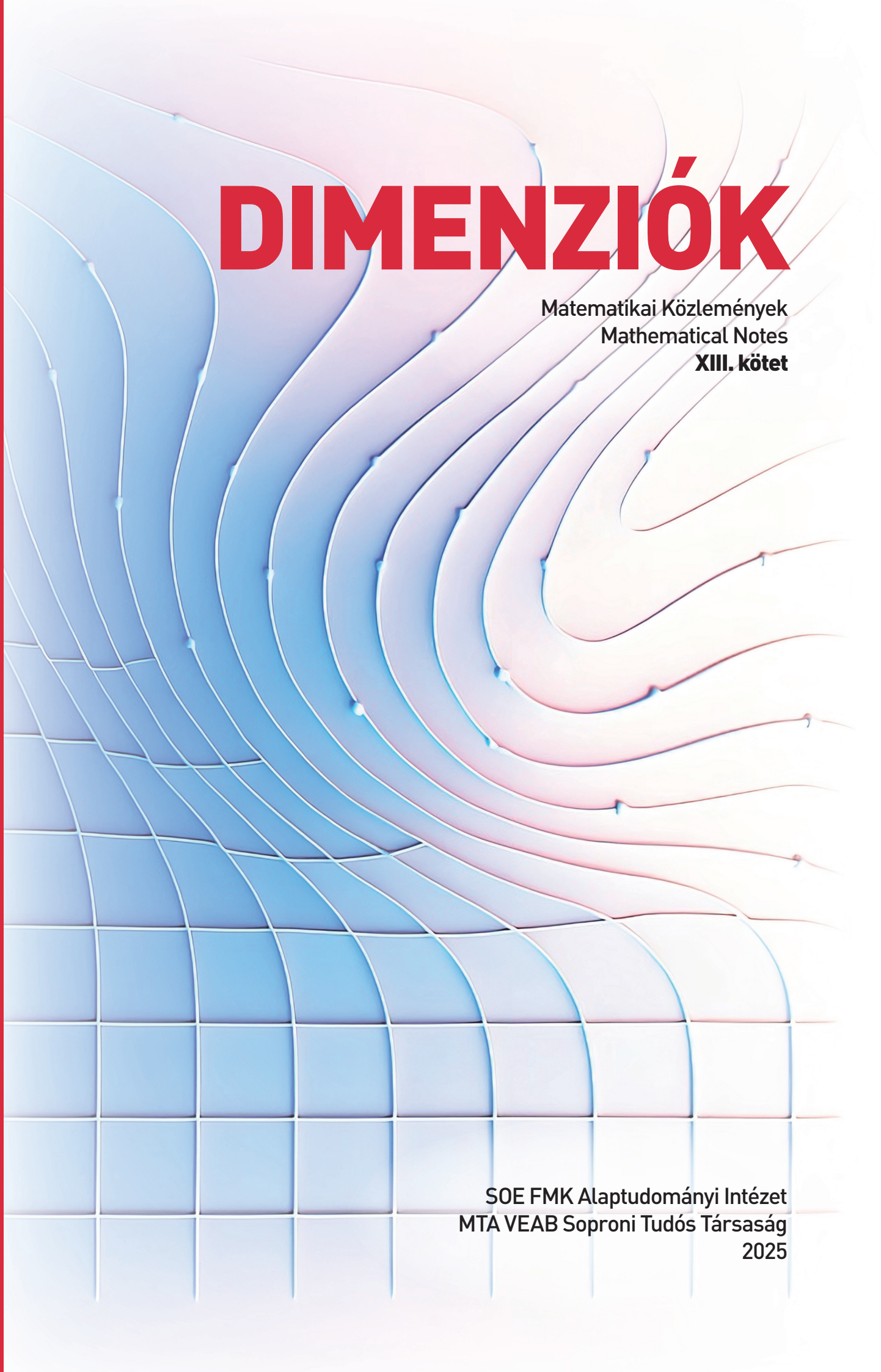


DIMENZIÓK

Matematikai Közlemények
Mathematical Notes
XIII. kötet

SOE FMK Alaptudományi Intézet
MTA VEAB Soproni Tudós Társaság
2025

Dimenziók

Matematikai Közlemények

(Mathematical Notes)

XIII. kötet

2025

SOPRONI EGYETEM KIADÓ

Dimensions – Mathematical Notes is a peer-reviewed scientific journal published annually since 2013 by the University of Sopron (SOE). It is a periodical dedicated to mathematical research and related fields. Submitted manuscripts are evaluated and reviewed by members of the editorial board and independent referees; however, the authors bear full responsibility for the content.

RESPONSIBLE PUBLISHER: FÁBIÁN Attila, Rector (SOE, Hungary)

EDITOR-IN-CHIEF: NÉMETH László (SOE, Hungary)

TECHNICAL EDITOR: TÓTH Zsolt (SOE, Hungary)

PUBLISHER:
Sopron University Press
9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky utca 4.

ISSUED BY:
Institute of Basic Sciences, Faculty of Wood Engineering and Creative Industries, University of Sopron
H-9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky utca 4.
and
MTA VEAB Soproni Tudós Társaság
H-9400 Sopron, Csatkai Endre utca 6-8.

COVER DESIGN: SZARKA Judit Gabriella (SOE, Hungary)

OJS ADMINISTRATOR: AMBRUS Attila József (SOE, Hungary)

Online access: https://journal.uni-sopron.hu/index.php/dimenziok
HU ISSN 2064-2172 (Printed), ISSN 3057-9503 (Online)

A **Dimenziók − Matematikai Közlemények** 2013 óta évente egyszer, a Soproni Egyetem (SOE) kiadásában megjelenő tudományos folyóirat, időszaki kiadvány (periodikum). A kéziratokat a szerkesztőbizottság tagjai és független bírálók véleményezik, lektorálják, de a tartalomért a szerzők a felelősek.

FELELŐS KIADÓ NEVE: FÁBIÁN Attila, a Soproni Egyetem rektora

KIADÓ:
Soproni Egyetem Kiadó
9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky utca 4.

KÖZREADÓ:
Soproni Egyetem Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar Alaptudományi Intézet
9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky utca 4.
és
MTA VEAB Soproni Tudós Társaság
9400 Sopron, Csatkai Endre utca 6-8.

BORÍTÓTERV: SZARKA Judit Gabriella (SOE, Magyarország)

OJS-ADMINISZTRÁTOR: AMBRUS Attila József (SOE, Magyarország)

Elektronikus elérhetőség: https://journal.uni-sopron.hu/index.php/dimenziok
HU ISSN 2064-2172 (Nyomtatott), ISSN 3057-9503 (Online)

Tartalomjegyzék (Table of Contents)

DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények (Mathematical Notes)
XIII. kötet, 2025 3–11

doi:10.20312/dim.2025.01

Creating subsets of natural numbers with a given weighted density

Dániel Tóth
J. Selye University, Faculty of Economics and Informatics,
Department of Mathematics, 945 01 Komárno, Slovakia
tothd@ujs.sk, 0009-0007-5712-8426

ÖSSZEFOGLALÓ. A természetes számok részhalmazainak súlyozott sűrűségeinek vizsgálatakor gyakran dolgozunk $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big((c_n, d_n] \cap \mathbb{N}\big)$, alakú blokkszerkezetű halmazokkal, ahol (c_n) és (d_n) egész számokból álló sorozatokra teljesül, hogy $0 \le c_n < d_n < c_{n+1}$.
Ebben a cikkben azt vizsgáljuk, hogyan lehet tetszőleges alsó és felső súlyozott sűrűségű halmazokat definiálni, milyen kapcsolat van a blokkok mérete és a súlyozott sűrűség között, és hogyan alkalmazható a Cesàro–Stolz-tétel a súlyozott sűrűségek kiszámítására.
Vizsgáljuk továbbá az $f(n)$ súlyfüggvény és az $f^*(n) = f(n)/(f(1) + \cdots + f(n))$ által meghatározott sűrűségek közötti kapcsolatot a blokkszerkezetű halmazok esetében.

ABSTRACT. When studying the weighted densities of subsets of the natural numbers, we often work with block-structured sets of the form $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big((c_n, d_n] \cap \mathbb{N}\big)$, where the integer sequences (c_n) and (d_n) satisfy $0 \le c_n < d_n < c_{n+1}$.
In this article, we examine how to construct sets with arbitrary lower and upper weighted density, the relationship between the size of the blocks and the weighted density, and how the Cesàro–Stolz theorem can be applied to compute weighted densities.
We also investigate the relationship between densities defined by the weight function $f(n)$ and $f^*(n) = f(n)/(f(1) + \cdots + f(n))$ in the case of block-structured sets.

1 Introduction

Let $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ be the set of natural numbers. In the quantitative characterization of the size of subsets of natural numbers, one of the most natural and commonly used tools is the *asymptotic density*.

Definition 1. Let $A \subseteq \mathbb{N}$, and denote $A(n) = |\{a \in A : a \le n\}|$. Then the values

$$\underline{d}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} \quad \text{and} \quad \overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

are called the lower and upper asymptotic density of the set A, respectively. If $\underline{d}(A) = \overline{d}(A)$, then this common value is the asymptotic density of the set A [6].

HUNGARIAN TITLE. A természetes számok adott súlyozott sűrűségű részhalmazainak konstruálása.
KULCSSZAVAK. Aszimptotikus sűrűség, logaritmikus sűrűség, Erdős–Ulam-sűrűség.
KEYWORDS. Asymptotic density, logarithmic density, Erdős–Ulam density.

Denote by χ_A the characteristic function of the set A, that is

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad n \in A; \\ 0, & \text{if} \quad n \notin A. \end{cases}$$

We call a function $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ an *Erdős–Ulam function* if it satisfies $f(1) = 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \infty,$$

and

$$\lim_{n\to\infty} f^*(n) = 0, \quad \text{where} \quad f^*(n) = \frac{f(n)}{\sum\limits_{j=1}^{n} f(j)}. \tag{1}$$

Using an Erdős–Ulam function, we can define an *Erdős–Ulam density* as follows.

Let f be an Erdős–Ulam function. For any $A \subset \mathbb{N}$, let

$$F_A(n) = \frac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)}, \quad \text{where} \quad A_f(n) = \sum_{j=1}^{n} f(j) \cdot \chi_A(j), \quad \mathbb{N}_f(n) = \sum_{j=1}^{n} f(j) \quad [2].$$

Obviously, for every $n \in \mathbb{N}$, $0 \le F_A(n) \le 1$.

Let

$$\underline{d_f}(A) = \liminf_{n\to\infty} F_A(n) \quad \text{and} \quad \overline{d_f}(A) = \limsup_{n\to\infty} F_A(n)$$

be the lower and upper f-density of the set A [1]. It is obvious that

$$0 \le \underline{d_f}(A) \le \overline{d_f}(A) \le 1. \tag{2}$$

If $\underline{d_f}(A) = \overline{d_f}(A)$, then the set A *possesses* an f-density, which we denote by $d_f(A)$.

The asymptotic density corresponds to the choice $f(n) = 1$, while the logarithmic density corresponds to the choice $f(n) = \frac{1}{n}$.

For any Erdős–Ulam function f, the f-density of finite sets is 0, while that of sets with finite complement is 1. The other subsets of natural numbers can be written in the following form [3, 4].

Definition 2. Let (c_n) and (d_n) be sequences of integers such that

$$0 \le c_n < d_n < c_{n+1}.$$

Let

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big((c_n, d_n] \cap \mathbb{N}\big). \tag{3}$$

The Erdős–Ulam density of certain sets given in the form (3) can be computed using the Cesàro–Stolz theorem [5].

Cesàro–Stolz theorem. Let (a_m) and (b_m) be real sequences such that

(i) $0 < b_1 < b_2 < \dots$ and $\lim_{m\to\infty} b_m = \infty$,

(ii) $\lim_{m\to\infty} \frac{a_{m+1}-a_m}{b_{m+1}-b_m} = k \in \mathbb{R}$.

Then $\lim_{m\to\infty} \frac{a_m}{b_m} = k$.

If we substitute sequences of the form $a_m = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n, \quad b_m = \sum_{n=1}^{m} \beta_n$ into the theorem, we obtain the following theorem which is more suitable for us.

Corollary 3. *(Cesàro–Stolz theorem [5, page 42].) Let $(\alpha_n), (\beta_n)$ be sequences of positive real numbers such that*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty,$$

and

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = k.$$

Then

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{m} \alpha_n}{\sum_{n=1}^{m} \beta_n} = k.$$

The following two lemmas present the property of sets of the form (3) that the index subsequence belonging to the limit inferior of the sequence $\left(\frac{A_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(c_n)}\right)$ is a subsequence of the (c_n) sequence, and the index subsequence belonging to the limit superior is a subsequence of the (d_n) sequence.

Lemma 4. *Let $A \subseteq \mathbb{N}$. Then for every natural number $n \geq 2$*

- *if $n \in A$, then* $\dfrac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)} \geq \dfrac{A_f(n-1)}{\mathbb{N}_f(n-1)}$,
- *if $n \notin A$, then* $\dfrac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)} \leq \dfrac{A_f(n-1)}{\mathbb{N}_f(n-1)}$.

Proof. Let $n \geq 2$ and $n \in A$. Then $A_f(n) = A_f(n-1) + f(n)$, therefore

$$\frac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)} = \frac{A_f(n-1) + f(n)}{\mathbb{N}_f(n-1) + f(n)} \geq \frac{A_f(n-1)}{\mathbb{N}_f(n-1)}.$$

Now let $n \geq 2$ and $n \notin A$. Then $A_f(n) = A_f(n-1)$, therefore

$$\frac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)} = \frac{A_f(n-1)}{\mathbb{N}_f(n)} \leq \frac{A_f(n-1)}{\mathbb{N}_f(n-1)}.$$

□

Corollary 5. *Let A be a set defined in the way* (3). *Then*

$$\underline{d_f}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{A_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(c_n)} \quad \textit{and} \quad \overline{d_f}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A_f(d_n)}{\mathbb{N}_f(d_n)}.$$

2 Results

In the following theorem, we give a condition under which the index sequence belonging to the limit inferior of the sequence $\left(\frac{A_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(c_n)}\right)$, respectively to the limit superior, coincides with the (c_n), respectively (d_n) sequences.

Theorem 6. *Let A be a set defined in the way* (3). *If*

$$\left[\lim_{n\to\infty}(\mathbb{N}_f(c_{n+1})-\mathbb{N}_f(c_n))=\infty \quad \textit{and} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{N}_f(d_n)-\mathbb{N}_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(c_{n+1})-\mathbb{N}_f(c_n)}=\alpha,\right]$$
$$\left(\lim_{n\to\infty}(\mathbb{N}_f(d_{n+1})-\mathbb{N}_f(d_n))=\infty \quad \textit{and} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{N}_f(d_{n+1})-\mathbb{N}_f(c_{n+1})}{\mathbb{N}_f(d_{n+1})-\mathbb{N}_f(d_n)}=\beta,\right)$$

then

$$\left[\underline{d_f}(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{A_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(c_n)}=\alpha,\right]$$
$$\left(\overline{d_f}(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{A_f(d_n)}{\mathbb{N}_f(d_n)}=\beta\right).$$

Proof. The statement can be proved directly using the Cesàro–Stolz theorem. Define the

$$\beta_n=\mathbb{N}_f(c_{n+1})-\mathbb{N}_f(c_n), \quad \beta'_n=\mathbb{N}_f(d_{n+1})-\mathbb{N}_f(d_n),$$
$$\alpha_n=\mathbb{N}_f(d_n)-\mathbb{N}_f(c_n), \quad \alpha'_n=\mathbb{N}_f(d_{n+1})-\mathbb{N}_f(c_{n+1})$$

sequences. Apply the Cesàro–Stolz theorem to the sequences $(\alpha_n),(\beta_n)$, and $(\alpha'_n),(\beta'_n)$, from which the statement follows immediately. □

Remark 7. If

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{N}_f(c_{n+1})-\mathbb{N}_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(d_n)-\mathbb{N}_f(d_{n-1})}=1,$$

then in the previous theorem $\alpha=\beta$, that is

$$\underline{d_f}(A)=\overline{d_f}(A).$$

In the following theorem, we provide a method for constructing sequences (c_n) and (d_n) that define a set with a prescribed lower f-density α and upper f-density β.

Theorem 8. *Let f be a non-increasing Erdős–Ulam function and $0\le\alpha<\beta\le 1$. Define the set*

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left((c_n,d_n]\cap\mathbb{N}\right),$$

where the sequences (c_n) and (d_n) are constructed as follows. Let $i\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ be a function such that $\lim_{n\to\infty}i(n)=\infty$ (e.g., $i(n)=n$). Let c_1 be an arbitrary positive integer. For each $n\ge 1$:

- *If $\beta<1$, then*
$$d_n=\min\left\{k\in\mathbb{N}:\mathbb{N}_f(k)>\frac{1-\alpha}{1-\beta}\,\mathbb{N}_f(c_n)\right\}. \tag{4}$$
- *If $\beta=1$, then*
$$d_n=\min\left\{k\in\mathbb{N}:\mathbb{N}_f(k)>i(n)\,\mathbb{N}_f(c_n)\right\}. \tag{5}$$
- *If $\alpha>0$, then*
$$c_{n+1}=\min\left\{k\in\mathbb{N}:\mathbb{N}_f(k)>\frac{\beta}{\alpha}\,\mathbb{N}_f(d_n)\right\}. \tag{6}$$
- *If $\alpha=0$, then*
$$c_{n+1}=\min\left\{k\in\mathbb{N}:\mathbb{N}_f(k)>i(n)\,\mathbb{N}_f(d_n)\right\}. \tag{7}$$

Then, the set A satisfies

$$\underline{d_f}(A) = \alpha \quad \textit{and} \quad \overline{d_f}(A) = \beta.$$

Proof. We proceed by considering the different cases based on the values of α and β.

- Case $\beta < 1$. By (4)

$$\frac{1-\alpha}{1-\beta}\mathbb{N}_f(c_n) < \mathbb{N}_f(d_n) \leq \frac{1-\alpha}{1-\beta}\mathbb{N}_f(c_n) + f(d_n+1).$$

  Since (1) and f is non-increasing

$$\mathbb{N}_f(d_n) = \frac{1-\alpha}{1-\beta}\mathbb{N}_f(c_n) + o(\mathbb{N}_f(c_n)). \tag{8}$$

  - Subcase $\alpha > 0$ (then $\beta > 0$). By (6)

$$\frac{\beta}{\alpha}\mathbb{N}_f(d_n) < \mathbb{N}_f(c_{n+1}) \leq \frac{\beta}{\alpha}\mathbb{N}_f(d_n) + f(c_{n+1}+1),$$

    giving

$$\mathbb{N}_f(c_{n+1}) = \frac{\beta}{\alpha}\mathbb{N}_f(d_n) + o(\mathbb{N}_f(d_n)). \tag{9}$$

    From (8) and (9)

$$\begin{aligned}\mathbb{N}_f(d_{n+1}) &= \frac{1-\alpha}{1-\beta}\mathbb{N}_f(c_{n+1}) + o(\mathbb{N}_f(c_{n+1}))\\ &= \frac{1-\alpha}{1-\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\mathbb{N}_f(d_n) + o(\mathbb{N}_f(d_n)),\\ \mathbb{N}_f(c_{n+1}) &= \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{1-\alpha}{1-\beta}\mathbb{N}_f(c_n) + o(\mathbb{N}_f(c_n)).\end{aligned}$$

    Then

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{N}_f(d_{n+1}) - \mathbb{N}_f(c_{n+1})}{\mathbb{N}_f(d_{n+1}) - \mathbb{N}_f(d_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1-\alpha}{1-\beta}\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} + o(1)}{\frac{1-\alpha}{1-\beta}\frac{\beta}{\alpha} - 1 + o(1)} = \beta,$$

    and

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{N}_f(d_n) - \mathbb{N}_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(c_{n+1}) - \mathbb{N}_f(c_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1-\alpha}{1-\beta} - 1 + o(1)}{\frac{1-\alpha}{1-\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha} - 1 + o(1)} = \alpha.$$

  - Subcase $\alpha = 0$. By (7)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{N}_f(d_n)}{\mathbb{N}_f(c_{n+1})} = 0.$$

    Then

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{N}_f(d_n) - \mathbb{N}_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(c_{n+1}) - \mathbb{N}_f(c_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\mathbb{N}_f(d_n)}{\mathbb{N}_f(c_{n+1})} - \frac{\mathbb{N}_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(c_{n+1})}}{1 - \frac{\mathbb{N}_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(c_{n+1})}} = 0. \tag{10}$$

    From (8) for $n+1$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{N}_f(d_{n+1}) - \mathbb{N}_f(c_{n+1})}{\mathbb{N}_f(d_{n+1}) - \mathbb{N}_f(d_n)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\mathbb{N}_f(d_{n+1})}{\mathbb{N}_f(c_{n+1})} - 1}{\frac{\mathbb{N}_f(d_{n+1})}{\mathbb{N}_f(c_{n+1})} - \frac{\mathbb{N}_f(d_n)}{\mathbb{N}_f(c_{n+1})}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1-\alpha}{1-\beta} - 1 + o(1)}{\frac{1-\alpha}{1-\beta} - \frac{\mathbb{N}_f(d_n)}{\mathbb{N}_f(c_{n+1})} + o(1)} = \beta.\end{aligned}$$

- Case $\beta = 1$. By (5)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{N}_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(d_n)} = 0.$$
Then
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{N}_f(d_{n+1}) - \mathbb{N}_f(c_{n+1})}{\mathbb{N}_f(d_{n+1}) - \mathbb{N}_f(d_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{\mathbb{N}_f(c_{n+1})}{\mathbb{N}_f(d_{n+1})}}{1 - \frac{\mathbb{N}_f(d_n)}{\mathbb{N}_f(d_{n+1})}} = 1.$$
  - Subcase $\alpha > 0$. From (6)
$$\mathbb{N}_f(c_{n+1}) = \frac{\beta}{\alpha}\mathbb{N}_f(d_n) + o(\mathbb{N}_f(d_n)).$$
Then
$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{N}_f(d_n) - \mathbb{N}_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(c_{n+1}) - \mathbb{N}_f(c_n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{\mathbb{N}_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(d_n)}}{\frac{\mathbb{N}_f(c_{n+1})}{\mathbb{N}_f(d_n)} - \frac{\mathbb{N}_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(d_n)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{\mathbb{N}_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(d_n)}}{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\mathbb{N}_f(c_n)}{\mathbb{N}_f(d_n)} + o(1)} = \alpha.
\end{aligned}$$
  - Subcase $\alpha = 0$. Then (10) holds.

In all cases, the conditions of Theorem 6 are satisfied, completing the proof. □

In the following lemma, we give a precise condition for the existence of f-density.

Lemma 9. *Let $A \subseteq \mathbb{N}$ and f be an Erdős–Ulam function. The set A has f-density exactly when there exists a sequence (i_n) of natural numbers such that*

(i) for every $n \in \mathbb{N}$, $i_n < i_{n+1}$,

(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_f(i_{2n-1})}{\mathbb{N}_f(i_{2n-1})}$,

(iii) $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_f(i_{2n})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})}$,

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathbb{N}_f(i_{n+1})}{\mathbb{N}_f(i_n)} = 1$.

Proof. If $\underline{d_f}(A) = \overline{d_f}(A)$, then let the sequence $i_n = n$ $(n = 1, 2, \dots)$. Then properties (i)-(iv) obviously hold.

Let (i_n) be such a sequence that properties (i)-(iv) hold
$$\overline{d_f}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A_f(n)}{\mathbb{N}_f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_f(i_{2n})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})} \le \liminf_{n\to\infty} \frac{A_f(i_{2n-1}) + \mathbb{N}_f(i_{2n}) - \mathbb{N}_f(i_{2n-1})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})}$$
$$\le \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{A_f(i_{2n-1})}{\mathbb{N}_f(i_{2n-1})} + 1 - \frac{\mathbb{N}_f(i_{2n-1})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})} \right) = \underline{d_f}(A).$$
From which it follows that $\underline{d_f}(A) = \overline{d_f}(A)$. □

In the following, we examine what value the lower and upper f-density takes for sets of the form (3), if it does not have f^*-density.

Lemma 10. *Let f be an Erdős–Ulam function. If for some sequence of integers (i_n)*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{N}_{f^*}(i_{n+1})}{\mathbb{N}_{f^*}(i_n)} > 1,$$

then

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{N}_f(i_{n+1})}{\mathbb{N}_f(i_n)} = \infty.$$

Proof. We can write the following inequality.

$$\begin{aligned}\mathbb{N}_{f^*}(i_{n+1}) &= \mathbb{N}_{f^*}(i_n) + \sum_{k=i_n+1}^{i_{n+1}} \frac{f(k)}{\mathbb{N}_f(k)} \\ &\le \mathbb{N}_{f^*}(i_n) + \sum_{k=i_n+1}^{i_{n+1}} \frac{f(k)}{\mathbb{N}_f(i_n)} \\ &= \mathbb{N}_{f^*}(i_n) + \frac{\mathbb{N}_f(i_{n+1}) - \mathbb{N}_f(i_n)}{\mathbb{N}_f(i_n)}.\end{aligned}$$

From this, it directly follows that

$$\frac{\mathbb{N}_f(i_{n+1})}{\mathbb{N}_f(i_n)} \ge \mathbb{N}_{f^*}(i_{n+1}) - \mathbb{N}_{f^*}(i_n). \tag{11}$$

According to the condition, there exist $\delta > 0$ and $n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$\frac{\mathbb{N}_{f^*}(i_{m+1})}{\mathbb{N}_{f^*}(i_m)} \ge 1 + \delta \quad \text{for every} \quad m > n_0.$$

From this it follows that

$$\mathbb{N}_{f^*}(i_{m+1}) - \mathbb{N}_{f^*}(i_m) \ge \delta \mathbb{N}_{f^*}(i_m).$$

According to inequality (11)

$$\frac{\mathbb{N}_f(i_{m+1})}{\mathbb{N}_f(i_m)} \ge \mathbb{N}_{f^*}(i_{m+1}) - \mathbb{N}_{f^*}(i_m) \ge \delta \mathbb{N}_{f^*}(i_m).$$

Since $\mathbb{N}_{f^*}(i_m) \to \infty$ (as $m \to \infty$), therefore

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{N}_f(i_{n+1})}{\mathbb{N}_f(i_n)} = \infty. \qquad \square$$

Theorem 11. *Let f be an Erdős–Ulam function, and let (i_n) be a sequence of integers such that*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{N}_{f^*}(i_{n+1})}{\mathbb{N}_{f^*}(i_n)} > 1. \tag{12}$$

Let $L, H \subseteq \mathbb{N}$ be sets that possess f-density and satisfy $d_f(L) < d_f(H)$. Define

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\big((i_{2n-1}, i_{2n}] \cap H\big) \cup \big((i_{2n}, i_{2n+1}] \cap L\big) \Big).$$

Then

$$\underline{d_f}(A) = d_f(L), \qquad \overline{d_f}(A) = d_f(H).$$

Proof. Based on the definition of set A

$$A_f(i_{2n}) - A_f(i_{2n-1}) = H_f(i_{2n}) - H_f(i_{2n-1}).$$

According to Corollary 5

$$\begin{aligned}\overline{d_f}(A) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{A_f(i_{2n})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{A_f(i_{2n-1}) + H_f(i_{2n}) - H_f(i_{2n-1})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{A_f(i_{2n-1})}{\mathbb{N}_f(i_{2n-1})} \frac{\mathbb{N}_f(i_{2n-1})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})} + \frac{H_f(i_{2n})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})} - \frac{H_f(i_{2n-1})}{\mathbb{N}_f(i_{2n-1})} \frac{\mathbb{N}_f(i_{2n-1})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})} \right).\end{aligned}$$

Based on (12) and Lemma 10

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{N}_f(i_{n-1})}{\mathbb{N}_f(i_n)} = 0.$$

Hence, it follows that

$$\overline{d_f}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{H_f(i_{2n})}{\mathbb{N}_f(i_{2n})} = d_f(H).$$

Similarly, it can be proven that

$$\underline{d_f}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A_f(i_{2n+1})}{\mathbb{N}_f(i_{2n+1})} = d_f(L).$$

□

3 Conclusion

In this article, we examined certain properties of sets of the form (3) with respect to Erdős–Ulam densities.

In Theorem 6, we determined the f-densities of sets defined by sequences (c_n) and (d_n), and provided a condition for the existence of the f-density. Using Theorem 6, we then defined a method that constructs a set $A \subseteq \mathbb{N}$ for any $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ such that $\underline{d_f}(A) = \alpha$ and $\overline{d_f}(A) = \beta$.

Acknowledgments

Supported by The Slovak Research and Development Agency under the grant VEGA No. 1/0493/25. The author acknowledges the support of the J. Selye University Grant for young researchers and doctoral students (2025).

Bibliography

[1] Bukor, J., Filip, F., Šustek, J., and Tóth, J. T.: *Comparing weighted densities*, Journal of Inequalities and Applications, **2022** (2022), No. 1, 146. doi: 10.1186/s13660-022-02885-y.

[2] Bukor, J., Filip, F., and Tóth, J.: *Sets with countably infinitely many prescribed weighted densities*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, **50** (2020), No. 2, 467 – 477. doi: 10.1216/rmj.2020.50.467.

[3] Grekos, G., Mišík, L., and Tóth, J. T.: *Density sets of sets of positive integers*, Journal of Number Theory, **130** (2010), No. 6, 1399–1407. doi: 10.1016/j.jnt.2009.12.007.

[4] Grekos, G., Šalát, T., and Tomanová, J.: *Gaps and densities*, Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, **46 (94)** (2003), No. 3/4, 121–141. URL: http://www.jstor.org/stable/43678928.

[5] Paštéka, M.: *Density and related topics*, Academia, Veda, Praha; Bratislava, 2017.

[6] Tóth, J. T.: *Teória r-hustých množín a jej aplikácie v školskej matematike*, Eruditio - educatio, **1** (2006), No. 3, 31–94.

DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények (Mathematical Notes)
XIII. kötet, 2025 13–24

doi:10.20312/dim.2025.02

Computer-aided validation of basic concepts of probability theory for high school students

Sándor Zsuppán
Berzsenyi Dániel Evangélikus (Líceum) Gimnázium és Kollégium
Sopron, Hungary
zsuppans@gmail.com, 0009-0006-3454-1528

ÖSSZEFOGLALÓ. A középiskolai matematika tananyag részét képező valószínűség, feltételes valószínűség, valószínűségi eloszlás és várható érték fogalmak számítógépes segítséggel történő szemléltetését mutatjuk be. Az internetről hozzáférhető véletlenszerűen vagy pszeudorandom módon generált, viszonylag sok adatot tartalmazó adathalmazokkal dolgozunk, hogy a nagy számok törvénye alapján a fenti fogalmakat a relatív gyakoriság és átlag fogalmakkal állíthassuk párhuzamba. Kitekintésképpen a Bernstein-polinomokhoz hasonló, de a hipergeometrikus eloszlásból származtatott polinomokat vizsgálunk röviden.

ABSTRACT. In this note we cover some examples of computer-aided illustration of the concepts of probability, conditional probability, probability distribution and expected value for high school students. We utilize relatively big true random or pseudorandom datasets available on the internet or generated locally in order to be able to make use of the law of large numbers. Apropos of an example we briefly investigate Bernstein like polynomials derived from the hypergeometric rather than from the binomial distribution.

1 Introduction

Several basic concepts of statistics and probability theory are contained in the requirements [1] for high school graduation in mathematics. These include at the intermediate level exam e.g. relative frequency and average in statistics and their parallel concepts probability and expected value in probability theory, respectively. Ref. [1] requires at the advanced level additionally the concepts of conditional probability and probability distribution, especially the binomial and the hypergeometric ones for random sampling with or without replacement, respectively. Even though the law of large numbers in its precise form is not directly specified in [1], the students should use it intuitively by knowing that although the outcome of a random event is not predictable, the relative frequency of the favorable outcomes from many mutually independent random samplings is a good approximation for its probability. Moreover, in the same sense the average of many mutually independent random samplings approximates the expected value. These correspondences facilitate the utilization of randomly generated big datasets and of the

HUNGARIAN TITLE. Valószínűségszámítási fogalmak számítógépes illusztálása középiskolásoknak
KULCSSZAVAK. valószínűség, számítógéppel támogatott, Bernstein polinom.
KEYWORDS. probability, computer-aided, Bernstein polynom.

computers processing them for demonstrating the above mentioned concepts. On the one hand such datasets in various subjects are easily and mostly freely available on the internet, on the other hand basic programming skills are also required for high-school graduation in informatics not only on the advanced level but also on the intermediate level exam. Hence experimenting with the processing of such big datasets on a computer can improve not only the mathematical but also the programming skills of the students. A similar concept for computer-aided illustration of interesting mathematical problems for high school students was treated in [6].

In this note we discuss some examples, wherein the used datasets consist of true random numbers from the internet or pseudorandom numbers generated locally by the computer. As recommended for the graduation exam in informatics we utilize the Python programming language (python.org) along with the useful libraries NumPy (numpy.org) and SciPy (scipy.org) for calculations and Matplotlib (matplotlib.org) for graphical visualization in the Jupyter Notebook interface (jupyter.org). This note is not intended as a full description of the teaching methodology of the subject, we just demonstrate some interesting exercises in the first section. In one of these exercises some polynomials pop up, which resemble the Bernstein polynomials [2, 5], however, these polynomials emerge from the hypergeometric distribution rather than from the binomial one. In the final section we briefly investigate some basic properties of these Bernstein-like polynomials.

2 Exercises for probability theory with big datasets

In this section we discuss some interesting probability theory exercises. The results will be visualized using relatively big datasets stored in comma-separated value (csv) files which Python can handle.

Exercise 1. Simulate many rolls of a 6-sided fair die and plot the variation of the relative frequencies of all possible outcomes as functions of the number of rolls! Compare the diagram to the probabilities of the respective outcomes! Plot also the variation of the average of the outcomes as a function of the number of rolls! Compare the diagram to the expected value of the outcomes!

The probability of each outcome of a die roll is $\frac{1}{6}$ and the expected value equals 3.5. We use the 'Random Integer Generator' item on random.org and save the generated random integers between 1 and 6 (both inclusive) as a 'csv' file. (This service is free up to 10000 random integers.) We can observe that according to the law of large numbers the relative frequencies and averages of the outcomes tend (however oscillating) toward but at the same time oscillate around the probability $\frac{1}{6}$ and expected value 3.5, respectively.

Exercise 2. Generate many random digits independently and let move a random walk along the number line as follows: start at zero and move a distance which equals the random digit left if the digit is even but right if it is odd. Let the random variable X_n denote the position of the random walk after n steps! Calculate the expected value and the standard deviation of X_n! Plot the position of the generated random walk as a function of the number of steps and compare the outcome to the expected value and to the standard deviation! Treat the digits of some irrational numbers as if they were generated at random, plot the connected random walk and compare it to the results of the previous two parts!

If the digits are selected with equal probability $\frac{1}{10}$, then the expected value of one step of the walk equals $E_1 = \sum_{k=0}^{9}(-1)^{k+1}k = \frac{1}{2}$ and for the standard deviation we have $D_1^2 =$

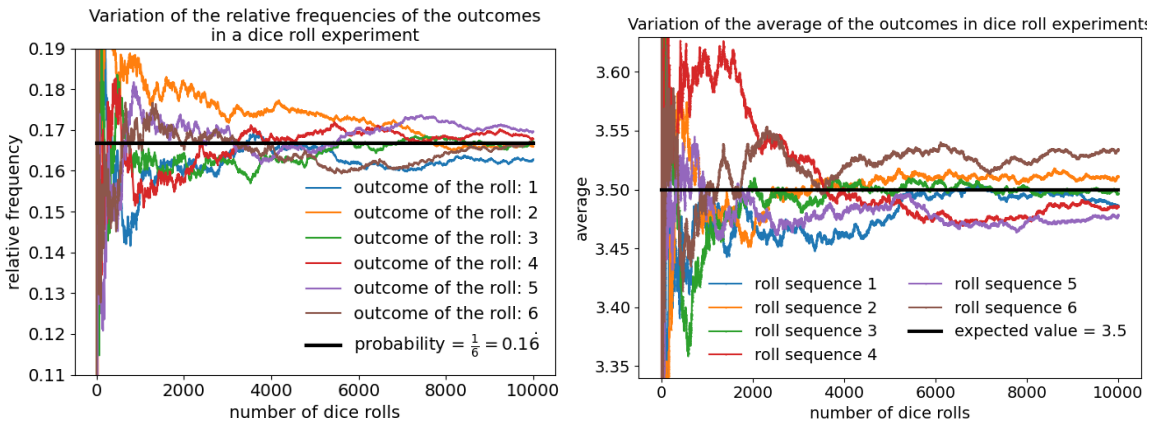


Figure 1. Simulating dice rolls

$\sum_{k=0}^{9}\left((-1)^{k+1}k-\frac{1}{2}\right)^2 = 282.5$ and hence $D_1 = \sqrt{282.5} \approx 16.8$. Because the steps in this random walk are mutually independent there follows $E(X_n) = \frac{1}{2}n$ and $D^2(X_n) = nD_1^2$ which implies $D(X_n) = \sqrt{282.5n} \approx 16.8\sqrt{n}$. According to the diagram on the right of Figure 2 the

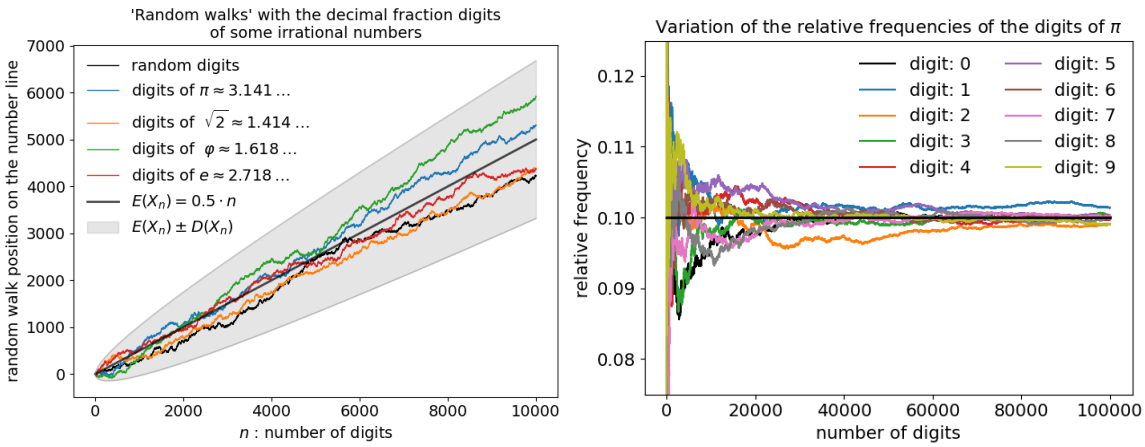


Figure 2. 'Random walks' with irrational numbers

relative frequency variations of the decimal digits of π pretend to be randomly generated with discrete uniform distribution, however this is not yet proven, see e.g. [4] and the references there. On the left diagram of Figure 2 we can see that using the irrational numbers π, $\sqrt{2}$, the golden ratio φ and the Euler constant e as 'random digit generators' give very similar results to an actual random walk with digits generated on random.org. (The digits of the used irrationals can be found in e.g. https://apod.nasa.gov/htmltest/rjn_dig.html and https://www2.cs.arizona.edu/icon/oddsends/phi.htm.)

Exercise 3. Let the random variable R denote the distance of a random point in the unit square $[0;1]^2$ from the origin. Calculate the probability $\mathrm{P}(R \leq 1)$! Determine the distribution function of the random variable R and compute its expected value! Place many random points into the unit square, calculate the relative frequency of those with $R \leq 1$ and compare it to the probability! Compute also the average distance of the points from the origin and compare it to the expected value!

In order to produce the diagrams on Figure 3 we used the 'Decimal Fraction Generator' item on random.org to obtain two times 10000 random decimal fractions in the interval [0;1]

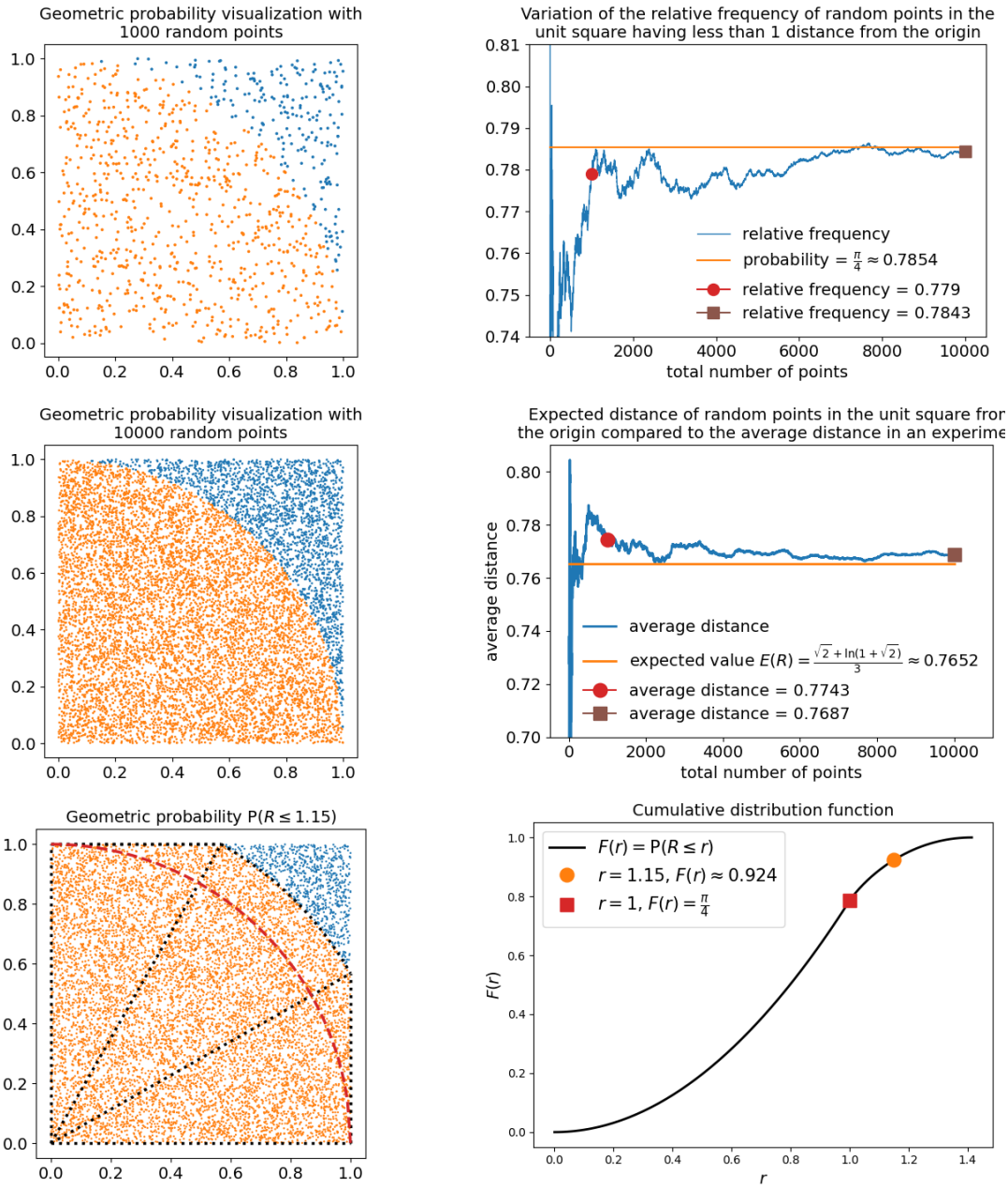


Figure 3. Geometric probability exercise

which then ordered in pairs serve as coordinates for points in the unit square. The exercise can be solved with geometric probability calculating the corresponding areas (depicted on Figure 3 for $r = 1.15$ as an example) inside the unit square. For the distribution function of the random variable R we have

$$F(r) = \mathrm{P}(R \leq r) = \begin{cases} \text{if } r < 0, \text{ then } 0 \\ \text{if } 0 \leq r < 1, \text{ then } \dfrac{\pi}{4} r^2 \\ \text{if } 1 \leq r < \sqrt{2}, \text{ then } \dfrac{\pi}{4} r^2 + \sqrt{r^2 - 1} - r^2 \arccos \dfrac{1}{r} \\ \text{if } \sqrt{2} \leq r, \text{ then } 1 \end{cases} \tag{1}$$

Hence $\mathrm{P}(R \leq 1) = \frac{\pi}{4}$ and the expected distance can be calculated from the integral

$\int_0^{\sqrt{2}} rf(r)\mathrm{d}r$, where $f = F'$ is the probability density function. Although this integral can be solved analytically and equals exactly $\frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{3}$, we also can solve it numerically in an online integral calculator. Finally here should be mentioned that some parts of this exercise are beyond the high-school mathematics curriculum.

The next exercise is about the intriguing Monty-Hall probability puzzle about the concept of conditional probability, see e.g. https://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem. In this conceptual game a player is given a choice of three doors. Behind one door is a car, behind the other doors a goat. After the player picks one of the doors, the host of the game (who knows what lies behind each door) opens one of those doors having a goat and offers the player to switch his first choice or stay at the originally picked door. The player wins whatever is behind the door that he lets open after his final decision.

Exercise 4. Simulate many Monty-Hall games with an additional parameter $0 \leq p \leq 1$, which denotes the a priori probability that the player switches his door choice. Calculate the relative frequencies of each of the possible outcomes (stay,goat), (stay,car), (switch,goat) and (switch,car) and compare them to their corresponding probabilities! Calculate the conditional probability of winning a car if switching the first choice.

The tree graph on the left of Figure 4 shows a Monty-Hall game, where the rectangles are the doors (C=car, G=goat) and the border denotes the choice of the player. The probabilities of the outcomes are calculated by multiplying the probabilities on the corresponding branches. These theoretical formulae give rise to linear functions on the right diagram of Figure 4. In the

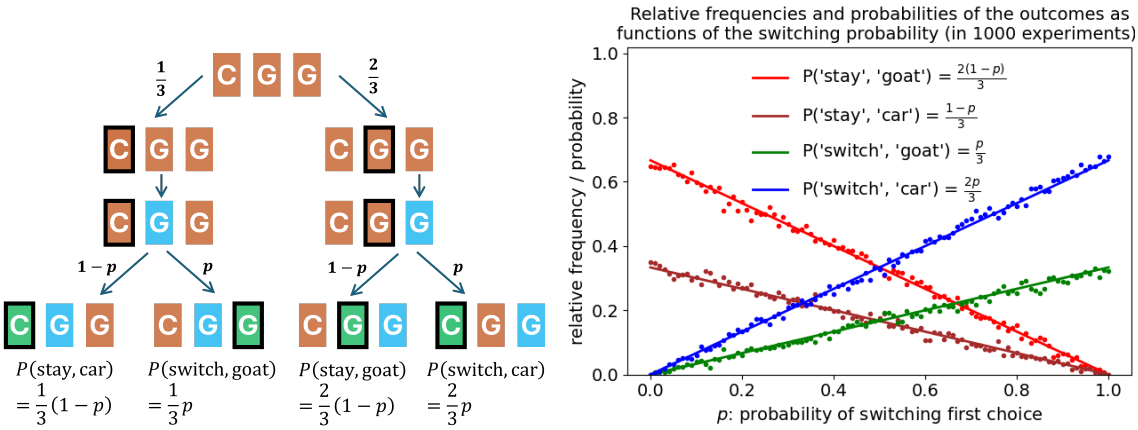


Figure 4. Monty-Hall puzzle

simulations we used the Python inbuilt pseudorandom number generator. Each point depicts the relative frequency result of 1000 games for the corresponding outcome. The experimental points fit fairly good onto the corresponding lines. Figure 5 shows the relative frequencies of the outcomes (on the left) and the conditional frequencies (on the right) tending to their corresponding probabilities as the number of random Monty-Hall games increases in case of the arbitrary chosen switching probability $p = 0.8$.

In the next exercise we utilize the PyOTP Python library for generating and verifying one-time passwords for implementing two-factor (2FA) authentication methods for applications which require users to log in. For more information and usage of the library see the Project description on https://pypi.org/project/pyotp/.

Exercise 5. Determine the probability distribution of the number of digits which occur at least twice in a randomly generated six digit long one time password (OTP for short) and calculate

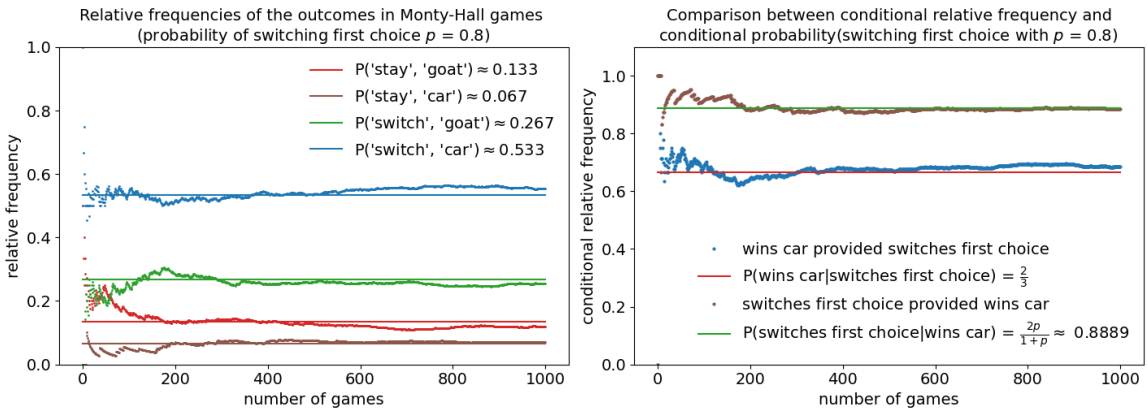


Figure 5. Monty-Hall simulation with $p = 0.8$

the expected value of this number! Generate many such OTPs and compare the experimental relative frequencies and averages with the theoretical probabilities and expected value!

Let the random variable X denote the number of digits which occur at least twice in the six digit long OTP. The possible values are $X = 0, 1, 2, 3$. Their probabilities can be calculated so that one chooses the appropriate number of distinct digit out of 10, then one chooses which digits how many times occur and finally one makes all possible permutations of the six prepared digits, c.f. Figure 6. The expected value of X from this distribution is $E(X) = 1.14265$. The experiments show that relative frequencies of the possible outcomes and the averages tend to the probabilities and to the expected value, respectively, c.f. the diagrams on Figure 6. The pseudorandomly generated OPT codes pretend true random behavior.

ABCDEF

$$P(X=0) = \frac{\binom{10}{6}\cdot 6!}{10^6} = 0{,}1512$$

AACDEF AAADEF AAAAEF AAAAAF AAAAAA

$$P(X=1) = \frac{\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{1}\cdot\frac{6!}{2!} + \binom{10}{4}\cdot\binom{4}{1}\cdot\frac{6!}{3!} + \binom{10}{3}\cdot\binom{3}{1}\cdot\frac{6!}{4!} + \binom{10}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot\frac{6!}{5!} + \binom{10}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot\frac{6!}{6!}}{10^6} = 0{,}56575$$

AABBCD AAABBC AABBBB AAABBB

$$P(X=2) = \frac{\binom{10}{4}\cdot\binom{4}{2}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 2!} + \binom{10}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 3!} + \binom{10}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 4!} + \binom{10}{2}\cdot\frac{6!}{3!\cdot 3!}}{10^6} = 0{,}27225$$

AABBCC

$$P(X=3) = \frac{\binom{10}{3}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}}{10^6} = 0{,}0108$$

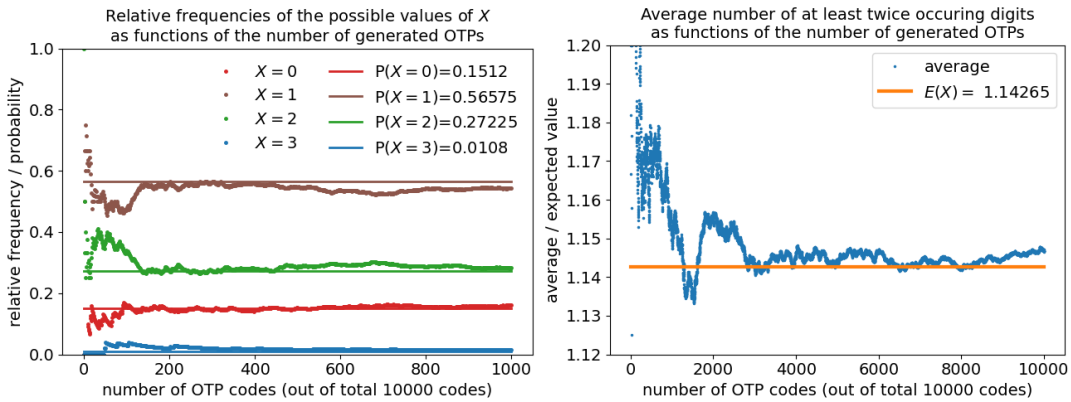


Figure 6. Distribution of at least twice occuring digits

In the last two exercises we examine the Hungarian lottery in which 5 winning numbers are drawn from 90. A comprehensive and continuously updated list of the drawings can be found e.g. at https://bet.szerencsejatek.hu/cmsfiles/otos.csv.

Exercise 6. Compute the probability of drawing a particular number in the hungarian 5 from 90 lottery! Let the random variable X denote how many times a particular number is drawn in a total of n mutually independent drawings! Determine the probability distribution of X and its expected value! Compare the theoretical results to the actual dataset of the drawn numbers!

The probability of the contrary event, that a particular number is not drawn equals $\frac{\binom{89}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{85}{90}$, hence the probability of drawing a particular number is $p = 1 - \frac{85}{90} = \frac{5}{90}$. Because the drawings are supposed to be mutually independent, the random variable X has a binomial distribution with success probability $p = \frac{5}{90}$ and n the total number of drawings, which is in our example $n = 3582$:

$$\mathrm{P}\left(X = k\right) = \binom{3582}{k}\left(\frac{5}{90}\right)^{k}\left(\frac{85}{90}\right)^{3582-k}, \text{ for } 0 \leq k \leq 3582.$$

The expected value of X is $E(X) = 3582 \cdot \frac{5}{90} = 199$. In order to compare this theoretical distribution to the actual drawing data, we count how many times each number was drawn. This gives a sample list of 90 numbers for the random variable X the histogram of which fits fairly good to the theoretical binomial distribution, c.f. Figure 7. Moreover, the expected value of X equals the average drawing frequency of the numbers.

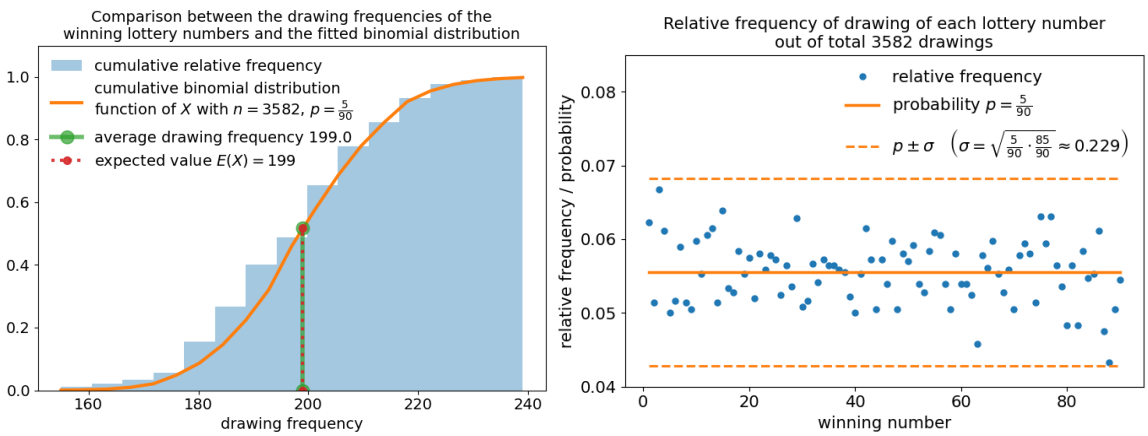


Figure 7. Drawing frequencies of the winning numbers

Exercise 7. In the 5 from 90 lottery the drawn winning numbers are published in ascending order. Let the random variable Y_ℓ ($\ell = 1; 2; 3; 4; 5$) denote the ℓ-th winning number. Determine the distribution of the random variables Y_ℓ! Calculate the expected value of each Y_ℓ! Compare the theoretical distributions to the actual dataset of the drawn numbers!

We utilize the hypergeometric distribution. The outcome $Y_\ell = k$ means that the first $\ell - 1$ winning numbers are drawn from the first $k - 1$ numbers, the ℓ-th winning number is k and the other $5 - \ell$ winning numbers are drawn form the other $90 - k$ numbers bigger than k. Hence there follows

$$\mathrm{P}\left(Y_\ell = k\right) = \frac{\binom{k-1}{\ell-1}\binom{90-k}{5-\ell}}{\binom{90}{5}}, \text{ for } \ell \leq k \leq 85 + \ell.$$

The expected value of Y_ℓ is determined by

$$E(Y_\ell) = \sum_{k=\ell}^{85+\ell} k \cdot \frac{\binom{k-1}{\ell-1}\binom{90-k}{5-\ell}}{\binom{90}{5}} = \ell \cdot \sum_{k=\ell}^{85+\ell} \frac{\binom{k}{\ell}\binom{90-k}{5-\ell}}{\binom{90}{5}} = \frac{91}{6}\ell.$$

These probability distributions and expected values can be compared to the relative frequency distributions and to the averages of the ℓ-th winning numbers: The values in Table 1 and the

ℓ	1	2	3	4	5
$E(Y_\ell) =$	$15.1\dot{6}$	$30.\dot{3}$	45.5	$60.\dot{6}$	$75.8\dot{3}$
average $\approx$	14.87	29.78	45.45	60.34	75.35

Table 1. Comparison of the average ℓ-th winning numbers with $E(Y_\ell)$

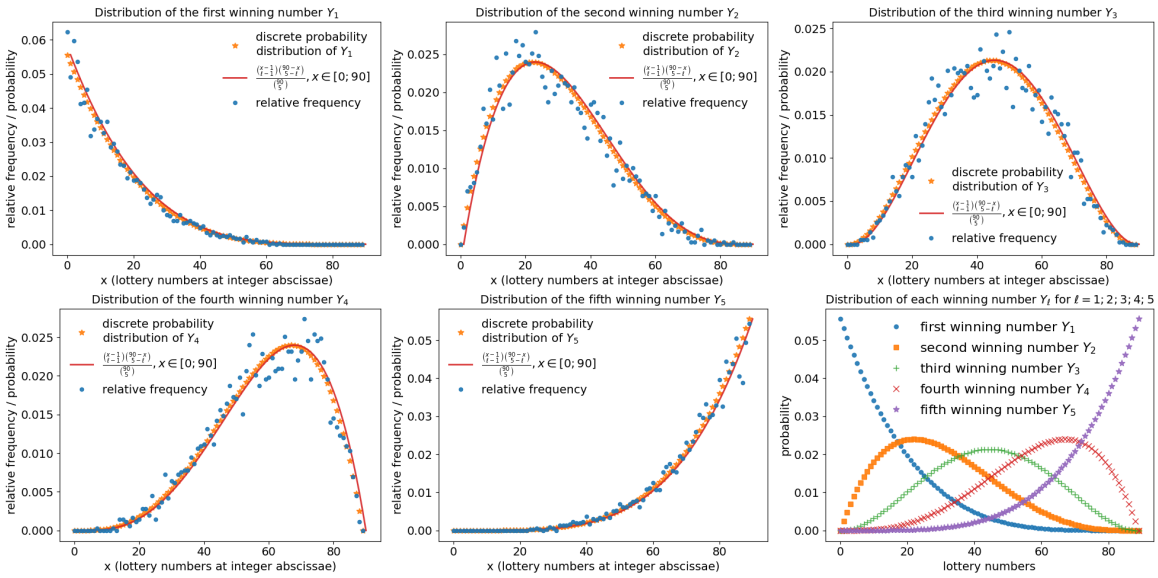


Figure 8. Distribution comparisons of the winning numbers

diagrams on Figure 8 show a very good accordance between the theoretical results and the actual dataset, which contains every drawing outcome from the first drawing in the 10th week of 1957 until the drawing in the 43rd week of 2025.

The distributions of the random variables Y_ℓ on Figure 8 can be extended to a function on the whole interval $x \in [0; 90]$ with $x \mapsto \frac{\binom{x-1}{\ell-1}\binom{90-x}{5-\ell}}{\binom{90}{5}}$, where the generalized binomial coefficients are defined with the Γ function as $\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}$. For integer values of a and b this coincides with the usual definition because we have $n! = \Gamma(n+1)$ for every natural number n. The graphs of these functions and the diagrams of the distributions of Y_ℓ show a striking resemblance with the graphs of the Bernstein polynomials $B_{\ell,4}(x) = \binom{4}{\ell}x^\ell(1-x)^{4-\ell}$ for $\ell = 0; 1; 2; 3; 4$ resp., see e.g. [5]. We investigate this resemblance further in the next section.

3 Bernstein-like polynomials from the hypergeometric distribution

The Bernstein polynomials with parameters $n \geq 0$ and $0 \leq k \leq n$ are defined by

$$B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \text{ for } 0 \leq x \leq 1. \tag{2}$$

These polynomials and their further generalized versions have an extensive literature and they found usage far beyond probability theory, c.f. [2]. Their connection to the binomial distribution $\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ with success probability $0 \leq p \leq 1$ is obvious by setting $p = x$. The binomial distribution describes the probability of a k-times success out of total n mutually independent trials by random sampling with replacement from a population which size is denoted by N. The success probability equals $p = \frac{K}{N}$, where $0 \leq K \leq N$ denotes the size of some subpopulation such that the choice of an element from this subpopulation is considered as a success.

If the random sampling is done without replacement, then we use the hypergeometric distribution instead, which is given by

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \text{ for } 0 \leq k \leq n, \tag{3}$$

where we also have $n \leq N$ and $k \leq K$. Defining here also $x = \frac{K}{N}$ as the fraction of the subpopulation size in the whole population, then using the properties of the generalized binomial coefficients we obtain alternative expressions for the hypergeometric distribution

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{xN}{k}\binom{(1-x)N}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{xN-k}}{\binom{N}{xN}}. \tag{4}$$

Herein we have the function $\frac{\binom{N-n}{xN-k}}{\binom{N}{xN}}$ of the variable x instead of $x^k(1-x)^{n-k}$, see (2). Moreover, if the parameters k, n, N are integers with $0 \leq k \leq n \leq N$, then the probabilities (4) as functions of the variable $0 \leq x \leq 1$ are in fact polynomials with these three parameters

$$B_{k,n,N}(x) = \binom{n}{k} \prod_{\ell=0}^{k-1} \frac{xN - \ell}{N - \ell} \prod_{\ell=k}^{n-1} \frac{(1-x)N - (\ell - k)}{N - \ell}, \text{ for } 0 \leq x \leq 1. \tag{5}$$

From the definition (5) we have $B_{0,0,N}(x) = B_{0,0}(x) = 1$, $B_{0,1,N}(x) = B_{0,1}(x) = 1 - x$ and $B_{1,1,N}(x) = B_{1,1}(x) = x$ for each $N \geq 0$, i.e. the polynomials (2) and (5) coincide if $n = 0, 1$. Although this does not remain true for $n \geq 2$, we have the following

Theorem 1. *For each fixed parameter pair (k, n) and for $x \in [0; 1]$ we have*

$$\lim_{N \to \infty} B_{k,n,N}(x) = B_{k,n}(x). \tag{6}$$

Proof. For fixed parameters (k, n) with $0 \leq k \leq n \leq N$ the polynomials (2) consists of n factors for which we have

$$\lim_{N \to \infty} \frac{xN - \ell}{N - \ell} = x \text{ and } \lim_{N \to \infty} \frac{(1-x)N - (\ell - k)}{N - \ell} = 1 - x$$

for each $0 \leq \ell \leq k-1$ and $k \leq \ell \leq n-1$, respectively. Hence the first k factors of (5) tend to x and the last $n-k$ factors of (5) tend to $1-x$, which implies (6). From the probability theory point of view this merely means that for sample sizes n way much smaller than the population size N it practically does not matter whether the random sampling occurs with or without replacement. □

Theorem 1 is visualized on Figure 9 for some arbitrary parameter values. Figure 9 also

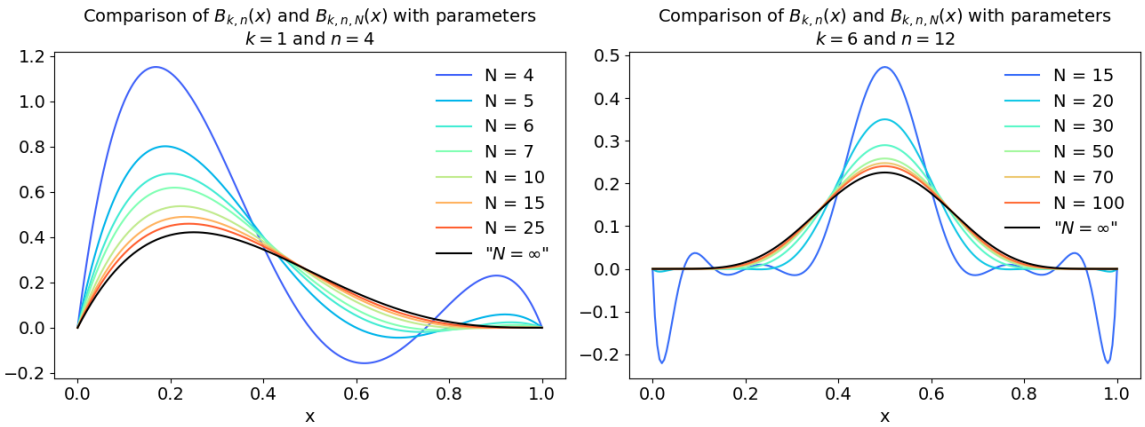


Figure 9. Illustration of Theorem 1

shows a major difference between (2) and (5), namely that whilst each of the polynomials (2) are nonnegative in the interval $[0;1]$ having multiple roots only on $x=0$ or $x=1$, the polynomials (5) have also negative values and only simple roots at the points $x=\frac{\ell}{N}$ for $0 \leq \ell \leq k-1$ or $x=1-\frac{\ell-k}{N}$ for $k \leq \ell \leq n-1$. Despite this difference the usual Berstein polynomials (2) derived from the binomial distribution and the ones (5) derived from the hypergeometric distribution have some other properties in common concerning for example symmetry or recursive relations between them. We formulate these in the following

Theorem 2. *The system* (5) *of polynomials has the following properties.*

- $B_{n-k,n,N}(1-x) = B_{k,n,N}(x)$
- $B_{k,n,N}(x) = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{x-\frac{k-1}{N}}{1-x-\frac{n-k}{N}} B_{k-1,n,N}(x)$
- $B_{k,n,N}(x) = \frac{x-\frac{k-1}{N}}{1-\frac{n-1}{N}} \cdot B_{k-1,n-1,N}(x) + \frac{1-x-\frac{n-k-1}{N}}{1-\frac{n-1}{N}} \cdot B_{k,n-1,N}(x)$
- $\sum_{k=0}^{n} B_{k,n,N}(x) = 1$

Proof. Starting from the definition (4) the first identity follows as

$$B_{n-k,n,N}(1-x) = \frac{\binom{(1-x)N}{n-k}\binom{(1-(1-x))N}{n-(n-k)}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{(1-x)N}{n-k}\binom{xN}{k}}{\binom{N}{n}} = B_{k,n,N}(x).$$

For the second and third identities we use the property $\binom{a}{b} = \frac{a-b+1}{b}\binom{a}{b-1}$ of the generalized binomial coefficients, which is proved by

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)} = \frac{\Gamma(a+1)}{b\Gamma(b)\frac{\Gamma(a-b+2)}{a-b+1}} = \frac{a-b+1}{b}\binom{a}{b-1},$$

where we used the functional identity $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ for the gamma function. From this follows also $\binom{a}{b} = \frac{b+1}{a-b}\binom{a}{b+1}$. Again starting with (4) we obtain

$$B_{k,n,N}(x) = \frac{\binom{(1-x)N}{n-k}\binom{xN}{k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{xN-k+1}{k}\binom{xN}{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{(1-x)N-(n-k)}\binom{(1-x)N}{n-k+1}}{\binom{N}{n}}$$
$$= \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{x - \frac{k-1}{N}}{1 - x - \frac{n-k}{N}} B_{k-1,n,N}(x),$$

which proves the second identity. The third identity is proved in two steps. On the one hand we have

$$\frac{x - \frac{k-1}{N}}{1 - \frac{n-1}{N}} \cdot B_{k-1,n-1,N}(x) = \frac{xN-(k-1)}{N-(n-1)} \cdot \frac{\binom{xN}{k-1}\binom{(1-x)N}{n-k}}{\binom{N}{n-1}}$$
$$= \frac{xN-(k-1)}{N-(n-1)} \cdot \frac{\frac{k}{xN-(k-1)}\binom{xN}{k}\binom{(1-x)N}{n-k}}{\frac{n}{N-(n-1)}\binom{N}{n}} = \frac{k}{n} B_{k,n,N}(x).$$

On the other hand we also have

$$\frac{1 - x - \frac{n-k-1}{N}}{1 - \frac{n-1}{N}} \cdot B_{k,n-1,N}(x) = \frac{(1-x)N-(n-k-1)}{N-(n-1)} \cdot \frac{\binom{xN}{k}\binom{(1-x)N}{n-k-1}}{\binom{N}{n-1}}$$
$$= \frac{(1-x)N-(n-k-1)}{N-(n-1)} \cdot \frac{\binom{xN}{k}\frac{n-k}{(1-x)N-(n-k-1)}\binom{(1-x)N}{n-k}}{\frac{n}{N-(n-1)}\binom{N}{n}}$$
$$= \frac{n-k}{n} B_{k,n,N}(x).$$

Adding the latter two equalities the third identity follows

$$\frac{x - \frac{k-1}{N}}{1 - \frac{n-1}{N}} \cdot B_{k-1,n-1,N}(x) + \frac{1 - x - \frac{n-k-1}{N}}{1 - \frac{n-1}{N}} \cdot B_{k,n-1,N}(x) = \frac{k}{n} B_{k,n,N}(x) + \frac{n-k}{n} B_{k,n,N}(x)$$
$$= B_{k,n,N}(x).$$

The last identity (partition of unity) expresses the mere fact that all the probabilities of the hypergeometric distribution denoted by $B_{k,n,N}(x)$ in (4) add up to 1. □

Remark 3. All the properties in Theorem 2 simplify to the respective properties of the ordinary Bernstein polynomials (2) with the same parameters k, n in the limiting case $N \to \infty$. The first (symmetric) and the third (recursive) property together give rise to a Pascal's triangle like structure of these polynomials (5) resembling the same structure of the Bernstein polynomials (2), however these have finite extent because the requirement $k \leq n \leq N$ limits the allowed values for the parameters k and n. This enriches a little bit the already vast literature of the generalizations of the Pascal triangle, see e.g. [3].

Conclusion

In this note we discussed a variety of examples how basic concepts of probability theory can be demonstrated for high-school students using big datasets. Obviously we only have scratched the surface of a huge multitude of possibilities since randomness can be found in datasets of several subjects taught in high-school. As a byproduct of an exercise concerning lottery number distributions we obtained Bernstein like polynomials from the hypergeometric distribution, some basic properties of which we briefly investigated.

Bibliography

[1] *Matematika részletes érettségi vizsgakövetelmény*, (Last updated 2021). URL: https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/erettsegi/vizsgakovetelmenyek2024/matematika_2024_e.pdf.

[2] Lorentz, G.: *Bernstein Polynomials*, Toronto: University of Toronto Press, 1953.

[3] Németh, L. and Szalay, L.: *Áttekintés a hiperbolikus Pascal háromszögekről*, Dimenziók - Mathematical Notes, **8** (2020), No. 8, 61–74. doi: 10.20312/dim.2020.07.

[4] Wolfram-MathWorld: *Normal number*, (Last Updated: Oct 24 2025). URL: https://mathworld.wolfram.com/NormalNumber.html.

[5] Wolfram-MathWorld: *Bernstein polynomial*, (Last Updated: Oct 28 2025). URL: https://mathworld.wolfram.com/BernsteinPolynomial.html.

[6] Zsuppán, S.: *Érdekes matematikai problémák modellezése számítógéppel középiskolásoknak*, Dimenziók - Mathematical Notes, **11** (2023), No. 11, 77–82. doi: 10.20312/dim.2023.09.

DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények (Mathematical Notes)
XIII. kötet, 2025 25–37

doi:10.20312/dim.2025.03

A Cayley-Hamilton tétel és a vektor-mátrixok algebrája

Péntek Kálmán
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Savaria Egyetemi Központ, Berzsenyi Dániel Pedagógusképző Központ, Matematikai Tanszék, Szombathely, Magyarország
pentek.kalman@sek.elte.hu, 0000-0002-9467-7025

ÖSSZEFOGLALÓ. A lineáris algebrában a Cayley-Hamilton tétel kimondja, hogy egy kommutatív gyűrű feletti minden négyzetes mátrix (pl. valós vagy komplex számok) kielégíti saját karakterisztikus egyenletét. Áttekintjük az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$, az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$, az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ és az általánosított szedeniók $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ algebráját. Bebizonyítjuk a Cayley-Hamilton tételt a $\mathbb{C}_\alpha$, $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ asszociatív és az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ nem asszociatív algebrákban.

ABSTRACT. In linear algebra, the Cayley-Hamilton theorem states that every square matrix over a commutative ring (such as the real or complex numbers) satisfies its own characteristic equation. We review the algebra of generalized complex numbers $\mathbb{C}_\alpha$, generalized quaternions $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$, generalized octonions $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ and generalized sedenions $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$. We prove the Cayley-Hamilton theorem in the associative algebras $\mathbb{C}_\alpha$, $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ and non-associative algebras $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

1. Bevezetés

A Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárás [3] Albert, A.A. [1] által bevezetett általánosítása lehetőséget kínál egymásra épülő algebrák egy szép és fontos sorozatának felépítésére.

Első lépésként a valós számok $\mathbb{R}$ struktúrájából, mint önmaga feletti 1-dimenziós algebrából kiindulva a megkettőzési eljárással az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ 2-dimenziós, neutrális elemes, kommutatív és asszociatív algebráját nyerjük [6]. Az $\alpha = 1$ speciális esetben az eljárás a klasszikus Gauss-féle komplex számok $\mathbb{C}$ algebráját eredményezi [4], [5].

A $\mathbb{C}_\alpha$ algebrára megismételve a megkettőzési eljárást az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ $(\beta \in \mathbb{R})$ 4-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív, viszont asszociatív algebrájához juthatunk [6]. Az $\alpha = \beta = 1$ különleges esetben az eljárás eredményeként így a klasszikus Hamilton-féle kvaterniók $\mathbb{H}$ algebráját kaphatjuk [4], [5].

A $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrából kiindulva a megkettőzési eljárással az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ $(\gamma \in \mathbb{R})$ 8-dimenziós, neutrális elemes. nem kommutatív, nem asszociatív, de alternáló

ENGLISH TITLE. The Cayley-Hamilton theorem and the algebra of vector matrices
KULCSSZAVAK. Cayley-Hamilton tétel, klasszikus általánosított algebra, Zorn-féle vektor-mátrix.
KEYWORDS. Cayley-Hamilton theorem, classical generalized algebra, Zorn vector matrix.

algebráját állíthatjuk elő [7], [8]. Az $\alpha = \beta = \gamma = 1$ választással ezen a módon a klasszikus Cayley-Graves-féle $\mathbb{O}$ oktoniók származtathatók [4], [5].

Ezután a megismételt megkettőzési eljárással az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebrából állíthatjuk elő az általánosított szedeniók $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ $(\delta \in \mathbb{R})$ 16-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív, nem asszociatív, nem is alternáló, viszont flexibilis algebráját [9], [10]. E négy említett, a megkettőzési eljárással felépülő struktúra közül az első kettő véges dimenziós asszociatív algebra, így alkalmas mátrixok segítségével reprezentálható. A második kettő viszont nem asszociatív algebra, ezek a Zorn, M.A. [12], [13] által bevezetett vektor-mátrixok struktúrájával reprezentálhatók eredményesen.

A lineáris algebra nevezetes tétele a Cayley-Hamilton tétel, amely azt állítja, hogy egy kommutatív, neurális elemes R gyűrű feletti n-edrendű négyzetes mátrixok $M_n(R)$ struktúrájában minden mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét [2], [11]. E tétel egy különleges esetét először Hamilton , W.R. $(1805 - 1865)$ ír matematikus, fizikus és csillagász bizonyította be 1853-ban a kvaterniók algebrájára. Ez a struktúra bizonyos negyedrendű valós, vagy alkalmas másodrendű komplex komponensű mátrixok felhasználásával reprezentálható. Cayley, A. $(1821 - 1895)$ angol matematikus a tételt a legfeljebb harmadrendű mátrixokra 1858-ban tárgyalta, de csupán a másodrendű mátrixokra publikált bizonyítást. Ami az n-edrendű mátrixokat illeti, Cayley kijelentette: „… nem tartottam szükségesnek a tétel formális bizonyítását bármilyen rendű mátrix általános esetére.” A Cayley-Hamilton tételt általánosan először Frobenius, F.G. $(1849 - 1917)$ német matematikus bizonyította be 1878-ban.

Dolgozatunkban azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy ez a fontos tétel bizonyítható-e a fentiekben említett négy nevezetes algebrában.

2. A Cayley-Hamilton tétel a $\mathbb{C}_\alpha$ algebrában

Ebben a fejezetben bebizonyítjuk, hogy az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$ algebráját reprezentáló mátrixok struktúrájában érvényes a Cayley-Hamilton tétel.

Legyen $\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$ a valós számok teste a 0 összeadási és az 1 szorzási neutrális elemmel. A

$$\mathbb{C}_\alpha := \{a + b \cdot i : a, b \in \mathbb{R}, i \notin \mathbb{R}\} \tag{1}$$

alakú kifejezéseket az általánosított komplex számok halmazának nevezzük, ha az $\{1, i\}$ általánosított komplex-egységek eleget tesznek a következő szorzási szabályoknak:

$$1 \cdot 1 := 1\,, \quad 1 \cdot i = i \cdot 1 := i\,, \quad i^2 := -\alpha \tag{2}$$

ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter.

A $\mathbb{C}_\alpha$ halmazban értelmezhetünk az $\mathbb{R}$ elemeivel, mint skalárokkal való szorzást, egy összeadást és a (2) összefüggések felhasználásával az algebrák szerkesztésének homogén és disztributív szabályait követve egy szorzást is[6]. Tetszőleges $r \in \mathbb{R}, a + b \cdot i, c + d \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ esetén

skalárral való szorzás: $r \cdot (a + b \cdot i) := (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot i$ (3)

összeadás: $(a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) := (a + c) + (b + d) \cdot i$ (4)

szorzás: $(a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) := (a \cdot c - \alpha \cdot b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot i\,.$ (5)

Az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$ halmaza a rajta értelmezett $(3), (4)$ és (5) műveletekkel egy 2-dimenziós, neutrális elemes, kommutatív és asszociatív algebrát alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

A $\mathbb{C}_\alpha$ algebra részletes tárgyalása a szerző [6] munkájában megtalálható.

A $\mathbb{C}_\alpha$ struktúra mátrix-reprezentációjának meghatározásához az (5) felhasználásával tetszőleges $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ esetén

$$1 \cdot z = (1 + 0 \cdot i) \cdot (a + b \cdot i) = a + b \cdot i \tag{6}$$

$$i \cdot z = (0 + 1 \cdot i) \cdot (a + b \cdot i) = -\alpha \cdot b + a \cdot i \tag{7}$$

adódik, ezen összefüggéseket az

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot z \\ i \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{8}$$

mátrixegyenlet formájában írhatjuk fel. Ezt felhasználva tekintsük ezért az

$$M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \tag{9}$$

alakú mátrixok halmazát. Ha $r \in \mathbb{R}, A, B \in M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, akkor egyszerű számolással beláthatjuk, hogy $r \cdot A, A + B, A \cdot B \in M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ teljesül, így $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ részalgebrát alkot az $\mathbb{R}$ feletti másodrendű négyzetes mátrixok $M_2(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebrájában.

Tekintsük most az

$$F_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}_\alpha \to M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \,, a + b \cdot i \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} \tag{10}$$

leképezést! Az $F_{\mathbb{C}}$ bijektív, hiszen $F_{\mathbb{C}}^{-1}$ is leképezés. Ha $r \in \mathbb{R}, z, t \in \mathbb{C}_\alpha$ tetszőleges elemek, akkor az $F_{\mathbb{C}}$ leképezésre teljesül a
homogén:

$$F_{\mathbb{C}}(r \cdot z) = r \cdot F_{\mathbb{C}}(z) \;, \tag{11}$$

additív:

$$F_{\mathbb{C}}(z + t) = F_{\mathbb{C}}(z) + F_{\mathbb{C}}(t) \;, \tag{12}$$

multiplikatív:

$$F_{\mathbb{C}}(z \cdot t) = F_{\mathbb{C}}(z) \cdot F_{\mathbb{C}}(t) \tag{13}$$

tulajdonság. Így a (10) leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus. Ebben, a $\mathbb{C}_\alpha$ algebrával izomorf $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ mátrixalgebrában bizonyítjuk, hogy igaz a Cayley-Hamilton tétel.

Ha $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} \in M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ egy tetszőleges mátrix, akkor

$$det(A) = det \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} = a^2 + \alpha \cdot b^2 \in \mathbb{R} \tag{14}$$

teljesül. Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $E \in M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ az egységmátrix, akkor

$$A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ -\alpha \cdot b & a - \lambda \end{pmatrix}, \tag{15}$$

így az A mátrix karakterisztikus polinomja

$$k_A(\lambda) = det(A - \lambda \cdot E) = \lambda^2 - 2 \cdot a \cdot \lambda + (a^2 + \alpha \cdot b^2) = \tag{16}$$

$$= \lambda^2 - tr(A) + det(A) \in \mathbb{R}[x] \,,$$

ahol $tr(A)$ az A mátrix nyoma.

1. Tétel. Ha $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} \in M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, akkor $k_A(A) = \mathcal{O}$, tehát az A mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét.

BIZONYÍTÁS. A (14) - (16) összefüggések felhasználásával

$$k_A(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} - 2 \cdot a \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} + (a^2 + \alpha \cdot b^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 - \alpha \cdot b^2 & 2 \cdot a \cdot b \\ -2 \cdot \alpha \cdot a \cdot b & a^2 - \alpha \cdot b^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \cdot a^2 & 2 \cdot a \cdot b \\ -2 \cdot \alpha \cdot a \cdot b & 2 \cdot a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2 + \alpha \cdot b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + \alpha \cdot b^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \tag{17}$$

teljesül, vagyis az A mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét. Ez pedig pontosan a Cayley-Hamilton tétel az $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ algebrában. ■

3. A Cayley-Hamilton tétel a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrában

Ezután belátjuk, hogy az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$ algebráját reprezentáló mátrixok struktúrájában is érvényes a Cayley-Hamilton tétel.

A

$$\mathbb{H}_{\alpha\beta} := \{a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k : a, b, c, d \in \mathbb{R}; i, j, k \notin \mathbb{R}; i \neq j \neq k \neq i\} \tag{18}$$

alakú kifejezéseket általánosított kvaterniók halmazának nevezzük, ha az $\{1, i, j, k\}$ általánosított kvaternió-egységek között teljesülnek az alábbi szorzási szabályok

$$1 \cdot 1 := 1, 1 \cdot i = i \cdot 1 := i, 1 \cdot j = j \cdot 1 := j, 1 \cdot k = k \cdot 1 := k$$

$$i^2 := -\alpha, j^2 := -\beta, k^2 := -\alpha \cdot \beta \tag{19}$$

$$i \cdot j = -j \cdot i := k, j \cdot k = -k \cdot j := \beta \cdot i, k \cdot i = -i \cdot k := \alpha \cdot j,$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ rögzített valós paraméterek.

A $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ halmazban értelmezhetünk az $\mathbb{R}$ elemeivel, mint skalárokkal való szorzást, egy összeadást és a (19) összefüggések felhasználásával az algebrák szerkesztésének homogén és disztributív szabályait követve egy szorzást is [6]. Tetszőleges $r \in \mathbb{R}, a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$, $a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ esetén a

skalárral való szorzás:

$$r \cdot (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) := (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot i + (r \cdot c) \cdot j + (r \cdot d) \cdot k \tag{20}$$

összeadás:

$$(a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) + (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) :=$$

$$:= (a + a') + (b + b') \cdot i + (c + c') \cdot j + (d + d') \cdot k \tag{21}$$

szorzás:

$$(a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) \cdot (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) :=$$
$$:= (a \cdot a' - \alpha \cdot b \cdot b' - \beta \cdot c \cdot c' - \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d') +$$
$$+(a \cdot b' + b \cdot a' + \beta \cdot c \cdot d' - \beta \cdot d \cdot c') \cdot i +$$
$$+(a \cdot c' - \alpha \cdot b \cdot d' + c \cdot a' + \alpha \cdot d \cdot b') \cdot j +$$
$$+(a \cdot d' + b \cdot c' - c \cdot b' + d \cdot a') \cdot k \tag{22}$$

Az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ halmaza a rajta értelmezett $(20), (21)$ és (22) műveletekkel egy 4-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív, de asszociatív algebrát alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

A (19) összefüggésben szereplő $i \cdot j = k$ felhasználásával a tetszőleges $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternió egyértelműen írható fel

$$q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k = (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) \cdot j = z_1 + z_2 \cdot j \tag{23}$$

alakban, ahol $z_1 = a + b \cdot i, z_2 = c + d \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$, ez a q kvaternió komplex-algebrai alakja. A $(20) - (23)$ összefüggések felhasználásával az általánosított kvaterniók komplex-algebrai alakjára levezethetők az alábbi számolási szabályok:

Ha $r \in \mathbb{R}, z_1 + z_2 \cdot j, w_1 + w_2 \cdot j \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor

$$r \cdot (z_1 + z_2 \cdot j) = (r \cdot z_1) + (r \cdot z_2) \cdot j \tag{24}$$

$$(z_1 + z_2 \cdot j) + (w_1 + w_2 \cdot j) = (z_1 + w_1) + (z_2 + w_2) \cdot j \tag{25}$$

$$(z_1 + z_2 \cdot j) \cdot (w_1 + w_2 \cdot j) = (z_1 \cdot w_1 - \beta \cdot z_2 \cdot \overline{w_2}) + (z_1 \cdot w_2 + z_2 \cdot \overline{w_1}) \cdot j. \tag{26}$$

A (26) összefüggésben szereplő felülvonás az adott általánosított komplex szám konjugáltját jelenti, ahol a $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ konjugáltján a $\bar{z} = a - b \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ általánosított komplex számot értjük. A $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebra részletes tárgyalása a [6] dolgozatban megtalálható.

Az általánosított kvaterniók mátrixokkal történő reprezentációjának meghatározásához tetszőleges $q = z_1 + z_2 \cdot j \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ esetén (26) és a $\mathbb{C}_\alpha$ struktúrában a konjugált képzésének tulajdonságai [6] alapján

$$1 \cdot q = (1 + 0 \cdot j) \cdot (z_1 + z_2 \cdot j) = z_1 + z_2 \cdot j \tag{27}$$

$$j \cdot q = (0 + 1 \cdot j) \cdot (z_1 + z_2 \cdot j) = -\beta \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot j \tag{28}$$

következik, amely összefüggéseket a

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot q \\ j \cdot q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} \tag{29}$$

mátrixegyenlet formájában is felírhatjuk. Tekintsük ezután az

$$M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha) := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} : z_1, z_2 \in \mathbb{C}_\alpha \right\} \tag{30}$$

alakú mátrixok halmazát! Ha $r \in \mathbb{R}$, $A, B \in M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha)$, akkor a $\mathbb{C}_\alpha$ algebrában levő konjugálási szabályok felhasználásával egyszerű számolással igazolhatjuk, hogy $r \cdot A, A + B, A \cdot B \in M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha)$ teljesül, ezért $M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha)$ részalgebrát alkot a $\mathbb{C}_\alpha$ feletti másodrendű négyzetes mátrixok $M_2(\mathbb{C}_\alpha)$ teljes mátrixalgebrájában.

Vizsgáljuk most az

$$F_{\mathbb{H}} : \mathbb{H}_{\alpha\beta} \to M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha), z_1 + z_2 \cdot j \mapsto \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \tag{31}$$

leképezést! Az $F_{\mathbb{H}}$ bijektív, hiszen $F_{\mathbb{H}}^{-1}$ is leképezés. Ha $r \in \mathbb{R}; p, q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ tetszőleges elemek, akkor az $F_{\mathbb{H}}$ leképezésre teljesül az

$$F_{\mathbb{H}}(r \cdot p) = r \cdot F_{\mathbb{H}}(p) \tag{32}$$

homogén,

$$F_{\mathbb{H}}(p + q) = F_{\mathbb{H}}(p) + F_{\mathbb{H}}(q) \tag{33}$$

additív,

$$F_{\mathbb{H}}(p \cdot q) = F_{\mathbb{H}}(p) \cdot F_{\mathbb{H}}(q) \tag{34}$$

multiplikatív tulajdonság. Ezért igaz, hogy a (31) összefüggésben szereplő $F_{\mathbb{H}}$ leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus.

Ebben, a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrával izomorf $M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha)$ mátrixok alkotta algebrában bizonyítjuk, hogy igaz a Cayley-Hamilton tétel.

Ha $A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \in M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha)$ egy tetszőleges mátrix, akkor

$$det(A) = det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} = z_1 \cdot \overline{z_1} + \beta \cdot z_2 \cdot \overline{z_2} \in \mathbb{R}\,. \tag{35}$$

Legyen $\lambda \in \mathbb{C}_\alpha$, továbbá $E \in M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha)$ az egységmátrix, akkor

$$A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - \lambda & z_2 \\ -\beta \cdot \overline{z_2} & \overline{z_1} - \lambda \end{pmatrix}, \tag{36}$$

ezért az A mátrix karakterisztikus polinomja

$$k_A(\lambda) = det(A - \lambda \cdot E) = det \begin{pmatrix} z_1 - \lambda & z_2 \\ -\beta \cdot \overline{z_2} & \overline{z_1} - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^2 - (z_1 + \overline{z_1}) \cdot \lambda + (z_1 \cdot \overline{z_1} + \beta \cdot z_2 \cdot \overline{z_2}) = \lambda^2 - tr(A) \cdot \lambda + det(A) \in \mathbb{R}[x]\,. \tag{37}$$

2. Tétel. Ha $A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \in M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha)$, akkor $k_A(A) = \mathcal{O}$, vagyis az A mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét.

BIZONYÍTÁS. A $(35) - (37)$ összefüggések felhasználásával

$$k_A(A) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} - (z_1 + \overline{z_1}) \cdot \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} +$$

$$+(z_1\cdot\overline{z_1}+\beta\cdot z_2\cdot\overline{z_2})\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1^2-\beta\cdot z_2\cdot\overline{z_2} & z_1\cdot z_2+z_2\cdot\overline{z_1}\\ -\beta\cdot z_1\cdot\overline{z_2}-\beta\cdot\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} & (\overline{z_1})^2-\beta\cdot z_2\cdot\overline{z_2}\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}z_1^2+z_1\cdot\overline{z_1} & z_1\cdot z_2+z_2\cdot\overline{z_1}\\ -\beta\cdot z_1\cdot\overline{z_2}-\beta\cdot\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} & z_1\cdot\overline{z_1}+(\overline{z_1})^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z_1\cdot\overline{z_1}+\beta\cdot z_2\cdot\overline{z_2} & 0\\ 0 & z_1\cdot\overline{z_1}+\beta\cdot z_2\cdot\overline{z_2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\mathcal{O}\in M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha), \tag{38}$$

vagyis az A mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét. Ez pedig azt jelenti, hogy a Cayley-Hamilton tétel igaz az $M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha)$ algebrában. ■

4. A Cayley-Hamilton tétel az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebrában

Most belátjuk, hogy az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebráját reprezentáló vektor-mátrixok struktúrájában szintén érvényes a Cayley-Hamilton tétel.
Az

$$\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}:=\left\{\sum_{i=0}^{7}a_i\cdot e_i : e_0=1, e_i\notin\mathbb{R}\ (1\le i\le 7), e_i\ne e_j (i\ne j)\right\} \tag{39}$$

alakú kifejezéseket az általánosított oktoniók halmazának nevezzük, ha az $\{e_i\}_{i=0}^{7}$ általánosított oktonió-egységek között teljesülnek a [8] dolgozat végén szereplő műveleti táblázatban megadott $e_i\cdot e_j$ szorzási szabályok, ahol továbbá $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ rögzített valós paraméterek.

Az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ halmazban értelmezhetünk az $\mathbb{R}$ elemeivel, mint skalárokkal való szorzást, egy összeadást és az $\{e_i\}_{i=0}^{7}$ elemek felhasználásával az algebrák szerkesztésének szabályait követve egy szorzást is [8].

Tetszőleges $r\in\mathbb{R}, o_1=\sum_{i=0}^{7}a_i\cdot e_i, o_2:=\sum_{i=0}^{7}b_i\cdot e_i\in\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ esetén legyen
skalárral való szorzás:

$$r\cdot\left(\sum_{i=0}^{7}a_i\cdot e_i\right):=\sum_{i=0}^{7}(r\cdot a_i)\cdot e_i\ , \tag{40}$$

összeadás:

$$\sum_{i=0}^{7}a_i\cdot e_i+\sum_{i=0}^{7}b_i\cdot e_i:=\sum_{i=0}^{7}(a_i+b_i)\cdot e_i\ , \tag{41}$$

szorzás:

$$\left(\sum_{i=0}^{7}a_i\cdot e_i\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{7}b_j\cdot e_j\right):=\sum_{i,j=0}^{7}\left(a_i\cdot b_j\right)\cdot\left(e_i\cdot e_j\right). \tag{42}$$

Az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ halmaza a rajta értelmezett $(40), (41)$ és (42) műveletekkel egy 8-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív, nem asszociatív, alternáló algebrát alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

Minden $o=\sum_{i=0}^{7}a_i\,e_i$ általánosított oktonió egyértelműen írható fel

$$o=q_1+q_2\cdot E \tag{43}$$

alakban, ahol $q_1,q_2\in\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ és $E=e_4$, ez az általánosított oktonió kvaternió-algebrai alakja.

A $(40)-(43)$ összefüggések felhasználásával az általánosított oktoniók kvaternió-algebrai alakjára levezethetők a következő számolási szabályok:
ha $r\in\mathbb{R},\ p_1+p_2\cdot E, q_1+q_2\cdot E\in\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

$$r\cdot(p_1+p_2\cdot E)=(r\cdot p_1)+(r\cdot p_2)\cdot E \tag{44}$$

$$(p_1 + p_2 \cdot E) + (q_1 + q_2 \cdot E) = (p_1 + q_1) + (p_2 + q_2) \cdot E \tag{45}$$

$$(p_1 + p_2 \cdot E) \cdot (q_1 + q_2 \cdot E) = (p_1 \cdot q_1 - \gamma \cdot \overline{q_2} \cdot p_2) + (p_2 \cdot \overline{q_1} + q_2 \cdot p_1) \cdot E\ . \tag{46}$$

A (46) összefüggésben szereplő felülvonás az adott általánosított kvaternió konjugáltját jelenti. Minden $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ egyértelműen írható fel

$$q = a + U \tag{47}$$

alakban, ahol $a = S(q) \in \mathbb{R}$ a q valós része, $U = b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k = V(q) \in Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta})$ a q képzetes része. Ez a $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ Hamilton-féle alakja.

Minden $o = q_1 + q_2 \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ pedig egyértelműen írható fel a (47) felhasználásával

$$o = (a + U) + (b + V) \cdot E \tag{48}$$

alakban, ahol $q_1 = a + U, q_2 = b + V \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, itt $a, b \in \mathbb{R}$ és $U, V \in Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta})$ teljesül. Ez az $o \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ Hamilton-féle alakja.

Az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebra részletes tárgyalása az [7], [8] és [9] dolgozatokban található.

Az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebra reprezentálásához tekintsük a

$$Zorn(3, \mathbb{C}_\gamma) := \left\{ \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, U, V \in Im(\mathbb{H}_{\alpha\beta}), i \notin \mathbb{R}, i^2 = -\gamma \right\} \tag{49}$$

halmazt, amelynek elemei a Zorn-féle vektor-mátrixok. Látható, hogy e vektor-mátrixok főátlójában a $\mathbb{C}_\gamma$, mellékátlójában pedig a $\mathbb{C}_\gamma^3$ elemei találhatók. E vektor-mátrixok között értelmezhetünk egy komponensenként elvégzendő $\mathbb{R}$-beli elemmel, mint skalárral való szorzást és egy összeadást, valamint egy $*$ szorzást is a [9] dolgozatban bemutatott módon. Ha $r \in \mathbb{R}$ és $A, B \in Zorn(3, \mathbb{C}_\gamma)$, akkor $r \cdot A, A + B, A * B \in Zorn(3, \mathbb{C}_\gamma)$, tehát e vektor-mátrixok halmaza zárt a köztük értelmezett műveletekre nézve.

Tekintsük most az

$$F_{\mathbb{O}}: \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \to Zorn(3, \mathbb{C}_\gamma), (a + U) + (b + V) \cdot E \mapsto \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} \tag{50}$$

leképezést! Az $F_{\mathbb{O}}$ bijektív, hiszen $F_{\mathbb{O}}^{-1}$ inverze is leképezés. Ha $r \in \mathbb{R}, o_1, o_2 \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ tetszőleges elemek, akkor az $F_{\mathbb{O}}$ leképezésre teljesül az

$$F_{\mathbb{O}}(r \cdot o_1) = r \cdot F_{\mathbb{O}}(o_1) \tag{51}$$

homogén, az

$$F_{\mathbb{O}}(o_1 + o_2) = F_{\mathbb{O}}(o_1) + F_{\mathbb{O}}(o_2) \tag{52}$$

additív és az

$$F_{\mathbb{O}}(o_1 \cdot o_2) = F_{\mathbb{O}}(o_1) * F_{\mathbb{O}}(o_2) \tag{53}$$

multiplikatív tulajdonság.

Ezért az (50) összefüggésben szereplő $F_{\mathbb{O}}$ leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus. Ebben, az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebrával izomorf $Zorn(3, \mathbb{C}_\gamma)$ Zorn-féle vektor-mátrixok alkotta algebrában bizonyítjuk, hogy igaz a Cayley-Hamilton tétel.

Legyen most

$$A = \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} \in Zorn(3, \mathbb{C}_\gamma) \tag{54}$$

egy tetszőleges Zorn-féle vektor-mátrix, ekkor

$$det(A) = det\begin{pmatrix} a+i\cdot b & -U+i\cdot V \\ U+i\cdot V & a-i\cdot b \end{pmatrix} = (a+i\cdot b)\cdot(a-i\cdot b) -$$
$$-(U+i\cdot V)\circ(-U+i\cdot V) = a^2+\gamma\cdot b^2+U\circ U+\gamma\cdot(V\circ V)\in\mathbb{R} \tag{55}$$

teljesül, itt $\circ$ a [9] dolgozatban értelmezett $\mathbb{C}_\gamma^3$-beli általánosított skaláris szorzat. Ha $\lambda\in\mathbb{C}_\gamma$, továbbá $E\in Zorn(3,\mathbb{C}_\gamma)$ az egység vektor-mátrix, akkor

$$A-\lambda\cdot E = \begin{pmatrix} a+i\cdot b & -U+i\cdot V \\ U+i\cdot V & a-i\cdot b \end{pmatrix} - \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1+i\cdot 0 & O+i\cdot O \\ O+i\cdot O & 1-i\cdot 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (a+i\cdot b)-\lambda & -U+i\cdot V \\ U+i\cdot V & (a-i\cdot b)-\lambda \end{pmatrix}, \tag{56}$$

ezért az A mátrix karakterisztikus polinomja

$$k_A(\lambda) = det(A-\lambda\cdot E) = det\begin{pmatrix} (a+i\cdot b)-\lambda & -U+i\cdot V \\ U+i\cdot V & (a-i\cdot b)-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= [(a+i\cdot b)-\lambda]\cdot[(a-i\cdot b)-\lambda]-(U+i\cdot V)\circ(-U+i\cdot V) = \tag{57}$$
$$= \lambda^2 - [(a+i\cdot b)+(a-i\cdot b)]\cdot\lambda + [a^2+\gamma\cdot b^2+U\circ U+\gamma\cdot(V\circ V)] =$$
$$= \lambda^2 - tr(A)\cdot\lambda + det(A)\in\mathbb{R}[x]\ .$$

3. Tétel. Ha $A = \begin{pmatrix} a+i\cdot b & -U+i\cdot V \\ U+i\cdot V & a-i\cdot b \end{pmatrix}\in Zorn(3,\mathbb{C}_\gamma)$, akkor $k_A(A)=\mathcal{O}$, tehát az A vektor-mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét.

BIZONYÍTÁS. Az $(54)-(57)$ összefüggések felhasználásával

$$k_A(A) = \begin{pmatrix} a+i\cdot b & -U+i\cdot V \\ U+i\cdot V & a-i\cdot b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a+i\cdot b & -U+i\cdot V \\ U+i\cdot V & a-i\cdot b \end{pmatrix} -$$
$$-2\cdot a\cdot\begin{pmatrix} a+i\cdot b & -U+i\cdot V \\ U+i\cdot V & a-i\cdot b \end{pmatrix} + \tag{58}$$
$$+[a^2+\gamma\cdot b^2+U\circ U+\gamma\cdot(V\circ V)]\cdot\begin{pmatrix} 1+i\cdot 0 & O+i\cdot O \\ O+i\cdot O & 1+i\cdot 0 \end{pmatrix}\ .$$

Az (58) összefüggésben kijelölt, vektor-mátrixok közötti műveletek elvégzése után a [9] dolgozatban szereplő $\mathbb{C}_\gamma^3$-beli $\times$ általánosított vektoriális szorzat tulajdonságai és e dolgozatban levő Lemmák alapján

$$\begin{pmatrix} a^2-\gamma b^2+i\cdot 2ab-U\circ U-\gamma\cdot(V\circ V) & -2aU+i\cdot 2aV \\ 2aU+i\cdot 2aV & a^2-\gamma b^2-i\cdot 2ab-U\circ U-\gamma\cdot(V\circ V) \end{pmatrix} +$$
$$+\begin{pmatrix} -2a^2-i\cdot 2ab & 2aU-i\cdot 2aV \\ -2aU-i\cdot 2aV & -2a^2+i\cdot 2ab \end{pmatrix} + \tag{59}$$

$$+\begin{pmatrix} a^2+\gamma b^2+U\circ U+\gamma\cdot(V\circ V) & O+i\cdot O \\ O+i\cdot O & a^2+\gamma b^2+U\circ U+\gamma\cdot(V\circ V)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0+i\cdot 0 & O+i\cdot O \\ O+i\cdot O & 0+i\cdot 0\end{pmatrix}=\mathcal{O}$$

adódik, tehát az A mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét. Ez pedig azt jelenti, hogy a Cayley-Hamilton tétel igaz a $Zorn(3,\mathbb{C}_\gamma)$ vektor-mátrix algebrában.■

5. A Cayley-Hamilton tétel az $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ algebrában

Végül megmutatjuk, hogy az általánosított szedeniók $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ algebráját reprezentáló vektor-mátrixok struktúrájában is igaz a Cayley-Hamilton tétel.
Az

$$\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}:=\left\{\sum_{i=0}^{15}a_i\cdot E_i:\ E_0:=1, E_i\notin\mathbb{R}\ (1\le i\le 15), E_i\ne E_j\ (i\ne j)\right\} \tag{60}$$

alakú kifejezéseket az általánosított szedeniók halmazának nevezzük, ha az $\{E_i\}_{i=0}^{15}$ általánosított szedenió-egységek között érvényesek a [10] dolgozat végén levő műveleti táblázatban szereplő $E_i\cdot E_j$ szorzási szabályok, itt $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ rögzített valós paraméterek.

Az $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ halmazban értelmezhetjük az $\mathbb{R}$ elemeivel, mint skalárokkal való szorzást, egy összeadást, valamint az általánosított szedenió-egységek elempárjai szorzatainak felhasználásával az algebrák általános megszerkesztésének szabályait követve egy szorzási műveletet is [10].

Tetszőleges $r\in\mathbb{R}, s_1=\sum_{i=0}^{15}a_i\cdot E_i, s_2=\sum_{i=0}^{15}b_i\cdot E_i\in\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ esetén
skalárral való szorzás:

$$r\cdot\left(\sum_{i=0}^{15}a_i\cdot E_i\right):=\sum_{i=0}^{15}(r\cdot a_i)\cdot E_i\ , \tag{61}$$

összeadás:

$$\sum_{i=0}^{15}a_i\cdot E_i+\sum_{i=0}^{15}b_i\cdot E_i:=\sum_{i=0}^{15}(a_i+b_i)\cdot E_i\ , \tag{62}$$

szorzás:

$$\left(\sum_{i=0}^{15}a_i\cdot E_i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{15}b_j\cdot E_j\right):=\sum_{i,j=0}^{15}\left(a_i\cdot b_j\right)\cdot\left(E_i\cdot E_j\right). \tag{63}$$

Az általánosított szedeniók (60) összefüggéssel értelmezett halmaza a (61), (62) és (63) műveletekkel egy 16-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív, nem asszociatív, nem is alternáló, viszont flexibilis algebrát alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

Minden $s=\sum_{i=0}^{15}a_i\cdot E_i$ általánosított szedenió egyértelműen írható fel

$$s=o_1+o_2\cdot F \tag{64}$$

alakban, ahol $o_1,o_2\in\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ és $F=E_8$, ez az általánosított szedeniók oktonió-algebrai alakja. A $(61)-(63)$ összefüggések felhasználásával az általánosított szedeniók oktonió-algebrai alakjára bizonyíthatók a következő számolási szabályok:
ha $r\in\mathbb{R}, u_1+u_2\cdot F, v_1+v_2\cdot F\in\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, akkor

$$r\cdot(u_1+u_2\cdot F)=(r\cdot u_1)+(r\cdot u_2)\cdot F\ , \tag{65}$$

$$(u_1+u_2\cdot F)+(v_1+v_2\cdot F)=(u_1+v_1)+(u_2+v_2)\cdot F\ , \tag{66}$$

$$(u_1+u_2\cdot F)\cdot(v_1+v_2\cdot F)=(u_1\cdot v_1-\delta\cdot\overline{v_2}\cdot u_2)+(u_2\cdot\overline{v_1}+v_2\cdot u_1)\cdot F \tag{67}$$

teljesül. A (67) összefüggésben szereplő felülvonás az adott általánosított oktonió konjugáltját jelenti. A (47) és (48) összefüggések gondolatait folytatva minden $s = o_1 + o_2 \cdot F \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ egyértelműen írható fel

$$s = (a + U) + (b + V) \cdot F \tag{68}$$

alakban, ahol $o_1 = a + U, o_2 = b + V \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, itt $a, b \in \mathbb{R}, U, V \in Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$. Ez a (68) előállítás az s általánosított szedenió Hamilton-féle alakja.

Az $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ algebra részletes tárgyalása a [10] dolgozatban megtalálható.

Az általánosított szedeniók algebrájának reprezentációjához tekintsük a

$$Zorn(7, \mathbb{C}_\delta) := \left\{ \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, U, V \in Im(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}), i \notin \mathbb{R}, i^2 = -\delta \right\} \tag{69}$$

halmazt, amelynek elemei a Zorn-féle vektor-mátrixok. Figyeljük meg, hogy e vektor-mátrixok főátlójában a $\mathbb{C}_\delta$, míg mellékátlójában a $\mathbb{C}_\delta^7$ elemei állnak. E vektor-mátrixok között értelmezhetünk egy komponensenként elvégzendő $\mathbb{R}$-beli elemmel, mint skalárral való szorzást és egy összeadást, valamint egy $*$ szorzást is a [10] dolgozatban bevezetett módon.

Ha $r \in \mathbb{R}, A, B \in Zorn(7, \mathbb{C}_\delta)$, akkor $r \cdot A, A + B, A * B \in Zorn(7, \mathbb{C}_\delta)$, vagyis az ilyen típusú vektor-mátrixok halmaza zárt ezen műveletekre nézve.

Tekintsük ezután az

$$F_{\mathbb{S}} : \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta} \to Zorn(7, \mathbb{C}_\delta), (a + U) + (b + V) \cdot F \mapsto \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} \tag{70}$$

leképezést! Az $F_{\mathbb{S}}$ bijektív, mert $F_{\mathbb{S}}^{-1}$ inverz is leképezés. Ha $r \in \mathbb{R}, s_1, s_2 \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ tetszőleges elemek, akkor az $F_{\mathbb{S}}$ leképezésre teljesül az

$$F_{\mathbb{S}}(r \cdot s_1) = r \cdot F_{\mathbb{S}}(s_1) \tag{71}$$

homogén,

$$F_{\mathbb{S}}(s_1 + s_2) = F_{\mathbb{S}}(s_1) + F_{\mathbb{S}}(s_2) \tag{72}$$

additív, és

$$F_{\mathbb{S}}(s_1 \cdot s_2) = F_{\mathbb{S}}(s_1) * F_{\mathbb{S}}(s_2) \tag{73}$$

multiplikatív tulajdonság. Így a (70) összefüggésben szereplő $F_{\mathbb{S}}$ leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus.

Ebben, az $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ algebrával izomorf $Zorn(7, \mathbb{C}_\delta)$ Zorn-féle vektor-mátrixok alkotta algebrában bizonyítjuk, hogy érvényes a Cayley-Hamilton tétel.

Legyen most

$$A = \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} \in Zorn(7, \mathbb{C}_\delta) \tag{74}$$

egy tetszőleges vektor-mátrix, ekkor az előző fejezettel teljesen analóg okoskodással

$$det(A) = det \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} = a^2 + \delta \cdot b^2 + U \circ U + \delta \cdot (V \circ V) \in \mathbb{R} \tag{75}$$

teljesül. Ha $\lambda \in \mathbb{C}_\delta$, továbbá $E \in Zorn(7, \mathbb{C}_\delta)$ az egységmátrix, akkor

$$A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} (a + i \cdot b) - \lambda & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & (a - i \cdot b) - \lambda \end{pmatrix}, \tag{76}$$

ezért az A vektor-mátrix karakterisztikus polinomja

$$k_A(\lambda) = det(A - \lambda \cdot E) = \lambda^2 - 2 \cdot a \cdot \lambda + [a^2 + \delta \cdot b^2 + U \circ U + \delta \cdot (V \circ V)] =$$

$$= \lambda^2 - tr(A) \cdot \lambda + det(A) \in \mathbb{R}[x] \,. \tag{77}$$

Ezután már az előző fejezet 3. Tételével teljesen analóg módon könnyen bizonyíthatjuk a következő állítást.

4. Tétel. Ha $A = \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} \in Zorn(7, \mathbb{C}_\delta)$, akkor $k_A(A) = \mathcal{O}$ teljesül, vagyis az A vektor-mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét.
BIZONYÍTÁS. A $(74) - (77)$ összefüggések felhasználásával

$$k_A(A) = \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} -$$

$$-2 \cdot a \cdot \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} + [a^2 + \delta \cdot b^2 + U \circ U + \delta \cdot (V \circ V)] \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 + i \cdot 0 & O + i \cdot O \\ O + i \cdot O & 1 + i \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + i \cdot 0 & O + i \cdot O \\ O + i \cdot O & 0 + i \cdot 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \tag{78}$$

adódik a 3. Tétel bizonyításával megegyező okoskodással, ez pedig tételünk állítását bizonyítja.■

6. Összefoglaló

Dolgozatunkban a klasszikus lineáris algebra egy nevezetes tételének, a Cayley-Hamilton tételnek négy nevezetes, $\mathbb{R}$ feletti algebrában való érvényességével foglalkoztunk.

Tudjuk, hogy a véges dimenziós asszociatív algebrák alkalmas mátrixok struktúráival reprezentálhatók. Ilyen asszociatív algebrák az általánosított komplex számok és az általánosított kvaterniók is. Egyszerű direkt bizonyítást mutatunk be dogozatunk első felében arra, hogy ezen algebrákat leíró mátrixok struktúráiban – valójában nem is meglepő módon – teljesül a Cayley-Hamilton tétel.

Érdekesebb kérdés, hogy az általánosított oktoniók és általánosított szedeniók nem asszociatív algebrájában, amelyek Zorn nyomán alkalmas vektor-mátrixok struktúráival reprezentálhatók, vajon érvényes-e ez a fontos klasszikus tétel? A szerző korábbi [7] - [10] dolgozataira támaszkodva igazoltuk munkánk fő eredményét, hogy az említett két nevezetes nem asszociatív algebrákat leíró vektor-mátrix struktúrákban is igaz a Cayley-Hamilton tétel.

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszönetét fejezi ki Prof. Dr. Nagy Péter Tibor egyetemi tanárnak az algebrák témakörében folytatott konzultációkért és szakmai támogatásáért, segítségéért.

Irodalomjegyzék

[1] Albert, A.A.: *Quadratic forms permitting composition*. Annals of Mathematics. **43** (1942), 161-177.
[2] Curtis, M.L.: *Abstract Linear Algebra*. Spinger-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1990.
[3] Dickson, L.E.: *On quaternions and their generalization and the history of eight square theorem*. Annals of Mathematics, 2nd. **20**(3), (1919), 155-171. doi: 10.2307/1967865.
[4] Ebbinghaus, H.D. – Hermes, H. – Hirzebruch, F. – Koecher, M. – Mainzer, M. – Mainzer, K. – Neukirch. J. – Prestel, A. – Remmert, R.: *Numbers*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1991.
[5] Kantor, I.L. – Szolodovnyikov, A.Sz.: *Hiperkomplex számok*. Gondolat, Budapest, 1985
[6] Péntek, K.: Az általánosított kvaternióalgebrák és egy új felépítéséről. Dimenziók. Matematikai Közlemények, **6** (2018), 25-30. doi: 10.20312/dim.2018.03.
[7] Péntek, K.: *Az általánosított oktonióalgebrák egy új felépítéséről*. Dimenziók. Matematikai Közlemények, **7** (2019), 19-27. doi: 10.20312/dim.2019.03.
[8] Péntek, K.: *Az általánosított oktonióalgebrákról*. Savaria Természettudományi és Sporttudományi Közlemények, **18**, Szombathely, (2020), 7-20.
[9] Péntek, K.: *Az általánosított oktoniók és a vektor-mátrixok algebrája*. Dimenziók. Matematikai Közlemények, **11** (2023), 11-20. doi: 10.312/dim.2023.02.
[10] Péntek, K.: *Az általánosított szedeniók és a vektor-mátrixok algebrája*. Dimenziók. Matematikai Közlemények, **12** (2024), 91-103. doi: 10.20312/dim.2024.10.
[11] Praszolov, V.V.: *Lineáris algebra*. TypoTEX, Budapest, 2005.
[12] Zorn, M.A.: *Theorie der alternativen Ringe*. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1931) 123-147.
[13] Zorn, M.A.: *Alternativkörper und quadratische Systeme*. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1933), 395-402.

DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények (Mathematical Notes)
XIII. kötet, 2025 39–53

doi:10.20312/dim.2025.04

Stationarity and non-stationarity in long-term climate time series in Hungary

Zsolt Tóth*
University of Sopron, Faculty of Wood Sciences and Creative Industries,
Institute of Basic Sciences, Sopron, Hungary
toth.zsolt@uni-sopron.hu, 0000-0003-0999-784X

Ernő Kulcsár
University of Sopron, Faculty of Wood Sciences and Creative Industries,
József Cziráki Doctoral School, Sopron, Hungary
kulcsar.erno@uni-sopron.hu, 0009-0007-2848-3445

Adrienn Novotni
University of Sopron,
Sopron, Hungary
novotni.adrienn@uni-sopron.hu, 0000-0003-1451-0709

Összefoglaló. A tanulmány 154 év (1870–2023) adatait elemzi négy magyar városban a csapadék és hőmérséklet stacionaritásának vizsgálatára. A havi csapadék Szegeden és Nyíregyházán viszonylag stabil, míg Budapesten és Sopronban csökkenő tendenciát mutat. A hőmérsékleti idősorok minden városban nem stacionáriusak, jól kimutatható trendekkel és szerkezeti törésekkel. Az eredmények kiemelik a regionális különbségeket és a töréspontérzékeny elemzések jelentőségét.

Abstract. The study analyses 154 years of climate data (1870–2023) from four Hungarian cities to evaluate stationarity in precipitation and temperature. Monthly precipitation remains relatively stable in Szeged and Nyíregyháza, while Budapest and Sopron show a gradual decline. Temperature series in all cities are non-stationary, with clear trends and structural breaks. These findings emphasize regional differences in climate behaviour and the relevance of break-aware approaches for robust trend assessment.

1 Introduction

Long-term climatic records are crucial for understanding trends in temperature and precipitation patterns. Previous studies have highlighted significant shifts in climate variability, often indicating non-stationarity due to factors such as urbanization and anthropogenic influences.

Extensive literature exists on the non-stationarity and trends of temperature and extreme precipitation. Urban warming significantly increased air temperatures in China from 1959 to

Hungarian title. Stacionaritás és nem-stacionaritás a hosszú távú magyarországi éghajlati idősorokban.
Kulcsszavak. Stacionaritás, csapadék, hőmérséklet, KPSS-próba.
Keywords. Stationarity, precipitation, temperature, KPSS test.
* Corresponding author.

2018, with urban areas showing more pronounced changes [27]. In major Asian cities, including Osaka, Seoul, Tokyo, Taipei, Jakarta, and Bangkok, notable urban warming trends have been observed from 1901 to the present, with significant increases noted especially after 1981 [20]. Increasing minimum temperatures were observed across India from 1901 to 2003, particularly in winter and post-monsoon seasons [36]. In the USA, from 1968 to 2013, annual maximum air temperature trends increased [25], and the climate grids produced for Canada and the U.S. between 1901 and 2000 confirm significant trends in climate variables and model accuracy [29]. Extreme precipitation in the U.S. shows continental increases alongside significant regional variability, influenced by factors such as water vapour and climate change impacts, with a notable shift from snow to rain in various regions [33]. In South America, monthly climate variations showed distinct trends influenced by geographical factors, particularly from 1901 to 2000 [13]. Prominent positive temperature trends were observed in Spain from 1961 to 2006, with over 60% of the country experiencing increases [32]. In France, from 1948 to 2008, drought severity increased in the southern half, while drought timing showed earlier starts [14]. Extreme precipitation trends are significant in Europe, with an increase observed since recent years [28]. Significant increases in surface temperature in Africa have been observed from 1901 to 2014 [16]. Extreme temperatures in Turkey increased significantly between 1970 and 2018 [2]. In Iran, significant warming trends were observed from 1960 to 2005, particularly noted after 1990 [24]. In Australia (1967-2021), rainfall increased for shorter storm durations [19].

The literature on this topic is vast, with a general consensus that much of the Earth is expected to experience prolonged warming and more extreme precipitation patterns. The economic, social, and political impacts of climate change are now considered some of the most significant scientific issues, posing severe risks to global economies and social structures.

However, the persistence of certain climatic features suggests that stationarity may still characterize specific regions under certain conditions. The stationarity may, in some cases – at least locally – cast doubt on the trends. Research indicates that the assumption of stationarity is often challenged by local climatic variations, leading to uncertainties in trend analysis. Stationarity is generally established in the context of precipitation patterns. Historical data (1951–2003) indicates no significant trend for precipitation in most areas of the Hanjiang basin, China [8]. In arid Central Asia, precipitation variability is analysed over 126 years, revealing stationarity [39]. The global trend for annual total precipitation was not significant from 1921 to 1995 [35]. (Studies on the local stationarity of temperature trends are much more sporadic and less convincing.)

In this study, we investigate whether long-term daily temperature and precipitation data from four Hungarian cities – Budapest, Nyíregyháza, Sopron, Szeged (Figure 1) – between 1870 and 2023 exhibit stationarity. Long-term data is available only for these four Hungarian cities.

Naturally, the situation in Hungary has also been extensively analysed. An increasing trend in extreme precipitation events was identified in Pécs, a city in southwest Hungary, between 1971 and 2020 [34]. The trend in Keszthely between 1871 and 2014 shows a significant decreasing trend in annual precipitation, especially in autumn [23]. A study revealed a trend of increasing drought intensity and duration in western Hungary compared to eastern Hungary between 1961 and 2010 [3]. Linear models were acceptable for annual, spring, winter, and autumn temperature data in Hungary between 1901 and 2018 at a 0.1 significance level, but not for summer data, where a higher-order function may be necessary for accurate trend estimation [17]. Significant decreasing trends in both annual and seasonal precipitation amounts, including winter, were observed in Hungary during the period from 1901 to 1998 [11]. Research has reconstructed the temperature conditions of the Carpathian Basin over the past two millennia, identifying four main periods, the last of which was a cooling phase peaking around 1850 after a general warming

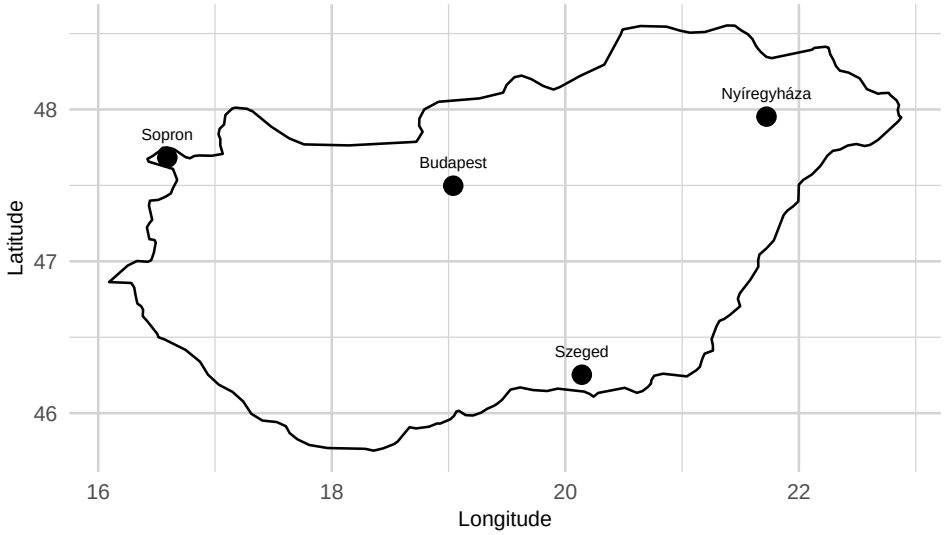


Figure 1. Analysed Hungarian cities

period [7]. The periodic behaviour of shallow groundwater levels in Hungary was investigated, revealing connections to large-scale circulation patterns and offering insights into future drought frequency and duration [12]. In summary, it is likely that Hungary and the Carpathian region will experience another warming phase, accompanied by significant changes in precipitation patterns, as highlighted in various studies [6, 10, 22].

Compared to the previously mentioned context, there is an even more abundant Hungarian literature. It rarely addresses the issue of stationarity.

This analysis aims to contribute to ongoing discussions regarding climate stability and variability. Understanding these patterns is vital for future climate predictions and can provide insights into the resilience of ecosystems and human infrastructure under changing climatic conditions.

2 Data and methods

2.1 Data

The analysis is based on historical meteorological data from four major Hungarian cities, spanning from 1870 to 2023. The dataset is sourced from the National Meteorological Service and includes original, verified, and homogenized data [1].

The analysis of long-term weather data from Budapest, Nyíregyháza, Sopron, and Szeged is crucial for climate research because it allows for the examination of regional climate patterns and trends across diverse geographical and climatic contexts within Hungary. Comparing data from these cities can reveal local variations in temperature, precipitation, and extreme weather events, contributing to a better understanding of climate change impacts. Of course, this is only relevant if the data does not show stationarity everywhere.

2.2 Research objective

The research objective is to investigate whether the temperature and precipitation can be considered stationary during the studied period and across the four cities. In the analysis, KPSS (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin) test were applied [26]. The KPSS test is used to test for stationarity in time series. The model is expressed as

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t,$$

where y_t is the observed time series, μ_t is the deterministic trend component, and ϵ_t is the stationary error term. The null hypothesis of the KPSS test is that the time series is stationary around a mean or a linear trend, which can be written as

$$H_0 : \mu_t = \mu_0 \quad \text{(stationarity)}.$$

The alternative hypothesis states that the time series follows a random walk, formulated as

$$H_1 : \mu_t \text{ follows a random walk} \quad \text{(non-stationarity)}.$$

The test statistic is calculated as

$$KPSS = \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^{T} S_t^2 / \hat{\sigma}^2,$$

where $S_t = \sum_{i=1}^{t} \hat{u}_i$ is the partial sum of the residuals, $\hat{u}_i$ are obtained from regressing y_t on an intercept or a linear trend, $\hat{\sigma}^2$ is an estimator of the long-run variance of ϵ_t, and T is the number of observations.

The KPSS statistic is compared to critical values from the KPSS distribution. If the test statistic exceeds the critical value, the null hypothesis of stationarity is rejected.

The KPSS test functions effectively when there is temporal correlation (autocorrelation) in the time series being analysed, as it accounts for the possibility that past values influence future observations, which is a common characteristic in non-stationary processes. In the analysis, the presence of autocorrelation was assessed using the Autocorrelation Function (ACF) and the Augmented Dickey-Fuller (ADF) test.

The ACF, implemented through the `acf` function from the `stats` package in R, facilitated the examination of the correlation between the time series and its lagged values, allowing for the identification of significant autocorrelation patterns. Subsequently, the ADF test, conducted using the `adf.test` function from the `tseries` package in R, evaluated the stationarity of the time series, helping to determine if a unit root was present, which is indicative of non-stationarity. The KPSS test works best with larger samples. (The high sample size was considered fulfilled without detailed separate examination.) The constancy of variance is fundamental to the reliability of the KPSS test results. If the variance of the time series is not constant (heteroscedastic), it can influence the test outcomes, potentially leading to incorrect conclusions regarding stationarity. Therefore, assessing heteroscedasticity is essential for ensuring the validity of subsequent analyses and interpretations. To investigate heteroscedasticity in the datasets, linear regression models were fitted using the `lm` function in R. Specifically, the response variable `r` was regressed against the `date` variable for each location. The Breusch-Pagan test for heteroscedasticity was conducted using the `bptest` function from the `lmtest` package. This procedure allowed for the evaluation of whether the variance of the residuals from the regression models was constant across the different time periods analysed.

A stationary series can be either level stationary or trend stationary. A time series is considered level stationary if its mean and variance remain constant over time, with fluctuations around a fixed mean. It does not exhibit trends or seasonal effects. A time series is trend stationary if it has a deterministic trend, meaning that while the series may exhibit a long-term upward or downward movement, the deviations from this trend are stationary.

The seasonal adjustment of the time series was performed in R by first aggregating daily data into monthly. This reduced the dataset from daily observations ($n = 56247$) to monthly aggregates ($n = 1848$). A time series object was then created with the ts function, specifying a start date and a frequency of 12 for monthly data. The series was decomposed using the `stl` function, and the seasonal effects were removed with the `seasadj` function, resulting in a seasonally adjusted time series.

The analysis tested for level stationarity using the KPSS test implemented in R. The `kpss.test` function from the `tseries` package was utilized to perform this test. The null hypothesis for the KPSS test under the level stationarity assumption is that the time series is level stationary, meaning that its mean remains constant over time. The analysis also examined trend stationarity using the KPSS test implemented in R. The `kpss.test` function from the `tseries` package was utilized for this purpose, too. In the context of the KPSS test, the null hypothesis posits that the time series is trend stationary, indicating that any trends present in the data can be represented as deterministic. A linear regression model was fitted to the data using the `lm()` function from the `stats` package, where the dependent variable was the time series of the adjusted data, and the independent variable was a sequence representing the time index. This model aimed to capture the deterministic trend in the seasonal and random effect-free data.

2.3 Stationarity

A time series is said to be strongly stationary if its joint probability distribution does not change when shifted in time. This means that for any given set of time points $t_1, t_2, \ldots, t_k$ and any time lag h, the joint distribution remains unchanged under this shift, which means that

$$P(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}) = P(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_k+h}).$$

This definition implies that all statistical properties (mean, variance, and higher-order moments) are constant over time.

A time series is considered weakly stationary if its first two moments are time-invariant, meaning that the mean is constant over time ($E[X_t] = \mu$ for all t), the variance is constant ($Var(X_t) = \sigma^2$ for all t), and the covariance between any two time points depends only on the lag h and not on time ($Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$ for all t).

In practice, weak stationarity is often the more commonly used condition for time series analysis, especially in the context of weather data. When dealing with weakly stationary processes, it is important to note that spurious trends can easily emerge if stationarity is not adequately assessed. Weak stationarity implies that the mean and variance of the process are constant, but the data can still be influenced by random fluctuations and other effects that may distort long-term results. If (weak) stationarity is not examined or is overlooked, several issues can arise:

- False trends: Statistical analyses, such as regression models, may reveal false trends that are actually the result of random fluctuations or seasonality rather than genuine long-term changes [9].
- Measurement errors: The variations caused by weak stationarity may lead to biases in trend measurement, resulting in misleading conclusions about climate change or other climatic impacts [15].

- Inconsistent results: Different analytical methods may yield varying results, making it difficult to draw reliable conclusions about temperature changes.

Therefore, it is crucial to thoroughly investigate the stationarity issue before analysing weakly stationary processes, and to apply appropriate statistical methods to filter out false trends.

Note on the scope of the KPSS test: The KPSS assesses level- or linear trend-stationarity under a single deterministic component. When time series exhibit non-linear or multi-phase (piecewise) trajectories, KPSS outcomes near conventional thresholds may be ambiguous. We therefore complement KPSS with Bai–Perron multiple-break tests (unknown break dates) and with Zivot–Andrews unit-root tests allowing for a single endogenous break; these directly probe parameter instability and help distinguish persistent stochastic trends from regime shifts.

2.3.1 Structural breaks and nonlinear trends

We fit piecewise-linear trend models and test for unknown breakpoints via the Bai–Perron methodology [4, 5]. Let y_t denote the seasonally adjusted monthly series and $t = 1, \ldots, T$. With M breaks at ordered dates $1 < \tau_1 < \cdots < \tau_M < T$, a parsimonious specification is given by

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \sum_{m=1}^{M} \delta_m (t - \tau_m)_+ + \varepsilon_t, \text{ where } (x)_+ = \max(x, 0),$$

and ε_t may exhibit short-range dependence and mild heteroskedasticity. The global null of parameter constancy is tested by supF statistics and the number of breaks is selected by BIC. The supF statistic is given by

$$\sup F = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} F(\tau).$$

For robustness, we also compute HAC-adjusted p-values [30]. In addition, we run Zivot–Andrews unit-root tests (model "both"), which endogenously estimate a single break in the deterministic component [40]. Implementation uses `strucchange` (Bai–Perron) and `urca` (ZA) packages in R.

3 Results

The ADF tests were conducted as preliminary tests to assess the stationarity of the precipitation and average temperature data across the four cities. All series showed a p-value of ≤ 0.01, indicating strong evidence against the null hypothesis of non-stationarity for both precipitation and temperature data across the four cities. This result suggests that these time series are stationary. It's important to note that these ADF tests were performed as preliminary checks prior to conducting the KPSS test. The ADF test was not used as a primary analytical tool because the assumption of linearity was not met in all cases (Table 1).

Note: The ADF tests reported here use the default specification without a deterministic trend component. For temperature series with strong trends and possible structural breaks, this can lead to over-rejection of the unit root hypothesis. Furthermore, the p-values returned by `tseries::adf.test` are discrete and often capped at 0.01 for very small values, which may give the impression of uniformly strong evidence against non-stationarity. Therefore, these results should be interpreted as preliminary checks only. Robust inference is provided by KPSS tests and breakpoint diagnostics (Bai–Perron, Zivot–Andrews) discussed later.

The autocorrelation function (ACF) analysis of seasonally adjusted daily precipitation data reveals interesting characteristics across different cities (Figure 2). For Budapest, the first lag

City	Metric	Statistic	p-value	Conclusion
Budapest	Precipitation	-11.280	0.01	Stationary
Budapest	Temperature	-10.251	0.01	Stationary
Nyíregyháza	Precipitation	-12.370	0.01	Stationary
Nyíregyháza	Temperature	-11.039	0.01	Stationary
Sopron	Precipitation	-12.305	0.01	Stationary
Sopron	Temperature	-9.651	0.01	Stationary
Szeged	Precipitation	-11.990	0.01	Stationary
Szeged	Temperature	-10.865	0.01	Stationary

Table 1. ADF test results

exhibits a positive autocorrelation of 0.063, which suggests a slight persistence in precipitation from one day to the next. However, as the lags increase, the values decrease rapidly, with subsequent lags approaching zero, indicating a lack of significant long-term dependencies. Similar trends are observed in the precipitation data from Sopron and Szeged, where the autocorrelations at lag 1 are very low, 0.008 and 0.074, respectively. These findings imply that while there may be short-term correlations in daily precipitation, longer-term persistence is minimal.

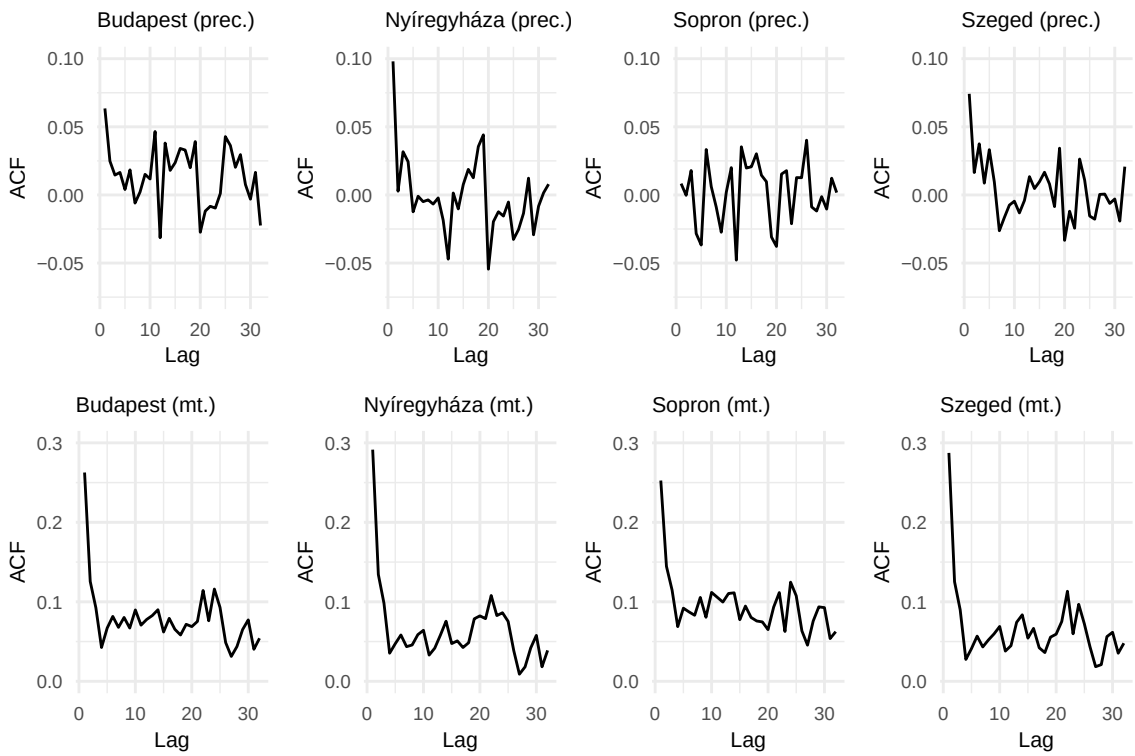


Figure 2. ACF test results for monthly precipitation and temperature (mean) data

In contrast, the analysis of seasonally adjusted temperature data indicates a different pattern of autocorrelation. For Budapest, the first lag shows a significant autocorrelation of 0.263, suggesting that daily temperature readings are strongly related to one another. This trend is further evidenced by the declining autocorrelation values, which remain appreciable across multiple lags, with values such as 0.126 at lag 2 and 0.093 at lag 3. Similar results are noted in Sopron and Szeged, where the autocorrelation at lag 1 is 0.253 and 0.287, respectively. The

City	Parameter	Statistic	p-value
Budapest	Precipitation	0.032	0.859
Nyíregyháza	Precipitation	0.860	0.354
Sopron	Precipitation	0.212	0.645
Szeged	Precipitation	0.001	0.980
Budapest	Temperature	2.150	0.143
Nyíregyháza	Temperature	6.036	0.014
Sopron	Temperature	0.437	0.509
Szeged	Temperature	4.062	0.044

Table 2. Breusch-Pagan test results

persistent autocorrelation values indicate that temperature readings are highly correlated over time, suggesting the presence of a trend or seasonal effect. Overall, the analysis reveals that the precipitation data exhibit characteristics of a stationary process.

In contrast, the temperature data are non-stationary, as both level and trend stationarity are rejected. This indicates that the series do not remain stable over time, but it does not confirm the presence or nature of any specific trend. The KPSS test alone cannot determine whether a deterministic or stochastic trend exists, nor can it identify its direction or significance.

For the precipitation models, no significant heteroskedasticity was detected in any of the cities. The p-values were consistently high (ranging from 0.3538 to 0.9798), indicating that the assumption of homoskedasticity holds and the variance of residuals remains constant. In contrast, the temperature models, based on monthly average temperature data, yielded mixed results. While Budapest and Sopron exhibited no significant heteroskedasticity (p-values of 0.1426 and 0.5088, respectively), both Szeged ($p = 0.0439$) and Nyíregyháza ($p = 0.0140$) displayed evidence of heteroskedasticity. This suggests that for these two cities, the residuals' variance may vary with the independent variable (monthly data), requiring further attention in subsequent analyses (Table 2).

Given the presence of heteroskedasticity in the temperature models for Szeged and Nyíregyháza, it is crucial to interpret the results of the KPSS test with caution in these cases, as the assumption of constant variance in the monthly average temperature may not hold, potentially affecting the reliability of stationarity testing. Adjustments or alternative modeling techniques may be considered to address these issues.

The KPSS test results for both precipitation and temperature data reveal important insights regarding stationarity in the selected cities. In Precipitation Data, the null hypothesis of level stationarity was rejected in Budapest and Sopron, indicating that the precipitation series in these cities are non-stationary. Conversely, the null hypothesis was not rejected for Szeged and Nyíregyháza, suggesting that their precipitation data may be stationary at the level. When examining the trend stationarity, all cities' precipitation data fail to reject the null hypothesis, suggesting that the trend component of the precipitation series is stationary across all locations. For temperature data, the situation differs significantly.

The null hypothesis of level stationarity is rejected for all cities indicating that the temperature series in these locations are non-stationary. Furthermore, the trend stationarity is also rejected for all cities, implying that there is a significant trend in the temperature data over time (Table 3).

The main findings indicate that the precipitation analysis reveals a general decreasing trend. In Budapest, the decline in precipitation is more pronounced, with a significant intercept suggesting that the precipitation level is not zero. The model's R^2 value is low, indicating that it explains only

City	Parameter	Statistic	p-value	Stationarity	Significance
Budapest	Precipitation	1.264	0.010	Level	Reject Null
Nyíregyháza	Precipitation	0.296	0.100	Level	Fail to Reject Null
Sopron	Precipitation	0.706	0.013	Level	Reject Null
Szeged	Precipitation	0.435	0.062	Level	Fail to Reject Null
Budapest	Temperature	4.939	0.010	Level	Reject Null
Nyíregyháza	Temperature	4.007	0.010	Level	Reject Null
Sopron	Temperature	5.742	0.010	Level	Reject Null
Szeged	Temperature	4.296	0.010	Level	Reject Null
Budapest	Precipitation	0.126	0.087	Trend	Fail to Reject Null
Nyíregyháza	Precipitation	0.060	0.100	Trend	Fail to Reject Null
Sopron	Precipitation	0.036	0.100	Trend	Fail to Reject Null
Szeged	Precipitation	0.084	0.100	Trend	Fail to Reject Null
Budapest	Temperature	0.468	0.010	Trend	Reject Null
Nyíregyháza	Temperature	0.243	0.010	Trend	Reject Null
Sopron	Temperature	0.622	0.010	Trend	Reject Null
Szeged	Temperature	0.296	0.010	Trend	Reject Null

Table 3. KPSS test results

Note: We report approximate p-values because the KPSS test statistic has a non-standard asymptotic distribution, so exact probabilities cannot be computed analytically. Instead, critical values (0.01, 0.05, 0.10) are tabulated from simulations and used as thresholds. This is the standard procedure for KPSS testing.

a small portion of the variance. Based on the F-statistic and p-value, the model is statistically significant. In Sopron, the decrease is slower, but the intercept is also significant, indicating a positive average precipitation. The model also exhibits a low R^2 value, with the F-statistic and p-value showing statistical significance, although weaker compared to Budapest. For Szeged and Nyíregyháza, similar precipitation trends are observed, with a slight decline in both cities. The intercepts are significant, but the slope values are not as strong as in Budapest or Sopron. The R^2 values are low, and the F-statistic and p-value indicate that evidence for the trend is weak.

Temperature trends show an increase in all four cities, with significant intercept values indicating a positive baseline temperature level. The slope values are positive, and the models have slightly higher R^2 values compared to precipitation, although still low. The F-statistics and low p-values confirm the increasing trend in temperature, which is valid for all four cities (Table 4).

City	Parameter	β_0	β_1	R^2	F-statistic	p-value
Budapest	Precipitation	49.398	-0.005	0.007	13.490	0.000
Nyíregyháza	Precipitation	47.406	-0.002	0.002	2.881	0.090
Sopron	Precipitation	59.971	-0.004	0.004	6.495	0.011
Szeged	Precipitation	46.509	-0.002	0.002	3.417	0.065
Budapest	Temperature	10.676	0.001	0.054	104.786	0.000
Nyíregyháza	Temperature	9.165	0.001	0.045	87.456	0.000
Sopron	Temperature	9.163	0.001	0.066	130.713	0.000
Szeged	Temperature	9.979	0.001	0.048	92.682	0.000

Table 4. Trend Model Summary

City	Parameter	Breaks (BIC)	supF	p-value
Budapest	Precipitation	1	8.202	0.190
Nyíregyháza	Precipitation	1	6.922	0.302
Sopron	Precipitation	1	4.268	0.681
Szeged	Precipitation	1	14.224	0.016
Budapest	Temperature	1	53.618	0.000
Nyíregyháza	Temperature	1	39.214	0.000
Sopron	Temperature	1	64.401	0.000
Szeged	Temperature	1	42.662	0.000

Table 5. Breakpoint diagnostics (Bai–Perron / supF)

Breakpoint diagnostics are based on Bai–Perron supF tests and BIC-selected break counts, as summarized in Table 5. For Szeged precipitation, a significant break is detected (supF $p = 0.016$), whereas for Budapest, Nyíregyháza, and Sopron precipitation the supF test is not significant. In all four temperature series, supF tests are highly significant ($p < 0.001$), with one break selected by BIC. These results indicate multi-phase behaviour, particularly for temperature, consistent with long-term warming while allowing for regime shifts.

To interpret borderline full-sample KPSS outcomes for Szeged and Nyíregyháza precipitation, we re-apply the KPSS test within Bai–Perron segments. For Szeged, KPSS fails to reject stationarity in both segments, whereas for Nyíregyháza the first segment shows some evidence against level stationarity ($p = 0.016$), while the later period does not reject ($p = 0.100$). Overall, these results support a multi-phase interpretation rather than global non-stationarity.

4 Discussion

The findings of this study reveal significant insights into the stationarity and trends of monthly precipitation and temperature data in the four analysed cities.

The stationarity observed in Nyíregyháza and Szeged's monthly precipitation stands in contrast to the prevailing trends reported in many studies, which often highlight increasing variability and non-stationarity in precipitation patterns globally. This suggests that the climatic behaviour in these two cities may be less susceptible to the impacts of climate change compared to other regions, aligning with some localized studies but differing from the general narrative that points toward increasing precipitation variability in Hungary. This contributes to the relatively limited literature on climate stationarity [8, 35, 39]. In certain aspects, our findings align most closely with the observed increasing trend in drought intensity and duration in western Hungary compared to eastern Hungary over the period from 1961 to 2010, as Nyíregyháza and Szeged are located in the east, while Sopron is situated in the west [3].

In contrast, the non-stationary and declining precipitation trends observed in Budapest and Sopron align with findings from the broader literature, which indicates that urban areas are particularly vulnerable to changes in precipitation patterns. This scientific finding reflects the results of both international [14, 28] and Hungarian [11, 12, 23, 34] literature to date.

The non-stationary nature of monthly mean temperatures across all four cities indicates a clear upward trend, corroborating extensive research that links rising temperatures to global climate change [2, 13, 16, 20, 24, 25, 27, 29, 32, 33, 36].

These results contribute to the growing body of literature on climate dynamics in Hungary, highlighting the importance of localized climate studies [6, 7, 10, 17, 22]. Future research should

City	Parameter	Segment	Start	End	p (level)	p (trend)
Nyíregyháza	Precipitation	1	1	1519	0.016	0.100
Nyíregyháza	Precipitation	2	1519	1848	0.100	0.100
Szeged	Precipitation	1	1	868	0.100	0.100
Szeged	Precipitation	2	868	1848	0.100	0.100

Table 6. Segment-wise KPSS for precipitation in Szeged and Nyíregyháza

City	Parameter	ZA statistic	5% critical	Break (index)	Reject H_0
Budapest	Precipitation	-29.444	-5.08	156	TRUE
Nyíregyháza	Precipitation	-29.180	-5.08	1828	TRUE
Sopron	Precipitation	-30.552	-5.08	1651	TRUE
Szeged	Precipitation	-29.285	-5.08	43	TRUE
Budapest	Temperature	-26.882	-5.08	1287	TRUE
Nyíregyháza	Temperature	-25.966	-5.08	1287	TRUE
Sopron	Temperature	-26.971	-5.08	1287	TRUE
Szeged	Temperature	-26.379	-5.08	1287	TRUE

Table 7. Zivot–Andrews unit-root tests with an endogenous break

focus on the underlying mechanisms driving these trends and their implications for climate resilience, particularly in areas exhibiting non-stationarity.

Segment-wise KPSS testing within Bai–Perron breaks clarifies borderline full-sample outcomes (Table 6). For Szeged and Nyíregyháza precipitation, this approach reveals regime changes that full-sample stationarity masks, aligning with hydro-climate evidence and highlighting the importance of break-aware inference in long records.

It would be reasonable to limit the analysis to the post-1970 period, as this better reflects the effects of climate change. This consideration is indeed relevant and was taken into account during the analysis. However, maintaining the full historical period from 1870 to 2023 provides significant analytical advantages. It enables the assessment of long-term trends and variability, which are essential for understanding the broader context of climate-related changes. Furthermore, the extended dataset allows for the detection of regime shifts through structural break tests such as Bai–Perron and Zivot–Andrews, offering insights into different phases of climate dynamics (Table 7). Segmented stationarity tests, including KPSS applied to sub periods, ensure that the analysis captures both persistent patterns and transitional behaviours. This comprehensive approach enhances the robustness and interpretability of the findings compared to restricting the analysis to recent decades. Possible geographical reasons for (near-)stationary precipitation in Szeged and Nyíregyháza:

- Topography and flat basin structure: The cities lie in the flat Pannonian (Carpathian) Basin; lack of significant terrain forces often leads to slow-moving weather systems, facilitating stationary precipitation [31].
- Atmospheric blocking patterns: Persistent high-pressure systems (blocking highs), like Omega or Rex blocks, can halt the movement of frontal systems, resulting in prolonged precipitation over one region [21].
- Weak steering winds: The Carpathian Basin frequently experiences low mid-upper level wind speeds under anticyclonic regimes, permitting near-stationary rain bands [18].
- Soil moisture and local evaporation: Proximity to the Tisza River and irrigated lands

increases surface wetness, promoting sustained convective activity and localized rainfall [37].

- Urban heat island (UHI) effect: Especially in Szeged, urban heating can destabilize the boundary layer, enhance convergence, and trigger or reinforce convective precipitation cells, contributing to stationary rainfall dynamics [38].

5 Conclusion

This study highlights the complex dynamics of monthly precipitation and temperature in Budapest, Nyíregyháza Sopron, and Szeged. The stationarity of monthly precipitation in Szeged and Nyíregyháza represents a novel finding in the context of existing literature, indicating a potential stability in precipitation patterns in these areas. In contrast, the declining precipitation trends in Budapest and Sopron signal increasing vulnerability to drought and water scarcity.

All cities displayed non-stationary behavior in monthly mean temperatures, reflecting a consistent upward trend. This trend aligns with global warming observations, suggesting that rising temperatures may influence local climates and ecosystem health. Allowing for a break the conclusions are slightly different:

- Szeged (precipitation): The supF test is significant and segment-wise KPSS does not reject within either segment, pointing to multi-phase but segment-stationary behaviour.
- Nyíregyháza (precipitation): BIC selects one break; segment-wise KPSS shows earlier non-stationarity at the level and later stationarity, consistent with a change in regime.
- Temperature (for all four cities): The supF tests reject parameter constancy with BIC selecting one break, consistent with a monotonic warming plus level shifts.

Although full-sample KPSS results may suggest level stationarity (e.g., precipitation in Szeged and Nyíregyháza), break-aware diagnostics indicate that segment-wise assessment is preferable for climate-sensitive applications such as design standards and risk studies.

Data availability

The data is available in the database of the Hungarian National Meteorological Service (OMSZ) [1].

Bibliography

[1] *Meteorológiai Adattár (Hungarian) [Meteorological Data Repository]*. URL: https://odp.met.hu/climate/homogenized_data/station_data_series/from_1870/.

[2] Aksu, H.: *Nonstationary analysis of the extreme temperatures in Turkey*, Dynamics of Atmospheres and Oceans, **95** (2021), 101238. doi: 10.1016/j.dynatmoce.2021.101238.

[3] Alsafadi, K., Mohammed, S. A., Ayugi, B., Sharaf, M., and Harsányi, E.: *Spatial–temporal evolution of drought characteristics over Hungary between 1961 and 2010*, Pure and Applied Geophysics, **177** (2020), No. 8, 3961–3978. doi: 10.1007/s00024-020-02449-5.

[4] Bai, J. and Perron, P.: *Estimating and testing linear models with multiple structural changes*, Econometrica, **66** (1998), No. 1, 47–78. doi: 10.2307/2998540.

[5] Bai, J. and Perron, P.: *Computation and analysis of multiple structural change models*, Journal of Applied Econometrics, **18** (2003), No. 1, 1–22. doi: 10.1002/jae.659.

[6] Bartholy, J., Pongracz, R., and Kis, A.: *Projected changes of extreme precipitation using multi-model approach*, Időjárás, **119** (2015), 129–142.

[7] Bodri, L. and Dövényi, P.: *Climate change of the last 2000 years inferred from borehole temperatures: data from Hungary*, Global and Planetary Change, **41** (2004), No. 2, 121–133. doi: 10.1016/j.gloplacha.2003.10.001.

[8] Chen, H., Guo, S., Xu, C.-y., and Singh, V. P.: *Historical temporal trends of hydro-climatic variables and runoff response to climate variability and their relevance in water resource management in the Hanjiang basin*, Journal of Hydrology, **344** (2007), No. 3, 171–184. doi: 10.1016/j.jhydrol.2007.06.034.

[9] Clarke, A. J. and Lebedev, A.: *Long-term changes in the equatorial Pacific trade winds*, (1996), section: Journal of Climate. URL: https://journals.ametsoc.org/view/journals/clim/9/5/1520-0442_1996_009_1020_ltcite_2_0_co_2.xml.

[10] Csanády, V.: *Időjárási légnyomásváltozás regressziós analízise (Hungarian) [Analysis of weather atmospheric pressure changes through regression]*, Dimenziók: Matematikai Közlemények, **4** (2016). doi: 10.20312/dim.2016.05.

[11] Domonkos, P. and Tar, K.: *Long-term changes in observed temperature and precipitation series 1901–1998 from Hungary and their relations to larger scale changes*, Theoretical and Applied Climatology, **75** (2003), No. 3, 131–147. doi: 10.1007/s00704-002-0716-2.

[12] Garamhegyi, T., Kovács, J., Pongrácz, R., Tanos, P., and Hatvani, I. G.: *Investigation of the climate-driven periodicity of shallow groundwater level fluctuations in a Central-Eastern European agricultural region*, Hydrogeology Journal, **26** (2018), No. 3, 677–688. doi: 10.1007/s10040-017-1665-2.

[13] Garreaud, R. D., Vuille, M., Compagnucci, R., and Marengo, J.: *Present-day South American climate*, Palaeogeography, Palaeoclimatology, Palaeoecology, **281** (2009), No. 3, 180–195. doi: 10.1016/j.palaeo.2007.10.032.

[14] Giuntoli, I., Renard, B., Vidal, J. P., and Bard, A.: *Low flows in France and their relationship to large-scale climate indices*, Journal of Hydrology, **482** (2013), 105–118. doi: 10.1016/j.jhydrol.2012.12.038.

[15] Hirsch, R. M., Slack, J. R., and Smith, R. A.: *Techniques of trend analysis for monthly water quality data*, Water Resources Research, **18** (1982), No. 1, 107–121, eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/WR018i001p00107. doi: 10.1029/WR018i001p00107.

[16] Iyakaremye, V., Zeng, G., Siebert, A., and Yang, X.: *Contribution of external forcings to the observed trend in surface temperature over Africa during 1901–2014 and its future projection from CMIP6 simulations*, Atmospheric Research, **254** (2021), 105512. doi: 10.1016/j.atmosres.2021.105512.

[17] Izsák, B. and Szentimrey, T.: *To what extent does the detection of climate change in Hungary depend on the choice of statistical methods?*, GEM - International Journal on Geomathematics, **11** (2020), No. 1, 17. doi: 10.1007/s13137-020-00154-y.

[18] Jánosi, I. M., Bíró, T., Lakatos, B. O., Gallas, J. A. C., and Szöllösi-Nagy, A.: *Changing water cycle under a warming climate: Tendencies in the Carpathian Basin*, Climate, **11** (2023), No. 6, 118. doi: 10.3390/cli11060118.

[19] Jayaweera, L., Wasko, C., Nathan, R., and Johnson, F.: *Non-stationarity in extreme rainfalls across Australia*, Journal of Hydrology, **624** (2023), 129872. doi: 10.1016/j.jhydrol.2023.129872.

[20] Kataoka, K., Matsumoto, F., Ichinose, T., and Taniguchi, M.: *Urban warming trends in several large Asian cities over the last 100 years*, Science of The Total Environment, **407** (2009), No. 9, 3112–3119. doi: 10.1016/j.scitotenv.2008.09.015.

[21] Kautz, L.-A., Martius, O., Pfahl, S., Pinto, J. G., Ramos, A. M., Sousa, P. M., and Woollings, T.: *Atmospheric blocking and weather extremes over the Euro-Atlantic sector – a review*, Weather and Climate Dynamics, **3** (2022), No. 1, 305–336. doi: 10.5194/wcd-3-305-2022.

[22] Kis, A., Pongrácz, R., and Bartholy, J.: *Multi-model analysis of regional dry and wet conditions for the Carpathian Region*, International Journal of Climatology, **37** (2017), No. 13, 4543–4560, _eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/joc.5104. doi: 10.1002/joc.5104.

[23] Kocsis, T., Kovács-Székely, I., and Anda, A.: *Homogeneity tests and non-parametric analyses of tendencies in precipitation time series in Keszthely, Western Hungary*, Theoretical and Applied Climatology, **139** (2020), No. 3, 849–859. doi: 10.1007/s00704-019-03014-4.

[24] Kousari, M. R., Ahani, H., and Hendi-zadeh, R.: *Temporal and spatial trend detection of maximum air temperature in Iran during 1960–2005*, Global and Planetary Change, **111** (2013), 97–110. doi: 10.1016/j.gloplacha.2013.08.011.

[25] Kukal, M. and Irmak, S.: *Long-term patterns of air temperatures, daily temperature range, precipitation, grass-reference evapotranspiration and aridity index in the USA great plains: Part II. Temporal trends*, Journal of Hydrology, **542** (2016), 978–1001. doi: 10.1016/j.jhydrol.2016.06.008.

[26] Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P., and Shin, Y.: *Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root?*, Journal of Econometrics, **54** (1992), No. 1, 159–178. doi: 10.1016/0304-4076(92)90104-Y.

[27] Liang, L., Chen, M., and Huang, D.: *Spatiotemporal change and non-stationarity of air temperature in China from 1959 to 2018*, Sustainable Cities and Society, **87** (2022), 104227. doi: 10.1016/j.scs.2022.104227.

[28] Madsen, H., Lawrence, D., Lang, M., Martinkova, M., and Kjeldsen, T. R.: *Review of trend analysis and climate change projections of extreme precipitation and floods in Europe*, Journal of Hydrology, **519** (2014), 3634–3650. doi: 10.1016/j.jhydrol.2014.11.003.

[29] McKenney, D. W., Pedlar, J. H., Papadopol, P., and Hutchinson, M. F.: *The development of 1901–2000 historical monthly climate models for Canada and the United States*, Agricultural and Forest Meteorology, **138** (2006), No. 1, 69–81. doi: 10.1016/j.agrformet.2006.03.012.

[30] Newey, W. K. and West, K. D.: *A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix*, Econometrica, **55** (1987), No. 3, 703–708. doi: 10.2307/1913610.

[31] Rakonczai, J.: *Effects and consequences of global climate change in the Carpathian Basin*, in: *Climate Change – Geophysical Foundations and Ecological Effects*, InTechOpen, 2011 . URL: https://cdn.intechopen.com/pdfs/19847/InTech-Effects_and_consequences_of_global_climate_change_in_the_carpathian_basin.pdf.

[32] del Río, S., Herrero, L., Pinto-Gomes, C., and Penas, A.: *Spatial analysis of mean temperature trends in Spain over the period 1961–2006*, Global and Planetary Change, **78** (2011), No. 1, 65–75. doi: 10.1016/j.gloplacha.2011.05.012.

[33] Schlef, K. E., Kunkel, K. E., Brown, C., Demissie, Y., Lettenmaier, D. P., Wagner, A., Wigmosta, M. S., Karl, T. R., Easterling, D. R., Wang, K. J., François, B., and Yan, E.: *Incorporating non-stationarity from climate change into rainfall frequency and intensity-duration-frequency (IDF) curves*, Journal of Hydrology, **616** (2023), 128757. doi: 10.1016/j.jhydrol.2022.128757.

[34] Schmeller, G., Nagy, G., Sarkadi, N., Cséplő, A., Pirkhoffer, E., Geresdi, I., Balogh, R., Ronczyk, L., and Czigány, S.: *Trends in extreme precipitation events (SW Hungary) based on a high-density monitoring network*, Hungarian Geographical Bulletin, **71** (2022), No. 3, 231–247, number: 3. doi: 10.15201/hungeobull.71.3.2.

[35] Serrano, A., Mateos, V. L., and Garcia, J. A.: *Trend analysis of monthly precipitation over the Iberian peninsula for the period 1921–1995*, Physics and Chemistry of the Earth, Part B: Hydrology, Oceans and Atmosphere, **24** (1999), No. 1, 85–90. doi: 10.1016/S1464-1909(98)00016-1.

[36] Sonali, P. and Nagesh Kumar, D.: *Review of trend detection methods and their application to detect temperature changes in India*, Journal of Hydrology, **476** (2013), 212–227. doi: 10.1016/j.jhydrol.2012.10.034.

[37] Szolgay, J., Blöschl, G., Gribovszki, Z., and Parajka, J.: *Hydrology of the Carpathian Basin: interactions of climatic drivers and hydrological processes on local and regional scales – HydroCarpath Research*, Journal of Hydrology and Hydromechanics, **68** (2020), No. 2, 128–133. doi: 10.2478/johh-2020-0017.

[38] Unger, J.: *Urban heat island studies in Szeged, Hungary – an overview based on papers published over the past forty years (1980–2020)*, Acta Climatologica et Chorologica, **54** (2020), 41–60. doi: 10.14232/acta.clim.2020.54.4.

[39] Yao, J.-Q., Chen, J., Zhang, T.-W., Dilinuer, T., and Mao, W.-Y.: *Stationarity in the variability of arid precipitation: A case study of arid Central Asia*, Advances in Climate Change Research, **12** (2021), No. 2, 172–186. doi: 10.1016/j.accre.2021.03.013.

[40] Zivot, E. and Andrews, D. W. K.: *Further evidence on the great crash, the oil-price shock, and the unit-root hypothesis*, Journal of Business & Economic Statistics, **10** (1992), No. 3, 251–270. doi: 10.1080/07350015.1992.10509904.

DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények (Mathematical Notes)
XIII. kötet, 2025 55–62

doi:10.20312/dim.2025.05

From tiling to matching: exploring Fibonacci cube structures

László Németh
University of Sopron, Faculty of Wood Sciences and Creative Industries,
Institute of Basic Sciences, Sopron, Hungary
nemeth.laszlo@uni-sopron.hu, 0000-0001-9062-9280

ÖSSZEFOGLALÓ. Számos publikáció foglalkozik különböző alakú síkidomokkal való elhelyezésekkel vagy a kombinatorika egyik nagyon érdekes alakzatának vizsgálatával, a Fibonacci-kocka gráffal. Mi ezt a két kutatási területet kombináljuk. Rövid cikkünkben egy bijektív megfelelést adunk az un. Fibonacci-elhelyezések és a Fibonacci-kockák csúcsai között. Meghatározzuk az azonos típusú mozaikok közötti egyértelmű szomszédságot, amely megadja a megfelelő gráf éleit. Ezenkívül példákat mutatunk be a cikkcakk alakú hatszögletű láncok és a Fibonacci-kocka teljes párosításainak kapcsolatára.

ABSTRACT. Several articles deal with tilings with various shapes, and also a very frequent type of combinatorics is to examine the Fibonacci cube graph and its generalizations. We combine these two things. In our note, we give a one-to-one contention between the Fibonacci tilings and vertices of the Fibonacci cubes. We define a clear adjacency between the tiles of the same type, which gives us the edges of the corresponding graph. In addition, we present examples of the relationship between perfect matchings of zigzag hexagonal chains and Fibonacci cube.

1 Introduction

Hundreds, if not thousands, of articles can be found about tilings and about the Fibonacci cube, but to the best of our knowledge, there is not any paper that deals with both at the same time. In this article, we connect these two subfields of combinatorics as follows. We define a neighborhood relationship among the tilings, which allows us to represent the tilings in a graph structure that is isomorphic to the Fibonacci cube. It is important to look for connections between different areas of mathematics, as it can be beneficial to each area. The results having achieved in one of the fields may be applied and reinterpreted in the other field, or fields, which can give new impetus to research. We hope that our observations will be useful in the combinatorial study of tilings and the Fibonacci cube as well.

Let t_n be the number of the different tilings (n-tilings) with (1×1)–squares and (1×2)–dominoes (two squares with a common edge) of a $(1 \times n)$–board. Hereafter, a square always means (1×1)-square and a domino means (1×2)–domino. It is known, e.g., in [3], that the number of possible tilings of a $(1 \times n)$–board is $t_n = F_{n+1}$, where (F_n) denotes the Fibonacci

HUNGARIAN TITLE. A Fibonacci kockagráf lefedésekkel és párosításokkal adott interpretációi.
KULCSSZAVAK. Lefedés négyzetekkel és dominókkal, Fibonacci lefedés, Fibonacci kockagráf, teljes párosítás.
KEYWORDS. Tiling with squares and dominoes, Fibonacci tiling, Fibonacci cube, perfect matching.
MSC 2010. 05B45, 05C70, 52C20, 05C75, 11B39.

sequence (defined by $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ and A000045 in OEIS [15]). Some researchers generalized the tilings with colored or weighted shapes, i.e., [1, 4, 16]. Moreover, Komatsu, Németh, and Szalay [12] examined the tilings with colored squares and dominoes on the hyperbolic $(2 \times n)$–board, and they gave the fourth order linear homogeneous recurrence relation of t_n, where the coefficients satisfy recurrence sequences, as well. There are numerous articles in which authors examine various generalizations or restrictions, i.e., with regard to shapes, colors, or dimensions. For example, Khadir, Németh, and Szalay [9] examined a type of tilings in which the colors had a specific order and a “darker" element could never come before a “lighter" element.

The Fibonacci cube of dimension $n \geq 1$, denoted as Γ_n, is the subgraph of the hypercube Q_n induced by vertices with no consecutive 1s in their coordinates. Hsu [8] introduced this graph as an interconnection network. Γ_n is an isometric subgraph and is inspired by the Fibonacci numbers. It has attractive recurrent structures, such as its decomposition into two subgraphs which are also Fibonacci cubes themselves. Structural properties of these graphs were more extensively studied afterwards; see, for example, the survey [10] and the recent book [7]. There are several kinds of cube graphs, ex., the Lucas cubes Λ_n, introduced in [14], that have attracted attention as well due to the fact that these cubes are the cyclic version of Fibonacci cubes. For other generalizations, i.e., see [2, 6]. They have also been widely studied.

In this article, we combine both of the above-mentioned combinatorial examinations.

2 Structure of tilings with squares and dominoes

In this section, we define a neigbouring among the n-tilings, which implies a structure.

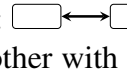
Let the *divide–join base transformation*, shortly divide–join transform, be when we divide a domino into two squares or we join two consecutive squares into one domino (see: ). We say, that two n-tilings are *neighboring* if we can transform them into each other with only one divide–join transform. For example, in Figure 1, the two 6-tilings are neighbors, they defer exclusively in the light blue parts.

Figure 1. Two neigbouring tilings

Let $\boldsymbol{\Gamma}_n$ for $n \geq 1$ be the graph, where the vertices are the $(n+1)$–tilings and between any two neighboring tilings there is an edge. For example, Figure 2 shows the graph $\boldsymbol{\Gamma}_3$.

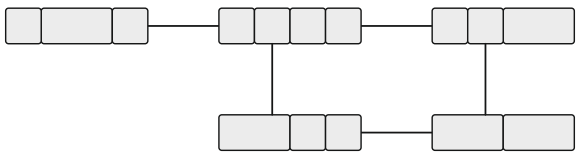


Figure 2. Graph $\boldsymbol{\Gamma}_3$

Theorem 1. *For $n \geq 1$ the graph $\boldsymbol{\Gamma}_n$ is isomorphic to the Fibonacci n-cube Γ_n.*

Proof. Now we give a one-to-one correspondence between $(1 \times n)$–tilings and the binary bit strings of length $n-1$ with no block of 2 or more 1s. The base of the bijection is what follows. Imagine a $(1 \times n)$–square grid behind the tiling, where neighbor squares are separated from each other by vertical edges. If such an edge is covered by the tiling, then we write 1 above

the edge; otherwise, we write 0. Figure 3 shows all the $(1 \times n)$–tilings and their corresponding binary strings for $n = 2, 3, 4, 5$. (We mention that in [9], there was introduced a similar code for a type of general tilings on $(1 \times n)$–board, but the rules of 0 and 1 were changed.) Because we tile with at most dominoes, there is no two consecutive 1s in any codes which are the vertices of graph Γ_n. Moreover, in case of the neighboring tilings, the codes differ only one bit. That means, the corresponding vertices are joined with edges in $\boldsymbol{\Gamma}_n$ and in n-cube Γ_n as well. □

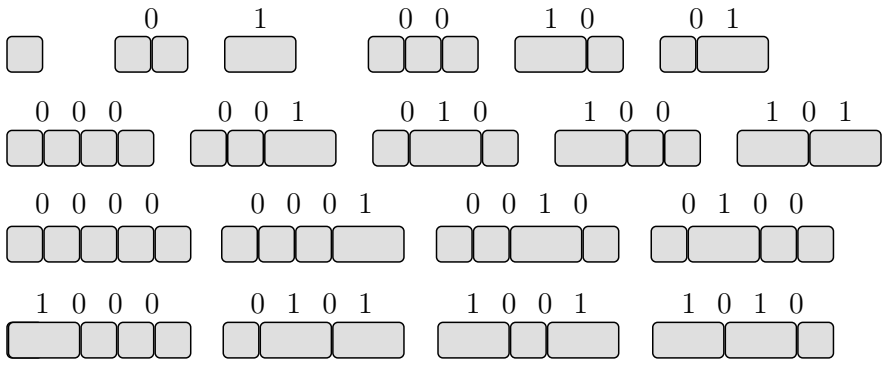


Figure 3. All the n-tilings and their codes up to $n = 5$

Figures 4 and 5 show the structures of some n-tilings in graph forms.

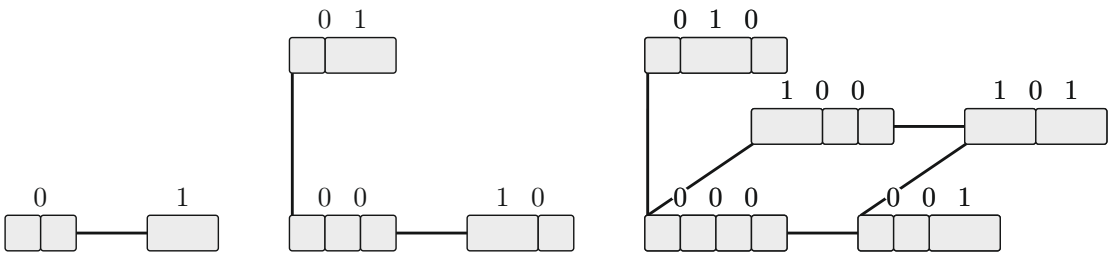


Figure 4. Fibonacci cubes with tilled vertices if $n = 1, 2, 3$

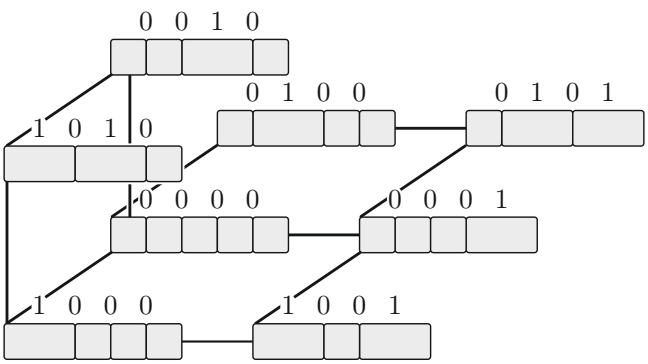


Figure 5. Fibonacci cube with tilled vertices when $n = 4$

2.1 Concluding remarks and future works

2.1.1 Fibonacci cubes and tilings

The connection of the tilings and the Fibonacci cubes can provide many new theorems. For example:

- It is well known that every Fibonacci cube has a Hamiltonian path. That means that all n-tilings can be drawn in a sequence, where the consecutive tiling are neigbours. Figure 6 shows a path, moreover, with the dashed line a circle of 5-tilings.

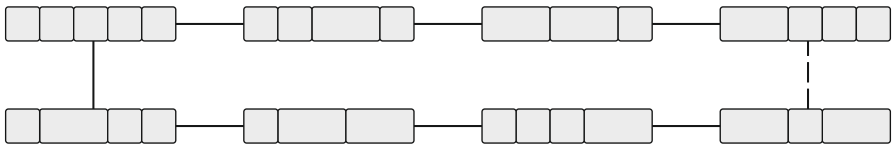


Figure 6. Neigbouring circle of the 5-tilings

- By the omitting the tilings, where the first and last peaces are dominoes (their codes in the first and last positions contain 1s) the structure of the n-tilings is isomorphic to the Lucas cubes Λ_{n-1} (see Figure 7).

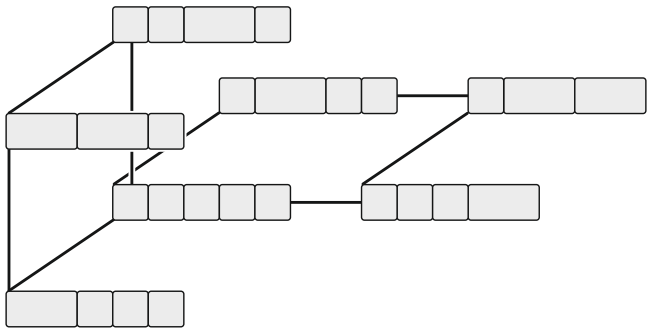


Figure 7. Lucas cube

- The presented method allows for the definition of additional tiling structures, such as tribonacci cubes [2], Pell graphs [13].

2.1.2 Resonance graphs – graphs of perfect matchings

It is well known that Fibonacci cubes are the resonance graphs of fibonacenes which are specific types of hexagonal chains, where no three consecutive hexagons are in a straight line; see the paper by Klavzar and Zigert [11]. On the other hand, it is easy to construct a bijection between perfect matchings in a zig-zag fibonacene with n hexagons and all matchings in a path of length n. An example is given in Fig. 3 of Doslic's paper [5], where the path and the corresponding matchings are obtained by taking the horizontal edges in the backbone path of a fibonacene. A matching is a set of edges in a graph, where no two edges share a common vertex, and a matching is perfect when every vertex in the graph is an endpoint of an edge in the matching.

Using the notations, where the chosen edges of hexagonal chains are double lines (see [5]) we show the connection among the perfect matchings of zigzag hexagonal chains, Fibonacci tilings, and binary strings in Figure 8. (A small circle appears inside a hexagonal, if it has three edges in the perfect matching.) The key links are the blue edges from the "backbone" of the perfect matching as we see in the figure. Each horizontal blue line is covered by a domino.

Thus, the vertices of the resonance graphs are perfect matchings and two perfect matchings are connected in the resonance graph if their symmetric difference (the set of edges in one but not the other) forms a cycle around a hexagonal. In Figure 9, the two perfect matchings are neighbors, they connect along the blue hexagons. (The symmetrical difference of these is a hexagon.)

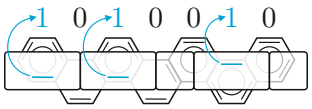


Figure 8. Connection among the perfect matchings of zigzag hexagonal chains, Fibonacci tilings, and binary strings

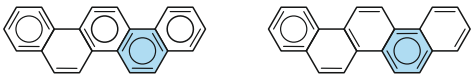


Figure 9. Two neigbouring perfect macthings

Figures 10 and 11 show the resonance graphs with corresponding binary strings when $n = 1, 2, 3,$ or 4.

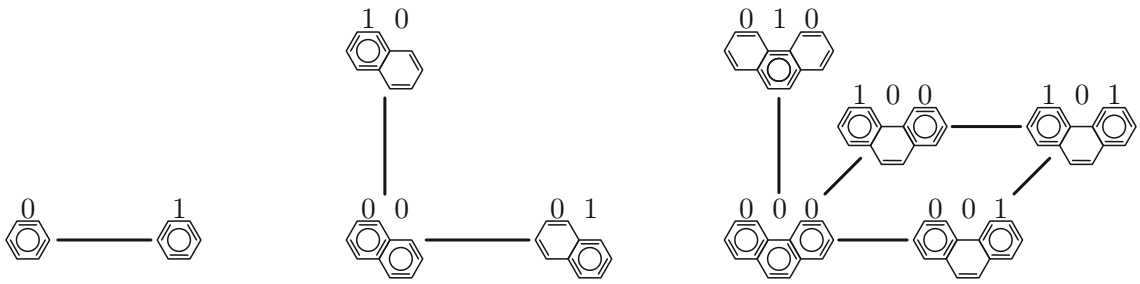


Figure 10. Fibonacci cubes with perfect matching vertices if $n = 1, 2, 3$

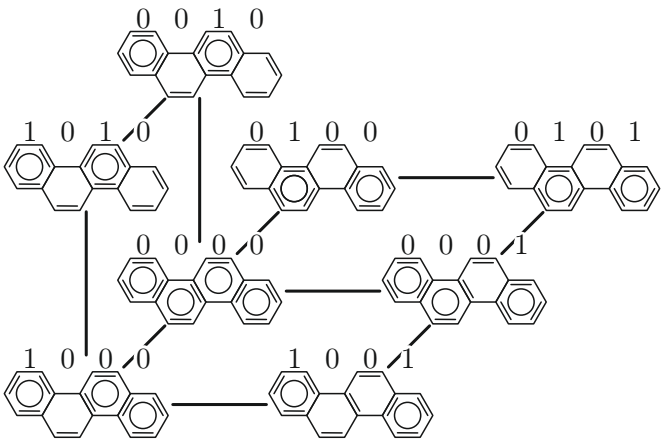


Figure 11. Fibonacci cubes with perfect matching vertices if $n = 4$

Now let's examine all the matching and their graph structures, not just the perfect matchings for $n = 1$ and 2. Let two matchings be neighbors if their symmetric differential is a single edge. (The two matchings differ in only one edge.) Then Figure 12 shows the graph structure of all 18 matchings when $n = 1$. As we see the graph is a connected subgraph of the 3-dimensional cube mosaic graph. The blue edges form two cubes that share a common vertex, which is the empty (edge-less) matching. These two cube graphs together can be an extension of the corresponding resonance graph, see left subfigure of Figure 10.

Similarly, if we expand the resonance graph in the case of $n = 2$, we obtain Figure 13. It contains for cube graphs with a common edges.

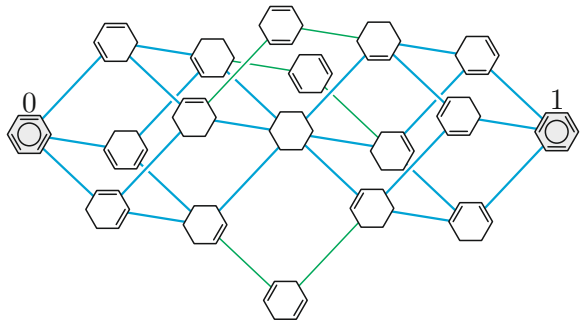


Figure 12. Graph of all matchings of zigzag hexagonal chain if $n = 1$

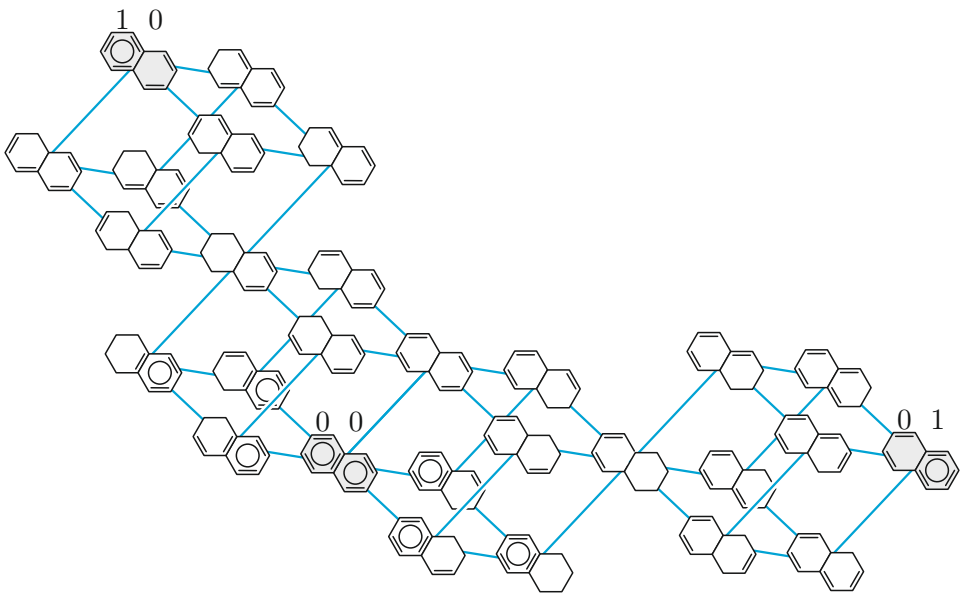


Figure 13. An extension graph of resonance graph when $n = 2$

It is obvious that any edge of a resonance graph can be extended in a similar way, only the connecting hexagonal parts change. Thus, we can formulate the following statement.

Theorem 2. *All the edges of a resonance graphs can be extended by two 3-dimensional cube graphs which vertices are matchings.*

But what might the complete graph structure look like? We present Figure 14 which contain some matchings when $n = 2$. This graph is also a subgraph of the 3-dimensional cube mosaic graph, but the structure of all the 148 matchings cannot be a subgraph of the 3-dimensional cube mosaic graph, because, for example, the matching without edges () has 11 neigbours. Therefore, this part (the graph of the empty matching and its neighbours) is at least a subgraph of a 6-dimensional hypercube mosaic. Based on our observations, we can conclude that most of the structure may be a subgraph of the cube- or a higher-dimensional hypercube mosaics. And if the graph structure of all the matchings of the n-long zigzag hexagonal chain is a subgraph of the d-dimensional hypercube mosaic, than d is $\lceil \frac{5n+1}{2} \rceil$.

Acknowledgment. The author would like to say thanks for the valuable comments to the referee. The author is supported by National Research, Development and Innovation Office Grant 2023-1.2.4-TÉT-2023-00063.

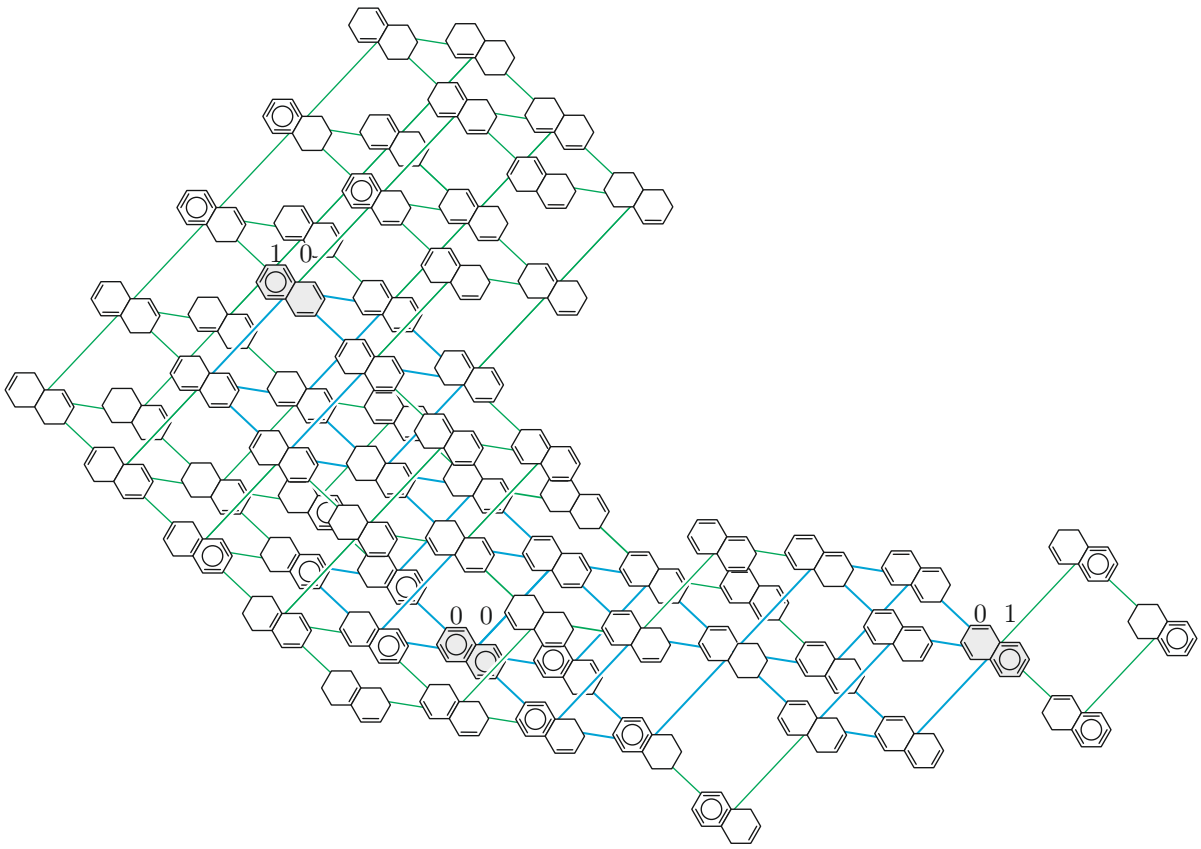


Figure 14. Graph of some machings if $n = 2$

References

[1] Belbachir, H. and Belkhir, A.: *Tiling approach to obtain identities for generalized Fibonacci and Lucas numbers*, Ann. Math. Inform., **41** (2013), 13–17. URL: https://publikacio.uni-eszterhazy.hu/2716/1/AMI_41_from13to17.pdf.

[2] Belbachir, H. and Ould-Mohamed, R.: *Enumerative properties and cube polynomials of tribonacci cubes*, Discrete Math., **343** (2020), No. 8, 111922. doi: 10.1016/j.disc.2020.111922.

[3] Benjamin, A. T. and Quinn, J. J.: *Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof*, vol. 27, American Mathematical Soc., 2003. doi: 10.5948/9781614442080.

[4] Benrabia, I., Belaggoun, N., and Belbachir, H.: *Bi-periodic Fibonomial coefficients*, Filomat, **39** (2025), No. 3, 963–973. doi: 10.2298/FIL2503963B.

[5] Došlić, T.: *Counting conjugated circuits in benzenoid chains*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., **65** (2011), No. 2, 775–784. URL: https://match.pmf.kg.ac.rs/electronic_versions/Match65/n3/match65n3_775-784.pdf.

[6] Došlić, T. and Podrug, L.: *Metallic cubes*, Discrete Math., **347** (2024), No. 4, 113851. doi: 10.1016/j.disc.2023.113851.

[7] Eğecioğlu, O., Klavžar, S., and Mollard, M.: *Fibonacci Cubes with Applications and Variations*, Word Scientific, 2023. doi: 10.1142/13228.

[8] Hsu, W.-J.: *Fibonacci cubes: a new interconnection topology*, IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst., **4** (1993), 3–12. doi: 10.1109/71.205649.

[9] Khadir, O., Németh, L., and Szalay, L.: *Tiling of dominoes with ranked colors*, Results Math., **79** (2024), No. 7, Article 253. doi: 10.1007/s00025-024-02284-3.

[10] Klavžar, S.: *Structure of Fibonacci cubes: a survey*, Comb. Optim., **25** (2013), No. 4, 505–522. doi: 10.1007/s10878-011-9433-z.

[11] Klavžar, S. and Žigert, P.: *Fibonacci cubes are the resonance graphs of fibonaccenes*, Fibonacci Quart., **43** (2005), No. 3, 269–276. doi: 10.1080/00150517.2005.12428368.

[12] Komatsu, T., Németh, L., and Szalay, L.: *Tilings of hyperbolic* $(2 \times n)$*-board with colored squares and dominoes*, Ars Math. Contemp., **15** (2018), No. 2, 337–346. doi: 10.26493/1855-3974.1470.e79.

[13] Munarini, E.: *Pell graphs*, Discrete Math., **342** (2019), No. 8, 2415–2428. doi: 10.1016/j.disc.2019.05.008.

[14] Munarini, E., Cippo, C. P., and Salvi, N. Z.: *On the Lucas cubes*, Fibonacci Quart., **39** (2001), No. 1, 12–21. URL: https://www.fq.math.ca/Scanned/39-1/munarini.pdf.

[15] OEIS Foundation Inc.: *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, Published electronically, 2025. URL: http://oeis.org/?language=english.

[16] Quinn, J. J. and Benjamin, A. T.: *The Fibonacci numbers – exposed more discreetly*, Math. Mag., **76** (2003), No. 3, 182–192. doi: 10.2307/3219319.

DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények (Mathematical Notes)
XIII. kötet, 2025 63–74

doi:10.20312/dim.2025.06

A dimenzióanalízis módszerének alkalmazása a kutatási eredmények általánosítása céljából

Kocsis Zoltán*
Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar,
Alkalmazott Tudományi Intézet, Sopron, Magyarország
kocsis.zoltan@uni-sopron.hu, 0009-0004-8021-0864

Németh Gábor
Soproni Egyetem, Faipari Mérnöki és Kreatívipari Kar,
Alkalmazott Tudományi Intézet, Sopron, Magyarország
nemeth.gabor@uni-sopron.hu, 0009-0004-7515-4845

ÖSSZEFOGLALÓ. A kutatás célja a dimenzióanalízis módszerének bemutatása és gyakorlati alkalmazásának ismertetése. Ez a módszer hatékonyan csökkenti a független változók számát, miközben biztosítja az eredmények általános érvényességét. Az elmúlt évszázadban a módszert sikeresen alkalmazták hőtani, mechanikai, áramlástani és faipari problémák megoldására, különösen olyan esetekben, amikor a vizsgált jelenségek részletei nem voltak teljesen ismertek, ezért pontos matematikai modelljük nem volt felírható. A publikáció hozzájárul a módszer szélesebb körű megismertetéséhez, kiemelve annak jelentőségét a faipari tudományokban.

ABSTRACT. The aim of the research is to present the method of dimensional analysis and its practical application. This method effectively reduces the number of independent variables while ensuring the general validity of the results. Over the past century, the method has been successfully applied to solve problems in thermodynamics, mechanics, fluid dynamics, and wood science, particularly in cases where the details of the phenomena under investigation were not fully understood, and an exact mathematical model could not be formulated. The publication aims to promote broader awareness of this practical and effective method, highlighting its significance in the field of wood sciences.

1. Bevezetés

A tudományok elsődleges célja új, eddig ismeretlen összefüggések feltárása, amelyek segítségével egy jelenség minél pontosabb leírását lehet adni az azt befolyásoló tényezők (változók) függvényében. A műszaki tudományokban a különböző jelenségeket meghatározott hajtóerők mozgatják és ezek összefüggéseit a természeti törvények határozzák meg. Ezek a törvények időtől függetlenek, változatlanok és determinisztikusak [25]. Ugyanakkor a jelenségek gyakran rendkívül bonyolultak, így a tudomány sok esetben még nem tárta fel az

ENGLISH TITLE. Application of the dimensional analysis method for generalizing research results.
KULCSSZAVAK. Dimenzióanalízis, kutatási módszertan, kísérleti adatok, famegmunkálás, egyenlet.
KEYWORDS. Dimensional analysis, research methodology, experimental data, woodworking, equation.
* Levelező szerző.

összes összefüggést és ilyenkor a meglévő ismeretek kiegészítésére van szükség.

A korszerű gépek, berendezések, műveletek és technológiák tervezéséhez elengedhetetlen bizonyos alapvető törvényszerűségek és összefüggések ismerete, amelyek pontosan leírják a jelenséget befolyásoló változók közötti kapcsolatot. Az összefüggések feltárásának klasszikus módszere a matematikai modellek, például differenciálegyenletek elméleti levezetése, amely a meglévő tudományos ismeretek és az alaptudományok, mint a mechanika, áramlástan vagy hőtan felhasználásával történik. Az ilyen elméleti levezetések azonban feltételezéseken alapulnak, ezért az így kapott összefüggések helyességét kísérleti úton is célszerű ellenőrizni.

Az elméleti modellek kidolgozása csak akkor lehetséges, ha a jelenség mechanizmusa pontosan ismert, azaz a befolyásoló változók (tényezők) hatását megfelelően figyelembe tudjuk venni. Amikor azonban a vizsgált feladatok bonyolódnak ezáltal a változók számbavétele nehezebbé válik, a jelenség részleteinek pontos megértése akadályokba ütközhet. Gyakran előfordul az is, hogy az alaptudományok nem nyújtanak elegendő ismeretet a jelenség leírásához. Ilyen esetekben a dimenzióanalízis módszere hatékony megközelítést kínál, amely gyakorlati megfigyelésekre és kísérleti mérésekre támaszkodik. E módszer segítségével következtetni lehet a jelenség mechanizmusára és a befolyásoló változókra. Különösen fontos a releváns változók pontos azonosítása, mivel ezek nélkül nem lehetséges szisztematikus kísérleteket megtervezni és kivitelezni [8; 14; 15].

A tudományos megállapítások (természeti törvények) a matematika segítségével, összefüggésekkel írhatóak le. Az összefüggés mindig három részből áll [6; 8; 25]:

- kimenő adatrendszer (Y_i),
- a függvénykapcsolatok rendszere ($F(x_i)$),
- a bemenő adatbázis (X_i).

Formálisan felírva a fentieket:

$$Yi = F(X_i), \tag{1}$$

ahol X_i – a független változókat jelöli.

A fenti három elemből kettőt mindig ismerni kell ahhoz, hogy az összefüggés használható legyen. Egyszerű a helyzet, ha a függvénykapcsolatok rendszere már ismert, de az esetek döntő többségében sajnos pont ez az ismeretlen. A kutatás során éppen ezért legtöbbször bemenő adatokat közlünk a rendszerrel, majd a rendszer válaszol rá kimenő adatok formájában. A kutató feladata megfejteni, hogy a rendszer milyen természeti törvény alapján válaszolt, vagyis hogyan néz ki a függvénykapcsolatok rendszere.

1.2. A Buckingham-féle dimenzióanalízis módszer

A tudományos kísérletek gyakran költségesek és időigényesek, ezért kiemelt fontosságú, hogy a már elvégzett kísérletek eredményeit hasonló esetekre általánosítsuk. Ugyanakkor a hasonlóság megítélése sokparaméteres folyamatok esetén nem mindig egyszerű feladat. Az általánosítás lehetősége nélkül azonban a kísérletek eredményeinek értékelése korlátozott hasznosságú. Két vagy több folyamat akkor tekinthető hasonlónak, ha lényegi, belső összefüggéseik megegyeznek [9]. Ez a feltétel azonban csak szükséges, de nem elégséges a hasonlóság megállapításához, mivel a folyamatot leíró differenciálegyenletek végtelen sok lehetséges megoldása közül az egyértelműségi feltételek határozzák meg a keresett megoldást. A hasonlóság további feltétele tehát, hogy a vizsgált folyamatok egyértelműségi feltételei – például kezdeti és peremfeltételek, geometriai jellemzők, valamint az értelmezési tartomány – azonosak legyenek, vagy azonos alakra transzformálhatók legyenek [8; 17; 18; 23].

A kísérleti adatok feldolgozásának hagyományos megközelítése a változók szerinti elemzés. Ebben az esetben a részösszefüggések száma megegyezik a független változók számával, ami gyakran bonyolulttá teszi az összefüggések összerendezését és az eredő függvény helyes matematikai alakjának meghatározását. A kísérletek szervezése azonban jelentősen egyszerűbbé válik és az eredmények általánosan alkalmazhatóvá tehetők, ha a kísérleti adatokat hasonlósági kritériumok formájában dolgozzuk fel. Ebben a folyamatban kiemelkedő segítséget nyújt a dimenzióanalízis módszere [8; 9; 19].

A dimenzióanalízis története a 19. század végére nyúlik vissza, amikor a fizikusok és mérnökök felismerték a fizikai mennyiségek dimenzióinak jelentőségét a természeti törvények megértésében. Az első jelentős hozzájárulást Joseph Bertrand francia matematikus tette 1878-ban [4], míg Lord Rayleigh 1877-es „*The Theory of Sound*" című művében részletesen tárgyalta a módszert és annak alkalmazási lehetőségeit [21]. A dimenzióanalízis formális rendszerezése és gyakorlati alkalmazhatóságának megteremtése azonban Edgar Buckingham [9] nevéhez fűződik, aki 1914-ben publikált munkájában bevezette a π-tételt. Buckingham érdeme, hogy a módszert egységes elméleti keretbe foglalta és gyakorlati szempontból is széles körben alkalmazhatóvá tette, különösen a mérnöki és fizikai problémák kezelésében. Bár a tétel általánosítását más kutatók, például Vaschy (1892) és Riabouchinsky (1911) is elvégezték, Buckingham munkája kiemelkedett világos rendszerezésével és a dimenzió nélküli π-csoportok fogalmának bevezetésével, amely megalapozta a módszer nemzetközi elterjedését.

A dimenzióanalízis az elmúlt 100 év során számos tudományterületen bizonyította hatékonyságát, többek között mechanikai [7], dinamikai [2], fizikai [12; 13; 26], hidrodinamikai [5], kémiai [20], gépészeti [3] és közgazdaságtani [11] alkalmazásokban. A tudományos világban számos dimenzió nélküli szám vált alapvető jelentőségűvé különféle területeken. A teljesség igénye nélkül íme néhány példa: a Reynolds-szám a folyadékok áramlástani jellemzőit írja le, és meghatározza, hogy egy áramlás lamináris vagy turbulens lesz-e. A Prandtl-szám a hőátadás és az áramlás közötti viszonyt jellemzi, míg a Nusselt-szám a konvekciós hőátadás hatékonyságát fejezi ki. A Froude-szám a gravitáció és a tehetetlenségi erők arányát adja meg, és különösen fontos a hajótervezésben és hullámjelenségek vizsgálatában.

A Buckingham π-tétel kimondja, hogy ha egy fizikai problémában n független változó szerepel, és ezek k független dimenzióval rendelkeznek (például hossz, idő, tömeg), akkor $n-k$ darab független, dimenzió nélküli mennyiséget, úgynevezett π-csoportot lehet képezni. Ez a módszer jelentősen leegyszerűsíti a bonyolult, több változót tartalmazó rendszerek elemzését. A tétel lényege, hogy a rendszer változóinak dimenzióit figyelembe véve olyan kombinációkat hozunk létre, amelyek dimenziómentesek, vagyis függetlenek az alkalmazott mértékegységektől. Ennek érdekében a dimenziómátrix-módszer és lineáris algebrai technikák segítségével azonosítjuk a független változókat, amelyek alapján a π-csoportok felépíthetők. Fontos szabály, hogy minden változó csak egyszer szerepelhet egy adott π-csoportban, de más csoportokban újra felhasználható. Ez biztosítja, hogy a csoportok egymástól függetlenek legyenek, és ne tartalmazzanak redundáns információt. A π-csoportok olyan kombinációkat alkotnak, amelyek nemcsak dimenziómentesek, hanem egymástól függetlenek is, ami azt jelenti, hogy egyik csoport sem lehet másik aránya vagy többszöröse.

A módszer lehetővé teszi, hogy minden független változó hatását figyelembe vegyük, miközben a fizikai rendszer egyszerűsített, általánosan alkalmazható leírását nyújtja. Ezáltal a Buckingham π-tétel a dimenzióanalízis egyik alapvető eszköze a tudományos és mérnöki problémák megoldásában.

A hasonlósági elmélet szerint bármilyen jelenséget leíró összefüggés kifejezhető a jelenségre jellemző hasonlósági kritériumok függvényében:

$$\mathrm{F}(\pi_1, \pi_2, \dots \pi_n) = 0, \tag{2}$$

ahol a $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$ dimenziónélküli számok.

Ha a kísérleti eredményeket hasonlósági kritériumok formájában dolgozzuk fel, általános érvényű összefüggéseket kapunk, amelyek minden egymással hasonló jelenségre alkalmazhatók. Az így megfogalmazott egyenletek természetes formája a kritériumi egyenlet, amely kétféleképpen állítható elő: egyrészt például differenciálegyenletek alapján, másrészt a dimenzióanalízis módszerével. A kritériumi egyenletekben a hasonlósági kritériumok mellett előfordulhatnak úgynevezett szimplexek is, amelyek azonos dimenziójú mennyiségek hányadosaként definiálhatók [8; 18; 19]. A hasonlóságelmélet szerint a kritériumi egyenletek általában hatványfüggvények szorzataként írhatók fel:

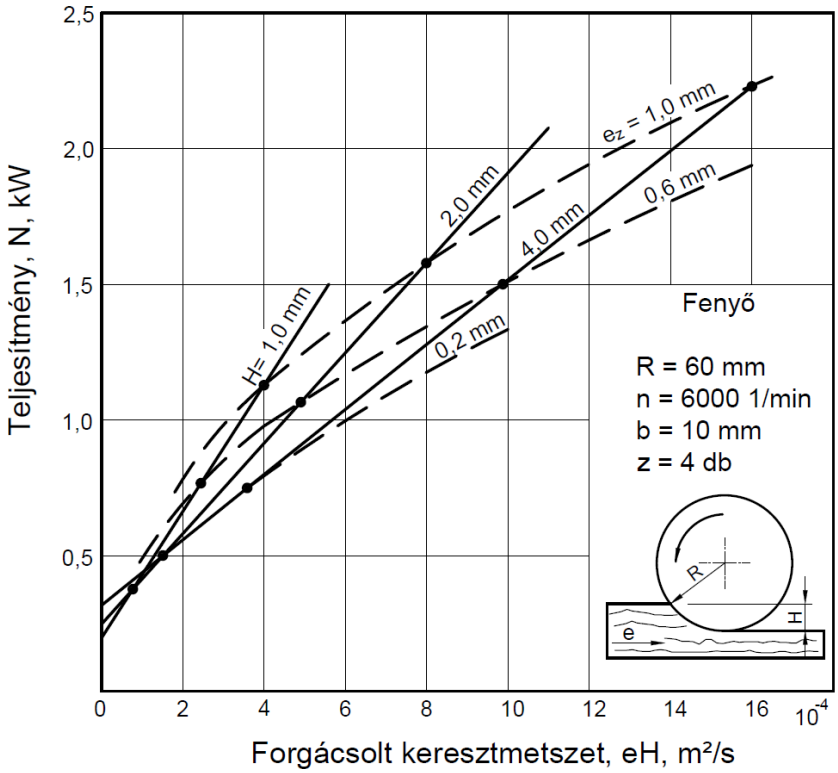
$$\pi_1 = C \cdot {\pi_2}^a \cdot {\pi_3}^b \ldots {\pi_i}^n, \tag{3}$$

ahol a C és $a, b \ldots n$ állandókat a kísérleti eredmények alapján kell meghatározni.

A dimenzióanalízis módszerének alkalmazásakor először a megfelelő mértékegység-rendszert kell kiválasztani. Az alapegységek lehetnek például „*hossz-erő-idő*” vagy „*hossz-tömeg-idő*”, de bizonyos esetekben további, látszólagos mértékegységek is használhatók. Ugyanakkor valamennyi hasonlósági kritérium számszerű egyezőségének megvalósítása a gyakorlatban sokszor lehetetlen. Ezért gyakran kénytelenek vagyunk teljes hasonlóság helyett részleges hasonlósággal dolgozni [16; 17; 19]. Ez azt jelenti, hogy a hasonlóság csak a folyamat néhány – lehetőség szerint döntő – elemére érvényes. Ilyenkor bizonyos részjelenségeket elhanyagolunk, és az elhanyagolás mértéke dönti el, mennyire használhatók a kapott eredmények. A dimenzióanalízis egyik legnagyobb előnye, hogy egyszerűen alkalmazható a sokváltozós folyamatok leírására, így elkerülhetők a bonyolult matematikai modellek. Hátránya azonban, hogy a változókat helyesen kell kiválasztani és – a módszer szabályai szerint – csoportosítani. Emellett kiemelten fontos a kísérletek pontos kivitelezése, mivel a mért adatok helyes – a kritériumi egyenletnek megfelelő – feldolgozása igazolja az egyenlet helyességét vagy helytelenségét. Gyakori probléma, hogy nehéz eldönteni, a kísérleti adatok hibásak-e, vagy maga a kritériumi egyenlet tartalmaz téves összefüggéseket. Ha a mérési pontok nem illeszkednek megfelelően a kritériumi egyenlet által meghatározott függvényhez, akkor vagy a mérések pontatlanok, vagy a kritériumi egyenlet helytelen. Az is előfordulhat, hogy a kísérletek megfelelőek, de az analízis során bizonyos fontos változókat figyelmen kívül hagytunk, vagy nem megfelelő változókat vettünk figyelembe. Ez helytelen dimenzió nélküli számokhoz, hibás hasonlósági kritériumi egyenlethez, ezáltal inkonzisztenciához vezethet. A megbízható eredmények érdekében ezért elengedhetetlen a mérések többszöri megismétlése és a változók alapos szakmai megválasztása.

2. A dimenzióanalízis módszerének bemutatása faipari példán keresztül

A dimenzióanalízis módszerének gyakorlati alkalmazását az 1. ábrán bemutatott faipari példán keresztül szemléltetjük. A példában szereplő forgácsolási kísérlet mérési körülményeinek leírása a jelölt szakirodalomban [24] megtalálható, ugyanakkor a mérési adatok dimenzió nélküli feldolgozására eddig ilyen formában nem került sor. Célunk ezért, hogy a marási teljesítményfelvétel (N) kapcsán egy általános érvényű hasonlósági egyenletet állítsunk fel. Az 1. ábrán egy marási művelet teljesítményfelvételét (N) láthatjuk fenyő faanyag forgácsolásakor az időegység alatt forgácsolt keresztmetszet ($e \cdot H$) függvényében különböző fogásmélység (H) és egy fogra jutó előtolás (e_z) mellett.



1. ábra. A marás teljesítményfelvétele [24, p. 355.]

Az 1. ábrán bemutatott kísérlet során bizonyos paraméterek nem változtak. Ilyenek a fordulatszám (n), a kések száma (z), a forgácsolási szélesség (b), a szerszám élkörsugara (R) és a fafaj. A változó paraméterek között szerepelt a fogásmélység (H), az előtolási sebesség (e) és a vele összefüggő egy fogra jutó előtolás (e_z) Az 1. ábra főbb metszéspontjai alapján a forgácsolásra jellemző mérési adatokat és az egyes paraméterek közötti összefüggéseket az alábbi táblázatokban (1-2. táblázat) foglaltuk össze.

1. táblázat. A mérést összefoglaló adat és paramétertáblázat

Paraméter megnevezése	Jelölés	Érték/összefüggés	Mértékegység
Szerszám élkörsugara	R	0,06	m
Gyalutengely fordulatszáma	n	100	1/s
Forgács szélesség	b	0,01	m
Faanyag (fenyő) hajlítószilárdsága	σ_b	60000000	Pa
Forgácsoló élek száma	z	4	db
Egy fogra eső előtolás	e_z	e/(z·n)	m
Előtolási sebesség	e	e_z·n·z	m/s
Forgácsolási sebesség	v_f	2R·π·n	m/s

2. táblázat. A mért értékek összefoglaló táblázata (1. ábra metszéspontjai alapján)

H (mm)	e_z (m)	N (W)	e (m/s)
	0,001	1150	0,400
1	0,0006	750	0,248
	0,0002	400	0,082
	0,001	1580	0,400
2	0,0006	1080	0,248
	0,0002	500	0,087
	0,001	2250	0,400
4	0,0006	1500	0,248
	0,0002	815	0,085

A következő lépés a forgácsolás teljesítményfelvételét befolyásoló tényezők, mint független változók számbavétele és a konzekvens dimenziók megadása *tömeg(M)-hossz(L)-idő(T)* bázison:

$$N = f(H, b, R, e, \sigma_b), \tag{4}$$

ahol

			Mértékegység formálisan felírva
N –	a marási teljesítményigény,	$kg \cdot m^2/s^3$	ML^2T^{-3}
H –	a fogásmélység,	m	L
b –	a forgácsolási (marási) szélesség,	m	L
R –	a szerszám élkörsugara,	m	L
e –	az előtolási sebesség,	m/s	LT^{-1}
σ_b –	a faanyag hajlítószilárdsága, (fafaji sajátosság)	$kg/m \cdot s^2$	$ML^{-1}T^{-2}$

Célszerű olyan változókat kiválasztani, amelyek a gyakorlat szempontjából a legnagyobb hatást gyakorolják a forgácsolási teljesítményre. Ezért a feladat megoldásában az előtolási sebességet (e) vesszük figyelembe a változók között, mivel közvetlenül arányos az e_z, n és z paraméterekkel, valamint közvetetten a forgácsolási sebességgel (v_f). Az e ismeretében e_z számolható így elkerülhető bármilyen inkonzisztencia a számításokban.

A következő lépés az alapvető dimenziók és a független π-csoportok számának a meghatározása. A változók száma 6 (N, H, b, R, e, σ_b), az alapvető dimenziók száma 3 (M, L, T), tehát a független π-csoportok száma: 6 - 3 = 3. Vagyis három dimenzió nélküli π-csoportot kell létrehoznunk. A megoldáshoz a dimenziómátrix módszerét alkalmazzuk [1; 6; 8; 10]. A dimenziómátrixot a kiválasztott paraméterek dimenzióinak felírásával készítjük el. Az oszlopok az egyes változókat, a sorok pedig a dimenziókat képviselik.

3. táblázat. A változók dimenziómátrixa

Dimenziók/Változók	N	H	b	R	e	σ_b
M (tömeg, kg)	1	0	0	0	0	1
L (hossz, m)	2	1	1	1	1	-1
T (idő, sec)	-3	0	0	0	-1	-2

Ezek után kiválasztunk három alapváltozót, amelyek mindhárom alapvető dimenziót lefedik. A Buckingham π-tétel szerint ugyanis az alapváltozók száma mindig megegyezik az alapvető dimenziók számával. Célszerű olyan alapváltozókat választani, amelyek egyszerűen kombinálhatók a fennmaradó változókkal, és amelyek lefedik az összes alapvető dimenziót. Az alapváltozók kiválasztása többféleképpen történhet, de a végeredmény minden esetben azonos marad: a hasonlósági egyenlet dimenzió nélküli, független csoportokat tartalmaz. Ezek a csoportok azonban különböző kombinációkban tartalmazhatják a változókat az alapválasztástól függően. A választott alapváltozók legyenek az alábbiak:

H – (hosszegység, [L]),
e – (hosszegység és idő, [LT^{-1}]),
σ_b – (tartalmazza a tömeg dimenzióját is, [$ML^{-1}T^{-2}$]).

A célunk, hogy a fennmaradó változókkal (N, b, R) úgy kombináljuk az alapváltozókat (H, e, σ_b), hogy minden dimenzió kioltódjon, ezáltal dimenzió nélküli csoportokat kapunk.

Az első π-csoportot (dimenzió nélküli csoportot) a következő alakban írhatjuk fel:

$$\pi_1 = N \cdot H^a \cdot e^b \cdot {\sigma_b}^c. \tag{5}$$

Most helyettesítsük be a dimenziókat minden változóhoz:

N: [ML^2T^{-3}]
H: [L]
e: [LT^{-1}]
σ_b: [$ML^{-1}T^{-2}$]

Behelyettesítve a dimenziókat π_1-be (5. egyenlet):

$$\pi_1 = [ML^2T^{-3}] \cdot [L]^a \cdot [LT^{-1}]^b \cdot [ML^{-1}T^{-2}]^c. \tag{6}$$

Bontsuk fel a kifejezést, és rendezzük el a tagokat az egyes dimenziók szerint:

1. Tömeg (M) szerint: M^{1+c}
2. Hossz (L) szerint: $L^{2+a+b-c}$
3. Idő (T) szerint: $T^{-3-b-2c}$

Ahhoz, hogy π_1 dimenzió nélküli legyen, minden egyes kitevőnek nullának kell lennie:

1. Tömeg egyenlet: $1 + c = 0 \rightarrow \underline{c = -1}$
2. Hossz egyenlet (c értékét behelyettesítve): $2 + a + b - c = 0 \rightarrow 2 + a + b + 1 = 0 \rightarrow \underline{a + b = -3}$
3. Idő egyenlet: $-3 - b - 2c = 0 \rightarrow -3 - b + 2 = 0 \rightarrow \underline{b = -1}$

Megoldva az egyenleteket a, b és c értéke: a = -2; b = -1; c = -1

Az első π-csoport tehát:

$$\pi_1 = N \cdot H^{-2} \cdot e^{-1} \cdot {\sigma_b}^{-1} = \frac{N}{\sigma_b \cdot H^2 \cdot e}. \tag{7}$$

A további π csoportokhoz (π_2 és π_3) az R és b változókat használjuk, hogy dimenzió nélküli arányokat hozzunk létre H-val. Az előzőkhöz hasonlóan az alábbi dimenzió nélküli csoportokat kaptuk eredményül:

$$\pi_2 = \frac{R}{H} \quad \text{és} \quad \pi_3 = \frac{b}{H}. \tag{8}$$

A Buckingham π-tétel szerint ezek a csoportok egy függvénnyel összekapcsolhatók:

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0. \tag{9}$$

Azaz a két dimenzió nélküli csoport között egy általános kapcsolat áll fen. Ezt úgy is felírhatjuk, hogy

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3). \tag{10}$$

vagy kifejtve:

$$\frac{N}{\sigma_b \cdot H^2 \cdot e} = f\left(\frac{R}{H}, \frac{b}{H}\right), \tag{11}$$

ahol f egy ismeretlen függvény, amely empirikus adatok vagy elméleti elemzések alapján határozható meg. Ha empirikus adatok alapján szeretnénk meghatározni a függvényt, gyakran feltételezzük, hogy a dimenzió nélküli számok között arányosság áll fenn, amely jó közelítéssel hatványfüggvénnyel írható le:

$$\pi_1 \approx {\pi_2}^n \cdot {\pi_3}^m \quad \text{vagy} \quad \frac{N}{\sigma_b \cdot H^2 \cdot e} = C \cdot \left(\frac{R}{H}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{H}\right)^m. \tag{12}$$

A kitevők (n és m) és a C állandó (arányossági tényező) értékének meghatározása empirikus úton történik, a kísérleti adatok feldolgozásával és logaritmus-transzformált egyenlet segítségével. A logaritmus-transzformáció segítségével linearizálhatjuk a hasonlósági egyenletet (12. egyenlet) az alábbiak szerint:

$$y = ln\left(\frac{N}{\sigma_b \cdot H^2 \cdot e}\right),$$

$$x_1 = ln\left(\frac{R}{H}\right),$$

$$x_2 = ln\left(\frac{b}{H}\right).$$

Ezáltal a kifejezés az alábbi alakban írható fel:

$$y = ln(C) + n \cdot x_1 + m \cdot x_2. \tag{13}$$

Ez egy többváltozós lineáris regresszió forma, ahol y a függő változó, x_1 és x_2 a független változók, és ln(C) az y-tengelymetszet.

Ezek után a lineáris regresszió eredményei megadják:

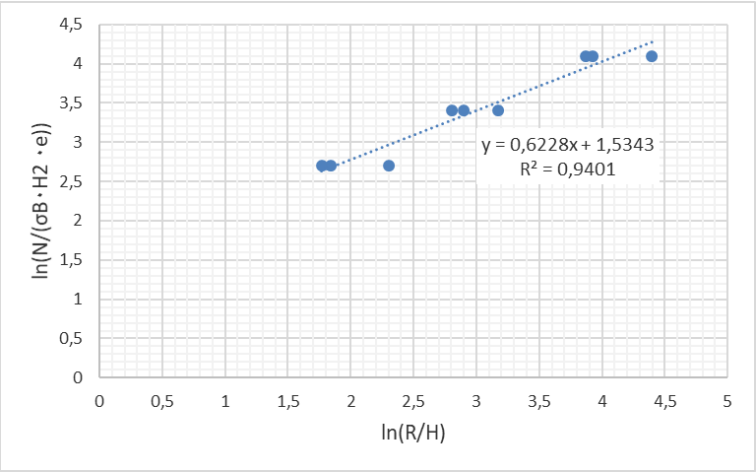
– n értékét, amely az x_1-hez (azaz ln(R/H)-hoz) tartozó meredekség.
– m értékét, amely az x_2-höz (azaz ln(b/H)-hoz) tartozó meredekség.
– ln(C) értékét, amely az y-tengelymetszet, vagyis $C = e^{\text{metszet}}$.

A kísérleti adatok felhasználásával a 4. táblázatban megadtuk a hasonlósági egyenletben szereplő π-csoportokat, valamint a kitevők meghatározásához szükséges logaritmizált értékeket.

4. táblázat. A dimenzió nélküli mennyiségek összefoglaló táblázata

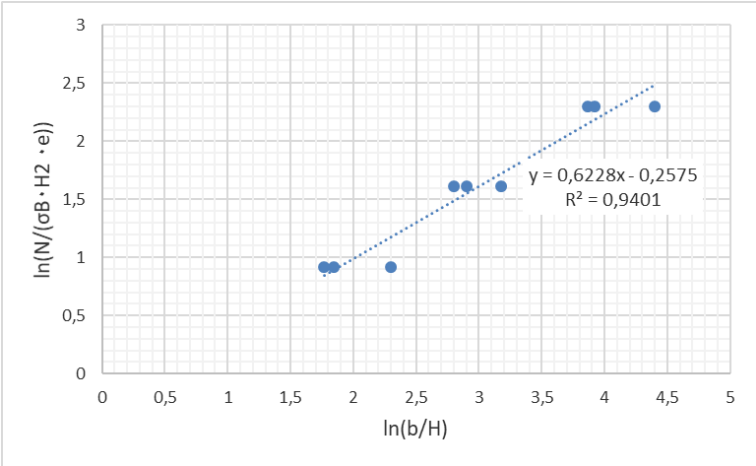
H (m)	e_z (m)	$N_{(\text{mért})}$ (W)	e (m/s)	$N/(\sigma_b \cdot H^2 \cdot e)$	R/H	b/H	$\ln(N/(\sigma_b \cdot H^2 \cdot e))$	$\ln(R/H)$	$\ln(b/H)$	$N_{(\text{számolt})}$
0,001	0,001	1150	0,400	47,917	60	10	3,869	4,094	2,303	1222
0,001	0,0006	750	0,248	50,505	60	10	3,922	4,094	2,303	756
0,001	0,0002	400	0,082	81,301	60	10	4,398	4,094	2,303	251
0,002	0,001	1580	0,400	16,458	30	5	2,801	3,401	1,609	1986
0,002	0,0006	1080	0,248	18,182	30	5	2,900	3,401	1,609	1229
0,002	0,0002	500	0,087	23,946	30	5	3,176	3,401	1,609	432
0,004	0,001	2250	0,400	5,859	15	3	1,768	2,708	0,916	3225
0,004	0,0006	1500	0,248	6,313	15	3	1,843	2,708	0,916	1996
0,004	0,0002	815	0,085	9,988	15	3	2,301	2,708	0,916	685

A kitevők (n és m) értékeit ezek alapján meghatározhatjuk az alábbi függvénykapcsolatok rendszerében:



2. ábra. n kitevő értékének meghatározása

Az adatokra illesztett lineáris regressziós egyenes alapján meghatároztuk az n kitevő értékét: $n = 0{,}6228$. Hasonló módon, az m kitevő értékét az alábbi grafikus ábrázolás segítségével kaptuk meg (3. ábra): $m = 0{,}6228$. A regressziós elemzés eredményei alapján megállapítható, hogy a pontok jól illeszkednek a regressziós egyenesre, amit az $R^2 = 0{,}94$ determinációs együttható is alátámaszt. Ez az illeszkedési szint megfelel a tudományos eredmények igazolásához szükséges követelményeknek.



3. ábra. *m* kitevő értékének meghatározása

A kísérleti adatok feldolgozása után a hasonlósági egyenlet az alábbi konkrét alakban írható fel:

$$\frac{N}{\sigma_b \cdot H^2 \cdot e} = C \cdot \left(\frac{R}{H}\right)^{0,6228} \cdot \left(\frac{b}{H}\right)^{0,6228} \quad vagy \quad \frac{N}{\sigma_b \cdot H^2 \cdot e} = C \cdot \left(\frac{R \cdot b}{H^2}\right)^{0,6228}. \tag{14}$$

C-állandó átlagos értéke ennek megfelelően *C* = 0,796 –ra adódott, így a végső egyenlet az alábbiak szerint alakult:

$$\frac{N}{\sigma_b \cdot H^2 \cdot e} = 0,796 \cdot \left(\frac{R \cdot b}{H^2}\right)^{0,6228}. \tag{15}$$

Kifejezve a forgácsolási teljesítményt (*N*):

$$N = \sigma_b \cdot H^2 \cdot e \cdot 0,796 \cdot \left(\frac{R \cdot b}{H^2}\right)^{0,6228}. \tag{16}$$

3. Konklúzió

Az empirikus egyenlet (16. egyenlet) a kiindulási paraméterek függvényében adja meg a marási teljesítményigény egy lehetséges számítási formuláját. Ez az általános alak más, hasonló forgácsolási körülményekre is alkalmazható, azonban a kitevők (*n*, *m*) és a *C*-állandó értékei az adott kísérleti körülményekhez kötöttek. Ezért ezeket mindig a specifikus feltételekhez kell igazítani, és értékeiket kísérleti úton kell meghatározni.

A 4. táblázatban bemutatott mért és a hasonlósági formulával számolt teljesítményértékek alapján az alábbi következtetések vonhatók le:

- A számított teljesítményértékek általában jó közelítést nyújtanak a mért értékek átlagos értékéhez. Azonban az adatok szórása és az egyedi eltérések elemzése alapján kijelenthető, hogy az egyenlet pontosítása szükséges lehet. A jelentősebb eltérések okainak feltárása érdekében célszerű lenne további, eddig figyelmen kívül hagyott tényezőket (pl. egyéb forgácsolást befolyásoló paraméterek, szerszámkopás, dinamikus hatások) is figyelembe venni a modellben.
- A *C* állandó átlagos értéke (*C* = 0,796) és szórása (±28,02%) kapcsán megállapítható, hogy az egyenlet jelenlegi formája nem képes teljes pontossággal figyelembe venni az összes releváns paramétert, amelyek hatással vannak a marási teljesítményre. A szórás nagyrészt a *C*-érték paraméterfüggőségének eredménye, amelyet például az anyagjellemzők, forgácsolási sebesség, előtolás vagy a szerszám állapotának változásai

befolyásolnak. Ez azt mutatja, hogy az átlagos *C*-érték alkalmazása ugyan egyszerűsítést nyújt, de jelentős szórást eredményez a mért és számított teljesítményértékek között, különösen szélsőséges körülmények esetén.

– A jelenlegi formában az egyenlet alkalmazható durva becsléshez, különösen olyan forgácsolási körülmények között, amelyek közel állnak a mért értékek átlagához.

Az eredmények azt sugallják, hogy a *C* állandót a kísérleti paraméterek függvényében célszerű újra modellezni. Kutatásunk további célja, hogy *C* értékét explicit módon összefüggésbe hozzuk a befolyásoló paraméterekkel, illetve csoportosított analízis segítségével csökkentsük a szórást. Ezzel a modell (egyenlet) pontossága és alkalmazhatósága jelentősen javítható.

4. Összefoglalás

A dimenzióanalízis egyszerű és hatékony módszert kínál a komplex rendszerek vizsgálatára, mértékegységtől függetlenül, általános érvényű hasonlósági egyenletek formájában. Ez különösen előnyös a mérnöki és természettudományos kutatásokban, mivel lehetővé teszi a rendszerek viselkedésének skálázását és a változók számának jelentős csökkentését. A módszer előnyei közé tartozik a kísérletek optimalizálása, kevesebb méréssel elérhető általánosítható eredmények, valamint új fizikai törvényszerűségek felismerése.

A mesterséges intelligencia (AI) további lehetőségeket kínál a dimenzióanalízis gyakorlati alkalmazásában. Az AI algoritmusai képesek gyorsan és hatékonyan elemezni nagyméretű adatbázisokat, azonosítani a dimenzió nélküli csoportokat, valamint optimalizálni az empirikus modellek paramétereit. Ezáltal a dimenzióanalízis alkalmazási lehetőségei jelentősen bővülhetnek a jövőben. E módszer egyszerűsége és sokoldalúsága biztosítja, hogy a dimenzióanalízis a tudományos és mérnöki problémák megoldásának egyik alapvető eszközévé váljon.

Irodalomjegyzék

[1] Bakarji, J., Callaham, J., Brunton, S. L., & Kutz, J. N., Dimensionally consistent learning with Buckingham Pi. *Nature Computational Science*, (2022), *2*(12), 834-844. doi: 10.48550/arXiv.2202.04643

[2] Baker, W.E., Westine, P.S., Dodge, F.T., *Similarity Methods in Engineering Dynamics*, Hayden, Rochelle Park, (1973), N.J. 396. p.

[3] Barenblatt, G.I., *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics*, Cambridge University Press, Cambridge, (1996), UK. 96. p.

[4] Bertrand, J., Théorie des dimensions. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, (1878), 86, 1234–1237.

[5] Birkhoff, G., *Hydrodynamics: a study in logic, fact and similitude*, first ed., Princeton University, (1950), Press. 430. p.

[6] Bluman, G. W., Kumei, S., Potential symmetries. *Symmetries and Differential Equations*, (1989), 352-383.

[7] Brand, L., *The Pi Theorem of Dimensional Analysis, Archive for Rational Mechanics and Analysis*, (1957), 1:35-45.

[8] Bridgman, P. W., *Dimensional analysis*. Yale University Press, 1922.

[9] Buckingham, E., On the physically similar systems. *Physical Review*, (1914), (4):345-376. doi: 10.1103/PhysRev.4.345

[10] Conejo, A. N., Buckingham's π Theorem. *Fundamentals of Dimensional Analysis: Theory and Applications in Metallurgy*, (2021), 69-76.

[11] de Jong, F.J., Quade, W., *Dimensional Analysis for Economists*, Nort Holland, Amsterdam, (1967), 220. p.
[12] Eddington, Sir A.S., *The Philosophy of Physical Science*, Cambridge University Press, Cambridge, (1939), 225. p.
[13] Einstein, A., Relativity and the problem of space: in Relativity, the Special and the General Theory, A Popular Exposition, Crown, New York, 1961 (a translation of the 15th edition, 1952) in SNT Vol. 2, 744. p.
[14] Gibbings, J. C., *Dimensional analysis*. Springer Science & Business Media, 2011.
[15] Girard, A., Dimensionless Policies Based on the Buckingham π Theorem: Is This a Good Way to Generalize Numerical Results?. *Mathematics*, (2024), *12*(5), 709. doi: 10.3390/math12050709
[16] Hardtke, J. D., On Buckingham's $\Pi $-Theorem, (2019), *arXiv preprint arXiv:1912.08744* doi: 10.48550/arXiv.1912.08744
[17] Hart, G. W., *Multidimensional analysis: algebras and systems for science and engineering*. Springer Science & Business Media, 1995.
[18] Kline, S. J., *Similitude and approximation theory*. McGraw-Hill, 1965.
[19] Langhaar, H.L., *Dimensional Analysis and Theory of Models*, John Wiley & Sons Ltd, New York, (1951), N. Y., S. 85-166.
[20] Lokarnik, M., *Dimensional Analysis and Scale-Up in Chemical Engineering*, Springer Verlag, Berlin, (1991), 178. p.
[21] Rayleigh, J. W. S., *The Theory of Sound*. Macmillan, 1877.
[22] Riabouchinsky, D., Méthode des variables dimensions et ses applications. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, (1911), 153, 133–138.
[23] Sedov, L. I., *Similarity and dimensional methods in mechanics* (10th ed.). CRC Press, 1993.
[24] Sitkei, Gy., *A faipari műveletek elmélete*. Mezőgazdasági Szaktudás Kiadó, Budapest, (1994), pp. 343-356.
[25] Sitkei, Gy., *Előadások az akadémián: „Hasonlósági törvények alkalmazása a műszaki tudományokban”*. Nyugat-magyarországi Egyetem Kiadó, (2013), Sopron, pp. 2-10.
[26] Tolman, R.C., The Measurable Quantities of Physics, *Physical Review*, (1917), 9(3):237-253.
[27] Vaschy, A., Sur les lois de similitude en physique. *Annales Télégraphiques*, (1892), 19(5), 25–28.

UNIVERSITY PRESS