Acta GEODAETICA, GEOPHYSICA et MONTANISTICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
L. EGYED
J. ZAMBÓ
REDIGIT
A. TÁRCZY-HORNOCH

TOMUS 4
FASCICULI 1–2
1969

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

ACTA GEODAETICA, GEOPHYSICA et MONTANISTICA

Academiae Scientiarum Hungaricae

A Magyar Tudományos Akadémia Föld- és Bányászati Tudományok Osztályának folyóirata

Szerkesztőség: Budapest V., Münnich Ferenc utca 7.

Kiadja az Akadémiai Kiadó, Budapest V., Alkotmány utca 21.

Az *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica* eredeti tanulmányokat közöl a föld- és bányászati tudományok tárgyköréből, angol, német, francia vagy orosz nyelven. Félévenként jelenik meg, évi egy, kb. 400–500 oldalas kötetet alkotva.

Előfizetési ára kötetenként belföldre 120,— Ft, külföldre 165,— Ft. Megrendelhető az Akadémiai Kiadónál (Bp. V., Alkotmány utca 21.), a külföld részére pedig a Kultúra Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Bp. I., Fő utca 32.).

Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica is a semiannual review of the Hungarian Academy of Sciences, publishing papers — in English, German, French or Russian — on Geodesy, Geophysics and Mining.

Editorial Office: Budapest V., Münnich Ferenc utca 7.

The subscription rate is Ft 165 per year. Orders may be placed with Kultura Trading Co. for Books and Newspapers (Budapest 62, P.O.B. 149) or with its representatives abroad, listed on p. 4 of the cover.

ACTA GEODAETICA, GEOPHYSICA et MONTANISTICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS

L. EGYED, J. ZAMBÓ

REDIGIT

A. TÁRCZY-HORNOCH

TOMUS 4

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1969

ACTA GEODAETICA, GEOPHYSICA et MONTANISTICA

Tomus 4.

INDEX

Recensiones

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (1—2), pp. 3—12 (1969)

ON THE VARIABILITY OF MICROPULSATION-PERIODS

J. VERŐ

CAND. OF TECH. SCIENCES
GEOPHYSICAL RESEARCH LABORATORY OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, SOPRON

[Manuscript received January 13, 1968]

The article affirms VOELKER's results in connection with the latitude-dependence of geomagnetic micropulsations, but at the same time it gives evidence for geologic influence on these periods.

1. In recent years an increasing number of investigators have dealt with the latitude-dependence of micropulsation-periods of the geoelectromagnetic field, following VOELKER's [1] and SIEBERT's [2] papers, mainly of the types pc 2—pc 4 with periods between 10 sec and some minutes. The problem consists of two main parts: how does the period of micropulsations change at a given station during the day, and how does it depend in a given part of the day on the (geographic or magnetic) latitude? Let us start out from VOELKER's statement: he considered the period of micropulsations in Wingst, Göttingen, Fürstenfeldbruck, at a distance of 2—3° magnetic latitude each. At both northern stations (Wn, Gt) the period has increased from dawn to sunset (Fig. 1), also during the whole period of the occurrence of day-time pulsations. In Fu, however, it has been minimal at 6 h (UT), and later increased continuously. The period decreased during the whole day in the direction of the Equator, but the diminution was more rapid around noon (4 per cent/degree magnetic latitude). Fig. 1 shows the average period of regular pulsations in the Observatory near Nagycenk (Hungary, $\Phi = 47{,}2°, \Lambda = 98{,}3°$) for June—July 1961, together with VOELKER's data. Some cases of exceptional pc 2 with periods 8—11 sec disturbed these values, without them the morning periods would be longer (dotted line). In 1962 the periods for the same months are very close, but somewhat longer. The curve seems to continue the trend on VOELKER's stations. The minimum of Fu at 6 h appears in Nc to be somewhat later (8 h) in both years, if we take 1961 without the pc 2-s. The decrease in the period is quicker than more to the North (at least 10 per cent/°). This quick decrease may not be produced by scatter, as the mean error in all cases is about 1 sec. Nagycenk is, however, not at the same meridian as VOELKER's stations and, as will be later explained, geologic causes distort the spectrum of earth-current variations in Nc, too. The lack of the evening increase may be due to the lack of sufficient regular pulsations in Nc.

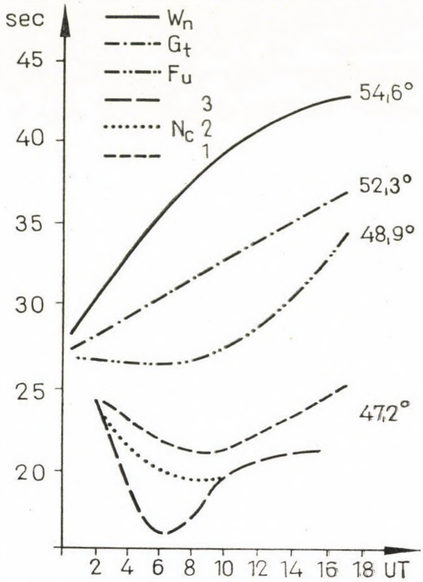


Fig. 1. Average periods of regular pulsations at VOELKER's stations and in Nagycenk (3. June—July 1961, 2. the same months, but without pc 2, 1. June—July 1962)

Table I

Periods with maximal frequency in different parts of the day during the period 1957—67.

Observatory near Nagycenk

Year	0—3 h	3—6 h	6—9 h	9—12 h	12—15 h	15—18 h	18—21 h	21—0 h
1957	(34)	16	20	22	22	21	24	(30) sec
1958	(26)	23	26	28	30	30	(26)	(21) sec
1959	(27)	20	24	26	26	26	(24)	(24) sec
1960	(28)	20	21	24	24	24	(32)	(36) sec
1961	27	23	19	20	20	20	34	(28) sec
1962	24	24	21	21	21	24	30	(20) sec
1963	34	30	21	21	24	27	30	(30) sec
1964	32	32	24	21	21	32	(30)	(32) sec
1965	48	32	32	21	22	32	32	(28) sec
1966	(36)	32	25	24	25	29	40	(32) sec
1967	30	32	24	24	24	24	(40)	(27) sec
(In brackets less reliable data)								
1957—1961	28	20	22	24	24	24	28	27 sec
1962—1966	34	30	24	21	22	28	30	28 sec

In Table I the most frequent periods of micropulsations in Nc are arranged according to local time in the years 1957—67 (including irregular pulsations). The daily distribution of periods is quite different during the years with maximum and minimum solar activity (Fig. 2a). Minimal periods appear during solar maximum at about 3—6 h, during solar minimum at about 9—12 h. The daily variation of periods seems to be rather different for different types of pc-pulsation, as it was found in [3] that for the most regular pulsations the

Fig. 2a. Average period of all pulsations in Nagycenk in solar maximum (1) and minimum years (2)

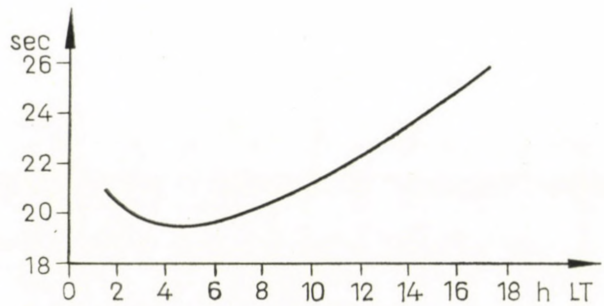


Fig. 2b. Average period of the most regular pulsations at Nagycenk (from [3])

period increases from the morning 19 sec to an evening 26 sec, similar to VOELKER's northern stations (Fig. 2b).

One finds that the daily variation of periods as found by VOELKER holds for Nagycenk in broad outlines, too.

2. The latitude-dependence of micropulsation periods was investigated by means of records from the Tamanrasset and Niemegk observatories, in addition to VOELKER's data.

A remarkably regular micropulsation-series occurred between 5 and 8 h, on July 26, 1961. Smoothed spectra are to be seen in Fig. 3 for Nc and Niemegk, with maxima at 23 sec for Nk and 19 sec for Nc. As the latitude-difference between these observatories is 5°, the period decrease is 3—4 per cent/°. For the early morning hours VOELKER obtained 2 per cent/°. So it was again found that the period decrease is about twice that of VOELKER's one. In case of VOELKER's data and Nagycenk, the quicker decrease could be interpreted as a result of the longitude-difference, but the decrease between Nc and Nk cannot to be understood in this way.

A greater quantity of data was used from Tamanrasset ($\Phi = 25{,}4°$). The spectra for the days considered (June 9, 13—14, Sept. 9—10, 1958) was computed by the method used in the Observatory of Nagycenk for rapid-run records. All the records were for 68 hours. Spectra for some parts of this material can be seen in Figs 4—7; the spectrum of the midday hours of June merits special attention, as according to VOELKER the period-difference should be the greatest in this part of the day. Fig. 8 shows the ratio of occurrence frequencies for some groups of the data. There is a fair correspondence among the three curves. In Tamanrasset the frequency was greater for the periods 10—16 sec

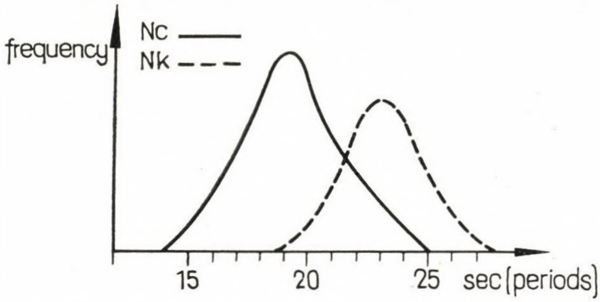


Fig. 3. Smoothed spectra of micropulsations at Nc and Nk, July 26, 1961, 5—8 h UT

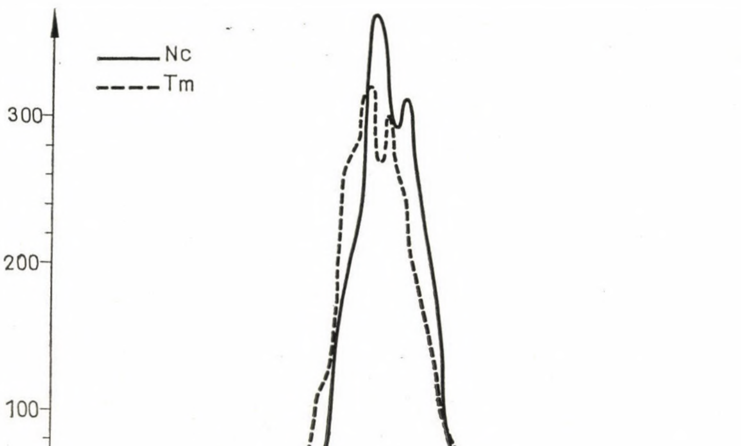


Fig. 4. Spectra of Tamanrasset and Nagycenk, Sept. 8—9, 1958

and 35—60 sec (twice and five times, resp.). At 25 sec the frequency in Nc is about one and half times higher than in Tm. Below 10 sec and above 60 sec, the frequency in Tm is less resulting from instrumental causes. A numerical value for the decrease of periods is hardly to be determined because for determining an "average" period these spectra do not apply properly. If one chooses the periods with maximal frequency, i.e. for Tm 18 sec and for Nc 21 sec, the decrease is less than 1 per cent/°. When the extreme values in Fig. 8 are, however, considered (12 and 25 sec, resp.) then the decrease is about 3—4 per cent/°. This value corresponds well with the earlier ones, but it is questionable whether such a choice could be admitted.

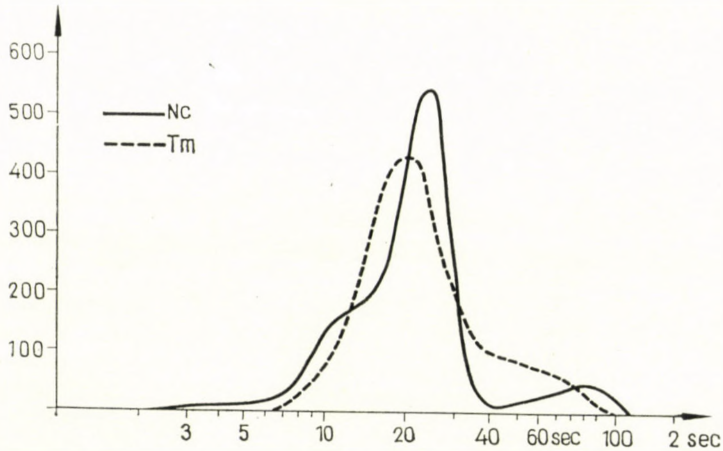


Fig. 5. Spectra of Tamanrasset and Nagycenk, June 9, 13—14, 1958

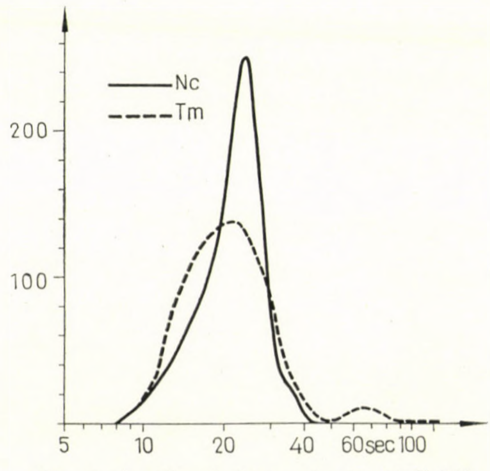


Fig. 6. As Fig. 5, but only 9—15 h LT

3. Some data on geologic influences on micropulsation periods in earth-current records.

Mrs. CZUCZOR [4] compared some records (three days) of Budkov ($\Phi = 49.1°$) in Czechoslovakia and Nagycenk in respect of their micropulsation spectra. She found (Fig. 9 in [4]), that in Budkov the frequency of periods over

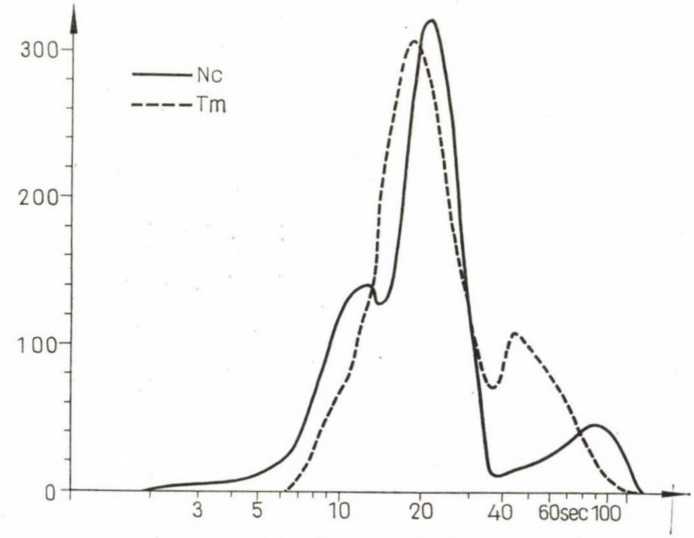


Fig. 7. As Fig. 5, but only 15—9 h LT

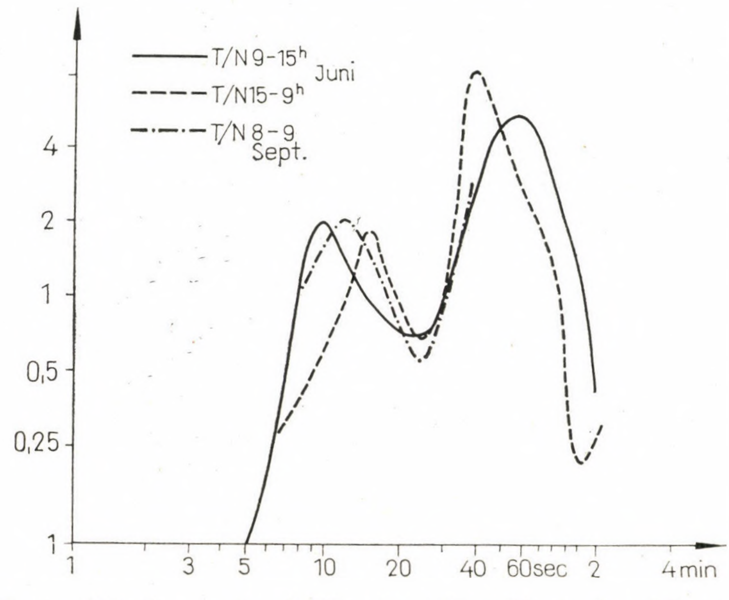


Fig. 8. Ratios of the frequencies of different periods at Nagycenk and Tamanrasset (1. June 1958, 9—15 h; 2. June 1958, 15—9 h, 3. Sept. 1958)

30 sec is (about twice) greater than in Nagycenk; below 30 sec the differences are smaller and not regular.

It can be regarded as a contribution to this problem a comparison of the magnetic data of the Observatory in Garchy ($\varphi = 47° 17'$) with earth-current data of Nc which was made possible during a stay in France by a grant

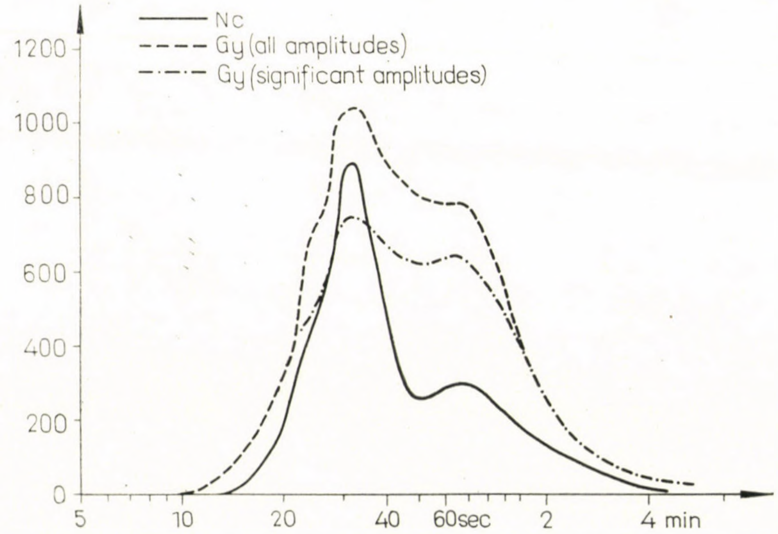


Fig. 9. Cumulative spectra of Nagycenk and Garchy for 20—22 July and 19—21 October 1965

of the CNRS. As Garchy and Nagycenk lie nearly at the same latitude, this comparison mainly shows the effects of local geologic factors on the earth-current records, as no plausible explanation is evident for longitude-dependent primary frequency variations.

The records of Garchy from 6 days of the year 1965 (20—22 July and 19—21 October) were compared with records of Nc from the same period. Cumulative spectra can be seen in Fig. 9, in Garchy for significant amplitudes and for all amplitudes separately (in the latter some cases of noise may be included). The differences between both the curves of Garchy do not distort the spectrum in respect to Nc. Between Nc and Garchy the differences appear again mainly around 60 sec. The difference below 20 sec is of instrumental origin. These differences shall be discussed later.

This comparison gave evidence of the simultaneous appearance of regular micropulsations at a distance of about 1000 km. In the 573 quarter-hours studied the regularity of micropulsations was in 241 cases (42%) very similar, in 290 cases (50,5%) similar and only in 42 cases (7,5%) different. There is, however, a delay of about 90 min in Garchy in the activity of micropulsations in respect to Nc. This difference appears roughly so that in the forenoon there is more regular micropulsation in Nc, in the afternoon in Garchy (Fig. 10). This delay is somewhat more than it would have been according to the longitude-difference (60 min).

4. Fig. 11 summarizes the results of Tamanrasset, Budkov and Garchy in respect to Nagycenk for the distortion of the spectra. It can be seen that in the range 20—60 sec where both components (magnetic and electric) and all

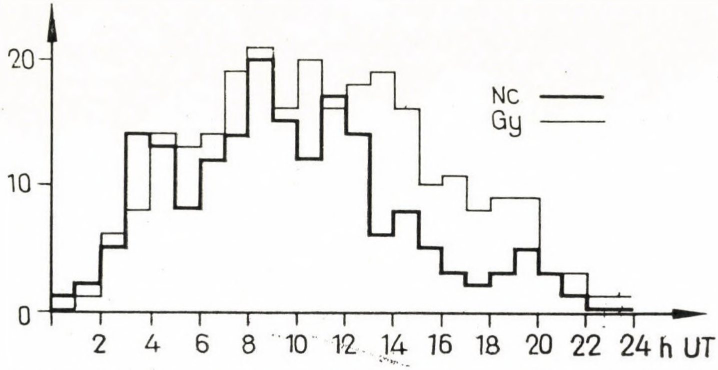


Fig. 10. Distribution of regular pulsations (UT) at Garchy and Nagycenk for the same days as in Fig. 9

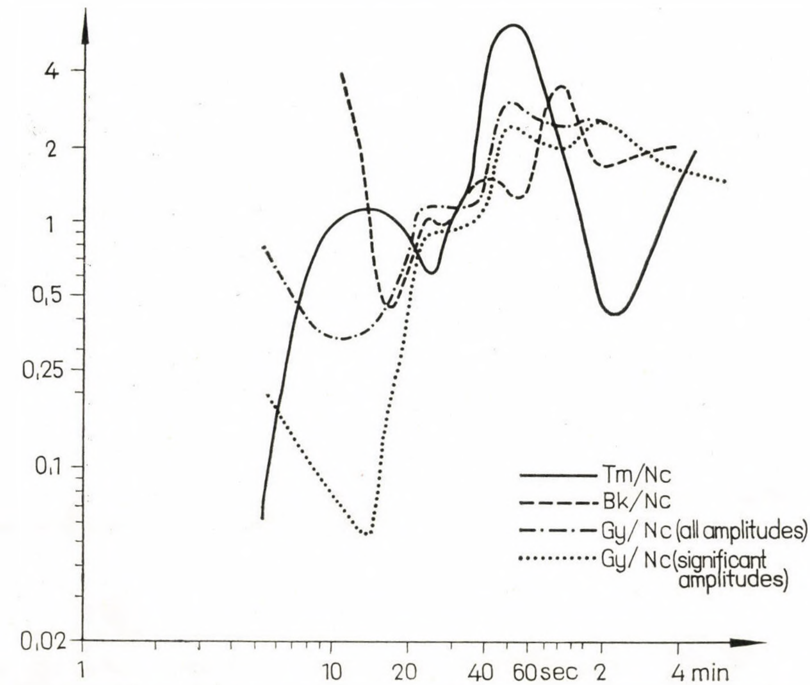


Fig. 11. Ratios of the frequencies of different periods at Tamanrasset, Budkov and Garchy to Nagycenk

instruments work properly, the ratios of the frequencies in the observatories mentioned above at Nagycenk have certain similar trends. This common trend can only be attributed to the geologic structure below Nc (or below the whole Carpathian Basin), and the deviations from this common trend to the geologic structures of the other observatories, not regarding the latitude-dependent variations.

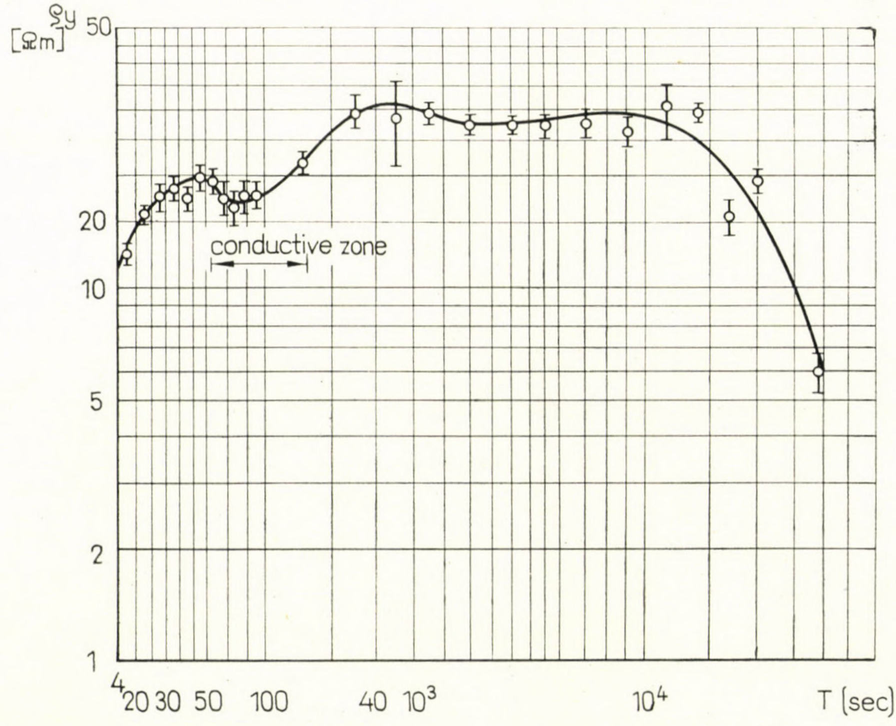


Fig. 12. Magnetotelluric sounding curve (ϱ_y) of Nagycenk

The fact, that the frequency of micropulsations with periods over 30 sec is relatively small, had already been found earlier in Nagycenk. Simultaneously (or perhaps consequently) the frequency of periods 20—25 sec is greater. This shift in the spectrum could be understood as being the result of the geologic situation, as has already been mentioned. The suggestion that the anomaly extends to the whole basin is based on the fact that on rapid-run records in different parts of Hungary, no apparent departure has been found from the spectrum of Nc. A difficulty of this explanation is, however, that no overall support is found on magnetotelluric sounding curves for this supposition. So it is more probable that the anomaly is caused by a conductive zone or horizontal inhomogeneity below Nagycenk in a depth corresponding to these periods (Fig. 12).

Concerning the other part of the problem no great variability in the latitude-dependence of micropulsation periods was found, and VOELKER's statement was not confirmed comparing his results to Nc. Only the sporadic early morning data show VOELKER's daily trend.

A further problem would be an investigation into the microstructure of latitude-dependence. With the found dependence of 4 per cent/°, for a station-distance of 100 km in the N—S direction (about 1°) a period-difference of 4 per cent, or the lack of a sinusoid from every 25 sinusoids would result. Such distances were often reached during the regional earth-current survey of Hungary, but no case of such a lack has been found. In some cases the records could not be used because of differences of activity. The transition may not be a continuous one, but with jumps during amplitude minima.

REFERENCES

1. VOELKER, H.: Zur Breitenabhängigkeit erdmagnetischer Pulsationen. *Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Aeronomie*, 11 (1963).
2. SIEBERT, M.: Geomagnetic Pulsations with Latitude-Dependent Periods and their Rel a tion to the Structure of the Magnetosphere. *Planet. Space Sci.*, 1964, 137.
3. VERŐ, J.: A földi elektromágneses tér pulzációinak vizsgálata a Nagycenk melletti obszervatórium mérései alapján (Investigations into the Pulsations of the Electromagnetic Field of the Earth on the Basis of the Records of the Observatory near Nagycenk). Thesis, Sopron, 1964.
4. CZUCZOR, E.: Eine vergleichende Untersuchung der elektromagnetischen Registrierungen der beiden Observatorien Nagycenk und Budkov. *Studia Geodaetica et Geophysica*, 1968

ИЗМЕНЯЕМОСТЬ МИКРОПУЛЬСАЦИОННЫХ ПЕРИОДОВ

Й. ВЕРЁ

РЕЗЮМЕ

Статья подтверждает результаты Волкера в отношении периодической зависимости геомагнитных микропульсаций, но в то же время доказывает влияние на эти периоды геологических факторов.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (1—2), pp. 13—20 (1969)

ELECTRON DENSITY (N(h)) PROFILES ABOVE BÉKÉSCSABA, HUNGARY, I. SUNSPOT MINIMUM. QUIET DAYS

P. BENCZE

CAND. OF GEOSCIENCES
GEOPHYSICAL RESEARCH LABORATORY OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, SOPRON

[Manuscript received January 25, 1968]

Recognizing the necessity of the knowledge of the electron distribution in the ionosphere in the study of the relations between the ionosphere and the components of the electromagnetic field of the Earth the author describes the procedure used to compute electron density profiles from ionograms of the ionospheric station Békéscsaba, Hungary, for this purpose. Quiet day average N(h) profiles are given for the summer, equinox and winter months of 1964.

The direct measurement of the variation of electron density with height enables the determination of values referring only at a given point to a given moment, and besides this, it is an expensive procedure. Therefore, the most important method for the determination of the electron density distribution remains the computation of electron density profiles from ionograms. Namely we need the knowledge of the variation of the electron density with height not only in our investigations related to the physics of the ionosphere but also in the study of the relations between the ionosphere and the components of the electromagnetic field of the Earth. As regards the diurnal variation of the geomagnetic field we need it for the computation of the electrical conductivities of the ionosphere. It is necessary to know this also for the determination of the total electron content of the ionosphere, if we will investigate the attenuation, or screening effect exerted by the ionosphere on the short period variations of the geomagnetic field (micropulsations) and electromagnetic waves originating above the ionosphere. Moreover we also need this, if we want to study the role of the ionosphere as one of the boundaries of the earth-ionosphere waveguide played in the propagation of extremely low (ELF) to medium frequency (MF) natural and artificial electromagnetic waves.

This recognition led us as we started to compute electron density profiles from ionograms of the ionospheric station Békéscsaba (46° 40′ N, 21° 10′ E) of the Central Meteorological Institute (Budapest). According to the demands of the investigations urging these computations we determine electron density profiles for geomagnetically quiet and disturbed days of both the minimum and the maximum of the solar cycle. Quiet and disturbed days were selected on the basis of K numbers determined from the magnetograms of the Geophysical Observatory near Nagycenk of the Geophysical Research Laboratory of the Hungarian Academy of Sciences (Sopron). Unfortunately the often unsatisfactory quality of the ionograms greatly diminished the number of the usable hours. The poor quality is due first of all to the interference produced all over Europe by broadcasting stations in the frequency range of 1 to 1.6 Mc and the absence of the trace near the critical frequency created by deviative absorption, which may partly be attributed to the small power output of the sounding equipment.

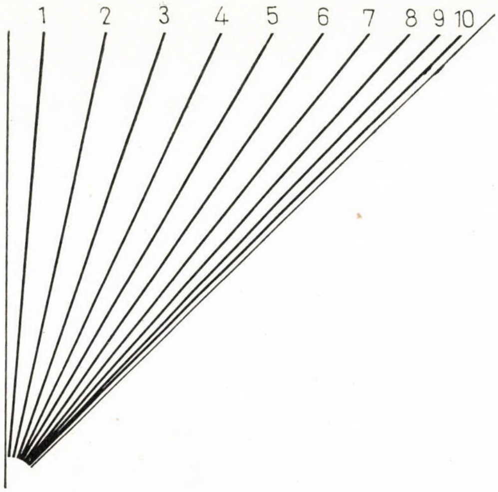


Fig. 1. Fan-like diagram for the determination of the true height at a given frequency

At the ionospheric station Békéscsaba an IRX type automatic ionospheric recorder is working. The frequency scale of this equipment is linear. Therefore, it seemed reasonable to use the method of SCHMERLING [1] for the determination of the electron density profiles. We applied the following procedure: The virtual heights necessary for the determination of the true height at a given frequency and belonging to fractions of this frequency may be readily found, if we construct a fan-like diagram scaled according to these fractions on transparent paper (Fig. 1). Laying the vertical initial line of the diagram on the zero frequency mark of the ionogram and the last line of the former on the frequency mark to which the pertaining true height we wish to find, the intersections of the sloping lines and the zero line of the virtual height scale give those frequencies to which the belonging virtual heights must be read. Then we slide the diagram upwards and make the points of intersection and the trace on the ionogram coincide. The appropriate virtual heights may be read from the height scale. To make the scaling more easy the ionograms were prepared

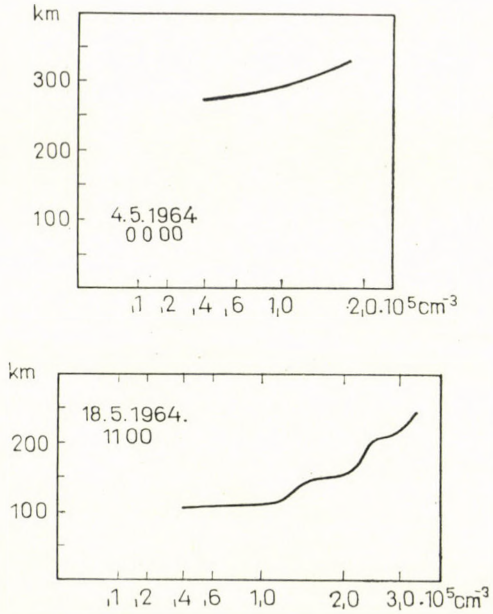


Fig. 2. **Daytime and nighttime electron density distribution of a summer day**

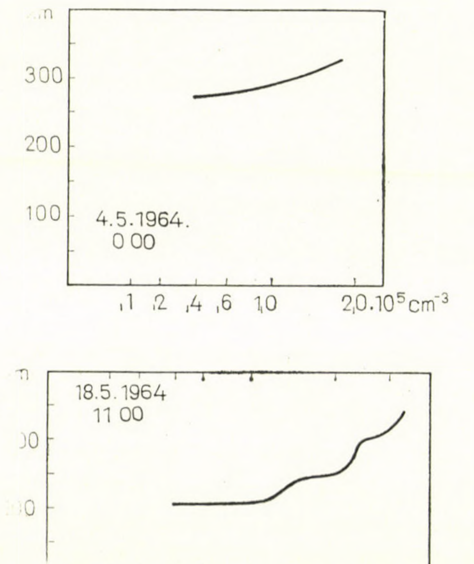


Fig. 3. **Daytime and nighttime electron density distribution of a winter day**

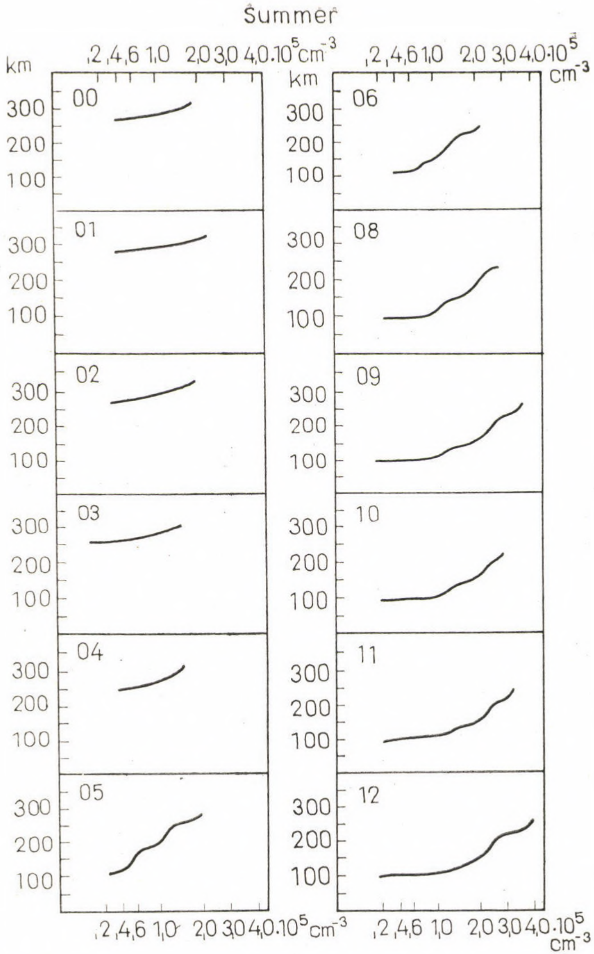


Fig. 4a. **Hourly average electron density [N(h)] profiles for quiet days of the summer months of 1964**

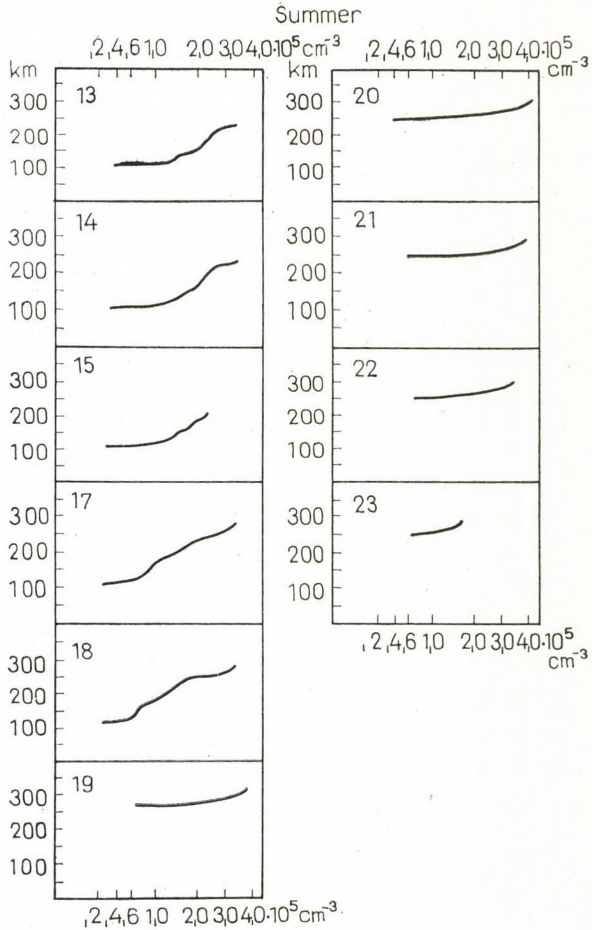


Fig. 4b. **Hourly average electron density [N(h)] profiles for quiet days of the summer months of 1964**

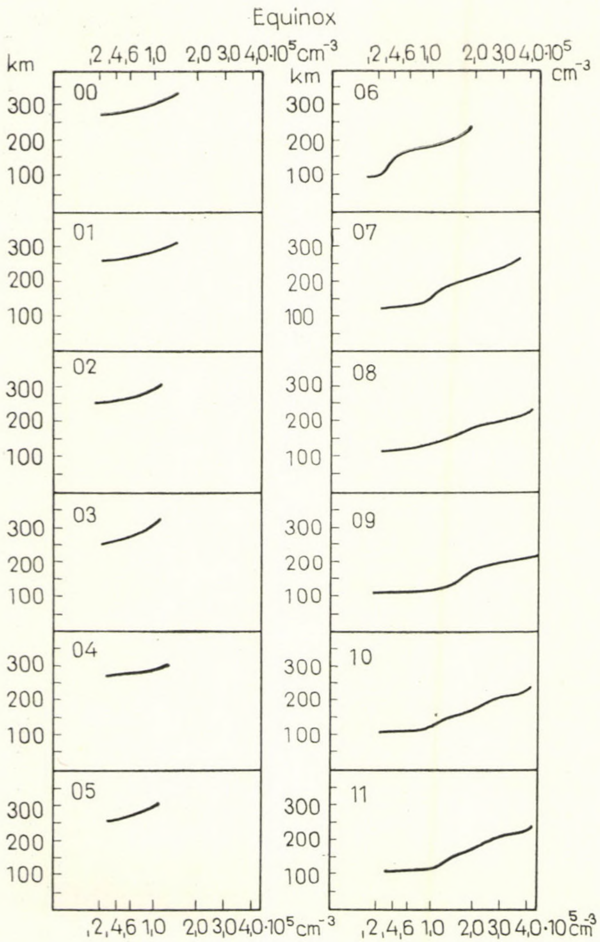


Fig. 5a. **Hourly average electron density [N(h)] profiles for quiet days of the equinoctial months of 1964**

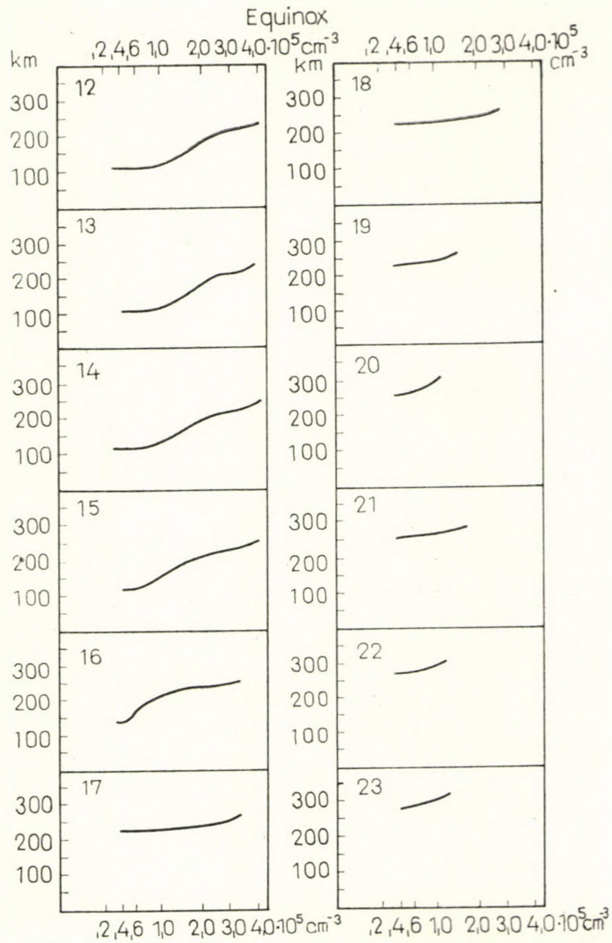


Fig. 5b. **Hourly average electron density [N(h)] profiles for quiet days of the equinoctial months of 1964**

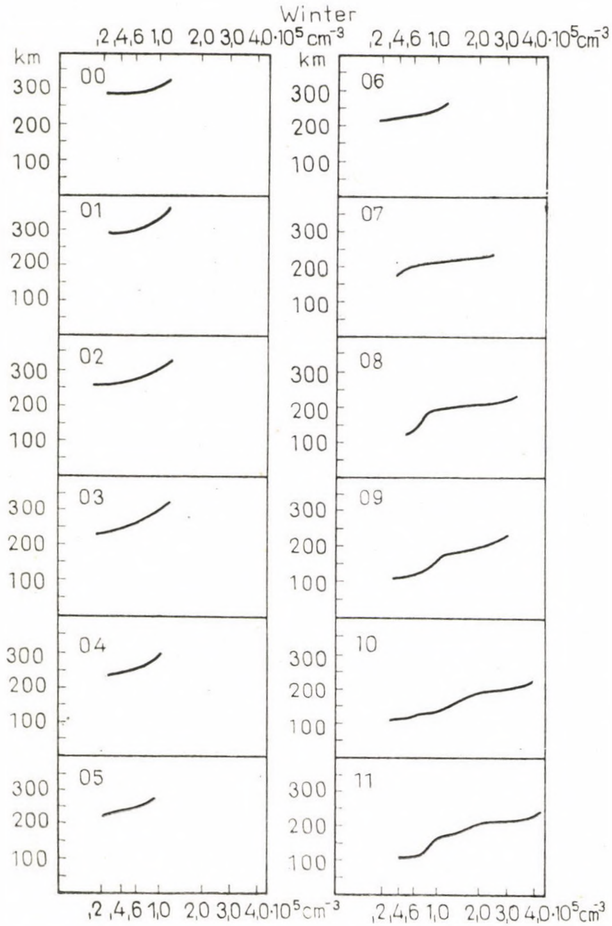


Fig. 6a. **Hourly average electron density [N(h)] profiles for quiet days of the winter months of 1964**

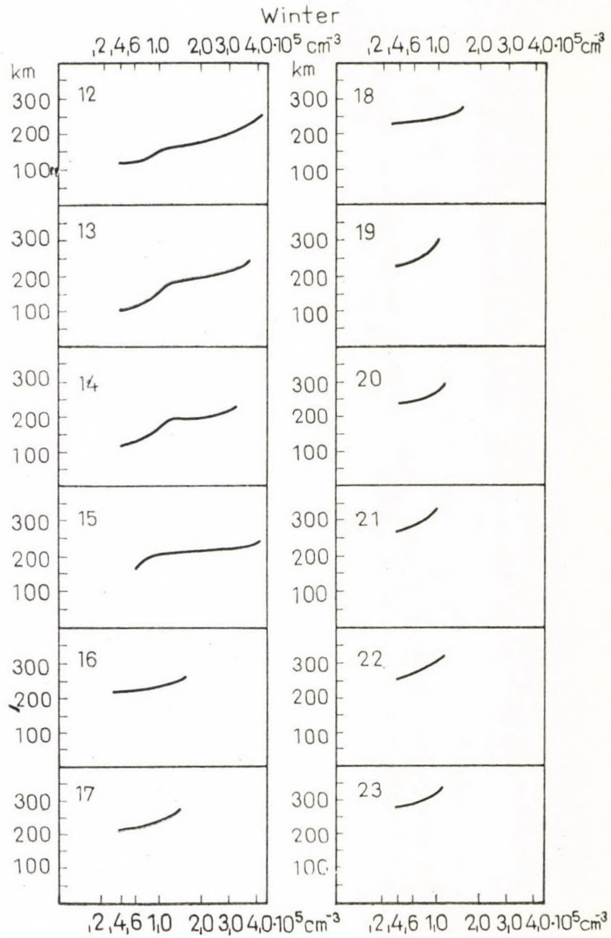


Fig. 6b. **Hourly average electron density [N(h)] profiles for quiet days of the winter months of 1964**

as follows: We made prints of the 35 mm film laying a transparent film with equidistant scale prepared by making scratches on the photographic paper. Putting the film with the ionograms into the enlarger we varied the enlargement till the 100 km height marks of the virtual height scale of the ionogram and every tenth mark of the equidistant scale conicided. It was relatively easy to do that since the height scale of the ionograms is sufficiently uniform. Thus, we obtained a height scale with 10 km marks.

We used the so-called "ten point" method [1]. As at the ionospheric station Békéscsaba the magnetic dip is 63°, the value of the field intensity at 300 km obtained by extrapolation of the ground value according to the inverse cube law 0.411 oersted, the gyrofrequency 1.15 Mc/s, the coefficients used by us were those shown in the following table.

	1	2	3	4	5	6
f/f_n	0.071	0.208	0.388	0.461	0.576	0.683
	7	8	9	10		
f/f_n	0.782	0.870	0.941	0.986		

where f_n is the frequency at which the true height is desired.

Figs 2 and 3 show as an illustration of the results obtained by the procedure daytime and nighttime electron distributions for a summer and a winter day. On the following Figures 4, 5 and 6 hourly average electron-density profiles for the quiet days of summer, equinox and winter months of 1964 (sunspot minimum) are reproduced. The shape of the profiles is influenced by the fact that they are averages of different electron density distributions due to the variation of the zenith distance of the sun.

This procedure limits the determination of the electron density profiles to height intervals visible on the ionogram without any extrapolation of the profile to the F2-layer maximum, resp. below $f_{\min}$. Therefore, to have more complete and more accurate electron density profiles the program of a computer method has been developed for the computer recently acquired by the Laboratory. The results will be published in a later paper.

REFERENCE

1. SCHMERLING, E. R.—VENTRICE, C. A.: Coefficients for the Rapid Reduction of h'—f Records to N—h Profiles without Computing Aids. *J. Atmosph. Terr. Phys.*,14 (1959), 249.

СЕЧЕНИЯ ПЛОТНОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ НАД БЕКЕШЧАБОЙ (ВЕНГРИЯ) I. МИНИМУМ СОЛНЕЧНЫХ ПЯТЕН, СПОКОЙНЫЕ ДНИ

П. БЕНЦЕ

РЕЗЮМЕ

Автор, признав необходимость в знании распределения плотностей электронов в ионосфере, при рассмотрении зависимостей между компонентами ионосферы и земного электромагнитного поля, по ионограммам ионосферной станции в Бекешчабе вычислил сечения плотностей электронов. Описывает примененный им способ и извещает о среднем часовом распределении плотностей электронов, относящемся к спокойным дням летних, равноденственных и зимних месяцев 1964 года (минимум солнечных пятен).

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (1—2), pp. 21—31 (1969)

DAS ANLEGEN ANSCHLIESSENDER WEGESYSTEME FÜR MATERIALBEWEGUNG

J. ZAMBÓ

KORRESP. MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 26. März 1968]

An ein bereits vorhandenes Wegesystem kann in der Weise angeschlossen werden, daß entweder die von den neuen Punkten ausgehenden Wege sich in einem Knotenpunkt treffen, oder diese Wege in eine Kammlinie einmünden. Im letzteren Falle ist die optimale Lage der Kammlinie immer an einen Punkt gebunden; sie verläuft immer durch einen der Punkte. Im ersteren Falle ist dieses nicht eine ausschließliche Bedingung des Optimums. Aus dem Vergleichen der beiden Systeme geht hervor, daß im allgemeinen das günstigere Anlegen dann vorliegt, wenn die neuen Punkte sich an eine Kammlinie anschließen, besonders dann, wenn das von den neuen Punkten gedeckte Gebiet in irgendeiner Richtung eine gestreckte Form aufweist.

Beim Entwerfen des Wegesystems für Materialbewegung kann frei von Gebundenheiten allgemein nur bei Neuanlagen verfahren werden. In solchen Fällen ist dann das Wegesystem je nach dem Charakter der Lagerstätte ein Knotenpunkt- oder ein Kammlinien-System, mit einer geraden, gebrochenen oder mit mehreren Kammlinien, schließlich auch eine Kombination dieser Systeme. Entspricht das von den Punkten des Systems bedeckte Gebiet etwa einem Kreise, so werden wir das Knotenpunktsystem bevorzugen, ist es aber ellipsenförmig, so kommt das System einer Kammlinie oder gebrochenen Kammlinie in Frage. Hat das von den Punkten okkupierte Gebiet auch flügelartige Erstreckungen, so wählen wir als Lösung ein System mit mehreren Kammlinien [1, 2]. Selbstredend kann auch der Fall eintreten, daß der Charakter des Systems im vornhinein nicht eindeutig festgelegt werden kann; in solchen Fällen müssen wir dann zum Verfahren des Vergleichens alternativer Lösungen greifen.

In der Praxis stehen wir meist Fällen gegenüber, die in erheblichem Maße Gebundenheiten enthalten. Die häufigste dieser Bedingungen ist ein bereits bestehendes Wegesystem, an welches angeschlossen werden soll: Hierbei muß eine gewisse Anzahl neuer Punkte dem bestehenden System zugefügt werden. Ein solcher Fall ist beispielsweise in Abb. 1 dargestellt, wo an ein bereits vorhandenes Wegesystem die Anzahl n neuer Punkte angeschlossen werden soll. Das Anschließen dieser n neuen Punkte kann gleichfalls mit einem Knotenpunkt, mit einer Kammlinie usw. erfolgen.

Bei Prüfung des Anschlusses von n weiteren Punkten wenden wir zuerst das Augenmerk auf ein Knotenpunktsystem, um es dann mit der Lösung durch ein Kammliniensystem zu vergleichen. Es sollen deshalb zuerst die theoretischen Zusammenhänge für das anschließende Einpunkt-Knotenpunktsystem einer näheren Betrachtung unterzogen werden.

Gemäß Abb. 2 ist eine frühere Kammlinie gegeben, deren Endpunkt mit B und ein weiterer ihrer Punkte mit A bezeichnet ist. Ferner ist eine n-Anzahl von neuen Punkten gegeben (P_1, P_2, . . ., P_i, . . . P_n). Zu suchen

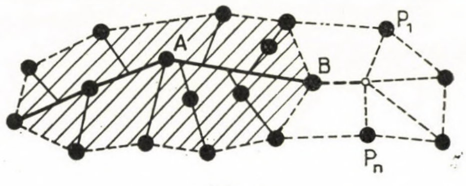


Abb. 1

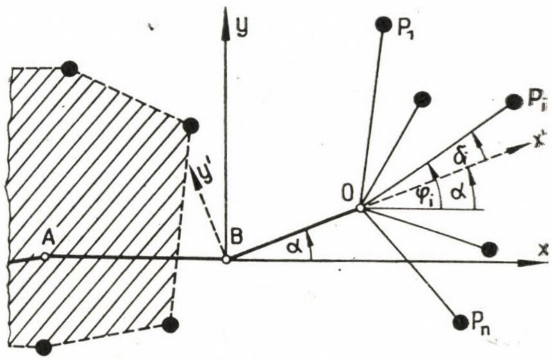


Abb. 2

ist ein O-Punkt, welcher einerseits mit den P_1, . . . P_n-Punkten, andererseits mit dem B-Endpunkt so zu verbinden ist, daß in dem damit geschaffenen Wegesystem die Summe der gewichteten Entfernungen ein Minimum betrage.

Zu jedem einzelnen P_1-Punkt gehören zwei Gewichte. Das eine, p_i, gehört zum Wege P_iO, das andere, q_i, gehört zum Wege OB. Demnach sind die Gewichte der Wege P_1O, P_2O, . . ., P_iO, . . ., P_nO der Reihe nach p_1, p_2, . . ., p_i, . . ., p_n, für den Abschnitt OB aber $q_1 + q_2 + \ldots q_i + \ldots + q_n = = \sum_{i-1}^{n} q_i$. Ferner stellen wir fest, daß

$$q_i < p_i \quad \text{ist.}$$

Es sei der Ursprung des rechtwinkligen Koordinatensystems der Endpunkt der vorhandenen Kammlinie B, während die Richtung der $+ x$ -Achse durch die Richtung AB gegeben sei. Die Koordinaten des einstweilen beliebig angenommenen O-Punktes sind : x, y. Somit kann die Summe der gewichteten Entfernungen einfach folgendermaßen geschrieben werden:

$$S = \sum_{i=1}^{n} p_i \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} q_i . \tag{1}$$

Da $S = \Phi\,(x, y)$ ist, besitzt S einen extremen Wert, wenn

$$\frac{\partial S}{\partial x} = - \sum_{i=1}^{n} p_i \cos \varphi_i + \cos \alpha \sum_{i=1}^{n} q_i = 0 \tag{2}$$

und

$$\frac{\partial S}{\partial y} = - \sum_{i=1}^{n} p_i \sin \varphi_i + \sin \alpha \sum_{i=1}^{n} q_i = 0 \quad \text{ist.} \tag{3}$$

Haben wir uns davon überzeugt, daß der Extremwert ein Minimum ist, so kann das das optimale Anlegen bezeichnende Gleichungssystem folgendermaßen aufgestellt werden:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cos \varphi_i + \cos \alpha \sum_{i=1}^{n} q_i = 0 \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sin \varphi_i - \sin \alpha \sum_{i=1}^{n} q_i = 0 . \tag{5}$$

Die Bedingung kann auch in dem verschobenen x', y'-System ausgedrückt werden, und zwar:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \cos \delta_i - \sum_{i=1}^{n} q_i = 0 \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sin \delta_i = 0 . \tag{7}$$

Der O-Knotenpunkt sichert der Summe der gewichteten Entfernungen dann ein Minimum, wenn er so gelegen ist, daß die Resultierende des in ihm angreifenden $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n$ Vektorsystems gleich Null und das Vektorpolygon ein geschlossenes ist.

Ist die Richtung der neuen Kammlinie von vornherein fixiert, d. h. α gegeben, dann lautet die Bedingung für das Optimum:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cos \delta_i - \sum_{i=1}^{n} q_i = 0 . \tag{8}$$

Dies besagt: Die resultierende des Vektorsystems ist nicht gleich Null, nur die Resultierende der auf der Kammlinie erscheinenden Komponenten des Vektorsystems und des Vektors $\sum_{i=1}^{n} q_i$ ist gleich Null. Das Vektorpolygon ist demnach offen, die Resultierende deckt sich mit einer im Nullpunkt auf der Kammlinie errichteten Senkrechten. Kurz gesagt: sie entfällt auf die Normale, mit andern Worten: die Resultante des Vektorsystems ist ein Minimum.

In Abb. 3 ist B der Endpunkt der früheren, schon vorhandenen Kammlinie, deren Richtung durch einen anderen Punkt A fixiert ist. Weitere vier neue Punkte (P_1, P_2, P_3, P_4) sollen nun so an das bestehende System angeschlossen werden, daß deren Zweiglinien in einen gemeinsamen Punkt, den Knotenpunkt (O) münden, welcher auf der Verlängerung von AB liegen soll.

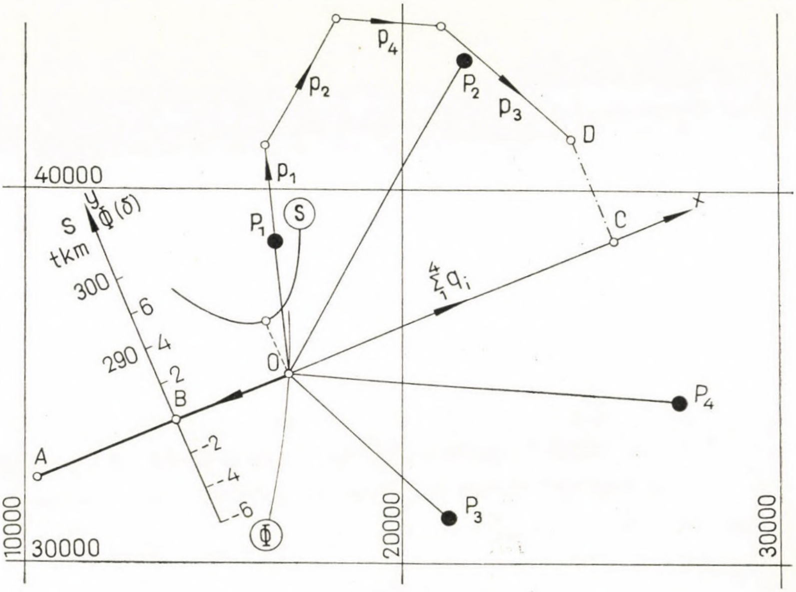


Abb. 3

Die den einzelnen Punkten beigeordneten Gewichte sind auf den Zweiglinien: $p_1 = 12{,}3$, $p_2 = 7{,}8$, $p_3 = 9{,}1$, $p_4 = 5{,}6$; auf der Kammlinie aber: $q_1 = 7{,}2$, $q_2 = 3{,}9$, $q_3 = 5{,}0$, $q_4 = 2{,}6$, d. h. $\sum_1^4 q_i = 18{,}7$.

In der Praxis bieten sich zwei Lösungen: eine numerisch-graphische und eine nur graphische Lösung. In der Praxis ist nämlich niemals eine größere Genauigkeit nötig als die hier erzielbare, da es sich ja um ein Entwerfen handelt.

Das numerisch-graphische Verfahren bedeutet das Suchen des Nullortes der Funktion

$$\varphi(\delta) = \sum_1^4 q_i \cos \delta_i - \sum_1^4 q_i \, .$$

Es werden auf der Geraden AB die Punkte $O_1, O_2, \ldots, O_k, \ldots, O_m$ angenommen und die hierzu gehörigen $\Phi(\delta)$ Werte berechnet. Diese ergeben in dem x, $\Phi(\delta)$

System eine Kurve (Φ). Die Kurve (Φ) schneidet die x-Achse, d. h. die Gerade AB in dem gesuchten Punkt O. Der Anschaulichkeit halber entwarfen wir auch die S-Kurve, d. h. die Kurve, die die Änderungen der Summe der gewichteten Entfernungen darstellt. Das hat insofern auch einen praktischen Nutzen, als daraus zu ersehen ist, wie sich S in der Nähe des optimalen Knotenpunktes ändert. Das Entwerfen der S-Kurve wird jedoch nicht unbedingt benötigt.

Die zweite ist die graphische Methode und besteht aus dem Aufzeichnen des Vektorpolygons. Auf der Geraden AB wird ein Punkt angenommen, von diesem aus der Wert $\sum_{1}^{4} q_i = 18{,}7$ aufgetragen, und in dem andern Endpunkt (C) die Normale (CD) errichtet. Entfällt der Endpunkt (D) des Vektorpolygons $p_1, \ldots, p_4$ auf die Normale, dann bedeutet der Punkt O_k das Optimum (O). Selbstredend kann im ersten Schritt O_k nur zufällig richtig gewählt werden; allgemein wird der D-Punkt im ersten Schritt nicht auf die Normale zu liegen kommen. Entfällt der D-Punkt von der Normalen in Richtung des B-Punktes, dann muß der O-Punkt in der Richtung auf B hin verschoben werden, und selbstverständlich auch umgekehrt. Wird dieses beachtet, so kommen wir mit jedem neuen Entwerfen immer näher an den das Optimum bedeutenden O-Punkt heran, den wir dann nach drei- bis viermaligem Probieren schon mit einer für die Praxis genügenden Genauigkeit bezeichnen können.

Das Wesen der Methode ändert sich auch dann nicht, wenn wir für den Punkt B eine Knickung vorschreiben, sodaß BA mit der x-Achse einen gegebenen Knickwinkel bildet.

Die Kammlinie kann auch eine krumme Linie sein. In diesem Falle ist das Problem einfach auf graphische Weise zu lösen (Abb. 4). Es tritt nämlich dann anstelle des vorherigen x, y-Koordinatensystems ein bewegliches x', y'-Koordinatensystem, wobei die x-Achse jeweils mit der Tangente zusammenfällt. Die graphische Methode unterscheidet sich demnach nur dadurch von der vorherigen, daß bei dieser die Werte $\sum_{i=1}^{n} q_i$ stets auf der Tangente aufzutragen sind. Das Optimum der Kurve wird durch den Punkt bezeichnet, für den die Resultante der in ihm angreifenden $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n$ und $\sum_{i=1}^{n} q_i$ mit der zu diesem Kurvenpunkt gehörigen Normalen zusammenfällt, d. h. die Resultante ein Minimum beträgt.

Kehren wir nun zu Abb. 3 zurück, wobei jedoch diesmal in der Verlängerung der Kammlinie keinerlei Bindung vorliegen soll, und sie frei so angelegt werden kann, daß die Summe der gewichteten Entfernungen ein Minimum beträgt.

Die Lösung der Aufgabe bedeutet das Suchen eines O-Punktes, für den die Gleichungen (4) und (5) erfüllt werden. Wir kennen mathematische

Iterations-Methoden, mit deren Hilfe diese Aufgabe auch numerisch gelöst werden kann. Die Praxis jedoch erhebt keinen Anspruch auf die damit erzielbare Genauigkeit, für ihre Zwecke ist auch die graphische Methode völlig ausreichend.

In Abb. 5 sind dieselben vier Punkte zu sehen wie in Abb. 3, und auch die ihnen beigeordneten Gewichte sind identisch.

Die Lösung erfolgt mit stufenweiser Annäherung. Als erster Schritt wird eine Richtung (BO_1) angenommen und dann gemäß dem in Abb. 3 befolgten Verfahren der O_1-Punkt ermittelt, bei dem die Resultante des Vektor-

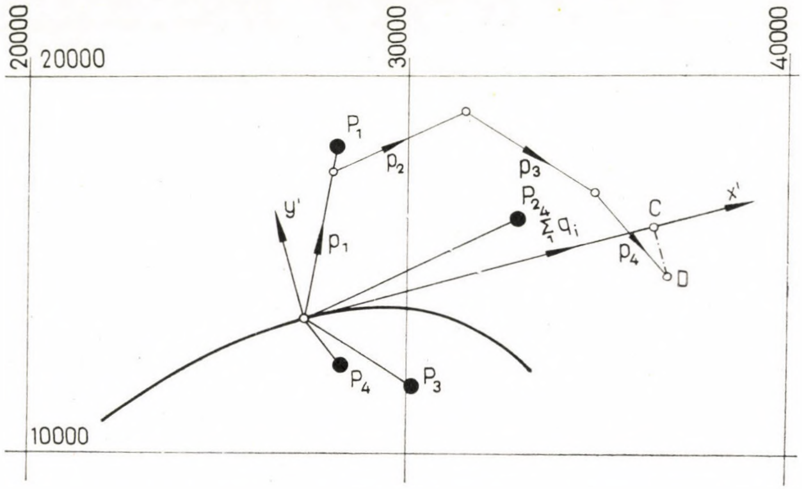


Abb. 4

polygons (C D) mit der in C errichteten Normalen zusammenfällt. Im allgemeinen ist $C_1D_1 \neq 0$. Im folgenden Schritt wird die Richtung BO_2 nun schon so gewählt, daß diese von der vorherigen BO_1-Richtung in gleicher Weise abweiche wie der Punkt D_1 von der Geraden BC_1. Wenn im zweiten Schritt der Schlußfehler C_2D_2 noch immer auf der gleichen Seite von BC_2 erscheint, dann muß auch im dritten Schritt in der vorherigen Richtung fortgeschritten werden, andernfalls wir einen Rückschritt begehen. Auf diese Weise kommen wir von Schritt zu Schritt immer näher an die gesuchte BO-Richtung heran und somit zu dem darauf liegenden gesuchten O-Punkt, für den dann die Punkte C und D zusammenfallen.

Die Reihe der O-Punkte (O_1, O_2, . . .) liegt auf einer Kurve (G), welche in den Punkten G_1, G_2, . . . Knickpunkte besitzt. Diese Kurve kann nach der graphischen Ermittlung von zwei bis drei O-Punkten schon in einer praktisch akzeptablen Weise extrapoliert werden, und damit kann praktisch auch der Ort des folgenden O-Punktes festgesetzt werden.

Je nach dem Orte und dem Gewicht der Punkte kann es vorkommen, daß ein restloses Schließen des Vektorpolygons nicht erfolgt, da, bevor noch dies eintritt, die sich bewegende Gerade BO durch einen gegebenen Punkt verlaufen kann, so daß dann bei weiterem Fortschreiten die Resultante bereits auf die andere Seite von BC entfällt und eine zunehmende Tendenz aufweist. Es ist sogar möglich, daß der gesuchte O-Punkt mit einem gegebenen Punkt zusammenfällt, denn dort ist die Resultante ein Minimum.

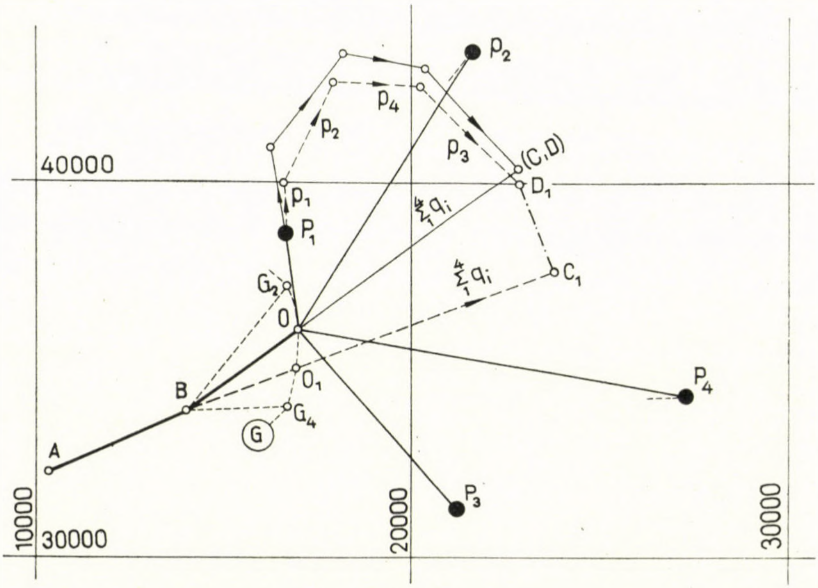


Abb. 5

Das Einordnen und Anschließen der neuen Punkte an das schon bestehende System kann auch als Kammlinienlösung erfolgen. Das Anlegen nach dieser Methode ist schon bekannt [1]. Die Kammlinie verläuft immer durch einen gegebenen Punkt, der Neigungswinkel der Zweiglinien aber ist durch die Beziehung

$$\cos \delta_{i,0} = \frac{q_i}{p_i}$$

gegeben.

In Abb. 6 werden eine Kammlinien- und eine Knotenpunkt-Anordnung mit einander verglichen.

Gegeben sind vier Punkte: P_1, P_2, P_3, P_4. Die ihnen zugehörigen Gewichte sind: $p_1 = 4{,}1$, $p_2 = 10{,}3$, $p_3 = 3{,}7$, $p_4 = 2{,}9$; $q_1 = 2{,}5$, $q_2 = 6{,}0$, $q_3 = 2{,}4$, $q_4 = 1{,}8$; $\sum_1^4 q_i = 12{,}7$. Die aus der Beziehung

$$u_i = \sqrt{p_i^2 - q_i^2}$$

berechneten u-Gewichte aber:

$$u_1 = 3{,}25, \quad u_2 = 8{,}37, \quad u_3 = 2{,}82, \quad u_4 = 2{,}27 \,.$$

Im Falle des Anlegens mit einer Kammlinie [1] kann die Entscheidung bezüglich der Lage der Kammlinie aufgrund der Beziehung

$$\left| \sum_{i=1}^{n_b} q_{b,i} - \sum_{i=1}^{n_j} q\, q_{j,i} \right| \longrightarrow \min$$

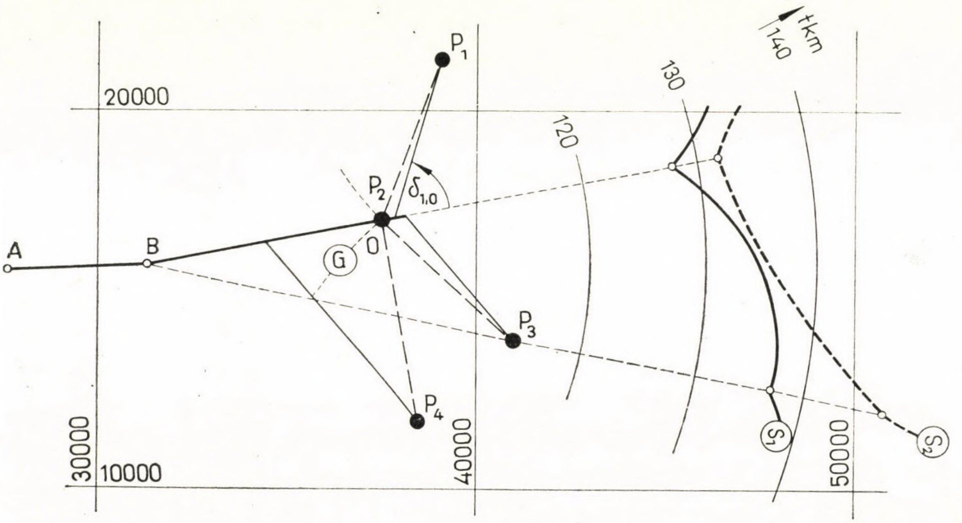


Abb. 6

leicht gefällt werden, da diese eindeutig den Punkt P_2 als den Punkt bezeichnet, durch den die Kammlinie verlaufen muß. Auch die optimalen Neigungswinkel lassen sich aus der Beziehung

$$\delta_{1,0} = \arc\cos \frac{2{,}5}{4{,}1} \quad \text{usw.}$$

leicht berechnen.

Im Falle des Ein-Kammliniensystems ist die Summe der gewichteten Entfernungen S_1. Die Änderungen dieser Größe stellten wir im Polarkoordinatensystem dar. Man sieht, daß die Kurve S_1 von unten gesehen konkav ist, und somit nur dann ein Minimum besitzen kann, wenn die Kammlinie durch einen der gegebenen Punkte, in unserem Falle durch Punkt P_2 verläuft. Während die Kammlinie von P_2 bis P_3 umbiegt, ändern sich die Werte S_1 nach der Cosinus-Funktion. Das Gleiche ist der Fall auch dann, wenn sich die Kammlinie zwischen P_2 und P_1 oder P_3 und P_4 bewegt. Wenn wir daher die Zweiglinien nicht in *einem* Kammlinienpunkt anschließen können, dann ist das Optimum ($S_{1,\mathrm{opt}} = 127{,}4$ gewichtete km) immer an einen gegebenen Punkt gebunden.

Erfolgt der Anschluß der Zweiglinien in einem Punkt der Kammlinie, d. h. treffen sich die Zweiglinien in einem Punkt, und es liegt somit eine Knotenpunktanordnung vor (gestrichelte Linien), dann ändert sich schon die Summe der gewichteten Entfernungen — von unten gesehen — nach einer konvexen Kurve. Sie besitzt daher prinzipiell auch dann ein Minimum, wenn die Kammlinie durch keinen der gegebenen Punkte verläuft. Selbstredend hängt die Möglichkeit hiefür von der Anordnung und dem Gewicht der Punkte ab. Während dieser Fall nach Abb. 5 noch möglich war, ist er bei der Anordnung nach Abb. 6 nun nicht mehr möglich: Das Optimum ist in diesem Falle an den Punkt P_2 gebunden. Im allgemeinen ist beim vorherigen, d. h. beim Anlegen nach dem Ein-Kammliniensystem das Minimum der Summe der gewichteten Entfernungen kleiner als in letzterem Falle, d. h. bei der Knotenpunkt-Anordnung

$$(S_{1,\mathrm{opt}} = 127{,}4;\ \text{aber}\ S_{2,\mathrm{opt}} = 132{,}0\ \text{gewichtete km}).$$

Das Ein-Knotenpunktsystem kann technische Vorteile besitzen, daher wird das Fällen einer Entscheidung durch einen Vergleich der beiden Systeme erleichtert. Ist nämlich der Wert von $S_{2,\mathrm{opt}} - S_{1,\mathrm{opt}}$ nicht erheblich, so sprechen die technischen Vorteile für die Ein-Knotenpunktlösung.

Das Suchen nach der Ein-Knotenpunktlösung scheint umständlicher zu sein als eine Lösung ohne Knotenpunkt, d. h. eine Lösung mit Kammlinie zu finden.

Ist die Anzahl der Punkte gering, dann ist die Lösung weder umständlich noch langwierig; wächst jedoch die Anzahl der Punkte, dann ist auch die Ein-Knotenpunktlösung eher an einen gegebenen Punkt, ja oftmals auch beide Lösungen an den gleichen Punkt gebunden.

Bei der Lösung von Aufgaben aus der Praxis muß immer geprüft werden, ob auch die mathematischen Bedingungen erfüllt sind. Dies ist besonders von Wichtigkeit, wenn es sich um wenige Punkte handelt. Um dies zu veranschaulichen, sei in Abb. 7 ein konkreter Fall vorgeführt.

Gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2. Die zugeordneten Gewichte lauten:

$$p_1 = 3{,}5,\ p_2 = 3{,}0;\ q_1 = 2{,}2,\ q_2 = 2{,}6;\ \sum_1^4 q_i = 4{,}8.$$

Nach der Lösung ohne Knotenpunkt, d. h. mit einer Kammlinie ist die Kammlinie durch BP_2 bezeichnet. Die Zweiglinie P_1T_1 ist unter einem Winkel $\delta_{1,0} = \arccos 2{,}5$ zur Kammlinie BT_2 geneigt. Die Summe der gewichteten Entfernungen lautet:

$$S_1 = p_1\,P_1T_1 + q_1\,T_1B + q_2\,P_2B = 3{,}5 \cdot 4{,}0 + 2{,}2 \cdot 2{,}3 + 2{,}6 \cdot 7{,}3 = 38{,}04$$

gewichtete km, wobei die Entfernungen der Zeichnung entnommen wurden.

Bei der Ein-Knotenpunktlösung lautet die Summe der gewichteten Entfernungen

$$S_2 = p_1 \mathrm{P}_2 \mathrm{O} + p_2 \mathrm{P}_2 \mathrm{O} + \sum_1^2 q_1 \mathrm{BO} = 3{,}5 \cdot 1{,}5 + 4{,}0 \cdot 3{,}4 + 4{,}8 \cdot 4{,}5 = 40{,}45$$

gewichtete km.

Es hat sich demnach auch jetzt erwiesen, daß die Ein-Kammlinien-Anordnung günstiger ist, da wir angenommen hatten, daß die mathematische Bedingung erfüllt ist, d. h. daß $\mathrm{P}_2\mathrm{B}$ hinsichtlich des Charakters wirklich eine

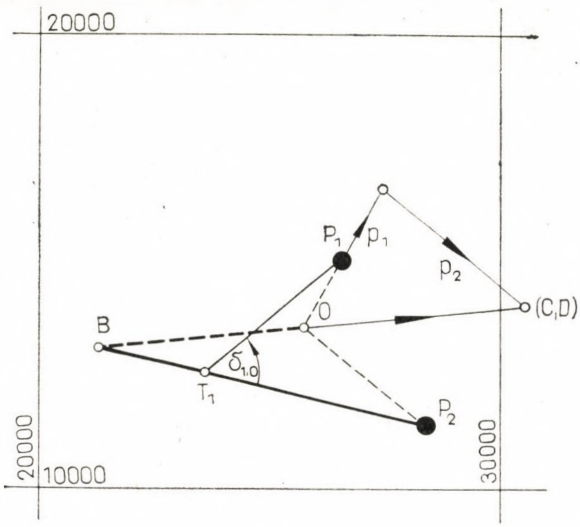


Abb. 7

Kammlinie ist, ferner daß das Gewicht der auf dieser Strecke zu vollziehenden Materialbewegung im Abschnitt $\mathrm{T}_1\mathrm{B}$ tatsächlich $q_1 = 2{,}2$ beträgt, und daß das Gewicht $q_2 = 2{,}6$ für den ganzen Abschnitt $\mathrm{P}_2\mathrm{B}$ gültig ist.

Wird vom Abschnitt $\mathrm{P}_2\mathrm{B}$ nur der Teil $\mathrm{T}_1\mathrm{B}$ zu einer Kammlinie ausgebaut, während der Teilabschnitt $\mathrm{T}_1\mathrm{P}_2$ den Charakter der Zweiglinie beibehält, da es beispielsweise nicht in unserer Absicht liegt, die Kammlinie über Punkt P_2 hinaus zu verlängern, dann wird selbstverständlich eine Knotenpunktlösung die günstigere sein, da sich unter diesen Bedingungen folgende Summe der gewichteten Entfernungen ergibt:

$$S_1 = p_1 \mathrm{P}_1 \mathrm{T}_1 + p_2 \mathrm{P}_2 \mathrm{T}_1 + \sum_1^2 q_i \cdot \mathrm{BT}_1 = 3{,}5 \cdot 4{,}0 + 4{,}0 \cdot 5{,}0 + 4{,}8 \cdot 2{,}3 = 44{,}56$$

gewichtete km.

Ist die Anzahl der Punkte nicht gering, so kann sich von vornherein ein solches Problem nicht ergeben, denn die als Kammlinie mathematisch angenommene Strecke ist auch in Wirklichkeit eine Kammlinie.

In unserer kurzen Abhandlung wollten wir nur auf die prinzipiellen Zusammenhänge dieses Problems hinweisen. Auf die praktischen Beziehungen, wie beispielsweise auf das Bilden der Gewichte und deren Änderung wurde hier nicht näher eingegangen, da von diesen schon früher a.a.O. die Rede war.

SCHRIFTTUM

1. Zambó, J.: Az anyagmozgatás útrendszerének telepítése egy gerincvonal esetében (Das Anlegen eines Wegesystems für Materialbewegung im Fall einer Kammlinie). *Bányászati Lapok*, 1968.
2. Zambó, J.: Az anyagmozgatás útrendszerének telepítése tört gerincvonal esetében (Das Anlegen eines Wegesystems für Materialbewegung im Fall einer gebrochenen Kammlinie). *Bányászati Lapok*, 1968.

SETTING ON OF THE CONNECTING ROAD SYSTEM FOR CONVEYANCE OF MATERIALS

J. ZAMBÓ

SUMMARY

One can connect with an existing road system by making the roads from new points to meet in a junction or by leading them in a principal line. In the latter case the optimal position of the principal line is always bound to a certain point, i.e. it passes through a point; in the former case there is not to be found such an absolute condition for the optimal position. Comparing both systems it is shown that the better setting on is, if the new points are connected with a principal line, especially if the area covered by the new points is stretched.

УСТАНОВЛЕНИЕ ПРИМЫКАЮЩЕЙ ДОРОЖНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ТРАНСПОРТИРОВКИ МАТЕРИАЛА

Я. ЗАМБО

РЕЗЮМЕ

К существующей дорожной системе можем примыкать так, что исходящние из более новых точек дороги встречаются в одной узловой точке или же так, что эти последние примыкают к гребню. В последнем случае оптимальное положение гребня всегда связано с одной точкой, всегда проходит через одну точку; в первом же случае это не является исключительным условием оптимума. Из сравнения двух систем выясняется, что более выгодным установлением является вообще примыкание к одному гребню более новых точек особенно тогда, когда покрытая этими точками территория растянута в каком-то направлении.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (1—2), pp. 33—40 (1969)

GEDANKEN ÜBER DIE KOMPARIERUNG

GY. ALPÁR

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
GEODÄTISCHES FORSCHUNGSLABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,
SOPRON

[Eingegangen am 2. November 1967]

Der einleitende Teil der Studie befaßt sich mit den verknüpften Problemen der Komparierung und der Teilungsprüfung sowie deren Absonderung.

Im weiteren wird die Meinung des Verfassers dargelegt, daß die durch Komparierung zu bestimmenden durchschnittlichen Teilungswerte streng genommen nur aufgrund einer vorherigen Teilungsprüfung abgeleitet werden können. Es kann nämlich nur in diesem Falle die Häufung der bei der Berechnung mit durchschnittlichen Teilungswerten vernachlässigten individuellen Teilungsfehler numerisch kontrolliert werden. Danach werden mit Hinweis auf die Zusammenhänge zwischen der Prüfung von Kreis- und Längsteilungen die Möglichkeiten der Verminderung der Meß- und Rechenarbeiten von Teilungsprüfungen erörtert. Zuletzt wird anhand des Beispieles der Komparierung von Präzisionsnivellierlatten auch auf die Berechnungsprobleme der durchschnittlichen Teilungswerte hingewiesen.

Die Wichtigkeit der Komparierung muß den Geodäten nicht eigens betont werden. Man könnte ohne dies die Messungen nicht auf eine gemeinsame Grundlage beziehen. Die Komparierung hat naturgemäß hauptsächlich in Zusammenhang mit Präzisionsmessungen eine wichtige Rolle, und die erhöhten Genauigkeitsansprüche bringen auch in dieser Beziehung immer neuere Probleme hervor.

Der Ausdruck »Komparierung« bedeutet im ursprünglichen Sinne des Wortes den Vergleich zweier Meßzeuge, wobei das eine meistens als Etalon angenommen wird. In einigen Fällen aber, z.B. bei der Komparierung von Nivellierlatten, ist die Grenze zwischen Teilungsprüfung und Komparierung schon verschwommen, und so wurden im Geodätischen Forschungslaboratorium der Ungarischen Akademie der Wissenschaften diesbezügliche Untersuchungen vollzogen.

Bei den sog. Teilungsprüfungen wird die auf einen Ausgangsstrich bezogene absolute Genauigkeit der Teilstriche und die relative Genauigkeit der benachbarten Teilstriche mit der durch die Prüfeinrichtung gewährleisteten Genauigkeit bestimmt.

Aus den, während der Komparierung vollzogenen Messungen wird bei den besprochenen Fällen ein »durchschnittlicher« Teilungseinheitswert abgeleitet. Der Ausdruck »durchschnittlich« wird hier in Ermangelung eines besseren gewählt, und wir kehren darauf gleich wieder zurück.

Aus den beiden obigen Definitionen ist es schon ersichtlich, daß bei der Komparierung von mit Unterteilungen versehenen Meßzeugen viel davon abhängt, was man unter »durchschnittlichen« Teilungswerten versteht. Wenn nämlich während der Messung mit dem Meßzeug sämtliche Unterteilungen mit gleicher Wahrscheinlichkeit zur Anwendung kommen können, so ist es offensichtlich, daß die durchschnittliche Teilungseinheit so bestimmt wird, daß die Quadratsumme der Abweichungen sämtlicher Unterteilungen vom Durchschnitt ein Minimum sei. In diesem Falle bestünde aber kein Unterschied mehr zwischen den Messungen der Teilungsprüfung und der Komparierung, und worauf wir bereits in der Einleitung hingewiesen haben, stehen die Grenzen zwischen den zwei genannten Operationen nicht mehr fest.

Demnach erhebt sich mit Recht die Frage, ob in den behandelten Fällen überhaupt ein Unterschied zwischen Teilungsprüfung und Komparierung besteht. Es kann nicht bestritten werden, daß bezüglich des Zweckes von zwei verschiedenen Prüfungen die Rede ist. Bei geodätischen Messungen war es nie vorteilhaft, wenn man die speziellen Werte der einzelnen Teilungen (ob Kreis- oder Längsteilungen) in Betracht ziehen mußte. Bei der heutigen Entwicklung der Instrumentenerzeugung ist dies allgemein nicht mehr nötig, und man kann mit durchschnittlichen Teilungseinheiten arbeiten. Diese müssen aber eben wegen der Anstrebung von großer Genauigkeit auch sehr genau bestimmt werden, damit die ungünstige Häufung der vernachlässigten regelmäßigen Fehler das erlaubte Maß nicht überschreite. Dies ist also der Zweck der Komparierung, und es ist nun schon klar ersichtlich, daß auch in jenem Falle, wenn wir die speziellen Fehler der einzelnen Teilungswerte nicht in Betracht ziehen wollen, müssen sie im Laufe der Komparierung doch bestimmt werden. Dies ist nicht nur deshalb nötig, damit die durchschnittlichen Teilungseinheiten am genauesten bestimmt werden können, sondern auch um sich über die Vernachlässigbarkeit der Teilungsfehler auch numerisch zu vergewissern. Es können also jene Komparierungsmethoden, die nur auf der Prüfung von einigen Teilungs-Intervallen beruhen, oder bei denen — wie es bei der Komparierung von Präzisionsnivellierlatten auch heute noch üblich ist — die durchschnittliche Teilungseinheit nur aus unkorrelierten Messungen abgeleitet wird, nicht für befriedigend betrachtet werden. Die Lage ist aber auch bei der allbekannten Heuvelinkschen Kreisteilungsprüfung nicht besser, weil auch hier — eben einfachheitshalber — die Korrelation der gemessenen Winkelwerte nicht gesichert ist, und weil in der Praxis diese Prüfung auch nur auf einen kleinen Teil der Teilstriche vollzogen wird. In diesem Falle kann daher nur von Komparierung im bisherigen Sinne des Wortes gesprochen werden. (Es sei noch erwähnt, daß man die Heuvelinksche Methode eben deshalb für eine qualifizierende Prüfmethode hält; die Brunssche Methode ist aber eine wirkliche Kreisteilungsprüfung auch dann, wenn hier nur die sogenannten Durchmesserfehler bestimmt werden. (Siehe [1; S. 57—58].) Aufgrund der bisherigen ist es leicht einzusehen, daß man zur Komparierung der mit Unterteilungen versehenen Meßzeuge Teilungsprüfungen zu vollführen hat. Dies haben wir zwar so in dieser Abfassung noch nirgends gelesen — unerwähnt die Praxis, die laut den bisher gezeigten nicht diesen Weg folgt — möchten aber doch nicht behaupten, daß dieser Gedanke neu sei. Die um die Jahrhundertwende ausgearbeiteten, speziell geodätischen Zwecken dienenden Teilungsprüfverfahren weisen auch darauf hin. Eine solche ist z.B. zur Prüfung der Längsteilungen ausgearbeitete Hansensche und Lorentzensche Methode, zur Prüfung der Kreisteilungen die Schreibersche und die bereits erwähnte Brunssche Methode, siehe [1]. Unlängst wurde im Geodätischen Forschungslaboratorium der Ungarischen Akademie der Wissenschaften von A. Tárczy-Hornoch auch ein Libellenprüfverfahren zur Bestimmung der spezifischen Fehler der Libellen-Teilungen ausgearbeitet [2], das im besprochenen Sinne auch eine Art der Teilungsprüfungen darstellt. Aufgrund dieser Beispiele ist es also offensichtlich, daß die Notwendigkeit der Teilungsprüfungen schon längst erkannt wurde, und der Verbreitung der genannten älteren Methoden zog nur der Umstand Grenzen, daß deren Anwendung mit sehr viel Meß- und Rechenarbeit verbunden war. Aber eben die in [2] bekannt gegebene Libellenprüfmethode ist ein Beweis dafür, daß in bestimmten Fällen die Anwendung dieser Methoden auch heute noch erforderlich ist, und wir können uns bezüglich der Teilungsprüfungen nicht allein auf die von der Herstellerfirma angegebenen Daten verlassen. Es wurde die Tatsache eben aufgrund der in unserem Laboratorium vollzogenen Libellenprüfungen allgemein bekannt, daß man bei Messungen mit den Sekundenlibellen in den meisten Fällen nur unter Beachtung der spezifischen Teilungswerte annehmbare Ergebnisse erhalten kann, es ist aber auch zu bemerken, daß wir auch schon bei der Kreisteilungsprüfung von Präzisionstheodoliten wesentliche Teilungsfehler gefunden haben.

Es ergibt sich demnach die Frage, wie diese Teilungsprüfungen wirtschaftlich verwirklicht werden können, wenn hierfür Notwendigkeit besteht. Es sind, wie bereits erwähnt, mehrere Teilungsprüfmethoden bekannt, aber es würde zu weit führen, wenn wir uns auf deren Erörterung — wenn auch nur in großen Zügen — einließen. Gemeinsam charakteristisch für all diese Methoden ist aber, daß man Vermittlungsgleichungen mit den gemessenen Intervallen der einzelnen Teilstriche für den Absolutwert der in Frage stehenden Teilstriche oder deren Abweichung von der nominellen aufschreibt. Bezüglich der Meßanordnung sind aber — um mit je weniger Messungen eine je größere Korrelation der Meßwerte zu sichern — schon viele Variationen aufzufinden.

Die bestehenden Probleme könnten wir am einfachsten an einem praktischen Beispiel schildern. Hierfür fanden wir die Teilungsprüfung der Präzisionsnivellierlatten am geeignetsten, weil sich damit die Fachliteratur kaum beschäftigt, und weil diesbezüglich in der ungarischen Fachliteratur in Zusammenhang mit der Komparierung der Präzisionsnivellierlatten auch einige Gedanken aufgeworfen worden sind [3].

Abgesehen von den meßtechnischen Problemen scheint eine Anordnung am geeignetsten zu sein, bei der die Intervalle der benachbarten Teilungsstriche gemessen würden, wie dies auch in Studie [3] empfohlen wurde.

Es sei nebstbei erwähnt, daß eine solche Prüfung ohne jegliche Einrichtungen auch mit den Präzisionsnivellier-Instrumenten selbst vollzogen werden könnte, wenn deren optisches Mikrometer mit einigen Überteilungen versehen und für eine entsprechende Einrichtung zur Lattenverschiebung gesorgt würde. Diese Methode hätte auch noch den Vorteil, daß das Anvisieren der Teilstriche im Laufe der Teilungsprüfung mit derselben Methode vollzogen werden könnte wie bei den praktischen Messungen, d. h. allgemein mit Keilstricheinstellung. Und dies hat deshalb Bedeutung, weil wir unsere Messungen auf die Symmetrielinie der relativ dicken Teilstriche beziehen müssen, und in diesem Falle ist es bei der erforderten Genauigkeit der Teilungsprüfungen nicht ganz gleichgültig, ob diese Symmetrielinie mit Hilfe des Keilstriches oder mit dem bei den jetzigen Komparatoren angewandten Koinzidenzverfahren oder ev. mit der früheren Doppelfaden-Einstellung gesucht wird. Bei dieser Anordnung könnte ferner die Lattenteilungsprüfung bzw. die Komparierung in vertikaler Lage verwirklicht werden, auf deren Notwendigkeit KNEISSL in [4] bereits hingewiesen hat.

Nach dieser kleinen Abschweifung müssen wir aber bemerken, daß HANSEN bereits 1874 eine Methode zur Teilungsprüfung aufgrund der unmittelbaren Abmessung der Intervalle der benachbarten Teilungstriche beschrieben hat; diese Methode war aber wegen der oben erörterten Meßanordnung mit dem Fehler behaftet, daß die Messungen unkorreliert waren, d. h., es bestand unter ihnen keine Überlappung. Demnach ergaben sich die Fehler der aufeinander folgenden Teilungstriche in der Reihenfolge der Bestimmung immer ungenauer. Um dies zu eliminieren, wurde von HANSEN auch eine andere Methode ausgearbeitet, bei der er die Intervalle der Teilungstriche in jeder Kombination abmaß, und so die maximale Korrelation der Meßwerte (siehe [1] S. 100—103) gewährleistete. Diese Methode bedeutet aber bei der Prüfung von vielen Teilungsstrichen eine so große Meß- und Rechenarbeit, daß man an deren Anwendung nur in Ausnahmefällen denken kann. Die Berechnungsvereinfachungen, die noch seinerzeit in Zusammenhang mit der Methode ausgearbeitet worden sind, vermindern aber wesentlich die Korrelation des übrigens unverändert großen Meßmaterials. Es sei zuletzt noch bemerkt, daß sowohl diese als auch die vorher erwähnte Lorentzensche Methode zur Teilungsprüfung der Meßlatten für Längenmessung ausgearbeitet worden sind.

Im weiteren gelangten wir nach einer einfacheren Lösung suchend zu dem Standpunkt, daß es bei den heutigen Gegebenheiten zweckmäßiger ist, die Zahl der Teilungsprüfungsmessungen auf ein zugelassenes Minimum zu reduzieren, und dabei die Berechnung ohne Vernachlässigung von Korrelationen zu vollführen. Hier denken wir in Zusammenhang mit den Berechnungen nicht nur an die Möglichkeit der Anwendung von Großrechenanlagen, sondern es ist laut den in [2] bereits besprochenen Prüfungen schon bekannt, daß die Koeffizienten-Matrix der hier zu lösenden Normalgleichungen durch zweckmäßige Anordnung der Messungen nur in der Nähe ihrer Hauptdiagonalen von Null abweichende Elemente enthalten wird und so ihre Berechnung sich wesentlich vereinfacht. Es werden Grenzen der Verminderung der Zahl der Messungen dadurch gestellt, daß wenigstens so viel Vermittlungsgleichungen für die gesuchten Teilungswerte aufgeschrieben werden müssen, wieviel die Zahl der zu bestimmenden Unbekannten, im vorliegenden Falle die Zahl der Teilungsstriche ist. Diese Zahl ist natürlich auch bei einer Skale der Präzisionsnivellierlatte sehr beträchtlich. Bei der üblichen Lattenlänge von 3 m muß man im Falle von cm-Teilung die Fehler von etwa 300, bei 1/2 cm-Teilung aber ungefähr von 600 Teilstrichen oder deren Absolutwerte bestimmen. Wir erwähnen nur deshalb einen etwaigen Zahlenwert, weil an beiden Enden der Latte einige Teilstriche für die Messung meistens unzugänglich sind. Wir benötigen also wenigstens so viel Vermittlungsgleichungen. Da in den Vermittlungsgleichungen immer die Differenz zweier Teilstrichwerte vorkommt, muß ein jeder Teilstrich in den Messungen zweimal vorkommen (die Mindestzahl der Gleichungen vorausgesetzt), wenn gleichzeitig auch die maximale Korrelation der Messungen angestrebt wird. Auf diese Weise kann man im Falle von überschüssigen Messungen sogar gewährleisten, daß die berechneten Unbekannten, d.h. die Werte der Teilstriche das gleiche Gewicht haben. Die, der obigen Erwägung entsprechende Meßanordnungen können verschieden sein, es soll aber von ihnen beispielsweise nur eine hervorgehoben werden. Wollen wir in diesem Falle den absoluten Wert eines jeden Teilstriches bestimmen, so werden die Intervalle der entsprechenden Teilstriche mit Hilfe eines 1-m-Komparators durch Verschiebung je Teilung gemessen; später werden am ersten und dritten Lattenmeter dieselben Messungen mit einem 0,5 m langen Komparator vollzogen. Da wir bei der Messung mit einem 1-m-Komparator für das in der Mitte liegende Lattenmeter eine vollkommene Überlappung erhalten, d.h., ein jeder Teilstrich kommt hier in den Messungen zweimal vor, kann aufgrund der bereits erwähnten Gesichtspunkte mit der Anwendung eines 0,5-m-Komparators erreicht werden, daß auch die Teilstriche des ersten und dritten Lattenmeters zweimal in den Messungen vorkommen. Diese Anordnung wurde als Beispiel auserwählt, weil mit Hilfe des meistens zur Verfügung stehenden 1-m-Komparators die Länge des 0,5-m-Komparators einfach ableitbar ist.

Weitere Einzelheiten können nicht mehr von allgemeinem Interesse sein, deshalb wollen wir uns wieder mit den Zusammenhängen der Teilungsprüfungen und der Komparierung befassen. Es ist offensichtlich, daß die Teilungsprüfungen sogar mit den von uns vorgeschlagenen Vereinfachungen eine so große Arbeit bedeuten, daß ihre häufige Anwendung für Komparierungszwecke unwirtschaftlich wäre. Es würde eine wesentlich einfachere Lösung bedeuten, wenn mit Hilfe der Teilungsprüfungen solche Etalone verschafft werden könnten, die mit den zu komparierenden Meßzeugen übereinstimmende Teilungen haben, wodurch die Teilungsfehler des zu komparierenden Meßzeuges aus unmittelbaren vergleichenden Messungen bestimmt werden können. Es sei hier noch auf jenen in [2] bereits erörterten Umstand hingewiesen, daß es meistens vorauszusetzen ist, daß die Teilungsfehler sich während der einzelnen Komparierungs-Zeitabschnitte proportionell verändern, und so können die Komparierungsmessungen in diesem Falle noch weiter vereinfacht werden.

Wir müssen zuletzt noch auf die Frage zurückkehren, wie die durchschnittliche Teilungseinheit in Kenntnis der Teilungsfehler berechnet werden kann. Wir wiesen bereits in der Einleitung in diesem Zusammenhang auf die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate hin. Es gibt bereits auf diesem Gebiete bekannte Verfahren, von welchen die Wanachsche Methode [5] zur Prüfung der Sekundenlibellen als theoretisch am stärksten begründet eigens hervorgehoben werde. Diese Methode wurde später ausführlich auch von Hirvonen [6] erörtert. Unsererseits sei nur hinzugefügt, daß laut unseren Prüfungen [7] bei der Anwendung dieser Methode auch gesichert ist, daß die Abweichung der in beliebiger Kombination berechneten Differenzen der Teilstriche von den mit der durchschnittlichen Teilungseinheit berechneten entsprechenden Werten das Minimum sei. In diesem Zusammenhang müssen wir aber noch auf einen Umstand hinweisen, der die Gestaltung des durchschnittlichen Teilungswertes ausschlaggebend beeinflußt. Es ist nämlich nicht gleichgültig, ob wir die in Frage stehende lineare Substitution derart beschränken, daß wir die Ausgangsteilung für fehlerfrei annehmen oder nicht. Mit der Einschränkung geht ein Freiheitsgrad der Substitution verloren, und so liegt es auf der Hand, daß dadurch die Anschmiegung der zu berechnenden durchschnittlichen Teilungseinheit zum ganzen Teilungsbereich beschränkt wird. Wenn daher eine solche Bedingung unnötig eingeführt wird, so vergrößern wir unbegründet die Abweichungen von der durchschnittlichen Teilungseinheit. Dies kann bei kritischen Fällen auch soweit führen, daß ein Meßzeug für die Anwendung mit durchschnittlichem Teilungswert für ungeeignet erklärt werden muß. Dieser Umstand wird deshalb betont, weil in Zusammenhang mit der Komparierung von Präzisionsnivellierlatten in [3], von der bisherigen Praxis abweichend, eben zu der Notwendigkeit einer solchen Beschränkung Stellung genommen wurde. Es ist der in [3] betonte Umstand zweifellos richtig, daß eine jede Lattenablesung sich auf den 0-Strich der Latte bezieht. Unserer Meinung nach ist dies aber keine genügende Begründung um den Nullstrich für fehlerfrei anzunehmen. In diesem Zusammenhang wollen wir uns nicht darauf beziehen, daß der Fehler des Null-Striches nötigenfalls in die sog. Fußpunktskorrektion der Nivellierlatte einbezogen werden könne, oder darauf, daß die übliche Meßanordnung keine Lattenablesungen unter 0,5 m zuläßt, sondern es soll bemerkt werden, daß im Laufe der Präzisionsnivellements praktisch mit Lattenablesungsdifferenzen gearbeitet wird. Da bei dem Präzisionnivellement zusammengehörige Lattenpaare angewendet werden, bei welchen zu den beiden Latten eben zur Vereinfachung der Berechnungen ein gemeinsamer Komparierungsfaktor, d.h. meistens eine gemeinsam durchschnittliche Längeneinheit berechnet wird, kann es im Gedanken vorausgesetzt werden, daß die Messungen nur mit einer Latte vollzogen werden. Es kann sogar im Gedanken angenommen werden, daß keine Teilungen an der Latte vorhanden sind. Wenn nun beim Rück- und Hinvisieren auf diese Latte je ein Strich entsprechend der Lage der Richtungslinie gezeichnet wird, so können wir zwischen den zwei Strichen unmittelbar die Höhendifferenz der Lattenstandpunkte bemessen. Es ist offensichtlich, daß dies eine sehr vereinfachte Vorstellung ist, aber die Anwendung der mit den Fußpunktskorrektionen auf gemeinsamen Nullpunkt gebrachten und mit gemeinsamen Komparierungsfaktoren versehenen Lattenpaare entspricht ihr vollkommen.

Zuletzt soll noch darauf hingewiesen werden, daß im Grunde genommen kein Unterschied zwischen der Prüfung der Längen- und Kreisteilungen besteht, und daß die einzelnen Teilungsprüfmethoden — vorausgesetzt, daß sie im strengen Sinne des Wortes zur Teilungsprüfung bestimmt worden sind — allgemein anwendbar sind. Die Meßumstände können natürlich mehrere Variationen erfordern, hier wurden aber vornehmlich die prinzipiellen und rechentechnischen Fragen untersucht, um für auf konkrete Fälle auszuarbeitende Komparierungs- und damit zusammenhängende Teilungsprüfungsmethoden Richtlinien geben zu können.

SCHRIFTTUM

1. Jordan—Eggert: Handbuch der Vermessungskunde. III./1. Band 9. Auflage.
2. Tárczy-Hornoch, A.: Über die Messung mit Sekundenlibellen. *Vermessungstechnik*, 1961.
3. Csatkai, D.: Pontosságfokozás a szintezés komparálási javításának meghatározásában (Genauigkeitssteigerung in der Bestimmung der Komparierungsverbesserung des Nivellements). *Geodézia és Kartográfia*, 1962.
4. Kneissl, M.: Nachweis systematischer Fehler beim Feinnivellement. *Abhandl. der Bayer. Akademie der Wissenschaften. Math.-Nat. Klasse.* Neue Folge Nr. 68. München, 1955.
5. Wanach, B.: Untersuchungen von Sekundenlibellen. *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, 1962.
6. Hirvonen, R. A.: Bestimmung der Libellenempfindlichkeit und eines konstanten Verhältnisses im allgemeinen. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 1950.
7. Alpár, Gy.: Libellák vizsgálata (Prüfung von Libellen). Dissertation, 1965.

NEW ASPECTS OF COMPARATION

GY. ALPÁR

SUMMARY

In the introduction, the article deals with the interwoven problems of comparation and the examination of scale divisions and also with the separation of both processes.

In the following the author expresses his opinion that the average values of divisions determined by comparation can be rigorously deduced only based on the results of a previous

examination of divisions, as the accumulation of individual division errors neglected, when calculating with the average division value can be controlled quantitatively only in this case. With reference to the connection between circular and lengthwise divisions the author examines possibilities of reduction of the measurement and calculation works in examination of divisions. Finally, on the example of the comparation of precise staffs, problems in the calculation of the average division value are presented, too.

НОВЫЕ ПОЗИЦИИ ПО КОМПАРИРОВАНИЮ

Д. АЛЬПАР

РЕЗЮМЕ

В вводной части работы рассматриваются переплетающиеся проблемы компарирования и исследования делений, а также возможности их разделения.

В дальнейшем автор излагает своё мнение о том, что средние значения делений, определяемые компарированием, могут быть выведены только на основании предшествующего им исследования делений. Только в этом случае может быть численно проконтролировано накопление отдельных ошибок делений, пренебрегаемых при вычислениях со средним значением деления. Затем указывается связь между исследованиями делений круга и длины и рассматриваются возможности уменьшения объема измерительных и вычислительных работ при исследовании делений. Наконец на примере компарирования высококлассных нивелирных реек анализируются и проблемы вычисления среднего значения деления.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (1—2), pp. 41—65 (1969)

A SIMPLE AND RIGOROUS METHOD FOR THE ADJUSTMENT OF GEODETIC SATELLITE NETWORKS BY APPLYING ARBITRARY APPROXIMATE COORDINATES

I. KÁDÁR

GEODETIC AND CARTOGRAPHIC INSTITUTE, BUDAPEST

F. KARSAY

INSTITUTE FOR GEODESY AND GEOTECHNICS, BUDAPEST

[Manuscript received December 19, 1967]

At present, the adjustment of geodetic satellite networks is considerably impeded by the large number of equations of observation, by the lack of good approximate values and by the need of establishing the normal equations with excessively lengthy computations.

The solution presented here is based on the method of the least squares of Gauss. The parametric equations, linear for the unknown coordinate variations, are given by a vector and a scalar product (Formula 1). The establishing of equations of observation is omitted, since the coefficients of the normal equations can be established directly from the observation results and from the approximate coordinates.

The approximate coordinates may be equal to zero, roughly approximate round numerical values or even values of good approximation.

The formulas can be equally applied for planar and for spatial formations, for single doints and for networks, and they are especially advantageous in case of electronic computer dıograms.

1. The problem

The usual adjustment of satellite networks encounters three essential difficulties:

1. The number of the equations of observation is very large.

2. Good approximate values are lacking, consequently the adjustment can be solved by way of iteration only.

3. The establishing of the coefficients of the normal equations requires computations of excessive length.

The procedure presented here means to surmount these difficulties. Already in papers by Zhongolovich [1, 2], Dufour [3], Stiefel [10], Kraus [4] and Firago [5], efforts are made to use linear equations from the very first and to solve the adjustment by a single normal equation. Their considerations, however, did not attain generalization; they referred to planar figures or to the spatial determination of a single point.

Our procedure, based on the method of the least squares of Gauss, resulting accordingly in a precision adjustment, reaches the parametric equations in a simple way, with the aid of a vector product.

The problem is to calculate the most accurate values of the spatial rectangular coordinates of points constituting a satellite network (Fig. 1) and the measures characteristic for the reliability, if

— the observation values,

— data usable for the choice and establishing of weight factors, further

— the mathematical relations to be established between the observed magnitudes and the unknowns are at our disposal.

No limitations as to the points and directions figuring in the network are made at all. Thus, for example, actual directions (diversely or separately)

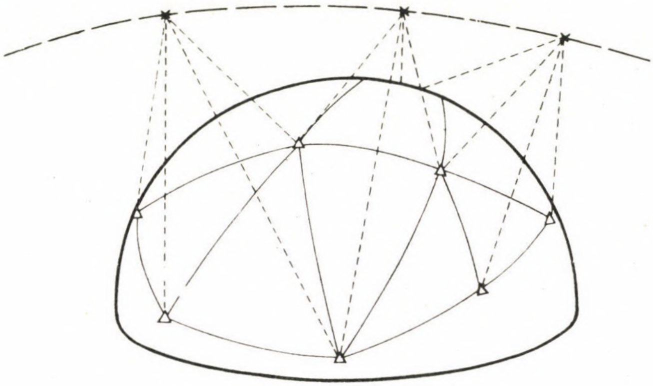


Fig. 1. Satellite network

from terrestrial point to satellite point may occur, but also derived (fictitious) directions connecting a terrestrial point with a terrestrial point may exist in the network. The points themselves may be known or can be determined, independently, of being a terrestrial or a satellite point in question (Fig. 2). The only conditions expected from the network is that it should be ***determinate***, i.e. it should contain at least as many data of observation as necessary for calculating all its unknown points.

For uniqueness' sake it will be assumed in the following that our (fictitious) direction observation results are topocentric direction cosines referring to the network sides, that is, the components of the unit vectors determining the spatial directions, referring to that spatial rectangular system of coordinates, in which the coordinates of the fixed stations are at our disposal. These direction cosines (m, n, p) are generally not directly computed from measurements, but from the photographically or visually determined equatorial coordinates (α, δ) and in the knowledge of the sidereal time s belonging to these from the following relations:

$$m = \cos\delta \cos(s - \alpha)$$

$$n = \cos\delta \sin(s - \alpha)$$

$$p = \sin\delta\,.$$

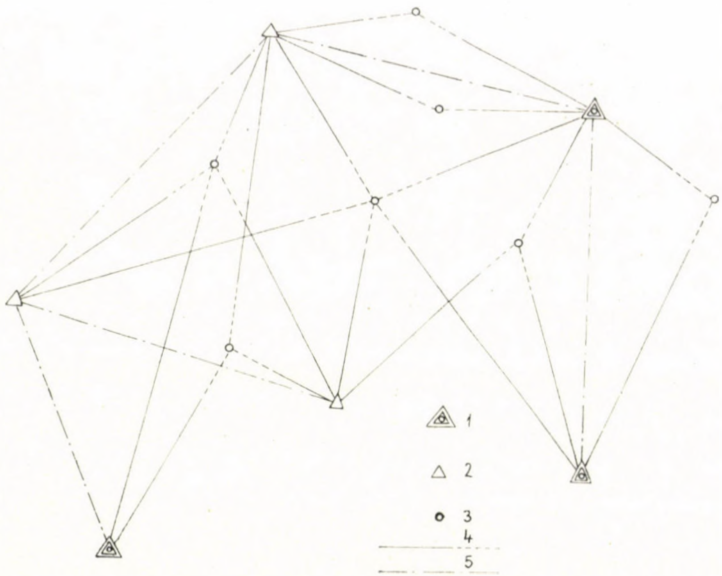


Fig. 2. Determination plane of the satellite network. 1 known terrestrial points, 2 terrestrial points to be determined, 3 satellite points, 4 actually measured directions, 5 derived (fictitious) directions

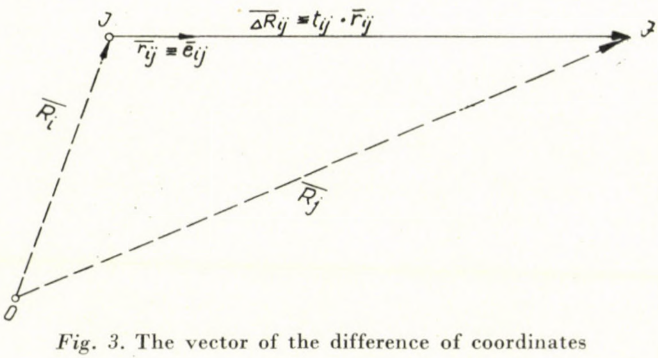


Fig. 3. The vector of the difference of coordinates

On the other hand, also the length of an arbitrary number of sides can be measured in the network. It is assumed, however, that also the direction of that side is known, the length of which is measured.

2. Parametric equations

Let us select two neighbouring points I and J from the network (Fig. 3) and let us assume that our measurements were executed without any error. In this case, two conditions must be satisfied:

1. The coordinate-difference vector $\bar{\Delta R} = \bar{R}_j - \bar{R}_i$, formable from the adjusted coordinates $\bar{R}_i$ and $\bar{R}_j$ of the points I and J, on the one hand, and the measured unit vector $\bar{r}$ on the other must have the same direction, i.e. their vector product must be zero:

$$\bar{r} \times \bar{\Delta R} = 0 . \tag{1a}$$

2. The distance t', computable from the adjusted coordinates $\bar{R}_i$ and $\bar{R}_j$ of the points I and J, must be equal to the measured side length t, that is, the difference of the scalar product

$$t' = \bar{r}\Delta R$$

and the distance t must be zero:

$$\bar{r} \cdot \bar{\Delta} R - t = 0 . \tag{1b}$$

These are the two parametric equations forming the basis of our adjustment procedure to be presented. Since these two relations are based on the two most important operations of linear algebra, upon the scalar multiplication and the vectorial multiplication, the method might also be called *linear adjustment*.

3. The equations of direction-correction

As it will be seen in the following, it is not necessary to establish equations of observation in the course of the computational work in our procedure, because the coefficients of the normal equations can be established directly from the observation values. Here, however — in order to create a connection with the equations of observation of the traditional adjustment — also the equations of the observation themselves will be derived.

On account of the errors of measurement, the directions of the vectors $\bar{r}$ and $\bar{\Delta R}$ presented in equation (1a) will not coincide entirely. Instead of the vector $\bar{r}$ actually an unit vector $\bar{e}$ differring by a vector $\bar{v}$ from the vector $\bar{r}$ is measured (Fig. 4):

$$\bar{r} = \bar{e} + \bar{v} \tag{2}$$

Substituting this into (1a):

$$(\bar{e} + \bar{v}) \times \bar{\Delta R} = 0 \tag{3}$$

and hence

$$\bar{e} \times \bar{\Delta R} + \bar{v} \times \bar{\Delta R} =) \tag{4}$$

Let us introduce the following denotations, too:

Let the axial components of the vector be $\bar{\Delta R}$: ΔX, ΔY, ΔZ; more precisely

$$\begin{aligned}\Delta X &= X_j - X_i = X_{0j} + dX_j - X_{0i} - dX_i \\ \Delta Y &= Y_j - Y_i = Y_{0j} + dY_j - Y_{0i} - dY_i \\ \Delta Z &= Z_j - Z_i = Z_{0j} + dZ_j - Z_{0i} - dZ_i ,\end{aligned} \tag{5}$$

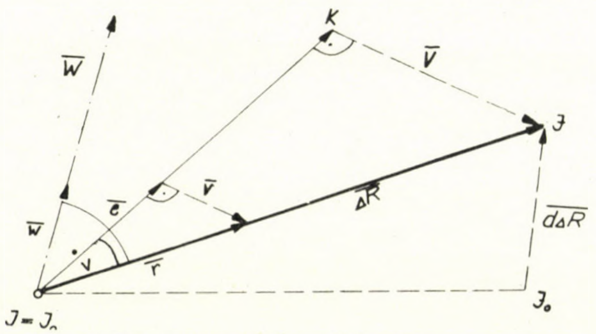


Fig. 4. The interpretation of direction correction

where X_j, Y_j, Z_j and X_i, Y_i, Z_i are the final (adjusted) coordinates of the points J resp. I, X_{0j}, Y_{0j}, Z_{0j} and X_{0i}, Y_{0i}, Z_{0i} are the approximate coordinates of the points J, resp. I, and finally dX, dY and dZ are the corresponding changes in the coordinates.

Let us denote the absolute value of $\bar{\Delta R}$ by t:

$$|\bar{\Delta R}| = t . \tag{6}$$

Finally let us use the letters m, n, p for the denotation of the components of the vector $\bar{e}$, resp. — being the unit vector in question — of its direction cosines related to the axes of coordinates.

Let us perform the vectorial multiplication referred to in Equ. (4) also with the scalar components:

$$\bar{e} \times \bar{\Delta R} = (n\Delta Z - p\Delta Y)\,\bar{i} + (p\Delta X - m\Delta Z)\,\bar{j} + (m\Delta Y - n\Delta X)\,\bar{k} .$$

Let us substitute this into (4) and transpose it to the right-hand side of the equation:

$$\bar{v} \times \bar{\Delta R} = (p\Delta Y - n\Delta Z)\,\bar{i} + (m\Delta Z - p\Delta X)\,\bar{j} + (n\Delta X - m\Delta Y)\,\bar{k} . \tag{7}$$

The left-hand side of equation (7) is equal to a vector $\overline{W}$, the absolute value of which is

$$|\overline{W}| = |\bar{v}| \cdot |\Delta R| \sin 90^\circ = t\,|\bar{v}|\,. \tag{8}$$

if equation (6) is also taken into consideration.

Since $\bar{v}$ is small and normal to ΔR (Fig. 3), it can be regarded as identical with the arc, i.e. the angular correction itself expressed in analytical units.

The triangle IJK of Fig. 4 is similar to the triangle enclosed in it; from the proportionality of its sides it follows that

$$t\,|\bar{v}| = |\overline{V}|\,. \tag{9}$$

Consequently, according to Equ. (8) and (9) the linear correction $|\overline{V}|$ is equal to $|\overline{W}|$; these, as vectors, are rotated by 90° to each other. The same can be said for the vectors $\bar{v}$ and $\bar{w}$, that is

$$|\bar{v}| = |\bar{w}| \qquad \text{and} \qquad \bar{v}\cdot\bar{w} = 0\,. \tag{10}$$

In case of equal probable measurements* the adjustment is made according to the conditions

$$[\bar{v}\cdot\bar{v}] = \min.$$

On the basis of the formulas (9) and (10) it is easy to see that the following conditions are identical to the above one:

$$[\bar{v}\,\bar{v}] = [\bar{w}\,\bar{w}] = \left[\frac{1}{t^2}\,\overline{V}\,\overline{V}\right] = \min.$$

and finally,

$$[\bar{v}\,\bar{v}] = \left[\frac{1}{t^2}\,\overline{W}\,\overline{W}\right] = \min. \tag{11}$$

As can be seen it is the linear corrections weighted in a proportion inverse to the square of the approximate distance that correspond to the unit weight corrections of the observed angles.

These corrections are corrections of fictitious observation results.

It can be demonstrated that this minimum, established for the square sum of the fictitious corrections, occurs in the same place as the minimum related to the square sum of the real observation corrections, that is, the fictitious corrections chosen properly exactly for this purpose are independent of each

* In case of non-equal probable measurements the corresponding weights must be considered — anywhere in the following — in the way usual in adjustment computations.

other, if the image coordinates x and y are equally accurate, independent observation results. In this case the weight matrix related to the fictitious corrections is simplified to an unit matrix.

This follows also from the fact that the algebraic form of the coefficients of the system of normal equations derived by us exactly agrees with the formulas of other authors (e. g. of [11]), established for the real observation results but derived in a more complicated way.

In that case, then, if the above mentioned condition is not fulfilled, that is, the real observation results are of different weights, eventually not even independent of each other, our general formula (18) published in [12] has to be applied for a direct establishing of the normal equation.

31. First variant

In the first place in our procedure, as *the first variant*, Equ. (11) will be applied; that is, the minimum condition of the weighted square sum of vectors $\bar{W}$ — equally normal to the plane of the coordinate-difference vectors and of the measuring result vectors — will be satisfied. Actually, the previous fictitious correction vector is used:

$$\bar{W} = (p\Delta Y - n\Delta Z)\,\bar{i} + (m\Delta Z - p\Delta X)\,\bar{j} + (n\Delta X - m\Delta Y)\,\bar{k}\,, \tag{12}$$

the scalar components of which are

$$\begin{aligned} W_X &= p\Delta Y - n\Delta Z \\ W_Y &= m\Delta Z - p\Delta X \\ W_Z &= n\Delta X - m\Delta Y\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Let us substitute here the quantities figuring in Equ. (5) and let us separate the absolute terms, whereby the form of the equations of observation, suitable for computations, is obtained:

$$\begin{aligned} W_X &= p\,(dY_j - dY_i) - n\,(dZ_j - dZ_i) + \{p\,(Y_{0j} - Y_{0i}) - n\,(Z_{0j} - Z_{0i})\} \\ W_Y &= m(dZ_j - dZ_i) - p\,(dX_j - dX_i) + \{m(Z_{0j} - Z_{0i}) - p(X_{0j} - X_{0i})\} \\ W_Z &= n\,(dX_j - dX_i) - m\,(dY_j - dY_i) + \{n\,(X_{0j} - X_{0i}) - m(Y_{0j} - Y_{0i})\} \end{aligned} \tag{14}$$

It can easily be seen that the three equations of observation are independent only by pairs, the third one follows from the other two. In the interest of the possibility of writing them up symmetrically, however, it is advisable to use all three.

In the equations, each two right-hand members do not contain unknowns; the absolute terms of the equations are obtained by their reduction. The above presented system of equations of observation has to be weighted, according to (11), in an inverse ratio to the squares of the approximate length of the sides.

32. *Second variant*

As a *second variant*, the linear correction $|\bar{V}|$ itself, too, can be established, if the vector product of the vectors $\bar{W}$ and $\bar{e}$ is formed. By this, namely, the vector $\bar{W}$, rotating it by 90° around in the direction $\bar{e}$, is brought into coverage with vector $\bar{V}$,

$$\bar{V} = \bar{W} \times \bar{e}$$

$$\bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ n\Delta Z - p\Delta Y & p\Delta X - m\Delta Z & m\Delta Y - n\Delta X \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

the components of which are

$$\begin{aligned} V_X &= (p\Delta X - m\Delta Z)\,p - (m\Delta Y - n\,\Delta X)\,n \\ V_Y &= (n\Delta Z - p\Delta Y)\,p - (m\Delta Y - n\Delta X)\,m \\ V_Z &= (n\Delta Z - p\Delta Y)\,n - (p\Delta X - m\Delta Z)\,m \end{aligned}$$

After reduction,

$$\begin{aligned} V_X &= (1 - mm)\,\Delta X - mn\,\Delta Y - mp\,\Delta Z \\ V_Y &= \quad - mn\,\Delta X + (1 - nn)\,\Delta Y - np\,\Delta Z \\ V_Z &= \quad - mp\,\Delta X - np\,\Delta Y + (1 - pp)\,\Delta Z \end{aligned} \tag{15}$$

These corrections, too, require a weighting inversely proportional to the square of the distance. Using (5), the right-hand sides can be similarly established in detail.

33. *Third variant*

In the following, as *a third variant*, also a system of equations of observation, consisting of two equations, is given.

For this purpose, such a local system of coordinates will be added to each point (I), the center of which will be in the point I, its axis Z' coincides with the direction of $\bar{e}$, and its axis X' will be chosen so that the plane $X'Z'$

will be parallel to X axis. By a suitable transformation of coordinates the following system of equations is obtained:

$$
\begin{gathered}
\frac{V_X}{\sqrt{1-mm}} = V_{X'} = \sqrt{1-mm}\,\Delta X - \frac{mn}{\sqrt{1-mm}}\,\Delta Y - \frac{mp}{\sqrt{1-mm}}\,\Delta Z \\
-\frac{W_X}{\sqrt{1-mm}} = V_{Y'} = \frac{n}{\sqrt{1-mm}}\,\Delta Z - \frac{p}{\sqrt{1-mm}}\,\Delta Y \\
V_{Z'} = 0\,.
\end{gathered}
\tag{16}
$$

By introducing an auxiliary weight $\frac{1}{1-mm}$ this can be written even in

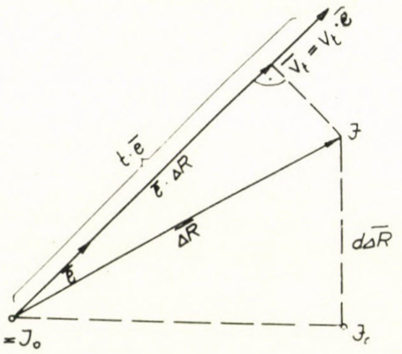


Fig. 5. The interpretation of distance correction

a still simpler way:

$$
\begin{aligned}
V'_{X'} &= (1-mm)\,\Delta X - mn\,\Delta Y - mp\,\Delta Z = V_X \\
V'_{Y'} &= n\Delta Z - p\Delta Y \qquad\qquad\qquad\quad = -W_X \\
V'_{Z'} &= 0\,.
\end{aligned}
$$

It can be seen that Variant 3 is actually an expedient combination of the variants 1 and 2.

The above-described form has the advantage, that merely two equations of observation must be established for each direction. The derivation of the system of equations (16) is omitted here; it can be proved by deduction that the identity $|\overline{W}| = |\overline{V}| = |\overline{V}'|$ exists, that is,

$$
\sqrt{W_X^2 + W_Y^2 + W_Z^2} = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2} = \sqrt{V_{X'}^2 + V_{Y'}^2} = \sqrt{PV_X^2 + PW_Y^2}
$$

4. Equations for the corrections to the measured distance and constraint conditions equations

The equation for the correction to the measured distance can be established on the basis of Formula (1b), resp, of Fig. 5, if the fixed distance t' of the two final points of the network side is substituted by the sum $t' = t + v$ of the measured distance t and of the correction v_t belonging to it. In this way

$$\bar{r} \cdot \bar{\Delta R} - (t + v_t) = 0 \, .$$

Hence

$$v_t = \bar{r} \cdot \bar{\Delta R} - t = m\Delta X + n\Delta Y + p\Delta Z - t \, ,$$

that is,

$$\begin{aligned} v_t &= m\,(dX_j - dX_i) + n\,(dY_j - dY_i) + p\,(dZ_j - dZ_i) + \\ &+ \left\{ m\,(X_{0j} - X_{0i}) + n\,(Y_{0j} - Y_{0i}) + p\,(Z_{0j} - Z_{0i}) - t \right\} . \end{aligned} \tag{17}$$

This is the equation for the correction to the measured distance sought for, which, as is to be seen, assumes — on account of the application of the coefficients m, n and p — that, besides the measurement of distance, also a measurement of direction has taken place. The role of these coefficients, however, is so secondary here that they can also be substituted by rather rough approximate values m_0, n_0, p_0; merely the condition

$$m_0^2 + n_0^2 + p_0^2 = 1$$

has to be strictly fulfilled.

In case of constraint of distance $v_t = 0$, therefore the right-hand side of the equation (17) is equal to zero.

For the calculation of the values m_0, n_0, p_0, an accuracy of a few minutes of arc, obtainable from the following (sighting) data anyway necessary for distance measurement, is sufficient.

5. Comparisons

51. First variant

In our computations, the same numerical example has been repeated by which the satellite network adjustment method used in Poland was demonstrated by MILBERT [6]. In the same way did the adjustment of a continental network take place, measured in 1963 which was reported by DOBACZEWSKA and BARAN [7, 8], too.

Our example was worked out first according to the first variant under the application of the system of equations (14). Equations of observation and normal equations were computed separately. The number of equations of observation was the threefold of the measured pairs of points, also increased by an equation of constraint of distance condition.

The example is of illustrative character, merely involving terrestrial points and the fictitious directions connectir g them, since it is desirable to reduce the computation of nearly all observations having a geodetic purpose to this basic form. There are no difficulties, however, in including also an arbitrary number of satellite points in the adjustment.

The data given from an earlier station adjustment are the fictitious measurement results m, n, p (topocentric equatorial direction cosines), the weights belonging to these, the fixed coordinates of one point, further a base length to be introduced in the adjustment as a constraint condition. The approximate coordinates were established as rounded off to 1000 km. It is also to be remarked, that — for the sake of a comparison with the original adjustment (and solely for this) — the already known fixed distances have been used as weights to the computation. Otherwise even distances measured off on a scheme are suitable.

As usually the right-twist system of coordinate axes was adopted in such a way that the Z axis should coincide with the axis of rotation of the Earth (its positive direction pointing towards north), and the XY-axis should lie in the plane of the Equator.

Table I

Observation results

Serial numbers of the directions	Stations	Number of observations N	t [10^3km]	Weight $P = 0{,}5 \cdot 10^5 \frac{N}{t^2}$	Direction cosines measured		
					m	n	p
1	Nikolaev—Poznan	19	1,2	0,06	+0,027 000 30	—0,948 844 26	+0,314 588 11
2	Riga—Nikolaev	11	1,2	0,04	+0,417 733 83	+0,719 834 72	—0,554 379 31
3	Riga—Poznan	19	0,7	0,20	+0,799 743 31	—0,421 808 61	—0,427 186 29
4	Poznan—Bucharest	9	1,1	0,04	+0,328 070 77	+0,783 730 35	—0,527 386 30
5	Riga—Bucharest	9	1,4	0,02	+0,653 763 52	+0,418 603 89	—0,630 368 18
6	Nikolaev—Bucharest	2	0,5	0,03	+0,742 252 75	—0,559 557 29	—0,368 723 51

The measurement results are summed in Table I. The coordinates of the given point (Poznan) are: $X_P = 3\,732\,188$ m, $Y_P = 1\,132\,435$ m and $Z_P = 5\,030\,006$ m.

The base (the distance of the points Poznan-Bucharest):

$$1\,116\,375{,}5 \text{ m}.$$

Table II

Equations of

Y_B	Z_B	X_N	Y_N	Z_N
		+0,948 844 26	+0,027 000 30	
			−0,314 588 11	−0,948 844 26
		+0,314 588 11		−0,027 000 30
		+0,719 834 72	−0,417 733 83	
			−0,554 379 31	−0,719 834 72
		+0,554 379 31		+0,417 733 83
−2,200 329 19	+1,259 876 48			
−0,527 386 30	−0,783 730 35			
−1,259 876 49	+1,175 864 40			
−1,653 769 03	+0,672 921 75			
−0,630 368 18	−0,418 603 89			
−1,505 890 55	+1,667 104 47			
+0,594 477 22	−0,899 509 72	+0,559 557 29	+0,742 252 75	
−0,368 723 51	+0,559 557 29		+0,368 723 51	−0,559 557 29
−0,880 845 94	+1,334 989 88	−0,368 723 51		−0,742 252 75

The approximate coordinates:

	X [m]	Y [m]	Z [m]
Bucharest	+4 000 000	+2 000 000	+4 000 000
Nikolaev	+3 000 000	+2 000 000	+4 000 000
Riga	+3 000 000	+1 000 000	+5 000 000

As coordinate-index, in the following the initial of the respective town's name will be used.

The equations of observation are presented in Table II, the normal equations in Table III, and the final results in Table IV.

In the course of the computations, under the application of the distance forced-condition equation, $V_t = 0$, the coordinate X_B was expressed and substituted in all the other equations of observation.

The adjusted coordinate values precisely agree with the values obtained by MILBERT. Though, he obtained them with accurate approximate coordinates *direction-correction*

x_R	y_R	z_R	l
			$-671\,307{,}865\,771\,38$
			$+704\,389{,}647\,213\,41$
			$-202\,527{,}168\,082\,88$
$-0{,}719\,834\,72$	$+0{,}417\,733\,83$		$-417\,733{,}830\,000\,00$
	$+0{,}554\,379\,31$	$+0{,}719\,834\,72$	$+165\,455{,}410\,000\,00$
$-0{,}554\,379\,31$		$-0{,}417\,733\,83$	$-417\,733{,}830\,000\,00$
$+0{,}421\,808\,61$	$+0{,}799\,743\,31$		$-414\,757{,}207\,798\,53$
	$+0{,}427\,186\,29$	$-0{,}421\,808\,61$	$-43\,917{,}627\,164\,49$
$-0{,}427\,186\,29$		$-0{,}799\,743\,31$	$+336\,777{,}773\,062\,38$
			$-539\,692{,}433\,132\,79$
			$+349\,705{,}067\,522\,60$
			$-509\,555{,}877\,506\,78$
$-0{,}418\,603\,89$	$+0{,}653\,763\,53$		$-483\,503{,}916\,999\,28$
	$+0{,}630\,368\,18$	$+0{,}418\,603\,89$	$-211\,764{,}290\,000\,00$
$-0{,}630\,368\,18$		$-0{,}653\,763\,53$	$-397\,372{,}595\,900\,54$
			$-227\,589{,}876\,546\,85$
			0
			$+149\,971{,}664\,422\,11$

and with twice as much work (namely the establishment and development of equations of observations and of normal equations were twice carried out), our computations immediately furnished the final results.

In the following we compare our method with the procedure of PACHELSKI, published in [9].

For the adjustment of the network, PACHELSKI gives an algorithm written in a matrix form, according to which the general form of the equations of observation is as follows (his Formula 10):

$$V = C\Delta_i - C\Delta_j + \bar{L}\,,$$

where the individual quantities, using our earlier described notations, are:

vector of correction:

$$V = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Table IV

Final results

Serial number of directions	Components of the corrections (in m) W_X W_Y W_Z	Components of the corrections (in radians) $W_X = w_X/t$ $W_Y = w_Y/t$ $W_Z = w_Z/t$	Absolute values of the corrections $w = +\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$ according to our example / according to MILBERT	$10^8 \cdot pvv$ according to our example	$10^8 \cdot pvv$ according to MILBERT
1	+ 85,72	+0,000 069 14	$p = 0,95$	0,728 009	0,731 673
	— 18,75	—0,000 015 12	0,000 087 54		
	— 63,87	—0,000 051 52	0,000 087 76		
2	— 82,37	—0,000 066 84	$p = 0,55$	0,546 157	0,544 952
	+ 80,54	+0,000 065 36	0,000 099 65		
	+ 42,51	+0,000 034 50	0,000 099 54		
3	— 7,24	—0,000 010 56	$p = 0,95$	0,276 302	0,275 381
	— 31,66	—0,000 046 17	0,000 053 93		
	+ 17 69	+0,000 025 79	0,000 053 84		
4	+ 22,09	+0,000 019 78	$p = 0,45$	0,020 053	0,020 130
	— 8,01	—0,000 007 17	0,000 021 11		
	+ 1,86	+0,000 001 67	0,000 021 14		
5	— 76,41	—0,000 054 62	$p = 0,45$	0,406 210	0,405 954
	+108,51	+0,000 077 57	0,000 095 01		
	— 7,20	—0,000 005 15	0,000 094 98		
6	— 18,55	—0,000 034 44	$p = 0,1$	0,153 215	0,152 473
	— 50,53	—0,000 093 80	0,000 123 78		
	+ 39,35	+0,000 073 05	0,000 123 48		
	$m_0 = \sqrt{pvv]}/10 = \pm$ 0,000 046 16; $[pvv] \cdot 10^8 =$			2,129 946	2,130 563

Adjusted coordinates

Station	X [m]	Y [m]	Z [m]
Bucharest	4 098 435,40	2 007 360,08	4 441 224,91
Nikolaev	3 698 646,04	2 308 799,67	4 639 893,42
Riga	3 183 786,42	1 421 700,57	5 322 976,63

Variation-vectors of the unknowns:

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} dX_I \\ dY_I \\ dZ_I \end{bmatrix}; \qquad \Delta_j = \begin{bmatrix} dX_J \\ dY_J \\ dZ_J \end{bmatrix}.$$

Table III

Normal equations

Variant 1

+0,409 936 04	—0,281 971 60	+0,022 657 12	+0,010 521 41	+0,029 642 76	+0,037 744 94	—0,033 996 94	+0,016 569 71	+ 85 397,100 777 84	—1								+ 85 396,311 881 27	+ 1	
	+0,307 855 30	—0,034 310 34	—0,015 899 23	—0,044 939 94	—0,030 640 78	+0,004 048 19	—0,029 089 72	— 62 801,326 869 41		—1							— 62 802,451 817 54	+ 2	
		+0,107 130 75	+0,005 006 57	+0,017 294 31	—0,029 896 98	+0,010 890 39	—0,008 387 21	— 68 876,143 320 86			—1						— 68 877,052 936 25	— 1	
			+0,047 284 61	+0,025 790 12	+0,010 890 39	—0,017 450 67	—0,014 452 76	— 17 639,155 951 56				—1					— 17 640,104 261 12	+ 2	
				+0,110 550 12	—0,008 387 22	—0,014 452 76	—0,025 086 11	— 55 437,998 598 50					—1				— 55 438,908 187 22	— 1	
					+0,115 873 04	+0,050 966 06	+0,086 881 06	— 34 715,802 095 05						—1			— 34 716,568 664 49	— 5	
						+0,202 491 05	—0,015 881 93	— 84 135,445 975 10							—1		— 84 136,259 361 71	0	
							+0,204 096 45	— 36 100,231 936 02								—1	— 36 101,017 286 52	+ 1	
								+169 642 161 666,698 808 58									+169 641 887 357,690 720 83		

+0,640 262 48	—0,440 400 00	+0,035 387 23	+0,016 432 97	+0,046 297 82	+0,058 952 29	—0,053 098 44	+0,025 879 55	+133 378,268 203 13	—1,561 859 44								+133 377,036 057 57	+ 5	
	+0,337 495 39	—0,055 484 61	—0,025 665 98	—0,072 742 86	—0,013 861 49	—0,057 293 70	—0,052 422 55	— 12 034,349 721 78	—2,038 080 88	—2,963 003 44							— 12 039,290 781 99	— 9	
		+0,320 624 31	+0,009 359 80	+0,036 241 32	—0,102 151 46	+0,029 911 89	—0,038 087 13	—231 622,336 982 78	—0,180 311 47	—0,512 753 04	—3,118 915 09						—231 625,893 063 63	+ 3	
			+0,215 100 48	+0,106 104 27	+0,048 916 58	—0,085 209 40	—0,073 765 66	— 83 551,146 241 84	—0,116 018 66	—0,331 236 45	+0,135 715 27	— 4,648 990 09					— 83 555,895 625 43	+ 5	
				+0,300 904 56	—0,045 240 45	—0,027 268 11	—0,069 425 56	—150 310,457 426 43	—0,189 762 29	—0,537 741 60	+0,327 790 21	+ 1,639 316 13	— 3,323 312 88				—150 312,382 166 22	+20	
					+0,311 979 29	+0,190 051 78	+0,260 291 66	—221 550,625 222 68	+0,136 212 82	—0,325 581 96	—0,994 973 35	+ 0,966 654 22	— 0,481 917 14	— 3,205 340 96			—221 553,767 846 16	+16	
						+0,389 063 55	—0,190 250 43	—102 621,880 165 95	—0,604 672 06	—0,348 103 15	+0,778 514 33	— 1,375 484 72	+ 0,002 489 95	+ 1,565 761 55	— 2,570 274 18		—102 624,233 121 17	— 6	
							+0,291 581 36	— 94 173,960 165 95	—0,842 013 52	—0,748 006 93	+1,101 145 76	— 2,546 198 32	— 0,359 454 18	+ 3,882 899 68	— 1,677 047 42	—33,429 574 51	— 94 178,291 595 14	+ 2	
								— 26 489,102 532 93	—7360,083 525 60	—441 224,913 001 17	—698 646, 040420 34	—308 799,666 350 12	—639 893,424 862 12	—183 786,423 532 82	—421 700,573 973 43	—322 976,629 962 51	—3050 876,788 968 25		85 816 104
									—7,769	—10,228	—12,662	—33,607	—11,404	—27,802	— 9,417	—11,765			

The coefficient matrix:

$$C = \frac{1}{t^3}\begin{bmatrix} \Delta X^2 - t^2 & \Delta X\,\Delta Y & \Delta X\,\Delta Z \\ \Delta X\,\Delta Y & \Delta Y^2 - t^2 & \Delta Y\,\Delta Z \\ \Delta X\,\Delta Z & \Delta Y\,\Delta Z & \Delta Z^2 - t^2 \end{bmatrix}$$

The absolute term vector:

$$L = \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta X}{t} - m \\ \dfrac{\Delta Y}{t} - n \\ \dfrac{\Delta Z}{t} - p \end{bmatrix}$$

PACHELSKI prescribed the minimum condition ΣPvv, where P is the weight of the fictitious measurements, obtained from the station-pair adjustment.

The coefficient matrix of our procedure is, according to the system of equations (14),

$$C' = \begin{bmatrix} n & -m & 0 \\ 0 & +p & -n \\ -p & 0 & +m \end{bmatrix}$$

its absolute term vector, if the final point J is given and the final point I is an unknown point:

$$L' = -\begin{bmatrix} nX_j - mY_j \\ pY_j - nZ_j \\ mZ_j - pX_j \end{bmatrix}$$

and if both ends of the direction are unknown points:

$$L' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

On account of the linearity, instead of the coordinate variations the unknown coordinates themselves can be written; therefore, if both final points are unknown as

$$\Delta_i' = \begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{bmatrix} \qquad \Delta_j' = \begin{bmatrix} X_J \\ Y_J \\ Z_J \end{bmatrix},$$

that is, the equation of observations, applied by us:

$$V' = C'\Delta_i' - C'\Delta_j',$$

respectively, if the point J is given:

$$V' = C'\Delta_i' + L' .$$

The essential difference is that in our procedure both the coefficient matrix and the absolute term vector contain *observation data only*, while the formulas of PACHELSKI assume, respectively, contain, good approximate coordinates.

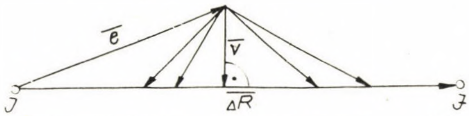


Fig. 6. The vector $\bar{v}_{min}$ normal to ΔR

It is also to be remarked that the condition of PACHELSKI, established in the formula (11) of his article, is fulfilled — against his statement made there — even in case if one does not dispose of good approximate coordinate, since the fulfilment of the condition is made possible already by the reliability of observations and by the minimum condition in itself (Fig. 6).

52. Second variant

The most computational advantage is contained in the second variant expressed with the system of equations (15). In this case, namely, the normal equations are obtained by a simple summation instead of multiplications. Thus, if the equation of observation in (15) is written in the matrix form

$$\bar{V}_{ij} = \bar{\bar{A}}_{ij} \quad \bar{\Delta R}_{ij} \tag{15a}$$

then the i-eth normal equation is

$$[\bar{V}]_i = 0 .$$

Here the summation must be carried out referring to every point $j_{i1}, j_{i2} \ldots, j_{in_i}$ which is in connection with point i. The system of equations, determining the individual corrections, will be called in the following the system of partial normal equations. Keeping in mind (15a), the vectorial sum of the corrections can be expressed with the unknown coordinates in the following way:

$$[\bar{\bar{A}} \cdot \bar{\Delta R}]_i = 0 ,$$

or more detailed,

$$\bar{A}_{ij_{i_1}}(\bar{R}_{j_{i_1}} - \bar{R}_i) + \bar{A}_{ij_{i_2}}(\bar{R}_{j_{i_2}} - \bar{R}_i) + \ldots + \bar{A}_{ij_{in_i}}(\bar{R}_{j_{in_i}} - \bar{R}_i) = 0\,,$$

respectively, by introducing the notation

$$\bar{\bar{A}}_{ii} = [\bar{A}]_i$$

and by resolving the brackets,

$$\bar{\bar{A}}_{ii}\,\bar{R}_i - \bar{A}_{ij_{i_1}}\bar{R}_{j_{i_1}} - \bar{A}_{ij_{i_2}}\bar{R}_{j_{i_2}} - \ldots - \bar{A}_{ij_{in_i}}\bar{R}_{j_{in_i}} = 0.^*$$

Here, by the symbol $\bar{\bar{A}}_{ii}$, the leading term of the partial normal equation is indicated. An interesting feature of the above-described normal equation is that it has no absolute term provisionally, further that the sum of the coefficients always results in a zero matrix.

Accordingly a coefficient matrix of the form

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 - mm & -mn & -mp \\ -mn & 1 - nn & -np \\ -mp & -np & 1 - pp \end{bmatrix}$$

belongs to each arbitrary direction ij_{i_k} (where $1 \leq k \leq n_i$), further a partia normal equation of the form * to each unknown point i. The coefficient matrices are functions of the observation data only, for their establishment no other auxiliary data (approximate coordinates) whatsoever are necessary. The $\bar{A}$ values are generally computable from the measurement of a single direction, with the exception of the $\bar{\bar{A}}_{ii}$ leading terms, for the formation of which the directions passing towards all the known and unknown points measured from point i must be used. Since the coefficient matrices are symmetrical, numerically it is sufficient — similar to the normal equations — to give the upper triangle matrix only.

Consequently the second variant of our procedure makes the forming of the coefficients of the normal equations directly from the observation data possible.

The steps of the numerical solution of the adjustment are:

1. In the order of numbering the elements of the $\bar{A}$ matrix are formed according to equation (15) for each direction:

$$\begin{array}{ccc} \underline{(1 - \mathrm{mm})} & -\mathrm{mn} & -\mathrm{mp} \\ & \underline{+(1 - \mathrm{nn})} & -\mathrm{np} \\ & & \underline{+(1 - \mathrm{pp})} \end{array}$$

For example, in the case of Direction 1 (Nikolaev—Poznan):

+ 0,999 270 98	+ 0,025 619 08	— 0,008 493 97
	+ 0,099 694 57	+ 0,298 495 12
		+ 0,901 034 32

It is advisable to group the directions in such a way that the extreme right-hand columns should be occupied by the directions commensured with the point of known coordinate (in our example, the directions belonging to Poznan).

2. The matrix elements are multiplied by the weight P belonging to the direction (here, $P = + 0{,}061\ 802\ 81$):

+ 0,061 757 75	+ 0,001 583 33	+ 0,000 524 95
	+ 0,006 161 40	+ 0,018 447 84
		+ 0,055 686 45

These $P(1—mm)$, . . . etc. values multiplied by the weights are inscribed, according to the scheme of Table V, into Table VII; thus the so-called *indefinite form* of the normal equations are obtained (the thick-printed figures indicate the serial numbers of the directions). Then the calculation of the leading terms must be carried out, adding, for this purpose, the corresponding coefficients indicated in the scheme.

3. Next, the distance-correction equations are written up.

Departing from the equation of observation (17), forming the normal equations in the traditional way, the following systems of normal equations are obtained for the *i*-eth point.

$$[\bar{\bar{B}} \cdot \Delta R]_i - [\bar{e}t]_i = 0\,,$$

or more in detail,

$$\bar{\bar{B}}_{ij_{i_1}}(\bar{R}_{j_{i_1}} - \bar{R}_i) + \bar{\bar{B}}_{ij_{i_2}}(\bar{R}_{j_{i_2}} - \bar{R}_i) + \ldots + \bar{\bar{B}}_{ij_{in_i}}(\bar{R}_{j_{in_i}} - \bar{R}_i) -$$
$$- t_{ij_{i_1}}\bar{e}_{ij_{i_1}} - t_{ij_{i_2}}\bar{e}_{ij_{i_2}} - \ldots - t_{ij_{in_i}}\bar{e}_{ij_{in_i}} = 0\,,$$

respectively, by introducing the notations

$$\bar{\bar{B}}_{ii} = [\bar{\bar{B}}]_i; \qquad \Omega_i = [\omega]_i \qquad \text{and} \qquad \omega_{ij_{ik}} = - t_{ij_{ik}}\bar{e}_{ij_{ik}}$$

Table V

Scheme of normal equation coefficients

Indeterminate form

(Variant 2)

x_B	y_B	z_B	x_N	y_N	z_N	x_R	y_R	z_R	x_P	y_P	z_P
$-\Sigma P(1-mm)$	$+\Sigma Pmn$	$+\Sigma Pmp$	$P(1-mm)$	$-Pmn$	$-Pmp$	$P(1-mm)$	$-Pmn$	$-Pmp$	$P\ (1-mm)$	$-Pmn$	$-Pmp$
	$-\Sigma P(1-nn)$	$+\Sigma Pnp$		$+P(1-nn)$	$-Pnp$		$+P(1-nn)$	$-Pnp$		$P(1-nn)$	$-Pnp$
$-(4+5+6)$		$-\Sigma P(1-pp)$		**6**	$+P(1-pp)$	**5**		$+P(1-pp)$	**4**		$+P(1-pp)$
			$-\Sigma P(1-mm)$	$+\Sigma Pmn$	$+\Sigma Pmp$	$P(1-mm)$	$-Pmn$	$-Pmp$	$P(1-mm)$	$-Pmn$	$-Pmp$
				$-\Sigma P(1-nn)$	$+\Sigma Pnp$		$+P(1-nn)$	$-Pnp$		$P(1-nn)$	$-Pnp$
			$-(1+2+6)$		$-\Sigma P(1-pp)$	**2**		$+P(1-pp)$	**1**		$+P(1-pp)$
						$-\Sigma P(1-mm)$	$+\Sigma Pmn$	$+\Sigma Pmp$	$P(1-mm)$	$-Pmn$	$-Pmp$
							$-\Sigma P(1-nn)$	$+\Sigma Pnp$		$P(1-nn)$	$-Pnp$
						$-(2+3+5)$		$-\Sigma P(1-pp)$	**3**		$+P(1-pp)$
									$-\Sigma P(1-mm)$	$+\Sigma Pmn$	$+\Sigma Pmp$
										$-\Sigma P(1-nn$	$+\Sigma Pnp$
									$-(1+3+4)$		$-\Sigma P(1-pp)$

and by resolving the brackets of the coordinate differences,

$$\bar{\bar{B}}_{ii}\bar{R}_i - \bar{\bar{B}}_{ij_{i_1}}\bar{R}_{j_{i_1}} - \bar{\bar{B}}_{ij_{i_2}}\bar{R}_{j_{i_2}} - \ldots - \bar{\bar{B}}_{ij_{in_i}}\bar{R}_{j_{in_i}} + \Omega_i = 0\,.^{**}$$

By the symbol $\bar{\bar{B}}_{ii}$ the leading term of the partial normal equation is denoted also here. According to these, a coefficient matrix of the form

$$\bar{\bar{B}} = \begin{bmatrix} mm & mn & mp \\ mn & nn & np \\ mp & np & pp \end{bmatrix}$$

and an absolute-term vector of the form

$$\bar{\omega} = -\begin{bmatrix} tm \\ tn \\ tp \end{bmatrix} = -t\begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix}$$

belong to each arbitrary distance ij_{i_k}.

The above-mentioned system of normal equations may be written even in this way when it originates from the fictitious correction equation (Fig. 5)

$$\bar{v}_t = \bar{B}\overline{\Delta R} - t\bar{e}$$

in the same way as it was formed from (15) in the case of direction measuring. Here, the forming of the normal equation is simplified — by the introduction of the fictitious distance correction vector v_t — to the form

$$[\bar{v}_t]_i = 0\,.$$

Assuming that all the six distances between the four points figuring in our example have been measured, the scheme of Table VI is obtained. Since, however, actually a single distance measurement occurred, in the table it is only the partial normal equation indicated by 4 which is different from zero.

In the case if the direction and also the length of the same side were measured, the unified partial normal equation belonging to them will assume the following form:

$$(P_A\bar{\bar{A}} + P_B\bar{\bar{B}})\,\bar{\Delta R} + \bar{\omega} = 0\,.$$

In the special case, then, if the determination of direction and length was carried out with an equal weight, that is, if $P_A = P_B$,

$$\bar{\bar{A}} + \bar{\bar{B}} = \bar{\bar{E}}\,,$$

Table VI

Normal equations formed of distance-condition equations

(Variant 2)

X_B	Y_B	Z_B	X_N	Y_N	Z_N	X_R	Y_R	Z_R	X_P	Y_P	Z_P	Ω
$-\Sigma Pmm$	$-\Sigma Pmn$	$-\Sigma Pmp$	Pmm	Pmn	Pmp	Pmm	Pmn	Pmp	Pmm	Pmn	Pmp	Σtm
	ΣPnn	$-\Sigma Pnp$		Pnn	Pnp		Pnn	Pnp		Pnn	Pnp	Σtn
$-(4+5+6)$		$-\Sigma Ppp$	**6**		Ppp	**5**		Ppp	**4**		Ppp	Σtp
			$-\Sigma Pmm$	$-\Sigma Pmn$	$-\Sigma Pmp$	Pmm	Pmn	Pmp	Pmm	Pmn	Pmp	Σtm
				$-\Sigma Pnn$	$-\Sigma Pnp$		Pnn	Pnp		Pnn	Pnp	Σtn
			$-(6+2+1)$		$-\Sigma Ppp$	**2**		Ppp	**1**		Ppp	Σtp
						$-\Sigma Pmm$	$-\Sigma Pmn$	$-\Sigma Pmp$	Pmm	Pmn	Pmp	Σtm
							$-\Sigma Pnn$	$-\Sigma Pnp$		Pnn	Pnp	Σtn
						$-(5+1+3)$		$-\Sigma Ppp$	**3**		Ppp	Σtp
									$-\Sigma Pmm$	$-\Sigma Pmn$	$-\Sigma Pmp$	Σtm
										$-\Sigma Pnn$	$-\Sigma Pnp$	Σtn
									$-(1+3+4)$		$-\Sigma Ppp$	Σtp

where $\bar{E}$ is the unit matrix, and thus the corresponding partial normal equation is

$$\bar{E}\,\overline{\Delta R} + \bar{\omega} = \bar{R}_j - \bar{R}_i - t\bar{e} = 0\,;$$

i.e. the simplest case of polar measurement has been attained.

If every direction and every distance were measured with equal reliability, the unified system of normal equations is similar to the normal equation system known in the adjustment of the levelling network, since it does not contain the side cosine values m, n, p, its coefficients will be 0 and 1.

In our example, the numerical value of the distance correction equation according to (17) is the following:

$$\begin{aligned} v_b = &+ 0{,}328\,070\,77\; dX_B + 0{,}783\,730\,35\; dY_B - 0{,}527\,386\,30\; dZ_B - \\ &- 0{,}328\,070\,77\; X_P - 0{,}783\,730\,35\; Y_P + 0{,}527\,386\,30\; Z_P - \\ &- 1\,116\,375{,}5 = 0. \end{aligned}$$

Here it must be taken into consideration that

a) for the calculation the direction cosines of Direction **5** were used, since the constraint of distance refers to Direction **5**;

b) the approximate coordinates of Bucharest are equal to zero, that is, $X_B = Y_B = Z_B = 0$;

c) X_P, Y_P and Z_P (Poznan) are given coordinates not suffering any variation, consequently $dX_P = dY_P = dZ_P = 0$.

Substituting the given values of X_P, Y_P and Z_P, the final form of the distance correction equation (writing also here X_B instead of dX_B, Y_B instead of dY_B, etc.) will be:

$$\begin{aligned} &+ 0{,}328\,070\,77\; X_B + 0{,}783\,730\,35\; Y_B - 0{,}527\,386\,30\; Z_B - \\ &- 575\,564{,}716\,529\,21 = 0. \end{aligned}$$

The numerical values according to the general form of the fictitious distance correction equations, reduced with the coefficients of the first three normal equations:

— 0,107 630 43	— 0,257 119 02	+ 0,173 020 03	+ 188 825,957 568 50
	— 0,614 233 26	+ 0,413 328 65	+ 451 087,534 678 38
		— 0,278 136 31	— 303 544,945 726 18

4. We pass now from the indefinite form of the normal equation to the *definite form*, when in the last column (in case of several points of given coordinates: in the last columns) for the directions the given coordinates (which are

Table VII

Normal equations

Variant 2
Indeterminate form

The approximate coordinates are equal to zero

X_B	Y_B	Z_B	X_N	Y_N	Z_N	X_R	Y_R	Z_R	X_P	Y_P	Z_P
−0,060 862 85	+0,001 262 81	−0,025 155 24	+0,015 476 00	+0,014 313 63	+0,009 432 05	+0,013 165 99	−0,006 292 62	+0,009 475 94	+0,032 220 86	−0,009 283 82	+0,006 247 25
	−0,056 565 89	−0,013 881 04	+0,014 313 63	+0,023 672 51	−0,007 110 48	−0,006 292 62	+0,018 964 47	+0,006 067 43	−0,009 283 82	+0,013 928 91	+0,014 924 09
−(4 + 5 + 6)		−0,069 698 71	+0,009 432 05	−0,007 110 48	+0,029 777 54	+0,009 475 94	+0,006 067 43	+0,013 856 78	+0,006 247 25	+0,014 924 09	+0,026 064 39
			−0,107 130 73	−0,005 006 57	−0,017 294 31	+0,029 896 98	−0,010 890 39	+0,008 387 21	+0,061 757 75	+0,001 583 33	−0,000 524 95
				−0,047 284 58	−0,025 790 12	−0,010 890 39	+0,017 450 67	+0,014 452 76	+0,001 583 33	+0,006 161 40	+0,018 447 84
			−(1 + 2 + 6)		−0,110 550 10	+0,008 387 21	+0,014 452 76	+0,025 086 11	−0,000 524 95	+0,018 447 84	+0,055 686 45
						−0,115 873 04	−0,050 966 06	−0,086 881 06	+0,072 810 07	+0,068 149 07	+0,069 017 91
							−0,202 491 05	+0,015 881 93	+0,068 149 07	+0,166 075 91	−0,036 402 12
						−(2 + 3 + 5)		−0,204 096 45	+0,069 017 91	−0,036 402 12	+0,165 153 56
									−0,166 788 68	−0,060 448 58	−0,074 740 21
										−0,186 166 22	+0,003 030 19
								−(1 + 3 + 4)			−0,246 904 40

Table VIII

Determinate form

X_B	Y_B	Z_B	X_N	Y_N	Z_N	X_R	Y_R	Z_R	Ω
−0,168 493 28	−0,255 856 21	+0,147 864 79	+0,015 476 00	+0,014 313 63	+0,009 432 05	+0,013 165 99	−0,006 292 62	+0,009 475 94	+ 329 990,646 891 98
	−0,670 799 15	+0,399 447 61	+0,014 313 63	+0,023 672 51	−0,007 110 48	−0,006 292 62	+0,018 964 47	+0,006 067 43	+ 507 280,420 520 61
		−0,347 835 02	+0,009 432 05	−0,007 110 48	+0,029 777 54	+0,009 475 94	+0,006 067 43	+0,013 856 78	− 132 224,434 297 69
			−0,107 130 73	−0,005 006 57	−0,017 294 31	+0,029 896 98	−0,010 890 39	+0,008 387 21	+ 229 644,050 115 85
				−0,047 284 58	−0,025 790 12	−0,010 890 39	+0,017 450 67	+0,014 452 76	+ 105 679,416 122 08
					−0,110 550 10	+0,008 387 21	+0,014 452 76	+0,025 086 11	+ 299 034,945 218 50
						−0,115 873 04	−0,050 966 06	−0,086 881 06	+ 696 075,763 026 07
							−0,202 491 05	+0,015 881 93	+ 259 312,432 393 29
								−0,204 096 45	+1047 088,327 733 76

in our example the X_P, Y_P, and Z_P coordinates of Poznan) are substituted. Thus, in a general case the following absolute terms are obtained:

$$\bar{\omega}_4 = \bar{\bar{\mathbf{6}}}\,(\bar{N}_0 - \bar{B}_0) + \bar{\bar{\mathbf{5}}}\,(\bar{R}_0 - \bar{B}_0) + \bar{\bar{\mathbf{4}}}\,(\bar{P} - \bar{B}_0)$$

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\bar{\mathbf{6}}}\,(\bar{B}_0 - \bar{N}_0) + \bar{\bar{\mathbf{2}}}\,(\bar{R}_0 - \bar{N}_0) + \bar{\bar{\mathbf{1}}}\,(\bar{P} - \bar{N}_0)$$

$$\bar{\omega}_3 = \bar{\bar{\mathbf{5}}}\,(\bar{B}_0 - \bar{R}_0) + \bar{\bar{\mathbf{2}}}\,(\bar{N}_0 - \bar{R}_0) + \bar{\bar{\mathbf{3}}}\,(\bar{P} - \bar{R}_0)\,.$$

The regularity is well recognizable in the equations. In those cases, where the approximate coordinates are equal to zero,

$$\bar{\omega}_4 = \bar{\bar{\mathbf{4}}}\,\bar{P}$$

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\bar{\mathbf{1}}}\,\bar{P}$$

$$\bar{\omega}_3 = \bar{\bar{\mathbf{3}}}\,\bar{P}$$

In our example, the calculation of $\bar{\omega}_1$ with the data referring to Direction 1 was carried out as follows:

$$\bar{\omega}_{1X} = P\,(1 - mm)\,X_P - Pmn\,Y_P - Pmp\,Z_P$$

$$\bar{\omega}_{1Y} = -Pmn\,X_P + P(1 - nn)\,Y_P - Pnp\,Z_P$$

$$\bar{\omega}_{1Z} = -Pmp\,X_P - Pnp\,Y_P + P\,(1 - pp)\,Z_P\,.$$

Numerically:

$$+\,230\,491{,}533\,457\,00 + 1\,793{,}018\,308\,55 - 2\,640{,}501\,649\,70 = \\ = +\,229\,644{,}050\,115\,85$$

$$+\,5\,909{,}285\,226\,04 + 6\,977{,}385\,009\,00 + 92\,792{,}745\,887\,04 = \\ = +\,105\,679{,}416\,122\,08$$

$$-\,1\,959{,}212\,090\,60 + 20\,890{,}979\,690\,40 + 280\,103{,}177\,618\,70 = \\ = +\,299\,034{,}945\,218\,50.$$

In this way the data of Table VIII are obtained, which yield the definite form of the sytem of normal equations.

5. Finally, the normal equations are solved.

The advantages of our procedure are the following:

a) neither for the terrestrial points, nor for the satellite points are accurate approximate coordinates needed;

b) the single normal equation set-up and development immediately furnish the final results of desired accuracy;

c) no separate equations of observation have to be formed;

d) the normal equations are formed directly from the (original or fictitious) observation data;

e) within the normal equations a micro-symmetry can be experienced (they can be written up with leading terms);

f) the computations can be divided into groups, consequently the computation work can be distributed. One has not to wait for the arrival of all observation data planned to be involved in the adjustment, and the setting up of normal equations can be begun immediately after the arrival of the first observation results;

g) the formulas are very suitable for computer programming, they can be programmed very simply;

h) by means of establishing the equations of observation in the way suggested by us, even such observation data can be involved in the adjustment which do not furnish all the three (m, n, p) components of the vector $\bar{e}$, but only one of them (e.g. only the height), or only two (merely those in the horizontal direction). This makes the participation of more observation data (more directions) in the adjustment possible. The same can be said in relation of the partially given point (of coordinates less than three), too.

When using a computer of suitable capacity, our procedure has, besides the advantages enumerated, virtually no disadvantages at all.

53. *Third variant*

If the computation is made with formula (16), the computation results entirely agree with the values and formulas presented in Tables VI and VII. The values of the coefficients figuring in the normal equations can be obtained in the following way:

$$[Paa] = \sum_{4,5,6} P\left(\sqrt{1-mm}\right)^2 = \sum_{4,5,6} P\,(1-mm)\,;$$

$$[Pab] = \sum_{4,5,6} P\sqrt{1-mm}\,\frac{-mn}{\sqrt{1-mm}} = -\sum_{4,5,6} Pmn\,;$$

$$[Pbb] = \sum_{4,5,6} P\,\frac{-mn}{\sqrt{1-mm}}\,\frac{-mn}{\sqrt{1-mm}} + \sum_{4,5,6} P\,\frac{-p}{\sqrt{1-mm}}\,\frac{-p}{\sqrt{1-mm}}$$

$$[Pbb] = \sum_{4,5,6} P\,\frac{m^2n^2}{1-mm} + \sum_{4,5,6} P\,\frac{p^2}{1-mm} = \sum_{4,5,6} P\,\frac{m^2n^2+p^2}{1-mm}\,.$$

Substituting $p^2 = 1 - m^2 - n^2$,

$$[Pbb] = \sum_{4,5,6} P\,\frac{m^2n^2+1-m^2-n^2}{1-mm} = \sum_{4,5,6} P\,\frac{(1-n^2)(1-m^2)}{1-m^2}\,.$$

and hence, finally,

$$[Pbb] = \sum_{4,5,6} P\,(1-nn)$$

and so on.

REFERENCES

1. Жонголович, И. Д.: Определение положения искусственного спутника по синхронным наблюдениям топоцентрических направлений на него с известных пунктов на поверхности Земли. *Бюллетень института Теоретической Астрономии,* X. 8 (1966). 121. 509—515.
2. Жонголович, И. Д.: Определение положения искусственного спутника по синхронным наблюдениям его с двух известных пунктов на поверхности Земли. *Бюллетень станций оптических наблюдений,* 46 (1965). 3—16.
3. Dufour, H. M.: Annexe. Relevement Sur n Points, En Moindres Carres, Par Formules Finies. *Bull. Géod.* 84. (1967). 146—151.
4. Kraus, K.: Trigonometrisches Einschneiden mittels der Geradengleichung in Hessescher Normalform. *Zeitschrift für Vermessungswesen,* Stuttgart, 1967.
5. Фираго, В. А.: Об использовании синхронных наблюдений спутников в космической геодезии. *Бюлл. станций оптических наблюдений И. С. З.* 38 (1964). 18—21.
6. Мильберт, С.: Уравнивание и обработка сети космической триангуляции. *Наблюд. искусственных спутников Земли,* 1964. 3. (1965). 51—68.
7. Dobaczewska, W.: Metoda obserwacji posrednich w zastosowaniu do wyrownania (The application of the method of indirect observations in the adjustment). *Geodezja i Kartografia,* Warszawa, 1966.
8. Dobaczewska, W.—Baran, W.: Wyrownanie eksperymentalnej srodkowoeuropejskiej sieci triangulacji satelitarnej (The adjustment of the experimental Central-European satellite triangulation networks). *Geodezja i Kartografia,* Warszawa, 1966.
9. Пахелский, В.: Выравнивание линейных элементов и направлений в экспериментальной сети космической триангуляции. Выравнивание сети. *Наблюд. И. С. З.* 1965. 4. (1966). Праха. 35—45.
10. Stiefel, E.: Einführung in die numerische Mathematik. Teubner Verlag, Stuttgart, 1961. Bd. 2. 67.
11. Veis, G.: Geodetic Uses of Artificial Satellites. Smithsonian Contributions to Astrophysics, 3, 9. (1960) 122—28, 135—145.
12. Kádár, I.—Karsay, F.: Szatellita és hagyományos geodéziai hálózatok szigorú kiegyenlítése tetszőleges előzetes koordináták felhasználásával (A novel rigorous adjustment method of satellite and of traditional geodetic networks with the application of arbitrary approximate coordinates). *Geodézia és Kartográfia,* Budapest, 1968—1969.
13. Kádár, I.: Koordinátakiegyenlítés előzetes koordináták nélkül (Adjustment of coordinates without approximate coordinates). Innovation presented to and accepted by the Geodetic and Cartographic Institute of Budapest, 1961.

УПРОЩЕННЫЙ И СТРОГИЙ СПОСОБ ДЛЯ УРАВНИВАНИЯ КОСМИЧЕСКИХ СЕТЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ КООРДИНАТ

И. КАДАР—Ф. КАРШАИ

В настоящее время в уравнивании космических сетей создают значительные трудности большое количество уравнений поправок, отсутствие хороших приближённых значений и составление через трудоёмкие вычисления нормальных уравнений.

Публикуемый здесь метод основан на Гауссовом способе наименьших квадратов. Уравнения, линеарные по отношению неизвестных приращений координат, могут быть получены посредством одного векторного и одного скалярного произведения (формула I.). Уравнения поправок не составляются потому, что коэффициенты нормальных уравнений могут быть непосредственно определены по результатам измерений и предварительным координатам.

Предварительные координаты могут быть равны нулю, а также с грубым или хорошим приближением круглые цифры.

Формулы с успехом могут быть применены для плоскостных и пространственных фигур, для отдельных точек и сетей. Имеют особое преимущество на вычислительных машинах.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (1—2), pp. 67—71 (1969)

EIN LINEARES ROTATIONSPLANIMETER

SZ. FÉNYI und J. DÉNES

INSTITUT FÜR PHYSIKALISCHE CHEMIE DER »ATTILA JÓZSEF«-UNIVERSITÄT, SZEGED

[Eingegangen am 7. Januar 1968]

Es wird ein Planimeter vorgeschlagen, das die Flächen unter den im rechtwinkligen Koordinatensystem angegebenen Kurven mißt, ohne daß es nötig wäre, die vollständigen Grenzlinien dieser Flächen abzutasten. Die zur Flächenbestimmung benötigte Zeit wird dadurch beträchtlich herabgesetzt.

Aus der allgemeinen Formel des Planimeters können die Größen leicht abgeleitet werden, die von den verschiedentlich gebauten linearen Stangenplanimetern, so z.B. vom Kugelrollplanimeter [1] bei der Abtastung der Kurve L zwischen den Punkten L_1 und L_2 gemessen werden. Die allgemeine Formel lautet:

$$l\int_1^2 dh = \frac{1}{2} l^2 \vartheta_2 + \frac{1}{2} l q_2 - \frac{1}{2} l^2 \vartheta_1 - S\,. \tag{1}$$

Die Verdrehung des Meßrades ist der Größe $\int_1^2 dh$ proportional, sie bedeutet nämlich das Integral der zum Arm rektangulären elementaren Bewegungen. q_2 bedeutet die senkrechte Entfernung der Richtung des Armes vom Punkt A, und so ist die Fläche des Dreiecks ACL_2 $^1/_2\, lq_2$ gleich. Die Bedeutung der anderen Größen ist aus Abb. 1 zu entnehmen. Somit ist die Größe $l\int_1^2 dh$ dem Flächeninhalt der Form BL_1L_2E proportional. Mit dem Kugelrollplanimeter erfolgt die Messung der Flächen folgenderweise:

Ist L eine geschlossene Kurve, so bedeutet die Größe

$$l\oint dh\,,$$

laut Gleichung (1), die von Kurve L umgrenzte Fläche, da sämtliche anderen Größen gleich null sind.

Entspricht die Kurve L der in Abb. 1 angegebenen, so ist die gemessene Größe nicht der Fläche $L_1L_2C'B'$ unter der Kurve, sondern der Fläche der

Form BL_1L_2E proportional, die — wie aus Abb. 1 ersichtlich — von dem mit dem Planimeterarm als Radius gezeichneten Kreisbogen abgegrenzt ist.[1]

Will man die Fläche unter der Kurve bestimmen, so muß man mit der Nachführungsnadel neben der Linie L_2C' bis zu dem mit Punkt L_1 in gleicher Höhe gelegenen Punkt L_2' zurückkehren. Dadurch mißt man nämlich die Fläche der Form $BL_1L_2L_2'D$, von der der Teil $BL_1L_2'D$ mit der Fläche von $B'L_1L_2'C'$ identisch ist. (Das kann z.B. mit der Theorie von CAVALIERI leicht nachgewiesen werden.)

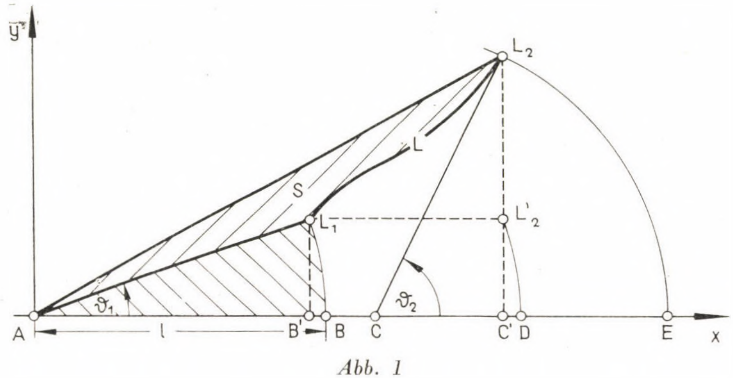


Abb. 1

Es wäre zweckmäßig, ein Planimeter zu konstruieren, das die Fläche unter einer Kurve derart mißt, daß nur die Kurve selbst abgetastet wird. Dessen Vorteil ist in dem Fall wesentlich, wenn man nachträglich die Integration von Registrierungen durchführen will, die von solchen Registriergeräten geliefert worden sind, die nach dem Prinzip des rechtwinkligen Koordinatensystems arbeiten. Zu diesem Zweck können verschiedene Integratoren, wie z.B. der von THOMSON verwendet werden; solche Integratoren sind jedoch für

[1] Das kann auch auf elementarem Wege nachgewiesen werden. Man berechne, welche Fläche vom Kugelrollplanimeter gemessen wird, falls es auf der zur Basislinie senkrechten Linie bis zum Punkt L_1 (mit Ordinate y_1) verschoben wird. Es summiert dann wohl die Flächenelemente ydx, die durch die Zwangsbedingung $l =$ const. bestimmt sind. Diese Zwangsbedingung verbindet x mit y folgenderweise:

$$y = \sqrt{l^2 - (l - x)^2}$$

und so bekommt man für die Differenz der Verdrehung:

$$\Delta n = \int_0^{l-\sqrt{l^2-y_1^2}} \sqrt{l^2 - (l - x)^2}\, dx = \int_l^{\sqrt{l^2-y_1^2}} \sqrt{l^2 - t^2}\, dt.$$

Diese Form ist nichts anderes als der Integralausdruck des Flächeninhaltes des Kreissegmentes $B'L_1B$. Übrigens wird das sofort offensichtlich, wenn man die Nachführungsnadel vom Punkt y_1 bis zur Basislinie zurückführt; dabei ändert sich der Wert Δn nicht, da keine Bewegung in Richtung x vorhanden ist. So muß Δn also das Maß des Flächeninhaltes des beschriebenen Kreissegmentes sein.

die Bestimmung von Flächen unter Kurven, die auf Papier gezeichnet sind, nicht geeignet, da die Übertragung der Bewegungen auf den Integrator in den Richtungen x und y nur kompliziert, meistens durch die Kombination von Zahnstange und Schraubenspindel möglich ist.

Der der obgenannten Anforderung nachkommende Vorschlag ist der folgende: Man behalte die Stange als exaktes kinematisches Element, die Nachführungsnadel sei jedoch in einer Gerade zwangsgeführt, und die Stange verfolge diese Bewegung (Abb. 2). Die anderen Teile lasse man vorerst dem

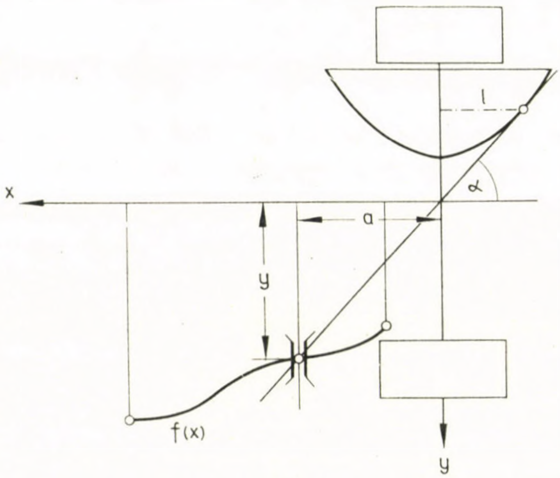


Abb. 2

Kugelrollplanimeter ähnlich sein. Durch diese Kinematik kann gesichert werden, daß bei der Abtastung der Basislinie sowie der auf diese senkrechten Linien, das Meßrad sich nicht verdreht. Zu ändern ist jedoch der kugelförmige Integratorteil des Kugelrollplanimeters. Die Grundforderung, daß bei der in Richtung x erfolgten Bewegung der bis zu einer gewissen y-Ordinate bewegten Nachführungsnadel die erfolgte Verdrehung des Meßrades y proportional sei, wird bei dem mit lineargeführter Nachführungsnadel versehenen Planimeter durch die Kugelform nicht erfüllt. Sie wird jedoch durch ein Rotationsparaboloid erfüllt; die Richtungstangente der dazu gezogenen Tangente ist nämlich der Abszisse proportional, da laut Abb. 2:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{a}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = cl$$

und

$$y = acl$$

ist, d.h., die Bedingung ist erfüllt. Bei der Bewegung der Nachführungsnadel muß das Paraboloid offensichtlich parallel verschoben werden. Das könnte am einfachsten mit ineinanderschiebbaren Nutwellen gelöst werden. (Man müßte extra untersuchen, bis zu welcher Genauigkeitsanforderung die beim Kugelrollplanimeter angewandte Kipplagerung benützbar ist.)

Der Rollzylinder, der das Meßrad antreibt, muß mit dem Paraboloid in der durch die Nachführungsnadel und die Achse der Stangenlagerung bestimmten Ebene in Berührung kommen, sonst ist die kinematische Bedingung nicht erfüllt. (Bei der Kipplagerung kann diese Bedingung exakt nicht erfüllt werden, ihre Anwendung ist schon deshalb fragwürdig.)

Bezüglich der Anwendung ist die vorgeschlagene Konstruktion besonders zu einer nachträglichen Integration der obgenannten Registrierungen geeignet. Wenn die Abszisse (Grundlinie) mit der Basislinie des Gerätes gut in Deckung gebracht wird, z.B. mechanisch mit dem gut definierbaren Rand des Registrierpapiers oder mit den darauf gedruckten Hilfslinien, und wenn das Planimeter nicht auf Rädern läuft, sondern die Bewegung in die Richtung der Abszisse auf einer mechanischen Zwangsbahn, wie z.B. Schienen abläuft, so kann der systematische Fehler durch sorgfältige Messungen bestimmt bzw. reduziert werden. Dieser Fehler ergibt sich aus der Verschiebung der beiden Basislinien von Registrierung und Gerät; er wächst linear bei einer parallelen Verschiebung und quadratisch im Fall, daß die beiden Linien einen Winkel bilden. So kann behauptet werden, daß man den Vorteil benutzen kann, daß man z.B. bei der Bestimmung von zeitlichen Durchschnittswerten nicht auf die Basislinie zurückkehren muß, sondern auf einem beliebigen Punkt der Kurve stehen bleiben und das Maß der unter der Kurve gelegenen Fläche ablesen kann. Die Meßzeit kann dabei beträchtlich (um etwa 50—70%) abnehmen, die Genauigkeit bleibt jedoch erhalten.

Die Konstruktion gestattet natürlich auch die ursprüngliche Meßmethode, d.h. bei geschlossener Kurve gibt sie den umgrenzten Flächeninhalt.

Bei der erwähnten technischen Ausführung müssen zwei aufeinander senkrechte Zwangsbahnen sein, wo man die unbehinderte Bewegung z.B. mit kleinen Kugellagern sichern kann. (Um für die Nachführungsnadel einen leichteren Kontakt mit dem Papier zu sichern, kann auch z.B. die Tschebischevsche Geradführung [2] verwendet werden.)

Die exakte Anfertigung des Rotationsparaboloides ist bei dem Kegelschnitt-Generierungsverfahren kein Problem. Die Änderung der Planimeterkonstante ist auch möglich, wenn der Abstand a der Geradführung veränderbar angefertigt wird.

SCHRIFTTUM

1. WILLERS, F., A.: Mathematische Maschinen und Instrumente. Akademie Verlag Berlin, 1951.
2. BLOCH, A.: Angenäherte Synthese. VEB Verlag Technik, 1952.

A LINEAR ROTATION PLANIMETER

SZ. FÉNYI and J. DÉNES

SUMMARY

A proposal is made for a planimeter that measures the area below unclosed curves in a system of rectangular coordinates without it being necessary to trace the whole border-line of curves; only the curve itself must be traced. Such an important reduction is reached in the determination of areas.

ЛИНЕАРНЫЙ РОТАЦИОННЫЙ ПЛАНИМЕТР

С. ФЕНИ—Й. ДЕНЕШ

РЕЗЮМЕ

Был предложен планиметр, определяющий в прямоугольной системе координат площадь, ограниченную незамкнутыми кривыми, при этом не нужно обходить её по полному контуру. Достаточно пройти только по кривой. Этим самым в существенной мере уменьшится время для определения площади.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (1—2), pp. 73—93 (1969)

TANGENTENDIAGRAMM ANSTATT TANGENTENSKALE

V. VINCZE

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
INGENIEURSCHULE FÜR VERMESSUNGSWESEN, SZÉKESFEHÉRVÁR

[Eingegangen am 25. Januar 1968]

Die Studie befaßt sich mit den bei Reduktionstachymetern angewendeten Entfernungsmeßdiagrammen. Es werden allgemeingültige Zusammenhänge gezeigt, die auf sämtliche Entfernungsmeßdiagramme gültig sind und gleichzeitig auch die Diagrammschar bestimmen, durch die die Tangentenskale stufenfrei ersetzt wird.

1. Einleitung

Die verschiedenartigen Diagrammtachymeter, ferner die Tachymeter mit Tangentenskale, die sog. Tangententachymeter bilden die beiden, vielleicht bedeutendsten Gruppen der die horizontale Entfernung unmittelbar gebenden Reduktionstachymeter.

Da der Tangententachymeter auch als Fadentachymeter verwendet werden kann [3, 7], so sind die beiden Arten der erwähnten Tachymeter eigentlich Reduktionstachymeter mit veränderlicher Fadenentfernung. Während bei den ersten eine kontinuierliche Kurve — das Diagramm — die sich verändernde Fadenentfernung liefert, so geben die Teilungsintervalle der Tangentenskale bei den Tangententachymetern, falls ein Teilungsstrich sich an den horizontalen Faden bzw. die Richtungslinie des Fernrohres anschmiegt, die reduzierten Fadenentfernungen. Daraus entsteht die vorteilhafte Eigenschaft der Tangententachymeter — und dies wird auch in den bezogenen Arbeiten [3, 7] hervorgehoben — daß bei einer solchen Einstellung im Gesichtsfeld zugleich nicht nur die zur Multiplikationskonstante $k_t = 100$ gehörigen, sondern auch gleichzeitig jene zur Multiplikationskonstante $k_t = 200$ bzw. $k_t = 66{,}667$, sogar $k_t = 50$ gehörigen Tangentenskalenteilungen sichtbar sind.

Da aber der erwähnte Tachymeter nur in der obengenannten Lage und nur zu jenen Höhenwinkeln die reduzierten Fadenentfernungen liefert, die von den Strichen der Tagentenskale angegeben werden, deshalb kann dieser Tachymeter auch ein Tachymeter mit stufenweisem Diagramm genannt werden. Ähnliche Auffassung ist übrigens auch in [7] zu lesen.

Die auf die Unstätigkeit bezogene Feststellung ist sinngemäß auch im Falle gültig, wenn der horizontale Faden nicht auf einen Tangentenstrich, sondern schätzungsweise auf einen beliebigen Halbierungsstrich der Tangentenskale eingestellt wird.

Die Unstätigkeit kann aber ausgeschaltet werden. Es kann nämlich eine solche Diagrammschar hergestellt werden, bei der die Entfernung der einzelnen Diagrammlinien voneinander mit den Teilungsintervallen der zu den beliebigen Höhen- (oder Tiefen-)winkel gehörigen Tangentenskale identisch sind. Wird diese Diagrammschar an beliebiger Stelle in Radialrichtung durchschnitten, so sind die entstandenen Segmente den Teilungsintervallen der Tangentenskale gleich (Abb. 7).

Bevor wir dies erörtern würden, sollen zum Vergleich zuerst die auf die derzeitigen Entfernungsmeßdiagramme bezogenen grundlegenden Zusammenhänge kurz zusammengefaßt werden.

2. Entfernungsmeßdiagramme

Die Entfernungsmeßdiagramme werden allgemein in zwei Gruppen geteilt: einer Gruppe gehören die Leemann-Kernschen Diagramme, der anderen aber jene, die auf das Hammer-Fennelsche Prinzip basiert und voneinander höchstens insofern verschieden sind, daß der diagramm-enthaltende Glaskreis bei der Einstellung des Fernrohrs unbeweglich oder als Funktion der Neigung des Fernrohres verschiedenerweise drehbar ist. Da unsere Untersuchungen vom letztgenannten Umstand nicht beeinflußt werden, so setzten wir im weiteren bei beiden Typen ein unbewegliches Diagramm voraus. Für die erste Gruppe ist es charakteristisch, daß zwei Entfernungsmeßdiagrammlinien vorhanden sind, die den an die Richtungslinie des Fernrohres angeschmiegten, aber nicht markierten Grundkreis einschließen; bei den der anderen Gruppe gehörigen ist nur eine Entfernungsdiagrammlinie vorhanden und diese befindet sich oberhalb (oder unterhalb) des Grundkreises. (Auf das sog. Kreisdiagramm kehren wir noch später zurück.)

21. Leemann-Kernsches Diagramm

Laut Abb. 1 können wir — gleich in reihenentwickelter Form — aufschreiben, daß

$$L_F = t\,[\operatorname{tg}(\alpha_i + \omega_i) - \operatorname{tg}\alpha_i]$$

$$L_F = t\left[\operatorname{tg}\alpha_i + \frac{1}{\cos^2\alpha_i}\,\omega_i + \frac{\sin\alpha_i}{\cos^2\alpha_i}\,\omega_i^2 + \frac{\cos^2\alpha_i + 3\sin^2\alpha_i}{3\cos^4\alpha_i}\,\omega_i^3 + \ldots - \operatorname{tg}\alpha_i\right] \quad (1')$$

$$L_A = t\,[\operatorname{tg}\alpha_i - \operatorname{tg}(\alpha_i - \omega_i)]$$

$$L_A = t\left[-\operatorname{tg}\alpha_i + \frac{1}{\cos^2\alpha_i}\,\omega_i - \frac{\sin\alpha_i}{\cos^2\alpha_i}\,\omega_i^2 + \frac{\cos^2\alpha_i + 3\sin^2\alpha_i}{3\cos^4\alpha_i}\,\omega_i^3 - \ldots + \operatorname{tg}\alpha_i\right] \quad (1'')$$

wo L_F und L_A die Richtungslinie des Fernrohres und die Länge des von der oberen bzw. unteren Diagrammlinie eingeschlossenen Lattenabschnittes bezeichnen; t ist die horizontale Entfernung; α_i bezeichnet den Höhenwinkel und

$$\omega_i = \frac{E_i}{2} \tag{2}$$

ist, d.h. ω_i ist die Hälfte des Entfernungsmeßwinkels, daher ist:

$$L_F \neq L_A \tag{3}$$

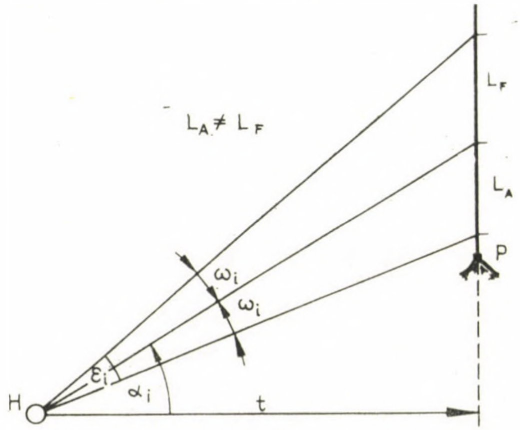


Abb. 1

Mit der Summierung der Gleichungen (1′) und (1″) kann folgender Zusammenhang aufgeschrieben werden:

$$L_F + L_A = L = t\,\frac{2}{\cos^2 \alpha_i}\,2\,\omega_i + R. \tag{4}$$

Das erste Glied des auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Restes R:

$$R = 2\,\frac{\cos^2 \alpha_i + 3 \sin^2 \alpha_i}{3 \cos^4 \alpha_i}\,\omega_i^3$$

erreicht auch beim Grenzfall nicht den Wert $2 \cdot 10^{-7}$; die Summe der weiteren ungeraden Potenzen von ω_i ist auch nur dessen Bruchteil. So gibt die Gleichung (4) auch bei der Vernachlässigung des Restgliedes R ein präzises Ergebnis.

k_t sei die Multiplikations-Konstante des Entfernungsmessers; z_0 und z_i bedeute die Entfernung der Entfernungsdiagrammlinien voneinander beim Höhenwinkel $\alpha_i = 0°$ bzw. α_i, ferner soll f die resultierende (aequivalente)

Brennweite bedeuten. Es kann in diesem Falle aufgrund (4) aufgeschrieben werden:

$$\frac{L}{t} = \frac{1}{k_t} = \frac{1}{\cos^2 \alpha_i} 2\, \omega_i$$

Beide Seiten mit f multipliziert, und da

$$z_0 = \frac{f}{k_t} \qquad \text{und} \qquad z_i = f\, \omega_i$$

sind, so ist

$$z_0 = \frac{f}{\cos^2 \alpha_i} z_i \,,$$

d.h.

$$z_i = z_0 \cos^2 \alpha_i \,,$$

bzw.

$$z_i = \frac{z_0}{2} (1 + \cos^2 \alpha_i) \,. \tag{5}$$

Wie ersichtlich, ist bezüglich der vollkommenen Fadenentfernung der aufgrund der Gleichung (4) gewonnene Zusammenhang (5) eine präzise Formel, da aber der Mittelpunkt des Fadenkreuzes die am vertikalen Faden des Fadenkreuzes meßbare Entfernung der beiden Diagrammlinien — der Fadenentfernung — halbiert, kann dieses Diagrammpaar für Entfernungsmessung nur mit einer einzigen ($k_t = 100$) Multiplikationskonstante angewendet werden, aber die Formel ist diesbezüglich präzis.

22. Hammer-Fennelsches Entfernungsmeßdiagramm

Aufgrund der Arbeit [4] laut Abb. 2 kann aufgeschrieben werden, daß

$$L = \frac{t}{k_t} = t\,[\operatorname{tg}(\alpha_i + \varepsilon_\alpha) - \operatorname{tg}\alpha_i] \tag{6}$$

$$\frac{1}{k_t} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_i + \operatorname{tg}\varepsilon_\alpha + \operatorname{tg}\alpha_i (1 - \operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\varepsilon_\alpha)}{1 - \operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\varepsilon_\alpha} = \operatorname{tg}\varepsilon_\alpha \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_i}{1 + \operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\varepsilon_\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon_\alpha = \frac{\cos^2 \alpha_i}{k_t} (1 - \operatorname{tg}\alpha_i \operatorname{tg}\varepsilon_\alpha) \tag{7}$$

ist.

Da bei der ersten Annäherung

$$\operatorname{tg} \varepsilon_\alpha = \frac{\cos^2 \alpha_i}{k_t}$$

und ε_α einen kleinen Winkel bedeutet, kann Gleichung (7) auch folgendermaßen aufgeschrieben werden:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{k_t} \cos^2 \alpha_i \left(1 - \frac{1}{k_t} \sin 2\,\alpha_i\right) \varrho'' \tag{8'}$$

und

$$z_i = z_0 \cos^2 \alpha_i \left(1 - \frac{1}{k_t} \sin^2 \alpha_i\right). \tag{8''}$$

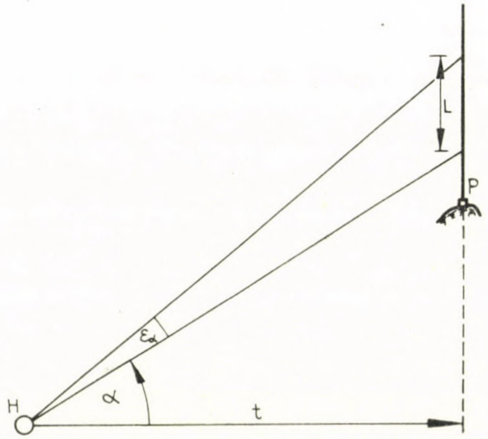


Abb. 2

3. Tangentenskale ersetzende Tangenten-Diagrammschar

Das Wesen der Tangentenskale wird durch Abb. 3 veranschaulicht. Bekanntlich entsteht diese dadurch, daß die Endpunkte der auf der Tangente eines Kreises mit beliebigem Radius r_0 markierten Teilungsintervalle

$$\frac{r_0}{k_t} = \frac{r_0}{200}$$

in Radialrichtung auf den Kreisbogen projiziert werden. Die so entstandene Radienreihe (Abb. 3)

$$\alpha_0 = 0^0; \quad \alpha_1 = \omega_0; \quad \alpha_2 = \omega_0 + \omega_1; \quad \omega_3 = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2; \ldots$$

und allgemein:

$$\alpha_i = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{i-1}$$

ihre Neigungswinkel können aufgrund des folgenden Zusammenhanges berechnet werden [5]:

$$r_0 \operatorname{tg}(\alpha_i + \omega_i) - r_0 \operatorname{tg} \alpha_i = r_0 \operatorname{tg} \omega_0 \tag{9}$$

Da ω_0 ein kleiner Winkel und mit r_0 zu reduzieren ist, kann Gleichung (9) auch so aufgeschrieben werden:

$$\operatorname{tg}(\alpha_i + \omega_i) - \operatorname{tg} \alpha_i - \omega_0 = 0 \tag{10}$$

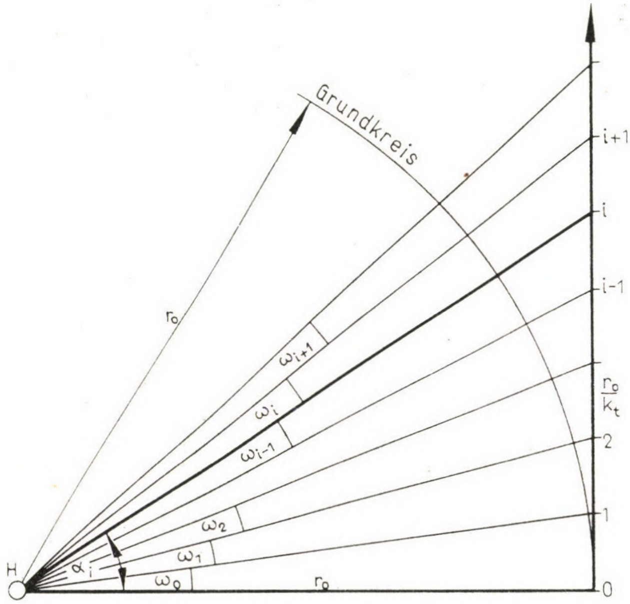


Abb. 3. Konstruktion der Tangentenskale

wo ω_0 den zum $\alpha_i = 0°$ gehörigen Entfernungsmeßwinkel in Bogenmaß ausgedrückt bezeichnet; üblicher Wert (hier $k_t = 200$) ist:

$$\frac{1}{k_t} = \frac{1}{200} = 0{,}005\,.$$

Nach Reihenentwicklung des Ausdruckes $\operatorname{tg}(\alpha_i + \omega_i)$ erhalten wir, daß:

$$\operatorname{tg}(\alpha_i + \omega_i) = \operatorname{tg} \alpha_i + \frac{1}{\cos^2 \alpha_i} \omega_i + \frac{\sin \alpha_i}{\cos^3 \alpha_i} \omega_i^2 - \frac{\cos^2 \alpha_i + 3 \sin^2 \alpha_i}{3 \cos^4 \alpha_i} \omega_i^3 + R \tag{11}$$

ist.

Das Glied ω_i auf der rechten Seite des Ausdruckes (11) ist in Bogenmaß zu verstehen.

Nach Substitution der Gl. (11) in Gl. (10) (die Glieder dritten und höheren Grades von ω_i weggelassen) und nach den möglichen Reduktionen erhalten wir, daß

$$\frac{\sin \alpha_i}{\cos^3 \alpha_i} \omega_i^2 + \frac{1}{\cos^2 \alpha_i} \omega_i - \omega_0 = 0 \tag{12}$$

ist. Diese Gleichung kann bezüglich ω_i als eine präzise betrachtet werden, weil die Vernachlässigung nicht den Wert 10^{-7}, d.h. einige Hundertstel Sekunden, übertrifft. Die Lösung der Gl. (12):

$$\omega_i = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \tag{13}$$

wo

$$A = \frac{\sin \alpha_i}{\cos^3 \alpha_i}; \quad B = \frac{1}{\cos^2 \alpha_i} \quad \text{und} \quad C = -\omega_0 . \tag{14}$$

Verringert sich der Winkel α_i laufend, so nähert sich A im Nenner der Gl. (13) Null.

Es kann bewiesen werden, daß Gl. (13) auch in diesem Falle nicht unbestimmt ist, weil:

$$\lim_{\alpha_i \to 0} \omega_i = \omega_0 \tag{15}$$

ist. Dies ist selbstverständlich, weil ω_0 so definiert wurde, daß dies der Entfernungswinkel im Falle von:

$$\alpha_i = 0^0$$

ist.

Die zum Höhenwinkel α_i gehörige Ordinate z_i des Entfernungsmeßdiagrammes ist auch in diesem Falle:

$$z_i = f\omega_i .$$

Das Tangentendiagramm wird im Prinzip so hergestellt, daß die Teilungsintervalle z_i (Abb. 3) der Tangentenskale nicht am Bogen des Grundkreises, sondern an dessen Radien angemerkt werden, und die so gewonnene Punktreihe mit einer kontinuierlichen Linie verbunden wird (Abb. 4).

Bei der oberen und unteren Entfernungsmeß-Diagrammlinie sind also die zusammenhängenden Werte, falls sie einen Höhenwinkel bezeichnen, die folgenden:

$$\begin{array}{lll}
\alpha_0 = 0^0 & z_0^F = f\omega_0 = z_0 & z_0^A = f\omega_0 = z_0 \\
\alpha_1 = \omega_0 & z_1^F = f\omega_1 = z_1 & z_1^A = f\omega_0 = z_0 \\
\alpha_2 = \omega_1 & z_2^F = f\omega_2 = z_2 & z_2 = f\omega_1 = z_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\alpha_i = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_{i-1} & z_i^F = f\omega_i = z_i & z_i^A = f\omega_{i-1} = z_{i-1}
\end{array}$$

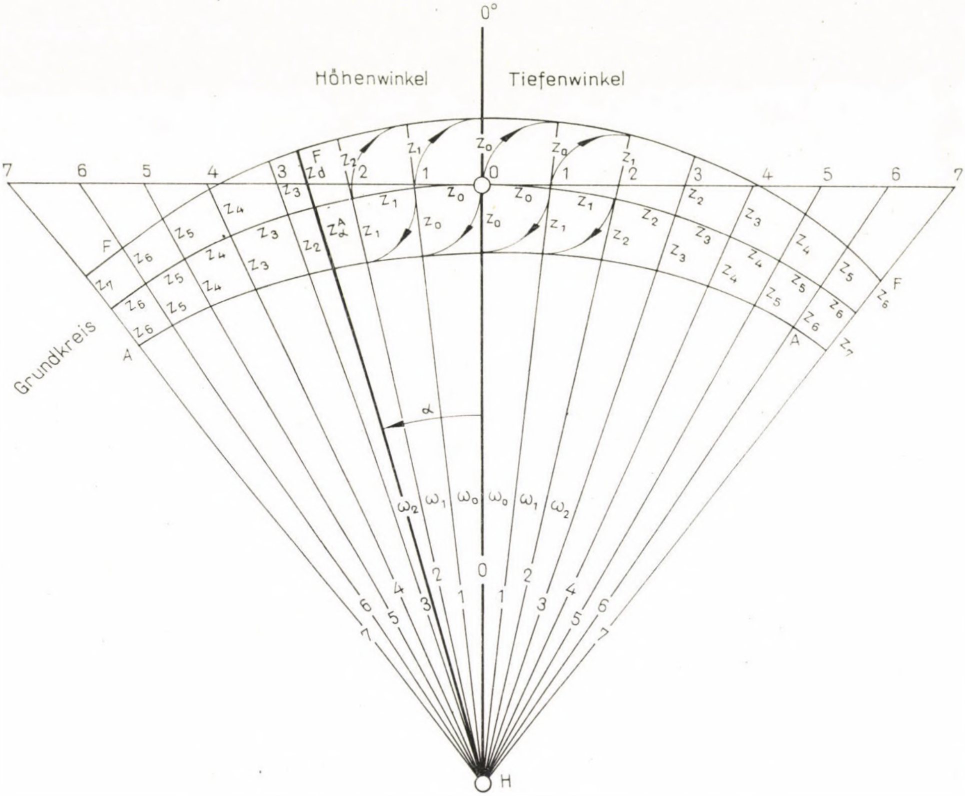


Abb. 4. Die Herstellung des Tangentendiagramms

Wenn es ein Tiefenwinkel ist:

$$
\begin{array}{lll}
\alpha_0 = 0^0 & z_0^F = f\omega_0 = z_0 & z_0^A = f\omega_0 = z_0 \\
\alpha_1 = \omega_0 & z_1^F = f\omega_0 = z_0 & z_1^A = f\omega_1 = z_1 \\
\alpha_2 = \omega_0 + \omega_1 & z_2^F = f\omega_1 = z_1 & z_2^A = f\omega_2 = z_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\alpha_i = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_{i-1} & z_i^F = f\omega_{i-1} = z_{i-1} & z_i^A = f\omega_i = z_i
\end{array}
$$

Es ist erkennbar, daß die Ordinaten der oberen Entfernungsdiagrammkurve auf den zum Tiefenwinkel:

$$\alpha_i = -\frac{\omega_0}{2} \tag{16'}$$

und jene der unteren Entfernungsdiagrammkurve auf den zum Höhenwinkel:

$$\alpha_i = + \frac{\omega_0}{2} \tag{16''}$$

gehörigen Radius bezogen symmetrisch verteilt sind. Es kann aber aufgrund der folgenden Erwägung auch die über den Grundkreis befindliche zweite Entfernungsdiagrammkurve aufgezeichnet werden (Abb. 7).

Es sei α_i zuerst ein Höhenwinkel:

$$\begin{array}{ll}
\alpha_0 = \omega_0 & z_0^{\mathrm{II}} = f\omega_1 = z_1^{\mathrm{I}} \\
\alpha_1 = \omega_0 + \omega_1 & z_1^{\mathrm{II}} = f\omega_2 = z_2^{\mathrm{I}} \\
\alpha_2 = \omega_0 + \omega_1 + \omega_0 & z_2^{\mathrm{II}} = f\omega_3 = z_3^{\mathrm{I}} \\
\vdots & \vdots \\
\alpha_i = \omega_0 + \omega_1 + \ldots + \omega_i & z_i^{\mathrm{II}} = f\omega_{i+1} = z_{i+1}^{\mathrm{I}}
\end{array}$$

Ist α_i ein Tiefenwinkel:

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1 = \omega_0 & z_1^{\mathrm{II}} = f\omega_0 = z_0^{\mathrm{I}} \\
\alpha_2 = \omega_0 + \omega_1 & z_2^{\mathrm{II}} = f\omega_1 = z_1^{\mathrm{I}} \\
\alpha_3 = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 & z_3^{\mathrm{II}} = f\omega_2 = z_2^{\mathrm{I}} \\
\vdots & \vdots \\
\alpha_i = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_{i-1} & z_i = f\omega_{i-1} = z_{i-1}^{\mathrm{I}} \,.
\end{array}$$

Die Ordinaten dieser Kurve (Abb. 7) sind auf den zum Tiefenwinkel:

$$\alpha_i = - \omega_0$$

gehörigen Radius bezogen von symmetrischer Lage.

Auf den Zusammenhang (12) zurückkehrend und in Betracht ziehend, daß

$$z_i = f\omega_i$$

ist, kann die Gleichung auch folgendermaßen aufgeschrieben werden:

$$\frac{\sin \alpha_i}{f \cos^3 \alpha_i} z_i^2 + \frac{1}{\cos^2 \alpha_i} z_i - z_0 = 0 \,. \tag{17}$$

Die Lösung der Gl. (17), ähnlicherweise wie die der Gl. (12) ist:

$$z_i = \frac{- B \pm \sqrt{B^2 - 4\,AC}}{2\,A}\,, \tag{18}$$

jetzt aber ist:

$$A = \frac{\sin \alpha_i}{f \cos^1 \alpha_i}\,; \qquad B = \frac{1}{\cos^2 \alpha_i} \qquad \text{und} \qquad C = -z_0\,. \tag{19}$$

So ist die Gleichung der oberen (F) Kurve (Abb. 4):

$$z_i^F = \frac{z_0}{2}(1 + \cos 2\,\alpha_i) - \frac{1}{f}\operatorname{tg} \alpha_i\, z_i^2\,, \tag{20'}$$

und der unteren (A):

$$z_i^A = \frac{z_0}{2}(1 + \cos 2\,\alpha_i) + \frac{1}{f}\operatorname{tg} \alpha_i\, z_i^2\,. \tag{20''}$$

Die Zusammenhänge (20′) und (20″) zeigen offensichtlich, daß ihre Summe zwar mit der durch die Gl. (5) bestimmten Fadenentfernung übereinstimmt, aber die zwei Kurven sind bezüglich des Grundkreises asymmetrisch.

Wir haben bereits festgestellt, daß die Gl. (5) eine präzise Formel ist, aber nur deshalb, weil in diesem Falle die Richtungslinie die Winkelhalbierende des Entfernungsmeßwinkels ist.

Diese Formel kann daher für das Tangentendiagramm nicht angewendet werden. Sollten aber die Neigungswinkel der die obere und untere Fadenentfernung halbierenden Richtungslinie separat bekannt sein, so kann man die Gleichungen der oberen und der unteren Diagrammlinie auch eigens aufschreiben.

An Abb. 5 wurden sowohl die Richtungslinie des Fernrohres mit Neigungswinkel α_i als auch der zur oberen Diagrammlinie gehörige Entfernungsmeßwinkel ω_i und dessen Winkelhalbierende mit Neigungswinkel α_i aufgezeichnet. D.h.

$$\alpha_i^1 = \alpha_i + \frac{\omega_i}{2}\,. \tag{21}$$

Der Zusammenhang (5) hat in diesem Falle, eigens auf die obere Diagrammlinie bezogen, die folgende Form:

$$z_i^F = \frac{z_0}{2}\left[1 + \cos 2\left(\alpha_i + \frac{\omega_i}{2}\right)\right]. \tag{22}$$

In diesem Zusammenhang ist aber der Entfernungswinkel ω_i noch nicht bekannt; er kann aber berechnet werden, weil bei erster Annäherung:

$$\omega_i' = \frac{\omega_0}{2}(1 + \cos 2\,\alpha_i)\,\varrho'' \tag{23'}$$

und sein, dem Zwecke entsprechender präziser Wert:

$$\omega_i = \frac{\omega_0}{2}\left[1 + \cos 2\left(\alpha_i + \frac{\omega_i'}{2}\right)\right]\varrho'' \tag{23''}$$

ist.

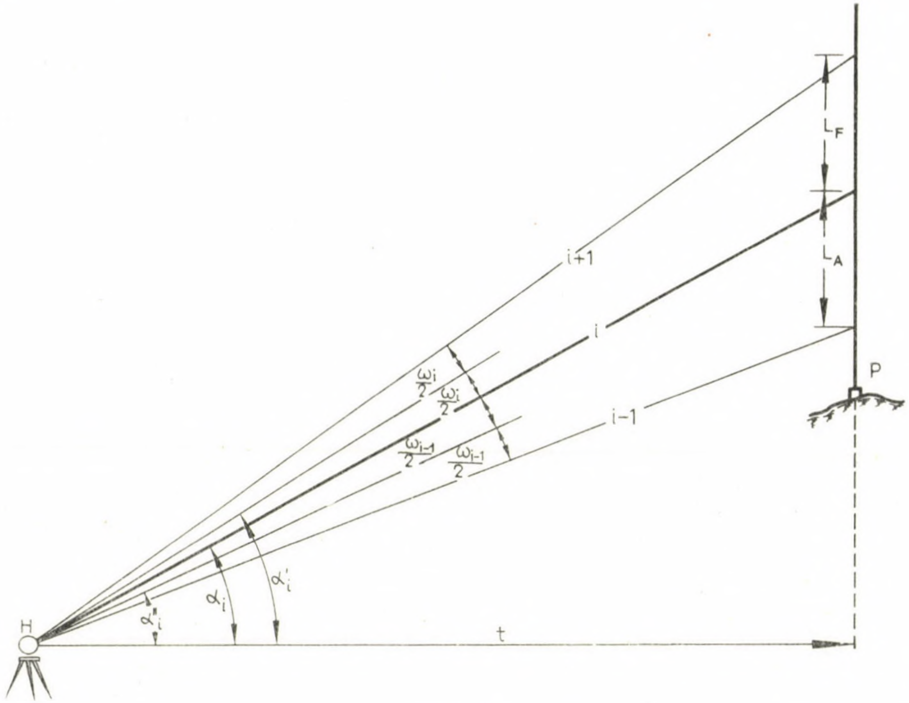


Abb. 5

Nach dem Muster des Zusammenhanges (22) kann auch die Gleichung der unteren Diagrammlinie aufgeschrieben werden. In diesem Falle ist:

$$\alpha_i' = \alpha_i - \frac{\omega_{i-1}}{2}, \tag{24}$$

und

$$z_i^A = \frac{z_0}{2}\left[1 + \cos 2\left(\alpha_i - \frac{\omega_{i-1}}{2}\right)\right], \tag{25}$$

wo

$$\omega_{i-1} = \frac{\omega_0}{2}\left[1 + \cos 2\left(\alpha_i - \frac{\omega_i'}{2}\right)\right]\varrho'' \tag{26}$$

ist.

ω^1_i kann auch in diesem Falle mit Hilfe des Zusammenhanges (23′) berechnet werden.

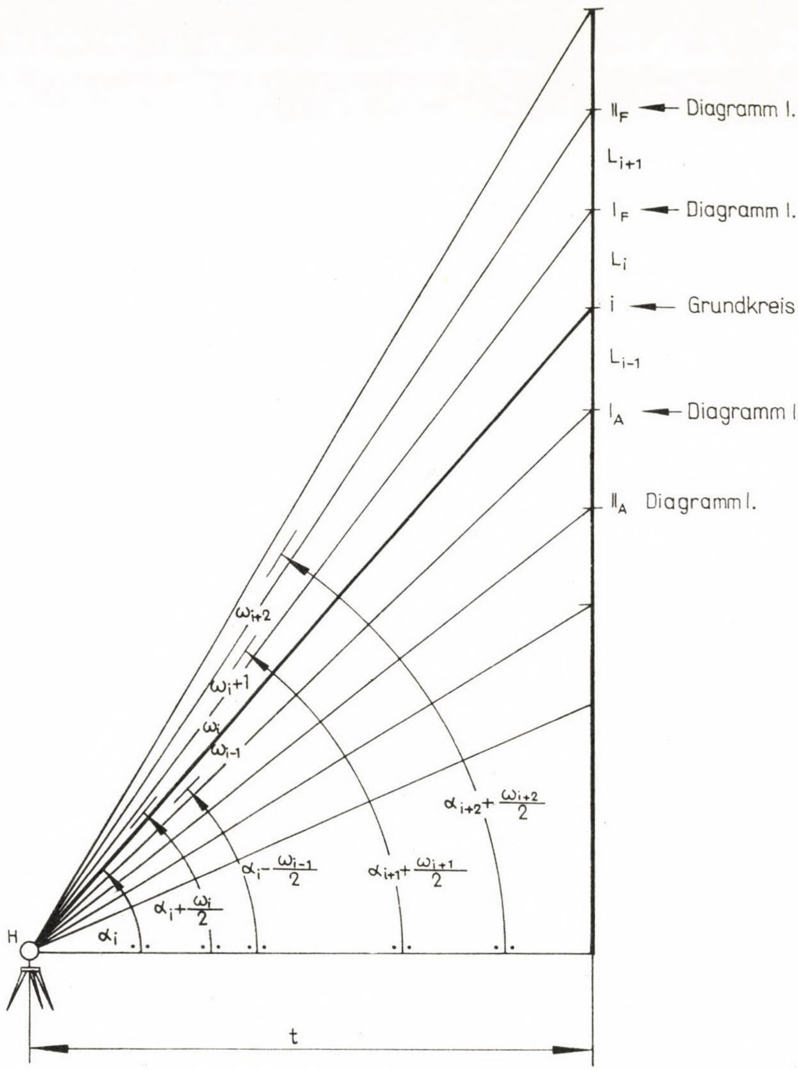


Abb. 6

Ähnlich den Zusammenhängen (22) und (26) können nun die Gleichungen eines jeden Gliedes der die Tangentenskalenlinie ersetzenden Diagrammschar (Abb. 7) aufgeschrieben werden.

In Abb. 6 haben wir an der in t Entfernung befindlichen Latte mit Einteilungen, die zu den Lattenlängen

$$L_1 = L_2 = L_3 = \ . \ . \ . \ = L_i$$

gehörigen, miteinander

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ . \ . \ . \ \omega_i$$

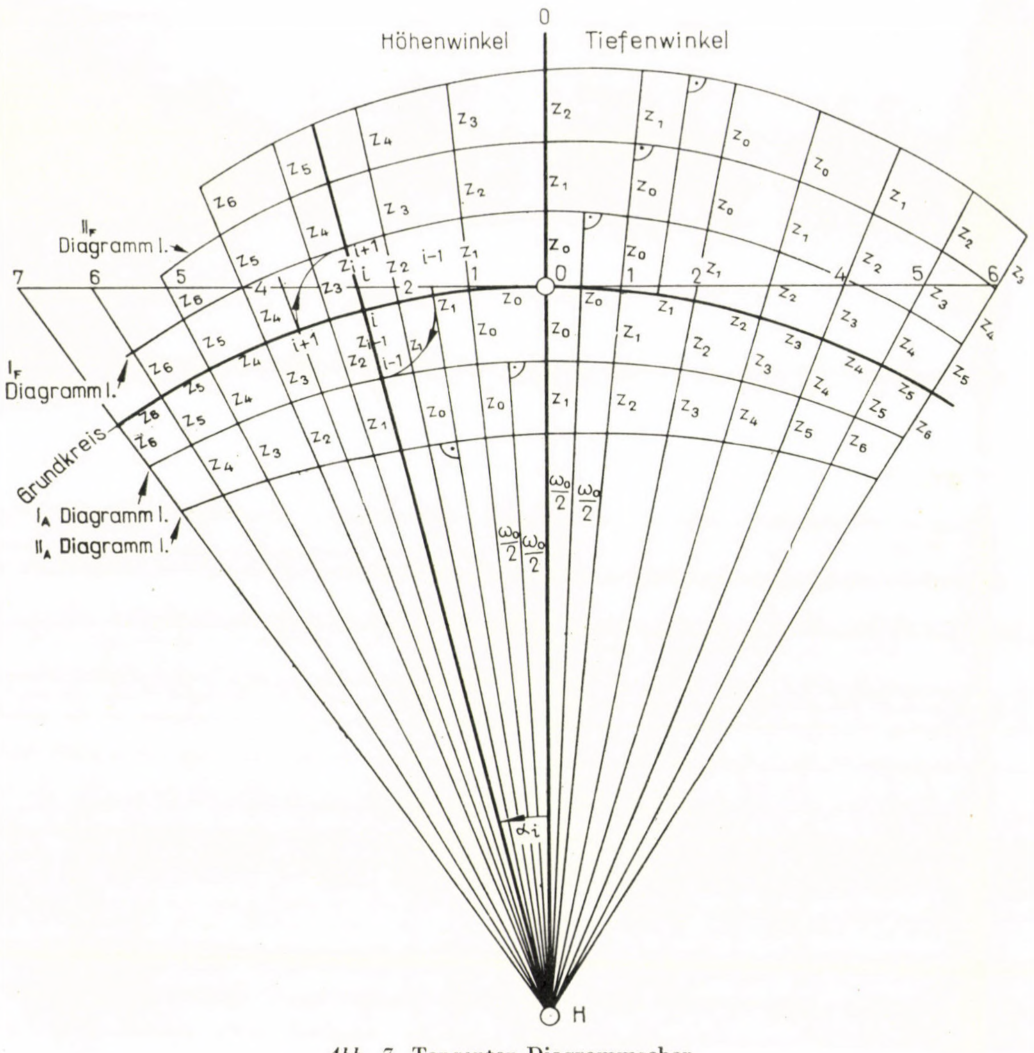


Abb. 7. Tangenten-Diagrammschar

Winkel einschließenden Richtungslinien angemerkt. Die Lattenlängen L_i wurden so gewählt, daß

$$t = k_t L_i$$

sei.

Es sollen zuerst die über dem Grundkreis befindlichen Diagramme (Abb. 7) untersucht werden.

Die Gleichung der mit I bezeichneten Linie der oberen Diagrammlinien ist mit der Gl. (22) identisch.

Die Neigungswinkel der Winkelhalbierenden der zum Diagramm II gehörigen Entfernungsmeßwinkel sind präzis (Abb. 6):

$$\alpha_i^{\mathrm{II}} = \alpha_i + \frac{\omega_i + \omega_{i+1}}{2}, \tag{27'}$$

bzw. mit dem Zwecke entsprechender Strenge:

$$\alpha_i^{\mathrm{II}} = \alpha_i + \omega_i, \tag{27''}$$

und die zur horizontalen Richtlinie gehörige Fadenentfernung:

$$2\frac{f}{2\,\boldsymbol{k}_t} = 2\,z_0,$$

d.h., die Gleichung des mit II bezeichneten Diagrammes:

$$z_i^{\mathrm{II}} = z_0\,[1 + \cos 2\,(\alpha_i + \omega_i)], \tag{28}$$

wo

$$\omega_i = \omega_0\,[1 + \cos 2\,(\alpha_i + \omega_i')]\,\varrho'', \tag{29'}$$

und

$$\omega_i' = \omega_0\,(1 + \cos 2\,\alpha_i)\,\varrho'' \tag{29''}$$

ist.

Mit ähnlicher Erwägung ist die Gleichung der mit III bezeichneten Kurve aufschreibbar; da jetzt (Abb. 6):

$$\alpha_i^{\mathrm{III}} = \alpha_i + \frac{\omega_i + \omega_{i+1} + \omega_{i+2}}{2}, \tag{30'}$$

bzw.

$$\alpha_i^{\mathrm{III}} = \alpha_i + \omega_i + \frac{\omega_{i+1}}{2}, \tag{30''}$$

$$Z_i^{\mathrm{III}} = \left(Z_0 + \frac{Z_1}{2}\right)\left[1 + \cos 2\left(\alpha_i + \omega_i + \frac{\omega_{i+1}}{2}\right)\right], \tag{31}$$

und

$$\omega_{i+1} = \frac{\omega_0}{2}\left[1 + \cos 2\left(\alpha_i + \omega_i + \frac{\omega_{i+1}}{2}\right)\right]\varrho'' \tag{32'}$$

ist, wo

$$\omega_{i+1}' = \frac{\omega_0}{2}\left[1 + \cos 2\left(\alpha_i = \omega_i\right)\right.\varrho'' \tag{32''}$$

ist.

Zuletzt kann die Ordinate z_α^F der zum Neigungswinkel α gehörigen beliebigen oberen Diagrammkurve sowie die Ordinate z_α^A des gleichfalls beliebigen unteren Diagramms auch in ganz allgemeiner Form aufgeschrieben werden:

$$z_\alpha^F = \frac{f}{2k_t}\left[1 + \cos 2\left(\alpha + \frac{\omega_\alpha}{2}\right)\right], \tag{33}$$

wo

$$\omega_\alpha = \frac{1}{2k_t}\left[1 + \cos 2\left(\alpha + \frac{\omega_\alpha^{\mathrm{I}}}{2}\right)\right]\varrho'', \tag{34'}$$

und

$$\omega_\alpha^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2k_t}(1 + \cos 2\,\alpha)\,\varrho'' \tag{34''}$$

ist. Ferner

$$z_\alpha^A = \frac{f}{2k_t}\left[1 + \cos 2\left(\alpha - \frac{\omega_{\alpha-1}}{2}\right)\right], \tag{35}$$

wo

$$\omega_{\alpha-1} = \frac{1}{2k_t}\left[1 \cos 2\left(\alpha - \frac{\omega_\alpha'}{2}\right)\right]\varrho'', \tag{36'}$$

und

$$\omega_\alpha' = \frac{1}{2k_t}(1 + \cos 2\,\alpha)\,\varrho'' \tag{36''}$$

ist.

Durch die entsprechende Wahl des in der allgemeinen Formel vorkommenden Wertes k_t kann die Gleichung der mit I, II, . . . N bezeichneten Kurven der in Abb. 7 sichtbaren Tangentendiagrammschar aufgeschrieben werden; es ist nämlich:

$$k_t = 200, \qquad k_t = 100, \qquad k_t = 66{,}666, \qquad k_t = 50$$

und zulätzt die zur N-ten Kurve gehörige Multiplikationskonstante:

$$k_t = \frac{200}{N}. \tag{37}$$

Aus den Gleichungen der Tangentendiagrammlinien ist ersichtlich, daß deren Konstruktion auf die Herstellung der Leemann-Kernschen Diagrammlinien zurückführbar ist.

Es entsteht ein Tangentendiagramm, wenn man den das Leemann-Kernsche Diagramm tragenden Glaskreis während der Zeichnung dieses Diagrammes stufenweise um einen Winkelwert

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i$$

verdreht.

Für sämtliche Zwecke kann aber das Tangentendiagramm mit entsprechender Genauigkeit auch so hergestellt werden, daß der Diagramm-Glaskreis vor Beginn des Zeichnens um einen bestimmten, durchschnittlichen, konstanten Winkelwert ω_a verdreht wird.

Die Gleichung der oberen Kurve ist in diesem Falle:

$$z_i^F = \frac{z_0}{2}\left[1 + \cos 2\left(\alpha_i + \frac{\omega_a}{2}\right)\right], \tag{38'}$$

und die der unteren:

$$z_i^A = \frac{z_0}{2}\left[1 + \cos 2\left(\alpha_i - \frac{\omega_a}{2}\right)\right]. \tag{38''}$$

Wir werden sehen, daß in dem Falle, wenn

$$\omega_a = 13'\,40''$$

ist, so weichen die aufgrund der Gln. (38′) und (38″) erhaltenen Werte von z_i nur um einige Zehntel Mikron von den präzisen Werten von z_i ab.

4. Kontrollberechnungen

Die Richtigkeit der erörterten Formeln wird an einigen Beispielen kontrolliert.

Es sei:

$$f = 240; \qquad k_t = 200 \qquad \text{bzw.} \qquad \omega_0 = 0{,}005$$

Der Neigungswinkel α_{140} des zum Punkt

$$i = 140 \tag{I}$$

gehörigen Radius des oberen Tangentendiagrammes kann folgendermaßen bestimmt werden:

$$\operatorname{tg} \alpha_i = i \cdot \omega_0 = 140 \cdot 0{,}005 = 0{,}700\,00 \tag{II}$$

$$\alpha_{140} = 34^\circ\,59'\,31{,}27'' \tag{III}$$

Die Tangente des nach diesem folgenden Radius:

$$\operatorname{tg} \alpha_{i+1} = \operatorname{tg} \alpha_{141} = 0{,}705\,00$$

$$\alpha_{141} = 35^\circ\,11'\,01{,}81''$$

Der zum α_{140} gehörige Entfernungsmeßwinkel:

$$\omega_i = \omega_{140} = \alpha_{141} - \alpha_{140} = 11' \, 30{,}54'' \qquad \text{(IV)}$$

$$\omega_{140} = 0{,}003\,347\,8$$

So ist der präzise Wert von z_i:

$$z_i = f\omega_i = 240 \cdot 0{,}003\,347\,8$$

$$z_{140} = 0{,}803\,47 \text{ mm} \qquad \text{(VII)}$$

Dasselbe nach Zusammenhang (18):

$$z_i = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\,AC}}{2\,A}$$

wo nach (19):

$$A = \frac{\sin \alpha_i}{f \cos^3 \alpha_i} = \frac{0{,}573\,462\,3}{240 \cdot 0{,}819\,231\,9^3} = 0{,}004\,345\,9$$

$$B = \frac{1}{\cos^2 \alpha_i} \quad \frac{1}{0{,}819\,231\,9^2} = 1{,}490\,000\,,$$

und

$$C = -1{,}2\,.$$

Ferner

$$B^2 = 2{,}220\,10 \qquad \text{und} \qquad -4\,AC = +\,0{,}020{,}860$$

Also

$$z_{140} = \frac{-1{,}49 \pm \sqrt{2{,}220\,10 + 0{,}020\,860}}{2 \cdot 0{,}004\,345\,9} = 0{,}803\,46 \text{mm} \qquad \text{(VIII)}$$

Laut (23″):

$$\omega'_{140} = \frac{0{,}005}{2}\,(1 + \cos 2\,\alpha_{140})\,\varrho''$$

$$\omega'_{140} = 0{,}0025 \cdot 1{,}342 \quad 281\,\varrho'' = 11' \, 32{,}11''$$

Laut (23′):

$$\omega_{140} = 0{,}0025 \left[1 + \cos 2\left(\alpha_{140} + \frac{\omega'_{140}}{2}\right)\right] \varrho''$$

$$\omega_{140} = 0{,}0025 \cdot 1{,}339\,127\,2\,\varrho'' = 11'30{,}49'' \qquad \text{(V)}$$

Aufgrund des Zusammenhanges (22):

$$z_{140} = 0{,}0025 \left[1 + \cos 2\left(\alpha_{140} + \frac{\omega_{140}}{2}\right)\right]$$

$$z_{140} = 0{,}0025 \cdot 1{,}139\,134\,58 = 0{,}803\,46 \text{ mm} \qquad \text{(IX)}$$

Zuletzt mit dem Wert:

$$\omega_a = 13' \, 40'' \tag{VI}$$

berechnet laut (38'):

$$z_{140} = 0{,}0025 \left[1 + \cos 2 \left(\alpha_{140} + \frac{\omega_a}{2} \right) \right]$$

$$z_{140} = 0{,}0025 \cdot 1{,}338\,543\,9 = 0{,}803\,13 \text{ mm}, \tag{X}$$

somit ist die Abweichung kaum mehr als 0,3 μ.

Dieselben Berechnungen wurden auch im Zusammenhang mit den Radien von Neigungswinkeln

$$\alpha_{32}, \quad \alpha_{100}, \quad \alpha_{125}, \quad \alpha_{150} \quad \text{und} \quad \alpha_{175}$$

vollzogen und die erhaltenen Ergebnisse wurden in Tabelle I so zusammengefaßt, daß die auf demselben Wege gewonnenen Resultate in die mit entsprechender römischer Zahl bezeichnete Spalte fallen.

Wir haben den präzisen Wert von z_i aufgeschrieben, ferner die aufgrund der Zusammenhänge (22) bzw. (38') mit einem Drehungswinkel

$$\omega_a = 13' \, 40''$$

berechneten z_i-Werte.

Laut der Tabelle ergibt auch der Zusammenhang (22) einen präzisen Wert, aber auch der mit dem erwähnten durchschnittlichen Drehungswinkel berechnete Wert von z_i weicht auch in dem sehr ungünstigen Falle eines Neigungswinkels

$$\alpha_i \cong 41^\circ$$

vom präzisen Wert nicht um mehr als 0,7 μ ab.

5. Zusammenfassung

Wie ersichtlich, sind die Gln. (22) und (25) von allgemeiner Gültigkeit. Analog können die auf sämtliche Glieder der die vollkommene Tangentenskale ersetzenden Diagrammschar bezogenen Gleichungen (33) und (35) abgeleitet werden.

Zwei Glieder dieser Diagrammschar — die unteren und oberen, mit I bezeichneten Diagramme — können als um veränderlich bzw. konstante Winkel verdrehte Varianten der Leemann-Kernschen Diagramme betrachtet werden; ein Glied der oberen Diagrammschar — das mit II bezeichnete — ist

Tabelle I

i	tg α_i	α_i	ω_i	ω_i	ω_A	z_i mm	z_i Gl. (18)	z_i Gl. (22)	z_i Gl. (38′)
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
32	0,160 00	9°05′25,00″	16′44,79″	16′44,8″	13′40″	1,169 13	1,169 12	1,169 13	1,169 30
100	0,500 00	26°33′54,2″	13′43,41″	16′43,4″	13′40″	0,958 08	0,958 09	0,958 08	0,958 09
125	0,625 00	32°00′19,4″	12′20″	12′20″	13′40″	0,860 98	0,860 96	0,860 96	0,860 78
140	0,700 00	34°59′31,3″	11′30,54″	11′30,49″	13′40″	0,803 47	0,803 46	0,804 46	0,803 13
150	0,750 00	36°52′11,6″	10′58,47″	10′58,45″	13′40″	0,766 17	0,766 15	0,766 15	0,765 71
175	0,875 00	$41_0 11'09,3''$	9′42,67″	9′42,63″	13′40″	0,677 97	0,677 92	0,677 92	0,677 28

im wesentlichen mit der Hammer-Fennelschen Diagrammkurve übereinstimmend.

Hier kann bemerkt werden, daß auch das Bezzeghsche Kreisdiagramm auf die vorher erwähnten Grundgleichungen zurückführbar ist. Die unteren und oberen, mit I bezeichneten Diagrammlinien können nämlich im Falle einer 2α-Verdrehung durch exzentrische Kreise ersetzt werden, und durch die entsprechende Wahl der Exzentrizität kann auch die in der Formel vorkommende um einen veränderlichen bzw. konstanten Winkel durchgeführte Verdrehung mit guter Annäherung in Betracht gezogen werden.

Der Tangentendiagramm-Tachymeter bedeutet sowohl im Vergleich mit den jetzigen Diagramm- als auch im Vergleich mit den Tangenten-Tachymetern einen Fortschritt. Sein Vorteil gegenüber den Diagramm-Tachymetern ist, daß es auch ohne Verdrehung des Diagrammes mit verschiedenen Multiplikationskonstanten anwendbar ist. Im Verhältnis zum Tangenten-Tachymeter ist sein Vorteil aber, daß bei der Messung ein Tangenten-Teilstrich nicht auf den horizontalen Faden des Fadenkreuzes eingestellt werden muß, d.h., es ist in jeder Lage meßbereit.

Daraus folgt auch der Vorteil, daß beliebige zwei der Diagrammlinien für Entfernungsmessung bei beliebigem Höhenwinkel angewendet werden können.

Der Tangentendiagramm-Tachymeter vereint also in hohem Maße die guten Eigenschaften der jetzigen Diagramm- sowie Tangenten-Tachymeter.

SCHRIFTTUM

1. Hammer: Der Hammer-Fennelsche Tachymeter-Theodolit. *Zeitschrift f. Instr.* 1902. S. 221.
2. Oltay, K.: Redukáló tahiméterek (Reduktions-Tachymeter). *Geodéziai Közlöny*, 1940.
3. Szepessy, J.: A tahiméterek fejlődése és a Szepessy-féle új tahiméter (Die Entwicklung der Tachymeter und das Szepessysche neue Tachymeter). *Geodéziai Közlöny*, 1927.
4. Jordan—Eggert—Kneissl: Handbuch der Vermessungskunde, Bd. III. Stuttgart, 1956.
5. Vincze, V.: Tangens diagrammos tahiméter (Tangentendiagramm-Tachymeter). MOM Patent Ungarisches Patent No. 148 683/1957. Schweizer Patent No. 391 308/1965. Englisches Patent No. 960 595/1964. Deutsches Patent No. 1 230 573/1967. BR.
6. Tárczy-Hornoch, A.: A magasságot közvetlenül adó redukáló tahiméter (Das die Höhe unmittelbar liefernde Reduktionstachymeter). *Magyar Technika*, 1948.
7. Bors, K.: A Magyar Optikai Művek MOM MF típusú mérőasztala (Meßtisch Typ MOM MF der Ungarischen Optischen Werke). *Geodézia és Kartográfia*, 1956.
8. Tárczy-Hornoch, A.: Über die Tangententachymeter. *Öster. Zeitschrift f. Vermessungswesen*, 1966.

TANGENT DIAGRAM INSTEAD OF TANGENT SCALE

V. VINCZE

SUMMARY

The paper deals with the stadia diagrams used in reducing tacheometers. It generally shows valid relations which can be used at every stadia diagram and which determine a set of diagrams (Fig. 7) substituting the tangent scale without discontinuities.

ВМЕСТО ШКАЛЫ ТАНГЕНСОВ ДИАГРАМ ТАНГЕНСОВ

В. ВИНЦЕ

РЕЗЮМЕ

Статья ознакомит читателя с дальномерными диаграммами, применяемыми в редукционных тахометрах. Выводятся такие общие связи, которые могут применяться для всех дальномерных диаграмм, кроме того они определяют и множество диаграмм (рис. 7), безразрывно заменяющие шкалу тангенсов.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (1—2), pp. 95—133 (1969)

ANALYSIS OF THE SEISMIC GROUND ROLL

O. ÁDÁM

CAND. OF TECHN. SCIENCES
CENTRAL OFFICE OF GEOLOGY, BUDAPEST

[Manuscript received May 29, 1968]

The gorund roll, in fact, comprises two wave-types: the first and of greatest intensity is the vertically polarized transverse wave (SV); the second and of smaller intensity is the Rayleigh wave consisting of one cycle, eventually of two cycles. The different components of the former travel in different wave-guides and the individual components originate from different sources. Beside this, consideration is given to the ground roll mechanism and the dynamical characteristics of the ground roll components.

Even the most up-to-date seismic methodology could not exterminate the problem of the ground roll, which is as old as the seismic method itself.

The subsurface geological pattern remains undiscovered as long as the "signal" remains covered by the "noise", and vast areas are known all over the world with sweeping "noise" dominating on them.

In Hungary, tape-recording, seismometer-grouping, pattern-shooting and — last but not least — "stacking" has recently made a great improvement in the quality of recording. The ground-roll is, nevertheless, a problem not entirely solved; the areas of dominating ground roll are neither small, nor economically insignificant.

The ground roll in our country is in connection with certain loose unconsolidated young sediments. Such are e.g. the loess covered SW Hungary [65], and other mild rolling countries of Transdanubia with deep-lying ground water. Beside this, there are "ground-rolling" countries in the Great-Plain, too, where the ground-water table is though in the very nearness of the surface, still the surface or near-surface very loose, unconsolidated alluvia offer exceedingly poor energy-transfer and are excellent ground roll generators (Hajdúszoboszló, Zagyvarékas, etc.) [51, 55, 66].

There is a rather comprehensive compilation about our ground-roll stricken areas in the graduate work of I. Polcz [55], which reveals that the old, notorious "dumb" (NR) areas, even in our days — although shrunken — still hold their positions.

The following considerations are based upon such experiments as were expected to give answer to the following questions.

1. What kind of soil composition generates the ground roll;

2. is the ground roll composed of one single surface wave, or of several waves of differring character;

3. if composed of different wave-groups, what are the conditions of their generation;

4. what is the effect of the quantity, depth and shape of the traditional explosives upon the ground roll or on its individual components?

The ground roll — owing to the surface-wave character of its components — is attached to the uppermost, few meter thick, weathered layer, as a rule [18, 42]. In the hitherto made model-experiments usually the Rayleigh, Sezawa M_1, M_2 waves and Love wave combinations have been recognized. Guided waves are seldom mentioned in the literature [15, 34]. The problem is in general solved only up to the determination of the wave-types and their main parameters. Apart from the analysis of some dispersion-curves, neither the soil-composition nor the ground-roll received proper treatment.

Only Hagedoorn [29] and Rudnitsky [59] seem to have been engaged in the latter studies. While Hagedoorn gives consideration to the immerging transversal wave, Rudnitsky is inclined to attach considerable significance to the conversion of the individual waves; the ground roll groups insensible to the quality and depth of shooting can be interpreted — according to his conception — in the terms of the latter.

The results referring to the underdevelopped character of the Rayleigh wave [46, 15] are likewise interesting in this theme. The sum of these ideas is that when a heterogeneity of soil is encountered, characteristic for the ground-roll generating areas, no Rayleigh wave, in the classical sense of the word, can be expected.

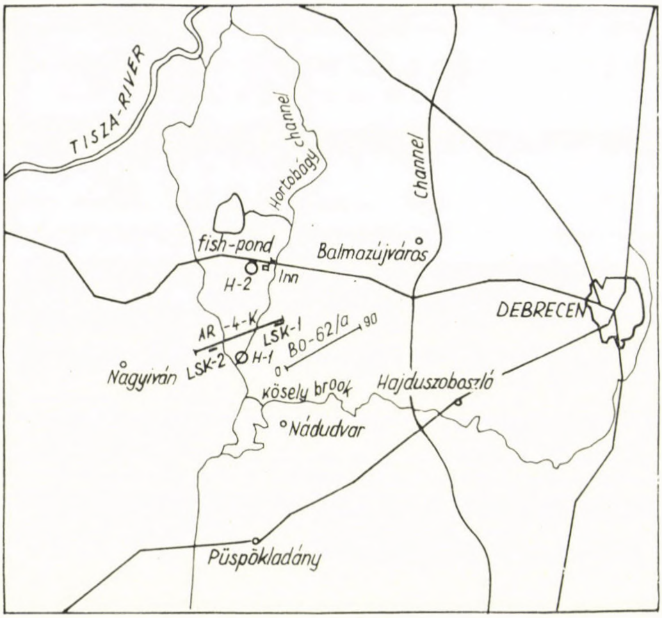
The ground roll experiments on the Great-Plain (LSK-2)

There is a notorious ground roll stricken area between Balmazújváros and Nagyiván (Hortobágy, NE Hungary). Several efforts have been made [20, 52, 66] to obtain reliable seismic material on this area. A more sophisticated technique — grouping, linear-shooting, etc. — succeeded in reducing the extension of the unexplorable spot, but the problem has not been solved even until today.

The below described experiment was carried out along a profile (called henceforward LSK) of the latest work [66] (Fig. 1). The near-surface geological pattern of the area according to the drilling Hortobágy-I [61] is as follows:

0 — 0,50 m soil
— 1,20 ,, slightly limey yellow clay
— 3,50 ,, bluish grey clay

— 6,00 m light grey limey clay
— 23,00 „ different sandy clays
— 34,00 „ bluish grey clayey marl
—111,80 „ grey, brownish grey sandy clay layers of 1—2 m thickness each
—127,80 „ grey, brownish grey marly clay layers



M=1:500000

Fig. 1. An outline sketch of the area of the experiments

The bottom of the hole lies at 1115,04 m below sea-level. The ground-water table is in 2—3 m even in the aridest periods.

The shallow refraction profiles shot to explore the near-surface soil-composition, further the velocities of the first arrivals of the reflection records indicate nothing extraordinary, at first sight.

Reflection records of the spot are usually characterized by intense regular ground-roll, turning sometimes, in consequence of interferences, into irregular. Their apparent velocity is 250, 230 m/s around Hajdúszoboszló and 160 m/s, but sometimes 470 and 290—300 m/s velocities were observed.

The instrumentation applied in the experiments: a portable seismic reflection equipment Type GS-11 (made by the Gamma Works) with seismometers of 7 cps natural frequency; further another seismic reflection equipment (made by the ELGI) with traditional recording allowing a better pass in the low-frequency range.

Endeavours were made to keep the channel response on a steady level. Since the equipments mentioned did not meet this requirement, the sensitivity of the amplifiers was fixed on the records. In this way the changes could always be taken into account. The in-line seismometers were oriented in the following way: the horizontal one was forced to display positive amplitude at moving off from the shooting; the vertical ones made the same display at the ground particles moving upward.

The travel-time diagrams and displacement velocity trajectories of the ground roll. The field parameters of the experiments are the following:

First experiment: vertical and in-line oriented horizontal twin-seismometers, spacing 25 m, spread 145 m, shooting with 1 kg by 5 m-s down to 25 m, in 25 m 0,25, 0,5, 1,0, 2,0, 4,0, 8,0 kg.

Second experiment: to attain a better correlation: spacing 12,5 m, spread 215 m, along the spread at 6 points six horizontal and vertical seismometer-twins, attenuation 1 : 4, shooting in 25, 10 and 5 m with 0,5 kg.

In Fig. 2, a detailed travel-time diagram, in Fig. 3, the correlation-possibilities, in Fig. 4 the interrelation of the arrivals ($x = 145$ m) in the first experiment are shown.

Beyond 50 m the hyperbole shape of the curve changes into ones of mild curvature providing the key to distinguish the individual wave-groups.

The first wave-group (K_1) of small amplitudes immediately follows the reflected body-waves. Its apparent velocity continuously varies between 275 and 350 m/s. Its amplitude is dwindling as compared to the later components (K_2—K_3—M—N); towards the end of the spread it is not more than $^1/_5$—$^1/_{10}$ of the complete noise-amplitude. The ground-motion starts in the horizontal plane and turning along a flat ellipse it gradually turns into a plane making 60° with the vertical. Fig. 4 indicates that this group appears on every record but its amplitude depends on the depth of the shot.

The second group (K_2—K_3—M—N) of great amplitudes can be, infolded by the velocity-trajectories (henceforward: trajectory, for short) into several components. Its time-span is the longest of the three groups, spread-end time: 0,525 sec. Its apparent velocity is at the beginning of the group 225—300 m/s, at the end of it: 200—225 m/s. This group (upon the last trace of the Fig. 3) arrives at 0,866 sec, with a sudden break; in the first cycle it is nearly circular with forward rotating trajectory. The second cycle's arrival is likewise sudden (abt treble, resp. double amplitude-increase); at the beginning there is a linear, from left to right rotating trajectory at an angle of 45—50° changing into the vertical. The third cycle indicates a great vertical displacement-velocity, the fourth starts horizontally turning into the vertical. This group contains waves of identically oriented rotation and of differring angles of incidence. The pattern of the group (see Fig. 4) shows no essential change until the 25 m shot, a continuous decrease of the amplitude of the terminating great vertical

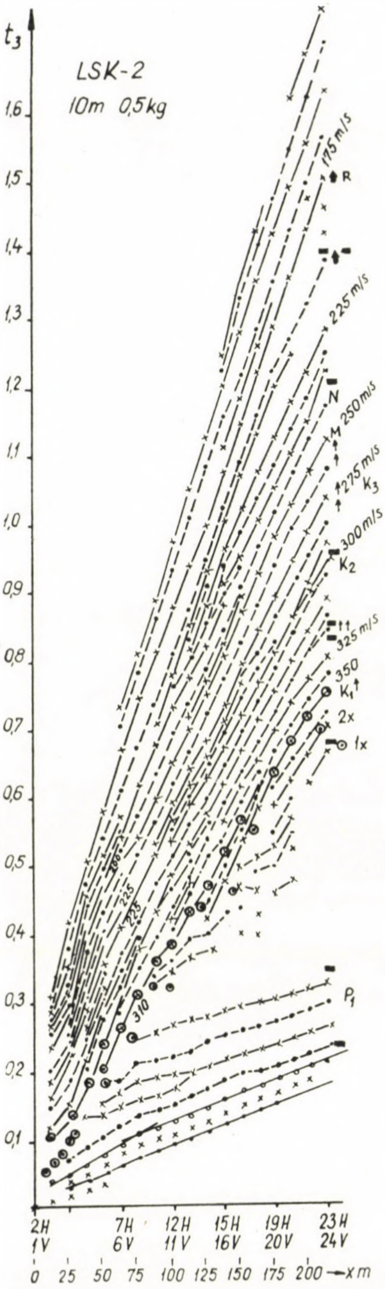


Fig. 2. **Travel-time diagram of the ground roll (10 m, 0,5 kg)**

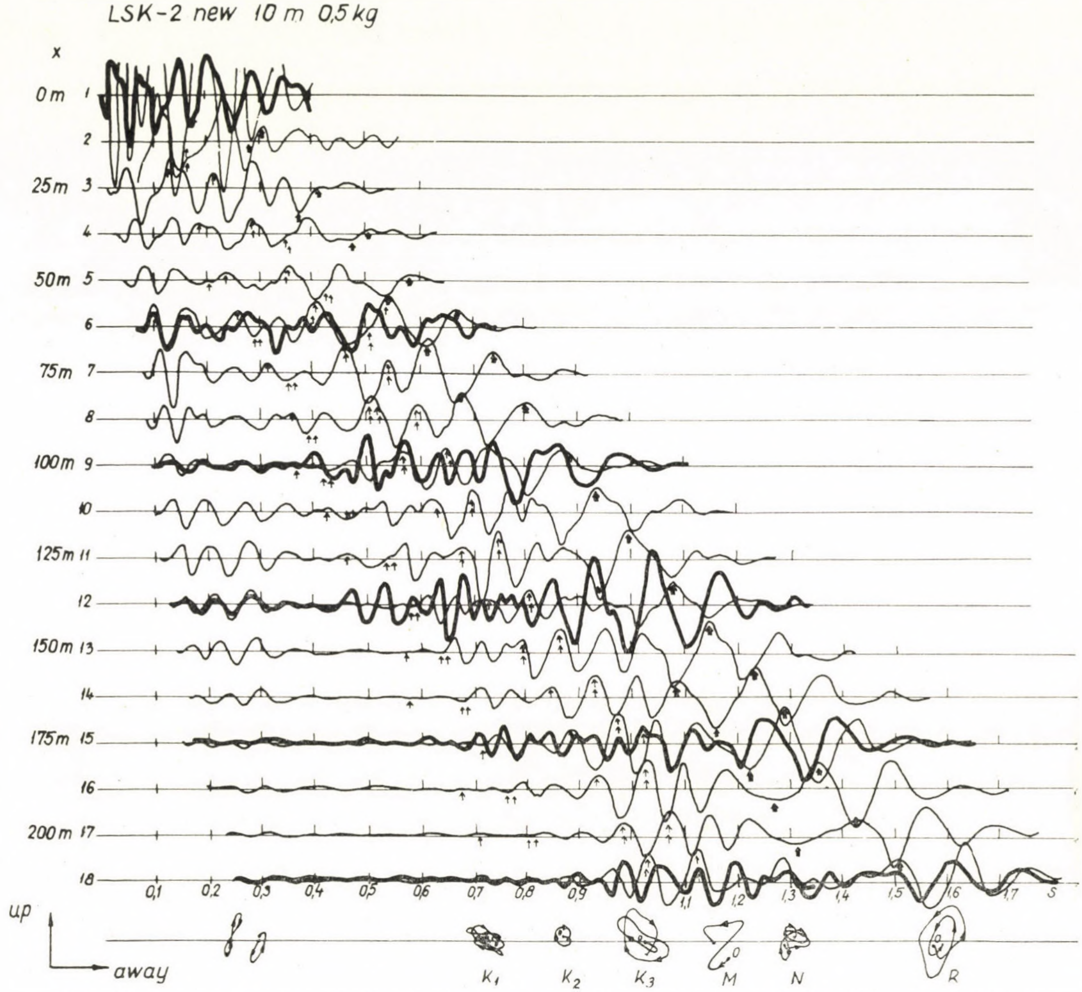


Fig. 3. A seismogram and the displacement velocity trajectories of the diagram of Fig. 2

displacement-velocity can be observed, at most. On the record obtained from 25 m there appears already some change in the character, too.

The third wave-group (*R*) consists, in fact, of two cycles. Its apparent velocity varies between 150—170 m/s (occurring also 190 m/s in the transitional zone). The trajectory rotates backward, i.e. from the right to the left. The last trace on Fig. 3 is, however, not entirely clear, for the ellipse is leaning forward. Fig. 4 clearly shows the disappearing of the wave with the depth of shooting.

At closer examination of the components the following characteristics were observed:

a) The travel-time diagrams are curved, i.e. the apparent velocity increases with the distance;

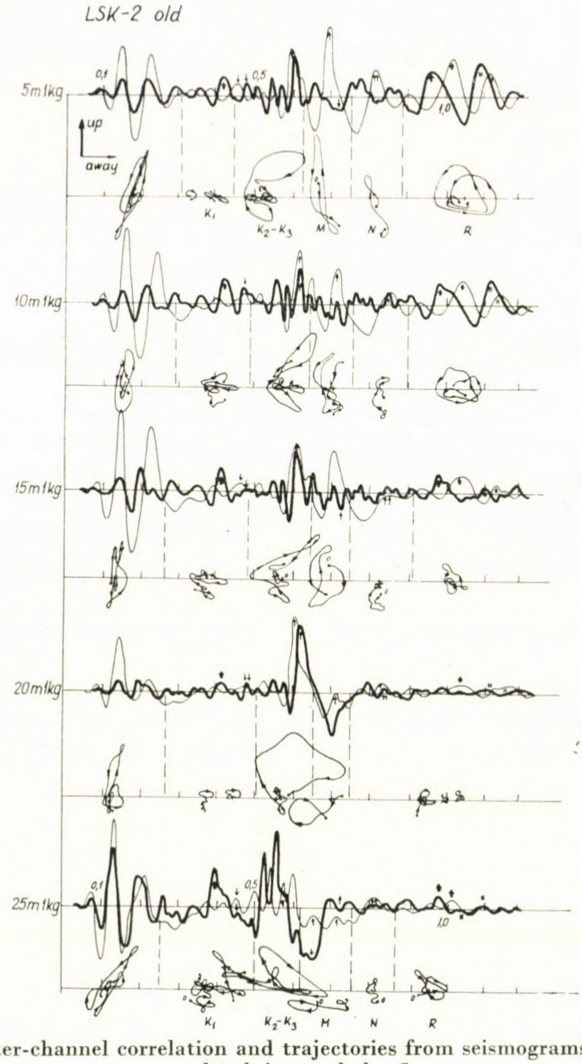


Fig. 4. Inter-channel correlation and trajectories from seismograms at $x = 145$; depth-intervals by 5 m

b) The character of the trajectory is linear, resp. forward-rotating in the first two wave-groups; it is backward-rotating in the third group. The first two groups are characteristic of the vertically (in the vertical plane) polarized transverse wave, the third, of the Rayleigh-wave;

c) The character of the components (K_1—N phases) doesn't change (at least substantially) with the depth of shooting (henceforward sometimes: source) the amplitude of the phase R, however, rapidly decreases with the depth of the source.

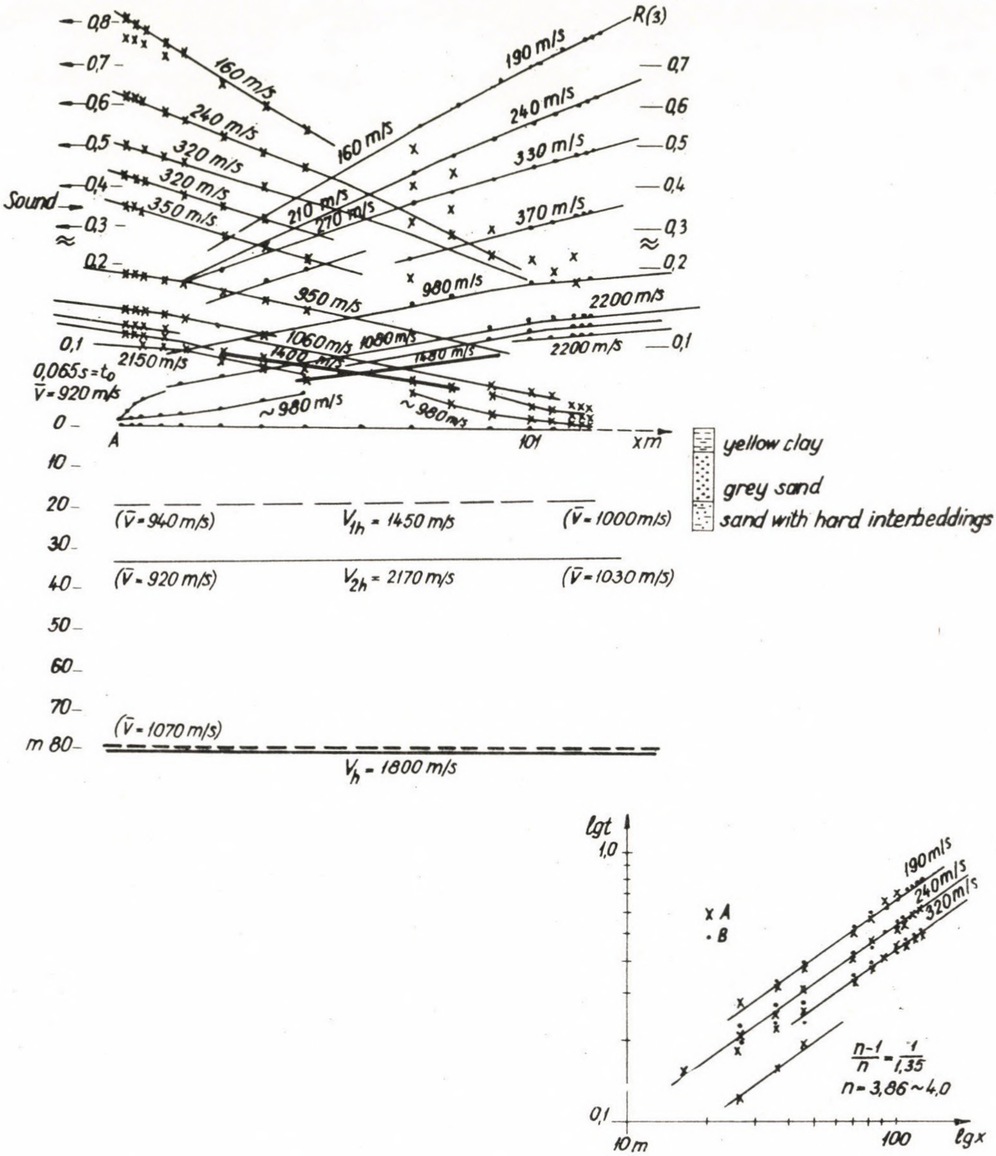


Fig. 5. The near-surface complex according to the shallow refraction

The seismic study of the near-surface complex at the point LSK-2

Shallow-refraction results (Fig. 5)

The rapid attenuation of the first arrivals indicates a thin bed of high velocity upon the surface, bordered from below by a medium of minor velocity. The former is a hard clay, the latter a water-soaked grey sand layer, as revealed

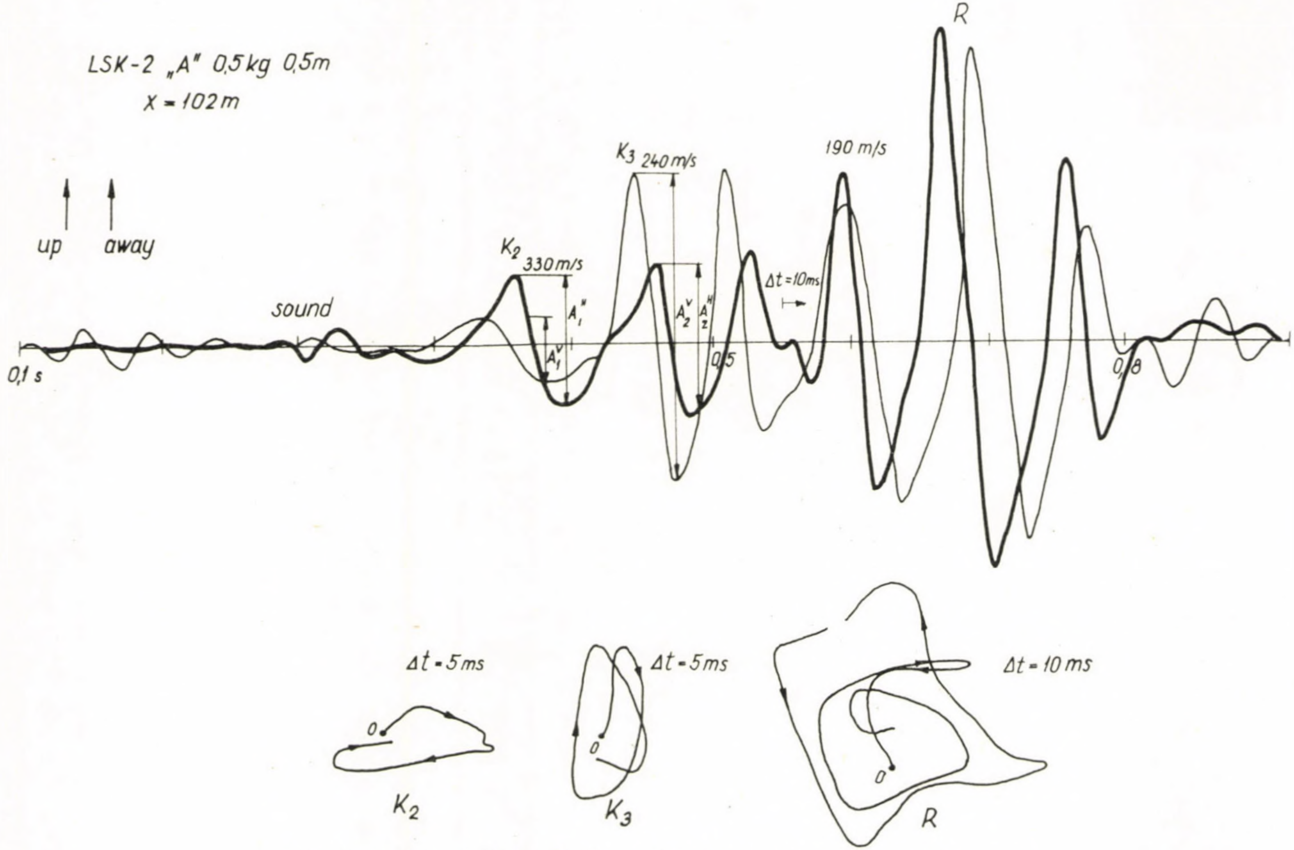


Fig. 6. A channel of the shallow refraction record, and the trajectories

by the shot-hole log. From the upper, no simply interpretable travel-time curve was obtained, the arrivals died away very soon. There were, however, arrivals from 20 and 32, with 1450 m/s, resp. 2170 m/s velocities.

In the group following the sound wave (350—370 m/s) three waves can be distinguished and correlated (in Fig. 5 the scale, in the range of the later arrivals, is exaggerated).

The first wave (K_2) can be traced from $x = 26$ m on, having an apparent velocity in the beginning 270 m/s, increasing toward the end of the spread to 350, resp. 320 m/s. This wave is attenuated within a short range. The amplitude on an in-line oriented horizontal seismometer, is nearly double as compared to that on the vertical seismometer (Fig. 6). Its period $T = 0{,}045$—$0{,}050$ sec.

The apparent velocity of the second wave (K_2) starts at $x = 26$ m as 210 m/s, increasing to 230—240 m at the end of the spread. Its attenuation is substantially smaller than that of the former one. The period $T_1 = 0{,}050$ sec; $T_2 = 0{,}062$ sec; it is a dispersive wave. The trajectory is a forward-rotating ellipse of a nearly vertical (10° leaning) axis. The axis-ratio $W/U = 2{,}4$.

The longest living third wave (R) starts with 160 m/s velocity increasing to 190 m/s. Its amplitude is the greatest in the complete group. It is dispersive; the periods of the three cycles are: $T_1 = 0{,}048$ sec; $T_2 = 0{,}082$ sec; $T_3 = 0{,}081$ sec. The trajectory is a backward leaning (35°) ellipse (at least it may be approximated by such); its axis-ratio $W/U = 1{,}5$.

The shallow refraction shooting cleared up the inhomogeneous build of the near-surface complex and furnished the fundamental types of the ground roll.

Well-logging data

At point "B" of the shallow-refraction profile a reverse-logging was carried out in a 25 m deep hole with constant charge (detonator) in order to determine the velocity curve and the transverse wave-velocity (Fig. 7).

The first arrival of the longitudinal wave raises no problem. The determination of the travel time of the transverse wave is problematic because of the small time-difference of the two waves and the reflections. Considering, however, the signal of the two seismometers (Z and H II), the arrivals can be picked, if somewhat uncertainly, either.

Both travel-time curves prove the high degree of inhomogeneity of the section and confirms the conclusions drawn from the refraction results. The upper, 9 m thick section is of comparatively great velocity: $V_P = 1900$ m/s; on the topmost part of it no transverse wave-arrivals can be marked. Penetrating, however, deeper, the arrivals can be separated and in the first phase a 400 m/s velocity can be calculated. Under this layer there is a layer of $V_P =$ $= 1120$ m/s average velocity (for longitudinal waves) consisting in fact, of a

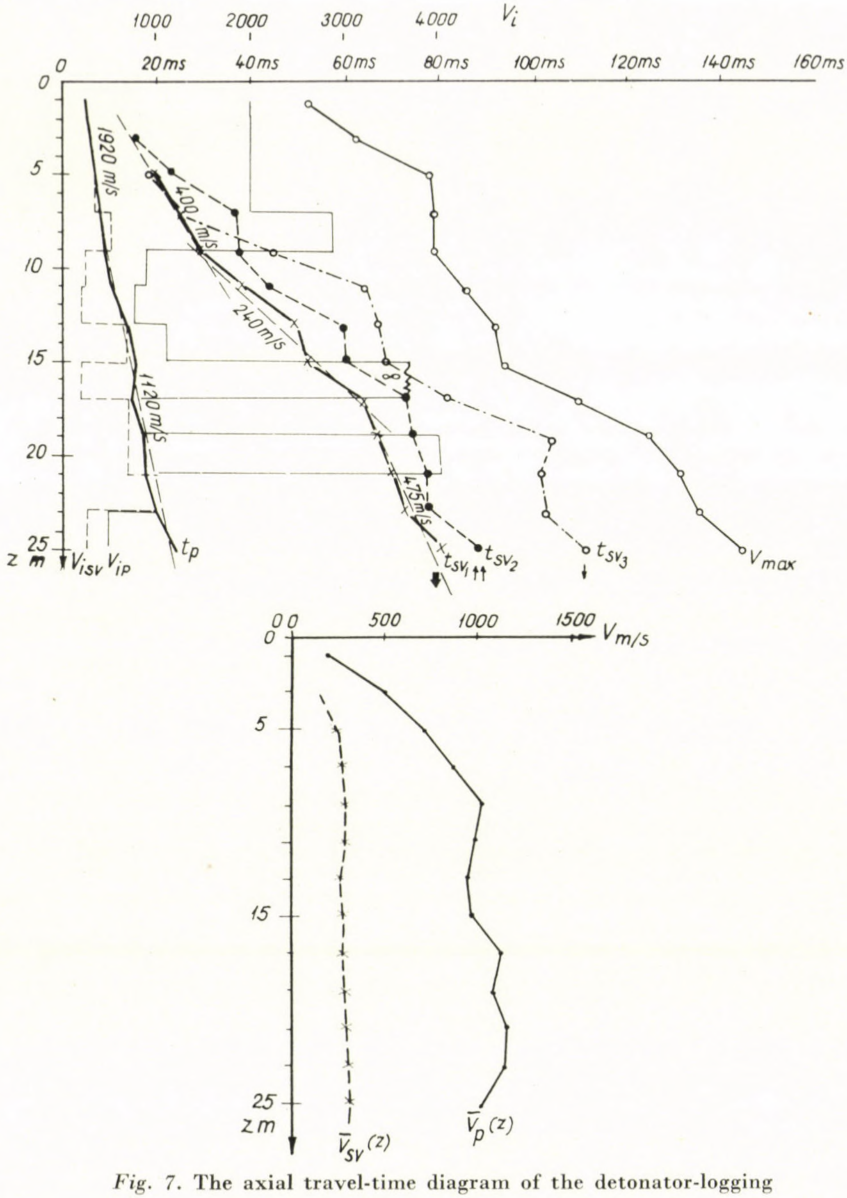


Fig. 7. The axial travel-time diagram of the detonator-logging

mixture of lower velocity embedding complex with thin high velocity inter-beddings. For the transverse waves, between 9 and 17 m $V_s = 240$ m/s; beneath it $V_s = 475$ m/s layer-velocity can be calculated.

The accuracy of the logging with respect to the transverse waves, can hardly be judged. In Hungary this is the first such experiment. WHITE and

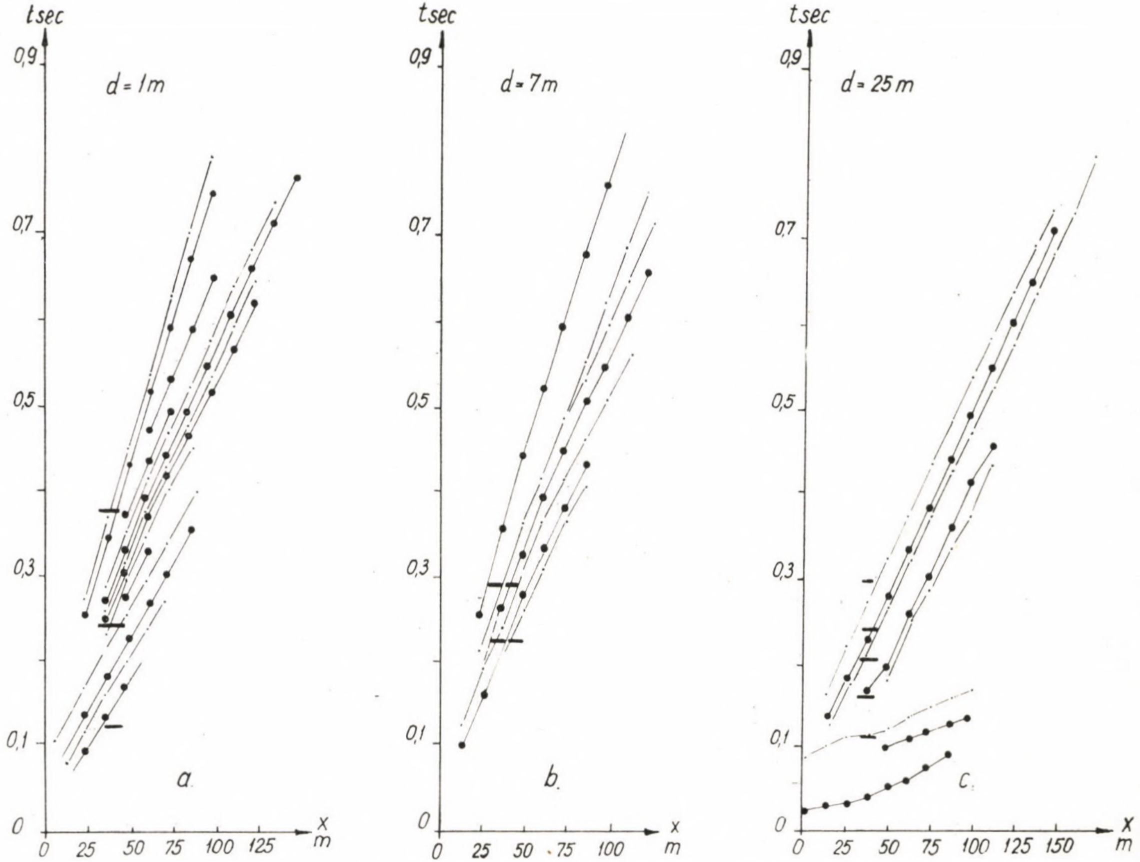


Fig. 8. The profile travel-time diagrams of the detonator-logging; shooting in 1—7—25 m

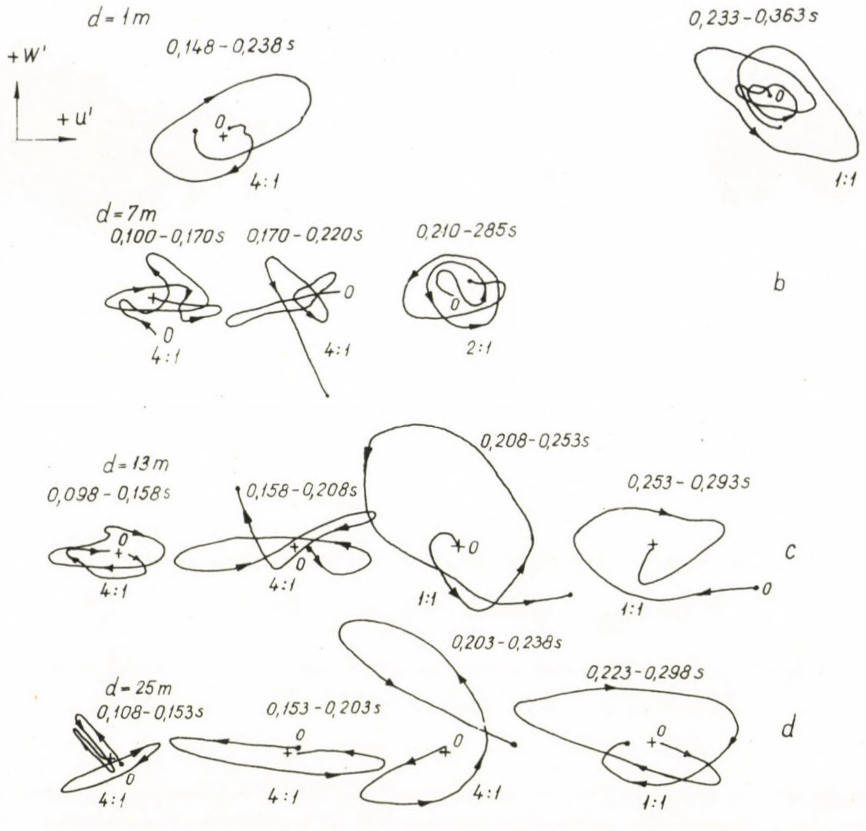


Fig. 9. The trajectories of the detonator-logging

SENGBUSH [69] reported such investigations, having stated that at shooting in holes (and with a charge not exceeding 0,5 kg) the tube wave or water pulse generates the transverse wave.

Keeping the spread steady during logging the horizontal travel-time curve was calculated; the lay-out of the horizontal seismometers offered means to determine the trajectories of the individual wave-groups (see Figs. 8, 9.; $x = 37{,}5$ m).

Shooting in $d = 1$ m (Fig. 8a) the diagram after the sound is curved, the apparent velocity varies between 162,5 and 262,5 m/s at the end of the section. Two wave-groups can be separated. The first — rather in the higher range — is of forward-rotating ellipse shaped, the great-axis subtending an angle of 65° with the vertical (this is probably a sound-vave modificated arrival); the second — in the lower range — is of backward rotating, 50—60° backward leaning trajectory (Fig. 9a). The apparent velocities are conform with those of the later arrivals of the shallow-refraction.

The shooting $d = 7$ m (i.e. in the upper layer of high velocity) gave likewise two wave-groups, but the intensity of the second, is very small (Figs 8b and 9b). The arrivals start motion in the horizontal plane, turning later into a nearly circular backward rotation.

The travel-time diagrams and trajectories of the shots $d = 13$ m and 25 m are very similar (Figs 8c and 9c). The apparent velocity in the group of great intensity varies between 225—250 m/s, i.e. slightly. The record of $d = 25$ m reveals at the start a wave-group of greater velocity and it is of more marked character than on other records. The wave-group of 225—250 m/s apparent velocity indicates a flat, nearly horizontal, forward rotating ellipse of the soil particle displacement.

Summing up the conclusions of the analysis of the near-surface complex, the following can be stated.

Both shallow refraction shooting and well-logging prove a velocity-distribution of the near-surface complex indicating a wave-guide. The parameters of the latter: for P waves: under a 9 m thick 1920 m/s layer a 1120 m/s one; for S waves: under a 9 m thick 400 m/s a 240 m/s one down to 17 m, further a 475 m/s one.

The trajectories of the wave groups in the profile are, both in the shallow refraction and in the well-logging, similar to those of the ground-roll, with the only difference that when logging, on the up-hole channel, a forward rotating trajectory follows a backward rotating one.

The interdependence between the wave-types and the near-surface geological pattern

The experiments reveal the following:

a) the apparent velocity of certain wave-groups increases with the distance;

b) the trajectory in the first two groups is linear, resp. forward rotating, in the third group it is backward rotating;

c) the character of the components (K_1—N phases) of the first two groups does not change substantially with the depth of the shot, while the amplitude of the third group rapidly changes with the depth of the source;

d) both shallow-refraction and well-logging data prove a velocity-distribution suggesting a wave-guide character in the near-surface complex.

The recognition of the transverse waves polarized in the vertical plane (henceforward: SV waves, or simply SV, for short) is provided by the displacement velocity trajectories (trajectories for short, as agreed).

The trajectories of the SV waves arriving to the free surface are defined by two parameters: the angle of emergence and the quotient of the V_P and V_S velocities of the topmost complex. Depending upon whether

$$j_0 \lesseqgtr \arcsin \frac{V_S}{V_P},$$

the trajectories will be different.

The *SV* trajectories were calculated by MEISSNER [48] and MALINOVSKAYA [45]. MEISSNER took the differences emerging from the change of the V_S/V_P, resp. the Poisson ratio (σ) into consideration. According to his calculations, at $j_0 = 45°$ the horizontal component is zero; in the range $j_0 = 0°—45°$, the rotation is always directed towards the source, i.e. from the right to the left; in the range $j_0 = 45°—90°$ from the left to the right, i.e. clockwise moving off from the source.

It was shown, likewise, that the critical angle determining the start of the elliptical motion decreases with the increase of the Poisson ratio, e.g. at $\sigma = 0{,}475$ j_0 will be around 20°.

Our individual wave-groups must be qualified in the terms of the abovesaid (in drawing the trajectories no phase-characteristics have been taken into consideration on the condition, that the phase-frequency spectrum of the arriving wave remains unchanged within one wavelet; if not so, it changes identically for both components).

Fig. 9 shows the trajectories of signals from detonator-logging at $x = 37{,}5$ m in differents depths.

It is revealed that (if without sound-wave) the motion starts in the horizontal plane then, together with an amplitude-increase, it turns continuously into the vertical, rotating from the right to the left, i.e. backwards. In the last phase, however, at least when shooting in 13 and 25 m, forward rotating motion is observed. The vertical motion due to 45° or 90° doesn't show up. Upon the channel in question, thus, *SV* waves were observed, the linear trajectories indicating the nearly vertically arriving waves, the backward rotating trajectories indicating waves arriving at $j_0 < 45°$ angle of emergence, the forward rotating ones indicating those of $j_0 > 45°$ angle of emergence.

On Figs 3 and 4 the more or less elliptical trajectory ($K_1—K_2—K_3$ and $M—N$ phases) horizontally (or nearly horizontally) starting and turning into the vertical is clearly recognizable. These phases represent such *SV* waves, as increase their angle of emergence with the time and the ray advances more and more towards the surface ($j_0 > 45°$).

Thus, the *SV* character of the waves is established by both shot-near and shot-far trajectories, moreover, by shallow-refraction trajectories (Fig. 6), too.

The characteristic features of the SV wave-guides

The turning into the vertical indicates a continuous variation of the angle of emergence, i.e. of the apparent velocity. The same is indicated by the curved travel-time diagrams, too, disclosing at the same time, likewise, the presence of a wave-guide.

According to BREKHOVSKIKH [12] every formation having a refraction index depending on the depth ($n(z) = V(z)/V_0$) can be regarded as wave-guide. In such cases the rays stepping out of the source under a great angle, return to the source in a distance determined by this angle, i.e. differently penetrating wave-groups, similar to the R_g and L_g phases of the seismology, come into being. This wave-type is well-known in our country; KILÉNYI [41] studied this question recently in details.

The characteristic features just enumerated offer a model which fairly approximates the genuine velocity-distribution and clears up, to a certain extent, the ground-roll mechanism.

This approximative model will be based upon the well proved velocity-function $V(z) = Az^{1/n}$. One of the advantages of this function is that it approximates rather well the rapid velocity-change, resp. the rapid gradient-decrease of the near-surface formations, for

$$\frac{dV(z)}{dz} = \frac{1}{n} A z^{1/n-1} . \tag{1}$$

Another advantage is that both n and A can be simply calculated [39,9].

Knowing the parameters n and A the maximum penetration depth of the wave

$$Z_{\max} = \frac{1}{A^n p^n} . \tag{2}$$

when the angle of the ray to the vertical is

$$\Theta = 90° . \tag{3}$$

In order to make the calculations easier, the following simplifications are suggested: the length of one cycle

$$X = n \pi^{1/2} z_{\max} \Gamma_x \tag{4}$$

where

$$\Gamma_x = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

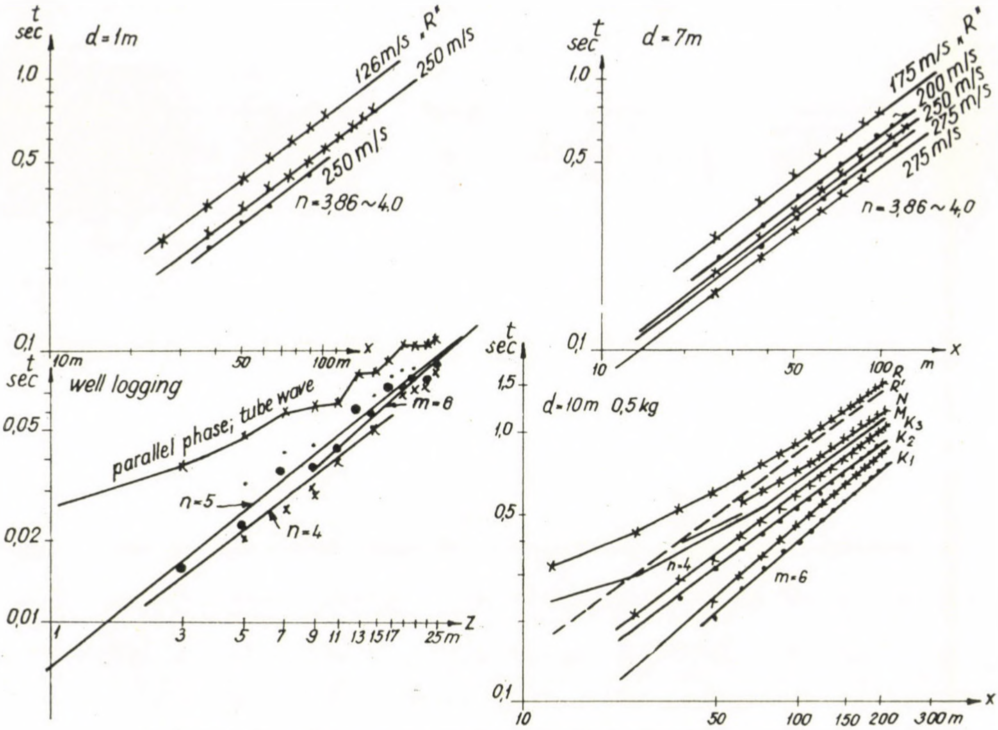


Fig. 10. Travel-time diagrams in logarithmic coordinate-system

the travel-time of one cycle

$$T = \frac{n\, \pi^{1/2}\, z_{\max}\, \Gamma_t}{V^x} \tag{5}$$

where

$$\Gamma_t = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$$

and V^x is the apparent velocity.

It comes from the wave-guide character that between x and t, further X and T the following relation exists:

$$x = NX \pm \frac{n}{A^n p^n} \int_0^{\Theta} \sin^n \Theta \, d\,\Theta \tag{6}$$

resp.

$$t = NT \pm \frac{n}{A^n p^{n-1}} \int_0^{\Theta} \sin^{n-2} \Theta \, d\,\Theta \tag{7}$$

where $N = 1, 2 \ldots$ etc., always a whole number. When shooting on the surface, the value of the integral is zero.

Out of surface and near-surface shootings one could obtain for n only values between 3,86—4,00 (Fig. 10). The value of the exponent is not influenced, as revealed by formulas (3) and (4), by multiplication. The value of A is, however, the function of the number of the multiplication. The condition $N =$ *whole number* can be met only by iteration. Performing the iteration for the three surface or near-surface travel-time curves the topmost formation can be characterized by the following velocity-function:

$$V_1(z) = 143 - 165\, Z^{1/4},$$

taking the mean value:

$$V_1(z) = 154\, Z^{1/4}.$$

The interval of the velocity-function is, however, questionable. It is a matter of fact, that the maximum penetration of the surface or near-surface shock-waves is no more than 7—8 m.

From shots deeper than 10 m, the phase K_1 is easily traceable. Putting the travel-time curve into a logarithmic coordinate system an exponent $n = 6$ is obtained.

For phase K_1, considering the conditional formulas, $A_2 = 187$/sec.

It must be understood that if two marked formations are present, the velocity-function obtained from the travel-time curve of the direct wave [9] differs most from the actual velocity-pattern in the very nearness of the boundary of the two formations; beneath or above it covers them rather neatly. Hence, out of surface or near-surface shooting, first of all, $V_1(z)$ can be determined controlled by the topmost formation; the $V_2(z)$ function obtained out of deeper shots, is controlled by the deeper velocity-pattern.

The travel-times of the K_2 and K_3 phases of deeper shots are characterized by an exponent $n = 4$. For both wave-groups the same velocity-function can be calculated if, taken (3) and (4) into consideration, in the first one a triple, in the other a fourfold multiple are assumed.

The interpretation of the MN wave-groups of the deeper shooting is much more difficult than that of the foregoing ones. At the end of the spread ($x = 212{,}5$ m) the apparent velocity varies between 225—250 m/s, the nearer values tend to 200 m/s. The travel-time curve cannot be, in log-log coordinate-system, approximated with a straight line, although in the linear system the curved character is clear. To determine the quality of this wave-group, two factors must be kept in mind.

a) out of a $d = 10$ m deep source no wave of $V^x = 225$—250 m/s apparent velocity can arise, since the penetration-depth of the waves is too little to reach the depth of the source, bound to be reached according to Snel's Law. The penetration depth of the 225 m/s is 4,7 m. While the former (the M's) depth can be assumed to be within the equivalent cavity, the latter is too small for it;

b) to have been generated in the depth of the source is objected even in the first M wave, by the fact that the travel-time diagram is curved also in the log-log system. The curved nature can easily be explained if assumed to have been created by a constant t_0 time [9]. By logarithming the formula

$$t = t_0 + \frac{n\,\pi^{1/2}}{A}\,\Gamma_t \left(\frac{x}{n\,\pi^{1/2}\,\Gamma_x}\right)^{\frac{n-1}{n}} \tag{8}$$

a parabola of higher order is obtained. Inscribing the formula in the form

$$t - t_0 = \frac{n\,\pi^{1/2}}{A}\,\Gamma_t \left(\frac{x}{n\,\pi^{1/2}\,\Gamma_x}\right)^{\frac{n-1}{n}} \tag{9}$$

a straight line must be obtained, dipping under the same angle as the hitherto calculated ones do.

All the above-said mean that *the wave-group containing the M—N phases arises out of a secondary source. The level of this source is the surface and the generator of this wave-group is, in the case of small charges, the so-called water-wave or tube-wave* [70], *in the case of the larger charges, the direct SV wave.*

The uphole-time t_0 is upon the first channel of the $d = 10$ m shooting 0,080—0,100 sec. Taking this time into correction, i.e. elevating the source up to the surface, a travel-time diagram corresponding to the near-surface formation is obtained.

Fig. 10 shows, among others, a few phases of the vertical detonator-logging travel-time diagram, referring to the SV waves. The first two phases can be approximated by straight lines, dipping under $n = 4$ and $m = 6$; the same as those obtained for horizontal travel-time curves. The respective two velocity-functions from the intercept-times:

$$V_1(z) = 185\, z^{1/4},$$

resp.

$$V_2(z) = 215\, z^{1/6}.$$

In consequence of the scattering of the arrival times, also a straight line of $n' = 5$ exponent can be produced allowing the calculation of the following velocity-function:

$$V'(z) = 179\, z^{1/5}.$$

Thus, the velocity of the medium calculated from logging, is apparently higher. This apparent contradiction can be, however, reconciled, taking the effect of the high-velocity beds and the substantial difference between the periods of the observed waves, into consideration. At detonator-logging signals in the range of 50—100 cps, at shallow-refraction and charges exceeding 0,5 kg, signals in the range of 10—20 cps were recorded. The high-frequency arrivals are more sensitive to the velocity distortion-effect of the thin beds, than the low-frequency ones.

The SV wave-group can be interpreted in the terms of the geometrical wave-optics (ray-path). Brekhovskikh [9; p. 121] draws the transition zone between the domain of the wave theory and the geometrical optics in the field of the angle of emergence, assuming that all surface-waves can be regarded as degenerated reflections of plane-waves [op. cit. p. 39.]. While, however, the wave-theory describes the image of the wave inhomogeneous medium, too, the geometrical optics provides X and T cycle parameters correctly only in cases

$$\alpha_{\lim} = (a \lambda_0)^{1/3} \tag{10}$$

resp.

$$\alpha_0 \gg (a \lambda_0)^{1/2},$$

where $$\alpha_0 = 90^0 + \Theta ; \quad \lambda_0 = \frac{1}{K_0} = \frac{v_0}{\omega_0} ; \quad \text{and} \quad a$$

is the depth-gradient of the refraction-index.

From the low apparent velocity arrivals of the SV wave-group the velocity-function $V = 154\ z^{1/4}$ can be derived. A disadvantage of this function that the starting velocity is zero, so the angle of emergence is always $\alpha_0 = 90°$. The error is, however, negligible, if the above criterion is calculated for a depth $z = 1$ m.

The depth-dependence of the refraction index may be written as

$$n(z) = \frac{V(z)}{V_0} ,$$

the gradient of which is

$$a = \frac{dn(z)}{dz} = \frac{1}{4} Z^{-3/4} \frac{A}{V_0}$$

that is

$$a = 0{,}25/\text{m}.$$

Taking a mean frequency of 15 cps and a starting-velocity of $V_0 = 154$ m/s of the arrivals, the limiting angle

$$\widehat{\alpha}_{\lim} = \left(0{,}25 \frac{154}{94}\right)^{1/3} = 0{,}74 .$$

Which means that the laws of the geometrical optics can be applied to all arrivals of greater grazing-angle. On Fig. 2 in the SV wave-group the lowest apparent velocity arrival can be observed around $V^x = 225$ m/s; the angle of emergence of the latter at $z = 1$ m is

$$\Theta_{1\,\mathrm{m}} = 43^\circ ;$$

the grazing angle

$$\alpha_{1\,\mathrm{m}} = 47^\circ \quad \text{and} \quad \hat{\alpha}_{1\,\mathrm{m}} = 0{,}81 ,$$

i.e. the lowest apparent velocity SV wave taken into account, can be interpreted in the simple terms of geometrical optics.

In summing up, we may state:

The first, high intensity group of the ground roll, composed of vertically polarized transverse waves, travels in a wave-guide. As to the individual components, the wave-guide is not the same.

The wave-guide of the first group (phase K_1) is characterized by a velocity function $V = 187\ z^{1/6}$ valid up to $z > 10$ m, that of the second group (phases K_2—K_3—M—N) can be described by the function $V = 154\ z^{1/4}$, valid in the range $0 < z < 20$ m.

The individual phases of the second group are generated in different sources, e.g. in $d = 10$ m the K_2—K_3 phases in the source itself, and the M—N phases upon the surface. To this group of the ground roll the rules of the geometrical optics can be applied, thus their interpretation becomes rather simple.

Another essential component of the wave-pattern is the Rayleigh-wave, which occurs in dependence of the depth of the source.

In the literature there is information about the dispersive and non-dispersive Rayleigh-waves [18]. The latter comes into being only if the generation takes place upon the surface of a (quasi) infinite, homogeneous half-space.

Tolstoy and Usdin [68], Ewing [18] and Brekhovskikh [12] have studied the dispersive properties of the symmetrical and antisymmetrical surface waves denoted by Kanai and Sezawa as M_1 and M_2 waves. Tolstoy and Usdin gave these M_1 and M_2 phases (which are nothing else than solutions of wave-equations) a physical meaning by qualifying them as symmetrical (M_1) and antisymmetrical (M_2) plate-vibrations. Any further variants of the dispersion-curves can be traced back to these two wave-types.

The backward-rotating and late arrivals of great periods of the surface and near-surface shootings give well-defined travel-time curves (Figs 3, 4, 6, 9a and b). The apparent velocity of the arrivals varies between 150—190 m/s with distance. A characteristic feature of the phase R is that its amplitude decreases with the depth of the source, contrarily to that of the former wave-groups.

The SV waves were earlier separated into two groups: the ones generated in the source, and the ones generated through the SV waves reflected from the surface. In fact, the same applies to the wave-group R as was pointed out for the phases M and N (Figs. 10 a, b, c), i.e. when shooting deeper, their travel-time curve takes, in a log-log system, a convex shape; one has to apply a correction $t = 0{,}080$—$0{,}100$ sec to straighten it. Phase R is a straight line on the

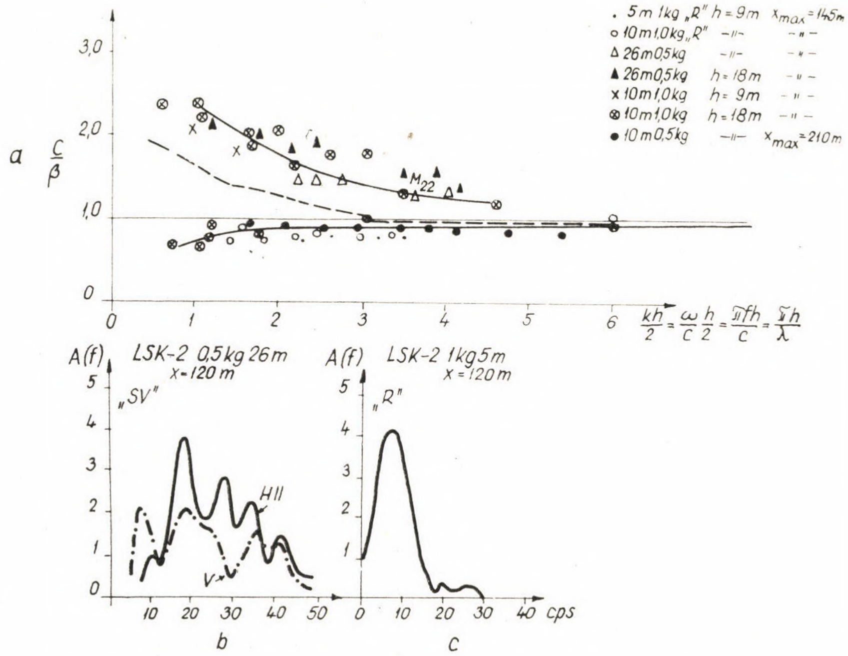


Fig. 11. Dispersion-curves calculated for phases M_{11}, M_{21} and M_{22}

travel-time curves of $d = 1$ m, $d = 7$ m and of the shallow refraction, dipping $n = 4$. In first approximation it can be asserted that the wave-group remains in that upper wave-guide which has a velocity-function of $V = 154\ z^{1/4}$. This upper, 9 m thick formation which is, in fact, a wave-guide of greater velocity (Fig. 7) can be replaced for the M_1 and M_2 wave-types by the following model [68].

$$\alpha = \overline{V}_P = 1100 \text{ m/s}$$

$$\beta = \overline{V}_S = 210 \text{ m/s}$$

$$\sigma = 0{,}35.$$

Regarding Fig. 11/a and the travel-time curves, the following can be stated:

Phase R corresponds to the Rayleigh phase of the M_{21} wave, namely, the wave-guide is 9 m thick, observing at 145 m distance ($d = 5$ m and 10 m).

Taking $d = 10$ m (charge: 0,5 kg), the penetration of the phase R exceeds the thickness $h = 9$ m ($V^x = 175$ m/s) and the calculated values approximate the theoretical curve only if a $h = 18$ m thickness is chosen.

Phases M_{22} come from the $h = 9$ m thick bed of high velocity and from the $h = 18$ m thick formation (Fig. 11 a). This is tested both by shallow-refraction and by detonator-logging. In the phase-velocity analysis the same arrival types can be separated as those by the ray-path analysis.

The mechanism of the ground roll

In the hole-shootings, in fact, two wave-groups have been separated. The first: a pure SV (eventually M_{22}) is generated in the source. The second of SV (eventually M_{22} and M_{21}) and Rayleigh phases is generated at the surface-impact of the direct SV wave (with small charges: water-pulse). Both groups travel in a wave-guide characterized by the transverse velocity pattern of the near-surface formation. No P waves play role in the ground roll group.

Consequently, in the ground roll mechanism, the transverse wave pattern of the medium and the way of generation are the most important. In the following, the circumstances of the generation are examined for both wave-groups.

The seismic shots are made in cylindrical bore-holes. When treating the mathematical problem of the wave-source, usually a uniform impact to the walls of a spherical cavity is assumed; thus, the wave travelling in the medium is of spherical symmetry, all values are independent of the angular coordinates, the shear-waves are missing, and only the radial component has a role [62, 63, 58, 54]. HEELAN [30] assumed a cylindrical charge and tri-directional pressure-, resp. strain-distribution.

If examining HEELAN's amplitude-functions, it becomes clear, that the amplitude of the SV and P displacements is independent of the shape of the pressure, resp. shearing strain, but not of the direction. Regarding the wall-pressure $P(t)$ (i.e. in case of P and SV waves the $F_1(\Phi)$ and $F_2(\Phi)$ coefficients) only, it can be seen that the P waves are horizontally polarized, while the maximum-value of the displacement-component of the SV waves subtends an angle of 45° with the vertical. Examining the displacement-amplitude coefficients $G_1(\Phi)$ and $G_2(\Phi)$ only, which denote the axial shearing strain $q(t)$, we find that the displacement of P waves is greatest along the axis Z, while that of the SV wave in the horizontal plane.

The Δ and A values denoting the dimensions of the cylindrical cavity define here the so-called equivalent cavity [62], a boundary, beyond which the medium, according to Hooke's Law, can be regarded as perfectly elastic. Examining the amplitude-coefficients in this view, we find that the displacement-amplitude is directly proportional with the dimensions of the equivalent cavity.

According to HEELAN the quotient of the energies of the P and SV waves:

$$\frac{E'_P}{E'_{SV}} = \frac{V_S^3}{V_P^3}\left(\frac{3\,V_S^2}{2\,V_P^2} + \frac{15\,V_P^2}{8\,V_S^2} - \frac{5}{3}\right) \tag{11}$$

In other words, if $\sigma = 0{,}25$, 60% of the energy is transported by the SV wave, remaining only 40% for the P wave.

This theoretical result was regarded by WHITE and SENGBUSH [70] as a proved one in view of the polarization of the SV waves, too. They had, however, to take the water-pulse, or tube-wave (as a strong transverse-wave source) into consideration to identify the theoretical wave-form with the observed one.

Thus, the mechanism of the ground roll generated at the surface can easily be explained. In a medium of velocity-gradient a 45° polarization of 60% (in our case, being $\sigma = 0{,}35$, 70%) of the energy involves the possibility of the generation of a guided wave-group of great energy: in our case phases K_1, K_2 and K_3 representing the upward ray. And *since the energy is concentrated in the surroundings of the 45°, the ways are provided for the greater part of the energy to reach the surface with an angle for which* $\Theta >$ arc sin $\frac{V_S}{V_P}$ (the greater velocity of the uppermost layer contributes to it, too); *such wave is reflected from the surface without conversion, resp. energy-loss.*

The other component of the wave-group is the M—N—R phase-group, which is, according to the diagrams, generated in the nearness of the source but upon the surface when the SV wave arrives there (using great charges, for with small charges the water-pulse obtains an important role).

Both the SV wave and the water-pulse are travelling upward, reflected on the intermediate boundaries and on the surface; on the latter they generate a new group of the guided waves. If the boundaries are perpendicular to the axis of the hole, the water pulse penetrates, resp. is reflected, according to the rules of the perpendicular incidence. A boundary of great velocity contrast substantially reduces the amplitude of the surfacing water-pulse.

The SV or water-pulse impacts upon the surface with large strength. This concentrated (point-like) force, reaching the surface near-vertically, generates P and SV wave. If this wave's angle of emergence $\Theta >$ arc sin V_S/V_P, the transverse wave starts with a frequency-independent amplitude though, but with a phase-shift as compared to the incident wave. And *since this wave henceforward keeps this angle, it is always reflected from the surface with no conversion, i.e. without any energy-loss.*

Our experiments support the above statement with some data.

Shots were made in 5—10 and 25 m depth with 1 m, 2 m and 4 m long concentrated charges in order to decide the dependence of the energy of the ground-roll from $F_2(\Phi)$ and $G_2(\Phi)$, i.e. from the cubical extent of the equivalent cavity and from the cylinder-jacket.

The concentrated charge gave the slightest surface wave energy, which — in a form of

$$\sum_{i=0}^{n} w_i'^2 \Delta t$$

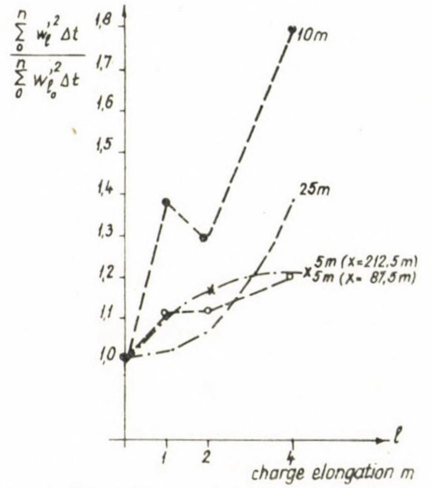


Fig. 12. The effect of the elongation of the charge upon the intensity of the ground roll (w' is the velocity-amplitude in mm in the direction Z)

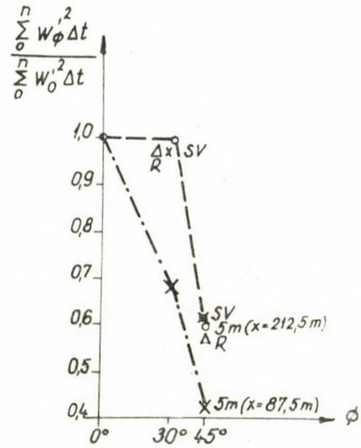


Fig. 13. The effect of the inclination of the hole upon the intensity of the ground roll

can be expressed [32] (Fig. 12), where w' is the displacement velocity amplitude in mm read off on the vertical channel. Summing by 10 ms for the entire wave-group, but only for the vertical channel, and referring the results to the vertical channel-energy of the concentrated charge, the apparent velocity of the individual wave-groups remained unchanged. Thus, this so-called energy-measure correctly denotes the change of the energy of the ground roll on the vertical channel. The figure referred to above clearly reveals that the increase of the elongation of the charge increases the intensity of the ground roll.

On the effect of the charge-orientation we collected some data through 5 m deep shot, but in a reverse way, i.e. charges of 1 m elongation were placed in bore-holes slanting at 30° and 45°. In the hole slanting at 45°, the $x = 212{,}5$ m channel carried 60%, the $x = 87{,}5$ m channel 43% of the ground roll energy generated by the concentrated charge on the vertical channel. The results of the hole slanting at 30° are not so clear, for at $x = 215{,}5$ a mere 1—2% decrease, at $x = 87{,}5$ m, however, a 31% decrease was observed (Fig. 13).

An interesting result was obtained through analysing the amplitudes of the detonator-logging (in Fig. 14 the $x = 1$ m vertical channel first arrival of the P and the maximum water-pulse amplitude is demonstrated in a linear coordinate-system; further w' and u' maximum water-pulse velocity amplitudes are demonstrated in a semi-logarithmic coordinate system).

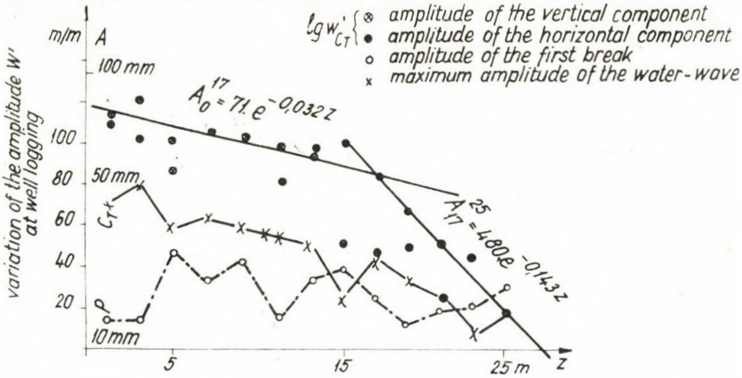


Fig. 14. The variation of the wave amplitudes of the detonator-logging with the depth

Between the amplitude-trends of the P waves and of the water-pulse no or poor correlation can be found. The water-pulse amplitudes demonstrated in a semi-logarithmic system can be approximated by two "straight lines". These are:

$$A = 71 \exp(-0{,}032\, z) \qquad 0 < z < 17 \text{ m} \tag{12}$$

and

$$A = 480 \exp(-0{,}143\, z) \qquad 17 \text{ m} < z < 25 \text{ m} \tag{13}$$

With regard to the formula

$$P = \varrho\, c_T\, w'$$

denoting the relation between pressure and displacement in fluids (where ϱ is the density of the fluid, c_T is the velocity of the water-pulse and w' is the vertical displacement velocity) the above functions contain information about the "reflexion loss" in the first place. The change between the two functions is attached to the several times mentioned interbeddings of high velocity.

The results support the statements about the character of the two sources, namely:

— an increase of the elongation of the charge with a bulk left untouched the intensity of the ground roll increases;

— the intensity of the ground-roll is rather sensitive to the angle between the vertical and the axis of the charge: at 45° the intensity is reduced by 40—50%;

— the intensity of the ground roll originated in a surface source is the function of the charge-depth. The hard thin interbeddings of high velocity substantially reduce the energy of the upward travelling pulse.

The dynamical characteristics of the individual wave-groups

To a correct planning of the seismic set-ups the essential dynamical parameters of the signals and noises must be known.

These are the following: the duration of the wave; the frequency of the wave, the change of the latter with the charge and the depth of the source; the attenuation of the individual wave-groups with the distance, resp. with the depth of the shot.

The duration of a water-group is determined, in the first place, by the parameters of the wave-guide, i.e. its velocity distribution, resp. the h thickness of it.

A simple relation is attained if following the below considerations:

a) Within a given distance x one can observe only such waves as are the N whole number multiples of the length of one cycle. The same refers to the time t of observation, i.e.

$$x = NX; \quad \text{and} \quad t = NT.$$

b) The maximum depth of penetration, the minimum number of cycles and, thus, the maximum apparent velocity is limited by the thickness h of the wave-guide, i.e., taking (4) and (5) into consideration,

$$x = NX = N_{\min}\, n\, \pi^{1/2}\, Z_{\max}\, \Gamma_x, \tag{14}$$

and

$$Z_{\max} = \frac{x}{N_{\min}\, n\, \pi^{1/2}\, \Gamma_x} \le h, \tag{15}$$

yielding the numerical value of $N_{\min}$.

The penetration-depth of the wave arriving at a distance x with maximum cycle number N is

$$Z_{\min} = \frac{x}{N_{\max}\, n\, \pi^{1/2}\, \Gamma_x} > \emptyset. \tag{16}$$

Expressing the arrival-times in the same way, the relations

$$t_{\min} = N_{\min} T = \frac{N_{\min}\, n\, \pi^{1/2}\, \Gamma_t\, Z_{\max}}{V^x_{\max}} \tag{17}$$

$$t_{\max} = N_{\max} T = \frac{N_{\max}\, n\, \pi^{1/2}\, \Gamma_t\, Z_{\min}}{V^x_{\min}} \tag{18}$$

are obtained.

The duration of the wave-group at a distance x from the source, is

$$\Delta t = t_{\max} - t_{\min} = n\,\pi^{1/2}\,\Gamma_t \left(\frac{N_{\max} Z_{\min}}{V^x_{\min}} - \frac{N_{\min} Z_{\max}}{V^x_{\max}} \right) \tag{19}$$

Deriving from (15) and (16) the values $N_{\max}\,Z_{\min}$ resp., $N_{\min}\,Z_{\max}$, for the duration of the wave-group the term

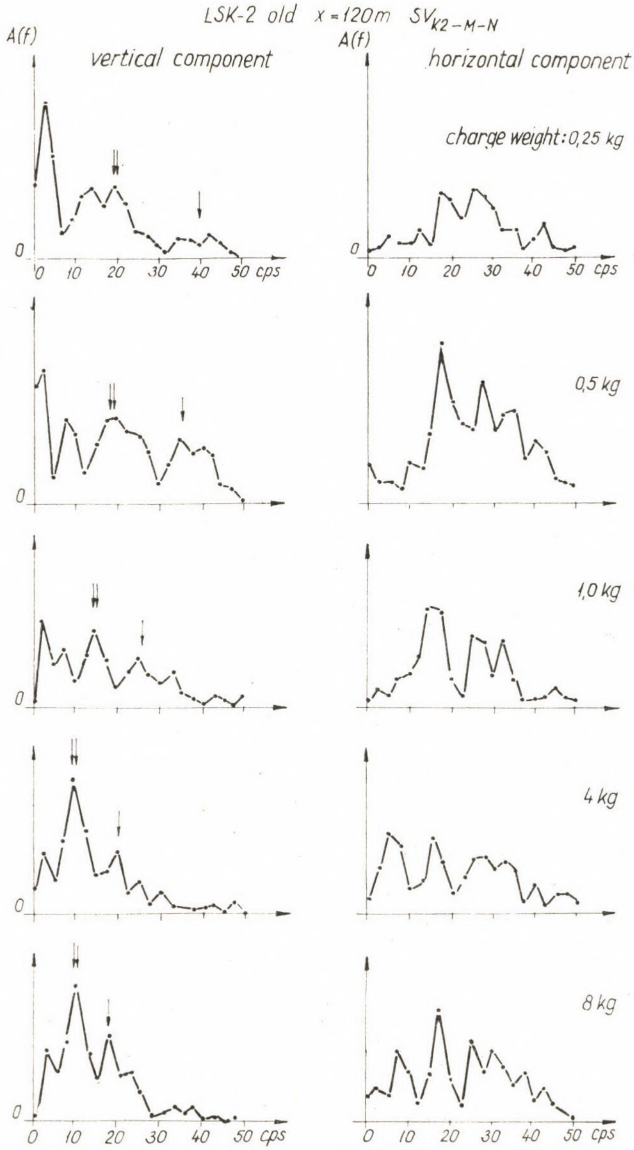


Fig. 15. Ground roll spectra for varying charge

$$\Delta t = x \frac{\Gamma_t}{\Gamma_x} \left(\frac{1}{V^x_{\min}} - \frac{1}{V^x_{\max}} \right) \tag{20}$$

will be obtained, where $\frac{\Gamma_t}{\Gamma_x}$ can be written in the form $\frac{n}{n-1}$.

If the apparent velocity V^x in the topmost complex lies between 150 and 300 m/s and the gamma values are $\Gamma_t = 0{,}886$; $\Gamma_x = 0{,}605$, the duration of the wave-group, together with phase R, is $t = 0{,}94$ sec at $x = 212{,}5$ m.

This is, however, only an approximation of the observed values, since the source differs according to the individual wave-types.

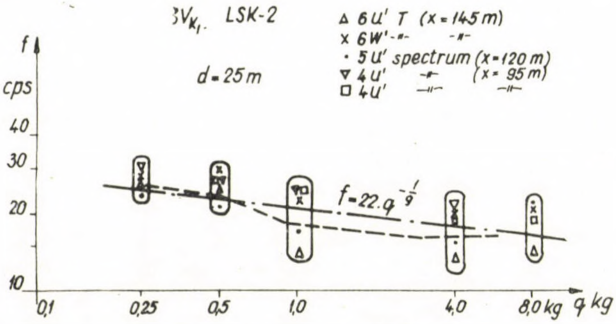


Fig. 16. The variation of the frequency of phase $SV—K_1$ with the charge

In case of several complexes of different velocity-patterns the sum of the partial durations must be taken into account.

The amplitude-frequency spectrum of the wave-group is formed by those of the components. In the foregoing, in fact, phases K_1, K_2—K_3, M—N and R were determined, the sum of their spectra makes the spectrum of the entire wave-group. The spectra of the individual wave-components, again, depend on three essential factors. The first and most important one is the process in the source itself: the width and amplitude of the starting pulse. The second is the velocity-distribution of the formation involved; the third is the thickness of the individual layers.

The velocity-amplitude spectrum, resp., basic-period of the individual wave-groups can be influenced substantially, with the weight of the charge and less with the shape of the charge.

The effect of charge weight was examined in a 25 m deep hole, with shootings of 0,25, 0,5, 1,0, 4,0, and 8 kg charges (Fig. 15).

The shift of the spectrum-amplitudes towards the low-frequencies is conspicuous chiefly on the vertical channel. It can be observed, in fact, on the horizontal channel, too, but on the latter the spectrum is always more clear-cut and wider [8].

The individual waves, resp. wave-groups can be selected out of the spectra only roughly, hence the interpretation requires the determination of the quasi-periods and the separate analysis of the individual wave-groups, too.

Fig. 16 shows the variation of the peak-frequency of the wave-group SV_{k_1}. This is a deep-penetrating wave-group, thus, the analysis was carried out upon the H II channel. The interrelation of the charge and peak-frequency can be written in the form

$$f \cong 22\, q^{-1/9}\,,$$

where q is the weight of the charge in kg, f the peak-frequency of the spectrum.

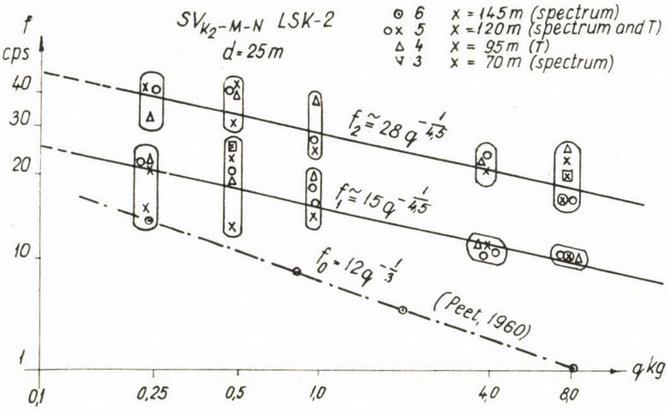


Fig. 17. The variation of the frequency of phases $SV—K_2—K_3—M—N$ with the charge

Fig. 17 shows the analysis of the phases $K_2—M—N$ of the wave-group SV. There are two different frequency-intervals. Approximately the following relations come to hand:

$$f_1 \cong 15\, q^{-1/4,5}$$

$$f_2 \cong 28\, q^{-1/4,5}$$

According to PEET [54], the value of n varies between $^1/_2$—$^2/_3$. The variation of the charge can be utilized, consequently, in shifting the frequency-range. This is rather important, for the signal, too, is similarly ranging from 25 to 35 cps, as a rule. Through the increase of the charge, the frequency-spectrum of the ground roll can be shifted towards the low frequencies.

The dependence of the amplitude-frequency spectrum of the ground roll from the depth of the shot is somewhat more complicated.

The parameters of the SV_{k_1} wave-group are shown on Fig. 18. The approximating function is

$$f_1 \cong 12{,}5\, d^{1/6}\,,$$

where d is given in meters.

This function for some frequencies of the SV K_2—K_3—M—N and R phases is

$$f_2 \simeq 6\, d^{1/2,5}$$

$$f_3 \simeq 2{,}1\, d^{1/2,5}$$

espectively (Fig. 19).

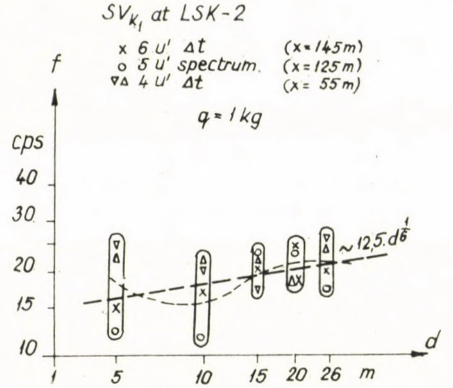


Fig. 18. The variation of the SV—K_1 peak-frequency with the depth of the charge

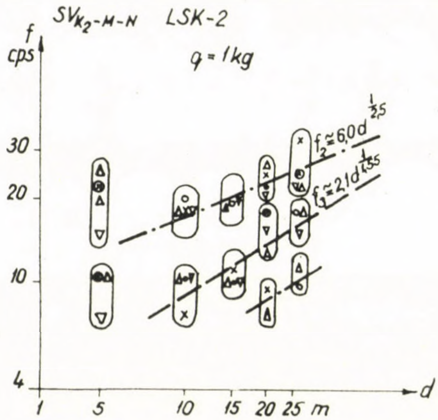


Fig. 19. The variation of the frequency of phases SV—K_2—K_3—M—N with the depth of the charge

These relations are valid, however, only if $d \geq 5$ m, for — in consequence of the high-velocity interbeddings — with shots shallower than 5 m, arrivals of higher frequencies were observed. The phenomenon similarly occurred in the detonator-logging, too, but because of the scattered nature of the data, not even approximative relation can be established.

The spectrum of the phase R remains, at various depths and within the resolving power of the analysis, nearly constant. The amplitude-variation is, however, substantially greater (Fig. 20).

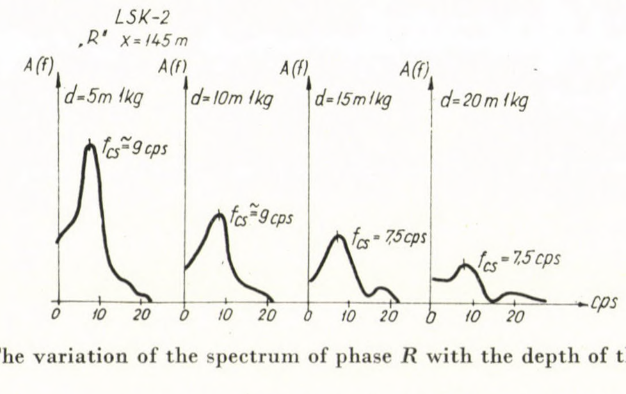


Fig. 20. The variation of the spectrum of phase R with the depth of the charge

The *absorption coefficient* of the observed waves depends on the character (P or S) of the waves, expressed by the geometrical factor, too. Two ways offer themselves to determine this parameter: the velocity-amplitude — distance relation [34, 38] and the velocity-amplitude frequency spectrum [35]. The accuracy of the calculations depends on the distance and on the interferences. The K_3 and R phases of Fig. 3 are more or less favourable from this point of view (although, because of the scattered amplitudes a simple smoothing was indispensable).

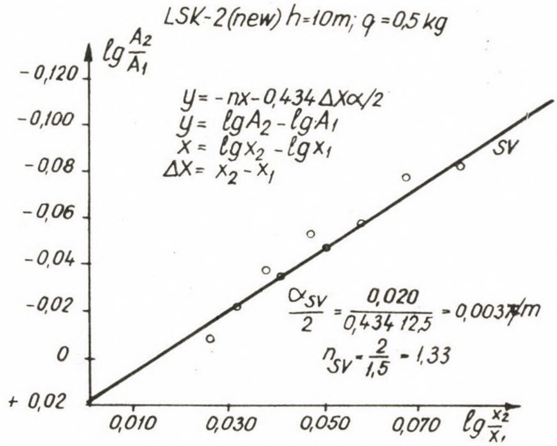


Fig. 21. The determination of the absorption coefficients of the phase SV—K_3

The first type of calculations can be carried out by an equation-system developped from the relation

$$A_i = x_i^{-n} \exp\left(-\frac{\alpha}{2} x_i\right), \tag{21}$$

where n is the geometrical factor and α is the absorption coefficient.

Fig. 21 shows the calculated values; the result is

$$\alpha = 0{,}0074/\mathrm{m}$$

$$n = —1{,}33$$

The absorption coefficient is rather small according to MEISSNER [48], it is, for the SV wave, $\alpha = 0{,}01—0{,}03/\mathrm{m}$. HOWELL and BUNDENSTEIN [32] published for the coupled wave, which is in character alike, a value of $\alpha_B = 0{,}033/\mathrm{m}$ ($\alpha_B = 0{,}011/\mathrm{ft}$).

The geometrical factor was calculated by HOWELL and BUNDENSTEIN [32] for the coupled wave as $n = (—1{,}33) - (—4{,}4)$. This wave was qualified by them as surface wave, although this value-range contradicts to it, since a value of $n = -1$, out of energy measure, and a value of $n' = -1/2$ ought to have offered themselves in case of a surface wave. These data and results testify, at the same time, for the body-wave character of the SV.

For phase R

$$\alpha = 0{,}0074/\mathrm{m}$$

$$n = -1{,}2$$

This calculation is based, however, upon rather scattered data. The difference, as compared to those in literature [53], is two orders of magnitude. The cause is, in all probability, the material difference.

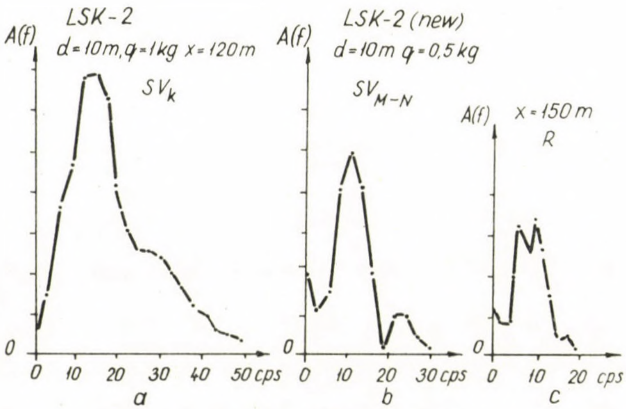


Fig. 22. Velocity amplitude spectra

The geometrical factor n is greater than 1/2, probably for the reason, that in the nearness of the shot-point the surface wave character of the phase R is uncertain, it can be interpreted even in the terms of the ray-path method [32].

It is a condition of the calculations from the amplitude-spectrum, that the absorption-coefficient should be in a linear relation with frequency, i.e.

$$\frac{\alpha}{2} = \varkappa f.$$

If this condition is fulfilled [35], then the relation

$$\bar{\vartheta} = \ln \frac{\vartheta a\,(f)}{\vartheta a\,(f_0)} - 2 \ln \frac{f}{f_0} = -\,(f - f_0) \sum_{i=0}^{n} r_i \varkappa \tag{22}$$

is obtained, where $\vartheta_a(f)$ is the spectrum-amplitude; $\vartheta_a(f_0)$ is the spectrum reference amplitude; r_i is the length of the ray.

Fig. 22 shows three spectra, Fig. 23 the result of the tranformation.

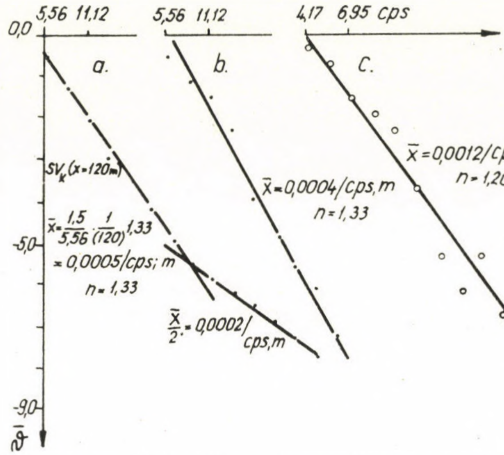


Fig. 23. Calculation of the absorption coefficient from the spectrum

Considering the previously calculated geometrical factor, too, for phase SV_{k_1},

$$\varkappa_{SV_{k_1}} = 0{,}0005/\mathrm{m,\ cps}$$

resp. for peak-frequency 14 cps

$$\alpha_{SV_{k_1}} = 0{,}014/m$$

for phase SV_{MN},

$$\varkappa_{SV_{MN}} = 0{,}0004/\mathrm{m,\ cps}$$

resp. for peak-frequency 12 cps

$$\alpha_{SV_{MN}} = 0{,}0096/m$$

for phase R

$$\varkappa_R = 0{,}0012/\mathrm{m,\ cps}$$

resp. for peak-frequency 7,5 cps

$$\alpha_R = 0{,}018/m\,.$$

Comparing the results of the two calculations, it is seen that while the phase SV_{MN} of the arrivals is of nearly identical value with the phase SV_{K_3} ($\varkappa_{SV_{K_3}} = 0{,}0074/\mathrm{m}$), the phase R shows a twofold difference. If the geometrical factor is negliged, the difference increases.

Summing up: it can be stated that

— the duration of the ground roll at a given distance can be calculated if the exponent determining the velocity-distribution and the maximum and minimum apparent velocity are known;

— the amplitude-frequency spectrum of the individual ground roll components depends on the charge; by increasing the charge the spectrum can be shifted towards the low-frequency range;

— the amplitude-frequency spectrum of the individual ground roll components depends on the depth of the charge; within the same formation the spectrum widens and shifts towards the higher frequencies;

— the body (SV) wave character of the individual ground roll components is supported by the value of the geometrical factor, too;

— the value of the absorption-coefficients is identical for the individual components in order of magnitude.

Conclusions

The aim of this work has been to clear up the generation of the ground roll in the area investigated (see Introduction), but also some general conclusions can be drawn.

The author intended to answer four such groups of questions upon which a correct and effective filtering theory can be established.

The ground roll fundamentally comprises two wave-types: the first and of highest intensity is the vertically polarized transverse wave, its duration being within the (commonly used) 200 m half spread 0,7—0,8 sec; the second, of lower intensity, is the Rayleigh wave containing one, eventually two cycles.

The first group (SV) travels in wave-guides. The wave-guide is different for the individual components:

— the wave-guide of the first group (phase K_1) can be characterized by a velocity-function $V = 187\, z^{1/6}$, valid in the range $z < 10$ m;

— that of the second group (phases K_2—K_3—M—N) can be characterized by a velocity-function $V = 154\, z^{1/4}$, valid in the range $0 < z < 20$ m.

The components of the SV group of the ground roll are generated in consequence of the transverse velocity distribution of the near-surface complex, from different sources:

— phases K_1—K_2—K_3 are generated in the point of the explosion;

— phases M—N are generated by the reflection of the near-vertical SV wave from the surface (in the case of small charges, the water-pulse, too, gets some role).

To the SV group of the ground roll the laws of geometrical optics can be applied, their interpretation becomes, thus, more simple.

The second group of the ground roll (phase R) corresponds to the Rayleigh phase of the M_{21} wave-modification. The penetration depth of this phase increases, in the interval studied, with the distance. It is generated in a surface source similarly to the M and N phases of the vertically polarized transverse wave-group.

The essential parameters of the ground roll mechanism are the following:

— SV waves generated by cylindrical charge are 45° oriented;

— the SV waves in the near-surface layers, because of the great Poisson ratio ($\sigma > 0{,}25$), resp. the great V_S—V_P velocity-difference, are reflected from the surface without conversion even at small angles of incidence ($\sim 10°$);

— when the axial uphole travelling SV wave of great intensity (water-pulse) is reflected from the surface, P and SV waves are generated;

— in a loose sedimentary formation, when having shot in a cylindrical cavity, the greater part ($\sim 70\%$) of the explosion energy is transported by the SV, the smaller part ($\sim 30\%$) of it, by the P wave;

— the intensity of the components originated in the surface source (phase R, in the first place) is a function of the depth of the charge; a great part of the vertically travelling SV wave is reflected on the thin hard inter-beddings and the intensity of the surface-generated group becomes reduced.

The dynamical parameters of the ground roll components;

— the duration of the ground roll is determined by parameters of the wave-guide;

— the velocity amplitude frequency spectrum of the ground roll components depends on the charge; by increasing the charge the ground-roll spectrum can be shifted towards the low-frequency range;

— the spectrum of the wave-group depends, further on the place of the charge; within the same complex, when increasing the depth, the spectrum widens and shifts towards the higher frequencies;

— the value of the absorption coefficients is identical in order for the individual components;

— the geometrical factor is, in both wave-groups, greater than the unit. The experimental results obtained in different areas of the Great-Plain and on the Cserehát rolling-country (Hernád-valley) are identical in character with those described in this paper, namely, one can determine the SV and Rayleigh components and the wave-guide parameters.

The reported investigations furnished results which are applicable in the planning of the patterns and grouping in up to-date seismic prospectings. Such are:

— the possibility to determine the duration of the ground roll from place to place, from group to group;

— the possibility to control the amplitude-frequency spectrum of the ground roll by changing the quantity and the depth of the charge;

— the exact terms of the attenuation of the ground roll with the distance.

The quintessence of our study is, — and this is supported by the bibliography of the theme, too, — that the ground roll is generated in the near-surface complex, its character is determined by the latter, either; it is, however, primarily no surface wave, but a *SV* type body wave travelling in a wave-guide.

*

The author is indebted to those persons or institutions who supported the fundamental experiments of this paper: I. Polcz and B. Ráner research associates, the Management of the "Roland Eötvös" Geophysical Institute, the Management of the Central Geological Board, The Management of the Seismic Survey of the National Oil and Gas Trust.

REFERENCES

1. Acheson, C. H.: The correction of seismic time maps for laterial variation of velocity beneath the low velocity layer. *Geophysics*, 1959.
2. Allen, E. S.: Six place tables. McGraw-Hill, 1947.
3. Angenheister, G.: Fortschreitende elastische Wellen in planparallelen Platten. *Gerlands Beiträge zur Geophysik*, 1950. 61, 54.
4. Anstey, N. A.: Modern technique in seismic reflection recording. *Geophysical Prospecting*, 1957.
5. Ádám, O.: Egyes DNY dunántúli területek némaságának okai (The reasons of the NR nature of some areas in SW Transdanubia). *Geofizikai Közlemények*, 1954.
6. Ádám, O.: Jelentés a Nagykanizsán 1960. VIII. 9—20. között végzett kísérleti mérésekről (Report on the experimental measurements in the vicinity of Nagykanizsa). ELGI, 1960.
7. Ádám, O.: Szeizmikus felvételek frekvenciaanalízise (Frequency analysis of seismic records). *Geofizikai Közlemények*, 1963.
8. Ádám, O.: Szeizmikus felszíni zavarhullámok (ground roll) dinamikai vizsgálata. (A dynamical test of the ground roll). *Magyar Geofizika*, 1964.
9. Ádám, O.—Sz. Kilényi, É.: Közelítő sebességfüggvény meghatározása refrakciós menetidőgörbékből. (Approximative velocity function from refraction travel-time diagrams). *Geofizikai Közlemények*, 1963.
10. Banta, H. E.: A refraction theory adaptable to seismic weathering problems. *Geophysics*, 1941.
11. Bisztricsány, E.—Kiss, Z.—Molnár, K. : Robbantással keltett felületi hullámok vizsgálata. (Analysis of explosion-generated surface waves). *Magyar Geofizika*, 1964.
12. Brekhovskikh, L. M.: Waves in layered media. Academic Press, 1960. New York and London.
13. Dobrin, M. B.: Submarine geology of Bikini lagoon as indicated by dispersion of waterborne explosion waves. *Bulletin of Geological Society of Amerika*, 1950.
14. Dobrin, M. B.: Dispersion in seismic surface waves. *Geophysics*, 1951.
15. Dobrin, M. B.—Lawrence, Ph. L.—Sengbush, R.: Surface and near-surface waves in the Delaware Basin. *Geophysics*, 1954.
16. Don Leet, L.: Earth Waves. Cambridge, Massachusetts. Harvard University Press, 1950.
17. Egyed, L.: A Föld fizikája. (Physics of the Earth). Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.
18. Ewing, W. M.—Jardetzky, W. S.—Press, F.: Elastic Waves in Layered Media. McGraw-Hill, 1957.
19. Förtsch, O.: Untersuchungen von Biegewellen in Platten; Messung ihrer Gruppen und Phasengeschwindigkeit. *Gerlands Beiträge zur Geophysik*, 1950. 61, 54.
20. Gálfi, J.: A levegőben robbantás módszerének alkalmazása a hazai szeizmikus kutatásban (Air-shooting in the Hungarian seismic prospectings). *Geofizikai Közlemények*, 1952.
21. Gálfi, J.—Stegena, L.: Reflexiós szűrési eljárások és kritikai vizsgálatuk (Seismic filtering and its critical analysis). Manuscript, 1959.
22. Golzman, F. M.—Kalinyina, T. B.: A frekvencia analízis és szintézis egyszerű módszerei és alkalmazásuk néhány geofizikai feladat megoldásához (Simple methods of the frequency-analysis and synthesis, and their application to some geophysical problems). *Prikladnaja Geofizika*, Moszkva, 1958.
23. Голзман, Ф. М.: Частотная теория группирования сигналов. *Известия Академии Наук СССР*, 1960. *Серия Геофизика*, 6.

24. GOGUEL, J. M.: Seismic refraction with variable velocity. *Geophysics*, 1951.
25. GUPTA, I. M.—KISSLINGER, C.: Model study of explosion generated Rayleigh waves in a half space. *Bulletin of Seismological Society of America*, 1964.
26. GUPTA, I. M.: Dispersion of body waves in layered media. *Geophysics*, 1966.
27. Гурвич, И. И.—Чао-Тхун: О зависимости амплитуд сейсмических колебаний от веса заряда. *Разведочная и Промисловая Геофизика*, 1962.
28. Гурвич, И. И.—Номоноков, В. П.: Сейсморазведка. Недра, Москва, 1966.
29. HAGEDOORN, I. G.: In pursuit of the errand seismic pulse. *Geophysical Prospecting*, 1962.
30. HEELAN, P. A.: Radiation from a cylindrical source of finite length. *Geophysics*, 1953.
31. HOLZMAN, F. M.: On the experimental analysis of interferences and of the reliability of the results of grouping of signals. *Bulletin Academy of Sciences USSR*. 1961. *Geophysics Series*, 12.
32. HOWELL, B. F.—BUNDENSTEIN, D.: Energy distribution in explosion generated seismic pulses. *Geophysics*, 1955.
33. HOWELL, G. L.—NEUENSCHWANDER, E. F.—PIERSON, A. L.: Gulf Coast surface waves. *Geophysics*, 1953.
34. HOWELL, B. F.: Ground vibrations near explosions II. Earthquake Notes 1957, 28, 4.
35. HUANG, JEN, HU: A szeizmikus hullám frekvencia-spektrumáról (The frequency spectrum of the seismic wave). *Geofizikai Közlemények*, 1961.
36. JOLLY, B. N.: Investigation of shear waves. *Geophysics*, 1956.
37. JÓSA, E.: Jelentés a Nagyalföldön végzett kismélységű geoelektromos ellenállásmérésekről (Report on the shallow geoelectic resistivity-measurements on the Great-Plain). Manuscript, 1964.
38. Карус, Е. В.: Поглощение упругих колебаний в горных породах при стационарном возбуждении. *Известия Академии Наук, СССР, Сер. Геофизическая*, 1958. 4.
39. KAUFMAN, H. V.: Velocity functions in seismic prospecting. *Geophysics*, 1953.
40. Кефели, А. С.: Изучение скоростей продольных и поперечных волн в рыхлых плиоценово-четвертичных отложениях рудного алтая. *Геология и Геофизика Академии Наук СССР. Сибирское отделение* 1964.
41. SZ. KILÉNYI, É.: A refrakciós későbbi beérkezések felhasználása a gyakorlati szeizmikus kutatásban (Utilization of refraction later arrivals in seismic prospecting). *Geofizikai Közlemények*, 1964.
42. KISSLINGER, C.: Observation of development of Rayleigh type waves in the vicinity of small explosions. *Journal of Geophysical Research*, 1959.
43. LÁNCZOS, C.: Applied Analysis. Prentice Hall, 1956.
44. LUECKE, E. J.: Experimental dependence of the energy of seismic waves on the explosive conditions. *Bulletin-Academy of Sciences, USSR. 1958. Geophysics Series, 2.*
45. MALINOVSKAYA, L. H.: The dynamic features of totally reflected transverse waves. *Bulletin Academy of Sciences USSR. 1958. Geophysics Series, 2.*
46. MASON, G.: Small scale field investigation of motion near the source. *Geophysical Prospecting*, 1957.
47. MÁFI Síkvidéki Kutató Osztály: Jelentés az 1964—65. évi alföldi munkálatokról (Report on the fieldwork on the Grat-Plain in 1964—65). Manuscript, 1965.
48. MEISSNER, R.: P and SV waves from uphole shooting. *Geophysical Prospecting*, 1965.
49. NIELSON, K. L.: Methods in Numerical Analysis. The Macmillan Company, 1956. New York.
50. NUTTLI, O.: The effect of the Earth's surface on the S wave particle motion. *Bulletin of Seismological Society of America*. 1961.
51. OKGTSzKÜ: 53. jelentés, MIKLÓS G. (Report No. 53 G. MIKLÓS). 1958.
52. OKGTSzKÜ: 55. jelentés, HÁMOR N., ÚJFALUSSY A. (Report No. 55 N. HÁMOR, A. ÚJFALUSSY). 1959.
53. OMOTE, S.—KOMAKI, SH.—NAKAJIMA, N.: Seismic wave types in a sand layer near a small explosion. *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, 1958.
54. PEET, W. E.: A shock wave theory for generation of seismic signal around a sperical shoothole. *Geophysical Prospecting*, 1960.
55. POLCZ, I.: Geofoncsoportok alkalmazásának vizsgálata hazai szeizmogeológiai viszonyokra (Application of seismometer-grouping to the seismogeological build of Hungary). Manuscript, 1963.
56. POSGAY, K.: Szeizmikus kísérleti terület kijelölése (Location of a seismic experimental area). *Geofizikai Közlemények*, 1958.
57. RICKER, N.—LYAN, R. D.: Composite reflections. *Geophysics*, 1950.
58. RICKER, N.: The form and laws of propagation of seismic wavelets. *Geophysics*, 1953.

59. Рудницкий, В. П.: Материал геофизического исследования территории Украины. *Геофизический Сборник*, 1965.
60. Sato, Y.: Analysis of dispersed surface waves by means of Fourier transform. *I—II Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo University*, 1955.
61. Schmidt, E. R.: A Kincstár csonkamagyarországi szénhidrogénkutató mélyfúrásai (The deep drillings of the Treasury for CH in Hungary). MÁFI Évkönyve, 1923. 34.
62. Sharpe, J. A.: The production of elastic waves by explosion pressure. *Geophysics*, 1942.
63. Sharpe, J. A.: The production of elastic waves by explosion pressure. II. Results of observation near an exploding charge. *Geophysics*, 1942.
64. Stegena, L.: Geofizika IV. éves geofizikai hallgatók részére (Manual for graduating students). Manuscript, 1955.
65. Szénás, Gy.—Ádám, O.: Szeizmogeológiai viszonyok DNY Magyarországon (The seismogeological build of SW Transdanubia). *Geofizikai Közlemények*, 1953.
66. Szénás, Gy.: Jelentés az 1962-ben végzett hortobágyi geofoncsoport és linear shooting kísérletekről (Report on the seismometer-grouping and linear-shooting experiments on the NE Great-Plain in 1962). Manuscript, 1962.
67. Tatel, H. E.—Tuve, M. A.: Note on the nature of a seismogram I. *Journal of Geophysical Research*, 1954.
68. Tolstoy, J.—Usdin, I.: Dispersive properties of stratified elastic and liquid media: a ray theory. *Geophysics*, 1953.
69. White, J. E.—Sengbush, R. L.: Velocity measurements in near-surface formations. *Geophysics*, 1953.
70. White, J. E.—Sengbush, R. L.: Shear waves from explosive sources. *Geophysics*, 1963.
71. White, J. E.: Seismic Waves; Radiation, Transmission, and Attenuation. McGraw-Hill, 1965.

СЕЙСМИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЗМУЩЁННЫЕ ВОЛНЫ

О. АДАМ

РЕЗЮМЕ

Возмущённая волна по существу содержит два типа волн: первый тип с наибольшей интенсивностью есть вертикально-поляризованная трансверсальная (поперечная) волна (SV), а второй с меньшей интенсивностью — это т. н. волна Рейле (Rayleigh), которая состоит из одного, или даже двух циклов. Различные компоненты первой группы волн распространяются в разных проводящих волны слоях и отдельные компоненты происходят от разных источников.

Помимо этого, автор рассматривает механизм возмущенной волны и динамические характеристики её компонентов.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (1—2), pp. 135—142 (1969)

USE OF COMPUTERS IN THE DEVELOPMENT OF THE THEORY OF GEOELECTRICAL SOUNDING CURVES

J. CSÓKÁS

CANDIDATE OF THE TECHNICAL SCIENCES
TECHNICAL UNIVERSITY OF HEAVY INDUSTRIES, MISKOLC

[Manuscript received June 3, 1968]

The geological resolution-power of the geoelectric sounding with focussed current-space is higher than that of the AMNB systems. The method allows, beside the apparent specific resistivity sounding, the sounding with current ratios. The potential values in handbooks are not precise enough for the computations. With the aid of an algorithm given in the paper, the resistivities and the current ratios can be determined in case of any number of current and measuring electrode_.

One of the geoelectrical sounding procedures is the method of focussed current-field method. Our theoretical investigations concerning the different related methods began with the analysis of this method. The measuring current I_0 flows into the ground through the electrode A_0 (Fig. 1), and is deflected into a plate-shaped part of the space by the current $I_t/2$ supplied through the electrodes A_1 and A_2. In this way the direction of the current will be, to a certain depth, nearly perpendicular to the layer boundaries parallel to the surface. The deflection of the measuring current can be regulated by the intensity of the deflecting current so that the potential difference between the control — and also potential — electrodes MM' should remain zero at any spread distance. The current-returning electrode B and the potential electrode N are practically in an infinite distance from each other.

The elaboration of the principle of this method began in 1962 [1]. According to it, an apparent resistivity sounding can be made, if in case of different $\overline{A_1A_2}$ spread distances and with e.g. $n = \overline{A_1A_2}/\overline{0_10_2} = 5{,}0$ spread ratio the potential difference ΔV, measured between the points $\overline{MN}$ is substituted into the equation $R_a = K\dfrac{\Delta V}{I_0}$, then the R_a values obtained are presented as function of $\overline{A_0A_1}$ in a bilogarithmic system of coordinates. The spread constant K, is composed of the electrode-distances, the equation is merely formally similar to the Schlumberger-equation.

Comparing it to the Schlumberger-method, besides the electrode-arrangement three differences are remarkable:

1. The field of the measuring current is regulated; the horizontal inhomogeneities can be recognized more easily.

2. The direction of the current is perpendicular to the layers, to a certain depth; the greater part of the measured voltage ΔV is falling in a different part of the ground, and in a different direction.

3. Besides the resistivity sounding curve, the curve of the current-ratio η can be recorded, too, which also may be used in geological interpretation.

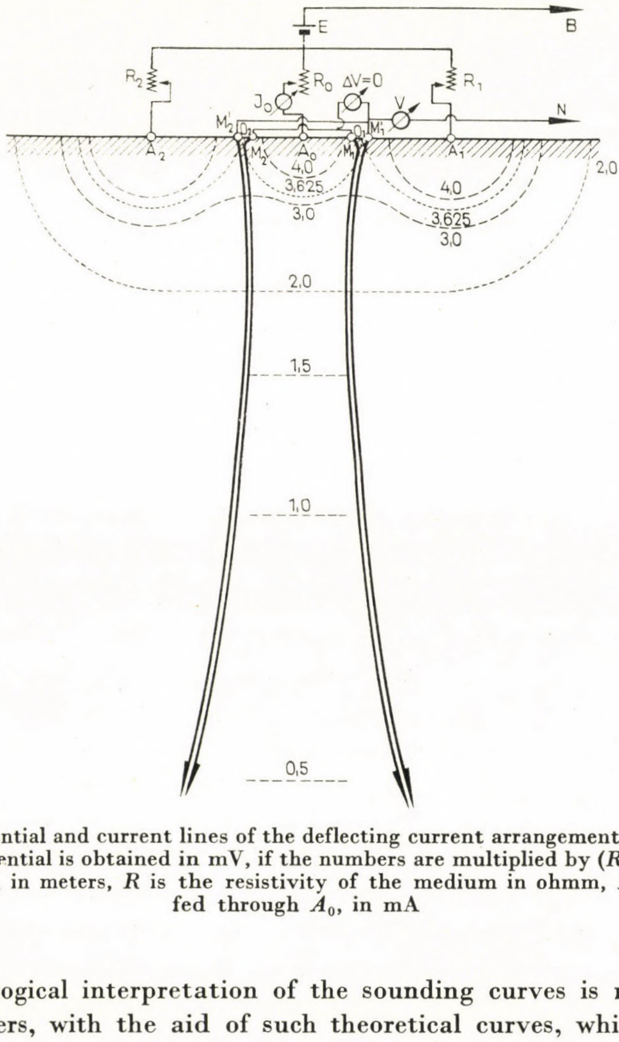


Fig. 1. Equipotential and current lines of the deflecting current arrangement in homogeneous medium. The potential is obtained in mV, if the numbers are multiplied by $(RI_0/2\,\pi a)$. a is the distance from A_0 in meters, R is the resistivity of the medium in ohmm, I_0 is the current fed through A_0, in mA

The geological interpretation of the sounding curves is made, in case of several layers, with the aid of such theoretical curves, which have been obtained by computation for the case of layer-thicknesses and resistivities chosen according to a certain system. Since a great variety of layer sequences occurs in nature, it is suitable to calculate and tabulate also such basic quantities, from which the sounding curve of practically any sequence of layers can be calculated. Such tables can be found in the literature [2, 3]. These potential and resistivity values turned out to be not sufficiently accurate for the calculation of deflecting-current theoretical curves (Fig. 2). The current ratio calculated with data taken from the tables of publication [2] became infinite, and even negative in certain cases, although this is physically impossible in case of parallel layer boundaries.

For the theoretical investigation of the deflecting-current method in case of layered media, apparent resistivity values R_a and current ratio values η of suitable accuracy can be obtained only from numerical values of the noise-

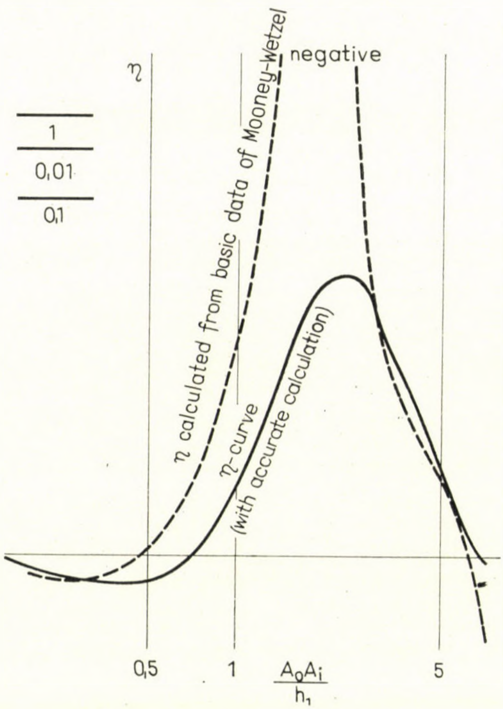


Fig. 2

potential $G(r)$ and the noise-potential-gradient $H(r)$ computed with sufficient accuracy. The computation of these quantities for a point in a distance r from a point source of intensity I in case of resistivity contrasts

$$k_i = \frac{R_i - R_{i-1}}{R_i + R_{i-1}}$$

and of layer thicknesses h_i is possible with the following formulas:

$$V(r) = \frac{IR_1}{2\pi r} G(r), \quad \text{and} \quad -\frac{\partial V(r)}{\partial r} = \frac{IR_1}{2\pi r^2} H(r),$$

where

$$H(r) = 1 + 2 \sum_{N=h_1}^{\infty} \frac{q[N]}{\left[1 + \left(\frac{2N}{r}\right)^2\right]^{3/2}}, \quad \text{and} \quad G(r) = 1 + 2 \sum_{N=h_1}^{\infty} \frac{q[N]}{\left[1 + \left(2\frac{N}{r}\right)^2\right]^{1/2}}$$

in these,

$$q[N] = \Sigma \left\{ (-1)^{t+1} . k_{i_1} . k_{i_2} \ldots k_{i_t} . q\left[N - \sum_{m=0}^{t-1} (-1)^m . h_{i_{t-m}}\right] + \right.$$
$$\left. + \Delta \cdot \frac{1 + (-1)^{t+1}}{2} k_{i_1} . k_{i_2} \ldots k_{i_t} \right\},$$

where the summation has to be made for all the $i_1, i_2, \ldots i_p, \ldots i_s, \ldots i_t$ combinations ($i_p > i_s$, if $p > s$) of the members $t = 1, \ldots, m$ of the elements $1, \ldots, n$.

$$q[N] = 0, \; if \; N \leq 0, \text{ and } \Delta = \begin{cases} 1, \text{if } N = \sum_{m=0}^{t-1} (-1)^m h_{i_{t-m}} \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$$

From the complicated nature and volume of the formula it may be seen, that even in case of a few layer sequences several ten thousands of numerical operations and their control are necessary, and this cannot be carried out practically by manual calculations.

For the investigations in question, the use of computers are running since 1962; it was in 1965 that the algorithm of the calculations of a $q[N]$ valid for arbitrary layer sequences was given. The computer program of the algorithm was prepared in 1967, according to the above mentioned formula.

This formula is suitable, on the surface of any sequence of parallel layers, in case of any current- and potential-electrode arrangement, for the numerical calculation of potentials and potential-gradients in any point (except the place of the current-electrodes), further of the apparent resistivity and of the current-ratio values, with the aid of the computer program elaborated for it.

With deflecting-current measurements, not only R_a but also η-sounding curves can be recorded. The geological power of resolution of the method can be investigated also by the comparison of the sounding curves of the current-ratio η which signifies a new method, too. Also these investigations have been made possible by the program of the computer mentioned.

In Fig. 3 an example is shown for the geologically less frequent case $R_2 < R_1$. The departure of the η-curves in case of different resistivity contrasts for a two-layer case is approximately similar to the departure of the R_a-two-layer Schlumberger curves. An essential difference is, as compared to the last mentioned curves, the common point of intersection appearing in the initial section of the η-curves, and the fact that the curves have generally several extreme values, and their asymptote is a straight line corresponding to the current-ratio developped in a homogeneous medium.

In Fig. 4 an example is shown for the geologically more frequent case $R_2 > R_1$ and for the geological power of resolution.

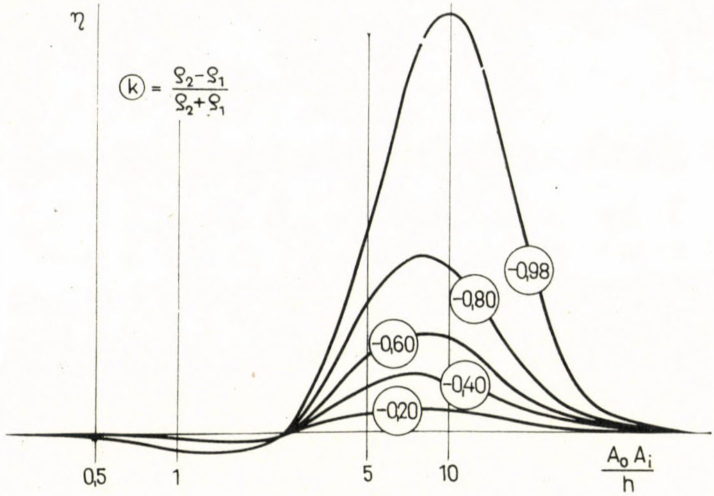


Fig. 3

In case of resistivity-ratios $100 \leq R_2/R_1 \leq \infty$, the separation of the η-curves is much more striking, than that of the two-layer curves measured with the Schlumberger arrangement; namely the two-layer Schlumberger-curves are hardly separated, in this range, at all. This makes a more accurate determination not only of the depth of the second layer but also of its resistivity possible. If the second layer is formed by the basement, the more accurate

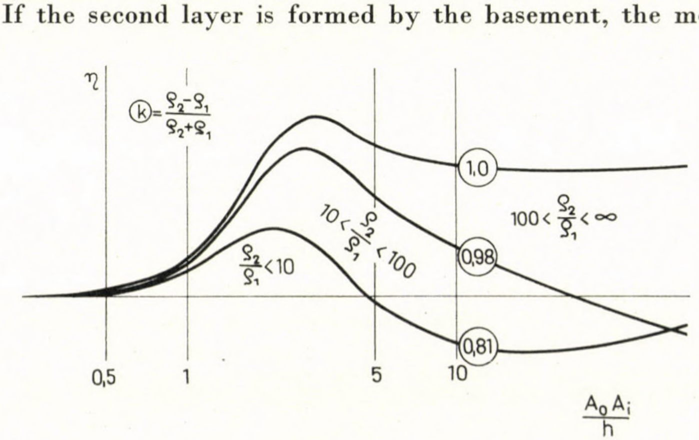


Fig. 4

resistivity value gives means for its finer separation, too, e.g. to decide whether it is, in a given case, crystalline or carbonate, volcanic, or lithologically varying in horizontal direction. In principle, distinction can be made between formations which would be qualified, with the usual geoelectrical sounding, as those of infinite resistivity.

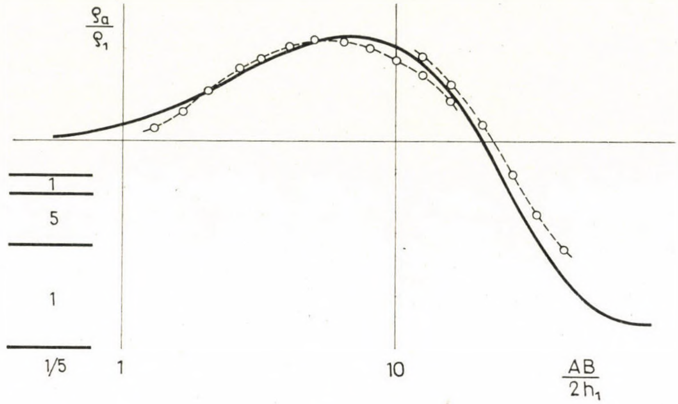


Fig. 5

Fig. 5 shows a four-layer curve recorded with the Schlumberger-method (dotted line with circles), with a layer-sequence determined with an auxiliary-curve procedure, and with the theoretical curve calculated from the latter (continuous line). In Fig. 6 the η-current-ratio values measured in the same measuring point with the deflecting-current method (circles) and the η-curve calculated with the data of the previous layer-sequence are shown. The scat-

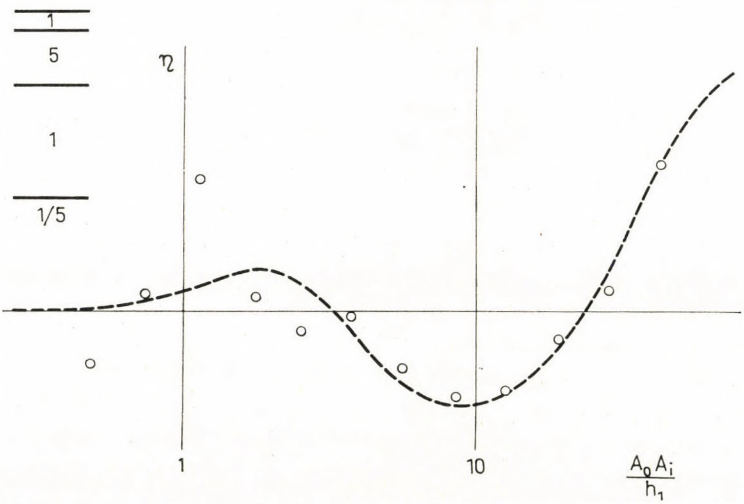


Fig. 6

tering of the points in the initial section of the curve can be explained in such a way that the electrodes here cannot be regarded yet as point-like, the accuracy of the adjustment of the electrode-distances is insufficient, and the current-deflecting effect of smaller horizontal inhomogeneities prevails. Along the further section of the curve, the agreement of the values measured with the calculated values is sufficiently good.

An example for the geological power of resolution is shown in Fig. 7. Here, the Schlumberger resistivity curve and the first sections of two deflecting-current η-curves, all calculated for the previously mentioned layer-sequence, may be seen.

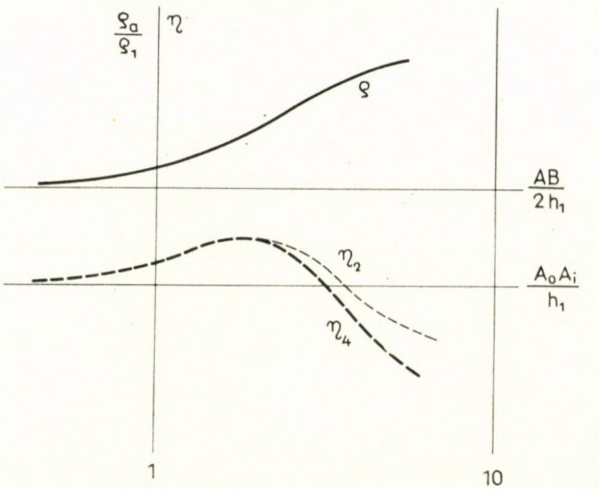


Fig. 7

Among the deflecting-current curves, η_4 is calculated for the layer-sequence in question; η_2 is the two-layer curve best approximating the latter. The separation of the two-layer, resp. four-layer curves shows, already at the short spread-distance presented, that it is not a two-layer case. The same cannot be stated of the corresponding section of the Schlumberger-curve.

Our investigations presently in progress are aimed by the use of electronic computer to anisotropy-determination. The basic conception of the investigations is, that the current fed into the ground flows, in case of a Schlumberger electrode-arrangement, rather parallel to the layering; in the case of the deflecting-current method on the contrary it is nearly perpendicular to it. It may be assumed, that the apparent resistivity of an anisotropic layer-complex is determined in the first case by the horizontal, in the second case by the vertical conductivity. By sounding with both methods the anisotropy may be determined.

For these investigations, the assumption of a layer-sequence consisting of numerous layers is necessary; in this case the computation of theoretical curves requires the performation of especially numerous operations, and this would be impossible without electronic computers.

*

Thanks are due to candidate L. ZILAHI-SEBESS, who prepares the computer programs of the algorithms, since the beginning of the investigations; by this close cooperation, the good progress of the research work has been greatly promoted.

REFERENCES

1. CSÓKÁS, J.: A focused-field geoelectrical method. *Acta Techn. Acad. Sci. Hung.* 43 (1963).
2. MOONEY, H. M.—WETZEL, W. W.: The potentials about a point electrode . . . *The Univ. of Minnesota Press*, Minneapolis, 1956.
3. ORELLANA, E.—MOONEY, H. M.: Master Tables and Curves . . . Madrid, 1966.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ В РАЗВИТИИ ТЕОРИИ СПОСОБОВ ГЕОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

Я. ЧОКАШ

РЕЗЮМЕ

Геологическая разрешающая способность геоэлектрического зондирования с направленным электрическим полем лучше, чем у систем АМНБ. Помимо видимого зондирования удельного сопротивления может быть произведено и зондирование отношения токов. Данные в таблицах потенциалы для вычисления теоретических кривых не совсем точны. С помощью программы на ЭВМ алгоритма, описанного в работе, в случае любого количества электродов и при любом их расположении могут быть вычислены удельные сопротивления и отношения токов.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (1—2), pp. 143—156 (1969)

VERBESSERUNG DER GEGENSEITIGEN ORIENTIERUNG DER BILDER AM STEREOKOMPARATOR, BEI MESSUNGEN IM BASISSYSTEM

G. HANKÓ

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 10. Juni 1968]

Der Ausgangspunkt der Studie ist das bekannte Verfahren der relativen Orientierung der Bildpaare, und zwar der unabhängigen Bildpaare. Die relative Orientierung wird in zwei Teile geteilt. Der erste Teil ist die Orientierung und Messung des Bildpaares — in einer Ebene — am Komparator. Der zweite Teil ist die räumliche Transformation des zweiten Bildes auf das erste, die durch Iteration gelöst wird. Es werden die einzelnen Phasen hinsichtlich der Zweckmäßigkeit sowohl der Messung als auch der Berechnung erörtert.

Im weiteren wird die Erhöhung der Genauigkeit der Orientierung am Komparator besprochen. Dadurch wird die genauere Lösung der Aufgabe — ebenfalls durch die Anwendung der Iteration der räumlichen Transformation — praktisch ermöglicht.

Relative Orientierung mit Teilparallaxen

Eine der wichtigen Aufgaben der Stereophotogrammetrie besteht in der gegenseitigen Orientierung der Bilder. Zur Lösung des Problems wurden mehrere Methoden ausgearbeitet. Ihre mathematischen Formeln waren schon am Beginn unseres Jahrhunderts bekannt. An den Auswertegeräten werden diese Gleichungen mit dem Analogprinzip gelöst. Die direkte Umbildung der Formeln wurde aber wegen ihrer Kompliziertheit erst später durchgeführt. Zu jener Zeit wurde die Aufgabe an den Stereogeräten mit optisch-mechanischem Verfahren gelöst. Die erwünschte größere Genauigkeit sowie die Verbreitung der Rechenanlagen ermöglichten die analytische Lösung der Aufgabe. Die direkte Bestimmung der Orientierungselemente erwünscht sogar bei Hilfe von Rechenanlagen die Auflösung komplizierteren Gleichungssystemen als die Anwendung von linearisierten Gleichungen und Iterationen. Bei dieser kommen nämlich die Unbekannten in den Gleichungen der Orientierungselemente nur in erster Potenz vor. Es geben zwar die Gleichungen erster Potenz der Orientierungselemente nur bei kleiner Bildneigung und bei geringen Gelände-Höhenunterschieden eine zureichende Lösung, infolge der Iterationen besteht aber auch hier eine günstigere Lage. Neben den in der Praxis vorkommenden Bildneigungen von 2—3° und bei solche Aufnahmehöhen, die in Ungarn 15% der Geländehöhe entsprechen, kann man — ohne die Erhöhung der Zahl der Iterationen — entsprechende Ergebnisse erreichen. Die Programmierung ist einfacher, und es können auch Handrechenmaschinen angewendet werden.

Nebst der Bewahrung der Genauigkeit wird die Erhöhung der Wirtschaftlichkeit angestrebt. Die Konstruierung von kleineren Zielinstrumenten kann die bessere Lösung des Problems fördern, leider sind aber diese nicht vorhanden. Es gibt Fälle und Institutionen, bei denen daher die Anwendung von Handrechenmaschinen nicht ausgeschaltet werden kann.

Bei der analytischen Bestimmung der relativen Orientierung wird, sogar im Falle der Anwendung von Rechenautomaten großer Kapazität, das Iterationsverfahren angewendet. Man muß aber jene Meßmethode und jenes Rechenverfahren wählen, welches dem Zweck entsprechend am wirtschaftlichsten ist.

Als Ausgangspunkt sei die Messung am Stereokomparator im Basiskoordinatensystem und zur Berechnung das Verfahren der unabhängigen Bildpaare gewählt.

Das Bildpaar wird — nach einer sorgfältigen Vorbereitung an den Kopien — aufgrund von Rahmenmarken in den Stereokomparator eingesetzt. Wie bei den terrestrischen Aufnahmen, so werden die Richtung x des linken Bildes mit Hilfe des y-Rades durch $\varkappa_1$ Kantung, und die des rechten Bildes mit Hilfe des q-Rades und durch $\varkappa_2$ Kantung mit der Richtung x des Instrumentes, die die positive x-Achse der Messung sowie der Berechnung bildet, parallelisiert. Die Orientierung der Bilder in der Ebene wird an der Basislinie des Bildpaares durch Kantung $\varkappa_1$ bzw. $\varkappa_2$ vollzogen. Bei einem genau justierten Instrument sind der formelle Mittelpunkt der Rahmenmarken — die beiden inneren Daten des Bildhauptpunktes vernachlässigt — der Projektionsmittelpunkt, der Drehungspunkt und der Punkt 1 bzw. 2 der gegenseitigen Orientierung. Dadurch sind ihre q Vertikalparallaxen gleich, wodurch sie der Berechnung entfallen. Die fünf Unbekannten der gegenseitigen Orientierung vermindern sich bei der ersten Annäherung auf drei, und auch die Formeln der Berechnung werden einfacher.

Wird in Betracht gezogen, daß durch instrumentelle Orientierung von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die Formeln einfacher werden, und wird $-\Delta\varphi_1$ durch $+\Delta bz_2$ substituiert, so wurde zur gegenseitigen Orientierung ein solches kombiniertes Verfahren ausgestaltet, bei dem die bekannte Verbesserungsgleichung der Vertikalparallaxe im Punkt i aus den Daten des Bildes 2 die folgende ist:

$$q_i + \frac{1}{c} y_i''^2 \Delta\omega_2 + \frac{1}{c} y_i'' \Delta bz_2 + \frac{1}{c} x_i'' y_i'' \Delta\varphi_2 = 0 \tag{1}$$

Das Koordinatensystem der Messung und der Berechnung wird in der Abb. 1 gezeigt.

Aus den für die Punkte $i = 3 \,..\, 6$ aufgeschriebenen vier Verbesserungsgleichungen sind die Orientierungselemente die folgenden (Index 2 wird im weiteren weggelassen):

$$\Delta\omega = -(q_3 + q_4 + q_5 + q_6)\, c/4\, a^2 \tag{2}$$

$$\Delta bz = -(q_4 - q_6)\, c/2a \tag{3}$$

$$\Delta\varphi = [(q_3 - q_5) - (q_4 - q_6)]\, c/2ab \tag{4}$$

Zur Erhöhung der Genauigkeit und der Verminderung der Zahl der Iterationen bezeichnen a und b in den obigen Formeln nicht den Durchschnittswert der gewählten Punkte, sondern immer die Koordinaten jener Punkte, aus welchen das in Frage stehende Orientierungselement berechnet wird, d.h.

$$\text{in der Formel (2)}: a = (|y_3'| + |y_5'| + |y_4''| + |y_6''|)/4 \tag{5}$$

$$\text{in der Formel (3)}: 2a = |y_4''| + |y_6''| \tag{6}$$

$$\text{in der Formel (4)}: 2ab = |x_3'' y_3''| + |x_5'' y_5''| \tag{7}$$

Aus den Formeln (2)—(4) gelangen wir zu den Annäherungswerten der Orientierungs-Unbekannten. Werden dieselben in Gleichungssystem (1) wieder

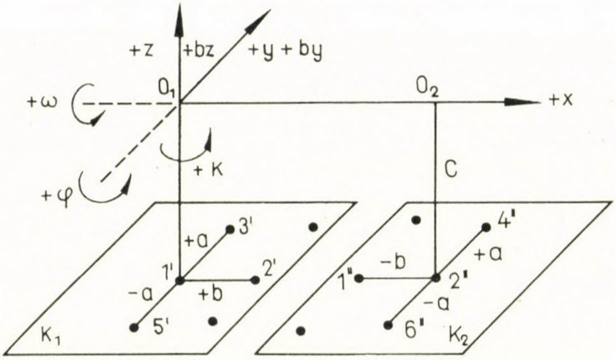


Abb. 1

substituiert, so erhalten wir bei sämtlichen vier Punkten eine kleinere Δq_m-Restvertikalparallaxe. Aus den Werten Δq_{im} werden die weiteren Ergänzungen der Orientierungselemente mit Hilfe von Iterationen berechnet.

Wird der Annäherungswert der Orientierungselemente mit Index 0 bezeichnet, so kann

$$q_i + \frac{1}{c} y_i''^2 (\Delta\omega_0 + \delta\omega) + \frac{1}{c} y_i''(\Delta\, bz_0 + \delta\, bz) + \frac{1}{c} x_i'' y_i'' (\Delta\varphi_0 + \delta\varphi) = 0 \tag{8}$$

aufgeschrieben werden, wobei $\delta\omega$, δbz, $\delta\varphi$ die Ergänzung der Orientierungs-Unbekannten bedeuten. Werden aus den Gleichungen (8) die Gleichungen (1) substrahiert, und wird bei der ersten Annäherung vorausgesetzt, daß $\Delta\omega_0 = \Delta\omega$ ist, so gelangen wir zu den Gleichungen:

$$0 + \frac{1}{c} y_i''^2 \delta\omega + \frac{1}{c} y_i'' \,\delta\, bz + \frac{1}{c} x_i'' y_i'' \,\delta\varphi = -\Delta\, q_{im} \tag{9}$$

Die sind bezüglich der Glieder δ und Δq_{im} von gleichem Aufbau wie die ursprünglichen Gleichungen. Die Ergänzungen der Orientierungsdaten sind daher (ev. mit Hilfe von *mehrfacher* Iteration) durch die Bildkoordinaten der ursprünglichen Punkte zu berechnen; dies bedeutet die Vereinfachung der Berechnung. Die *Ergänzungen sind* mit entsprechendem Vorzeichen zu den Ausgangswerten der Orientierungselemente *laut Gleichungssystem (8) zu addieren.*

Die Orientierungselemente sowie ihre Ergänzungen werden durch Iterationen berechnet. Die Berechnung wird innerhalb einer Iteration mit $\Delta\omega$ begonnen, weil dies durch den Multiplikationsfaktor y^2 auf die Vertikalparallaxen sämtlicher vier Punkte die größte Wirkung hat. Nachher wird Δbz — mit den Teilparallaxen der Punkte 4 und 6 — berechnet. Zuletzt wird $\Delta\varphi$ berechnet, bei dem — im Falle der obigen Anordnung — allgemein die Teilparallaxen nur der Punkte 3 und 5 erforderlich sind. Dies ist auch eine Vereinfachung, weil kleinere Werte vorkommen.

Der Begriff der Teilparallaxe wurde also eingeführt. Das wesentliche ist darin, daß bei der Berechnung der einzelnen Orientierungselemente immer die von der vorigen Orientierung zurückgebliebene Teilparallaxe Δq_{ir} angewendet wird. Mit dem aus (2) berechneten $\Delta\omega$ wird die Teilparallaxe

$$\Delta q'_{ir} = q_i \pm \frac{1}{c} y_i''^2 \Delta\omega \tag{11}$$

$$\Delta q'_{ir} \pm \frac{1}{c} y_i'' \Delta bz = \Delta q''_{ir} \tag{12}$$

und

$$\Delta q''_{ir} \pm \frac{1}{c} x_i'' y_i'' \Delta\varphi = \Delta q_{im} \tag{13}$$

berechnet. Werden in die Gl. (13) die Teilparallaxen laut den Gleichungen (12) und (11) nacheinander wieder substituiert, so gelangen wir zur ursprünglichen Gleichung (1). Dies entspricht der bei der optisch-mechanischen Orientierung angewendeten Methode. Die Zahl der Iterationen ist vom ersten Annäherungswert abhängig, aber durch die Anwendung der Teilparallaxen vermindert sich ihre Zahl, da diese immer kleiner sind.

Tabelle I

P	x'	x''	y'	y''
1	0,000	−78,412	0,000	0,000
2	+78,921	− 0,001	0,000	0,000
3	+36,642	−43,452	+79,048	+77,579
4	+80,363	− 0,534	+69,046	+67,616
5	+26,912	−49,496	−76,492	−78,131
6	+62,072	−14,302	−81,174	−82,590

In der Tabelle I finden wir die Daten, die zur Berechnung von am Stereokomparator vollzogenen Messungen eines Bildpaares nötig sind. Aus der Tabelle entnommen, sind:

$$q = y'' - y' \quad \text{und} \quad p = x' - x''$$

Der erste Schritt ist die Berechnung der Konstanten mit Hilfe der angegebenen Formeln:

$$c = 209{,}13 \text{ mm}; \; a = 76{,}438 \text{ mm}; \; c/4a^2 = -0{,}008947;$$

$$c/2a = -1{,}392155; \; c/2ab = +0{,}028890$$

Die Berechnung wurde in der besprochenen Weise in vier Iterationen durchgeführt. Die in den einzelnen Iterationen gewonnenen Orientierungselemente sowie die Restvertikalparallaxen Δq_m wurden in Tabelle II zusammengefaßt.

Tabelle II

J \ T	$\Delta\omega$	Δb_z	$\Delta\varphi$
1	+0,053 270 44	+0,817 056	+0,021 858 17
2	−0,001 309 84	+0,157 592	+0,003 406 13
3	−0,000 135 99	+0,025 616	+0,000 554 69
4	−0,000 020 58	+0,004 176	+0,000 086 67
Σ	+0,051 804 03	+1,004 440	+0,025 905 66

q \ P	+ 3	3 −	+ 4	4 −	+ 5	5 −	+ 6	6 −
q		1,4690		1,4300		1,6390		1,4160
Δq_m^{I}	0,0149			0,0049	0,0149		0,1224	
Δq_m^{II}		0,0192	0,0169			0,0192	0,0367	
Δq_m^{III}		0,0225	0,0220			0,0225	0,0253	
Δq_m^{IV}		0,0230	0,0230			0,0230	0,0233	

Die Restvertikalparallaxen Δq_m^W sind zu weiteren Berechnungen nicht mehr geeignet, weil $\Sigma \Delta q_m^{IV} = +0{,}0003$ mm ist; dies gibt auch bei dem größten quadratischen Glied y^2 in der vierten Dezimalstelle keine Verbesserung. Da die übrigen kleiner sind, kann die Iteration als beendet betrachtet werden.

Die Genauigkeit der Bestimmung beträgt $\pm$ 0,0231 mm. Dies kann auch als Konfidenz-Grenze der am Stereokomparator vollzogenen Punktidentifizierung und Messung in den schlecht identifizierbaren Punkten 1 und 2 betrachtet werden, da die Meßgenauigkeit des angewendeten Stereokomparators einen Wert von ca $\pm$ 0,01 mm beträgt.

Verbesserung der Orientierung

Die erörterte Methode erreicht das entsprechende Ergebnis mit weniger Iterationen. Bei mehreren ausgearbeiteten Beispielen wurden drei-vier Iterationen angewendet.

Bei dem beschriebenen Verfahren wurde die relative Orientierung eigentlich in zwei Teile geteilt. Im ersten Teil werden die q Vertikalparallaxen mit Kantungen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ an der Basislinie $\overline{1,2}$ des am Stereokomparator in

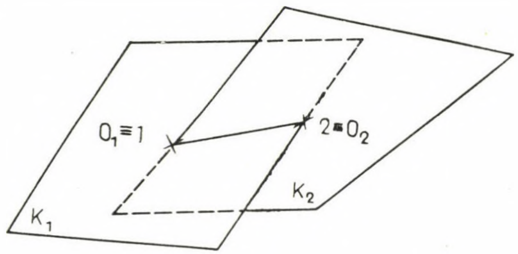


Abb. 2

gemeinsamer Ebene liegenden Bildpaares eliminiert. Wird dies fehlerlos gelöst, gestaltet sich die geometrische Lage der Bilder des entstandenen Raummodells laut Abb. 2. Der zweite Teil der gegenseitigen Orientierung ist die räumliche Einstellung des zweiten Bildes zum ersten. Wie auch aus der Abbildung ersichtlich, kann dies mit einer relativen Neigung $\Delta\omega$ und $\Delta\varphi$ in zwei Richtungen und mit einer eine Maßstabänderung bedeutenden Verschiebung Δbz, d.h. mit einer räumlichen Transformation gelöst werden. Das wird mit 3—4 Iterationen vollzogen. Die Größe der zuletzt zurückgebliebenen Vertikalparallaxen Δq_{im} ist von der Genauigkeit der am Stereokomparator vollzogenen Orientierung in Basisrichtung abhängig. Da die Orientierungspunkte 1 und 2, d.h. die Drehungspunkte fiktive Punkte sind, muß man mit geringen Orientierungsfehler in Basisrichtung rechnen, auch wenn in deren Nähe — in 0,1—0,2 mm Entfernung — Hilfsorientierungspunkte gewählt worden sind. Ist bei denen sogar $q_1 = q_2 = 0$, treten in den Punkten von großer y-Ordinate erfahrungsgemäß Restvertikalparallaxen $\Delta q_{im} = \pm\ 0{,}0229 - 0{,}0241$ mm auf, als Beweis dafür, daß unsere Orientierung nach Basisrichtung fehlerhaft ist. Werden die nach den Iterationen zurückgebliebenen Δq_{im} Restvertikalparallaxen untersucht, so können gewisse Regelmäßigkeiten festgestellt werden. Das Modell zeigt eine Verwindung. Es sind nämlich die an den Orientierungspunkten 3;5 und 4;6 zurückgebliebenen Δq_{im} Vertikalparallaxen mit einer sehr geringen Differenz gleich groß, aber sie sind paarweise von entgegengesetztem Vorzeichen. Daraus kann man auch auf die verkantete Lage der Basislinie $\overline{1,2}$ folgern (Abb. 3). D. h.: es ergibt sich aus den in der Tabelle II vorgelegten

Δq_m^{IV}-Werten durch Interpolation $\Delta q_1 = -0{,}0230$ und $\Delta q_2 = +0{,}0231$ mm; der Fehler ist in der Orientierung $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ zu suchen. Man kann dies zweckmäßig durch die in entsprechendem Sinne vollzogene Einstellung von by_2 und $\varkappa_2$ eliminieren. Dadurch nimmt die Formel der relativen Orientierung wieder die vollkommene Form des Bildanschlusses auf.

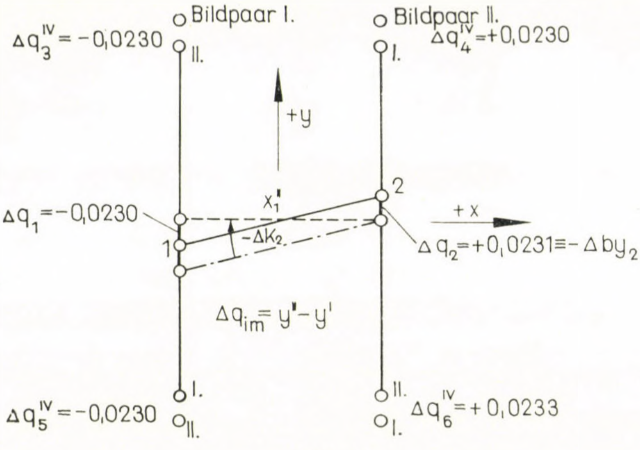


Abb. 3

Vorzeichen und Größe der Verbesserungen sind laut Abb. 3 unmittelbar aufschreibbar. Im Punkt 2 ist die Verbesserung der negativen Werte der im Punkt 4 oder 6 zurückgebliebenen Vertikalparallaxen, d. h., es ist

$$\Delta by_2 = -\Delta q_m^{IV} \tag{14}$$

Ferner ist

$$\Delta \varkappa_2 = 2\,\Delta q_m^{IV}/(-x_1'') \tag{15}$$

da im Punkt 1, nach der Verschiebung laut (14) die Restparallaxe des Punktes 3 bzw. 5 und $-\Delta q_m^{IV}$, d. h. insgesamt $-2\Delta q_m^{IV}$ zum Vorschein kommt, und die Verbesserung ist positiv.

Mit den so erhaltenen Δby und $x_i''\,\Delta\varkappa$-Werten werden die zurückgebliebenen Δq_{im}^{IV} Vertikalparallaxen in sämtlichen (3 . . 6) Orientierungspunkten vorzeichenrichtig verbessert (in den Formeln wurde die Bezeichnung 2 weggelassen und x_i'' bedeutet die zweiten Bildkoordinaten der erwähnten Punkte). Nachher werden die Ergänzungen der Orientierungselemente $\Delta\omega$, Δbz und $\Delta\varphi$ mit den ursprünglichen Konstanten und Koordinaten noch einmal berechnet.

Aufgrund der Experimente wurde aber festgestellt, daß mit $\Delta by = -\Delta q_m^{IV}$ und zu diesen gehörigen $\Delta\varkappa$ Wert berechnet, wurden die benötigten Orientierungsverbesserungen nicht erreicht. Nach ein-zwei Iterationen gelangen wir in

Orientierungspunkten 3 . . 6 zu einer — von Kammerkonstante und von der y Koordinate abhängigen — kleineren Restvertikalparallaxe Δq_m, deren Sinn mit Δq_m^{IV} gleich ist. Zur Verringerung der Zahl der Iterationen ist bei Δby eine Überkorrektion erforderlich, $\Delta\varkappa$ aber gestaltet sich aufgrund der Formel (15) immer nach dem tatsächlichen Wert von Δby. Die Annäherung kann — da hier von kleinen Werten die Rede ist — mit einer arithmetischen Reihe charakterisiert werden, deren erstes Glied die in beiden (4;6) Punkten zurückgebliebene Δq_m Vertikalparallaxe und bei der die Differenz d $0{,}1\Delta q_m$ ist. So gestaltet sich die Reihe wie folgt: Δq_m; $1{,}1\Delta q_m$; $1{,}2\Delta q_m$; . . .

Bei der Berechnung wird bei erster Annäherung zur Verbesserung ein geschätzter Überkorrektionsfaktor, z. B. $\Delta by = -1{,}5\Delta q_{2m}^{\mathrm{IV}}$ gewählt. Mit diesem und dem dazu gehörigen $\Delta\varkappa$ Wert gelangt man nach ein-zwei Iterationen zu einer neuen $\Delta q_{2m}^{\mathrm{VI}\prime}$ Restvertikalparallaxe. Die Verbesserung beträgt $\Delta q_{2m}^{\mathrm{IV}} - \Delta q_{2m}^{\mathrm{VI}\prime}$ wozu eine Überkorrektion von $\Delta by = -1{,}5\Delta q_{2m}^{\mathrm{IV}}$ erforderlich war. Der vollständige K Überkorrektionsfaktor wird aus einem einfachen Verhältnis berechnet:

$$K = 1{,}5\,\frac{\Delta q_{2m}^{\mathrm{IV}}}{\Delta q_{2m}^{\mathrm{IV}} - q_{2m}^{\mathrm{VI}\prime}} \tag{16}$$

In Tabelle III wurde die Berechnung des mitgeteilten Beispieles mit dem Überkorrektionsfaktor $K = 1{,}5$, ausgegangen aus den in Tabelle II angegebenen $\Delta q_{im}^{\mathrm{IV}}$ Restvertikalparallaxen, zusammengestellt. Es wurde das Iterationsverfahren auch zur die Schätzung dienenden räumlichen Transformation angewendet.

Tabelle III

J	M \ P	+ 3	3 —	+ 4	4 —	+ 5	5 —	+ 6	6 —
1.	Δq_m^{IV}		0,0230	0,0230			0,0230	0,0233	
2.	Δby		0,0346		0,0346		0,0346		0,0346
3.			0,0576		0,0116		0,0576		0,0113
4.	$x''\Delta\varkappa$	0,0384		0,0005		0,0437		0,0126	
5.	Δq_r		0,0192		0,0111		0,0139	0,0013	
6.	$\Delta\omega$	0,0111		0,0084		0,0112		0,0126	
7.	$\Delta q_r'$		0,0081		0,0027		0,0027	0,0139	
8.	Δbz	0,0086		0,0075			0,0087		0,0092
9.	$\Delta q_r''$	0,0005		0,0048			0,0114	0,0047	
10.	$\Delta\varphi$		0,0055		0,0001	0,0063		0,0019	
11.	$\Delta q_m^{\mathrm{V}\prime}$		0,0050	0,0047			0,0051	0,0066	

Die einzelnen Schritte sind die folgenden: Die erste Zeile der Tabelle III enthält die Δq_m^{IV} Restvertikalparallaxen. Die zweite Zeile zeigt, den Überkorrektionsfaktor in Betracht gezogen, den Wert Δby.

$$\Delta by = -1.5\,\Delta\, q_m^{IV} = -1{,}5 \cdot 0{,}0231 = -0.0346$$

Der nächste Schritt ist laut Formel (15) die Berechnung von $\Delta\varkappa$:

$$\Delta\varkappa = 3\,\Delta\, q_m^{IV}/(-x_1'') = -0{,}693/78{,}412 = -0{,}000\,8838$$

Die vierte Zeile gibt die $x_i''\Delta\varkappa$ Verbesserungen mit entsprechendem Vorzeichen in den Punkten 3 . . 6 an. Die 5. Zeile enthält die Teilparallaxen der V'-Iteration unter Berücksichtigung der Teilkorrektionen.

Der nächstfolgende Schritt ist nun die Berechnung von $\Delta\omega$. Hierzu ist

$$\Sigma\,\Delta q_r\,(3..6) = A = -0{,}0429$$

Laut Formel (2) ist

$$\Delta\omega = A \cdot c/4\,a^2 = +0{,}00038383$$

Zur Substitution in die Formel (1):

$$\frac{1}{c}\,\Delta\omega\, y_i''^{\,2} = +0{,}000\,001\,84\, y_i''^2$$

Die berechneten Verbesserungen enthält die sechste und die $\Delta q_r'$ Teilparallaxen die siebente Zeile der Tabelle.

Die mit Δbz verbundenen Daten werden ähnlicherweise berechnet. Hierzu ist

$$\Delta q_{r4}' - \Delta q_{r6}' = B = -0{,}0166$$

Laut Formel (3) ist

$$\Delta bz = B \cdot c/2a = +0{,}023110$$

Zur Substitution in die Formel (1):

$$\frac{1}{c}\,\Delta bz\, y_i'' = +0{,}000\,111\, y_i''$$

Die berechneten Verbesserungen finden wir in der achten, die $\Delta q_r''$ Teilparallaxen in der neunten Zeile.

Es folgen nun die mit $\Delta\varphi$ verbundenen Berechnungen. Hierzu ist

$$(\Delta q_{r3}'' - \Delta q_{r5}'') - (\Delta q_{r4}'' - \Delta q_{r6}'') = C = +0{,}0118$$

Laut Formel (4) ist

$$\Delta\varphi = C \cdot c/2ab = + 0{,}000\,340\,90$$

und zur Formel (1):

$$\frac{1}{c}\,\Delta\varphi\, x_i'' y_i'' = + 0{,}000\,001\,63\, x_i'' y_i''$$

Die Verbesserungen sind in der zehnten und die $\Delta q_m^{V'}$ Restvertikalparallaxen in der elften Zeile vorzufinden.

$\Sigma\Delta q_m^{V'} = + 0{,}0012$; Die Iteration VI′ beginnt mit diesem Wert; nach der Durchführung der Iteration gelangen wir zu den folgenden Ergebnissen:

$q_m^{VI'}$ ist am Orientierungspunkt 3 — 0,0053 mm,

am Orientierungspunkt 4 + 0,0053 mm,

am Orientierungspunkt 5 — 0,0053 mm,

am Orientierungspunkt 6 + 0,0056 mm.

Nach Interpolation: $\Delta q_{1m}^{VI'} = - 0{,}0054$ mm und $\Delta q_{2m}^{VI'} = + 0{,}0054$ mm. Nach zwei Iterationen erhielten wir den Wert $\Delta q_{2m}^{VI'} = + 0{,}0054$ mm. Die Verbesserung betrug also + 0,0231 — 0,0054 = 0,0177 mm. Der der vollständigen Verbesserung entsprechende Überkorrektionsfaktor beträgt laut Formel (16) : $K = 1{,}9576$ rund 1,96. Damit wurde die Berechnung nochmals durchgeführt, und wir gelangten nach zwei Iterationen in den Orientierungspunkten 3—6 zu folgendem Resultat:

$$\Delta q_{3m}^{VI} = + 0{,}0002 \text{ mm}; \quad \Delta q_{4m}^{VI} = - 0{,}0003 \text{ mm};$$

$$\Delta q_{5m}^{VI} = + 0{,}0002 \text{ mm}; \quad \Delta q_{6m}^{VI} = + 0{,}0001 \text{ mm};$$

$$\Sigma\Delta q_{\mathrm{m}}^{VI} = + 0{,}0002 \text{ mm}.$$

Nach Interpolation: $\Delta q_{1m}^{VI} = + 0{,}0002$ mm und $\Delta q_{2m}^{VI} = - 0{,}0002$ mm; die Rest-Modell-Verwindung ist im Verhältnis zum ursprünglichen gering und von entgegengesetztem Sinne.

Als Kontrolle wurden von den sechs Iterationen sämtliche Orientierungselemente der gegenseitigen Orientierung zusammengestellt:

$$\begin{aligned} &\Delta by = - 0{,}0453 \text{ mm}, \Delta\varkappa = - 0{,}0011554, \Delta\omega = + 0{,}05229611 \\ &\Delta bz = + 1{,}037991 \text{mm}, \Delta\varphi = + 0{,}02642279 \end{aligned} \tag{17}$$

Von der ursprünglichen q Vertikalparallaxe ausgegangen wurden mit Hilfe der Formel

$$q_i + \Delta by + x_i''\,\Delta\varkappa + \frac{1}{c}\,y_i''^2\,\Delta\omega + \frac{1}{c}\,\Delta bz y_i'' + \frac{1}{c}\,x_i'' y_i''\,\Delta\varphi = \Delta q_{im} \tag{18}$$

die Restvertikalparallaxen Δq_{im} in den Orientierungspunkten 3—6 berechnet. Sie sind die folgenden:

$$\Delta q_{3m} = +\,0{,}0001\text{ mm}, \Delta q_{4m} = -\,0{,}0004\text{ mm},$$
$$\Delta q_{5m} = +\,0{,}0002\text{ mm}, \Delta q_{6m} = +\,0{,}0003\text{ mm},$$
$$\Sigma\,\Delta q_m = +\,0{,}0002\text{ mm}.$$

Nach Interpolation: $\Delta q_{1m} = +\,0{,}0002$ mm und $\Delta q_{2m} = -\,0{,}0001$ mm. Mit der verteilt vollzogenen Berechnung verglichen beträgt die Abweichung 0,0 — 0,2 μm.

Die weiteren Schritte erfolgten in der bereits bekannten Weise. Aus den Orientierungselementen werden sowohl die $\Delta x_i''$ Verbesserungen als auch die neuen p Parallaxen, ferner aus den Formeln des Normalstereogramms mit den Koordinaten $(x'y')$ und den neuen p Parallaxen die Modellkoordinaten berechnet.

Die Durchführung der Berechnung wird im weiteren schematisch besprochen.

Es müssen zuerst die x_i'' Bildkoordinaten des 2. Bildes mit dem Wert $\Delta x_i''$ reduziert werden. Die dazu gehörige Gleichung ist:

$$\Delta x_i'' = -\,\Delta\varkappa\, y'' + \frac{1}{c}\,\Delta\omega\, x_i'' y_i'' + \frac{1}{c}\,\Delta bz\, x_i'' + c\Delta\varphi + \frac{1}{c}\,\Delta\varphi\, x_i''^2 \qquad (19)$$

in welcher $\Delta\varkappa$, $\Delta\omega$, Δbz, $\Delta\varphi$ die nach den ergänzenden Iterationen erhaltenen summierten Orientierungselemente (17) sind. Die x_i'' Bildkoordinaten werden mit $\Delta x_i''$ vorzeichenrichtig verbessert und die veränderten p_{ij} Parallaxen in Basisrichtung berechnet.

Durch die Bestimmung der Orientierungselemente wurden die in den Punkten wahrnehmbaren Δq_i Vertikalparallaxen — mit gewünschter Genauigkeit — eliminiert. In Tabelle IV wurden die $\Delta x_i''$ Verbesserungen, die verbes-

Tabelle IV

P	$\Delta x''$	Verbessert x_j''	x'	y'	Verbessert p_j	Rest Δq_m	
	mm						
1	+5,913	−72,499	0,000	0,000	+72,499	+0,0002	$p_j =$
2	+5,524	+ 5,523	+78,921	0,000	+73,398	−0,0001	$= x' - x_j''$
3	+4,795	−38,657	+36,642	+79,048	+75,299	+0,0001	
4	+5,592	+ 5,058	+80,363	+69,046	+75,305	−0,0004	
5	+6,466	−43,030	+26,912	−76,492	+69,942	+0,0002	
6	+5,680	− 8,622	+62,072	−81,174	+70,694	+0,0003	

serten x_i'' Bildkoordinaten, die ersten Bildkoordinaten $x'_i\ y'_i$, die neuen Parallaxen p_{ij} in Basisrichtung und die vernachlässigbaren Restvertikalparallaxen Δq_{im} angeführt.

Das Bildpaar wird danach schon als Normal-Stereogramm behandelt, dessen Grundebene die Ebene des ersten Bildes oder eine mit dieser parallelle Ebene ist. Die Entfernung von dieser ist die Kammerkonstante c, oder deren auf die parallelle Ebene vergrößerter Wert. Ausgangspunkt ist der Punkt 1, Basis die Bildkoordinate x'_2, die Orientierung des Koordinatensystems erfolgt laut Abb. 1. In diesem System können die Modellkoordinaten mit den bekannten Formeln des Normal-Stereogramms berechnet werden.

$$h_{im} = \frac{nb}{p_{ij}} c\,, \quad x_{im} = \frac{nb}{p_{ij}} x'_i\,, \quad y_{im} = \frac{nb}{p_{ij}} y'_i \tag{20}$$

Aus dem Wert h_i kann die auf die Grundebene bezogene Höhe des Punktes m_i einfach berechnet werden, wenn die Grundebene durch einen der tiefsten h_i-Punkte für einen runden Wert — z.B. $m = 100$ mm — angenommen wird. Wird dieser Punkt mit h_0 bezeichnet, so ist

$$m_i = h_0 - h_i + m\,(\text{mm}) \tag{21}$$

Tabelle V

P	b/p_{ij}	x_{im}	y_{im}	h_{im}	m_{im}
		mm			
1	1,082 381	0,000	0,000	226,337	108,096
2	1,068 313	+84,312	0,000	223,395	111,038
3	1,041 342	+38,157	+82,316	217,755	116,678
4	1,041259	+83,679	+71,895	217,738	116,695
5	1,121 100	+30,121	−85,755	234,433	h_0 = 100,00
6	1,109 175	+75,504	−90,036	231,940	102,493

Die Berechnung wurde in Tabelle V zusammengefaßt. Um die Bild- und Modellkoordinaten vergleichen zu können, wird $n = 1$ gewählt.

Der Übergang auf genauen Maßstab oder terrestrische Koordinaten erfolgt durch die absolute Orientierung aufgrund gegebener horizontaler und Höhenpunkte mit bekannten Modell- und terrestrischen Koordinaten.

Der Vorteil der erörterten Berechnung liegt in ihrer Einfachheit. Sie besteht aus der Wiederholung derselben Schritte. Das Verfahren kann in vier Hauptteile geteilt werden. Der erste Teil ist die Messung am Stereokomparator, am auf die Basislinie mit $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ Kantungen orientierten Bildpaar. Je genauer die Orientierung ist, desto weniger wird die weitere Arbeit. Bei dieser sind die zwei Bilder in einer Ebene. Bei einer richtigen Lösung müssen wir eine parallaxisfreie $\overline{1,2}$ Basislinie erreichen.

Der zweite Teil besteht in der räumlichen Transformation des zweiten Bildes auf das erste mit relativen Neigungsänderungen von $\Delta\omega$ und $\Delta\varphi$ und mit einer Verschiebung Δbz. Das Verfahren wurde mit Iteration vollzogen. Praktisch waren 3—4 Iterationen erforderlich. Die Zahl der Iterationen ist desto weniger und die Δq_{im} Restvertikalparallaxe ist desto geringer, je besser die Lösung der Orientierung am Stereokomparator ist.

Laut der erzielten und erwünschten Genauigkeit kann die relative Orientierung hier als vollendet betrachtet werden.

Im dritten Teil kann man die Genauigkeit der Orientierung in Basisrichtung eigentlich durch Berechnung erhöhen. Dies kann dadurch erreicht werden, daß die am Stereokomparator vollzogene Orientierung um Δby_2 und $\Delta\varkappa_2$ verbessert wird. Wie ersichtlich, wird Überkorrektion angewendet, die mit zwei für Schätzung dienenden Iterationen und Proportionsberechnungen durchgeführt wird.

Der vierte, der Abschlußteil ist — mit dem dritten Teil gekoppelt — wieder eine aus zwei Iterationen bestehende räumliche Transformation, gleichsam Fortsetzung des zweiten Teiles. Die ganze Operation besteht aus 5—6 Iterationen — ungeachtet der auf die Bestimmung des Überkorrektionsfaktors K erforderlichen Arbeit — mit unveränderten Konstanten und mit den ursprünglichen Koordinaten der Punkte ist sie daher auch für Anwendung von Handrechenmaschinen geeignet.

Bei der oben erörterten Verbesserung der Orientierung in Basisrichtung kann man in dem Falle auf ein vorteilhaftes Ergebnis rechnen, wenn die nach der Instrumentenorientierung berechneten Restvertikalparallaxen Δq_{im} nach Größenordnung mit der Meßgenauigkeit des Stereokomparators in Einklang sind.

Die erzielten Ergebnisse beziehen sich auf ein solches System, bei dem die tatsächlichen Drehungspunkte die Projektionszentren sind, welche — präzis justiertes Instrument und präzis eingesetzte Negative vorausgesetzt — mit den Hauptpunkten der Bilder identisch sind.

SCHRIFTTUM

1. Hallert, B.: Photogrammetry. New York, 1960.
2. Schwidefsky, K.: Grundriß der Photogrammetrie, Stuttgart, 1963.
3. Hankó, G.: Relative Orientation of Image Pairs in the Stereometrograph. *ÉKME Tudományos Közleményei*, XI. No. 5 (1965).
4. Homoródi, L. und Frau Domokos: Fotogrammetria II. rész (Photogrammetrie Teil II). ÉKME Lehrbrief. Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.

CORRECTION OF THE RELATIVE ORIENTATION OF PICTURES ON THE STEREOCOMPARATOR MEASURED IN BASIS SYSTEM

G. HANKÓ

SUMMARY

The article sets out from the well known method of relative orientation of pictures with independent models. The relative orientation is divided into two parts. In the first part one has to carry out the orientation and measurement of pictures — in plane — on the stereocomparator. In the second part the second picture is fitted to the first one with space transformation by iteration.

The author discusses the steps necessary to make the measurements and calculations easier. Further the increase of accuracy of orientation on stereocomparator is treated. This enables the practically more accurate solution of the task similarly by the iterative space transformation.

УЛУЧШЕНИЕ ВЗАИМНОГО ОРИЕНТИРОВАНИЯ СНИМКОВ НА СТЕРЕОКОМПАРАТОРЕ ПРИ ВЫПОЛНЕННЫХ В БАЗИСНОЙ СИСТЕМЕ ИЗМЕРЕНИЯХ

Г. ХАНКО

РЕЗЮМЕ

Статья исходит из известного метода относительного ориентирования — независимой — пары снимков. Относительное ориентирование разлагается на две части. Первая часть — это ориентирование и измерение пары снимков на компараторе — в одной плоскости. Вторая — это пространственное трансформирование второго снимка при помощи первого, решаемое итерационным способом. Занимается вопросами, служащими для упрощения как измерений, так и вычислений.

В дальнейшем рассматривается вопрос повышения точности ориентирования на компараторе. Этим становится возможным практически более точное решение задачи, также с применением итерации в пространственном трансформировании.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (1—2), pp. 157—166 (1969)

ÜBER DIE KONSTRUKTION DER ZU DEN MITTLEREN FEHLERELLIPSEN GEHÖRIGEN FUSSPUNKTKURVEN

A. TÁRCZY-HORNOCH

MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 15. Juni 1968.]

Wir gaben bereits in [1] u. [2] eine graphische Methode an, die allein durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes die konstruktive Bestimmung der Fußpunktkurve auch ohne Kenntnis der großen und kleinen Achsen und deren Richtungen ermöglichte. In [3] wurde mit Hilfe dieser Werte eine graphische Näherungslösung durch zwei Kreise vorgeschlagen, deren Mittelpunkte aus den Verbindungslinien zweier entsprechender Punkte der Fußpunktkurve als Sehnen dieser Kreise bestimmt werden. Letztere Lösung ist aber mehrwertig.

Bei Verwendung von Hilfskreisen wird vorgeschlagen, an den Endpunkten der großen und kleinen Achsen der mittleren Fehlerellipse die Krümmungskreise zu verwenden, deren Radien nach Gln. (8) u. (9) leicht zu bestimmen sind. Aus Gl. (9) geht unmittelbar hervor, wann der Krümmungsradius in den Endpunkten der kleinen Achse positiv und wann negativ ist. Im letzteren Falle hat hier die Fußpunktkurve Einbuchtungen.

Zu dem zu behandelnden Problem haben wir bereits früher Beiträge geliefert. In [1] untersuchten wir die Berechnung der mittleren Fehlerellipse des einfachen Vorwärtseinschnittes und gaben dabei neben der rechnerischen auch eine graphische Bestimmungsmethode der Fußpunktkurve der mittleren Fehlerellipse an. In [2] wurde letztere Methode auch auf den einfachen Rückwärtseinschnitt, auf den Seitwärtsabschnitt, auf die polare Punktbestimmung, auf die Punktbestimmung mit einem Vorwärtseinschnittwinkel und einer Bogenlänge, auf die Punktbestimmung mit einem Seitwärtsabschnittswinkel und einer Bogenlänge und endlich auf die Punktbestimmung durch den Schnitt zweier Bogenlängen ausgedehnt. Zum Schluß wurde kurz auch auf die Konstruktion der Fußpunktkurve im Falle der überschüssigen Beobachtungen hingewiesen.

Ausführlicher wurde auch in [2] nur der einfache Vorwärtseinschnitt behandelt und wiederholt betont, daß nach der Konstruktion der als Parallelogramm behandelbaren Fehlerfigur die weitere Konstruktion der Fußpunktkurve bei den behandelten weiteren Punktbestimmungen in ähnlicher Weise erfolgt.

In 1964 erschien nun eine Veröffentlichung [3], in der die Konstruktion der Fußpunktkurve der mittleren Fehlerellipse beim einfachen Bogenschnitt behandelt wurde, zuvor aber auch die entsprechenden mathematischen Beziehungen hergeleitet worden sind. Bezüglich der letzteren sei bemerkt, daß diese gleichfalls aus dem Fehlerparallelogramm hergeleiteten Beziehungen naturgemäß unseren, aus dem Fehlerparallelogramm erhaltenen Beziehungen entsprechen müssen. [3] beruft sich auf den ersten sechs Seiten wiederholt auf unsere Untersuchungen, und dies zeigt auch, daß man diesen Teil durch Übernahme unserer entsprechenden Ergebnisse etwas kürzer hätte fassen können. Insbesondere erscheint es für entbehrlich, die Richtungen der großen und kleinen Achse noch einmal durch Differentiation herzuleiten, zumal die Gln. (7) u. (8) in [3] (abgesehen von einem Druckfehler in [3; Gl. (8)]) in [1; S. 399] bereits hergeleitet worden waren und so einfach von dort übernommen werden konnten.

Von S. 373 angefangen gibt [3] eine von unserer Methode abweichende und vom Verfasser wohl als näherungsweise aber als einfachere Methode bezeichnete Konstruktion der Fußpunktkurve an.

Um einen Vergleich anzustellen, wollen wir hier aus [2; S. 159] die leitenden Grundsätze unserer graphischen Lösung kurz wiederholen: Zu unserer graphischen Lösung brauchen wir weder die mittlere Fehlerellipse, noch deren kleine und große Achse bzw. deren Richtungen kennen. Weiters schrieben wir in Kursive: Wir brauchen nicht einmal den Begriff der Fußpunktkurve der mittleren Fehlerellipse einzuführen und diese zu definieren, weil wir den mittleren Fehler durch die bekannte Zusammensetzung der mittleren Teilfehler bestimmen.

Ist nun die in [3] angegebene konstruktive Näherungslösung in diesen Beziehungen voraussetzungslos? Nach [3; S. 373] braucht man hierzu zunächst die Richtung und Größe der großen Achse zu bestimmen, dann brauchen wir den mittleren Punktfehler, um daraus den Wert der kleinen Halbachse graphisch ermitteln zu können; weiters setzen wir voraus, daß große Teile der Fußpunktkurve durch zwei Kreise entsprechend genau dargestellt werden können, deren Mittelpunkte auf der großen Achse liegen, endlich werden je zwei zu demselben Kreis gehörende Punkte der Fußpunktkurve gebraucht. Die in [3] angegebene Methode ist daher in unserem Sinne keinesfalls voraussetzungslos, und sie ist daher nicht eine einfachere, sondern eine andere Lösung als die unsere.

Die in [3] angeführte Lösung ist dabei trotz ihres Näherungscharakters kaum ein allgemein rasches Verfahren, wie dies aus folgenden ersichtlich ist.

Die bezogene Lösung geht (Abb. 1) von den vier Punkten 1, 2, 3, 4 aus, die Punkte der Fußpunktkurve sind und vom Schnittpunkt der gemessenen Längen a und b durch Auftragung der mittleren Fehler μ_a und μ_b erhalten werden. γ ist der durch die beiden Längen a und b eingeschlossene Winkel. Da in diesem Falle die zueinander näher liegenden Punkte 1 und 3, bzw. 2 und 4 zu denselben, die Fußpunktkurve teilweise ersetzenden Kreisen gehören, können ihre Verbindungslinien als deren Sehnen angesehen werden und nach [3; S. 373] durch Errichtung der Normalen in den Halbierungspunkten sowie durch deren Schnitt mit der Hauptachse die Mittelpunkte der entsprechenden Kreise bestimmt werden. Diese Methode versagt aber, wenn $\mu_a = \mu_b$ ist, welcher Fall besonders bei der elektrooptischen Seitenmessung oft vorkommen kann, weil in diesem Falle die Normalen in den Halbierungspunkten der Sehnen mit der großen Achse zusammenfallen. Sind μ_a und μ_b nicht merklich verschieden, so sind die Schnitte sehr spitz und ungenau. In beiden Fällen sind daher noch andere Punkte der Fußpunktkurve erforderlich, die am einfachsten durch die Konstruktionen nach [1], bzw. [2] erhalten werden. Ähnliches gilt, wenn man nach [3; Gl. (19)] zur Ermittlung der kleinen Halbachse den mittleren Punktfehler und hierzu zunächst den mittleren Fehler in einer um 90° abweichenden Richtung sucht.* Endlich werden nach [3; S. 373] erforderlichenfalls

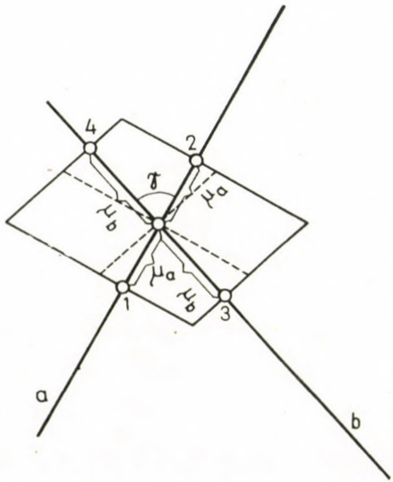


Abb. 1

auch die Übergangspunkte in der Nähe der Enden der kleinen Halbachsen durch rechtwinklige Projizierungen bestimmt.

Wir wollen nun prüfen, ob solche Punkte der Übergangskurven oft erforderlich erscheinen und wieviel die begangenen Vernachlässigungen betragen. Zu diesem Zwecke gehen wir aus einem konkreten, mit Zahlen belegten Beispiel aus. Um die Fehlereinflüsse der Konstruktionen auszuschalten, wollen wir es rechnerisch behandeln.

Es seien die ermittelten großen und kleinen Halbachsen der mittleren Fehlerellipse: $a = 5$ cm und $b = 3{,}7$ cm. Wir suchen nun die mittleren Fehler x_1 und x_2 in den mit der großen Achse die Winkel $\xi_1 = 65°$ und $\xi_2 = -75°$ einschließenden Richtungen (Abb. 2). Gebraucht werden y und r, die die Mittelpunkte und den Radius der Kreise angeben.

* Dies kann vermieden werden, wenn wir aus der großen Halbachse und einem gegebenen Punkt (z. B. aus einem der Punkte 1, 2, 3, 4) der Fußpunktkurve durch Umkehrung der in [1, 2] angegebenen Methode die kleine Halbachse konstruieren.

Weil in bezug auf die Hauptachsen $\gamma = 90°$ ist, wird hier aus [1; Gl. (11)]:

$$m_\xi^2 = x^2 = a^2 \cos^2 \xi + b^2 \sin^2 \xi \tag{1}$$

und daher:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{5^2 \cos^2 65° + 3{,}7^2 \sin^2 65°} = \sqrt{15{,}7097} = 3{,}9636 \text{ cm} \\ x_2 &= \sqrt{5^2 \cos^2 75° + 3{,}7^2 \sin^2 75°} = \sqrt{14{,}4467} = 3{,}8009 \text{ cm} \end{aligned} \tag{1a}$$

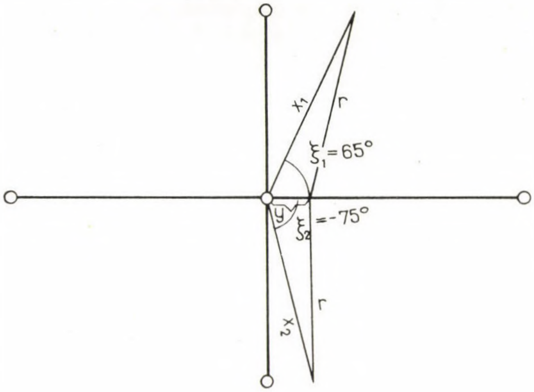


Abb. 2

Nun bestehen nach Abb. 2 die Beziehungen:

$$\begin{aligned} y^2 + x_1^2 - 2yx_1 \cos \xi_1 &= r^2 \\ y^2 + x_2^2 - 2yx_2 \cos \xi_2 &= r^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Daraus wird:

$$y = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2\,(x_1 \cos \xi_1 - x_2 \cos \xi_2)} \tag{3}$$

Wenn wir diesen Wert in eine der Gln. (2) einsetzen, so können wir r berechnen.

In unserem Falle werden:

$$y = \frac{15{,}7097 - 14{,}4467}{2\,(1{,}6750 - 0{,}9837)} = \frac{1{,}2630}{1{,}3826} = 0{,}9135$$

sowie nach Gln. (2):

$$r^2 = 0{,}8345 + 15{,}7097 - 3{,}0602 = 13{,}4840, \text{ bzw. } r = 3{,}6720$$

Der Radius des Kreises, der durch die beiden, durch x_1 und x_2 bestimmten Fußpunkte geht, beträgt hier also 3,6720 cm. Nun soll aber dieser Kreis gleichzeitig auch durch den Endpunkt der großen Halbachse gehen und dies bestimmt aber hier einen anderen Radius r' für den Kreis: $r' = 5 - y = 4{,}0865$ cm, der wieder die beiden Punkte mit x_1 und x_2 nicht enthält. Der Unterschied zwischen beiden Radien ist 0,4145 cm = 4,145 mm, also im Vergleich zu $r = 3{,}6720$ mehr als 11%. Dieser Unterschied zwischen den mit beiden Radien gezeichneten Kreisen ist schon merklich. Dieser kann aber durch die Wahl der zur Konstruktion verwendeten Punkte vermindert werden. Dies deutet darauf hin, daß zur Konstruktion der Kreise nach [3] Punkte der Fußpunktkurve mit nicht zu großen ξ-Werten herangezogen werden sollen und daß die Kreise bei großen ξ-Werten bereits große Abweichungen von den richtigen Werten zeigen und deshalb diese Teile der Fußpunktkurve gleichfalls mit Hilfe der nach [1, 2] konstruierten Punkte oder nach einer, hier noch anzugebenden Methode gezeichnet werden sollten.

Auf die weitere Behandlung der Konstruktion des Kreises mit Hilfe der Sehne gehen wir hier nicht ein, da die Unterschiede zwischen beiden Radien, wohl im kleineren Ausmaß, auch weiterhin bestehen bleiben, und so diese Lösung uns nicht befriedigt. Es sei bemerkt, daß [3] die Frage offen läßt, welcher Radius von beiden zu wählen sei. Daß diese Zweiwertigkeit (die bei den verschiedenen Sehnen verschiedene Zahlenwerte liefert) im dortigen Beispiel nicht zum Vorschein kam, dürfte seinen Grund in der ungenauen Konstruktion der Abb. 5 in [3] haben: die beiden Kreise müssen symmetrisch zum Schnittpunkt der großen und kleinen Achse liegen, was dort in Abb. 5 sichtbar nicht der Fall ist.

Wir wollen im folgenden eine Lösung suchen, die zu eindeutigen Werten führt.

Hat man die große und die kleine Achse der mittleren Fehlerellipse, und kennt man die hier unter (1) angeführte Gleichung der Fußpunktkurve, so ist es naheliegend, die Krümmungskreise für die Endpunkte der großen und der kleinen Achse zu bestimmen. Man könnte allerdings die Zweiwertigkeit von r auch dadurch beseitigen, daß man im Sinne von [3] als einen Punkt der Sehne und der Konstruktion den Endpunkt der großen Halbachse wählt. Doch wir wollen im folgenden nur den Fall mit den Krümmungsradien behandeln, weil dieser auch dann nicht versagt, wenn die Sehne normal zur Achse steht.

Der Krümmungsradius ϱ im polaren Koordinatensystem ist bekanntlich (Vgl. [4; S. 128]):

$$\varrho = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - r \cdot r''}, \tag{4}$$

wobei in unserem Falle

$$r = x = \sqrt{a^2 \cos^2 \xi + b^2 \sin^2 \xi} \tag{5}$$

bedeutet.

Aus Gl. (5) werden:

$$r' = \frac{1}{2} \frac{(b^2 - a^2) \sin 2\xi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \xi + b^2 \sin^2 \xi}} \tag{6}$$

und

$$r'' = \frac{1}{2} \frac{2(b^2 - a^2) \cos 2\xi \sqrt{a^2 \cos^2 \xi + b^2 \sin^2 \xi} - \frac{(b^2 - a^2)^2 \sin^2 2\xi}{2\sqrt{a^2 \cos^2 \xi + b^2 \sin^2 \xi}}}{a^2 \cos^2 \xi + b^2 \sin^2 \xi} \tag{7}$$

Wenn nun $\xi = 0$ ist, d.h. in der Richtung der großen Halbachse a, ergeben sich:

$$r_a = a, \; r_a' = 0, \; r_a'' = -\frac{b^2 - a^2}{a}$$

und daher der Krümmungsradius ϱ_a:

$$\varrho_a = \frac{a^3}{2a^2 - b^2} \tag{8}$$

Wenn $\xi = 90°$ ist, d.h. in der Richtung der kleinen Halbachse b werden:

$$r_b = b, \; r_b' = 0, \; r_b'' = -\frac{b^2 - a^2}{b}$$

und daher der Krümmungsradius ϱ_b:

$$\varrho_b = \frac{b^3}{2b^2 - a^2} \tag{9}$$

Die beiden Krümmungsradien ϱ_a und ϱ_b sind daher mit einem Rechenschieber sehr leicht zu berechnen. Bei ϱ_b bedeutet das positive Vorzeichen, daß ϱ_b dem Schnittpunkt der beiden Achsen zu, bei negativem Wert, daß er in der entgegengesetzten Richtung zu nehmen ist.

In dem vorherigen Zahlenbeispiel mit $a = 5$ cm, $b = 3{,}7$ cm erhält man:

$$\varrho_a = \frac{125}{50 - 13{,}69} = +\,3{,}4426 \text{ cm}$$

$$\varrho_b = \frac{50{,}653}{27{,}38 - 25} = +\,21{,}283 \text{ cm}$$

Da ϱ_b positiv ist, entspricht dieser Fall dem von HOMORÓDI in [5; S. 9] unter 2. behandelten Fall. In der Tat, solange $2b^2 - a^2 > 0$ ist, wird ϱ_b positiv und diese Bedingung entspricht der für diesen Fall angegebenen Homoródischen Bedingung

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} > 0 .$$

Denn es folgt aus unserer Bedingung, daß

$$b^2 > \frac{a^2}{2} \quad \text{bzw.} \quad b > \left|\frac{a}{\sqrt{2}}\right|$$

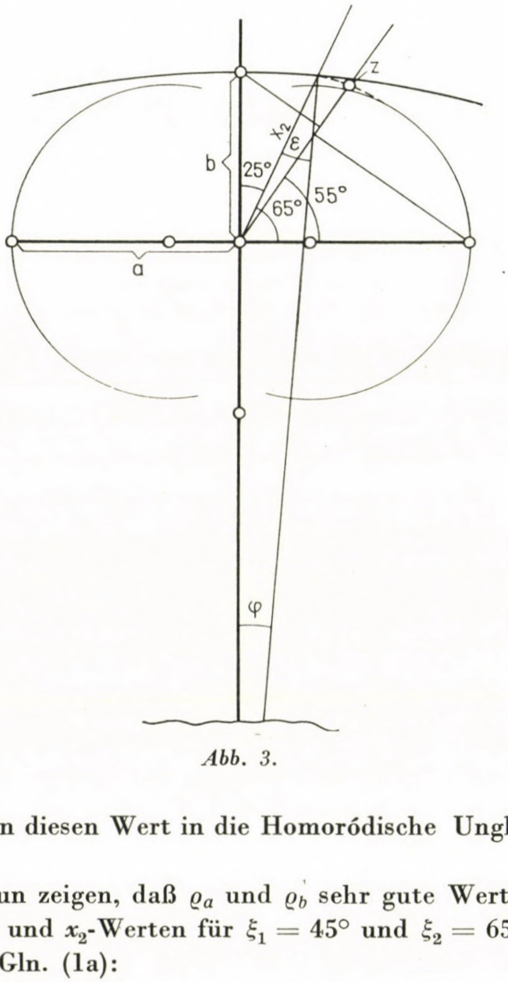


Abb. 3.

sein muß. Setzt man diesen Wert in die Homoródische Ungleichung, so wird diese erfüllt.

Wir wollen nun zeigen, daß ϱ_a und ϱ_b sehr gute Werte sind. Wenn wir nämlich aus den x_1 und x_2-Werten für $\xi_1 = 45°$ und $\xi_2 = 65°$ r berechnen, so erhalten wir nach Gln. (1a):

$$x_1 = \sqrt{19{,}345} = 4{,}3983 \text{ cm}; \; x_2 = \sqrt{15{,}7097} = 3{,}9636 \text{ cm}$$

Weiters nach Gl. (3): $y = 1{,}2667$ cm und nach Gln. (2): $r = \sqrt{13{,}0720} = 3{,}6153$ cm. Dieser Wert ist noch immer um 1,2 mm kleiner als der von $5{,}000 - y$ errechnete Wert 3,7333 cm, d. h., der Kreis mit $r = 3{,}6153$ cm weicht noch immer um 1,2 mm vom Endpunkt der großen Halbachse ab. Dagegen erhalten wir mit $\varrho_a = 3{,}4426$ cm $y = 5{,}0000 - 3{,}4426 = 1{,}5574$ cm und so mit ϱ_a, y sowie $\xi_1 = 45°$, $x_1' = 4{,}3559$ cm, welcher Wert nur um rund 0,4 mm kleiner ist als der richtige Wert 4,3983 cm. Wie groß ist nun die Abweichung bei $\xi_2 = 65°$? Der damit und mit ϱ_a sowie y errechnete Wert $x_2' = 3{,}7982$ cm weicht bereits um 1,6 mm vom richtigen ab. Wie groß ist aber hier der mit ϱ_b ermittelte Wert x_2''? Nach Abb. 3 werden:

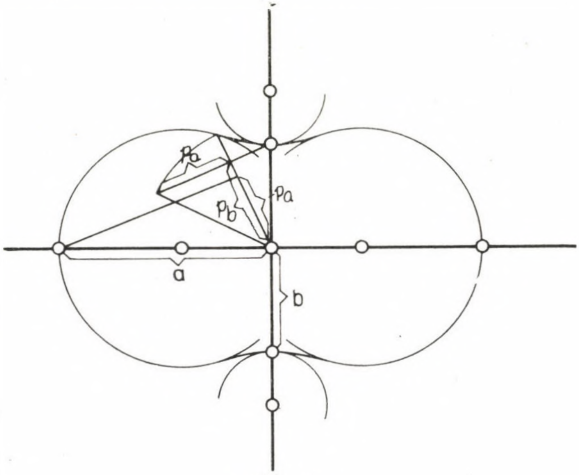


Abb. 4

$$\sin \varepsilon = \frac{21{,}283 - 3{,}7}{21{,}283} \sin 155° = 0{,}3491$$

und

$$\varepsilon = 20°26'.$$

Mithin $$\varphi = 180° - (155° + 20°26') = 4°34'$$

und $$x_2'' = \frac{21{,}283}{\sin 155°} \sin 4°\,34' = 3{,}9858\,\text{cm}.$$

Der Unterschied zum richtigen Wert ist somit nur rund 0,2 mm, also hier ersetzt die Fußpunktkurve den Kreis mit ϱ_b bereits wesentlich besser. Noch mehr gilt dies natürlich für $\xi = 75°$, und so kann es uns nicht wundern, daß der aus Gln. (1a) berechnete Kreishalbmesser mit dem Mittelpunkt auf der großen Achse große Abweichungen zeigte. Die Verwendung von zwei Krümmungsradien ist bei größeren Genauigkeitsforderungen jedenfalls ratsam. Das Zeichnen der Kreise gibt auch dafür Hinweise (Vgl. Abb. 3) und auch Aufschluß, ob die Konstruktion von Punkten zwischen den Kreisen erforderlich ist. Bei höheren Genauigkeitsforderungen wird man in Abb. 3 z. B. etwa bei $\xi = {}^{+}/_{-}\,55°$

vier Punkte z bestimmen. (In der Abb. ist nur die Konstruktion eines solchen Punktes angegeben.)

Wir wollen noch kurz den Fall behandeln, bei dem die kleinen Halbachsen in Einwölbungen liegen, d.h., bei welchen ϱ_b negativ ist. Die Bedingung ist hierfür aus Gl. (9) offenkundig, daß $a^2 > 2b^2$ werde. Es sei daher $a = 4{,}16$ cm, $b = 2{,}08$ cm. Dann werden nach Gln. (8) u. (9): $\varrho_a = 2{,}3772$ cm, $\varrho_b = 1{,}0400$ cm. Zeichnet man mit diesen die Kreise in Abb. 4, so genügt oft, die Kreise durch die hier vorhandenen gemeinsamen Tangenten zu verbinden. Bei größeren Genauigkeitsforderungen ist zu berücksichtigen, daß in der Nähe der Endpunkte der kleinen Halbachsen die Punkte der Fußpunktkurve zu deren Krümmungskreise in der Regel näher liegen. Es kann in diesem Falle auch je ein Punkt der Fußpunktkurve durch Konstruktion bestimmt werden. In Abb. 4 fällt dieser ziemlich genau auf den tangential verbindenden Teil.

Zusammenfassend können wir sagen, daß der in [3] aufgeworfene Halmossche Gedanke, die Fußpunktkurven der mittleren Fehlerellipse zur raschen Konstruktion durch Kreise zu ersetzen, ein guter Gedanke ist. Wir glauben aber, daß an Stelle der dort angegebenen zwei Kreise die vier Krümmungskreise in den Endpunkten der Hauptachsen, schon der Eindeutigkeit ihrer Größen halber, beachtenswert sind.

SCHRIFTTUM

1. Tárczy-Hornoch, A.: Zur Berechnung der mittleren Fehlerellipse beim einfachen Vorwärtseinschnitt. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 1957.
2. Tárczy-Hornoch, A.: A középhiba-ellipszis talpponti görbéjének egyszerű megszerkesztése. *Geodézia és Kartográfia*, 1959.
3. Halmos, F.: Konstruktion der Fußpunktkurve der mittleren Fehlerellipse bei einfachem Bogenschnitt. *Acta Technica Hung.* 47 (1964).
4. Duschek, A.: Höhere Mathematik. II. Bd. zweite Aufl. 1958.
5. Homoródi, L.: A hibaellipszis és a ponthiba. *Geodézia és Kartográfia*, 1956.

CONSTRUCTION OF PEDAL CURVES TO MEAN SQUARE ERROR ELLIPSES

A. TÁRCZY-HORNOCH

SUMMARY

A graphical method was already published in [1, 2] that makes the constructive determination of pedal curves possible on the basis of the law of error propagation without the knowledge of the major and minor axes and their direction. Starting out from these values, in [3] a graphical approximation is given with the aid of two circles, the centres of which can be determined from straight lines connecting two corresponding points each of the pedal curve; these straight lines are the chords of the circles. The latter solution is, however, ambiguous.

In this paper it was proposed for the case of the auxiliary circles that at the end-points of the major and minor axes of the mean square error ellipse the curvature circles, belonging to these points. should be used. Their radii can be easily determined from eq. (8) and (9). Eq. (9) shows directly whether the curvature radius at the end-points of the minor axis is positive or negative. In the latter case here the pedal curve has embayments.

О ПОСТРОЕНИИ КРИВЫХ ОСНОВАНИЙ, ОТНОСЯЩИХСЯ К ЭЛЛИПСУ СРЕДНИХ КВАДРАТИЧЕСКИХ ОШИБОК

А. ТАРЦИ-ХОРНОХ

РЕЗЮМЕ

В [1] и [2] уже был опубликован один графический метод, который при помощи закона распространения ошибок дает возможность для конструкционного определения кривой оснований, при этом большая и малая оси и их направление неизвестны. С использованием этих величин в [3] было дано одно приближённое графическое решение при помощи двух окружностей, центры которых могут быть определены по связующим линиям двух соответствующих точек кривой оснований, как по хордам этих окружностей. Но это последнее не однозначно.

В случае применения вспомогательных окружностей, в конечных точках большой и малой осей эллипса средних квадратических ошибок, предлагается воспользоваться относящимися к ним окружностями кривизны, радиус которых может быть легко определён по уравнениям (8) и (9). Из уравнений (9) ясно видно, что радиус кривизны в конечных точках малой оси когда будет положительным или отрицательным. В последнем случае кривая оснований здесь имеет вогнутости.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (1—2), pp. 167—173 (1969)

EINE ABSCHÄTZUNG DER VERBESSERUNG EINES AUSGLEICHS DURCH ZUSÄTZLICHE BEOBACHTUNGEN UND BEDINGUNGEN

P. MEISSL

TECHNISCHE HOCHSCHULE, WIEN

[Eingegangen am 15. Juni 1968]

Als Genauigkeitsmaß irgendwelcher streng ausgeglichener Größen wird die Summe ihrer mittleren Fehlerquadrate gewählt. Diese Summe ist gleich der Spur der Fehlermatrix (Kovarianz-Matrix) dieser Größen. Mit Hilfe der Eigenwerte dieser Fehlermatrix läßt sich eine a priori Abschätzung dafür angeben, um wieviel das eingeführte Fehlermaß verbessert werden kann, wenn das Ausgleichsproblem durch eine vorgegebene Anzahl zusätzlicher Beobachtungen oder/und Bedingungen ergänzt wird.

1. Problemstellung

Ein Ausgleichsproblem ist gekennzeichnet durch den Vektor $\mathbf{l}$ der n Beobachtungen, durch die $n \times n$ Fehlermatrix (Kovarianzmatrix) $\mathbf{C} = \mathrm{Cov}(\mathbf{l})$ dieser Beobachtungen, die eventuell einen unbekannten Skalarfaktor enthalten kann, durch den m-dimensionalen Vektor $\mathbf{x}$ auszugleichender Parameter, durch eine Anzahl linearer (Zwangs-)Bedingungen zwischen den Komponenten von $\mathbf{x}: \mathbf{Tx} = \mathbf{t}$ und schließlich durch eine Anzahl linearer Vermittlungsgleichungen zwischen $\mathrm{Exp}(\mathbf{l})$ und $\mathbf{x}$: $\mathbf{R}(\mathrm{Exp}(\mathbf{l})) = \mathbf{Sx}$. (Exp bedeutet Erwartungswert).

Sei $\mathbf{y}$ ein p-dimensionaler von $\mathbf{x}$ linear abhängender Vektor: $\mathbf{y} = \mathbf{Bx}$. Nach strengem Ausgleich kommt $\mathbf{y}$ eine Fehlermatrix $\mathbf{M} = \mathrm{Cov}(\mathbf{y})$ zu. $\mathbf{M}$ läßt sich aus $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ und $\mathbf{B}$ berechnen. (Siehe z. B. [3]. § 123.) Enthält $\mathbf{C}$ einen unbekannten Skalarfaktor, so enthält auch $\mathbf{M}$ diesen. Als Fehlermaß für die Genauigkeit von $\mathbf{y}$ betrachten wir neben $\mathbf{M}$ noch $\mathrm{sp}(\mathbf{M})$, die Spur (Summe der Hauptdiagonalglieder) von $\mathbf{M}$. $\mathrm{sp}(\mathbf{M})$ ist einfach die Summe der mittleren Fehlerquadrate der Komponenten von $\mathbf{y}$.

Wir ergänzen nun das Ausgleichsproblem durch r_1 zusätzliche Beobachtungen $\bar{\mathbf{l}}$ samt entsprechenden Vermittlungsgleichungen und durch r_2 zusätzliche (Zwangs-) Bedingungen. Auch die Parameter $\mathbf{x}$ können durch neu hinzukommende $\bar{\mathbf{x}}$ vermehrt werden, die in den neuen Zwangsbedingungen und Vermittlungsgleichungen auftreten. Die neuen Beobachtungen $\bar{\mathbf{l}}$ können auch mit den ursprünglichen korreliert sein. Die früheren Größen $\mathbf{y}$ nennen wir nach strengem Ausgleich des modifizierten Problems jetzt $\tilde{\mathbf{y}}$. Ihre Fehlermatrix sei $\tilde{\mathbf{M}}$ und $\mathrm{sp}(\tilde{\mathbf{M}})$ das entsprechende Fehlermaß. Welche Aussagen lassen sich über

$\mathrm{sp}(\tilde{\mathbf{M}})$ machen, ohne den neuerlichen Ausgleich tatsächlich durchzuführen? Trivialerweise gilt $\mathrm{sp}(\tilde{\mathbf{M}}) \leq \mathrm{sp}(\mathbf{M})$, da durch zusätzliche Information die Fehler jedenfalls kleiner werden. Unser Ziel ist es, $\mathrm{sp}(\tilde{\mathbf{M}})$ nach unten abzuschätzen.

2. Formulierung des Ergebnisses

Vorerst benötigen wir einige Tatsachen aus der Spektraltheorie der Matrizen. Eine $p \times p$ Matrix $\mathbf{M}$ besitzt stets p Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Sie sind die Wurzeln der algebraischen Gleichung p-ten Grades.

$$\mathrm{Det}(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{M}) = 0 \tag{1}$$

Hier und im folgenden bedeutet $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix. Die Gleichung (1) benützt man nur bei kleinem p zur tatsächlichen Berechnung der λ_i. Es sind zahlreiche rationellere Verfahren zu ihrer numerischen Ermittlung bekannt. Viele Möglichkeiten gibt es, die Eigenwerte a priori abzuschätzen. Die Eigenwerte erfüllen die Gleichung

$$\mathrm{sp}(\mathbf{M}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p\,. \tag{2}$$

Falls $\mathbf{M}$ einen unbekannten Skalarfaktor enthält, so überträgt sich dieser auf die λ_i. Ist $\mathbf{M}$ eine Fehlermatrix (d. h. eine symmetrische, nicht negativ definite Matrix), so sind die $\lambda_i \geq 0$. Wir numerieren sie der Größe nach:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p \geq 0 \tag{3}$$

Nun formulieren wir folgenden

Satz. Ergänzt man ein Ausgleichsproblem durch r_1 zusätzliche Beobachtungen und r_2 zusätzliche Bedingungen und ist $\mathbf{M}$ bzw. $\tilde{\mathbf{M}}$ die $p \times p$ Fehlermatrix irgendwelcher streng ausgeglichener Größen vor bzw. nach der Ergänzung, ist $r = r_1 + r_2$ und $r < p$ so gilt

$$\mathrm{sp}(\tilde{\mathbf{M}}) \geq \mathrm{sp}(\mathbf{M}) - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j = \sum_{j=r+1}^{p} \lambda_j \tag{4}$$

Dabei sind $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p \geq 0$ die Eigenwerte von $\mathbf{M}$.

Zusatz. Es ist stets möglich $r = r_2$ zusätzliche Bedingungen formal so zu wählen, daß in (4) statt $\geq$ ein $=$ steht. Der Satz ist also in dieser Allgemeinheit nicht mehr verbesserungsfähig.

Da der mathematische Beweis dieser Aussagen den Leser vielleicht weniger interessiert, bringen wir vorerst Beispiele.

3. Anwendungsbeispiele

a) *Mehrfacher Bogenschnitt.* (Siehe Abb. 1.) Seien zunächst die Distanzen von A, B, C nach dem Neupunkt P mit gleichem mittleren Fehler 1 gemessen worden. Die Fehlermatrix **M** der beiden ausgeglichenen Koordinaten von P berechnet sich zu

$$\mathbf{M} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3, & -1 \\ -1, & 3 \end{bmatrix}$$

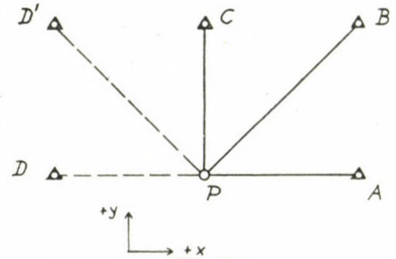


Abb. 1

Es ist $\mathrm{sp}(\mathbf{M}) = \frac{3}{2}$ = mittlerer quadratischer Punktlagefehler. Die beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 von **M** kann man hier mittels (1) berechnen. (1) wird zu $\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}$ und liefert $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. λ_1, λ_2 sind hier natürlich die Quadrate der beiden Halbachsen der Fehlerellipse von P. $\lambda_1 + \lambda_2$ ergibt gemäß (2) sp(**M**).

Wir ergänzen nun das Ausgleichsproblem durch eine Messung der Distanz $\overline{\mathrm{DP}}$ mit mittlerem Fehler μ. Die Fehlermatrix der Koordinaten von P nach neuerlichem Ausgleich nennen wir $\tilde{\mathbf{M}}$. Auf Grund des Satzes wissen wir

$$\mathrm{sp}\,(\tilde{\mathbf{M}}) \geq \frac{1}{2} \tag{5}$$

Rechnen wir $\tilde{\mathbf{M}}$ tatsächlich aus, so finden wir

$$\tilde{\mathbf{M}} = \frac{1}{4 + 3\mu^{-2}}\begin{bmatrix} 3, & -1 \\ -1, & 3 + 2\mu^{-2} \end{bmatrix}$$

und $\mathrm{sp}(\tilde{\mathbf{M}}) = (6 + 2\mu^{-2})/(4 + 3\mu^{-2})$. Für $\mu = \infty$ (keine zusätzliche Information) wird $\mathrm{sp}(\tilde{\mathbf{M}}) = \frac{3}{2}$, wie früher. Für $\mu = 0$ (Zwangsbedingung: $\overline{\mathrm{DP}}$ fest !) wird $\mathrm{sp}(\tilde{\mathbf{M}}) = \frac{2}{3}$. Zwischen diesen Grenzfällen wächst $\mathrm{sp}(\tilde{\mathbf{M}})$ monoton mit wachsendem μ. Das = in (5) wird nie erreicht.

Messen wir *statt* $\overline{DP}$ die Distanz $\overline{D'P}$ mit mittlerem Fehler μ, so erhalten wir

$$\tilde{\mathbf{M}} = \frac{1}{4 + 4\mu^{-2}} \begin{bmatrix} 3 + \mu^{-2}, 1 + \mu^{-2} \\ 1 + \mu^{-2}, 3 + \mu^{-2} \end{bmatrix}$$

und $\mathrm{sp}(\tilde{\mathbf{M}}) = (3 + \mu^{-2})/(2 + 2\mu^{-2})$. Im Intervall $0 \leq \mu \leq \infty$ wächst $\mathrm{sp}(\tilde{\mathbf{M}})$ von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{2}$. Für $\mu = 0$ gilt in (5) das $=$. Die Ursache dafür ist natürlich darin zu suchen, daß die große Achse der Fehlerellipse von P auf Grund der 3 ursprünglichen Messungen die Richtung $\overline{D'P}$ hatte.

b) *Nivellementschleife.* Zur Bestimmung der Höhen $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$ von n Punkten $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ wurden die n Höhenunterschiede Δh_{01}, $\Delta h_{12}, \ldots, \Delta h_{n-2,\, n-1}, \Delta h_{n-1,0}$ unabhängig voneinander mit mittlerem Fehler 1 gemessen. Zur Fixierung der absoluten Höhe wurde die Zwangsbedingung $h_0 + h_1 + \ldots + h_{n-1} = 0$ angenommen. Die $n \times n$ Fehlermatrix $\mathbf{M} = (m_{jk})$ der streng ausgeglichenen Höhen $h_0, \ldots, h_{n-1}$ ist gegeben durch

$$m_{jk} = n^{-1} \sum_{t=1}^{n-1} \zeta_j^{-t} \zeta_k^t (2 - \zeta_t - \zeta_t^{-1})^{-1}$$

wobei $\zeta_j = e^{2\pi j i/n}$ mit $i = \sqrt{-1}$ ist. Die Berechnung von $\mathbf{M}$ in dieser Form beruht auf einer Fehlertransformation, über die in [4] genauer berichtet wird. Die Spur von $\mathbf{M}$ ist

$$\mathrm{sp}\,(\mathbf{M}) = (n^2 - 1)/12 = n^2/12 + 0(1)\,.$$

Das Symbol 0(1) bedeutet eine beschränkte i. a. von n abhängige Größe. Für große n spielt sie eine untergeordnete Rolle. Die Eigenwerte von $\mathbf{M}$ sind der Größe nach

$$\lambda_{2k-1} = \lambda_{2k} = (2 - \zeta_k - \zeta_k^{-1})^{-1} = [4 \sin^2 (k\pi/n)]^{-1},$$

$$k = 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1,\ \lambda_{n-1} = 4^{-1},\ \lambda_n = 0\,.$$

(Diese Formeln gelten für gerades n, für ungerades n läuft k von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ und 4^{-1} tritt nicht als Eigenwert auf.)

Wir nehmen jetzt n gerade an und ergänzen das Ausgleichsproblem durch eine Beobachtung des Höhenunterschiedes zwischen P_0 und $P_{\frac{n}{2}}$ mit mittlerem Fehler μ. Sei $\tilde{\mathbf{M}}$ die neue Fehlermatrix der ausgeglichenen Höhen. Der Satz liefert die Abschätzung:

$$\mathrm{sp}\,(\tilde{\mathbf{M}}) \geq \frac{n^2 - 1}{12} - \frac{1}{4 \sin^2 (\pi/n)} = \frac{n^2}{16} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \right) + 0\,(1) \qquad (5a)$$

Eine tatsächliche Durchrechnung liefert das Resultat:

$$\mathrm{sp}\,(\tilde{\mathbf{M}}) = \frac{n^2-4}{16} + \frac{\mu^2}{12} \cdot \frac{n^2+8}{n+4\,\mu^2} = \frac{n^2}{16} + \frac{n}{12}\mu^2 + 0(1) \tag{6}$$

Formel (6) zeigt, daß für große n die Abschätzung (5a) ziemlich gut ist. Interessant ist dabei, daß μ^2 in (6) nur von der Ordnung n^1 wirksam ist.

Sei nun n durch $r+1$ teilbar und $m = n/(r+1)$. Ergänzen wir das ursprüngliche Ausgleichsproblem durch die r Bedingungen

$$h_{jm} = h_0 + \delta\, k_{0,jm}, \qquad j = 1, \ldots, r\,,$$

wobei $\delta h_{0,jm}$ bekannte feste Höhenunterschiede sind, so liefert der Satz

$$\mathrm{sp}(\tilde{\mathbf{M}}) \geq \mathrm{sp}(\mathbf{M}) - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k = \begin{cases} \dfrac{n^2}{12} - \dfrac{n^2}{2\pi^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{r/2} \frac{1}{k^2} + 0(1) \ldots r \text{ gerade} \\ \dfrac{n^2}{12} - \dfrac{n^2}{2\pi^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{(r-1)/2} \frac{1}{k^2} - \frac{n^2}{\pi^2}(r+1)^{-2} + 0(1) \ldots r \text{ ungerade} \end{cases} \tag{7}$$

Tatsächliche Durchrechnung ergibt:

$$\mathrm{sp}\,(\tilde{\mathbf{M}}) = \frac{(2\,r+1)\,[n^2-(r+1)^2]}{12\,(r+1)^2} = \frac{2\,r+1}{12\,(r+1)^2}\, n^2 + 0(1) \tag{8}$$

Für $r = 2$ liefert (7) $\mathrm{sp}(\tilde{\mathbf{M}}) \geq 0{,}033\, n^2 + 0(1)$, während (8) $\mathrm{sp}(\tilde{\mathbf{M}}) = 0{,}046\, n^2 + 0(1)$ ergibt.

Bemerkung: Bei diesem Beispiel wäre es sinnvoll neben $\mathrm{sp}(\mathbf{M})$, $\mathrm{sp}(\tilde{\mathbf{M}})$ noch die Fehlermaße $\tau = \sqrt{\mathrm{sp}(\mathbf{M})/n}$, $\tilde{\tau} = \sqrt{\mathrm{sp}(\tilde{\mathbf{M}})/n}$ zu betrachten und etwa als durchschnittliche Höhenfehler zu bezeichnen. Wir sehen, daß τ mit $\sqrt{n}$ anwächst. Aber bei festem r hat auch $\tilde{\tau}$ dieses Verhalten. Eine beschränkte Anzahl zusätzlicher Beobachtungen und Bedingungen ändert also an dem für ein Nivellement charakteristischen Fehlerwachstum $\sqrt{n}$ nichts. Bezüglich Verallgemeinerungen dieses Sachverhaltens siehe [4].

4. Beweis des Satzes

Jedes Ausgleichsproblem kann man auf eines nach vermittelnden Beobachtungen transformieren. Also genügt es, ein solches zu betrachten: $\mathrm{Exp}(\mathbf{l}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathrm{Cov}(\mathbf{l}) = \mathbf{C}$. Dabei bedeutet das Symbol Exp Erwartungswert. Die Fehlermatrix der ausgeglichenen $\mathbf{x}$ ist $\mathbf{N} = \mathrm{Cov}(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A})^{-1}$. Hochgestelltes T bedeutet dabei Transposition. Die uns interessierenden Größen $\mathbf{y}$ seien gegeben durch $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}$. Ihre Fehlermatrix ist demnach gleich $\mathbf{M} = \mathrm{Cov}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}\mathbf{N}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$. Der weitere Beweis zerfällt in 3 Teile.

(1). Wir beweisen den Satz zunächst für $r_1 = 0$ und $r_2 = r$ zusätzliche Bedingungen, die die Form $\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{f}$ haben. Wir nehmen also auch an, daß keine neuen Parameter $\bar{\mathbf{x}}$ dazukommen. Wir können dann einfach folgendes bedingte Ausgleichsproblem betrachten: $\mathrm{Exp}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{x}}$, $\mathrm{Cov}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}$, $\mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{f}$. Dies führt auf folgende Fehlermatrix für die $\tilde{\mathbf{x}} : \tilde{\mathbf{N}} = \mathrm{Cov}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{N}} - \mathbf{N}\mathbf{F}^T(\mathbf{F}\mathbf{N}\mathbf{F}^T)^{-1}\mathbf{F}\mathbf{N}$. Wir wählen eine quadratische Matrix $\mathbf{V}$ so, daß $\mathbf{V}(\mathbf{F}\mathbf{N}\mathbf{F}^T)\mathbf{V}^T = \mathbf{E}$ gilt, und ersetzen in der Formel für $\tilde{\mathbf{N}}\,\mathbf{F}$ durch $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{G}$. Dann ist $\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{G}^T\mathbf{G}\mathbf{N}$. Außerdem gilt $\mathbf{G}\mathbf{N}\mathbf{G}^T = \mathbf{E}$. Nun ersetzen wir noch $\mathbf{N}$ durch $\mathbf{N} = \mathbf{W}^2$, wobei $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$ die sogenannte positive Wurzel aus $\mathbf{N}$ ist (siehe [1], S. 253). Mit $\mathbf{H} = \mathbf{G}\mathbf{W}$ wird unsere Formel zu $\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N} - \mathbf{W}\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{W}$, wobei $\mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{E}$ gilt.

Für die Fehlermatrix $\tilde{\mathbf{M}} = \mathrm{Cov}(\tilde{\mathbf{y}})$ von $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{x}}$, erhalten wir $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{B}^T = \mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{W}\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{W}^T$. Also $\mathrm{sp}(\tilde{\mathbf{M}}) = \mathrm{sp}(\mathbf{M}) - \mathrm{sp}(\mathbf{B}\mathbf{W}\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{W}\mathbf{B}^T)$. Nun behandeln wir den letzten Term weiter. Da $\mathrm{sp}(\mathbf{X}^T\mathbf{X}) = \mathrm{sp}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)$ für beliebiges $\mathbf{X}$ gilt, folgt (mit $\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{W}\mathbf{B}^T$): $\mathrm{sp}(\mathbf{B}\mathbf{W}\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{W}\mathbf{B}^T) = \mathrm{sp}(\mathbf{H}\mathbf{W}\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{W}\mathbf{H}^T)$. $\mathbf{H}$ hat zugleich mit $\mathbf{F}$ r Zeilen. Sie sind orthonormiert wegen $\mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{E}$. Also ist $\mathbf{H}\mathbf{W}\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{W}\mathbf{H}^T$ eine r-dimensionale Sektion der Matrix $\mathbf{W}\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{W}$ (siehe [2], S. 76 !). Somit ist

$$\mathrm{sp}\,(\mathbf{H}\mathbf{W}\mathbf{B}^T\,\mathbf{B}\mathbf{W}\mathbf{H}^T) \leq \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \tag{9}$$

wenn $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die r größten Eigenwerte von $\mathbf{W}\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{W}$ sind. Da bei beliebigem $\mathbf{X}$ die von Null verschiedenen Eigenwerte von $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ und $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ übereinstimmen, sind (mit $\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{W}$) die λ_k auch die r größten Eigenwerte von $\mathbf{B}\mathbf{W}\mathbf{W}\mathbf{B}^T = \mathbf{B}\mathbf{N}\mathbf{B}^T = \mathbf{M}$. Damit ist Teil (1) bewiesen. Wählt man in (9) die Zeilen von $\mathbf{H}$ gleich den Eigenvektoren von $\mathbf{W}\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{W}$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, so gilt in (9) das $=$ Zeichen. Da sich aus $\mathbf{H}$ eindeutig $\mathbf{F}$ berechnen läßt, ist der Zusatz bewiesen.

(2). Nun beweisen wir den Satz für $r_1 > 0$ und betrachten das Ausgleichsproblem $\mathrm{Exp}(\mathbf{l}) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$, $\mathrm{Exp}(\bar{\mathbf{l}}) = \bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}$, $\mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{f}$ und

$$\mathbf{D} = \mathrm{Cov}\begin{bmatrix} \mathbf{l} \\ \bar{\mathbf{l}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \bar{\bar{\mathbf{C}}} \\ \bar{\bar{\mathbf{C}}}^T & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix}$$

Wiederum lassen wir noch keine zusätzlichen Parameter $\bar{\mathbf{x}}$ zu. Die Zeilenanzahl von $\bar{\mathbf{A}}$ ist r_1, jene von $\mathbf{F}$ r_2. $r_1 + r_2 = r$. Neben $\mathbf{D}$ betrachten wir die Matrix

$$\hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}, & \bar{\bar{\mathbf{C}}} \\ \bar{\bar{\mathbf{C}}}^T, & \bar{\bar{\mathbf{C}}}^T\,\mathbf{C}^{-1}\,\bar{\bar{\mathbf{C}}} \end{bmatrix}$$

Es ist $\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$ mit

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}, & \mathbf{0} \\ \bar{\bar{\mathbf{C}}}^T\,\mathbf{C}^{-1}, & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Daher ist $\hat{\mathbf{D}}$ eine Fehlermatrix. Die Matrix $\bar{\mathbf{C}} - \bar{\bar{\mathbf{C}}}^T\mathbf{C}^{-1}\bar{\bar{\mathbf{C}}}$ ist nicht negativ definit, denn sie ist gleich $(-\bar{\bar{\mathbf{C}}}^T\mathbf{C}^{-1},\mathbf{E})\mathbf{D}(-\bar{\bar{\mathbf{C}}}^T\mathbf{C}^{-1},\mathbf{E})^T$. Daher ist $\mathbf{D} - \hat{\mathbf{D}}$ nicht negativ definit. Das bedeutet, daß wir bei einem strengen Ausgleich mit $\hat{\mathbf{D}}$ kleinere

Fehler, also auch ein kleineres sp$(\tilde{\mathbf{M}})$, erhalten als bei einem Ausgleich mit $\mathbf{D}$. Nun gilt aber $(-\bar{\mathbf{C}}^T\mathbf{C}^{-1}, \mathbf{E})\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{O}$. Das heißt bei einem Ausgleich mit $\hat{\mathbf{D}}$ bestehen zwischen den Beobachtungen die Bedingungen $\bar{\mathbf{l}} - \bar{\mathbf{C}}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l} = \mathbf{O}$. Da diese Bedingungen auch zwischen den Erwartungswerten gelten müssen, gilt Exp $(\bar{\mathbf{l}} - \bar{\mathbf{C}}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{l}) = (\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{C}}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A})\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{O}$. Daher reduziert sich das Ausgleichsproblem auf $\mathrm{Exp}(\mathbf{l}) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$, $\mathrm{Cov}(\mathbf{l}) = \mathbf{C}$, $(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{C}}^T\mathbf{C}^{-1}\bar{\mathbf{A}})\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{O}$, $\mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{f}$. Diesen Fall mit $r_1 + r_2 = r$ zusätzlichen Bedingungen haben wir aber oben schon behandelt. Jetzt liefert er uns eine untere Schranke für sp$(\tilde{\mathbf{M}})$, womit Teil (2) des Beweises beendet ist.

(3). Zum Schluß lösen wir uns von der Einschränkung, daß in den hinzukommenden Bedingungs- und Vermittlungsgleichungen keine zusätzlichen Parameter $\bar{\mathbf{x}}$ auftreten. Treten welche auf, so denken wir uns das Problem durch die weiteren zusätzlichen Bedingungen $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{O}$ ergänzt. Dadurch sinkt sp$(\tilde{\mathbf{M}})$ noch weiter ab. Setzen wir andrerseits $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{O}$ in die Bedingungs- und Vermittlungsgleichungen ein, so erhalten wir den zuletzt betrachteten Fall. Er liefert uns eine untere Schranke für sp$(\tilde{\mathbf{M}})$, womit jetzt alles bewiesen ist.

SCHRIFTTUM

1. GANTMACHER, F. R.: Matrizenrechnung I. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin 1958.
2. HOUSEHOLDER, A. S.: The theory of matrices in numerical analysis. Blaisdell Publ. Co. 1964.
3. JORDAN—EGGERT—KNEISSL: Handbuch der Vermessungskunde, Band I, 10. Auflage, Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1961.
4. MEISSL, P.: Über zufällige Fehler in regelmäßigen gestreckten Ketten. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1969.

ESTIMATION OF THE IMPROVEMENT REACHED IN AN ADJUSTMENT THROUGH COMPLEMENTARY MEASUREMENTS AND CONDITIONS

P. MEISSL

SUMMARY

The sum of the squares of the mean square errors is chosen as a confidence measure of rigorously adjusted quantities. The sum is equal to the trace of the error matrix (covariance matrix). The eigenvalues of this error-matrix allow an a priori estimation of the decrease of the given errors, when the adjustment is supplemented by complementary observations or conditions.

ОЦЕНКА ПОПРАВОК, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ УРАВНИВАНИЯ, ПРИ ПОМОЩИ ДОБАВОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ И УСЛОВИЙ

П. МЕЙССЛ

РЕЗЮМЕ

Ценой точности строго уравновешенных величин выбираем сумму квадратов их средней квадратической ошибки. Эта сумма равна сумме членов главной диагонали (следу) матрицы ошибок. При помощи собственных значений этой матрицы ошибок возможна априорная оценка, относящаяся к тому, что в какой мере уменьшается данное значение ошибки, если проблема уравновешивания дополняется определенным количеством добавочных наблюдений, или же условий.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (1—2), pp. 175—186 (1969)

ÜBER DIE NORMUNG DER PRÜFUNGEN GEODÄTISCHER INSTRUMENTE

GY. ALPÁR

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

A. ORBÁN

GEODÄTISCHES FORSCHUNGSLABORATORIUM DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
SOPRON

[Eingegangen am 22. Juni 1968]

Die Verfasser der Studie erörtern die Probleme der Normung der Prüfungen geodätischer Instrumente. Vorerst werden die Zielsetzungen der Instrumentenprüfungen besprochen. Hier werden die zur Kontrolle der Justierung der Instrumente, weiter zur Bestimmung der Leistungsdaten vollzuführenden Prüfungen bzw. deren Probleme erörtert.

Im weiteren werden die Fehlerquellen der mit geodätischen Instrumenten vollzogenen Messungen hinsichtlich der Bestimmung der Leistungsdaten analysiert, und die von der Konstruktion der Instrumente herrührenden sog. inneren und von übrigen Umständen stammenden äußeren Fehlerquellen unterschieden.

Es werden die für die numerische Charakterisierung der Leistungsdaten angewendeten mittleren Fehler und deren Berechnungsmethoden kritisch betrachtet.

Die Normung ist neuerdings nicht nur in den einzelnen Ländern, sondern auch auf internationaler Ebene eine allgemeine Bestrebung. Die Zielsetzungen der Normung sind bezüglich der Fertigung und der Produktion allgemein wohlbekannt, und eine gut organisierte Kooperation ist ohne deren Verwirklichung kaum vorstellbar. Immer mehr Probleme treten aber hinsichtlich der Kontrolle der als Ergebnisse der Normung erscheinenden Daten (Maße, quantitative Zusammensetzungen usw.) auf. Dies brachte uns schon vor Jahren zum Gedanken der Normung der Prüfungen geodätischer Instrumente. Das Geodätische Forschungslaboratorium der UAdW beschäftigt sich — zwar unter bescheidenen Verhältnissen — schon seit drei Jahren mit diesbezüglichen Forschungen [1], deren Ergebnis die Ausarbeitung mehrerer solcher Prüfmethoden war. Die aufgeworfenen Probleme sind aber unserer Meinung nach noch weitaus nicht gelöst, da die noch bestehenden Schwierigkeiten uns eben aufgrund unserer Untersuchungen offensichtlich wurden.

Oberflächlich betrachtet scheinen die Probleme der Instrumentenprüfungen für einfach, da ja die jungen Forscher auf dem Gebiete der Geodäsie sich häufig in ihren ersten Studien mit Instrumentenprüfungen befassen. Es sei aber bemerkt, daß in dieser Beziehung bis jetzt sehr viele Verwirrungen bestehen und auf einheitlichen Grundsätzen beruhende, zur Normung brauchbare Instrumentenprüfungen z. Z. noch kaum vorhanden sind. Daher wollen wir im folgenden die Instrumentenprüfungen einer solchen Kritik unterziehen, daß wir durch sie ein klares Bild bezüglich der bestehenden Probleme, deren

Lösungsmöglichkeiten und der im Laufe der Normung der Prüfungen zu lösenden Aufgaben erhalten.

Vorerst soll die Frage der genauen Zielsetzungen der Instrumentenprüfungen untersucht werden. Diese Fragestellung ist garnicht überflüssig, da die meisten bestrittenen Probleme auf diese Grundlage zurückzuführen sind. Dies soll hier ausführlich erörtert werden.

Von der bisherigen Praxis — die bekanntlich nicht für vollkommen falsch betrachtet werden kann — ausgegangen, kann festgestellt werden, daß Instrumentenprüfungen allgemein von zwei Gesichtspunkten vollführt worden sind. Der Justierungszustand der Instrumente mußte immer — und muß auch in der Zukunft — unabhängig von den auch von den Instrumentenfabriken durchgeführten Prüfungen kontrolliert werden. Es kann nämlich nicht bestritten werden, daß für die geodätischen Arbeiten in erster Linie der Geodät verantwortlich ist, und eben seiner Verantwortung bewußt, ist er gezwungen, die allgemein bekannten Prüfungen zur Kontrolle des Justierungszustandes — in gewissen, von den Umständen bedingten Zeitabständen — zu vollführen. Mit diesen Prüfungen und deren Methoden wollen wir uns — da sie allgemein bekannt sind — nicht eingehend befassen, es sei aber bemerkt, daß sie die Basis aller weiteren Prüfungen bilden. Es sei auch bemerkt, daß diese Prüfmethoden in Zusammenhang mit neuen Konstruktionen, wie z. B. bei automatischen Nivellierinstrumenten, bei Theodoliten mit automatischem Höhenindex, bzw. Tachymetern, oft noch nicht geklärt oder wenigstens nicht allgemein bekannt sind. In gegebenen Fällen muß man daher immer eigens untersuchen, welche Prüfungen bei einer neuen Instrumentenkonstruktion die allgemeinen Erforderungen der Justierung benötigen.

Die genaue Beschreibung der Zielsetzungen der Prüfungen, bei denen die Leistungsdaten eines geodätischen Instrumentes zu bestimmen sind, ist aber schwieriger. Wird nämlich die Frage gestellt, was die weitere Verwendung der zu bestimmenden Leistungsdaten sein wird, so kommt nämlich gleich eine ganze Reihe ungelöster Probleme zum Vorschein. Von der Verwendung ist es nämlich abhängig, welche die zu bestimmenden Leistungsdaten sind. Unabhängig davon muß aber zugegeben werden, daß bezüglich der weiteren Verwendung der in Frage stehenden Leistungsdaten uns sehr wenig annehmbare Angaben zur Verfügung stehen, und unserer Meinung nach ist dies der springende Punkt des Problems der Normung von Instrumentenprüfungen. Es soll hier darauf hingewiesen werden, daß die in Frage stehenden Leistungsdaten bekanntlich die Funktion mehrerer, vom Instrument unabhängiger, und schwierig kontrollierbarer Faktoren sind. Daher können die so bestimmten Leistungsdaten auch im Falle gut genormter Instrumentenprüfungen nicht als verläßliche Basen zur Planung unserer Meßarbeiten, oder zur Bestimmung geodätischer Arbeitsnormen betrachtet werden, da die Zusammenhänge zwischen den genannten Faktoren und den Leistungsdaten mit entsprechender Genauigkeit noch nicht geklärt worden sind. Dieses Problem kann unserer Ansicht nach nicht einmal so umgangen werden, daß aufgrund — unter gleichen Umständen — vollzogener Vergleichsmessungen relative Leistungsdaten bestimmt werden, die sich in gegebenem Falle z. B. auf einen wohlbekannten und sich gut bewährten Instrumententyp beziehen. Dieses Problem kommt noch schärfer zum Vorschein, falls die zu bestimmenden Leistungsdaten zur Beurteilung der Qualität eines gegebenen Instrumentes, oder als Grundlagen zur Klasseneinteilung in eine gegebene Kategorie in Zusammenhang mit der geplanten Klasseneinteilung der geodätischen Instrumente, verwendet werden sollten (siehe z. B. [2]). Bei Instrumentenprüfungen solcher Zielsetzung kann man nämlich unbegründet über sonst sehr wirtschaftlich anwendbare Instrumente eine ungünstige Beurteilung geben, wenn wir nur mit der Inbetrachtnahme der üblichen Genauigkeitsdaten ein Urteil fällen, die Daten bezüglich der Geschwindigkeit der Bedienung, der Eliminierbarkeit der Vergessenheitsfehler, des Maßes der zur Bedienung notwendigen Fachkenntnisse usw. aber außer acht lassen. In diesem Falle ist es daher außerordentlich wichtig, bezüglich der zu berücksichtigenden Leistungsdaten einig zu sein und die entsprechenden Prüfungen zu normen.

Wird also vereinbarungsgemäß angenommen, daß die Zielsetzung der Prüfungen zur Bestimmung der Leistungsdaten von geodätischen Instrumenten die Bestimmung der nötigen Daten zur Klasseneinteilung und zur Planung der geodätischen Messungen bzw. Normen ist, so stehen wir einem komplizierten Problemenkreis gegenüber, dessen wesentliche Gesichtspunkte aufgrund unserer bisherigen Untersuchungen im folgenden zusammengefaßt werden.

Die geodätischen Instrumentenfabriken pflegen ihre Instrumente außer den üblichen Parametern (Fernrohr-Vergrößerung, freie Öffnung, kleinster Kreisablesewert, Libellenangaben, usw.) bezüglich der Genauigkeit der zu vollziehenden Messungen meistens nur mit einer einzigen Angabe zu charakterisieren. Es werden meistens bei Theodoliten die Winkel- oder Richtungsmeßgenauigkeit, bei Tachymetern außer den Vorherigen noch die Genauigkeit der Messung von Entfernung- und Höhenunterschieden auf 100 m bezogen, bei Nivellierinstrumenten aber der km-mittlere Fehler des Hin- und Rücknivellements angegeben. Bedauerlicherweise war das Bestreben der meisten bisherigen Instrumentenprüfungen nicht mehr (siehe z. B. [3] und [4]); so wurde die Genauigkeit der Instrumente nur mit den obigen Daten charakterisiert. Es ist aber leicht einzusehen, daß die obigen Genauigkeitsdaten von vielen Umständen abhängig sind, so daß wir bei praktischen Messungen sogar mit Veränderungen von mehreren 100% rechnen können. Im weiteren soll auf die wichtigeren Fehlerquellen hingewiesen werden, die die in Frage stehenden Genauigkeitsdaten beeinflussen können. Man kann allgemein innere und äußere Fehlerquellen unterscheiden, je nach dem, ob sie von der Konstruktion des Instrumentes abhängig oder unabhängig sind. Diese Aufteilung betrachten wir aber nicht für streng gültig, da wir auch Fehlerquellen zu erörtern haben, deren Eingliederung nur willkürlich durchgeführt werden kann.

Im Falle von Theodoliten wollen wir zuerst die Quellen des Richtungsfehlers untersuchen. Hier werden allgemein zwei Komponenten: der Zielfehler des Fernrohres und der Kreisablesefehler unterschieden. Beide stehen aber auch selbst noch unter der Wirkung von zahlreichen anderen Faktoren. Die Genauigkeit der Zielfassung mit dem Fernrohr kann z. B. mit einer einzigen Angabe — wie dies heute noch meistens üblich ist — nicht charakterisiert werden. Würden wir nur aufgrund der optischen Daten des Fernrohres einen a priori Zielfehler berechnen, so müßten wir noch in Betracht ziehen, daß dies noch die Funktion der Beleuchtungstärke (womit die Prüfung der Dämmerungsleistung der Fernrohre zusammenhängt), der Qualität der Kontrastübertragung und nicht zuletzt der Form der anzuzielenden Marke, bzw. in diesem Zusammenhang der Ausführung des Fadenkreuzes ist. Für die Praxis ist schon wegen der verschiedenen Form der angezielten Marke die Charakterisierung der Richtungsgenauigkeit eines Fernrohres durch eine einzige Angabe nicht möglich. Es ist ja allgemein bekannt, daß man genauer auf eine Zieltafel als auf einen Fluchtstab orientieren kann und daß auch ein numerisch ausdrückbarer Zusammenhang zwischen der Form und Beleuchtung der Zielmarke, der Zielentfernung, der Form des Fadenkreuzes und dem Zielfehler besteht. Zu all diesen müssen noch die von der Zeit und Richtung bedingten Änderungen der optischen Eigenschaften der Luftumgebung herrührenden Fehler (Luftvibration, Refraktion usw.) addiert werden. Es darf nicht außer Acht gelassen werden, daß die Zielfassung letzten Endes ein zu dem Beobachter gebundener psychologischer Vorgang ist (Symmetrie-Schätzung), der den Ursprung von heute noch schwer kontrollierbaren Fehlerquellen bildet. Außer der optischen Leistungsfähigkeit der Ablesevorrichtung ist der Fehler der Kreisablesung ebenfalls Funktion der günstigsten Einstellung der Beleuchtung (deshalb wurde von uns bereits vor Jahren empfohlen, die Beleuchtung der Kreisablesungen der Präzisionstheodolite nur mit künstlichen Lichtquellen zu lösen), des etwaigen mechanischen Fehlers der Ablesevorrichtung (des toten Ganges des Mikrometers), der Kreisteilungsfehler, und vom Typ der Ablesevorrichtung abhängig der bei der Koinzidenz, bzw. bei der Symmetrie-Einstellung der Kreisteilstriche bzw. Schätzung ihrer Lage (Zehntel-Schätzung) auftretenden psychologischen Fehler sowie der Teilungsfehler der Mikrometerskale.

Bis jetzt wurde von den die Genauigkeit der Richtungsmessung beeinflussenden übrigen Instrumentenfehlern nicht gesprochen, obwohl sie in gegebenem Falle bedeutend sein können. Wenn wir nämlich der obigen Voraussetzung entsprechend bei unter Laborverhältnissen kontrollierten äußeren Umständen nur den auch einzeln bestimmbaren mittleren Fehler der Zielfassung mit dem Fernrohr μ_F und der Kreisablesung μ_K in Betracht ziehen und außerdem voraussetzen, daß die Fehler eine normale (Gauss'sche) Verteilung haben, so ist in dem ziemlich häufig vorkommenden Falle, wenn der unmittelbar bestimmbare mittlere Fehler μ_R einer Richtungsmessung größer als der von den Komponenten berechenbare Wert, d. h.

$$\mu_R^2 > \mu_F^2 + \mu_K^2$$

ist, so muß man das Vorhandensein von weiteren Fehlerquellen annehmen. Es ist nun schon einleuchtend, daß besonders die eventuellen mechanischen Fehler der Klemm- und Feinschrauben (toter Gang, Nachgiebigkeit) unmittelbar auf die Genauigkeit der Richtungsmessung auswirken, aber die Unvollkommenheiten der Achsen, der Fußschrauben, der Libellen und auch die des Statives können Fehler verursachen.

Es ist außerordentlich wichtig, daß eben wegen der eventuellen Temperaturabhängigkeit der oben erwähnten Fehler mechanischen Charakters die Temperaturstabilität der Instrumente geprüft werde. Hier denken wir nicht an die Untersuchung der Richtungsmeßgenauigkeit bei einseitigen drastischen Wärmeeinwirkungen, sondern an Untersuchungen bei durchschnittlicher Temperaturverteilung innerhalb des gewünschten Temperaturbereiches im Laufe der praktischen Messungen. Fehler solcher Art kommen häufig bei Theodoliten mit einseitiger Ablesevorrichtung sowie bei Theodoliten mit Spiegelfernrohr vor.

Vom mittleren Fehler der Richtungsmessung kann der mittlere Fehler der Winkelmessung theoretisch bereits abgeleitet werden. Trotzdem können wir in vielen Fällen sehen, daß der unmittelbar bestimmbare mittlere Winkelmeßfehler μ_W größer als $\mu_K\sqrt{2}$ ist, und daher müssen weitere Fehlerquellen angenommen werden. Die häufigsten unter diesen sind die Exzentrizitätsfehler der Instrumentenaufstellung (bzw. der Zielaufstellung), die aber bei Laboruntersuchungen durch Anwendung von Kollimatoren eliminierbar sind. Man muß aber hauptsächlich bei Präzisionstheodoliten unter den Fehlerquellen der Winkelmessung auch die Fehler der Kreisteilungen und der Teilungen der Mikrometerskalas, die Exzentrizitätsfehler der Repetitionsachsensysteme und allgemein die von dem speziellen Aufbau des vorhandenen Instrumententyps herrührenden eventuellen weiteren Fehler in Betracht ziehen.

Schon aus der obigen schematischen Darstellung ist es ersichtlich, daß die Richtung- bzw. Winkelmeßgenauigkeit der Theodolite die Funktion sehr vieler innerer und äußerer Fehlerquellen ist. Die äußeren, vom Instrument unabhängigen Fehlerquellen können zwar bei Laborprüfungen weitgehend ausgeschaltet werden, auf diese Weise können wir aber nur willkürliche, für Laborverhältnisse charakteristische Daten erhalten.

Im Falle von Tachymetern sind die Fehlerelemente der Richtung- bzw. Winkelmeßgenauigkeit mit denen der Theodolite übereinstimmend. Zusätzlich ist in diesem Falle die Prüfung der optischen Entfernung- und Höhenunterschiedsmeßgeräte erforderlich. Trotz der weiten Skale der verschiedenen Lösungsmöglichkeiten kann auch dieses Problem auf die Prüfung der Genauigkeit von parallaktischen Winkeln (diastinometrischen Winkeln) eines Tachymeters (siehe [5] und [5a]) vereinfacht werden. In diesem Falle messen wir zwar, abgesehen von einigen Ausnahmen (z. B. Basislatte), die in Rede stehenden Winkel nicht, sondern es werden die zu dem gegebenen Winkelwert gehörigen Lattenablesungen bestimmt, aber deren Fehler können immer in Winkelwerte umgerechnet werden, und so können im Prinzip von der Entfernung unabhängige Genauigkeitswerte erhalten werden. Nach der bestehenden Praxis pflegt man aber die Genauigkeitsdaten der verschiedenen optischen Entfernung- und Höhenunterschiedsmeßgeräte vereinbarungsgemäß auf eine 100 m-Entfernung zu berechnen, da diese Daten sogar in Winkelwerten ausgedrückt mehr oder weniger entfernungsabhängig sind. Was die Fehlerquellen dieser Winkelmessungen betrifft, so sind viele Variationen — von den verschiedenen Konstruktionen bedingt — möglich, aber auch hier können die vom Instrument abhängigen inneren und die von übrigen Umständen verursachten äußeren Fehlerelemente unterschieden werden. Bei den sich nach konstanten oder gegebenen Funktionen verändernden diastinometrischen Winkeln ist eine bedeutende Fehlerquelle nebst den bisherigen noch der systematische Fehler dieser Winkel, dessen Temperaturabhängigkeit auch untersucht werden muß. Es soll die bei den unter veränderlichen Umständen vollzogenen Lattenablesungen vorkommende Dezimal-Schätzung außerdem eigens hervorgehoben werden, die auch einen vom Beobachter abhängigen persönlichen Charakter hat.

Der für die Nivellierinstrumente charakteristische mittlere km-Fehler besteht auch aus vielen, größtenteils vom Instrument unabhängigen Fehlerelementen. Streng genommen dürfte auch die Genauigkeitsangabe nur gemeinsam mit den übrigen wesentlichen Daten für die Genauigkeit des Instrumentes als charakteristisch angenommen werden. Wie es auch aus einigen in der Fachliteratur auffindbaren ausführlichen Untersuchungen hervorgeht, ist der mittlere km-Fehler die Funktion der Lattenentfernung, der Einheit der Lattenteilung und auch dessen, ob die Lattenablesungen mit oder ohne Mikrometer vollzogen wurden. Ohne diese Daten ist der km-mittlere-Fehler nichteinmal charakteristisch und eindeutig.

Wird der Fehler der mit dem Nivellierinstrument vollzogenen einmaligen Lattenablesung analysiert, so kann der mittlere Fehler μ_L einer Lattenablesung grundsätzlich aus zwei Komponenten berechnet werden: aus dem mittleren Fehler μ_F der mit dem Fernrohr vollzogenen Lattenablesung, sowie dem mittleren Fehler μ_E des Einspielens der Nivellierlibelle bzw. der Einspielung des Kompensators. Kommt es aber bei einer gegebenen Untersuchung vor,daß der auch unmittelbar berechenbare totale Lattenablesungsfehler größer als der aus den auch einzeln meßbaren Komponenten berechnete ist, d. h.

$$\mu_L^2 > \mu_F^2 + \mu_E^2$$

so müssen auch hier weitere Fehlerquellen gesucht werden. Im Laufe der unlängst in unserem Laboratorium vollzogenen diesbezüglichen ausführlichen Untersuchungen konnten wir auch experimentell feststellen, daß die mechanischen Fehler der Nivellierinstrumente besonders bei Präzisionsnivellieren beträchtlich sein können [6]. Hier sollen in erster Linie die Fehler der Kippachse der Nivellierschraube, der Libellenfassung, der Stehachse, der Führung der Bildeinstell-Linse sowie auch die Fehler der Fußschrauben und des Stativs hervorgehoben werden. Von der Konstruktion abhängig soll aber auch auf weitere Fehlerquellen hingewiesen werden, wie z. B. auf die Fehler des optischen Mikrometers und die speziellen Fehler der Kompensatoren bei Kompensator-Nivellierinstrumenten. Hier sei bemerkt, daß erfahrungsgemäß bei Kompensator-Nivellierinstrumenten der Großteil der mechanischen Fehler die Genauigkeit der Messung kaum beeinflußt, die Funktionsfehler der Kompensatoren kommen aber besonders bei größeren Genauigkeitsforderungen zum Vorschein. Ein beträchtlicher Unterschied zeigt sich zwischen den Nivellierinstrumenten mit Libellen bzw. Kompensatoren hinsichtlich der mit der Temperaturänderung zusammenhängenden Fehlerquellen. Bei den Libellen-Nivellierinstrumenten zeigt sich die Wirkung der Temperaturänderung in verschiedener Weise, die Kompensator-Nivellierinstrumente weisen meistens eine günstigere Temperatur-Stabilität auf. Solche Untersuchungen sind daher besonders bei Libellen-Nivellierinstrumenten unerläßlich.

In Kenntnis des totalen mittleren Fehlers der Lattenablesung kann der mittlere Fehler μ_Δ einer Höhenunterschiedsmessung nach dem Zusammenhang

$$\mu_\Delta = \mu_L \sqrt{2}$$

berechnet werden. Ist der aus unmittelbaren Messungen bestimmte μ_Δ größer als der aus den Komponenten berechenbare Wert, so können weitere — in erster Linie von der Senkung des Instrumentes bzw. der Latte während der Messung herrührende — Fehlerquellen vorausgesetzt werden. Aufgrund eines solchen Gedankenganges kann auch ein a priori mittlerer km-Fehler berechnet werden [7] und sollte dieser mit dem aus den Messungen berechneten mittleren km-Fehler nicht übereinstimmen, so müssen schon sämtliche in Betracht kommenden Fehlerquellen der Nivellierung (Refraktion, Lattenfehler, Unaufmerksamkeit der Hilfsarbeiter, usw.) untersucht werden.

Die bisherigen Erörterungen beziehen sich nur auf die Untersuchung der für die Genauigkeit der Instrumente charakteristischen Daten. So erhalten wir aber noch keinen Überblick über die Geschwindigkeit und Bequemlichkeit der Bedienung der Instrumente, über das Maß der zur Bedienung nötigen Vorbildung und nicht zuallerletzt, inwieweit das Instrument den Justierungszustand in Geländeverhältnissen beibehält, bzw., wie einfach die fallweise nötigen Justierungen vollzogen werden können. Auch die Wirtschaftlichkeits-Charakteristiken bezüglich der Anschaffung, der Benützung sowie ihrer Anwendung zu verschiedenen Meßaufgaben sind ebenfalls sehr wichtig, obwohl sie nicht für Leistungsdaten gehalten werden können. Aufgrund des Studiums der bezüglichen internationalen Fachliteratur kann ruhig behauptet werden, daß z. B. ein einheitlicher und begründeter Standpunkt nicht einmal über solche grundsätzlichen Probleme entstanden ist, ob für die sämtlichen mit geodätischen Instrumenten zu lösenden Meßaufgaben wenig Grundtype hergestellt werden, die mit entsprechenden Ergänzungsteilen die Vollführung einer jeden Meßaufgabe ermöglichen, oder aber die Frage mit mehreren Instrumententypen gelöst werde. Es steht außer Zweifel, daß auch dieses Problem ernste wirtschaftliche Auswirkungen hat. Unter den großen Instrumentenfabriken haben beide Prinzipien Vertreter.

Zur Entscheidung der hier aufgezählten Probleme durch Instrumentenprüfungen wurden — auch unsererseits — Experimente durchgeführt, aber die Gesichtspunkte solcher Untersuchungen sind meistens so verschieden, daß die zur Lösung nötigen Untersuchungen unserer Meinung nach den Problemenkreis der Instrumentenprüfungen überschreiten.

Hier sollen die als Grundlage der Leistungsdaten dienenden oder jene unmittelbar verkörpernden mittleren Fehler und deren Berechnung eigens erwähnt werden. In letzter Zeit konnte man oft die praktische Bemerkung hören, daß die mittleren Fehler nicht eindeutig die Genauigkeit der Messungen charakterisieren. Wir konnten auch bei unseren eigenen Untersuchungen öfters erfahren, daß in den einfachsten Fällen, d. h. bei aus unmittelbaren Beobachtungen berechneten mittleren Fehlern z. B. die klassischen Fehlerfortpflanzungsgesetze nicht erfüllt wurden: in gegebenen Fällen war der aus den Komponenten berechnete a priori mittlere Fehler größer als der aus den unmittelbaren Beobachtungen berechnete entsprechende mittlere Fehler. In anderen Fällen ergaben sich die mittleren Fehler im Gegensatz zu den Erfahrungen als zu klein. Selbstverständlich kann es von niemandem bestritten werden, daß die mittleren Fehler nur in jenem Falle den klassischen Regeln der Fehlertheorie, der Fehlerfortpflanzung sowie der Ausgleichsrechnung folgen, wenn die Meßfehler von normaler (Gauss'scher) Verteilung sind. Man muß auch in diesem Falle — auch theoretisch — mit der von der Zahl der Messungen abhängigen Unsicherheit des mittleren Fehlers rechnen. Bei den Instrumentenprüfungen spielt der zu erwartende größte Fehler — in vielen Fällen eben als Leistungsangabe — eine wichtige Rolle. Wird dieser als das Dreifache des mittleren Fehlers angegeben, so ist auch eine normale Verteilung vorausgesetzt, wobei die Unsicherheit auch dieser Angabe in Betracht gezogen werden mußte. Die Einführung solcher neuen Fehlerbegriffe, wie die bezüglich der Kreiseltheodolite neuerdings eingeführte Reproduktionsfähigkeit, steigert nur noch die diesbezüglich bestehende Verwirrung, obwohl für die Praxis das Anstreben verläßlicher Genauigkeitsdaten sowohl verständlich als auch nötig ist. Die bezüglichen Studien des Problemenkreises über die Wahrscheinlichkeitsrechnung setzen meistens schon einen gewissen Fehlerverteilungstyp voraus. Daher halten wir es für unerläßlich, daß im Zusammenhang mit den Instrumentenprüfungen auch die Verteilung der Meßfehler untersucht werde [8], da man nur solche unter kontrollierten Verhältnissen berechneten mittleren Fehler z. B. bei der Klasseneinteilung der Instrumente nach Genauigkeit als Basis betrachten kann. Bei den in unserem Laboratorium vollführten Instrumentenprüfungen wird die Verteilung der Meßergebnisse durch einen einfachen Normaltest kontrolliert und im Falle von größeren Ausschlägen werden zur Aufklärung deren Gründe ausführliche Untersuchungen vollzogen. Nur die aufgrund solcher einheitlicher Prinzipien berechneten charakteristischen Fehlerwerte werden für Vergleiche als geeignet gehalten. Der Charakter der normalen Verteilung, die systematischen Fehlerquellen, deren Einfluß das zulässige Maß übertrifft, müssen unserer Meinung nach immer mit Hilfe besonders gründlicher Untersuchungen geklärt werden, denn die Benützung der sog. totalen mittleren Fehler führt zu den oben erwähnten Widersprüchen.

In dem bisher Erörterten waren wir bestrebt, eine schematische Zusammenfassung über die Probleme der Instrumentenprüfungen zu geben. Im weiteren sehen wir aufgrund unserer diesbezüglichen Forschungen schon eine Möglichkeit, die Normung der Instrumentenprüfungen lösen zu können. Heute können wir zwar auf viele Fragen noch keine Antwort geben, die notwendigen Forschungsrichtungen sind aber bereits bekannt, die in dem weiteren kurz besprochen werden.

Vorerst kann nur auf die Leistungsdaten bezogen festgestellt werden, daß die Genauigkeitsdaten unter streng kontrollierten Verhältnissen nur aus Labormessungen bestimmt werden können. Diese Labormessungen müssen aber trotzdem so zusammengestellt werden, daß bei ihnen all jene inneren Fehlerquellen, die auch die Feldmessungen belasten, zur Geltung kommen, zugleich aber die äußeren Fehlerquellen unter Laborverhältnissen stabilisiert werden können. Zur Verwirklichung dieser Bedingungen benötigt man die Normung der Prüfeinrichtungen. Die Konstruktion solcher Einrichtungen ist in unserem Laboratorium bereits im Gange, und mit deren Hilfe wird es ermöglicht, daß unabhängig von den sich verändernden Refraktions-, Bodenbeleuchtungsverhältnissen, usw., übrigens aber den Geländeverhältnissen doch ähnlich die in Frage stehenden Genauigkeitsdaten bestimmt werden können. Es ist aber weiterhin zu betonen, daß diese Genauigkeitsdaten nur in genau festgelegten Fällen vergleichbar sein werden. Daher wird empfohlen, daß die Richtungs- bzw. Winkelmeßgenauigkeit der Theodolite und Tachymeter auf ihrem Anwendungsgebiet entsprechende Zielweite und auf eine bestimmte Form der Zielmarke bezogen werde. So könnten sich die für die Winkelmeßgenauigkeit charakteristischen mittleren Fehler z. B. bei Präzisionstheodoliten auf eine in 30 km Entfernung liegende genormte Zielpyramide beziehen, selbstredend immer bei im Laboratorium genau einstellbaren einheitlichen Beleuchtungsverhältnissen usw. Ebenso könnten sich die mittleren Fehler der Richtungsmessung z. B. bei Ingenieur-Theodoliten und Tachymetern auf einen in 200 m Entfernung sichtbaren Fluchtstab beziehen. Bei Nivellierinstrumenten halten wir — im Falle von Liniennivellement — nebst genauer Angabe der Lattenentfernung und des Lattenbildes den a priori genannten, d. h. aus den Fehlern der Lattenablesung bestimmten mittleren km-Fehler für charakteristisch. Darin sind nämlich nur die innere Genauigkeit des Instrumentes beeinflussenden Fehler enthalten, die Wirkung der im verschiedenen Maße hervortretenden und auf die Genauigkeit des Instrumentes nicht charakteristischen Fehler fällt weg. Im Laufe der diesbezüglichen Versuchsmessungen wurde bewiesen, daß mit genauer Nivellierung der a priori mittlerer km-Fehler erreicht werden kann, und so ist dieser Wert für die innere Genauigkeit des Instrumentes charakteristisch.

Die derartige Bestimmung der Genauigkeitsdaten ermöglicht schon den Vergleich der Instrumente und ihre Einreihung in Genauigkeitsklassen. Im Falle einer feinmechanisch günstigen Konstruktion der zu prüfenden Instrumente, d. h., wenn keine mechanischen Fehler als wahrnehmbare systematische Fehlerquellen auftreten, können die charakteristischen Genauigkeitsdaten laut des obigen aus relativ wenigen und leicht durchführbaren Untersuchungen bestimmt werden. Müssen aber neben den Hauptfehlerquellen laut der bereits erörterten noch weitere vorausgesetzt werden, was besonders bei den Präzisionsinstrumenten häufig der Fall ist, so sind noch weitere spezielle Prüfungen notwendig. Deren Beschreibung würde hier zu weit führen, und die präzise Prüfmethode mehrerer Fehlerquellen wurde bisher noch nicht ausgearbeitet. In unserem Laboratorium werden auch diesbezügliche Forschungen vollzogen, und es sollen unsere neuen präzisen Prüfmethoden bezüglich des Stehachsentaumels [9, 10] sowie unser Verfahren zur Prüfung der Reduktion der Diagramme von Tachymetern bzw. deren übrigen Reduktionseinrichtungen [5a] erwähnt werden.

Die hier vorgeschlagenen Methoden der Laborprüfungen können noch in der Richtung weiterentwickelt werden, daß die Genauigkeitsdaten bei verschiedenen, aber meßbar eingestellten äußeren Verhältnissen bestimmt werden. Die zu solchen Prüfungen konstruierten Laboreinrichtungen werden optische Simulatoren genannt, mit deren Hilfe die meßbare Herstellung verschiedener Beleuchtungsverhältnisse, zur Simulierung des Nebels verschiedene Kontrast-Verhältnisse usw. verwirklicht werden sollen. So ist die Wirkung der bekannten äußeren Fehlerquellen auch eigens bestimmbar, und es können letzen Endes auch die a priori Leistungsdaten konkreter Feldmessungen berechnet werden. Nebst der vorgeschlagenen Laborlösung der Instrumentenprüfungen kann man durch Einstellung entsprechender Klimaanlagen auch die für die vorgeschriebenen verschiedenen klimatischen Verhältnisse gültigen Leistungsdaten kontrollierten Geländeverhältnissen entsprechend bestimmen, ohne dadurch die Kosten der Prüfungen beträchtlich zu erhöhen. Die Klimatisierung eines relativ kleinen Laboratoriums für Instrumentenprüfungen scheint z. Z. ein bereits gelöstes Problem zu sein, und die größeren Instrumentenfabriken bedienen sich schon solcher Prüfkammern, vorläufig nur um die Funktion der Instrumente zu kontrollieren.

Die einheitliche Bestimmung der die Geschwindigkeit und Bequemlichkeit der Bedienung der Instrumente sowie die Wirtschaftlichkeit der mit dem Instrument vollzogenen Messungen charakterisierenden Daten bereitet so lang Schwierigkeiten, bis auch die Meßmethoden selbst, ganz bis zu den sämtlichen nötigen Operationen, vereinheitlicht werden. Bei solchen Prüfungen ergeben sich aber auch weiterhin viele Schwierigkeiten psychologischer Natur. Wir wissen ja aus eigener Erfahrung, daß man mit den relativ zerstreuten Bedienungsschrauben des Theodolits Wild T2 ebenso vertraut werden kann, wie z. B. mit dem nach gründlicher Erwägungen angeordneten koaxialen Klemm- und Feinschraubensystem der MOM-Theodolite. Es kann z. B. noch bestritten werden, bei welchen Instrumentenkategorien die so rasch aufgegriffenen automatischen Höhenindexe wirtschaftlich angewendet werden können. Von den bestehenden Schwierigkeiten und den unbestreitlich bestehenden Vorurteilen unabhängig ist aber die derartige Untersuchung der Instrumente bei der von uns vorgeschlagenen Laboranordnung möglich, es ist sogar der Zeitbedarf der einzelnen Messungen in gegebenem Falle bei weitgehend kontrollierten Umständen meßbar.

Aus dem bisherigen ist es zweifellos ersichtlich, daß die Normung der Prüfmethoden mit der Anwendung der von uns vorgeschlagenen Labormethoden neben der weitgehenden Kontrolle der berücksichtigbaren Fehlerquellen verwirklicht werden kann und mit solchen Methoden auf einheitlichen Grundlagen beruhende Leistungsdaten berechnet werden können. Alldies würde naturgemäß die bereits früher erwähnten, in gegebenen Fällen auch im Felde durchzuführenden einfacheren Instrumentenprüfungen nicht beeinträchtigen.

SCHRIFTTUM

1. Orbán, A.: Gondolatok a geodéziai műszerek vizsgálatának szabványosításához (Gedanken zur Normung der Prüfungen geodätischer Instrumente). Vortrag auf der internationalen Instrumententagung, Budapest 1964.
2. Рытов, А. В.: Стандарты на теодолиты и нивелиры. *Геодезия и Картография*, 1964.
3. Deutsche Normen DIN 18723 Geodätischen Instrumenten Prüfungen Meßverfahren V. R. 1961. 24.
4. Fachbereichstandard TGL 3474 Bestimmung des mittleren Fehlers. *Vermessungstechnik*, 1964.
5. Dott. C. Mazzon: Studio teorico e sperimentale del tacheometro autoriduttore a tratti con particolare riferimento al 4180 della Filotecnica-Salmoiraghi «TARI». *Rivista del Catasto e dei Servici Technici Erariali*, Nuova Serie — Anno XI—N. 2. 1956.

5a. Alpár, Gy.: MA 4 távcsöves vonalzó diagramkörének vizsgálata (Prüfung des Diagrammkreises der Kippregel MA 4/. Institutsbericht 1963.

6. ORBÁN, A.—ALPÁR, GY.: Beszámoló a Ni—Al szintezőműszer vizsgálatáról (Bericht über die Prüfung des Nivellierinstrumentes Ni—Al). Institutsbericht 1961 und 1963.
7. ALPÁR, GY.—SOMOGYI, J.: A MOM Ni—Bl szintezőműszer teljesítményadatainak vizsgálata (Die Prüfung der Leistungsdaten des Nivellierinstrumentes MOM Ni—Bl). *Geodézia és Kartográfia*, 1960.
8. ALPÁR, GY.: A másodpercet közvetlenül leolvasó mikrométerrel felszerelt Te—Cl teodolit vizsgálata (Die Prüfung des mit die Sekunde unmittelbar ablesendem Mikrometer versehenen Theodolits Te—Cl). Institutsbericht, 1960.
9. ALPÁR, GY.—SOMOGYI, J.: Teodolitok állótengely-ingadozásának vizsgálata (Untersuchung des Stehachsentaumels von Theodoliten). *Geodézia és Kartográfia*, 1960.
10. ALPÁR, GY.—SOMOGYI, J.: Über den Stehachsentaumel der geodätischen Instrumente. *Allgemeine Vermessungsnachrichten*, 1965.

ON STANDARDIZATION OF THE GEODETIC INSTRUMENT-TESTING

GY. ALPÁR and A. ORBÁN

SUMMARY

In the article the authors present the problems of the standardization of geodetic instrument-testing. They make introductory remarks on the purposes of the instrument-testing. Examinations to control the adjustment of the instruments and to determine the efficiency are discussed as well as problems emerging from this connection.

In the following the sources of errors of measurements with geodetic instruments are analysed from the point of view of determining efficiency data. So-called inner sources of errors (taking their origine from the structure of the instruments) are distinguished from outer sources of errors which arise from other circumstances.

The authors examine critically the mean errors which used to characterize the numerical efficiency and the method used to compute these errors.

Finally, the unsolved problems of standardization of the instrument-testing are listed in connection with the review of a program proposed by the authors.

О СТАНДАРТИЗАЦИИ СПОСОБОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

Д. АЛЬПАР—А. ОРБАН

РЕЗЮМЕ

В работе излагаются проблемы, связаные с стандартизацией способов исследования геодезических приборов. Сначала рассматривается, с какой целью ведутся исследования, причем обсуждаются вопросы исследований, направляемых на проверку юстировки приборов и на определение данных об их производительности, а также возникающие при этом проблемы.

Затем анализируются источники ошибок измерений, проводимых геодезическими приборами с точки зрения определения характеристики производительности приборов. Эти источники разделяются на так назыв. внутренние, вызванные конструкцией приборов, и на внешние, связанные с прочими факторами.

Критическому рассмотрению подвергаются средние ошибки, используемые для численной характеристики производительности, а также способы их вычисления.

В заключение излагается предлагаемая авторами программа исследований и определяются проблемы стандартизации исследования приборов, подлежащие решению.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (1—2), pp. 187—197 (1969)

APPEARANCE OF THE ELECTRICAL INHOMOGENEITY AND ANISOTROPY IN THE RESULTS OF THE COMPLEX ELECTRICAL EXPLORATION OF THE CARPATHIAN BASIN

A. ÁDÁM

CAND. OF TECHNICAL SCIENCES
GEOPHYSICAL RESEARCH LABORATORY OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, SOPRON

[Manuscript received June 22, 1968]

The paper deals with forms of appearance of electrical inhomogeneity and anisotropy in the Carpathian Basin on the results of following measurements:
1. magnetotelluric sounding;
2. geomagnetic directions based on the determination of $\Delta H_z/\Delta H_\vartheta$;
3. earth current and magnetotelluric ellipses;
4. four-electrode resistivity measurements on rocks.
The results allow a comparison with the tectonic structure of the Carpathian Basin.

In Hungary some regional data have been obtained as the result of electromagnetic explorations with natural fields (earth current measurements in the *S*-interval, relative earth current frequency soundings, magnetotelluric (MT) profiling and sounding), the syntheses of which may promote the knowledge on the deep structure and geotectonics of the Carpathian Basin.

Structural effects (horizontal inhomogeneities, anisotropy) appear as distortions of the homogeneous electromagnetic field. In the following these effects will be summarized and then an effort will be made to outline the most probable common cause of the discovered effects in a synthesis.

The characteristic regional effects in the electromagnetic field in the Carpathian Basin are:

1. The magnetotelluric sounding curves in the N—S direction ($\varrho_x(\sqrt{T})$) and in the E—W direction ($\varrho_y(\sqrt{T})$) do not coincide. Both curves usually intersect each other in the period range of the pulsations *pc*3 ($T = 10$—45 sec) or *pc*4 ($T = 45$—150 sec). At shorter periods $\varrho_y > \varrho_x$ is more frequent, at longer ones $\varrho_x > \varrho_y$. This fact hints at a greater apparent specific resistivity contrast between sediment complex and crystalline basement in the direction N—S, than in E—W. As the curves diverge instead of converging, the resistivity difference exists in the resistive basement, and not in the sediment complex, and it extends down to very great depths.

This situation is illustrated by the short period part of four MT sounding curves of the Great Hungarian Plain (Fig. 1), as well as of the average curve of several MT curves from this part of the Basin (Fig. 2). In the average the following not extremely anisotropic stations appear: Nagycenk, Gabčikovo (ČSSR, near to the Hungarian frontier), Vezseny, Endrőd, Gyula, Túrkeve. Each curve displays this tendency.

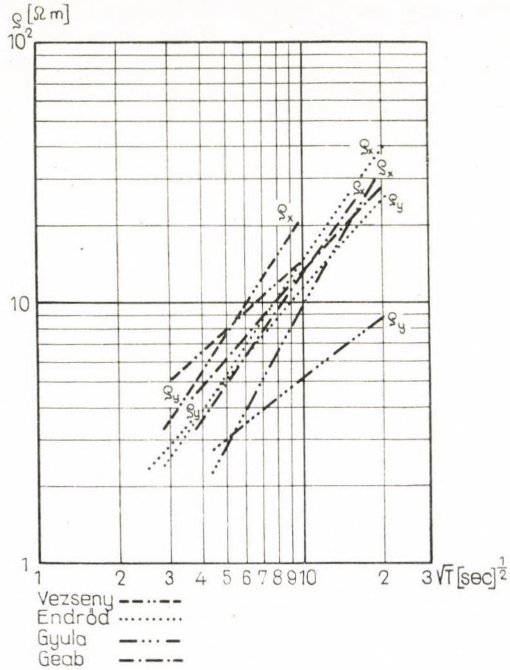


Fig. 1. **The left side part of four MT sounding curves (ϱ_x and ϱ_y both) in the Great Hungarian Plain, corresponding to the period of pulsations**

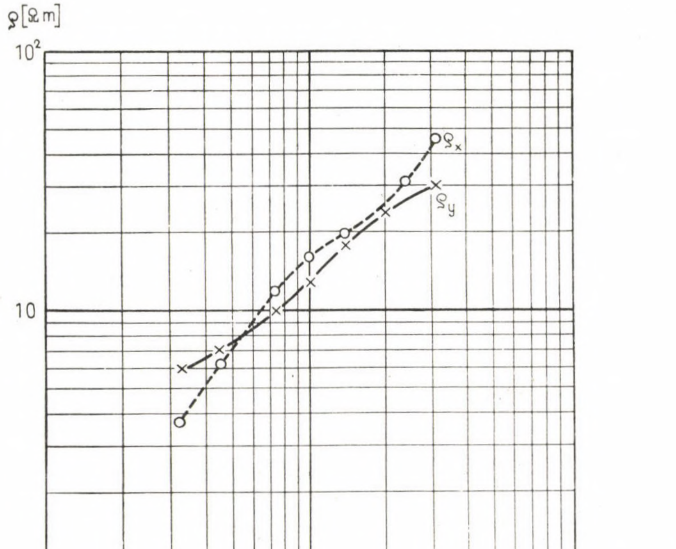


Fig. 2. **Mean MT curves**

The steepness of the ϱ_x-curves at Takács [11] is greater in the mean too, than that of the ϱ_y-curves. The difference of the angles between the T-axis and the ϱ_x and ϱ_y-curves is taken from 19 cases:

$$\text{in 6 cases } \alpha_{\varrho_y} > \alpha_{\varrho_x} \qquad \text{mean } \Delta\alpha_{yx} = 5°$$
$$\text{in 13 cases } \alpha_{\varrho_x} > \alpha_{\varrho_y} \qquad \text{mean } \Delta\alpha_{xy} = 10°.$$

All angles are measured in the coordinate system ϱ—T.

2. The magnetotelluric impedance ellipses at different periods and the mean absolute ellipses from earth-current measurements for the whole country in reality express the period dependent difference of ϱ_x and ϱ_y. Impedance ellipses (e.g. that of the observatory near Nagycenk) reveal this turning to

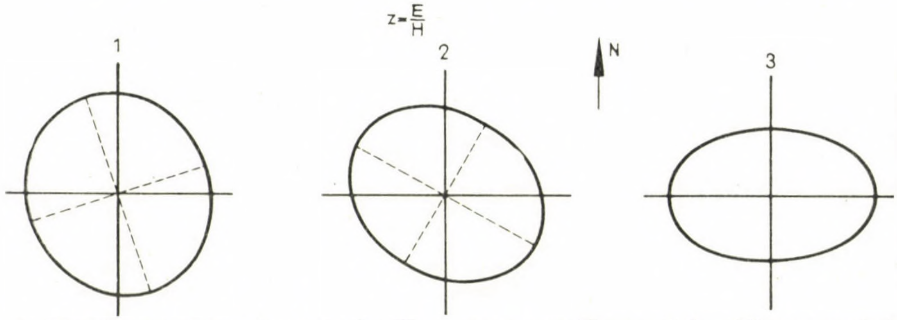


Fig. 3. The ellipses of impedance in the Observatory near Nagycenk for different periods — 1. 24-hour term of Sq — 2. Bays — 3. Pulsations

the North beginning from the period of the pulsations up to the 1-day period (Sq) [1]. The prevailing of the North component amplitudes is delayed between $T = 40$ and 70 sec by the decrease of ϱ_x. This decrease can be caused by structural effects and it does not mean by any means a conductive layer. The regional mean absolute ellipse thoroughly changes between 20 sec and 1 min. In contrast to the E—W polarised variations with periods of 20 sec, the variations at 1 min have almost no polarisation [2]. This interval corresponds to the intersection interval of the frequency sounding curves ϱ_x and ϱ_y.

3. The section of the MT frequency sounding curves at long periods (great depths) reveal a conductive zone in Hungary [3, 4]. In the paper referring to the latter it was hinted that the depth of the layer determined from the ϱ_x curves is greater than from the ϱ_y curves. According to the new investigations, the curves ϱ_x and ϱ_y show the conductive zones in depths according to Table I.

The mean depth of the conductive layer at the ϱ_x curves is about 80 km, at the ϱ_y curves about 40—50 km. Fig. 4 presents 8 sounding curves having long-period sections, too.

Table I

Station with abbreviation	Depth of the conductive layer	
	ϱ_x	ϱ_y
Nagycenk (N)	100*	50
Tihany (T)	55	37
Baja (B)	65	40
Gabčikovo (ČSSR) (G)č		
(measurement of Praus et al.)	80	30
GEAB-II (Túrkeve) (G)	100	30
Vezseny (V)	80	40*
Endrőd (E)	70*	100—125*
Gyula (Gy)	100*	55*

* The interpretation of $\varrho \sqrt{T}$ curves denoted by an asterisk took place by theoretical curves

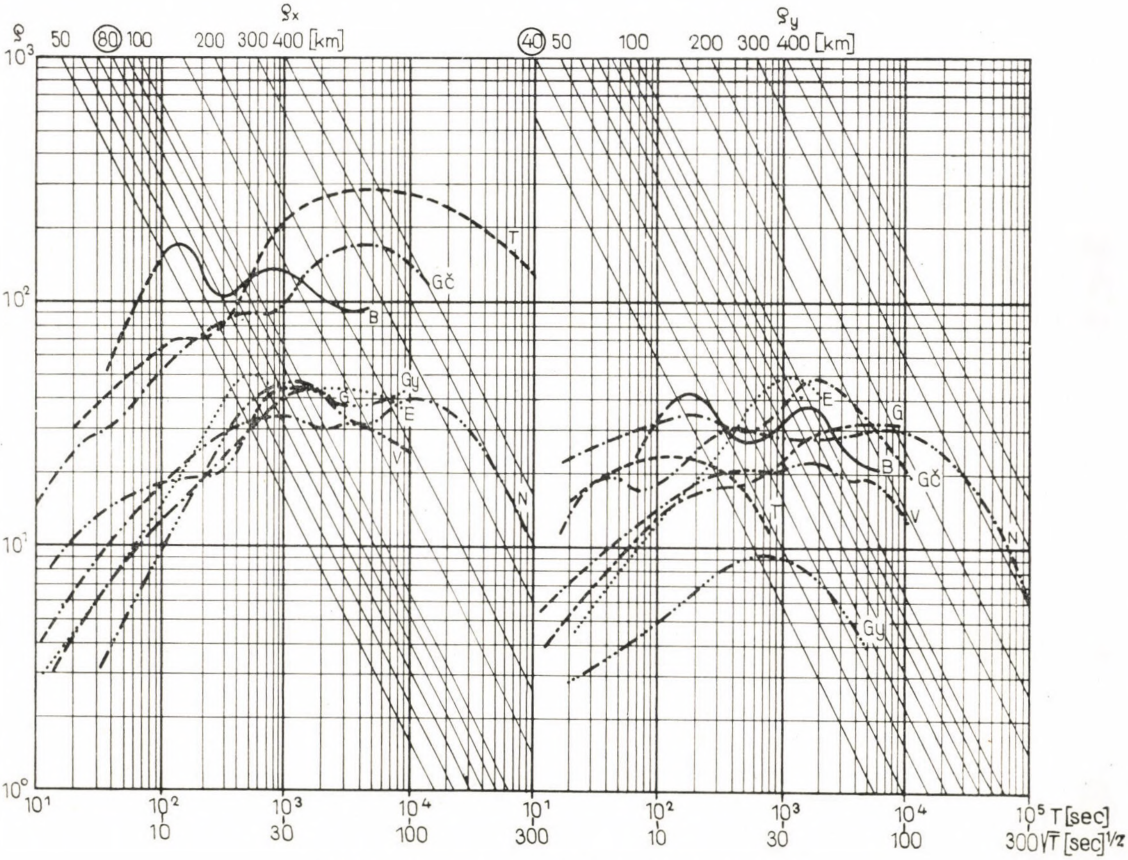


Fig. 4. **MT deep sounding curves (ϱ_x and ϱ_y)**

The difference of the depths cannot be simply explained by the difference of the ϱ_x and ϱ_y values. The theory of the magnetotelluric sounding predicts the same depths even if the curves are shifted in the direction of the ϱ-axis. The curves ϱ_x and ϱ_y are, however, not only shifted in respect to each other, but the left-side parts that correspond to the ratio of the basement and sediment resistivities intersect each other according to point 1. This circumstance must be taken into account together with the different indications of the conductive zone when interpreting the curves.

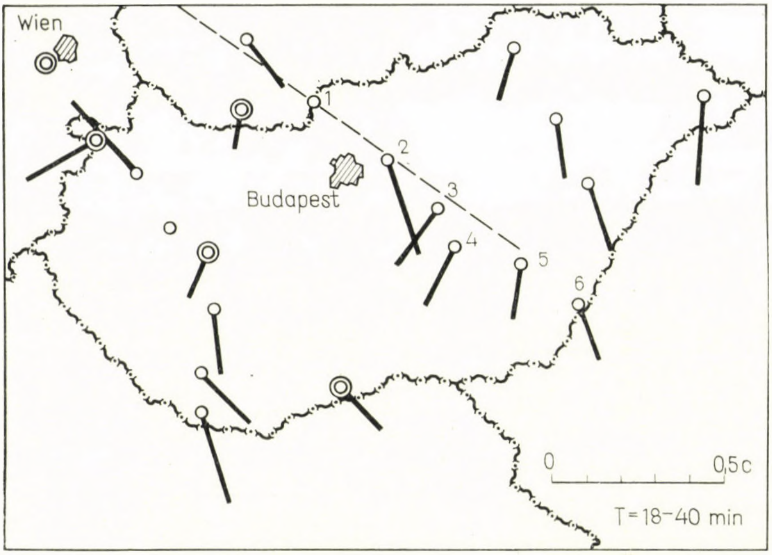


Fig. 5. Induction arrows (method of WIESE); RITTER's data

4. Fig. 5 shows the directions of conductivity changes in the Carpathian Basin, determined by the method of WIESE [5]. The directions are determined from many ratios $\Delta H_z/\Delta H_\vartheta$ (ΔH_z is the vertical, ΔH_ϑ the horizontal component of geomagnetic variations).

For a correct interpretation it must be known, that in WIESE's method these quantities are opposite to the directioned quantity based on variations of H_z and determined for the case of two dimensional structures from the Maxwellian equation:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = - \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

assuming $\partial E_x/\partial y = 0$ (x is the direction of the dip) as $\partial H_z/\partial t = - \partial E_y/\partial x$, a variation in the direction of the dip. This quantity is represented in the direction of the dip ($+x$) according to its sign. The quantity $\Delta H_z/\Delta H_\vartheta$ so directed lies in the case of a resistant basement in the direction of the dip, WIESE's quantity, however, represents the direction of the rise.

In an earlier paper [4] the connection of the directional quantities $\Delta H_z/\Delta H_\vartheta$ with the geologic structure was examined, mainly for stations in Transdanubia, with the result that a connection exists with the relief of the basement, similar to the results of the German investigations. Measurements along the international deep seismic profile VI enriched the data by six points [5, 6]. So an outline of the distribution of $\Delta H_z/\Delta H_\vartheta$ has been obtained allowing regional studies. All data are determined from variations with periods 18—40 min. A first supervision shows, that most of these quantites are directed to the South with deviations according to the variations of the basement. In the territory of the Great Hungarian Plain the mean deviation (9 points) is 14,5° (to the E or to the W), the maximum 35°. In Transdanubia the directions are more variable as a consequence of shallow effects [4], and even the mean deviation from four points, directed nearly to the South, is 20°.

It is to be mentioned further that the mean of $\Delta H_z/\Delta H_\vartheta$ is small in the Carpathian Basin (0,18) in comparison to other values, e.g. in Niemegk (0,32). About the distribution of the anomaly in the depth the frequency sounding by $\Delta H_z/\Delta H_\vartheta(T)$ gives some information. At the point Endrőd, where shallow effects do not distort the results, RITTER [5] found a period-dependence of $\Delta H_z/\Delta H_\vartheta$ as is given in Table II. This dependence is rather indefinite and does not allow a precise determination of the depth, thus it appears to be desirable to investigate this further.

Table II

Period intervals (T)	1.	0	$< T <$	6 min
	2.	6,1	$< T <$	18 min
	3.	18,1	$< T <$	40 min
	4.	40,1	$< T$	

T	1.	2.	3.	4.
$\frac{\Delta H_z}{\Delta H_\vartheta}$	0,09	0,11	0,16	0,16

5. In a paper on the results of the electromagnetic measurements in Hungary [7] attention was drawn on the direction of earth current ellipses in the proximity of the big Balaton fault, in different distances from this fault. The data of the relative ellipses in respect to the Observatory near Nagycenk are contained in Table III.

Fig. 6 shows the form of the relative ellipses. These results were interpreted as follows: The effect of the fault can be traced up to distances of 30 km based on the mentioned data. As the area of the ellipses here is not great any

Table III

Distance from the fault	*a*	*b*	*c*	*d*	Area	Number of stations
0—15 km	3,02	—0,63	—0,84	1,94	5,30	6
15—30	1,72	—0,24	—0,20	1,27	2,13	5
30—45	1,46	0,02	0,02	1,31	1,90	9

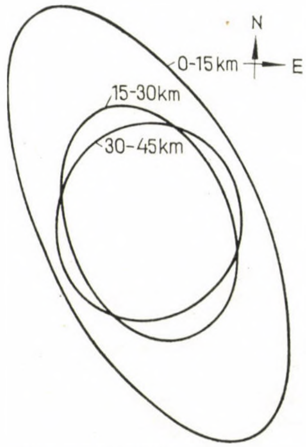


Fig. 6. Relative earth current ellipses at different distances from the Lake Balaton-fault

longer, the ϱ_∞ layer is at a greater depth. The immediate effect of the fault (i.e. a sudden change in the thickness of the conductive sediments and the resulting prolongation of the ellipses normal to the fault) does not assumedly produce at such a great distance measurable excentricity. It must be assumed that simultaneously with the formation of the fault the whole block of rocks which form the basement was subject to a deformation and this decreased the resistivity in the direction parallel with the fault (e.g. parallel system of gaps and breaches).

6. Geoelectric cross-soundings with artificial field (system AMNB) indicate over the crystalline schists of the Sopron Mountains an anisotropy (from depths of some meters on, below the decaying rocks), the resistivity in the N—S direction being greater than that in the E—W direction. Thus at a point the following values were found: $\varrho_x = 2700\ \Omega$ m, $\varrho_y = 900\ \Omega$ m. Fig. 7 is taken from a paper of VERŐ [8], and it represents the sounding curves of point Kp I. This difference was confirmed by magnetotelluric soundings, too (see the MT sounding curves of point 3 in [9]). The left-side parts of the MT-curves at point 3 do not intersect, they are surprisingly parallel. The anisotropy may appear in consequence of the oblique position of the crystalline schists, not only by the rupture tectonics, but it can be brought about by both.

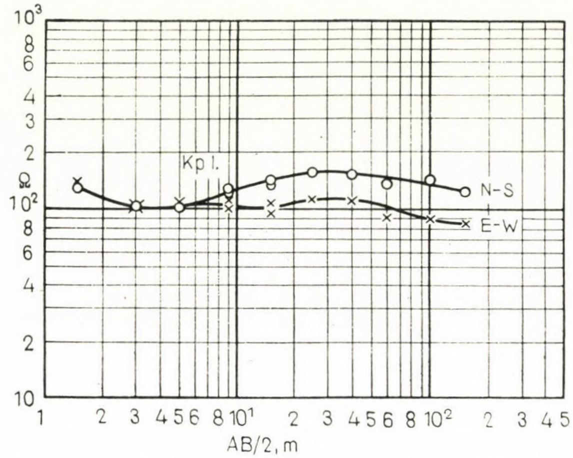


Fig. 7. Geoelectric sounding curves in the Sopron Mts.

Interpretation of the distortions of the natural electromagnetic field and of the dependency of the apparent specific resistivities on directions.

The earlier outlined picture characterizes the important regional electric anisotropy of the resistive basement in the Carpathian Basin. Two questions arise: whether all observations can be interpreted in terms of the anisotropic basement and what this anisotropy is. At first the results of the magnetotelluric soundings listed in 1.—3. need to be explained. They show the existence of the anisotropy below the crust in the upper mantle, characterized by the inequality $\varrho_x > \varrho_y$.

Considering O'Brien and Morrison's model ([10], Fig. 8) which is computed for an anisotropic medium and agrees well in respect to the first two layers with the stratigraphy of the Basin, the following results are obtained:

1. The left-side increasing branches of the curves ϱ_{Ax} and ϱ_{Ay} intersect each other. Before the intersection is $\varrho_{Ay} > \varrho_{Ax}$, in spite of $\varrho_{A_x} > \varrho_{A_y}$. At $\Theta = 0$ is $\varrho_x = 1/\sigma_1 = 2000\ \Omega$ m and $\varrho_y = 1/\sigma_2 = 100\ \Omega$ m. Accordingly the impedance ellipse turns from the direction Y (E—W) to X (N—S).

2. The curve ϱ_{Ay} (E—W) having smaller resistivities indicates at a depth of a few times ten km-s (in function of Θ) a conducting layer. On the curve ϱ_x (N—S) this layer has no trace. This indication also results from the anisotropy.

3. The curve ϱ_x shows a very slight decrease of resistivities at a depth of 150 km.

These statements correspond well with the magnetotelluric characteristics of the Carpathian Basin, in the first place with the different depths of the conductive zone obtained from the curves ϱ_x and ϱ_y. The curve ϱ_x with the greater resistivities shows a conducting layer at a depth agreeing well with the

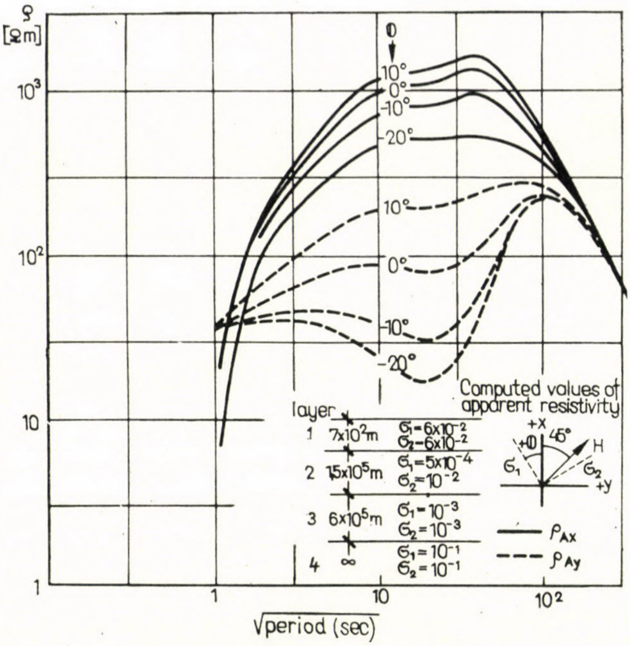


Fig. 8. Theoretical curves by O'BRIEN and MORRISON over anisotropic media

geophysical situation and it is connected at the real depth to a real resistivity decrease, the curve ϱ_y, however, shows an apparent decrease of resistivities at the given depth. (See point 3 above.) The period at the intersection is smaller than at our mean curves, hinting at the difference of the stratigraphic models.

The cause of the regional direction of the values $\Delta H_z/\Delta H_\vartheta$ can be of various kinds.

The most simple explanation would be the regional dip of the basement to the North, or the dip of the conductive layer in the upper mantle to the South. The dip would then be quite uniform in the area of the Carpathian Basin according to the small differences of $\Delta H_z/\Delta H_\vartheta$ values (Fig. 5). There is, however, no indication on the map of the basement about a regional dip of the crystalline basement to the North. The changes of the depth of the conductive layer in the upper mantle cannot be evaluated based on the few data, although some undefinite traces of a deeper situation to the South were found in an earlier paper [6].

WIESE has taken as basic model the contact of media with different resistivities along a vertical plane (e.g. along a fault). In this case the direction of $\Delta H_z/\Delta H_\vartheta$ is in his representation towards the rocks having a greater resistivity, perpendicularly to the discontinuity. This effect is comparable in the case of the Carpathian Basin to the increase of the mean resistivity of the sediment complex to the South. But in accordance with the mentioned interpretation of the magnetotelluric deep soundings it can be assumed that the disturbance is caused by a system of very deep E—W faults, which are filled with conducting material and so the resulting resistivity in the N—S direction is essentially greater than that in the E—W direction. This is why a big excentricity of the telluric relative ellipses was found at a distance up to 30 km from the Lake Balaton fault, and this is the reason of the near to surface anisotropy in the Sopron Mts resulting from a tectonic deformation. The value of $\Delta H_z/\Delta H_\vartheta$ may be influenced by the macroforms of this tectonics.

It is not likely, however, that the persistent direction of $\Delta H_z/\Delta H_\vartheta$ to the South is a mere chance resulting from the situation at the points of measurements, and in reality both directions (N and S) are equally present. This fact hints at other factors in this anomaly in addition to the conductive faults and the change of sediment resistivities; these should include the structure of the conductive zone in the upper mantle. To separate this effect is impossible at present. The small values of $\Delta H_z/\Delta H_\vartheta$ may be influenced by unidirectional primary effects, too.

The most important result of the present investigations is that the Carpathian Basin was hit by a tectonic stress which resulted in the loosening of the basement in the direction E—W or ENE—WSW down to depths greater than the earth crust, and the system of faults is filled with a material more conductive than the crystalline rocks of the basement. This conductive material is perhaps produced by water in shallower depths, at greater depths the effect of the temperature may be significant, too. The indications of the quantities $\Delta H_z/\Delta H_\vartheta$ cannot be definitely interpreted hitherto.

REFERENCES

1. Ádám, A.: A napi járás (*Sq*) harmonikusaiból számított magnetotellurikus értékek bizonytalanságáról (The uncertainty of the magnetotelluric values computed from *Sq*). *MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl.*, 35 (1965).
2. Ádám, A.—Verő, J.: A földi áramok eloszlásának vizsgálata Magyarországon (Investigations on the distribution of earth-currents in Hungary). *Magyar Geofizika*, 1964.
3. Ádám, A.: A földkéreg és a felső köpeny elektromos ellenállás viszonyainak kutatása Magyarországon földi elektromágneses térrel (The exploration of electric resistivity of the earth's crust and upper mantle in Hungary with the electromagnetic field of the Earth). Dissertation, 1963.
4. Ádám, A.: A magyarországi elektromágneses mérések információiról (On the informations of electromagnetic measurements in Hungary). *Geofizikai Közlemények*, 1968.
5. Ritter, E.: Ergebnisse geomagnetischer Variationsregistrierungen auf dem internationalen tiefenseismischen Profil VI. in Ungarn. *Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung.*, 3 (1968).
6. Ádám, A.—Miletits, J.—Verő, J.: Magnetotelluric deep-soundings in Hungary. *Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung.*, 3 (1968).
7. Ádám, A.—Verő, J.: A magyarországi elektromágneses mérések újabb eredményei (Latest results of electromagnetic measurements in Hungary). *Geofizikai Közlemények*, 1967.
8. Verő, J.: A Soproni Medence környékének földi áramviszonyai (The characteristic distribution of earth currents in the Basin of Sopron). *MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl.*, 35 (1965).

9. ÁDÁM, A.—HOLLÓ, L.—TÁTRALLYAY, M.: Szerkezeti hatások (horizontális inhomogenitások) szerepe a magnetotellurikus frekvenciaszondázási görbéken (The role of structural effects (horizontal inhomogeneities) on the magnetotelluric deep sounding curves). *Magyar Geofizika*, 1967.
10. O'BRIEN, D. P.—MORRISON, H. F.: Electromagnetic fields in an N-layer anisotropic half-space. *Geophysics*, XXXII (1967).
11. TAKÁCS, E.: Magnetotellurikus műszer- és módszerfejlesztési vizsgálatok és alkalmazásuk a geofizikai kutatásban (Development of magnetotelluric instruments and methods and their use in geophysical exploration). Dissertation, 1964.

ФОРМЫ ВЫЯВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ И АНИЗОТРОПИИ В КОМПЛЕКСНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ, ПРОВЕДЕННЫХ В ВЕНГЕРСКОМ БАССЕЙНЕ

А. АДАМ

РЕЗЮМЕ

В статье излагаются формы выявления электрической анизотропии и неоднородности по следующим результатам измерений, проведенных в Венгерском бассейне:

1. по кривым магнитотеллурических частотных зондирований;
2. в геомагнитных направлениях $\left(\text{на основании определения } \frac{\Delta H_z}{\Delta H_\vartheta}\right)$;
3. по теллурическим и магнитотеллурическим эллипсам;
4. по измерениям сопротивлений с четырьмя электродами у выходов пород на поверхность.

На этом основании в статье указываются главные тектонические особенности Венгерского Бассейна.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (1—2), pp. 199—209 (1969)

SOME METHODS OF ANALYTICAL AEROTRIANGULATION

"TETRAPLET" METHOD TAKING ADVANTAGE OF AN OVERLAPPING OF 70 AND 80 PER CENT WITHIN THE STRIP

L. MOLNÁR

GEODETIC INSTITUTE, BUDAPEST

[Manuscript received July 28, 1968]

The different methods of aerotriangulation are well characterized by the correction and condition equations used to solve them. In this paper the aerotriangulation is solved by the construction of normal stereograms the plane of which is parallel with the xy plane of the strip coordinate system after a suitable transformation of the left-side photo, so the coupling of these normal stereograms to strips is possible merely by shifting and by the changes of scale. The basis of the different methods proposed is two sorts of condition equations: error equations connected with vertical parallaxes and error equations expressing the differences of strip co-ordinates of identical points determined from different pairs of photos. Both sorts of error equations contain as unknown the elements of relative orientation. Using the deduced error equations, the article gives different methods for the case of an overlapping of 60 per cent and more (70, 80 per cent) within the strip.

Notations

The minuscules in the deductions and on the figures refer to the image plane, the majuscules to the model space (model, strip, map or geodetic coordinates).

x, y, z = left-side picture coordinates
x', y', z' = right-side picture coordinates
$p = x - x'$ = horizontal parallax
$q = y - y'$ = vertical parallax
x_0, y_0 = left-side picture coordinates of the normal stereogram
x_0', y_0' = right-side picture coordinates of the normal stereogram
x'', y'' = right-side picture coordinates of the pair of photos with the axis tilting sidewards
x_{tr}, y_{tr} = picture coordinates transformed into the horizontal plane
$\varphi, \omega, \varkappa$ = angular orientation elements of the left-side or a single photo
$\varphi', \omega', \varkappa'$ = the same of the right-side photo

I. Deduction of the error equations connected with vertical parallaxes

The transformation of a single photo means the construction of a new picture having its projection center at the same place as the original picture, the tilts and scales are, however, different (the change of scale means a proportional change of each coordinate, thus of the coordinate $z = -f$, too). The spatial position of the projection center of a single pair of photos cannot be changed without the distortion of the cone of rays [1]. The analytical transformation (by equations) of single photos is a rigorously expressed procedure independent of the topography of the terrain.

The formulas of the rigorous analytic transformation are:

$$x_{tr} = -f\frac{X}{Z} \tag{1}$$

$$y_{tr} = -f\frac{Y}{Z} \tag{2}$$

$$z_{tr} = -f \tag{3}$$

where x_{tr}, y_{tr} and z_{tr} are the picture coordinates, measured on the transformed picture, f the camera-constant (focal distance), X, Y and Z auxiliary coordinates to be determined dependent on the order of elimination of φ and ω with the aid of the equations in Table I.

Table I

$a_1 = \cos\varphi\cos\varkappa + \sin\varphi\sin\omega_2\sin\varkappa$	$a_1 = \cos\varphi_2\cos\varkappa$
$a_2 = \cos\omega_2\sin\varkappa$	$a_2 = \cos\omega\sin\varkappa + \sin\varphi_2\sin\omega\cos\varkappa$
$a_3 = -\sin\varphi\cos\varkappa + \cos\varphi\sin\omega_2\sin\varkappa$	$a_3 = \sin\omega\sin\varkappa - \sin\varphi_2\cos\omega\cos\varkappa$
$b_1 = -\cos\varphi\sin\varkappa + \sin\varphi\sin\omega_2\cos\varkappa$	$b_1 = -\cos\varphi_2\sin\varkappa$
$b_2 = \cos\omega_2\cos\varkappa$	$b_2 = \cos\omega\cos\varkappa - \sin\varphi_2\sin\omega\sin\varkappa$
$b_3 = \sin\varphi\sin\varkappa + \cos\varphi\sin\omega_2\cos\varkappa$	$b_3 = \sin\omega\cos\varkappa + \sin\varphi_2\cos\omega\sin\varkappa$
$c_1 = \sin\varphi\cos\omega_2$	$c_1 = \sin\varphi_2$
$c_2 = -\sin\omega_2$	$c_2 = -\cos\varphi_2\sin\omega$
$c_3 = \cos\varphi\cos\omega_2$	$c_3 = \cos\varphi_2\cos\omega$

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

To change the position of projection centers is a stereophotogrammetrical task that means that it can be solved only with the aid of the data of a pair of photos. Obviously, if from the data of a single photo the photo of the terrain from any other point could be constructed, then the mono-photogrammetry could solve the determination of all three coordinates of points on the terrain, what is impossible.

A change in the position of the projection center – i.e. the construction of a picture seen from any point from a given pair of photos – can only be made if the elements of relative orientation for the original pair of pictures is known. This means that the procedures based on the change of the spatial position of the projection center are not able to correct the base components or the base tilts, in a geometrical sense during the single iterations for the determination of relative orientation elements but the complete base components or base tilts can be determined again through the correction of the absolute terms and the corresponding coefficients according to the relative orientation elements determined in the previous iteration (it is naturally possible to subtract a value at will from the unknown and to consider its effect in the absolute term, but this does not alter the real meaning of the unknown from a geometrical point of view).

The picture that has been constructed from the relative orientation elements calculated in the previous iteration, and the position of which approaches to that of the normal stereogram is, namely, distorted, so the application of the equation on this as on a rigorously determined picture leads to a distortion of the elements to be determined.

Taking the above-mentioned into consideration, the formulas can so be deduced as to allow the mathematical (analytic) construction of right-side pictures forming with the left-side pictures normal stereograms, based on the values measured on a pair of pictures.

If the picture coordinates are denoted by x_0' and y_0', then they can be determined from the following Eqs:

$$x_0' = (f + p_0 \operatorname{tg} \tau) \frac{a_1 x' + b_1 y' - c_1 f}{c_3 f - a_3 x' - b_3 y'} \tag{4}$$

$$y_0' = (f + p_0 \operatorname{tg} \tau) \left(\frac{a_2 x' + b_2 y' - c_2 f}{c_3 f - a_3 x' - b_3 y'} - \frac{p_0 \operatorname{tg} \nu}{(f + p_0 \operatorname{tg} \tau) \cos \tau} \right) \tag{5}$$

where p_0 is the value of horizontal parallax, corresponding to the normal stereogram, i.e. $p_0 = x - x_0'$;

τ is an angle, measured in the plane XZ of the normal stereogram, formed — after elimination of B_y — by the base of the normal stereogram and the position of the original base projected orthogonally to the mentioned plane ($\approx B_z/B_x$);

ν is the angle between the original base and its position projected orthogonally to the plane XZ of the normal stereogram ($\approx B_y/B_x$);

$a_1 \ldots c_3$ can be taken according to the order of elimination from Table I.

Taking the serial expansion of Eq. (5) and introducing the vertical parallax, the linearised correction equation is found:

$$-\frac{x'y'}{f}\varphi' + \left(f + \frac{y'^2}{f}\right)\omega + \frac{y'p_0}{f}\tau - p_0\nu + x'\varkappa' + (R_q - q) = v \tag{6}$$

Eqs (4)—(6) are recursive expressions, as the coordinates of the left-side picture, corresponding to the unknown normal stereogram appear among the constants, hidden the value p_0. This fact as well as the non-linear terms in (6) (denoted by R_q) require the use of iterative methods. The value of p_0 is modified in the iterations:

$$p_0 = \frac{p''}{1 + \frac{x''}{f}\operatorname{tg}\tau} \tag{7}$$

where p'' and x'' are the values of the "obliques axis" pair of pictures, taking φ', ω' and $\varkappa'$ also into account (B_y has no influence on the x-coordinates).

The value of R_q can be determined according to Eqs (5) and (6) without neglections, following each iteration.

II. Error equations expressing the deviations of the strip coordinates determined from different picture points

Having formed the normal stereograms the model coordinates can be calculated from the known equations:

$$\begin{aligned} X &= \frac{B}{p_0}x_0 \\ Y &= \frac{B}{p_0}y_0 \\ Z &= \frac{B}{p_0}f \end{aligned} \tag{8}$$

In case of the proposed method to form the strips, the axes of the normal stereograms are parallel. The following refers to this case.

Let us assume that one has to fit a model to the coordinates X_0, Y_0, Z_0. The axes of coordinate system X_0, Y_0, Z_0 are parallel with the corresponding model coordinate axes X, Y, Z. A change of scale and a shift of the origo is needed for the fitting.

$$\begin{aligned} XM - C_x &= X_0 \\ YM - C_y &= Y_0 \\ ZM - C_z &= Z_0 \end{aligned} \tag{9}$$

In these equations M is the denominator of the scale, $C_{x,y,z}$ are the values of the shift of the origo. Substituting the corresponding expressions from Eq. (8), as well as p_0 by $p + \delta p$, the rigorous form of the error equations is found in:

$$\begin{aligned} &\frac{x_0}{p+\delta_p} M - (X_0 - C_x) = v \\ &\frac{y_0}{p+\delta_p} M - (Y_0 - C_y) = v \\ &\frac{f}{p_0+\delta_p} M - (Z_0 - C_z) = v \end{aligned} \tag{10}$$

In Eqs (10) $C_{x,y,z}$ are known, as they are determined independently (forming the geometrical center from the procedures of making strips already carried out and from the values M). So Eq. (9) contains a single unknown: the scale factor M. Linearising the coefficients of similar type beside the unknown values one obtains:

$$\frac{x_0}{p+\delta_p} \approx x_0 (p^{-1} - p^{-2}\delta_p + \ldots) \tag{11}$$

and similarly in y and in z.

Substituting Eq. (11) into (10), and considering the linearised expressions of δp, one gets the final form of error equations based on Eq. (4):

$$\begin{aligned} &\frac{x_0}{p} M + a\left[\left(f + \frac{x'^2}{f}\right)\varphi - \frac{x'y'}{f}\omega + \frac{x_0 p_0}{f}\tau + y'\varkappa\right] + R_x - (X_0 + C_x) = v \\ &\frac{y_0}{p} M + b\left[\left(f + \frac{x'^2}{f}\right)\varphi - \frac{x'y'}{f}\omega - \frac{x_0 p_0}{f}\tau + y'\varkappa\right] + R_y - (Y_0 + C_y) = v \\ &\frac{f}{p} M + c\left[\left(f + \frac{x'_0}{f}\right)\varphi - \frac{x'y'}{f}\omega - \frac{x_0 p_0}{f}\tau + y'\varkappa\right] + R_z - (Z_0 + C_z) = v \end{aligned} \tag{12}$$

In these equations

$$\begin{aligned} a &= -\frac{x_0}{p^2} M_{n-1} \\ b &= -\frac{y_0}{p^2} M_{n-1} \\ c &= -\frac{f}{p^2} M_{n-1} \end{aligned}$$

where M_{n-1} means the value of the denominator of scale determined in the $(n - 1)$-th iteration.

In Eqs (12) $R_{x,y,z}$ means the sum of the non-linear terms. These values as well as the fact that in the coefficients of the error equations p_0 and M_{n-1} appear, too (values a, b and c), require iterations for the determination of the unknown. In this process the first term of Eq. (10) and the reliability of the determination achieved so far can be computed from the relative orientation elements and from M. Subtracting from this the corresponding part of Eq. (12) the rigorous value of $R_{x,y,z}$ can be computed.

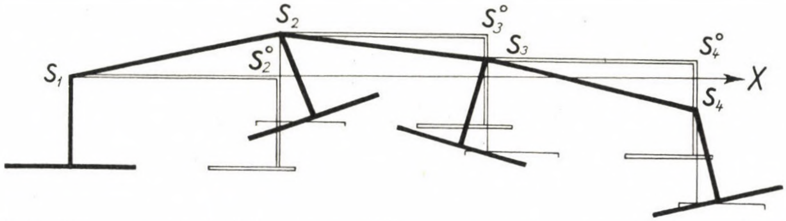


Fig. 1. Wide line — original picture axes of the camera and base, thin line — fraction of the right-side picture, axes of the camera and base computed according to the normal stereogram, double line — fraction of the transformed picture

III. Some aerotriangulation methods based on the deduced error equations

III.1. Methods for an overlapping of 60 per cent

III.11. Methods based on the error equations of the vertical parallaxes

This procedure applies the error equations (6). The procedure is the following.

The photos are transformed to the position $\varkappa = 0$ according to the collimation marks and their undisturbed ("ideal") coordinates. This procedure allows the elimination of film deformation. The systematical errors (distortion) are considered, too. The parallaxes are expressed as differences of left- and right-side picture coordinates after elimination of systematical errors.

The spatial coordinate system of the strips is determined by the first photo of the strip. The origo represents the first projection center, the strip coordinate axes X, Y, Z agree with the coordinate axes x, y, z of the first picture (Fig. 1).

The second picture must then be according to Eqs (4), (5) transformed with the aid of relative orientation elements determined from the error equations (6) and shifted in the space to form with picture 1 a normal stereogram.

The right side of the second picture (thus the part measured on model 2) is then transformed into a parallel position with the plane of the first photo with the aid of the same relative orientation elements φ, ω, $\varkappa$ according to I

(Eqs (1) (2) and (3)). Photo 3 is then oriented to the picture coordinates obtained – that is one forms a normal stereogram the XYZ axes of which are parallel with the axes XYZ of the first model, thus with the axes XYZ of the strip coordinate system, and its origo coincides with the original projection center of photo 2, and the scale (the length of the base) is unknown. Such a model can be coupled with the previous one in several ways. A solution of the problem is duction of the strip coordinates of the tie points as well their model coordinates to be connected to the geometrical center, when the scale is transmitted by the ratio of the Y coordinates. (In this case the determination of the shifts is substituted by the determination of the geometrical center.) The coupling can be solved in determining the B_z element corresponding to the first model with the aid of the elements τ and M of the first model (B_z is the strip coordinate Z of the second projection center relative to the first one), and taking this into consideration one calculates the scale from the ratio of the modified Z data. The first method is more reliable, but it requires a very precise identification of the tie points of the models, and experiences have shown that it can be used only in case of tie points defined with artificial marks (good marking on the terrain or a very fine artificial mark — needle prick, small boring — on the central photo). In other cases the coupling Z is more accurate (but less precise). It is to be remarked that the strip coordinates Z of the further projection centers are the sums of the values B_z multiplied by the scales.

Programs (GIER, ELLIOT 803B) based on the solution in this chapter have given with numerical tests rigorous results up to the accuracy of the machine.

Resulting from leaving out consideration of the error equations dealt with in chapter II, at the tie points contradictions appear that hint at errors $\delta_\varkappa$ and δ_ω. In order to eliminate the error $\delta_\varkappa$ a cappa-correction is introduced in the position of the programs if the circumstances admit its use (conditions: demand of customer, suitable position and number of tie points, small scatter of the deviations hinting at $\delta_\varkappa$ relative to the deviations themselves.)

III.12. Triplet method

The cappa-correction mentioned at the end of the last chapter does not rigorously solve the elimination of the systematical deviations in the sense X at the tie points, as the other orientation elements remain unchanged. The rigorous solution is the triplet method of Mikhail [2] that can be described very simply with the aid of the error equations (6) and of that deduced in II, if the central photo of the triplet is assumed in both models to be the left-side one. In the error equations (12) the constants $C_{x,y,z}$ are in this case 0, in place of the given coordinates X_0, Y_0, Z_0 the appropriate part of the same error equations corresponding to the other model can be written. To solve this system of normal equations with 11 unknowns, the whole photo 3 is transformed into a horizontal position with the aid of elements φ, ω, $\varkappa$ (Eqs (1), (2) and (3)), then this photo is handled as a central picture to calculate the next triplet.

A further refinement is reached by the linear transformation of the triplets one on the other overlapping the whole model. It must be mentioned in connection with the triplet method that an improvement of the conditions is attained only if the application of the $\varkappa$-correction is fulfilled i.e. if the identification of the tie points and the measurement of vertical parallaxes is carried out by about the same accuracy. In the opposite case incorrect constraints appear and the result deteriorates.

III. 13. A solution with six unknowns to approximate the results of the triplet method with a significant decrease in the quantity of calculations

A disadvantage of the triplet method described in the last chapter is that it does not make the result more accurate, but the quantity of calculations is significantly increased [3].

The problem can be solved far more accurately than with the method of III. 1, supplemented with the cappa-correction, if the conditions mentioned there are fulfilled, using the error equations described in chapter II at the tie points with the last model. In this case the constants $C_{x,y,z}$ Eq. (12) are determined in the knowledge of the previous base components, in place of X_0, Y_0, Z_0 the strip coordinates of these points are to be written. Thus a system of normal equations with six unknowns is set up based on the error equations (6) and (12). Solving this system and calculating with the results, no systematical contradictions remain in the tie points.

We again emphasise the decisive importance of the conditions enumerated at the end of chapter III. 11.

III.2. Methods for the case of an overlapping of 70 per cent or more within the strip. "Tetraplet" method

III.21. "Tetraplet" method to take advantage of an overlapping of 80 per cent within the strip

The precision is more economically and surely increased using in place of an overlapping of 60 per cent within the strip an overlapping of 80 per cent and the analytical tetraplet method to be described.

A tetraplet contains four photos of 80 per cent overlapping (Fig. 2). To the collective calculations according to the scheme recommended the determination of 15 unknowns is needed. The tetraplets are coupled by two common photos each. Both the first photos can be transformed to a horizontal position

Table II

Tetraplet-method, error equations

N	error equation \ unknown	φ_3	ω_3	$\varkappa_3$	φ_4	ω_4	$\varkappa_4$	M_{13}	τ_{13}	ν_{13}	M_{24}	τ_{24}	ν_{24}	M_{14}	τ_{14}	ν_{14}	l
1	(1 — 3) vert parallax.	$-\frac{x_3 y_3}{f}$	$f+\frac{y_3^2}{f}$	x_3					$\frac{y_3(p_{013})}{f}$	(p_{013})							$-(q_{13}-R_{q_{13}})$
2	(2 — 4) vert parallax.				$-\frac{x_4 y_4}{f}$	$f+\frac{y_4^2}{f}$	x_4					$\frac{y_4(p_{024})}{f}$	(p_{024})				$-(q_{24}-R_{q_{24}})$
3	(1 — 4) vert parallax.				$-\frac{x_4 y_4}{f}$	$f+\frac{y_4^2}{f}$	x_4								$\frac{y_4(p_{014})}{f}$	(p_{014})	$-(q_{14}-R_{q_{14}})$
4/x	$X_{strip} \sim X_{mod\,(1-3)}$	$-a_{13}\left(f+\frac{x_3^2}{f}\right)$	$a_{13}\frac{x_3 y_3}{f}$	$-a_{13} y_3$				$\frac{x_1}{x_1-x_3}$	$a_{13}\frac{x_3(p_{013})}{f}$								$-X_{str}+\Sigma Bx_{13}-R_{x_{13}}$
4/y	$Y_{strip} \sim Y_{mod\,(1-3)}$	$-b_{13}\left(f+\frac{x_3}{f}\right)$	$b_{13}\frac{x_3 y_3}{f}$	$-b_{13} y_3$				$\frac{y_1}{x_1-x_3}$	$b_{13}\frac{x_3(p_{013})}{f}$								$-Y_{str}+\Sigma By_{13}-R_{y_{13}}$
4/z	$Z_{strip} \sim Z_{mod\,(1-3)}$	$-c_{13}\left(f+\frac{x_3}{f}\right)$	$c_{13}\frac{x_3 y_3}{f}$	$-c_{13} y_3$				$\frac{f}{x_1-x_3}$	$c_{13}\frac{x_3(p_{013})}{f}$								$-Z_{str}+\Sigma Bz_{13}-R_{z_{13}}$
5/x	$X_{strip} \sim X_{mod\,(2-4)}$				$-a_{24}\left(f+\frac{x_4^2}{f}\right)$	$a_{24}\frac{x_4 y_4}{f}$	$-a_{24} y_4$				$\frac{x_2}{x_2-x_4}$	$a_{24}\frac{x_4(p_{024})}{f}$					$-X_{str}+\Sigma Bx_{24}-R_{x_{24}}$
5/y	$Y_{strip} \sim Y_{mod\,(2-4)}$				$-b_{24}\left(f+\frac{x_4^2}{f}\right)$	$b_{24}\frac{x_4 y_4}{f}$	$-b_{24} y_4$				$\frac{y_2}{x_2-x_4}$	$b_{24}\frac{x_4(p_{024})}{f}$					$-Y_{str}+\Sigma By_{24}-R_{y_{24}}$
5/z	$Z_{strip} \sim Z_{mod\,(2-4)}$				$-c_{24}\left(f+\frac{x_4^2}{f}\right)$	$c_{24}\frac{x_4 y_4}{f}$	$-c_{24} y_4$				$\frac{f}{x_2-x_4}$	$c_{24}\frac{x_4(p_{024})}{f}$					$-Z_{str}+\Sigma Bz_{24}-R_{z_{24}}$
6/x	$X_{mod\,(1-3)} \sim X_{mod\,(2-4)}$	$-a_{13}\left(f+\frac{x_3^2}{f}\right)$	$a_{13}\frac{x_3 y_3}{f}$	$-a_{13} y_3$	$a_{24}\left(f+\frac{x_4^2}{f}\right)$	$-a_{24}\frac{x_4 y_4}{f}$	$a_{24} y_4$	$\frac{x_1}{x_1-x_3}$	$a_{13}\frac{x_3(p_{013})}{f}$		$-\frac{x_2}{x_2-x_4}$	$-a_{24}\frac{x_4(p_{024})}{f}$					$\Sigma Bx_{13}-\Sigma Bx_{24}+R_{x_{13}}-R_{x_{24}}$
6/y	$Y_{mod\,(1-3)} \sim Y_{mod\,(2-4)}$	$-b_{13}\left(f+\frac{x_3^2}{f}\right)$	$b_{13}\frac{x_3 y_3}{f}$	$-b_{13} y_3$	$b_{24}\left(f+\frac{x_4^2}{f}\right)$	$-b_{24}\frac{x_4 y_4}{f}$	$b_{24} y_4$	$\frac{y_1}{x_1-x_3}$	$b_{13}\frac{x_3(p_{013})}{f}$		$-\frac{y_2}{x_2-x_4}$	$-b_{24}\frac{x_4(p_{024})}{f}$					$\Sigma By_{13}-\Sigma By_{24}+R_{y_{13}}-R_{y_{24}}$
6/z	$Z_{mod\,(1-3)} \sim Z_{mod\,(2-4)}$	$-c_{13}\left(f+\frac{x_3^2}{f}\right)$	$c_{13}\frac{x_3 y_3}{f}$	$-c_{13} y_3$	$c_{24}\left(f+\frac{x_4^2}{f}\right)$	$-c_{24}\frac{x_4 y_4}{f}$	$c_{24} y_4$	$\frac{f}{x_1-x_3}$	$c_{13}\frac{x_3(p_{013})}{f}$		$-\frac{f}{x_2-x_4}$	$-c_{24}\frac{x_4(p_{024})}{f}$					$\Sigma Bz_{13}-\Sigma Bz_{24}+R_{z_{13}}-R_{z_{24}}$
7/x	$X_{mod\,(1-4)} \sim \frac{X_{m(1-3)}+X_{m(2-4)}}{2}$	$-\frac{a_{13}}{2}\left(f+\frac{x_3^2}{f}\right)$	$\frac{a_{13}}{2}\frac{x_3 y_3}{f}$	$-\frac{a_{13}}{f} y_3$	$\left(a_{14}-\frac{a_{24}}{2}\right)\left(f+\frac{x_4^2}{f}\right)$	$\left(\frac{a_{24}}{2}-a_{14}\right)\frac{x_4 y_4}{f}$	$\left(a_{14}-\frac{a_{24}}{2}\right)y_4$	$\frac{x_1}{2(x_1-x_3)}$	$\frac{a_{13}}{2}\frac{x_3(p_{013})}{f}$		$\frac{x_2}{2(x_2-x_4)}$	$\frac{a_{24}}{2}\frac{x_4(p_{024})}{f}$		$-\frac{x_1}{x_1-x_4}$	$-a_{14}\frac{x_4(p_{014})}{f}$		$(\Sigma Bx_{24}-\Sigma Bx_{13})/2+$ $+(R_{x_{13}}+R_{x_{24}})/2-R_{x_{14}}$
7/y	$Y_{m(1-4)} \sim \frac{Y_{m(1-3)}+Y_{m(2-4)}}{2}$	$-\frac{b_{13}}{2}\left(f+\frac{x_3^2}{f}\right)$	$\frac{b_{13}}{2}\frac{x_3 y_3}{f}$	$-\frac{b_{13}}{2} y_3$	$\left(b_{14}-\frac{b_{24}}{2}\right)\left(f+\frac{x_4^2}{f}\right)$	$\left(\frac{b_{24}}{2}-b_{14}\right)\frac{x_4 y_4}{f}$	$\left(b_{14}-\frac{b_{24}}{2}\right)y_4$	$\frac{y_1}{2(x_1-x_3)}$	$\frac{b_{13}}{2}\frac{x_3(p_{013})}{f}$		$\frac{y_2}{2(x_2-x_4)}$	$\frac{b_{24}}{2}\frac{x_4(p_{024})}{f}$		$-\frac{y_1}{x_1-x_4}$	$-b_{14}\frac{x_4(p_{014})}{f}$		$(\Sigma By_{24}-\Sigma By_{13})/2+$ $+(R_{y_{13}}+Ry_{24})/2-R_{y_{14}}$
7/z	$Z_{m(1-4)} \sim \frac{Z_{m(1-3)}+Z_{m(2-4)}}{2}$	$-\frac{c_{13}}{2}\left(f+\frac{x_3^2}{f}\right)$	$\frac{c_{13}}{2}\frac{x_3 y_3}{f}$	$-\frac{c_{13}}{2} y_3$	$\left(c_{14}-\frac{c_{24}}{2}\right)\left(f+\frac{x_4^2}{f}\right)$	$\left(\frac{c_{24}}{2}-c_{14}\right)\frac{x_4 y_4}{f}$	$\left(c_{14}-\frac{c_{24}}{2}\right)y_4$	$\frac{f}{2(x_1-x_3)}$	$\frac{c_{13}}{2}\frac{x_3(p_{013})}{f}$		$\frac{f}{2(x_2-x_4)}$	$\frac{c_{24}}{2}\frac{x_4(p_{024})}{f}$		$-\frac{f}{x_1-x_4}$	$-c_{14}\frac{x_4(p_{014})}{f}$		$(\Sigma Bz_{24}-\Sigma Bz_{13})/2+$ $+(R_{z_{13}}+R_{z_{24}})/2-R_{z_{14}}$

with the aid of the elements determined from the previous tetraplet. The model coordinates are then calculated from the pairs of photos with 60 and 40 per cent overlapping (1—3), (2—4) and (1—4), resp. The error equations to be set up follow the same pairs of photos. Table II contains the error equations.

The solution contains at each point error equations in the senses x and y, thus the measurement errors in both directions x and y can be determined with absolute certainty.

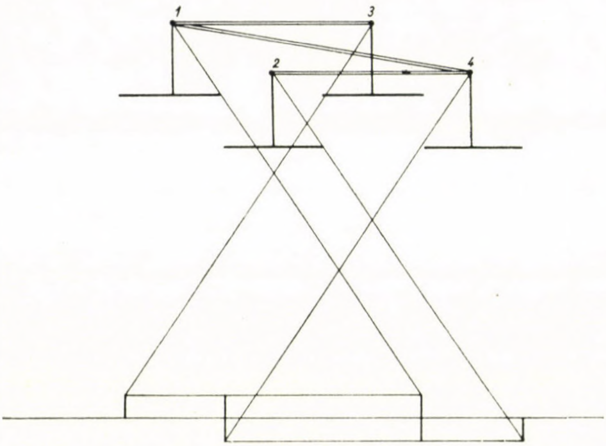


Fig. 2. A schematic "tetraplet"

The course of computations for every tetraplet is e.g. the following:

1. Transformation of photos 1 and 2 with the aid of Eqs (1) and (2) based on the elements determined for the previous tetraplet.

2. Determination of preliminary values for the unknown quantities, and elimination of rough errors as well as partial elimination of small errors in the sense y. For this purpose:

determination of the relative orientation elements on the model (1—3) and (2—4) with 60 per cent overlapping according to the method described in III.11;

determination of the preliminary values of ν_{1_1} and τ_{1_1} on the model (1—4) with an overlapping of 40 per cent, using the previously determined values of φ_4, ω_4 and $\varkappa_4$ (system of normal equation with two unknowns);

calculation of preliminary values for M_{13}, M_{24} and M_{14}.

3. Setting up and solving the system of normal equations with 15 unknowns. This procedure must be coupled with the elimination of errors.

4. Calculation of the strip coordinates of points from the models (1—3), (2—4) and (1—4) and of the average value of the values received (maybe weighted too) (the model (1—4) with 40 per cent overlapping means the "useful area" of the simple tetraplet).

III.22. "Pentaplet" method to take advantage of an overlapping of 80 per cent within the strip

The overlapping of 80 per cent within the strip can be, naturally, taken advantage of based on error equations applied in a combination unlike the tetraplet described earlier. It is possible to deal with 5 photos as a unit ("pentaplet"). Pentaplets (Fig. 3) are always coupled by three photos. As orientation elements φ, ω, $\varkappa$ are known from the previous pentaplet, one has here only three unknowns more than for the tetraplet method. In this case the models with 60 and 40 per cent overlapping are (3—1), (3—5), (2—4), (1—4), (2—5),

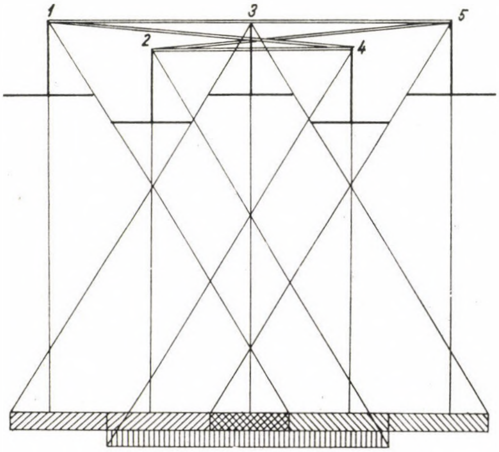


Fig. 3. A schematic "pentaplet"

from these all data of (3—1) is already known, the further models give three elements τ, ν and M each, and further one is to determine the elements φ, ω and $\varkappa$ of the photos 3 and 5, thus altogether 15 unknowns. The number of unknowns increase by 4, if one wants to consider the pair of pictures (1—5) with 20 per cent overlapping, too, in setting up the error equations.

This method perhaps diminishes somewhat the error accumulation within the strip in comparison to the tetraplet method, but the increase of the number of unknowns (by three, or even by six) significantly increases the quantity of calculations, and the treatment of the data complex of Fig. 3 further increases the storage demand of the computation; the disadvantages are scarcely proportional with the increase of accuracy.

III.23. Method to take advantage of an overlapping of 70 per cent within the strip

In this case it is very useful to treat three photos as a unit; these units are always coupled by a common photo. Such a unit (Fig. 4) contains two models of 70 per cent overlapping and one of 40 per cent; models (1—2), (2—3),

and (1—3) resp. Unknown are elements φ, ω and $\varkappa$ of photos 2 and 3, and for all the three methods the values of τ, ν and M - thus one has 15 unknowns.

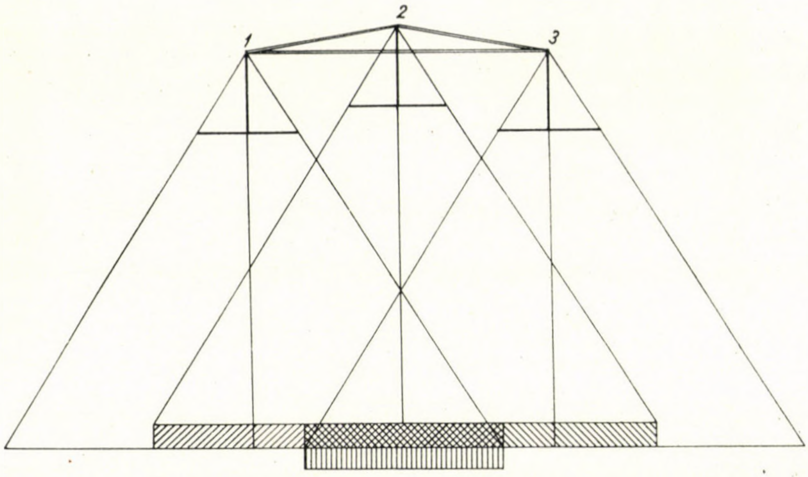


Fig. 4. A schematic 70 per cent "triplet"

Notes: 1. It is an advantageous solution to couple the units of three 70 per cent overlapping photos by two common photos each: the number of unknowns (to 9) is thus significantly reduced, the calculations are split into smaller cycles (the system of equations repeat themselves from photo to photo).

2. The problem can be solved by the tetraplet method described earlier. This hints at relatively universal applicability of the tetraplet method.

REFERENCES

1. Лобанов, А. Н.: Теория трансформирования пары снимков и создание карты по трансформированным изображениям. Москва, Геодезиздат, 1954.
2. Mikhail, E. M.: Use of Triplets for Analytical Aerotriangulation. *Photogrammetric Engineering*, 1962.
3. Lehmann, G.: Die Verwendung von Bildpaaren und Bildtripeln bei der Aerotriangulation von Bildstreifen. *Z. f. Vermessungswesen*, 1963.

НЕСКОЛЬКО МЕТОДОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФОТОТРИАНГУЛЯЦИИ, МЕТОД «ТЕТРАПЛЕТ» ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ 70-И И 80-И %-НОГО ПРОДОЛЬНОГО ПЕРЕКРЫТИЯ

Л. МОЛНАР

РЕЗЮМЕ

Разные методы аналитической пространственной фототриангуляции хорошо характеризуются применяемыми для их решения уравнениями поправок и условными уравнениями. В этой работе решение пространственной фототриангуляции заключалось в построении нормальных стереограмм, плоскость которых — вследствие предварительной

трансформации левого аэроснимка — параллельна плоскости xy маршрутной координатной системы, так что привязка к маршруту нормальных стереограмм может быть решена путём смещении и изменения масштаба. Основой для разных предложенных методов служат два вида уравнения поправок: уравнения поправок, связанные с вертикальными параллаксами и уравнения поправок, выражающие различие координат одних и тех же точек в маршруте, определенных из разных стереопар. Оба типа уравнений поправок содержат, как неизвестные, элементы взаимного ориентирования. На основе выведенных уравнений поправок в статье излагаются разные методы для случаев продольного перекрытия в 60% и больше (70, 80%).

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (1—2), pp. 211—233 (1969)

NEUE UNTERSUCHUNGEN ZUR THEORIE DES NORMALSPHÄROIDES*

K. LEDERSTEGER

WIRKL. MITGLIED DER ÖSTERR., KORR. MITGLIED DER BAYER. UND EHRENMITGLIED DER UNG. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Für die Definition des Normalsphäroides der Erde stehen grundsätzlich vier Möglichkeiten offen:

1. Eine Gleichgewichtsfigur mit den empirischen Daten (E, ω, a, a_k, C), welche also mit der Erde die Masse E, die Rotationsgeschwindigkeit ω, die Achse a des Geoides oder besser des mit dem Erdkörper volumgleichen Ellipsoides, die Äquatorachse des Kernes (Kernoberfläche in 2900 km Tiefe), das Hauptträgheitsmoment C um die Rotationsachse und schließlich den Dichtesprung $\Delta\varrho = 3{,}75$ an der Kernoberfläche gemeinsam hat. Damit ist dem Prinzip der Erhaltung des Drehimpulses ωC Rechnung getragen, weshalb J. O'KEEFE diese Lösung schlechtweg als *die* Gleichgewichtsfigur der Erde bezeichnet. Diese Figur hat aber eine zu kleine Differenz (C—A) der beiden Trägheitsmomente und infolgedessen auch eine zu kleine Abplattung (1 : 299,2), weshalb sie zumindest für geodätische Zwecke ungeeignet ist.

2. Halten wir umgekehrt die statische Abplattung J_2 oder die Differenz der Trägheitsmomente fest, gehen also von den empirischen Daten (E, ω, a, a_k, J_2) aus, so resultiert wohl die richtige Abplattung (1 : 298,25), jedoch ein zu großes C. Es gibt überhaupt keine Gleichgewichtsfigur, welche neben (E, a, a_k) die Rotationsgeschwindigkeit *und* beide Trägheitsmomente J und A, d. h. C *und* J_2 mit der Erde gemeinsam hat.

3. In Anbetracht der Tatsache, daß der Sterntag gegenwärtig um 1 Sekunde in rund 120 000 Jahren abnimmt, kann man an eine Gleichgewichtsfigur mit etwas größerer Rotationsgeschwindigkeit denken. Man nimmt an, daß die Erde vor vielen Jahrmillionen gleichsam im Gleichgewicht erstarrt ist und hätte hierzu das Wechselspiel von Kontraktion und Flutreibung im Laufe der Entwicklungsgeschichte der Erde zu studieren. Man kann aber auch an eine Abnahme der Gravitationskonstanten und eine damit verbundene Ausdehnung des Erdkörpers denken, welche Hypothese besonders von L. EGYED verfochten wird. Jedenfalls findet man für das Wiechert-Modell (homogener Mantel und homogener Kern) mit den Daten (E, a, a_k, J_2, C) eine Rotationsgeschwindigkeit, die einem um 275^s kürzeren Sterntag entspricht. Der Übergang von diesem Wiechert-Modell zur mehrparametrigen Gleichgewichtsfigur erfordert zusätzliche Annahmen, die derzeit noch hypothetischen Charakter tragen.

Erteilt man dieser Gleichgewichtsfigur die heutige Rotationsgeschwindigkeit, so resultiert eine Gleichgewichtsanordnung, soweit es sich um die Festerde handelt, während die Wasserhülle der verminderten Fliehkraft folgen kann. Mit den Daten (E, ω, a, J_2, J_4), wobei die Massefunktion J_4 der Gleichgewichtsfigur der Erde entnommen wird, folgt aus dem Helmertsystem das mehrparametrige Normalsphäroid. Dieses hat die richtige, geodätisch verwendbare Abplattung und außerdem ein Trägheitsmoment C, das sich vom wahren Wert höchstens um eine Größe 6. O. unterscheiden kann.

4. Liegt schließlich auch J_4 empirisch vor, wie es grundsätzlich aus der Analyse der Bahnstörungen der künstlichen Satelliten möglich ist, so kann man aus (E, ω, a, J_2, J_4) direkt ein Helmertsches Niveausphäroid vierten Ranges berechnen und als Normalsphäroid bezeichnen. Auffallender Weise hat sich aber bisher der Satellitenwert von $|J_4|$ um rund 47% kleiner ergeben als der Gleichgewichtswert. Für die Prüfung dieser befremdenden Diskrepanz eröffnen sich drei Möglichkeiten: das Studium der Undulationen in verschiedenen Höhen, die Untersuchung der mit den Massefunktionen streng gekoppelten Formparameter und die Untersuchung des Störpotentiales auf Grund der Entwicklung der Höhen- und Tiefenverhältnisse der Erde. Alle drei berechtigen zu einer skeptischen Einstellung gegenüber den Satellitenergebnissen.

* Erweiterte Fassung eines Vortrages, gehalten am 21. August 1968 auf der Geodätischen Konferenz in Sopron.

a) Die Wahl der Ausgangsdaten

Bekanntlich kann das Normalsphäroid als freie Oberfläche und gleichzeitig Niveaufläche des regularisierten Erdkörpers definiert werden. Durch die Regularisierung soll eine möglichst wenig vom physischen Erdkörper abweichende rotations- und äquatorsymmetrische Massenanordnung entstehen, welche mit der wirklichen Erde die Masse, die Rotationsgeschwindigkeit und das Hauptträgheitsmoment C, also auch den Drehimpuls ωC gemeinsam hat, während das äquatoriale Trägheitsmoment A mit dem Mittel der beiden tatsächlichen Trägheitsmomente A und B identisch sein soll. Ferner soll das Normalsphäroid mit dem wirklichen Erdkörper volumgleich sein. Wir müssen also den Äquatorradius des Geoides ($a = 6378{,}165$ km) um 234 m vergrößern, entsprechend der Delfter Entwicklung der Höhen- und Tiefenverhältnisse (1962); denn die auf die ganze Erdoberfläche bezogene mittlere Kontinentalhöhe ist 234 m. Aus diesen Forderungen folgt, daß auch die statische Abplattung $J_2 = (C - A) : Ea^2$ erhalten bleiben muß. Wir wählen daher folgende Ausgangswerte:

$$E = 5976{,}1 \cdot 10^{24}\,\text{g}; \quad a = 6{,}378\,399 \cdot 10^{8}\ \text{cm}; \quad J_2 = 108\,271 \cdot 10^{-8};$$
$$\omega^2 = 5{,}317\,496 \cdot 10^{-9}\ \text{sec}^{-2}, \tag{1}$$

mit denen sich noch ergibt:

$$k^2E = 398\,605{,}87 \cdot 10^{15}\,\text{cm}^3\text{sec}^{-2}; \quad \bar{\varepsilon} = 346\,177{,}3 \cdot 10^{-8}. \tag{1a}$$

Hierzu ist zu bemerken, daß die Erdmasse nicht unmittelbar bestimmbar ist. Vielmehr liefert das dritte Kepler-Gesetz lediglich k^2E und die Genauigkeit der Erdmasse hängt von der empirischen Unsicherheit der Bestimmung der Gravitationskonstanten $k^2 = 66{,}7 \cdot 10^{-9}$ cm^{3}sec^{-2}g^{-1} ab. In Luzern wurde $k^2E = 398\,603 \cdot 10^{15}$ cm^{3}sec^{-2} empfohlen, was mit demselben k^2 auf $E = 5976{,}057 \cdot 10^{24}$ g führt. Ferner ist die aus den künstlichen Satelliten abgeleitete Massefunktion J_2 auf das Geoid bezogen; die Umrechnung auf den größeren Radius (1) ergibt genau genommen eine geringe Abnahme: $J_2 = 108\,262{,}9 \cdot 10^{-8}$.

Das Trägheitsmoment C ist keine Stokessche Konstante und kann daher nicht unmittelbar als Bestimmungsstück gelten. Andererseits brauchen wir unbedingt ein weiteres empirisches Bestimmungsstück, wenn wir das Normalsphäroid eindeutig als Helmertsches Rotations-Niveausphäroid vierten Ranges berechnen wollen. Hierzu kann nur die Äquatorschwere γ_0 oder die Massefunktion J_4 dienen. Nach dem gegenwärtigen Stand der Erkenntnis liegt die Äquatorschwere auf dem Geoid zwischen den Grenzen 978,032 und 978,037 Gal. Da hierbei das Geoid als Rand der umgruppierten Erdmasse gedacht ist, können wir den Übergang auf den Radius (1) am besten mit dem Freiluftgradienten vornehmen und finden $\Delta\gamma = -0{,}308\,554 \cdot 234 = -72{,}2$ mGal, also:

$$977{,}960 \leq \gamma_0 \leq 977{,}965 \text{ Gal}. \tag{2}$$

Mit den Gleichungen des Helmert-Systems:

$$\begin{gathered}
\bar{\varepsilon} = \omega^2 a^3/k^2E\,; \quad \frac{1}{2}(3\,J_2+\bar{\varepsilon}) = (e - e^2 + e\,\bar{\varepsilon}) - \frac{5}{8}J_4 \\
\left(\gamma_0\,a^2/k^2E + \frac{3}{2}\bar{\varepsilon} - 1\right) = (e - e^2 + e\,\bar{\varepsilon}) - \frac{5}{2}J_4 \\
f_4 = 3{,}5\,e^2 - 2{,}5\,e\,\bar{\varepsilon} + 4{,}375\,J_4
\end{gathered} \tag{3}$$

finden wir folgende Lösungen für die drei Unbekannten, nämlich die Abplattung e, den Formparameter f_4 und die Massefunktion J_4:

mit γ_0	e	e^{-1}	J_4	f_4
977,960 Gal:	335 489,3 $\cdot 10^{-8}$;	298,072;	$+$ 48,0 $\cdot 10^{-8}$;	$+$ 1245,9 $\cdot 10^{-8}$
977,965 Gal:	335 318,6	298,224	$-$ 224,2	$+$ 52,6
977,967 Gal:	335 250,3	298,285	$-$ 333,0	$-$ 424,7

(I)

Die beiden ersten Lösungen sind unbrauchbar. Die erste liegt überhaupt außerhalb des Bereiches der möglichen Niveausphäroide ($J_4 \leq 0$), die zweite noch unterhalb des zugehörigen Niveauellipsoides ($f_4 = 0$), d.h. es gibt dazu keine physikalisch sinnvolle Massenanordnung. Auffallend ist die hohe Empfindlichkeit der Größen 4.O. Einer Zunahme von γ_0 um 1 mGal entsprechen eine Abnahme der Abplattung um $\Delta e = -34{,}14 \cdot 10^{-8}$ und folglich die Variationen $\Delta J_4 \sim 1{,}6\,\Delta e = -54{,}4 \cdot 10^{-8}$ und $\Delta f_4 \sim 7{,}0\Delta e = -238{,}7 \cdot 10^{-8}$.

Durch lineare Interpolation finden wir für das Niveauellipsoid: $\gamma_0 = 977{,}96522$, in der Parabel der homogenen Ellipsoide $F = 15/7$, also für $J_4 = -251{,}2 \cdot 10^{-8} : \gamma_0 = 977{,}96550$ und schließlich in der Schranke $A = 0$, in welcher an der Oberfläche die Änderung des Formparameters mit der Höhe gerade verschwindet, wegen

$$J_4 = -\frac{4}{5}e^2 + \frac{6}{7}e\,\bar{\varepsilon} - \frac{5}{14}\bar{\varepsilon}^2 = -332{,}4 \cdot 10^{-8}$$

zufällig gerade obige dritte Lösung: $\gamma_0 = 977{,}96700$ mGal. Man sieht also, daß die mögliche Streuung in γ_0 kaum 1,5 mGal übersteigen kann. Es müßte somit γ_0 auf mindestens 0,1 mGal genau bekannt sein, um J_4 auf $5{,}5 \cdot 10^{-8}$ und den Formparameter f_4 auf $23{,}9 \cdot 10^{-8}$ sicher zu erhalten. Es folgt, daß die empirische Bestimmung von γ_0 höchste Genauigkeit erfordert; letztere dürfte am ehesten mittels der Kondensationsreduktion zu erreichen sein, weil dabei der indirekte Effekt stets positiv und klein ist.

Überdies lehrt die vorstehende Rechnung, daß die angenommenen Daten (1) und (2) für γ_0 und k^2E noch nicht befriedigend zusammenstimmen. Aus der Näherung 2.O.

$$\gamma_0 a^2 \doteq k^2E \left(1 + e - \frac{3}{2}\bar{\varepsilon}\right) \sim 0{,}99816\,\mathrm{k}^2E \tag{3a}$$

folgt, daß einer Zunahme von γ_0 um 1 mGal eine Zunahme von k^2E um $0{,}4076 \cdot 10^{15}$ entspricht. In der Parabel $F = |J_4| : J_2^2 = 15/7$ ergibt sich mit dem verbesserten $J_2 = 108\,262{,}9 \cdot 10^{-8}$ leicht $J_4 = -251{,}16 \cdot 10^{-8}$ und damit folgende kleine Tabelle:

k^2E	$\bar{\varepsilon}$
$398\,605{,}87 \cdot 10^{15}$	$346\,177{,}256 \cdot 10^{-8}$
398 605,00	346 178,011
398 604,00	346 178,880
398 603,00	346 179,748 (II)
$(e - e^2 + e\bar{\varepsilon})$	γ_0
$335\,326{,}002 \cdot 10^{-8}$	977,966 91 Gal
335 326,380	977,964 77
335 326,814	977,962 31
335 327,248	977,959 85.

Dieses Ergebnis scheint die Luzerner Empfehlung für k^2E zu rechtfertigen. Demgegenüber darf aber die derzeit noch bestehende Unsicherheit in der empirischen Bestimmung von γ_0 nicht übersehen werden, die etliche mGal beträgt. Tatsächlich wurden hier bloß Wertepaare k^2E und γ_0 aufgesucht, welche dieselben Massefunktionen liefern. Dies könnte bequem auch mittels der Gleichung

$$k^2E = (\gamma_0 a^2 + \omega^2 a^3) : \left(1 + \frac{3}{2} J_2 - \frac{15}{8} J_4\right) \tag{4}$$

erfolgen.

Während bei gegebenen (k^2E, ω, a, J_2, γ_0) gemäß der ersten Tabelle ein Fehler von 1 mGal in γ_0 bereits illusorische Werte für J_4 und f_4 liefert, verfälscht bei gegebenen (k^2E, ω, a, J_2, J_4) ein Fehler von $1 \cdot 10^{15}$ in k^2E die Äquatorschwere bloß um 2,4 mGal, während $\bar{\varepsilon}$ fast unverändert bleibt. Mithin sind offensichtlich die letztgenannten Ausgangsdaten vorzuziehen und eine sichere empirische Bestimmung der Massefunktion J_4 oder eine sichere theoretische Abschätzung dieser Größe ist der eigentliche Angelpunkt der Theorie des Normalsphäroides. Die bisherigen empirischen Bestimmungen von J_4 aus den Bahnstörungen der künstlichen Satelliten befriedigen nicht. Daher müssen wir eine rein theoretische Lösung versuchen. Wären die letztgenannten Daten (E, ω, a, J_2, J_4) gegeben, so hätten wir aus den zahllosen zugehörigen Massenanordnungen jene auszuwählen, welche dasselbe Trägheitsmoment C wie die wirkliche Erde haben, und darunter wieder diejenige, welche am besten den auf seismischer Grundlage entwickelten Vorstellungen vom inneren Aufbau der Erde entspricht. Dabei haben wir von jenen einfachsten Modellen auszugehen, deren Massefunktionen exakt mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnet werden können, nämlich von den sogenannten Zweischalen-Modellen.

b) Zweischalenmodelle und Wiechert-Modelle

Setzt man in Näherung 4.O. an:

$$\bar{\varepsilon} = xe + ye^2\,; \qquad J_4 = -\,\xi\, e^2\,; \qquad f_4 = -\,\varkappa\, e^2 \tag{5}$$

und betrachtet (E, ω, a) als gegeben, dann gibt es noch ∞^2 Helmertsche Niveausphäroide vierten Ranges, deren jedes durch die beiden Massefunktionen J_2 und J_4 oder durch die Punkte eines (x, $\varkappa$)-Diagrammes eindeutig bestimmt ist. So definiert z. B. der Punkt E($x = 4/5$, $\varkappa = 0$) das zugehörige MacLaurinsche Ellipsoid und der Punkt N($x = 2$, $\varkappa = 1{,}5$) vermöge $J_2 = J_4 = 0$ eine Niveaufläche des Massenpunktes. Halten wir ferner J_2 konstant:

$$3\,J_2 = (2 - x)\,e + ze^2,$$

so liegen die unendlich vielen Lösungen mit den Ausgangsdaten (1) in einer Kurve $J_2 = \text{const}$, welche in Näherung 2.O. mit einer Vertikalen $x = \text{const}$ zusammenfällt.

Für jede Massenanordnung ist in der ganzen Schar ihrer äußeren Niveauflächen das Verhältnis

$$F = |\,J_4\,| : J_2^2 = 9\,\frac{\dfrac{4}{5} - \dfrac{4}{7}\,x + \dfrac{8}{35}\,\varkappa}{(2 - x)^2} = \text{const.} \tag{6}$$

Alle diese Parabeln enden im Punkte N und haben dort die gemeinsame Tangente

$$\varkappa = -\,\frac{7}{2} + \frac{5}{2}\,x\,, \tag{7}$$

welche mit der degenerierten Parabel $F = 0$ oder mit der Geraden $\xi = 0$ zusammenfällt. Tatsächlich sind gemäß der letzten Gleichung (3) die Kurven konstanter ξ-Werte die Geraden

$$\varkappa = \frac{35}{8}\xi - \frac{7}{2} + \frac{5}{2}x\,. \tag{8}$$

Alle diese Geraden schneiden unsere Kurve $J_2 = \text{const}$ und der Schnittpunkt mit (7) definiert die absolute untere Grenze. Der physikalisch sinnvolle Bereich endet für die Gleichgewichtsfiguren jedenfalls in der Parabel $F = 15/7$ der Niveauflächen der homogenen Ellipsoide, d.h. mit $J_4 = -251{,}2 \cdot 10^{-8}$, da diese ja als Grenzfälle von zweiparametrigen Gleichgewichtsfiguren aufgefaßt werden können. Ob es auch abgesehen vom Gleichgewicht unterhalb der Parabel $F = 15/7$ noch physikalisch mögliche Massenanordnungen gibt, ist zumindest sehr problematisch, wie eine neuerliche Analyse der Niveauellipsoide lehrt.* Immer nimmt die Dichte nach innen ab oder die Abplattung der Dichteflächen zu, oder es treten Flächenbelegungen mit teils negativer, teils positiver Dichte auf oder die Dichte wird unendlich groß. Ausgehend vom Zweischalenmodell gibt es allerdings auch Massenanordnungen mit heterogenem Mantel oder Kern, wobei im heterogenen Teil eine stärkere Massenkonzentration mit unbekanntem Dichtegesetz vorliegt. Im Gleichgewichtsfalle ist eine obere Schranke durch die Parabel $A = adf/da = A = 0$ gegeben, welche durch den Punkt E geht. Da aber E auf jeden Fall in der Grenze der Gleichgewichtsfiguren liegen muß, kommen für das Gleichgewicht Werte $A > 0$ nicht in Frage. Die Parabel $A = 0$ oder

$$\varkappa = \frac{25}{16}x^2 - \frac{5}{4}x \tag{9}$$

schneidet die Kurve $J_2 = \text{const}$ im Punkte $J_4 = -332{,}4 \cdot 10^{-8}$, so daß also für die Daten (1) Gleichgewichtslösungen nur in dem engen Abschnitt

$$-251{,}2 \cdot 10^{-8} \geqq J_4 > -332{,}4 \cdot 10^{-8} \tag{10}$$

liegen können.

Die Zweischalenmodelle bestehen aus zwei homogenen Teilen, Mantel und Kern, wobei die Oberfläche der Gesamtfigur als Niveaufläche vorausgesetzt ist, während die Kernoberfläche ein exaktes Ellipsoid sein soll. Ist neben den Daten (1) noch J_4 gegeben, so bestimmen die zweite und vierte Gleichung (3) die Abplattung e und den Formparameter f_4 und anschließend die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 5\,J_2 &= \left(2\,e - e^2 - \frac{2}{7}f_4\right)(E_1 : E) + (2\,e_k - e_k^2)\,(a_k : a)^2\,(E_k : E) \\ -\frac{35}{3}J_4 &= \left[(2\,e - e^2)^2 - \frac{8}{9}f_4\right](E_1 : E) + (2\,e_k - e_k^2)^2\,(a_k : a)^4\,(E_2 : E) \end{aligned} \tag{11}$$

* *K. Ledersteger:* „Nochmals zur Problematik des Niveauellipsoides". Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik, Winterthur 1968, S. 389–398.

die Unbekannten $(E_1: E)$ und $(2e_k - e_k^2)a_k^2$. Dabei ist E_1 eine Teilmasse zum Aufbau eines homogenen Sphäroides als »Mantelfigur«, während die Restmasse $E_2 = E - E_1$ zusätzlich im Kern homogen verteilt wird. Zu jedem Punkt der Kurve $J_2 = \text{const}$ gehören also eine bestimmte Teilmasse E_1 sowie unendlich viele konfokale Kerne, also unwesentliche Massenverschiebungen. Die Kerne beginnen mit einem Ellipsoid von minimaler Abplattung, das dieselbe Polarachse wie die Gesamtfigur besitzt, und enden in einem Ellipsoid $e_k = e$, da ja eine Zunahme der Abplattung nach innen zumindest dann physikalisch sinnlos ist, wenn wir Gleichgewicht anstreben. Zwischen diesen Grenzen liegt ein Wiechert-Modell, d.h. eine zweiparametrige Gleichgewichtsfigur, wobei die Gleichgewichtsbedingung fordert, daß auch die Kernoberfläche eine Niveaufläche ist. Dem Schnittpunkt mit der Parabel $F = 15/7$ gehört $E_1 = 0$ zu; tatsächlich kann die äußere Niveaufläche eines MacLaurinschen Ellipsoides als Wiechert-Modell mit der Manteldichte Null gedeutet werden. Nun erkennt man, daß auch für die Zweischalenmodelle, obwohl sie keine Gleichgewichtsfiguren sind, in der Parabel $F = 15/7$ die untere Grenze festliegt; denn unterhalb wird E_1 negativ und erreicht im Niveauellipsoid den Wert $E_1 = -\infty$.

Hält man den Kernradius a_k fest, so beginnt die zugehörige Reihe der Zweischalenmodelle in der Parabel $F = 15/7$ mit einem Modell $E_1 = 0$. In der Kurve $J_2 = \text{const}$ aufwärtsgehend, gelangt man zu immer größeren Werten E_1, bis schließlich das maximale E_1 oberhalb der Geraden EN oder $\varkappa = 1{,}25\,x - 1$ erreicht wird. In diesem Grenzpunkt geht die Schar der konfokalen Kerne in eine Schar konzentrischer Kugeln über, wobei die untere Grenze mit dem natürlich bereits fiktiven Wiechertschen Grenzmodell $a_k = 0$ identisch ist.

Ohne auf die mathematische Formulierung der Gleichgewichtsbedingung und auf die etwas komplizierte Berechnung der Wiechert-Modelle einzugehen, seien drei dieser Figuren in der Kurve $J_2 = 108\,271 \cdot 10^{-8}$ ausgewiesen, nämlich die beiden Grenzmodelle $B(E_1 = 0)$ und $G(a_k = 0)$ sowie das Modell D mit dem empirischen Radius des Erdkernes, der in einer Tiefe von 2900 km angenommen wird.

	B	D	G	H
E_1	0	$4\,523{,}392 \cdot 10^{24}$	$4\,832{,}273 \cdot 10^{24}$	$2\,698{,}121 \cdot 10^{24}$ g
e	$335\,301{,}7 \cdot 10^{-8}$	$335\,260{,}9 \cdot 10^{-8}$	$335\,246{,}3 \cdot 10^{-8}$	$236\,876{,}6 \cdot 10^{-8}$
J_4	$-251{,}2 \cdot 10^{-8}$	$-316{,}1 \cdot 10^{-8}$	$-339{,}5 \cdot 10^{-8}$	$-105{,}7 \cdot 10^{-8}$
f_4	$-65{,}9 \cdot 10^{-8}$	$-350{,}6 \cdot 10^{-8}$	$-453{,}0 \cdot 10^{-8}$	$-548{,}8 \cdot 10^{-8}$
a_k	5 811,991 km	3 478,399 km	0 km	0 km
e_k	$326\,539{,}2 \cdot 10^{-8}$	$239\,634{,}6 \cdot 10^{-8}$		
ϱ_M	0,000	4,175	4,461	2,487 (III)
ϱ_K	7,291	12,436	∞	
$\Delta\varrho$	7,291	8,260	∞	
C	$80\,747{,}23 \cdot 10^{40}$	$80\,642{,}00 \cdot 10^{40}$	$78\,638{,}22 \cdot 10^{40}$	$43\,883{,}65 \cdot 10^{40}$ gcm^2

Bemerkt sei, daß diese Resultate ohne Benützung der Gleichungen (11) gewonnen wurden und letztere daher nur bis auf Größen 6.O. befriedigen. Trotz der Zunahme der Manteldichte nimmt das Trägheitsmoment C

$$C = \frac{2}{5} E_1 a^2 \left(1 + \frac{6}{35} f_4\right) + \frac{2}{5} E_2 a_k^2 \tag{12}$$

wegen der gleichzeitigen Abnahme des Kernradius in der Reihe langsam ab. Die gesamte Abnahme ist bloß 2,6%, so daß also C als Quasi-Stokessche Konstante bezeichnet werden darf. In der letzten Kolonne ist noch die Figur $H(a_k = 0)$ ausgewiesen, welche zu $J_2 = 42\,742 \cdot 10^{-8}$ gehört.

Mit dieser Figur ist eine etwas größere Sicherheit in der Bestimmung der Kurve $a_k = 0$ gewährleistet, welche die beiden Punkte E und N verbindet und ihre konkave Seite der Geraden EN zukehrt. Wir setzen für sie eine Parabel an, deren Koeffizienten mit Hilfe der drei Punkte E, H und N eindeutig gefunden werden:

$$\varkappa = -\,0{,}425\,130\,x^2 + 2{,}440\,365\,x - 1{,}680\,209\,. \tag{13}$$

Die Hauptschwierigkeit bei dieser Rechnung liegt darin, daß im allgemeinen der Koeffizient x der Entwicklung von $\bar{\varepsilon}$ nicht mit der nötigen Genauigkeit bestimmt werden kann. In Anbetracht dieses Umstandes paßt der Punkt G befriedigend in diese Kurve. Die Tangente der Parabel im Punkte E hat die Steigung $\alpha = 60°24'$. Die Parabel liegt in ihrem Anfangsstück oberhalb der Schranke $A = 0$, welche sie erst im Punkte ($x = 1{,}052$, $\varkappa = 0{,}416$) schneidet. Dies gilt aber auch noch für eine ganze Schar von weiteren Parabeln $a_k = \text{const}$, bis schließlich eine bestimmte Kurve $a_k = \min$ im Punkte E die Tangente EN ($\varkappa = 1{,}25x - 1$) mit der Steigung $d\varkappa/dx = 1{,}25$ oder $\alpha = 51°21'$ mit der Parabel $A = 0$ gemeinsam hat.

Näherungsweise wären demnach im $(x,\varkappa)$-Diagramm alle Kurven $a_k = \text{const}$ Parabeln, deren Achsen zur $\varkappa$-Achse parallel liegen. Sie beginnen stets im Punkte E und enden in einem Punkte der Parabel $F = 15/7$, der mit abnehmendem Kernradius zu immer größeren $\varkappa$-Werten fortschreitet, bis schließlich für $a_k = 0$ der Punkt N erreicht wird. In Wahrheit wird aber die Parabel $F = 15/7$ gar nicht erreicht und wir können die wirkliche Grenze allein durch $\varrho_M = \omega^2/2\pi k^2$ definieren. Auch die obere Grenze der Wiechert-Modelle kann keineswegs durch die Parabel $a_k = 0$ gegeben sein. Vielmehr hat die Hypothese, daß die physikalische Grenze mit der obigen Parabel $a_k = \min$ vorliegt, viel für sich. Denn auf jeden Fall muß ein Minimum des Kernradius vorliegen und der Anfang der reellen Kurven $a_k = \text{const}$ kann kaum außerhalb des physikalisch möglichen Bereiches liegen. Sollte sich diese Hypothese bestätigen lassen, so liegt auch der Gedanke nahe, diese Grenze der zweiparametrigen Gleichgewichtsfiguren mit der Kurve der einparametrigen Gleichgewichts-

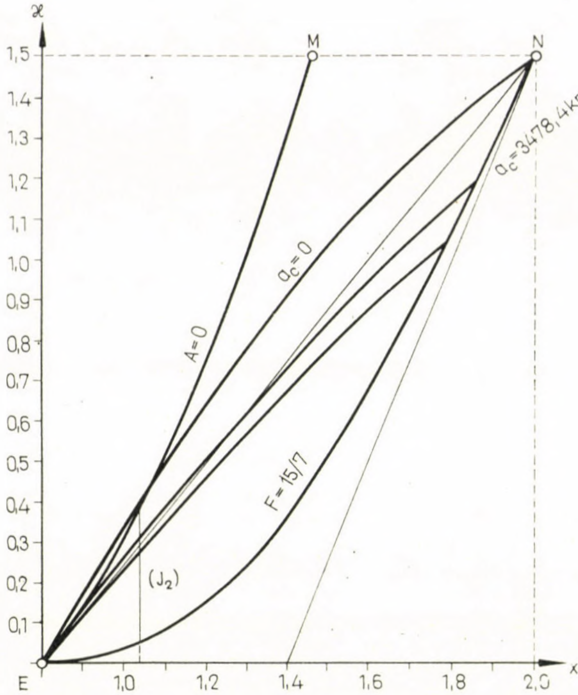


Abb. 1

figuren zu identifizieren. Denn die einparametrigen Gleichgewichtsfiguren müssen unbedingt unmittelbar an die MacLaurinschen Ellipsoide anschließen und dürften höchstwahrscheinlich in der Grenzkurve des Bereiches aller Gleichgewichtsfiguren liegen. Schließlich ist von ganz besonderem Interesse zu untersuchen, ob der Kernradius der Erde ein Minimum ist.

c) Die Kurve der Wiechert-Modelle a_k = min
Die hypothetische Lösung für die einparametrigen Gleichgewichtsfiguren

Die Kurve der Wiechert-Modelle mit dem Kernradius der Erde $a_k =$ $= 3478{,}399$ km beginnt wie jede dieser Kurven $a_k =$ const mit dem MacLaurinschen Ellipsoid (E, ω, a), wobei stets der Dichtesprung an der Kernoberläche verschwindet ($\Delta\varrho = 0$). Sie endet in der Parabel $F = 15/7$ in einer äußeren Niveaufläche des MacLaurinschen Ellipsoides (E, ω, a_k). Für dieses Ellipsoid gilt

$$\bar{\varepsilon} = 56\,143{,}8 \cdot 10^{-8}\,; \quad e_k = 10\,141{,}1 \cdot 10^{-8}\,; \quad J_{2,k} = 28\,046{,}6 \cdot 10^{-8}\,; \quad J_{4,k} = -16{,}9 \cdot 10^{-8} \tag{14}$$

und daher für das Wiechertsche Grenzmodell K

$$\begin{aligned} &J_2 = J_{2,k}(a_k : a)^2 = 8340{,}95 \cdot 10^{-8}\,; \qquad J_4 = J_{4,k}(a_k : a)^4 = -1{,}49 \cdot 10^{-8}\,; \\ &e = 185\,301{,}0 \cdot 10^{-8}\,; \qquad f_4 = -408{,}4 \cdot 10^{-8}\,; \qquad \varkappa = 1{,}1895,\, x \sim 1{,}8667\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Als dritten Punkt wählen wir die obige Figur $D(\varkappa = 0{,}3034,\ x \sim 1{,}0305)$, wobei unter Berücksichtigung von Gliedern 6.O. f_4 näherungsweise etwas gehoben wurde: $f_4 = -341{,}0 \cdot 10^{-8}$. Die oben erwähnte Schwierigkeit mit dem Koeffizienten x kann leicht dadurch behoben werden, daß man für die Parabel ansetzt:

$$f_4 = a\bar{\varepsilon}^2 + be\bar{\varepsilon} + ce^2. \tag{16}$$

So findet man für die Kurve $a_k = 3478{,}399$ km die Parabel

$$\varkappa = -0{,}243\,646\ x^2 + 1{,}767\,068\ x - 1{,}261\,453\,, \tag{17}$$

welche im Punkte E die Steigung 54°01′ hat. Auch diese Kurve liegt also in ihrem Anfangsstück noch oberhalb der Schranke $A = 0$; obwohl der Kernradius von 0 auf 3478,4 km angewachsen ist, hat die Steigung der Anfangstangente bloß um 6°23′ abgenommen und bis zur Kurve $a_k = \min$ ist eine weitere Abnahme um 2°40′ erforderlich. Man erkennt die hohe Empfindlichkeit des Kernradius, und daß die exakte Berechnung der Parabel $a_k = \min$ die Mitnahme der Glieder 6.O. erfordert.

In der vorliegenden Näherung 4.O. können wir also folgenden einfachen Weg einschlagen. Wir legen durch die beiden Punkte E und K jene Parabel, welche die gewünschte Steigung $d\varkappa/dx = 1{,}25$ besitzt:

$$f_4 = +\,0{,}125\,\bar{\varepsilon}^2 - 1{,}450\,e\,\bar{\varepsilon} + 1{,}080\,e^2\,. \tag{18}$$

Zusammen mit (3) liefert dies für den Schnittpunkt mit der Kurve $J_2 = 108\,271 \cdot 10^{-8}$:

$$e = 335\,265{,}4 \cdot 10^{-8}; \quad J_4 = -309{,}0 \cdot 10^{-8}; \quad f_4 = -319{,}1 \cdot 10^{-8}\,. \tag{19}$$

In diesem Punkte liegen gemäß (11) unendlich viele Zweischalenmodelle der Teilmasse $E_1 = 4416{,}862 \cdot 10^{24}$ g und darunter das Wiechert-Modell L:

$$a_k = 3757{,}870\ \text{km}; \qquad e_k = 257\,261{,}7 \cdot 10^{-8}. \tag{20}$$

Die zugehörige Reihe $a_k = 3757{,}87$ km endet in der Parabel $F = 15/7$ mit dem Modell Q

$$\begin{aligned} &e_k = 88\,429{,}5 \cdot 10^{-8}; \quad J_2 = 12\,272{,}3 \cdot 10^{-8}; \quad J_4 = -3{,}2 \cdot 10^{-8}; \\ &e = 191\,198{,}7 \cdot 10^{-8}; \quad f_4 = -389{,}3 \cdot 10^{-8} \end{aligned} \tag{21}$$

und man findet aus den drei Punkten E, L und Q schließlich die Parabel

$$\varkappa = -0{,}227\,776\,x^2 + 1{,}648\,702\,x - 1{,}173\,185, \tag{22}$$

deren Tangente in E die Steigung 1,284 26 besitzt. Mithin darf $a_k \sim 3800$ km näherungsweise mit dem gesuchten Minimum identifiziert werden und die Gleichung $a_k = \min$ kann analog (18) aus den beiden Punkten E und Q abgeleitet werden:

$$f_4 = +0{,}194\,\bar{\varepsilon}^2 - 1{,}560\,e\,\bar{\varepsilon} + 1{,}124\,e^2. \tag{23}$$

Identifiziert man nun hypothetisch die Kurve $a_k = \min$ mit der Kurve der einparametrigen Gleichgewichtsfiguren, so liefert die Gleichsetzung von (23) mit der letzten Gleichung (3) die Gleichgewichtsbedingung in der Form:

$$35\,J_4 = +1{,}552\,\bar{\varepsilon}^2 + 7{,}520\,e\,\bar{\varepsilon} - 19{,}008\,e^2. \tag{24}$$

Sie gilt ebenso für die Wiechert-Modelle $a_k = \min$, wobei der minimale Kernradius natürlich eine Funktion der Daten (E, ω, a) ist. Aber selbstverständlich gilt diese Übereinstimmung nur in Näherung 4.O. Ferner wird die Grenze für die Oberflächendichte $\varrho_{\min} > \omega^2/2\pi k^2$ für das stetige Dichtegesetz der einparametrigen Gleichgewichtsfiguren schon wesentlich früher, nahezu vertikal unter dem Punkte M($x = 1{,}4583$), erreicht als für die Wiechert-Modelle. Für die Rotationsgeschwindigkeit der Erde ist $\varrho_{\min} > 0{,}0127$.

Mit (24) kann das Helmert-System für die Parabel $a_k = \min$ oder hypothetisch für die einparametrigen Gleichgewichtsfiguren spezialisiert werden:

$$\begin{aligned}
&1.\ e + \beta = 2{,}5\,\bar{\varepsilon} - 0{,}3211\,e^2 - 3{,}2686\,e\,\bar{\varepsilon} + 3{,}6946\,\bar{\varepsilon}^2 \\
&2.\ \gamma_0 = \frac{k^2 E}{a^2}\,[1 + e - 1{,}5\,\bar{\varepsilon} + 0{,}3577\,e^2 + 0{,}4629\,e\,\bar{\varepsilon} - 0{,}1109\,\bar{\varepsilon}^2] \\
&3.\ 3\,J_2 = 2\,e - \bar{\varepsilon} - 1{,}3211\,e^2 + 1{,}7314\,e\,\bar{\varepsilon} - 0{,}0554\,\bar{\varepsilon}^2 \\
&4.\ W_0 = \frac{k^2 E}{a}\left[1 + \frac{1}{3}\,e + \frac{1}{3}\,\bar{\varepsilon} - 0{,}0165\,e^2 + 0{,}2080\,e\,\bar{\varepsilon} - 0{,}0259\,\bar{\varepsilon}^2\right] \\
&5.\ \beta_4 = -3{,}6683\,e^2 + 7{,}0994\,e\,\bar{\varepsilon} - 0{,}5986\,\bar{\varepsilon}^2 \\
&6.\ \bar{\varepsilon} = \frac{\omega^2 a^3}{k^2 E}; \\
&7.\ f_4 = +1{,}124\,e^2 - 1{,}560\,e\,\bar{\varepsilon} + 0{,}194\,\bar{\varepsilon}^2 \\
&8.\ \varrho_m = \frac{3\,E}{4\,\pi}\,\frac{1}{a^3\,(1 - e)}; \\
&9.\ J_4 = -0{,}5431\,e^2 + 0{,}2149\,a\,\bar{\varepsilon} + 0{,}0443\,\bar{\varepsilon}^2.
\end{aligned} \tag{25}$$

Daraus ergibt sich mit den Daten (E, ω, a, J_2) das »einparametrige Normalsphäroid«:

$$E = 5976{,}1 \cdot 10^{24}\,\text{g}; \quad a = 6378{,}399\,\text{km}; \quad e = 335\,266{,}0 \cdot 10^{-8} = 1{:}298{,}27;$$

$$f_4 = -\,314{,}7 \cdot 10^{-8}; \quad \omega^2 = 5{,}317\,496 \cdot 10^{-9}\,\text{sec}^{-2}; \quad \bar{\varepsilon} = 346\,177,3 \cdot 10^{-8}$$

$$J_2 = 108\,271 \cdot 10^{-8}; \quad J_4 = -\,308{,}0 \cdot 10^{-8}; \quad \varrho_m = 5{,}5164; \tag{26}$$

$$W_0 = 62\,635{,}16 \cdot 10^7\,\text{cm}^2\,\text{sec}^{-2}; \quad \gamma_0 = 977{,}9665\,\text{Gal}; \quad \beta = 530\,450{,}1 \cdot 10^{-8};$$

$$\beta_4 = +\,3399{,}0 \cdot 10^{-8}.$$

Reduziert man γ_0 mit dem Freiluftgradienten auf das Geoid ($\Delta\gamma_0 = +\,72{,}2$ mGal), so folgt die Formel für die theoretische Schwere:

$$\gamma = 978{,}0387\,(1 + 0{,}005\,3045 \sin^2\varphi - 0{,}000\,0085 \sin^2 2\,\varphi)\,\text{Gal}. \tag{27}$$

Im Hinblick auf die kleine Tabelle II erkennt man, daß k^2E tatsächlich etwas kleiner gewählt werden müßte. Denn die Äquatorschwere des internationalen Ellipsoides $\gamma_0 = 978{,}049$ Gal war an sich etwas zu groß, wozu noch die Korrektion des Potsdamer Schweresystems kommt, welche in Luzern mit — 14 mGal angenommen wurde. Formel (27) kann leicht auf das achsengleiche (oder besser volumgleiche) Ellipsoid übertragen werden, das wir als mittleres Erdellipsoid bezeichnen dürfen. Da dieses Ellipsoid das Normalsphäroid einschließt, finden wir mit dem Freiluftgradienten die Korrektion

$$\frac{a}{4} f_4 \sin^2 2\,\varphi \cdot 0{,}308\,554\,\text{mGal/m} = -\,1{,}55 \sin^2 2\,\varphi\,\text{mGal}, \tag{28}$$

also für die theoretische Schwere auf dem mittleren Erdellipsoid, das aber nicht mit einem Niveauellipsoid verwechselt werden darf,

$$\gamma = 978{,}0387\,(1 + 0{,}005\,3045 \sin^2\varphi - 0{,}000\,0101 \sin^2 2\,\varphi)\,\text{Gal}. \tag{28a}$$

Hierin darf γ_0 ohne Einfluß auf die Gestalt auf etwa 978,032 Gal reduziert werden, soferne es nicht als Bestimmungsstück verwendet wird.

d) Das mehrparametrige Normalsphäroid

Das Trägheitsmoment C des einparametrigen Normalsphäroides kann nicht mit der nötigen Sicherheit berechnet werden, solange wir nicht exakt das stetige Dichtegesetz und die Abplattungsfunktion kennen. Näherungsweise kann es bei fiktiver Identifizierung der einparametrigen Figurenreihen (ω, K_2) und (ω, C) dem Trägheitsmoment der Figur B in Tabelle III gleichgesetzt werden. Aber selbst das kleinere Trägheitsmoment $C = 80\,642{,}00 \cdot 10^{40}$ g cm² des zweiparametrigen Falles, d.h. des Wiechert-Modelles D in Tabelle III, ist noch zu groß. Denn rein empirisch findet man aus der statischen Abplattung $J_2 = (C - A): Ea^2 = 108\,271 \cdot 10^{-8}$ in Kombination mit der sogenannten dynamischen Abplattung oder mechanischen Elliptizität

$$H = (C - A) : C = 327\,300 \cdot 10^{-8}, \tag{29}$$

welchen Wert JEFFREYS aus der Präzessionskonstanten und dem Massenverhältnis Erde-Mond abgeleitet hat, leicht

$$C = 80\,428{,}02 \cdot 10^{40}\ \mathrm{g\ cm^2}. \tag{30}$$

Das zugehörige MacLaurinsche Ellipsoid (E, ω, C):

$$\begin{aligned} a_h &= 5800{,}4911\ \mathrm{km}; \quad \bar{\varepsilon}_h = 261\,684{,}1 \cdot 10^{-8}; \quad e_h = 324\,609{,}7 \cdot 10^{-8}; \\ J_{2,h} &= 129\,633{,}1 \cdot 10^{-8}; \quad (C - A) = 260{,}6534 \cdot 10^{40}\ \mathrm{g\ cm^2} \end{aligned} \tag{31}$$

ist gleichzeitig Kernellipsoid des Wiechertschen Grenzmodels $\varrho_M = 0$ der Reihe (ω, a, C) und Ausgangsellipsoid einer einparametrigen Figurenreihe (ω, C), in welchen beiden Reihen nun umgekehrt $(C - A)$ eine Quasi-Stokessche Konstante ist. Die Reihe der Wiechert-Modelle beginnt mit der äußeren Niveaufläche des soeben berechneten Ellipsoides:

$$\begin{aligned} (a_h : a)^2_C &= 0{,}827\,001\,25; \quad J_2 = J_{2,h}\,(a_h : a)^2_C = 107\,206{,}8 \cdot 10^{-8}; \\ J_4 &= -\,246{,}3 \cdot 10^{-8}; \quad e = 333\,703{,}2 \cdot 10^{-8}; \quad f_4 = -\,68 \cdot 10^{-8}, \end{aligned} \tag{32}$$

während für $a_k = 3478{,}399$ km das Modell

$$\begin{aligned} e &= 334\,228{,}0 \cdot 10^{-8} = 1 : 299{,}20; \quad e_k = 238\,022{,}2 \cdot 10^{-8}; \\ J_2 &= -\,107\,583{,}4 \cdot 10^{-8}; \quad J_4 = -\,313{,}2 \cdot 10^{-8}; \quad f_4 = -\,352{,}9 \cdot 10^{-8}; \\ \varrho_M &= 4{,}1581; \quad \varrho_K = 12{,}5248; \quad \Delta\varrho = 8{,}3777 \end{aligned} \tag{33}$$

resultiert. Schließlich findet man für das Grenzmodell $a_k = 0$:

$$\begin{aligned} e &= 342\,579{,}7 \cdot 10^{-8}; \quad J_2 = 113\,151{,}6 \cdot 10^{-8}; \quad J_4 = -\,358{,}4 \cdot 10^{-8}; \\ f_4 &= -\,425{,}3 \cdot 10^{-8}. \end{aligned} \tag{34}$$

Für die einander entsprechende Figuren der Reihen $J_2 = 108\,271 \cdot 10^{-8}$ und $C = 80\,428{,}02 \cdot 10^{40}$ g cm² ergeben sich folgende Differenzen im Sinne $(J_2) - (C)$:

$$\begin{array}{llll} F = 15/7 & : \Delta e = & +\,1598{,}5 \cdot 10^{-8}; & \Delta J_4 = -\ \ 4{,}9 \cdot 10^{-8} \\ \text{Kerntiefe 2900 km}: & & +\,1032{,}9 & \qquad -\ \ 2{,}9 \\ a_k = 0 & : & -\,7333{,}4 & \qquad +\,18{,}9 \end{array} \tag{35}$$

In der Kurve (C) nehmen mit wachsendem $\varkappa$ die Abplattungen zu und damit die x-Werte ab, während die Kurve (J_2) bei wesentlich geringerer Veränderlichkeit der Abplattung das umgekehrte Verhalten zeigt. Die beiden Kurven schneiden sich in einem Punkt. Es gibt also möglicherweise ein Wiechert-Modell, dem beide empirische Trägheitsmomente der Erde zugehören, wobei aber die Kerntiefe rund 500 km kleiner wäre als der empirische Wert.

Nach unseren bisherigen Ergebnissen liegen in der Kurve $J_2 = 108\,271 \cdot \cdot 10^{-8}$ das einparametrige Normalsphäroid (26) und das Wiechert-Modell D (Tab. III) äußerst knapp übereinander, so daß wir für das unbedingt dazwischen liegende mehrparametrige Normalsphäroid $(E, \omega, a, a_k, J_2, \Delta\varrho = 3{,}75)$ alle Daten bis auf Größen 6.O. angeben können; vor allem ist die Abplattung 1: 298,27. Lineare Interpolation mit dem empirischen Dichtesprung $\Delta\varrho = 3{,}75$ würde zur Lösung vollkommen ausreichen. Etwas schwieriger liegen die Verhältnisse in der Kurve $C = 80\,428{,}02 \cdot 10^{40}$ g cm^2, weil wir in ihr wohl das Wiechert-Modell (33), nicht aber die zugehörige einparametrige Lösung exakt kennen. Jedenfalls liegen aber auch diese beiden Figuren knapp übereinander und hat das mehrparametrige Normalsphäroid $(E, \omega, a, a_k, C, \Delta\varrho = 3{,}75)$ die Abplattung 1: 299,20.

Wir wählen ein sechsparametriges Modell, bei dem ein homogener Ozean $(\varrho = 1{,}028)$ der Tiefe 2601 m eine vierparametrige Festerde bedeckt, welche aus einem heterogenen Mantel und einem heterogenen Kern mit dem Radius $a_k = 3478{,}399$ km besteht. Nach Abhebung des Ozeans sind für die Festerde die Daten $(E', \omega, a', a_k, J_2')$ gegeben, so daß für die ∞^2 möglichen Lösungen noch $\bar{\varepsilon}'$ festliegt. Die gegebenen Daten reichen zur eindeutigen Berechnung eines einparametrigen Modells und eines Wiechert-Modells aus. Die Gesamtheit der Lösungen liegt im $(x, \varkappa)$-Diagramm in der Kurve $J_2' = \text{const}$ innerhalb eines ziemlich eng begrenzten Bereiches von $\varkappa$-Werten. Die Streuungen in e und J_4 sind äußerst klein, die im Formparameter f_4 etwa 4-bis 6-mal so groß. Auch die Spannung in C erreicht kaum $100 \cdot 10^{40}$ g cm^2, also bloß etwa 1,3%. Für die allgemeine Lösung dieses zweiteiligen Modelles der Festerde sind neben obigen Daten noch zwei Bestimmungsstücke erforderlich, z.B. die Teilmasse E_1 zum Aufbau einer einparametrigen «Mantelfigur» und die Oberflächendichte ϱ_0. Geht man in einem Koordinatensystem mit der Abszisse ϱ_0 und mit der Ordinate E_1 in einer Vertikalen $\varrho_0 = \text{const}$ zwischen dem Wiechert-Modell A und dem einparametrigen Modell D aufwärts, so erhält man als erste physikalisch mögliche Lösung eine Figur mit homogenem Kern, also eine die Punkte A und F verbindende Kurve von dreiparametrigen Lösungen mit homogenem Kern. Mit wachsendem E_1 wird der Kern heterogen und der Dichtesprung an der Kernoberfläche nimmt ab, bis schließlich mit $\Delta\varrho = 0$ eine zweite Grenzfigur erreicht ist, in welcher an der Kernoberfläche ein Wechsel des Dichtegesetzes mit stetigem Übergang eintritt. Diese Kurve $\Delta\varrho = 0$ beginnt im einparametrigen Modell im Punkte D und endet im Punkte B, der mit A durch die Kurve der dreiparametrigen Lösungen mit homogenem Mantel verbunden ist. Letztere Kurve ist sehr kurz, weil in ihr ähnlich wie in den Vertikalen die Abnahme des Dichtesprunges, der beim Wiechert-Modell mehr als acht Einheiten beträgt, sehr rasch erfolgt. Den Abschluß des Gültigkeitsbereiches der physikalisch möglichen Lösungen stellt die Horizontale FD mit $E_1 = E$ dar.

In der ganzen zweifach unendlichen Schar von hydrostatischen Lösungen finden wir kein brauchbares Normalsphäroid; stets ist das Trägheitsmoment C

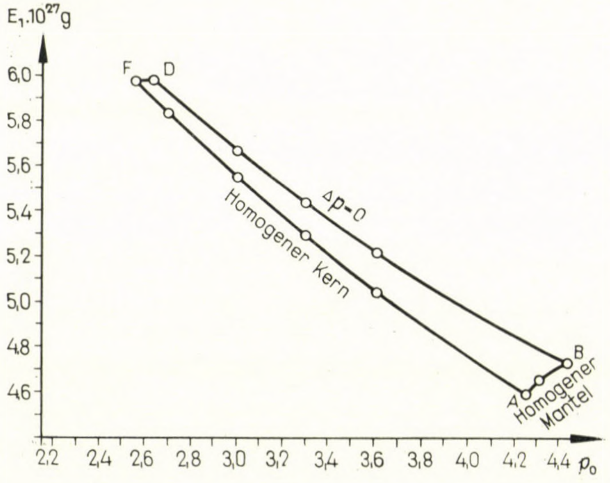


Abb. 2

zu groß, wenn auch die Abweichung kaum 0,3% übersteigt. Auch mit einem achtparametrigen Modell, bei dem zwischen den homogenen Ozean und die vierparametrige Festerde noch eine homogene Kruste der Dichte $\varrho_m/2 = 2{,}76$ oder vielleicht besser der Dichte 2,80 eingeschoben ist, verschwindet die Diskrepanz nicht. Genau so, wie in den Reihen der Wiechert-Modelle (E, ω, a, J_2) und (E, ω, a,C) mit wachsendem $\varkappa$ die Manteldichte zunimmt, tritt bei allen, von einem bestimmten dieser Wiechert-Modelle mit einem bestimmten Kernradius a_k ausgehenden drei- und vierparametrigen Figurenreihen Kernmasse in den Mantel über, und die geringe Veränderlichkeit oder Konstanz von C wird durch gleichzeitige Massenkonzentration in Mantel oder Kern oder in beiden bewirkt. Unabhängig vom jeweils konstant gehaltenem a_k enden alle diese Reihen im gleichen einparametrigen Modell (E, ω, a, J_2), resp. (E, ω, a, C). Im (x, $\varkappa$)-Diagramm müßten diese zwei Punkte mit zwei Wiechert-Modellen der Kernradien a_k' und a_k'' zusammenfallen. Wäre zumindest einer dieser beiden Radien kleiner als der oben definierte Minimalwert, so wäre dieser überhaupt in Frage gestellt. Würde umgekehrt die Kurve der einparametrigen Figuren unterhalb der Grenzparabel $a_k = \min$ der Wiechert-Modelle verlaufen, so gäbe es Wiechert-Modelle, für welche sich die zugehörigen Reihen von drei- und vierparametrigen Gleichgewichtsfiguren in den Kurven $J_2 =$ $= \text{const}$ oder $C = \text{const}$ nach abwärts erstrecken müßten, was unmöglich ist. Es folgt, daß die Kurve der einparametrigen Gleichgewichtsfiguren mit der Kurve der Wiechert-Modelle $a_k = \min$ zusammenfallen muß, und daß im Grenzfall eines Wiechert-Modelles $a_k = \min$ die ganze zugehörige zweifach unendliche Mannigfaltigkeit dieser Lösungen sich in denselben Punkt abbildet, das heißt, daß für alle Lösungen J_4 und f_4 in Näherung 4.O. konstant sind. Jeder Punkt des $(x, \varkappa)$-Diagramms repräsentiert innerhalb des Gültigkeitsbereiches der Wiechert-Modelle zahllose vierparametrige Gleichgewichtsfiguren, darunter auch zahllose dreiparametrige Modelle mit homogenem Kern oder homogenem Mantel und ein einziges Wiechert-Modell, welches durch minimalen Kernradius ausgezeichnet ist.

Diese Betrachtungen ermöglichen die Unterscheidung von drei einparametrigen Normalsphäroiden. Das durch (E, ω, a, J_2) definierte Modell (26) stimmt in e, J_4 und f_4 mit einem Wiechert-Modell $a_k = \min$ überein und hat daher bis auf Größen 6.O. auch dasselbe Trägheitsmoment. Für das Modell L, Gleichung (20), liefert (12): $C = 80\,685{,}73 \cdot 10^{40}$ g cm^2 und schließlich lineare Extrapolation unter Heranziehung der Figur D (Tabelle III) für das Modell (26): $C = 80\,692{,}92 \cdot 10^{40}$ g cm^2. Die Reihe der Wiechert-Modelle (E, ω, a, C) ist durch die Figuren (32)—(34) charakterisiert. Durch lineare Interpolation mit $a_{k,\min} \sim 3800$ km findet man $e = 334\,155{,}3 \cdot 10^{-8}$ und damit aus (25) die einparametrige Lösung:

$$J_2 = 107\,531{,}6 \cdot 10^{-8}; \quad J_4 = -\,304{,}7 \cdot 10^{-8}; \quad f_4 = -\,317{,}0 \cdot 10^{-8}, \tag{36}$$

womit bereits $(C - A)$ und H bestimmt sind. Schließlich kann noch eine dritte einparametrige Gleichgewichtsfigur (E, ω, a, H) mit der empirischen dynamischen Abplattung (29) definiert werden. Das MacLaurinsche Ellipsoid (E, ω, H):

$$\begin{gathered} e_h = 327\,837{,}4 \cdot 10^{-8}; \quad a_h = 5819{,}708\ \text{km}; \quad C_h = 80\,961{,}81 \cdot 10^{40}\ \text{g cm}^2; \\ J_{2,h} = 130\,920{,}0 \cdot 10^{-8}; \ (C - A)_h = 264{,}9880 \cdot 10^{40}\ \text{g cm}^2; \ J_4 = -\,367{,}3 \cdot 10^{-8} \end{gathered} \tag{37}$$

führt auf das Wiechert-Modell $\varrho_M = 0$:

$$\begin{gathered} (a_h : a)^2 = 0{,}832\,491\,18; \quad J_2 = 108\,989{,}7 \cdot 10^{-8}; \quad e = 336\,381{,}2 \cdot 10^{-8}; \\ J_4 = -\,254{,}5 \cdot 10^{-8}; \quad f_4 = -\,64{,}5 \cdot 10^{-8}, \end{gathered} \tag{37a}$$

während die Modelle $\varrho_M = 0$ mit den empirischen Werten C und J_2 durch

$C : e = 333\,703{,}2 \cdot 10^{-8}$; $J_2 = 107\,206{,}8 \cdot 10^{-8}$; $C = 80\,428{,}02 \cdot 10^{40}$ g cm^2;
$J_2 : e = 335\,301{,}7 \cdot 10^{-8}$; $J_2 = 108\,271{,}0 \cdot 10^{-8}$; $C = 80\,747{,}23 \cdot 10^{40}$ g cm^2

charakterisiert waren. Andererseits gilt in der Parabel $a_k = \min$ für die Wiechertschen Grenzmodelle:

$$C : e = 334\,155{,}3 \cdot 10^{-8};\ J_2 = 107\,531{,}6 \cdot 10^{-8};\ C = 80\,428{,}02 \cdot 10^{40}\ \mathrm{g\ cm}^2$$

$$J_2 : e = 335\,266{,}0 \cdot 10^{-8};\ J_2 = 108\,271{,}0 \cdot 10^{-8};\ C = 80\,692{,}92 \cdot 10^{40}\ \mathrm{g\ cm}^2.$$

Lineare Interpolation auf Grund von (37a) liefert zusammen mit dem Formelsystem (25) die einparametrige Figur (E, ω, a, H):

$$e = 336\,016{,}2 \cdot 10^{-8};\ J_2 = 108\,770{,}4 \cdot 10^{-8};\ J_4 = -310{,}2 \cdot 10^{-8}. \tag{38}$$

Bequemlichkeitshalber seien die Ergebnisse für die drei einparametrigen Normalsphäroide in Einheiten 10^{-8}, resp. 10^{40} vergleichend gegenübergestellt:

	J_2	J_4	$C—A$	C	H	e^{-1}	f_4
aus C:	107 531,6;	—304,7;	261,44;	80 428,02;	325 064,5;	299,26;	—317,0
aus J_2:	108 271,0	—308,0	263,24	80 692,92	326 225,5	298,27	—314,7
aus H:	108 770,4	—310,2	264,46	80 798,99	327 300,0	297,60	—313,0

Bis auf Größen 6.O. gelten diese Resultate auch für zahllose vier- und dreiparametrige Gleichgewichtsfiguren, unter denen sich auch je unendlich viele mit dem empirischen Dichtesprung 3,75 an der Kernoberfläche befinden. Aber all diese Modelle haben einen zu großen Kernradius und es ist kein einziges darunter, das beide Hauptträgheitsmomente und damit die dynamische und statische Abplattung mit dem wirklichen Erdkörper gemeinsam hat.

e) Gleichgewichtsfigur und Normalsphäroid

Wir wenden uns von der statischen einer dynamischen Betrachtung zu. Auf der einen Seite bewirkte vormals die allmähliche Abkühlung der Erde eine Kontraktion und damit eine Abnahme des Trägheitsmomentes C, welche wegen der Konstanz des Drehimpulses $\omega\, C$ im geschlossenen Massensystem mit einer Zunahme der Winkelgeschwindigkeit verbunden ist. Andererseits resultiert aus der Gezeitenreibung eine Verlangsamung der Rotation, welche begreiflicherweise nur mit recht mäßiger Genauigkeit aus der Diskussion alter Mondfinsternisse abgeleitet werden kann. Man schätzt derzeit, daß der Sterntag in den letzten 120 000 Jahren um eine Sekunde abgenommen hat. Auf Grund dieser Vorstellung kann man unter gleichzeitiger Annahme des Gleichgewichtes die Hypothese zugrundelegen, daß die Erde vor Jahrmillionen gleichsam im Gleichgewicht hinreichend erstarrt ist. Der Kontraktionsprozeß war damit abgeschlossen und seither hat sich die Rotationsgeschwindigkeit bloß wegen Gezeitenreibung, die überdies wegen der wachsenden Distanz Erde—Mond immer geringer wird, vermindert. Die Flächen gleicher Dichte konnten sich dieser verminderten Rotationsgeschwindigkeit nicht mehr anpassen, d.h. ihre Abplattung ist größer als es im Gleichgewicht der Fall wäre. Abgesehen von der Wasserhülle müßte demnach der Erdkörper eine Gleichgewichtsanordnung repräsentieren, welche für eine entsprechend größere Rotationsgeschwindigkeit eine Gleichgewichtsfigur wäre. Auf diese Weise gelangen wir zu einer klaren Unterscheidung zwischen der Gleichgewichtsfigur der Erde und dem heutigen Normalsphäroid. Der feste Erdkörper hat in beiden Modellen dieselbe Massenanordnung, während das Weltmeer auch heute noch der Verlangsamung der Rotation folgt und seine Oberfläche demnach eine geringere Abplattung hat als die idealisierte Lithosphäre.

Das nahe Zusammenfallen der drei einparametrigen Gleichgewichtsfiguren im vorhergehenden Abschnitt zeigt unmittelbar, daß der Sterntag seit der »Erstarrung« der Erde nur um wenige Zeitminuten zugenommen haben kann. Um dieses Zeitintervall und damit die Rotationsgeschwindigkeit der Gleichgewichtsfigur der Erde zu finden, fragen wir nach der Rotationsgeschwindigkeit des Wiechert-Modelles (E, a, a_k, J_2, C), welches mit der Erde beide Trägheitsmomente C und $(A + B)/2$ gemeinsam hat und denselben Kernradius 3478,399 km besitzt. Die Lösung erfolgt in sukzessiver Approximation. Zunächst kann mit den empirischen Daten a_k und $C = 80\,428{,}02 \cdot 10^{40}$ g cm^2 Gleichung (12) geschrieben werden:

$$128\,763{,}665 \cdot 10^{40} = E_1 \left[a^2 \left(1 + \frac{6}{35} f_4 \right) - a_k^2 \right]. \tag{39}$$

Zusammen mit (11) und der zweiten und vierten Gleichung (3) liegen dann 5 Gleichungen vor, welche für ein geeignet gewähltes ω oder $\bar{\varepsilon}$ eindeutig die fünf Unbekannten e, e_k, J_4, f_4 und E_1 eines Zweischalenmodelles liefern. Diesen Vorgang wiederholt man mit einer zweiten Wahl von $\bar{\varepsilon}$ und bestimmt beidemale den Widerspruch der Gleichgewichtsbedingung. Auf diese Weise erhält man durch lineare Interpolation in ausreichender Näherung das gesuchte Wiechert-Modell:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= 348\,397{,}4 \cdot 10^{-8}; \; e = 336\,367{,}3 \cdot 10^{-8}; \; e_k = 239\,554{,}0 \cdot 10^{-8} \\ J_4 &= -315{,}9 \cdot 10^{-8}; \; f_4 = -351{,}8 \cdot 10^{-8}; \; E_1 = 4504{,}6375 \cdot 10^{24} \text{ g.} \end{aligned} \tag{40}$$

Es folgt $\omega'^2 = 5{,}351\,599 \cdot 10^{-9}$ sec^{-2} oder $T = 2\,\pi/\omega' = 85\,889{,}11^s$, d. h. eine Verkürzung des Sterntages um $274{,}98^s \sim 4^m\,35^s$. Dürfte man die derzeitige Zunahme des Sterntages nach rückwärts extrapolieren, so käme man auf einen Zeitraum von bloß 33 Millionen Jahren.

Von besonderem Interesse ist die Frage, ob durch diese Änderung von ω

eine Annäherung des Wiechert-Modelles (40) an die Parabel $a_k = \min$ erfogt ist. Im Falle der wirklichen Rotationsgeschwindigkeit der Erde lag zwischen dem Wiechert-Modell (E, ω, a, a_k, J_2), Figur D in Tabelle III, und dem Modell (26) bei $e = 335\,263 \cdot 10^{-8}$ die Differenz $\Delta f_4 = 35{,}9 \cdot 10^{-8}$, d. h. $\Delta \varkappa = 0{,}0319$ vor, wobei noch zu beachten ist, daß dieses Modell ein zu großes C hat. Für die Figur (E, ω, a, J_2, C), die mittels (35) näherungsweise interpoliert werden kann und für welche a_k bei rund 3000 km liegt, wächst $\Delta \varkappa$ auf etwa 0,0432 an. Mit dem neuen $\bar{\varepsilon} = 348\,397{,}4 \cdot 10^{-8}$ liefert (25) die Abplattung $e = 336\,371{,}7 \cdot \cdot 10^{-8}$ und $f_4 = -320{,}9 \cdot 10^{-8}$, also gegenüber dem Modell (40), mit welchem die drei einparametrigen Lösungen zusammenfallen müßten, eine Differenz $\Delta f_4 = 30{,}9 \cdot 10^{-8}$ oder $\Delta \varkappa = 0{,}0273$, d. h. die Diskrepanz ist um rund 37% gesunken.

Bei weiterer Zunahme der Rotationsgeschwindigkeit rückt das Wiechert-Modell (E, ω, a, J_2, C) in der Kurve $J_2 = 108\,271 \cdot 10^{-8}$, die sich übrigens wegen der Änderung von $\bar{\varepsilon}$, e und x selbst geringfügig verschiebt, nach abwärts, wobei sich E_1 ständig vermindert, gleichzeitig aber der Kernradius im Hinblick auf (12) rasch wächst. Schon für $\omega^2 = 5{,}360\,014 \cdot 10^{-9}$ sec^{-2} (Tagesverkürzung $342{,}4^s$) liegt das Modell in der hypothetischen Parabel (23) und der Kernradius ist $a_k = 3803{,}8$ km. Da überdies in dieser Parabel der Kernradius mit wachsendem ω nur sehr langsam zunimmt, also für den in Frage kommenden ω-Bereich stets nahe bei 3800 km liegt, scheint unser Resultat die obige Hypothese zu widerlegen. Demgegenüber ist aber zu bemerken:

a) Die obige Diskrepanz $\Delta f_4 = 30{,}9 \cdot 10^{-8}$, die einer Änderung der Abplattung von bloß $4{,}4 \cdot 10^{-8}$ entspricht, ist eine kleine Größe 6. O. Mithin hat eine genauere Rechnung in Anbetracht der geringen Änderungen in J_4 und f_4 wenig Sinn, solange die nötigen Formeln nicht einschließlich der Glieder 6. O. entwickelt sind.

b) Auch ist die Diskrepanz in den empirischen Daten J_2, C und a_k in Erwägung zu ziehen. Die Berechnung von C aus der statischen und dynamischen Abplattung erfordert ja eine exakte Trennung der beiden Faktoren in der empirischen Größe k^2E. Wegen der verhältnismäßig großen Unsicherheit der Gravitationskonstanten kann aber die Erdmasse nur mit mäßiger Genauigkeit bestimmt werden.

c) Schließlich ist auch der Ansatz einer Parabel für die Kurven der Wiechert-Modelle $a_k = \mathrm{const}$ noch problematisch.

Somit erfordern alle drei Bestandteile unserer Hypothese: die Existenz einer Kurve $a_k = \min$, welche im Punkte E (MacLaurinsche Ellipsoide) eine Tangente mit der Steigung 1,25 besitzt, das Zusammenfallen dieser Kurve mit der Kurve der einparametrigen Gleichgewichtsfiguren und die Annahme, daß der Kernradius der Erde ein Minimum ist, noch eine eingehende Untersuchung.

Bei dem geschilderten Sachverhalt dürfte es derzeit am besten sein, die mehrparametrige Gleichgewichtsfigur der Erde durch die Daten (E, ω, a, J_2)

zu definieren und mittels des Formelsystems (25) ebenso wie früher die einparametrige Figur (26) zu berechnen, wobei jetzt aber die Rotationsgeschwindigkeit des Wiechert-Modelles (40) verwendet wird, welche mit Hilfe des empirischen Kernradius gewonnen wurde:

$$E = 5976{,}1 \cdot 10^{24}\ \mathrm{g};\ a = 6378{,}399\ \mathrm{km};\ \omega'^2 = 5{,}351\,599 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{sec}^{-2};$$
$$\bar{\varepsilon} = 348\,397{,}4 \cdot 10^{-8};\ J_2 = 108\,271 \cdot 10^{-8};\ e = 336\,371{,}7 \cdot 10^{-8} = 1 : 297{,}29;$$
$$J_4 = -308{,}9 \cdot 10^{-8};\ f_4 = -320{,}9 \cdot 10^{-8};\ \gamma_0 = 977{,}9448\ \mathrm{Gal}; \tag{41}$$
$$\beta = 534\,912{,}1 \cdot 10^{-8};\ \beta_4 = +3442{,}7 \cdot 10^{-8};\ W_0 = 62635{,}86 \cdot 10^7\ \mathrm{cm^2\,sec^{-2}};$$
$$\varrho_m = 5{,}5164.$$

Vergleich mit (26) läßt die aus der größeren Rotationsgeschwindigkeit folgende Zunahme der Abplattung und Abnahme der Äquatorschwere erkennen, während die Änderung der Massefunktion J_4 noch nicht $1 \cdot 10^{-8}$ erreicht.

Erteilt man der Gleichgewichtsfigur die heutige, kleinere Rotationsgeschwindigkeit, so resultiert das Normalsphäroid der Erde als Gleichgewichtsanordnung, soweit es die »Festerde« betrifft. Lediglich die Wasserhülle konnte stets der Verminderung der Fliehkraft folgen, so daß für die Oberfläche des Weltmeeres die heutige, kleinere Abplattung vorliegt, während dem Ozeanboden oder der idealisierten Lithosphäre die Abplattung von näherungsweise $e = 336\,300 \cdot 10^{-8}$ zukommt. Die Änderung des Ozeananteiles an der Massefunktion J_4 ist aber unerheblich, da der Anteil der Wasserhülle an J_4 in der Gleichgewichtsfigur überhaupt nur $0{,}2 \cdot 10^{-8}$ beträgt. Somit können wir das Normalsphäroid mittels des Helmert-Systems auf Grund der Daten (E, ω, a, J_2, J_4) berechnen:

$$E = 5976{,}1 \cdot 10^{24}\ \mathrm{g};\ a = 6378{,}399\ \mathrm{km};\ \omega^2 = 5{,}317\,496 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{sec}^{-2};$$
$$\bar{\varepsilon} = 346\,177{,}3 \cdot 10^{-8};\ J_2 = 108\,271 \cdot 10^{-8};\ J_4 = -308{,}9 \cdot 10^{-8};$$
$$e = 335\,265{,}5 \cdot 10^{-8} = 1 : 298{,}27;\ f_4 = -318{,}8 \cdot 10^{-8};\ \gamma_0 = 977{,}9666\ \mathrm{Gal};$$
$$\beta = 530\,451{,}8 \cdot 10^{-8};\ \beta_4 = +3295{,}8 \cdot 10^{-8};$$
$$W_0 = 62\,635{,}16 \cdot 10^7\ \mathrm{cm^2\,sec^{-2}};\ \varrho_m = 5{,}5164.$$

Selbstverständlich ist diese Figur fast identisch mit der früheren Lösung (26).

Obige Gleichgewichtsfigur (41) darf nicht als ein früheres Stadium der Entwicklungsgeschichte der Erde aufgefaßt werden. Denn einmal ist das Wechselspiel von Kontraktion und Flutreibung in der fast vier Milliarden Jahre umfassenden Entwicklungsgeschichte der Erde nicht genau bekannt. Sicher müssen beide Effekte früher größer gewesen sein, die Kontraktion, weil sich der Prozeß der Abkühlung und Zusammenziehung naturgemäß immer mehr verringern mußte, die Gezeitenreibung aber wegen der größeren Mondnähe. Vor allem aber muß das Gleichgewicht schon lange vor dem Abschluß der Kontraktion allmählich verloren gegangen sein, weil die Flächen gleicher Dichte im Zuge der langsamen Verfestigung des Erdkörpers immer weniger der geänderten Fliehkraft folgen konnten. Nur wenn wir die Erde als völlig starr betrachten dürften, würden die berechneten 275^s (oder 342^s) den ganzen Gezeiteneffekt darstellen. Wäre umgekehrt die Erde eine ideale Flüssigkeit, so würde sie auch heute noch trotz der Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit im hydrostatischen Gleichgewicht sein, und der Effekt der Gezeitenreibung würde bloß in einer kaum nachweisbaren Verringerung der Abplattung, verbunden mit einer kleinen Änderung des Trägheitsmomentes C, bestehen. Aber da die Erde plastisch ist, müßte der totale Gezeiteneffekt von möglicherweise $74\,000^s$ in vier Milliarden Jahren mit einem kleinen Bruch multipliziert werden, der die Nachgiebigkeit der Erde gegenüber der Verminderung der Zentrifugalkraft zum Ausdruck bringt. Das Wechselspiel von Kontraktion und Flutreibung kann unabhängig vom Entwicklungszeitraum studiert werden, wenn man hypothetisch von einem MacLaurinschen Ellipsoid ausgeht.

Liegt schließlich auch J_4 empirisch vor, wie es grundsätzlich aus der Analyse der Bahnstörungen der künstlichen Satelliten möglich ist, so kann man aus (E, ω, a, J_2, J_4) direkt ein Helmertsches Niveausphäroid vierten Ranges berechnen und hätte so das Normalsphäroid gänzlich unabhängig vom Gleichgewicht gefunden. Nur wäre es ohne ähnliche Betrachtungen wie oben nicht möglich, unter den zahllosen zugehörigen Massenanordnungen jene als wesentlich herauszuheben, welche dem inneren Aufbau der Erde am nächsten kommt. Wäre zwischen dem empirischen Wert von J_4 und dem Gleichgewichtswert (41) nur ein geringfügiger Unterschied, so würde wieder die Figur (42) resultieren. Auffallenderweise hat sich aber bisher der Satellitenwert von $|J_4|$ um rund 47% kleiner ergeben als der Gleichgewichtswert, womit ein neues, schwieriges Problem vorliegt.

NEW INVESTIGATIONS CONCERNING THE THEORY OF THE NORMAL SPHEROID

K. LEDERSTEGER

SUMMARY

Principally, there are four possibilities for defining the normal spheroid of the Earth:

1. An equilibrium figure with the empirical data (E, ω, a, a_k, C), which thus has in common with the real earth the mass E, the rotational velocity ω, the axis a of the geoid or better that of the ellipsoid of equal volume, the equatorial axis of the core (the surface of the core being in a depth of 2900 km), the principal moment of inertia about the rotational axis C, and finally the density discontinuity $\Delta\varrho = 3{,}75$ at the surface of the core. Hence, the principle of conservation of the angular momentum ωC is taken notice of, wherefore J. O'Keefe simply calls this solution *the* equilibrium figure of the Earth. This figure, however, has too small a difference (C—A) of both the moments of inertia and therefore also too small a flattening (1 : 299,2), which is the reason why this figure is unsuitable at least for geodetic purposes.

2. If we, contrarily, maintain the static flattening J_2 or the difference of the moments of inertia, i.e. if we proceed from the empirical data (E, ω, a, a_k, J_2), then the correct flattening (1 : 298,25) results, but too great a C. There exists no equlibrium figure at all which, besides (E, a, a_k), has in common with the Earth the rotational velocity *and* both moments of inertia J and A, i.e. C *and* J_2.

3. Considering the fact that presently the sidereal day decreases by 1 second in about 120 000 years, one may conceive an equilibrium figure with somewhat greater rotational velocity. One assumes that the Earth many millions of years ago has solidified in equlibrium, and thus one had to study the interaction of contraction and tidal friction in the course of terrestrial history. But one also can imagine a decrease of the gravitational constant and an expansion of the Earth body connected with it, which hypothesis is especially defended by L. EGYED. In any case, for the Wiechert-model (homogeneous mantle and homogeneous core) with the data (E, a, a_k, J_2, C) one finds a rotational velocity corresponding to a sidereal day being shorter by 275 sec. The transition from this Wiechert-model to multi-parametric equilibrium figures requires additional assumptions which at present still are of hypothetical nature.

If one prescribes this equilibrium figure the present rotational velocity, then an equilibrium configuration results as far as the solid Earth is concerned, whereas the water cover is able to yield to the decreased centrifugal force. With the data (E, ω, a, J_2, J_4), the mass-function J_4 being taken from the equilibrium figure of the Earth, the multi-parametric normal spheroid results from Helmert's system. This figure has the correct, geodetically useful flattening and, in addition, a moment of inertia C which can deviate from the true value only by a six-order quantity at best.

4. If, finally, J_4 is given empirically, as it is possible in principle by the analysis of the orbital perturbations of artificial satellites, then one may directly compute a Helmert equipotential spheroid of fourth order from the data (E, ω, a, J_2, J_4), and may designate it as normal spheroid. However, up to now the satellite-value of $|J_4|$ strikingly has resulted smaller by about 47% than the equilibrium-value. There are three possibilities for the analysis of this strange discrepancy: the study of the undulations in various heights, the investigation of the form-parameters which are rigorously connected with the mass-functions, and the analysis of the anomalous potential on basis of the expansion of the heights and depths of the earth. All three possibilities justify a sceptical attitude towards the satellite results.

НОВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ НОРМАЛЬНОГО СФЕРОИДА

К. ЛЕДЕРШТЕГЕР

РЕЗЮМЕ

Принципиально существуют 3 возможности для определения нормального сфероида Земли:

1. Фигура равновесия с эмпирическими данными (E, ω, a, a_κ, c), которая имеет одинаковые с истинной землей массу E, угловую скорость ω, ось a геоида или скорее эллипсоида такой же массы, экваториальный радиус ядра (поверхность ядра находится на глубине 2900 км), инерционный момент C на главную ось и, наконец, разрывность плотности $\Delta\varrho = 3{,}75$, находящаяся на границе ядра. Таким образом учтено постоянство углового момента ωC, так что это решение Дж. О'Киф называет просто фигурой равновесия Земли. Но эта фигура имеет слишком малую разность $(C-A)$ между двумя инерционными моментами: поэтому её сжатие (1:299,2) тоже очень мало. Такая фигура не подходит, по крайней мере, к геодезическим целям.

2. Если же оставим статическое сжатие J_2 или разность инерционных моментов, то есть исходим из эмпирических данных (E, ω, a, a_κ, J_2), то получим правильное сжатие (1:298,25), но слишком большое C. Вообще, нет фигуры равновесия, имеющей кроме (E, a, a_κ) общую с землей скорость вращения *и* оба инерционных момента J и A, то есть C и J_2.

3. Учитывая тот факт, что сидерический (звёздный) год укорачивается на одну секунду через 120 000 лет, можем взять фигуры равновесия с несколько большей скоростью вращения. Предположим, что земля много миллионов лет назад затвердела в равновесии, поэтому в ходе истории земли мы должны рассмотреть взаимодействие усадки земли и приливно-отливного трения. Можно представить и уменьшение гравитационной постоянной и расширение тела земли так, как это защищает в особенности Л. ЕДЬЕД. В

любом случае при модели Вихерта (однородние оболочка и ядра) с помощью данных (E, a, a_K, J_2, C) получаем скорость вращения, которая на 275 сек. короче звёздного дня. Переход с модели Вихерта к фигуре равновесия со многими параметрами требует добавочных предположений, которые пока гипотетического характера.

Если этой фигуре равновесия задавать настоящую скорость вращения, то получаем фигуру равновесия относительно твёрдой земли, а водной поверхностью дается уменьшенная центробежная сила. При функции масс J_4 с данными (E, ω, a, J_2, J_4) надо исходить из фигуры равновесия земли, при этом из системы Гельмерта получаем нормальный сфероид со многими параметрами. Такая фигура имеет правильное, применяемое в геодезии сжатие, кроме того, такой момент инерции C, который отличается от истинного на величину шестого порядка.

4. Если, наконец J_4 задана эмпирически, как это возможно на основании анализа возмущений орбит искусственных спутников земли, тогда по данным (E, ω, a, J_2, J_4) непосредственно можно вычислить Гелмертов сфероид равновесия четвёртого порядка и его можем называть нормальным сфероидом. Значение же (J_4) по космическим наблюдениям получилось примерно на 47% меньшим, чем значение равновесия. Имеются три возможности для исключения этого странного протировечия: исследование колебания на разных высотах; исследование параметров фигуры, строго связанных с функциями масс и анализ аномального потенциала на основании разложения в ряд высот и глубин земли. Все три возможности могут создавать сомнения в связи с результатами космических наблюдений.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (1—2), pp. 235—237 (1969)

RECENSIONES

J. Zambó: OPTIMUM LOCATION OF MINING FACILITIES

Akadémiai Kiadó, Budapest. 144 pages and 70 figures. Translated by *B. Balkay*, 1968

The English-reading professional public receives this work in the interpretation of B. Balkay, in a presentation of noble elegance, suitable for its content. This work is essentially a concentrate — but at the same time also a continuously developped generalization — of everything that has been offered by the author — through his activity surpassing a decade already — in the field of the elaboration of the scientific basis of mining for research, planning, education, and, of course, for the practical plant and business management.

Even a mining plant in itself, but all the more the individual plant systems are a multitude of underground and surface working sites located in space in a way influenced by numerous factors. Among these, a large quantity of material must be kept moving along a variety of paths — spatial trajectories. By material, not only the product, the useful or waste mineral, but also air, water, electrical energy, etc. are meant. Moreover, fluids and gases can be transported in pipeline-systems, electrical current in cable networks, and so on. These operations grew well beyond the framework of mining, since also the transportation systems of an area (or even a country) consist of material handling of defined quantity between defined points. By the work of Prof. Zambó, consequently, scientifically established theoretical bases, treatable with up-to-date computing techniques, are presented for the process of decision-preparation of all such technical-economical problems, the main point of which is an arbitrary mass-handling in space. The material handling may take place along freely chosen paths or along ones limited by compelling conditions. It is decisive, however, that a solution, optimal under the circumstances given, should be possible to find, or to approximate. An optimum is an optimum from the point of view of both technique and economy, that is: a good efficiency and a minimum of expenditures. In a given case, of course, it is good to know also the consequences raised by a solution differring from the optimum, during the operation period of the system to be established. Naturally the method can be applied in this regard, too.

In the first chapter of the book, the law of minimum sum of weighted distances can be found as the basic principle ensuring the optimum conditions of the location of a plant, i.e. in the case of the application of which the total effort of material handling, and the total costs involved, are a minimum.

The general spatial problems always include the simpler plane cases, too.

The theoretical relationships are made better intelligible or brought into "life-nearness" by the demonstration of their application to some practical examples. Such are: the optimum location of a system of underground passages, or e.g. the marking of such a point of junction in a certain mine roadway, which is situated from the point of view of transportation from different sites in such a way that the total transportation work, consequently also the cost is minimum. But also a central wash-house can be mentioned, which should lie along a given railway line (that is, bound to a forced trajectory), moreover in such a point where the sum of the weighted distances (weighted by the quantity of material), under the consideration of material quantities transported from the different mining plants, must be minimum. The problem can be still more complicated by the practical requirement that the material flow is possible not only between the individual points (plants) and the point of junction (wash-house), but also departing from the point of junction or even between the individual points themselves.

From all these investigations, the knowledge of the cost function is indispensable, since — simplifying the problem — the minimalization of this can lead to the optimum solution.

This is why the author discusses the cost function in the second chapter of the book also separately. Essentially, this relationship creates a certain — generally correlative — connection between the characteristic indexes of the plant (e.g. production capacity, plant size, main parameters of mass material handling, etc.) and the specific production cost of a weight unit of mineral produced. Within this specific cost, the specific amortisation costs — on account of their special importance — are usually treated separately. Recently, for the amortisation, the interest form is applied.

For the establishment of cost functions, the basis of departure is furnished by the data of existing plants. From the set of points representing coherent data, characteristic regression curves (straight line, in space, eventually, surfaces) can be derived with a suitable adjustment, i.e. linear and non-linear formations, by the equations of which the data required are usually furnished with a satisfactory closeness, resp. with an acceptable standard error within given interpretation limits. In a limited measure, even a certain extrapolation may be possible. These functions, of course, may contain one or several independent variables.

Also this chapter gives practical suggestions for the determination of the cost function.

The third chapter discusses questions of recovery of mining investments, the most frequently applied modifications of amortisation, and — accordingly — the time of recovery.

Next to basic data and basic relationships, necessary for the analysis in the fourth, fifth, sixth and seventh chapters the author turns to the optimum establishment site of mine shafts, choice of the optimal production capacity of the mine shaft plant and to the optimal size of the field. For the case of level working, he discusses questions of optimal level division and establishment of cross drives.

All these data, characteristic for the plant, the so-called optimum parameters are analyzed and determined with the aid of cost functions. On account of frequently hidden functional relations, of course, also approximations with iteration are needed. Since, however, the cost functions show only slight changes in the neighbourhood of optimum values, a moderate number of repetition of the calculations furnishes the data required, already with a satisfactory accuracy. Computer calculations present no difficulties even in case of a larger mass of calculations. The author gives, however, also graphical solutions. By these, a rapid solution even of relationships appearing frequently as complicated, is similarly promoted.

In these chapters, the cases of the two basic types of mining, namely panel working and level working, are found. The optimal parameters can be determined for both basic types.

By the activity of Prof. Zambó in the field of decision-preparing analytical investigations of mining establishments a particular scientific school has been opened and developped. Here it is decisive that researchers, planners and practical technical experts have obtained — apart from the objective methods of these investigations — a novel view, too. They have learnt to examine the phenomena of mining, influenced by numerous technical, economical and natural factors, limited to the elements, which are the most important and decisive from the point of view of results. This is what gives the finest scientific value to this book, too.

F. Martos

E. Gotthardt: EINFÜHRUNG IN DIE AUSGLEICHUNGSRECHNUNG

Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe 1968. VIII/273 S. Gr. 8° mit 7 Tafeln und 87 Abb. geb. DM 49,50.

Es ist die deutsche geodätische Fachliteratur zu beneiden, daß sie in relativ kurzer Zeit fünf verschiedene wertvolle Bücher über die Ausgleichungsrechnung herausbrachte, in zeitlicher Reihenfolge: das Großmansche, das Näbauersche, das Reißmansche, das Wolfsche und jetzt das Gotthardtsche Buch. Der Schreiber dieser Zeilen ist davon überzeugt, daß alle diese Bücher ihre Berechtigung haben, eine wesentliche Bereicherung der Fachliteratur bedeuten und man aus allen viel neues und wesentliches lernen kann.

Im folgenden wollen wir die Eigenheiten des Gotthardtschen Buches hervorheben

Bekanntlich hat auch die Ausgleichsrechnung in den letzten Jahrzehnten einen bedeutenden Fortschritt gemacht. Dieser umfaßt teils die Lösung einer Reihe von neuen Problemen, wie die der streckenmessenden Triangulation, der dreidimensionalen Geodäsie, oder der Satellitengeodäsie, teils muß er die elektronischen Berechnungsmethoden und die Automatik berücksichtigen. Er erstreckt sich aber auch auf methodische Fragen, wie auf die Verwendung der Matrizenrechnung und der mathematischen Statistik in der Ausgleichsrechnung. Um die Klaffungen zwischen traditionellen und neueren Darstellungen zu vermindern, werden u.a. eine Reihe von Paralleldarstellungen mit der Matrizenschreibweise gegeben. Die Fehlerlehre und mathematische Statistik sind fast zum Schluß der Ausgleichsrechnung, in dem vorletzten Kapitel behandelt worden. Dies bedeutet mithin, daß sie die Erörterungen über die Ausgleichungen selbst nur wenig beeinflussen. In einem eigenen Paragraphen wird darauf hingewiesen, daß dem Konfidenzintervall in der Ausgleichsrechnung der mittlere Fehler des mittleren Fehlers entspricht. Das Buch ist bündig, klar und leicht verständlich: es eignet sich sehr gut zum Lehrbuch der Ausgleichsrechnung.

Wir halten das Buch auch sonst für mehr als eine Einführung in die Ausgleichsrechnung: sie gibt auch Anregungen zu weiteren Untersuchungen. Von diesem Gesichtspunkt wäre die etwas ausführlichere Behandlung der fingierten Verbesserungen und der systematischen Fehler sicherlich von Nutzen. Erstere würde u.a. eine einfache Bestimmung der ausgleichenden Geraden auch bei verschieden genauen Beobachtungen ermöglichen, während letztere auch für die rechnerische Erfassung der systematischen Fehler Anhaltspunkte geben könnte, auf die auf S. 7 nur hingewiesen wurde. Das Buch stellt aber auch so eine wertvolle Bereicherung der Fachliteratur dar.

A. Tárczy-Hornoch

Heinrich Faust: DER AUFBAU DER ERDATMOSPHÄRE

Verlag Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 307 Seiten und 160 Abbildungen (Serie »Die Wissenschaft«, Bd. 127) Dm 56.—

Der vorliegende Band gibt einen Überblick über die Atmosphäre, allerdings mit dem Schwerpunkt auf der Meteorologie, also der Physik der unteren Atmosphäre. Den einleitenden Kapiteln über die Entstehung, Zusammensetzung und Stockwerkeinteilung der Atmosphäre sowie den meteorologischen Grundtatsachen folgen die den einzelnen Stockwerken gewidmeten Kapitel. Sie umfassen die Troposphäre (63 Seiten), Stratosphäre (38 Seiten), Mesosphäre (29 Seiten), Ionosphäre (48 Seiten) und Exosphäre (10 Seiten) sowie die Homosphäre als Ganzes (36 Seiten). Im allgemeinen werden die Erkenntnisse hervorgehoben, die auf einen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Schichten hinweisen. Zu dieser Gruppe der Erscheinungen gehören unter anderen die 26-monatige Periode oder der Einfluß der Sonnenaktivität auf die Atmosphäre. Eigentlich eben diese Zusammenhänge ermöglichen oder sogar erfordern eine Behandlung und Untersuchung der Atmosphäre als Ganzes. Der Verfasser betont immer wieder in seinem Buch, daß die einzelnen Schichten der Atmosphäre nicht als selbständige Medien aufzufassen sind, und dazu bringt er das sehr klare Bild einer Verkleinerung der Erde zu einer Kugel mit einem Durchmesser von 6 m, wobei niemand annehmen würde, daß die dann auf Zentimeterdicke verkleinerten Schichten der Atmosphäre voneinander unabhängig wären.

Mit der Untersuchung der oberen Stockwerke der Atmosphäre wurde erst vor etwa 70 Jahren begonnen. Seitdem hat sich eine stürmische Entwicklung, besonders in den letzten Jahrzehnten, vollzogen. Es war sicher sehr schwierig, das in den verschiedenen Zeitschriften zerstreute neue Material zusammenzubringen, mehrmals mußte der Verfasser sogar auf persönliche Mitteilungen und Erinnerungen zurückgreifen, und die Flut neuer Erkenntnisse führte manchmal zu gewissen Überdeckungen und nicht leicht übersehbaren Erörterungen. Dennoch ist es dem Verfasser gelungen, ein einheitliches Bild über die Atmosphäre unseres Planeten zu geben. Wenn etwas noch zu wünschen übrigbleibt, ist dies eine eingehendere Besprechung der Erscheinungen der oberen und obersten Atmosphäre, wie z. B. leuchtende Nachtwolken und Polarlicht oder die vermutete Einwirkung erdmagnetischer Störungen auf das Wettergeschehen. Auch ohne diese lohnt es sich für den, der ein Interesse für die Vorgänge in der Atmosphäre besitzt, das Buch zu lesen.

J. Verő

INDEX

Recensiones

EUROPEAN ASSOCIATION OF EXPLORATION GEOPHYSICISTS

Te E.A.E.G. was founded in December, 1951

The aims of the Association are to promote the science of exploration geophysics by establishing contacts and encouraging co-operation and fellowship between geophysicists in Europe and elsewhere and by disseminating knowledge of the science through the agency of regular meetings and the publication of technical papers.

MEMBERSHIP

Active Members pay an annual membership fee of Neth. fls. 20.
Prospective Members. Anybody interested in geophysics can apply for membership by sending in an Application Form. Forms will gladly be supplied by the Secretary-Treasurer of the E.A.E.G. All applicants must be sponsored by two members of the Association, with the exception of members of the Society of Exploration Geophysicists who require no sponsors.

GEOPHYSICAL PROSPECTING

Official Journal of the European Association of Exploration Geophysicists

This journal is issued quarterly and contains articles written in English, French or German. English, however, is predominant and each article is preceded by an abstract in that language.
Active members receive the journal free of charge.
The Subscription Rate for non-members is Neth. fls. 30. per annum. Single copies are available at Neth. fls. 8. These rates include packing and postage and are payable in advance. Previous issues are available.

Advertising rates will be sent upon request.

All communications to be directed to:

THE SECRETARY-TREASURER E.A.E.G.
30, CAREL VAN BYLANDTLAAN • THE HAGUE • NETHERLANDS

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1969. I. 8. — Terjdedelem: 21.25 (A/5) ív, 96 ábra, 3 melléklet

69.66875 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica ist eine Halbjahresschrift der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. Sie veröffentlicht Originalbeiträge aus dem Bereiche der Geodäsie, Geophysik und Bergbau, in deutscher, englischer, französischer oder russischer Sprache.

Redaktion: Budapest V., Münnich Ferenc utca 7.

Jahresabonnementspreis: Ft 165. Bestellbar durch Kultura Außenhandelsunternehmen für Bücher und Zeitungen (Budapest 62, P. O. B. 149) oder bei den Vertretungen im Ausland.

Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica est une revue biannuelle de l'Académie Hongroise des Sciences publiant des essais originaux, en français, anglais, allemand ou russe, du domaine de la géodésie, géophysique et des sciences minières.

Rédaction: Budapest V., Münnich Ferenc utca 7.

Le prix de l'abonnement: 165,— forints par an. On s'abonne chez Kultura, Société pour le Commerce de Livres et Journaux (Budapest 62, P. O. B. 149) ou chez ses représentants à l'étranger.

Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica выходят два раза в год в издании Академии наук Венгрии. В журнале публикуются оригинальные исследования по проблемам геодезии, геофизики и горного дела на русском, английском, немецком и французском языках.

Адрес редакции: Budapest V., Münnich Ferenc u 7.

Подписная цена на год 165 форинтов. Заказать журнал через Внешнеторговое предприятие «Kultura» (Budapest 62, P.O.B. 149) или через его заграничные представительства.

Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable at the following addresses:

ALBANIA
Ndermarja Shtetnore e Botimeve
Tirana

AUSTRALIA
A. Keessing
Box 4886, GPO
Sydney

AUSTRIA
Globus Buchvertrieb
Salzgries 16
Wien I

BELGIUM
Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
5, Place St. Jean
Bruxelles

BULGARIA
Raznoiznos
1. Tzar Assen
Sofia

CANADA
Pannonia Books
2. Spadina Road
Toronto 4, Ont.

CHINA
Waiwen Shudian
Peking
P. O. B. 88

CZECHOSLOVAKIA
Artia
Ve Smečkách 30
Praha 2
Poštová Novinová Služba
Vinohradská 46
Dovoz tisku
Praha 2
Mad'arská Kultura
Václavské nám. 2
Praha I
Poštová Novinová Služba
Dovoz tlace
Leningradská 14
Bratislava

DENMARK
Ejnar Munksgaard
Nörregade 6
Copenhagen

FINLAND
Akateeminen Kirjkauppa
Keskuskatu 2
Helsinki

FRANCE
Office International de Documentation et Librairie
48, rue Gay Lussac
Paris 5

GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC
Deutscher Buch-Export und Import
Leninstraße 16
Leipzig 701
Zeitungsvertriebsamt
Fruchtstrasse 3—4
1004 Berlin

GERMAN FEDERAL REPUBLIC
Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart S.

GREAT BRITAIN
Collet's Holdings Ltd.
Dennington Estate
London Rd.
Wellingborough. Northants.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
Waynflete Bldg. The Plain
Oxford

HOLLAND
Swetz and Zeitlinger
Keizersgracht 471—487
Amsterdam C
Martinus Nijhof
Lange Voorhout 9
The Hague

INDIA
Current Technical Literature
Co. Private Ltd.
India House OPP
GPO Post Box 1374
Bombay I.

ITALY
Santo Vanasia
Via M. Macchi 71
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmora 45
Fireze

JAPAN
Nauka Ltd.
92, Ikebukur O-Higashi 1-chome
Toshima-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 605
Tokyo-Central
Far Eastern Booksellers
Kanda P. O. Box 72
Tokyo

KOREA
Chulpanmul
Phenjan

NORWAY
Johan Grundt Tanum
Karl Johansgatan 43
Oslo

POLAND
RUCH
ul. Wronia 23
Warszawa

ROUMANIA
Cartimex
Str. Aristide Briand 14—18.
București

SOVIET UNION
Mezhdunarodnaya Kniga
Moscow G—200

SWEDEN
Almquist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
Stockholm

USA
Stechert Hafner Inc.
31, East 10th Street
New York, N. Y. 10003
Walter J. Johnson
111 Fifth Avenue
New York, N. Y. 10003

VIETNAM
Xunhasaba
19, Tran Quoc Toan
Hanoi

YUGOSLAVIA
Forum
Vojvode Mišića broj 1
Novi Sad
Jugoslovenska Knjiga
Terazije 27
Beograd

30. V. 1969 Index: 26.008

Acta

GEODAETICA, GEOPHYSICA *et* MONTANISTICA

ACADEMIAE SCIENTIARUM
HUNGARICAE

ADIUVANTIBUS
L. EGYED
J. ZAMBÓ
REDIGIT
A. TÁRCZY-HORNOCH

TOMUS 4
FASCICULI 3—4
1969

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

ACTA GEODAETICA, GEOPHYSICA
et MONTANISTICA

Academiae Scientiarum Hungaricae

A Magyar Tudományos Akadémia Föld- és Bányászati Tudományok Osztályának folyóirata

Szerkesztőség: Budapest V., Münnich Ferenc utca 7.
Kiadja az Akadémiai Kiadó, Budapest V., Alkotmány utca 21.

Az *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica* eredeti tanulmányokat közöl a föld- és bányászati tudományok tárgyköréből, angol, német, francia vagy orosz nyelven. Félévenként jelenik meg, évi egy, kb. 400—500 oldalas kötetet alkotva.

Előfizetési ára kötetenként belföldre 120,— Ft, külföldre 165,— Ft. Megrendelhető az Akadémiai Kiadónál (Bp. V., Alkotmány utca 21.), a külföld részére pedig a Kultúra Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Bp. I., Fő utca 32.).

Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica is a semiannual review of the Hungarian Academy of Sciences, publishing papers — in English, German, French or Russian — on Geodesy, Geophysics and Mining.

Editorial Office: Budapest V., Münnich Ferenc utca 7.

The subscription rate is Ft 165 per year. Orders may be placed with Kultura Trading Co. for Books and Newspapers (Budapest 62, P.O.B. 149) or with its representatives abroad, listed on p. 4 of the cover.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (3—4), pp. 239—256 (1969)

THE THEORETICAL PRINCIPLES OF HEAVY-MEDIA HOIST AND SOME PROPOSALS OF CONSTRUCTION

G. TARJÁN

CORRESPONDENT MEMBER OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

[Manuscript received: 17 June, 1966]

When employing, as a hydraulic hoist medium, instead of water (or any solution of a lesser specific gravity than, on the average, that of the material to be drawn) a heavy-medium of a specific gravity exceeding the average specific gravity of solid matter, the hydrostatic pressure in the chute will exceed that in the delivery track connected thereto at the bottom, and the cyclic liquid flow will be created "by itself", that is, without the application of an extra pump. The process is analogous to that of the air lift: the water of the latter is replaced here by the heavy-medium, and the air bubbles are substituted with the delivered product proper. Heavy-media hoist can be combined with the separation of the product by specific gravity (heavy-medium), when the refuse of a higher specific gravity will be retained in the mine, and only the lower specific gravity valuable material (e.g. pure coal + middlings) is delivered. The paper describes the theoretical lay-out, the feasible construction alternatives, output and energetic efficiency of the process.

At present, mining products are brought to daylight generally by cables through vertical shafts, in cage hoist cars or skip road buckets. Recently, in certain places, a hydraulic hoist has been introduced. Here the mixture of water and solid particles is brought to the surface by a pump through a pipe where afterwards the solids are separated. The circulating water is returned to the mine via the chute and, since its bottom is connected to that of the delivery pipe, the pump must overcome only the friction resistance and the hydrostatic pressure difference between the two conduits in order to bring about a liquid flow in the pipes. Feeding the product into the highpressure water flow at the bottom of the delivery pipe can be made by various means.

As an example, Fig. 1 illustrates the solution employed in the French colliery near St. Etienne [1]. Valves (1) and (2) open and closed alternative. Prior to their opening, pressure compensation at the two sides is by a cock (3) which connects the tank located between the valves with the chute before valve (2) opens, and with the tank above before the opening of valve (1). Unlike the hydraulic delivery in horizontal pipes, the friction resistance of vertical pipes is not affected by the quantity or grain size of the coarse particles in the liquid. The pipe friction pressure loss of the mixture of liquid (water, solution, or heavy-medium) and coarse solid particles will remain identical to that of the liquid proper [1, 3].

In the Gnilushinskaya No. 1 shaft of the Don basin [2], a calcium chloride solution of 1,35 specific gravity is used as a hydraulic hoist medium instead of water, with the refuse heavier than 1,8 to 1,9 specific gravity removed from the coal to be delivered, by using a $CaCl_2$ solution of this specific gravity, within the mine. In the 1,35 specific gravity medium the pure coal of similar specific gravity is just floating, which offers several advantages: the pipeline will not become clogged during longer or shorter downtimes either; instead

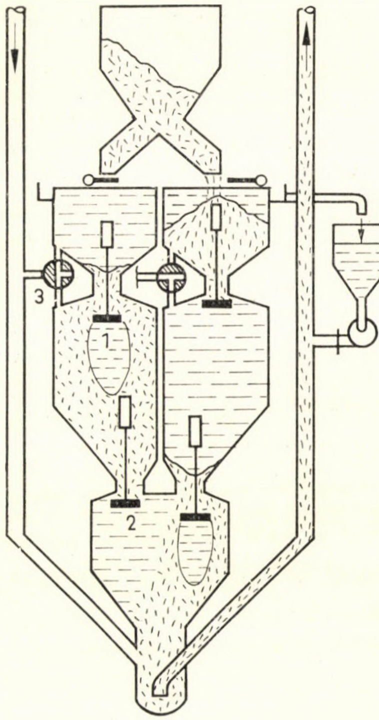


Fig. 1

of the 1 : 5 to 1 : 7 sludge density (solids to liquid ratio) to be employed with water, a sludge density of 1 : 2 may be selected, that is, a given quantity of solids can be delivered within a smaller sludge quantity; flow velocity may be reduced from 2,5 to 3,35 m/sec, required in case of water as a minimum, to 0,5—0,7 m/sec whereby wear and friction resistance will similarly decrease; the hydrostatic pressure difference of the two intercommunicating pipes is reduced and, as a result, a pump of lesser output and energy requirement is needed for operation. (In Gnilushinskaya, at a shaft depth of $H = 130$ m, with a 1300 m underground level delivery and $T = 60$ t/h coal, a pump of $Q = 100$ m^3/h output and 9 atm pressure is used against, for example, the pump of a $Q = 360$ m^3/h output and 36 atm pressure, working with water in the Vermaysk No. 15 shaft at a depth of $H = 120$ m and 1200 m underground + 3000 m daylight pipe length, to deliver $T = 60$ t/h coal hydraulically).

On the surface, the $CaCl_2$ solution of 1,35 specific gravity is separated from the two products (washed coal and middlings) suspended and submerged therein, the products caught in the sieves are flushed off with water, and the water diluted by $CaCl_2$ solution is then concentrated by steam heating to the desired 1,35 specific gravity.

Instead of using a true solution of a specific gravity identical to the limit value required for the separation of pure coal from middlings (in Gnilushinskaya: 1,35), it is still more advantageous to apply a heavy suspension, as a medium, of a specific gravity exceeding that of the product to be delivered. Regeneration of the diluted true solutions (such as concentration by heat in Gnilushinskaya) is much more expensive than that of the heavy media (this is why heavy suspensions have replaced true heavy solutions in the field of, for example, mineral preparation). On the other hand, when using a heavy suspension of a specific gravity exceeding that of the solids, as a medium, the hydrostatic pressure of the chute will exceed that of the delivery pipe connected thereto at the bottom. In the chute, equilibrium will be maintained by a pure heavy suspension column of a height lower than that of the solids + heavy suspension mixture column in the delivery pipe, and if the former exceeds that corresponding to the hydrostatic equilibrium, the circulating liquid flow will be created "by itself", that is, without the employment of another pump.

This process is identical to that observed in air lifts, with the exception that water is here replaced by the heavy suspension, and the air bubbles by the product thus delivered.

In case of a σ solids volume fraction, δ average solid matter specific gravity, and γ heavy suspension specific gravity, the equilibrium with the mixture of solids + heavy suspension in the delivery pipe of L length is maintained by a pure heavy suspension of a

$$\Delta L = L\sigma \frac{\gamma - \delta}{\gamma}$$

value lower sludge level, in the chute connected to the former at the bottom. Introducing the expression $a = \delta/\gamma$ will lead to the relation

$$\Delta L = L\sigma (1 - a) .$$

If, in the chute, the heavy suspension level is ΔH m lower than at the upper outlet of the delivery pipe, the flow will be created by the pressure of a $H = \Delta L - \Delta H$ m heavy suspension column (or of an $H' = \gamma H$ m water column). A shaft of L m depth has an approximately $2L$ m long full pipe length associated; if diameter D is identical for both delivery pipe and chute, equation

$$H = \lambda \frac{v^2}{2g} \frac{2L}{D}$$

will apply wherefrom the v flow velocity is readily calculated. As a mean value for water in iron pipes: $\lambda \cong 0{,}015/\sqrt[3]{D}$, which leads to the formula $v \cong 25 D^{2/3} \sqrt{H/L}$ where D, H, L are expressed in m, and v in m/s. The sludge quantity delivered:

$$Q = \frac{3600\,\pi}{4} D^2 v \text{ m}^3/\text{h},$$

while the quantity of the product delivered: $T = Q\sigma\delta$ t/h.

The pipe friction resistance is much higher for heavy media than for pure water, that is, the $i' = H'/2L = H\,\gamma/2L$ m water column/m hydraulic gradient is higher than the i gradient in m water column/m of pure water. The ratio of the two is:

$$\alpha = \frac{i'}{i} = 1 + \frac{\Sigma}{382} \sqrt{\frac{2gD}{v^2} \frac{D}{x}} \Delta^2 = 1 + \frac{\Sigma \sqrt{g}\, D^{3/2} \Delta^2}{270\, x\, v}$$

where Σ is the volume fraction of the Δ specific gravity and x (average) grain size solid particles of the heavy suspension, D is the pipe diameter, and v is the flow velocity of the suspension in the pipe. The v flow velocity pertaining to given $H, L, D, x, \Sigma, \Delta\,(\gamma)$ values can be calculated with the above formula and, thereby, the Q m^3/h and T t/h values may be obtained.

The dimensionless $(i'-i)/i\Sigma$ value is inversely proportionate to the square root of the v^2/gD Froude number. The numerical relation is represented [3] by a straight line plotted at a 45° angle across points

$$\frac{i'-i}{i\Sigma} = 1 \quad \text{and} \quad \sqrt{\frac{gD}{v^2} \frac{D}{x}} \left(\frac{\Delta}{1}\right)^2 = 270\,,$$

of a log-log scale, for optional x and Δ values.

The quantities actually delivered are, however, somewhat greater than those calculated with the $T = Q\sigma\delta$ formula since, in the heavy suspension of γ specific gravity, the solid particles of $\delta(<\gamma)$ specific gravity are displaced upwards with a v_0 relative rate of ascent, that is, they move ahead of the medium just as the air bubbles do in the air lift pipe. If they do not impede each other's movement, and $d \ll D$, the relative ascent velocity of the parts of a d size and δ specific gravity will be

$$v_0 \cong 30 \sqrt{\frac{d(\gamma-\delta)}{\gamma}} = 30 \sqrt{d(1-a)} \text{ cm/s,}$$

where d is expressed in cm.

Here v_0 will increase with the reduction of the $a = \delta/\gamma$ value. For example, if $a = 0,8$, $v_0 \cong 13,5 \sqrt{d}$, whereas if $a = 0,9$ then $v_0 = 9,5 \sqrt{d}$. With σ increased, the free movement of the solids is gradually decreased: $v' = \psi v_0$, where $\psi < 1$. For example, if the average grain size is $d = 5$ cm, and $a = 0,8$, $v_0 = 30$ cm/s $= 0,3$ m/s. If $\sigma = 0,1$, then ψ may be around 0,8 and $v' \cong 0,24$ m/s, while the quantity of solids ascending in the heavy suspension stagnating ($Q = 0$) in the $D = 0,4$ m dia pipe may be approximately

$$T' = \frac{3600\,\pi}{4} D^2 v_0' \sigma\delta = 900\pi \cdot 0,16 \cdot 0,24 \cdot 0,1 \cdot 1,6 \cong 17,5 \text{ t/h}.$$

If $\sigma = 0,2$ and, there, $\psi = 0,6$ is assumed, v_0' will equal 0,18 m/s, that is, the t/h value of T pertaining to $\sigma = 0,2$ will increase with $T' \cong 26$ t/h. Thus the product of a specific gravity lower than the heavy suspension will ascend "by itself", i.e. without the production of a circulating liquid flow, to the surface of the suspension, even in a delivery pipe filled with stagnating heavy suspension. This is particularly important when restarting work after a downtime: feeding the product into the delivery pipe will start the liquid flow without any external energy transmission (pump).

If more product is fed into the delivery pipe, that is, if σ is increased, ΔL will similarly increase and, if ΔH is constant, H will also increase whereby the sludge flow velocity (v), and the quantity of the sludge (Q) and solids (T) will increase automatically. This is why the heavy-media hoist equipment cannot be overloaded, i.e. choked by feeding an excessive quantity of solids, as compared to the hydraulic delivery process using water.

If the cast-off barren is of a specific gravity higher than that of the useful product (as in coal), it is reasonable to remove it in advance from the material to be delivered and, consequently, to deliver only the valuable part, with the barren left behind in the mine, to be used as backfill (like, for example, in Gnilushinskaya). In-mine separation of the refuse may be, in theory, by any specific gravity enrichment process, although it is best to select a low height equipment (for example low depth vats or ducts for heavy media, etc.). However, the feeding tank of the heavy suspension hoist can be used by itself, as the separation tank of enrichment, where the refuse of a specific gravity higher than that of the heavy suspension will be retained, and prevented from entering the delivery pipe.

If heavy-media hoist and the heavy suspension enrichment of the raw product are thus combined, the fine grain fraction (as under 6 to 10 mm) of the product should be removed in advance from the heavy suspension hoist material, as in case of static heavy suspension enrichment. The lower grain size limit of the product to be fed depends, above all, on the viscosity of the heavy suspension. The requirement of low viscosity can only be met by means of a high specific gravity suspension solid (such as magnetite or barite in case of coal), and its regeneration during operation.

If delivery to the surface need not be combined with heavy suspension enrichment in the feeding tank, then the heavy-media hoist process may be extended to involve the entire raw material quantity (including fine dust), and may take place in a cheap, low specific gravity dense, high viscosity suspension, produced by making use of the higher specific gravity fraction of the product proper (such as sand, clay, etc. in case of coal). The heavy suspension may actually be a viscous sludge here, in which the highest specific gravity pieces cannot move practically, either, or if so, sinking at a minimum speed only. If the heavy suspension of the delivery pipe has a velocity exceeding this downward movement, the heavy coarse pieces can be displaced upwards therewith (just as in the case of common water-medium hoist).

The pipe filled with a suspension flowing upwards is of the nature of a hydraulic classifier: at a certain rate, pieces of a specific gravity exceeding that of the suspension, but smaller than a predetermined size, will move upwards while the larger ones downwards in the suspension again flowing upwards. At low relative velocities (low Reynolds number values), the movement of larger pieces will follow the laws of viscous flow (Stokes law):

$$V_0 = \frac{d^2(\delta - \gamma)}{18\,\mu}$$

where V_0 is the relative movement (submersion velocity) of the solid in the medium, d is the grain size of the solid, δ is its specific gravity, γ is the specific gravity of the medium, and μ is the viscosity of the latter. In case of given γ and μ medium characteristics, any d and δ solid characteristics may have the associated V_0 medium flow rate calculated whereas the solid will float in the pipe; at a slightly higher medium flow velocity the solid will be transported upwards. This means that a suspension of a specific gravity lower than that of the solids is capable of delivering the product (or its parts of lesser grain size and specific gravity than the given values) at a relatively low medium flow rate, if the viscosity of the medium is high. Thus, a high-viscosity heavy suspension of viscous sludge character will deliver the high specific gravity parts ($\delta > \gamma$) of the products to the surface "by itself" (without a circulating pump), if the specific gravity of the heavy medium exceeds the *average* specific gravity of the product to be delivered.

The product to be delivered moves from the separation or feeding tank located at the bottom of the delivery pipe via a locking mechanism (such as a valve) to the delivery pipe proper in an intermittent way; the chute is preferably connected to the bottom of this tank, similarly through a locking device, for example a cock. The stepwise discharge of the tank, then its fillup

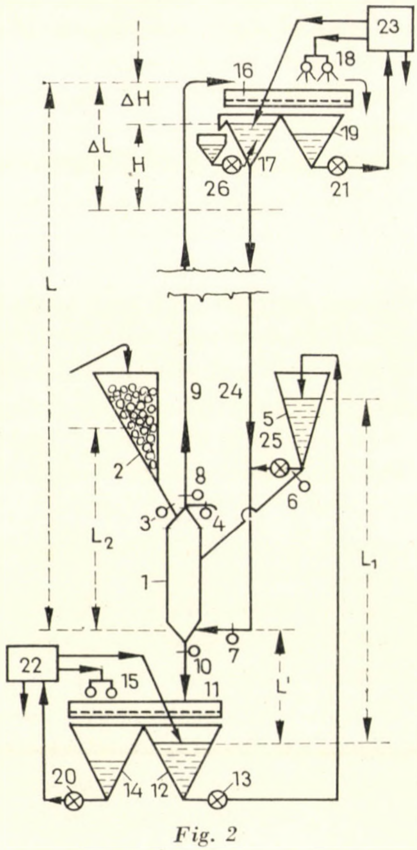


Fig. 2

with product and heavy medium is again through certain locking devices, with the two mentioned above in a closed position. To promote more uniform material delivery and higher output, there may be two or more tanks connected in parallel to the delivery pipe instead of only one; their automatically controlled operational phases follow one another with suitable displacement.

The following paragraphs describe the essential features of heavy-media hoist, and some of the feasible constructions, as illustrated by schematic diagrams.

Fig. 2 presents the schematic layout of heavy-media hoist combined with heavy suspension enrichment.

A predetermined volume of product free from fines moves into the empty tank (1) from the funnel (2) via a shut-off valve (3). Locking device (4) connecting the inside of the tank with the ambient atmosphere is opened with the others, is however, closed. After the closing of valve (3), heavy suspension flows from tank (5) through the open locking mechanism (6) to tank (1) wherefrom the air can pass through locking mechanism (4). Now (4) and (6) close, and (7) opens, whereby the hydrostatic pressure on (8) from above is compensated, and the latter is easily opened. Products of specific gravity lower than that of the heavy suspension enter the delivery pipe (9) through the open valve (8), and ascend to the surface, while parts of a specific gravity higher than that of the heavy medium accumulate at the bottom of tank (1). Finally, with (7) and (8) closed, (10) and (4) open, this removes the heavy medium as well as the high specific gravity solids from tank (1) whereafter the operational cycle can start all over again. (If (4) is closed before the complete fillup of tank (1) with sludge, some air may be retained in the tank, and enter the delivery pipe opening of (8), then efficiently reduce the specific gravity of the heavy medium + solids + air mixture therein, leading to an increase of L,H,v,Q and T.)

The heavy suspension and high specific gravity solids leaving the tank through (10) are separated at sieve (11): the former flows to tank (12) and, therefrom, to tank (5) by means of sludge pump (13), while the heavy suspension particles adhering to the high specific gravity parts left on sieve (11) are flushed off by water spray (15) above tank (14).

The product delivered to the surface by pipe (9) arrives at sieve (16) where a greater part of the heavy medium discharged therewith is removed. The latter flows to reservoir (17) while the heavy suspension grains adhering to the product parts are washed away by water spray (18) into tank (19).

The dilute suspensions of tanks (14) and (19) are transferred by pumps (20) and (21) to regenerators (22) and (23). Here the heavy medium is freed from sludge and the product particles having passed through sieves (11) and (16), by any suitable preparatory process known from heavy suspension enrichment practices (such as magnetic separation, flotation, specific gravity enrichment for example panning or table separation, hydrocyclone or other hydraulic classifier application, etc.), then returned to tanks 17 and 12 (or 5), respectively.

The heavy suspension volume moving from tank (5), to the opening of (6), to tank (1) is less with the volume of the "floating" part of product quantity transferred from tank (2) to (1), than the heavy suspension volume leaving tank (1), on the opening of (10), and returning to tank (5) via tank (12) and sludge pump (13). The heavy suspension quantity corresponding to this difference (or to the potential leakage in the closed position of valves (3) and (10), respectively) is delivered by sludge pump (25) from tank (5) to chute

(24) or to the surface. The overflow of tank (17) and sludge pump (26) provide for a constant heavy medium level, that is, independent of the product quantity in delivery pipe (9), in tank (17) attached to the top end of chute (24).

(Treatment of the material fed before it arrives at tank (2), and that of the product as well as heavy medium leaving tank (1) and delivery pipe (9), respectively, which is feasible in several ways, do not strictly pertain to the heavy-media hoist principle. Parts of Fig. 2 and the attached explanation of this, therefore, represent nothing but a possible example.)

Valves (7) and (8) are open during the main working phase, that is, while the low specific gravity product is removed from tank (1) to delivery pipe (9), whereas in the other working phases (during the discharge of high specific gravity refuse and heavy suspension from the tank, and its fillup with new feed and heavy medium) they are closed.

Let the main working period be (valves (7) and (8) open) t' min, and the total period of the other phases (valves (7) and (8) closed) t'' min. Thus, the total period of each cycle is: $t = t' + t''$ min. If the volume of tank (1) is V m^3, then the product volume fed into the tank per cycle is fV, and the volume of the heavy medium is $(1 - f)V$. The volume of the low specific gravity product fraction (coal) is sfV. Thus the tank will discharge per cycle, through (10), a quantity of $(1 - s)fV$ m^3 refuse, and $V' = V - (1 - s)fV = V[1 - (1 - s)f]$ m^3 heavy medium, that is, 60/t-times more per hour.

In order to promote more uniform material delivery and increased output, the bottom of delivery pipe (9) may have two or more tanks (1) attached instead of one, the automatically controlled individual working phases of which will follow one another by an appropriate displacement. Fig. 3 illustrates a feasible schematic presentation of the multi-tank arrangement. The symbols of this Figure are identical to those of Fig. 2.

The total suspension quantity discharged by n tanks (1) connected in parallel is:

$$Q_{sz} = 60\, V'n/t = 60\, V[1-(1-s)f]\, n/t \text{ m}^3 .$$

This will be delivered by low-pressure sludge pump (13) to a height of L_1 m. (L_1 is the height difference between the heavy-medium levels in tanks (5) and (12), respectively.) Now a suspension quantity of

$$Q'_{sz} = 60\, V(1-f)\, n/t \ \text{ m}^3/\text{h}$$

is returned from tank (5) to tank (1), through (6), to fill up the clearances between solids, while the leftover heavy suspension quantity of

$$Q''_{sz} = Q_{sz} - Q'_{sz} = 60\, V[1-(1-s)f - (1-f)]\, n/t - 60\, Vsfn/t \ \text{ m}^3/\text{h}$$

is delivered by high-pressure sludge pump (25), against a static pressure of

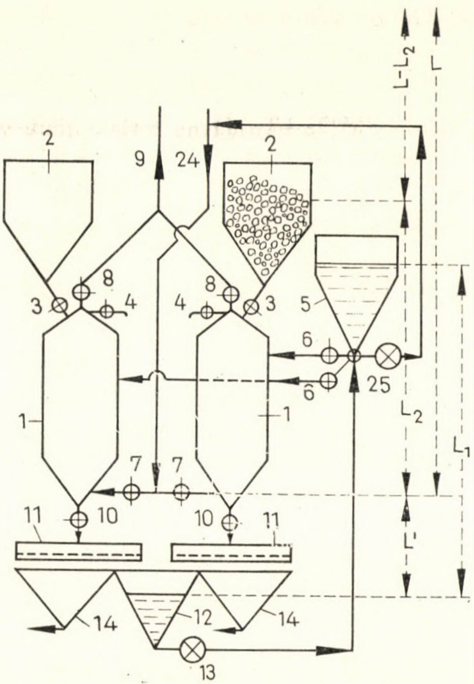


Fig. 3

$(L + L' - L_1 - \Delta H)$ m, to chute (24). (L is the vertical distance between the bottom of tank (1) and the surface opening of delivery pipe (9), L' is the vertical distance between the bottom of tank (1) and the heavy suspension level in tank (12), and ΔH is the vertical distance between the surface opening of delivery pipe (9) and the overflow rim of chute flare (17), respectively.)

Accordingly, the energy requirement of suspension delivery is:

$$E = \left(\frac{Q''_{sz}(L+L'-L_1-\Delta H)}{\eta_1} + \frac{Q_{sz}L_1}{\eta_2} \right) \frac{10^3 \gamma}{102} \text{ kW}$$

where η_1 and η_2 are the efficiencies of sludge pumps (25) and (13).

The solids fed to tank (2) must be delivered to the surface through a height of $(L - L_2)$ m. The theoretical energy requirement of this operation is:

$$E_s = \frac{Q_s(L-L_2) \cdot 10^3 \delta}{102} \text{ kW}$$

where $Q_s = 60\, Vsfn/t$ m^3/h, and L_2 is the vertical distance between the centre of gravity of the product batch fed to tank (2), and that of the batch fed to tank (1).

Thus the heavy-media hoist efficiency is:

$$\varepsilon = \frac{E_s}{E} = \frac{sf\delta(L-L_2)}{\dfrac{sf(L+L'-L_1-\Delta H)\,\gamma}{\eta_1} + \dfrac{(1-f+sf)L_1\gamma}{\eta_2}} .$$

If $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, and with the symbols $\delta/\gamma = a$, $L_2 = l_2 L$, $L' = l'L$, $L_1 = l_1 L$, and $\Delta H = hL$ is used,

$$\varepsilon = \frac{\eta a(1-l_2)}{1+l'-h+l_1\dfrac{1-f}{sf}}$$

hoist efficiency formula is obtained. This value is the higher, the higher are η, a, f, s, and h, and the lower l_1, l_2, and l'.

Table I presents ε and ε/η values obtained with different η, a, . . . values. Higher $l_1 - l_2 - l' - h$ values lead, according to the estimations, to a shaft depth of about $L \simeq 100$ m, whereas the lower ones to $L \simeq 200$ m. (These vary inversely to L, with shaft depth variations.)

Table I

	η	a	f	s	l_1	l_2	l'	h	ε	ε/η
1	0,65	0,8	0,6	0,8	0,2	0,15	0,04	0,02	0,37	0,57
2	0,75	0,9	0,6	0,8	0,2	0,15	0,04	0,02	0,49	0,65
3	0,65	0,8	0,6	0,8	0,1	0,075	0,02	0,01	0,44	0,68
4	0,75	0,9	0,6	0,8	0,1	0,075	0,02	0,01	0,57	0,76
5	0,65	0,8	0,7	0,9	0,2	0,15	0,04	0,02	0,40	0,61
6	0,75	0,9	0,7	0,9	0,2	0,15	0,04	0,02	0,52	0,69
7	0,65	0,8	0,7	0,9	0,1	0,075	0,02	0,01	0,46	0,70
8	0,75	0,9	0,7	0,9	0,1	0,075	0,02	0,01	0,59	0,79

If heavy-media hoist without simultaneous heavy suspension enrichment is performed, s will equal 1, and the $a = \delta/\gamma$ will have a high value, such as 0,95 or so. In such cases, therefore, a hoist efficiency exceeding those in Table I will be arrived at (the efficiency of properly constructed bull cable hoist techniques is about 0,50 to 0,55).

Hoist efficiency is independent of the number and size of the parallel connected tanks, and of the cycle period: n, V, and t are missing from the ε formula. The output of delivery (Q m^3/h or T t/h), however, will greatly depend on n (ea), V (m^3), and t (min).

Let one of the $n > 1$ number of tanks be periodically and alternatively closed, while $(n - 1)$ connected to both delivery pipe (9) and chute (24), through the open valves (7) and (8). In this case $t' = nt''$, and $t = t' + t'' = t''(1 + n)$.

The product is safely delivered from tanks (1) to delivery pipe (9), if the Q suspension quantity flowing upwards is equal to the $Q_{sz} = 60\ V'n/t$ suspension quantity discharged through (10) since, in this case, the product to be delivered will enter delivery pipe (9) even with a relative displacement between the γ specific gravity suspension and the δ specific gravity solids missing. Thus the relation

$$Q = \frac{60Vn[1-(1-s)f]}{(1+n)t''}$$

may be safely written.

According to estimations, the t'' discharge and refill time of tanks (1) may amount, in practice, to about 2/3 to 1 min, that is, $60/t'' = 90$—60. Calculating with the formula

$$Q = \frac{75V'n}{1+n}$$

will make, for example, the $Q = 1500$ m^3/h sludge quantity ($\sigma = 0{,}4$, $a = 0{,}8$, $L = 100$ m, $\Delta H = 2$ m, $D = 0{,}4$ m) have, in case of $n = 2$—3—4, the values of $V' \cong 30$—27—25 m^3 associated while, for example, if $f = 0{,}6$ and $s = 0{,}8$, then 1/0,88-times higher $V \cong 34$—30—28 m^3 tank volumes pertaining. The $t = t''(1 + n) = 0{,}8(1 + n)$ cycle time is 2,4—3,2—4,0 min, whereas the t' phase period is $60/75 = 0{,}8$ min less: 1,6—2,4—3,2 min.

Sludge flow is not uniform in the open tank $(n - 1)$ parallel connected to both delivery pipe and chute. The laws of hydrostatic equilibrium prevail between the individual tanks. Where the product (coal) quantity is greater, there the average specific gravity of the coal + heavy suspension mixture will be lower. The average γ' mixture specific gravity of the tank filled with coal (or any other product), where the refuse of $\delta_m > \gamma$ specific gravity and $V(1 - s)f$ volume deposited onto the bottom of the tank is neglected, can be calculated from equation

$$V(1-f)\gamma + Vsf\delta = [V-V(1-s)f]\gamma'$$

and expressed as

$$\gamma' = \gamma \frac{1-f+asf}{1-f+sf}\ .$$

For example, $f = 0{,}6$, $s = 0{,}8$, and $a = 0{,}8$ will give $\gamma' = 0{,}89\ \gamma$. If the tank does not contain floating coal, γ represents the specific gravity of the medium, but if it does, γ' will be the specific gravity of the "medium + coal" mixture, which will gradually increase to the value of γ with the removal of coal.

With (7) and (8) in open position i.e. in the main working phase, the tanks "intercommunicate" through the delivery pipe and the chute. If the specific gravity of the sludge is γ in one tank, and γ' in the other, the hydrostatis equilibrium bears the relation $S\gamma = S'\gamma'$ or $S' = S\gamma/\gamma'$ and $\Delta S = S' - S = S(\gamma/\gamma' - 1)$. Here S is tank height, ΔS means sludge column height, and $\gamma\Delta S$ the corresponding water column height. Thus, for example, if $\gamma'/\gamma = 0{,}89$ then $\gamma/\gamma' = 1{,}22$ and $\Delta S = 0{,}122S$ m sludge column (or, for example, at $\gamma = 2$ it means a $0{,}244S$ m water column). Again for example, in case of $S = 10$ m, the differential pressure is $\Delta S = 2{,}44$ m water column, which will transfer the heavy suspension from the tank containing no floating coal to the *sf* volume fraction tank containing it. In practice, therefore, the heavy medium flows upwards at the highest rate in the tank containing the maximum floating coal quantity, whereby the t' time required for the discharge of the coal from the tank will be considerably reduced and, on the other hand, the solid volume fraction in the delivery pipe (σ) will increase, as a greater part of the heavy suspension always flows through the tank containing "much coal" to the delivery pipe. In the tanks containing no floating coal, the suspension flows upwards at a low rate (or moves downwards), and does not "dilute" the solid matter content of the delivery pipe. An increase of σ, however, leads to increased ΔL and H whereby, in turn, an increased sludge flow rate is obtained. Thus, a system of more than two tanks will automatically adjust itself to create optimum conditions.

Fig. 4 illustrates such a feasible constructional alternative of the bottom of an equipment combined with heavy suspension enrichment where, in order to make possible the achievement of an increased transport efficiency, the l_1, l_2, and l' members of the transport efficiency formula (that is, the L_1, L_2, and L' height values of Fig. 2) are low. Symbols 1 to 25 of Fig. 4 are identical to those of Fig. 2.

During the main working phase period (7) and (8) are open; the open position of (8) is maintained by electromagnet (27). Its current is switched off simultaneously with or somewhat earlier than the closing of (7), when (8) would close "by itself" due to its weight. After valve (8) has closed, rod (28) and valves (3), (10), and (29) connected thereto subside because of the weight on (3), represented by the product to be fed, and that acting on (10) by the suspension + refuse mixture, that is, (3) and (10) open while (29) will close. At the same time valve (4) must also open. During the open position of (7) and (8), the closed position of (3) and (10) is maintained by the high pressure in tank (1), if the surface of the annular valve (3) is larger than that of (10).

The refuse and heavy suspension retained in the tank will move from (1) to tank (30) whence, through the upward duct (31), a greater part of the heavy medium will flow to tank (12′). The height of outlet pipe orifice (31) determines, according to the law of intercommunicating vessels, the heavy suspension level retained in tank (1). The V volume of tank (1) consists of the space above this level; this is where an fV volume of product, such as the coarser than

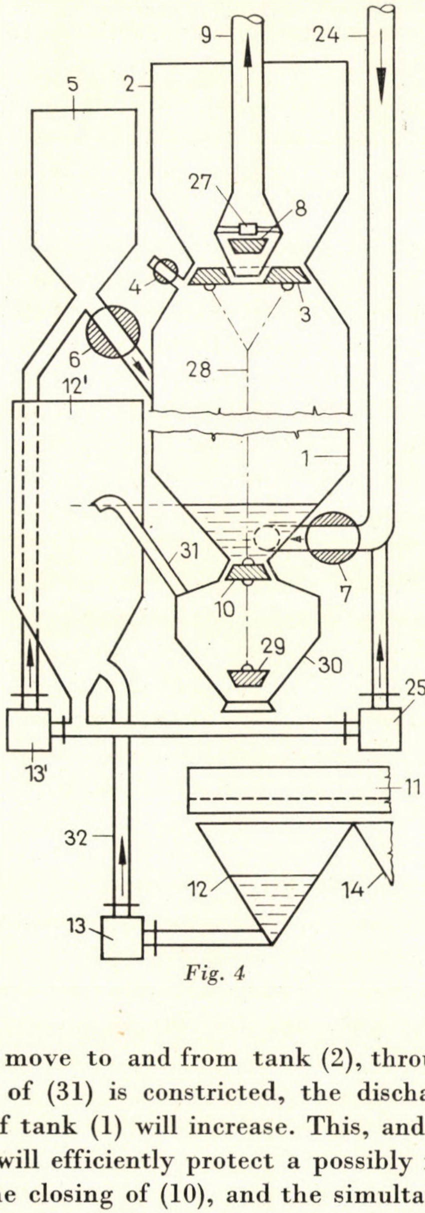


Fig. 4

6 to 10 mm coal will move to and from tank (2), through the open valve (3). If the outlet profile of (31) is constricted, the discharge and simultaneous product fillup time of tank (1) will increase. This, and the heavy suspension retained in tank (1) will efficiently protect a possibly more brittle feed from breakage. Prior to the closing of (10), and the simultaneous opening of (29), some refuse may move from the new feed to tank (30), through the heavy suspension stagnating at the bottom of tank (1). The size of tank (30) should

be about equal to the volume of refuse removed per cycle, in order to allow only a small amount of suspension to enter tank (12) through sieve (11) whence it would be transferred by sludge pump (13) to tank (12′), via duct (32), but a greater part of the V' volume heavy suspension discharged from tank (1) per cycle should pass directly to tank (12′) through pipe (31), whence it would be transferred by sludge pump (13′) to tank (5). Thus the l_1 and l' members of the efficiency formula may be reduced. Locating tank (2) directly with the above tank (1) according to Fig. 4, on the other hand, leads to a reduced l_2.

After tank (1) has been filled up with raw coal (or any other mining product), rod (28) and the attached valves (3), (10), and (29) must be lifted by an external (mechanical, hydraulic, or electromagnetic) force, when (3) and (10) would close while (29) opens. The contents of tank (30) are discharged through the latter, and arrive at sieve (11). With (3) and (10) closed, (6) opens, and heavy suspension flows there-through from tank (5) to (1), filling up the clearances between product pieces. When tank (1) is full of heavy medium, valve (4) would close and (7) open. The high-pressure heavy suspension entering there-through keeps (3) and (10) closed, and eliminates the overpressure acting on (8) from above, whereby (8) may be opened by the electromagnet (27) with a relatively moderate force. A heavy medium quantity identical to the coal volume removed through delivery pipe (9) is transferred by high-pressure sludge pump (25) from tank (12′) to chute (24).

In case of multi-tank constructions, tanks (5), (12), and (12′) as well as sludge pumps (13), (13′), and (25) may be common for an $n > 1$ number of tanks (1). If $n \geq 3$, these accessories may be located, for example, centrally with tanks (1) around a symmetric patterns. In case of $n = 2$, however, it is better to locate the axes of tanks (1) in the apex points of an isosceles triangle base line, and the "common" elements in the third apex. Sieve (11) may be similarly common for the two tanks (1), if the refuse is transferred from under (29) to this common sieve (11) by hoppers.

The solution according to Fig. 5 controls (3), (8), (10), and (29) by switching the electromagnet mounted to bar on and off (28). Just as in Fig. 4, valves (3), (10), and (29) are in rigid connection with rod (28), whereas the pushrod of (8) can move up and down independently of (28). The mild steel V-mass at the pushrod bottom of (8) is enclosed by the M_1 and M_2 electromagnets of the control mechanism. The upward movement of rod (28) is by switching on electromagnet M_2 and, thereby, at the closed position of valve (8) and cock (7), when the overpressure acting on (8) represents a greater force than the weight of (28). Valve (8) is opened by switching on electromagnet M_1 and, thereby, at the closed position of (3) and (10), and the open position of cock (7), when the difference between the overpressure acting from below on valve (3) of a larger surface, than that affecting (10) from above, represents a greater force than the weight of rod (28). The winding of electro-

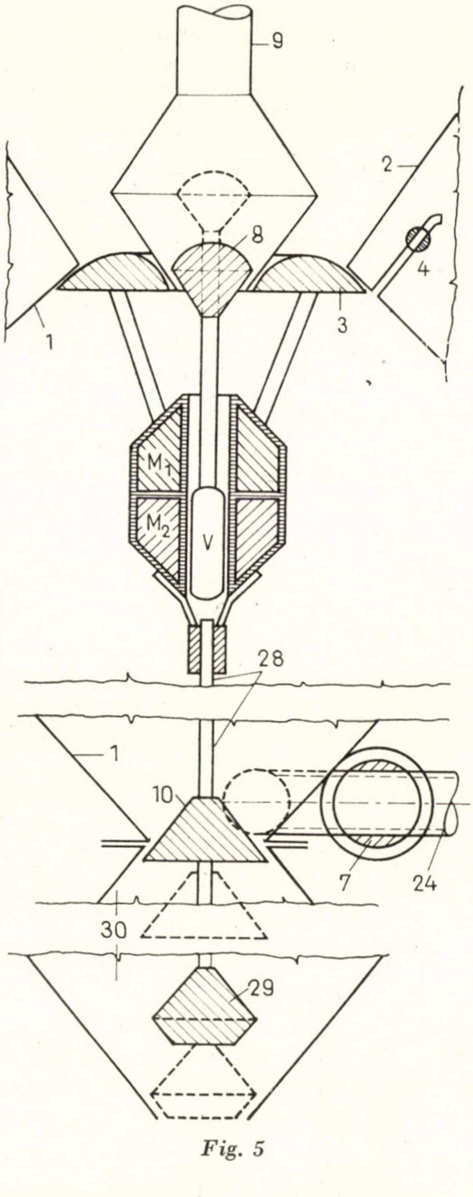


Fig. 5

magnet M_1 is best constructed in two parts, M'_1 of a lower turn number, and M''_1 of a higher number of turns. When valve (8) opens, both windings obtain current, and the small-size M'_1 electromagnet will be entirely sufficient to maintain the open position of valve (8) for a comparatively long period of time.

The pushrod of valves (8), (10), and (29) is a thread connected to the respective valve body; their accurate position can be easily adjusted by rotation. Electromagnets M_1 and M_2 must be located in closed housings. Naturally, the overpressures acting on the valves in their closed position, and the weight of rod (28) including the attached valves and control mechanism must be in correct ratio to enable operation.

Fig. 6 illustrates a feasible constructional version of the bottom part of a heavy-media hoist equipment not combined with heavy suspension enrichment, again for high transport efficiency (low l_1, l_2, and l' values).

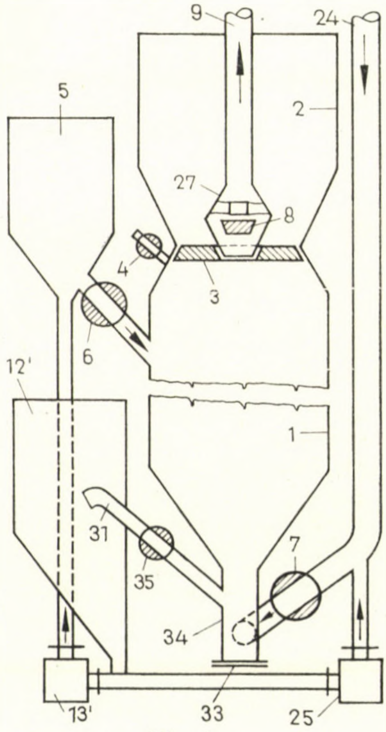


Fig. 6

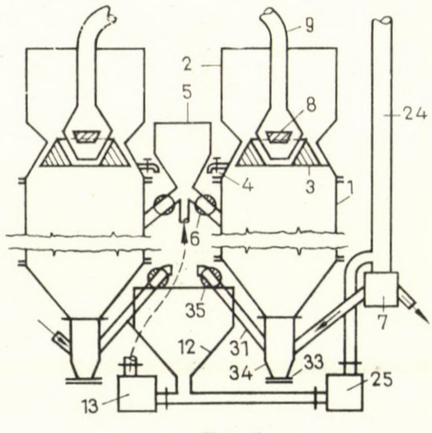


Fig. 7

The bottom part of tank (1) here consists of pipe (34) closed by plate (33), through the lower end of which arrives the heavy medium from chute (24), via (7), and to which is attached the upward pipe (31), across the valve (35) of which, in turn, the heavy suspension discharged from tank (1) in each cycle will move to tank (12′). Plate (33) is always closed under operational conditions, and will be opened only periodically to remove the heavy solids (such as iron lumps in the product) accumulated on the bottom of tank (1). Fittings (11), (12), (13), and (14) of Fig. 4 and, in addition, (15), (20), and (22) of Fig. 2 are omitted here. With respect to the suspension of "viscous mud" character, sludge pump (13′) and high-pressure sludge pump (25) should be of the piston type here, or the latter might be an ordinary mud pump. The duties of fittings marked by the symbols of Fig. 4 are the same as there, thus their detailed description is unnecessary.

In case of a number of tanks (1) connected in parallel, their layout may be as shown in Fig. 7, that is, tanks (5) and (12') located in the centre line one under the other are enclosed by tanks (1).

REFERENCES

1. Condolios, E.,—Couratin, P.—Chapus, E. E.: Pumping ores up vertical shafts. *The Canadian Mining and Metallurgical Bulletin*, 1963. pp 187—198.
2. Seidl: Hydraulische Kohlenförderung in der Sowjetunion. *Glückauf*, 1958, pp 345—346.
3. Newitt, D. M.—Richardson, J. F.—Gliddon, B. J.: Hydraulic conveying of solids in vertical pipes. *Trans Inst. Chem. Eng.*, 1961, pp 93—100.

ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ ПЕРЕВОЗКИ В СТВОЛЕ С ТЯЖЕЛОЙ СУСПЕНЗИЕЙ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ПО ЕЁ ОСУЩЕСТВЛЕНИЮ

Г. ТАРЯН

РЕЗЮМЕ

Если в качестве среды гидравлической перевозки в стволе вместо воды (или раствора с удельным весом, меньшим среднего удельного веса вывозимого твёрдого материала) применять тяжелую суспензию, имеющую удельный вес, больший среднего удельного веса твердого материала, то гидростатическое давление в спускной трубе будет больше, чем в сообщающейся с ней внизу трубе для перевозки и, таким образом, циркулирующее течение жидкости осуществляется «от себя», то есть без применения отдельного насоса. Процесс, аналогичен подъёмному устройству воздуха, здесь заменяется тяжелой суспензией, а воздушные пузырьки—вывезённым горным продуктом. При помощи перевозки в стволе с тяжелой суспензией может быть произведено и отделение по удельному весу горного продукта, когда безрудный материал с большим удельным весом останется в шахте, а ценный — с меньшим удельным весом (например, чистый уголь + промжуточный продукт) выводится наружу.

Излагаются: принципиальное расположение метода и некоторые возможныорешения его осуществления, вычисляются его мощность и коэффициент энергетическкго полезного действия.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (3—4), pp. 257—279 (1969)

ANWENDUNG VON PROJEKTIONEN BEI ELLIPSOIDISCHEN BERECHNUNGEN

I. HAZAY

KORRESP. MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 27. März 1968]

Die komplizierten ellipsoidischen Berechnungen können vereinfacht werden, wenn sie an einer geeigneten ebenen Projektion des Ellipsoides vollzogen werden. Eine geeignete Projektion ist z. B. die Gauß—Krügersche, falls der Ausgangsmeridian entsprechend gewählt wird.

Die gegenseitige Lage zweier verschiedener Ellipsoide kann ebenfalls mit Hilfe von Projektionen untersucht werden.

Ist am älteren Ellipsoid ein altes, am neuen aber ein neues Netz angeordnet, so gibt es bedeutende Abweichungen auch im Einklang der beiden Netze. Daher kann eine geringfügige Toleranz bei der Präzision erlaubt werden, und die gegenseitige Lage der beiden Ellipsoide kann auch einfacher bestimmt werden. Man muß von beiden Ellipsoiden mit Hilfe je einer sog. Kugel mit mittlerem Krümmungsradius zu einer stereographischen ebenen Projektion übergehen; hier können die lagebestimmenden Größen der beiden Ellipsoide mit einfacher Helmertscher Transformation bestimmt werden.

I

Bekanntlich wird als Referenzfläche der horizontalen geodätischen Netze ein solches *Rotationsellipsoid* gewählt, das der theoretischen Figur der Erde, dem Geoid möglichst nahe kommt. Es wurde schon mehrerseits angestrebt, die günstigste Gestalt und Größe des Ellipsoids aufgrund von Messungen abzuleiten; es werden daher in den verschiedenen Ländern der Erde zahlreiche —voneinander an Größe und Gestalt abweichende — Ellipsoide angewendet. Durch die Verfeinerung der Instrumente und der angewendeten Meß- und Rechenmethoden können immer verläßlichere Daten auch über das der Erde nahekommende Ellipsoid gewonnen werden; so kommen neuerdings immer neuere Parameter zum Vorschein. Nur Ungarn in Betracht gezogen, wurden die Koordinaten des östlichen Pfeilers der einstigen Sternwarte am Gellért-Berg — des Anfangspunktes Ungarns — in der Mitte des vorigen Jahrhunderts am *Waldbeckschen Ellipsoid* von Wien aus abgeleitet. Zu einer Darstellung Ungarns an der Ebene wurde die stereographische Projektion und später die Zylinderprojektion zu einer an das *Besselsche Ellipsoid* angeschmiegten Kugel mit mittlerem Krümmungsradius angewendet; die Referenzfläche unseres neuesten Triangulationsnetzes ist aber das *Krassowskysche*

Ellipsoid. Es sollen nur noch einige der im Ausland angewendeten Ellipsoide genannt werden: Die berühmtesten sind das *Everestsche* (Indien), das *erste Clarksche* (USA, Canada, Mexico, Ägypten) und das *zweite Clarksche Ellipsoid* (Frankreich, Rumänien).

Es wurde angestrebt, daß sämtliche Länder womöglich dasselbe Ellipsoid anwenden, um die Netze der einzelnen Länder in ein je einheitlicheres internationales Netz zusammenschließen zu können. So wurde von der *Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik* im Jahre 1924 das *Hayfordsche Ellipsoid* als internationales Ellipsoid gewertet, bzw. empfohlen. Bald darauf, 1940 entstand das *Krassowskysche Ellipsoid*, dessen Meßbasen unter den bisherigen Ellipsoiden am meisten ausgedehnt waren, und welches so als das verläßlichste betrachtet werden kann; daher wurde dieses Ellipsoid als gemeinsame Referenzfläche seitens der Sowjetunion und der befreundeten sozialistischen Länder auserwählt. Z. Z. wird in der Internationalen Union für Geodäsie und Geophysik über die Annahme von *neuen Parametern* diskutiert, die schon aufgrund der neuesten und modernsten Untersuchungsmethode, der Meßergebnisse der *künstlichen Erdsatelliten* entstanden sind. Diese Messungen bestätigten offensichtlich jene Annahme, daß unter den bisherigen Ellipsoiden das *Krassowskysche* das entsprechendste ist, weil zwar die durch die künstlichen Erdsatelliten gewonnenen Ergebnisse auf eine gewissermaßen kleinere Größe hindeuten, die formbestimmende Abplattung beinahe mit der der *Krassowskyschen* übereinstimmt. Gegenüber der *Krassowskyschen* Abplattung $\alpha = 1/298{,}3$ ist die Abplattung im neuen Vorschlag $\alpha = 1/298{,}25$. Dies bedeutet eine so geringfügige Abweichung, daß sie für uns und die befreundeten Länder keinen Grund zur Veränderung bildet. Es muß nämlich in Betracht gezogen werden, daß während die Größenänderung des Ellipsoides in den Daten unseres alten Netzes nur so geringe Änderung bedeuten würde, die Veränderung der Abplattung aber eine gänzlich neue Berechnung benötigen würde. Die Lage ist aber eine andere für die nicht das *Krassowskysche* Ellipsoid anwendenden Länder, für welche die Abplattung wesentlich von der empfohlenen abweicht, und so müssen sie unbedingt ein neues Ellipsoid einführen. So beträgt die Abweichung des Nenners vom empfohlenen Wert z. B. in der *Besselschen* und *Hayforderschen* Abplattung beinahe eine Einheit, obwohl die erwähnten Abplattungen — die *Krassowskysche* nicht in Betracht gezogen — ihm am nächsten stehen. Meiner bescheidenen Meinung nach und — ich glaube, man kann hier ruhig verallgemeinern — laut der Meinung der ungarischen Geodäten ist die zweite Dezimalstelle im Nenner der Abplattung keine wertvolle Zahl, sondern nur ein solches zahlenmäßiges Ergebnis, das keinen oder nur einen sehr geringen Zuverläßlichkeitswert hat, daher könnte der empfohlene Wert 298,25 ruhig auf den *Krassowskyschen* 298,3 aufgerundet werden.

Tabelle I zeigt die Parameter einiger Ellipsoide. Die Reihenfolge wurde der zunehmenden Größe des Nenners der Abplattung entsprechend bestimmt.

Tabelle I

Ellipsoid	Große Halbachse a	Abplattung α
Clark II	6 378 249 m	1/293,47
Clark I	6 378 206 m	1/294,98
Hayford	6 378 388 m	1 /297
empfohlen	6 378 160 m	1/298,25
Krassowsky	6 378 245 m	1/298,3
Bessel	6 377 397 m	1/299,153
Everest	6 377 233 m	1/300,80

Die im Titel meiner Studie erwähnten ellipsoidischen Berechnungen könnten in zwei Hauptgruppen geteilt werden. In die erste gehören jene, die sich auf ein Ellipsoid mit angegebenen Parametern beziehen, in die zweite aber jene Berechnungen, die die gegenseitigen Verhältnisse zweier verschiedener Ellipsoide zu prüfen berufen sind, bzw. zu ermöglichen, daß ein an einem Ellipsoid gelegenes Netz je entsprechender auf ein neues Ellipsoid übergeführt werden könne.

II

Unter den Berechnungen am Ellipsoid mit gegebenen Parametern verstehe ich die sog. *erste* und *zweite geodätische Hauptaufgabe.*

In der *ersten Hauptaufgabe* sind die geographische Breite φ_1 und die geographische Länge λ_1 eines Oberflächenpunktes, sowie das Azimut α_{12} einer nach einem anderen Oberflächenpunkt gerichteten geodätischen Linie im gegebenen Punkt, weiters die kürzeste Oberflächenentfernung s der beiden Punkte, d. h. die Länge des Teiles der geodätischen Linie gegeben. Die geographischen Koordinaten φ_2 und λ_2 des anderen Punktes und das Azimut α_{21} der die zwei Punkte verbindenden geodätischen Linie in diesem Punkte sind zu bestimmen (Abb. 1).

In der *zweiten Hauptaufgabe* sind die geographischen Koordinaten φ und λ zweier Oberflächenpunkte gegeben; zu bestimmen sind die kürzeste Oberflächenentfernung s der zwei Punkte, weiters die Azimute α_{12} und α_{21} der geodätischen Linie in beiden Punkten (Abb. 2).

Mit den auf der Kugel vollzogenen ähnlichen Berechnungen verglichen (Zitat aus dem Lehrbuch [6]):»Die Berechnung am Ellipsoid ist wegen der komplizierteren Fläche offensichtlich schwieriger, umständlicher. Daraus folgt, daß für beide Hauptaufgaben im Laufe der Zeit zahlreiche Lösungen entstanden sind.« Solche Lösungen sind z. B. die *Legendresche* Potenzreihe, die auch für die erste Hauptaufgabe eine unmittelbare Lösung liefert, die Reihe konvergiert aber langsam; die *Gaußsche* Mittelbreiten-Methode, die die erste Hauptaufgabe mit einer stufenweisen Annäherung löst, weiters die *Schreibersche* Lösung mit Hilfsdreiecken, die nach der verschiedenen Wahl der Hilfsgrößen mehrere Variationen hat, wie z. B. die *Helmertsche*, die *Krügersche*, die *Tardische*, die *Krassowskysche*, die *Hirvonensche* Variation. Die erwähnten Lösungen dienen meistens zu den in der Geodäsie allgemein erforderlichen Berech-

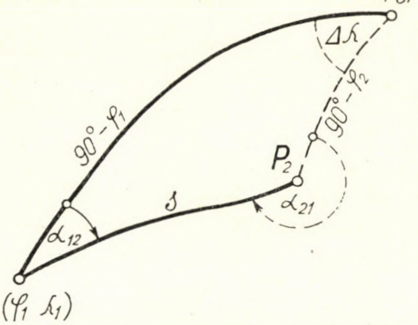


Abb. 1

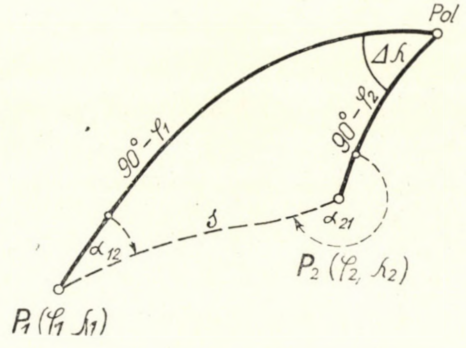


Abb. 2

nungen, bei welchen die Entfernungen selten 50 km überschreiten. Sie liefern allgemein bis 200 km zuverläßliche Ergebnisse. Auch für den Fall von größeren Entfernungen gibt es Berechnungsmethoden, die naturgemäß noch komplizierter sind. Man arbeitet meistens mit dem Normalschnitt anstatt der geodätischen Linie (der kürzesten Linie), aber — ich zitiere wieder das Buch von L. Homoródi —: »Der Vorteil der Lösungen mit dem Normalschnitt besteht jedenfalls darin, daß sie eine strenge und unmittelbare Lösung liefern, und die Differenz der geodätischen Linie und der Bogenlänge des Normalschnittes im Falle der behandelten Entfernungen schließlich vernachlässigbar ist.«

Bei diesen großen Entfernungen muß man auf die zu strenge Präzision gewissermaßen verzichten, und wir müssen uns anstatt der mm-Genauigkeit mit dm-Genauigkeit begnügen. Man kann meiner Meinung nach z. B. bei einer 1000 km Entfernung mit einer Genauigkeit von einem Millionstel zufrieden sein; dies bedeutet, daß man innerhalb eines Kreises mit einem Radius von einem Meter in den Punkt treffen muß. Dieser Umstand bedeutet naturgemäß nicht nur für die Koordinaten bzw. für die Entfernung, sondern auch für die Azimutwerte eine entsprechende Toleranz; bei 1000 km Länge würde dies im Azimut einer Schwankung von 0,2″ entsprechen.

Die Schwierigkeiten der Lösung der im vorherigen geschilderten Hauptaufgaben werden dadurch noch gesteigert, daß man auch im Falle von kürzeren Entfernungen die Winkelfunktionen oder deren Logarithmen während der ganzen Berechnung wenigstens bis acht Dezimalstellen, bei längeren Entfernungen aber bis zehn-zwölf Dezimalstellen in Betracht ziehen muß.

Ich meine, daß *die Berechnungen an einer entsprechenden ebenen Projektion des Ellipsoides einfacher und schneller durchführbar sind.* Ich halte das Anstreben der Vereinfachung für zeitgemäß, da — meiner Meinung nach — solche Aufgaben in Zukunft häufiger vorkommen werden.

Man muß eine solche Projektion wählen, zu der der Übergang vom Ellipsoid verhältnismäßig einfach ist, und an welcher die Projektionsreduktionen leicht berechenbar sind. Es muß eine Lösung gefunden werden, bei der die komplizierten ellipsoidischen Berechnungen durch Routine-Arbeit, durch einfach übersichtliche Schritte ersetzt werden können. Es können natürlich *nur winkeltreue Projektionen* in Betracht gezogen werden.

Vorerst dachte ich an eine solche dem Ellipsoid angeordnete *Zylinderprojektion normaler Lage*, welche den mittleren Parallelkreis des zu bearbeitenden Gebietes — z. B. Ungarns — längentreu darstellt (Abb. 3). Die normale Zylinderprojektion wäre deshalb vorteilhaft gewesen, weil die Projektions-Meridiankonvergenz an dieser überall Null ist. Die Berechnung eines wichtigen Faktors hätte dadurch entfallen können. Leider mußte diese Lösung doch außer acht gelassen werden, da die Längenverzerrungen in den vom Äquator weiter gelegenen Gebieten schon in einer kleinen Entfernung vom längentreuen Parallelkreis bereits so groß sind, daß die Reihen der Reduktionen bis zu sehr hohem Grade hätten entwickelt werden, und in Betracht gezogen werden müssen. Die Lösung wäre daher nicht wirtschaftlich.

Der nächste Gedanke war eine solche *Kegelpsrojektion normaler Lage*, die das Ellipsoid entlang des mittleren Parallelkreises des bearbeiteten Gebietes berührt (Abb. 4). Die Längenverzerrungs-Verhältnisse sind in diesem Falle günstig, und auch die Projektions-Meridiankonvergenz ist sehr einfach berechenbar: $\mu = n\,\lambda$, wo λ die vom gewählten Anfangsmeridian berechnete geographische Länge, und $n = \sin\varphi_0$, wo φ_0 die geographische Breite des Berührungs-, d. h. des längentreuen Parallelkreises bedeutet. Die Reihen der

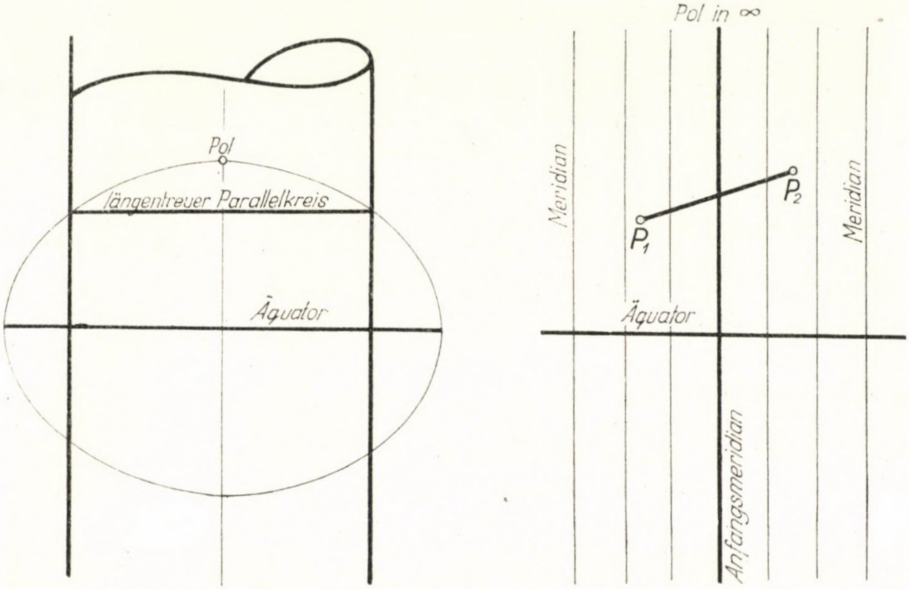


Abb. 3

Reduktion sind zwar ein wenig kompliziert, sie können aber trotzdem zu praktischen Berechnungen angewendet werden.

Diese Ausdrücke aber mit den entsprechenden Reihen der *transversal gelegenen Zylinderprojektion des Ellipsoides* (laut der allgemeinen Benennung

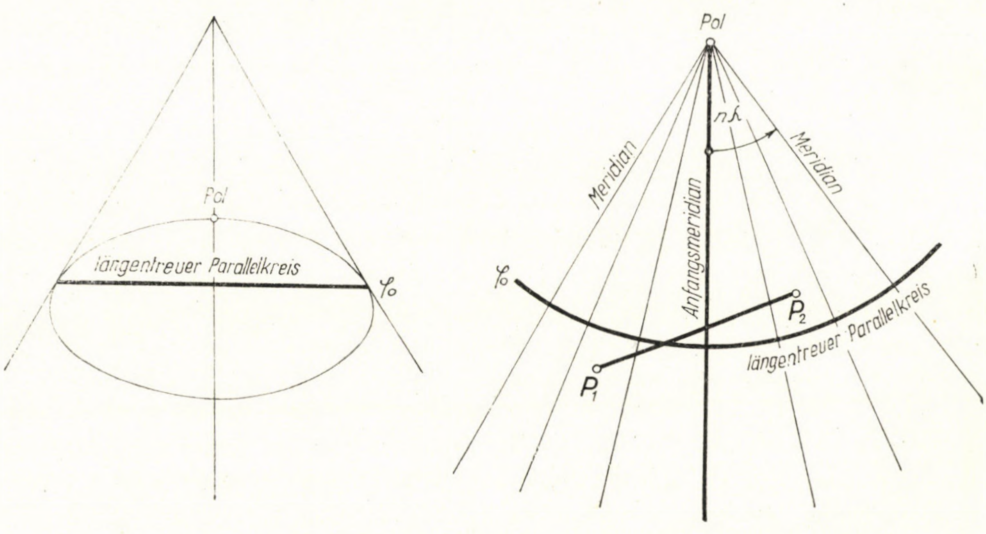


Abb. 4

mit denen der *Gauß—Krügersche* Projektion) vergleichend, kam ich zu der Feststellung, daß doch diese letztere — abgesehen von einigen Ausnahmefällen — zur Lösung der ellipsoidischen geodätischen Hauptaufgaben am meisten geeignet ist; die übliche Projektions-Streifeneinteilung muß aber weggelassen werden, obwohl man hier die Projektions-Meridiankonvergenz meistens

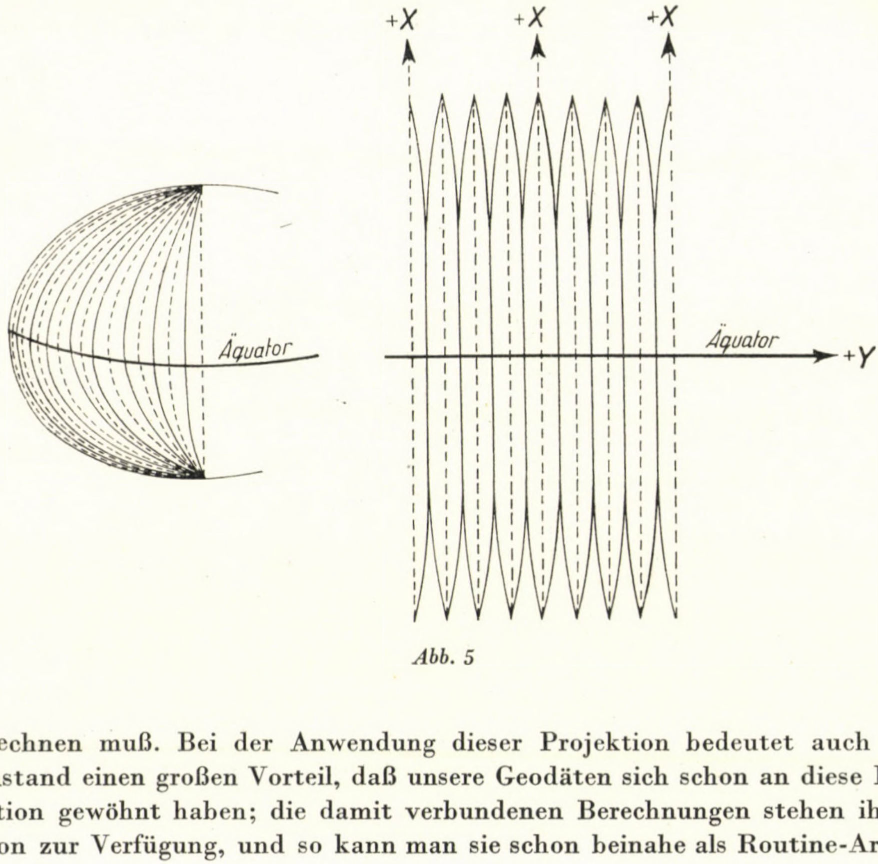


Abb. 5

berechnen muß. Bei der Anwendung dieser Projektion bedeutet auch der Umstand einen großen Vorteil, daß unsere Geodäten sich schon an diese Projektion gewöhnt haben; die damit verbundenen Berechnungen stehen ihnen schon zur Verfügung, und so kann man sie schon beinahe als Routine-Arbeit betrachten.

Die *Gauß—Krügersche* Projektion bedeutet ein solches System, bei dem das Ellipsoid auf Streifen von gewissen bestimmten Gradenbreiten geteilt ist, und zu einem jeden Streifen je eine Projektionsebene und ein Projektions-Koordinatensystem gehört, und die Bilder der Streifen sich an der Ebene mit einer bestimmten Ordnung aneinander schließen (Abb. 5). Bei unserer jetzigen Aufgabe verzichten wir aber auf diese systematische Ordnung, und so würde ich in diesem Falle die Benennung *Gauß—Krügersche* Projektion weglassen; ich würde im weiteren von *lokaler transversaler Zylinderprojektion* bzw. kurz von einer transversalen Zylinderprojektion reden (Abb. 6). *Zu unserer jetzigen Aufgabe* beabsichtige *ich den Anfangsmeridian* (den längentreuen Meridian) *nämlich immer so auszuwählen, daß bei den Reduktionen die möglichst größte Genauigkeit erreicht werden könne.* Es ist ein riesiger Vorteil, daß die zur *Gauß—Krügerschen* Projektion zusammengestellten Tabellen für einen jeglichen Ausgangsmeridian gleichfalls gültig sind, und so bedeutet die willkürliche Anordnung des Ausgangsmeridians bei der gewohnten Anwendung der Tabellen gar keine Veränderung.

Betrachten wir vorerst die *zweite Hauptaufgabe*, da diese von den beiden die einfachere ist. Sind die am Ellipsoid angegebenen beiden Punkte von-

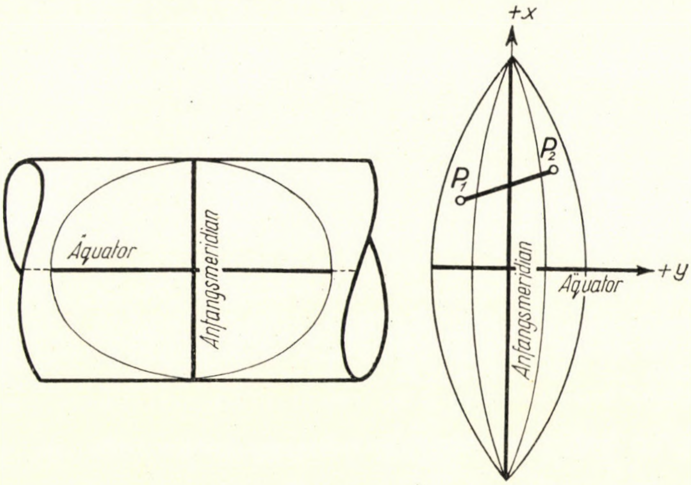


Abb. 6

einander nicht weiter als 50 km entfernt, so wird der Anfangsmeridian in einem durch einen der Punkte geführten Meridian angenommen (Abb. 7). Der Vorteil besteht darin, daß man von der Reihe der ebenen Koordinate x des am Anfangsmeridian gelegenen Punktes nur das erste Glied in Betracht ziehen muß, da die übrigen Glieder und y ebenfalls Null sind. Hier beträgt die Projektions-Meridiankonvergenz ebenfalls Null. Ist die Entfernung größer, — es wird angestrebt, daß die Endpunkte je näher dem Anfangsmeridian liegen, d. h., daß die Längenverzerrungen je kleiner seien — so wird als Anfangsmeridian der mit dem arithmetischen Mittel der geographischen Länge beider Punkte charakterisierte Meridian angenommen (Abb. 8). Der Vorteil dieser Anordnung ist, daß die Größe der vom Anfangsmeridian berechneten beiden geographischen Längen gleich und so auch ihre Potenzen gleich groß sind.

Nach der Bestimmung der ebenen Koordinaten des Bildes der beiden Punkte muß die trigonometrische Tabelle allein zur Berechnung einer einzigen Angabe, nämlich des Richtungswinkels der die beiden Punktbilder verbinden-

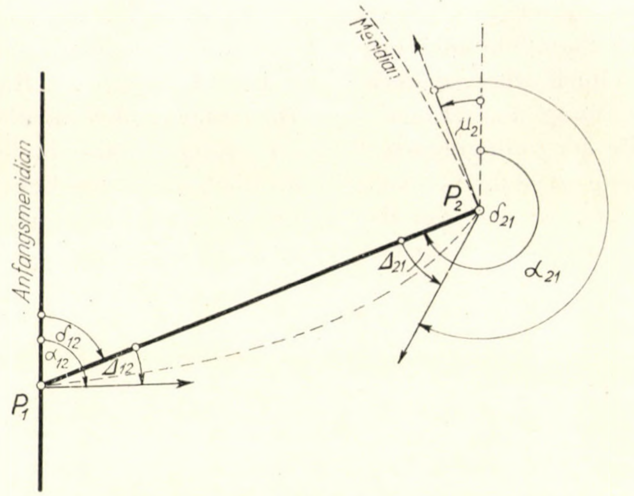


Abb. 7

den Strecke angewendet werden. Die gesuchten ellipsoidischen Daten werden aus den Formeln

$$\alpha = \delta + \mu - \Delta \quad \text{und} \quad s = \frac{1}{m}\, t$$

erhalten, wo α das Azimut, δ den Richtungswinkel in der Ebene, μ die Projektions-Meridiankonvergenz, Δ die Richtungsreduktion (Abb. 9) bzw. s die ellipsoidische Entfernung, t die Entfernung in der Ebene, schließlich m den

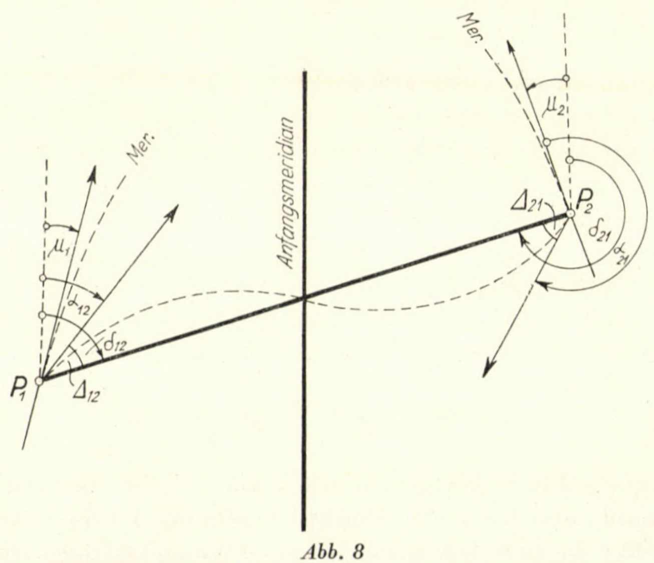


Abb. 8

Längenverzerrungsfaktor bezeichnen. Die Koordinaten des Bildes der beiden ellipsoidischen Punkte können mit Hilfe der zur Verfügung stehenden Tabellen einfach und schnell erhalten werden; die Berechnungen des Richtungswinkels und der Entfernung in der Ebene sind sehr einfach, auch die übrigen Faktoren sind mit Hilfe der vorhandenen Tabellen schnell erhältlich. Eine jede Phase der Berechnung ist einfach, und so kann die ganze Berechnung als Routine-Arbeit betrachtet werden. Zur Berechnung des Richtungswinkels ist die achtstellige trigonometrische Tabelle vollkommen ausreichend.

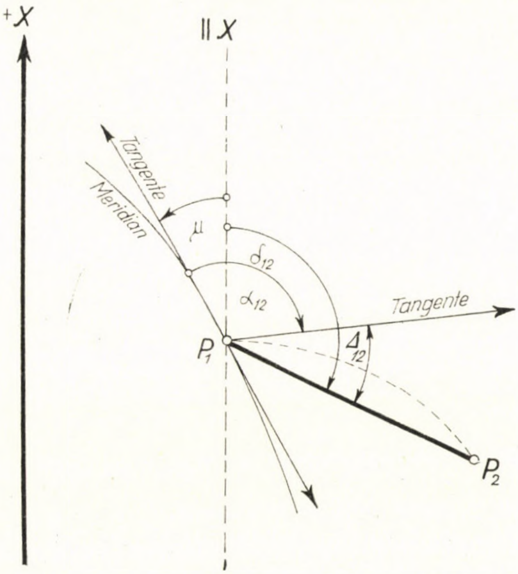


Abb. 9

Bei der Lösung der *ersten Hauptaufgabe* wird der Anfangsmeridian allgemein im Meridian des gegebenen Punktes angenommen. (Aus der Reihe der x-Koordinate des gegebenen Punktes muß man nur das erste Glied verwenden, und die y-Koordinate sowie die Projektions-Meridiankonvergenz beträgt Null.) Für den neuen Punkt werden an der Ebene durch unveränderte Anwendung des ellipsoidischen Azimuts und der ellipsoidischen Entfernung mit Hilfe polarer Punktbestimmung Näherungskoordinaten x und y berechnet; mit diesen werden dann der Längenverzerrungsfaktor sowie im gegebenen Punkt die Richtungsreduktion berechnet. Mit den Formeln

$$\delta = \alpha - \mu + \Delta \quad \text{und} \quad t = ms$$

werden die auf die Ebene bezogenen Werte zur polaren Bestimmung und mit diesen die Koordinaten des neuen Punktes bestimmt. Ist die Entfernung nicht größer als 30 km, so sind diese meistens schon die endgültigen ebenen Koordinaten. Sollten sie aber von den Näherungs-Koordinaten um mehr als 2 m abweichen, so muß man die Operationen von der Berechnung der Reduktionen angefangen wiederholen; dies ist aber schon eine geringe Arbeit. Eine einmalige Wiederholung genügt ca. bis 200 km, bei einer größeren Entfernung ist ev. auch eine wiederholte stufenweise Annäherung erforderlich. Aus den x und y Koordinaten des neuen Punktes können die geographischen Koordinaten mit den Projektionsreihen und mit Hilfe der Tabellen berechnet werden, und mit der vorher erwähnten Formel kann auch das Azimut im neuen Punkte bestimmt werden. Es ist ersichtlich, daß auch diese Aufgabe mit einfachen Schritten lösbar ist; trigonometrische Tabelle ist hier nur zur polaren Punktbestimmung erforderlich.

Tabelle II

●	φ_1	47° 49′ 55,6016″		●
●	λ_1	19° 42′ 42,4965″		●
●	α_{12}	78° 41′ 15,331″		
●	s	23 094,948 m		
	α_{21}	258° 54′ 43,313″	43,313″	
	φ_2	47° 52′ 20,8431″	20,8431″	●
	λ_2	20° 0′ 52,2755″	52,2755″	●
	α_{12}	78° 41′ 15,340″	15,336″	
	α_{21}	258° 54′ 43,322″	43,318″	
	s	23 094,947 m	4,948	

Zum Vergleich gebe ich in der Tabelle II ein Beispiel, dessen Berechnung am Ellipsoid im schon erwähnten Buch von HOMORÓDI zu finden ist. Das Ergebnis des Vergleiches ist sehr günstig. Bei der Arbeit bediente ich mich nur zur Berechnung des Richtungswinkels einer — nur siebenstelligen — trigonometrischen Tafel. (In der Tabelle bedeuten die Punkte an der linken Seite die Daten zur ersten, die an der rechten jene zur zweiten geodätischen Hauptaufgabe. Die Zeilen 5—7 zeigen die Ergebnisse der ersten, die Zeilen 8—10 jene der zweiten Hauptaufgabe, und zwar die Werte der linken Seite aufgrund der Berechnung am Ellipsoid, jene der rechten Seite aufgrund der Berechnung an der Projektionsebene.)

Ist in der ersten Hauptaufgabe die Entfernung sehr groß, so ist es zweckmäßig, den Anfangsmeridian so anzunehmen, daß er die Entfernung ungefähr dreiteilt. In dieser Lage ist nämlich die Richtungsreduktion in der Umgebung des gegebenen Punktes annähernd Null, und sie verändert sich außerordentlich langsam. (Abb. 10 ist stark verzerrt.) Man muß zwar in diesem Falle auch zum gegebenen Punkt Projektions-Meridiankonvergenz berechnen, es können aber die Wiederholungen der stufenweisen Annäherung auf das Minimum herabgesetzt werden.

Wird der Anfangsmeridian sowohl bei der ersten als auch bei der zweiten Hauptaufgabe durch irgendwelchen gegebenen Punkt angenommen, und wird aus diesem Punkte nicht nur in einer, sondern auch in mehreren Richtungen berechnet, kann die Berechnung naturgemäß in sämtlichen Richtungen in demselben ebenen Koordinatensystem vollzogen werden.

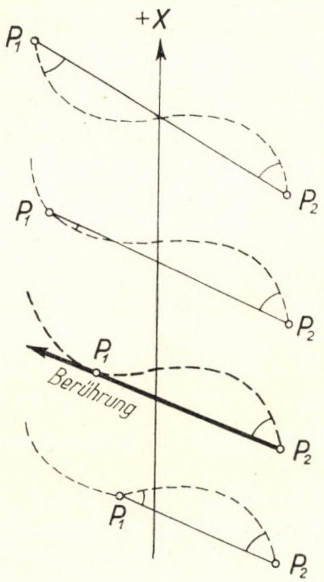


Abb. 10

Muß aber die Berechnung auf ein — aus den üblichen 30—50 km Seiten bestehendes — ganzes Netz oder einen Teil des Netzes ausgebreitet werden, so wird der Anfangsmeridian durch einen mittleren Punkt angenommen, und so können wir in einer Entfernung von 200—250 km östlich und westlich davon in demselben einzigen Koordinatensystem rechnen (Abb. 11).

Auf die Frage der *Kegelprojektion* zurückkehrend muß festgestellt werden, daß sie in dem Falle zweckmäßig angewendet werden kann, wenn die Entfernung sehr groß ist und ihre Richtung der Richtung Ost-West bedeutend näher steht als der Richtung Nord-Süd. Die Projektionskoeffizienten sollten z. B. zu jedem Halbgrad der geographischen Breite in eine Tabelle zusammengefaßt werden, und es wäre die Tabellenzeile, oder was damit identisch ist, der zum Berührungskreis angeordnete Kegel anzuwenden, der der geographischen Breite der Mitte der Entfernung am nähesten liegt.

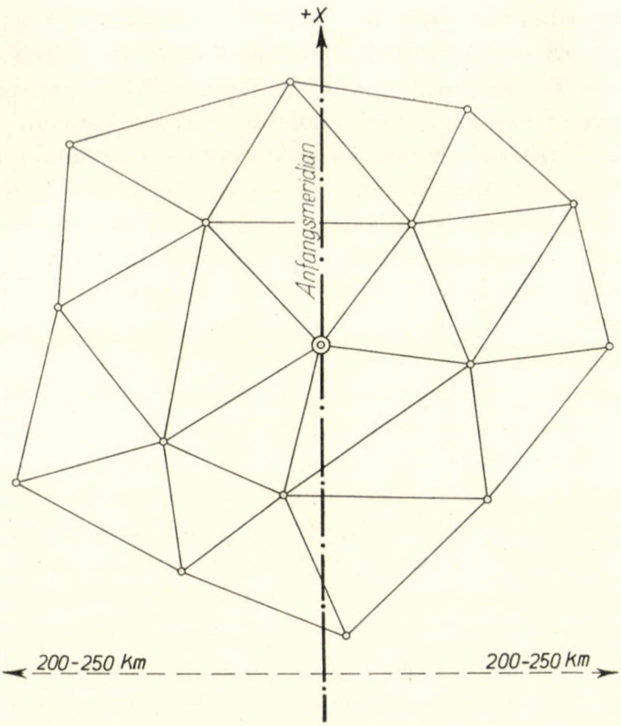


Abb. 11

III

Mit der Frage der Projektion *zwischen Ellipsoiden verschiedener Parameter* befaßte ich mich schon früher. Ich untersuchte die realen Variationen sowohl hinsichtlich der Geodäsie als auch der Geographie. In geodätischer Beziehung kommt naturgemäß nur die *winkeltreue Projektion* in Frage.

Man muß unterscheiden, ob *dasselbe Triangulationsnetz* an beiden Ellipsoiden angeordnet ist, oder ob man am neugewählten Ellipsoid aufgrund von neuen Messungen ein *neues Netz* entwickelt hat. Im ersten Falle können solche Projektionsgleichungen oder -reihen bestimmt werden, mit welchen eine der Genauigkeit des Triangulationsnetzes entsprechende Umrechnung zwischen den beiden Ellipsoiden vollzogen werden kann. In diesem Falle wird nämlich nur das am alten Ellipsoid entwickelte Netz laut einer bestimmten bzw. gewählten Gesetzmäßigkeit am anderen Ellipsoid eingeführt. Sind aber an den Ellipsoiden verschiedene Netze angeordnet, die von einem anderen Grundliniensystem — d. h. einem anderen Grundmaß —, anderer Meßgenauigkeit und Orientierung charakterisiert sind, so ist der wahrscheinlichste Zusammenhang zwischen ihnen nur aus den Abweichungen der in beiden Systemen bestimmten Koordinaten der in Wirklichkeit identischen Punkte festzustellen. Es ist selbstverständlich, daß die Punkte des alten Netzes wegen der verschiedenen Meßgenauigkeit nur mit beschränkter Genauigkeit, nur mit gewisser Toleranz in das neue Netz eingefügt werden können.

Die beiden Ellipsoide können im Verhältnis zueinander in solch einer Lage sein, daß sowohl ihre Äquatorebenen als auch ihre kleinen Achsen in Koinzidenz, d. h. *zentrisch* sind, oder so, daß das eine im Verhältnis zum anderen *verschoben und verdreht* liegt. Die letztere Lage kann man sich relativ auch so vorstellen, daß die zwei Ellipsoide zueinander zentrisch sind, und daß das Triangulationsnetz an dem einen im Verhältnis zum anderen verschoben und verdreht ist.

Vorerst soll die *zentrische Lage* besprochen werden. Als Erfordernis der Projektion sei vorausgesetzt, daß den Meridianen und Parallelkreisen des einen Ellipsoides Meridiane und Parallelkriese auch am anderen Ellipsoid entsprechen, und die einander entsprechenden Meridiane Bogenstücke proportioneller Größe aus den Parallelkreisen ausschneiden. Die erste Bedingung kann dadurch gesichert werden, daß von den geographischen Koordinaten in die eine Projektionsgleichung nur die geographischen Breiten, in die andere aber nur die geographischen Längen einbezogen werden. Die andere Bedingung ist dadurch gesichert, daß — die zum einen Ellipsoid gehörigen Daten mit Index 1, die zum anderen gehörigen mit Index 2 bezeichnend — zwischen den geographischen Längen der Zusammenhang

$$\lambda_2 = n\lambda_1$$

hergestellt wird, wobei n die Verhältniszahl bedeutet. Die Linearmodule in Richtung des Meridians und des Parallelkreises sind

$$l_m = \frac{M_2\,\mathrm{d}\varphi_2}{M_1\,\mathrm{d}\varphi_1}, \quad l_p = \frac{N_2\cos\varphi_2\,\mathrm{d}\lambda_2}{N_1\cos\varphi_1\,\mathrm{d}\lambda_1} = n\,\frac{N_2\cos\varphi_2}{N_1\cos\varphi_1},$$

wobei M der Krümmungsradius in Meridianrichtung, N der Querkrümmungsradius, $\mathrm{d}\varphi$ und $\mathrm{d}\lambda$ die differenzielle, elementare Veränderung der geographischen Breite bzw. Länge (Abb. 12) bedeuten.

An einer winkeltreuen Projektion sind die zwei Linearmodule gleich, d. h.

$$\frac{M_2\,\mathrm{d}\varphi_2}{M_1\,\mathrm{d}\varphi_1} = n\,\frac{N_2\cos\varphi_2}{N_1\cos\varphi_1}$$

ist; nach Ordnung ist unsere Differentialgleichung:

$$\frac{M_2}{N_2\cos\varphi_2}\,\mathrm{d}\varphi_2 = n\,\frac{M_1}{N_1\cos\varphi_1}\,\mathrm{d}\varphi_1 .$$

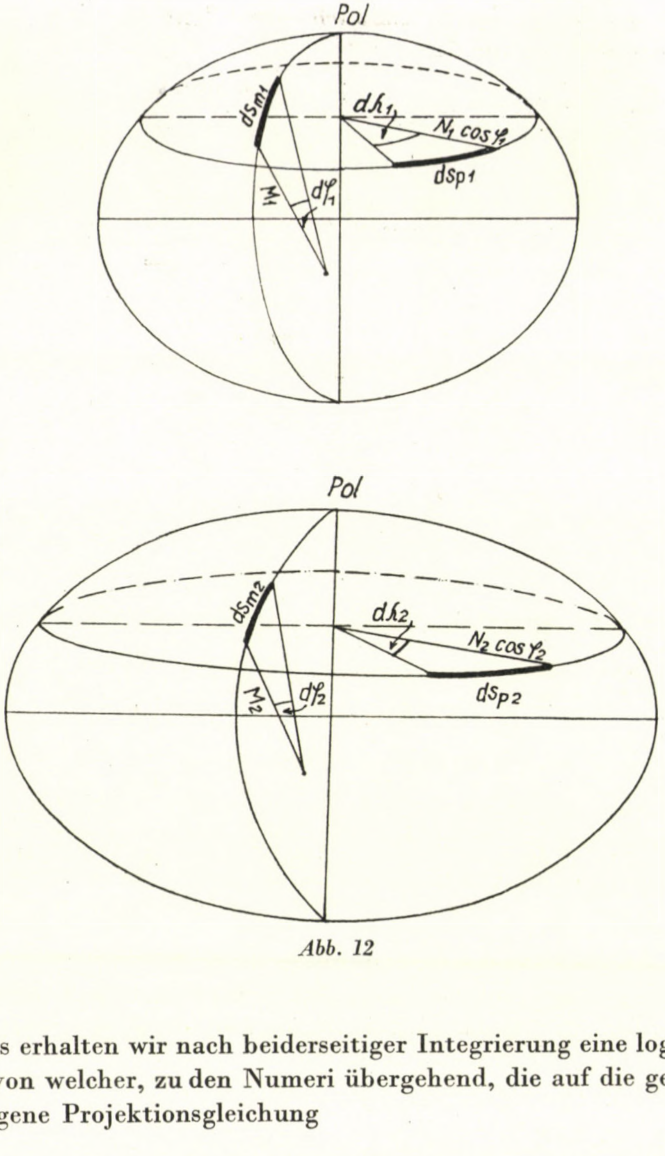


Abb. 12

Daraus erhalten wir nach beiderseitiger Integrierung eine logarithmische Gleichung, von welcher, zu den Numeri übergehend, die auf die geographische Breite bezogene Projektionsgleichung

$$\left[\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_2}{2}\right)\right]\left(\frac{1-e_2\sin\varphi_2}{1+e_2\sin\varphi_2}\right)^{\frac{e_2}{2}}=k\left[\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi_1}{2}\right)\right]\left(\frac{1-e_1\sin\varphi_1}{1+e_1\sin\varphi_1}\right)^{\frac{ne_1}{2}}$$

ist. Hier sind sowohl k als auch n aus den weiteren Bedingungen der Projektion bestimmbare Projektionsfaktoren, e ist die Exzentrizität der Ellipsoide. Die auf die geographische Länge bezogene Projektionsgleichung ist, wie bereits erwähnt:

$$\lambda_2 = n\lambda_1 \,.$$

In meiner früheren Studie habe ich — aus den vorher erwähnten weiteren Projektionsbedingungen die für die Geodäsie reellen ausgewählt — zu einer jeden Variante die Ausdrücke der Faktoren n und k bestimmt.

Nun wollen wir uns mit diesen nicht befassen, sondern die *verschobene und verdrehte Lage* der Ellipsoide behandeln.

Das Maß der Verschiebung wird durch die zwischen den auf die beiden Ellipsoide bezogenen geographischen Koordinaten auftretende Differenz des in der Mitte des zu untersuchenden Gebietes auserwählten Oberflächen-

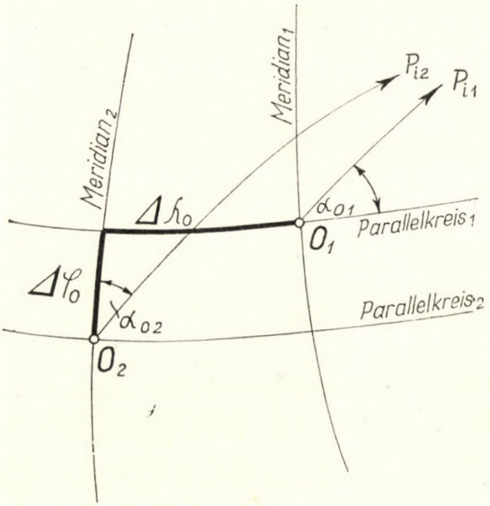


Abb. 13

punktes — im weiteren Anfangspunkt genannt — bestimmt. Das Maß der Verdrehung wird aber durch die Differenz der Azimutwerte im Anfangspunkt der vom Anfangspunkt ausgehenden geodätischen Linien an beiden Ellipsoiden festgestellt. Die Verschiebung (Abb. 13) ist also durch die Werte

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_{02} - \varphi_{01}, \quad \Delta\lambda_0 = \lambda_{02} - \delta_{01},$$

die Verdrehung aber durch die Werte

$$\varepsilon_0 = \alpha_{02} - \alpha_{01}$$

charakterisiert. In der Praxis sind alle drei Werte gering, sie betragen höchstens einige Sekunden.

Wie bereits erwähnt, kann die Verschiebung und Verdrehung der Ellipsoide auch so aufgefaßt werden, als ob die Ellipsoide zentrisch wären und das Triangulationsnetz entrückt würde.

Beträgt die Veränderung der geographischen Breite des Anfangspunktes den Wert $\Delta\varphi_0$, so ist die Veränderung der geographischen Koordinaten eines beliebigen Netzpunktes P_i:

$$\Delta\varphi_i = -\frac{M_0}{M_i}\left[\sin\alpha_0 \sin\alpha_i \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s}\right)_i - \cos\alpha_0 \cos\alpha_i\right]\Delta\varphi_0 = C_i\,\Delta\varphi_0\,,$$

$$\Delta\lambda_i = +\frac{M_0}{N_i}\,\frac{\sin(\lambda_i-\lambda_0)}{\operatorname{ctg}\varphi_i}\,\Delta\varphi_0 = D_i\,\Delta\varphi_0\,.$$

Das Azimut α bezieht sich auf die den Anfangspunkt mit dem anderen Netzpunkt verbindende geodätische Linie; s ist die Länge des geodätischen Linienteiles und m die sog. reduzierte Länge desselben.

Verändert sich die geographische Länge des Anfangspunktes um $\Delta\lambda_0$, so ist auf sämtliche Netzpunkte bezogen

$$\Delta\lambda_i = \Delta\lambda_0\,.$$

$\Delta\lambda_0$ hat auf die geographischen Breiten keine Wirkung.

Verdreht sich das Netz um den Anfangspunkt um einen Winkel ε, so ist die Veränderung der geographischen Koordinaten eines Netzpunktes:

$$\Delta\varphi_i = +\frac{m\sin\alpha_i}{M_i}\,\varepsilon = A_i\,\varepsilon\,,$$

$$\Delta\lambda_i = -\frac{m\cos\alpha_i}{M_i}\,\varepsilon = B_i\,\varepsilon.$$

Die verschiedenen drei Bewegungen verursachen aber in den geographischen Koordinaten eines beliebigen Netzpunktes folgende Veränderungen:

$$\Delta\varphi_i = A_i\,\varepsilon + C_i\,\Delta\varphi_0\,,$$

$$\Delta\lambda_i = B_i\,\varepsilon + D_i\,\Delta\varphi_0 + \Delta\lambda_0\,.$$

Sind $\Delta\varphi_0$, $\Delta\lambda_0$ und ε bekannt, so können — nach der Bestimmung der $A \div D$ Werte für sämtliche Netzpunkte — die Veränderungen der geographischen Breiten und Längen bestimmt werden.

Das Projektionsverfahren ergibt sich jetzt schon von selbst: Die geographischen Koordinaten der projizierenden Punkte müssen laut der vorherigen Formeln verändert werden, und man muß das auf die Ellipsoide zentrischer Lage bezogene Projektionsverfahren auf das so transformierte Netz anwenden. Die verschiedene Auswahl der Faktoren n und k verursacht verschiedene Varianten der Projektion. Sie müssen in jedem Falle so gewählt werden, daß für den Anfangspunkt die Bedingung

$$\varphi_{02} = \varphi_{01} + \Delta\varphi_0$$

befriedigt werde.

Wollen wir ein auf einem Ellipsoid entwickeltes Triangulationsnetz an einem *neu erwählten moderneren Ellipsoid* umführen, so gibt die höhere Geodäsie aufgrund irgendwelcher Erwägungen oder Messungen die Transformationsfaktoren; oder es wird als Bedingung gestellt, daß am neuen Ellipsoid die ellipsoidischen geographischen Koordinaten sämtlicher Neztpunkte, in welchen auch geographische Ortsbestimmung — astronomische Messungen — vollzogen wurde, je mehr die mit astronomischen Messungen bestimmten Koordinaten annähern. Es wird ev. vorgeschrieben, daß die Quadratsumme der *Lotabweichungen* das Minimum sei. In den beiden letzten Fällen kann das Verfahren der Ausgleichungsrechnung zur Bestimmung der Koeffizienten angewendet werden. Als Vermittlungsgleichung zu den geographischen Breiten dient der folgende logarithmische Zusammenhang:

$$\ln\left\{\left[\mathrm{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_2}{2}\right)\right]\left(\frac{1-e_2\sin\varphi_2}{1+e_2\sin\varphi_2}\right)^{\frac{e_2}{2}}\right\} =$$

$$= \ln k + n\ln\left\{\left[\mathrm{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi_1 + C\Delta\varphi_0 + A\varepsilon}{2}\right)\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{1-e_1\sin(\varphi_1+C\Delta\varphi_0+A\varepsilon)}{1+e_1\sin(\varphi_1+C\Delta\varphi_0+A\varepsilon)}\right)^{\frac{e_1}{2}}\right\}.$$

Daraus kann durch Reihenentwicklung die folgende Verbesserungsgleichung hergestellt werden:

$$v_\varphi = a\delta n + b\delta k + c\delta\varepsilon + d\delta\Delta\varphi_0 + l,$$

wo δn, δk, $\delta\varepsilon$ und $\delta\Delta\varphi_0$ die Änderungen der vorher angenommenen Näherungswerte und l das Absolutglied darstellen.

Die Vermittlungsgleichung für die geographischen Längen ist:

$$\lambda_2 = n(\lambda_1 + D\Delta\varphi_0 + B\varepsilon - \Delta\lambda_{01}) + \lambda_{01} + \Delta\lambda_0,$$

aus welcher die Verbesserungsgleichung

$$v_\lambda = a'\delta n + c'\delta\varepsilon + d'\delta\Delta\varphi_0 + e'\delta\Delta\lambda_0 + l'$$

gewonnen wird. Die Zwangsbedingung

$$\varphi_{02} = \varphi_{01} + \Delta\varphi_0$$

muß noch befriedigt werden.

Wird für einen jeden Netzpunkt, in dem geographische Ortsbestimmung vollzogen worden ist, je ein Verbesserungs-Gleichungspaar aufgeschrieben, so können die wahrscheinlichsten Werte der Transformationskoeffizienten und der Projektionsfaktoren k und n bestimmt werden.

*

Es wird in einem Lande meistens dann ein neues Ellipsoid eingeführt, wenn ein *neues Präzisions-Triangulationsnetz* entwickelt wird. Wie bereits erwähnt, besteht der Zusammenhang zwischen dem alten und dem neuen Netz nur darin, daß ein Teil der Grundpunkte in beiden Netzen dieselben sind. In diesem Falle besteht die Bedingung der Ausgleichung darin, daß die vom ersten auf das zweite Ellipsoid auf Projektionswege umgerechneten Koordinaten solcher Punkte je mehr die am zweiten Ellipsoid bestimmten Koordinaten annähern. Dadurch gewinnen wir die Charakteristiken $\Delta\varphi_0$, $\Delta\lambda_0$ und ε der gegenseitigen Lage der Ellipsoide und es können solche Transformations-Projektionsgleichungen zwischen den beiden Ellipsoiden aufgestellt werden, mit deren Hilfe die Punkte des alten Netzes, die nicht zu den Punkten des neuen gehören, auf das zweite Ellipsoid projiziert, d. h. am besten unter die Punkte des neuen Netzes eingegliedert werden können.

IV

In der letzten Zeit untersuchten wir ein am *alten Ellipsoid* angeordnetes *altes* und ein an einem *neueren Ellipsoid* entwickeltes *neues Triangulationsnetz* eines größeren Gebietes. Wir kamen zu der Erkenntnis, daß zwischen den Koordinaten der identischen Punkte der zwei Netze nicht nur wegen der verschiedenen Lage und der Differenz ihrer Grundmaße Unterschiede bestehen, sondern daß wegen der verschiedenen Meß- und Rechenmethoden bzw. wegen deren verschiedener Genauigkeitsverhältnisse sogar ziemlich beträchtliche Differenzen auftreten; die letzteren sind ja allgemein von einer Ordnung mehrerer Dezimeter, fallweise sogar Meter, und sie sind nicht systematisch. Dies ist die Lage zwischen den alten und neuen Netzen sämtlicher Länder. Teilweise deshalb, teilweise darum, weil die mittleren Fehler der geographischen Ortsbestimmung in linearem Sinne allgemein von Meter-Ordnung sind, ferner weil die im vorherigen erörterte Methode zur Untersuchung des Verhältnisses der beiden Ellipsoide eine beträchtliche Rechenarbeit benötigt, dachten wir daran, ob man nicht ev. für ein relativ nicht großes Gebiet — z. B. für ein kleineres Land — das Problem auch einfacher Lösen könnte. Am *Lehrstuhl für höhere Geodäsie der Technischen Universität Budapest* befaßten wir uns auch weiterhin mit der Frage. Diese Untersuchungen und Berechnungen wurden bereits vom E. Hőnyi durchgeführt.

Das Ergebnis der neuen Untersuchung ist, daß man von beiden Ellipsoiden die gemeinsamen Punkte der beiden Netze auf eine stereographische Ebene durch je eine an die Ellipsoide angeschmiegte Kugel mit mittlerem Krümmungsradius projizieren muß, und aufgrund der dort gewonnenen ebenen Koordinaten bzw. Koordinaten-Differenzen mit einer einfachen *Helmertschen Transformations-Ausgleichung* die wahrscheinlichsten Werte der Verschiebung des gemeinsamen Anfangspunktes der beiden Netze, der Verdrehung des Netzes und der Maßstabsänderungs-Koeffizienten der von dem Anfangspunkt ausgehenden geodätischen Linienteile, d. h. eigentlich der Charakteristiken der gegenseitigen Lage der beiden Ellipsoide — oder mit anderen Worten der beiden Netze — bestimmt werden können.

Die Konzeption wurde auf zwei grundsätzliche Umstände basiert. Der erste bestand darin, daß sich die *Bogenlängen* vom Ellipsoid durch die *Gaußsche winkeltreue Projektion* auf die Kugel übergehend *praktisch nicht verändern.* (Unter dem Ausdruck »praktisch« verstehen wir auch im weiteren, daß die Abweichungen eine Größenordnung von Millimetern oder Zentimetern, höchstens bei sehr großen Entfernungen die von Dezimetern betragen, d. h., sie sind so klein, daß sie neben den Widersprüchen der zwei Netze ruhig vernachlässigt werden können.) So beträgt die Längenverzerrung z. B. für Ungarn vom ungefähr in der Mitte des Landes gewählten Anfangspunkt bis zur größten Entfernung ca. 1/14 000 000, die für eine 400 km Länge 3 cm bedeutet. *Praktisch verändern sich* auch die *Anfangsazimute der vom Anfangspunkt ausgehenden geodätischen Linien nicht*; insbesonders verschwinden die Verzerrungswerte, die in den Differenzen der von den beiden Ellipsoiden projizierten Längen bzw. Azimute der von dem Anfangspunkt zu den identischen Punkten laufenden geodätischen Linienteile zum Vorschein kommen.

Der andere Umstand ist folgender: wird *wo immer in dem Gebiet innerhalb einer gewissen Grenze eine Kugel mit mittlerem Krümmungsradius an das Ellipsoid* gepaßt, und wird als Anfangspunkt der stereographischen Projektion *derselbe Punkt* gewählt — obwohl dessen geographische Koordinaten an verschieden angelegten Kugeln verschieden sind —, ergeben sich die stereographischen ebenen Koordinaten praktisch in jedem Falle einander gleich. Die Erklärung hierfür beruht auf drei einfachen Zusammenhängen (Abb. 14). Der erste ist, daß zu gleichen Bogenlängen an Kugeln von verschiedenem Radius dem Radius verkehrt proportionale Zentriwinkel gehören; der zweite, daß die vom Anfangspunkt gemessene Entfernung an der stereographischen Projektion

$$q = 2R \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = 2R \operatorname{tg} \frac{s}{2R}$$

ist, und die Tangentenkurve nebst den in Frage kommenden ϑ-Werten beinahe gerade ist. Der dritte Zusammenhang besagt, daß der ebene Richtungswinkel

δ bezüglich der aus dem Anfangspunkt ausgehenden Richtungen dem sphärischen Azimut α gleich ist, d. h.,

$$\delta = \alpha .$$

Ähnlich ist die Lage auch bezüglich der an die beiden Ellipsoide anzuschmiegenden Kugeln. Wird z. B. in Ungarns mittlerer geographischer Breite, bei 47°10′ eine Kugel an das *Besselsche* und das *Krassowskysche Ellipsoid* angepaßt, so ist der zur ersten Kugel gehörige Radius auf km aufgerundet

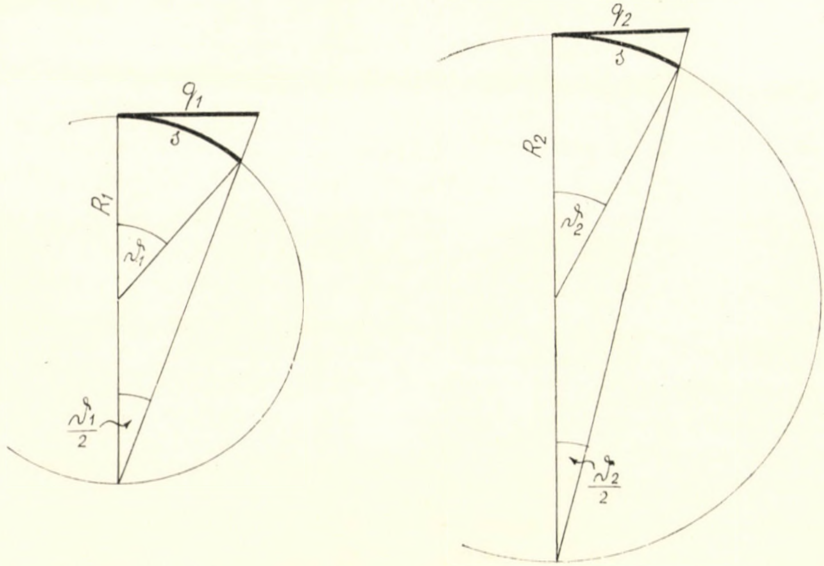


Abb. 14

6379 km, der zur zweiten gehörige aber 6380 km. (Die Differenz der nicht aufgerundeten Werte beträgt weniger als 1 km!) Von den beiden Kugeln die Differenz der stereographischen Entfernungen abgeleitet ist:

$$q_1 - q_2 = \frac{s^3}{12} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) .$$

Diese Differenz beträgt z. B. für eine Länge von 200 km 5 mm und für eine Länge von 400 km auch nur 4 cm. In Ungarn gibt es keine größere zentrale Entfernung als 400 km.

Bei einem wesentlich größeren Gebiet als Ungarn kann man die Daten der einen Kugel auf die Maße der anderen Kugel einfach aufgrund des Zusammenhanges

$$\vartheta_i' = \vartheta_i \frac{R_2}{R_1}$$

reduzieren. Werden nun die stereographischen Entfernungen von beiden Systemen mit dem Radius R_2 berechnet, so verschwindet die Differenz $q_1 - q_2$ vollkommen.

Da die erörterten Umstände — die zu Beginn nur Voraussetzungen waren — bestehen, kann festgestellt werden, daß die Differenzen der geographischen Koordinaten der identischen Punkte der an zwei verschiedenen Ellipsoiden gelegenen Netze praktisch durch die Differenzen der abgeleiteten ebenen Koordinaten sehr gut dargestellt werden (Abb. 15). Ein bedeutender Faktor der Differenzen ist der von der verschiedenen Lage beider Ellipsoide

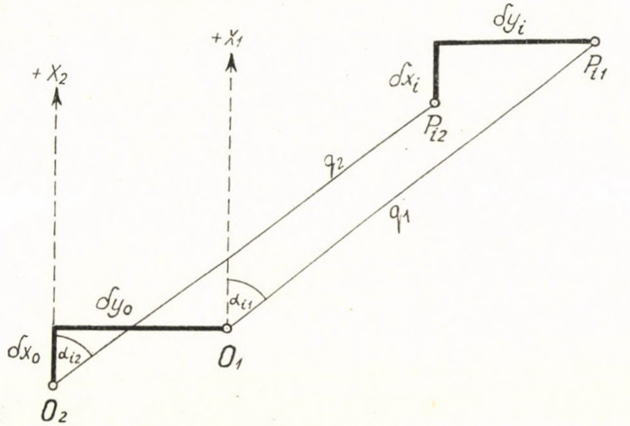


Abb. 15

stammende regelmäßige Teil, einen wesentlich kleineren Faktor bildet meistens der von den Widersprüchen der beiden Netze stammende zufällige Teil. Durch Anwendung der *Helmertschen Transformations-Ausgleichsrechnung*, gelangen wir tatsächlich zum wahrscheinlichsten Wert der die Lage charakterisierenden Faktoren.

*

Es gehört zwar nicht zur Lösung der geodätischen Hauptaufgaben und auch nicht zur Untersuchung der relativen Lage zweier Ellipsoide, doch möchte ich zum Schluß bemerken, daß wir auch die Untersuchung *der Loxodromen des Ellipsoides* mit Erfolg durch die Anwendung von Projektion, an der normal gelegenen winkeltreuen Zylinderprojektion, an der allgemein bekannten *Mercator-Projektion* vollzogen haben.

SCHRIFTTUM

1. HAZAY, I.—TÁRCZY-HORNOCH, A.: A Gauss-Krüger koordináták számítása (Berechnung der Gauß-Krügerschen Koordinaten). Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.
2. HAZAY, I.: Földi vetületek (Terrestrische Projektionen). Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.

3. HAZAY, I.: Untersuchungen über die Projektion zwischen Ellipsoiden und über die Bestimmung der relativen Lage der Ellipsoide durch Projektion. *Acta Techn. Hung.* XIV (1956).
4. HAZAY, I.: Beiträge zur Bestimmung der Konstanten bei der Projektion zwischen Ellipsoiden und die Lage der Ellipsoide. *Acta Techn. Hung.* XIV (1956).
5. HAZAY, I.: Vetülettan (Projektionslehre). Tankönyvkiadó, Budapest, 1964.
6. HOMORÓDI, L.: Felsőgeodézia (Höhere Geodäsie). Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
7. HAZAY, I.: Über die Loxodromen und die Orthodromen. *Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica* 1 (1966).
8. HŐNYI, E.: Két földi ellipszoid relatív helyzetének meghatározása a háromszögelési hálózat alapján (Die Bestimmung der relativen Lage von zwei terrestrischen Ellipsoiden aufgrund des Triangulationsnetzes). *Geodézia és Kartográfia* 1967.

THE USE OF PROJECTIONS FOR COMPUTATIONS ON THE ELLIPSOID

I. HAZAY

SUMMARY

Complicated computations of the ellipsoid can be easily made on a suitable plane projection of the ellipsoid. Such a suitable projection is that of Gauss-Krüger, if the prime meridian is appropriately chosen.

The position of two ellipsoids in respect to each other can also be studied by means of projections.

In on one of the ellipsoids one has an older net, and on the other one a new net is given, the differences may occur between the two nets. So the rigorosity of the investigations can be somewhat reduced, and the relative position of both ellipsoids can be determined more simply. From both ellipsoids to turn to the stereographic plane projection using a sphere with a mean radius, and there the position determining data of the ellipsoids can easily be found by a simple Helmert-transformation.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ЭЛЛИПСОИДЕ

И. ХАЗАИ

РЕЗЮМЕ

Сложные вычисления на эллипсоиде можно производить проще, если сделать их в какой-либо удобной проекции эллипсоида на плоскости. Удобной проекцией является, например, проекция Гаусса—Крюгера, если правильно выберем начальный меридиан.

Расположение друг относительно друга двух разных эллипсоидов также можем рассматривать через проекции.

Если на более старом эллипсоиде расположена старая, а на более новом — новая сеть, то показываются существеные различия и в согласованности двух сетей. Поэтому при исследовании можем допустить несколько меньшую точность и относительное положение двух эллипсоидов может быть установлено и проще. С обоих эллипсоидов необходимо переходить путем т. н. шара среднего радиуса к стереографической проекции на плоскости, а там определяющие положение эллипсоидов могут быть установлены простым преобразованием Гельмерта.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (3—4), pp. 281—295 (1969)

GEZEITENERSCHEINUNGEN AM BALATON

M. RÓZSA
KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
INSTITUT FÜR BAUWISSENSCHAFT, BUDAPEST

[Eingegangen am 22. April 1968]

In der Arbeit wird nachgewiesen, daß die regelmäßigen Schwankungen des Wasserniveaus am Balaton, die eine Periode von etwa 12 Stunden haben, durch die Änderungen der Anziehungskraft des Mondes und der Sonne hervorgerufen werden.

Einleitung

J. CHOLNOKY untersuchte im Auftrag der Ungarischen Geographischen Gesellschaft zwischen 1892 und 1896 die Niveauschwankungen der Oberfläche des Balatons und die bei der Fähre von Tihany auftretenden Strömungen eingehend. Über die Ergebnisse der Untersuchungen hat er in seinen Büchern [1, 2] ausführlich berichtet.

Auf Grund der Daten der bei Balatonkenese und Keszthely aufgestellten Limnographen (Registriergeräte des Wasserniveaus) wurden die Niveauänderungen des Balatons von CHOLNOKY in zwei Gruppen geteilt: in eine regelmäßige und in eine unregelmäßige. Unregelmäßig wurden die Niveauänderungen ohne nachweisbare Periode, regelmäßig die mit bestimmter Periode, annähernd als Sinuskurve ablaufenden Änderungen bezeichnet. (Die einzelnen Wasserwellen werden von den Limnographen nicht registriert.)

Die unregelmäßigen, relativ schnell ablaufenden Niveauänderungen werden — wie es auch schon CHOLNOKY festgestellt hat — durch Wind- und Luftdruckänderungen hervorgerufen. Eine Luftdruckdifferenz von 6 mm verursacht an den beiden Enden des Balatons eine statische Niveauänderung von 8 cm, diese kann sich durch dynamische Effekte auf 20—30 cm vergrößern.

Die regelmäßigen Niveauschwankungen des Wassers treten nach den Beobachtungen von CHOLNOKY in erster Reihe in der Längsrichtung des Balatons auf. Für sie ist es charakteristisch, daß im Zeitpunkt des Maximums bei Balatonkenese der Wasserstand bei Keszthely niedrig ist und umgekehrt. Die Zeit einer vollständigen »Schwingung« beträgt etwa 12 Stunden; die Amplitude der Schwingungen liegt in der Größenordnung von 1/2 cm. Diese Schwingungen konnten nur bei günstigen Verhältnissen, d. h. bei Windstille beobachtet werden. Die Sinuskurve wurde vom zeitlichen Ablauf der Schwingung am besten dann angenähert, als der See mit einem mächtigen Eispanzer bedeckt war.

Cholnoky deutete diese regelmäßigen Schwingungen des Balatons als Eigenschwingungen mit einem einzigen Knotenpunkt, die durch Änderungen im Wind- bzw. Luftdruck angeregt werden. Diese Annahme scheint durch die Tatsache gerechtfertigt zu sein, daß nach den Untersuchungen von Forel [3] der Genfer See zeitweise, ohne Zweifel infolge der Luftdruckänderungen in eine Schwingung mit großer Amplitude gerät. Ähnliche, als »Seiche« genannte Erscheinung wurde auch noch an anderen schweizerischen Seen beobachtet [4, 5, 6]. Diese Seen sind aber alle tiefer als 100 m und die Schwingungsperiode liegt unter 75 Minuten. Daher fand es Cholnoky sehr überraschend, daß die »Seiche« auf dem seichten, kaum 2—3 m tiefen Balaton auch auftreten kann, noch dazu mit der ungewöhnlich langen Schwingungsdauer von 12 Stunden. Nach seiner Bemerkung ist das »die Pendelschwingung mit der längsten Zeitdauer, die jemals von Menschen auf der Erde gemessen wurde« [2; S. 118]. Nach seiner Berechnung entspricht diese Schwingungsdauer der eines 1 600 000 km langen Pendels.

In der vorliegenden Arbeit wird nachgewiesen, daß die regelmäßige Schwingung des Wasserniveaus des Balatons keine »Seiche«, sondern eine durch periodische Schwankungen der Schwerkraft des Mondes und der Sonne hervorgerufene Gezeitenerscheinung sei. Die Amplituden und Zeitdauer der von Cholnoky beobachteten Schwingungen sind nämlich den mit Hilfe der Gezeitentheorie berechneten Werten gleich.

Eine »Seiche« kann in der Längsrichtung des Balatons nicht auftreten, da die Dämpfung der Schwingungen in dieser Richtung wegen der geringen Tiefe des Sees außerordentlich groß wäre. Die durch Luftdruckunterschied entstandene Denivellation geht daher mit aperiodischer (oder fast aperiodischer) Bewegung in den Gleichgewichtszustand über. Die Dämpfung ist auf dem eingefrorenen Balaton noch größer als im Falle von freier Wasseroberfläche, da auch zwischen Wasser und Eis eine Reibung entsteht. Es sei bemerkt, daß die durch Cholnoky berechnete Eigenschwingungsdauer von 19 Stunden mit der beobachteten überhaupt nicht identisch ist.

Die Schwankungen des Wasserniveaus am Balaton infolge des Gezeiteneffektes

Eine exakte Berechnung der Gezeiteneffekte ist sehr langwierig, wobei die gewonnenen Ergebnisse mit den tatsächlichen Werten nur annähernd übereinstimmen. Zwecks Vereinfachung der Berechnungen werden folgende Annäherungen eingeführt:

1. Die Erde ist kugelförmig, ihr Radius ist dem mittleren Erdradius gleich.

2. Die Entfernung zwischen Mond und Erde ist konstant und der mittleren Mondentfernung gleich.

3. Die Entfernung zwischen Sonne und Erde ist konstant und der mittleren Sonnenentfernung gleich.

4. Die Ebene der Mondbahn liegt in der der Erde, d. h., die scheinbare Mondbahn ist die Ekliptik.

5. Die Gezeitenbewegung der festen Erdkruste wird nicht berücksichtigt.

6. Die Wasseroberfläche des Balatons wird als eine Equipotentiale betrachtet, d. h., daß nur der »statische« Gezeiteneffekt in Betracht gezogen wird.

7. Die Lokalzeit wird der mitteleuropäischen Zonenzeit gleich genommen.

8. Der durch die zu den beiden Untersuchungspunkten gehörenden (zum Erdmittelpunkt gezogenen) Radien eingeschlossene Winkel ist so klein, daß sein Sinus dem in Radian gemessenen Winkel, sein Cosinus 1 gleichgesetzt werden kann.

Zuerst wird der Gezeiteneffekt des Mondes bestimmt. Die Anziehungskraft des Mondes ist auf eine Masseneinheit im Mittelpunkt der Erde laut des Newtonschen Gravitationsgesetzes:

$$a_0 = \frac{M_H}{M_F} \left(\frac{r}{R_H} \right)^2 g, \tag{1}$$

wo M_H die Masse des Mondes,
M_F die Masse der Erde,
r den Erdradius,
R_H die Entfernung vom Mond zur Erde,
g die Gravitationsbeschleunigung auf Meeresniveau
bedeutet.

Diese Kraft wirkt entlang der die Mittelpunkte von Mond und Erde verbindenden Geraden in der Richtung zum Mond (Abb. 1).

Infolge der Rotation des Systems Erde—Mond um seinen gemeinsamen Schwerpunkt ist im Mittelpunkt der Erde die auf die Masseneinheit wirkende Zentrifugalkraft gleich groß, jedoch von entgegengesetzter Richtung als die Anziehungskraft des Mondes.

In den Punkten an der Erdoberfläche ändert sich die auf die Masseneinheit wirkende Anziehungskraft des Mondes a laut des Newtonschen Gesetzes von der Lage des Punktes abhängig, während die Zentrifugalkraft infolge der Rotation des Systems Erde—Mond in jedem Punkt der Erde der im Mittelpunkt der Erde wirkenden Zentrifugalkraft a_0 gleich groß ist und dieselbe Richtung hat. (Ein jeder Punkt der Erde beschreibt eine Kreisbahn mit dem Radius

$$R_H \frac{M_H}{M_F + M_H}$$

um den Schwerpunkt des Systems Erde—Mond.) Im Punkt E (Abb. 1) ist die x-Komponente der Anziehungskraft a des Mondes bei Vernachlässigung der Ableitungen höherer Ordnung:

$$a_x = \frac{M_H}{M_F}\left(\frac{r}{R_H}\right)^2 g + 2\,\frac{M_H}{M_F}\left(\frac{r}{R_H}\right)^3 g \cos z_H\,, \tag{2}$$

wo z_H die geozentrische Zenitentfernung des Mondes bedeutet.

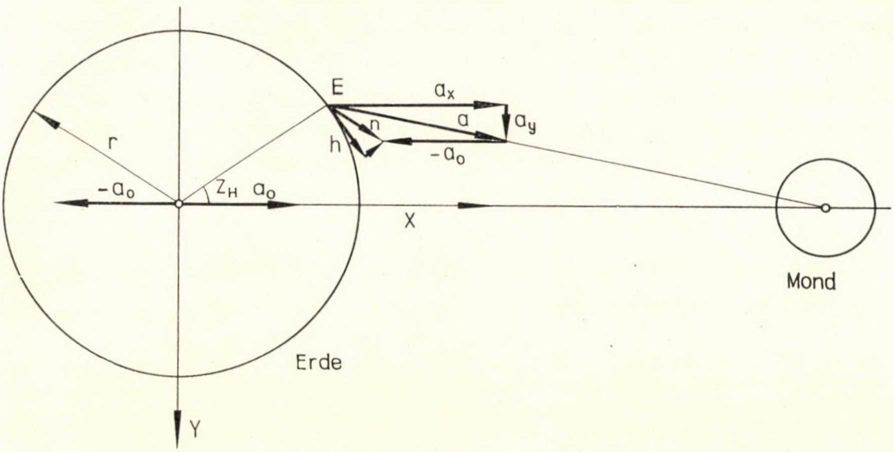


Abb. 1. Gezeiteneffekt des Mondes

Die y-Komponente der Anziehungskraft des Mondes beträgt im Punkt E nach Vernachlässigung der Ableitungen höherer Ordnung:

$$a_y = \frac{M_H}{M_F}\left(\frac{r}{R_H}\right)^3 g \sin z_H\,. \tag{3}$$

Der Gezeiteneffekt wird durch die Horizontalkomponente h der Resultierenden n der Anziehungskraft des Mondes und Zentrifugalkraft hervorgerufen:

$$h = (a_x - a_0)\sin z_H + a_y \cos z_H\,. \tag{4}$$

Setzt man die Ausdrücke (1), (2) und (3) in (4) ein, so erhält man:

$$h = \frac{3}{2}\,\frac{M_H}{M_F}\left(\frac{r}{R_H}\right)^3 g \sin 2\,z_H\,. \tag{5}$$

Zwischen zwei beliebigen Punkten der Erdoberfläche, die mit 1 und

2 bezeichnet werden sollen, lautet die durch den Gezeiteneffekt des Mondes verursachte Potentialdifferenz:

$$p_{H1,2} = -\int_{z_{H1}}^{z_{H2}} hr dz_H \,, \tag{6}$$

wo z_{H1} die geozentrische Zenitentfernung des Mondes in Punkt 1,
z_{H2} die geozentrische Zenitentfernung des Mondes in Punkt 2
bedeutet.

Setzt man den Ausdruck (5) in die Gleichung (6) ein und führt die Integration durch, so erhält man nach einfachen Umformungen:

$$p_{H1,2} = \frac{3}{2} \frac{M_H}{M_F} \frac{r^4}{R_H^3} g (\cos^2 z_{H2} - \cos^2 z_{H1}) \,. \tag{7}$$

Nach einer analogen Berechnung erhält man die durch den Gezeiteneffekt der Sonne hervorgerufene Potentialdifferenz zwischen den Punkten 1 und 2:

$$p_{N1,2} = \frac{3}{2} \frac{M_N}{M_F} \frac{r^4}{R_N^3} g (\cos^2 z_{N2} - \cos^2 z_{N1}), \tag{8}$$

wo M_N die Masse der Sonne,
R_N die Entfernung zwischen Sonne und Erde,
z_{N1} die Zenitentfernung der Sonne im Punkt 1,
z_{N2} die Zenitentfernung der Sonne im Punkt 2
bedeutet.

(Die Drehung der Erde um die eigene Achse verursacht zwischen den Punkten 1 und 2 eine Potentialdifferenz von konstanter Größe, die jedoch vom Gesichtspunkt des Gezeiteneffektes aus uninteressant ist.)

Wenn man die bekannten astronomischen Zahlenwerte in (7) und (8) einsetzt, erhält man:

$$p_{H1,2} = 53{,}4 (\cos^2 z_{H2} - \cos^2 z_{H1}); [\mathrm{cm}] \tag{7*}$$

$$p_{N1,2} = 24{,}6 (\cos^2 z_{N2} - \cos^2 z_{N1}); [\mathrm{cm}] \,. \tag{8*}$$

Die durch Mond und Sonne hervorgerufene totale Potentialdifferenz wird:

$$p_{1,2} = p_{H1,2} + p_{N1,2} \,. \tag{9}$$

Die Aufgabe besteht nun darin, die Zahlenwerte von (7*) und (8*) als Funktion der Zeit zu bestimmen. Die Berechnung erfolgt für beide Gleichungen in gleicher Weise, weshalb sie hier nur für (7*) durchgeführt wird.

Nach dem auf die Seiten bezogenen sphärischen Cosinussatz bestehen folgende Zusammenhänge:

$$\cos z_{H1} = \sin \varphi_1 \sin \delta_H + \cos \varphi_1 \cos \delta_H \cos \tau_{H1} \tag{10}$$

$$\cos z_{H2} = \sin \varphi_2 \sin \delta_H + \cos \varphi_2 \cos \delta_H \cos \tau_{H2}, \tag{11}$$

wo φ_1 die geographische Breite des Punktes 1,
φ_2 die geographische Breite des Punktes 2,
δ_H die Monddeklination,
τ_{H1} den Stundenwinkel des Mondes im Punkt 1,
τ_{H2} den Stundenwinkel des Mondes im Punkt 2
bedeutet.

Man bildet das Quadrat von (10) und (11) und subtrahiert (11) aus (10), dann erhält man:

$$\begin{aligned} \cos^2 z_{H2} - \cos^2 z_{H1} &= (\cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2) \sin^2 \delta_H + \\ &+ (\cos^2 \varphi_2 \cos^2 \tau_{H2} - \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \tau_{H1}) \cos^2 \delta_H + \\ &+ (\sin 2\varphi_2 \cos \tau_{H2} - \sin 2\varphi_1 \cos \tau_{H1}) \cdot \frac{\sin 2\delta_H}{2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Nach Einführung folgender Symbole:

$$\tau_H = \frac{\tau_{H1} + \tau_{H2}}{2},$$

$$\Delta\tau = \tau_{H1} - \tau_{H2},$$

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2},$$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2;$$

sowie nach Berücksichtigung der Annäherungen unter 8. erhält man folgende Zusammenhänge:

$$\cos^2 \varphi_1 = \cos^2 \varphi - \frac{\sin 2\varphi \cdot \Delta\varphi}{2};$$

$$\cos^2 \varphi_2 = \cos^2 \varphi + \frac{\sin 2\varphi \cdot \Delta\varphi}{2};$$

$$\begin{aligned} &\cos^2 \varphi_2 \cos^2 \tau_{H2} - \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \tau_{H1} = \\ &\qquad = \cos^2 \varphi \sin 2\tau_H \cdot \Delta\tau + \sin 2\varphi \cos^2 \tau_H \cdot \Delta\varphi; \\ &\sin 2\varphi_2 \cos \tau_{H2} - \sin 2\varphi_1 \cos \tau_{H1} = \\ &\qquad = -2 \cos 2\varphi \cos \tau_H \cdot \Delta\varphi + \sin 2\varphi \sin \tau_H \cdot \Delta\tau. \end{aligned} \tag{13}$$

Setzt man die Ausdrücke (13) in die Gleichung (12) ein, erhält man nach entsprechender Umordnung:

$$\begin{aligned}\cos^2 z_{H2} - \cos^2 z_{H1} = &-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\cdot\Delta\varphi + \frac{2}{3}\sin 2\varphi\cdot\Delta\varphi\cdot\cos 2\delta_H + \\ &+\cos^2\delta_H\left(\cos^2\varphi\cdot\Delta\tau\cdot\sin 2\tau_H + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cdot\Delta\varphi\cdot\cos 2\tau_H\right) + \\ &+\frac{\sin 2\delta_H}{2}(\sin 2\varphi\cdot\Delta\tau\cdot\sin\tau_H - 2\cos 2\varphi\cdot\Delta\varphi\cdot\cos\tau_H)\,.\end{aligned} \tag{14}$$

Durch analoge Berechnung erhält man:

$$\begin{aligned}\cos^2 z_{N2} - \cos^2 z_{N1} = &-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\cdot\Delta\varphi + \frac{3}{4}\sin 2\varphi\cdot\Delta\varphi\cdot\cos 2\delta_N + \\ &+\cos^2\delta_N\left(\cos^2\varphi\cdot\Delta\tau\cdot\sin 2\tau_N + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cdot\Delta\varphi\cdot\cos 2\tau_N\right) + \\ &+\frac{\sin 2\delta_N}{2}(\sin 2\varphi\cdot\Delta\tau\cdot\sin\tau_N - 2\cos 2\varphi\cdot\Delta\varphi\cdot\cos\tau_N)\,,\end{aligned} \tag{15}$$

wo δ_N den Mittelwert der Deklination der Sonne in den Punkten 1 und 2, τ_N den Mittelwert des Stundenwinkels der Sonne in den Punkten 1 und 2 bedeutet.

Setzt man die Formeln (14) und (15) in die Gleichungen (7*) und (8*) ein, so erhält man auf Grund von (9) die totale Potentialdifferenz $p_{1,2}$ als Funktion der Zeit. In dieser Formel können die konstante Potentialdifferenzen bedeutenden Glieder — das erste Glied rechts in (14) bzw. (15) — vernachlässigt werden, da eine konstante Potentialdifferenz keine Niveauänderung oder Strömung verursacht. Das zweite Glied rechts in (14) sowie (15) entspricht einer mit einer halbmonatigen bzw. halbjährigen Periode schwankenden Potentialdifferenz. Da am Balaton der Einfluß dieser langsamen Schwankungen auf die Strömung kaum nachgewiesen werden kann, werden diese Glieder ebenfalls vernachlässigt. Nach den obigen Vernachlässigungen gestaltet sich die Formel der die Gezeiten verursachenden totalen Potentialdifferenz wie folgt:

$$\begin{aligned}p_{1,2} = &\,53{,}4\cos^2\delta_H\left(\cos^2\varphi\cdot\Delta\tau\cdot\sin 2\tau_H + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cdot\Delta\varphi\cdot\cos 2\tau_H\right) + \\ &+26{,}7\sin 2\delta_H(\sin 2\varphi\cdot\Delta\tau\cdot\sin\tau_H - 2\cos 2\varphi\cdot\Delta\varphi\cdot\cos\tau_H) + \\ &+24{,}6\cos^2\delta_N\left(\cos^2\varphi\cdot\Delta\tau\cdot\sin 2\tau_N + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\cdot\Delta\varphi\cdot\cos 2\tau_N\right) + \\ &+12{,}3\sin 2\delta_N(\sin 2\varphi\cdot\Delta\tau\cdot\sin\tau_N - 2\cos 2\varphi\cdot\Delta\varphi\cdot\cos\tau_N)\,.\end{aligned} \tag{16}$$

Die Formel (16) wird zur Bestimmung der auf dem Balaton zwischen den beiden, voneinander entferntesten Punkten auftretenden Potentialdifferenz angewendet. Man nehme als Punkt 1 Balatonkenese, als Punkt 2 Keszthely, dann sind die geographischen Koordinaten dieser Punkte:

$$\varphi_1 = 47^\circ\ 02'; \qquad \lambda_1 = 18^\circ\ 08';$$

$$\varphi_2 = 46^\circ\ 43'; \qquad \lambda_2 = 17^\circ\ 14'.$$

Aus diesen Daten:

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 46^\circ\, 52';$$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0^\circ\ 19' = 0{,}0056 \text{ rad};$$

$$\Delta\tau = \tau_{H1} - \tau_{H2} = \lambda_1 - \lambda_2 = 0^\circ\ 54' = 0{,}0157 \text{ rad};$$

$$\cos^2\varphi \cdot \Delta\tau = 0{,}0073;$$

$$\frac{1}{2} \sin 2\,\varphi \cdot \Delta\varphi = 0{,}0028;$$

$$\sin 2\,\varphi \cdot \Delta\tau = 0{,}0157;$$

$$-2 \cos 2\,\varphi \cdot \Delta\varphi = 0{,}0007.$$

Diese Zahlenwerte setze man in Gleichung (16) ein:

$$\begin{aligned} p_{1,2} = {} & 53{,}4 \cos^2 \delta_H\,(0{,}0073 \sin 2\,\tau_H + 0{,}0028 \cos 2\,\tau_H) + \\ & + 26{,}7 \sin 2\,\delta_H\,(0{,}0157 \sin \tau_H + 0{,}0007 \cos \tau_H) + \\ & + 24{,}6 \cos^2 \delta_N\,(0{,}0073 \sin 2\,\tau_N + 0{,}0028 \cos 2\,\tau_N) + \\ & + 12{,}3 \sin 2\,\delta_N\,(0{,}0157 \sin \tau_N + 0{,}0007 \cos \tau_N). \end{aligned} \tag{16*}$$

Die Formel (16*) gibt die durch die Gezeiten verursachte Potentialdifferenz zwischen Balatonkenese und Keszthely als Funktion der Deklination und des Stundenwinkels von Mond und Sonne an. Letztere sind aus den astronomischen Tabellen bekannte Werte.

Auf Grund der Annäherungen 5. und 6. beträgt der Anstieg des Wasserniveaus bei Balatonkenese in Bezug auf das Niveau bei Keszthely:

$$v_{1,2} = -p_{1,2}\,, \tag{17}$$

d. h., (16*) gibt auch die Schwankung des Wasserniveaus annähernd an. Da die Deklination und die den Stundenwinkel beeinflußende Rektaszension von Mond und Sonne sich dauernd verändern, befolgt die Schwankung des Wasserniveaus sehr komplizierte Gesetzmäßigkeiten. Diese können besser überblickt werden, wenn man die Untersuchungen auf die Spezialfälle beschränkt, wenn die Rektaszension des Mondes bzw. der Sonne $\alpha = 0°, 90°, 180°$ oder $270°$ ist. Einfachheitshalber wird angenommen, daß die Rektaszension des Mondes und der Sonne beim Übergang der Sonne über dem örtlichen Meridian einer dieser Zahlen gleich ist und daß dieser Wert sich über die Zeitdauer von 12 Stunden vor und nach dem Übergang über dem Meridian nicht ändert.

Auf Grund obiger Annahmen gewinnt man aus den Gleichungen (16*) und (17) zur Berechnung der Niveauschwankungen folgende einfache Formeln:

1. *Die Sonne am Frühlingspunkt:*

$\alpha_N = 0°;\ \delta_N = 0°.$

a) Neumond:

$\alpha_H = 0°;\ \delta_H = 0°;\ \tau_H = \tau_N;$

$$v_{1,2} = -(53{,}4 + 24{,}6)\,(0{,}0073 \sin 2\,\tau_N + 0{,}0028 \cos 2\,\tau_N) \tag{18}$$

b) Erstes Viertel:

$\alpha_H = 90°;\ \delta_H = +23°\ 27';\ \tau_H = \tau_N - 90°;$

$$\begin{aligned} v_{1,2} = &-53{,}4 \cdot 0.842(-0{,}0073 \sin 2\,\tau_N - 0{,}0028 \cos 2\,\tau_N) -\\ &- 26{,}7 \cdot 0{,}730(-0{,}0157 \cos \tau_N + 0{,}0007 \sin \tau_N) -\\ &- 24{,}6(0{,}0073 \sin 2\,\tau_N + 0{,}0028 \cos 2\,\tau_N) \end{aligned} \tag{19}$$

c) Vollmond:

$\alpha_H = 180°;\ \delta_H = 0°;\ \tau_H = \tau_N - 180°;$

$v_{1,2} =$ wie (18).

d) Letztes Viertel:

$\alpha_H = 270°;\ \delta_H = -23°\ 27';\ \tau_H = \tau_N - 270°;$

$v_{1,2} =$ wie (19).

2. *Die Sonne am Herbstpunkt:*

$\alpha_N = 180°;\ \delta_N = 0°.$

a) Neumond:

$$\alpha_H = 180°; \; \delta_H = 0°; \; \tau_H = \tau_N;$$

$$v_{1,2} = \text{wie (18)}.$$

b) Erstes Viertel:

$$\alpha_H = 270°; \; \delta_H = -23° \; 27'; \; \tau_H = \tau_N - 90°;$$

$$v_{1,2} = -53{,}4 \cdot 0{,}842(-0{,}0073 \sin 2\,\tau_N - 0{,}0028 \cos 2\,\tau_N) +$$
$$+ 26{,}7 \cdot 0{,}730(-0{,}0157 \cos \tau_N + 0{,}0007 \sin \tau_N) -$$
$$- 24{,}6(0{,}0073 \sin 2\,\tau_N + 0{,}0028 \cos 2\,\tau_N)\,. \quad (20)$$

c) Vollmond:

$$\alpha_H = 0°; \; \delta_H = 0°; \; \tau_H = \tau_N - 180°;$$

$$v_{1,2} = \text{wie (18)}.$$

d) Letztes Viertel:

$$\alpha_H = 90°; \; \delta_H = +23° \; 27'; \; \tau_H = \tau_N - 270°;$$

$$v_{1,2} = \text{wie (20)}.$$

3. *Junisonnenwende:*

$$\alpha_N = 90°; \; \delta_N = +23° \; 27'.$$

a) Neumond:

$$\alpha_H = 90°; \; \delta_H = +23° \; 27'; \; \tau_H = \tau_N;$$

$$v_{1,2} = -(53{,}4 + 24{,}6) \cdot 0{,}842(0{,}0073 \sin 2\,\tau_N + 0{,}0028 \cos 2\,\tau_N) -$$
$$- (26{,}7 + 12{,}3) \cdot 0{,}730(0{,}0157 \sin \tau_N + 0{,}0007 \cos \tau_N). \quad (21)$$

b) Erstes Viertel:

$$\alpha_H = 180°; \; \delta_H = 0°; \; \tau_H = \tau_N - 90°;$$

$$v_{1,2} = -53{,}4(-0{,}0073 \sin 2\,\tau_N - 0{,}0028 \cos 2\,\tau_N) -$$
$$- 24{,}6 \cdot 0{,}842(0{,}0073 \sin 2\,\tau_N + 0{,}0028 \cos 2\,\tau_N) -$$
$$- 12{,}3 \cdot 0{,}730(0{,}0157 \sin \tau_N + 0{,}0007 \cos \tau_N). \quad (22)$$

c) Vollmond:

$$\alpha_H = 270°; \ \delta_H = -23° \ 27'; \ \tau_H = \tau_N - 180°;$$

$$v_{1,2} = \text{wie } (21).$$

d) Letztes Viertel:

$$\alpha_H = 0°; \ \delta_H = 0°; \ \tau_H = \tau_N - 270°;$$

$$v_{1,2} = \text{wie } (22).$$

4. *Wintersonnenwende:*

$$\alpha_N = 270°; \ \delta_N = -23° \ 27'.$$

a) Neumond:

$$\alpha_H = 270°; \ \delta_H = -23° \ 27'; \ \tau_H = \tau_N;$$

$$v_{1,2} = -(53{,}4 + 24{,}6) \cdot 0{,}842(0{,}0073 \sin 2\,\tau_N + 0{,}0028 \cos 2\,\tau_N) + \\ + (26{,}7 + 12{,}3) \cdot 0{,}730(0{,}0157 \sin \tau_N + 0{,}0007 \cos \tau_N). \quad (23)$$

b) Erstes Viertel:

$$\alpha_H = 0°; \ \delta_H = 0°; \ \tau_H = \tau_N - 90°;$$

$$v_{1,2} = -53{,}4(-0{,}0073 \sin 2\,\tau_N - 0{,}0028 \cos 2\,\tau_N) - \\ - 24{,}6 \cdot 0{,}842(0{,}0073 \sin 2\,\tau_N + 0{,}0028 \cos 2\,\tau_N) + \\ + 12{,}3 \cdot 0{,}730(0{,}0157 \sin \tau_N + 0{,}0007 \cos \tau_N). \quad (24)$$

c) Vollmond:

$$\alpha_H = 90°; \ \delta_H = +23° \ 27'; \ \tau_H = \tau_N - 180°;$$

$$v_{1,2} = \text{wie } (23).$$

d) Letztes Viertel:

$$\alpha_H = 180°; \ \delta_H = 0°; \ \tau_H = \tau_N - 270°;$$

$$v_{1,2} = \text{wie } (24).$$

Die Gleichungen (18)—(24) geben den Anstieg des Wasserniveaus in Punkt 1 (Balatonkenese), bezogen auf Punkt 2 (Keszthely) in Abhängigkeit

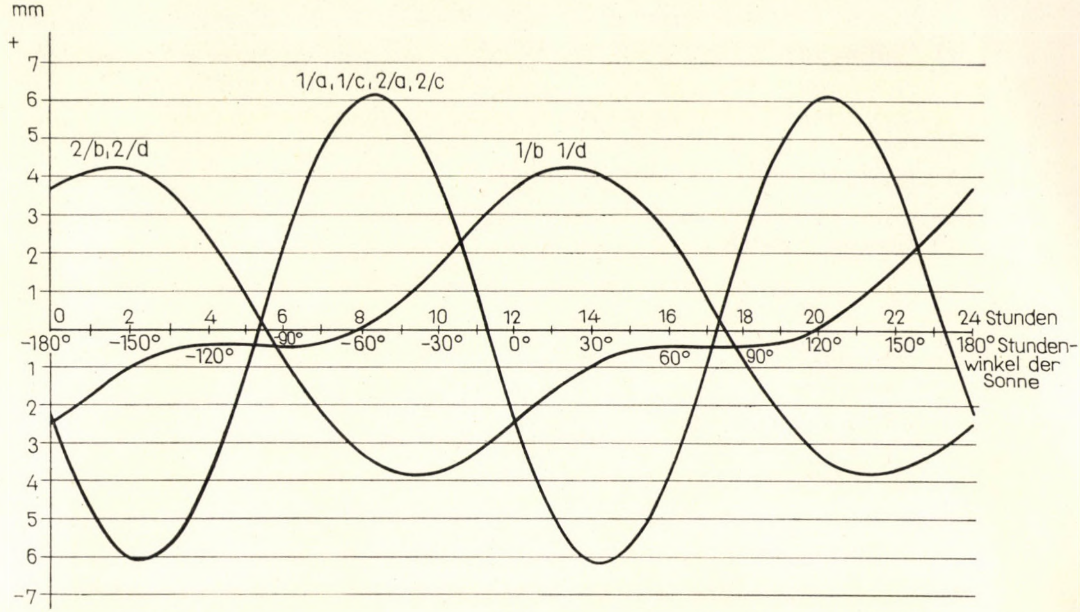


Abb. 2. Relative Niveauänderungen bei Balatonkenese. 1. Die Sonne am Frühlingspunkt; 2. Die Sonne am Herbstpunkt; *a)* Neumond, *b)* Erstes Viertel, *c)* Vollmond, *d)* Letztes Viertel

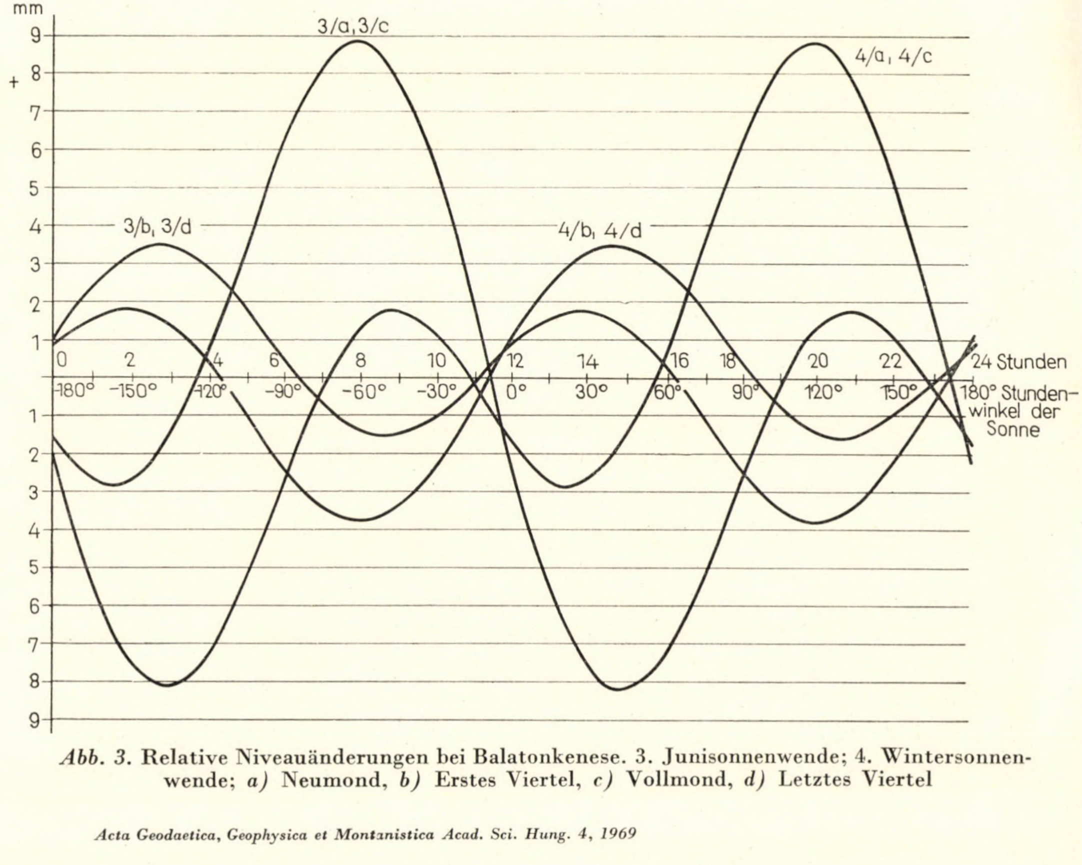


Abb. 3. Relative Niveauänderungen bei Balatonkenese. 3. Junisonnenwende; 4. Wintersonnenwende; *a)* Neumond, *b)* Erstes Viertel, *c)* Vollmond, *d)* Letztes Viertel

vom Stundenwinkel der Sonne an. Die Ergebnisse der Berechnung sind in Abb. 2 und 3 angegeben. Da von der Differenz zwischen Lokalzeit und Zonenzeit abgesehen wird (Annäherung 7.), entspricht dem Stundenwinkel 0° der Sonne 12 Uhr mittags. Auf Grund des stündlichen Anstieges des Stundenwinkels um 15° wurden in den Abbildungen 2 und 3 auch die den Stundenwinkeln entsprechenden Zeitpunkte angegeben.

Nach den Abbildungen verlaufen zwischen zwei Maxima (oder Minima) durchschnittlich 12 Stunden. Dieser Wert ist jedoch ungenau, weil in den Gleichungen (18)—(24) die Bewegung der Sonne und des Mondes auf der Ekliptik vernachlässigt worden ist. Da die Gezeitenerscheinung zu 68,5% von der Anziehungskraft des Mondes hervorgerufen wird, verläuft zwischen zwei Maxima (oder Minima) durchschnittlich soviel Zeit wie zwischen zwei Kulminationen des Mondes, d. h. 12 Stunden und 25 Minuten.

Vergleich zwischen den beobachteten und den auf Grund der Gezeitentheorie berechneten Niveauschwankungen

Cholnoky publizierte in seiner Arbeit [1; S. 97, Abb. 62] zahlreiche, bei Balatonkenese und Keszthely aufgenommene Limnogramme. Unter ihnen sind die regelmäßigsten, d. h. zur Sinuskurve am nächsten liegenden Kurven, die auf dem eingefrorenen Balaton zwischen dem 23-sten und 27-sten Dezember 1894 sowie am 12-ten Januar 1896 aufgenommen worden sind. Nach der in [1; S. 96] angegebenen Tabelle betrug die Periode der auf den Limnogrammen registrierten Schwingungen auf den ersten Aufnahmen 12 Stunden und 28 Minuten, bei der letzteren 12 Stunden und 19 Minuten. Diese Werte stimmen mit der mit Hilfe der Gezeitentheorie gewonnenen Periode von 12 Stunden und 25 Minuten recht gut überein.

In den beiden erwähnten Zeitabschnitten schwankte die Amplitude der Schwingungen zwischen 3 und 5 mm. Der Zeitabschnitt beider Beobachtungsgruppen lag nahe der Wintersonnenwende und dem Zeitpunkt des Neumondes. (Neumond war am 27. 12. 1894 sowie am 15. 1. 1896.) Bei diesem Stand des Mondes und der Sonne spielen sich die Niveauschwankungen — gemäß der Theorie — annähernd nach dem Diagramm 4/a von Abb. 3 ab. Nach dem Diagramm beträgt die größte Amplitude der relativen Niveauschwankung zwischen Balatonkenese und Keszthely $\frac{8+9}{2} = 8{,}5$ mm. Da die Amplituden der Schwingungen von Balatonkenese und Keszthely nahe gleich sind und entgegengesetzte Phasen haben, ist die Amplitude der auf das fixe Niveau bezogenen Schwankungen $8{,}5/2 = 4{,}25$ mm. Dieser theoretische Wert gleicht sich annähernd den von Cholnoky beobachteten Schwingungsamplituden an.

Nach den Limnogrammen erreichte das Wasserniveau bei Balatonkenese in beiden Beobachtungszeitabschnitten abends um 9—10 Uhr sein Tagesmaximum. (Die genauen Zeitpunkte konnten wegen der nicht ganz exakten Form der Limnogramme nicht festgestellt werden.) Nach dem theoretischen Diagramm 4/a tritt jedoch bei Neumond das Niveaumaximum abends um 8 Uhr auf. Daraus scheint es, daß der Zeitpunkt der beobachteten Maxima im Vergleich zu dem auf Grund der Annahme der statischen Niveauschwankung berechneten Zeitpunkt um einige Stunden später liegt. Ohne Zweifel existiert diese Phasenverspätung, ihre Größe kann jedoch wegen der Unsicherheit der Meßergebnisse nicht genau bestimmt werden. Zur Klärung der Frage wären weitere Messungen erforderlich.

Die bei der Fähre von Tihany auftretenden regelmäßigen Strömungen

Die durch den Gezeiteneffekt verursachte Niveauschwankung in der Längsrichtung des Balatons ruft notwendigerweise eine alternierende Bewegung hervor. Die Geschwindigkeit dieser Strömung ist jedoch infolge des großen Querschnittes des Balatons sehr gering und deshalb unmeßbar. Anders verhält es sich bei der Fähre von Tihany. Hier verringert sich der Querschnitt des Balatons dermaßen, daß die Strömungsgeschwindigkeit auf das mehrfache ansteigt und direkt beobachtet werden kann. Bei windigem Wetter verursachen natürlich an dieser Stelle Unterschiede im Wind- und Luftdruck ebenfalls starke Strömungen, besonders wenn sie in der Längsrichtung des Balatons wirken. Daher kann die durch die Gezeiten verursachte Strömung nur entweder bei vollkommener Windstille, oder im Winter durch die in die Eisdecke geschnittenen Löcher ohne Störung beobachtet werden.

Cholnoky führte zwar bei der Fähre von Tihany zwecks Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit des Wassers zahlreiche Messungen durch, aber sämtliche bei windigem Wetter, und deshalb können seine Meßergebnisse vom Gesichtspunkt des Gezeiteneffektes aus wenig benutzt werden. Cholnoky erwähnt [2; S. 120]: »Sei es vollkommene Windstille, klares Wetter usw., das Wasser strömt trotzdem dröhnend . . . Meist ganz unerwartet strömt es mit großer Geschwindigkeit bald nach Ost, bald nach West. Ohne Zweifel ist diese scheinbar launische Alternation der Strömungen die Folge der regelmäßigen Schwingung des Seeniveaus.«

Wie bekannt, bildete sich bei der Fähre von Tihany am Seegrund in O-W Richtung ein flußbeckenförmiger, tiefer sog. »Brunnen« aus, der einige 100 m breit und maximal 11 m tief ist. Dieser Brunnen wurde ohne Zweifel durch die hier auftretende alternierende Strömung ausgebildet. Es ist wahrscheinlich, daß bei der Entstehung und bei der »Aufrechterhaltung« des Brunnens die durch die Gezeiten verursachte Wasserströmung eine größere Rolle spielte bzw. spielt als die durch Wind- und Luftdruckunterschiede hervorgerufenen Strömungen. Letztere erreichen zwar bei stürmischem Wetter größere Geschwindigkeit als die Gezeitenströmung, das Wasser des Balatons wird aber von Stürmen nur selten aufgepeitscht, während es von den Gezeiten täglich viermals in Bewegung gebracht wird.

Es ist bemerkenswert, daß die durch Gezeiten verursachte Strömung mit freien Augen, ohne jegliche Instrumente auf keinem See beobachtet werden kann — nur am Balaton, bei der Fähre von Tihany.

SCHRIFTTUM

1. CHOLNOKY, J.: A Balaton limnológiája (Die Limnologie des Balatons). Budapest 1897. Band I. Teil 3. (Die Ergebnisse der wissenschaftlichen Untersuchung des Balatons.) Balatonkomitee der Ungarischen Geographischen Gesellschaft.
2. CHOLNOKY, J.: A Balaton (Der Balaton). Franklin T. Budapest, 1937.
3. FOREL, F. A.: Le Léman. Lausanne, 1895.
4. FOREL, F. A.: Die Schwankungen des Bodensees.
5. SARASIN, ED.: Tracés limnographiques du lac de Zürich. *Arch. Gen. T.* XVI. 1886. p. 210.
6. SARASIN, ED.: Les seiches du lac de Neuchâtel. *Arch. Gen. T.* XXVIII. 1892. p. 356.

TIDAL PHENOMENA ON LAKE BALATON

M. RÓZSA

SUMMARY

The paper shows that the regular swings of the water-level of Lake Balaton, approximately by a period of 12 hours, are produced by changes of the gravity forces of the Sun and Moon.

ПРИЛИВНО-ОТЛИВНЫЕ ЯВЛЕНИЯ НА БАЛАТОНЕ

М. РОЖА

РЕЗЮМЕ

В статье доказывается, что регулярные колебания уровня воды Балатона с периодом примерно 12 часов вызываются изменением силы притяжения Луны и Солнца.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (3—4), pp. 297—319 (1969)

SEISMIC WAVES IN AN ELASTIC MEDIUM OF INFINITE EXTENSION

P. MÁRTON

GEOPHYSICAL INSTITUTE OF EÖTVÖS UNIVERSITY, BUDAPEST

[Manuscript received 21 May, 1968]

Since the beginning of the forties, several authors have dealt with the problem given in the title, each having investigated a detail of it. In their theoretical studies they have applied different methods of solution. Several of them have even examined the correctness of the results in an experimental way. Also independent experiments were carried out in order to establish the relation between the shape of the seismic signal and the amplitude, respectively, the weight of the charge.

The present study contains the solution of the problem with a uniform view. In its three parts the following questions are discussed:

1. Explosion and wave-propagation under water.
2. Hole-shooting and wave-propagation in the ground.
3. Wave-propagation in an absorbing medium.

According to the valuation by th(author it is, as regards its results, a synthesis according to the view of the compilator.

Introduction

In the conventional seismic exploration, both in measurements at sea and on land, the operations are carried out with seismic waves generated by explosions. The explosive charge is placed at a relatively small depth (from a few meters to a few ten meters) and exploded. The charges employed extend from a few decagrams to several hundred kilograms.

For a description of the wave-field developing it is suitable to introduce some simplifying conditions. By these, the relatively simple realization of the mathematical treatment is ensured, and the following contain:

a) the explosion takes place in a homogeneous and isotropic medium of infinite extension;

b) the charge is of spherical shape, therefore, the spherical symmetry also asserts itself in the wavefield developing The characteristics of the wavefield are functions of the distance measured from the source and of time only;

c) the procedure of the transformation of the chemical energy of the explosive into mechanical energy is not considered, but it is accepted that the solid-state explosive is formed during the course of the explosion into a gas of high pressure. The period of time necessary for this procedure extends from a few tenth of a millisecond to one millisecond, depending to a small measure only on the quantity of the explosive material.

With these conditions, the transfer function or functions, characteristic for the medium permeated by the wave in a given shot-point model, can be determined.

The treatment is divided into the respective cases of underwater and hole-shooting. On both occasions the shot-point models and the propagating waves are investigated. Separate paragraphs are dedicated to the relations of the seismic wave amplitude and of the weight of the charge exploded. Finally, the effect of the absorption by the ground upon the shape of the propagating seismic signal is investigated.

1. Underwater explosion and wave-propagation

In the course of the explosion in the sea or in a water reservoir, the gas-sphere coming into existence as a result of the explosion and propagating radially away from the source generates waves of finite amplitude in the fluid (water). The wave of finite amplitude changes, in the course of its propagation, into shock wave. The amplitude of the shock wave decreases with distance and continues on its way, after a certain distance, as a sound-wave of infinitely small amplitude. At last the soundwave propagated in the liquid is generated by the shock wave.

According to the propagation theory of a spherical shock wave generated by an underwater explosion [1], the pressure p_l of the wave at a distance R from the charge, in a medium of infinite extension is

$$\begin{aligned} p_l(\tau) &= p_m \exp\left(-\frac{\tau}{\Theta}\right) \qquad && \tau \geqslant 0\,, \\ p_l(\tau) &= 0 && \tau < 0\,, \end{aligned} \tag{1}$$

where p_m is the peak pressure i.e. the value of pressure on the shock front, $\tau = t - R/C$ the time measured from the beginning of the pulse, C is the propagation velocity of the shock wave, Θ is the time-constant of the pressure-decrease behind the shock front. The value of the peak pressure p_m at a distance of 10—100 charge-radius (R_0) from the charge is well approximated by the relation

$$p_m = \text{const}\left(\frac{R_0}{R}\right)^n, \tag{2}$$

where n is an empirical constant. The peak pressure p_m falls to about 30% in the validity domain of the approximation

$$\Theta = \text{const.}\, R_0 \log\left(\frac{R}{R_0}\right) \tag{3}$$

in the neighbourhood of the places of maximal pressure p_m. On aceount of the decrease (1.2) of its amplitude, the pulse wave may be treated, beginning from a certain distance R_1, as an infinitely small pressure disturbance, therefore, it is propagated along distances $R > R_1$ as a sound wave having a constant shape. This fact can also be proved formally.

The pressure of a pulse wave acting on the inner surface of a sphere with a radius R_1 is equal, on the outer surface, to the hydrostatic pressure, that is,

$$p|_{R=R_1} = p_{m_1} \exp\left(-\frac{\tau}{\Theta_1}\right) \tag{4}$$

where p is the hydrostatic pressure, p_{m1} is the amplitude of the pulse wave in R_1, Θ_1 is the time constant in R_1.

This is the boundary condition with which the wave equation

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \alpha_0^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \tag{5}$$

in the medium must be solved. $\Phi = R\varphi$ and φ is the displacement potential. The pressure p can be expressed with Φ [2]:

$$p = -\varkappa \frac{1}{R\alpha_0^2} \Phi'', \tag{6}$$

where the comma denotes a derivation respect to the argument; and thus the form of the boundary condition (4) is

$$-\varkappa \frac{1}{R\alpha_0^2} \Phi''|_{R=R_1} = p_{m_1} \exp\left(-\frac{\tau}{\Theta_1}\right). \tag{7}$$

The Laplace transform of (5), [3], is

$$s^2 F = \alpha_0^2 \frac{\partial^2 F}{\partial R^2}, \tag{8}$$

where s is the transformation variable, F (s, R) is the transformed function. (8) is a common differential equation for F, the solution limited in the infinite is

$$F = A \exp\left(-\frac{s}{\alpha_0} R\right), \tag{9}$$

where A is a constant, the value of which can be obtained from the boundary condition (7), if first the Laplace transform of (7) is formed this being

$$-\varkappa \frac{1}{R\alpha_0^2} s^2 F|_{R=R_1} = \frac{p_{m_1}}{s+1/\Theta_1},$$

and the (9) value of F is substituted. For the constant A is obtained

$$A = -\frac{R_1\alpha_0^2}{\varkappa s^2} \frac{p_{m1}}{s+1/\Theta_1} \exp\left(-\frac{s}{\alpha_0} R_1\right).$$

and thus (9) will be

$$F = -\frac{R_1\alpha_0^2 p_{m1}}{\varkappa s^2(s+1/\Theta_1)} \exp\left(-\frac{s}{\alpha_0}(R-R_1)\right), \tag{10}$$

by the inversion of which Φ and thus φ can be determined. It is simpler to immediately investigate the pressure wave itself, since its Laplace transform ($P(s, R)$) according to (6) is

$$P = -\varkappa \frac{1}{R\alpha_0^2} s^2 F.$$

By applying this in (10), the equality

$$P = \frac{R_1}{R} \frac{p_{m1}}{s+1/\Theta_1} \exp\left(-\frac{s}{\alpha_0}(R-R_1)\right)$$

is obtained, the inverse transform of which is, converting the shifting theorem, [3], simply

$$p(\tau, R) = \frac{R_1 p_{m1}}{R} \exp\left(-\frac{\tau}{\Theta_1}\right), \tag{11}$$

where

$$\tau = t - \frac{R-R_1}{\alpha_0}.$$

This is the analytical expression of the pressure wave propagated in the medium. Another measurable characteristic of the wave field, the velocity wave, is — at least at a sufficiently long distance from the source (R_1) a constant manifold of (11), the constant itself being the acoustic impedance $\varrho\alpha_0$.

In this derivation it has also been demonstrated formally (11) that the elastic pressure- and velocity wave (of infinitely small amplitude), generated by the shock wave, is propagated in the liquid, disregarding the geometrical dispersion ($1/R$), in an unchanged form, that is, the sharp shock wave shape remains even in the small amplitude waves. This conclusion refers to the case of perfect elasticity. If deviations from this are experienced, their causes must be sought for in the deviation of the medium from the perfectly elastic behaviour.

This latter remark is important from the point of view of the relations which can be established between the amplitude of the pressure wave and the charge weight. Let us turn to this problem.

Our departure is the trivial condition [6]

$$R = \text{const}\, R_0^3\,, \tag{12}$$

that is, the weight of the charge Q is proportional to the cube of the radius of the charge. Hence the relation of the peak pressure of the shock wave and of the charge weight (from (2)) is:

$$p_m = \text{const}\left(\frac{Q^{1/3}}{R}\right)^n .$$

At a distance R_1, where the peak pressure is p_{m1}, this formula can be written for R_1:

$$R_1 = \left(\frac{\text{const}}{p_{m1}}\right)^{1/n} Q^{1/3}\,, \tag{13}$$

that is, R_1 is proportional to the cubic root of the charge weight, since the factor of $Q^{1/3}$ in (13) is constant. On the other hand, Θ_1 figuring in (11) is, according to (3)

$$\Theta_1 = \text{const}\, R_0 \log\left(\frac{R_1}{R_0}\right) = \text{const}\, R_0\,,$$

and thus

$$\Theta_1 = \text{const}\, Q^{1/3}\,, \tag{14}$$

that is, also Θ_1 is proportional to the cubic root of the charge weight.

When investigating (11) in the reflection of formulas (13) and (14), two things can be stated. The first one is that the amplitude of the wave is proportional to the cubic root of the charge weight. The second is that the duration of the wave, characterizable Θ_1, is a similar function of the charge weight. It is expected, then, that a doubling of the pressure amplitude and duration would require an eightfold increase, i.e. nearly by an order of magnitude, of the charge weight. According to the measured data, however, [4], the amplitude is somewhat more sensitive, the duration, however, nearly insensitive against an increase of the charge weight. It must be added, moreover, that the upper limit of the measurable frequencies is about 100 cps; no higher frequencies exist in the wave propagated in the sea-water. In this way it appears to be more appropriate to investigate, instead of the amplitude, the dependence of the spectral amplitude from the charge weight in the lower frequency domain ($<$ 100 cps). The spectrum of the pressure wave (11) will be, in the foregoing Laplace-transform substituting $s + j\,\omega$, [3],

$$p_{m1} \frac{R_1}{R} \frac{1}{j\omega + 1/\Theta_1} \exp\left(-j\omega \frac{R - R_1}{\alpha_0}\right),$$

the absolute value of which is the amplitude spectrum:

$$\frac{p_{m_1} R_1}{R} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1/\Theta_1^2}} .$$

In the low frequency range ($<$ 100 cps) ω^2 can be neglected besides $1/\Theta_1^2$, and thus the amplitude spectrum approximately takes the form

$$\frac{p_{m1}}{R} R_1 \Theta_1 ,$$

where — being R_1 and also Θ_1 proportional to the cubic root of the charge weight ((13), (14)) — the spectral amplitude itself is proportional to the two-third power of the charge weight, and since the amplitude of the signal is the "sum" of the spectral amplitudes, the same relation can be valid for it in the observable low frequency range. As a final result, the measured values of the relation amplitude-charge weight must lie between the 1/3 and 2/3 values of the exponent η in the relation

$$\text{pressure amplitude} \sim (\text{charge weight})^\eta$$

The "independence" of the pressure-duration (Θ_1) from the charge weight is similarly to be sought for in the fact that in the low frequency range recorded the anyway weak dependence on the charge weight is almost entirely obscured.

2. Hole-shooting and wave-propagation in the ground

In land measurements the explosive used for generation of the seismic signal is placed in most cases in a hole or in holes drilled to a depth of a few ten meters. When exploding the charge, the efficiency of energy-transmission towards the deeper zones of the ground is increased by filling up the hole with water. This water-tamping is always used under normal circumstances. An optimal tamping can be attained, if the propagation velocity of the wave in the medium surrounding the hole is somewhat higher than the velocity of propagation in water. In this case, namely, under the effect of the compressional wave propagating upwards in the medium, the hole contracts at the passing of the front and forms an increased resistance for the pressure wave passing upwards in the water, thus increasing the effective tamping. The optimum tamping, however, does not mean a prominent efficiency as against that to be found under different velocity conditions.

In those hole-shots where the charge is placed at a depth sufficient to neglect the effect of the surface, — and let us assume this case, — the mechanism of the origin of the elastic disturbance can be imagined as being the following. The explosion pressure arising during the explosion of the charge forms a zone of shattering in the immediate surroundings of the charge, where the material is deteriorated. The deterioration phenomena consume a considerable energy-content of the explosion pressure, but the energy remaining after having passed the zone of shattering is still sufficiently large to provoke lasting deformations, compaction phenomena. Also the lasting deformations consume considerable energy. In consequence, the amplitude of the explosion pressure rapidly decreases with the distance, and beyond a certain distance merely infinitesimal deformation come into existence on the passing of the wave; that is, the propagation of the disturbance beyond this distance can be treated according to the linear elastic theory.

The distribution of nonlinear effect zones is different for different rock types. In hard, compact rocks (limestone, sandstone, granite), the zone of deterioration phenomena is dominant, while in more plastic materials (clays, marls) the immediate surroundings of the explosion is better characterized by compaction phenomena causing the formation of a cavity, beyond which the material will be compacted. The zone of destruction, resp. of lasting deformations may be formally delimited by a spherical surface of a radius R_1. From the point of view of the elastic waves propagated in the medium, this spherical surface can be regarded as the source, radiator of these waves. Therefore, the spherical surface of a radius R_1 also calls for an equivalent radiator. Namely, the inner wall of the surface (seen from the explosion) is reached by the part of the total energy of the explosion, diminished by the nonlinear effects, appearing on the outer side (the medium side) in the form of purely elastic energy. Putting it in a different way, the radial stress appearing on the outer surface of the equivalent source is equal and of opposite sign to the explosion pressure acting on the inner wall (Fig. 1).

Mathematically, [5], this condition requires the fulfilment of the relation

$$-\left\{(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial R}+2\lambda\frac{u}{R}\right\}_{R=R_1}=\bar{p}(t)\,, \tag{15}$$

where $\bar{p}(t)$ is the explosion pressure acting in $R = R_1$. The equality (15) derived for the equivalent radiator as a shotpoint model makes a description of the wave field developing in the ground possible.

As a first task, let us examine the transmission properties of the ground. For an initial pressure $\bar{p}(t)$ the function $\delta(t)$ will be chosen. Physically, this is the assumption of the constancy of the pulse falling upon a unit area on the equivalent radiator. In our shot-point model, only radial stresses occur,

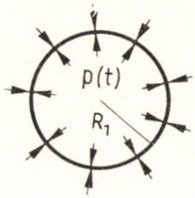


Fig. 1. The explosion pressure acting on the inner wall of the equivalent radiator appears on the outer, medium side wall as a radial elastic stress pointing to the inside

— by the source, only compressional waves are emitted. Therefore, the wave field will be described by the displacement potential φ, satisfying the equation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta \varphi$$

and the boundary condition (15). Transcribing the problem for spherical symmetry, the task can be formulated in the following way:

Let us solve the differential equation

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \tag{16}$$

with the boundary condition

$$-\left\{(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial R} + 2\lambda \frac{u}{R}\right\}_{R=R_1} = \bar{p}_0\, \delta(t) . \tag{17}$$

In (16) $\Phi = R\varphi$, further $u = \operatorname{grad} \varphi$, therefore, also the boundary condition (17) can be transcribed for Φ, if it is also considered, that

$$\Phi = \Phi\left(t - \frac{R}{\alpha}\right).$$

With these (17)

$$-\left\{(\lambda + 2\mu)\left[\frac{2}{R^3}\Phi + \frac{2}{R^2\alpha}\Phi' + \frac{1}{R\alpha^2}\Phi''\right] + \right.$$
$$\left. + 2\lambda\left[-\frac{1}{R^3}\Phi - \frac{1}{R^2\alpha}\Phi'\right]\right\}_{R=R_1} = \bar{p}_0\, \delta(t) ,$$

where the comma denotes the derivation according to the argument. Factoring out the quantity $(\lambda + 2\mu) = \varrho\alpha^2$, the factor of the brackets on the left side will be $2\lambda/(\lambda+2\mu)$, that is, on account of

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \quad \text{equal to} \; \frac{2\sigma}{1-\sigma}.$$

Carrying out the possible reductions on the left side and introducing the denotation

$$K = \frac{1}{2}\,\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}, \tag{18}$$

the boundary condition is obtained in this form:

$$-\varrho\alpha^2\left\{\frac{1}{R\alpha^2}\Phi'' + \frac{1}{KR^2\alpha}\Phi' + \frac{1}{KR^3}\Phi\right\}_{R=R_1} = \bar{p}_0\,\delta(t)\,. \tag{19}$$

The problem appointed will be solved by Laplace-transformation. In the same way as in (9), the solution — limited in the infinite — of the transformed equation (16) will be the function

$$F(s,R) = A\exp\left(-\frac{s}{\alpha}R\right). \tag{20}$$

For the determination of the constant A, first the transform of (19) will be prepared,

$$-\varrho\alpha^2\left\{\left(\frac{1}{R}\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{KR^2}\left(\frac{s}{\alpha}\right) + \frac{1}{KR^3}\right)F\right\}_{R=R_1} = \bar{p}_0,$$

and, substituting (20) into it, A can be calculated. With this value A, the transformed function (20) can be written thus:

$$F(s,R) = -\frac{\bar{p}_0\exp\left(-s\,\dfrac{R-R_1}{\alpha}\right)}{\varrho\alpha^2\left(\dfrac{1}{R_1\alpha^2}s^2 + \dfrac{1}{KR_1^2\alpha}s + \dfrac{1}{KR_1^3}\right)}. \tag{21'}$$

In (21′) the exponential factor signifies, in the sense of the shifting theorem, [3], a time shifting of $(R - R_1)/\alpha$ only. If this is taken into consideration in the inverse transform then the time-variable of the latter will be

$$\tau = t - \frac{R-R_1}{\alpha},$$

and from the formula (21′) the factor

$$\exp\left(-s\frac{R-R_1}{\alpha}\right)$$

will be omitted:

$$F(s,R) = -\frac{R_1}{\varrho}\frac{\bar{p}_0}{s^2+\dfrac{\alpha}{KR_1}s+\dfrac{\alpha^2}{KR_1^2}}. \tag{21}$$

The inverse transform of (21) can be formed according to the expansion theorem, [3]. For this purpose, the roots of the denominator are needed in the first place, which, on account of $K > 1/2$, are

$$s_{1,2} = -\frac{\omega_0}{\sqrt{4K-1}} \pm j\omega_0,$$

where

$$\omega_0 = \frac{\alpha}{2KR_1}\sqrt{4K-1}, \tag{22}$$

and thus the application of the expansion theorem leads to

$$\Phi(\tau,R) = -\bar{p}_0\frac{R_1}{\varrho}\frac{1}{2j\omega_0}\left\{\exp\left[\left(\frac{-\omega_0}{\sqrt{4K-1}}+j\omega_0\right)\tau\right]-\right.$$

$$\left.-\exp\left[\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{4K-1}}-j\omega_0\right)\tau\right]\right\},$$

i.e.

$$\begin{aligned} &\varphi(\tau,R) = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{P}_0\,\mathrm{R}_1}{\varrho\omega_0}\exp\left[-\frac{\omega_0}{\sqrt{4K-1}}\tau\right]\sin\omega_0\tau \qquad \tau \geqslant 0, \\ &\varphi(\tau,R) = 0 \qquad \tau < 0. \end{aligned} \tag{23}$$

The (23) form of the potential φ yields the solution to our problem. According to this, differently from liquids, the shape of the wave radiated by the source suffers a change in solid ground. The potential is described by a sine function of exponentially decreasing amplitude. Also the frequency and attenuation of the wave are determined, according to (22), by the elastic properties of the medium, in the first place, but a short calculation will convince one, that the wave will be a short-duration pulse, since the attenuation calculable from (22) is very large for real media [$\alpha > 1500$ m/s; $R_1 < 3$ m; $K \approx 1$] (Fig. 2). The potential φ, together with the field characteristics (displacement, velocity, pressure waves) derivable from it can be regarded as weight-functions characteristic for the transmission of ground.

When describing the wave field belonging to the seismic explosion, the time-dependence of the explosion pressure can be given with the decreasing exponential function

$$\bar{p}_b = \bar{p}_0 \exp\left(-\frac{t}{\Theta_2}\right) \qquad t \geq 0\,,$$
$$\bar{p} = 0 \qquad t < 0\,.$$

This is partly motivated by the instantaneousness of the development of the pressure wave, partly by the short but still finite period of its end.

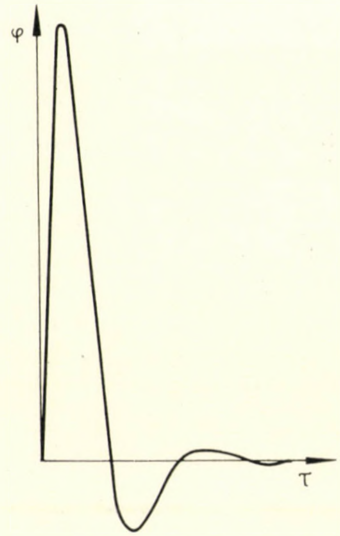


Fig. 2. Wave-shape (displacement potential) belonging to the explosion pressure $\bar{p}_0\delta(t)$

The determination of the wave field belonging to an initial pressure with exponential time-dependence causes no problem of principle, since it can be carried out for any of the field characteristics in the knowledge of (23) with the weight-function-theorem, [3]. Because of further investigations it is advisable to depart, instead of this, from equation (16) and to find the solution which satisfies the corresponding boundary condition

$$-\left\{(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial R} + 2\lambda\frac{u}{R}\right\}_{R=R_1} = \bar{p}_0 \exp\left(-\frac{t}{\Theta_2}\right). \tag{15'}$$

The expressions (20) and (21′) can be immediately applied, if the Laplace transform

$$\frac{\bar{p}_0}{s+1/\Theta_2}, \quad \text{of the function} \quad p_0 \exp\left(-\frac{t}{\Theta_2}\right)$$

is written in the latter, instead of p_0, and thus the following is obtained for $F(s, R)$:

$$F(s, R) = \frac{-R_1 \bar{p}_0 \exp\left(-s\frac{R-R_1}{\alpha}\right)}{\varrho\left(s+\frac{1}{\Theta_2}\right)\left(s^2+\frac{\alpha}{KR_1}s+\frac{\alpha^2}{KR_1^2}\right)},$$

from where, by writing

$$\tau = t - \frac{R-R_1}{\alpha}$$

for time variable in the inverse transform, the exponential factor can be omitted, that is,

$$F(s, R) = -\frac{R_1}{\varrho}\frac{\bar{p}_0}{\left(s+\frac{1}{\Theta_2}\right)\left(s^2+\frac{\alpha}{KR_1}s+\frac{\alpha^2}{KR_1^2}\right)} \tag{24}$$

For the establishment of the inverse transform, the roots of the denominator are needed:

$$s_0 = -\frac{1}{\Theta_2}; \quad s_1 = -\frac{\omega_0}{\sqrt{4K-1}} + j\omega_0; \quad s_2 = -\frac{\omega_0}{\sqrt{4K-1}} - j\omega_0,$$

where ω_0 is the value according to (22). In the knowledge of the roots, the expansion theorem, [3], can be applied, of which

$$\Phi(\tau, R) = -\frac{R_1\bar{p}_0}{\varrho}\left\{\frac{\exp\left(-\frac{\tau}{\Theta_2}\right)}{\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{4K-1}}-\frac{1}{\Theta_2}\right)^2+\omega_0^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\exp\left[\left(-\frac{\omega_0}{\sqrt{4K-1}}+j\omega_0\right)\tau\right]}{\left(-\frac{\omega_0}{\sqrt{4K-1}}-j\omega_0\right)2j\omega_0}+\frac{\exp\left[\left(-\frac{\omega_0}{\sqrt{4K-1}}-j\omega_0\right)\tau\right]}{\left(-\frac{\omega_0}{\sqrt{4K-1}}-j\omega_0\right)(-2j\omega_0)}\right\},$$

respectively, after reduction, the final result

$$\begin{aligned}\varphi(\tau, R) &= \frac{\bar{p}_0 R_1}{\varrho R}\left\{\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{4K-1}} - \frac{1}{\Theta_2}\right)^2 + \omega_0^2\right\}^{-1} \cdot \\ &\cdot \left\{\exp\left(-\frac{\tau}{\Theta_2}\right) + \frac{1}{\omega_2}\left[\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{4K-1}} - \frac{1}{\Theta_2}\right)^2 + \omega_0^2\right]^{1/2} \cdot \right. \\ &\cdot \left. \exp\left(-\frac{\omega_0}{\sqrt{4K-1}}\tau\right)\cos(\omega_0 \tau - \delta)\right\}, \quad \tau \geqq 0, \\ \varphi(\tau, R) &= 0, \qquad \tau < 0.\end{aligned} \tag{25}$$

will be obtained for the displacement potential

$$\varphi = \frac{1}{R}\Phi,$$

where

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{4K-1}} - \frac{1}{\Theta_2}\right).$$

This is the displacement potential of the wave propagating in a ground which is regarded as perfectly elastic, in the case of an initial pressure with a time-variation

$$\exp\left(-\frac{t}{\Theta_2}\right).$$

If the ground were really perfectly elastic, the dominant frequencies

$$\left(f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}\right)$$

of the recorded waves, besides the usual charge weights ($Q =$ up to 150 kg, i.e. $R_1 < 3$—4 m) and rock parameters ($\alpha > 1500$ m/s, $K \approx 1$), should fall between 50 cps and 2000 cps. The frequency range recordable in common seismic surveys, however, is restricted to waves of frequencies lower than 100 cps. An important role ought to be ascribed to the energy-absorbing processes arising from the inner friction in the ground during wave-propagation, respectively, to their effect in shaping the seismic signal form, this effect being frequency-selective and manifesting itself in the annihilation of high-frequency components (see the next part).

This remark involves that the relations between amplitude and charge weight ought to be investigated in each frequency-range, because former relations are not properly reflected in the dependence of the amplitude-charge weight but in that of the spectral amplitude-charge weight related to the frequency-range recorded.

Let us assume, that the volume of the equivalent radiator is proportional to the charge weight; therefore, the radius R_1 varies with the cubic root of the weight of the charge,

$$R_1 = \text{const}\, Q^{1/3}\,,$$

and that the time-constant of the initial pressure wave is proportional to the linear measure (R_1), i.e. similarly to the one-third power of the charge weight. These conditions are evident and necessary for the determination of the amplitude-charge weight function. No doubt, when applying these to wave-fields generated by different initial pulses, always different charge weight relations may be obtained, since also the response functions belonging to different initial pressures are different (e.g. (23), (25)). Correct or approximately correct formulas may be expected from the investigation of the response of such a function which complies best with the explosion pressure.

Let us choose the time function exp $(-1/\Theta_2)$ for the initial pulse. The Laplace-transform of the ground response is the expression (24). Let us rewrite this for the pressure wave, since the most perspicuous relations refer to this field quantity. The basis of the transcription is the formula

$$p(\tau, R) = -\frac{\varkappa}{R\alpha^2}\,\Phi''$$

already applied, the Laplace-transform of which is

$$P(s, R) = -\frac{\varkappa}{R}\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2 F\,.$$

By this, the transformed pressure wave, from (24), is

$$P(s, R) = \frac{\varkappa}{R}\,\frac{R_1\bar{p}_0}{\varrho\alpha^2}\,s^2\left\{\left(s + \frac{1}{\Theta_2}\right)\left(s^2 + \frac{\alpha}{KR_1}\,s + \frac{\alpha^2}{KR_1^2}\right)\right\}^{-1}, \tag{26}$$

the spectrum of which can be obtained by the substitution $s = j\,\omega$, [3]. The absolute value of the spectrum is the amplitude spectrum:

$$|P(\omega, R)| = \frac{\varkappa\bar{p}_0}{R\varrho\alpha^2}\,R_1^2(\omega R_1)^2\,\cdot$$
$$\cdot\left\{\left[(\omega R_1)^2 + \left(\frac{R_1}{\Theta_2}\right)^2\right]\left[(\omega R_1)^4 + \left(\frac{\alpha^2}{K^2} - 2\,\frac{\alpha^2}{K}\right)(\omega R_1)^2 + \frac{\alpha^4}{K^2}\right]\right\}^{-1/2}. \tag{27}$$

A more suitable form of this is

$$|P(\omega, R)| = \frac{A}{R} R_1^2 \frac{x^2}{[N(x)]^{1/2}}, \tag{27'}$$

where

$$A = \frac{\varkappa \bar{p}_0}{\varrho \alpha^2},$$

$x = \omega R_1$ and $N(x)$ is the function under the square root sign in the denominator.

At low frequencies ($\omega \to 0$), from (27') $|P(\omega, R)| \to A_1 \omega^2 R_1^4$, where A_1 is independent of the charge weight, and thus $|P(\omega, R)| \to D_1 \omega^2 Q^{4/3}$. D_1 does not depend on the charge weight.

Let us form the derivate

$$\frac{\partial}{\partial \omega} | P(\omega, R)|,$$

disappearing at the place of the extreme value. But at the same the derivate $\partial/\partial x$ is zero, too, that is,

$$\frac{\partial}{\partial x} |P(x, R)| = \frac{A}{R} R_1^2 \left\{ 2\, x\, N(x)^{1/2} - x^2 \frac{1}{2} N(x)^{-1/2} \frac{dN}{dx} \right\} = 0\,.$$

The root x_1 of the equation

$$2x\, N(x) - \frac{1}{2} x^2 \frac{dN}{dx} = 0\,,$$

different from the trivial one, is a function of quantities independent of the charge weight:

$$x_1 = x_1 \left(\frac{R_1}{\Theta_2}, \alpha, K \right).$$

Thus, (27') on the extreme-value place, i.e. on the dominant frequency $\omega_1 = x_1/R_1$ is

$$| P(\omega_1, R)| = \frac{A_2}{R} R_1^2 S(x_1)$$

where neither A_2, nor the polinom quotient $S(x_1)$ depend on Q, consequently

$$| P(\omega_1, R)| = D_2\, Q^{2/3}\,.$$

At high frequencies ($\omega \to \infty$), from (27′)

$$|P(\omega_1, R)| \to A_3 \frac{1}{\omega} R_1$$

and thus

$$|P(\omega, R)| = D_3 \frac{1}{\omega} Q^{1/3}.$$

A_3 and D_3 are independent of the charge weight.

Summing up the spectral amplitude-charge weight relations, the following results can be established:

$$\begin{aligned} &\omega \to 0 && |P(\omega, R)| = D_1 \omega^2 Q^{4/3} \\ &\omega = \omega_1 && |P(\omega, R)| = D_2 Q^{2/3} \\ &\omega \to \infty && |P(\omega, R)| = D_3 \frac{1}{\omega} Q^{1/3}, \end{aligned} \tag{28}$$

and being: $\omega_1 = x_1/R_1$

$$\omega_1 = \text{const}\, Q^{-1/3}, \tag{29}$$

further from the comparison of the middle formula of (28) and (29),

$$|P(\omega_1, R)| = \text{const} \frac{1}{\omega_1^3}. \tag{30}$$

According to (28), the spectral amplitudes belonging to the frequency ω generally satisfy the relation

$$|P(\omega, R)| = g(\omega)\, Q^{m(\omega, Q)}. \tag{31}$$

The value of the exponent m lies between 1/3 and 4/3, according to the frequency and to the charge weight. According to (29) and (30), the spectrum varies as the function of the charge weight. When increasing the charge, the dominant frequency shifts towards the low frequencies along the third degree hyperbole (30) (Fig. 4), [6].

In the frequency range $\omega < 500$ sec^{-1} of the seismic measurements, in case of normal charges (< 100 kg), the values $4/3 > m > 2/3$ are obtained for the exponent of (31), [4], in accordance with the theoretical values. In this interval of frequencies and charge weights, there is not significant signal shape change in function of the charge weight, since this is obscured by the selective energy-absorbing effect of the ground. In a pressure wave generated

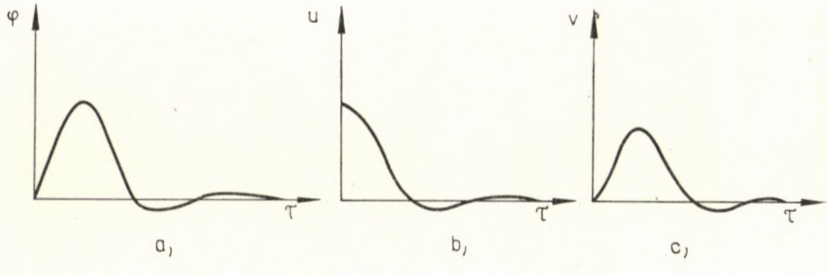


Fig. 3. Wave-shapes belonging to the explosion pressure $\bar{p}_0 \exp(-t/\Theta)_2$: *a)* displacement potential; *b)* displacement wave; *c)* velocity wave

by quite large charges of several hundred kilograms, on the other hand, a shifting of the spectrum to the left appears, which is a broadening of the signal according to (30); the amplitude of the wave, at the same time, is proportional to about the 1/3 power of the charge weight. The explanation for this is obvious (Fig. 5), [6], namely, the spectrum for such large charges contracts almost entirely to the low frequency range. The low frequencies are not affected by the energy-absorbing effect of the ground, consequently the charge-dependence measurable is directly reflected in the amplitude-charge weight relation which can also be determined by departing from (26).

Let us rewrite (26) in the following way:

$$P(s,R) = \frac{\varkappa \bar{p}_0}{R\varrho\alpha^2}\; R_1^2 (sR_1)^2 \left\{\left[(sR_1) + \frac{R_1}{Q_2}\right]\left[(sR_1)^2 + \frac{\alpha}{K}(s\,R_1) + \frac{\alpha^2}{K}\right]\right\},$$

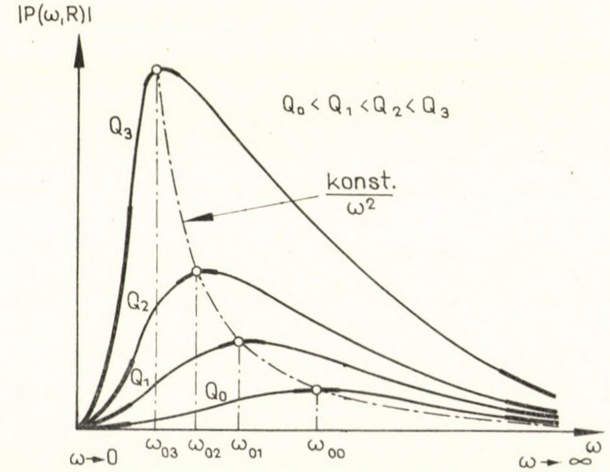


Fig. 4. Dependence of the absolute value of the pressure-spectrum on the charge weight, after [6]

or in a shorter form,

$$P(s, R) = \frac{\varkappa \bar{p}_0}{R\varrho\alpha^2} R_1^2 G(sR_1) .$$

Its inverse transform, by the inversion of the similarity theorem, [3], is

$$p(\tau, R) = \frac{\varkappa \bar{p}_0}{R\varrho\alpha^2} R_1 g \left(\frac{\tau}{R_1}\right) . \tag{32}$$

Actually, the amplitude of the pressure pulse is proportional to R_1, i.e. to the 1/3 power of the charge weight, and this relation is satisfied, according to the

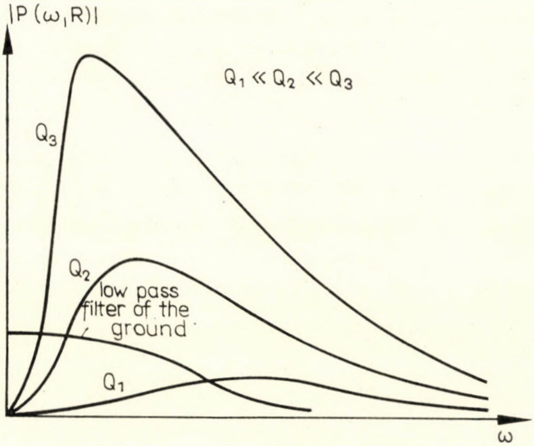


Fig. 5. The effect of the selective absorption of the ground upon the charge weight relations, after [6]

arguments mentioned, for pressure waves generated by large charges. By the amplitude-charge relation of cubic root, a well-known fact by seismologists, that when using large charges ($Q > 100$ kg), even a small increase of the amplitude requires a multiplication of the charge, is well explained.

3. Wave propagation in an absorbing medium

The medium propagating the seismic wave, the ground, can be regarded as perfectly elastic in a first approximation only. Actually the propagation of the seismic wave in the ground is not a process free of losses. On account of the inner friction accompanying the elastic deformation due to the passing of the wave, part of the elastic energy is irreversibly transformed into heat. The dissipation of the elastic energy is strikingly manifest to a great decrease by the amplitude of the seismic wave with the distance. At the same time, also the dynamic characteristics of the wave undergo a change.

The absorption-transfer function of the ground, that is its absorption spectrum for spherical waves are generally given by the function

$$\exp\,(-\,\beta\omega^{n} R)\,. \tag{33}$$

Having this knowledge, the effect of the ground (as absorbing medium) on the wave in propagation can be examined as follows:

Be the seismic spherical pulse propagated in a perfectly elastic medium, characterized for the sake of simplicity by a Dirac-delta that is:

$$\varphi_0 = \frac{1}{R}\,\delta(\tau) \qquad \tau = t - \frac{R}{\alpha}\,. \tag{34}$$

Corresponding to our previous results, this expression shows that in a perfectly elastic medium the shape of the seismic pulse is unchanged during propagation, if the factor $1/R$ due to geometrical dispersion is disregarded.

Let us investigate the propagation of the pulse (34) in an infinite absorbing medium. The law of absorption, related to harmonic waves, is known; (33); its effect on the wave (34), respectively, upon its spectrum can be established as follows:

$$\frac{1}{R}\,\frac{1}{2\pi}\exp\,(-\,\beta\omega^{n} R)\,d\omega\,, \tag{35}$$

where, $1/R2\pi$ is the spectrum of the wave (34), [3]. The expression (35) is the spectral amplitude of the wave of an initial shape (34), propagated in the absorbing medium and belonging to the frequency band $d\,\omega$; from it, the wave itself can be obtained by inverse Fourier-transformation:

$$\bar{\varphi}_0 = \frac{1}{R2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\,(-\beta\omega^{n} R + j\omega\tau)\,d\omega\,. \tag{36}$$

In the case of an arbitrary absorption exponent n, the integration cannot be carried out in an elementary way. With a choice of $n = 2$, however, we can easily reach our goal, because in this case (36) can be brought to the form

$$\bar{\varphi}_0 = \frac{1}{R2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\exp\,(-\beta\omega^{2} R)\cos\omega\tau\,d\omega$$

and this can be calculated according to the formula

$$\int_0^\infty \exp(-a^2 x^2)\cos bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\exp\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right),$$

to be found in any of the integral tables (see e.g. [7]), and its value is

$$\bar{\varphi}_0 = \frac{1}{R^{3/2}}\frac{1}{2\sqrt{\beta\pi}}\exp\left(-\frac{\tau}{4\beta R}\right). \tag{37}$$

From the result (37) it can be seen that the seismic pulse of a shape $\delta(\tau)$, propagating in the perfectly elastic medium, becomes a signal changing its shape in an absorbing medium with the distance. Actually, the seismic wave generated by explosion in a perfectly elastic medium will be described not by the delta-function but by the formula (25),

$$\varphi = \frac{\bar{p}_0 R_1}{\varrho R}\left[\left(\frac{\omega}{\sqrt{4K-1}} - \frac{1}{\Theta_2}\right) + \right.$$
$$\left. + \omega^2\right]\left\{-\exp - \frac{\tau}{\Theta_2} + \frac{1}{\omega}\exp - \frac{\omega\tau}{\sqrt{4K-1}}\,\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left[\left(\frac{\omega}{4K-1} - \frac{1}{\Theta_2}\right)^2 + \omega^2\right]^{1/2}\cos(\omega\tau - \delta)\right\}.$$

Since, however, (37) is, at the same time, the weight function of the absorbing medium, also the seismic wave generated by explosion can be determined by (25) and by the weight function theorem, [3], for an absorbing medium. Let us denote this wave by $\bar{\varphi}$; in this case, by the weight function theorem,

$$\bar{\varphi}(\tau, R) = \int_0^\tau \bar{\varphi}_0(\tau-\gamma, R)\,\varphi(\gamma, R)\,d\gamma. \tag{38}$$

To carry out the integration prescribed in (38) is a lengthy operation, moreover it is complicated, and its results cannot be established in a closed form. Therefore, we renounce the mathematical treatment of this problem. By previously given parameters and for some distance R, however, the form of the function $\bar{\varphi}$ was determined by numerical integration of (38).

After these, the following can be stated, according to the weight function (37) and of the integral (38), as regards the pulse transmission of the absorbing medium:

1. During propagation in an absorbing medium, the seismic pulse undergoes a change of shape.

2. The amplitude of the pulse decreases more rapidly with the distance, than $1/R$. In (37) this decrease is $1/R^{3/2}$; when considering also (38), however, it is visibly $1/R^{5/2}$, that is, besides the decrease by $1/R$, indicative of geometrical dispersion, the remaining attenuation $1/R^{3/2}$ is to be ascribed to absorption.

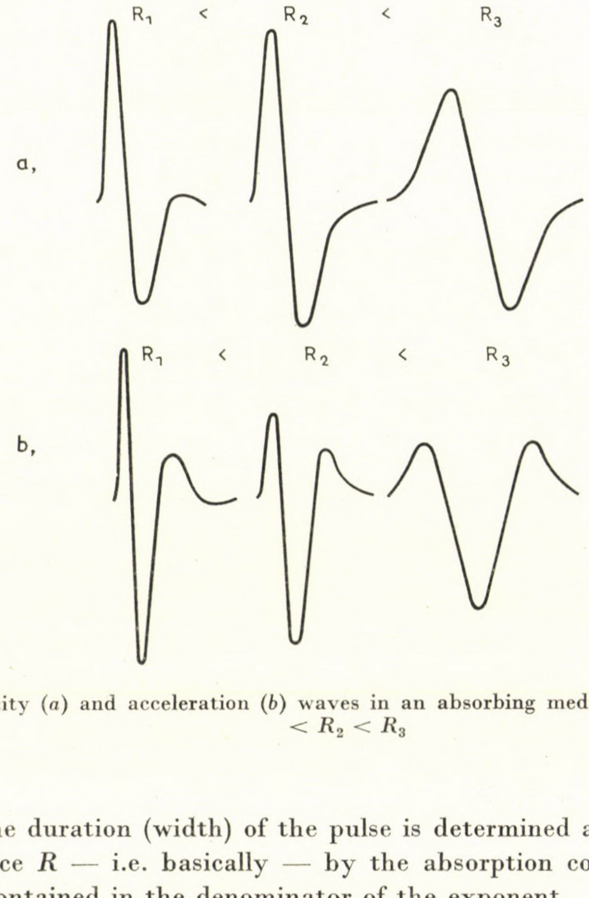


Fig. 6. Velocity (*a*) and acceleration (*b*) waves in an absorbing medium at distances $R_1 < < R_2 < R_3$

3. The duration (width) of the pulse is determined according to (37) at any distance R — i.e. basically — by the absorption coefficient (β) of the medium, contained in the denominator of the exponent.

4. The duration of the pulse increases with the increasing distance (with increasing propagation time), because e.g. in (37) the pulse width is proportional to the denominator of the exponent, this again, to the distance R.

5. The absorption spectrum (33), characteristic of the ground, does not contain any factor referring to dispersion, therefore, the propagation velocity of the elastic wave in an absorbing medium coincides with the velocity of the disturbance propagating in a perfectly elastic medium. For longitudinal waves, this is equal to α. It must be remarked, however, that the propagation

velocity in an absorbing medium refers to the centre of the pulse. In (37), namely, $\bar{\varphi}_0$ is an even function of τ; in the centre of the pulse $\tau = 0$, $t - R/\alpha = 0$, that is, $\alpha = R/t$, where t is the time required for covering the distance R.

Our relations and conclusions have been related to the displacement potential. The results, however, can be extended, because of the relations existing between the field characteristics, [2], to any other suitably selected field characteristic.

In Fig. 6, the corresponding shapes of velocity and acceleration waves in the absorbing medium for different distances have been drawn for the initial velocity and acceleration waves to be derived from (25). The wave shapes belonging to increasing distances indicate that the signal shape, asymmetrical at short distances, become symmetrical at long distances. Besides those which were enumerated, also this is characteristic of the wave propagation in an absorbing medium.

The physical constants occurring in the text are

- C the propagation velocity of the shock wave in water,
- α_0 the propagation velocity of the sound wave in water,
- $\varkappa$ incompressibility,
- λ, μ Lamé-constants,
- α the propagation velocity of the longitudinal wave,
- ϱ the density of the medium,
- σ Poisson-ratio,
- β absorption coefficient.

REFERENCES

1. Cole, R. H.: Underwater Explosions, Princeton Univ. Press. 1948.
2. Gálfi, J.—Márton, P.—Meskó, A.—Stegena, L.: Szeizmika (Seismic prospecting). Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.
3. Fodor, Gy.: A Laplace-transformáció műszaki alkalmazása (Technical Applications of the Laplace-Transformation). Műszaki Kiadó, Budapest, 1962.
4. O'Brien, P. N. S.: Seismic energy from explosions. *Geophys. Journ.* 3 (1960).
5. Sharpe, J. A.: The production of elastic waves by explosion pressure. Part I. *Geophysics*, (1942).
6. Peet, W. E.: A shock wave theory for the generation of the seismic signal around a spherical shot hole. *Geophys. Prosp.* 8 (1960).
7. Градштейн И. С.—Рыжик И. М.: Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. Физ. Мат. Литературы, Москва, 1963.
8. Blake, F. C.: Spherical wave propagation in solid media. *Journ. Acust. Soc. Amer.* 24/2 (1952).
9. Burckhardt, H.: Some physical aspects of seismic scaling laws for underwater explosions. *Geophys. Prosp.* 12 (1964).
10. Carpenter, E. W.—Savil, R. A.—Wright, J. K.: The dependence of seismic signal amplitudes on the size of underground explosions. *Geophys. Journ.* 6 (1962).
11. Dix, H. C.: Seismic prospecting for oil. Harper and Brothers, New York, 1952.
12. Eirich, F. R.: Rheology. Vol. I. Academie Press Inc., New York, 1956.

13. Ewing, M. W.—Jardetzky, W. S.—Press, F.: Elastic waves in layered media. McGraw Hill. New York, 1957.
14. Gálfi, J.—Stegena, L.: On the development of the seismic wave. *Annales Univ. Sci. Bp, Sec. Geol.* Tom IV. 1960, Budapest.
15. Gaskell, T. F.: The relation between size of charge and amplitude of refracted waves. *Geophys. Prosp.* 4/2 (1956).
16. Гурвич И. И.: Сейсмическая разведка. Гостоптехиздат, Москва, 1960.
17. Huang Jen-hu: On the frequency spectrum of the seismic wave. *Annales Univ. Sci. Bp, Sec. Geol.* Tom IX. 1965, Budapest.
18. Kiss Z.—Simon B.: On the relationship between seismic amplitude and charge in quarry blasting. *Annales Univ. Sci. Bp, Sec. Geol.* Tom IX. 1965. Budapest.
19. Mueller, St.—Stein, A.—Vees, R.: Seismic scaling laws for explosions on a lake bottom. *Zeitschrift f. Geophys.* (1962).
20. O'Brien, P. N. S.: The relationship between seismic amplitude and weight of charge. *Geophys. Prosp.* 5 (1957).
21. Postma, C. W.: Changes of shape of seismic impulses in homogeneous viscoelastic media. *Geophys. Prosp.* 6 (1958).
22. Ricker, N.: The primary seismic disturbance in shale. *Bull. Seismol. Soc. Amer.* 41 (1951).
23. Ricker, N.: The form and laws of propagation of seismic wavelets. Proc. 3rd World Petroleum Congress Sec. I. p. 514. 1951, Leiden.
24. Ricker, N.: The form and laws of propagation of seismic wavelets. *Geophysics*, 18 (1953).
25. Sharpe, J. A.: The production of elastic waves by explosion pressures. Part II. *Geophysics*, 7 (1942).
26. Sezawa, K.: On the decay of waves in viscoelastic solid bodies. *Bull. Earthquake Res. Inst.* (3) 1927.
27. Tárczy-Hornoch, A.: A robbantási töltet és a beérkező jel amplitúdója közötti összefüggés (On the Relation between the Explosive Charge and the Amplitude of the Arriving Signal). *Magyar Geofizika*, 1964.
28. Voight, W.: Über innere Reibung fester Körper. *Ann. Phys.* (47) 1892.
29. Weston, D. E.: The low-frequency scaling laws and source levels for underground explosions and other disturbances. *Geophys. Journ.* 3 (1960).

СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ БЕСКОНЕЧНОГО ПРОСТИРАНИЯ

П. МАРТОН

РЕЗЮМЕ

Начиная с сороковых годов, несколько авторов занималось заключенной в заголовке проблемой, изучая одну какую-то часть её. В теоретических работах применяли разные способы решения. Правильность результатов многими была рассмотрена и экспериментально. Были проведены и самостоятельные попытки определить вид сейсмического сигнала, а также связь между амплитудой и количеством взрывчатого материала.

Статья содержит единое решение проблемы. В трёх её главах рассматриваются следующие вопросы:

1. Подводный взрыв и распространение волн.
2. Скваженный взрыв и распространение волн в почве;
3. Распросртанение волн в поглащающей среде.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (3—4), pp. 321—337 (1969)

ДИГИТАЛЬНАЯ ЧАСТОТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ ОБРАБОТКЕ МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Л. ЗИЛАХИ-ШЕБЕШШ

КАНД. ГЕОФ. НАУК

ГЕОФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. ЛОРАНДА ЭТВЁША

И

Й. ВЕРЁ

КАНД. ГЕОФ. НАУК

ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ АН ВЕНГРИИ

[Сдана 11 июня 1968 г.]

В статье излагается конструирование дигитальных фильтров для магнитотеллурических целей. После изложения принципиальных основ дается программа на ЭВМ МИНСК—2 сделанных фильтров. Во второй части статьи описываются первые опыты применения фильтров.

Анализу временных рядов в последнее десятилетие посвящается множество книг и статей. Целью всех методов является выделение из сложного процесса регистрации явления, вызывающего с какой-то точки зрения интерес, а также невключение мешающих исследованию процессов. Если в частотных отношениях исследуемых и так же мешающих явлений проявляется существенное различие, то для достижения нашей цели можем с успехом применять частотную фильтрацию. Проведение частотной фильтрации одинаково может быть осуществлена аналогичным и дигитальным путём. Здесь рассмотрим только дигитальный путь частотной фильтрации. При дигитальной фильтрации прежде всего требуется производить отсчет постоянно отрегистрированного сигнала в дискретных точках. По вычислительнотехническим причинам целесообразно делать отсчет в эквидистантных промежутках. Конечно, при этом встает множество проблем. После фиксации информаций в цифровом виде (если не будем осторожны) придется считаться с существенным смещением полного информационного материала. Общий вывод при отборе образцов трудно сделать, ибо они всегда зависят от свойств постоянного явления. Необходимо заметить, что при полученном после отбора образцов множестве информаций надо учесть и метод, с помощью которого можем попытаться восстановить постоянный сигнал. Например, пусть нашей «кривой» будет прямая. В этом случае достаточно задаваться координатами двух различных точек и учесть то обстоятельство, что между координатами точек «кривой» существует линейная функциональная зависимость. Этих информаций уже достаточно для того, чтобы определить любую точку «кривой». Естественно, это так и в случае любой заранее заданного типа «кривой». В случае, если исследования периодического характера, при отборе образцов необходимо учесть, что в полученном ряде результатов уже не существует компоненты с частотой больше $f_H = 1/2 \cdot \Delta t$, где Δt — расстояние между отборами образцов, или же, если в начальной функции и были такие, то они могут проявляться после отбора образцов только в искажениях частот, менших f_H. Поэтому целесообразно выбрать расстояние между отборами образцов так, чтобы оно по возможности было меньше $1/2 \cdot f_H$, где f_H — та наименьшая величина частоты, при которой значение интеграла ФУРЬЕ равно нулю, или с практической точки зрения достаточно малое число. Если такая величина не может быть найдена, то отбор образцов при исследовании частотных отношений приведет к фальшивым результатам. Здесь нежелательно останавливаться на теории отбора образцов, мы всего лишь хотели обратить внимание на то, что выбор расстояния между отборами образцов при применении дигитальной фильтрации должен происходить соответственно цели.

Целью нашей дигитальной фильтрации явилось взятие явления, соответствующего одной, заранее определенной частотной полосе. Теоретической основой фильтрации послужила так называемая конволюционная теорема. По этой теореме для функции справедлива зависимость

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, s\,(t-\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\, s(\tau)\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-i2\pi ft}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-i2\pi ft}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-i2\pi ft}\, dt .$$

То есть преобразователь ФУРЬЕ функции, полученной конволюционным интегральным преобразованием, равен произведению преобразователей ФУРЬЕ двух функций, участвующих в конволюционном интеграле.

Выберем функцию $s(t)$ таким образом, чтобы её преобразователь ФУРЬЕ в последующих периодах был непрерывной функцией:

$$\begin{array}{lll} s(f) \equiv 1 & \text{если} & f_1 \leqslant |f| \leqslant f_2 \\ s(f) \equiv 0 & \text{вообще}. & \end{array}$$

Функция $s(t)$ может определяться из функции $s(t)$ обратным преобразованием ФУРЬЕ.

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(f)\, e^{i2\pi ft}\, df = \int_{-f_2}^{-f_1} e^{i2\pi ft}\, df + \int_{f_1}^{f_2} e^{i2\pi ft}\, df =$$

$$= \int_{f_1}^{f_2} (e^{-i2\pi ft} + e^{i2\pi ft})\, df = \int_{f_1}^{f_2} 2 \cos 2\pi ft\, df =$$

$$= \frac{\sin 2\pi ft}{\pi t} \Bigg|_{f=f_1}^{f=f_2} = \frac{\sin 2\pi f_2 t - \sin 2\pi f_1 t}{\pi t} .$$

Воспользуясь известным тригонометрическим соотношением, искомую функцию $s(t)$ можем преобразовать:

$$s(t) = \frac{2}{\pi t} \sin\left(\pi(f_2 - f_1)\, t\right) \cos\left(\pi(f_2 + f_1)\, t\right).$$

После этого, если из функции $g(t)$ хотим выделить компоненты частот в интервале (f_1, f_2), то можем применить интегральное преобразование

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \int g(t-\tau) \frac{\sin\left(\pi(f_2 - f_1)\,\tau\right) \cos\left(\pi(f_1 + f_2)\,\tau\right)}{\tau} d\tau .$$

В результате получим такую функцию $y(t)$, преобразователь ФУРЬЕ которой в интервале (f_1, f_2) совпадает с преобразователем ФУРЬЕ функции $g(t)$, а вне его равен нулю. Естественно, это справедливо только в случае интегрирования между пределами $+\infty \leq u \leq -\infty$. Практическое осуществление фильтрации, конечно, с такими пределами невозможно, и интегрирование можно проводить только численное. Так, задача решается только приближённо. Для того чтобы значения интегралов получить как сумму произведений, нашу зависимость надо преобразовать.

Введём обозначения

$$t = k\Delta t$$
$$\tau = l\Delta t,$$

связанные с отбором образцов. Здесь k и l целые числа. Вместо интеграла перейдём к суммированию

$$y(k\Delta t) = \frac{2}{\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g\left((k-l)\,\Delta t\right) \frac{\sin\left(\pi(f_2 - f_1)\,\Delta t \cdot l\right) \cos\left(\pi(f_2 + f_1)\,\Delta t \cdot l\right)}{l\Delta t} \Delta t .$$

При функциях $y(t)$ и $g(t)$ покажем только множители Δt, как индексы (они ставятся в квадратные скобки) и на Δt можно сократить.

$$y[k] = \frac{2}{\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g[k-l] \frac{\sin\left(\pi(f_2 - f_1)\,\Delta t \cdot l\right) \cos\left(\pi(f_2 + f_1)\,\Delta t \cdot l\right)}{l} .$$

Практически суммирование происходит на конечном интервале $(-M, M)$, где M достаточно большое число, которое обеспечивает, что величиной функции фильтрации $s(t)$ для значений, больших M, практически можно пренебречь.

$$y[k] = \frac{2}{\pi} \sum_{l=-M}^{M} g[k-l] \frac{\sin\left(\pi(f_2 - f_1)\,\Delta t \cdot l\right) \cos\left(\pi(f_2 + f_1)\,\Delta t \cdot l\right)}{l} .$$

По этой формуле значение функции фильтрации нужно знать в $2M+1$ точках. Предположим, что функция фильтрации известна в N точках ($i = 1, 2, \ldots, N$). Получаемые по формуле значения $y[k]$ могут определяться только на интервале $M+1 \leqslant k \leqslant N-M$, если желательно обеспечить в сумме учёт всех произведений. Если вне интервала $1 \leqslant i \leqslant N$ значения функции можно считать равными нулю, то наш метод можно подготовить так, чтобы получить профильтрованные значения функции для каждой такой точки, в которой имелось и первоначальное значение функции. Программирование было сделано так: на основании заданных параметров $f_1, f_2, \Delta t, M, N$ подготовили значения функцией $s[l]$, где $-M \leqslant l \leqslant M$, затем вычисляли суммы произведений

$$y[k] = \frac{2}{\pi} \sum_{l=-M}^{M} g[k-l] \cdot s[l], \quad \text{где} \quad 0 \leqslant k \leqslant N$$

Сначала программа была сделана на языке GIER ALGOL, а затем в коде машины МИНСК-2. Программа на языке ALGOL даётся ниже:

Дигитальная полосная фильтрация 1122/25

```
begin real dw, dt, f1, f2, dz, a, b;
integer s, M, N, h, j;
L0: writetext (≮<dt:=≯);
    dt: = typein; output(≮ndd·dddd≯ dt);
L1: writecr: writetext (≮<N: = ≯);
    N: = typein; outcr;
    output (≮ndddd≯N);
L2: writetext (≮<M: = ≯);
    M: = typein; outsp (3);
    output (≮ndddd≯M);
L3: writetext (≮<f1: = ≯);
    f1: = typein; outsp (3);
    output (≮ nddd·ddd≯ f1);
L4: writetext (≮< f2 : = ≯);
    f2: = typein; outsp (3);
    output; (≮ nddd·dddd ≯ f2);
begin array g [—M : M] SZ [—M : M];
    if N — 2×M — 1⩽0 then begin
    writetext (≮<короткое ag ≯);
    go to L1; end;
    dw: = 3.14159×(f2 —f1)×dt;
    dz: = 3.14159×(f2 + f1)×dt;
L5: for s: = —M step 1 until M do
```

```
     begin: a: = dw×xs;
             b: = dz×xs;
     if a = 0 then begin
     sz [S]: = dw×cos [b];
     go to L9; end;
     sz [S]: = sin (a)×cos (b)/s;
L9:  end sl;
     outcr; outtext (≮<фильтр f_ν≯);
     input (g);
L6:  for s: = —M step until Mdo
     begin outcr: output (≮ ndddd·dddd·≯sz [S];)
     end:
     outtext (≮<выходящий сигнал ≯);
     outcr;
     b: = 0; h: = N —2×M — 1;
L7:  for s: = 1 step 1 until h do
     begin a: = 0: b: = b + 1;
L8:  for j: = —M step 1 until M do
     a: = a + g [j]×sz[—j];
     for j: = —M step 1 until M — 1 do
     g [j]: = g[j + 1];
     input (g[M]);
     if b = 5 then begin outcr;
     b: = 0; end;
     output (≮ ndddd·dddd≯2/π a); outtext (≮<≯);
     end s2;
     end b1;
     end pr;
```

Из встречающихся в программе выражений те, которые не определяются в языке «ALGOL», изложим здесь: «writetext» (≮ < текст ≯); печать GIER под действием такой команды выписывает серию сигналов в скобках string ≮ < ≯.

Под действием «typein» машина прочитывает и передает переменное в левой части число, выписанное печатью.

На команду «outsp (n)» на перфоленте пробивается «n»-ное количество сигнала пробела.

Под действием «outcr» перфорируются сигналы «каретка обратно» и «для работы рычага интервала». Под действием «output (≮ ***nddd*** ≯ M)» перфорируется значение переменной M в виде, показанной в скобках ≮ ≯, т. е. в нашем случае как 5-значное целое число. На команду «input (s)» машина прочитает с перфоленты следующее число и располагает в ячейке, выделенной для переменной (s). Под действием «writecr» происходит движение рычага интервала, каретка обратно.

Под действием «writetext» печать выписывает серию сигналов в скобках string ($\nless < \ldots \ngtr$).

При работе программы от LO до сигнала ***begin*** после L4 основным параметрам придаются значения, так что печатью выписывается имя объявленной переменной со знаком $:=$, затем управляющий машиной сообщает значение актуальной переменной, машиной перфорируется и имя, и значение переменной на перфоленте так, чтобы было видно и после обработки, что при помощи каких параметров произошла дигитальная фильтрация. Эти параметры подряд следующие:

dt расстояние между отборами образцов
N количество образцов
M полудлина функции фильтрации
f_1 нижняя граница частотной полосы
f_2 верхняя граница частотной полосы

Пройдя begin после L4 программа посмотрит, есть ли достаточно данных для фильтрации. Если нет, то выписывается текст «короткий g» и происходит обращение за новым заданием, что сигнализируется снова печатью «dt: $=$».

Если задача осуществима, то машиной определяются элементы объявленного блока sz $[-M : M]$ то есть значения функции фильтрации.

После вычисления значений функции фильтрации под действием «input (g)» первые $2M+1$ элементов помещённой на перфоленте функции фильтрации попадают на место, оставленное для блока «g». Размер блока «g» совпадает с размером блока «sz». После этого выписываются значения функции фильтрации. В первом случае скальярное произведение элементов блоков «g» и «sz» ($M+1$)-ый элемент профильтрованной функции. На определение предыдущих элементов в этой форме программы не обратили внимания. Этой программой также не определяется последний M-ый элемент профильтрованной функции. Вычисленные значения профильтрованной функции выписываем в табличном виде. Вычисление же новых значений профильтрованной функции в этой программе происходит так, что элементы блока «g» перекладываем в соответствии с указанием $g[i] := g[i+1]$, и вместо элемента g $[M]$ при помощи команды input (g $[M]$) с перфоленты вводим новое значение. Программа на ЭВМ МИНСК-2 была сделана в коде машины. Её различие от сделанной для GIER программы состоит в том, что профильтруемая функция не постепенно, за время вычисления функции попадает в назначенные для неё ячейки, а её уже предварительно поместили там. Это делает возможным довольно большая оперативная память машины МИНСК-2.

Другое различие состоит в том, что профильтруемая функция ещё до обработки дополняется нулевыми значениями функции, то есть предполагалось, что профильтруемая функция кроме заданных значений тождественно равна нулю. Но самым существенным различием между двумя программами является то, что сделанная для МИНСК-2 программа кроме табличной формы профильтрованную функцию может фиксировать на перфоленте, управляющей чертёжной машиной (ZUSE graphomat). Перед обработкой нужно задаваться и относящимися к изображению параметрами (например, расстоянием между отборами образцов, или шириной полосы, внутри которой происходит изображение). Программа является частью готовящейся дигитальной сейсмической программной системы. После прочерчения одной кривой соответственно ширине полосы возвращается к начальному пункту, при этом головка для черчения подготовлена для изображения следующей функции. В этой системе может быть прочерчено произвольное (ограниченное лишь размером чертёжного стола) количество функций с одной переменной. Произвольно может быть выбран и вариант, где подряд прочерчиваются только профильтрованные функции, или же даже не профильтрованные, с целью проверки.

Применение дигитальной фильтрации в магнитотеллурике

Одной из самых больших проблем магнитотеллурических исследований является выбор связанных электрических и магнитных компонентов соответствующего периода. Хотя по нашим опытам и определение на глаз периода, на основании крайних значений, не сопровождалось плохими результатами, однако, несомненно стоит заниматься фильтрацией ряда полученных регистраций. Хотя и не ожидается существенное улучшение в значительной части полученных значений магнитотеллурических сопротивлений, всё-таки есть две точки зрения, обосновывающие исследования такого характера. Одной из них является то обстоятельство, что есть такие промежутки времени, когда связь между магнитным и электрическим компонентами разрушается. Это разрушение по всей вероятности связано с движением, или даже смещением источника, то есть системы ионосферических или магнитотеллурических токов. В излагаемом примере будем обращать внимание именно на такой случай. Не подходящие для вычисления магнитотеллурических сопротивлений промежутки времени трудно отделить только на основании начальных регистраций, ведь может случиться, что смещение проявляется не по всему спектру, а только в некоторых интервалах частот. На основе же профильтрованного ряда регистраций такие интервалы без дальнейшей оговорки можно выделить, и исключать из обработки.

Другой возможностью, обоснованной фильтрацией является более полное воспользование информациями, находящимися в отдельных регистрациях. Меньшие периоды, проявляющиеся с меньшей амплитудой, могут быть узнаваемы только после фильтрации и это при случае означает возможность уменьшения времени для измерений.

Помимо этого нельзя пренебрегать и тем, что дальнейшая автоматизация при магнитотеллурических измерениях возможна только после (аналогичной или дигитальной) фильтрации, ведь определение периода при помощи оценки, или же выбора на основании крайних значений здесь не может быть применяема.

Исследование изложенного выше фильтра, приготовленного в начале для сейсмических целей, показало, что нет особенного затруднения в том, чтобы этот фильтр применять и для фильтрации магнитотеллурических регистраций. Единственное различие, которое нужно учесть, состоит в том, что в этом случае необходимо иметь не только временной, но и амплитудный масштаб. А в общем, описанное выше полностью относится к магнитотеллурическим регистрациям, начиная от определения расстояния между отборами образцов и кончая проблемой выбора подходящего фильтра. В последующем хотим рассмотреть несколько подробнее эти два вопроса, прежде чем перейти к практическому примеру.

Целесообразнее в начале рассмотреть вопрос о выборе подходящих фильтров, так как зная их, становится легче определение расстояния между отборами образцов. Принципиально существуют две возможности: или решим заранее, какие будем применять фильтры и в этом случае не учитываем особенности данной регистрации, или же при известной регистрации решим вопрос о применяемых фильтрах. Первый случай подходит при опытных измерениях, когда фильтрация происходит либо сразу, либо во время полевых измерений. Но в случае некоторых отдельных исследований второй метод имеет преимущество перед первым. Выбор фильтров может происходить по нескольким принципам. например, по тому, что в каких полосах наименьшая корреляция между магнитными компонентами, перпендикулярными друг другу, то есть где самая слабая поляризация поля, а определение тензора проводимости самое точное. Для настоящего исследования применяли не эту возможность, а фильтры выбрали на основании частотного спектра данной регистрации так, чтобы в них уменьшались по возможности все, даже и самые маленькие вершины. К тому же выделили не только вершины отдельных частотных спектров, а рассмотрели, что нельзя ли получить новые информации из дальнейшего разложения одной (самой большой) частотной вершины. Этот вопрос может иметь значение при планировании определенного фильтровального решения, ведь если вершины в одном спектре могут быть дальше раскладываемы, тогда выгодно применять фильтры с более тонкими делениями.

При известных спектральных вершинах уже легко определить максимальное расстояние отсчитывания, что не вызывает проблему в требуемом интервале периодов, то есть расстояние между отборами образцов меньше половины исследуемого кратчайшего периода.

Описанный фильтр исследовался на применение на основе регистрации, сделанной в обсерватории около *Надьценк*. В настоящей статье не желаем

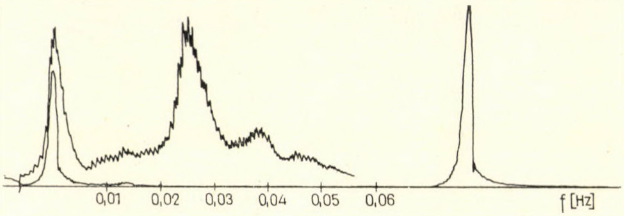


Рис. 1а. Аналогичный спектр исследованной магнитной регистрации (можно видеть проверочные сигналы около 0 и 0,08 Гц)

останавливаться на значениях магнитотеллурических сопротивлений, на их исследовании, а только на сравнении функций, полученных после фильтрации. Длина исследованной регистрации была 10 560 сек, т. е. приблизительно 3 часа. Исследование проводили на магнитном и на перпендикулярном ему электрическом компонентах. Теллурическая регистрация сделана с чувствительностью 0,15 мв/км/мм, регистрационным прибором типа Т 14 (гальванометр с жидкостным затуханием). Магнитная же регистрация снята при помощи индукционной катушки с сердечником, регистрирование проводилось тем же теллурическим регистратором.

Первым шагом в Исследовательской Лаборатории по Автоматике АН Венгрии сделан аналогичный спектр исследуемой регистрации при помощи коррелятора НОРАТОМ. Эти спектры для электрических и магнитных компонентов показаны на рисунках 1а и 1в. В связи с этими аналогичными спектрами пришли к выводу, что хотя теоретически можно было бы и их использовать для вычисления значений сопротивлений, всё-таки достоверность отдельных абсолютных значений не достаточна, иным словом относительное соотношение отдельных значений хорошо, абсолютное их значение не хорошо могут быть определены. За то для обозначения профильтруемых полос очень хорошо можно применять аналогичный спектр. На основании спектра выбрали следующие фильтры.

I.	0,008 — 0,012 гц	(125 — 83,3	сек)
II.	0,012 — 0,017 гц	(83,3 — 60	сек)
III.	0,022 — 0,028 гц	(45,5 — 36	сек)
IV.	0,022 — 0,025 гц	(45,5 — 40	сек)
V.	0,025 — 0,028 гц	(40 — 36	сек)

VI. 0,036 — 0,040 гц (28 — 25 сек)
II. 0,043 — 0,047 гц (21 — 23,5 сек)

Первыми двумя фильтрами желаем использовать слабые вершины, проявляющиеся в интервале с большим периодом, а третьим и пятым самую большую, встречающуюся в интервале пульсаций типа pc 3 с относительно большим периодом. Разделение на две части вершины преследует цели, чтобы можно было рассмотреть, что возможно ли в пределах одной вершины

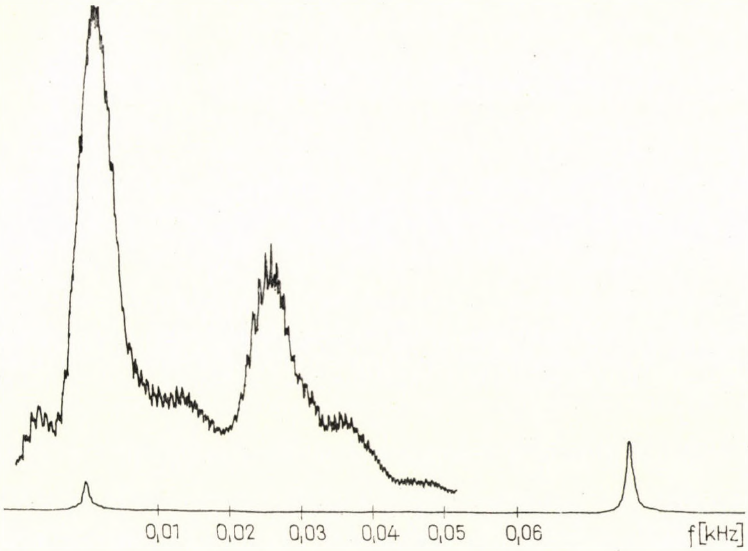


Рис. 1б. Спектр исследуемой теллурической регистрации

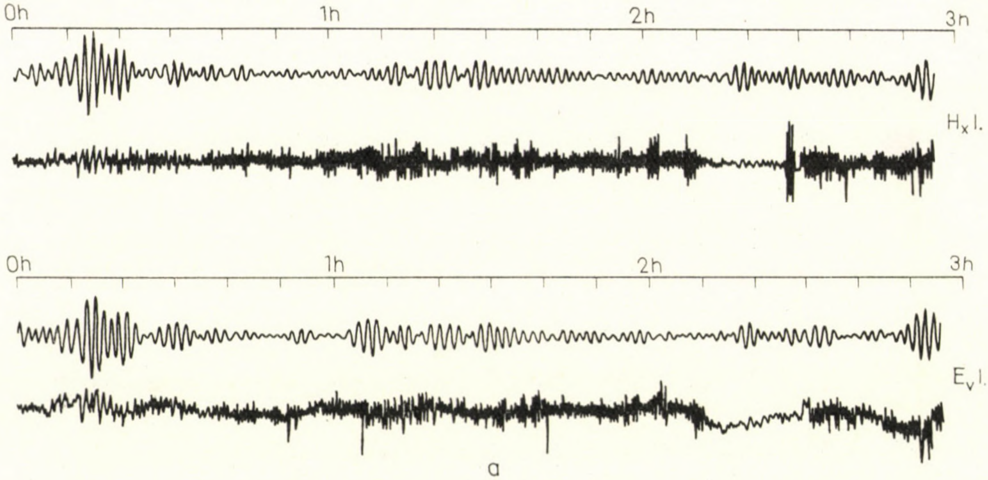
получить несколько информаций так, что при этом профильтрованные кривые построены двумя различными фильтрами. Желательно заметить, что в настоящем случае вычисление отношения между теллурическими и магнитными компонентами, то есть импеданции или магнитотеллурического сопротивления не имеет значения с точки зрения исслевования, потому что наши фильтры работают в интервале S, а для этого характерно, что отношение E/H (импеданция) постоянно. И так вычислив на основании двух профильтрованных функций значения отношения E/H, нельзя было бы определить, что отношения, полученные фильтрами IV и V одинаковы потому, что оба фильтра дали ту же информацию, или же потому, что отношение и физически не претерпевает изменения. Фильтры VI и VII используют разделенные в интервале с большим периодом две вершины.

Отметим, что компонент постоянного тока около 0 гц происходит из-за неточности установки средней линии, а сигнал с частотой около 0,075 гц из-за выверки.

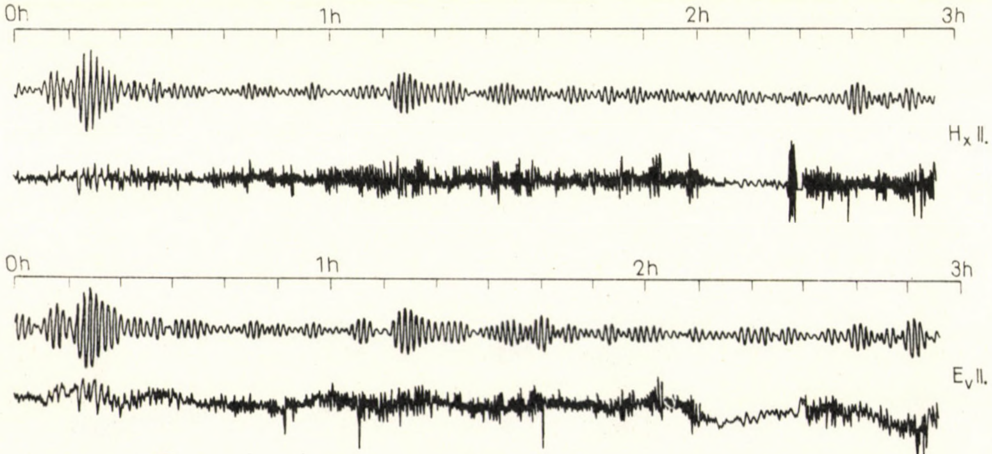
На рис. 2.а-д изображены кривые, полученные при помощи этих фильтров, вместе с оригинальными регистрациями.

В связи с магнитной регистрацией отметим ещё, что возмущение, возникающее через 2 часа после начала регистрации, происходит вследствие выверки магнитной установки, так что эту часть в дальнейших исследованиях не следут учитывать. Дигитализация, т. е. время, проходящее между отборами образцов 6 сек (развёртка начальной регистрации была 20 мм/сек, т. е. отбор образцов на ней произошёл через 2 мм).

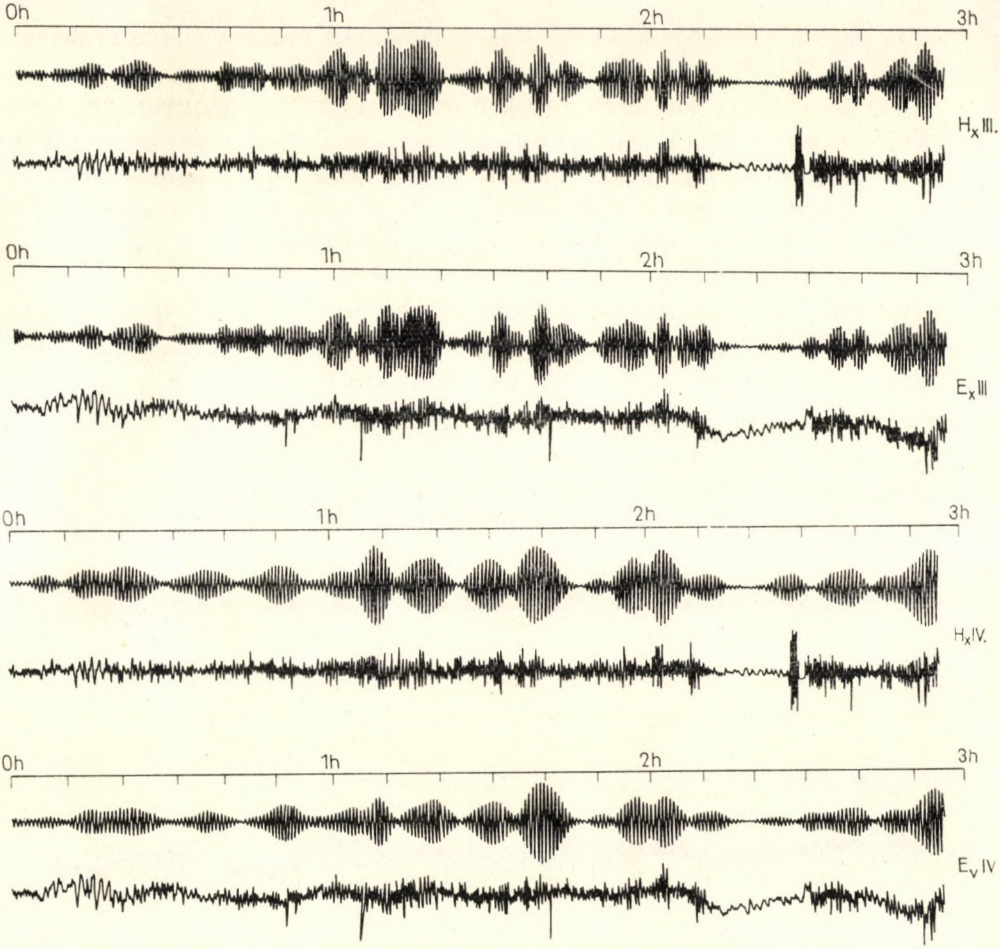
В связи с русинками важно знать, что их вычерчивание происходило графоматом ZUSE таким образом, что программа установила максимальную амплитуду автоматически на одинаковую (40 мм) величину.



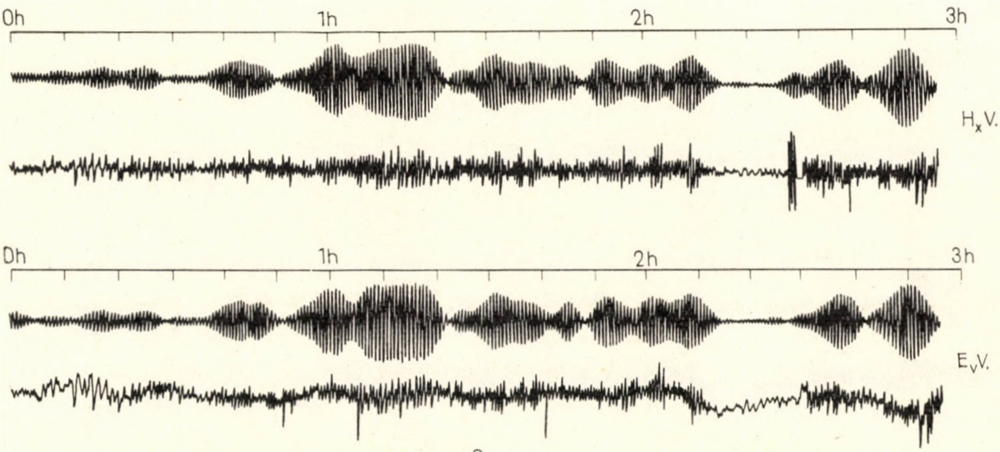
a



b



d



e

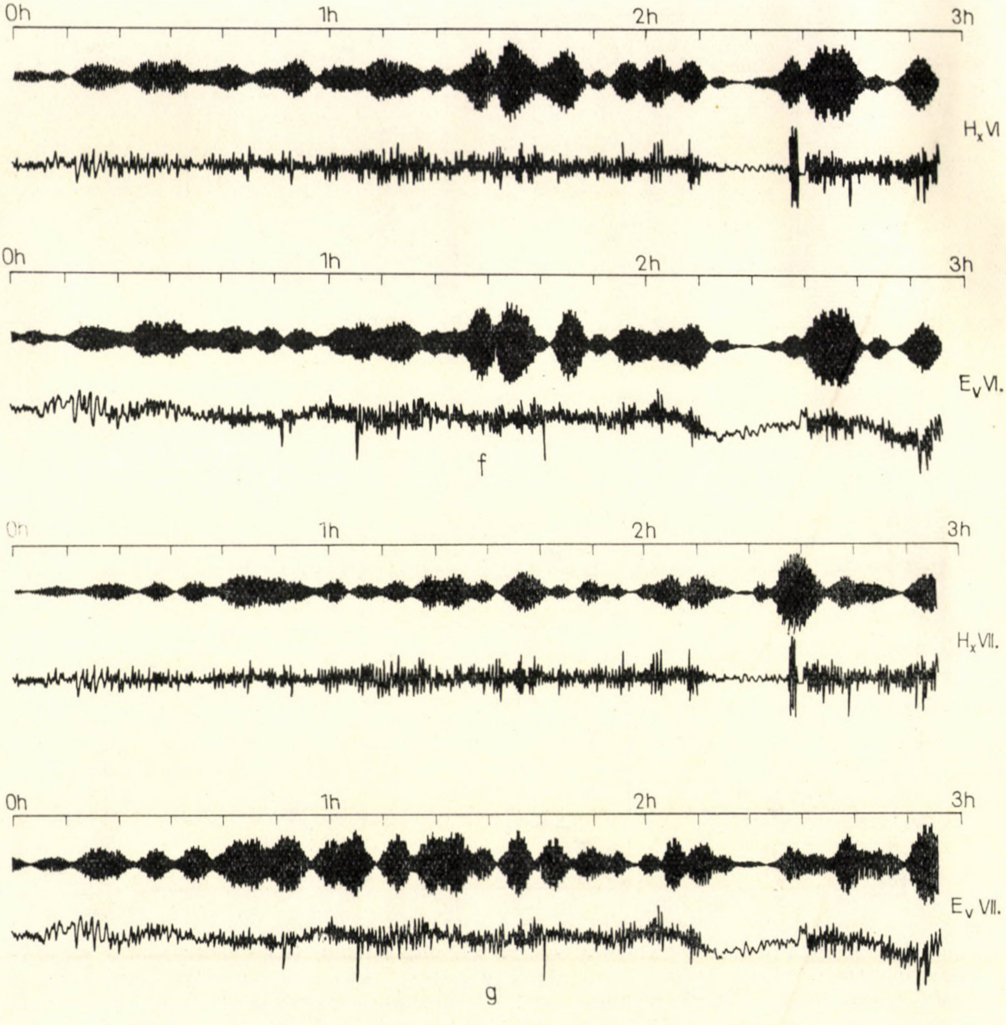


Рис. 2а-д. Исследованные регистрации и профильтрованные разными фильтрами функции. Частотную полосу фильтров, обозначенных римскими цифрами, см. в тексте. Под каждой профильтрованной функцией показана и оригинальная функция. Максимальная амплитуда при вычерчивании графоматом ZUSE везде одинакова (в оригинале 40 мм)

На рис. 3. показана зависимость одновременных амплитудных вершин и других характерных точек на сопряжённых парах теллурических и магнитных регистраций. В случае первых двух фильтров зависимость ещё не совсем определена лучше всего у фильтров III—V, которые попадают в самую большую амплитудную вершину. У фильтров VI, а особенно VII зависимость снова портится. Несколько точек, особенно у двух последних фильтров, получается по искусственно возмущенному интервалу на магнит-

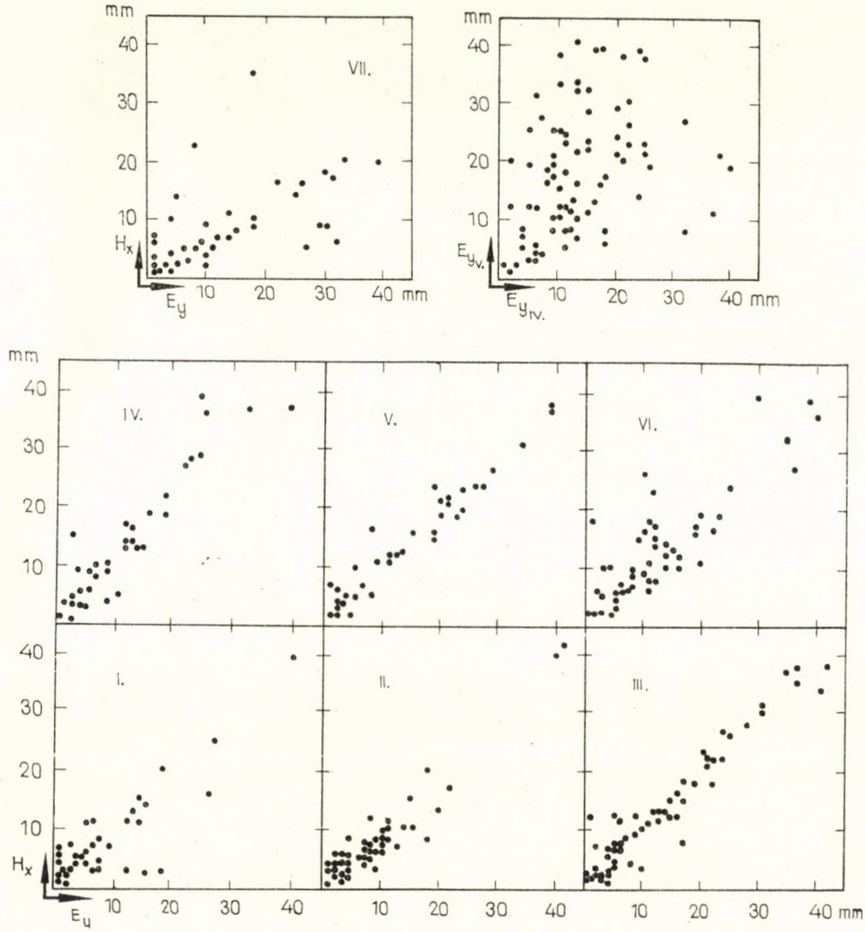


Рис. 3. Зависимость для 7 фильтров между максимальными теллурическими и магнитными одновременными амплитудами функций, полученных отдельными фильтрами, а также связь между одновременными, теллурическими амплитудами фильтров IV и V

ной регистрации, так что их при оценке рисунков не следует учитывать, зато эти значения появятся при автоматической дигитализации.

На рис. 3. изображена ещё зависимость между одновременными значениями профильтрованных теллурических регистраций, сделанных фильтрами IV и V. Несомненно, что связь между этими множествами точек намного слабее, то есть зависимость между одинаковыми профильтрованными рядами двух компонентов теснее у результирующей, полученной разными фильтрами об одной и той же регистрации, даже и тогда, если два разных фильтра лежат на одной спектральной вершине.

Несмотря на тесную связь между двумя компонентами, несомненно, что встречаются и величины, не принадлежащие к общей зависимости.

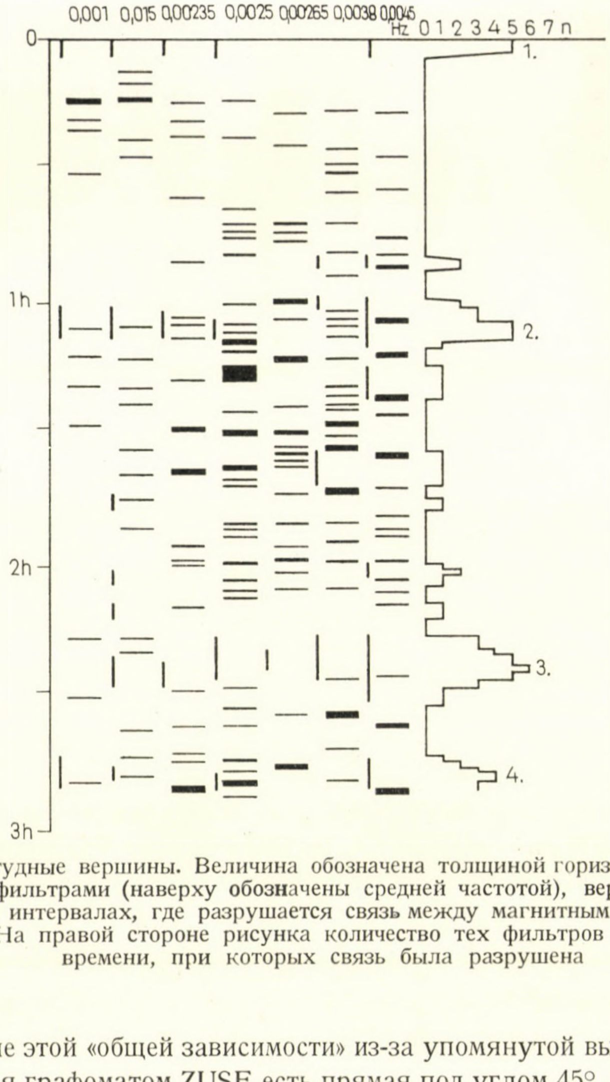


Рис. 4. Амплитудные вершины. Величина обозначена толщиной горизонтальных линий, полученных 7 фильтрами (наверху обозначены средней частотой), вертикальные линии поставлены на интервалах, где разрушается связь между магнитным и теллурическим компонентом. На правой стороне рисунка количество тех фильтров в зависимости от времени, при которых связь была разрушена

(Изображение этой «общей зависимости» из-за упомянутой выше особенности вычерчивания графоматом ZUSE есть прямая под углом 45°, за исключением фильтра VII, где вершина магнитной амплитуды попадает в возмущенный интервал и поэтому значения амплитуды меньше). Более подробное рассмотрение этих различающихся значений становится возможным по рис. 4. На нем указаны интервалы регистраций, не совпадающие по оценке на глаз, а также более существенные крайние амплитудные значения (двойная амплитуда больше 10 мм). На правой стороне рисунка для отдельных моментов указали, что у скольких фильтров не совпадают эти две амплитуды. Существенное различие показывается в 4-х местах: в начале и в конце регистраций (это особенность фильтра), вокруг искусственного магнитного возмущения и примерно через 1 час 6 минут после начала регистраций. Это последнее есть самое интересное, ведь здесь не существует подобного первым трём объяснения. Возможны две вариации: рисунок хорошо показывает, что амплитуда почти у всех фильтров возрастает именно на этом интервале и возможно, что здесь нужно считаться или подобным началу регистраций явлением, или же это приборное явление. Первому предположению противоречит фильтр V, при котором первая вершина очень большая как раз через час после начала регистрации, и всё-таки, зависимость двух компонентов не разрушается. К сожалению, наблюдаемое на регистрации второе «оживление» около 2 ч. 35 м. очень быстро следует за искусственным магнитным возмущением, поэтому из последнего нельзя сделать выводов. Мы считаем, что в этом случае на самом деле речь идёт о таком интервале времени, когда тесная между двумя компонентами корреляция разрушается вследствие особенности источника. Тем не менее этот вопрос требует дальнейших исследований.

На основании вышесказанного можем перечислить следующие преимущества дигитальной фильтрации:

1. Становится возможным определение сопряжённых амплитудных значений, относящихся к данному периоду, даже в близких друг к другу полосах.

2. Можно получить информацию о надежности соотношений, принадлежащих к отдельным периодам (в настоящем случае наилучшие соотношения, полученные фильтрами III—V, а наименее надёжные — значения, полученные фильтрами VII, а также I).

3. Становится возможным отделение интервалов, когда вследствие причин измерительной техники или природы источника пульсаций регистрации не могут быть использованы для определения магнитотеллурических сопротивлений.

DIGITAL FREQUENCY FILTERING AND ITS USE IN THE MAGNETOTELLURIC

L. ZILAHI-SEBES and J. VERŐ

SUMMARY

The paper summarises the method of digital frequency filtering. The first problem is sampling. The filters used in the following were constructed on the basis of the convolution theorem so that its Fourier-transform is

$$s(f) = 1 \quad \text{if} \quad f_1 \leqslant f \leqslant f_2$$
$$s(f) = 0 \quad \text{otherwise.}$$

The function $s(t)$ is obtained by Fourier transformation. With the aid of $s(t)$, the filtered function can be computed as integral transform, i.e. a band f_1—f_2 can be separated from a given time series. This integral transformation is naturally substituted by summation. The program was made for Gier, the paper gives, however, its version for MINSK-2 (Algol with additions explained in text). The filtered function can be tabulated or designed with a Zuse-graphomat (see e.g. figs. 2a—g).

The filter was constructed for seismic purposes, but it can be used for filtering of magnetotelluric records, too. Its use allows the expansion of the frequency band in construction of the sounding curve as well as further automation. In the example treated the passband was determined using analogue spectra so that they lie on peaks of the spectra (fig. 1a and b), on the other hand filters IV and V (figs. 2d and e) are subdivisions of filter III (fig 2c). Figs. 2 represent the upper part the magnetic, the lower part the earth current records, in each case the original one over the filtered series. The maximal amplitude in each series is identical for better comparison. Fig. 3. shows the values of simultaneous magnetic and earth current amplitudes; filters III to V give in very good approximation 45° straight lines. Further it is shown, that a subdivision of filter III gives surplus information. On the right side of fig. 4. the number of filters is to be seen, where the close correlations of magnetic and earth current amplitudes is violated. There are four such intervals: intervals 1. and 4. are at the beginning and end of the record, resp., and accordingly they are transient phenomena, in interval 3. an artificial disturbance (determination of sensitivity) occurred, but interval 2. has no such simple explanation. It is possible, that the increase of activity produced (similar to interval 1.) a transient confusion, but it is more likely that it has a physical cause (effect of source). The exclusion of such intervals from the processing represents one of the advantages of the digital filtering in magnetotelluric exploration.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (3—4), pp. 339—357 (1969)

INVESTIGATIONS ON THE PHENOMENA OF FLUID MECHANICS AND THERMODYNAMICS IN GEOTHERMAL WELLS

I. TARJÁN

CAND. TECHN. SCI.

UNIVERSITY OF HEAVY INDUSTRY, MISKOLC

[Manuscript received 12 July, 1968]

The paper studies the phenomena of fluid mechanics and thermodynamics encountered in geothermal wells producing hot water, wet steam, or overheated steam. The characteristic data of geothermal wells can be determined, in the function of well depth, by calculations which make possible the predetermination of the effect of well diameter and casinghead counterpressure variations on the operation of the geothermal well.

Measurements of the fluid mechanics and thermodynamics characteristics of the medium flowing in geothermal wells were hardly carried out up till now. Velocity, quantity, and temperature measurements for the casing head

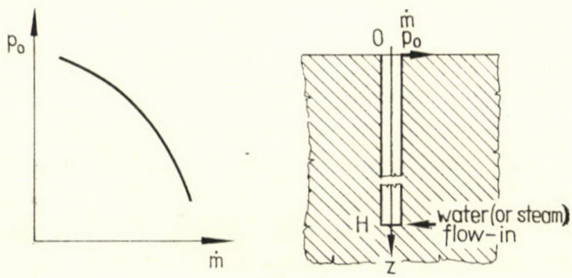


Fig. 1

pressure and outflow medium are relatively much simpler, but often contradictory and unnatural measurement results are obtained in the function of well depth [1, 2, 3]. In addition to certain objective difficulties this is due mainly to the lack of knowledge on the character of the flow within the geothermal well, as the thermal phenomena taking place during flow have not been completely clarified, as yet.

The typical nature of the relation between the output of the geothermal wells and the counterpressure at the casing head is illustrated in Fig. 1. The pressure measured at the bottom of the well (p_H) can be determined from the sum of the counterpressure (p_0), the hydrostatic pressure of the liquid column, and the flow losses:

$$p_H = p_0 - \int_H^0 \varrho(z)\, g\, dz - \int_H^0 dp_v\,, \tag{1}$$

where H means well depth.

Flow losses can be calculated from the equation applicable to turbulent flow:

$$dp_v = \frac{\lambda w^2 \varrho(z)}{2\,d}\,dz\,,$$

where w is the velocity of the flowing medium, d is the well diameter, λ represents the friction coefficient, and $\varrho(z)$ means density at any z depth.

In case of a liquid mass m delivered per unit time, and a cross-section of well f, the flow velocity is:

$$w = \frac{\dot{m}}{\varrho(z) f}\,.$$

Substituting the above expression into Equ. (1) gives the pressure value to be measured at the bottom of the well:

$$p_H = p_0 - \int_H^0 \varrho(z)\,g\,dz - \frac{\lambda \dot{m}^2}{2df^2}\int_H^0 \frac{dz}{\varrho(z)}\,. \tag{2}$$

The difference between pressure p_T measured at the hot water or steam storage plant, and pressure p_H existing at the well base brings about the $\dot{m}$ medium flow however impeded by the resistance between the plant containing water or steam and the well base proper. Inflow to the well may be either laminar or turbulent.

In case of hot water inflow through a porous medium, the flow is generally laminar, when the difference of pressure is

$$p_T - p_H = \alpha \dot{m} \tag{3}$$

where α is a constant characteristic of the laminar inflow.

On the other hand in case, of a turbulent inflow, the differential pressure between the approximately constant pressure of the plant and the well base pressure is

$$p_T - p_H = \beta \dot{m}^2 \tag{4}$$

where β is a constant characteristic of the turbulent inflow.

Substituting Equs. (3) and (4) into Equ. (2), the characteristic curve of the geothermal well under laminar inflow conditions will be expressed by

$$p_0 = p_T + \int_H^0 \varrho(z)\,g\,dz - \alpha \dot{m} + \frac{\lambda \dot{m}^2}{2\,df^2}\int_H^0 \frac{dz}{\varrho(z)}\,. \tag{5}$$

The characteristic curve of a turbulent inflow well may be described by the following formula:

$$p_0 = p_T + \int_H^0 \varrho(z)\, g\, dz - \beta \dot{m}^2 + \frac{\lambda \dot{m}^2}{2\, df^2} \int_H^0 \frac{dz}{\varrho(z)} \,. \tag{6}$$

In case of a water vapour inflow, using the relation valid for compressible media and assuming an isothermic flow from plant to well we get:

$$p_T^2 - p_H^2 = \delta \dot{m}^2 \tag{7}$$

that is,

$$p_H = \sqrt{p_T^2 - \delta \dot{m}^2} \,.$$

Here δ is a constant characteristic of the vapour inflow. Now substituting this into Equ. (2) will give the following equation for the characteristic curve of the well:

$$p_0 = \sqrt{p_T^2 - \delta \dot{m}^2} + \int_H^0 \varrho(z)\, g\, dz + \frac{\lambda \dot{m}^2}{2df^2} \int_H^0 \frac{dz}{\varrho(z)} \,. \tag{8}$$

Reopening the above statements in mind, let us now study the phenomena taking place in geothermal wells under water and vapour inflow conditions, respectively.

Outflow data (p_0 counterpressure, T_0 outflow temperature, and $\dot{m}$ outflow quantity) reveal whether a hot water, wet steam, or overheated steam producing well is being studied.

Wet steam production is associated with a T_0 boiling point temperature pertaining to the casinghead pressure of p_0. From the well base to a certain level hot water may flow and, after the boiling point, from this level to the outflow there may be wet steam flowing with an increasing vapour content. On the other hand, it is similarly possible that overheated steam will flow from the well base to the boiling point level and, therefrom, wet steam of decreasing vapour content to the well spout.

In case of overheated or wet steam, often outflow takes place with the speed of sound. On the basis of the outflow data, from Fig. 2 it can be easily found whether hot water, wet-steam, or overheated steam outflows out. Fig. 2 illustrates, for a normal geothermic well of $\dot{m} = 20$ kg/s output, the limit curve representing sound speed outflow with $d = 100$ mm, $d = 150$ mm, and $d = 200$ mm diameters.

The following paragraphs discuss the thermal and flow conditions of hot water, wet steam, and overheated steam producing geothermal wells at subsound speed flow.

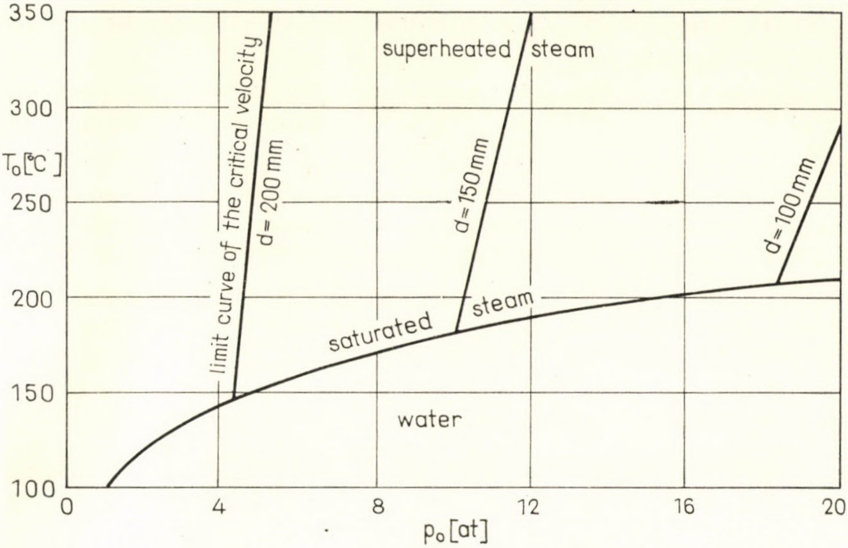


Fig. 2

Hot water producing geothermal well

The temperature of hot water inflow at the well base at H depth can be determined from the geothermal data:

$$T_H = \frac{H}{gg} + T_{00} \tag{9}$$

where (gg) = grad/cm.

In this relation gg means the average geothermal gradient, and T_{00} the annual mean temperature at the soil surface. The hot water of a temperature determined by the geothermal gradient flows into the well at a rate of

$$w = \frac{\dot{m}}{\varrho(z) f}.$$

This rate is approximately constant along the well as the $\varrho(z)$ water density may be considered as approximately constant within the range of 100 to 200°C, and the dependence of density on pressure is even more negligible. In case of a normal geothermic well with a water delivery of $\dot{m} = 20$ kg/s, average density of $\varrho = 900$ kg/m^3, and well diameter of $d = 100$ mm, the flow rate of the water will amount to $w = 2{,}55$ m/s, while with a well diameter of $d = 200$ mm a rate of $w = 0{,}64$ m/s will be obtained.

Due to the comparatively low velocity values there will be a heat exchange taking place between the rock shell surrounding the well, and the hot water flowing therein. The heat transfer between water and wall is significant whereby the hot water will warm up the surroundings of the well. Later on the heat exchange will decrease, and the hot water will cool off only at a lower rate in the well. These flow conditions discussed in the literature [4] are maintained until there is only water flowing from the well base to the outflow, as the water will never reach its boiling point anywhere within the well. At an outflow temperature of over 100°C this can be achieved only by creating a counterpressure exceeding the pressure of the wet steam pertaining to the outflow temperature. With the knowledge of the outflow data from the Fig. 2 the conditions of a geothermal well producing water can be very easily guessed.

The characteristic curve of a hot water producing geothermal well is, with a laminar inflow, according to Equ. (5):

$$p_0 = p_T - \varrho g H - \alpha \dot{m} - \frac{\lambda \dot{m}^2}{2df^2} \frac{H}{\varrho} . \tag{10}$$

The same, but for a turbulent inflow, can be written according to Equ. (6) as follows:

$$p_0 = p_T - \varrho g H - \beta \dot{m}^2 - \frac{\lambda \dot{m}^2}{2df^2} \frac{H}{\varrho} . \tag{11}$$

The pressure variation in function of well depth is linear:

$$p = p_0 + \varrho g z + \frac{\lambda \dot{m}^2}{2df^2} \cdot \frac{z}{\varrho} . \tag{12}$$

The mean temperature value any cross section of the well, at a given depth and moment, can be determined on the basis of the relevant literature [4, 5] by using the empirical formulae verified by calculations or measurements.

Geothermal wells producing wet steam

In the wet steam producing geothermal well of a hot water inflow at its base, investigations on the thermal conditions assume that the hot water flowing upwards arrives at a level where, owing to the pressure drop, its boiling point will be reached. In practice, of course, this level is indistinct, fluctuating within some section of the well length. From this level on, there will be wet steam flowing with an increasing vapour content. The specific volume of the wet steam is

$$v = v' + (v'' - v')\, x \tag{13}$$

where v' is specific volume of the boiling water, v'' indicates the specific volume of the dry saturated steam, and x represents the steam content.

As is well known, the value of the external evaporation heat is

$$\psi = p(v'' - v')$$

which may be considered, within the range of 100 to 130°C, as practically constant, with a mean value of $\psi_k = 1{,}85 \cdot 10^4$ mkp/kg, whereby the specific volume relation will give

$$v = v' + \frac{\psi_k x}{p} . \tag{14}$$

Hence the specific volume of the water will be regarded as constant, and a mean value of $v_k' = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ m³/kg can be reckoned with, in the 100 to 300°C range.

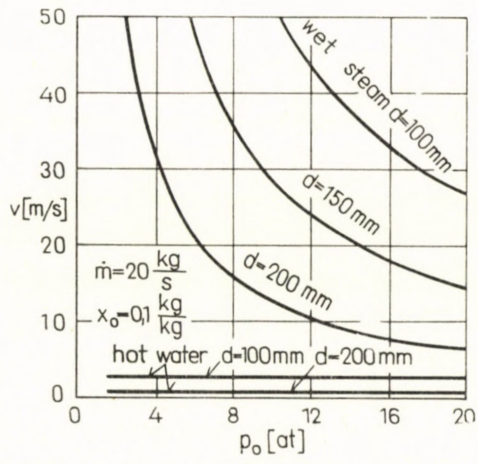


Fig. 3

The flow velocity of a geothermal well, at the outlet with a steam content of x_0 and specific volume of v_0 would be

$$w = \frac{\dot{m} v_0}{f} = \frac{\dot{m}}{f}\left(v' + \frac{\psi_k x}{p}\right). \tag{15}$$

Fig. 3 illustrates the outflow velocity in case of a normal geothermic well ($\dot{m} = 20$ kg/s), at different casinghead pressures, for diameters of $d = 100$ mm, $d = 150$ mm, and $d = 200$ mm, respectively, with an outflow steam content of $x_0 = 0{,}1$ kg/kg and or in case of hot water outflow. From the above mean values it can be concluded that wet steam flows generally with a velocity 10 to 20-times higher than that of hot water of the same weight.

Due to the high velocities involved, and the less favourable heat transfer conditions, there is only an insignificant heat exchange with the surrounding. Assuming the wet steam flow to the isentropic leads to results showing good agreement with the measurement data. Let the pressure at the water level H_1 be p_H and the change of state isentropic then the following equation with some approximation would assure sufficient accuracy [6]:

$$\frac{p_{H_1}}{p} = \left(\frac{v}{v'_{H_1}}\right)^{\varkappa}, \tag{16}$$

or, by its expansion and with the terms of higher order neglected:

$$v = v'_{H_1}\left(1 + \frac{1}{\varkappa} \frac{p_{H_1} - p}{p}\right). \tag{17}$$

The pressure variation along the element well section dz can be determined from the sum of the hydrostatic pressure and the pressure loss due to friction:

$$dp = \varrho(p)\, g dz + \frac{\lambda \dot{m}^2}{2df^2} \frac{dz}{\varrho(p)}, \tag{18}$$

which, by separating and integrating the variables, leads to the following equation:

$$z = \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\varrho(p)\, g + \dfrac{\lambda \dot{m}^2}{2df^2} \dfrac{1}{\varrho(p)}},$$

where

$$\varrho(p) = \frac{1}{v(p)}$$

can be determined on the basis of Equ. (17). After integration, and the introduction of the following expressions

$$c^2 = \frac{\lambda \dot{m}^2}{2df^2}$$

$$A = \frac{v'^2_{H_1} \dfrac{1-\varkappa}{\varkappa^2} c^2}{1 + v'^2_{H_1}\left(\dfrac{1-\varkappa}{\varkappa}\right)^2 d^2}$$

$$B = \frac{v_{H_1}'^2 \frac{1}{\varkappa^2} c^2}{\left[1 + v_{H_1}'^2 \left(\frac{1-\varkappa}{\varkappa}\right)^2 c^2\right]^2}$$

$$C = \frac{1 + v_{H_1}'^2 \left(\frac{1-\varkappa}{\varkappa}\right)^2 c^2}{1 - v_{H_1}'^2 \left(\frac{1-\varkappa}{\varkappa}\right)^2 c^2}$$

$$D = \frac{1 - v_{H_1}'^2 \left(\frac{1-\varkappa}{\varkappa}\right)^2 c^2}{\left[1 + v_{H_1}'^2 \left(\frac{1-\varkappa}{\varkappa}\right)^2 c^2\right]^2}$$

the result below will be obtained:

$$\frac{z}{p_{H_1}} = \frac{v_{H_1}'}{\varkappa} D \left[\ln \frac{\sqrt{\left(\frac{p}{p_{H_1}} - A\right)^2 + B}}{\sqrt{\left(\frac{p_0}{p_{H_1}} - A\right)^2 + B}} + \frac{A(1+C)}{\sqrt{B}} \cdot \right. \tag{19}$$

$$\left. \cdot \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{p}{p_{H_1}} - A}{\sqrt{B}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{p_0}{p_{H_1}} - A}{\sqrt{B}} \right) - (1-\varkappa) C \cdot \left(\frac{p}{p_{H_1}} - \frac{p_0}{p_{H_1}} \right) \right] .$$

In case of a geothermal well of $\dot{m} = 10$—15—20—25 kg/s steam delivery, a $d = 150$ mm diameter, and $\lambda = 0{,}05$ friction coefficient, Equ. (19) is a shown in Figs. 4—7. The Figures illustrate functions $z/p_{H_1} = f(p/p_{H_1})$ in the parameter of p_0/p_{H_1}. As according to Equ. (17), the specific gravity depends pn p/p_{H_1}, the function $z/p_{H_1} = g(\varrho)$ and, on the basis of Equ. (16), $z/p_{H_1} = h(x/p_{H_1})$ may also be plotted as shown by Figures 4—7 in the parameter of p_0/p_{H_1}.

By making use of the functions $z/p_{H_1} = f(p/p_{H_1}, p_0/p_{H_1})$ in Figures 4—7, a separate diagram illustrates the special case when $p = p_{H_1}$, $z = H_1$ and, therefore, $H_1/p_{H_1} = f(p_0/p_{H_1})$ as shown by Fig. 8 in the parameter of the steam quantity delivered.

Thus, the characteristics of wet steam flow under any geothermic conditions has generally been determined while Figures 4—8 offer an example for the calculation in any given case of a wet steam producing geothermal well.

It may be stated that, in a geothermal well producing wet steam with a hot water inflow at its base, the water will flow as a wet steam with an increasing vapour content, through an isentropic or similar change of state, from the level at H_1 depth where the boiling point is reached because of the pressure drop. During an isentropic process, this steam content will never

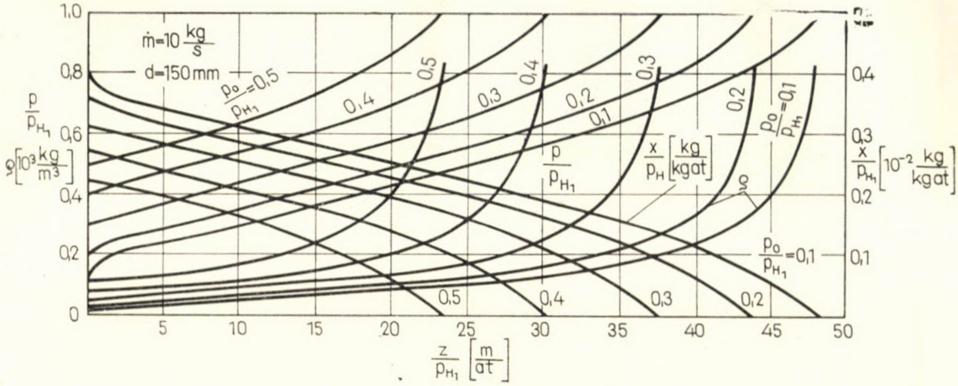


Fig. 4

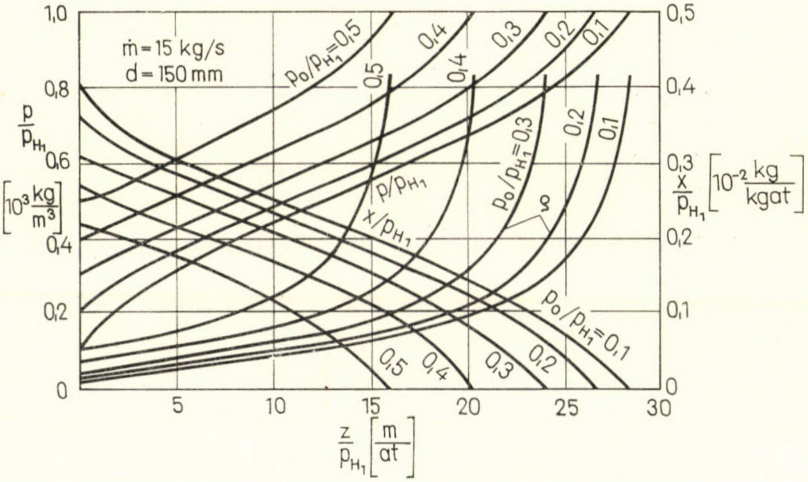


Fig. 5

reach the value of $x \simeq 0,5$ in practice. If the environment surrounding the well transmits heat thereto or vice versa, the change of state is very much different from isentropic.

Wells producing $x > 0,5$ vapour content wet steam will be studied later.

The above findings lead to the conclusion that out flowing wet steam with a vapour content $x_0 < 0,5$ got into the well certainly as hot water from

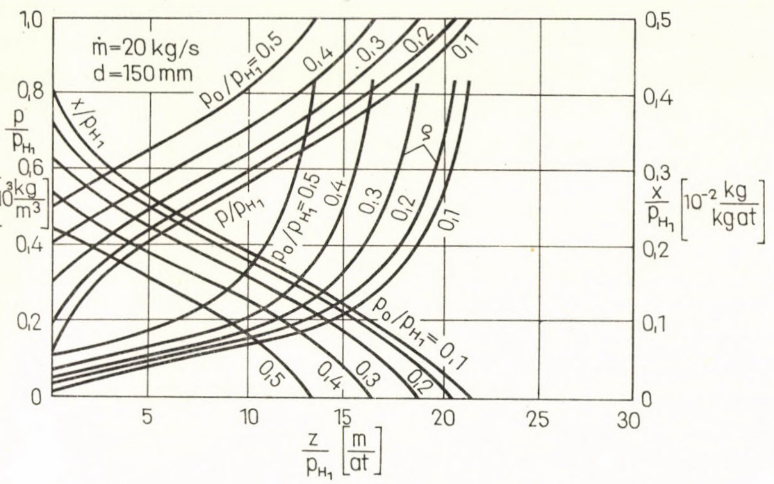


Fig. 6

water containing layer. The pressure of the hot water flowing upwards, due to the increased flow losses (Equs. 10—11), will be

$$p = p_T - \alpha\dot{m} - \varrho_k g(H - z) - \frac{\lambda\dot{m}^2}{2df^2}\,\frac{H - z}{\varrho_k}, \tag{10a}$$

or

$$p = p_T - \beta\dot{m}^2 - \varrho_k g(H - z) - \frac{\lambda\dot{m}^2}{2df^2}\,\frac{H - z}{\varrho_k}. \tag{11a}$$

The hot water temperature which, if the specified conditions are satisfied,

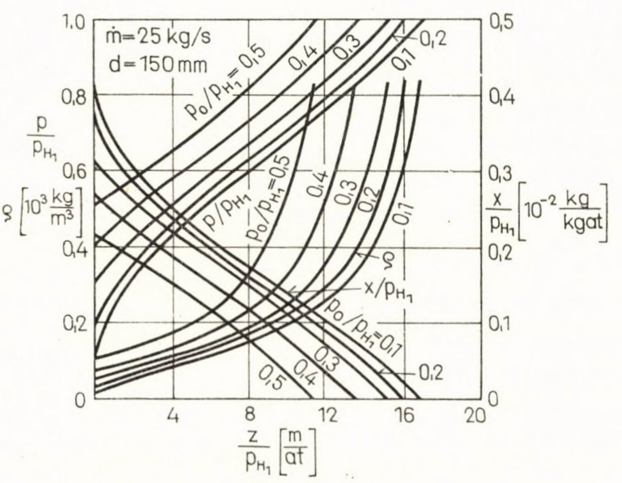


Fig. 7

does not decrease excessively during the upward flow, can be calculated from the geothermal data. When, owing to the excessive pressure drop, the hot water arrives at the boiling point at an H_1 level, it will continue flowing therefrom at a boiling point pressure and temperature. Further pressure (or temperature) reduction from this point, in the state of equilibrium, can be determined by assuming that the water would flow with an isentropic change of state and increasing steam content, $0 \leq x < 0{,}5$, afterwards.

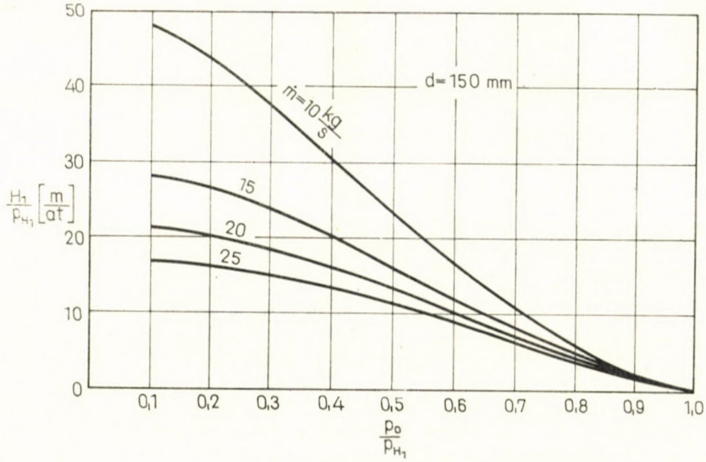


Fig. 8

An example will now be given, to demonstrate the above statements, for the calculation of an $H = 2000$ m deep and $d = 150$ mm diameter geothermal well. In this example, the average value of the geothermal gradient is $gg = 7{,}5$ m/°C, the thermal conductivity coefficient $\lambda = 1{,}7$ kcal/m h °C, the thermal diffusivity coefficient $a = 3{,}25 \cdot 10^{-3}$ m²/h, and the well life $t = 10^4$ h. Temperature variations can be readily determined by using these data [4, 5] and, at $\dot{m} = 10$—15—20—25 kg/s values, they will not be excessive (278—263°C). The boiling point pressures pertaining to the temperature values of the outflowing water are presented in Fig. 9.

Assuming the pressure of the hot water storage plant as p_T 200 at, and calculating with

$$\beta = \frac{1}{10} \frac{\text{at}}{(\text{kg/s})^2}$$

for turbulent inflow, and

$$\alpha = 1 \frac{\text{at}}{\text{kg/s}}$$

for laminar inflow, Fig. 9 illustrates the pressure drop as well (Equs. 10a and 11a), in case of $\dot{m} = 10$—15—20—25 kg/s delivered water quantities.

The intersections of the former boiling point pressure curve and the curves illustrating the actual pressure drop indicate the H_1 levels for different water deliveries as well as the corresponding p_{H1} pressures. These can be used for the calculation of the H_1/p_{H1} ratios wherefrom, according to Fig. 8, the casing-

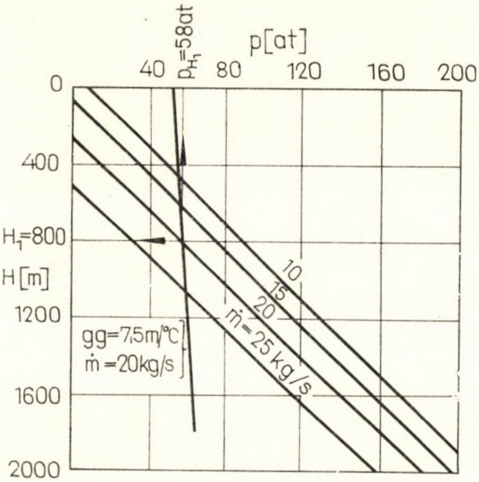


Fig. 9

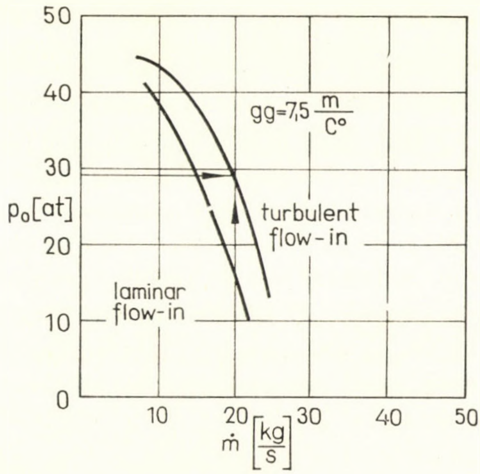


Fig. 10

head pressures p_0/p_{H1} and $p_0(\dot{m})$, respectively, can be determined. As a result of the examples on turbulent and laminar flow types, Fig. 10 illustrates the characteristic curve of a well producing wet steam. The character of this curve is in good agreement with that of the typical curves obtained by measurements [3, 4]. Taking as an example the $\dot{m} = 20$ kg/s ($p_0 = 29$ at) steam delivery

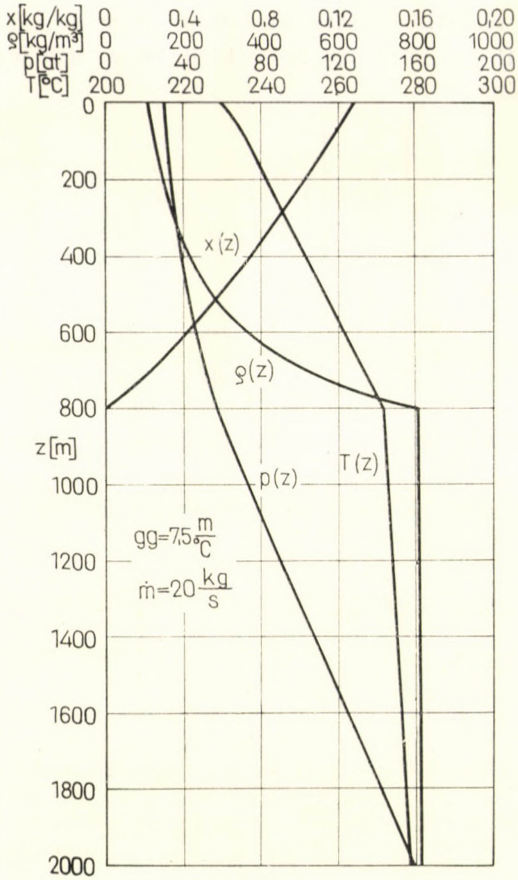


Fig. 11

on the characteristic curve plotted for a turbulent inflow well, Fig. 11 presents temperature, pressure, specific gravity, and steam content variations as function of depth.

Geothermal well producing overheated steam

In case of overheated steam inflow, the velocities exceed those of the geothermal wells producing wet steam and, therefore, assuming an isentropic flow would be again a good approximation. During the isentropic flow of the excessively overheated steam, the pressure loss according to the above findings will give

$$dp = \varrho(z)\, g\, dz + \frac{\lambda \dot{m}^2}{2df^2} \frac{dz}{\varrho(z)} .$$

In this equation, specific gravity variations may be expressed by pressure variations, using the general gas law which, then, will lead to the following differential equation:

$$\frac{d\left(\frac{p}{p_0}\right)}{dz} = a\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\varkappa} + c_0^2 \frac{1}{\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\varkappa}}\right], \tag{20}$$

using the expressions

$$a = \frac{\varrho_0 g}{p_0} = \frac{g}{RT_0}; \qquad c_0^2 = \frac{\lambda \dot{m}^2}{2df^2} \frac{1}{\varrho_0^2 g} = \frac{c^2}{g}\left(\frac{RT_0}{p_0}\right)^2,$$

where $\varkappa = 1{,}3$ the exponent of adiabatic change of state under water steam flow conditions.

Solving Equ. (20) results in the following equation:

$$\int_1^{\frac{p}{p_0}} \frac{\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\varkappa}}{\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\varkappa} c_0^2} d\left(\frac{p}{p_0}\right) = a\int_0^z dz = az.$$

Due to the difficulties of integration an approximative solution is sought for. As

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{2/\varkappa}.$$

can be neglected because of

$$c_0^2 \gg \left(\frac{p}{p_0}\right)^{2/\varkappa},$$

this means that the effect of hydrostatic pressure is not reckoned with in the original differential equation. In this case, the pressure ratio at any depth will be

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\varkappa+1}{\varkappa} a c_0^2 z\right)^{\varkappa/\varkappa+1}. \tag{21}$$

Due to the above neglection, the result has exceeded the accurate value.

If the hydrostatic pressure of the steam column is taken into account but an isothermic compression is reckoned with:

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{2/\varkappa} \simeq \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\varkappa+1/\varkappa}$$

then the pressure ratio will be

$$\frac{p}{p_0} = \left[c_0^2 \left(e^{\varkappa+1/\varkappa}\,\mathrm{az} - 1\right) + e^{\varkappa+1/\varkappa}\,\mathrm{az}\right]^{\varkappa/\varkappa+1}.$$

Due to the above neglection, the result has exceeded the accurate value.

Here the result obtained is lower than the accurate value.

The latter equation may be simplified, with good approximation, to

$$\frac{p}{p_0} = \left[c_0^2 \left(e^{\varkappa+1/\varkappa}\,\mathrm{az} - 1\right)\right]^{\varkappa/\varkappa+1} \tag{22}$$

as the following inequality holds good

$$c_0^2 \gg 1\,.$$

Thus, two approximative relations were obtained for the determination of the pressure ratio which enclose the accurate value sought for. With the two approximative solutions known, the problem is solved by using the following mean value:

$$g\,\frac{p_0^2}{c^2}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\varkappa+1/\varkappa} - 1\right] = \frac{1}{2}\,(RT_0)^2 \left(e^{\varkappa+1/\varkappa}\cdot\frac{gz}{RT_0} - 1 + \frac{\varkappa+1}{\varkappa}\,\frac{gz}{RT_0}\right). \tag{23}$$

In this expression, the right hand side depends only on depth and outflow temperature, while the left hand side on pressure ratio and the counterpressure at the casinghead. Calculations on the average conditions give evidence that the two approximative relations obtained for the pressure ratio exhibit only an insignificant difference, and the mean value is sufficiently accurate. The calculations on a normal well of $\dot{m} = 20$ kg/s steam output and $d = 150$ mm well diameter are presented in Fig. 12. The Figure illustrates as the function of depth the right hand side of Equ. (23), i.e. the mean value of the two different solutions, in the parameter of the outflow temperature. For a given T_0 value

$$f(z) = \frac{1}{2}\,(RT_0)^2 \left(e^{\varkappa+1/\varkappa}\cdot\frac{gz}{RT_0} - 1 + \frac{\varkappa+1}{\varkappa}\,\frac{gz}{RT_0}\right)$$

can be determined at any optional depth. Fig. 12 contains, in addition, the p/p_0 pressure ratio in the parameter of the p_0 counterpressure whereby the $p(z)$ pressure variation curve can be determined if the T_0 outflow temperature is known.

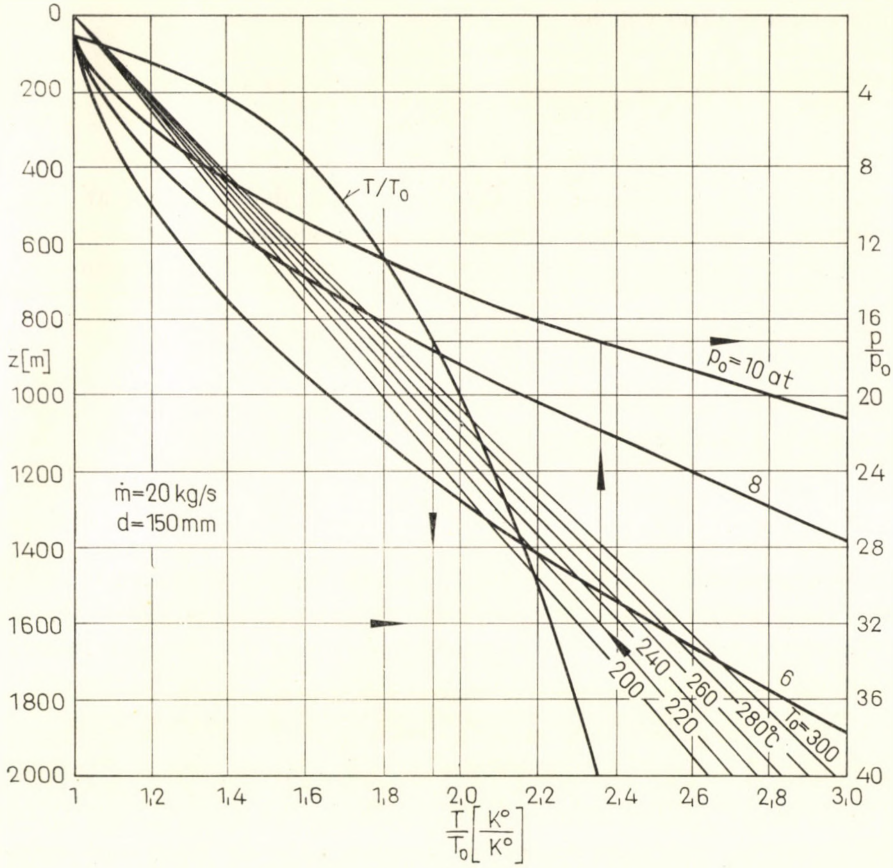


Fig. 12

An example has been worked out for a normal well of $\dot{m} = 20$ kg/s steam delivery, with a well diameter of $d = 150$ mm, outflow temperature of $T_0 = 220$°C, and casinghead pressure of $p_0 = 10$ at and 6 at, respectively. Fig. 13 illustrates the $T(z)$ and $p(z)$ curves as well as the $T_K = T_{00} + z/gg$ straight lines in case of $gg = 1$—1,5—2—2,5 m/°C. The Figure reveals that, for example, in case of a $gg = 1{,}5$ m/°C geothermic gradient, and at values $d = 150$ mm, $p_0 = 10$ at, $T_0 = 220$°C, the temperature and pressure variation curve exhibited by the steam flow in the $z = 0$ to 900 m depth range is in good agreement with the observations made hitherto.

Thus, superheated steam flow in a geothermal well may be considered with good approximation as isentropic, whereby the flow process and the variation of flow characteristice can be determined as a function of well depth from the outflow data.

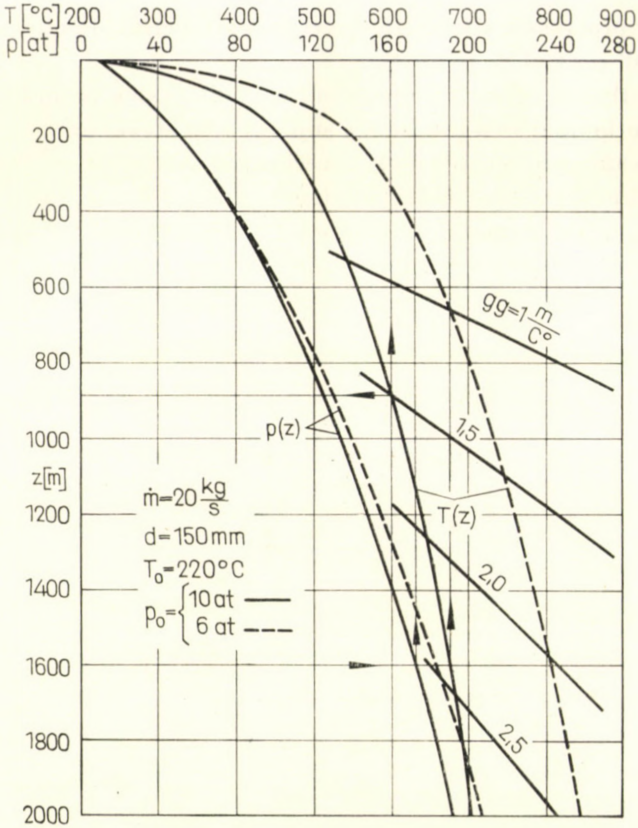


Fig. 13

This, in turn, leads to the conclusion that, in case of overheated steam outflow, the base of the geothermal well receives increasingly overheated steam from the steam containing layer. The heat exchange between the overheated steam flowing upwards in the geothermal well at a high rate and the surroundings may be neglected. Consequently, the flow is isentropic.

During its isentropic upward flow, the medium arriving at the geothermal well base as superheated steam may reach saturation due to the pressure drop. In such cases, owing to the subsequent pressure reduction within the well, the flow will continue with a decreasing steam and increasing water content, and a saturation value of $x_0 > 0{,}5$ can be measured at the outflow. This phenomenon is illustrated in Fig. 14. In course of the isentropic upward flow of the superheated steam, the change of state in the $T - s$ diagram is represented by the vertical line drawn from point A showing up to point B, a superheated steam outflow and, up to point C, the same in wet steam form. Since point A characteristic of the overheated steam received by the base of geothermal wells in practice is always to the right of the critical point, the inequality $x_0 > 0{,}5$ will prevail at point C.

Consequently, the general conclusion may be drawn according to which the base of a geothermal well producing superheated steam or $x_0 > 0{,}5$ vapour content wet steam can receive only overheated steam or $x_0 > 0{,}5$ vapour content wet steam from the respective layer, if the flow within the well can be regarded as approximately isentropic. In other words, if the well base receives hot water or $x_0 < 0{,}5$ vapour content wet steam from the stratum, and the flow in the well may be considered as approximately isentropic, then

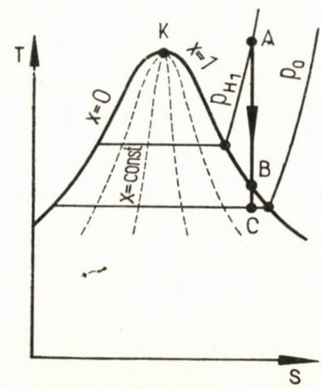


Fig. 14

the outflow must also be either hot water or $x_0 < 0{,}5$ vapour content wet steam, and can never be superheated steam or a wet steam of $x_0 > 0{,}5$ vapour content. The further geological, hydrological, or geothermic conclusions lie beyond the scope of the present investigations.

On the basis of these investigations, it may be ascertained that the thermodynamic characteristics of the isentropic change of state taking place in geothermal wells producing hot water, wet steam, or superheated steam can be determined, in function of well depth, by calculation. This, in turn, permits the predetermination of the influence of well diameter and casinghead counterpressure variations on the operations of the geothermal well itself.

REFERENCES

1. AVERIEV, V. V.: The technique of testing geothermal Wells — United Nations Conference on New Sources of Energy, 24 May, 1961.
2. PIYP, B. I.—IVANOV, V. V.—AVERIEV, V. V.: The hyperthermal waters of Pauzhetsk, Kamtchatke, as a source of geothermal energy — United Nations Conference on New Sources of Energy, 19 April, 1961.
3. WHITE, D. E.: Preliminary evaluation of geothermal areas by geochemistry, geology, and shallow drilling — United Nations Conference on New Sources of Energy, 10 April, 1961.

4. Казанский, А. В.: Об изменении температуры жидкости и тепловых потерях в действующей скважине. *Акад. Наук. СССР. Отдел. наук о земле.* Москва, 1966. стр. 171—180.
5. Boldizsár, T.: Bányászati Kézikönyv (Mining Manual). Vol. III, Section IV, Para, F.
6. Boshnakovitch, F.: Technische Thermodynamik, Dresden, 1965.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОАЭРОДИНАМИЧЕСКИХ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В ГЕОТЕРМИЧЕСКИХ КОЛОДЦАХ

И. ТАРЯН

РЕЗЮМЕ

В статье рассматриваются явления гидроаэродинамики и термодинамики, происходящие в геотермических колодцах, производящих горячую воду, влажные или перегретые пары. Характерные данные геотермического колодца могут быть определены вычислением в зависимости от глубины колодца, таким образом становится возможным заранее определить влияние изменения диагонали колодца и созданного у головки колодца противодавления на работу геотермического колодца.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (3—4), pp. 359—370 (1969)

DIE PRAKTISCHE ANWENDUNG EINER THEORETISCH GEGEBENEN NONLINEAREN METHODE AUF DEM WEGE DER MASCHINELLEN RECHNUNGEN*

F. STEINER

KANDIDAT DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
TECHNISCHE UNIVERSITÄT FÜR SCHWERINDUSTRIE, MISKOLC

[Eingegangen am 30. Juli 1968]

Die Anwendung linearer Methoden ist für die Zwecke der Fehlereliminierung ungeeignet. Im Falle von Schwerkraftmessungen ist z.B. die Eliminierung der Wirkung oberflächennaher Störkörper mit Hilfe linearer Methoden auch dann nicht möglich, wenn dies graphisch kein Problem bedeutet.

Die Theorie der größten Reziprokwerte gibt zwar die Möglichkeit zur numerischen Lösung der Aufgabe, ihre Anwendung ist jedoch nur dann rentabel, wenn eine gute Annäherung der Lösung bereits bekannt ist. In dieser Arbeit wird im Geiste der Theorie der größten Reziprokwerte eine mit Rechenmaschinen leicht durchführbare Methode zur Bestimmung dieser Annäherung entwickelt. Die praktische Bestimmung der maschinellen Annäherung wird ebenfalls an einem Beispiel aus der Gravimetrie (bezüglich regional-residualer Trennung) gezeigt.

1. Die in den verschiedenen Gebieten der Geophysik angewandten Filter sind in dem Sinne lineare Operationen, daß die aus der Summe der zur Filterung gelangenden Größen ausgefilterte Datenreihe der Summe der, aus den einzelnen Komponenten durch dieselbe Methode ausfiltrierbaren Datenreihen gleich ist.

Der Vorteil der linearen Operationen ist die leichte Kalkulierbarkeit; auf ihre Nachteile wird im Zusammenhang mit Beispielen aus der Gravimetrie hingewiesen.

Als erstes Beispiel sei das Problem der Glättung betrachtet. Die Gerade *a* in Abb. 1 kann über eine kurze Strecke als ein linearer Gravitationseffekt betrachtet werden, und man möchte diesen bestimmen. Bei der Messung wird jedoch auch die störende Wirkung des in geringerer Tiefe liegenden Störkörpers *b* mitgemessen, so daß man als Meßprofil die Kurve *c* erhält. Man möchte durch die Glättung das Profil *c* von der Störwirkung befreien. Falls das durch irgendeine lineare Methode möglich wäre, so würde das (wegen der Linearität) soviel bedeuten, daß diese Methode entlang des Profils *b* immer Null ergibt. Man kann aber als Resultierende zahlreicher *b*-ähnlicher, aber horizontal verschobener Störwirkungen mit verschiedenen Amplituden beliebige Profile konstruieren; und das würde (wiederum wegen der Linearität) soviel bedeuten, daß diese Methode auch für ein beliebiges Profil Null ergibt. Durch diese Absurdität wurde daher bewiesen, daß eine ideale Glättung durch Filterung

* Dieser Artikel wurde, in ungarischer Sprache abgefaßt, am 1. 5. 1967. der Gesellschaft Ungarischer Geophysiker als Preisschrift eingereicht.

oder eine andere lineare Operation unerreichbar ist. Von der genauen Glättung hängt jedoch die Verläßlichkeit der Schwerekarte ab, was spätere Phasen der Bearbeitung, wie z. B. quantitative Berechnungen beeinflußt.

Das zweite Beispiel hängt mit den quantitativen Methoden noch mehr zusammen. Falls man einen lokalen Effekt quantitativ interpretieren will (sei es mit Hilfe von theoretischen Kurven, oder von Daten der charakteristischen Punkte ausgehend), so benötigt man eine genaue Trennung der regionalen Effekte. Das mit punktierter Linie gezeichnete Profil und die Kurve *b* aus Abb. 2, die aus [2] übernommen wurde, sollen zeigen, daß dabei lineare Methoden nicht angewendet werden können. Wenn man letztere mit dem die wirk-

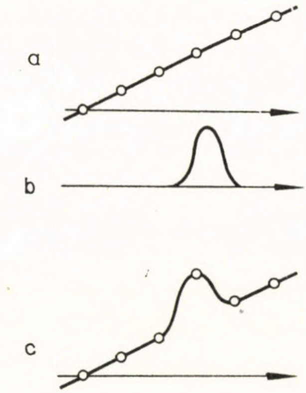


Abb. 1. Die Veranschaulichung des Gedankenganges aus 1., der beweist, daß die linearen Methoden für die Zwecke der Fehlereliminierung ungeeignet sind

lichen Residualeffekte widerspiegelnden Profil *c* vergleicht, so ergibt sich, daß die lineare Methode zur Berechnung der Residualanomalien ungeeignet ist.

Das Gesagte entspricht in der Filtertheorie teilweise dem folgenden: das Spektrum eines gegebenen Störkörpers kann in einem so großen Bereich von Null abweichende Werte annehmen (siehe z. B. Abb. 1 in [1]), daß man durch die Filterung auch jenen Effekt beeinflußt, den man unverändert erhalten will, wobei es gleichgültig ist, ob man — je nach Bedarf — oben oder unten schneidende Filter benutzt.

Von den nonlinearen Methoden wurde bisher die der kleinsten Quadrate angewendet (s. z. B. [5]). Man betrachte wiederum Abb. 1, um einzusehen, daß die Anwendung der kleinsten Quadrate die erwähnten Probleme nicht löst. Durch lineare Annäherung erhält man aus den Daten des Profils *c* als Ergebnis nicht die Gerade *a*, da die Summe der Abweichungen von der Geraden nicht Null ist (sie ist im vierten Punkt positiv, sonst 0, daher ist die Summe auch positiv).

Theoretisch gibt es eine nonlineare Methode, die mit den oben erwähnten Fehlern nicht behaftet ist: die der größten Reziprokwerte. (Eine eingehendere Besprechung findet man darüber in [4], hier sei sie nur definitionsgemäß gegeben.) Die Anpassung dieser Theorie für die Rechenmaschine ist aus mehreren Gründen notwendig; ihre direkte Übernahme auf die Rechenmaschine

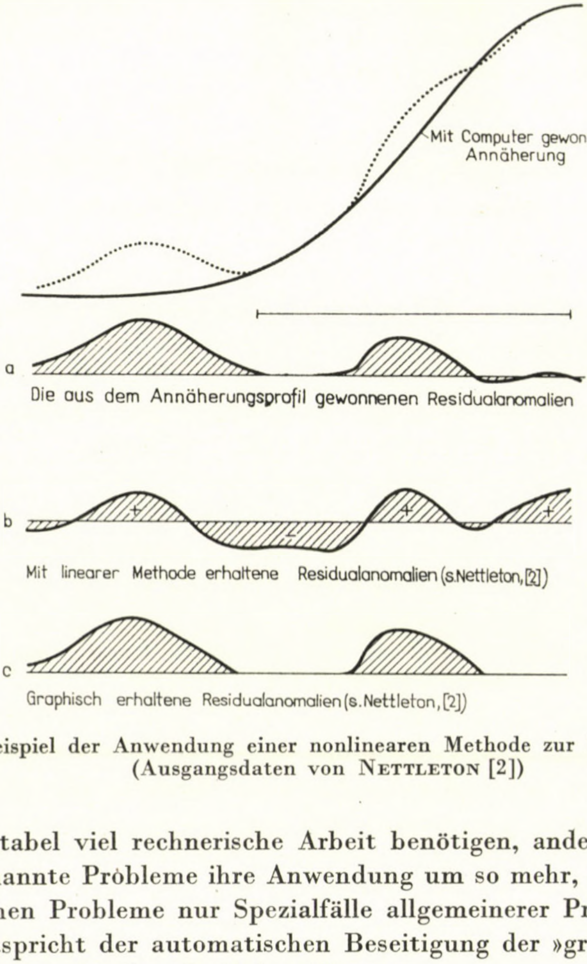


Abb. 2. Ein Beispiel der Anwendung einer nonlinearen Methode zur Regionalbestimmung (Ausgangsdaten von NETTLETON [2])

würde unrentabel viel rechnerische Arbeit benötigen, andererseits erfordern jedoch obgenannte Probleme ihre Anwendung um so mehr, da die erwähnten gravimetrischen Probleme nur Spezialfälle allgemeinerer Probleme sind. Die Glättung entspricht der automatischen Beseitigung der »groben« Fehler, die sämtliche Gebiete der Geophysik betrifft.

2. Es seien die an den Stellen der unabhängigen Veränderlichen

$$x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}) \quad (i = 1, \ldots, N)$$

gemessenen Werte z_i sowie die analytische Form der Funktion $F(x_i; A)$ — die z annähert — gegeben; es soll die wahrscheinlichste Parameterreihe

$$A = (a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_m)$$

bestimmt werden. (Der Ausgang ist derselbe wie bei der Theorie der kleinsten Quadrate.) Laut Theorie der größten Reziprokwerte ist die wahrscheinlichste Parameterreihe A diejenige (falls die Werte z_i gleich genau sind), für die

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(F(x_i; A) - z_i)^2 + \varepsilon^2} = \max \tag{1}$$

ist. Hier ist ε das Mehrfache der größten Abweichung Δz, die auf Grund der Meßfehler keine reale Bedeutung mehr hat. (Dieser Faktor wurde in diese Arbeit für 4 genommen, allgemein wird er laut [4] zwischen 4 und 7 gewählt.)

Die Theorie führt nicht zu solchen abgeschlossenen Rechnungsschemen, wie das Prinzip der kleinsten Quadrate. Bei einem großen Wert von N wird die Suche nach der richtigen Wertreihe A auch bei kleinem m-Wert langwierig sein, da die Summe in (1) bei mehreren A-Werten ein lokales Maximum haben kann und daher jene A-Reihe, die den größten Wert liefert, nicht dadurch bestimmt werden kann, daß man die Werte a_k stufenweise ändert (obgleich das bei Rechenmaschinen leicht durchführbar wäre). Das kann nur dann getan werden, wenn der Ausgang eine genügend gute Annäherung ist, um durch dieses Verfahren die maximale A-Reihe zu erhalten.

Daraus folgt, daß durch die Angabe einer für die Rechenmaschine rentabel anwendbaren Methode — die im erwähnten Sinne schon eine gute Annäherung bedeutet — das gesetzte Ziel erreicht werden kann: mit Hilfe der Berechnung auf Rechenmaschinen eröffnet sich für ein theoretisches Ergebnis der Weg zur praktischen Anwendung.

3. Die Theorie der größten Reziprokwerte kann weniger präzis als in (1), jedoch anschaulicher folgendermaßen abgefaßt werden: jene A-Reihe ist die richtige, bei der auf die Fläche $F(x_i; A)$ die meisten der Punkte z_i fallen. Würde man diese Punkte im voraus kennen, so könnte man von diesen ausgehend, mit Hilfe der kleinsten Quadrate die richtige A-Reihe ebenfalls erhalten.

Diese Feststellung ist die Grundlage der Methode, die im weiteren besprochen werden soll. Im wesentlichen lautet sie folgenderweise: 1. Man sucht die Abstände oder Flächeneinheiten aus (je nachdem, ob es sich um ein Profil oder eine Karte handelt), für welche die Meßdaten die Regelmäßigkeit nach F am besten befolgen. 2. Bei Annahme von derselben Funktion $F(x_i; A)$ bestimmt man für diese Punkte mit Hilfe der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichste Reihe A. Das Ergebnis gibt schon eine entsprechende Annäherung für die Bestimmung der, nach der Theorie der größten Reziprokwerte, wahrscheinlichsten Reihe A. Der Einfachheit halber beschränken wir uns im weiteren auf den Fall von Profilen, die Methode kann jedoch nach einer sinngemäßen Umgestaltung für eine zweidimensionale Datenreihe ebenso angewendet werden.

Allgemein besteht die Arbeitsphase des Punktes 1. aus zwei Teilen. Zunächst erfolgt eine Umgestaltung, um jene Abschnitte der Reihe der Ausgangsdaten linear zu gestalten, die eine Regelmäßigkeit nach F zeigen, sie wird als Linearisierung bezeichnet. Sodann benutzt man die Möglichkeit, daß die Maschine auch zu logischen Urteilen fähig ist und gibt den Punkten, die die Regelmäßigkeit zeigen, das Gewicht 1, den anderen das Gewicht 0. Man wendet nun für diese Ausgangsdaten die Methode der kleisten Quadrate an und erhält die durch die Reihe A_0 ausgedrückte Fläche $F(x_i; A_0)$. Dieses Ergebnis wird im weiteren kurz als »maschinelle Annäherung« bezeichnet.

Im Großteil der Fälle kann für F eine polynomförmige Annahme erwartet werden; bei einem Polynom p-ten Grades kann daher die Linearisierung durch $(p - 1)$-malige Ableitung erreicht werden. Die Daten sind oft in äquidistanten Punkten (Quadratnetz) angegeben, in solchen Fällen tritt an Stelle der Ableitungen die Bildung von Differenzen $(n - 1)$-ter Ordnung. Die Linearisierung vom nonpolynomen F wird in Punkt 4., im Zusammenhang mit einem Beispiel besprochen. Unter Linearisierung soll jedoch im allgemeinen die Bildung von Differenzen höherer Ordnung verstanden werden, da wir die umfangreichste Anwendungsmöglichkeit der Methode in der Glättung sehen, wo die Annäherung je nach Profilabschnitten (bzw. Flächenteilen) durch Polynome niedriger Ordnung erfolgen wird.

Bei äquidistanten Punkten könnte aus den nach Linearisierung erhaltenen Werten die Entnahme jener Punkte, die eine Regelmäßigkeit zeigen, folgenderweise geschehen. (Der in den Abbildungen angegebene Operationsplan und das Beispiel zeigen nicht genau diese Methode; eine einfachere sei hier zunächst gezeigt, um die einzelnen Teile der letzthin angenommenen Methode besser begründen zu können.) Man bilde die Differenzen der benachbarten Werte, die an den regelmäßigen und daher nach Linearisierung geraden Abschnitten um denselben Wert schwanken werden. Man bilde das arithmetische Mittel der gewonnenen Differenzen. Dieser Wert kann noch durch ausfallende Punkte stark beeinträchtigt sein. Man bilde daher die Abweichungen d vom Mittelwert und berechne den arithmetischen Mittelwert D nach den Gewichten $\varepsilon^2/(d^2 + \varepsilon^2)$, die mit der Zunahme von d abnehmen (ε ist gleich dem in (1)). Man wiederhole das Verfahren noch zweimal und bezeichne die Differenz zwischen dem zweiten und ersten Ergebnis mit ΔD_1 sowie die zwischen dem dritten und zweiten mit ΔD_2. Falls $\Delta D_2 = 0$ ist, erübrigt sich das Weiterberechnen der Mittelwerte. Falls die Vorzeichen von ΔD_1 und ΔD_2 entgegengesetzt sind, befindet man sich in der Nähe des sich derweise ergebenden Grenzwertes und die weitere Rechnung ist überflüssig. Bei $\Delta D_2 \geq$ $\geq \Delta D_1$, ist die Berechnung eines weiteren Annäherungsschrittes offentsichtlich begründet. Sie ist ebenfalls begründet, wenn zwar ΔD_2 kleiner ist als ΔD_1, jedoch nicht in überzeugendem Maße. Die letzte Bemerkung soll dadurch präzisiert werden, daß man eine derartige Konvergenz nimmt wie die Abnahme der Größe a/x, wobei x schrittweise um denselben Wert zunimmt. Nach dem obigen ist es leicht einzusehen, daß eine Fortsetzung der Mittelwertberechnung dann keinen Sinn mehr hat, falls

$$\frac{2 \cdot \Delta D_2 \cdot \Delta D_1}{\Delta D_1 - \Delta D_2} < \Delta D; \tag{2}$$

hier bedeutet ΔD jene größte (absolute) Abweichung, die keinen realen Sinn

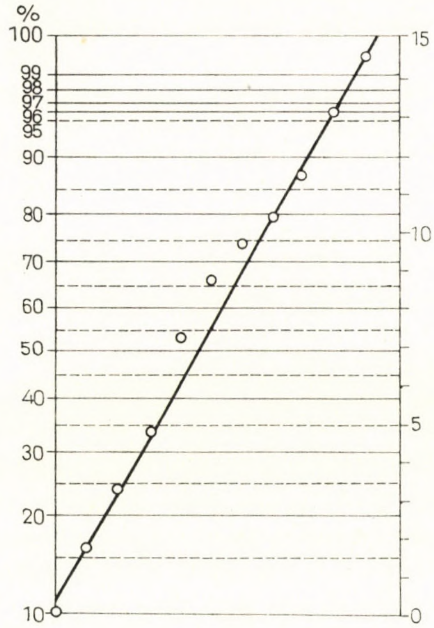


Abb. 3. Ein Beispiel der Linearisierung

mehr hat. (ΔD kann aus Δz, die durch (1) definiert worden ist, leicht abgeleitet werden, besonders wenn es sich um Polynome handelt, wo sich die Linearisierung und die Differenzbildung zusammen einfach als Differenzbildung p-ter Ordnung ergibt.)

In der beschriebenen Weise erhält man einen D-Wert, in dessen Nähe die aus den eine Regelmäßigkeit zeigenden Abschnitten ermittelten Werte δ liegen. Man könnte jetzt schon behaupten, daß man die Anwendung der Theorie der kleinsten Quadrate antreten kann, indem man die nahliegende Punkte gebenden Werte in Betracht zieht und die entfallenden außer acht läßt.

Hier ist jedoch eine weitere Präzisierung notwendig, was an Hand der Abb. 3 und 4 leicht eingesehen werden kann. Man fasse das in Abb. 3 dargestellte Profil nach dem linearen Maßstab an der rechten Seite als ein direkt gemessenes auf und lasse dabei den Maßstab an der linken Seite außer acht. Abb. 4 zeigt die Differenzen δ, die sich zwischen den eingezeichneten Punkten in Abb. 3 ergeben. Die Werte jener Punkte, die aus störungsfreien oder schwach gestörten Abschnitten stammen (1, 2, 3, 9, 10), haben annähernd den gleichen Wert. Diesen Wert nimmt auch der Punkt 5 an, obwohl er sich über dem lokalen Störkörper befindet. Würde man in der obgenannten Weise verfahren, so würde auch der Punkt 5 in die Ausgleichung mit einbezogen und dadurch in der maschinellen Annäherung eine Verzerrung verursachen.

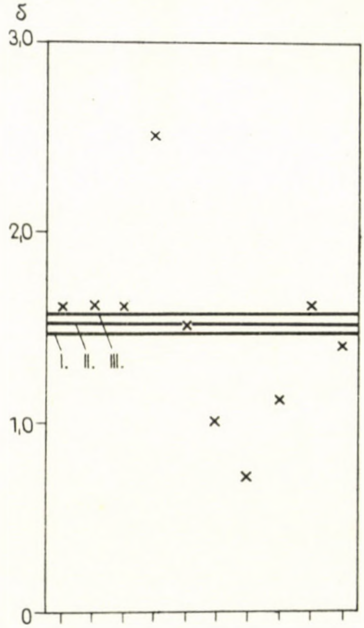


Abb. 4. Die aus Abb. 3 gewonnenen δ-Werte sowie die D-Werte

Der Fehler kann dadurch auftreten, daß man in Abb. 4 die Punkte nur isoliert betrachtet, wogegen man Abschnitte benötigt, die gewisse Regelmäßigkeiten zeigen. Daher muß noch zusätzlich gefordert werden, daß wenigstens noch einer der benachtbaren Punkte mit einem größeren Gewicht einbezogen sei. Dadurch wird der störende Effekt beseitigt, daß die genannte Regelmäßigkeit auch von einem Teil jenes Abschnittes gezeigt werden kann, der lokale Störung aufweist. Die Grenze der Inbetrachtnahme wird für den fraglichen Punkt, ebenso wie für den benachtbarten, bei dem Wert 0,5 des Gewichtes $\varepsilon^2/(d^2 + \varepsilon^2)$ festgelegt. Die Berechnung wird dadurch nur beschleunigt, wenn man aus der Mittelwertbildung die Punkte mit einem kleineren (eigenen oder benachbarten) Gewicht als 0,5 wegläßt und für die übrigen das Produkt der beiden Gewichte als Gewicht nimmt.

Der Operationsplan der Bestimmung der maschinellen Annäherung kann nun ohne weiteres zusammengestellt werden (siehe Abb. 5 und 6). Die Erläuterung der eventuell nicht genügend detaillierten Arbeitsphasen erfolgt anhand eines Beispieles in Punkt 4, wo die Berechnung zahlenmäßig verfolgt wird; das Beispiel kann in einigen Fällen auch zur Begründung der einzelnen Schritte beitragen.

4. Das Beispiel ist eine regional-residuale Bestimmung; als Ausgang dient das bereits erwähnte Profil, das in Abb. 2 mit punktierter Linie angegeben ist. Es ist ein Teil des in [2] gegebenen Beispiels. Die Werte der Ausgangsdatenreihe wurden (in äquidistanten Punkten) jenem Abschnitt des angegebenen Profilteils entnommen, der mit einem geraden Linienabschnitt extra angezeichnet ist.

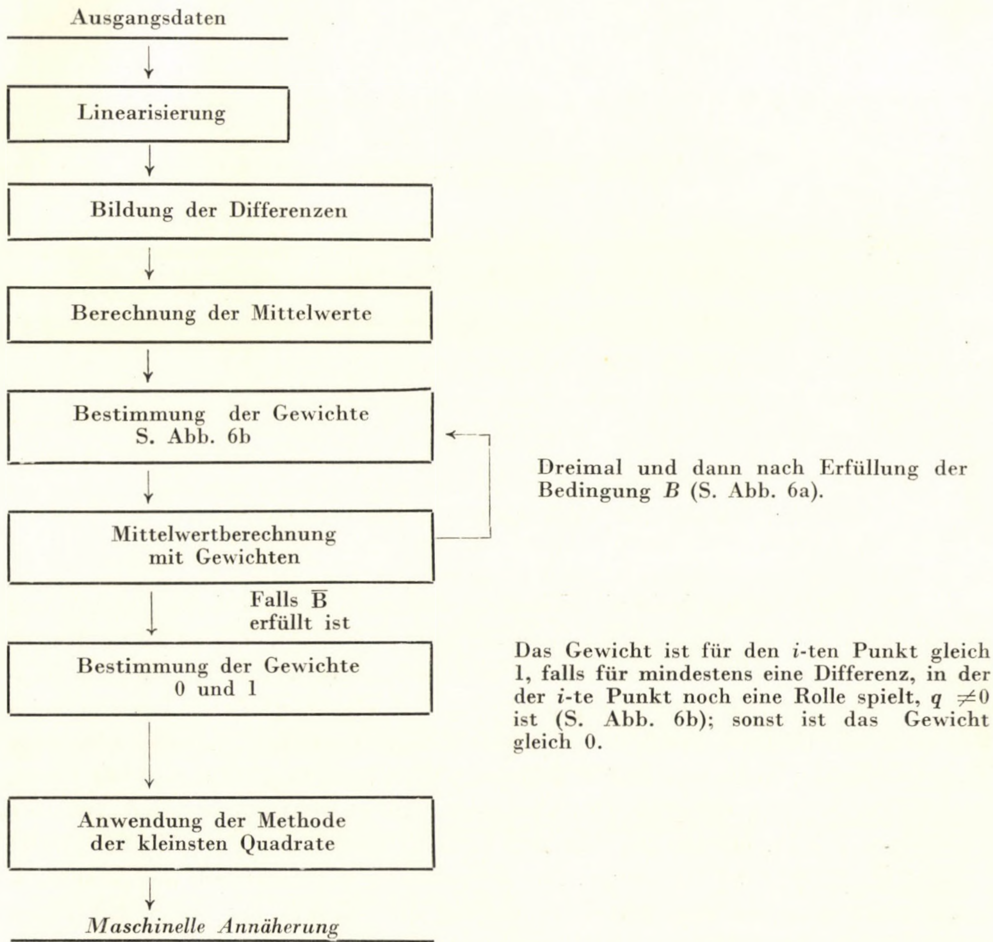


Abb. 5. Operationsplan zur Bestimmung der maschinellen Annäherung

Für diesen Abschnitt fällt es sofort in Augenschein, daß bei der Annäherung des regionalen Effektes durch ein Polynom, ein ziemlich großer p-Wert vorausgesetzt werden muß. Dieser Umstand gibt wegen der relativ vielen Parameter den Anlaß, in diesem Fall die Linearisierung auf einem anderen Weg durchzuführen.

In Abb. 2 haben die Teile der punktierten Kurve, die regionalen Charakter zeigen, einen der Glockenkurve ähnlichen Verlauf. Daher wird F mit der Glockenkurve identisch angenommen, in der neben Verschiebung und Amplitude nur noch ein Parameter vorhanden ist: die Streuung. Mit dieser Wahl soll auch betont werden, daß obwohl man in der Praxis am häufigsten polynomförmige Annäherung anwendet, die Methode theoretisch an die polynomförmige Annäherung nicht gebunden ist.

Zwecks Linearisierung haben wir unsere Ausgangsdaten auf ein Papier aufgetragen, bei dessen Einteilung die Glockenkurve als eine Gerade erscheint (siehe Abb. 3). Diese Lösung ist am meisten im Zusammenhang mit den logarithmisch eingeteilten Papieren bekannt, wir berufen uns hier jedoch lieber auf das Beispiel das Gaußschen Papiers (siehe in [3] die nach Seite 390 folgende

a) B ist gültig, falls $\Delta D_j \neq 0$ ist und

$$\left\{ \text{sign } \Delta D_j = \text{sign } \Delta D_{j-1} \text{ und } \left[|\Delta D_j| \geqq |\Delta D_{j-1}| \text{ oder } \left(|\Delta D_j| < |\Delta D_{j-1}| \text{ und } \frac{2 \cdot \Delta D_j \cdot \Delta D_{j-1}}{|\Delta D_{j-1}| - |\Delta D_j|} > \Delta D \right) \right] \right\}$$

b) Eingehendere Beschreibung des Schrittes: $\boxed{\text{Bestimmung der Gewichte}}$

$\boxed{\text{Bestimmung der Abweichungen } d \text{ vom Mittelwert}}$

↓

$\boxed{\text{Berechnung der Werte } q_1}$ $\qquad q_1 = \dfrac{\varepsilon^2}{d^2 + \varepsilon^2}$

↓

$\boxed{\text{Bildung der Werte } q_2}$

q_2 ist der größere aus den q_1-Werten der benachbarten Punkte (oder der benachbarte q_1-Wert, falls nur ein benachbarter Punkt vorhanden ist), falls für den betreffenden Punkt $q_1 > 0{,}5$ und falls für wenigstens einen der benachbarten Punkte $q_1 > 0{,}5$ ist; sonst ist $q_2 = 0$.

↓

$\boxed{\text{Berechnung der Gewichte } q}$ $\qquad q = q_1 \cdot q_2$

Abb. 6. Ergänzung und Erläuterung zum Operationsplan (S. Abb. 5)

Nr. im linearisierten Profil	δ–Nr.	δ	d	q_1	q_2	q	$q\delta$	d	q_1
1									
	1	1,6	1,4	0,88	0,88	0,77	1,23	0,9	0,95
2									
	2	1,6	1,4	0,88	0,88	0,77	1,23	0,9	0,95
3									
	3	1,6	1,4	0,88	0,88	0,77	1,23	0,9	0,95
4									
	4	2,5	10,4	0,13	0,00	0,00	0,00	9,9	0,14
5									
	5	1,5	0,4	0,99	0,00	0,00	0,00	0,1	1,00
6									
	6	1,0	4,6	0,42	0,00	0,00	0,00	5,1	0,38
7									
	7	0,7	7,6	0,22	0,00	0,00	0,00	8,1	0,20
8									
	8	1,1	3,6	0,55	0,88	0,48	0,53	4,1	0,48
9									
	9	1,6	1,4	0,88	0,97	0,85	1,36	0,9	0,95
10									
	10	1,4	0,6	0,97	0,88	0,85	1,19	1,1	0,93
11									

Mittel: 1,46 Mittel: 1,51

$\Delta D_1 = 0{,}05$

eingebundene Beilage), da an der erwähnten Stelle dazu auch eine kurze Erläuterung zu finden ist, und so haben wir auch die Methode in der Hand, wie man mit Hilfe der Inversfunktion die Operation, durch die in Abb. 3 die grafische Auftragung durchgeführt ist, für die Rechenmaschine umgestalten kann.

Im weiteren wurde der Operationsplan (Abb. 5 und 6) befolgt, $\Delta z =$ 1 mm, $\varepsilon = 4$ mm gesetzt (hier ist die Benützung beliebiger Einheiten möglich); der Ablauf der Berechnung kann mit Hilfe der Tabelle bis zur Bestimmung der bei der Ausgleichung in Betracht gezogenen Gewichte verfolgt werden; die nun erhaltene Ausgleichungsgerade ist in Abb. 3 zu sehen. Der Neigungs-

q_2	q	$q\delta$	d	q_1	q_2	q	$q\delta$	Gewicht
								1
0,95	0,90	1,44	0,4	0,99	0,99	0,98	1,57	
								1
0,95	0,90	1,44	0,4	0,99	0,99	0,98	1,57	
								1
0,95	0,90	1,44	0,4	0,99	0,99	0,98	1,57	
								1
0,00	0,00	0,00	9,4	0,15	0,00	0,00	0,00	
								0
0,00	0,00	0,00	0,6	0,98	0,00	0,00	0,00	
								0
0,00	0,00	0,00	5,6	0,34	0,00	0,00	0,00	
								0
0,00	0,00	0,00	8,6	0,18	0,00	0,00	0,00	
								0
0,00	0,00	0,00	4,6	0,42	0,00	0,00	0,00	
								1
0,93	0,88	1,41	0,4	0,99	0,86	0,85	1,36	
								1
0,95	0,88	1,23	1,6	0,86	0,99	0,85	1,19	
								1

Mittel: 1,56 Mittel: 1,55

$\Delta D_2 = -0{,}01$

sign $\Delta D_1 \neq$ sign ΔD_2

winkel dieser Ausgleichsgerade gibt den Streuungswert, ihr Schnittpunkt mit der dem 100% entsprechenden horizontalen Geraden den genauen Ort des Maximums an. Auf Grund der so bestimmten Parameter wurde auf die Abb. 2 die Kurve der maschinellen Annäherung aufgetragen, die nach der Theorie der größten Reziprokwerte für das Profil eine wirklich gute Annäherung gibt: auf erste Sicht wird es klar, daß (innerhalb der Möglichkeiten der für F gestellten Annahme) die maschinelle Annäherung die maximale Anzahl oder eine nahe des Maximums liegende Anzahl der Punkte des ursprünglichen Profils enthält. Dementsprechend zeigt das Residual nach der maschinellen Annäherung ebenfalls nur unbedeutende Abweichungen vom grafisch konstruierten.

SCHRIFTTUM

1. Gladkii, K. V.: Frequency Analysis during Treatment and Interpretation of Gravity-Survey and Magnetic-Survey Data, and the Possibility of Automatic Solution in the Treatment and Interpretation. (S. in der Sammlung „Industrial und Exploratory Geophysical Prospecting". Ed.: K. F. Zhigach, Consultants Bureau, New York, 1963).
2. Nettleton, L. L.: Regionals, Residuals, and Structures. *Geophysics*, 19 (1954).
3. Rényi A.: Valószínűségszámítás (Wahrscheinlichkeitsrechnung). Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
4. Steiner, F.: Bouguer-térképek elemzése (Analyse von Bouguer-Karten). Dissertation Miskolc, 1965.
5. Zilahi-Sebess, L.: Regionális és maradékanomáliák meghatározása gépi számítással (The Determination of Regional- and Residual Anomalies with the Aid of a High-Speed Electronic Computer). *Geofizikai Közlemények*, 1964.

PRACTICAL APPLICATION OF A PRINCIPALLY GIVEN NON LINEAR METHOD BY USING COMPUTERS

F. STEINER

SUMMARY

The application of linear methods is not suitable for the elimination of errors. E. g., in case of gravimetric measurements the removal of effects of near-surface masses by means of a linear method is even then not possible, if it can be achieved by a graphical one.

The principle of the greatest reciprocal values enables a numerical solution but the application is only economical when a good approximation of the solution is already known. This paper gives on the basis of the principle of greatest reciprocal values a solution for the determination of the approximation that can be easily calculated by computers. The practical determination of the approximation by computers is shown on gravimetrical example (regional-residual separation).

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПИАЛЬНО ЗАДАННОГО НЕЛИНЕЙНОГО МЕТОДА ПУТЕМ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА МАШИНЕ

Ф. ШТЕЙНЕР

РЕЗЮМЕ

Применение линейных методов не подходящее для целей исключения погрешностей. Например, в случае гравитационных измерений элиминяция влияний, действующих вблизи поверхности, линейным методом невозможна даже в том случае, когда это графически не составляет проблемы.

Правда, принцип наибольших обратных дает возможность для численного решения задачи, по применение последнего экономично только тогда, когда задача решена в хорошем приближении. В настоящей статье на основе принципа наибольших обратных дается легко применяемый на вычислительной машине метод для определения этого приближения. Практическое определение приближения на машине в статье демонстрируется на примере, связанном с гравитацией.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (3–4), pp. 371—388 (1969)

SUITABLE USE OF GYROTHEODOLITES IN SURFACE AND UNDERGROUND SURVEYING

F. HALMOS

CANDIDATE OF TECHN. SC.

[Manuscript received 12 August, 1968]

After reviewing accuracy and efficiency of existing gyrotheodolites and gyroattachments, the article deals with a new construction allowing greater stability of gyroattachments. A combined method is suggested for the determination of the resting position.

In the second part the distribution of meridian indications is investigated with the result, that the most advantageous case is, when the orientations are distributed so that the square sum of the distances between gravity centers of traverse stations included by the orientation stations and these traverse stations is a minimum. Practical results are given for some configurations in the tables.

The effect of the wind and of gusts are studied in the last part. A wind (or gust) velocity of 10—12 m/sec does not exclude measurements with the prescribed accuracy. If the wind is even stronger, it is advisable to protect the instruments by a shelter.

1. Problems of instrumental technics and accuracy

The development of the gyrotheodolite construction has lately advanced very rapidly. The weight, the accuracy and the efficiency reached a level where the needs of different geodetic and mine surveying works can be met. The

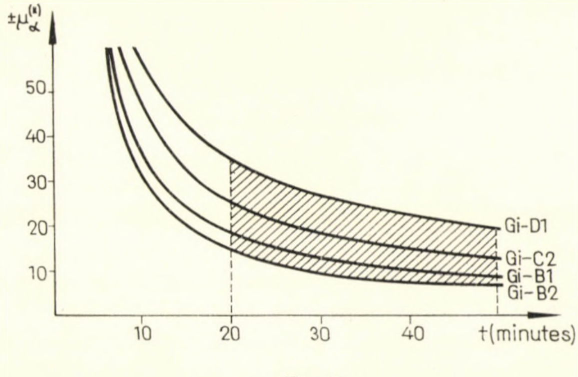


Fig 1

dependence of the measuring time on the accuracy for Hungarian gyrotheodolites are listed in Fig. 1. The less accurate measurements (with an accuracy less than the average) can be performed by quick methods of measurement, those having higher requirements by a combination of different methods and/or by repetition [1, 2]. The influence of regular errors, always appearing at a given station point must be taken into account when determining the number of repetitions needed (these regular outer errors became accidental by repeated return measurements and by scaling). By making intermediate scalings an accuracy of some seconds (± 3—$4''$) can be reached in the determination of the

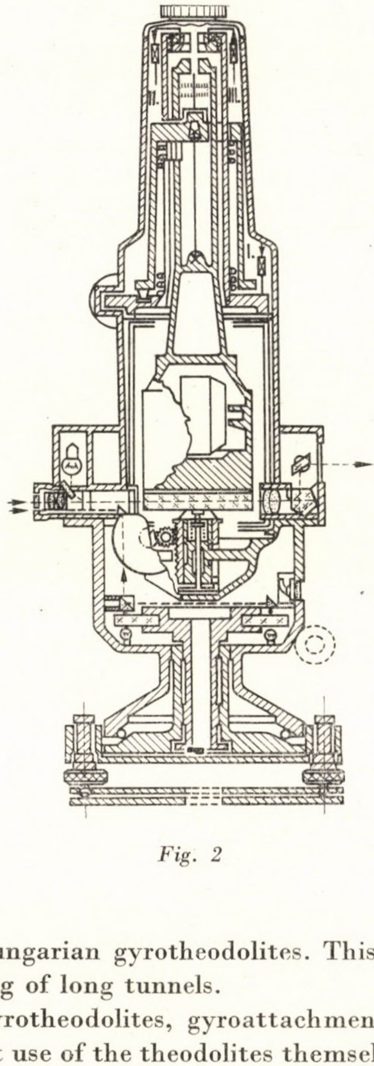


Fig. 2

true north with the Hungarian gyrotheodolites. This accuracy satisfies even the needs of the pegging of long tunnels.

In addition to gyrotheodolites, gyroattachments were developed, too, allowing an independent use of the theodolites themselves. Recently horizontal circles including bearers and telescopes were added to the gyroattachments. This new instrument is rather light, its accuracy being about $30''$—$1'$ (Wild ARK 1, Fennel KT 2). It must be, however, mentioned that these instruments have only one-side reading devices and their theodolites are non-reversible, so these sources of error burden the measurements (the unchanging effect can be included in the instrumental constant). In respect of the instrumental constant, the gyroscope, the telescope and the part consisting of the horizontal circle do not wholly make a single unit. A significant progress can be achieved if the collimator following the swings could be used for geodetic orientation (larger aperture, 5—10°, and a comparatively low magnification, 8—10, is

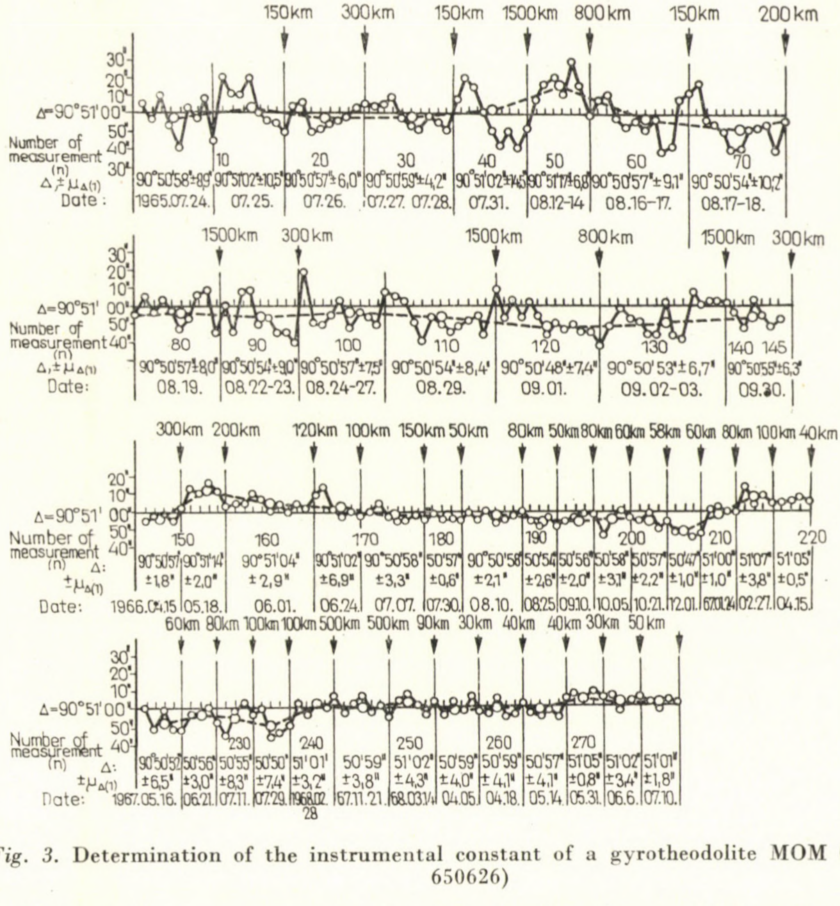


Fig. 3. Determination of the instrumental constant of a gyrotheodolite MOM Gi-B2 (No. 650626)

sufficient). The movement in the altitude direction could be substituted by a prism. This solution ensures a high stability of the instrumental constant — as the collimator telescope and the sighting telescope represents a closely connected unit.

This stability is important in a category of instruments where scalings are made comparatively seldom according to their employment. Such an instrument could be developed by a slight modification of the MOM (Hungarian Optical Works) gyroattachments (Fig. 2). The gravity center of the instrument is at a significantly lower position thus reducing the sensitivity against vibrations.

The solution on Fig. 2 — with centring control — ensures a versatile use of the instrument bearer as well as the possibility of measurements with centring control.

The reading on the horizontal circle in the field of view of the telescope is comfortable, the scaled microscope can be occasionally used as the scale of the collimator.

From the point of view of the user those instruments are naturally preferred whose instrumental constant is stable, and which can be applied *without calibration* for the finding of the true north at longer intervals. As an example the calibration measurements of a MOM Gi-B2 are shown in a subterranean experimenting room of the Geodetic Research Laboratory of the Hungarian Academy of Sciences in Sopron, carried out during three consecutive years (Fig. 3). When more accurate and reliable results are needed (for example at breakthrough) repeated calibrations are absolutely necessary. It must be remarked, that the quoted instrument was operated during 3000 hours with only a single breakdown.

2. Problems of the measurement methods

When determining the true north by gyrotheodolites — apart from rapid methods — the so-called reversion-point method (with following), the so-called amplitude method (without following) or the transit-time method is used (the latter possibly through several scale divisions, or along the whole swinging trajectory [1]. The measurement along the whole swinging trajectory can be advantageously used by instruments with automatic following. As in [1] this problem was omitted, it shall here deal with it in a some what more detailed way. Having measured the transit-time in addition to reversion points (n_i) at several positions, one has several possibilities to determine the resting position (Fig. 4). If $t_r - t_l = \Delta t$, where t_r is the right-side and t_l the left-side transittime, then the $\Delta N'$ correction of the approximate N_0' resting position can be computed from the approximate serial expansion (N_0' horizontal circle reading):

$$N = N_0' + \Delta N' + Ca_0 = N_0' + \sum_{i=0}^{s} \frac{G_r a \Delta t_i + dN_i'}{s+1} + Ca_0$$

$$dN_i' = N_i' - N_0' \quad \text{and} \quad N_{0,rev}' = N_0 + Ca_0 = \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{n_1+n_2}{2} + n_3 + \frac{n_2+n_3}{1} + n_4\right)\right\}.$$

Here a is the amplitude, c the constant of the bandtorsion, a_0 the torsion-free position of the band in scale-units, and the readings were made at $s+1$ po-

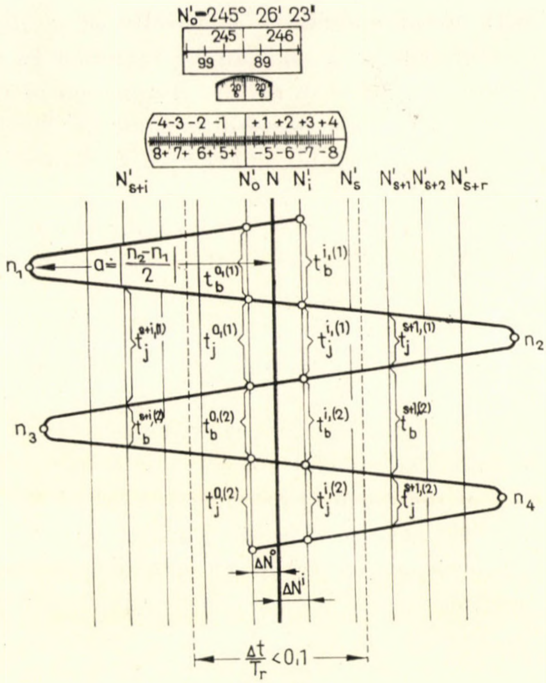


Fig. 4

sitions of the horizontal circle. The constant G_r is given by

$$G_r = \frac{\pi}{2} \frac{1}{T_r} . \tag{2}$$

If the mentioned condition for Δt is not fulfilled, then the readings must be calculated including the third term of Equ. (3):

$$N = N'_0 + \sum_{i=0}^{s} \frac{G_r \, a \Delta t_i + dN'_i}{s+1} + \sum_{i=s+1}^{s+r} \frac{a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\Delta t_i}{T_r}\right) + dN'_i}{r} + Ca_0 \tag{3}$$

or with reversions:

$$N = \frac{\left\{ \begin{aligned} & N_1 + N_2 + (r+s+1) N'_0 + \sum_{i=0}^{s} (dN'_i + G_r \, a \Delta t_i) + \\ & \qquad + \sum_{i=s+1}^{s+r} a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\Delta t_i}{T_r}\right) + dN'_i \end{aligned} \right\}}{r+s+3} + Ca_0 . \tag{3a}$$

This latter is a rather difficult formula, it can be used, however, for certain special investigations (e.g. determination of the effect of gusty conditions on the measurement with gyrotheodolites). Naturally at a given point of the horizontal circle, several values of Δt can be included in the calculations. It would be possible to use weights in reverse proportion of the distance from the resting position, but now this possibility shall be disregarded. For the sake of simple calculations it is suitable to keep $\Delta t < 0{,}10\ T_r$. If the reversion-point method and the method of measurement of transit-times at several scale- and horizontal circle positions is used combined together (at least in 3 positions and 3 transit-time differences), then the accuracy of the determination of the resting position can be increased by about 30—40 per cent. The same condition can be used within the scale of the collimator [1]. If the equations for the determination of the resting position (reversion points, transit-times and for control $t_r + t_l = T_r$) are solved together in an adjustment, an increase in accuracy of about 10—20 per cent can be reached. This method however is suitable only for special purposes. Comparative investigations proved the sufficiency of the rapid approximative calculation method, but in preference at several scale positions, as the member $G_r a \Delta t_i$ is the largest in the error equation (in consequence by it the error can be decreased).

What advantages has the mentioned combined method of measurements? In order to keep the condition $\Delta t \leq 0{,}10\ T_r$, the true north direction must be known with a good approximation (in function of the amplitude within 3—30′). During the measurements the tripod and consequently the pendulum system is exposed to certain interfering effects (wind, gusts, movement of the tripod etc.) that influence the trajectory around the resting position differently as in the neighbourhood of the reversions. Some other interesting effects resulting from technical, electric or methodic causes, e.g. unsmooth following and so on disturb the amplitude of the swinging. Without discussing these effects, it should be mentioned that a greater amplitude is more advantageous than a small one. Besides, informations coming from different parts of the trajectory improve the accuracy for the determination of the resting position. Table I contains some data on the accuracy with different methods for some types of the instruments.

The transit-time differences of neighbouring scale-divisions or horizontal circle divisions can be used for the determination of the resting position, but with a significantly lower accuracy than by other methods [1].

As has already been mentioned, the accuracy of the measurements can be increased by repeated returns and by intermediate calibrations, mainly by the reduction of the errors which vary from one station point to the other. The accuracy data of Table II are achieved by using a schematic arrangement (*M* means measurements, *C* calibration, the numbers before them give the number of repetitions at a given station point). The data here given are upper limits of errors from measurements made with several hundred instruments. According to the table, good results can be achieved, if both the calibrations

Table I

Method \ Instrument	Gi–B1	Gi–B2	Gi–C1	Gi–C2	Gi–D1 (300 cps)	Gi–D2 (400 cps)
Mean square error of a single determination of the true north with 4 and 3 reversions, resp.	±15″(±18″)	±12″(±15″)	±25″(±30″)	±20″(±25″)	±40″(±45″)	±25″(±30″)
Mean square error of a single determination with the transit time method (at three scale devisions, 2 values of Δt at each division)	±12″	±10″	±20″	±18″	±35″	±20″
Mean square error of a single determination with the combined method (method with and without following, and transit-time method)	±8—10″	±6—9″	±16—18″	±13—16″	±28—30″	±16—18″
Mean square error of the true north determination, two measurements at each station	±6—8″	±5—7″	±13—15″	±12—13″	±22—25″	±13—15″
The time needed for a determination of the true north (4 reversions)	26—30 minutes	25—28 minutes	16—18 minutes	16—18 minutes	14—17 minutes	16—18 minutes

Table II

Calibration — Measurement — Calibration	Gi—B1	Gi—B2	Gi—C1	Gi—C2	Gi—D1 (300 cps)	Gi—D2 (400 cps)
$1\,C - 1\,M - 0\,C$	±7,5—14,5″	±6,5—11,5″	±17,0—25,2″	±14,5—20,4″	±30—36″	±20—25″
$1\,C - 1\,M - 1\,C$	±6,5—12,5″	±5,9—10,0″	±14,7—21,8″	±12,6—17,7″	±28—34″	±18—22″
$2\,C - 2\,M - 2\,C$	±5,3—10,0″	±4,4— 7,9″	±11,6—17,7″	±10,0—14,3″	±20—25″	±14—18″
$2\,C - 3\,M - 2\,C$	±4,8— 9,5″	±4,4— 7,3″	±10,8—16,6″	± 9,4—13,4″	±19—22″	±12—16″
$2\,C - 4\,M - 2\,C$	±4,7— 9,3″	±4,3— 6,3″	±10,4—16,1″	± 9,1—13,0″	±18—21″	±11—15″
$2\,C - 3\,M - 2\,C - 3\,M - 2\,C$	±3,7— 7,3″	±3,4— 5,5″	± 8,2—12,5″	± 7,3—10,1″	±15—19″	± 9—12″
$4\,C - 4\,M - 4\,C$	±4,6— 9,0″	±4,0— 6,5″	± 9,7—15,2″	± 8—11″	±16—19″	±10—14″
One calibration every month and one measurement for the determination of the true north	±15″	±12″	±30″	±25″	±40″	±28″

(before and after the measurements) and the measurements of bearings (azimuth) are repeated several times e.g. in the system $2C — 2M — 2C$, maybe in $2C — 3M — 2C$. With the Hungarian instruments the demands of accuracy at breakthrough can be met using these systems of measurement. Only in case of special requirements is it advisable to exceed the given number of repetitions, as for long tunnels, where, in addition to the increased accuracy at a station point, the advantages of symmetrically distributed orientations are utilized, too. Some investigations into this problem are published elsewhere [2, 3].

Among the measurements at a given station point, the first one can be made with the so-called method of reversion-points (a preliminary orientation of 1—5° suffises), the second one with the combined method.

With instruments of rather stable constants, less calibrations are needed (Fig. 3). The calibration station must lie at an easily accessible point from the repository of the instrument, atmospheric effects (wind, gusts, refraction) must be slight there and conditions for measurements at different visibility are needed, too. The establishment of calibration stations must be considered in case of precise gyrotheodolite measurements, where the outer atmospheric and other disturbances can be reduced to a minimum (closed room with collimators). Naturally, the accord between calibration line and geodetic network must be guaranteed.

3. Problems in selection of places for the determination of true north

In the surface surveying, gyrotheodolites are mainly used in case of low density triangulation (few control points), or if the control points are not provided with accordingly high signals, as the meridian can be indicated even in such conditions with the gyrotheodolites. In some countries, terrestrial control points are built at distances of about 200—500 metres from first and second order points. They can be used for calibration measurements. In closed areas (forests, cities) the instruments can advantageously be used, too. They provide further possibility for the measurement of the detailed control nets for elongated establishments by appropriate orientations or intermediate orientations (long traverses with many break-points).

Gyrotheodolites can be widely used in the determination of photogrammetric connection points, for the establishment of further control points to intermediate control points (the series are shortening). The regular errors inside the series can be determined by finding the bearing of intermediate legs (meridian control); their lengths can be measured with distance-meters (scale-control). By adjustment the accuracy is increased [4]. Such intermediate orientations and distance measurements are very advantageous for reducing the regular errors in long aerotriangulation series. If such measurements are made dense enough, the adjustment can be omitted. An even greater importance in respect to there is the reduction of regular errors in blocs. If at larger aerotriangulation blocs symmetrically distributed meridian indications, distance measurements (scale) and levelling are made, then besides the regular errors the disadvantageous accumulation of irregular errors is excluded, too.

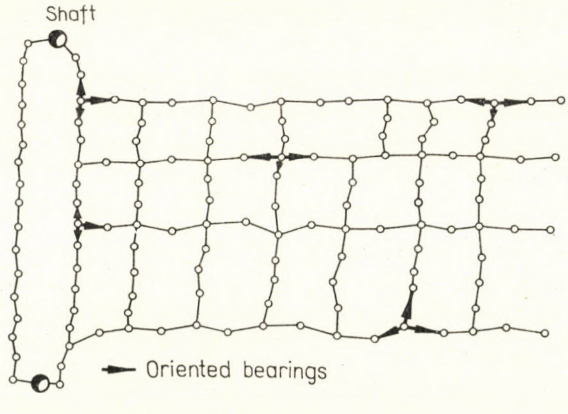


Fig. 5

Gyrotheodolites can be used, besides traditional surveying, as immediate indicators of direction between points without intervisibility (e.g. setting of TV antennas), in military mapping and direction etc.

The most obvious use of gyrotheodolites is in tunneling, in underground and mining survey, as a general meridian indicator, e.g. for breakthrough. In spite of a lack of flame-proof instruments, known instruments can be used by careful handle in the vicinity of shafts. In this case one has a geometrical situation similar to those with traditional shaft plumbing. If possible, it is advantageous from the point of view of the general mine surveying, too, to give the true north with gyrotheodolites, depending on the size of the mine field, at least at 3—10 places in a symmetrical distribution. As control points can be brought down only through shafts or inclined shafts, the network of control points connected with traverses has a rather disadvantageous form (Fig. 5). The situation of the error ellipses, characterizing the reliability of the points is rather variable in function of the geometric configuration. As the control network is not approximately quadratic, the accuracy is not uniform throughout the net (Fig. 6). The situation would be more suitable, if the junction of the single traverses would give a triangular configuration, but from a mining-technical point of view the quadratic form is more common. This quadratic form ensures a screen-like, rigid net [5]. In spite of the fact, that the junctions are at a more advantageous position in respect to accuracy, it is, however, suitable to indicate the meridian in these points, if possible, because thus the orientation of several traverses is found. The gyrotheodolite bearings must be distributed in such a way, that an appropriate connection of subsequent measurements might be ensured. These bearings must include stable, immovable points (for control the angles between traverse legs are given, too), and they should not be shorter than 50 m. These oriented bearings

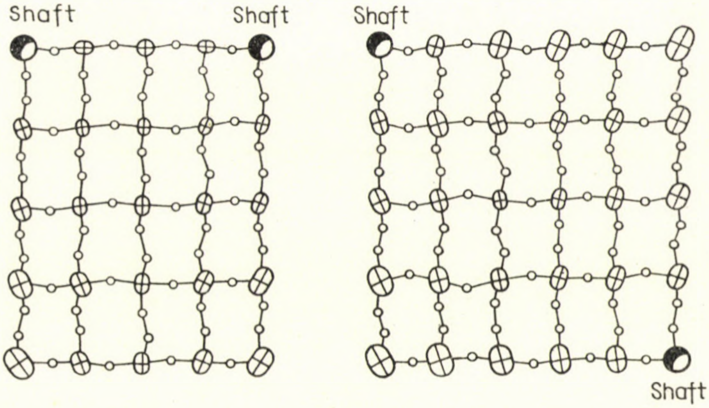


Fig. 6

should lie along the mean lines (control net) of the underground survey so that every unit net has a true north direction. The needed density of orientations can be determined from their accuracy and from the reliability of the stations. Practically 2—3 basic bearings are needed for a square kilometre. In case of traverses with many legs, the intermediate orientations can also serve for controlling. By the rigorous or approximative adjustment of the control net, the gyrotheodolite bearings must be taken into account. Time the control network thickened with gyrotheodolite bearings means a significant stiffening and increase of accuracy in the most common case of elongated nets.

Based on the theory of errors, it is possible to show that from the point of view of the mine or surface surveying the distribution of meridian indications is most favourable if *the sum of the squares of distances of the traverse stations of the control net from the gravity center of the points included between the neighbouring oriented bearings* (at every point the next gravity center, or its consideration in calculating the gravity center is naturally decisive) *is a minimum.* This would mean orientations by triangular or by nearly rectangular quadrangular units (the latter is identical with approximately stretched, equilateral traverse legs) not at the junctions, but at stations about midway between junctions. In certain cases this is disputable, and an exhaustive analysis is needed (Fig. 7). In respect to the transplantation of the meridian indication errors, the junction-point solution is the better (the distances between gravity centers are smaller). Even if the traverse is not a stretched one, the difference of both arrangements is not big. In doubtful cases the mathematical solution of the problem is decisive (calculation of the gravity centers.) Only two connected legs can, however, be so oriented and this results later

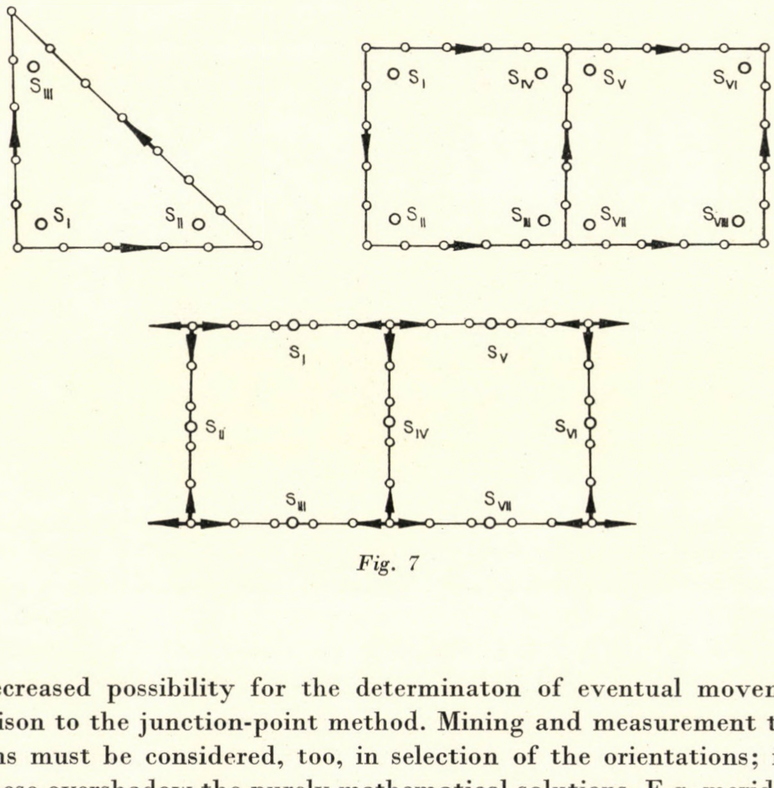


Fig. 7

in a decreased possibility for the determinaton of eventual movements in comparison to the junction-point method. Mining and measurement technical problems must be considered, too, in selection of the orientations; in many cases these overshadow the purely mathematical solutions. E.g. meridian indications in junctions ensure among other things a better connection.

Investigations into individual traverses have proved that a favourable choice of orientation measurements results in a significant increase of the accuracy and also in savings. These investigations were described by TÁRCZY-HORNOCH [6] and in [7], resp. the best results are achieved, if the orientations are symmetrically distributed in respect to the projections to the end leg. The greater the accuracy of the measurement of angles, the less importance has the favourable distribution of orientations from the point of view of theory of errors [6]. Even in this case it offers possibility for control of the measured angles.

The question arises, how to determine the sufficient number of intermediate orientations in long traverses (e.g. at breakthrough)?

Earlier investigations have shown that by stretched traverses with nearly equally long legs, the transversal error of the end point, $\mu_{tr,\, n+1}$, can be written after the distribution of the angular contradiction in a good approximation (the following expression slightly differs from expressions elsewhere) as:

$$\mu^2_{tr,(n+1)} = \frac{\mu^2_\beta}{\varrho^2} L^2 \left\{ \frac{n}{12\,(z+1)^2} + \frac{q}{(z+1)} \right\} \tag{4}$$

where μ_β means the mean square error of the angles, L the length of the traverse ($L = ns$, s is the mean length of the legs, n the number of legs), z the number of intermediate orientations (in addition to those at the end points), and

$$q = \frac{\mu^2_\alpha}{\mu^2_\beta}$$

(μ_α is the mean square error of the bearings).

Expressing z from eq. (4) and taking only the positive sign into consideration:

$$z = M^2 \left(q + \sqrt{q^2 + \frac{n}{6\,M^2}} \right) - 1 \tag{5}$$

where

$$M^2 = \frac{\mu^2_\beta L^2}{2\,\mu^2_{tr,n+1}\,\varrho^2} . \tag{6}$$

So for example if $\mu_\beta = \pm 5''$, $q = 2$, $L = 2$ km, $\mu_{tr,n+1\,(\mathrm{perm})} = \pm 5$ cm, $n = 20$, then $z = 2$. If $q = 4$, and the others are the same, then $z \doteq 3$—4. For the sake of security, only the third of the permitted transversal error is usually taken into consideration. In the deduction of Equs. (4) and (5) that the omissions should give errors less than 15 per cent was taken into account. As the mean square errors are even less reliable than this, and the configuration deviates from the ideal one, too, this approximation is always valid.

If $n < 10$ and $q \gg 1$, than it often suffises to take

$$z = 2\,M^2 q = \frac{\mu^2_\beta \cdot L^2}{\mu^2_{tr,n+1}\,\varrho^2}\, q - 1 \tag{7}$$

for the calculations. In the reverse case, if $q < 1$, one obtains

$$z = M \sqrt{\frac{n}{12}} - 1 = \left(\frac{\mu_\beta L}{\mu_{tr,n+1}\,\varrho} \sqrt{\frac{n}{12}} \right) - 1 . \tag{8}$$

If these equations give a value for z less than unity, then the prescribed accuracy can be reached without intermediate orientations. Sometimes the prescribed accuracy is very high, and so the quantity of the necessary orientations is unusually great; in this case the accuracy of the angles and bearings must be increased, by repeated measurements and by intermediate calibrations, resp. In some cases this problem leads to the problem of the most favourable distribution of weights. The latter problem, and the case of not stretched traverses are not dealt with in the present article, it should only be mentioned that if the traverse is nearly circular in shape, then the orientations can be placed symmetrically anywhere if points of view other than

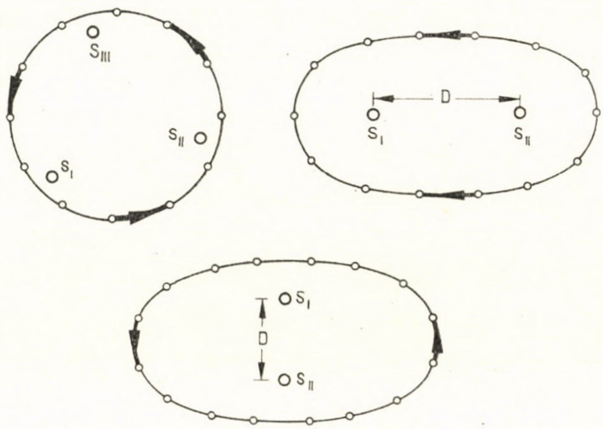


Fig. 8

that of the theory of errors are neglected. If the shape is roughly elliptical, then in case of two orientations it is advisable to test the problem in respect to the errors of the angles and bearings. If the effect of the errors in angles is greater, then it is more advantageous that the gravity center of the two orientations should be in the vicinity of the focal points of the ellipse (meridian indications in the intersection of the minor axis, or nearby). In this case the sum of the squares of the distances between traverse points and gravity centers is a minimum. If the effect of the errors in the bearings is greater then the orientations are most advantageously placed near the intersections of the major axis, as in this case distance of the two gravity centers is a minimum and so the effects of the errors in the orientations are minimal, too (Fig. 8).

If two or more parallel traverses (being a common case both in underground and surface surveys) are united with stiffening traverses, then this stiffening loses its importance in respect to the turning off, with the increase of the number of intermediate orientations. From the point of view of the decrease of longitudinal errors and consequently of errors of the traverse points it is, however, very important.

The measurements at breakthrough should be separately mentioned. The papers [1, 3] helped to clear up some problems in this direction. From the equations given there the necessary number of orientations can be determined similarly to the previous considerations, essentially taking the given proportions of the traverses and the accuracies wanted into consideration. Some investigations into this question are summarised in Table III.

Table III

Given values							Calculated values from two sides		
$\frac{n}{2}$	s (meter)	$\frac{L}{2}$ (km)	μ_β	$\mu_{\alpha,gyr}$	μ_k (cm)	Number of orientations	Member μ_β cm	Member $\mu_{\alpha,gyr}$ cm	μ break-through cm
20	100	2	±5″	±10″	±2	central leg	±13,8	±13,6	±19,6
						3	± 5,3	± 7,7	±10,7
						5	± 2,5	± 6,2	± 7,3
			±3″	±10″	±2	central leg	± 8,3	±13,6	±16,2
						3	± 3,2	± 7,7	± 8,8
						5	± 1,5	± 6,2	± 6,9
40	100	4	±5″	±10″	±2	central leg	±24,5	±27,2	±36,7
						3	± 8,3	±15,8	±17,9
						5	± 5,0	±12,2	±13,4
			±3″	±10″	±2	central leg	±14,6	±27,2	±30,9
						3	± 4,9	±15,8	±16,7
						5	± 3,0	±12,2	±12,8
35	500	17,5	±2″	± 5″	±5	35	—	±10,8	±12,6
						8	± 5,0	±21,3	±22,9
						4	±10,0	±30,0	±32,4
			±3″	± 4″	±5	35	—	± 8,6	±11,2
						8	± 7,4	±17,0	±19,8
						4	±14,9	±24,3	±30,9

μ_k Mean square error at the beginning point

For stretched traverses with equally long legs the increase of the accuracy and the decrease of the effect of angular and bearing errors with an increasing number of orientations are given in Table 4. It was found, that the effect of the orientation errors decreases approximately about as the square root of the number of orientations in a symmetrical configuration in the end-point.

Table IV

Type of the traverse (s length of the leg, n number of legs) (stretched, with equally long legs)	Square of the coefficient of μ_β	The coefficients of μ_β in relation to those of a traverse oriented at one end	The coefficients of μ_α in relation to those of a traverse oriented at one end
Open end	$\frac{n-1{,}5}{3}\frac{s^2}{\varrho^2}$	1	1
Oriented in the middle	$\frac{n}{12}\frac{s^2}{\varrho^2}$	$\sim\frac{1}{2}$	1
Oriented at both ends (contradition not distributed)	$\frac{n-1}{12}\frac{s^2}{\varrho^2}$	$\sim\frac{1}{2}$	0,70
Oriented at both ends and in the middle (contradictions not distributed)	$\frac{n-1}{48}\frac{s^2}{\varrho^2}$	$\sim\frac{1}{4}$	0,62
Oriented at both ends and at two intermediate points symmetrically (contradiction not distributed)	$\frac{n-1}{108}\frac{s^2}{\varrho^2}$	$\sim\frac{1}{6}$	0,53
Oriented at both ends and at three intermediate points symmetrically (contradiction not distributed)	$\frac{n-1}{192}\frac{s^2}{\varrho^2}$	$\sim\frac{1}{8}$	0,47
Oriented at both ends and at four intermediate points symmetrically (contradiction not distributed)	$\frac{n-1}{300}\frac{s^2}{\varrho^2}$	$\sim\frac{1}{10}$	0,42

4. Effect of the wind and gusts

The effect of the wind and gusts can be considerable. The gusts cause greater decrease in accuracy. In an experiment the Hungarian gyrotheodolite MOM Gi-B2 was used with automatic following. The transit times were measured along the whole trajectory and 8—10 reversion points and an according number of transit times were determined distributed symmetrically in function of the amplitude, at 5—8 points (Fig. 9). The investigations have shown that measurements with gyrotheodolites can be carried out at wind velocities and gusts of 10—12 m/sec with the wanted accuracy (the instrument was gyrotheodolite with automatic following, and not gyroattachment). The inner error of the measurements is about one and a half times or twice bigger than otherwise, giving no appreciable influence on the outer accuracy. The gusts, however, make the determination of the zero point considerably more difficult, as the resistivity of the pendulum against disturbances is less. It happens that the torsion free position cannot be determined more precisely as 1 scale division. Even in case of such strong gusts, smaller variations of the trajectory

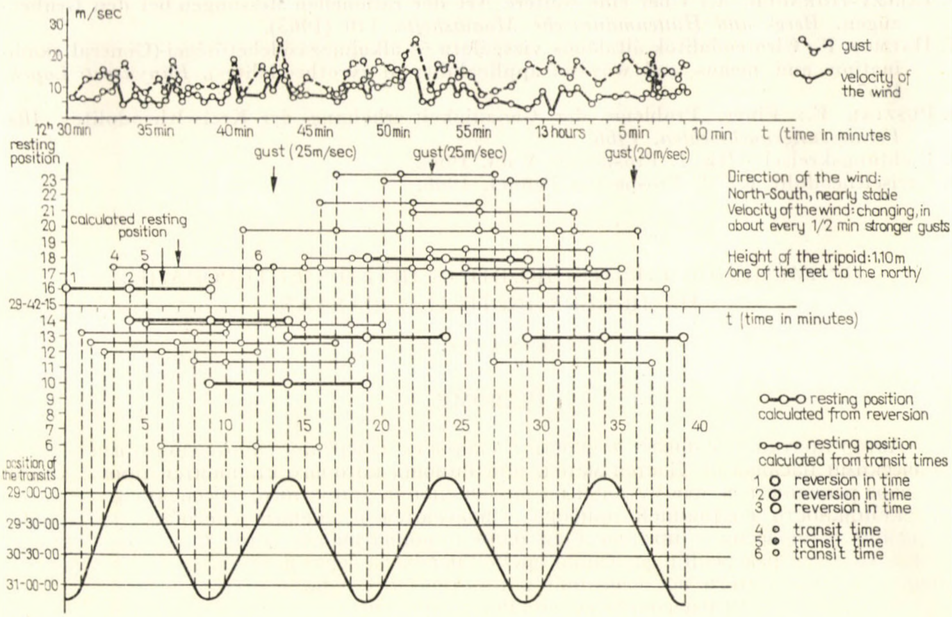


Fig. 9

occur. (With resting motor the resistivity of the pendulum also is less.) For this reason it is advisable to surround the instrument with a protecting shelter against stronger gusts. Windy conditions, draughts occur even in mines, not only on the surface. Fig. 9 shows that the extreme great values of the wind velocity (gusts) cause changes in the determination of the resting position in case of measurements with a turning motor.

The detailed investigation of problems of instrumental and measurement technics could expectedly clear up some important theoretical and practical questions.

REFERENCES

1. Halmos, F: Giroteodolitos azimutmeghatározások módszertani és pontossági vizsgálata (Methologic study and the investigation of gyrotheodolite azimuth-measurements). *Geodézia és Kartográfia*, 1968.
2. Halmos, F.: Föld alatti létesítmények tájékozása giroteodolittal, különös tekintettel az áttörési mérésekre (Orientation of underground installments by gyrotheodolite with special respect to breakthrough measurements). *Geodézia és Kartográfia*. 1968.
3. Halmos, F.: Anwendungsmöglichkeiten der Kreiseltheodolite zur genauen Azimuthbestimmung. In print (Zeitschrift für Vermessungswesen).
4. Halmos, F.: Untersuchung der Kreiseltheodolite sowie deren Anwendungsmöglichkeiten. *Allgemeine Vermessungsnachrichten*, 1966.
5. Konrád, Ö.: A poligonvonalak kimerevítésével elérhető pontosságnövekedés (The increase of accuracy by stiffening of traverses). Budapest, 1939, Honvéd Térképészeti Intézet.

6. Tárczy-Hornoch, A.: Über eine weitere Art der rationellen Messungen bei den Grubenzügen. *Berg- und Hüttenmännische Monatshefte*, 110 (1965).
7. Halmos, F.: Giroteodolitok általános vizsgálata és alkalmazási lehetőségei (General examination and means and ways of applicability of gyrotheodolites). *Bányászati Lapok*, 1967.
8. Pusztai, F.: Einige Probleme der Genauigkeitserhöhung der Kreiseltheodolite. *Allg. Vermessungsnachrichten*, 1966.
9. Richtungskreisel ARK 1. Prospectus Wild, 1968.
10. Kreiseltheodolit KT 2. Prospectus Fennel, 1968.

ПРИМЕНЕНИЕ ГИРОТЕОДОЛИТОВ ПРИ ОРИЕНТИРОВАНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ И В ШАХТАХ

Ф. ХАЛМОШ

РЕЗЮМЕ

Автор кратко сравнивает точность и скорость измерений гиротеодолитами и гироскопическими насадками. Дается метод, при помощи которого становится проще конструктивное решение т. н. «азимутальных» гироскопов и, кроме того, обеспечивается большая стабильность постоянной прибора. Излагаются различные способы определения положения равновесия и предлагается один комбинативный метод измерения (наблюдения за точками реверсий и фиксация времён перехода через деления шкалы автоколлиматора). Подводит итоги исследований математических и по теории ошибок.

Во второй части изучаются возможности применения ориентирований в условиях на поверхности и под землей, а также проблемы наивыгоднейшего расположения. Устанавливается, что с точки зрения общих съёмок ориентирование выгоднее всего провести так, чтобы сумма квадратов расстояний от точек полигонометрического хода до центров тяжести заключенных между ориентированными сторонами точек была наименьшая. Отдельно рассматривает проблему распределения ориентирований в случае нескольких фигур. На случай одиночных полигонометрических ходов даются зависимости для определения количества необходимых ориентирований. Рассматриваются случаи, когда влияние ошибок ориентирования или угловых измерений менее выгодно. Кратко излагается проблема выбора ориентирований в случае измерений в забое. Результаты экспериментальных измерений приведены в табличном виде.

Наконец, исследуется действие ветра и толчков ветра на измерения гиротеодолитом. Устанавливается, что при скорости ветра 10—12 м/сек ошибки измерений не превышают заданные пределы. При ветре, сильнее указанного, точность измерений существенно портится, поэтому приборы целесообразно накрывать зонтом. Для исследований автор разработал метод, относящийся к полной орбите колебаний.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (3—4), pp. 389—396 (1969)

ÜBER DIE KRITISCHEN FÄLLE BEI BERGBAULICHEN INVESTITIONEN

J. ZAMBÓ

KORRESP. MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 29. Oktober 1968]

Die Beziehung zwischen der einfachen Vergütungszeit und der Vergütungszeit mit Verzinsung lautet:

$$\bar{t} = -\frac{\log(1 - t'\delta)}{\log p}.$$

Als kritische sind jene Fälle zu bezeichnen, bei welchen $t'\delta \to 1$, d. h. die verzinste Vergütungszeit sehr groß ist, mithin wird also der kumulative verzinste Ertrag erst nach einer langen Zeit positiv. In solchen Fällen kann mit gewissen, vorher geplanten Eingriffen die kumulative Ergebnislinie in günstigem Sinne beeinflußt, und der Beginn des positiven Kurvenabschnittes beträchtlich nach vorne verlegt werden.

Bei der Prüfung der Wirksamkeit von Investitionen fällt eine wichtige, ja vielleicht die wichtigste Rolle der Vergütungszeit zu. Dabei kann von einer einfachen und von einer Vergütungszeit mit Zinsen die Rede sein. Die einfache Vergütungszeit kann durch folgende Formel ausgedrückt werden:

$$t = \frac{K_A}{E - K_B} = \frac{K_A}{D},$$

worin t [Jahre] die einfache Rückflußzeit, K_A [Ft] die Grundinvestitionskosten, E [Ft/Jahr] die jährliche Preiseinnahme, K_B [Ft/Jahr] die jährlichen Produktionskosten ohne die fällige Rückvergütungsrate der Investitionskosten bedeuten.

Die verzinste Vergütungszeit $\bar{t}$ [Jahr] kann aus folgender Beziehung errechnet werden:

$$D\frac{p^{\bar{t}} - 1}{\delta} = K_{A,r}\,p^{\bar{t}}$$

woher

$$\bar{t} = \frac{\log D - \log(D - \delta K_{Ar})}{\log p}$$

worin δ den Zinsfluß als Dezimalwert (0,05, 0,06 . . .), $p = 1 + \delta$ und $K_{A,r}$

den bis zum Beginn der Produktion verzinsten Wert der Grundinvestitionskosten bedeuten.

$$t = \frac{K_A}{D}$$

bezeichnet die einfache Vergütungszeit, demnach kann

$$t' = \frac{K_{A,r}}{D}$$

als modifizierte einfache Rückflußzeit bezeichnet werden. Die Verhältniszahl

$$\lambda = \frac{K_{A,r}}{K_A}$$

ist um so größer, je länger die Investierungszeit dauert.

Die Vergütungszeit mit Zinsen kann auch in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$\bar{t} = -\frac{\log(1 - t'\delta)}{\log p}.$$

Hieraus folgt, daß $\bar{t} = \infty$ wird, wenn $t'\,\delta = 1$ ist.

In Abb. 1 ist in dem rechtwinkligen Koordinatensystem $100\,\delta$, t' die Hyperbel $\bar{t}=\infty$ (ihre Gleichung lautet $t'=1/\delta$) die Trennkurve der Rückflußfläche, welche einerseits durch die Hyperbel, andererseits durch die Achsen umschlossen wird.

Selbstredend hat dieses Gebiet nur grundsätzliche Bedeutung, da es ja unendlich lange Vergütungszeit nicht gibt, sondern treten in der Praxis anstelle von $\bar{t} = \infty$ die Werte $\bar{t} = N$ oder $\bar{t} = n$, wobei N die in Jahren angegebene Betriebszeit, n aber eine bestimmte Zeit, gleichfalls in Jahren bedeutet, wobei immer $n < N$ ist.

In Abb. 1 sind auch die Grenzkurven für $\bar{t} = 20$ und $\bar{t} = 10$ dargestellt. Das Entwerfen dieser Kurven ist aus der Abb. ersichtlich. In dem rechtwinkligen Koordinatensystem t', $\bar{t}$ sind die Kurven der Funktion $\bar{t}_{p=\mathrm{const}} = \varphi(t')$ bei den konstanten Werten $p = 1{,}05$, $p = 1{,}07$ und $p = 1{,}10$ zu sehen. Der Punkt der Grenzkurve $\bar{t} = 20$ kann beispielsweise folgendermassen abgeleitet werden: Punkt 1 ($\bar{t} = 20$) wird auf die Kurve $p = 1{,}07$ projiziert, somit gehört zum Punkt P′ der Wert $t' = 10{,}6$. Dann wird der Punkt 2 nach Punkt 3 übergetragen und damit ist die Lage des Punktes P schon ermittelt.

Wird im Bergbau die untere Grenze des Zinsfußes mit 5%, die obere Grenze aber mit 10% angenommen, dann stellt die Fläche a—b—c—d bereits einen realen Bereich für alle jene Betriebe dar, deren Lebensdauer $N \leq 20$

beträgt. Zu jedem Punkt dieses Gebietes gehört ein gewisses Wertepaar von $100\,\delta, t'$. Bei jedem beliebigen dieser unendlich vielen Wertepaare ist der Rückfluß der Investitionskosten in weniger als 20 Jahren — also maximal in 20 Jahren — möglich, wenn der Punkt ein Punkt der Grenzkurve $\bar{t} = 20$ ist.

In gleicher Weise kann auch jede andere, z. B. die Grenzkurve $\bar{t} = 10$ abgeleitet werden.

Freilich können die Ordinatengrenzen des realen Gebietes auch sonstwo eingezeichnet werden. Im allgemeinen wird als untere Grenze $100\,\delta = 5$

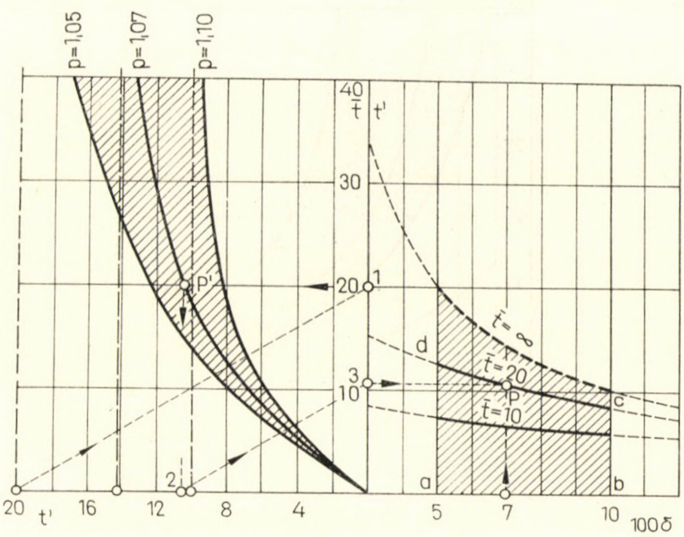


Abb. 1

akzeptiert, während die obere Grenze je nach dem Industriezweig variable sein kann.

Die Änderung der Funktion $\bar{t}_{p=\mathrm{const}} = \varphi(t')$ kann sehr beträchtlich sein, wenn $t' \rightarrow 1/\delta$ strebt. Eine $\Delta t'$ Änderung bedeutet so grösser Zunahme in Funktion t, je früher hat t' zum Werte $1/\delta$ behalt. Dieser Umstand muß in allen den Fällen in Betracht gezogen werden, in denen die als Grundlage der Beurteilung dienenden Angaben in diesen Bereich der Funktion entfallen.

Um die Übersicht zu erleichtern, sei hier ein durch numerische Daten belegter Fall — beispielweise aus dem Erzbergbau herangezogen. Die hierauf bezüglichen Angaben seien folgende:

Ein Vorkommen aus Kupfer-, Zink- und Bleierzen enthalte einen sicheren Mineralvorrat von mehr als $100 \cdot 10^6$ t. Nach den Bohrangaben betrage der voraussichtliche Metallgehalt 1,45% Cu, 6,0% Zn und 6,5% Pb. Mit Hilfe einer Kalkulation läßt sich der Wert der aus einer Tonne Erz erzielbaren

Metallmenge, u. zw. nach erfolgter Aufbereitung, also vor der Verhüttung bestimmen. Er betrage in unserem Falle 883 Ft/t.

Die Förderkapazität des zu errichtenden Grubenbetriebes betrage $2 \cdot 10^6$ t/Jahr, die bis Ende der Investitionsphase verzinsten Investitionskosten seien $K_{A,r} = 2100 \cdot 10^6$ Ft. Die auf 1 Tonne Roherz entfallenden Produktionskosten sollen einschließlich der Aufbereitungskosten 810 Ft/t betragen.

Diese Angaben genügen, um Abb. 2 zu entwerfen.

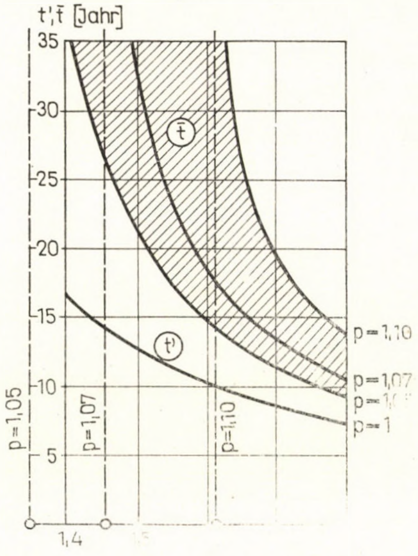


Abb. 2

Als Vereinfachung sei angenommen, daß das % an Zn und das % an Pb konstant sind und nur das % an Cu — gemäß der Darstellung — zwischen 1,4% und 1,8% variabel ist. Den Verlauf der als Funktion von Cu% modifizierten, zinslosen, einfachen Vergütungszeit (t') zeigt die Hyperbel t'. Die Gestaltung der Vergütungszeit mit Verzinsung ($\bar{t}$) stellen die andern drei Kurven dar, u. zw. für die Fälle $p = 1{,}05$, $p = 1{,}07$ und $p = 1{,}10$.

Es sei nun der Fall $p = 1{,}05$ herausgegriffen. Ist das Cu % = 1,35, so erhält man eine Vergütungszeit von unendlicher Größe, d. h., die Investitionskosten können nicht eingebracht werden. Ist hingegen das Cu % = 1,5, dann beträgt die Vergütungszeit mit Verzinsung rund 20 Jahre, die modifizierte einfache Vergütungszeit aber rund 13 Jahre. Wie man sieht, wurde also im vorliegenden Falle allein durch die Erhöhung des Kupfergehaltes um Δ Cu % = 0,15 die verzinste Vergütungszeit in eine annehmbare Nähe gebracht, wenn sich Zn % und Pb % dabei nicht veränderten.

Mit dem angeführten Beispiel soll darauf hingewiesen werden, wie wohlbegründet es ist, in kritischen oder Grenzfällen diese Frage einer eingehenden Prüfung zu unterziehen, mit anderen Worten: wie wenig man sich in solchen Fällen kritiklos nur auf die errechneten Werte stützen darf. Wie das Beispiel zeigt, liegt eine beträchtliche Verkürzung der verzinsten Vergütungszeit durchaus im Bereich der realen Möglichkeiten. Doch diese Gedankenreihe kann auch noch fortgesetzt werden. Angenommen sei, daß eine Rückvergütung der Investitionskosten innerhalb von 4 Jahren als Bedingung gelte, dann wäre hierzu z. B. ein Cu % = 2,0, Zn % = 7,0 und Pb % = 7,5 nötig. Wenn nach den Bohrangaben Cu % = 1,45, Zn % = 6,0 und Pb % = 6,5 beträgt, so sollte es wohl keine Schwierigkeiten bereiten, 4 Jahren hindurch die vorherigen Werte zu liefern, um so weniger, als das Bergwerk mit größter Wahrscheinlichkeit eine Lebensdauer von 100 Jahren erreichen wird.

Das Beispiel des erwähnten Erzbergwerkes verfolgt keinen Selbstzweck, sondern eignet sich dazu, einerseits die Aufmerksamkeit auf die besonders im kritischen Bereiche bestehende Unzuverlässigkeit der der Entscheidungsfällung vorausgehenden numerischen Daten hinzulenken, andererseits auch um zu zeigen, wie durch gewisse Maßnahmen scheinbar weniger oder überhaupt nicht wirksame Investitionen wirksam gestaltet werden können.

Am wichtigsten ist hierbei der Wert $t'\delta$. Seine Errechnung ist jedoch durchaus nicht einfach und mit vielen Fehlermöglichkeiten behaftet. t' enthält nämlich die Unsicherheiten hinsichtlich der Investitionskosten, der Produktionskosten und der Verwertung, bzw. die Änderungen dieser beträge als Funktionen der Zeit. Der δ-Wert aber ist durchaus eine Frage der Beurteilung, da ja genau soviel Argumente für einen 5%-igen wie für einen 7%-igen Zinsfuß vorgebracht werden können.

Diese Entscheidung kann schon von vornherein z. B. durch den Umstand beeinflußt werden, daß der Kupferpreis eine steigende oder sinkende Tendenz aufweist. Ferner kann es auch ein sehr wesentlicher Gesichtspunkt sein, ob das investierende Land hinsichtlich des fraglichen Produktes auf Import angewiesen ist oder nicht.

Nicht schwer ist es eine Entscheidung zu fällen, wenn der $t'\delta$-Wert verhältnismäßig klein oder groß ist, da ja im ersteren Falle die Investition zweifellos wirksam ist, der Rückfluß der Investitionskosten also sicher und rasch erfolgt, daher der Betrieb auch finanziell mit Nutzen arbeitet und zu den positiven Unternehmen zu zählen ist. Im letzteren Falle aber kann es vorkommen, daß die Investitionskosten innerhalb der Lebensdauer des Betriebes selbst unter Berücksichtigung der Verzinsung nicht wieder eingebracht werden.

Zwecks besserer Übersicht kehren wir wieder zu unserem früheren Beispiel zurück (Abb. 3). Ist anfangs im geförderten Erz das Cu % = 2,0, Zn % = 7,0 und Pb % = 7,5, so beträgt die Vergütungszeit mit Verzinsung

$\bar{t}$ = 4,6 Jahre. Danach aber werden sich die prozentuellen Metallgehalte im geförderten Roherz weiterhin gemäß der Bohrergebnisse gestalten. Kurve 1 zeigt den Verlauf der verzinsten Investitionskosten bei $p = 1{,}05$, Kurve 2 den Verlauf des verzinsten Rückflusses, Kurve R schließlich den kumulativen Verlauf des verzinsten Ergebnisses. Das kumulative Ergebnis wird innerhalb von 4 bis 5 Jahren (O = 4,6) positiv. Hätten die prozentuellen einzelnen Metallgehalte von Beginn an den Bohrergebnissen entsprochen, dann würde die Kurve R im Punkt O keinen Bruch aufweisen und auch der O-Punkt

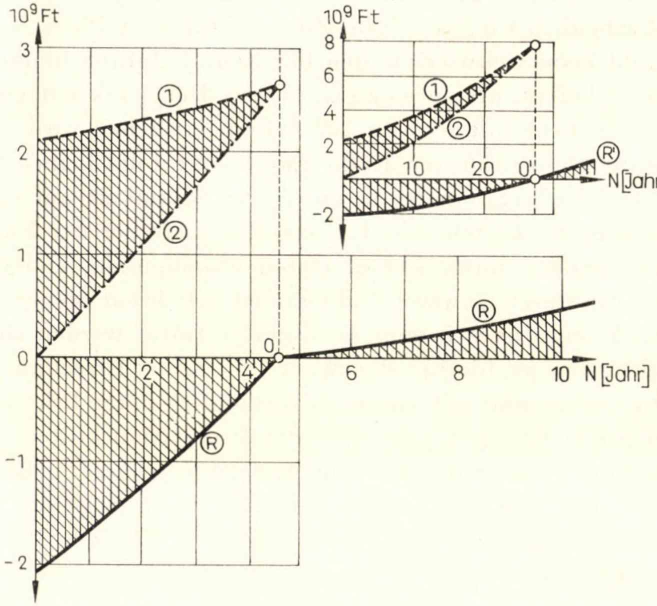


Abb. 3

würde nach rechts, etwa an die Stelle $N = O' = 27$ Jahre gerückt sein, wie es gleichfalls aus Abb. 3 zu ersehen ist.

Freilich wird in der Wirklichkeit die kumulative Ergebniskurve niemals so regelmäßig verlaufen, wie dies in Abb. 3 zu sehen ist. Im allgemeinen sind die Anfangsjahre am günstigsten, und hier ist auch die Steilheit am größten, um dann allmählich — und meist stufenweise — flacher zu werden, wie dies aus Abb. 4 zu entnehmen ist.

Auf Grund von Abb. 3 und 4 kann nun die Frage, ob man die kumulative Ergebniskurve brechen darf, ganz klar und in voller Einfachkeit gestellt werden.

Die Antwort darauf lautet: Es ist günstig, den Verlauf der kumulativen Ergebniskurve (R) zu brechen, d. h., der Wendepunkt (O) kann im allgemeinen zeitlich nach vorne verlegt werden. Selbstverständlich sind hierfür die Möglichkeiten im Bereich der einzelnen Mineralvorkommen verschieden. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit seien hier einige dieser Fälle angeführt.

Bei Steinkohlenvorkommen, die im Tiefbau abgebaut werden, können in einem unmittelbar am Schachtpfeiler angelegten hochkonzentrierten Abbaufeld in den Anfangsjahren überdurchschnittlich günstige Produktionskosten erzielt werden. Besteht das Vorkommen aus mehreren Flözen, und führt das obere, bzw. führen die oberen Flöze eine qualitätsmäßig bessere Kohle, so kann ihr Abbau in den Anfangsjahren eine überdurchschnittlich günstige Preiseinnahme sichern. Bei den mit Tagebau gewinnbaren Kohlenvorkommen wird es gewöhnlich zu erreichen sein, daß das Abraumverhältnis im Anfang

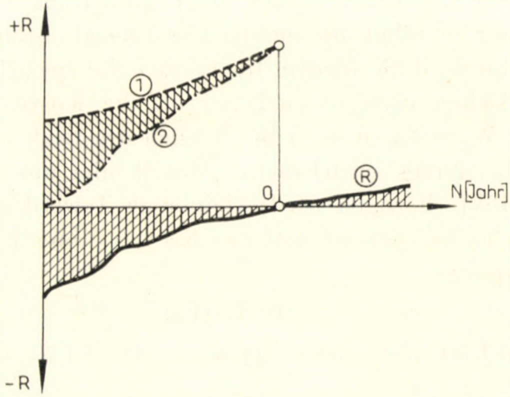


Abb. 4

am günstigsten und günstiger als der spätere Durchschnitt ist. Die gleichen Möglichkeiten bestehen natürlich auch beim Abbau von Erzvorkommen, noch dazu durch den Umstand ergänzt, daß hier die sich als notwendig erweisende Qualitätsverbesserung in den Anfangsjahren leichter erzielen läßt.

Die mit dem Brechen des Kurvenlaufs der kumulativen Ergebniskurve *R* verbundenen sämtlichen Details sind damit aber noch nicht einmal angenähert erschöpft. Das ist jedoch auch nicht nötig, da ja diese Möglichkeiten Fachleuten wohl bekannt sind.

Zusammenfassend kann folgendes festgestellt werden:

1. Nimmt man eine Amortisation mit Verzinsung an, so kann — wenn $t'\delta \geq 1$ ist — ein restloser Rückfluß der Investitionskosten nicht erfolgen; mit andern Worten: die kumulative Ergebniskurve (*R*) wird die Abszisse (O) nicht schneiden, sie besitzt also keinen positiven Abschnitt.

2. Das Brechen der kumulativen Ergebniskurve wird im allgemeinen dann von Erfolg begleitet sein, wenn $t'\delta$ keinen großen Wert repräsentiert. Im Wert $t'\delta$ ist δ eine Funktion des Zinsfusses, seine Änderung ist daher in gewissem Grade eine Frage der Beurteilung. Der Wert t' ist abhängig vom

Charakter des Vorkommens, von der Qualität seines Mineralhaltes, von der voraussichtlichen Gestaltung der Preis- und Produktionskosten, schließlich von der Schnelligkeit der Investitionsausführung. Es liegen also zahlreiche Umstände vor, deren Kenngrößen sich nicht nur zwischenzeitlich verändern können, sondern die es auch ausschlaggebend herbeiführen können, daß $t'\delta$ einen relativ kleinen Wert annimmt.

3. Es ist auch möglich, daß der t'-Wert im bergbaulichen Abschnitt des ganzen Vertikums — selbst nach Ausnützung sämtlicher Möglichkeiten — nicht günstig wird, trotzdem aber dieser Wert, auf das ganze Vertikum bezogen, einen akzeptabel niedrigen Wert ergibt. So kann z. B. der $t'\delta$-Wert eines im Tagebau fördernden Lignitbergwerkes zwar größer als 1 sein, während der auf das Endprodukt, nämlich die elektrische Energie bezogene $t'\delta$-Wert entweder in erwünschtem Maße niedrig liegt, oder die spezifischen Produktionskosten der elektrischen Energie niedriger als die Kosten für Importenergie sind. In ähnlicher Weise kann auch im Bereich des Erzbergbaus der $t'\delta$-Wert — wenn er auf das fertig ausgebrachte Metall oder auf die aus dem Metall hergestellten Produkte bezogen wird, kleiner als 1 werden, also günstig sein, oder es können sich niedrigere spezifische Kosten dieser Produkte ergeben als im Falle eines Importes.

SCHRIFTTUM

ZAMBÓ, J.: Optimum location of mining facilities. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.

CRITICAL CASES OF INVESTMENTS IN MINES

J. ZAMBÓ

SUMMARY

The connection between the simple recovery time and the recovery time with interest is the following:

$$\bar{t} = -\frac{\log(1 - t'\delta)}{\log p}.$$

The critical case is $t'\delta \to 1$, i. e. the recovery time with interest is very long, the cumulative effect with interest will be positive only after a long time. In this case by some preplanned interventions the cumulative effectline can be advantageously influenced and the beginning of the positive section significantly brought ahead.

КРИТИЧЕСКИЕ СЛУЧАИ ГОРНЫХ ИНВЕСТИЦИЙ

Я. ЗАМБО

РЕЗЮМЕ

Зависимость между временем простой и процентной оборачиваемости:

$$\bar{t} = -\frac{\log(1 - t'\delta)}{\log p}.$$

Критическим считается случай, когда $t'\delta \to 1$, то есть время процентной оборачиваемости очень велико, значит кумулятивный процентный результат только через долгое время становится положительным. С помощью некоторых, заранее запланированных вмещательств выгодно можно повлиять на линию кумулятивного результата и начало положительного отрезка может быть существенно отнесено вперёд.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (3—4), pp. 397—413 (1969)

TESTVERFAHREN ZUR DEUTUNG GEOPHYSIKALISCHER MESSPROFILE*

G. FANSELAU

[Eingegangen am 9. November 1968]

Eine Testmethode für geophysikalische Probleme wird beschrieben, und zwar unter Verwendung von Taylor-Reihen mit konstanter Gliederzahl. Die Anwendungsprobleme dieser Methode werden allgemein diskutiert. Ein numerisches Beispiel eines Modellkörpers wird berechnet und zeigt den praktischen Weg der Anwendung der Methode.

Die folgenden Betrachtungen beschäftigen sich mit der Anwendung von Taylor-Reihen bei der Deutung geophysikalischer Probleme. Die Hauptschwierigkeit bei einer voraussetzungslosen Deutung geophysikalischer Probleme liegt bekanntlich in der Unmöglichkeit, Geometrie und physikalische Eigenschaften des zu untersuchenden geotektonischen Störkörpers zu variieren, wie dies bei den Quellgebieten der physikalischen Forschung allgemein üblich ist. Es ist daher notwendig, die Variationsmöglichkeiten vom Quellgebiet selbst auf die mathematisch-statistische Untersuchung des Profils zu verlegen. Dabei sind im Prinzip zwei Wege möglich. Der eine stellt an die Spitze der Untersuchungen physikalische Theorien und betrachtet die Restfelder mit Hilfe statistischer Methoden; der andere bedient sich zuerst statistischer Untersuchungen und wendet dann die mathematischen Ergebnisse physikalischer Theorien an. Beide Wege haben ihre spezifischen Vor- und Nachteile. Hier soll der erstgenannte diskutiert werden, jener also, der sich zuerst im Rahmen physikalischer Theorien hält.

Wegen der im allgemeinen unregelmäßigen geometrischen Gestalt der zu untersuchenden Objekte sowie der physikalischen Heterogenität und Anisotropie ist es bei geophysikalischen Untersuchungen am besten, von vornherein zu Reihendarstellungen zu greifen. Im wesentlichen handelt es sich dabei darum, die reziproke Entfernung zwischen einem Element des Quellgebietes und dem Aufpunkt in eine Taylor-Reihe zu entwickeln.

Bei diesen Entwicklungen sind verschiedene Gesichtspunkte zu betrachten. Zunächst ist in das vermessene Profil ein geeigneter Trend zu legen. Diese Trendführung, von der aus die gemessenen Werte zu rechnen sind, ist wichtig im Sinne der Filtertheorie und im Sinne der Erhaltungsneigung. Die Trend-

* Mitteilung Nr. 322 aus dem Geomagnetischen Institut der DAW, Potsdam

variation bietet die erste Möglichkeit, das Profil, auf verschiedene Basen bezogen, der Reihenentwicklung zugrunde zu legen. Eine zweite Frage, die zu entscheiden wäre, ist die des zu benutzenden Koordinatensystems. Am besten eignen sich rechtwinklige kartesische Koordinaten, da die Erdoberfläche im allgemeinen als eben angesetzt werden kann. Selbstverständlich sind auch Kugel- und Zylinderkoordinaten von Vorteil, vor allen Dingen dann, wenn die verschiedenen Gültigkeitsgebiete der Reihenentwicklung abgeschätzt werden müssen. Besonders wichtig aber ist die Anwendung elliptischer Koordinaten für rotationssymmetrische Körper sowohl im dreidimensionalen wie im zweidimensionalen Fall. Hier ist es möglich, schon bei der Berechnung der ersten Reihenglieder festzustellen, ob es sich um einen linsenförmigen oder um einen schlotförmigen tektonischen Körper handelt, eine Entscheidung, die mitunter von ausschlaggebender Bedeutung sein kann. Nach der Wahl des Koordinatensystems ist als dritte und wichtigste Variante die Wahl des Koordinatenursprungspunktes anzusehen. Hier ergeben sich eine Fülle von Variationsmöglichkeiten, die kurz beschrieben werden sollen.

Es ist zweckmäßig, sich bei der Wahl des Koordinatenursprungspunktes nicht auf *einen* Punkt festzulegen, sondern seine Lage netzförmig variieren zu lassen, wobei auch Lagen des Koordinatenursprungspunktes oberhalb der Erdoberfläche von großer Bedeutung sein können. Für jeden Koordinatenursprungspunkt ist die Reihe anzusetzen. Sie gibt naturgemäß zahlenmäßig verschiedene Koeffizienten für die einzelnen Ordnungen. Nimmt man eine unveränderliche Gliederzahl der Taylor-Reihe an, d. h., bricht man die Reihe bei dem zweiten oder dritten Glied ab, so hat man mit diesem Testverfahren für die verschiedenen Koordinatenursprungspunkte eine ausgezeichnete Methode für die Lagebestimmung des geotektonischen Objekts, und zwar ist diese Methode in doppelter Hinsicht physikalisch signifikant. Einmal geht es um die Zahlenwerte der Koeffizienten der Reihenglieder selbst. Sie können bei Variation des Koordinatenursprungspunktes stark variieren, ja sogar physikalisch sinnlose, zum Beispiel bei der Masse negative Werte annehmen. Weiterhin ist die Konvergenz der Reihe ein wichtiges Kriterium. Ist die Konvergenz gut, so sind die Koeffizienten physikalisch signifikanter als bei schlechter Reihenkonvergenz. Diese Zahlenwerte sind bei divergenter Reihe sogar physikalisch nicht signifikant. Bedeutungsvoll sind auch die Fehler, mit denen die Koeffizienten der einzelnen Reihenglieder behaftet sind, wenn sie nach der Methode der kleinsten Quadrate für die verschiedenen Koordinatenursprungspunkte berechnet werden. Sind diese Fehler gering, so ist die Reihe im allgemeinen auch gut konvergent. In diesem Fall ist der Koordinatenursprungspunkt zweckmäßig gewählt. Sind die Fehler größer, muß die Lage des Koordinatenursprungspunktes verbessert werden. Es ergibt sich hier also ein einfaches Optimierungsverfahren, mit dessen Hilfe die physikalische Signifikanz der Koeffizienten der einzelnen Reihenglieder wesentlich gesichert werden kann. Die Verteilung der Zahlenwerte der Koeffizienten innerhalb des Gitters der Koordinatenursprungspunkte sowie die Fehler, mit denen diese Koeffizienten behaftet sind, geben zudem einen guten Überblick über gegebenenfalls vorhandene geometrische Symmetrieeigenschaften des geotektonischen Objekts.

Zur Charakterisierung des Quellgebietes muß die geotektonische Bedeutung der Koeffizienten der einzelnen Reihenglieder herangezogen werden. Beschränkt man sich bei der Charakterisierung dieser Reihenglieder auf das Potential des Gravitationsfeldes, so gibt das Glied nullter Ordnung die Masse des Quellgebietes an, ohne Rücksicht auf geometrische Form und Inhomogenität der Dichte. Das Glied erster Ordnung führt auf die Lage des Schwerpunktes, das Glied zweiter Ordnung auf Größen, die mit den Trägheitsmomenten in gewisse Beziehung gebracht werden können. Das Glied nullter Ordnung ist eine Invariante gegenüber Koordinatentransformationen. Das Glied erster Ordnung kann durch Verschiebung des Ursprungspunktes in den Schwerpunkt zum Verschwinden gebracht werden. Dieses Glied ist nicht invariant gegenüber Koordinatentransformationen. Das Glied zweiter Ordnung stellt eine Quadrik dar, das heißt eine homogene Form zweiten Grades. Diese Form ist im Rahmen einer Taylor-Reihe stets symmetrisch und besitzt im dreidimensionalen Falle drei Invarianten. Die erste Invariante ist die Spur der Matrix, die man aus den sechs Koeffizienten der Quadrik bilden kann; die zweite Invariante ist die Spur der adjungierten Matrix; die dritte Invariante schließlich ist die Determinante der Matrix. Diese drei Invarianten, die im Falle zweidimensionaler Betrachtungen sich auf zwei reduzieren, haben für verschiedene physikalische Theorien eine wichtige Bedeutung, so zum Beispiel in der Elastizitätstheorie. Sie sind, wie ihr Name sagt, unabhängig gegenüber Drehungen des Koordinatensystems und haben daher auch für die anderen Felder physikalisch ausgezeichnete Bedeutung, wenn auch zur Zeit von diesen Größen noch wenig Gebrauch gemacht wird. Sie eignen sich vorzüglich zur komplexen Deutung geotektonischer Quellgebiete. Man kann nun mit Hilfe der Koeffizienten der Quadrik eine Drehung des Koordinatensystems vornehmen, so daß die gemischten Glieder der Quadrik verschwinden. Man erhält dann die Hauptwerte und die Hauptachsen der Quadrik, wiederum also physikalisch wichtige Größen, deren Bestimmung bei komplexer Deutung ebenfalls strukturelle Hinweise geben kann. Eine Berechnung der Richtungskosinus für die Drehung sowie der Hauptwerte ist immer möglich, weil die Matrix, wie oben erwähnt, stets symmetrisch ist. Über die Invarianten der höheren Glieder liegt in der einschlägigen Literatur noch verhältnismäßig wenig vor. Die physikalischen Größen, die also durch solche Reihenentwicklungen gewonnen werden können, sind eindeutig bestimmbar — Masse, Schwerpunkt, »Trägheitsmomente« — und müssen zu einer Beschreibung des Quellgebietes herangezogen werden.

Ein wichtiger Faktor ist auch die Tatsache, daß die Ansätze für eine Taylor-Reihe verschiedenen analytischen Charakter tragen, wenn sich der Aufpunkt in bestimmten Bereichen relativ zum Quellgebiet befindet. Man kann zwischen einem Außenbereich und einem Innenbereich unterscheiden, die beide dadurch charakterisiert sind, daß kein Volumenelement des Quellgebietes in den Außenraum oder den Innenraum hineinragt. Zwischen Außen- und Innenraum liegt der mit Masse erfüllte Raum zum Teil durchaus auch mit verschwindender Dichte. Für den Außen- und Innenraum lassen sich für die Praxis gut auswertbare Formeln angeben, nicht so für den Masseraum selbst. Setzt man die für den Außenraum gültige Formel fälschlicherweise für die Beobachtungen im Innenraum ein, so divergieren die Reihen ebenso wie im umgekehrten Falle, wenn im Außenraum mit der Innenraumformel gerechnet wird. Hierdurch ist es möglich, die Räume voneinander zu trennen. Selbstverständlich sind diese Grenzen von der Wahl des Koordinatenursprungspunktes abhängig und gestatten so bei verschiedener Lage dieses Punktes eine gewisse Möglichkeit der direkten Lokalisierung des geotektonischen Quellgebietes.

Wichtig ist bei diesen Berechnungen die Möglichkeit der Anwendung der sogenannten Fenstermethode, wobei also das Kollektiv der Meßwerte, nur in bestimmte Gruppen zusammengefaßt, der Auswertung zugrunde gelegt wird. Numerisch kann man auch so vorgehen, daß man prinzipiell das Profil in eine Taylor-Reihe oder auch in eine Fourier-Reihe, die ja mit der Taylor-Reihe eng verwandt ist, entwickelt. Bei der Durchführung dieser Entwicklung ohne Rücksicht auf physikalische Fakten besitzen die gewonnenen Reihenkoeffizienten keine physikalische Signifikanz. Man kann jetzt mit dem einmal fertig ausgearbeiteten Kalkül des Innen- oder Außenfeldes in die obengenannten Reihenentwicklungen hineingehen und durch Vergleich der Reihenkoeffizienten die physikalische Bearbeitung des Profils vornehmen. Hierdurch wird die Rechenarbeit wesentlich verringert, da die Reihenentwicklungen der physikalischen Formeln ein für alle Mal für ein vorgegebenes Gitter des Koordinatenursprungs durchgeführt werden können. Die zu leistende Arbeit beschränkt sich dann im wesentlichen auf den Vergleich der Reihenkoeffizienten.

Ist man zu einer befriedigenden Deutung der Reihenglieder gelangt und genügt die Ausdehnung der Reihen selbst den zu stellenden Anforderungen, so kann eine numerische Synthese des Profils vorgenommen werden. Ein Vergleich des beobachteten Profils mit dem aus der Reihendarstellung gewonnenen ergibt ein Residualfeld, das nunmehr als statistisches Kollektiv einer besonderen Untersuchung bedarf. Es ist festzustellen, in welchem Umfang das Residualfeld rein statistischen Charakter trägt und inwieweit Auto- und Kreuzkorrelation Zeichen dafür sind, daß noch Strukturelemente im Residuum enthalten sind, die in ihrer geometrischen Ausdehnung die Deutung des Quellgebietes beeinflussen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die hier beschriebenen Verfahren die Möglichkeit enthalten, abgeschlossene Quellgebiete voneinander zu trennen, vor allen Dingen auch vertikal übereinanderliegende. Die Überlegungen in dieser Richtung sind noch nicht abgeschlossen. Auf ein Eingehen auf diese Frage sei daher hier verzichtet.

Zur Erläuterung der bisherigen Ausführungen seien einige mathematische Ergänzungen angefügt. Vorgelegt sei ein geophysikalisches Profil — der Einfachheit halber zweidimensional —, wie es in Abb. 1 dargestellt ist. Dieses Profil, ganz gleich welchen physikalischen Ursachen es seinen Ursprung ver-

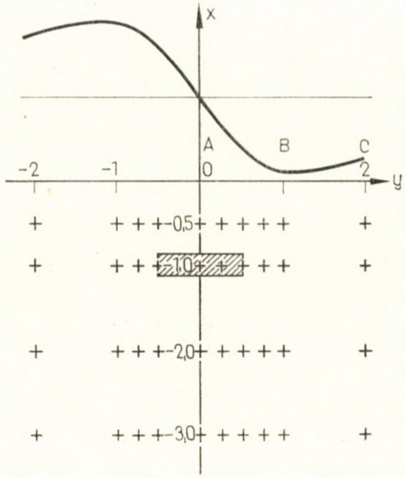


Abb. 1

dankt, läßt sich stets in beliebiger Annäherung durch eine Taylor-Reihe darstellen. Bedeutet $f(y)$ den an der Stelle y beobachteten Meßwert, so kann man stets $f(y)$ in eine Potenzreihe entwickeln

$$f(y) = \sum_{0}^{\infty} i\, a_i\, y^i . \tag{1}$$

Die Entwicklung (1) läßt sich nur durchführen, wenn vorher der Ursprungspunkt für die Koordinate y festgelegt ist. Von der geschickten Wahl dieses Ursprungspunktes hängt es ab, wie gut die angesetzte Potenzreihe die Funktion $f(y)$ durch eine vorgegebene Zahl von Reihengliedern darstellt. Dieses Verfahren entbehrt zunächst jeder physikalischen Grundlage, es ist lediglich als eine approximative numerische Erfassung der Funktion $f(y)$ zu werten. Stehen an einer genügend großen Zahl von Meßpunkten y_k entsprechend viele Beobachtungswerte $f(y_k)$ zur Verfügung, so lassen sich aus (1) die

a_i im Falle $k > i$ nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen. Die a_i sind, wie gesagt, numerische Werte, zunächst ohne physikalische Bedeutung. Die Sachlage ändert sich, wenn man dem vermessenen Profil zur Deutung physikalische Gesetze zugrunde legen muß. In Abb. 1 ist um den Punkt $x = -1$, $y = 0$ zentriert ein Rechteck eingezeichnet, das den zweidimensionalen geotektonischen Störkörper charakterisieren soll. Im vorliegenden Fall soll es sich z. B. um ein Problem der geomagnetischen Tiefensondierung handeln, zu dessen Charakterisierung lediglich das Biot-Savartsche Gesetz herangezogen sei. Es ist angenommen, daß die in der Abb. 1 angedeutete rechteckige Fläche von einem homogenen stationären Strom senkrecht zur Zeichenebene durchflossen sei. Für die Vertikalkomponente H_x, positiv nach oben gerechnet, gilt dann im Gaußschen Maßsystem folgende Gleichung

$$H_x = \int \frac{2I}{c} \frac{\partial}{\partial y'} \ln P \, d\sigma' . \tag{2}$$

Die gestrichenen Koordinaten beziehen sich dabei auf die Quellpunkte, d. h. in Abb. 1 auf das durchströmte Rechteck, die ungestrichenen auf die Aufpunkte, d. h. auf die Meßpunkte des Profils, $P^2 = \xi^2 + \eta^2$ mit $\xi = x - x'$, $\eta = y - y'$. Gleichung (2) läßt sich leicht integrieren. Der Ursprungspunkt liege im geometrischen Mittelpunkt des Rechtecks, also an der Stelle $x = 1$ und $y = 0$. Aus (2) erhält man bei konstantem I

$$H_x(x, y) = \frac{2I}{c} \int \left\{ \ln P|_{y'=y'_2} - \ln P|_{y'=y'_1} \right\} dx'$$

oder

$$H_x(x, y) = -\frac{I}{c} \int \left\{ \ln (\xi^2 + \eta_2^2) - \ln (\xi^2 + \eta_1^2) \right\} d\xi .$$

Die Integration ergibt schließlich

$$H_x(x, y) = -\frac{I}{c} \left\{ g_{22} - g_{21} + g_{11} - g_{12} \right\} \tag{3}$$

mit

$$g_{ik} = \xi_i \ln (\xi_i^2 + \eta_k^2) + 2 \eta_k \operatorname{arc\,tg} \frac{\xi_i}{\eta_k} - 2 \xi_i$$

und

$$\xi_i = x - x'_i \qquad \eta_k = y - y'_k \qquad (i, k = 1, 2)$$

Der Verlauf von $H_x(x, y)$, wie er durch (3) gegeben ist, wird durch das Profil in Abb. 1 dargestellt. In dem vorliegenden einfachen Beispiel läßt sich also die Wirkung des Störkörpers direkt berechnen. Dessenungeachtet kann man aber auch an diesem Beispiel die oben skizzierte Methodik erläutern. In diesem Falle sind die Werte $H_x(y)$ als Meßwerte an der Stelle y anzusehen mit $x = \text{const}$, wobei Lage und Form des erzeugenden geotektonischen Gebildes als unbekannt vorausgesetzt werden. Bekannt ist lediglich die Tatsache, daß es sich um ein zweidimensionales Problem handelt. Unbekannt sind also wie üblich die Stromstärke I und die geometrischen Abmessungen des Störkörpers. In diesem Fall wird man Gleichung (2) zur Erfassung allgemeiner

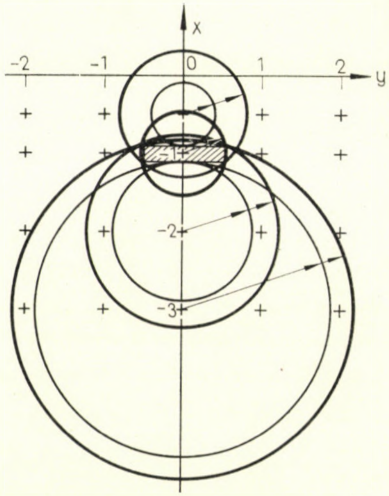


Abb. 2. Grenzkreise für die Gültigkeitsbereiche der Reihenentwicklung für $y = 0$

Bedingungen in eine zweidimensionale Taylor-Reihe entwickeln. Bedient man sich bei dieser Entwicklung für den Auf- und Quellpunkt der Polarkoordinaten, d. h., setzt man $x = \varrho \cos \varphi$ und $y = \varrho \sin \varphi$ und entsprechend $x' = \varrho' \cos \varphi'$ und $y' = \varrho' \sin \varphi'$, so ergibt die Entwicklung für Gleichung (2)

$$H_{xy}(\varrho, \varphi) = \sum_{0}^{\infty} i \frac{1}{\varrho_{i+1}} [\cos (i+1) \varphi \cdot b_i - \sin (i+1) \varphi \cdot a_i] . \tag{4}$$

Bei der Ableitung der Gleichung (4) ist vorausgesetzt, daß stets $\varrho > \varrho'$, d. h., der Aufpunkt außerhalb des Quellgebietes gelegen ist. Für die Lage des Ursprungspunktes im geometrischen Mittelpunkt des Rechtecks (Abb. 1) ist durch den Kreis, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprungspunkt liegt und der den zweidimensionalen Störkörper umschließt, der Gültigkeitsbereich der Formel (4) geometrisch veranschaulicht (Abb. 2). Er umfaßt demnach alle Punkte außerhalb des Kreises. H_x ist aus diesem Grunde durch den zusätzlichen Index a gekennzeichnet. Die Koeffizienten a_i und b_i bestimmen sich durch die physikalischen und geometrischen Fakten des Störkörpers. Sie bedeuten

$$\left.\begin{matrix} a_i \\ b_i \end{matrix}\right\} = \int \frac{2I}{c} \varrho'^i \begin{matrix} \cos i\varphi' \\ \sin i\varphi' \end{matrix} d\sigma' .$$

So zweckmäßig die Benutzung der Polarkoordinaten zur Beurteilung des Gültigkeitsbereiches der benutzten Formeln ist, so ist es doch nützlich für die Praxis, die Gleichung (4) in kartesischen Koordinaten umzuschreiben. Auch hier sei die Betrachtung auf den Außenraum beschränkt. In ausführlicher Schreibweise erhält man aus (4) für die Reihenglieder:

$$\begin{aligned}
&i = 0 \\
&\frac{1}{\varrho^2} y \int \frac{2I}{c} d\sigma' \\
&i = 1 \\
&\frac{1}{\varrho^4} \left\{ - x^2 \int \frac{2I}{c} y' \, d\sigma' + 2xy \int \frac{2I}{c} x' \, d\sigma' + y^2 \int \frac{2I}{c} y' \, d\sigma' \right\} \qquad (5) \\
&i = 2 \\
&\frac{1}{\varrho^6} \left\{ - x^3 \int \frac{2I}{c} 2x' y' \, d\sigma' - y^3 \int \frac{2I}{c} (x'^2 - y'^2) \, d\sigma' \right. \\
&\qquad \left. + 3\,x^2 y \int \frac{2I}{c} (x'^2 - y'^2) \, d\sigma' + 3\,xy^2 \int \frac{2I}{c} 2\,x' y' \, d\sigma' \right\} .
\end{aligned}$$

Auf die explizite Angabe der höheren Reihenglieder sei hier verzichtet. Die kartesische Schreibweise läßt aus (5) erkennen, welche physikalischen Größen in der Reihenentwicklung enthalten sind. In dem Glied $i = 0$ tritt als geophysikalischer Parameter der gesamte Stromfluß durch die in Abb. 1 angegebene rechteckige Fläche auf. Dabei sei besonders vermerkt, daß durchaus eine inhomogene Stromverteilung zugelassen ist. Das Reihenglied $i = 1$ führt auf die geophysikalischen Parameter der Koordinaten des Schwerpunktes, das Reihenglied $i = 2$ schließlich auf geophysikalische Parameter, die in der Mechanik den Trägheits- und Deviationsmomenten vergleichbar wären, auf die hier jedoch aus Platzersparnisgründen nicht näher eingegangen sei.

Die Aufgabe, die zu lösen ist, besteht darin, die charakteristischen Größen des geotektonischen Gebildes — die geophysikalischen Parameter — numerisch zu bestimmen. Diese Größen ergeben sich, wie man aus (5) erkennt, eindeutig und nicht vieldeutig, wie dies im Sinne der »inversen Potentialtheorie« der Fall wäre. Zur numerischen Auswertung schreibt man (5) zweckmäßigerweise folgendermaßen:

$$H_{xa_k} = \frac{1}{\varrho_k^2} y_k \int \frac{2I}{c} d\sigma' + \frac{1}{\varrho_k^4} \left\{ (-x_k^2 + y_k^2) \int \frac{2I}{c} y' d\sigma' + 2 x_k y_k \int \frac{2I}{c} x' d\sigma' \right\} \quad (6)$$

$$+ \frac{1}{\varrho_k^6} \left\{ (-x_k^3 + 3x_k \, y_k^2) \int \frac{2I}{c} 2 x' y' d\sigma' + (-y_k^3 + 3 x_k^2 y_k) \int \frac{2I}{c} (x'^2 - y'^2) d\sigma' \right\} + \ldots$$

$$= A_{1k} Q_1 + A_{2k} Q_2 + A_{3k} Q_3 + A_{4k} Q_4 + A_{5k} Q_5 + \ldots$$

In (6) wurden in leicht verständlicher abkürzender Schreibweise die Aufpunktsaggregate mit $A_{1k} \ldots A_{5k}$ bezeichnet, entsprechend die Quellpunktsaggregate mit Q_1 bis Q_5. Gleichung (6) gibt die Möglichkeit, die Unbekannten $Q_1 \ldots Q_5$ nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen, sofern genügend Meßwerte H_{xa_k} — k bedeutet ihre Anzahl — zur Verfügung stehen und sofern ein Koordinatenursprungspunkt festgelegt wurde, auf den die Lage der Meßpunkte bezogen werden kann, so daß die $A_{1k} \ldots A_{5k}$ als bekannte Zahlenwerte in die Gleichung (6) eingehen. Die Gleichung (6) geht dann über in ein Gleichungssystem von k Einzelgleichungen, wobei natürlich im vorliegenden Fall zur Durchführung einer sicheren Ausgleichung k sehr groß gegenüber 5 sein muß. Wie schon oben erwähnt, liegt eines der wichtigsten Variationsprinzipien der vorliegenden Methode in der Veränderung der Lage des Ursprungspunktes des Koordinatensystems, auf das die Meßpunkte bezogen werden. In der Abb. 1 ist als Beispiel ein Netz von Ursprungspunkten eingezeichnet, auf die die Auswertung der Meßwerte H_{xa_k} der Reihe nach bezogen wurde. Es ist von vornherein zu erwarten, daß bei einer ungeschickten Wahl der Lage des Ursprungspunktes eine Reihendarstellung mit geringer unveränderlicher Gliederanzahl zu physikalisch wenig signifikanten Ergebnissen führen würde. Unter ungünstiger Lage des Koordinatenursprungspunktes ist dabei eine Lage zu verstehen, die weit von dem geotektonischen Gebilde entfernt ist. Im allgemeinen befindet sich der Ursprungspunkt dann auch, wie in Abb. 1 zu erkennen ist, außerhalb des modulierten Teiles des Profils, jenes Teiles also, der die für die physikalische Interpretation signifikantesten Meßwerte enthält. In der Abb. 1 wäre das z. B. die Lage des Ursprungspunktes bei $x = -3$ und $y = \pm 2$, wobei diese Zahlenangaben auf den geometrischen Mittelpunkt des Rechtecks in Abb. 1 bezogen sind. Insgesamt wurde, wie aus Abb. 1 ersichtlich, die numerische Auswertung des Gleichungssystems (6) für 44 verschiedene Ursprungspunkte vorgenommen, wobei von vornherein zu erwarten war, daß relativ zur x-Achse gewisse Symmetrien oder Antisymmetrien auftreten würden. Es sei hier besonders darauf hingewiesen, daß bei der Auswertung der Gleichung (6) nicht nur die Quellpunktaggregate $Q_1 \ldots Q_5$ berechnet wurden, sondern natürlich auch deren Fehler $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_5$, wie sie sich bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate automatisch ergeben.

Die Ergebnisse der Rechnung sind unter Beschränkung auf Q_1, Q_2, Q_3 und ε_1, ε_2, ε_3 in den Tabellen I bis VI wiedergegeben. Die Einheit der Zahlen-

Tabelle I

Q_1 für den jeweiligen Koordinatenursprungspunkt (Einheiten 10^{-3})

x \ y	−2	−1	−0.75	−0,5	−0,25	0	0,25	0,5	0.75	1	2
−0,5	241	282	271	259	250	247	250	259	271	282	241
−1,0	451	282	250	240	249	250	249	240	250	282	451
−2,0	22	210	254	267	259	252	259	267	254	210	22
−3,0	−70	506	394	256	147	105	147	256	394	506	−70

Tabelle II

ε_1 für den jeweiligen Koordinatenursprungspunkt (Einheiten 10^{-3})

x \ y	−2	−1	−0.75	−0,5	−0,25	0	0,25	0,5	0.75	1	2
−0,5	24	8	5	2	1	0	1	2	5	8	24
−1,0	15	4	2	1	0	0	0	1	2	4	15
−2,0	26	8	5	2	2	1	2	2	5	8	26
−3,0	76	27	26	24	18	14	18	24	26	27	76

Tabelle III

Q_2 für den jeweiligen Koordinatenursprungspunkt (Einheiten 10^{-3})

x \ y	−2	−1	−0,75	−0,5	−0,25	0	0.25	0,5	0,75	1	2
−0,5	157	159	132	94	49	0	− 49	− 94	−132	−159	−157
−1,0	593	307	218	136	64	0	− 64	−136	−218	−307	−593
−2,0	828	168	150	122	71	0	− 71	−122	−150	−168	−828
−3,0	−460	263	407	389	234	0	−234	−389	−407	−263	460

Tabelle IV

ε_2 für den jeweiligen Koordinatenursprungspunkt (Einheiten 10^{-3})

x \ y	−2	−1	—0,75	−0,5	—0,25	0	0.25	0,5	0.75	1	2
—0,5	17	6	3	2	1	0	1	2	3	6	17
—1,0	15	4	2	1	0	0	0	1	2	4	15
—2,0	33	7	4	2	1	1	1	2	4	7	33
	123	26	23	20	14	11	14	20	23	26	123

Tabelle V

Q_3 für den jeweiligen Koordinatenursprungspunkt (Einheiten 10^{-3})

x \ y	−2	−1	—0,75	−0,5	—0.25	0	0.25	0,5	0.75	1	2
—0,5	—348	—260	—207	—161	—129	—118	—129	—161	—207	—260	—348
—1,0	—893	—111	— 28	6	6	0	6	6	— 28	—111	—893
—2,0	1991	403	178	136	200	242	200	136	178	403	1991
—3,0	2229	—1677	—611	578	1480	1815	1480	578	—611	—1677	2229

Tabelle VI

ε_3 für den jeweiligen Koordinatenursprungspunkt (Einheiten 10^{-3})

x \ y	−2	−1	—0.75	−0,5	—0,25	0	0.25	0,5	0.75	1	2
—0,5	38	12	8	4	2	0	2	4	8	12	38
—1,0	43	12	7	3	0	0	0	3	7	12	43
—2,0	138	38	13	11	8	6	8	11	13	38	138
—3,0	529	174	167	150	112	86	112	150	167	174	529

werte ist willkürlich, für alle 6 Größen selbstverständlich einheitlich gewählt worden.

Die Tabellen sind so zu verstehen, daß in jeder Tabelle der Wert des betreffenden Quellpunktsaggregates Q_1, Q_2, Q_3 oder dessen Fehler ε_1, ε_2, ε_3 dort verzeichnet ist, wo der jeweilige Ursprungspunkt liegt — vgl. Abb. 1.

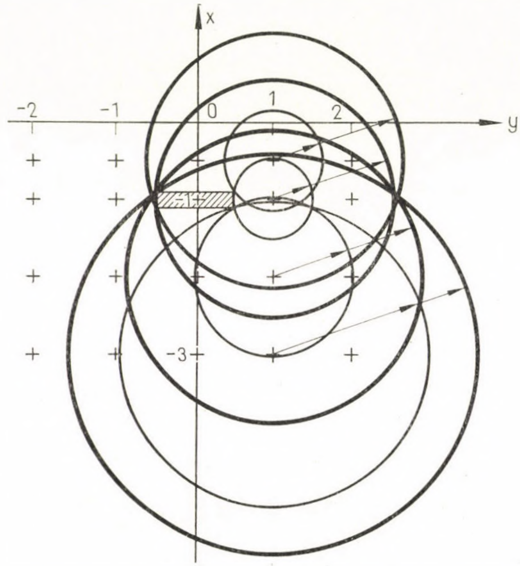


Abb. 3. Grenzkreise für die Gültigkeitsbereiche der Reihenentwicklung für $y = 1$

Wie schon oben erwähnt, tritt sowohl bei den Quellpunktsaggregaten wie auch bei ihren Fehlern die Symmetrie in Erscheinung, die das Profil auf Grund des gegebenen regelmäßigen Störkörpers erwarten läßt. Dabei zeigen Q_1 und Q_3 eine direkte Symmetrie, Q_2 dagegen Antisymmetrie. Die Fehlergrößen zeigen jedoch alle eine symmetrische Verteilung. Zur näheren Beurteilung des Zahlenmaterials in den Tabellen I bis VI ist es notwendig, sich einen Überblick über die Abgrenzung der verschiedenen Konvergenzbereiche der Reihen im Sinne der Potentialtheorie zu verschaffen. Da die vorliegenden Rechnungen mit den Formeln durchgeführt wurden, die für Aufpunkte im Außenfeld gültig sind, ist es erforderlich, die relative Lage des vermessenen Profils zu den Gültigkeitsgrenzen der Außenfeldgleichung zu betrachten. Zur Veranschaulichung dienen die Abb. 2, 3 und 4. Hier sind für die verschiedenen Lagen des Koordinatenursprungspunktes diese Grenzkreise gezeichnet, und zwar in Abb. 2 für $y = 0$ und $x = -0{,}5, -1, -2, -3$, entsprechend bei Abb. 3 dasselbe für $y = 1$, Abb. 4 für $y = 2$. Die wichtigsten Tatsachen lassen sich aus Abb. 2 allein erkennen, sie treten bei Abb. 3 und 4 natürlich in veränderter Form wieder in Erscheinung. Vorweg sei allgemein bemerkt, daß man bei den vorliegenden Betrachtungen zwischen drei Räumen zu unterscheiden hat: Einmal handelt es sich um den Außenraum, das heißt um jenen Raum, der durch einen Kreis begrenzt wird, außerhalb dessen keinerlei wirksame Quellgebiete liegen, dann tritt, nach innen zu gerechnet, der mit effek-

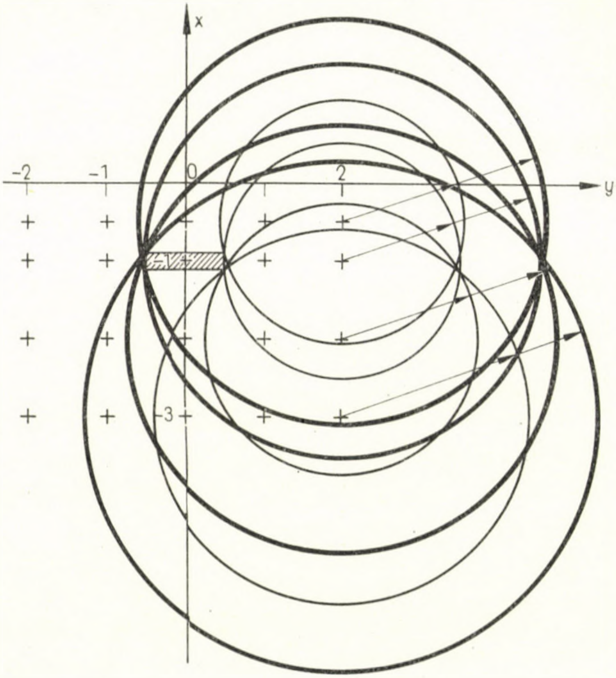


Abb. 4. Grenzkreise für die Gültigkeitsbereiche der Reihenentwicklung für $y = 2$

tiven Quellgebieten gefüllte Kreisring in Erscheinung, wobei die Quellgebiete durchaus unstetig verteilt sein können. Dieses ringförmige Gebiet ist gegenüber dem Außenraum und gegenüber dem Innenraum durch je einen Kreis begrenzt. Dabei sind auch im Innenraum keinerlei wirksame Quellgebiete enthalten. Die für das Außen- und Innengebiet gültigen Formeln sind in ihrem analytischen Charakter verschieden, ihre Gestalt jedoch ist verhältnismäßig einfach. Die für das Zwischengebiet gültigen Formeln sind dagegen nicht so übersichtlich und daher nicht so leicht zu handhaben. Bei den vorliegenden Betrachtungen wurden nur die Formeln für das Außengebiet herangezogen, so daß beim Überschreiten der entsprechenden Grenzkreise physikalisch nicht signifikante Ergebnisse zu erwarten sind, d. h. stark divergente Reihen. Die Konvergenz der angesetzten Reihe, hier für das Außengebiet, wird also immer schlechter werden, je mehr sich die Meßwerte des Profils bei der vorgegebenen

Lage des Ursprungspunktes dem Grenzkreis des Außengebietes nähern. Man erkennt weiterhin in Abb. 2, daß die Lage des Ursprungspunktes im Symmetriepunkt des rechteckigen Körpers besonders dadurch ausgezeichnet ist, daß das Innengebiet verschwindet, oder besser gesagt, auf den Ursprungspunkt selbst degeneriert. Selbstverständlich trifft dies auch für jeden anderen Koordinatenursprungspunkt zu, der innerhalb des Quellgebietes gelegen ist. Sobald der Grenzkreis des Außengebietes die Erdoberfläche durchschneidet, sobald also ein Teil der Meßpunkte des Profils nicht im Außengebiet, sondern im Zwischengebiet oder sogar im Innengebiet liegt, wird sich diese Tatsache zweifellos in der Konvergenz der Reihe bemerkbar machen. In der Abb. 2 ist dies z. B. für die Lage des Koordinatenursprungspunktes bei $x = —0{,}5$ und $y = 0$ der Fall, wenngleich hier die Wirkung des Zwischengebietes sehr gering ist.

Zur Erläuterung des Gesagten sind in Tabelle VII die numerischen Werte der Reihenglieder bis zur dritten Ordnung — vgl. (4) — angegeben, und zwar für drei festliegende Meßpunkte A, B, C (Abb. 1). Die Beschränkung auf diese drei Meßpunkte erfolgt lediglich aus Raumersparnisgründen, eine Vergrößerung der Zahl der Meßpunkte trägt natürlich wesentlich zur Klärung der hier zu behandelnden Fragen bei. Für neun Lagen des Koordinatenursprungspunktes sind für jeden der Meßpunkte A, B, C die vier Reihenglieder $i = 0, \ldots, 3$ zusammengestellt, deren Summe Σ sowie die Abweichungen Δ der Werte von Σ von den Meßwerten. Angegeben ist in Tabelle VII noch der Abstand d der Meßpunkte A, B, C von dem Grenzkreis des Außenraumes in Richtung des Kreisradius und die Größe des Kreisradius a selbst. a und d erweisen sich als zwei charakteristische Größen, die sich in der Konfiguration der Reihe bemerkbar machen und die außerdem zur geometrischen Festlegung des geotektonischen Körpers wesentlich sind. Während d für die Lage des betrachteten einzelnen Meßpunktes wichtig ist und er durch die Größe von d in seiner physikalischen Signifikanz charakterisiert wird, gibt a in seiner Lage zum vermessenen Profil, d. h. also zur Erdoberfläche, eine anschauliche Vorstellung davon, welche Teile des Meßprofils bei der betrachteten Lage des Ursprungspunktes durch einen kleinen Wert von d etwas an physikalischer Signifikanz einbüßen. Man sieht deutlich, wie in dieser Situation die Anwendung der Fenstermethode, d. h. eine Gruppeneinteilung des gesamten Meßpunktkollektivs von Nutzen sein wird. Die so wichtige Frage der Anteile der jeweiligen Bereiche und die Lage der Grenzkreise kommen in den numerischen Angaben gut zum Ausdruck. Bei positivem d, d. h., wenn die Meßpunkte im Außengebiet liegen, gibt die Summe Σ der Reihenglieder bis zur Ordnung $i = 3$ den Meßwert gut wieder (I_0, II_0, III_0), ja die Reihenglieder selbst zeigen einen recht kontinuierlichen Verlauf und deuten eine gute Konvergenz der Reihe an (insbesondere bei I_0 und II_0). Bei Annäherung von d an Null tritt dann eine merkliche Veränderung ein, die Reihenglieder selbst bewegen sich rascher

Tabelle VII

Reihenglieder der Ordnungen $i = 0$ bis $i = 3$ für die Meßpunkte A, B, C bei verschiedener Lage des Koordinatenursprungspunktes (Einheiten 10^{-3})

	$y = 0$			$y = 1$			$y = 2$		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C
$x = -1$	I_0			I_1			I_2		
i	$a = 0{,}515$			$a = 1{,}505$			$a = 2{,}503$		
0	0	—125	—100	141	0	—141	180	225	0
1	0	0	0	— 55	—307	55	— 72	—447	—593
2	0	5	0	— 94	249	— 30	— 94	— 41	931
3	0	0	0	16	— 62	16	15	115	—460
Σ	0	—120	—100	8	—120	—100	29	—148	—122
Δ	0	0	0	— 8	0	0	— 29	28	22
d	0,485	0,899	1,721	— 0,091	— 0,505	— 0,091	— 0,267	— 1,089	— 1,503
$x = -2$	II_0			II_1			II_2		
i	$a = 1{,}231$			$a = 1{,}875$			$a = 2{,}741$		
0	0	— 51	— 63	42	0	— 42	6	45	0
1	0	— 39	— 30	44	— 42	— 85	249	219	— 207
2	0	— 20	— 7	— 39	—136	4	—224	—587	54
3	0	— 10	0	— 42	56	22	— 15	228	61
Σ	0	—120	—100	5	—122	—101	16	— 95	— 92
Δ	0	0	0	— 5	2	1	— 16	— 25	— 8
d	0,769	1,005	1,597	0,361	0,125	0,361	0,087	— 0,505	— 0,741
$x = -3$	III_0			III_1			III_2		
i	$a = 2{,}183$			$a = 2{,}603$			$a = 3{,}281$		
0	0	— 10	— 16	51	0	— 51	— 11	— 7	0
1	0	—109	—129	—122	— 29	80	172	171	51
2	0	125	100	246	— 19	—264	— 63	—323	—391
3	0	—126	— 55	—172	— 76	138	— 89	37	241
Σ	0	—120	—100	3	—124	— 97	9	—122	— 99
Δ	0	0	0	— 3	4	— 3	— 9	2	— 1
d	0,817	0,979	1,423	0,559	0,397	0,559	0,325	— 0,119	— 0,281

zwischen positiven und negativen Werten, die Summe Σ zeigt Abweichungen Δ von den Meßwerten des Profils. Im Falle II_2, wo ca. 45% des betrachteten und ausgewerteten Profilbereiches von (—2, 2) bereits im Zwischengebiet liegen (d ist für die Meßpunkte B und C negativ) werden die Schwankungen der Reihenglieder größer, ebenso die Abweichungen Δ beträchtlich, da ja im Zwischengebiet die benutzte Formel des Außengebietes nicht mehr konver-

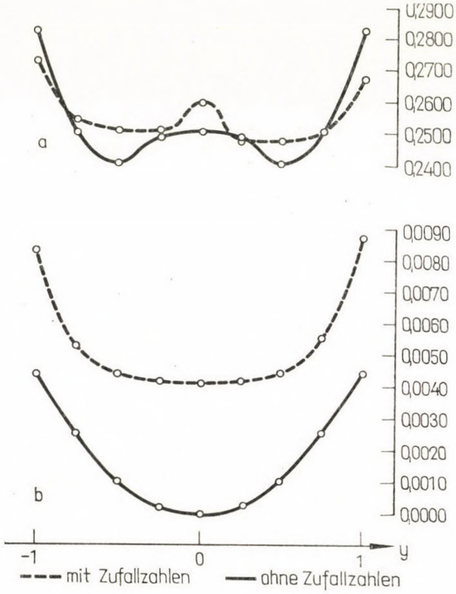


Abb. 5. a) Q_1 für $x = -1$; b) ε_1 für $x = -1$

giert. Einen wesentlichen Einfluß hat dabei auch die Größe des Grenzkreises a, der das Außen- vom Zwischengebiet trennt (vgl. I_1, II_2). Bei I_2 liegen ca. 55% des ausgewerteten Profilbereichs von (—2, 2) nicht mehr im Außengebiet, die Meßpunkte B und C sind sogar schon im Innengebiet gelegen. Das äußert sich dann in sehr starken Schwankungen der Reihenglieder, in großen Abweichungen vom Meßwert; denn die Reihe ist hier divergent.

Diese wenigen Beispiele zeigen deutlich, daß die Reihenkonvergenz als ein wichtiges Kriterium zur ungefähren Bestimmung der Lage der Grenzkreise und damit auch der Lage des Störkörpers selbst herangezogen werden kann. Selbstverständlich müssen bei der Beurteilung der Reihenkonvergenz noch andere Fakten berücksichtigt werden, die ebenfalls physikalische Signifikanz besitzen, die hier aber aus Raumgründen nicht diskutiert werden sollen.

Nach dem, was jetzt über die Reihenkonvergenz gesagt wurde, kann man die Tabellen I bis VI in ihrer physikalischen Signifikanz leicht beurteilen. Es erübrigt sich eine nähere Diskussion der Zahlenwerte. Es sei lediglich darauf hingewiesen, daß die Werte Q_1 in rohen Umrissen die geometrische Form des Störkörpers erkennen lassen. Ähnlich liegen die Dinge bei Q_3, wo sich gleichfalls die geometrische Form des Störkörpers andeutet.

Zum Schluß sei noch kurz darauf hingewiesen, welchen Einfluß zufällige Störungen, die dem Meßprofil überlagert sind, auf diese Betrachtungen haben. Abb. 5 zeigt den Einfluß von Zufallszahlen geringer Größe auf die Zahlenwerte von Q_1 und ε_1, und zwar beschränkt auf die Ursprungspunkte bei $x = -1$ im y-Intervall $(-1, +1)$. Man erkennt, daß die Zahlenwerte von Q_1 gegenüber den entsprechenden Werten der Tabelle I gestört sind und daß auch die Symmetrie nicht vollständig gegeben ist. Interessant ist der Verlauf bei ε_1. Hier zeigt sich gegenüber ε_1 ungestört eine bemerkenswerte Veränderung. Das nahezu parabolische Ansteigen der Zahlenwerte von ε_1 ungestört tritt erst in Erscheinung, wenn die Testsignifikanz die Schwelle der additiven Fehler der Zufallszahlen überschreitet. Selbstverständlich sind die Fehler von Q_1 gestört — ε_1 — durchweg größer gegenüber denen von Q_1 ungestört.

SCHRIFTTUM

1. Ritter, E.: Dissertation. Karl-Marx-Univ. Leipzig, 1969.
2. Webers, W.: Diplomarbeit, Humboldt-Univ. Berlin, 1969.

TEST-METHODS FOR THE INTERPRETATION OF GEOPHYSICAL PROFILES

G. FANSELAU

SUMMARY

A method is described for testing geophysical profils by means of Taylor-series with constant number of members. The problems of the application of the method are discussed generally. A numerical example of a model-body is calculated. It shows the practical way of the application of this method.

СПОСОБ КОНТРОЛЯ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПРОФИЛЕЙ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Г. ФАНЗЕЛАУ

РЕЗЮМЕ

Описывается метод для контроля геофизических проблем с применением рядов Тайлора с постоянным количеством членов. Возможности применения этого метода рассматриваются в общем. Приводится пример вычисления одной модели и показывается путь практического применения метода.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (3—4), pp. 415—423 (1969

THE ORIENTATION OF THE MAGNETOTELLURIC IMPEDANCE ELLIPSES

E. TAKÁCS

CANDIDATE OF TECHN. SC.
TECHNICAL UNIVERSITY FOR HEAVY INDUSTRY, MISKOLC

[Manuscript received 9 November, 1968]

The magnetotelluric impedance changes, when the direction of the field-polarization is changing, thus can be given in the form of an ellipse.

Investigations into the effect of two-dimensional lateral — both covered and uncovered — inhomogeneities with high and low resistance have shown that the major axis of the impedance ellipse can lie in the direction of strike as well as in that of fall. The geological information-content of the impedances belonging to the main axis depends on the type of inhomogeneity.

On account of inhomogenous geological conditions, the magnetotelluric impedance value depends in the Hungarian Basin not only on the thickness and resistivity of the layers but also on the direction of the polarisation of electromagnetic field. Thus it is necessary to plot an impedance ellipse for each frequency band. The main impedances, i.e. the eigenvalues of the impedance tensor can then be determined and used as base for a further interpretation.

According to the data at our disposal from 64 stations, the ratio of the ellipse-axes varies for the period range from 20 to 60 sec, between 1,1 and 3,9. Values less than 1,3 occurred only at 9 stations.

Everywhere the directions of the main axes have good correlations with the axes of known structures. But the major axis can lie in both strike and fall directions.

For major axes lying in the strike-direction, a good example was found in the North-Western foreground of the Bakony Mountains (Fig. 1). The sinking of the mesozoic rocks is well shown by the isolines of Bouguer-anomalies. In the surroundings of Nagyalásony, Pápasalamon and Somlószőllős, where the magnetotelluric measurements took place, seismic refraction measurements give a boundary with a velocity of 5600—6000 m/sec rising stepwise from 2830 m underground level to 1420 m [1].

As an example of major axes lying in the fall direction the results obtained above the anticlyne of the crystalline basement near Répcelak — the top is in a depth of 1450 m — are presented here together with the isolines of Bouguer-anomalies (Fig. 2).

At longer periods, the distortion effect due to structural inhomogeneities can also be seen. The ellipses of different frequency bands are shown on Fig. 3/a

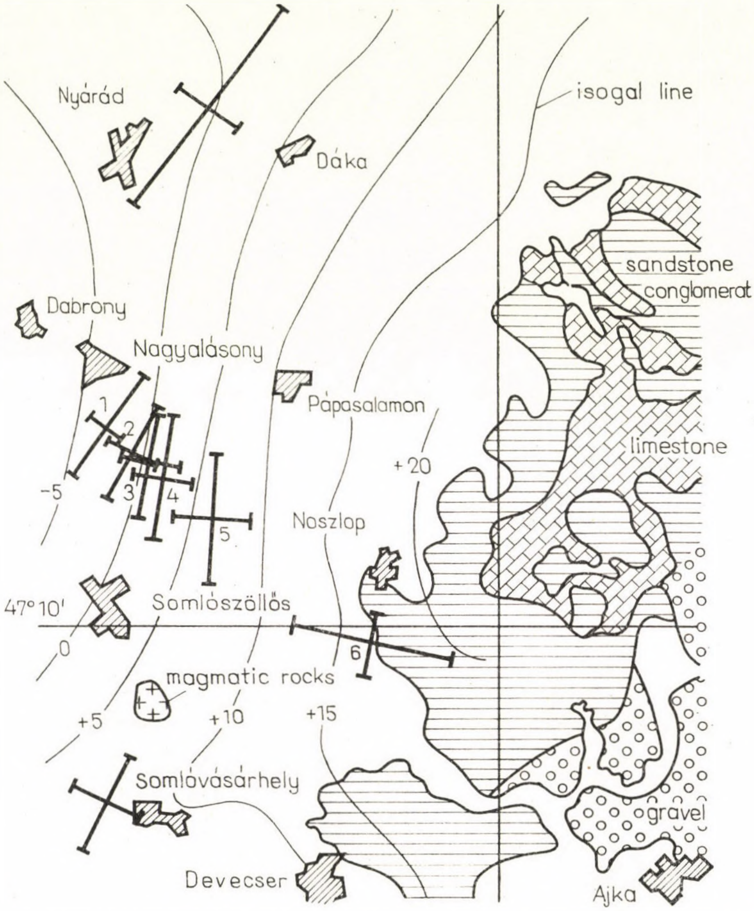


Fig. 1. Impedance ellipses with major axes parallel to isolines of Bouguer-anomalies in the North-Western foreground of the Bakony-Mountains

and 3/b corresponding to the station No. 3 of Fig. 2, and to the station No. 3 of Fig. 1, respectively. In some cases their orientation has greater variability depending on the frequency.

*

Model tests were carried out in the Jane Herdman Laboratories of Geology at the University of Liverpool with valuable advises and kind help of C. D. V. WILSON to investigate the above-mentioned phenomena. In addition to the orientation the intention was to examine the changes in the information content of impedances corresponding to the main axes. The model tests were in general, as suggested by RANKIN et al. [2] carried out. Above a cylindrical plastic tank (120 cm in diameter), at a distance of 70 cm from

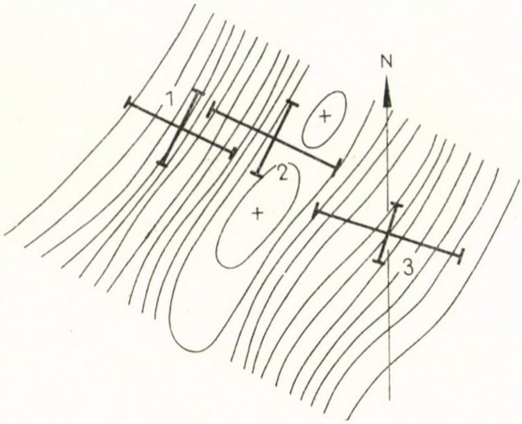


Fig. 2. Impedance ellipses with major axes perpendicular to the isolines of Bouguer-anomalies above the anticlyne of the crystalline basement near Mihályi

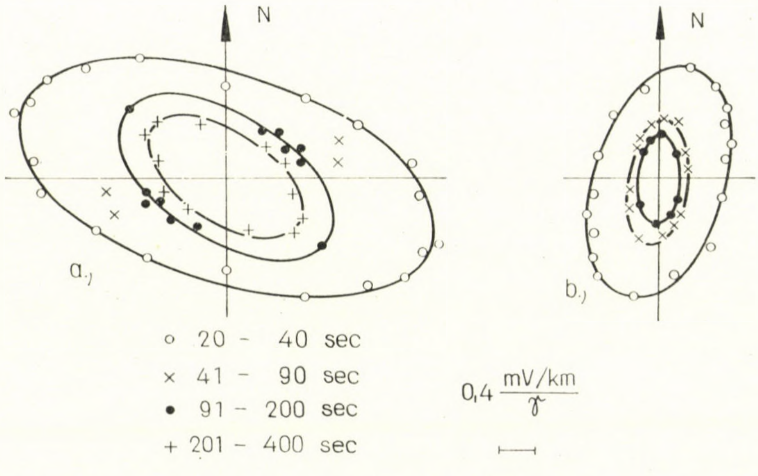


Fig. 3. Impedance ellipses corresponding to different period-intervals measured: *a)* at station No. 3 of Fig. 2, and *b)* at station No. 3 of Fig 1

the surface of the electrolyte a vertical rectangular loop served as source of the electromagnetic field having 20 kilocycles. It was 185 cm long, 180 cm wide and had 33 turns. A matching transformer coupled the loop to a 100-watt Standard Telephones and Cables 28 LU 125 audio-frequency amplifier controlled by an Ediswan R 666 oscillator.

An 11 mH inductance coil (2 cm long and 1,4 cm in diameter) was used to detect the magnetic field. The electrodes were placed at 2 cm from each other and coupled through a microphone transformer to the Solarscope CD 1014,2 oscilloscope, which was used as voltmeter. Transformer and oscilloscope were placed 3 m apart from the tank. Both the electrical and the magnetic field intensity had well-measurable values and noiseless signalform.

Coil and electrodes were mounted into a common plexi-block, their sensitivity axes being perpendicular to each other. The block was fixed in the centre of the tank with electrodes parallel to the field generating loop.

Helmholtz-coil was used for calibration of the magnetic channel, whereas the electrical component was calibrated by measuring the known resistivity

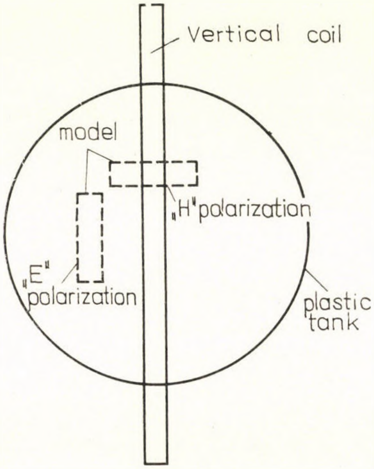


Fig. 4. The positions of the model at E and H polarization

(earlier determined by a Terrameter) of the electrolyte using the above-mentioned electrodes in a Wenner-arrangement.

In order to get profiles in the course of model tests, the structures were moved along a graduation at the bottom of the tank, while the electrodes had fixed positions.

The positions corresponding to H and E polarization were produced in such a way that the model-structure was situated at equal distances from the electrodes, at first along the projection of the plane of loop, and then along that of the axis. In the former case the long axis of the model-structure was lying perpendicular to, in latter parallel with the plane of the loop (Fig. 4).

The maximal distance from model to electrode was 20 cm, along which the impedance on the surface of the 17 cm deep electrolyte, which had 0,06 ohm-m resistivity, decreased by 1—2 per cent in the plane and by 15 per cent along the axis of the loop from its value measured at the centre of the tank.

If the scale of modelling has been chosen as $K_L = 10^5$ for the length, and assuming that the 0,06 ohm-m resistivity electrolyte corresponds to a 20 ohm-m resistance layer, then — as $K_\varrho = 330$ — the scale of the period

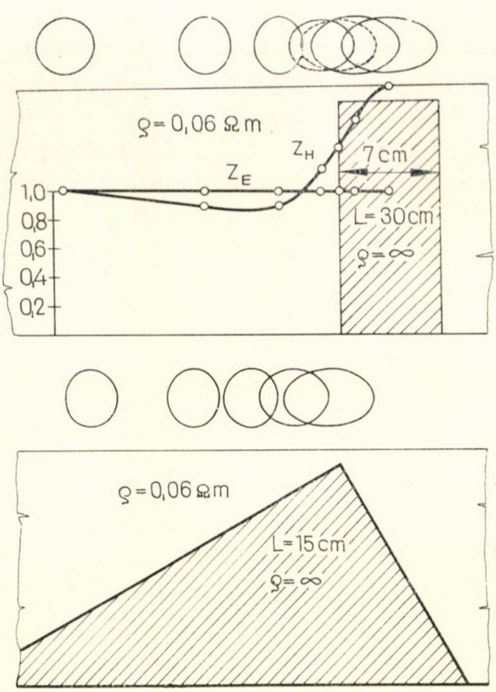


Fig. 5. Impedance ellipses and impedance values belonging to the electrical vector polarized into strike-direction (Z_E) and fall-direction (Z_H), resp., above high-resistance model, covered by electrolyte

time of model will be $K_T = 3{,}15 \cdot 10^7$. Thus, the frequency of 20 000 cycles, determined by the transmission of the loop-energizing audio-frequency amplifier, corresponds to variations with $T = 1500$ sec period. On the base of Fig. 3, however, it can be suggested to extend the results of the model tests qualitatively to shorter periods, though the wave-like-nature of field should be taken into account there [3].

*

The results of the model tests can be summarized as follows:

Fig. 5 shows the effect of buried high-resistance structures. The ellipses show the distortion related to the impedance measured without structure and chosen as a unit.

The major axis of the ellipse lies near the top of the structure in the fall-direction. The ratio of axes is a function of the depth of the structure, and in case of given depth it changes along the profile in such a way that the excentricity of the ellipse will increase, when its area increases. Above the slopes of the structure the excentricity of the ellipses is very small and their major axes lie in strike-direction. The Z_E impedance belonging to E polarization — i.e. the eletrical vector has a strike-direction — does not significantly change at the period used. At higher frequencies changes of that quantity can occur too [3]. When the electrical field shows in fall-direction, the structural conditions are far better reproduced by the impedance Z_H corresponding to H polarization. This will change only close to a vertical discontinuity surface in a rate depending on the depth.

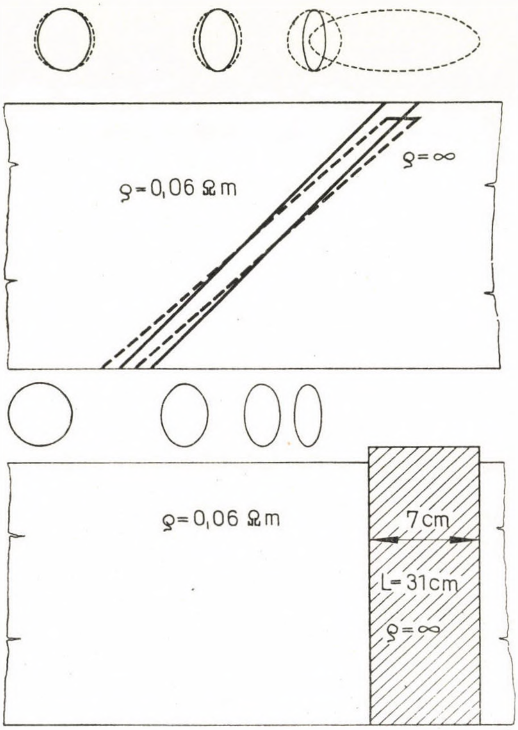


Fig. 6. Impedance ellipses over a high-resistance model, when covered by electrolyte — dashed line — and when outcroping — full line

In case of the outcrop of highly resistant structures, Z_H diminishes continuously, when approaching the outcrop line, while Z_E remains practically constant (Fig. 6). Thus, the impedance ellipses have large excentricities and their major axes lie in the strike-direction. Z_H loses its direct connection with the depth of the high-resistance basement.

Field-distortions, due to plate or prismatic conductive inhomogeneities have the common character that the decrease of Z_E already begins distantly, while the vertical discontinuity surface is marked by a sharp change in Z_H. Thus, in case of such anomalies, the value of both main impedances decrease even at the frequency used, when approaching the structure, whereas above highly resistant structure Z_E suffers almost no changes.

Excentrical ellipses with their major axes in the fall-direction are obtained distantly from the highly conducting model. As shown in Fig. 7a and 8a, they sometimes maintain that orientation over the conducting model too, but the excentricity becomes smaller. The greatest excentricities are found near the vertical discontinuity surface.

A very interesting result is shown on Fig. 7b, where the major axis lies in the strike-direction over a graphit prism, that stands on its smaller side.

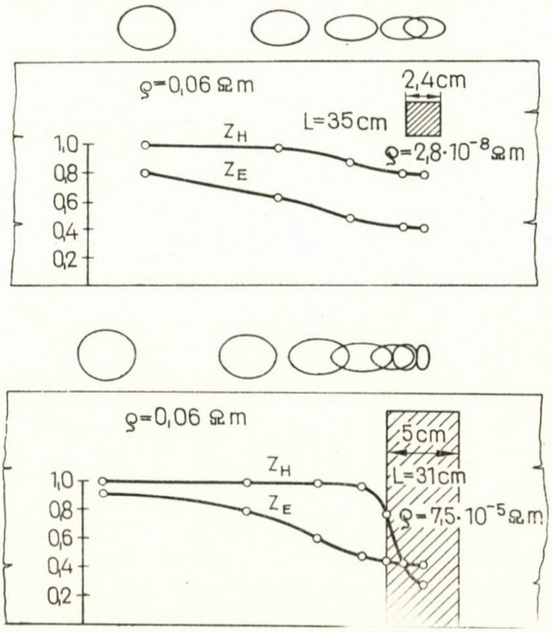


Fig. 7. Impedance ellipses and impedance values belonging to electrical vectors polarized into strike-direction (Z_E) and into fall-direction (Z_H), resp., above a low-resistance model

By placing the prism deeper, the effect diminished and below 17 mm of electrolyte the ellipse turned into a circle. The impedance was independent of the polarization above a broad graphit block as shown in Fig. 8b. By increasing depth, however, the major axis turned into the fall-direction here too.

It can be said therefore that above conductive inhomogeneities the orientation of the major axis depends equally on form, depth and dimensions of the structure. For the change along the profile it is characteristic that the excentricity decreases and the area increases, when it is removed from the highly conducting medium.

If there are thin, highly resistant interbeddings in the high and low resistance covering layers, they will have an important role, as some examples show on Fig. 9. Their shielding effect is then especially remarkable, when they have an outcrop over highly conducting mediums.

*

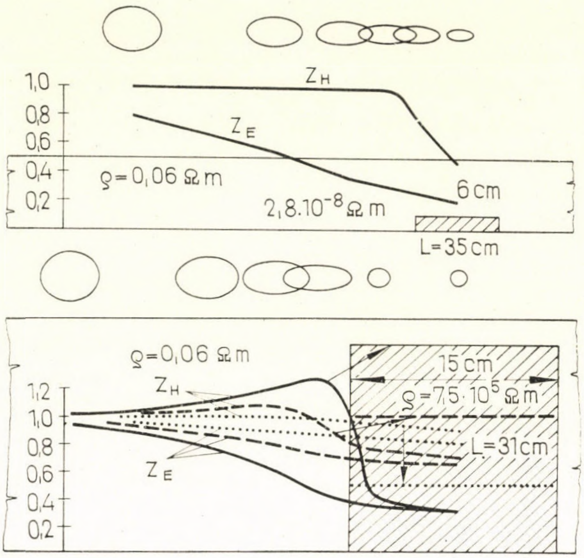


Fig. 8. Impedance ellipses and impedance values belonging to electrical vectors polarized into strike-direction (Z_E) and into fall-direction (Z_H), resp., above conducting model lying at different depth

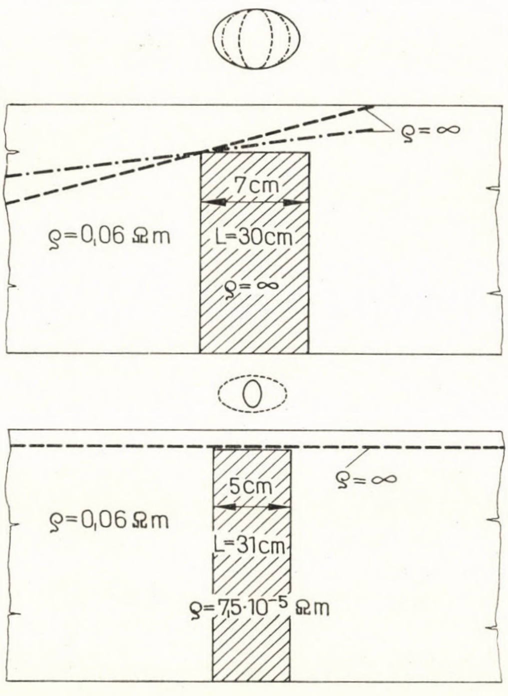


Fig. 9. **Distortion of the impedance ellipses above both highly and low-conducting structures (full lines) due to the effect of the interbedding of a resistant plate (dashed line)**

During the above-mentioned tests it was possible to deal with only three very schematical variants of horizontal inhomogenities. The limited number of the investigated structure forms and the low frequency used did not even allow to make a complete analysis and to clear all important connections. But it can be said unambiguously that, in case of considerable horizontal inhomogenities, a quantitative, but sometimes even a qualitative interpretation of the magnetotelluric data can only be made, if the types of inhomogenities are known, because value and content of the geological information of the main impedances depend on that.

In order to estimate the type of the inhomogeneity—in addition to geological and other geophysical data — the features of changes in area, ratio and direction of axes along a fall oriented profile can be used, as it is shown on different structural types.

The number of stations necessary to determine the direction of that profile can be lowered if the vertical component of the micro-variations of the geomagnetic field is known. Its knowledge permits the determination of the strike-directions of inhomogenities [4].

It seems necessary to make model tests for the most common structure-forms, where the dependence of impedance ellipses on the frequency should also be investigated. Thus, a new criterion would result for the determination of the type of inhomogeneity and anisotropy.

REFERENCES

1. Sághy, Gy.—Vándor, B.—Varga, I.: A kisalföldi refrakciós mérések földtani eredményei (Geological results of seismic refraction measurements on the Little Hungarian Plain). *Földtani Közlöny* 1967.
2. Rankin, D.—Garland, G. D.—Vozoff, K.: An analog model for the magnetotelluric effect. *J. Geoph. Res.* 70 (1965).
4. Berdicevski, M. N.: Magnitotelluriceskoe polje v gorizontalnoneodnorodnoj srede: *Prikladnaja Geofizika*, 1961.
4. Csókás, J.—Takács, E.: Jelentés a mágneses mikrovariációk vertikális összetevőinek és a „forráshatás'' szerepének vizsgálatáról a magnetotellurikus kutatásban (Report on the investigations into the role of the vertical component of geomagnetic micro-variations and of the "source-effect" in magnetotellurics). Manuscript.

НАПРАВЛЯЕМОСТЬ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКИХ ИМПЕДАНСНЫХ ЭЛЛИПСОВ

Э. ТАКАЧ

РЕЗЮМЕ

В неоднородных геологических условиях магнитотеллурический импеданс изменяется в зависимости от направления поляризации поля и поэтому может быть задан при помощи эллипса.

Рассматривая влияние двумерных — покрытых и выступающих на поверхность — неоднородностей — с большим, а также с уменьшенным сопротивлением, выяснилось, что большая ось импедансного эллипса может занимать положение и в направлении простирания и в направлении наклона. Геологическое содержание информаций импедансов, относящихся к главным осям, зависит от типа неоднородности.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (3—4), pp. 425—450 (1969)

UNTERSUCHUNGEN DER GENAUIGKEIT DER MIT ABGELEITETEN WINKELN VOLLZOGENEN TRIANGULIERUNG

L. HOMORÓDI

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
TECHNISCHE UNIVERSITÄT, BUDAPEST

[Eingegangen am 15. Dezember 1968]

Die Füllung des aus Doppelkranzsystem bestehenden neuen ungarischen Triangulationsnetzes erster Ordnung wurde mit einer neuartigen Methode vollzogen. Der Grundgedanke des Verfahrens ist, daß die Richtungen der Dreiecke erster Ordnung des Füllnetzes nicht unmittelbar gemessen werden, sondern sie werden von den gemessenen Richtungen der das ganze Gebiet erfassenden Kleindreiecke mit durchschnittlicher Seitenlänge von 7 km abgeleitet [2, 4, 6, 7]. In Zusammenhang mit der neuen Methode mußte es zuerst geklärt werden, daß das so entstandene Netz wenigstens nicht geringer verläßlich sein wird als das mit herkömmlicher Methode erhaltene. Die Studie gibt eine Zusammenfassung der Resultate der diesbezüglichen in- und ausländischen Untersuchungen. Besonders beachtenswert sind unter denen die schematischen, idealisierten Dreiecksgruppen erörternden Studien [22] und [25], weiters die die Ergebnisse der fertiggestellten ungarischen Füllnetze analysierenden [29, 32, 33 und 35] bzw. die nach den neuen Prinzipien durchgeführte Aufarbeitung eines vorhandenen früher angelegten Netzteiles in den Studien [36] und [37], schließlich die gründliche, jede Einzelheit umfassende Untersuchung in Studie [41]. Das Verfahren ist laut der übereinstimmenden günstigen Feststellungen nicht nur wirtschaftlich, sondern es gewährt eine noch größere Genauigkeit als das herkömmliche Verfahren.

Einwände wurden nur in [45] erhoben, mit welchen sich der Verfasser auf die falschen Folgerungen hinweisend ausführlicher befaßte. Die sind falsch einerseits, weil die Verläßlichkeit der abgeleiteten Winkel mit Hilfe einer Formel der Längenmeßtriangulation geprüft wurde, obwohl im gegebenen Problem überhaupt keine Rede von Längenmessung war; die Folgerungen sind auch unrichtig, weil nicht in Betracht gezogen wurde, daß die Ableitung nicht mit einem zusammenhängenden Flächennetz und mit einer Kette — worauf sich die dort angewendete Formel bezieht — vollzogen wurde.

Es ist beinahe 20 Jahre her, daß die Ausgleichung der großen Triangulationsnetze, die Auswahl und die Erkundung der günstigsten Lösung — sowohl in Ungarn als auch im Ausland — eines der zeitgemäßen Probleme der Geodäsie waren. Die Aktualität wurde bei uns durch die in Bearbeitung stehende neue Triangulierung erster Ordnung, im Ausland durch die Verwirklichung der einheitlichen kontinentalen Netze unterstrichen. Bei uns hatte die Frage zwei Seiten: Zur Lösung der Ausgleichung des Kettenrahmens wurden die Berechnungsmethoden der großen ausländischen Kettensysteme untersucht, um trotz der Maßunterschiede zu brauchbaren Gedanken zu gelangen; mittlerweile waren wir nicht nur mit der Frage der späteren Berechnung des Füllnetzes — vielmehr vornehmlich nicht damit —, sondern mit der Frage der Entwicklung und Messung des Füllnetzes beschäftigt, da schwierige materielle Probleme und die des Personalstandes zu erwarten waren, die wir eben aufgrund der Rahmenketten-Arbeiten schon gut abschätzen konnten.

Das Studium der ausländischen einschlägigen Literatur machte uns nebst der Erkenntnis der die Lösung unserer Probleme fördernden Feststellungen mit den im Ausland in Zusammenhang mit dem aus Kettensystemen aufgebauten Netzen hervortretenden Bemerkungen, mit besseren Lösungen ermöglichenden Gedanken bekannt. Diese veränderten zwar unseren Pläne nicht, da sie ja den damals bestehenden Gegebenheiten entstanden sind und keine optimale Lösung, aber den einzig gangbaren Weg bedeuteten; sie gaben trotzdem eine Anregung für die diesbezügliche Forschungen und Untersuchungen.

Über die Ergebnisse dieser Untersuchungen wurde zuerst an der Jubiläumstagung 1950 der Ungarischen Akademie der Wissenschaften berichtet [1, 3]; das erwähnte Verfahren wird seitdem als die *Hazay—Tárczy-Hornochsche* Methode zur kontinentalen Netzausgleichung oder als Methode dominierender Punkte bzw. als Methode der von Kleindreiecken abgeleiteten fiktiven Dreiecke gekennzeichnet oder eher umschrieben. Die zur Länder umfassenden enormen Triangulierung vorgeschlagene Methode wirkte fruchtbringend auf die sich mit der Verwirklichung unseres Füllnetzes befassenden Fachmänner, weil zwar Beispiele bzw. Vorstellungen zum erfolgreichsten, zum großbetrieblichen Verfahren bereits vorhanden waren (wiederholt aufstellbare Pyramidensignale, kürzere Seitenlängen), wirkte die Frage der Ausgleichung dennoch hemmend. Dieses Hindernis wurde durch die *Hazay—Tárczy-Hornochsche* Methode überwunden; die Studie von REGŐCZI über die »wirtschaftliche Triangulierung« erschien bereits im Sommer des Jahres 1951 [2], da er die Methode durch persönliche Kontakte offensichtlich schon früher kannte. Die REGŐCZIsche Lösung, die Füllung der Kettenkränze mit einem aus dem Netz dritter Ordnung abgeleiteten fiktiven Netz erster Ordnung wurde in [4, 5, 6, 7] ausführlich besprochen, darum möchte ich hier nur die Weiterentwicklung, die Wertung und die derzeitige Lage der beiden Grundgedanken geben.

Obwohl die Berechnungstechnik der *Regőczischen* Triangulierung grundsätzlich auf dem für kontinentale Triangulierungen vorgeschlagenen *Hazay—Tárczy-Hornochschen* Prinzip beruht, ist die Problematik der beiden wesentlich verschieden.

Laut der ursprünglichen *Hazay—Tárczy-Hornochschen* Vorstellung werden die fiktiven Dreiecke von 150—200 km Seitenlängen aus Dreiecken erster Ordnung, d. h. aus Dreiecken mit ca. 30 km Seitenlängen aufgebaut, damit möglichst viele Meßergebnisse bei der Ausgleichung von je einen Kontinent umfassenden Netz eine Rolle spielen, die Berechnungsarbeit aber praktisch noch durchführbar sei. Nebenbei sei bemerkt, daß bei der Arbeit mit elektronischen Rechenanlagen der Umfang der Berechnungen theoretisch nicht begrenzt ist, es wurde aber bewiesen, daß die einheitliche Handhabung von überaus großen Systemen bezüglich der Fehlerfortpflanzung und der Erkenntnis der Fehler nicht zweckmäßig ist, und die Anlage eines Verbindungsrahmens daher noch immer begründet ist. Z.Z. des Entstehens des

Gedankens der fiktiven Dreiecke war es noch nicht möglich, die Elemente von Dreiecken mit Seitenlängen 150—200 km zu messen, daher mußte man die theoretische Richtigkeit der Methode beweisen bzw. man mußte veranschaulichen, daß die abgeleiteten Winkel der fiktiven Dreiecke voneinander unabhängig gemacht werden können, d. h. man jenes grundsätzliche Erfordernis der Ausgleichsrechnung befriedigen kann, daß nur unabhängige Meßergebnisse in die Ausgleichung einbezogen werden können. Wir finden bereits auch in den erwähnten Berichten [1, 3] Hinweise darauf, daß die fiktiven Winkel voneinander unabhängig gemacht werden müssen, die mathematische ausführlichere Erörterung ist später in [4, 7] angegeben worden. Da wir heutzutage bereits über Instrumente zur so genauen Messung von 150—200 km Entfernungen verfügen, die einer mit Ableitung gewonnenen Genauigkeit entsprechen oder diese sogar übertreffen, ist die Weiterentwicklung dieser Methode sehr bedeutend, die auch die — obwohl aus einer kürzeren Grundlinie abgeleiteten und nicht unmittelbar gemessenen — Seitenlängen in Betracht zieht [24, 28, 31].

Die Frage der Unabhängigkeit der in die Ausgleichung einbezogenen Daten ist hinsichtlich des allein praktischen Zwecken dienenden Füllnetzes nicht so bedeutend; bezüglich der Regőczischen Triangulierung mußte man vor allem die Frage klären, daß die Genauigkeit des von fiktiven Dreiecken gebildeten Netzes mindestens nicht kleiner sein wird als die Genauigkeit eines gerade so großen, aber aus direkt gemessenen Dreiecken aufgebauten Netzes. Die Wirtschaftlichkeit des Verfahrens liegt nämlich auf der Hand, und so war das einzige Problem der Anwendung die Frage der Genauigkeit. Regőczi berief sich bereits in seiner erwähnten Studie [2] auf einige Umstände, die in dieser Hinsicht beruhigend waren. So untersucht er z. B. die aus der Exzentrizität der Aufstellung und der Punktmarkierung herrührenden Fehlerwirkungen und besonders die Rolle der Refraktion, von welcher vorausgesetzt werden kann, daß sie in den kürzeren Richtungen einerseits von zufälligem Charakter ist, andererseits mit der Entfernung rasch abnimmt. So können die kürzeren 6—8 km langen Richtungen wesentlich genauer gemessen werden als die von 30 km; infolgedessen können die abgeleiteten Winkel trotz der Fehlerfortpflanzung nicht ungenauer sein als die unmittelbar gemessenen und mit Richtungen von 30 km Länge eingeschlossenen Winkel. Er gab aber erst in den Studien [5] und [6] und später in der mit denen im Grunde genommen identischen Studie [11] den numerischen Beweis für die günstige Gestaltung der Genauigkeit. Dies beruhte auf drei Tatsachen:

1. Aufgrund von Winkelabschlußfehlern mehrerer Hundert Dreiecke von verschiedenen Seitenlängen kann festgestellt werden, daß der Winkelabschlußfehler und damit auch der *Ferrerosche* mittlere Fehler des Winkels mit der Entfernung zunimmt, der *Ferrerosche* mittlere Fehler des Winkels ist aufgrund von Dreiecken mit 8 km durchschnittlicher Seitenlänge $\pm 0{,}244''$

und aufgrund von Dreiecken mit 30 km durchschnittlichen Seitenlängen $\pm 0{,}627''$.

2. Wird die 30 km lange Seite des Dreiecks als der Teil einer den Ausgangs- und Endpunkt des aus vier gleichlangen Seiten bestehenden Polygonzuges verbindenden Geraden betrachtet, so ist aufgrund des Querfehlers des Polygonzuges ableitbar, daß der mittlere Fehler des zwischen zwei solchen Geraden eingeschlossenen Winkels $2\,\mu$ ist, falls μ der mittlere Fehler der Brechungswinkel des Polygonzuges bedeutet.

3. Die Daten von 1. angewendet, folgt, daß der mittlere Fehler eines von zwei 30 km langen Seiten eingeschlossenen Winkels $2 \cdot 0{,}244 = \pm 0{,}49''$ sein wird, entgegen dem mittleren Fehler $\pm 0{,}63''$ der Dreiecke von 30 km Seitenlängen, d. h., die neue Lösung bedeutet noch eine ca. 20%-ige Verbesserung bei den Winkeln des fiktiven Netzes erster Ordnung.

Die weiteren Befunde bestätigten auch die Bemerkung des Verfassers, daß die Ausgleichung, mit der die Ableitung der fiktiven Winkel aufgrund des *Hazay—Tárczy-Hornochschen* Prinzips erfolgt, diese Verhältniszahl (schätzungsweise) noch um 30% verbessert.

Die kurz gefaßte Beweisführung hatte noch allerdings zwei Mängel: einerseits beruhte sie nur auf ungarischen Meßerfahrungen und konnte daher nicht für allgemein gültig angenommen werden, andererseits verwahrscheinlichte sie nur durch die Zugrundelegung eines zwar ungünstigen (nicht so strengen) Systems, untersuchte aber die Gestaltung der Fehlerfortpflanzung nicht unter den gleichen Verhältnissen. Eine Methode des alle Zweifel ausschließenden Beweises kann die Untersuchung eines schematischen, z. B. aus lauter gleichseitigen Dreiecken bestehenden Dreiecksnetzes und der Fehlerfortpflanzung der daraus abgeleiteten fiktiven Dreiecke sein; die andere Methode ist aber die Aufarbeitung eines versuchshalber gemessenen oder als solcher anwendbaren älteren Netzteiles laut der Methode der fiktiven Dreieck. Schließlich bedeutet aber nur die gemeinsame Anwendung der beiden einen vollkommenen Beweis, da in der einen die Regelmäßigkeit des Systems, in der anderen aber die Beschränkung der Messung auf ein enges Gebiet — d. h. lokale Verhältnisse — verzerrt.

Bald wurden Versuche mit beiden Methoden unternommen. Die Methode von Regőczi, die entgegen dem 300jährigen Prinzip der Triangulierung, dem Arbeiten »vom Großen ins Kleine«, vom Kleinen den großen Rahmen aufbaut, fand auch im Ausland entschieden Anklang. An der Technischen Universität Dresden befaßte sich eine Diplomarbeit bereits 1952 mit der Frage der Genauigkeit der abgeleiteten Dreiecke, obwohl in der Fachliteratur der DDR die erste diesbezügliche Nachricht [9] aufgrund [3] erst aus dem Jahre 1954 stammt. Die kurze Zusammenfassung [8] in der Zeitschrift für Vermessungswesen kam nur ein wenig früher, die wegen dem Mißverstehen wesentlicher Elemente auch korrigiert werden mußte. Kurz nach [9] folgte die bereits erwähnte Arbeit [11].

Noch spätere Besprechungen für das Ausland waren [30, 32, 33]. Diese wurden teilweise erst dann geschrieben, als die Arbeiten unserer Füllnetze beendet worden waren, d. h., sie behandeln nebst der Erörterung der Methode auch die Analyse und die Erfahrungen der Meß- und Rechenergebnisse. Die Studie [23] sei eigens erwähnt, die die prinzipielle Ergänzung der grundlegenden Veröffentlichungen [4] und [5] ist, da diese die praktische Lösung für die zweite Ausgleichung der Kleindreiecksgruppen und für die zweckmäßigste Abfassung der Zwangsbedingungen liefert, die die Eingliederung in das von fiktiven Großdreiecken bestehende Netz löst. Die Würdigung der Methode in der internationalen geodätischen Fachliteratur kommt in den Arbeiten [26] und [27] zum Ausdruck. Ihre bedauernswerten Fehlbehauptungen bezüglich des Entstehens der Methode wurde in [28, 31] richtiggestellt, und dies wurde in der Arbeit [40] bereits in Betracht gezogen.

Auf die Analyse der Genauigkeit der Methode zurückkehrend, muß vorerst die Arbeit von D. Schoeps erwähnt werden. Die von ihm geschriebene genannte Diplomarbeit wählte den empirischen Weg des Beweises, aber nicht aufgrund des der Technologie der Methode entsprechend angelegten Versuchs- (Test-) Netzes, sondern mit der Anwendung einiger (sehr großer) Dreiecke des alten sächsischen Dreiecksnetzes. So waren seine von vollkommen anderem Ausgangspunkt erzielten Ergebnisse vom Standpunkt der *Regőczischen* Methode nicht reell und konnten daher nicht für und nicht gegen seine Methode in Betracht gezogen werden. Dies wurde bereits auch von F. Töpfer in der die Diplomarbeit besprechenden Studie [14] festgestellt, später wies sogar Schoeps selbst an jene Faktoren des untersuchten Netzes hin, aufgrund deren seine Resultate in Frage gestellt werden konnten [20, 21]. Diese Versuche lenkten aber die Aufmerksamkeit auf die gründliche Untersuchung der zu erwartenden und wirklichen Genauigkeit des neuen Verfahrens. Da dies berechtigt, ja sogar nötig war, wurde es auch vom internationalen Echo der neuartige Prinzipien einführenden Methode bewiesen. Prof. J. Böhm aus Prag berichtete auf einer Konferenz in Dresden 1956 darüber, daß die einschlägigen in der Tschechoslowakei durchgeführten Untersuchungen die *Regőczische* Schätzung bezüglich der Genauigkeitssteigerung nicht unterstützten. Er bemerkte, daß die Erklärung hierfür ev. darin bestehe, daß in den Reliefverhältnissen der Tschechoslowakei nicht der Zusammenhang zwischen der Länge und dem mittleren Fehler der Richtung bestehe wie der, worauf sich Regőczi z. B. in [6] berief.

Auf derselben Konferenz lenkte Prof. H. Wolf aus Hannover die Aufmerksamkeit auf den beträchtlichen Unterschied hin, der im Ergebnis der Ausgleichung besteht, falls eine Richtungsmessung durchgeführt wird, die Ausgleichung aber nach Winkeln erfolgt. Laut seiner Feststellung können die Ergebnisse in diesem Falle sogar mit 50% des mittleren Fehlers erreichenden Fehlern behaftet werden. Prof. W. Hristow und Prof. A. Durniew stellten in ihren Beiträgen direkt in Abrede, daß das abgeleitete fiktive Netz besser als das unmittelbar gemessene sein könnte, und hielten das abgeleitete Netz wegen der durch die großen Rechenanlagen gegebenen Möglichkeiten für überflüssig.

Da diese Meinungen und Bemerkungen noch vor ihrer Veröffentlichung infolge der persönlichen Kontakte wenigstens teilweise bekannt waren, wurden bereits 1955, sobald die Messungen am südlichen Teil des transdanubischen Füllnetzes vollzogen wurden, d. h., sobald die Möglichkeit zur Anwendung von tatsächlichen Meßergebnissen möglich war, von E. Hőnyi Versuchsberechnungen zur Untersuchung der Gestaltung der Genauigkeit vollzogen [12, 13]. Der angewendete Teil des Netzes bestand aus 123 Kleindreiecken (mit 6—8 km Seitenlängen), die auf dem Gebiet von 6, ein zentrales System bildenden, vorher unmittelbar gemessenen Dreiecken erster Ordnung (mit 30 km Seitenlängen) lagen. Hőnyi bildete den 6 Großdreiecken entsprechend 6 Gruppen aus den Kleindreiecken, glich sie nacheinander aus und leitete die Winkel der entsprechenden Großdreiecke von ihnen ab. So standen ihm zur Verfügung:

1. der Abschlußfehler der 6 Großdreiecke und der davon berechenbare *Ferrerosche* mittlere Winkelfehler ($\pm 0{,}408''$), der durch den *Ferreroschen* mittleren Winkelfehler ($\pm 0{,}462''$) der 132 Dreiecke von ähnlicher Größe und erster Ordnung des Kettenrahmens kontrollierbar war;

2. der aus dem Abschlußfehler der 123 Dreiecke berechnete *Ferrerosche* mittlere Winkelfehler ($\pm 0{,}68''$) und der aus der Ausgleichung der aus Kleindreiecken bestehenden 6 Einheiten erhaltene mittlere Netzwinkelfehler ($\pm 0{,}75''$);

3. der vom jenen Winkelabschlußfehler erhaltene gleichfalls *Ferrerosche* mittlere Fehler ($\pm 0{,}245$), der aus den abgeleiteten Winkeln der 6 fiktiven (großen) Dreiecke berechnet worden ist.

Diese Ergebnisse bewiesen nicht nur, daß das abgeleitete Netz besser als das unmittelbar gemessene ist, sondern auch, daß dies auch in jenem Falle besteht, wenn die Verläßlichkeit der zur Ableitung dienenden Kleindreiecke hinter dem bei der Messung der Großdreiecke erreichbaren Wert zurückbleibt. Der letztere beträgt laut unserer Triangulierung nämlich mindestens $\pm 0{,}46''$, jener der Kleindreiecke aber nur $\pm 0{,}68''$. Der *Ferrerosche* mittlere Winkelfehler der abgeleiteten Dreiecke beträgt also 68% des der Kleindreiecke, und nur ca. 55% des mittleren Winkelfehlers der in den Großdreiecken unmittelbar gemessenen Winkel. Es ist also eine wenigstens 40%-ige Besserung vorhanden, die Vermutung von Regőczi bestätigend, daß die am Beispiel des Polygonzuges vorgeführte 20%-ige Verminderung durch die Ausgleichung noch weiter gesteigert werden kann.

Den zeitlichen Ablauf der Veröffentlichungen jetzt gewissermaßen außer Acht lassend, sei hier bemerkt, daß Hőnyi die 6 Versuchs-Dreiecksgruppen auch nach Richtungen und Winkeln ausgeglichen hat [32], was sich wegen der erwähnten Studie von WOLF und wegen der im weiteren zu erörternden Bemerkung von TÖPFER auch für nützlich erwies. Die zweierlei Berechnungen zeigten, daß die Abweichung von den 369 Winkeln des Systems in 196 Fällen (44%) unter 0,1″ blieb, war in 108 Fällen (29%) zwischen 0,1″—0,2″, und in 65 Fällen (18%) zwischen 0,2″—0,3″. D. h., in 91% der Fälle erreicht die Abweichung nicht die Hälfte des die Winkel der Kleindreiecke charakterisierenden *Ferreroschen* mittleren Fehlers (±0,68″), 9% der Fälle unterstützen aber die *Wolfschen* Bemerkungen. Aber auch noch diese Werte sind von gleicher Ordnung mit den bei der unmittelbaren Messung der Winkel der Großdreiecke sich ergebenden mittleren Fehlern (nur einer erreicht den Wert von 0,52″), und sie sind von unregelmäßiger Verteilung. So blieben wir trotz der prinzipiellen Bemerkung im weiteren bei der Ausgleichung der Gruppe der Kleindreiecke auf dem praktisch einfacheren Weg, d. h., die Ausgleichung wurde nach Winkeln vollzogen, obzwar nach Richtungsmessung die Winkel zweifellos keine unabhängigen Meßergebnisse bieten.

Zur zeitlichen Reihenfolge sei bemerkt, daß der jetzt zitierte Bericht im Jahre 1959 erschien, aber er wurde im September 1956 am geodätischen Kongreß der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgetragen, d. h. bald nach der bereits erwähnten Konferenz zu Dresden; in dieser Zeit wurden bereits deutscherseits neuere eingehende Studien über die vielumstrittene Frage der Genauigkeit geführt. SCHOEPS und TÖPFER untersuchten die Frage theoretisch. SCHOEPS berichtete zuerst ebenfalls auf der Dresdener Konferenz über seine neueren Untersuchungen [15] und veröffentlichte sie wesentlich mit gleichem Inhalt und ungefähr zur gleichen Zeit, sowohl deutsch als auch ungarisch [20, 21]. Bei seinen Untersuchungen wurde ein ideales, aus 16 Kleindreiecken aufgebautes gleichseitiges Großdreieck angewendet, und aufgrund seiner Ableitung beträgt der mittlere Fehler des abgeleiteten Winkels des Großdreiecks nebst einem mittleren Richtungsmeßfehler μ_0 entgegen dem mittleren Fehler der Winkel (mit einem Wert von $\mu_0 \sqrt{2}$) eines Kleindreiecks mit 8 km Seitenlängen 0,894 μ_0, d. h., das Verhältnis der mittleren Fehler der Klein- und der Großdreiecke beträgt 0,623, wodurch die Folgerung von HŐNYI theoretisch bewiesen wurde, daß der abgeleitete Wert der Winkel der Großdreiecke nicht nur einen kleineren mittleren Fehler als die unmittelbar meßbaren Winkel aufweist, sondern sogar verläßlicher ist als die zur Ableitung angewendeten Kleindreiecke. Wir der *Hőnyische* Wert ±0,245″ mit dem mittleren Winkelfehler ±0,408″ der Großdreiecke verglichen, erhalten wir als Quotient 0,600, der sogar zahlenmäßig den erwähnten Wert von SCHOEPS unterstützt.

F. TÖPFER widmete eine Dissertation dieser Frage [22] und untersuchte ausführlich mit mehrere Variationen umfassender Gründlichkeit die verschiedenen Probleme der Genauigkeit der von den Dreiecksnetzen abgeleiteten übergeordneten Dreiecke und deren Rechentechnik. Bezüglich des Grund-problems der Genauigkeit ist es eine wesentliche Feststellung, daß das Gewicht der abgeleiteten Winkel in einem idealen, von gleichseitigen Dreiecken aufgebauten Netz im Falle von Winkelmessung 3/2 beträgt, unabhängig von der Zahl der zur Ableitung in je eine Berechnungsgruppe zusammengefaßten Kleindreiecke (das Gewicht der gemessenen Winkel für eins genommen), während im Falle von Richtungsmessung die Gewichte mit der Zahl der Kleindreiecke zunehmen. In einem nicht idealen Netz schwanken die Gewichtswerte gemäß der Form der Dreiecke um diese Werte.

Ähnliche Ergebnisse wie TÖPFER erzielte K. L. PROVOROV [25], der die Frage der Verdichtung eines Grundnetzes ebenfalls im allgemeinen untersuchend — unter den möglichen Lösungen auch das *Regőczische* Verfahren — und ebenfalls bei idealem Aufbau die folgende Wertenreihe erhielt:

mittlerer Fehler der Richtungsmessung der Kleindreiecke	$\pm 0{,}71''$
mittlerer Fehler der Winkel der Kleindreiecke	$\pm 1{,}00''$
mittlerer Fehler des aus 4 Kleindreiecken abgeleiteten Großdreiecks	$\pm 0{,}64''$
mittlerer Fehler des aus 9 Kleindreiecken abgeleiteten Großdreiecks	$\pm 0{,}65''$
mittlerer Fehler des aus 16 Kleindreiecken abgeleiteten Großdreiecks	$\pm 0{,}63''$

Die letzten drei Werte bestätigen TÖPFERS Feststellung, daß das Gewicht von der Zahl der zur Ableitung angewendeten Kleindreiecke unabhängig ist, nur beträgt bei ihm das Gewichtsverhältnis 2,4 entgegen dem *Töpferschen* Wert von 1,5.

Mit diesen Untersuchungen wurden die grundsätzlichen Analysen der Genauigkeit der *Hazay—Tárczy-Hornochschen* Ausgleichung und der *Regőczischen* Triangulierung seinerzeit schon abgeschlossen. Daher ist es zweckmäßig, zwei praktische Arbeiten zu erwähnen, die die Analyse von tatsächlich vollzogenen großräumigen Messungen ermöglichten. Die eine ist unser transdanubisches Füllnetz, dessen Untersuchung ebenfalls von HŐNYI vollzogen wurde [29, 35], und so konnte er die Ergebnisse seiner Versuchsberechnungen auf beträchtlich mehr Daten beruhend kontrollieren. Das transdanubische Füllnetz besteht aus 902 Kleindreiecken. Diese in 59 Gruppen geteilt, wurden die Winkel von 59 Großdreiecken abgeleitet und die folgenden charakteristischen Werte erhalten:

der von den 902 Kleindreiecken berechnete *Ferrerosche* mittlere Winkelfehler	$\pm 0{,}626''$
der aus der Ausgleichung von 59 Gruppen der Kleindreiecke berechnete mittlere Netzfehler	$\pm 0{,}662''$
der *Ferrerosche* mittlere Winkelfehler der 59 fiktiven Großdreiecke	$\pm 0{,}316''$

Wird dieser letztere Wert mit dem *Ferreroschen* mittleren Winkelfehler ($\pm 0{,}462''$) der 132 Großdreiecke des Kettenkranzes verglichen, beträgt der Quotient 0,682, der die theoretischen Feststellungen von SCHOEPS, TÖPFER und PROVOROV wieder bekräftigt.

Über die Anwendung der Methode in einem praktischen Zwecken dienenden Netz können wir einen anderen Bericht in der auch ungarisch erschienenen Arbeit von A. A. STOLYPIN lesen [36, 37]. Dies ist auch deshalb interessant, weil die Aufgabe stark von der unseren abwich, und auch die Ausgangsdaten verschieden waren. Im Bericht von STOLYPIN bestand der untersuchte Netzteil aus ung. 400 Dreiecken dritter und vierter Ordnung. Es wurden im Netz auch sieben Grundlinien gemessen. Die Winkelmessungen wurden in Punkten dritter Ordnung in 12 Gängen, in Punkten vierter Ordnung in 6 Gängen durchgeführt, der *Ferrerosche* mittlere Fehler betrug $\pm 1{,}1''$ bzw. $\pm 1{,}4''$. Die Kleindreiecke wurden in 44 Gruppen zusammengefaßt, d. h., es wurden 44 fiktive Dreiecke gebildet, aber die Seitenlängen waren sehr verschieden, und es kamen auch sehr ungünstige spitze Dreiecke vor. Für den mittleren Fehler der abgeleiteten Winkel des fiktiven Netzes ergab sich $\pm 1{,}7''$. Dieses Ergebnis widerspricht der Feststellung von TÖPFER und anderen, daher sei bemerkt, daß seine Berechnung nicht aus den Schlußfehlern der fiktiven Dreiecke erfolgte (d. h., es ist kein *Ferreroscher* mittlerer Fehler), sondern es ergab sich aus einem vom Verfasser abgeleiteten auf dem relativen Fehler der Seitenlängen beruhenden Zusammenhang. Diese indirekte Lösung ist dadurch gerechtfertigt, daß die gemessenen Grundlinien in die Ausgleichung einbezogen wurden, und die ungünstigere Gestaltung der mittleren Fehler der abgeleiteten Winkel ist wahrscheinlich mit dem Umstand verbunden, daß der relative Fehler der aus den Grundlinien entwickelten Seiten zwischen 1/69 700 und 1/174 000 lag, der Durchschnitt betrug 1/115 000. Wird dieser Durchschnitt mit dem zur Berechnung des Wertes $\pm 1{,}7''$ von STOLYPIN angewendeten relativen Fehler von 1/172 000 verglichen, so ist die durch die Ausgleichung erzielte Verbesserung 115 000/172 000 = 0,67, d. h., wir gelangen wieder zu dem von TÖPFER und anderen gewonnenen Wert. Auf den guten Einklang des Netzes weist auch der Umstand hin, daß der mittlere Quadratfehler der in den Anschlußpunkten der benachbarten Dreiecksgruppen erhaltenen Schlußfehler ungefähr 6 cm beträgt.

Wir bemerkten bereits, daß die sich mit der Genauigkeit des Verfahrens befassenden Untersuchungen mit der Studie von PROVOROV vom Jahre 1957 zu jener Zeit abgeschlossen wurden. Das Problem konnte aber nicht zu den endgültig gelösten gezählt werden. Im Jahre 1967 wurde an die Technische Universität Dresden eine neue Dissertation eingereicht, die die Genauigkeit der abgeleiteten Richtungen und Winkel noch ausführlicher untersuchte [41]. Die kurze Zusammenfassung der Arbeit ist in No. 12/1967 der Vermessungstechnik zu finden [42]. Es lohnt sich aber die Dissertation selbst durchzusehen, da sie die Aufmerksamkeit auf mehrere bisher nicht geklärte Fragen hinlenkt.

H. GÖHLER wies vor allem auf drei Unvollkommenheiten der früheren Analysen hin und setzte damit auch das Programm seiner Dissertation fest:

a) die Untersuchungen befaßten sich nicht eingehend mit dem Zusammenhang der Verläßlichkeit der Richtung und der Länge der Richtung, obwohl diesbezüglich verschiedene Ansichten auftraten;

b) die Ausgleichung der untersuchten idealen (schematischen) Netze erfolgte in jedem Falle aufgrund von Winkeln, obwohl die Meßergebnisse aus Richtungsmessungen entstanden;

c) im Laufe der Vergleichsprüfungen der praktischen Beispiele wurde die mathematisch-statistische Analyse der Beobachtungsergebnisse nicht vollzogen.

Dem Programm entsprechend wird vom Verfasser zuallererst die Analyse des mittleren Richtungsfehlers durchgeführt und nach Klärung der Rolle der Ablesung, der Visierung, vor allem aber der der Refraktion legt er die folgende Formel fest:

$$m_r = B \pm \sqrt{\frac{1}{s} + a^2 s^2} \tag{1}$$

in welcher s die Länge der Richtung, B die vom bei der Beobachtung angewendeten Gewicht und vom Instrument abhängige Konstante sind, und a den regelmäßigen Teil der Zieleinstellung charakterisiert. Aus dem Aufbau der Funktion folgt, daß der mittlere Fehler mit der Zunahme von s zuerst abnimmt und später wieder zunimmt, der Ort des Minimums vom Wert a abhängig ist.

GÖHLER bestimmte mit Hilfe von vier zur Verfügung stehenden ziemlich ausführlichen Datenmaterialien den zahlenmäßigen Wert von B und a. Die vier Datengruppen entnahm er der in [5] bekanntgegebenen ungarischen Triangulierung, den Arbeiten der russisch—skandinavischen Gradmessung, der preußischen Triangulierung sowie der sächsischen Triangulierung. Es lohnt sich, den Zahlenwert der beiden Konstanten aufgrund der vier Arbeiten nach der früheren Reihenfolge zu zitieren:

	B	a
ungarisch	0,01	0,0456
russisch—skandinavisch	0,30	0,0342
preußisch	0,46	0,0072
sächsisch	0,50	0,0045

Laut den Werten a nimmt der mittlere Fehler der Richtungsmessung in den ersten zwei Arbeiten mit der Entfernung rasch zu, in den anderen beiden Arbeiten ist die Veränderung sehr langsam und sie hat ung. bei 25 km ein mäßiges Minimum. (Es muß bemerkt werden, daß sich der Wert m_r aus der Formel (1) in Sekunden des Neugrades ergibt, d. h., die rechte Seite muß mit 0,324 multipliziert werden, wenn wir auf Altgradsekunden übergehen wollen.)

Sehr interessant und vollkommen neuartig ist die weitere Untersuchung Göhlers, die sich hier anschließt und in welcher er ermitteln will, wodurch diese wesentliche Differenz im Zusammenhang zwischen dem mittleren Fehler und der Länge der Richtung hervorgerufen wird, hierzu muß bemerkt werden, daß die Zusammenhänge in sämtlichen vier Fällen sehr entschieden sind, die Korrelations-Koeffizienten stehen zwischen 0,85—0,99.

Da die Richtungen in Hochgebirgen meistens weit oben über dem Terrain in einer solchen Luftschicht geführt werden, deren physikalischer Zustand beinahe konstant ist, kann eine Refraktionswirkung kaum zur Geltung kommen, während am flachen Gelände die Richtungen oft ganz in der Nähe des Terrains oder der Pflanzendecke geführt werden, wodurch sie ganz verschiedene Luftschichten berühren bzw. durchqueren, suchte Göhler den Grund der entschiedenen Abweichungen in den Reliefverhältnissen. Zur Charakterisierung der Reliefverhältnisse des mit Triangulation bedeckten Gebietes führte er interessanterweise die *Reliefenergie* ein. Dieser morphologische Begriff bedeutet die Höhendifferenz des am höchsten und am niedrigsten gelegenen Punktes innerhalb einer gegebenen Region. Göhler unterscheidet aufgrund der *Waldbauerschen* Reliefenergie-Karte drei Streifen: in dem ersten ist der maximale Höhenunterschied (innerhalb von 5 km) $H = 50$ m, dies ist das beinahe flache, kaum hügelige Gebiet; im zweiten ist H zwischen 50—200 m, dies charakterisiert das Hügelland; im dritten ist H über 200 m, dies ist für das Bergland charakteristisch. Die zur Ableitung des Zusammenhanges (1) angewendeten Meßergebnisse ermöglichten wegen der Ermangelung der benötigten Daten die Ableitung des zahlenmäßigen Zusammenhanges zwischen den Charakteristiken der Reliefenergie und dem mittleren Fehler leider nicht, aber der zweifellos annehmbaren Ansicht Göhlers zufolge sollte das Terrain die ungarischen und der russisch—skandinavischen Triangulation in die erste Gruppe gereiht werden, das Terrain die preußischen und der sächsischen Triangulierung ist aber sehr abwechslungsreich, daher kann höchstens die zweite, ev. bezüglich der sächsischen örtlich die dritte Gruppe in Betracht gezogen werden. Es scheint allerdings richtig zu sein, daß der den regelmäßigen Teil des mittleren Richtungsfehlers charakterisierende Wert a im Flachland 0,03 oder größer, im Bergland d. h. in der dritten Gruppe aber 0,01 oder kleiner sein kann. Dies könnte zugleich eine Erklärung auch dafür bedeuten, warum die *Böhmschen* Daten über die stärker hügelige-gebirgige Tschechoslowakei den *Regőczischen* Daten des größtenteils flachen Ungarns entgegengesetzt sind.

Wenn auch die erwähnten vier Triangulationen nicht zum Studium des Zusammenhanges des mittleren Fehlers und der Reliefenergie brauchbar waren, waren die am Gebiet der DDR gemessenen ca. 9000 Dreiecke mit durchschnittlich 5-km Seitenlänge hierzu doch geeignet; diese Dreiecke konnten aufgrund ihrer Gebietsverteilung in die drei erwähnten Streifen der Reliefenergie eingereiht werden. Die Zahl n der in die einzelnen Streifen fallenden Dreiecke und die auf den Dreiecks-Abschlußfehlern berechneten mittleren Richtungsfehler waren die folgenden:

H	n	m_F
0— 50 m	5000	$\pm 0{,}58''$
50— 200 m	2700	$\pm 0{,}66''$
200—1000 m	1000	$\pm 0{,}74''$

Es ist auf die Gründlichkeit von GÖHLER kennzeichnend, daß er mit der Methode der mathematischen Statistik kontrollierte, ob die Verteilung der Abschlußfehler als normale Verteilung und die Differenz zwischen den mittleren Fehlern m_F für signifikant betrachtet werden können. Nach der beruhigenden Antwort erhielt er für den Zusammenhang zwischen dem mittleren Wert H_K der Reliefenergie und dem Wert m_F den folgenden exponentiellen Ausdruck:

$$m_F = 0{,}14'' + 0{,}324\, H_K^{0{,}095} \tag{2}$$

(H_K muß in Metern eingesetzt werden und wir erhalten m_F in Sekunden des Altgrades.)

Der zweite, beträchtliche Teil der *Göhlerschen* Dissertation befaßt sich mit der Analyse der Verhältnisse der Gewichte der abgeleiteten und gemessenen Richtungen. Er erörtert drei Grundfälle. Er bestimmt den mittleren Fehler der aus dem Polygonzug, aus der einfachen Dreieckskette und aus dem Dreiecksnetz abgeleiteten Richtung in Funktion des mittleren Fehlers der gemessenen Richtung. Wir sind selbstverständlich nur am letzten interessiert, am Polygonzug nur insofern, daß es auch von REGŐCZI zur Abschätzung des mittleren Fehlers des abgeleiteten Winkels in seiner grundlegenden Studie angewendet wurde. Wenn die Richtung von Länge s aus einem freien Polygonzug mit n-zähligen gleichlangen Seiten bestimmt wird, beträgt GÖHLERS Meinung nach dessen mittlerer Fehler:

$$M_R = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2\,n^3 + 3\,n^2 + n}{3}}\, m_r \tag{3}$$

wo m_r aus Formel (1) zu berechnen ist, wobei aber in diesem Falle

$$s = \frac{S}{n}$$

ist.

(Es sei bemerkt: ist $n = 4$, so gibt der Multiplikator m_r genau den von REGŐCZI in [5] mitgeteilten Wert.) Da m_r laut (1) von s abhängig ist, ist M_R vom Wert (1) abhängig kleiner oder größer als m_r. D. h., zum gegebenen s gehört auch ein solcher Wert r, wobei M_R ein Minimum hat; der Ort des Minimums verschiebt sich in Richtung der größeren n-Werte, wenn der Wert a der Formel (1) zunimmt. Es ist ein interessanter Zufall, daß bei dem von GÖHLER für Ungarn angegebenen Wert $a = 0{,}0456$ der Formel (1) das Minimum ungefähr bei $n = 4$ auftritt, wenn $s = 30$ km ist, was eben der in der *Regőczischen* Beweisführung angenommene Fall war.

Was nun den mittleren Fehler der aus dem Netz abgeleiteten Richtung betrifft, sagt auch GÖHLER im Grunde genommen nicht mehr, als TÖPFER, er bestätigt nur nochmals, sich auf WOLF berufend, daß in dem Falle, wenn Richtungsmessung durchgeführt worden ist, die Ausgleichung ebenfalls nach Richtungen erfolgen muß. Wir erwähnten bereits, daß wir aufgrund der im Bericht [32] mitgeteilten Untersuchungen von HŐNYI bei der Ausgleichung unseres Füllnetzes auf die auf der Betonung der Unabhängigkeit der Messungen beruhende prinzipielle Feststellung keine Rücksicht genommen haben, da wir die zum Vorschein kommenden Unterschiede praktisch für vernachlässigbar angenommen haben und im Interesse der erhöhten Genauigkeit der abgeleiteten Winkel auch die Überlappung der Kleindreieckgruppe bei den Scheiteln der fiktiven Dreiecke zuließen.

Was GÖHLERS Feststellung über die Gewichte der abgeleiteten Richtungen betrifft, bestätigte er im Einklang mit TÖPFER, daß nach Winkeln ausgeglichen, das Gewicht der abgeleiteten Winkel des Großdreiecks für alle drei Winkel gleich ist, und dem 3/2-fachen Gewicht der Kleindreiecke gleich ist, unabhängig von der Zahl der das Großdreieck bildenden Kleindreiecke und vorausgesetzt, daß das gleichseitige Großdreieck ebenfalls aus gleichseitigen Kleindreiecken aufgebaut ist. Im Falle einer Ausgleichung nach Richtungen erhöht sich das Gewicht mit der Zahl der Dreiecke. Da aber das Gewicht einer abgeleiteten Richtung

$$m_i = m_r \sqrt{\frac{1}{P}}$$

ist und m_r laut (1) von s (von der Länge der Seiten der Kleindreiecke) abhängt, ist es nicht unbedingt richtig, daß m_i kleiner als m_r sein wird. Es ist wieder die Konstante a aus (1) ausschlaggebend; ist a sehr klein, so kann m_i größer als m_r sein. (Es sei aber noch in Erinnerung gebracht, daß a als Funktion des mittleren Fehlers der Messungen im Bergland einen kleinen Wert haben wird.)

Interessanter als die besprochenen, sind GÖHLERS Untersuchungen von aus nicht idealen, aus nicht lauter gleichseitigen Dreiecken aufgebauten Dreiecksgruppen. Diese hat er von einem aus den bereits erwähnten nahezu 9000 Dreiecken mit einer 5 km durchschnittlichen Seitenlänge aufgebauten

Netz abgesondert, nach der Zahl zwanzig; er hat sämtliche nach ihren Meßergebnissen ausgeglichen und leitete von einer jeden Gruppe den Gewichtskoeffizienten der drei Winkel je eines Großdreiecks und den die Dreiecksgruppe charakterisierenden mittleren Fehler m_N der Gewichtseinheit ab. So ergab sich Möglichkeit zu einer zweiseitigen Prüfung.

1. Da die Dreiecksgruppen auf verschiedene Gebiete der DDR fielen, konnte man den Zusammenhang des mittleren Netzfehlers und der mittleren Reliefenergie H_K eingehend prüfen (die Gruppen wurden so erwählt, daß der Wert H_K von 25 bis 600 m schwankte).

2. Da die Zahl n der Kleindreiecke in den einzelnen Großdreiecken zwischen 20 und 50 schwankte, und naturgemäß sowohl die einzelnen Kleindreiecke als auch die Großdreiecke von sehr verschiedener Form waren, konnte man sich ein Bild davon machen, zwischen welchen Grenzen das Verhältnis des von dem Abschlußfehler der Kleindreiecke der Gruppen abgeleiteten *Ferreroschen* mittleren Fehlers und des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit des Netzes schwankt, weiters auch davon, welche Differenzen im Gewicht (im Gewichtskoeffizienten) der drei Winkel desselben Großdreiecks auftreten können (sie wären grundsätzlich gleich) und überhaupt, welche Grenzwerte des Gewichtes unter den je drei Gewichtswerten der zwanzig Dreiecke sich ergeben können.

Die Korrelation im Verhältnis der Reliefenergie und des mittleren Netzfehlers ergab sich sinngemäß für etwas kleiner (der Korrelationskoeffizient ist 0,81), da nur weniger Dreiecksgruppen auf je ein Terrain desselben Charakters fielen. So konnte nur mit der Annahme eines Wahrscheinlichkeitsniveaus von 68,3% festgestellt werden, daß der mittlere Netzfehler zwischen die Grenzen

$$0{,}155 + 0{,}350\,H_K^{0,1} < m_N < 0{,}182 + 0369\,H_K^{0,1}$$

fällt. (Die Koeffizienten des Zusammenhanges wurden entgegen den ursprünglichen *Göhlerschen* Formeln umgeändert, um den Wert m_N nach der Substitution von H_K in Sekunden des Altgrades zu erhalten.) Im Falle von $H_K =$ $= 200$ m sind z. B. die Grenzwerte $\pm 0{,}75''$ und $\pm 0{,}81''$; bei der von GÖHLER untersuchten kleinsten ($H_K = 25$ m) und größten ($H_K = 600$ m) Reliefenergie schwankt m_N zwischen $\pm 0{,}64''$ und $\pm 0{,}86''$.

Was das Verhältnis des mittleren *Ferreroschen* Fehlers und des mittleren Netzfehlers betrifft, änderten sich ihre Quotienten aufgrund der 20 Dreiecksgruppen zwischen 0,95 und 1,44, d. h., es kam (in 6 Fällen) vor, daß der *Ferrerosche* Fehler größer als der des Netzes war.

Zuletzt kann man über die Gestaltung der Gewichte kurz folgendes sagen. In einem aus 25 Kleindreiecken (aus lauter gleichseitigen Dreiecken) bestehenden schematischen Netz wäre das Gewicht der abgeleiteten drei Winkel des Großdreiecks im Falle von Ausgleichung nach Richtungen gleichermaßen 1,308. Aus der geprüften Dreiecksgruppe die von 23—26 Dreiecken aufgebauten ausgewählt, ändern sich demgegenüber die Gewichte von 0,593 bis 1,462, und es kommt auch innerhalb desselben Dreiecks ein Gewicht von 1,462 entgegen dem von 0,755 vor. In den beiden aus nur 20 Dreiecken bestehenden Gruppen schwanken die Gewichte von 0,687 bis 1,094, in der größten (aus 50 Dreiecken bestehenden) Gruppe aber von 1,350 bis 1,450. Schließlich war der größte Gewichtswert 1,606, der kleinste 0,593.

All dies zeigt, daß das Gewicht des abgeleiteten Winkels nicht unbedingt größer als das des unmittelbar gemessenen ist (dies ist der Fall in 18 der 60 Winkel der untersuchten 20 Dreiecksgruppen). GÖHLER meint, daß sich der für den abgeleiteten Winkel bestehende Vorteil auf Gebieten von größerer als 100 m-Reliefenergie ausgleicht bzw. entfällt. Unsererseits können wir hier dazu noch bemerken — besonders den Aufbau der Dreiecksgruppen von GÖHLER in Betracht gezogen —, daß es richtig war, die Dreiecksgruppen unseres Füllnetzes so zu gestalten, daß der Scheitel des abgeleiteten Dreiecks (d. h. der dominierende Punkt) in das innere je eines Zentralsystems falle, auch dann, wenn dadurch die Überlappung der Dreiecksgruppen verursacht wird und wir gegen die Unabhängigkeit der in die Ausgleichung einbezogenen Werte verstoßen. Durch diese Methode wird nämlich verhindert, daß der ungünstige Anschluß zum dominierenden Punkt das Gewicht des abgeleiteten Winkels unter 1 herabsetze.

Am Ende seiner Arbeit macht GÖHLER noch einige auf die Wirtschaftlichkeit bezogene Bemerkungen, und stellt unter seinen Schlußfolgerungen fest:

Die Genauigkeit der Winkel der aus einem Netz dritter Ordnung abgeleiteten übergeordneten Dreiecke von ca. 30 km-Seitenlängen ist beinahe immer größer, als wenn wir sie von unmittelbarer Beobachtung gewonnen hätten. Die durch die Ableitung gewonnene Genauigkeitssteigerung ist an den Terrainen am größten, deren Reliefenergie weniger als 50 m ist. Die Ableitung der Winkel von Dreiecken höherer Ordnung bedeutet die Steigerung sowohl der Genauigkeit als auch der Wirtschaftlichkeit. Demnach stellt GÖHLER in seinen Schlußworten fest: »Unter dem Aspekt der Rationalisierung geodätischer Arbeitsverfahren wird der Ableitung von Winkeln übergeordneter Netze nach wie vor die ihr gebührende Bedeutung beizumessen sein.«

Diese Feststellung wird deshalb für sehr wichtig gehalten, weil die Frage wiederholt aufgeworfen wurde (selbst GÖHLER warf sie im Vorwort seiner Studie auf), ob mit der Einführung der großen Rechenanlagen in der Geodäsie die Methode der Anwendung der fiktiven Meßergebnisse nicht die Bedeutung verloren hätte.

Diesbezüglich wiesen wir schon auch in den früheren auf die Bedeutung der Anlage von Rahmen sogar bei den modernen Methoden hin; zur Ergänzung von GÖHLERS Feststellung möchte ich noch einige Bemerkungen und Vorschläge der internationalen Fachliteratur erwähnen.

Es ist ziemlich bekannt, daß auch die polnischen Geodäten sich mit der Methode der aus den Kleindreiecken entwickelten fiktiven Dreiecke viel beschäftigten. In dieser Beziehung müssen die Arbeiten von BATKIEWICZ [16, 34], TATARKOWSKI [17] und HAUSBRANDT [18] erwähnt werden. Nach BATKIEWICZ nimmt der mittlere Fehler der abgeleiteten Seite mit der Zahl der in der Ableitung vorkommenden Kleindreiecks-Seiten linear zu, aber er kam aufgrund von Untersuchungen praktischer Netze auf die Folgerung, daß die Genauigkeit der zwischen den abgeleiteten Seiten eingeschlossenen Winkeln mit der Genauigkeit des unmittelbar gemessenen Wertes des durch Richtungen gleicher Länge eingeschlossenen Winkels übereinstimmt. HAUSBRANDT kam mit Hilfe der Analyse der Punktfehler auf eine ähnliche Folgerung, feststellend, daß der Lagefehler nur von der Länge der Ausgangsseite und von dem mittleren Fehler mit Einheitsgewicht der Winkelmessung abhängig ist, nicht aber davon, wieviel Dreiecke zwischen der Ausgangsseite und dem Punkt eingereiht worden sind.

Die polnischen Untersuchungen klärten aber nicht genügend die Frage der Ausgleichung des abgeleiteten (fiktiven) Netzes, und ihre Vorstellungen scheinen auch insofern schwerfällig zu sein, daß sie in sämtlichen Kleindreiecksgruppen Grundlinien messen wollten. Jedenfalls befürwortet KLUSS [38] in einer neuen Studie grundsätzlich das *Hazay—Tárczy-Hornochsche* Anlegen der kontinentalen Netze, als er empfiehlt, ein aus Dreiecken mit 300 km Seitenlängen bestehendes Dreiecksnetz als abgeleitetes (fiktives) Netz herzustellen.

Sehr bemerkenswert ist für den ausländischen Anklang des Prinzips von HAZAY—TÁRCZY-HORNOCH—REGŐCZI auch die Arbeit [39] des Bulgaren GREGOWS, wobei er sich auch im Titel auf REGŐCZIS Name bezieht.

Schließlich möchten wir auf die von uns bekannte neueste, auf die im Jahre 1968 erschienene Arbeit SUDAKOVS als den Beweis der Lebensfähigkeit der abgeleiteten Netze hinweisen [44]. SUDAKOV untersuchte die Frage des geodätischen Landesgrundnetzes hinsichtlich der Verhältnisse der Sowjetunion. Sein Problem könnte kurz so zusammengefaßt werden, wie die Eingliederung der Füllnetzblöcke (von ihm Netzblöcke zweiter Ordnung genannt) in die astrogeodätischen Netzketten vollführt werden kann, damit die Verzerrungen der Ketten die Qualität des Netzes zweiter Ordnung nur im geringen Maße verschlechtern. Die Lösung der Frage besteht nach SUDAKOV darin, daß man von den Füllnetzen möglichst große Blöcke ausgestaltet und zur Bestimmung der Lage und der Orientierung des Füllnetz-Blockes eine möglichst geringe Zahl von den an der Grenzlinie der benachbarten Blöcke gelegenen, an verläßlichsten bestimmten Punkten des astrogeodätischen Netzes angewendet wird. Da so — nach den weiteren Erörterungen SUDAKOVS — die Blöcke des Netzes zweiter Ordnung (des Füllnetzes) auch aus mehreren Tausend Punkten bestehen können, ist es vorteilhaft, auf ein sog. abgeleitetes langseitiges Dreiecksnetz schon vorher überzugehen. »Ein solches Lösungsschema

— sagt er — wurde von den ungarischen Geodäten relativ ausführlich ausgearbeitet. Dieses Schema ist auch in der Praxis kontrolliert worden.« Danach bespricht SUDAKOV kurz REGŐCZIS Methode und schlägt interessanterweise für die Steigerung der Genauigkeit der Großdreiecke die auch bei uns angewendete Methode vor: die Scheitel der Großdreiecke seien nicht irgendein Randpunkt der Kleindreiecksgruppen, sondern durch die Ausdehnung der Gruppe der Kleindreiecke sollen die Scheitel in je ein zentrales System fallen. Über die so hervortretende Abhängigkeitsfrage ist er folgender Meinung: »Dieser Widerspruch (d. h. die Abhängigkeit der benachbarten fiktiven Dreiecke) ist gewissermaßen nur in dem Falle gültig, wenn die abgeleiteten Dreiecke bestimmenden Gruppen nicht groß sind. In einem System von Dreiecken bedeutender Zahl verringert sich die Bedeutung dieser Tatsache nur so wenig, daß man darüber als von einem ernsten Faktor kaum reden kann.« Was die Verläßlichkeit der abgeleiteten Winkel betrifft, ist SUDAKOVS Meinung, sich an PROVOROV beziehend, daß deren mittlerer Fehler cca. $\pm 0{,}6''$ sein wird, wenn der mittlere Fehler der Winkelmessungen des Netzes zweiter Ordnung (des Füllnetzes) $\pm 0{,}9''$ beträgt, d. h., das Verhältnis 2 : 3 ist. Es ist selbstverständlich, daß SUDAKOV die im Gebiet gelegenen Grundlinien und Laplace-Punkte in die Ausgleichung des abgeleiteten Netzes einbeziehen und die ganze Ausgleichung mit Rechenanlagen durchführen lassen will.

Die Vorschläge SUDAKOVS fanden einen interessanten Anklang in der rumänischen Fachliteratur [45]. Mit der von einer Arbeitsgruppe stammenden Publikation muß man sich an dieser Stelle unbedingt befassen — obwohl sie erst nach dem Abschluß unserer in der ungarischen Literatur erschienenen [46] Zusammenstellung uns erreichte und noch fortgesetzt wird —, da ihre Feststellungen den Schlußfolgerungen der in den früheren zitierten zahlreichen Arbeiten widersprechen, und unserer Meinung nach auf unrichtige Zusammenhänge bzw. auf Mißverständnisse basiert sind. Es ist wahrscheinlich, daß die Verfasser nicht die vollständige, das Problem erörternde Literatur kennen; darauf kann man aus ihrem Einführungssatz schließen, wonach keine Meinung über die vorgeschlagene Methode seitens des Fachgebietes nach der Veröffentlichung des *Regőczischen* Artikels geäußert wurde. Die in den vorherigen zitierten ausländischen Untersuchungen, von denen als erste die aus dem Jahre 1955 stammende TÖPFERsche [14] erwähnt und deren Reihe mit der GÖHLERschen vom Jahre 1968 abgeschlossen werden kann, zeigen eher die Kontinuität der Analysen. Daher sollen an Stelle der weiteren Widerlegung eher die meritorischen Feststellungen geprüft werden. Sie werden in der Studie, wie folgt, zusammengefaßt:

— die Genauigkeit der abgeleiteten Winkel ist immer geringer als die der Winkel des unmittelbar gemessenen Netzes,

— daher kann REGŐCZIS Methode zur Herstellung eines den jetzigen Vorschriften entsprechenden Netzes nicht angewendet werden,

— bei gewissen Voraussetzungen kann sie aber in Betracht gezogen werden.

Die erwähnte gewisse Voraussetzung folgt aus dem von den Verfassern abgeleiteten Zusammenhang, der eine Beziehung zwischen dem mittleren Fehler der Winkel des unmittelbar gemessenen und dem der Winkel des abgeleiteten Dreiecks feststellt. Dies besagt kurz, daß nach der Zahl n der an der an einer Seite des abgeleiteten Dreiecks gelegenen Kleindreiecksseiten der mittlere Fehler des abgeleiteten Winkels das 1,3—1,7-fache des mittleren Fehlers des unmittelbar gemessenen Winkels beträgt; wird gewährleistet, daß der bei den Winkelmessungen der Kleindreiecke erzielte mittlere Fehler das 0,6—0,8-fache des Wertes ist, der sich bei der unmittelbaren Messung der Großdreiecke ergeben würde, so werden die abgeleiteten Dreiecke wenigstens nicht schlechter als die unmittelbar gemessenen sein.

Der Gedankengang, wie die Verfasser zu dieser Folgerung kamen, ist ziemlich überraschend. Sie gingen von einer Formel ARNOLDs aus, die in seiner das Problem der Genauigkeit der streckenmessende Triangulation erörternden Dissertation veröffentlicht wurde. Die Formel gibt im Falle eines einzigen allein stehenden gleichseitigen Dreiecks einen Zusammenhang zwischen dem relativen Längenmeßfehler der gemessenen Seitenlängen und dem mittleren Fehler der aus den Seitenlängen berechneten Winkel des Dreiecks. Den relativen Fehler der Messung der Seitenlängen mit m_1, den des abgeleiteten Winkels mit μ_0'' bezeichnet, ist

$$m_1 = \frac{\mu_0''}{\varrho'' \sqrt{2}}$$

Es ist ganz selbstverständlich, meinen die Verfasser, daß man von den Seitenlängen wenigstens den gleichen relativen Fehler auch in dem Falle erfordert, wenn die Dreiecksseiten von den Winkeln der Kleindreiecke mit dem mittleren Fehler μ'' abgeleitet wurden. Für den Zusammenhang der abgeleiteten Seitenlänge und des mittleren Fehlers μ'' der Winkelmessung bedienen sie sich der STOLYPINschen [36] Formel, wonach

$$m_2 = \frac{\mu''}{3\varrho''} \sqrt{\frac{n(2n-1)}{n-1}}$$

ist, wo jetzt n die Zahl der an der Großdreiecksseite gelegenen Punkte bezeichnet, d. h., eine Seite des Großdreieckes aus $(n - 1)$ Kleindreiecksseiten besteht.

Die rechten Seiten der beiden Formeln miteinander gleichgestellt, ergibt sich in dem am häufigsten vorkommenden Fall $n = 5$ (d. h., wenn die 30 km-Seite des Großdreiecks aus vier Kleindreiecksseiten von ca. 7,5 km zusammengesetzt wird, das Großdreieck wird also von 16 Kleindreiecken bedeckt) der früher erwähnte hier genau den Wert 1,6 betragende Multiplikator, d. h., es ist

$$\mu_0'' = 1{,}6\,\mu'' .$$

Die Zusammenhänge können auch so formuliert werden, daß im Falle $n = 5$

$$m_1 = 0{,}35 \cdot 10^{-5}\,\mu_0''$$

und

$$m_2 = 0{,}56 \cdot 10^{-5}\,\mu''$$

sind, und das Verhältnis $m_2 : m_1$ 1,6 beträgt.

Es ist vor allem absolut falsch, daß die m_1-Formel einer Messung und Ableitung vollkommen anderen Charakters hier angewendet wird, obwohl aus der Fachliteratur [47] der Zusammenhang zwischen dem mittleren Fehler der Dreiecksseite und dem mittleren Fehler der gemessenen Winkel wohl bekannt ist, der falls alle drei Winkel gemessen und auch ausgeglichen wurden, wie folgt, lautet:

$$m_1' = \frac{\mu_0''}{\varrho''}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Dies angewendet wird

$$m_1' = 0{,}41 \cdot 10^{-5}\,\mu_0'',$$

woraus sich das Verhältnis $m_2 : m'$ bereits auf 1,36 verringert.

Es kann auch nicht angenommen werden, daß die Verfasser bei der Ableitung der Seitenlänge die offensichtlich für die Ketten bestimmte Formel von STOLYPIN anwenden, während die Ableitung auf dem Netz der die Fläche des Großdreiecks bedeckenden Kleindreiecke beruht. Wir bestreiten nicht die Richtigkeit der STOLYPINschen Formel, es sei aber bemerkt, daß die Frage der Verläßlichkeit der von der Kette abgeleiteten Seitenlänge in Zusammenhang mit der Grundlinienentwicklung aus der Fachliteratur [48] ebenfalls wohlbekannt ist, und es ist auch offenbar, daß der relative Fehler der abgeleiteten Seite auch davon abhängig ist, ob sich die Ausgangsseite der Kette am Ende oder in der Mitte der Kette befindet. Hier stehen wir zwar dem speziellen Fall gegenüber, wo garkeine Ausgangsseite vorhanden ist, da nicht der relative Fehler der abgeleiteten Seitenlänge, sondern der mittlere Fehler der abgeleiteten Winkel von sämtlichen bisherigen Untersuchungen analysiert wurde; doch wollen wir bei der Methode der Verfasser ausharren, es soll aber auch jener Fall geprüft werden, wenn sich die Ausgangsseite in der Mitte und nicht am Ende der Kette befindet, wie dies auch aufgrund der Abbildung der erwähnten Arbeit feststellbar ist. So ist nämlich

$$m_2' = \frac{\mu''}{\varrho''}\sqrt{\frac{N^2+3N-4}{9N}},$$

wo nun $N = (n - 1)$, die Zahl der in der abgeleiteten Seite gelegenen Kleindreiecksseiten ist. So ist im Falle $N = 4$ (dies entspricht der Annahme $n = 5$ der Verfasser)

$$m_2' = 0{,}41 \cdot 10^{-5}$$

d. h., jetzt beträgt das Verhältnis $m_2' : m_1'$ 1,00, es besteht also keine Differenz zwischen dem relativen Fehler der Seitenlänge des abgeleiteten und des unmittelbar gemessenen Dreiecks. Es soll aber irgendein mittlerer Wert angenommen werden, es sei z. B.

$$m_2'' = 0{,}5 \cdot 10^{-5} \mu'' ,$$

in welchem Falle die Schlußfolgerung der Verfasser so modifiziert wird, daß die Meßgenauigkeit der Kleindreiecke ungefähr um 20% größer sein muß als die in den Großdreiecken erzielbare Meßgenauigkeit.

Hier können wir eigentlich gleich darauf hinweisen, daß gemäß der ersten Schätzung REGŐCZIS der *Ferrerosche* mittlere Fehler der Dreiecke mit 8 km Seitenlänge wesentlich kleiner als der der 30 km-Dreiecke ist, der 20%-ige Nachteil kann also weitgehend ausgeglichen werden. Es ist auch bekannt, daß GÖHLER in seiner Dissertation [41] sowohl theoretisch als auch an praktischen Beispielen bewiesen hat, daß die Verläßlichkeit der Richtungsmessung ein gewisses, von den äußeren Umständen abhängiges Maximum haben kann, die Ausgleichung kann also auch vorausgesehen werden. Unsererseits wäre es aber falsch sich darauf zu berufen, wenn bekannt ist, daß unsere auf die Kleindreiecke bezogenen Messungen diese Erwartung nicht erfüllt haben, und wie dies in dem vorherigen wiederholt zitiert wurde, der *Ferrerosche* mittlere Fehler der Kleindreiecke den Wert $\pm 0{,}63''$ erreichte, während der *Ferrerosche* Fehler der Dreiecke der Triangulations-Ketten erster Ordnung $\pm 0{,}46''$ betrug. Der Grund hierfür kann — sich auf GÖHLER berufend — in dem Umstand gesucht werden, daß von transdanubischen Messungen, d. h. von bergig-hügeligem Gebiet die Rede ist, an welchem die Verringerung der Verläßlichkeit der Richtungsmessung der größeren Relief-Energie entsprechend mit der Länge der Richtung nicht ausgedrückt ist und sogar einen entgegengesetzten Charakter haben kann.

Es ist daher reeller, die Aufmerksamkeit auf den Umstand hinzulenken, daß die Ableitung nicht durch eine Kette, sondern mit Hilfe eines aus 16—25 (ev. mehr) Dreiecken bestehenden Netzes erfolgt, in welchem die Fehlerfortpflanzung offensichtlich anderen Zusammenhängen folgt. Sie sind in den Arbeiten [14, 18, 20, 22, 25, 41] auffindbar, worauf wir die Verfasser aufmerksam machen möchten. Es sollen höchstens aus GÖHLERS Dissertation [41] die folgenden Formeln herausgegriffen werden:

$$\mu_0 = \mu'' \sqrt{Q} ,$$

$$\mu_0 = \mu'' \sqrt{\frac{2}{3}} ,$$

wo μ_0 der mittlere Fehler des abgeleiteten, μ'' der des unmittelbar gemessenen Winkels ist, und die erste Formel sich auf den Fall bezieht, wenn die Ausgleichung nach Richtungen, die zweite auf den Fall, wenn sie nach Winkeln durchgeführt wird. Im ersten Fall ist der Gewichtskoeffizient Q vom vorherigen Wert ($n - 1$) abhängig, und im Falle von $n = 5$ ist er mit dem Wert 0,800, im zweiten Fall aber mit dem Wert 0,667 konstant. Demnach sind die von den unmittelbar gemessenen Winkeln abgeleiteten um 12—22% besser als die gemessenen Winkel.

Hier stoßen wir auf einen scheinbaren Widerspruch, daß der *Ferrerosche* Fehler unserer abgeleiteten Großdreiecke sich wesentlich besser ($\pm 0{,}316''$) als dieses Verhältnis ergab, was unter anderen auch damit erklärt werden kann, daß zur Ableitung der Winkel (wie dies auch von SUDAKOV empfohlen wurde) auch die um die Eckpunkte gelegenen und aus den Großdreiecken schon herauslangenden Dreiecke einbezogen wurden; so verstoßen wir zwar gegen das Prinzip der Unabhängigkeit, aber wir können uns in dieser Hinsicht wieder auf SUDAKOVs bereits erwähnte Feststellung beziehen. Für alle Fälle ist es offensichtlich und das unbezweifelbare Ergebnis der vollbrachten Arbeit, daß der *Ferrerosche* mittlere Fehler der Winkel der abgeleiteten Dreiecke bedeutend besser ist, als jener, der aufgrund theoretischer Zusammenhänge — so z. B. laut den beiden letzten Formeln — zu erwarten wäre.

Dies muß deshalb betont werden, weil man dessen bewußt zwei weitere Mißverständnisse der Verfasser der Arbeit [45] klären kann. Einerseits wird betont, daß der gewonnene ($\pm 0{,}316''$) mittlere Fehler auch deshalb nicht als reelle Meßzahl der Genauigkeit betrachtet werden kann, weil dies nicht im Einklang mit dem Umstand steht, daß im transdanubischen Füllnetz ein solcher dominierender Punkt vorkam, wo der mit abgeleiteten Winkeln gebildeter Horizontschlußfehler den Wert 3,17″ erreichte. Dies könnte nämlich (den mittleren Fehler $\pm 0{,}316$ angenommen) nach den Verfassern nur $\pm 1{,}896''$ sein. Wir wissen nicht, wie dieser Wert gewonnen wurde, da unserer Meinung nach der maximale Wert des Horizontabschlußfehlers bei dem üblichen Wahrscheinlichkeitsniveau — falls sich 6 Dreiecke an den Punkt anschließen —

$$\pm 3 \cdot 0{,}316 \sqrt{6} = \pm 2{,}322''$$

sein kann. Es kann nicht bestritten werden, daß auch dies wesentlich kleiner ist als der tatsächlich vorkommende maximale Wert; dies bedeutet aber nicht: daß der erwähnte *Ferrerosche* Fehler nicht charakteristisch sei, sondern weist darauf hin, daß die zur Ableitung der *Ferreroschen* Fehler benutzte Winkel schon das Ergebnis zweimaliger Ausgleichung sind, während diejenige, die die Horizontschlußfehler bestimmten, nur einmalig ausgeglichen sind.

Was die Frage betrifft, ob die *Ferreroschen* Fehler der abgeleiteten Dreiecke zur reellen Erwägung der Genauigkeit angenommen werden können, muß die Frage wie folgt gestellt werden: ist ein Netz mit 30 km Seitenlängen, das durch einen *Ferreroschen* Fehler von $\pm 0{,}462''$ charakterisiert werden kann, und ein anderes von gleicher Größe vorhanden, wofür dieser Wert — unabhängig von der Art der Entstehung — $\pm 0{,}316''$ ist, welches der beiden würde von den Verfassern der Studie [45] zur Bestimmung der Punkte eines Flächen-Triangulations-Netzes eher empfohlen, d. h., von welchem der beiden würden sie eine günstigere Punktbestimmung erwarten. Ich glaube, die Antwort unterliegt keinem Zweifel, damit aber kein Bedenken auftrete, sei es bemerkt, daß eben durch die Verteilung der Horizontschlußfehler die Abhängigkeit der Winkel der abgeleiteten Dreiecke überwiegend aufgelöst worden ist, daher kann bei der Ausgleichung die ursprüngliche Abhängigkeit nicht mehr stören (in dieser Beziehung berufen wir uns wieder auf SUDAKOVs Feststellung).

Das andere bereits erwähnte Mißverständnis der Verfasser ist die Behauptung, daß die Richtigkeit ihres Fehlermaßes (des Zusammenhanges $\mu''_0 = 1{,}6\,\mu''$) auch dadurch unterstrichen wird, daß der aus dem für rund $\pm 0{,}60''$ angenommenen Wert μ'' berechnete $\mu''_0 = \pm 0{,}96''$ in gutem Zusammenhang damit steht, daß ein Widerspruch sogar vom Wert 2,73″ beim Anschluß der Winkel des Füllnetzes zu den Randseiten des Kettenkranzes vorkam — wie es von REGŐCZI in [33] mitgeteilt wurde. Dieser Widerspruch kann nämlich laut den Verfassern mit diesem μ_0 den Wert 2,4″ erreichen. Wir können das Entstehen dieses Wertes wieder nicht verfolgen, da er unserer Meinung nach auch davon abhängt, von wieviel fiktiven Dreiecken vom Füllnetz her der durch die Randseiten des Kranzes gebildete Winkel besteht. Dies kann 2 oder aber auch 4 sein; einen Mittelwert von 3 angenommen, kann die maximale Abweichung nach den Verfassern durch eine einfache Fehlerfortpflanzung

$$\pm 3 \cdot 0{,}96 \sqrt{3} = \pm 5{,}0''$$

sein, während unserer Meinung nach

$$\pm 3 \cdot 0{,}316 \sqrt{3} = \pm 1{,}65''$$

ist. Unser Wert ist offensichtlich auch in diesem Falle beträchtlich geringer als der effektiv vorkommende Wert. Wir können wieder auf die früher schon erörterten hinweisen, man muß aber die Aufmerksamkeit auf einen noch wesentlicheren Umstand lenken. Bei dem Vergleich mit dem Anschlußwinkel darf nicht außer Acht gelassen werden, daß der Anschlußwinkel bereits durch den aus der Ausgleichung des Kettenkranzes herrührenden Zwang belastet ist, der Vergleich erfolgt also nicht mit solch einem fehlerfreien Wert wie der Wert von 360° bei der Berechnung des Horizontschlusses. Wir wissen aber von einer anderen Untersuchung — worauf hier nicht eingegangen werden kann —, daß die Ausgleichung unseres Kettenkranzes durch den Zwang des

·nternationalen Anschlusses an einigen Stellen leider beträchtlich verzerrt wurde.

Wir befaßten uns vielleicht ein wenig zu ausführlich mit der Analyse der neuesten, sich an unser Thema anknüpfenden Arbeit. Es konnten aber dadurch vielleicht eventuelle Mißverständnisse eliminiert werden, die durch die mit der Methode erzielten — manchmal dem Anschein nach widersprüchigen — Ergebnisse hervorgerufen werden können. So kann man wieder auf SUDAKOVs Studie [44] zurückkehren.

Als sich SUDAKOV im vorherigen darauf berief, daß *Regőczis Methode* auch praktisch kontrolliert wurde, dachte er ev. an jene — von ihm schon früher bekannte — Versuchsberechnung, welche im für den Kongreß der Internationalen Assoziation für Geodäsie (Luzern, 1967) fertiggestellten Bericht behandelt wurde [43]. Das wichtigste in dieser Versuchsberechnung ist, daß die 390 Punkte des transdanubischen Füllnetzes mit der Hilfe elektronischer Rechenanlagen gemeinsam als eine Einheit sich auf die inneren Punkte des Kettenrahmens stützend ausgeglichen wurden, und später die Koordinaten der in der fiktiven Ausgleichung als dominierende Punkte angewendeten 20 Punkte mit dem durch die gemeinsame Ausgleichung gewonnenen Koordinaten verglichen wurden. Das Maximum des aus den so bestimmten Koordinatendifferenzen berechneten Schlußfehlers (Punktfehlers) betrug 20,6 cm, sein Minimum aber 3,6 cm, der quadratische Mittelwert 12,9 cm. Dies bedeutet bei dem 30 km Abstand der dominierenden Punkte in der am ungünstigsten gelegenen Richtung eine Richtungsabweichung von 0,9″. In Betracht gezogen, daß der Meßfehler der 30 km-Richtung laut den Dreiecken erster Ordnung unserer Netze ung. $\pm 0{,}3''$ beträgt, kann der mit der Richtungsabweichung (aus den Koordinatenabweichungen herrührend) gleichwertige Fehler (das dreifache des mittleren Fehlers) auch in unmittelbarer Messung vorkommen. Hier ist aber von einer, dem Ergebnis von zwei, gewissermaßen größere mittlere Fehler ($\pm 0{,}44''$) benützenden Ausgleichungen (mit verschiedenem Grundprinzip) entstammenden Differenz die Rede. Die angegebenen Differenzen sind daher bezüglich der Qualität der Punktbestimmung außerordentlich beruhigend.

Wir meinen, mit diesen Feststellungen die Erörterung der mit der Untersuchung der Genauigkeit der bei uns 1953 eingeführten Methode zusammenhängenden Analysen abschließen zu können. Es folgt nämlich aus diesen Feststellungen, daß trotz der bedeutenden Entwicklung der Rechentechnik, vornehmlich trotz der allgemeinen Verbreitung der maschinellen Berechnung, die Methode noch immer zeitgemäß ist; bei der Ausführung, an die jetzigen Möglichkeiten angepaßt, kann sie an entsprechenden Stellen noch immer gute Dienste leisten.

SCRIFTTUM

1. Tárczy-Hornoch, A.: Beszámoló a felsőgeodézia terén folyó vizsgálatokról (Bericht über die Untersuchungen auf dem Gebiete der höheren Geodäsie). *MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl.* I (1951).
2. Regőczi, E.: Takarékos felsőrendű háromszögelés (Wirtschaftliche Präzisions-Triangulierung). *Földméréstani Közlemények*, 1951.
3. Tárczy-Hornoch, A.: Отчетный доклад о проводимых в области высшей геодезии исследованиях. *Acta Techn. Hung.* III. (1952).
4. Hazay, I.: Az országos és kontinentális háromszögelési hálózatok kiegyenlítéséről (Über die Ausgleichung der Landes- und kontinentalen Triangulationsnetze). *MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl.* VII (1952).
5. Regőczi, E.: Harmadrendű háromszögelési hálózatból levezetett elsőrendű hálózat (Ein aus Triangulationsnetz dritter Ordnung abgeleitetes Netz erster Ordnung). *MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl.* V (1952).
6. Regőczi, E.: Réseau primordial déduit d'un réseau trigonométrique de troisième ordre. *Acta Techn. Hung.* IV (1952).
7. Hazay, I.: Über Ausgleichung von Landestriangulierungsnetzen und kontinentalen Triangulierungsnetzen. *Acta Techn. Hung.* VI (1953).
8. Kick, W.: Ableitung des Dreiecksnetzes I. Ordnung aus dem der III. Ordnung. *Zeitschrift f. Vermessungswesen*, 1953.
9. Kick, W.: Bericht über im Gange befindliche Untersuchungen auf dem Gebiet der höheren Geodäsie in Ungarn. *Verm. Techn.* 1954.
10. Tárczy-Hornoch, A.: Ableitung des Dreiecksnetzes I. Ordnung aus dem der III. Ordnung. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 1954.
11. Regőczi, E.: Über das Ausfüllnetz des Kettenrahmens der Triangulation erster Ordnung in Ungarn. *Verm. Techn.* 1954.
12. Hőnyi, E.: A magyarországi új kitöltő háromszögelési hálózat kísérleti számításai (Versuchsberechnungen des neuen Triangulations-Füllnetzes in Ungarn). *Geod. és Kart.* 1955.
13. Hőnyi, E.: Versuchsberechnungen im neuen Ausfüllnetz der ungarischen Landestriangulation. *Verm. Techn.* 1955.
14. Töpfer, F.: Zur Ableitung großer Triangulationsdreiecke aus kleineren. *Verm. Techn.* 1955.
15. Schoeps, D.: Über die Genauigkeit eines mittelbar bestimmten Dreicksnetzes I. Ordnung. *Festschrift A. Buchholtz, Wiss. Zeitschr. d. Techn. Hochschule Dresden* 1955.
16. Batkiewicz, W.: Obliczenie sieci triangulacyjnej zbudowanej z trojkatow „wyliczeniowich" (Berechnung des aus abgeleiteten Dreiecken aufgebauten Triangulationsnetzes). *Goed. i Kart.* Warszawa, 1955.
17. Tatarkowski, J.: Nowe systemy triangulacji wypelniajacej (Neue Methode der Anwendung von Füllnetzen bei der Triangulation). *Przeglad Geodezijny*, Warszawa, 1955.
18. Hausbrandt, S.: Analiza porownawcza dokladnosci wielkotrojkatowich i malotrojkatowich sieci triangulacyjnych nawiazana do prac geodezyjnich w Polsce (Vergleichsuntersuchung der Genauigkeit von aus Groß- und Kleindreiecken bestehenden Triangulationsnetzen in Polen). *Prace Inst. Geod. i. Kart.* III. Warszawa 1955.
19. Thurn—Manteuffel—Töppler—Bahnert: Erste Polytechnische Tagung der Techn. Hochschule Dresden, 1956. *Verm. Techn.* 1956.
20. Schoeps, D.: Ein Beitrag zur Frage der Genauigkeit eines mittelbar bestimmten Dreiecksnetzes I. Ordnung. *Verm. Techn.* 1956.
21. Schoeps, D.: A közvetve mért elsőrendű háromszöghálózatok pontossága (Genauigkeit der mittelbar gemessenen Freiecksnetze I. Ordnung). *Geod. és Kart.* 1956.
22. Töpfer, F.: Ableitung von Winkeln übergeordneter Dreiecke aus Dreiecksnetzen. *Veröff. d. Geod. Inst. d. Techn. Hochschule Dresden* 1 (1956).
23. Hőnyi, E.: Eljárás kitöltő hálózatunk kiegyenlítésére (Verfahren zur Ausgleichung des ungarischen Füllnetzes). *Geod. és Kart.* 1957.
24. Tárczy-Hornoch, A.: Zur Ausgleichung der kontinentalen Triangulationsnetze. *Acta Techn. Hung.* XVI (1957).
25. Проворов, К. Л.: О построении сплошных сетей триангуляции. *Геодезиздат*, Москва, 1957.
26. Wolf, H.: Die Ausgleichung weltweiter Triangulationen. *Zeitschrift f. Vermessungswesen*, 1958.
27. Jordan—Eggert—Kneissl: Handbuch der Vermessungskunde, Stuttgart, 1958. IV/1 Bd. S. 602—610.

28. Tárczy-Hornoch, A.: A kontinentális hálózatok kiegyenlítéséről (Über die Ausgleichung der kontinentalen Triangulierungsnetze). *Geod. és Kart.* 1958.
29. Hőnyi, E.: A dunántúli új kitöltőhálózat szögméréseinek pontossága (Die Genauigkeit der Winkelmessungen des neuen transdanubischen Füllnetzes). *Geod. és Kart.* 1958.
30. Regőczi, E.: Tschunjali sen tja c lja kon zo zon so lun ta schin fan. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, Peking 1958.
31. Tárczy-Hornoch, A.: Weiteres zur Ausgleichung der kontinentalen Triangulierungsnetze. *Acta Techn. Hung.* XXIII. (1959).
32. Regőczi, E.: Die wissenschaftlichen und wirtschaftlichen Ergebnisse des ungarischen Triangulierungsverfahrens. *Acta Techn. Hung.* XXIII. (1959).
33. Регёци, Э.: Метод применённый при создании новой венгерской триангуляционной сети высшего класса. *Геодезия и Картография*, Москва, 1959.
34. Batkiewicz, W.: Berechnung eines aus abgeleiteten Dreiecken zusammengestellten Triangulationsnetzes. *Nachr. a. d. Karten- und Verm. wesen*, III. Frankfurt/M. 1959.
35. Hőnyi, E.: A dunántúli kitöltőhálózat fiktív elsőrendű hálózatának kiegyenlítése (Ausgleichung des fiktiven Netzes erster Ordnung des transdanubischen Füllnetzes). *Geod. és Kart.* 1960.
36. Столыпин, А. С.: Совместное уравнивание сплошной сети триангуляции 3 и 4 класса способом Регюци. *Геодезия и Картография*, Москва, 1963.
37. Stolypin, A. S.: Harmad- és negyedrendű homogén háromszögelési hálózat együttes kiegyenlítése Regőczi módszerével (Die gemeinsame Ausgleichung homogener Triangulierungsnetze dritter und vierter Ordnung mit der Regőczischen Methode). *Geod. és Kart.* 1964.
38. Kluss, T.: Wielkotrojkatowa siec zastepcza zbudowana z sieci malotrojkatovej (Aus Kleindreiecken abgeleitetes, aus Großdreiecken bestehendes Netz). *Prace Inst. Geod. i Kart.* Warszawa, 1965.
39. Грегов, Ц.: Вувездание на независимины фиктивны наблюдения при нацина на Регёци за изравнения на големи триангулицни. *Изв. Центр. Лабор. Геод.* София, 1965.
40. Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Hanseatische Verlagsantalt, Hamburg, 1965. Abschnitt 346.
41. Göhler, H.: Beitrag zur Genauigkeit abgeleiteter Richtungen und Winkel. *Diss. Arbeiten aus dem Vermessungs- und Kartenwesen DDR*, Leipzig, 1967. Bd. 14.
42. Göhler, H.: Beitrag zur Genauigkeit abgeleiteter Richtungen und Winkel. *Verm. Techn.* 1967.
43. Regőczi, E.: Geodetic Works in Hungary. *Acta Geodaet. Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung.* 2 (1967).
44. Судаков, Г. С.: К вопросу о главной геодезической основе страны. *Геодезия и Картография*, Москва, 1968.
45. Traistaru, G.—Turea, Gh.—Rotaru, M.: Cu privire la realizarea retelor de triangulatie prin metoda Regőczi. (Über dem Aufbau des Triangulationsnetzes mit der Regőczischen Methode). *Revista de Geodezie, Cadastru și Organizarea Teritoriului*, București, 1969.
46. Homoródi, L.: A levezetett szögekkel végzett háromszögelés pontosságának vizsgálatai (Untersuchungen der Genauigkeit der mit abgeleiteten Winkeln vollzogenen Triangulierung). *Geod. és Kart.* 1968.
47. Tardi, P.—Laclavere, G.: Traité de Géodésie, Paris, 1951. (v. Tome I. 292. p.)
48. Jordan—Egģert: Handbuch der Vermessungskunde, Stuttgart, 1948. (v.III/1. Bd. 192. p.)

EXAMINATION OF THE ACCURACY OF TRIANGULATION PERFORMED WITH DERIVED ANGLES

L. HOMORÓDI

SUMMARY

The author deals with the examinations of method published by I. Hazay and A. Tárczy-Hornoch [6] as well as by E. Regőczi [7]. The basis of the method is, that the filling network referring to the continental triangulation net, and triangulation chains could be developed with such fictive angles or directions, which are derived from the triangles existing on the ground. The side lengths of the triangles are shorter than the side lengths of the triangles

which will be developed. For instance, for the filling network referring to the first order triangulation net of the country, we set out triangles with side lengths of 6—7 km. Then we selected so-called "dominant-points" with side lengths averaging 30 km. The angles of the triangles composed in such a way could be derived from the network-system of small-triangles existing in this area. Naturally, in a continental network-system the side lengths of control net would be 30 km, and the side lengths of fictive network could be 150—200 km. The adjustment would be carried out in the directions (angles) derived in such a way. This remarkably reduces the calculation time in spite of the fact that after the adjustment of fictive network one must adjust the small-triangles supporting the dominant points. The measurement referring to the shorter side lengths yields significant saving in time and cost. Of course, the points of the network-system with small-triangles are not unnecessary. They form the basis of triangulation of a lower order.

This method was used in Hungary, establishing the filling network between 1953—58. It was investigated and discussed in different respects (see the publications [13, 14, 15, 19, 20, 22, 25, 30, 32, 36, 40, 42, 43]). All the investigations prove that the method — besides the economy — yields a higher accuracy than the traditional method.

Contrary opinion was mentioned only in [45], therefore the author dealt with that in detail and showed the conclusion there to be wrong at first because they checked the reliability of the deduced angles by a triangulation formula used for distance measuring while the problem is not connected anyway with distance measurings and on other hand, because they did not take in account the way of deduction which was done by connected surface-nets and not by chains while the formula they used concerns to the latter.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ТРИАНГУЛЯЦИИ, ПРОВЕДЕННОЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ УГЛОВ

Л. ХОМОРОДИ

РЕЗЮМЕ

Автор рассматривает исследования метода, разработанного профессорами Хазаи и Тарци-Хорнохом, а также профессором Э. Регёци и опубликанного в статьях [6] и [7]. Сущность этого метода следующая: сеть, заполняющая рамку, построенную из цепей континентальной или какой-нибудь государственной триангуляционной сети, может быть развиваема с помощью фиктивных углов или направлений, выведенных из треугольников, покрывающих территорию и имеющих длины сторон короче чем длины сторон развиваемой сети. То есть, например, в случае заполняющей рамку государственной сети первого класса сети развиваются и измеряются треугольники с длинами сторон в 6—7 км, затем выбираются расположенные друг от друга в среднем на 30 км т. н. господствующие пункты. Углы, построенные с помощью этих пунктов треугольников могут быть выведены из сети малых треугольников, попадающих на их территорию. В континентальной сети, естественно, стороны основной сети будут иметь длину 30 км, а стороны фиктивной сети могут достигать длины 150—200 км. Уравнивание происходит при помощи выведенных таким образом направлений (углов), что существенно уменьшает вычислительную работу, несмотря на то, что после уравнивания фиктивной сети необходимо уравновешивать малые треугольники на основании господствующих пунктов. Впрочем, измерение более коротких длин теугольников само дает существенную экономию как во времени, так и в затратах. Разумеется, что пункты сети малых треугольников не лишние, и служат основой для развития триангуляций более низких классов.

Этот метод применяли в 1953—58-ом годах для осуществления венгерских заполняющих сетей и с тех пор повторно обсудили и исследовали с разных точек зрения (смотри статьи 13, 14, 15, 19, 20, 22, 25, 30, 32, 36, 40, 42, 43). Во всех исследованиях сделано заключение, что этот метод—помимо его экономичности—даёт большую точность, чем традиционный.

Противоречивым мнением встретимся только в [45], которым именно поэтому автор занимался более подробно, указывая, что их вывод неправильный, в частности, потому, что надежность выведенных углов определялась по одной формуле трилатерации, хотя в данной проблеме даже и речи нет о линейном измерении, и в частности, ошибочный потому, что не учитывалось, что вывод сделан на основе сплошной поверхностной сети, а не цепи, к которой относится использованная ими формула.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung., Tomus 4 (3—4), pp. 451—458 (1969)

ABOUT THE DIRECT DETERMINATION OF THE ELEMENTS OF ROTATION MATRIX

J. SOMOGYI

CANDIDATE OF TECHN. SC.
GEODETICAL RESEARCH LABORATORY OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, SOPRON

[Manuscript received 19 December, 1968]

The paper deals with the direct determination of transformation coefficients. A simple derivation of the orthogonal matrix with the aid of algebraic substitution is given. Furthermore, it treats the solution of the three independent parameters which are needed for the computation of the coefficients.

Introduction

The importance of spatial transformation increased with practical photogrammetry. The scope of its employment is not limited only to the analytical aerotriangulation, as no provision is made on the plotting instruments for the base-in base-out interchange (e.g. Thompson-Watts plotter, Stereosimplex Model III, Kern PG 2, PG 3 etc.). The independent models performed with these kinds of plotters must be transformed in to a strip-system. Besides to avoid the errors for the sake of base interchange the so-called "semianalytical triangulation" is used with universal instruments.

As is well-known the spatial transformation is composed of three phases:

1. The translation of the coordinate-system
2. The scaling
3. The rotation of the coordinate-system.

From the point of view of mathematics the third phase is the most interesting one, as the coefficients of the three dimensional spatial rotation, which form an orthogonal matrix, are non-linear functions of three independent parameters. For this reason iteration is generally used to determine the rotation elements with the aid of linear equations derived from the transformation formulas by differentation. The iterative procedure needs much computations so the experts have dealt for many years with the possibility of determining the coefficients in a direct way. The mathematical solution of the task is known since a long time. To form coefficients as a function of independent parameters is an algebraical problem which had already drawn Euler's, Cayley's and Rodrigues' attention, too. They have given different methods to construct orthogonal matrices.

E. H. THOMPSON was the first, who called the photogrammeter's attention to the possibility for the direct determination of transformation coefficients [1]. However THOMPSON's derivation of orthogonal matrix which serves for direct determination of the coefficients is too complicated.

G. H. SCHUT derived this orthogonal matrix with the aid of matrix algebra and quaterion algebra [2, 3, 4] while J. KLAVER solved it with the help of vector algebra [5]. Practically the derived formulas are in conformity with the EULER-CAYLEY equation known from the mathematical literature [6].

Derivation of the orthogonal matrix

The method of the direct determination of transformation coefficients can be used very economically in practical photogrammetry. Thus, we assume that the elucidation of the problem in a simple algebraic way would not be without interest for the practice, the more so as the above-mentioned derivations require more comprehensive familiarity in mathematics.

In the following — starting out from D. A. KLEMPT's idea [7] — this formula will be derived by orthogonal algebraic substitution.

A linear substitution is orthogonal when the

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1}$$

condition is fulfilled, where X, Y, Z are the original values and x, y, z are the values introduced by substitution.

The transformation equation is:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2}$$

where:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

and since $\mathbf{R}$ is orthogonal

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{3}$$

and the condition (1) is fulfilled.

In case of three-dimensional space rotation, the number of the independent parameters is three and we will denote them with α, β and γ.

Let us introduce the following substitution:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

and

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Solving the equations (4) and (5) for v_1, v_2 and v_3 you obtain

$$\begin{aligned} Dv_1 &= XD_1 + YD_2 + ZD_3 \\ Dv_2 &= XD_4 + YD_5 + ZD_6 \\ Dv_3 &= XD_7 + YD_8 + ZD_9 \end{aligned} \tag{6}$$

as well as

$$\begin{aligned} Dv_1 &= xD_1 + yD_4 + zD_7 \\ Dv_2 &= xD_2 + yD_5 + zD_8 \\ Dv_3 &= xD_3 + yD_6 + zD_9 \end{aligned} \tag{7}$$

where

$$D = 1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \tag{8}$$

is the determinant of the equation-system and the values $D_1 \ldots D_9$ are the subdeterminants belonging to the unknowns.

$$\begin{aligned} D_1 &= 1 + \alpha^2 & D_4 &= \alpha\beta - \gamma & D_7 &= \alpha\gamma + \beta \\ D_2 &= \gamma + \alpha\beta & D_5 &= 1 + \beta^2 & D_8 &= \beta\gamma - \alpha \\ D_3 &= \alpha\gamma - \beta & D_6 &= \alpha + \beta\gamma & D_9 &= 1 + \gamma^2 \end{aligned} \tag{9}$$

Adding the right equations to the equation-systems (4) and (5) one can obtain the following equations:

$$\begin{aligned} 2\,v_1 &= X + x \\ 2\,v_2 &= Y + y \\ 2\,v_3 &= Z + z \end{aligned} \tag{10}$$

Substituting equations (10) into (7) after correct ordering we get the orthogonal matrix for direct determination of the coefficients.

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{2\,D_1 - D}{D}\,x + \frac{2D_4}{D}\,y + \frac{2D_7}{D}\,z \\
Y &= \frac{2D_2}{D}\,x + \frac{2D_5 - D}{D}\,y + \frac{2D_8}{D}\,z \\
Z &= \frac{2D_3}{D}\,x + \frac{2D_6}{D}\,y + \frac{2D_9 - D}{D}\,z
\end{aligned}
\tag{11}
$$

in the matrix notation

$$
\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

where after substitution the values of D (8,9) are:

$$
\mathbf{R} = \begin{bmatrix}
\dfrac{1+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} & \dfrac{2(\alpha\beta-\gamma)}{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} & \dfrac{2(\alpha\gamma+\beta)}{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \\[2ex]
\dfrac{2(\alpha\beta+\gamma)}{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} & \dfrac{1+\beta^2-\alpha^2-\gamma^2}{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} & \dfrac{2(\beta\gamma-\alpha)}{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \\[2ex]
\dfrac{2(\alpha\gamma-\beta)}{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} & \dfrac{2(\alpha+\beta\gamma)}{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} & \dfrac{1+\gamma^2-\alpha^2-\beta^2}{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}
\end{bmatrix}.
\tag{12}
$$

Determination of the independent parameters

To the calculation of coefficients $a_{11} \ldots a_{33}$ on the basis of (12) which are necessary for the solution, first, one has to determine the parameters α, β and γ. To connect two successive models we use the coordinates of the common projection center and the coordinates of points, which can be found in the common overlapping zone. As a strip system is selected the coordinate system of the first model corresponds with its own scale.

For the computation of the parameters the model coordinates must be reduced to a common origin and in addition the coordinates of the second model must be multiplied with the scale-factor. The coordinates reduced in this way will be denoted on the first model by X, Y and Z and on the second one with x, y and z.

On the base of (4) and (10) the following linear equations can be written for the calculation of values α, β and γ:

$$\begin{aligned} (X - x) &= \qquad\qquad\quad + (Z + z)\beta - (Y + y)\gamma \\ (Y - y) &= -(Z + z)\alpha \qquad\qquad\quad + (X + x)\gamma \\ (Z - z) &= \ \ (Y + y)\alpha - (X + x)\beta \end{aligned} \tag{13}$$

From equations (13) one can form the normal equations. The parameters should be solved from these.

For the solution of the three normal-equations either on a computer or on a desk-computer, DOOLITTLE's method [8] is very suitable.

Let the original normal-equation system be:

$$\begin{aligned} A_{11}\alpha + A_{12}\beta + A_{13}\gamma &= B_1 \\ A_{21}\alpha + A_{22}\beta + A_{23}\gamma &= B_2 \\ A_{31}\alpha + A_{32}\beta + A_{33}\gamma &= B_3 \end{aligned} \tag{14}$$

where

$A_{ij} =$ the coefficients of the unknowns $(A_{ij} = A_{ji})$

B_i = the clear numbers of the equations.

The reduced normal-equation system is:

$$\begin{aligned} A_{11}\alpha + A_{12}\beta + A_{13}\gamma &= B_1 \\ A'_{22}\beta + A'_{23}\gamma &= B'_2 \\ A'_{33}\gamma &= B'_3 \end{aligned} \tag{15}$$

The solution can be performed by the following simple algorithm:

$$\begin{aligned} A'_{22} &= A_{22} - \frac{A_{12}A_{12}}{A_{11}} \\ A'_{23} &= A_{23} - \frac{A_{12}A_{13}}{A_{11}} \\ B'_2 &= B_2 - \frac{A_{12}B_1}{A_{11}} \\ A'_{33} &= A_{33} - \frac{A_{13}A_{13}}{A_{11}} - \frac{A'_{23}A'_{23}}{A'_{22}} \\ B'_3 &= B_3 - \frac{A_{13}B_1}{A_{11}} - \frac{B'_2A'_{23}}{A'_{22}} \,. \end{aligned} \tag{16}$$

From which the unknowns:

$$\gamma = \frac{B_3'}{A_{33}'}$$

$$\beta = \frac{B_2' - A_{23}'\gamma}{A_{22}'} \tag{17}$$

$$\alpha = \frac{B_1 - A_{12}\beta - A_{13}\gamma}{A_{11}} .$$

After the substitution of the determined α, β and γ parameters in (12) we obtain the transformation coefficients $a_{11} \ldots a_{33}$. Further points of the second model determined with the aid of the coefficients in this way, can now be transformed into the system of the first model (strip-system).

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = m\mathbf{R}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} \tag{18}$$

where first the coordinates x, y, z must be reduced for x_i, y_i and z_i. (i indicates the origin of the common coordinate-system.)

Appendix

Finally the calculation will be shown in an example.

Measured coordinates (mm)

No.	Model 1			Model 2		
	X	Y	Z	x	y	z
P	183,00	500,40	800,02	423,09	500,42	800,02
1	181,53	749,31	402,84	423,78	766,61	379,80
2	223,76	279,16	393,28	465,59	267,41	367,23

The measured coordinates will be reduced for point 1 and the reduced coordinates of the second model will be multiplied with scale-factor m.

$$m = \sqrt{\frac{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} = 0{,}94220$$

No.	Reduced coordinates (mm)					
	Model 1			Model 2		
	X	Y	Z	x	y	z
2—1	42,23	—470,15	—9,56	39,39	—470,35	—11,84
P—1	1,47	—248,91	397,18	—0,65	—250,80	395,93

On the base of (13) the observation equations:

$$\begin{aligned}
& & -21{,}40\,\beta + 940{,}50\,\gamma &= 2{,}84\\
& & 793{,}11\,\beta + 499{,}71\,\gamma &= 2{,}12\\
21{,}40\,\alpha & & +\ 81{,}62\,\gamma &= 0{,}20\\
-\,793{,}11\,\alpha & & +\ 0{,}82\,\gamma &= 1{,}89\\
-\,940{,}50\,\alpha - 81{,}62\,\beta & & &= 2{,}28\\
-\,499{,}71\,\alpha - \ 0{,}82\,\beta & & &= 1{,}25
\end{aligned}$$

The coefficients of unknowns after the forming of normal-equations:

$A_{11} = 1\,763\,731{,}766$ $\quad A_{12} = A_{21} = 77173{,}372$
$A_{13} = A_{31} = 1\,096{,}3178$ $\quad B_1 = -4263{,}6754$
$A_{22} = 636\,143{,}929$ $\quad A_{23} = A_{32} = 376\,198{,}298$
$B_2 = 1433{,}4986$ $\quad A_{33} = 1\,140\,912{,}831$
$B_3 = 3748{,}279$

The reduced coefficients on the base of (16):

$A'_{22} = 632\,767{,}152$ $\quad A'_{23} = 376\,150{,}328$ $\quad B'_2 = 1620{,}0588$
$A'_{33} = 917\,308{,}463$ $\quad B'_3 = 2787{,}8804$

The sought for unknowns according to (17):

$$\alpha = -0{,}002\,452\,28$$
$$\beta = +0{,}000\,753\,62$$
$$\gamma = +0{,}003\,039\,20$$

Substituting the parameters α, β and γ into (12) we obtain the transformation coefficients:

$a_{11} = 0{,}999\,980\,38$ $\quad a_{21} = 0{,}006\,074\,60$ $\quad a_{31} = -0{,}001\,522\,12$
$a_{12} = 0{,}006\,082\,00$ $\quad a_{22} = 0{,}999\,969\,50$ $\quad a_{32} = -0{,}004\,899\,90$
$a_{13} = 0{,}001\,492\,32$ $\quad a_{23} = 0{,}004\,909\,06$ $\quad a_{33} = 0{,}999\,986\,84$

The points of the second model are transformed in the system according to the first model (strip-system) by equation (18).

REFERENCES

1. Thompson, E. H.: An Exact Linear Solution of the Problem of Absolute Orientation. *Photogrammetria*, 1958—59.
2. Schut, G. H.: Construction of Orthogonal Matrices and their Application in Analytical Photogrammetry. *Photogrammetria*, 1958—59.
3. Schut, G. H.: On Exact Linear Equations for the Computation of the Rotational Elements of Absolute Orientation. *Photogrammetria*, 1960—61.
4. Schut, G. H.: Formation of Strips from Independent Models. *Photogrammetric Engineering*, July 1968.
5. Klaver, J.: Semi Analytical Aerotriangulation with the Kern PG2. *Kern Publication*, 1967.
6. Mangoldt—Knopp: Einführung in die höhere Mathematik. S. Hirzel Verlag, Leipzig, 1955.
7. Klempt, D. A.: Lehrbuch zur Einführung in die moderne Algebra. Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1880.
8. Modern Computing Methods. Her Majesty's Stationery Office, London, 1961.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ ВРАЩЕНИЯ НЕПОСРЕДСТВЕННЫМ ПУТЁМ

Й. ШОМОДИ

РЕЗЮМЕ

Статья занимается непосредственным определением трансформационных коэффициентов. Зависимости выводятся с простой алгебраической подстановкой. Далее рассматривается исчисление трёх независимых параметров, необходимых к непосредственному определению коэффициентов.

Acta Geodaet., Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung. Tomus 4 (3—4), pp. 459—467 (1969)

ÜBER DEN GÜNSTIGSTEN SCHNITTWINKEL UND ÜBER DIE GENAUIGKEITSMASSE BEIM EINFACHEN VORWÄRTSEINSCHNITT

A. TÁRCZY-HORNOCH

MITGLIED DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

[Eingegangen am 24. März 1969]

Man ist bisher nicht einig, ob beim einfachen Vorwärtseinschnitt der Winkel 109° 28′, oder 120° am günstigsten ist. Es wird hier gezeigt, daß die Forderung sowohl nach dem kleinsten Flächeninhalt der Fußpunktskurve als auch nach dem kleinsten (linearen) und auch *Helmertschen* mittleren Punktfehler beim Vorwärtseinschnitt im gleichschenkligen Dreieck mit gleich genauen Winkelmessungen zum günstigsten Schnittwinkel 109° 28′ führt. Wird dagegen als Fehlermaß die *Möhlesche* Fehlerellipse bzw. der daraus sich ergebende flächenhafte mittlere Punktfehler gewählt, so ist für diese der Schnittwinkel 120° am günstigsten.

Die Größe des fehlertheoretisch günstigsten Schnittwinkels beim einfachen Vorwärtseinschnitt ist noch immer eine strittige Frage. Selbst unter der Voraussetzung, daß die gegebenen Punkte fehlerfrei und die Beobachtungen unkorreliert sind, finden wir verschiedene Feststellungen. Um nur einige zu nennen, nimmt JORDAN in seinem Handbuch [1; S. 110] bei gleich genauen Messungen und gleichschenkligem Dreieck schon vor mehr als 90 Jahren für den Winkel 109°28′ Stellung, WERKMEISTER dagegen [2; S. 411] 1920 für 120°. FRIEDRICH setzt sich noch 1927 entschieden für 90° ein [3; S. 33—34], während REISSMANN 1957 [4; S. 40 u. 51] den Winkel 90° ablehnt, es aber für unentschieden läßt, ob für das Minimum der Winkel 109°28′ oder 120° der richtige sei. Wir erhielten aus dem mittleren Punktfehler gleichfalls 1957 den Winkel 109°28′16″ [5; S. 405; hier blieb in den Sekunden ein Druckfehler zurück], und einen fast ähnlichen Wert in Neugrad umgerechnet gibt auch JORDAN—EGGERT—KNEISSL an [9; S. 491]. Dagegen nahm vor kurzem GRAFAREND wieder für 120° als den fehlertheoretisch günstigsten Schnittwinkel Stellung [6; S. 418]. Dieser Umstand veranlaßt uns, auf das Problem noch einmal zurückzukehren.

GRAFAREND hebt die Anschaulichkeit der *Reißmannschen* Gedankengänge, daß der Schnittwinkel 90° nicht der fehlertheoretisch günstigste ist, mit Recht hervor. Wir wollen dies mit einer wichtigen *Reißmannschen* Vermutung ergänzen. REISSMANN sagt bezüglich der zwei Schnittwinkel 109°28′ und 120° nämlich folgendes [4; S. 51]: »Das merkwürdigste hierbei ist aber, daß der günstigste Schnittwinkel für das Minimum der Ellipse nicht identisch ist mit dem für das Minimum des Punktfehlers. Dieser Unterschied könnte trotz aller in diesem Abschnitt nahezu erfüllten Forderungen darauf hindeuten, daß zumindest eines der beiden betrachteten Genauigkeitsmaße unzweckmäßig definiert ist.« Es ist in der Tat das Genauigkeitsmaß nach dem Ellipsenflächeninhalt ein flächenhaftes Fehlermaß, der mittlere Punktfehler dagegen ein lineares Fehlermaß. Lineare Fehlermaße sind andererseits die Radiusvektoren vom Mittelpunkt der Fußpunktskurve der mittleren Fehlerellipse, weshalb man den mittleren Punktfehler vorteilhafter mit dem Flächeninhalt der Fußpunktskurve und nicht mit dem der mittleren Fehlerellipse verbindet.

Es soll nun untersucht werden, ob das Minimum des Flächeninhaltes der Fußpunktskurve zu demselben Schnittwinkel führt wie das Minimum des *Helmertschen* mittleren Punktfehlerquadrates und so das des mittleren Punktfehlers.

Wir suchen zunächst den Radius des Kreises, dessen Flächeninhalt dem der Fußpunktskurve der mittleren Fehlerellipse entspricht. Dieser Flächeninhalt wurde in der Fachliteratur bereits angegeben. Wir finden einen Ausdruck hierfür 1933 bei G. Förstner [7; S. 30]. Leider ist dieser nur in dem unter [7] erwähnten Sonderdruck und nicht auch in der ursprünglichen Abhandlung »Ausgleichung von Polygonzügen« in der Zeitschrift für Vermessungswesen 1933 enthalten, so daß diese Beziehung nur sehr wenig bekannt wurde. Ganz unabhängig davon leitete 1956 Homoródi in seiner, die mittlere Fehlerellipse und deren Fußpunktskurve behandelnden gründlichen Studie [8; Gln. 29 u. ff.] die Beziehung für diesen Radius auch ab. Wir wollen die entsprechenden Zusammenhänge etwas anders erhalten. Da bekanntlich der Radiusvektor p vom Mittelpunkt der Fußpunktskurve mit dem Richtungswinkel φ den Wert

$$p = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \tag{1}$$

besitzt, wobei a die große und b die kleine Halbachse der Ellipse bedeuten, so wird das Viertel des Flächeninhaltes F_f der Fußpunktskurve bekanntlich (Vgl. [10; S. 315 u. 318]).

$$\begin{aligned} \frac{F_f}{4} &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} p^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} a^2 \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} b^2 \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{2}\varphi + \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi + \frac{b^2}{2}\varphi - \frac{b^2}{4}\sin 2\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{a^2\pi}{8} + \frac{b^2\pi}{8}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Wird der Radius r des Kreises gesucht, der mit der Fußpunktskurve den gleichen Flächeninhalt hat, so wird aus:

$$F_f = \frac{a^2\pi + b^2\pi}{2} = r^2\pi \tag{3}$$

nun:

$$r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}\,. \tag{3a}$$

Aus Gl. (3) folgt unmittelbar, daß der Flächeninhalt der Fußpunktskurve dem arithmetischen Mittel der Flächeninhalte der durch die große und kleine Halbachse als Radien bestimmten Kreise gleich ist. Weil aber der Flächeninhalt F_e der Ellipse

$$F_e = \pi ab \tag{4}$$

ist, so wird bei Einführung von

$$\begin{gathered} \Delta = a - b \\ F_e = \pi(b + \Delta)\, b = \pi(b^2 + b\Delta) \end{gathered} \tag{5}$$

und aus Gl. (3) der Flächeninhalt F_f der Fußpunktskurve:

$$F_f = \pi \frac{(b+\Delta)^2 + b^2}{2} = \pi \left(b^2 + b\Delta + \frac{\Delta^2}{2}\right). \tag{6}$$

Der Flächeninhalt der Fußpunktskurve ist mithin um $\pi\Delta^2/2$ größer als der der Ellipse, wobei Δ die Differenz der großen und kleinen Halbachsen bedeutet. Folglich: *Der Unterschied der Flächeninhalte der Fußpunktskurve und der Ellipse nimmt mit dem Quadrate des Unterschiedes der beiden Halbachsen zu.*

Es wird mithin das Verhältnis Q des Zuwachses $\pi\Delta^2/2$ zum Flächeninhalt der Ellipse:

$$Q = \frac{0{,}5\,\Delta^2}{b^2 + b\Delta} \quad \text{bzw.} \quad \Delta^2 - 2\,Qb\Delta - 2\,Qb^2 = 0\,. \tag{7}$$

Daraus kann für einen nicht zu überschreitenden Quotienten, z. B. für 0,05 (d. h. 5%) die noch zulässige Differenz Δ der beiden Halbachsen aus der Beziehung:

$$\Delta = \frac{2\,Qb \pm \sqrt{4\,Q^2\,b^2 + 8\,Q\,b^2}}{2} = b(\,Q \pm \sqrt{Q^2 + 2Q}) \cdot \tag{7a}$$

ermittelt werden. Für $Q = 0{,}05$ wird daraus $\Delta = 0{,}37\, b$ (ein negativer Wert Δ hat hier keinen Sinn).

Es sind weiters bekanntlich:

$$a^2 + b^2 = (a')^2 + (b')^2 = m_x^2 + m_y^2 = m_P^2 = R_l^2 \tag{8}$$

bzw.

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a')^2 + (b')^2} = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = \pm\, m_P = \pm\, R_l\,, \tag{8a}$$

wobei a' und b' die konjugierten Halbmesser der mittleren Fehlerellipse, m_x und m_y die mittleren Koordinatenfehler des vorwärtseingeschnittenen Punktes und

$m_P = R_l$ dessen (linearen) mittleren Punktfehler im *Helmertschen* Sinne bedeuten. Ein Vergleich der Gln. (3a) u. (8a) zeigt sofort, daß auch der Radius des dem Flächeninhalt der Fußpunktskurve entsprechenden Kreises und so auch der Kreisinhalt dann seinen kleinsten Wert annimmt, wenn das mittlere Punktfehlerquadrat zum Minimum wird. Folglich:

Die Forderung sowohl nach dem kleinsten Flächeninhalt der Fußpunktskurve als auch nach dem kleinsten (linearen) mittleren Punktfehler führt beim einfachen Vorwärtseinschnitt im gleichschenkligen Dreieck mit gleich genauen Winkelmessungen gleichermaßen zum gleichen günstigsten Schnittwinkel von 109°28′.

Es ist interessant, das Verhältnis der Größen der beiden Halbachsen beim Schnittwinkel $\gamma = 109°28'$ zu ermitteln. Aus:

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{a}{b} = \tan 54°\,44'\,08'' = 1{,}41421 = \sqrt{2}$$

folgt, daß in diesem Falle $a = b\sqrt{2}$ ist. Wir haben in einer früheren Studie [11] nachgewiesen, daß dieses Verhältnis der Halbachsen jene günstigen Fußpunktskurven liefert, bei denen die Einbuchtung der Fußpunktskurven eben verschwindet und man die Fußpunktskurve mit guter Näherung durch die Ellipse ersetzen kann. Der Quotient der Zusatzfläche zur Fläche der Fehlerellipse nach Gl. (7) beträgt hier 6%, während der größte prozentuelle Fehler in den Radiusvektoren nach [11] noch kleiner ist. Man sieht, daß der Schnittwinkel $\gamma = 109°28'$ beim Schnitt zweier Vorwärtsstrahlen auch eine in dieser Beziehung wichtige Eigenschaft der Fußpunktskurve sichert. Man könnte allerdings meinen, daß mit Rücksicht darauf, daß bei noch kleineren Unterschieden der Halbachsen die Unterschiede zwischen Fußpunktskurve und Fehlerellipse noch kleiner werden, ein 90° näher liegender Winkel noch günstiger sein könnte. Mit der Verkleinerung von γ vergrößern sich aber die von den gegebenen Punkten zum Neupunkt führenden Seiten und so auch die Wirkungen der in den gegebenen Punkten begangenen Winkelfehler im Neupunkt. Bei dem durch verschiedene Bedingungen erhaltenen Schnittwinkel 109°44′ entsteht mithin ein mehrfaches Optimum.

Es soll noch etwas über den mittleren Punktfehler, über die Fußpunktskurve der mittleren Fehlerellipse und über die *Möhlesche* Fehlerellipse gesagt werden.

Auf die ausgedehnte Literatur dieses Problems hinweisend (u. a. [3, 4, 11—17]) soll teilweise als Ergänzung zu [5; S. 402—404] noch folgendes bemerkt werden. Es sei ein Theodolit gegeben, dessen untere Zentrierspitze im Verhältnis zur Stehachse eine Exzentrizität R besitzt. Bei den wiederholten Zentrierungen bilden somit die Stehachsenlagen einen Kreis mit dem Radius R (Abb. 1). Wie groß ist nun die mittlere Größe r, die in den einzelnen

Richtungsmessungen wirksam ist? Nicht R, da dieser Wert nur in den Grenzfällen auftritt, wo die Exzentrizität R normal zur Richtung steht. Liegt R in der Richtung, so ist sein Einfluß Null. Die die Richtungen beeinflussende mittlere Größe r wurde schon vor 60 Jahren von REEH [18; S. 43] in

$$r = \frac{R}{\sqrt{2}} \qquad \text{bzw.} \qquad R = r\sqrt{2} \tag{9}$$

angegeben. Hat nun die Zentrierspitze keine Exzentrizität, aber man begeht bei den Zentrierungen Exzentrizitätsfehler, so haben letztere zufälligen Charakter und in deren quadratischem Mittel erhalten wir das Quadrat der mitt-

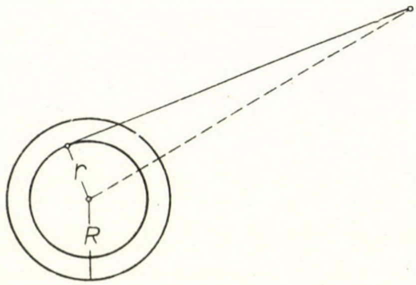


Abb. 1

leren Exzentrizität E und deren Kreis, ferner ebenso wie früher, die für die Richtungsmessungen maßgeblichen richtungsgebundenen mittleren Exzentrizitätsfehler E_r:

$$E = E_r\sqrt{2} \quad \text{bzw.} \quad E_r = \frac{E}{\sqrt{2}}. \tag{10}$$

Beide Kreise haben einen Sinn. Ersterer entspricht, wenn wir die Exzentrizitäten als Fehler betrachten, definitionsgemäß dem (linearen) mittleren Punktfehler R_l nach HELMERT, letzterer dem Radius r der zum Kreis entarteten Fußpunktskurve der mittleren Fehlerellipse.

Wenn die Exzentrizitätsfehler nicht durch Aufstellung, sondern dadurch entstehen, daß der Neupunkt durch wiederholte Vorwärtseinschneiden bestimmt wird, so gruppieren sich diese Punkte um den richtigen Wert. MÖHLE hat nun gezeigt [12], daß diese Punkte mit der Wahrscheinlichkeit 0,63 innerhalb der Ellipse fallen, deren Halbachsen $a\sqrt{2}$ und $b\sqrt{2}$ sind, wobei a und b die Halbachsen der *Helmertschen* Fehlerellipse bedeuten, während die Radiusvektoren vom Mittelpunkt der Fußpunktskurve der *Helmertschen* Fehlerellipse die richtungsgebundenen mittleren Fehler des Punktes in den einzelnen Richtungen angeben.

Die *Möhlesche* Fehlerellipse als flächenhaftes Fehlermaß hat den Nachteil, daß sie die in den einzelnen Richtungen zu erwartenden mittleren Fehler des Punktes nicht angibt, wie darauf schon HÖPCKE [16; S. 89] hingewiesen hat. Weil sie als flächenhaftes Fehlermaß gilt (die Fläche der *Helmertschen* Fehlerellipse schon bei WERKMEISTER [2; S. 408—411] 1920), so kann auch sie durch eine Kreisfläche mit dem gleichen Flächeninhalt ersetzt werden, deren Radius mit R_{fl} bezeichnet werde. Es wird mithin:

$$R_{fl}^2 \pi = \pi a \sqrt{2} \cdot b \sqrt{2} = 2 \pi ab = 2 \pi a' b' \sin \gamma$$

und daraus:

$$R_{fl}^2 = 2\,ab \qquad \text{bzw.} \qquad R_{fl} = \sqrt{2\,ab} = \sqrt{2\,a' b' \sin \gamma} . \tag{11}$$

Letztere Größe ist aus dem flächenhaften Fehlermaß hergeleitet und allgemein kleiner als der *Helmertsche* mittlere Punktfehler. Denn es ist nach Gl. (8) u. Gl. (11)

$$R_e^2 - R_{fe}^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab = (a - b)^2 \geqq 0 .$$

Nur bei $a = b$ sind beide Werte R_{fl} und R_l gleich und zwar $a \sqrt{2}$ bzw. $b \sqrt{2}$. Wir können R_{fl} als den flächenhaften mittleren Punktfehler bezeichnen, während der *Helmertsche* mittlere Punktfehler — wie wir sahen — ein linearer mittlerer Punktfehler ist. Es werden in der Tat R_{fl} aus Flächen, R_l aus Abständen berechnet.

Sucht man nun das Minimum des flächenhaften mittleren Punktfehlers R_{fl} nach Gl. (11), so tritt dies — wie der Vergleich der Gln. (4) und (11) zeigt — genau bei demselben Schnittwinkel auf wie beim Flächeninhalt der Fehlerellipse, nämlich bei 120°, wie dies von der Fehlerellipse WERKMEISTER bereits 1920 feststellte [2; S. 411]. *Mit dem Flächeninhalt der Möhleschen Fehlerellipse steht folglich der nach Gl. (11) berechenbare Radius, also der flächenhafte mittlere Punktfehler im Einklang, während die Fußpunktskurve zum Helmertschen linearen mittleren Punktfehler führt.* Allerdings zum $1/\sqrt{2}$-ten Teil, weil die Radiusvektoren der Fußpunktskurve vom Mittelpunkt richtungsgebunden sind und deshalb der an Richtung nicht gebundene lineare mittlere Punktfehler nach Gl. (10) $\sqrt{2}$ mal größer ist. Beim flächenhaften Fehlermaß mangels richtungsgebundener Größen entfällt diese Unterscheidung.

Es ist nicht uninteressant, die Verhältnisse der beiden Halbachsen bei den verschiedenen, für günstig gehaltenen Schnittwinkeln anzugeben:

Bei $\gamma = 90° : \; a = b\sqrt{1}$; bei $\gamma = 109° 28' : \; a = b\sqrt{2}$;

bei $\gamma = 120° : \; a = b\sqrt{3}$.

Der Schnittwinkel von 90° kann nach unserem heutigen Wissen nur bei einfacher Punktbestimmung mit solchen elektronischen Entfernungsmessungen als der günstigste angesehen werden, bei der die mittleren Längenfehler als von der Größe der Entfernung unabhängig angenommen werden können. Welcher von den beiden letzten Schnittwinkeln beim Vorwärtseinschnitt der günstigere ist, darüber wurde bereits, ohne dies abgeschlossen zu haben, viel diskutiert. Der günstigste Schnittwinkel hängt hier davon ab, welches Fehlermaß man für das bessere hält.

Wir selbst sind der Meinung, daß zur Angabe der in den einzelnen Richtungen zu erwartenden mittleren Fehler die Fußpunktskurve der *Helmertschen* Fehlerellipse, bzw. bei Erfüllung der Bedingung $a \lessapprox b\sqrt{2}$ mit entsprechender Genauigkeit auch die *Helmertsche* Fehlerellipse selbst am geeignetesten ist. Sucht man jene Kurve, innerhalb welcher der Punkt bei den gegebenen mittleren Fehlern mit 63%-iger Wahrscheinlichkeit fällt, so dient hierzu die *Möhlesche* Fehlerellipse. Will man die Genauigkeit eines Punktes nur mit einer Größe kennzeichnen, so gelangt man im ersten Falle zum richtungsgebundenen mittleren Punktfehler, bzw. zu dessen $\sqrt{2}$ fachen Wert, dem linearen mittleren Punktfehler, während man im zweiten Falle zur Kennzeichnung der Größe des Flächeninhaltes der *Möhleschen* Fehlerellipse den Radius des dem Flächeninhalt entsprechenden Kreises, den flächenhaften mittleren Punktfehler verwenden kann.

Es sei hier darauf hingewiesen, daß man mit Hilfe des *Mohrschen* Kreises auch aus den *Möhleschen* Fehlerellipsen die mittleren Fehlerquadrate in den einzelnen Richtungen konstruieren kann. Diesen benützte in [19] 1954 MILASOVSZKY, um die großen und kleinen Halbachsen der mittleren Fehlerellipse und die mittleren Fehlerquadrate in den einzelnen Richtungen anzugeben, erweiterte dies 1962 [20], und es wird in weiterentwickelter Form neuerdings von GRAFAREND [21; S. 162] vorgeschlagen. Für uns erscheinen aber die unmittelbar in den entsprechenden Richtungen dargestellten Größen als deutlicher als die durch die einzelnen Projektionen auf derselben Geraden erhaltene Punktreihe, die dazu noch die Quadrate der mittleren Fehler angibt, obwohl wir meist den mittleren Fehler selbst brauchen. Im übrigen läßt sich die Fußpunktskurve mit ihren Krümmungradien

$$\varrho_a = \frac{a^3}{2\,a^2 - b^2}$$

in den Endpunkten der großen, und

$$\varrho_b = \frac{b^3}{2\,b^2 - a^2}$$

in den Endpunkten der kleinen Halbachsen leicht zeichnen. (Vgl. [22].)

Mit den vorherigen verwandte Überlegungen gelten auch für die räumliche Punktgenauigkeit, auf die wir aber hier nicht näher eingehen wollen.

SCHRIFTTUM

1. JORDAN, W.: Handbuch der Vermessungskunde. Bd. I. 2. Aufl. 1877.
2. WERKMEISTER, P.: Über die Genauigkeit trigonometrischer Punktbestimmungen. *Zeitschr. f. Verm.* 1920. 401—412 u. 433—456.
3. FRIEDRICH, K.: Über Punktgenauigkeit. *Zeitschr. f. Verm.* 1927. 33—41 u. 65—79.
4. REISSMANN, G.: Genauigkeitsmaße bei der Punktbestimmung. *Veröff. d. Geod. Inst. d. Techn. Hochsch. Dresden*, Heft 2 (1957).
5. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Zur Berechnung der mittleren Fehlerellipse beim einfachen Vorwärtseinschnitt. *Zeitschr. f. Verm.* 1957. 395—412.
6. GRAFAREND, E.: Fehlertheoretisch günstigstes Einschneiden. *Zeitschr. f. Verm.* 1968. 414—419.
7. FÖRSTNER, G.: Ausgleichung und Genauigkeit von Polygonzügen im weitmaschigen Netz. 1933.
8. HOMORÓDI, L.: A hibaellipszis és a ponthiba (Die Fehlerellipse und der Punktfehler). *Geodézia és Kartográfia*, 1956, 5—16.
9. JORDAN—EGGERT—KNEISSL: Handbuch der Vermessungskunde Bd. II. 10. Aufl. 1963.
10. BRONSTEIN, J. N. und SEMENDJAJEW, K. A.: Taschenbuch der Mathematik. Leipzig, 1961.
11. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Über die Bedingungen der einbuchtungslosen Fußpunktskurven der mittleren Fehlerellipsen. *Allg. Verm. Nachr.* 1969. 233—238.
12. MÖHLE, A.: Die Definition des „mittleren Punktfehlers" und der „mittleren Fehlerellipse". *Zeitschr. f. Verm.* 1936. 593—603.
13. HÖPCKE, W.: Über die Ableitung der mittleren Fehlerellipse aus dem Fehlergesetz der Ebene. *Zeitschr. f. Verm.* 1937. 694—698.
14. MÖHLE, A.: Über die Definition der mittleren Fehlerellipse. *Zeitschr. f. Verm.* 1938. 627—631.
15. PINKWART: Zur Definition des mittleren Punktfehlers und der mittleren Fehlerellipse. *Zeitschr. f. Verm.* 1938. 5—14.
16. HÖPCKE, W.: Nochmals zur mittleren Fehlerellipse. *Zeitschr. f. Verm.* 1940. 88—89.
17. MÖHLE, A.: Zur Theorie der Genauigkeitsmaße in der Ebene. *Zeitschr. f. Verm.* 1941. 33—41.
18. REEH, R.: Kritik der Genauigkeit polygonometrischer Punkt- und Richtungsbestimmung. *Mitt. a. d. Markscheidew. Neue Folge H.* 10 (1908) 35—90.
19. MILASOVSZKY, B.: A hibaellipszis és talppontgörbéjének meghatározása szerkesztéssel (Die Fehlerellipse und die Bestimmung ihrer Fußpunktskurve durch Konstruktion). *Földméréstani Közlemények*, 1954. 151—159.
20. MILASOVSZKY, B.: The circle diagram substituting the error ellipse and its pedal curve. *Mitt. d. Techn. Univ. f. Schwerindustr.* Bd. XXII (1962), 93—124.
21. GRAFAREND, E.: Allgemeiner Fehlertensor bei a priori und a posteriori-Korrelationen. *Zeitschr. f. Verm.* 1967. 157—165.
22. TÁRCZY-HORNOCH, A.: Über die Konstruktion der zu den mittleren Fehlerellipsen gehörigen Fußpunktskurven. *Acta Geod. Geophys. et Mont.* 4 (1969). 157—166.

ABOUT THE MOST ADVANTAGEOUS ANGLE OF INTERSECTION AND MEASURES OF ACCURACY AT THE SIMPLE INTERSECTION

A. TÁRCZY-HORNOCH

SUMMARY

Up to the present no agreement was reached about which angle, 109° 28' or 120° is more advantageous at a simple intersection. The paper proves that the criterion of the least area of the pedal curve as well as that of the least (linear) and also of *Helmert's* mean error of point by equally accurate measurements of angles gives, for the most advantageous angle of intersection, in isosceles triangles the value of 109° 28'. If however *Möhle's* mean error-ellipse and the areal mean error of point resulting from it, resp., is chosen as a measure of accuracy, then the most advantageous value of the angle of intersection is 120°.

О НАИВЫГОДНЕЙШЕМ УГЛЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРОСТОЙ ПРЯМОЙ ЗАСЕЧКИ И О ЕЕ ТОЧНОСТНЫХ ПОКАЗАТЕЛЯХ

А. ТАРЦИ-ХОРНОХ

РЕЗЮМЕ

Нет согласованности в том отношении, что при простой прямой засечке наивыгоднейший угол 109°28' или 120°. В статье автор показывает, что требования, относящиеся к наименьшей площади кривой точек основания, а также к наименьшей (линейной) средней квадратической ошибке и средней квадратической ошибке *Гельмерта*, при прямой засечке в случае равнобедренных треугольников и равноточных угловых измерений вызывают угол пересечения в 109°28'. Если же мерой ошибок выбрать эллипс ошибок *Мёле* или характерную для получаемой по нему площади среднюю квадратическую ошибку точек, то для них наивыгоднейшим является угол пересечения в 120°.

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor
A kézirat nyomdába érkezett: 1969. VI. 5. — Terjedelem: 20,25 (A/5) ív, 90 ábra

69.67781 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

INDEX

Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica ist eine Halbjahresschrift der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. Sie veröffentlicht Originalbeiträge aus dem Bereiche der Geodäsie, Geophysik und Bergbau, in deutscher, englischer, französischer oder russischer Sprache.

Redaktion: Budapest V., Münnich Ferenc utca 7.

Jahresabonnementspreis: Ft 165. Bestellbar durch Kultura Außenhandelsunternehmen für Bücher und Zeitungen (Budapest 62, P. O. B. 149) oder bei den Vertretungen im Ausland.

Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica est une revue biannuelle de l'Académie Hongroise des Sciences publiant des essais originaux, en français, anglais, allemand ou russe, du domaine de la géodésie, géophysique et des sciences minières.

Rédaction: Budapest V., Münnich Ferenc utca 7.

Le prix de l'abonnement: 165,— forints par an. On s'abonne chez Kultura, Société pour le Commerce de Livres et Journaux (Budapest 62, P. O. B. 149) ou chez ses représentants à l'étranger.

Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica выходят два раза в год в издании Академии наук Венгрии. В журнале публикуются оригинальные исследования по проблемам геодезии, геофизики и горного дела на русском, английском, немецком и французском языках.

Адрес редакции: Budapest V., Münnich Ferenc u. 7.

Подписная цена на год 165 форинтов. Заказать журнал через Внешнеторговое предприятие «Kultura» (Budapest 62, P.O.B. 149) или через его заграничные представительства.

Reviews of the Hungarian Academy of Sciences are obtainable at the following addresses:

ALBANIA
Ndermarja Shtetnore e Botimeve
Tirana

AUSTRALIA
A. Keesing
Box 4886, GPO
Sydney

AUSTRIA
Globus Buchvertrieb
Salzgries 16
Wien I

BELGIUM
Office International de Librairie
30, Avenue Marnix
Bruxelles 5
Du Monde Entier
5, Place St. Jean
Bruxelles

BULGARIA
Raznoiznos
1, Tzar Assen
Sofia

CANADA
Pannonia Books
2, Spadina Road
Toronto 4, Ont.

CHINA
Waiwen Shudian
Peking
P. O. B. 88

CZECHOSLOVAKIA
Artia
Ve Směčkách 30
Praha 2
Poštovná Novinová Služba
Dovoz tisku
Vinohradská 46
Praha 2
Mad'arská Kultura
Václavské nám. 2
Praha I
Poštová Novinová Služba
Dovoz tlače
Leningradská 14
Bratislava

DENMARK
Ejnar Munksgaard
Nörregade 6
Copenhagen

FINLAND
Akateeminen Kirjakauppa
Keskuskatu 2
Helsinki

FRANCE
Office International de Documentation et Librairie
48, rue Gay Lussac
Paris 5

GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC
Deutscher Buch-Export und Import
Leninstraße 16
Leipzig 701
Zeitungsvertriebsamt
Fruchtstrasse 3–4
1004 Berlin

GERMAN FEDERAL REPUBLIC
Kunst und Wissen
Erich Bieber
Postfach 46
7 Stuttgart S.

GREAT BRITAIN
Collet's Holdings Ltd.
Dennington Estate
London Rd.
Wellingborough. Northants.
Robert Maxwell and Co. Ltd.
Waynflete Bldg. The Plain
Oxford

HOLLAND
Swetz and Zeitlinger
Keizersgracht 471–487
Amsterdam C.
Martinus Nijhof
Lange Voorhout 9
The Hague

INDIA
Current Technical Literature
Co. Private Ltd.
India House OPP
GPO Post Box 1374
Bombay I

ITALY
Santo Vanasia
Via M. Macchi 71
Milano
Libreria Commissionaria Sansoni
Via La Marmora 45
Firenze

JAPAN
Nauka Ltd.
92, Ikebukur O-Higashi 1-chome
Toshima-ku
Tokyo
Maruzen and Co. Ltd.
P. O. Box 605
Tokyo-Central
Far Eastern Booksellers
Kanda P. O. Box 72
Tokyo

KOREA
Chulpanmul
Phenjan

NORWAY
Johan Grundt Tanum
Karl Johansgatan 43
Oslo

POLAND
Ruch
ul. Wronia 23
Warszawa

ROUMANIA
Cartimex
Str. Aristide Briand 14–18
București

SOVIET UNION
Mezhdunarodnaya Kniga
Moscow G–200

SWEDEN
Almquist and Wiksell
Gamla Brogatan 26
Stockholm

USA
Stechert Hafner Inc.
31, East 10th Street
New York, N. Y. 10003
Walter J. Johnson
111, Fifth Avenue
New York, N. Y. 10003

VIETNAM
Xunhasaba
19, Tran Quoc Toan
Hanoi

YUGOSLAVIA
Forum
Vojvode Mišića broj 1
Novi Sad
Jugoslovenska Knjiga
Terazije 27
Beograd

26. XI. 1969

Index: 26.031