.

IV. Nivellierungskolloquium

EINIGE ERFAHRUNGEN BEI DER ENTWICKLUNG DES NIVELLEMENTGRUNDNETZES IN DER TSCHECHOSLOWAKEI

Prof. Dr. J. BÖHM
PRAHA

Die wichtigste wissenschaftliche Bedeutung der internationalen Nivellementnetze liegt in der Möglichkeit eines Vergleiches der Meeresniveaus und des Studiums der geologischen Bewegungen der Erdkruste. So hilft das Nivellement die Erforschung unseres Planeten und gibt die Grundlagen für die grössten und langfristigen technischen Projekte. Dazu ist aber eine möglichst hohe Genauigkeit des Netzes nötig.

Das tschechoslowakische Grundnetz ist nicht gross (27 Polygone mit einer gesamten Länge von ca. 5700 km). Ihre Einmessung dauerte des Krieges wegen zu lange (1939—55). Es wurden übliche Instrumente mit der Parallelplatte (Zeiss, Wild, Kern) und Invarlatten benutzt. Die Messungsmethode und die Arbeitsorganisation wurde dem Zwecke, den Einfluss der systematischen Fehler womöglich auszuscheiden, angepasst: symmetrische Folge der Ablesungen, Messungszeit auch früh am Morgen, Kontrollen des Lattenmeters im Feld, Wechsel der Stativbeine, höhere Sichten als 50 cm. Es wurden nicht lange Strecken durchlaufend in einer Richtung gemessen, sondern sie waren auf kurze (ca. 20 km) Abschnitte verteilt und diese von der Mitte anfangend eingemessen. Zu Beginn der Feldarbeiten wurden die Beobachter geübt und die Instrumente geprüft auf einem Übungs- und Versuchspolygon, wobei nicht mit Zeit und Geld gespart wurde.

Die Ergebnisse unseres Nivellements sind in einer Hinsicht sehr interessant. So z. B. sollte sich der Einfluss der systematischen Fehler im steigenden Mittelwert $\frac{\lambda^2}{L}$ (wo λ der Unterschied der 2 Messungen, L die Streckenlänge ist) bis zu einem Grenzwert (ca. $L = 50$ km) geltend machen. Dagegen bekommen wir im tschech. Netze folgende Werte (in km und Hundertstel von mm):

L (km)	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90	100
$\left[\frac{\lambda^2}{L}\right] : n$	65	66	64	69	64	63	50	52	47	58	26	28	10
n	98	98	97	95	90	86	76	59	43	31	22	14	6

Man sieht keinen Zuwachs der Werte mit L, im Gegenteil zeigt sich sogar ihre Abnahme ab $L = 30$ km. Eine weitere Prüfung — empirisches Suchen der Werte des zufälligen mittleren Fehlers η (proportionell $\sqrt{L}$ zunehmend), des systematischen Fehlers σ (prop. L zunehmend) und des systematischen Fehlers $\varkappa$ (prop. H zunehmend) (Höhenunterschied zwischen den Knotenpunkten; hauptsächlich handelt es sich um den Fehler in der Lattenmeterbestimmung) — wurde durch die Ausgleichung der 98 Fehlergleichungen

$$v_i = \eta^2 \cdot L_i + \sigma^2 \cdot L_i^2 + \varkappa^2 \cdot H_i^2 - \frac{\lambda_i^2}{4}, \quad m_L^2 = \frac{\lambda_i^2}{4} + v_i$$

durchgeführt mit den Ergebnissen

$$\eta^2 = +\,0{,}31, \quad \sigma^2 = -\,0{,}0023, \quad \varkappa^2 = +\,0{,}000015$$

$$\eta = \pm\,0{,}55 \text{ mm/km}, \quad \sigma = \pm\,0{,}05\,i \text{ mm/km}, \quad \varkappa = \pm\,0{,}004 \text{ mm/m}$$

Der mittlere systematische Fehler hat einen imaginären Wert. Nach den internationalen Formeln bekommen wir

$$\tau^2 = \eta^2 + \xi^2 = 0{,}18 - 0{,}08 = 0{,}10, \quad \tau = \pm\,0{,}004 \text{ mm/m}$$

Der totale mittlere Fehler ist kleiner als der zufällige; die systematische Komponente hat wieder einen imaginären Wert ($\eta = \pm\,0{,}42$ mm, $\xi = \pm\,0{,}27\,i$ mm). Das tschechoslowakische Netz ist also ein Paradox in Europa, was keine Entwertung bedeutet, im Gegenteil, vom guten Ausscheiden der systematischen Fehler zeugt. Leider war dies ohne Nutzen für die endgültige Netzgenauigkeit. Die Polygonschlüsse weisen einen ziemlich grossen mittleren Kilometerfehler von $\pm$ 0,86 mm auf, wie auch die Netzausgleichung ($\pm$ 0,88 mm/km). Manche Fehler wirkten wahrscheinlich im gleichen Sinne bei beiden Messungsrichtungen (Refraktion, Lattenmeterfehler) und ausserdem konnten sich auch die geologischen Bewegungen bei dem zu langsamen Arbeitsgang (16 Jahre) geltend machen.

Die Erforschung der Nivellierrefraktion wurde noch nicht systematisch angefangen. Einige kleinere Studien und Versuche wurden auf der technischen Hochschule in Brno unter der Leitung des Autors von den Assistenten Ing. JAKUBKA und DR. ZEMAN durchgeführt. Es zeigten sich bedeutende Refraktionsfehler bei Nivellierungen in Fabrikhallen mit Dampfkesseln. Man stellte ziemlich intensive Refraktionserscheinungen über grösseren Wasserflächen fest und zwar als Funktion der Wasser- und Lufttemperaturunterschiede (Inversionszeiten gab es immer bei den gleichen Temperaturen).

Ing. JAKUBKA hat eine grössere Anzahl von Versuchsmessungen während des ganzen Jahres zur Prüfung unternommen, ob die bei der Berechnung der

Refraktion benützten Voraussetzungen und Koeffizienten mit genügender Approximation auch wirklich für das Terrain gelten (Verminderung des Temperaturgradienten mit der Höhe über dem Boden, die Krümmung des Strahles auch bei waagerechter Bodenfläche, die angenommenen Werte der Konstanten). Die Versuchsmessungen wurden gleichzeitig auf zwei Pfeilern mit zwei genauen Nivellierinstrumenten durchgeführt. Die Höhe der Pfeiler über dem waagerechten Boden war 60 cm und 210 cm. Vier Latten mit Invarband standen auf fixierten Punkten in der Entfernung von 5, 20, 40, 60 m. (Die Ablesung der ersten Latte gab die Instrumentenhöhe). Die Temperaturen wurden in den

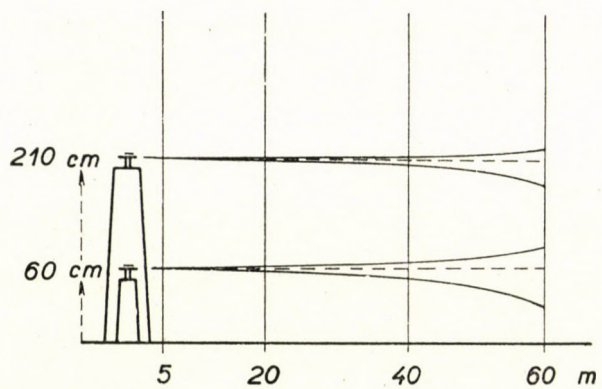


Bild 1

Höhen $z = 10, 110, 160, 260$ cm gleichzeitig abgelesen. Die Gradienten wurden bei dem niedriger liegenden Instrument grösser gefunden ($+ 0{,}3°$ bis—$1{,}2°$/lm, durchschn. $|0{,}5°|$) als bei dem höheren ($+0{,}2°$ bis $- 0{,}7°$, durchschn. $|0{,}2°|$). Die Strahlenkrümmung wurde dem gemessenen Gradienten proportionell gefunden. Der Verlauf des Strahles war einem Kreisbogen ähnlich, der Wert des theoretischen Koeffizienten $K = \frac{93}{10^8}$ wurde — innerhalb der Grenzen des mittleren Fehlers — bestätigt.

ALLGEMEINER AUSDRUCK FÜR DIE NIVELLIERUNGS- UND TACHYMETRISCHE REFRAKTION

Prof. Dr. JOSEF BÖHM
PRAHA

In den bodennahen Luftschichten herrschen besondere klimatische Verhältnisse (das sogenannte Mikroklima). Die Lufttemperatur ändert sich mit der Höhe über der Bodenfläche, der Temperaturgradient erreicht manchmal ziemlich grosse Werte und wird negativ bei der Einstrahlung und positiv bei der Ausstrahlung. Mit der Lufttemperatur ändert sich auch die Luftdichte, was die Brechung der Visur (Refraktion) in vertikalem Sinne verursacht (siehe Bild 1).

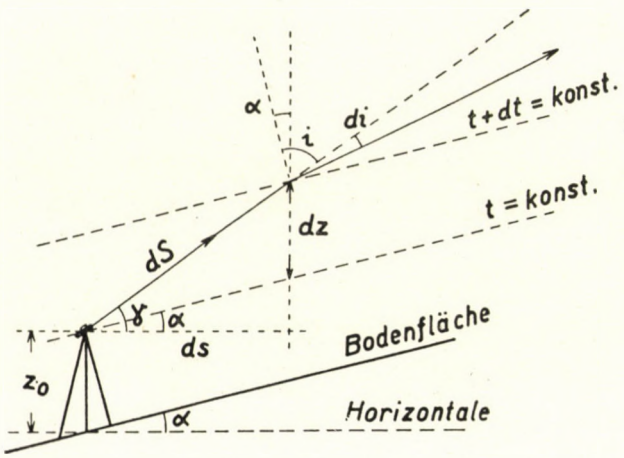


Bild 1

Man bezeichnet mit :

α ... Neigung der Bodenfläche
γ ... Neigung der Visur
z ... Visurhöhe über der Bodenfläche
z_0 ... Instrumentenhöhe
H ... Meereshöhe
n ... Strahlenbrechungsindex
t ... Lufttemperatur
s ... horizontale Zielweite
S ... schiefe Zielweite

Es wird vorausgesetzt, dass die Isothermen in der Luft mit der Bodenfläche parallel sind. Es gelten die Gleichungen

$$n \cdot \sin i = (n + dn) \sin (i + di) = \text{konst.} \quad di = -\frac{dn}{n} \operatorname{tg} i \tag{1}$$

Die Gleichung (1) ist unbestimmt im Falle $i = 90°$ (wobei $dn = 0$ und $\gamma = \alpha$), wo die Visur parallel mit der Bodenfläche geht. Weiter gilt

$$n - 1 = \frac{0{,}000293}{1 + \alpha t} \frac{B}{760}, \qquad \alpha = 0{,}00367, \qquad dn = -\frac{1075 \cdot 10^{-9}}{(1 + \alpha t)^2} \frac{B}{760} dt$$

wo B den barometrischen Druck bedeutet. Das Differential ändert sich sehr wenig mit dem Luftdruck und der Lufttemperatur. Bei der Einführung des mittleren Druckes und Temperatur (730 mm für $H = 350$ m, $t = 15°$) wird die Formel vereinfacht:

$$dn = -93 \cdot 10^{-8} \cdot dt, \quad n = 1, \quad di = 93 \cdot 10^{-8} \cdot \operatorname{tg} i \cdot dt \tag{2}$$

$$i = 90 - (\gamma - \alpha), \quad dS = \frac{\cos \alpha}{\sin (\gamma - \alpha)} dz$$

$$\Gamma = \frac{di}{dS} = \frac{93}{10^8} \frac{\cos (\gamma - \alpha)}{\cos \alpha} \cdot \frac{dt}{dz} = K \frac{\cos (\gamma - \alpha)}{\cos \alpha} \cdot G \tag{3}$$

Hier bedeutet Γ die Krümmung des Strahles, $K = 93 \cdot 10^{-8}$ und G den Temperaturgradienten, gewöhnlich in C°/m ausgedrückt. Im Falle der Parallelität der Visur mit dem Boden ($\gamma = \alpha$):

$$\Gamma = \frac{K}{\cos \alpha} \cdot G, \quad G = \text{konst. (längs der Visur)}$$

So bekommen wir auch da reelle Werte für die Visurkrümmung (mit dem Krümmungsradius $\varrho = 1 : \Gamma$), z. B. für $\cos \alpha = 1$, $G = +1°/1$ m, $\varrho = 1100$ km, $H = -4{,}5$ mm/100 m.

Der Temperaturverlauf wird als eine Funktion der Höhe z über dem Boden ausgedrückt

$$t = F(z) \tag{4}$$

und der Temperaturgradient dann wieder als eine Funktion der Veränderlichen z

$$G = \frac{dt}{dz} = \frac{\partial F(z)}{\partial z} = F_1(z) \tag{5}$$

Weiter führen wir die horizontale Komponente der Zielweite ein

$$ds = dS \cdot \cos\gamma\,, \quad g = \frac{di}{ds} = K\frac{\cos(\gamma - \alpha)}{\cos\gamma \cdot \cos\alpha}\,G = K\,(1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma)\,F_1(z) \qquad (6)$$

Die Werte von α, γ ändern sich so wenig durch die Visurkrümmung, dass man

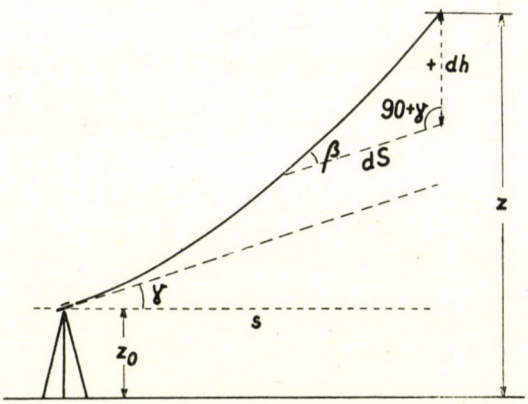


Bild 2

ihre Funktionen als konstant betrachten kann. Die Strahlbrechungen addieren sich längs der ganzen Visur.

$$\beta = \int_0^S di = \int_0^S g \cdot ds,$$

$$dz = ds\,(\operatorname{tg}\ \gamma - \operatorname{tg}\ \alpha) = T \cdot ds$$

$$\beta = K \cdot\ \operatorname{cotg}(\gamma - \alpha) \cdot \int_{z_0}^{z} F_1(z) \cdot dz =$$

$$= K \cdot \operatorname{cotg}(\gamma - \alpha) \cdot F_2(z - z_0) \qquad (7)$$

Die Gleichung ist wieder unbestimmt für den Fall der Parallelität der Visur mit dem Boden ($\gamma = \alpha$, $z - z_0 = 0$, $F_2(z - z_0) = 0$). Auf dem Bilde 2 ist der Fall des negativen Gradienten ersichtlich (die Visur bricht von der Senk-

rechten und β hat einen negativen Wert). Es gilt für den Refraktionseinfluss auf die Höhenbestimmung

$$dh = -dS\,\frac{\sin\beta}{\cos(\gamma+\beta)} = \frac{-\beta}{\cos^2\gamma}\,ds, \quad z - z_0 = T\cdot s, \quad F_2(z-z_0) = T\cdot F_3(s)$$

$$\Delta h = \int_0^s dh = \frac{-1}{\cos^2\gamma}\int_0^s \beta\cdot ds = \frac{-K}{\cos^2\gamma}(1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma)\,F_3(s)\,ds = \tag{8}$$

$$= \frac{-K}{\cos^2\gamma}\,F_4(s,\alpha,\gamma)$$

Für den Fall $\gamma = \alpha$ bekommt man wieder reelle Werte.

Anwendung für das Nivellement: $\gamma = 0$, $s\cdot\operatorname{tg}\alpha = z_0 - z$.

Mit Einsetzung $z = z_1$ (Visur nach hinten) bekommen wir h_1 bei der hinteren Latte

„ „ $z = z_2$ (Visur nach vorne) bekommen wir h_2 bei der vorderen Latte.

Einfluss der Refraktion:

$$\Delta H = \Delta h_1 - \Delta h_2, \qquad z_1 + z_2 = 2z_0, \qquad z_1 - z_2 = 2s\cdot\operatorname{tg}\alpha$$

Anwendung für die Tachymetrie (mit dem parallaktischen Winkel 0,01); die Neigung γ gilt für die mittlere Visur.

Für die untere Visur:

$$\Delta h_1 = \frac{-K}{\cos^2\gamma}\,F_4(\gamma - 0{,}005)$$

Für die obere Visur:

$$\Delta h_2 = \frac{-K}{\cos^2\gamma}\,F_4(\gamma + 0{,}005)$$

Für den Lattenabschnitt:

$$\Delta l = \Delta h_2 - \Delta h_1 = \frac{-K}{\cos^2\gamma}\cdot 0{,}01\,\frac{\partial F_3}{\partial\varphi}$$

Der Fehler in tachymetrisch bestimmter horizontaler Entfernung:

$$\Delta s = 100\cdot\Delta l\cdot\cos^2\gamma, \quad \Delta s = -K\frac{\partial F_4}{\partial\gamma} \tag{9}$$

Beispiel der kubischen Interpolationsfunktion (vom Autor im J. 1949 eingeführt):

$$t = F(z) = a + bz + cz^2 + dz^3 \tag{10}$$

$$G = F_1(z) = F'(z) = b + 2cz + 3d \cdot z^2$$

$$F_2(z - z_0) = b(z - z_0) + c(z^2 - z_0^2) + d(z^3 - z_0^3)$$

$$z = z_0 + s \cdot T,$$

$$F_3(s) = (b + 2c \cdot z_0 + 3d z_0^2)\, s + (c + 3dz_0) \cdot T \cdot s^2 + d T^2 s^3$$

$$\Delta h = -\frac{K}{\cos^2 \gamma} \cdot \frac{s^2}{12} (1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma) \cdot \{6b + 12cz_0 + 18dz_0^2 + (4c + 12dz_0) \cdot T \cdot s + 3d T^2 s^2\} = \frac{K}{\cos^2 \gamma} \cdot F_4(\gamma)$$

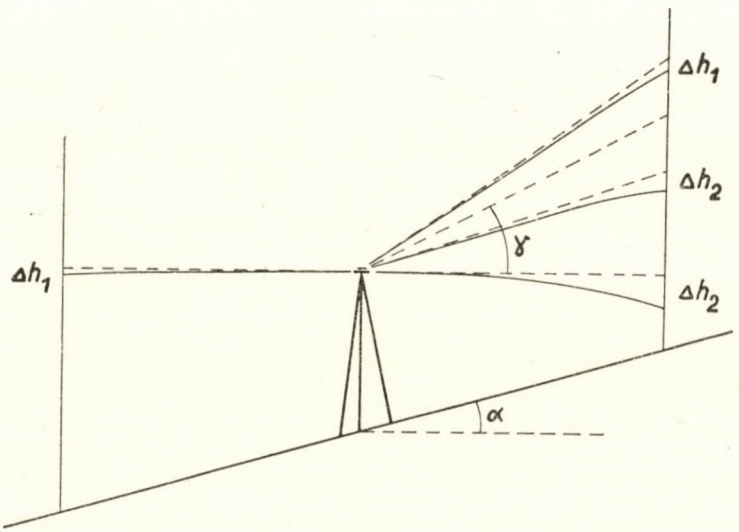


Bild 3

Der Fall des Nivellements: $\gamma = 0, \quad s \cdot \operatorname{tg}\alpha = z_0 - z$

$$H = -31 \cdot 10^{-8} \cdot s^2 (c + 3d \cdot z_0)(z_1 - z_2) \tag{11}$$

Der Fall der Tachymetrie: Die Werte Δs betragen bei $s = 100$ m nur wenige Zentimeter; der Fehler macht sich geltend nur für grössere Zielweiten, wo die Neigungen α, γ regelmässig klein werden. Man kann deswegen das Produkt $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma$ entfallen lassen, und es wird gelten:

$$F_4(\gamma) = \frac{s^2}{12}\{6b + 12cz_0 + 18dz_0^2 + (4c + 12dz_0)\, Ts + 3d T^2 s^2\},$$

$$T = \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha$$

Weiter setzen wir $\cos^2 \gamma \doteq 1$ und bekommen nach der Gleichung (9) den Hauptwert der Refraktionsfehler

$$\Delta s \doteq -78 \cdot 10^{-9} \cdot s^3 \{4c + 12d \cdot z_0 + 6d(\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha)s\} \qquad (12)$$

Der Wert des Koeffizienten d hat immer den entgegengesetzten Sinn als der Wert des Koeffizienten c. So vermindert sich der Refraktionsfehler mit der grösseren Instrumentenhöhe und mit dem positiven Unterschied $T = \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha$.

Berechnungsbeispiel. Es wurden folgende Temperaturen gemessen :

z	t^0
0,5 m	15,00
1 m	15,50
2 m	16,00
3 m	16,25

Nach der Substitution in die Gleichungen (10) bekommen wir

$$c = -\frac{5}{8}, \quad d = +\frac{1}{12}$$

Refraktionsfehler bei dem Nivellement :

$$s = 50 \text{ m}, \quad z_0 = 1{,}5 \text{ m}, \quad z_1 - z_2 = 2 \text{ m}, \quad \Delta H = +0{,}4 \text{ mm}$$

Refraktionsfehler in der tachymetrisch bestimmten Entfernung :

$s = 100$ m, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}01$, $z_0 = 1{,}5$ m

a) $\gamma = \alpha$, $\Delta s = +0{,}08$ m

b) $\gamma = 0$, $\Delta s = +0{,}12$ m

DISKUSSION

Prof. A. TÁRCZY-HORNOCH, SOPRON

Unser Kollege BÖHM hat in seinem Diskussionsbeitrag eine sehr wichtige Frage aufgeworfen, die meiner Ansicht nach verdient hier noch weiter diskutiert zu werden. Er sagte nämlich, dass im Interesse der wissenschaftlichen Forschung, ganz besonders der kontinentalen Senkungen es wünschenswert wäre, wenn die einzelnen Länder, nicht nur die befreundeten Staaten, ihre geodätischen Netze zusammenschliessen möchten. Er sieht keinen Grund, warum dies nicht erfolgen sollte.

Ich bin meinerseits auch der Anschauung und der Meinung, dass augenblicklich kein zwingender Grund dafür besteht dies zu verweigern, um so weniger, weil das die Erforschung der kontinentalen Senkungen und Hebungen erleichtern würde.

Herr Diskussionsleiter PESCHEL bemerkte, dass dies auch eine grosse volkswirtschaftliche Bedeutung hat, indem man auf dieser Weise verschiedene wichtige Ergebnisse, wichtige geographische und geophysikalische Daten liefern könnte. Die Frage dürfte auch deshalb aktuell sein, weil es unter anderen für Ungarn sehr wertvoll wäre, sich geodätisch an das Adriatische Meer anzuschliessen. Jugoslawien hat sogar drei Pegelstationen am Adriatischen Meer. Wir könnten einen Anschluss an die Adria durch Jugoslawien am kürzesten Wege erreichen.

Jugoslawien ist bereits dem europäischen Netz angeschlossen und ein derartiger Anschluss Ungarns würde auch einen Anschluss an das europäische Netz bedeuten. Ich würde vorschlagen, dass wir diese Frage pro und kontra diskutieren wollen, und falls es sich ergeben sollte, dass die anderen anwesenden Mitglieder der Meinung sein würden, dass so ein Anschluss nützlich wäre, so könnte das in Form einer Empfehlung weitergeleitet werden. Wir können allerdings darüber diskutieren, welche Gründe dafür oder dagegen sprechen.

Prof. Dr. H. PESCHEL, DRESDEN

Es würde mich auch interessieren, die Meinung der Herren darüber vom alleuropäischen Standpunkt aus zu hören.

Ich selbst habe mir in der Deutschen Demokratischen Republik viel Mühe gegeben, die Höhenmessungen mit jenen der benachbarten Staaten zu verbinden. Ich habe die Frage gestellt, man solle mir nur einen Grund sagen, der dagegen steht, dass man Höhenangaben austauschen könne. Es gibt im Moment eigentlich nur einen, nämlich den, dass die Höhen unter die geodätischen Grundlagen eines Landes gehören, und dass die geodätischen Grundlagen nicht veröffentlicht werden können. Wir haben in der D. D. R. die Höhenangaben nicht aus den »Grundlagen«, sondern von dem Wandschrank hervorgenommen. Es gibt keinen strategischen Grund, warum man diese nicht austauschen könnte. Es hat auch niemand diese Annahme widerlegt.

Gestatten Sie mir, dass ich noch einige Worte über die Vorträge über das Nivellement sage.

Was den Vortrag Professor BÖHMS über die tschechoslowakischen Verhältnisse betrifft, möchte ich wiederum feststellen, dass die Differenz beim Nivellement auf den Refraktionserscheinungen beruht. Die Arbeiten des Fin-

nen KUKKAMÄKI zeigen, dass man die Refraktion nicht durch gesetzmässige Formeln erfassen kann. Es gibt nur ein Mittel den Einfluss der Refraktion klein zu halten, und zwar die Zielweite nicht zu gross zu nehmen.

Bei dem wissenschaftlichen Präzisionsnivellement ist dies lösbar. Die Refraktionsfehler können — in der Summe gesehen — fast einen zufälligen Charakter haben. Die Zielweite auf etwa 25 m zu beschränken ist ratsam, wenigstens in den Tageszeiten, wo grosse Temperaturdifferenzen vorhanden sind.

Prof. W. K. HRISTOW, SOFIA

In den volksdemokratischen Staaten gibt es Bestrebungen, Einheitlichkeit in die Geodäsie einzuführen. Sie wissen alle, dass das Ellipsoid von Krassowsky angenommen wurde. Die Bestrebungen werden hier nicht stehenbleiben.

Natürlich sind auch die Grenzverbindungen sehr wichtig, und das wird die Aufgabe der Vermessungsbehörden sein. Man wird von einem einzelnen Ausgangspunkt ausgehen. Wenn wir auch lange gemeinsame Grenzen haben, kann man nicht von jedem Pegel ausgehen. Es ist möglich, dass gewisse Punkte tiefer liegen, als die Nordsee oder Ostsee. Als Anhaltspunkt kann nicht jeder Basispunkt angenommen werden. Wir müssen hier auf die Einheitlichkeit besonders achten.

Für die ganze Sowjetunion bis zu Wladiwostok hat man ein einheitliches Höhennetz. Bei uns kann es nicht anders sein. Wenn wir in Verbindung mit der Sowjetunion stehen müssen, werden wir auch vom gleichen Punkte ausgehen, vom Basispunkt in Kronstadt. Weiter wäre es die Aufgabe der Vermessungsbehörden, dass sie die Nivellierungsnetze in Verbindung bringen. Natürlich wird man auch die anderen Pegel miteinander vergleichen, und daraus können interessante Schlüsse gezogen werden, nämlich ob es stimmt, dass das Meeresspiegel einen Gleichgewichtszustand darstellt. Es wird sich herausstellen, dass dies nicht stimmt.

Prof. Dr. A. TÁRCZY-HORNOCH, SOPRON

Die Ausführungen des Herrn Kollege HRISTOW glaube ich dahin deuten zu können, dass er einen Zusammenschluss zur Untersuchung des Gleichgewichtsproblems des Meeres begrüssen würde. Um Missverständnissen vorzubeugen, möchte ich noch eine kleine Bemerkung machen. Als ich sagte, dass Jugoslawien drei Pegelstationen hat und Ungarn somit einen Anschluss an den Adriaspiegel bekäme, ist das so zu nehmen, dass Jugoslawien bereits an die übrigen Staaten Europas angeschlossen ist. Daran sollte sich auch Ungarn anschliessen. Ein Anschluss an Amsterdam oder Kronstadt würde sofort den Unterschied zwischen den Pegelstationen an der Adria und den anderen Meeren ergeben. Für Ungarn ist ein derartiger Anschluss von sehr grossem wissenschaftlichem Interesse. Das ungarische Höhennetz wurde seinerzeit noch von dem ehemaligen Militärgeographischen Institut der damaligen Österreich—Ungarischen Monarchie abgeleitet, vor etwa 70 Jahren. Die seinerzeit zeitgemässen Instrumente sind heute äusserst unzeitgemäss. Die Fehler sind allzu gross. Ungarn hat keinen unmittelbaren Anschluss an das Meer. Seinerzeit wurde vom Militärgeographischen Institut ein Fundamentalpunkt in Ungarn

bei Nadap angelegt. Wir konnten nicht anders verfahren, als dass wir die seinerzeit nach unseren heutigen Methoden als ungenau bestimmte Nadaper Höhe als richtig annahmen und die ungarischen Höhen daran angeschlossen haben.

Wenn wir den Anschluss an die Adria oder an das Amsterdamer oder Kronstädter Netz bekommen, werden wissenschaftlich sehr wichtige Schlüsse gezogen werden können. HRISTOW und BÖHM haben ihrer Zustimmung Ausdruck gegeben, ich denke daher, dass die Befürworter dieses Anschlusses mindestens ein Verhältnis von 4 : 0 zeigen.

Dr. L. BENDEFY, BUDAPEST

An beide Themen des Vortrages von Herrn Prof. BÖHM möchte ich einige Bemerkungen anknüpfen.

1. Gelegentlich des internationalen Anschlusses des Landesnivellementnetzes höchster Ordnung, anderseits bei meinem im Prager Zentralgebäude der tschechoslowakischen Staatlichen Landmessung abgestatteten Besuch hatte ich reichlich Gelegenheit, mich von der hervorragenden Entwicklungsarbeit im tschechoslowakischen Landesnivellementnetz höchster Ordnung zu überzeugen. Es war mir möglich all jene Methoden der Praxis kennenzulernen, mit deren Hilfe unsere tschechoslowakischen Kollegen die Erhöhung des Messgenauigkeit anstreben. Mehrere dieser Methoden haben wir auch in der Praxis des ungarischen Nivellements höchster Ordnung eingeführt.

Es sei mir hier erlaubt bloss auf ein einziges Verfahren hinzuweisen, deren Einführung die deutlich bemerkbare Erhöhung der Messgenauigkeit zur Folge hat. Heutzutage ist es eine sehr verbreitete Art, die alten Makadamstrassen mit kleinem Asphaltsplitt zu bedecken. Auf einer solchen Pflasterung, besonders, solange die ätherischen Öle aus dem frischen Pflaster nicht völlig entwichen sind, ist es sehr schwer Messungen auszuführen. Bis zur vollständigen Verdichtung des Pflasters ist ungefähr ein halbes Jahr notwendig.

Um auf solchen Fahrwegen — besonders in der Sommerhitze — das so häufig vorkommende Einsinken der Instrumente zu eliminieren, wurden beim Landesnivellement höchster Ordnung in der Tschechoslowakei entzweigeschnittenen Birnen ähnliche Bleiunterlagen angewandt (Bild 1), an deren untere Platte ein dicker Vollgummiring befestigt ist. Dieser haftet gut an die Strassenoberfläche, unterstützt auf einer grossen Fläche das Stativ und verhindert somit das Einsinken des Instrumentes. Der Meinung J. SVOBODAS entsprechend wurden damit hervorragende Ergebnisse erreicht.*

2. Was die Frage der Nivellementrefraktion betrifft, begrüsse ich mit Freuden die diesbezüglichen Studien des vortragenden Herrn Prof. BÖHM. Es wäre jedoch wünschenswert, wenn — wie es das tschechoslowakische Nivellement höchster Ordnung begonnen hat — von je mehr Nivellementzügen Profile bereitet würden und damit im Zusammenhang müsste auch bei den Hin- und Rückmessungen die aus den für die einzelnen Abschnitte erhaltenen Differenzen d gebildete Kurve (d) aufgetragen werden. Aus den zwei Diagrammen und aus den in den Beobachtungsprotokollen festgelegten Daten

*Svoboda, Jaroslaw Dr.: Nivelace. Praha, 1953. — S. 38—39. Fig. 56.

der Nivellementsbedingungen könnten bezüglich der Nivellementrefraktion sehr wertvolle Prüfergebnisse erreicht werden.

Denn so wünschenswert es auch erscheinen mag, die beim Nivellement auftretenden Refraktionsbedingungen auf jedem experimentellen Abschnitt längere Zeit hindurch zu beobachten, würden diese Beobachtungen mehr oder

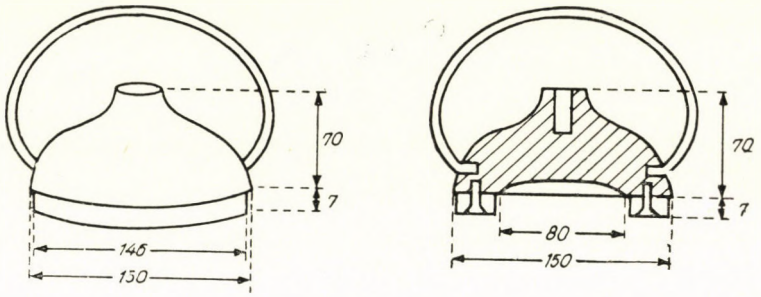


Bild 1

minder immer laboratoriumgemäss sein und könnten die in der Praxis der Feineinwägung tatsächlich auftretenden und schwerlich in mathematische Formeln einzuzwängenden abwechslungsreichen Möglichkeiten bei weitem nicht erschöpfen.

NIVEAUÄNDERUNGEN IM RAUM VON TRANSDANUBIEN AUF GRUND ZEITGEMÄSSER FEINEINWÄGUNGEN

Dr. L. BENDEFY
KANDIDAT DER TECHN. WISS., BUDAPEST

Unter den ununterbrochenen Wandlungen der Natur ist in ihrer Wirkung eins der grössten, jedoch dem menschlichen Auge fast unbemerkbaren geokinetischen Vorgänge die säkulare Bewegung der Erdkruste, sowie die infolge der Schichtenverdichtung der lockeren Sedimente auftretende Terrainänderung. Wenn nichts den normalen Lauf der Dinge stört (ich denke an Erdbeben, Bergstürze, Abrutschungen, Bergschlüpfe usw.), dann kann die tägliche Änderung selbst mit den hervorragendsten modernen Geräten nicht bestimmt werden.

Die bezüglich der geologischen Nahvergangenheit ausgeführte Untersuchung von Niveauänderungen und die Ermittlung deren Grössenordnung kann auf verschiedene Art erfolgen, so z. B. mit Hilfe der Geomorphologie, Geologie, Prähistorik, Paläobotanik (Pollenanalyse). Die Bestimmung der Geschwindigkeit der Niveauänderungen in unserem Zeitalter ist jedoch heute einzig auf Grund der Resultate von Feineinwägungen möglich.

Die oben erwähnten Untersuchungen der Bewegung blicken in der Literatur der Geologie und Geographie auf eine Vergangenheit von 80—100 Jahren zurück. Die auf die Resultate der Ingenieurs-, genauer : der Feineinwägungsarbeiten begründeten Untersuchungen erschienen jedoch bloss vor 30—35 Jahren in der Fachliteratur. Am Anfang der zwanziger Jahre unseres Jahrhunderts konstruierten EMANUEL KAYSER und MAX SCHMIDT Kurven auf Grund der Ergebnisse der in Frankreich in den Jahren 1857—1864, bzw. 1884—1893 ausgeführten Landesnivellements höherer Ordnung. Die identische Abweichungen darstellenden Kurven (Abb. 1) nannte KAYSER »Isokatabasen« [1, 2].

Es ist bekannt, dass das französische Landesnivellement höherer Ordnung vom Marseiller Thalattografen ausging und die im Jahre 1855 abgeleitete Höhenkoordinate des in der Nähe des Hafens befindlichen Hauptbasispunktes im Jahre 1884 als Konstante betrachtet wurde. Daher geht die Isokatabasis Null KAYSERS vom Meere mit der Berührung von Marseilles aus und nimmt, den Gang des Tales der Durance verfolgend, über den Abhängen der Westalpen die Richtung des Genfer-Sees ein (Abb. 1).

Östlich von dieser Neutrallinie, in der Richtung des Mont Cenis zeigte sich eine »Steigung« von +10 cm, und in der Richtung der atlantischen Küsten eine stufenweise »Senkung«. Das Höchstmass dieser letzteren erreichte —90 cm, ja stellenweise sogar —1,0 m.



Abb. 1. Die auf Grund der alten französischen Nivellements konstruierten »Isokatabasen« (Nach KAYSER, E.)

Sollten diese Werte tatsächlich eine Niveauänderung im geologischen Sinne bedeuten, dann müssten die französischen Ufer hundertjährlich durchschnittlich 185 cm sinken, was selbst die Senkung der holländischen Ufer weit übertrifft. Diese betrug, gemäss VAN STRAATEN [3] vor 7000—8000 Jahren alle zehn Jahre 35 mm, in unserer Zeit hingegen — ebenfalls auf zehn Jahre berechnet — insgesamt 10 mm.

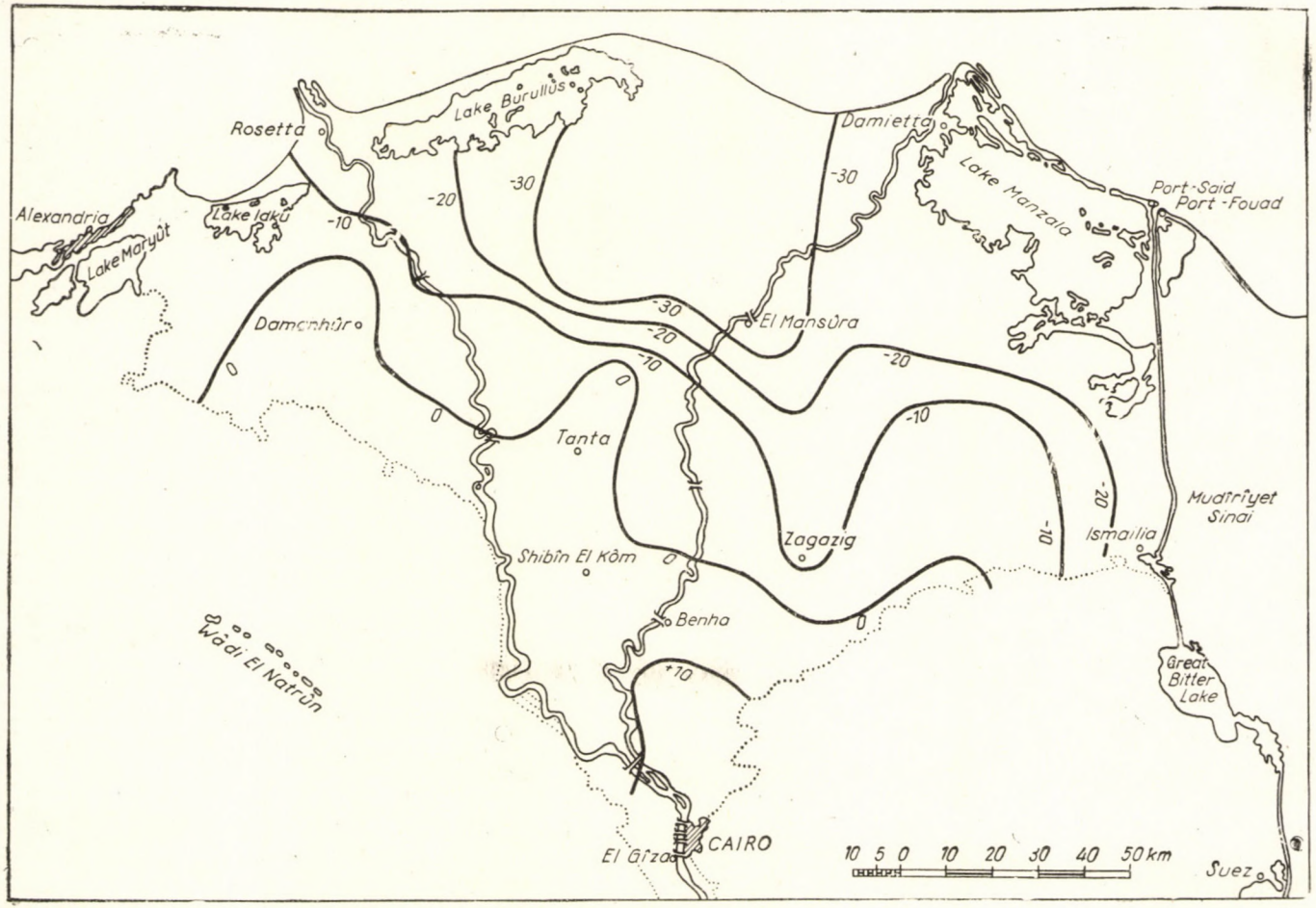


Abb. 2. Isobasen im Umkreis des Nildelta. (Nach COLE, J. H.)

Im Jahre 1932 wurden seitens der Ungarisch-Staatlichen Landesvermessung die auf Grund der im Jahre 1873 durch das einstige Wiener Militärinstitut für Geographie engeleiteten Feineinwägung, bzw. des Nivellements höherer Ordnung des Ung. Staatl. Triangulierungsamtes nachgewiesenen Höhenunterschiede in der Bearbeitung von JENŐ GÁRDONYI [7] herausgegeben. Das letztere wurde rund 50 Jahre nach der Wiener militärischen Einwägung ausgeführt.

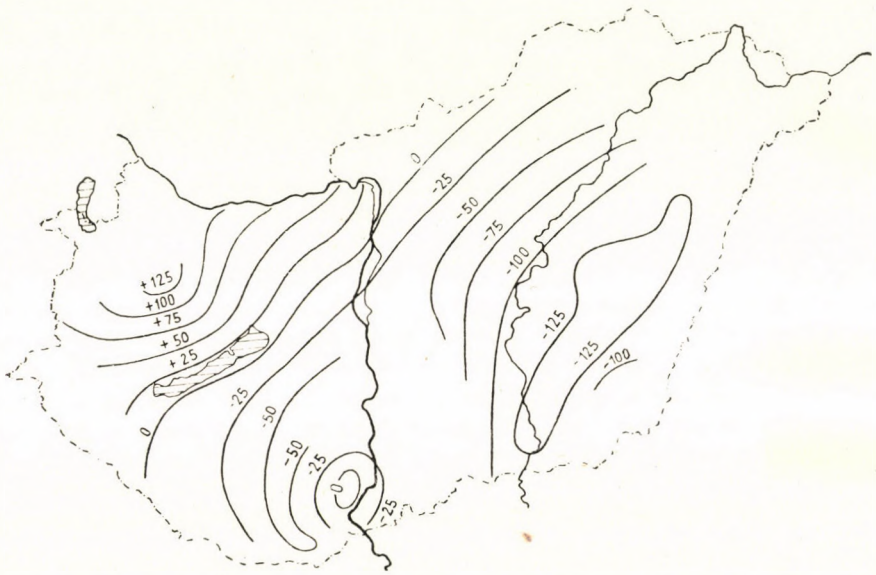


Abb. 3. Durchschnittliche Differenzen zwischen den Feineinwägungsergebnissen des Militär-Geographischen Institutes zu Wien und des ungarischen Triangulierungsamtes. (Aufarbeitung von GÁRDONYI, J. 1931)

Betrachtet man GÁRDONYIS Kurven der durchschnittlichen Änderungen (Abb. 3 und 4), so ist ersichtlich, dass es mehrere auffallende Ähnlichkeiten zwischen den bisher bekanntgegebenen und den Ergebnissen von GÁRDONYI gibt. Vor allem, dass hier genau so grosse Differenzen in Dezimeter-Grössenordnung angetroffen werden, wie in Frankreich. Die fünfzigjährige Änderung ist in ihrem Extremwert annähernd 40 cm.

Kollege B. KRUIS aus Prag gelangte zu einander parallelen Kurven völlig gleichen Charakters. Er berechnete die Abweichungen auf Grund der zweierlei Höhen der gemeinsamen Basispunkte des einstigen Wiener Militärinstitutes für Geographie und des modernen tschechoslowakischen Nivellementnetzes höherer Ordnung, danach konstruierte er, von diesen ausgehend, die gleichen Abweichungskurven für je die Tschechei und Mähren, bzw. die Slowakei. Die Grössenordnung der Abweichungen ist ähnlich denen, die GÁRDONYI für Ungarn nachgewiesen hat.

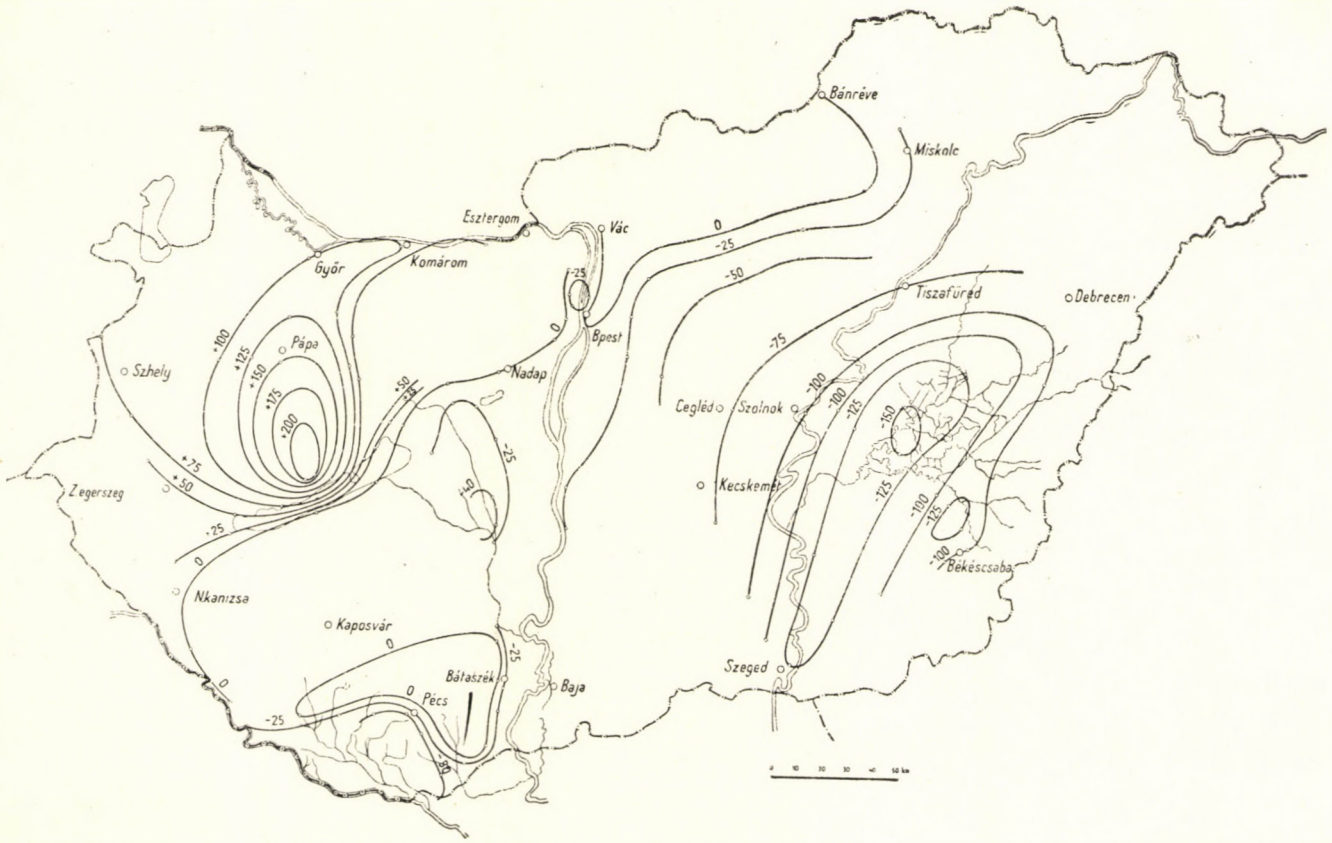


Abb. 4. Die durchschnittlichen Differenzen von Abb. 3 in der völlig irrtümlichen Neuaufarbeitung von GÁRDONYI, J. 1932.

Im Nildelta wird ebenfalls im Laufe von fünfzig Jahren eine maximale Niveauänderung von 50,2 = 100 mm, d. h. von 10 cm beobachtet (Abb. 2).

In den hier gebrachten Fällen zeigt sich ein charakteristischer Einklang in der Hinsicht, dass sich überall je eine Nulllinie gebildet hatte und die Kurven der gleichgrossen Differenzen im Grossen und Ganzen parallel zu dieser verlaufen. Die derart regelmässige Bildung der Änderungskurven kann, wie ich dies unlängst sehr eingehend durcharbeitet habe, auf zwei Grundlagen zurückgeführt werden. Die eine ist die allmähliche Anhäufung der während der Messung verbrochenen regelmässigen bzw. akkumulativartigen Messfehler, oder aber deren systematische Verringerung ; die andere ist, dass sich infolge des Ausgleichungszwanges und der Grundniveauverschiebungen in der Höhe der Basispunkte des Nivellementnetzes grundlegende und bei den weiteren Nivellierungsarbeiten nicht mehr zu eliminierende Differenzen bilden [8].

Nicht uninteressant ist der Zusammenhang, der zwischen der Jahreszahl der ersten Nivellierung (t) und der Grössenordnung der sich ergebenden Höhenänderungen (d) besteht.

	(t)	(d)
Frankreich	1857—1864	100 cm
Österr.-Ungar. Monarchie	1873—1913	40 cm
Ägypten	1906—1914	10 cm

Es ist offensichtlich, dass die Grösse der regelmässigen Fehler der Nivellierungen mit den fortschreitenden Jahren, mit der ständigen Verbesserung der Messmethoden und Geräte abnimmt (Abb. 5).

Um in der Nähe von Meeresufern zu bleiben, nehmen wir Ägypten, d. h. näher beschrieben : den Raum zwischen Alexandria, Port Said, Ismailia und Kairo, was dem Nildelta entspricht ; hier kann, auf eine zehnjährige Zeitspanne berechnet, eine Niveauänderung von +5 bis —15 mm beobachtet werden. Dies entspricht im Extremwert einer jährlichen Verschiebung von 2,0 mm (Abb. 2).

Die Tatsache jedoch, dass das erste ägyptische Nivellementnetz zwischen 1906 und 1914, das zweite zwischen 1927 und 1936 gemessen wurde, muss hier unbedingt erwähnt werden. Das erste wurde — wie bei den Engländern — mit dem Zeiss'schen Nivellierinstrument und Holzlatten der Type Cambridge ausgeführt, während das zweite mit dem in der eigenen Werkstatt der amerikanischen Coast and Geodetic Survey of USA hergestellten Gerät eigener Konstruktion [4] und mit Zeiss'schen Invarnivellierlatten ausgeführt wurde. Es kann kein Zweifel bestehen, dass die Ergebnisse der in der ersten Nivellementetappe ausgeführten Messungen in ihrer Genauigkeit weit hinter den letzteren bleiben. In welchem Masse, kann vorerst noch nicht festgestellt werden, aber dass die

regelmässigen Messfehler auch in diesem Fall Oberhand nahmen, das bezeugt die von J. H. COLE mitgeteilte regelmässige Linienführung der Niveauänderungskurven, sowie die nahezu Parallelität der Kurven [5].

Die Nulllinie der Änderung lag im unteren Drittel des Deltagebietes (Abb. 2). Dabei spielte auch jener Umstand eine bedeutende Rolle, dass die Kurven auf das mittlere Meeresniveau bezogen wurden, zu diesem Zwecke jedoch die Daten nicht einer, sondern dreier Thalattografenstationen

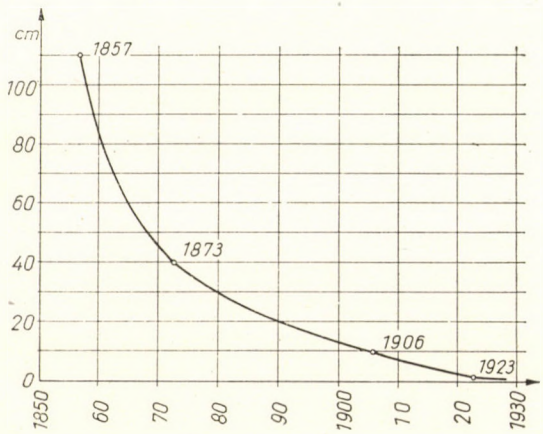


Abb. 5. Bei wiederholten Nivellierungen nimmt der in der Höhe der Nivellementsbasispunkte festgestellte Unterschied mit der Entwicklung der Nivellementsgeräte und -methoden stufenweise ab (BENDEFY)

verwendet wurden. Das mittlere Meeresniveau dieser drei Stationen steht im folgenden Verhältnis zueinander:

Port Said	+0,011 m
Port Taufiq (Suez)	+0,226 m
Alexandria	+0,050 m

Nur die alexandrinische Thalattografenstation befand sich im staatlichen Besitz Ägyptens, während jene in Port Said und Suez — bis zu der in der nächsten Vergangenheit erfolgten Verstaatlichung — das Eigentum der Suezkanalgesellschaft bildeten.

Wenn man nun den mittleren Wert der Landesnivellements der Suezkanalgesellschaft sowie der Ägyptischen Staatlichen Landesvermessung annimmt, kann festgestellt werden, dass zwischen Port Said und Port Taufiq (Suez) ein ständiger bedeutender Niveauunterschied besteht, undzwar ist das mittlere Niveau des Roten Meeres um 0,222 m höher als das mittlere Niveau des Mittelländischen Meeres [6].

Anders beurteilt werden die von den Japanern beobachteten Niveauänderungen, die relative Höhenänderungen von ± 10 cm ganz bis ± 300 cm angezeigt hatten. Bei der Bewertung der Verlässlichkeit der fraglichen Daten der Niveauänderung muss man auch die folgenden Tatsachen beachten.

Gelegentlich der Aufarbeitung der Messergebnisse wurden alle Messungen benützt, die nur seit 1883 im Japanischen Reiche ausgeführt wurden. Das japanische Landesnivellement höherer Ordnung macht nämlich seit 1883 ununterbrochen Fortschritte. Im gegenwärtigen Netz gibt es noch immer Teile, die in den achtziger Jahren des 19. Jahrhunderts gemessen wurden. Zur Messung des Nivellementnetzes höherer Ordnung wurden bis 1913 Bambergsche Feineinwägungsgeräte benützt, seither werden die Beobachtungen mit dem Zeiss'schen Gerät Typ N III. ausgeführt. Früher war der zulässige Fehler beim Hin- und Rückmessen auf Strecken erster Ordnung 3,0 mm. Heute beträgt die erwünschte Fehlergrenze $1{,}5\sqrt{L}$, wobei L die Länge des Abschnittes in Kilometern ist, und das Ergebnis in direkten Millimetern zu verstehen ist [9].

Die in den japanischen Berichten angegebenen Niveauänderungswerte sind meistens Absolutwerte, die sich auf eine der zehn japanischen Thalattografstationen beziehen. Die mit denen registrierten mittleren Meeresniveaus weichen im Durchschnitt auch um 12 cm voneinander ab, was jedoch im Extremfall auch 25 cm überschreitet [9]:

Aburatubo	$\pm 0{,}000$ m
Ayukawa	$+0{,}012$ m
Kusimoto	$+0{,}105$ m
Hosozima	$+0{,}108$ m
Hukabori	$+0{,}221$ m
Tonoura	$+0{,}211$ m
Wazima	$+0{,}244$ m
Iwasaki	$+0{,}254$ m
Osiro	$+0{,}026$ m
Hanasaki	$-0{,}011$ m

Die aus den Thalattogrammen gebildeten mittleren Meeresniveaus weisen bedeutende Abweichungen auf, die an sich wiederum auf die Verschiebung der Umgebung der Thalattografenstationen hinweist. Eben deshalb müssen jene Werte, die SOKURYOBU nach dem sehr starken Erdbeben in Japan im Jahre 1916 angegeben hatte, mit grosser Vorsicht behandelt werden.

Es ist bekannt, dass gelegentlich des Erdbebens im Jahre 1916 in der japanischen Inselwelt mächtige Erdrisse entstanden sind, längs deren auf der Erdoberfläche sowohl in horizontaler, als auch in vertikaler Richtung Verschiebungen von mehreren Metern erfolgt sind.

Nach SOKURYOBU variieren die horizontalen Verschiebungen im allgemeinen zwischen $\pm 0{,}15$ und $\pm 2{,}60$ m, während sich der Grenzwert der vertikal gerichteten Verschiebungen zwischen 0,0 und 3,0 m wechselt.

Da das Staatsgebiet Japans in seiner Gänze eine ausserhalb des eurasiatischen Kontinents fallende und mit diesem nur im Sockel zusammenhängende Inseleinheit ist, welche sich noch dazu neben einem der grösstbekannten Tiefseegraben befindet, ist es verständlich, dass es in die Zone der kraftvollsten gegenwärtigen Krustenbewegungen gehört. Die hier beobachteten und mit kraftvollem gegenwärtigen Vulkanismus verbundenen Bewegungserscheinungen müssen eben darum völlig von den übrigen, insbesondere von den auf den Gebieten im Innern der Kontinente beobachteten säkularen Krustenbewegungen abgetrennt werden.

Man könnte hier die Beispiele häufen. Eine riesige Sammlung der gegenwärtigen Krustenbewegungen könnte hier zusammengestellt werden, wie auch unlängst eine sehr bedeutende Anzahl diesbezüglicher Hefte in der Redaktion von E. WEGMANN erschienen sind [11]. Es ist schade, dass diese sehr wertvolle Sammlung in dem Abschnitt, der sich mit Triangulierungen und Feineinwägungen befasst, nicht eine einzige Niveauänderungsangabe erwähnt, die ausschliesslich auf modernen und unbedingt verlässlichen Nivellements beruht. Jene früheren Nivellements, auf die sich WEGMANN bezieht, sind vor 40—50, ja sogar 70—80 Jahren ausgeführt worden und viel weniger verlässlich als die heutigen Arbeiten.

Nach dem bisher Vorgetragenen liegt es an der Hand zu untersuchen, wie sich vom kinetischen Standpunkt aus ein ins Herz des europäischen Kontinents eingeschlossenes kratogenes Gebiet benimmt. Unsere Untersuchungen wurden im westlichen Teile Ungarns, in dem von der Donau, Drau und Mur und der ungarisch—österreichischen Staatsgrenze umfassten Gebiet Transdanubiens ausgeführt.

Auf diesem Gebiet hatte das Triangulierungsamt im Jahre 1923 begonnen, das Landesnivellementsnetz höherer Ordnung im Umkreis des Hauptbasispunktes Nadap zu entwickeln und diese Arbeit konnte im Jahre 1930 in Transdanubien als beendet betrachtet werden. Nach dem letzten Krieg begannen wir 1950 erneut ein Landesnivellementsnetz erster Ordnung zu entwickeln und 1954 wurden bereits die lokalen Arbeiten in Transdanubien abgeschlossen, ja, dieser Teil des Netzes wurde sogar im Winter 1954—1955 vorläufig eingewägt.

Das Landesnetz erster Ordnung des Triangulierungsamtes weist, aus den Hin- und Rückmessungen berechnet,

einen mittleren regelmässigen Km-Fehler von $\sigma'_r = \pm 0{,}06$ mm,
einen mittleren versehentlichen Km-Fehler von $\sigma''_r = \pm 0{,}34$ mm auf,
und aus den Polygonschlüssen berechnet,
einen mittleren regelmässigen Km-Fehler von $\eta'_R = \pm 0{,}03$ mm,
einen mittleren versehentlichen Km-Fehler von $\eta''_R = \pm 0{,}46$ mm auf. [12]

Die Genauigkeitsdaten unseres im Jahre 1950 begonnenen transdanubischen Nivellementsnetzes erster Ordnung sind, auf Grund vorläufiger Ausgleichung, die folgenden :

$$\sigma'_r = \pm 0{,}053 \text{ mm} \quad \text{und} \quad \sigma'_R = \pm 0{,}051 \text{ mm}$$
$$\sigma''_r = \pm 0{,}259 \text{ mm} \quad \text{bzw.} \quad \sigma''_R = \pm 0{,}608 \text{ mm}.$$

Die Bedeutung der Bezeichnungen entspricht dem Obigen.

Die mitgeteilten Genauigkeitsdaten bekräftigen jene offizielle Erklärung KUKKAMÄKIS, des Generalsekretärs der Internationalen Geodätischen und Geophysikalischen Union, die er auf Grund der zu der im Jahre 1951 in Bruxelles abgehaltenen Konferenz eingesandten Daten getan hatte, nämlich, dass das ungarische Landesnivellement höherer Ordnung heute in Präzision auf der ganzen Welt an erster Stelle steht [13].

Die absolute Zeitgemässheit sowie die ausgezeichnete Präzision der beiden Nivellements garantieren, dass die aus diesen Ergebnissen sich ergebenden Höhendifferenzen solch minimale Mess- und Ausgleichsfehler aufweisen, dass das Resultat grösstenteils tatsächlich als Mass der Niveauänderung geologisch-geophysikalischen Ursprunges gelten kann.

Die zur Darstellung erbrachten Diagramme basieren auf den Ergebnissen, die aus dem erneuten Nivellement der seitens des Triangulierungsamtes in Transdanubien im Jahre 1923 begonnenen Nivellierung, d. h. der aus dieser erhaltenen Basispunkte herstammen. Es muss bemerkt werden, dass das Triangulierungsamt in diese Nivellierungsarbeit auch die vom früheren Nivellement des einstigen Militär-Geographischen Intitutes zu Wien, sowie von zahlreichen ungarischen hydrographischen, als präzis annehmbaren Nivellements erhaltenen Höhenmarken aufnahm.

Zu der im folgenden dargestellten Isobasenkonstruktion benützten wir die auf zehn Jahre reduzierten Niveauänderungsdaten von rund 2500 Basispunkten. Ausserdem wurden auch die durch das tschechoslowakische Landesnivellement höherer Ordnung im Csallóköz (Grosse Schüttinsel) und deren Nachbarschaft bestimmten Niveauänderungsdaten aufgearbeitet. Auf dieser Stelle sagen wir unseren tschechoslowakischen Kollegen herzlichen Dank für die Liebenswürdigkeit, mit der sie uns diese Daten zur Verfügung gestellt hatten.

Krustenbewegungen im Raume von Transdanubien

All unsere bisherigen ähnlichen Untersuchungen wurden mit der Annahme ausgeführt, dass unser Hauptbasispunkt »Nadap« im Laufe der Untersuchungszeit seine lokale Lage nicht verändert hatte.

Unter dieser Annahme konstruierten wir auch die hier dargestellten geokinetischen Skizzen.

Die aus dem Resultat der früher schon erwähnten zwei Nivellements stammenden Höhendifferenzen wurden einheitlich auf zehn Jahre umgerechnet.

Gelegentlich der Konstruktion der dargestellten Isobasen machten wir mehrere derartige Feststellungen, die im Laufe ähnlicher Arbeiten nicht mehr ausser acht gelassen werden können.

Bei der Konstruktion der Isobasen ist es üblich, im allgemeinen auf Grund ähnlicher Prinzipien vorzugehen, wie bei der Konstruktion der Basislinien. Anfangs hielten wir uns an diese alte Regel und gelangten im ersten Gang zu einem vollkommen irrealen Ergebnis. Die aus den Isobasen und den lokalen geologischen Forschungen bekannte, oder wenigstens in ihren Hauptzügen bekannte Tektonik kann nicht im Widerspruch stehen. Im erwähnten Falle hingegen ergab es sich, dass das bisherige Konstruktionsverfahren zur Bildung der von den Leitrichtungen der Tektonik wesentlich abweichenden, ja in einzelnen Teilen sogar ganz entgegengesetzte Linienzüge aufweisenden Isobasen führte.

Es ist fast natürlich, dass sich bei solch zahlreichen Daten dieses Ergebnis ergab. Unsere heutigen Landesgrenzen sind keineswegs natürliche Grenzen und schneiden ohne Ausnahme überall jene tektonischen Tiefstrukturen, deren zueinander bezogene Verschiebung die Art der säkularen Niveauänderungen auf der Oberfläche bestimmt. Den grössten Teil der konstruierbaren Isobasen schneidet die Landesgrenze mal hier, mal dort. Das Aussuchen dieser Orte verursachte nicht geringe Sorgen. Unsere Arbeit wurde durch die liebenswürdige Bereitschaft unserer slowakischen Kollegen in Pozsony erleichtert und sichergestellt, da die Kenntnis der Niveauänderungswerte im Csallóköz (auf der Grossen Schüttinsel) die Anzahl der während der Konstruktion der Isobasen gebildeten möglichen Lösungen auf das kleinste heruntergedrückt hatte.

Ein anderer Umstand, auf den sehr geachtet werden muss, ist die geokinetische Auswertung der im unmittelbaren Umkreis der Basispunkte entstehenden relativen Wertefluktuationen. Angesichts der Präzision der Messergebnisse kann selbst die kleinste Wertefluktuation* eine geologische Ursache und einen geologischen Sinn haben. Im Laufe der Konstruktion ergab es sich, dass in dem zu Nadap, deren Höhe als unverändert angenommen wurde, bezogenen transdanubischen Raume die positiv gerichteten, d. h. eine relative Steigung aufweisenden Basispunkte sich in Streifen der Leitrichtung SW—NO anordnen. Diese Streifen sind meistens sehr schmal, insgesamt 10—20 km breit, und folgen einander auf einigen Stellen ziemlich häufig. Auf mehreren

* Hier erwähnen wir, dass zwecks Eliminierung der von den Messunsicherheiten herstammenden Wertefluktuationen die Niveauänderungswerte bloss in einer Schärfe von 0,1 mm berechnet werden.

Stellen, wo der Niveauänderungswert mit positivem Vorzeichen fehlt, wird dieser im negativen Wertebereich von entsprechenden relativen Extremwerten vertreten.

Dass diese Streifen (nennen wir sie einstweilen so) nicht aus eigenmächtigen Erklärungen stammen, wird mit folgender Tatsache zur Genüge bestätigt.

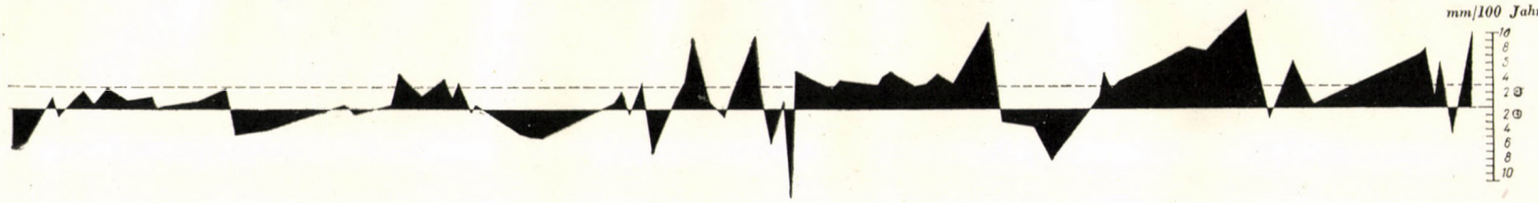
Nahezu lotrecht auf die erwähnte Leitrichtung, also in NW—SO Streichrichtung, haben wir in sechs Profilen Bewegungsdiagramme konstruiert. Diese Profile sind folgende :

1) Bratislava—Győr—Komárom—Adony ;
2) Rajka—Magyaróvár — Győr — Győrszentmárton — Csesznek Eisenbahnstation — Vilonya — Polgárdi — Sárbogárd — Cece — Szedres — Baja ;
3) Sopron und die Gegend des Fertő tó (Neusiedlersee)—Hanság—Rába- und Marcaltal—Bakony und das Balaton-Hochland—Vilonya—Szántód—Iregszemcse—Tamási—Szedres Eisenbahnstation—Baja ;
4) Horvátzsidány beim Fusse der Berge von Kőszeg—Vát—Rábamolnári—Vasvár—Bögöte—Ukk—Nemestördemic—Balaton-Buzsák Eisenbahnstation — Somogyvár — Várda — Taszár — Vásárosdombó — Magyarszék — Umgebung von Pécs — Peterd — Villány;
5) Nagykölked — Salomvár — Zalaegerszeg — Gelse — Vése — Nagydobsza — Lakócsa — Selye ;
6) Szentgotthárd — Szalafő — Máhomfa — Lovászi — Zákány — Szenta — Bagolasánc — Nagykanizsa — Iharos — Berzence — Vízvár — Bolhó — Barcs.

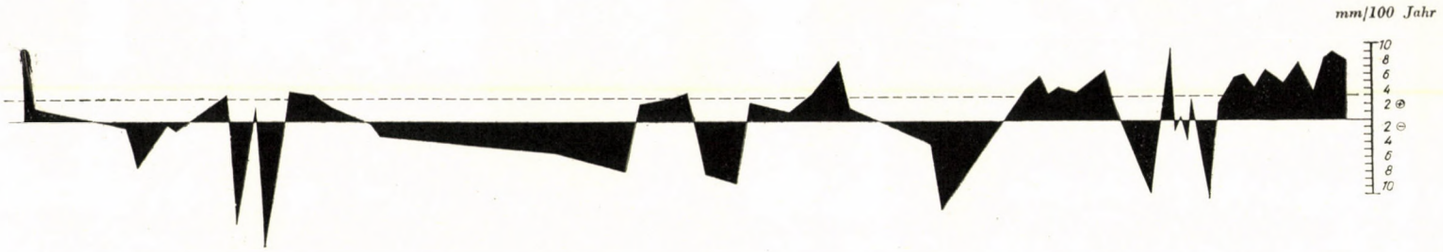
Zwei sehr charakteristische Eigenschaften dieser Profile fallen sogleich auf. Einesteils, dass die — ob im positiven oder negativen Sinne — hervorspringenden Extremwerte im Grossen und Ganzen gleichmässig voneinander entfernt sind (Abb. 6). Anderseits fällt auf, wie ausserordentlich eng die Beziehung zwischen den Niveauänderungen und der Tektonik des untersuchten Gebietes ist. Es könnten hundert und aberhundert Beispiele aufgebracht werden, in diesem vorläufigen Bericht hingegen wird nur auf einige Fälle hingewiesen.

Zuerst werden die Bewegungsverhältnisse im Bakonygebirge und im Hochland am Balaton (Plattensee) behandelt. Wie aus Abb. 7 sehr klar ersichtlich, ist die zentrale mesozoische Hauptmasse im Sinken begriffen und auf beiden Seiten erscheinen aufeinander schuppende Flanken. Der Balaton erscheint im südöstlichen Vorraum dieses von sehr kraftvollen Bewegungen charakterisierten Gebietes, in einer auch heute in Bildung begriffenen Senkung, deren nordöstlicher Rand von einem sich dem Zuge der grossen Vulkane anpassenden, auch in unseren Tagen sehr stark sinkenden tektonischen Graben abgeschlossen wird.

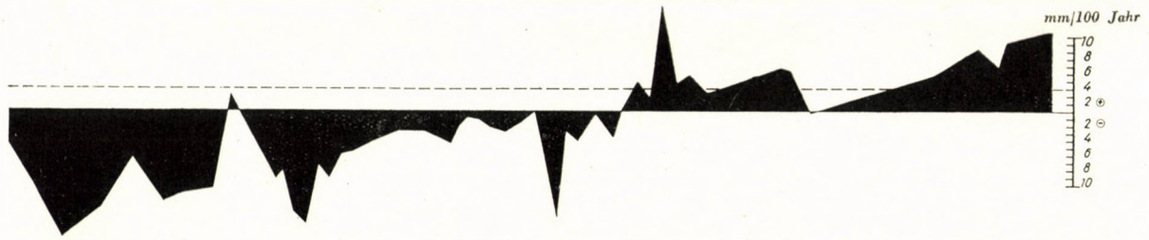
Sopron - Vilonya - Tamási - Baja



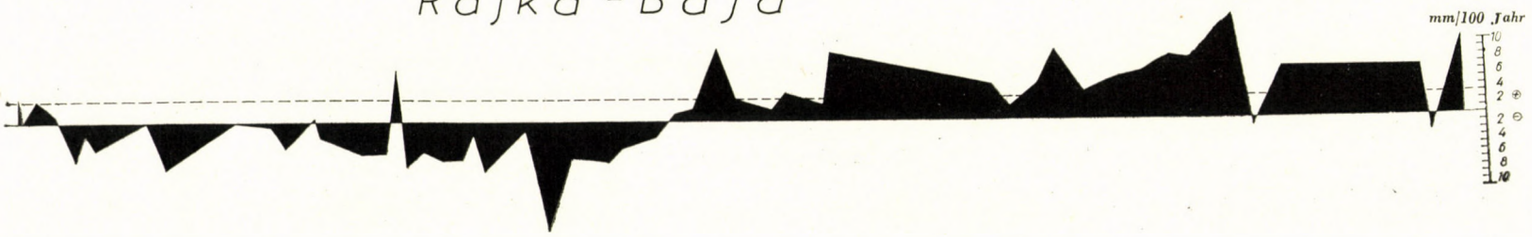
Kőszeg - Vasvár - Ukk - Taszár - Villány



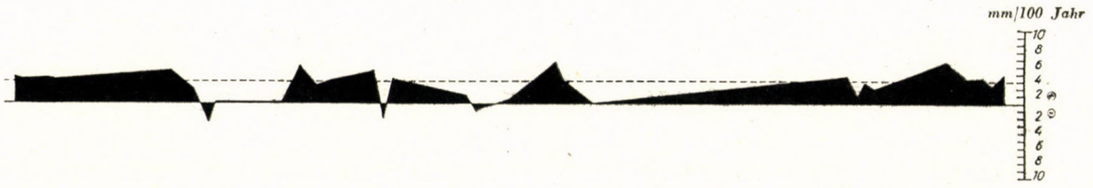
Pozsony - Győr - Adony



Rajka - Baja



Nagykölked - Selye



Szentgotthárd - Barcs

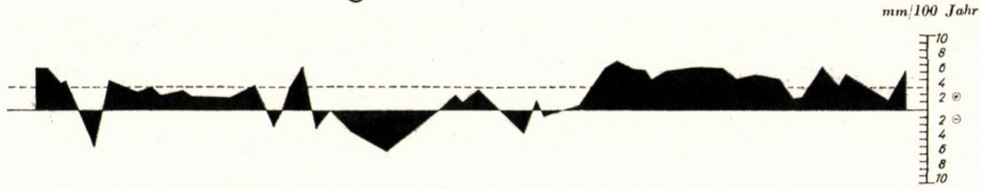


Abb. 6/a—f Auf zehnjährige Perioden umgerechnete Bewegungsdiagramme von Transdanubien

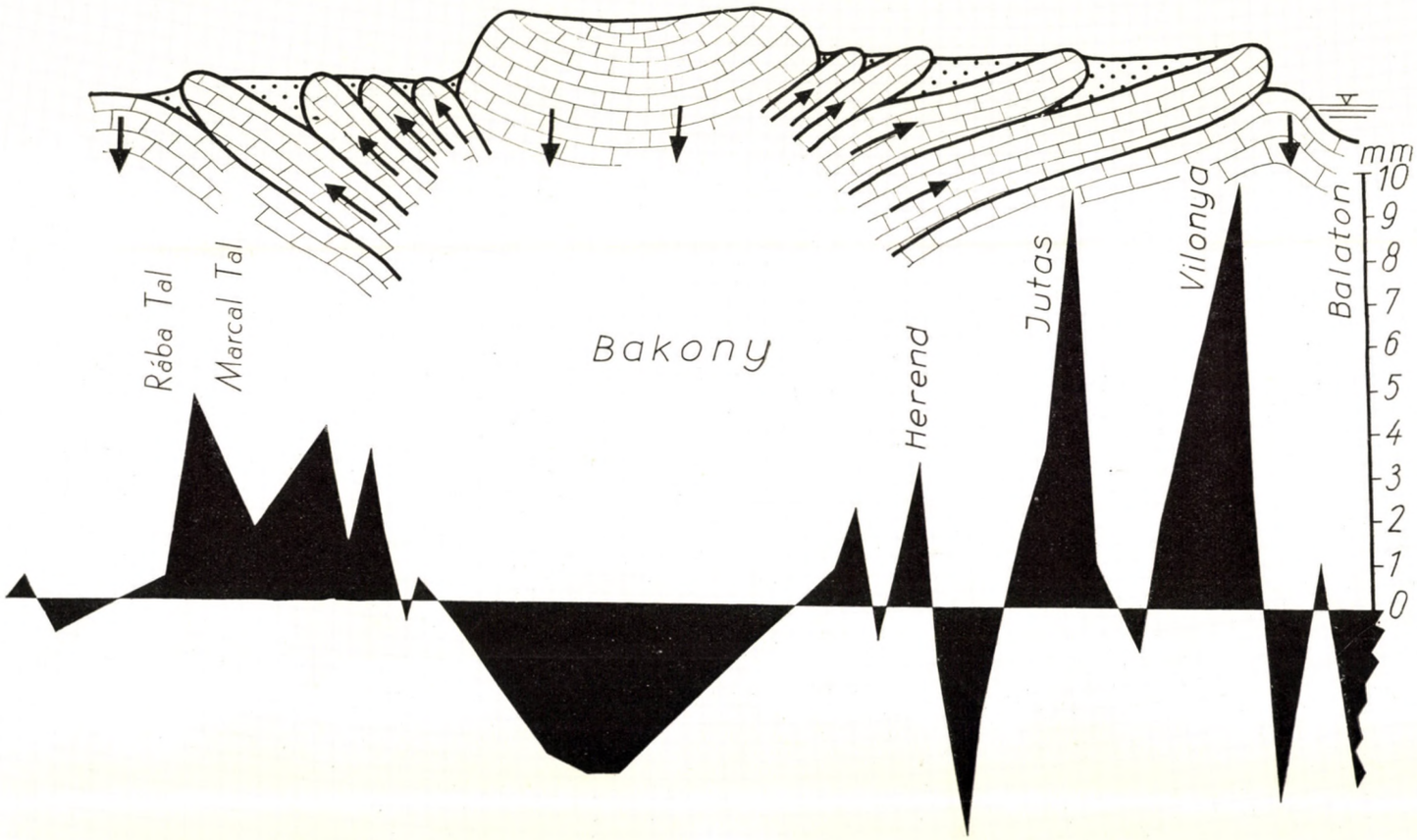


Abb. 7/a—b Bewegungsverhältnisse des Bakonygebirge und der Hochlandes am Balaton

Was die Entfaltung des Fertő (Neusiedlersees) betrifft, kamen wir anhand unserer Untersuchungen auf folgende verblüffende Ergebnisse. Die Bewegungsdiagramme und Isobasen bestätigen, dass die am westlichen Grenzgebiet von den Alpen in östlicher Richtung vorwärtsdringende Schuppenbildung (Abb. 6) ein aufeinandergesetzten Tellern ähnliches Ringsperrensystem zu Füssen der österreichischen Grenzgebirge ausbaut. Diese geokinetischen Sperren verbrauchen die Energie der Niederschlagswasser der ganzen Gegend in solchem Masse, dass ihnen schon keine kinetische Energie mehr zur Beckenbildung bleibt. Die Torflager der Umgebung sind Zeugen dessen, dass hier dieselben Bewegungsverhältnisse am Ende des Tertiärs und während des ganzen Quartärs (Diluvialperiode) herrschten.

Ähnliche sehr erstaunliche Tatsachen stellen wir im Csallóköz und Szigetköz fest (Diagram 1 auf Abb. 6). Dieses morphologisch einheitlich erscheinende Gebiet ist in seiner Tiefstruktur ausserordentlich gegliedert. Einzelne Schollen des mit einer sehr dicken Sedimentdecke bedeckten Grundgebirge befinden sich in der intensivsten Bewegung. Ein Zeuge der ständigen und sehr lebhaften Bewegung dieses Gebietes sind die in der Gegend von Komárom, Győr, Magyaróvár, Dévény, Pozsony, Szentgyörgy, Nagyszombat, Tornóc und Érsekújvár häufig auftretenden, oft sehr heftigen Erdbeben [15].

Charakter der transdanubischen Isobasen und deren Lehren

Zur Konstruktion der in Abb. 8 dargestellten Isobasen wurden ungefähr 1500 Daten der Basispunkt-Niveauänderung benützt. Die auf zehn Jahre umgerechneten Niveauänderungswerte bewegen sich zwischen 0,0 und —20,0 mm, bzw. von 0,0 bis +17,0 mm.

Der Charakter der geokinetischen Skizze überzeugt uns davon, dass das Gebiet Transdanubiens im allgemeinen steigt. Sinkende Gebiete gibt es nur folgende :

1) Die gesamte Csallóköz und Szigetség, dem sich noch östlich von der Strecke Rába und Marcal ein sinkendes Becken von bedeutender Grösse anschliesst. Dessen Grenzlinie ist Dunaalmás, Mór, Zirc und Győrszentmárton. Aus diesem sackförmigen Becken erstreckt sich in SW-Richtung eine weitere sinkende Mulde, die um Jánosháza herum ihr Ende nimmt.

2) In der unmittelbaren Nachbarschaft der beschriebenen zusammenhängenden sinkenden Gebiete, aber separiert von diesen, weist die grosse Einheit der Grossen Schüttinsel (von Csallóköz) noch zwei kleinere Ausläufer in SW-Streichrichtung auf. Einer von diesen bildete sich in der Mündung der Rába und Marcal.

Nach eingehendem Studium bemerkt man, dass hier, der Streichrichtung Komárom—Jánosháza entsprechend und mit dieser parallel, eine ähnlich

ablaufende sinkende Struktur zugegen ist, deren Senkungsintensität jedoch im südlichen Teil des Flügels bedeutend geringer ist. Eben deshalb erscheint sie nur in Flecken: bei Rábapordány—Szilsárkány und in der grossen unteren Kurve des Gyöngyös in der nächsten Umgebung von Táplánszentkereszt.

3) Ganz ähnlich diesem obigen finden wir auch eine dritte sinkende Mulde. Diese buchtet sich bei Mosonmagyaróvár aus dem grossen sinkenden Becken der Csallóköz auf. Sie ist begrenzt von der Rába und der Répce, von Mosonszentjános und Magyaróvár. Als Fortsetzung kann eine Reihe südwestlich sinkender Schollen beobachtet werden: Mihályi und Cirák, Alsószopor und Újkér, sowie im Gebiete von Nárai und Ják.

Die unter 2) und 3) beschriebenen sinkenden Strukturen verflechten sich schon in der Gegend von Táplánszentkereszt und Nárai—Ják fast gänzlich, ihre vollständige Verflechtung erfolgt jedoch nicht. Im Raume von Szalafő erscheint eine Senkung, die gleichzeitig den Ursprung der Quellen des Baches Zala tektonisch erklärt. Es ist wahrscheinlich, dass die sinkende Mulde in der Streichrichtung Rábatorok—Szilsárkány die letzte Spur in der Nähe der Landesgrenze ist.

Die unter 3) beschriebene sinkende Zone weicht wahrscheinlich im Burgenland in NW-Richtung ab.

4) Das Gebiet von Sopron ist in Senkung begriffen, ebenso

5) der grösste Teil der mesozoischen Masse des Bakonygebirge; inbegriffen sind nicht allein die mesozoischen Massen über Tage, sondern auch jene unter Tage. Von einzelnen, sehr stark sinkenden Schollen im Csallóköz gar nicht gesprochen, können die grössten Senkungen Transdanubiens gerade im Bakonygebirge und im Hochland am Balaton angetroffen werden. Senkungen grössten Ausmasses hatten sich in der Streichrichtung von Balatonarács und Kővágóörs entwickelt.

6) In der Streichrichtung der vom Hochland am Balaton bestimmten sinkenden Zone erscheint nordöstlich und südwestlich hiervon je eine beachtenswerte Senkung. Im NO längs der Donau, im Raume zwischen Dömös, Dorog und Esztergom.

7) Im SW im Raume von Lispe und Csörnyeföld, bzw. Lovászi und Rédics. Die zwei sinkenden Strukturen werden von einer im Steigen befindlichen Wölbung voneinander abgetrennt, auf deren gespalteter Spitze sich der Bach Kerka ein Bett ausgewaschen hat.

Im Gebiete südöstlich vom Balaton trifft man nur auf unbedeutende sinkende Strukturen. Auch diese sind in der Streichrichtung SW—NO angeordnet.

8) In der ersten Zone ist es bei Murakeresztúr und Zákány, sowie in der Gegend von Szólád,

9) in der zweiten bei Somogyvár, bzw. im Raume von Somogyacsa,

10) als dritter Streifen bei Tamási, sowie in dem Umkreis von Sáregres,

11) als viertes bei Kaposvár, Dombóvár und im näheren Raume von Döbrököz, dass man voneinander isolierte sinkende Strukturen findet.

12) Ausser den hier erwähnten erscheinen bloss in der Gegend von Pécs im Zusammenhang mit der bekannten Überschiebung drei kleinere sinkende Strukturen.

Die hier nicht erwähnten Teile Transdanubiens sind im Steigen begriffen. Die Steigung kann auf grossen Strecken fast gleichmässig genannt werden, wenn in einzelnen Flecken, d. h. in einzelnen auftauchenden Strukturen der tatsächliche Charakter der steigenden Bewegungen nicht zum Vorschein kommen würde.

Im südöstlichen Teile Transdanubiens, sowie zwischen dem im Graben von Mór plätschernden Bach Gaja und der Donau befinden sich die kraftvollsten Steigungen. Eine genau so intensive Steigung kann nördlich von Nagykanizsa, bei den Strukturen im Raume von Hahót und Zalaszentmihály beobachtet werden.

Aus dem Raume dieser sehr kraftvoll steigenden Bewegungen dringt NO-lich vom Balaton, durch die Gegend von Vilonya und Hajmáskér—Kádárta hindurch, ein kraftvoll geformter, gut entwickelter steigender Keil zwischen die sinkenden Massen des Bakonygebirges und des Zircer Beckens.

Nordwestlich von der sinkenden Zone Komárom—Jánosháza kommt eine mit derselben Streichrichtung parallel angeordnete, steigende Schollenserie zum Vorschein. Im Norden gleich drei : Győr, Győrszentiván und in der Gegend von Nyúl, Gönyü, Ásvány- bzw. Almásfüzitő. Diese in Serien aufeinander folgenden und — wie dies Eligius Schmidt so klar dargelegt hatte [16] — parkettartig verschobenen Schollenstrukturen schliessen die Csallóköz-Strecke der Donau ab.

Die grösste ist die Struktur Győr—Győrszentiván—Nyúl. Als deren Fortsetzung folgen in SW-Richtung der Reihe nach : die Struktur von Vaszar, Mezőlak, Sitke—Nagysimony, dann Hosszúpereszteg, hierüber die weniger ausgedehnte Struktur in Kám, dann SW zu jene von Győrvár—Gősfa, schliesslich die von Salomvár und die kleine Struktur von Zalabaksa—Kerkabarabás. Die hier erwähnten steigenden Strukturen entsprechen dem geschuppten Nordflügel des Transdanubischen Mittelgebirges, wie auch Eligius Schmidt deren gesetzmässiges Vorkommen mit geomechanischen Untersuchungen, auf rein theoretischem Wege abgeleitet hatte [17].

Längs der ungarisch—österreichischen Grenze, sich dem Zuge des bei Vaskeresztes—Felsőcsatár befindlichen Berges Vashegy, des Kőszeg—Rohoncer Gebirges und des Soproner Gebirges anpassend, kommt noch eine steigende Schollenreihe zum Vorschein. Diese weist auf eine auf Einwirkung einer aus Österreich kommenden gebirgsgestaltenden Kraft entstandenen und von NW nach SO zu beschuppten Struktur hin.

Es soll noch erwähnt werden, dass die Bettwindung der die Csallóköz abschliessenden Kleindonau, bzw. des Vágduna genannten Flussarmes ebenfalls von einer, und zwar in der Gegend von Feketenyék und Hidaskürt auftauchenden steigenden Struktur bedingt ist.

Nebenbei wird noch erwähnt, dass die grosse Senkung im Csallóköz, sowie die erwähnten sinkenden Strukturen bei der Mündung des Flusses Rába, bei Szilsárkány, Mihályi und Cirák, bzw. die sich weiter erstreckende Struktur in Magyaróvár gemeinsam dem von RÉTHLY für dasselbe Gebiet gezeichneten [18] aseismischen Raume entsprechen.

Die Form des für das Gebiet vom Bakonygebirge ebenfalls von RÉTHLY konstruierten aseismischen Raumes stimmt gut überein mit der Form des unsererseits erhaltenen Gebildes und umfasst im allgemeinen ebenfalls sinkende Strukturen.

Die südlich vom Balaton liegenden aseismischen Gebiete sind hingegen im allgemeinen steigender Tendenz. Der Form nach ist die Ähnlichkeit zwischen den seismotektonischen Ergebnissen RÉTHLYS und dem Liniengang der dargestellten transdanubischen Isobasen erstaunlich.

*

Die durchschnittlichen Isobasen wurden in vier Schritten gebildet. Dementsprechend sind vier durchschnittliche Isobasenskizzen konstruiert worden und drei von diesen werden hier besprochen.

Während der Mittelbildung haben wir uns streng an das Prinzip gehalten, dass nur die nahesten Punkte zur Mittelbildung einbezogen werden, und der dem auf diese Weise erhaltenen Wert entsprechende ideale Punkt wurde im Schwerpunkt der durch die zur Mittelbildung benützten Basispunkte bestimmten Linie oder Gebilde angebracht. Es wurde ausserdem sorgfältig darauf geachtet, dass der Charakter der verschiedenen Bewegungen bei der Mittelbildung nicht geändert werde. Schliesslich : die bekannten wichtigeren Erdstrukturlinien wurden im Laufe der Mittelbildung nicht überschritten.

Die so gebildete Linienschar ist für uns sehr lehrreich. Durch diese verschwinden nämlich stufenweise die durch die lokalen strukturellen Verhältnisse verursachten Erscheinungen und bloss die auf die Grossstruktur weisenden Hauptlinien bleiben zurück. Diese vertreten, diese projizieren vor unsere Augen die hauptsächlichen Charakteristiken der untersuchten Erdkrustenbewegungen.

Ohne auf Einzelheiten einzugehen weisen wir auf folgende, auf den Skizzen (Abb. 9, 10, 11) gut bemerkbare Erscheinungen.

Beim Fertő (Neusiedlersee) offenbart sich ausgezeichnet die bereits erwähnte kippend steigende Teller- oder Schüsselform. Im Inneren der Schüssel beträgt die Niveauveränderung von 10 Jahren —6,0 mm, am Rande der Schüssel —2,5 mm.



Abb. 8. Transdanubische Isobasen auf Grund der Ergebnisse der in den Jahren 1923—1930 und 1950—1954 ausgeführten Landesnivellements höherer Ordnung (Orig. BENDEFY)

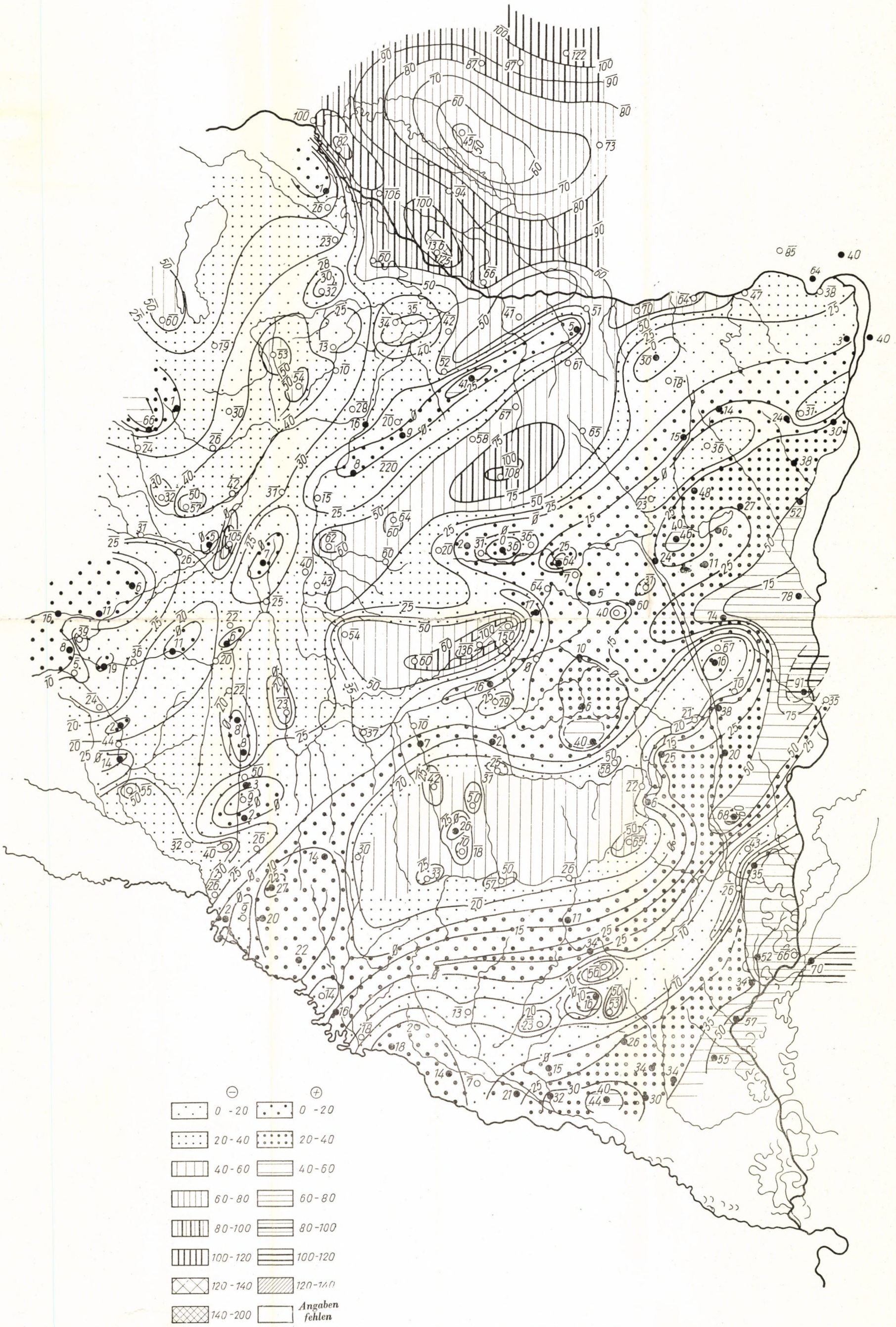


Abb. 9. Durchschnittliche Isobasen. Anzahl der angewandten Punkte: 205 (Orig. BENDEFY)

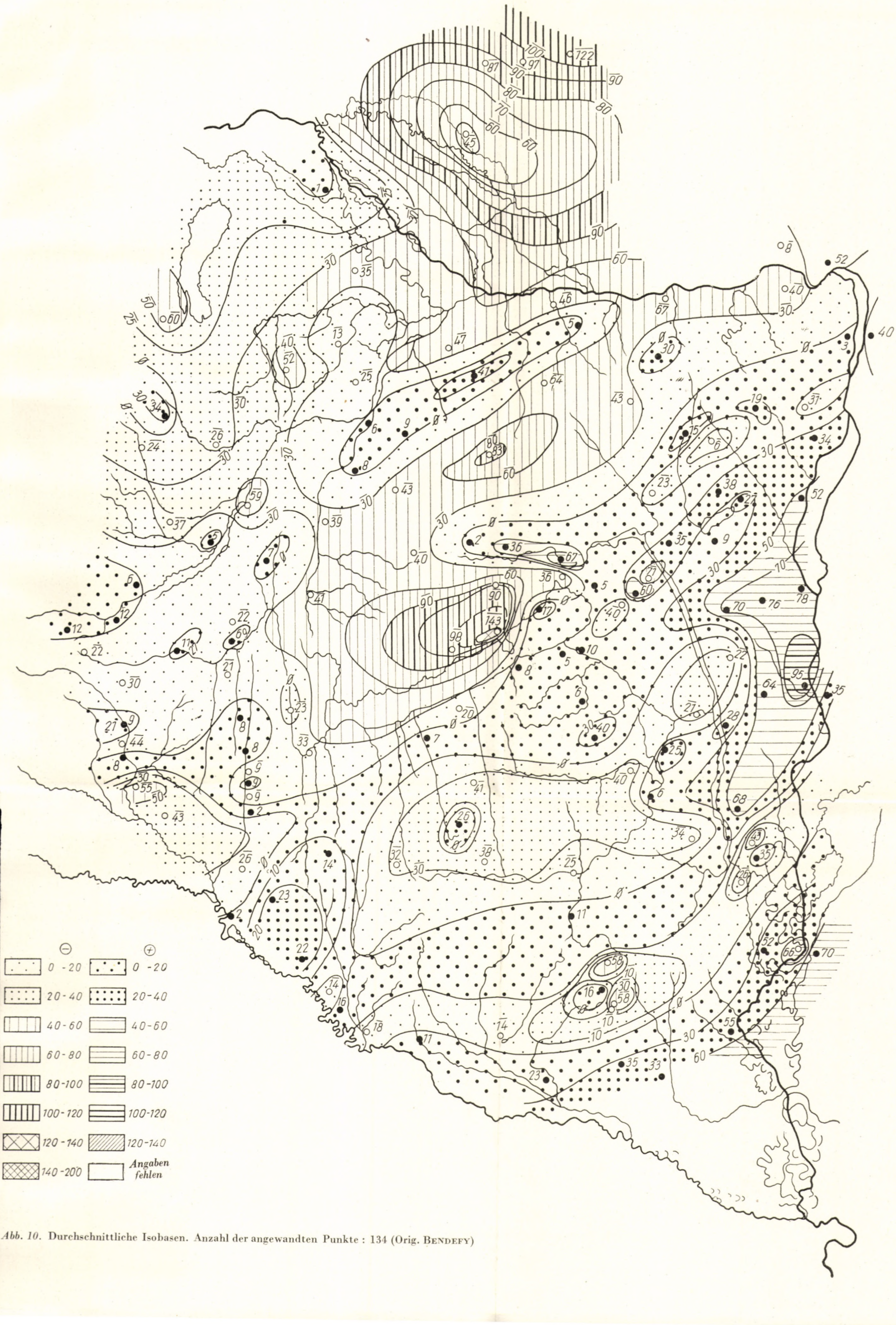


Abb. 10. Durchschnittliche Isobasen. Anzahl der angewandten Punkte : 134 (Orig. BENDEFY)

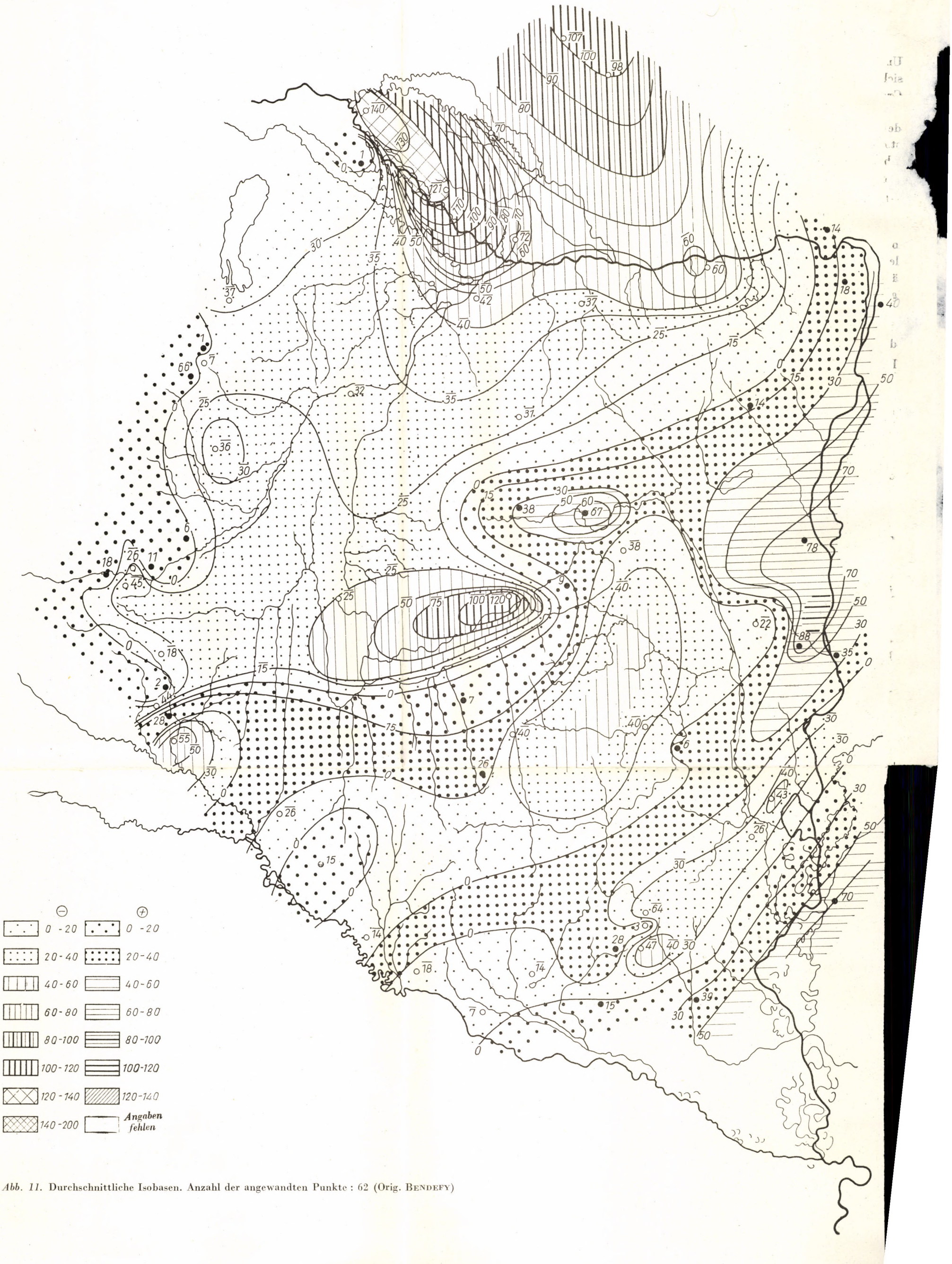


Abb. 11. Durchschnittliche Isobasen. Anzahl der angewandten Punkte : 62 (Orig. BENDEFY)

Prächtig entfaltet sich der sich von Komárom fast bis Mihályfa ohne Unterbrechung erstreckende Gegenflügel des Ungarischen Mittelgebirges, der sich dann mit kleineren Unterbrechungen ganz bis zur ungarisch—jugoslawischen Grenze fortsetzt.

Die Linienführung der durchschnittlichen Isobasen ist im Einklang mit den von L. Facsinay und J. Szilárd ein halbes Jahr später konstruierten isostatischen Schwerkraftsanomalienkurven Ungarns [19]. Die auftretenden Abweichungen sind hauptsächlich Folgen dessen, dass uns nur Zeichnung der auf geokinetischer Grundlage konstruierten Isobasen nahezu das fünffache Messergebnis zur Verfügung stand wie genannten Verfassern.

Es muss noch folgendes sehr wichtiges und bedeutendes Ergebnis erwähnt werden. Die aus den Messergebnissen entstandenen Höhenänderungsdaten sind bloss die vertikalen Projektionen der in der Natur auf schräger Fläche abspielenden Erdkrustenbewegungen. Aus diesem Grunde kann von den Niveauänderungskurven bis zu einem gewissen Grade auch auf die horizontalen Bewegungen geschlossen werden.

In dieser Beziehung verdient der bereits erwähnte Keil von Vilonya—Hajmáskér—Kádárta auf den die Mittelisobasen enthaltenden Skizzen besondere Aufmerksamkeit. Die durchschnittlichen Isobasen bieten uns das möglich plastischste Bild. Es entfaltet sich die Tatsache einer um den N—NW-Zipfel des Balatons entstandenen Drehbewegung, jener Bewegung, die E. Schmidt theoretisch bereits im Jahre 1950 abgeleitet hatte [20], deren Vorkommen jedoch bisher praktisch nur auf einem ganz kleinen Gebiet bewiesen werden konnte [21]. Diese Kurven beweisen nun überzeugender als alles andere, dass jenes Drehmoment, welches laut Annahme, bzw. Ableitung von E. Schmidt von den aus Afrika kommenden, bzw. vom tschechischen Massiv rückwirkenden gleichgerichteten, jedoch nicht in eine Gerade fallenden Kräften hervorgerufen wurde, tatsächlich da ist und seine kraftvollen Auswirkungen, deren Ergebnis in der parkettartigen Verschiebung der gesamten Masse der transdanubischen Mittel- und Inselgebirge beobachtet werden kann, auch in unseren Tagen ausübt.

Voller Freude erblickte ich im I. Band des ungef. vor 10 Tagen unter der Schriftleitung Professors I. Hazay erschienenen »Geodätischen Handbuches« jene kleine Geoidkarte, die von L. Homoródi stammt und das Gebiet von Transdanubien darstellt (Abb. 12).

Auch diese Karte bestätigt und beweist in vollem Masse die Richtigkeit obiger Behauptungen. Denn obwohl Homoródi zur Herstellung dieser Geoidkarte eine verhältnismässig geringe Anzahl von Punkten benützt hat, entfaltet sich hier dennoch die das gesamte Transdanubien am besten kennzeichnende strukturelle Eigenheit : die im NO-Raume des Balatons sowie im Bakonygebirge einander gegenüberstehenden semmel- bzw. kipfelartigen Formen. Diese wurden von dem enfalls von E. Schmidt erkannten mächtigen Kräfte-

paar hervorgerufen, genau wie auch jene — ebenfalls von SCHMIDT geomechanisch begründeten — tektonischen Leitrichtungen, die aus HOMORÓDIS Karte ebenfalls abgelesen werden können.

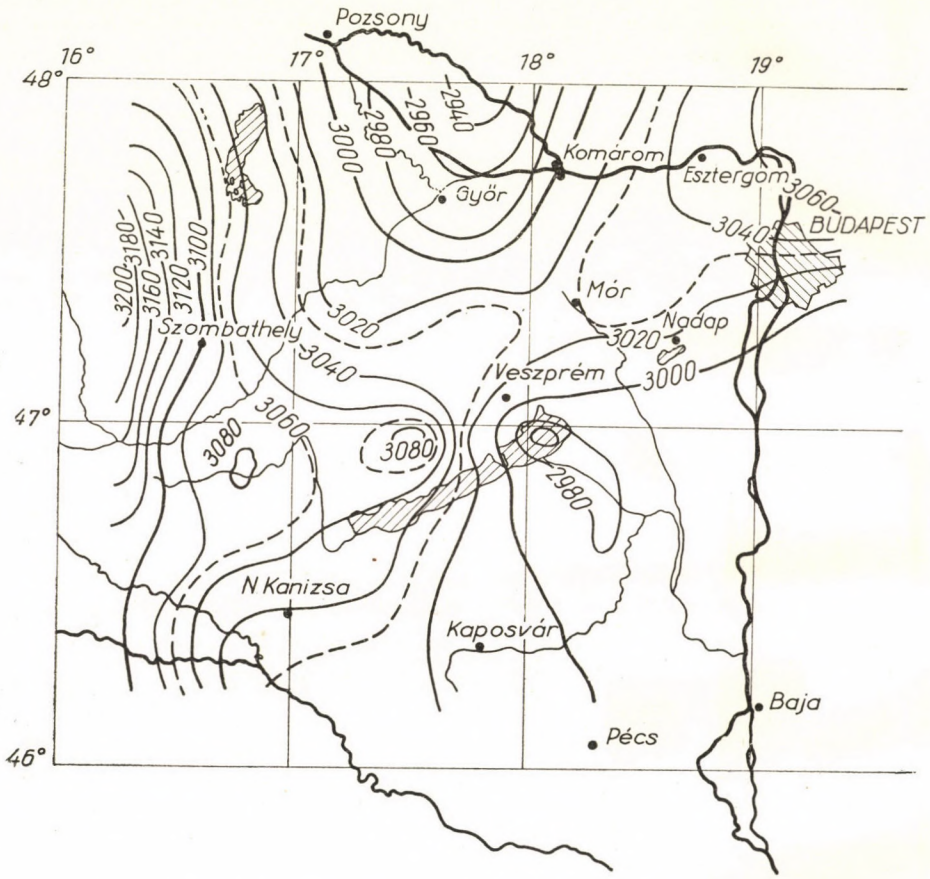


Abb. 12. Karte des transdanubischen Teiles des Geoids nach HOMORÓDI

Schlussfolgerungen und Zusammenfassung

Aus alledem können auf Grund unserer im Raume Transdanubiens ausgeführten geokinetischen Untersuchungen folgende Tatsachen festgestellt werden.

Im Raume von Trasdanubien vollziehen sich sehr kraftvolle kratogene Erdkrustenbewegungen. Rund zweidrittel des ganzen Gebietes ist im allgemeinen im Steigen begriffen, während die im Mesozoikum zu sehr belasteten Schollen, darunter vor allem das Bakonygebirge, sich im Sinken befinden.

Wie dies auch auf den hier gezeigten geokinetischen Karten ersichtlich ist, ist der Raum von Transdanubien — die nordwestlichen Teile abgerechnet — fast in Gänze im Steigen begriffen. Diese Tatsache bestätigt die vor mehr als 30 Jahren verlautete Behauptung Professors GYULA PRINZ [23], wonach sich in unseren Zeiten im Karpatenbecken eine Festlandbildung (Epeirogenese s. str.) vollzieht. Die Steigung ist jedoch nicht kontinuerlich, nicht kipphaft und nicht gleichmässig; die Bewegungen deuten grösstenteils auf geschuppte Bewegung oder Überschiebung hin.

Wie dies auch schon mit der Ähnlichkeit der Form der Durchschnittsisobasen und der isostatischen Anomalienkurven bestätigt wurde, stehen die beobachteten Niveauänderungen in enger Beziehung mit den das Gebiet charakterisierenden Schwerkraftsanomalienkurven. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die geprüften gegenwärtigen Erdkrustenbewegungen isostatischen Charakters sind. Aus der Zeichnung der Isobasen und der Intensität der Bewegungen folgt, dass diese transdanubischen Bewegungen kratogenen Charakters den orogenen Bewegungen viel näher kommen, als den aus rein isostatischen Gründen erfolgten Niveauänderungen.

Den Einklang zwischen den theoretischen und erfahrungsgemässen Tatsachen schafft folgende Erkenntnis.

Die Isostasie als sekundäre, passive Kräftewirkung [22] ist überall und immer tätig. Sie übt ihre Wirkung demnach auch dann aus, wenn gleichzeitig auch orogene oder kratogene strukturbildende Kräfte wirken. Dementsprechend drücken die Kurven der isostatischen Anomalien einen im Inneren der Erdkruste befindlichen und Verschiebung ausübenden Spannungszustand aus, der von der Resultante der aktiven strukturbildenden, sowie der passiven isostatischen Kräftwirkungen hervorgerufen wurde.

SCHRIFTTUM

1. KAYSER, E.: Merkwürdige Senkungen des Bodens von Frankreich. Sitzungsbericht d. bayr. Akad. d. Wiss. math.-phys. Kl. 1922.
2. SCHMIDT, MAX. Neuzeitliche Erdkrustenbewegungen in Frankreich. Sitzungsbericht d. bayr. Akad. d. Wiss. math.-phys. Kl. 1922.
3. VAN STRAATEN, L. M. J. U. Lowering of the Dutch coast relative to sea-level. Geologie en Mijnbouw. (New Series) 16, p. 247. 1954.
4. OLTAY, K. A szintezés műszereinek és módszereinek fejlődése és mai állása. (Heutiger Stand der Entwicklung der Nivellierungsgeräte und -methoden.) 47 p. — Bpest 1946.
5. COLE, J. H. Revision of first order levelling in lower Egypt. (Survey Department paper No. 44.) Géza (Orman) 1939. Travaux de l'Assoc. Internat. de Géodésie. Tom 15. Fasc. 1. Washington—Paris, 1939.
6. COLE, J. H. Siehe (5) 14. p.
7. GÁRDONYI, J. A régi felsőrendű szintezési alappontok magasságainak változásai (Höhenänderungen der alten Nivellementsbasispunkte höherer Ordnung). (M. Kir. Áll. Földm. Közl. II. sz.) Bpest 1932, und Geod. Közl. VIII. Ig. 93—106 p. Bpest 1932.
8. BENDEFY, L. Szintezési munkálatok Magyarországon 1820-tól 1920-ig. (Nivellierungsarbeiten in Ungarn von 1820 bis 1920.) IX. Teil. Bpest, 1958. Akad. Verl.
9. RIKUTI SOKURYOBU. Precise Levelling in Japan. (The Imperial Japanese Military Land Survey) Tokyo, 1929. Travaux de l'Assoc. Internat. de Géodésie. Tom 7. fasc. 2. Paris 1931.

10. Rikuti Sokuryobu. Eingehende Berichte. Travaux de l'Assoc. Internat. de Géodésie, Tom. 7. fasc. 2. Paris 1931, und Tom. 11. fasc. 3. Paris 1934.
11. Wegmann, E. Lebende Tektonik. Geolog. Rundschau. 43. Band. Heft 1. Stuttgart 1955.
12. Bendefy, L. Felsőrendű szintezési hálózatunk az 1949. évi kiegyenlítés tükrében. (Nivellementsnetz höherer Ordnung Ungarns im Spiegel des Ausgleichs im Jahre 1949.) Földméréstani Közl. 4. évf. 84—90. p. Bpest 1952.
13. Kukkamäki, T. J. Aus seinem an das Ungarische Geodätische und Kartographische Institut am 23. März 1953 gerichteten Schreiben.
14. Facsinay, L. und Szilárd, J. A magyar országos gravitációs alaphálózat. (Das ungarische Schweregrundnetz) Geofiz. Közl. V. 2. Bpest 1956, und die offiziellen Daten des Tschechoslowakischen Landesnivellements höherer Ordnung vom 4. Okt. 1955.
15. Réthly, A. A Kárpátmedencék földrengései. (Die Erdbeben der Karpatenbecken). Bpest 1952. (Akad. Verl.)
16. Schmidt, E. R. Közép- és szigethegységeink szerkezeti kialakulásának geomechanikai alapjai. (Geomechanische Grundlagen der strukturellen Entfaltung unserer Mittel- und Inselgebirge.) Bány. Lapok, 6. évf. 7. sz. Bpest 1951.
17. Schmidt, E. R. A Dunántúli Magyar Középhegység északkeleti részének hegyszerkezeti vázlata és kialakulásának geomechanikai magyarázata. (Bergstrukturelle Skizze und geomechanische Erklärung der Entwicklung des nordöstlichen Teiles des Transdanubischen Ungarischen Mittelgebirges.) Bány. Lapok 7. l. Bpest 1952.
18. Réthly, A. Siehe (15) Beilagen I und II.
19. Facsinay, L. und Szilárd J. Siehe (14).
20. Schmidt, E. R. Siehe (16).
21. Bendefy, L. Vízszintes értelmű szekuláris mozgások Budapest területén. (Horizontal gerichtete säkulare Bewegungen im Gebiete von Budapest.) Földmérési Közl. 5. No. 1 und 2. Bpest 1953.
22. Bendefy, L. Szintezési alappontok időközi magasságváltozásának meghatározása. (Bestimmung der Höhenänderung der Nivellementsbasispunkte.) Geofiz. Közl. V. 2. Bpest 1955.
23. Prinz, Gy., Az országdomborzat földszármazástani magyarázata a „Tisia"-elmélet tükrében. (Genetische Erklärung des Landesreliefs im Spiegel der „Tisia"- Theorie.—) Földrajzi Közl. VI. (82.) Bd. 3. Bpest, 1958.

DISKUSSION

Prof. Dr. J. BÖHM, PRAHA

Herr Kollege BENDEFY ist in seiner wirklich schönen Arbeit, die ihm gewiss viel Mühe gegeben hat, zu denselben Erfahrungen gelangt, wie auch wir in der Tschechoslowakei. Es ist zu bedauern, dass die Ergebnisse der alten Nivellierungen vom Ende des 19. Jahrhunderts nicht so verlässlich sind, als wir zur Bestimmung der möglichen geologischen Bewegungen brauchen würden. Herr Kollege BENDEFY sagt, dass dies besonders durch die Refraktionseinflüsse verursacht wurde. Ich meine, dass die festgestellte ungünstige Fehleranhäufung auch dadurch entstanden ist, dass die alten Geodäten die Holzlatten benützten und das Lattenmeter nicht im Felde kontrollierten.

So müssen wir uns nur mit dem Vergleich der jüngeren, seit dem Jahr 1920 eingemessenen Nivellierungen zufriedengeben. Leider wurden diese Nivellierungsnetze nur ganz isoliert in jedem Lande entwickelt. Es fehlen also die Nivellementsverbindungen zwischen den Donaustaaten nach dem J. 1920, und die mitteleuropäischen Geodäten müssen ihre Studien nur auf relative Höhenänderungen und immer nur auf ein kleines Gebiet beschränken. Und doch möchten wir in der Tschechoslowakei so gerne auch wissen, was mit unserem Höhengrundpunkt Lišov geschieht!

Endlich ist es in den letzten Jahren zu den Nivellementsverbindungsmessungen zwischen den Volksdemokratien gekommen, die diesen Mangel einigermassen vermindern. Ich bin aber überzeugt, dass dies noch nicht genügt. Wir benötigen auch eine neu eingemessene Nivellementsverbindung mit dem Adriatischen Meer, also durch Österreich und Jugoslawien, und die Wissenschaft benötigt überhaupt periodisch wiederholte Nivellementsverbindungen zwischen allen Meeren. Ich glaube, dass wir — wissenschaftliche Arbeiter in der Geodäsie — die geodätischen Verwaltungen in unseren Ländern überzeugen sollten, dass es sogar unsere Pflicht den nachkommenden Generationen gegenüber ist, die Schaffung eines gemeinsamen europäischen Nivellementsnetzes zu ermöglichen. Die internationale geodätische Assoziation braucht dazu nichts mehr als die Höhen- und Schwerenunterschiede zwischen den Punkten, die hunderte von Kilometer voneinander entfernt und irgendwo weit von jeder Fabrik unterirdisch stabilisiert sind. Man muss nicht befürchten, dass solche Angaben in irgendwelcher Weise zu Kriegszwecken missbraucht werden könnten. Und für diese Daten bekommen wir Ergebnisse eines modernen ausgeglichenen Nivellementsnetzes, das alle europäischen Meere verbinden wird und uns, aber besonders den nachkommenden Generationen schon manche wissenschaftliche Fragen beantworten kann!

Prof. A. I. DURNJEW, MOSKAU—DRESDEN

Die Entwicklung der Beziehungen zwischen der wissenschaftlichen Geologie und der Geodäsie ist zu begrüssen.

In der Sowjetunion wird alle 10—15 Jahre ein präzises Nivellement gemacht, aber keineswegs seltener als alle 25 Jahre und längs des Triangulierungsnetzes werden auch geodätische Beobachtungen gemacht und zwar in einem Abstand von nicht grösser als 6 km.

Z. KÁROLYI, BUDAPEST

L. BENDEFY war bestrebt, die auf Grund der Änderung der Höhenfestpunkte höherer Ordnung bestimmten Erdkrustenbewegungen mit geologischen Argumentum und Beobachtungen zu beweisen. Diese Daten können auch auf Grund hydromorphologischer Beobachtungen kontrolliert werden.

Im Laufe der Aufarbeitung der Sinkstoffmessungen der Donau kamen wir im Forschungsinstitut für Wasserhaushalt auf das verblüffende Ergebnis, dass der Flussgrund besonders in der Gegend der Visegráder Enge mit grobem Kies bedeckt ist, während der vom Wasser mitgebrachte Schwemmstoff selbst bei Hochwasser nur feiner Sand ist. Die Frage, wie der Grobkies auf den Flussgrund geraten ist, blieb offen. Die Antwort hierauf kann gefunden werden, wenn man auf Grund der Daten BENDEFYS annimmt, dass einst die über Visegrád befindliche Dunaustrecke höher gelegen war, die darunter befindliche tiefer, die Donau demnach früher ein stärkeres Gefälle hatte und noch imstande war Kies zu bewegen, heute aber nicht mehr. Dieser Umstand ist vom Standpunkt der Stromwerke und der Planung des Visegráder Kraftwerkes von grosser Bedeutung.

Die Richtigkeit der von BENDEFY angegebenen Daten kann auch numerisch bewiesen werden. Seiner Meinung nach war bei Visegrád während 100 Jahren eine Steigung von 115 mm, bei Esztergom eine Senkung von 40 mm zu beobachten, die Höhenänderung zwischen den beiden Orten beträgt demnach 155 mm. Auf der Donau-Insel bei Esztergom wurden im Jahre 1955 die Grundmauern eines Klosters aus der Zeit der ersten Arpaden erschlossen,deren Fussbodenoberkante auffallend tief, in einer vom Hochwasser fast jedes Jahr erreichten Höhe lag ; es ist nicht wahrscheinlich, dass hier ein Kloster erbaut worden wäre, wenn die Hochwässer vor 900 Jahren auch die heutige Höhe erreicht hätten. Angenommen, dass sich die Fussbodenoberkante mindestens in der Höhe der alle 10—20 Jahre vorkommenden Hochwässer befunden hatte, kann berechnet werden, dass die in solchen Perioden erfolgenden Hochwässer heute um 1,4—1,8 m höher steigen. Die Steigung der Visegráder Schwelle hatte demnach auch den Wasserspiegel der Donau um so viel erhoben. Wenn nun die von BENDEFY angegebenen 155 mm mit 9 multipliziert werden, dann ergibt sich auf 900 Jahre ein Wert von 1,4 m, die auf zwei Arten erhaltenen Daten stimmen demnach auffallend überein.

Mit dem hier Vorgetragenen habe ich nur bestätigt, welche grosse praktische Bedeutung die Forschungen DR. BENDEFYS auch in anderen Beziehungen haben, daher wäre deren systematische Weiterführung und Erstreckung auf das ganze Gebiet Ungarns sehr wünschenswert.

Prof. MICHAL ODLANICKI, KRAKOW

Comme c'était justement dir par le Professeur DURNJEV, les études du nivellement, montrés dans le referat de M. BENDEFY, doivent être liés avec les travaux gravimétriques. Mais a mon avis, elles doivent avoir une liaison, meme très ferme, avec les travaux de triangulation.

Et de ce point de vue je fait une proposition que notre Congrès donne un conseil aux Académies des Sciences des États qui participent dans nos travaux,

d'entreprendre des études systématiques dans les domaines de nivellement, de triangulation et de gravimetrie. Cette entreprise est absolument nécessaire pour étudier le mouvement de la surface terrestre des nos pays.

Ces études dans les endroits des frontières parmi les états doivent etre précisement concordées selon le voeux du Collegue KOWALCZYK présenté au premier Congrès Géodesique de l'Academie de l'Hongrie en 1952.

Dr. L. BENDEFY, BUDAPEST

Herr Prof. J. BÖHM betonte in seiner Bemerkung jene Tatsache, dass unsere tschechoslowakischen Kollegen bis zum heutigen Tage bloss die Höhe der noch von den Nivellierungen des einstigen Militär-Geographischen Institutes zu Wien herstammenden und den heutigen Begriffen entsprechend keineswegs präzis erscheinenden Basispunkte des vergangenen Jahrhunderts mit neuen Nivellements zum Gegenstand ihrer Prüfungen machten.

Ich möchte ihm meinen herzlichen Dank aussprechen dafür, dass auch er den Kongress auf die Ungenauigkeit der einstigen Wiener Militärnivellements aufmerksam gemacht hatte.

Herr Prof. A. J. DURNJEW lenkte die Aufmerksamkeit auf die Beziehung zwischen den praktischen Nivellements höherer Ordnung, der Gravitationsanomalien und der Niveauänderungen, betonte ausserdem die Notwendigkeit ähnlicher Untersuchungen auf 25 Jahre überschreitende Perioden.

Was das erste Thema betrifft, befassen wir uns schon seit Jahren mit der Untersuchung des erwähnten Problems, und die diesbezügliche Prüfung der Niveauänderungen des hier im voraus angeführten Gebietes bildet einen Teil unseres nächsten Arbeitsplanes.

Es sei mir erlaubt, bezüglich der Prüfung der Niveauänderungen in 25—30 Jahre überschreitenden Perioden auf den ersten Teil meines Vortrages hinzuweisen. Aus den angeführten Beispielen ist klar ersichtlich, dass die noch vor der Erscheinung der heutigen modernen Feineinwägungsgeräten herstammenden Nivellements mit solch bedeutenden Messfehlern belastet sind, dass diese zum Nachweisen von Niveauänderungen nicht geeignet sind und höchstens für methodische Versuche oder geodätische Untersuchungen verwendet werden können.

Herr Prof. A. TÁRCZY-HORNOCH hatte die Freundlichkeit mit seinen Bemerkungen darauf aufmerksam zu machen, wie grundlegend wichtig es auch vom Standpunkt der internationalen Wissenschaft wäre, das ungarische Nivellementsnetz höherer Ordnung dem jugoslawischen Nivellementsnetz höherer Ordnung anzuschliessen.

Es sei mir erlaubt, die Bemerkung meines Kollegen J. THURY damit zu ergänzen, dass der Anschluss an das jugoslawische Nivellementsnetz — infolge der zentralen geographischen Lage Ungarns — sehr bedeutenden wissenschaftlichen Problemen weitere wertvolle Aufschlüsse geben könnte. Es ist nämlich bekannt, dass die thalattographischen Forschungen unseres Zagraber Geophysiker-Kollegen DR. MARIJAN KASUMOVIČ nicht allein dazu dienten, das Verhältnis des jugoslawischen Nivellementsnetzes höherer Ordnung zum Ausgangspunkt in Triest zu klären, sondern auch dazu, die mittlere Seehöhe der Bucht von Buccari zu bestimmen.

Da bereits das jugoslawische Nivellementsnetz höherer Ordnung an jenes von Triest, dieses wiederum über das italienische Netz an das österreichische Netz und das österreichische an das tschechoslowakische Netz angeschlossen wurde, könnte im Falle eines Anschlusses an das jugoslawische Netz die Höhe von Nadap von drei Seiten, d. h. vom Adriatischen, Atlantischen Meer und der Ostsee abgeleitet werden. Wir sind jedoch jetzt in der Lage, die Höhe unseres Hauptbasispunktes Nadap auch vom Baltischen Meer her abzuleiten. Mittels eines unmittelbaren Anschlusses an das rumänische Nivellementsnetz, bzw. eines indirekten Anschlusses an das bulgarische Nivellementsnetz könnten wir uns sogar den Thalattographenstationen des Schwarzen Meeres anschliessen. Auf diese Weise hätten wir die eine ausreichende Möglichkeit, auf dem Hauptbasispunkt Nadap, als einem genügend zentral gelegenen Orte, die Niveauverhältnisse von fünf Meeren zu vergleichen.

Es muss vielleicht hier nicht besonders betont werden, welche wissenschaftliche und praktische Vorteile auf diesem Gebiete der je ehere Feinanschluss an das österreichische Nivellementsnetz höherer Ordnung mit sich bringen würde.

Herr Oberingenieur Z. KÁROLYI hob in seinen Bemerkungen den Einklang zwischen unseren modernen geokinetischen Resultaten und den Ergebnissen der hydromorphologischen Untersuchungen des Forschungsinstitutes für Wasserhaushalt hervor.

Ich erlaube mir hier seine Daten damit zu ergänzen, dass die Forschungsergebnisse des Forschungsinstitutes für Wasserhaushalt (VITUKI) im Gebiete von Visegrád jene der in der Visegráder Donauwindung ausgeführten geomorphologischen Untersuchungen tadellos unterstützen.

Auf Grund der Messergebnisse des Nivellements höherer Ordnung kann nämlich bewiesen werden, dass — während am rechten Ufer der Donau, auf der Strecke zwischen Kisoroszi und Visegrád, das Terrain alle zehn Jahre durchschnittlich 3,3 mm sinkt (im Verhältnis zu Nadap ; im absoluten Sinne beträgt die Senkung bloss 0,3 mm, ist daher praktisch fast ganz in Ruhe) — auf derselben Strecke, jedoch auf der anderen Uferseite zwischen Nógrádverőce und Zebegény im Laufe derselben Zeit eine verhältnismässige Steigung von 7,5—8,5 mm beobachtet werden kann. (Im absoluten Sinne entspricht dies einer Steigung von ungefähr 10,5—11,5 mm pro 10 Jahre.)

Auf derselben Donaustrecke kann bewiesen werden (siehe die Werke von B. BULLA, A. KÉZ, M. PÉCSI, usw.), dass die hier befindlichen paläodiluvialen Terrassen sich über die Terrassen der Nachbargebiete desselben Zeitalters erhoben hatten und der Niveauunterschied erreicht heute sogar 85—170—210 m. Diese Erhöhung beträgt — auf 180 000 Jahre berechnet — eine Intensitätsdifferenz von jährlich ungef. 0,8 mm. Der Unterschied zwischen den Bewegungsgeschwindigkeiten besteht auch heute und zwar ungefähr in demselben Masse.

Ebenso untersuchten wir mit Geologen M. ERDÉLYI zwischen Érd und Bátaszék einige Profile an der Donau. Die Messdaten der Niveauänderung stimmen bestens mit den geographischen Daten überein.

VORSCHLAG ZUR BERECHNUNG DER ORTHOMETRISCHEN HÖHEN DER PRÄZISIONS-NIVELLEMENT-HAUPTPUNKTE

I. MÜLLER
BUDAPEST

Laut Beschluss 1955 der Kommision für Präzisionsnivellement der I. U. G. G. in Florenz ist es zweckmässig, die orthometrische Höhe H_i eines Punktes A_i nach folgender Formel zu berechnen :

$$H_i = \frac{C_i}{G_i} \tag{1}$$

wo C_i der geopotentielle Wert des betreffenden Punktes, G_i die mittlere Schwerkraftbeschleunigung zwischen dem Geoid und der physikalischen Oberfläche auf der Lotlinie ist, die durch den betreffenden Punkt hindurchgeht.

Die obenerwähnte Kommission hat die Bestimmung des geopotentiellen Wertes an gewisse Regeln gebunden, doch setzte sie die Methode zur Berechnung der mittleren Gravitation G_i nicht fest. Die letztere könnte man nämlich nur in der Tiefe der Erde mit Schwerkraftbeschleunigungsmessungen entlang der Lotlinie bestimmen. Dies ist aber — obwohl es grundsätzlich möglich ist — in der Praxis zumindest im erforderlichen Ausmass undurchführbar. Bei der Bestimmung von G_i ist man an gewisse Voraussetzungen gebunden. Je besser sich diese Voraussetzungen der Wirklichkeit annähern, desto besser wird das Resultat bei der Berechnung orthometrischer Höhen sein.

Zur Bestimmung des Wertes G_i haben viele Forscher Vorschläge gemacht (HELMERT, BAESCHLIN, NIETHAMMER, VIGNAL, LEDERSTEGER, BARANOW, RAMSAYER). Von diesen Verfahren hält die Literatur die NIETHAMMERsche Methode für die genaueste, doch wird man diese wegen ihrer komplizierten Rechnungsmethode kaum in der Praxis anwenden können. Bei der Entwicklung des hier vorgeschlagenen Verfahrens wurde angestrebt, ein Berechnungsverfahren zu erhalten, das sich einerseits besser an die NIETHAMMERschen orthometrischen Höhen annähert als die übrigen Methoden und sich anderseits auch für die praktische Anwendung eignet.

Bei der Bestimmung der mittleren Schwerkraftbeschleunigung G_i soll von drei Voraussetzungen ausgegangen werden :

1) Für die Verteilung der Schwerkraftbeschleunigung sei vorausgesetzt, dass der Anfangswert g_i proportional der Tiefe bis zum Wert am Meeresspiegel (g_i^0) wächst (Abb. 1).

2) Es sei angenommen, dass die Schwerkraftbeschleunigung am Meeresspiegel mit Hilfe der normalen Schwerkraftbeschleunigung und der BOUGUER-schen Anomalien bestimmt werden kann.

3) Schliesslich sei vorausgesetzt, dass im Gebiet eines geschlossenen Nivellierungspolygons die Geoidundulationen und die Bodendichte unverän-

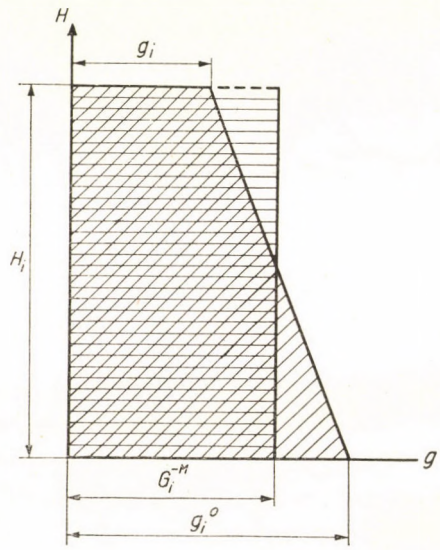


Abb. 1

derte Werte haben und dass diese als gleich den lokalen mittleren Geoidundulationen bzw. als gleich der Dichte des Bodens angenommen werden können.

Die mittlere Schwerkraftbeschleunigung G_i wird so gewählt, dass die auf der Abb. 1 mit schräger Schraffur bezeichnete Fläche $^1/_2\,(g_1 + g_i^0)H_i$ der mit horizontaler Schraffur bezeichneten Fläche $\overline{G}_i H_i$ gleich sein soll. Diese Gleichheit der Flächen bedeutet Gleichheit der Arbeit. Dementsprechend ist

$$\overline{G}_i\, H_i = {}^1/_2\,(g_i + g_i^0)\, H_i\,,$$

woraus

$$\overline{G}_i = {}^1/_2\,(g_i + g_i^0) \tag{2}$$

Nun sei untersucht, wie man die Schwerkraftbeschleunigung am Meeresspiegel g_i^0 berechnen kann.

Hierbei sei vorausgesetzt, dass in dem Durchstosspunkt der durch den Punkt A_i führenden Lotlinie durch das Erdellipsoid der Wert der Schwerkraftbeschleunigung g_i^e ist. Man setze ferner voraus, dass sich dieser Wert aus zwei Komponenten zusammensetzt: aus der Komponente g_i^{e1}, die die Wirkung der in das Erdellipsoid eingeschlossenen Massen ausdrückt, und aus der Komponente g_i^{e2}, welche die Wirkung der ausserhalb des Erdellipsoids befindlichen Massen bedeutet.

Hieraus ergibt sich

$$g_i^e = g_i^{e1} - g_i^{e2} \tag{3}$$

Verschiebt man den auf dem Erdellipsoid befindlichen Punkt entlang der Lotlinie des Punktes A_i auf das Geoid, also auf den Meresspiegel, so erhält man in diesem Punkte die Schwerkraftbeschleunigung g_i^0 dadurch, dass man diesen Beschleunigungswert mit der Freiluft-Reduktion und mit der zweifachen BOUGUER-Reduktion, die die Wirkung der Masse der zwischen Geoid und Ellipsoid eingeschlossenen Flächen ausdrückt. Bei Anwendung der Formel (3) gelangt man zu

$$g_i^0 = (g_i^{e1} - g_i^{e2} - 0{,}3086\, u_i + 2 \cdot 0{,}0418\, \sigma_i\, u_i)\, 10^{-3}\ \mathrm{cm\ sec^{-2}} \tag{4}$$

(u_i in Meter, σ_i in $\mathrm{gcm^{-3}}$)

(u_i ist die Geoidundulation).

Von der Schwerkraftbeschleunigung g_i^{e2}, die die Wirkung der Massen $(H_i + u_i)$ über dem Ellipsoid ausdrückt, sei vorausgesetzt, dass man sie mit der BOUGUERschen Wirkung ausdrücken kann; dadurch erhält man aus der Gleichung (4) folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} g_i^0 &= g_i^{e1} - 0{,}0418\, \sigma_i\, (H_i + u_i) - 0{,}3086\, u_i + 2 \cdot 0{,}0418\, \sigma_i\, u_i = \\ &= g_i^{e1} - (0{,}3086 - 0{,}0418\, \sigma_i)\, u_i - 0{,}0418\, \sigma_i\, H_i\, 10^{-3}\ \mathrm{cm\ sec^{-2}} \end{aligned} \tag{5}$$

(H_i und u_i in Meter, σ_i in $\mathrm{gcm^{-3}}$)

Das zweite Glied auf der rechten Seite der Formel kann auf dem ganzen Gelände des Nivellierungspolygons als konstant betrachtet werden, während sich das dritte Glied einfach berechnen lässt.

Den wahrscheinlichsten Wert g_i^{e1}, der die Wirkung der ins Innere des Erdellipsoids eingeschlossenen Massen ausdrückt, kann man so berechnen, dass man zu dem CASSINISschen Normalwert (γ_{i0}) der Schwerkraftbeschleunigung

die BOUGUERsche Anomalie $(g''_{i0} - \gamma_{i0})$ addiert, da es sich um die Wirkung der in das Ellipsoid eingeschlossenen Massen handelt.

Es wird daher

$$g_i^{e1} = \gamma_{i0} + (g''_{i0} - \gamma_{i0}).$$

Setzt man diesen Wert und ferner statt der orthometrischen Höhe H^i das rohe Nivellierungsresultat z_i in die Gleichung (5) ein, so wird:

$$g_i^0 = \gamma_{i0} + (g''_{i0} - \gamma_{i0}) - (0{,}3086 - 0{,}0418\,\gamma_i)\,u_i - 0{,}0418\,\gamma_i\,z_i\,10^{-3}\ \mathrm{cm\,sec^{-2}} \qquad (6)$$

(u_i und z_i in Meter, γ_i in $\mathrm{gcm^{-3}}$)

Bei Einführung dieser Gleichung in die Formel (2) erhält man für die mittlere Schwerkraftbeschleunigung G_i folgende Formel:

$$\bar{G}_i = {}^1/_2 g_i + \gamma_{i0} + (g''_{i0} - \gamma_{i0}) - (0{,}3086 - 0{,}0418\,\gamma_i)\,u_i - \\ - 0{,}0418\,\gamma_i\,z_i\,10^{-3}\,\mathrm{sec^{-2}} \qquad (7)$$

Wenn man z. B. für das Gebiet der Schweiz die geltende Formel berechnen wollte, dann sind in die Gleichung (7) die Werte $u_i = 40$ m und $\gamma_i = 2{,}7$ $\mathrm{gcm^3}$ einzusetzen. Die gesuchte Gleichung lautet daher:

$$\bar{G}_i = {}^1/_2 g_i + \gamma_{i0} + (g''_{i0} - \gamma_{i0}) - 0{,}11286\,z_i - 8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{cm\,sec^{-2}}$$

In Ungarn, im Gebiet der Grossen Tiefebene (Alföld) ergibt sich bei Werten von $u_i = 30$ m und $\gamma = 1{,}9$ $\mathrm{gcm^{-3}}$ folgende Gleichung:

$$\bar{G}_i = {}^1/_2 g_i + \gamma_{i0} + (g''_{i0} - \gamma_{i0}) - 0{,}07942\,z_i - 7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{cm\,sec^{-2}}$$

Natürlich geben die Gleichungen desto bessere Resultate, je mehr sich die Werte u_i und γ_i den tatsächlichen lokalen Werten annähern. Es ist zweckmässig, für jedes Polygon eine besondere Formel zu bestimmen. Bei den BOUGUERschen Anomalien $(g''_{i0} - \gamma_{i0})$ muss man darauf achten, dass diese mit der CASSINISschen Normalformel berechnet werden.

Die nachstehende Tabelle zeigt die Abweichungen für das Schweizer geschlossene Präzisionsnivellierungspolygon No. XVII (bezogen auf den Abschnitt Biasca—Reichenau), zwischen den auf verschiedenen Weisen berechneten G_i-Werten und den NIETHAMMERschen mittleren Schwerkraftbeschleuni-

gungswerten, ferner zwischen den auf verschiedene Weisen berechneten orthometrischen Höhen und den NIETHAMMERsche orthometrischen Höhen.

1	2	3	4
Autor	Durchschnittliche Abweichung der G-Werte von den NIETHAMMERschen G_i-Werten	Die maximale Abweichung der orthometrischen Höhen von den NIETHAMMERschen orthometrischen Höhen	Die durchschnittliche Abweichung der orthometrischen Höhen von den NIETHAMMERschen orthometrischen Höhen
	10^{-3} cm sec^{-2}	cm	cm
HELMERT	+ 14,8	+ 3,76	+ 1,63
VIGNAL	+ 175,4	+ 33,41	+ 18,52
BARANCO	+ 152,2	+ 41,60	+ 17,58
LEDERSTEGER	+ 120,4	+ 22,60	+ 12,85
RAMSAYER I.	+ 68,7	+ 25,47	+ 9,22
RAMSAYER II.	+ 65,6	+ 24,80	+ 9,66
RAMSAYER III.	+ 235,5	+ 57,98	+ 26,13
Vorgeschlagen	+ 13,4	+ 2,78	+ 1,22

DISKUSSION

P. MÁJAY, BUDAPEST

Anerkennenswert ist das Bestreben, aus den rohen Ergebnissen des Nivellements auf Grund der tatsächlichen Schwerkraft die orthometrische Höhe der Nivellementsbasispunkte zu bestimmen. Anerkennenswert ist auch die Bemühung I. MÜLLERS, mit welcher er die Lösung dieser Frage erstrebte. Es ist schade, dass er bei seinem Vorschlag nicht auf den Grad der Genauigkeit seines Verfahrens hingewiesen hat. Um diesen Mangel zu eliminieren, bzw. um den Grad der Näherung zu bestimmen, verfolgen wir nun denselben Gedankengang, dem MÜLLER gefolgt war.

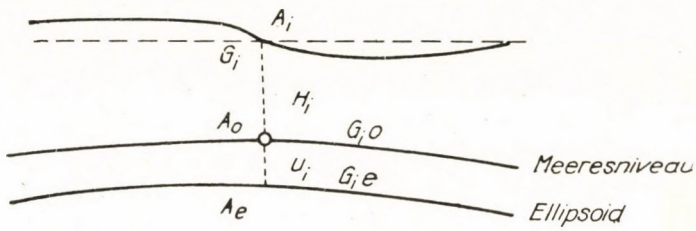


Abb. 1

Bezeichnen wir auf irgendeinem Geländepunkt A_i (Abb. 1) den Wert der Schwerebeschleunigung mit g_i. Die durch den Punkt A_i hindurchgehende Lotlinie schneidet den Meeresspiegel in A_0, das Erdellipsoid im Punkt A_e. Bezeichnen wir nun die Schwerkraft auf dem Meeresspiegel mit g_{i0}, auf dem Ellipsoid mit g_{ie}, die Höhe des Punktes A_i über dem Meeresspiegel mit H_i, die Entfernung zwischen dem Ellipsoid und dem Meeresspiegel mit u_i.

I. MÜLLER betrachtet den Wert g_{ie} auf dem Ellipsoid als aus zwei Teilen bestehend, und zwar

$$g_{ie} = g_{ie1} - g_{ie2} \tag{1}$$

Der mit g_{ie1} bezeichnete Teil stellt die Wirkung der Massen im Ellipsoid, der mit g_{ie2} bezeichnete Teil die Wirkung der Massen ausserhalb des Ellipsoids dar.

Der Teil g_{ie2} wird durch die BOUGUERsche Wirkung der Schichten u_i und H_i ausgedrückt. Es soll die BOUGUERsche Wirkung der Schicht $H_i = \Delta g'_H$, die der Schicht $u_i = \Delta g'_u$ sein, dann ist

$$g_{ie2} = \Delta g'_H + \Delta g'_u \tag{2}$$

und somit

$$g_{ie} = g_{ie1} - \Delta g'_H - \Delta g'_u \tag{3}$$

Nun reduziert I. MÜLLER die auf dem Ellipsoid befindliche Kraft mit der Freiluft-Reduktion Δg_u sowie mit der BOUGUERschen Reduktion der u_i

mächtigen Schicht $\Delta g'_u$ durch die Schicht u_i auf den Meeresspiegel; somit ergibt sich für g_{i0} auf dem Meeresspiegel

$$g_{i0} = g_{ie} - \Delta g_u + 2\,\Delta g'_u \tag{4}$$

Wird nun Gleichung (3) in Gleichung (4) eingesetzt, dann ist

$$g_{i0} = g_{ie1} - \Delta g_u - \Delta g'_H + \Delta g'_u \tag{5}$$

Den Wert g_{ie1} auf der rechten Seite der Gleichung drückt MÜLLER durch die normale Schwerebeschleunigung und die BOUGUERsche Anomalie aus, d. h.

$$g_{ie1} = \gamma_{i0} + (g''_{i0} + \gamma_{i0}) \tag{6}$$

In der Gleichung (6) bedeutet γ_{i0} die normale Schwerkraft auf dem Meeresspiegel, $(g''_{i0} - \gamma_{i0})$ widerum die BOUGUERsche Anomalie. Aus Gleichung (6) ist nach MÜLLERS Vorschlag ersichtlich, dass

$$g_{ie1} = g''_{i0} \tag{7}$$

Hier bedeutet g''_{i0} die auf den Meeresspiegel reduzierte Schwerkraft, d. h.

$$g''_{i0} = g_i + \Delta g_H - \Delta g'_H + \Delta g'' \tag{8}$$

wobei Δg_H die Freiluft-Reduktion über die H-Schicht,
$\Delta g'_H$ die BOUGUERsche Wirkung der H-Schicht,
$\Delta g''$ die topographische Korrektion
bedeuten.

MÜLLER nimmt demnach stillschweigend an, dass jene Kraft, die sich aus der Summe der normalen Schwerkraft und der BOUGUERschen Anomalie ergibt, gleich ist der Wirkung der Massen im Ellipsoid, dem Wert g_{ie1}, d. h. dass die Gleichung (7) besteht. Diese Annahme kann jedoch stark umstritten werden und es muss ernstlich geprüft werden, ob eine solche Näherung möglich ist. Es kann nämlich nachgewiesen werden, das MÜLLER, wenn er den Wert $g_{ie1} = g''_{i0}$ nimmt, einen Fehler

$$\Delta g_u - \Delta g'_u \tag{9}$$

begeht, und dieser Fehler ist innerhalb jenes Gebietes, in welchem die Geoidundulation als konstant erachtet werden kann, ebenfalls von *konstantem Wert.*

Laut MÜLLERS Vorschlag kann der Wert der *durchschnittlichen Schwerkraft* unter Verwendung der Gleichung (5) folgendermassen geschrieben werden:

$$\bar{g}_i = \frac{g_i + g_{i0}}{2} = \frac{g_i + g''_{i0} - \Delta g_u - \Delta g'_H + \Delta g'_u}{2} \tag{10}$$

bzw., wenn der Wert g''_{i0} aus der Gleichung (8) eingesetzt wird,

$$\bar{g}_i = g_i + \frac{\Delta g_H}{2} - \Delta g'_H + \frac{\Delta g''}{2} + \frac{-\Delta g_u + \Delta g'_u}{2} \tag{11}$$

Demgegenüber gibt NIETHAMMER den Wert den durchschnittlichen Schwerkraft in folgender Gleichung an:

$$\bar{g}_i = g_i + \frac{\Delta g_H}{2} - \Delta g'_H + (\Delta g'' - \overline{\Delta g''}) \tag{12}$$

oder in anderer Form:

$$\bar{g}_i = g_i + \frac{\Delta g_H}{2} - \Delta g'_H + \frac{\Delta g''}{2} + \left(+ \frac{\Delta g''}{2} - \overline{\Delta g''}\right) \tag{12a}$$

wobei $\Delta g''$ die topographische Korrektion auf dem Terrainpunkt, und $\overline{\Delta g''}$ die topographische Korrektion des durchschnittlichen Wertes bedeutet.

Wird nun der von MÜLLER vorgeschlagene und mit der Gleichung (11) angegebene Wert der durchschnittlichen Schwerkraft mit dem durchschnittlichen Wert gemäss der von NIETHAMMER abgeleiteten Gleichung (12a) verglichen, so ist ersichtlich, dass das letzte Glied auf der rechten Seite der Gleichung (11) ein konstanter Wert ist, welcher — wenn von der BOUGUER-schen Wirkung abgesehen wird — im Falle Ungarns gleich ist der durch etwa 15 m Freilufthöhendifferenz auftretenden Änderung der Schwerkraft; bei der NIETHAMMERschen Gleichung hingegen (12a) ist das letzte Glied ein aus der topographischen Korrektion zu berechnender *variabler Wert*, eine von der Geländeform, vom Relief um den Terrainpunkt abhängende Grösse, welche negativ, Null oder positiv sein kann.

Damit wurde bewiesen, dass der von MÜLLER vorgeschlagene durchschnittliche Schwerewert in bedeutendem Masse von dem als richtig zu betrachtenden Wert abweicht und somit ernsthaft geprüft werden muss, ob so ein abweichender durchschnittlicher Schwerewert bei der Berechnung der orthometrischen Höhen verwendet werden darf.

Prof. Dr. H. PESCHEL, DRESDEN

Meinerseits finde ich es interessant festzustellen, dass hier eine Gegenüberstellung, eine Art Kontroverse zwischen MÜLLERS Ergebnissen und den Werten NIETHAMMERS zum Vorschein gekommen ist. In diesem Fall ist der Unterschied zwischen den NIETHAMMERschen und MÜLLERschen Werten verhältnismässig klein, dies würde auf den ersten Blick für die Vernachlässigung von gewissen Teilen des mathematischen Ausdruckes sprechen. Man könnte aber behaupten, ein Beispiel ist kein Beispiel, deshalb wäre es empfehlenswert, in dieser Beziehung weitere Versuche und Vergleiche anzustellen.

Prof. Dr. A. TÁRCZY-HORNOCH, SOPRON

Prof. PESCHEL hat die Kontroverse zwischen den NIETHAMMERschen Werten und dem neuen Versuch MÜLLERS scharf beleuchtet. Ich bin auch der Meinung, dass es ratsam ist, weitere Beispiele zu untersuchen. Dadurch werden wir Aufschlüsse erhalten, ob in diesem oder jenem Falle die begangene Vernachlässigung erlaubt ist oder nicht.

Prof. Dr. W. K. HRISTOW, SOFIA

Ich habe eine Frage an den Kollegen MÜLLER, ob er einen Vergleich mit der »Normalhöhenmethode« von MOLODJENSKY gemacht hat.

Ich möchte noch darauf hinweisen, dass bei uns die Formel von HELMERT — 1901—1909 — verwendet werden soll; dieser Formel entspricht eine Abplattung, die fast identisch mit der Abplattung nach der Schwereformel von KRASOWSZKY ist.

Prof. ANDREJ I. DURNJEW, MOSKAU—DRESDEN

Es ist unverständlich, dass bei diesem Referat nicht die Arbeit des sowjetischen Forschers MOLODJENSKY erwähnt worden ist, obwohl er seine Studie über die »Grundfragen der geodätischen Geometrie« bereits im Jahre 1945 veröffentlicht hat. Er hat darüber in Sofia 1952 berichtet und auch in Rom im Jahre 1954. Ausserdem wurden MOLODJENSKYs Arbeiten in den Veröffentlichungen der Sowjetischen Akademie der Wissenschaften veröffentlicht. Wenn man über eine wissenschaftliche Frage berichtet, soll man den Standpunkt der Wissenschaft kennen. In den Arbeiten von MOLODJENSKY und anderen sowjetischen Geodäten wurde in dieser Beziehung Klarheit geschaffen.

Über die drei Integrale der H-Werte kann folgendes gesagt werden. Man kann bekanntlich dieses »g« auf keinen Fall richtig finden, da diese Höhe nicht zu berechnen ist. Deswegen hat MOLODJENSKY den Wert »g_{mh}« mit »g« ersetzt.

MOLODJENSKY kommt somit auf ein anderes Ergebnis, und zwar auf das Quasigeoid.

Die Normalhöhe auf dieses Quasigeoid bezogen kann errechnet werden.

Schliesslich wird die Formel der dynamischen Höhe gegeben. In der Sowjetunion hat man eine einfachere Formel aufgestellt, wonach die Normalhöhen errechnet werden können. Statt der Formel (2) bedient man sich der Formel (4). Da kann man viel einfacher rechnen, als mit der Formel (2):

$$H_N^B = \frac{1}{\gamma_m^B} \int_{0B}^{} g dh$$

Es wird der Wert von »γ_m« errechnet.

Das Buch von MOLODJENSKY ist in die deutsche Sprache übersetzt worden und wird demnächst vom Verlag Technik herausgegeben. Dann kann man dieses Buch in allen Ländern benützen.

Dr. L. BENDEFY, BUDAPEST

Ich versuche, den Vorschlag I. MÜLLERS vom Gesichtspunkt der Praxis aus zu betrachten.

Vortragender nimmt an, dass im Gebiete eines geschlossenen Nivellementspolygons die Geoidundulationen und die Bodendichte immer von konstantem Werte sind, und er hält diese für identisch mit denen der lokalen mittleren Geoidundulationen bzw. dem lokalen Wert der Bodendichte.

Die heutige Fläche unseres Landes beträgt rund 93 000 km². Diese Fläche st von 33 geschlossenen Nivellementspolygonen des Nivellementsnetzes erster

Ordnung bedeckt. Die durchschnittliche Fläche je eines geschlossenen Nivellementspolygons beträgt demnach annähernd 2800 km², es gibt jedoch noch viel weiter erstreckte geschlossene Nivellementspolygone. Hier handelt es sich um Gebiete, die sich über 50—70 km erstrecken bzw. verbreiten. Es lässt sich schwerlich annehmen, dass die im Schwerpunkt der geschlossenen Nivellementspolygone vorausgesetzten Durchschnittswerte der Wirklichkeit entsprechen könnten.

Ungarn ist geographisch, insbesondere jedoch in seinen tiefstrukturellen Verhältnissen, ein kompliziertes Gebiet ; bei uns sind — wie dies durch mehr als ein Beispiel bestätigt wird — auf verhältnismässig kleinen Gebieten die strukturellen und Aufbauverhältnisse derart veränderlich, dass es schwer ist, innerhalb je eines geschlossenen Nivellementspolygons Allgemeinheiten bezüglich der Verhältnisse des Schwerefeldes auszusagen.

Was als Tatsache für den Fall eines einzigen geschlossenen Nivellementspolygons gilt, das steht noch mehr fest für all jene Fälle, wo es sich um ein verbreitetes Nivellementsnetz handelt.

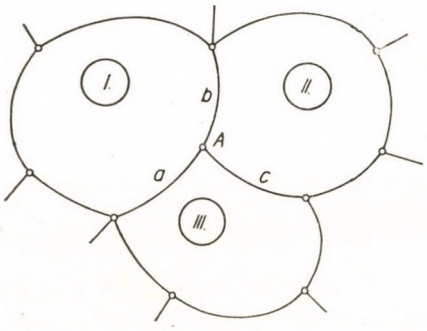


Abb. 1

Es sei jedoch angenommen, dass die Voraussetzung des Vortragenden in der Praxis sich als zufriedenstellend erweist. Selbst in diesem Falle kann das, was vorgetragen wurde, ohne weiteres nur zur Berechnung eines e i n z i g e n geschlossenen Polygons angewandt werden. Sobald man es mit mehreren geschlossenen Nivellementspolygonen zu tun hat, wie dies bei Landesnivellementsnetzen immer der Fall ist, entstehen beim Zusammentreffen der geschlossenen Nivellementspolygone gemeinsame Linien. Bei diesen wird das vorgeschlagene Verfahren problematisch.

Es lässt sich zwar denken, dass in dem Falle laut Abb. 1 auf der Linie *a*, *b* bzw. *c* die Mittelwerte der auf die geschlossenen Nivellementspolygone I und III, I und II, bzw. II und III berechneten Durchschnittswerte in Betracht genommen werden. Auf Grund einer solchen Überlegung wäre au den sich dem Punkt *A* anschliessenden Abschnitten die Anwendung des aus dem Durchschnittswert der drei geschlossenen Polygone gebildeten Mittelwertes erwünscht. Es erhebt sich jedoch die Frage, wie weit diese sehr naheliegend erscheinende Lösung der Wirklichkeit entspricht.

Sollte jedoch von einem Landesnivellementsnetz die Rede sein, dann könnte MÜLLERS Vorschlag in seiner ursprünglichen Form im Falle einer der

obigen ähnlichen Lösung ausschliesslich an den Linien des Umhüllungspolygons angewandt werden. Auf allen übrigen, sich im Inneren des Netzes befindlichen Linien müsste auf irgendeine andere Weise, eventuell auf oben beschriebener Weise vorgegangen werden.

Ich kann auch meine Überraschung bezüglich jener Tabelle nicht verschweigen, in welcher — laut Vortragendem — die Zahlenwerte der Abweichungen von den NIETHAMMERschen orthometerischen Höhen angegeben sind. In dieser Tabelle sind Werte von 1 bis fast 60 cm ersichtlich. Und diese sind obendrein nicht das Resultat irgendeines theoretischen Beispiels, sondern die Abweichungen der auf eine Strecke des schweizerischen Landesnivellementsnetzes erster Ordnung berechneten Werte von einem einzigen Grundwert.

Es lohnte sich, wenn Vortragender untersuchen würde, welche Abweichungen sich in einem ähnlichen Falle in Ungarn ergeben würden, wo die *grossen Höhenunterschiede* nicht auf einem *kleinen Gebiet* zusammengedrängt sind, wie in der Schweiz. Diese Frage erscheint aber trotz allem sehr schwierig und aufregend zu sein.

Das gesamte Problem jedoch verdient zweifelsohne eingehendere Studien.

I. MÜLLER, BUDAPEST

Kollege MÁJAY erhob Einwand dagegen, dass ich den auf das Ellipsoid bezüglichen Wert g_{ie1} dem zweifellos auf das Geoid bezüglichen Wert g''_{i0} gleichgestellt habe. Dieser Einwand wäre tatsächlich berechtigt, wenn ich im Laufe meiner Berechnung den Wert g_{ie1} auf die seinerseits aufgeschriebene Art berechnen würde, d. h. den auf der Oberfläche gemessenen Wert g_i nehmen würde, diesen der Freiluftreduktion addieren, die BOUGUERsche Reduktion hievon abziehen und das ganze mit dem Wert der Geländekorrektion korrigieren würde. In Wirklichkeit jedoch — wie dies auch auf der Abbildung ersichtlich war — hütete ich mich davor, die BOUGUER-Anomalie in meinem Vortrag mit $(g''_0 - \gamma_0)$ zu bezeichnen, da ich im Laufe meiner Berechnungen den Wert g_{ie1} so ausgerechnet hatte, dass ich den auf das Ellipsoid bezüglichen Wert γ mit einem von der BOUGUERschen Anomalienkarte ablesbaren BOUGUER-Anomalienwert erhöhte.

Wenn wir nun anschauen, auf welches Gebiet die beiden Werte bezogen sind, dann wird folgendes klar.

Der Wert γ_{i0} ist annähernd ein Wert von der Grössenordnung 10^3. Dies bezieht sich zweifellos auf die Ellipsoidfläche. Die BOUGUER-Anomalie ist der Grössenordnung nach bei uns, grob berechnet, ein Wert von der maximalen Grössenordnung $50 \cdot 10^{-3}$. Ich wage nicht mit Bestimmtheit zu erklären, dass dies sich tatsächlich auf das Geoid bezieht, und zwar deshalb nicht, weil es — die Bildungsart der BOUGUERschen Anomalie betrachtend — klar wird, dass, wenn auch der Wert g''_0 tatsächlich ein Geoidwert ist, der γ-Wert sich hingegen auf das Ellipsoid bezieht.

Die BOUGUER-Anomalie bezieht sich demnach auf irgendeine Fläche, die sich zwischen dem Geoid und dem Ellipsoid befindet. Dies wird übrigens gemischte Anomalie genannt. Wenn wir jedoch akzeptieren, dass die BOUGUER-Anomalie sich auf das Geoid bezieht, dann werden auch diese beiden Werte, die Summe des Wertes γ_0 und die BOUGUER-Anomalie, — da der eine von der Grössenordnung 1000, der andere von der Grössenordnung 10^{-3} ist — zwei-

fellos der Fläche des höheren Wertes näherstehen als der des kleineren Wertes. Aus dem folgt, dass die Summe dieser beiden Glieder — die ich, nochmals betont, nicht auf diese Weise berechnet habe, sondern γ für sich und die BOUGUER-Anomalie für sich — also wie gesagt, dass die Summe dieser beiden Glieder sich viel eher auf das Ellipsoid beziehen wird, als auf die Geoidflächen. Dies ist übrigens ein sehr interessantes Beispiel dafür, dass wenn etwas mathematisch auch richtig ist, von der Anschauung abhängend jedoch — wenn von verschiedenen Standpunkten ausgegangen wird — immer andere Ergebnisse liefern kann.

Wenn nun dies angenommen wird, so kann gleichzeitig jene gewisse Differenz von $(\Delta g_u - \Delta g'_u)$ erklärt werden, gegen die Kollege MÁJAY seinen Einwand erhoben hatte. Er erwähnte, dass diese vorgeschlagene Formel um soviel von der NIETHAMMERschen abweicht.

Herr Prof. HRISTOW stellte die Frage, auf welche Weise die in Bulgarien angewandte HELMERTsche Schwereformel, jene Normalformel, die sich so gut verhält und fast — mit seinen Worten — auf die Ellipsoidfläche KRASSOWSKYS bezogen werden kann, bei der unsererseits bekanntgegebenen Normalformel angewandt werden könnte.

Diesbezüglich möchte ich bloss bemerken, dass es ganz gleichgültig ist, welche Normalformel in dieser Formel verwendet wird. Die Hauptsache ist, dass dieselbe Normalformel angewandt werden soll, die bei der Berechnung der BOUGUER-Anomalie benützt wurde. Bei der Anwendung der Formel ist es selbstverständlich auch wichtig, die in der Formel vorkommende Geoidundulation auch aus dem Ellipsoid KRASSOWSKYS zu berechnen, wenn unsererseits die das KRASSOWSKY-Ellipsoid betreffenden Formeln benützt wurden.

DIE WEITERENTWICKLUNG DER FREIBERGER SCHLAUCHWAAGE

Prof. O. MEISSER, FREIBERG/Sa.

Es werden im Anschluss an einen Vortrag in Sopron [1] 1956 die Grundlagen der Schlauchwaage theoretisch und instrumentell gegeben. Um Mauerbolzen auch mit Grundbolzen verbinden zu können, werden neue Stativentwicklungen beschrieben. Das Funktionieren und die Genauigkeit (etwa $\pm 2/100$ mm Höhengenauigkeit bei praktischen Schlauchlängen bis 40 m) wird an einer technischen Kirchenüberwachung gegeben.

SCHRIFTTUM

1. O. MEISSER: Sehr genaue Schlauchwaagemessungen und praktische Anwendungen (Mitteilungen der Fakultäten für Bergingenieure und Geo-Ingenieure, Sopron XIX. Band pp. 69—79.)

DISKUSSION

Prof. A. TÁRCZY-HORNOCH, SOPRON

Es sei mir erlaubt, zum Vortrag von Herrn MEISSER einiges beizutragen.

Nun, was den Inhalt seines Vortrages betrifft, das allgemeine Interesse hat es bewiesen, dass das Problem ein äusserst aktuelles und wichtiges war und ist. In einem einzigen Punkte muss ich aber ihm in gewissem Sinne widersprechen, und zwar in dem Punkte, dass zwischen Geophysik und Geodäsie nur die Gravitation das einzige Bindeglied sei. Sein Vorschlag bewies, dass zumindest auch das Nivellement ein wichtiges Bindeglied zwischen beiden Wissenschaften ist. Weiters, wenn man die Entwicklung der selbständig gewordenen Geophysik betrachtet, so sieht man, dass es in den früheren Jahren sehr oft Geodäten und Markscheider gab, die Geophysiker waren. Wir freuen uns sehr, wenn nun Geophysiker und Geodäten einander helfen. Ich erinnere mich an eine sehr interessante Abhandlung unseres Kollegen HEISKANEN, der in der Doležal-Gedenkschrift, welche sich mit dem Wendepunkt der Geodäsie befasste und bewiesen hat : an Stelle der mathematischen Geodäsie kommen wir allmählich zur geophysikalischen Geodäsie, und die Grenze zwischen Geodäsie und Geophysik wird immer mehr verschwommen. Ich möchte mich so ausdrücken : ich bin der bescheidenen Meinung, dass das Präzisionsnivellement in der Zukunft eine der wichtigsten geophysikalischen Methoden zur Erforschung der Erdkruste sein werde und somit ein Bindeglied zwischen den zwei Wissenschaften herstellen wird.

Prof. Dr. Z. KOWALCZYK, KRAKÓW

Es wurde hier über die Zusammenarbeit der Geodäten und Geophysiker sowie über die Zusammenarbeit der Länder in geophysikalischen und geodätischen Untersuchungen gesprochen. Ich möchte nur bemerken, dass man unter die zu entwickelnden Untersuchungen auch die Messung der Längenveränderungen einfügen muss, dann bekommen wir alle Faktoren. In dieser Weise kann man drei Koordinaten der Punkte feststellen. Zu diesem Zwecke muss man selbstverständlich spezielle Beobachtungspunkte anstellen und spezielle Nivellierungsinstrumente verwenden. Dieses Sonderinstrument ist in unserem Hefte, welches Prof. ODLANICKI Prof. TÁRCZY-HORNOCH übergeben hat, beschrieben.

Bei uns in Polen macht man viele Beobachtungen : nicht nur die Bodensenkungen im Zusammenhang mit dem Bergbau werden beobachtet, sondern auch Senkungen verschiedener Industriegebäude. Es freut mich, dass mit der Schlauchwaage von Prof. MEISSER derartige Messungen sehr gut erledigt werden können.

K. FAZEKAS, BUDAPEST

Herr Prof. MEISSER machte in seinem Vortrag ein Gerät bekannt, welches wahrscheinlich für kleinere Entfernungen bei Feinmessungen auch bei uns sehr gut brauchbar sein wird. Im Zusammenhang mit diesem Gerät möchte

ich auf ein kleines Gerät aufmerksam machen, welches im Forschungsinstitut für Wasserhaushalt entwickelt wurde und welches ebenfalls die Horizontalablesung in hundertstel Millimetern auf sehr einfache Weise ermöglicht. Die Beschreibung dieses Gerätes befindet sich im Jahresbericht von 1954 des Forschungsinstitutes für Wasserhaushalt.

Prof. Dr. W. K. HRISTOW, SOFIA

Ich möchte zuerst die Frage stellen, wie man Nivellements über breite Flüsse machen kann. Ich habe an ein Nivellement über die Donau mittels der kommunizierenden Gefässe gedacht und einen Vorschlag gemacht, man hat aber so viel Bedenken ausgesprochen, dass aus meinem Vorschlag schliesslich nichts geworden ist. Das Verfahren könnte vielleicht in diesem Falle gar nicht angewendet werden.

V. Photogrammetrisches Kolloquium

DER PHOTOGRAMMETRISCHE GERÄTEBAU UND HOCHSCHULUNTERRICHT IN DER DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK

Prof. A. BUCHHOLTZ
DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN, DRESDEN

Als man nach Kriegsende in der jetzigen Deutschen Demokratischen Republik vor der Notwendigkeit stand, möglichst schnell neue Kartenwerke zu schaffen, war man sich sehr wohl bewusst, dass diese Aufgabe am rationellsten durch weitgehende Anwendung der Aerophotogrammetrie zu lösen sei. Die dazu erforderlichen Voraussetzungen waren jedoch damals keineswegs erfüllt. Ganz abgesehen davon, dass es keine landeseigene Fliegerei gab, fehlte es an photogrammetrischen Geräten, fehlte es auch an photogrammetrisch geschulten Fachleuten.

Als das Zeisswerk in Jena (jetzt VEB Carl Zeiss Jena) wieder in der Lage war, die Entwicklung und Produktion photogrammetrischer Geräte aufzunehmen, war noch nicht abzusehen, wann und auf welche Weise mit der photogrammetrischen Landesaufnahme begonnen werden könnte. Deswegen, und auch aus betriebstechnischen Gründen, wurde zunächst mit der Entwicklung und Produktion von Geräten für terrestrische Photogrammetrie begonnen.

Als erstes solches Gerät wurde der dem früheren TAN von Zeiss sehr ähnliche *Phototheodolit 19/1318* herausgebraucht (Bild 1). Als diesem zugeordnetes, aber auch für Luftbilder geeignetes Auswertegerät folgte bald darauf ein neuartiger *Stereokomparator 1818* (Bild 2) für Platten und Film. Das 8fach vergrössernde Doppelmikroskop dieses Geräts ist unter dem Hauptschlitten angebracht. Es besteht aus einem feststehenden, die Okulare und Messmarken enthaltenden Teil und einem die Objektive enthaltenden verschiebbaren Teil. Zwischen diesen beiden Teilen ist paralleler Strahlengang vorhanden. Die Messmarken sind von zweierlei Art : grabstichelförmige für die Auswertung von Erdbildern und punktförmige für die Auswertung von Luftbildern. Die rechte Hälfte des beweglichen Teils des Doppelmikroskops kann zwecks Messung von Vertikalparallaxen zusätzlich messbar in der y-Richtung verschoben werden. Alle Ablesungen geschehen an Messtrommeln mit folgender Genauigkeit der Angaben : für x und y — 0,02 mm, für p_y — 0,01 mm, für p_x — 0,005 mm. Zwecks allgemeiner Betrachtung der eingelegten Bilder können diese auch von unten beleuchtet werden.

Als nur für terrestrische Photogrammetrie bestimmtes Gerät ist in -etzter Zeit noch der neu entwickelte *Stereoautograph 1318* hinzugekommen

(Bild 3). Derselbe ist für frontale Bildbetrachtung von oben mit feststehendem Okulareinblick eingerichtet. Als Raummarke dient eine in ihrer Helligkeit veränderbare Leuchtmarke, deren Teilbilder von einer gemeinsamen Markenplatte aus in die betreffenden Einzelmikroskope des Betrachtungssystems ein-

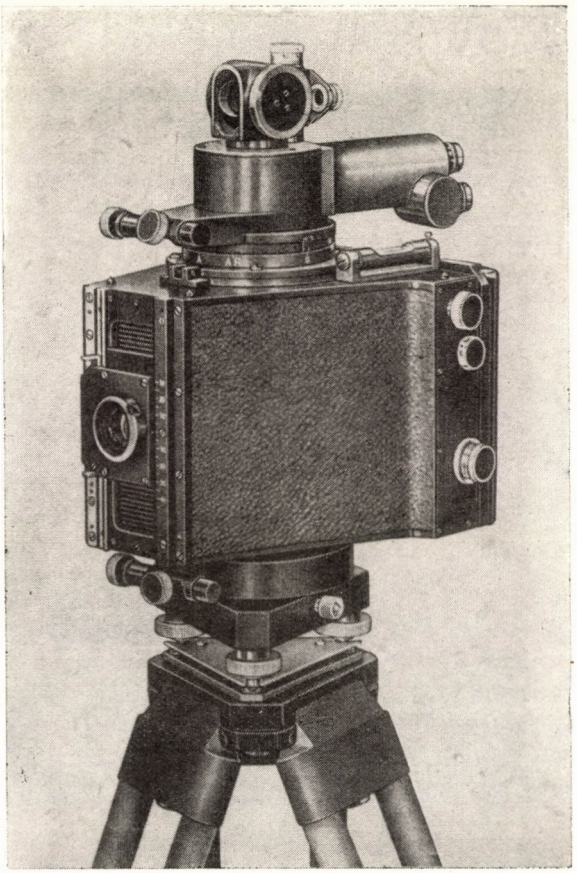


Bild 1

gespiegelt werden. Am Phototheodolit erfolgte Objektivverschiebungen werden durch Rastverstellungen von 5 zu 5 mm mit Einstellung der Zwischenwerte auf 0,01 mm berücksichtigt. Für die Übertragung der Grundrissbewegungen auf den Koordinatographen sind Übersetzungsgetriebe 1 : 1 und 1 : 2 vorhanden. Der Höhenzähler hat Teilungen für verschiedene Auswertemassstäbe, wobei die Höhen in Metern angegeben werden. Die Einpassung der Bildpaare wird durch die Anzeige der Einstelldaten an Messuhren erleichtert. Die Arbeitsbereiche werden durch folgende Daten gekennzeichnet: einstellbare Bild-

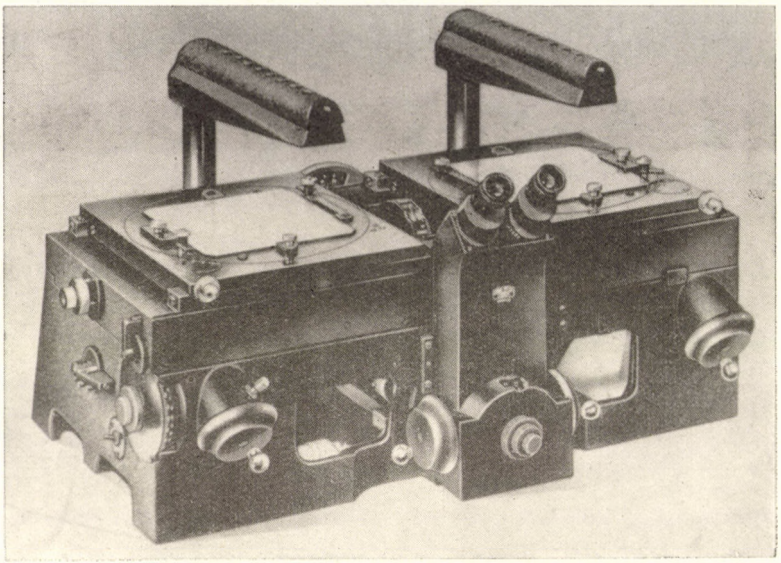


Bild 2

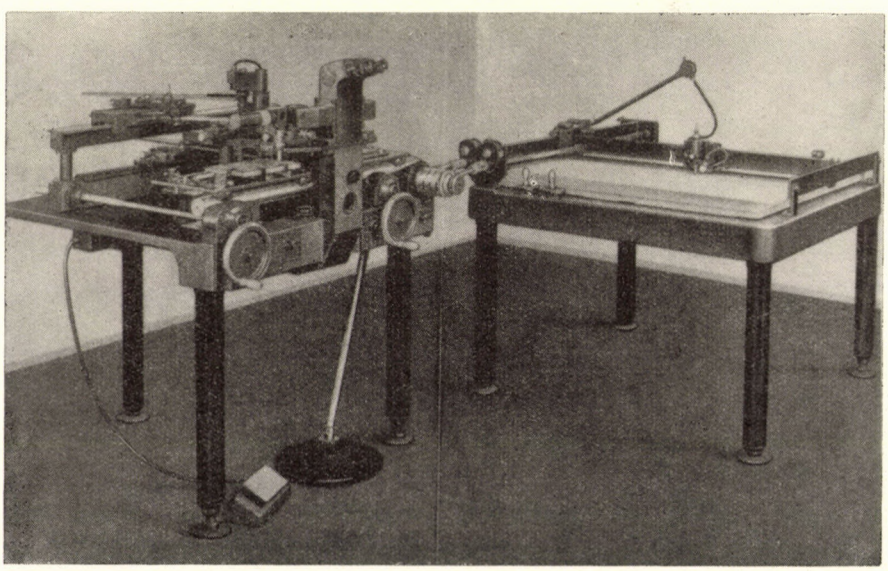


Bild 3

konstanten 157 bis 198 mm, Konvergenz der Aufnahmerichtungen $+ 5^g$ bis $- 2^g$, Basiskomponenten b_x bis 50 mm, $b_y = \pm 30$ mm, $b_z = \pm 10$ mm, Raumkoordinaten $x = \pm 240$ mm, $y = + 30$ bis $+ 400$ mm, $z = \pm 275$ mm.

Mit diesen drei Geräten ist eine vollständige Apparatur für terrestrische Photogrammetrie geschaffen worden.

An Geräten für *Aerophotogrammetrie* wird von VEB Carl Zeiss Jena neuerdings wieder das *Entzerrungsgerät SEG I* in einer der bekannten früheren sehr ähnlichen Ausführung, aber für das Bildformat 18×18 cm, gebaut.

Neuerdings ist auch ein neuer, gegenüber den früheren vom Jenaer Zeisswerk entwickelten Modellen in mancherlei Hinsicht modernisierter und verbesserter *Stereoplanigraph* (Bild 4) herausgebracht worden. Dessen Arbeitsbereiche kennzeichnen folgende Daten: Bildformat 18×18 cm, einstellbare Längsneigungen $\varphi_1 = + 15^g$ bis $- 30^g$, $\varphi_2 = + 30^g$ bis $- 15^g$, gemeinsam $\pm 9^g$; Querneigungen einzeln $\pm 10^g$, gemeinsam $- 20^g$ bis $+ 75^g$; Basiskomponenten $b_x = \pm 270$ mm, $b_y = \pm 30$ mm, $b_z = \pm 20$ mm, Raumkoordinaten $x = \pm 280$ mm, $y = - 435$ bis $+ 320$ mm, $z = + 150$ bis $+ 660$ mm; freier Kartierbereich des Zeichentisches 80×80 cm.

Ausser diesen grossen Geräten sind auch einige kleinere, wie z. B. das *Stereopantometer* und verschiedene *Stereoskope*, in die Produktion aufgenommen worden.

Zur Zeit noch in Entwicklung begriffen ist eine *Normalwinkel-Reihenmesskammer* 18×18 cm für Film, ein *Multiplex* und ein *Auswertegerät* II. 0.

Auch der *VEB Präzisionsmechanik Freiberg* (ehem. Hildebrand) ist mit einigen Neukonstruktionen photogrammetrischer Geräte hervorgetreten. Auf Veranlassung des Lehrstuhls für Photogrammetrie der TH Dresden hat er einen *Einbildkomparator* (Bild 5) für das Bildformat 18×18 cm mit messbar verkantbarem Bildträger gebaut, ferner ein für das Bildformat 12×12 cm eingerichtetes *Schulgerät* (Bild 6) nach dem Prinzip des Aerokartographen von Hugershoff. Entsprechend dem Zweck, für den dieses Gerät bestimmt ist, lässt es seinen Aufbau und seine Wirkungsweise in allen Einzelheiten gut erkennen, ist leicht transportabel und im Vergleich zu den bekannten Universal-Auswertegeräten billig. Verkleinerte Diapositive von Erd- oder Luftbildern können entsprechend den verschiedenen Aufnahmefällen orientiert und ausgewertet werden.

Vom VEB Präzisionsmechanik Freiberg ist auch eine Weiterentwicklung des topographischen Stereometers von DROBYSCHEW in Erwägung gezogen.

Es seien auch noch einige Geräte erwähnt, die unter wesentlicher Mitwirkung des Oberassistenten Dipl.-Ing. DÖHLER von der *Werkstatt des Geodätischen Instituts der TH Dresden* für den eigenen Bedarf des Lehrstuhls für Photogrammetrie gebaut worden sind.

Der bekannte *Luftbildumzeichner* von Zeiss ist dahingehend verbessert worden, dass die kardanische Neigung des Bildträgers in Drehungen um zwei

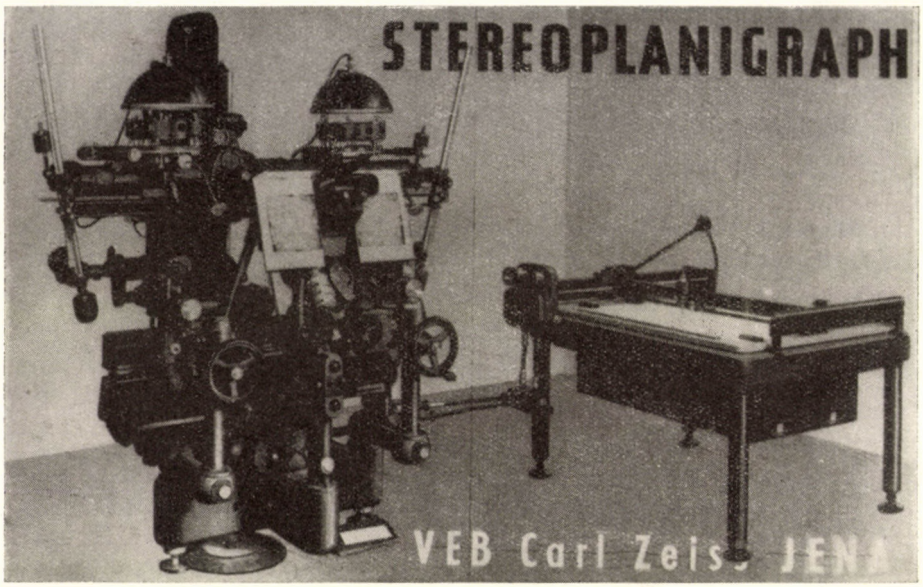


Bild 4

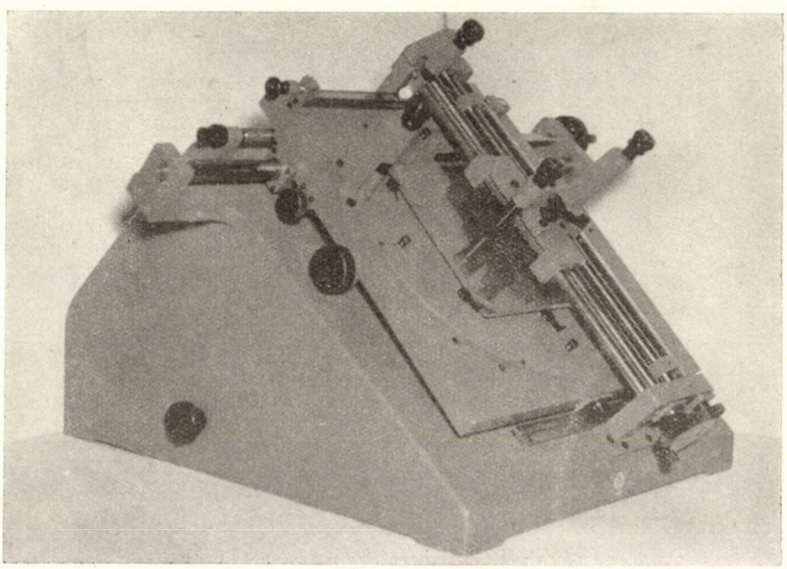


Bild 5

zueinander senkrechte Achsen zerlegt wurde (Bild 7). Ausserdem ist das Bild kantbar gemacht worden, und das ganze Gerät kann in einem Kreuzschlitten über die Karte geführt und in jeder beliebigen Lage festgehalten werden.

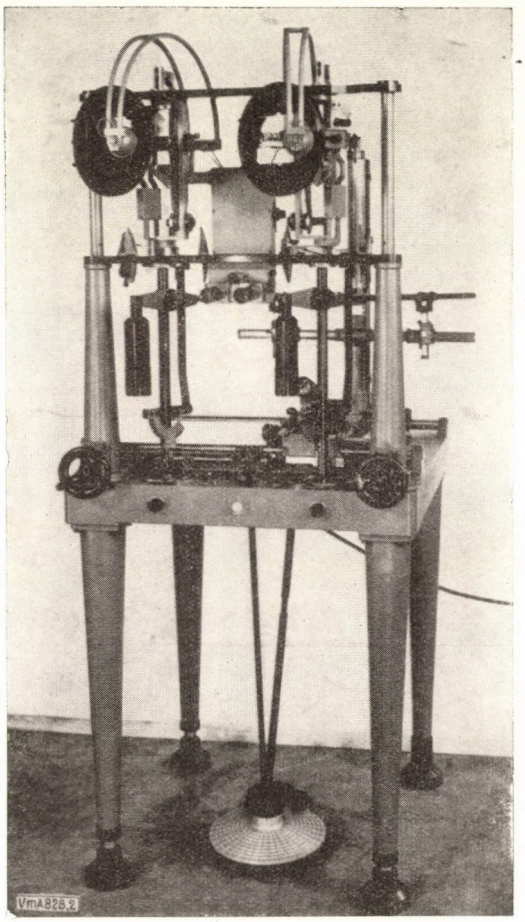


Bild 6

Im *stereoskopischen Luftbildumzeichner* (Bild 8) sind zwei Bildträger nebeneinander angeordnet und können gemeinsam mit dem aus einem Spiegelstereoskop und zwei Prismensystemen bestehenden Betrachtungssystem gehoben und gesenkt werden.

Der Stereokomparator von Zeiss Modell E ist durch Anbringung einer besonderen Stechvorrichtung zu einem *stereoskopischen Übertragungsgerät* (Bild 9) gestaltet worden. Die Stechvorrichtung besteht aus einem Schwenkarm mit zwei an seinen Enden angebrachten Nadeln. Wird er in eine bestimmte

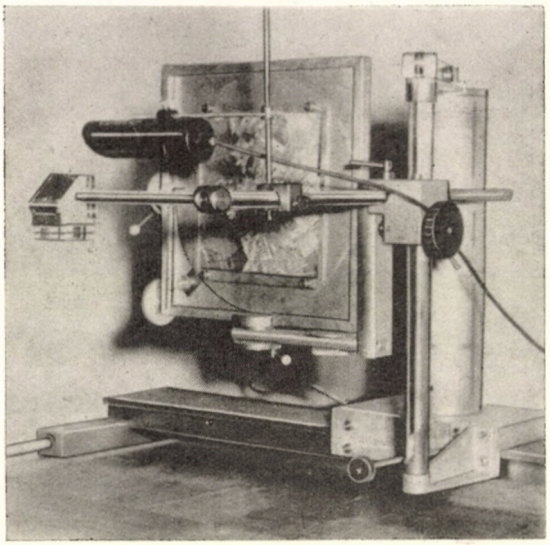


Bild 7

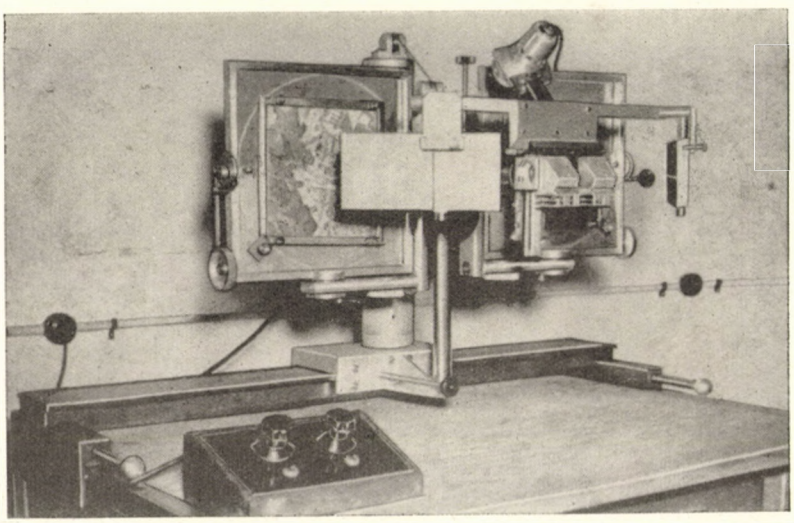


Bild 8

Anschlagstellung gebracht, so befinden sich die Nadeln über denjenigen Punkten der beiden Teilbilder, die dem am Modell eingestellten Punkt entsprechen.

Eine nach amerikanischem Muster angefertigte LAZY—DAISY-*Ausrüstung* für mechanische Radialtriangulation besteht aus Metallschienen, Ver-

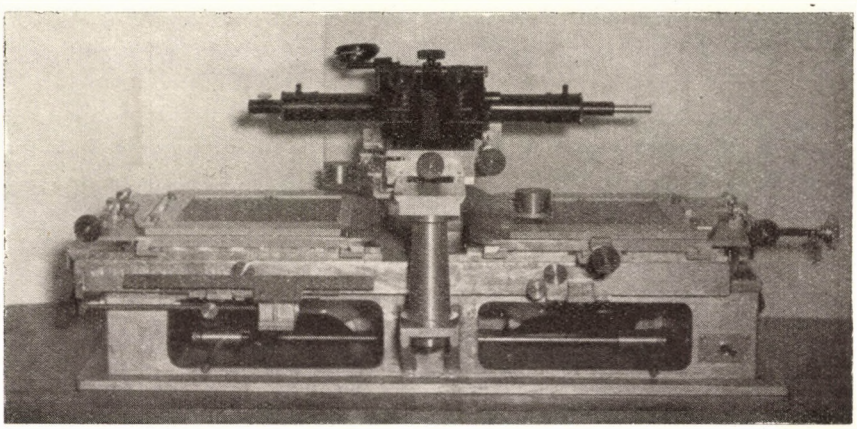


Bild 9

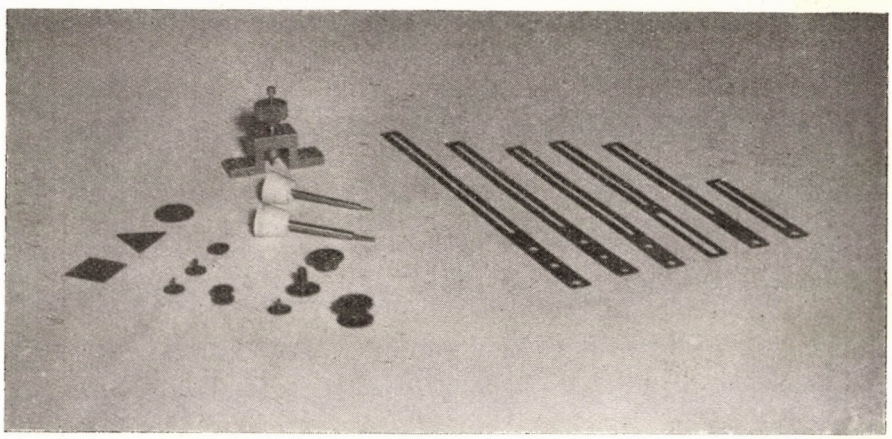


Bild 10

schraubungen, Steckzapfen und Hülsen, Pikiernadeln, Passpunktmarken und einem Locher zum Vorbereiten der Bilder (Bild 10). Die aus den Schienen zusammengefügten Richtungsauszüge (Bild 11) werden zum mechanischen Aufbau des Netzes der Radialtriangulation benutzt (Bild 12).

Für die Heranbildung *photogrammetrischen Nachwuchses* ist in der Hauptsache die *TH Dresden* zuständig, an der in der Abteilung Vermessungswesen

der Fakultät für Bauwesen ein besonderer Lehrstuhl für Photogrammetrie besteht.

In dessen Lehrplan sind für Studierende der *Vermessungs-Abteilung* im 6. Sem. 2 W.-St. V. und 4 W.-St. Üb., im 7. Sem. 3 W.-St. V. und 4. W.-St.

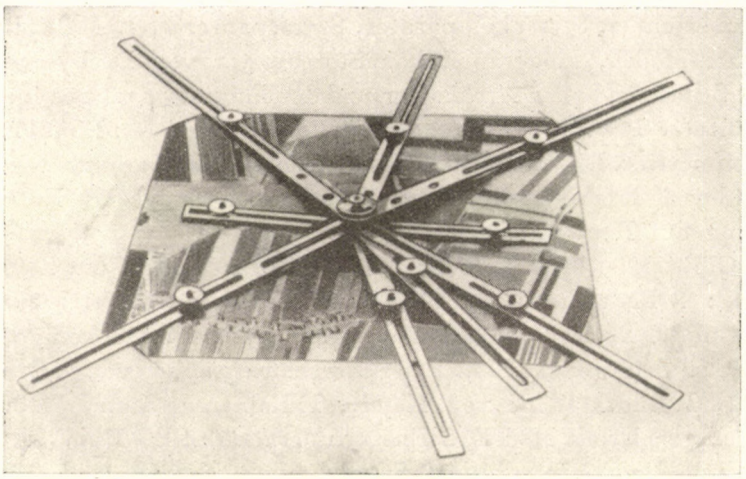


Bild 11

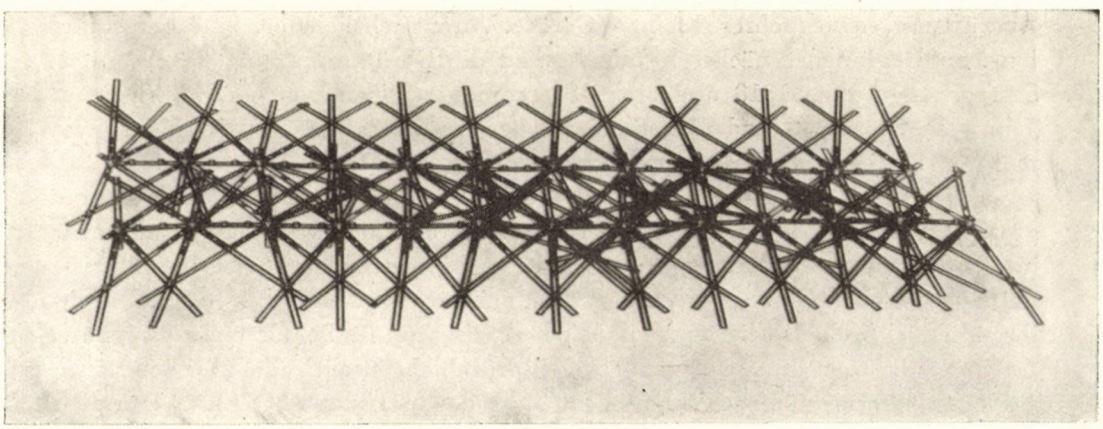


Bild 12

Üb., im 8. Sem. 1 W.-St. Seminar und 2 W.-St. Üb. in Photogrammetrie als *obligatorisch* vorgesehen, ausserdem als *fakultativ* im 7. Sem. 1 W.-St. V. und 14-tägig 2 W.-St. Üb. in »Ausgewählte Kapitel der Radialtriangulation« und im 8. Sem. 1 W.-St. V. über »Photogrammetrie in der Sowjetunion«. Das gesamte Übungsprogramm umfasst: Bestimmung der Daten der inneren

Orientierung eines Phototheodolits, terrestrische Photogrammetrie nach dem Einschneideverfahren (Aufnahme und Auswertung der Bilder), rechnerische, graphische und mechanische Radialtriangulation, graphische und optisch-mechanische Entzerrung von Luftbildern, Anfertigung eines Luftbildplans, Höhenbestimmung nach dem Verfahren des ungestörten Modells, Übungen am Luftbildumzeichner, Stereokomparator, Stereopantometer, Multiplex, Stereoautographen-Modell, topographischen Stereometer von Drobyschew.

Für Studierende der *Architektur* und des *Bauwesens* gibt es im 5. oder 7. Sem. fakultativ 1 W.-St. V. und 14-tägig 2 W.-St. Üb. in »Einführung in die Photogrammetrie«. Die Übungen beziehen sich auf Photogrammetrie nach dem Einschneideverfahren, graphische und optisch-mechanische Entzerrung in Anwendung auf Bauwerke.

An Geräten ist beim Lehrstuhl für Photogrammetrie zur Zeit folgendes vorhanden: 2 Phototheodolite 19/1318 von VEB Carl Zeiss Jena, 2 Phototheodolite und 1 Stereodoppelkammer von Heyde, 1 Stereokomparator 1818 von VEB Carl Zeiss Jena, 1 Modell des Stereoautographen von v. Orel-Zeiss als Schulgerät, 1 Bildtheodolit von Heyde, 1 Reihenmesskammer 30×30 mit Überdeckungsregler als Modell, 2 Entzerrungsgeräte SEG I und SEG IV, von Zeiss, 1 Einbildkomparator und 2 Schulgeräte nach dem Prinzip des Aerokartographen von VEB Präzisionsmechanik Freiberg, 1 »Multiplex« mit nur 2 Weitwinkelprojektoren, 4 Stereopantometer und 5 Luftbildumzeichner von VEB Carl Zeiss Jena, 1 stereoskopisches Übertragungsgerät, 1 Lazy—Daisy-Ausrüstung, sowie mehrere kleinere Geräte. Voraussichtlich noch in diesem Jahr bzw. zu Beginn des nächsten Jahres wird die Gerätesammlung durch einen Stereoautographen 1318 und einen Stereoplanigraphen von VEB Carl Zeiss Jena, ein Stereotop und eine Schlitzstanze von Zeiss-Aerotopograph, sowie mehrere sowjetische Geräte vervollständigt werden.

Die bereits vorhandenen Schulgeräte sind ein guter Notbehelf, solange grosse Auswertegeräte, wie der Stereoautograph und der Stereoplanigraph noch in der Sammlung fehlen. Aber auch darüber hinaus werden diese verhältnismässig einfachen Geräte von grossem Nutzen für den Lehrbetrieb sein. Durch ihre übersichtliche Einrichtung sind sie besonders gut für Schulzwecke geeignet. An ihnen können die Studierenden sich gründliche praktische Vorkenntnisse aneignen, die sie für sachkundige und schonende Handhabung der komplizierten und teueren grossen Auswertegeräte dringend brauchen.

Seit einiger Zeit laufen beim Lehrstuhl für Photogrammetrie praktische Versuche mit den sowjetischen Verfahren des ungestörten Modells, der geraden Linie und der Photopolygonometrie, sowie mit einem dem Lehrstuhl leihweise zur Verfügung gestellten Topographischen Stereometer STD-2 von Drobyschew. Diesbezügliche Veröffentlichungen sind bereits erschienen oder in Vorbereitung. Ein dem Lehrstuhl erteilter Forschungsauftrag bezieht sich auf die Klärung verschiedener Fragen, die mit dem Einsatz der Aerophotogramm-

metrie bei der topographischen Landesaufnahme der DDR in Verbindung stehen.

Am Geodätischen Kolloquium, das im Juni dieses Jahres im Rahmen der I. Polytechnischen Tagung der TH Dresden stattfand, nahmen auch mehrere Hochschullehrer und in der Praxis stehende Fachleute der Photogrammetrie aus Bulgarien, der ČSR, Jugoslawien, den Niederlanden, Österreich, Ungarn, Westdeutschland teil. Es wurde nicht nur über verschiedene wissenschaftliche Probleme diskutiert, sondern auch die Gelegenheit wahrgenommen, sich in privaten Gesprächen gegenseitig über die Gestaltung des photogrammmetrischen Hochschulunterrichts in den verschiedenen Ländern zu informieren. U. a. wurde es als sehr wünschenswert erachtet, zeitweiligen Austausch wissenschaftlicher Assistenten von Hochschulen verschiedener Volksdemokratien in die Wege zu leiten.

In weniger umfassender Weise als an der Abteilung für Vermessungswesen der TH Dresden und unter Verlegung des Schwerpunkts auf bestimmte besondere Anwendungsgebiete wird Photogrammetrie auch noch an einigen anderen Stellen gelehrt, und zwar an der *Bergakademie Freiberg*, der *Fakultät für Forstwirtschaft der TH Dresden*, dem der Humboltd-Universität Berlin angegliederten *Institut für Geodäsie und forstliche Luftbildmessung Eberswalde*, der *Hochschule für Bauwesen Cottbus und der Fachschule für Vermessungswesen Dresden*.

Abschliessend seien noch drei auf Anregung der Hauptabteilung Vermessung des Ministeriums des Innern und der Kammer der Technik abgehaltene *Photogrammetrische Kurzlehrgänge* für Angehörige des Vermessungsdienstes erwähnt. Dieselben fanden in Dresden unter Leitung von Assistenten des Lehrstuhls für Photogrammetrie der TH Dresden statt. Die Zeitdauer dieser Lehrgänge betrug für den ersten eine Woche, für den zweiten und dritten je zwei Wochen.

DISKUSSION

G. HANKÓ, BUDAPEST

Im Laufe des Vortrages bestimmte Professor Buchholtz das beim Photoentzerrungsgerät Modell SEG I. und bei dem in gewisser Hinsicht modernisierten Stereoplanigraphen angewandte Bildmass in 18×18 cm. Unsererseits wird die Frage aufgeworfen, welche Brennweite die Fabrik Zeiss bei der Herstellung von Messkammern für dieses Bildmass plant?

Die Auswertungsgeräte sind nämlich für längere Zeit, für mehrere Jahrzehnte zu Feinmessarbeiten geeignet. Mit der ständigen Entwicklung und Vervollkommnung der Messkammerobjektive sind die angewandten Verfahren auch gewissen Änderungen unterworfen. Beim Bildmass 18×18 cm kommen heute neben den Normalöffnungswinkel gebenden Objektiven mit einer Brennweite von 210 mm, bereits auch die Weitwinkel-Objektive von 100—120 mm bei Feinarbeiten in Betracht, deren Distorsion so gering ist, dass sie ausser acht gelassen werden kann und dabei können diese Objektive, unter Bewahrung der Genauigkeit, viel ökonomischer angewandt werden.

Eine andere Frage ist, ob sich die Fabrik Zeiss mit der Konstruktion der im Ausland schon angewandten Weitwinkel-Messkammern für ein Bildmass von 23×23 cm befasst? Diese entsprechen auch — infolge der günstigen Filmschrumpfung — mehr als die für das Bildmass 30×30 cm. Die proportionierte Orientierung der Stereopaare mit grossem Öffnungswinkel kann mit besserem Ergebnis gelöst werden.

Unsere weitere Frage bezieht sich auf die Auswertungsgeräte. Werden die neu entworfenen und gebauten Geräte dazu geeignet sein, bei entwickelteren Objektiven und variierenden Bildmassen auch längere Zeit im Betrieb zu bleiben? Der schon vorhin erwähnte Umstand, dass jene eine längere Lebensdauer haben, macht es wünschenswert, bei den neueren Objektiven entsprechende ausgleichende Platten anzuwenden ; zu den Messkammern verschiedener Brennweite wiederum sollten entsprechend reduzierende bzw. umformende Geräte hergestellt werden, damit diese — ähnlich den Auswertungsgeräten mechanischer Lösung — zu Messkammern verschiedener Brennweite angewandt werden können.

Uns interessiert ausserdem das nach amerikanischem Muster für die mechanische Radialtriangulierung hergestellte Lazy—Daisy-Gerät. Welche Ergebnisse sind hier zu erwarten? Meines Erachtens können die bei der Verbindung des Netzes auftretenden inneren Spannungen, Querkräfte und Momente bei den im radialen Punkt befestigten acht — eventuell noch mehr — Linealen leicht eine Lockerung verursachen, was die Lage des Radialpunktes unsicher macht. Ich halte das Schlitzverfahren der mechanischen Triangulierung für entsprechender. Die Entwicklung der radialen Triangulierung erachte ich als wichtig, da bei grossdimensionierter Kartographie die Spesen der Passpunktbestimmung wesentlich grösser sind, als die der photogrammetrischen Arbeit.

Auch bei uns werden diesbezügliche Experimente ausgeführt. Die Resultate versprechen bei kürzeren Entfernungen günstig zu sein. Meines Erachtens werden die 7—10 km langen Reihen, die im Allgemeinen die Entfernung der Triangulierungspunkte III. Ordnung angeben, entsprechend sein.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER PHOTOGRAMMETRIE

Prof. J. SÉBOR
KAND. D. TECHN. WISS., SOPRON

Die Photogrammetrie ist schon seit Jahrzehnten ein sich stark entwickelnder Zweig der Geodäsie. Es ist eine bedauernswerte Tatsache, dass sehr viele unserer mit der Geodäsie beschäftigten Ingenieure gegen dieses für viele Zwecke sehr ökonomisch verwendbare Messverfahren eine Abneigung hegen. Den triftigsten Grund hierfür sehe ich darin, dass sich in Ungarn in der letzteren Zeit mit Photogrammetrie eingehender bloss das Honvéd Kartographische Institut und die Hochschule für Forstingenieure befasste. Unsere Ingenieure konnten die bedeutende ausländische Literatur der Photogrammetrie nicht lesen, befassten sich nicht mit den verschiedenen photogrammetrischen Verfahren, hatten demnach auch keine Möglichkeit, deren praktische Anwendbarkeit sowie all jene Vorteile kennenzulernen, die sich bei vielen geodätischen Arbeiten mit der Benützung von Photographien ergeben. Ich erwähne es als eine erfreuliche Tatsache, dass heute die Fakultät für Vermessungsingenieure schon einen photogrammetrischen Lehrstuhl hat. Wenn dieser sich in Personal und Ausrüstung entwickelt, dann wird er sich zur wichtigen Zentrale der photogrammetrischen Forschung auswachsen. Es ist eine sehr gesunde Massnahme des Staatlichen Vermessungs- und Kartographischen Amtes, dass es auf sowjetische Anregung eine photogrammetrische Abteilung aufgestellt hat, die befugt ist, bei der staatlichen Vermessung die photogrammetrischen Verfahren anzuwenden und somit diese in die ungarische Praxis einzuführen.

Das Honvéd Kartographische Institut war bis zum Anfang des zweiten Weltkrieges mit modernen Geräten ausgerüstet, verfügte für diese Zwecke über ausgebildete Techniker, deren Kenntnisse und deren Arbeit keineswegs hinter den mit Photogrammetrie beschäftigten ausländischen Instituten zurückblieb. Der Krieg richtete jedoch einen bedeutenden Teil der Instrumente zugrunde. Wir haben allen Grund zu hoffen, dass unsere Regierung in der nahen Zukunft unsere Institute mit den neuesten Instrumenten bester Konstruktion versorgen wird und dann werden mit diesen Instrumenten nicht allein die praktischen Aufgaben lösbar, es werden auch vielseitige Untersuchungen beginnen, als deren Ergebnis die Photogrammetrie in den verschiedensten Zweigen der Volkswirtschaft Anwendung finden wird. Vor allem werden die geo-

dätischen Arbeiten beschleunigt und wirtschaftlicher gemacht. Die Planung der Fluss- und Wasserregulierungsarbeiten wird beschleunigt und verbilligt. Sehr vorteilhaft erweist sie sich bei der Betriebsregelung in der Forstwirtschaft, beim Herstellen der zur Bewaldung notwendigen technischen Pläne.

Die Genauigkeit der auf photogrammetrischem Wege erhaltenen Werte hängt davon ab, wie scharf die Linse der Kamera zeichnet, in welchem Masse sich die lichtempfindliche Schicht beim Trocknen zusammenzieht und was die Leistungsfähigkeit der Auswertegeräte ist.

KASPER führte Messungen mit den modernsten Objektiven aus und das Ergebnis seiner Untersuchungen war, dass deren Verzeichnungsfehler $\pm$ 0,01 mm betrug.

Gemäss LEHMANNS Untersuchungen ist der mittlere Fehler des Punktes bei modernen Platten $\pm$ 5 μ. Dies entspricht, wenn die Brennweite der Kamera 20 cm ist, einem Richtungsfehler von $\pm$ 5″. Bei seinen Untersuchungen betrug der Punktfehler bei Katastralaufnahmen $\pm$ 10 — $\pm$ 15 cm, wenn die Höhe des Fluges 1500—2000 m war. In Österreich ausgeführten Untersuchungen entsprechend ist der mittlere Fehler $\pm$ 6,8 cm, die Höhe des Fluges jedoch 800 m.

Nach den Untersuchungen H. HÄRRYS beträgt die Unsicherheit der Grenzpunkte bei Katastralaufnahmen $\pm$ 10,4—$\pm$ 12,6 cm, seiner Meinung entsprechend jedoch kann man hoffen, mit der Entwicklung der Gerätetechnik eine Genauigkeit von $\pm$ 5 — $\pm$ 10 cm erreichen zu können. Hier spielt jedoch auch die Wirtschaftlichkeit eine Rolle, die bei der Herstellung von Landkarten in einem Grössenverhältnis von mehr als 1 : 5000 in Berggegenden eher zugunsten des photogrammetrischen Verfahrens spricht.

RINNER bestimmt — um die infolge der überkomplizierten Konstruktion der Auswertegeräte entstehenden Fehler zu eliminieren — die Koordinaten der Punkte bei der Lufttriangulierung mittels reiner Berechnung. Die Formeln leitet er auf vektorialem Wege ab. Diese Berechnungen sind jedoch derart verwickelt, dass sie auf wirtschaftliche Weise bloss mit elektronischen Rechenmaschinen ausgeführt werden können.

In Ungarn erfolgten unsere Untersuchungen nur mit den einfachsten Instrumenten und den einfachsten Methoden. Unser Ziel ist solche Verfahren auszuarbeiten, deren Genauigkeit den Forderungen der Wirtschaft entspricht.

Mein Lehrstuhl beschäftigte sich vor allem mit mit der Forstwirtschaft zusammenhängenden geodätischen und photogrammetrischen Problemen. Meine Arbeitsgenossen hatten in erster Reihe bezüglich der Methoden der Holzmassenschätzung Untersuchungen ausgeführt. Hierzu wurden stereo-terrestrische Aufnahmen mit kurzer Basis verfertigt. Zum Messen der Baumdurchmesser stellte Adjunkt T. FARKAS das Zeiss'sche Registriermikrometer in abgeänderter Ausführung her, mit Hilfe dessen der Durchmesser der Bäume unmittelbar von den Stereobildern abgelesen werden kann. Der Unterschied zwischen der in der Natur abgemessenen und der mittels Stereobilder berechneten Holzmasse

variierte zwischen 2 und 10%. Die Abweichung war umso grösser, je dichter der Bestand war. Die Ursache hiervon ist, dass in dichten Beständen die Anzahl jener Bäume, die auf dem Bilde von den vor ihnen befindlichen Bäumen verdeckt werden, viel grösser ist. Auf den Stereobildern können auch die Baumarten unterschieden werden. Dazu gehört aber schon eine bedeutende Praxis. Die Zeitdauer der im Gelände erfolgten Aufnahme und die der auf photogrammetrischem Wege ausgeführten Auswertung ist ungefähr gleich. Das photogrammetrische Verfahren wird aber dadurch ökonomischer, dass die Zeitdauer der äusseren Arbeit geringer wird.

Zur Vermessung von Flächen und somit zur Kartographie kann die terrestrische Photogrammetrie bloss in Berggegenden verwendet werden. Auf ebenem oder fast ebenem Gelände sind die terrestrischen Aufnahmen infolge der Bedeckung zum Entwurf von Karten ungeeignet. Unseres Erachtens könnten sie jedoch auch hier verwendet werden, wenn die Aufnahmen nach dem Laubfall der Bäume, also während der Winter- und Vorfrühlingsmonate, über den Baumkronen gemacht werden könnten. Diesem Zwecke würden die bei der Staatlichen Landesvermessung gebräuchlichen Erkundungsgerüste sehr gut entsprechen. Hierzu wären jedoch zwei solche Geräte notwendig, um Stereoaufnahmen zu machen. Mit Hilfe dieser Aufnahmen wäre man in der Lage, die Karte der auf den Bildern aufgenommenen Gebiete mit der bei Forstmessungen erforderten Genauigkeit zu entwerfen, die Bestandsdichte zu schätzen und den Holzvorrat zu berechnen. Somit würden sich die bisher viele Arbeit und viel Spesen erfordernden äusseren Aufnahmen bloss auf die photographischen Aufnahmen beschränken und die gesamte übrige Arbeit könnte im Büro ausgeführt werden.

Auf der ganzen Welt nehmen die Forschungen zur je günstigeren forstwirtschaftlichen Ausnutzung der Luftphotogrammetrie ihren beschleunigten Gang. Es ist der grosse Vorteil der Luftaufnahmen, dass sie das Bild der ständig abwechselnden Holzbestände für einen bestimmten Zeitpunkt festhalten und dadurch, wenn von derselben Betriebseinheit alle zehn Jahre Luftaufnahmen verfertigt werden, der ganze Wirtschaftsgang des Betriebes von diesen Aufnahmen abgelesen werden kann. Es kann von den Bildern festgestellt werden, wo und in welchem Masse Waldpflegearbeiten, Durchhauungen, Durchlichtungen erfolgt sind. Es kann festgestellt werden, wo Ausbeutungen und wo Verjüngungen bzw. Neukulturen stattgefunden hatten. Es ist klar ersichtlich, mit welchem Erfolg die Verjüngungen und Neukulturen ausgeführt wurden und in welchem Masse sie die Stetigkeit des forstwirtschaftlichen Betriebes sichern. Es kann festgestellt werden, wo übermässige Ausbeutungen erfolgt sind, d. h. wo das zur Deckung des Holzbedarfes der Volkswirtschaft erwünschte Holzkapital vermindert wurde.

Mit diesen Fragen befasste sich der Lehrstuhl in allen Einzelheiten. All das, was im Vorangehenden erwähnt wurde, kann auf Aufnahmen, die in der üblichen Flughöhe von 1000—2000 m gemacht wurden, gut gesehen werden.

Zur Holzmassenabschätzung jedoch sind die Bilder zu klein, so dass Ergebnisse mit praktisch entsprechender Genauigkeit nicht erhalten werden können. Die ausländische Literatur geht bei der Abschätzung der Holzmasse von der Fläche des Wachsraumes aus. Dies ist jedoch eine Funktion der Bestanddichte und kann somit keine verlässlichen Ergebnisse liefern. Wir halten daher die Luftaufnahmen für den Entwurf forstwirtschaftlicher Karten, für die Charakterisierung der Bestände, für die Gestaltung der Distrikte als zweckmässig, während zur Holzmassenabschätzung die oben beschriebenen terrestrischphotogrammetrischen Verfahren geeignet sind. Den Ort der terrestrischen Aufnahmen kann man auf Grund der Luftaufnahmen sehr zweckmässig und gut auswählen. Wir haben geplant, in einem für diesen Zweck konstruierten kleinen Helikoptermodell zwei Photoapparate mit kurzer Basis in eine Höhe von 100—200 m hinaufzutragen und von dem so gewonnenen Stereobildpaar die für forstwirtschaftliche Zwecke notwendigen Daten auszuwerten. Zu den Aufnahmen werden Mikrofilmapparate benützt.

Bei forstwirtschaftlichen Betrieben sind die äusseren Grenzlinien bereits auf geodätischem Wege bestimmt, auf photogrammetrischem Wege müssen daher nur die inneren Linien eingezeichnet werden. Diesem Zwecke entsprechen die sogen. Photopläne vollständig. Auf ebenem oder fast ebenem Gelände erhält man mittels Photoentzerrung einen Photoplan von entsprechender Genauigkeit, wenn man über eine genügende Anzahl von Passpunkten verfügt, — die Frage ist bloss, unter welchen Niveaudifferenzen das Gelände annähernd eben betrachtet werden kann, um noch den notwendigen Genauigkeitsgrenzwert einhalten zu können. Die aus den Niveaudifferenzen entstehende Verzerrung ist um so grösser, je entfernter der Punkt vom Nadirpunkt ist. Eben deshalb muss bei den Aufnahmen mit grosser Überdeckung gearbeitet werden. Es ist erwünscht, dass die Überdeckung der Bilder 60—65% betragen soll. So vermeidet man die Benützung der Bildränder, wo die Verzerrung am bedeutendsten ist. Wenn die Brennweite der bei der Aufnahme benützten Kamera 21 cm ist, die Flughöhe 2100 m, dann ist das Grössenverhältnis des Bildes 1 : 10 000. Bei Zulassung einer Verzerrung von 0,5 mm und von dem 18×18 grossen Bild ein Quadrat von 10×10 cm, auf dem Gelände also 1 km² benützend, kann die maximale Niveaudifferenz der Geländepunkte von der Grundebene 15 m betragen. Wird die Grundebene in der mittleren Höhe zwischen den am höchsten und am tiefsten liegenden Geländepunkten bestimmt, dann kann die maximale Niveaudifferenz zwischen den Geländepunkten 30 m betragen.

Der grösste Teil unserer Forstwirtschaft befindet sich im Berggebiet, es ist daher fraglich, ob auf solchem Gelände mit Entzerrung eine der Forstwirtschaft entsprechend genaue Karte hergestellt werden kann. In diesem Falle werden die sich den Geländeformen anpassenden Grundebenen bezeichnet. Wenn die Schnittlinien der Passebenen als Mosaikplattenkontur betrachtet werden und auf jede Mosaikplatte mit Hilfe von entsprechenden Pass-

punkten je eine Entzerrung ausgeführt wird, dann kann ein Photoplan von genügender Genauigkeit entworfen werden.

Die schräge Grundebene wird von den zur Entzerrung nötigen Passpunkten bezeichnet. Da drei Punkte eine Ebene bestimmen und zur Entzerrung vier Punkte notwendig sind, muss vor allem gesichert werden, dass die Entfernung des vierten Punktes von der Grundebene nicht grösser als zulässig sei. Wo es die Umstände ermöglichen, muss man bestrebt sein, eine maximale Abweichung von $\pm$ 10 m zu erhalten. Die vertikale Abweichung des vierten Punktes von der aufgenommenen schrägen Ebene wird entweder mittels Berechnung oder auf graphischem Wege bestimmt. Das graphische Verfahren gibt gute und genügend genaue Lösungen ; im wesentlichen werden hier nach Auftragen der Basispunkte die zwei Geraden, welche die ausgewählten drei Basispunkte verbinden, graduiert. Somit erhält man die Niveaulinien und kann die Niveauhöhe des vierten Punktes unmittelbar ablesen. Es kann also festgestellt werden, um wieviel höher oder tiefer dieser vierte Passpunkt im Verhältnis zur aufgenommenen schrägen Ebene liegt. Ein grosser Vorteil dieses Verfahrens ist, dass — wenn alle Passpunkte konstruiert und die Niveaulinien zwischen je drei Passpunkten gezogen sind — die Schnittpunkte der Niveaulinien gleicher Höhe die Schnittgeraden der benachbarten Ebenen bestimmen. Diese Schnittgeraden sind dann die Grenzgeraden der Mosaikflächen. Werden nun die entzerrten Bilder in der Richtung dieser Schnittgeraden abgeschnitten, dann kann der Photoplan zusammengestellt werden.

Im Falle einer schrägen Grundebene werden die infolge der perspektivischen Abbildung entstandenen Verzerrungen mit Hilfe von Entzerrung eliminiert. Bei der Entzerrung einer schrägen Grundebene ergibt sich dieselbe Lage, wie in dem Fall, wenn die Grundebene horizontal und die optische Achse der Aufnehmekammer nicht vertikal ist. In diesem Falle jedoch fällt der Nadirpunkt nicht mit dem Mittelpunkt des Bildes zusammen.

Die Entzerrung der schrägen Grundebene, d. h. die Verwendbarkeit des Verfahrens hängt davon ab, in welchem Geländewinkel das zu dieser Arbeit benützte Entzerrungsgerät noch imstande ist, die perspektivische Lage auszugleichen, ohne die Schärfe der Photographie zu vermindern. Das hier beschriebene Verfahren stellt, im Verhältnis zu den Photoentzerrungen der ebenen Gelände, erhöhte Anforderungen an das Entzerrungsgerät. Die modernen Entzerrungsgeräte können, den Erfahrungen der Praxis entsprechend, bei einem Geländewinkel von 30° noch sehr gut verwendet werden. Mit noch steileren Abhängen hat man in Ungarn nicht sehr zu rechnen.

Die Bestimmung des Feldplanes der Passpunkte zur Entzerrung der schrägen Ebene kann mittels geodätischer Einwägung, auf Grund von Katastral- oder forstwirtschaftlicher Karten erfolgen. Da verhältnismässig viele Passpunkte notwendig sind, wo mit den erwähnten Methoden nicht wirtschaftlich gearbeitet werden kann, ist es möglich die Passpunkte nach schweizerischer und

schwedischer Praxis zwischen trigonometrisch bestimmten Basispunkten mit einem mittleren Punktfehler von $\pm$ 4 m auch mittels Multiplex anzureichern. Sämtliche Passpunkte am Gelände werden ausgewählt und mit Gips bezeichnet. Dass die vier Punkte nahezu in einer Ebene liegen sollen, wird dadurch erreicht, wenn je zwei Punkte in fast gleicher Höhe, also auf derselben Niveaulinie aufgenommen werden. Es genügt, die Höhenlage der Passpunkte mit barometrischer Höhenmessung zu bestimmen.

Den nach diesen Prinzipien zusammengestellten Photoplan haben wir mit einer von demselben Gelände mit feingeodätischem Verfahren entworfenen Karte verglichen und das Ergebnis bestätigte, dass die Photopläne forstwirtschaftlichen Zwecken vollkommen entsprechen, da die auftretenden Fehler, bzw. Abweichungen überall unter der Fehlergrenze geblieben sind. Im Besitze eines guten Photoentzerrungsgerätes kann demnach jegliche forstwirtschaftliche Aufgabe dieser Art gelöst werden.

Mit einem Mikrofilm-Photoapparat wurden unsererseits vom Flugzeug farbige Aufnahme von Waldgebieten gemacht. Die Aufnahmen erzeigten, dass die verschiedenen Baumarten auf Farbbildern sehr gut erkenntlich sind, diese demnach für forstwirtschaftliche Arbeiten sehr gut benützt werden können. Ich habe später gelesen, dass die Schweden die einzelnen Baumarten auf den Photoaufnahmen mittels verschieden farbiger Filter voneinander abgesondert haben. Es ist natürlich, dass zu all diesen Arbeiten viel Übung gebraucht wird, um sich auf den Aufnahmen gut auszukennen und diese korrekt ablesen zu können.

DISKUSSION

G. HANKÓ, BUDAPEST

Der Vortrag befasst sich unter anderem mit der Art der Aufarbeitung von Hügellandschaften für die in der Forstkunde so wichtigen Photopläne, und zwar von dem Standpunkt, dass die durch die zentrale Projektion der Höhenunterschiede verursachte Verzerrung minimal sei. Diesbezüglich wird die seitens des Lehrstuhls für Geodäsie der Hochschule für Forstingenieure ausgearbeitete Lösung bekanntgegeben.

Zu diesem Zwecke ist das in Frankreich bei den Katastralaufnahmen angewandte Kasettenverfahren ebenfalls sehr brauchbar. Hier wird das Gelände in von vier Geraden begrenzten, gut anschmiegenden Ebenen auf eine Polyederfläche zerlegt. Die Höhe der Polyederecken im Verhältnis zum Bezugsniveau wird mit einem Barometer bestimmt. Die Verzerrungsstelle der Punkte kann — auf Grund der ungefähr in einem Niveau befindlichen Passpunkte des Bildes — mittels eines Photoentzerrungsgerätes bestimmt werden. Sind die radialen Richtung und die Höhe der Polyederecken bekannt, so kann die genaue Stelle der Eckpunkte angegeben werden. Die einzelnen Polyederebenen werden durch Projektion auf die so erhaltenen Eckpunkte transformiert. An deren Verbindungslinie passen sich die einzelnen Polyederebenen an. Da die Höhen nur bis auf einige Meter bekannt sein müssen, entspricht die Höhenmessung mittels Barometers vollkommen. Die Kostenauswirkung des Verfahrens ist jedoch gross, kann daher ökonomisch bloss bei grossen Polyederebenen, also bei geringerer Genauigkeit angewandt werden.

VI. Gravitationskolloquium

SCHWERKRAFTSUNTERSUCHUNGEN IN UNGARN SEIT ROLAND EÖTVÖS' TÄTIGKEIT

J. RENNER
DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN, BUDAPEST

Es ist schon fünfzig Jahre her, dass ROLAND EÖTVÖS am Budapester Kongress der Internationalen Erdmessung sein hochempfindliches Instrument, die Drehwaage, den von allen Teilen der Welt hier versammelten Gelehrten vorführte und sein Messverfahren bekanntgab. Der Kongress äusserte sich mit der grössten Anerkennung über EÖTVÖS' Instrument und Verfahren und ersuchte die damalige ungarische Regierung, die bedeutungsvollen Untersuchungen EÖTVÖS' zu unterstützen. Nach diesem Kongress haben in Ungarn die geophysikalischen Forschungen in grösserem Masse begonnen.

Seit EÖTVÖS' Tode sind nahezu vier Jahrzehnte vergangen. In dieser Zeitspanne haben die geophysikalischen und darunter auch die Gravitationsforschungen auf der ganzen Welt eine mächtige Entwicklung durchgemacht und die ungarischen Forscher waren bemüht, EÖTVÖS' Andenken zu Ehren auch ihren gebührenden Anteil an der Entwicklung der Wissenschaft der Gravitation, sowie an der Ausführung der modernen Schweremessungen zu nehmen. Die Arbeiten können in drei Gruppen geteilt werden : unsere Forscher entwickelten die Gravitationsinstrumente und Messverfahren weiter, führten zahlreiche Messungen im Gelände aus, arbeiteten die Messresultate auf und lieferten auch wissenschaftliche Forschungsarbeiten im engsten Sinne.

Beachtenswert war die Weiterentwicklung der EÖTVÖSschen Drehwaage. EÖTVÖS' ehemalige Schüler und Arbeitsgenossen waren bestrebt, einzelne Störungen der Beobachtungen der ursprünglichen Eötvös'schen Drehwaage nach Möglichkeit zu eliminieren und das Instrument im allgemeinen zu modernisieren. Es gelang die Empfindlichkeit des Instrumentes gegen rasche Temperaturänderungen in grossem Masse zu vermindern, die Beruhigungszeit zu verkürzen. Mit der Verwendung von Aufhängedrähten entsprechender Empfindlichkeit und grosser Tragfähigkeit wurden die Dimensionen des Instrumentes — ohne dadurch seine Empfindlichkeit zu vermindern — bedeutend kleiner. Die Einführung der automatischen Registrierung von Dr. I. RYBÁR machte das Instrument für praktische Geländemessungen besonders geeignet. Diese Entwicklung ging im Laufe der dem Tode EÖTVÖS' folgenden 10—15 Jahre vor sich ; danach trat eher die Ausführung der praktischen Messungen

in den Vordergrund und die weitere Vervollkommnung der Instrumente wurde zurückgedrängt. Bloss in den letzten Jahren wurde ein neuer Schritt getan : im Geophysikalischen Institut Roland Eötvös konstruierten Dr. I. Rybár und Gy. Banai eine Drehwaage neueren Typs und die Werkstatt des Institutes unter Leitung von I. Herbály stellte deren erstes Exemplar her. Dieser neueste Typ ist Temperaturänderungen gegenüber sozusagen vollkommen unempfindlich, er registriert automatisch und nimmt keine Lichtpunkte, sondern Skaleneinteilungen und ausserdem die Nummer des Instrumentes und der Beobachtungsstation auf die lichtempfindliche Platte auf. Er kann nach Belieben auf 120°, 90° und 72° Azimut-Abstände eingestellt werden. Die in 90°-Azimut-Abständen erfolgte Beobachtung ermöglicht die schnelle Bestimmung der Gradientenkomponenten, da ein vollkommener Umlauf in den vier Stellungen beide Komponenten des Gradienten ergibt und gleichzeitig auch die Beobachtungen kontrolliert.

Interessante Versuche führte K. Tangl, Eötvös' ehemaliger Arbeitsgenosse und Nachfolger an der Universität, mit einer in Flüssigkeit getauchten Drehwaage aus. Bei diesen Versuchen verwertete er die Kompensationswirkung der Auftriebskraft. Später führte I. Rybár ähnliche Versuche aus, diese wuchsen jedoch noch nicht über die Wände des Laboratoriums hinaus.

Ein wichtiger Abschnitt in der Entwicklung der ungarischen Schweremessungen war die Einführung der Messmethode mit dem Gravimeter um die Mitte der 30-er Jahre. Es muss hier erwähnt werden, dass bereits Eötvös ein Bifilargravimeter konstruiert hatte und mit diesem Instrument den Schwerkraftsunterschied zwischen dem Physikalischen Institut der Universität und dem Szabadsághegy in Buda gemessen hat. Eötvös's Bifilargravimeter wird als technisches Andenken im Geophysikalischen Institut Roland Eötvös bewahrt. Bei den späteren Gravimetermessungen, die praktische Zwecke hatten, wurden ausländische Instrumente benützt. Messungen wurden ausgeführt mit Hilfe der Boucher-, Thyssen-, Haalck- und Grafschen Gravimeter. Gegenwärtig arbeitet das Geophysikalische Institut bei seinen Messungen mit zwei Heilandschen und einem Nörgaardschen Gravimeter. Die Forscher führen nicht bloss Routinemessungen aus, sondern prüfen auch die charakteristischen Eigenschaften der verwendeten Instrumente ; wertvolle Studien wurden über die Eigenschaften der Gravimeter angestellt.

In den vergangenen Jahrzehnten wurden bedeutende Forschungsarbeiten ausgeführt, damit die mit der Eötvös'schen Drehwaage und dem Gravimeter erhaltenen Messresultate je zeitgemässer aufgearbeitet werden können. Die ungarischen Geophysiker verfolgten aufmerksam die bezügliche ausländische Literatur, verwendeten die wertvollen ausländischen Resultate bei ihren eigenen Aufarbeitungen und führten selber theoretische Untersuchungen, um die Methode der Aufarbeitung zu vervollkommnen. Auch ungarische Forscher waren bemüht, zur Berechnung der Gelände- und Karteneinflüsse solche Ver-

fahren auszuarbeiten, mit deren Hilfe die Wirklichkeit auf verhältnismässig einfache Weise am möglichst besten angenähert werden kann. Mit solchen Fragen beschäftigten sich I. HAÁZ, L. EGYED und SZ. OSZLACZKY. Bei der Interpretation der Messresultate spielt die Berechnung der Wirkungen der angenommenen unsichtbaren Massen eine wichtige Rolle. Zur Erleichterung der Berechnung der Massenwirkung konstruierten M. SZECSŐDY und Verfasser eine einfache Vorrichtung. Zu ähnlichem Zwecke machte T. DOMBAI einen Vorschlag auf die Photozelleneinrichtung. Mit den theoretischen Fragen der Wirkung verschieden geformter und angeordneter Massen befasste sich I. HAÁZ in mehreren Studien. Mit Hilfe mehrmaliger Herumdrehung der Eötvös'schen Drehwage erhalten wir sich wiederholende Wertereihen. Mit den verschiedenen Aufarbeitungsmethoden dieser Reihen befasste sich J. GÁLFI.

Die Messungen mit der Eötvös'schen Drehwaage liefern teils die Komponenten des horizontalen Gradienten der Schwerkraft, teils die Grössen, die die Krümmung der Niveaufläche charakterisieren. In seinen grundlegenden Arbeiten hatte zwar EÖTVÖS die Methode entwickelt, wie diese Werte in den weiteren Aufarbeitungen benützt werden können, in der Literatur der vergangenen Jahrzehnte war diese Frage jedoch ständig auf der Tagesordnung. Es gibt noch immer umstrittene Fragen, in denen noch keine einheitliche Stellung genommen wurde. Solch eine Frage ist vor allem, ob die Gradienten an sich das Schwerefeld in der Tangentenebene der Niveaufläche zur Genüge charakterisieren, oder ob die von den Gradienten abgeleiteten Schweredifferenzen und auf Grund derer die Isogallinien dazu notwendig seien. Hieran knüpft sich die Frage, wie die Berechnung der Schwerkraftsdifferenzen erfolgen sollte. Zweifellos wird die Änderung des Schwerefeldes in der Horizontalen durch die Gradienten zur Genüge charakterisiert, und wenn von den Gradientenwerten die Wirkung der sichtbaren Masseninhomogenitäten sowie die normale Wirkung abgezogen wird, dann kann von den Gradienten unmittelbar auf die Massen geschlossen werden. Trotz alledem ist auch die Herstellung der Isogallinien zweckmässig, da diese von der Schwerkraftsänderung ein anschaulicheres, leichter übersichtliches Bild geben, als die Gradienten. Von den horizontalen Gradienten erhalten wir die Schwerkraftsänderung im Prinzip durch Integration. Eine exakte Integration könnte nur in dem Falle erfolgen, wenn wir den Gradienten als Ortsfunktion genau kennen würden ; anlässlich der Messungen erfolgt jedoch die Bestimmung des Gradienten nur an gesonderten Punkten. Deshalb ist man auf Näherungsrechnungen angewiesen. Es ist am einfachsten, die lineare Änderung des Gradienten zwischen zwei benachbarten Beobachtungspunkten anzunehmen und die Rechnung mit dem Mittelwert der Gradienten auszuführen. Dieses Verfahren ist selbstverständlich nicht in jedem Falle richtig, da im Falle einer raschen Änderung der Gradienten die Schwerkraftsänderung eine bedeutende Abweichung vom Linearen aufweisen kann und sie sodann von der für den linearen Fall berechneten Änderung abweicht. Nimmt man z. B. an,

dass in zwei voneinander 1 km entfernten Beobachtungspunkten die Gradienten dieselbe Richtung haben und ihre Richtung in die Verbindungslinie fällt, weiters, dass der Gradient im einem Punkt 6 Eötvös, im anderen 26 Eötvös beträgt, dann ist die Schwerkraftsänderung zwischen den zwei Punkten im linearen Falle 1,6 Milligal, unter Annahme einer quadratischen Änderung 1,2 Milligal oder noch weniger, bzw. noch mehr. Die Berechnung der Schwerkraftsänderung aus Gradienten kann schon im Falle von Messungen längs Profile Unsicherheiten in sich bergen, wenn jedoch mit der Eötvös'schen Drehwaage im Netz gemessen wird und zwischen den benachbarten Netzpunkten die Schwerkraftsdifferenzen unter linearer Annahme berechnet werden, dann geraten wir oft auf bedeutende Widersprüche. Die von den verschiedenen benachbarten Punkten auf denselben Punkt abgeleiteten Werte weisen bedeutende Abweichungen auf. Die Widersprüche werden teils von den Beobachtungsfehlern der Gradienten, teils von der Abweichung vom Linearen verursacht. Auch Eötvös kannte diese Widersprüche und machte auch Versuche mit einem vom Linearen abweichenden Berechnungsverfahren. Später hat man sich bei der Auswertung der Vermessungsnetze auf verschiedene Weisen bemüht, die bestehenden Fehler zu verteilen. Meistens hat man einfach die Mittelwerte benützt und die Reihenfolge der Ableitungen durch Erwägung der Umstände bestimmt. In mehreren Fällen wurde die Fehlerverteilung durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate mit Ausgleichungsrechnungen ausgeführt. Bei der Ausgleichungsrechnung wurden im allgemeinen die Schwereunterschiede korrigiert. A. Tárczy-Hornoch wies in seiner im Jahre 1949 erschienenen Studie darauf hin, dass — wenn man bei der Bestimmung der Schwerkraftswerte die Ausgleichsrechnung benützen will — die beobachteten Gradientenwerte zu korrigieren sind und eine solche Fehlerverteilung zu suchen ist, bei welcher die Quadratsumme dieser Korrektionen die kleinste sei. Tárczy-Hornoch schlug sogar noch vor, bei der Ausgleichung der Gradienten diesen entsprechende Gewichte zuzuteilen.

Es kann nicht bezweifelt werden, dass dieses Verfahren streng den Grundprinzipien der Ausgleichungsrechnung entspricht, es erfordert jedoch im Falle einer grösseren Menge von Netzpunkten eine verhältnissmässig grosse Rechenarbeit. Dem Ausgleichungsprinzip der Gradienten als unmittelbarer Messresultate entspricht bis zu einem bestimmten Grade jenes Verfahren, das Sz. Oszlaczky entwickelt und bei der Ausgleichung mehrerer ungarischer Messgebiete angewandt hat. Das Wesen dieses Verfahrens ist, dass die Gradienten auf die Winkelpunkte eines quadratischen Netzes interpoliert werden, was die Fehlerverteilung der Gradienten zur Folge hat. Die Bestimmung der Schwerkraftsdifferenzen auf die Winkelpunkte des quadratischen Netzes erfolgt dann mit einer verhältnismässig einfachen Ausgleichungsrechnung. Den bisherigen Erfahrungen gemäss leistet diese Bearbeitung jener Anforderung, dass die Isogallinien die Gradienten senkrecht schneiden sollten, weitgehend Genüge.

Bei den Messungen mit der Eötvösschen Drehwaage werden ausser den Komponenten der Gradienten meistens auch die Krümmungsdaten der Niveaufläche bestimmt. Dazu ist es notwendig die Doppelwaage in drei symmetrischen Stellungen zu beobachten. Zur Charakterisierung der Krümmungsverhältnisse führte Eötvös den Begriff der mit der Hauptkrümmungsdifferenz proportionalen horizontalen Richtkraft ein. Diese wird in einer graphischen Darstellung mit einer Linie gekennzeichnet, die vom Beobachtungspunkt halbiert wird, deren Länge proportional zur horizontalen Richtkraft ist, während ihre Richtung in die Richtung der kleinsten Krümmung fällt. Diese von Eötvös herstammende Darstellung charakterisiert vollständig die Krümmungsverhältnisse der Niveaufläche und ein geübter Interpretator kann aus diesen leicht die charakteristischen örtlichen Eigenheiten der Niveaufläche erkennen. Doch können die Krümmungsverhältnisse dadurch anschaulicher gemacht werden, dass man nach Eötvös aus den Krümmungsdaten die relativen Lotabweichungen und hieraus die Potentialwerte berechnet. Im Interesse der praktischen Arbeit war die Entwicklung eines solchen Verfahrens erwünscht, mit dessen Hilfe die Lotabweichungen mit entsprechender Genauigkeit und verhältnismässig einfach berechnet werden können. Das Wesen des vom Verfasser angewandten einfacheren Verfahrens ist, dass die Krümmungsdaten auf die Winkelpunkte eines entsprechend gewählten quadratischen Netzes interpoliert und die weiteren Berechnungen in diesem Netz ausgeführt werden. In diesem Falle kommen an Stelle allgemeiner Dreiecke gleichseitige rechtwinklige Dreiecke vor. Die relativen Werte der Lotabweichungen können nur dann aus den Resultaten der Eötvös'schen Drehwaagenmessungen berechnet werden, wenn im betreffenden Gebiet oder in dessen Nähe zwei Punkte mit astrogeodätischen Messangaben zur Verfügung stehen, deren wenigstens einer ein Laplace'scher Punkt ist. Aus den Komponenten der Lotabweichungen können die Potentialwerte einfach berechnet und die Linien gleichen Potentials konstruiert werden. Mehrere auf ungarischen Gebieten ausgeführte Berechnungen zeigen, dass die Lotabweichungen, sowie die Potentiallinien ein sehr anschauliches Bild der Niveaufläche geben. Werden zur Berechnung der Lotabweichungen die unterirdischen Anomalien der Eötvös'schen Drehwaagemessungen benützt, dann widerspiegeln die Lotabweichungen und die Potentiallinien die Wirkung der unsichtbaren Massen, und zwar sind die Lotabweichungen eher für die tiefer liegenden wirkenden Massen, als für die Massen in der Nähe der Oberfläche charakteristisch. Im Falle einer solchen Auswertung müssen selbtverständlich auch die verwendeten astrogeodätischen Angaben mit der topographischen Korrektion korrigiert werden, denn die Anomalien der Eötvös'schen Drehwaagemessungen können nur auf diese Weise mit den auf astrogeodätischem Wege bestimmten Lotabweichungen in Zusammenhang gebracht werden. Die Potentialwerte ergeben unmittelbar die Geoidundulation, wenn die Potentialdifferenz mit der Schwerkraft dividiert wird. Werden bei den Berech-

nungen die subterranen Anomalien angewandt, dann bedeuten die Geoidundulationen die von den verborgenen Massen herstammenden Undulationen; werden hingegen die topographischen Korrektionen ausser acht gelassen, so erhält man die Undulationen der wahren Geoidoberfläche. Die von den Ergebnissen der Eötvös'schen Drehwaagemessungen ausgewerteten Undulationen geben demnach die feinen Einzelheiten; durch dieses Verfahren wird die Geoidoberfläche auch in ihren kleinen Einzelheiten bekannt.

Die im Lande zum ersten Mal ausgeführten Gravimetermessungen waren bloss Versuche, besonders die mit dem HAALCK'schen Gravimeter. Mit den vorher erwähnten übrigen Gravimetern wurden schon regelmässige Messungen ausgeführt, und zwar anfangs mit dem Step-Verfahren, später, das Wiederholungsverfahren anwendend, mit Rückkehr zur Basisstation. Die Aufarbeitung der Ergebnisse erfolgte mit den in der internationalen Praxis angenommenen Verfahren. Auf Grund der Beobachtungsdaten und nach den notwendigen Korrektionen wurden die Driftkurven aufgetragen und hieraus die auf die Basisstation bezogenen Schwerkraftsunterschiede bestimmt. Im Falle geschlossener Linien wurden die sich ergebenden Schlussfehler verteilt. Die weitere Aufarbeitung der so bestimmten rohen Schwerkraftsdifferenzen bestand darin, dass die reine Höhen- und Bouguer-Korrektion, sowie die Breitenkorrektion berechnet und unter Beachtung dieser Resultate die Bouguer-Anomalien bestimmt wurden. Das bedenklichste in dieser Berechnung ist der zur Bouguer-Korrektion angewandte durchschnittliche Dichtewert, dessen Bestimmung oft mit Schwierigkeiten verbunden ist und Unsicherheiten birgt. Im allgemeinen kann man sich nicht immer auf die Dichtewerte der Bohrkernproben oder geologischer Aufschliessungen stützen. Bei diesen Berechnungen wurde oft die graphische Methode NETTLETONS verwendet, welche die durchschnittliche Dichte am besten annähert.

Sehr beachtenswert sind die Untersuchungen V. SCHEFFERS bezüglich der Korrektion der Gravimetermessungen in Berggebieten. In diesen Untersuchungen wurde darauf hingewiesen, dass die richtige Ausführung der Korrektion die Kenntnis der Tiefenänderung der Dichte benötigt.

Die Entfernung der Stationen bei detaillierten Gravimetermessungen ändert sich je nach den lokalen Verhältnissen und der zu lösenden Aufgaben im allgemeinen zwischen 100 und 500 m.

In den vergangenen Jahrzehnten wurden in verschiedenen Gebieten des Landes immer mehr Messungen mit der Eötvös'schen Drehwaage und dem Gravimeter ausgeführt, um den Ansprüchen der Lagerstättenforschung entsprechen zu können. Es sind ungefähr 60 000 Beobachtungsstationen der Eötvösschen Drehwaage und ungefähr 40 000 Gravimeterstationen im Lande verteilt, so dass die mit zweierlei Instrumenten ausgeführten detaillierten Messungen zusammen einen grossen Teil des Landes bedecken. Nur in einem Teile des Transdanubischen Mittelgebirges sowie auf einzelnen Gebieten des

nördlichen Gebirgslandes sind noch keine eingehenden Schweremessungen vorgenommen worden.

Um die Struktur der unsichtbaren wirkenden Massen in allen Einzelheiten kennenzulernen, wurden auf den vom Standpunkt der Lagerstättenforschung interessanten Gebieten auch Residualanomalien berechnet. Diese Berechnung der Residualanomalien aus den Ergebnissen der Gravimetermessungen erfolgte mit mehreren Verfahren, wie z. B. dem Verfahren nach PETERS, ELKINS, ROSENBACH, und hauptsächlich BARANOV. Die Erfahrung zeigte, dass die Residualanomalien in vielen Fällen auch solche strukturelle Einzelheiten aufdeckten, die in den direkten Messergebnissen entweder überhaupt nicht oder sehr schwer zu erkennen waren. Aus ähnlichem Grunde wurden in einigen Gebieten aus den Gradienten der Eötvösschen Drehwaagemessungen auch die vertikalen zweiten Ableitungen der Schwerkraft berechnet und auch dies wurde zur Erforschung von Feinstrukturen verwendet. LÁSZLÓ EGYED hatte darauf hingewiesen, dass das Verfahren der Erforschung regionaler Mittelwerte aus den Schwerkraftswerten schliesslich zur zweiten vertikalen Ableitung der Schwerkraft führt und somit — obwohl diese zwei Verfahren verschiedene Daten benützen und auch im Verlauf der Berechnung verschieden sind — dem Wesen nach dasselbe Resultat ergeben. Verfasser hat die Berechnung der Residualanomalien mit dem regionalen Mittelungsverfahren auch auf die Lotabweichungen angewandt und auf Grund dessen dieselben lokalen Anomalien festgestellt, die mit der Methode der höheren Ableitungen erhalten worden sind.

Das *Geophysikalische Institut Roland Eötvös* hatte mit der Vermessung des *Gravimetergrundnetzes* eine Arbeit von grosser Bedeutung ausgeführt. Die vermessung des Grundnetzes erfolgte in den Jahren 1950—1955. Diese Vermessung war schon deshalb notwendig, weil die Ergebnisse der seit langen Jahren teils mit der Eötvös'schen Drehwaage, teils mit dem Gravimeter ausgeführten Detailmessungen endlich in ein einheitliches System gefasst werden konnten. Die im Interesse der Lagerstättenforschung ausgeführten Detailmessungen wurden nämlich im Laufe der Zeit mit verschiedenen Instrumenten, in voneinander sehr abweichenden Stationsabständen ausgeführt, weshalb die Gebiete der einzelnen Detailmessungen aus Mangel eines Basisnetzes auf reale Weise nicht einander angepasst werden konnten. Das Gravimeterbasisnetz Ungarns umfasst Basispunkte erster und zweiter Ordnung. Die Messung der sechzehn Basispunkte erster Ordnung erfolgte im August und September 1951 mit einem Heiland-Gravimeter, das mit Flugzeug transportiert wurde, wodurch sich zu lange Zeitspannen zwischen den aufeinanderfolgenden Beobachtungen vermeiden liessen. Die 16 Basispunkte wurden mit dem Umfliegen der 12 Vierecke auf solche Weise vermessen, dass jedes Viereck im Laufe eines Tages zweimal umflogen wurde, während man den Ausgangspunkt und den darauf folgenden Punkt auch zum drittenmal beobachtete. Die Seiten der Vierecke haben eine Länge von 60—120 km, die Entfernung in Nordsüdrichtung erreicht die 100 km

nicht. Diese Einschränkung erwies sich wegen des verhältnissmässig geringen Messbereiches des gebrauchten Instrumentes für notwendig. Die ursprünglichen Beobachtungen in Punkten erster Ordnung wurden in der Nähe von Flugplätzen oder Landungsplätzen, auf leicht erreichbaren Orten, im allgemeinen am Rande von Landstrassen ausgeführt. In der Nähe der ursprünglich beobachteten Punkte erster Ordnung wurden die endgültigen Basispunkte gewählt und entsprechend stabilisiert. Die endgültigen Basispunkte befinden sich in 30—60 m Entfernung von der Strasse, meistens auf angeeigneten Grundstücken. Die Stabilisierung erfolgte derart, dass auf eine Betonsäule mit Ziegelgrund eine Granitplatte in Quadratform aufgesetzt wurde. Die obere Fläche der Granitplatte ist mit der Umgebung auf einem Niveau. Zum Schutze wurde für eine abhebbare Deckelplatte gesorgt. Zu den derart festgelegten endgültigen Basispunkten führen nun Zufahrten und der Instrumentenwagen mit dem Gravimeter kann sich unmittelbar auf dem stabilisierten Punkt stellen. Bei der Auswahl der endgültigen Punkte mussten verschiedene Gesichtspunkte beachtet werden. Dem Ratschlage geologischer Fachleute entsprechend sind sie möglichst auf Stellen gesetzt, wo das Grundwasser tief, die Lagerung der Schichten ruhig ist und keine Bodenbewegungen zu erwarten sind. Einige endgültige Basispunkte sind auf anstehendes Gestein gelagert. Die Schwerkraftsdifferenzen der ursprünglich beobachteten Basispunkte und der endgültigen Punkte wurden durch mehrfach wiederholte Verbindungsmessungen bestimmt. Die vertikalen Koordinaten der endgültigen Basispunkte wurden vom Budapester Geodätischen und Kartographischen Unternehmen mit grosser Zuvorkommenheit durch Nivellierung bestimmt. Die genaue Bestimmung der horizontalen Koordinaten erfolgte bisher noch nicht.

Das Gravimeterbasisnetz zweiter Ordnung besteht aus 493 voneinander 15—20 km entfernten Punkten. Die Basispunkte erster Ordnung sind zugleich Punkte des Netzes zweiter Ordnung. Bei der Messung des Netzes zweiter Ordnung wurde das Instrument im Auto befördert. Die Ausführung der Messung war im Übrigen der des Netzes erster Ordnung ähnlich. Auch die Basispunkte zweiter Ordnung bilden Vierecke und die Punkte jedes Viereckes wurden, in derselben Richtung herumgehend, wiederholt beobachtet. Zur Beobachtung des Netzes zweiter Ordnung wurde dasselbe Gravimeter benützt, mit welchem das Netz erster Ordnung vermessen wurde. Die Beobachtungen erfolgten sowohl beim Netz erster, als auch bei dem zweiter Ordnung im Inneren eines geschlossenen Instrumentenwagens. I. Komáromy bemerkte im Laufe der Beobachtungen, dass die Azimutstellung des Instrumentenwagens die Messwerte beeinflusst, wahrscheinlich infolge der Wirkung des erdmagnetischen Feldes auf das Instrument. Aus diesem Grunde wurde die Azimutstellung des Instrumentenwagens und des im Verhältnis dazu fixierten Instrumentes bei jeder Gelegenheit aufgezeichnet und die hieraus folgende Wirkung auf Grund einer empirischen Formel in Rechnung genommen. I. Komáromy hatte

ausserdem noch beobachtet, dass auch die Stellung der Gravimeterfedern den beobachteten Wert beeinflusst.

Das Netz erster und zweiter Ordnung wurde jedes für sich bearbeitet, das letztere unter Verwendung der Ergebnisse des Netzes erster Ordnung. Bei der Bearbeitung des Netzes erster Ordnung wurde auch die lunisolare Wirkung berechnet und von den beobachteten Werten abgezogen. Die Fehlerverteilung erfolgte mit Ausgleichungsrechnung auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate. Das Netz zweiter Ordnung wurde schon im Laufe der Messungen vorerst provisorisch ausgeglichen und zwar auf mehrere Arbeitsgebiete eingeteilt. Die endgültige Aufarbeitung ist schon im Gange, die lunisolaren Wirkungen auf die Basispunkte zweiter Ordnung sind bereits berechnet. Mit den theoretischen Fragen der Berechnung von Sonnen- und Mondwirkung befassten sich K. Lassovszky und Sz. Oszlaczky in ihrer im Jahre 1952 erschienenen Abhandlung. K. Lassovszky beschäftigte sich in seiner in diesem Jahre erschienenen Studie erneut mit dieser Frage und untersuchte hauptsächlich den wahrscheinlichsten Wert des auf die nicht starre Erde bezogenen Korrektionsfaktors. Den Grund zur Arbeit dieser Verfasser bot jene Beobachtungsserie, die mit den zwei Heiland-Gravimetern des Geophysikalischen Institutes im Kellergeschoss eines Gebäudes (in der Nähe Budapests in ruhiger Umgebung) in Februar und März 1951 von Arbeitsgenossen des Institutes fortlaufend ausgeführt wurde. Diese Registrierreihe ist in Hinsicht auf den Instrumentengang und der zeitlichen Änderung der Schwerkraft sehr wertvoll.

Die Vermessung des Gravimetergrundnetzes wurde von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgeschlagen und sowohl in der Ausführung der Messungen, als auch bei deren Aufarbeitung stets durch wertvolle Ratschläge unterstützt. Auch die Stabilisierung der Basispunkte erfolgte auf Vorschlag der Akademie. Von Seiten der Akademie war es vor allem Professor A. Tárczy-Hornoch, Akademiker, der in grossem Masse zum Entwurf und zur Ausführung der Basisnetzmessungen beigetragen hat. Zur Stabilisierung der Basispunkte zweiter Ordnung wurden mit der Stationsnummer versehene Betonsäulen am Rande der Strasse angebracht und zwar in solcher Höhe, dass der Metallknopf auf der Spitze der Säule sich 30 cm über dem Fahrweg befindet. Somit ist die Reproduzierbarkeit des Messniveaus auch für den Fall gesichert, wenn der Fahrweg inzwischen irgendeine Veränderung erleidete.

Die Auswertung der Messergebnisse des Punktnetzes erfolgte nach verschiedenen Gesichtspunkten. Es wurden auf Grund der von der Bearbeitung stammenden direkten Schwerkraftswerte Isogallinien konstruiert, ebenso nach Subtrahieren der mittels der Cassinis-Formel berechneten Normalwerte, sowie unter Anwendung der Freiluftkorrektion, schliesslich auf Grund der Bouguer-Anomalien.

Die ungarischen Gravitationsforschungen erstreckten sich auch auf die

Frage der Isostasie. Mit dieser Frage beschäftigte sich I. RÉDEY in seiner Studie von 1942. Später befasste sich insbesondere L. FACSINAY mit dem Problem der Isostasie, vor allem auf Grund der auf das Gebiet Transdanubiens berechneten isostatischen Anomalien, seine Untersuchungen jedoch erstreckten sich auch auf die Grosse Ungarische Tiefebene. Seine Ergebnisse kombinierte er mit TANNIS Untersuchungen, die auf Grund relativer Pendelmessungen im Gebiete des Karpatenbeckens ausgeführt wurden. Im Jahre 1952 fasste FACSINAY in einer wertvollen Monographie die Forschungsergebnisse bezüglich der Gravitationsmessungen und Isostasie zusammen und gab die ungarischen isostatischen Anomalien auf Grund der Gravimetermessungen ausführlich bekannt. In der letzteren Zeit benützte FACSINAY mit seinen Arbeitsgenossen auch die Daten des Gravimetergrundnetzes zur Berechnung der isostatischen Anomalien und erstreckte seine Untersuchungen auch auf das Gebiet einiger benachbarter Länder mit Benutzung ihres Gravimeterbasisnetzes. Die Auswertung der isostatischen Anomalien in grösseren zusammenhängenden Gebieten ist in der Forschung von Tiefenstrukturen von grosser Bedeutung.

Die in Ungarn ausgeführten relativen Pendelmessungen müssen auch kurz erwähnt werden. Es ist bekannt, dass ROLAND EÖTVÖS zur Kontrolle seiner Drehwaagemessungen K. OLTAY ersucht hat, relative Pendelmessungen anzustellen. OLTAY führte die relativen Pendelmessungen auch nach EÖTVÖS' Tode fort und bestimmte auf vielen Stellen den Wert der Schwerkraft im Potsdamer System. Die Messungen dienten damals zur guten Orientierung, die erreichte Genauigkeit jedoch war — vom Gesichtspunkt der heutigen modernen relativen Pendelapparate — nicht befriedigend. Es ist sehr wünschenswert, dass Ungarn je eher moderne relative Pendel anschafft, denn die mit solchen Instrumente ausgeführten Messungen ermöglichen die Kontrolle der Konstanten der bei Basis- und Forschungsmessungen benützen HEILANDschen Gravimeter, ausserdem die Verbindungsmessungen mit den Hauptbasispunkten der benachbarten Länder, vor allem mit Potsdam. Weitere Verbindungsmessungen können dann mit den so geeichten HEILANDschen Gravimetern ausgeführt werden.

In den ungarischen Gravitationsforschungen der vergangenen Jahrzehnte nahmen die Probleme der geologischen Interpretation der Messergebnisse einen wichtigen Platz ein. Dies kann damit erklärt werden, dass die gravimetrischen Messungen — ähnlich den übrigen geophysikalischen Messungen — in erster Linie im Interesse der Lagerstättenforschung ausgeführt wurden und auch augenblicklich ausgeführt werden. Eine ganze Reihe von Forschern beschäftigte sich im Laufe ihrer amtlichen Arbeit mit der Interpretation und zahlreiche Abhandlungen sind über diese Probleme erschienen. In dem Jahrzent nach EÖTVÖS' Tode befasste sich D. PEKÁR mit dem Nachweis von Verwerfungen auf Grund Eötvös'scher Drehwaagemessungen auf der Oberfläche, weiters mit der Frage des Nachweises unterirdischer Aushöhlungen auf Grund der in den Grubenbauen

ausgeführten Messungen zur Abwehr der Karstwassergefahr. R. VAJK behandelte die Fragen der Interpretation der transdanubischen Gravitationsmessungen. Mit den Fragen der Interpretation hatte sich auch J. FEKETE eingehend beschäftigt. V. SCHEFFER und K. KÁNTÁS berichteten vom Ergebnis ihrer eingehenden Untersuchungen in ihrem Werke »Die regionale Geophysik Transdanubiens«. Wertvolle Ergebnisse enthalten die sich mit diesem Subjekt befassenden Studien von L. EGYED. Die ins Gebiet der Interpretation gehörenden zahlreichen wertvollen Abhandlungen sind in den amtlichen Berichten über die geophysikalischen Messungen vorzufinden, und zwar in den alle drei Jahre gelegentlich der internationalen Kongresse, weiters zwischen den Jahren 1935—1944 jährlich vom Geophysikalischen Institut Roland Eötvös herausgegebenen Berichten, sowie in den Berichten des Finanzministeriums über die monopolisierte Tiefenforschung. Ausserdem wurden noch viele amtliche Berichte im Geophysikalischen Institut Roland Eötvös und beim Geophysikalischen Unternehmen MASZOLAJ, neuerdings Erdölforschung- und Aufschliessungsunternehmen, ohne Publikation deponiert.

Mit dem Zusammenhang der geodätischen und Gravitationsforschungen hatten sich in Ungarn seit EÖTVÖS viele befasst. Selbst die Titel einiger Arbeiten EÖTVÖS' drücken den engen Zusammenhang zwischen Drehwaagemessungen und Geodäsie aus. Dieser Zusammenhang offenbart sich hauptsächlich in zwei Beziehungen : einerseits in der Frage der Bestimmung des Geoids, anderseits in der Frage der ortometrischen und dynamischen Korrektion der Nivellierung erster Ordnung. Die zur ersten Problemgruppe gehörenden Forschungen habe ich im Vorhergehenden bereits berührt. Mit den theoretischen Beziehungen der Niveaufläche befasste sich besonders I. RÉDEY in mehreren Studien. Auch mit der Frage der Nivellierungskorrektion befassten sich mehrere ; beachtenswert ist der Vorschlag I. RÉDEYS bezüglich der auf die Achse der Erde reduzierten Höhe. Diese Frage ist jetzt besonders zeitgemäss und es wird die Ausführung von Gravimetermessungen längs einer Nivellierlinie höchster Ordnung geplant, damit die direkt gemessenen Gravitationswerte bei der Höhenkorrektion verwendet werden können.

Es ist erwähnenswert, dass auch auf Gebieten, die den praktischen geophysikalischen und geodätischen Arbeiten ferner stehen, anschliessend an EÖTVÖS' Arbeiten wissenschaftliche Untersuchungen erfolgten. Eine der bedeutungsvollen Untersuchungen EÖTVÖS' im Zusammenhang mit den grundlegenden Problemen der Physik bezog sich auf die Proportionalität der Massenanziehung und Trägheit. Auf eine andere Untersuchung dieser Frage machten SELÉNYI und RÓZSA im Jahre 1931 einen beachtenswerten Vorschlag. Etwas später befasste sich auch Verfasser mit dieser Frage und es gelang ihm, von den Untersuchungen EÖTVÖS' ausgehend, die Methode bis zu einem gewissen Grade verändernd und die störenden Einflüsse möglichst eliminierend, die Genauigkeit wenigstens um eine Grössenordnung zu steigern. Während EÖTVÖS

in seinen mit D. PEKÁR und J. FEKETE zusammen ausgeführten Untersuchungen keine Abweichung bis zur Genauigkeit $1 : 2 \cdot 10^8$ zwischen der anziehenden und trägen Masse fand, hatte Verfasser diese Genauigkeit bis auf $1 : 2 \cdot 10^9$, in einemFalle bis auf $1 : 5 \cdot 10^9$ erhöht.

Es kann nicht unerwähnt bleiben, dass in der letzteren Zeit zusammenfassende Arbeiten erfreulich hohen Niveaus erschienen sind, die die Gravitationsforschungen zeitgemäss behandeln. Eine hervorragende zusammenfassende Arbeit ist das akademische Lehrbuch von L. EGYED »Geophysikalische Grundkenntnisse«, welches, die Ansprüche der Studenten weit überflügelnd, den Forschern eine gute Orientierung bietet. Im Druck befindet sich jetzt eine Ausgabe der Ungarischen Akademie der Wissenschaften mit dem Titel »Allgemeine Geophysik«, die auch die Gravitationsprobleme eingehend bespricht.

Ich möchte noch kurz die Frage der Beziehung zwischen Drehwaage und Gravimetermessungen berühren. Es ist bekannt, dass — während im Jahrzehnt nach EÖTVÖS' Tod die Drehwaage im Ausland in immer weiterem Kreise zur Lagerstättenforschung verwendet wurde — in den darauffolgenden Zeiten die EÖTVÖS'sche Drehwaage von immer moderneren Gravimetern in den Hintergrund gedrängt wurde und sie heute im Ausland nur in Einzelfällen bei praktischen Forschungen angewandt wird. Meiner Meinung nach ist der Grund hierfür nicht theoretisch, sondern wirtschaftlich. Die Gravimetermessung ist heute zweifelsohne schneller und somit verhältnismässig billiger, als die EÖTVÖS'sche Drehwaagemessung. Letztere wird hauptsächlich durch ihre verhältnismässig lange Beruhigungszeit und durch den Umstand verteuert, dass sie nicht auf Verkehrsstrassen ausgeführt werden kann, sondern in den meisten Fällen auf bebauten Feldern unternommen werden muss, was oft die Verpflichtung des Schadenersatzes zur Folge hat.

Im Prinzip kann auch jener Nachteil gegen die EÖTVÖS'schen Drehwaagemessungen angeführt werden, dass sie gegenüber den sichtbaren und unsichtbaren Masseninhomogenitäten der unmittelbaren Umgebung sehr empfindlich sind. Es gibt gewiss solche Gebiete, besonders in der Umgegend der Flüsse und alter Flussbette, wo die lokalen störenden Einflüsse stark zur Geltung kommen, im grössten Teil der Fälle jedoch befinden sich keine störenden Massen unmittelbar unter der Oberfläche und die sichtbaren Unebenheiten des Terrains können in Rechnung genommen werden. Zu EÖTVÖS' Zeiten und noch ungefähr anderthalb Jahrzehnte nachher hat man bei den mit der EÖTVÖS'schen Drehwaage ausgeführten Messungen auf jeder Beobachtungsstation mit zwei Instrumenten beobachtet, die voneinander in 10—12 m Entfernung standen. Die lokalen Störungen zeigten sich somit unmittelbar in den Beobachtungen der beiden Instrumente, in der überwiegenden Mehrzahl der Stationen wichen die Daten der zwei Instrumente jedoch nur wenig voneinander ab. Der entschiedene Vorteil der Messungen mit der EÖTVÖS'schen Drehwaage ist, dass

die Verwerfungen besser nachgewiesen werden können, als bei den Gravimetermessungen. Vom geodätischen Standpunkt aus gesehen sind die Eötvös'schen Drehwaagemessungen deshalb wertvoller, weil die Krümmungswerte bei der Lösung des Geoidproblems wichtig sind. Die Krümmungswerte verhelfen übrigens in grossem Masse zur Bestimmung des Streichens der verborgenen wirkenden Massen. Die Konstruktion eines neuen Drehwaagetyps ist erwünscht, deren Beruhigungszeit kürzer ist als bisher, wodurch die ökonomischere Ausführung der Messungen ermöglicht sein würde. Obwohl ich die grosse wissenschaftliche und praktische Bedeutung der Gravimetermessungen anerkenne, kann die Eötvös'sche Drehwaage selbst vom praktischen Standpunkt aus gesehen nicht als ein überholtes, veraltetes Instrument betrachtet werden.

DISKUSSION

I. KÁDÁR, BUDAPEST

J. RENNER fasste in seinem Votrag all die Untersuchungen zusammen, die seit der Tätigkeit von LORÁND EÖTVÖS in Ungarn im Gebiete der Schweremessung ausgeführt wurden. Diese Untersuchungen waren die Fortsetzung der Arbeit EÖTVÖS' und trugen dazu bei, dass die mit Hilfe des Eötvös'schen Gerätes erhaltenen Messergebnisse eine immer mehr verbreitete praktische Anwendung auch im Gebiete der Geodäsie fanden. In meiner Bemerkung möchte ich bloss auf eine Anwendungsmöglichkeit hinweisen, die in der Geodäsie infolge der heutigen Genauigkeitsanforderungen aktuell geworden ist.

Sowohl die ausländische als auch die einheimische Fachliteratur legt, zur Erhöhung der Genauigkeit der Triangulierungsnetze, immer grösseren Wert auf die bisher ziemlich vernachlässigte Frage der Reduktion. Das gemeinsame Ziel sämtlicher bisheriger Untersuchungen ist, die Unregelmässigkeit des Schwerefeldes bei der Reduktion der Resultate der Winkel- und Längenmessung auf das Ellipsoid bzw. auf das Geoid auf irgendeine Weise zu beachten. Diesem Zwecke dient auch jene Reduktion, die HELMERT bei der Behandlung der Azimutreduktion »die infolge des vom astronomischen Zenit auf den Ellipsoidzenit erfolgten Überganges ausgeführte Korrektion« nennt. Bezüglich des zweiten Gliedes dieser Korrektion gibt HELMERT folgende Formel:

$$\Delta \alpha_{1,2} = - \frac{\Delta h_{1,2}}{s_{1,2}} (\xi_1 \sin \alpha_{1,2} - \eta_1 \cos \alpha_{1,2})$$

Hier ist $\Delta h_{1,2}$ die Höhendifferenz zwischen der Station und dem Richtpunkt,
$s_{1,2}$ die horizontale Entfernung zwischen denselben zwei Punkten,
$\alpha_{1,2}$ das Azimut der Richtung 1—2,
ξ_1 und η_1 die Meridian- bzw. Querrichtungskomponente der zur Station gehörenden Lotabweichung.

Mit dem Wert $\Delta \alpha_{1,2}$ der linken Seite soll der Azimut der Richtung 1—2 korrigiert werden. Bei Winkelmessung muss der gemessene Winkel mit der auf die Winkelarme bezogenen Differenz der Azimutreduktion versehen werden; hier fällt dann bei der Bildung der Differenz das hier nicht aufgezeichnete erste Glied der Azimutreduktion aus. Aus der Formel ist ersichtlich, dass man zur Bildung der Werte $\Delta\alpha$ die Werte der Lotabweichungskomponenten in sämtlichen Punkten des Triangulierungsnetzes kennen muss.

VENING—MEINESZ schlägt in einer seiner von der präzisen Ausführung der Reduktion handelnden Studien anstelle der HELMERTschen Reduktion folgende Azimutreduktion vor:

$$\Delta \alpha_{1,2} = \frac{h_2}{s_{1,2}} [(\xi_2 - \xi_1) \sin \alpha_{1,2} - (\eta_2 - \eta_1) \cos \alpha_{1,2}]$$

In dieser Formel kann anstelle der Höhendifferenz $\Delta h_{1,2}$ die absolute Höhe des Zielpunktes 2 gefunden werden, statt den Lotabweichungskomponenten der Station wiederum die Differenzen der zu den Endpunkten gehörenden

entsprechenden Lotabweichungskomponenten. Eben infolge dieses letzteren Umstandes kann die VENING—MEINESZ'sche Formel der HELMERTschen gegenüber auch vom Standpunkt der praktischen Geodäsie als viel vorteilhafter erachtet werden.

Nehmen wir nämlich an, dass die zu beiden Formeln notwendigen Lotabweichungsdaten aus den Resultaten der Eötvös'schen Drehwaagemessungen aufgestellt werden sollen. Dies wird durch das von EÖTVÖS ausgearbeitete und von J. RENNER vereinfachte Verfahren ermöglicht. Während jedoch zur Berechnung der in der HELMERTschen Formel vorkommenden Lotabweichungskomponenten als Hilfsdaten auch astrogeodätische Messungen nötig sind, kann die seitens VENING—MEINESZ vorgeschlagene Formel einzig aus den Ergebnissen der EÖTVÖS'schen Messungen erhalten werden. Diese letztere Formel kann nämlich auch in folgender Form geschrieben werden :

$$\Delta \alpha_{1,2} = \frac{h_2}{s_{1,2}} (\vartheta_2 - \vartheta_1) ,$$

wobei ϑ die auf die Visierebene lotrechte Komponente der Lotabweichung ist.

Nehmen wir zuerst den Fall, wo die Station und der Zielpunkt auf demselben Parallelkreis liegen. In diesem Spezialfall ist die gesuchte Reduktion auf Grund der vorigen Formel

$$\Delta \alpha_{1,2} = \frac{h_2}{s_{1,2}} (\xi_2 - \xi_1) .$$

Nehmen wir weiterhin an, dass zwischen den beiden Endpunkten auf deren Verbindungsgeraden Eötvös'sche Drehwaagenmessungen so ausgeführt wurden, dass die Entfernung der benachbarten Punkte die lineare Interpolation ermöglicht. In diesem Falle kann die Komponentendifferenz $\xi_2 - \xi_1$ ohne Anwendung jeglicher ergänzender Daten aus der folgenden Formel berechnet werden :

$$\xi_2 - \xi_1 = - \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{\partial W}{\partial x \partial y} \right)_{0i} \Delta s_i$$

wo

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x \partial y} \right)_{0i} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x \partial y} \right)_i + \left(\frac{\partial W}{\partial x \partial y} \right)_{i+1} \right] .$$

Die rechtseitigen zweiten Differentialquotienten erhält man unmittelbar von der Eötvös'schen Drehwaagemessung. Δs_i ist die Entfernung der benachbarten Punkte.

Wenn die Drehwaagemessungen nicht auf der die beiden Punkte verbindenden Geraden, sondern mehr oder minder unregelmässig erfolgt sind, die notwendige Dichte jedoch gesichert ist, dann ist es zweckmässig folgendermassen vorzugehen. Die zu den Messpunkten gehörenden zweiten Ableitungen W_{xy} werden auf eine gewisse Anzahl von Punkten der die zwei Endpunkte verbindenden Geraden interpoliert und damit wird die Aufgabe auf den früheren Fall zurückgeleitet. Als Interpolationspunkt kann man selbstverständlich auch die zwei Endpunkte der Richtung benützen. Eine ähnlich einfache Lage ergibt sich auch dann, wenn die beiden Endpunkte nicht auf demselben Parallel-

kreis, jedoch auf demselben Meridian liegen. Die hierauf bezügliche Reduktionsformel lautet:

$$\Delta \alpha_{1,2} = \frac{h_2}{s_{1,2}} (\eta_2 - \eta_1) ,$$

wobei

$$\eta_2 - \eta_1 = \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{\partial W}{\partial x \partial y} \right)_{0i} \Delta s_i$$

Schliesslich gehen wir zum allgemeinen Fall über und nehmen an, dass die Lage der beiden Endpunkte beliebig ist und dass längs der Verbindungsrichtungen auf einer entsprechenden Anzahl von Punkten Eötvös'sche Drehwaagemessungen zur Verfügung stehen. In diesem Falle werden die zu den umgebenden Punkten gehörenden Wxy und die zweiten Ableitungen $W_\Delta = W_{yy} - W_{xx}$ dem obigen Falle entsprechend auf die Punkte der verbindenden Gerade interpoliert und dann die auf Grund der zusammengehörenden Wertepaare transformierten Werte W_{xy} berechnet. Die aus der Transformationsformel

$$W_{ns} = \frac{\partial W}{\partial n \partial s} = \frac{1}{2} W_\Delta \sin 2\alpha + W_{xy} \cos 2\alpha$$

erhaltene zweite Ableitung W_{ns} weicht insofern von der ursprünglichen gemischten zweiten Ableitung ab, dass hier die Rolle der y-Achse der die beiden Punkte verbindenden Richtung s und die Rolle der x-Achse der hierauf senkrechten Richtung n zufällt. Die Berechnung der Komponentendifferenz $\vartheta_2 - \vartheta_1$ kann auf Grund der auf den früher behandelten Spezialfall bezüglichen Formel erfolgen, wenn anstelle der in diesen angegebenen Werte von W_{xy} deren transformierte Werte W_{ns} eingesetzt werden, d. h.

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{\partial W}{\partial n \partial s} \right)_{0i} \Delta s_i .$$

Es kann noch erwähnt werden, dass im Falle der bedeutenderen Höhendifferenz der Interpolationslinienpunkte die Wirkung der Höhe auf die Lotabweichungskomponentendifferenz unter Beachtung der zweiten Ableitungen W_{xz} und W_{yz} ebenfalls beachtet werden kann. Ein bedeutenderes Gelände reduziert bloss die Genauigkeit der Interpolation.

Die hier bekanntgegebene Methode ermöglicht, dass die Ergebnisse der bereits bestehenden Eötvös'schen Drehwaagemessungen ohne ergänzende Daten oder Anwendung besonderer Annahmen zur Steigerung der Genauigkeit der Triangulierungsnetze benützt werden können. Da die notwendigen Berechnungen höchstens auf 2—3 Zahlen genau ausgeführt werden müssen, kann die Berechnung in entsprechender Weise vereinfacht werden.

Schliesslich muss nochmals erwähnt werden, dass die auf dem Projektionsgedanken von PIZETTI basierte VENING—MEINESZ'sche Formel nicht nur infolge ihrer Genauigkeit vorteilhafter ist, sondern — wie dies aus dem hier behandelten Verfahren ersichtlich ist — auch für die praktische Anwendung zweckmässiger erscheint. Die HELMERTsche Formel erfordert ausser den Eötvös'schen Drehwaagemessungen auch ergänzende astro-geodätische Messungen, während zu der seitens VENING—MEINESZ vorgeschlagenen Reduktionsberechnung solche Messungen bzw. Daten nicht notwendig sind.

DIE ÄNDERUNG DER DIMENSIONEN DER ERDE AUF GRUND PALÄOGEOGRAPHISCHER DATEN UND IHRE GEODÄTISCHEN KONSEQUENZEN

Prof. L. EGYED
DOKTOR DER GEOLOGISCHEN UND MINERALOGISCHEN WISSENSCHAFTEN, BUDAPEST

Das erste Problem der höheren Geodäsie war die Bestimmung der Form und Dimensionen der Erde. Die ältesten schriftlichen Erinnerungen sind mit dem Namen von ERATOSTHENES verknüpft, der von der Erde voraussetzte, dass diese kugelförmig sei, und aus der Länge des Meridianbogens zwischen Alexandrien und Syene und aus den Schattenverhältnissen in vertikalen Brunnen schon vor mehr als zwei Jahrhunderten vor Beginn unserer Zeitrechnung als Erster die Dimensionen der Erde bestimmte. Die ermittelten Dimensionen sind um kaum 15% grösser als der zeitgemässe Wert des Erddurchmessers.

Die höhere Geodäsie entwickelte sich besonders durch Verwendung der durch Untersuchungen am Gravitationsfeld erzielten Ergebnisse zu einer umfassenden Wissenschaft. Es wurde allerdings jene Grundbedingung stillschweigend angenommen, dass die Dimensionen der Erde unverändert seien. Der Grund für diese Auffassung ist in dem Umstand zu suchen, dass die geodätischen Messungen keine Dimensionsänderungen ergeben haben. Die Ursache dafür kann darin bestehen, dass sich die Dimension der Erde tatsächlich nicht ändert, es kann aber auch sein, dass die Änderung so klein ist, dass sie bei der heutigen Genauigkeit der klassischen geodätischen Methoden und Messungen nicht konstatiert werden kann.

Im allgemeinen gibt es zwei Auffassungen bezüglich der Dimensionen der Erde. Nach der einen wird das Volumen der Erde infolge Auskühlung ständig kleiner, das heisst die Erde schrumpft zusammen. Nach der anderen Auffassung änderte sich das Volumen der Erde während der geologischen Zeiten überhaupt nicht. Welche Auffassung die richtige ist, kann nur die Erfahrung entscheiden.

Das Ziel dieses Vortrages ist die Lösung dieser Frage. Da sich hierzu die klassischen geodätischen Methoden nicht eignen, seien statt diesen die paläogeographischen Beobachtungen herangezogen. Es steht ausser Zweifel, dass eine solche Lösung dieser Frage, was die Genauigkeit betrifft, mit der Methode von ERATOSTHENES verglichen werden kann, der die Bewegungsgeschwindigkeit der Kamelkaravane zur Bestimmung der Meridianbogenlänge benutzte. Immerhin lässt sich die Richtung der Dimensionsänderung der Erde daraus

bestimmen und das so erhaltene Ausmass der Änderung wird in der richtigen Grössenordnung liegen.

Die geologischen Beobachtungen zeigen, dass sich die Menge des Wassers in den Ozeanen während der Erdgeschichte kaum änderte. Laut KUENEN nahm die Hydrosphäre seit Beginn des Paläozoikums um nicht mehr als 4% des Gesamtvolumens zu.

Wenn die Erde zusammenschrumpft, dann verringert sich auch ihre Oberfläche, und die durchschnittliche Mächtigkeit (Tiefe) des Wassers der Ozeane wächst ständig während der geologischen Zeiten. Folglich muss der Meeresspiegel im Falle einer schrumpfenden Erde eine durchschnittlich steigende Tendenz zeigen. Das Steigen des Meeresspiegels verursacht aber, dass das Meer immer grössere Teile der Erde überschwemmt. *Im Falle einer schrumpfenden Erde müssen die kontinentalen Gebiete nach und nach immer mehr mit Wasser überflutet werden.*

Wenn das Volum der Erde konstant ist, dann wird die Ausdehnung der überschwemmten Oberfläche nur durch Krustenbewegungen beeinflusst, und die trockene Oberfläche soll um einen konstanten Wert schwanken.

Es sei aber jetzt eine dritte Möglichkeit angenommen. Wenn sich das Volum der Erde vergrössert, dann vergrössert sich auch die Oberfläche der Erde, folglich muss die Mächtigkeit (Tiefe) des Meereswassers ständig abnehmen. Dementsprechend muss sich das Meereswasser von den höherliegenden Gebieten zurückziehen, das heisst im Falle einer sich ausdehnenden Erde *müssen die mit Wasser überfluteten Gebiete im Laufe der Geschichte der Erde eine ständige Abnahme zeigen.*

Die Frage der Dimensionsänderung der Erde ist daher effektiv auf Grund paläogeographischer Angaben lösbar, man braucht bloss das Ausmass der Wasserüberflutungen in den verschiedenen geologischen Zeiten zu bestimmen. Das Zunehmen der Wasserüberflutung bedeutet Schrumpfung, die Stabilität der Wasserüberflutung Stabilität des Volums, endlich die Abnahme der Wasserüberflutung Zunahme des Volums.

Zu diesem Zwecke wurden von uns einerseits die paläogeographischen Karten von STRACHOW, anderseits von TERMIER auf die Kugelfläche transformiert und mit dem Planimeter die vom Meer bedeckten kontinentalen Gebiete ermittelt. Die auf solche Weise erhaltenen Resultate wurden als Funktion der Zeit graphisch dargestellt. Die aufgetragenen Werte zeigen im Falle beider Diagramme im Laufe der geologischen Zeiten eine abnehmende Tendenz.

Bei Berücksichtigung des Aufbaus und Verteilung der hypsographischen Kurve lässt sich dieses Resultat nur mit einer Vergrösserung des Erdvolums erklären.

Auf Grund der paläogeographischen Daten wurde also bewiesen, dass das Volumen der Erde zunimmt. Die Erde schrumpft daher nicht, sondern dehnt sich aus.

Aus den obigen Diagrammen kann man das Ausmass des Radiuszuwachses so bestimmen, dass man als Annäherung annimmt — was übrigens auch beweisbar ist —, dass sich der durchschnittliche Ablauf der hypsographischen Kurve in den letzten 500 Millionen Jahren nicht wesentlich geändert hat. Als Resultat der Berechnungen erhält man, dass die Zunahme des Erdradius durchschnittlich 0,66 mm/Jahr beträgt, wenn man die Werte der STRACHOWschen Karten verwendet, wogegen die aus den TERMIERschen Karten berechneten Werte zu einer Radiuszunahme von 0,4 mm/Jahr führen. Der Durchschnitt bezieht sich auf 500 bzw. auf 400 Millionen Jahre. Es sei noch erwähnt, dass die Zunahme des Radius auch aus anderen Daten und auf einer grundsätzlich anderen Weise bestimmbar ist und dass auch dann die Berechnungen zu denselben Werten führen.

Es ist also feststellbar, dass sich die Erde ausdehnt und dass der Radius jährlich um rund 0,5 mm zunimmt.

Welche geodätischen Folgen hat dieses überraschende Resultat?

Aus den geodätischen Messungen konnte man feststellen, dass in einzelnen Gebieten Krustenbewegungen stattfanden. In gewissen Gebieten sind hauptsächlich die vertikalen Krustenbewegungen gut messbar, anderswo sind diese nahezu den Messfehlern gleich. Besonders problematisch sind die Bewegungen in horizontaler Richtung. Die WEGENERsche Theorie spricht von grosszügigen Bewegungen, nämlich, dass Südamerika und Afrika einst zusammenhingen, nachher zerrissen wurden und auseinanderschwammen.

Das relative Ausmass der Bewegungen ist so klein, dass man diese mit geodätischen Messungen nicht nachweisen kann. Ist die WEGENERsche Theorie wahr? Das heisst, haben die horizontalen Bewegungen grosser Ausmasse eine Realität?

Das jetzt gezeigte Ergebnis beweist, dass die Horizontalbewegungen von grossen Dimensionen reell sind, aber nicht unter Voraussetzung der WEGENERschen Kontinentalverschiebung, sondern einerseits in modifizierter, anderseits in generalisierter Form.

Eine Zunahme des Erdvolums seit Beginn der Entstehung der Erde darf vorausgesetzt werden. Auf Grund deren lässt sich die Entstehung der Meeresbecken wie folgt erklären. Die erste feste Kruste bildete die Gesamtheit der heutigen kontinentalen Gebiete. Diese erste Kruste zerriss aber infolge der Volumzunahme, und entlang dieser Risslinie drang das Magma von grösserer Dichte hervor, aber eben wegen der grösseren Dichte konnte es das durchschnittliche Niveau der kontinentalen Kruste nicht erreichen, sondern nahm dem hydrostatischen Gleichgewicht entsprechend eine rund 5 km tiefere Lage ein. So kamen die Meeresbecken zustande. Dieser Vorgang wiederholte sich natürlich öfters und so entstand eine Risslinie auf der östlichen Seite Südamerikas und an der Westküste Afrikas. Entlang dieser Linie öffnete sich die Kruste und es entstand der Atlantische Ozean. Es ist von Interesse zu erwäh-

nen, dass die aus der Oberfläche kontinentaler Gebiete berechnete jährliche Radiuszunahme um 0,6 $\pm$ 0,05 mm/Jahr beträgt.

In der Kruste der sich ausdehnenden Erde entstehen infolge der Festigkeit und Elastizität mit dem Fortschreiten der Ausdehnung Verzerrungen. Diese Verzerrungen sind zu beobachten in den Höhenänderungen, die geodätisch ebenfalls messbar sind.

Die WEGENERsche Theorie sprach von grosszügigen Polbewegungen. Wenn man nun bedenkt, dass infolge der durch Ausdehnung auftretenden Risse grosszügige Massenwanderungen entstehen, die gleichzeitig das Trägheitsmoment der Erde verändern, so wird das Endergebnis nicht nur die Änderung der Lage der kontinentalen Gebiete, sondern auch die Verlagerung der Drehachse sein. Die Möglichkeit von grosszügigen Polbewegungen ist daher im Laufe der Erdgeschichte eine Realität.

Im Zusammenhang mit der Untersuchung der Form der Erde trat auch die Theorie der Isostasie auf. Das Prinzip der Isostasie schien zuerst Gültigkeit zu besitzen. Die Erweiterung der Gravitationsvermessungen, die Steigerung der Genauigkeit und die Detailuntersuchungen zeigten indessen immer mehr, dass die Lage der Erdkruste an vielen Stellen von dem Prinzip der Isostasie abweicht.

Im Zusammenhang damit dürften zwei Bemerkungen von Interesse sein. Es ist feststellbar, dass ein Gebiet bei verschiedenen Werten von T (theoretische Krustenmächtigkeit) und sogar bei verschiedenen isostatischen Prinzipien durchschnittlich dasselbe Bild des Anomalienablaufes vermittelt. Das isostatische Anomalienbild muss in enger Verbindung mit dem Aufbau der Erdkruste stehen. Anderseits zeigen sowohl in den Ostalpen als auch in der Schweiz die Mittelwerte der auf 100 Meter Höhenkreisen gebildeten isostatischen Anomalien eine mit der Höhe abnehmende Tendenz. Im Vergleich mit den vorhergehenden Ausführungen ist dies so zu deuten, dass die Anomalien in erster Linie durch die auf die Kruste angehäuften Sedimentmassen verursacht werden. Die Kruste ist aber nur in kleinerem Ausmass durchgebogen. Darauf weisen — wenngleich etwas unsicher — auch die Daten der Seismologie hin.

Die Erklärung für diese Erscheinung gibt die Volumzunahme der Erde. Die Volumzunahme ist, wie dies von uns theoretisch anderswo gezeigt wurde, mit dem Kern der Erde verbunden. Zieht man die zusammenhängende elastische und feste Kruste in Betracht, so führt die Ausdehnung im Magma unterhalb der Kruste zu einem Überdruck, so dass auf die Kruste nicht nur die hydrostatische Auftriebskraft, sondern auch der aus dem Überdruck herrührende Druck einwirkt. Ähnlich wie bei einem aufgeblasenen Gummiball werden die Belastungen hauptsächlich — infolge des innerlichen Überdruckes — von der Festigkeit der Kruste getragen; das Prinzip der Isostasie wird in den Hintergrund gedrängt und dient nur noch als Annäherung beim Rechnen.

Das hier erhaltene Ergebnis weist also darauf hin, dass die Anwendung des Prinzips der Isostasie einer starken Revision unterzogen werden muss.

DISKUSSION

F. EILINGZFELD, SOPRON

Die Frage, die die höhere Geodäsie ununterbrochen beschäftigt, ist die Bestimmung der Gestalt und der Dimensionen der Erde und innerhalb dessen insbesondere die Prüfung, ob diese Masse tatsächlich konstant oder aber im Laufe der Zeiten Änderungen ausgesetzt sind. Zweifellos benötigt man zu dieser Prüfung auf lange Zeiten erstreckende Messergebnisreihen, mit deren Vergleich diese Änderungen bewiesen werden können. Es ist jedoch bekannt, dass allgemein verbreitete Messungen dieser Art — wenigstens in ungarischer und auch in unmittelbarer ausländischer Relation — nur bis ins vergangene Jahrhundert zurückgreifen, die Kürze der zwischen diesen Messungen vergangenen Zeit ist von diesem Standpunkt aus die Ursache einesteils dessen, dass die Frage den Standpunkten des Vortragenden gemäss nicht untersucht werden kann, anderseits — was im allgemeinen ein wichtiges Moment der Auswertung der geodätischen Messungen ist — übertrifft (was mit Genauigkeitsprüfungen und den angewandten Messmethoden bewiesen werden kann) die zueinander bezogene Ungenauigkeit der bisher zur Verfügung stehenden, auf verhältnismässig längere Zeit zurückgreifenden Messergebnisse der Grössenordnung nach in bedeutendem Masse den Grad der eventuell nachweisbaren Radiuszu- oder -abnahme.

Heute kann schon behauptet werden, dass die Zunahme an Genauigkeit der geodätischen Geräte und Messungen einen so hohen Grad erreicht hat, dass die Verlässlichkeit der horizontalen und Höhenmessungen es ermöglicht, die Frage im Sinne des Vortragenden zu untersuchen ; hierzu würden jedoch wiederum geodätische Messungen von langen Zeiten notwendig sein.

Eine Frage möchte ich noch an Vortragenden richten. Sind wohl die vom Vortragenden erwähnten und als Grundlage der Untersuchungen dienenden Strachow'schen und Termier'schen Karten genug genau zur Schlussfolgerung, um solch minimale Änderungen wie jährlich 0,5 mm nachzuweisen, anderseits möchte ich wissen, welche Planimeter und Planimeterverfahren Vortragender bei der Prüfung dieser Fragen benützt hat, als er zur Bestimmung des auf der Karte befindlichen Geländes das Planimeter zur Hilfe genommen hat.

Prof. L. EGYED, BUDAPEST

Ich möchte in einigen Worten die mir gestellten Fragen beantworten. Die erste Fragengruppe bezog sich darauf, wie weit die paläogeographischen Werte verlässlich sind. Die Paläogeographen stellen die Karten zweifellos aus Einzelstücken zusammen und es ergeben sich hier ganz beachtenswerte Fluktuationen. Dass diese Karten trotzdem annehmbar sind — mit einer gewissen prinzipiellen Toleranz —, dazu wird sozusagen ein verkehrter Beweis erbracht. Die Regelmässigkeit, die sich in den ausgemessenen Daten mehr oder minder zeigt, beweist, dass die Fehler der Paläogeographen nicht so gefährlich sind, dass diese Daten zum Nachweis derartiger sehr grosser Gebiete, grosse Unterschiede vertretender Änderungen nicht gebraucht werden könnten.

Die andere Frage bezog sich auf die Ausmessung. Es wurde jenes Verfahren verfolgt, wonach die Kugelfläche auf die Ebene abgebildet wird. Dies-

bezüglich wurde demnach vor allem die gesamte Erdoberfläche auf Kugelsektoren abgelöst, auf diese wurde mit Hilfe der paläogeopraphischen Daten die Verbreitung der Meere auf dem Kontinent aufgetragen und dies wurde mit einem polaren Planimeter mehrfach abgemessen. Wir kontrollierten uns obendrein so, dass zuerst separat die Meere und danach die Kontinente abgemessen wurden, letztere in dem Sinne, dass die nicht mit Wasser bedeckten Werte genommen wurden. Die Streuung an sich betrug im Allgemeinen bei der Messung 1—2 Prozent, blieb aber immer unter 5 Prozent.

Und es kann aus mechanischen Festigkeitsuntersuchungen nachgewiesen werden, dass die Spannungsanhäufungen sich periodisch wiederholen ; die Geologen bezeichnen diese Erscheinung als Regression-Transgression.

Eine solche Periode kann auch prinzipiell berechnet werden. Wird eine Radiuszunahme von jährlich 0,5 mm angenommen, so kommen für eine Periode 50 Millionen Jahre heraus. Und der hier berechnete Durchschnitt beträgt 47 Millionen Jahre.

Ich habe bereits erwähnt, dass auf grundsätzlich ganz anderem Wege — wenn die Kontinente zusammengeschoben werden — eine Radiuszunahme von jährlich $0{,}6 \pm 0{,}05$ mm erhalten wird. Dies ist wieder das Ergebnis einer auf prinzipiell ganz anderem Wege ausgeführten Berechnung.

Und schliesslich noch zwei Bemerkungen. Die angegebenen Werte sind Beobachtungsdaten. Theoretisch ist die Zunahme des Erdvolumens eine Folge des Benehmens des Erdinneren, nämlich eines dem radioaktiven Zufall der Elemente ähnlichen Phasenübergangsprozesses, der die dichteren Stoffe des Erdkernes in die weniger dichten Stoffe des Mantels überführt. Die Dichte des inneren Kernes beträgt 17 gr/cm^2 und wenn hieraus das ursprüngliche Volumen berechnet wird, so kann man für den Wert der Radiuszunahme — genau wie aus dem Vorangehenden — 0,46 erhalten.

In der letzten Zeit bewies gerade HORNBERG, dass im grossen und ganzen die Flutreibung an sich durch das auf die Atmosphäre bezügliche Drehmoment der Sonne kompensiert wird. Trotz allem zeigt sich in der Drehgeschwindigkeit der Erde eine durchschnittliche Abnahme von 1—2 Sekunden. Die Flutreibung erklärt demnach die Kompensierung der Atmosphäre. Aus der Änderung des Trägheitsmomentes folgt dies auch und tatsächlich, wenn die diesbezüglichen Daten von SPENCER JONES benützt werden, dann ergibt sich ungef. der Wert von 0,4—0,8 mm für die Radiuszunahme.

Die paläogeographischen Daten sind daher eingentlich nur eine Einheit einer grösseren Gruppe von Angaben und beweisen, unabhängig von allen Theorien, dass das Volumen der Erde zunimmt. Es ist möglich, dass sich auf Grund der paläogeographischen Daten eine Abweichung von 1—2 Dezimalen ergibt, die Tendenz zeigt jedoch unbedingt und unbestreitbar, dass das Volumen der Erde nicht schrumpft, sondern zunimmt. Und die vorhergehenden Daten beweisen auch im grossen und ganzen, dass die Grössenordnung keinen besonderen Fehler aufweist.

EXPERIMENTELLE DICHTEBESTIMMUNG FÜR SCHWEREKORREKTIONEN*

Prof. Dr. OTTO MEISSER, FREIBERG/Sa.

Bei Reduktionen gemessener Schwerewerte und bei einigen Höhenreduktionen wird die Dichte der Gesteinsschicht zwischen Erdoberfläche und Bezugsniveau benötigt. Ihre Bestimmung an Proben stösst speziell bei Sedimenten auf grundsätzliche Schwierigkeiten.

Nach einer Betrachtung dieser Problematik werden zwei Verfahren zur Dichtebestimmung im anstehenden Gestein beschrieben. Die »Methode der vertikalen Schwereprofile« wird als technisch durchgebildetes Verfahren behandelt, sämtliche erforderliche Korrekturen werden in einer für die Praxis geeigneten Form vorgelegt. Ein umfassendes Messmaterial in 65 Schächten Mitteldeutschlands belegt die Brauchbarkeit dieses Verfahrens und gibt gesicherte Werte für eine Dichtekarte. Experimentell gewonnene Tiefen-Dichte-Funktionen werden beschrieben. Ein neues Verfahren für Dichtebestimmung im Gesteinsverband aus Drehwaagemessungen unter Tage wird behandelt. Erste Versuchsmessungen brachten im Vergleich mit Gravimetermessungen übereinstimmende Ergebnisse innerhalb der Messgenauigkeit.

Abschliessend wird auf die Bedeutung des vertikalen Schweregradienten hingewiesen, experimentelle Messergebnisse nach zwei verschiedenen Methoden werden vorgelegt.

* Nach der Dissertation von Dr. H. RISCHE vorgetragen.

ZUR NEUBESTIMMUNG DER ABSOLUTEN SCHWERE IN POTSDAM

Prof. K. REICHENEDER,
DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
POTSDAM

Die am Anfang dieses Jahrhunderts von KÜHNEN und FURTWÄNGLER durchgeführten Reversionspendelmessungen zur Bestimmung der Fallbeschleunigung im Pendelsaal des Geodätischen Instituts Potsdam hatten den Wert

$$g = 981{,}274 \pm 0{,}003 \text{ gal}$$

ergeben, der sich im Laufe der Jahre als internationaler Bezugswert eingebürgert hat. Als rund 30 Jahre später die wieder mit einem Reversionspendel durchgeführten Absolutmessungen der Schwerkraft in Washington und Teddington Abweichungen von — 18,4 bzw. 12,9 mgal gegenüber dem obigen Potsdamer Wert erkennen liessen, wurde das Problem der absoluten Schweremessung wieder aktuell, besonders als dann VOLET im Büro des Poids et Mesures in Sèvres bei Paris mit der Methode des frei fallenden Körpers sogar eine Abweichung von —24 mgal, nach einer späteren Korrektur —21 mgal gefunden hatte. BERROTH überprüfte die alten Berechnungen von KÜHNEN und FURTWÄNGLER, deckte eine anfechtbare Reduktion wegen des Einflusses der Schneidenelastizität auf und verbesserte den Potsdamer Schwerewert um —12,7 mgal ; eine spätere Berechnung von JEFFREYS ergab —11,2 mgal. Dieser Wert stimmt am besten mit der in jüngster Zeit abgeschlossenen Bestimmung der Fallbeschleunigung im Mendeljeev-Institut in Leningrad zusammen. AGALETZKI hat dabei drei verschiedene Methoden (Reversionspendel, freier Fall, geführter Fall) angewandt und im Mittel —10,8 mgal erhalten. Von den zur Zeit noch in Gang befindlichen Absolutmessungen der Schwere sind nur vorläufige Ergebnisse bekannt geworden aus Ottawa (—12,7), aus Sèvres (—14,8), aus Buenos Aires (—13,9).

Es besteht also kein Zweifel darüber, dass der Potsdamer Bezugswert um über 10 mgal zu hoch ist, doch ist es zur Zeit wohl noch nicht möglich einen sicheren Wert anzugeben. Deshalb hat die Internationale Gravimetrische Kommission Anfang September 1956 in Paris einem Antrag PARISKI's (SU) zugestimmt, Absolutmessungen der Schwere in grösserem Umfang durchzuführen und dabei die Versuchsbedingungen zu variieren.

In Potsdam selbst ist man gegenwärtig ebenfalls mit der Neubestimmung der absoluten Schwere beschäftigt, welche eine der wichtigsten Aufgaben des Geodätischen Instituts darstellt. Die diesbezüglichen Arbeiten befinden sich bereits in einem vorgeschrittenen Stadium der Entwicklung, da über die Methodik völlige Klarheit herrscht. Ich habe mich wieder für die Methode des Reversionspendels entschieden, obwohl mir ihre Mängel bekannt sind, welche im wesentlichen darin bestehen, dass man den Einfluss der Elastizität von Schneide und Lager und deren gegenseitiges Verhalten nur mit einer gewissen Unsicherheit berücksichtigen kann. Gegenüber dem üblichen Verfahren bisher bekannter Reversionspendelmessungen sind allerdings einige wesentliche konstruktive Verbesserungen beabsichtigt, worüber ich der Internationalen Gravimetrischen Kommission in Paris bereits einen Bericht vorgelegt habe.

Um alle Einflüsse auszuschalten, welche von Bewegungen des Stativs bzw. Untergrundes herrühren, sind zwei Reversionspendel vorgesehen, die auf gemeinsamem Stativ gleichzeitig gegeneinander schwingen (sog. Prinzip von Vening—Meinesz). Dieses für relative Pendelmessungen längst bekannte Verfahren ist bei Absolutmessungen bisher noch nicht angewandt worden.

Wesentlich neu ist die Tatsache, dass die Pendel bei allen erforderlichen Messungen nicht aus dem evakuierten Apparat genommen zu werden brauchen. Es können also sowohl die Beobachtungen der Schwingungsdauer in beiden Pendellagen wie auch die Längenmessungen (Schneidenabstand) unmittelbar hintereinander und in verhältnismässig kurzer Zeit ausgeführt werden. Dies wird wie folgt erreicht: Das Stativ besitzt eine obere und untere Lagerfläche, deren Abstand etwas kleiner als der Schneidenabstand ist. Durch Umdrehen des ganzen Apparates einschliesslich der arretierten Pendel wird die Rolle dieser Lager vertauscht und die Reversion vollzogen.

In jedem Pendel sind 2 Hilfsebenen vorgesehen. Sowohl ihr gegenseitiger Abstand wie auch die Abstände zu einer Lagerfläche werden durch interferrometrischen Längenvergleich mit Quarzendmassen ermittelt, welche sich ebenfalls im Innern des Apparates befinden und daraus der gesuchte Schneidenabstand abgeleitet. Während der Längemessung ruhen die Pendel auf ihrem Lager.

Die Einflüsse, welche durch das elastische Zusammenspiel zwischen Schneide und Lager während des Schwingens zu befürchten sind, versuchen wir nach einem Vorschlag von Berroth und nach dem Vorbild vom Agaletzki in Leningrad dadurch zu eliminieren, dass wir 3 Paare von Pendeln verschiedener Längen (25, 50, 75 cm) einsetzen. Bei diesem Verfahren, welches im Prinzip auf die Elimination einer unbekannten Länge ähnlich wie beim Besselschen Verfahren hinausläuft, wird vorausgesetzt, dass die Verhältnisse zwischen Schneide und Lager, insbesondere der Auflagerdruck, d. h. die Pendelgewichte, in allen Fällen gleich sind. Schneide und Lager sind daher bei

allen Pendeln austauschbar, was auch Untersuchungen über den Einfluss der Schneidenschärfe und des Schneidenmaterials erleichtert.

Hinsichtlich der Zeitmessung zur Bestimmung der Schwingungsdauer wird auf bereits bekannte Methoden zurückgegriffen.

Der im Entstehen begriffene neue Apparat mit den beiden Reversionspendeln stellt an die Stabilität der Aufstellung und an die Temperatur des Messraumes keine grösseren Anforderungen wie ein gewöhnlicher Apparat für relative Schweremessungen. Auch die Messdauer wird durch die zusätzlich notwendige Längenmessung nicht wesentlich verlängert. Man wird das neue Pendelgerät somit als transportablen, absoluten Schweremesser bequem an verschiedenen Orten einsetzen können und darin liegt sein besonderer Vorteil.

DISKUSSION

JERZY JASNORZEWSKI, WARSZAWA

A la Conférence Générale des Poids et Mesures qui avait lieu à Sêvres au cours de l'année 1954, la délégation polonaise a transmis un voeux qu'il est nécessaire de créer une base gravimétrique internationale. C'est important du point de vue de la conservation de l'unité de »g« parceque maintenant nous avons deux différentes valeurs pour cette unité dans le monde, une unité européenne et une unité americaine. Les différences entre ces deux valeurs ne sont pas grandes, mais quand même ce sont deux valeurs différents et c'est un état qu'il faut rémédier.

Prof. W. K. HRISTOW, SOFIA

Es ist zu begrüssen, dass man wieder einen absoluten Wert der Schwerkraft bestimmen will, um Klarheit zu schaffen. Das hängt auch damit zusammen, dass man auch eine definitive Formulierung der Normalschwere bekommt:

$$g_{r0} = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi)$$

Man soll »g« bestimmen nach der Formel von Cassinis, jedoch mit der Abänderung von KRASSOWSKY. So ein Ergebnis kann man nur dann bekommen, wenn man einen guten Ausdruck für die Schwerkräfte hat. Deshalb ist es zu begrüssen, dass man Schritte unternommen hat, die Bestimmung der absoluten Schwere vorzunehmen. Es scheint aber, dass nicht nur an diesem einen Orte solche absolute Bestimmungen gemacht werden sollen, sondern auch an mehreren Orten. Weiters ist es erforderlich, relative Bestimmungen vorzunehmen durch relative Pendelmessungen und relative gravimetrische Messungen.

Bezüglich der Ausführung der Pendelmessung wird das geodätische Verfahren angewendet. Diesbezüglich habe ich eine kleine Arbeit in deutscher Sprache geschrieben.

Mein Vorschlag besteht darin: man kann sehr schwer verschiedene Pendel aufeinander so abstimmen, dass die beiden Perioden ganz gleich sind. Man gibt bei den Pendeln die gleiche Amplitude und dann lässt man sie schwingen. Wenn die Perioden eine Zeitlang nicht gleich sind, dann gehen die Pendel auseinander. Man kann im Anfangsmoment den beiden Pendeln nicht die gleiche Amplitude geben. Ist die Differenz zwischen den beiden Pendeln gross, dann schwingen die beiden Pendel einander entgegen.

Was die neuen Messungen betrifft, hoffe ich, dass man mit den neuen Reversionspendeln gut arbeiten kann, und dass gewisse Vorzüge mit dieser Methode gefunden werden können.

Prof. A. TÁRCZY-HORNOCH, SOPRON

Die Vorträge, welche wir im Gravitationskolloquium gehört haben, waren ausserordentlich interessante Beiträge, die jedenfalls als eine Entwicklung auf diesem Gebiete betrachtet werden können und müssen. Wir begrüssen gleich-

falls die Mitteilung des Herrn Kollegen REICHENEDER über die Bestimmung des absoluten Wertes der Gravitations-Konstante. Ich glaube, dass die hier versammelten Kollegen aus verschiedenen Staaten, auch Mitglieder der Internationalen Union, daran festhalten, dass Potsdam ein internationales Gravitationszentrum bleibe. Ich hatte Gelegenheit mit Kollegen REICHENEDER vor einigen Jahren über diese Gravitationsmessungen ein Gespräch zu führen, und es freut mich ganz besonders, dass seitdem auf diesem Gebiete ganz wesentliche Fortschritte gemacht worden sind.

DIE BEHANDLUNG VON DÜNNEN WOLFRAMTORSIONSDRÄHTEN FÜR DIE EÖTVÖSSCHE DREHWAAGE

Prof. O. MEISSER,
FREIBERG/Sa.

Es ist mir eine hohe Ehre, über dieses Thema gerade hier, in Budapest zu sprechen, wo es Dr. RYBÁR gelungen ist, die Eötvössche Drehwaage umzugestalten und ein Standardmodell herzustellen von einer Genauigkeit, welche von keinem Lande überholt worden ist. Ich möchte jetzt die damit gemachten Erfahrungen anführen.

Wenn Sie dünne Drähte haben, erhöht sich die Zuverlässigkeit der Messungen. Ein Draht mit einem Durchmesser von 1 Mikron hat eine grössere Tragfähigkeit, als es mit einem Draht grösseren Querschnittes verglichen proportional der Fall wäre.

Das gilt für Platin-Iridiumdrähte, aber auch für Wolframdrähte.

In den Eötvös-Arbeiten musste man verschiedene Oberflächenspannungen hinwegnehmen, denn diese durch einen Wärmebehandlungsprozess auszuschalten war damals noch nicht durchführbar. Heute macht man das in der Feinmechanik regelmässig. Die Platinfäden werden oben ausgeschmolzen und eingespannt.

Den Metallfaden müssen wir leider klemmen. Das Klemmen ist eine der Hauptfehlerquellen.

QUELQUES REMARQUES CONCERNANT L'ÉTALONNAGE DU GRAND CADRAN DES GRAVIMÈTRES WORDEN*

Prof. Dr. DRAGUTIN PROSEN, BEOGRAD

*DISKUSSION***

Prof. OTTO MEISSER, FREIBERG/Sa.

Ich bitte die Frage der geodätischen Gravimeter und die Verbindung der gravimetrischen Grundnetze zwischen den einzelnen Staaten zu behandeln.

Prof. Dr. D. PROSEN, BEOGRAD

Ich glaube, dass man in allen Staaten einen grossen Wert den Grundpunkten beimisst. Es wäre gut, wenn alle Grundpunkte untereinander verglichen werden könnten. Wir haben zum Beispiel Belgrad mit Paris fest angeschlossen, weiters Belgrad mit Zürich und Rom verbunden. Wir werden Belgrad auch mit Athen und Istambul verbinden. Ich glaube, es wäre sehr nützlich, Belgrad mit Budapest zu verbinden, um so mehr, als die gravimetrischen Arbeiten jetzt nördlich von Belgrad schon begonnen worden sind. Es wäre sehr gut, wenn diese Arbeiten bis Budapest fortgesetzt werden könnten, um so mehr, da bereits an einer Basiskette zwischen Belgrad und Skoplje gearbeitet wird. Von Belgrad sind wir bis zu Subotica gekommen. Es wäre aber gut, eine Kalibrierungsbasis Belgrad—Budapest—Warszawa—Leningrad zu machen. Darüber könnte man sich auch unterhalten, um Punkte zu haben, die einen Unterschied von etwa 150 Milligal haben sollten, die man mittels Pendel feststellen sollte.

Prof. OTTO MEISSER, FREIBERG/Sa.

Ich danke dem Kollegen PROSEN für seine ergänzenden Ausführungen. Wären Sie in der Lage, mit Ihrem Personal Messungen auch in anderen Ländern auszuführen?

* Das Manuskript ist vom Verfasser nicht eingelangt.

** Wir bringen die nach dem fehlenden Vortrag des Prof. D. PROSEN stattgefundene Diskussion aus dem Grunde, weil dieselbe eigentlich nicht den Inhalt des Vortrages sondern die wichtige Frage der Verbindung der gravimetrischen Grundnetze zwischen den einzelnen Staaten betrifft.

Prof. Dr. D. PROSEN, BEOGRAD

Ich glaube, dass wir das mit unserem Gravimeter machen könnten. Wir haben noch einen North-American-Apparat bekommen, so dass der nur zu geodätischen Zwecken bereit steht.

Prof. OTTO MEISSER, FREIBERG/Sa.

Es wäre natürlich sehr wünschenswert, wenn sich die einzelne Länder in dieser Beziehung mit Professor PROSEN in Verbindung setzten. Es ist ein Glück, dass Sie so einen Gravimeter besitzen. Das ist eine grosse Beschaffung, und wird sehr nützlich sein, um die Verbindungen messen zu können.

Prof. M. ODLANICKI, KRAKÓW

Les gravimètres WORDEN sont si sensibles qu'ils sont sensibles même pour l'influence luni-solaire. C'est pourquoi je demande, est-ce que vous faites des corrections des mesures ordinaires, courantes pour ces influences? Comment vous faites mesurer ces influences avant les introduire dans les mesures de gravimètre WORDEN?

Prof. Dr. D. PROSEN, BEOGRAD

Avant que nous faisions les mesures avec le gravimètre, nous faisons beaucoup de corrections. La première est la correction pour la dérive de l'attraction solaire, et les erreurs périodiques. On a une précision d'à-peu-près 4—5/1000 du milligal, spécialement si on en applique le gravimètre WORDEN.

Prof. A. TÁRCZY-HORNOCH, SOPRON

Ich erinnere mich mit grosser Freude an die schönen Stunden, die wir vor anderthalb Jahren in Florenz verbracht haben. Wir sind darin übereingekommen, dass die Jugoslawische Akademie der Wissenschaften ein Ansuchen an Ungarn stellen wird, und gleichfalls an das benachbarte und befreundete Österreich. Es tut mir leid, dass der österreichische Prof. LEDERSTEGER nicht hier erscheinen konnte, da er ja, wie bekannt, in einem sehr warmen Brief mitteilte, dass es ihm wegen der Kürze der Zeit nicht möglich ist, zu erscheinen.

Prof. Dr. D. PROSEN, BEOGRAD

Ich danke für die Worte, die Professor TÁRCZY-HORNOCH an mich gerichtet hat und ich bin bereit zu erklären, dass ich einen Vorschlag machen könnte, Schritte zu unternehmen, damit Belgrad und Budapest mittels gravimetrischer Messungen verbunden werde. Kurz gefasst, antworte ich auf die Frage bejahend.

Prof. A. TÁRCZY-HORNOCH, SOPRON

Ich nehme die Erklärung des Herrn Kollegen PROSEN mit grossem Dank entgegen.

VII. Kartographisches Kolloquium

AUS DER VERGANGENHEIT DER UNGARISCHEN KARTOGRAPHIE

Prof. L. IRMÉDI-MOLNÁR,
BUDAPEST

Vor gerade einem Jahrhundert, im Jahre 1856 erschien eine Regierungsverordnung, die das ungarische staatliche Vermessungswesen ins Leben rief, das sich mit vielen schönen, interessanten und wertvollen Arbeiten Anerkennung von allen Seiten erwarb. Die Vorträge, die jetzt anlässlich des Zentenariums im Rahmen des Geodätischen Kongresses gehalten werden, sind berufen der ungarischen Geodäsie über die bisherigen wichtigen Resultate hinaus weitere Anerkennung zu sichern. Hierbei seien aber nicht jene Ereignisse unerwähnt gelassen, auf die diese vorzüglichen Resultate aufgebaut sind.

Schon vor Herausgabe der Verordnung zur Aufstellung des staatlichen Vermessungswesens vergingen Jahrhunderte voll Arbeit auf dem Gebiete der ungarischen technischen Wissenschaften, insbesondere auf dem Gebiete der geodätischen und kartographischen Arbeit. Angaben, die weit in die Vergangenheit zurückreichen, beweisen, dass die Resultate der letzten 100 Jahre, die Fundierung, die Unterstützung aus der wissenschaftlichen Bereitschaft der Vergangenheit nahmen. Besonders darauf ist mit Nachdruck hinzuweisen, dass die ungarische Geodäsie nur den hundertsten Geburtstag der amtlichen Verordnung ihrer Tätigkeit feiert, denn die ungarische Geodäsie, und zwar die amtliche ungarische Geodäsie begann ja schon im Jahre 1780, und von dieser Zeit an geht ihre Arbeit bis heute ununterbrochen fort. Während der dreissigjährigen Forschungen des Verfassers in den Archiven, die heute noch andauert — wobei ausschliesslich die Vergangenheit der ungarischen Kartographie aufgehellt werden sollte — stellte es sich heraus, dass schon zu jener Zeit, als es gelang, die letzten Reste der türkischen Belagerungstruppen zu vernichten, auf den zurückeroberten südlichen Teilen vorerst geodätische Arbeiten aus militärischen, später, nach einigen Jahren, aus wirtschaftlichen Gründen vorgenommen wurden. Es wurde damals die im Rahmen der Temeser Administration stehende sogenannte »Mappierungs Direction« geschaffen, die sich 1856 reibungslos zum ständigen Organ des Katasteramtes in Temesvár umwandelte.

Als der Verfasser seinem Vortrag den obigen Titel gab, tat er das mit einer gewissen Anspielung darauf, dass eben zur Zeit des Zentenarfestes die ungarische amtliche Geodäsie nicht auf eine Vergangenheit von nur 100, sondern von 176 Jahren zurückblicken kann.

Selbstredend führen noch Fäden auch in die weitere Vergangenheit. Es erscheint angezeigt, hier kurz zu berichten, dass die Spuren der ungarischen geodätischen Arbeiten schon in der Mitte des XVI. Jahrhunderts nachweisbar sind.

Bis jetzt stehen darüber nicht viel Angaben zur Verfügung, doch sollen von jenen, die bis heute aufgefunden worden sind, hier einige bekanntgegeben werden. Diese Angaben beziehen sich auf jene Epoche, in der die Mappierungsarbeiten im Jahre 1768 in der Gegend von Temes im Massstab 1 : 28 800 ausgeführt worden sind.

Die älteste zusammenfassende Landkarte in unserem Lande stammt aus dem Jahre 1528. Diese Mappe ist verhältnismässig sehr gut, was nur beweist, dass schon früher irgendwelche Mappierungs-Detailarbeiten in Ungarn fertiggestellt wurden, aus denen die Mappe von 1528 entstand. Zeichnungsmaterial wurde zwar noch nicht gefunden, aber Texte beweisen, dass solche vorhanden waren. Das Ungarische Landesarchiv bewahrt in grosser Anzahl Texte über Grenzbesichtigungen, aber neben diesen musste es auch Zeichnungen in Form von Skizzen gegeben haben. Auf die Richtigkeit dieser Annahme deutet das aus dem Jahre 1415 stammende Dokument des Székesfehérvárer Kreuzkonventes hin, das Gy. Fejér im Codex Diplomaticus erwähnt und in dem ein Flussbett auf einer Tafel geschildert wird, d. h. die Grenzbesichtigung hatte schon eine Mappe als Beilage (». . . eiusdem alvei *figurabiliter* in quadam tabula coram ut facta . . .«). Ausser diesem Beispiel geht auch aus anderen Daten hervor, dass in Zusammenhang mit den Vermessungsarbeiten in jener Zeit viele Schriftkundige das Vermessen studierten und wegen der Detailmappen, die sich auf ein kleines Territorium beschränkten, mehrere von ihnen auch zeichnen lernten.

Die Arbeiten wurden in vielen Fällen aus Staatsinteresse für wirtschaftliche oder strategische Zwecke ausgeführt. Ein sehr interessantes Beispiel für letzteres ist ein Dokument aus dem Jahre 1544, aus dem hervorgeht, dass man auf Befehl Nádasdys einen Versuch zur Regulierung der Raab machte. Darüber unterrichtet ein gleichaltriges Dokument in ungarischer Sprache. Aus dem Text geht hervor, dass die Regulierung der Raab aus strategischen Gründen notwendig gewesen wäre, und zwar wollte man bewaffnete Barken auf diesem Wasserweg auf die Drau befördern. Leider blieb nur der Textteil erhalten, aber die Vorbereitung der Kartierungsarbeit wird durch die von Punkt zu Punkt, von Gemeinde zu Gemeinde führende genaue Beschreibung bewiesen.

Noch viele andere Daten weisen auf die alten Vermessungsarbeiten hin. Von ihrer Aufzählung muss hier abgesehen werden, nur sei die Aufmerksamkeit kurz auf die grosse, zusammenhängende, den geodätischen Arbeiten nahestehende Tätigkeit dieser Epoche gelenkt; die Tätigkeit des XVIII. Jahrhunderts lässt sich noch anhand vieler Angaben beweisen. So kann man die Katastervermessungsarbeiten der Heeresleitung von 1769 im Massstab 1 : 7200 schon als gut fundierte Vermessung betrachten. Diese Mappierungsarbeit,

deren amtliche Benennung »Konskription des Grossfürstentums Siebenbürgen« hiess, stand der im Banat durch das Militär durchgeführten ökonomischen Vermessung ganz nahe. Eine nicht geringere Arbeit war die in den Jahren 1786—90 mit der Steuerkonskription gemeinsam fortschreitende sogenannte ökonomische Vermessung von Joseph II. Diese grosszügige und bis in die kleinsten Einzelheiten gut durchgedachte Arbeit ist zwar grösstenteils zugrunde gegangen, es blieben aber genügend Schriften und Zeichnungsmaterial zurück, um über den Verlauf der Arbeiten ein völlig klares Bild zu haben. Es war eine Vermessungs-, Berechnungs- und Grundschätzungsarbeit, bei der viele ungarische Ingenieure mitwirkten. Die »Conscriptio Josephina«, obwohl sie eine staatliche Arbeit unter militärischer Leitung war, kann eher als ein österreichisches und nicht als ungarisches Unternehmen betrachtet werden. Als solches kann nur die 1780 beginnende und ausschliesslich für ein kleines Territorium, für die Temeser Gegend durchgeführte grosszügige Arbeit gelten. Auch diese Arbeit wurde indessen nicht vom ungarischen Staat, sondern vom Wiener Kriegsrat 1772 veranlasst und erst 8 Jahre später, im Jahre 1780 wurde die Geschäftsführung, Leitung, die weitere Organisierung der Vermessung und Kostendeckung von der damaligen ungarischen Behörde, von der Kammer in Temesvár übernommen. Von diesem Zeitpunkt an kann diese Arbeit als erster Schritt der ungarischen, staatlichen Vermessung betrachtet werden.

Auf dem von den Türken zurückeroberten Gebiet, speziell im Temeser Gebiet (zwischen den Flüssen Temes und Béga) wurde auf Anordnung von Prinz Eugen von Savoyen in den Jahren 1723—25 eine militärische Vermessung unter Leitung des Generals Mercy durchgeführt. Das Mappierungsmaterial wurde nur à la vue auf Papier gebracht, da es die Notwendigkeit so verlangte. Deshalb wurde von der Heeresleitung im Jahre 1768 General Elmt mit einer neuen, ausschliesslich militärischen Vermessung betraut. Diese Arbeit dauerte bis 1772. Kaum war sie beendet, als der höchste Kriegsrat die Vermessung dieses Gebietes für wirtschaftliche Zwecke anordnete. Mit der Leitung dieser Arbeit wurde wiederum General Elmt betraut, doch wurde es 1778 offenkundig, dass diese Vermessung nicht ihrer Bestimmung entsprechen werde ; infolge des inzwischen ausgebrochenen bayrischen Erbfolgekrieges wurde die Mappierung eingestellt bzw. nur 12 Offiziere unter Leitung eines Hauptmanns konnten sich dieser Arbeit widmen. Zwei Jahre später kam die Arbeit wieder in Schwung, und der höchste Kriegsrat übergab die Vermessungsarbeit einem Zivilorgan : Zivilingenieur Josef Plessing de Pless übernahm im Jahre 1780 das gesamte Material von den militärischen Behörden und begann die auf ganz neuer Basis fussende Arbeit teilweise mit Hilfe von zu diesem Zivilorgan vom Militär übergetretenen, teilweise mit neu angestellten Zivilingenieuren.

Es ist hier am Platze, kurz zu skizzieren, wie die Verwaltungsorganisation seinerzeit, besonders in der Temeser Gegend war. Die im Jahre 1718 von den

Türken zurückeroberten Gebiete wurden nicht an das Mutterland angeschlossen, sondern getrennt verwaltet.

Die Administration des Temeser Gebiets unterstand vorerst der Wiener Hofkammer. Im Jahre 1757 wurde jedoch der ganze Apparat unter die Leitung des »Directorium in Publicis et Cameralibus« gestellt. Dieser Zustand dauerte aber nur zwei Jahre, denn am 14. August 1759 wurde das ganze Temeser Gebiet (zwischen den Flüssen Temes und Béga) mit Ausnahme der Grenzschutzgegend von Maria Theresia der »Ministerial-Banco Deputation« unterstellt. Im Leben der Temeser Administration bedeuten diese Änderungen in der vorgesetzten Behörde nicht viel, sie absolvierte ihre Arbeit reibungslos, nur musste sie die Meldungen bald dorthin, bald dahin senden. Kaum waren seit 1759 zehn Jahre verstrichen, als wieder die Wiener Hofkammer die oberste Behörde wurde (1769). Eine weitere Änderung folgte dann 1778. Am 27. April dieses Jahres wurde das Temeser Gebiet (Temesköz) an das Mutterland zurückgegliedert, und von diesem Zeitpunkt an erteilte die Ungarische Kammer in Temes ein Jahr hindurch sowohl der Temeser Administration als auch der ihr untergestellten Mappierungsdirektion die Anordnungen, da die Arbeit der Zurückgliederung ein Jahr in Anspruch nahm. Diese Aufgabe ist von der »Kgl. Hungarische in Incorporations Geschäft operierende Hofcomission« erfüllt und 1779 beendet worden. Endlich kam das Temeser Gebiet mit allen Organisationen zur ungarischen Kammer, die Ende April 1779 zu ihrer Leitung die ungarische Kammeradministration organisierte. Die Mappierungsarbeit findet seit Ende April schon unter ungarischer staatlicher Leitung statt. Die vorgesetzte Behörde ändert sich jetzt lange Zeit nicht, eine Änderung tritt erst 1856 ein, als das auf allerhöchste Anordnung ins Leben gerufene ungarische Triangulierungsamt die Mappierungssektion der Administration mit Personal und Material übernahm. Die Vermessung ging ohne weitere Reibung vor sich, wenn auch mit einer anderen, neu aufgebauten Arbeitsweise. Die in 76 Jahren aufgestapelten mächtigen Aktenmassen kamen ins Magazin der ungarischen Kammer, Sektion Temesvár, von wo diese stark dezimiert erst im Jahre 1895 ins Landesarchiv eingeliefert wurden.

Wie war die Mappierungsarbeit vor der Übernahme durch ungarische Zivilorgane beschaffen? Der Zweck der 1768 begonnenen Arbeit war, das Terrain so zu vermessen und als Mappe zu zeichnen, dass diese den militärischen Operationen als Grundlage dienen konnte. Nach Beendigung dieser Arbeit wurde im Jahre 1772 ein neues Verfahren eingeführt, bei dem auch die wirtschaftlichen Gesichtspunkte zu Wort kamen. Da auch diese Aufgabe in grosser Eile erledigt werden musste, ist es natürlich, dass die Karten, die durch Zusammenklebung und mit Ketten gemessen entstanden, nicht gut und mit sehr vielen Fehlern behaftet waren. Soviel Güter oder Gemeinden nur gemessen wurden, so viele Teilkarten waren vorhanden, die nicht zusammenfügbar waren; es gab an den Grenzen Überdeckungen bzw. leere Räume.

Sämtliche Grenzen der Ortschaften, die mit Ketten gemessen wurden, waren durch eine gewisse Längenabweichung charakterisiert, so dass jeder Gemeindehotter ausnahmslos ungenau gezeichnet wurde. Diese Aufnahme ist daher voller Fehler und ungenauer Darstellungen. Die Bevölkerung schenkte den Grössen, die aus diesen Karten ermittelt wurden, kein Zutrauen und betrachtete die Verteilung mit Argwohn ; dies mit Recht, denn nie bekam sie die gleiche Antwort über die Grösse des gekauften Gutes. Diese Karten waren also nicht in einem solchen Zustand, dass ihre Angaben gut verwendbar gewesen wären.

Als das Temeser Gebiet (Temesköz) in den Jahren 1778—79 an das Mutterland zurückgegliedert wurde, war es offenkundig, dass neue Methoden bei der Mappierung einzuführen waren, da man die intabulierten Staatsgüter nach ihrer richtigen Grösse, an den meistbietenden zu verkaufen wünschte. Die Kammer und die Käufer wollten die Grösse der geometrisch dargestellten Grundstücke kennen, sie wollten sich auch überzeugen, ob die Daten der Wirklichkeit entsprachen und ob die Schätzungspreise richtig waren. Sie prüften die Karten nach, wobei jetzt diese verborgenen Ungenauigkeiten und Mängel zum Vorschein kamen.

Nach diesen zwei Etappen der militärischen Mappierung übernahm Josef Plessing de Pless die Leitung aus militärischen Händen, und zwar von Generalstabshauptmann Hayn, und die ungarische Kammer ordnete zur Berichtigung der aufgezählten Unzulänglichkeiten eine neue Hotterbesichtigung und Kartenauffrischung sowie eine neue geometrische Vermessung der verkauften Güter an. Neu mussten auch die Ortschaften samt den dazugehörenden Feldern aufgenommen werden, doch wurden vorläufig keine Detailaufnahmen gemacht. Man trachtete die Grundstücke der Bauern nach Möglichkeit genau zu vermessen, damit der Gerechtigkeit möglichst entsprochen werde, doch gaben diese Aufnahmen kein klares Bild über die Dimensionen der grösseren Güter und besonders über die Grösse der Restgrundstücke.

Plessing de Pless wurde Direktor eines schon ganz neuen Kammer-Mappierungsorgans. Dieses gehörte zu der Temesvárer Organisation und fungierte unter dem Namen »Mappierungsdirection«. Plessing war sich dessen von vornherein bewusst, dass auch die von der Kammer angeordenete neue Vermessung unrichtige Resultate zeitigen werde, wenn sie ungleich durchgeführt wird, so dass später auch eine Verordnung über die vorzunehmenden Detailaufnahmen herausgegeben wurde. Der Massstab der Messung wurde durch das Ausstecken einer Basis gesichert, und nach Abmessung dieser durch Stangen oder Ketten konnte diese in entsprechendem Massstab auf den Messtisch übertragen werden. Dies war der Ausgang, wonach die Manipulation mit Einschnitten beendet wurde. Diese Arbeitsmethode bestand Jahrzehnte hindurch und änderte sich nur sehr wenig.

Die Karten wurden im allgemeinen im Massstab 1 : 7200 hergestellt ; mehrere Karten sind allerdings in ganz abweichenden Massstäben gezeichnet.

Auf den Karten wurde auch das Gelände dargestellt. Es fand hier die Schwungstrichmethode Anwendung und ergab im allgemeinen sehr schöne Resultate. Die Korporation hatte eigene Zeichner, die die Arbeit der Ingenieure schön und genau in die Karte eintrugen. Man achtete besonders streng auf die Geländezeichnung. Das Gehalt der Zeichner hing — da sie nicht fix besoldet waren — von der leichten oder schwierigen Ausführungsmöglichkeit ab. Es wurde genau festgesetzt, wieviel die Bezahlung pro Quadratklafter in Ebenen und in Gebirgsterrain war.

Die Korporation unter der Leitung von PLESSING DE PLESS, die Mappierungsdirection, führte ihre Vermessungen schon mit einer ganz anderen Arbeitsmethode durch (wie wir es schon vorher gesagt haben). Von dieser Korporation schrieb WENZEL FRANKENBUSCH, der damalige Direktor, im Jahre 1788, dass ». . . die hier arbeitenden Ingenieure können keinesfalls nur als Mappöre oder Verfertiger von Landkarten betrachtet werden, als die Offiziere es waren von 1768—1773, sondern früher als grundherrliche Ingenieure ebenso wie die übrigen im Bereiche des Königreichs Ungarn« (es sind die beim Komitat wirkenden Ingenieure gemeint).

Mehrmals wurde über die Auflösung der Korporation gesprochen, besonders zu Kriegszeiten, aber es kam nie dazu. Die zahlreichen einlaufenden Wünsche, Aufträge der Parteien, Kanalisierungsarbeiten, Forst- und Grubenbetriebe, Grundstückangelegenheiten, zwangen die höheren Behörden, die Institution weiterhin aufrechtzuerhalten, bzw. auch zu Kriegszeiten beizubehalten. Ausser den Gutsvermessungen war noch die Vermessung weiterer 400 000 Joch Waldung bzw. deren Berichtigung erforderlich, eine Arbeit, deren Durchführung von der vorgesetzten Behörde ständig urgiert wurde. Zur Korporation gehörten auch jene Ingenieure, die die Kanalisierungsarbeiten der Temesau, besonders aber die Regulierung und Kanalisierung der Béga beendeten, ferner diejenigen, die sich mit den Angelegenheiten der Grubenvermessung im Komitat Krassó beschäftigten.

Der Arbeitskreis der Mappierungsdirektion bestand aus der Erfüllung von sieben voneinander verschiedenen Vermessungsforderungen, und zwar musste sie sorgen :

1. für die Grundverteilung,
2. für die nach dem Verkauf folgende Vermessung der übriggebliebenen Grundstücke,
3. für die Arbeiten, die mit der Ansiedlung verbunden waren,
4. für die Abwicklung der Steuerregulierung und Grunderwerbschätzungs-Manipulationen,
5. für die Vermessung der Wälder,
6. für die mit den Gruben verbundenen Vermessungen und endlich
7. für die Durchführung der Kanalisation und anderer Wasserregulierungsarbeiten.

Diese Arbeiten zogen sich derart in die Länge, dass sie noch die erste Hälfte des XIX. Jahrhunderts ausfüllten. Aus einem im Jahre 1788 aufgenommenen Inventar geht z. B. hervor, dass die Ingenieure der Korporation ausser dem Schriftenmaterial 1677 Stück Landkarten verfertigten, aber schon im Jahre 1814 erhöhte sich diese Zahl — nur die Zahl der sich aus der Vermessung ergebenden Landkarten — auf 3486 Stück.

Von 1780 bis 1859 wurde die Ingenieurskorporation von sechs Direktoren geleitet. Die Korporation hiess bis 1811 »Mappierungs Direction«, von diesem Jahr an »Planarchiv«, später ungarisch »Tervtár«.

Der erste Direktor war, wie bereits erwähnt, Josef Plessing de Pless, der fünf Jahre hindurch die Geschäfte führte. Nach ihm kam Wenzel Frankenbusch (1785—1814), nachher (1814—1822) Josef Larenz. Nach Larenz war elf Jahre hindurch Wilhelm Silviny Direktor, dem Oberingenieur Antal Kutsera im Jahre 1833 folgte. Am Ende des Freiheitskrieges 1848/49 wurde Kutsera abgelöst, und an die Spitze der Korporation trat Josef Subbotich, der die Arbeiten der Korporation bis 1859 führte. Vom Januar 1859 datiert die Inventarisierung des letzten Aktenstückes im Planarchiv. Die Inventarisierung wurde von k. k. Rat Greinzinger geleitet, der das ganze Planarchivmaterial — fein säuberlich auf Papier festgelegt — zur Aufbewahrung der Kammer unter der Bedingung übergab, dass die Landkarten und Schriftstücke bei Einhaltung strenger Ordnung von Korporationen und Einzelpersonen benutzt werden können. Leider konnte das schriftliche — im Inventar aufgezählte — Aktenmaterial bis heute nicht gefunden werden.

Das selbständige Leben der Organisation fand 1859 endgültig sein Ende, doch wurden ihre Mitglieder von dem schon früher begründeten ungarischen Triangulierungsamt übernommen. Die Organisation lebte in diesem weiter, mit neuen Mitgliedern, mit einer auf neuer Basis ruhenden Arbeit, die schon den geodätischen Forderungen im heutigen Sinne entsprach.

Wie bereits erwähnt, wurde das alte Material auch weiterhin benutzt, doch war die grosse vorgesehene Strenge vergeblich, man brachte sehr viel Landkarten nicht mehr ins einstige Planarchiv zurück und die kompetenten Stellen kümmerten sich wenig darum, da schon die neuen Karten im Vordergrunde standen und es niemanden schmerzte, ob die alten Karten auf ihre Plätze zurückkamen oder nicht. Das Material gehörte der Geschichte an und stand sozusagen ohne Bewachung im Magazin der einstigen Kammer. Es ging zugrunde, wurde Tag für Tag weniger, so dass als es vom jetzigen Landesarchiv (Országos Levéltár) übernommen wurde, von den mehr als 5000 Landkarten nur mehr etwa 700 Stück übrig waren. Auch die Zahl der Schriften hat sich vermindert.

Während des Verlaufes dieser 76 Jahre war die Anzahl der angestellten Ingenieure über hundert. Grösstenteils waren es Fremde, Österreicher, Reichsdeutsche, Franzosen, Italiener, Holländer, Tschechen, Mährer, Polen, doch

fehlten auch die Ungarn nicht, besonders später traten viele aus dem Komitatsdienst in den Dienst der Kammer über. Es sind hier namentlich zu erwähnen: István Báthory, Károly Járossy, Gyula Szigethy, Pál Várady, Mátyás Jaross, József Győrffy, die alle für ihre schönen Arbeiten verdienen, dass man ihr Andenken bewahrt.

Neben den Ingenieuren wurden anfangs Dolmetsche verwendet, aber schon nach einigen Jahren wurden die Dolmetschstellen gestrichen, mit der Begründung, dass sich jeder Ingenieur während der verflossenen Zeit jene Sprache aneignete, die in seinem Wirkungsbereich gebraucht wurde. Tatsächlich, wenn man die Personenqualifikationen liest, lässt sich feststellen, dass beinahe sämtliche Ingenieure, besonders in den späteren Zeiten, ausser der lateinischen und deutschen Sprache auch die ungarische, illyrische und rumänische Sprache kannten.

Die Korporation fungierte mit strenger Organisation. Ihre Ingenieure wurden mit Diäten und Verpflegung in natura honoriert und nur nach längerer Urgierung wurde 1794 die Administration so organisiert, dass die Ingenieure der Kammer Monatsgehälter bekamen und Pensionsberechtigung erhielten.

Die zur Vermessung notwendigen Instrumente mussten sich die Ingenieure in der ersten Zeit selbst besorgen und nur ausnahmsweise half die Direktion mit ärarischen Instrumenten. Dagegen trug die Kammer die Kosten der Instrumentenreparatur.

Mit diesen Darlegungen sollten die Ingenieurarbeiten im Temeser Gebiet kurz geschildert und hervorgehoben werden, dass die ihre Hundertjahrfeier begehende ungarische staatliche Geodäsie nicht nur die sich auf weitere 76 Jahre erstreckende Arbeit ihrer Vorgänger kennt und würdigt, sondern sich auf die ausgezeichnete Qualität der ungarischen geodätischen Arbeiten in Kenntnis dieser Tätigkeit berufen darf. Dadurch stellt sie ihren Vorgängern neben der Anerkennung ein ehrendes Andenken.

DISKUSSION

Prof. MICHAL ODLANICKI, KRAKÓW

J'ai écouté avec grand intérêt l'exposition du M. le Professeur IRMÉDI-MOLNÁR sur l'histoire de la cartographie hongroise. Il élucida la grande importance de la cartographie dans le domaine économique, social, dans la géographie, et dans l'économie des forêts. Il est certain que sur tous les domains les cartes sont très nécessaires.

En Pologne nous menons depuis 100 ans l'histoire de la cartographie. Le héros de la cartographie polonaise, BERNARD WAPOWSKI a collaboré avec COPERNIC.

L. BENDEFY, BUDAPEST

Recht wenig haben wir bisher von den geodätischen Arbeiten des einstigen Vorfahren des heutigen Finanzministeriums, der ungarischen Kammer, im Gebiete des Flusses Temesch gehört. Mit den ehemaligen hydrographischen Verhältnissen des früheren Banats Temesch befasste sich in der Literatur Dr. GYŐZŐ TEMESY in den dreissiger Jahren unseres Jahrhunderts ; aus seinen Studien wird uns jedoch jene enorme Arbeit der Vermessungsingenieure nicht klar, die vor 1850 auf diesem Gebiete 75 Jahre hindurch ausgeführt wurde.

Bisher wussten wir eigentlich nicht, dass gerade der ungarische Staat ungeheure Opfer gebracht hatte, um das während der nahezu 200jährigen türkischen Herrschaft vollkommen verwilderte Temesch-Gebiet wieder der menschlichen Ansiedlung und kulturellen Entwicklung zu öffnen.

Es ist das Verdienst der ab 1770 hier tätigen ungarischen Feldmesser, dass das weit ausgebreitete Sumpf- und Moorgebiet immer mehr zusammenschrumpfte und schliesslich in seiner Gänze von der Landwirtschaft erobert wurde.

Wir halten es für notwendig, das mühselige Leben, die aufopfernde Arbeit jener ungarischen Ingenieure in allen Einzelheiten bekanntzugeben, ausserdem jedoch, dass wir ihrem Namen auf diese Weise ein gebührendes Denkmal setzen, ist es erwünscht, die von ihnen angewandte Arbeitsmethode und ihre Geräte eingehend zu studieren und zu besprechen. Ihre Arbeit war nämlich vom Staat organisiert und gelenkt, sie sind demnach in jeder Hinsicht als Vorläufer der späteren Staatlichen Katastralvermessung zu betrachten.

Hierzu gehörte auch die auf alle Einzelheiten eingehende Aufarbeitung des auf die Geodäsie bezüglichen Archivgutes, welches sich unter den unzähligen Dokumenten der Schiffahrts- bzw. Architektenabteilung der Ungarischen Hauptverwaltung für Bauwesen befindet. Diese umfangreiche geodätische Arbeit wurde von den Wasserbauingenieuren bzw. Architekten des 18. und 19. Jahrhunderts ausgeführt.

In geodätisch-historischer Beziehung haben wir demnach noch viel zu tun. Eben deshalb begrüssen wir mit Freude die Ergebnisse der diesbezüglichen Archivforschungen von IRMÉDI-MOLNÁR und erwarten deren weitere Entfaltung.

Prof. A. TÁRCZY-HORNOCH, SOPRON

Ich möchte zum Vortrag unseres Kollegen IRMÉDI-MOLNÁR folgendes bemerken. IRMÉDI-MOLNÁR gilt in Ungarn als einer der besten und erfolgreichsten Forscher der Geschichte der Kartographie. Das musste ich im voraus sagen, da die ausländischen Kollegen darüber nicht unterrichtet sein dürften. Seine hier dargebotenen Forschungsergebnisse sind ganz besonders interessant. Das staatliche Vermessungswesen feiert in diesem Jahr seinen hundertjährigen Bestand. IRMÉDI-MOLNÁR bewies aber soeben, dass schon 76 Jahre früher auf ungarischem Gebiet staatliche Vermessungen im grossen durchgeführt wurden. Die österreichische Vermessung hat ihren 150jährigen Bestand gefeiert. In Ungarn feiern wir einen 100jährigen Bestand. Wenn man aber dieses wichtige Temescher Gebiet betrachtet, handelt es sich um eine kontinuierliche Vergangenheit von 176 Jahren. Übrigens wirkte der erste berühmte ungarische Kartograph und Geodät, SÁMUEL MIKOVINY vor 230 Jahren. Es gab einzelne Punkte in der Geschichte der ungarischen Kartographie schon zuvor, die kontinuierliche Linie besteht aber nur seit 176 Jahren. Man muss in Betracht ziehen, wodurch diese eigene Organisation ins Leben gerufen worden ist. Professor IRMÉDI-MOLNÁR berührte schon diese Frage ; in dem von der türkischen Herrschaft befreiten Land mussten solide technische Grundlagen geschaffen werden. Das ist der Grund, warum hier mit der Kartographie begonnen wurde. Ich habe vor einigen Tagen über den Beginn der Kartographie in Böhmen gelesen. Das war vor etwa 200 Jahren. Es wäre interessant zu wissen, welche Gründe dort zu einer systematischen Organisation der Kartographie führten. Vielleicht könnten wir darüber von den tschechoslowakischen Kollegen Auskunft erhalten, damit dieses Bild vollständiger vor uns stehe.

EINE NEUE METHODE DER UNGARISCHEN KARTOGRAPHIE: DIE KARTE DER ZUKUNFT

J. TAKÁCS
BUDAPEST

Den Geodäten, der dazu berufen ist, bei der Herstellung der Karte irgendeiner Gegend die erste, grundlegende Arbeit zu leisten, wird sicher auch das Endresultat: die fertige, gedruckte Karte interessieren.

Was die Darstellungsarten einer Karte im allgemeinen anbelangt, können von der ganz skizzenartigen Zeichnung bis zum reliefartig greifbaren, die Gegend lebenstreu veranschaulichenden Bilde, sehr viele Lösungen in Frage kommen. Im Wandel der Zeiten wird bald diese, bald jene Lösung in Mode sein, den Geschmack befriedigen und allgemeinen Beifall finden. Dabei wird jedoch immer deutlicher auch jene Forderung hervortreten, eine messbare und leicht lesbare, also anschauliche Kartenart zu besitzen. Die Darstellungsarten haben einen stetigen Fortschritt zu verzeichnen, nicht nur was den Stil und die äussere Gefälligkeit anbelangt, sondern auch in jener Richtung, dass der Inhalt der Karte von jedermann ohne längere Erklärungen und ohne Zeichenschlüsselstudien verstanden und mit der Wirklichkeit derart identifiziert werden kann, als würde man die Landschaft selbst beobachten.

Bis heute noch erfreuen sich im praktischen Schulunterricht die Höhenkarten und die »politischen« Kartentypen (richtiger: »Verwaltungskarten«) grosser Beliebtheit. Es scheint jedoch, dass an ihre Stelle allmählich die Karte in Naturfarben treten wird. Die Notwendigkeit, in der Karte auch die wirtschaftlichen Verhältnisse darzustellen, nimmt immer mehr zu. Offenbar kann die Landwirtschaft in der anschaulichsten Weise durch die Naturfarben der Pflanzenkultur (und noch z. B. durch jene des Eises, des Sandes und Wassers) ohne sonstige Erklärungen versinnbildlicht werden. Die Kartographie der Zukunft wird bestrebt sein, ihre Farben aus jenen der Natur zu wählen. Man kann nämlich auch in dieser Hinsicht sagen, dass die Karte insofern gut ist, als sie der Wirklichkeit nahekommt. Das grau schattierte Relief und darüber die natürliche Buntheit der Erdoberfläche stellt die Gegend einem Luftphoto ähnlich dar. Die Farben der charakteristischen Landschaftselemente würden aus der minutiös künstlerischen, jedoch verständlichen und im Falle von Schichtenlinien auch messbaren Karte konzentriert hervortreten. Die Waldungen würden dunkelgrün, die Wiesen, Weiden lichtgrün erscheinen.

Die Kulturflächen der Landwirtschaft erhalten die goldgelbe Farbe des reifenden Kornes. Die grünen Schraffen der Weinkulturen erinnern uns an die wohlbekannten Weinstockreihen. Bei kleineren Massstäben werden auch die Farben entsprechend zusammengezogen (generalisiert).

Die ausländische Fachliteratur widmet der naturfarbenen Karte immer mehr Raum. Ihre Einführung wird von den sowjetischen Kartographen ebenso befürwortet, wie von jenen des Westens. Mit dieser vielversprechenden neuen Kartenart beschäftigt sich auch die ungarische Kartographie. Forschungswille und Arbeitseifer schufen auch hier tatsächlich die erste derartige Karte. Eine Betriebskarte für den Schulunterricht hat ihre Farben bereits der Natur entliehen. Der Entwerfer hat die einzelnen Details mosaikartig aus den besten Karten des Landes zusammengestellt. Bei nebel- und wolkenloser Beobachtung aus grosser Höhe würde die Landschaft Ungarns derart anmuten, wie dies in der Karte dargestellt ist.

Ähnliche Lösungen sind für die neuen Verwaltungseinheiten des Landes vorgesehen, namentlich für die Zwecke der Volksbildung und des Unterrichts. Auch die verwendeten Zeichen sind Sinnbilder der Natur. Schwarze Doppellinien sind z. B. für die Eisenbahnen bestimmt, und zwar mehr oder weniger markant, je nachdem es sich um Haupt- oder Nebenstrecken handelt. Derartige Ausführungen erleichtern die Vorstellung der Wirklichkeit auch jenem Schüler und Kartenleser, der dem Erlernen des Zeichenschlüssels abneigend gegenübersteht.

Die ungarische Kartographie bemüht sich vielfach und mit Begeisterung um die Weiterentwicklung der Zukunftskarte. Diese wissenschaftliche und künstlerische Arbeit lässt sich nicht gewerbsmässig behandeln. Auch viel Geduld, besondere Fertigkeit und geschulter Geschmack sind dabei unerlässliche Gegebenheiten.

DISKUSSION

Prof. Fr. KUŠKA, BRATISLAVA

Aus dem eben vorgetragenen Bericht erfuhren wir, wie die ungarischen Karten hergestellt werden. Aus Erfahrung weiss ich, dass die Karte nicht nur dazu benötigt wird, sie zu betrachten und das Gelände kennenzulernen, sondern auch dazu, dass sie später für verschiedene wissenschaftliche Zwecke verwendet wird. Ich denke an die Kartometrie. In mehreren Zweigen der Wissenschaft ist die Karte von grosser Wichtigkeit und in vielen Fällen müssen mit Hilfe von Karten auch Flächenberechnungen, Längen- und Winkelberechnungen ausgeführt werden. Ich möchte darauf hinweisen, dass es wünschenswert wäre, schon bei der Herstellung der Karten an deren Verwendbarkeit und Wert vom kartometrischen Standpunkt zu denken. Eben deswegen bitte ich Sie meinen Vorschlag zu beachten, wonach auf jeder Karte die Längenmasse des Rahmens auch in Zahlen angegeben werden sollen, da mittels dieser Daten das Mass der Trocknung des Papiers in Prozenten berechnet werden kann.

Im Kataster arbeitet man mit Karten grossen Massstabes, oder rechnet auf analytischem Wege, oder leitet die Masse auf geometrischem oder mechanischem Wege ab. So können viel genauere Ergebnisse erreicht werden. Die Geographen hingegen arbeiten mit topographischen und speziellen Karten anderen Massstabes. Oft können sie die Karte darum nicht gut benützen, weil sie keine genügend hohe Bildung in der Geodäsie haben und das Ergebnis hiervon ist, dass die Karten nicht genug präzis sind. Bei uns in der Tschechoslowakei wurde schon begonnen, die Geographen auf Kartometrie zu erziehen, damit sie die Karten gut gebrauchen können, sie lernen die geodätischen Grundbegriffe kennen, damit sie ihre kartographische Arbeiten gut ausführen können.

Oft fehlt von den Karten Bescheid über ihr Projektionssystem. Dies ist sehr wichtig, wenn irgendeine Gelände-Verzerrung besteht. Weiss man nicht, in welchem Projektionssystem die Karte hergestellt wurde, so kann auch der territoriale Inhalt der Karte nicht genau bestimmt werden und Korrektionen werden benötigt. Es wäre daher wünschenswert, in der Zukunft die Karten auch mit diesen Daten zu versehen. Die Daten über Flächeninhalt bzw. Projektionsart der Karte fehlen fast immer, besonders auf den alten Karten. Will man nun diese für wissenschaftliche Zwecke benützen, so sind diese Daten unbedingt notwendig, sonst kann sie nicht mit völliger Konsequenz abgelesen werden. Ich hätte also den Vorschlag bei der zukünftigen Kartenherstellung auch diese Daten anzuführen.

Prof. W. K. HRISTOW, SOFIA

Ich bin selber der Meinung, dass die Geodäten so gut wie möglich die Natur abbilden sollen. Zu diesem Problem habe ich einen Punkt hinzuzufügen. Es handelt sich um die sogenannte Beleuchtung der Karte, die mit Schmierungen vorgenommen wird. Merkwürdigerweise stellen diese Schmierungen eine nordwestliche Beleuchtung dar. Das wäre nur für die südliche Halbkugel der Erde angebracht, für die nördliche Halbkugel ist das wider die Natur. Vor mehr als 20

Jahren habe ich bei uns in Bulgarien einen Vorschlag gemacht, dass man eine südliche Beleuchtung für die Karte nimmt, oder höchstens eine südwestliche, nur nicht eine nordwestliche.

Es wäre selbstverständlich leicht Karten mit so einer Beleuchtung zu verfertigen. Man kann den Beleuchtungsgrad so errechnen und so angeben. Der Kartograph kann aus der Dichte und Richtung der Schichtlinien die Beleuchtung einigermassen so erhalten, wie es tatsächlich in der Natur erscheint. Ich habe seinerzeit solche Umgestaltungen gemacht. Die Gewohnheit ist aber so stark, dass man gar nicht an eine Änderung des Beleuchtungssystems denken kann.

E. MAÁCZ, BUDAPEST

Es ist zweifellos wahr, dass im Ausland viele Versuche ausgeführt werden, um Karten herzustellen, die den Farben der Erdoberfläche am ehesten nahekommen und es gebührt sich, dass wir an diesen Versuchen auch teilnehmen, das als Beispiel angeführte Schulatlasblatt jedoch — so hübsch es auch aussieht — entspricht in seiner Färbung und seinem Code dem Zwecke bei weitem nicht.

Die Brauchbarkeit einer jeden Karte wird von drei Faktoren bestimmt: von der Projektion, vom Massstab und von der guten Zeichnung, d. h. vom Code, womit die vollkommene Lesbarkeit gesichert ist. Beabsichtige ich z. B. das Eisenbahnnetz Ungarns auf einer Karte vorzuführen, dann bin ich gezwungen die Eisenbahnlinien (denn in diesem Falle ist ja dies der Zweck der Karte) stärker auszuziehen oder mit einer Farbe auffallend zu machen, damit ich die Aufmerksamkeit auf diese lenke, obwohl sie von grosser Höhe gesehen nichts anderes sind als dünne schwarze oder dunkelgraue Linien.

Um bei der Eisenbahn zu bleiben: auf dem von Kollegen Takács erwähnten Atlasblatt z. B. sind die Schmalspur-Nebenstrecken viel auffallender gezeichnet, als die Hauptbahnlinien. Die ungestörte Lesbarkeit wird noch durch den Umstand vermindert, dass die Hauptbahnlinien mit zwei parallelen Linien dargestellt sind, und da in der Legende hiervon keine Erwähnung gemacht wird, ist der Leser der Meinung, dass es sich hier um zweigleisige Eisenbahnen handelt. Nota bene: der Raum zwischen den beiden parallelen Linien ist abwechselnd gelb, grün, rot, je nach dem, ob sie über ein Ackerfeld, eine Wiese oder eine Siedlung führen.

Kollege Takács sagte, dass wir unsere einheimischen Flüsse aus grosser Höhe — wenn es keinen Dunst und keine Wolken gibt — in blauer Tönung sehen würden. Da jedoch Dunst und Wolken immer zugegen sind, bietet sich uns zu selten die Gelegenheit, die Donau, Theiss, und unsere übrigen Flüsse blau zu sehen. — Aber ich gehe noch weiter: ein Teil unserer Ackerfelder ist im Laufe der 12 Monate des Jahres höchstens einen Monat lang gelb — bis das Korn reif wird. Auf der als Beispiel vorgeführten Karte hingegen ist jedes Ackerfeld gelb, während sich dort, wo sich unter der gelben Farbe ein Relief, d. h. eine Schattierung befindet, die Farbe ändert (graulila), woraus der Laie die Folgerung zieht, dass an diesen Stellen eine andere Flora gedeiht, die jedoch bei der Erklärung ausgelassen wurde. Auf ausländischen Karten wird eine solche Verfärbung so eliminiert, dass die Farbe der Schattierung mit der Farbe der Pflanzendecke übereinstimmt: d. h. unter dem grünen Wald ist auch die Schattierung grün, unter einer hellgrünen Wiese hellgrün, usw.

Es könnte ja noch z. B. die Wahl der Farbe und Darstellungsart der Strassen und Siedlungen erörtert werden, ich will jedoch nicht den Anschein erwecken, als ob ich mich gegen das Neue sträuben würde. Ich meinerseits bin auch ein Anhänger der naturgefärbten Karten, suche jedoch deren Lösung auf einem anderen Wege. Die naturgefärbte Karte soll nämlich eine matt gefärbte Photokarte sein. Strassen und Gewässer sollen sich darauf weiss entlangschlängeln, die Pflanzen- und Bodendecke soll die Farbe erhalten, die sie im grössten Teil des Jahres tatsächlich besitzt und gestrichelt soll nur werden, worauf die Karte ganz besonders aufmerksam machen will. Das Relief soll die Unebenheiten der Erdoberfläche mittels oberbeleuchteter Schattierung, mit Höhenlinien verbunden oder auch nicht, aber immer in den abwechselnden Farben der Pflanzen- und Bodendecke darstellen. Die Gesamtwirkung der Färbung soll den Eindruck machen, als ob man vom Flugzeug aus das Gelände überblicken würde. Je kleiner der Massstab der Karte ist, desto verschwommener sollen die Farben sein, als ob man aus immer wachsender Höhe herunterblicken würde. Eine Ausnahme bilden selbstverständlich jene Objekte, die — dem Zweck der Karte entsprechend — von besonderer Bedeutung sind und mit guter Leserlichkeit auffallen sollen.

Ich weiss, dass eine solche Karte schön ist und gut brauchbar, ihre Ausführung stellt jedoch sowohl den Verfasser, als auch den Zeichner und Hektographen vor sehr schwierige Aufgaben. Noch viele Versuche und technische Probleme müssen gelöst werden, bis die naturgefärbten Karten in Bebrauchbarkeit und Lesbarkeit unsere gegenwärtigen Karten überflügeln und populär werden können. Eben deshalb soll jeder Versuch, der den weiteren Weg der Entwicklung der kartographischen Darstellung ebnen will, mit Freude begrüsst werden. Kollege TAKÁCS hat uns erwähnt, dass das Kartographische Unternehmen beabsichtigt neue naturgefärbte Karten herauszugeben. Es wäre erfreulich, wenn die aufeinanderfolgenden Ausgaben dieser Kartenreihe die wahrhaften Farben der Natur immer getreuer wiedergeben würden; ich habe ja auch jetzt bloss darum das Wort ergriffen, dass er — wenn er es als würdig erachtet — einige meiner Bemerkungen und Einfälle in gesündere Formen giessen und Einfall auf Einfall bauend, den Weg der besten Lösung finden soll.

VIII. Astronomisch-Geodätisches Kolloquium

DIE VERWENDUNG VON QUARZUHREN ZUR GEOGRAPHISCHEN ORTSBESTIMMUNG

Á. KLATSMÁNYI
BUDAPEST

Das zeitbestimmende Element der Quarzuhren ist ein piezoelektrischer Quarzkristall, der mittels Elektronenröhren in Schwingung gehalten wird. Die Schwingungsfrequenz und somit auch die Schwingungszeit des Quarzkristalls wird vor allem durch seine geometrische Dimensionen, Elastizitätsmodul und Dichte bestimmt. Der den Quarzkristall in Schwingung haltende Stromkreis übt nur einen sehr geringen Einfluss auf die Frequenz aus, die so eine grosse zeitliche Beständigkeit aufweist. Bei der Quarzuhr ersetzt die Schwingung des Kristalls die Pendelschwingung der Pendeluhr, oder den Unruhegang des Chronometers. Die Schwingungszeit ist sehr kurz, bei den üblichen Werken insgesamt 10^{-5} Sek. Diese Zeit kann durch Untersetzungen mittels elektronischer Stromkreise — durch Frequenzteiler — vervielfacht werden, und die Kristallfrequenzschwingungen mit der auf diese Weise erhöhten Schwingungszeit können zum Antrieb von Synchronuhren verwendet werden, deren Verlässlichkeit gleichwertig ist mit der Verlässlichkeit der Schwingung des Quarzkristalls.

Die Quarzuhren würden daher dem Zwecke der geographischen Ortsbestimmungen mehr entsprechen als die gegenwärtig benützten Uhren. Ihre Verwendung ist dennoch durch ihre Ortsgebundenheit, durch die Unmöglichkeit sie im Gelände zu benützen, ausgeschlossen.

Die Ortsgebundenheit der mit Elektronenröhren betriebenen Quarzuhren wird hauptsächlich durch zwei ungünstige Eigenschaften der Elektronenröhren verursacht: erstens der zum Betrieb der Elektronenröhren der Quarzuhr notwendige bedeutende elektrische Energieverbrauch, der selbst bei verhältnismässig einfach konstruierten Uhren 60 Watt überschreitet, zweitens die Empfindlichkeit der Elektronenröhren mechanischen Beanspruchungen gegenüber. So wären einerseits — angesichts der langen Zeitdauer der im Gelände auszuführenden Messungen — zur Inbetriebhaltung des Gerätes Batterien von einfach unlösbar grossem Gewicht und Zahl notwendig, anderseits könnten infolge der während des Transportes unvermeidlichen Erschütterungen leicht Betriebsstörungen oder Betriebsunsicherheiten in den Elektronenröhren auftreten.

Auf Grund der im Laufe der vergangenen Jahre ausgeführten Experimente mit Transistoren sind wir zu der Überzeugung gelangt, dass — wenn die Elektronenröhren in den Quarzuhren durch Transistoren ersetzt werden — Quarzuhren mit solch günstigen Eigenschaften hergestellt werden können, dass diese auch zur Geländearbeit geeignet sind.

Die Transistoren sind die modernsten, zugleich jüngsten Erzeugnisse der Industrie für Fernmeldetechnik. Ihr Mechanismus ist einfach. Ihr Betrieb wird durch die ausserordentliche elektrische Leitfähigkeit der aus sehr reinem Germanium hergestellten Einkristallplatte garantiert. Sie sind dazu geeignet, die Elektronenröhren zu ersetzen, ja in vielen Fällen sind sogar ihre Eigenschaften günstiger als die der Elektronenröhren. Namentlich :

1. Mit den heutigen modernen Transistoren können all jene Aufgaben gelöst werden, die bisher bloss mit Hilfe von Elektronenröhren verwirklicht werden konnten.

2. Der Energieverbrauch eines Transistors beträgt insgesamt ein Zehntel oder Hundertstel einer zu ähnlichem Zwecke gebrauchten Elektronenröhre.

3. Die mechanische Widerstandsfähigkeit der Transistoren ist um drei Grössenordnungen höher als die der Elektronenröhren. Ihre Eigenschaften zeigen auf mechanische Einwirkungen weder kurzfristige noch dauernde Veränderungen. Es ist kennzeichnend für ihre mechanische Stabilität, dass sie selbst bei einer Beschleunigung von 20 000 g nicht zugrunde gehen.

4. Die Grösse der Transistoren und gleichzeitig auch ihre Wärmeausstrahlung ist um eine Grössenordnung kleiner als die der Elektronenröhren. Die Folge dessen ist eine bedeutende Verringerung der Dimensionen und des Gewichtes der Apparate.

5. Die Lebensdauer des Transistors ist um eine Grössenordnung länger als die der Elektronenröhren und überschreitet 100 000 Stunden, d. h. mehr als zehn Jahre. Somit ist es möglich, die mit Transistoren erbauten Geräte lange Zeit hindurch im Betrieb zu halten, was gerade bei den Quarzuhren eine sehr wichtige Bedingung ist.

In Kenntnis und Erwägung all dieser Gesichtspunkte wurden die Pläne einer auch zur Geländemessung geeigneten, mit Transistoren in Betrieb gehaltenen Quarzuhr angefertigt.

Die Skizze der Konstruktion dieser Uhr ist aus Bild 1 ersichtlich.

Im Aufbau ist die geplante Uhr der üblichen Anordnung der Quarzuhren ähnlich. Die zur Betätigung der Uhr dienende Schwingung von hoher Genauigkeit wird durch den quarzgesteuerten Oszillator O_1 hervorgerufen. Die Nennfrequenz des Quarzoszillators beträgt 100 kHz. Die Schwingungszeit einer Schwingung ist demnach 10^{-5} Sek.

Die Frequenz des quarzgesteuerten Oszillators wird mit frequenzteilenden Stromkreisen (F. O.) im Verhältnis 1 : 10 so lange geteilt, bis der Wert der

resultierenden Frequenz auf 100 Hz sinkt. Die Frequenz bzw. Schwingungszeit der einzelnen Stufen ist in Tabelle I enthalten.

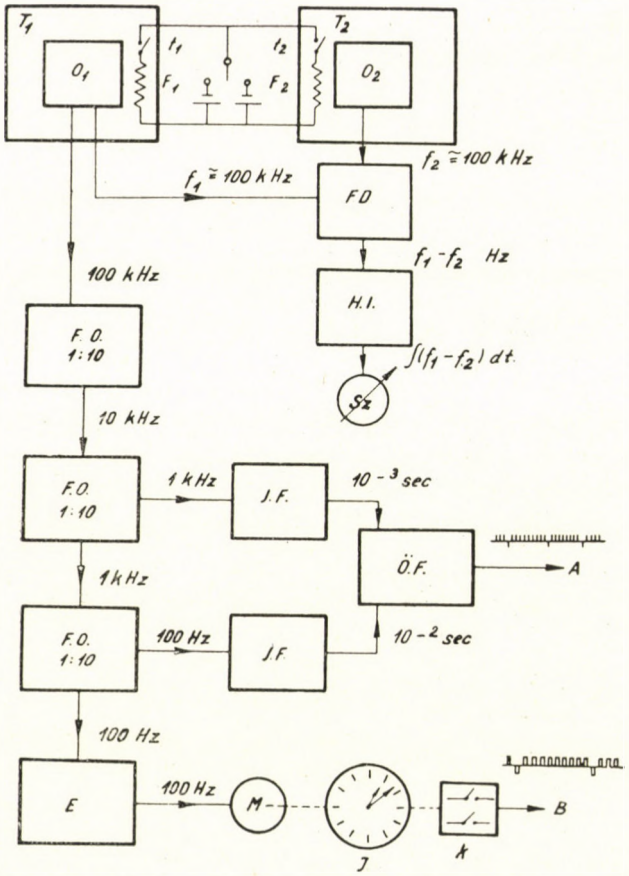


Bild 1

Konstruktionsdiagramm der tragbaren Quarzuhr
O_1 Quarzoszillator von 100 kHz — O_2 Quarzoszillator von 100 kHz — T_1 Thermostat zu Oszillator O_1 — T_2 Thermostat zu Oszillator O_2 — t_1 Kontaktthermometer zu Oszillator O_1 — t_2 Kontaktthermometer zu Oszillator O_2 — F_1—F_2 Heizkörper — *FD* Phasendetektor zur Messung der Phasenabweichung zwischen den beiden Oszillatoren — *H. I.* Fehlerintegrator zur Messung der Schwingungszahldifferenz zwischen den beiden Oszillatoren — *Sz.* Mechanischer Zähler zur Registrierung der Differenz — *F. O.* Frequenzteiler. Teilungsverhältnis 1 : 10 — *J. F.* Signalformende Stromkreise zur Erzeugung der Zeitsignalimpulse — *E.* Verstärker zum Antrieb des Synchronmotors — *M.* Synchronmotor — *I.* Indikatoruhr — *K.* Mechanische Schalter von 0,1 und 1 Sek. — *Ö. F.* Mischstufe zum Summieren der Signale in den Zeitintervallen 10^{-3} und 10^{-2} Sek. — *A.* feine Zeitsignalserie — *B.* grobe Zeitsignalserie.

Die relative Genauigkeit der abgeteilten Frequenz stimmt mit der Genauigkeit der Frequenz des Schwingquarzes überein, denn die grundlegende Eigenschaft des Frequenzteilers ist, dass der Quotient der abzuteilenden und der

Tabelle I

Stufe	Frequenz	Schwingungszeit
Oszillator (O_1)	100 kHz	10^{-5} Sek.
I. Frequenzteiler (F. o.)	10 kHz	10^{-4} Sek.
II. « «	1 kHz	10^{-3} Sek.
III. « «	100 Hz	10^{-2} Sek.

abgeteilten Frequenz nur eine ganze Zahl sein kann. Das Verhältnis der Teilung ist also so steif, wie bei Zahnradübertragungen.

Die elektrischen Signale der den einzelnen abgeteilten Frequenzen entsprechenden Schwingungen können nach entsprechender Formung (*I. F.*) zur Anzeige verschieden langer Zeitintervalle benützt werden. Die Schwingung von 100 Hz hingegen wird nach entsprechender Verstärkung (*E*) zur Betätigung eines mit Synchronmotor (*M*) versehenen Uhrwerkes (*I*) benützt. Die einzelnen übersetzten Wellen der Uhr setzen elektrische Kontakte (*K*) in Betrieb, die zum Signalisieren der Zeitintervalle von 0,1 Sek. bzw. 1 Sek. dienen.

Die Uhr liefert in ihrer geplanten Anordnung auf zwei separaten Leitungen zweierlei Zeitsignale. Die feinen Zeitsignale, die in Zeitintervallen von 10^{-3} Sek. aufeinander folgen und jedes zehnte Zeichen, d. h. alle 10^{-2} Sek.weist eine entgegengesetzte Polarität auf, womit die Zeitpunkte von 10^{-2} Sek. angegeben werden. Diese Signalreihe wird von einer, die Zeitzeichen von 10^{-3} und 10^{-2} Sek. summierenden (*O. F.*) Stufe hergestellt. DieZeitdauer der einzelnen Zeichen beträgt 10^{-4} Sek.

Die andere Zeitsignalreihe besteht aus Stromimpulsen mit längerer Zeitdauer und markiert jedes zehnte bzw. hundertste Zeichen der 10^{-2} Sek.-Signale. Somit dient sie als Index für die Reihe der feinen Zeitsignale.

Ausser den obigen abteilenden und zeitsignalisierenden Stromkreisen ist auf der Skizze noch ein anderer, die automatische Kontrolle des Uhrganges ausübender Stromkreis ersichtlich. Dieser Stromkreis hat die Aufgabe die Verlässlichkeit der unter schwierigen Umständen tätigen Uhr zu kontrollieren.

Das Wesen des Stromkreises liegt in einem zweiten Oszillator (O_2), der in seinem Aufbau dem Oszillator O_1 gleich ist, von diesem aber gänzlich unabhängig gespeist und angeordnet wird. Die sich aus der geringen Frequenzabweichung zwischen der Schwingung der beiden Oszillatoren ergebende Phasendifferenz wird von einem Phasendetektorstromkreis (*F. D.*) andauernd wahrgenommen und wenn die Phasendifferenz den Wert einer ganzen Periode überschreitet, dann wird der Fehler auf einem Zählwerk (*Sz.*) angezeigt. Somit registriert das Zählwerk die Differenz zwischen der gesamten Schwingungszahl der beiden Oszillatoren. Ein Zahlenwert des Zählwerkes entspricht einer

Abweichung von 10^{-5} Sek. zwischen der Schwingungslage (Phase) der beiden Oszillatoren. Aus der vom Zählwerk registrierten Differenz kann auf die richtige Funktion der Oszillatoren geschlossen werden.

Mit der Kontrolle des Zählwerkes in bestimmten Zeitabständen kann die zeitliche Änderung der Abweichung zwischen den beiden Oszillatoren festgestellt werden. Bei normalem Betrieb kann diese Abweichung in der Zeit fast linear, als kontinuierliche Funktion variieren. Sollte sich in einem der beiden Oszillatoren eine sprunghafte Frequenzänderung einstellen, dann ist der zeitliche Ablauf der vom Zählwerk angezeigten Abweichung nicht mehr stetig.

Bei stabil angeordneten Uhren ist dieser Kontrollstromkreis nicht notwendig, da die Uhren immer in Gruppen angewandt werden.

Die Frequenzstabilität der Quarzuhr wird auch dadurch erhöht, dass die Quarzkristalle mit GT-Schnitt in einem Vakuumkolben eingeschmolzen und in Meacham'scher Brückenschaltung angewandt werden. Ausserdem wollen wir in der Zukunft beide Oszillatoren in voneinender unabhängigen Thermostaten unterbringen, die die Temperatur mit einer Genauigkeit von $\pm 0{,}1°$ C konstant halten.

Infolge der grossen mechanischen Festigkeit der Transistoren sind die einzelnen Stromkreise gegen Schütteln und Schläge unempfindlich. Im Apparat müssen bloss die Quarzkristalle vor mechanischer Beanspruchung geschützt werden. Deshalb sollen beide Quarzoszillatoren elastisch aufgehängt werden. Wenn ihre geometrischen Achsen senkrecht zueinander stehen, dann reagieren die beiden Oszillatoren auf äussere Einwirkungen in verschiedenem Masse. Wird der Apparat rohen äusseren Kraftwirkungen ausgesetzt, so wird diese Anordnung, sollte einer der Kristalle eine Verletzung erlitten haben, die verschiedentliche Veränderung der Kristallfrequenzen im Kontrollstromkreis und somit die Beschädigung des Apparates anzeigen.

Zur praktischen Inbetriebhaltung des Apparates können folgende Daten angegeben werden.

Zur Speisung der einzelnen Einheiten der Uhr wird die einheitliche Anwendung von NIFE-Akkumulatoren von 6 V 20 Ah geplant.

Zur Speisung der Oszillatoren werden zwei, der Hilfsstromkreise ein und der Thermostaten ein weiterer Akkumulator benötigt. Vor der Erschöpfung der Akkumulatoren müssen diese unbedingt mit aufgeladenen Akkumulatoren ersetzt werden, ohne dabei den Gang der Uhr zu unterbrechen. Angesichts des geringen Verbrauches der einzelnen Einheiten hat der Umtausch der Akkumulatoren bei den Oszillatoren alle zwei Wochen, bei den Hilfsstromkreisen jeden dritten Tag und bei den Heizstromkreisen jeden zweiten Tag zu erfolgen. Somit kann der Dauerbetrieb der Uhr gesichert werden.

Das geplante Gewicht des Apparates ist ohne Batterien 15 kg.

Im folgenden prüfen wir nun die voraussichtliche Verlässlichkeit der Quarzuhren.

Die Frequenz der Quarzkristalle wird infolge Alterung verändert. Diese Frequenzänderung ist erfahrungsgemäss bloss in den ersten drei Monaten von Bedeutung und überschreitet den 10^{-7}-ten Teil des Nennwertes nicht.

Bei den Oszillatoren obiger Anordnung kann erreicht werden, dass die späteren Frequenzschwankungen kleiner sein sollen, als der 10^{-8}-te Teil der Nennfrequenz.

Unter solchen Umständen ist die Frequenz der Quarzuhr

$$f = f_1 \pm \Delta f_1;$$

hier

$$|\Delta f_1| \leq 10^{-8} \cdot f_0$$

wobei f_1 die eingestellte Frequenz,
Δf_1 die momentane Frequenzabweichung und
f_0 die Nennfrequenz ist.

Die Abweichung von der Nennfrequenz f_0 :

$$f - f_0 = \Delta f = f_1 - f_0 \pm \Delta f_1 = \Delta f_0 \pm \Delta f_1$$

wo Δf_0 der Einstellfehler ist. Sein Wert ist gleich der Genauigkeit der bei der Einregelung der Uhr zur Verfügung stehenden Normalfrequenz und überschreitet den $5 \cdot 10^{-8}$-ten Teil der Nennfrequenz nicht.

Die Frequenz der Uhr beträgt nun

$$f = f_0 + \Delta f_0 \pm \Delta f_1$$

oder

$$f = f_0 \left(1 + \frac{\Delta f_0}{f_0} \pm \frac{\Delta f_1}{f_0}\right)$$

bzw. die Dauer einer Schwingung :

$$\tau = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_0} \left(1 - \frac{\Delta f_0}{f_0} \mp \frac{\Delta f_1}{f_0}\right)$$

Während dieser Schwingungszeit beträgt die von der Uhr angezeigte nominelle Zeitänderung

$$\tau_0 = \frac{1}{f_0}$$

Der Stand der Uhr sei in einem gegebenen physikalischen Zeitpunkt : u_1; nach Verlauf der Zeit τ : u_2.

In diesem Falle ist der Wert der Zeit im Zeitpunkt 1 :

$$S_1 = U_1 + u_1$$

und im Zeitpunkt 2 :

$$S_2 = U_2 + u_2$$

wobei S_1 und S_2 die lokale Zeit, U_1 und U_2 die Uhrzeit, u_1 und u_2 den Stand der Uhr in Zeitpunkt 1 bzw. 2 bezeichnen.

Die Differenz zwischen den beiden Zeiten ist :

$$S_2 - S_1 = \tau$$

während die Differenz der Uhrzeiten

$$U_2 - U_1 = \tau_0$$

beträgt, da die Uhr während einer Periode die nominelle Zeitänderung τ_0 anzeigt. Aus obigen Gleichungen ergibt sich :

$$\tau = S_2 - S_1 = U_2 - U_1 + u_2 - u_1 = \tau_0 + u_2 - u_1$$

bzw.

$$u_2 - u_1 = \tau - \tau_0$$

und der Gang der Uhr

$$j = \frac{u_2 - u_1}{S_2 - S_1} = \frac{\tau - \tau_0}{\tau}$$

Somit ist der Uhrengang :

$$j = \frac{-\frac{\Delta f_0}{f_0} \mp \frac{\Delta f_1}{f_0}}{1 - \frac{\Delta f_0}{f_0} \mp \frac{\Delta f_1}{f_0}} \cong -\frac{\Delta f_0}{f_0} \mp \frac{\Delta f_1}{f_0} = j_k \pm \Delta j$$

Der Mittelwert des Ganges ist demnach im allerungünstigsten Falle mit dem oben angegebenen Wert :

$$(j_k) = 5 \cdot 10^{-8}$$

und die Schwankung des Ganges

$$(\Delta j) = \pm 10^{-8}$$

Dies verursacht im Laufe eines Tages eine regelmässige Änderung im Uhrengang von 0,00432 Sek. und im allerungünstigsten Falle einen unregelmässigen Fehler von 0,00084 Sek.

Wenn man bedenkt, dass die Zeitdauer einer Messreihe im allgemeinen 2—3 Stunden beträgt und mit einer wohldurchdachten Anordnung der Sternübergangsbeobachtungen der mittlere Fehler des Uhrenganges eliminiert

werden kann, dann überschreitet der sich aus der Gangschwankung ergebende unregelmässige Fehler des Uhrstandes bei der Anwendung einer Quarzuhr den Wert von $\pm 0{,}0001$ Sek. nicht.

Die Genauigkeit zufolge der Stirndauer der von der Quarzuhr gelieferten elektrischen Zeitsignale hat ebenfalls den Wert von $\pm 0{,}0001$ Sek., und ist demnach in Einklang mit der Verlässlichkeit der Uhr.

Die grössere Genauigkeit der Quarzuhr kann selbstverständlich bloss dann in vollem Masse ausgenützt werden, wenn auch die Genauigkeit der bei den

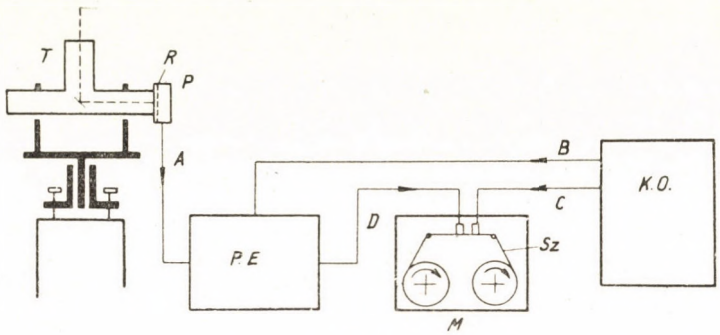


Bild 2

Messanordnung bei den mit der Verwendung von Quarzuhren ausgeführten geographischen Ortsbestimmungen

T. Fernrohr — *R.* Gitter — *P.* Fotozelle mit Elektronenvervielfacher — *P. E.* Fotozellenverstärker — *K. O.* Quarzuhr — *M.* Magnetische Tonaufnahmevorrichtung mit doppeltem Registrierkopf — *Sz.* Tonband — *A.* Durch Fotozelle aufgenommene Signalserie des Sternüberganges — *B.* Grobe Zeitsignale (1 Sek. und 10^{-1} Sek.) — *C.* Feine Zeitsignale (10^{-2} Sek. und 10^{-3} Sek.) — *D.* Vermischtes Zeichen, aus der Summierung der Signalserie des Sternüberganges und der groben Zeitsignale entstanden

Sternübergangsbeobachtungen bzw. bei dem Zeitvergleich angewandten übrigen Geräte und Messverfahren entsprechend ist.

Bei der Sternübergangsbeobachtung kann selbst bei Gebrauch des unpersönlichen Mikrometers kein kleinerer Fehler als $\pm$ 0,05 Sek. gesichert werden. Ähnlicherweise tritt sowohl beim Zeitvergleich, als auch bei der Zeitbestimmung ein Fehler von $\pm 0{,}01$ Sek. bei der Auswertung des Chronographenbandes, sowie als Nadelparallaxenfehler auf.

Diese Fehler würden die Ausnützung der grösseren Genauigkeit unmöglich machen. Deshalb müssen beim Messen der Genauigkeit entsprechende neue Geräte angewandt werden.

So muss bei der Sternübergangsbeobachtung zur Eliminierung des persönlichen Fehlers ein objektives Messgerät verwendet werden, während der Vergleich der Zeitsignale mittels eines Registriergerätes ohne bewegliche Bestandteile zu erfolgen hat.

Die vorgeschlagene Messanordnung für die Zeitbestimmung ist aus Bild 2 ersichtlich.

Der Sternübergang wird von dem in die Meridianebene gestellten Gerät (T) mittels einer Fotozelle (P) derart beobachtet, dass das Bild des beobachteten Sternes beim Übergang vor einem Strichgitter (R) vorüberzieht und sein Licht abwechselnd auf das Gitter bzw. auf die Fotozelle fällt. In dieser Weise entsteht auf der Fotozelle, den periodischen Lichtschwankungen entsprechend, eine Stromschwankung. Die durch die Lichtschwankung verursachte sprunghafte Stromschwankung kann mit dem physikalischen Zeitpunkt des Sternüberganges in Verbindung gebracht werden.

Die Zeichen der Fotozelle werden im Fotozellenverstärker ($P.\ E.$) verstärkt und mit den groben Zeitsignalen der Quarzuhr summiert.

Die so erhaltenen vereinigten Zeichen, sowie die feinen Zeitsignale der Quarzuhr werden mit Hilfe einer Magnettonvorrichtung auf ein Tonband aufgenommen.

Die Aufnahme erfolgt, von der gewohnten Weise abweichend, derart, dass das Gerät mit zwei Aufnahmeköpfen versehen wird, welche die zwei Zeitsignalserien auf den je 3 mm breiten Halbstreifen des 6 mm breiten Bandes aufnehmen. Die auf diese Weise aufgenommenen Zeitsignale können in einer zueinander starr festgesetzten Lage aufbewahrt und später bei mehreren Gelegenheiten reproduziert und ausgewertet werden. Ein Vorteil des vorgeschlagenen Verfahrens ist, dass mit dem magnetischen Tonaufnahmegerät auch Gespräche auf das Messband aufgenommen werden und somit sämtliche die Messung betreffende Daten einfach ins Mikrophon gesagt und damit neben die Signale aufgenommen werden können.

Das hier beschriebene Verfahren wird beim Zeitvergleich nur insofern verändert, dass hier an Stelle der Fotozellenzeichen die Zeichen des zur Zeitsignalaufnahme dienenden Funkempfängers auf das Tonband geführt werden.

Die Auswertung der Messung ist aus Bild 3 ersichtlich. Hier werden die vom Tonaufnahmegerät aufgenommenen Zeichen rückgespielt, reproduziert, jedoch mit einer im Verhältnis von ungef. 1 : 20 oder 1 : 50 reduzierten Bandgeschwindigkeit. In dieser Weise werden die ursprünglich 10^{-3} Sek. dauernden Zeitsignale in Zeitspannen von $5 \cdot 10^{-2}$, bzw. $2 \cdot 10^{-2}$ Sek. abgespielt. Diese verhältnismässig langsame Zeitsignalserie kann entweder mit Hilfe eines Chronographen, oder eines Zweischleifenoszillographen, oder eines in der Fernschreibetechnik gebrauchten Doppelundulators mit grosser Genauigkeit auf Papier aufgenommen werden. Ein solches Auswertungsband wird in Bild 4 gezeigt. Auf der einen Seite des Bandes sind die Zeitintervalle von 10^{-3} Sek. mit einer Genauigkeit von 10^{-4} Sek., auf der anderen Seite die in regelmässigen Zeitabständen eintreffenden Zeitsignale des Sternüberganges oder der Zeitsignalstation, sowie die Indexsignale 10^{-1} und 1 Sek. ersichtlich.

Der Zeitpunkt eines Überganges ist daher in der unteren Zeichenreihe mit einer Genauigkeit von 10^{-1} Sek. ablesbar, wogegen die obere Zeitsignal-

reihe eine Genauigkeit von 10^{-4} Sek. gestattet, dadurch, dass die restliche Zeit mit dieser Genauigkeit angegeben wird.

Der zur Messung gebrauchte transportable Fotozellenverstärker und die magnetischen Tonaufnahmevorrichtungen können heute schon im Handel gekauft werden, ihr Betrieb ist einfach und verlässlich. Ein Tonband vom üblichen Masse (300 m) ist geeignet, ein rund halbstündiges Gespräch bzw. Messprogramm aufzunehmen. Wenn man bedenkt, dass eine Beobachtung

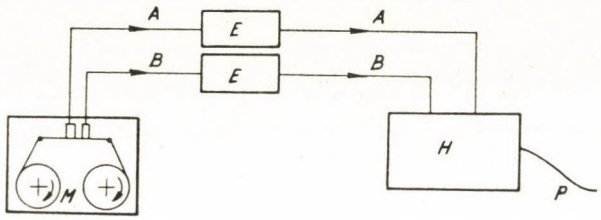


Bild 3

Auswertung der zur geographischen Ortsbestimmung gehörenden Messung
M. Magnetische Tonaufnahmevorrichtung mit doppeltem Hörkopf — *E—E.* Kanalverstärker — *H.* Zweischleifenoszillograph oder Doppelundulator — *P.* Registrierband aus Papier

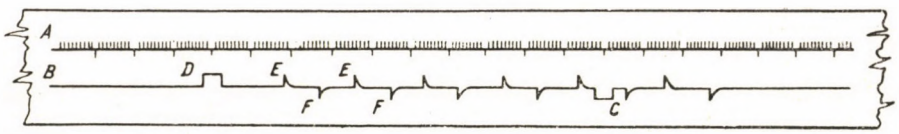


Bild 4

Auswertungsband zur geographischen Ortsbestimmung
A. und *B.* feine Zeitsignale — *A.* Zeitsignale von 10^{-3} Sek. — *B.* Zeitsignale von 10^{-2} Sek. — *C.—D.—E.—F.* grobe Zeitsignale und die Signale des Sternüberganges — *C.* Signal von 10^{-1} Sek. — *D.* Signal von 1 Sek. — *E.* Signale der Zeitpunkte des Sterneintritts in das Sehfeld — *F.* Signale der Zeitpunkte des Sternverschwindens hinter dem Gitter

samt Angabe der notwendigen Daten nicht länger als eine Minute dauert und das Tonband nach der Auswertung wieder neu gebraucht werden kann, dann kann man gut einsehen, dass eine Messgruppe mit 2—3 Tonbändern fast unbegrenzte Zeit arbeiten kann.

Jetzt sind wir noch mit der Prüfung der Genauigkeit des beschriebenen Verfahrens schuldig.

Der Fehler des Sternübergangzeichens hängt vom Auflösungsvermögen des Fernrohres, von der Fertigungsgenauigkeit des Gitters und der Empfindlichkeit des Fotozellenstromkreises ab.

Das Bild des Sternes ist infolge des endlichen Auflösungsvermögens des Fernrohres in der Ebene des Gitters nicht punktförmig und deshalb sind die Zeichen der Fotozelle auch nicht scharf. So z. B. beträgt bei einem Auflösungsvermögen von 0,15″ die Zeitdauer des Verschwindens oder Erscheinens des

Sternes 10^{-2} Sek. Der Zeitpunkt des Überganges kann noch genauer festgestellt werden, wenn dieser aus dem Halbwert des Fotozellensignals bestimmt wird. Die Auswertung wird erleichtert, wenn auf das Tonband nicht das Fotozellensignal, sondern dessen Ableitung aufgetragen wird (Bild 4). Auf diese

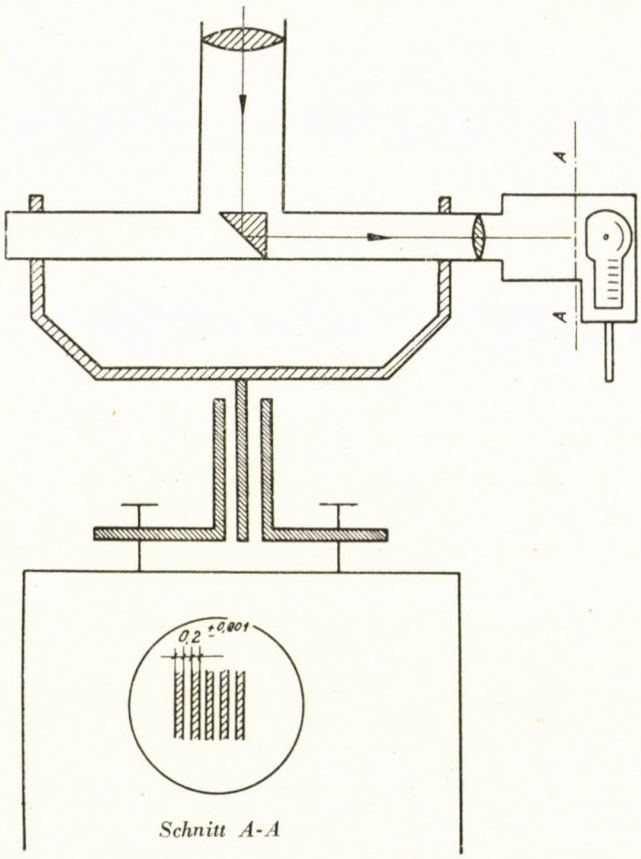


Bild 5
Verbindung der Fotozelle mit dem Gerät

Weise kann die Genauigkeit der Auswertung um eine Grössenordnung erhöht werden.

Zur Prüfung der objektiven Beobachtung des Sternüberganges ergeben sich, die Daten des Wildschen Gerätes Typ 74 beachtend, folgende Daten (Bild 5):

Wenn die Brennweite des Objektivs = 500 mm
die Angularvergrösserung = 65×
die Entfernung des Gitters vom Okular = 250 mm
die Fertigungsgenauigkeit des Gitters = $\pm 1\ \mu$

dann ist der Fehler des Sternübergangszeichens gleich 0,001 Sek. Dieser Fehler ist grösstenteils der normale Fehler der Verbindung zwischen Gerät und Fotozelle.

Bei der Berechnung des Fehlers nehmen wir an, dass das Bild des beobachteten Sternes in der Ebene des Gitters punktförmig, d. h. das Auflösungsvermögen des Gerätes besser als 0,015″ ist.

Die aus der spontanen Stromschwankung der Fotozelle und Verstärkervorrichtung entstehende Spannungsschwankung birgt eine Fehlermöglichkeit in sich, welche besonders bei der Beobachtung von Sternen geringer Lichtstärke ein Signal der gleichen Grössenordnung ergeben kann mit dem durch den Sternübergang hervorgerufenen Signal. Dies macht das Messen unmöglich oder schwierig. Den Berechnungen gemäss ist das Signal—Geräusch Verhältnis bei Anwendung einer Fotozelle mit Elektronenvervielfacher unter ungünstigen Beobachtungsverhältnissen :

bei einem Stern von Magnitude	$+6^m$	=	2
„ „ „ „ „	$+4^m$	=	12,5
„ „ „ „ „	0^m	=	472
„ „ „ „ „	-4^m	=	18 500

Die Auswertung kann gut ausgeführt werden, wenn das Verhältnis grösser ist als 10. Die Methode ergibt demnach bei den Sternen $+ 6^m$ ein zweifelhaftes Ergebnis. Bei den Sternen $+ 5^m$ kann die Auswertung nur mit Schwierigkeit ausgeführt werden ; bei den Sternen $+4^m$ und bei noch blankeren Sternen ist die Methode gut anwendbar.

Laut den obigen Überlegungen ist die voraussichtliche Genauigkeit der Methode im Falle von $+4^m$ oder einer noch grösseren Helligkeit um mehr als eine Grössenordnung besser, als bei der unpersönlichen Mikrometerbeobachtung.

Zum Schluss muss noch der Fehler der magnetischen Zeichenaufnahme, sowie die Grösse des voraussichtlichen Fehlers bei der Auswertung besprochen werden.

Ist die Geschwindigkeit des Tonbandes die übliche 19 cm/Sek. und wird mit dem gewöhnlichen 10 μ breiten Registrierkopf gearbeitet, dann beträgt das auf das Band noch aufnehmbare kleinste Zeitintervall $5 \cdot 10^{-5}$ Sek., das Zeitauflösungsvermögen des Bandes ist demnach grösser als die Genauigkeit der Quarzuhr. Der Parallaxenfehler der doppelten Registrierkopfanordnung fällt bei der Auswertung völlig weg, da die Aufnahme und Reproduktion des Zeichens auf dem Bande mit denselben zwei Köpfen geschehen soll. Ein Fehler könnte nur in dem Falle vorkommen, wenn zwischen Aufnahme und Auswertung die Köpfe einer relativen Verschiebung erlitten hätten. Doch selbst bei einer relativen Verschiebung um 0,01 mm würde die Verschiebung

bloss einen Fehler von $5 \cdot 10^{-5}$ Sek. verursachen. Einen Fehler ähnlicher Grösse kann auch die Dehnung des Bandes hervorrufen. Beide Fehler können völlig eliminiert werden, wenn die beiden Registrierköpfe miteinander verbunden als eine Einheit gebaut werden. Der Zeichnungsfehler des Auswertungschronographen kann nach Belieben vermindert werden, wenn bei der Auswertung die Geschwindigkeit des Tonbandes reduziert und die Geschwindigkeit des Papierbandes erhöht wird. Die Auswertung der Messung verringert demnach die Zuverlässigkeit der gesamten Beobachtung nicht.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass bei der Anwendung einer tragbaren Quarzuhr mit den vorgeschlagenen Beobachtungs- und Auswertungsmethoden bei geographischen Ortsbestimmungen die Reduktion der Fehler der Zeitbestimmungen und Zeitvergleiche um eine Grössenordnung zu erwarten ist.

DISKUSSION

Prof. Dr. K. REICHENEDER, POTSDAM

Ich möchte zu dem Vortrag des Kollegen KLATSMÁNYI einiges sagen.

Die Quarzuhr ist zweifellos das moderne Gerät für die Zeitmessung. Die Güte einer Quarzuhr ist in erster Linie durch die Eigenschaften des benützten Quarzes, in zweiter Linie durch die Einhaltung gewisser Betriebsbedingungen bestimmt.

Die hohe Frequenz-Genauigkeit von 10^{-8} bis 10^{-9} bei ortsfesten Quarzuhren ist daher im Feldbetrieb kaum zu erreichen.

Gegen die hin und wieder auftretenden Sprünge kann man sich durch gleichzeitige Benützung mehrerer Quarzuhren sichern. Eine mehrmalige Kontrolle des Gangs bzw. Standes der Uhr mit Zeitsignalen bzw. Normalfrequenzen erscheint vorläufig noch unerlässlich. Zweifellos liegt aber ein dringendes Bedürfnis vor, das Chronometer auch bei Feldbeobachtungen durch die genauere Quarzuhr zu ersetzen, und alle Versuche in dieser Richtung sind sehr zu begrüssen und wahrscheinlich erfolgreich.

Allerdings erscheint mir die bei Sterndurchgängen von Kollege Klatsmányi erwartete Genauigkeit von 0,002 Sek. zu hoch. Eine Delegation des Geodätischen Instituts Potsdam, welche kürzlich die photoelektrische Registrierung in Pulkowa studiert hat, berichtet, dass man damit eine Genauigkeitssteigerung um etva $^1/_3$ erreicht habe, das heisst von 0,02 Sek. für den Sterndurchgang. Ich glaube nicht, dass die vom Vortragenden angegebene Genauigkeit von 0,002 Sek. je erreicht werden kann, schon wegen der Refraktion.

Prof. W. K. HRISTOW, SOFIA

Es ist sehr zu begrüssen, wenn Quarzuhren soweit wie möglich hier gebaut werden, damit wir auch welche beziehen können. Mit der Mitte des nächsten Jahres beginnt das geophysikalische Jahr und in Bulgarien haben wir geplant, Längebestimmungen während des geophysikalischen Jahres durchzuführen. Wenn man bis dahin Quarzuhren beziehen könnte, so wäre das zu begrüssen. Ob man die einzelnen Abendwerte der Uhrkorrektion dadurch verbessern kann, ist meiner Ansicht nach zweifelhaft, eine Ausgleichung lassen aber die Quarzuhren durchführen.

Prof. J. KRAJČI, BRATISLAVA

Der Vortrag des Herrn KLATSMÁNYI beweist, dass die ungarische geodätische Astronomie im Vordergrund der Forschung über das fundamentale Problem der praktischen Astronomie ist.

Die Benützung von komplizierten elektronischen Geräten im Felde bringt jedoch auch gewisse Schwierigkeiten mit sich. Einerseits beseitigen diese Geräte einen Teil der systematischen Fehler und geben der astronomischen Beobachtung den Charakter einer objektiven Methode, andererseits aber bringen sie die Möglichkeit des Auftauchens von weiteren, noch unbekannten systematischen Fehlerquellen mit sich.

BETRACHTUNGEN ZUR BESTIMMUNG DES EINFLUSSES DER LOTKRÜMMUNG AUF ASTRONOMISCHE POSITIONSBESTIMMUNGEN

Dr. KURT ARNOLD
POTSDAM

Aus astronomischen Ortsbestimmungen ermittelt man die Richtung des Lotes im Beobachtungspunkt. Die sich ergebenden Werte für die geographische Länge und Breite beziehen sich bekanntlich auf die Erdoberfläche. Für die Bestimmung des Geoids, also der Niveaufläche in Meereshöhe, ist es aber notwendig, die Lotrichtung am Geoid, d. h. die Flächennormale am Geoid, zu kennen. Wären die Niveauflächen Parallelflächen, so wäre bekanntlich eine derartige Reduktion der Lotrichtung von der Oberfläche auf das Geoid nicht erforderlich; denn die Lotlinien wären dann Geraden. Tatsächlich weist die Lotlinie bekanntlich immer eine gewisse Krümmung auf, die die Beobachtungsgenauigkeit von $\pm 0{,}5''$ für Lotabweichungspunkte mit einer grösseren Meereshöhe teilweise recht erheblich übersteigt.

Eine derartige Reduktion der astronomischen Positionsbestimmungen von der Oberfläche auf das Geoid ergibt sich z. B. bei jener Methode zur Bestimmung des Erdellipsoids, bei der die Summe der Quadrate der Lotabweichungen zu einem Minimum gemacht wird. Es lässt sich leicht zeigen, dass die gravimetrisch bestimmten Lotabweichungen ebenfalls von der Erdoberfläche auf das Geoid reduziert werden müssen. Weil diese Reduktion schwierig zu bestimmen ist und nur im Gebirge wesentliche Werte erreicht, hat man sie meistens vernachlässigt. Ihre Bestimmung aus dem normalen Schwerefeld der Erde ist zu ungenau und führt auf zu kleine Werte $\Delta\varphi = -0''{,}000171 \times \times H_m \sin 2\varphi$; $\Delta\lambda = 0$. Die Berücksichtigung des tatsächlichen Schwerefeldes ist unerlässlich. Das Problem wird noch komplizierter, weil man zu seiner Lösung den Verlauf der Lotrichtung im Erdinnern zwischen der Erdoberfläche und dem Geoid kennen muss. Dieser Raum ist einer Messung nicht direkt zugänglich.

Dieses Problem der Bestimmung des Einflusses der Lotkrümmung auf astronomische Positionsbestimmungen hat in den letzten Jahren eine bemerkenswerte Weiterentwickelung erfahren.

Auf der HELMERTschen Kondensationsmethode für die äusseren Erdmassen aufbauend hat LAMBERT 1952 eine Formel für die Reduktion der astronomischen Ortsbestimmung wegen der Meereshöhe abgeleitet.

Er kam zu folgenden Werten:

$$\Delta\varphi = -\,0'',210\left(\frac{\partial\,\Delta g}{\partial\,x}\right)H$$

$$\Delta\lambda = -\,0'',210\left(\frac{\partial\,\Delta g}{\partial\,y}\right)H\sec\varphi$$

Δg ist die FAYE-Anomalie. x ist die Nord—Süd und y die Ost—West-Richtung. H ist die Meereshöhe.

LEDERSTEGER hat 1955 dieses Problem weiterentwickelt und eine neue Formel aufgestellt, die nicht mit den Ungenauigkeiten der HELMERTschen Kompensationsmethode behaftet ist. LEDERSTEGER geht von tatsächlichen horizon-

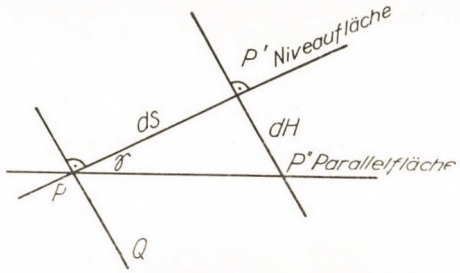


Bild 1

talen Oberflächengradienten der Schwere aus und kommt zu folgenden Formeln:

$$\Delta\varphi = -\,0'',2103\,\frac{dg}{dx}\,H, \quad \Delta\lambda = -\,0'',2103\,\frac{dg}{dy}\,H\sec\varphi$$

$\frac{dg}{dx}$ und $\frac{dg}{dy}$ sind die tatsächlichen Schweregradienten.

Auf diese wertvollen Arbeiten aufbauend will ich zu diesem Problem der Reduktion der astronomischen Ortsbestimmungen einige weitere Gedanken äussern.

Aus Bild 1 liest man für die Komponente der Lotkrümmung in der Richtung τ_s folgende Beziehung ab:

$$\tau_s = \frac{\overline{P'P''}}{PP'} = \frac{dH}{ds}$$

Denn bekanntlich ist die Lotkrümmung der Differentialquotient der orthometrischen Höhe. Diesen Differentialquotienten können wir aus dem horizon-

talen Gradienten der tatsächlichen Schwere entlang der Lotlinie ermitteln. Wir gehen dabei von der Tatsache aus, dass entlang einer Niveaufläche das Potential konstant ist. Drückt man dieses Potential durch die Schwere entlang der Lotlinie aus, so erhält man bekanntlich folgendes Integral:

$$W - W_0 = \int_{h=0}^{H} g_Q \, dh = \text{konst.}$$

Wir differenzieren und bekommen die Beziehung

$$g \cdot \frac{dH}{ds} = - \int_{h=0}^{H} \frac{dg_Q}{ds} \, dh$$

also

$$\tau_s = - \frac{1}{g} \int_{h=0}^{H} \frac{dg_Q}{ds} \, dh$$

Zur Bestimmung der Lotkrümmung brauchen wir also den horizontalen Gradienten der wahren Schwere zwischen dem Geoid und der Erdoberfläche entlang der Lotlinie.

Für die Berechnung der wahren Schwere g_Q im Erdinnern sind folgende Werte nötig:

1. Die Oberflächenschwere g im Punkt P.
2. Die Komponenten, die dadurch für die Vertikalintensität der Schwere im Punkt P entsteht, dass man die über dem Geoid gelegenen Erdmassen beseitigt (I_p).
3. Die strenge Freiluftreduktion für den Übergang vom Punkt P zum Punkte Q (Δg_Q).
4. Die Komponente, die dadurch für die Vertikalintensität der Schwere im Punkt Q entsteht, dass die Erdmassen wieder über dem Geoid in ihrer tatsächlichen Verteilung gelagert werden (I_Q).

g_Q ergibt sich also folgendermassen:

$$g_Q = g - I_p + \Delta g_Q + I_Q \, (H_Q)$$

Der horizontale Gradient von g_Q ist der Integrand in dem Integral, das die Lotkrümmung bestimmt.

$$\tau_s = - \frac{H}{g} \frac{dg}{ds} + \frac{1}{g} \int_{h=0}^{H} \frac{d}{ds} (I_p - I_Q) \, dh - \frac{1}{g} \int_{h=0}^{H} \frac{d \Delta g_Q}{ds} \, dh$$

Die Richtung der Differentiation liegt hier eigentlich in der Parallelfläche zum Geoid, sie kann aber in genügender Näherung auf der Niveaufläche des Oberflächenpunktes P liegen.

Das dritte Glied $\bar{\tau}_s$ auf der rechten Seite der letzten Gleichung wollen wir nun näher betrachten.

Nach einem bekannten Theorem von BRUNS gilt für den vertikalen Gradienten der Schwere

$$\frac{\partial g}{\partial h} = 2\frac{g}{\varrho} + 2\omega^2$$

g ist die Schwere, $\frac{1}{\varrho}$ die mittlere Krümmung $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)$ der Niveaufläche, ω ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde. So erhalten wir für den Integranden von $\bar{\tau}_s$

$$\frac{d\,\Delta g_Q}{ds} = 2\,(H - H_Q)\,\frac{d}{ds}\left[\frac{g_m\,(H_Q)}{\varrho_m\,(H_Q)}\right]$$

g_m und ϱ_m sind Mittelwerte für den Bereich der Lotlinie von $h = H_Q$ bis $h = H$.

Bei der letzten Formel wurde berücksichtigt, dass bei der Differentiation entlang einer Parallelfläche H und H_Q konstant sind. ω fällt wegen seiner Konstanz heraus.

So erhalten wir nach Berücksichtigung gewisser immer zulässiger Näherungen

$$\bar{\tau}_s = \frac{H^2}{R^2}\left(\overline{\frac{d\,\varrho_m\,(H_Q)}{ds}}\right) \cdot \varrho''$$

R ist der Erdradius, und in der Klammer steht der Mittelwert für den Bereich der Lotlinie zwischen $h = 0$ und $h = H$.

Wir wollen diesen Klammerausdruck abschätzen.

Es zeigt sich zunächst, dass der durch die Änderung der mittleren Krümmung des Erdellipsoids entstehende »normale« Teil genähert gleich Null gesetzt werden kann.

Wir setzen nun für

$$\left(\overline{\frac{d\,\varrho_m\,(H_Q)}{ds}}\right)$$

in erster Annäherung die horizontale Änderung des Krümmungsradius $\bar{\varrho}$ der an der Erdoberfläche liegenden Niveaufläche. Der durch die horizontale Änderung der Lotabweichungen verursachte Anteil kann erheblich grösser als der »normale« Anteil sein.

Wir erhalten, wie man leicht nachweisen kann

$$\frac{d\,\bar{\varrho}}{ds} \cong -\,R_{km}\,\frac{1}{32''}\,\frac{d}{ds}\,(\delta\lambda'')$$

$\delta\lambda$ ist der Zentriwinkel über einem Bogen von 1 km Länge auf der Niveaufläche

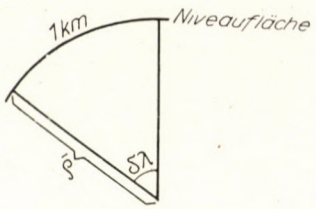


Bild 2

$\frac{d}{ds}(\delta\lambda)$ ist der zweite Differentialquotient der Lotabweichungen. Wir setzen für diesen Differentialquotienten den Wert 1″ je km und erhalten

$$\frac{d\bar{\varrho}}{ds} = -\frac{1}{32} R_{km}$$

und weiter

$$\bar{\tau}_s = -\frac{1}{32}\frac{H^2}{R}\varrho''$$

bei einer Meereshöhe von 1 km ergibt sich

$$\bar{\tau}_s \cong -1''$$

Aus den astronomischen Beobachtungen im astronomischen Nivellement im Meridian des St. Gotthard ist ersichtlich, dass

$$\frac{d}{ds}(\delta\lambda)$$

durchaus den Betrag von 1″ je km erreichen kann.

Tafel I gibt den Verlauf der meridionalen Lotabweichungen ξ zwischen den Stationen +43 km bis +3 km im astronomischen Nivellement im Meridian des St. Gotthard an. Die Intervalle betragen 1 km. Die zweiten Differenzen in der letzten Spalte sind die gesuchten Grössen $\frac{d}{ds}(\delta\lambda)$.

Wenn sich auch die beobachteten Lotabweichungen in Tafel I nicht alle auf dieselbe Niveaufläche beziehen und wenn auch die über dem Geoid liegenden Erdmassen nicht beseitigt sind, so kann man aus dem astronomischen

Tafel I

Punkt i	H_m	km	ξ	$\Delta\,\xi_i = \xi_{i+1} - \xi_i$	$\frac{d}{ds}(\delta\,\lambda) = \Delta\,\xi_{i+1} - \Delta\,\xi_i$
0	650	+43	− 2″2		
				− 0″5	
1	700	42	− 2,7		− 0″4
				− 0,9	
2	750	41	− 3,6		− 0,5
				− 1,4	
3	800	40	− 5,0		+ 0,2
				− 1,2	
4	700	39	− 6,2		+ 0,2
				− 1,0	
5	600	38	− 7,2		+ 0,9
				− 0,1	
6	500	37	− 7,3		+ 0,9
				+ 0,8	
7	450	36	− 6,5		+ 3,9
				+ 4,7	
8	300	35	− 1,8		− 2,4
				+ 2,3	
9	450	34	+ 0,5		− 1,8
				+ 0,5	
10	500	33	+ 1,0		0,0
				+ 0,5	
11	550	32	+ 1,5		+ 0,2
				+ 0,7	
12	600	31	+ 2,2		+ 0,1
				+ 0,8	
13	650	30	+ 3,0		0,0
				+ 0,8	
14	650	29	+ 3,8		+ 0,3
				+ 1,1	
15	700	28	+ 4,9		− 0,1
				+ 1,0	
16	700	27	+ 5,9		− 0,8
				+ 0,2	
17	750	26	+ 6,1		+ 2,2
				+ 2,4	
18	700	25	+ 8,5		− 0,9
				+ 1,5	
19	1050	24	+ 10,0		− 7,9
				− 6,4	
20	1150	23	+ 3,6		+ 6,4
				0,0	
21	950	22	+ 3,6		+ 0,7
				+ 0,7	
22	950	21	+ 4,3		− 1,4
				− 0,7	
23	950	20	+ 3,6		+ 2,9
				+ 2,2	
24	1000	19	+ 5,8		− 1,5
				+ 0,7	
25	1150	18	+ 6,5		− 3,0
				− 2,3	
26	1100	17	+ 4,2		+ 3,3
				+ 1,0	
27	850	16	+ 5,2		0,0
				+ 1,0	
28	950	15	+ 6,2		− 0,9
				+ 0,1	
29	1150	14	+ 6,3		− 5,0
				− 4,9	
30	1250	13	+ 1,4		+ 1,6
				− 3,3	
31	1050	12	− 1,9		+ 3,3
				0,0	
32	800	11	− 1,9		+ 1,5
				+ 1,5	
33	600	10	− 0,4		+ 1,2
				+ 2,7	
34	500	9	+ 2,3		+ 0,3
				+ 3,0	
35	550	8	+ 5,3		+ 1,0
				+ 4,0	
36	500	7	+ 9,3		+ 4,9
				+ 8,9	
37	550	6	+ 18,2		− 4,5
				+ 4,4	
38	800	5	+ 22,6		− 6,2
				− 1,8	
39	1600	4	+ 20,8		− 6,0
				− 7,8	
40	1500	3	+ 13,0		

Nivellement im Meridian des St. Gotthard durchaus das Resultat ableiten, dass das Glied $\bar{\tau}_s$ die Beobachtungsgenauigkeit erheblich übersteigen und nicht immer vernachlässigt werden kann. LEDERSTEGER hat das Glied $\bar{\tau}_s$ nicht berücksichtigt. Im Punkt 19 erreicht $\bar{\tau}_s$ sogar den Betrag von ca 8″, obwohl dort die Meereshöhe nur 1050 m beträgt.

Bei der Anwendung isostatischer Reduktionen für die Schwere dürfte $\bar{\tau}_s$ im allgemeinen am kleinsten sein.

DISKUSSION

Prof. W. K. HRISTOW, SOFIA

Die Festsetzung der astrogeodätischen Koordinaten von Topozentren, oder besser gesagt, wie man eigentlich das Gewicht und die Sache des Geoids bestimmen kann, ist im Augenblick eine hoffnungslose Sache. Richtig könnte man das erst machen, wenn die Idee von JULES VERNE, in die Erde hineinzugehen, einmal verwirklicht werden wird. Bis dahin kann man das Gewicht nicht bestimmen und man kann nicht eine Reduktion auf das Gewicht machen.

Es handelt sich um einen kleinen Winkel zwischen diesen beiden Richtungen, und wenn man diese nicht bestimmen kann, wie kann man von der Lotrichtung zum Geoid sprechen? Eine solche Reduktion ist unausführbar. Deswegen muss man auch hier, bei dieser Frage an das Geoid denken und die Topozentren muss man in der gleichen Weise behandeln.

Wenn man zu den normalen statt der orthometrischen Gewichte übergegangen ist, muss man bei der Reduktion zum Quasigeoid übergehen und zur entsprechenden Lotabweichung, so dass meiner Ansicht nach die Untersuchung in dieser Richtung fortgesetzt werden muss. Ich wiederhole also : Reduktion auf das Quasigeoid und vom Quasigeoid auf das betreffende Referenzellipsoid.

Prof. A. TÁRCZY-HORNOCH, SOPRON

Es ist mir eine Freude, festzustellen, dass auch die heutigen Vorträge sehr interessante Probleme aufgeworfen haben. Ich möchte hier in erster Reihe des Vortrages von Herrn Dr. ARNOLD gedenken, in dem sehr viele und sehr interessante Gedanken enthalten sind, welche uns noch eine lange Zeit hindurch zum Denken Anlass geben werden. Er erwähnte auch, es ist Schade, dass Professor LEDERSTEGER nicht erschienen ist ; wäre er hier gewesen, so hätte sich eine weitere interessante Diskussion entwickeln können.

ÜBER EINIGE FRAGEN DER ASTROGEODÄSIE IN UNGARN 1948—55

Prof. B. MILASOVSZKY
MISKOLC

Die Ermittlung der astronomischen Länge, der Breite und des Azimuts der Laplace-Punkte im ungarischen Hauptdreiecksnetze obliegt seit Jahrzehnten einer kleinen Gruppe für Astrogeodäsie der Ungarischen Landesaufnahme.

Die in den Kriegswirren vernichtete und im Jahre 1948 neu ins Leben gerufene, mit neuen Instrumenten ausgestattete Gruppe führte zur Breitenbestimmung an Stelle der bisher gebrauchten STERNECKschen Methode jene von HORREBOW-TALCOTT ein.

Vorher erfolgten eingehende Untersuchungen in der Richtung, inwiefern letztere Methode der bisher gebrauchten überlegen sei. Zwei Beobachter machten mit je einem Instrument nebeneinander zahlreiche Nächte hindurch ausgedehnte Beobachtungsserien nach beiden Methoden und zwar auf mehreren Stationen. Die mittleren Fehler der ausgeglichenen Breitenwerte der Stationen gestalteten sich im Verhältnis 1:2 zugunsten der HORREBOWschen Methode.

Dabei wurden die Breite φ und der Revolutionswert R der Mikrometerschraube als zwei Unbekannte mittels gemeinsamer Ausgleichung der gemessenen Zenitdistanzdifferenzen bestimmt, und zwar entsprechend der Fehlergleichung:

$$v_\delta + v_m = \left(-\frac{m_0 - m_w}{2}\right) dR + d\varphi + \varphi_0 - \left\{\frac{\delta_s + \delta_N}{2} + \frac{R_0}{2}(m_0 - m_w) + \overline{Refr}\right\},$$

oder in kürzerer Schreibweise mit der fingierten Verbesserung λ,

$$\lambda_i = M_i\, dR + d\varphi - (\varphi_i - \varphi_0)\,,$$

wobei in der ersten Gleichung m die verbesserten Ablesungen der Mikrometerschraube, R den Revolutionswert der Schraube und δ die Deklinationen der Sterne bedeuten. Für den mittleren fingierten Fehler der aus den Beobachtungen hervorgehenden Zenitdistanzdifferenzen leiteten wir die Formel

$$\mu_\lambda^2 = \frac{\mu_s^2 + \mu_N^2}{4} + \mu_m^2$$

ab, worin μ_s, μ_N die mittleren Fehler der Deklinationen und μ_m jenen der Mikrometerablesungen bedeuten.

Seitens der Schweizerischen Geodätischen Kommission (Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, Band XXIII, Seite 104) hat man schon früher den Schraubenwert R neben der Polhöhe als zwei Unbekannte in eine Ausgleichung der beobachteten Zenitdistanzdifferenzen eingeführt, jedoch bloss mit einer Verbesserung in jeder Gleichung und mit dem mittleren Fehlerausdruck :

$$\mu^2 = \frac{\mu_s^2 + \mu_N^2}{4} + \frac{\mu_m^2}{n_P},$$

worin n_P die Anzahl der Beobachtungen irgendeines Sternpaares auf der betreffenden Station bedeutet. Unserer Ansicht nach wäre die letztere Fehlerformel erst begründet, wenn man nicht die beobachteten φ_i-Werte selbst, sondern deren, aus den einzelnen Horrebow-Sternpaaren gebildeten Mittelwerte in die Ausgleichung einführen würde. Denn die Genauigkeit je einer Beobachtung irgendeines Sternpaares kann nicht davon anhängig sein, ob dasselbe Sternpaar auch zukünftig beobachtet werden wird.

Im nächsten Jahre, 1950, haben wir diese Ausgleichung der Meridianzenitdistanzdifferenzen derart modifiziert, dass diese ausser φ und R noch auf die Ermittlung einer dritten Unbekannten, und zwar der Libellenangabe L der Horrebow-Libellen erstreckt wurde. Dies wurde durch den Umstand begründet, dass die wiederholte Ermittlung der Libellenangabe mittels Libellenprüfer inmitten der Feldarbeiten aus mehrerlei Gründen als bedenklich erschien. Die fingierten Gewichte der Verbesserungsgleichungen wurden auch diesmal entsprechend berücksichtigt.

Zu den Längenbestimmungen übergehend, sei hier vorerst bemerkt, dass es sich bei unseren Laplace-Punkten um sogenannte »Einbeobachterlängen« handelt. Zur Ermittlung des Uhrstandes und des Azimutfehlers k werden abendlich die Meridianzeitdurchgänge von 10—15 zenitnahen »Zeitsternen« und noch 2—5 Polsternen am Durchgangsinstrument mit unpersönlichem Mikrometer beobachtet. Parallel werden die rythmischen Zeitzeichen nach der Hännischen Methode aufgenommen.

Bekanntlich kann dann die Berechnung von k und ΔU nach mehreren Methoden erfolgen. Lehrreich und gewunden ist der Weg, den in dieser Hinsicht z. B. die Schweizerische Geodätische Kommission bei ihren einschlägigen Arbeiten durchmachte. Demnach wurde dort bis 1935 die von HERR und TINTER, wie auch ALBRECHT angegebene klassische Methode gebraucht. Später ging man allmählich zur Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen über. Dabei wurde dort auch über die Gewichtsfrage der Zeitdurchgänge, über das Sternprogramm und namentlich über die Rolle der Polsterne eingehend debattiert und es wurden auch entsprechende Rechnungen durchgeführt.

Anhand unserer eigenen Beobachtungen haben wir nun diesen Fragenkomplex weiter verfolgt und sowohl die Modifikationen der Beobachtung wie auch jene der Rechnung kritischen Betrachtungen unterzogen und zwar im wesentlichen nach folgenden Gesichtspunkten : 1. Ob ausser den Zeitsternen überhaupt noch Polsterne zu messen sind oder ob man von dieser mühseligen Mehrarbeit absehen könnte. 2. Ob man die beobachteten Polsterne nur zur Ermittlung von k verwende oder es besser wäre, diese auch zur Bestimmung des Uhrstandes selbst heranzuziehen. 3. Soll man k und ΔU mittels Näherungsmethoden oder gemäss der strengen Ausgleichungsrechnung ermitteln? 4. Soll man dabei alle Sterndurchgänge als gleich genau betrachten oder denselben in Abhängigkeit von den Deklinationen verschiedene Gewichte beifügen? — Diesen Gesichtspunkten folgend wurden insgesamt 18 Variationen der Ermittlung von k und ΔU in Betracht gezogen, von denen einige allerdings nur theoretischen Wert haben konnten.

Auf Grund der semidefinitiven und definitiven Zeitzeichenkorrektionen der Hefte Bulletin Horaire, Jahrgang 1949, führten wir des weiteren Berechnungen durch, um die mittleren Fehler der mit semidefinitiven und definitiven Korrektionen versehenen rythmischen Zeitzeichensendungen festzustellen. Es handelte sich um die unserseits damals benutzten drei Sendungen : GKU_3 (Rugby) 18^h ; TMD (Pontoise) 20^h und 22^h5 W. Z. Bekanntlich tauchte die Frage auch während den Längenbestimmungen des Baltischen Ringes auf. (Veröffentlichungen der Baltischen Geodätischen Kommission Helsinki 1934 und Tallin—Tartu 1935.) Dort wurden Sendefehler vom Werte $0^s,01$ und $0^s,0047$ gefunden. Unser Resultat war (für das Jahr 1949) $0^s,005$. Mit dieser Frage in Zusammenhang erinnern wir daran, dass man den Uhrgang bekanntlich laut Formel

$$g = \frac{\Delta U_2 - \Delta U_1}{U_2 - U_1}$$

bildet, wobei die U- und ΔU-Werte mit Hilfe der Zeitzeichenempfänge erhalten werden. Auf Grund der B. I. H.-Hefte haben wir deshalb auch den mittleren Emissionsfehler der *Differenz* von zwei Uhrständen im Falle der angegebenen drei Sendungen bestimmt. Es ergab sich hierbei das nicht uninteressante Resultat, dass die mittleren Sendefehler einerseits und die mittleren Fehler der *Differenzen* von zwei benachbarten Sendungen von ein und derselben Grössenordnung sind : $0^s,005$. Dies bekräftigt den auch bei uns üblichen Gebrauch, wonach zur Ermittlung exakter Längenwerte zwar die definitiven Zeichenkorrektionen unerlässlich sind, die hierzu notwendigen Uhrgänge und Uhrstände jedoch, die den überwiegenden Teil der Rechenarbeit ausmachen, schon im Besitze der bedeutend früher bekannten semidefinitiven Korrektionen berechnet werden können.

Im Gange der Längenmessungen standen wir gleich am Anfang im Jahre 1949 insofern einem besonderen und zwar unliebsamen Fall gegenüber, da nach einem schwierigen Transport unsere gute alte Hosersche Pendeluhr, die auf den Feldstationen sowohl als Beobachtungsuhr, wie auch als Zeitzeichenuhr zu dienen hatte, plötzlich schwere Störungen aufwies, die es damals nicht gelungen ist, zu beheben. So waren wir dieses Jahr gezwungen, zur Längenbestimmung auf zwei Stationen ein kleines Nardinsches Deck-Chronometer zu verwenden. Vermutlich als Folge einer nicht ausreichenden Temperaturkompensation zeigte diese kleine Uhr während der Sommernächte einen abnormal grossen, ungleichmässigen Gang, der nicht einmal binnen den $3\frac{1}{2}$ Stunden der Sternbeobachtungen als konstant hätte gelten können. Wäre das nämlich der Fall gewesen, so hätte man normalerweise den Uhrstand ΔU für den Zeitmoment $T = U - E$ irgendeines Zeitzeichenempfanges (E ist die mittlere Epoche der Sternbeobachtungen), wie bekannt, laut

$$\Delta U_T = \Delta U_E + (U - E)\, g$$

in Rechnung stellen können, wo g ein konstanter Uhrgang ist. Dies erschien damals in unserem Falle jedoch als unzulässig, was schon in den ungewohnt grossen mittleren Fehlern der berechneten abendlichen Uhrstände zum Vorschein kam. Auch zeigten die aus den Beobachtungen herrührenden einzelnen Uhrstandswerte

$$\Delta U_i = \alpha_i - U_i$$

in Funktion der Zeit graphisch aufgetragen, deutlich einen parabelartigen Verlauf. So wurde nach mehreren Versuchsrechnungen die Uhrstandsformel

$$\Delta U_T = \Delta U_E + (U - E)\, x + (U - E)^2 y$$

als bedeutend besser zutreffend gefunden. Die Unbekannten x und y lassen sich aus den rythmischen Zeitzeichenempfängen des betreffenden Beobachtungsabends ermitteln, nachdem man jeden aus den Empfängen erhaltenen Uhrstand ebenfalls in der Form

$$\Delta \tilde{U} = \zeta + (U - E)\, x + (U - E)^2 y$$

schreiben kann. Aus mehreren abendlichen Gleichungen dieser Form kann man nämlich die nicht notwendige Unbekannte ζ eliminieren und dann x und y ermitteln. Endlich erhält man ΔU_E aus den abendlichen beobachteten Meridianzeitdurchgängen. Der sehr wesentliche Genauigkeitsunterschied, der einerseits zwischen den Zeitzeichensendungen und -empfängen, anderseits zwischen

den beobachteten Sterndurchgängen besteht, spielt hierbei eine bedeutende Rolle.

Dementsprechend wurde die Zeitbestimmung durchgeführt und so gelang es denn auch, den mittleren Fehler des Stationslängenwertes auf die Hälfte des laut konventioneller Rechnung erhaltenen ursprünglichen Fehlerbetrages herabzudrücken ($0^s,006$ gegen $0^s,0116$). Die Kontrolle des so ermittelten Stationslängenwertes auf Grund der Laplaceschen Gleichung gestaltete sich als zufriedenstellend.

DISKUSSION

Prof. J. KRAJČI, BRATISLAVA

Ich habe mit grossem Interesse den abgelaufenen Vorträgen zugehört und sie studiert, und es sei mir gestattet einiges zuzufügen.

Zu dem Vortrag des Herrn MILASOVSZKY möchte ich bemerken, dass wir in der ČSR ähnliche Erfahrungen über den Chronometergang gehabt hatten wie es Prof. MILASOVSZKY erwähnte.

Die Verbesserung des Chronometerganges haben wir auf einfachem Wege so gelöst, dass wir mit Hilfe eines einfachen Thermostaten die Konstanten des Ganges feststellten. Auf diese Art und Weise gelang es uns den Wert der mittleren Variation von 0,4 auf 0,05 der Zeitsekunde zu vermindern.

Man kann also die vorgelegte Arbeit der ungarischen Fachkollegen gewissermassen als bahnbrechend ansehen und deswegen möchte ich gerne auch noch weitere Erfahrungen, eventuell Literaturhinweise von den ungarischen Fachkollegen erhalten. Deshalb wünsche ich mit Ihnen in dieser Hinsicht einen engeren Kontakt anzuknüpfen.

Prof. A. TÁRCZY-HORNOCH, SOPRON

Mit grossem Interesse nahmen wir die Mitteilung meines Herrn Vorredners entgegen, dass man in der Tschechoslowakei den unlinearen Uhrgang durch Einschaltung eines Thermostaten zu korrigieren versucht hatte.

Unsere werten Gäste werden in Sopron Gelegenheit haben, in meinem Institut eine Versuchsvorrichtung vorzufinden, die in unserer Werkstatt hergestellt wurde und mit welcher schon seit etwa $^3/_4$ Jahren Versuche im Gange sind zu erproben, ob es nicht möglich wäre, den unregelmässigen Gang des Chronometers durch Anwendung eines Thermostaten zu beheben.

Zusätzlich möchte ich nur etwas über einen Umbau des Theodolits Wild T-4 sagen.Wir haben versucht, diesen Theodolit so umzubauen, dass der Oberteil eine Ergänzung zu Passagebeobachtungen erhielt. Nach den bisherigen Messungen konnte man dadurch die Genauigkeit bemerkenswert steigern.

I. RÉDEY, BUDAPEST

In Zusammenhang mit der geographischen Ortsbestimmung möchte ich auf einen Umstand aufmerksam machen, der eigentlich tagtäglich vor dem Kongress hätte erwähnt werden sollen.

Betrachten wir die Erde in ihrem Ursprung und ihrer Entwicklung, dann ist es uns klar, dass ihre Kruste im Laufe der Zeiten Falten bildete, Risse bekam und ihren Platz veränderte. Diese Krustenbewegung äussert sich nicht bloss in der Höhe, wie es die bisherigen Vorträge behaupteten, sondern auch in der horizontalen Verschiebung der Basispunkte. Diesbezüglich möchte ich hier ein einziges Beispiel bringen.

In der Nähe von Budapest ergab die auf einem gut stabilisierten Instrumentenpfeiler wiederholt ausgeführte Längenbestimmung folgende Ergebnisse:

1935	18° 57′	52,005″
1939		51,105
1951		50,940
1952		50,910
1953		50,850
1954		49,890

Mit Ausnahme der ersten Messung wurden alle übrigen mit dem Instrument Wild T 4 ausgeführt.

Ohne die Messungen eingehend bekanntzugeben, zu kritisieren und zu bewerten, fühle ich mich dazu berechtigt zu bemerken, dass die Messungen nicht zufälligerweise stets kleinere Resultate ergeben. Dies bedeutet einerseits, dass unsere Basispunkte auch im Verhältnis zueinander in Bewegung sind — die angegebenen Werte zeigen die Entfernung zwischen Greenwich und Budapest an —, andererseits, dass die Erdkonfigurationen, die kontinentalen Tafeln sich auch auf der Oberfläche der Erde und somit des Erdellipsoids bewegen. Diese Bewegung ist nicht so klein, dass sie vernachlässigt werden kann.

Demzufolge muss auch dies sowohl bei den Triangulierungsberechnungen als auch besonders bei der Verbindung der Netze zwischen den Ländern beachtet werden, denn der Zeitpunkt der bei diesen Arbeiten berücksichtigten Messungen ist nicht gleichgültig.

All dies beweist, dass mit der Zeit nicht bloss die Höhen, nicht bloss die Schwerkraft, sondern auch die geographischen Koordinaten variieren. Dies kann folgendermassen ausgedrückt werden:

$$\varphi = f_1(t); \quad \lambda = f_2(t); \quad H = f_3(t); \quad g = f_4(t)$$

Dementsprechend kann erklärt werden, dass die höhere Geodäsie nicht allein die Bestimmung dieser Werte auf einen Zeitpunkt zur Aufgabe hat, sondern auch, dass sie auf den Hauptbasispunkten die die Veränderungen ausdrückenden Funktionen bestimmen soll. Wenn diese bekannt wären, dann könnten die Daten eines Hauptbasispunktes in irgendeinem beliebigen Zeitpunkt folgendermassen ausgedrückt werden:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \int_{to}^{ta} f_1(t)\,dt; \qquad H_1 = H_0 + \int_{to}^{ta} f_3(t)\,dt;$$

$$\lambda_1\,\lambda_0 + \int_{to}^{ta} f_2(t)\,dt; \qquad g_1\,g_0 + \int_{to}^{ta} f_4(t)\,dt$$

Es ergibt sich demnach von selbst die Anleitung, auf den Hauptbasispunkten zeitweise nicht bloss den Wert der Höhe und der Schwerkraft zu messen, sondern auch die geographischen Koordinaten, damit wir die zeitlichen Veränderungen dieser Grundwerte je eingehender kennenlernen.

Empfehlungen

des Geodätischen Kongresses, veranstaltet zwischen 18.—21. September 1956, in Budapest.

1. Die Teilnehmer der in Budapest vertretenen acht Länder sind darüber einig, dass eine jährliche Zusammenkunft der Wissenschaftler auf dem Gebiet der Geodäsie und der benachbarten Wissenschaften für die Weiterentwicklung der Wissenschaft ausserordentlich nützlich und anzustreben ist, da die wissenschaftlichen Probleme und die damit verbundenen praktischen Arbeiten die Zusammenarbeit von mehreren Ländern erfordern. Durch diese regionale Zusammenarbeit wünschen die vertretenen Länder die Gesamtheit der geodätischen Wissenschaften und ihrer Grenzgebiete zu fördern.

Die Teilnehmer danken der Ungarischen Akademie der Wissenschaften für die Organisierung dieses auf Iniziative des Prof. Dr. TÁRCZY-HORNOCH veranstalteten geodätischen Kongresses, nehmen das Angebot von Herrn Prof. Dr. BÖHM dankbar an und ersuchen ihn, den nächsten Kongress im Jahr 1957 in der Tschechoslowakei zu organisieren.

2. Die Teilnehmer stellen fest, dass die bisherige wissenschaftliche Dokumentation auf dem Gebiet der Geodäsie nicht ganz zufriedenstellend ist, und nehmen mit Freude zur Kenntnis, dass in der DDR die deutschsprachige Dokumentation auch auf das geodätische Gebiet ausgebaut wird. Sie ersuchen die Vertreter der DDR, die diesbezüglichen Verhandlungen mit den Interessierten zu fördern.

3. Die Teilnehmer nehmen zur Kenntnis, dass die Tabellen für das Krassowsky-Ellipsoid für die Zone 40° bis 55° durch die Mitarbeiter und Mitglieder der Bulgarischen und der Ungarischen Akademie der Wissenschaften voraussichtlich Ende dieses Jahres fertiggestellt werden und die Ungarische Akademie der Wissenschaften wird ersucht, diese Arbeit im Jahr 1957 herauszugeben.

4. Die Teilnehmer ermächtigen das Vorbereitungskomitee des nächsten Kongresses, zur Herausgabe des Kongressmaterials, die wichtigsten Ergebnisse und Empfehlungen der einzelnen Sektionen (Kolloquien) zusammenzufassen.

5. Die Teilnehmer kennen die Gründe nicht, weshalb die nivellistischen und Gravitations-Netze mit den übrigen Teilen Europas nicht zusammengeschlossen werden, da dieser Zusammenschluss nicht nur eine wesentliche wissenschaftliche, sondern auch eine grosse wirtschaftliche Bedeutung hat, insbesondere für geotektonische Bewegungsvorgänge, und sie empfehlen deshalb, solche Verbindungen zu fördern.

6. Die Teilnehmer nehmen mit Genugtuung zur Kenntnis, dass die neuerliche absolute Bestimmung der Schwere in Potsdam im Gange ist, und wünschen Potsdam als zentralen fundamentalen gravimetrischen Punkt auch weiterhin beizubehalten. Gleichzeitig halten sie es für erforderlich, dass Potsdam mit den anderen Fundamentalpunkten der Gravitation zeitgemäss verbunden werde. Dafür ist es aber erforderlich, dass Potsdam zum Anschluss allen Ländern zugänglich werde.

DIE ERGEBNISSE DER BEOBACHTUNGEN DES BEI NAGYCENK ERRICHTETEN GEOPHYSIKALISCHEN OBSERVATORIUMS VON JUNI BIS DEZEMBER 1957

Prof. Dr. h. c. Dr. A. TÁRCZY-HORNOCH
O. MITGLIED D. UNG. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, DIREKTOR DES GEOPHYSIKALISCHEN FORSCHUNGSLABORATORIUMS DER UNG. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, SOPRON

Das Internationale Geophysikalische Jahr machte in Ungarn die Errichtung eines zeitgemässen Observatoriums für Erdstrommessungen erforderlich. Die Ungarische Akademie der Wissenschaften stellte die erforderlichen Mittel ihrem Geophysikalischen Forschungslaboratorium bereitwillig zur Verfügung und so konnte das Observatorium in der Nähe von Sopron, bei Nagycenk ($\varphi = 47°37'58{,}38'' \pm 0{,}21''$ N; $\lambda = 16°43'15{,}68'' \pm 0{,}12''$ EGr) ihre Tätigkeit am 27. Juni 1957 beginnen. Die nähere Beschreibung des Observatoriums ist im Band 39 der Zeitschrift »Geofisica pura e applicata« (Das Erdstrom-Observatorium bei Nagycenk [Ungarn] von A. ÁDÁM und J. VERŐ jun.) zu finden. Hier folgen die Erläuterungen und ausführlichen Beobachtungsergebnisse der Erdstrommessungen von Juni bis Dezember 1957.

Es mag bemerkt werden, dass das Geophysikalische Observatorium des Geophysikalischen Forschungslaboratoriums zu Sopron der Ung. Akademie der Wissenschaften im Begriffe ist, die Messung der Erdmagnetischen Elemente und der Luftelektrizität, sowie der Ionosphäre auszubauen, so dass wir später auch die diesbezüglichen Ergebnisse fortlaufend zu veröffentlichen in der Lage sein dürften.

Vorderhand folgen hier aber nur die Ergebnisse der Erdstrommessungen in der Bearbeitung von JOSEF VERŐ jun.

Sopron, den 26-ten Apr. 1958.

ERLÄUTERUNGEN ZUM BERICHT DES OBSERVATORIUMS ÜBER DIE ERGEBNISSE DER ERDSTROMREGISTRIERUNGEN VOM 1. 8. 1957 BIS 31. 12. 1957 BEI NAGYCENK IN UNGARN

I. Diese Tabelle enthält in Zeitabschnitten von je drei Stunden die auf die allgemeine Tätigkeit bezüglichen Kennzahlen K_t und die für die tägliche Tätigkeit der einzelnen Frequenzklassen charakteristischen Kennzahlen K_1—K_5.

K_t-Skala ist linear; 1,8 mV/km entspricht einem Grad. Die K_1—K_5 Skalen sind nicht linear.

K / Frequenz Kl.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	—	0,2	0,5	0,9	1,3	1,8	2,2	2,9	4,5	5,4
2	—	0,5	1,0	1,8	2,7	3,6	4,5	6,3	7,2	10,8
3	—	1,2	2,2	3,6	5,4	6,3	9,0	12,5	18,0	21,5
4	—	1,5	3,0	4,5	7,2	9,0	11,5	16,2	21,5	29,0
5	—	1,8	3,5	5,5	8,0	10,5	14,5	21,5	27,0	36,0

Die Werte in Klammern der folgenden Tabelle enstammen mangelhaften Daten.

Im Monatsdurchschnitt figurieren die K_t-Werte gesondert für die Nord- und für die Ost-Komponenten.

II. Diese Tabelle enthält die Ermittlung der D, Q, q,-Tage. Die Auswahl der D, Q, q-Tage geschah auf Grund von $\Sigma[K_t(O) + K_t(N)]$.

III. Diese Tabelle enthält die Monats- und die Jahreswerte für jede einzelne Stunde des Tages. Sie gibt die Jahresdurchschnittswerte für die durchschnittlichen, gestörten und ruhigen Tage an.

1—5. Die Durchschnittsamplitude der 5 Frequenzklassen (0—2′, 2—6′, 6—12′, 12—24′, 24—60′) in 10^{-5} V/km.

6. Die durchschnittliche Elektroden-Potentialdifferenz in 10^{-5} V/km. Das Elektrodenpotential ist auf die langperiodische Variation korrigiert.

7. Die Totalvariation aus den letzten 4 Frequenzklassen in 10^{-4} V/km.

8—13. Das vorherrschende Gepräge der 5 Frequenzklassen bzw. der stürmischen Stunden (13) in Perzenten der Tage des Monats.

Wir wählten als gestörte Tage jene Tage aus, an welchen K_t höchstens einmal 3 ist; als ruhige Tage betrachten wir Tage, wenn K_t immer unter 3 bleibt.

An gestörten Tagen ist die herrschende Frequenz nur in Prozenten der sturmfreien Stunden ausgedrückt. Die Zahl der Stürme haben wir mit den Obigen verglichen.

IV. Diese Tafel enthält die Richtung der dreistündlichen mittleren Amplituden.

V. In dieser Tafel haben wir bei der harmonischen Analyse der Frequenzklassen auch die Tiefe der Tagesmodulation angegeben. Stellenweise liegt diese über 100%. Der Grund hierzu liegt darin, dass die höheren Harmonischen das Minimum mässigen können.

VI. a) Enthält die Zeitpunkte der Störungen.

b) Gibt die Kennwerte der Störungen nach der Tabelle I an.

VII. Zeigt die schnellen Registrierungen an.

1—4. a_1 0 — 0,1 mV/km
a_2 0,1 — 1 ,,
a_3 1 — 2 ,,
a_4 2 — ,, die Zahl der Amplituden im gegebenen Intervall pro Stunde.

5. Die Summe $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

6—10. Das 100fache der Durchschnittskennzahlen (0 keine, 1 in Spuren, 2 gut wahrnehmbar, 3 herrschend) der Frequenzklassen 0—8″, 8″—15″, 15″—30″, 30″—1′, 1′—2′ (1a—1e).

11. Die Formel der Durchschnittsamplitude a in 10^{-3} V/km ist :

$$a = \frac{0{,}1 \cdot a_1 + 0{,}5\, a_2 + 1{,}5\, a_3 + 3\, a_4}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}$$

Tabelle 1

I. Stürme
II. Kleinere Störungen ohne Bai
III. Kleinere Störung mit Bai
IV. Bai ohne Störung
V. Starker Einzelimpuls
VI. 1,5 Wellen
VII. Zwei Wellen
VIII. Regelmässige Variationen
IX. Kurze Pulsationen
X. Nadeln.

I.	A 0 — 2 h B 2 — 6 h C 6 — h	Richtung des Anfangsimpulses N O a + + b + — c — + d — —		Dauer in Zehntelstunden
II.	Verhältnis der zwei Komponenten			
III. 1. Teil (Puls.)	α N = 0,9—1,1.O β N = 0,7—0,9.O			
2. Teil (Bai)	Amplitude in mV/km γ N = 0,4—0,7.O	e + Ø f — Ø g Ø + h Ø —	Phasensituation *A* O geht vor um 90° *B* „ „ „ 45° *C* „ „ „ 15° *D* „ „ „ 0° *E* O geht nach um 15° *F* „ „ „ 45° *G* „ „ „ 90°	
IV.	δ N < 0,4.O ε N = Ø			
V.	ζ N = 1,1—1,5.O			
VI.	η N = 1,5—2,5.O ϑ N > 2,5.O			
VII.	ι O = Ø			
VIII.	Frequenz β 2— 6 Min. γ 6—12 „ δ 12—24 „			
IX.				

X. »Nadeln« (Amplitude, Verhältnis der zwei Komponenten und Richtung wie oben). (Nachträglich ausgesucht und eingereiht.)

I.

Die auf die allgemeine Tätigkeit bezüglichen Kennzahlen (K_t), sowie für die tägliche Tätigkeit der einzelnen Frequenzklassen charakteristischen Kennzahlen K_1—K_5.

August, 1957

Tag	K_t	Summe	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
1.							
2.	211	(11)	6	4	4	2	3
3.	31222996	34	7	5	3	3	2
4.	93512212	25	7	5	3	2	2
5.	31211334	18	7	4	2	1	1
6.	42835476	39	6	5	3	4	3
7.	21122111	11	4	3	2	2	2
8.	12323234	20	6	2	2	4	4
9.	24439415	32	7	4	5	4	2
10.	26111112	15	1	4	2	3	3
11.	31112211	12	6	2	2	3	3
12.	22459946	41	5	3	3	2	4
13.	35536347	36	4	3	3	3	5
14.	12214432	19	7	2	2	2	3
15.	333	(24)	6	3	2	2	3
16.	22112	(13)	6	3	2	1	4
17.	10013401	10	5	2	2	3	1
18.	22355112	21	1	5	1	2	3
19.	33432111	18	2	4	3	2	3
20.	11112326	17	3	4	2	1	5
21.	34411241	20	1	4	1	3	6
22.	00 3011	(7)	2	3	2	1	2
23.	11112111	9	3	3	1	2	2
24.	00112101	6	1	3	1	1	2
25.	01122323	14	2	3	2	2	3
26.	2123 232	(17)	4	4	1	2	4
27.	44566444	37	7	8	5	5	5
28.	23434232	23	7	6	4	3	3
29.	42222199	31	6	4	4	4	2
30.	99554642	44	5	6	7	6	4
31.	11524599	36	6	4	3	3	6

Monatsdurchschnitte :		
	K_t(N)	2,628
	K_t(O)	2,362
	$K_{(1)}$	4,67
	$K_{(2)}$	3,83
	$K_{(3)}$	2,63
	$K_{(4)}$	2,60
	$K_{(5)}$	3,17

September, 1957

Tag	K_l	Summe	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
1.	99999613	55	?	?	?	?	?
2.	79998	(67)	?	?	9	6	5
3.	99999999	72	?	?	8	6	9
4.	956 9	(58)	?	?	7	3	7
5.	9599	(64)	4	4	8	6	4
6.	94349952	45	4	5	4	5	5
7.	16344322	25	6	4	5	4	4
8.	21234322	19	7	2	4	2	4
9.	43336442	29	6	4	3	3	5
10.	12223222	16	6	3	3	2	4
11.	11322111	12	5	4	2	2	3
12.	12223415	20	4	4	2	3	3
13.	99999965	65	?	9	6	8	6
14.	55889415	45	7	5	7	6	3
15.	53234	(27)	0	5	2	5	5
16.	43632151	25	9	6	3	3	4
17.	21232451	20	4	4	3	4	5
18.	53235122	23	4	4	3	4	4
19.	11342110	13	7	3	2	2	4
20.	10241222	14	5	4	1	3	3
21.	312799	(41)	3	5	4	3	4
22.	57969	(58)	1	5	5	6	7
23.	99999598	67	?	?	?	?	9
24.	54697246	43	7	4	6	5	6
25.	22344311	20	9	5	4	4	4
26.	2 33211	(18)	7	4	2	3	4
27.	10222111	10	4	3	2	3	4
28.	22432131	18	2	4	1	3	4
29.	46649899	55	?	6	5	6	4
30.	99 59978	(64)	6	9	5	7	7

Monatsdurchschnitte :

K_l(N)	4,213
K_l(O)	3,872
$K_{(1)}$	5,13
$K_{(2)}$	4,35
$K_{(3)}$	3,52
$K_{(4)}$	3,83
$K_{(5)}$	4,35

Oktober, 1957

Tag	K_t	Summe	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
1.	56845353	39	6	6	6	6	6
2.	4 24532	(26)	6	4	3	3	4
3.	53244472	31	5	3	3	4	6
4.	33344331	24	4	4	2	5	5
5.	42254342	26	2	3	2	3	5
6.	21211101	9	4	3	1	2	2
7.	21442212	18	1	3	3	3	4
8.	10122110	8	0	3	1	3	2
9.	23212	(16)	7	4	2	3	3
10.	332 2243	(22)	1	3	2	3	5
11.	32244222	21	0	3	3	3	4
12.	22282213	22	0	3	5	5	3
13.	84543418	37	6	5	3	4	6
14.	34989748	52	2	4	2	9	6
15.	51233242	22	2	4	3	5	3
16.	10132221	12	1	2	2	4	1
17.	112 5311	(16)	0	3	4	3	2
18.	11231121	12	3	3	2	3	3
19.	01274211	18	1	3	3	5	4
20.	12	(12)	0	2	1	5	2
21.	3329	(34)	0	5	3	4	5
22.	93863533	40	2	4	6	7	3
23.	45554234	32	5	6	5	6	3
24.	23454251	26	6	6	5	5	6
25.	43221	(19)	2	3	3	4	4
26.	31243112	17	4	3	2	3	4
27.	11446412	23	3	4	3	3	5
28.	14346132	24	1	3	3	2	6
29.	13578234	33	1	4	3	4	6
30.	35574222	30	4	4	6	5	5
31.	34111	(16)	6	5	3	3	6

Monatsdurchschnitte :

K_t(N)	2,884
K_t(O)	2,103
$K_{(1)}$	2,74
$K_{(2)}$	3,71
$K_{(3)}$	3,07
$K_{(4)}$	4,10
$K_{(5)}$	4,19

November, 1957

Tag	K_f	Summe	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
1.	12342111	15	3	4	2	4	3
2.	221 1112	(11)	4	4	3	3	2
3.	41242121	17	1	4	2	3	4
4.	10111021	7	2	3	2	3	3
5.	10113220	10	1	2	1	3	2
6.	23 22499	(35)	0	3	3	3	6
7.	96772431	39	1	6	6	6	5
8.	11458333	28	2	5	5	5	5
9.	65667546	45	3	4	5	6	7
10.	66698432	44	6	4	6	5	6
11.	37875336	42	5	4	3	6	5
12.	32337522	27	3	4	3	4	3
13.	31232222	17	3	4	3	3	2
14.	35338563	36	6	5	6	5	5
15.	23994433	37	6	8	7	4	2
16.	22345231	22	6	6	3	2	3
17.	11121111	9	5	3	2	2	1
18.	22334324	23	4	5	3	5	5
19.	21211133	14	4	3	3	2	3
20.	11242213	16	4	4	3	3	3
21.	11112112	10	5	4	2	2	1
22.	21112111	10	3	3	2	2	2
23.	01126221	15	2	3	2	3	3
24.	35546442	33	6	5	6	6	3
25.	38887556	50	4	7	7	6	5
26.	969 799	(65)	8	9	7	7	7
27.	9885 757	(56)	7	7	6	6	6
28.	35456365	37	2	5	6	6	3
29.	26448332	32	3	5	3	3	3
30.	32226431	23	1	4	3	4	2

Monatsdurchschnitte :

K_f(N)	3,287
K_f(O)	2,560
$K_{(1)}$	3,67
$K_{(2)}$	4,53
$K_{(3)}$	3,83
$K_{(4)}$	4,07
$K_{(5)}$	3,67

Dezember, 1957

Tag	K_t	Summe	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
1.	27685225	37	3	6	5	3	4
2.	62363511	27	4	4	3	4	4
3.	12145321	19	5	4	3	4	4
4.	31132111	13	3	3	3	3	3
5.	52343353	28	1	4	2	4	4
6.	7 76433	(40)	4	4	3	6	6
7.	23367321	27	6	6	5	6	5
8.	32244222	21	7	5	3	3	3
9.	43346625	33	4	4	3	5	5
10.	25145638	34	4	4	3	6	3
11.	47564678	47	5	8	6	6	6
12.	56787565	49	6	9	5	5	4
13.	43367921	35	6	6	5	5	4
14.	14122122	15	3	3	2	4	3
15.	22469941	37	6	5	3	7	5
16.	52483255	34	7	4	3	6	5
17.	46333363	31	7	4	2	5	4
18.	33353321	23	5	4	3	5	3
19.	22275465	33	6	4	3	4	6
20.	65676346	43	3	3	5	7	6
21.	35543312	26	2	5	3	4	4
22.	11121110	8	0	1	2	3	1
23.	01111001	5	0	2	2	2	1
24.	10134222	15	1	3	2	4	3
25.	12645234	27	3	4	3	6	3
26.	34477631	35	4	6	3	5	5
27.	22122212	14	0	2	2	4	2
28.	21211111	10	0	2	1	3	2
29.	11133112	13	0	3	2	3	2
30.	23495112	27	4	4	3	5	3
31.	34458999	51	1	4	6	4	7

Monatsdurchschnitte :

K_t(N)	3,282
K_t(O)	2,360
$K_{(1)}$	3,55
$K_{(2)}$	4,19
$K_{(3)}$	3,19
$K_{(4)}$	4,55
$K_{(5)}$	3,87

II.

Ausgewählte D, Q und q Tage

	D	*Q*	*q*
Aug.	6, 12, 27, 30, 31	7, 17, 22, 23, 24	2, 10, 11, 16, 25
Sept.	2, 3, 5, 13, 23	10, 11, 19, 20, 27	8, 12, 17, 26, 28
Okt.	1, 13, 14, 21, 22	6, 8, 16, 18, 20	7, 9, 17, 26, 31
Nov.	9, 14, 25, 26, 27	4, 5, 17, 21, 22	1, 2, 3, 20, 23
Dez.	6, 11, 12, 20, 31	22, 23, 27, 28, 29	3, 4, 8, 14, 24

Korrelation K_t mit K_1—K_5

	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
K_1	+ 0,48	— 0,22	+ 0,19	+ 0,38	+ 0,28	+ 0,22
K_2	+ 0,61	+ 0,64	+ 0,61	+ 0,77	+ 0,70	+ 0,67
K_3	+ 0,66	+ 0,82	+ 0,55	+ 0,78	+ 0,77	+ 0,72
K_4	+ 0,72	+ 0,87	+ 0,67	+ 0,79	+ 0,74	+ 0,76
K_5	+ 0,41	+ 0,62	+ 0,62	+ 0,73	+ 0,81	+ 0,64

III. *Die Durchschnittswerte der*

Stunde / Param.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
													Aug. 1957. Nord-
1.	7	3	2	3	6	6	9	10	12	13	11	6	9
2.	27	30	25	24	27	28	48	35	33	23	26	23	22
3.	31	34	23	24	39	49	48	44	41	41	54	44	57
4.	53	47	44	34	42	51	46	68	70	69	45	49	55
5.	51	100	62	93	66	28	42	6	15	30	71	56	59
6.	−46	−32	−4	−10	−43	−81	−100	−102	−44	+56	+158	+191	+194
7.	97	108	111	108	112	130	150	167	127	113	131	124	142
8.	—	—	—	—	—	—	4	3	4	—	4	—	—
9.	—	4	4	7	4	4	18	25	15	11	4	11	4
10.	11	19	7	15	33	41	24	28	19	19	23	26	27
11.	37	19	33	26	7	30	21	38	47	44	31	22	23
12.	48	58	52	48	52	21	21	3	15	26	38	41	42
13.	4	—	4	4	4	4	12	3	—	—	—	—	4
													Ost-
1.	8	11	6	10	9	17	26	32	46	41	37	36	36
2.	28	30	26	25	29	33	36	26	24	22	30	27	26
3.	44	33	12	26	24	25	17	21	33	26	41	27	40
4.	34	41	49	15	21	13	11	12	22	62	31	45	62
5.	62	129	55	59	55	45	44	32	32	21	73	42	42
6.	−12	+23	−1	−6	+10	−12	−37	−87	−84	−73	−28	−9	+39
7.	87	100	92	82	96	88	107	97	91	92	104	95	112
8.	—	—	—	—	—	11	17	28	29	29	14	17	21
9.	11	4	4	7	14	14	17	17	14	7	7	7	7
10.	14	7	4	25	14	21	14	14	18	14	14	7	11
11.	21	18	32	18	21	18	10	14	14	36	25	24	21
12.	50	71	56	46	47	32	35	23	25	14	40	45	40
13.	4	—	4	4	4	4	7	4	—	—	—	—	4
													Sept. 1957. Nord-
1.	3	3	0	3	11	15	6	2	11	21	15	9	4
2.	24	32	32	35	27	28	45	34	38	31	44	40	40
3.	42	42	36	52	44	73	57	57	62	27	49	41	82
4.	49	49	71	52	72	49	58	65	56	58	65	86	101
5.	80	132	99	61	70	49	42	37	62	80	114	145	144
6.	−42	−7	−18	−45	−57	−63	−123	−149	−92	+38	+159	+217	+163
7.	180	169	171	178	196	209	232	204	220	245	230	242	241
8.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9.	—	—	4	4	—	5	5	4	4	4	8	4	4
10.	17	17	17	13	18	27	14	26	16	8	4	4	1_2
11.	33	8	27	31	14	18	27	22	28	32	27	27	1^2
12.	33	54	35	35	50	32	18	26	36	40	46	46	4^9
13.	17	21	17	17	18	18	36	22	16	16	15	19	1^6_9

langsamen Registrierungen

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mitt.	
Komponent												
9	4	4	3	3	3	4	3	0	1	2	5,6	10^{-5} V/km
22	27	22	24	24	22	22	21	21	23	19	25,7	
56	38	42	43	28	26	13	17	21	25	26	36,0	
55	44	44	42	43	42	29	50	41	45	54	48,4	
56	82	64	40	43	73	103	127	132	108	78	66,1	
+113	+48	−1	−74	−56	−29	−30	−22	−14	−22	−46		
147	135	120	86	100	81	87	145	127	135	129	2911	10^{-4} V/km
												%
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,6	
8	8	—	7	3	11	11	4	—	7	4	7,2	
23	16	14	24	10	7	—	14	17	4	7	17,8	
23	32	36	31	45	29	21	14	14	24	31	28,2	
42	40	46	38	39	53	64	61	66	61	54	42,9	
4	4	4	—	3	—	4	7	3	4	4	3,2	
Komponent												
29	30	22	19	15	15	12	7	6	5	5	20,0	10^{-5} V/km
27	37	35	37	28	28	24	24	25	21	21	27,9	
38	51	23	35	22	37	22	21	33	32	27	29,7	
25	26	42	55	89	44	39	37	53	70	57	39,8	
51	76	76	53	55	89	76	95	83	100	55	62,6	
+32	+60	+62	+26	+28	+14	+24	+22	+7	−8	+10		
											2625	
131	139	142	107	126	110	110	134	141	129	111		10^{-4} V/km
											8,0	%
14	4	4	—	—	4	—	—	—	—	—		
7	8	4	7	3	7	10	—	3	—	—	7,5	
21	8	—	23	3	14	4	10	7	7	7	11,7	
4	23	32	30	54	14	37	24	37	38	54	27,2	
50	53	56	40	37	61	45	59	50	51	35	42,8	
4	4	4	—	3	—	4	7	3	4	4	3,0	
Komponent												
2	2	4	5	5	6	3	1	1	2	0	5,6	10^{-5} V/km
38	36	35	31	25	27	32	32	15	22	21	31,9	
62	45	40	77	49	37	50	49	40	27	42	49,1	
85	66	48	66	83	74	89	60	69	57	62	64,6	
104	137	134	111	81	204	127	143	131	100	108	104,0	
+79	−15	−70	−76	−92	+12	−6	−8	−7	−20	−30		
316	251	228	201	195	206	184	179	161	164	174	4976	10^{-4} V/km
												%
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0	
4	8	4	—	—	—	—	—	—	—	—	2,6	
11	4	8	8	16	8	17	8	12	8	8	15,0	
19	15	8	19	28	20	26	20	16	28	44	23,2	
41	42	57	54	40	64	48	64	60	48	36	43,8	
26	31	23	19	16	8	9	8	12	16	12	1,45	

Stunde / Param.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
													Ost-
1.	5	6	2	11	18	35	29	37	59	52	51	39	36
2.	38	32	33	38	37	39	29	26	35	37	35	47	39
3.	28	25	44	39	66	73	30	42	57	40	48	64	41
4.	61	62	50	34	36	30	32	20	30	62	61	72	125
5.	122	140	86	62	78	64	43	48	39	49	67	86	80
6.	−32	−13	+22	+21	+34	+3	−63	−132	−116	−74	−24	+3	+37
7.	187	192	198	183	190	220	193	166	199	212	216	232	268
8.	—	—	—	—	—	9	9	9	20	8	8	12	4
9.	8	—	—	4	—	9	9	13	4	4	—	—	4
10.	—	12	13	13	26	30	9	17	24	17	15	15	4
11.	28	17	17	17	22	9	14	9	12	12	31	27	31
12.	48	54	53	49	35	26	27	30	24	42	31	27	38
13.	16	17	17	17	17	17	32	22	16	17	15	19	19
													Okt. 1957. Nord-
1.	0	1	0	0	1	3	1	3	2	1	4	2	2
2.	18	17	17	23	28	33	41	33	27	24	30	31	33
3.	16	24	37	39	33	41	68	90	85	89	67	52	75
4.	87	79	53	109	75	77	76	115	140	118	135	104	118
5.	109	125	150	74	82	79	61	40	41	35	104	194	111
6.	−14	−26	−12	+22	+15	+16	−36	−72	−129	−14	+136	+180	+166
7.	107	111	110	120	128	124	133	197	212	204	184	210	194
8.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9.	—	—	—	—	4	—	—	—	—	—	4	—	—
10.	—	4	11	15	4	4	23	38	21	35	11	15	14
11.	44	36	41	41	38	54	43	50	50	43	44	37	46
12.	44	56	48	44	54	42	27	12	17	8	34	41	33
13.	12	4	—	—	—	—	7	—	12	4	7	7	7
													Ost-
1.	3	0	0	1	4	16	19	23	19	17	16	22	20
2.	21	20	21	20	37	28	27	27	32	30	32	28	31
3.	39	32	41	35	25	63	33	48	45	68	32	43	50
4.	65	68	39	43	71	46	81	65	68	42	89	81	72
5.	81	84	106	90	73	56	46	29	42	48	41	58	70
6.	−27	−24	−26	−21	+17	+4	+32	+5	−24	−46	−35	−17	+19
7.	109	109	107	105	116	142	121	134	134	137	119	123	145
8.	—	—	—	—	—	—	8	8	—	4	4	11	14
9.	—	4	8	—	—	—	—	4	—	4	—	—	—
10.	8	4	4	19	4	20	17	25	18	39	12	15	11
11.	42	42	27	27	52	38	38	38	41	30	53	37	39
12.	38	44	57	50	40	38	25	21	32	19	23	30	29
13.	12	4	4	4	4	4	12	4	9	4	8	7	7

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mitt.	
Komponent												
40	38	38	26	26	25	12	12	3	5	3	25,4	10^{-5} V/km
33	47	41	41	63	52	33	36	32	29	35	38,7	
60	48	62	75	84	49	23	64	39	22	58	46,3	
50	49	68	89	75	99	106	71	50	67	69	61,2	
92	124	93	58	50	181	168	114	136	169	85	93,1	
+63	+59	+50	+37	+24	+62	+31	+25	+11	+2	0		
267	257	261	238	246	210	178	214	189	186	175	5076	10^{-4} V/km
												%
4	12	8	8	—	4	—	—	—	—	—	4,8	
—	—	—	—	8	4	—	—	8	—	—	3,1	
15	4	19	23	20	8	4	16	4	—	8	15,3	
12	8	15	23	28	23	24	32	28	32	28	20,7	
42	45	34	27	28	53	60	44	48	52	52	40,4	
27	31	24	19	16	8	12	8	12	16	12	15,9	
Komponent												
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0,9	10^{-5} V/km
29	24	28	24	21	21	21	21	19	22	23	25,2	
50	69	66	33	43	39	33	24	33	30	21	48,1	
125	103	73	102	57	46	49	60	66	58	48	86,2	
199	100	87	73	83	80	114	130	65	122	117	98,8	
+125	+22	−35	−57	−16	−23	−47	−65	−37	−73	−29		
167	151	158	111	94	102	91	104	100	106	98	3307	10^{-4} V/km
												%
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0	
3	3	—	3	—	—	—	—	—	—	—	0,7	
10	20	18	3	7	10	10	7	10	13	7	13,1	
33	33	39	57	45	37	38	31	43	44	36	42,0	
44	37	39	34	45	46	49	59	40	40	50	39,5	
10	7	4	3	3	7	3	3	7	3	7	4,7	
Komponent												
20	19	17	12	4	2	1	1	1	2	0	9,9	10^{-5} V/km
31	26	32	30	27	25	23	25	23	27	23	27,0	
51	60	44	50	39	44	42	32	44	35	22	41,4	
49	61	78	90	41	57	55	58	50	71	44	61,9	
63	31	49	40	100	98	95	122	95	103	123	72,5	
+37	+21	+23	−9	+23	+45	+38	+41	+8	−4	+2		
118	123	135	118	109	114	113	117	95	112	109	2860	10^{-4} V/km
												%
7	3	—	3	—	—	—	—	—	—	—	2,6	
—	3	—	—	—	—	—	—	3	—	—	1,1	
10	27	14	17	10	10	14	13	3	15	—	13,7	
28	37	53	54	33	33	35	34	33	37	22	37,3	
45	23	29	23	54	50	48	50	54	44	67	38,6	
10	7	4	3	3	7	3	3	7	4	11	6,7	

Stunde / Param.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
													Nov. 1957. Nord-
1.	0	1	1	0	1	3	3	8	9	1	3	3	2
2.	18	18	17	22	21	32	50	65	62	37	33	26	22
3.	33	29	33	50	89	78	77	116	145	98	77	36	84
4.	66	41	72	114	85	78	53	98	104	116	80	96	97
5.	133	170	66	59	53	28	50	22	14	28	98	167	132
6.	−3	0	+14	+12	+14	+22	−5	−44	−67	+5	+66	+68	+86
7.	134	112	128	141	154	160	151	236	260	211	193	207	190
8.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9.	7	—	—	—	—	4	18	19	5	8	8	4	5
10.	11	7	15	18	19	40	30	24	55	38	36	9	30
11.	30	32	52	41	46	44	30	38	30	42	28	26	20
12.	48	61	30	41	35	12	22	19	10	12	28	52	35
13.	4	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	9	10
													Ost-
1.	9	5	3	6	10	20	32	29	26	23	19	22	23
2.	33	28	26	44	32	28	61	92	49	42	36	36	35
3.	29	37	47	52	67	70	86	50	89	51	57	45	68
4.	60	64	73	89	64	41	28	75	56	46	69	68	82
5.	130	64	21	39	60	46	28	25	71	42	39	50	45
6.	+44	+6	−1	−13	−2	+15	+7	−12	−66	−72	−79	−10	−14
7.	133	110	120	152	148	159	196	220	192	172	187	155	160
8.	—	3	—	—	11	17	21	7	4	4	7	16	16
9.	—	7	—	22	7	14	21	39	12	15	11	12	12
10.	11	17	29	30	30	41	18	11	38	35	36	20	32
11.	36	30	54	33	26	7	7	32	27	19	25	32	20
12.	50	43	14	15	26	21	33	11	19	27	18	20	16
13.	3	—	3	—	—	—	—	—	—	—	3	—	4
													Dez. 1957. Nord-
1.	0	0	0	0	1	1	1	1	4	5	1	1	2
2.	14	23	17	19	32	27	34	40	56	44	40	44	39
3.	27	30	37	22	61	53	53	60	39	51	79	66	98
4.	81	75	77	96	72	109	69	63	113	108	179	91	163
5.	117	82	85	97	81	61	70	85	62	41	77	165	93
6.	−14	+10	+6	+2	+37	+32	+5	−24	−45	−43	+39	+57	+82
7.	107	125	123	139	156	146	172	181	181	189	224	200	206
8.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9.	3	3	6	—	4	3	—	3	11	14	3	10	3
10.	10	13	19	13	28	23	30	30	14	21	23	23	35
11.	45	55	39	44	34	40	37	30	50	45	52	29	39
12.	42	29	36	43	34	33	33	33	21	20	19	38	23
13.	—	—	—	—	—	—	—	3	3	—	3	—	—

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mitt.	
Komponent												
1	0	1	0	1	2	0	0	0	0	0	1,6	10^{-5} V/km
27	25	14	52	21	16	22	19	20	17	19	28,1	
68	66	77	52	45	30	53	37	33	36	30	61,4	
94	88	64	70	56	57	91	87	54	90	80	80,3	
75	88	85	71	108	156	47	69	82	133	92	84,4	
+54	+31	+7	−4	+35	−11	−46	−61	−71	−67	−70		
201	180	163	140	133	130	145	131	124	142	136	3932	10^{-4} V/km
												%
—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	—	0,2	
5	—	—	7	—	—	—	7	4	—	4	4,5	
23	29	33	37	26	22	11	18	23	21	19	24,8	
45	29	33	30	35	26	48	41	43	49	43	36,8	
18	29	21	22	35	52	33	30	27	32	34	30,8	
9	13	13	4	4	—	8	4	3	4	—	3,6	
Komponent												
24	20	16	18	9	8	8	3	5	4	2	14,4	10^{-5} V/km
28	33	29	40	42	32	29	28	28	33	28	37,1	
74	43	49	45	33	32	38	56	28	40	26	50,6	
73	67	37	82	38	97	89	56	63	66	67	64,6	
44	69	73	58	104	91	75	68	113	159	156	69,5	
−8	+19	−26	+9	+5	+34	+54	+37	+48	+22	+4		
159	161	147	172	163	148	158	157	153	160	152	3834	10^{-4} V/km
												%
11	3	7	10	—	—	—	—	—	—	—	5,7	
7	11	7	3	17	7	7	3	7	—	—	10,0	
11	18	21	30	13	11	21	14	14	14	14	21,3	
38	25	17	27	27	46	29	38	38	41	28	29,4	
26	36	41	30	40	36	36	42	38	45	55	31,4	
7	7	7	—	3	—	7	3	3	—	3	2,2	
Komponent												
1	0	2	1	0	0	1	0	0	0	0	1,1	10^{-5} V/km
37	30	27	21	17	19	16	19	17	15	15	27,5	
42	57	45	39	43	28	20	34	29	23	19	44,5	
138	118	118	102	72	53	60	77	86	95	61	94,9	
172	71	50	73	61	103	107	98	73	42	82	86,0	
+61	+37	−9	−23	+16	0	−60	−55	−42	−48	−28		
198	222	163	149	139	112	124	120	105	115	115	3711	10^{-4} V/km
												%
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0	
3	—	3	3	—	—	—	—	—	—	—	3,0	
10	19	19	26	16	23	16	16	16	6	6	19,0	
45	52	52	39	45	32	42	42	52	58	42	43,4	
42	29	26	32	36	45	39	39	32	38	49	33,7	
—	—	—	—	3	—	3	3	—	—	3	0,9	

Stunde / Peram.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
													Ost-
1.	2	2	3	3	7	19	20	27	25	20	21	24	21
2.	26	21	20	20	37	37	43	51	55	50	38	41	45
3.	21	35	38	32	58	52	52	43	47	51	49	41	44
4.	77	75	68	70	70	72	46	66	60	42	107	51	65
5.	104	71	57	71	40	71	87	42	42	45	41	63	59
6.	+3	+15	+11	−5	−4	+1	+10	−7	−16	−46	−71	−28	−26
7.	122	123	121	128	149	143	170	151	152	160	180	159	164
8.	—	—	—	—	—	—	7	—	7	6	—	3	3
9.	—	3	—	—	7	—	7	7	20	3	3	6	16
10.	6	23	23	20	14	21	30	20	17	42	33	39	23
11.	45	45	42	33	41	41	23	40	33	33	37	29	32
12.	49	29	35	47	38	38	33	30	20	16	27	23	26
13.	—	—	—	—	—	—	—	3	3	—	—	—	—
													Jahr 1957.
1.	2	1	1	1	1	5	4	5	8	8	6	4	4
2.	20	24	21	24	27	30	43	42	44	46	34	33	32
3.	29	31	33	36	54	58	60	73	73	65	59	49	80
4.	68	59	64	84	64	75	60	81	96	95	104	85	110
5.	100	120	92	78	71	52	55	39	38	41	92	144	104
6.	−22	−9	−1	−4	−7	−15	−54	−79	−76	+8	+111	+135	+138
7.	125	125	129	137	149	154	168	197	200	192	192	197	194
8.	—	—	—	—	—	—	1	1	1	—	1	—	—
9.	2	1	3	2	2	3	8	10	7	8	5	6	3
10.	10	12	14	15	21	27	25	29	23	24	19	16	24
11.	38	31	39	37	28	38	32	35	42	41	37	28	31
12.	43	51	40	43	45	28	25	19	20	23	34	43	35
13.	7	5	4	3	4	4	9	6	7	4	4	7	7
													Ost-
1.	5	5	3	5	9	20	25	29	35	30	28	29	27
2.	29	26	25	31	34	33	41	46	40	37	34	37	38
3.	32	33	36	34	48	55	46	40	54	50	46	44	48
4.	60	62	57	52	53	42	38	49	47	51	72	64	78
5.	99	54	80	64	59	56	51	34	45	68	52	61	59
6.	+8	+7	+1	−5	+11	+2	−10	−46	−61	−62	−48	−10	+12
7.	128	127	127	130	140	150	158	154	153	154	161	153	170
8.	—	1	—	—	2	7	13	11	12	11	7	11	12
9.	4	4	2	7	6	7	11	16	11	7	4	5	8
10.	8	13	15	22	17	27	18	17	23	29	22	20	16
11.	36	30	35	26	33	23	18	27	25	26	34	30	29
12.	46	48	43	41	37	31	31	23	24	23	28	29	29
13.	6	4	5	4	5	5	9	6	5	4	5	5	6

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mitt.	
Komponent												
24	26	22	17	11	9	5	2	1	1	3	13,1	10^{-5} V/km
38	41	33	37	28	19	25	23	18	27	25	33,1	
31	49	46	36	22	19	23	18	49	23	22	37,4	
67	55	56	31	68	60	67	82	64	47	91	64,8	
77	49	72	123	113	129	128	119	85	148	94	80,5	
−15	+7	+3	0	+35	+28	+6	+21	+33	+35	+13		
169	165	145	152	148	134	140	135	129	130	129	3497	10^{-4} V/km
												%
6	6	3	3	—	—	—	—	—	—	—	−1,8	
6	16	6	13	—	—	—	—	—	—	3	4,9	
23	16	16	10	3	6	13	3	23	6	3	18,0	
29	32	29	26	42	32	23	39	32	29	39	34,4	
36	30	45	48	52	62	61	55	45	59	52	39,9	
—	—	—	—	3	—	3	3	—	6	3	1,0	
Nord-Komponent												
3	1	2	1	1	2	1	1	0	1	1	2,7	10^{-5} V/km
30	28	25	30	21	21	23	22	19	20	19	28,3	
54	56	54	46	41	32	34	32	31	28	27	47,3	
102	87	72	77	61	54	64	67	64	69	61	76,0	
127	91	80	71	74	120	107	113	95	99	95	87,3	
+89	+25	−22	−47	−23	−10	−38	−42	−34	−43	−37		
204	188	166	143	132	126	126	136	123	134	131	3769	10^{-4} V/km
												%
—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	0,2	
4	4	1	4	1	2	2	2	1	1	1	3,5	
15	18	18	20	15	14	12	13	16	11	10	17,5	
33	33	34	36	40	29	35	30	34	38	38	34,9	
38	35	38	36	39	52	46	50	45	43	46	38,2	
10	10	9	4	5	3	5	5	4	6	5	5,7	
Komponent												
27	26	22	18	12	11	7	5	3	3	3	16,2	10^{-5} V/km
32	36	34	37	36	30	26	27	25	27	26	32,8	
49	50	44	46	37	35	30	37	35	27	30	41,0	
53	52	55	68	61	70	69	61	56	57	66	58,1	
64	65	72	68	86	115	106	104	100	135	103	74,7	
+21	+33	+10	+7	+17	+37	+29	+29	+22	+9	+6		
169	169	166	158	159	143	140	151	141	143	135	3578	10^{-4} V/km
												%
9	6	4	5	—	1	—	—	—	—	—	4,7	
4	8	4	5	5	4	4	1	4	—	1	5,5	
16	15	14	20	10	10	11	11	10	9	6	15,8	
22	26	30	32	37	30	30	33	34	36	34	29,7	
40	36	41	34	43	52	50	50	47	50	52	38,6	
9	9	7	4	5	3	5	5	5	5	7	5,7	

Stunde / Param.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
													Jahr 1957. Gestörte Tage.
1.	0	0	0	0	2	5	0	3	11	6	5	3	2
2.	27	38	25	36	59	68	84	85	142	132	59	93	66
3.	36	59	72	63	131	146	99	100	176	111	82	82	216
4.	81	101	117	135	122	106	156	152	70	72	62	136	144
5.	164	241	126	88	61	0	66	33	0	102	211	26	90
6.	+43	−62	−42	−50	+4	+13	+34	−96	−73	−37	+69	+147	+78
7.	240	270	280	310	340	330	390	390	450	400	370	350	420
8.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9.	12	—	—	—	14	12	—	16	29	58	33	14	11
10.	13	25	45	12	29	50	40	50	29	14	17	29	45
11.	25	25	22	50	29	38	20	16	42	14	16	43	22
12.	50	50	33	38	28	—	40	17	—	14	33	14	22
13.	33	33	31	33	42	33	55	36	36	36	45	36	25
													Ost-
1.	16	14	2	12	2	10	50	36	38	38	34	23	27
2.	40	58	50	50	72	68	90	128	76	97	65	90	97
3.	26	64	58	70	110	150	116	70	142	77	99	136	106
4.	48	74	154	174	108	88	21	106	60	92	56	82	182
5.	178	244	52	106	86	8	85	38	30	54	23	36	65
6.	−5	−5	−17	−82	−31	+12	−15	−42	−75	−48	−52	−14	−12
7.	250	320	310	350	320	360	380	380	330	380	350	350	370
8.	—	—	—	—	—	—	12	—	—	12	12	—	—
9.	—	11	—	—	—	22	38	38	13	13	—	14	11
10.	—	33	33	11	38	45	25	12	50	50	50	43	22
11.	33	22	56	67	25	22	12	25	25	13	25	29	56
12.	67	34	11	22	37	11	13	25	12	12	13	14	11
13.	31	31	31	31	38	31	38	33	33	33	38	37	25
													Jahr 1957. Ruhige Tage
1.	0	1	1	0	2	3	3	1	1	3	2	1	0
2.	18	15	13	12	15	20	25	17	15	14	15	11	18
3.	10	24	33	23	25	33	21	29	36	28	25	23	22
4.	50	40	49	42	47	36	28	59	57	41	51	60	32
5.	49	46	15	29	28	35	27	31	18	48	50	57	89
6.	−30	−3	−8	−12	−5	−18	−35	−66	−70	+21	+98	+127	+147
7.	68	61	60	52	57	65	66	78	76	86	78	80	90
8.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9.	6	—	—	—	—	6	23	6	—	—	6	—	—
10.	—	18	23	18	18	18	11	18	25	18	18	6	6
11.	44	53	59	47	41	41	33	58	50	53	41	50	35
12.	50	29	18	35	41	35	33	18	25	29	35	44	59
13.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mitt.	
Nord-Komponent												
3	5	3	0	2	4	5	0	0	0	0	2	10^{-5} V/km
75	77	62	144	59	42	46	55	33	42	31	66	
126	116	167	126	65	46	61	78	62	38	43	96	
206	44	59	23	135	100	105	84	183	174	126	112	
111	44	36	169	169	533	241	228	207	200	313	144	
+132	+58	−50	−94	−66	+57	+34	+7	+3	−23	−89		
410	390	390	350	300	370	300	300	300	310	280	8220	10^{-4} V/km
												%
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0	
—	29	14	30	—	—	—	—	—	—	—	11,2	
29	—	72	30	10	—	17	17	9	11	—	24,7	
42	42	14	—	50	8	17	17	45	33	50	28,3	
29	29	—	40	40	92	66	66	46	56	50	35,5	
46	50	50	33	33	14	25	25	28	40	23	35,0	
Komponent												
18	33	36	25	32	43	35	21	12	14	2	24	10^{-5} V/km
75	123	108	130	104	72	54	57	48	68	52	78	
100	113	139	121	92	94	35	93	69	38	62	91	
108	69	129	124	95	115	226	152	66	102	140	107	
36	51	54	74	124	348	163	183	260	400	300	125	
+54	+50	+69	+80	+48	+25	+32	+66	+55	−10	−80		
380	360	430	400	380	370	300	350	340	330	280	8370	10^{-4} V/km
												%
—	—	—	—	8	—	—	—	—	—	—	1,8	
17	29	28	30	20	8	—	—	8	—	—	12,5	
17	42	29	30	20	15	8	25	8	—	11	25,8	
50	—	29	20	20	15	42	33	33	20	56	30,3	
16	29	14	20	40	54	50	42	51	80	33	29,3	
50	50	50	33	33	17	20	20	20	38	31	33,0	
Nord-Komponent												
3	2	1	3	4	2	1	2	1	2	0	1,6	10^{-5} V/km
20	21	14	13	14	15	16	18	18	17	16	16,2	
24	36	19	25	27	21	18	27	21	19	14	23,8	
66	45	42	40	32	26	25	40	33	36	35	42,0	
57	41	67	26	36	42	44	22	52	50	45	41,8	
+74	+33	−24	−37	−25	−15	−23	−14	−37	−33	−43		
92	83	72	56	52	48	49	46	53	62	55	1585	10^{-4} V/km
												%
—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	—	0,2	
5	5	—	5	—	—	6	11	5	5	6	4,0	
5	22	5	39	21	17	6	11	22	5	—	14,6	
50	45	31	39	42	39	38	52	40	39	62	45,1	
40	28	64	17	37	44	50	26	33	46	32	36,2	
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	

Stunde / Param.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
													Ost-
1.	2	0	2	2	8	18	15	17	16	11	11	18	19
2.	24	19	18	17	23	25	25	16	13	17	21	17	18
3.	22	19	18	29	13	18	26	20	13	23	21	15	11
4.	42	42	48	35	39	26	13	29	41	46	30	34	34
5.	58	42	29	24	30	27	33	21	20	18	52	39	51
6.	+3	−14	−12	−17	−12	−7	−20	−59	−83	−57	−13	+28	+24
7.	66	56	50	46	57	58	65	57	48	66	60	50	68
8.	—	—	—	—	12	25	24	22	20	6	—	6	13
9.	—	6	—	6	6	12	18	6	—	—	12	6	6
10.	17	12	18	41	6	12	24	22	7	37	—	18	6
11.	33	35	41	24	35	6	—	28	46	38	38	29	25
12.	50	47	41	29	41	38	34	22	27	19	50	41	50
13.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mitt.	
Komponent												
19	17	16	10	6	5	5	2	2	4	3	9,5	10^{-5} V/km
13	18	13	16	18	13	19	16	19	23	22	18,5	
24	22	12	31	23	22	22	30	29	21	16	20,9	
27	42	33	37	44	32	31	28	44	34	38	35,3	
49	29	62	26	25	42	64	49	35	73	75	40,5	
+23	+46	+24	+19	+19	+29	+24	+18	+14	+18	+10		
70	69	68	59	63	64	65	58	61	61	58	1442	10^{-4} V/km
												%
11	12	6	11	—	6	—	—	—	—	—	7,2	
—	6	—	—	5	6	6	—	—	—	—	4,4	
17	—	11	37	5	17	23	11	18	12	18	16,2	
28	41	28	16	69	23	18	33	41	35	32	30,9	
44	41	55	36	21	48	53	56	41	53	50	41,1	
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	

IV.

Richtung der dreistündlichen mittleren Amplituden

Frequenzklasse \ Stunde		0—3	3—6	6—9	9—12	12—15	15—18	18—21	21—24	Mittel
Aug.	1.	65°	68	73	74	77	80	71	78	74
	2.	45	43	37	48	52	55	50	47	47
	3.	45	34	28	34	40	35	55	52	40
	4.	41	22	14	40	37	56	45	52	40
	5.	50	40	60	31	40	52	41	37	43
	T	41	37	33	38	42	51	49	46	42
Sept.	1.	64	66	81	72	86	82	78	76	78
	2.	50	52	38	46	50	58	53	57	51
	3.	39	46	37	53	38	53	45	48	43
	4.	46	33	24	43	42	41	51	46	44
	5.	48	46	42	31	37	32	44	49	43
	T	48	46	40	42	44	50	48	47	46
Okt.	1.	76	78	84	83	87	90	90	76	85
	2.	48	49	40	46	46	50	50	49	47
	3.	64	47	28	34	40	44	51	43	41
	4.	37	31	33	29	28	42	48	43	36
	5.	34	43	39	23	22	38	44	47	36
	T	45	44	36	39	38	45	49	46	41
Nov.	1.	82	85	77	85	88	87	84	87	84
	2.	59	54	49	50	52	51	58	58	53
	3.	50	41	34	39	41	36	46	43	40
	4.	48	35	32	32	38	40	46	41	39
	5.	33	45	53	25	29	41	39	54	39
	T	45	50	43	41	39	46	49	49	44
Dez.	1.	90	85	85	84	88	88	88	90	85
	2.	51	51	49	45	50	57	51	55	50
	3.	45	46	43	33	32	39	36	54	40
	4.	43	37	36	28	24	28	48	40	34
	5.	39	37	38	27	29	59	50	59	43
	T	46	44	41	39	39	45	49	49	43
Jahr	1.	74	75	80	78	85	84	79	80	81
	2.	51	51	45	43	50	54	52	54	49
	3.	47	43	34	39	38	42	46	47	41
	4.	42	34	30	33	32	41	47	43	37
	5.	39	42	44	29	30	45	44	50	40
	T	45	44	39	39	41	48	48	47	44
D	1.	90	75	82	82	83	87	85	90	84
	2.	59	50	42	42	54	53	52	59	50
	3.	42	44	40	48	34	43	50	52	43
	4.	43	46	28	40	43	59	60	34	44
	5.	42	50	58	18	32	36	35	46	41
	T	45	47	38	41	41	55	47	47	45
Q	1.	63	79	84	81	85	84	83	71	80
	2.	53	54	44	54	39	48	44	47	49
	3.	42	36	35	38	35	43	53	51	41
	4.	43	39	29	36	35	45	45	48	40
	5.	50	42	45	35	35	41	55	51	44
	T	42	43	36	37	37	46	53	42	42

V.

Harmonische Analyse des täglichen Potentialganges

	A_1	φ_1	A_2	φ_2	A_3	φ_3	A_4	φ_4	A_5	φ_5	A_6	φ_6
Nord-Komponent												
Aug.	68	268	74	107	45	314	8	197	1	270	8	280
Sept.	53	260	81	115	69	315	21	152	10	60	10	301
Okt.	53	282	57	80	39	316	36	140	6	33	8	285
Nov.	35	283	36	44	26	315	21	142	4	45	10	328
Dez.	28	296	35	39	6	311	22	151	3	74	10	338
Jahr	46	277	49	87	37	314	18	142	4	13	8	300
Ost-Komponent												
Aug.	39	183	33	28	3	225	3	135	10	28	1	40
Sept.	47	183	41	21	12	48	9	198	9	130	6	321
Okt.	18	187	15	295	17	222	15	69	3	138	2	207
Nov.	37	139	13	301	21	224	12	64	9	27	5	148
Dez.	28	128	12	317	14	223	4	56	8	261	3	315
Jahr	30	162	15	0	8	224	8	83	3	79	3	330

Amplituden in 10^{-5} V/km.

Harmonische Analyse der mittleren Amplituden

	Nord			Ost		
	Ampl.	%	φ	Ampl.	%	φ
Juni						
1a	96	110	187	59	73	117
1b	29	22	149	42	30	84
1c	50	27	340	42	21	341
1d	70	70	18	28	29	15
1e	66	120	24	41	113	14
August						
1a	5	17	99	28	55	105
1b	30	49	120	63	100	124
1c	73	41	292	73	39	284
1d	22	27	50	20	24	85
1e	37	64	106	34	60	114
1.	5	92	319	18	90	293
2.	4	17	346	4	14	270
3.	13	35	306	5	17	244
4.	5	11	333	15	39	185
5.	46	70	154	22	35	145
September						
1a	44	78	152	44	58	118
1b	24	20	42	38	35	32
1c	42	24	305	35	29	302
1d	46	41	283	53	24	278
1e	14	18	104	19	30	186
1.	5	68	321	23	90	288
2.	6	20	289	8	22	225
3.	8	16	301	9	19	238
4.	11	17	228	26	42	199
5.	40	38	191	40	43	151
Oktober						
1.	1	60	315	11	108	293
2.	7	29	315	4	14	299
3.	26	54	303	11	25	280
4.	33	39	307	9	14	276
5.	14	15	179	37	43	126

	Nord			Ost		
	Ampl.	%	φ	Ampl.	%	φ
			November			
1a	17	36	75	19	46	73
1b	30	19	283	15	11	305
1c	32	20	280	31	19	279
1d	35	34	268	28	22	254
1e	36	30	316	7	7	39
1.	3	160	354	11	74	303
2.	11	40	321	12	31	338
3.	32	51	315	19	38	332
4.	11	14	310	5	8	178
5.	23	28	175	37	53	143
			Dezember			
1.	1	67	346	12	90	288
2.	14	50	309	12	37	303
3.	23	52	301	12	31	328
4.	29	31	282	6	9	79
5.	10	12	240	37	45	157
			Jahr			
1a	39	78	151	38	64	104
1b	15	12	123	31	28	79
1c	43	27	301	47	28	284
1d	16	15	299	20	17	252
1e	10	13	67	20	31	135
1.	3	110	315	15	92	289
2.	10	36	317	6	19	300
3.	21	45	303	9	22	298
4.	17	23	292	8	13	186
5.	21	25	171	31	41	148
			Gestörte Tage			
1.	2	100	286	12	50	269
2.	32	50	290	24	31	278
3.	28	29	300	23	25	299
4.	22	20	257	21	20	163
5.	92	64	124	99	79	130
			Ruhige Tage			
1.	1	60	251	5	42	302
2.	1	6	231	3	16	99
3.	4	17	315	2	9	143
4.	6	14	332	2	6	29
5.	10	24	242	11	27	155

Amplitude bei 1a—1e in 100fachem der Durchschnittskennzahlen, bei 1—5 in 10^{-5} V/km.

VI/a.

Die Zeitpunkte der Störungen

August, 1957

I.	II.	III.	IV.	V.
3. 16h 45	5. 18h 00	2. 18h 45	2. 23h 30	3. 21h 00
6. 6 00	6. 22 45	3. 0 15	5. 6 30 ?	5. 1 15
12. 9 45	9. 0 15	10 30	16 30 ?	8. 21 00
27. 4 00	10. 18 15	5. 19 30	8. 14 45 ?	9. 15 00
29. 20 15	16. 22 00	6. 0 15	10. 19 30	12. 8 00
30. 17 30	20. 0 15	21 00	11. 18 15	22 00
31. 19 00	24. 22 00	9. 4 00	12. 2 30	23 00
	26. 17 45	13. 22 30	13. 18 00	13. 1 45
		15. 0 15	17. 14 45	18. 11 30
		2 15	18. 13 15 ?	22. 17 45
		25. 0 00	22 15	19 00
		27. 1 15	23. 10 45	26. 11 45
		28. 21 30	13 30	28. 8 00
		29. 2 00	24. 16 00	29. 5 15
		31. 1 30	25. 16 30	5 45
			26. 20 15	31. 10 45
			28. 20 00 ?	16 45
			30. 15 30	
			31. 14 30 ?	
			18 00 ?	

VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
4. 1h 00	17. 16h 30	8. 22h 00	7. 16h 45	3. 13h 45
13. 21 30	20. 15 00	12. 3 00	18 45	6. 16 00
14. 20 30		19. 11 00	20 45	10. 16 00
20. 23 00			22 45	28. 15 00
			8. 17 30	
			12. 1 45	
			13. 18 15	
			16. 17 15	
			18 15	
			28. 15 15	
			29. 16 15	
			18 45	

September, 1957

I.	II.	III.	IV.	V.
13. 0h 45	7. 3h 30	9. 0h 00	9. 12h 30	5. 23h 45
21. 11 15	12. 21 30	3 45	23 00	6. 1 45
29. 1 30	17. 19 30	20 45	10. 18 30 ?	2 15
	18. 1 15	10. 22 00	12. 14 00	2 45
	20. 23 00	11. 17 45	14. 23 00 ?	9 00
	28. 23 00	23 15	16. 1 00	7. 9 15
		12. 17 00	17. 14 00	12 15
		22 00	18. 18 30	8. 12 30
		16. 18 00	20. 14 00	17 30
		18. 20 30	17 00	9. 14 45
		19. 0 30	22 00	10. 15 00
		21. 0 30	21. 10 15	20 00
		24. 20 15	24. 1 30	11. 2 15
		28. 20 15	25. 14 45	17. 7 30
			27. 11 00	18 00
			12 30	19. 8 00
			23 30	20. 10 00
			28. 5 30 ?	24. 11 45
			30. 21 30	21 30
				28. 1 15

VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
	12. 3h 45	7. 14h 00	7. 17h 30	11. 7h 45
	23. 21 00	10. 21 30	19 00	
		24. 4 45	11. 14 00	
		16 00	16. 22 45	
		25. 20 00	24. 18 15	
			26. 2 30	

Oktober, 1957

I.	II.	III.	IV.	V.
14. 1h 30	8. 21h 30	2. 23h 30	1. 19h 45	1. 5h 15
21. 23 45	11. 18 00	4. 19 45	2. 20 30	2. 16 00
	15. 20 00	5. 0 45	3. 21 30	17 00
	31. 22 30	19 30	4. 15 45	4. 0 00
		6. 1 00	18 45	3 00
		9. 21 30	7. 20 30	23 30
		10. 3 00	11. 3 30 ?	5. 11 45
		20 00	13. 1 00 ?	12 45
		12. 21 30	4 00 ?	16 30
		13. 2 15	15. 16 30	7. 2 15
		21 15	19. 18 30	11 45
		14. 2 45	24. 3 30	12. 10 00
		15. 23 00	25. 18 45	13. 10 30
		19. 0 30	26. 10 30	15 00
		23. 2 15	27. 13 15 ?	18. 4 15
		24. 19 30	29. 2 45	22. 14 45
		25. 20 45	31. 20 15	24. 12 45
		26. 22 00		26. 1 45
		28. 18 00		4 15
				27. 7 15
				15 00
				31. 8 00

VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
3. 19h 00	29. 13h 00	1. 0h 45	3. 4h 15	16. 22h 00
28. 11 30		3 15	7. 23 30	26. 15 00
		4. 18 15	10. 0 30	
		10. 14 00	1 00	
		12. 5 45	1 30	
		16. 15 15	11. 2 00	
		22. 4 30	14. 1 30	
		24. 4 45	18. 1 00	
		29. 19 45	19. 23 00	
			24. 4 00	
			16 30	

November, 1957

I.	II.	III.	IV.	V.
6. 20h 00	2. 18h 45	3. 18h 45	3. 2h 30	5. 13h 00
	4. 22 00	4. 1 15	8. 5 00	6. 15 45
	5. 0 00	17 45	10. 17 30 ?	8. 2 30
	12. 20 30	9. 23 00	11. 0 45	10. 17 45
	19. 23 30	12. 22 45	12. 22 00	19 15
	30. 2 00	16. 19 00	13. 4 45	18. 23 00
		17. 0 15	20. 18 45	23. 14 15
		19. 21 30	22. 19 15	24. 3 30
		20. 21 45	23. 4 30	4 00
		21. 23 30	27. 19 30	4 45
		26. 0 00	28. 4 30	25. 0 15
		22 30		28. 6 00
		27. 16 15		22 00
		22 30		29. 3 15
		29. 1 30		12 45
		23 00		30. 14 00
				16 15
				18 30

VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
	1. 2h 00		16. 23h 00	12. 6h 45
	23. 8 00		23 30	15. 19 45
			17. 0 30	17. 4 30
			2 30	25. 4 30
			3 45	26. 3 15
			22 00	28. 12 45
			21. 22 00	29. 3 30
			22 30	

Dezember, 1957

I.	II.	III.	IV.	V.
1. 4h 15	10. 20h 15	1. 22h 15	4. 0h 30 ?	2. 14h 30
19. 10 30	23. 22 30	2. 1 30	22 30	2. 10 30
	24. 19 45	22 30	6. 0 15 ?	4. 17 45
	26. 20 00	5. 1 45	10. 3 30 ?	8. 0 45
	27. 1 45	9. 22 15	11. 15 15	10 15
	31. 1 00	10. 21 00	13. 16 15 ?	12. 3 15
		23 30	14. 3 30	14. 9 45
		11. 2 15	13 30	15. 5 00
		16. 22 30	27. 20 00 ?	17. 12 00
		27. 23 45	23 00	12 30
			26. 18 30	18. 5 45
			27. 0 30	25. 6 30
			21 00	
			29. 22 00 ?	

VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
	10. 16h 30	20. 17h 30	11. 0h 00	18. 8h 45
			0 15	26. 6 15
			1 15	
			1 30	
			14. 22 00	
			24. 23 15	
			25. 00 00	

VI/b

Die Kennwerte der Störungen

Kennzahl \ Stunde	0—3	3—6	6—9	9—12	12—15	15—18	18—21	21—24	Summe
				I.					
A	1	—	—	—	—	—	—	—	1
B	—	2	—	2	—	1	—	1	6
C	1	1	1	1	—	1	3	—	8
a	1	2	—	3	—	1	2	—	9
b	—	—	—	—	—	—	—	—	—
c	1	—	1	—	—	—	—	—	2
d	—	—	—	—	—	1	1	1	3
.....	2	3	1	3	—	2	3	1	15
Summe									
				II.					
α	8	2	—	—	—	—	2	7	19
β	11	1	—	—	—	1	9	14	36
γ	5	—	—	1	—	3	6	15	30
δ	—	—	—	—	—	1	5	1	7
ε	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ζ	5	1	—	—	—	—	3	—	9
η	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ϑ	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ι	—	—	—	—	—	—	—	—	—
a	22	1	—	—	—	1	7	21	52
b	2	2	—	—	—	—	1	2	7
c	—	—	—	—	—	—	8	5	13
d	3	—	—	1	—	3	5	7	19
0— 2	1	—	—	—	—	—	2	1	4
3— 5	8	—	—	—	—	1	4	7	20
6—10	13	1	—	—	—	3	12	15	44
11—	6	2	—	—	—	1	6	12	27
Summe	31	4	—	1	—	5	25	37	101
				III.					
α	3	—	—	—	—	1	1	6	11
β	—	—	—	—	—	1	1	6	8
γ	3	—	—	—	—	—	—	3	6
δ	4	1	—	—	—	1	1	1	7
ε	4	—	—	1	—	—	—	—	5
ζ	1	1	—	—	—	1	5	4	12
η	6	1	—	—	—	—	4	3	14
ϑ	2	—	—	—	—	—	3	4	9
ι	1	—	—	—	—	—	—	—	1
a	16	3	—	—	—	4	4	14	41
b	1	—	—	—	—	—	—	3	4
c	2	—	—	—	—	—	8	8	18
d	—	—	—	1	—	—	3	2	6
e	1	—	—	—	—	—	—	—	1
f	—	—	—	—	—	—	—	—	—
g	4	—	—	—	—	—	—	—	4
h	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Kennzahl \ Stunde	0—3	3—6	6—9	9—12	12—15	15—18	18—21	21—24	Summe
A	—	—	—	—	—	1	—	2	3
B	4	—	—	—	—	—	2	6	12
C	2	—	—	1	—	—	2	2	7
D	5	—	—	—	—	—	2	5	12
E	4	—	—	—	—	2	2	3	11
F	2	—	—	—	—	1	6	9	18
G	1	3	—	—	—	—	1	—	5
0—1,8	2	—	—	—	—	—	—	—	2
1,8—3,6	6	1	—	1	—	4	8	9	29
3,6—5,4	9	1	—	—	—	—	2	5	17
5,4—7,2	2	1	—	—	—	—	3	3	9
7,2—9,0	3	—	—	—	—	—	1	5	9
9,0—	2	—	—	—	—	—	1	4	7
0—3	1	—	—	—	—	—	—	2	3
4—5	8	—	—	—	—	—	6	10	24
6—8	14	3	—	1	—	2	7	10	37
9—10	1	—	—	—	—	1	2	4	8
Summe	24	3	—	1	—	4	15	26	73
%	77	75	?	?	?	80	60	70	
				IV.*					
α	—	1	—	1	3	2+2	6+1	2	15+ 3
β	—	—+1	—	—	1+2	2	4	3	10+ 3
γ	1	—	—	—	—	—	—+2	1	2+ 2
δ	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ε	—	—+1	—	—	—	—	2	1	3+ 1
ζ	5+1	1+1	—	1	1	3+1	3	2+1	16+ 4
η	—+1	—+1	—+1	1	4+1	—	1+1	1+1	7+ 6
ϑ	—+1	4	—	1	—+1	—	—	1	6+ 2
ι	1	—	—	—	—	—	—	—	1
a	4+2	1+1	—	3	6+3	4+1	10+2	8+1	36+10
b	1+1	1+1	—	—	1+1	—	—	—	3+ 3
c	—	3+1	—	—	—	—+1	1+1	1+1	5+ 4
d	1	1	—	1	2	3+1	3+1	1	12+ 2
e	1	—	—+1	—	—	—	—	—	1+ 1
f	—	—	—	—	—	—	—	—	—
g	—	—+1	—	—	—	—	1	—	1+ 1
h	—	—	—	—	—	—	1	1	2
A	—+1	—	—	—	—	—	3	1	4+ 1
B	1	—	—	—	2+1	—+1	4+3	3+1	10+ 6
C	2	—+1	—	2	1+3	2	1	1	9+ 4
D	1	—	—	1	4	4	4+1	4	18+ 1
E	2	1	—	1	1	1+1	1	1	8+ 1
F	—+2	4+2	—	—	1	—	1	—	6+ 4
G	—	—	—	—	—	—+1	—	—	—+ 1
0—	1	—	—	—	—	—	1	—	2
1,8	4	5+1	—+1	3	5+1	4	10	8	39+ 3
3,6	2+1	—+3	—	—	3+1	2+1	5+2	2+1	14+ 9
5,4	—	1	—	—	1+1	1+1	—+1	1	4+ 3
7,2	—+1	—	—	1	—	—	—	—	1+ 1
9,0	—+1	—	—	—	—+1	—+1	—+1	—+1	—+ 5

* Nach dem +-Zeichen stehende Zahlen sind mit unbestimmten Störungen behaftete Bais.

Kennzahl \ Stunde	0—3	3—6	6—9	9—12	12—15	15—18	18—21	21—24	Summe
0—3	3	3+1	−+1	2	2	2	4	3	19+ 2
4—5	4+2	2	—	1	5+3	5+1	11+1	7	35+ 7
6—8	−+1	−+3	—	1	2+1	−+1	1+3	1+1	5+10
9—	—	—	—	—	—	−+1	—	−+1	−+ 2
Summe	7	6	—	4	11	7	16	10	61
+ ?	10	10	1	4	15	11	20	12	83

V.

α	4	2	—	—	—	2	—	3	11
β	5	2	1	—	1	2	1	4	16
γ	1	—	—	—	—	1	2	—	4
δ	—	—	—	—	—	1	1	—	2
ε	1	—	—	—	—	—	—	—	1
ζ	—	2	—	4	2	3	1	1	13
η	1	3	3	7	3	3	—	—	20
ϑ	—	3	2	4	6	1	—	—	16
ι	1	—	1	—	1	—	—	—	3
a	7	7	3	8	8	6	3	5	47
b	—	1	—	—	1	—	—	—	2
c	—	2	—	—	1	—	1	—	4
d	4	3	2	7	2	8	1	3	30
e	—	—	—	—	—	—	—	—	—
f	1	—	1	—	1	—	—	—	3
g	1	—	—	—	—	—	—	—	1
h	—	—	—	—	—	—	—	—	—
A	1	1	—	2	—	—	—	2	6
B	4	6	4	7	3	3	2	1	30
C	6	—	2	—	3	3	—	2	17
D	—	2	—	3	4	5	1	2	17
E	—	—	—	2	2	1	1	1	7
F	—	2	—	—	—	1	1	—	4
G	—	2	—	1	—	—	—	—	3
1,8	5	4	2	3	1	3	3	2	23
3,6	5	5	2	6	4	4	2	—	28
5,4	1	1	1	2	3	4	—	2	14
7,2	—	1	2	2	2	1	—	1	9
9,0	2	1	—	2	3	2	—	3	13
1	12	13	7	9	8	10	4	6	69
2	1	—	—	6	5	4	1	3	20
Summe	13	13	7	15	13	14	5	9	89

VI.—IX.

VI.	1	—	—	1	—	—	2	2	6
VII.	1	1	1	—	1	3	—	1	8
VIII.	1	6	—	1	2	3	3	2	18
IX.	15	3	—	—	1	7	7	11	44

Kennzahl \ Stunde	0—3	3—6	6—9	9—12	12—15	15—18	18—21	21—24	Summe
				X.					
α	—	—	3	—	—	—	—	—	3
β	—	—	—	—	—	—	1	1	2
γ	—	—	—	—	1	2	—	—	3
δ	—	1	1	—	—	—	—	—	2
ε	—	1	—	—	—	—	—	—	1
ζ	—	1	—	—	—	1	—	—	2
η	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ϑ	—	—	—	—	—	1	—	—	1
ι	—	—	—	—	1	—	—	—	1
a	—	1	1	—	1	1	—	1	5
b	—	—	—	—	—	—	—	—	—
c	—	2	—	—	—	—	—	—	2
d		1	3	—	1	3	1	—	9
0	—	—	—	—	1	1	—	1	3
1,8	—	1	4	—	1	3	—	—	9
3,6	—	1	—	—	—	—	1	—	2
5,4	—	2	—	—	—	—	—	—	2
Summe	—	4	4	—	2	4	1	1	16

Bemerkung: Ganze Zahlen — Dauer des Ereignisses in Zehntelstunden
Gebrochene Zahlen — Amplitude in mV/km

VII. Schnelle Registrierung

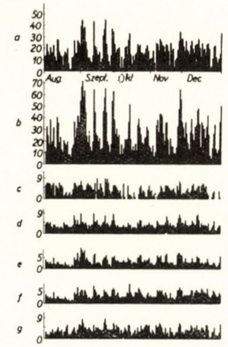
Stunde / Param.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.	75	69	65	54	55	53	47	38	38	39	35	37	38
2.	52	40	72	90	101	95	84	100	115	110	90	95	99
3.	1,9	4,3	5,9	12,4	13,2	22,4	13,7	7,7	11,2	13,8	14,3	8,1	9,8
4.	1,1	2,9	4,6	5,8	4,6	11,1	10,9	6,9	5,5	5,3	6,2	3,1	4,3
5.	130	116	148	162	174	183	156	153	170	168	146	143	151
6.	53	59	48	45	54	32	22	25	19	15	23	23	35
7.	119	150	126	103	118	132	122	91	83	121	107	118	123
8.	95	102	127	151	169	166	188	194	212	232	197	192	178
9.	71	91	100	112	108	109	126	133	95	109	119	119	120
10.	96	90	92	84	68	66	102	77	73	85	75	75	88
11.	305	362	440	533	544	654	641	562	557	568	606	508	536
													Ost-
1.	85	77	111	95	90	60	46	43	33	34	25	35	28
2.	72	75	80	97	103	104	113	111	123	112	104	94	91
3.	2,0	5,8	5,9	10,8	11,2	17,4	10,7	17,6	16,1	14,5	14,8	14,9	19,4
4.	0,9	1,8	3,4	3,5	5,4	10,9	6,7	13,2	4,9	6,8	8,6	3,5	5,4
5.	160	160	200	216	210	192	186	185	177	167	152	147	143
6.	88	66	89	81	103	80	30	35	24	26	19	36	15
7.	112	137	131	121	131	170	124	106	63	97	86	100	101
8.	109	126	147	162	159	160	182	199	231	228	203	204	198
9.	98	97	122	108	92	107	118	125	99	131	134	132	133
10.	78	78	69	61	46	31	44	63	49	59	71	57	61
11.	314	371	351	392	445	608	523	680	586	608	674	567	609

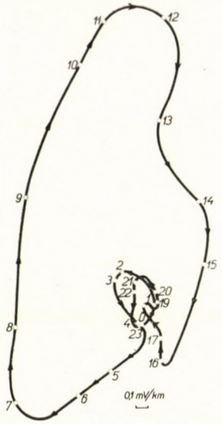
Jahr 1957. Nord-Komponent

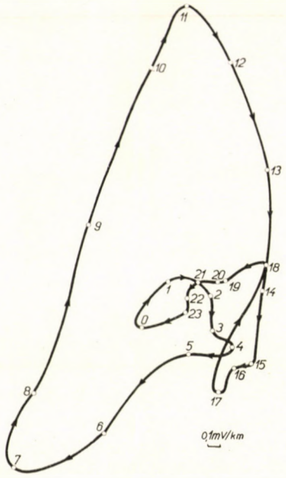
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	Mitt.
47	53	60	68	67	107	94	128	103	75	80	63,5
86	85	89	85	78	82	98	64	66	67	53	83,2
8,0	9,2	7,4	5,2	5,4	5,8	7,6	7,2	6,6	4,0	4,1	8,72
3,4	4,5	4,1	3,7	3,4	2,5	1,6	2,4	2,4	1,8	1,9	4,33
144	152	150	162	154	197	201	202	178	148	139	159,8
48	44	56	50	66	97	104	92	70	71	49	50
112	102	96	115	129	141	114	119	140	143	138	119
153	169	165	157	173	151	118	124	128	113	111	157
115	109	109	110	102	98	89	94	91	91	88	104
64	67	44	58	67	74	81	88	81	96	88	80
485	494	489	421	416	345	371	311	339	354	333	463
Komponent											
29	27	44	63	63	99	102	107	100	113	120	67,9
89	88	100	90	85	75	70	72	82	80	124	93,1
15,7	12,5	12,0	9,0	5,6	8,1	3,9	2,4	4,5	5,2	5,7	10,20
6,9	9,7	10,0	5,5	2,5	2,0	0,6	1,8	2,2	2,2	1,5	5,00
141	137	166	168	156	184	176	183	189	200	251	177,2
27	24	38	50	56	88	98	81	72	95	110	60
67	72	62	82	104	113	108	123	131	143	143	109
175	180	194	190	182	155	130	127	112	97	124	166
147	148	140	126	128	123	126	102	100	93	113	118
45	54	45	62	77	78	90	74	94	100	105	66
650	690	617	484	415	456	300	304	341	328	347	473

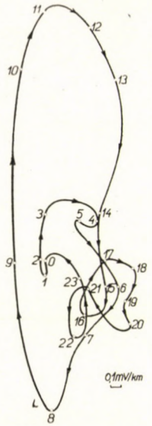
A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1958. VIII. 26. — Terjedelem: 30 (A/5) ív, 111 ábra (4 szines), 5 melléklet

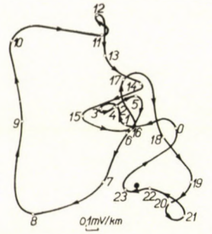
46688/59 Akadémiai Nyomda Budapest. — Felelős vezető: Bernát György.

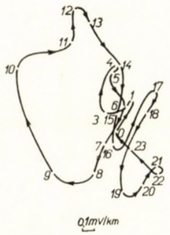

a
b
c
d
e
f
g
Aug.
Sept.
Okt
Nov
Dec

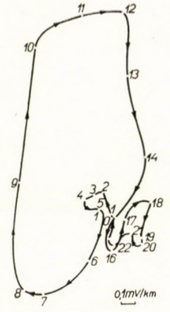

0,1 mV/km

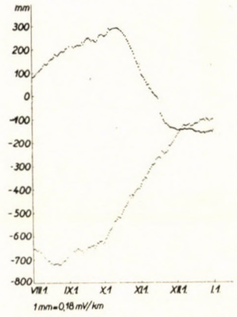

0,1mV/km

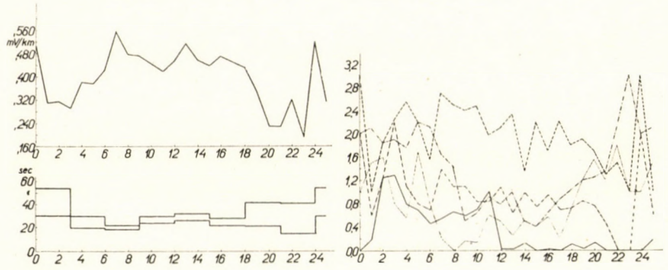

0,1mV/km

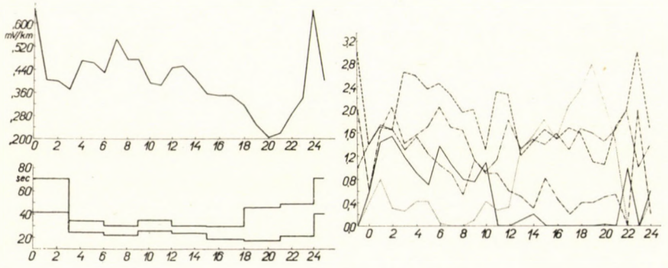

0,1mV/km

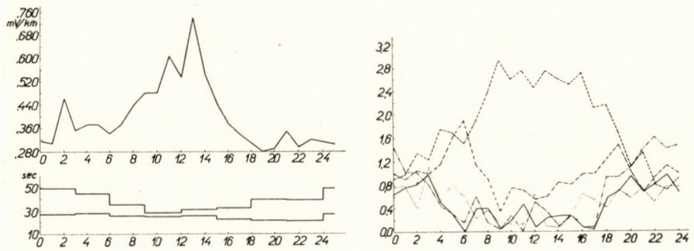

0,1mV/km

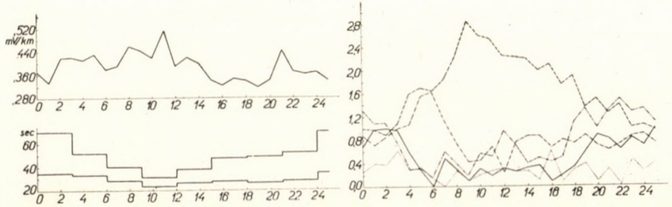

0,1mV/km

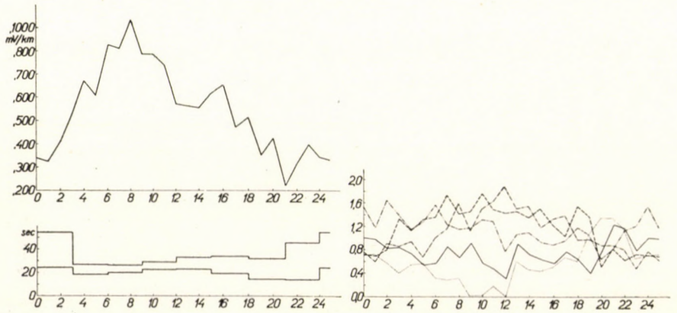

mm
VIII.1
IX.1
X.1
XI.1
XII.1
I.1
1mm=0,18 mV/km

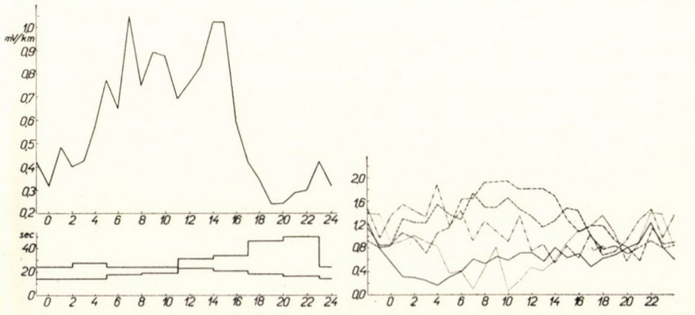

mV/km
sec


mV/km
sec


mV/km
sec


mV/km
sec


mV/km
sec


mV/km
sec

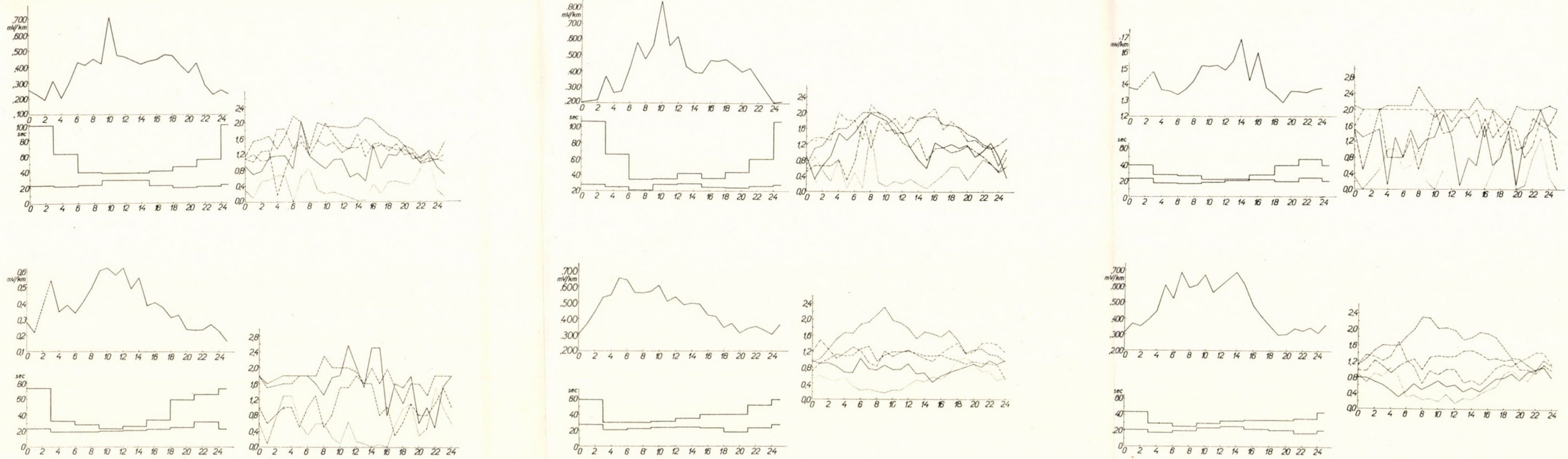


Abb. I/1. a) Die tägliche Summe der magnetischen Charakterzahlen in Collm — *b)* Die Summe der tellurischen Charakterzahlen — *c)—g)* Die Charakterzahlen in den 5 Frequenzklassen *III/1—6.* Vektordiagramme in Aug., Sept., Okt., Nov., Dez. 1957 und Jahresmittel — *III/7.* Mittlere Elektrodenpotenzial-Differenz — *VII/1.—6.* Ergebnisse der Schnellregistrierung: *a)* Mittlere Amplitude in mV/km — *b)* Mittlere Periode. Obere Linie aus Amplituden, die grösser als 0,1 mV/km sind, untere Linie aus allen Amplituden — *c)* Mittlere Charakterzahlen für die Pulsationen von

.....	0—8″
—·—·—·—·—	8—15″
- - - - - - - - - - - - -	15—30″
—·—·—·—·—	30—60″
————	1—2′

(O) zeigt die Ost, (N) die Nordkomponente

1. Juni
2. August
3. September
4. November
5. Dezember
6. Jahresdurchschnitt

INDEX

Erdey-Gruz, T. (Budapest): Eröffnungsansprache 7

I. Ausgleichungskolloquium

Tárczy-Hornoch, A. (Sopron): Weiteres zur Ausgleichung der kontinentalen Triangulierungsnetze 9

Diskussion:

Kuska, F. (Bratislava) 16

Hristow, W. K. (Sofia): Klassische und moderne Genauigkeitsabschätzungen in einigen Ausgleichungsfällen 17

Diskussion:

Böhm, J. (Praha) 39
Arnold, K. (Potsdam) 40
Reicheneder, K. (Potsdam) 40
Peschel, H. (Dresden) 41
Böhm, J. (Praha) 41
Durnjew, A. I. (Moskwa—Dresden) 41
Hristow, W. K. (Sofia) 43

Homoródi, L. (Budapest): Die Deutung des Punktfehlers 45

Diskussion:

Reissmann, G. (Dresden) 53
Vincze, V. (Budapest) 53
Durnjew, A. I. (Moskwa—Dresden) 56
Hristow, W. K. (Sofia) 57

II. Triangulierungskolloquium

Böhm, J. (Praha): Einige Erfahrungen beim Ausbau des trigonometrischen Grundnetzes in der Tschechoslowakei 59

Diskussion:

Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 68
Homoródi, L. (Budapest) 68

Regőczi, E. (Budapest): Die wissenschaftlichen und wirtschaftlichen Ergebnisse des ungarischen Triangulierungsverfahrens 71

Diskussion:

Durnjew, A. I. (Moskwa—Dresden) 92
Jasnorzewski, J. (Warszawa) 92

Odlanicki, M. (Kraków): Die Entwicklung der polnischen Geodäsie-Wissenschaft in den Jahren 1945—1956 93

Diskussion:
Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 99
Jasnorzewski, J. (Warszawa) 99

Durnjew, A. I. (Moskwa—Dresden): Метод построения геодезическнх сетей с помошью вспомогательных Пунктов 101

Diskussion:
Peschel, H. (Dresden) 120
Durnjew, A. I. (Moskwa—Dresden) 120
Peewsky, V. (Sofia) 120

III. Projektionsrechnungs-Kolloquium

Hazay, I. (Sopron): Über die Probleme der Projektion zwischen zwei Ellipsoiden ... 121

Diskussion:
Böhm, J. (Praha) 124
Arnold, K. (Potsdam) 127
Hristow, W. K. (Sofia) 127
Hazay, I. (Sopron) 128

Kaspar, J. (Praha): Das Bild der Kurve bei der Abbildung einer beliebigen Fläche auf eine andere 131

Szádeczky-Kardoss, Gy. (Sopron): Die Berechnung der ellipsoidischen Bogenlänge von Meridianschnitten und Normalschnitten mittels Rechenmaschine 147

IV. Nivellierungskolloquium

Böhm, J. (Praha): Einige Erfahrungen bei der Entwicklung des Nivellementgrundnetzes in der Tschechoslowakei 153

Böhm, J. (Praha): Allgemeiner Ausdruck für die Nivellierungs- und tachymetrische Refraktion 157

Diskussion:
Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 163
Peschel, H. (Dresden) 163
Hristow, W. K. (Sofia) 164
Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 164
Bendefy, L. (Budapest) 165

Bendefy, L. (Budapest): Niveauänderungen im Raum von Transdanubien auf Grund zeitgemässer Feineinwägungen 167

Diskussion:
Böhm, J. (Praha) 187
Durnjew, A. I. (Moskwa—Dresden) 187
Károlyi, Z. (Budapest) 188
Bendefy, L. (Budapest) 189

Müller, I. (Budapest): Vorschlag zur Berechnung der orthometrischen Höhen der Präzisionsnivellement-Hauptpunkte 191

Diskussion:
Májay, P. (Budapest) 196
Peschel, H. (Dresden) 198
Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 198
Hristow, W. K. (Sofia) 199
Durnjew, A. I. (Moskwa—Dresden) 199
Bendefy, L. (Budapest) 199
Müller, I. (Budapest) 201

Meisser, O. (Freiberg/Sa.): Die Weiterentwicklung der Freiberger Schlauchwaage ... 203

Diskussion:

Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) ... 204
Kowalczyk, Z. (Kraków) ... 204
Fazekas, K. (Budapest) ... 204
Hristow, W. K. (Sofia) ... 205

V. Photogrammetrisches Kolloquium

Buchholtz, A. (Dresden): Der photogrammetrische Gerätebau und Hochschulunterricht in der Deutschen Demokratischen Republik ... 207

Diskussion:

Hankó, G. (Budapest) ... 218

Sébor, J. (Sopron): Untersuchungen über Photogrammetrie ... 219

Diskussion:

Hankó, G. (Budapest) ... 225

VI. Gravitationskolloquium

Renner, J. (Budapest): Schwerkraftsuntersuchungen in Ungarn seit Roland Eötvös' Tätigkeit ... 227

Diskussion:

Kádár, I. (Budapest) ... 240

Egyed, L. (Budapest): Die Änderung der Dimensionen der Erde auf Grund paläogeographischer Daten und ihre geodätischen Konsequenzen ... 243

Diskussion:

Eilingzfeld, F. (Sopron) ... 247
Egyed, L. (Budapest) ... 247

Meisser, O. (Freiberg/Sa.): Experimentelle Dichtebestimmung für Schwerekorrektionen 249

Reicheneder, K. (Potsdam): Zur Neubestimmung der absoluten Schwere in Potsdam 251

Diskussion:

Jasnorzewski, J. (Warszawa) ... 254
Hristow, W. K. (Sofia) ... 254
Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) ... 254

Meisser, O. (Freiberg/Sa.): Die Behandlung von dünnen Wolframtorsionsdrähten für die Eötvössche Drehwaage ... 257

Prosen, D. (Beograd): Quelques remarques concernant l'étalonnage du grand cadran des gravimètres Norden ... 259

Diskussion:

Meisser, O. (Freiberg/Sa.) ... 259
Prosen, D. (Beograd) ... 259
Meisser, O. (Freiberg/Sa.) ... 259
Prosen, D. (Beograd) ... 260
Meisser, O. (Freiberg/Sa.) ... 260
Odlanicki, M. (Kraków.) ... 260
Prosen, D. (Beograd) ... 260
Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) ... 260
Prosen, D. (Beograd) ... 260
Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) ... 260

VII. Kartographisches Kolloquium

Irmédi-Molnár, L. (Budapest): Aus der Vergangenheit der ungarischen Kartographie 261

Diskussion:

Odlanicki, M. (Kraków) 265
Bendefy, L. (Budapest) 269
Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 270

Takács, J. (Budapest): Eine neue Methode der ungarischen Kartographie: die Karte der Zukunft 271

Diskussion:

Kuska, F. (Bratislava) 273
Hristow, W. K. (Sofia) 273
Maácz, E. (Budapest) 276

VIII. Astronomisch-Geodätisches Kolloquium

Klatsmányi, Á. (Budapest): Die Verwendung von Quarzuhren zur geographischen Ortsbestimmung 277

Diskussion:

Reicheneder, K. (Potsdam) 290
Hristow, W. K. (Sofia) 290
Krajči, J. (Bratislava) 290

Arnold, K. (Potsdam): Betrachtungen zur Bestimmung des Einflusses der Lotkrümmung auf astronomische Positionsbestimmungen 291

Diskussion:

Hristow, W. K. (Sofia) 298
Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 298

Milasovszky, B. (Miskolc): Über einige Fragen der Astrogeodäsie in Ungarn 1948—1955 299

Diskussion:

Krajči, J. (Bratislava) 304
Tárczy-Hornoch, A. (Sopron) 304
Rédey, I. (Budapest) 304

Empfehlungen des Geodätischen Kongresses 306

Tárczy—Hornoch, A. (Sopron): Die Ergebnisse der Beobachtungen des bei Nagycenk errichteten Geophysikalischen Observatoriums von Juni bis Dezember 1957 .. 307

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest, VI. Népköztársaság útja 21. Account No. 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction à l'adresse suivante:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest, VI. Népköztársaság útja 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Budapest, 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

ACTA TECHNICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
L. GILLEMOT, GY. HEVESI, I. RÁZSÓ, K. SZÉCHY, G. TARJÁN

REDIGIT
A. GELEJI

TOMUS XXIII FASCICULUS 4

SERIES GEODAETICA ET GEOPHYSICA
TOMUS 1 FASCICULUS 4

AKADÉMIAI KIADÓ BUDAPEST

1959

ACTA TECHN. HUNG.

ACTA TECHNICA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐSÉG ÉS KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V. ALKOTMÁNY UTCA 21.

Az Acta Technica német, angol, francia és orosz nyelven közöl értekezéseket a műszaki tudományok köréből.

Az Acta Technica változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, több füzet alkot egy kötetet.

A közlésre szánt kéziratok a következő címre küldendők:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi és kiadóhivatali levelezés.

Az Acta Technica előfizetési ára kötetenként belföldre 80 forint, külföldre 110 forint. Megrendelhető a belföld számára az „Akadémiai Kiadó"-nál (Budapest V. Alkotmány utca 21. Bankszámla 05-915-111-44), a külföld számára pedig a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Bankszámla: 43-790-057-181), vagy annak külföldi képviseleteinél és bizományosainál.

Die Acta Technica veröffentlichen Abhandlungen aus dem Bereiche der technischen Wissenschaften in deutscher, französischer, englischer oder russischer Sprache.

Die Acta Technica erscheinen in Heften wechselnden Umfanges. Mehrere Hefte bilden einen Band.

Die zur Veröffentlichung bestimmten Manuskripte sind an folgende Adresse zu senden:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

An die gleiche Anschrift ist auch jede für die Schriftleitung und den Verlag bestimmte Korrespondenz zu richten.

Abonnementspreis pro Band: 110 Forint. Bestellbar bei dem Buch- und Zeitungs-Außenhandels-Unternehmen »Kultura« (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Bankkonto Nr. 43-790-057-181) oder bei seinen Auslandsvertretungen und Kommissionären.

BESTIMMUNG DES MITTLEREN FEHLERS DURCH VERBESSERUNGEN DER BEOBACHTUNGSERGEBNISSE

F. HALMOS

GEODÄTISCHES FORSCHUNGSLABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, SOPRON

[Eingegangen am 20. Mai 1958]

Es ist bekannt, dass die mittleren Fehler der ausgeglichenen Werte bei Ausgleichungsaufgaben aus Verbesserungen zu berechnen sind. Diese mittleren Fehler bestimmen im allgemeinen die Genauigkeit der erhaltenen Ergebnisse und dienen oft für unsere weiteren Messungen, bzw. Berechnungen als Grundlage. Z. B. bei Punktausgleichungen werden die erforderlichen Angaben der mittleren Fehlerellipse in der Funktion der bestimmten mittleren Fehler berechnet ; die Genauigkeit der entwickelten Grundlinie wird auf Grund des durch Ausgleichung gewonnenen mittleren Winkelfehlers des Grundlinienvierecks bestimmt ; der mittlere Fehler des durch eine Messreihe erhaltenen Längen- oder Winkelwertes erfolgt unter Berücksichtigung deren Gewichte. Bei allen diesen Aufgaben müssen wir darauf achten, dass die berechneten mittleren Fehler wirklich die Genauigkeit der betreffenden Beobachtungen charakterisieren, da in entgegengesetztem Falle die weiteren Berechnungen zu keinen realen Ergebnissen führen können.

In der Praxis kommt es oft vor, dass man aus den einzelnen Messreihen den Mittelwert berechnet und mit letzterem im weiteren als mit einem Messergebnis verfährt. Das Gewicht dieser fingierten Messergebnisse nimmt man bei gleich genauen Messungen gewöhnlich in solchen Fällen entsprechend der Zahl der Messungen an. Bei diesen Lösungen werden die durch Ausgleichung erhaltenen wahrscheinlichsten Werte dieselben sein, als wenn die Messungen einzeln in die Ausgleichung eingeführt sein würden, für die mittleren Fehler erhalten wir dagegen durch die zwei verschiedenen Berechnungsarten nicht dieselben Ergebnisse [1]. Die angeführte Studie von MÁJAY sieht den Grund hierfür darin, dass der mittlere Fehler ebenfalls einem mittleren Fehler habe und dessen Bestimmungsmethode für die Bestimmung des mittleren Fehlers nicht gleichgültig sei. Zwei Beziehungen werden für den mittleren Fehler des mittleren Fehlers von MÁJAY abgeleitet. Im ersten Fall geht er — nach JORDAN—EGGERT — aus den wahren Fehlern der Messungen aus [2] und erhält durch gewisse Näherungen mit JORDAN—EGGERT folgendes Ergebnis :

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} \tag{1}$$

wo m den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels, n die Zahl der Messungen, m_m den mittleren Fehler des mittleren Fehlers bedeutet. Das mittlere Fehlerquadrat lässt sich aber auch in der Funktion der einzelnen Beobachtungsergebnisse ausdrücken und so erhielt er für den mittleren Fehler des mittleren Fehlers die folgende Beziehung:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

Wenn wir die auf zwei verschiedenen Wegen gewonnenen Ergebnisse miteinander vergleichen, mag das zweite auf den ersten Blick verlässlicher scheinen, wie es auch dem Verfasser der Studie [1], MÁJAY, erschien, weil die Ableitung auf Grund der Unterschiede zwischen den Beobachtungsergebnissen und dem wahrscheinlichsten Wert unter Ausschluss jederlei Näherung geschah. Man kann jedoch nicht wissen, ob die Vernachlässigungen einander vergrössern oder kompensieren, deshalb kann man aus den Vernachlässigungen nicht sicher folgern, dass die Beziehung (1) nicht richtiger sei. Diese Frage wurde von L'AUNÉ [3] behandelt. Er beweist die Richtigkeit der Beziehung (1) auf dem Wege experimenteller Messergebnisse, dann — ähnlich dem Verfahren von GROSSMANN [4] — gibt er für die erste Beziehung eine Ableitung unter Ausschluss jeder Näherung und Vernachlässigung mit Anwendung der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung an.

Es steht aber noch immer dahin, warum der mittlere Fehler des auf Grund von Messungen unmittelbar berechneten arithmetischen Mittels nicht mit dem auf dem Wege der durch Gruppenbildung der Messungen abgeleiteten Gewichte erhaltenen mittleren Fehler identisch sei. Die Ursache des Unterschieds liegt eigentlich darin, dass die durch Gruppenbildung der unter denselben Umständen gemessenen Ergebnisse erhaltenen Gewichtszahlen bei der Ausgleichung nur eine genäherte Genauigkeit haben, da der streng genommene mittlere Fehler innerhalb der einzelnen Gruppen und damit auch das Gewicht von der Streuung der einzelnen Ergebnisse, und nicht nur von der Zahl der Messungen bestimmt wird. Die regelrechte mathematische Lösung des Problems wird von TÁRCZY-HORNOCH in seinem Werk »Zur Berechnung der mittleren Fehler aus den Verbesserungen und Herleitung der Verbesserungsgleichungen für Funktionen der Beobachtungen« [5] behandelt.*

Im Zusammenhang mit der Gruppenbildung der Messergebnisse lenkte er die Aufmerksamkeit schon in einem in 1949 erschienenen Werk auf die Änderung des mittleren Fehlers in folgenden Sätzen: »Es ist bekannt, dass mehrere Beobachtungen derselben zu bestimmenden Grössen bei Berücksichtigung der Gewichte für die weitere Ausgleichung zusammengezogen werden können. Die

*Einige sinnstörende Druckfehler — der Verfasser konnte die Korrekturen infolge seiner Auslandsreisen nicht selbst lesen — sind im nächsten Band berichtigt.

Werte der gesuchten Unbekannten werden dadurch nicht geändert, wohl aber die aus der Ausgleichung erhaltenen mittleren Fehler, wobei verlässlicher die aus mehreren Beobachtungen, also aus den nicht zusammengezogenen Werten ermittelten sind.« [6]

In unseren weiteren Erörterungen wollen wir dem in [5] mitgeteilten Gedankengang von TÁRCZY-HORNOCH folgen, deshalb werden wir einige Teile seiner Ableitung wiederholen müssen.

Wir untersuchen zuerst, wie das arithmetische Mittel und dessen mittlerer Fehler bei gleichgewichtigen Messungen zu berechnen sind.

Sei O_{I} der aus Messergebnissen $o_1, o_2, \ldots,$

O_{II} der aus Messergebnissen $o_k, o_{k+1}, \ldots,$

O_{III} der aus Messergebnissen $o_r, o_{r+1}, \ldots,$ usw. berechnete arithmetische Mittelwert. Wenn die auf O_{I}, $O_{\mathrm{II}}, \ldots$ bezogenen Verbesserungen mit $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots$ bezeichnet und in O_{I} n_{I} Messwerte, in O_{II} n_{II}, in O_{III} n_{III} zusammengezogen werden, wird für den wahrscheinlichsten Wert X folgende Gleichung gewonnen:

$$X = \frac{n_{\mathrm{I}} O_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} O_{\mathrm{II}} + n_{\mathrm{III}} O_{\mathrm{III}} + \ldots + n_i O_i}{n_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} + n_{\mathrm{III}} + \ldots + n_i} = \frac{[n0]}{[n]} \tag{3}$$

Wenn die auf das arithmetische Mittel bezogenen Verbesserungen der einzelnen fingierten Ergebnisse mit $v_{\mathrm{I}}, v_{\mathrm{II}}, v_{\mathrm{III}}, \ldots,$ bezeichnet werden, so ergibt sich für das mittlere Fehlerquadrat des arithmetischen Mittels folgende Formel:

$$m_X^2 = \frac{n_{\mathrm{I}} v_{\mathrm{I}}^2 + n_{\mathrm{II}} v_{\mathrm{II}}^2 + n_{\mathrm{III}} v_{\mathrm{III}}^2 + \ldots + n_i v_i^2}{(n_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} + n_{\mathrm{III}} + \ldots + n_i)(i-1)} \tag{4}$$

wobei i die Zahl der zusammengezogenen fingierten Beobachtungen ist. Das mittlere Fehlerquadrat kann auch aus den unmittelbar gemessenen Werten abgeleitet werden: wir bezeichnen die auf das arithmetische Mittel X bezogenen Verbesserungen der Messergebnisse $o_1, o_2, \ldots$ usw. mit $v_{x,1}, v_{x,2}, \ldots,$ $v_{x,k}, v_{x,k+1}, \ldots,$ welche folgendermassen ausgedrückt werden können:

$$\begin{aligned} v_{x,1} &= v_{\mathrm{I}} + v_1, \qquad v_{x,2} = v_{\mathrm{I}} + v_2, \ldots \\ v_{x,k} &= v_{\mathrm{II}} + v_k, \quad v_{x,k+1} = v_{\mathrm{II}} + v_{k+1}, \ldots \\ v_{x,r} &= v_{\mathrm{III}} + v_r, \quad v_{x,r+1} = v_{\mathrm{III}} + v_{r+1}, \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Durch die Bildung der Quadratsumme der Verbesserungen erhalten wir für das mittlere Fehlerquadrat folgende Formel:

$$m_X^2 = \frac{\begin{array}{c}(v_{\mathrm{I}} + v_1)^2 + (v_{\mathrm{I}} + v_2)^2 + \ldots + (v_{\mathrm{II}} + v_k)^2 + (v_{\mathrm{II}} + v_{k+1})^2 + \ldots + \\ + (v_{\mathrm{III}} + v_r)^2 + (v_{\mathrm{III}} + v_{r+1})^2 + \ldots\end{array}}{(n_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} + n_{\mathrm{III}} + \ldots + n_i)(n_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} + n_{\mathrm{III}} + \ldots + n_i - 1)} \tag{6}$$

Wenn wir die Summe der auf O_{I} bezogenen Verbesserungen mit $[vv]_{\mathrm{I}}$, die der auf O_{II} bezogenen mit $[vv]_{\mathrm{II}}$, usw., bezeichnen und die folgenden bekannten Verhältnisse einführen:

$$\begin{aligned} [vv] &= m_{\mathrm{I}}^2 \quad n_{\mathrm{I}}(n_{\mathrm{I}}-1) \\ [vv]_{\mathrm{II}} &= m_{\mathrm{II}}^2 \quad n_{\mathrm{II}}(n_{\mathrm{II}}-1) \\ [vv]_{\mathrm{III}} &= m_{\mathrm{III}}^2 \quad n_{\mathrm{III}}(n_{\mathrm{III}}-1) \end{aligned} \tag{7}$$

so gestaltet sich Formel (6) folgenderweise:

$$m_x^2 = \frac{\begin{array}{c} n_{\mathrm{I}}v_{\mathrm{I}}^2 + n_{\mathrm{II}}v_{\mathrm{II}}^2 + n_{\mathrm{III}}v_{\mathrm{III}}^2 + \ldots + n_i v_i^2 + n_{\mathrm{I}}(n_{\mathrm{I}}-1)\,m_{\mathrm{I}}^2 + \\ + n_{\mathrm{II}}(n_{\mathrm{II}}-1)\,m_{\mathrm{II}}^2 + n_{\mathrm{III}}(n_{\mathrm{III}}-1)\,m_{\mathrm{III}}^2 + \ldots + n_i(n_i-1)\,m_i^2 \end{array}}{(n_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} + n_{\mathrm{III}} + \ldots + n_i)\,(n_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} + n_{\mathrm{III}} + \ldots + n_i - 1)} \tag{8}$$

(Diese Formel ist Formel (6) in der Studie von TÁRCZY-HORNOCH [5].) Wenn man die auf zwei verschiedenen Wegen erhaltenen Formeln des mittleren Fehlerquadrats vergleicht, findet man, dass die regelrechte Formel (8) für das mittlere Fehlerquadrat des arithmetischen Mittels im allgemeinen einen anderen Wert ergibt als Formel (4). Die Differenz zwischen den beiden ist umso grösser, je mehr und je unterschiedlichere Glieder in die einzelnen Gruppen zusammengefasst werden, da der Wert der mit $n(n-1)m^2$ bezeichneten Glieder wesentliche Abweichungen verursachen kann. Daraus ersieht man, dass die Berechnung des mittleren Fehlers durch gruppenweise Mittelbildung, trotz der Einführung der Wiederholungszahlen als Gewichte, zu falschen Ergebnissen führt.

Ein ähnliches Problem kann nicht nur bei direkten Beobachtungen, sondern auch bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen entstehen, wenn z. B. im Falle einer Punktausgleichung der arithmetische Mittelwert der mehrmals wiederholten Winkelmessungen in die Ausgleichung eingeführt wird. Die Frage ist in der Fachliteratur eingehend behandelt [5] und ein direkt für die Fälle des Vorwärts- und Rückwärtseinschnittes ausgearbeitetes Verfahren ist in der Studie von HAZAY [8] zu finden. Besonders beachtenswert ist die Frage dann, wenn die durch Punktausgleichung gewonnenen mittleren Fehler für weitere Untersuchungen — z. B. für die Konstruktion der Fehlerellipse — benutzt werden. In solchen Fällen ist es immer zweckmässig auf die unmittelbar gemessenen Werte zurückzugreifen, da wir in entgegengesetztem Falle gefälschte Ergebnisse für die weiteren Untersuchungen erhalten. Dabei besteht der Satz freilich zu Recht, dass es genügt mit den fingierten Messergebnissen zu rechnen, vorausgesetzt, dass nur die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten gesucht werden, da die entsprechenden Werte für diese auch in dieser Weise (d. i. durch weniger Berechnung) zu gewinnen sind.

Nehmen wir ein Beispiel für den Fall der durch eine derartige Zusammenziehung der einzelnen Beobachtungen ermittelten fingierten Messergebnisse. Es scheint zweckmässig, hier nicht die in [1] mitgeteilten Ergebnisse zu verwenden, weil die dortigen Angaben — nach unserer Meinung — willkürlich aufgeschriebene Zahlen sind und die Anwendung solcher Zahlen als Messergebnisse keineswegs ratsam ist, da deren Verbesserungen keine normale Verteilung haben. Die Voraussetzung der Ausgleichung mit der Methode der kleinsten Quadrate ist aber die normale Verteilung. Aus den eigenen ausgeführten Längenmessungen entnehmen wir die unten mitgeteilten Ergebnisse. Unsere Aufgabe ist den wahrscheinlichsten Wert der Messungen, sowie den mittleren Fehler der einzelnen Messung, zuerst auf Grund der einzelnen Beobachtungen (Tabelle I), dann durch Ableitung aus den fingierten Messergebnissen (Tabelle II) und zuletzt durch die Zurückführung der fiktiven Messergebnisse auf die einzelnen Messungen (Tabelle III) zu bestimmen.

Tabelle I

Lfd. Nr.	o	n	no	$V_{(mm)}$	nvv	
1.	45,611	1	45,611	+1,7	2,89	
2.	5	1	5	—2,3	5,29	$X = \frac{[nv]}{[n]} = 45{,}6127$ m
3.	2	1	2	+0,7	0,49	
4.	3	1	3	—0,3	0,09	
5.	2	1	2	+0,7	0,49	$m_0 = \sqrt{\frac{[nvv]}{n-1}} = \pm 1{,}37$ mm
6.	3	1	3	—0,3	0,09	
[ ]				+0,1	9,34	

Wenn wir durch die Zusammenziehung der ersten drei und der letzten drei Messungen fingierte Messergebnisse ermitteln, erhalten wir auf Grund der Gleichung (4) folgende Werte :

Tabelle II

Lfd. Nr.	O	n	$V_{I,\,II}$ (mm)	nvv	
I.	45,6127	3	Ø	Ø	$X = \frac{[n0]}{[n]} = 45{,}6127$ m
II.	45,6127	3	Ø	Ø	$m_0 = Ø$

Wenn der mittlere Fehler der einzelnen Messung auf Grund der Gleichung (8) berechnet wird, ergeben sich folgende Ergebnisse :

Tabelle III

Lfd. Nr.	o	O	$V_{I,II}$ (mm)	V_1^s	nvv	$[vv]_{I,II}$	
1.	45,611			+1,7		2,89	
2.	5	45,6127	Ø	—2,3	Ø	5,29	$X = \frac{[n0]}{[n]} = 45{,}6127$ m
3.	2			+0,7		0,49	
4.	3			—0,3		0,09	
5.	2	45,6127	Ø	+0,7	Ø	0,49	$m_0 = \pm 1{,}37$ mm
6.	3			—0,3		0,09	
[ ]					Ø	9,34	

Das angeführte Beispiel zeigt also, dass in diesem Fall aus den durch Gruppenbildung der Messergebnisse eingeführten fingierten Werten ein völlig falscher mittlerer Fehler erhalten wird, falls die unmittelbar gemessenen Werte nicht berücksichtigt, bzw. unsere Berechnungen nicht der Formel (8) entsprechend ausgeführt werden.

Es kann vorkommen — bei Winkelmessungen seltener, umso öfter bei Längenmessungen —, dass die einzelnen Beobachtungen selbst von ungleicher Genauigkeit, d. h. ungleichgewichtig sind [7]. Schon TÁRCZY-HORNOCH hatte darauf hingewiesen [5 ; S. 148.], dass die von ihm mitgeteilten Formeln in dieser Richtung leicht zu ergänzen sind. Wir wollen dies hier vornehmen und zunächst untersuchen, wie man in diesem Fall den mittleren Fehler der Gewichtseinheit berechnet.

Wir untersuchen zuerst den allgemeinen Fall, bei dem die in mehreren Gruppen durchgeführten Messungen auch innerhalb der einzelnen Gruppen ein verschiedenes Gewicht haben. Die einzelnen Beobachtungen sind die Folgenden:

I. Gruppe : $o_1, o_2, o_3, \ldots$, mit $p_1, p_2, p_3 \ldots$ Gewichten.
Zahl der Messungen n_1.

II. Gruppe : $o_k, o_{k+1}, o_{k+2}, \ldots$, mit $p_k, p_{k+1}, p_{k+2} \ldots$ Gewichten.
Zahl der Messungen n_{II}.

III. Gruppe : $o_r, o_{r+1}, o_{r+2}, \ldots$, mit $p_r, p_{r+1}, p_{r+2} \ldots$ Gewichten.
Zahl der Messungen n_{III}.

Das gewogene arithmetische Mittel der ersten Gruppe bezeichnen wir als eine aus zusammengezogenen Beobachtungen gebildete fingierte Messung mit O_I.

$$O_I = \frac{p_1 o_1 + p_2 o_2 + p_3 o_3 + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots} = \frac{[po]}{[p]_I} \tag{9}$$

In ähnlicher Weise kann auf Grund der Beobachtungen der zweiten Gruppe O_{II} und der dritten Gruppe O_{III}, abgeleitet werden. Das Gewicht von O_I bezeichnen wir mit $[p]_I$, von O_{II} mit $[p]_{II}$, und von O_{III} mit $[p]_{III}$.

Auf Grund des Obigen erhalten wir für den wahrscheinlichsten Wert die folgende Gleichung:

$$X = \frac{[p]_I O_I + [p]_{II} O_{II} + [p]_{III} O_{III} + \dots}{[p]_I + [p]_{II} + [p]_{III} + \dots} \tag{10}$$

Wenn man die auf die O_I, O_{II}, O_{III}, ... fingierten Beobachtungen bezogenen Verbesserungen mit v_I, v_{II}, v_{III}, ... bezeichnet, dann erhält man für das mittlere Fehlerquadrat des arithmetischen Mittels (X) nach Gleichung (10) folgende Formel:

$$m_x^2 = \frac{[p]_I v_I^2 + [p]_{II} v_{II}^2 + [p]_{III} v_{III}^2 + \dots}{\{[p]_I + [p]_{II} + [p]_{III} + \dots\}\{i - 1\}} \tag{11}$$

in dem i die Zahl der zusammengezogenen fingierten Beobachtungen ist. Unsere obige Gleichung gibt jedoch nur annähernd das mittlere Fehlerquadrat an. Zur Ableitung der genaueren Formel muss man auf die Verbesserungen zurückgreifen, die sich auf die unmittelbar gemessenen Beobachtungen beziehen. Diese sind dem Vorhergehenden entsprechend Folgende:

$$\begin{aligned} v_{x,1} &= v_I + v_1, & v_{x,2} &= v_I + v_2, \dots \\ v_{x,k} &= v_{II} + v_k, & v_{x,k+1} &= v_{II} + v_{k+1}, \dots \\ v_{x,r} &= v_{III} + v_r, & v_{x,r+1} &= v_{III} + v_{r+1}, \dots \end{aligned}$$

Wenn man die auf ursprüngliche Beobachtungen bezügliche Verbesserungen in Betracht zieht, erhält man für das mittlere Fehlerquadrat folgende Gleichung:

$$m_x^2 = \frac{\left\{\begin{array}{l}\{p_1 (v_I + v_1)^2 + p_2 (v_I + v_2)^2 + \dots\} + \{p_k (v_{II} + v_k)^2 + p_{k+1} (v_{II} + \\ + v_{k+1})^2 + \dots\} + \{p_r (v_{III} + v_r)^2 + p_{r+1} (v_{III} + v_{r+1})^2 + \dots\} + \dots\end{array}\right.}{\{[p]_I + [p]_{II} + [p]_{III} + \dots\}(n_I + n_{II} + n_{III} + \dots - 1)} \tag{12}$$

Wenn man die einzelnen Glieder quadriert und in Betracht zieht, dass die mit den entsprechenden Gewichten multiplizierten Verbesserungen, bezogen auf die gewogenen arithmetischen Mittelwerte der Gruppe, gleich Null sind, so erhalten wir:

$$m_x^2 = \frac{\left\{\begin{array}{l}(p_1 + p_2 + p_3 + \dots) v_I^2 + (p_k + p_{k+1} + p_{k+2} + \dots) v_{II}^2 + (p_r + \\ + p_{r+1} + p_{r+2} + \dots) v_{III}^2 + \dots + [pvv]_I + [pvv]_{II} + [pvv]_{III} + \dots\end{array}\right.}{\{[p]_I + [p]_{II} + [p]_{III} + \dots\}\{n_I + n_{II} + n_{III} + \dots - 1\}} \tag{13}$$

Man führt nun die folgenden Bezeichnungen ein :

$$\begin{aligned}
[pvv]_{\mathrm{I}} &= p_1 v_1 v_1 + p_2 v_2 v_2 + \ldots &&= m_{\mathrm{I}}^2 [p]_{\mathrm{I}} (n_{\mathrm{I}} - 1) \\
[pvv]_{\mathrm{II}} &= p_k v_k v_k + p_{k+1} v_{k+1} v_{k+1} + \ldots &&= m_{\mathrm{II}}^2 [p]_{\mathrm{II}} (n_{\mathrm{II}} - 1) \\
[pvv]_{\mathrm{III}} &= p_r v_r v_r + p_{r+1} v_{r+1} v_{r+1} + \ldots &&= m_{\mathrm{III}}^2 [p]_{\mathrm{III}} (n_{\mathrm{III}} - 1)
\end{aligned} \tag{14}$$

Wenn man diese Werte der Gleichung (13) entsprechend einführt, so erhalten wir :

$$m_{\bar{x}}^2 = \frac{\begin{array}{l}\{[p]_{\mathrm{I}} v_{\mathrm{I}}^2 + [p]_{\mathrm{II}} v_{\mathrm{II}}^2 + [p]_{\mathrm{III}} v_{\mathrm{III}}^2 + \ldots + [p]_{\mathrm{I}} (n_{\mathrm{I}} - 1) m_{\mathrm{I}}^2 + \\ + [p]_{\mathrm{II}} (n_{\mathrm{II}} - 1) m_{\mathrm{II}}^2 + [p]_{\mathrm{III}} (n_{\mathrm{III}} - 1) m_{\mathrm{III}}^2 + \ldots\}\end{array}}{\{[p]_{\mathrm{I}} + [p]_{\mathrm{II}} + [p]_{\mathrm{III}} + \ldots\}\{n_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} + n_{\mathrm{III}} + \ldots - 1\}} \tag{15}$$

Für das mittlere Fehlerquadrat der Gewichtseinheit wird dann bekanntlich :

$$m_0^2 = \frac{\begin{array}{l}\{[p]_{\mathrm{I}} v_{\mathrm{I}}^2 + [p]_{\mathrm{II}} v_{\mathrm{II}}^2 + [p]_{\mathrm{III}} v_{\mathrm{III}}^2 + \ldots + [p]_{\mathrm{I}} (n_{\mathrm{I}} - 1) m_{\mathrm{I}}^2 + \\ + [p]_{\mathrm{II}} (n_{\mathrm{II}} - 1) m_{\mathrm{II}}^2 + [p]_{\mathrm{III}} (n_{\mathrm{III}} - 1) m_{\mathrm{III}}^2 + \ldots\}\end{array}}{(n_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} + n_{\mathrm{III}} + \ldots - 1)} \tag{16}$$

Daher ergibt die Gleichung (15), im Falle dass die einzelnen Beobachtungen ungleichgewichtig sind, für das mittlere Fehlerquadrat die genauere Beziehung.

Da wir nunmehr den allgemeinen Fall kennen, gehen wir nun zu dem in der Praxis häufig vorkommenden Fall über, wenn innerhalb der einzelnen Gruppen die Beobachtungen gleichgewichtig sind.

Die einzelnen Beobachtungen sollen wieder folgendermassen bezeichnet werden :

In der ersten Gruppe : $o_1, o_2, o_3, \ldots$, Gewicht p_{I},
Zahl der Messungen n_{I}.
In der zweiten Gruppe : $o_k, o_{k+1}, o_{k+2}, \ldots$, Gewicht p_{II},
Zahl der Messungen n_{II}.
In der dritten Gruppe : $o_r, o_{r+1}, o_{r+2}, \ldots$, Gewicht p_{III},
Zahl der Messungen n_{III}.

Wenn das gewichtige arithmetische Mittel der Beobachtungen in der ersten Gruppe mit O_{I}, das in der zweiten Gruppe mit O_{II}, das in der dritten mit O_{III} bezeichnet wird, so kann folgende Gleichung aufgeschrieben werden:

$$X = \frac{n_{\mathrm{I}} p_{\mathrm{I}} O_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} p_{\mathrm{II}} O_{\mathrm{II}} + n_{\mathrm{III}} p_{\mathrm{III}} O_{\mathrm{III}} + \ldots}{n_{\mathrm{I}} p_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} p_{\mathrm{II}} + n_{\mathrm{III}} p_{\mathrm{III}} + \ldots} = \frac{[npO]}{[np]} \tag{17}$$

Wenn die auf das arithmetische Mittel X bezogenen Verbesserungen der fingierten Werte O_{I}, O_{II}, O_{III}, ... wieder mit v_{I}, v_{II}, v_{III}, ... bezeichnet werden, so ist dessen mittleres Fehlerquadrat :

$$m_x^2 = \frac{n_{\mathrm{I}} p_{\mathrm{I}} v_{\mathrm{I}}^2 + n_{\mathrm{II}} p_{\mathrm{II}} v_{\mathrm{II}}^2 + n_{\mathrm{III}} p_{\mathrm{III}} v_{\mathrm{III}}^2 + \dots}{(n_{\mathrm{I}} p_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} p_{\mathrm{II}} + n_{\mathrm{III}} p_{\mathrm{III}} + \dots)(i-1)} \tag{18}$$

wobei i die Zahl der zusammengezogenen fingierten Beobachtungen ist. Ähnlich unserer Gleichung (4) gibt auch diese Gleichung nur eine annähernde Bestimmung des mittleren Fehlers. Zur Ableitung der richtigen Beziehung haben wir wiederum auf die unmittelbar gemessenen Werte zurückzugreifen, d. i. die fingierten Messverbesserungen zu ergänzen.

Ähnlich den vorigen, bezeichnen wir die auf das arithmetische Mittel bezogenen Verbesserungen der einzelnen Beobachtungen mit den folgenden Zeichen :

$$\begin{aligned} v_{x,1} &= v_{\mathrm{I}} + v_1, \quad v_{x,2} = v_{\mathrm{I}} + v_2, \dots \\ v_{x,k} &= v_{\mathrm{II}} + v_k, \quad v_{x,k+1} = v_{\mathrm{II}} + v_{k+1}, \dots \\ v_{x,r} &= v_{\mathrm{III}} + v_r, \quad v_{x,r+1} = v_{\mathrm{III}} + v_{r+1}, \dots \end{aligned} \tag{19}$$

Nach dem bekannten Grundsatz der Berechnung des mittleren Fehlers :

$$m_x^2 = \frac{\begin{array}{l} p_{\mathrm{I}}\{(v_{\mathrm{I}} + v_1)^2 + (v_{\mathrm{I}} + v_2)^2 + \dots\} + p_{\mathrm{II}}\{(v_{\mathrm{II}} + v_k)^2 + (v_{\mathrm{II}} + \\ + v_{k+1})^2 + \dots\} + p_{\mathrm{III}}\{(v_{\mathrm{III}} + v_r)^2 + (v_{\mathrm{III}} + v_{r+1})^2 + \dots\} + \dots \end{array}}{(n_{\mathrm{I}} p_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} p_{\mathrm{II}} + n_{\mathrm{III}} p_{\mathrm{III}} + \dots)(n_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} + n_{\mathrm{III}} + \dots - 1)} \tag{20}$$

Wenn man die einzelnen Glieder quadriert und in Betracht zieht, dass $[v]_{\mathrm{I}} = \emptyset$ (wo $[v]_{\mathrm{I}}$ die Summe der auf O_{I} bezogenen Verbesserungen der ersten Gruppe ist und daher auch $v_{\mathrm{I}}\,[v]_{\mathrm{I}}$ gleich Null ist, wie das auch für die übrigen gleichartigen Glieder gilt), erhalten wir :

$$m_x^2 = \frac{\begin{array}{l} n_{\mathrm{I}} p_{\mathrm{I}} v_{\mathrm{I}}^2 + n_{\mathrm{II}} p_{\mathrm{II}} v_{\mathrm{II}}^2 + n_{\mathrm{III}} p_{\mathrm{III}} v_{\mathrm{III}}^2 + \dots + p_{\mathrm{I}}[vv]_{\mathrm{I}} + p_{\mathrm{II}}[vv]_{\mathrm{II}} + \\ + p_{\mathrm{III}}[vv]_{\mathrm{III}} + \dots \end{array}}{(n_{\mathrm{I}} p_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} p_{\mathrm{II}} + n_{\mathrm{III}} p_{\mathrm{III}} + \dots)(n_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{II}} + n_{\mathrm{III}} + \dots - 1)} \tag{21}$$

Folgende Substitutionen werden eingeführt :

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{I}}[vv]_{\mathrm{I}} &= [pvv]_{\mathrm{I}} = m_{\mathrm{I}}^2 n_{\mathrm{I}} p_{\mathrm{I}} (n_{\mathrm{I}} - 1) \\ p_{\mathrm{II}}[vv]_{\mathrm{II}} &= [pvv]_{\mathrm{II}} = m_{\mathrm{II}}^2 n_{\mathrm{II}} p_{\mathrm{II}} (n_{\mathrm{II}} - 1) \\ p_{\mathrm{III}}[vv]_{\mathrm{III}} &= [pvv]_{\mathrm{III}} = m_{\mathrm{III}}^2 n_{\mathrm{III}} p_{\mathrm{III}} (n_{\mathrm{III}} - 1) \end{aligned} \tag{22}$$

Für das mittlere Fehlerquadrat können wir also folgende Gleichung aufschreiben:

$$m_{\bar{x}}^2 = \frac{n_I p_I v_I^2 + n_{II} p_{II} v_{II}^2 + n_{III} p_{III} v_{III}^2 + \ldots + n_I p_I (n_I - 1) m_I^2 + \\ + n_{II} p_{II} (n_{II} - 1) m_{II}^2 + n_{III} p_{III} (n_{II} - 1) m_{III}^2 + \ldots}{(n_I p_I + n_{II} p_{II} + n_{III} p_{III} + \ldots)(n_I + n_{II} + n_{III} + \ldots - 1)} \tag{23}$$

Analog zu dieser Gleichung kann auch das mittlere Fehlerquadrat der Gewichtseinheit abgeleitet werden. Für dieses ergibt sich folgende Formel:

$$m_0^2 = \frac{n_I p_I v_I^2 + n_{II} p_{II} v_{II}^2 + n_{III} p_{III} v_{III}^2 + \ldots + n_I p_I (n_I - 1) m_I^2 + \\ + n_{II} p_{II} (n_{II} - 1) m_{II}^2 + n_{III} p_{III} (n_{III} - 1) m_{III}^2 + \ldots}{(n_I + n_{II} + n_{III} + \ldots - 1)} \tag{24}$$

*

Das beste Beispiel für die Ausgleichung der ungleichgewichtigen fingierten Messergebnisse ist der bei den Längemessungen vorkommende Fall, bei dem wir durch mehrmals wiederholte Messergebnisse den mittleren Fehler der Gewichtseinheit ableiten wollen. Als Grundlage unserer Berechnungen sollen die von BRAUNE in der Vermessungstechnik, Jg. 1957. Nr. 6. [7] mitgeteilten Beobachtungsergebnisse dienen. In diesem Fall wurden 6 verschieden lange Seiten mit vierfacher Wiederholung mit demselben Messgerät und unter denselben Messverhältnissen gemessen (Tabelle IV).

Tabelle IV

Seite	1	2	3	4	Mittelwert	$p = \frac{50}{s}$
a	38,310	,311	,314	,314	38,3122	1,30
b	46,576	,575	,577	,576	46,5760	1,07
c	23,481	,478	,483	,482	23,4810	2,13
d	41,224	,222	,222	,226	41,2235	1,21
e	33,538	,538	,540	,541	33,5392	1,49
f	29,994	,996	,992	,999	29,9952	1,67

Ebenso wie BRAUNE, beziehen auch wir die Beobachtung der Gewichtseinheit auf eine Länge von 50 m, wo die Aufgabe ist, den mittleren Fehler der Gewichtseinheit — bezogen auf die einzelne Beobachtung — genau zu bestimmen. BRAUNE erhielt — ausgehend aus den einzelnen Messergebnissen — für den mittleren Fehler der Gewichtseinheit folgendes Ergebnis:

$$m_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \pm 2{,}54\, m$$

wo m_0 der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, p das Gewicht der einzelnen Messungen, v die wahrscheinlichsten Verbesserungen der einzelnen Messungen, n die Zahl der überschüssigen Beobachtungen ist.

Durch verschiedene Kombinationen der Beobachtungen (indem er nämlich das Mittel von je zwei und zwei Beobachtungen als fingierten Wert einführte oder aus den Unterschieden der Beobachtungen ausging), erhielt BRAUNE Werte, welche von diesem eine Abweichung von 5—21% aufgewiesen. Wenn wir also im weiteren mit den daraus sich ergebenden Gewichten einen Grubenzug ausgleichen, so wird die strenge Ausgleichung mit einem regelmässigen Fehler belastet.

Wie lässt sich der mittlere Fehler der Gewichtseinheit berechnen, wenn wir bei der Fehlerberechnung aus den arithmetischen Mitteln je zweier Messergebnissen ausgehen? Den Angaben der Tabelle IV entsprechend sollen die zwei ersten Beobachtungen bei jeder Länge die mit I bezeichneten fingierten Ergebnisse sein, die zwei letzteren Beobachtungen aber die mit II bezeichneten fingierten Ergebnisse (also $n = 2$ in jedem Fall). Weiter werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

v_{aI} bezeichnet die auf den wahrscheinlichsten Wert der Seite a bezogenen Verbesserungen des mit I bezeichneten fingierten Wertes,

v_{aI} die auf das mit I bezeichnete arithmetische Mittel bezogene Verbesserung der Beobachtung 1,

$[vv]_{aI}$ die Quadratsumme der auf die fingierten Werte bezogenen Verbesserungen der einzelnen Beobachtungen, also in diesem Fall $[vv]_{aI} = v_{a1}^2 + v_{a2}^2$.

Die Bedeutung aller anderen Bezeichnungen ergibt sich sinngemäss aus den obigen.

Für das mittlere Fehlerquadrat der Gewichtseinheit kann man — analog der Gleichung (24) — folgende Formel aufschreiben:

$$m_0^2 = \frac{\begin{array}{c} p_a\{(v_{aI}+v_{a1})^2+(v_{aI}+v_{a2})^2+(v_{aII}+v_{a3})^2+v_{aII}+v_{a4})^2\}+\ldots+ \\ +p_f\{(v_{fI}+v_{f1})^2+(v_{fI}+v_{f2})^2(v_{fII}+v_{f3})^2+(v_{fII}+v_{f4})^2\} \end{array}}{(n_{aI}+n_{aII}+\ldots+n_{fI}+n_{fII}-6)} =$$

$$= \frac{\begin{array}{c} n_{aI}p_a v_{aI}^2+p_a[vv]_{aI}+n_{aII}p_a v_{aII}^2+p_a[vv]_{aII}+\ldots+n_{fI}p_f v_{fI}^2+ \\ +p_f[vv]_{fI}+n_{fII}p_f v_{fII}^2+p_f[vv]_{fII} \end{array}}{24-6} =$$

$$= \frac{\begin{array}{c} 2\{p_a(v_{aI}^2+v_{aII}^2)+\ldots+p_f(v_{fI}^2+v_{fII}^2)\}+p_a([vv]_{aI}+[vv]_{aII})+\ldots+ \\ +p_f([vv]_{fI}+[vv]_{fII}) \end{array}}{18} \qquad (25)$$

(Die vorausgehenden Berechnungen sind in Tabelle V zusammengefasst.)

Tabelle V

Seite	$\frac{1.+2.}{2} = I$	$\frac{3.+4.}{2} = II$	$\frac{I+II}{2}$	v_I	v_{II}	$pv^2_{I,II}$	$p[vv]_{I,II}$
a	38,3105	,3140	,3123	+1,8	—1,7	7,969	0,650
b	46,5755	,5765	,5760	+0,5	—0,5	0,535	1,070
c	23,4795	,4825	,4810	+1,5	—1,5	9,585	10,650
d	41,2230	,2240	,2235	+0,5	—0,5	0,605	12,100
e	33,5380	,5405	,5393	+1,3	—1,2	4,663	0,745
f	29,9950	,9955	,9952	+0,2	—0,3	0,218	45,925
[ ]						23,575	71,140

$$m_0^2 = \frac{2.(23{,}575) + 71{,}140}{(24-6)} = \frac{118{,}290}{18} = 6{,}572$$

$$m_0 = \pm 2{,}56 \text{ mm}$$

Braune — gleichfalls aus den arithmetischen Mitteln je zweier Beobachtungen ausgehend — erhielt folgende Ergebnisse:

Tabelle VI

Seite	$\frac{1.+2.}{2}$	$\frac{3.+4.}{2}$	d	pdd	$\frac{1.+4.}{2}$	$\frac{2.+3.}{2}$	d	pdd
a	38,3105	,3140	3,5	15,9	38,3120	,3125	0,5	0,3
b	46,5755	,5765	1,0	1,1	46,5760	,5760	0,0	0,0
c	23,4795	,4825	3,0	19,2	23,4815	,4805	1,0	2,1
d	41,2230	,2240	1,0	1,2	41,2250	,2220	3,0	10,9
e	33,5380	,5405	2,5	9,2	33,5395	,5390	0,5	0,3
f	29,9950	,9955	0,5	0,3	29,9965	,9940	2,5	10,4
[ ]				46,9				24,0

Im ersten Fall ergibt sich aus den arithmetischen Mitteln der 1. und 2., sowie der 3. und 4. Beobachtungen für den mittleren Fehler der Gewichtseinheit $\pm$ 2,80 mm, aus den arithmetischen Mitteln der 1. und 4., sowie der 2. und 3. Beobachtungen ergibt sich dagegen für denselben $\pm$ 2,00 mm. Daraus kann man also ersehen, dass man mit dieser Methode für den mittleren Fehler nur Werte von geringerer Genauigkeit (oft völlig irreale Ergebnisse) erhält; wenn man jedoch die Tatsache in Erwägung zieht, dass hier im Verhältnis zu ihrer Grössenordnung zwischen den zwei Werten ein Unterschied von 30% entsteht, welcher im Laufe der weiteren Ausgleichungen zu einer völlig falschen Fehler-

verteilung führen kann, besonders, wenn eine gemeinsame Ausgleichung von Winkeln und Längen ausgeführt wird, wie z. B. im Falle des Polygonzuges, so muss man zur Berechnung der mittleren Fehler die unmittelbar gemessenen Werte berücksichtigen. Da im vorliegenden Beispiel ein mittlerer Fehler vor der Ausgleichung berechnet wird, ergibt sich der durch die Zurückführung der fingierten Messergebnisse auf die einzelnen Beobachtungen berechnete mittlere Fehler durch ein ebenso langes Berechnungsverfahren, wie bei der Berechnung mit den unmittelbar gemessenen Werten. Es ist nötig in vielen Fällen — z. B. wenn der mittlere Fehler nach der Ausgleichung berechnet wird (es ist zweckdienlich, die Ausgleichung mit den fingierten Messergebnissen auszuführen) — die auf die fingierten Messergebnisse bezogenen Verbesserungen zu ergänzen. In solchen Fällen kann man die bei der Ausgleichung vorkommenden Berechnungen vereinfachen und unter Berücksichtigung der vorigen die genauer bestimmten mittleren Fehler der wahrscheinlichsten Werte erhalten.

Zusammenfassend können wir in Einklang mit TÁRCZY-HORNOCH [5] feststellen :

1. Wenn wir nur die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten zum Ziel setzen, so ist die Aufgabe durch die Ausgleichung sowohl der fingierten Messergebnisse, als auch der ungleichgewichtigen Beobachtungen richtig zu lösen.
2. Wenn wir ausser den Unbekannten auch deren mittlere Fehler bestimmen wollen, so soll man bei der mittleren Fehlerberechnung in jedem Fall auf die unmittelbar gemessenen Werte, bzw. auf deren Verbesserungen zurückgreifen, sonst werden die für diese erhaltenen mittleren Fehler nicht real.

SCHRIFTTUM

1. MÁJAY, PÉTER, jun.: Néhány szó a középhiba megbízhatóságához. (Einiges zur Genauigkeit des mittleren Fehlers.) Geodézia és Kartográfia. Budapest, Jg. 1956. Nr. 1., S. 75—78.
2. JORDAN—EGGERT : Handbuch der Vermessungskunde. Stuttgart, 1948. Bd. I. S. 612.
3. L'AUNÉ, OTTO : A középhiba megbízhatósága. (Die Genauigkeit des mittleren Fehlers.) Geodézia és Kartográfia, Budapest, Jg. 1956. Nr. 4. S. 286—290.
4. GROSSMAN, W.: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. Berlin, 1954. S. 248—253.
5. Dr. TÁRCZY-HORNOCH, ANTON: Zur Berechnung der mittleren Fehler aus den Verbesserungen und Herleitung der Verbesserungsgleichungen für Funktionen der Beobachtungen. Mitteilungen der Fakultäten für Bergingenieure und Geo-Ingenieure (XIX). Technische Universitätsfakultäten, Sopron, Jg. 1956. S. 145—152.
6. Dr. TÁRCZY-HORNOCH, ANTON : Eine weitere Ausgleichungsgruppe. Mitteilungen der berg- und hüttenmännischen Abteilung der Technischen Universität Sopron, Jg. 1948—49. S. 325—332.
7. BRAUNE, G.: Der »durchschnittliche« mittlere Fehler. Vermessungstechnik. Jg. 1957. Heft 6. S. 141—142.
8. Dr. HAZAY, STEFAN : Die Lösung der Koordinatenausgleichung mit einem Punkt unter Berücksichtigung von Richtungsgewichten. Mitteilungen der Fakultäten für Bergingenieure und Geo-Ingenieure (XIX). Technische Universitätsfakultäten, Sopron, Jg. 1956. S. 179—190.

ZUSAMMENFASSUNG

Verfasser führt die Untersuchungen Professors Dr. TÁRCZY-HORHOCH bezüglich der Ausgleichung fingierter Beobachtungen [5] auf den Fall weiter, wo die einzelnen Beobachtungen verschiedenen Gewichtes sind. Dieser Fall kommt am häufigsten bei Streckenmessungen vor, wo man den auf die Einheitslänge bezüglichen mittleren Fehler, bzw. das Gewicht auf Grund der Messergebnisse der verschieden langen Abschnitte ableiten möchte. Verfasser weist nach, dass gegebenenfalls, wenn nicht die — sämtliche Beobachtungen umfassenden — genauen Beziehungen der mittleren Fehler angewandt werden (siehe Formeln [4], [11] und [18]), eine 30%-ige Abweichung vom wahrscheinlichsten Wert festgestellt werden kann, obwohl in jedem Falle derselbe Wert für die Unbekannten erhalten wird, wenn die entsprechenden Gewichte berücksichtigt werden. Sollten die Berechnungen der mittleren Fehler die Grundlage zu weiteren Fehleruntersuchungen bzw. Ausgleichungen bilden, ist es unbedingt notwendig, die exakten Formeln zu benützen (siehe Formeln [8], [16] und [24]). Verfasser bringt für die verschiedenen Fälle, anhand zahlenmässiger Beispiele, Ergebnisse, die mit den einzelnen Verfahren erreicht werden können. Seine Schlussfolgerung steht in vollem Einklang mit jener von Tárczy-Hornoch : Sollte im Laufe der Berechnungen bloss der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten benötigt sein, so ist es zweckmässig, mit den durch die Zusammenfassung der Messungen erreichten fingierten Ergebnissen zu rechnen, um die Arbeit zu vermindern. Wenn nun auch die mittleren Fehler der wahrscheinlichsten Werte bestimmt werden sollen, so ist es notwendig, diese — nachdem sie auf Grund der fingierten Beobachtungen berechnet worden sind — mit Hilfe der Verbesserungen der ursprünglichen Messungen zu bestimmen.

DETERMINATION OF MEAN ERRORS WITH THE CORRECTION OF RESULTS OF OBSERVATIONS

F. HALMOS

SUMMARY

Author extend the researches of A. TÁRCZY-HORNOCH concerning the adjustment of fictitious observations [5] to the case when the weight of each observation is different. This frequently happens with measurements of length where the mean error resp. the weight as referred to the unit length are intended to be deduced on the basis of measurement results of the sections of different lengths. It is proved that in certain cases, where the exact relations of mean errors comprising all observations are applied (see equations [4], [11] and [18]), a difference of 30 per cent from the most probable value can be found, although the same value of the unknown is obtained in every case where different equations are used, but the proper weights got considered. If the calculations of mean errors should form the basis of further examinations of error resp. adjustments, it is by all means necessary to use the exact equations (see equations [8], [16] and [24]). Explaining numerical examples, author presents the results of different methods. His final conclusion is in full accordance with that of Professor A. Tárczy-Hornoch : Should, in the course of calculations, nothing but the most probable value of the unknowns be required, it is advisable to calculate — in order to reduce work — with the fictitious results obtainable by means of reducing the number of measurements. Wanting now to determine even the mean error of the most probable values, it is inevitable to determine the same — after having made calculations on the basis of fictitious observations — by means of corrections concerning the original measurements.

CALCUL DE L'ERREUR MOYENNE SUR BASE DE LA CORRECTION DES RÉSULTATS DE MESURES

F. HALMOS

RÉSUMÉ

Les examens du prof. A. Tárczy-Hornoch concernant la compensation des observations fictives (5) sont étendus au cas où les poids des observations sont différents. Ce cas se produit le plus souvent dans les mesurages de longueurs, lorsque l'on s'efforce de déduire

l'erreur moyenne ou le poids relatifs à l'unité de longueur, en se basant sur les résultats de mesures effectuées à plusieures reprises sur des sections de longueur différente. L'auteur démontre que dans un cas donné, si on n'utilise pas la relation rigoureuse des erreurs moyennes résultant de toutes les observations (voir formules [4], [11], et [18]), on trouvera jusqu'à 30 pour cent d'écart par rapport aux valeurs les plus probables, bien que pour les inconnues on obtienne dans chaque cas une valeur identique, si l'on tient compte poids justes. Lorsque les calculs de l'erreur moyenne doivent servir de base à des calculs d'erreurs ou compensations nouveaux, il est indispensable de faire usage des relations précises déduites pour ces calculs (voir formules [8], [16] et [24]). Par des exemples numériques correspondant aux différents cas, l'auteur montre les résultats que l'on obtient par les différents procédés. En accord avec le prof. Tárczy-Hornoch, il arrive aus conclusions suivantes: si l'on n'a besoin de connaître, dans ses calculs, que la valeur la plus probable des inconnues, on peut simplifier le calcul en comptant avec les résultats fictifs obtenus par la réunion des résultats des mesures. Si l'on cherche aussi les erreurs moyennes sûres des valeurs les plus probables, il faut, après le calcul basè sur les observations fictives, les déterminer à l'aide des corrections relatives aux mesures originales.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СРЕДНЕЙ ОШИБКИ НА ОСНОВАНИИ ВВЕДЕНИЯ ПОПРАВОК В РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Ф. ХАЛМОШ

РЕЗЮМЕ

Исследования профессора д-ра Тарци-Горноха, связанные с уравниванием фиктивных наблюдений (5), распространены автором и на случай, когда вес отдельных наблюдений неодинаков. Такие случаи имеют место чаще всего при измерениях длины, когда средняя ошибка или вес, приходящиеся на единицу длины, определяются на основании данных многократно измеренных участков различной длины. Автором показано, что в данном случае, не пользуясь строгой зависимостью средней ошибки, получаемой с учетом всех наблюдений (см. формулы (4), (11) и (18)), могут встречаться отклонения от наиболее вероятного значения, достигающие 30%, несмотря на то, что с учетом правильных весов всегда получаются одинаковые значения для неизвестных величин. Если вычисления по средней ошибке служат основой для дальнейших расчетов или уравнений, необходимо применять выведенные для этого случая строгие зависимости (см. соотношения (8), (16) и (24)). Автором приводятся числовые примеры результатов, получаемых отдельными приемами для соответствующих случаев. Наконец, соглашаясь с мнением профессора Тарци-Горноха, автор приходит к следующему заключению. В том случае, если при вычислениях требуется знать лишь наиболее вероятные значения неизвестных величин, то для сокращения работ по вычислениям целесообразно пользоваться фиктивными результатами, получаемыми путем сведения измерений. Если приходится найти и точные средние ошибки наиболее вероятных величин, то, выполнив вычисления по фиктивным наблюдениям, необходимо определить их также и при помощи поправок, относящихся к первоначальным измерениям.

MÖGLICHKEITEN IN UNGARN ZUR ANWENDUNG DER INDIREKTEN ENTFERNUNGSMESSUNG AUF PHYSIKALISCHER (ELEKTRONISCHER) GRUNDLAGE

E. REGŐCZI

DOKTOR DER TECHN. WISSENSCHAFTEN
STAATSAMT FÜR GEODÄSIE UND KARTOGRAPHIE, BUDAPEST

[Eingegangen am 7. Januar 1959.]

Unsere Betrachtung ist eigentlich nur dann zeitgemäss, wenn die Zuverlässigkeit der mittels elektronischer Entfernungsmessung bestimmten geodätischen Daten die Genauigkeit der Ergebnisse der bisher zu diesem Zwecke benützten modernen Instrumente erreicht. Diese ziemlich strenge Bedingung kann eventuell dadurch gemildert werden, dass von dem neuen Gerät nicht die Genauigkeit der bisher angewandten Instrumente gefordert wird, sondern man sich damit zufrieden gibt, dass die Fehler der mittels dieses Gerätes erhaltenen Ergebnisse das Erlaubte nicht überschreiten, d. h. wenn die Qualität der Arbeitsproduktion jenes Mass erreicht, welches durch Regeln und Vorschriften bestimmt ist.

Es kann ruhig festgestellt werden, dass es bereits mehrere Typen von physikalischen Entfernungsmessern gibt, die dieser Bedingung auf dem Gebiete gewisser geodätischer Arbeiten entsprechen. Sollte es sich jedoch auch erweisen, dass diese unsere Meinung etwas übertrieben ist, so wäre unsere Betrachtung dennoch nicht verfrüht, da der Prozess der Vervollkommnung dieser Geräte bei weitem nicht abgeschlossen ist.

Die Anwendung der SHORAN- und HIRAN-Geräte ist nur dann von Bedeutung, wenn auf weiterstreckten, unerschlossenen Gebieten Hauptpunkte aufgestellt, oder voneinander weit entfernte (z. B. durch Meere getrennte) Hauptpunktnetze miteinander verbunden werden sollen. In unserem Lande können sich selbstverständlich solche Aufgaben nicht ergeben. Bei unseren Arbeiten können der *sowjetische* Entfernungsmesser *SzVV.I*, die Geräte von BERGSTRAND, GIGAS, BJERHAMMAR, das *Tellurometer* oder andere physikalische Entfernungsmesser ähnlicher Leistungsfähigkeit in Frage kommen.

Die Grundlinienmessung kann als natürlichstes Arbeitsgebiet der elektronischen Entfernungsmesser angesehen werden. Bisher wurde dieser Vorgang mit Invardrähten ausgeführt. Wird hier die Arbeit mit der nötigen Sorgfalt verrichtet, so kann es leicht erreicht werden, dass der relative mittlere Fehler bei den Streckenmessungen mit Hilfe von Invardrähten unter 1 : 1 000 000 liege. So betrug z. B. bei den Grundlinienmessungen der ungarischen Landestriangulation erster Ordnung der grösste relative mittlere Fehler 1 : 1 493 000

(die Länge der Grundlinie war 9,93 km), der kleinste 1 : 2 844 000 (10,18 km). Diese Genauigkeit kann selbst mit den als die besten geltenden physikalischen Entfernungsmessern höchstens durch Zufall angenähert werden.

Es muss jedoch auch der folgende Abschnitt der Arbeit beachtet werden. Von der mit Invardraht gemessenen Grundlinie ausgehend, wird die Länge der einen Seite eines Dreiecks erster Ordnung mit Winkelmessung bestimmt. Diese Übertragung hat eine wesentliche Genauigkeitsverminderung zur Folge. (Der relative mittlere Fehler der von den eben erwähnten zwei Grundlinien abgeleiteten Seiten erster Ordnung beträgt 1/776 000, bzw. 1/576 000, es gibt jedoch in unserem Netz auch Werte um 1/200 000). Der relative mittlere Fehler der physikalischen Entfernungsmessung vermindert sich jedoch (bis zu einer gewissen Entfernung) mit der zunehmenden Entfernung. Wenn also mit Hilfe des physikalischen Entfernungsmessers unmittelbar die Länge der Seite des Dreiecks erster Ordnung gemessen wird, kann die Genauigkeit des aus der mit Invardraht gemessenen Grundlinie abgeleiteten Wertes erreicht werden.

Mit diesem Satz haben wir eigentlich unsere Meinung bezüglich einer Möglichkeit zur Lösung *der Triangulation erster Ordnung* mit Hilfe der Entfernungsmessung ausgesprochen. Da wiederum Entfernungsmessungen auch dann ausgeführt werden können, wenn das Wetter zur Winkelmessung ungeeignet ist, erweist sich diese Lösung gewiss auch als wirtschaftlich. Wenn jedoch das Triangulationsnetz erster Ordnung mit Hilfe von Entfernungsmessung hergestellt wird, dann muss dieselbe Methode auch beim *Netz zweiter Ordnung* angewandt werden.

Bei den Arbeiten der *Triangulation dritter Ordnung* hingegen kann der Gebrauch der elektronischen Entfernungsmesser nicht mehr vorteilhaft genannt werden. Heute ist die Winkelmessung auf eine Entfernung von 7—8 km einfacher und schneller als die Methode der Entfernungsmessung. Dabei ist sie auch wesentlich billiger, da bei Entfernungsmessungen an beiden Endpunkten der Dreieckseiten sich je ein Gerät und Bedienungspersonal befinden muss. Das Gerät ist kostspieliger, der Arbeitslohn ist höher und die Transportspesen sind infolge der wiederholten Ortsveränderungen viel grösser. Diesen Nachteilen gegenüber darf der Vorteil, dass der Entfernungsmesser nicht so stabil sein muss wie der Theodolit, nicht überschätzt werden.

Es folgt aus all dem, was über die Triangulation dritter Ordnung gesagt wurde, dass es auch nicht zweckmässig wäre, das in unserem Lande entwickelte Prinzip der Netzherstellung höherer Ordnung mit Hilfe von *Kleindreiecken* auf dem Gebiet der Entfernungsmessung anzuwenden. Dagegen aber ist die Lösung mittels Winkelmessung einfacher und wirtschaftlicher.

Auf der Suche nach einem neuen Weg könnte der Gedanke auftauchen, die *beiden Verfahren miteinander zu verbinden :* es soll mit Hilfe von Entfernungsmessung ein Triangulationsnetz erster Ordnung hergestellt und dieses mittels Winkelmessung mit dem homogenen Netz der Kleindreiecke ausgefüllt

werden. Der Vorteil dieses gemischten Verfahrens bestünde darin, dass die Rechnungsarbeit einer Person bei jedem fingierten Dreieck erster Ordnung um rund 70 Stunden verringert sein würde. Dagegen ist aber der Entwurf des Netzes schwieriger, weil bei diesem Verfahren die Punkte erster Ordnung gegenseitig sichtbar sein müssen (die von Kleindreiecken abgeleiteten fingierten Punkte erster Ordnung jedoch nicht!), ein Teil der ersparten Büroarbeitszeit geht demnach verloren und die Dauer der viel kostspieligeren Feldarbeit wird erhöht. Die Erkundung wird nämlich umständlicher und langsamer, da die Untersuchung der gegenseitigen Sichtbarkeit von Punkten, die sich in einem Abstand von 30 km voneinander befinden, eine viel schwierigere Aufgabe ist, als die Untersuchung der sich in einem Abstand von 7—8 km befindlichen Punkte. Ausserdem sind die Bauarbeiten — besonders im flachen Gelände — viel kostspieliger, weil man höhere Pyramidengerüste braucht. Dabei müssen mehrere Messungen vorgenommen werden, da die Entfernungsmessung im ganzen gesehen eine Mehrarbeit bedeutet, denn man muss ja die mit den Kleindreiecken verbundene Winkelmessung auf den Punkten erster Ordnung ebenso durchführen, als ob die Entfernung nicht gemessen worden wäre.

Und somit sind wir ans Ende des Abschnittes höherer Ordnung der Hauptpunktherstellung angelangt. Wenn unsere bisherigen Betrachtungen auch lehrreich gewesen sind, so bedeuten sie in ungarischer Beziehung keinen unmittelbaren geodätischen Vorteil, da die Messarbeiten unseres neuen Triangulierungsnetzes höherer Ordnung eben beendet worden sind.

Gehen wir nun auf das Gebiet der niederen geodätischen Arbeiten über, so treffen wir zuerst die *Triangulierung vierter Ordnung* an. Dies ist noch auch eine Aufgabe ländischer Ausdehnung. Betrachten wir jetzt die einzelnen Schritte.

Der Ingenieur beginnt seine Feldarbeit damit, dass er die Triangulierungspunkte höherer Ordnung sowie die vorhandenen Triangulierungspunkte vierter Ordnung mit einem provisorischen Zeichen von weitem sichtbar macht (absteckt). Inzwischen betrachtet er das Gelände, d. h. — wie man dies üblicherweise zu sagen pflegt: er schliesst Bekanntschaft mit dem Gelände. Danach steckt er, in der Reihenfolge ihrer Bestimmung, die neuen Punkte vierter Ordnung ab. Der Begriff des Absteckens umfasst drei Arbeitsvorgänge : die Untersuchung der gegenseitigen Sichtbarkeit, den Signalbau und die genäherte (zeichnerische) Ortsbestimmung des Punktes an der Absteckungsskizze. Nach der Absteckung sämtlicher Punkte wird der Bestimmungsplan hergestellt (der Plan der horizontalen Winkelmessung und trigonometrischen Höhenmessung), die Beobachtung ausgeführt und dann beim Schreibtisch die Koordinaten und die Seehöhe der Punkte berechnet.

Die Feldarbeiten der mittels Entfernungsmessung ausgeführten Triangulation vierter Ordnung beginnen genau so, wie im vorigen Falle, während der Absteckung und des Signalbaues jedoch muss noch berücksichtigt werden,

dass auch auf den »visierten« Punkt immer ein Gerät aufgestellt werde, d. h. dass jeder Punkt gleichzeitig ein »Beobachtungsort« ist. Demnach bleiben jene sogen. Hochpunkte (Bauspitzen, Schornsteine), auf denen ein Gerät nicht aufgestellt werden kann, aus der Triangulation aus. (Auch auf jenen Punkten, die beobachtet werden können, muss meistens ein Theodolit benützt werden zur Bestimmung der Zentrierungselemente.) Das Wegbleiben der Hochpunkte ist ein wesentlicher Verlust, denn diese stets sichtbaren »billigen« Punkte sind in der Praxis sehr nützlich. Es können aber auch weder Maste (Tafelgerüste) noch Baumtafeln verwendet werden, statt dessen werden Pyramidengerüste (Hochbauten) aufgestellt, was nicht geringe Mehrspesen verursacht.

Zur provisorischen Bezeichnung der Triangulationspunkte werden meistens Tafelsignale benützt. Wird die Triangulation mit Entfernungsmessung ausgeführt, so ist grundsätzlich eine provisorische Bezeichnung auf jenen Punkten, von denen sämtliche, mit ihnen in Beziehung stehende Punkte am Erdboden stehend sichtbar sind, nicht notwendig, denn während der Messung ist eigentlich das auf dem Stativ stehende Entfernungsmessgerät das Punktsignal. Nichtsdestoweniger können die Signale in der Praxis nicht entbehrt werden, da man ja beim Abstecken sehen muss, wo die übrigen schon abgesteckten Punkte sind.

Die Beobachtung schlägt sehr zugunsten des Theodolits aus. Der Arbeitsvorgang der Entfernungsmessung ist bedeutend langsamer, als der der Richtungsmessung und seine Organisation ist wesentlich schwerfälliger.

Auf einem Punkte vierter Ordnung nimmt die Messung von zehn Richtungen in zwei Fernrohrstellungen — die Aufstellung und Verpackung des Theodolits mit inbegriffen — insgesamt 15—20 Minuten in Anspruch. (Die Messung an sich dauert bei jeder Richtung nur eine Minute!)

Die Aufstellung und Verpackung eines Entfernungsmessgerätes beansprucht 15 Minuten, die Messung einer Entfernung 10—15 Minuten. Nachdem jedoch diese erste Seite gemessen ist, muss das die Rückstrahlung ausführende Gerät (d. h. jenes, welches sich am anderen Punkt befindet) auf den folgenden Punkt weiterbefördert werden, damit auch dessen Entfernung bestimmt werden kann. Nehmen wir an, dass ein solcher Transport — im günstigen Falle — 30 Minuten dauert (ohne Aufstellung). Wenn nun sechs Entfernungen gemessen werden (denn von den zehn Richtungen waren vier nur zur Orientierung notwendig, bleiben demnach hier weg), kann die Beobachtung auf unserem Punkte 3,5—4 Stunden in Anspruch nehmen. Diese Zeit kann reduziert werden, wenn zwei Rückstrahlungsgeräte benützt sind, im Verhältnis zum Zeitbedarf der Richtungsmessung hingegen ist sie auch so noch sehr beträchtlich.

Der grösste Teil der Arbeitszeit am Felde vergeht nicht mit Messungen, sondern mit Ortsveränderungen. Und gerade diese improduktive Zeit wächst bei der mit Entfernungsmessung ausgeführten Triangulation ausserordentlich an. Dieser Verlust kann einigermassen reduziert werden, wenn man von dem

durch die Anwendung der orientierten Richtungswerte entwickelten und für die Verteilung der Rahmenfehler ausgezeichneten Grundprinzip der Triangulierung niederer Ordnung abweicht und die Aufgabe mit Hilfe eines aus aneinandergefügten geschlossenen Dreiecken bestehenden Netzes (eventuell mittels Ketten) löst. In diesem Falle wird aber die Büroarbeit um bedeutende Ausgleichrechnungen vermehrt.

Ein grosser Nachteil der Trilateration ist, dass — wenn auch die Höhe der Punkte notwendig ist — diese mit einem anderen Verfahren bestimmt werden muss, nachdem man Höhenmessungen mit physikalischen Entfernungsmessern nicht ausführen kann. Es muss demnach entweder noch nivelliert, oder die Zenitdistanz, bzw. der Höhenwinkel gemessen werden. Wird jedoch auch der Theodolit benützt so hat die Entfernungsmessung tatsächlich keinen Sinn.

Der mittels Längenmessung triangulierende Ingenieur befindet sich schon beim Beginn der Rechnung in einer sehr nachteiligen Lage. Das Ergebnis der Winkelmessung ist nämlich der *horizontale Winkel*, das der Entfernungsmessung hingegen die effektive, sogenannte *schräge Entfernung*. Letztere muss noch vor Beginn der Koordinatenberechnung auf die Horizontale reduziert werden. Hierzu benötigt man jedoch die Höhendifferenz der Punkte — und es wurde eben erwähnt, dass es keine Möglichkeit zu deren wirtschaftlicher Bestimmung gibt. Der Niveauunterschied zwischen den Punkten kann schon auf hügeligem Gelände so gross sein, dass diese Schwierigkeit mit Barometerhöhenmessung höchstens bei der Triangulation erster Ordnung überbrückt werden könnte.

Nach alledem kann kaum ein Zweifel bestehen, dass die physikalischen Entfernungsmesser im Gebiete der Triangulierung vierter Ordnung nicht mit dem Theodolit wetteifern können. Es bedarf keines besonderen Beweises, dass sich dies auch auf die *Triangulierung fünfter Ordnung* bezieht.

Ein anderes Verfahren zur Verdichtung der Festpunkte, *die Polygonierung*, wird in unserem Lande in zwei Formen angewandt. Auf schwierigem, bebauten Gelände, wo die Triangulierung nur durch sehr kostspielige Signalbauten verrichtet werden könnte, stellt man die mit den Punkten des Triangulationsnetzes vierter Ordnung gleichwertigen Festpunkte mittels langseitiger präziser Polygonierung her. Zur Einmessung oder Absteckung von Detailpunkten wiederum wird das Festpunktnetz mit kurzseitigen Polygonzügen niederer Ordnung verdichtet.

Es ist nicht leicht, die Genauigkeit der Triangulation durch Polygonierung zu erreichen. Die Schwierigkeit besteht hier in der Längenmessung. Je eine Seite unserer präzisen Polygonzüge beträgt 800—1000 m. Die Länge wird mit Hilfe einer zwei Meter langen Invarbasislatte, mit Einschaltung einer Hilfsbasis, bestimmt. Es ist eine ziemlich umständliche, langsame Arbeit. (Die zur Ableitung der Entfernung dienende Winkelmessung wird viermal wieder-

holt ; Verwendung findet hier der Theodolit Type Wild T3 und die Zwangszentriervorrichtung). Ein guter elektronischer Entfernungsmesser kann diese Arbeit wesentlich erleichtern, beschleunigen und billiger machen. Ein weiterer Vorteil ist, dass bei dieser Messung unser Polygonzug auf einer schmäleren Fläche Platz hat, da von diesem Zug die um etwa 40 m hervorspringenden Hilfsbasislinien wegbleiben.

Mit kurzen (allgemein 50—200 m langen) Seiten wird oft polygoniert. Auf diesem Gebiet jedoch bietet der elektronische Entfernungsmesser dem Tachymeter, welches gleichzeitig den horizontalen Winkel, die Entfernung und die Höhendifferenz angibt, keine Konkurrenz.

Vergebens suchen wir unter den noch einfacheren niederen geodätischen Arbeiten, es lässt sich nicht ein einziger Arbeitsvorgang finden, bei welchem die Anwendung solcher Geräte in Frage kommen könnte, die auf Grund des gegenwärtig verfolgten Prinzipes der physikalisch-elektronischen Entfernungsmessung konstruiert wurden.

Zusammenfassend können wir sagen, dass es in Ungarn nicht viele Möglichkeiten zur wirtschaftlichen Anwendung der physikalischen Entfernungsmesser gibt. Die Begründung liegt vor allem darin, dass unser neues horizontales Festpunktnetz grösstenteils fertig ist. Was hier noch an Verdichtung und Ergänzung geleistet werden soll, das kann in meisten Fällen mit den bisher angewandten Punkteinschaltungsverfahren, bzw. Geräten einfacher und billiger verrichtet werden. Eine Ausnahme bildet höchstens die langseitige präzise Polygonierung. Diese Ausnahme ist jedoch in dem jetzt begonnenen Abschnitt unserer Landestriangulierungsarbeiten von ganz besonderer Bedeutung, denn sie kann die — zur Umrechnung der alten Punkte niederer Ordnung notwendige — Verbindung des alten Netzes vierter Ordnung mit dem neuen Netz höherer Ordnung wesentlich vereinfachen und verbilligen. Allerdings werden aber bei dieser Arbeit die Methoden von Prof. A. I. Durnjew (Methode des Aufbaus von geodätischen Netzen unter Benutzung von Hilfspunkten. — Vermessungstechnik, 1956/11.) und E. Wolf (Polygonation sans longueurs. — Revue des Géomètres-Experts et Topographes Français, 1956/6) der elektronischen Entfernungsmessung eine starke Konkurrenz machen.

In Ländern, wo das Festpunktnetz noch auf grossen Gebieten fehlt oder sehr spärlich ist, kann die physikalische Entfernungsmessung sehr wirksam sein, insbesondere in Fällen, wo es — den in der Sowjetunion und in Amerika entwickelten Grundsätzen entsprechend — zweckmässig ist, anstelle der Triangulation höherer Ordnung die langseitige Polygonierung zu benützen.

Allgemeiner gefasst kamen wir zu der Meinung, dass die gegenwärtig hergestellten physikalisch-elektronischen Entfernungsmesser vor allem dort nützlich sind, wo bisher auch *Längen* gemessen wurden, wo jedoch dieses Verfahren infolge der Grösse der Entfernung sehr schwierig war (z. B. Grundlinienmessung, langseitige Polygonierung.) Die Winkelmessung kann haupt-

sächlich dort durch Entfernungsmessung ersetzt werden, wo die Winkelmessung wegen der grossen Entfernung langwierig und schwerfällig wird. Besonders wirtschaftlich ist diese Hilfe dann, wenn die schlechte Sichtbarkeit selbst bei der Winkelmessung die Anwendung von Geräten und Personal am visierten Punkte notwendig macht, wie z. B. bei der Triangulation erster Ordnung.

ZUSAMMENFASSUNG

Die einzelnen geodätischen Arbeitsvorgänge untersuchend zieht Verfasser den Schluss, dass es in Ungarn nicht viele Möglichkeiten zur wirtschaftlichen Anwendung der physikalischen Entfernungsmesser gibt. Die Begründung liegt vor allem darin, dass das neue horizontale Festpunktnetz Ungarns grösstenteils fertig ist. Was hier noch an Verdichtung und Ergänzung geleistet werden soll, das kann mit dem bisher angewandten Punkteinschaltungsverfahren auf einfachere und billigere Weise verrichtet werden. Eine Ausnahme bildet höchstens die langseitige präzise Polygonierung, wenn diese Methode in grösserem Masse zur Verbindung des alten Triangulierungsnetzes vierter Ordnung mit dem neuen Netz höherer Ordnung angewandt wird. In Ländern, wo das Festpunktnetz noch auf grossen Gebieten fehlt oder sehr spärlich ist, kann die physikalische Entfernungsmessung sehr wirksam sein, insbesondere in Fällen, wo es — den in der Sowjetunion und in Amerika entwickelten Grundsätzen entsprechend — zweckmässig ist, anstelle der Triangulation höherer Ordnung die langseitige Polygonierung zu benützen.

Im allgemeinen sind die gegenwärtig hergestellten physikalischen Entfernungsmesser vor allem dort nützlich, wo bisher auch Längen gemessen wurden, wo jedoch dieses Verfahren infolge der Grösse der Entfernung sehr schwierig war (z. B. Grundlinienmessung, langseitige Polygonierung). Die Winkelmessung kann hauptsächlich dort ersetzt werden, wo sie infolge der grossen Entfernung langwierig und schwerfällig wird. Besonders wirtschaftlich ist diese Hilfe dann, wenn die schlechte Sichtbarkeit selbst bei der Winkelmessung die Anwendung von Geräten und Personal am visierten Punkte notwendig macht, wie z. B. bei der Triangulierung erster Ordnung.

POSSIBILITIES FOR THE APPLICATION OF INDIRECT ELECTRONIC DISTANCE MEASUREMENT IN HUNGARY

E. REGŐCZI

SUMMARY

Studying one by one the geodetic operations, author comes to the conclusion that there are but few possibilities for the economical application of electronic stadimeters in Hungary. The chief reason is that the greatest part of the new horizontal base net is ready. What remains to complete the net and make it more detailed, is simpler and cheaper done by means of the method of interpolation applied till now. The only exception may be long-sided precise traversing, if this method is going to be used to a larger extent for joining the ancient fourth order triangulation net with the new net of superior order. In countries where vast areas are still missing the base net, or where this net is not yet detailed, electronic distance measurement may be very useful, particularly in cases when it is advisable to use — instead of superior triangulation — longsided traversing according to the principles developed in the Soviet Union and in the United States.

The electronic stadimeters produced at present are generally useful where length has been measured so far too, but where this method has been difficult because of great distances (e. g. base measurement, long-sided traversing). Angle measurement can be substituted especially in cases when it becomes tiresome and difficult because of great distance. The application of this method is particularly economic, if — because of bad visibility — even angle measurement requires apparatus and staff on the sighted point as, e. g., in case of first-order triangulation.

POSSIBILITÉS D'APPLICATION DE LA MESURE ÉLECTRONIQUE INDIRECTE DE DISTANCE EN HONGRIE

E. REGŐCZI

RÉSUMÉ

En étudiant un à un les divers procédés géodésiques, l'auteur arrive à la conclusion que le domaine d'emploi économique des stadimètres électroniques est, en Hongrie, assez restreint. Cela tient surtout à ce que le nouveau réseau horizontal des points fondamentaux est en grande partie réalisé. Les travaux destinés à compléter le réseau et à le déterminer en détail, peuvent être faits d'une manière plus simple et plus économique par les méthodes trigonométriques déjà utilisées, excepté peut-être le cheminement polygonal à côtés longs, si on emploie cette méthode dans une plus grande mesure pour joindre l'ancien réseau de triangulation de quatrième ordre au nouveau réseau d'ordre supérieur. Dans les pays où le réseau des points fondamentaux fait encore défaut sur de vastes territoires, ou le réseau est encore très clairsemé, la mesure électronique de distance peut être très utile. Ceci est particulièrement valable dans le cas où les conditions exigent, au lieu de la triangulation d'ordre supérieur, l'application du cheminement polygonal à côtés longs, selon les principes développés en Union Soviétique et aux États-Unis.

En général, les stadimètres électroniques fabriqués à présent s'utilisent surtout dans les cas, où la longueur a dû être mesurée par un procédé difficile à cause des distances (par exemple : mesure de base, cheminement polygonal à côtés longs). Ils peuvent aussi remplacer les mesures d'angle quand celles-ci deviennent malaisées et fastidieuses à faire, à cause des distances considérables. Son application devient particulièrement économique quand la mesure d'angle exige, elle aussi, la présence d'appareils et de personnel sur le point visé, à cause de la mauvaise visibilité, comme c'est le cas par exemple pour les triangulations de premier ordre.

ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ В ВЕНГРИИ КОСВЕННЫХ МЕТОДОВ ИЗМЕРЕНИЯ РАССТОЯНИЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОСНОВЫ

Э. РЕГЕЦИ

РЕЗЮМЕ

Анализируя отдельные геодезические методы, автор делает заключение, что в Венгрии в отношении выгодного применения физических длиномеров имеется мало возможностей. Причина этого, в первую очередь, заключается в том, что преобладающая часть горизонтальной базисной сети уже готова. Что же касается сгущения и дополнения этой сети, то их выполнение проще и дешевле производить при помощи применявшихся до сих пор методов связывания точек. Исключение может представить лишь строгая полигонометрия с длинными сторонами, если этот метод будет применяться в значительных масштабах для связания старой триангуляционной сети четвертого класса с новой первоклассной триангуляционной сетью. В таких странах, где сеть базисных точек еще не построена на значительных площадях или же является слишком неплотной, тогда физические дальномерные методы могут оказать эффективную помощь, и в особенности при наличии таких условий, при которых целесообразно вместо первоклассной триангуляции применить на основе разработанных в СССР и США принципов полигонометрию с длинной стороной.

Изготовляемые в настоящее время физические дальномеры вообще пригодны, в первую очередь, там, где и до сих пор производилось измерение длин, но выполнение этого из-за большого расстояния было трудно осуществимо (например, измерение базисной линии, полигонометрия с длинной стороной). Измерение угла, в основном, может оказать помощь в тех случаях, когда вследствие значительного расстояния измерение угла становится затруднительным и требует много времени. Особенно выгодным является этот метод, когда вследствие плохой видимости также для измерения угла необходимо иметь специальное оборудование и персонал в ориентированной точке, как, например, в случае первоклассной триангуляции.

GRAVITY NETWORK OF HUNGARY

J. RENNER and J. SZILÁRD

HUNGARIAN GEOPHYSICAL INSTITUTE "LORÁND EÖTVÖS", BUDAPEST

[Manuscript received February 10, 1959]

In Hungary, gravity measurements were commenced around the end of the last century, by the initiative of L. Eötvös. The purposes of gravity work were purely theoretical at first, but they soon became a tool of the prospecting of mineral deposits as well. Up to 1950 the number of points surveyed by either Eötvös torsion balance or gravity meter is near one hundred thousand.

To systematize this vast amount of information it has become imperative to develop a country-wide gravity base network, with the purpose of obtaining a country-wide gravity map by adjusting the individual partial surveys to this general system.

This effort has found a strong support in the pertaining proposals of the 1948 Oslo Conference of the International Union of Geodesy and Geophysics [1].

The development of the country-wide gravity base network was commenced in 1950 and completed by 1955. During this time one group of the gravity department of the Hungarian State's Eötvös Loránd Geophysical Institute was almost continually occupied by this task.

The developed network consists of
the first-order gravity network, with 16 stations, and
the second-order gravity network, with 493 stations,

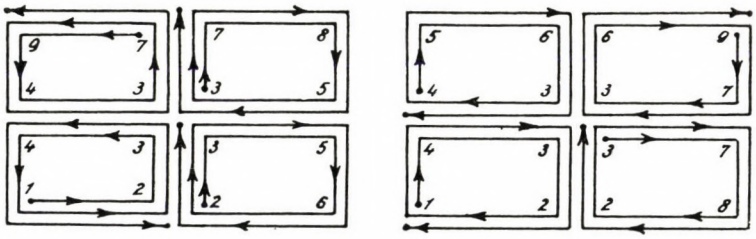
Totally : 509 stations.

The stations of the first-order network are distributed all over the country, some 100 to 120 kilometres apart, while the spacing of the second-order stations is 15 to 20 kilometres. The two networks are intrinsically related, as the base stations of the second-order network were directly compared with the first-order base stations and the level of the base network is adjusted to the level of the first-order network which, on its part, is adjusted to the main gravity base station of the country, situated at the Technical University, Budapest.

The lay-out of the first-order network was designed so that the gravity differences to be expected between the individual points should fall within the

measuring range of 100 to 120 milligals of the HEILAND gravity meter employed, and, on the other hand, so as to make possible the coverage of four base stations, with all the necessary repetitions of measurement, in one day.

In the case of the first-order network this was only feasible by air transport of the gravity meter. The differences of gravity acceleration between the base stations were determined by flying twice around a closed quadrangle and after having returned to the starting point, proceeding to Point No. 2., which served as the starting point of next day's quadrangle (Fig.). It was possible in this way to commence the measurement series of one day at the station where it was finished the foregoing day. Thus the transport of the instrument for purely transport's sake, without measurement, to the first base station of next day



could be avoided, so that the readjustment of the instrument for the gravity range to be expected for next day could be carried out the previous evening, so that there was all night for the instrument to relax.

In the case of the second-order network the instrument was transported by car, remodeled for this purpose, as because of the shorter side length of the polygons it was possible even so to go twice around the quadrangles, and the third observation on the Station No. 2. has become unnecessary (Fig.).

The measurements on the base network and the preliminary results were described in 1956 by L. FACSINAY and J. SZILÁRD [2].

The final, high-accuracy processing of the data was completed in the last few years. First the lunisolar effect was computed for the time of each observation, with special attention to the factor introduced by the elasticity of the Earth, the value of which was assumed to equal 1, 2. In the course of computation work the diagrams developed by K. LASSOVSZKY and SZ. OSZLACZKY [3] were employed. A further correction to be taken into consideration was the one dependent on the azimuth of the instrument during observation, most probably caused by magnetic effects. This problem was first considered by I. KOMÁROMY [4].

Both corrections were applied to the gravity differences as expressed in scale divisions of the instrument. The values thus corrected were plotted in a

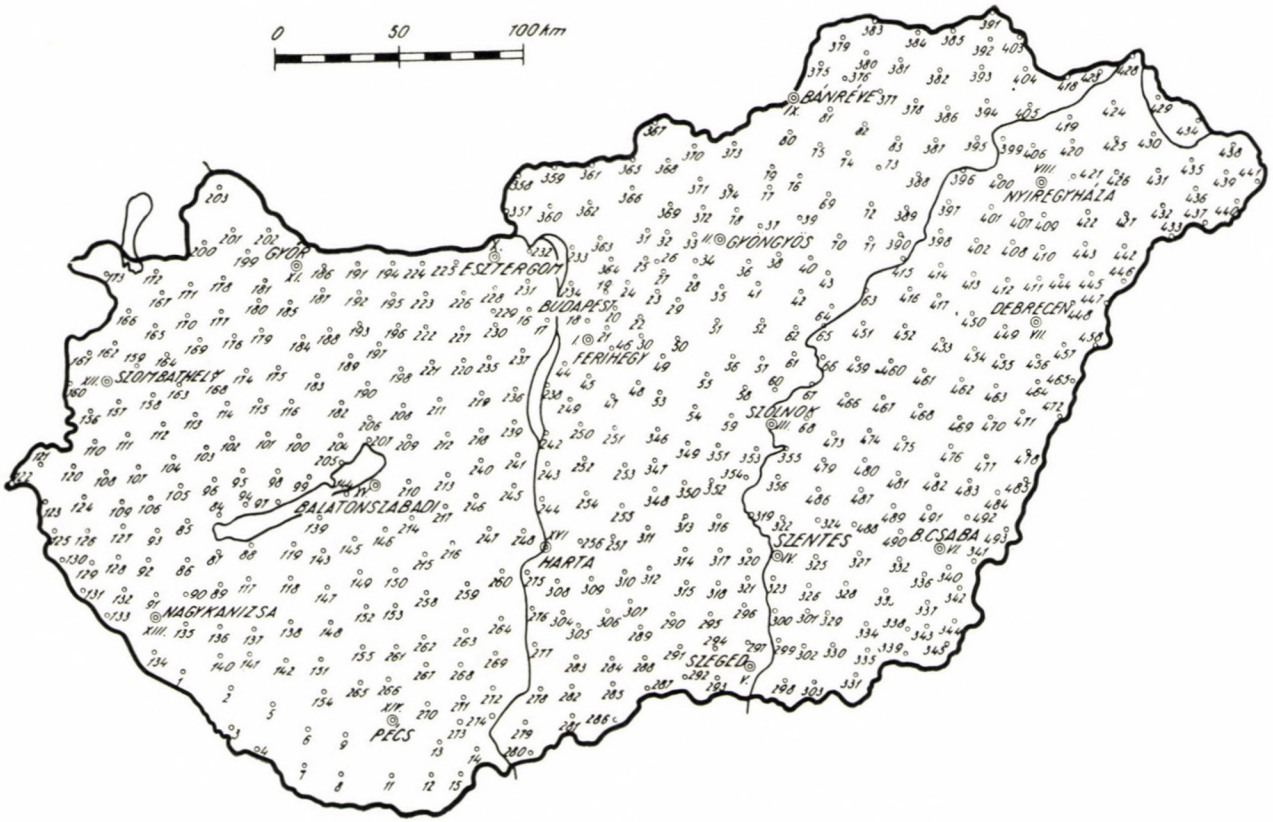


Fig 1. I[st] and IInd order gravity base stations in Hungary

co-ordinate system and the graph of instrumental drift was constructed for each apex of each polygon.

From the drift graph the gravity differences of the base-points were determined in scale units in all possible combinations. From the drift graph we have obtained from one and the same polygon 2—3 gravity difference values for one pair of base-stations. Subsequently, the arithmetic mean of these was computed. Then a further correction was applied considering that the relation

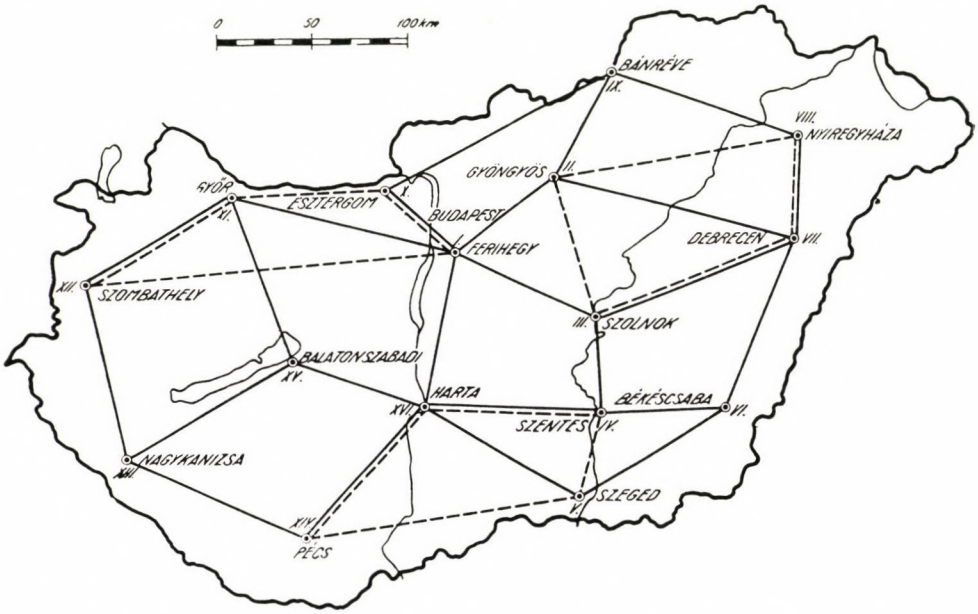


Fig 2. Scheme of flying routes in surveying the I[st] order base stations in Hungary

of gravity differences to instrument reading differences is not strictly linear in the entire range of the instrument. I. KOMÁROMY has, to investigate this problem in detail, carried out experimental measurements the results of which have permitted us to carry out the necessary correction. I. HAÁZ has, by using the experimental results of KOMÁROMY, but a different line of thought and computation procedure, arrived at an analogous correction formula. In the further processing of data we have applied this formula to calculate the square corrections. According to this formula, if the readings at two different stations of the employed HEILAND gravity meter No. 40, are s_1 and s_2, respectively, then the square correction is

$$(s_1 - s_2)\left(1825 - \frac{s_1 + s_2}{2}\right) \cdot 10^{-5} \text{ scale divisions.}$$

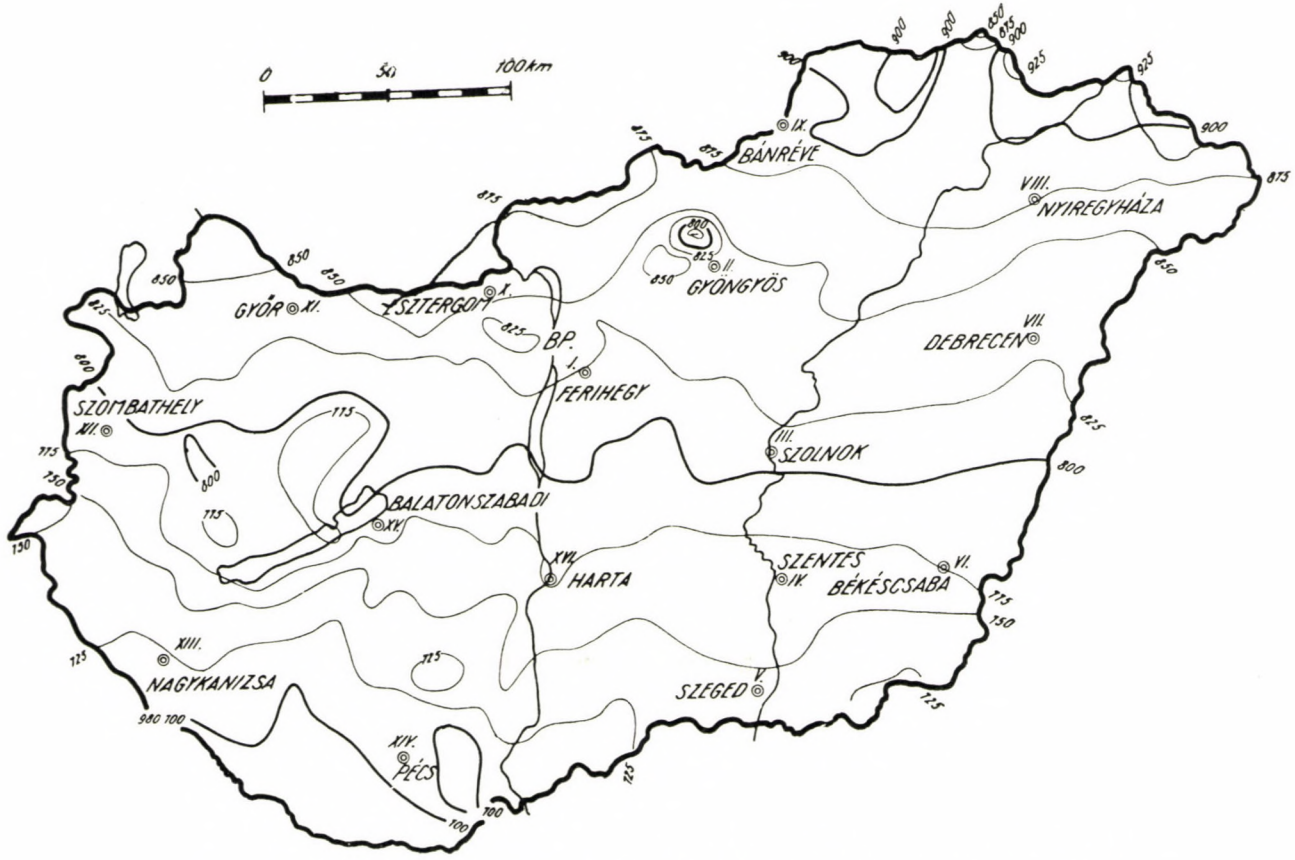


Fig. 3. Adjusted observed values of gravity of the Ist and IInd order base net in Hungary

Data of gravimetric

Station		Geographical		Height	Adjusted observed gravity mgal
number	name	latitude	longitude		
I.	Ferihegy	47°25′05,6″	19°14′31,4″	126,515	980 824,44
II.	Gyöngyös	47°49′00,6″	19°57′43,2″	272,968	837,24
III.	Szolnok	47°07′56,8″	20°13′00,2″	90,677	808,38
IV.	Szentes	46°40′31,0″	20°15′59,6″	83,026	763,10
V.	Szeged	46°15′10,2″	20°05′14,5″	81,860	737,61
VI.	Békéscsaba	46°40′37,6″	21°07′54,3″	86,463	775,08
VII.	Debrecen	47°29′04,7″	21°38′21,7″	108,249	838,08
VIII.	Nyíregyháza	47°59′06,9″	21°40′44,0″	107,676	876,90
IX.	Bánréve	48°18′17,2″	20°21′48,4″	164,764	897,41
X.	Esztergom	47°45′35,7″	18°44′17,5″	111,433	872,20
XI.	Győr	47°42′19,5″	17°40′27,5″	116,291	838,82
XII.	Szombathely	47°16′16,3″	16°38′41,6″	216,891	788,52
XIII.	Nagykanizsa	46°25′59,7″	16°57′20,7″	150,270	722,50
XIV.	Pécs	46°04′15,3″	18°12′30,3″	127,235	713,99
XV.	Balatonszabadi ..	46°54′17,5″	18°07′04,0″	113,641	793,21
XVI.	Harta	46°42′09,9″	19°01′45,7″	94,925	780,19

To explain this formula it has to be mentioned that in the HEILAND gravity meter the auxiliary spring is connected to a calibrated control dial divided into 510 divisions. After completing the revolutions of the dial up to reading 510, the dial can be turned round continously further, but one has to add the numbers 510, 1020, or 1530 respectively to the reading. The revolutions of the dial have four ranges and the reading has to be expressed every time as the difference from the zero of the lowest range. The maximum possible reading with this instrument is 1825 : this explains the occurrence of this number in the formula.

In connection with the square correction the value of the sensitivity constant had to be cleared. Using the experimental results of I. KOMÁROMY and other comparative measurements, I. HAÁZ has found the sensitivity constant to be smaller by 0,5 per cent than was given by the factory in the certificate, namely 0,0972 instead of 0,0977. This value of the sensitivity constant was also corroborated by a comparative measurement between the Ferihegy and Szeged airport : the comparative measurement was carried out with nine Soviet gravity meters of the GAE-3 type by Soviet scientists and with two HEILAND gravity meters by the collaborators of the Eötvös Loránd Geophysical Institute.

The processing was continued by adding the square correction to the gravity differences expressed in scale divisions, as determined from the drift graph, and by computing the weighted averages of the gravity differences obtained for the common sides of adjacent polygons. Weighting was done with the number of gravity differences obtained from the drift graphs for one and the same polygon side. The obtained gravity differences were then multiplied

base stations I^st order

Station number	Topographical effect	Theoretical gravity according to international formula (1930)	Faye	Bouguer	Isostatic	Faye	Bouguer	Isostatic
			corrections			anomalies		
I.	0,02	980 847,47	+39,04	—14,14	+21,80	+16,03	+ 1,89	+23,69
II.	0,58	883,32	+84,24	—30,52	+25,90	+38,74	+ 8,22	+34,12
III.	0,01	821,75	+27,98	—10,14	+16,50	+14,62	+ 4,48	+20,98
IV.	—	780,56	+25,62	— 9,28	+15,80	+ 8,16	— 1,12	+14,68
V.	—	742,46	+25,26	— 9,15	+13,80	+20,41	+11,26	+25,06
VI.	—	780,72	+26,68	— 9,67	+17,30	+21,04	+11,37	+28,67
VII.	0,01	853,45	+33,40	—12,10	+20,80	+18,04	+ 5,94	+26,74
VIII.	0,02	898,45	+33,23	—12,04	+23,00	+11,70	— 0,34	+22,66
IX.	0,08	927,14	+50,85	—18,42	+37,00	+21,20	+ 2,78	+39,78
X.	0,19	878,20	+34,39	—12,46	+24,70	+28,58	+16,12	+40,82
XI.	0,01	873,30	+35,89	—13,00	+21,80	+ 1,42	—11,58	+10,22
XII.	0,04	834,24	+66,93	—24,25	+33,80	+21,25	— 3,00	+30,80
XIII.	0,02	758,73	+46,37	—16,80	+22,40	+10,16	— 6,64	+15,76
XIV.	0,43	726,05	+39,26	—14,22	+19,30	+27,63	+13,41	+32,71
XV.	0,03	801,25	+35,07	—12,70	+19,70	+27,06	+14,36	+34,06
XVI.	—	783,03	+29,29	—10,61	+16,20	+26,45	+15,84	+32,04

by the sensitivity constant, 0,0972, and thus the gravity differences were obtained in milligals for all polygon sides. This process was performed separately for the first- and then for the second-order network.

Considering that in the case of both networks an excess number of equations is obtained for the gravity values of the individual stations, the probable values were determined by a least-squares adjustment, wherein only the gravity differences along the circumferences of the polygons were accepted as effectively measured values. Adjustment was carried out by a process gradually minimizing residues. The first-order network was adjusted first.

Station No. I. of the first-order network (Ferihegy Airport) was connected with the main base station situated at the Institute of Geodesy of the Technical University, whose gravity value in the Potsdam system was accepted to be 980,853 gal. The measurements connecting the main base station with the Potsdam base were carried out some time ago by K. OLTAY who has found a gravity acceleration of 980,852 in the Potsdam system. C. MORELLI has, in the European base network adjusted by him, found a value of 980,853 for Budapest, which is hardly different from the value of 980,8533 given by R. A. HIRVONEN. The gravity acceleration of the base station No. I. (Ferihegy Airport) is 980,82444 gal in the Potsdam system.

The stations of the first-order network are also comprised by the second-order network and in the adjustment of the second-order network the adjusted gravity values of the first-order network were introduced as conditions of constraint. The second-order network was adjusted in one set and the number of intermediate equations in the adjustment was 968, that of the unknowns 492.

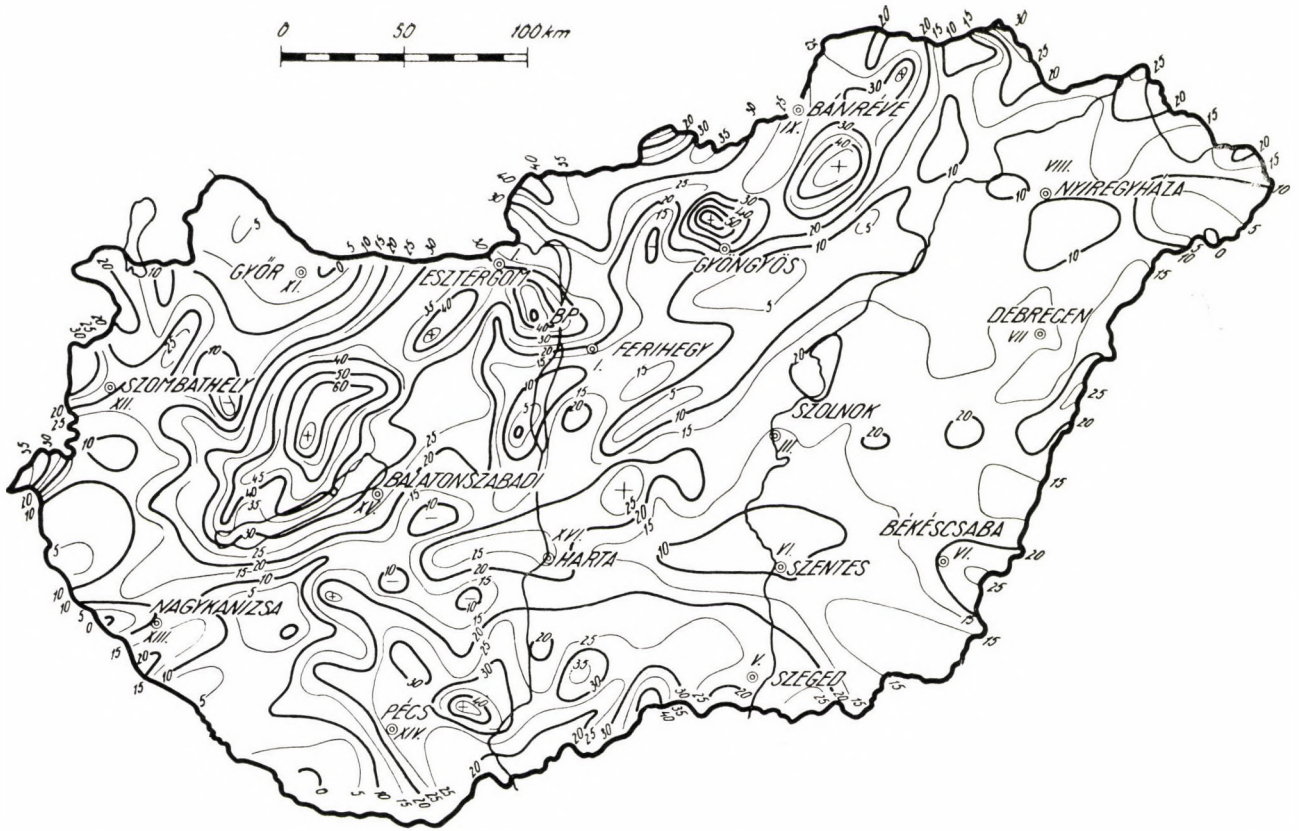


Fig. 4. Faye anomaly map of Hungary as computed from the Ist and IInd order gravity base net. Interval of isogams 5 mgal

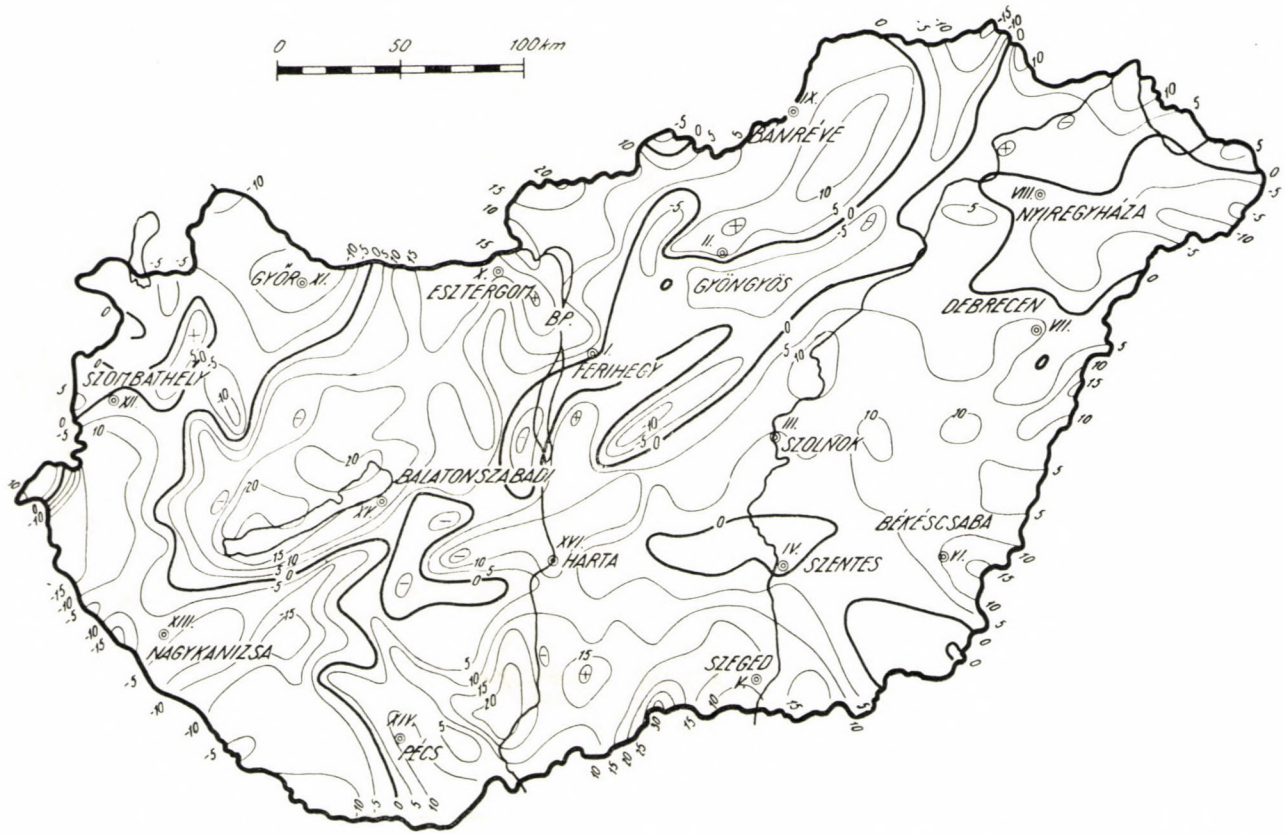


Fig. 5. Bouguer anomaly map of Hungary as computed from the I[st] and IInd order gravity base net. Interval of isogams 5 mgal

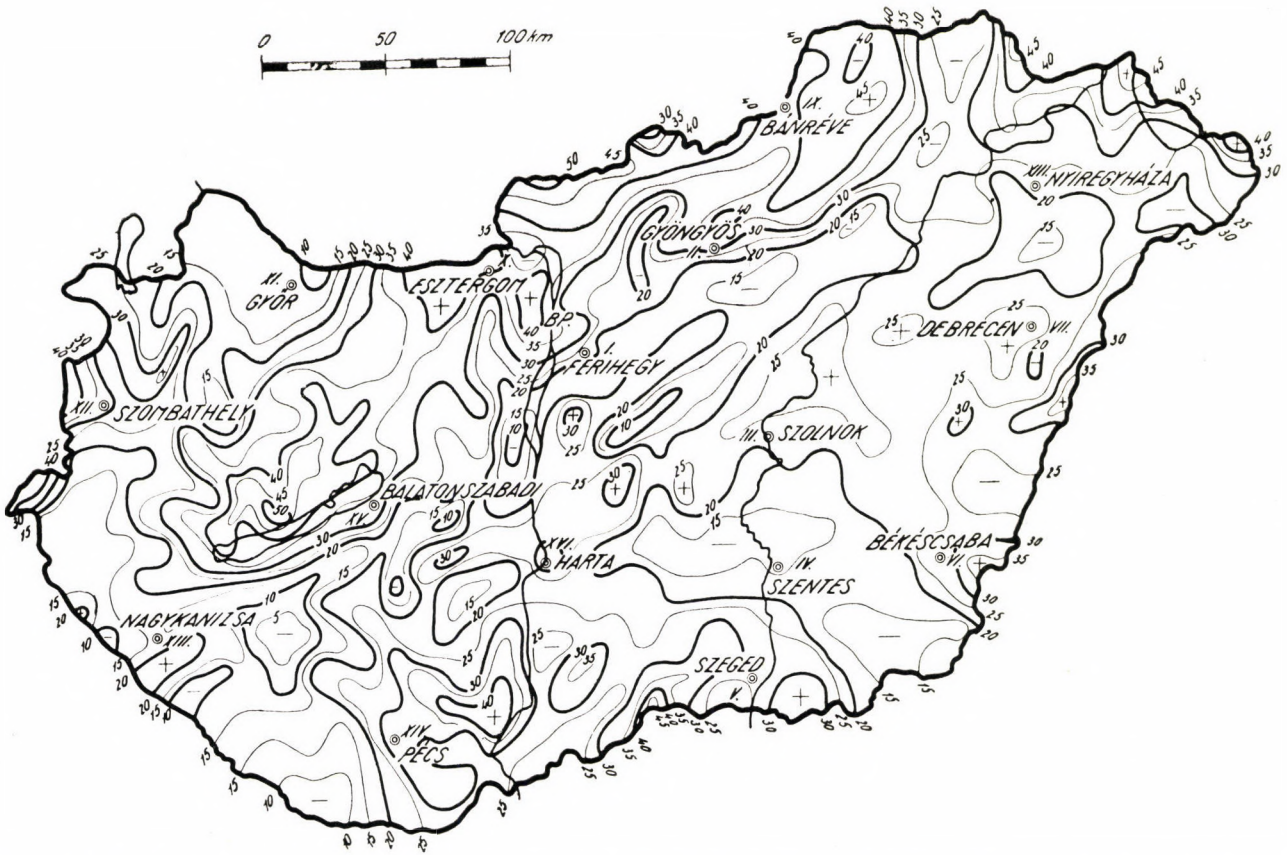


Fig. 6. Isostatic isogams of Hungary as computed from the Ist and IInd order gravity base net, Interval of isogams 5 mgal

The mean error of the individual measurements in the adjustment of the first-order base network was found to be $\pm$ 0,02 mgal, in that of the second-order network $\pm$ 0,029 mgal.

The horizontal co-ordinates of the base stations were in the course of the measurements preliminarily determined from survey maps of 1 : 50,000 scale. In the course of processing, the horizontal co-ordinates were more accurately determined by finding the base stations by the aid of lay-out sketches on the catastral map sheets of 1:2880 scale and by determining the stereographic co-ordinates of the stations by the aid of the catastral maps. The transformation of stereographic co-ordinates into geographical ones was performed by an approximation by third-degree polynoms as described in a paper by B. Szilágyi and Gy. Barta in 1953 [5]. These approximating polynoms are of a sufficient accuracy as regards the geographical latitude ; however, some special corrections had to be applied in the case of longitudes. The geographical co-ordinates determined in this way with a mean error of $\pm$ 0,15″ are related to the base point on the Gellérthegy, Budapest, whose co-ordinates are

$$\varphi = 47^\circ\ 29'\ 14{,}92''$$

$$\lambda = 19^\circ\ \ 2'\ 59{,}8\ ''$$

The final results of the high-accuracy processing of the base network data and the gravity anomalies therefrom computed are presented in the form of sketch maps and tables.

The anomalies were computed with the density of 2,67 and the isostatic anomalies are referred to the depth T = 30 km.

Data of gravimetric

Station		Geographical		Height	Adjusted observed gravity mgal
number	name	latitude	longitude		
1.	Alsok	46°14′17,1″	17°07′05,5″	137,314	980 700,21
2.	Kivadár	46°11′13,4″	17°21′36,7″	127,860	704,69
3.	Babócsa	46°02′13,9″	17°21′57,6″	123,113	694,08
4.	Barcs	45°57′47,8″	17°29′58,0″	119,229	683,83
5.	Homokszentgyörgy	46°07′19,3″	17°35′24,1″	148,761	695,30
6.	Szigetvár	46°02′16,7″	17°47′03,5″	116,451	694,79
7.	Drávafok	45°54′12,9″	17°44′42,6″	100,673	679,20
8.	Nagycsány	45°52′38,1″	17°56′49,0″	102,458	677,74
9.	Szentlőrinc	46°01′56,2″	17°59′12,8″	115,011	690,77
10.	Pécs	46°04′15,1″	18°12′29,7″	127,173	714,07
11.	Harkány	45°51′31,6″	18°14′08,0″	96,971	689,87
12.	Villány	45°52′24,2″	18°27,52,9″	100,216	702,64
13.	Szederkény	45°59′37,8″	18°28′16,2″	157,550	693,55
14.	Mohács	45°58′52,5″	18°40′45,4″	93,192	709,22
15.	Majs	45°54′14,6″	18°35′32,2″	112,680	699,16
16.	Petneházirét	47°32′03,0″	18°57′00,6″	289,608	819,01
17.	Műegyetem	47°28′54,6″	19°03′25,5″	104,800	853,21
18.	Cinkota	47°30′01,9″	19°14′27,0″	167,046	832,65
19.	Gödöllő	47°36′42,1″	19°20′17,0″	215,933	822,49
20.	Isaszeg	47°32′37,0″	19°23′38,3″	181,813	822,33
21.	Pécel	47°28′31,0″	19°20′45,4″	178,244	814,48
22.	Dány	47°30′53,1″	19°32′09,6″	162,703	820,23
23.	Tura	47°35′40,7″	19°36′25,4″	123,082	836,81
24.	Aszód	47°38′33,0″	19°28′04,5″	143,530	837,66
25.	Verseg	47°43′39,6″	19°33′55,2″	158,912	836,88
26.	Heréd	47°42′37,6″	19°37′31,3″	127,561	844,43
27.	Hatvan	47°40′28,4″	19°40′01,6″	121,556	846,67
28.	Csány	47°39′11,9″	19°50′14,8″	118,894	837,46
29.	Jászfényszaru ...	47°34′45,2″	19°43′54,2″	115,175	835,40
30.	Sülysáp	47°27′02,5″	19°32′14,2″	141,552	819,37
31.	Szirák	47°49′43,0″	19°32′40,9″	157,234	844,63
32.	Apc	47°48′34,4″	19°41′52,5″	143,777	859,18
33.	Gyöngyöstarján .	47°48′16,1″	19°50′39,2″	180,449	851,36
34.	Atkár	47°43′14,6″	19°50′53,2″	167,055	832,40
35.	Jászárokszállás ..	47°38′24,7″	19°57°03,5″	102,317	838,70
36.	Ludas	47°43′17,7″	20°06′06,2″	116,695	843,59
37.	Kisnána	47°50′55,3″	20°09′33,2″	176,597	852,30
38.	Kál	47°44′45,8″	20°15′19,2″	121,434	842,58
39.	Eger	47°52′31,2″	20°23′06,7″	167,657	864,14
40.	Füzesabony	47°44′17,2″	20°26′06,8″	109,209	847,68
41.	Tarnaméra	47°39′06,1″	20°08′46,1″	102,676	839,89
42.	Átány	47°37′19,8″	20°21′05,8″	97,148	845,73
43.	Besenyőtelek	47°40′29,3″	20°32′13,7″	96,476	850,46
44.	Dunaharaszti ...	47°20′49,2″	19°07′10,6″	104,441	817,69
45.	Ócsa	47°17′56,3″	19°14′41,2″	112,215	813,68
46.	Üllő	47°23′49,0″	19°22′18,6″	130,159	817,59
47.	Újhartyán	47°13′39,7″	19°22′55,2″	109,762	810,45
48.	Pilis	47°16′29,5″	19°31′32,0″	143,051	808,89
49.	Pánd	47°22′11,0″	19°38′34,2″	136,423	817,71
50	Nagykáta	47°25′57,6″	19°44′00,6″	116,339	826,49
51.	Jászberény	47°30′26,2″	19°55′59,9″	95,405	838,88
52.	Jászapáti	47°31′28,7″	20°09′36,7″	94,188	834,38
53.	Albertirsa	47°14′26,1″	19°38′38,0″	122,539	794,87
54.	Cegléd	47°11′31,8″	19°48′44,2″	99,108	809,24

base stations IInd order

Station number	Topographical effect	Theoretical gravity according to international formula (1930)	Faye	Bouguer	Isostatic	Faye	Bouguer	Isostatic
			corrections			anomalies		
1.	0,02	980 741,13	42,38	—15,35	+22,10	+ 1,48	—13,87	+ 8,23
2.	—	736,53	39,46	—14,29	21,60	+ 7,62	— 6,67	+14,93
3.	—	723,01	37,99	—13,76	21,90	+ 9,06	— 4,70	+17,20
4.	0,02	716,34	36,79	—13,33	21,80	+ 4,30	— 9,03	+12,77
5.	0,01	730,66	45,91	—16,63	21,40	+10,56	— 6,07	+15,33
6.	—	723,08	35,94	—13,02	21,30	+ 7,65	— 5,37	+15,93
7.	—	710,95	31,07	—11,26	21,20	— 0,68	—11,94	+ 9,26
8.	0,02	708,57	31,62	—11,45	20,50	+ 0,81	—10,64	+ 9,86
9.	0,05	722,56	35,49	—12,86	20,30	+ 3,75	— 9,11	+11,19
10.	0,43	726,04	39,24	—14,22	19,40	+27,70	+13,48	+32,88
11.	0,06	706,91	29,92	—10,84	19,30	+12,94	+ 2,10	+21,40
12.	0,06	708,22	30,93	—11,20	20,00	+25,41	+14,21	+34,21
13.	0,07	719,09	48,62	—17,61	24,30	+23,15	+ 5,54	+29,84
14.	0,01	717,96	28,76	—10,42	20,00	+20,03	+ 9,61	+29,61
15.	0,03	710,99	34,77	—12,60	19,70	+22,97	+10,37	+30,07
16.	0,84	857,90	89,37	—32,38	22,60	+51,32	+18,94	+41,54
17.		853,20	32,34	—11,72	22,60			
18.	0,06	854,88	51,55	—18,68	22,50	+29,38	+10,70	+33,20
19.	0,08	864,88	66,64	—24,14	23,60	+24,33	+ 0,19	+23,79
20.	0,04	858,75	56,11	—20,33	22,80	+19,73	— 0,60	+22,20
21.	0,19	852,60	55,01	—19,93	22,10	+17,08	— 2,85	+19,25
22.	0,03	856,16	50,21	—18,19	22,20	+14,31	— 3,88	+18,32
23.	0,02	863,34	37,98	—13,76	23,20	+11,47	— 2,29	+20,91
24.	0,06	867,64	44,29	—16,05	23,90	+14,37	— 1,68	+22,22
25.	0,04	875,30	49,04	—17,77	25,00	+10,66	— 7,11	+17,89
26.	0,03	873,76	39,36	—14,26	24,80	+10,06	— 4,20	+20,60
27.	0,01	870,53	37,51	—13,59	24,30	+13,66	+ 0,07	+24,37
28.	0,01	868,62	36,69	—13,29	23,50	+ 5,54	— 7,75	+15,75
29.	0,01	861,96	35,54	—12,88	22,60	+ 8,99	— 3,89	+18,71
30.	0,07	850,39	43,68	—15,82	21,30	+12,73	— 3,09	+18,21
31.	0,23	884,38	48,52	—17,58	27,70	+ 9,00	— 8,58	+19,12
32.	0,53	882,67	44,37	—16,07	27,00	+21,41	+ 5,34	+32,34
33.	0,37	882,21	55,69	—20,17	26,50	+25,21	+ 5,04	+31,54
34.	0,12	874,68	51,55	—18,68	24,50	+ 9,39	— 9,29	+15,21
35.	0,02	867,44	31,58	—11,44	22,90	+ 2,86	— 8,58	+14,32
36.	0,09	874,76	36,01	—13,05	23,90	+ 4,93	— 8,12	+15,78
37.	0,34	886,18	54,50	—19,74	26,90	+20,96	+ 1,22	+28,12
38.	0,03	876,96	37,47	—13,58	23,70	+ 3,12	—10,46	+13,24
39.	0,17	888,58	51,74	—18,74	26,80	+27,47	+ 8,73	+35,53
40.	0,01	876,24	33,70	—12,21	22,20	+ 5,15	— 7,06	+15,14
41.	0,01	868,47	31,68	—11,48	21,90	+ 3,11	— 8,37	+13,53
42.	—	865,82	29,98	—10,86	20,40	+ 9,89	— 0,97	+19,43
43.	—	870,55	29,77	—10,79	20,30	+ 9,68	— 1,11	+19,19
44.	0,01	841,06	32,23	—11,68	20,90	+ 8,87	— 2,81	+18,09
45.	0,01	836,74	34,63	—12,54	20,00	+11,58	— 0,96	+19,04
46.	0,02	845,56	40,17	—14,55	21,10	+12,22	— 2,33	+18,77
47.	—	830,32	33,87	—12,27	18,80	+14,00	+ 1,73	+20,53
48.	0,01	834,57	44,14	—15,99	19,10	+18,47	+ 2,48	+21,58
49.	0,02	843,11	42,10	—15,25	20,10	+16,72	+ 1,47	+21,57
50.	—	848,77	35,90	—13,01	20,80	+13,62	+ 0,61	+21,41
51.	0,01	855,48	29,44	—10,67	20,80	+12,85	+ 2,18	+22,98
52.	—	857,05	29,07	—10,53	20,30	+ 6,40	— 4,13	+16,17
53.	0,02	831,48	37,82	—13,70	18,40	+ 1,23	—12,47	+ 5,93
54.	0,01	827,12	30,58	—11,08	17,20	+12,71	+ 1,63	+18,83

Station number	Station name	Geographical latitude	Geographical longitude	Height	Adjusted observed gravity mgal
55.	Tápiószele	47°19′11,3″	19°52′39,1″	100,480	980 813,61
56.	Jászboldog	47°22′53,9″	20°00′29,3″	92,186	820,34
57.	Jászladány	47°22′55,4″	20°10′04,7″	86,969	832,51
58.	Újszász	47°16′29,5″	20°03′56,7″	88,564	822,34
59.	Abony	47°10′00,7″	20°00′23,6″	91,358	815,85
60.	Besenyszög	47°16′39,3″	20°13′55,3″	88,186	826,50
61.	Nagyházihalom ..	47°23′31,8″	20°19′42,4″	87,759	839,51
62.	Pély	47°30′29,3″	20°20′26,2″	88,654	842,84
63.	Tiszafüred	47°36′48,8″	20°44′10,7″	92,096	851,61
64.	Tiszanána	47°34′23,7″	20°32′15,2″	89,220	849,58
65.	Kisköre	47°29′09,9″	20°30′21,4″	87,012	847,23
66.	Tiszaroff	47°22′44,4″	20°29′53,2″	88,729	838,05
67.	Nagykörü	47°16′53,9″	20°26′15,5″	87,034	828,96
68.	Törökszentmiklós	47°09′30,3″	20°24′22,7″	88,746	812,75
69.	Cserépfalu	47°57′09,4″	20°32′10,9″	225,234	858,54
70.	Mezőkövesd	47°49′01,6″	20°35′25,0″	120,741	851,32
71.	Mezőnagymihály	47°48′47,1″	20°44′14,6″	98,697	859,09
72.	Vatta	47°55′20,6″	20°44′53,3″	137,381	854,46
73.	Harsány	48°03′12,3″	20°48′02,4″	119,486	882,81
74.	Lillafüred	48°05′44,6″	20°37′24,0″	329,546	853,60
75.	Nagyvisnyó	48°08′42,9″	20°27′09,3″	261,140	872,03
76.	Monosbél	48°02′07,5″	20°20′08,4″	277,145	858,57
77.	Bükkszék	47°59′38,0″	20°11′03,2″	192,245	866,68
78.	Bodony	47°55′57,3″	20°01′40,4″	284,196	851,09
79.	Tarnalelesz	48°03′41,5″	20°11′39,7″	208,636	865,42
80.	Hódoscsépány ...	48°11′44,5″	20°16′00,8″	179,263	881,76
81.	Vadna	48°16′08,8″	20°32′47,1″	143,081	904,61
82.	Sajószentpéter ...	48°12′43,9″	20°43′59,0″	126,851	904,70
83.	Szikszó	48°10′03,9″	20°54′38,8″	119,222	893,69
84.	Keszthely	46°48′12,3″	17°16′21,9″	160,351	782,12
85.	Szentgyörgyvár ..	46°45′05,8″	17°08′04,4″	131,921	771,61
86.	Zalaszabar	46°38′13,9″	17°07′04,9″	118,740	756,59
87.	Balatonsztgyörgy	46°40′51,2″	17°17′15,4″	110,286	770,53
88.	Balatonfenyves ..	46°42′41,7″	17°28′42,4″	107,726	779,61
89.	Felsőzsitva	46°33′49,5″	17°17′48,1″	118,400	739,23
90.	Galambok	46°30′44,9″	17°07′01,8″	168,846	725,31
91.	Korpavár	46°31′07,3″	16°57′41,2″	161,124	730,25
92.	Hahót	46°37′23,6″	16°55′21,0″	160,406	743,61
93.	Zalaszentmihály	46°43′55,0″	16°57′43,0″	172,570	744,92
94.	Hegymagas	46°49′46,7″	17°26′36,7″	118,422	787,69
95.	Zalahaláp	46°56′42,5″	17°25′33,7″	215,690	784,45
96.	Bazsi	46°54′49,2″	17°14′51,8″	216,124	765,03
97.	Balatonrendes ...	46°49′45,2″	17°36′16,9″	121,244	798,36
98.	Kapolcs	46°57′07,2″	17°36′07,2″	172,448	788,46
99.	Vászoly	46°56′17,7″	17°45′35,9″	267,691	771,21
100.	Zsófiapuszta	47°04′05,3″	17°41′45,2″	392,145	761,87
101.	Csékút	47°04′34,9″	17°31′54,2″	222,211	787,97
102.	Káptalanfa	47°04′09,8″	17°21′16,2″	153,110	795,08
103.	Gógánfa	47°01′23,4″	17°12′05,7″	145,943	797,00
104.	Batyk	46°59′34,7″	17°01′38,7″	147,816	778,03
105.	Kehida	46°52′23,2″	17°05′04,3″	120,031	787,21
106.	Alsónemesapáti ..	46°50′48,9″	16°55′30,4″	154,430	768,66
107.	Egervár	46°56′47,2″	16°51′05,1″	150,058	770,31
108.	Ozmánbükk	46°57′00,8″	16°40′24,9″	218,637	748,29
109.	Zalasztmihályfa .	46°49′43,8″	16°45′50,4″	167,139	750,92

Station number	Topographical effect	Theoretical gravity according to international formula (1930)	Faye	Bouguer	Isostatic	Faye	Bouguer	Isostatic
			corrections			anomalies		
55.	0,01	980 838,61	31,01	—11,23	+18,80	+ 6,02	— 5,21	+13,59
56.	—	844,18	28,45	—10,31	19,30	+ 4,61	— 5,70	+13,60
57.	—	844,22	26,84	— 9,72	18,60	+15,13	+ 5,41	+24,01
58.	0,02	834,57	27,33	— 9,90	17,50	+15,12	+ 5,22	+22,72
59.	0,01	824,84	28,19	—10,21	16,80	+19,21	+ 9,00	+25,80
60.	—	834,81	27,21	— 9,86	17,00	+18,90	+ 9,04	+26,04
61.	—	845,13	27,08	— 9,81	18,00	+21,46	+11,65	+29,65
62.	—	855,56	27,36	— 9,91	19,20	+14,64	+ 4,73	+23,93
63.	0,02	865,04	28,42	—10,30	19,10	+15,01	+ 4,71	+23,81
64.	0,01	861,42	27,53	— 9,97	19,30	+15,70	+ 5,73	+25,03
65.	—	853,55	26,85	— 9,73	18,60	+20,53	+10,80	+29,40
66.	0,01	843,94	27,38	— 9,92	17,60	+21,50	+11,58	+29,18
67.	0,01	835,18	26,86	— 9,73	16,80	+20,65	+10,92	+27,72
68.	—	824,08	27,39	— 9,92	16,30	+16,06	+ 6,14	+22,44
69.	0,60	895,52	69,51	—25,18	28,00	+33,13	+ 7,95	+35,95
70.	0,08	883,34	37,26	—13,50	23,20	+ 5,32	— 8,18	+15,02
71.	0,01	882,98	30,46	—11,03	22,20	+ 6,58	— 4,45	+17,75
72.	0,16	892,80	42,40	—15,36	25,60	+ 4,22	—11,14	+14,46
73.	0,32	904,58	36,87	—13,36	28,30	+15,42	+ 2,06	+30,36
74.	4,05	908,37	101,70	—36,84	30,50	+50,98	+14,14	+44,64
75.	0,76	912,82	80,59	—29,20	33,00	+40,56	+11,36	+44,36
76.	0,89	902,96	85,53	—30,98	30,80	+42,03	+11,05	+41,85
77.	0,41	899,23	59,33	—21,49	30,20	+27,19	+ 5,70	+35,90
78.	0,51	893,72	87,70	—31,77	29,50	+45,58	+13,81	+43,31
79.	0,35	905,30	64,38	—23,32	31,90	+24,85	+ 1,53	+33,43
80.	0,72	917,35	55,32	—20,04	34,90	+20,45	+ 0,41	+35,31
81.	0,37	923,94	44,15	—16,00	35,10	+25,19	+ 9,19	+44,29
82.	0,27	918,83	39,15	—14,18	32,90	+25,29	+11,11	+44,01
83.	0,25	914,84	36,79	—13,33	29,90	+15,89	+ 2,56	+32,46
84.	0,60	792,10	49,48	—17,93	22,20	+40,10	+22,17	+44,37
85.	0,11	787,43	40,71	—14,75	22,70	+25,00	+10,25	+32,95
86.	0,22	777,12	36,64	—13,28	21,90	+16,33	+ 3,05	+24,95
87.	0,04	781,06	34,03	—12,33	21,30	+23,54	+11,21	+32,51
88.	0,03	783,83	33,24	—12,04	20,90	+29,05	+17,01	+37,91
89.	0,04	770,50	36,54	—13,24	20,70	+ 5,31	— 7,93	+12,77
90.	0,05	765,88	52,10	—18,88	21,60	+11,58	— 7,30	+14,30
91.	0,04	766,44	49,72	—18,01	22,40	+13,57	— 4,44	+17,96
92.	0,16	775,86	49,50	—17,93	23,10	+17,41	— 0,52	+22,58
93.	0,05	785,66	53,26	—19,29	23,50	+12,57	— 6,72	+16,78
94.	0,33	794,47	36,54	—13,24	22,60	+30,09	+16,85	+39,45
95.	0,07	804,87	66,56	—24,11	23,50	+46,21	+22,10	+45,60
96.	0,16	802,04	66,70	—24,16	22,90	+29,85	+ 5,69	+28,59
97.	0,24	794,43	37,42	—13,56	22,10	+41,59	+28,03	+50,13
98.	0,84	805,49	53,22	—19,28	23,10	+37,03	+17,75	+40,85
99.	0,26	804,25	82,61	—29,93	22,40	+49,83	+19,90	+42,30
100.	0,16	815,96	121,02	—43,84	23,80	+67,09	+23,25	+47,05
101.	0,11	816,69	68,57	—24,84	23,80	+39,96	+15,12	+38,92
102.	0,04	816,07	47,25	—17,12	23,20	+26,30	+ 9,18	+32,38
103.	0,02	811,90	45,04	—16,32	22,20	+30,16	+13,84	+36,04
104.	0,02	809,18	45,62	—16,52	24,00	+14,49	— 2,03	+21,97
105.	0,22	798,38	37,04	—13,42	21,80	+26,09	+12,67	+34,47
106.	0,46	796,02	47,66	—17,26	25,00	+20,76	+ 3,50	+28,50
107.	0,15	804,99	46,31	—16,78	26,00	+11,78	— 5,00	+21,00
108.	0,05	805,33	67,47	—24,44	28,50	+10,48	—13,96	+14,54
109.	0,16	794,39	51,58	—18,69	26,50	+ 8,27	—10,42	+16,08

Station		Geographical		Height	Adjusted observed gravity mgal
number	name	latitude	longitude		
110.	Körmend	47°02′08,6″	16°35′42,4″	199,477	980 760,69
111.	Vasvár	47°03′22,8″	16°47′17,0″	178,472	767,78
112.	Szemenye	47°06′30,5″	16°58′21,7″	217,992	773,46
113.	Jánosháza	47°08′17,0″	17°07′54,3″	142,963	805,90
114.	Felsőiszkáz	47°11′16,2″	17°18′19,5″	147,730	784,14
115.	Noszlop	47°11′45,6″	17°28′32,6″	198,973	798,71
116.	Farkasgyepű ...	47°12′00,8″	17°38′25,5″	399,282	758,84
117.	Boronka	46°35′06,8″	17°27′22,7″	121,255	740,67
118.	Somogyvár	46°34′43,7″	17°39′06,9″	136,418	731,93
119.	Szöllősgyörök ...	46°42′14,2″	17°40′31,3″	137,119	764,26
120.	Hegyh.sztmárton	46°56′07,7″	16°29′06,2″	244,437	739,82
121.	Máriaújfalu	46°57′05,9″	16°19′02,0″	222,266	770,61
122.	Felsőszölnök	46°52′07,1″	16°09,19,5″	287,717	751,87
123.	Kotormány	46°49′21,4″	16°20′53,9″	232,106	730,06
124.	Felsőjánosfa	46°50′40,5″	16°33′37,6″	204,629	740,62
125.	Szentgyörgyvölgy	46°43′31,0″	16°24′40,1″	213,592	726,76
126.	Pórszombat	46°43′47,2″	16°35′29,2″	187,427	734,07
127.	Lickóvadamos ...	46°44′44,2″	16°46′41,5″	190,505	737,75
128.	Gutorfölde	46°38′27,7″	16°43′30,6″	170,543	734,68
129.	Lenti	46°37′22,7″	16°34′24,8″	166,278	730,08
130.	Gáborjánháza ...	46°37′04,7″	16°26′02,6″	163,034	727,08
131.	Dobri	46°30′54,1″	16°34′56,6″	154,926	731,55
132.	Borsfa	46°31′42,2″	16°46′58,4″	188,587	724,94
133.	Letenye	46°25′14,6″	16°42′22,0″	142,491	713,30
134.	Surd	46°18′18,9″	16°57′38,4″	219,180	701,89
135.	Sand	46°25′27,5″	17°08′07,0″	161,586	725,66
136.	Vése	46°24′44,8″	17°18′16,1″	152,198	723,38
137.	Nagybajom	46°24′01,4″	17°29′01,7″	150,987	710,94
138.	Mezőcsokonya ...	46°25′39,6″	17°40′15,8″	163,882	706,88
139.	Balatonszemes ..	46°48′27,8″	17°47′23,9″	134,529	779,85
140.	Somogyszob	46°18′03,0″	17°17′36,8″	151,402	705,38
141.	Szabás	46°17′54,6″	17°27′24,0″	143,813	711,66
142.	Gigei-n. puszta ..	46°17′01,6″	17°38′26,2″	189,310	695,82
143.	Karád	46°41′02,7″	17°51′35,3″	179,860	735,76
144.	Balatonendréd ..	46°50′54,4″	17°58′22,3″	167,981	776,88
145.	Tab	46°43′12,3″	18°00′46,6″	158,938	745,89
146.	Daránypuszta ..	46°45′37,6″	18′09°39,6″	137,036	761,46
147.	Ecseny	46°34′16,4″	17°50′23,4″	238,971	724,05
148.	Kisrépáspuszta .	46°26′08,3″	17°52′23,6″	152,553	720,55
149.	Szorosad	46°36′13,5″	18°01′51,0″	131,941	750,01
150	Nagykónyi	46°36′41,8″	18°13′27,1″	127,562	739,78
151.	Zselicszentpál ...	46°18′34,6″	17°49′06,6″	149,891	723,02
152.	Nak	46°29′37,7″	18°03′14,9″	137,321	742,27
153.	Dalmand	46°29′31,8″	18°12′25,2″	183,704	728,48
154.	Boldogasszonyfa .	46°10′24,1″	17°50′22,8″	157,260	699,12
155.	Kisberki	46°20′32,2″	18°01′36,8″	122,785	725,76
156.	Ják	47°09′02,0″	16°34′52,0″	214,220	771,12
157.	Tanakajd	47°11′23,6″	16°43′42,6″	191,401	783,87
158.	Ikervár	47°13′02,5″	16°54′02,6″	160,418	797,97
159.	Nagyszeleste	47°19′00,5″	16°50′17,7″	160,684	808,93
160.	Nagynarda	47°14′40,1″	16°29′06,5″	252,261	788,37
161.	Kőszeg D.	47°22′01,5″	16°34′03,0″	263,598	793,9-
162.	Csepreg	47°24′30,5″	16°43′35,4″	184,686	805,91
163.	Nagysimonyi	47°15′39,0″	17°03′30,0″	151,695	799,49
164.	Uraiújfalu	47°22′38,2″	16°59′27,0″	145,836	824,86

Station number	Topographical effect	Theoretical gravity according to international formula (1930)	Faye	Bouguer	Isostatic	Faye	Bouguer	Isostatic
			corrections			anomalies		
110.	0,01	980 813,03	61,56	—22,30	+31,00	+ 9,23	—13,07	+17,93
111.	0,06	814,89	55,08	—19,95	27,90	+ 8,03	—11,92	+15,98
112.	0,05	819,59	67,27	—24,37	25,70	+21,19	— 3,18	+22,52
113.	—	822,25	44,12	—15,98	24,30	+27,77	+11,79	+36,09
114.	0,01	826,73	45,59	—16,52	23,70	+ 3,01	—13,51	+10,19
115.	0,06	827,47	61,40	—22,24	23,70	+32,70	+10,46	+34,16
116.	0,28	827,85	123,22	—44,64	24,30	+54,49	+ 9,85	+34,15
117.	0,01	772,44	37,42	—13,56	20,30	+ 5,66	— 7,90	+12,40
118.	0,10	771,86	42,10	—15,25	20,50	+ 2,27	—12,98	+ 7,52
119.	0,11	783,14	42,31	—15,33	20,70	+23,54	+ 8,21	+28,91
120.	0,04	804,00	75,43	—27,33	31,00	+11,29	—16,04	+14,96
121.	0,06	805,46	68,59	—24,85	33,70	+33,80	+ 8,95	+42,65
122.	0,43	797,98	88,79	—32,17	31,00	+43,11	+10,94	+41,94
123.	0,04	793,83	71,63	—25,95	30,10	+ 7,90	—18,05	+12,05
124.	0,03	795,81	63,15	—22,88	28,90	+ 7,99	—14,89	+14,01
125.	0,05	785,06	65,91	—23,88	28,90	+ 7,66	—16,22	+12,68
126.	0,03	785,47	57,84	—20,95	27,10	+ 6,47	—14,48	+12,62
127.	0,09	786,89	58,79	—21,30	25,50	+ 9,74	—11,56	+13,94
128.	0,06	777,47	52,63	—19,07	24,50	+ 9,90	— 9,17	+15,33
129.	0,03	775,84	51,31	—18,59	25,00	+ 5,58	—13,01	+11,99
130.	0,01	775,39	50,31	—18,23	26,60	+ 2,01	—16,22	+10,38
131.	0,03	766,11	47,81	—17,32	24,50	+13,28	— 4,04	+20,46
132.	0,11	767,31	58,20	—21,08	23,60	+15,94	— 5,14	+18,46
133.	0,04	757,60	43,97	—15,93	23,50	— 0,29	—16,22	+ 7,28
134.	0,08	747,19	67,64	—24,50	22,50	+22,42	— 2,08	+20,42
135.	0,02	757,93	49,86	—18,06	21,70	+17,61	— 0,45	+21,25
136.	0,01	756,86	46,97	—17,02	20,90	+13,50	— 3,52	+17,38
137.	0,01	755,77	46,59	—16,88	20,60	+ 1,77	—15,11	+ 5,49
138.	0,01	758,23	50,57	—18,32	20,50	— 0,77	—19,09	+ 1,41
139.	0,07	792,49	41,52	—15,04	20,90	+28,95	+13,91	+34,81
140.	0,02	746,79	46,72	—16,93	21,30	+ 5,33	—11,60	+ 9,70
141.	—	746,58	44,38	—16,08	21,00	+ 9,46	— 6,62	+14,38
142.	0,01	745,25	58,42	—21,16	20,70	+ 9,00	—12,16	+ 8,54
143.	0,04	781,35	55,50	—20,11	20,60	+ 9,95	—10,16	+10,44
144.	0,18	796,16	51,84	—18,78	20,80	+32,74	+13,96	+34,76
145.	0,32	784,59	49,05	—17,77	20,10	+10,67	— 7,10	+13,00
146.	0,38	788,23	42,29	—15,32	19,20	+15,90	+ 0,58	+19,78
147.	0,11	771,17	73,75	—26,72	20,40	+26,74	+ 0,02	+20,42
148.	0,02	758,95	47,08	—17,06	20,40	+ 8,70	— 8,36	+12,04
149.	0,17	774,11	40,72	—14,75	20,30	+16,79	+ 2,04	+22,34
150.	0,13	774,82	39,36	—14,26	19,80	+ 4,45	— 9,81	+ 9,99
151.	0,17	747,58	46,26	—16,76	20,50	+21,87	+ 5,11	+25,61
152.	0,12	764,19	42,38	—15,35	20,20	+20,58	+ 5,23	+25,43
153.	0,03	764,04	56,69	—20,54	19,60	+21,16	+ 0,62	+20,22
154.	0,08	735,29	48,53	—17,58	20,60	+12,44	— 5,14	+15,46
155.	0,12	750,53	37,89	—13,73	20,00	+13,24	— 0,49	+19,51
156.	0,01	823,38	66,10	—23,95	32,90	+13,85	—10,10	+22,80
157.	—	826,92	59,07	—21,40	31,00	+16,02	— 5,38	+25,62
158.	—	829,39	49,50	—17,93	28,20	+18,08	+ 0,15	+28,35
159.	0,02	838,34	49,59	—17,96	30,50	+20,20	+ 2,24	+32,74
160.	0,09	831,83	77,85	—28,20	36,00	+34,48	+ 6,28	+42,28
161.	0,13	842,87	81,35	—29,47	36,10	+32,55	+ 3,08	+39,18
162.	0,03	846,59	56,99	—20,65	32,50	+16,34	— 4,31	+28,19
163.	0,04	833,31	46,81	—16,96	25,90	+13,03	— 3,93	+21,97
164.	—	843,79	45,00	—16,30	26,70	+26,07	+ 9,77	+36,47

Station		Geographical		Height	Adjusted observed gravity mgal
number	name	latitude	longitude		
165.	Pusztacsalád ...	47°28′45,0″	16°54′26,9″	156,316	980 817,50
166.	Sopronkövesd ...	47°32′15,4″	16°45′24,6″	192,815	822,38
167.	Fertőendréd	47°35′51,1″	16°55′22,5″	129,548	831,35
168.	Mersevát	47°17′27,7″	17°13′54,5″	138,263	799,37
169.	Pápoc	47°25′30,1″	17°09′59,2″	133,927	817,03
170.	Mihályi	47°30′25,5″	17°04′57,8″	130,395	840,12
171.	Osli	47°37′48,9″	17°05′00,2″	117,802	844,71
172.	Sarród	47°41′04,9″	16°54′52,8″	117,615	842,86
173.	Sopron	47°40′38,2″	16°37′39,6″	229,334	822,71
174.	Borsosgyőr	47°18′35,6″	17°25′10,0″	133,769	810,09
175.	Ugod	47°19′38,2″	17°36′07,9″	183,681	815,31
176.	Várkesző	47°26′07,2″	17°19′50,2″	121,155	822,50
177.	Szilsárkány	47°31′57,1″	17°15′46,8″	121,009	830,80
178.	Csorna	47°39′36,6″	17°14′46,8″	115,118	842,58
179.	Gyarmat	47°28′15,9″	17°29′45,6″	155,844	814,66
180.	Tét	47°33′09,6″	17°28′33,2″	120,080	828,54
181.	Enese	47°39′12,0″	17°27′40,4″	114,073	835,47
182.	Eplény	47°12′08,3″	17°55′21,0″	394,741	773,99
183.	Porva	47°18′17,5″	17°49′42,5″	400,146	773,90
184.	Nagydém	47°25′53,4″	17°43′14,0″	151,889	822,59
185.	Tényő	47°33′42,4″	17°38′05,6″	146,022	821,76
186.	Gönyü	47°43′52,7″	17°51′04,1″	116,294	838,72
187.	Pér	47°36′33,4″	17°49′31,2″	132,334	829,58
188.	Tápszentmiklós ..	47°28′57,9″	17°51′46,5″	195,015	815,24
189.	Csatka	47°23′34,6″	17°59′18,6″	305,692	793,08
190.	Tés	47°16′08,7″	18°03′44,4″	452,440	760,96
191.	Ács	47°43′05,1″	18°02′34,7″	117,845	848,74
192.	Tárkány	47°36′02,7″	18°00′54,4″	135,660	839,41
193.	Kisbér	47°29′18,5″	18°02′31,4″	197,275	824,17
194.	Szőny	47°43′58,2″	18°13′01,0″	111,042	865,98
195.	Kocs	47°35′43,6″	18°12′36,2″	183,814	837,19
196.	Bokod	47°28′12,3″	18°14′36,3″	193,142	823,00
197.	Bakonysárkány .	47°24′20,6″	18°09′46,7″	191,546	818,51
198.	Bodajk	47°20′04,1″	18°15′06,9″	149,674	825,05
199.	Lébény	47°44′47,5″	17°24′26,6″	115,207	843,04
200.	Mosonszentjános	47°47′53,4″	17°09′12,7″	118,492	849,72
201.	Magyaróvár	47°50′26,6″	17°17′41,3″	120,555	853,90
202.	Ásványráró	47°49′40,2″	17°29′04,9″	116,852	851,39
203.	Rajka	47°59′33,6″	17°13′25,3″	127,784	863,70
204.	Veszprém	47°04′53,2″	17°55′01,6″	273,786	779,71
205.	Csopak	46°58′22,4″	17°56′07,8″	114,880	806,87
206.	Öskü	47°08′51,5″	18°03′59,9″	182,262	800,29
207.	Balatonkenese ...	47°01′58,2″	18′07′38,0″	115,050	813,46
208.	Csór	47′12°04,7″	18°14′52,2″	117,983	817,84
209.	Polgárdi	47°04′00,4″	18°16′58,3″	165,691	798,52
210.	Enying	46°54′47,4″	18°17′20,2″	147,040	772,41
211.	Székesfehérvár ..	47°13′20,1″	18°27′56,8″	175,356	802,22
212.	Báránd	47°05′21,5″	18°29′43,2″	123,485	799,96
213.	Kálóz	46°58′14,0″	18°29′03,5″	108,311	793,15
214.	Felsőnyék	46°46′52,4″	18°16′46,7″	117,889	762,12
215.	Pincehely	46°39′24,2″	18°22′32,0″	123,943	763,35
216.	Kisszékely	46°41′24,7″	18°31′25,9″	133,142	772,37
217.	Mezőszilas	46°49′51,6″	18°27′58,8″	123,450	760,52
218.	Szabadegyháza ..	47°05′41,5″	18°40′45,1″	119,533	805,60
219.	Kápolnásnyék ...	47°14′19,8″	18°40′05,5″	119,480	820,66

Station number	Topographical effect	Theoretical gravity according to international formula (1930)	Faye	Bouguer	Isostatic	Faye	Bouguer	Isostatic
			corrections			anomalies		
165.	—	980 852,96	48,24	—17,48	+27,00	+12,78	— 4,70	+22,30
166.	0,05	858,21	59,50	—21,56	30,20	+23,72	+ 2,16	+32,36
167.	0,01	863,60	39,98	—14,48	25,20	+ 7,74	— 6,74	+18,46
168.	0,01	836,02	42,67	—15,46	24,20	+ 6,03	— 9,43	+14,77
169.	—	848,08	41,33	—14,97	23,90	+10,28	— 4,69	+19,21
170.	—	855,47	40,24	—14,58	23,80	+24,89	+10,31	+34,11
171.	—	866,54	36,35	—13,17	23,30	+14,52	+ 1,35	+24,65
172.	—	871,44	36,30	—13,15	25,70	+ 7,72	— 5,43	+20,27
173.	0,18	870,77	70,77	—25,64	31,50	+22,89	— 2,75	+28,75
174.	0,03	837,72	41,28	—14,96	23,30	+13,68	— 1,28	+22,02
175.	0,11	839,29	56,68	—20,54	23,30	+32,81	+12,27	+35,57
176.	—	849,01	37,39	—13,54	22,80	+10,88	— 2,66	+20,14
177.	—	857,76	37,34	—13,53	22,50	+10,38	— 3,15	+19,35
178.	0,01	869,23	35,52	—12,87	22,00	+ 8,88	— 3,99	+18,01
179.	0,01	852,23	48,09	—17,42	21,90	+10,53	— 6,89	+15,01
180.	0,01	859,57	37,06	—13,42	21,60	+ 6,04	— 7,38	+14,22
181.	0,01	868,62	35,20	—12,75	21,50	+ 2,06	—10,69	+10,81
182.	0,55	828,04	107,93	—39,10	24,30	+54,43	+15,33	+39,63
183.	0,25	837,27	123,48	—44,74	24,40	+60,36	+15,62	+40,02
184.	0,09	848,66	46,87	—16,98	23,10	+20,89	+ 3,91	+27,01
185.	0,24	860,38	45,06	—16,32	21,60	+ 6,68	— 9,64	+11,96
186.	0,01	875,63	35,89	—13,00	22,80	— 1,01	—14,01	+ 8,79
187.	0,01	864,66	40,84	—14,79	22,70	+ 5,77	— 9,02	+13,68
188.	0,02	853,28	60,18	—21,80	24,80	+22,16	+ 0,36	+25,16
189.	0,11	845,20	94,34	—34,18	24,40	+42,33	+ 8,15	+32,55
190.	0,64	834,05	139,62	—50,58	23,50	+67,17	+16,59	+40,09
191.	—	874,44	36,37	—13,18	23,70	+10,67	— 2,51	+21,19
192.	0,01	863,89	41,86	—15,17	23,80	+17,39	+ 2,22	+26,02
193.	0,04	853,79	60,88	—22,06	24,30	+31,30	+ 9,24	+33,54
194.	0,04	875,77	34,27	—12,41	24,10	+24,52	+12,11	+36,21
195.	0,09	863,41	56,72	—20,55	23,50	+30,59	+10,04	+33,54
196.	0,07	852,14	59,60	—21,59	23,40	+30,53	+ 8,94	+32,34
197.	0,07	846,34	59,11	—21,41	24,00	+31,35	+ 9,94	+33,94
198.	0,18	839,93	46,19	—16,73	22,00	+31,49	+14,76	+36,76
199.	—	877,00	35,55	—12,88	21,60	+ 1,59	—11,29	+10,31
200.	—	881,64	36,57	—13,25	22,90	+ 4,65	— 8,60	+14,30
201.	0,01	885,47	37,20	—13,48	22,00	+ 5,64	— 7,84	+14,16
202.	—	884,31	36,06	—13,06	21,80	+ 3,14	— 9,92	+11,88
203.	—	899,12	39,43	—14,29	23,20	+ 4,01	—10,28	+12,92
204.	0,15	817,15	84,49	—30,61	23,10	+47,20	+16,59	+39,69
205.	0,23	807,37	35,45	—12,84	21,30	+35,18	+22,34	+43,64
206.	0,09	823,11	56,25	—20,38	22,00	+33,52	+13,14	+35,14
207.	0,15	812,77	35,50	—12,86	19,90	+36,34	+23,48	+43,38
208.	0,18	827,94	36,41	—13,19	19,90	+26,49	+13,30	+33,20
209.	0,07	815,83	51,13	—18,52	18,00	+33,89	+15,37	+33,37
210.	—	801,99	45,38	—16,44	17,80	+15,80	— 0,64	+17,16
211.	0,04	829,83	54,11	—19,60	18,90	+26,54	+ 6,94	+25,84
212.	—	817,86	38,11	—13,80	17,60	+20,21	+ 6,41	+24,01
213.	0,02	807,16	33,42	—12,11	17,20	+19,43	+ 7,32	+24,52
214.	0,22	790,10	36,38	—13,18	18,40	+ 8,62	— 4,56	+13,84
215.	0,03	778,88	38,25	—13,86	18,70	+22,75	+ 8,89	+27,59
216.	0,34	781,90	41,09	—14,88	17,90	+31,90	+17,02	+34,92
217.	0,04	794,59	38,10	—13,80	17,60	+ 4,07	— 9,73	+ 7,87
218.	0,01	818,36	36,89	—13,36	17,60	+24,14	+10,78	+28,38
219.	0,01	831,32	36,87	—13,36	19,10	+26,22	+12,86	+31,96

Station		Geographical		Height	Adjusted observed gravity mgal
number	name	latitude	longitude		
220.	Vértesacsa	47°21′21,9″	18°34′59,4″	162,165	980 821,53
221.	Csákvár	47°21′35,5″	18°25′55,2″	157,589	821,27
222.	Várgesztes	47°28′48,7″	18°23′45,3″	269,343	816,91
223.	Vértesszöllős	47°36′39,2″	18°23′11,0″	139,595	853,22
224.	Neszmély	47°44′21,2″	18°23′04,8″	111,043	872,61
225.	Bajót	47°44′25,8″	18°33′50,5″	140,131	865,46
226.	Gyermely	47°36′20,3″	18°35′19,8″	237,146	835,32
227.	Bicske	47°28′45,1″	18°36′28,9″	189,951	825,05
228.	Tinnye	47°36′51,6″	18°46′23,2″	250,335	821,49
229.	Páty	47°32′00,6″	18°46′59,2″	165,577	826,20
230.	Biatorbágy	47°28′50,0″	18°47′15,5″	130,882	832,15
231.	Csobánka	47°38′26,6″	18°57′30,4″	253,558	837,69
232.	Dömös	47°45′42,5″	18°56′00,6″	106,993	863,54
233.	Vác	47°45′53,0″	19°08′38,3″	112,493	867,49
234.	Alag	47°38′07,0″	19°10′03,1″	156,488	841,28
235.	Gyuró	47°21′48,4″	18°44′19,7″	124,328	818,98
236.	Ercsi	47°15′28,2″	18°51′43,3″	108,208	809,58
237.	Érd	47°22′45,9″	18°56′12,8″	102,504	831,49
238.	Majosháza	47°15′44,4″	19°01′43,8″	101,222	809,73
239.	Adony	47°07′30,7″	18°50′34,3″	97,740	789,13
240.	Nagylók	46°58′29,2″	18°39′55,7″	146,490	782,50
241.	Sztálinváros	46°59′42,8″	18°53′15,6″	158,565	771,53
242.	Dömsöd	47°06′10,0″	19°00′55,0″	100,766	804,39
243.	Szalkszentmárton	46°57′29,2″	19°02′40,5″	97,502	791,95
244.	Solt	46°48′03,4″	19°01′24,4″	97,124	782,37
245.	Baracs	46°52′56,4″	18°50′39,0″	115,645	776,85
246.	Sárszentmiklós ..	46°52′03,3″	18°39′21,1″	119,789	777,67
247.	Cece	46°44′27,8″	18°42′22,1″	127,293	773,12
248.	Dunaföldvár	46°44′31,7″	18°53′19,5″	149,107	768,97
249.	Bugyi	47°13′08,7″	19°10′36,7″	98,514	821,21
250.	Peszéradacs	47°06′00,7″	19°13′53,7″	97,475	808,30
251.	Örkény	47°07′06,2″	19°24′53,4″	122,597	785,28
252.	Kunszentmiklós .	46°58′55,7″	19°15′30,6″	96,512	795,65
253.	Kerekegyháza ...	46°58′14,7″	19°27′10,5″	117,566	801,56
254.	Szabadszállás ...	46°51′31,3″	19°14′01,3″	95,903	790,14
255.	Ágasegyháza ...	46°50′09,8″	19°26′02,0″	108,462	786,32
256.	Akasztó	46°42′01,6″	19°11′43,6″	94,706	768,93
257.	Páhi	46°42′22,8″	19°22′46,5″	105,670	764,77
258.	Szakály	46°31′38,3″	18°22′32,4″	120,726	744,88
259.	Borjád	46°33′45,6″	18°35′39,9″	96,598	746,90
260.	Pusztalencse	46°36′02,4″	18°45′55,8″	153,824	744,86
261.	Mágócs	46°21′18,6″	18°13′09,8″	182,280	729,99
262.	Lengyel	46°23′02,1″	18°22′58,3″	252,787	703,54
263.	Zomba	46°24′33,5″	18°35′12,1″	150,745	729,17
264.	Tolna	46°26′38,2″	18°46′56,4″	100,933	757,41
265.	Bakóca	46°13′21,0″	18°01′46,0″	164,487	713,39
266.	Magyarszék	46°12′32,0″	18°11′38,7″	160,468	714,47
267.	Szászvár	46°16′30,3″	18°24′06,0″	156,965	727,19
268.	Grábóc	46°16′38,1″	18°35′18,4″	119,438	727,86
269.	Öcsény	46°19′41,4″	18°45′16,8″	90,261	752,18
270.	Pécsvárad	46°08′17,7″	18°24′32,6″	204,349	698,03
271.	Véménd	46°09′25,8″	18°35′20,0″	270,737	701,79
272.	Bátaszék	46°12′26,9″	18°43′32,9″	91,266	744,36
273.	Himesháza	46°04′00,6″	18°34′56,6″	191,265	689,85
274.	Dunaszekcső	46°06′05,6″	18°45′42,6″	143,547	723,91

Station number	Topographical effect	Theoretical gravity according to international formula (1930)	Faye	Bouguer	Isostatic	Faye	Bouguer	Isostatic
			corrections			anomalies		
220.	0,10	980 841,88	50,04	—18,13	+20,40	+29,79	+11,66	+32,06
221.	0,08	842,22	48,63	—17,62	20,90	+27,76	+10,14	+31,04
222.	0,39	853,05	83,12	—30,11	22,50	+47,37	+17,26	+39,76
223.	0,49	864,80	43,08	—15,61	23,40	+31,99	+16,38	+39,78
224.	0,28	876,34	34,27	—12,41	24,30	+30,82	+18,41	+42,71
225.	0,45	876,46	43,24	—15,67	24,40	+32,69	+17,02	+41,42
226.	0,07	864,33	73,18	—26,51	23,10	+44,24	+17,73	+40,83
227.	0,06	852,96	58,62	—21,24	21,70	+30,77	+ 9,53	+31,23
228.	0,13	865,11	77,25	—27,99	23,00	+33,76	+ 5,77	+28,77
229.	0,13	857,84	51,10	—18,51	22,00	+19,59	+ 1,08	+23,08
230.	0,18	853,08	40,39	—14,63	21,50	+19,64	+ 5,01	+26,51
231.	0,48	867,48	78,25	—28,35	23,50	+48,94	+20,59	+44,09
232.	1,69	878,37	33,02	—11,96	24,80	+19,88	+ 7,92	+32,72
233.	0,20	878,64	34,72	—12,58	25,50	+23,77	+11,19	+36,69
234.	0,07	867,00	48,29	—17,50	24,10	+22,64	+ 5,14	+29,24
235.	0,10	842,54	38,37	—13,90	20,40	+14,91	+ 1,01	+21,41
236.	0,02	833,04	33,39	—12,10	19,90	+ 9,95	— 2,15	+17,75
237.	0,14	843,98	31,63	—11,46	21,20	+19,28	+ 7,82	+29,02
238.	0,02	833,44	31,24	—11,32	20,20	+ 7,55	— 3,77	+16,43
239.	—	821,09	30,16	—10,93	17,90	— 1,80	—12,73	+ 5,17
240.	0,04	807,54	45,21	—16,38	16,90	+20,21	+ 3,83	+20,73
241.	0,01	809,38	48,93	—17,73	17,10	+11,09	— 6,64	+10,46
242.	0,04	819,07	31,10	—11,26	17,80	+16,46	+ 5,20	+23,00
243.	—	806,04	30,09	—10,90	16,90	+16,00	+ 5,10	+22,00
244.	0,02	791,88	29,97	—10,86	16,30	+20,48	+ 9,62	+25,92
245.	0,02	799,22	35,69	—12,93	16,60	+13,34	+ 0,41	+17,01
246.	0,02	797,89	36,97	—13,39	16,90	+16,77	+ 3,38	+20,28
247.	0,02	786,48	39,28	—14,23	17,10	+25,94	+11,71	+28,81
248.	0,01	786,58	46,01	—16,67	16,60	+28,41	+11,74	+28,34
249.	0,01	829,55	30,40	—11,01	19,20	+22,07	+11,06	+30,26
250.	—	818,84	30,08	—10,90	17,90	+19,54	+ 8,64	+26,54
251.	—	820,48	37,83	—13,71	17,70	+ 2,63	—11,08	+ 6,62
252.	—	808,21	29,78	—10,79	16,90	+17,22	+ 6,43	+23,33
253.	—	807,18	36,28	—13,14	16,60	+30,66	+17,52	+34,12
254.	—	797,08	29,60	—10,72	16,10	+22,66	+11,94	+28,04
255.	0,01	795,04	33,47	—12,13	15,90	+24,76	+12,63	+28,53
256.	—	782,82	29,23	—10,59	15,80	+15,34	+ 4,75	+20,55
257.	—	783,35	32,61	—11,81	15,60	+14,03	+ 2,22	+17,82
258.	0,05	767,21	37,26	—13,50	18,80	+14,98	+ 1,48	+20,28
259.	0,15	770,40	29,81	—10,80	17,90	+ 6,46	— 4,34	+13,56
260.	0,09	773,83	47,47	—17,20	17,00	+18,59	+ 1,39	+18,39
261.	0,06	751,69	56,25	—20,38	20,00	+34,61	+14,23	+34,23
262.	0,12	754,28	78,01	—28,26	21,00	+27,39	— 0,87	+20,13
263.	0,02	756,57	46,52	—16,85	18,90	+19,14	+ 2,29	+21,19
264.	0,04	759,70	31,15	—11,28	17,30	+28,90	+17,62	+34,92
265.	0,17	739,72	50,76	—18,39	20,10	+24,60	+ 6,21	+26,31
266.	0,25	738,50	49,52	—17,94	21,10	+25,74	+ 7,80	+28,90
267.	0,22	744,47	48,44	—17,55	24,70	+31,38	+13,83	+38,53
268.	0,33	744,66	36,86	—13,35	21,00	+20,39	+ 7,04	+28,04
269.	0,02	749,26	27,85	—10,09	18,10	+30,79	+20,70	+38,80
270.	0,12	732,12	63,18	—22,89	28,10	+29,21	+ 6,32	+34,42
271.	0,29	733,83	83,55	—30,27	22,80	+51,80	+21,53	+44,33
272.	0,05	738,37	28,16	—10,20	19,10	+34,20	+24,00	+43,10
273.	0,11	725,68	59,02	—21,38	23,30	+23,30	+ 1,92	+25,22
274.	0,11	728,81	44,30	—16,05	19,10	+39,51	+23,46	+42,56

Station		Geographical		Height	Adjusted observed gravity mgal
number	name	latitude	longitude		
275.	Dunaszentbenedek	46°36′06,5″	18°54′18,1″	92,768	980 759,88
276.	Bátya	46°28′51,2″	18°57′20,8″	91,641	757,40
277.	Dusnok	46°20′53,0″	18°58′32,3″	91,225	740,93
278.	Baja	46°11′04,0″	18°59′41,7″	111,806	728,10
279.	Nagybaracska ...	46°04′12,2″	18°55′21,7″	95,956	718,64
280.	Hercegszántó ...	45°57′25,9″	18°56′05,5″	87,230	704,93
281.	Bácsborsód	46°04′16,8″	19°08′20,6″	106,858	711,86
282.	Csávoly	46°11′41,0″	19°09′15,4″	132,219	727,15
283.	Borota	46°18′16,8″	19°11′19,1″	148,087	740,90
284.	Jánoshalma	46°17′54,2″	19°21′37,5″	140,970	731,94
285.	Mélykút	46°12′20,3″	19°21′42,8″	130,952	719,43
286.	Bácsalmás	46°03′03,5″	19°23′02,0″	125,088	719,59
287.	Tompa	46°11′07,7″	19°32′50,4″	136,798	740,24
288.	Kisszállás	46°17′51,5″	19°31′30,2″	130,163	736,83
289.	Kiskunhalas	46°24′43,9″	19°29′55,0″	127,327	741,36
290.	Kiskunmajsa	46°27′53,0″	19°40′47,8″	115,076	750,47
291.	Pusztamérges ...	46°20′47,1″	19°42′56,4″	119,624	742,53
292.	Ásotthalom	46°14′23,4″	19°42′42,4″	122,443	733,34
293.	Mórahalom	46°12′59,5″	19°53′49,4″	93,796	729,78
294.	Üllés	46°20′18,9″	19°52′32,7″	99,602	748,71
295.	Kömpöc	46°28′01,8″	19°52′28,6″	94,901	759,40
296.	Sövényháza	46°29′51,6″	20°03′46,6″	85,212	759,31
297.	Sándorfalva	46°20′59,3″	20°03′47,9″	82,591	750,26
298.	Deszk	46°13′09,5″	20°15′55,0″	80,753	739,22
299.	Algyő	46°21′54,0″	20°12′58,9″	79,154	751,43
300.	Mártély	46°29′28,6″	20°12′38,7″	82,546	756,88
301.	Hódm.-vásárhely.	46°28′30,9″	20°22′12,4″	82,872	751,72
302.	Maroslelle	46°19′57,5″	20°21′51,7″	80,852	746,39
303.	Makó	46°11′56,3″	20°27′02,5″	83,124	737,52
304.	Homokmégy	46°28′19,4″	19°06′37,4″	92,330	757,32
305.	Császártöltés ...	46°24′18,4″	19°10′17,8″	112,936	743,51
306.	Kecel	46°27′43,4″	19°20′02,4″	124,324	747,45
307.	Pirtó	46°29′22,1″	19°27′23,0″	127,339	746,20
308.	Szakmár	46°35′09,3″	19°04′18,5″	94,058	761,45
309.	Kiskőrös	46°34′50,4″	19°15′37,0″	99,942	757,25
310.	Soltvadkert	46°36′04,1″	19°26′03,4″	112,270	758,54
311.	Jakabszállás	46°45′17,6″	19°35′17,1″	111,423	764,80
312.	Szank	46°35′03,8″	19°35′58,3″	117,686	753,97
313.	Kunszállás	46°47′48,7″	19°46′58,1″	106,753	772,52
314.	Bugac	46°40′39,5″	19°46′22,2″	105,052	755,55
315.	Jászszentlászló ..	46°34′26,5″	19°44′57,9″	103,782	755,64
316.	Alpár	46°47′58,3″	19°58′06,5″	96,506	771,29
317.	Gátér	46°41′07,9″	19°58′17,3″	88,284	760,56
318.	Pálmonostora ...	46°35′22,4″	19°55′34,6″	92,332	759,93
319.	Csépa	46°48′50,4″	20°06′57,9″	87,906	774,95
320.	Felgyő	46°39′08,8″	20°07′04,1″	84,270	762,47
321.	Csanytelek	46°34′55,5″	20°06′15,9″	83,506	759,74
322.	Kunszentmárton	46°47′17,2″	20°18′29,8″	85,436	773,26
323.	Szegvár	46°34′10,2″	20°13′34,2″	83,857	759,73
324.	Cserebökény	46°47′39,8″	20°29′23,3″	83.111	774,02
325.	Fábiánsebestyén .	46°40′09,1″	20°28′24,1″	85,600	766,51
326.	Nagymágócs	46°34′34,3″	20°25′37,6″	82,139	758,72
327.	Nagyszénás	46°40′05,5″	20°42′44,0″	89,492	766,09
328.	Orosháza	46°33′37,8″	20°37′51,8″	86,909	753,52
329.	Székkutas	46°27′48,4″	20°32′40,9″	85,707	744,85

Station number	Topographical effect	Theoretical gravity according to international formula (1930)	Faye	Bouguer	Isostatic	Faye	Bouguer	Isostatic
			corrections			anomalies		
275.	—	980 773,93	28,63	—10,37	+16,60	+14,58	+ 4,21	+20,81
276.	0,01	763,03	28,28	—10,24	16,40	+22,66	+12,42	+28,82
277.	—	751,05	28,15	—10,20	16,00	+18,03	+ 7,83	+23,83
278.	0,01	736,29	34,50	—12,50	15,80	+26,32	+13,82	+29,62
279.	0,01	725,97	29,61	—10,73	15,90	+22,29	+11,56	+27,46
280.	—	715,79	26,92	— 9,75	15,90	+16,06	+ 6,31	+22,21
281.	—	726,09	32,98	—11,95	15,50	+18,75	+ 6,80	+22,30
282.	—	737,22	40,80	—14,78	15,50	+30,73	+15,95	+31,45
283.	0,01	747,14	45,70	—16,56	15,60	+39,47	+22,91	+38,51
284.	0,01	746,57	43,50	—15,76	15,30	+28,88	+13,12	+28,42
285.	—	738,20	40,41	—14,64	15,20	+21,64	+ 7,00	+22,20
286.	0,02	724,25	38,60	—13,98	15,00	+33,96	+19,98	+34,98
287.	0,01	736,38	42,22	—15,29	14,80	+46,09	+30,80	+45,60
288.	0,01	746,50	40,17	—14,55	14,90	+30,51	+15,96	+30,86
289.	—	756,83	39,29	—14,24	15,20	+23,82	+ 9,58	+24,78
290.	—	761,57	35,51	—12,86	14,80	+24,41	+11,55	+26,35
291.	—	750,90	36,92	—13,37	14,70	+28,55	+15,18	+29,88
292.	—	741,29	37,78	—13,69	14,50	+29,83	+16,14	+30,64
293.	—	739,18	28,95	—10,49	14,20	+19,55	+ 9,06	+23,26
294.	—	750,19	30,74	—11,14	14,40	+29,26	+18,12	+32,52
295.	—	761,79	29,29	—10,61	14,50	+26,90	+16,29	+30,79
296.	—	764,54	26,30	— 9,53	14,40	+21,07	+11,54	+25,94
297.	—	751,21	25,49	— 9,23	13,90	+24,54	+15,31	+29,21
298.	—	739,44	24,92	— 9,03	14,40	+24,70	+15,67	+30,07
299.	0,01	752,58	24,43	— 8,85	13,80	+23,29	+14,44	+28,24
300.	—	763,97	25,47	— 9,23	14,30	+18,38	+ 9,15	+23,45
301.	0,01	762,52	25,57	— 9,26	14,20	+14,78	+ 5,52	+19,72
302.	—	749,66	24,95	— 9,04	14,30	+21,68	+12,64	+26,94
303.	0,05	737,60	25,65	— 9,29	14,90	+25,62	+16,33	+31,23
304.	—	762,23	28,49	—10,32	15,90	+23,58	+13,26	+29,16
305.	—	756,19	34,85	—12,63	15,70	+22,17	+ 9,54	+25,24
306.	—	761,33	38,37	—13,90	15,50	+24,49	+10,59	+26,09
307.	—	763,80	39,30	—14,24	15,40	+21,70	+ 7,46	+22,86
308.	—	772,50	29,03	—10,52	16,10	+17,98	+ 7,46	+23,56
309.	—	772,03	30,84	—11,17	15,70	+16,06	+ 4,89	+20,59
310.	—	773,87	34,65	—12,55	15,40	+19,32	+ 6,77	+22,17
311.	—	787,73	34,38	—12,46	15,80	+11,45	— 1,01	+14,79
312.	0,01	772,36	36,32	—13,16	15,30	+17,94	+ 4,78	+20,08
313.	—	791,51	32,94	—11,93	15,80	+13,95	+ 2,02	+17,82
314.	0,01	780,77	32,42	—11,74	15,30	+ 7,21	— 4,53	+10,77
315.	—	771,43	32,03	—11,60	14,90	+16,24	+ 4,64	+19,54
316.	—	791,75	29,78	—10,79	15,60	+ 9,32	— 1,47	+14,13
317.	—	781,48	27,24	— 9,87	15,20	+ 6,32	— 3,55	+11,65
318.	0,01	772,83	28,49	—10,32	14,70	+15,60	+ 5,28	+19,98
319.	—	793,06	27,13	— 9,83	15,40	+ 9,02	— 0,81	+14,59
320.	—	778,50	26,01	— 9,42	14,90	+ 9,98	+ 0,56	+15,46
321.	—	772,15	25,77	— 9,34	14,60	+13,36	+ 4,02	+18,62
322.	—	790,73	26,36	— 9,55	15,30	+ 8,89	— 0,66	+14,64
323.	—	771,02	25,88	— 9,38	14,70	+14,59	+ 5,21	+19,91
324.	—	791,29	25,65	— 9,29	15,20	+ 8,38	— 0,91	+14,29
325.	—	780,01	26,42	— 9,57	14,80	+12,92	+ 3,35	+18,15
326.	—	771,62	25,35	— 9,18	14,50	+12,45	+ 3,27	+17,77
327.	—	779,92	27,62	—10,00	14,80	+13,79	+ 3,79	+18,59
328.	—	770,21	26,82	— 9,72	14,70	+10,13	+ 0,41	+15,11
329.	—	761,46	26,45	— 9,58	14,40	+ 9,84	+ 0,26	+14,66

Station number	Station name	Geographical latitude	Geographical longitude	Height	Adjusted observed gravity mgal
330.	Földeák	46°20′21,5′,	20°32′31,1″	86,213	980 736,56
331.	Kövegy	46°13′39,1″	20°38′35,5″	91,959	723,67
332.	Csorvás	46°38′59,4″	20°54′27,8″	90,471	763,62
333.	Csanádapáca ...	46°32′19,5″	20°50′22,5″	93,287	750,02
334.	Tótkomlós	46°25′52,6″	20°43′58,3″	94,446	737,16
335.	Pitvaros	46°19′26,8″	20°43′38,2″	93,641	729,41
336.	Újkígyós	46°35′49,2″	21°00′42,1″	93,288	760,04
337.	Medgyesegyháza .	46°29′38,9″	21°03′20,9″	97,167	745,45
338.	Mezőkovácsháza .	46°23′44,7″	20°55′46,6″	97,713	732,22
339.	Mezőhegyes	46°18′19,6″	20°54′33,8″	103,279	724,10
340.	Szabadkígyós ...	46°36′44,9″	21°09′53,1″	88,758	769,44
341.	Gyula	46°39′51,3″	21°16′41,1″	88,583	780,78
342.	Elek	46°32′09,6″	21°13′19,2″	93,856	760,25
343.	Kunágota	46°24′09,3″	21°04′02,6″	98,907	733,94
344.	Kevermes	46°25′05,7″	21°13′04,5″	100,932	733,92
345.	Dombegyháza ...	46°20′09,2″	21°07′08,3″	101,375	730,48
346.	Kupai-Kovács mjr.	47°06′04,5″	19°38′03,6″	136,894	794,12
347.	Lajosmizse	46°59′22,5″	19°36′53,8″	129,370	789,45
348.	Kecskemét	46°53′18,2″	19°36′29,8″	123,215	775,99
349.	Nagykőrös	47°03′40,6″	19°46′56,4″	115,842	800,04
350.	Kecskemét	46°54′38,4″	19°46′39,7″	112,730	790,34
351.	Kocsér	47°03′20,6″	19°57′30,0″	94,880	801,99
352.	Lakitelek	46°55′05,8″	19°54′24,7″	106,759	788,10
353.	Tiszavárkony ...	47°02′03,7″	20°09′37,8″	86,868	799,46
354.	Tiszakécske	46°55′04,6″	20°04′12,1″	89,523	788,51
355.	Pusztakengyel ...	47°02′08,3″	20°17′39,2″	89,485	799,79
356.	Cibakháza	46°56′26,8″	20°14′30,7″	87,844	788,43
357.	Letkés	47°52′26,2″	18°47′19,6″	111,728	874,06
358.	Perőcsény	48°00′08,2″	18°51′26,2″	232,742	871,65
359.	Drégelypalánk ..	48°03′11,5″	19°02′17,2″	146,944	895,66
360.	Nógrád	47°54′59,3″	19°03′00,2″	232,398	858,93
361.	Balassagyarmat .	48°03′56,7″	19°18′14,3″	161,487	886,44
362.	Romhány	47°55′54,3″	19°15′15,2″	167,296	873,32
363.	Csővár	47°48′29,5″	19°20′03,8″	195,560	854,85
264.	Galgagyörk	47°43′38,2″	19°22′49,1″	146,119	849,45
365.	Hugyag	48°04′31,0″	19°27′17,4″	188,456	881,47
366.	Herencsén	47°58′32,2″	19°27′39,6″	198,529	864,50
367.	Litke	48°12′17,1″	19°37′07,4″	173,346	875,39
368.	Sóshartyán	48°04′39,0″	19°41′48,4″	205,287	873,78
369.	Pásztó	47°56′13,5″	19°43′18,8″	208,252	842,84
370.	Salgótarján	48°08′09,4″	19°49′01,6″	288,236	862,05
371.	Kisterenye	47°59′51,3″	19°52′19,1″	204,868	859,93
372.	Galyatető	47°54′17,6″	19°50′53,7″	669,634	763,35
373.	Zabar	48°08′27,4″	20°01′59,7″	224,106	873,22
374.	Nádújfalu	48°00′35,3″	20°00′35,8″	226,722	856,23
375.	Trizs	48°25′26,9″	20°30′02,6″	256,817	887,60
376.	Rudabánya	48°22′36,0″	20°37′56,0″	236,204	891,87
377.	Hegymeg	48°20′00,8″	20°51′32,1″	170,114	908,11
378.	Csobád	48°16′30,5″	21°02′35,2″	125,629	904,29
379.	Szögliget	48°30′49,3″	20°41′06,8″	174,768	913,51
380.	Martonyi	48°27′51,4″	20°46′15,6″	164,628	909,90
381.	Gagybátor	48°26′05,4″	20°57′47,0″	267,949	892,37
382.	Garadna	48°24′35,0″	21°10′28,6″	148,903	900,57
383.	Bódvavendégi ...	48°34′08,4″	20°49′32,1″	167,159	916,82
384.	Buzita	48°31′10,0″	21°03′23,3″	250,562	892,25

Station number	Topographical effect	Theoretical gravity according to international formula (1930)	Faye	Bouguer	Isostatic	Faye	Bouguer	Isostatic
			corrections			anomalies		
330.	—	980 750,26	26,60	— 9,64	+14,80	+12,90	+ 3,26	+18,06
331.	—	740,18	28,38	—10,28	15,60	+11,87	+ 1,59	+17,19
332.	—	778,26	27,92	—10,11	15,50	+13,28	+ 3,17	+18,67
333.	—	768,24	28,79	—10,43	15,30	+10,57	+ 0,14	+15,44
334.	—	758,56	29,15	—10,56	15,20	+ 7,75	— 2,81	+12,39
335.	—	748,89	28,90	—10,47	15,60	+ 9,42	— 1,05	+14,55
336.	—	773,50	28,79	—10,43	16,60	+15,33	+ 4,90	+21,50
337.	—	764,22	29,98	—10,86	17,00	+11,21	+ 0,35	+17,35
338.	—	755,35	30,15	—10,92	16,40	+ 7,02	— 3,90	+12,50
339.	—	747,21	31,87	—11,55	16,70	+ 8,76	— 2,79	+13,91
340.	—	774,89	27,39	— 9,92	17,70	+21,94	+12,02	+29,72
341.	—	779,56	27,34	— 9,90	18,80	+28,56	+18,66	+37,46
342.	—	768,00	28,96	—10,49	18,30	+21,21	+10,72	+29,02
343.	—	755,97	30,52	—11,06	17,10	+ 8,49	— 2,57	+14,53
344.	—	757,38	31,15	—11,28	18,20	+ 7,69	— 3,59	+14,61
345.	—	749,95	31,28	—11,33	17,80	+11,81	+ 0,48	+18,28
346.	—	818,94	42,24	—15,30	16,90	+17,42	+ 2,12	+19,02
347.	—	808,88	39,92	—14,46	16,50	+20,49	+ 6,03	+22,53
348.	—	799,76	38,02	—13,78	15,90	+14,25	+ 0,47	+16,37
349.	—	815,34	35,75	—12,95	16,70	+20,45	+ 7,50	+24,20
350.	—	801,77	34,79	—12,60	16,00	+23,36	+10,76	+26,76
351.	—	814,84	29,28	—10,61	16,40	+16,43	+ 5,82	+22,22
352.	—	802,45	32,94	—11,94	15,90	+18,59	+ 6,65	+22,55
353.	—	812,91	26,81	— 9,71	16,20	+13,36	+ 3,65	+19,85
354.	—	802,42	27,63	—10,01	15,80	+13,72	+ 3,71	+19,51
355.	0,01	813,03	27,62	—10,00	16,00	+14,39	+ 4,39	+20,39
356.	—	804,48	27,11	— 9,82	15,70	+11,06	+ 1,24	+16,94
357.	0,71	888,45	34,48	—12,49	26,90	+20,80	+ 8,31	+35,21
358.	0,45	899,98	71,82	—26,02	30,50	+43,94	+17,92	+48,42
359.	0,26	904,56	45,35	—16,43	32,10	+36,71	+20,28	+52,38
360.	0,22	892,27	71,72	—25,98	28,60	+38,60	+12,62	+41,22
361.	0,09	905,68	49,83	—18,05	32,90	+30,68	+12,63	+45,53
362.	0,15	893,64	51,63	—18,70	29,30	+31,46	+12,76	+42,06
363.	0,28	882,54	60,35	—21,86	26,70	+32,94	+11,08	+37,78
364.	0,17	875,27	45,09	—16,34	25,10	+19,44	+ 3,10	+28,20
365.	0,08	906,54	58,16	—21,07	33,60	+33,17	+12,10	+45,70
366.	0,37	897,59	61,27	—22,20	30,50	+28,55	+ 6,35	+36,85
367.	0,20	918,16	53,49	—19,38	37,30	+10,92	— 8,46	+28,84
368.	0,20	906,74	63,35	—22,95	33,60	+30,59	+ 7,64	+41,24
369.	0,37	894,13	64,27	—23,28	29,60	+13,35	— 9,93	+19,67
370.	0,87	911,98	88,95	—32,22	34,50	+39,89	+ 7,67	+42,17
371.	0,61	899,56	63,22	—22,90	31,10	+24,20	+ 1,30	+32,40
372.	1,65	891,23	206,65	—74,86	29,00	+80,42	+ 5,56	+34,56
373.	0,62	912,43	69,16	—25,06	34,50	+30,57	+ 5,51	+40,01
374.	0,21	900,66	69,97	—25,35	31,00	+25,75	+ 0,40	+31,40
375.	0,38	937,84	79,25	—28,71	38,60	+29,39	+ 0,68	+39,28
376.	0,25	933,59	72,89	—26,41	37,00	+31,42	+ 5,01	+42,01
377.	0,19	929,72	52,50	—19,02	34,80	+31,08	+12,06	+46,86
378.	0,03	924,48	38,77	—14,04	32,70	+18,61	+ 4,57	+37,27
379.	0,78	945,87	53,93	—19,54	40,00	+22,35	+ 2,81	+42,81
380.	0,35	941,44	50,80	—18,40	38,00	+19,61	+ 1,21	+39,21
381.	0,15	938,80	82,69	—29,96	36,30	+36,41	+ 6,45	+42,75
382.	0,43	936,55	45,95	—16,65	34,50	+10,40	— 6,25	+28,25
383.	1,50	950,83	51,58	—18,69	39,90	+19,07	+ 0,38	+40,28
384.	0,13	946,39	77,32	—28,01	37,80	+23,31	— 4,70	+33,10

Station		Geographical		Height	Adjusted observed gravity mgal
number	name	latitude	longitude		
385.	Tornyosnémeti ..	48°31′02,1″	21°14′48,0″	157,740	980 901,68
386.	Abaújszántó	48°15′23,2″	21°11′44,6″	127,977	891,67
387.	Szerencs	48°07′24,3″	21°08′47,1″	113,466	881,30
388.	Tiszaluc	48°00′37,9″	21°00′40,4″	103,272	879,81
389.	Hejőbába	47°53′28,5″	20°57′42,5″	97,360	873,47
390.	Mezőcsát	47°48′01,2″	20°54′54,4″	93,483	860,31
391.	Hollóháza	48°33′23,7″	21°24′04,3″	423,724	849,36
392.	Nagybózsva	48°28′34,4″	21°27′04,7″	197,667	889,33
393.	Háromhuta	48°22′36,8″	21°24′37,0″	235,703	877,59
394.	Olaszliszka	48°15′26,9″	21°24′46,7″	149,444	895,42
395.	Tarcal	48°08′24,5″	21°20′24,5″	97,360	894,76
396.	Tiszadada	48°01′48,1″	21°15′59,1″	96,789	887,05
397.	Tiszagyulaháza ..	47°54′46,3″	21°11′14,1″	94,270	878,44
398.	Polgár	47°48′51,5″	21°08′03,5″	92,930	867,29
399.	Rakamaz	48°06′47,9″	21°29′28,8″	99,722	895,36
400.	Tiszalök	47°59′58,6″	21°26′50,8″	97,840	876,36
401.	Hajdúnánás	47°53′41,4″	21°24′47,8″	95,836	876,76
402.	Görbeháza	47°45′22,5″	21°19′53,5″	91,662	861,95
403.	Felsőregmec	48°29′25,9″	21°36′44,0″	132,709	931,10
404.	Sátoraljaújhely .	48°22′38,7″	21°38′21,0″	102,677	922,49
405.	Sárospatak	48°15′49,0″	21°39′21,8″	95,848	907,15
406.	Buj	48°07′01,4″	21°39′31,8″	97,596	894,63
407.	Kálmánháza	47°52′00,0″	21°33′14,6″	116,780	862,31
408.	H.-böszörmény É.	47°43′57,8″	21°30′49,2″	109,122	852,84
409.	Újfehértó	47°50′43,5″	21°42′46,6″	120,547	856,08
410.	Téglás	47°43′34,0″	21°40′56,7″	136,599	840,28
411.	Debrecen	47°36′57,9″	21°39′40,0″	138,068	838,06
412.	H.-böszörmény D.	47°36′02,1″	21°28′23,2″	125,068	838,94
413.	Balmazújváros .	47°37′37,4″	21°18′54,4″	90,825	848,02
414.	Cserepes	47°41′04,4″	21°08′03,6″	91,214	854,93
415.	Ároktő	47°43′05,3″	20°55′35,8″	92,280	855,69
416.	Belsőohát	47°36′43,3″	20°57′52,6″	91,182	849,48
417.	Hortobágyi Csárda	47°35′00,2″	21°08′12,2″	89,799	845,65
418.	Pácin	48°20′13,9″	21°50′44,6″	98,052	917,41
419.	Dombrád	48°12′11,6″	21°53′17,2″	98,072	897,52
420.	Kék	48°05′56,1″	21°53′08,8″	99,846	891,74
421.	Apagy	47°58′34,2″	21°55′58,3″	116,726	874,70
422.	Kállósemjén	47°52′36,4″	21°55′52,4″	132,841	855,32
423.	Láca	48°22′18,6″	22°00′39,5″	100,364	919,87
424.	Döge	48°14′43,2″	22°04′51,1″	102,308	911,53
425.	Nyírkarász	48°07′14,1″	22°05′29,9″	111,057	893,45
426.	Baktalórántháza .	48°00′08,7″	22°04′09,1″	123,578	876,23
427.	Nyírbátor	47°51′25,4″	22°09′26,6″	150,464	851,68
428.	Zsurk	48°24′39,4″	22°12′24,3″	105,446	930,72
429.	Tiszakerecseny ..	48°15′34,6″	22°19′20,3″	106,822	912,05
430.	Vásárosnamény .	48°06′54,2″	22°19′02,9″	110,890	886,30
431.	Ópályi	48°00′33,5″	22°19′22,2″	118,085	873,01
432.	Nyírcsaholy	47°52′59,9″	22°20′38,5″	122,678	853,37
433.	Mérkváralja	47°45′07,5″	22°23′37,8″	119,362	851,27
434.	Beregdaróc	48°11′53,8″	22°32′40,2″	111,016	897,11
435.	Kisar	48°03′15,6″	22°31′07,4″	111,044	882,20
436.	Cégénydányád ..	47°56′06,7″	22°32′34,5″	115,133	863,29
437.	Ura	47°49′16,1″	22°34′19,1″	115,597	846,83
438.	Milota	48°06′17,8″	22°46′25,1″	117,261	893,58
439.	Vámosoroszi	47°59′13,2″	22°41′55,2″	115,455	869,74

Station number	Topographical effect	Theoretical gravity according to international formula (1930)	Faye	Bouguer	Isostatic	Faye	Bouguer	Isostatic
			corrections			anomalies		
385.	0,34	980 946,19	48,68	—17,64	+ 36,80	+ 4,51	—13,13	+23,67
386.	0,68	922,80	39,49	—14,31	30,90	+ 9,04	— 5,27	+25,63
387.	0,06	910,86	35,02	—12,68	28,30	+ 5,52	— 7,16	+21,14
388.	0,01	900,72	31,87	—11,54	26,50	+10,97	— 0,57	+25,93
389.	—	890,01	30,04	—10,88	24,00	+13,50	+ 2,62	+26,62
390.	—	881,84	28,85	—10,45	21,50	+ 7,32	— 3,13	+18,37
391.	0,85	949,72	130.76	—47,37	37,10	+31,25	—16,12	+20,98
392.	0,68	942,51	61,00	—22,10	35,30	+ 8,50	—13,60	+21,70
393.	1,56	933,60	72,74	—26,35	33,80	+18,29	— 8,06	+25,74
394.	0,54	922,89	46,12	—16,71	30,00	+19,19	+ 2,48	+32,48
395.	0,12	912,36	30,04	—10,88	27,50	+12,56	+ 1,68	+29,18
396.	—	902,48	29,87	—10,82	25,80	+14,44	+ 3,62	+29,42
397.	0,01	891,95	29,09	—10,54	22,90	+15,59	+ 5,05	+27,95
398.	0,01	883,09	28,68	—10,39	21,20	+12,89	+ 2,50	+23,70
399.	—	909,95	30,77	—11,15	26,80	+16,18	+ 5,03	+31,83
400.	—	899,74	30,19	—10,94	24,00	+ 6,81	— 4,13	+19,87
401.	—	890,33	29,57	—10,71	22,20	+16,00	+ 5,29	+27,49
402.	0,01	877,87	28,29	—10,25	21,00	+12,38	+ 2,13	+23,13
403.	0,20	943,80	40,95	—14,84	35,10	+28,45	+13,61	+48,71
404.	0,52	933,65	31,69	—11,48	33,00	+21,05	+ 9,57	+42,57
405.	0,03	923,44	29,58	—10,72	30,00	+13,32	+ 2,60	+32,60
406.	—	910,29	30,12	—10,91	25,90	+14,46	+ 3,55	+29,45
407.	—	887,80	36,04	—13,06	22,10	+10,55	— 2,51	+19,59
408.	—	875,76	33,68	—12,20	21,40	+10,76	— 1,44	+19,96
409.	—	885,89	37,20	—13,48	22,50	+ 7,39	— 6,09	+16,41
410.	—	875,16	42,15	—15,27	21,90	+ 7,27	— 8,00	+13,90
411.	0,04	865,27	42,61	—15,44	21,40	+15,44	0	+21,40
412.	—	863,88	38,60	—13,98	20,70	+13,66	— 0,32	+20,38
413.	—	866,26	28,03	—10,15	20,00	+ 9,79	— 0,36	+19,64
414.	—	871,43	28,15	—10,20	19,80	+11,65	+ 1,45	+21,25
415.	—	874,45	28,48	—10,32	19,80	+ 9,72	— 0,60	+19,20
416.	—	864,91	28,14	—10,19	18,90	+12,71	+ 2,52	+21,42
417.	—	862,33	27,71	—10,04	19,00	+11,03	+ 0,99	+19,99
418.	0,01	930,05	30,26	—10,96	32,30	+17,63	+ 6,67	+38,97
419.	—	918,02	30,26	—10,96	29,50	+ 9,76	— 1,20	+28,30
420.	0,01	908,66	30,81	—11,16	27,20	+13,90	+ 2,74	+29,94
421.	—	897,64	36,02	—13,05	24,60	+13,08	+ 0,03	+24,63
422.	—	888,71	41,00	—14,85	23,80	+ 7,61	— 7,24	+16,56
423.	—	933,15	30,97	—11,22	33,00	+17,69	+ 6,47	+39,47
424.	—	921,80	31,57	—11,44	31,50	+21,30	+ 9,86	+41,36
425.	0,02	910,60	34,27	—12,42	29,70	+17,14	+ 4,72	+34,42
426.	—	899,99	38,14	—13,82	27,60	+14,38	+ 0,56	+28,16
427.	—	886,94	46,43	—16,82	26,30	+11,17	— 5,65	+20,65
428.	—	936,66	32,54	—11,79	33,60	+26,60	+14,81	+48,41
429.	—	923,09	32,96	—11,94	32,30	+21,92	+ 9,98	+42,28
430.	—	910,11	34,22	—12,40	30,90	+10,41	— 1,99	+28,91
431.	—	900,61	36,44	—13,20	30,00	+ 8,84	— 4,36	+25,64
432.	0,01	889,29	37,86	—13,72	28,90	+ 1,95	—11,77	+17,13
433.	—	877,50	36,84	—13,34	28,50	+10,61	— 2,73	+25,77
434.	0,01	917,58	34,26	—12,41	32,30	+13,80	+ 1,39	+33,69
435.	—	904,66	34,27	—12,41	21,20	+11,81	— 0,60	+20,60
436.	—	893,96	35,53	—12,87	30,90	+ 4,86	— 8,01	+22,89
437.	—	883,70	35,67	—12,92	30,90	— 1,20	—14,12	+16,78
438.	0,01	909,20	36,19	—13,11	32,90	+20,58	+ 7,47	+40,37
439.	—	898,61	35,63	—12,91	32,20	+ 6,76	— 6,15	+26,05

Station		Geographical		Height	Adjusted observed gravity mgal
number	name	latitude	longitude		
440.	Gacsály	47°54′03,7″	22°45′24,4″	119,081	980 862,99
441.	Nagyhódos	47°57′50,9″	22°50′21,2″	120,256	867,59
442.	Piricse	47°44′22,6″	22°08′25,0″	154,550	842,87
443.	Szakoly	47°44′36,4″	21°55′58,2″	149,143	841,14
444.	Hajdúsámson ...	47°37′28,7″	21°47′11,4″	141,322	832,89
445.	Nyíracsád	47°38′58,1″	21°56′31,5″	152,439	831,75
446.	Penészlek	47°38′55,8″	22°08′42,5″	151,073	841,38
447.	Nyírábrány	47°31′41,0	22°01′26,5″	132,999	833,65
448.	Vámospércs	47°31′46,7″	21°50′02,9″	126,507	831,17
449.	H.-szoboszló ÉK..	47°28′34,1″	21°29′09,0″	104,308	840,38
450.	Balmazújváros ..	47°32′16,3″	21°19′01,0″	90,298	844,00
451.	Tiszaszentimre ..	47°28′14,8″	20°43′41,4″	90,135	841,05
452.	Nagyiván	47°28′47,0″	20°54′11,5″	89,707	842,90
453.	Nádudvar	47°25′13,6″	21°08′41,6″	88,653	834,03
454.	H.-szoboszló DNy.	47°24′31,8″	21°19′53,0″	91,553	830,95
455.	Hajdúszovát	47°22′24,6″	21°27′22,4″	94,184	831,79
456.	Konyár	47°19′53,2″	21°38′43,4″	97,458	819,64
457.	Monostorpályi ...	47°23′10,4″	21°47′14,7″	106,352	826,23
458.	Nagyléta	47°23′02,4″	21°55′32,4″	119,644	828,77
459.	Kunhegyes	47°21′59,2″	20°39′38,2″	88,926	831,61
460.	Kunmadaras ...	47°22′35,3″	20°49′43,5″	90,362	832,47
461.	Püspökladány ...	47°19′19,0″	21°04′10,2″	87,322	827,00
462.	Báránd	47°17′28,6″	21°14′58,0″	89,542	825,50
463.	Földes	47°15′51,0″	21°25′45,4″	92,162	819,57
464.	Gáborján	47°14′44,7″	21°39′01,5″	96,545	813,95
465.	Kismarja	47°14′10,2″	21°49′40,7″	104,160	826,63
466.	Kenderes	47°14′45,9″	20°39′20,4″	87,413	823,41
467.	Kisújszállás	47°14′43,4″	20°50′03,5″	85,605	823,06
468.	Bucsa	47°11′19,0″	21°02′06,2″	87,039	816,37
469.	Füzesgyarmat ...	47°09′54,4″	21°14′03,0″	86,378	821,50
470.	Zsáka	47°07′40,2″	21°24′43,3″	91,372	810,73
471.	Mezősas	47°07′20,5″	21°34′07,6″	92,326	815,20
472.	Ártánd	47°07′22,5″	21°46′57,4″	103,897	808,41
473.	Kuncsorba	47°06′15,2″	20°32′54,8″	85,629	806,71
474.	Túrkeve	47°05′39,6″	20°45′50,2″	85,549	814,10
475.	Dévaványa	47°03′08,4″	20°56′12,9″	86,442	805,46
476.	Szeghalom	47°00′51,8″	21°08′54,8″	86,950	802,73
477.	Újiráz	47°00′06,3″	21°20′49,2″	87,247	797,25
478.	Biharugra	46°59′00,9″	21°36′16,4″	92,746	798,77
479.	Mezőtúr Ny.	46°59′51,0″	20°30′11,2″	86,025	796,13
480.	Mezőtúr K.	47°00′08,6″	20°41′22,0″	86,374	800,02
481.	Gyoma	46°57′07,6″	20°53′25,6″	85,839	796,38
482.	Kőröstarcsa	46°54′40,5″	21°03′22,6″	85,586	793,74
483.	Vésztő	46°54′00,8″	21°15′15,0″	87,703	789,04
484.	Okány	46°53′09,4″	21°25′41,5″	88,016	785,38
485.	Geszt	46°52′40,2″	21°35′31,6″	93,562	781,22
486.	Öcsöd	46°53′24,3″	20°26′37,1″	85,413	785,04
487.	Gyoma	46°53′23,8″	20°40′56,6″	85,476	788,40
488.	Csabacsüd	46°47′03,2″	20°38,40,9″	84,385	775,83
489.	Mezőberény Ny. .	46°49′31,0″	20°51′00,5″	88,148	781,77
490.	Kondoros DK. ..	46°42′54,4″	20°56′32,6″	89,220	772,99
491.	Mezőberény K. ..	46°48′29,0″	21°03′00,7″	86,791	782,80
492.	Tarhos	46°48′01,2″	21°14′13,8″	86,650	784,31
493.	Méhkerék	46°45′48,9″	21°28′53,5″	89,854	780,31

Station number	Topographical effect	Theoretical gravity according to international formula (1930)	Faye	Bouguer	Isostatic	Faye	Bouguer	Isostatic
			corrections			anomalies		
440.	—	980 890,88	36,75	—13,31	+32,40	+ 8,86	— 4,45	+27,95
441.	—	896,56	37,11	—13,44	33,40	+ 8,14	— 5,30	+28,10
442.	0,07	876,38	47,69	—17,28	25,20	+14,25	— 3,03	+22,17
443.	—	876,72	46,02	—16,67	23,00	+10,44	— 6,23	+16,77
444.	0,02	866,04	43,61	—15,80	21,90	+10,48	— 5,32	+16,58
445.	—	868,27	47,04	—17,04	22,90	+10,52	— 6,52	+16,38
446.	0,05	868,22	46,62	—16,89	24,70	+19,83	+ 2,94	+27,64
447.	0,01	857,35	41,04	—14,87	23,50	+17,35	+ 2,48	+25,98
448.	0,02	857,50	39,04	—14,14	21,90	+12,73	— 1,41	+20,49
449.	—	852,68	32,19	—11,66	20,00	+19,89	+ 8,23	+28,23
450.	—	858,23	27,86	—10,10	19,30	+13,63	+ 3,53	+22,83
451.	0,01	852,20	27,82	—10,08	18,10	+16,68	+ 6,60	+24,70
452.	—	853,00	27,68	—10,03	18,10	+17,58	+ 7,55	+25,65
453.	—	847,67	27,36	— 9,91	18,20	+13,72	+ 3,81	+22,01
454.	—	846,63	28,25	—10,24	18,80	+12,57	+ 2,33	+21,13
455.	0,01	843,45	29,06	—10,53	19,50	+17,41	+ 6,88	+26,38
456.	—	839,66	30,08	—10,90	20,05	+10,06	— 0,84	+19,21
457.	0,01	844,59	32,82	—11,89	21,40	+14,47	+ 2,58	+23,98
458.	—	844,39	36,92	—13,38	22,70	+21,30	+ 7,92	+30,62
459.	—	842,81	27,44	— 9,94	17,30	+16,24	+ 6,30	+23,60
460.	—	843,71	27,88	—10,10	17,30	+16,64	+ 6,54	+23,84
461.	—	838,81	26,95	— 9,76	17,50	+15,14	+ 5,38	+22,88
462.	—	836,05	27,63	—10,01	18,30	+17,08	+ 7,07	+25,37
463.	—	833,61	28,44	—10,30	19,20	+14,40	+ 4,10	+23,30
464.	—	831,95	29,79	—10,79	20,50	+11,79	+ 1,00	+21,50
465.	—	831,08	32,14	—11,64	21,50	+27,69	+16,05	+37,55
466.	—	831,98	26,98	— 9,77	16,50	+18,41	+ 8,64	+25,14
467.	—	831,91	26,42	— 9,57	16,40	+17,57	+ 8,00	+24,40
468.	—	826,80	26,86	— 9,73	16,80	+16,43	+ 6,70	+23,50
469.	—	824,69	26,66	— 9,66	17,90	+23,47	+13,81	+31,71
470.	—	821,33	28,20	—10,22	19,00	+17,60	+ 7,38	+26,38
471.	—	820,84	28,49	—10,32	20,20	+22,85	+12,53	+32,73
472.	—	820,89	32,06	—11,62	21,40	+19,58	+ 7,96	+29,36
473.	—	819,20	26,42	— 9,57	15,80	+13,93	+ 4,36	+20,16
474.	—	818,31	26,40	— 9,56	15,80	+22,19	+12,63	+28,43
475.	—	814,53	26,68	— 9,66	15,90	+17,61	+ 7,95	+23,85
476.	—	811,11	26,83	— 9,72	17,50	+18,45	+ 8,73	+26,23
477.	—	809,97	26,92	— 9,75	18,90	+14,20	+ 4,45	+23,35
478.	—	808,34	28,62	—10,37	20,50	+19,05	+ 8,68	+29,18
479.	—	809.59	26,55	— 9,62	15,70	+13,09	+ 3,47	+19,17
480.	—	810,03	26,66	— 9,66	15,60	+16,65	+ 6,99	+22,59
481.	—	805,50	26,49	— 9,60	15,70	+17,37	+ 7,77	+23,47
482.	—	801,82	26,45	— 9,58	16,70	+18,37	+ 8,79	+25,49
483.	—	800,83	27,06	— 9,80	18,20	+15,27	+ 5,47	+23,67
484.	—	799,54	27,16	— 9,84	19,30	+13,00	+ 3,16	+22,46
485.	—	798,81	28,87	—10,46	20,40	+11,28	+ 0,82	+21,22
486.	—	799,91	26,36	— 9,55	15,90	+11,49	+ 1,94	+17,84
487.	—	799,90	26,38	— 9,56	15,30	+14,88	+ 5,32	+20,62
488.	0,01	790,37	26,04	— 9,43	14,90	+11,50	+ 2,07	+16,97
489.	—	794,08	27,20	— 9,85	15,30	+14,89	+ 5,04	+20,34
490.	—	784,14	27,53	— 9,97	15,20	+16,38	+ 6,41	+21,61
491.	—	792,52	26,78	— 9,70	16,20	+17,06	+ 7,36	+23,56
492.	—	791,82	26,74	— 9,69	18,10	+19,23	+ 9,54	+27,64
493.	—	788,51	27,73	—10,04	19,80	+19,53	+ 9,49	+29,29

REFERENCES

1. LEJAY, R. P.: Comptes-rendus des séances de travail de la section de gravimétrie . . . Assemblée générale d'Oslo. Bulletin Géodésique, No. 12. 121—142. 1949.
2. FACSINAY, L. and SZILÁRD, J.: A magyar országos gravitációs alaphálózat. Geofizikai Közlemények. V. 2. 1956. (The Hungarian gravity base network).
3. LASSOVSZKY, K. and OSZLACZKY, SZ.: A Nap és a Hold gravitációs hatása a graviméter-mérésekre. (The influence of Sun and Moon upon measurements with the gravity meter). Geofizikai Közlemények, I. 3. 1952.
4. KOMÁROMY, I.: Különböző azimutokban végzett graviméteres észlelések vizsgálata. (Study of gravity meter observations in different azimuths). Geofizikai Közlemények, I. 8. 1952.
5. SZILÁGYI, B. and BARTA, GY.: Földrajzi koordináták és meridián konvergencia számítása sztereografikus összrendezőkből. (The computation of geographical co-ordinates and of the convergence of the meridian from stereographic co-ordinates). Geofizikai Közlemények, II. 1. 1953.

SUMMARY

In Hungary, a gravity base network was surveyed in the years 1950 to 1955 by the Eötvös Loránd Geophysical Institute of the Hungarian State. The network consists of 16 first-order and 493 second-order stations. The survey was carried out by the aid of a HEILAND gravity meter. In the last years the uniformizing and processing the results of the survey was performed. Taken into consideration were the lunisolar effect, the effect of the orientation of the instrument, as well as the square correction, due to the fact that in the gravity meter of the used type the readings of instrument are not entirely linear function of the variation of gravity. After having performed the corrections the first-order network was adjusted: thereupon, taking the adjusted values of the first-order network for correct, the second-order network was adjusted in one set. The accuracy of gravity determinations was found to be $\pm$ 0,02 mgal for the first-order and $\pm$ 0,029 mgal for the second-order network. A preliminary report on the base network was published in 1956 in "Geofizikai Közlemények".

DAS SCHWEREGRUNDNETZ VON UNGARN

J. RENNER und J. SZILÁRD

ZUSAMMENFASSUNG

In den Jahren 1950—55 wurde in Ungarn durch das Staatliche Geophysikalische Institut „Eötvös Loránd" ein das ganze Land umfassendes Schweregrundnetz mit 16 Stationen I. Ordnung und 493 Stationen II. Ordnung vermessen. Die Vermessung war mit einem Heiland-Gravimeter ausgefürt. Die Vereinheitlichung und endgültige Verarbeitung der Messergebnisse geschah in den letzten Jahren. Als Korrektionen waren in Betracht gezogen: der lunisolare Effekt, der Effekt des Instrumentazimuths sowie die quadratische Korrektion, die sich daraus ergibt, dass die Ablesungswerte am Instrumente den Änderungen der Schwere nicht als vollständig lineare Funktionen folgen. Nach Anbringen der Korrektionen war zunächst das Netz I. Ordnung ausgeglichen ; bei der Ausgleichung des Netzes II. Ordnung in einem Satz sind die ausgeglichenen Werte des Netzes I. Ordnung als Zwangswerte eingeführt worden. Die Genauigkeit der Bestimmungen für das Netz I. Ordnung beträgt $\pm$ 0,02 mgal und für dasjenige II. Ordnung $\pm$ 0,029 mgal. Ein vorläufiger Bericht über das Grundnetz ist in 1956 in „Geofizikai Közlemények" gegeben worden.

LE RÉSEAU FONDAMENTAL GRAVIMÉTRIQUE EN HONGRIE

J. RENNER et J. SZILÁRD

RÉSUMÉ

Au cours de la période allant de 1950 à 1955, l'Institut National de Géophysique «Loránd Eötvös» a mesuré, en Hongrie, un réseau gravimétrique national sur 16 points fixes de premier, et 493 points fixes de deuxième ordre. Les mesures ont été effectuées avec le gravimètre système Heiland. Au cours des dernières années, on a procédé à l'élaboration globale et précise des résultats de mesure, compte tenu de l'influence lunisolaire, de l'effet produit par la position en azimut de l'instrument, puis de la correction quadratique provenant de ce que, chez le gravimètre employé, la gravitation ne varie pas avec les lectures de division selon une fonction de linéarité irréprochable. Après avoir effectué les corrections, on a compensé tout d'abord le réseau primordial, puis en employant les valeurs compensées des points fixes de premier ordre, on compensait à la fois le réseau fondamental secondaire. La précision des déterminations a été $\pm$ 0,02 mgal pour le réseau de premier ordre et $\pm$ 0,029 mgal pour le réseau secondaire. Avant le présent rapport, une étude consacrée au réseau fondamental et à ses résultats provisoires a été publiée, en 1956, dans «Geofizikai Közlemények» (Bulletin de Géophysique).

ОПОРНАЯ ГРАВИМЕТРИЧЕСКАЯ СЕТЬ ВЕНГРИИ

Я. РЕННЕР и И. СИЛАРД

РЕЗЮМЕ

В 1950—1955 гг. Венгерским Государственным геофизическим институтом им. Л. Этвеша была создана опорная гравиметрическая сеть страны на 16 опорных пунктах первого класса и 493 опорных пунктах второго класса. Измерения проводились гравиметром типа Хейланда. За последние годы была выполнена единая и подробная обработка материалов измерений. При обработке учитывались лунно-солнечные эффекты, влияние азимутального положения прибора на результаты, а также и квадратическая поправка за нелинейность зависимости определений цены деления использованных гравиметров от изменения значений силы тяжести. После введения соответствующих поправок, с использованием опорных пунктов первого класса, сети первого и второго класса уравнивались совместно. На сети первого класса точность определений получилась равной $\pm$ 0,02 *мгл*, а на сети второго класса — $\pm$ 0,029 *мгл*. До появления настоящей статьи, в бюллетене «Geofizikai Közlemények» в 1956 г. уже была опубликована работа, содержащая сведения по опорной сети и о предварительных результатах обработки ее материалов.

AUSFÜHRUNG DER STATISCHEN KOORDINATEN-AUSGLEICHUNG

Prof. I. HAZAY

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
LEHRSTUHL FÜR ANGEWANDTE GEODÄSIE. TECHNISCHE UNIVERSITÄT, SOPRON

[Eingegangen am 21. August 1958]

I. TEIL. AUSGLEICHUNG EINES PUNKTES

Etwa zwanzig Jahre sind es her, seit wir Untersuchungen ausführten, um jene Widersprüche zu bereinigen, die sich unter den die Grundlage zur Bestimmung der Triangulierungsnetze niederer Ordnung bildenden, bereits mit endgültigen Koordinaten bestimmten, gegebenen Triangulierungspunkten (Triangulierungspunkte höherer Ordnung, bzw. schon früher bestimmte Punkte niederer Ordnung) in kleinerem oder grösserem Masse regelmässig ergeben. Da die gegebenen Punkte sozusagen den Rahmen des neuen Netzes bilden, erhielt der erwähnte Widerspruch den Namen *Rahmenfehler*. Die Untersuchungen, deren Ergebnis seinerzeit in deutscher Sprache in den Mitteilungen [1] veröffentlicht wurde, hatten erwiesen, dass es zweckmässig sei, bei der Bestimmung der neuen Punkte die Bestimmungsrichtungen mit einem zu deren Länge linear proportionalen *Richtungsgewicht* zu verwenden. Es wurde weiterhin nachgewiesen, dass die Anwendung des erwähnten Richtungsgewichtes bis zu einer Richtungslänge von ungef. 7 km auch in dem Fälle richtig ist, wenn es überhaupt keine Rahmenfehler gibt und sich bloss bei den zur Bestimmung des zwischen die alten Punkte einzusetzenden neuen Netzeteiles ausgeführten Messungen zufällige Fehler ergeben. Für solche Fälle haben die moderneren Winkelinstrumente mit ihren kleineren Kreisteilungsfehlern und ihrer grösserer Ableseschärfe die theoretische Richtigkeit der Anwendung des Richtungsgewichtes bis zu einer Richtungslänge von etwa 10 Kilometern ausgedehnt.

Da es sich auch in der Praxis erwies, dass die proportionale Verteilung der Rahmenfehler eine gute Lösung in der Anwendung der den Richtungslängen proportionalen Richtungsgsewichte gefunden hat und dass diese Lösung im Falle von Richtungslängen von etwa 10 Kilometern auch dann richtig ist, wenn bloss Messfehler auftreten, werden die Bestimmungsrichtungen bei der Triangulierung niederer Ordnung in Ungarn mit einem den Richtungslängen linear proportionalen Gewicht angewandt und bei der Orientierung der gemessenen Richtungssätze werden die Orientierungsrichtungen ebenfalls mit solch einem Gewicht bestimmt.

Die Erfüllung der Bedingung $[pvv] = Minimum$ mit der üblichen Koordinatenausgleichung ist auch in dem Falle ziemlich schwerfällig, wenn sich

die Gewichte aus der Gleichung $p_i = s_i$ ergeben, wobei s_i die Länge irgendeiner Bestimmungsrichtung in Kilometereinheit ist. Es wurde unsererseits aus diesem Grunde ein Verfahren ausgearbeitet, welches die entsprechenden Richtungsgewichte schon in seinem Aufbau in sich schliesst und somit durch weniger Arbeit, also schneller zum Ergebnis führt. Das Verfahren beruht auf rein mechanischen (hauptsächlichen statischen) Grundsätzen ; es wurde aus diesem Grunde die statische Koordinatenausgleichung genannt. In unserer Arbeit [1] gaben wir auch schon die Grundprinzipien der statischen Koordinatenausgleichung bekannt, bewiesen ausserdem, dass die statische Koordinatenausgleichung zu denselben Ergebnissen führt, wie die Koordinatenausgleichung mit der Bedingung $[svv] = Minimum$ und führten die ausschliesslich auf Grund von Richtungsmessungen erfolgte Einpunktausgleichung aus. Einige Jahre später behandelten wir dann in unserer Arbeit [2] die Lösung weiterer, ins Gebiet der Koordinatenausgleichung gehörender Aufgaben.

In der Arbeit [1] wurde auch erwähnt, dass auf Grund der Ergebnisse der Ausgleichung auch der Gauss'sche mittlere Fehler gebildet werden kann. Seither hatten wir uns auch mit dieser Frage eingehender befasst und untersucht, wie die Berechnung der mittleren Fehler auf Grund der verschiedenen Messergebnisse und besonderen Gewichte zu erfolgen hat, bzw. auf welche Art sie am zweckmässigsten wäre.

Die statische Koordinatenausgleichung wird bei der ungarischen Triangulation bereits seit zwei Jahrzehnten mit gutem Erfolg praktisch angewandt. Im Laufe dieser Zeit ergab es sich, bis zu welcher Genauigkeit (bis zu wieviel Dezimalen) die einzelnen Faktoren zweckmässig berechnet werden sollen — mit besonderer Beachtung dessen, dass die Kontrollrechnung tatsächlich zur Kontrolle dienen soll — und es wurden auch die am entsprechendsten erscheinenden Berechnungsschemen ausgearbeitet. Wir hatten Einfälle, die in den Arbeiten [1] und [2] bloss aufgeworfen, praktisch jedoch seinerzeit noch nicht zu Ende geführt wurden. Ein Bespiel hierzu sei jener Umstand, wenn den einzelnen Messergebnissen ausser der Entfernung (bei Richtungsmessung die Richtungslänge, bei Längenmessung die gemessene Länge) noch von anderen Standpunkten aus ein spezielles Gewicht zugeschrieben wird. Dies kann auch im Falle von Richtungsmessungen oder Längenmessungen allein erfolgen, wenn z. B. die eine Richtung oder Länge öfter gemessen wird als die andere, insbesondere aber dann, wenn neben Richtungsmessungen auch Längenmessungen ausgeführt werden und ein gewisses Verhältnis der Gewichte zwischen diesen zwei verschiedenartigen Messgruppen festgestellt wird.

Im Folgenden beabsichtigen wir, die Ausführung der statischen Koordinatenausgleichung in ihrer heutigen fortgeschritteneren und im Verhältnis zur ursprünglichen bedeutend vereinfachten Form darzustellen. Da sich meine heutigen Leser die Arbeiten [1] und [2] schwerlich beschaffen können, dürfte es notwendig sein einen gewissen Teil hievon, namentlich die Beschreibung des

Grundprinzipes der statischen Koordinatenausgleichung und ihren Aufbau, kurz zu wiederholen. Mit einer Wiederholung der Untersuchungen und Beweise wollen wir jedoch den Leser hier nicht belästigen, diesbezüglich verweisen wir bloss auf diese Arbeiten.

Es soll hier noch erwähnt werden, dass die Grundsätze der statischen Koordinatenausgleichung seither auch schon zur graphischen Lösung der Einpunktausgleichung angewandt wurden [3], ihre Grundprinzipien wurden sogar bei solchen Annäherungsverfahren benützt, bei denen die Anwendung der Präzisionsausgleichung nicht unbedingt notwendig ist [4].

1. Grundprinzip der statischen Koordinatenausgleichung

Man stelle sich vor, dass die Verbesserungen der zur Bestimmung irgendeines Punktes ausgeführten Richtungs- und Längenmessungen in der mittels Ausgleich bestimmten (endgültigen) Lage des Punktes ein *Kräftesystem* mit gemeinsamen Schnittpunkten in der Ebene hervorrufen. Bei Richtungsmessungen ist die Kraft R die in der Entfernungseinheit entsprechende und lotrecht auf die Richtung erfolgte *lineare Abweichung* der Verbesserung v:

$$R = \frac{v''}{\varrho''} 1 = \frac{v''}{\varrho''} \tag{1}$$

während bei Längenmessungen der auf eine Entfernungseinheit fallende Teil der Längenverbesserung v_L, d. h. wenn die gemessene Länge mit s bezeichnet wird:

$$R = \frac{v_L}{s} \tag{2}$$

was in die Richtung der Längenmessung fällt. Zu jeder gemessenen Richtung bzw. Länge gehört je eine Kraft. Der Grundsatz der Ausgleichung ist, dass *das Kräftesystem in der mit den durch Ausgleichung berechneten Koordinaten des Neupunktes bestimmten Punktlage P*, d. h. *in der endgültigen Punktlage im Gleichgewicht zu sein hat.* Das Gleichgewicht wird so dargestellt, dass die Summe der durch die Koordinatenachsen ausgedrücklten Kräfteprojektionen auf beiden Achsen Null beträgt:

$$[R_y] = 0 \quad \text{und} \quad [R_x] = 0 \tag{3}$$

Diese zwei *Gleichgewichtsgleichungen* sind die Fundamentalgleichungen, auf denen die statische Ausgleichung beruht, so dass sie zur Lösung sämtlicher, ins Gebiet der Koordinatenausgleichung gehörender Aufgaben geeignet ist.

2. Ausgleichung des Vorwärtseinschneidens mit den vor der Ausgleichung endgültig orientierten Richtungswerten

Bei der Triangulation niederer Ordnung werden im allgemeinen die vor der Ausgleichung endgültig orientierten Richtungswerte als Messergebnisse des Vorwärtseinschneidens betrachtet. Der Ausdruck der Verbesserungen kann von Abb. 1 abgelesen werden. Der Punkt P_i ist der eine gegebene Festpunkt,

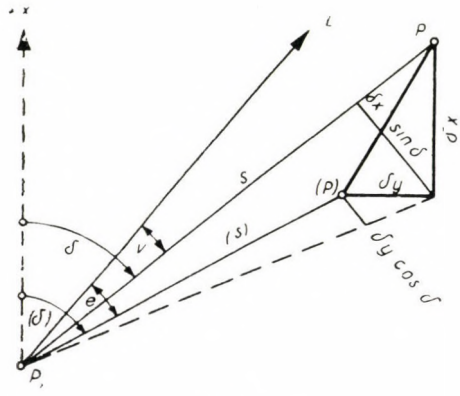


Abb. 1

von dem der zu bestimmende Neupunkt P visiert wird. Ist (P) die genäherte Lage des Neupunktes, die durch die genäherten Koordinaten (y) und (x) bestimmt sind, L der gemessene und orientierte Richtungswert und (δ) der auf Grund der genäherten Koordinaten (y) und (x) berechnete genäherte Richtungswinkel der vom gegebenen Festpunkt P_i, dem Neupunkt P zulaufenden Richtung, dann ist die sogenannte *Richtungsabweichung:*

$$e = (\delta) - L. \tag{4}$$

Im Laufe der Ausgleichung verschiebt sich der Neupunkt in die ausgeglichene Lage P. Ist es erwünscht, die Koordinatenänderungen δy und δx — wie es bei der Ausgleichung üblich ist — *in Dezimetern* zu erhalten, so beträgt die Verbesserung v in Sekunden:

$$v'' = + \frac{0{,}1\,\varrho'' \cos(\delta)}{(s)}\,\delta y - \frac{0{,}1\,\varrho'' \sin(\delta)}{(s)}\,\delta x + e'', \tag{5}$$

wobei (s) die auf Grund der genäherten Koordinaten (y) und (x) berechnete genäherte Entfernung ist. Nachdem gemäss Formel (1) die Kraft $= v''/\varrho''$ ist,

entsprechen den unter (3) angegebenen Gleichgewichtsgleichungen die Gleichungen

$$[-v\cos\delta] = 0 \quad \text{und} \quad [v\sin\delta] = 0 \tag{6}$$

wenn der Wert sämtlicher Kräfte mit ϱ'' multipliziert wird. Dies kann erfolgen, da die Summengleichungen den Wert Null haben.

Angenommen, dass die Differenz zwischen dem endgültigen und genäherten Richtungswinkel, d. h. der Winkel $\delta - (\delta)$ so klein ist, dass die Annäherung $\sin\delta = \sin(\delta)$ und $\cos\delta = \cos(\delta)$ innerhalb der Grenzen der Rechnungsschärfe möglich ist, sollen für jede Richtung die Projektionen $v\cos(\delta)$ und $v\sin(\delta)$ berechnet und nach Addition der entsprechenden Projektionen die der Formel (6) entsprechenden Gleichgewichtsgleichungen aufgestellt werden. Werden die *Richtungskoeffizienten*

$$a_i = -\frac{0{,}1\,\varrho''\cos^2\delta_i}{s_i} \qquad b_i = -\frac{0{,}1\,\varrho''\sin^2\delta_i}{s_i}$$
$$c_i = \frac{0{,}1\,\varrho''\sin\delta_i\cos\delta_i}{s_i} \tag{7}$$

eingeführt, dann ergeben sich folgende *Gleichgewichtsgleichungen :*

$$\begin{aligned}[a]\,\delta y + [c]\,\delta x - [e\cos\delta] &= 0\\ [c]\,\delta y + [b]\,\delta x + [e\sin\delta] &= 0,\end{aligned} \tag{8}$$

Aus den zwei Gleichungen können die *Koordinatenänderungen* berechnet werden. Die Gleichgewichtsgleichungen sind immer symmetrisch.

Die Richtungskoeffizienten a und b tragen immer ein negatives Vorzeichen. Der Richtungskoeffizient c ist positiv, wenn $\mathrm{sg}(y - y_i) = \mathrm{sg}(x - x_i)$, wobei y und x die Koordinaten des Neupunktes, y_i und x_i die des gegebenen Punktes sind, d. h. wenn $\mathrm{sg}\sin\delta = \mathrm{sg}\cos\delta$; im entgegengesetzten Falle ist er negativ. Positiv ist er demnach im I. und III. Quadrant, negativ im II. und IV. Quadrant. Die Berechnung der Richtungskoeffizienten kann mit der des Richtungswinkels gemeinsam ausgeführt werden. Wie aus den Formeln (7) ersichtlich, ist der Absolutwert des Richtungskoeffizienten c gleich dem geometrischen Mittel des Absolutwertes der anderen beiden Richtungskoeffizienten.

Nachdem die Koordinatenänderungen bestimmt sind, wird die Änderung der Richtungswinkel mit Hilfe der Formel

$$\delta\delta_i = \frac{a_i\,\delta y + c_i\,\delta x}{-\cos\delta_i} \quad \text{oder} \quad \delta\delta_i = \frac{c_i\,\delta y + b_i\,\delta x}{\sin\delta_i} \tag{9}$$

berechnet. Im allgemeinen wird die linke Formel angewandt. Die rechte Formel ist bloss in dem Falle notwendig, wenn der Wert $\cos\delta$ so klein ist, dass eine Division mit ihm unsicher sein würde. Die Verbesserungen werden aus der Beziehung

$$v_i = \delta\delta_i + e_i \tag{10}$$

berechnet.

Es folgt aus dem Grundsatz der Ausgleichung, dass die Bedingungen

$$[v\cos\delta] = 0 \quad \text{und} \quad [v\sin\delta] = 0 \tag{11}$$

innerhalb der Berechnungsschärfe erfüllt werden müssen. Es ergibt sich von selbst, dass — wenn die Berechnungen der Ausgleichung fehlerlos ausgeführt worden sind — die auf Grund der endgültigen Koordinaten $y = (y) + \delta y$ und $x = (x) + \delta x$ des Neupunktes berechneten Richtungswinkel innerhalb der Berechnungsschärfe um den in der Formel (9) bestimmten Wert von den entsprechenden genäherten Richtungswinkeln abweichen und dass auch die auf Grund der endgültigen Richtungswinkeln bestimmten Verbesserungen mit den aus der Formel (10) berechneten Ergebnissen übereinstimmen.

3. Ausgleichung des Rückwärtseinschneidens

Beim Rückwärtseinschneiden wird der Richtungssatz mit dem genäherten Wert des Richtungwinkels (Z) orientiert, und somit erscheint die *Änderung des Orientierungswinkels* δz als dritte Unbekannte. Die Verbesserung ist :

$$v_i = -\delta z + \frac{0{,}1\,\varrho''\cos\delta_i}{s_i}\,\delta y - \frac{0{,}1\,\varrho''\sin\delta_i}{s_i}\,\delta x + e. \tag{12}$$

(In der Formel (12) sowie in den folgenden Formeln (14) und (17)—(19) ist δ der Richtungswinkel der dem Neupunkt zulaufenden, d. h. der von der im Neupunkt gemessenen Richtung um 180° abweichenden Richtung.)

Auf Abb. 2 stellen die vom Punkt P ausgehenden, mit fortlaufenden Linien eingezeichneten Geraden die endgültigen Richtungswinkel nach der Ausgleichung dar. Man stelle sich vor, dass diese ein starres System bilden, welches sich um den Punkt P drehen kann. Am Endpunkt der Richtungen wirken die Kräfte $R_i = v_i/\varrho''$ senkrecht auf die Richtung. Bei Gleichgewicht beträgt die Summe der auf die ausgeglichene Punktlage P der einzelnen Kräfte bezogenen *Drehmomente* Null :

$$\left[s\,\frac{v}{\varrho''}\right] = 0. \tag{13}$$

Nach Entwicklung und Division mit 0,1:

$$[\cos\delta]\,\delta y - [\sin\delta]\,\delta x + \frac{10}{\varrho''}\,[es] - \frac{10}{\varrho''}\,\delta z[s] = 0. \tag{14}$$

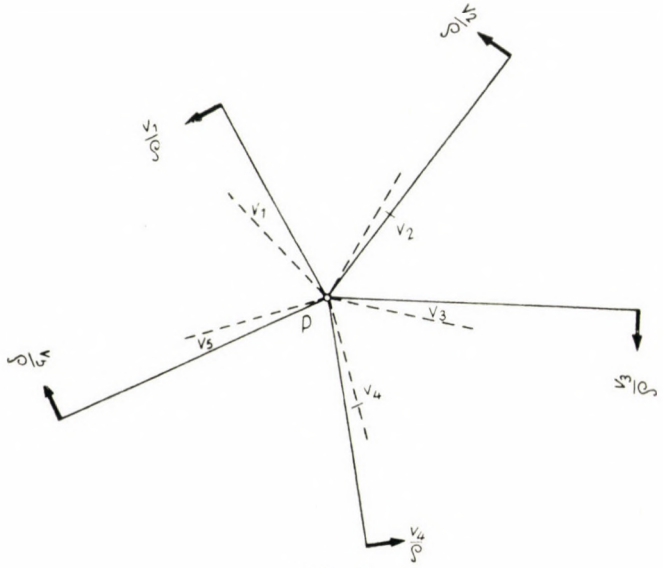


Abb. 2

Aus den durch die einzelnen Richtungen bestimmten Orientierungswerten $(z_i) = (\delta_i) - L_i$ wird auf Grund der Formel

$$(Z) = \frac{[s\,(z)]}{[s]} \tag{15}$$

der genäherte Wert (Z) des Orientierungswinkels aufgenommen, wobei

$$e_i = (z_i) - (Z) \quad \text{und} \quad [se] = 0. \tag{16}$$

Unter Beachtung dessen wird die Unbekannte δz aus Formel (14):

$$\delta z = \frac{[\cos\delta]\,\delta y - [\sin\delta]\,\delta x}{D} \quad \text{wo} \quad D = \frac{10}{\varrho''}\,[s]_{\mathrm{dm}} = 0{,}048\,48\,[s]_{\mathrm{km}}. \tag{17}$$

Wird nun der Wert δz in den Ausdruck (12) der Verbesserungen eingesetzt, sodann die Projektionen der Kräfte berechnet, dann erhält man mittels Addition folgende *Gleichgewichtsgleichungen :*

$$\begin{aligned} A\delta y + C\delta x - [e\cos\delta] &= 0 \\ C\delta y + B\delta x + [e\sin\delta] &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

wo

$$A = [a] + \frac{[\cos\delta]^2}{D} \qquad B = [b] + \frac{[\sin\delta]^2}{D}$$
$$C = [c] - \frac{[\sin\delta]\,[\cos\delta]}{D}. \tag{19}$$

Wie aus den Ausdrücken(19) ersichtlich,müssen die Glieder der zwecks von Ausschliessung der Unbekannten δz unmittelbar, ohne Beachtung von δz aufgestellten Gleichgewichtsgleichungen reduziert werden, u. zw. mit insgesamt drei, aus der Summe der Sinus- bzw. Cosinus-Werte leicht ausgedrückten *Reduktion*. Die Reduktionen können mit Hilfe des Rechenschiebers einfach berechnet werden.

Nach Bestimmung der Koordinatenänderungen dient die Formel (17) zur Berechnung der Unbekannten δz. Gleichfalls nach Bestimmung der Koordinatenänderungen wird die Änderung der Richtungswinkel auch im Falle vom Rückwärtseinschneiden mit einer der Formeln (9) berechnet. Die Verbesserungen sind :

$$v_i = \delta\delta_i + e_i - \delta z\ . \tag{20}$$

All das, was im letzten Absatz des Punktes 2 gesagt wurde, gilt auch auf die Ausgleichung des Rückwärtseinschneidens. Nach Berechnung der endgültigen Richtungswinkel auf Grund der endgültigen Koordinaten des Punktes P muss der gemessene Richtungssatz zwecks von Berechnung der Verbesserungen v auch endgültig orientiert werden. Der endgültige Orientierungswinkel und die Verbesserungen werden mit folgender Formel berechnet :

$$Z = \frac{[sz]}{[s]} \quad \text{bzw.} \quad v_i = z_i - Z. \tag{21}$$

z_i bedeutet die Orientierungswerte, die sich als Differenz zwischen den endgültigen Richtungswinkeln und den Messergebnissen ergeben.

4. Ausgleichung mit äusseren und inneren Richtungen

Bezüglich der am Neupunkt gemessenen *(inneren)* Richtungen wird das beim Rückwärtseinschneiden besprochene, bezüglich der nach dem Neupunkt gemessenen *(äusseren)* Richtungen das beim Vorwärtseinschneiden besprochene Verfahren angewandt. Die Gleichgewichtsgleichungen werden auf Grund sämtlicher Richtungen aufgestellt, die Reduktionen jedoch *bloss aus den Angaben der inneren Richtungen* berechnet. Die Bedingungen unter (11) müssen unter Beachtung sämtlicher Verbesserungen erfüllt werden.

5. Ausgleichung auf Grund von Längenmessungen

Beträgt die ausgeglichene (endgültige) Entfernung zwischen dem gegebenen Punkt P_i und dem Neupunkt $P\,s$, und ist dabei das Ergebnis der Längenmessung $= L$, dann ist die *Längenverbesserung :*

$$v_L = s - L. \tag{22}$$

Wird die Kraft auf Grund der Formel (2) gedeutet, so sind die Projektionen der Koordinatenachsen der Kraft :

$$R_y = -\frac{v_L}{s}\sin\delta \qquad R_x = -\frac{v_L}{s}\cos\delta. \tag{23}$$

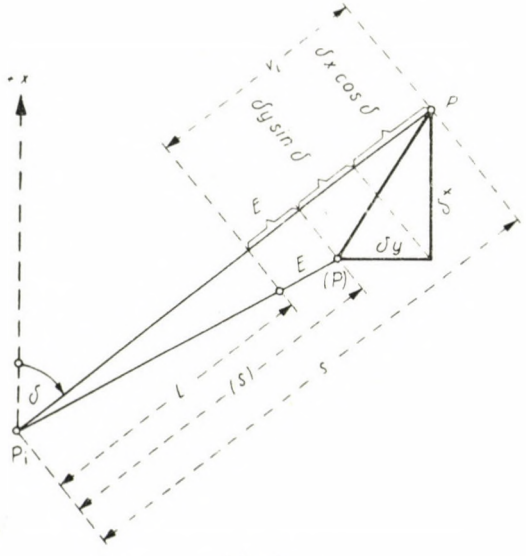


Abb. 3

Die negativen Vorzeichen ergeben sich dadurch, dass die Längenverbesserung bloss dann positiv ist, wenn das Messergebnis kleiner ist als die endgültige Entfernung, die positive Kraft demnach in die Richtung des endgültigen Punktes hinweist. Wenn sich die Richtung $P_i - P$ im ersten Quadrant befindet, dann weist der Sinn der Kräfteprojektionen in die Richtung der Achsen $-y$ und $-x$.

Die Differenz E zwischen der genäherten Entfernung (s) und dem Messergebnis L wird *Längenabweichung* genannt :

$$E = (s) - L. \tag{24}$$

Die Längenverbesserung auf Abb. 3 ist :

$$v_L = \delta y \sin \delta + \delta x \cos \delta + E. \tag{25}$$

Nachdem die Projektionssummen Null betragen müssen, können die Kräfteprojektionen mit ϱ'' multipliziert werden. Ist dies erfolgt und werden die Koordinatenänderungen *in Dezimetereinheiten* berechnet, so nehmen die *Gleichgewichtsgleichungen* folgende Form an :

$$\begin{aligned} [b]\,\delta y - [c]\,\delta x - [e \sin \delta] &= 0 \\ -[c]\,\delta y + [a]\,\delta x - [e \cos \delta] &= 0, \end{aligned} \tag{26}$$

wo a, b und c die aus Punkt 2 bekannten *Richtungskoeffizienten* sind, während e der Wert

$$e = \frac{E\,\varrho''}{s} \tag{27}$$

ist. Zur Berechnung der Richtungskoeffizienten muss man die gemessene oder genäherte Entfernung sowie auch den genäherten Richtungswinkel der Richtung der Längenmessung kennen, denn zu deren Berechnung laut Formel (7) ist der Sinus und Cosinus dieses Richtungswinkels anzuwenden.

Infolge der Multiplikation der Projektionen der Kräfte mit ϱ entstanden eigentlich solche Kräfteprojektionen, die gleich sind den zum fiktiven Richtungsmessergebnis der auf die Richtung der dem Neupunkt zu laufenden Längemessungen senkrechten (mit einem um 90° kleineren Richtungswinkel) und mit den gemessenen Längen gleichlangen Richtungen gehörenden Kräfteprojektionen. In diesem Sinne können die mit der Formel (27) berechneten Werte e als die Richtungsabweichung der fiktiven Richtungen betrachtet werden.

Bei den anstelle der Längenmessungen eingesetzten fiktiven Richtungsmessungen wird die Richtungswinkeländerung mit der Formel

$$\delta\delta_i = \frac{b_i\,\delta y - c_i\,\delta x}{-\sin\delta_i} \quad \text{oder} \quad \delta\delta_i = \frac{-c_i\,\delta y + a_i\,\delta x}{-\cos\delta_i} \tag{28a}$$

berechnet und deren Verbesserung mittels der Formel (10) bestimmt. Werden nun diese fiktiven Richtungsmessverbesserungen mit v bezeichnet, betragen die entsprechenden Längenmessverbesserungen

$$v_{Li} = \frac{v_i}{\varrho''}\,s_i \tag{28b}$$

Die Bedingungen unter (11) müssen mit der Verbesserung der fiktiven Richtungsmessungen erfüllt werden. Werden nun die endgültigen Entfernungen s mit den endgültigen Koordinaten des Neupunktes berechnet, so müssen die mit der Formel

$$v_{Li} = s_i - L_i \tag{29}$$

berechneten Längenverbesserungen innerhalb der Berechnungsschärfe der Reihe nach mit jenen der Formel (28b) übereinstimmen und die Bedingungen

$$\left[\frac{v_L}{s}\sin\delta\right] = 0 \qquad \left[\frac{v_L}{s}\cos\delta\right] = 0 \tag{30}$$

erfüllen.

6. Ausgleichung mit Richtungs- und Längenmessungen

Wenn zur Bestimmung des Neupunktes neben Richtungsmessungen auch Längenmessungen ausgeführt werden und deren Ergebnis auch als eine mit Messfehlern belastete variable Menge betrachtet wird, so müssen am Neupunkt die von den Richtungs- und Längenmessergebnissen herstammenden Kräfte gemeinsam im Gleichgewicht sein.

Da die Ergebnisse der Richtungs- und Längenmessungen im allgemeinen nicht gleich zuverlässig sind, muss vor allem deren Gewichtsverhältnis festgestellt werden. Ist der mittlere Fehler des auf eine beliebige Entfernung s_0 bezogenen Richtungsmessergebnisses μ_i'' und der mittlere Fehler des auf dieselbe Entfernung bezogenen Längenmessergebnisses μ_L Meter, so müssen die von der Längenmessung herstammenden und mit dem Zahlenwert ϱ multiplizierten Kräfte — bei unveränderter Benutzung der von den Richtungsmes-

sungen herstammenden Kräfte — noch mit dem Wert (mit dem *Gewichtsfaktor)*

$$q = \frac{s_0^2 \mu_i^2}{\varrho^2 \mu_L^2} \tag{31}$$

multipliziert werden. Wenn z. B. der mittlere Fehler des Messergebnisses einer 100 m langen Richtung $\pm 10''$ und der mittlere Fehler des Längenmessergebnisses der Entfernung von $100\ m = \pm 0{,}0054$ m beträgt, dann ist $q \approx 0{,}8$.

Die Beachtung des Wertes q erfolgt so, dass anstelle des Ergebnisses der Längenmessungen das fiktive Richtungsmessergebnis solcher s_i/q langen Richtungen eingesetzt wird, deren Richtungswinkel um 90° kleiner ist als der Richtungswinkel der Richtung der dem Neupunkt zulaufenden Längenmessungen. Wenn auch in diesem Falle die zur Richtung der Längenmessung und der gemessenen Länge gehörenden Richtungskoeffizienten mit a, b, bzw. c bezeichnet werden, so wird auf Grund der zweierlei Messergebnisse die Ausgleichung so ausgeführt, dass während die Angaben bezüglich der Richtungsmessungen in üblicher Weise in das zur Ausgleichung der Richtungsmessungen dienende Rechnungsschema eingetragen werden, bei den Angaben bezüglich Längenmessungen der Wert qb in die Rubrik a, qa in die Rubrik b, $-qc$ in die Rubrik c, $-\cos\delta$ in die Rubrik $\sin\delta$ und $\sin\delta$ in die Rubrik $\cos\delta$ eingesetzt wird ; die fiktive Richtungsabweichung e für die Längenmessergebnisse wird mit der Formel

$$e_i = \frac{q E_i \varrho''}{s_i} \tag{32}$$

berechnet (E ist die Längenabweichung). Die Ausgleichung wird des weiteren so durchgeführt, als ob sämtliche Kräfte von den Richtungsmessergebnissen herstammen würden.

Es soll beachtet werden, dass zu der zwischen denselben Punkten gemessenen Richtungs- und Längenmessung dieselben Richtungskoeffizienten a, b und c gehören, und dass die zur Längenmessung gehörenden Angaben *immer den äusseren Richtungen* zugeteilt werden.

Bei der Durchführung der Ausgleichung werden — unabhängig davon, dass es bei der Gruppe der äusseren Richtungen auch von der Längenmessung herstammende Werte gibt — die zur Behebung der Änderung δz des Orientierungswinkels notwendigen Reduktionen aus den Angaben der *inneren* Richtungen in der bei Richtungsmessungen üblichen Weise berechnet ; dem folgt, ebenfalls in üblicher Weise, die Berechnung der behobenen Orientierungsänderung.

Die Formeln (9) und (10) bzw. (20) geben die Änderung der Richtungswinkel zu den wirklichen und zu den anstelle der Längenmessergebnisse eingesetzten fiktiven Richtungsmessergebnissen, bzw. die Verbesserungen an,

während die Bedingungen unter (11) mit diesen Verbesserungen erfüllt werden. In Formel (9) sind die Richtungskoeffizienten sowie die Winkelfunktionen der Schemaeinteilung gemäss zu deuten, demnach muss bei den die Längenmessergebnisse ersetzenden fiktiven Richtungsmessergebnissen als a betrachtet werden, was in die Rubrik a, als b, was in die Rubrik b eingetragen wurde, usw.; genau so müssen auch die Werte $\sin\delta$ und $\cos\delta$ betrachtet werden.

Zwischen den Längenverbesserungen und den fiktiven Richtungsverbesserungen besteht die Beziehung

$$v_{Li} = \frac{v_i''}{\varrho''}\,\frac{s_i}{q} \quad \text{bzw.} \quad v_i'' = \frac{q\,v_{Li}\,\varrho''}{s_i} \tag{33}$$

7. Beachtung spezieller Gewichte

Es wurde bereits in der Einleitung erwähnt, dass die statische Koordinatenausgleichung die gemessenen Richtungswerte mit einem den Richtungslängen linear proportionalen Richtungsgewicht benutzt. Dasselbe Richtungsgewicht macht sich auch bei den anstelle der Längenmessungen eingesetzten fiktiven Richtungswerten geltend. Das Richtungsgewicht braucht jedoch — wie dies schon besprochen wurde — bei der Ausführung der Ausgleichung nicht besonders beachtet zu werden, da es schon im Aufbau der Ausgleichung inbegriffen ist.

Aus Punkt 6 ergibt sich auch noch, dass — wenn die Ausgleichung auf Grund von Richtungs- und Längenmessungen erfolgt — zwischen den beiden Arten von Messgruppen ein Gewichtsverhältnis festgestellt werden kann. Die Feststellung und Benutzung des Gewichtsfaktors q (Gewichtsverhältnis) wurde ebenfalls im Punkt 6 behandelt.

Es kann sich jedoch auch bei einer gleichartigen Messgruppe ergeben, dass irgendeinem Messergebnis ausser dem den Richtungslängen proportionalen Richtungsgewicht den übrigen Messergebnissen gegenüber noch andere Gewichte zugeschrieben werden, z. B. aus dem Grunde, weil das Messergebnis aus mehr oder weniger Messungen bestimmt wurde als die übrigen, oder z. B. deshalb, weil es erwünscht ist, die sich den Triangulierungspunkten höherer Ordnung anschliessenden Richtungen mit grösserem Gewicht zu verwerten, als die sich den Punkten niederer Ordnung anschliessenden. Wird nun dieses *spezielle Gewicht* der Messergebnisse (das Richtungsgewicht ausser acht lassend) mit g_i bezeichnet, dann müssen bei der Ausgleichung anstelle der Bedingungen unter (6) bzw. (11) die Bedingungen

$$[gv\cos\delta] = 0 \quad \text{und} \quad [gv\sin\delta] = 0 \tag{34}$$

erfüllt werden. Das Gewicht der mit speziellem Gewicht nicht hervorgehobenen Messergebnisse wird zweckmässig als 1 aufgenommen und das Gewicht der hervorgehobenen Messergebnisse wird hierzu ins Verhältnis gebracht.

In dem Falle, wenn bei einer ausschliesslich auf Grund von Richtungsmessungen erfolgenden Ausgleichung das spezielle Gewicht bloss zu einer oder mehreren *äusseren* Richtungen gehört, oder wenn es bei einer ausschliesslich auf Grund von Längenmessungen erfolgenden Ausgleichung zu einer oder mehreren Längenmessungen gehört, wird das spezielle Gewicht bei der Ausgleichung einfach so zur Geltung gebracht, dass in das Berechnungsschema der Ausgleichung anstelle der ohne Beachtung des Gewichtes berechneten Richtungskoeffizienten a_i, b_i und c_i, sowie anstelle der Richtungsabweichungen e_i bezüglich der mit besonderem Gewicht versehenen Messergebnisse deren g_i-faches, d. h. die Werte $g_i a_i$, $g_i b_i$, $g_i c_i$ und $g_i e_i$ eingetragen werden. Dies bedeutet dem Wesen nach, dass die s_i lange gemessene Richtung bzw. die gemessene Länge s_i durch eine s_i/g_i lange *(reduzierte Länge)* fiktive Richtungsmessung ersetzt wurde. Die Ausgleichung wird auf Grund der ins Schema eingetragenen Angaben, den Verlauf des allgemeinen Verfahrens ohne jegliche Änderung verfolgend, ausgeführt. Auf diese Weise geben bei den mit speziellem Gewicht versehenen Messergebnissen die Formeln (9) und (10) die Richtungswinkeländerung bzw. Verbesserung des eingesetzten *fiktiven Richtungsmessergebnisses* an. Diese Verbesserung muss in den Ausdrücken unter (11) eingesetzt werden, damit die Nullbedingung der Projektionssummen erfüllt wird. Bei der Richtungsmessung beträgt die zum *wirklichen Messergebnis* gehörende Richtungswinkeländerung und Verbesserung, wenn diese mit Buchstaben ohne Beistrich, und die zum fiktiven Richtungsmessergebnis gehörenden Angaben mit Beistrich versehenen Buchstaben bezeichnet sind :

$$\delta\delta_i = \frac{\delta\delta_i'}{g_i} \qquad v_i = \frac{v_i'}{g_i}. \tag{35}$$

Im Falle von Längenmessungen beträgt die Längenverbesserung :

$$v_{Li} = \frac{v_i'}{\varrho}\,\frac{s_i}{g_i}. \tag{36}$$

Erfolgt die Ausgleichung auf Grund von Richtungs- und Längenmessungen und wird irgendeinem Längenmessergebnis im Verhältnis zum Ergebnis der übrigen Längenmessungen (vom Richtungsgewicht abgesehen) das spezielle Gewicht g_i zugeschrieben, wobei auch noch zwischen Richtungs- und Längenmessungen der Gewichtsfaktor q beachtet werden muss, ist bei diesem Längenmessergebnis — in allem anderen dem Punkt 6 folgend — anstelle des Wertes q der Wert qg_i zu benutzen.

Wenn einzelnen *inneren* Richtungen ein spezielles Gewicht zugeschrieben wird, dann wird der genäherte Wert des Orientierungswinkels mit der Formel

$$(Z) = \frac{[gs\,(z)]}{[gs]} \tag{37}$$

berechnet, während die Eliminierung bzw. Bestimmung seiner Änderung auf Grund der Formeln

$$\left[gs\,\frac{v}{\varrho}\right] = 0 \qquad \delta z = \frac{[g\cos\delta]\,\delta y - [g\sin\delta]\,\delta x}{D}$$
$$D = 0,\,048\,48\,[gs]_{\text{km}} \tag{38}$$

erfolgt.

Demgemäss werden die zur Eliminierung der Unbekannten δz anzuwendenden Reduktionen — im Übrigen gänzlich nach dem Muster der Formeln unter (19) — anstelle der die inneren Richtungen betreffenden Werte $[\cos\delta]$ und $[\sin\delta]$ aus den Summengliedern $[g\cos\delta]$ und $[g\sin\delta]$ berechnet. Die Ausgleichung wird übrigens auf Grund der ins Rechnungsschema genau wie bei den äusseren Richtungen eingeschriebenen Angaben (ga, gb, gc und ge) ausgeführt ; dem allgemeinen Verfahren gegenüber besteht eine Abweichung in der Berechnung der Reduktionen ausser dem Obengesagten noch darin, dass nach der Bestimmung der Koordinatenänderungen die Änderung des Orientierungswinkels δz mit der Formel (38), und die Verbesserung der anstelle der mit speziellem Gewicht versehenen inneren Richtungen eingesetzten fiktiven Richtungsmessergebnisse statt der Formel (20) mit der Formel

$$v_i' = \delta\delta_i' + e_i' - g_i\,\delta z \tag{39}$$

berechnet wird. Die Richtungswinkeländerung $\delta\delta_i'$ muss mit den ins Rechnungsschema eingetragenen Richtungskoeffizienten berechnet werden und e_i' bedeutet auch die ins Schema eingetragene Richtungsabweichung ($e_i' = g_i e_i$). Die zur effektiven Richtungsmessung gehörende Richtungswinkeländerung und Verbesserung kann den Beziehungen (35) gemäss aus den zur entsprechenden fiktiven Ersatzrichtungsmessung Gehörenden bestimmt werden.

Es versteht sich von selbst, dass in dem Falle, wenn angenommen wird, dass die inneren Richtungen das gleiche Gewicht besitzen (selbstverständlich abgesehen vom Richtungsgewicht) und im Verhältnis zu diesen den äusseren Richtungen (ebenfalls vom Richtungsgewicht abgesehen) ein anderes Gewicht zugeschrieben wird, zur Vereinfachung der Rechnung das Gewicht der inneren Richtungen mit 1 bezeichnet und das spezielle Gewicht der äusseren Richtungen zu diesem ins Verhältnis gebracht wird.

Der Vollkommenheit halber muss noch erwähnt werden, dass — wenn mehrere Messergebnisse sich mit speziellem Gewicht von den anderen unterscheiden und diese speziellen Gewichte eventuell auch noch voneinander abweichen — nichts dem im Wege steht, bei jedem solchen Messergebnis dem Obengesagten gemäss das entsprechende Gewicht g_i zu benutzen, wenn wiederum sämtliche Messergebnisse mit voneinander abweichenden oder gruppenweise abweichenden speziellen Gewichten versehen werden müssen, bei sämtlichen Messerergebnissen dem Obengesagten gemäss das entsprechende Gewicht g_i zu benutzen.

8. Ausgleichung mit Zwangbedingung

In der statischen Koordinatenausgleichung rufen auch die Zwangbedingungen Kräfte hervor. Einer Zwangbedingung kann auf unendlich viele Arten entsprochen werden. Wenn z. B. erfordert wird, dass der Neupunkt sich in einer gegebenen Entfernung von einem bekannten Punkt befinden soll, wird dem so entsprochen, wenn der Neupunkt auf irgendeine beliebige Stelle des Kreises gerät, der um den bekannten Punkt mit einem der gegebenen Entfernung entsprechenden Radius gezogen wurde. Dementsprechend kann die Zwangbedingung von unendlich vielerlei, der Grösse, Richtung und dem Sinne nach verschiedenen Kräften vertreten werden. Zur Lösung der Aufgabe der Ausgleichung wird unter diesen jene vorerst noch unbekannte Kraft gewählt, welche — nachdem das Gleichgewicht des durch die Messergebnisse gegebenen Kräftesystems gestört wurde — den Punkt von der rein auf Grund der Messergebnisse bestimmbaren ausgeglichenen Punktlage verschiebt und ihn samt dem von den Messergebnissen herstammenden Kräftesystem *mit der geringsten Arbeitsausführung* in eine andere Punktlage bringt, wo das gesamte, aber schon veränderte Kräftesystem ins Gleichgewicht gerät.

In Bezug auf die Studie [2] wird hier die Ableitung ausser acht gelassen und bloss der Lauf der Ausgleichung bekanntgegeben.

1. Es werden — die Zwangbedingungen vorerst gänzlich ausser acht gelassen — die ausschliesslich von den Messergebnissen herstammenden Gleichgewichtsgleichungen aufgestellt, wobei im Falle der inneren Richtungen auch die Reduktionen beachtet werden, die eine Folge der Eliminierung der Orientierungsunbekannten sind:

$$f_1 \qquad f_2. \tag{40}$$

2. Aus der Zwangbedingungsgleichung, die in jedem Falle (nötigenfalls nach der Reihenentwicklung) in der linearen Form

$$k = A\delta y + B\delta x + T = 0 \tag{41}$$

aufgeschrieben werden kann, wird die eine Unbekannte (die eine Koordinatenänderung) mit Hilfe der anderen ausgedrückt, während für die letztere eine Identitätsgleichung aufgeschrieben wird. Wird z. B. die Unbekannte δx ausgedrückt, dann beträgt

$$\begin{aligned} \delta y &= A_1 \delta y \\ \delta x &= A_2 \delta y + T_2, \end{aligned} \tag{42}$$

wobei $A_1 = 1$.

3. Die die Zwangbedingung auch in sich schliessende Gleichgewichtsgleichung beträgt

$$g = [Af] = 0, \tag{43}$$

d. h.

$$g = f_1 + A_2 f_2 = 0. \tag{44}$$

4. In die Gleichung g wird der Wert der aus der Zwangbedingungsgleichung k ausgedrückten Unbekannten laut (42) eingesetzt, d. h. anstelle des Wertes δx wird der Ausdruck $(A_2 \delta y + T_2)$ eingesetzt und die Gleichung g sodann geordnet.

5. Aus der Gleichung g kann die andere Unbekannte, d. h. der Wert δy berechnet werden.

6. Hiernach wird die Unbekannte δx aus dem Ausdruck (42) berechnet.

Wenn nun gegebenenfalls aus der Zwangbedingungsgleichung die Koordinatenänderung δy ausgedrückt sein würde, dann würden die einzelnen Schritte vom 2. Schritt angefangen folgendermassen aussehen:

$$\begin{aligned} 2. \quad \delta y &= A_1' \delta x + T_1' \\ \delta x &= A_2' \delta x, \end{aligned} \tag{45}$$

wobei $A_2' = 1$ ist;

3. Die die Zwangbedingung auch in sich schliessende Gleichgewichtsgleichung:

$$g' = [A' f] = A_1' f_1 + f_2 = 0. \tag{46}$$

4. In die Gleichung g' wird der in (45) ausgedrückte Wert von δy, d. h. $(\delta y = A_1' \delta x + T_1')$ eingesetzt und sodann die Gleichung g' geordnet;

5. Aus der Gleichung g' wird die Koordinatenänderung δx berechnet und schliesslich

6. auf Grund der Gleichung (45) auch die Koordinatenänderung δy.

Werden nun die unter dem Einfluss der Zwangbedingung entstandenen Koordinatenänderungen in die Gleichgewichtsgleichungen f unter (40) eingesetzt, welche, ungeachtet der Zwangbedingung, rein auf Grund der Messergebnisse aufgestellt wurden, so erfüllen diese Gleichungen selbstverständlich die

Nullbedingung nicht, sondern ergeben den Wert jener Projektion, welche der die Zwangbedingung darstellenden Kraft entspricht, doch mit entgegengesetztem Vorzeichen; d. h. wenn die Projektionen der die Zwangbedingung darstellenden Kraft mit V_y und V_x bezeichnet werden:

$$f_1 = -V_y \quad f_2 = -V_x. \tag{47}$$

Eine fehlerfreie Berechnung angenommen, können innerhalb der Berechnungsschärfe dieselben Werte auch so erreicht werden, dass in der schon bei den vorigen Aufgaben kennengelernten Weise zu sämtlichen Messergebnissen (wenn anstelle des effektiven Messergebnisses das fiktive Messergebnis eingesetzt wird, dann zu diesem) die Verbesserung berechnet und deren y- bzw. x-gerichteten Projektionen addiert werden.

9. Ausgleichung unter Beachtung der Messfehler der Orientierungsrichtungen

Im Vorlaufenden wurden — wie in der allgemeinen Praxis üblich — als Messergebnis der von den gegebenen Punkten dem zu bestimmenden Neupunkt zulaufenden (äusseren) Richtungen die vor der Ausgleichung endgültig orientierten Richtungswerte betrachtet. Es gibt jedoch Ausnahmefälle, wo in der Ausgleichung auch die Messfehler der Orientierungsrichtungen beachtet werden sollen. In solchen Fällen werden die in den einzelnen gegebenen Punkten gemessenen Richtungssätze vor der Ausgleichung mit je einem genäherten Orientierungswinkel (Z) orientiert und der endgültige Orientierungswinkel $Z = (Z) + \delta z$ der Richtungssätze mit der Ausgleichung bestimmt.

Es soll z. B. der eine gegebene Punkt, von welchem der zu bestimmende Punkt P visiert wurde, mit A bezeichnet werden. In dem im Punkt A gemessenen Richtungssatz wurden ausser der nach dem Punkt P laufenden Richtung auch noch die nach den gegebenen Punkten I, II ... laufenden Orientierungsrichtungen gemessen. Verbesserung der gemessenen Richtungswerte:

$$\begin{aligned}
v_{AP} &= -\delta z_A + \frac{0{,}1\,\varrho'' \cos\delta_{AP}}{s_{AP}}\delta y_P - \frac{0{,}1\,\varrho'' \sin\delta_{AP}}{s_{AP}}\delta x_P + e_{AP} \\
v_I &= -\delta z_A + e_{AI} \\
v_{II} &= -\delta z_A + e_{AII} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{48}$$

Die Richtungsabweichungen werden mit der Formel

$$e_i = \delta_i - L_i - (Z_A) = z_i - (Z_A) \tag{49}$$

berechnet, in welcher L der gemessene Richtungswert, (Z_A) der genäherte Orientierungswinkel ist. Bei den den gegebenen Punkten zulaufenden (Orientierungs-)Richtungen bedeutet δ einen endgültigen und bei der dem Neupunkt zulaufenden (bestimmenden) Richtung einen genäherten Richtungswinkel.

Auf Grund der Gleichgewichtsbedingung des auf den Punkt A bezüglichen *Drehmomentes* kann den Gleichungen (13) und (14) entsprechend die Gleichung

$$\frac{[sv]_A}{0{,}1\,\varrho''} = \cos\delta_{AP}\,\delta y_P - \sin\delta_{AP}\,\delta x_P + \frac{10}{\varrho''}[es] - \frac{10}{\varrho''}\,\delta z_A\,[s] = 0 \tag{50}$$

aufgestellt werden. Es werde nun der genäherte Wert des Orientierungswinkels laut Formel

$$(Z_A) = \frac{[sz]}{[s]} \tag{51}$$

aufgenommen, wo

$$z_i = \delta_i - L_i \tag{52}$$

und zwar so, dass in die Berechnung auch der zu der dem Neupunkt P zulaufenden Richtung gehörende Wert z eingezogen wird (selbstverständlich mit dem genäherten Richtungswinkel berechnet). In diesem Falle ist

$$[es] = 0 \tag{53}$$

und dementsprechend nach Gleichung (50), die Bezeichnung

$$D = \frac{10}{\varrho''}[s]_{\mathrm{dm}} = 0{,}048\,48\,[s]_{\mathrm{km}} \tag{54}$$

verwendend, wird die Änderung des Orientierungswinkels:

$$\delta z_A = \frac{\cos\delta_{AP}\,\delta y_P - \sin\delta_{AP}\,\delta x_P}{D_A}\,. \tag{55}$$

Der Ausdruck δz sei in die Gleichung (48) von v_{AP} eingesetzt, die Gleichung mit dem Wert $-\cos\delta_{AP}$ bzw. $\sin\delta_{AP}$ multipliziert, d. h. folgende Kräfteprojektionen dargestellt:

$$\begin{aligned} -v_{AP}\cos\delta_{AP} &= a'_{AP}\,\delta y_P + c'_{AP}\,\delta x_P - e_{AP}\cos\delta_{AP} \\ v_{AP}\sin\delta_{AP} &= c'_{AP}\,\delta y_P + b'_{AP}\,\delta x_P + e_{AP}\sin\delta_{AP}, \end{aligned} \tag{56}$$

wobei

$$a'_{AP} = a_{AP} + \frac{\cos^2 \delta_{AP}}{D_A} \qquad b'_{AP} = b_{AP} + \frac{\sin^2 \delta_{AP}}{D_A}$$

$$c'_{AP} = c_{AP} - \frac{\sin \delta_{AP} \cos \delta_{AP}}{D_A}. \tag{57}$$

Die nach der Richtung A—P berechneten Richtungskoeffizienten müssen demnach der Formelgruppe (57) entsprechend reduziert werden. In das Ausgleichungsschema werden in die zur Richtung A—P gehörende Reihe anstelle der originellen Richtungskoeffizienten die reduzierten (die Werte a', b' und c') eingetragen. Bei der Weiterleitung der Ausgleichung müssen die Orientierungsrichtungen nicht weiter beachtet werden, sind bloss bei der Berechnung des mittleren Fehlers wieder heranzuziehen.

Wird bezüglich der auf den übrigen gegebenen Punkten gemessenen Richtungen auf ähnliche Weise vorgegangen, muss nach Bestimmung der Koordinatenänderung δy und δx des Punktes P zu sämtlichen Stationen die Änderung des Orientierungswinkel berechnet werden, und zwar bezüglich des Punktes P nach der Formel (17) und bezüglich der gegebenen Punkte nach der Formel (55) — jedoch selbstverständlich immer unter Benutzung der Angaben der fraglichen Station. Hernach müssen die Verbesserungen berechnet werden, und zwar zwecks der Berechnung des mittleren Fehlers auch die Verbesserung der Orientierungsrichtungen. Die Verbesserung auf die Richtung A—P beträgt z. B.:

$$v_{AP} = \delta\delta_{AP} + e_{AP} - \delta z_A, \tag{58}$$

wozu die Richtungswinkeländerung $\delta\delta_{AP}$ auf der üblichen Weise mit der Formel (9) berechnet wird und z. B. die Verbesserung der Orientierungsrichtung A—I

$$v_{AI} = e_{AI} - \delta z_A. \tag{59}$$

10. Berechnung des mittleren Fehlers

Der mittlere Fehler der *Gewichtseinheit* nach der Ausgleichung wird in jedem Falle aus der allgemein bekannten Formel

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{pvv}{f}} \tag{60}$$

berechnet, wo f die Zahl der überschüssigen Beobachtungen, p die effektiven Gewichte und v die Verbesserung der effektiven Messungen bedeutet.

1. *Bei der rein auf Grund von Richtungsmessungen ausgeführten Ausgleichung*, wenn ausser des linear proportionierten Richtungsgewichtes der

Richtungslängen kein anderes Gewicht (spezielles Gewicht) beachtet wird:

$$p_i = s_i \tag{61}$$

in Kilometereinheit. In diesem Sinne ergibt die Formel (60) den mittleren Fehler der Messung der 1 km langen Richtung, in Sekunden ausgedrückt. Der mittlere Fehler der Messung einer s_i langen Richtung nach Ausgleichung beträgt:

$$\mu_i = \frac{\mu_0}{\sqrt{s_i}}. \tag{62}$$

Wenn sich zwischen den gemessenen Richtungen auch eine mit speziellem Gewicht versehene Richtung befindet, kann diesbezüglich für den Zähler der Formel (60) das Produkt $p_i v_i^2$ entweder mit der Verbesserung v_i der effektiven Messung und mit dem Gewicht $g_i s_i$, oder mit der Verbesserung v_i' des eingesetzten fiktiven Messergebnisses und der hierzu gehörenden reduzierten Länge s_i/g_i ausgerechnet werden, denn auf Grund der Beziehung auf der rechten Seite der Formel (35) ist

$$g_i s_i v_i^2 = \frac{s_i}{g_i} v_i'^2. \tag{63}$$

Der mittlere Fehler der Messung der mit speziellem Gewicht versehenen s_i langen Richtung beträgt nach der Ausgleichung:

$$\mu_i = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_i s_i}}. \tag{64}$$

2. *Bei der rein auf Grund von Längenmessungen*, ohne spezielle Gewichte *ausgeführten Ausgleichung* ist

$$p_i = \frac{1}{s_i}. \tag{65}$$

Den Wert s_i in Kilometereinheit beachtend und den Zähler der Formel (60) aus den Längenmessverbesserungen v_{Li} berechnend, ergibt die Formel (60) den mittleren Fehler der Messung der 1 km langen Entfernung. Der mittlere Fehler der Messung einer Entfernung s_i wiederum beträgt nach der Ausgleichung

$$\mu_{Li} = \sqrt{s_i}\mu_0. \tag{66}$$

Wenn sich unter den Längenmessergebnissen auch mit speziellem Gewicht versehene Messergebnisse befinden, so wird diesbezüglich für den Zähler der Formel (60) das Produkt

$$p_i v_i^2 = \frac{g_i}{s_i} v_{Li}^2 \tag{67}$$

ausgerechnet und der mittlere Fehler eines solchen Längenmessergebnisses ist nach der Ausgleichung

$$\mu_{Li} = \sqrt{\frac{s_i}{g_i}}\,\mu_0. \tag{68}$$

Der Zähler der Formel (60) kann jedoch auch aus der Verbesserung der anstelle der Längenmessergebnisse eingesetzten fiktiven Richtungsmessungen berechnet werden, wobei jener mittels Addition der Produkte $s_i v_i^2$ dargestellt wird. Aus dem auf diese Weise berechneten mittleren Fehler der Gewichtseinheit ergibt sich als mittlerer Fehler des Längenmessergebnisses der Entfernung s_i, in Metern ausgedrückt :

$$\mu_{Li} = \mu_0 \frac{1000}{\varrho''} \sqrt{s_i} \tag{69}$$

bzw. im Falle des speziellen Gewichtes g_i :

$$\mu_{Li} = \mu_0 \frac{1000}{\varrho''} \sqrt{\frac{s_i}{g_i}}. \tag{70}$$

Dieses Rechnungsverfahren wird auch dann verfolgt, wenn auch mittlere Koordinatenfehler berechnet werden müssen, denn der Wert μ_0 der Formeln (76) und (77) entspricht diesem Rechnungsverfahren.

3. Kommen *Richtungs- und Längenmessungen gemeinsam* vor, so werden in die Formel (60) zweckmässig die in Sekunden ausgedrückten Verbesserungen und die in Kilometern ausgedrückten Entfernungen eingesetzt. Im Falle einer Ausgleichung ohne spezielle Gewichte ist bei effektiven Richtungsmessungen das Gewicht gleich der in Kilometern ausgedrückten Entfernung :

$$p_i = s_i\,, \tag{71}$$

und bei den die Längenmessergebnisse ersetzenden fiktiven Richtungsmessungen :

$$p_i = \frac{s_i}{q}\,, \tag{72}$$

wo q der mit der Formel (31) bestimmte Gewichtsfaktor ist.

Der mittlere Fehler einer s_i km langen Richtung nach der Ausgleichung, in Sekunden ausgedrückt :

$$\mu_i = \frac{\mu_0}{\sqrt{s_i}}\,, \tag{73}$$

während der mittlere Fehler der Längenmessung einer s_i km langen Linie nach der Ausgleichung, in Metern ausgedrückt

$$\mu_{Li} = \mu_0 \frac{1000}{\varrho''} \sqrt{\frac{s_i}{q}}. \tag{74}$$

beträgt.

Bei der Anwendung spezieller Gewichte wird für den Zähler der Formel (60) bei den gewogenen Richtungsmessergebnissen auf Grund der Beziehung (63) der Wert $p_i v_i^2$ mit der Verbesserung v_i' der eingesetzten fiktiven Richtungsmessungen und mit der entsprechenden reduzierten Länge s_i/g_i berechnet. Der mittlere Fehler eines solchen Richtungsmessergebnisses wird nach der Ausgleichung laut Formel (64) berechnet.

Bei den mit speziellem Gewicht versehenen Längenmessergebnissen wird für den Zähler der Formel (60) der Wert $p_i v_i^2$ mit der Verbesserung v' der entsprechenden fiktiven Richtungsmessung und der dazu gehörenden reduzierten Länge s_i/qg_i berechnet. Nach der Ausgleichung beträgt der mittlere Fehler des Längenmessergebnisses an sich, in Metern ausgedrückt:

$$\mu_{Li} = \mu_0 \frac{1000}{\varrho''} \sqrt{\frac{s_i}{qg_i}}. \tag{75}$$

4. Nachdem die Koeffizienten und das Absolutglied der Gleichgewichtsgleichungen das (—0,0001 ϱ'')-fache der entsprechenden Glieder der Normalgleichung der [svv] Quadratsummenminimum-bedingten Ausgleichung betragen (siehe Studie [1]), d. h., das Vorzeichen unbeachtet gelassen und mit genügender Genauigkeit um das 20,63fache kleiner sind, kann die Berechnung des Gewichtes, bzw. des Gewichtskoeffizienten der Unbekannten genau so ausgeführt werden, wie bei den Normalgleichungen, wenn die von den Gleichgewichtsgleichungen herstammenden entsprechenden Werte beim Gewicht mit 20,63 multipliziert, beim Gewichtskoeffizienten mit 20,63 dividiert werden. Obzwar das Vorzeichen der Koeffizienten und des Absolutgliedes der Gleichgewichtsgleichungen entgegengesetzt ist dem Vorzeichen der entsprechenden Glieder der Normalgleichungen, kann die Abweichung im Vorzeichen bei der Bestimmung des immer positiven Gewichtes, bzw. Gewichtskoeffizienten keine Störung verursachen. Wenn sich demnach für die Koordinaten des Neupunktes während der Lösung der Gleichgewichtsgleichungen die mit den Gewichten proportionalen Werte p_y' bzw. p_x' ergeben, dann beträgt der mittlere Fehler der durch Ausgleichung bestimmten Koordinaten, in Metern ausgedrückt und bloss den Absolutwert der Werte p_y' und p_x' beachtet

$$\mu_y = \frac{0{,}1\,\mu_0}{\sqrt{20{,}63\,p_y'}} = 0{,}022\frac{\mu_0}{\sqrt{p_y'}} \quad \text{und} \quad \mu_x = 0{,}022\frac{\mu_0}{\sqrt{p_x'}}. \tag{76}$$

Wenn wiederum die Gleichgewichtsgleichungen die zu den Gewichtskoeffizienten proportionalen Werte Q'_y und Q'_x ergeben, wird, ihr Vorzeichen ebenfalls unbeachtet gelassen, der mittlere Fehler der Koordinaten, in Metern ausgedrückt, folgendermassen aussehen :

$$\mu_y = 0{,}1\sqrt{\frac{Q'_y}{20{,}63}}\,\mu_0 = 0{,}022\sqrt{Q'_y}\,\mu_0 \quad \text{und} \quad \mu_x = 0{,}022\sqrt{Q'_x}\,\mu_0. \tag{77}$$

5. Wurde bei der Ausgleichung auch der Messfehler der Orientierungsrichtungen beachtet, so müssen diese auch in die Formel (60) herangezogen werden. Die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen beträgt

$$f = n - (N + k) \tag{78}$$

wo n die gesamte Zahl der gemessenen Orientierungs- und Bestimmungsrichtungen (bzw. die Anzahl der gesamten Messungen) ist, N die Anzahl der gegebenen Stationen und $k = 3$ oder 2, je nachdem, ob auf dem Neupunkt ebenfalls eine Richtungsmessung ausgeführt wurde oder nicht.

Beispiele

1. Beispiel. Zur Bestimmung des Punktes P wurden auf *Abb. 4* mit der Laufnummer 1—4 bezeichnete innere und mit der Laufnummer 5—8 bezeichnete äussere Richtungen gemessen. Es wurde ausserdem noch die Entfernung $\overline{AP}$ gemessen (Messergebnis 9).

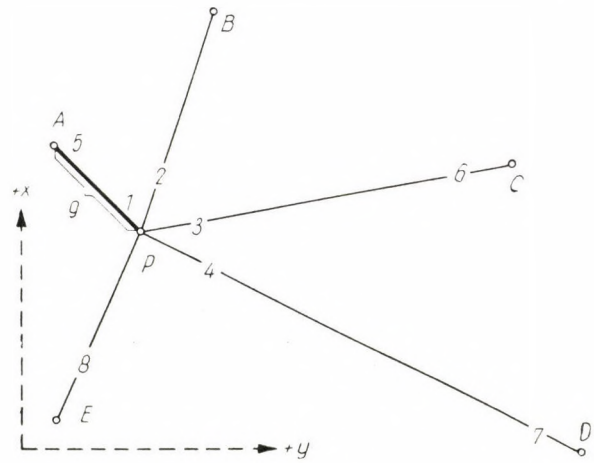


Abb. 4

Zur Bestimmung des Gewichtsfaktors q wurde vom Punkt A der Punkt P öfters gerichtet und die Entfernung AP ebenso oft gemessen. Es ergab sich bei der Richtungsmessung ein mittlerer Fehler von $\mu_i = \pm 5{,}97''$ und bei der Längenmessung ein mittlerer Fehler von $\mu_L = \pm 0{,}0108$ m. Die Formel (31) ergibt mit diesen Daten und dem Entfernungswert $s = \overline{AP} = 311{,}21$ m einen Gewichtsfaktor von $q = 0{,}67$.

Als Richtungsmessergebnisse werden bei den inneren Richtungen die Richtungswerte des im Punkt P gemessenen Richtungssatzes, bei den äusseren Richtungen die orientierten Richtungswerte angenommen. Rubrik L der Tabelle 1 gibt diese Werte an. In dieselbe Rubrik wurde auch das Längenmessergebnis eingetragen. Koordinaten des bekannten Punktes:

$y_A = + 24\,326{,}70$ m	$x_A = - 40\,251{,}28$ m
$y_B = + 24\,850{,}12$ m	$x_B = - 39\,574{,}57$ m
$y_C = + 26\,018{,}57$ m	$x_C = - 40\,211{,}84$ m
$y_D = + 26\,471{,}28$ m	$x_D = - 41\,512{,}76$ m
$y_E = + 24\,170{,}83$ m	$x_E = - 41\,250{,}31$ m

Die Ausführung der Ausgleichung wird schrittweise verfolgt.

1. Aus einem (oder mehreren) dem Punkt P einen guten Schnitt bietenden Dreieck werden genäherte Koordinaten berechnet:

$$(y) = + 24\,540{,}66 \text{ m} \qquad (x) = - 40\,477{,}50 \text{ m}.$$

2. Auf Grund der genäherten Koordinaten des Punktes P werden auf sämtliche gemessene Richtungen der genäherte Richtungswinkel (δ) und die Richtungskoeffizienten a, b, c berechnet, sowie die Werte sin (δ) und cos (δ) ausgesucht. Der genäherte Richtungswinkel (und mit diesem im Zusammenhang auch die übrigen erwähnten Werte) werden so berechnet, dass das Ergebnis sich auf die dem Neupunkt zulaufende Richtung bezieht. Auf Grund der genäherten Koordinaten des Punktes P wird zur gemessenen Länge auch die genäherte Entfernung (s) berechnet. Die genäherten Richtungswinkel bzw. in der Reihe der Längenmessung die genäherte Entfernung werden in die Rubrik (δ) der Tabelle 1 eingetragen, während die übrigen ausgerechneten, ausgesuchten Werte in die entsprechende Rubrik der Tabelle 2 eingeführt werden, die inneren und äusseren Richtungen für sich gruppiert. Die Längenmessung (oder Längenmenssungen) kommen immer zu den äusseren Richtungen. In der Reihe der Längenmessung wird die Menge qb in die Rubrik a, qa in die Rubrik b und $-qc$ in die Rubrik c eingetragen. (Zu dem Richtungsmessergebnis 1 und 5 sowie zu dem Längenmessergebnis 9 gehören dieselben Werte a, b und c. Die in die Reihe der Längemessung eingetragenen Werte sind:

$$qa = 0{,}67\,(-31{,}3); \qquad qb = 0{,}67\,(-35{,}0) \qquad \text{und} \qquad -qc = -0{,}67\,(-33{,}1).$$

3. Die Richtungsabweichungen e werden in Tabelle 1 berechnet. Bei äusseren Richtungen ist $e = (\delta) - L$, bei inneren Richtungen $e = (\delta) - L - (Z)$, wobei (Z) der genäherte Wert des Orientierungswinkels ist. Dieser wird mit der Formel (15) berechnet. Was die Längenmessung betrifft, so wird der Wert e aus der Längenabweichung $E = (s) - L$ mittels der Formel (32) berechnet. In die Rubrik s der Tabelle 1 werden auch die Richtungslängen eingetragen, bei inneren Richtungen mit einer Schärfe von Hundertstel Kilometern, bei äusseren Richtungen von Zehntel Kilometern. Bei der anstelle der Längenmessung eingesetzten fiktiven Richtungsmessung muss der Wert s/q eingetragen werden.

4. In Tabelle 2 werden die Werte $e \sin \delta$ und $e \cos \delta$ aus den eingetragenen Werten berechnet, und danach bezüglich sämtlicher Richtungen (einschliesslich die die Längenmessung ausdrückende fiktive Richtung) die Glieder der Rubriken a, b, c, $e \sin \delta$ und $e \cos \delta$ einzeln addiert. Nur bezüglich der inneren Richtungen werden noch die Summenwerte $[\sin \delta]$ und $[\cos \delta]$ sowie laut Formel (17) auch der Wert D berechnet.

5. Die in Tabelle 2 vorgeschriebenen Reduktionen werden ausschliesslich aus den die inneren Richtungen betreffenden Angaben berechnet. Die vorgeschriebenen Werte ergeben die Hilfsmengen M. Werden diese mit D dividiert, so erhält man die Reduktionen l. Im Schema ist auch vorgeschrieben, welche Reduktion wohin gehört und auch, ob diese mit dem ursprünglichen Vorzeichen des berechneten Wertes (mit + bezeichnet) oder mit dem entgegengesetzten

Tabelle 1

Messung	Standpunkt	Zielpunkt	s km	L ° ′ ″	(δ) ° ′ ″	(z) ° ′ ″	e ″	δ ° ″	z ° ′ ″	v ″	svv
1	P	A	0,31	316 32 45	316 35 43	0 2 58	+52,5	316 35 30,8	0 2 45,8	+29,6	262,8
2		B	0,95	18 53 25	18 55 5	0 1 40	—25,5	18 55 27,8	0 2 2,8	—13,4	179,6
3		C	1,50	79 46 44	79 48 35	0 1 51	—14,5	79 48 51,2	0 2 7,2	— 9,0	121,5
4		D	2,19	118 9 47	118 12 6	0 2 19	+13,5	118 12 11,4	0 2 24,4	+ 8,2	147,9
			4,95			(Z)=0° 2′ 5,5″			Z=0° 2′16,2″		
5	A	P	0,3	136 35 43	136 35 43		0	136 35 30,8		—12,2	44,6
6	C		1,5	259 48 47	259 48 35		—12	259 48 51,2		+ 4,2	26,5
7	D		2,2	298 11 56	298 12 6		+10	298 12 11,4		+15,4	521,8
8	E		0,9	25 34 25	25 34 25		0	25 33 57,4		—27,6	685,6
9	$\overline{AP}$		0,5	311,210 m	311,376 m	+0,166 m	+110	311,246 m	+0,036 m	+15,9	126,4
											2116,7

Tabelle 3

Messung	$a\delta y$ oder $c\delta y$	$c\delta x$ oder $b\delta x$	[ ]	$-\cos\delta$ oder $\sin\delta$	$\delta\delta$	e	$-\delta z$	v	s	svv	$v\sin\delta$	$v\cos\delta$
1	+26,11	—35,28	— 9,17	+0,726	—12,63	+52,5	—10,94	+28,93	0,3	251,1	+19,88	—21,00
2	+14,40	+ 7,04	+21,44	+0,946	+22,66	—25,5	—10,94	—13,78	1,0	189,9	+ 4,47	+13,04
3	— 1,79	—14,18	—15,97	—0,984	+16,23	—14,5	—10,94	— 9,21	1,5	127,2	+ 9,07	+ 1,64
4	+ 2,91	— 7,78	— 4,87	—0,881	+ 5,53	+13,5	—10,94	+ 8,09	2,2	144,0	— 7,12	+ 3,84
5	+26,11	—35,28	— 9,17	+0,726	—12,63	0		—12,63	0,3	47,8	— 8,67	+ 9,17
6	— 1,79	—14,18	—15,97	—0,984	+16,23	—12		+ 4,23	1,5	26,9	— 4,16	— 0,75
7	+ 2,91	— 7,78	— 4,87	—0,881	+ 5,53	+10		+15,53	2,2	530,6	—13,67	+ 7,35
8	+14,62	+10,02	+24,67	—0,902	—27,32	0		—27,32	0,9	671,8	—11,80	—24,64
9	+15,67	+23,66	+39,33	—0,687	—57,25	+73,7		+16,45	0,5	135,3	+11,95	+11,31
										2124,6	— 0,05	— 0,04

Tabelle 2

Messung	a	b	c	e	sin δ	cos δ	e sin δ	e cos δ
1	—35,0	—31,3	—33,1	+52,5	+0,687	—0,726	+36,07	—38,12
2	—19,3	— 2,3	+ 6,6	—25,5	—0,324	—0,946	+ 8,26	+24,12
3	— 0,4	—13,3	+ 2,4	—14,5	—0,984	—0,177	+14,26	+ 2,56
4	— 2,1	— 7,3	— 3,9	+13,5	—0,881	+0,473	—11,89	+ 6,38
					—1,502	—1,376		
5	—35,0	—31,3	—33,1	0	+0,687	—0,726	0,00	0,00
6	— 0,4	—13,3	+ 2,4	—12	—0,984	—0,177	+11,81	+ 2,12
7	— 2,1	— 7,3	— 3,9	+10	—0,881	+0,473	— 8,81	+ 4,73
8	—19,6	— 4,5	+ 9,4	0	+0,432	+0,902	0,00	0,00
9	—21,0	—23,4	+22,2	+73,7	+0,726	+0,687	+53,51	+50,63
[ ]	—134,9	—134,0	—31,0					
Δ	+ 7,9	+ 9,4	— 8,6					
[ ]	—127,0	—124,6	—39,6				+103,21	+52,42

Nur für innere Richtungen :
$[s] = 4{,}95$ km
$D = 0{,}04848\ [s] = 0{,}240$

Reduktionen	Δ'	$\Delta = \frac{\Delta'}{D}$		
[cos δ] [cos δ]	+1,8934	+7,89	a	+
[sin δ] [sin δ]	+2,2560	+9,40	b	+
[sin δ] [cos δ]	+2,0667	+8,61	c	—

Vorzeichen (mit — bezeichnet) angewendet werden soll. Die Reduktionen werden betreffs sämtlicher Richtungen unter die dem 4. Schritt gemäss berechneten entsprechenden Summenglieder eingetragen. Nachdem Summenglieder und Reduktionen zusammengezogen wurden, erhält man zwei Gleichgewichtsgleichungen :

$$-127{,}0\,\delta y - 39{,}6\,\delta x - 52{,}4 = 0$$
$$-39{,}6\,\delta y - 124{,}6\,\delta x + 103{,}2 = 0\,.$$

6. Die Gleichgewichtsgleichungen werden gelöst. (Eventuell multipliziert man erst die Gleichungen mit —1.) Als Ergebnis erhält man folgende Koordinatenänderungen :

$$\delta y = -0{,}746 \text{ dm} \qquad \delta x = +1{,}066 \text{ dm}.$$

7. Mit Formel (17) wird die Änderung des Orientierungswinkels berechnet :

$$\delta z = \frac{(-1{,}376)(-0{,}746) - (-1{,}502)(+1{,}066)}{0{,}240} = +10{,}94''.$$

8. Die Änderung der Richtungswinkel werden aus der Formel

$$\delta\delta_i = \frac{a_i\,\delta y + c_i\,\delta x}{-\cos\delta_i} \qquad \text{oder} \qquad \delta\delta_i = \frac{c_i\,\delta y + b_i\,\delta x}{\sin\delta_i}$$

berechnet (Tabelle 3).

Bei den äusseren Richtungen werden die Verbesserungen mit der Formel $v = \delta\delta + e$, bei den inneren mit der Formel $v = \delta\delta + e - \delta z$ berechnet. Bei der die Längenmessung ersetzenden fiktiven Richtung werden die in Tabelle 2 eingetragenen Richtungskoeffizientenwerte benutzt (d. h. die Werte qa, qb und $-qc$). Die Verbesserung der Längenmessung wird nun aus der linken Seite der Formel (33) berechnet:

$$v_L = \frac{16{,}45''}{\varrho''} \cdot \frac{311}{0{,}67} = 0{,}035 \text{ m}.$$

9. Kontrolle (in Tabelle 3):

$$[v \cos \delta] = -0{,}04 \approx 0 \qquad [v \sin \delta] = -0{,}05 \approx 0$$

(Anstelle des linken Summenwertes müsste eigentlich die Summe der Produkte mit entgegengesetztem Vorzeichen berechnet werden. Da jedoch der Wert hier prinzipiell Null sein müsste, ist das Vorzeichen vom Gesichtspunkt der Kontrolle aus nicht interessant.)

10. In Tabelle 3 werden noch die Mengen svv und $[svv]$ berechnet. Die Längen s werden auf Zehntel-Kilometer beachtet. Bei der die Längenmessung ersetzenden fiktiven Richtungsmessung wird der in die Rubrik s von Tabelle 1 bzw. 3 eingetragene Wert a/q benutzt.

11. Die ausgeglichenen (endgültigen) Koordinaten des Punktes P:

$$y = (y) + \delta y = +24\,540{,}585 \text{ m} \qquad x = (x) + \delta x = -40\,477{,}393 \text{ m}.$$

12. Auf Grund der endgültigen Koordinaten des Punktes P werden die endgültigen Richtungswinkel berechnet und zur gemessenen Länge die endgültige Entfernung. Die im Verhältnis zu den genäherten Richtungswinkeln erhaltenen Richtungswinkeländerungen müssen auf der Berechnungsschärfe (im allgemeinen innerhalb 1″) mit den im 8. Schritt berechneten Werten $\delta\delta$ übereinstimmen.

13. Die im vorigen Schritt erwähnten Werte werden in Tabelle 1 eingetragen und die Verbesserungen v auch hier ausgerechnet. Die Längenmessverbesserung (+0,036 mm) wird auch auf Grund der aus den endgültigen Koordinaten berechneten Entfernung berechnet sowie hieraus mit der rechten Formel (33) auch die zur fiktiven Richtungsmessung gehörende Verbesserung:

$$v_9 = +0{,}67 \frac{0{,}036}{311{.}246} \varrho'' = +15{,}9''.$$

Aus den durch die einzelnen inneren Richtungen gegebenen Orientierungswinkeln z wird ebenfalls in Tabelle 1 der endgültige Orientierungswinkel Z mit der Formel (21) berechnet. Die Berechnung erfolgt übrigens mit der sinngemässen Anwendung des im 3. Schritt beschriebenen Berechnungsverfahrens. Die Werte v müssen innerhalb der Berechnungsschärfe mit den im 8. Schritt erhaltenen entsprechenden Werten übereinstimmen.

14. Aus den Richtungsmessverbesserungen werden die Mengen svv und $[svv]$ berechnet. Diese müssen innerhalb der Berechnungsschärfe mit den im 10. Schritt berechneten Mengen übereinstimmen. (Bei den die Längenmessung ersetzenden fiktiven Richtungsmessungen wird selbstverständlich auch der in die Rubrik s der Tabelle eingetragene Wert s/q benutzt.)

15. Die Berechnung des mittleren Fehlers erfolgt laut Punkt 10. In unserem Beispiel beträgt die Zahl der überschüssigen Beobachtungen: $f = 9 - 3 = 6$.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, nachdem der mittlere Wert des auf zwei Weisen berechneten Wertes $[svv]$ 2120 beträgt, ist:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{2120}{6}} = \pm 18{,}8.$$

Z. B. beträgt der mittlere Fehler der Richtungsmessergebnisse 3 und 5 nach der Ausgleichung

$$\mu_3 = \frac{18{,}8}{\sqrt{1{,}5}} = \pm 15{,}3'' \qquad \mu_5 = \frac{18{,}8}{\sqrt{0{,}3}} = \pm 34{,}3''.$$

Der mittlere Fehler des Längenmessergebnisses 9 nach der Ausgleichung (siehe Formel [74]):

$$\mu_9 = 18{,}8 \frac{1000}{\varrho''} \sqrt{0{,}5} = \pm 0{,}065 \text{ m}.$$

Im Laufe der Lösung der Gleichgewichtsgleichungen ergeben sich für die Koordinaten des Neupunktes die zu den Gewichtskoeffizienten proportionalen Werte $Q'_y = 0{,}008\,749$ und $Q'_x = 0{,}008\,919$. Auf Grund dieser Werte betragen die mittleren Fehler der Koordinaten, mit der Formel (77) berechnet:

$$\mu_y = 0{,}022 \cdot 18{,}8 \sqrt{0{,}008\,749} = \pm 0{,}039 \text{ m}$$

$$\mu_x = 0{,}022 \cdot 18{,}8 \sqrt{0{,}008\,919} = \pm 0{,}039 \text{ m}.$$

2. Beispiel. Man bestimme die Koordinaten des Punktes P auf Grund des im 1. Beispiel gegebenen Messergebnisses der auf Abb. 4 mit den Laufnummern 1—8 bezeichneten Richtungen, und zwar mit der Zwangbedingung, dass die Entfernung $\overline{AP}$ — mit den endgültigen Koordinaten des Punktes P berechnet — 311,210 m betragen soll.

Vorerst werden die Schritte 1—5 des 1. Beispiels verfolgt, ohne das Messergebnis 9 des 1. Beispiels zu beachten. Bei unserem jetzigen Beispiel wird nämlich die gegebene Entfernung $\overline{AP}$ nicht als Messergebnis, sondern als eine Zwangbedingung betrachtet, die erfüllt werden muss. Die genäherten Koordinaten des Punktes P stimmen mit den im 1. Beispiel aufgenommenen Werten überein. Die ausschliesslich auf Grund der Messergebnisse gebildeten Gleichgewichtsgleichungen sind:

$$f_1 = -106{,}0\,\delta y - 61{,}8\,\delta x - 1{,}8 = 0$$

$$f_2 = -61{,}8\,\delta y - 101{,}2\,\delta x + 49{,}7 = 0.$$

(Diese Gleichungen weichen von den Gleichgewichtsgleichungen des 1. Beispiels insofern ab, als dass die Koeffizienten und die Absolutglieder um die zum Messergebnis 9 des 1. Beispiels gehörenden entsprechenden Werte kleiner sind.)

Bekanntlich wird die Zwangbedingung der Entfernung durch die Zwangbedingungsgleichung

$$k = \sin(\delta_{AP})\,\delta y + \cos(\delta_{AP})\,\delta x - ds = 0$$

ausgedrückt. Nachdem — wenn die genäherte Entfernung $\overline{AP}$ mit den genäherten Koordinaten des Punktes P berechnet wird — $(s) = 311{,}376$ m ist, beträgt

$$ds = s - (s) = 311{,}210 - 311{,}376 = -0{,}166 \text{ m}.$$

Wird nur der Sinus- und Cosinuswert des genäherten Richtungswinkels der Richtung A—P eingesetzt, ergibt die Zwangbedingungsgleichung zahlenmässig:

$$k = +0{,}687\,\delta y - 0{,}726\,\delta x + 1{,}66 = 0.$$

Es werde z. B. aus der Gleichung k die Unbekannte δx ausgedrückt und für δy eine Identitätsgleichung aufgestellt:

$$\delta y = +1{,}000\,\delta y \qquad A_1 = +1$$

d. h.

$$\delta x = +0{,}946\,\delta y + 2{,}286 \qquad A_2 = +0{,}946.$$

Die die Zwangbedingung auch in sich schliessende Gleichgewichtsgleichung lautet:

$$g = [Af] = -164{,}48\,\delta y - 157{,}54\,\delta x + 45{,}20 = 0$$

bzw. wenn hier der vorher mittels δy ausgedrückte Wert von δx eingesetzt wird:

$$g = -313{,}51\,\delta y - 314{,}94 = 0$$

und weiter δy, sodann diesen in den Ausdruck δx eingesetzt, die Koordinatenänderung δx:

$$\delta y = -1{,}00 \text{ dm} \qquad \delta x = +1{,}34 \text{ dm}$$

Hiernach wird laut 7. Schritt des 1. Beispiels die Änderung des Orientierungswinkels: $\delta z = +14{,}1''$ berechnet, sowie auch der 8. Schritt des 1. Beispiels getan (in diesem Beispiel haben wir jedoch keine Längenmessung). Wenn die Summe der Kräfteprojektionen dem 9. Schritt des 1. Beispiels entsprechend berechnet wird, erhält man nicht Null, sondern die Projektionen der die Zwangbedingung darstellenden Kraft mit entgegengesetztem Vorzeichen:

$$[-v\cos\delta] = -V_y = +21{,}26 \qquad [v\sin\delta] = -V_x = -23{,}93.$$

Des Weiteren erfolgen die Schritte 10—15 des 1. Beispiels (wobei die die Längenmessung betreffenden Schritte ausser Acht gelassen wurden). Die endgültigen Koordinaten des Punktes P betragen:

$$y = (y) + \delta y = +24\,540{,}560 \text{ m} \qquad x = (x) + \delta x = -40\,477{,}366 \text{ m}.$$

Die Berechnung des mittleren Fehlers erfolgt unter Beachtung dessen, dass die Zahl der überschüssigen Beobachtungen $f = 8 - (3 - 1) = 6$ beträgt.

Zur Kontrolle werden die Koordinatenänderungen auch in die Gleichungen f eingesetzt. Auf diese Weise erhält man nämlich auch die Projektionen der die Zwangbedingung darstellenden Kraft ebenfalls mit entgegengesetztem Vorzeichen:

$$f_1 = -V_y = +21{,}28 \qquad f_2 = -V_x = -24{,}00.$$

Wird mit dem endgültigen Koordinaten des Punktes P die Entfernung AP berechnet, ergibt sich der Wert: $s_{AP} = 311{,}209$ m. Dieser Wert entspricht innerhalb der Berechnungsschärfe dem als Zwangbedingung angegebenen Entfernungswert.

3. Beispiel. Man bestimme die Koordinaten des Punktes P auf Grund der im 1. Beispiel angegebenen Messergebnisse, jedoch mit der Abweichung, dass den Richtungsmessergebnissen 2, 4 und 7 das spezielle Gewicht $g = 2$ zugeschrieben wird.

Der Lauf der Ausgleichung, wenn Punkt 7 sowie die Schritte des 1. Beispiels genau beobachtet wurden, kann auf Grund der Tabellen 4—6 leicht verfolgt werden. Die genäherten Koordinaten des Punktes P stimmen mit den im 1. Beispiel aufgenommenen Werten überein. Den genäherten sowie endgültigen Wert des Orientierungswinkels erhält man in Tabelle 4 genau so, wie in Tabelle 1. Folgende Gleichgewichtsgleichungen sind zu lösen:

$$-149{,}7\,\delta y - 45{,}0\,\delta x - 88{,}8 = 0$$
$$-45{,}0\,\delta y - 132{,}2\,\delta x + 92{,}4 = 0$$

und aus diesen die Koordinatenänderungen:

$$\delta y = -0{,}896 \text{ dm} \qquad \delta x = +1{,}005 \text{ dm}.$$

Tabelle 4

Messung	Standpunkt	Zielpunkt	s km	g	L ° ′ ″	(δ) ° ′ ″	(z) ° ′ ″	e ″	δ ° ′ ″	z ° ′ ″	v ″	$pv^2 = gsv^2$
1	P	A	0,31	1	316 32 45	316 35 43	0 2 58	+51,9	316 35 41	0 2 56	+39	456,3
2		B	0,95	2	18 53 25	18 55 5	0 1 40	—26,1	18 55 30	0 2 5	—12	288,0
3		C	1,50	1	79 46 44	79 48 35	0 1 51	—15,1	79 48 51	0 2 7	—10	150,0
4		D	2,19	2	118 9 47	118 12 6	0 2 19	+12,9	118 12 10	0 2 23	+ 6	158,6
			8,09	$= gs$			$(Z) = 0° 2' 6{,}1''$			$Z = 0° 2' 17''$		
5	A		0,3	1	136 35 43	136 35 43		0	136 35 41		— 2	1,2
6	C		1,5	1	259 48 47	259 48 35		—12	259 48 51		+ 4	24,0
7	D		2,2	2	298 11 56	298 12 6		+10	298 12 10		+14	862,4
8	E		0,9	1	25 34 25	25 34 25		0	25 33 55		—30	810,0
9	$\overline{AP}$		0,5	1	311,210 m	311,376 m	+ 0,166 m	+110	311,241 m	+0,031 m	+14	98,0
												2848,5

Tabelle 6

Messung	g	$ga\delta y$ oder $gc\delta y$	$gc\delta x$ oder $gb\delta x$	[ ]	$-\cos\delta$ oder $\sin\delta$	$\delta\delta'$	ge	$-g\delta z$	v'	$\frac{s}{g}$	$\frac{s}{g} v'^2$	$v' \sin\delta$	$v' \cos\delta$	v
1	1	+31,36	—33,27	— 1,91	+0,726	— 2,63	+51,9	—11,17	+38,10	0,3	435,5	+26,17	—27,66	+38,1
2	2	+34,59	+13,27	+47,86	+0,946	+50,59	—52,2	—22,34	—23,95	0,5	288,0	+ 7,76	+22,66	—12,0
3	1	— 2,15	—13,37	—15,52	—0,984	+15,77	—15,1	—11,17	—10,50	1,5	165,4	+10,33	+ 1,86	—10,5
4	2	+ 6,99	—14,67	— 7,68	—0,881	+ 8,72	+25,8	—22,34	+12,18	1,1	163,7	—10,73	+ 5,76	+ 6,1
5	1	+31,36	—33,27	— 1,91	+0,726	— 2,63	0		— 2,63	0,3	2,0	— 1,81	+ 1,91	— 2,6
6	1	— 2,15	—13,37	—15,52	—0,984	+15,77	—12		+ 3,77	1,5	21,7	— 3,71	— 0,67	+ 3,8
7	2	+ 6,99	—14,67	— 7,68	—0,881	+ 8,72	+20		+28,72	1,1	906,1	—25,30	+13,58	+14,4
8	1	+17,56	+ 9,45	+27,01	—0,902	—29,94	0		—29,94	0,9	804,6	—12,93	—27,01	—29,9
9	1	+18,82	+22,31	+41,13	—0,687	—59,87	+73,7		+13,83	0,5	95,2	+10,04	+ 9,50	+13,8
											2882,2	— 0,18	— 0,07	

Tabelle 5

Messung	g	ga	gb	gc	ge	$\sin\delta$	$\cos\delta$	$ge\sin\delta$	$ge\cos\delta$
1	1	—35,0	—31,3	—33,1	+51,9	+0,687	—0,726	+35,65	—37,68
2	2	—38,6	— 4,6	+13,2	—52,2	—0,324	—0,946	+16,91	+49,38
3	1	— 0,4	—13,3	+ 2,4	—15,1	—0,984	—0,177	+14,85	+ 2,67
4	2	— 4,2	—14,6	— 7,8	+25,8	—0,881	+0,473	—22,73	+12,20
						—2,707	—1,849		
5	1	—35,0	—31,3	—33,1	0	+0,687	—0,726	0,00	0,00
6	1	— 0,4	—13,3	+ 2,4	—12	—0,984	—0,177	+11,81	+ 2,12
7	2	— 4,2	—14,6	— 7,8	+20	—0,881	+0,473	—17,62	+ 9,46
8	1	—19,6	— 4,5	+ 9,4	0	+0,432	+0,902	0,00	0,00
9	1	—21,0	—23,4	+22,2	+73,7	+0,726	+0,687	+53,51	+50,63
[ ]		—158,4	—150,9	—32,2					
Δ		+ 8,73	+ 18,69	—12,77					
[ ]		—149,67	—132,21	—44,97				+92,38	+88,78

Nur für innere Richtungen:
$[gs] = 8{,}09$
$D = 0{,}04848\,[gs] = 0{,}392$

Reduktionen	Δ'	$\Delta = \frac{\Delta'}{D}$		
$[g\cos\delta]\,[g\cos\delta]$	+3,4188	+ 8,73	a	+
$[g\sin\delta]\,[g\sin\delta]$	+7,3279	+18,69	b	+
$[g\sin\delta]\,[g\cos\delta]$	+5,0052	+12,77	c	—

Die Änderung des Orientierungswinkels wird mit Formel (38) berechnet:

$$\delta z = \frac{(-1{,}849)(-0{,}896) - (-2{,}707)(+1{,}005)}{0{,}392} = +11{,}17''.$$

Die endgültigen Koordinaten des Punktes P sind

$$y = (y) + \delta y = +24\,540{,}570\ \text{m} \qquad x = (x) + \delta x = -40\,477{,}395\ \text{m}.$$

Berechnung des mittleren Fehlers:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{2865}{9-3}} = \pm 21{,}9.$$

Beispielweise sei der mittlere Fehler einzelner Messergebnisse nach der Ausgleichung:

$$\mu_1 = \frac{21{,}9}{\sqrt{0{,}3}} = \pm 40{,}0'' \qquad \mu_3 = \frac{21{,}9}{\sqrt{1{,}5}} = \pm 17{,}9'' \qquad \mu_4 = \frac{21{,}9}{\sqrt{2\cdot 2{,}2}} = \pm 10{,}4''$$

$$\mu_9 = 21{,}9\,\frac{1000}{\varrho''}\sqrt{\frac{0{,}311}{0{,}67}} = \pm 0{,}072\,\text{m}.$$

Nachdem sich aus den Gleichgewichtsgleichungen für die Koordinaten die zu ihren Gewichten proportionalen Werte $p'_y = 134$ und $p'_x = 119$ ergeben haben, beträgt der mittlere Fehler der Koordinaten auf Grund der Formeln (76):

$$\mu_y = 0{,}022\,\frac{21{,}9}{\sqrt{134}} = \pm 0{,}041 \text{ m} \qquad \mu_x = 0{,}022\,\frac{21{,}9}{\sqrt{119}} = \pm 0{,}044 \text{ m}.$$

4. Beispiel. Man bestimme die Koordinaten des Punktes P von vier gegebenen Punkten auf Grund der bis zum Punkt P gemessenen Entfernungen.

Der Lauf der Ausgleichung kann auf Grund der Tabellen 7—9 verfolgt werden. Die zu lösenden Gleichgewichtsgleichungen und die aus ihnen berechneten Koordinatenänderungen lauten folgendermassen:

$$-181{,}4\,\delta y - 11{,}9\,\delta x - 19{,}6 = 0 \qquad \delta y = -0{,}170 \text{ dm}$$

$$-11{,}9\,\delta y - 210{,}9\,\delta x + 200{,}2 = 0 \qquad \delta x = +0{,}957 \text{ dm}.$$

Berechnung des mittleren Fehlers:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{8492}{2}} = \pm 65{,}11.$$

Beispielsweise beträgt der mittlere Fehler des Längenmessergebnisses 1 nach der Ausgleichung, gemäss Formel (69):

$$\mu_1 = 65{,}11\,\frac{1000}{\varrho''}\sqrt{0{,}18} = \pm 0{,}13 \text{ m}.$$

Während der Lösung der Gleichgewichtsgleichungen ergaben sich für die Koordinaten die zu den Gewichtskoeffizienten proportionalen Werte $Q'_y = 0{,}00553$ und $Q'_x = 0{,}00476$ gemäss der Formeln (77) sind die mittleren Fehler der Koordinaten demnach:

$$\mu_y = 0{,}022 \cdot 65{,}11\sqrt{0{,}00553} = \pm 0{,}106 \text{ m}$$

$$\mu_x = 0{,}022 \cdot 65{,}11\sqrt{0{,}00476} = \pm 0{,}099 \text{ m}.$$

Tabelle 7

Messung	(δ)	L m	(s) m	E m	e''	s m	v_L m
1	133°51′	179,365	179,365	0	0	179,286	—0,079
2	206°58′	213,590	213,591	+0,001	+ 1,0	213,513	—0,077
3	283°35′	272,750	272,577	—0,173	—130,9	272,616	—0,134
4	32°28′	196,420	196,230	—0,190	—199,6	196,301	—0,119

Tabelle 8

Messung	a	b	c	e	sin δ	cos δ	e sin δ	e cos δ
1	—55,2	—59,8	—57,5	0	+0,721	—0,693	0,0	0,0
2	—76,7	—19,9	+39,0	+ 1,0	—0,453	—0,891	— 0,4	— 0,9
3	— 4,2	—71,5	—17,2	—130,9	—0,972	+0,235	+127,2	— 30,8
4	—74,8	—30,2	+47,6	—199,6	+0,537	+0,844	—107,2	—168,5
[ ]	—210,9	—181,4	+11,9				+ 19,6	—200,2

Tabelle 9

Messung	$b\partial y$ oder $-c\partial y$	$-c\partial x$ oder $a\partial x$	[ ]	$-\sin\delta$ oder $-\cos\delta$	$\partial\delta$	e	v''	$v \sin\delta$	$v \cos\delta$	s km	svv	v_L m
1	+10,23	+55,08	+65,31	—0,721	—90,58	0	— 90,58	—65,31	+ 62,77	0,18	1476,8	—0,079
2	+ 6,67	—73,48	—66,81	+0,891	—74,98	+ 1,0	— 73,98	+33,51	+ 65,92	0,21	1149,3	—0,077
3	+12,23	+16,48	+28,71	+0,972	+29,54	—130,9	—101,36	+98,52	— 23,82	0,27	2773,9	—0,134
4	+ 8,14	—71,66	—63,52	—0,844	+75,26	—199,6	—124,34	—66,67	—104,94	0,20	3092,1	—0,118
								+ 0,05	— 0,07		8492,1	

AUSFÜHRUNG DER STATISCHEN KOORDINATEN-AUSGLEICHUNG

Prof. I. HAZAY

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
LEHRSTUHL FÜR ANGEWANDTE GEODÄSIE. TECHNISCHE UNIVERSITÄT, SOPRON

[Eingegangen am 21. August 1958.]

II. TEIL. GEMEINSAME AUSGLEICHUNG MEHRERER PUNKTE

11. Gemeinsame Ausgleichung zweier Punkte mittels Richtungsmessungen

Bei der *gemeinsamen Ausgleichung* zweier Punkte muss das auf den Punkt wirkende Kräftesystem *bei beiden Punkten* für sich im Gleichgewicht sein. Je zwei Gleichgewichtsgleichungen jedes Neupunktes ermöglichen die eindeutige Berechnung der Koordinatenänderungen, falls die Änderung der Orientierungswinkel auf jedem Standpunkt auf Grund der Nullsumme der Drehmomente eliminiert wird.

Es muss jedoch die besondere Rolle der die Neupunkte P_1 und P_2 verbindenden Neupunktrichtung — der gemeinsamen Richtung — berücksichtigt werden. Die von P_1 nach P_2 gemessene gemeinsame Richtung ist nämlich bei P_1 als innere, bei P_2 dagegen als äussere Richtung anzusprechen. Umgekehrt, falls die gemeinsame Richtung auch von P_2 gemessen wurde, gilt letztere bei P_2 als innere, bei P_1 als äussere Richtung. Beide Messergebnisse der gemeinsamen Richtung müssen bei beiden Neupunkten vorkommen, und zwar beide beim einen Punkt als innere, beim anderen Punkt als äussere Richtung. Wurde die gemeinsame Richtung bloss beim einen Endpunkt gemessen, so erscheint diese bei dem Punkte, wo sie gemessen wurde, als innere, beim anderen Punkte als äussere Richtung.

Die auf den Neupunkten gemessenen Richtungswerte können mit einem endgültigen Orientierungswinkel nicht orientiert werden, bloss mit einem genäherten und die Änderung δz des Orientierungswinkels muss bezüglich beider Punkte im Laufe der Ausgleichung bestimmt werden. So muss man von einem Punkt zum anderen mit dem mittels des genäherten Wertes des Orientierungswinkels orientierten Richtungswert gemeinsam auch den einstweilen unbekannten Wert δz gegenseitig übertragen. Die Werte δz stellen den engeren Zusammenhang beider Punkte her.

Die einstweilige Ausscheidung der δz-Werte wird abermals mittels *Reduktionen* erreicht. Reduktionen entstehen nach dem bisherigen

wegen δz_1 bei P_1, dessen sämtliche inneren Richtungen betreffend,
wegen δz_2 bei P_2, dessen sämtliche inneren Richtungen betreffend,

wegen δz_1 bei P_2, die gemeinsame Richtung betreffend und
wegen δz_2 bei P_1, die gemeinsame Richtung betreffend.

Der Verbesserungsausdruck der Richtungen vom Punkte P_1 nach den Festpunkten stimmt mit jenem der Richtungen des Rückwärtseinschneidens überein (12). Die Verbesserung der Neupunktrichtung vom Punkte P_1 nach dem Punkt P_2 aber ist :

$$v_{12} = + \frac{0{,}1\varrho'' \cos \delta_{21}}{s_{12}} \delta y_1 - \frac{0{,}1\varrho'' \sin \delta_{21}}{s_{12}} \delta x_1 - \\ - \frac{0{,}1\varrho'' \cos \delta_{21}}{s_{12}} \delta y_2 + \frac{0{,}1\varrho'' \sin \delta_{21}}{s_{12}} \delta x_2 + e_{12} - \delta z_1. \tag{79}$$

Wird nun der *genäherte Wert des Orientierungswinkels* im Punkte P_1 gemäss der Formel

$$(Z_1) = \frac{[s(z)]^{\mathrm{I}}}{[s]^{\mathrm{I}}} \tag{80a}$$

aufgenommen, wobei auch die Werte der Neupunktrichtung nach dem Punkte P_2 in die Formel einbezogen wurden, also für die im Punkte P_1 gemessenen (inneren) Richtungen

$$[se]^{\mathrm{I}} = 0 \tag{80b}$$

gilt (die Bedeutung der Buchstaben ist schon von früher her bekannt, der Index hoch I weist auf die Werte bezüglich des Punktes P_1 hin), dann folgt aus der Nullbedingung der dem Punkte P_1 bezüglichen *Drehmomentensumme* der zu sämtlichen, im Punkte P_1 gemessenen Richtungen gehörenden Kräfte, daß die *Orientierungsunbekannte* des Punktes P_1

$$\delta z_1 = \frac{[\cos \delta]^{\mathrm{I}} \delta y_1 - [\sin \delta]^{\mathrm{I}} \delta x_1 - \cos \delta_{21} \delta y_2 + \sin \delta_{21} \delta x_2}{D^{\mathrm{I}}} \tag{81}$$

beträgt, wo

$$D^{\mathrm{I}} = \frac{10}{\varrho''} [s]^{\mathrm{I}}_{\mathrm{dm}} = 0{,}048\,48\, [s]^{\mathrm{I}}_{\mathrm{km}}. \tag{82}$$

Die Verbesserung v_{12} ist, nach Einsetzen des Wertes δz_1 beim Punkte P_1 mit den Werten sin δ_{21} bzw. $-\cos \delta_{21}$ zu multiplizieren, um die den Koordinatenachsen entsprechenden Projektionen der Kraft zu erhalten. Beim Punkte P_2 hingegen ist die Verbesserung v_{12} mit den Werten sin $\delta_{12} = -\sin \delta_{21}$ bzw. $-\cos \delta_{12} = \cos \delta_{21}$ zu multiplizieren. (Der Index 12 zeigt an, dass die

Richtung vom Punkt P_1 nach dem Punkt P_2 läuft, der Index 21 wiederum, dass die Richtung vom Punkt P_2 nach P_1 zu geht!)

Die *Orientierungsunbekannte* des Punktes P_2 ist (die im Ausdrucke δz_1 auch durch zyklische Permutation der Zeiger erhalten werden kann), angenommen, dass der genäherte Wert des Orientierungswinkels (Z_2) der Formel (80a) entsprechend berechnet wurde, jedoch aus den Werten des Punktes P_2:

$$\delta z_2 = \frac{[\cos\delta]^{II}\,\delta y_2 - [\sin\delta]^{II}\,\delta x_2 - \cos\delta_{12}\,\delta y_1 + \sin\delta_{12}\,\delta x_1}{D^{II}}, \tag{83}$$

wo

$$D^{II} = \frac{10}{\varrho''}\,[s]^{II}_{dm} = 0{,}048\,48\,[s]^{II}_{km}. \tag{84}$$

(Der Zeiger II weist auf die Werte des Punktes P_2 hin.)

Die Verbesserung v_{21} ist nach Einsetzen des Wertes δz_2 beim Punkte P_1 bzw. beim Punkte P_2 mit denselben Sinus- und Cosinuswerten zu multiplizieren, wie die Verbesserung v_{12}.

Die aus der zur Neupunktrichtung gehörenden Verbesserung v_{12} stammende Kraft weist beim Punkte P_1 — die Orientierungsunbekannte ausser acht lassend — zwischen den inneren Richtungen folgende *Projektionen* auf:

$$\begin{aligned} &+ a\delta y_1 + c\delta x_1 - a\delta y_2 - c\delta x_2 - e_{12}\cos\delta_{21} \\ \text{und}\quad &+ c\delta y_1 + b\delta x_1 - c\delta y_2 - b\delta x_2 + e_{12}\sin\delta_{21}. \end{aligned} \tag{85}$$

Beim Punkte P_2 (zwischen den äusseren Richtungen) ergibt sich dasselbe mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Die Projektionen der aus der Verbesserung v_{21} herstammenden Kraft betragen beim Punkte P_2 (zwischen den inneren Richtungen) — die Orientierungsunbekannte nicht berücksichtigend:

$$\begin{aligned} &- a\delta y_1 - c\delta x_1 + a\delta y_2 + c\delta x_2 + e_{21}\cos\delta_{21} \\ \text{und}\quad &- c\delta y_1 - b\delta x_1 + c\delta y_2 + b\delta x_2 - e_{21}\sin\delta_{21}. \end{aligned} \tag{86}$$

Beim Punkte P_1 (zwischen den äusseren Richtungen) ergibt sich dasselbe mit entgegengesetztem Vorzeichen.

In den aufgezeichneten Kräfteprojektionen sind die Werte a, b und c selbstverständlich die zur Neupunktrichtung gehörenden Richtungskoeffizienten, e_{12} die Richtungsabweichung der vom Punkt P_1 ausgehenden Richtung, e_{21} die Richtungsabweichung der vom Punkt P_2 ausgehenden Richtung, während

Tabelle 10

Wegen δz_1			Wegen δz_2		
$[\cos\delta]^{\mathrm{I}}\,[\cos\delta]^{\mathrm{I}}$	a_1^{I}	+	$[\cos\delta]^{\mathrm{II}}\,[\cos\delta]^{\mathrm{II}}$	a_2^{II}	+
$[\sin\delta]^{\mathrm{I}}\,[\sin\delta]^{\mathrm{I}}$	b_1^{I}	+	$[\sin\delta]^{\mathrm{II}}\,[\sin\delta]^{\mathrm{II}}$	b_2^{II}	+
$[\sin\delta]^{\mathrm{I}}\,[\cos\delta]^{\mathrm{I}}$	c_1^{I}	—	$[\sin\delta]^{\mathrm{II}}\,[\cos\delta]^{\mathrm{II}}$	c_2^{II}	—
$[\cos\delta]^{\mathrm{I}}\,\cos\delta_{21}$	a_2^{I}	—	$[\cos\delta]^{\mathrm{II}}\,\cos\delta_{12}$	a_2^{I}	—
$[\sin\delta]^{\mathrm{I}}\,\sin\delta_{21}$	b_2^{I}	—	$[\sin\delta]^{\mathrm{II}}\,\sin\delta_{12}$	b_2^{I}	—
$[\sin\delta]^{\mathrm{I}}\,\cos\delta_{21}$	$c_2^{\mathrm{I}\,\sin}$	+	$[\sin\delta]^{\mathrm{II}}\,\cos\delta_{12}$	$c_2^{\mathrm{I}\,\cos}$	+
$[\cos\delta]^{\mathrm{I}}\,\sin\delta_{21}$	$c_2^{\mathrm{I}\,\cos}$	+	$[\cos\delta]^{\mathrm{II}}\,\sin\delta_{12}$	$c_2^{\mathrm{I}\,\sin}$	+
$\cos^2\delta_{21}$	a_2^{II}	+	$\cos^2\delta_{12}$	a_1^{I}	+
$\sin^2\delta_{21}$	b_2^{II}	+	$\sin^2\delta_{12}$	b_1^{I}	+
$\sin\delta_{21}\cos\delta_{21}$	c_2^{II}	—	$\sin\delta_{12}\cos\delta_{12}$	c_1^{I}	—

δ_{21} der Richtungswinkel der vom Punkt P_2 nach dem Punkt P_1 aus gehenden Richtung ist.

Die ohne Berücksichtigung der Orientierungsunbekannten aufgestellten Gleichgewichtsgleichungen müssen wegen den Orientierungsunbekannten mit der in Tabelle 10 vorgeschriebenen *Reduktion* 20 versehen werden. (Die Tabelle schreibt die Hilfswerte Δ' vor. Die Δ-Reduktionen sind deren mit dem entsprechenden D-Wert geteilte Quotienten. Die Tabelle zeigt auch die Zugehörigkeit der Reduktionen an, sowie, ob der ausgerechnete Wert mit seinem ursprünglichen Vorzeichen, oder mit dem umgekehrten Vorzeichen benutzt werden soll.)

Die Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen erfolgt so, dass man die in das Berechnungsschema eingetragenen Richtungskoeffizienten, wie auch die Werte $e\cos\delta$ und $e\sin\delta$ dem Vorwärtseinschneiden entsprechend für jeden Punkt einzeln summiert und die aus den Richtungskoeffizienten ermittelten Summenglieder mit den Reduktionen zusammenzieht. Das zur Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen dienende Schema ist in Tabelle 14 *(Beispiel 5)* ersichtlich. In diesem Schema gehört zu jedem Neupunkt je ein horizontaler Streifen und je eine vertikale Kolonne. Die Streifen wurden mit I und II, die Kolonnen mit 1 und 2 bezeichnet. Die Zugehörigkeit der Reduktionen wurde auch mit Streifen- und Kolonnenbezeichnung angegeben. In der 2. Kolonne des I. Streifens erhält die Summe der Richtungskoeffizienten c_2 eine andere Reduktion für die y-gerichtete (Cosinus-)Projektions- und eine andere für die x-gerichtete (Sinus-)Projektionsgleichung. Aus diesem Grunde fällt die entsprechende Kolonne in zwei Teile. Infolge der Symmetrie der Gleichgewichtsgleichungen kann die 1. Kolonne des II. Streifens ausser acht gelassen werden. Hier werden demnach keine Reduktionen mehr eingeführt. Die *Gleichgewichts-*

gleichungen gestalten sich also schematisch, unter Fortlassung der symmetrischen Glieder, folgend :

$$\begin{array}{lllll} \underline{+[a]_1^{\mathrm{I}}} & +[c]_1^{\mathrm{I}} & +[a]_2^{\mathrm{I}} & +[c]_2^{\mathrm{I}\cos} & -[e\cos\delta]^{\mathrm{I}} \\ & \underline{+[b]_1^{\mathrm{I}}} & +[c]_2^{\mathrm{I}\sin} & +[b]_2^{\mathrm{I}} & +[e\sin\delta]^{\mathrm{I}} \\ & & \underline{+[a]_2^{\mathrm{II}}} & +[c]_2^{\mathrm{II}} & -[e\cos\delta]^{\mathrm{II}} \\ & & & \underline{+[b]_2^{\mathrm{II}}} & +[e\sin\delta]^{\mathrm{II}} . \end{array} \tag{87}$$

Die Bezeichnung der Gleichungskoeffizienten gibt bereits die reduzierten Werte an.

Nach Bestimmung der Koordinatenänderungen wird die Änderung δz_1 und δz_2 der Orientierungswinkel mit den Formeln (81) und (83) ausgerechnet, sodann auch die Änderung der Richtungswinkel berechnet. Zu den von den Festpunkten nach dem Punkte P_1 ausgehenden Richtungen gehören die Formeln

$$\delta\delta_i = \frac{a_i\,\delta y_1 + c_i\,\delta x_1}{-\cos\delta_i} \qquad \text{oder} \qquad \delta\delta_i = \frac{c_i\,\delta y_1 + b_i\,\delta x_1}{\sin\delta_i}, \tag{88}$$

zu den von den Festpunkten nach dem Punkte P_2 aus gehenden Richtungen die Formeln

$$\delta\delta_i = \frac{a_i\,\delta y_2 + c_i\,\delta x_2}{-\cos\delta_i} \qquad \text{oder} \qquad \delta\delta_i = \frac{c_i\,\delta y_2 + b_i\,\delta x_2}{\sin\delta_i}, \tag{89}$$

während die Änderung des Richtungswinkels der Neurichtung mit den folgenden Formeln berechnet werden kann :

$$\delta\delta_{21} = \frac{+a\delta y_1 + c\delta x_1 - a\delta y_2 - c\delta x_2}{-\cos\delta_{21}} = \frac{+c\delta y_1 + b\delta x_1 - c\delta y_2 - b\delta x_2}{\sin\delta_{21}}$$

bzw. mit der Formel (90)

$$\delta\delta_{12} = \frac{-a\delta y_1 - c\delta x_1 + a\delta y_2 + c\delta x_2}{-\cos\delta_{12}} = \frac{-c\delta y_1 - b\delta x_1 + c\delta y_2 + b\delta x_2}{\sin\delta_{12}}.$$

Die Buchstaben a, b und c ohne Index bezeichnen die zu der Neupunktrichtung gehörenden Richtungskoeffizienten. Es ergibt sich von selbst, dass

$$\delta\delta_{21} = \delta\delta_{12}. \tag{91}$$

Die Verbesserungen von den gegebenen Festpunkten nach den auf den Punkt P_1 gerichteten äusseren Richtungen und vom Punkt P_1 nach den auf die gegebenen Festpunkte gerichteten inneren Richtungen betragen :

$$v_i = \delta\delta_i + e_i \qquad \text{bzw.} \qquad v_i = \delta\delta_i + e_i - \delta z_1 \,. \tag{92}$$

Ähnlicherweise bei den zum Punkte P_2 gehörenden Richtungen :

$$v_i = \delta\delta_i + e_i \qquad \text{bzw.} \qquad v_i = \delta\delta_i + e_i - \delta z_2 \tag{93}$$

und bei der Neupunktrichtung :

$$v_{12} = \delta\delta_{12} + e_{12} - \delta z_1 \qquad \text{bzw.} \qquad v_{21} = \delta_{21} + e_{21} - \delta z_2 \,. \tag{94}$$

Zur Kontrolle dient, dass innerhalb der Berechnungsschärfe die Bedingungen

$$\begin{aligned} [v\cos\delta]^{\mathrm{I}} &= 0 \qquad [v\sin\delta]^{\mathrm{I}} = 0 \\ [v\cos\delta]^{\mathrm{II}} &= 0 \qquad [v\sin\delta]^{\mathrm{II}} = 0 \end{aligned} \tag{95}$$

erfüllt sein müssen.

Die mit den endgültigen Koordinaten der Neupunkte berechneten Richtungswinkel müssen selbstverständlich, innerhalb der Berechnungsschärfe, auch hier von den entsprechenden genäherten Richtungswinkeln um die in den Formeln (88)—(90) bestimmten Werte abweichen und die auf Grund der endgültigen Richtungswinkel bestimmten Verbesserungen müssen auch mit den in den Formeln (92)—(94) bestimmten übereinstimmen.

Es versteht sich von selbst, dass — wenn auf irgendeinem Neupunkt keine Richtungsmessung erfolgt ist, d. h. wenn der Punkt nur von äusseren Richtungen bestimmt wird — es bezüglich dieses Punktes keine Orientierungsunbekannte δz gibt und die mit ihr zusammenhängenden Reduktionen fallen auch weg.

12. Gemeinsame Ausgleichung bei mehr als zwei Punkten mittels Richtungsmessungen

Der Grunsdatz der Ausgleichung bei mehr als zwei Punkten ist ebenfalls, dass auf jedem einzelnen Neupunkt das auf dem Punkt wirkende Kräftesystem für sich im Gleichgewicht sein muss. Auch in diesem Fall müssen die je zwei Neupunkte verbindenden Neupunktrichtungen berücksichtigt werden. Wurde eine solche Richtung auf beiden Endpunkten gemessen, dann müssen beide Messergebnisse bei beiden Endpunkten der Richtung vorkommen, und

zwar beide als innere Richtung beim einen Endpunkt und als äussere Richtung beim anderen. Wird die Richtung nur am einen Endpunkt gemessen, so kommt sie bei jenem Punkte, auf welchem gemessen wurde, als innere, beim anderen Punkte hingegen als äussere Richtung vor.

All das, was im Punkte 11 von der gemeinsamen Richtung gesagt wurde, bezieht sich sinngemäss auch auf sämtliche Neupunktrichtungen.

Nachdem der an den Neupunkten gemessene Richtungssatz vorläufig nur mit dem genäherten Orientierungswinkel orientiert werden kann, der mit einer der Formel (80a) entsprechenden, jedoch mit — den fraglichen Punkt betreffenden — Indexen versehenen Formel berechnet wird, erscheint bei jedem einzelnen Neupunkt, bei welchem Richtungsmessungen ausgeführt wurden, je eine Orientierungsunbekannte δz. Werden bloss die Angaben der auf dem Punkte gemessenen inneren Richtungen berücksichtigt, so ergeben sich aus der Bedingung des auf den entsprechenden Neupunkt bezüglichen Drehmomentgleichgewichtes der Reihe nach folgende *Orientierungsunbekannten :*

$$\delta z_1 = \frac{[\cos\delta]^{\mathrm{I}}\,\delta y_1 - [\sin\delta]^{\mathrm{I}}\,\delta x_1 - \cos\delta_{21}\,\delta y_2 + \sin\delta_{21}\,\delta x_2}{D^{\mathrm{I}}} + \\ + \frac{-\cos\delta_{31}\,\delta y_3 + \sin\delta_{31}\,\delta x_3 - \ldots}{D^{\mathrm{I}}}$$

$$\delta z_2 = \frac{-\cos\delta_{12}\,\delta y_1 + \sin\delta_{12}\,\delta x_1 + [\cos\delta]^{\mathrm{II}}\,\delta y_2 - [\sin\delta]^{\mathrm{II}}\,\delta x_2}{D^{\mathrm{II}}} + \\ + \frac{-\cos\delta_{32}\,\delta y_3 + \sin\delta_{32}\,\delta x_3 - \ldots}{D^{\mathrm{II}}} \qquad (96)$$

$$\delta z_3 = \frac{-\cos\delta_{13}\,\delta y_1 + \sin\delta_{13}\,\delta x_1 - \cos\delta_{23}\,\delta y_2 + \sin\delta_{23}\,\delta x_2}{D^{\mathrm{III}}} + \\ + \frac{+[\cos\delta]^{\mathrm{III}}\,\delta y_3 - [\sin\delta]^{\mathrm{III}}\,\delta x_3 - \ldots}{D^{\mathrm{III}}}$$

usw., wobei

$$D^{\mathrm{I}} = 0{,}048\,48\,[s]^{\mathrm{I}}_{\mathrm{km}} \qquad D^{\mathrm{II}} = 0{,}048\,48\,[s]^{\mathrm{II}}_{\mathrm{km}}$$
$$D^{\mathrm{III}} = 0{,}048\,48\,[s]^{\mathrm{III}}_{\mathrm{km}} \quad \text{usw.} \qquad (97)$$

Wenn an irgendeinem Neupunkt sämtliche übrigen Neupunkte nicht gerichtet

worden sind, so fallen selbstverständlich die auf die nicht gemessenen Richtungen (nicht gerichteten Punkte) bezüglichen Glieder der Formeln (96) weg.

Die ohne Berücksichtigung der Orientierungsunbekannten aufgestellten Gleichgewichtsgleichungen werden infolge der Orientierungsunbekannten auch hier mit *Reduktionen* versehen: auch hier werden die Summenglieder der Richtungskoeffizienten reduziert. In dem der Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen dienenden Schema gehört zu jedem einzelnen Neupunkt je ein mit römischer Ziffer bezeichneter horizontaler Streifen und je eine mit arabischer Ziffer bezeichnete vertikale Kolonne. Jede Richtungskoeffizientensumme c, in deren Indizen die Kolonnenziffer (arabische Ziffer) grösser ist als die Streifenziffer (römische Ziffer), erhält andere Reduktionen für die y-gerichtete (Cosinus-) Projektions- und andere für die x-gerichtete (Sinus-) Projektionsgleichung. Infolge der Symmetrie der Gleichgewichtsgleichungen darf jedes Schementeil, bei welchem die Kolonnenziffer (arabische Ziffer) kleiner ist als die Streifenziffer (römischer Ziffer), ausser acht gelassen werden. In diese Teile werden demnach die Reduktionen nicht eingeführt. Die Berechnung der Reduktionen wird später behandelt. Die Gleichgewichtsgleichungen sind z. B. bei der Dreipunktausgleichung, ohne Berücksichtigung der symmetrischen Glieder, schematisch:

$$
\begin{array}{llll}
\underline{+[a]_1^{\mathrm{I}}} + [c]_1^{\mathrm{I}} + [a]_2^{\mathrm{I}} & + [c]_2^{\mathrm{Icos}} + [a]_3^{\mathrm{I}} & + [c]_3^{\mathrm{Icos}} - [e\cos\delta]^{\mathrm{I}} & \\
\underline{+[b]_1^{\mathrm{I}}} + [c]_2^{\mathrm{Isin}} & + [b]_2^{\mathrm{I}} + [c]_3^{\mathrm{Isin}} & + [b]_3^{\mathrm{I}} + [e\sin\delta]^{\mathrm{I}} & \\
\underline{[a]_2^{\mathrm{II}}} & + [c]_2^{\mathrm{II}} + [a]_3^{\mathrm{II}} & + [c]_3^{\mathrm{IIcos}} - [e\cos\delta]^{\mathrm{II}} & \\
& \underline{[b]_2^{\mathrm{II}}} + [c]_3^{\mathrm{IIsin}} & + [b]_3^{\mathrm{II}} + [e\sin\delta]^{\mathrm{II}} & \\
& \underline{+[a]_3^{\mathrm{III}}} & + [c]_3^{\mathrm{III}} - [e\cos\delta]^{\mathrm{III}} & \\
& & \underline{+[b]_3^{\mathrm{III}}} + [e\sin\delta]^{\mathrm{III}}. &
\end{array}
\tag{98}
$$

Nach Bestimmung der Koordinatenänderungen wird die Änderung δz der Orientierungswinkel mit den Formeln (96) berechnet, sodann werden mit Hilfe der den Formeln (88)—(94) des Punktes 11 entsprechenden (jedoch bei den betreffenden Punkten bzw. Richtungen angewandten) Formeln all jene Berechnungen ausgeführt, die im Punkte 11 bekanntgegeben worden sind. Die mit den Formeln (95) auf zwei Neupunkte gegebenen Bedingungen müssen selbstverständlich jetzt bei sämtlichen Neupunkten einzeln erfüllt werden.

Nehmen wir jetzt die Gestaltung der *Reduktionen* vor. Zu diesem Zwecke wurden in der Tabelle 11 die Reduktionen der Dreipunktausgleichung samt der Bezeichnung der Zugehörigkeit und des Vorzeichens der Benutzung aufge-

zählt. (Das Vorzeichen + bedeutet, dass die Reduktion mit jenem Vorzeichen angewandt werden muss, mit welchem sie sich ergeben hat, während das Vorzeichen — die notwendige Anwendung des entgegengesetzten Vorzeichens bedeutet). In der Tabelle sind die Hilfsmengen Δ' angegeben, diese müssen noch mit dem entsprechenden Wert D dividiert werden, damit man die Reduktionen Δ erhält. Es wurden weiterhin in Tabelle 12 die infolge der Orientierungsunbekannten δz_1 der Vierpunktausgleichung entstandenen Reduktionen aufgezählt.

Die Reduktionen können — von den Reduktionen der Zweipunktausgleichung ausgehend — gesetzmässig aufgebaut werden. Vor allem werden die wegen δz_1 entstandenen Reduktionen bestimmt. Die Gesetzmässigkeit des Aufbaues ist im Vergleich der Tabellen 10, 11 und 12 ohne besondere Erklärung klar ersichtlich. Sind wir nun im Besitze der wegen δz_1 entstandenen Reduktionen, so können mittels der zyklischen Permutation der Indicen der Reihe nach die infolge δz_2, hieraus die infolge δz_3 usw. entstandenen Reduktionen hergestellt werden. Es wurde schon erwähnt, dass jene Werte, deren arabischer Ziffernindex (Kolonne) kleiner ist als ihr römischer Ziffernindex (Streifen), nicht notwendig sind. Erhält man solche, so können die Indizen umgetauscht werden. Die Permutation der Indizen des Wertes a_3^{I} z. B. ergibt bei einer Dreipunktausgleichung den Wert a_1^{III}. Nachdem man diesen nicht benötigt, werden die Indizen umgetauscht. Es ist nämlich

$$a_3^{\mathrm{I}} = a_1^{\mathrm{III}} . \tag{99}$$

Wird ein Sinus- oder Cosinusindex umgetauscht, so wird die Bezeichnung *sin* zu *cos*, und umgekehrt. Z. B.:

$$c_1^{\mathrm{II}\sin} = c_2^{\mathrm{I}\cos} \qquad \text{und} \qquad c_1^{\mathrm{II}\cos} = c_2^{\mathrm{I}\sin} . \tag{100}$$

Die Permutation kann in Tabelle 10 und 11 gut beobachtet werden.

Es muss noch die *Vorzeichenregel* der Benutzung der Reduktionen besprochen werden. (Die Erklärung der Vorzeichen + und — wurde schon oben gegeben.) Man nehme als Vorzeichennorm das Vorzeichen der Reduktionen des Rückwärtseinschneidens. Beim Rückwärtseinschneiden sind die Reduktionen der Glieder a und b, deren Vorzeichen immer gleich ist, im positiven Sinne, die Reduktion des Gliedes c mit verschiedenen Vorzeichen im negativen Sinne zu benutzen. In allen Fällen, wo ein Summenglied mit dem Wert der Winkelfunktion der Neupunktrichtung (der gemeinsamen Richtung) multipliziert wird, gilt das Entgegengesetzte der Vorzeichennorm, in allen übrigen Fällen muss die Norm angewandt werden.

Tabelle 11

Wegen δz_1			Wegen δz_2			Wegen δz_3		
$[\cos\delta]^{I}\,[\cos\delta]^{I}$	a_1^{I}	+	$[\cos\delta]^{II}\,[\cos\delta]^{II}$	a_2^{II}	+	$[\cos\delta]^{III}[\cos\delta]^{III}$	a_3^{III}	+
$[\sin\delta]^{I}\,[\sin\delta]^{I}$	b_1^{I}	+	$[\sin\delta]^{II}\,[\sin\delta]^{II}$	b_2^{II}	+	$[\sin\delta]^{III}[\sin\delta]^{III}$	b_3^{III}	+
$[\sin\delta]^{I}\,[\cos\delta]^{I}$	c_1^{I}	—	$[\sin\delta]^{II}\,[\cos\delta]^{II}$	c_2^{II}	—	$[\sin\delta]^{III}[\cos\delta]^{III}$	c_3^{III}	—
$[\cos\delta]^{I}\cos\delta_{21}$	a_2^{I}	—	$[\cos\delta]^{II}\cos\delta_{32}$	a_3^{II}	—	$[\cos\delta]^{III}\cos\delta_{13}$	a_3^{I}	—
$[\sin\delta\,]^{I}\sin\delta_{21}$	b_2^{I}	—	$[\sin\delta]^{II}\sin\delta_{32}$	b_3^{II}	—	$[\sin\delta]^{III}\sin\delta_{13}$	b_3^{I}	—
$[\sin\delta]^{I}\cos\delta_{21}$	$c_2^{I\,\sin}$	+	$[\sin\delta]^{II}\cos\delta_{32}$	$c_3^{II\,\sin}$	+	$[\sin\delta]^{III}\cos\delta_{13}$	$c_3^{I\,\cos}$	+
$[\cos\delta]^{I}\sin\delta_{21}$	$c_2^{I\,\cos}$	+	$[\cos\delta]^{II}\sin\delta_{32}$	$c_3^{II\,\cos}$	+	$[\cos\delta]^{III}\sin\delta_{13}$	$c_3^{I\,\sin}$	+
$[\cos\delta]^{I}\cos\delta_{31}$	a_3^{I}	—	$[\cos\delta]^{II}\cos\delta_{12}$	a_2^{I}	—	$[\cos\delta]^{III}\cos\delta_{23}$	a_3^{II}	—
$[\sin\delta]^{I}\sin\delta_{31}$	b_3^{I}	—	$[\sin\delta]^{II}\sin\delta_{12}$	b_2^{I}	—	$[\sin\delta]^{III}\sin\delta_{23}$	b_3^{II}	—
$[\sin\delta]^{I}\cos\delta_{31}$	$c_3^{I\,\sin}$	+	$[\sin\delta]^{II}\cos\delta_{12}$	$c_2^{I\,\cos}$	+	$[\sin\delta]^{III}\cos\delta_{23}$	$c_3^{II\,\cos}$	+
$[\cos\delta]^{I}\sin\delta_{31}$	$c_3^{I\,\cos}$	+	$[\cos\delta]^{II}\sin\delta_{12}$	$c_2^{I\,\sin}$	+	$[\cos\delta]^{III}\sin\delta_{23}$	$c_3^{II\,\sin}$	+
$\cos^2\delta_{21}$	a_2^{II}	+	$\cos^2\delta_{32}$	a_3^{III}	+	$\cos^2\delta_{13}$	a_1^{I}	+
$\sin^2\delta_{21}$	b_2^{II}	+	$\sin^2\delta_{32}$	b_3^{III}	+	$\sin^2\delta_{13}$	b_1^{I}	+
$\sin\delta_{21}\cos\delta_{21}$	c_2^{II}	—	$\sin\delta_{32}\cos\delta_{32}$	c_3^{III}	—	$\sin\delta_{13}\cos\delta_{13}$	c_1^{I}	—
$\cos\delta_{21}\cos\delta_{31}$	a_3^{II}	+	$\cos\delta_{32}\cos\delta_{12}$	a_3^{I}	+	$\cos\delta_{13}\cos\delta_{23}$	a_2^{I}	+
$\sin\delta_{21}\sin\delta_{31}$	b_3^{II}	+	$\sin\delta_{32}\sin\delta_{12}$	b_3^{I}	+	$\sin\delta_{13}\sin\delta_{23}$	b_2^{I}	+
$\sin\delta_{21}\cos\delta_{31}$	$c_3^{II\,\sin}$	—	$\sin\delta_{32}\cos\delta_{12}$	$c_3^{I\,\cos}$	—	$\sin\delta_{13}\cos\delta_{23}$	$c_2^{I\,\sin}$	—
$\cos\delta_{21}\sin\delta_{31}$	$c_3^{II\,\cos}$	—	$\cos\delta_{32}\sin\delta_{12}$	$c_3^{I\,\sin}$	—	$\cos\delta_{13}\sin\delta_{23}$	$c_2^{I\,\cos}$	—
$\cos^2\delta_{31}$	a_3^{III}	+	$\cos^2\delta_{12}$	a_1^{I}	+	$\cos^2\delta_{23}$	a_2^{II}	+
$\sin^2\delta_{31}$	b_3^{III}	+	$\sin^2\delta_{12}$	b_1^{I}	+	$\sin^2\delta_{23}$	b_2^{II}	+
$\sin\delta_{31}\cos\delta_{31}$	c_3^{III}	—	$\sin\delta_{12}\cos\delta_{12}$	c_1^{I}	—	$\sin\delta_{23}\cos\delta_{23}$	c_2^{II}	—

Die Zahl der infolge *eines* Wertes δz entstandenen Reduktionen wird durch die Formel

$$n = p\,(1 + 2\,p) \tag{101}$$

bestimmt, wobei p die Zahl der gemeinsam auszugleichenden Neupunkte ist. Die Zahl, infolge bei *sämtlichen* Werten δz entstandenen Reduktionen beträgt wiederum :

$$N = p^2\,(1 + 2\,p). \tag{102}$$

Beide Gleichungen gelten für den Fall, wenn von jedem Neupunkt nach sämtlichen übrigen Neupunkten gerichtet wurde, die Gleichungen geben demnach die *maximale* Zahl der Reduktionen an. Wenn nicht sämtliche, die Neupunkte verbindende Richtungen gemessen wurden (und dies kommt bei der gemeinsamen Ausgleichung mehrerer Punkte öfters vor), verringert sich die Zahl der Reduktionen entsprechend.

Tabelle 12

Wegen δz_1					
$[\cos\delta]^{I}\,[\cos\delta]^{I}$	a_1^{I}	+	$\cos\delta_{21}\cos\delta_{31}$	a_3^{II}	+
$[\sin\delta]^{I}\,[\sin\delta]^{I}$	b_1^{I}	+	$\sin\delta_{21}\sin\delta_{31}$	b_3^{II}	+
$[\sin\delta]^{I}\,[\cos\delta]^{I}$	c_1^{I}	—	$\sin\delta_{21}\cos\delta_{31}$	$c_3^{II\,\sin}$	—
$[\cos\delta]^{I}\,\cos\delta_{21}$	a_2^{I}	—	$\cos\delta_{21}\sin\delta_{31}$	$c_3^{II\,\cos}$	—
$[\sin\delta]^{I}\,\sin\delta_{21}$	b_2^{II}	—	$\cos\delta_{21}\cos\delta_{41}$	a_4^{II}	+
$[\sin\delta]^{I}\,\cos\delta_{21}$	$c_2^{I\,\sin}$	+	$\sin\delta_{21}\sin\delta_{41}$	b_4^{II}	+
$[\cos\delta]^{I}\,\sin\delta_{21}$	$c_2^{I\,\cos}$	+	$\sin\delta_{21}\cos\delta_{41}$	$c_4^{II\,\sin}$	—
$[\cos\delta]^{I}\,\cos\delta_{31}$	a_3^{I}	—	$\cos\delta_{21}\sin\delta_{41}$	$c_4^{II\,\cos}$	—
$[\sin\delta]^{I}\,\sin\delta_{31}$	b_3^{I}	—	$\cos^2\delta_{31}$	a_3^{III}	+
$[\sin\delta]^{I}\,\cos\delta_{31}$	$c_3^{I\,\sin}$	+	$\sin^2\delta_{31}$	b_3^{III}	+
$[\cos\delta]^{I}\,\sin\delta_{31}$	$c_3^{I\,\cos}$	+	$\sin\delta_{31}\cos\delta_{31}$	c_3^{III}	—
$[\cos\delta]^{I}\,\cos\delta_{41}$	a_4^{I}	—	$\cos\delta_{31}\cos\delta_{41}$	a_4^{III}	+
$[\sin\delta]^{I}\,\sin\delta_{41}$	b_4^{I}	—	$\sin\delta_{31}\sin\delta_{41}$	b_4^{III}	+
$[\sin\delta]^{I}\,\cos\delta_{41}$	$c_4^{I\,\sin}$	+	$\sin\delta_{31}\cos\delta_{41}$	$c_4^{III\,\sin}$	—
$[\cos\delta]^{I}\,\sin\delta_{41}$	$c_4^{I\,\cos}$	+	$\cos\delta_{31}\sin\delta_{41}$	$c_4^{III\,\cos}$	—
$\cos^2\delta_{21}$	a_2^{II}	+	$\cos^2\delta_{41}$	a_4^{IV}	+
$\sin^2\delta_{21}$	b_2^{II}	+	$\sin^2\delta_{41}$	b_4^{IV}	+
$\sin\delta_{21}\cos\delta_{21}$	c_2^{II}	—	$\sin\delta_{41}\cos\delta_{41}$	c_4^{IV}	—

13. Gemeinsame Ausgleichung mehrerer Punkte mittels Längemessungen

Die Verbesserungsgleichung einer von irgendeinem Festpunkt nach einem Neupunkt ausgeführten *Längemessung* bei der gemeinsamen Ausgleichung mehrerer Punkte ist dieselbe, wie bei der Einpunktausgleichung. In Gleichung (25) müssen selbstverständlich die den entsprechenden Neupunkt und Richtung betreffenden Angaben eingesetzt werden, während die Verbesserung der zwischen zwei Neupunkten (z. B. zwischen den Punkten A und B) ausgeführten Längemessung

$$v_L = \delta y_A \sin\delta_{BA} + \delta x_A \cos\delta_{BA} - \delta y_B \sin\delta_{BA} - \delta x_B \cos\delta_{BA} + E_{BA} \quad (103)$$

beträgt, wobei sich die *Längenabweichung*, wenn die aus den genäherten Koordinaten berechnete genäherte Entfernung mit (s_{BA}) und das Ergebnis der Längemessung mit L_{BA} bezeichnet wird, folgendermassen gestaltet :

$$E_{BA} = (s_{BA}) - L_{BA}\,. \quad (104)$$

Nach Multiplikation der mit der Gleichung (23) definierten Kräfteprojektionen mit ϱ'', werden die beiden, zu der zwischen den zwei Neupunkten gemessenen Entfernung gehörenden *Kräfteprojektionen* beim Punkte A

$$\begin{aligned} &+ b\delta y_A - c\delta x_A - b\delta y_B + c\delta x_B - e_{BA}\sin\delta_{BA} \\ &- c\delta y_A + a\delta x_A + c\delta y_B - a\delta x_B - e_{BA}\cos\delta_{BA} \end{aligned} \tag{105}$$

und beim Punkte P_2 dasselbe mit entgegengesetztem Vorzeichen. Der Beziehung (27) entsprechend wird :

$$e_{BA} = \frac{E_{BA}\varrho''}{s_{BA}}. \tag{106}$$

Die unter (105) vorkommenden Richtungskoeffizienten beziehen sich selbstverständlich auf die Richtung $A - B$ und auf die Entfernung s_{BA} und stimmen mit jener Erklärung überein, die bezüglich der Gleichungen (26) gegeben wurde.

Zu jedem Längemessresultat, das zwischen zwei Neupunkten erhalten wurde, gehören ähnliche Kräfteprojektionen, wie unter (105) angegeben waren, wobei selbstverständlich immer die Angaben der zwei entsprechenden Neupunkte, bzw. die ihrer miteinander verglichenen Lage entsprechenden Angaben in die Ausdrücke eingesetzt werden müssen.

In dem zum Aufbau der *Gleichgewichtsgleichungen* dienenden Schema entspricht auch jetzt bei jedem Neupunkt je ein mit römischer Ziffer bezeichneter horizontaler Streifen und je eine mit arabischer Ziffer bezeichnete vertikale Kolonne. Es muss darauf geachtet werden, dass die Koeffizienten der Kräfteprojektionen in den entsprechenden Streifen, bzw. in die entsprechende Kolonne eingetragen werden. Schematisch lauten z.B. die Gleichgewichtsgleichungen der Dreipunktausgleichung, wobei die symmetrischen Glieder fortgelassen werden, folgendermassen :

$$\begin{aligned}
\underline{+[b]_1^{\mathrm{I}}} - [c]_1^{\mathrm{I}} + [b]_2^{\mathrm{I}} - [c]_2^{\mathrm{I}} + [b]_3^{\mathrm{I}} - [c]_3^{\mathrm{I}} - [e\sin\delta]^{\mathrm{I}} \\
\underline{+[a]_1^{\mathrm{I}}} - [c]_2^{\mathrm{I}} + [a]_2^{\mathrm{I}} - [c]_3^{\mathrm{I}} + [a]_3^{\mathrm{I}} - [e\cos\delta]^{\mathrm{I}} \\
\underline{[b]_2^{\mathrm{II}}} - [c]_2^{\mathrm{II}} + [b]_3^{\mathrm{II}} - [c]_3^{\mathrm{II}} - [e\sin\delta]^{\mathrm{II}} \\
\underline{+[a]_2^{\mathrm{II}}} - [c]_3^{\mathrm{II}} + [a]_3^{\mathrm{II}} - [e\cos\delta]^{\mathrm{II}} \\
\underline{+[b]_3^{\mathrm{III}}} - [c]_3^{\mathrm{III}} - [e\sin\delta]^{\mathrm{III}} \\
\underline{+[a]_3^{\mathrm{III}}} - [e\cos\delta]^{\mathrm{III}}.
\end{aligned} \tag{107}$$

Die Änderung des Richtungswinkels der anstelle der zwischen den Neupunkten

A und B ausgeführten Längemessungen eingesetzten fiktiven Richtungen wird mit den Formeln :

$$\delta\delta = \frac{b\delta y_A - c\delta x_A - b\delta y_B + c\delta x_B}{-\sin \delta_{BA}} \tag{108}$$

oder

$$= \frac{-c\delta y_A + a\delta x_A + c\delta y_B - a\delta x_B}{-\cos \delta_{BA}} \tag{109}$$

bestimmt, wobei a, b und c die zur Richtung $A - B$ und zur Entfernung $\overline{AB}$ gehörenden Richtungskoeffizienten und δ_{BA} der Richtungswinkel der Richtung $B—A$ ist. Dieselbe Richtungswinkeländerung $\delta\delta$ erhält man auch aus jenen Formeln, die so entstehen, dass in der Formel (108) bzw. (109) die Indizen A und B miteinander vertauscht werden. Zu jeder Längemessung, die zwischen je zwei Neupunkten ausgeführt wird, gehören ähnliche Formeln, es müssen jedoch selbstverständlich immer die Angaben der entsprechenden zwei Neupunkte in die Formeln eingesezt werden.

Die Verbesserung der fiktiven Richtungsmessungen wird mit der Formel

$$v = \delta\delta + e \tag{110}$$

ausgerechnet.

Zur Ausführung der Ausgleichung sind neben unseren bisherigen Kenntnissen keine neuen Erklärungen notwendig.

14. Gemeinsame Ausgleichung mehrerer Punkte mittels von Richtungs- und Längemessungen

Der Grundsatz der Ausgleichung der Richtungs- und Längemessungen bei Mehrpunktausgleichungen entspricht auch dem im Punkte 6 angegebenen Grundsatz. Den Gewichtsfaktor q bestimmt man auch hier mit der Formel (31). Die Ausgleichung kann, das in den Punkten 6, 12 und 13 Kennengelernte zusammengefasst, ohne jegliche weitere Erklärung ausgeführt werden.

15. Berücksichtigung spezieller Gewichte

Die Berücksichtigung spezieller Gewichte erfolgt auch bei der Ausgleichung mehrerer Punkte vollkommen den im Punkt 7 behandelten Prinzipien und Methoden entsprechend. Zur richtigen Benutzung der Gewichte genügen unsere bisherigen Kenntnisse.

16. Gemeinsame Ausgleichung mehrerer Punkte mit einer oder mehreren Zwangbedingungen

Bei der Ausgleichung mehrerer Punkte wird die die Zwangbedingung darstellende, vorerst unbekannte Kraft oder die Resultante der aus mehreren Zwangbedingungen sich ergebenden Kräfte aus mehrere Komponente zerlegt, die durch die ausschliesslich auf Grund der Messergebnisse bestimmte (ausgeglichene) Punktlage der Neupunkte, welche durch die Zwangbedingungen betroffen sind, hindurchgehen. Diese Komponenten stören das Gleichgewicht der durch die Messergebnisse bestimmten Kräftesysteme. Die Neupunkte nehmen hienach eine solche Stellung ein, dass die mit den aus den Zwängen herstammenden Kräften gestärkten neuen Kräftesysteme sich im Gleichgewicht befinden.

Die Zwänge können mit unendlich vielfältigen Kräften ersetzt und ihre Resultante wieder auf unendlich vielerlei Weisen auf die durch die Neupunkte gehenden Komponenten zerlegt werden. Es wird auch jetzt eine solche Lösung gewählt, welche dem Prinzip des geringsten Arbeitsaufwandes entspricht (siehe ersten Abschnitt des Punktes 8).

Die Ableitung wird hier wieder fortgelassen und bloss der Gang der Ausgleichung bekanntgegeben.

1. Es werden — die Zwangbedingungen vorerst gänzlich ausser acht gelassen — die ausschliesslich von Messergebnissen herstammenden Gleichgewichtsgleichungen aufgestellt, wobei auch bei inneren Richtungen die Reduktionen wegen der Orientierungsunbekannten berücksichtigt werden :

$$f_1 \qquad f_2 \qquad f_3 \qquad f_4 \qquad \ldots \tag{111}$$

2. Aus den Zwangbedingungsgleichungen wird mit Hilfe der übrigen Unbekannten die mit deren Zahl übereinstimmende Anzahl von Unbekannten ausgedrückt; für die nicht ausgedrückten Unbekannten werden Identitätsgleichungen aufgestellt. Es werden z. B. die Unbekannten δy_1 und δx_1 mittels der Unbekannten δy_2, $\delta x_2 \ldots$ ausgedrückt :

$$\begin{aligned}
\delta y_1 &= A_1 \delta y_2 + B_1 \delta x_2 + C_1 \delta y_3 + D_1 \delta x_3 + \ldots + T_1 \\
\delta x_1 &= A_2 \delta y_2 + B_2 \delta x_2 + C_2 \delta y_3 + D_2 \delta x_3 + \ldots + T_2 \\
\delta y_2 &= A_3 \delta y_2 + B_3 \delta x_2 + C_3 \delta y_3 + D_3 \delta x_3 + \ldots + T_3 \\
\delta x_2 &= A_4 \delta y_2 + B_4 \delta x_2 + C_4 \delta y_3 + D_4 \delta x_3 + \ldots + T_4 \\
\delta y_3 &= A_5 \delta y_2 + B_5 \delta x_2 + C_5 \delta y_3 + D_5 \delta x_3 + \ldots + T_5 \\
\delta x_3 &= A_6 \delta y_2 + B_6 \delta x_2 + C_6 \delta y_2 + D_6 \delta x_3 + \ldots + T_6 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{112}$$

Die Koeffizienten der in den Zwangbedingungsgleichungen nicht vorkommenden Unbekannten betragen in der Gleichung der mittels der Zwangbedingungsgleichungen ausgedrückten Unbekannten (gegenwärtig in den zwei ersten Gleichungen) Null. In den Identitätsgleichungen (gegenwärtig in sämtlichen Gleichungen ausser den zwei ersten) beträgt der Koeffizient der fraglichen Unbekannten an sich $+1$, die übrigen Koeffizienten und das Absolutglied hingegen Null. (In der Identitätsgleichung δy_2 z. B. ist $A_3 = +1$, $B_3 = C_3 = \ldots = T_3 = 0$).

3. Die Gleichgewichtsgleichungen, die auch die Zwangbedingungen umfassen, betragen :

$$g_1 = [Af] = 0, \quad g_2 = [Bf] = 0, \quad g_3 = [Cf] = 0, \quad g_4 = [Df] = 0 \quad \ldots \quad (113)$$

(Mit den Multiplikatoren, die die Indexzahl 1 tragen, wird jene Gleichgewichtsgleichung (111) multipliziert, in welcher das führende Glied, δy_1 unbekannt ist ; mit den Multiplikatoren, die die Indexzahl 2 haben, jene Gleichung, in der δx_1 das führende Glied ist, mit den Multiplikatoren, die die Indexzahl 3 haben, jene, in der δy_2 das führende Glied ist, usw. Eine Multiplikation mit den Absolutgliedern T ist nicht nötig.)

4. In die Gleichungen g wird als Funktion der übrigen Unbekannten der Wert der aus den Bedingungsgleichung ausgedrückten Unbekannten eingesetzt, und sodann die Gleichungen g geordnet.

5. Aus den Gleichungen g werden die darin enthaltenen Unbekannten bestimmt.

6. Hiernach werden die übrigen Unbekannten auf Grund der Zwangbedingungsgleichungen berechnet.

Werden nun die infolge der Zwangbedingungen entwickelten Koordinatenänderungen in die Gleichungen f unter (111) eingesetzt, so erfüllen diese die Nullbedingung nicht, sondern ergeben die Projektionen der Komponenten des die Zwangbedingung repräsentierende Kraftresultates mit entgegengesetztem Vorzeichen :

$$\begin{aligned} f_1 &= [-v\cos\delta]^{\mathrm{I}} = -V_y^{\mathrm{I}} \qquad f_2 = [v\sin\delta]^{\mathrm{I}} = -V_x^{\mathrm{I}} \\ f_3 &= [-v\cos\delta]^{\mathrm{II}} = -V_y^{\mathrm{II}} \qquad f_4 = [v\sin\delta]^{\mathrm{II}} = -V_x^{\mathrm{II}} \end{aligned} \quad (114)$$

. . . . . .

Als Kontrolle dient, dass die direkt aus den Messverbesserungen darstellbaren Summenwerte $[-v\cos\delta]$ und $[v\sin\delta]$ innerhalb der Rechnungsschärfe bezüglich sämtlicher Neupunkte mit den mittels (114) erhaltenen Werten übereinstimmen müssen.

17. Ausgleichung mehrerer Punkte mit Berücksichtigung der Messfehler der Orientierungsrichtungen

Punkt 9 gegenüber beträgt die Abweichung nur soviel, dass es sich ergeben kann: von irgendeinem Festpunkt (z. B. vom Punkte A) wird nicht nur nach einem Neupunkt, sondern nach mehreren, eventuell nach sämtlichen der gemeinsam auszugleichenden Neupunkte gerichtet. Die Messverbesserungen ergeben (wobei für die Neupunkte die Indizen 1, 2, 3 . . ., für die gerichteten Festpunkte die Indizen I, II, . . . benutzt werden):

$$
\begin{aligned}
v_{A1} &= -\delta z_A + \frac{0{,}1\varrho'' \cos \delta_{A1}}{s_{A1}} \delta y_1 - \frac{0{,}1\varrho'' \sin \delta_{A1}}{s_{A1}} \delta x_1 + e_{A1} \\
v_{A2} &= -\delta z_A + \frac{0{,}1\varrho'' \cos \delta_{A2}}{s_{A2}} \delta y_2 - \frac{0{,}1\varrho'' \sin \delta_{A2}}{s_{A2}} \delta x_2 + e_{A2} \\
v_{A3} &= -\delta z_A + \frac{0{,}1\varrho'' \cos \delta_{A3}}{s_{A3}} \delta y_3 - \frac{0{,}1\varrho'' \sin \delta_{A3}}{s_{A3}} \delta x_3 + e_{A3} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_{AI} &= -\delta z_A + e_{AI} \\
v_{AII} &= -\delta z_A + e_{AII} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{115}
$$

Auf Grund der Nullbedingung des Drehmomentes, wenn der vorläufige Wert des Orientierungswinkels gemäss Formel (51) aufgenommen wird:

$$
\begin{aligned}
\frac{[sv]^A}{0{,}1\varrho''} = {} & \cos \delta_{A1} \delta y_1 - \sin \delta_{A1} \delta x_1 + \cos \delta_{A2} \delta y_2 - \sin \delta_{A2} \delta x_2 + \\
& + \cos \delta_{A3} \delta y_3 - \sin \delta_{A3} \delta x_3 + \ldots - \frac{10}{\varrho''} \delta z_A [s]^A = 0
\end{aligned}
\tag{116}
$$

und hieraus ergibt die Änderung des Orientierungswinkels:

$$
\begin{aligned}
\delta z_A = {} & \frac{\cos \delta_{A1} \delta y_1 - \sin \delta_{A1} \delta x_1 + \cos \delta_{A2} \delta y_2 - \sin \delta_{A2} \delta x_2}{D_A} + \\
& + \frac{\cos \delta_{A3} \delta y_3 - \sin \delta_{A3} \delta x_3 + \ldots}{D_A},
\end{aligned}
\tag{117}
$$

wo

$$
D_A = 0{,}048\,48\ [s]^A_{\mathrm{km}}. \tag{118}
$$

Die Kräfteprojektionen, die zu der Richtung nach dem Neupunkt 1 gehören:

$$\begin{aligned} -v_{A1}\cos\delta_{A1} &= a_1'\,\delta y_1 + c_1'\,\delta x_1 + a_1''\,\delta y_2 + c_{1\cos}''\,\delta x_2 + \\ &\quad + a_1'''\,\delta y_3 + c_{1\cos}'''\,\delta x_3 + \ldots - e_{A1}\cos\delta_{A1} \\ +v_{A1}\sin\delta_{A1} &= c_1'\,\delta y_1 + b_1'\,\delta x_1 + c_{1\sin}''\,\delta y_2 + b_1''\,\delta x_2 + \\ &\quad + c_{1\sin}'''\,\delta y_3 + b_1'''\,\delta x_3 + \ldots + e_{A1}\sin\delta_{A1}, \end{aligned} \tag{119}$$

wo

$$\begin{aligned} a_1' &= a_{A1} + \frac{\cos^2\delta_{A1}}{D_A} \qquad a_1'' = +\frac{\cos\delta_{A1}\cos\delta_{A2}}{D_A} \qquad a_1''' = +\frac{\cos\delta_{A1}\cos\delta_{A3}}{D_A} \\ b_1' &= b_{A1} + \frac{\sin^2\delta_{A1}}{D_A} \qquad b_1'' = +\frac{\sin\delta_{A1}\sin\delta_{A2}}{D_A} \qquad b_1''' = +\frac{\sin\delta_{A1}\sin\delta_{A3}}{D_A} \\ c_1' &= c_{A1} - \frac{\sin\delta_{A1}\cos\delta_{A1}}{D_A} \\ c_{1\cos}'' &= -\frac{\sin\delta_{A2}\cos\delta_{A1}}{D_A} \qquad c_{1\sin}'' = -\frac{\cos\delta_{A2}\sin\delta_{A1}}{D_A} \\ c_{1\cos}''' &= -\frac{\sin\delta_{A3}\cos\delta_{A1}}{D_A} \qquad c_{1\sin}''' = -\frac{\cos\delta_{A3}\sin\delta_{A1}}{D_A}. \end{aligned} \tag{120}$$

Die Kräfteprojektionen, die zu der Richtung nach dem Punkt 2 gehören:

$$\begin{aligned} -v_{A2}\cos\delta_{A2} &= a_2'\,\delta y_1 + c_{2\cos}'\,\delta x_1 + a_2''\,\delta y_2 + c_{2\cos}''\,\delta x_2 + \\ &\quad + a_2'''\,\delta y_3 + c_{3\cos}'''\,\delta x_3 + \ldots - e_{A2}\cos\delta_{A2} \\ +v_{A2}\sin\delta_{A2} &= c_{2\sin}'\,\delta y_1 + b_2'\,\delta x_1 + c_2''\,\delta y_2 + b_2''\,\delta x_2 + \\ &\quad + c_{2\sin}'''\,\delta y_3 + b_2'''\,\delta x_3 + \ldots + e_{A2}\sin\delta_{A2}, \end{aligned} \tag{121}$$

wo

$$\begin{aligned} a_2' &= +\frac{\cos\delta_{A2}\cos\delta_{A1}}{D_A} \qquad a_2'' = a_{A2} + \frac{\cos^2\delta_{A2}}{D_A} \qquad a_2''' = +\frac{\cos\delta_{A2}\cos\delta_{A3}}{D_A} \\ b_2' &= +\frac{\sin\delta_{A2}\sin\delta_{A1}}{D_A} \qquad b_2'' = \mathrm{b}_{A2} + \frac{\sin^2\delta_{A2}}{D_A} \qquad b_2''' = +\frac{\sin\delta_{A2}\sin\delta_{A3}}{D_A} \\ c_{2\cos}' &= -\frac{\sin\delta_{A1}\cos\delta_{A2}}{D_A} \qquad c_{2\sin}' = -\frac{\cos\delta_{A1}\sin\delta_{A2}}{D_A} \\ c_2'' &= c_{A2} - \frac{\sin\delta_{A2}\cos\delta_{A2}}{D_A} \\ c_{2\cos}''' &= -\frac{\sin\delta_{A3}\cos\delta_{A2}}{D_A} \qquad c_{2\sin}''' = -\frac{\cos\delta_{A3}\sin\delta_{A2}}{D_A}. \end{aligned} \tag{122}$$

Die Kräfteprojektionen, die zu der nach den übrigen Neupunkten laufenden Richtungen gehören, werden in entsprechender Weise dargestellt. Wie ersichtlich, greifen wegen δz die vom Festpunkt gerichteten sämtlichen Neupunkt-Koordinatenänderungen in die Projektionen der äusseren Richtungen ein. In dem Rechenschema, welches zur Darstellung der Gleichgewichtsgleichungen dient, sind die Koeffizienten der einzelnen Koordinatenänderungen in die Kolonne des entsprechenden Punktes einzutragen, selbstverständlich in die Gruppe der äusseren Richtungen.

18. Berechnung des mittleren Fehlers

Den mittleren Fehler der Gewichtseinheit müssen wir der Formel (60) entsprechend unter Einbeziehung der Messverbesserung sämtlicher Messergebnisse berechnen. Im übrigen erfolgt die Berechnung des mittleren Fehlers in jeder Hinsicht gemäss Punkt 10. Werden die Gleichgewichtsgleichungen auf solche Weise gelöst, dass wir zu sämtlichen Koordinatenänderungen den mit dem Gewichtskoeffizienten oder mit dem Gewicht proportionalen Wert Q' bzw. p' erhalten, dann kann mit Hilfe der Formel (77) bzw. (76) der mittlere Fehler sämtlicher Koordinatenänderungen auch berechnet werden.

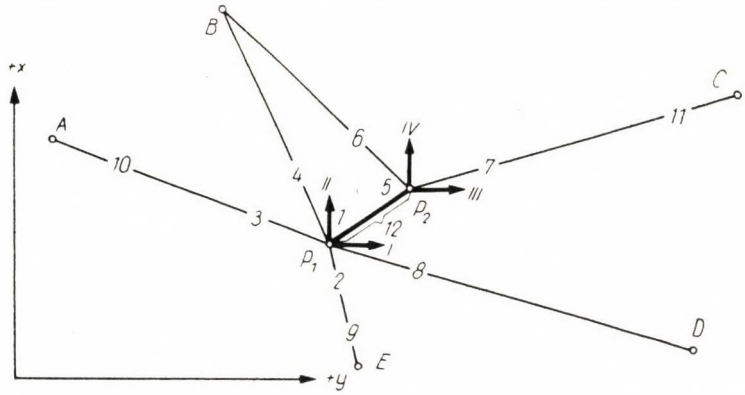


Abb. 5

Beispiele

5. Beispiel. Es sollen die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 mittels gemeinsamer Ausgleichung bestimmt werden. Die auf Fig. 5 mit den Nummern 1—11 bezeichneten Richtungen und die Entfernung P_1P_2 (Nr. 12) wurden gemessen. Wir bezeichnen die Koordinatenänderungen des Punktes P_1 bei der Ausgleichung mehrerer Punkte — wie bei der ungarischen Landesvermessung üblich — mit I (δy_1 entsprechend) und II (δx_1 entsprechend) und die Koordinatenänderungen des Punktes P_2 mit III (δy_2 entsprechend) und IV (δx_2 entsprechend). Diese Bezeichnung wurde auch auf der Abbildung angegeben.

Die Koordinaten der Festpunkte betragen:

$y_A = +\ 20\,677{,}423$ m	$x_A = +\ 53\,266{,}784$ m
$y_B = +\ 22\,304{,}174$ m	$x_B = +\ 54\,513{,}224$ m
$y_C = +\ 26\,681{,}366$ m	$x_C = +\ 53\,792{,}062$ m
$y_D = +\ 26\,284{,}635$ m	$x_D = +\ 50\,637{,}502$ m
$y_E = +\ 23\,394{,}710$ m	$x_E = +\ 51\,689{,}828$ m

Den Lauf der Ausgleichung können wir schrittweise verfolgen.

1. Für Punkt P_1 und P_2 berechnen wir vorläufige Koordinaten:

$(y_1) = +\ 23\,301{,}400$ m	$(x_1) = +\ 52\,107{,}800$ m
$(y_2) = +\ 23\,600{,}100$ m	$(x_2) = +\ 52\,305{,}300$ m

2. Auf Grund der vorläufigen Koordinaten werden für sämtliche gemessene Richtungen der vorläufige Richtungswinkel (δ) und die Richtungskoeffizienten a, b, c berechnet, sowie die Werte sin (δ) und cos (δ) ausgesucht. Der vorläufige Richtungswinkel (und im Zusammenhang mit diesem auch die übrigen erwähnten Werte) werden so berechnet, dass wir ein Ergebnis für die Richtung nach dem Neupunkt erhalten. Der Richtungswinkel der (gemeinsamen) Neupunktrichtung wird zweckmässig in der Richtung von P_2 nach P_1 berechnet.

Zur gemessenen Länge wird nun auf Grund der vorläufigen Koordinaten auch der vorläufige Richtungswinkel (δ) und die vorläufige Entfernung (s) berechnet.

Die vorläufigen Richtungswinkel bzw. in der Reihe der Längenmessung die vorläufige Entfernung wird in die Kolonne (δ) der 13. Tabelle eingeführt. In Tabelle 13 werden auch die Richtungslängen in Kilometern eingetragen, und zwar bei den inneren Richtungen bis auf eine Schärfe von einhundertstel, bei den äusseren Richtungen bis auf eine Schärfe von einzehntel. Bei der die Längenmessung ersetzenden fingierten Richtung wird der Wert s/q eingeschrieben. Die Richtungskoeffizienten und die Winkelfunktionen werden — für jeden Neupunkt gruppiert, und zwar auch die inneren Richtungen von den äusseren getrennt — in Tabelle 14 eingeführt. In der Tabelle (im Rechenschema) gehört bekanntlich zu jedem auszugleichenden Punkt je ein horizontaler Streifen und je eine vertikale Kolonne. Die Streifen wurden mit I und II, die Kolonnen mit 1 und 2 bezeichnet.

In unserem Beispiel wurde die gemeinsame Richtung von beiden Endpunkten gemessen. Die der einen Messung entsprechende Richtung 1 ist bei P_1 die innere, bei P_2 die äussere, während die der anderen Messung entsprechende Richtung 5 bei P_1 die äussere und bei P_2 die innere Richtung ist. Die Koeffizienten und Winkelfunktionswerte der gemeinsamen Richtung sind bei je einem Punkte identisch, ihr Vorzeichen wechselt aber pro Punkt der Richtungswinkeldifferenz von 180° entsprechend. Ebenfalls unter den äusseren Richtungen der beiden Neupunkte befinden sich auch die Angaben der sich aus der Längenmessung ergebenden fingierten Richtungsmessung 12. Der Gewichtsfaktor q wurde auf Grund der Messergebnisse des 1. Beispiels auch hier im Werte von 0,67 aufgenommen. Im Laufe der Längenmessung schrieben wir in der Reihe der Längenmessung in Kolonne a den Wert $qb = 0{,}67$ (—40,07), in Kolonne b den Wert $qa = 0{,}67$ (—17,52), in Kolonne c den Wert $-qc = -0{,}67$ (+26,50).

3. Die Richtungsabweichungen werden in Tabelle 13 berechnet. Den genäherten Wert des Orientierungswinkels berechnen wir der Formel (80a) entsprechend, selbstverständlich bei jedem Neupunkt einzeln. Hierzu werden die Werte s mit einer Schärfe von hundertstel Kilometern angewandt. Die Richtungsabweichungen e werden der Reihe nach in Tabelle 14 eingetragen. Die zu den zwei Messergebnissen der gemeinsamen Richtung gehörende Richtungsabweichungen stimmen im allgemeinen nicht miteinander überein, da sie sich aus immer anderen Messreihen ergeben. Es versteht sich von selbst, dass zu der auf Punkt P_1 ausgeführten Messung 1 sowohl zwischen den inneren Richtungen des Punktes P_1 als auch zwischen den äusseren Richtungen des Punktes P_2 dieselbe Richtungsabweichung $e = +86{,}6''$ gehört. Ähnlicherweise wird bei der Messung 5, die auf Punkt P_2 ausgeführt wurde, sowohl zwischen den inneren Richtungen des Punktes P_2, als auch zwischen den äusseren Richtungen des Punktes P_1 die Richtungsabweichung $e = -20{,}6''$ aufgezeichnet.

4. In Tabelle 14 werden die Werte $e \cos \delta$ und $e \sin \delta$ berechnet und dann für jeden Neupunkt einzeln, der Reihe nach, die Glieder der Kolonnen, a, b, c, $e \sin \delta$ und $e \cos \delta$ addiert.

5. Nun werden die in Tabelle 15 vorgeschriebenen Reduktionen berechnet. Die zur Reduktionsberechnung notwendigen Sinus- und Cosinuswerte sind in Tabelle 14 unter-

Tabelle 13

Messung	Standpunkt	Zielpunkt	s km	L	(δ)	(z)	e	δ	z	v	svv
1	P_1	P_2	0,36	56 24 45,2	56 31 38,6	0 6 53,4	+86,6	56 31 4,5	0 6 19,3	+52,5	1104,6
2		E	0,43	167 20 33,4	167 24 55,4	0 4 22,0	—64,8	167 25 26,1	0 4 52,7	—34,1	465,1
3		A	2,87	293 44 26,1	293 49 50,0	0 5 23,9	— 2,9	293 49 53,0	0 5 26,9	+ 0,1	0,0
4		B	2,60	337 23 27,9	337 28 56,6	0 5 28,7	+ 1,9	337 28 52,9	0 5 25,0	— 1,8	8,4
			6,26			$(Z) = 0\ 5\ 26{,}8$			$Z = 0\ 5\ 26{,}8$		
5	P_2	P_1	0,36	236 19 9,3	236 31 38,6	0 12 29,3	—20,6	236 31 4,5	0 11 55,2	—51,4	1056,8
6		B	2,56	329 22 45,1	329 35 22,1	0 12 37,0	—12,9	329 35 30,2	0 12 45,1	— 1,5	5,8
7		C	3,42	64 1 36,1	64 14 30,9	0 12 54,8	+ 4,9	64 14 26,7	0 12 50,6	+ 4,0	54,4
8		D	3,16	121 38 6,6	121 51 3,9	0 12 57,3	+ 7,4	121 50 56,2	0 12 49,6	+ 3,0	28,8
			9,50			$(Z) = 0\ 12\ 49{,}9$			$Z = 0\ 12\ 46{,}6$		
9	E		0,4	347 24 55,4	347 24 55,4		0,0	347 25 26,1		+30,7	377,0
10	A		2,9	113 49 50,0	113 49 50,0		0,0	113 49 53,0		+ 3,0	26,1
11	C		3,4	244 14 30,9	244 14 30,9		0,0	244 14 26,7		— 4,2	60,0
12	P_2P_1		0,5	357,973 m	358,089 m	+116 mm	+66,8	357,962 m	—11 mm	— 4,2	8,8
											3195,8

Tabelle 14

		1				2								
	Messung	a_1	b_1	c_1 +	c_1 −	a_2	b_2	c_2 +	c_2 −	e	sin δ	cos δ	e sin δ	e cos δ
	1	−17,52	−40,07	26,50		+17,52	+40,07		26,50	+86,6	−0,834	−0,552	−72,22	−47,80
	2	−45,88	− 2,29		10,24					−64,8	−0,218	+0,976	+14,13	−63,24
	3	− 1,17	− 6,02		2,66					− 2,9	+0,915	−0,404	− 2,65	+ 1,17
	4	− 6,76	− 1,16		2,80					+ 1,9	+0,383	−0,924	+ 0,73	− 1,76
											+0,246	−0,904		
I	5	−17,52	−40,07	26,50		+17,52	+40,07		26,50	−20,6	−0,834	−0,552	+17,18	+11,37
	9	−45,88	− 2,29		10,24					0,0	−0,218	+0,976	0,00	0,00
	10	− 1,17	− 6,02		2,66					0,0	+0,915	−0,404	0,00	0,00
	12	−26,85	−11,74		17,76	+26,85	+11,74	17,76		+44,8	+0,552	−0,834	+24,73	−37,36
								cos egyenlet	sin					
	[ ]	−162,75	−109,66		+6,64	+61,89	+91,88	−35,24	−35,24					
	Δ_1	+ 2,69	+ 0,20		+0,73	− 1,64	+ 0,68	+ 2,48	− 0,45					
	Δ_2	+ 0,66	+ 1,51		−1,00	+ 0,26	+ 0,74	− 0,49	− 0,39					
	[ ]	−159,40	−107,95		+6,37	+60,51	+93,30	−33,25	−36,08				−18,10	−137,62
	5	+17,52	+40,07		26,50	−17,52	−40,07	26,50		−20,6	+0,834	+0,552	−17,18	−11,37
	6					− 5,99	− 2,06		3,52	−12,9	+0,506	−0,862	− 6,53	−11,12
	7					− 1,14	− 4,89	2,36		+ 4,9	−0,901	−0,435	− 4,41	− 2,13
	8					− 1,82	− 4,71		2,92	+ 7,4	−0,849	+0,528	− 6,28	+ 3,91
											−0,410	−0,217		
II	1	+17,52	+40,07		26,50	−17,52	−40,07	26,50		+86,6	+0,834	+0,552	+72,22	+47,80
	11					− 1,14	− 4,89	2,36		0,0	−0,901	−0,435	0,00	0,00
	12	+26,85	+11,74	17,76		−26,85	−11,74		17,76	+44,8	−0,552	+0,834	−24,73	+37,36
	[ ]					−71,98	−108,43	+33,52						
	Δ_1					+ 1,00	+ 2,29	− 1,52						
	Δ_2					+ 0,10	+ 0,36	− 0,19						
	[ ]					−70,88	−105,78	+31,81					+13,09	+86,69

Tabelle 15

$[s]^{I} = 6{,}26$ km $\quad D^{I} = 0{,}04848[s]^{I} = 0{,}3035$					$[s]^{II} = 9{,}50$ km $\quad D^{II} = 0{,}04848[s]^{II} = 0{,}4605$				
wegen δz_1	Δ'	$\Delta = \frac{\Delta'}{D}$			wegen δz_2	Δ'	$\Delta = \frac{\Delta'}{D}$		
$[\cos\delta]^{I}\,[\cos\delta]^{I}$	+0,8172	+2,69	a_1^{I}	+	$[\cos\delta]^{II}\,[\cos\delta]^{II}$	+0,0471	+0,10	a_2^{II}	+
$[\sin\delta]^{I}\,[\sin\delta]^{I}$	+0,0605	+0,20	b_1^{I}	+	$[\sin\delta]^{II}\,[\sin\delta]^{II}$	+0,1681	+0,36	b_2^{II}	+
$[\sin\delta]^{I}\,[\cos\delta]^{I}$	—0,2224	—0,73	c_1^{I}	—	$[\sin\delta]^{II}\,[\cos\delta]^{II}$	+0,0890	+0,19	c_2^{II}	—
$[\cos\delta]^{I}\cos\delta_{21}$	+0,4990	+1,64	a_2^{I}	—	$[\cos\delta]^{II}\cos\delta_{12}$	—0,1198	—0,26	a_2^{I}	—
$[\sin\delta]^{I}\sin\delta_{21}$	—0,2052	—0,68	b_2^{I}	—	$[\sin\delta]^{II}\sin\delta_{12}$	—0,3419	—0,74	b_2^{I}	—
$[\sin\delta]^{I}\cos\delta_{21}$	—0,1358	—0,45	$c_2^{I\sin}$	+	$[\sin\delta]^{II}\cos\delta_{12}$	—0,2263	—0,49	$c_2^{I\cos}$	+
$[\cos\delta]^{I}\sin\delta_{21}$	+0,7539	+2,48	$c_2^{I\cos}$	+	$[\cos\delta]^{II}\sin\delta_{12}$	—0,1810	—0,39	$c_2^{I\sin}$	+
$\cos^2\delta_{21}$	+0,3047	+1,00	a_2^{II}	+	$\cos^2\delta_{12}$	+0,3047	+0,66	a_1^{I}	+
$\sin^2\delta_{21}$	+0,6956	+2,29	b_2^{II}	+	$\sin^2\delta_{12}$	+0,6956	+1,51	b_1^{I}	+
$\sin\delta_{21}\cos\delta_{21}$	+0,4604	+1,52	c_2^{II}	—	$\sin\delta_{12}\cos\delta_{12}$	+0,4604	+1,00	c_1^{I}	—

strichen. Die Reduktionen werden, dem Zugehörigkeitszeichen und Verwendungsvorzeichen von Tabelle 15 entsprechend, unter die für jeden Punkt dargestellten Summenglieder der Richtungskoeffizienten eingetragen. Nachdem die Summenglieder und Reduktionen zusammengezogen wurden, erhalten wir die vier Gleichgewichtsgleichungen. Diese betragen schematisch, wenn die symmetrischen Glieder fortgelassen werden :

— 159,40	+ 6,37	+ 60,51	— 33,25	+137,62
	— 107,95	— 36,08	+ 93,30	— 18,10
		— 70,88	+ 31,81	— 86,69
			— 105,78	+ 13,09

Zur ersten Kolonne gehört die Koordinatenänderung *I*, zur zweiten die Koordinatenänderung *II*, zur dritten die Koordinatenänderung *III* und zur vierten die Koordinatenänderung *IV*. Die nicht ausgeschriebene rechte Seite der Gleichungen beträgt Null.

6. Es folgt die Lösung der Gleichgewichtsgleichungen. (Eventuell multipliziert man erst die Gleichungen mit —1.) Als Ergebnis erhalten wir folgende Koordinatenänderungen :

$$\delta y_1 = I = +0{,}838 \text{ dm} \qquad \delta x_1 = II = -0{,}834 \text{ dm}$$

$$\delta y_2 = III = -0{,}550 \text{ dm} \qquad \delta x_2 = IV = -1{,}041 \text{ dm}.$$

7. Mit den Formeln (81) und (83) wird die Änderung der Orientierungswinkel berechnet :

$$\delta z_1 = \frac{+(-0{,}904)(+0{,}838) - (+0{,}246)(-0{,}834) - (-0{,}552)(-0{,}550)}{0{,}3035} +$$

$$+ \frac{(-0{,}834)(-1{,}041)}{0{,}3035} = +0{,}04''$$

$$\delta z_2 = \frac{-(+0{,}552)(+0{,}838) + (+0{,}834)(-0{,}834) + (-0{,}217)(-0{,}550)}{0{,}4605} +$$

$$+ \frac{+(-0{,}410)(-1{,}041)}{0{,}4605} = -3{,}18''.$$

8. In Tabelle 16 wird mit Hilfe der Formeln (88), (89) und (90) die Änderung $\delta\delta$ der Richtungswinkel berechnet, und dann mittels der Formeln (92), (93) und (94) die Verbesserungen v (bei den Längenmessungen die Verbesserung der fingierten Ersatzrichtungsmessung). Bei der die Längenmessung ersetzenden fingierten Richtung werden die in Tabelle 14 eingeführten Richtungskoeffizientenwerte angewandt (also die Werte qa, qb und $-qc$). Es muss darauf geachtet werden, dass bei der Neupunktrichtung und bei der zu der zwischen den beiden Neupunkten ausgeführten Längenmessung gehörenden fingierten Richtung alle vier Koordinatenänderungen zur Berechnung benützt werden müssen, weiters, dass in die Berechnung der Verbesserungen bei all jenen Richtungen, bei denen auch die Änderung irgendwelcher Orientierungswinkel eingezogen wird, der entsprechende δz-Wert benutzt werden soll : bei der Richtung 1—4 der Wert δz_1, bei der Richtung 5—8 Wert δz_2. Richtung 1 und 5 kommt zweimal vor. Ob nun die Richtungswinkeländerung und die Messverbesserung unter den inneren oder äusseren Richtungen mit diesen Werten gerechnet wird, die zu demselben Messergebnis gehörenden Werte müssen selbstverständlich völlig miteinander übereinstimmen.

Die Längenmessverbesserung wird aus der fingierten Richtungsmessverbesserung mit Hilfe der linksseitigen Formel (33) berechnet :

$$v_L = -\frac{4{,}30}{\varrho''}\,\frac{358}{0{,}67} = 0{,}0111 \text{ m}.$$

9. Kontrolle :

$$[v \cos\delta]^{\mathrm{I}} = -0{,}05 \approx 0 \qquad [v \sin\delta]^{\mathrm{I}} = -0{,}13 \approx 0$$

$$[v \cos\delta]^{\mathrm{II}} = +0{,}04 \approx 0 \qquad [v \sin\delta]^{\mathrm{II}} = +0{,}12 \approx 0.$$

Tabelle 16

Messung	a_1I oder c_1I	c_1II oder b_1II	a_2III oder c_2III	c_2IV oder b_2IV	[ ]	— cos δ oder sin δ	δδ	e	$-\delta x$	v	s	svv	$v \sin \delta$	$v \cos \delta$
1	—14,68	—22,10	— 9,64	+27,59	—18,83	+0,552	—34,11	+86,6	—0,04	+52,45	0,4	1100,4	—43,74	—28,95
2	—38,45	+ 8,54			—29,91	—0,976	+30,65	—64,8	—0,04	—34,19	0,4	467,6	+ 7,45	—33,37
3	— 2,23	+ 5,02			+ 2,70	+0,915	+ 3,05	— 2,9	—0,04	+ 0,11	2,9	0,0	+ 0,10	— 0,04
4	— 5,66	+ 2,34			— 3,32	+0,924	— 3,59	+ 1,9	—0,04	— 1,73	2,6	7,8	— 0,66	+ 1,60
5	—14,68	—22,10	— 9,64	+27,59	—18,83	+0,552	—34,11	—20,6	+3,18	—51,53	0,4	—	+42,98	+28,44
9	—38,45	+ 8,54			—29,91	—0,976	+30,65	0,0		+30,65	0,4	375,8	— 6,68	+29,91
10	— 2,23	+ 5,02			+ 2,79	+0,915	+ 3,05	0,0		+ 3,05	2,9	27,0	+ 2,79	— 1,23
12	—22,50	+14,81	—14,77	—18,49	—40,95	+0,834	—49,10	+44,8		— 4,30	0,5	9,2	— 2,37	+ 3,59
													— 0,13	— 0,05
5	+14,68	+22,10	+ 9,64	—27,59	+18,83	—0,552	—34,11	—20,6	+3,18	—51,53	0,4	1062,1	—42,98	—28,44
6			+ 3,29	+ 3,66	+ 6,95	+0,862	+ 8,06	—12,9	+3,18	— 1,66	2,6	7,2	— 0,84	+ 1,43
7			— 1,30	+ 5,09	+ 3,79	—0,901	— 4,21	+ 4,9	+3,18	+ 3,87	3,4	50,9	— 3,49	— 1,68
8			+ 1,00	+ 3,04	+ 4,04	—0,527	— 7,67	+ 7,4	+3,18	+ 2,91	3,2	27,1	— 2,47	+ 1,54
1	+14,68	+22,10	+ 9,64	—27,59	+18,83	—0,552	—34,11	+86,6	—0,04	+52,45	0,4	—	+43,74	+28,95
11			— 1,30	+ 5,09	+ 3,79	—0,901	— 4,21	0,0		— 4,21	3,4	60,3	+ 3,79	+ 1,83
12	+22,50	—14,81	+14,77	+18,49	+40,95	—0,834	—49,10	+44,8		— 4,30	0,5	—	+ 2,37	— 3,59
												3195,4	+ 0,12	+ 0,04

10. In Tabelle 16 werden auch noch die Werte svv und $[svv]$ berechnet. Die Richtungslängen werden auf zehntel Kilometer berücksichtigt. Bei der die Längenmessung ersetzenden fingierten Richtungsmessung wird der in die Kolonne s der Tabelle 13 bzw. 16 eingetragene Wert s/q benützt.

11. Die ausgeglichenen (endgültigen) Koordinaten der Neupunkte werden berechnet:

$$\begin{aligned} y_1 &= (y_1) + I = +23\,301{,}400 + 0{,}084 = +23\,301{,}484 \text{ m} \\ x_1 &= (x_1) + II = +52\,107{,}800 - 0{,}083 = +52\,107{,}717 \text{ m} \\ y_2 &= (y_2) + III = +23\,600{,}100 - 0{,}055 = +23\,600{,}045 \text{ m} \\ x_2 &= (x_2) + IV = +52\,305{,}300 - 0{,}104 = +52\,305{,}196 \text{ m} \end{aligned}$$

12. Auf Grund der endgültigen Koordinaten der Neupunkte werden die endgültigen Richtungswinkel berechnet, sowie die endgültige Entfernung zur gemessenen Länge. Die je nach den genäherten Richtungswinkeln erhaltenen Richtungswinkeländerungen müssen innerhalb der Berechnungsschärfe mit den gemäss Schritt 8 berechneten Werten $\delta\delta$ übereinstimmen.

13. Die im vorigen Schritt erwähnten Werte werden in Tabelle 13 eingetragen und der endgültige Wert der Orientierungswinkel wird für jeden Neupunkt mit der Formel

$$Z = \frac{[s\,z]}{[s]}$$

bestimmt. Diese Werte müssen innerhalb der Berechnungsschärfe mit den laut Formel

$$Z = (Z) + \delta z$$

berechneten entsprechenden Winkelwerten übereinstimmen.

Auch in Tabelle 13 werden die Messverbesserungen v berechnet. Auf Grund der aus den endgültigen Koordinaten berechneten Entfernung beträgt die Längenmessverbesserung: —11 mm. Hieraus ergibt sich mit der rechtsseitigen Formel (33) die zur fingierten Richtungsmessung gehörende Verbesserung:

$$v_{12} = 0{,}67\,\frac{0{,}011}{358}\,\varrho'' = 4{,}25''.$$

Auch die in Tabelle 13 berechneten Verbesserungen müssen (innerhalb der Berechnungsschärfe) mit den im 8. Schritt erhaltenen entsprechenden Werten übereinstimmen.

14. Aus den Richtungsmessverbesserungen werden auch in Tabelle 13 die Werte svv und $[svv]$ berechnet, wobei die Längen s auf zehntel Kilometer berücksichtigt werden. Diese müssen innerhalb der Berechnungsschärfe mit dem im 10. Schritt Berechneten übereinstimmen. (Bei den die Längenmessung ersetzenden fingierten Richtungsmessungen wird hier selbstverständlich auch der in Kolonne s eingetragene Wert s/q benützt).

15. In unserem Beispiel beträgt die Zahl der überschüssigen Beobachtungen:

$$f = 12 - 6 = 6$$

Der mittlere Wert des auf zwei Arten berechneten Wertes $[svv]$ beträgt, auf eine ganze Zahl aufgerundet: 3196, der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist demnach:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{3196}{6}} = \pm 23{,}1.$$

Die Neupunktrichtung sowie die Richtungen 4 und 11 weisen, beispielsweise, nach der Ausgleichung den folgenden mittleren Fehler auf:

$$\mu_1 = \mu_5 = \frac{23{,}1}{\sqrt{0{,}4}} = \pm 36{,}5'' \qquad \mu_4 = \frac{23{,}1}{\sqrt{2{,}6}} = \pm 14{,}31'' \qquad \mu_{11} = \frac{23{,}1}{\sqrt{3{,}4}} = \pm 12{,}5''.$$

Der mittlere Fehler der Längenmessung nach der Ausgleichung:

$$\mu_{12} = 23{,}1 \frac{1000}{\varrho''} \sqrt{\frac{0{,}358}{0{,}67}} = \pm 0{,}082 \text{ m}.$$

Bei der Lösung der Gleichgewichtsgleichungen ergeben sich für die Koordinatenänderungen die mit den Gewichtskoeffizienten proportionalen Werte

$$Q'_{\mathrm{I}} = 0{,}013\,94 \qquad Q'_{\mathrm{II}} = 0{,}060\,78 \qquad Q'_{\mathrm{III}} = 0{,}030\,38 \qquad Q'_{\mathrm{IV}} = 0{,}056\,02,$$

die mittleren Koordinatenfehler betragen also nach den Formel (77):

$$\mu_I = 0{,}022 \cdot 23{,}1 \sqrt{0{,}013\,94} = \pm 0{,}060 \text{ m}$$

$$\mu_{II} = 0{,}022 \cdot 23{,}1 \sqrt{0{,}060\,78} = \pm 0{,}125 \text{ m}$$

$$\mu_{III} = 0{,}022 \cdot 23{,}1 \sqrt{0{,}030\,38} = \pm 0{,}088 \text{ m}$$

$$\mu_{IV} = 0{,}022 \cdot 23{,}1 \sqrt{0{,}056\,02} = \pm 0{,}120 \text{ m}.$$

6. Beispiel. Man berechne auf Grund der Richtungsmessungen des 5. Beispiels die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 mit gemeinsamer Ausgleichung, mit jener *Zwangbedingung* jedoch, dass die auf Grund der ausgeglichenen Koordinaten berechnete Entfernung der zwei Neupunkte: $\overline{P_1P_2} = s = 358{,}000$ m betragen soll.

Zuerst werden die im 5. Beispiel eingehend behandelten Schritte 1—5 ausgeführt. Die Messung 12 des 5. Beispiels wird jetzt jedoch ausser acht gelassen, da die Entfernung nicht gemessen, sondern der hiefür gegebene Wert als Zwang betrachtet wurde. Die genäherten Koordinaten der Neupunkte werden dem 5. Beispiel entsprechend aufgenommen. Die ausschliesslich auf Grund der Messergebnisse gebildeten Gleichgewichtsgleichungen betragen:

$$f_1 = -132{,}55\ I + 24{,}13\ II + 33{,}66\ III - 51{,}01\ IV + 100{,}26 = 0$$

$$f_2 = +\ 24{,}13\ I - 96{,}21\ II - 53{,}84\ III + 81{,}56\ IV - 42{,}83 = 0$$

$$f_3 = +\ 33{,}66\ I - 53{,}84\ II - 44{,}03\ III + 49{,}57\ IV - 49{,}33 = 0$$

$$f_4 = -\ 51{,}01\ I + 81{,}56\ II + 49{,}57\ III - 94{,}04\ IV + 37{,}82 = 0$$

(Diese Gleichungen weichen von den Gleichgewichtsgleichungen des 5. Beispiels insofern ab, als dass die Koeffizienten und die Absolutglieder um die zum Messergebnis 12 des Beispiels 5 gehörenden entsprechenden Werte kleiner sind.)

Bekanntlich wird die Zwangbedingung der Entfernung durch die Zwangbedingungsgleichung

$$k = \sin(\delta_{21})\ I + \cos(\delta_{21})\ II - \sin(\delta_{21})\ III - \cos(\delta_{21})\ IV - ds = 0$$

ausgedrückt. Nachdem die genäherte Entfernung der Punkte P_1 und P_2 aus den genäherten Koordinaten berechnet $(s) = 358{,}089$ m beträgt, ergibt sich, der Dezimeterlängeneinheit der Ausgleichung entsprechend:

$$ds = s - (s) = -0{,}89 \text{ dm}.$$

Wird hier der Sinus- und Cosinuswert des genäherten Richtungswinkels der Richtung $P_2 - P_1$ eingesetzt, ergibt sich als Zwangbedingungsgleichung zahlenmässig:

$$k = -0{,}834\ I - 0{,}552\ II + 0{,}834\ III + 0{,}552\ IV + 0{,}89 = 0.$$

Es soll nun z. B. aus der Gleichung k die Unbekannte IV ausgedrückt und für die übrigen Unbekannten Identitätsgleichungen aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} I &= +1{,}000\ I \\ II &= +1{,}000\ II \\ III &= +1{,}000\ III \\ IV &= +1{,}511\ I + 1{,}000\ II - 1{,}511\ III - 1{,}612. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Formelgruppe (112) betragen demnach:

$$\begin{aligned} A_1 &= +1 & B_1 &= 0 & C_1 &= 0 \\ A_2 &= 0 & B_2 &= +1 & C_2 &= 0 \\ A_3 &= 0 & B_3 &= 0 & C_3 &= +1 \\ A_4 &= +1{,}511 & B_4 &= +1 & C_4 &= -1{,}511 \end{aligned}$$

Wenn nun die Gleichungen f mit dem mit entsprechendem Index versehenen Wert A, B und schliesslich C multipliziert werden (wobei in den Gleichgewichtsgleichungen f selbstverständlich auch die symmetrischen Glieder berücksichtigt werden), dann gelangen wir zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} g_1 &= -209{,}63\ I + 147{,}37\ II + 108{,}56\ III - 193{,}10\ IV + 157{,}41 = 0 \\ g_2 &= -\ 26{,}88\ I - \ 14{,}65\ II - \ 4{,}27\ III - \ 12{,}48\ IV - \ 5{,}01 = 0 \\ g_3 &= +110{,}74\ I - 177{,}08\ II - 118{,}93\ III + 191{,}66\ IV - 106{,}48 = 0 \end{aligned}$$

Es soll nun in diese der aus der Gleichung k ausgedrückte Wert der Unbekannten IV eingesetzt und die Gleichungen geordnet werden:

$$\begin{aligned} g_1 &= -501{,}40\ I - 45{,}73\ II + 400{,}33\ III + 468{,}69 = 0 \\ g_2 &= -\ 45{,}73\ I - 27{,}13\ II + \ 14{,}59\ III + \ 15{,}11 = 0 \\ g_3 &= +400{,}33\ I + 14{,}59\ II - 408{,}53\ III - 415{,}44 = 0. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser auch die Zwangbedingungen umfassenden Gleichgewichtsgleichungen beträgt:

$\delta y_1 = I = +0{,}852$ dm $\qquad \delta x_1 = II = -0{,}995$ dm $\qquad \delta y_2 = III = -0{,}218$ dm

Mit Hilfe dieser Gleichungen kann auf Grund der Gleichung k auch die Unbekannte IV ausgerechnet werden:

$$\delta x_2 = IV = -0{,}990 \text{ dm}$$

Hiernach wird die Änderung der Orientierungswinkel gemäss Schritt 7 im 5. Beispiel berechnet:

$$\delta z_1 = +0{,}59'' \qquad \delta z_2 = -3{,}60''$$

und sodann auch der 8. Schritt des 5. Beispiels ausgeführt.

Werden die dem 9. Schritt des 5. Beispiels entsprechenden Summenwerte berechnet, gelangen wir nicht zu Null, sondern erhalten Projektionen, die zu den die Neupunkte schneidenden Komponenten der die Zwangbedingung repräsentierenden Kraft gehören mit entgegengesetztem Vorzeichen:

$$[-v\cos\delta]^{I} = -V_y^{I} = +6{,}47 \qquad [v\sin\delta]^{I} = -V_x^{I} = +4{,}36$$
$$[-v\cos\delta]^{II} = -V_y^{II} = -6{,}56 \qquad [v\sin\delta]^{II} = -V_x^{II} = -4{,}42.$$

(Nachdem hier Null nicht erreicht wird, muss das Vorzeichen berücksichtigt und die Werte $-v\cos\delta$ berechnet werden.)

Des Weiteren werden auch die Schritte 10—14 des 5. Beispiels ausgeführt. Die ausgeglichenen Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 betragen:

$$y_1 = (y_1) + \quad I = +23\,301{,}400 + 0{,}085 = +23\,301{,}485 \text{ m}$$
$$x_1 = (x_1) + \quad II = +52\,107{,}800 - 0{,}100 = +52\,107{,}700 \text{ m}$$
$$y_2 = (y_2) + III = +23\,600{,}100 - 0{,}022 = +23\,600{,}078 \text{ m}$$
$$x_2 = (x_2) + \quad IV = +52\,305{,}300 - 0{,}099 = +52\,305{,}201 \text{ m}.$$

Wenn wir nun die Koordinatenänderungen in die ursprüngliche Gleichgewichtsgleichung f einsetzen, ergeben sich als Resultat die Komponenten der Zwangbedingungskraft ebenfalls mit entgegengesetztem Vorzeichen:

$$-V_y^{I} = +6{,}48 \qquad -V_x^{I} = +4{,}44$$
$$-V_y^{II} = -6{,}56 \qquad -V_x^{II} = -4{,}50$$

Die Übereinstimmung mit den im Vorlaufenden berechneten entsprechenden Werten ist zufriedenstellend.

Zur weiteren Kontrolle wird aus den endgültigen Koordinaten auch die Entfernung $s = \overline{P_1P_2}$ berechnet:

$$s = 358{,}000 \text{ m}.$$

Wie ersichtlich, wurde die Zwangbedingung erfüllt.

Nachdem die Kontrolle ausgeführt wurde, folgt die Berechnung des mittleren Fehlers. In unserem Beispiel beträgt die Zahl der überschüssigen Beobachtungen: $f = 11 - (6 - 1) = 6$.

7. Beispiel. Es sollen die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 mit gemeinsamer Ausgleichung auf Grund sämtlicher Messungen des 5. Beispiels berechnet werden, jedoch mit den zwei Zwangbedingungen, dass die Entfernung $\overline{EP_1}$ gleich $s_E = 428{,}200$ m, der Richtungswinkel der Richtung $D—P_2$ wiederum gleich $\delta_D = 301°51'0''$ sein soll.

Zuerst werden gemäss den Schritten 1—5 des 5. Beispiels die rein aus Messergebnissen erhaltenen Gleichgewichtsgleichungen aufgestellt. Die Gleichgewichtsgleichungen ergeben sich im 5. Schritt des 5. Beispiels. Hiernach werden die Zwangbedingungsgleichungen aufgestellt.

Bekanntlich wird die erste Zwangbedingung (der Entfernung), wenn der genäherte Richtungswinkel der Richtung $E—P_1$ mit (δ_E) bezeichnet wird, durch die Zwangbedingungsgleichung

$$k_1 = \sin(\delta_E)\, I + \cos(\delta_E)\, II - ds = 0$$

ausgedrückt. Mit den genäherten Koordinaten des Punktes P_1 erhalten wie die genäherte Entfernung $(s_E) = 428{,}261$ m. Bei der Richtung 9 des 5. Beispiels kann der notwendige Sinus- und Cosinuswert aus der Tabelle 14 entnommen werden. Nachdem die Ausgleichung in ihrer Dezimeterlängeneinheit $ds = s_E - (s_E) = -0{,}61$ dm beträgt, ergibt sich als Zwangbedingungsgleichung k_1 zahlenmässig:

$$k_1 = -0{,}218\, I + 0{,}976\, II + 0{,}61 = 0.$$

Die zweite Zwangbedingung (die sich auf den Richtungswinkel bezieht) wird von der Zwangbedingungsgleichung

$$k_2 = \frac{0{,}1\varrho'' \cos \delta_D}{(s_D)} III - \frac{0{,}1\varrho'' \sin \delta_D}{(s_D)} IV - d\delta'' = 0$$

ausgedrückt, in welcher der genäherte Wert der Entfernung $\overline{DP_2}$ mit (s_D) bezeichnet wurde. Nachdem bei der Richtung 8 des 5. Beispiels in Tabelle 13 der genäherte Richtungswinkelwert 121°51′3,9″ vorkommt, ist

$$d\delta = \delta_D - (\delta_D) = -3{,}9''.$$

Wenn nun die Koeffizienten der Gleichung k_2 ausgerechnet werden, ergibt sich zahlenmässig als zweite Zwangbedingungsgleichung:

$$k_2 = +3{,}44\, III + 5{,}54\, IV + 3{,}9 = 0.$$

Aus der Gleichung k_1 wird z. B. die Unbekannte II ausgedrückt, aus der Gleichung k_2 die Unbekannte IV und danach werden Identitätsgleichungen für die Unbekannten I und III aufgestellt:

$$\begin{aligned} I &= +1{,}000\, I \\ II &= +0{,}223\, I \qquad\qquad -0{,}625 \\ III &= \qquad +1{,}000\, III \\ IV &= \qquad -0{,}621\, III \qquad -0{,}704 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Formelgruppe (112) sind demnach:

$$\begin{aligned} A_1 &= +1 & B_1 &= 0 \\ A_2 &= +0{,}223 & B_2 &= 0 \\ A_3 &= 0 & B_3 &= +1 \\ A_4 &= 0 & B_4 &= -0{,}621 \end{aligned}$$

Nachdem die Gleichgewichtsgleichungen des 5. Beispiels mit den mit entsprechenden Indizen versehenen Werten A, dann B durchmultipliziert wurden (wobei in den Gleichgewichtsgleichungen f selbstverständlich auch die symmetrischen Glieder berücksichtigt wurden), erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} g_1 &= [Af] = -157{,}98\, I - 17{,}70\, II + 52{,}47\, III - 12{,}44\, IV + 133{,}58 = 0 \\ g_2 &= [Bf] = +\ 81{,}16\, I - 94{,}02\, II - 90{,}63\, III + 97{,}50\, IV - \ 94{,}82 = 0. \end{aligned}$$

Werden nun hier die durch die Zwangbedingungsgleichungen ausgedrückten Werte von II und IV eingesetzt, so gelangen wir zu den auch die Zwangbedingungen enthaltenden Gleichgewichtsgleichungen:

$$\begin{aligned} -161{,}93\, I + \ 60{,}20\, III + 153{,}40 &= 0 \\ +\ 60{,}20\, I - 151{,}18\, III - 104{,}70 &= 0. \end{aligned}$$

Das Ergebnis der Lösungen:

$$\delta y_1 = I = +0{,}810 \text{ dm} \qquad \delta y_2 = III = -0{,}370 \text{ dm}.$$

Mit deren Hilfe können jetzt bereits die übrigen Unbekannten berechnet werden :

$$\delta x_1 = II = -0{,}445 \text{ dm} \qquad \delta x_2 = IV = -0{,}474 \text{ dm}.$$

Hiernach wird die Änderung der Orientierungswinkel gemäss Schritt 7 des 5. Beispiels berechnet :

$$\delta z_1 = -1{,}42'' \qquad \delta z_2 = -2{,}02'',$$

und danach auch der 8. Schritt des 5. Beispiels vorgenommen.

Erfolgt die Berechnung der dem 9. Punkt des 5. Beispiels entsprechenden Summenwerte, so gelangen wir nicht zu Null, sondern erhalten Projektionen mit entgegengesetztem Vorzeichen, die zu den die Neupunkte schneidenden Komponenten jener Kräfteresultanten gehören, welche die Zwangbedingung darstellt :

$$[-v \cos \delta]^{I} = -V_y^{I} = -0{,}94 \qquad [v \sin \delta]^{I} = -V_x^{I} = +4{,}13$$
$$[-v \cos \delta]^{II} = -V_y^{II} = -10{,}51 \qquad [v \sin \delta]^{II} = -V_x^{II} = -16{,}89.$$

Im weiteren werden die unter 10—14 des 5. Beispiels aufgezählten Schritte vorgenommen. Die ausgeglichenen Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 betragen :

$$y_1 = (y_1) + I = +23\,301{,}400 + 0{,}081 = +23\,301{,}481 \text{ m}$$
$$x_1 = (x_1) + II = +52\,107{,}800 - 0{,}045 = +52\,107{,}755$$
$$y_2 = (y_2) + III = +23\,600{,}100 - 0{,}037 = +23\,600{,}063$$
$$x_2 = (x_2) + IV = +52\,305{,}300 - 0{,}047 = +52\,305{,}253.$$

Wenn die Koordinatenänderungen in die rein auf Grund der Messergebnisse aufgestellten ursprünglichen Gleichgewichtsgleichungen f eingesetzt werden, entsprechen jetzt diese der Nullbedingung nicht, sondern ergeben die Projektionen der Kräfteresultantenkomponenten der Zwangbedingung ebenfalls mit entgegengesetztem Vorzeichen :

$$-V_y^{I} = -0{,}96 \qquad -V_x^{I} = +4{,}22$$
$$-V_y^{II} = -10{,}47 \qquad -V_x^{II} = -16{,}99.$$

Die Übereinstimmung mit den im Vorlaufenden berechneten entsprechenden Werten ist zufriedenstellend.

Zur weiteren Kontrolle werden aus den endgültigen Koordinaten die Entfernung s_E und der Richtungswinkel δ_D berechnet :

$$s_E = 428{,}1993 \text{ m} \qquad \delta_D = 301°51'0{,}0''.$$

Wie ersichtlich, ist die Zwangbedingung entsprechend erfüllt worden.

Nach Ausführung der Kontrolle folgt die Berechnung des mittleren Fehlers. In unserem Beispiel beträgt die Anzahl der überschüssigen Messungen : $f = 12 - (6 - 2) = 8$.

8. Beispiel. Es ist im allgemeinen zweckmässig, die Längenmesstriangulierungsnetze — wenn die gemessenen Seiten einander nicht kreuzen — mit Korrelatenausgleichung zu berechnen. Gibt es jedoch auch einander kreuzende Seitenmessungen, oder wurden auch Richtungsmessungen ausgeführt, so ist es gewöhnlich günstiger, die Methode der Koordinatenausgleichung anzuwenden. Hier geben wir ein Beispiel für die Ausgleichung eines solchen Netzes, in welchem zwischen 9 Punkten 27 Seitenlängen mittels Invardrahten gemessen wurden.

Wenn bloss Längenmessergebnisse angegeben werden, kann es vorkommen, dass die endgültigen Koordinaten ein im Verhältnis zu der mit den genäherten Koordinaten charakterisierten ursprünglichen Lage stark verdrehtes Netz festsetzen. Dieser Umstand ist vom Stand-

punkt des Längennetzes im allgemeinen gleichgültig, da ja bloss die endgültigen, ausgeglichenen Seitenlängen nötig sind. Wünschen wir jedoch das Netz orientiert festzusetzen, so muss mindestens ein orientierter Richtungswert angegeben werden. In unserem Beispiel ist Punkt *A* der Festpunkt des umrissenen Netzes (Abb. 6) und die von diesem Punkt ausgehenden Seiten, bzw. deren gemessener und orientierter Richtungswert wurde auch zu den Messergebnissen einbezogen.

Den Lauf der Ausgleichung beschreiben wir hier nicht in allen Einzelheiten, da ja dieser auf Grund des Obengesagten leicht verfolgt werden kann.

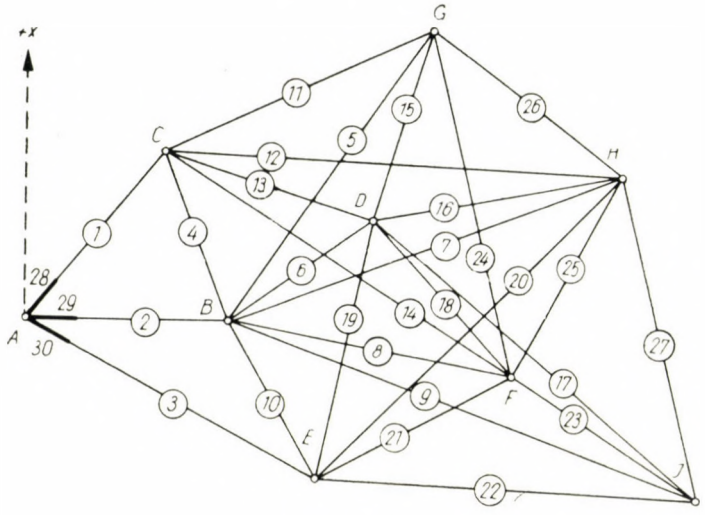


Abb. 6

Tabelle 17 zählt die endgültigen Koordinaten des Punktes *A* und die genäherten Koordinaten der übrigen Punkte, sowie die mittels Ausgleichung bestimmten Koordinatenänderungen und die endgültigen Koordinaten, und schliesslich den mittleren Fehler dieser endgültigen Koordinaten auf.

Tabelle 18 enthält die genäherten Richtungswinkel (δ), die Messergebnisse L, die genäherten Längenwerte (s), die Längenabweichungen E, die e Richtungsabweichungen — die zu den die Längenmessungen ersetzenden fingierten Richtungsmessungen der Formel (106) entsprechend berechnet wurden —, ausserdem die der Ausgleichung folgenden endgültigen Entfernungen s und die Längenmessverbesserungen v_L, bzw. bei den Richtungsmessungen den endgültigen Richtungswinkel δ und die Richtungsverbesserung v.

Tabelle 19 weist (aus drucktechnischen Gründen auf Teile *a*, *b*, *c*, *d* und *e* gruppiert) die Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen auf. Nachdem bei unserem Beispiel die Längenmessungen in überwiegender Mehrzahl sind, und es keine Orientierungsunbekannte gibt, die die Anwendung von Reduktionen erfordert, wurde in der Reihe der Richtungsmessungen in die Kolonne *a* der Wert des Richtungskoeffizienten *b*, in die Kolonne *b* der des Richtungskoeffizienten *a* und in die Kolonne *c* der Wert des Richtungskoeffizienten —*c* eingetragen, ausserdem in die Kolonne sin δ der Wert cos δ und in die Kolonne cos δ der Wert —sin δ. Die Gewichtszahl q wurde als 1 aufgenommen. Die Tabellenteile werden folgendermassen nebeneinander aufgestellt :

a	*b*	*c*
	d	*e*

Die Anzahl der Gleichgewichtsgleichungen beträgt 16. Sie werden dem Gleichungssystem (107) entsprechend, jedoch unter Berücksichtigung der Unbekannten 16 aufgestellt : in jede Gleichung kommen 16 Koeffizienten und ein Absolutglied. Die symmetrischen Glieder

Tabelle 17

Punkt	Genäherte Koordinaten		Koordinaten-änderungen		Endgültige Koordinaten		Mittlere Fehler der Koordinaten	
	(y)	(x)	δy	δx	y	x	μ_y	μ_x
	Meter						Millimeter	
A	0,00	0,00			0,000	0,000	—	—
B	+1600,20	+ 0,12	—0,199	—0,119	+1600,001	+ 0,001	±2,27	±2,21
C	+1156,88	+1378,75	+0,141	+0,130	+1157,021	+1378,880	±2,92	±2,48
D	+2799,75	+ 800,17	+0,249	—0,169	+2799,999	+ 800,001	±2,97	±3,63
E	+2382,34	—1221,60	—0,198	+0,122	+2382,142	—1221,478	±3,37	±2,81
F	+3902,40	— 408,05	+0,141	—0,174	+3902,541	— 408,224	±2,93	±5,41
G	+3240,00	+2375,39	+0,176	+0,005	+3240,176	+2375,395	±5,53	±4,59
H	+4800,75	+1205,00	—0,032	+0,137	+4800,718	+1205,137	±3,61	±7,19
I	+5417,30	—1421,10	—0,146	+0,106	+5417,154	—1420,994	±4,83	±9,00

Tabelle 18

Messung	(δ)	L m	(s) m	E m	e''	s δ	v_L v
1	39°59′57″	1800,0036	1799,8116	—0,1920	—22,0049	1800,0021	—0,0015
2	89 59 45	1600,0000	1600,2000	+0,2000	+25,7799	1600,0010	+0,0010
3	117 8 50	2677,0523	2677,2843	+0,2320	+17,8739	2677,0523	0,0000
4	342 10 26	1448,2894	1448,1554	—0,1340	—19,0860	1448,2882	—0,0012
5	34 37 11	2886,6407	2886,3712	—0,3195	—22,8300	2886,6366	—0,0041
6	56 17 54	1442,2180	1441,8740	—0,3440	—49,2103	1442,2188	+0,0008
7	69 22 14	3420,0776	3419,8336	—0,2440	—14,7167	3420,0793	+0,0017
8	100 3 14	2338,4490	2338,1039	—0,3451	—30,4364	2338,4478	—0,0012
9	110 25 18	4073,0665	4073,0945	+0,0280	+ 1,4179	4073,0661	—0,0004
10	147 22 22	1450,4320	1450,6360	+0,2040	+29,0077	1450,4329	+0,0009
11	64 25 55	2309,2393	2309,2592	+0,0199	+ 1,7856	2309,2373	—0,0020
12	92 43 48	3647,8393	3648,0104	+0,1711	+ 9,6693	3647,8370	—0,0023
13	109 24 4	1741,9760	1741,7740	—0,2020	—23,9213	1741,9752	—0,0008
14	123 3 23	3275,9160	3275,7508	—0,1652	—10,3904	3275,9163	+0,0003
15	15 36 54	1635,7301	1635,5871	—0,1430	—18,0338	1635,7329	+0,0028
16	78 33 46	2041,3264	2041,5405	+0,2141	+21,6206	2041,3260	—0,0004
17	130 19 5	3432,5440	3433,0130	+0,4690	+28,1788	3432,5383	—0,0057
18	137 36 56	1635,6659	1635,7369	+0,0710	+ 8,9530	1635,6670	+0,0011
19	191 39 55	2064,2115	2064,4090	+0,1975	+19,7327	2064,2146	+0,0031
20	44 54 11	3426,0740	3425,9411	—0,1329	— 8,0000	3426,0722	—0,0018
21	61 50 38	1724,2360	1724,0780	—0,1580	—18,9028	1724,2376	+0,0016
22	93 45 39	3041,5604	3041,5104	—0,0500	— 3,3908	3041,5628	+0,0024
23	123 46 18	1822,0177	1822,4147	+0,3970	+44,9333	1822,0196	+0,0019
24	346 36 50	2861,3394	2861,1734	—0,1660	—11,9671	2861,3392	—0,0002
25	29 6 53	1846,5249	1846,3389	—0,1860	—20,7791	1846,5253	+0,0004
26	126 51 57	1950,5860	1950,8339	+0,2479	+26,2207	1950,5884	+0,0024
27	166 47 15	2697,5060	2697,5060	0,0000	0,0000	2697,5095	+0,0035
28	39 59 57,5	40° 0′ 0,5″			— 3,0000	40° 0′ 0,2991″	—0,2009
29	89 59 44,5	89 59 59,5			—15,0000	89 59 59,8711	+0,3711
30	117 8 51,1	117 8 50,1			+ 1,0000	117 8 49,7168	—0,3832

Tabelle 19a

		1 ≡ *B*			2 ≡ *C*			3 ≡ *D*			4 ≡ *E*		
	Messung	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
	29	—12,89	0,00	—0,00									
	2	0,00	—12,89	+0,00									
	4	—12,91	— 1,33	—4,15	+12,91	+ 1,33	+4,15						
I	5	— 4,84	— 2,31	+3,34									
B	6	— 4,40	— 9,90	+6,60				+ 4,40	+ 9,90	—6,60			
	7	— 0,75	— 5,28	+1,99									
	8	— 0,27	— 8,55	—1,52									
	9	— 0,62	— 4,44	—1,66									
	10	—10,09	— 4,13	—6,46							+10,09	+4,13	+6,46
		—46,77	—48,83	—1,86	+12,91	+ 1,33	+4,15	+ 4,40	+ 9,90	—6,60	+10,09	+4,13	+6,46
	28				— 4,74	— 6,73	—5,64						
	1				— 6,73	— 4,74	+5,64						
	11				— 1,66	— 7,27	+3,48						
II	12				— 0,01	— 5,64	—0,27						
C	13				— 1,31	—10,54	—3,71	+ 1,31	+10,54	+3,71			
	14				— 1,87	— 4,42	—2,88						
	4				—12,91	— 1,33	—4,15						
					—29,23	—40,67	—7,53	+ 1,31	+10,54	+3,71	0,00	0,00	0,00
	6							— 4,40	— 9,90	+6,60			
	13							— 1,31	—10,54	—3,71			
	15							—11,70	— 0,91	+3,58			
III	16							— 0,40	— 9,71	+1,96			
D	17							— 2,52	— 3,49	—2,96			
	18							— 6,88	— 5,73	—6,28			
	19							— 9,58	— 0,41	+1,98	+ 9,58	+0,41	—1,98
								—36,79	—40,69	+1,17	+ 9,58	+0,41	—1,98
	30										— 6,10	—1,60	+3,13
	3										— 1,60	—6,10	—3,13
IV	10										—10,09	—4,13	—6,46
E	19										— 9,58	—0,41	+1,98
	20										— 3,02	—3,00	+3,01
	21										— 2,66	—9,30	+4,98
	22										— 0,03	—6,75	—0,44
											—33,08	—31,29	+3,07

Tabelle 19b

		5 ≡ *F*			6 ≡ *G*			7 ≡ *H*			8 ≡ *I*		
	Messung	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
I *B*	29 2 4 5 6 7 8 9 10	+0,27	+8,55	+1,52	+4,84	+2,31	−3,34	+0,75	+5,28	−1,99	+0,62	+4,44	+1,66
		+0,27	+8,55	+1,52	+4,84	+2,31	−3,34	+0,75	+5,28	−1,99	+0,62	+4,44	+1,66
II *C*	28 1 11 12 13 14 4	+1,87	+4,42	+2,88	+1,66	+7,27	−3,48	+0,01	+5,64	+0,27			
		+1,87	+4,42	+2,88	+1,66	+7,27	−3,48	+0,01	+5,64	+0,27	0,00	0,00	0,00
III *D*	6 13 15 16 17 18 19	+6,88	+5,73	+6,28	+11,70	+0,91	−3,58	+0,40	+9,71	−1,96	+2,52	+3,49	+2,96
		+6,88	+5,73	+6,28	+11,70	+0,91	−3,58	+0,40	+9,71	−1,96	+2,52	+3,49	+2,96
IV *E*	30 3 10 19 20 21 22	+2,66	+9,30	−4,98				+3,02	+3,00	−3,01	+0,03	+6,75	+0,44
		+2,66	+9,30	−4,98	0,00	0,00	0,00	+3,02	+3,00	−3,01	+0,03	+6,75	+0,44

Tabelle 19c

	Messung	e	$\sin\delta$	$\cos\delta$	$e\sin\delta$	$e\cos\delta$
	29	—15,000	+0,0003	—1,0000	— 0,004	+15,000
	2	+25,780	+1,0000	+0,0003	+25,780	+ 0,008
	4	—19,086	+0,3061	—0,9520	— 5,842	+18,170
I	5	—22,830	—0,5681	—0,8229	+12,970	+18,787
B	6	—49,210	—0,8319	—0,5549	+40,938	+27,307
	7	—14,717	—0,9359	—0,3523	+13,773	+ 5,185
	8	—30,436	—0,9846	+0,1746	+29,967	— 5,314
	9	+ 1,418	—0,9371	+0,3489	— 1,329	+ 0,495
	10	+29,008	—0,5392	+0,8422	—15,641	+24,430
					+100,61	+104,07
	28	— 3,000	+0,7661	—0,6428	— 2,298	+ 1,928
	1	—22,005	+0,6428	+0,7661	—14,145	—16,858
	11	+ 1,786	—0,9021	—0,4316	— 1,611	— 0,771
II	12	+ 9,669	—0,9989	+0,0476	— 9,658	+ 0,460
C	13	—23,921	—0,9432	+0,3322	+22,563	— 7,947
	14	—10,390	—0,8381	+0,5455	+ 8,707	— 5,668
	4	—19,086	—0,3061	+0,9520	+ 5,842	—18,170
					+ 9,40	—47,03
	6	—49,210	+0,8319	+0,5549	—40,938	—27,307
	13	—23,921	+0,9432	—0,3322	—22,563	+ 7,947
	15	—18,034	—0,2692	—0,9631	+ 4,855	+17,368
III	16	+21,621	—0,9801	—0,1983	—21,191	— 4,288
D	17	+28,179	—0,7625	+0,6470	—21,486	+18,232
	18	+ 8,953	—0,6741	+0,7386	— 6,035	+ 6,613
	19	+19,733	+0,2022	+0,9793	+ 3,990	+19,324
					—103,37	+37,89
	30	+ 1,000	—0,4563	—0,8898	— 0,456	— 0,890
	3	+17,874	+0,8898	—0,4563	+15,904	— 8,156
	10	+29,008	+0,5392	—0,8422	+15,641	—24,430
IV	19	+19,733	—0,2022	—0,9793	— 3,990	—19,324
E	20	— 8,000	—0,7059	—0,7083	+ 5,647	+ 5,666
	21	—18,903	—0,8817	—0,4718	+16,667	+ 8,918
	22	— 3,391	—0,9978	+0,0656	+ 3,383	— 0,222
					+52,80	—38,44

werden auch hier nicht aufgezeichnet. Die Gleichgewichtsgleichungen befinden sich in Tabelle 20. Ihre Lösung ergibt die in Tabelle 17 eingeführten Koordinatenänderungen.

Im Zusammenhang mit Tabellen 19 und 20 muss noch erwähnt werden, dass bei der Ausrechnung des Beispiels sowohl die Richtungskoeffizienten als auch die Richtungsabweichungen mit einer Schärfe von vier Dezimalen berücksichtigt wurden, denn nur so kann man zur Lösung der Gleichgewichtsgleichungen entsprechende Kontrollen erhalten. In die erwähnten zwei Tabellen jedoch wurden die Werte — um den Umfang der Tabellen zu vermindern — mit weniger Dezimalen eingeführt. Darum zeigen sich geringe Abweichungen zwischen einigen entsprechenden Daten der zwei Tabellen.

In Tabelle 21 wurden die die Längenmessungen ersetzenden fingierten Richtungsmessungen bzw. die Verbesserung v der effektiv gemessenen Richtungen sowie die Längenmessverbesserungen v_L zusammengestellt. Die Richtungswinkelabweichungen wurden mittels Formel (28a), bzw. (108) oder (109) berechnet, die Richtungsmessverbesserung laut Formel (110), selbstverständlich unter Berücksichtigung der Koordinatenänderungen der entsprechenden Endpunkte, der zu dem gemessenen Linienabschnitt gehörenden Richtungskoeffizienten, des Sinus- oder Cosinuswertes und der Richtungsabweichung. Die Längenmessverbesserungen wurden mittels Formel (28b) bestimmt. Ebenfalls in Tabelle 21 sind die Werte svv und $[svv]$

Tabelle 19d

		$5 \equiv F$			$6 \equiv G$			$7 \equiv H$			$8 \equiv I$		
	Messung	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
V *F*	8	—0,27	—8,55	—1,52									
	14	—1,87	—4,42	—2,88									
	18	—6,88	—5,73	—6,28									
	24	—6,82	—0,39	—1,62	+6,82	+0,39	+1,62						
	25	—8,53	—2,64	+4,75				+8,53	+2,64	—4,75			
	23	—3,50	—7,82	—5,23									
	21	—2,66	—9,30	+4,98							+3,50	+7,82	+5,23
		—30,53	—38,85	—7,80	+6,82	+0,39	+1,62	+8,53	+2,64	—4,75	+3,50	+7,82	+5,23
VI *G*	5				—4,84	—2,31	+3,34						
	11				—1,66	—7,27	+3,48						
	26				—3,81	—6,77	—5,07	+3,81	+6,77	+5,07			
	24				—6,82	—0,39	—1,62						
	15				—11,70	—0,91	+3,58						
					—28,83	—17,65	+3,71	+3,81	+6,77	+5,07	0,00	0,00	0,00
VII *H*	7							—0,75	—5,28	+1,99			
	16							—0,40	—9,71	+1,96			
	12							—0,01	—5,64	—0,27			
	26							—3,81	—6,77	—5,07			
	27							—7,25	—0,40	—1,70	+7,25	+0,40	+1,70
	25							—8,53	—2,64	+4,75			
	20							—3,02	—3,00	+3,01			
								—23,77	—33,44	+4,67	+7,25	+0,40	+1,70
VIII *I*	22										—0,03	—6,75	—0,44
	9										—0,62	—4,44	—1,66
	23										—3,50	—7,82	—5,23
	17										—2,51	—3,49	—2,96
	27										—7,24	—0,40	—1,70
											—13,90	—22,90	—11,99

Tabelle 19e

	Messung	e	$\sin\delta$	$\cos\delta$	$e\sin\delta$	$e\cos\delta$
	8	—30,436	+0,9846	—0,1746	—29,967	+ 5,314
	14	—10,390	+0,8381	—0,5455	— 8,708	+ 5,668
	18	+ 8,953	+0,6741	—0,7386	+ 6,035	— 6,613
V	24	—11,967	+0,2315	—0,9728	— 2,770	+11,642
F	25	—20,779	—0,4866	—0,8736	+10,111	+18,153
	23	+44,933	—0,8313	+0,5559	—37,353	+24,978
	21	—18,903	+0,8817	+0,4718	—16,667	— 8,918
					—79,32	+50,22
	5	—22,830	+0,5681	+0,8229	—12,970	—18,787
	11	+ 1,786	+0,9021	+0,4316	+ 1,612	+ 0,771
VI	26	+26,221	—0,8000	+0,5999	—20,977	+15,730
G	24	—11,967	—0,2315	+0,9728	+ 2,770	—11,642
	15	—18,034	+0,2692	+0,9631	— 4,855	—17,368
					—34,42	—31,30
	7	—14,717	+0,9359	+0,3523	—13,773	— 5,185
	16	+21,621	+0,9801	+0,1983	+21,191	+ 4,288
	12	+ 9,669	+0,9989	—0,0476	+ 9,658	— 0,460
VII	26	+26,221	+0,8000	—0,5999	+20,977	—15,730
H	27	0,000	—0,2286	+0,9735	0,000	0,000
	25	—20,779	+0,4866	+0,8736	—10,111	—18,153
	20	— 8,000	+0,7059	+0,7083	— 5,647	— 5,666
					+22,29	—40,91
	22	— 3,391	+0,9978	—0,0656	— 3,383	+ 0,222
	9	+ 1,418	+0,9391	—0,3489	+ 1,329	— 0,495
VIII	23	+44,933	—0,8313	—0,5559	+37,353	—24,978
I	17	+28,179	+0,7625	—0,6470	+21,486	—18,232
	27	0,000	+0,2286	—0,9735	0,000	0,000
					+56,78	—43,48

berechnet worden. Werden nun die zueinander gehörenden Werte der Tabellen 18 und 21 einander gegenübergestellt, so kann eine entsprechende Übereinstimmung festgestellt werden.

Die Berechnung der Werte $\delta\delta$ und v wird übrigens genau so tabellarisch ausgeführt, wie beim 5. Beispiel. Unter dem Richtungskoeffizienten a, b bzw. c wird auch bei den gemessenen Richtungen jener Wert verstanden, welcher in Tabelle 19 in die Kolonne mit demselben Zeichen eingetragen wurde. Ähnlich sind auch die Werte $\sin\delta$ und $\cos\delta$ zu verstehen. Wir halten es für überflüssig, die ziemlich umfangreiche Tabelle hier bekanntzugeben, und nehmen lieber Beispiele, um die Berechnung je einiger Richtungswinkeländerungen und Verbesserungen vorzuführen.

(In die Formeln wurden von der ursprünglichen Berechnung herstammende und auf mehrere Dezimale scharfe Werte eingesetzt.)

Zur Entfernung $\overline{AC}$ (Messung 1), mit dem Werte $\cos\delta$ gerechnet:

$$\delta\delta_1 = \frac{(-5{,}6431)(+1{,}4075) + (-6{,}7254)(+1{,}3009)}{-0{,}7661} = +21{,}7880''$$

$$v_1 = +21{,}7880 - 22{,}0049 = -0{,}2169''$$

Tabelle 20

δy_1	δx_1	δy_2	δx_2	δy_3	δx_3	δy_4	δx_4	δy_5	δx_5	δy_6	δx_6	δy_7	δx_7	δy_8	δx_8	
—48,83	+ 1,86	+ 1,33	— 4,15	+ 9,90	+ 6,60	+ 4,13	— 6,46	+ 8,55	— 1,52	+ 2,31	+ 3,34	+ 5,28	+ 1,99	+ 4,44	— 1,66	—100,61
	—46,77	— 4,15	+12,91	+ 6,60	+ 4,40	— 6,46	+10,09	— 1,52	+ 0,27	+ 3,34	+ 4,84	+ 1,99	+ 0,75	— 1,66	+ 0,62	—104,07
		—40,67	+ 7,53	+10,54	— 3,71	0,00	0,00	+ 4,42	— 2,88	+ 7,27	+ 3,48	+ 5,64	— 0,27	0,00	0,00	— 9,40
			—29,23	— 3,71	+ 1,31	0,00	0,00	— 2,88	+ 1,87	+ 3,48	+ 1,66	— 0,27	+ 0,01	0,00	0,00	+ 47,02
				—40,69	— 1,17	+ 0,41	+ 1,98	+ 5,73	— 6,28	+ 0,91	+ 3,58	+ 9,71	+ 1,96	+ 3,49	— 2,96	+103,37
					—36,78	+ 1,98	+ 9,58	— 6,28	+ 6,88	+ 3,58	+11,70	+ 1,96	+ 0,40	— 2,96	+ 2,52	— 37,89
						—31,30	— 3,07	+ 9,30	+ 4,98	0,00	0,00	+ 3,00	+ 3,01	+ 6,75	— 0,44	— 52,80
							—33,09	+ 4,98	+ 2,66	0,00	0,00	+ 3,01	+ 3,02	— 0,44	+ 0,03	+ 38,44
								—38,86	+ 7,80	+ 0,39	—1,62	+ 2,64	+ 4,75	+ 7,82	— 5,23	+ 79,32
									—30,53	— 1,62	+ 6,82	+ 4,75	+ 8,53	— 5,23	+ 3,50	— 50,22
										—17,64	— 3,70	+ 6,77	— 5,07	0,00	0,00	+ 34,42
											—28,83	— 5,07	+ 3,81	0,00	0,00	+ 31,30
												—33,44	— 4,67	+ 0,40	— 1,70	— 22,29
													—23,76	—1,70	+ 7,25	+ 40,91
														—22,91	+12,00	— 56,78
															—13,91	+ 43,48

Tabelle 21

Messung	v	s km	svv	v_L m
1	—0,2169	1,80	0,0847	—0,0019
2	+0,1459	1,60	0,0341	+0,0011
3	—0,0129	2,68	0,0004	—0,0002
4	—0,1118	1,45	0,0181	—0,0008
5	—0,3544	2,89	0,3630	—0,0050
6	+0,2235	1,44	0,0719	+0,0016
7	+0,1552	3,42	0,0824	+0,0026
8	—0,0629	2,34	0,1472	—0,0007
9	—0,0570	4,07	0,0132	—0,0011
10	+0,1768	1,45	0,0453	+0,0012
11	—0,2459	2,31	0,1397	—0,0028
12	—0,0866	3,65	0,0274	—0,0015
13	—0,0263	1,74	0,0012	—0,0002
14	+0,0636	3,28	0,0133	+0,0010
15	+0,2512	1,64	0,1035	+0,0020
16	—0,1081	2,04	0,0238	—0,0011
17	—0,3128	3,43	0,3356	—0,0052
18	+0,2198	1,64	0,0792	+0,0017
19	+0,3431	2,06	0,2425	+0,0034
20	—0,1505	3,43	0,0777	—0,0025
21	+0,2019	1,72	0,0701	+0,0017
22	+0,2233	3,04	0,1516	+0,0033
23	+0,3016	1,82	0,1656	+0,0027
24	—0,0337	2,86	0,0032	—0,0005
25	+0,1285	1,85	0,0305	+0,0012
26	+0,3139	1,95	0,1921	+0,0030
27	+0,2519	2,70	0,1713	+0,0033
28	—0,2263	1,80	0,0922	
29	+0,3436	1,60	0,1888	
30	—0,3966	2,68	0,4215	
			3,3911	

Tabelle 22

Messung	v	sin δ	cos δ	v sin δ	v cos δ
2	+0,1459	+1,0000	+0,0003	+0,1459	+0,0000
4	—0,1118	+0,3061	—0,9520	—0,0342	+0,1064
5	—0,3544	—0,5681	—0,8229	+0,2013	+0,2916
6	+0,2235	—0,8319	—0,5549	—0,1859	—0,1240
7	+0,1552	—0,9359	—0,3523	—0,1453	—0,0547
8	—0,0629	—0,9846	+0,1746	+0,0619	—0,0110
9	—0,0570	—0,9371	+0,3489	+0,0534	—0,0199
10	+0,1768	—0,5392	+0,8422	—0,0953	+0,1489
29	+0,3436	+0,0003	—1,0000	+0,0001	—0,3436
				+0,0019	—0,0063

Zur Entfernung $\overline{DG}$ (Messung 15), mit dem Werte cos δ gerechnet:

$$\delta\delta_{15} = \frac{(-3{,}5780)(+2{,}4950) + (-11{,}6973)(-1{,}6854) + (+3{,}5780)(+1{,}7555)}{+0{,}9631} +$$

$$+ \frac{(+11{,}6973)(+0{,}0463)}{+0{,}9631} = +18{,}2850''$$

$$v_{15} = +18{,}2850 - 18{,}0338 = +0{,}2512''.$$

Zur Entfernung $\overline{EF}$ (Messung 21), mit dem Werte sin δ gerechnet:

$$\delta\delta_{21} = \frac{(-9{,}3006)(-1{,}9831) + (-4{,}9772)(+1{,}2206) + (+9{,}3006)(+1{,}4109)}{+0{,}8817} +$$

$$+ \frac{(+4{,}9772)(-1{,}7372)}{+0{,}8817} = +19{,}1047''$$

$$v_{21} = +19{,}1047 - 18{,}9028 = +0{,}2019''.$$

Zur Richtung A—B (Messung 29), mit dem Werte cos δ gerechnet:

$$\delta\delta_{29} = \frac{(+0{,}0009)(-1{,}9886) + (-12{,}8899)(-1{,}1905)}{+1{,}0000} = +15{,}3436''$$

$$v_{29} = +15{,}3436 - 15{,}0000 = +0{,}3436''.$$

Zur Richtung A—C (Messung 28), mit dem Werte sin δ gerechnet:

$$\delta\delta_{28} = \frac{(-6{,}7254)(+1{,}4075) + (+5{,}6431)(+1{,}3009)}{-0{,}7661} = +2{,}7737''$$

$$v_{28} = +2{,}7737 - 3{,}0000 = -0{,}2263''.$$

In Tabelle 22 wurden zu Punkt B die Summenwerte $[v \sin \delta]$ und $[v \cos \delta]$ berechnet. Auch die zu den übrigen Punkten gehörenden Summenwerte nähern Null entsprechend an. Nachdem

$$[svv] = 3{,}3911$$

ist und die Anzahl der überschüssigen Messungen $f = 30 - 16 = 14$ beträgt, ergibt sich als mittlerer Fehler der Gewichtseinheit:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{3{,}3911}{14}} = \pm 0{,}492.$$

Der mittlere Fehler der Richtungsmessung 29 beträgt z. B. nach der Ausgleichung:

$$\mu_{29} = \frac{0{,}492}{\sqrt{1{,}60}} = \pm 0{,}39''$$

Der mittlere Fehler der Längenmessergebnisse 1, 8 und 9 beträgt nach der Ausgleichung:

$$\mu_1 = 0{,}492 \frac{1000}{\varrho''} \sqrt{1{,}80} = \pm 0{,}0032 \text{ m}$$

$$\mu_8 = 0{,}492 \frac{1000}{\varrho''} \sqrt{2{,}34} = \pm 0{,}0036 \text{ m}$$

$$\mu_9 = 0{,}492 \frac{1000}{\varrho''} \sqrt{4{,}07} = \pm 0{,}0048 \text{ m}.$$

Mit der Lösung der Gleichgewichtsgleichungen erhielt man auch die mit den Gewichtskoeffizienten der Koordinatenänderungen proportionalen Werte Q'. Dieser beträgt z. B. zu δy_B: 0,043 94. Der mittlere Fehler der Koordinate y_B ist demnach:

$$\delta_{y_B} = 0{,}022 \cdot 0{,}492 \sqrt{0{,}04394} = \pm 0{,}00227 \text{ m}.$$

Ähnlicherweise wurden auch die mittleren Fehler der übrigen Koordinaten ausgerechnet, und in Tabelle 17 vorgeführt. Sie beweisen ganz klar, dass die Lage der Punkte im Koordinatensystem mit der Entfernung von jenem Festpunkt, an dem auch die Orientierungsrichtungen gemessen wurden, stufenweise unsicherer wird.

SCHRIFTTUM

1. Statische Koordinatenausgleichung. (Mitteilungen der berg- und hüttenmännischen Abteilung an der Ung. Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften. Sopron. Band XI. 1939.)
2. Die Lösung zusammengesetzter Aufgaben mittels statischer Ausgleichung. (Mitteilungen der berg- und hüttenmännischen Abteilung an der Ung. Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften. Sopron. Band XIV. 1942.)
3. P. MÁJAY: Háromszögelési pontok koordinátáinak grafikus kiegyenlítése (Graphische Ausgleichung der Koordinaten von Triangulierungspunkten). (Földméréstani Közlemények, No. 2. 1952. Budapest.)
4. G. ZELCSÉNYI: Alsórendű háromszögelési pontok koordinátáinak számítása (Berechnung der Koordinaten von Triangulierungspunkten niederer Ordnung). (Geodézia és Kartográfia, No. 3. 1955. Budapest.)

ZUSAMMENFASSUNG

Die in den Studien (1) und (2) behandelten früheren Untersuchungen haben gezeigt, dass es bei der Triangulierung niederer Ordnung zweckmässig ist, die Richtungen mit einem ihrer Länge linear proportionellen Richtungsgewicht zu benützen. Besonders erforderlich ist dies wegen der richtigen Verteilung der sogenannten Rahmenfehler. Die Erfüllung der Minimumbedingung $= [pvv]$ mit der üblichen Koordinatenausgleichung ist selbst im Falle einfacher Gewichte langwierig. Aus diesem Grunde wurde ein Verfahren ausgearbeitet, welches die Richtungsgewichte schon in seinem Aufbau in sich schliesst und diese daher nicht mehr für sich berücksichtigt werden müssen. Das Verfahren ist auf rein mechanischen (hauptsächlich statischen) Prinzipien aufgebaut und wurde in den Studien (1) und (2) schon bekanntgegeben. Seither ist jedoch das Verfahren einesteils bedeutend vereinfacht, andererseits weiterentwickelt worden. Diese Studie befasst sich mit der statischen Koordinatenausgleichung in ihrer neueren, fortschrittlichen Form und berührt dabei sämtliche Aufgaben der Koordinatenausgleichung.

EXECUTION OF STATIC ADJUSTMENT OF CO-ORDINATES

I. HAZAY

SUMMARY

Earlier researches discussed in studies (1) and (2) have shown that in case of detailed triangulations it is advisable to use directions with the weight of direction linearly proportional to their lengths. This is of particular importance as far as the appropriate distribution of the so-called errors of the position of points of support is concerned. To satisfy the minimum condition $= [pvv]$ with the usual adjustment of co-ordinates is complicated even in case of simple weights. For this purpose a method has been developed including in its very structure the weights of direction which, as a consequence, must not be considered separately. This method is based on purely mechanical (chiefly static) principles and has already been discussed in studies (1) and (2). It got considerably simplified since and, at the same time, further developed. This paper discusses static adjustment of co-ordinates in its latest form, taking into consideration all tasks of the adjustment of co-ordinates.

EXÉCUTION DE LA COMPENSATION STATIQUE SELON LA MÉTHODE DES VARIATIONS DE COORDONNÉES

I. HAZAY

RÉSUMÉ

Des recherches antérieures exposées dans les études (1) et (2) ont montré que dans le cas de triangulations d'ordre inférieur, il convient d'utiliser les directions avec un poids de direction linéairement proportionnel à leur longuer. Cela importe surtout pour la bonne distribution des écarts dits de position des points d'appui. Satisfaire à la condition minimum $=[pvv]$ au moyen de la compensation habituelle des coordonnées est un travail fastidieux, même lorsqu'il s'agit de poids simples. Pour éviter cet inconvénient, l'auteur a élaboré une méthode comprenant les poids de direction dans sa structure même, de sorte qu'il est inutile de les envisager séparément. La méthode, basée entièrement sur des principes mécaniques (statiques surtout), a déjà été présentée dans les études (1) et (2), mais depuis on l'a beaucoup simplifiée et développée en même temps. La présente étude donne la forme nouvelle, plus développée de la méthode des variations de coordonnées, compte tenu de toutes les tâches à résoudre par la compensation.

О ВЫПОЛНЕНИИ СТАТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КООРДИНАТ

И. ХАЗАИ

РЕЗЮМЕ

Проведенные ранее исследования, изложенные в работах (1) и (2) показали, что при выполнении триангуляции низких классов целесообразным представляется воспользоваться направлениями с весом, линейно пропорциональным их длине. Это требуется главным образом для правильного распределения так называемых предельных ошибок. Удовлетворение условия ($[pvv]$ = минимум) занимает длительное время при обычном уравнивании координат даже при несложных весах. В связи с этим нами разработан прием, включающий в себе уже в своем построении вес направлений и, таким образом, не приходится учитывать его отдельно. Этот прием основывается на чисто механических (главным образом статических) принципах. В работах (1) и (2) уже были даны сведения об этом приеме, но с тех пор он в значительной мере упрощен и усовершенствован. В данной работе излагается новейший, усовершенствованный вид статического уравнивания координат с рассмотрением всех задач уравнивания координат.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1959. VI. 19. — Terjedelem: 11.50 (A/5) ív, 14 ábra

1959.49208 — Akadémiai Nyomda Budapest, V., Gerlóczy u. 2 — Felelős vezető: Bernát György

The Acta Technica publish papers on technical subjects in English, German, French and Russian.

The Acta Technica appear in parts of varying size, making up volumes.

Manuscripts should be addressed to

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Correspondence with the editors and publishers should be sent to the same address.

The rate of subscription to the Acta Technica is 110 forints a volume. Orders may be placed with "Kultura" Foreign Trade Company for Books and Newspapers (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Account No 43-790-057-181) or with representatives abroad.

Les Acta Technica paraissent en français, allemand, anglais et russe et publient des travaux du domaine des sciences techniques.

Les Acta Technica sont publiés sous forme de fascicules qui seront réunis en volumes.

On est prié d'envoyer les manuscrits destinés à la rédaction a l'adresse suivante:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

Toute correspondance doit être envoyée à cette même adresse.

Le prix de l'abonnement est de 110 forints par volume.

On peut s'abonner à l'Entreprise pour le Commerce Extérieur de Livres et Journaux «Kultura» (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Compte-courant No. 43-790-057-181) ou à l'étranger chez tous les représentants ou dépositaires.

«Acta Technica» публикуют трактаты из области технических наук на русском, немецком, английском и французском языках.

«Acta Technica» выходят отдельными выпусками разного объема. Несколько выпусков составляют один том.

Предназначенные для публикации рукописи следует направлять по адресу:

Acta Technica
Budapest 62, Postafiók 440.

По этому же адресу направлять всякую корреспонденцию для редакции и администрации.

Подписная цена «Acta Technica» – 110 форинтов за том. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultura» (Budapest VI. Népköztársaság útja 21. Текущий счет № 43-790-057-181) или его заграничные представительства и уполномоченные.

34,– Ft

INDEX

HALMOS, F.: Bestimmung des mittleren Fehlers durch Verbesserungen der Beobachtungsergebnisse — Determination of Mean Errors with the Correction of Results of Observations — Calcul de l'erreur moyenne sur base de la correction des résultats de mesures — *Халмош, Ф.:* Об определении сердней ошибки на основании введения поправок в результаты измерений 341

REGŐCZI, E.: Möglichkeiten in Ungarn zur Anwendung der indirekten Entfernungsmessung auf physikalischer Grundlage — Possibilities for the Application of Indirect Electronic Distance Measurement in Hungary — Possibilités d'application de la mesure électronique indirecte de distance en Hongrie — *Регеци, З.:* Возможности применения в Венгрии косвенных методов измерения расстояний физической основы 355

RENNER, J. and SZILÁRD, J.: Gravity Network of Hungary — Das Schwerebasisnetz von Ungarn — Le réseau fondamental gravimétrique en Hongrie — *Реннер, Я.* и *Силард, Й.:* Опорная гравиметрическая сеть Венгрии 365

HAZAY, I.: Ausführung der statischen Koordinatenausgleichung, I. — Execution of Static Adjustment of Co-ordinates, I. — Exécution de la compensation statique selon la méthode des variations de coordonnées, I. — *Хазаи, И.:* О выполнении статического уравнения координат, I. 397

HAZAY, I.: Ausführung der statischen Koordinatenausgleichung, II. — Execution of Static Adjustment of Co-ordinates, II. — Exécution de la compensation statique selon la méthode des variations de coordonnées, II. — *Хазаи, И.:* О выполнении статического уравнения координат, II. 431