

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

ALAPÍTOTTÁK

KALMÁR LÁSZLÓ, TANDORI KÁROLY, PRÉKOPA ANDRÁS, ARATÓ MÁTYÁS

FŐSZERKESZTŐ

PÁLES ZSOLT

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTESEK

BENCZÚR ANDRÁS, GERENCSÉR LÁSZLÓ, SZÁNTAI TAMÁS

FELELŐS SZERKESZTŐ

BOZÓKI SÁNDOR

FELELŐS SZERKESZTŐ-HELYETTES

CSATÓ LÁSZLÓ

TÖRDELŐSZERKESZTŐ

MOCZÁR KÁROLY

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI

Arató Miklós, Baran Sándor, Csáji Balázs Csanád, Csendes Tibor, Csirik János, Fazekas István, Forgó Ferenc, Frank András, Fridli Sándor, Friedl Katalin, Friedler Ferenc, Galántai Aurél, Garay Barna, Gazdag-Tóth Boglárka, Gyimóthy Tibor, Hajdu András, Hartung Ferenc, Hatvani László, Horváth Zoltán, Illés Tibor, Járai Antal, Jelasity Márk, Katona Gyula, Király Tamás, Kis Tamás, Kovács Gergely, Krisztin Tibor, Lovász László, Maksa Gyula, Michaletzky György, Miklós István, Molnár-Sáska Gábor, Pituk Mihály, Rásonyi Miklós, Recski András, Rónyai Lajos, Röst Gergely, Simon Péter, Szabó Péter Gábor, Szeidl László, Szilágyi Brigitta, Tasnádi Attila, Temesi József, Tusnády Gábor, Vizi Zsolt, Vizvári Béla

41. kötet

Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű fizetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Páles Zsolt, főszerkesztő

1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.

A folyóirat e-mail címe: aml@renyi.hu

A folyóirat honlapja: <http://aml.math.bme.hu>

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára évfolyamonként 1200 forint. Megrendelések a szerkesztőség címén lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

A PRÉKOPA ANDRÁS-DÍJ 2024. ÉVI DÍJAZOTTJA:
DEÁK ISTVÁN



Az MTA Matematikai Tudományok Osztálya a 2024. évi Prékopa András-díjat Deák Istvánnak ítélte oda a Monte Carlo módszerek, véletlenszám-generálási algoritmusok, szimulációs és numerikus módszerek vizsgálatában elért eredményeiért.

Tudományos és szakmai pályafutása

Deák István felsőfokú tanulmányait az Eötvös Loránd Tudományegyetemen végezte; 1969-ben kapott matematikus diplomát, numerikus matematikai és operációkutatási szakirányon. A továbbiakban az egyetemi doktori (1971), kandidátusi (1982), PhD (1995) fokozatot, majd a habilitált doktori (1999) és az MTA Doktora címet (2006) nyerte el.

Szakmai pályafutását 1969-ben kezdte a Műegyetemen. 1972 és 1991 között az MTA SZTAKI-ban dolgozott, 1982-től tudományos főmunkatársi, 1990-től osztályvezető helyettesi beosztásban. A „Sztochasztikus és nagyméretű rendszerek” csoportot, majd a „Párhuzamos számítógépek és szakértői rendszerek” csoportot vezette. 1991 és 2005 között ismét a Műegyetemen dolgozott, a Villamosmérnökhari Matematika Tanszéken, majd a Differenciálegyenletek Tanszéken. 2005-től a Budapesti Corvinus Egyetem Számítástudományi Tanszékének egyetemi tanára. Hat éven át párhuzamosan a Nyíregyházi Főiskolán is tanított. 2006 és 2008 között a Corvinus Egyetem Közgazdasági és Gazdaságinformatikai Doktori Iskolájának Gazdaságinformatika Doktori Programja megalakításában dolgozott, 2009-től a program igazgatója volt. 2008 és 2010 között a Corvinus Egyetem Számítástudományi Tanszékét vezette. 2014 óta Corvinus Egyetem Professor Emeritusa. Emeritus professzorként is foglalkozott doktorandusz hallgatókkal.

Neves külföldi egyetemeken tanított vendégprofesszorként: a kanadai Dalhousie Egyetemen, a Wisconsin-Madison Egyetemen, a Zürichi Egyetem Operációkutatási Intézetében, legutóbb pedig a Rutgers Egyetemen. Vendégprofesszori megbízatásai alatt mind egyetemistáknak, mind doktorandusz hallgatóknak tartott előadásokat.

Több mint nyolcvan cikket, tanulmányt írt. Két angol nyelvű és három magyar nyelvű szakkönyv szerzője illetve társszerzője. Két felsőoktatási tankönyv szerzője.

Fontos OTKA pályázatokban vett részt Prékopa András irányítása alatt, és jelentős projektek témavezetője volt. 1992-97 között részt vett a hét országra kiterjedő Central European Initiative „Parallel Computation” elnevezésű projektjében. Nagyszabású alkalmazási és kutatás-fejlesztési munkákban vett részt:

- a magyar villamosenergiaipar sztochasztikus modelljének felépítése, az Országos Tervhivatal számára,
- az ország villamosenergia termelésének napi ütemezése, a Magyar Villamos Művek Tröszt számára,
- Dunai Vasmű hideghengersor termelésének ütemezése, illetve hosszútávú komplex termelésstervezési és prognosztikai programcsomag kifejlesztése a Vasmű szükségleteire,
- villamos távvezetékek korróziójának vizsgálata.

Sok cikluson keresztül a Magyar Tudományos Akadémia Operációkutatási Bizottságának tagja, egy korábbi ciklusban a Bizottság titkára volt. Két ciklusban a Magyar Operációkutatási Társaság alelnöke volt.

Számos konferencia szervezésében vett részt, a programbizottság vagy szervezőbizottság tagjaként. Az 1992. évi mátrafüredi „XI. International Conference on Operations Research” társelnöke volt.

Kitüntetései: Farkas Gyula díj (Bolyai János Matematikai Társulat, 1976) a STABIL sztochasztikus programozási modell villamosenergiaipari alkalmazásában végzett munkájáért; Egerváry díj (Magyar Operációkutatási Társaság, 2020).

Tudományos tevékenysége

Deák Istvánnak a Monte Carlo módszerekkel, véletlenszám-generálási algoritmusokkal, szimulációs és numerikus módszerekkel kapcsolatos eredményei között különösen nagy jelentőségűek a többdimenziós normális eloszlás eloszlásfüggvényének kiszámítására kidolgozott eljárása, valamint néhány véletlenszám-generálási algoritmus.

Fontos eredményeket ért el szukcesszív regressziós közelítéseknek a sztochasztikus programozásban való felhasználásával. Új, regresszió alapuló nemlineáris optimalizálási eljárásokat dolgozott ki, amelyek zajos függvények esetén is alkalmazhatók.

Eredményeit más elméleti területeken is alkalmazták, ezek között jelentős a térfogatszámítás. Elméleti kutatási tevékenysége több területen is kapcsolódik az alkalmazásokhoz, ipari és gazdasági rendszerek nagyméretű és sztochasztikus optimalizálásával kapcsolatos kérdésekhez. Világviszonylatban is úttörő projekteken vett részt.

AZ EGERVÁRY JENŐ EMLÉKPLAKETT 2023. ÉVI DÍJAZOTTJA:
GERENCSÉR LÁSZLÓ



Az Egerváry Jenő emlékplakettet a Magyar Operációkutatási Társaság 2023-ben *Gerencsér Lászlónak* – a HUN-REN SZTAKI tudományos tanácsadójának – ítélte oda a sztochasztikus rendszerek területén elért kutatói, oktatói és vezetői eredményeiért, valamint tudományos közéleti tevékenységéért.

Életútja

Gerencsér László 1946. augusztus 7-én született Zalaegerszegen. Matematikai és műszaki érdeklődése már az általános iskolában megnyilvánult. Középiskolai éve alatt 1964-ben az Országos Tanulmányi versenyen és a Kürschák József Matematikai versenyen első díjat, valamint a moszkvai Matematikai Diákolimpián megosztott első díjat kapott.

Egyetemi diplomáját és doktori fokozatát az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematikus szakán szerezte 1969-ben, illetve 1970-ben. Egyetemi tanulmányait követően az MTA Matematikai Kutató Intézetben kapott állást, Prékopa András csoportjában, amely rövidesen az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetébe (SZTAKI) került át.

1976-ban megvédte kandidátusi disszertációját a nemlineáris programozás numerikus kérdéseiről. Ez időben fordult érdeklődése a sztochasztika irányába, majd az irányításelmélet matematikai problémáival kezdett foglalkozni, ezen belül is a rendszeridentifikációval, amely egész későbbi tudományos pályáját végigkísérte.

1988 és 1991 között vendégprofesszor volt a kanadai McGill Egyetem Villamosmérnöki Tanszékén. Hazatérése után, 1991-ben a SZTAKI Rendszer- és Irányításelméleti Laboratóriumhoz csatlakozott, szakmai és baráti kapcsolatot alakított ki élvonalbeli holland, svéd és olasz kutatókkal. Az MTA doktora címet 2000-ben nyerte el.

1997 és 2001 között Széchenyi Professzori Ösztöndíjasként oktatott az ELTE TTK Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszékén. Itt társoktatóként matematikus szakon elsőként oktatott Magyarországon modern pénzügyi matematikát. Több éven keresztül tanított a Pázmány Péter Katolikus Egyetem Információs Technológiai és Bionikai Karán is.

1998 és 2004 között a *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2001 és 2004 között pedig az *IEEE Transactions on Automatic Control* folyóiratok szerkesztőbizottsági tagja volt. Tagja volt az IEEE Control Systems Society Conference Editorial Boardnak (1998-2001) és az IFAC Technical Committee on Stochastic Systemsnek is.

Szakmai tevékenysége

A rendszeridentifikáció svéd iskolájának gondolatait követve a 80-as években megalkotta az L -keverő folyamatok fogalmát, és egy 1989-es, a *Stochastics* folyóiratban megjelent cikkében kidolgozta egy, a későbbiekben sokat alkalmazott elmélet alapjait. Ennek egyik első alkalmazása a Shannon díjas Jorma Rissanennel írt 1993-as közös dolgozata, amelyben Gauss-i idősorok egy fontos osztályára modell-független prediktorok hatékonyságát vizsgálták. A rendszeridentifikáció és a sztochasztikus analízis eszköztárának ötvözése a későbbiekben munkásságának egy visszatérő motívuma lett. Ehhez kapcsolódó témában vállalta Vágó Zsuzsanna, későbbi felesége szakdolgozati témavezetését is.

Az 1980-as években formálódott a díjazott szakmai kapcsolata Bokor Józseffel, amely megtermékenyítőleg hatott egész tudományos pályájára. Részben ennek tudható be, hogy nemzetközi szakmai kapcsolata döntően matematikai/műszaki fórumokhoz köthető. Az 1980-as évek derekán a rekurzív identifikáció témakörének egy ünnevelt, de matematikailag nem teljesen kidolgozott eredményének szigorú megalapozása felé fordult az érdeklődése. Ennek eredményeképpen egy, a *SIAM Journal of Control and Optimization* folyóiratban megjelent dolgozatában kifejlesztett egy egzakt vizsgálati metodikát, egy korábbi heurisztikus átlagolási elv új értelmezését. Eerre támaszkodva bizonyította a meghökkentő tényt: egy gyakran használt rekurzív identifikációs algoritmus által kapott on-line becslés és annak off-line változata között az eltérés oly csekély, hogy előbbi az utóbbi minden szokványos statisztikai tulajdonságát örökli. Ennek az eredménynek egy lényeges kiterjesztését tartalmazza a *SIAM Journal of Control and Optimization* folyóirat 2006-ban megjelent 66 oldalas dolgozata, amelyre támaszkodva több, korábban reménytelenül nehéznek tartott kérdés megválaszolható lett.

1998-ban létrehozta a SZTAKI-ban a Sztochasztikus Rendszerek Kutatócsoportot, amely 2013-ig állt fenn. Ebben a szervezeti keretben több PhD hallgató vezetője változatos témákban, úgy mint opcióárazás, rejtett Markov folyamatok, változásdetektálás, sztochasztikus volatilitás modellek, piaci mikrostruktúrák, sokk-hatások modellezése.

Összesen 9 PhD hallgató dolgozott a témavezetése alatt, közülük 8-an sikeresen megvédték disszertációjukat, egy hallgató munkája még folyamatban van.

A díjazott 2015 óta intenzíven foglalkozik epileptológiával, pontosabban epilepsziás rohamok előrejelzésével kapcsolatos kérdésekkel, ezen belül a szeizmológiában sikeresen alkalmazott módszerek adaptálásával. Ehhez kapcsolódik az orvos végzettségű Perczel György PhD kutatási programja, amelynek vezetését Eröss Loránddal, a SOTE Idegsebészeti és Neurointervenciós Klinika jelenlegi igazgatójával, mint társ-témavezetővel együtt látta el. Egy, az *IEEE Signal Processing Society* által jegyzett konferencia 2022-ben megjelent kötetében áttörést jelentő eredményt publikáltak idegsejtek tüzelési mintázatának valós idejű modellezésére. A gépi tanulás területén évek óta együttműködik SZTAKI-s kollégájával, Csáji Balázs Csanáddal. Szakértőként közreműködik egy, kooperatív doktori program keretében kollégája által vezetett kutatás felügyeletében is. A közelmúlt egy kiemelkedő eredménye matematikus fiával, Gerencsér Balázssal közös dolgozata (*IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022), amelyben elosztott számítási módszerek alapját képező konszenzus algoritmusok egy tág osztályára határozták meg a konvergencia sebességének éles felső korlátját, megválaszolva a témakör egy alapcikkében 2010-ban megfogalmazott kérdést.

Tudományos közéleti tevékenysége

A határterületek iránti érdeklődését tükrözi a díjazott tudományos közéletben való aktív részvétele. Kiemelt nemzetközi szerepvállalásai: szerkesztőbizottsági tag volt a *SIAM Journal of Control and Optimization*, illetve az *IEEE Transactions on Automatic Control* folyóiratoknál, 2010-ben pedig egy Budapesten rendezett mintegy 400 fős konferencia (19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, MTNS 2010) nemzetközi programbizottságának elnöke volt. Hazai szerepvállalásai: a Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) Alkalmazott Matematikai Szakosztályának és egyben a Farkas Gyula Emlékdíj Díjbizottságának elnöke 12 éven át. Kezdeményezője és Horváth Zoltánnal (SzE) társelnöke volt a Győrben 2012-ben, illetve 2016-ban rendezett multidiszciplináris BJMT Alkalmazott Matematikai Konferenciáknak. 2016 óta az *Alkalmazott Matematikai Lapok* főszerkesztő-helyettese. 2008 óta tagja az MTA III. Matematikai Tudományok Osztálya Operációkutatási Tudományos Bizottságának, és két cikluson át (2016-2022) tagja volt az osztály Doktori Bizottságának is. Két cikluson át tagja volt az MTA Tudományetikai Bizottságának Fésüs László elnöksége alatt, valamint közgyűlési képviselő volt Lovász László elnöksége idején.

Főbb díjai és kitüntetései

- Széchenyi Professzori Ösztöndíj, 1997–2001
- Hart Prize for Excellence in Research, Johns Hopkins University, 2001
- Kálmán Rudolf Díj, SZTAKI, 2021

AZ EGERVÁRY JENŐ EMLÉKPLAKETT 2024. ÉVI DÍJAZOTTJA:
GALÁNTAI AURÉL



Az Egerváry Jenő emléklakett a Magyar Operációkutatási Társaság 2024-ben *Galántai Aurélnak* – az Óbudai Egyetem professzorának – ítélte oda a kiemelkedő tudományos, szakmai és oktatói munkásságáért, valamint tudomány- és oktatásszervezési tevékenységéért.

Végzettség, tudományos fokozatok és címek

Okleveles matematikus diplomáját 1975-ben az Eötvös Loránd Tudományegyetemen szerezte, ugyanebben az évben nyerte el a természettudományi doktori címet (Dr. rer. nat.) az ELTE TTK-n. Tudományos és egyetemi fokozatai: a matematikai tudományok kandidátusa, MTA, Budapest, 1980; PhD alkalmazott matematikából, BME, Budapest, 1994; Dr.habil., BME, Budapest, 1994; a Magyar Tudományos Akadémia doktora, 2005.

Oktatási és szervezési tevékenység

Galántai Aurél tanári pályája négy egyetemhez kötődik. Közvetlenül az MSc fokozat megszerzése után az Eötvös Loránd Tudományegyetemen (ELTE), majd a

Gödöllői Agrártudományi Egyetem (GATE), a Miskolci Egyetemen (ME) és végül az Óbudai Egyetemen (ÓE) volt oktató. Jelenleg az Óbudai Egyetem professor emeritusa. Az általa betöltött fontosabb egyetemi tisztségek:

1975-1979: tanársegéd, ELTE Numerikus és Számítógépes Matematika Tanszék
1979-1984: adjunktus, GATE Matematikai és Számítástechnikai Tanszék
1984-1990: egyetemi docens, GATE Matematikai és Számítástechnikai Tanszék
1988-1990: tanszékvezető, GATE Számítástechnikai Tanszék
1990-1995: egyetemi docens, ME Alkalmazott Matematika Tanszék
1990-2003: az ME Alkalmazott Matematika Tanszékének vezetője
1991-2006: az ME Matematikai Intézetének igazgatója
1995-2006: egyetemi tanár, ME Matematikai Intézet
2006-2022: egyetemi tanár, ÓE Szoftvermérnöki Intézet
2009-2022: az ÓE Alkalmazott Matematika és Informatika Doktori Iskola vezetője
2023-: professor emeritus, ÓE Neumann János Informatikai Kar

Egyetemi pályafutása során, különösen az 1980-as évek végétől, aktív részvevője az egyetemi szakmai és tudományos életnek. Mint tanszék, intézet és később doktori iskola vezetőjeként, valamint szakmai bizottságok tagja és elnökeként jelentős szerepe volt egyetemi szakok akkreditálásában és elindításában. 14 felsőoktatási tankönyv és számos oktatási anyag szerzője numerikus analízis, az operációkutatás és az alkalmazott matematika és informatika területen. Alapító törzstagként és vezetőként kiemelkedő szerepe volt az ÓE Alkalmazott Informatikai és Alkalmazott Matematikai Doktori Iskola létrehozásában 2009-ben, amely azóta virágzó és fontos doktori iskolává vált az informatikai és alkalmazott matematikai területen.

Ösztöndíjak és kutatási projektek

Számos hazai és külföldi kutatási ösztöndíj az elméleti és alkalmazott matematikai kutatások területén; hosszabb ösztöndíjak; Elektromos és Számítástechnikai Tanszék, Tucsoni Egyetem, Arizona (1985/1986, 12 hónap), évente többször 1-3 hónapig; Matematika, Statisztikai, Informatikai és Alkalmazási Tanszék, Bergamoi Egyetem, Olaszország.

Szakmai közéleti tevékenysége

Aktív és elismert tagja a hazai operatív kutatói közösségnek, a kezdetektől tagja a Magyar Operatív Társaságnak. Az egyetemeken, a Magyar Tudományos Akadémián és más szakmai bizottságokban kiemelkedő munkával képviselte az operációkutatás és a kapcsolódó szakterületek érdekeit. Hosszabb ideig aktív sze-

repet vállalt a tudományos képesítések és címek (DSc, PhD és Dr.habil.) értékelési eljárásaiban. 9 éven át képviselte az MTA Matematika Osztály Doktori Bizottságában az Operációkutató Tudományos Bizottságot, amelynek több mint két évtizede választott tagja. Az Operációkutatási Bizottság tagjai kétszer választották az Akadémia Közgyűlésének tagjává 1-1 ciklusra. Oktatóként több egyetem doktori iskolájának tagja. Több folyóirat szerkesztőbizottságának tagja, nemzetközi folyóiratok rendszeres bírálója.

Kitüntetései

Szakmai és oktatói munkája elismeréseként kapott kitüntetések: Farkas Gyula-díj I. fokozat (1977), Széchenyi Professzori Ösztöndíj (1998-2001) és Magyar Érdemrend Tisztikeresztje (2020).

Kutatási és szakmai tevékenysége, fontosabb eredményei

Galántai Aurél szakmai aktivitása a numerikus analízis, az operációkutatás és az alkalmazott matematika széles területét öleli fel, annak kiemelkedő, nemzetközileg elismert képviselője. Kutatói munkáját egyaránt jellemzi az elmélyült matematikai gondolkodásmód és az elméleti eredmények gyakorlati, hatékony számítógépes alkalmazhatóságára való törekvés. Kutatási eredményeit a szakterület nemzetközileg legfontosabb folyóirataiban, valamint 3 monográfiában jelentette meg. Az MTMT-ben hozzáférhető 150 publikációja a numerikus analízis és alkalmazásainak széles területét fedi le, független hivatkozásainak száma 296 (a valóságban ennek többszöröse lehet scholar.google adatbázisa szerint). A laudáció keretén belül a tudományos pálya részletes bemutatására nincs mód, csak a pálya szempontjából fontosabb elméleti és alkalmazott matematikai eredmények bemutatására.

Galántai Aurél az egyetem befejezése után a közönséges differenciálegyenletek numerikus módszereinek konvergencia és hibaanalízisével foglalkozott és ért el eredményeket az egylépéses módszerek konvergenciatételeire és hibaelemzésére vonatkozóan (Runge–Kutta módszerek automatikus hibabecslése, Lehmer–Schur típusú módszerek optimalizálása és lineáris stiff probléma).

Tudományos fokozatát (CSc, 1980) „*Vizsgálatok a közönséges differenciálegyenletek numerikus módszereinek konvergencia és hibaanalízisének körében*” disszertációjával nyerte el, amely tartalmazza még az említetteken kívül azokat az eredményeit, amelyek a Cauchy-problémák általánosított megoldásához vezető diszkrét konvergenciához, a stiff módszerekre vonatkozó új stabilitási tulajdonsághoz és a konjugált iránymódszerek hibabecsléséhez kapcsolódnak.

Az ABS (Abaffy–Broyden–Spedicato, 1984) algoritmuscsalád megjelenése és Abaffy József és Emilio Spedicato professzorokkal kialakult erős szakmai együttműködés után, az 1980-as évek közepétől, új fontos feladatokkal kezdett foglalkozni. Ezek részben jelentős, új ABS módszereket és azok vizsgálatát jelentik, részben pedig - ehhez kapcsolódóan - fontos lineáris algebrai elméleti eredmények: az Egerváry-féle rangszámcsökkentő eljárás alapvető tulajdonságai, továbbá az LU, LDU, LDL^T (itt L alsó-, U felső háromszögmátrix, D pedig diagonális mátrix) és Cholesky felbontásokra adott egzakt perturbációs formulák, valamint azok vizsgálata.

Az alapfeladat a többváltozós nemlineáris $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, n > 1$ függvényekre vonatkozó $f(x) = 0$ algebrai egyenletek megoldásaival és a megoldások kvalitatív tulajdonságaival foglalkozik. A vizsgálatok célja olyan hatékony numerikus algoritmusok kifejlesztése, amelyek alkalmasak nemlineáris egyenletek megoldására, továbbá a numerikus eljárások konvergenciájának, stabilitásának, hatásmechanizmusának feltárása. A lebegőpontos műveletek figyelembevétele mellett fontos feladat a hibaterjedés vizsgálata is.

A lineáris rendszerekre kidolgozott ABS eljárást sikerült általánosítania (közösén Abaffyval és Spedicatoval, 1987) nemlineáris rendszerekre, és bebizonyítani elég általános feltételek mellett a módszer lokális konvergenciáját. A kidolgozott módszer számos jó tulajdonsággal rendelkezik: speciális esetként magába foglalja a Brown és Brent módszerek Gay-féle általánosítását, megőrzi a Seidel-féle relaxációs elvet, lineáris egyenletek esetén egzakt megoldást ad és további fontos előnye még az egyszerű programozhatóság is.

Az ABS-módszerek alkalmazásával kapcsolatos kutatásait folytatva ért el fontos eredményeket. Nemlineáris feladatok széles osztályára bizonyította be az ABS módszerek (a részbenrendezés szerint) monoton konvergenciáját, amely lehetővé ad a közelítések pontosságának becslésére. A bizonyítási technikák között fontos szerepet játszik a mátrixok LU faktorizációja, és erre vonatkozóan néhány tulajdonság bizonyítása. A függvényekre tett szokásos feltételek (f folytonosan differenciálható konvex függvény, Jacobi-mátrixa nem szinguláris M-mátrix és isoton) igazolja az eljárás globális konvergenciáját, vagyis azt, hogy az eljárás tetszőleges kezdeti pontból kiindulva konvergens.

Jeney Andrással közös publikációjában (1996) hatékony módszereket vezetnek be és vizsgálnak nemlineáris egyenletek megoldására, amely a nemlineáris ABS módszer és kvázi-Newton módszer kombinációjaként jön létre. A bevezetett módszerek részletes elemzésére FORTRAN nyelven írt program (dupla pontosságú számítással), pontosan specifikált számítógép és meghatározott tesztfeladatok mellett került sor. Az eredmények azt igazolták, hogy a többlépéses quasi-Newton ABS módszer gépidő felhasználásában jobb, mint az addig legjobbként ismert Broyden módszer (az külön elismerés, hogy Broyden ajánlásával jelent meg a cikk a folyóiratban).

Kutatásai során komoly figyelmet szentelt a rangredukciós eljárás és a kapcsolódó faktorizációs és konjugációs algoritmusok tanulmányozásának. A rangszámcsökkentő algoritmusok alapja Egerváry által az 1950-es évek közepén kidolgozott eljárás. Ennek a kutatásnak a motivációját az jelenti, hogy az ABS konjugálási eljárás alapját rangszámcsökkentő eljárás képezi. A cikk szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy az eljárás mikor hajtható végre, megadja a rangszámcsökkentő eljárás kanonikus alakját és az eljárás eredményeként adódó bázisfaktorizációt a paraméterek függvényében. A bizonyításokból kiderül, hogy a bázisfaktorizáció szoros kapcsolatot mutat az LDU faktorizációkkal. Az eredmények alkalmazásaként több ismert eredmény speciális esetként adódik, nevezetesen faktorizációkra nyerhetők szükséges és elégséges feltételek, továbbá bizonyítást nyer Chu, Funderlic és Golub egy sejtése is.

A mátrixok különböző háromszög felbontásai (LU , LDL^T , LDU és Cholesky-felbontások) régóta fontos szerepet játszanak a különböző numerikus eljárásokban, de pl. többváltozós sztochasztikus modellezési problémáknál is meghatározó jelentőséggel bírnak. A felbontások stabilitásától nagymértékben függ az eljárás pontossága, ezért lényeges a perturbációs feladatok vizsgálata. Galántai (2003) egyik legfontosabb és igen szép eredménye ezen a területen az, hogy sikerült megoldani a perturbációs egyenleteket és a mátrix faktorizációban egzakt formulákat sikerült adni a faktorok perturbációira. Ezek az eredmények érvényesek minden olyan mátrix perturbációra, amely megőrzi a faktorizálhatóság és nonszinguláris tulajdonságot. Bár a különböző háromszögfelbontások esetén a perturbációs egyenletek megoldása különbözik egymástól, a közös bennük az, hogy mindegyik bizonyítás meghatározott projektorok tulajdonságaira támaszkodik. Az egzakt formulák segítségével sikerült részben javítani, részben pontosítani a faktorizációk perturbációira addig ismert becsléseket.

A 2004-ben megjelent monográfiája (*Projectors and Projection Methods*, Kluwer) egységes áttekintést ad a projektorokról és a vetítési módszerekről. Kitér az általános elméleti háttér bemutatására, majd megvizsgálja a lineáris és nemlineáris algebrai egyenletrendszerek és konvex optimalizálási feladatok megoldására szolgáló vetületeket véges dimenziós euklideszi és részben Hilbert-terekben.

Hegedűs Csabával (2008) közösen elemi módszerekkel egy globális és egy lokális perturbációs tételt vezetnek le polinomok nullhelyeire. Ez az eredmény szignifikánsan javította Ostrowski (1940) pontosnak vélt klasszikus eredményét a polinomok gyökeinek perturbációjára vonatkozóan. A mátrixelméleti megközelítéssel Edelman és Murakami visszafelé irányuló stabilitási eredményét is javították.

A 2010-es években egyik fő kutatási területe a nemlineáris egyenletek és a minimalizálási problémák konvergens megoldási módszerei voltak. Ezekkel a problémákkal kapcsolatban számos eredményt ért el egyedül és Abbafy Józseffel közösen a tartomány és a nemlineáris függvény különböző korlátaival rendelkező módszerek kidolgozásával. Részletesen vizsgálták a kidolgozott algoritmusok számítógépes megvalósításait és teljesítményét, amelyek alátámasztják az eredmények hatékonyságát.

Az elmúlt néhány évben, a 2010-es évek vége óta több cikkben is foglalkozott a Nelder-Mead módszer konvergenciaelemzésével. Ez a módszer egy direkt szimplex módszer a minimalizálási probléma megoldására, és széles körben használatos a deriváltmentes optimalizálás és alkalmazási területeken. Kidolgozta a Nelder-Mead szimplex módszer mátrixformáját, és kimutatta, hogy konvergenciája összefügg a végtelen mátrixszorzatok konvergenciájával. Ez a megközelítés lehetővé tette egy általános konvergenciatétel bizonyítását a módszerrel generált szimplex sorozatokra, és elégséges feltételt ad a Nelder-Mead szimplex módszer egy bizonyos típusú konvergencia viselkedéséhez. Azt is bebizonyította, hogy a Nelder-Mead szimplex módszer abban az értelemben konvergál, hogy a szimplex csúcsok egy valószínűséggel konvergálnak egy közös határponthoz, ami általános magyarázatot ad a módszer hatékonyságára.

Az elméleti kutatások mellett meg kell említeni, hogy Galántai Aurél pályafutása során az alkalmazott matematika területén is jelentős eredményeket ért el. Legfontosabb kutatási eredményeit a következő alkalmazási területeken érte el: különböző modellek numerikus megoldása az orvosi biológiai modellezéshez kapcsolódóan; operációkutatási módszerek mezőgazdasági alkalmazása szántóföldi energiafelhasználás szimulációs modellezésére; az elektron-optikai alkalmazások feladatai kapcsán: elektrosztatikus lencsék optimalizálása, optimalizálási modellek és eljárások kidolgozása; programozás, új objektív keresése jelentősen javított tulajdonságokkal; kristályfizikai alkalmazások szempontjából: modell és numerikus eljárás kidolgozása a minta alakjának meghatározására adott formájú forgásszimmetrikus kristályok termesztésekor; acélszerkezetek optimalizálása (szerkezetoptimalizálás), konkrét feladatok numerikus megoldása.

A FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ 2023. ÉVI DÍJAZOTTJA:
TÓBIÁS ANDRÁS



Életútja

Tóbiás András 1992-ben született Budapesten. Alapszakos matematika diplomáját a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen (BME) szerezte 2014-ben, míg mesterszakos diplomáját a Technische Universität (TU) Berlinen 2016-ban, szintén matematikából. Ugyanitt 2019-ben szerzett PhD fokozatot Wolfgang König témavezetésével. 2014 és 2019 közötti németországi tanulmányait a Berlin Mathematical School (BMS) ösztöndíja támogatta. Ezt követően három évig szintén a TU Berlin munkatársaként dolgozott Noemi Kurt kutatócsoportjában. 2022 óta Budapesten él, a BME Villamosmérnöki és Informatikai Karán, a Számítástudományi és Információelméleti Tanszéken adjunktus, valamint a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet részmunkaidős munkatársa.

A Magyar Tudományos Művek Tárának adatbázisa szerint külföldi kiadású szakfolyóiratban 16 cikke jelent meg, emellett három könyvrészlet és egy konferenciaközlemény szerzője. Műveire az MTMT szerint 17 független hivatkozás található, a GoogleScholarban az összes hivatkozás száma 111. Publikációi többek között a valószínűségelmélet vezető folyóirataiban, az *Annals of Probability*, *Electronic Journal of Probability*, *Stochastic Processes and Their Applications* folyóiratokban jelentek meg.

Szemináriumi előadásokat és konferenciaelőadásokat tartott Freiburgban, Bielefeldben, Bochumban, Bath-ban és Bécsben. A Berlinben töltött évek alatt több PhD-diákoknak szóló szeminárium és egyéb rendezvény szervezője volt.

Tóbiás András fő kutatási eredményeit a populációgenetika matematikai modelljeinek vizsgálatával érte el, elsősorban a dormancia, logisztikus versengés, horizontális géntranszfer témájában. Jochen Blath-tal közös, 2020-ban, illetve

2021-ben megjelent cikkeinek témája a dormancia, az élőlények/sejtek inaktív állapota, ami sok helyen előfordul az élővilágban: növények magképzése, emlősök téli álma, baktériumok sporulációja, vírusok lappangó állapota, ráksejtek dormanciája (ami később a tumor növekedésének újraindulásához és áttétekhez vezethet). Megmutatták, hogy bizonyos sztochasztikus adaptív dinamikai modellekben a dormanciára való képesség szelekciós előnyt ad egy mutáns részpopulációnak, noha a mutáns a rezidenshez képest rosszabbul szaporodik. A feltárt jelenséget (versengés által indukált dormancia) elméleti biológusok is plauzibilisnek tartják, és idézik a cikket. Módszertanilag a cikk elágazó folyamatokra és differenciálegyenlet-rendszerek kvalitatív viselkedésére épül.

Másik tanulmányukban a dormancia és a horizontális géntranszfer kölcsönhatását vizsgálták. A horizontális géntranszfer bizonyos paraméterválasztások esetén lehetővé teszi rezidens és mutáns koegzisztenciáját. Ebben a cikkben is a differenciálegyenlet-rendszerek (nem csak lokális) stabilitásának igazolása jelentette a fő matematikai nehézséget.

Egy további kutatási irány olyan részecske-rendszerek szisztematikus vizsgálata, amelyekben a részecskék nem egymástól függetlenül, hanem gyakran egyszerre végeznek bizonyos „tevékenységeket” (szaporodás, halálozás, migráció, összeolvadás) Poisson-pontfolyamatok által vezérelve, amit koordinációnak nevezünk. Ennek egyik első példája a Lambda-koaleszcens volt, azóta számos biológiai releváns példát vizsgáltak. Ezek a folyamatok rendszerint populációgenetikai modellek skálázási limeszeinek (momentum)duálisaként lépnek fel, amit Tóbiás András társszerzőivel együtt igazolt. A részecske-rendszer koordinációja ritka, de jelentős hatású – a populációnak nagy populációméret esetén is pozitív hányadát érintő – szelekciós/mutációs/migrációs/genetikai sodródásos eseményeknek felel meg a duális folyamatban. Megmutatták azt is, ha nincs összeolvadás a modellben, akkor a folyamat részecskeszámának várható értéke csak a Poisson-pontfolyamatok intenzitási mértékeinek súlyozásától függ, és hasonló módszerekkel becsülték a részecskeszám szórásnégyzetét. Ezt az irányt folytatja Tommaso Rosatival közös cikke, mely koordinált Brown-mozgások és martingáleméleti módszerek segítségével igazolja bizonyos parciális differenciálegyenletek megoldásának létezését és egyértelműségét.

Legfrissebb, az *Annals of Probability* folyóiratban elfogadott cikkében az adaptív dinamikai inváziómodelleket általánosítja a kontakt folyamatra. Itt egy nagy tóruszon a kontakt folyamatban bizonyos szaporodási (fertőzési) események során mutáció következik be, ami a szaporodási ráta növekedéséhez vezet. A határértékben megjelenő folyamat érdekessége a térbeliség fontos szerepe: a mutáns túlélési esélyénél például számít, hány fertőzött szomszédja volt, amikor született.

A populációgenetikai modelleken kívül Tóbiás András általános véletlen intenzitású Poisson-pontfolyamatok perkolációjáról is több cikket írt. Ezeket a modelleket és eredményeket széleskörűen használják a mobil-hálózatok összefüggőségi tulajdonságainak elméletében.

A díjazott öt legfontosabb publikációja

- [1] BLATH, J. ÉS TÓBIÁS, A.: *Invasion and fixation of microbial dormancy traits under competitive pressure*, Stochastic Processes and their Applications, Vol. **130** No. **12**, pp. 7363–7395 (2020). DOI: 10.1016/j.spa.2020.07.018
- [2] BLATH, J. ÉS TÓBIÁS, A.: *The interplay of dormancy and transfer in bacterial populations: Invasion, fixation and coexistence regimes*, Theoretical Population Biology, Vol. **139**, pp. 18–49 (2021). DOI: 10.1016/j.tpb.2021.05.001
- [3] GONZÁLEZ CASANOVA, A., KURT, N. ÉS TÓBIÁS, A.: *Particle systems with coordination*, Alea Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics, Vol. **18** No. **2**, pp. 1817–1844 (2021). DOI: 10.30757/ALEA.v18-68
- [4] ROSATI, T. ÉS TÓBIÁS, A.: *The wave speed of an FKPP equation with jumps via co-ordinated branching*, Electronic Journal of Probability, Vol. **28**, Article No. **71** (2023). DOI: 10.1214/23-EJP958
- [5] GONZÁLEZ CASANOVA, A., TÓBIÁS, A. ÉS VALESIN, D.: *Scaling limit of an adaptive contact process*, Annals of Probability, Vol. **52** No. **1**, pp. 296–349 (2024). DOI: 10.1214/23-AOP1662

A FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ 2023. ÉVI DÍJAZOTTJA:
VARGA ANITA



Életútja

Varga Anita 1992-ben született. Jelenleg a Budapesti Corvinus Egyetem (BCE) félállású tudományos segéd munkatársa és félállású adjunktusa. Érdeklődési területei a lineáris és konvex optimalizálás elmélete, belsőpontos algoritmusok, valamint az operációkutatás ipari, gazdasági alkalmazásai.

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen (BME) szerzett 2014-ben matematika Bsc, majd 2016-ban alkalmazott matematika Msc diplomát. Mindkét esetben operációkutatás témakörében írta szakdolgozatát. Msc diplomamunkájában (Integrating combinatorial algorithms into a linear programming solver) az Xpress optimalizáló szoftverhez készített egy új modult, mely az Eötvös Loránd Tudományegyetemen (ELTE) fejlesztett LEMON C++ gráfelméleti könyvtár objektumait és függvényeit teszi elérhetővé az Xpress keretein belül. Ennek segítségével gyorsabban sikerült megoldania a Bsc szakdolgozata során vizsgált feladatokat, melyek a kvadratikus hozzárendelési feladat egyfajta közelítő megoldását adják.

Anita már egyetemi évei alatt elkezdett dolgozni a BME Építészmérnöki Karán Mályusz Leventével anyagdepók elhelyezési problémáin. Munkájával nagyon elégedettek voltak, így végzése után még két évig félállású tudományos segéd munkatársként dolgozott, melynek eredményeként több publikáció született Mályusz Leventével közösen, főként a projekttervezés témakörében.

Ezzel párhuzamosan félállásban a BME Differenciálegyenletek Tanszékén kezdett oktatni, többek között matematikai modellezést és operációkutatási szoftvereket bemutató tárgyakat.

2018-ban ösztöndíjat nyert a BME Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolájába. A képzést sikeresen befejezte, 2023 januárjában *summa cum*

laude minősítéssel védte meg doktori értekezését (New Ai-Zhang type long-step interior point algorithms using the algebraically equivalent transformation technique), melyben a belsőpontos algoritmusok egy családjának általános elemzését adta. A belsőpontos algoritmusok polinom időben megoldják a lineáris programozási feladatokat és bizonyos speciális lineáris komplementaritási (LCP) feladatokat, illetve szemidefinit programozási feladatokra és kúptimalizálási feladatokra is általánosíthatók. A dolgozat egyik fő kérdése az volt, hogy az algoritmus során milyen keresési irányok alkalmazásával szavatolható az elméletben ismert legjobb komplexitás megtartása. Ennek például lineáris komplementaritási feladatok megoldásánál lehet jelentősége. Általános esetben ugyanis az LCP $\mathcal{NP}$ -nehéz probléma, így nem reménykedhetünk olyan hatékony algoritmusban, ami mindegyik LCP feladatot képes megoldani. Ugyanakkor numerikus tesztek alapján nehéz LCP feladatok esetén a keresési irány változtatása lehetővé teheti a „problémás” régiók elkerülését. A doktori tézis eredményei első lépésnek tekinthetők egy olyan hibrid algoritmus konstruálása felé, mellyel hatékonyan lehetne kezelni általános LCP feladatokat.

Dolgozata számos numerikus tesztet tartalmaz, az elméleti összefüggések igazolása mellett a különböző algoritmusokat Matlabban implementálta, és számos feladat megoldásán tesztelte a tárgyalt eljárásokat és azok paraméterbeállításait. A doktori eredményeit ismertető két folyóiratcikk már megjelent, egy harmadik benyújtásra került. Doktori tanulmányai alatt a 2020/21 tanévben ÚNKP ösztöndíjas volt.

Varga Anita 2016 őszétől folyamatosan tanított a BME Differenciálegyenletek tanszékén, 2022 őszétől már teljes állásban tette ezt. Előadásokat és gyakorlatokat tartott magyar és angol nyelven (Lineáris programozás, Operációkutatás, Optimalizálási modellek, Operációkutatási programcsomagok). 2023 őszétől csatlakozott a BCE Corvinus Operációkutatási Kutatócsoportjához. A tanítás mellett három Bsc diák témavezetője volt, illetve közreműködött mérnök és közgazdász hallgatók részére készített matematikai e-tananyagok fejlesztésében.

Az elmúlt évek során számos alkalmazott projektben vett részt. Foglalkozott villamosenergia termelés tervezés optimalizációs feladataival, és 2023 januárjától félállásban operációkutatóként dolgozik az EPIC InnoLabs Nonprofit Kft.-nél.

Rendszeres résztvevője, előadója nemzetközi konferenciáknak. Az Operációkutatási Szeminárium szervezésében aktívan részt vett a BME-n és a BCE-n. 2023 augusztusában a BCE-n került megrendezésre a EUROPT Workshop, több mint 200 résztvevővel. Anita a szervezőbizottság helyi tagjaként aktívan hozzájárult a rendezvény sikeréhez.

A díjazott öt legfontosabb publikációja

- [1] MÁLYUSZ, L. ÉS VARGA, A.: *An estimation of the learning curve effect on project scheduling with working days calculation*, Periodica Polytechnica Architecture, Vol. **47** No. **2**, pp. 104–109 (2016). DOI: 10.3311/PPar.10387
- [2] MOLNÁR-SZIPAI, R. ÉS VARGA, A.: *Integrating combinatorial algorithms into a linear programming solver*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **27** No. **2**, pp. 475–482 (2018). DOI: 10.1007/s10100-018-0552-9
- [3] E.-NAGY, M. ÉS VARGA, A.: *A new long-step interior point algorithm for linear programming based on the algebraic equivalent transformation*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **31** No. **3**, pp. 691–711 (2023). DOI: 10.1007/s10100-022-00812-6
- [4] E.-NAGY, M. ÉS VARGA, A.: *A new Ai-Zhang type interior point algorithm for sufficient linear complementarity problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. **202** No. **1**, pp. 76–107 (2024). DOI: 10.1007/s10957-022-02121-z
- [5] E.-NAGY, M., ILLÉS, T., POVH, J., VARGA, A. ÉS ŽEROVNIK, J.: *Sufficient matrices: properties, generating and testing*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. **202** No. **1**, pp. 204–236 (2024). DOI: 10.1007/s10957-023-02280-7

A FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ 2024. ÉVI DÍJAZOTTJA:
DÓZSA TAMÁS GÁBOR



Életútja

Dózsa Tamás Gábor programtervező informatikus BSc és MSc diplomáját egyaránt az Eötvös Loránd Tudományegyetem Informatikai Karán (ELTE IK) szerezte, 2017-ben, illetve 2020-ban. Doktori tanulmányait ugyanitt, az ELTE IK Doktori Iskolájában folytatta. 2021 és 2024 között NVKDP Ösztöndíjban részesült, amelynek keretében az ELTE IK Numerikus Analízis Tanszék és a HUNREN SZTAKI Rendszer- és Irányításelméleti Kutatólaboratóriumában dolgozott. Tanszéki témavezetője Dr. Kovács Péter, vállalati szakértője és társ-témavezetője Dr. Soumelidis Alexandros volt. Az ösztöndíj ideje alatt tudományos segédmunkatársi beosztásban tevékenykedett, majd 2024 szeptemberétől a SZTAKI főállású munkatársa lett, emellett az ELTE IK Numerikus Analízis Tanszékének félállású oktatója. PhD értekezését 2025 februárjában *summa cum laude* minősítéssel védte meg.

Oktatói pályafutása során aktívan részt vett az ELTE IK Numerikus Analízis Tanszékének oktatási tevékenységében, több hallgatója sikeresen szerepelt a kari és országos Tudományos Diákköri Konferenciákon.

Kutatási területe modellvezérelt gépi tanulási algoritmusok konstrukciója, amely a mesterséges intelligencia (MI) egy dinamikusan fejlődő ága. Ennek keretében a matematikai modellezés és az MI adatvezérelt szemléletének kombinálásával paraméterezett ortogonális transzformációkat – például projekciókat – épít be gépi tanulási algoritmusokba. Nemzetközi együttműködésekben is aktívan részt vesz, kiemelendő a linzi Johannes Kepler Egyetemi Kórházzal közös projekt, melyben

EEG-jelek vizuálisan gerjesztett potenciáljainak reprezentációját és osztályozását vizsgálja. Ipari kapcsolatai révén a belgiumi Siemens Digital Industries Software kutatóival közösen publikált egy szenzormeghibásodás detektálásával foglalkozó tanulmányt.

A SZTAKI Rendszer- és Irányításelméleti Kutatólaboratóriumában fizikai jelenségek elemzését és döntéshozatali folyamatok támogatását lehetővé tevő modellek fejlesztését végzi. A kutatásai során kidolgozott paraméterbecslési módszerek egyszerűsítik az irányítási rendszerek tervezését és megvalósítását. Különös figyelmet fordít az adatvezérelt módszerek alkalmazására, melyek akkor válnak különösen fontossá, ha a hagyományos, analitikus megközelítés a vizsgált rendszerek összetettsége miatt nem nyújt kielégítő megoldást. Kutatásai az autonóm járműirányítás területére is kiterjednek, különös tekintettel a járműfedélzeti rendszerekben alkalmazható hatékony detektálási és döntéshozatali algoritmusok fejlesztésére.

Új tudományos eredményei között szerepel a kerékszenzoros méréseken alapuló út-típus meghatározás. További kutatásai a talpponti kerékerők becslésére és a tapadási tényező meghatározására irányulnak, például a megcsúszás korai detektálására. Kidolgozott egy új racionális Gauss wavelet transzformációt. Ennek alapján a mérésekhez igazított olyan idő-frekvencia felbontások állíthatók elő, melyek együtt taníthatók mesterséges neurális hálózatokkal. A módszer a járművekhez kapcsolódó detektálási problémák megoldása mellett számos területen alkalmazható. A jármű-irányításhoz kapcsolódó kutatásokban a Széchenyi Egyetem Járműipari Kutatóközpontjával is együttműködik. Az autonóm járműveken végzett méréseire támaszkodó kutatások egyik alapját egy rendszer-póluskeresési módszer adja, mely lehetőséget biztosít lineáris dinamikus rendszerek nem-paraméteres identifikációjára.

A díjazott öt legfontosabb publikációja

- [1] DÓZSA, T., RADÓ, J., VOLK, J., KISARI, Á., SOUMELIDIS, A. ÉS KOVÁCS, P.: *Road abnormality detection using piezoresistive force sensors and adaptive signal models*, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. **71**, Article No. 9509211 (2022). DOI: 10.1109/TIM.2022.3194900
- [2] DÓZSA, T., DEUSCHLE, F., CORNELIS, B. ÉS KOVÁCS, P.: *Variable projection support vector machines and some applications using adaptive Hermite expansions*, International Journal of Neural Systems, Vol. **34** No. **1**, Article No. 2450004 (2023). DOI: 10.1142/S0129065724500047
- [3] DÓZSA, T., JURDANA, V., ŠEGOTA, S. B., VOLK, J., RADÓ, J., SOUMELIDIS, A. ÉS KOVÁCS, P.: *Road type classification using time-frequency representations of tire sensor signals*, IEEE Access, Vol. **12**, pp. 53361–53372 (2024). DOI: 10.1109/ACCESS.2024.3382931
- [4] DÓZSA, T., SCHIPP, F. ÉS SOUMELIDIS, A.: *On Bernoulli's method*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. **62** No. **3**, pp. 1259–1277 (2024). DOI: 10.1137/22M1528501
- [5] DÓZSA, T., BÖCK, C., MEIER, J. ÉS KOVÁCS, P.: *Weighted Hermite variable projection networks for classifying visually evoked potentials*, IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, megjelenés alatt (2024). DOI: 10.1109/TNNLS.2024.3475271

A FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ 2024. ÉVI DÍJAZOTTJA:
REGŐS KRISZTINA



Életútja

Regős Krisztina 1998-ban született, 2016-ban érettségizett a szegedi Radnóti Miklós Gimnázium speciális matematika tagozatán. Tanulmányai során számos országos matematikaversenyen ért el kimagasló eredményeket. 2016-tól a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem (BME) Építészmérnöki Karán folytatta tanulmányait.

Egyetemi éve alatt jelent meg első három, társszerzős folyóiratcikke és első ismeretterjesztő cikke, szintén társszerzőkkel. Egyik publikációja radikálisan új, algoritmikus megközelítést kínált egy John Horton Conway nevéhez fűződő, több mint hatvan éve felvetett, azóta is nagyrészt nyitott kérdésre. A kutatás célja annak meghatározása volt, hogy egy monostatikus – egyetlen stabil vagy instabil egyensúllyal rendelkező – konvex poliédernek legalább hány lapja, csúcsa és éle lehet. Az első cikk eredményeire építve egy évvel később sikerült áttörést elérni, és először kiszámítani a minimális értéket egy speciális tömegeloszlás esetén.

2022-ben kitűnő eredménnyel védte meg diplomamunkáját, melyben a térkitöltő mintázatokat, mint természeti jelenségek matematikai modelljeit vizsgálta. Ugyanebben az évben felvételt nyert a BME Csonka Pál Doktori Iskolájába, ahol Domokos Gábor vezetésével folytatja kutatásait. Diplomamunkájának témáját továbbfejlesztve, 2023-ban vezető szerzőként jegyzett egy cikket, amely új geometriai modellt mutatott be szupramolekuláris mintázatok leírására. A publikáció a rangos *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States*

of America folyóiratban jelent meg, társszerzői között szerepel K. S. Novoselov Nobel-díjas fizikus is.

Szintén 2023-ban társszerzőként közreműködött egy, a térkitöltő mintázatok időbeli fejlődését vizsgáló tanulmányban, amely a matematikai fizika eszköztárára épül. Ezt követően egy újfajta térkitöltési osztállyal, az úgynevezett lágy mintázatokkal kezdett foglalkozni, amelyek minimális éles sarokkal rendelkeznek. Erről szóló publikációja – melyben meghatározó szerzőként szerepel – 2024 szeptemberében jelent meg, és kiemelkedő nemzetközi figyelmet kapott. A *Nature* magazin három napon át vezető hírként számolt be róla, emellett felfigyelt rá a Harvard Egyetem matematikai tanszéke és a torontói Fields Intézet is.

Tudományos munkája mellett kiemelt figyelmet fordít az ismeretterjesztésre. 2023-ban a BJMT által szervezett 62. Rátz László Vándorgyűlés egyik kiemelt előadója volt, azóta rendszeresen tart népszerűsítő előadásokat gimnáziumokban és középiskolai matematikatáborokban. 2022-ben előadott a Rényi Intézet Lányok Napja rendezvényén. A HUN-REN-BME Morfodinamika Kutatócsoport tagja, aktív szerepet vállal a csoport közös programjainak szervezésében. Meghívott előadóként szerepelt több neves egyetem, köztük a University of Bern, a University of Pennsylvania és a National University of Singapore szemináriumain.

Tudományos munkásságát számos ösztöndíjjal és elismeréssel jutalmazták. 2019-ben Strommer Gyula Ösztöndíjban, 2021-ben Ifjúsági Gábor Dénes Ösztöndíjban, részesült, diplomamunkáját a BME Építésmérnöki Kara Hauszmann-díjjal tüntette ki. 2022 óta folyamatosan elnyerte az NKFIH ÚNKP ösztöndíját, 2023-tól pedig a Doktori Kiválósági Ösztöndíj támogatását élvezi. Tudományos kutatásait 2022 óta az Albrecht Science Fellowship segítségével végzi.

A díjazott öt legfontosabb publikációja

- [1] BOZÓKI, S., DOMOKOS, G., KOVÁCS, F. ÉS REGŐS, K.: *Mono-unstable polyhedra with point masses have at least 8 vertices*, International Journal of Solids and Structures, Vol. **234-235**, Article No. 111276 (2022). DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2021.111276
- [2] PAPP, D., REGŐS, K., DOMOKOS, G. ÉS BOZÓKI, S.: *The smallest mono-unstable convex polyhedron with point masses has 8 faces and 11 vertices*, European Journal of Operational Research, Vol. **31** No. **2**, pp. 511–517 (2023). DOI: 10.1016/j.ejor.2023.04.028
- [3] REGŐS, K., PAWLAK, R., WANG, X., MEYER, E., DECURTINS, S., DOMOKOS, G., NOVOSELOV, K. S., LIU, S.X. ÉS ASCHAUER, U.: *Polygonal tessellations as predictive models of molecular monolayers*, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. **120** No. **16**, Article No. 2300049120 (2023). DOI: 10.1073/pnas.2300049120
- [4] BÁLINT, P., DOMOKOS, G. ÉS REGŐS, K.: *An evolution model for polygonal tessellations as models for crack networks and other natural patterns*, Journal of Statistical Physics, Vol. **190** No. **8**, Article No. 130 (2023). DOI: 10.1007/s10955-023-03146-y
- [5] DOMOKOS, G., GORIELY, A., HORVÁTH, Á. G. ÉS REGŐS, K.: *Soft cells and the geometry of seashells*, PNAS Nexus, Vol. **3** No. **9**, Article No. pgae311 (2024). DOI: 10.1093/pnasnexus/pgae311

A FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ 2024. ÉVI DÍJAZOTTJA:
TEKELI TAMÁS



Életútja

Tekeli Tamás 1993-ban született. A Szegedi Tudományegyetemen matematikából szerezte BSc és MSc diplomáját, majd 2023-ban ugyanitt védte meg doktori disszertációját. Tudományos munkásságát kezdettől fogva Röst Gergely irányította, témavezetője volt szakdolgozatának, diplomamunkájának, doktori értekezésének és OTDK-dolgozatának is, mellyel második díjat nyert az Országos Tudományos Diákköri Konferencián. Három alkalommal részesült az Új Nemzeti Kiválóság Program ösztöndíjában. Tudományos pályáját a dinamikai rendszerek területén kezdte, szakdolgozatában a Bendixson-kritérium egy következményét vizsgálta. Később érdeklődése a járványterjedés matematikai modellezése felé fordult, amely azóta is fő kutatási területe. Jelenleg az olaszországi Trentóban dolgozik posztdoktori kutatóként Andrea Pugliese professzor csoportjában, aki korábban az Európai Matematikai és Elméleti Biológiai Társulat elnöke volt.

Első tudományos publikációja Dénes Attila vezetésével született és a *Scientific Reports* folyóiratban jelent meg. Ebben társszerzőivel együtt egy olyan szezonális modellt dolgozott ki a Zika-láz terjedésére, amely magyarázatot adott az egyes latin-amerikai országokban megfigyelt eltérő járványdinamikai mintázatokra. Röst Gergellyel közös első kutatása egy olyan SIS típusú járványmodellt vizsgált, amelyben a fertőzöttek egy lineáris láncon keresztül haladnak végig, modellezve a fertőzés stádiumait. Megmutatta, hogy az endemikus egyensúly – amennyiben létezik – mindig stabil, ha a lánc legfeljebb három lépésből áll. Négy vagy több

lépés esetén azonban egyaránt előfordulhat stabil és instabil egyensúly, és tetszőlegesen hosszú láncokra konkrét példákat is konstruált. Ezzel általánosította számos korábbi SIS modell eredményeit, valamint kijavított egy korábban hibás következtetést az irodalomban.

2020-ban csatlakozott a Röst Gergely vezette COVID-19 Epidemiológiai és Modellezési Projekthez, amely a pandémia során a döntéshozók egyik legfontosabb tudományos tanácsadó testülete lett. Számításai hozzájárultak több jelentős döntés meghozatalához a járvány kritikus szakaszaiban. A témában két kiemelkedően idézett publikáció társszerzője: az egyik a globális terjedési kockázatokat vizsgálta és több mint 400 hivatkozással bír, a másik a magyarországi helyzetet elemezte és 70 hivatkozást kapott.

Doktori értekezésének egyik központi témája a tesztelési stratégiák optimalizálása volt. Társszerzőivel igazolta, hogy a csoportos tesztelés hatékonysága jelentősen javítható, ha a csoportméretet folyamatosan a járvány aktuális prevalenciájához igazítják. Legfrissebb kutatási eredményeit a dániai Pandemix csoporttal együttműködve publikálta: Dánia és Magyarország járványkezelési stratégiáját hasonlították össze, rávilágítva a tesztelési gyakoriság és a megfigyelhető járványgörbe közötti nem-triviális összefüggésekre.

Tekeli Tamás aktív szerepet vállal az alkalmazott matematika népszerűsítésében. A Zika-láz terjedéséről szóló tanulmányát a média széles körben ismertette, a COVID-19 modellezés kapcsán is több ismeretterjesztő cikket publikált, például az *Érintő* folyóiratban. Számos tudományos konferencia és rendezvény szervezésében vett részt, többek között a QTDE és CSM konferenciákon, az ECMI európai modellezési héten, a 2019-es BIOMAT konferencián, valamint a 2024-es Bolyai Társulat Alkalmazott Matematikai Konferenciáján.

A díjazott öt legfontosabb publikációja

- [1] DÉNES, A., IBRAHIM, M. A., OLUOCH, L., TEKELI, M. ÉS TEKELI, T.: *Impact of weather seasonality and sexual transmission on the spread of Zika fever*, Scientific Reports, Vol. **9** No. **1**, Article No. 17055 (2019). DOI: 10.1038/s41598-019-53062-z
- [2] RÖST, G. ÉS TEKELI, T.: *Stability and oscillations in multistage SIS models depend on the number of stages*, Applied Mathematics and Computation, Vol. **380**, Article No. 125259 (2020). DOI: 10.1016/j.amc.2020.125259
- [3] BOLDOG, P., TEKELI, T., VIZI, Z., DÉNES, A., BARTHA, F. A. ÉS RÖST, G.: *Risk assessment of novel coronavirus COVID-19 outbreaks outside China*, Journal of Clinical Medicine, Vol. **9** No. **2**, Article No. 571 (2020). DOI: 10.3390/jcm9020571
- [4] RÖST, G., BARTHA, F. A., BOGYA, N., BOLDOG, P., DÉNES, A., FERENCI, T., HORVÁTH, K. J., JUHÁSZ, A., NAGY, C., TEKELI, T. ÉS VIZI, Z.: *Early phase of the COVID-19 outbreak in Hungary and post-lockdown scenarios*, Viruses, Vol. **12** No. **7**, Article No. 708 (2020). DOI: 10.3390/v12070708
- [5] TEKELI, T., DÉNES, A. ÉS RÖST, G.: *Adaptive group testing in a compartmental model of COVID-19*, Mathematical Biosciences and Engineering, Vol. **19** No. **11**, pp. 11018–11033 (2022). DOI: 10.3934/mbe.2022513

A FARKAS GYULA EMLÉKDÍJ 2024. ÉVI DÍJAZOTTJA:
VARGA KITTI KATALIN



Életútja

Varga Kitti Katalin 1990-ben született Szombathelyen, ahol a Premontrei Rendi Szent Norbert Gimnáziumban érettségizett. Egyetemi tanulmányait a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen (BME) végezte, 2015-ben szerzett matematikus mesterfokozatot. Ezt követően ugyanitt folytatta doktori tanulmányait Katona Gyula Y. témavezetésével, PhD fokozatát 2021-ben szerezte meg.

Fiatal kutatói ösztöndíjasként dolgozott a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben, emellett tagja a HUN-REN-ELTE Egerváry Kutatócsoportnak és az MTA-ELTE Momentum Matroid Optimization Kutatócsoportnak. 2024 szeptemberétől a BME Villamosmérnöki és Informatikai Karának Számítástudományi és Információelméleti Tanszékén főállású adjunktusként oktat. Több mint egy évtizede tanít kiemelkedő színvonalon, amelyet a Kar Kiváló Fiatal Oktatója díjjal ismert el – ráadásul két alkalommal (2019, 2023), ami egyedülálló a díj történetében.

Kutatómunkájának egyik központi témája a minimálisan szívós gráfok vizsgálata. A t -szívós gráf összefüggősége egy adott t paraméterrel mérhető. Egy gráf minimálisan t -szívós, ha szívóssági értéke t , de bármely élének elhagyásával ez az érték csökken. A fogalom a gráfok ellenállóképességének vizsgálatához kapcsolódik, fő alkalmazási területe a hálózatok megbízhatósága.

E témában négy, társszerzőkkel közösen írt folyóiratcikke jelent meg. Igazolták, hogy minden n csúcsú minimálisan 1-szívós gráf minimális foka legfeljebb $n/3 + 1$. Egy másik eredményük szerint a minimálisan t -szívós gráfok eldöntési

problémája tetszőleges t esetén $\mathcal{DP}$ -teljes. Vizsgálták e gráfok létezésének kérdését is különböző gráfosztályokban, például merev-körű, split, karommentes és $2K_2$ -mentes gráfokban.

Másik kiemelt kutatási területe inverz optimalizálási problémák vizsgálata. Ezekben adott egy lehetséges megoldás, egy lineáris költségfüggvény és egy bemeneti megoldás, a cél pedig a bemeneti megoldás optimalitásának elérése a költségfüggvény lehető legkisebb változtatása mellett. Társszerzőivel egy új inverz optimalizálási problémakört vezetett be, amelyben k darab költségfüggvény adott, és ezeket egyetlen vektorral kell módosítani úgy, hogy a bemeneti megoldás mindegyik függvény szerint optimális legyen. Három alapvető kombinatorikus optimalizálási feladatra összpontosítottak: az inverz legrövidebb út, az inverz teljes párosítás páros gráfokban, valamint az inverz fenyőprobléma. Lineáris programozási módszerekkel min-max karakterizációkat adtak az optimális eltérítési vektor normájára. A cikk a *Discrete Applied Mathematics* folyóiratban jelent meg.

Publikációs tevékenységét 11 impakt faktoros folyóiratcikk és 5 konferencia-kiadvány fémjelzi. Széleskörű kutatásai a kombinatorika és a számítástudomány különböző területeit ölelik fel, munkáinak jelentős része az alkalmazott matematikához kapcsolódik.

A díjazott öt legfontosabb publikációja

- [1] KATONA, GY. Y., SOLTÉSZ, D. ÉS VARGA, K.: *Properties of minimally t -tough graphs*, Discrete Mathematics, Vol. **341** No. **1**, pp. 221–231 (2018). DOI: 10.1016/j.disc.2017.08.033
- [2] BÉRCZI, K., MENDOZA-CADENA, L. M. ÉS VARGA, K.: *Inverse optimization problems with multiple weight functions*, Discrete Applied Mathematics, Vol. **327**, pp. 134–147 (2023). DOI: 10.1016/j.dam.2022.12.004
- [3] LV, Z., GYÖRI, E., HE, Z., SALIA, N., TOMPKINS, C., VARGA, K. ÉS ZHU, X.: *Generalized Turán numbers for the edge blow-up of a graph*, Discrete Mathematics, Vol. **347** No. **1**, Article No. 113682 (2024). DOI: 10.1016/j.disc.2023.113682
- [4] PINTÉR, J. ÉS VARGA, K.: *Color-avoiding connected spanning subgraphs with minimum number of edges*, Discrete Applied Mathematics, Vol. **349**, pp. 25–43 (2024). DOI: 10.1016/j.dam.2024.01.044
- [5] FRANKL, P., GYÖRI, E., HE, Z., LV, Z., SALIA, N., TOMPKINS, C., VARGA, K., ZHU, X.: *Extremal results for graphs avoiding a rainbow subgraph*, Electronic Journal of Combinatorics, Vol. **31** No. **1**, Article No. P1.28 (2024). DOI: 10.37236/11676

A GYIRES BÉLA-DÍJ 2022. ÉVI DÍJAZOTTJA:
GERENCSÉR BALÁZS



Az MTA III. Matematikai Tudományok Osztálya 2022-ben Gerencsér Balázsnak ítélte oda a Gyires Béla-díjat az alkalmazott valószínűségszámításban, így a konszenzuskereső algoritmusok vizsgálatában elért eredményeiért.

Gerencsér Balázs 2002-ben érettségizett a Budapesti Fazekas Mihály Gimnáziumban, majd tanulmányait az ELTE matematikus szakán végezte, Köztársasági Ösztöndíjjal. Az ELTE Kiváló Hallgatója címet 2006-ban nyerte el. Tusnády Gábor témavezetésével PhD fokozatot szerzett 2013-ban, szintén az ELTE-n, közben egy évig Fulbright Ösztöndíjjal John Tsitsiklis professzornál tanult at MIT-n. 2014-ben Farkas Gyula Emlékdíjat kapott.

2011 óta a Rényi Intézetben dolgozik, 2013–2015 között a Leuveni Katolikus Egyetemen volt posztdoktori állásban. Bolyai ösztöndíjban részesült 2020–2023 között. Több kutatási pályázat nyertese: 2016–2019 NKFIH Posztdoktori Ösztöndíjat, 2020-ban Fiatal Kutatói OTKA pályázatot, végül a 2021–2026 időszakra „Élvonal” kutatási pályázatot nyert. 2016 óta az ELTE TTK-n tanít, a Valószínűségelmélet és Statisztika Tanszéken.

Gerencsér Balázsnak 2022-ig 18 matematikai cikke jelent meg nemzetközi folyóiratokban, továbbá hat cikke orvosi alkalmazásokról. Számos konferencián és több külföldi egyetem szemináriumán adott elő.

Kutatási területe elsősorban az alkalmazott valószínűségszámítás. Három fő témája: a konszenzuskereső algoritmusok viselkedésének vizsgálata; a Markov folyamatok keverési idejének javítása; valamint a véges matematika egy régóta kutatott problémája olyan pontrendszerekről, melyek által alkotott szakaszok hegyesszögeket zárnak be.

Az első téma lényege az, hogy miként lehet egy (óriási) hálózat működését összehangolni abban az esetben, ha a hálózat elemei csak a hozzájuk legközelebbi elemekkel tudnak kommunikálni. Gerencsér Balázs ezen a területen jelentős új eredményeket ért el.

A második téma olyan algoritmusokkal foglalkozik, melyek célja egy egyensúlyi állapot minél gyorsabb megtalálása. Az ilyen eljárások gyorsítása, illetve a megfelelő állapot elérésének lépésszámára vonatkozó becslések aktívan kutatott területek, melyekhez szintén szép eredményekkel járult hozzá.

A harmadik témában az eddigieknél sokkal erősebb, az optimálishoz közeli konstrukciót hoztak létre Harangi Viktorral, amelyért 2020-ban a Paul R. Halmos–Lester R. Ford Award díjat kaptak a „Mathematical Association of America”-tól.

Több területen is jelentős alkalmazási gyakorlattal gazdagította tudását: orvosi cikkekben működött közre, illetve a Morgan Stanley-ben is dolgozott gyakornokként 2006-ban ill. 2007-ben, tapasztalatokat szerezve a pénzügy területéről.

A GYIRES BÉLA-DÍJ 2024. ÉVI DÍJAZOTTJA:
FERENCI TAMÁS



Az MTA III. Matematikai Tudományok Osztálya 2024-ben *Ferenci Tamás*nak ítélte oda a Gyires Béla-díjat a biostatistikában, azon belül különösen az orvosi statisztikai kutatások kritikus értékelése területén szerzett eredményeiért.

Életútja

Ferenci Tamás 1985-ben született. Az MTA Operációkutatási Bizottsághoz tartozó köztestület tagja, az Óbudai Egyetem (ÓE) és a Budapesti Corvinus Egyetem (BCE) egyetemi docense. Széles látókörű, kiváló felkészültségű kutató és oktató, aki egy komplex területen folytatott eredményes kutatásait többirányú egyetemi tanulmányaival alapozta meg. Kitüntetéses egyetemi diplomát szerzett a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem (BME) mérnök-informatikus (2009), alkalmazott matematikus (2013), egészségügyi (orvosbiológiai) mérnök (2010) szakán, emellett elvégezte a BCE logisztikai menedzsment (2013), illetve gazdálkodás és menedzsment (2010) szakát. 2013-ban szerezte PhD fokozatát, 2019-ben habilitált.

Ferenci Tamás kutatási eredményeit elsősorban biostatisztikai (orvosi statisztikai) területen, azon belül különösen az orvosi statisztikai kutatások kritikus értékelése területén érte el. A problémák vizsgálata összetett statisztikai kutatásokat követel meg az informatikai eszközök magas szintű használatával együtt. A felhasznált biostatisztikai, modellezési és informatikai eszközök alkalmazásával hazai és külföldi kutatókkal együtt elért és publikált eredményei magasan jegyzett nemzetközi folyóiratokban jelentek meg. Az MTMT-ben szereplő 238 közleményből

tudományos besorolású publikációinak száma 99, melyek közül a lektorált folyóiratcikkeinek száma, független hivatkozásainak száma 688, Hirsch indexe 18.

Kutatásainak egyik fő iránya az alsó végtagi érbetegségek, különösen az ezek miatt szükségessé váló amputációk epidemiológiájának vizsgálata egy újszerű adatforrás, adminisztratív/finanszírozási adatok alapján. A módszer lényege, hogy az egészségbiztosítóhoz alapvetően biztosítási céllal beküldött jelentések tartalmát használják fel epidemiológiai kérdések, például a kockázati csoportok, időbeli vagy térbeli mintázatok vizsgálatához. Ezek a jelentések szükségképpen korlátozott adattartalmúak, viszont így sokkal nagyobb mintanagyság és utánkövetési idő érhető el, mint más eszközökkel. Kutatótársaival, Kolossváry Endrével és Kovács Tamással együtt az országban az elsők között kezdte vizsgálni az ilyen adatok felhasználási lehetőségeit, részt vett a szükséges módszertan kidolgozásában, és az elmúlt években számos, nemzetközileg jegyzett eredményt ért el ezen a területen.

Ferenci Tamás a Járványmatematikai Modellező és Epidemiológiai Munkacsoport tagjaként bekapcsolódott a koronavírus-járvány elleni védekezésbe. Itteni munkájának egyik fontos elemét képezte a többlethalalozás számítása, mely a járvány alatt a közbeszédben is nagy hangsúllyal jelent meg. Azon túl, hogy gyakran jelentkezett a témában magyarázó, ismeretterjesztő írásokkal, alapkutatást is végzett az optimális számítási módszer meghatározása érdekében.

Több klinikai biostatisztikai kutatásban vett részt, a legváltozatosabb témákban. Ezek közül kiemelkedik a kardiológia, amely területen az utóbbi években számos rangos közlemény társszerzője.

Meg kell említeni a jelentős statisztikai tananyagfejlesztési tevékenységét, valamint a szakterülethez kapcsolódó ismeretterjesztő tevékenységét is (orvosok és a nagyközönség számára), utóbbit többek között 17 folyóiratcikk és két könyv jelzi. Kiemelkedő szakmai eredményeit és tevékenységét több díjjal ismerték el: Nyerges Gábor Díj (2013), Markusovszky Lajos-díj (2017, 2021), Kemény János-díj (2017). Tagja az International Society for Clinical Biostatisticsnek, a magyar Klinikai Biostatisztikai Társaságnak, a Magyar Statisztikai Társaságnak, a Magyar Diabetes Társaságnak és a Magyar Kardiológusok Társaságának.

A BALAS EGON-DÍJ 2024. ÉVI DÍJAZOTTJA:
GYÖRGYI PÉTER



A Magyar Operációkutatási Társaság (MOT) Balas Egon (1922–2019) emléke előtt tisztelegve 2023-ban díjat alapított fiatal kutatók kiemelkedő operációkutatási eredményeinek elismerésére. A díjat minden évben egy fiatal kutató nyerheti el egy olyan, az előző évben megjelent cikkel, melynek a pályázó vagy egyedüli szerzője, vagy többszerzős cikk esetén saját hozzájárulása elkülöníthető és önmagában értékelhető. A pályázatot a MOT elnöksége bírálja el, fenntartva a jogot külső szakértő(k) bevonására. A díjazott pénzjutalomban és oklevélben részesül.

A díjat első alkalommal, 2024-ben, *Györgyi Péter* kapta.

A díjazott

Györgyi Péter 2013-ban végzett az Eötvös Loránd Tudományegyetem (ELTE) alkalmazott matematika szakán. Ugyanebben az évben itt kezdte PhD tanulmányait Kis Tamás témavezetésével, értekezését 2018-ban *summa cum laude* minősítéssel védte meg.

2014 óta a Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézet (SZTAKI) munkatársa. Fő kutatási területe az ütemezéselmélet, de járműirányítási feladatokkal is foglalkozik. Korábban elnyerte az Magyar Tudományos Akadémia (MTA) Akadémiai ifjúsági Díját és Bolyai János Kutatási Ösztöndíját, illetve a Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) Farkas Gyula Emlékdíját.

A pályamű tudományos jelentősége

FISHER, D. ÉS GYÖRGYI, P.: *Approximation algorithms for coupled task scheduling minimizing the sum of completion times*, Annals of Operations Research, Vol. **328** No. **2**, pp. 1387–1408 (2023). DOI: 10.1007/s10479-023-05322-5

A páros munkák ütemezési problémája közel 50 éves feladat. A probléma két, adott hosszúságú feladatból álló munka ütemezése egy gépen úgy, hogy egyrészt a gép ne kapjon egyszerre két feladatot, másrészt az ugyanazon munkához tartozó feladatok között meghatározott követési idő teljesüljön (ezen feladatok sorrendje is kötött). A problémának számos gyakorlati alkalmazása van: eredetileg radar-rendszereknél merült fel, ahol a hullámok kibocsátása után adott idővel érzékelni kell a visszaverődő jeleket. Egy másik fontos alkalmazási terület a kémia, ahol különféle reakciók lejátszódásához előre ismert időnek kell eltelnie, míg ezen reakciók megfelelő előkészítést és utómunkát igényelnek.

Egészen a legutóbbi évekig a cikkek többsége a legkésőbbi befejezési idő minimalizálásával foglalkozott. Számos tanulmány javasolt különböző approximációs algoritmusokat, a témakör több eredménye magyar kutatókhoz (Békési József, Dósa György, Galambos Gábor) kötődik. A probléma iránti érdeklődés az elmúlt néhány évben jelentősen megnőtt, a kutatás egyre inkább bonyolultabb, de általában nagyobb gyakorlati jelentőséggel bíró célfüggvények vizsgálata felé fordult.

A befejezési idők összegének minimalizálási feladatát először egy 2021-ben megjelent cikk vizsgálta, a legfontosabb variánsok bonyolultságának bemutatásával. Ezen eredményeket bővíti a pályamű 3. fejezete. Erre a célfüggvényre korábban nem született approximációs módszer.

A pályázatban elvárt saját hozzájárulást a cikk 4. fejezete adja. Ez approximációs algoritmusokat mutat be olyan $\mathcal{NP}$ -nehéz variánsokra, ahol a célfüggvény a befejezési idők összegének minimalizálása. A fejezetben bemutatott algoritmusok mindegyike $\mathcal{O}(n \log n)$ futási idejű (n a munkák száma), ennek köszönhetően a gyakorlatban is jól alkalmazhatók. Noha a bemutatott algoritmusok viszonylag egyszerűek, az approximációs hányadosok bizonyítása érdekében több esetben számos apró trükkre, kifinomult technikákra volt szükség.

Az elért eredményeket a cikk 2. ábrája foglalja össze. Három variáns esetén sikerült $3/2$ -approximációt igazolni, további három esetén 2 -approximációt, míg két, meglehetősen általános variáns esetén 3 -approximáció került bizonyításra. Több esetben alsó korlátokat is sikerült találni az algoritmusok approximációs hányadosára.

A bizonyítások nehézségét elsősorban az optimális megoldások ismeretének hiánya okozza: számos példa bizonyítja, hogy a feladatpéldányok közötti egészen apró eltérések is jelentősen meg tudják változtatni az optimális megoldás szerkezetét és a célfüggvény értékét. Egyes esetekben a bizonyítás néhány egyszerű észrevétel ügyes kombinálásával kijött, azonban több esetben ezek nem vezettek eredményre.

Külön kiemelendő a 8. tételben bizonyított $3/2$ -approximáció, ahol a bizonyítás egy messze nem nyilvánvaló esetvizsgálaton túl az egyes esetek ügyes számolásokkal való kezelését igényelte. A bizonyításokban számos, korábban máshol nem alkalmazott trükkre volt szükség az approximációs hányados igazolása érdekében.

A társszerző, David Fischer a közös munka indulásakor kezdte meg a PhD képzését Hamburgban. Ez volt az első, folyóiratban megjelent cikke.

FOLYTONOS ÁLTALÁNOSÍTOTT JÁTÉKOK

BALOG IMRE ÉS PINTÉR MIKLÓS

Cikkünkben véges sztochasztikus játékokkal foglalkozunk. Az alapfogalmak bevezetése és egy rövid matematikai áttekintés után a véges sztochasztikus játékok egyensúlyának létezését vizsgáljuk.

Célunk, hogy egy új fogalom – a folytonos általánosított játék – segítségével egy, a korábbiaktól eltérő bizonyítást adjunk a véges általánosított diszkontált sztochasztikus játékok egyensúlyának létezésére. Bizonyításunkban megmutatjuk, hogy minden említett sztochasztikus játék ún. folytonos általánosított játék. A folytonos általánosított játékokról pedig megmutatjuk, hogy van egyensúlyuk.

Továbbá, az egyik klasszikus sztochasztikus játék, a Big Match példáján keresztül szemléltetjük, hogy amennyiben a játékosok kifizetései az általánosított diszkontálás helyett a hosszú távú átlagos kifizetéssel adottak, akkor a véges sztochasztikus játék már nem feltétlenül tartozik a folytonos általánosított játékok osztályába, sőt a Big Match esetében jól ismert, nincs egyensúlya sem.

1. Bevezetés

A sztochasztikus játék [25] egy olyan matematikai modell, ami több szereplő több időszakon keresztüli viselkedését írja le dinamikusan változó döntési környezetben. Shapley [25] röviden úgy írta le a sztochasztikus játékot, mint ami pozícióról pozícióra halad előre egy olyan átmenetszabály szerint, amelyet (az adott pozíció és) a játékosok cselekedetei kontrollálnak. Shapley [25] nyelvezetében tehát a pozíció nem más, mint az az állapot, amelyben a játékosok döntenek. A sztochasztikus játék dinamikus jellege pedig vonzó tulajdonságnak bizonyult a későbbiekben a különféle alkalmazási lehetőségek tekintetében, például: fegyverkezési verseny [37], adózás [24] vagy halászati háborúk [15].

Egy sztochasztikus játékra tekinthetünk tehát úgy, mint ami kiterjeszti a von Neumann [35] által bevezetett játékok osztályát, hiszen a sztochasztikus játék több időszakon ível át. Emellett általánosítja a Blackwell [3] által elsőként vizsgált Markov-döntési problémákat (MDP), hiszen több játékos szerepel benne.

A fenti két általánosítás miatt úgy tűnik, hogy a sztochasztikus játék egy összetett fogalom. Ezt támasztja alá az is, hogy a sztochasztikus játékokban a

játékosoknak két, akár egymással szemben álló célja van. Először is természetesen minden játékos döntését befolyásolja, hogy az adott állapotban mi lesz az aktuális kifizetése. Másodszor az adott állapot és az abban meghozott döntései a játékosoknak befolyásolni fogják a jövőbeli kifizetéseket. Emiatt a játékosoknak a döntéshozatalkor mindkét következmény szempontjából kell mérlegelni a lehetőségeket. Habár ez a kettősség megjelenik az MDP-nél is, a sztochasztikus játékoknál nem feltétlenül egyetlen szereplő viselkedését vizsgáljuk, ami bonyolultabbá teszi az elemzést.

Shapley [25] olyan sztochasztikus játékokat elemzett, amelyekben az elnyeléseknek pozitív a valószínűsége, azaz a sztochasztikus játék egy adott állapot elérése után abban az állapotban marad örökre.¹

A sztochasztikus játékok elemzése során fontos szerepet játszik a játéktörténet, amely az állapotok és a hozzá tartozó akcióprofilok rendezett együttese aszerint, hogy a sztochasztikus játékban mi is ment végbe az adott játékkörig. A játéktörténetek segítségével a játékosok stratégiáját is definiálni tudjuk, mégpedig a stratégia írja elő a játékos számára a követendő akciót annak tükrében, hogy mi a játéktörténet.

A zérus összegű játékoknál speciális fogalom a játék értéke. Egy valós szám egy zérus összegű véges sztochasztikus játék értéke, ha

- a sorjátékosnak létezik olyan stratégiája, amely minden esetben biztosítja számára, hogy a sztochasztikus játék során létrejövő várható teljes jutalma nem süllyed az érték alá,
- valamint az oszlopjátékosnak létezik olyan stratégiája, amely minden esetben biztosítja számára, hogy a sztochasztikus játék során létrejövő várható teljes jutalma nem süllyed az érték ellentettje alá.

Shapley [25] megmutatta, hogy egy zérus összegű sztochasztikus játéknak létezik értéke, ha a játékosok diszkontálást használnak (véges diszkontált sztochasztikus játék). Emellett Shapley [25] azt is belátta, hogy a játék értékét karakterizálni is lehet úgy mint egy nemlineáris operátor fixpontja.

A véges nemdiszkontált zérus összegű sztochasztikus játékosztályra Mertens és Neyman [19, 20] eredménye a következő: minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik ε -optimális stratégia.

Shapley [25] másik eredménye – a sztochasztikus játékokat meghatározó paraméterek időfüggetlenségét kihasználva –, hogy az általa vizsgált esetben a játékosoknak létezik olyan optimális stratégiája, amely stacionárius, azaz csak az adott állapottól függ.

¹Vizsgálata során fontos feltételeket alkalmazott, amelyeket a cikkben is alkalmazni fogunk: az állapotok, a játékosok és az akciók halmazok végessége. Ezenkívül a játék zérus összegű volt, azaz olyan kétszemélyes sztochasztikus játék, amelyben az első játékos nyeresége a második játékos vesztesége.

A többszemélyes diszkontált sztochasztikus játékok esetében a stacionárius Nash-egyensúly létezését látta be véges sok állapot mellett Fink [6], Takahashi [31], illetve végtelen sok állapot és néhány megszorítás mellett Maitra and Parthasarathy [18]. Azonban a szakirodalomban található arra példát, hogy általános keretek között a stacionárius Nash-egyensúly létezése egyáltalán nem biztosított, sőt még stacionárius ε -Nash-egyensúly sincs elég kicsi ε értékre [16, 17]. A teljesség igénye nélkül megemlíjtjük, hogy a diszkontált sztochasztikus játékok stacionárius egyensúlyának létezéséről átfogóbb képet ad Solan [28] és Levy [16].

A sztochasztikus játékok vizsgálatának egy másik lehetséges iránya az úgynevezett egyenletes megoldás módszerének használata, amelyet olyan végtelen hosszú sztochasztikus játékokra alkalmazhatunk, ahol minden körben kapnak a játékosok kifizetést. Ez az eljárás egy végtelen hosszú játékokra hosszú távú interakciók modellezési lehetőségeként tekint, ahol szinte semmilyen értéke sincs az időnek (a diszkontfaktor közel van 1-hez) és/vagy a játék kellő mértékben hosszú – és ezek közül egyik sem ismert teljes mértékben. Ekkor az a cél, hogy az eredményként előálló, bizonyos optimalitási tulajdonságokkal rendelkező megoldások ne legyenek érzékenyek a játék időbeli lefolyásának hosszára vagy éppen a diszkontfaktor változására.

Egy zérus összegű sztochasztikus játéknak ν az egyenletes értéke, ha

- a T -hosszúságú játékban átlagolás útján létrejövő ν_T érték konvergál a ν értékhez, midőn T tart a végtelenhez,
- és minden $\varepsilon > 0$ esetén minden játékosnak van olyan stratégiája, ami az összes T -hosszúságú játékban ε -optimális, amennyiben T elég nagy.

Bewley és Kohlberg [2] bebizonyította, hogy minden véges zérus összegű sztochasztikus játékban a ν_T értékek konvergálnak abban az esetben, ha T növekszik. Mertens és Neyman [19, 20] eredménye az, hogy minden véges zérus összegű sztochasztikus játéknak van egyenletes értéke.

A nemzérus összegű játékok szakirodalma természeténél fogva sokkal szerteágazóbb, és ez a terület az utolsó három évtizedben intenzíven kutatott. A játék jellegének eme apró módosítása számos ponton utolérhető, mint például egy egyensúly egyenletes ε -egyensúly, ha egyetlenegy játékos sem tud az egyensúlytól eltérve ε mennyiségnél többet profitálni – feltéve, hogy a játék megfelelően hosszú, vagy a diszkontfaktor közel van 1-hez, és emellett a kifizetési vektor majdnem független a játék hosszától. A témakörben néhány eredmény született az egyenletes ε -egyensúly létezésére: kétszemélyes játék esetén Vieille [33, 34]; háromszemélyes játék esetén Solan [27], ahol az állapot legfeljebb egyszer változik; illetve más sztochasztikus játékokra Solan és Vieille [29], Flesch és mások [8] és Simon [26] cikkei.

A cikkünkben vizsgált sztochasztikus játék diszkrét időben zajlik véges sok állapottal, játékoskal és akcióval. Amint már korábban említettük, egy sztochasztikus játékban a játékosoknak két – egymástól nem feltétlenül független – célja

van. Az egyik az, hogy a sztochasztikus játékokban keletkező hosszú távú kifizetésüket valamilyen szokásos értékelés alapján (például jelenérték számítás) növeljék. A másik cél pedig az, hogy az adott időszakban a kifizetésük legyen minél magasabb. Ez a kettősség teszi a sztochasztikus játékok elemzését érdekessé és nehezzé.

Munkánk célja, hogy a Fink [6], Maitra és Parthasarathy [18] Takahashi [31], eredményekhez hasonló módon, azaz fixponttételt használva, bizonyítsuk, hogy minden véges diszkontált sztochasztikus játéknak (azaz, ahol diszkontált kifizetés van) van Nash-egyensúlya.

Megközelítésünk egy új fogalom, az ún. folytonos általánosított játék, használatára támaszkodik. Egy (folytonos) általánosított játékban a játékosok nem közvetlenül kontrollálják a játék kimeneteleit, hanem egy függvényen keresztül.

Megmutatjuk, hogy minden folytonos általánosított játéknak van Nash-egyensúlya, majd megmutatjuk, hogy minden véges általánosított diszkontált sztochasztikus játék folytonos általánosított játék, azaz van Nash-egyensúlya.

A folytonos kifizetéssel rendelkező játékok irodalma széleskörű, ezért a teljesség igénye nélkül említünk meg néhány releváns eredményt. A relevancia alatt azt értjük, hogy a cikkekben (Fudenberg és Levine [9], Harris [13], Harris, Reni és Robson [14]) szintén a játékmenekeken értelmezett értékfüggvényekkel dolgoznak, mint ahogyan azt mi is tesszük (lásd a 3.3. Definícióban szereplő λ -diszkontált vagy a hosszú távú átlagos kifizetéseket).

Fudenberg és Levine [9] egy olyan diszkrét idejű játékot vizsgált véges sok játékosal, ahol minden időszakban a játékosok véges sok akcióval rendelkeznek. A cikk alapötlete az, hogy az eredeti játékot vágjuk szét az időszakok szerint több (levágott) játékokra az alábbi elv szerint: az első játék csak az első időszakot, a második játék az első két időszakot, $\dots$, a t -edik játék az első t időszakot öleli fel és így tovább. Amennyiben az eredeti játékban a kifizetés egyenletesen folytonos, akkor a (T időszakig) levágott játékok részjáték tökéletes ε^T -egyensúlyainak halmaza konvergál az eredeti játék részjáték tökéletes egyensúlyainak halmazához, ha $T \rightarrow \infty$ és $\varepsilon^T \rightarrow 0$. Speciálisan a cikk egy „pusztán” topológiai megfontolásokon alapú bizonyítást ad ismételt játékok egyensúlyának létezésre λ -diszkontált kifizetés mellett – a szokásos Banach-féle fixponttételen alapuló bizonyításokhoz képest (például [25] vagy [6]). Megjegyezzük, hogy a [9] cikkben találhatunk néhány eredményt arra az esetre is, amikor az akcióterek végességét nem írjuk elő. Azonban az alkalmazott módszer és annak minden eredménye nem általánosítható az akcióterek végességének elhagyásával [12].

Harris [13] egy hasonló diszkrét idejű játékot vizsgált szintén véges sok játékosal. Amennyiben feltesszük, hogy 1) a lehetséges történetek halmaza zárt részhalmaza az összes kimenetel halmazának, 2) minden játékos kifizetése – mint a kifizetéssorozatok függvénye – folytonos, 3) az akcióterek minden időszakban kompakt Hausdorff-terek minden játékosra, valamint 4) a $t - 1$ időszakot felölelő történeteket és a t időszakban lehetséges kimeneteleket összekapcsoló halmazértékű leképezés alulról félig folytonos és 5) a játékban a játékosok tökéletesen informál-

tak, akkor létezik tökéletes egyensúlya a játéknak. Az említett tétel bizonyítása számos ponton a halmazértékű leképezésekre vonatkozó klasszikus eredményekre épül, magyarázatul szolgálva a felsorolt feltevések szükségességére. Ahogy Harris [13] megemlíti, tételének következménye Fudenberg és Levine [9] fő eredménye.

Megemlíjtjük még a [14] cikket, amelyben szintén egy diszkrét idejű véges sok játékosal rendelkező modell kerül bemutatásra kompakt akcióterekkel. A cikk egyik eredménye egy olyan majdnem tökéletesen informált játék megadása, amelyben nem létezik részjáték tökéletes egyensúly.² A cikk másik eredménye a következő: mindig létezik részjáték tökéletes egyensúly egy folytonos játékban, ha a játékosok minden egyes kör végén kellően gazdag publikus szignált figyelhetnek meg.

Megközelítésünk betekintést nyújt a véges sztochasztikus játékok egyensúlyának létezési problémájába. A Big Match játékot vizsgálva pontosan látható, hogy melyik nem triviális ponton „csúszik” meg a fixpontos megközelítés. Köztudott, hogy ez a „csúszás” végzetes, a Big Match játéknak nincs Nash-egyensúlya.

Cikkünk felépítése a következő. A 2. fejezetben felidézük a szükséges matematikai fogalmakat, ismereteket. Ezután a 3. fejezetben a sztochasztikus játékok bevezetésére kerül sor, majd az általánosított diszkontált és a hosszú távú átlagos kifizető függvények kerülnek bevezetésre. A 4. fejezetben a sztochasztikus játékoktól némelyest elrugaszkodva, a folytonos általánosított játékok esetén, az egyensúly létezésének klasszikus, fixponttételre alapuló bizonyítását tárgyaljuk. Ezt az eredményt felhasználva az 5. fejezetben megmutatjuk, hogy a véges általánosított diszkontált sztochasztikus játékoknak van Nash-egyensúlya, mivel ezek a játékok a folytonos általánosított játékok egy alosztályát képezik. A 6. fejezetben bemutatjuk, hogy az egyik legfontosabb sztochasztikus játék a Big Match esetében a diszkontálás helyett hosszú távú átlagos kifizetőfüggvény mellett a megközelítésünk már nem alkalmazható, mivel az így kapott sztochasztikus játék már nem lesz folytonos általánosított játék. Végezetül, a 7. fejezetben röviden összefoglaljuk az eredményeinket.

2. Matematikai előkészítés

A következőkben áttekintjük azokat a főbb matematikai fogalmakat, amiket a cikkben használunk.

Adott X vektortér, és $Y \subseteq X'$, ahol Y az X' egy altere és X' az X -en értelmezett (valós értékű) lineáris funkcionálok halmaza.

Az (X, Y) *duális pár*, ha tetszőleges $x, x' \in X, x \neq x'$ -höz létezik $y \in Y$, hogy $y(x) \neq y(x')$; és tetszőleges $y, y' \in Y, y \neq y'$ -höz létezik $x \in X$, hogy $x(y) \neq x(y')$.

Adott (X, Y) duális pár, ekkor τ_w a leggyengébb topológia, amire minden $y \in Y$

²A majdnem tökéletesen informáltság azt jelenti, hogy az adott időszakban a játékosok szimultán döntenek az összes korábban meghozott döntést ismerve.

folytonos, azaz, τ_w a leggyengébb topológia, amire $Y \subseteq C(X, \tau_w)$. Továbbá, τ_{w^*} a leggyengébb topológia, amire minden $x \in X$ folytonos, azaz, τ_{w^*} a leggyengébb topológia, amire $X \subseteq C(Y, \tau_{w^*})$.

Legyen X egy nemüres halmaz és $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ egy σ -algebra. Jelölje $\text{cba}(X, \mathcal{M})$ az $\mathcal{M}$ σ -algebrán értelmezett korlátos mértékek osztályát. Továbbá, jelölje $\Delta(X, \mathcal{M})$ az $\mathcal{M}$ σ -algebrán értelmezett valószínűségi mértékek osztályát.

Adott (X, τ) topologikus tér. Jelölje $\mathcal{B}(X, \tau)$ a *Borel-féle σ -algebrát* az (X, τ) topologikus téren, azaz $\mathcal{B}(X, \tau)$ a legszűkebb σ -algebra, ami tartalmazza az X összes τ -nyílt részhalmazát.

Legyen (X, τ) egy Hausdorff-tér (másnéven T_2 -tér). Ekkor $\mu \in \Delta(X, \tau)$

– *belső reguláris*, ha minden $A \in \mathcal{B}(X, \tau)$ esetén

$$\mu(A) = \sup \{ \mu(F) : F \subseteq A \text{ és } F \text{ zárt halmaz} \};$$

– *feszes*, ha minden $A \in \mathcal{B}(X, \tau)$ esetén

$$\mu(A) = \sup \{ \mu(K) : K \subseteq A \text{ és } K \text{ kompakt halmaz} \}.$$

Az $f: (X, \tau) \rightrightarrows (Y, \tau')$ halmazértékű leképezés *felülről félig folytonos*, ha tetszőleges $x \in X$ pontra és $V \in \tau'$ nyílt halmazra, amelyre $f(x) \subseteq V$, létezik $U \in \tau$ nyílt halmaz, amelyre $x \in U$ és minden $x' \in U$ -ra $f(x') \subseteq V$.

3. Sztochasztikus játékok

Ebben a fejezetben bevezetjük a véges sztochasztikus játék fogalmát, azaz azt a sztochasztikus játékot, ahol a játékosok, az állapotok és az akciók halmaza véges. Fontos hangsúlyoznunk, hogy a továbbiakban, ha elhagyjuk a *véges* jelzőt, akkor is mindig feltesszük e tulajdonság meglétét a vizsgált sztochasztikus játékkal kapcsolatban. A következőkben többször, külön említés nélkül támaszkodunk Solan [28] cikkére.

3.1. Definíció. Egy sztochasztikus játék egy olyan $\Gamma = \langle I, S, (A^i(s))_{s \in S}^{i \in I}, q, r \rangle$ lista, ahol

- $I = \{1, 2, \dots, n\}$ a játékosok véges halmaza;
- S az állapotok nemüres, véges halmaza;
- $A^i(s)$ az $i \in I$ játékos $s \in S$ állapotbeli akcióinak nemüres, véges halmaza. Továbbá jelölje $A(s) = \prod_{i \in I} A^i(s)$ az $s \in S$ állapotbeli akcióprofilok halmazát; legyen $A^i = \cup_{s \in S} A^i(s)$ és $A = \cup_{s \in S} A(s)$, $i \in I$;
- $q: SA \rightarrow \Delta(S)$ az átmenetszabály, ahol $SA = \{(s, a) \in S \times A : a \in A(s)\}$;

– $r^i: SA \rightarrow \mathbb{R}$ az i játékos kifizetésfüggvénye, $i \in I$.

A sztochasztikus játékok osztályozása történhet a játék időbeli lefolyása szerint, amely alapján lehet folytonos vagy diszkrét idejű sztochasztikus játék. Ezek közül mi csak az utóbbival fogunk foglalkozni, ehhez vezessük be a $\mathbb{T} = \{1, 2, 3, \dots\}$ indexhalmazt.

Egy sztochasztikus játékot az eddigiekkel összhangban úgy képzelhetünk el, hogy az az időben játszódik le és a szomszédos időszakokat az átmenetszabály köti össze.

A **játék lefolyása**: Egy sztochasztikus játék (3.1. Definíció) egy $s_1 \in S$ kezdeti állapotból indul, majd minden $t \in \mathbb{T}$ időszakban az alábbi események, az alábbi sorrendben követik egymást:

- L1. A játékosok megtudják az aktuális $s_t \in S$ állapotot.
- L2. Minden $i \in I$ játékos egyszerre és egymástól függetlenül kiválasztja az aktuális állapot ismeretében az $a_t^i \in A^i(s_t)$ akcióját.
- L3. Az így létrejött $a_t = (a_t^i)_{i \in I}$ akcióprofil a játékosok megismerik, és annak alapján minden $i \in I$ játékos megkapja az adott t időszakra vonatkozó $r^i(s_t, a_t)$ kifizetését.
- L4. A következő $s_{t+1} \in S$ állapotot a $q(\cdot \mid s_t, a_t)$ átmenetszabály határozza meg. A sztochasztikus játék továbblép a $t + 1$ időszakba, és visszatérünk az L1. lépéshez.

Egy sztochasztikus játék lejátszása természetesen sokféle módon alakulhat, ezért jelöljük a $t \in \mathbb{T}$ időszakig tartó (vagy röviden t -hosszúságú) *játéktörténetek* (*history*) halmazát az alábbi módon:

$$H_t = \begin{cases} (SA)^{t-1} \times S, & \text{ha } t > 1, \\ S, & \text{ha } t = 1. \end{cases}$$

Egy $h_t = (s_1, a_1, s_2, a_2, \dots, s_{t-1}, a_{t-1}, s_t) \in H_t$ játéktörténet tehát az addig létrejövő állapotok és a játszott akcióprofilok rendezett alakban való felírása, ügyelve arra, hogy a t időszakra vonatkozólag csak a bekövetkezett állapotot tüntetjük fel.

Egy sztochasztikus játék egy lehetséges lejátszását *játékmenetnek* (*play*) nevezzük, amelyet egy végtelen hosszú játéktörténetként képzelhetünk el. Vezessük be az összes játéktörténet (H) és az összes játékmenet (H_∞) halmazait az alábbiak szerint:

$$H = \bigcup_{t \in \mathbb{T}} H_t \quad \text{és} \quad H_\infty = (SA)^\mathbb{T}.$$

Az $s \in S$ állapotban az $i \in I$ játékos *kevert akciója* egy valószínűségi eloszlás az $A^i(s)$ akcióhalmaz felett; így az i játékos kevert akcióinak halmaza az $s \in S$ állapotban $\Delta(A^i(s))$. Tetszőleges $h \in H$ játéktörténetre legyen $s(h) \in S$ az az állapot, ahol a sztochasztikus játék van a h játéktörténet esetén.

3.2. Definíció. Az $i \in I$ játékos $\sigma^i: H \rightarrow \Delta(A^i)$ stratégiája egy olyan leképezés, amely minden $h \in H$ játéktörténethez hozzárendeli $\Delta(A^i(s(h)))$ egy elemét. Az i játékos stratégiáinak halmazát jelölje Σ^i , és legyen $\Sigma = \prod_{i \in I} \Sigma^i$.

A σ^i stratégia tiszta stratégia, ha minden $h \in H$ játéktörténet esetén $\text{supp } |\sigma^i(h)| = 1$.

A σ^i stratégia stacionárius, ha az pusztán az aktuális állapottól függ, azaz tetszőleges $h, h' \in H$ játéktörténetekre, amelyekre $s(h) = s(h')$, teljesül, hogy $\sigma^i(h) = \sigma^i(h')$.

A σ^i stratégia Markov-stratégia, ha csak az aktuális állapottól és az időszaktól függ, azaz tetszőleges $h, h' \in H$ játéktörténetekre, amelyekre $|h| = |h'|$ és $s(h) = s(h')$, teljesül: $\sigma^i(h) = \sigma^i(h')$.

A 3.2. Definícióban bevezetett stratégiafogalmak esetében láthatjuk, hogy minden stacionárius stratégia egyben Markov-stratégia is.

Tekintsük a játékmenetek halmazát (H_∞) . Egy $\hat{h}_t = (\hat{s}_1, \hat{a}_1, \dots, \hat{s}_t) \in H_t$ játéktörténethez tartozó $C(\hat{h}_t) \subset H_\infty$ cylinderhalmaz azon játékmenetek halmaza, amelyek létrejöhetnek a $\hat{h}_t$ játéktörténet esetén, azaz

$$C(\hat{h}_t) = \left\{ h_\infty = (s_1, a_1, s_2, a_2, \dots) \in H_\infty : s_1 = \hat{s}_1, a_1 = \hat{a}_1, \dots, s_t = \hat{s}_t \right\}.$$

Legyen $\mathcal{H}$ a $(C(h))_{h \in H}$ halmazok által generált σ -algebra, azaz $(H_\infty, \mathcal{H})$ mérhető tér. Ekkor tetszőleges $\sigma = (\sigma^i)_{i \in I}$ stratégiaprofil és $s_1 \in S$ kezdeti állapot a Kolmogorov-féle kiterjesztési tétel [1, 15.26. Tétel] miatt egyértelműen meghatároz egy $\mathbb{P}_{s_1, \sigma}$ valószínűségi mértékét a $(H_\infty, \mathcal{H})$ mérhető téren. Konkrétan, tetszőleges $\hat{h}_t = (\hat{s}_1, \hat{a}_1, \dots, \hat{s}_t) \in H_t$ játéktörténetre

$$\mathbb{P}_{s_1, \sigma}(C(\hat{h}_t)) = \chi_{\{s_1 = \hat{s}_1\}} \left(\prod_{\tau=1}^{t-1} \left(\prod_{i \in I} \sigma^i(\hat{a}_\tau^i \mid \hat{h}_t) \right) q(\hat{s}_{\tau+1} \mid \hat{s}_\tau, \hat{a}_\tau) \right).$$

Ennek alapján jelölje $\mathbb{E}_{s_1, \sigma}$ a $\mathbb{P}_{s_1, \sigma}$ valószínűségi mértékhez tartozó várható érték operátort.

A sztochasztikus játékok esetében általában a 3.3. Definícióban bevezetésre kerülő két kifizetésfüggvény-típust szoktunk használni – vagy azoknak valamilyen hasonló alakját. Amikor egy játékos a λ -diszkontált kifizetést használja, akkor a különböző időszakokban keletkező kifizetések együttes kiértékelésekor figyelembe veszi a kifizetések időértékét is. Ezzel szemben a hosszú távú átlagos kifizetés ugyanakkora súllyal veszi figyelembe a különböző időszakokat és így a nevével összhangban az átlagos értékét adja vissza a kifizetéseknek.

3.3. Definíció. Egy $\Gamma = \langle I, S, (A^i(s))_{s \in S}^{i \in I}, q, r \rangle$ sztochasztikus játékban az $s_1 \in S$ kezdeti állapothoz és a $\sigma \in \Sigma$ stratégiaprofilhoz tartozó λ -diszkontált kifizetés az i játékos számára a $\lambda \in (0, 1]$ diszkontfaktor mellett

$$\gamma_\lambda^i(s_1; \sigma) = \mathbb{E}_{s_1, \sigma} \left[\lambda \sum_{t=1}^{\infty} (1 - \lambda)^{t-1} r^i(s_t, a_t) \right] = \lambda \int_{H_\infty} d_\lambda^i(h_\infty) d\mathbb{P}_{s_1, \sigma}, \quad (1)$$

ahol $d_\lambda^i(h_\infty) = \sum_{t=1}^{\infty} (1 - \lambda)^{t-1} r^i(s_t, a_t)$ minden $h_\infty = (s_1, a_1, s_2, a_2, \dots) \in H_\infty$ játékmenetre.

Továbbá, a Γ sztochasztikus játékban az $s_1 \in S$ kezdeti állapothoz és a $\sigma \in \Sigma$ stratégiaprofilhoz tartozó hosszú távú átlagos kifizetés

$$\gamma_{ls}^i(s_1; \sigma) = \mathbb{E}_{s_1, \sigma} \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n r^i(s_j, a_j) \right]. \quad (2)$$

Mint már korábban említettük, a 3.3. Definícióban bevezetett kifizetésfüggvényeknek számos alakja létezik, mint ahogy ezt a 3.1. Megjegyzésben is láthatjuk.

3.1. Megjegyzés. A 3.3. Definícióban szereplő λ -diszkontált kifizetésre az $i \in I$ játékos tekintetében teljesül az

$$\mathbb{E}_{s_1, \sigma} \left[\lambda \sum_{t=1}^{\infty} (1 - \lambda)^{t-1} r^i(s_t, a_t) \right] = \lambda \sum_{t=1}^{\infty} (1 - \lambda)^{t-1} \mathbb{E}_{s_1, \sigma} [r^i(s_t, a_t)]$$

összefüggés [28, 2.4. fejezet].

Emellett a sorösszeg előtti λ szorzótagnak a normalizálás célját szolgálja: az a játékos, aki minden egyes játékkörben 1 egységet kap, értékelje a játékmenet diszkontált jelenértékét egységnyiinek.

A 3.3. Definícióban bevezetett λ -diszkontált kifizetést általánosíthatjuk úgy, hogy a diszkontfaktor rögzítésétől eltekintünk. Érdekességképpen megemlítjük, hogy már Shapley [25] is utal erre a lehetőségre [25, 1099. oldal 2-es pontja].

3.4. Definíció. Egy $\Lambda: \mathbb{T} \times S \rightarrow [0, 1]$ függvény diszkontfüggvény, ha tetszőleges $h_\infty = (s_1, a_1, s_2, a_2, \dots) \in H_\infty$ játékmenet esetén

$$\sum_{t=1}^{\infty} \prod_{m=1}^t \Lambda(m, s_m) < \infty.$$

A $\Gamma = \langle I, S, (A^i(s))_{s \in S}^{i \in I}, q, r \rangle$ sztochasztikus játékban az $s_1 \in S$ kezdeti állapothoz és a $\sigma \in \Sigma$ stratégiaprofilhoz tartozó általánosított diszkontált kifizetés az i játékos számára a Λ diszkontfüggvény és $\lambda \in (0, 1]$ diszkontfaktor mellett

$$\begin{aligned}
\gamma_{\Lambda}^i(s_1; \sigma) &= \mathbb{E}_{s_1, \sigma} \left[\lambda \sum_{t=1}^{\infty} \left(\prod_{m=1}^t \Lambda(m, s_m) \right) r^i(s_t, a_t) \right] \\
&= \lambda \int_{H_{\infty}} d_{\Lambda}^i(h_{\infty}) \, d\mathbb{P}_{s_1, \sigma} = \lambda d_{\Lambda}^i(\mathbb{P}_{s_1, \sigma}),
\end{aligned} \tag{3}$$

ahol $d_{\Lambda}^i(h_{\infty}) = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\prod_{m=1}^t \Lambda(m, s_m) \right) r^i(s_t, a_t)$, minden $h_{\infty} = (s_1, a_1, s_2, a_2, \dots) \in H_{\infty}$ játékmenetre.

Láthatjuk, hogy amennyiben a 3.4. Definícióban a diszkontfüggvényeket

$$\Lambda(t, s_t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t = 1, \\ 1 - \lambda & \text{egyébként,} \end{cases}$$

módon választjuk meg $\lambda \in (0, 1]$ mellett, akkor adott $h_{\infty} \in H_{\infty}$ játékmenet esetén az általánosított diszkontált kifizetés és a λ -diszkontált kifizetés megegyezik.

3.1. LEMMA. *A $d_{\Lambda}^i = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\prod_{m=1}^t \Lambda(m, \cdot) \right) r^i$ függvény a H_{∞} halmazon a szorzattopológiára nézve folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített, és legyen $K > 0$ olyan konstans, amelyre minden n időszakban teljesül $|r(s_n, a_n)| < K$ tetszőleges $s_n \in S$ és $a_n \in A(s_n)$ mellett.

Mivel $\sum_{t=1}^{\infty} \prod_{m=1}^t \Lambda(m, s_m) < \infty$, ezért létezik olyan t^* időszak, hogy

$$\sum_{t=t^*+1}^{\infty} \prod_{m=1}^t \Lambda(m, s_m) < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Legyen $h_{\infty}^{\alpha} = (s_1^{\alpha}, a_1^{\alpha}, \dots, s_t^{\alpha}, a_t^{\alpha}, \dots)$ és $h_{\infty}^{\beta} = (s_1^{\beta}, a_1^{\beta}, \dots, s_t^{\beta}, a_t^{\beta}, \dots)$ két olyan játékmenet ($h_{\infty}^{\alpha}, h_{\infty}^{\beta} \in H_{\infty}$), amelyek az első t^* időszakban egybeesnek: $h_t^{\alpha} = (s_1^{\alpha}, a_1^{\alpha}, \dots, a_{t-1}^{\alpha}, s_t^{\alpha}) = (s_1^{\beta}, a_1^{\beta}, \dots, a_{t-1}^{\beta}, s_t^{\beta}) = h_t^{\beta}$, ahol tehát $h_t^{\alpha}, h_t^{\beta} \in H_t$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\left| d_{\Lambda}^i(h_{\infty}^{\alpha}) - d_{\Lambda}^i(h_{\infty}^{\beta}) \right| &= \left| \sum_{t=1}^{\infty} \left(\prod_{m=1}^t \Lambda(m, s_m) \right) r^i(s_t^{\alpha}, a_t^{\alpha}) - \sum_{t=1}^{\infty} \left(\prod_{m=1}^t \Lambda(m, s_m) \right) r^i(s_t^{\beta}, a_t^{\beta}) \right| \\
&= \left| \sum_{t=1}^{\infty} \left(\prod_{m=1}^t \Lambda(m, s_m) \right) \left(r^i(s_t^{\alpha}, a_t^{\alpha}) - r^i(s_t^{\beta}, a_t^{\beta}) \right) \right| \\
&\leq \sum_{t=t^*+1}^{\infty} \left(\prod_{m=1}^t \Lambda(m, s_m) \right) \left| \left(r^i(s_t^{\alpha}, a_t^{\alpha}) - r^i(s_t^{\beta}, a_t^{\beta}) \right) \right| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

azaz a d_{Λ}^i függvény folytonos. □

Mivel korábban beláttuk, hogy a λ -diszkontált kifizetés speciális esete az általánosított diszkontált kifizetésnek, ezért a 3.1. Lemma eredménye igaz λ -diszkontált kifizetésre is.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. A $d_\lambda^i = \sum_{t=1}^{\infty} \lambda^{t-1} r^i$ függvény a H_∞ halmazon a szorzat-topológiára nézve folytonos.

3.5. Definíció. Adott egy $\Gamma = \langle I, S, (A^i(s))_{s \in S}^{i \in I}, q, r \rangle$ sztochasztikus játék, az $s_1 \in S$ kezdeti állapot, a Λ diszkontfüggvény és a $\lambda \in (0, 1]$ diszkontfaktor. A $\sigma_* = (\sigma_*^i)_{i \in N} \in \Sigma$ stratégiaprofil Nash-egyensúlya a Γ általánosított diszkontált sztochasztikus játéknak az s_1 állapotban, a Λ diszkontfüggvény és a λ diszkontfaktor mellett, ha minden $i \in N$ játékos minden $\sigma^i \in \Sigma^i$ stratégiája esetén

$$\gamma_\Lambda^i(s_1; \sigma_*) \geq \gamma_\Lambda^i(s_1; (\sigma^i, \sigma_*^{-i})).$$

Egy σ_* stratégiaprofil általánosan diszkontált (Nash-)egyensúly, ha minden kezdeti állapotban általánosan diszkontált egyensúly.

Egy sztochasztikus játékot kétszemélyesnek hívunk, ha csak két játékos szerepel benne ($|I| = 2$). Egy kétszemélyes sztochasztikus játékot zérus összegűnek nevezünk, ha minden $s \in S$ állapotra, $a^1 \in A^1(s)$ és $a^2 \in A^2(s)$ akcióra $r^1(s, (a^1, a^2)) + r^2(s, (a^1, a^2)) = 0$.

A zérus összegű sztochasztikus játékok esetében bevezethetjük a játék értékét a kifizetésfüggvények segítségével. Az egyszerűség kedvéért a 3.6. Definícióban jelöljük a λ -diszkontált kifizetést az egyes játékos „szemszögéből”, azaz $\gamma_\lambda(s; \sigma^1, \sigma^2) = \gamma_\lambda^1(s; \sigma^1, \sigma^2) = -\gamma_\lambda^2(s; \sigma^1, \sigma^2)$; és tegyük ugyanígy a hosszú távú átlagos kifizetés esetében is: $\gamma_{ls}(s; \sigma^1, \sigma^2) = \gamma_{ls}^1(s; \sigma^1, \sigma^2) = -\gamma_{ls}^2(s; \sigma^1, \sigma^2)$.

Legyen adott egy véges zérus összegű sztochasztikus játék $s_1 \in S$ kezdeti állapottal. Ekkor a (4)-beli $\gamma_\lambda(s_1)$ -re vonatkozó összefüggést Shapley [25], míg a $\gamma_{ls}(s_1)$ vonatkozó összefüggést Mertens és Neyman [19, 20] látta be:

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma^1 \in \Sigma^1} \inf_{\sigma^2 \in \Sigma^2} \gamma_\lambda(s_1; \sigma^1, \sigma^2) &= v_\lambda(s_1) = \inf_{\sigma^2 \in \Sigma^2} \sup_{\sigma^1 \in \Sigma^1} \gamma_\lambda(s_1; \sigma^1, \sigma^2), \\ \sup_{\sigma^1 \in \Sigma^1} \inf_{\sigma^2 \in \Sigma^2} \gamma_{ls}(s_1; \sigma^1, \sigma^2) &= v_{ls}(s_1) = \inf_{\sigma^2 \in \Sigma^2} \sup_{\sigma^1 \in \Sigma^1} \gamma_{ls}(s_1; \sigma^1, \sigma^2). \end{aligned} \quad (4)$$

3.6. Definíció. Adott egy véges zérus összegű sztochasztikus játék $s_1 \in S$ kezdeti állapottal. Ekkor a (4)-beli $v_\lambda(s_1)$ -t a sztochasztikus játék λ -diszkontált értékének, míg $v_{ls}(s_1)$ -t a hosszú távú átlagos értékének nevezzük.

4. Folytonos általánosított játékok

Most térjünk át az egyetlen időszakkal és állapottal rendelkező játékokhoz, ezen belül is a 4.1. Definícióban bevezetésre kerülő folytonos általánosított játékok

osztályához. Erre a lépésre azért lesz szükségünk, mert egy sztochasztikus játék egyensúlyát a megszokott fixponttételen alapuló megközelítéssel akarjuk vizsgálni.

4.1. Definíció. Egy $\Gamma = \langle I, P, (A_i)_{i \in I}, F, (f_i)_{i \in I} \rangle$ listát folytonos általánosított játéknak nevezünk, ha

1. I a játékosok nemüres, véges halmaza;
2. P nemüres topologikus vektortér, a kimenetek halmaza;
3. A_i az i játékos nemüres akcióhalmaza, $A = \prod_{i \in I} A_i$ az akcióprofilok halmaza;
4. $F: A \rightarrow P$ olyan függvény, ami
 - affin,
 - $F(A)$ kompakt és konvex,
 - $F(A_i \times \{a_{-i}\})$ kompakt és konvex, minden $i \in I$ játékosra és $a_{-i} \in A_{-i}$ csonka akcióprofilra,
5. $f_i: P \rightarrow \mathbb{R}$ az $i \in I$ játékos kifizetőfüggvénye, ami
 - folytonos,
 - konkáv az $F(A_i \times \{a_{-i}\})$ halmaz felett minden $i \in I$ játékosra és $a_{-i} \in A_{-i}$ csonka akcióprofilra.

A következőkben a folytonos általánosított játékok egy részosztályát vezetjük be.

4.2. Definíció. Legyen $\Gamma_B = \langle I, (A_i)_{i \in I}, (f_i)_{i \in I} \rangle$ egy játék, ahol

- I a játékosok nemüres, véges halmaza;
- A_i az i játékos nemüres akcióhalmaza, $A = \prod_{i \in I} A_i$ az akcióprofilok halmaza;
- $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ az $i \in I$ játékos kifizetőfüggvénye.

Ha az előbbi $\Gamma_B = \langle I, (A_i)_{i \in I}, (f_i)_{i \in I} \rangle$ játékhoz létezik a $\hat{\Gamma}_B = \langle I, (\hat{A}_i)_{i \in I}, (\hat{f}_i)_{i \in I} \rangle$ játék, ahol

- $\hat{A}_i = \Delta(A_i)$ minden $i \in I$ játékosra,
- $\hat{f}_i(\mu_1, \dots, \mu_n) = \int_A f_i d(\mu_1 \times \dots \times \mu_n)$;

akkor ezt a $\hat{\Gamma}_B$ játékot a Γ_B játék kevert bővítésének hívjuk.

A kevert bővítés azonban nem mindig létezik, ahogy ezt az általánosított Wald-játék [36] esetében láthatjuk.

4.1. *Példa. (Általánosított Wald-játék)* Az általánosított Wald-játék egy olyan $\langle I, (A_i)_{i \in I}, (f_i)_{i \in I} \rangle$ játék, ahol

- $I = \{1, 2\}$,
- $A_i = ([0, 1], \tau_d)$, azaz a $[0, 1]$ intervallum a diszkrét topológiával minden $i \in I$ játékosra,
- a játékosok kifizetésfüggvénye pedig

$$f_1(a_1, a_2) = -f_2(a_1, a_2) = \begin{cases} 1 & \text{ha } a_1 \geq a_2, \\ 0 & \text{ha } a_1 < a_2. \end{cases}$$

Az általánosított Wald-játéknak nincs kevert kiterjesztése. Vegyük észre, hogy f_1 pontosan a $G = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x \geq y\}$ halmaz felett 1, különben 0. Ebből kifolyólag az f_1 függvény a G halmaz indikátorfüggvénye: $f_1 = \chi_G$.

Ugyanakkor G nincs benne a cylinderhalmazok generálta σ -algebrában ($[0, 1] \times [0, 1]$ felett), azaz f_1 nem integrálható. Magyarán szólva $\hat{f}_1$ nem definiált, azaz az általánosított Wald-játéknak nincs kevert kiterjesztése.

A 4.1. Állításban elégséges feltételt adunk a kevert bővítés létezésére.

4.1. ÁLLÍTÁS. Legyen $\Gamma_B = \langle I, (A_i)_{i \in I}, (f_i)_{i \in I} \rangle$ a 4.2. Definícióban szereplő játék, ahol A_i kompakt metrizálható tér és f_i a szorzattopológiára nézve folytonos függvény minden $i \in I$ -re. Ekkor a Γ_B játéknak van kevert bővítése.

Továbbá a kevert bővítés egy folytonos általánosított játék.

Bizonyítás. A_i feltevésünk szerint metrizálható minden $i \in I$ játékos esetén, ezért $\mu_i \in \Delta(A_i)$ belső reguláris valószínűségi mérték [1, 12.5. tétel]. Mivel ezenfelül A_i kompakt halmaz is, emiatt minden zárt részhalmaza is kompakt, így $\mu_i \in \Delta(A_i)$ valószínűségi mérték feszes.

Feltevésünk szerint tetszőleges $i \in I$ játékos f_i kifizetésfüggvénye folytonos a szorzattopológiában, ezért ezen kifizetésfüggvények integrálhatók tetszőleges, a szorzattopológia Borel-halmazain értelmezett valószínűségi mérték szerint. Továbbá tetszőleges $\mu_i \in \Delta(A_i)$, $i \in I$, esetén $\mu = \times_{i \in I} \mu_i$ egy valószínűségi mérték a cylinderhalmazok által generált σ -algebrán. Könnyen látható, hogy μ feszes.

Mivel A kompakt metrizálható tér, ezért $\Delta(A)$, az A Borel-halmazain értelmezett valószínűségi mértékek halmaza, tetszőleges eleme feszes. Ezért μ egyértelműen kiterjeszthető az A Borel-halmazain értelmezett valószínűségi mértékké. Tehát a továbbiakban μ alatt a $\Delta(A)$ egy elemét értjük.

Tehát a 4.2. Definícióban bevezetett $\hat{f}_i$ várható kifizetésfüggvény minden $i \in I$ játékosra létezik, azaz a Γ_B játék kevert bővítése $\langle I, (\Delta(A_i)_{i \in I}), (f_i)_{i \in I} \rangle$ létezik.

Tekintsük a $(C(A), \text{cba}(A))$ duális párt. Mivel A kompakt metrizálható, így $\Delta(A)$ is kompakt metrizálható lesz a gyenge* topológiában [1, 15.11. Tétel]³. Továbbá $\prod_{i \in I} \Delta(A_i)$ gyenge* zárt részhalmaza $\Delta(A)$ -nak, tehát gyenge* kompakt.

Könnyen látható továbbá, hogy a $\prod_{i \in I} \Delta(A_i)$ halmaz konvex. Továbbá feltevésünk szerint tetszőleges $i \in I$ játékos esetén $f_i \in C(A)$, így az $\hat{f}_i$ (várható) kifizetésfüggvény folytonos és lineáris, tehát konkáv is.

Tehát $\prod_{i \in I} \Delta(A_i)$ gyenge* kompakt, $\hat{f}_i$ lineáris folytonos függvény, $i \in I$.

Legyen $P = \prod_{i \in I} \Delta(A_i)$ és $F = \text{id}$. Világos, hogy F teljesíti a 4.1. Definícióban megkívántakat.

Ekkor a kevert kiterjesztés egy folytonos általánosított játék. $\square$

A következőkben a Nash-egyensúly [22, 23] fogalmát definiáljuk folytonos általánosított játékokra.

4.3. Definíció. Adott $\Gamma = \langle I, P, (A_i)_{i \in I}, F, (f_i)_{i \in I} \rangle$ folytonos általánosított játék. Ekkor $a^* \in A$ a Γ játék Nash-egyensúlya, ha tetszőleges $i \in I$ játékosra és tetszőleges $a_i \in A_i$ stratégiára

$$f_i \circ F(a^*) \geq f_i \circ F(a_i, a_{-i}^*).$$

Könnyen látható, hogy amennyiben $P = A$, azaz $F = \text{id}$, akkor visszakapjuk a normál játékok esetén jól ismert Nash-egyensúly [23] fogalmát.

4.1. Folytonos általánosított játékok egyensúlya

Tekintsük először az alkalmazott fixponttételt [11, 171–172. oldal].

4.1. TÉTEL. Legyen $\Phi: K \rightrightarrows K$ egy olyan halmazértékű leképezés, ahol $K \subset X$ egy nemüres, konvex, kompakt részhalmaza egy X Hausdorff topologikus vektortérnek, amire

- $\Phi(x) \neq \emptyset, \forall x \in K$,
- $\Phi(x)$ konvex, $\forall x \in K$,
- Φ felülről félig folytonos.

Ekkor a Φ leképezésnek létezik fixpontja, azaz van olyan $x \in K$, hogy $x \in \Phi(x)$.

³A $\Delta(A)$ halmazon a gyenge* topológia szubtilisát a

$$\left\{ \mu \in \Delta(A) : \left| \int_A f \, d\mu - \int_A f \, d\mu' \right| < \varepsilon \right\}$$

halmazok alkotják, ahol $f \in C(A)$, $\mu' \in \Delta(A)$ és $\varepsilon > 0$.

A 4.2. Tételben kimondjuk a Nash-egyensúly létezését a folytonos általánosított játékokra, amely a 4.1. Tétel alkalmazása. Megjegyezzük továbbá, hogy a 4.2. Tétel Glicksberg [11] eredményének általánosítása [11, 172–174. oldal].

4.2. TÉTEL. *Tetszőleges $\langle I, P, (A_i)_{i \in I}, F, (f_i)_{i \in I} \rangle$ folytonos általánosított játéknak van Nash-egyensúlya.*

Bizonyítás. Legyen n játékosunk, azaz $I = \{1, \dots, n\}$, és i tetszőleges játékos. Defináljuk a következő leképezést (legjobbválasz leképezés): tetszőleges $p = F(a) \in F(A)$ -ra

$$B_i(p) = \arg \max_{p' \in F(A_i \times \{a_{-i}\})} f_i(p').$$

Vegyük észre, hogy mivel $F(A_i \times \{a_{-i}\})$ kompakt halmaz és az f_i kifizetésfüggvény folytonos, ezért $B_i(p) \neq \emptyset$.

Továbbá az f_i kifizetésfüggvény konkáv az $F(A_i \times \{a_{-i}\})$ halmazon – amely feltevésünk szerint konvex halmaz –, ezért $B_i(p)$ konvex halmaz.

Végezetül mivel $F(A)$ kompakt halmaz, $F(A_i \times \{a_{-i}\})$ kompakt halmaz minden $a_{-i} \in A_{-i}$ -re, és az f_i kifizetésfüggvény folytonos, ezért a Berge-féle Maximum tétel [1, 17.31 Berge Maximum Theorem, 570. oldal] miatt B_i legjobbválasz leképezés felülről félig folytonos.

Legyen $B: P \rightrightarrows P$ a következő

$$B(p) = F \left(\prod_{i \in I} (F^{-1}(B_i(p)))_i \right),$$

minden $p \in F(A)$ -ra.

Világos, hogy tetszőleges $a \in \prod_{i \in I} (F^{-1}(B_i(p)))_i$ -re $F(a) \in B(p)$, minden $p \in F(A)$ -ra. Tehát $B(p) \neq \emptyset$ minden $p \in F(A)$ -ra.

Mivel F affin, ezért $\prod_{i \in I} (F^{-1}(B_i(p)))_i$ konvex halmaz. Tehát $B(p) = F(\prod_{i \in I} (F^{-1}(B_i(p)))_i)$ konvex halmaz minden $p \in F(A)$ -ra.

Végezetül, mivel a B_i leképezések felülről félig folytonosak minden $i \in I$ -re, ezért B is felülről folytonos.

Alkalmazzuk a 4.1. Tételt, azaz a B leképezésnek van fixpontja. Legyen $s^* \in F(A)$ a B leképezés egy fixpontja.

Ekkor tetszőleges $a^* \in A$, amelyre $s^* = F(a^*)$, a folytonos általánosított játék Nash-egyensúlya. $\square$

4.1. KÖVETKEZMÉNY. Legyen $\Gamma = \langle I, P, (A_i)_{i \in I}, F, (f_i)_{i \in I} \rangle$ egy olyan folytonos általánosított játék, amelyben $a \in A$ és $\hat{a} \in A$ stratégiaprofilok Nash-egyensúlyok és $F(a) = F(\hat{a})$. Ekkor tetszőleges $\beta \in [0, 1]$ esetén fennáll, hogy $\beta a + (1 - \beta)\hat{a}$ is Nash-egyensúly.

A 4.1. Következmény nem meglepő, hiszen ha egy játékban két különböző stratégiaprofil ugyanazt a lejáttszást generálja, akkor azok csak a meg nem valósult történetekben különböznek, azaz a konvex kombinációjuk is ugyanazt a lejáttszást generálja.

5. Sztochasztikus játékok diszkontálással

Ebben a részben az a célunk, hogy egy fixponttételen alapuló bizonyítást adjunk az általánosított diszkontált sztochasztikus játékok Nash-egyensúlyának létezésére. Megmutatjuk, hogy minden általánosított diszkontált sztochasztikus játék folytonos általánosított játék.

Mivel egy sztochasztikus játékban véges számú játékosunk van, ezért a 4.1. Definícióban szereplő megkötés teljesül a játékosok halmazára. A többi megkötést a következő segédtételekben tárgyaljuk.

Tekintsük a $(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty))$ párt, ahol – emlékeztetőül – $\mathcal{B}(H_\infty)$ a játékmenetek halmazán lévő Borel-féle σ -algebra (ami megegyezik $\mathcal{H}$ -val). Ekkor tetszőleges $s_1 \in S$ kezdeti állapot és $\sigma \in \Sigma$ stratégiaprofil mellett $(s_1, \sigma) \in \Delta(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty))$ adódik (Kolmogorov-féle kiterjesztési tétel).

Adott egy $\Gamma = \langle I, S, (A^i(s))_{s \in S}^{i \in I}, q, r \rangle$ sztochasztikus játék, az $s_1 \in S$ kezdeti állapot, a Λ diszkontfüggvény és a $\lambda \in (0, 1]$ diszkontfaktor. Továbbá legyen

- $P = \Delta(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty))$ a kimenetek halmaza;
- $A_i = \Sigma^i$, $i \in I$;
- $F: \Sigma \rightarrow P$ az a leképezés, hogy egy $\sigma \in \Sigma$ stratégiaprofil esetén $F(\sigma) \in \Delta(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty))$ a Kolmogorov-féle kiterjesztési tétel által adott valószínűségi mérték (az adott s_1 kezdeti állapot mellett);
- $f_i = \lambda d_\Lambda^i$ (ld. (3) egyenlet).

Tekintsük a következő lemmákat:

5.1. LEMMA. *Az F leképezés affin.*

Bizonyítás. A Kolmogorov-féle kiterjesztési tétel közvetlen következménye. $\square$

5.2. LEMMA. *$F(\Sigma)$ gyenge* kompakt halmaz.*

Bizonyítás. Mivel a játékmenetek H_∞ halmaza kompakt metrizálható tér, ezért $\Delta(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty))$ gyenge* kompakt (metrizálható) halmaz [1, 15.11. Tétel], ahol a duális pár a következő: $(C(H_\infty), \text{cba}(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty)))$.

Azt kell megmutatni, hogy minden rögzített s_1 kezdeti állapot mellett a stratégiaprofilok $F(\Sigma) = \{(s_1, \sigma): \sigma \in \Sigma\} \subset \Delta(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty))$ halmaza gyenge* zárt

halmaz (hiszen gyenge* kompakt halmaz gyenge* zárt részhalmaza gyenge* kompakt).

Vezessük be minden $t \in \mathbb{T}$ időszakra az alábbi két halmazt:

- $S_t = \{(s_1, \sigma)|_{H_t} : \sigma \in \Sigma \text{ és } H_t \subseteq H\}$ azon $\Delta(H_t, \mathcal{B}(H_t))$ elemek halmaza (ld. F definíciója), amelyek az s_1 kezdeti állapottal és a játéktörténetek H_t halmazával „kompatibilisek”,
- $U_t = \{\nu \in \Delta(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty)) : \nu|_{(H_t, \mathcal{B}(H_t))} \in S_t\}$ azon valószínűségi mértékek halmaza, amelyeket a játéktörténetek H_t halmazára megszorítva egy-egy S_t -beli stratégiaprofil generálja.

Láthatjuk, hogy minden $t \in \mathbb{T}$ esetén $U_t \subseteq \Delta(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty))$.

Vegyük észre, hogy minden $t \in \mathbb{T}$ időszakra az U_t gyenge* zárt részhalmaza $\Delta(H_\infty, \mathcal{B}(H_\infty))$ gyenge* kompakt halmaznak a végesség (véges dimenzió) miatt. Emellett minden $t \in \mathbb{T}$ időszakra $U_{t+1} \subseteq U_t$ teljesül.

Továbbá $F(\Sigma) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} U_t$, tehát tetszőleges s_1 kezdeti állapot esetén $F(\Sigma) = \{(s_1, \sigma) : \sigma \in \Sigma\}$ gyenge* zárt halmaz, tehát állításunkat beláttuk. $\square$

5.3. LEMMA. $F(\Sigma)$ konvex.

Bizonyítás. Világos, hogy Σ konvex halmaz. Mivel F affin (ld. 5.1. Lemma), ezért $F(\Sigma)$ konvex. $\square$

5.4. LEMMA. Tetszőleges $\sigma \in \Sigma$ stratégiaprofilra és $i \in I$ játékosra $F(\Sigma^i \times \{\sigma^{-i}\})$ konvex és kompakt.

Bizonyítás. Világos, hogy $\Sigma^i \times \{\sigma^{-i}\}$ konvex halmaz minden $i \in I$ -re és $\sigma^{-i} \in \Sigma^{-i}$ -re. Mivel F affin (ld. 5.1. Lemma), ezért $F(\Sigma^i \times \{\sigma^{-i}\})$ konvex minden $i \in I$ -re és $\sigma^{-i} \in \Sigma^{-i}$ -re.

$F(\Sigma^i \times \{\sigma^{-i}\})$ kompaktságának bizonyítása az 5.2. Lemma bizonyításával analóg módon megy. $\square$

A folytonos általánosított játék definíciójában a kifizetésfüggvényről feltettük, hogy folytonos és a játékos saját akciója tekintetében affin is. Ezt a tulajdonságát látjuk be a diszkontált kifizetésnek a következő Lemmában.

5.5. LEMMA. Minden $s_1 \in S$ kezdeti állapot, $\sigma \in \Sigma$ stratégiaprofil, $\lambda \in (0, 1]$ diszkontfaktor és Λ diszkontfüggvény mellett a $\gamma_\Lambda^i(s_1) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ Λ -diszkontált kifizetés affin függvény.

Bizonyítás. A Λ -diszkontált kifizetés definíciójának (ld. (3) képlet) közvetlen következménye. $\square$

Az előző Lemmák miatt adódik a következő állítás:

5.1. ÁLLÍTÁS. Minden általánosított diszkontált sztochasztikus játék folytonos általánosított játék.

A 3.5. és a 4.3. Definíciók, valamint az 5.1. Állítás miatt adódik, hogy

5.1. KÖVETKEZMÉNY. Adott egy $\langle I, S, (A^i(s))_{s \in S}^{i \in I}, q, r \rangle$ sztochasztikus játék, $s_1 \in S$ kezdeti állapot, Λ diszkontfüggvény és $\lambda \in (0, 1]$ diszkontfaktor. Ekkor $\langle I, P, (A_i)_{i \in I}, F, (f_i)_{i \in I} \rangle$ egy folytonos általánosított játék.

Vegyük észre, hogy előfordulhat az alábbi eset: $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ egy általánosított diszkontált sztochasztikus játék két eltérő stratégiaprofilja (azaz $\sigma \neq \sigma'$), de $F(\sigma) = F(\sigma')$.

Végül a fenti eredmények alapján kimondhatjuk, hogy az általánosított diszkontált kifizetéssel rendelkező sztochasztikus játékok a folytonos általánosított játékok osztályában találhatók, így létezik Nash-egyensúlyuk.

5.1. TÉTEL. Minden általánosított diszkontált sztochasztikus játéknak van Nash-egyensúlya.

6. A Big Match

A Big Match egy kétszemélyes zérus összegű sztochasztikus játék [10], ami a $t = 1$ időszakban a játékosok számára ismert $s_1 \in S$ állapotból indul. A játékosok egyszerre és egymástól függetlenül hozzák meg döntéseiket, ami által az aktuális állapot és a megjátszott akcióprofil egyértelműen meghatározza a $t = 2$ időszaki állapotot. A $t = 2$ időszakban a játékosok a döntésüket megint az aktuális állapot ismeretében hozzák meg egyszerre és egymástól függetlenül, így kialakítva a $t = 3$ időszakbeli állapotot, és így tovább.

Ezek alapján tehát a Big Match sztochasztikus játékra teljesül a 3. részben leírt, a sztochasztikus játékokat jellemző általános lefolyási séma.

	Bal (L)	Jobb (R)		Bal (L)		Jobb (R)
Fel (T)	1	0	Le (B)	0^{s_2}	Le (B)	1^{s_3}
Le (B)	0^{s_2}	1^{s_3}				
	(a) s_1 állapot			(b) s_2 állapot		(c) s_3 állapot

1. táblázat. Big Match játék állapotai és a hozzájuk tartozó kifizetések a sorjátékos szemszögéből.

Vegyük észre, hogy az s_2 és s_3 állapotok speciális állapotok, amibe ha a játék menete elér, azt már nem hagyja el. Az ilyen állapotokat elnyelő állapotnak nevezzük. Mivel a Big Match sztochasztikus játéknak csak az s_1 állapota nem elnyelő, emiatt a Big Match egy zérus összegű, elnyelő sztochasztikus játék.

A Big Match játékban a sorjátékos adott időszakbeli kifizetése 1, amennyiben a (Fel, Bal) vagy $(Le, Jobb)$ akcióprofilok valamelyike jön létre az aktuális állapotban, egyébként pedig 0 (lásd az 1. táblázatot).

A hagyományokat őrizve a játékosok kifizetésfüggvénye a Big Match sztochasztikus játékban a hosszú távú átlagos kifizetés. A Big Match játékot Gillette [10] vezette be és Blackwell és Ferguson [4] mutatta meg, hogy létezik hosszú távú átlagos értéke a játéknak.

6.1. TÉTEL. (Blackwell és Ferguson [4], 1. Tétel) *A Big Match sztochasztikus játéknak a hosszú távú átlagos értéke $\frac{1}{2}$.*

Ugyanakkor a Big Match játék olyan sztochasztikus játék, amely nem tartozik a folytonos általánosított játékok osztályába – ugyanis a hosszú távú átlagos kifizetés nem folytonos függvény még a stacionárius stratégiák esetében sem.

Ennek igazolására tegyük fel, a sorjátékos x stacionárius stratégiája ellen az oszlopjátékos végig az $(1, 0)$ stratégiát játssza. Jelöljük ezt a stacionárius stratégiát y -nal. Ekkor a sorjátékos hosszú távú átlagos kifizetése

$$\gamma_{ls}^1(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = (1, 0), \\ 0, & \text{ha } x \in \{(1 - p, p) : 0 < p \leq 1\}, \end{cases}$$

ami nem folytonos függvény.

A Big Match sztochasztikus játék esetén ismert, hogy az oszlopjátékosnak van optimális stratégiája az s_1 kezdeti állapotban, pontosabban van stacionárius optimális stratégiája; mégpedig az oszlopjátékos mindig az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ kevert akciót játssza. Ezzel szemben ismert, hogy a sorjátékosnak nincs ilyen stratégiája.

6.1. LEMMA. (Thuijsman [32], 3. Lemma) *A sorjátékosnak nincs optimális stratégiája az s_1 kezdeti állapot mellett.*

7. Összefoglalás

Cikkünkben a véges sztochasztikus játékok elméletét mutattuk be röviden. A fő célunk az volt, hogy egy új alternatív bizonyítást adjunk a véges általánosított diszkontált sztochasztikus játékok egyensúlyának létezésére. Ennek érdekében először bevezettük a folytonos általánosított játékok osztályát, amely játékok egyensúlyának létezését a Glicksberg-féle fixponttétel biztosítja. Ezután beláttuk, hogy a véges általánosított diszkontált sztochasztikus játékok az előbb említett játékosztályhoz tartoznak, így létezik egyensúlyuk.

A cikk végén a Big Match sztochasztikus játék példáján keresztül érzékeltettük, hogy nem minden sztochasztikus játék folytonos általánosított játék.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönik a bírálók konstruktív és javító megjegyzéseit és ajánlásait. Ezt a kutatást az NFHI (K146649) támogatta.

Hivatkozások

- [1] C.D. ALIPRANTIS ÉS K.C. BORDER: *Infinite Dimensional Analysis: a Hitchhiker's Guide*, Springer Berlin, (2006).
- [2] T. BEWLEY ÉS E. KOHLBERG: *The Asymptotic Theory of Stochastic Games*, Mathematics of Operations Research, Vol. **1** No. **3**, pp. 197–208 (1976). DOI: 10.1287/moor.1.3.197
- [3] D. BLACKWELL: *Discrete Dynamic Programming*, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. **33** No. **2**, pp. 197–208 (1962). DOI: 10.1214/aoms/1177704593
- [4] D. BLACKWELL ÉS T.S. FERGUSON: *The Big Match*, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. **39** No. **1**, pp. 159–163 (1968). DOI: 10.1214/aoms/1177698513
- [5] H. EVERETT: *Recursive Games*, Contributions to the Theory of Games (AM-39), Princeton University Press, Vol. **III**, pp. 47–78 (1958). DOI: 10.1515/9781400882151-004
- [6] A.M. FINK: *Equilibrium in a stochastic n-person game*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math., Vol. **28** No. **1**, pp. 89–93 (1964). DOI: 10.32917/hmj/1206139508
- [7] J. FLESC: *Stochastic games with the average reward*, PhD Thesis, University of Maastricht, the Netherlands (1998). DOI: 10.26481/dis.19981118jf
- [8] J. FLESC, J. KUIPERS, G. SCHOENMAKERS ÉS K. VRIEZE: *Subgame perfection in positive recursive games with perfect information*, Mathematics of Operations Research, Econ Theory, Vol. **35** No. **1**, pp. 193–207 (2010). DOI: 10.1287/moor.1090.0437
- [9] D. FUDENBERG ÉS D. LEVINE: *Subgame-perfect equilibria of finite-and infinite-horizon games*, Journal of Economic Theory, Vol. **31** No. **2**, pp. 251–268 (1983). DOI: 10.1016/0022-0531(83)90076-5
- [10] D. GILLETTE: *Stochastic games with zero stop probabilities*, Contributions to the Theory of Games (AM-39), Princeton University Press, Vol. **III**, pp. 179–188 (1958). DOI: 10.1515/9781400882151-011
- [11] I.L. GLICKSBERG: *A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem, with Application to Nash Equilibrium Points*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. **3** No. **1**, pp. 170–174 (1952). DOI: 10.2307/2032478
- [12] C. HARRIS: *A characterisation of the perfect equilibria of infinite horizon games*, Journal of Economic Theory, Vol. **37** No. **1**, pp. 99–125 (1983). DOI: 10.1016/0022-0531(85)90032-8
- [13] C. HARRIS: *Existence és Characterization of Perfect Equilibrium in Games of Perfect Information*, Econometrica, Vol. **53** No. **3**, pp. 322–334 (1985). DOI: 10.2307/1911658
- [14] C. HARRIS, P. RENY ÉS A. ROBSON: *The Existence of Subgame-Perfect Equilibrium in Continuous Games with Almost Perfect Information: A Case for Public Randomization*, Econometrica, Vol. **63** No. **3**, pp. 507–544 (1995). DOI: 10.2307/2171906

- [15] D. LEVHARI ÉS L.J. MIRMAN: *The Great Fish War: An Example Using a Dynamic Cournot-Nash Solution*, The Bell Journal of Economics, Vol. **11** No. **1**, pp. 322–334 (1980). DOI: 10.2307/3003416
- [16] Y. LEVY: *Discounted Stochastic Games With No Stationary Nash Equilibrium: Two Examples*, Econometrica, Vol. **81** No. **5**, pp. 1973–2007 (2013). DOI: 10.3982/ECTA10530
- [17] Y. LEVY ÉS A. MCLENNAN: *Corrigendum to „Discounted Stochastic Games With No Stationary Nash Equilibrium: Two Examples”*, Econometrica, Vol. **83** No. **3**, pp. 1237–1252 (2015). DOI: 10.3982/ECTA12183
- [18] A. MAITRA ÉS T. PARTHASARATHY: *On stochastic games*, Journal of Optimization Theory és Applications, Vol. **5**, pp. 289–300 (1970). DOI: 10.1007/BF00927915
- [19] J.F. MERTENS ÉS A. NEYMAN: *Stochastic games*, International Journal of Game Theory, Vol. **10**, pp. 53–66 (1981). DOI: 10.1007/BF01769259
- [20] J.F. MERTENS ÉS A. NEYMAN: *Stochastic games have a value*, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. **79** No. **6** pp. 2145–2146 (1982). DOI: 10.1073/pnas.79.6.2145
- [21] J. MILNOR ÉS L.S. SHAPLEY: *On Games of Survival*, Stochastic Games and Related Topics, Springer Dordrecht, Vol. **7**, pp. 207–233 (1982). DOI: 10.1007/978-94-011-3760-7_19
- [22] J. NASH: *Equilibrium points in n -person games*, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. **36** No. **1**, pp. 48–49 (1950). DOI: 10.1073/pnas.36.1.48
- [23] J. NASH: *Non-Cooperative Games*, Annals of Mathematics, Vol. **54** No. **2**, pp. 286–295 (1951). DOI: 10.2307/1969529
- [24] T.E.S. RAGHAVAN: *Non-Cooperative Games*, A Stochastic Game Model of Tax Evasion, Advances in Dynamic Games, Birkhäuser Boston, Vol. **8**, pp. 397–420 (2006). DOI: 10.1007/0-8176-4501-2_21
- [25] L.S. SHAPLEY: *Stochastic Games**, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. **39**, pp. 1095–1100 (1953). DOI: 10.1073/pnas.39.10.1095
- [26] R.S. SIMON: *The challenge of non-zero-sum stochastic games*, International Journal of Game Theory, Vol. **45** No. **1-2** pp. 191–204 (2016). DOI: 10.1007/s00182-015-0497-3
- [27] E. SOLAN: *Three-Player Absorbing Games*, Mathematics of Operations Research, Vol. **24** No. **3**, pp. 669–698 (1999). DOI: 10.1287/moor.24.3.669
- [28] E. SOLAN: *A Course in Stochastic Game Theory*, Cambridge University Press, (2022).
- [29] E. SOLAN ÉS N. VIEILLE: *Quitting games*, Mathematics of Operations Research, Vol. **26** No. **2**, pp. 265–285 (2001). DOI: 10.1287/moor.26.2.265.10549
- [30] E. SOLAN ÉS N. VIEILLE: *Stochastic games*, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. **112** No. **45**, pp. 13743–13746 (2015). DOI: 10.1073/pnas.1513508112
- [31] M. TAKAHASHI: *Equilibrium points of stochastic non-cooperative n -person games*, Journal of Science of the Hiroshima University, Series A-I (Mathematics), Vol. **28** No. **1**, pp. 95–99 (1964). DOI: 10.32917/hmj/1206139509
- [32] F. THUJSMAN: *The Big Match and the Paris Match*, Stochastic Games and Applications, Springer Dordrecht, Vol. **570**, pp. 195–204 (2003). DOI: 10.1007/978-94-010-0189-2_12

- [33] N. VIEILLE: *Two-player stochastic games I: A reduction*, Israel Journal of Mathematics, Vol. **119**, pp. 55–91 (2000). DOI: 10.1007/BF02810663
- [34] N. VIEILLE: *Equilibrium in 2-person stochastic games II: The case of recursive games*, Israel Journal of Mathematics, Vol. **119**, pp. 93–126 (2000). DOI: 10.1007/BF02810664
- [35] J. VON NEUMANN: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen, Vol. **100**, pp. 295–320 (1928). DOI: 10.1007/BF01448847
- [36] A. WALD: *Generalization of a Theorem By v. Neumann Concerning Zero Sum Two Person Games*, Annals of Mathematics, Vol. **46** No. **2**, pp. 281–286 (1945). DOI: 10.2307/1969023
- [37] W. WINSTON: *A Stochastic Game Model of a Weapons Development Competition*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. **16** No. **3**, pp. 411–419 (1978). DOI: 10.1137/0316026



Balog Imre 1991-ben született Békéscsabán. BSc és MSc tanulmányait a Budapesti Corvinus Egyetemen (BCE) végezte el. Jelenleg a BCE Közgazdasági és Gazdaságinformatikai Doktori Iskola hallgatója. Fő kutatási területe a nemkooperatív játékelmélet.

Balog Imre

Budapesti Corvinus Egyetem,
Közgazdasági és Gazdaságinformatikai Doktori Iskola
imrebalog1991@gmail.com

Pintér Miklós a Budapesti Corvinus Egyetemen a Corvinus Center for Operations Research kutatóközpontban dolgozik. Fő kutatási területei: döntéselmélet, játékelmélet, matematikai közgazdaságtan és operációkutatás.

Pintér Miklós

Budapesti Corvinus Egyetem,
Corvinus Center for Operations Research
pmiklos@protonmail.com

CONTINUOUS GENERALIZED GAMES

IMRE BALOG, MIKLÓS PINTÉR

In this article, we focus on finite stochastic games. After introducing the basic concepts and giving a brief mathematical overview, we examine the existence of equilibrium for finite stochastic games.

Our goal is to use a new concept – continuous generalized game – to provide a different proof for the existence of equilibrium for finite generalized discounted stochastic games. We prove that all finite generalized discounted stochastic games are so-called continuous generalized game. After that, we show that every continuous generalized game has an equilibrium.

Furthermore, through the example of one of the most well-known classical stochastic games, the Big Match, we illustrate that if the players' payoffs are given by the long-run average reward instead of the generalized discounted reward, then the finite stochastic game no longer necessarily belongs to the class of continuous generalized games, and even in the case of Big Match, it has no equilibrium either.

PARAMÉTERES AKTIVÁCIÓS FÜGGVÉNY ÉS JELENTŐSÉGE A NEURÁLIS HÁLÓK ÉRTELMEZHETŐSÉGÉBEN

PUSZTAHÁZI LUCA SÁRA, EIGNER GYÖRGY, CSISZÁR ORSOLYA

A mesterséges intelligencia, különösen a mélytanulási modellek forradalmasítják az üzleti és technológiai világot. Napjaink egyik legnagyobb kihívása a mélytanulásban az értelmezhetőség problémájának megoldása. A modellek átláthatóságának, teljesítményének és biztonságának javítására (XAI: eXplainable Artificial Intelligence) egyre égetőbb szükség van. A neurális hálózatok folytonos logikával és többkritériumú döntéshozatali eszközökkel való kombinálása hozzájárulhat a jobb értelmezhetőséghez, átláthatósághoz és biztonsághoz az orvosi, mérnöki és üzleti alkalmazásokban. Ez a megközelítés más fejlődő módszerekkel együtt a neuroszimbolikus hibrid mesterséges intelligenciához, a mesterséges intelligencia kutatásának újszerű területéhez tartozik, amely a hagyományos szabályalapú megközelítéseket modern mélytanulási technikákkal kombinálja. A neuroszimbolikus modellekről bebizonyosodott, hogy a hagyományos modellekhez képest lényegesen kevesebb adattal is nagy pontosságot érnek el. A neurális hálózatok és a szimbolikus rendszerek kiegészíthetik egymás erősségeit és gyengeségeit, így pontos, min-tavételi szempontból hatékony és értelmezhető rendszerek jöhetnek létre. Ez javíthatja a döntéshozatalt, bizalmat építhet a gépi tanulási modellek iránt, és hatékonyabb és eredményesebb folyamatokhoz vezethet a különböző iparágakban. Ebben az összefoglaló cikkben kutatócsoportunk e területen elért legújabb eredményeit ismertetjük.

1. Bevezetés

Az értelmezhetőség igénye a gépi tanulásban egyre nagyobb szerepet kap. A hagyományos neurális hálók gyakran nagyszámú paramétert tartalmaznak, így meglehetősen nehéz megfogalmazni, hogy miért hoz egy neurális háló bizonyos döntéseket. Számos életben található alkalmazási területen azonban elengedhetetlen, hogy az eredményül kapott döntés értelmezhető legyen. Néhány intuitív példa:

1. Az orvosok nem szeretnék, hogy neurális hálók is részt vegyenek a kezelések felírásában, amíg nem értik teljesen pontosan, hogy mely tünetek kombinációja indokolja az adott kezelést.

2. A biztosítók modelljeit ellenőrizni kell annak érdekében, hogy egyetlen ki-sebbséget se érjen hátrányos megkülönböztetés.
3. A robotfejlesztőknek érteniük kell, hogy adott környezeti feltételek mellett miért hoznak a robotok bizonyos, akár látszólag ellentmondásos döntéseket.
4. Amikor egy önvezető jármű balesetet szenved, mind jogi, mind mérnöki szem-pontból fontos ismerni a jármű döntéseinek indokait.

Mindegyik esetben értelmezhetőbbé válna a modell, ha a neurális hálózatot logikai kifejezésként tudnánk leírni.

A folytonos logika bevonása ígéretes út az értelmezhető modellek irányába, hi-szen ahhoz, hogy a számítások természetes nyelven megfogalmazhatók legyenek, jó szolgálatot tesznek a pontatlan, nem teljesen precíz kifejezések. A szakértők által megfogalmazott szabályok digitális nyelvre történő „lefordításához” és a termés-zetes nyelv, valamint az emberi gondolkodás jobb modellezése érdekében dolgozta ki Lotfi Zadeh a fuzzy logika alapjait. Zadeh a korai 1960-as években megfigyelt egy különös jelenséget: a szakértők általi vezérlés jobb eredményekhez vezet, mint az optimális automatikus vezérlés. Jobban meggondolva érthető a jelenség, mivel a szakértők olyan további tudást is használnak, amit nem lehetett az automati-kus vezérlőkbe beprogramozni. Ezt a további tudást pontatlan nyelvi elemekkel lehet megfogalmazni, mint például, „ha kicsit csökken a nyomás, akkor kicsit több anyagot kell beleengedni az edénybe”. Itt a „kicsit” szónak nincs pontos jelentése. A Zadeh által kidolgozott fuzzy logika segítségével ez a pontatlan tudás leírható precíz matematikai eszközökkel.

A neurális hálók és a folytonos logika összekapcsolása egyre nagyobb érdeklő-désnek örvend. Az adaptív folytonos logikai rendszereket évtizedek óta tanulmá-nyozzák [1, 2, 3], a neurális folytonos modellezés pedig továbbra is aktív kutatási téma [4, 5, 6]. Ezen módszerek ötvözésének a fő előnye az, hogy egy olyan mo-dellt eredményez, amely rendelkezik a hagyományos, „fekete doboz” típusú neurális hálók rugalmasságával és pontosságával, valamint a folytonos logikai rendszerek értelmezhetőségével és átláthatóságával. A mély neurális hálózatokban az adatfel-dolgozás általában lineáris transzformációk és az $f(x) = \max(0, x)$ rektifikált line-áris egység (ReLU) váltakozó végrehajtásával történik. Érdekes módon mindkét művelet, $f_{\&}(a, b) = \max(a + b - 1, 0)$ és $f_{\vee}(a, b) = \min(a + b, 1)$, könnyen ábrá-zolható ilyen neurális hálózati transzformációk kompozíciójaként. Ez a tény segít értelmezni a mély neurális hálózatokban lévő transzformációkat „és”- és „vagy”-műveletek formájában – így lehetőséget adva arra, hogy a mély neurális hálózatok empirikus sikerét kiegészítsük az eredmények természetes nyelvi interpretációjával [7, 9].

Az emberi viselkedés tanulmányozása fontos összetevője több tudományterület-nek, például a számítástudománynak, mesterséges intelligenciának, neurális háló-zatoknak, kognitív tudománynak, filozófiának és pszichológiának. Gyakran feltéte-lezzük, hogy a viselkedést az észlelés, a tudás és a mentális folyamatok befolyásol-

ják. Az emberi viselkedés modellezéséhez olyan számítógépes-logikai rendszerekre van szükség, amelyek képesek magas szintű gondolkodást kezelni. Ilyen rendszerek közé tartoznak a klasszikus logika, a nemmonoton logika, a modális és temporális logika. Az emberi viselkedés modellezésében a gépi tanulás alapú modellek közül elsősorban a kapcsolati modellek, mint a feedforward és rekurrens hálózatok, szimmetrikus és mély hálózatok, valamint az önszervező hálózatok játszanak nagy szerepet. Azok a modellek, amelyek foglalkoznak a kognitív folyamatok valószínűségi jellegével, például a Bayes hálók, a Markov döntési folyamatok és a valószínűségi logikai modellek, szintén fontosak a viselkedés modellezésében a bizonytalanság kezelésére [10].

Jelen cikkben röviden bemutatjuk egy hibrid neuroszimbolikus modell matematikai hátterét és kutatócsoportunk e területen elért legújabb eredményeit.

2. Neurális hálók és a folytonos logika

A gépi tanulásban a számítási idő minimalizálása nagy adathalmaz esetén természetesen elengedhetetlen. Ideális esetben azonban a számításoknak értelmezhetőnek is kell lenniük, mivel akár az időjárás, akár a banki kölcsön esetén meg kell magyarázni a kérdező számára, hogy miért az adott eredményt adta a matematikai modell.

A gyors számításokra vonatkozó igény természetes úton vezet a neurális hálók használatához, mivel azok jellegükben fogva párhuzamos műveleteket tartalmaznak, amelyek nagyban hozzájárulnak a számolás sebességének növeléséhez. A függvényválasztás tekintetében a lineáris függvények a leggyorsabban számolhatók, a nemlineáris függvények közül pedig az egyváltozós $y = s(z)$ alakúak. Ezáltal eljutunk a neurális hálók réteges felépítéséhez, melyben minden réteg tartalmaz egy lineáris transzformációt és egy, a lehető leggyorsabban kiszámolható nemlineáris transzformációt, és a rétegek egymás után számolandók. A nemlineáris függvényt ebben az esetben aktivációs függvénynek hívjuk. Az aktivációs függvények közül hagyományosan a legerőteljesebb a szigmoid ($s(z) = 1/(1 + \exp(-z))$) függvény. Az utóbbi időben azonban egyre sikeresebb a ReLU ($s(z) = \max(0, z)$) függvény, amely a negatív bemeneteket nullára korrigálja, míg a pozitív bemeneteket változatlanul hagyja.

Az értelmezhetőség igénye természetes úton vezethet érvelés, valamilyen típusú logika irányába. A folytonos logika a hagyományos, kétértékű logikával ellentétben, ahol minden kijelentés vagy igaz, vagy hamis (1 és 0 számokkal reprezentálva), bizonyossági fokokkal dolgozik, amelyek köztes értékeket vesznek fel a $[0,1]$ intervallumban. Ezzel a megközelítéssel a klasszikus logikánál jobban modellezi az emberi gondolkodást.

A logikai neuronokon alapuló neurális háló elterjedt kutatási téma a széleskörű alkalmazhatóság és értelmezhetőség miatt. Ezek a modellek kiválóan alkalmazha-

tók például mintázatok klasszifikációjára, idősorok előrejelzésére, árverési csalások kiszűrésére, illetve nemlineáris folyamatok elemzésére. A logikai neuronok nemlineáris leképezések $[0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ között, ahol az „és” neuronok leggyakrabban t-normákat, míg a „vagy” neuronok t-konormákat (s-normákat) reprezentálnak.

[16]-ban a szerzők ezért azt elemzik, hogy a folytonos logika mely „és” és „vagy” operátorai reprezentálhatók a leggyorsabb, egy rétegű neurális hálóval, illetve hogy mely aktivációs függvény használható az adott reprezentáció esetén. Megmutatható [16], hogy az egyetlen olyan „és” és „vagy” operátorok, amelyeket egy egy rétegű neurális hálóval ki lehet számítani, azok az

$$f_{\&}(a, b) = \max(a + b - 1, 0), \quad (1)$$

valamint

$$f_{\vee}(a, b) = \min(a + b, 1) \quad (2)$$

függvények, a ReLU függvény pedig az az aktivációs függvény, amellyel ezek a leggyorsabban kiszámíthatók. Ez a megfigyelés a függvény növekvő népszerűségét is magyarázza.

Egy további érdekes tulajdonság is alátámasztja a fenti operátorok használatát. A folytonos logikában az ellentmondás törvénye (amely szerint x és $\text{nem } x$ mindig hamis) és a kizárt harmadik törvénye (x vagy $\text{nem } x$ mindig igaz) nem mindig teljesülnek. Azokban a rendszerekben, amelyekben az „és”, „vagy” és „nem” műveletek hármasa kielégíti a fenti két törvényt, az „és” és „vagy” operátorok éppen a fenti ((1), (2)) függvényekkel izomorfak [7, 8].

3. Uninormák és a paraméteres aktivációs függvény

Az emberi gondolkodásban a logikai operátorokon kívül a kevert operátorok is fontos szerepet játszanak, ahol a magas bemeneti értékek kompenzációt nyújthatnak az alacsonyabb bemeneti értékeknek. Emiatt Yager és Rybalov [17] bevezették az uninorma fogalmát, amely általánosítja a t-normát és a t-konormát (s-normát). Azóta egyre több kutatás szól az uninormákról mind elméleti, mind gyakorlati szempontból, melynek során hasznosnak bizonyultak több területen is, mint például szakértői rendszerek és folytonos logikai integrálok esetén.

A folytonos logikai „és” és „vagy” műveleteket modellező neuronok mellett ezért új fajta kapcsolók, mint például az uninormák és nullnormák használata is egyre jobban terjed. Az uninormák alacsony bemeneti értékek esetén konjunkcióként, magas bemeneti értékek esetén diszjunkcióként viselkednek, míg a nullnormák éppen fordítva. Vegyes bemeneti értékek esetén mindkét típus átlagoló függvényként viselkedik, így fontos szerepet játszanak a többváltozós döntési modellekben.

3.1. Definíció. (Uninorma, Yager és Rybalov, 1996) Uninormának hívjuk azt az $U : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ leképezést, amely kommutatív, asszociatív, nemcsökke-

nő és létezik $e \in [0, 1]$ neutrális eleme, melyre $U(e, x) = x$ minden $x \in [0, 1]$ esetén teljesül.

3.2. Definíció. (*Aggregatív operátor, Dombi, 1982*) Aggregatív operátornak nevezzük azt az $a : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ leképezést, amelyre a következők teljesülnek:

- folytonos a $[0, 1]^2 \setminus \{(0, 1), (1, 0)\}$ halmazon;
- $a(x, y) < a(x, y')$, ha $y < y', x \neq 0, x \neq 1$;
 $a(x, y) < a(x', y)$, ha $x < x', y \neq 0, y \neq 1$;
- $a(0, 0) = 0$ és $a(1, 1) = 1$ (szélsőérték feltételek);
- létezik egy erős tagadás η , melyre $a(x, y) = \eta(a(\eta(x), \eta(y)))$,
ha $\{x, y\} \neq \{0, 1\}$ (self-De Morgan identity);
- $a(1, 0) = a(0, 1) = 0$ vagy $a(1, 0) = a(0, 1) = 1$.

A fő különbség az uninormák és az aggregatív operátorok definíciója között az, hogy az aggregatív operátorok önduális feltétele nem jelenik meg az uninormák definíciójában, míg az uninormák neutrális elem tulajdonsága nincs benne az aggregatív operátorok definíciójában. [7]-ben a szerzők vizsgáltak egy általános paraméteres keretrendszert a nilpotens konjunktív, diszjunktív, aggregatív és negáló operátorokhoz és megmutatták, hogyan használható az aggregatív operátor preferenciák modellezésére. [15]-ben a szerzők ezt felhasználva építenek egy modellt, ahol az aktivációs függvény egy általános operátorként szerepel, amely tartalmazza a bemeneti értékek közötti kompenzáció mértékét jelölő tanítható paramétert.

3.3. Definíció. (*Vágófüggvény*) Defináljuk a vágófüggvényt a következő formulával:

$$[x] = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{ha } 1 < x. \end{cases}$$

3.4. Definíció. (*Súlyozott általános operátor*) Legyenek $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ és $w_i > 0$ valós paraméterek, $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ monoton növekvő bijekció és $\nu \in [0, 1]$. A súlyozott általános operátor a következő formulával definiálható:

$$a_{\nu, \mathbf{w}}(\mathbf{x}) := f^{-1} \left[\sum_{i=1}^n w_i (f(x_i) - f(\nu)) + f(\nu) \right].$$

A súlyozott általános operátort az implementált modellben két változóval, konstans együtthatókkal és az identitás függvénnyel használjuk, $\mathbf{x} = (x, y)$; $\mathbf{w} = (w_1, w_2) = (1, 1)$; $f(x) = x$; azaz

$$a_{\nu}(\mathbf{x}) = [x + y - \nu].$$

A fenti operátor definíciójában szerepel a vágófüggvény, mely nem mindenhol differenciálható. Viszont a neurális háló gradiens alapú optimalizáló módszerek segítségével tanítható, melyhez szükség van az aktivációs függvény deriváltjára. Ennek érdekében bevezetjük a vágófüggvény jelenleg ismert legjobb közelítését, a squashing function-t, melyet az alábbi képlettel definiálhatunk [11, 12, 13]:

$$S_{a,\lambda}^{(\beta)}(x) = \frac{1}{\lambda\beta} \ln \frac{1 + e^{\beta(x-(a-\lambda/2))}}{1 + e^{\beta(x-(a+\lambda/2))}}.$$

Az implementációban a következő paraméterekkel használjuk: $\lambda = 1$, $a = \frac{1}{2}$, $\beta = 80$, azaz

$$S(x) = \frac{1}{80} \ln \frac{1 + e^{80x}}{1 + e^{80(x-1)}}.$$

A paraméteres aktivációs függvény így a következő: $S(x + y - \nu)$, melyben ν a tanítható paraméter.

1. táblázat. A súlyozott általános operátor három speciális esete

Típus	ν	$\mathbf{a}_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
Diszjunkció	0	$[x + y]$
Konjunkció	1	$[x + y - 1]$
Átlagoló operátor	0.5	$[x + y - 0.5]$

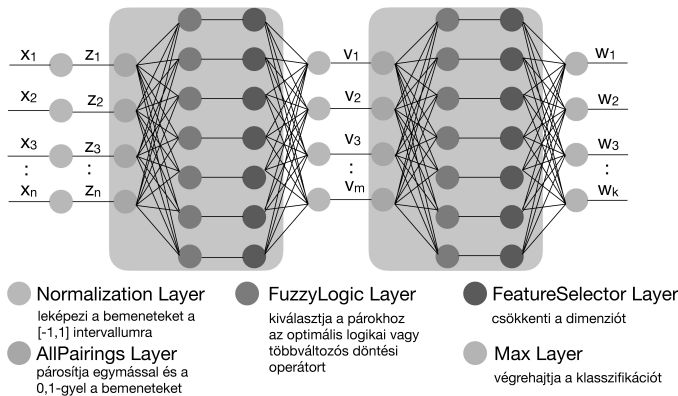
A paraméteres operátor így már differenciálható és ezáltal alkalmazható aktivációs függvényként. A neurális háló tanítása során a paraméteren keresztül az optimális logikai operátort is tanulja a rendszer. A paraméter értéke jelöli a bemenetek közötti kompenzáció mértékét, mely szerint lehet konjunktív, diszjunktív vagy átlagoló operátor, amint az 1. táblázatban is látható.

Gashler és társai [14] egy innovatív, paraméterezhető, differenciálható aktivációs függvényt használtak a mélytanulási architektúrában fuzzy logikai kifejezések tanulására. Ez az aktivációs függvény lehetővé teszi a neurális hálózat számára, hogy a bemeneti változók közötti kapcsolatokat megtalálja.

Kutatócsoportunk a Csiszár és Dombi által [7, 9]-ben megalapozott elméleti alapok alapján a Gashler és társai [14]-ben bemutatott modellt fejlesztette tovább [15]. Egy olyan hibrid neuroszimbolikus modellt alkalmaztunk, amelyben a logikai operátorok és egy uninorma tulajdonságú kompenzáló operátor egyetlen paraméteres függvény segítségével írható le. A tanulható paraméter egy paraméteres aktivációs függvénybe kerül. Így a neurális háló tanítása során az aktivációs függvényen keresztül a logikai operátorok paraméterei is finomodnak mindaddig, amíg a rendszer megtanulja az optimális műveletet a bemeneti értékek között.

4. A modell alkalmazása klasszifikációs problémákon

A bemutatott mély tanulási modell célja, hogy az emberek által érthető kapcsolatokat találjon a bemeneti tulajdonságok között. A fenti megközelítés egy paraméteres, differenciálható aktivációs függvényt használ, amely a nilpotens logikai rendszerek súlyozott általános operátorán alapul.



1. ábra. A neurális háló felépítése

A neurális háló implementációja [14, 15] 9 rétegből áll (1. ábra), a bemeneti értékeket először normalizálja a modell, ami azt jelenti, hogy leképezi a $[-1, 1]$ intervallumra. A következő réteg létrehozza a normalizált értékekből és az Igaz, Hamis értékekből az összes lehetséges párosítást. A harmadik rétegben a fenti aktivációs függvény segítségével a modell megtanulja az optimális folytonos logikai operátort mindegyik párosításhoz. A negyedik réteg csökkenti a dimenziót azáltal, hogy szelektál a bemeneti értékek között. A 2-4. rétegek együtt a neurális háló logikai része, ennek többszörös alkalmazásával mélyíthető a modell, jelen esetben két logikai rész tartalmaz. Két logikai rész között szükséges az értékek $[-1, 1]$ -re transzformálása a tanh függvény segítségével. Az utolsó, kilencedik réteg a klasszifikációért felel a max függvényt használva.

2. táblázat. Hibás besorolások aránya [15]

Adathalmaz	DNN	Fuzzy NN
Breast cancer	0,23	0,25
Diabetes	0,26	0,28
King-Rook vs King-Pawn	0,06	0,07
Vote	0,05	0,29

3. táblázat. Optimális logikai kifejezés [15]

Adathalmaz	Logikai kifejezés
Breast cancer	$((28)uni(34))uni((6)uni(34))$
Diabetes	$1 - ((1)uni(6))$
King-Rook vs King-Pawn	$((9)uni(34))uni((22)uni(34))$
Vote	$((25)uni(31))uni((11)uni(37))$

A modell (Fuzzy NN) validálása a UCI Machine Learning Repository-ból vett klasszifikációs problémákon történt. Referenciaként egy hagyományos mély neurális hálót (DNN) használtak. A logikai kifejezésekben szereplő *uni* művelet az uninorma tulajdonságú kompenzáló operátort jelöli, azaz $S(x + y - 0, 5)$. A logikai kifejezés kiértékelése után a végeredmény egy folytonos érték 0 és 1 között. A bináris klasszifikációk esetén a vágóérték 0,5. A hibás besorolások aránya (misclassification rate) a legtöbb esetben hasonló (2. táblázat), viszont értelmezhetőség szempontjából a folytonos logikát használó neurális háló előnyt élvez. Eredményül a klasszifikációs érték mellett a magyarázó változók közötti optimális logikai kapcsolatot is visszaadja (3. táblázat).

5. Uninormán alapuló folytonos értékű neurális háló finomítása regularizációval

A fent bemutatott modell egy lehetséges továbbfejlesztése [18], a neurális háló regularizációs paraméterének optimalizálása.

A gépi tanulásban az optimalizáció kulcsfontosságú a modellek fejlesztéséhez. A regularizációs technika segít abban, hogy az optimalizációs folyamat során olyan modelleket válasszunk ki, amelyek kedvezőbb tulajdonságokkal rendelkeznek [19]. A Ridge regresszió L2 regularizációt használ, amely a modell együtthatóinak négyzetösszegével arányosan bünteti az optimalizálás során minimalizálandó értéket, emiatt előnyben részesíti a kevésbé extrém értékű együtthatókkal rendelkező modelleket, melynek következtében hatékonyan megelőzi a túltanulást, különösen akkor, amikor korlátozott mennyiségű tanuló adat áll rendelkezésre. Egy másik népszerű regularizációs módszer a Lasso, mely L1 regularizációt használ, ami a modell együtthatóinak abszolút összegével büntet. Ennek következtében előnyt élveznek a ritka, többnyire nulla együtthatókkal rendelkező modellek.

[18]-ban az a cél, hogy a szerzők az ember által is érthető, átlátható logikai kifejezést eredményező modellt fejlesszenek, ezért a ritka együtthatók kifejezetten előnyösek. Így ebben az implementációban az L1 regularizációt alkalmazzák.

A λ regularizációs együttható korlátozza az optimalizálás során hozzáadott büntetés mértékét. Ezt az együtthatót figyelmesen kell meghatározni, hogy meg-

4. táblázat. Hagyományos neurális háló [18]

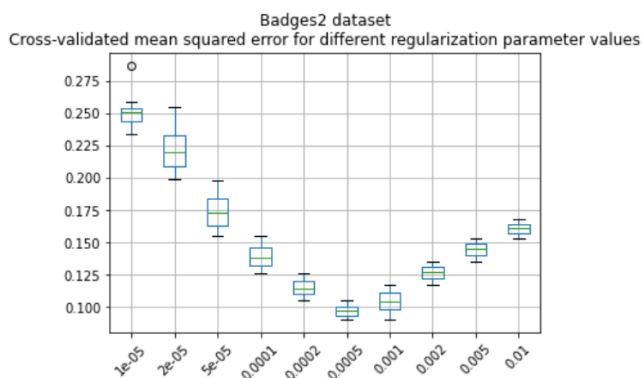
Adathalmaz	Átlagos hibaarány
Badges2	0,022
Breast cancer	0,284
Diabetes	0,270

legyen a megfelelő egyensúly a kevésbé komplex, de nagyobb pontosságú modellek között. Ha λ túl kicsi, akkor az eredményül kapott logikai kifejezés túl sok összetevőből áll, ha pedig túl magas értékű, akkor a modell várhatóan nem illeszkedik elég jól a tanuló adathalmazra, ezáltal hibás predikciókat eredményezve.

Az optimalizálás során mindegyik vizsgált regularizációs együttható ($\{1, 2, 5\} \times 10^{-5}$, $\{1, 2, 5\} \times 10^{-4}$, $\{1, 2, 5\} \times 10^{-3}$ és 10^{-2}) esetén 50 különböző futtatás történt. Az eredmények kiértékeléséhez a keresztvalidáció módszerét használták a szerzők [18].

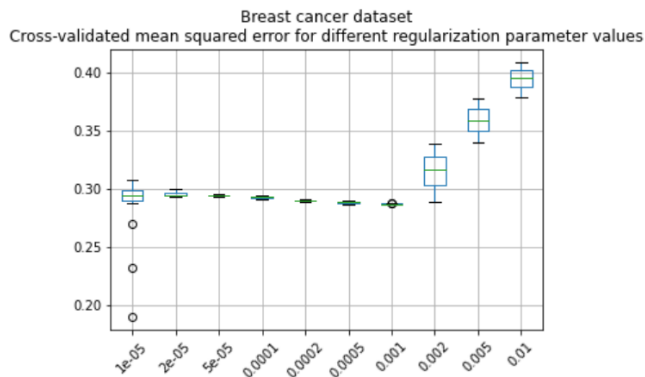
A referenciaként használt mély neurális háló keresztvalidációval kiértékelt átlagos hibaarányai a 4. táblázatban találhatóak. A 2., 3. és 4. ábrán a három vizsgált adathalmaz hibaarányainak eloszlása látható különböző regularizációs paraméterekkel történő kiértékelések esetén. Látható, hogy az adott adathalmazhoz tartozó optimális regularizációs paraméter esetén a modell hasonló pontossággal teljesít, mint a referenciául szolgáló mély neurális háló, viszont emellett egy értelmezhető logikai kifejezést is ad eredményül.

2. ábra. Keresztvalidáció a Badges2 adathalmaz esetén [18]

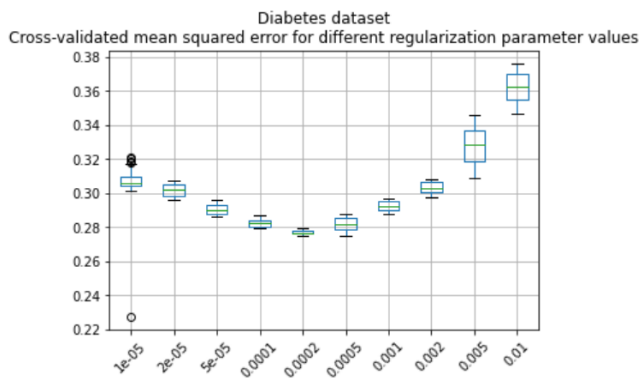


A különböző regularizációs együtthatókat keresztvalidációval kiértékelve a szerzők azt az eredményt kapták, hogy a kétváltozós klasszifikációs problémák ese-

3. ábra. Keresztvalidáció a Breast cancer adathalmaz esetén [18]



4. ábra. Keresztvalidáció a Diabetes adathalmaz esetén [18]



tén különböző adathalmazokra különböző regularizációs együttható lesz optimális. A számítások alapján optimális regularizációs paramétert alkalmazva rövid és könnyebben érthető logikai kifejezést adott eredményül a neurális háló, mint az eredeti, rögzített regularizációs paraméterrel.

A legjobban közelítő logikai kifejezéseket vizsgálva azt az eredményt kapták, hogy a leggyakrabban előforduló kifejezésekben szereplő művelet az *uni*, azaz az uninorma tulajdonságú kompenzáló operátor. Ezen logikai kifejezéseket, a keresztvalidáció során történő előfordulás darabszámát, a hozzá tartozó hibaarány értékeket és az előfordulásokhoz tartozó regularizációs paramétereket a 5. táblázat tartalmazza.

5. táblázat. Leggyakrabban előforduló logikai kifejezések

Adathalmaz	Kifejezés	Hibaarány	Regularizációs együtthatók
Badges2	$(3)uni((3)uni(6))$	0, 127	$\{1, 2, 5\} \times 10^{-4}$
Breast cancer	$((20)uni(29))uni((31)uni(32))$	0, 292	$\{1, 2\} \times 10^{-4}$
Diabetes	$(1)notuni(7)$	0, 299	$\{1, 2, 5\} \times 10^{-5}, \{1, 2\} \times 10^{-4}$

Az uninorma tulajdonságú kompenzáló operátor tapasztalt népszerűsége a hagyományos „és” és „vagy” operátorokkal szemben többek között azzal magyarázható, hogy a modell nem különbözteti meg a bináris klasszifikáció kétféle kérdésfeltevését. Például, a breast cancer, azaz a mellrák adathalmaz esetén kétféle kimenet lehetséges egy adott páciens vizsgálata során: vagy jelen van a betegség (1-es számmal jelölve) vagy nincs (0-val jelölve). Viszont, ugyanezt a problémát úgy is meg lehet fogalmazni, hogy mutassuk meg, mely páciensek esetén *nincs* jelen a betegség, azaz az egészségeseket jelöljük 1-essel, míg a betegeket 0-val. A logikai kifejezés kiértékelése során egy 0 és 1 közötti z számot kapunk, melynek függvényében a páciens diagnózisa 1, ha $z > 0,5$ vagy 0, ha $z < 0,5$. A neurális hálónak bármelyik típusú megfogalmazás esetén a megfelelő helyes választ kéne adnia, ami az egyik esetben z , a másikban viszont $1 - z$.

A 4. fejezetben bemutatott paraméteres aktivációs függvénynt használó neurális háló többek között az $S(x + y - \nu)$ függvényben található ν paramétert optimalizálja, amely utána meghatározza az x és y értékeket összekapcsoló logikai operátort. [20] -ban a szerzők megmutatták, hogy az $S(x + y - \nu) = z$ egyenletbe behelyettesítve az ellentétesen megfogalmazott problémát, $S(x' + y' - \nu) = z'$, ahol $x' = 1 - x$, $y' = 1 - y$ és $z' = 1 - z$, azt kapjuk eredményül, hogy $\nu = 0.5$. Ez a megközelítés egy lehetséges magyarázatot ad arra, hogy miért részesíti előnyben a neurális háló az *uni*, azaz az uninorma tulajdonságoló átlagoló operátort a diszjunkcióval és a konjunkcióval szemben.

6. Összefoglalás

Az értelmezhetőség egyre fontosabb tényezővé válik a gépi tanulásban. A hagyományos neurális hálók gyakran túl sok paramétert tartalmaznak, ami megnehezíti, hogy megértsük, miért hoznak bizonyos döntéseket. Az értelmezhetőség javítása érdekében a folytonos logikai rendszerek és neurális hálók kombinációja egyre nagyobb figyelmet kap. Ezek az új modellek rugalmasságot és pontosságot kölcsönöznek a neurális hálóknak, miközben lehetővé teszik a jobb értelmezhetőséget és átláthatóságot. A folytonos logika segít megfogalmazni a neurális hálózatokban lévő transzformációkat, és ezáltal lehetőséget nyújt az eredmények természetes nyelvi interpretációjára. A folytonos logika és neurális hálók kombinálása olyan eredményekhez vezet, amelyek mind a hagyományos neurális hálók rugalmasságát,

mind a folytonos logika értelmezhetőségét ötvözik. Ez az összekapcsolás egy ígéretes irány a gépi tanulásban és az értelmezhető modellek létrehozásában. Ennek a hibridizációnak egy ígéretes módja a vizsgált paraméteres aktivációs függvény, amely a paraméter választásától függően különböző, az érvelésben szereplő operátorokat tud modellezni. A paraméterek optimalizációjával lehetővé válik a neurális hálózat számára, hogy megtalálja a bemeneti változók közötti kapcsolatokat.

Köszönetnyilvánítás

A 2019-2.1.11-TÉT-2020-00217 számú projekt a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alap támogatásával valósult meg, a 2019-2.1.11-TÉT-2020-00217 támogatási konstrukció keretében.

Hivatkozások

- [1] J.-S.R. JANG ET AL. *Fuzzy modeling using generalized neural networks and kalman filter algorithm*, AAAI, Vol. **91**, pp. 762–767 (1991). DOI: 10.5555/1865756.1865795
- [2] J.-S.R. JANG: *Anfis: adaptive-network-based fuzzy inference system*, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. **23** No. **3**, pp. 665–685 (1993). DOI: 10.1109/21.256541
- [3] C.T. LIN ÉS C.S. G. LEE: *Neural fuzzy systems: a neuro-fuzzy synergism to intelligent systems*, IEEE Transactions on Neural Networks, Prentice-Hall, Inc., Vol. **7** No. **5**, p. 1316 (1996). DOI: 10.1109/TNN.1996.536328
- [4] S.X. CHEN, H.B. GOOI, ÉS M.Q. WANG: *Solar radiation forecast based on fuzzy logic and neural networks*, Renewable Energy, Vol. **60**, pp. 195–201 (2013). DOI: 10.1016/j.renene.2013.05.011
- [5] C.L.P. CHEN, Y.J. LIU, ÉS G.X. WEN: *Fuzzy neural network-based adaptive control for a class of uncertain nonlinear stochastic systems*, IEEE Transactions on Cybernetics, Vol. **44** No. **5**, pp. 583–593 (2014). DOI: 10.1109/TCYB.2013.2262935
- [6] E. KAYACAN, E. KAYACAN, ÉS M.A. KHANESAR: *Identification of nonlinear dynamic systems using type-2 fuzzy neural networks – a novel learning algorithm and a comparative study*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. **62** No. **3**, pp. 1716–1724 (2015). DOI: 10.1109/TIE.2014.2345353
- [7] J. DOMBI ÉS O. CSISZÁR: *Explainable Neural Networks Based on Fuzzy Logic and Multi-criteria Decision Tools*, Springer Nature, (2021). DOI: 10.1007/978-3-030-72280-7
- [8] J. DOMBI ÉS O. CSISZÁR: *The general nilpotent operator system*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. **261**, pp.1–19 (2015). DOI: 10.1016/j.fss.2014.05.011
- [9] O. CSISZÁR, G. CSISZÁR, ÉS J. DOMBI: *Interpretable neural networks based on continuous-valued logic and multicriterion decision operators*, Knowledge-Based Systems, Vol. **199**, 105972 (2020). DOI: 10.1016/j.knosys.2020.105972

- [10] T.R. BESOLD, A. D'AVILA GARCEZ, S. BADER, H. BOWMAN, P. DOMINGOS, P. HITZLER, K.U. KÜHNBERGER, L.C. LAMB, P.M. VIEIRA LIMA, L. DE PENNING, G. PINKAS, H. POON és G. ZAVERUCHA: *Neural-Symbolic Learning and Reasoning: A Survey and Interpretation*, Neuro-Symbolic Artificial Intelligence: The State of the Art, Vol. **342**, pp. 1–51 (2021). DOI: 10.3233/FAIA210348
- [11] J. DOMBI ÉS ZS. GERA: *The approximation of piecewise linear membership functions and Łukasiewicz operators*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. **154**, pp. 275–286 (2005). DOI: 10.1016/j.fss.2005.02.016
- [12] J. DOMBI ÉS O. CSISZÁR: *Squashing Functions*. In: *Explainable Neural Networks Based on Fuzzy Logic and Multi-criteria Decision Tools*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer, Cham., Vol. **408**, pp. 121–134 (2021). DOI: 10.1007/978-3-030-72280-7_7
- [13] D. ZELTNER, B. SCHMID, G. CSISZÁR ÉS O. CSISZÁR: *Squashing activation functions in benchmark tests: Towards a more explainable Artificial Intelligence using continuous-valued logic*, Knowledge-Based Systems, Vol. **218**, 106779 (2021). ISSN 0950-7051, DOI: 10.1016/j.knosys.2021.106779
- [14] L. GODFREY ÉS M. GASHLER: *A parameterized activation function for learning fuzzy logic operations in deep neural networks*, IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC), (2017). DOI: 10.1109/SMC.2017.8122696
- [15] O. CSISZÁR, L.S. PUSZTAHÁZI, L. DÉNES-FAZAKAS, M.S. GASHLER, V. KREINOVICH, ÉS G. CSISZÁR: *Uninorm-like parametric activation functions for human-understandable neural models*, Vol. **260**, 110095 (2022). DOI: 10.1016/j.knosys.2022.110095
- [16] K. ALVAREZ, J.C. URENDA, O. CSISZÁR, G. CSISZÁR, J. DOMBI, G. EIGNER, ÉS V. KREINOVICH: *Towards Fast and Understandable Computations: Which „And”- and „Or”-Operations Can Be Represented by the Fastest (i.e., 1-Layer) Neural Networks? Which Activations Functions Allow Such Representations?*, Acta Polytechnica Hungarica, Vol. **18** No. **2**, pp. 27–45 (2021). DOI: 10.12700/APH.18.2.2021.2.2
- [17] R.R. YAGER ÉS A. RYBALOV: *Uninorm aggregation operators*. Fuzzy Sets and Systems, Fuzzy Modeling, Vol. **80** No. **1**, pp. 111–120 (1996). DOI: 10.1016/0165-0114(95)00133-6
- [18] L.S. PUSZTAHÁZI, G. CSISZÁR, M.S. GASHLER, ÉS O. CSISZÁR: *Parametric activation functions modelling fuzzy connectives for better explainability of neural models*, 2022 IEEE 20th Jubilee International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY), pp. 77–82 (2022). DOI: 10.1109/SISY56759.2022.10036318
- [19] S.L. BRUNTON ÉS J.N. KUTZ: *Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*, Cambridge University Press, USA, 1st edition, (2019). DOI: 10.1017/9781108380690
- [20] O. CSISZÁR, G. CSISZÁR, M. CEBERIO, ÉS V. KREINOVICH: *Selecting the Most Adequate Fuzzy Operation for Explainable AI: Empirical Fact and Its Possible Theoretical Explanation*, (2023). CorpusID:259830061



Pusztaházi Luca Sára 1995-ben született Budapesten. BSc és MSc tanulmányait a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Természettudományi Karának Alkalmazott matematika szakán sztochasztika szakirányon végezte. Diplomamunkáinak témája az internetes adatforgalom multifraktál analízise volt. A Nokiánál Data Scientistként dolgozott, melynek során telekommunikációs adatok elemzésével, predikciójával foglalkozott. Jelenleg másodéves PhD hallgató az Óbudai Egyetem Alkalmazott Informatikai és Alkalmazott Matematikai Doktori Iskolájában. Kutatási témái

a megmagyarázható mesterséges intelligencia, a folytonos logika és a neurális hálók ötvözése. A PhD témakörében eddig 2 nemzetközi publikációja jelent meg.

PUSZTAHÁZI LUCA SÁRA

Óbudai Egyetem

pusztahazi.luca@uni-obuda.hu



Dr. Eigner György az Óbudai Egyetemen szerzett mechatronikai mérnöki alapidipломát cum laude, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen pedig egészségügyi mesterdiplomát summa cum laude minősítéssel. Doktori fokozatát az Óbudai Egyetemen szerezte summa cum laude minősítéssel alkalmazott informatika tudományágban 2017-ben. Dr. Eigner György az Óbudai Egyetem Neumann János Informatikai Karának dékánja, valamint a Biomatika és Alkalmazott Mesterséges Intelligencia Intézet vezetője, ahol jelenleg egyetemi docensként tevékenykedik. Kutatási területe az élettani kapcsolatokra vonatkozó fejlett szabályozási módszerek, a biomedikai mérnöki tudomány, az ember-beavatkozással működő

rendszerek, valamint a mesterséges intelligenciára épülő kibermedikai rendszerek.

EIGNER GYÖRGY

Óbudai Egyetem

eigner.gyorgy@uni-obuda.hu



Dr. Csizsár Orsolya az Eötvös Loránd Tudományegyetemen szerzett MSc diplomát matematikából, majd 2016-ban summa cum laude minősítéssel doktorált matematikából és számítástudományból az Óbudai Egyetemen. A németországi Aaleni Egyetemen a matematika és az alkalmazott mesterséges intelligencia professzora. Fő kutatási területe a megmagyarázható gépi tanulási módszerek fejlesztése.

CSISZÁR ORSOLYA

csizar.orsolya@uni-obuda.hu
orsolya.csizar@hs-aalen.de

PARAMETRIC ACTIVATION FUNCTION AND ITS SIGNIFICANCE IN THE INTERPRETABILITY OF NEURAL NETWORKS

LUCA SÁRA PUSZTAHÁZI, GYÖRGY EIGNER, ORSOLYA CSISZÁR

Artificial intelligence, especially deep learning models, are revolutionizing the business and technology world. One of the biggest challenges of deep learning today is solving the problem of interpretability. There is an increasingly pressing need to improve the transparency, performance, and safety of models (XAI: eXplainable Artificial Intelligence). Combining neural networks with continuous logic and multi-criteria decision-making tools can contribute to better interpretability, transparency, and safety in medical, engineering, and business applications. This approach, along with other emerging methods, belongs to neuro-symbolic hybrid artificial intelligence, a novel area of AI research that combines traditional rule-based approaches with modern deep learning techniques. Neuro-symbolic models have been proven to achieve high accuracy with significantly less data compared to traditional models. Neural networks and symbolic systems can complement each other's strengths and weaknesses, leading to precise, sample-efficient, and interpretable systems. This can improve decision-making, build trust in machine learning models, and lead to more efficient and effective processes across various industries. In this summary article, the latest results of our research group are presented in this field, comparing them to the most significant international trends.

Keywords: eXplainable AI, neural networks, fuzzy logic.

Mathematics Subject Classification (2000): 68T27.

A MAGYAR OPERÁCIÓKUTATÁS KEZDETEI A PUBLIKÁCIÓK FÉNYÉBEN

VIZVÁRI BÉLA

Kivonat

A dolgozat az operációkutatás indulására vonatkozó nemzetközi kitekintés után ismerteti a magyar szakmai és egyéb sajtóban fellelhető, az operációkutatásra (is) vonatkozó közleményeket 1965-ig. A legfontosabb tanulság az, hogy az operációkutatás sokkal szélesebb körben ismertté vált már ebben a korai időszakban, mint azt gondolni lehetne. Ennek több okát is detektálni lehet. Az ismertségből következőleg már ekkor számos alkalmazásra került sor.

1. Bevezetés

Az operációkutatás egy friss tudomány. Az 1930-as években indult. A II. világháború után nagyon gyorsan terjedt el az egész világon. Hazánkban is gyorsan ismertté vált abban a korban, amikor az akkori politikai rendszer bizonyos új tudományágakra gyanakvással tekintett. Krekó Béla már az 1950-es években tanította, Kornai János pedig 1959-ben és 1960-ban az Élet és Tudományban írt róla cikket.

Jelen dolgozat célja, hogy bemutassa az operációkutatás hazai elterjedtségét az 1965-ig terjedő időszakban a fellelhető szakmai folyóiratok és a napi sajtó alapján. Ezt egy rövid nemzetközi kitekintés után érdemes megtenni, hogy jobban lássuk, hogy mennyire jól tájékozott volt a magyar, szélesebb értelemben vett szakember gárda.

2. A kezdetek

Kezdetei mindössze a II. világháborút megelőző időkre nyúlnak vissza. Kantorovics ekkor készítette modelljeit. A radar célszerű használatának kidolgozására az 1930-as években állították fel az „Operational Research Group” nevű szervezetet a brit hadseregen belül. Amerikában a háborús idők nagy lehetőséget nyitottak arra, hogy a hadsereg és a haditengerészet kutatásokat támogasson, melyek között voltak mind sikeresek, mind sikertelenek. Dantzig ugyanezzel a lendülettel kapott támogatást. Az 1940-es évek végén, az 1950-es évek elején az operációkutatás közgazdasági alkalmazásai már javában folytak Amerikában. A terület

több, későbbi közgazdasági Nobel-díjas kutatója ebben az időszakban érte el legfontosabb eredményeit. Az operációkutatáshoz szorosan kapcsolódó Nobel-díjasok listája 2000-ig zárójelben a díj dátumával: Arrow (1972), Debreu (1983), Harsányi (1994), Kantorovics (1975), Koopmans (1975), Leontief (1973), Markowitz (1990), Nash (1994). A sorból egyrészt Harsányi lóg ki, aki legfontosabb eredményeit az 1960-as években érte el. Másrészt pedig Leontief, akinek fontos könyve már 1941-ben megjelent.¹ Ugyanitt érdemes megemlíteni, hogy a játékelméletet megalapozó Neumann-Morgenstern könyv viszont ugyanebben az időszakban íródott és jelent meg.

Egy, a szakmában terjedő városi legenda szerint az 1975-ben a díjazottak kiválasztásakor a harmadik jelölt George Dantzig volt, akit a bizottság azzal utasított el, hogy hozzájárulása túlságosan matematikai. Amennyiben ez igaz, a bizottság indoklása hibás. Már a világháborús időkben Dantzig a Pentagonban tervezéssel, a legkülönbözőbb dolgok tervezésével, beleértve a termelést is, foglalkozott. A háború vége után egy félévre visszatért az egyetemre, és megvédte a doktori disszertációját. Majd visszatért a Pentagonba, és a tervezés automatizálásán kezdett dolgozni 1946-ban. Világos tehát, hogy kutatásának az első pillanattól kezdve volt közgazdasági vonatkozása. 1947-ben találta meg a szimplex módszert és 1949-ben publikálta. Az INFORMS Dantzigről szóló megemlékezése² szerint még a két 1975-ös díjazott, azaz Kantorovics és Koopmans is csodálkozott, hogy Dantzigot kihagyták.

Dantzignál és a szimplex módszernél azért érdemes elidőzni, mert a lineáris programozás vált azon eszközzé, amivel problémákat lehetett megoldani a gyakorlatban. A számításokat egy ideig még számítógépes programok hiányában kézzel végezték. A terület rendkívül gyorsan fejlődött. Ismertté vált a lineáris programozás dualitás tétele, 1951-ben publikálták a Kuhn-Tucker tételt, amiről jóval később derült ki, hogy lényegében már 1939-ben megvolt, így lett belőle Karush-Kuhn-Tucker tétel. Dantzigről el kell mondani, hogy nagyon sok minden vele kezdődött az optimalizálás elméletében, akkor is, ha később nem folytatta különösebben a témát. Társszerzője az utazó ügynök feladat első pontos matematikai modelljének. Ezt a mai napig használják, sőt bizonyos értelemben az egyik legerősebb modell. Elsők között írt az egészértékű és sztochasztikus programozásról.

Az első egyetemi tárgyat operációkutatási témában az MIT-n hirdették meg 1948-ban [ORS]. A brit Operational Research Society 1950-ben alakult meg. Az első graduate program 1952-ben indult a ma Case Western Reserve University-nek nevezett egyetemen. Ezt követően számos egyetemen indultak hasonló programok. A híres és sokáig abszolút vezető szerepet játszó Operations Research című folyóirat 1952-ben indult az amerikai társaság lapjaként.³

¹Érdekes módon modellje és módszere a népgazdasági tervezés alapjává vált, amit az Országos Terhivatal fennállása során mindvégig alkalmazott.

²Még a szöveges részben az interjú fölött.

³The Operations Research Society of America.

3. A módszer

A jelen dolgozat alapanyagát az Arcanum adatbázisa, pontosabban az abból kiválogatott anyag képezi. Ebben mind tudományos folyóiratok, mind napi olvasásra szánt lapok megtalálhatók. Esetünkben, mint azt alább részletezem, mindkettő fontos. Technikai vonatkozásban tudni kell, hogy az Arcanum kulcsszavakra és rövidebb szövegekre nyújt keresési lehetőséget, nem pedig közvetlenül művekre, így könyvekre és dolgozatokra. A keresés annyi találatot ad, ahány oldalon a keresett szöveg előfordul. Például, ha a keresés szerzőre történik és az oldal fejlécében ott van a szerző neve, ahogy ez némely folyóiratnál szokásos, akkor a dolgozat összes oldala külön találatnak számít. Ehhez adódik az is, hogy egy dolgozat akár több tartalomjegyzékben, például havi és éves, is szerepelhet, amely előfordulások a keresés szempontjából újabb találatnak számítanak.

Keresés először az „operációkutatás” szóra történt. Azonban az 1950-es és ’60-as években ezt inkább kötőjellel, „operáció-kutatás” formában írták, de előfordul két szóban, mint „operáció kutatás” is. Azonban az egyik legelső fellelhető dokumentum, ami már az operációkutatásról szól, más forrásból származik. Erről részletesebben szó lesz.

A kapott eredmények feldolgozása során nyilvánvalóvá vált, hogy szükséges más kulcsszavakra is keresni. Érdekes módon a „lineáris programozás” nagyon korán előfordul. Viszont 1960-tól kezdve már feldolgozhatatlan mennyiségben fordul elő.⁴ Ezért ezt a kifejezést tartalmazó írások közül csak az 1950-es években megjelentek kerültek feldolgozásra. Szükségessé vált egyes szerzőkre külön rákeresni. A feldolgozás során kiderült, hogy bizonyos dolgozatok hivatkozási listájában feltüntetett hazai dolgozatok közül nincs meg minden az Arcanumban, mert például egy intézmény belső kiadványaiként jelent meg valami. Tehát a begyűjtött anyag ugyan nem teljes, de az akkor elérhető irodalom jelentős részét lefedi.

Az elmondottakból látszik, hogy a személyes visszaemlékezések, vagyis „oral history” feldolgozása nem szerepel a cikkben. Ennek oka, hogy a legelső operációkutatók közül a dolgozat készítésekor, azaz 2024-ben már senki sincs életben.⁵ Az 1980-as években készült egy kivételesen kettő szerzős szakdolgozat az ELTE TTK-n, aminek egyik szerzője volt felelős az operációkutatás akkor még életben lévő jeles alakjaival készült riportokért. Akkor még sok egykori szerző élt. Sajnos a szakdolgozatnak jelenleg nincs fellelhető példánya. Előkerülése esetén érdemes volna azt is kiadni.

⁴Ez persze szubjektív minősítés.

⁵Kivételt képezhetne Meszéna György, aki ugyanekkor töltötte be 93. évét. Ő azonban először Debrecenben tanított és az ATOMKI munkatársa volt, csak később kapcsolódott be az operációkutatásba.

4. Hazai viszonyok

Az 1950-es években több diszciplína megkapta a „burzsoá áltudomány” címkét. Ennek ellenére azok a tudományágak, amelyek ma besorolhatók a számítástechnika vagy informatika kategóriájába, korántsem voltak abban az időben annyira fejletlenek Magyarországon, mint ahogy azt gondolni lehetne. Az MTA Kibernetikai Kutató Csoportja (KKCS) már 1956-ban megalakult. Ez a csoport építette meg az első magyarországi, M-3 néven ismert számítógépet szovjet dokumentáció és a Szovjetunióból kapott alkatrészek alapján [1].⁶ Érdekes, hogy ezt a számítógépet Kornai már 1960-ban említi az operációkutatással összefüggésben [19]. Ugyanakkor azt, hogy kezdetben az MTA nem értette meg a számítástechnika jelentőségét, [1] alaposan bemutatja. Ide tartozik az M-3 második példánya munkálatainak leállítása⁷ és a megkapott Urál gép raktárban való tárolása éveken keresztül.

A KKCS munkatársai között olyan, később a hazai számítástechnika kiemelkedő jelentőségű szakembereit találunk, mint Dömölki Bálint, Hatvany József, Kovács Győző, Szelezsán János. A KKCS 1960-ban átalakult az MTA Számítástechnikai Központjává, ami a 1973-ban a máig létező SZTAKI egyik közvetlen elődje lett.

A kibernetika szót ma már csak ritkán használjuk. A vizsgált időszakban azonban a mai számítástechnika kifejezés megfelelője volt.

Magyarországon tulajdonképpen egy bonyolult helyzet jött létre. Egyes erők a fejlődés irányába hatottak, mások akadályozni igyekeztek azt. A területen a KKCS az elsők közé tartozott és főleg a műszaki oldalt támogatta. Szakmai és felhasználói oldalról több mag jött létre. Ide tartoznak a közgazdászok, akikről a következő fejezetben lesz szó. Az akkori Alkalmazott Matematikai Intézetben, ma Rényi Intézet, 1957-ben megalakult Prékopa András csoportja [11], ami az operációkutatás szempontjából kiemelkedő jelentőségűvé vált a későbbiek folyamán. A korszerű ismeretekkel rendelkezőket azonban nem lehet leszűkíteni erre a két kutatóhelyre. Az országba beérkező információ másokat is elért. Érdemes megemlíteni Csébfalvi Károlyt [12], aki már 1958-ban operációkutatáshoz tartozó problémát oldott meg. A későbbiekben pedig a hazai operációkutatásban fontos szerepet játszó NIM IGÜSZI vezető munkatársa lett.

Itt elérkeztünk ahhoz a ponthoz, még mindig a helyzet pozitív oldalát tárgyalva, hogy lassan a minisztériumok és egyéb főhatóságok is felismerték, hogy szükségük lenne nagyobb számítási kapacitásra, röviden szólva számítóközpontra. Közülük a Nehézipari Minisztérium (NIM), melyhez a bányászat, a villamosenergia- és vegy-

⁶A Szovjetunió a dokumentációt a megépítéshez szükséges alkatrészekkel együtt más ún. szocialista országoknak is átadta, például Lengyelországnak. Ezek a gépek a szintén szovjet Urál gépekhez hasonlóan, rádiócsöveket használtak tranzisztorok, illetve azok realizációja helyett. Emiatt méretük nagy volt és sok hőt termeltek. Ezért nagy termeket és légkondicionálást igényeltek. Így szóba se jött, hogy egyetlen ember használja őket. A személyi számítógépek nagyobb számban csak az 1970-es évek végén jelentek meg.

⁷Az első példány után annyi maradt meg a Szovjetunióból érkezett alkatrészekből, hogy erre lett volna lehetőség. A KKCS dolgozott is rajta.

ipar tartozott, járt az élen. Ennek az intézménye lett az 1961-ben alakult⁸ Ipargazdasági és Üzemszervezési Intézet, mely a későbbiekben a hazai operációkutatás egyik fellegvárává vált. Jóval korábban alapították a Kohó- és Gépipari Minisztérium hasonló intézményét, a KGM Ipargazdasági, Szervezési és Számítástechnikai Intézetét [36], de ez operációkutatási szempontból kisebb jelentőséggel bírt. Viszont érdemes még megemlíteni a Központi Statisztikai Hivatal Információfeldolgozási Laboratóriumát, ami a vizsgált időszak legvégén, 1965 elején alakult. Ez a legendás intézmény INFELOR néven működött. Operációkutatási osztályának szellemi vezetője Stahl János volt.

Másfelől nem volt könnyű a számítógépek beszerzése. A Szovjetunióból csak nagyon korlátozottan lehetett számítógépeket kapni. Nyugatról szintén, az embargó, azaz a COCOM lista miatt [49].⁹ Számítógépek az eladási tilalom ellenére kerülhettek be az országba legalisan a szó fizikai értelmében, például a Budapesti Nemzetközi Vásárra.¹⁰ Nem feltétlenül volt érdemes ezeket visszaszállítani a gyártó cég országába. A NIM IGÜSZI így tudta megszerezni az Elliott 803-as gépét 1962-ben, ami vámszabad területen várakozott [12].

5. Hogyan jutott az információ az országba?

Ez a szakasz történelmi szempontból főként arra vállalkozik, hogy a problémát felfesse. Több akkor volna mondható, ha volnának még élő szemtanúk.

Azt lehetne gondolni, hogy az információ sem kelet, sem nyugat felől nem jut-

⁸Itt mellőzve egynémely rövid és lényegtelen kitérőt.

⁹A listán szereplő termékeket, amelyeket hivatalosan katonai szempontból felhasználhatónak tekintettek, nem volt szabad eladni az akkori Szovjetunió vezetése alatt álló katonai tömb, a Varsói Szerződés országainak. A lista teljes neve Coordinating Committee for Multilateral Export Controls. Ténylegesen azonban a listán szereplő termékek köre tágabb volt a közvetlenül katonai célokra használható dolgoknál. Szerepeltek rajta szoftverek is, például optimalizálási programcsomagok. Így az embargó a gazdasági fejlődést is akadályozta. A COCOM-listára vonatkozó szerződést a NATO akkori tagjai (Izland kivételével), Ausztrália és Japán kötötték meg. Lásd még <https://hu.wikipedia.org/wiki/COCOM-lista>. A lista összetétele bonyolult dinamika szerint változott. A lista változása önálló történeti kutatást érdemelne. A műszaki fejlődés következtében új termékek jelentek meg, amelyek felkerültek a listára. Viszont az eladási tilalom kárt okozott a nyugati vállalatoknak, ezért időnként engedményt tettek. Végül a keleti kutatóintézetek nagy erővel dolgoztak olyan berendezések előállításán, amelyek fenn voltak a listán. Ha valamit sikerült elkészíteni, akkor az lekerült a listáról. Így azonnal meg kellett küzdenie a nyugati konkurenciával. Tipikus példa erre a SZTAKI GD80-as grafikus kijelzője, ami akkor került le a listáról, amikor több darabot eladtak Líbiának.

¹⁰Én a következőt láttam 1979-ben egy ENSZ által szervezett konferencián Ostravában, ami akkor Csehszlovákia egyik legfontosabb városa volt, ahol acélt termeltek. Az egyik acélgyár számítóközpontja két géppel rendelkezett, egy IBM360-assal és egy IBM370-essel. Szállítottak hozzájuk egy nagy kapacitású mágneslemez egységet is. Miután az utóbbi megérkezett, kiderült, hogy a teljes kapacitás túllépné az engedélyezett méretet. Továbbá a két gépet semmilyen módon, még egy periférián, mint a mágneslemez egység, sem volt szabad összekötni. Ezért az egység ott állt a gépterem előszobájában, még a portól sem védték. Egyetlen vékony és keskeny papírszalagot tettek rá körben, amire végig azt a szöveget nyomtatták ismétlődően, hogy "Ez a berendezés az IBM tulajdona és ezt a szalagot csak IBM dolgozó távolíthatja el."

hatott el hozzánk. Kelet felől a már említett áltudományként való minősítések miatt, nyugat felől meg az utazási lehetőségek hiánya, a levelezésnek a levéltitok megsértése általi hazai ellenőrzése, a nyugati folyóiratokban való publikálás engedélyhez való kötése és az embargó miatt. Ezzel szemben, mint az alább kiderül, az operációkutatással kapcsolatos tudás Magyarországon nagyon gyorsan megjelent és azonnal széles körben elterjedt.

Azt lehet látni, hogy az akkori magyar tudományosság pontosan ismerte a szovjetunióbeli helyzetet. Ha valamit ott engedélyeztek, akkor az nálunk is virágozhatott. Maga az operációkutatás soha nem minősült áltudománynak. Ebben fontos lehetett, hogy Kantorovicsnak úttörő szerepe volt a területen, amiről a Szovjetunióban tudtak. Erősítette az operációkutatás itthoni helyzetét, hogy a hazai sajtóban több oroszból fordított cikk is megjelent. A teljesség igénye nélkül két példa, [10] és [39]. Publikáltak továbbá németből és lengyelből fordított dolgozatot is. Sejtésként fogalmazható meg egy lehetséges, de nem bizonyított ok is. Dantzig szimplex módszere katonai kutatás keretében született meg egy olyan korban, amikor a Szovjetunió még jelentős kémtevékenységet folytatott az USÁ-ban. Ha a szovjet katonai vezetés tudott az operációkutatásról és annak katonai jelentőségéről, akkor a terület fejlődését szándékosan engedhették.¹¹

A nyugati oldalon éltek magyar kutatók, akik hazai kollégáikkal kapcsolatot tartottak. Nyugati folyóiratok érkeztek az országba. Bár a külföldre való utazást a magyar hatóságok erősen korlátozták, de kutatók számára mégis lehetséges volt. Ezt bizonyítja, hogy mind az MTA III. osztálya, mind a Rényi Intézet elődje éves beszámolóiban rendszeresen jelentette, hogy melyik kutató melyik országban járt. A meglátogatott helyek között szép számmal vannak nyugati államok.

Tehát az általánosan ismert akadályok korántsem voltak annyira erősek az operációkutatás szempontjából, mint azt várni lehetne. Ez azonban még nem magyarázza meg gyors hazai elterjedését, amiben szerepet játszhatott az is, hogy néhány szerző felismerte a diszciplína rendkívüli alkalmazhatóságát és terjesztette azt, esetleg erre építve pályafutását. Róluk az alábbiakban szó lesz.

6. Első hazai operációkutatási tárgyak

Az operációkutatás első hazai dokumentuma a közgazdasági egyetemen született határozat.¹² Az ülésről, ami más ügyeket is tárgyalt, a Rectori Hivatal készített jegyzőkönyvet, amiből azonban az nem derül ki, hogy mi annak a testületnek a neve, amelyik jogosult volt a határozatok meghozatalára. Talán nem áll messze az igazságtól, ha „egyetemi tanácsnak” nevezzük. A jegyzőkönyvet Temeši József professzor bocsátotta a tudományos közösség rendelkezésére egy magán

¹¹A Szovjetunió 1959 októberében, tehát éppen a vizsgált időszakban, tett javaslatot a Barátság kőolajvezeték megépítésére. Ekkor még készültek egy újabb világháborúra. A vezetékek gazdasági előnyeinek túl értelmezhető úgy is az akkori katonai technológia mellett, mint egy olyan létesítmény, ami biztosítja a nyugat felé támadó szovjet csapatok üzemanyagellátását.

¹²Akkori neve Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem, rövidítve MKKE.

e-levélben. Az ülést 1957. szeptember 16-án tartották. Egy, a lapra kézzel írt megjegyzés szerint a jegyzőkönyvet 17-én már iktatták is. Az írógéppel készült jegyzőkönyv két oldal, melyek közül a teljes másodikat foglalja el „A tanév előkészítésével kapcsolatban felmerült problémák” megoldására vonatkozó döntések felsorolása. Itt a hatodik bekezdés így szól:

Javasolja, hogy Krekó elvtárs az oktatószemélyzetnek is tartson tanfolyamot a lineáris programozás és az input-output kérdéseiről.

Tíz évvel vagyunk csak a lineáris programozás megszületése és nyolccal annak publikálása után egy olyan korban, amikor számos, nyugaton született tudományágot burzsoá áltudománynak minősítettek. A jegyzőkönyv arról vall, hogy akkor már a szakma vezetői is tudtak az operációkutatásról és felfogták annak jelentőségét. Ennek megfelelően vállalták annak felelősségét, hogy a téma megjelenjen az egyetemi körökben. Az input-output modellt az ülés előtt 16 évvel közölte Leontief. Mindez arra vall, hogy az Amerikában elért eredmények gyorsan, átütő erővel érkeztek meg hozzánk. Arról sajnos nincs tudomásunk, hogy milyen legális vagy illegális csatornán keresztül. Erre valószínűleg interjúkon keresztül lehetne választ kapni. Azonban azok nagy része, akik a választ meg tudnák adni, sajnos már nem él.

Érdeemes továbbá megjegyezni, hogy [11] szerint Krekó Béla első lineáris programozásról szóló könyvét [22] már 1955-ben megírta, de csak 1957-ben jelent meg. Krekó ezt a könyvet [11] szerint az 1953-ban kiadott [6] alapján írta.¹³ Ez is jellemzi a gyors fejlődést és terjedést. A 1949-es közlés után négy évvel már érdemes volt összefoglaló művet írni, ami olyan gyorsan megérkezett Magyarországra, hogy újabb két év múlva ennek alapján már magyarul írt könyv készült a témában. A „lineáris programozás” kifejezés találatainak számát jelentősen növelte, hogy a könyvet és az annak alapján megtartott tanfolyamokat már az 1950-es években reklámozták különböző folyóiratokban, beleértve olyanokat is, ahol az olvasók többsége nem került kapcsolatba az operációkutatással. Ebben az időben csak nagyon kicsi feladatokat lehetett megoldani számítógépek és programjaik hiánya miatt.

Érdekes, hogy ezzel egyidőben felmerült a lineáris programozás oktatása az Építőipari és Közlekedésügyi Egyetemen [15] nem kötelező tárgyként. Az említett egyetem 1950 után vált ki a Budapesti Műszaki Egyetemből. A két intézmény 1967-ben egyesült újra.

7. Nyomtatott források és gazdasági ágak

Ahogy említettem, a jelen dolgozat nagyrészt az arcanum.hu oldalról letöltött közleményeken alapul. Az így megszerzett dolgozatokat az alábbiakban gyűjteménynek nevezem. Mivel több száz írásműről van szó, nem fogom idézni vala-

¹³Valószínűleg [11] tévesen adta meg a hivatkozást. 1953-ban egy 75 oldalas cikk jelent meg *Operational Research Quarterly* 4. számában. Ezt adták ki 1958-ban könyv formájában.

mennyit. A megemléített művek így is adnak egy átfogó képet.

Néhány folyóiratnak megváltozott a címe. Amit ma Magyar Tudományként ismerünk, 1956-ig Akadémiai Értesítő volt, ez is több változatban. Az arcanum.hu 1956 után is esetenként korábbi nevén tartja számon. A ma Rényi Intézetként szereplő kutatóhely elődjei kiadványainak címe is változott az intézmény nevének változásával. Az MTA III. osztálya eredetileg Matematikai és Fizikai Osztály volt, de később kettéváltak. Ennek megfelelően módosult annak a folyóiratnak is a neve, amit ma röviden A III. Osztály Közleményei címen ismerünk. Minden ilyen esetben a folyóiratokat összevontam és csak egy címmel szerepelnek az adatok között. Összesen 51 lapból sikerült begyűjteni releváns cikkeket. Érthető módon a közgazdaságtant különböző mélységekben lefedő lapok (Ipargazdaság, Közgazdasági Szemle, Figyelő) együttes érdeklődése kiemelkedő. Az már valamennyire meglepő, hogy őket a közlekedés témájú folyóiratok (Közlekedéstudományi Szemle, Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények, Magyar Vasutas) követi. A harmadik pedig a műszaki tematikájú lapok egységesnek nem tekinthető csoportja. Az utóbbiak nagyon sok, egymástól távoli területet fednek le: energetika, építőipar, papíripar, kohászat, faipar, cukoripar és konzervipar. Fontos, hogy számos olyan fórum is közölt cikket a témában, amelyik kifejezetten a nagyközönségnek szól vagy témája messze áll az operációkutatástól (Valóság, Magyar Nemzet, Élet és Tudomány, Állam és Igazgatás, Munka, Népszabadság, Új Könyvek, Dél-Magyarország, Kisalföld, Korunk, Kultúra Világa, Pártélet, Társadalmi Szemle, Pedagógiai Szemle, Univerzum).

A legtöbb közleménnyel rendelkező szakmai lapok

Ipargazdaság	30
Közgazdasági Szemle	25
Közlekedéstudományi Szemle	24
Műszaki Élet	18
Magyar Tudomány	18
Figyelő	16
Matematikai Kutató Intézet Közleményei	13
Elektrotechnika	7
Matematikai Lapok	7
Mélyépítéstudományi Szemle	6
Technika	6
Papíripar	5
Építés- és Közlekedéstudományi Közlemények	5

Szoros összefüggésben a cikkeket megjelentető újságokkal és folyóiratokkal, a nemzetgazdaság következő ágai érdeklődtek leginkább az operációkutatás iránt: cukoripar, energia szektor, építőipar, felsőoktatás, gépipar, kereskedelem, kohászat, konzervipar, közlekedés, könnyűipar, mezőgazdaság, papíripar és szénbányá-

szat. Ez széles spektrum.

8. Szerzők

8.1. Andorka Rudolf

Andorka Rudolf szociológusként vált ismertté. 1991-ben az akkori közgazdasági egyetem rektora lett. Aktív rektorként halt meg. Elég későn, 1963-ban szerzett jogi diplomája előtt már több közgazdasági és operációkutatási cikket publikált. Ezen műveiből látszik az is, hogy jól tudott lengyelül, mert a dolgozatok közül többnek erős lengyel vonatkozása is van. Érdeklődése 1962 táján kezdett a szociológia felé fordulni. Ennek ellenére az operációkutatási cikkei a vizsgált időszakban 1962 és 1965 között jelentek meg, összesen hat. Némelykor csak utal a tudományterületre. Mindegyik írása közgazdasági jellegű és inkább szól nagyközönségnek mint közvetlenül a kutatóknak.

8.2. Bod Péter

Ő egy nagyon korai operációkutató. Az MTA Matematikai Kutató Intézetében dolgozott. Munkásságában az operációkutatás mellett sok közgazdasági elem is megtalálható. Gyakran nehéz megmondani, hogy egy dolgozat melyik területhez tartozik. Nagydoktori értekezését is a népgazdaság tervezéséből írta az 1970-es évek közepén. Ugyancsak foglalkozott biztosítási matematikával. Korán írt Kantorovics eredményeiről [2]. Ugyancsak ő az egyik első magyar szerző, aki tárgyalja a többcélú optimalizálást [3]. Az akkori idők szellemének megfelelően dolgozott közvetlen alkalmazáson is [4].

8.3. Bródy András

Neves közgazdász. Közel állt Kornai Jánoshoz. A gyűjteménybe nyolc dolgozata került, ebből az egyik egy 97 oldalas könyv, amit Kornai Jánossal közösen írtak. Ebben erős a matematikai részletek tárgyalása. Érdekesség, hogy első, 1958-as cikkében még nincs magyar neve az operációkutatásnak, hanem a teljesen releváns "vezetés tudománya" kifejezést alkalmazza [5]. Két cikke is Kornai egy-egy művét ismerteti. Bródy egyéb dolgozatai a közgazdaságtanhoz általában, illetve a népgazdaság tervezéséhez tartoznak.

8.4. Jándy Géza

A vizsgált időszakban két Jándy Géza publikált szakmai cikkeket. Egyikük kohómérnök volt, és dolgozatainak nincs köze az operációkutatáshoz. A másik építőmérnök, aki sokáig az UVATERV-nél dolgozott és itt került kapcsolatba az operációkutatással. Tanított a közgazdasági egyetemen 1963-tól, majd 1970-ben a BME professzora lett. Nagy szerepet vállalt az operációkutatás népszerűsítésében a legkülönbözőbb szakmai körökben. Számos cikkben mutatott rá az optimalizálás

lehetőségére. Dolgozataira már a vizsgált időszakban is hivatkoznak, de úgy tűnik, hogy iskolát nem alakított ki maga körül. 19 dolgozata került a gyűjteménybe. Valamennyinek ő az egyedüli szerzője. A legtöbb közlekedéssel kapcsolatos. Vanak építőipari témájúak is, melyek egy kivételével földmunkákra vonatkoznak. Az az egy a betonacél optimális darabolásáról szól. Ezek a dolgozatok mindig tartalmaznak pontosan leírt matematikai modelleket. Ugyanakkor a cikkek között többször is van jelentős átfedés. Például a klasszikus szállítási feladatot kétszer is feldolgozta [13], [14]. Cikkeinek harmadik csoportja beszámoló valamely hazai vagy külföldi szakmai eseményről, amely általánosabb érdeklődésre tarthat számot. Jándy Géza a későbbiekben is aktív volt. Több előadását hallottam az 1970-es években hazai konferenciákon.

8.5. Dr. Kádas Kálmán

A legelső egyike volt, aki felismerte az operációkutatás jelentőségét, amit a fent említett [15] cikke is bizonyít. Három dolgozata szól közvetlenül iparági, nevezetesen közlekedési és építőipari problémákról. Ezek is inkább általánosságban tárgyalják a kérdéseket, kevés bennük a matematikai megfogalmazás. További három cikke meg, a felsőoktatás ide vonatkozó problémáit tárgyalja.

8.6. Kornai János

Kornai világhírű közgazdász volt. Egykori cikkeit olvasva látszik, hogy az alkalmazási feladat közgazdasági oldalától a numerikus megoldás matematikai részleteiig a teljes problémát értette. A gyűjteménybe 16 cikke került. Ezekből tíznek egyedüli szerzője. Kiemelendő, hogy 1959-ben is [18] és 1960-ban is [19] írt az operációkutatásról az Élet és Tudományban. Ezzel sokat segített abban, hogy a tudományterület híre eljusson a nagyközönséghez. A gyűjteményben szereplő dolgozatai főként a népgazdaság tervezésével, illetve ennek részfeladataival, például egy-egy iparág tervezésével kapcsolatosak. Az utóbbiak között több cikk is foglalkozik a textiliparral, de tárgyalta a papíripar és az építőipar esetét is. Ebben a témakörben legfontosabb eredménye a vizsgált időszakban Lipták Tamással közösen írt Kétszintű tervezés című munkája, mely az első olyan matematikai modellnek tekinthető, amelyik az úgynevezett népgazdaság tervezését írta le [21].¹⁴

¹⁴[20] emlékezik meg Lipták Tamás haláláról. Innen tudható, hogy Lipták 1956-os és azt követő tevékenysége miatt börtönbe került. A modell csak szabadulása után készült el. Intézeti kiadványként jelent meg. Lipták nagyon tehetséges matematikus volt. Kornaival való találkozása előtt főleg statisztikával foglalkozott. Sajnos a börtön megtörte. Sikerült Angliába emigrálnia, de ahogy Kornai fogalmaz, „...többé már nem tudott jelentős tudományos eredményt produkálni.” Baleset következtében hunyt el 1998-ban.

8.7. Lehel Jenő

Lehel Jenő vasútépítő mérnök volt. Nem tévesztendő össze azonos nevű fiával, a kombinatorikában alkotó matematikussal. Vasúti építkezéseknél alkalmazott optimalizálási modelleket. Az a fajta kutató volt, aki egy alkalmazási területhez, ami esetében tehát a vasúti szállítás volt, tanul meg és szed össze minden szükséges dolgot. Így írt a földmunkákról [24], a hálózat kiépítéséről (telepítés) [25] és a kapacitások vizsgálatáról [26]. Munkássága a vizsgált időszakon túl is folytatódott.

8.8. Martos Béla

Híres eredménye a hiperbolikus programozásról ekkor jelent meg [29]. Ez a dolgozat négy évvel később angolul is elérhetővé vált [46]. A vizsgált időszakban még népgazdasági tervezéssel kapcsolatos dolgozata jelent meg, egy-egy beszámoló nemzetközi konferenciákról.

8.9. Nagy András

Kornai János köréhez tartozó közgazdász kutató. Van is egy korai dolgozatuk közösen Martos Bélával [30]. Egyedül írt cikkei a pamutiparral [32], a külkereskedelemmel és szintén az alumíniumiparral [31] foglalkoznak. Az utóbbi a szövege szerint egy nagyobb projekt eredményeiről szól. E munkában részt vett az MTA Számítástechnikai Központja, Kornai János, Martos Béla és többen mások. Van egy beszámolója nemzetközi konferenciákról.

8.10. Nagy Ernő

Ezt a szerzőt nem sikerült egyértelműen azonosítani. Már az is feltételezés, hogy az ilyen nevű szerzőtől begyűjtött négy cikket egyetlen ember írta, mert az idők folyamán rengetegen viselték ezt a nevet. A Természettudományi Közlöny szerkesztőségének volt egy ilyen nevű tagja. Mivel egyik dolgozat sem tudományos igényű, hanem mindegyik a nagyközönségnek szól, adódik a hipotézis, hogy egyetlen, nagyon jól felkészült újságíróról van szó. Már 1959 januárjában egy nagy cikkben belül lineáris programozásról írt a Technika című lapban [33]. Számunkra talán a legérdekesebb, hogy a szakszervezetek Munka című havi folyóiratában megadja az operációkutatás meghatározását 1962-ben [34]. Ugyanabban az évben más definíciók is megjelentek tőle, melyek technikai vonatkozásúak.

8.11. Prékopa András

Bár az 1960-as évek második felére Prékopa András a magyar operációkutatás vezető alakjává vált, a vizsgált időkeret még a szorgalmas munkával töltött felkészülés jegyében telt. Már igen korán foglalkozott víztározók méretezésével [37]. Megkezdte sztochasztikus programozási kutatásait [38]. Továbbá írt a matematika

közgazdasági alkalmazásairól [42]. Röviden úgy lehetne jellemezni tevékenységét, hogy ekkor még főképpen a tudományosság belső köreiben mozgott, beleértve az egyetemi oktatást is.

8.12. Reguly Zoltán

A főváros elektromos műveinél dolgozó mérnök volt, aki a vizsgált időszak végén 1964-ben és 1965-ben öt cikket is publikált az operációkutatás alkalmazásairól az energiaszektorban [43]. Környezetére hatást gyakorolt, mert mások is hivatkoznak dolgozataira.

8.13. Simon György és Kondor György

Az Akadémia Közgazdaságtudományi Intézetének két munkatársáról van szó, akik nagyon sokat publikáltak együtt, szerzőpárosnak tekinthetők, bár van közleményük egyedüli szerzőként és más társszerzővel is. Simon György volt a tapasztaltabb. Ebben az időszakban többet is publikált. Eredményeik többnyire a Közgazdasági Szemlében jelentek meg. Bod Péter műveihez hasonlóan, náluk is nehéz pontosan megítélni, hogy mi az, ami inkább operációkutatás, és mi az, ami inkább közgazdaságtan. Ők is többször foglalkoztak Kantorovics eredményeivel. Könyvről írtak egy alapos ismertetőt [44], majd kifejtették Kantorovicsot támogató nézetüket a későbbi Nobel-díjas körüli vitákkal kapcsolatban [45]. Ha ehhez hozzávesszük Bod Péter ugyancsak Kantorovicsról szóló írását, talán nem túlzás azt mondani, hogy ebben az időszakban Kantorovics jobban ismert volt hazánkban, mint a későbbiekben. A kor szellemének megfelelően Kondor György foglalkozott gyakorlati problémával [17], ami a cukorrépa szállítása volt.

8.14. Ziermann Margit

Ziermann Margit a Rényi Alfréd alapította Alkalmazott Matematikai Intézet munkatársa volt. Rényi figyelme sok mindenre kiterjedt, így sok lehetséges alkalmazási területre is. Már 1953-ban készletgazdálkodással foglalkoztak. Ezt ma mindenképpen az operációkutatáshoz (is) soroljuk. Írtak egy két részből álló dolgozatot a témáról. Az első résznek több szerzője van [41], de Ziermann Margit nincs köztük. Viszont ő az egyedüli szerzője a második résznek [50]. Ez az utóbbi cikk tekinthető a Prékopa-Ziermann készletezési modell csírájának. A vizsgált időszakban további készletezéssel kapcsolatos cikkei jelentek meg. A későbbiekben is sztochasztikus módszerek közgazdasági alkalmazásaival foglalkozott.

9. Általános következtetések

Tézisként a fentiekből az alábbi következtetésekre juthatunk.

1. Az operációkutatás 1930-as évekbeli elszórt megjelenését követően, de különösen a kezdeti idők legfontosabb algoritmusa, a szimplex módszer 1949-es publikálása után nagyon gyorsan az új tudományág széles szakmai körben ismertté vált Magyarországon.

2. Ennek következtében léteznie kellett olyan csatornáknak, amelyeken keresztül a tudományos információ beáramlott az országba, már az 1950-es években is. Erre a fentiekben látható példa mind keleti, mind nyugati irányból. Ide tartozik az is, hogy tudományos célból, nyilván felügyelet és korlátozás mellett, lehetséges volt az utazás külföldre.

3. Már a kezdeti időkben, amikor még nem jött létre egységes tudományos közösség az operációkutatás művelésére, a gazdaság számos ágában ismerték és alkalmazták annak ellenére, hogy mind a számítógépek, mind az optimalizáló szoftverek hiánya csak korlátozott méretű feladatok megoldását tette lehetővé.

4. Az elterjedést segíthette a már akkoriban is létező erős szemináriumi élet.

5. Az operációkutatás szakmai közléte ebben a nagyon korai időszakban, beleértve a publikációs fórumokat és magukat a publikációkat, más szerkezetű volt, mint később, mert még nem alakultak meg (SZTAKI), illetve éppen csak megalapították (NIM IGÜSZI, INFELOR) azokat az intézményeket, ahol később a kutatás szervezeten zajlott. Ekkor még az Alkalmazott Matematikai Lapok se létezett.

6. A terület nagyon hamar bekerült az egyetemi oktatásba, ami főként Krekó Bélának és segítőinek (a közgazdasági egyetemen) és Prékopa Andrásnak (az ELTÉ-n) az érdeme.

7. A feltárt források főként a központhoz, azaz Budapesthez kapcsolódnak. Bennük nincs nyoma, hogy a debreceni, pécsi és szegedi egyetemeken már ebben a korai időszakban foglalkoztak volna operációkutatással. Erdemes lenne ebben a vonatkozásban további kutatásokat folytatni.

8. Vannak olyan források is, például a NJSzT anyagai, amelyek nem kerültek be a gyűjteménybe, mert például hiányoznak az arcanum.hu adatbázisából. A kutatást ilyen irányba is érdemes kiterjeszteni.

Hivatkozások

- [1] BALÁZS KATALIN: *Felzárkózás - követés - lemaradás*, Valóság, Vol. **24** No. **8**, pp. 18–31 (1981).
- [2] BOD PÉTER: *A matematika közgazdasági alkalmazásának egy klasszikus munkájáról*, L. V. KANTOROVICS: „A termelés szervezésének és tervezésének matematikai módszerei” című könyvének ismertetése, Az MTA Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei, Vol. **10**, pp. 39–57 (1960).
- [3] BOD PÉTER: *Lineáris programozás több, egyidejűleg adott célfüggvény szerint*, A MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei, Vol. **8**, pp. 541–556 (1960).
- [4] DR. BOD PÉTER, DR. PÁLVÖLGYI ISTVÁN: *A kocsitartózkodások csökkentése a kohóműveknél*, Közlekedéstudományi Szemle, Vol. **13**, pp. 355–364 (1962).

- [5] BRÓDY ANDRÁS: *Érdekes könyv a „vezetés tudományáról”*, Közgazdasági Szemle, No. 4, pp. 440–443 (1958).
- [6] A. CHARNES, W.W. COOPER, A. HENDERSON: *An introduction to linear programming*, John Wiley & Sons, New York, p. 120 (1953).
- [7] G.B. DANTZIG: *Linear programming under uncertainty*, Management Science, Vol. 1, pp. 197–206 (1955); 2010-beli újbóli publikáció: DOI: [10.1007/978-1-4419-1642-6_1](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1642-6_1)
- [8] G.B. DANTZIG: *Discrete-Variable Extremum Problems*, Operations Research, Vol. 5, pp. 266–288 (1957). DOI: [10.1287/opre.5.2.266](https://doi.org/10.1287/opre.5.2.266)
- [9] G.B. DANTZIG, R. FULKERSON, S. JOHNSON: *Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman Problem*, Operations Research, Vol. 2, pp. 393–410 (1954). DOI: [doi:10.1287/opre.2.4.393](https://doi.org/10.1287/opre.2.4.393)
- [10] A.SZ. DUMLER: *A lineáris programozás és alkalmazása az iparban*, Ipargazdaság, Vol. 11 No. 6, pp. 11–15 (1959).
- [11] FORGÓ FERENC, KOMLÓSI SÁNDOR: *Krekó Béla szerepe a közgazdászokképzés modernizálásában; Krekó Béla (1915–1994) emlékére*, Sigma, Vol. XLVO, pp. 137–158 (2015), DOI: [10.1515/crll.1902.124.1](https://doi.org/10.1515/crll.1902.124.1)
- [12] HAVASS MIKLÓS: *A NIM IGÜSZI Számológépközpont*, Neumann János Számítógép-tudományi Társaság, Informatikatörténeti Fórum, [utolsó letöltés 2024.02.29.](#)
- [13] JÁNDY GÉZA: *Szállítási feladatok lineáris programozása*, Közlekedéstudományi Szemle, Vol. 8 No.6, pp. 254–261 (1958).
- [14] JÁNDY GÉZA: *Optimális szállítások tervezése*, Közlekedéstudományi Szemle, Vol. 9 No. 10, pp. 430–440 (1959).
- [15] KÁDAS KÁLMÁN: *Az Építőipari és Közlekedésügyi Egyetemen folyó mérnök-közgazdász képzés első évének tanulságai*, Felsőoktatási Szemle, pp. 282–288 (1957).
- [16] W. KARUSH: *Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints*, M.Sc. thesis, Dept. of Mathematics, Univ. of Chicago, Chicago, Illinois, p. 28 (1939), újabb kiadás: Giorgi, G., Kjeldsen, T. (eds) *Traces and Emergence of Nonlinear Programming*. Birkhäuser, Basel. DOI: [10.1007/978-3-0348-0439-4_10](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0439-4_10)
- [17] KONDOR GYÖRGY: *Eljárások a leggazdaságosabb cukorrépa-szállítási és -feldolgozási program megállapítására*, Közgazdasági Szemle, Vol. 6, november, pp. 1184–1201 (1959).
- [18] KORNAI JÁNOS: *A matematika a közgazdaság szolgálatában*, Élet és Tudomány, Vol. 14, pp. 611–615 (1959).
- [19] KORNAI JÁNOS: *Mi az operációkutatás?*, Élet és Tudomány, Vol. 15, pp. 532–535 (1960).
- [20] KORNAI JÁNOS: *Lipták Tamás halálára*, Közgazdasági Szemle, Vol. 45, pp. 771–772 (1998).
- [21] KORNAI JÁNOS, LIPTÁK TAMÁS: *Kétszintű tervezés*, Magyar Tudományos Akadémia, Számítástechnikai Központja, Gazdasági Alkalmazások Osztálya, Budapest, 112 oldal, (1962).
- [22] KREKÓ BÉLA, BACSKAY ZOLTÁN: *Bevezetés a lineáris programozásba*, Közgazdasági és Jogi KIÖnyvkiadó, Budapest, 1957.

- [23] H. W. KUHN, A.W. TUCKER: *Nonlinear programming*, Proceedings of 2nd Berkeley Symposium, University of California Press, Berkeley, pp. 481–492 (1951).
- [24] LEHEL JENŐ: *Egy nagyobb telephely gépi földmunkájának vizsgálata*, Mélyépítéstudományi Szemle, Vol. **12** No. **9**, pp. 408–414 (1962).
- [25] LEHEL JENŐ: *A központosított szállítások elosztó centrumainak optimális telepítése*, Közlekedéstudományi Szemle, Vol. **13**, No. **8**, pp. 341–352 (1963).
- [26] LEHEL JENŐ: *Árukezelési helyek és kirakóberendezések szükséges kapacitásának számítása az operációkutatás módszerével*, Közlekedéstudományi Szemle, Vol. **14**, No. **9**, pp. 384–395 (1964).
- [27] IRV LUSTIG: *Interjú George B. Dantziggal*, INFORMS, Biographical profiles: George B. Dantzig, **utolsó letöltés 2024.02.11.**
- [28] W.W. LEONTIEF: *The Structure of American Economy, 1919-1929: An Empirical Application of Equilibrium Analysis*, Harvard University Press, Amsterdam and New York, p. 181 (1941).
- [29] MARTOS BÉLA: *Hiperbólikus programozás*, Matematikai Kutató Intézetének Közleményei, Vol. **5**, pp. 383–406 (1960).
- [30] MARTOS BÉLA, KORNAI JÁNOS, NAGY ANDRÁS: *Lineáris programozási modell a magyar alumíniumipar távlati tervezéséhez*, MTA Számítástechnikai Központ (Tájékoztató), No. **7**, december (1961).
- [31] NAGY ANDRÁS: *A magyar alumíniumipari termelés és külkereskedelem távlati fejlesztésének lineáris programozási modellje*, Külkereskedelem, Vol. **6** No. **6**, pp. 9–12 (1962).
- [32] NAGY ANDRÁS: *A pamutszövet-kivitel rövid lejáratú optimumszámításának modellje*, Közgazdasági Szemle, pp. 318–331 (1963).
- [33] NAGY ERNŐ: *Számítógépek a gyakorlatban*, Technika, Vol. **3** No. **1**, pp. 2 (1959).
- [34] NAGY ERNŐ: *Operációkutatás*, Munka, Vol. **12** No. **12**, pp. 33 (1962).
- [35] J. NEUMANN, O. MORGENSTERN: *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, p. 625 (1944).
- [36] NJSZT: *A NIM IGÜSZI Számológépközpont* Neumann János Számítógép-tudományi Társaság, Informatikatörténeti Fórum, <https://itf.njszt.hu/>, **utolsó letöltés 2024.02.29.**
- [37] NÉV NÉLKÜL 1: *Monte Carlo Módszer Kollokvium Előadáskivonatai*, Matematikai Lapok, Vol. **8**, No. **3-4**, pp. 353–357 (1958).
- [38] NÉV NÉLKÜL 2: *A közgazdasági alkalmazások csoport és a valószínűségszámítási osztály közös szemináriuma: sztochasztikus folyamatok*, Az MTA Matematikai Kutató Intézet Közleményei, Vol. **9**, p. 766 (1964).
- [39] V. NYEMCSINOV: *Matematikai módszerek alkalmazása a közgazdasági kutatásban és a tervezésben*, Közgazdasági Szemle, Vol. **8** No. **3**, pp. 271–286 (1961).
- [40] THE OPERATIONAL RESEARCH SOCIETY: **utolsó letöltés 2024.02.28.**
- [41] PALÁSTI ILONA, RÉNYI ALFRÉD, SZENTMÁRTONY TIBOR, TAKÁCS LAJOS: *A raktárkészlet pótlásáról I. A törzskészlet*, Alkalmazott Matematikai Intézet, pp. 187–201 (1953).

- [42] PRÉKOPA ANDRÁS: *Matematikai módszerek gazdasági alkalmazása*, Magyar Tudomány, Vol. 8 No. 7, pp. 462–466 (1964).
- [43] REGULY ZOLTÁN: *Villamos energiahálózatok optimális kialakítása az operációkutatás módszerével*, Elektrotechnika, Vol. 57 No. 9, pp. 420–424 (1964).
- [44] SIMON GYÖRGY, KONDOR GYÖRGY: *Az erőforrások legjobb felhasználásának gazdasági számítása*, Közgazdasági Szemle, Vol. 9, január, pp. 121–127 (1962).
- [45] SIMON GYÖRGY, KONDOR GYÖRGY: *A Kantorovics és Novozilov nézeteiről folyó vitához*, Közgazdasági Szemle, Vol. 9, április, pp. 468–479 (1962).
- [46] SIMONOVITS ANDRÁS: *Martos Béla 1920–2007*, Közgazdasági Szemle, Vol. 55, február, pp. 93–94 (2008).
- [47] TEMESI JÓZSEF: *Levél a Magyar Operációkutatási Társaság levelező listáján, 2020. december 14.*
- [48] DR. VARGA GYÖRGY: *A közgazdász: társadalmi mérnök, Sz. V. Nemcsinov akadémikussal folytatott beszélgetésből*, Figyelő, 1961. No. 15, p. 3.
- [49] VIZVÁRI BÉLA: *Maros István (1941–2023) - hatvan év a magyar operációkutatásban*, Érintő, 2023. szeptember, <https://ematlap.hu/interju-portre-2023-3/1324-maros-istvan-1941-2023-hatvan-ev-a-magyar-operaciokutatasban>
- [50] ZIERMANN MARGIT: *A raktárkészlet pótlásáról II. A készletpótló rendelés*, Alkalmazott Matematikai Intézet, pp. 203–216 (1953).
- [51] G. ZOUTENDIJK: *Methods of Feasible Directions*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, p. 120 (1960).

VIZVÁRI BÉLA

Dept. of Industrial Engineering, Eastern Mediterranean University
 bela.vizvari@emu.edu.tr



Vizvári Béla 1948-ban született. 1973-ban szerzett matematikus (mester) diplomát az ELTE TTK-n operációkutatás szakirányon. Fokozatai: 1979 kisdoktori (ELTE), 1987 Dr.Sc.Nat. (NDK nagydoktori, TH "Carl Schorlemmer" Merseburg), 1988 a matematikai tudomány kandidátusa, 2003 Dr.habil. (ELTE). Munkahelyei: MTA SZTAKI 1973–1989; Bilkent Egyetem, Ankara, 1989–1993; ELTE 1993–2007; Eastern Mediterranean University, Famagusta 2007–. 4 könyv egyedüli szerzője, egynek társszerzője. 154 folyóiratcikk szerzője vagy társszerzője, 7 cikke kötetben jelent meg. Összes tudományos publikációjának száma mintegy 340. Egy regénye jelent meg. Google Scholar hivatkozásainak száma 2240, h-indexe 23, i10 indexe 47. 16 doktori dolgozat és számos (1991 óta 25) mester dolgozat témavezetője. 2004 és 2019 között az Alkalmazott Matematikai Lapok felelős szerkesztője.

THE BEGINNINGS OF HUNGARIAN OPERATIONS RESEARCH ACCORDING TO THE
EARLY PUBLICATIONS

BÉLA VIZVÁRI

After an international outlook on the start of operations research, the thesis presents the information on operations research available in the Hungarian professional and other press until 1965. The most important lesson is that operations research became much more widely known at this early stage than one might think. Several reasons for this can be detected. As a result of the familiarity, several applications were already carried out at that time.

Keywords: operations research; history of science; Hungary

Az Alkalmazott Matematikai Lapok megjelenését támogatja
a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

A kiadásért felelős a BJMT főtítkára
Szedte és tördelte: Moczár Károly

Nyomta a Coradix Kft., Budapest
Felelős vezető: Szűcs Ernőné

Budapest, 2024
Megjelent 18 (A/5) ív terjedelemben
100 példányban
HU ISSN 0133-3399

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A közlésre szánt dolgozatokat és mellékleteiket egy tömörített zip fájlban e-mailen az **aml@renyi.hu** címre kérjük elküldeni.

A részletes instrukciók és a LaTeX minta fájl megtalálhatók az AML honlapján, a cikkek benyújtása http://aml.math.bme.hu/?page_id=7 címén. Mivel az Alkalmazott Matematikai Lapokban megjelenő cikkek 2019 óta DOI azonosítót kapnak, az irodalomjegyzékben szereplő minden forrás adatai között szerepeltetni kell a DOI azonosítót is, amennyiben rendelkezik ilyen-
nel.

Kérjük a szerzőket, hogy a cikk benyújtása előtt ellenőrizték az alábbi elemek meglétét:

A teljes cikk, benne:

magyar nyelvű kivonat

a cikk szövege, valamint ábrák és táblázatok, ha vannak

irodalomjegyzék, DOI azonosítókkal együtt

szerzők bemutatása és fotói, munkahelyei és e-mail címei

angol nyelvű cím és kivonat

Mellékelt fájlok:

a cikk LaTeX forráskódja, és a teljes cikk pdf formátumban

ábrák, képek fájljai

szerzők fotói

A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.

TARTALOMJEGYZÉK

A Prékopa András-díj 2024. évi díjazottja: Deák István	1
Az Egerváry Jenő emléklakett 2023. évi díjazottja: Gerencsér László	5
Az Egerváry Jenő emléklakett 2024. évi díjazottja: Galántai Aurél	9
A Farkas Gyula emlékdíj 2023. évi díjazottja: Tóbiás András	15
A Farkas Gyula emlékdíj 2023. évi díjazottja: Varga Anita	19
A Farkas Gyula emlékdíj 2024. évi díjazottja: Dózsa Tamás Gábor	23
A Farkas Gyula emlékdíj 2024. évi díjazottja: Regős Krisztina	25
A Farkas Gyula emlékdíj 2024. évi díjazottja: Tekeli Tamás	27
A Farkas Gyula emlékdíj 2024. évi díjazottja: Varga Kitty	29
A Gyires Béla-díj 2022. évi díjazottja: Gerencsér Balázs	31
A Gyires Béla-díj 2024. évi díjazottja: Ferenci Tamás	33
A Balas Egon-díj 2024. évi díjazottja: Györgyi Péter	35
<i>Balog Imre, Pintér Miklós</i> , Folytonos általánosított játékok	39
<i>Pusztaházi Luca Sára, Eigner György, Csiszár Orsolya</i> , Paraméteres aktivációs függvény és jelentősége a neurális hálók értelmezhetőségében	63
<i>Vizvári Béla</i> , A magyar operációkutatás kezdetei a publikációk fényében	79

INDEX

András Prékopa Prize recipient in 2024: István Deák	1
Jenő Egerváry Prize recipient in 2023: László Gerencsér	5
Jenő Egerváry Prize recipient in 2024: Aurél Galántai	9
Gyula Farkas Prize recipient in 2023: András Tóbiás	15
Gyula Farkas Prize recipient in 2023: Anita Varga	19
Gyula Farkas Prize recipient in 2024: Tamás Gábor Dózsa	23
Gyula Farkas Prize recipient in 2024: Krisztina Regős	25
Gyula Farkas Prize recipient in 2024: Tamás Tekeli	27
Gyula Farkas Prize recipient in 2024: Kitty Varga	29
Béla Gyires Prize recipient in 2022: Balázs Gerencsér	31
Béla Gyires Prize recipient in 2024: Tamás Ferenci	33
Egon Balas Prize recipient in 2024: Péter Györgyi	35
<i>Imre Balog, Miklós Pintér</i> , Continuous generalized games	39
<i>Luca Sára Pusztaházi, György Eigner, Orsolya Csiszár</i> , Parametric activation function and its significance in the interpretability of neural networks	63
<i>Béla Vizvári</i> , The beginnings of Hungarian operations research according to the early publications	79