32. szám 2024. június

2024. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

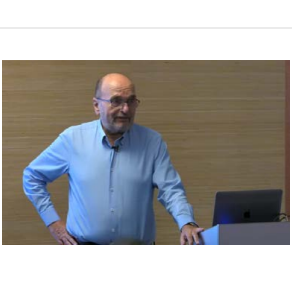
Nyári olvasni- és néznivalók

Nyáron talán mindenkinek egy kicsit több ideje van, ezért ajánlunk egy csokor hírt, linkeket, amelyeket érdemes megnyitni, elolvasni, megnézni. Az idei Abel-díjról, az ELTE Matematika Intézet díjairól, az EU idei nyertes ERC-pályázatáról, a BJMT Váltószögek podcast-adásairól, a Yale Egyetem újabb díszdoktoráról és érettségi sorozatunk befejező részének feladatairól lesz szó.

2024. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Ki akar ma tanítani? – II. rész

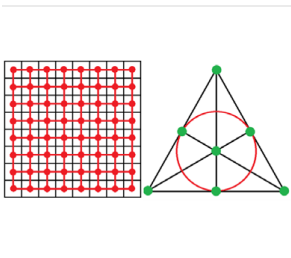
Ujházy Márton matematikusként végzett 2011-ben, de már a képzés alatt tudta, hogy középiskolában szeretne tanítani. Rögtön felvették az ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnáziumba, ahol azóta vezetőtanárként tanárszakos hallgatók fejlődését is segíti. Tanári, osztályfőnöki és vezetőtanári feladatai mellett felfedezető tananyagbank-fejlesztésben vesz részt. Szabadidejében táncházban zenél, és persze, mint az interjút készítő *Paulovics Zoltán* is, biciklizik. A tanári hivatás nehézségeiről és szépségeiről szól a beszélgetés.



2024. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matematikaoktatás – az ország valós gazdasági kitörési pontja

„Ezt a cikket elsősorban egykori cégem, a Graphisoft tapasztalatai inspirálták. Még ha nem is általánosíthatók a konklúziók, érdemes megosztani őket." *Bojár Gábor* írása a Rátz László Vándorgyűlésen 2023. július 4-én elhangzott előadás rövidített változata. Megjelent a Matematikai Lapok 2020/1. számában. Azok számára, akik nem hallották vagy még nem olvasták, az Érintőben is közöljük.



2024. JÚNIUS, HÉTTUSA

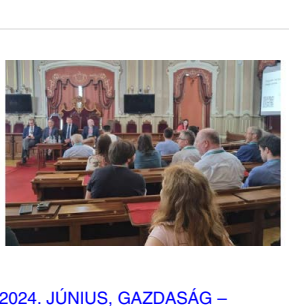
Megoldások, megjegyzések a Héttusa 4. fordulójának feladataihoz

Az Érintő Facebook-oldalán már megjelent megoldásokat a rovatszerkesztő, *Róka Sándor* kibővítette néhány olyan megoldással és megjegyzéssel, amit a beküldőktől kapott. Ezek újabb kérdéseket, pontosításokat vagy éppen általánosításokat, számítógépes megközelítéseket mutatnak be. Érdemes áttekinteni a különböző meggondolásokat!

2024. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Big Five centenáriuma

Különleges ülésnapot tartott az MTA Matematikai Tudományok Osztálya június 5-én a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben. A Big Five centenáriumán a 100. születésnapját idén ünneplő *Fuchs Lászlónak*, az MTA külső tagjának *Freund Tamás*, az MTA elnöke átadta az Arany János-életműdíjat, majd egy-egy előadás hangzott el a nagy ötök, Aczél János, Császár Ákos, Fuchs László, Gaál István és Horváth János matematikai munkásságának tiszteletére.



2024. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

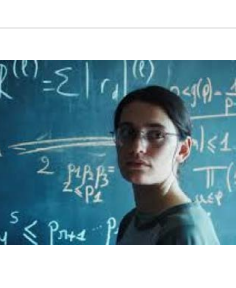
Szilánkok a szegedi Alkalmazott Matematikai Konferenciáról

A 2024. június 3. és 5. között megtartott szegedi Alkalmazott Matematikai Konferencia bizonyította, hogy ma Magyarországon jelentős – jellemzően ipari és egészségügyi – területeken megkerülhetetlen a matematikára alapozott kutatás és a ráépülő fejlesztés. A sikeres konferencia rendkívül sok matematikai alkalmazást felvetett, közülük néhány szilánkot mutatunk be.

2024. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Matematika a díjak hátterében

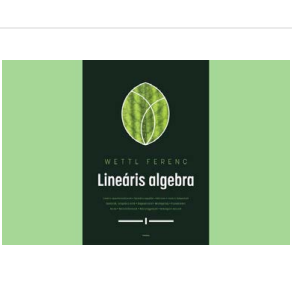
A Magyar Tudományos Akadémia 197. Közgyűlésének ünnepi ülésén, illetve a Közgyűléshez kapcsolódó osztályrendezvényeken számos rangos tudományos díjat és elismerést adtak át. Ebben a cikkben röviden bemutatjuk a matematikus díjazottakat és azokat a területeket is, amelyekben elérték eredményeiket.



2024. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Marguerite, a számok szerelmese

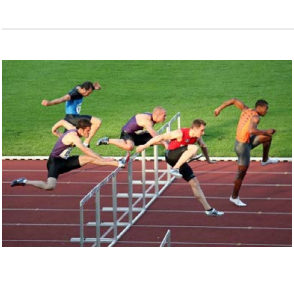
A cím egy 2024 májusában bemutatott érdekes játékfilmre utal, amelynek főhősnője a Szemerédi-tételből kiindulva bebizonyítja a Goldbach-sejtést (a következtetés nem igaz). A Wikipédia segítségével elolvasható a film leírása, a Goldbach-sejtés és a Szemerédi-tétel, mégsem tartom feleslegesnek a három kérdést egy rövid cikkben tárgyalni – írja Simonovits András.



2024. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Wettl Ferenc: Lineáris algebra

Az egyszerű, de elegáns sötétzöld címlap egy nagy méretű és vaskos kötetet takar, ami több mint ötszáz sűrűn szedett oldalon minél természetesebb módon bevezetve, gondosan felépítve tartalmazza a lineáris algebra témáit az alapoktól kezdve egészen a határterületekig. *Wettl Ferenc* Lineáris algebrájának moduláris felépítése lehetővé teszi, hogy különböző, mérnöki, közgazdasági vagy természettudományos képzések akár alap-, akár mesterfokú kurzusain tankönyvként és kiegészítő anyagként is szolgáljon. *Ács Bernadett* mutatja be a könyvet.



2024. JÚNIUS, HÉTTUSA

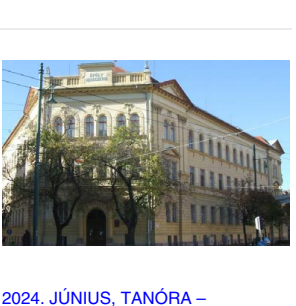
Beszámoló a Héttusa 4. fordulója után

Az egy évvel ezelőtt indult Héttusa 4. alkalma után készült egy kis számvetés arról, milyen eredményt értek el a négy forduló során a versenyzők. A 4. forduló feladataira 126 helyes válasz érkezett. Az összesített verseny 32 résztvevője közül 17-en kaptak könyvjutalmat. Minden kedves olvasónkat arra biztatjuk, próbálja ki magát az 5. forduló mostani számunkban megjelenő feladatainak megoldásával. Az eddigi állás a következő.

2024. JÚNIUS, HÉTTUSA

Héttusa 5. forduló (2024. június)

Lezárult az első 4 forduló, várjuk új versenyzőinket is! A Héttusa rovatban kitűzött feladatokra bárki küldhet megoldást. Elég a feladat kérdésére a feladatok sorszámát és a feltett kérdésekre a válaszokat megküldeni, indoklást, részletes megoldást nem szükséges írni. A beküldési határidő: **2024. július 1.** Következnek az 5. forduló feladatai.



2024. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Tehetséggondozás a szegedi Radnótiban

A Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnáziumban évtizedek óta folyó tehetséggondozó munkáról írtak az iskola tanárai, *Ábrahám Gábor*, *Szaszkó-Bogárné Eckert Bernadett* és *Schultz János*. Az elveken és a megvalósításon túl a különböző korosztályoknak szóló matematika szakköri feladatsorokból is mutatnak példákat.

2024. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

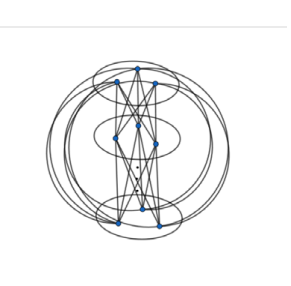
A logika szörnyei és a turbulencia

„A logika néha szörnyeket szül. Az elmúlt fél évszázadban rengeteg olyan bizarr függvény megjelenésének lehettünk tanúi, amelyek látszólag arra törekednek, hogy a lehető legkevésbé hasonlítsanak a célt szolgáló, becsületes függvényekre. Nincs több folytonosság, vagy van folytonosság, de nincs derivált, és így tovább." – írta a 19-20. század fordulóján Poincaré. Ezektől a szörnyektől indult el *ifj. Székelyhidi László* 2024. ápr. 8-án a Rényi Intézetben tartott előadása, amelyben még kukacos almák, biciklik és turbulens áramlások is előfordultak.

2024. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Szintfelmérés a Miskolci Egyetemen

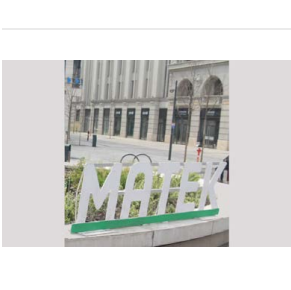
A szilárd alapok hiánya megnehezíti az egyetemi szintű matematika tananyag elsajátítását, a sikeres előrehaladást. Ezért kiemelten fontos, hogy szükség esetén időben, hatékony támogatást nyújtsunk a hallgatóknak. Ezt a célt szolgálja a bejövő hallgatók matematikai kompetenciamérése. A Miskolci Egyetemen 2023-ban új koncepció szerint bevezetett szintfelmérésről és a kapcsolódó felzárkóztatásról az egyetem két matematikoktatója, Homolya Szilvia és Rozgonyi Erika írt.



2024. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Egy Schweitzer-feladat megoldása középiskolás eszközökkel

Néha előfordul, hogy a híresen nehéz Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyen kitűznek egy-egy feladatot, ami akár középiskolások számára is érthető, nemcsak a leírása, hanem a megoldása is, ami persze nem egyszerű, változatos ötleteket, sok kreativitást igényel. Mégis hasznos lehet ilyen példákat is mutatni a diákoknak, azt szemléltetve, hogy bár egyáltalán nem könnyű, de még a világ egyik legnehezebb matematikaversenyének is lehetséges megoldani a feladatait. *Szőke Tamás* 2018-ban első helyen végzett a Schweitzer-versenyen, saját tapasztalata alapján mutatja be az egyik ilyen feladatot.



2024. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

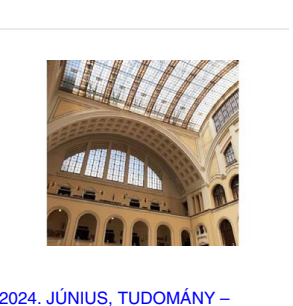
Matek az Utcán a Matematika Világnapja (π-nap) alkalmából

A Matematika Nemzetközi Világnapja (március 14.) alkalmából a Bolyai János Matematikai Társulat több mint negyven önkéntessel, két budapesti és öt vidéki helyszínen többszáz ember bevonásával idén is megszervezte a Matek az Utcán eseménysorozatot. A Társulat kezdeményezéséhez a helyi szervezők saját programokkal kapcsolódtak. Azt, hogy milyen trükkökkel sikerült népszerűsíteni a matematikát az ország utcáin, *Barbarics Márta* foglalta össze.

2024. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Pi-napi előadások a szegedi Bolyai Intézetben

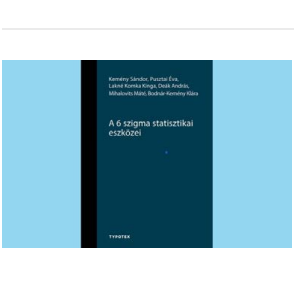
Nagy érdeklődés kísérte a szegedi SZTE Bolyai Intézetben megtartott Pi-nap előadásait. „Az idei volt az első alkalom, hogy a matematika világnapján a szegedi matematikusok kifejezetten a Pi-nap apropóján beszéljenek érdekes matematikáról, természetesen a pi számmal kapcsolatban. A rendezvényre a szójáték kedvéért pizzával, pitével és Piroska szörppel is készültünk, segítségükkel a csütörtök késő délutáni időpont ellenére sikerült megtöltenünk a száz főnél is nagyobb Bolyai-termet." *Győrffy Lajos* küldte el a beszámolót.



2024. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

100 éves a matematika oktatása a Debreceni Egyetemen

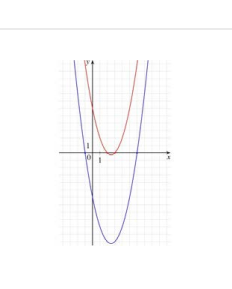
„Debrecen mindig elsőrangú szerepet játszott a matematika magyarországi sorsában. Egyetemünk hivatása arról is gondoskodni, hogy folytatódjanak a régi és nemes tradíciók..." *Varga Nóra* és *Vincze Csaba* hitelesen, szeretettel és büszkén ismerteti meg az Érintő olvasóival a Debreceni Egyetem Matematikai Intézetének százéves történetét.



2024. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Vélemény „A 6 szigma statisztikai eszközei" című könyvről

„A Six Sigma egy új minőségügyi kezdeményezés, filozófia és módszertan is egyszerre. De mi is az a Hat szigma módszertan? Mi benne az új? Ez egy strukturált, egymásra épülő fázisokból (definíció, mérés, elemzés, fejlesztés és szabályozás) álló fejlesztési folyamat, amelynek fókuszában a vevői elvárás áll. A szigma alapvetően támaszkodik a matematikai statisztikára. Itt jön a képbe az elmélkedésünk témáját jelentő könyv." *Tóth Csaba László* fizikus vezet be a különleges témába.



2024. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

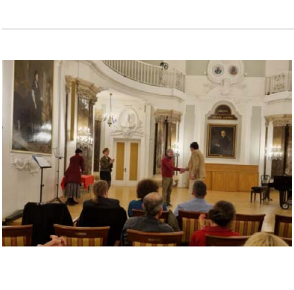
Speciális másodfokú egyenletpárok

Középiskolai tanárként (és persze diákként is) szeretjük az olyan egész együtthatós másodfokú egyenleteket, amelyeknek egész gyökei vannak. A középiskolai tanulmányok során számtalan ilyen egyenlettel találkozunk, és megesik, hogy ezek között valamilyen kapcsolatot is felfedezünk. Tritz Árpád ilyen speciális másodfokú egyenletpárok érdekes kapcsolatát járja körül.

2024. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A seregélyek röpte

Giorgio Parisi: A seregélyek röpte című könyvében nyolc önálló kis történet van, amelyek mind a szerző fizikai Nobel-díját megelőző időszakban születtek. Az első fejezet címe, A seregélyek röpte nem metafora, hanem a lehető legkonkrétabban kell érteni. A Rómában nagy csapatokban repkedő madarak összehangolt mozgásának tudományos vizsgálatáról szól. Az utolsó fejezet pedig Édith Piafot idézi. *Lente Gábor* vegyészprofesszor ajánlja a könyvet.



2024. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

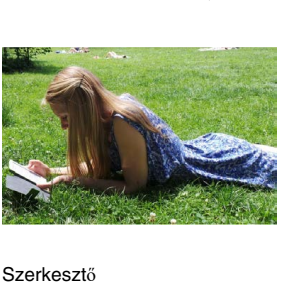
Gács András-díj a Matematikus Hangversenyen

2024. április 3-án az ELTE Jogi karának dísztermében a Matematikus Hangverseny keretében adták át az idei Gács András-díjakat *Csomós Petrának* (ELTE) és *Ruff Jánosnak* (PTE). Örömteli volt látni és hallani, hogy a koncerten néhány „régi" zenész-matematikus mellett különösen sok új fiatal lépett fel. További részletek itt.

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon: ›

A **HÍREK – ÚJDONSÁGOK** ROVAT A MATEMATIKÁHOZ ÉS A BOLYAI TÁRSULATHOZ KAPCSOLÓDÓ ESEMÉNYEKRŐL, ÚJDONSÁGOKRÓL SZÓL. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÁKÓCZI ILDIKÓ.)*



Szerkesztő
2024. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

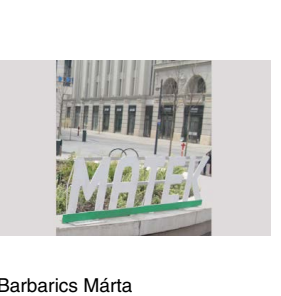
Nyári olvasni- és néznivalók

Nyáron talán mindenkinek egy kicsit több ideje van, ezért ajánlunk egy csokor hírt, linkeket, amelyeket érdemes megnyitni, elolvasni, megnézni. Az idei Abel-díjról, az ELTE Matematika Intézet díjairól, az EU idei nyertes ERC-pályázatáról, a BJMT Váltószögek podcast-adásairól, a Yale Egyetem újabb díszdoktoráról és érettségi sorozatunk befejező részének feladatairól lesz szó.

Győrffy Lajos
2024. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Pi-napi előadások a szegedi Bolyai Intézetben

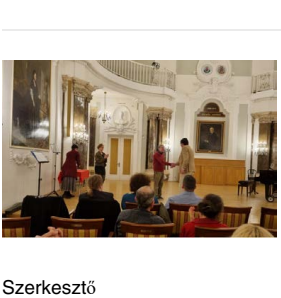
Nagy érdeklődés kísérte a szegedi SZTE Bolyai Intézetben megtartott Pi-nap előadásait. „Az idei volt az első alkalom, hogy a matematika világnapján a szegedi matematikusok kifejezetten a Pi-nap apropóján beszéljenek érdekes matematikáról, természetesen a pi számmal kapcsolatban. A rendezvényre a szójáték kedvéért pizzával, pitével és Piroska szörppel is készültünk, segítségükkel a csütörtök késő délutáni időpont ellenére sikerült megtöltenünk a száz főnél is nagyobb Bolyai-termet." *Győrffy Lajos* küldte el a beszámolót.



Barbarics Márta
2024. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Matek az Utcán a Matematika Világnapja (π-nap) alkalmából

A Matematika Nemzetközi Világnapja (március 14.) alkalmából a Bolyai János Matematikai Társulat több mint negyven önkéntessel, két budapesti és öt vidéki helyszínen többszáz ember bevonásával idén is megszervezte a Matek az Utcán eseménysorozatot. A Társulat kezdeményezéséhez a helyi szervezők saját programokkal kapcsolódtak. Azt, hogy milyen trükkökkel sikerült népszerűsíteni a matematikát az ország utcáin, *Barbarics Márta* foglalta össze.



Szerkesztő
2024. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Gács András-díj a Matematikus Hangversenyen

2024. április 3-án az ELTE Jogi karának dísztermében a Matematikus Hangverseny keretében adták át az idei Gács András-díjakat *Csomós Petrának* (ELTE) és *Ruff Jánosnak* (PTE). Örömteli volt látni és hallani, hogy a koncerten néhány „régi” zenész-matematikus mellett különösen sok új fiatal lépett fel. További részletek itt.

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon: ›

Szerkesztő 2024. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Nyári olvasni- és néznivalók

Nyáron talán mindenkinek egy kicsit több ideje van, ezért ajánlunk egy csokor hírt, linkeket, amelyeket érdemes megnyitni, elolvasni, megnézni.

Abel-díj 2024

Oslóban 2024. május 21-én átadták az idei évei Ábel-díjat *Michel Talagrandnak* a valószínűségszámítás és a sztochasztikus folyamatok terén elért áttörő munkájáért és kitűnő alkalmazásaiért a matematikai fizikában és a statisztikában. Mára ugyanis nyilvánvalóvá vált, hogy folyamatosan változó világunkban a véletlen folyamatok megértése alapvető fontosságú az üzleti élettől kezdve az időjárás-előrejelzésen át a nagy nyelvi modellekig. A részleteket és a díjátadó ünnepség videóját megtalálják a https://abelprize.no/ oldalon.

Michel Talagrand (Peter Badge fotója)

Lovász László a Yale Egyetem tiszteletbeli doktora lett

2024. május 20.-án a Yale Egyetem kilenc személynek adományozott tiszteletbeli oklevelet kiemelkedő teljesítményük vagy a közjóhoz való hozzájárulásuk elismeréseként, közöttük Lovász Lászlónak. A Yale 1702 óta adományoz tiszteletbeli okleveleket.

A Yale Egyetem méltatása emlékeztet arra, hogy Lovász László szinte minden díjat megkapott, amit matematikus kiérdemelhet, köztük a matematika legmagasabb kitüntetését, az Abel-díjat is: „Megtisztelő számunkra, hogy beleegyezett, hogy még egyet megkapjon, mégpedig attól az egyetemtől, ahol több mint fél évtizeden át tanított és kutatott, és amely maga is megtiszteltetésnek érzi, hogy átadhatja Önnek a műszaki és technológiai tudományok doktora címet." A díjazott méltatása itt olvasható.

A 2024-es díszdoktorok fényképe: Az első sorban balról Risa Lavizzo-Mourey, Judith Rodin, Peter Salovey, Mahzarin Banaji és Hortense Spillers, a második sorban balról Lovász László, Kehinde Wiley, Mario Capecchi és Stephen Breyer (Fotó: Michael Marsland)

Stipsicz András nyertes ERC-pályázata

2024. április 11-én jelentette be az Európai Kutatási Tanács (ERC), hogy *Stipsicz András*, a HUN-REN Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet igazgatója immár másodszor nyerte el a rangos ERC Advanced Grantet. „Knots and Surfaces on four-manifolds" című projektjének célja a négydimenziós sima sokaságokkal kapcsolatos fontos kérdések vizsgálata. A most elnyert 2 millió eurós támogatás segítségével a tizenkettedik – Stipsicz András vezetésével már a második – ERC-kutatócsoport alakul a Rényi Intézetben, amint az honlapjukon olvasható.

A nyertes témáról bővebben fogunk írni az Érintő következő számában.

Stipsicz András (Forrás: mta.hu/Szigeti Tamás.)

Besenyei Ádám-díj az ELTE Matematikai Intézetében

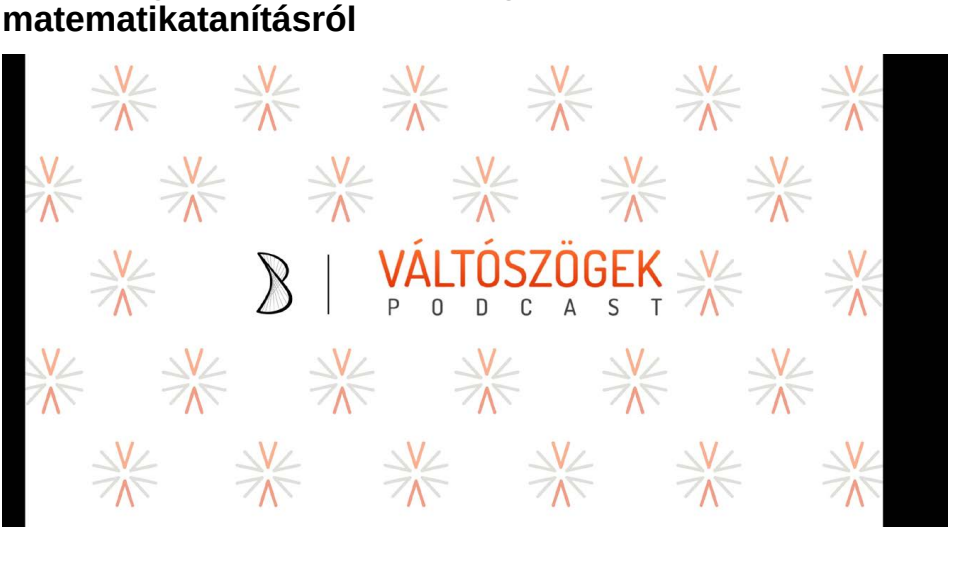
Az ELTE TTK Matematikai Intézetben az idei évben egy új díj került kiosztásra. A Besenyei Ádám-díj az Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék 2022-ben tragikusan fiatalon elhunyt docensének állít emléket. A díjat a család alapította, és kifejezetten a tanár szakos hallgatók elismerését célozza. A díjat idén *Vas Zsuzsanna* és *Vaszil Levente László* kapta.

Zábrádi Gergely lett idén a **Kar Kiváló Oktatója.** Az ELTE honlapján olvashatnak az Eötvös Nap keretében kitüntetettekről és az egyetem új díszdoktorairól.

Érettségire készülőknek jövőre is: valószínűségszámítás és statisztika

Az idei érettségi követelményeiről szóló ötrészes sorozatunk utolsó témakörében – valószínűségszámítás és statisztika – az Érintő előző számában jelent meg Csapodi Csaba cikke A feladatok megoldását itt találhatják. Ajánljuk a sorozatot a felkészüléshez a jövő évi érettségire is.

Váltószögek: Két videóbeszélgetés a matematikatanításról



Előző számunkban közöltük Kosztra Gábor cikkét a készülő podcast-sorozatáról. A Bolyai János Matematikai Társulat támogatásával készült műsor a matematikatanítás témáját járja körül.

Az első, áprilisban megjelent részben két középiskolai tanárral, egy kezdő és egy tapasztalt pedagógussal folyt a beszélgetés: *Szeresd a munkád - Váltószögek podcast - #S01E01 - Így tanítanak ők - YouTube*.
Aki szívesen megnézi, itt találhatja.

A matematika érettségi napjára időzítve elkészült a Váltószögek podcast második adása. Ebben két borásszal, Laposa Bencével és Szijjártó Elóddel beszélgetett a két kérdező a korábbi matematikatanulási élményeikről: *Hibázni ér - Váltószögek podcast - #S01E02 - Így tanultak ők - YouTube.* Ezen a linken lehet megnézni a műsort, ami a Spotify-on is megtalálható.

Reméljük, sokakat érdekelnek a témáját és formáját tekintve újszerű műsorok. A folytatás ősszel lesz, és az Érintő is hírt ad a következő rész megjelenéséről.

Bátorítunk mindenkit, hogy kövesse a BJMT facebook-oldalát, és iratkozzon fel a youtube csatornára.

A szerk.

(Nyitóképünk forrása: Pixabay, Elien Smid)

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon:

Győrffy Lajos 2024. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Pi-napi előadások a szegedi Bolyai Intézetben

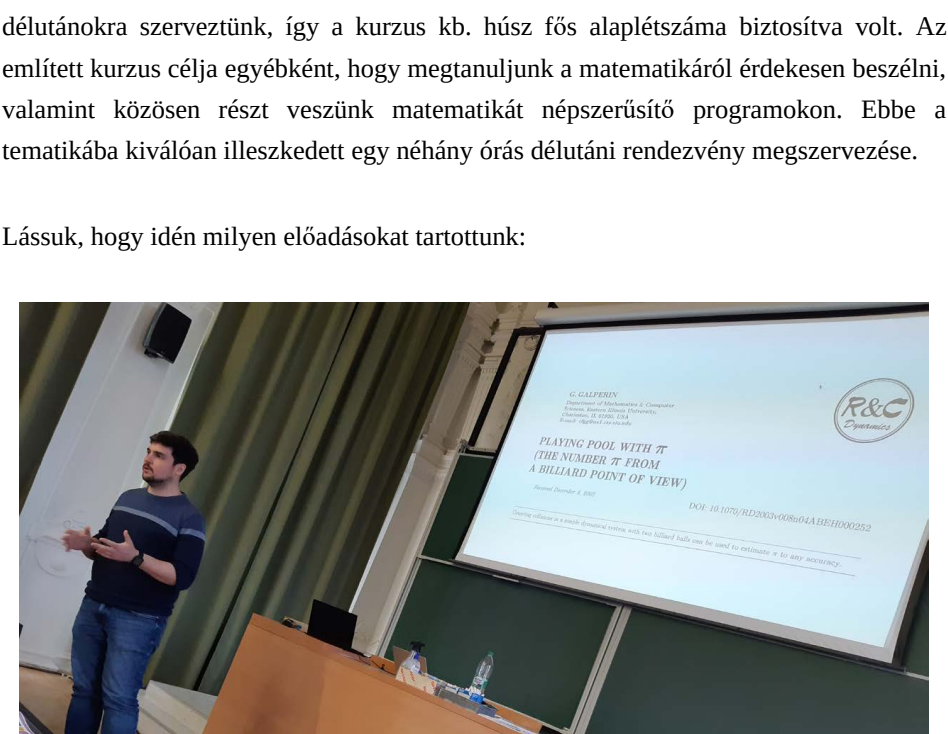
Nagy érdeklődés kísérte a szegedi SZTE Bolyai Intézetben megtartott Pi-nap előadásait. Az idei volt az első alkalom, hogy a matematika világnapján a szegedi matematikusok kifejezetten a Pi-nap apropóján beszéljenek érdekes matematikáról, természetesen a pi számmal kapcsolatban. A rendezvényre a szójáték kedvéért pizzával, pitével és Piroska szörppel is készültünk, segítségükkel a csütörtök késő délutáni időpont ellenére sikerült megtöltenünk a száz főnél is nagyobb Bolyai-termet.

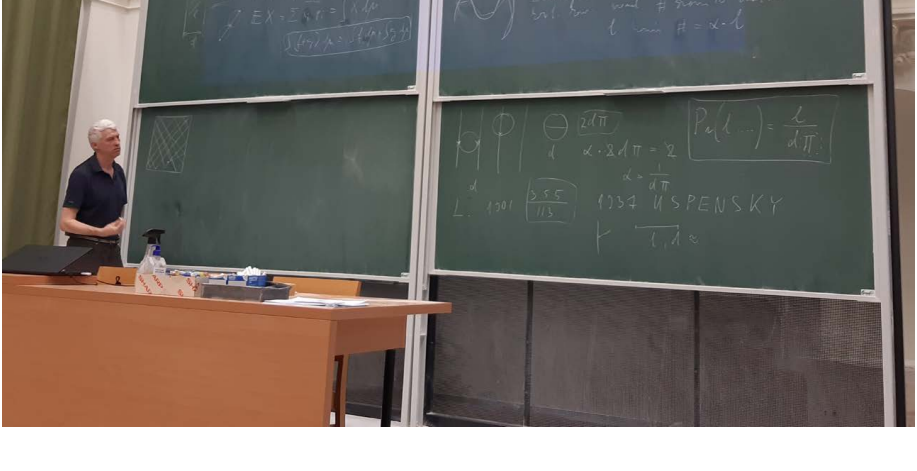
A nemzetközi Pi-nap a sokak által egyedüliként ismert (talán még az e szám rúghat mellette labdába), de mindenképpen a legismertebb transzcendens szám, a pi (π) ünnepe. Első ünneplése 1988. március 14-én történt, amikor is a dátum (03.14) éppen a π első három számjegyéből áll. Az ötletadó Larry Shaw San Franciscó-i professzor („a π hercege"), akinek vezetésével az első ünneplés óta a π számjegyeivel díszített gyümölcsös pitéket fogyasztanak közösen az intézete munkatársai. Pi-nap alkalmából világszerte egyre szélesebb körben tartanak különböző matematikához kötődő rendezvényeket. További érdekesség e nappal kapcsolatban, hogy Albert Einstein születésének, valamint Stephen Hawking halálának évfordulója is Pi-napra esik.

A Bolyai Intézet kollégái közül a korábbi években többen vettünk már részt általában gimnáziumok által szervezett pi-napi előadásokon. Innen jött az ötlet, hogy kézenfekvő lenne, ha a szegedi matematikai intézet is előállna egy saját hasonló rendezvénnyel. Lelkes előadókat nem volt nehéz találni, hiszen a matematikus kollégák közül többen is rendszeresen vállalnak különböző tudomány-népszerűsítő előadásokat.

Az időponttal szintén szerencsénk volt, hiszen a tavaszi félévben tartjuk a „Matematika népszerűsítése" című szabadon választható kurzust, amelyet éppen csütörtök délutánokra szerveztünk, így a kurzus kb. húsz fős alaplétszáma biztosítva volt. Az említett kurzus célja egyébként, hogy megtanuljunk a matematikáról érdekesen beszélni, valamint közösen részt veszünk matematikát népszerűsítő programokon. Ebbe a tematikába kiválóan illeszkedett egy néhány órás délutáni rendezvény megszervezése.

Lássuk, hogy idén milyen előadásokat tartottunk:





1. Elsőként fiatal kollégánk, Boldog Péter beszélt a π szám egy alternatív kiszámításáról, ütköző blokkok és egy fénysugár segítségével. Az előadás alapjául szolgáló videó itt érhető el, 3blue1brown videóit egyébként is mindenképpen érdemes időről-időre megnézni.
2. Másodikként Pluhár András következett, aki a Buffon-féle görbe tű problémáról (Buffon's noodle) beszélt. Érdekesség, hogy az eredeti Buffon-féle egyenes tű problémához (Buffon's needle) képest ezt a problémát jóval kevesebben ismerik.
3. Őt követte Csaba Béla, Fulkerson-díjas kollégánk, aki a π közelítésére használt Wallis-formulára adott egy geometriai bizonyítást.
4. Utolsó előttiként a tavaly 80 éves Németh József tanár úr mesélt humoros és energikus stílusában az ismert és kevésbé ismert π-közelítő formulákról, majd belátta a π irracionális voltát. Természetesen az $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ sorösszeget sem hagyhatta ki előadásából, mely olyannyira a tanár úr kedvence, hogy kapott már ilyen bögrét, pólót, kitűzőt, még a 80. születésnapi tortáját is ez a formula díszítette. Sőt, elmesélte, hogy amikor egy, a fejét ért baleset után a mentőorvos a bekövetkező esetleges károsodások miatt képességeit felmérve kérte, hogy „mondjon valamit", akkor elsőként a „szumma egy per n négyzet egyenlő pi négyzet per hat" mondat csúszott ki a száján (szegény mentőorvos nem lett sokkal okosabb a tanár úr állapotát illetően).

5. Végül pedig Makay Géza beszélt racionális, algebrai és transzcendens hatványokról: a három szám (alap, kitevő, eredmény) mindegyikére három lehetőségünk van (racionális, algebrai, transzcendens), így összesen 27 esetet vehetünk számba. Aki kíváncsi, hogy a 27 esetből melyek fordulhatnak elő, illetve milyen példákat tudunk adni, annak ajánljuk szeretettel Géza cikkét a szegedi Polygon 2021. szeptemberi számában.

A közönség soraiban matematika és más szakos egyetemista hallgatók és munkatársak, középiskolai tanárok és diákok, valamint érdeklődő tudománykedvelők is jelen voltak. A több mint százfős hallgatóság nagyon élvezte az előadásokat, mindenki talált bennük számára érdekeset. Mi sem bizonyítja jobban, mint hogy a majdnem három és fél órás rendezvény végére is nagyon sokan maradtak (pedig a pizza már korábban elfogyott), illetve azóta is kapjuk a meghívásokat a szegedi középiskolákból előadások tartására. Az alkalom végére nem maradt más hátra, mint hogy mindenkinek jó pi-henést kívánjuk a másnap kezdődő március 15. miatti hosszú hétvégére.

A pi-napi rendezvények szervezését bátran ajánljuk minden matematikához kötődő szervezetnek, intézetnek és a matematikából kiemelkedő gimnáziumoknak, hiszen az év e napján különös figyelem irányul a matematikára, amit ki lehet használni a laikusok és a pályaválasztó diákok motiválására kedvenc tárgyunk iránt. Ha pedig még pizzával és/vagy pitével is felturbózzuk az alkalmat, garantált a siker!

Győrffy Lajos, SZTE Bolyai Intézet, adjunktus, szervező

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI
GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon:

Barbarics Márta 2024. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Matek az Utcán a Matematika Világnapja (π-nap) alkalmából

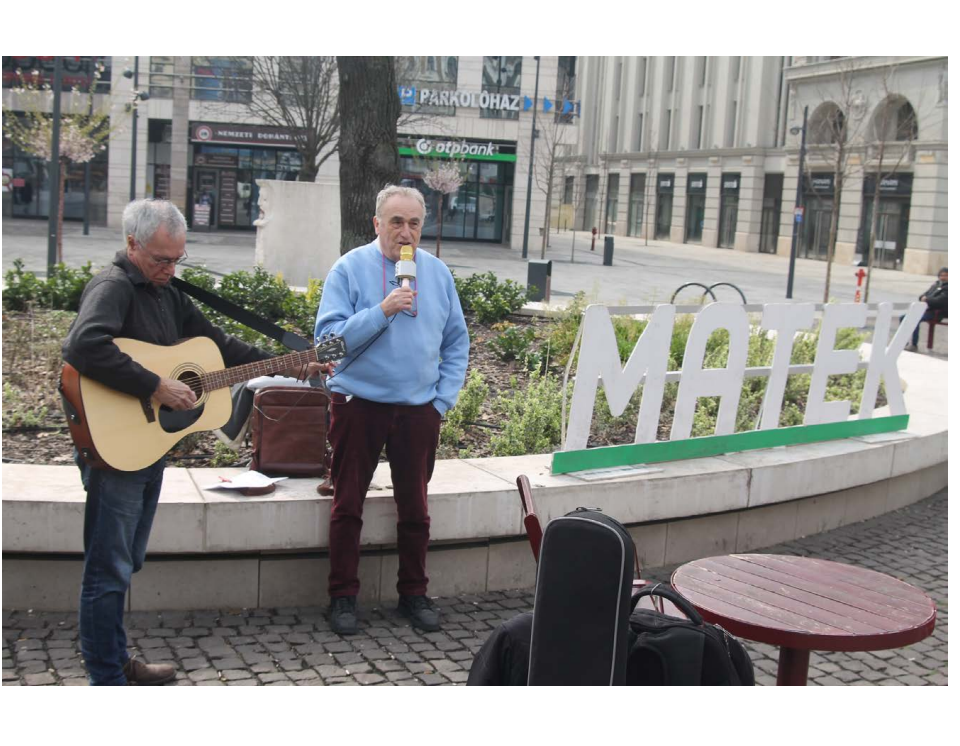
Március 14. a nemzetközi π-nap (azaz pi-nap, $\pi \approx 3{,}14$), a Matematika Világnapja. Ennek alkalmából a Bolyai János Matematikai Társulat idén is megszervezte a Matek az Utcán eseménysorozatot (a tavalyi beszámoló itt található). A cél a matematikát közelebb vinni az utca emberéhez. A Társulat felhívására több mint negyven önkéntessel, többszáz ember bevonásával valósultak meg matematikát népszerűsítő utcai programok. A nemzetközi kezdeményezést követve, Magyarországon az immár második évben megrendezett esemény védnöke az UNESCO Magyar Nemzeti Bizottság volt. A BJMT kezdeményezéséhez saját programokkal kapcsolódtak további szervezők. Így idén két budapesti és öt vidéki helyszínen voltak rendezvények március 14-én, illetve március 16-án.

Szigetmonostoron, Baján, Pusztamérgesen és Nyíregyházán a π-napon, március 14-én helyi iskolások részvételével zajlott a „π-ünnep”. Szigetmonostoron Szalay Péter szobrászművész matek által inspirált absztrakt szobrairól mesélt. A gyerekek megnézhették, megfoghatták a szobrokat, a szervezők szerint sok érdekes kérdést tettek fel. Bata Tibor saját matek aha-élményeit osztotta meg alsó tagozatos diákokkal, Mészáros László villamosmérnök pedig a GPS-ről és az űrhajózásról mesélt érdekes dolgokat, valamint a Róka nevű repülőről, amivel átélhető a súlytalanság. A gyerekek kipróbálhatták a hipociklois rajzolót is. Baján az érdeklődő diákok matematikai fejtörőket oldottak meg. A Szent Ágoston Katolikus Általános Iskola Pusztamérgesi telephelyén pedig előadást tartottak és a π számjegyeiből írott zenére jelenítették meg a π-t annyi tizedesjegyig, ahány diák részt vett a programban (46). A Nyíregyházi Egyetem Matematika és Informatika Intézete középiskolásoknak szóló játékos feladatokkal, érdekes feladványokkal, matematikai témájú versennyel ünnepelt.

Március 16-án Budapesten a Blaha Lujza téren volt a rendezvény központi helyszíne, ahol 10 és 13 óra között több mint 100 járókelőt vontak be érdekes matematikai tevékenységekbe. Az érdeklődők felfedezhették a térkövön megjelenített Pascal-háromszög tulajdonságait: a képzési szabályától kezdve, a Fibonacci-sorozattal való kapcsolatán át, egészen a fraktálokat eredményező prím-maradékosztály színezésekig.

Gál Péter térkőre rajzolt labirintussal, illetve számos ördöglakattal állított kihívást a megoldásukra vállalkozók elé, akik megjegyezték, hogy szívesen játszanának ilyeneket az iskolában is. Pálffy László játékfejlesztő matematikus valószínűségi játékokat játszott a résztvevőkkel, miközben a következő tanulságokat gyűjtötte: „a dobókockának nincs emlékezete”, „csak az nyer, aki játszik” és „eddig szinte minden kérdésemre választ adott a statisztika”.

Futó Péter a „Micimackó és a Pí” című, saját átírású dalt adta elő Illés György gitárkíséretével, közös éneklésre invitálva a járókelőket.



Huszti Melinda divat- és textiltervező iparművésszel matematikai témájú művészi alkotások készülhettek. ELTE-s és BME-s egyetemi hallgatók Medve Matek önkéntesekkel kiegészülve, logikai játékokat, csillagászati kérdéseket és 3D nyomtatott fraktálokat hoztak. A téren a Poliuniverzum játékkal játszhattak kicsik és nagyok, illetve vihették haza a nyereményjáték győztesei, de Einstein-csempe és más tesszalációk (hézag nélküli síkkitöltések) is várták az érdeklődőket.

A közönség nagyon sokszínű volt: beszállt a játékba éppen arra járó külföldi turista épp úgy, mint a matematikát szerető hajléktalan, vagy a hátrányos helyzetű családból származó kislány, aki anyukájával véletlenül tévedt arra egy közeli józsefvárosi utcából. De volt olyan is, aki Fejér megyéből utazott Budapestre matematika tanár édesapjával, hogy részt vegyen a programon. Az óvodásoknak is élvezetes feladatoktól kezdve egészen az egyetemi matematikáig mindenki találhatott a maga számára megfelelő szintű érdekességet. A rendezvény sikerét mutatja, hogy olyan résztvevő is volt, aki tavaly még épp arra sétálva véletlenül talált rá a programra, de idén már tudatosan jött, egész családjával együtt. Az önkénteseknek az okozta az egyik legnagyobb örömet, amikor azok, akik először tartózkodóbbak voltak a matematika hallatán, végül sikerélményekkel és széles mosollyal távoztak.

A programhoz csatlakozott a Vasarely Múzeum is. Így Budapesten a Szentlélek téren az érdeklődők megismerhették, hogyan tervezte meg Vasarely azokat a képeit, amelyek látszólag kiugranak a papír felületéből (vagy épp belesüllyednek), majd bárki megtervezhette saját, a földben vagy a falon egy lyukat ábrázoló kollázsát. Szmerka Gergő tanítványai csodálatos vasarely-szerű képeket alkottak. Szegeden a Széchenyi téren Kávássyné Molnár Emese tanárnőtől és diákjaitól lehetett megtanulni, hogyan kell szorobánnal összeadni-kivonni. Példát mutattak arra, hogy hogyan lehet a teret hézagmentesen kitölteni és az arra járók itt is megismerkedhettek Hanoi tornyaival vagy a Poliuniverzum kirakásával. A tapasztalatok és a visszajelzések minden helyszínen hasonlóak voltak. A járókelők örömmel vennének részt hasonló eseményeken, az önkéntesek pedig már lelkesen készülnek újabb ötletekkel a jövő évi Matek az Utcán programokra.

Barbarics Márta

Bolyai János Matematikai Társulat

További sajtómegjelenéseket találhatnak a Bolyai Társulat honlapján, ahol végignézhetik a képgalériát is: https://www.bolyai.hu/rendezvenyek-egyeb-matekazutcan-2024-beszamolo.

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon: ›

Szerkesztő 2024. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Gács András-díj a Matematikus Hangversenyen

2018 óta minden évben egy vagy két fiatal matematikus vehette át a Gács András-díjat kiváló egyetemi oktatói teljesítményéért. Röst Gergely, Zábrádi Gergely, Elekes Márton, Bérczi-Kovács Erika, Szeszlér Dávid, Besenyei Ádám, Nyul Gábor, Bérczi Kristóf, Frenkel Péter, Csikvári Péter és Pálvölgyi Dömötör mellé idén **Csomós Petra** és **Ruff János** csatlakozhatott. Mindannyiukról részletesen olvashatnak a https://www.gacsandrasdij.org/korabbi-dijazottak/ oldalon, vagy az Érintő korábbi számaiban.

A különleges díj talapzata egy téglatest, ehhez kapcsolódik mozgékony, rugalmas rögzítettséggel a híres Fano-sík egy modellje, mely a fiatalon elhunyt Gács András kutatási területéhez, a véges geometriához kötődik. A díjazottakról a kuratórium (tagjai családtagok és volt kollégák) döntött. A két kiválasztott matematikus méltatását Szőnyi Tamás olvasta fel:

Csomós Petra, az ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszékének docense, 2008-ban szerzett PhD fokozatot Faragó István doktoranduszaként. Ezután néhány évig posztdoktorként az Innsbrucki Egyetemen dolgozott, majd 2015-ben visszatért, és ezt követően 2022-ben habilitált. Kutatási területe a parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása, azon belül is operátorszeletelési eljárásokkal, exponenciális és Magnus-integrátorokkal, valamint az ehhez kapcsolódó operátorfélcsoport-elmélettel foglalkozik. Mintegy 40 publikációjára 200 hivatkozást kapott.

Petra az oktatási feladatokból mindig sokat vállalt. Igyekezett a matematikát megszerettetni azokkal is, akik nem a matematika alapszakon folytatták tanulmányaikat: a földtudomány és környezettan alapszakon több éven át tartotta a matematika évfolyam-előadásokat. Ezzel párhuzamosan a matematika alapszakosoknak szóló „Folytonos modellezés’’ tárgy anyagát is kidolgozta, amely az érintett hallgatók körében nagyon népszerű lett. Ennek kapcsán sok szakdolgozat született az irányításával. A matematika alapszakos Differenciálegyenletek tárgy oktatását is több féléve sikeresen végzi. Mindezek során a hallgatókkal nagyon jó kapcsolatot alakított ki érdekes, gyakorlati példákkal, lendületes, fiatalos előadásmóddal hozta közelebb ezen területeket a diákokhoz. A standard oktatási feladatok kiváló teljesítésén túl az ELTE Matematikai Intézetének nyílt napján tartott érdekes előadásokat, valamint hasonló feladatot vállalt több éven át a Kutatók éjszakáján is. Itt ismert matematikai érdekességek mellett modern kutatási irányokat, eredményeket is ismertetett, az előadások anyaga alapján cikket is közölt a Természet Világa folyóiratban.

Ruff János jelenleg a Pécsi Tudományegyetem Természettudományi Karának adjunktusa, diplomáját és doktori fokozatát a Szegedi Tudományegyetemen szerezte. Kutatásait főleg véges geometria és algebrai gráfelmélet területén végzi.

A Pécsi Tudományegyetem Természettudományi Karának munkájába 18 éve csatlakozott be, azóta folyamatosan magas óraszámban tart főleg tanárszakos és matematika BSc hallgatóknak geometriai, kombinatorikai, algebrai jellegű kurzusokat és problémamegoldó szemináriumot. A reguláris kurzusokon kívül rendszeresen tart véges geometriai tárgyú speciális előadásokat.

Fontosnak tartja a tehetséggondozást, a hallgatók kutatásba bevonzásán túl középiskolásoknak is havi rendszerességgel tart tehetséggondozó foglalkozásokat. Korábban évekig a Baranya megyei olimpiai szakkör vezetője volt, az odajáró diákok közül többen azóta PhD fokozatot szereztek matematikából. Nagy hangsúlyt fektet arra, hogy előadásai jól felépítettek, érdeklődést felkeltőek legyenek. Órái népszerűek, így szakdolgozóinak száma folyamatosan átlagon felüli. Eddig több mint 25 szakdolgozat (matematika tanári, matematika BSc, Computer Science BSc) témavezetője volt.

A BJMT Baranya megyei tagozatának elnökeként számos, tanároknak szóló előadás és rendezvény szervezésében vett részt. A matematika népszerűsítését is fontos feladatának tartja. A Kutatók Éjszakája rendezvényeknek állandó előadójaként, különböző pályaorientációs rendezvények, Pí napok résztvevőjeként igyekszik a tudománnyal nem rendszeresen foglalkozóknak is érdekessé, „elérhetővé" tenni a matematikát.

A Gács András különdíjat most a gyorsan népszerűvé vált Møbee nevű kártyajáték megalkotásáért kapta. Ez a kártyajáték a Dobble továbbgondolása, általánosítása. Míg a Dobble-ban mindig két kártya közös szimbólumát kell megtalálni, addig a Møbee-ben ugyanezt 3 kártyánként kell megtegyük, ami a játékot még izgalmassabbá teszi. A játék hátterében speciális végesgeometriai struktúrák, a Möbius-síkok állnak. Bár a játék csak 2023 novemberében jelent meg, már több mint 2600 készlet kelt el belőle, a vásárlók között nemcsak magyarok vannak, például a flamand matematikai diákolimpia szervezői ezzel a kártyajátékkal ajándékozták meg a döntőbe jutott versenyzőket.

(Cikkünk a Møbee matematikájáról: https://ematlap.hu/gazda-g-sag-2024-5/1366-mobius-sikok-blokkrendszerek-mobee-jatek)

A Matematikus Hangverseny hagyománya láthatóan töretlen, az új előadók is nagy sikerrel szerepeltek: említhetjük a csengő hangú női Allegrettino Kamarakórust, a Sasvári testvéreket, Stein Andort vagy Perczel Jakabot. Nem bánta meg, aki április 3-án este eljött az ELTE Jogi Kar dísztermébe.

Copyright © BOLYAI TÁRSULAT Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

AZ **INTERJÚ-PORTRÉ** MENÜPONT JÓL VAGY KEVÉSBÉ ISMERT MATEMATIKUSOKAT, VAGY OLYAN, EGYKOR MATEMATIKUSKÉNT VÉGZETTEKET SZERETNE BEMUTATNI, AKIK MA MÁS SZAKMA ELISMERT KÉPVISELŐI, SPORTOLÓK, MŰVÉSZEK...(ROVATSZERKESZTŐ: *OLÁH VERA*.)

Szerkesztő
2024. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Big Five centenáriuma

Különleges ülésnapot tartott az MTA Matematikai Tudományok Osztálya június 5-én a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben. A Big Five centenáriumán a 100. születésnapját idén ünneplő *Fuchs Lászlónak*, az MTA külső tagjának *Freund Tamás*, az MTA elnöke átadta az Arany János-életműdíjat, majd egy-egy előadás hangzott el a nagy ötök, Aczél János, Császár Ákos, Fuchs László, Gaál István és Horváth János matematikai munkásságának tiszteletére.

Paulovics Zoltán
2024. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Ki akar ma tanítani? – II. rész

Ujházy Márton matematikusként végzett 2011-ben, de már a képzés alatt tudta, hogy középiskolában szeretne tanítani. Rögtön felvették az ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnáziumba, ahol azóta vezetőtanárként tanárszakos hallgatók fejlődését is segíti. Tanári, osztályfőnöki és vezetőtanári feladatai mellett felfedeztető tananyagbank-fejlesztésben vesz részt. Szabadidejében táncházban zenél, és persze, mint az interjút készítő *Paulovics Zoltán* is, biciklizik. A tanári hivatás nehézségeiről és szépségeiről szól a beszélgetés.

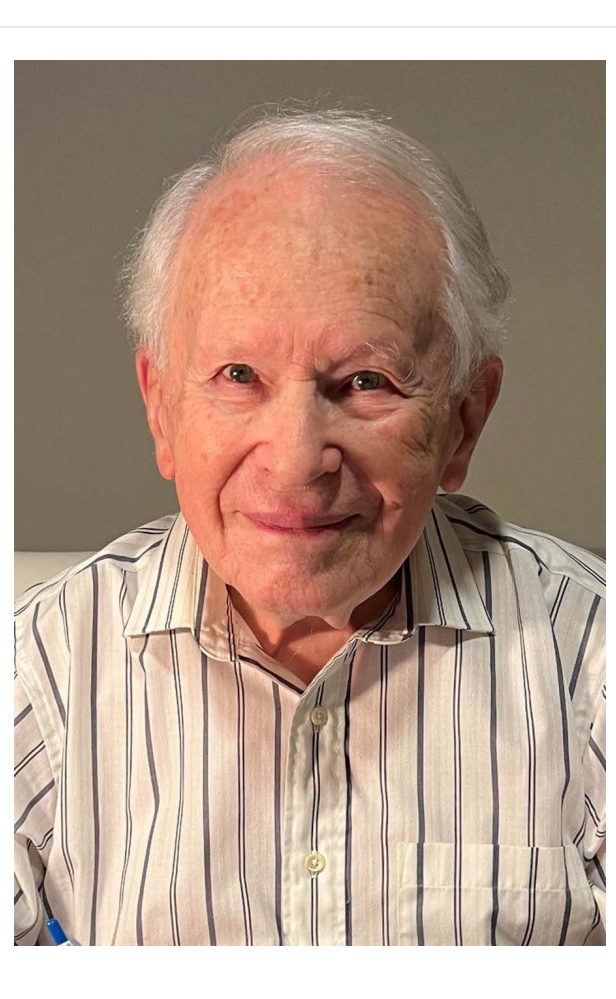
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

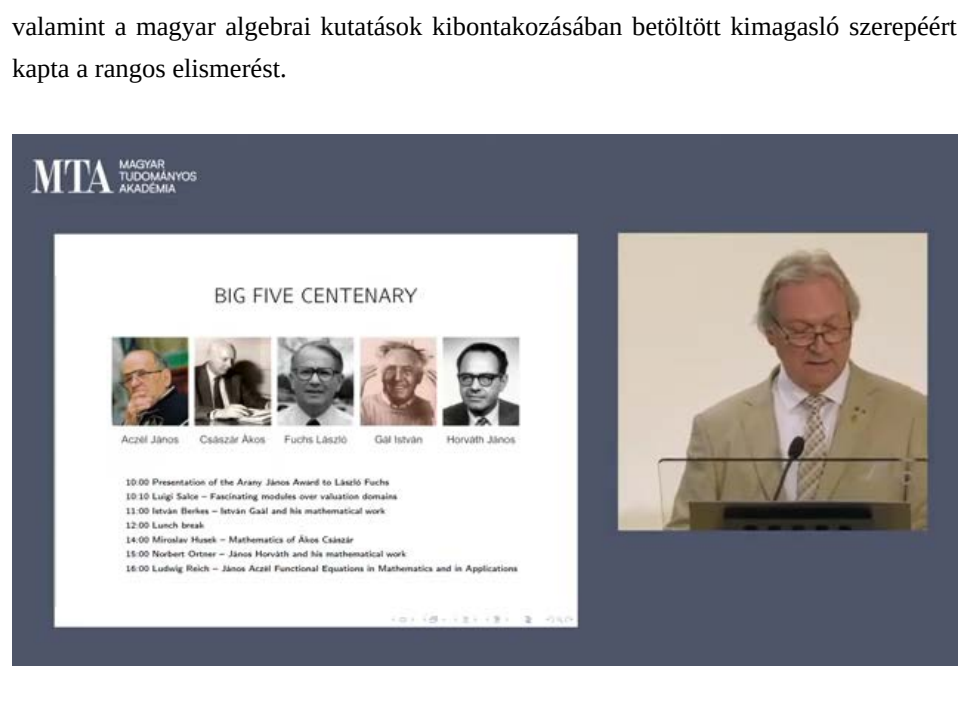
Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon:

Szerkesztő 2024. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Big Five centenáriuma



Különleges ülésnapot tartott az MTA Matematikai Tudományok Osztálya június 5-én a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben. *Pálfy Péter Pál* és *Páles Zsolt* köszöntője után a 100. születésnapját idén ünneplő *Fuchs Lászlónak*, az MTA külső tagjának, a Tulane University professor emeritusának *Freund Tamás*, az MTA elnöke átadta az Arany János-életműdíjat. Evvel az életük során jelentős tudományos munkásságot végző és kiemelkedő eredményeket elérő külhoni magyar tudósokat, kutatókat díjazza az Akadémia. Fuchs László az algebrában – azon belül az Abel-csoportok vizsgálatában –, valamint a magyar algebrai kutatások kibontakozásában betöltött kimagasló szerepéért kapta a rangos elismerést.



MTA MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

BIG FIVE CENTENARY

Aczél János Császár Ákos Fuchs László Gál István Horváth János

10:00 Presentation of the Arany János Award to László Fuchs
10:10 Luigi Salce – Fascinating modules over valuation domains
11:00 István Berkes – István Gaál and his mathematical work
12:00 Lunch break
14:00 Miroslav Husek – Mathematics of Ákos Császár
15:00 Norbert Ortner – János Horváth and his mathematical work
16:00 Ludwig Reich – János Aczél Functional Equations in Mathematics and in Applications

A „Big Five” nevet Fejér Lipót adta annak az 5 kiemelkedő diákjának (*Aczél János, Császár Ákos, Fuchs László, Gaál István és Horváth János*), akik a II. világháború utáni nagyon nehéz években saját szervezésű, hetenkénti szemináriumaikon tanultak együtt, és olyan eredményeket értek el, hogy 1947-ben mindannyian doktoráltak. Későbbi életútjuk is igazolta nagyságukat, és bár külön-külön, ki itthon, ki külföldön, de mindannyian neves matematikaprofesszorok lettek. 10 évvel ezelőtt, 90 évesen még mind az öten részt vettek a számukra ugyanitt rendezett ünnepi ülésen. Ma már csak egyikük emlékezett köszönőbeszédében társaira. Fuchs László kivételesen jó szellemi és fizikai állapotban beszélt a bennfentes hallgatóságnak, állítva és bizonyítva, hogy 100 évesen is lehet foglalkozni matematikával.

Meglepetés ajándékként *Kacskovics Imre*, az ELTE TTK dékánja platina oklevelet adott át az egyetem egykori dékánja, Fuchs László részére:

A Rényi Intézet honlapján, itt megtekinthető az eseményről és az előadásokról készült hír és az eseményről készült videófelvétel.

MTA-fotó Szigeti Tamás

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon:

Paulovics Zoltán 2024. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Ki akar ma tanítani? – II. rész

Amikor minden gördül – Beszélgetés Ujházy Mártonnal

„Hova fogom itt lelakatolni a biciklimet?” – nézek tanácstalanul körbe az ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium épülete előtt. Aztán észreveszem a biciklitárolót, ráadásul egy nekem ismerős biciklit is. Épp a kerékpár tulajdonosához, Ujházy Mártonhoz, a Trefort matematika vezetőtanárához jöttem interjút készíteni .

Marci matematikusként végzett 2011-ben, de már a képzés alatt tudta, hogy középiskolában szeretne tanítani. Rögtön felvették a Trefortba, ahol azóta vezetőtanárként tanárszakos hallgatók fejlődését is segíti. Tanári és vezetőtanári feladatai mellett már az aktív matematikatanár-közösség továbbképzésében is részt vesz: felfedeztető tananyagbank-fejlesztésen túl a tavalyi, 35. Varga Tamás Módszertani Napok sikeres előadója is volt.

„A biciklizésről is kérdezhetnék valamit” – villan át az agyamon, de aztán elhessegetem a gondolatot, mert már így is túl sok téma van a beszélgetéshez…

Marci bemutatja a munkaközösség féltett kincsét: egy mechanikus számológépet – ámulva hallgatom, ahogy a működésének finomságairól mesél. Ha lehet, még jobban lenyűgöz az iskolai könyvtár – plafonig érő polcrendszerével –, ahol egy nyugodt sarokban helyet foglalunk.

Marci, hogy látod vezetőtanárként, ki akar ma tanítani?

Nagyon sokféle tanárjelölt érkezik hozzánk, nagyon különböző karakterrel és motivációval. De azért felfedezhető közös motívum: majd minden hallgatóban motoszkál valami mélyről jövő érdeklődés, kíváncsiság a diákok és a tudás átadása iránt.

Nyilván nem azok választják a tanári pályát, akik sok pénzt akarnak keresni, vagy kényelmes állást szeretnének. Van viszont ezek helyett a motivációk helyett valami hajtóerő, ami a diákok, a diákokkal való foglalkozás felé vezeti őket.

Ezek a jellemzők, gondolom, a te tanári karakteredben is megjelennek.

Persze. Jó kérdés, miért akar az ember bármit is. Miért kezd el olvasni egy könyvet? Vagy miért fest, zenél, tanul valami szakmáján kívülit? Tapasztalatom szerint az ilyesmi úgy kezdődik, hogy valami elkezd motoszkálni az emberben, és valamiért nem hagyja békén: vonzza, hívja a felfedezésre.

Számomra nagyon érdekes napról napra, óráról órára bemenni a diákokhoz, együtt elmerülni a matematikában, együtt röhögni a kirándulásokon. Azért tanítok, mert nagyon szeretem ezt a munkát, nagyon komfortosnak érzem, otthonos számomra, nem stresszel. Szerencsére eljutottam a pályámon arra a pontra, amikor a felmerülő kérdések és helyzetek többségére vannak kialakult, működő módszereim.

Vonz az odafordulás a diákokhoz, az ő támogatásuk, és közben a matematika is. Hogyan látod a tanári munka ezen kettősségét, hogyan kapcsolódik benned össze a matematika és a nevelés?

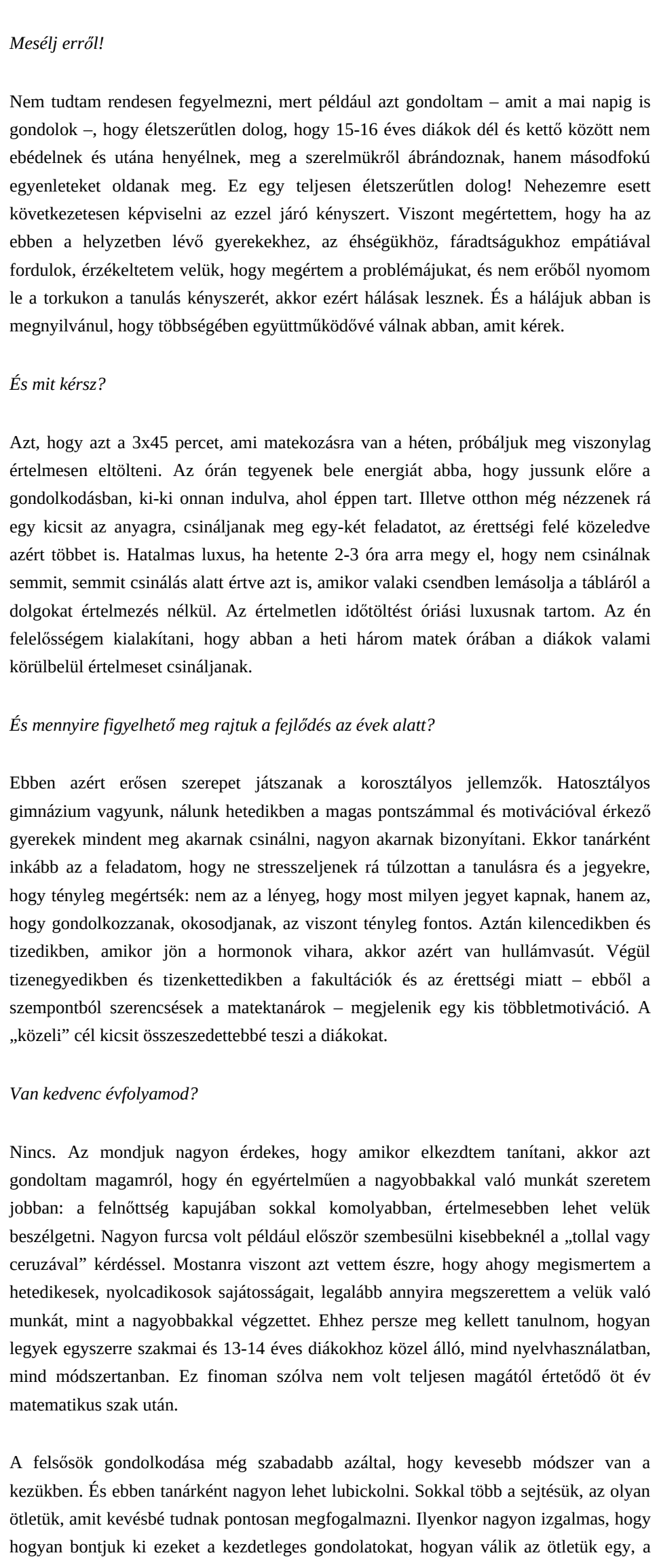
Látszólag két különböző dolgot csinálunk a diákokkal: egyrészt gondolkozni tanítjuk őket, másrészt az érzelmi-szociális életükkel is foglalkozunk. Mindkettőre igyekszünk hatással lenni, támpontokat adni nekik. Fontos a szaktárgy, mert mindenképpen kell egy nyelv, amin keresztül kapcsolatot teremtünk a diákokkal. Szükséges, hogy legyen kerete a közös időnek, és az is, hogy az általam tanított területen úgy érezzem, olyan gondolatokat adok át, amelyek érvényesek lehetnek a diákok számára, vagy legalább egy részük számára. Ha a szaktárgyon keresztül kialakult kapcsolat mélyebb, összetettebb emberi tartalmat kap, az hab a tortán.

A szaktárgyi részről és az emberi részről sem szabad megfeledkezni! Egyrészt folyamatosan szem előtt kell tartanom azt a személyt, akit tanítok. Másrészt időről időre eszembe jut Dobszay László figyelmeztetése is: „annyit foglalkozunk Pistikével, akinek meg akarjuk tanítani a matematikát, hogy közben elfeledkezünk a matematikáról”. Megvan a helye annak, hogy a gyerekekkel mély beszélgetést folytassunk, de annak is, amikor az a fontos, hogy a diáknak olyan tevékenységet kínáljunk, ami leköti. Amikor úgy érzi, hogy vacak a világ körülötte, megoldhatatlan problémák veszik körül, akkor jól eshet megtapasztalnia, hogy mégis van a világnak egy olyan szűk szelete, amit kedvel, amivel szívesen bíbelődik. Ez segítséget tud nyújtani a kamaszkor viharfelhői közepette.

Ez a szűk szelet valakinek lehet a matematika, valakinek a francia nyelv, de mondhatnék bármi mást is. Nem kell, hogy mindenkinek a matek legyen a biztonságos szeglet. Az viszont fontos, hogy intézményi szinten adjunk olyan széles spektrumot, hogy mindenki találhasson fogódzókat. És legalább ilyen fontos az is, hogy abban, ami egy-egy tanuló számára nem olyan érdekes, abban ne nyomjuk őt agyon túlzó elvárásokkal.

Ezt hogyan éled meg nap mint nap? Hiszen mégis csak meg kell tanítanod nekik a tananyagot, le kell érettségizniük…

Persze, ez egy fontos kérdés, nem is mindig könnyű a gyakorlatban. Kitől mit várjak el? Hogyan tartsak rendet egy csoportban? Hogyan tartsak rajta egy csoportot egy olyan úton, amihez semmi kedve nincs éppen? Nem könnyű… Nekem például a fegyelmezéssel a pályám elején nagyon sok problémám volt.



Mesélj erről!

Nem tudtam rendesen fegyelmezni, mert például azt gondoltam – amit a mai napig is gondolok –, hogy életszerűtlen dolog, hogy 15-16 éves diákok dél és kettő között nem ebédelnek és utána henyélnek, meg a szerelmükről ábrándoznak, hanem másodfokú egyenleteket oldanak meg. Ez egy teljesen életszerűtlen dolog! Nehezemre esett következetesen képviselni az ezzel járó kényszert. Viszont megértettem, hogy ha az ebben a helyzetben lévő gyerekekhez, az éhségükhöz, fáradtságukhoz empátiával fordulok, érzékeltetem velük, hogy megértem a problémájukat, és nem erőből nyomom le a torkukon a tanulás kényszerét, akkor ezért hálásak lesznek. És a hálájuk abban is megnyilvánul, hogy többségében együttműködővé válnak abban, amit kérek.

És mit kérsz?

Azt, hogy azt a 3x45 percet, ami matekozásra van a héten, próbáljuk meg viszonylag értelmesen eltölteni. Az órán tegyenek bele energiát abba, hogy jussunk előre a gondolkodásban, ki-ki onnan indulva, ahol éppen tart. Illetve otthon még nézzenek rá egy kicsit az anyagra, csináljanak meg egy-két feladatot, az érettségi felé közeledve azért többet is. Hatalmas luxus, ha hetente 2-3 óra arra megy el, hogy nem csinálnak semmit, semmit csinálás alatt értve azt is, amikor valaki csendben lemásolja a tábláról a dolgokat értelmezés nélkül. Az értelmetlen időtöltést óriási luxusnak tartom. Az én felelősségem kialakítani, hogy abban a heti három matek órában a diákok valami körülbelül értelmeset csináljanak.

És mennyire figyelhető meg rajtuk a fejlődés az évek alatt?

Ebben azért erősen szerepet játszanak a korosztályos jellemzők. Hatosztályos gimnázium vagyunk, nálunk hetedikben a magas pontszámmal és motivációval érkező gyerekek mindent meg akarnak csinálni, nagyon akarnak bizonyítani. Ekkor tanárként inkább az a feladatom, hogy ne stresszeljenek rá túlzottan a tanulásra és a jegyekre, hogy tényleg megértsék: nem az a lényeg, hogy most milyen jegyet kapnak, hanem az, hogy gondolkozzanak, okosodjanak, az viszont tényleg fontos. Aztán kilencedikben és tizedikben, amikor jön a hormonok vihara, akkor azért van hullámvasút. Végül tizenegyedikben és tizenkettedikben a fakultációk és az érettségi miatt – ebből a szempontból szerencsések a matektanárok – megjelenik egy kis többletmotiváció. A „közeli” cél kicsit összeszedettebbé teszi a diákokat.

Van kedvenc évfolyamod?

Nincs. Az mondjuk nagyon érdekes, hogy amikor elkezdtem tanítani, akkor azt gondoltam magamról, hogy én egyértelműen a nagyobbakkal való munkát szeretem jobban: a felnőttség kapujában sokkal komolyabban, értelmesebben lehet velük beszélgetni. Nagyon furcsa volt például először szembesülni kisebbeknél a „tollal vagy ceruzával” kérdéssel. Mostanra viszont azt vettem észre, hogy ahogy megismertem a hetedikesek, nyolcadikosok sajátosságait, legalább annyira megszerettem a velük való munkát, mint a nagyobbakkal végzettet. Ehhez persze meg kellett tanulnom, hogyan legyek egyszerre szakmai és 13-14 éves diákokhoz közel álló, mind nyelvhasználatban, mind módszertanban. Ez finoman szólva nem volt teljesen magától értetődő öt év matematikus szak után.

A felsősök gondolkodása még szabadabb azáltal, hogy kevesebb módszer van a kezükben. És ebben tanárként nagyon lehet lubickolni. Sokkal több a sejtésük, az olyan ötletük, amit kevésbé tudnak pontosan megfogalmazni. Ilyenkor nagyon izgalmas, hogy hogyan bontjuk ki ezeket a kezdetleges gondolatokat, hogyan válik az ötletük egy, a többiek számára is érthető gondolatmenetté. Ez egy rettenetesen izgalmas dolog számomra!

És ez a szabadság csökken az évek alatt…

Persze, de ez valamennyire törvényszerű.

Miért?

Minél több módszert tudsz, annál több bejáratott útvonalad van. Tehát, ha az ember már megtanulta például a Pitagorasz-tételt, a másodfokú megoldóképletet, a szögfüggvényeket, akkor van egy hatalmas eszköztára. A diákok nagy többsége egy megoldandó matekfeladat láttán azon kezd el gondolkozni, hogy mi az, amit ebből használni tud. Hetedikben még ez az eszköztár nagyon pici, és nem alakult ki a matematikai eszközök tudatos alkalmazásának attitűdje sem. Gimnáziumban az eszköztáruk már sokkal gazdagabb. Persze, amikor előkerülnek nem szokványos feladatok, az mindig egy izgalmas helyzet.

És az érettségi írásakor szinte már gondolkozniuk sem kell, csak minden feladatnál előhúzni a megfelelő eszközt, legalábbis középszinten.

Igen, a mostani középszintű érettségi egyértelműen azt a részét kéri számon a matematikai tudásnak, amiben bizonyos jól körülhatárolt módszereket kell leginkább szöveges feladatok megoldásán keresztül bemutatni.

Lehet, hogy törvényszerű ez a változás, de mennyire kívánatos?

Itt van a matematikának egy szép és fontos kettőssége, ami időnként ellentmondásokhoz vezet abban, hogy mit is kell csinálnunk tanárként. Az egyik az, hogy gondolkodni tanítunk, a másik pedig, amit még Szűcs Andrástól hallottam az egyetemen: „a matematika arra való, hogy ne kelljen gondolkozni”. Erre az elsőre furcsának tűnő állításra mondok egy középiskolai és egy általános iskolai példát. Amikor az ember tudja a másodfokú egyenlet megoldóképletét, akkor már nem kell azon gondolkoznia, hogy mik lesznek egy másodfokú egyenlet gyökei, csak végig kell csinálnia a behelyettesítést. Amíg ezt nem tudja, addig teljes négyzetté alakít, rendezget, alakítgat, tehát több gondolkoznivalója van. Hasonlóan, amíg nem ismeri egy diák az egyenleteket, addig a szöveges feladatokat sokszor ügyes trükkökkel oldja meg, kilogikázgatja. De amikor már tud egyenletet felírni, akkor, miután kiszűrte az adatokat a szövegből, általában viszonylag könnyen kipörög a megoldás.

Fontos kettősség az, hogy egyrészt tanítsunk gondolkozni is, másrészt a matematikai eszköztár fejlesztésével tanítsuk meg, hogy ne kelljen mindig gondolkozniuk a diákoknak.

Egyszerre nehéz szélesíteni és mélyíteni is.

Igen. Mindkettő fontos, de sokszor kihívás elé állítja a tanárt, hogy a kettő közül melyikre helyezze a hangsúlyt. Az is érdekes kérdés a számomra, hogy ez mennyire függ például a diákok tehetségétől. Viszonylag gyakran hallani, hogy bizonyos gondolkodásfejlesztést csak tehetséges diákok körében lehet megvalósítani. Nekem ahhoz kevés a tapasztalatom, hogy ebben állást foglaljak, éppen elmúltam 22 éves, amikor ide kerültem válogatott gyerekek közé, és a Treforton kívül csak magántanítási tapasztalatom van. Azt tudom, hogy mi működik itt, de más iskolákra, helyzetekre nincs elég rálátásom.

Az előző interjúban Szauer Marci a „Mi lenne a legnagyobb segítség?” kérdésre rávágta, hogy „Tíz év tapasztalat!”. Ismerve téged azt látom, hogy nagyon stabilan tudod, hogy általában mi működik neked, mit, hogyan, miért szoktál. Megvannak a jól átgondolt, kipróbált anyagaid, nem jössz zavarba egy váratlan helyzettől. Hadd legyek egy kicsit provokatív: miben nem vagy még tanár, hol akarsz még fejlődni?

Nagyon élvezem a mostani időszakot a tanári pályámon. Már sok segédanyagom van, elő tudom venni azokat a feladatsorokat, amiket a saját szám íze szerint dolgoztam ki, amiknek tudom, hogy mi az íve. Érzem, hogy szereztem egy olyan szintű rálátást a tananyagra, ami felszabadító és magabiztosságot ad: bátrabban merhetek kísérletezni munkaformákkal, felfedeztetéssel.

És – többször végigtanítva a teljes középiskolás anyagot – arról is van bőséges tapasztalatom, hogy adott idő alatt nagyjából honnan hová tudunk eljutni a diákjainkkal, ezért bátrabban játszhatok azzal, hogy egy témában kicsit jobban elmerülünk, aztán egy másikkal legfeljebb egy kicsit kevesebbet fogunk foglalkozni. Inspirál, hogy minél kevesebb elméleti útmutató megadásával, felfedeztetve tanítsak. Mostanra lett meg ahhoz az elég tapasztalatom, hogy sokkal szabadabban gondolkozzak a matematikatanításról: mit mikor miért és miért nem; mi az, ami mindenképpen szükséges, mi az, ami igazából elhagyható. Ez új utakat nyit meg, amelyeken végig szeretnék menni, szeretném tovább fejleszteni magam ezen a téren.

Ezt hallgatva úgy gondolnám, hogy szerencsésebbek a mostani diákjaid, hiszen tapasztaltabb, kiforrottabb, szakmaibb vagy. Éppen ezért hadd fordítsam vissza: milyen szempontokból szerencsésebbek a tíz évvel ezelőtti diákjaid?

Nem tudom, hogy kik a szerencsésebbek. Az biztos, hogy a tíz évvel ezelőttiek mondjuk matektanárként kevésbé jártak jól velem, mert sokkal szegényebb volt az eszköztáram, sokkal kevésbé voltam felkészült. Viszont megvolt a kezdetnek a nagy lendülete, annak az előnye, hogy fiatal tanár voltam nagy tervekkel, „Ide nekem az oroszlánt is!” mentalitással. Jobban ráértem, nem volt családom, gyerekeim, sokkal könnyebben bent maradtam délutánonként. És a generációs különbségek is lényegesen kisebbek voltak, ami szintén nem elhanyagolható szempont.

Most az jutott eszembe, hogy kicsit olyan ez, mint a szó igazán jó értelmében vett amatőr és profi közti különbség. Tehát, hogy az akkori önmagam sok mindenben emlékeztet egy jó és felkészült amatőrre – a lelkesedésében, hozzáállásában. A mostani hozzáállásom sokkal professzionálisabb, de időnként emiatt talán kimértebb, kevésbé spontán: már bennem van, hogy mit hogyan szoktam, egyértelműbb, hogy meddig érek rá, mikortól nem érek rá, mennyi kapacitásom van fizikailag, szellemileg és érzelmileg. A távlatos tervezés, a kiegyensúlyozott színvonal, a keretek világos megfogalmazása a professzionálisabb viselkedés jellemzői, de tud hiányozni belőle az amatőrségnek a bája és a lendülete.

Ennek hasonlít a dallama arra, amit az előbb mondtál a matematikában való jártasságra: kezdetben kevés eszközünk van, cserébe van egy intuitív, kreatív, nyitott, szabad légköre a gondolkozásnak. És aztán kialakulnak a struktúrák, eszközök, bevált módszerek, keretek…

Egy másik példa: mindenki felteheti a kérdést magának, hogy koncertekről milyen professzionális és milyen amatőr emlékei vannak. Nem biztos, hogy az életre szóló élmények mindegyike egy professzionális körülmények között megvalósuló profi koncerthez kötődik.

Nem sírod vissza azokat az éveket?

Azt, hogy több időm volt, azt visszasírom. De a megoldhatatlannak tűnő fegyelmezési problémákat az első két tanévemből biztosan nem, az emiatti gyomorgörcsöket és a bizonytalanságérzetet pláne nem.

Mára ezek teljesen elmúltak, és így tényleg nagyon otthonos számomra tanítani, jelen lenni. Habár igazából az az érdekes, hogy az elején is otthonos volt, csak sokszor megoldhatatlannak tűnő problémákkal telített.

Azért még vannak kihívások?

Persze. Az osztályfőnökség például mindig nagy kihívás, és ebben azért kiütközik az előbb említett időhiány.

Mielőtt osztályfőnök lettem volna, és tanácsokat gyűjtöttem, egy kollégám azt mondta, hogy az osztályfőnökség egy nagy lehetőség a személyiségfejlődésre, ugyanis a diákok mindig kérdeznek. Nem feltétlenül szóban feltett kérdést kell ezalatt érteni, például az is egy kérdés, ha egy diák a hátsó padban telefonozik az órán: Tanár Úrnak belefér, vagy nem fér bele?

Válaszolnom kell ezekre a kérdésekre, helyzetekre: mi az, aminek örülök, mi az, amit megtűrök, és mi az, amit már nem. Döntenem kell, hogy mire reagálok, mikor kérek, mikor utasítok. Aki nem osztályfőnök, az egy csomó ilyen kérdéssel kapcsolatban megteheti, hogy ne legyenek válaszai. Ezt azért mesélem el, mert a diákok által feltett kérdések újabbak és újabbak, nekem meg újra és újra válaszokat kell keresnem, ami egyrészt fárasztó, jó nagy kihívás, közben viszont egy hatalmas lehetőség a saját fejlődésemre is.

A szaktárgyamban pedig kihívást jelent a tehetséggondozás, illetve az, hogy hogyan tudok minél több életszerű dolgot becsempészni a tanításba, hogyan lehet minél több kapcsolatot találni a diákokat körülvevő világ és az osztálytermi matematika között.

Tizenhárom éve tanítasz és hat éve vagy vezetőtanár; lassan aktuális lesz egy újabb kihívás... Szeretnéd magad más közegben is kipróbálni?

Nagyon szeretek itt tanítani, és életemnek ezt az időszakát bőségesen kitölti: a pályámnak most azon a részén tartok, hogy egyszerre vagyok tanár, vezetőtanár, órák után magántanár, aztán otthon pedig ott vannak a kicsi gyerekeim, akiket el kell hozni a bölcsődéből, iskolából, de ezen felül is mindenképpen szánok rájuk időt. De mondjuk ötvenéves korom után, amikor már nagyok a gyerekeim, akkor mindenképpen szívesen vinnék egy csoportot például egy szakgimnáziumban. Ahogy korábban utaltam rá, nagyon örülnék neki, ha lenne személyes tapasztalatom arról, hogy egy trefortostól eléggé különböző matekcsoportban mi az, ami működik.

Még az is eszembe jut a kérdés kapcsán, vajon mennyire tesz jót az, hogy a tanárságra afféle szent hivatásként tekintünk, van egy ezzel kapcsolatos elég makacs mítosz a társadalomban és a tanári társadalomban.

Ennek a mítosznak nyilván van számos előnye, de mi történik akkor, amikor valaki elfáradt a pályán?

Úgy érted, hogy nehéz méltósággal elhagyni a tanári pályát a nyugdíj előtt?

Ha foggal-körömmel ragaszkodunk hozzá, akkor mindenképp. Nehéz lehet azt kimondani, hogy volt mondjuk huszonöt jó évem tanárként, ennyit tudtam adni, ennyi emberhez tudtam kapcsolódni, az új osztályokra nyitottnak maradni. Szép és hosszú feladat volt, de itt az ideje váltani.

De mihez kezdjen huszonöt tanév után az ember?

Persze, ez nehéz kérdés. Az én állításom csak annyi, hogy a „szent hivatás” típusú megközelítéssel könnyebb beleragadni egy fásult helyzetbe.

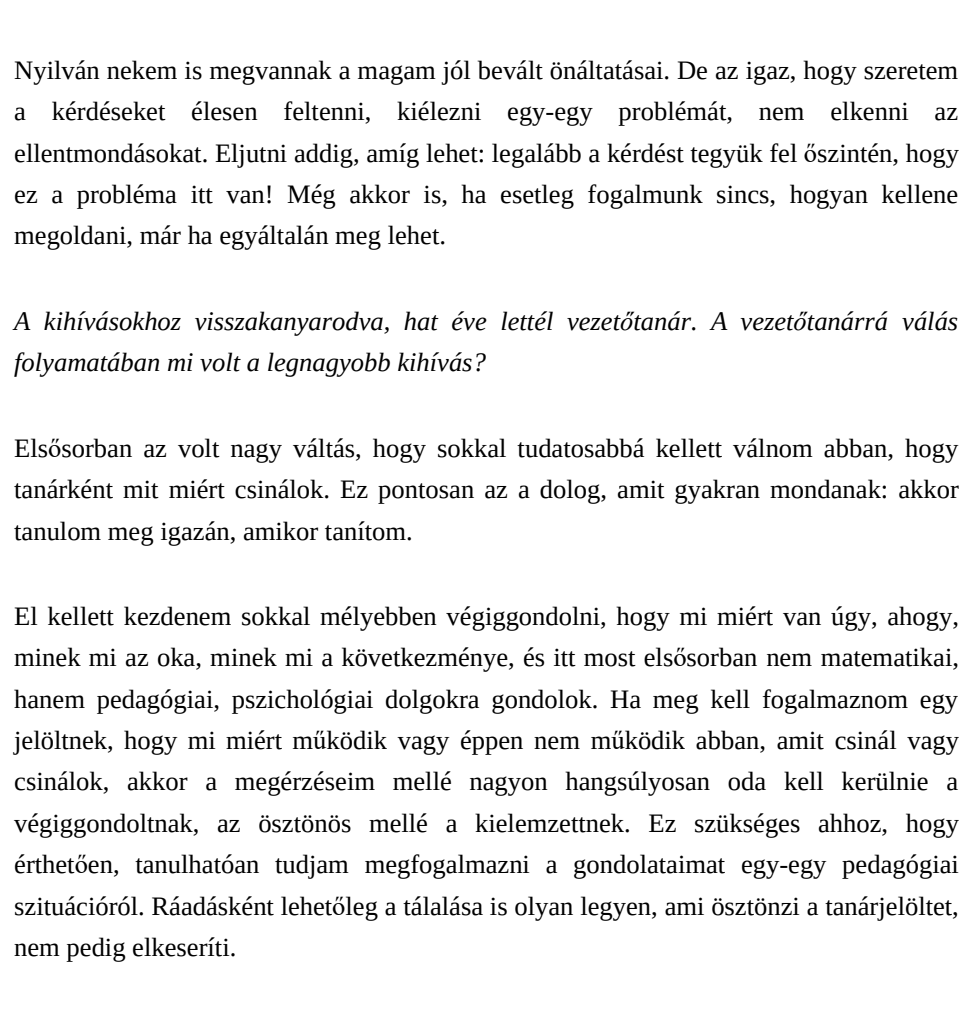
Számomra a tanítás egy olyan munka, amiért jelenleg nagyon lelkesedem, és nagyon szeretem. Úgy látom, hogy amit csinálok, annak van értelme, és fejlődési potenciál is van még bennem: szeretném fejlesztgetni a módszertanomat, érdekesebbé tenni az óráimat.

De hogy mi lesz tíz, vagy húsz év múlva, azt nem tudom megmondani. Most teljesen jól érzem magam a bőrömben, van egy erős elköteleződésem, várom az újabb és újabb felvett csoportokat, szívesen kezdek el egy újabb társasággal újra belegondolni a szögfüggvények rejtelmeibe.

De nem tudom, milyen, amikor ez már nem öröm, hanem nyűg. Lehet, hogy egyszer majd ilyen kérdéseket is fel kell tennem magamnak. Örülök, hogy egyelőre nem kell.

Abban, hogy ne gyűrjön maga alá teljesen a tanítás, biztosan segít, hogy a mai napig zenélsz. Kis zeneiskolásként a trombitával kezdted, aztán sokáig zongoráztál, többször majdnem zenészi pályára léptél. Végül matematikusként végeztél, majd matematikatanár lettél, de a mai napig énekelsz kórusban, odaülsz néha otthon a zongora elé, és időnként nagybőgőn húzod a talpalávalót a táncházban. Mi fogott meg ennyire a zenében?

Már egészen kisgyerekkoromban két dolog volt, ami borzasztóan foglalkoztatott: a zene és a matek. Egyrészt nagyon érdekelnek a struktúrák, ami a zenében és matematikában is nagyon markánsan jelen van. Ez a zenében kiegészül egy érzékelési és emocionális oldallal, ami szintén nagyon fontos a számomra. A világ ezen szeleteiben éreztem igazán otthon magam kisgyerekkorom óta, a zenei tevékenység feltölt mind a mai napig. A színpadot is szeretem: inspirál.



Forrás: Pilicsabai képek Facebook-oldal

Ugyanúgy találok szépséget a zenében, mint a matematikai gondolatokban. Számomra sok hasonlóság van abban, amikor egy matematikai problémán gondolkozom, illetve amikor a zenét művelem, próbálok, gyakorlok. Őszintén végére járni a dolgoknak, ez egy fontos közös vonás: a matek és a zene is akkor jó, ha nincs mellébeszélés.

Az egész életedet így éled? Nincs mellébeszélés?

Nyilván nekem is megvannak a magam jól bevált önáltatásai. De az igaz, hogy szeretem a kérdéseket élesen feltenni, kiélezni egy-egy problémát, nem elkenni az ellentmondásokat. Eljutni addig, amíg lehet: legalább a kérdést tegyük fel őszintén, hogy ez a probléma itt van! Még akkor is, ha esetleg fogalmunk sincs, hogyan kellene megoldani, már ha egyáltalán meg lehet.

A kihívásokhoz visszakanyarodva, hat éve lettél vezetőtanár. A vezetőtanárrá válás folyamatában mi volt a legnagyobb kihívás?

Elsősorban az volt nagy váltás, hogy sokkal tudatosabbá kellett válnom abban, hogy tanárként mit miért csinálok. Ez pontosan az a dolog, amit gyakran mondanak: akkor tanulom meg igazán, amikor tanítom.

El kellett kezdenem sokkal mélyebben végiggondolni, hogy mi miért van úgy, ahogy, minek mi az oka, minek mi a következménye, és itt most elsősorban nem matematikai, hanem pedagógiai, pszichológiai dolgokra gondolok. Ha meg kell fogalmaznom egy jelöltnek, hogy mi miért működik vagy éppen nem működik abban, amit csinál vagy csinálok, akkor a megérzéseim mellé nagyon hangsúlyosan oda kell kerülnie a végiggondoltnak, az ösztönös mellé a kielemzettnek. Ez szükséges ahhoz, hogy érthetően, tanulhatóan tudjam megfogalmazni a gondolataimat egy-egy pedagógiai szituációról. Ráadásként lehetőleg a tálalása is olyan legyen, ami ösztönzi a tanárjelöltet, nem pedig elkeseríti.

Másodsorban a tanításban kevésbé jelenlévő projektszemlélet elsajátítása volt komolyabb feladat. Mi leginkább rövid gyakorlatokat viszünk, ami nem egy tanév hosszúságú maratonfutás, hanem inkább egy intenzív projektre hasonlít: felkészülés, majd tizenöt megtartott óra, utána még egy kis utóhospitálás, lezárás. Körülbelül három hónapos folyamat. Ehhez elég világosan kell látni időpontokat, folyamatokat, célokat. Ki kell ijelölni, hogy mikor, honnan, hová akarunk eljutni, akár egy valamirevaló projektben.

Mondok egy másik példát: az első pár megtartott órában – hogyha a jelöltnek még nincs tanítási tapasztalata – általában előjönnek tipikus gyermekbetegségek. Akinél nem – aki az első két órájánál azt érzi, hogy „húha, ez nagyon megy!” –, az se dőlhet hátra, elég jellegzetesek az öt-hat megtartott óra után előjövő, addig feltorlódott hiányosságok.

Én azt hiszem inkább az utóbbi kategóriába tartoztam.

Én meg az elsőbe. Persze mindenki másképp indul neki, de azért alaptípusokat fel lehet fedezni. Viszont bármi is a gyakorlat íve, nagyon fontos, hogy amikor problémák jelentkeznek, akkor ne azt mondjuk, hogy minden rossz, hanem tudjunk kijelölni pontos, jól szemmel tartható részcélokat, apró kis projekteket.

Például?

A következő órádon mindenképp járd be a terem egészét, akkor is menj a gyerekek közé, ha frontálisan tanítasz. Vagy a táblaképedet egy adott szempontból gondold végig alaposabban, és próbáld meg észszerű keretek között követni. Vagy azt gondold végig, hogy mikor és milyen kérdéseket fogsz feltenni, érd el, hogy az órádhoz legalább tíz különböző ember szóljon hozzá, stb. Nem lehet mindent egyik pillanatról a másikra megvalósítani, lépésenként kell építkezni. Egy tanítási órán, de bármilyen tanítási helyzetben azért rengeteg mindenre kell figyelni.

Én úgy látom, hogy sok másodéves, harmadéves hallgató tanít már középiskolában, sokan a volt iskolájukban. Te is így érzékeled?

Abszolút! Nincsenek pontos számaim, de a személyes benyomásom az, hogy érezhetően többen tanítanak aktívan a képzés alatt a hat-nyolc évvel ezelőtti helyzethez képest.

Ennek az előnyeit vagy inkább a hátrányait tapasztalod?

Nehéz erre válaszolni, talán az előnyeit inkább. Akik hozzám kerültek, és már tanítottak valahol, ők általában kifejezetten lelkesek voltak, jól érezték magukat a tanári szerepben, feladatokban. Az esetleges hiányosságaikat a lelkesedésük és az önreflektív hozzáállásuk jól kompenzálta. Sokat számít az a rutin, hogy nem jön zavarba a jelölt akkor, amikor hirtelen fel kell rajzolni a táblára például egy kört. Más mélységben lehet ilyenkor beszélgetni tanítási kérdésekről.

Az viszont egy élesebb kérdés, hogy amikor az ember elkezd tanítani - akár a gyakorlatán, akár már a gyakorlat előtt óraadóként - , akkor hogyan, mi alapján áll neki.

Jogos! Megválaszolod?

Szerintem leginkább ösztönből. Az mindenképpen nagyon meghatározó, hogy a tanítani kezdő személynek hogyan tanították a matematikát a középiskolában. Az ott szerzett körülbelül 400 órányi tapasztalatot nem tudja felülírni az, hogy voltak pedagógiai, leginkább elméleti fókuszú órái, meg a rövid gyakorlat elején hospitált 10 órát a vezetőtanárnál. Az ideális az lenne, hogy ha a saját középiskolás élmények társtapasztalatként beépülnének sok más tapasztalat mellé, de hogy ez megtörténik-e, az természetesen a képzési rendszertől is nagyban függ.

Te hogyan képeznéd a tanárokat?

Nagyon örülök annak, hogy nem vagyok abban a helyzetben, hogy erre érdemi választ kelljen adnom. De egy párhuzam szerintem sok mindent szemléltet abból, hogy milyen hiányosságokat érzékelek, avagy egy, a jelenlegihez hasonló képzési rendszernek jellegénél fogva milyen gyengeségei vannak .

A nagymamám az ötvenes években lett tanítónő. Tanítóképző szakközépiskolába járt, ami egy középfokú képzés volt, a normál gimnáziumi menetrendhez jött hozzá még egy-két év. Ebbe az iskolába elsősök ugyanúgy jártak, mint szakközépiskolások.

A leendő tanítónők az öt napból egyet a tanítási hetek többségében valamelyik alsós osztályban töltöttek. Fel volt osztva az osztály öt részre, az egyik csoport ment hospitálni hétfőn, a másik kedden, és így tovább. Az egész vetésforgó rendszerben zajlott, hogy ne mindig ugyanabból a napból maradjanak ki, és az is változott, hogy mikor hányadik osztályt látogatják. Ez azt jelenti, hogy akik itt végeztek, négy év alatt iszonyat mennyiségű órát láttak, nagyon sok tanárnál. Ráadásul be voltak vonva az ebédeltetés, az udvari felügyelet és egyéb kisegítő feladatokba is.

Később ez a nagymamám hallgatók tanítási gyakorlatát is vezette. És bizony sajnálkozva mesélte, hogy a már nem szakközépiskolai, hanem főiskolai képzésben tanuló, hozzá kerülő tanítónők mennyi mindent nem tudnak, amit ők tudtak. Nehezen tájékozódtak el például abban, hogy a gyerekek mikor milyen fejlettségi szinten vannak, mikorra mit illik tudniuk: megtanulták a vizsgára, de nem volt saját, elsődleges tapasztalatuk erről hétről hétre, éveken át. De a módszertani kultúrájuk sem volt gazdagabb, hiszen nem élesben látták, hogy hogyan birkózik a tanítónő egy bonyolultabb helyzettel, feladattal. Ehhez jött még hozzá, hogy a gimnázium után milyen sok idő kimaradt addig, amíg újra rendszeres kapcsolatba nem kerültek az alsós korosztállyal.

Persze kérdés, hogy a nagymamám tapasztalása mennyire objektív, de valami elég fontosra mutat rá függetlenül attól, hogy mennyi benne a „régen minden jobb volt” faktor.

Ami biztos, hogy a nagymamám és osztálytársai igen nagy mennyiségű pedagógiai kilométert tettek meg már középiskolásként a szakmájukban. Na mármost az egy igen jó kérdés, hogy akik hozzánk érkeznek ötödévesen matektanári szakról, ők mibe és hány kilométert fektettek.

Az biztos, hogy nagyon sok mindenről van elméleti tudásuk, nem is kevés. De hogy hány tanórát láttak, milyen mélységű ismeretük van az elemi matematikáról, mennyi idő és figyelem jutott arra, hogy átértékelődjenek a saját középiskolás tapasztalataik, az nagyon esetleges.

Nyilvánvaló, hogy azt a rendszert, amiben a nagyszüleink tanultak, nem lehet és nem is kell egy az egyben átültetni egy tudományegyetemi képzésbe. De közben vezetőtanárként igen nagy százalékban találkozunk azzal, hogy a tanítási gyakorlatuk idejére nincs még meg a hallgatókban az elegendő kilométer.

Mit tudsz tenni? Nyilván azt a kilométermennyiséget nem fogják elérni a rövid gyakorlat alatt, de talán vannak olyan kilométerek, szakaszok, amelyeket fontosabb lefutni.

Persze az is megkérdőjelezhető, hogy a rövid gyakorlatnak mennyi értelme van, de amiben mindenképpen hasznos, az az, hogy az adott tananyag feladatanyagát, lehetséges buktatóit, ügyes fogásait, módszereit azért közösen áttekintjük. Ez epszilon a középiskolai anyag egésze szempontjából, de talán lehet abban bízni, hogy az analógiás gondolkodás működik. Azaz a jelöltek látnak legalább egy saját élményeken alapuló példát a tananyaghoz kapcsolódó matematikai, didaktikai, pedagógiai elemek tervezésére, kiválasztására, illetve az utólagos, alapos reflexióra.

Ráadásul válogatott diákoknak tanítanak nálatok a gyakorlóiskolában, nem is a magyar „átlagnak”.

Igen, az átlagnál jóval magasabb intellektusú, motiváltabb diákokkal találkoznak nálunk, és ez vet fel kérdéseket. De azért ezek a válogatott gyerekek kamaszkorukban ugyanúgy végigmennek a hullámvasúton, mint bárki más, nem igaz, hogy nincs velük pedagógiai feladat. Illetve talán az sem baj, hogy arra a hallgatóra, aki egy koordináta-rendszert nehezen rajzol fel a táblára, nem szakad rá egyből a pedagógiai nehézségek teljessége.

Mit javasolsz a hallgatóknak, hogyan tudják a legjobban eltölteni a rövid gyakorlatukat?

A rövid gyakorlat egy olyan műfaj, amiből annyit tud kivenni egy hallgató, amennyit belerak. Tehát, ha keveset rak bele, meg akarja úszni, akkor keveset fog belőle kivenni. Pedig ez egy hatalmas lehetőség arra nézve, hogy ott van a vezetőtanár, így a jelölt folyamatos visszajelzést kaphat mind az óravázlatairól, mind a megtartott órákról. A munkaformákkal itt úgy kísérletezhet, hogy van egy külső szem, aki látja, tud segítő visszajelzést adni.

Tehát érdemes úgy alakítani az egyéb teendőket, hogy legyen elég energiájuk, amit beletehetnek a munkába. Persze vannak külső körülmények, amikkel nehéz mit kezdeni. De aki keveset tesz bele, az biztosan nem fog sokat kivenni belőle, ám ha sokat beletesz, akkor van esélye arra, hogy sokat is fog profitálni belőle.

A másik nagyon fontos tanács, hogy legyenek türelmesek magukkal szemben. A tanítás egy annyira komplex szakma, hogy biztosan nem fog minden tökéletesen menni az egyik pillanatról a másikra. Valószínűleg tökéletesen sosem fog működni semmi, de kegyelmi pillanatok azért lesznek, és azokat nagyon meg kell becsülni! Legyenek igényesek, de ne akarjanak egyből mindent jól csinálni. Merjenek kérdezni, és örülni annak, ami megy!

Gyakran emlékezteted őket erre?

Nagyon igyekszem, mert ez a pálya – hogyha nem tudsz örülni a sikereknek – pillanatok alatt felemészt. Ha másképp nem megy, tudatosan kell megtanulni, hogy szabad örülni! Ez tényleg fontos.

Úgy tapasztalom, hogy átlagosan egyre elkötelezettebbek, elhivatottabbak a tanárjelölt hallgatók.

Az elkötelezettséggel nekem sem voltak mostanában problémáim. Persze, aki ma tanár akar lenni…

Na igen. A másik oldalról viszont azt is tapasztalom, hogy igen nagy szórás van mind a tárgyi tudás, mint a készségek terén.

Ez így van, habár valahogy mostanában szerencsém volt, általában ügyes és szakmailag felkészült hallgatók érkeztek hozzám.

És amikor nem?

Akkor nehezebb. De közöttük is sokan motiváltak, beleteszik a szükséges munkát. Persze, a munka egy részét talán évekkel korábban kellett volna elvégezni, de milyen jó, hogy legalább utóbb elvégzik.

A „fontos kilométereket” valamikor le kell futni.

Ezért is előzi meg az órák tartását egy felkészülési időszak, ami alatt a jelölteknek el kell kezdeniük a témakörük fogalmainak, feladatanyagának áttekintését. Közösen átnézem velük, hogy az adott korosztály szintjén mit mennyire precízen érdemes tálalni stb. A tanítás megkezdésére fontos, hogy legyen áttekintésük legalább a témájuk első feléről.

Ez nagyon hasznos!

Nem mindig vagyok ebben ennyire szigorú – leginkább akkor, hogyha látom a bizonytalanságot az elején. Ha úgy látom, hogy menni fog, akkor jobban elengedem őket.

Azt mindig nagyon jó megélni, amikor ülök hátul és minden gördül: amikor a tanárjelölt a diákokkal – a szakmát is komolyan véve – egy hullámhosszra kerül.

„Kár, hogy a biciklizésről tényleg nem tudtunk beszélgetni: vázról és megkötöttségekről, arról, hogy milyen két kerékkel egy úton haladni, milyen számolni a kilométereket, vagy a gurulás szabadságáról” – merül fel bennem, miközben távolodom a Treforttól. Aztán az elmúlt két óra mondatai, ismétlődő motívumai adják meg a ritmust a tekeréshez. „Tanár, vezetőtanár, magántanár, férj, apa, zenész… A világ számos szeletének számtalan szerepében az összeszedettség és hatékonyság, a kiélezett kérdések éltető feszültsége, az élethelyzetek természetes dinamikájának elfogadó szemlélése… Amikor minden gördül…”

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI
GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat

Szerkesztőség

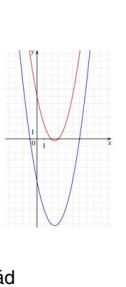
Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

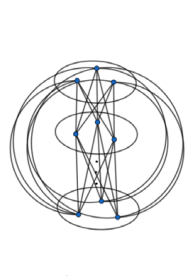
SOKSZOR TALÁLKOZUNK OLYAN FELADATTAL, ÖTLETTEL, AMIT SZÍVESEN ELTESZÜNK KÉSŐBBI HASZNÁLATRA. A **TANÓRA – SZAKKÖR** ROVAT SZERETNE HOZZÁJÁRULNI A MATEMATIKATANÁROK ESZKÖZTÁRÁNAK GAZDAGÍTÁSÁHOZ, FÓRUMOT KÍVÁN ADNI A GONDOK, NEHÉZSÉGEK MEGTÁRGYALÁSÁRA IS. (ROVATSZERKESZTŐ: *HORVÁTH ESZTER*.)



Tritz Árpád
2024. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Speciális másodfokú egyenletpárok

Középiskolai tanárként (és persze diákként is) szeretjük az olyan egész együtthatós másodfokú egyenleteket, amelyeknek egész gyökei vannak. A középiskolai tanulmányok során számtalan ilyen egyenlettel találkozunk, és megesik, hogy ezek között valamilyen kapcsolatot is felfedezünk. Tritz Árpád ilyen speciális másodfokú egyenletpárok érdekes kapcsolatát járja körül.



Szőke Tamás
2024. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

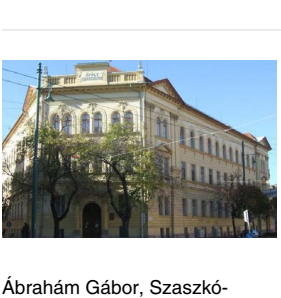
Egy Schweitzer-feladat megoldása középiskolás eszközökkel

Néha előfordul, hogy a híresen nehéz Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyen kitűznek egy-egy feladatot, ami akár középiskolások számára is érthető, nemcsak a leírása, hanem a megoldása is, ami persze nem egyszerű, változatos ötleteket, sok kreativitást igényel. Mégis hasznos lehet ilyen példákat is mutatni a diákoknak, azt szemléltetve, hogy bár egyáltalán nem könnyű, de még a világ egyik legnehezebb matematikaversenyének is lehetséges megoldani a feladatait. *Szőke Tamás* 2018-ban első helyen végzett a Schweitzer-versenyen, saját tapasztalata alapján mutatja be az egyik ilyen feladatot.

Homolya Szilvia, Rozgonyi Erika
2024. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Szintfelmérés a Miskolci Egyetemen

A szilárd alapok hiánya megnehezíti az egyetemi szintű matematika tananyag elsajátítását, a sikeres előrehaladást. Ezért kiemelten fontos, hogy szükség esetén időben, hatékony támogatást nyújtsunk a hallgatóknak. Ezt a célt szolgálja a bejövő hallgatók matematikai kompetenciamérése. A Miskolci Egyetemen 2023-ban új koncepció szerint bevezetett szintfelmérésről és a kapcsolódó felzárkóztatásról az egyetem két matematikoktatója, Homolya Szilvia és Rozgonyi Erika írt.



Ábrahám Gábor, Szaszkó-Bogárné Eckert Bernadett, Schultz János
2024. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Tehetséggondozás a szegedi Radnótiban

A Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnáziumban évtizedek óta folyó tehetséggondozó munkáról írtak az iskola tanárai, *Ábrahám Gábor, Szaszkó-Bogárné Eckert Bernadett* és *Schultz János*. Az elveken és a megvalósításon túl a különböző korosztályoknak szóló matematika szakköri feladatsorokból is mutatnak példákat.

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

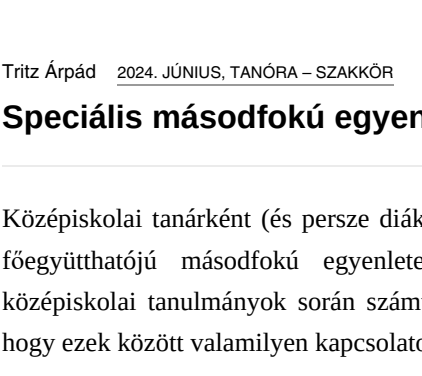
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon:

Tritz Árpád 2024. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Speciális másodfokú egyenletpárok

Középiskolai tanárként (és persze diákként is) szeretjük az olyan egész együtthatós, 1 főegyütthatójú másodfokú egyenleteket, amelyeknek egész gyökei vannak. A középiskolai tanulmányok során számtalan ilyen egyenlettel találkozunk, és megesik, hogy ezek között valamilyen kapcsolatot is felfedezünk.



Például az $x^2-5x+6=0$ és az $x^2-5x-6=0$ egyenletek gyökei egyaránt egész számok. Másik ilyen „szerencsés” páros a következő két egyenlet: $x^2-13x+30=0$ és $x^2-13x-30=0$. Mindkét esetben a konstans tag előjelét megváltoztatva olyan másodfokú egyenletet kaptunk, amelynek szintén egész számok a gyökei, csakúgy, mint az eredetinek.

Matematika szakkörön és matematika tagozaton felvethetők az alábbi kérdések:

– Hány ilyen tulajdonságú páros létezik?

– Egyáltalán véges vagy végtelen sok van belőlük?

– Hogyan lehet ilyen egyenletpárokat előállítani a fenti két példán kívül (ha egyáltalán vannak)?

Ezekre a kérdésekre keressük a választ ebben a cikkben, és a probléma megoldásában a komplex számokat is segítségül hívjuk.

Az első dolog, amire érdemes kitérni, hogy ha az elsőfokú tag együtthatójának az előjelét változtatjuk meg, akkor az új gyökök az eredeti gyökök ellentettjei lesznek, vagyis, ha eredetileg egész számok voltak, akkor azok is maradnak. Ez azonnal kiolvasható a megoldóképletből. A konstans tag előjelének megváltoztatása viszont a legtöbb esetben a diszkriminánst is megváltoztatja, így egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy egész gyököket kapunk a változtatás után.

A probléma tehát a következő: melyek azok az a és b egész számok, amelyekre az $x^2+ax+b=0$ és az $x^2+ax-b=0$ másodfokú egyenletek gyökei egyaránt egész számok?

Mint az előző megjegyzésből is következik, a előjele nem befolyásolja a vizsgálatainkat (és természetesen b előjele sem). Ha $b=0$, akkor minden $a\in\mathbb{Z}$-re olyan egyenleteket kapunk, amelyeknek egész gyökei vannak (0 és $-a$). Ezek a feladatunk triviális megoldásai, amelyekből nyilván végtelen sok van, de nem túl érdekesek a számunkra. Innentől a nemtriviális megoldásokat vizsgáljuk, vagyis feltesszük, hogy a, $b>0$. Ahhoz, hogy mindkét másodfokú egyenlet gyökei egészek legyenek, szükséges, hogy mindkét egyenlet diszkriminánsa négyzetszám legyen. Ez viszont elegendő is hozzá, mert a megoldóképletben szereplő számláló ($-a\pm\sqrt{a^2\pm 4b}$) két tagjának paritása megegyezik, ezért ha 2-vel osztjuk, egész számokat kapunk.

Az egyenletek diszkriminánsai: a^2-4b és a^2+4b. Ezeknek kell négyzetszámnak lenniük, vagyis valamilyen c,d pozitív egész számokra fenn kell állnia a következő összefüggéseknek:

$$a^2-4b=c^2 \tag{1}$$

és

$$a^2+4b=d^2. \tag{2}$$

Itt c és d nem lehet egyenlő egymással, mert akkor b értéke 0 lenne, és visszajutnánk a triviális megoldásokhoz. Ha összeadjuk (1)-et és (2)-t, akkor a következőt kapjuk:

$$2a^2=c^2+d^2. \tag{3}$$

Vagyis a $2a^2$ olyan szám, amely előáll két különböző négyzetszám összegeként. Ez a gondolatmenet visszafelé is működik: ha $2a^2$ előáll c^2+d^2 alakban, ahol $c\neq d$, akkor a (3) átrendezésével kapjuk: $a^2-c^2=d^2-a^2$.

– Ha a páros, akkor $2a^2$ osztható 8-cal, így (3) miatt c^2+d^2 is. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha c és d is páros. Ekkor tehát a^2-c^2 és d^2-a^2 is osztható 4-gyel.

– Ha a páratlan, akkor $2a^2$-nek a 4-es maradéka 2, így (3) miatt c és d is páratlanok. Ebben az esetben is teljesül tehát, hogy a^2-c^2 és d^2-a^2 osztható 4-gyel. Vagyis b megkapható $b=\dfrac{a^2-c^2}{4}=\dfrac{d^2-a^2}{4}$ alakban (természetesen $c\neq d$ miatt $b\neq 0$), és innen visszakapjuk az (1) és (2) összefüggéseket.

Azt állapítottuk meg tehát, hogy pontosan azokhoz az a pozitív egész számokhoz létezik olyan b pozitív egész szám, amelyekre az $x^2+ax+b=0$ és az $x^2+ax-b=0$ másodfokú egyenletek gyökei egész számok, amely a számok esetében $2a^2$ előáll két különböző négyzetszám összegeként. A kérdés az, hogy hogyan lehet egy ilyen előállítást „elkészíteni”.

Erre fogunk példát látni az alábbiakban. Komplex számok segítségével dolgozunk, és felhasználjuk a komplex számok körében megismert műveleteket és műveleti tulajdonságokat.

1. példa. Legyen $a=91$:

$$2\cdot 91^2=2\cdot 13\cdot 7\cdot 13\cdot 7=98\cdot 169=(49+49)\cdot(144+25)=|7+7i|^2\cdot|12+5i|^2=$$

$$=|\,(7+7i)\,(12+5i)\,|^2=|49+119i|^2=49^2+119^2.$$

Tehát $c=49$ és $d=119$, így $b=\dfrac{a^2-c^2}{4}=1470$. Így a megfelelő egyenletpár: $x^2+91x+1470=0$ (a gyökei -70 és -21) és $x^2+91x-1470=0$ (a gyökök -105 és 14). Természetesen 91 helyett -91-et is lehet írni x együtthatójaként. Vegyük észre, hogy a számolás során felhasználtuk, hogy a 91 összetett szám, és így több prímtényező szorzatára bontható.

2. példa. Vizsgáljunk meg most egy olyan esetet, amikor a prímszám. Legyen például $a=73$:

$$2\cdot 73^2=2\cdot 73\cdot 73=146\cdot 73=(121+25)\cdot(9+64)=|11+5i|^2\cdot|3+8i|^2=$$

$$=|\,(11+5i)\,(3+8i)\,|^2=|-7+103i|^2=7^2+103^2.$$

Ebben az esetben $c=7$ és $d=103$, így $b=\dfrac{a^2-c^2}{4}=1320$. Tehát a megfelelő egyenletpár: $x^2+73x+1320=0$ (a gyökei -40 és -33) és $x^2+73x-1320=0$ (a gyökök -88 és 15).

3. példa. Nézzünk meg olyan esetet is, amikor a páros szám és nem négyzetmentes! Legyen például $a=120$:

$$2\cdot 120^2=2\cdot 3\cdot 40\cdot 3\cdot 40=18\cdot 40^2=(9+9)\cdot(36+4)^2=|3+3i|^2\cdot(|6+2i|^2)^2=$$

$$=|\,(3+3i)\,(6+2i)^2|^2=|\,(3+3i)\,(32+24i)\,|^2=|24+168i|^2=24^2+168^2.$$

Így tehát $c=24$ és $d=168$, ezért $b=\dfrac{a^2-c^2}{4}=3456$. Vagyis a megfelelő egyenletpár: $x^2+120x+3456=0$ (a gyökei -48 és -72) és $x^2+120x-3456=0$ (a gyökök -144 és 24).

Ez a három példa jól mutatja, hogyan keressünk a cikk elején bemutatott egyenletpárokhoz hasonlókat: a $2a^2$ számot bontsuk fel két (vagy több) olyan szám szorzatára, amelyek maguk is előállnak két négyzetszám összegeként, majd pedig használjuk fel a komplex számok szorzására és abszolútértékére vonatkozó szabályokat. Az persze kérdés, hogy milyen a pozitív egészekre létezik megfelelő felbontás. Erre ad választ a következő állítás.

Állítás: Valamely $a\in\mathbb{N}^+$–ra $2a^2$ pontosan akkor áll elő két különböző négyzetszám összegeként, ha az a szám prímtényezős felbontásában van $4k+1$ alakú prímszám ($k\in\mathbb{N}^+$).

Bizonyítás: Felhasználjuk azt a tételt, amely szerint egy négyzetszám pontosan akkor írható fel két kisebb négyzetszám összegeként, ha a prímtényezős felbontásában van $4k+1$ alakú prím. (Ennek bizonyítása a cikk végén megadott hivatkozásban található.)

Először tegyük fel, hogy az a pozitív egész szám prímtényezős felbontásában van $4k+1$ alakú prímszám. Ekkor a^2 előáll két, nála kisebb négyzetszám összegeként, vagyis valamilyen $0<t<s<a$ egészekre $a^2=s^2+t^2$. Ekkor $2a^2=2s^2+2t^2=(s+t)^2+(s-t)^2$. Nyilván $s+t\neq s-t$, mert akkor t egyenlő lenne 0-val. Így $2a^2$ előáll két különböző négyzetszám összegeként.

Nézzük meg a másik irányt. Tegyük fel, hogy $2a^2$ előáll két különböző négyzetszám összegeként, vagyis $2a^2=e^2+f^2$, ahol $e,f\in\mathbb{N}^+$ és $e<f$. Ekkor $\left(\dfrac{f+e}{2}\right)^2+\left(\dfrac{f-e}{2}\right)^2=\dfrac{2e^2+2f^2}{4}=\dfrac{e^2+f^2}{2}=a^2$. Mivel $2a^2=e^2+f^2$, ezért e és f azonos paritásúak, és így $\dfrac{f+e}{2}$, valamint $\dfrac{f-e}{2}$ természetes számok. Egyik sem lehet egyenlő 0-val, ezért az a^2 számot előállítottuk két, nála kisebb négyzetszám összegeként. A hivatkozott tétel alapján ez azt jelenti, hogy az a pozitív egész szám prímtényezős felbontásában van $4k+1$ alakú prímszám. Ezzel az állítást beláttuk.

A fenti állításból következik természetesen az is, hogy végtelen sok nemtriviális megoldása van a cikk elején kitűzött problémának. Egyúttal a komplex számoknak egy szép alkalmazását találtuk a másodfokú egyenletek témakörében.

Hivatkozás

[1] Maga Balázs és Török Mihály: Háromszögszámok és négyzetszámok összegéről

https://magab.web.elte.hu/irasok/szeged

Tritz Árpád

Szegedi Tudományegyetem Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon:

Szőke Tamás 2024. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Egy Schweitzer-feladat megoldása középiskolás eszközökkel

A Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny hosszú hagyományokra tekint vissza: 1949 óta minden évben megrendezik. A verseny egyetemistáknak, különösképpen matematikát tanulók számára szól, és két dolog teszi rendkívül hírhedtté és különlegessé: a formátuma és a nehézsége. A lebonyolítás a következőképpen néz ki: a versenyzők számára 10-12 feladatot tűznek ki, ezek megoldására 10 nap áll rendelkezésre. Bármilyen könyv és segédanyag felhasználható, egyedül külső személy segítségének igénybevétele nem megengedett. Ezeknek a feladatoknak sokszor még az értelmezése is komoly kutatást és utánaolvasást igényel, még matematikát tanuló egyetemisták is sok idegen szót fedezhetnek fel benne. A megoldás ennek megfelelően még ennél is nehezebb, gyakorlatilag egy kutatómunkának megfelelő energiát kell befektetni egy feladatsor megoldásába, és plusz nehézséget okoz az is, hogy nagyon széles körű a feladatok merítése: minden évben az algebra, számelmélet, geometria és analízis legváltozatosabb alterületeiből kerülnek ki a megoldandó problémák.

Néha azonban előfordul, hogy kitűznek egy-egy feladatot, ami akár középiskolások számára is érthető, mind a feladat leírása, mind a megoldása is. Természetesen ez nem azt jelenti, hogy ezek a feladatok egyszerűek lennének, hiszen nem véletlenül válogatták be őket a feladatsorba: megoldásuk változatos ötleteket, sok kreativitást és rengeteg munkát igényel. Mindazonáltal hasznos néha ilyen példákat is mutatni a diákoknak, azt szemléltetve, hogy bár egyáltalán nem könnyű, de még a világ egyik legnehezebb matematikaversenyének is lehetséges megoldani a feladatait. Sokszor érdemes napokig agyalni, próbálkozni egy feladattal, nem feltétlenül csak a legtöbb versenyen megszokott pár órát, mert az igazán nehéz feladatok megfejtése sokszor még több időt vesz igénybe, akár napokig, hetekig is eltarthat. A szerző saját tapasztalatából kiindulva, annak, hogy valaki elinduljon a Schweitzer versenyen, megfelelő táptalaja lehet, ha már középiskolás korában rendszeresen megoldja, beküldi a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok matematika pontversenyeinek feladatait, gondolva itt főleg a B-jelű pontversenyre, és különösen tehetséges diákok esetén az A-jelűre is.

A következő feladat a 2018-as versenyről való. Bár maga a feladat elsőre geometriai megfogalmazású, de már az elejétől érezhetően gráfelméleti jellegű, ugyanakkor a megoldáshoz nem elég csak ezekre a területekre korlátozódni. A megoldáshoz szükség van számelméleti eszközökre, algebrai számításokra, kombinatorikus gondolatokra, és természetesen rengeteg gráfelméleti és geometriai megfontolásra. Érdekes megfigyelni, hogy több állításon és lemmán keresztül a bizonyítás a középiskolás versenyfeladat-megoldási eszközök széles tárházát vonultatja fel: teljes indukciós és indirekt bizonyítások, moduláris számolások, „vegyük a minimálisat”, és még a determináns is alkalmazásra kerül. Igazi demonstrációja annak, hogy minden, amit felépítünk az évek alatt, végeredményben kapcsolatban áll egymással, és hogy ezekkel az erős eszközökkel nagyon szép és nehéz tételek bizonyítására nyílik lehetőség.

Feladat (Schweitzer, 2018/4.) *Legyen P egy véges ponthalmaz a síkon, melyre teljesül, hogy bármely két pontjának távolsága egész szám. Lássuk be, hogy P pontjai színezhetőek három színnel úgy, hogy bármely két azonos színű pont távolsága páros legyen.*

Megoldás. Először is, vegyük a problémának egy gráfelméleti átfogalmazását: tekintsük azt a G gráfot, aminek a csúcshalmaza P, és két csúcsát pontosan akkor kötjük össze éllel, ha a két pont távolsága páratlan. Ekkor a feladat állítása ekvivalens azzal, hogy G csúcsai színezhetőek 3 színnel úgy, hogy azonos színű pontok között nem fut él, azaz $\chi(G) \leq 3$, ahol $\chi(G)$ a G gráf kromatikus számát jelöli.

1. Definíció. A G egyszerű gráf $\chi(G)$-vel jelölt kromatikus száma az a legkisebb színszám, ahány szín felhasználásával G összes csúcsa kiszínezhető úgy, hogy G minden élének két végpontja különböző színű legyen.

Ebben a megfogalmazásban gondolkozzunk el, miről is szól igazából ez a feladat: tekintünk pontokat a síkon, amik közül bármely kettő távolsága egész, és ennek a felállásnak a geometriája strukturálisan korlátozza a fellépő páratlan távolságokat, amit itt a G gráf kromatikus száma fejez ki. Ez a kromatikus szám egyelőre még megfoghatatlannak tűnik, de könnyű találni egy gyengébb, viszont annál szemléletesebb feltételt:

1. Állítás. *Adott a síkon 4 pont, amelyek közül bármely kettő távolsága egész. Ekkor a pontok között fellépő távolságok közül legalább az egyik páros.*

Ez egy szükséges (de nem elégséges!) feltétele annak, hogy a feladat állítása igaz legyen, hiszen ha lenne 4 pont, amely közül bármely kettő távolsága páratlan, akkor a G gráf bármely színezésében ennek a 4 pontnak különböző színűnek kellene lennie, vagyis a kromatikus szám legalább 4 lenne.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt módon, hogy a 4 pont között fellépő mind a 6 távolság páratlan. Jelölje ezeket a pontokat A, B, C és D, a megfelelő távolságokat pedig $d_{AB}, d_{AC}, d_{AD}, d_{BC}, d_{BD}, d_{DC}$. A kulcsötlet a bizonyításban, hogy számoljuk ki az A, B, C, D pontok által meghatározott tetraéder térfogatát 3 dimenzióban: ez egyrészt nyilvánvalóan 0, hiszen a 4 pont egy síkban fekszik. Másrészt, ahogyan két dimenzióban háromszögekre a Héron-képlet, ugyanúgy tetraéderekre is létezik egy formula, ami a csúcsok távolságának függvényében megadja a tetraéder térfogatát, ez az úgynevezett Cayley–Menger-determináns, ami azt mondja ki, hogy ha az $ABCD$ tetraéder térfogata V, akkor

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{AB}^2 & d_{AC}^2 & d_{AD}^2 \\ 1 & d_{AB}^2 & 0 & d_{BC}^2 & d_{BD}^2 \\ 1 & d_{AC}^2 & d_{BC}^2 & 0 & d_{CD}^2 \\ 1 & d_{AD}^2 & d_{BD}^2 & d_{CD}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ennek a kifejezésnek a bal oldala 0. Másrészt, feltevésünk szerint mindegyik távolság páratlan, és ismert, hogy páratlan számok négyzete 8-cal osztva mindig 1 maradékot ad. Ezt felhasználva, a jobb oldal értéke modulo 8:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{AB}^2 & d_{AC}^2 & d_{AD}^2 \\ 1 & d_{AB}^2 & 0 & d_{BC}^2 & d_{BD}^2 \\ 1 & d_{AC}^2 & d_{BC}^2 & 0 & d_{CD}^2 \\ 1 & d_{AD}^2 & d_{BD}^2 & d_{CD}^2 & 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \pmod 8.$$

Ez viszont ellentmondás, hiszen modulo 8 a bal oldal 0-val, a jobb oldal 4-gyel egyenlő. Tehát nem lehet minden távolság páratlan. □

Így tehát kizártuk, hogy G-ben megjelenjen a 4 csúcsú teljes gráf (feszített) részgráfként. Ez még nem elég ahhoz, hogy biztosítsuk, hogy a gráf kromatikus száma legfeljebb 3. Ugyanakkor vegyük észre, hogy az előző bizonyításban maradt még „kakaó”: a determináns, amit felírunk a távolságok alapján, talán más típusú részgráfok esetén sem 0, és ezért további gráfokat is ki tudnánk zárni G (feszített) részgráfjai közül. Ez valóban így is van, ahogy a következő állításban meg is mutatjuk. Mielőtt azonban még erre rátérnénk, érdemes tisztázni, mi a különbség egy gráf részgráfja és feszített részgráfja között, mert a bizonyítás további részeinek teljes megértéséhez elengedhetetlenül szükséges ezen fogalmak elkülönítése.

2. Definíció. Egy gráf feszített részgráfja egy olyan gráf, melynek csúcsai az eredeti gráf csúcsainak egy részhalmaza, élei pedig a részhalmazban szereplő csúcsokat összekötő élek. Másként fogalmazva, H lesz feszített részgráfja G-nek, ha vesszük G bizonyos csúcsait és minden köztük futó élt.

Tehát minden alkalommal, amikor feszített részgráfról beszélünk, kiválasztjuk az eredeti G gráf csúcsainak egy részhalmazát, és *minden* közöttük futó élt, és *pontosan* csak ezeket az éleket.

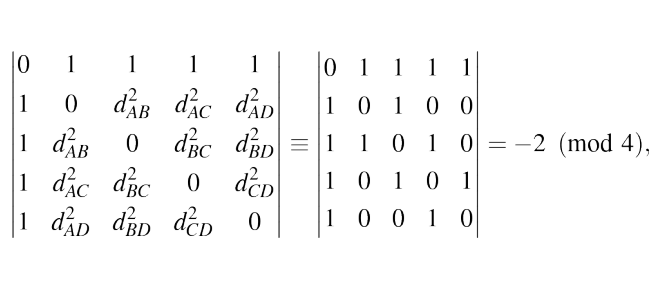
2. Állítás. *G nem tartalmazhat 4 csúcsból álló utat feszített részgráfként, azaz nem lehet olyan A, B, C, D csúcsa, hogy AB, BC és CD között fut él, de AC, AD, és BD között nem fut él.*

Bizonyítás. A bizonyítás ugyanúgy megy, mint az előző állítás esetében: indirekt feltéve, hogy létezik 4 csúcsú út feszített részgráfként, a determináns értékének egyrészt 0-nak kell lennie, hiszen a megfelelő tetraéder térfogata 0; másrészt viszont most modulo 4 felírva a determinánst az esetünkben (felhasználva, hogy páratlan számok négyzete 1 modulo 4, és páros számok négyzete 0 modulo 4):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{AB}^2 & d_{AC}^2 & d_{AD}^2 \\ 1 & d_{AB}^2 & 0 & d_{BC}^2 & d_{BD}^2 \\ 1 & d_{AC}^2 & d_{BC}^2 & 0 & d_{CD}^2 \\ 1 & d_{AD}^2 & d_{BD}^2 & d_{CD}^2 & 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \pmod 4,$$

ami ellentmondás. □

Az egyszerűség kedvéért jelöljük a továbbiakban a 4 csúcsú teljes gráfot K_4-gyel, a 4 csúcsból álló utat pedig P_4-gyel. Beláttuk tehát, hogy a G gráf struktúrájában létezik a következő két megkötés: nem tartalmazza se K_4-et, se P_4-et feszített részgráfként. Kissé meglepő módon kiderül, hogy ez a két dolog elégséges is: be fogjuk bizonyítani, hogy ha egy gráf nem tartalmazza K_4-et és P_4-et feszített részgráfként, akkor kromatikus száma legfeljebb 3.



Jelölje egy tetszőleges H gráf komplementerét $\overline{H}$, vagyis azt a gráfot, aminek csúcshalmaza megegyezik H csúcshalmazával, és két csúcs pontosan akkor van benne összekötve, ha H-ban nincs.

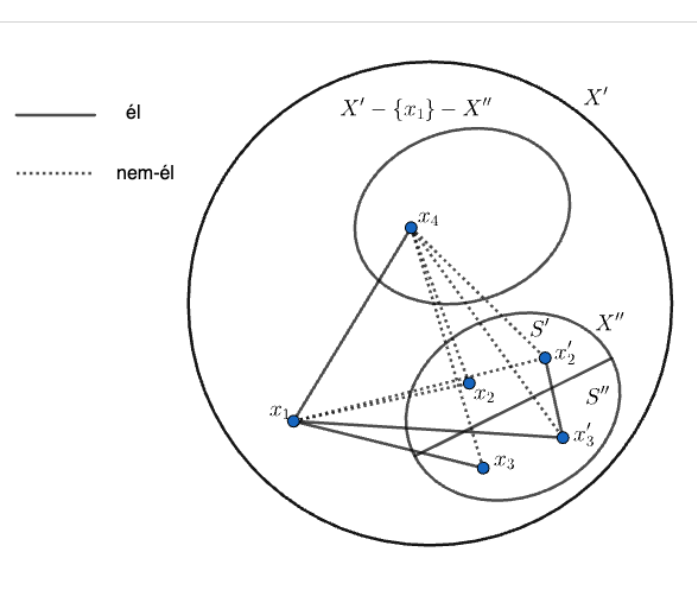
Vegyük észre, hogy a P_4 gráf komplementere szintén egy P_4 gráf, azaz a négyelemű út egy olyan gráf, amelynek komplementere izomorf önmagával. Speciálisan tehát P_4 olyan gráf, amire igaz, hogy saját maga és a komplementere is összefüggő. A következő lemmában megmutatjuk, hogy gráfokban ez utóbbi tulajdonságot tudjuk karakterizálni P_4 segítségével.

1. Lemma. *Legyen a H egyszerű gráf csúcshalmaza X. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

- (i) *H-ban van P_4-gyel izomorf feszített részgráf;*
- (ii) *X-nek létezik olyan, legalább kételemű részhalmaza, ami H-ban és $\overline{H}$-ben is összefüggő.*

Bizonyítás. Az (i) $\Rightarrow$ (ii) következtetéshez elég vennünk egy P_4-gyel izomorf feszített részgráfot H-ban, amelynek csúcshalmaza a fentiek szerint $\overline{H}$-ben is P_4-gyel izomorf részgráfot feszít ki.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy létezik csúcsoknak egy olyan részhalmaza, ami legalább kételemű és H-ban és $\overline{H}$-ben is összefüggő. Legyen X' egy minimális elemszámú az ilyen tulajdonságokkal bíró csúcshalmazok között. Vegyük észre, hogy X' legalább négyelemű, hiszen könnyen ellenőrizhetjük, hogy nincs ilyen tulajdonságú 2 vagy 3 csúcsú gráf. Legyen $x_1 \in X'$ tetszőleges. A minimalitás miatt ekkor $X' - \{x_1\}$ vagy nem összefüggő H-ban, vagy nem összefüggő $\overline{H}$-ben. Mivel H és $\overline{H}$ szerepe felcserélhető, így feltehetjük, hogy $X' - \{x_1\}$ nem összefüggő H-ban (vegyük észre, hogy ezt a felcserélést megtehetjük, mert P_4 komplementere izomorf önmagával, ezért ha a megcserelés után a bizonyítás talál P_4-et $\overline{H}$-ben, akkor ez biztosítja azt is, hogy lesz P_4 H-ban). Mivel X' összefüggő $\overline{H}$-ben, és legalább kételemű, ezért létezik $x_2 \in X' - \{x_1\}$, ami szomszédos x_1-gyel $\overline{H}$-ben (vagyis H-ban nem fut x_1 és x_2 között él). Mivel $X' - \{x_1\}$ nem összefüggő H-ban, így az ez által a csúcshalmaz által indukált részgráfnak H-ban legalább két összefüggőségi komponense van. Legyen X'' ahhoz az összefüggőségi komponenshez tartozó csúcshalmaz, ami tartalmazza x_2-t. X'' és $X' - \{x_1\} - X''$ egyaránt nemüres, és a két halmaz között nem fut H-ban él.



Mivel X' összefüggő H-ban, ezért ez csak úgy lehet, ha létezik $x_3 \in X''$ és $x_4 \in X' - \{x_1\} - X''$ úgy, hogy mind a kettő össze van kötve x_1-gyel H-ban.

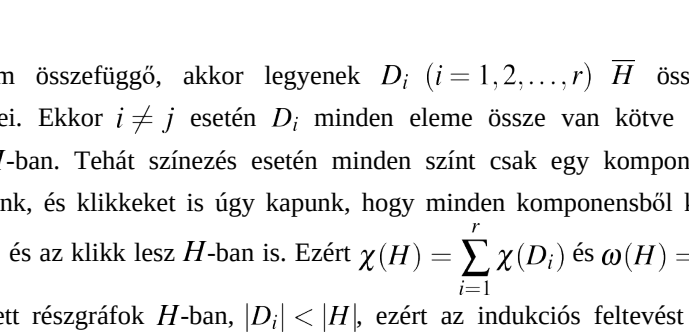
Legyen S' azon elemek halmaza X''-ben, amik nincsenek összekötve H-ban (azaz össze vannak kötve $\overline{H}$-ben) x_1-gyel, S'' pedig azon X''-beli csúcsok halmaza, amik össze vannak kötve H-ban x_1-gyel. Ekkor S' és S'' diszjunkt halmazok és $S' \cup S'' = X''$. Mivel $x_2 \in S'$, $x_3 \in S''$, így mindkét halmaz nemüres, és az uniójuk, X'', egy feszített részgráf összefüggőségi komponense H-ban, ezért létezik $x_2' \in S'$, $x_3' \in S''$, amik éllel össze vannak kötve H-ban. Így az x_1, x_2', x_3', x_4 pontok olyanok, hogy $x_1x_2', x_2'x_4, x_4x_3'$ élek $\overline{H}$-ben (azaz nem élek H-ban) és $x_2'x_3', x_3'x_1, x_1x_4'$ élek H-ban, vagyis az x_1, x_2', x_3', x_4 csúcsok által feszített részgráf H-ban és $\overline{H}$-ben is P_4-gyel izomorf. □

Jelölje tetszőleges H gráf esetén $\omega(H)$ a H klikkszámát, vagyis a legtöbb olyan csúcs számát, amit ki tudunk választani úgy, hogy bármely kettő között fusson él.

2. Lemma. *Ha egy H gráfban nincs P_4-gyel izomorf feszített részgráf, akkor $\chi(H) = \omega(H)$.*

Bizonyítás. A csúcsok számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. Egycsúcsú gráfra az állítás nyilvánvalóann igaz. Legyen H tetszőleges, legalább kétcsúcsú gráf, amiben nincs P_4-gyel izomorf feszített részgráf, és tegyük fel, hogy az állítás igaz minden H-nál kisebb csúcsszámú gráfra. Az előző lemmából következik, hogy ekkor H-nak tetszőleges X csúcshalmazára X vagy nem összefüggő H-ban, vagy nem összefüggő $\overline{H}$-ben. Ezt $X = H$-ra alkalmazva kapjuk, hogy vagy H, vagy $\overline{H}$ nem összefüggő.

Ha H nem összefüggő, akkor jelöljük C_i-vel $(i = 1, 2, \ldots, r)$ az összefüggőségi komponenseit. Mivel komponensek között nem fut él, ezért $\omega(H) = \max_{i=1,\ldots,r} \omega(C_i)$. Szintén amiatt, hogy nem fut a kompnensek között él, ezért külön-külön is tudjuk színezni őket, ezért adódik, hogy $\chi(H) = \max_{i=1,\ldots,r} \chi(C_i)$. Az indukciós feltétel miatt $\chi(C_i) = \omega(C_i)$ (alkalmazható a feltevés, hiszen mivel a C_i-k feszített részgráfok, ezért nem tartalmazhatnak P_4-et feszített részgráfként és $|C_i| < |H|$), így $\max_{i=1,\ldots,r} \chi(C_i) = \max_{i=1,\ldots,r} \omega(C_i)$, vagyis $\chi(H) = \omega(H)$.



$\overline{H}$ összefüggőségi komponensei

Ha $\overline{H}$ nem összefüggő, akkor legyenek D_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ $\overline{H}$ összefüggőségi komponensei. Ekkor $i \neq j$ esetén D_i minden eleme össze van kötve D_j minden elemével H-ban. Tehát színezés esetén minden színt csak egy komponensen belül használhatunk, és klikkeket is úgy kapunk, hogy minden komponensből kiválasztunk egy klikket, és az klikk lesz H-ban is. Ezért $\chi(H) = \sum_{i=1}^{r} \chi(D_i)$ és $\omega(H) = \sum_{i=1}^{r} (D_i)$, a D_i-k feszített részgráfok H-ban, $|D_i| < |H|$, ezért az indukciós feltevést alkalmazva $\chi(D_i) = \omega(D_i)$ és így $\chi(H) = \omega(H)$. □

Ebből viszont már következik a fentiek alapján a feladat állítása: mivel G nem tartalmaz P_4-et feszített részgráfként, ezért $\chi(G) = \omega(G)$, másrészt mivel K_4-et sem tartalmaz feszített részgráfként, ezért $\omega(G) \leq 3$, vagyis $\chi(G) \leq 3$, és éppen ezt akartuk belátni.

Szőke Tamás

Szőke Tamás 2015-ben végzett a Földes Ferenc Gimnázium speciális matematika tagozatán, majd az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematikus hallgatója volt. Középiskolás évei alatt számos országos eredményt ért el matematikából: 10. helyezés az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny III. kategóriájában, 9–10. helyezés a Középiskolai Matematikai Lapok A pontjelű és 13. a B pontjelű versenyén, dicséret a Romanian Master of Mathematics nemzetközi matematikaversenyen, valamint bronzérem a Közép-európai Matematikai Diákolimpián (MEMO). A versenyzést az egyetemen is folytatta, ahol I. díjat szerzett az egyetemisták nemzetközi matematikaversenyén (International Mathematics Competition for University Students, rövidítve: IMC), illetve 2018-ban 1. helyen végzett a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyen. Egyetemi évei alatt több alkalommal részt vett a Földes Ferenc Gimnázium matematikai tehetséggondozó munkájában. Jelenleg Svájcban dolgozik kvantitatív fejlesztő munkakörben. (A szerk.)

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon:

Homolya Szilvia, Rozgonyi Erika 2024. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Szintfelmérés a Miskolci Egyetemen

Bejövő hallgatók matematikai szintfelmérése a Miskolci Egyetemen

Bevezető

A tapasztalatok azt mutatják, hogy a felsőoktatásba jelentkező hallgatók matematikatudása jelentős mértékben differenciált. Ennek egyik oka, hogy a hallgatók különböző típusú középiskolákból érkeznek, ahol eltérő tantervekkel és tanítási módszerekkel találkozhattak. Előfordul, hogy bizonyos típusú szakközépiskolákból érkező hallgatóknak előnyt jelent a már tanult szakrajz, géprajz néhány egyetemi tantárgynál (például Ábrázoló geometriánál), de esetükben sokszor az figyelhető meg, hogy nehezebben megy a matematikai tudásra épülő tantárgyak befogadása, mint például az Analízis vagy a Lineáris algebra, hiszen középiskolájukban alacsonyabb óraszámban tanulták a matematikát. A különbségeket tovább mélyíti, hogy a műszaki, illetve informatikai szakokra való bekerüléshez nem feltétlenül szükséges matematikából emelt szintű érettségit tenni. A szilárd alapok hiánya megnehezíti az egyetemi szintű matematika tananyag elsajátítását, a sikeres előrehaladást. Ezért kiemelten fontos, hogy már az elején azonosítsuk a hiányosságokat, és szükség esetén időben, hatékony támogatást nyújtsunk a hallgatóknak. Ezt a célt szolgálja a bejövő hallgatók matematikai kompetenciamérése.

A szintfelmérésnek a Miskolci Egyetem Gépészmérnöki és Informatikai Karán (GÉIK) és annak jogelődjén már a korábbi évtizedekben is volt gyakorlata. 2022 szeptemberében azonban a mérést a társkarokra is kiterjesztettük, azaz az ME minden olyan elsőéves alapképzési szakos hallgatójára, akinek valamilyen matematikatárgy szerepel a mintatantervében. A 2022/2023. tanév 1. félévében a Miskolci Egyetem informatikai, műszaki, illetve gazdaságtudományi területéhez tartozó I. éves BSc szakos hallgatóinak körében végzett matematikai kompetenciamérés eredményeinek elemzését egy korábbi cikkünkben ([1]) már megtettük.

2023 szeptemberében új koncepció szerint bonyolítottuk le a szintmérést és a kapcsolódó felzárkóztatást. A GÉIK belépő hallgatóinak mérése a regisztrációs hét első napján megtörtént. A tesztet a hallgatók az egyetemi e-learning-rendszerben írták meg, a nappali tagozatos hallgatók személyes jelenléttel, a levelező munkarendben tanulók online módon. A 2023/2024-es tanévtől a kar alapképzési (BSc) szakos mintatanterveinek első félévére Matematikai kompetenciafejlesztő kurzus címmel 0 kredites (kötelező) kritériumtárgy került beillesztésre. A fejlesztés célja a hallgatók tanterv szerinti előmenetelének segítése, a későbbi esetleges lemorzsolódás megelőzése. A felmérő eredményes teljesítése esetén a Matematikai kompetenciafejlesztő kurzus című tárgyat elismertként fogadjuk el, a hallgatók a félév elején megkapják az aláírást. A belépési szintfelmérőt sikertelenül teljesítők, illetve meg nem írók részére szükséges a kompetenciafejlesztő kurzus elvégzése. Ebben a tanévben vezettük be, hogy a felzárkóztató foglalkozásokat a nappali tagozatos hallgatóknak – a mérést követő nappal kezdődően – a regisztrációs héten tömbösített formában tartjuk, ezzel is támogatva a tanév sikeres megkezdését. Az órákat videófelvételen rögzítettük, amelyet az összefoglaló tananyagokkal, gyakorló feladatokkal együtt a szorgalmi időszak első hetének végéig az egyetemi zárt e-learning-rendszerben található, minden érintett hallgató által elérhető felzárkóztató kurzushoz feltöltöttük. Az online tananyagok, visszanézhető felvételek így azon (pl. levelező tagozatos) hallgatók számára is támogatást nyújtanak, akik nem tudnak részt venni a felzárkóztató foglalkozásokon.

Az érettségi témakörei

A 2005-ben bevezetett kétszintű érettségi rendszerrel párhuzamosan megszűntek a felsőoktatásba bekerüléshez szükséges felvételi vizsgák. Az eredeti koncepció értelmében az emelt szintű érettségi a felsőoktatási intézményekbe való jelentkezés feltétele lett volna, míg a középszintű érettségi a középfokú tanulmányok lezárására lett volna hivatott. Ez az elképzelés azonban nem vált valóra [2]. Ugyan 2020-tól bevezetésre került, hogy minden képzési területen felvételi követelmény az emelt szintű érettségi, de még a műszaki és informatikai képzési terület szakjain sem volt kötelező azt matematikából teljesíteni. 2023-tól újabb átalakuláson ment át a felvételi rendszer, intézményi hatáskörbe került annak eldöntése, hogy előírják-e felvételi követelményként az emelt szintű érettségi vizsgát. Így a Miskolci Egyetem szakjainak többségén – a 2023-as általános felvételi eljárástól kezdődően – elegendő a középszintű érettségi megléte.

Az Érintő egy ötrészes cikksorozatában Csapodi Csaba bemutatja, hogy a 2020-ban bevezetett új Nemzeti alaptanterv és az ehhez tartozó kerettanterv változásai 2024-től hogyan módosítják a matematika érettségi követelményeket. Az érettségi rendszer változásait, témakörönként és szintenként, táblázatos formában részletezve, áttekinthető módon adja meg (pl. [3], [4]), így cikkünkben csak érintőlegesen térünk ki a változásokra.

A középszintű érettségi témakörei a matematika alábbi fejezeteiből kerülnek ki:

1. Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok

2. Számelmélet, algebra

3. Függvények, az analízis elemei

4. Geometria, koordinátageometria, trigonometria

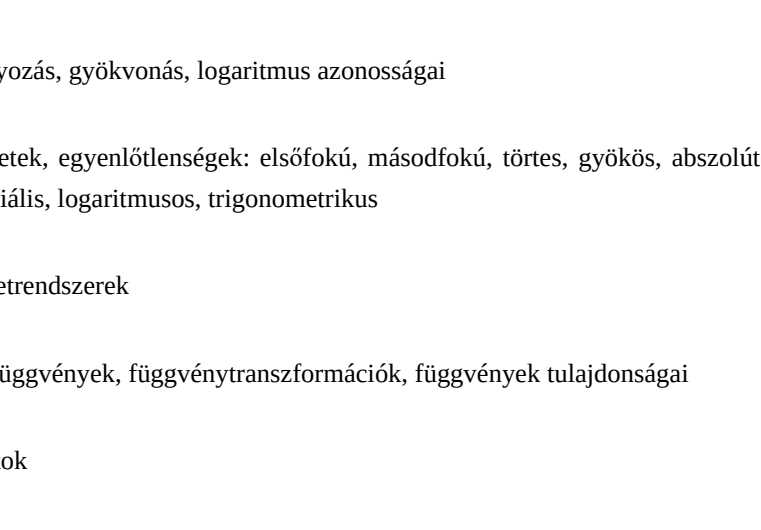
5. Valószínűségszámítás, statisztika

A 2023/2024-es tanévben felvett hallgatók az előző NAT alapján meghatározott vizsgakövetelmények szerint érettségiztek, sőt számos levelező tagozatos hallgató még a kétszintű érettségi bevezetése előtt vizsgázott. Így egyidejűleg figyelembe kell vennünk a korábbi érettségi követelményeket, illetve fel kell készülnünk a matematika tantárgy új NAT szerinti tartalmi változásaira. Több, elsősorban a műszaki, illetve informatikai, alapképzési szakok szempontjából releváns témakör a középszintű érettségi vizsga követelményei közül átkerült az emelt szintű követelmények közé, vagy kikerült a középiskolai kötelező tananyagból [5].

A műszaki és informatikai BSc szakok esetén a kötelezően teljesítendő tárgyak között szerepel általában két féléven keresztül analízis témakörű kurzus, legalább egy félévben lineáris algebra, illetve diszkrét matematika. A gazdaságtudományi területhez tartozó BSc szakok esetén a két féléves matematikai tárgyak tematikája az analízis, a valószínűségszámítás, alkalmazott lineáris algebra és az operációkutatás elemeit öleli fel. A legtöbb hallgató számára ezek az alapozó jellegű matematikakurzusok nehezen teljesíthetőek, hiszen jelentős mennyiségű új ismeret elsajátításáról kell számot adniuk, valamint a sikeres abszolváláshoz elengedhetetlenül szükségesek a középiskolában szerzett jó matematikai alapok. Ezek hiányában a hallgatók lényegesen nehezebben tudják megoldani a zárthelyi dolgozatokban, illetve a vizsgadolgozatokban kitűzött feladatokat. A hézagos matematikai tudásanyaggal érkező hallgatóknak a kurzusok sikeres teljesítéséhez nemcsak az új anyagot kell elsajátítaniuk, hanem pótolniuk kell a középiskolai anyag megfelelő fejezeteit is. Ezért indokolt már az egyetemi tanulmányok megkezdésekor a felvételt nyert hallgatók bemeneti matematikai kompetenciájának mérése, hogy szükség esetén megtörténjen a beavatkozás, a szintre hozás, így elkerülve a későbbi esetleges lemorzsolódást.

A matematikai szintfelmérésről

A bejövő hallgatók matematikai szintfelmérését összesen 1126 elsőéves műszaki, informatikai, illetve gazdaságtudományi képzési területhez tartozó BSc-s (672 nappali, illetve 454 levelező tagozatos) hallgató írta meg. A karonkénti létszámadatok a következő ábrán láthatók:



1. ábra Szintmérésen résztvevők száma karonként és tagozatonként

A bevezetőben is említettük, hogy a Gépészmérnöki és Informatikai Kar (GÉIK) újonnan felvett alapképzési szakos hallgatóinak a regisztrációs hét első napjára ütemeztük a matematikai felmérő tesztet. A regisztrációs hét második felében írták meg a szintmérést az Anyag- és Vegyészmérnöki Kar (AVK) érintett hallgatói, a Gazdaságtudományi Kar (GTK) elsőéves BSc-s hallgatói pedig a szorgalmi időszak megkezdése után vettek részt a szintmérésen.

A teszt megírására 45 perc állt rendelkezésre, a feladatsor 15 feleletválasztós kérdést tartalmazott, amelyeket a matematika középszintű érettségi témaköreihez kapcsolódóan válogattunk. A diákok öt lehetőségből választhattak egyet. Minden jó válasz 4 pontot ért, a hibás válasz 1 pont levonásával járt, míg a nem megválaszolt feladatra nem adtunk pontot.

A feladatokat igyekeztünk úgy összeállítani, hogy az egyetemi tananyag elsajátítása szempontjából fontos témakört érintsenek és reális képet kapjunk a diákok megfelelő ismereteiről, hiányosságaikról. A szintmérés előtt a hallgatók számára közzétettünk gyakorló feladatsort, illetve tájékoztattuk őket a belépési szintfelmérő céljáról és tematikájáról. A műszaki és informatikai képzési terület esetén a középiskolai matematikai tananyagból az alábbi témákat emeltük ki:

✓ műveletek, algebrai átalakítások

✓ hatványozás, gyökvonás, logaritmus azonosságai

✓ egyenletek, egyenlőtlenségek: elsőfokú, másodfokú, törtes, gyökös, abszolútértékes, exponenciális, logaritmusos, trigonometrikus

✓ egyenletrendszerek

✓ elemi függvények, függvénytranszformációk, függvények tulajdonságai

✓ sorozatok

✓ elemi síkgeometria, elemi térgeometria

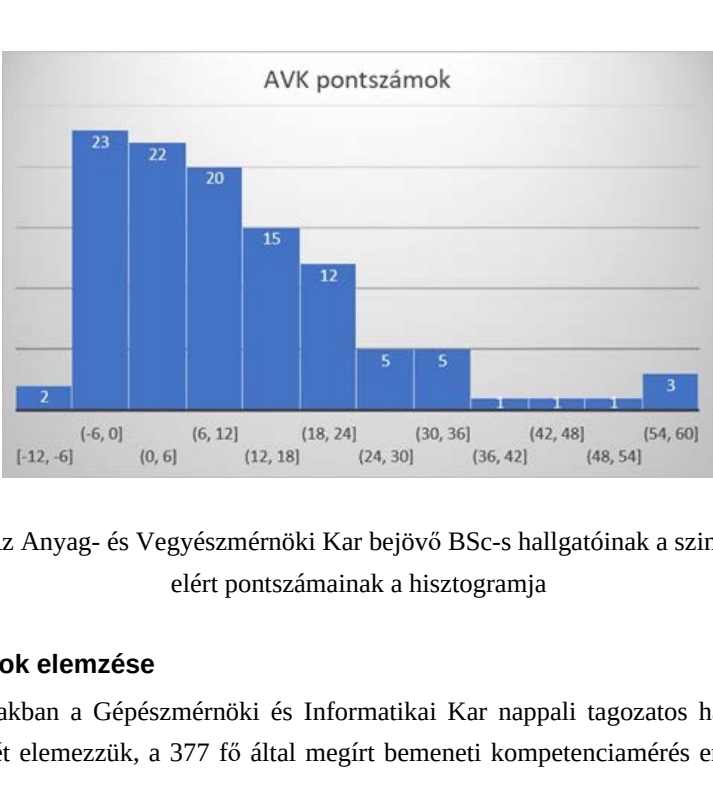
✓ vektorok, koordinátageometria

✓ trigonometria

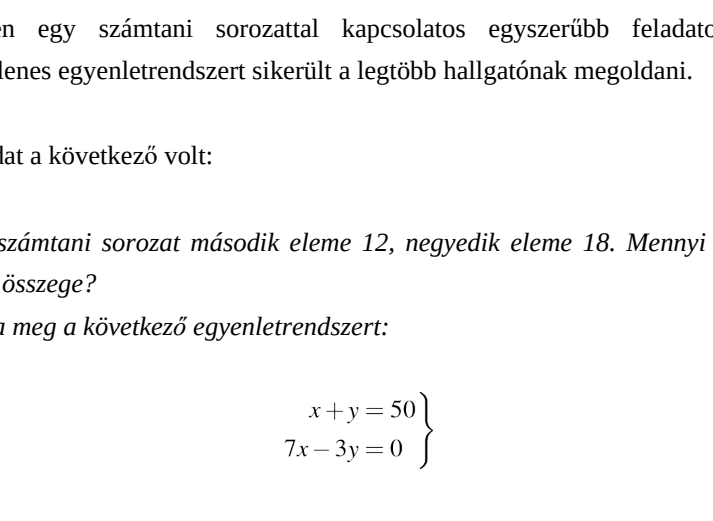
A GTK hallgatói számára a Gazdasági matematika 1. tárgyhoz a középiskolában tanult kombinatorikai alapismeretek is szükségesek, így esetükben a kevésbé releváns geometriai témakörű feladatok helyett kombinatorikai kérdések szerepeltek. Továbbá hangsúlyosabban megjelentek a sorozatokkal (mértani sorozat, kamatos kamat) kapcsolatos feladatok.

Az elérhető 60 pontból a hallgatók átlagosan 25,5 pontot teljesítettek, a szórás 16,1 volt, amely megerősíti a bevezetőben is említett heterogén alaptudást. A maximális 60 pontot (az 1126 résztvevőből) 20 hallgató érte el. A tesztet akkor tekintettük sikeresnek, ha az eredmény minimum 24 pont volt. A belépési szintmérőt sikeresen teljesítő 611 hallgatónak a Matematikai kompetenciafejlesztő kurzus c. tárgyat elismertként fogadtuk el.

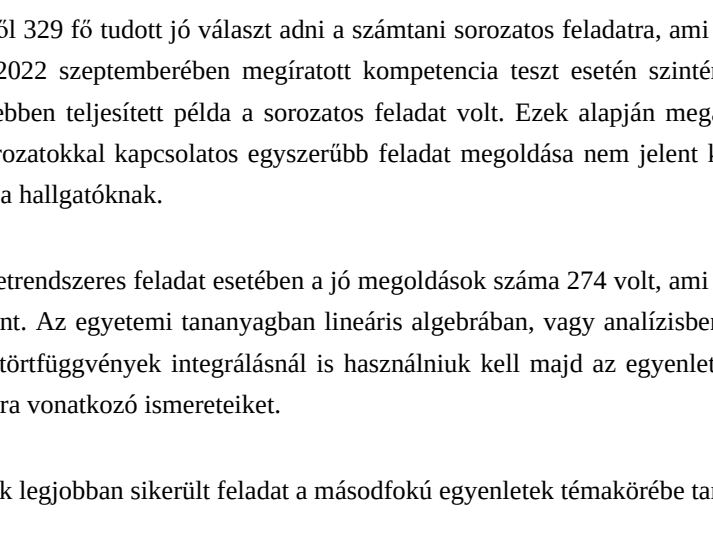
A következő ábrákon karonként adjuk meg az elért pontszámok eloszlását. Az eredmények megfelelnek a 2023-as felvételi pontszámok alapján előzetesen vártaknak. Egyrészt a korábbi évekhez képest alacsonyabb pontszámmal is be lehetett kerülni képzéseinkre, másrészt a gazdaságtudományi szakok esetén a ponthatár magasabb volt, mint a műszaki és informatikai képzési terület szakjainál. Tovább árnyalhatja az átlagok közötti különbséget a szintfelmérés – előzőekben már említett – karonként eltérő ütemezése. A GTK hallgatói a szorgalmi időszakban írták meg a tesztet, amikor a felzárkóztató kurzus tananyagai a zárt e-learning-rendszerben már rendelkezésre álltak.



2. ábra A Gépészmérnöki és Informatikai Kar bejövő BSc-s hallgatóinak a szintmérésen elért pontszámainak a hisztogramja



3. ábra A Gazdaságtudományi Kar bejövő BSc-s hallgatóinak a szintmérésen elért pontszámainak a hisztogramja



4. ábra Az Anyag- és Vegyészmérnöki Kar bejövő BSc-s hallgatóinak a szintmérésen elért pontszámainak a hisztogramja

A feladatok elemzése

A továbbiakban a Gépészmérnöki és Informatikai Kar nappali tagozatos hallgatóinak eredményét elemezzük, a 377 fő által megírt bemeneti kompetenciamérés eredményeit alapul véve.

A tesztben egy számtani sorozattal kapcsolatos egyszerűbb feladatot és egy kétismeretlenes egyenletrendszert sikerült a legtöbb hallgatónak megoldani.

A két feladat a következő volt:

- *Egy számtani sorozat második eleme 12, negyedik eleme 18. Mennyi az első 10 elem összege?*
- *Oldja meg a következő egyenletrendszert:*

$$\left.\begin{array}{r} x+y=50 \\ 7x-3y=0 \end{array}\right\}$$

Mennyi lesz az egyenletrendszer megoldásainak szorzata?

A 377 főből 329 fő tudott jó választ adni a számtani sorozatos feladatra, ami 87,27%-os arány. A 2022 szeptemberében megíratott kompetencia teszt esetén szintén az egyik legsikeresebben teljesített példa a sorozatos feladat volt. Ezek alapján megállapítható, hogy a sorozatokkal kapcsolatos egyszerűbb feladat megoldása nem jelent különösebb problémát a hallgatóknak.

Az egyenletrendszeres feladat esetében a jó megoldások száma 274 volt, ami 72,68%-os arányt jelent. Az egyetemi tananyagban lineáris algebrában, vagy analízisben például a racionális törtfüggvények integrálásnál is használniuk kell majd az egyenletrendszerek megoldására vonatkozó ismereteiket.

A harmadik legjobban sikerült feladat a másodfokú egyenletek témakörébe tartozott:

- *Mennyi az* $x^2-5x+6=0$ *egyenlet valós megoldásainak a négyzetösszege?*

Erre a feladatra a 377 diákból 255-en válaszoltak helyesen, ami 67,64%-os arányt jelent. Itt azért már érezhető a csökkenés mértéke az első feladat 87,27%-hoz képest, pedig egy egyszerű, két egész megoldással rendelkező másodfokú egyenletet adtunk meg. Azt nem tudjuk a válaszokból lemérni, hogy a másodfokú egyenletet jól oldotta-e meg, csak a gyökök négyzetösszegét határozta meg esetleg rosszul.

A problémás feladatok elemzése

A feladatok közül a legkevésbé egy logaritmusfüggvény értelmezési tartományára vonatkozó, 13. feladat feladat sikerült.

- *Mi a valós számok halmazának az a legbővebb részhalmaza, ahol az* $f(x)=\log_2(x+1)$ *függvény értelmezhető?*

A 378 válaszadóból csak 155 fő oldotta meg helyesen a feladatot. Ez a válaszadók 41%-os arányát jelenti, azaz a diákoknak kevesebb mint a felét. Tapasztalataink is alátámasztják a fenti eredményt, ugyanis az elsőéves hallgatók körében a függvények témakörében jelentkeznek a legnagyobb hiányosságok. Ugyanakkor az első félévben teljesítendő analízis kurzusok egyik legfontosabb fejezete az egyváltozós valós függvények elméletéhez kapcsolódik, így a sikeres vizsga szempontjából elengedhetetlen a középiskolában korábban megismert (az első és másodfokú, az abszolútérték, a négyzetgyök, a trigonometrikus, az exponenciális és logaritmus) függvények egzakt ismerete [5]. A korábban említett változások miatt pl. a logaritmusfüggvény ábrázolása és jellemzése is kikerült a 2020-as NAT szerint a középszintű követelményekből, illetve a logaritmus azonosságai sem tartoznak a kötelező anyagrészek közé. Ugyanez elmondható a trigonometrikus függvények témaköréről. Az emelt szintű tananyagnak természetesen része a fent említett összefüggések és a függvények ábrázolása is, amelyről bővebben olvashatunk Csapodi Csaba erre vonatkozó cikkében [3]. Azonban kevesen rendelkeznek emelt szintű érettségivel matematikából, miközben az egyetemi oktatásban szükség van a fenti témakörökre. Ezért az egyetemi oktató kollégák számára kiemelten fontos, hogy hangsúlyt helyezzenek ezen ismeretek megfelelő átadására, és ne tekintsék ezeket magától értetődőnek.

Sajnos még rosszabb eredményt értek el a diákok a következő feladat esetében:

- *Az* a *paraméter mely értéke esetén párhuzamos a*

$$3x+y=10 \quad \textit{és a}$$

$$-6x+ay=30 \quad \textit{egyenes?}$$

A 377 diákból 62 fő tudott erre a kérdésre helyesen válaszolni, ami 16,45%-os arány. A teszt ezen eredménye is visszaigazolta azt, hogy a koordinátageometria sok esetben nehézséget jelent. Ennek egyik oka az lehet, hogy ahhoz, hogy valaki jó legyen ebben a témában, biztos geometriai és algebrai alapokkal is rendelkeznie kellene. A középiskolai koordinátageometriai ismeretekre szükség van az Analízis tárgyak esetén, de említhetnénk a Lineáris algebra tárgy vektorokkal foglalkozó fejezetét is, ahol szintén ezekre az ismeretekre építünk. A függvényeknél már említetteknek megfelelően a jövőben itt is figyelembe kell venni, hogy a középszintű tananyagból mely témakörök (pl. a skaláris szorzat definíciója, tulajdonságai) maradtak ki, kerültek át az emelt szintre [4].

Konklúzió

A kompetenciamérés eredménye megerősítette az egyetemi matematikaoktatás során szerzett tapasztalatainkat. A frissen felvett hallgatók azokban a feladatokban bizonyultak kevésbé eredményesnek, amelyek nehézségére előzetesen számítottunk. A teszt összeállításakor az volt a célunk, hogy szinte az összes releváns témakört lefedjük, a jelenléti megírással pedig arra törekedtünk, hogy a valós tudásukról kapjunk képet. A teszt írása során a feladatokat feleletválasztós kérdések formájában kellett megoldani, de a nehézségeket jelentő témakörök esetén a felkínált válaszlehetőségek sem mindig nyújtottak megfelelő segítséget a diákoknak.

Azon hallgatóknak, akik nem írták meg elégséges szinten a tesztet, kötelező volt részt venniük egy felzárkóztató kurzuson. Ennek keretében már a pótolandó hiányosságokra fókuszálhatunk, így segítve az érintetteket az egyetemi matematikatárgyak abszolválásában és a ráépülő szakmai ismeretek sikeres elsajátításában. A kurzuson való részvétel, illetve az elektronikus tananyagok feldolgozása után már jelentősen emelkedett azon diákok száma, akik pótlólagosan, de meg tudták írni a kompetenciatesztet elégséges szinten. Összefoglalva megállapítható, hogy a hallgatók sikeres előrehaladásának támogatásához fontos a bejövő diákok matematikai szintfelmérése. Az eredménytől függően előírt fejlesztő kurzus biztosítása segíthet abban, hogy a hallgatók megfelelő alapokkal indulhassanak a tanulmányaikban.

Irodalomjegyzék

[1] Homolya Szilvia, Rozgonyi Erika: The results of the university competence measurement in mathematics in the view of the tasks, Mathematics In Education, Research And Applications 8:1 pp. 24–32., 9 p. (2022), https://doi.org/10.15414/meraa.2022.08.01.24-32

[2] Árvai-Homolya Szilvia, Lengyelné Szilágyi Szilvia: Matematika emelt szintű érettségi vizsgák elemzése az informatikai és műszaki alapképzési szakokon elvárt matematikai tudásanyag szempontjából, (In: Talata István (szerk.) Matematikát, Fizikát és Informatikát Oktatók 41. Országos Konferenciája: MAFIOK 2017. Budapest, Szent István Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar, p. 79–87. ISBN: 978-963-269-663-8)

[3] Csapodi Csaba: A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – III. rész, Érintő–Elektronikus matematikai lapok, 29. szám, 2023. szeptember

[4] Csapodi Csaba: A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – IV. rész, Érintő–Elektronikus matematikai lapok, 30. szám, 2023. december

[5] Homolya Szilvia, Rozgonyi Erika: A 2020-as NAT szerint módosult matematika érettségi követelmények várható hatása az egyetemi oktatásra, Proceedings of the Conference on Problem-based Learning in Engineering Education, Debreceni Egyetem Műszaki Kar, Műszaki Alaptárgyi Tanszék (2023) p. 4–9.

Homolya Szilvia, Rozgonyi Erika
Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Matematikai Intézet

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

Adatkezelés
Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon:

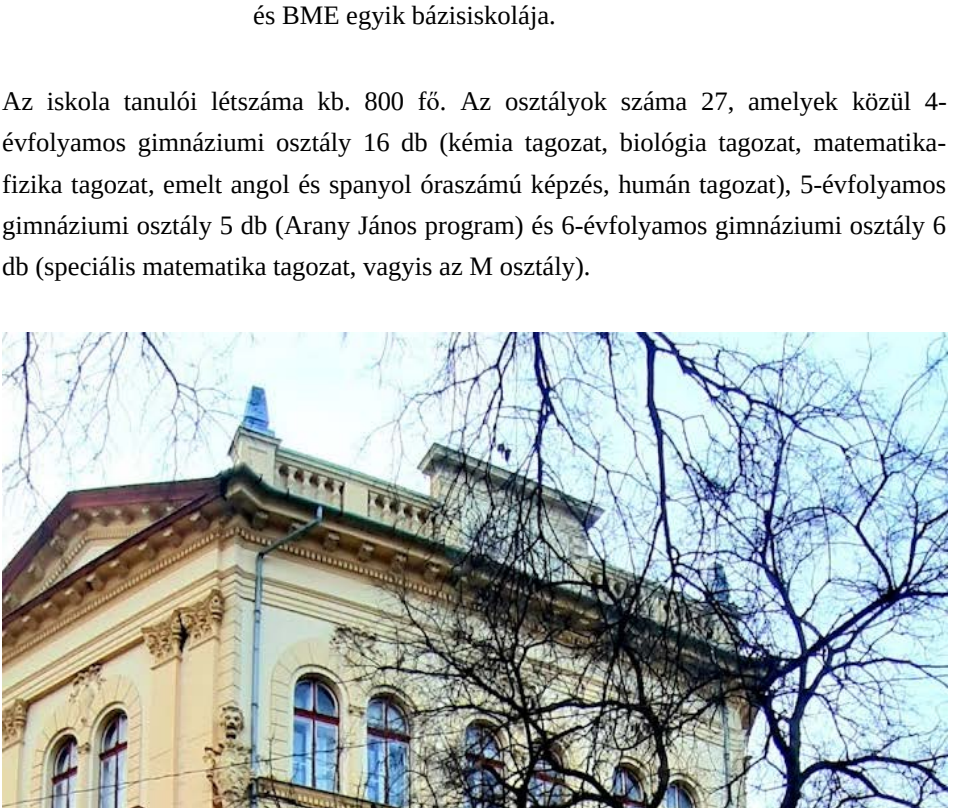
Ábrahám Gábor, Szaszkó-Bogárné Eckert Bernadett, Schultz János 2024. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Tehetséggondozás a szegedi Radnótiban

Tehetséggondozó munka matematikából a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnáziumban

Iskolánk 1898-ban épült, három neve volt eddigi története során: Magyar Királyi Főgimnázium, Klauzál Gábor Gimnázium, végül 1945 óta Radnóti Miklós Gimnázium. Ennek névváltozataként alakult ki az iskola mostani neve, ami tükrözi a benne folyó sajátos tehetséggondozó munkát. Intézményünk évtizedek óta a felsőoktatási tanulmányokra készíti fel diákjait, az SZTE, ELTE és BME egyik bázisiskolája.

Az iskola tanulói létszáma kb. 800 fő. Az osztályok száma 27, amelyek közül 4-évfolyamos gimnáziumi osztály 16 db (kémia tagozat, biológia tagozat, matematika-fizika tagozat, emelt angol és spanyol óraszámú képzés, humán tagozat), 5-évfolyamos gimnáziumi osztály 5 db (Arany János program) és 6-évfolyamos gimnáziumi osztály 6 db (speciális matematika tagozat, vagyis az M osztály).



A 4-évfolyamos matematika-fizika tagozatos képzés

A Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnáziumban 4-évfolyamos képzési rendben egy-egy fél osztály számára működik a matematika-fizika tagozat, amely mintegy 15 évvel ezelőtt indult ebben a formában. Heti matematikaóráik száma 5-5-6-6 a négy év során. A tananyag a témaköröket tekintve nem haladja meg az emelt szintű érettségi tartalmi követelményeit, viszont a relatíve magasabb heti óraszámnak köszönhetően az egyes témakörökön belül sokkal mélyebbre tudunk jutni. Lehetőség van számos versenyfeladat megoldására is a különböző elméleti részekhez kapcsolódóan, ezzel segítve a felkészülést az Arany Dániel Matematikai Tanulóversenyre és az OKTV-re.

A csoportokat nagyon magas felvételi pontszámmal érkező fiatalokkal tudjuk megtölteni minden évben, akiknek természettudományos, matematika iránti érdeklődéséhez elhivatottság is társul. Ezt bizonyítja, hogy a tanulók minden évben nagy létszámban vesznek részt a különböző matematikaversenyeken és a KöMaL pontversenyeiben. Például ebben a tanévben a 11. évfolyamos csoport 8 tagja szerepel a C-pontverseny első 30 helyezettje között. A csoportokon belüli differenciálás eszköze az úgynevezett évfolyamszakkör a 9., 10. és 11. évfolyamos tanulóknak. Itt hetente 60 percben a legérdeklődőbb „mat-fizes” diákok más, akár „specmatos” évfolyamtársaikkal együtt oldanak meg versenyfeladatokat. Erre az évfolyamszakkörre tehát az adott évfolyam bármely osztálytípusában tanuló diák járhat. A szakköri létszám 10–20 fő, a szakköri foglalkozásokat pedig az aktuális évfolyamon abban a tanévben tanító egy-egy kolléga vezeti. A tanári munkát itt a kortárscsoport húzóereje is segíti. A diákok meghallgatják egymás megoldásait, tanulnak egymástól, egyszerre ismerik el egymás tudását és versengve motiválják egymást. Ez a tehetségsegítő forma igen sikeresnek bizonyult. Az Arany Dániel Matematikai Tanulóversenyen több diákunk is a díjazottak között szerepelt az elmúlt 10 évben. A matematika OKTV II. kategóriájában is több alkalommal végzett az első 10 versenyző között matematika-fizika tagozatra járó diák. A tapasztalatok alapján úgy gondoljuk, hogy ez az iskolai matematika évfolyamszakkör más intézményekben is könnyen meghonosítható, és remek lehetőséget ad a matematikai tehetség fejlesztésére.

> 9.-es évfolyamszakkör, 7. foglalkozás
>
> 1. Egy szög csúcsa az A pont, szárai s_1 és s_2. Felvesszük a szög s_1 szárán a B, C, az s_2 szárán a D, E pontokat úgy, hogy $AB=BD=DC=CE=EA$. Hány fokos a szög?
>
> 2. Az ABC háromszögben $AB=3\cdot BC$. Legyen P és Q az AB oldal azon pontja, amelyekre $AP=PQ=QB$. Legyen F az AC oldal felezőpontja. Határozzuk meg a QFP szög nagyságát.
>
> 3. Az $ABCD$ négyzet belsejében felvesszük a P pontot úgy, hogy az ABP háromszög olyan egyenlőszárú háromszög legyen, amelynek alapon fekvő szögei 15 fokosak. Mekkora a CPD szög?
>
> 4. Az ABC háromszög AB oldala 26 cm. Az A csúcsból induló súlyvonal 18 cm, a C csúcsból induló súlyvonal pedig 15 cm hosszú. Mekkora a háromszög területe?
>
> 5. Az ABC szabályos háromszögben D és E rendre az AC és AB oldalak pontjai, P pedig a BD és CE szakaszok metszéspontja. Határozzuk meg a BPE szög nagyságát, ha az $AEPD$ négyszög és a BCP háromszög területe egyenlő.
>
> 6. Hány hegyesszögű, derékszögű, illetve tompaszögű háromszöget határoznak meg egy szabályos húszszög csúcsai?

A csoportok fő célja, hogy mindenki kimagasló eredményt érjen el az emelt szintű matematika érettségin, majd felvételt nyerjen az általa kiválasztott felsőoktatási intézménybe és ott sikeresen és eredményesen megállja a helyét. Ezt el is szokták érni a diákok, hiszen a négy közösen töltött év alatt a szorosan vett tananyag átadásán túl, a csoport minden tagjának fejlesztjük a képességét az önálló problémamegoldásra, a kitartó, önálló, mély munkára. Így, reményeink szerint, akár a tudományos életben, akár a magánszektorban helyezkednek majd el az egyetemi éveik után, értékes és elismert szakemberek lesznek.

A hatosztályos speciális matematika tagozat

Tagozatunk az egyik legfiatalabb speciális matematika tagozat hazánkban. A radnótis matematikaiskola első osztálya az 1987/88-as tanévben indult, öt évfolyamos képzési formában, gimnáziumunk legendás igazgatója, dr. Bánfalvi József kezdeményezésére. A programban részt vevő matematika szakos kollégák úgy látták, hogy nagymértékben növelné a hatékonyságot, ha már hetedik osztálytól kezdve lehetőség nyílna a mélyebb matematikai ismeretek megalapozására. Ezért az 1988/89-es tanévben megkezdte munkáját – időben az országos szinten is első – hatévfolyamos speciális matematika tagozatos osztály.

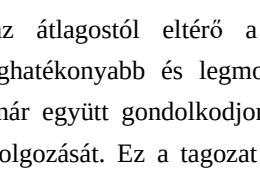
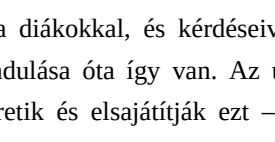
Számos vitát váltott ki szakmai körökben a 6-évfolyamos képzés, mivel többen úgy vélték-vélik, hogy egy 6. osztályos gyermek nem maga dönt a továbbtanulásáról, hanem elsősorban a szüleire hallgat. Ebben van igazság, ugyanakkor a kiemelkedő matematikai tehetség már 12 éves korban is jól megfigyelhető, emellett a tehetséges gyerekek nagyszerűen tudnak együtt dolgozni. Nem kell szégyellniük az osztályban, hogy átlagostól eltérő az érdeklődésük, nincsenek olyan korlátaik, amelyek sajnos a legtöbb általános iskolai osztályban fékezik előrehaladásukat.

Bár a korábbi iskolájukhoz képest sok gyereknek erős váltás a matematika tagozat, mégis az a tapasztalat, hogy ha 7. osztály elején a hangsúlyt nem a tárgyi tudásra, hanem a gondolkodás finomítására, élesítésére helyezzük, akkor a többi tudáselem idővel magától beérik. Természetesen a tanár kollégáktól sokkal több energiát igényel egy ilyen típusú osztályban végzett munka. Ez szinte egy külön szakma. Ennek elsajátításában is rengeteget segít egy jelentős szellemi műhely, az ország speciális matematika tagozatain tanító kollégák évenkénti kétnapos találkozója. Ennek fontos részét képezi a bemutató órák megbeszélése, kiváló felkészültségű kollégák tanítási módszereinek megismerése és a szakmai megbeszélések, amelyek mind beépülnek a tanári munkánkba. Nagyon hatékonynak bizonyultak az esti kötetlen baráti beszélgetések is. Évtizedes remek munkakapcsolatok alakultak ki. A más iskolákban folyó jó gyakorlatok átvétele és adaptálása a saját intézményünkben folyó munkához volt talán legfontosabb dolog, ami a radnótis matematika tagozat munkáját segítette. Például az 5. osztályos tehetséggondozó szakkörök ötletét a miskolci Földes Ferenc Gimnáziumból, a hetedikesek heti szorgalmi feladatsorainak beépítését a tananyag feldolgozásába a budapesti Fazekas Gimnáziumból vettük át. Ugyancsak innen kaptuk az inspirációt a matematikából legkiválóbb diákjainknak tartott, évfolyami megkötés nélküli szakkör elindításához és működtetéséhez.

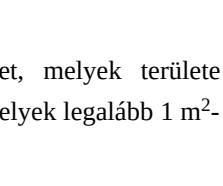
Iskolánk matematikatanárai a speciális matematika tagozat előkészítéseként 5. és 6. osztályos diákoknak általános iskolai szakköröket vezetnek. Az ötödikes foglalkozásokra kb. 45–50, míg a hatodikos szakkörökre kb. 75–80 tanuló jár. A matematika tagozat indulása óta rendezünk a hatodikos tanulóknak külön tehetségkutató versenyt is, ahol 90 perces időkeretben 6 gondolkodtató problémával foglalkozhatnak.

A 7. és 8. osztályban hetente kiadott szorgalmi feladatsorok, melyek megoldásait a következő héten részletesen megbeszéljük, lehetőséget adnak az írásbeli munka csiszolására. A fiatalok megérzik az ízét a felfedezés örömének, ami a magas szintű szellemi munka elengedhetetlen feltétele a későbbiekben. Ugyanakkor azt is megtanulják, hogy milyen formát öltsön a beadott feladatmegoldás, küllalak és szerkesztettség szempontjából.

Több sikertelen próbálkozás után arra jöttünk rá, hogy a csoportbontás nem szerencsés 7–8. évfolyamban. Azok az osztályaink bizonyultak a legsikeresebbnek tanulmányi munka és közösség terén is, amelyekben az induló 28–32 diák együtt tevékenykedik a matematikaórán az általános iskolai két év során. A diákok rengeteget tanulnak egymástól, valamint toleránsabbak és megértőbbek lesznek a többiekkel.

> Tehetségkutató verseny 6. osztályosoknak, 2023.
>
> *A megoldásra fordítható idő 90 perc. A megoldások indoklását részletesen le kell írni, az eredmények puszta közlése nem elegendő! A megoldások elkészítéséhez számológép, telefon* ***nem használható****. Felhasználható eszközök: toll, ceruza, radír, vonalzó, körző, szögmérő. Egy-egy feladat teljes megoldása 10 pontot ér.*
>
> **1.** Anna a spórolt pénzének felét társasjátékokra, a kétötöd részét pedig könyvekre költötte el. Névnapja alkalmából a megmaradt pénzéhez még kapott 4000 Ft-ot az apukájától. Ez alkalomból meghívta a barátnőjét cukrászdába. Itt elköltötte a meglévő összes pénzének kétkilenced részét, ami után 5600 Ft maradt nála.
> *a)* Mennyi volt Anna spórolt pénze?
> *b)* Mennyi pénzt költött Anna könyvekre?
>
> **2.** Egy iskolai rendezvényen 22 diák vett részt. A végén megkérdeztük őket, hogy hány osztálytársuk volt a rendezvényen. Négyen azt válaszolták, hogy 4, hatan azt, hogy 3, és heten azt, hogy 2. Mi lehetett a hiányzó öt válasz?
>
> **3.** A 2023 olyan négyjegyű szám, amelynek 3 db páros és 1 db páratlan számjegye van.
> *a)* Melyik a legnagyobb ilyen tulajdonságú négyjegyű szám?
> *b)* Hány darab 4000-nél kisebb ilyen szám van?
>
> **4.** Az 1, 2, 3, 4, 5, ... egész számok közé felváltva – és + jeleket tettünk. (A 2 előtt – jel van.) Az így kapott műveletsort balról jobbra haladva kezdtük elvégezni. Melyik számig végeztük el a műveleteket, ha az eredmény 2023 lett?
>
> **5.** Az ábrán egy négyzet köré négy egybevágó téglalapot helyeztünk el. Egy ilyen téglalap kerülete 18 cm, a négyzet területe 25 cm². Mekkora egy téglalap területe? (Az ábra nem a pontos méreteket tartalmazza.)
>
> 
>
> 
>
> **6.** Van 5 db szabályos háromszög alakú egybevágó papírdarabunk. Ezeknek a szabályos háromszöglapoknak az oldalai 2 cm hosszúak. Mind az 5 háromszöget felhasználva összeállítottunk egy sokszöget úgy, hogy a szomszédos háromszögek teljes oldalukkal érintkeznek. Egy lehetséges sokszögtípus látható is az ábrán.
> *a)* Rajzold le, hogy milyen különböző sokszögeket kaphatunk!
> *b)* Mekkora egy-egy ilyen sokszög kerülete?
> *c)* Mekkorák lesznek egy ilyen összerakás után kapott sokszög belső szögei az egyes esetekben?

A 8. osztály végén egy szintfelmérő dolgozat, valamint a két általános iskolai évben végzett munka alapján az M osztályt matematikából két csoportra bontjuk. Jelenleg az egyik csoport a 9–12. osztályban heti 6 órában tanulja a matematikát emelt szinten, de nem speciális matematika tanterv szerint. A másik csoport heti 7-7-8-8 órában, a speciális tanterv szerint halad tovább. A gimnáziumi évek alatt már két matematikatanár tanít az osztályban. A tagozaton folyó komplex tehetségnevelő, tehetségsegítő munkának számos összetevője van. Az osztályban oktató matematikatanárok egymás munkáját ismerve és segítve foglalkoznak a diákokkal. A kollégák szakmai tudása, felkészültsége messze meghaladja az átlagos tanári szintet. Tehetséges diákokkal csak az tud sikeresen foglalkozni, aki állandóan képezi magát és karbantartja tudását. Ez történhet a szakirodalom, illetve a hazai és nemzetközi versenyek feladatanyagának tanulmányozásával, valamint önálló rendszeres feladatmegoldással. A speciális matematika tagozat óráinak az átlagostól eltérő a szerkezete. A felfedeztető matematikaoktatást tartjuk a leghatékonyabb és legmotiválóbb módszernek. Ennek nagyon fontos része, hogy a tanár együtt gondolkodjon a diákokkal, és kérdéseivel segítse, vezesse a tananyag feldolgozását. Ez a tagozat indulása óta így van. Az új, tagozatos tanári munkába belépő kollégák hamar megszeretik és elsajátítják ezt – a tanártól állandó koncentrációt és biztos szakmai tudást igénylő – munkastílust.

> Szorgalmi feladatok 7M, 2024. 04. 11.
>
> **1.** Egy hatszögbe kör írható. A hatszög oldalait felváltva pirosra és kékre színezzük. Bizonyítsuk be, hogy a piros oldalak hosszának összege egyenlő a kék oldalak hosszának összegével.
>
> **2.** Egy 6 m²-es helyiségben kiterítünk három szőnyeget, melyek területe egyenként 3 m². Bizonyítsuk be, hogy van közöttük kettő, amelyek legalább 1 m²-en átfedik egymást.
>
> **3.** Lefedhető-e a sík véges sok sávval? (A sáv azon pontok halmaza, amely két adott párhuzamos egyenes közötti pontokból áll, a két határoló egyenes pontjait is beleértve.)
>
> **4.** Igazoljuk, hogy egy $n\times n$-es négyzetrács kiparkettázható 5×5-ös, illetve 1×3-as parketták segítségével, ha $n=2021$.
>
> 
>
> **5.** Egy téglalap egy csúcsból induló oldalai 8 cm és 9 cm. A téglalapot az ábrán látható módon két párhuzamos szakasszal három egyenlő területű részre bontottuk fel. Határozzuk meg a két szakasz távolságát.

Kilencedik osztálytól indul az ún. „szuperszakkör”, amelynek munkájába évfolyam megkötés nélkül iskolánk bármelyik tanulója bekapcsolódhat. Ezeken a 90 perces foglalkozásokon komplex tehetséggondozó munka folyik. Sokszor a matematika különböző területeiről dolgozunk fel egy-egy témát. Máskor meghívott előadók, pl. volt tanítványok, egyetemi oktatók, matematikusok mesélnek a saját kutatási területükhöz kapcsolódó, ugyanakkor középiskolai szinten tárgyalható eredményekről. Itt zajlik a legrangosabb versenyekre való speciális felkészítés is. Ezeken a szakkörökön nagyon sokat tanulnak egymástól a diákok. A kisebbeknek óriási erőt ad az, hogy látják, a nagyobbak milyen mély és szerteágazó ismeretanyaggal rendelkeznek, és persze megértik: erre a tudásra ők is szert tehetnek, ha elég alázat és munkabírás van bennük. Amióta ez a szakköri forma működik megnőtt a matematika versenyeken kimagasló eredményeket elérő diákjaink száma, ami igazolja a kissé szokatlannak számító munkamódszert.

> 9–12.osztályosok „szuperszakköre”
> Egész együtthatós polinomok szorzattá bontása
>
> **1.** Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ páronként különböző egész számok, ahol $n\geq 2$ egész szám. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$ polinom nem bontható fel legalább elsőfokú, egész együtthatós polinomok szorzatára.
>
> **2.** Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ páronként különböző egész számok, ahol $n\geq 2$ egész szám. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1$ polinom nem bontható fel legalább elsőfokú, egész együtthatós polinomok szorzatára.
>
> **3.** Tudjuk, hogy $n\geq 4$, egész szám. Igazoljuk, hogy az $f(x)=x^n+x^3+x^2+x+5$ polinom nem bontható fel legalább elsőfokú, egész együtthatós polinomok szorzatára.
>
> **4.** Tudjuk, hogy $n\geq 2$, egész szám. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$ polinom nem bontható fel legalább elsőfokú, egész együtthatós polinomok szorzatára.
>
> **5.** Legyen $p(x)=a_7x^7+a_6x^6+\cdots+a_1x+a_0$ egész együtthatós polinom $(a_7\neq 0)$. Tudjuk, hogy hét különböző egész helyen $|p(x)|=1$. Bizonyítsuk be, hogy a $p(x)$ polinom nem bontható fel legalább elsőfokú, egész együtthatós polinomok szorzatára.
>
> 6. Az a 5-tel nem osztható egész szám. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x)=x^5-x+a$ polinom nem bontható fel legalább elsőfokú, egész együtthatós polinomok szorzatára.

Tehetségsegítő munkánk fontos eleme, hogy tanulóinkat ösztönözzük a részvételre a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok feladatmegoldó pontversenyeiben. Ez is hozzájárul ahhoz, hogy tudásukat minden témakörből frissen tartsák, sőt fejlesszék, ne elégedjenek meg az aktuális órai témakör adta problémák megoldásával. A legkiválóbbaknak iskolánk oktatási alapítványa biztosítja, hogy eljárjanak a fővárosi olimpiai szakköre, valamint matematika táborokba, ahol további ismeretekre tehetnek szert, és felmérhetik, hogy hol állnak korosztályuk más diákjaihoz képest. A gimnáziumunkban minden tanévben a matematika tagozatos osztályaink tanulmányi, illetve érettségi átlaga a legkiemelkedőbb. A legmagasabb emelt szintű érettségi átlag mellett, iskolánk történetének három legjobb, 4,98-as, 4,96-os és 4,95-ös, teljes osztályra vonatkozó érettségi átlagát is M-es osztályok érték el. A 2022/2023-as tanévben az M osztály speciális matematika tanterv szerint tanuló felében pl. 97%-os volt a matematika emelt szintű érettségi dolgozatok átlageredménye.

A tagozaton végzett diákok túlnyomó többsége kiválóan megállja a helyét a hazai, sőt a külföldi felsőoktatásban is. Közülük számos kutató, egyetemi oktató került már ki. Húsznál több diákunk végzett, illetve tanul jelenleg is a világ legjobbjai közé tartozó University of Oxford, University of Cambridge és a bostoni MIT egyetemeken.

A speciális matematika tagozaton végzett tehetséggondozó munkánk eredményességét jól mutatja a hazai matematikaversenyeken elért számos kiváló eredmény mellett az is, hogy 2000 óta a nemzetközi matematikaversenyeken (EGMO, MEMO, RMM, IMO) diákjaink kb. 50 alkalommal szerepeltek a magyar csapat tagjai között. A matematika mellett más tantárgyakból is kiválóan teljesítenek az M osztályos diákok. Volt több diákolimpikonunk fizika, kémia és informatika tárgyakból, valamint nyertek OKTV-t diákjaink magyar irodalomból, biológiából, fizikából és orosz nyelvből is.

Természetesen az M osztály nem „versenyistálló”, inkább egy olyan, a tanulókat munkára inspiráló közeg, ahol mindenki kibontakoztathatja képességeit. A nagyon jó közösség kialakulásának alapja a teljesítmény, a tolerancia és a nyitottság. Ezek azok a tulajdonságok, amelyek szinte minden speciális matematika tagozatos osztályunkra jellemzőek. Az M osztály tehát nemcsak a matematikáról szól. Számos diákunknak a matematika ugródeszkaként szolgál ahhoz, hogy más területeken elmélyedve hasznosítsa a tagozaton elsajátított strukturált gondolkodást. Minden osztályban jól érzik magukat azok is, akik nem matematikát választanak továbbtanulási iránynak. Vannak köztük leendő orvosok, jogászok, biológusok, akik akkor sem váltanak osztályt, amikor világossá válik számukra, hogy nem a matematika az elsődleges érdeklődési területük. Tudják, hogy az csak hozzáad egy osztályhoz, azon belül minden emberhez, ha sokszínű a társaság. Jól megfér egymás mellett a leendő mérnök, kutató, pénzügyi szakember, régész, színész, fizikus és még sorolhatnánk, hogy milyen színes is szokott lenni egy M-es osztályközösség. Az a szellemi és általános műveltségbeli koncentráció, ami jó néhány specmat tagozatos osztályunkra jellemző volt és jelenleg is jellemző, iskolánk legnagyobb értékei közé tartozik. Nem lehet véletlen, hogy a tagozat történetében versenyeken és az érettségi vizsgákon is legeredményesebb M osztályok éppen ezek közül a nagyon sokszínű, szerteágazó érdeklődésű diákokból álló osztályokból kerültek ki.

A matematika tagozatos osztályokra jellemző, hogy valóban erős, összetartó osztályközösség ott alakul ki, ahol az első két, még általános iskolai évben sokat dolgoznak a diákok. De úgy, hogy nem rivalizálnak, hanem örülnek annak, ha tanulhatnak egymástól. Ez a mentalitás annak az önzetlenségnek az alapja, amire aztán egy valódi osztályközösség épülhet. Fontos megemlíteni, mekkora szerepe van az osztályfőnöknek abban, hogy milyen lesz egy specmat-tagozatos osztály. Mivel az ilyen osztályokban sok az átlagostól valamilyen szempontból eltérő (ez lehet viselkedés, tehetség, műveltség) diák, így kezdetben nem könnyű elérni, hogy a gyerekek figyeljenek egyrészt egymásra, másrészt a halkabb, visszafogottabb társaikra. A matematika tagozat rendkívül sokat köszönhet azoknak a nem matematika szakos M-es osztályfőnököknek, akik nagy pedagógiai érzékkel, a magas óraszámban tanító matematikatanárokkal együttműködve, egymás munkáját kölcsönösen segítve vezették osztályaikat. Nélkülük a speciális matematika tagozatunk kevésbé lett volna eredményes.

Talán sikerült érzékeltetni, hogy mennyi minden játszik fontos szerepet abban, hogy egy tagozat eredményesen működjön. Jól kitalált képzési forma, kiváló felkészültségű szaktanárok, gondolkodni szerető és egymást tisztelő fiatalok, színes és érdeklődő tanulókból álló osztályközösség, a tagozatos munkát tisztelő és segítő osztályfőnökök. Bízunk benne, hogy iskolánk e képzési formája még hosszú évekig biztosítja majd a Szegeden és vonzáskörzetében élő fiataloknak, hogy elmélyülten és eredményesen foglalkozhassanak matematikával.

Ábrahám Gábor, Szaszkó-Bogárné Eckert Bernadett, Schultz János
Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium

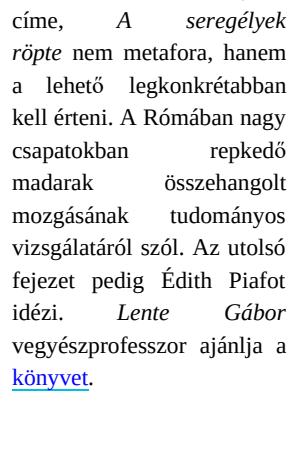
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Adatkezelés
Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon:

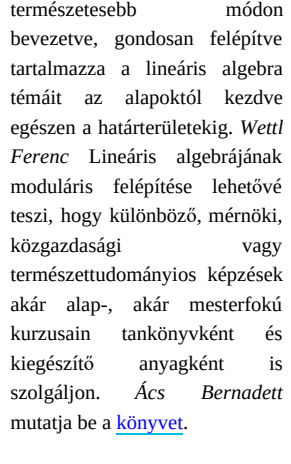
A **KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ** ROVATBAN ELSŐSORBAN OLYAN KÖNYVEKRŐL SZERETNÉNK TUDÓSÍTANI ÉS OLYAN ELEKTRONIKUSAN ELÉRHETŐ ÍRÁSOKAT AJÁNLUNK, AMELYEK A MATEMATIKA BÁRMELY RÉSZE VAGY KAPCSOLATAI IRÁNT ÉRDEKLŐDŐK SZÁMÁRA KÍVÁNATOSAK LEHETNEK. (ROVATSZERKESZTŐ: *TÓTH JÁNOS.)*



Lente Gábor
2024. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A seregélyek röpte

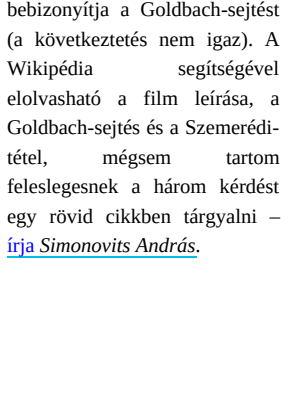
Giorgio Parisi: A seregélyek röpte című könyvében nyolc önálló kis történet van, amelyek mind a szerző fizikai Nobel-díját megelőző időszakban születtek. Az első fejezet címe, *A seregélyek röpte* nem metafora, hanem a lehető legkonkrétabban kell érteni. A Rómában nagy csapatokban repkedő madarak összehangolt mozgásának tudományos vizsgálatáról szól. Az utolsó fejezet pedig Édith Piafot idézi. *Lente Gábor* vegyészprofesszor ajánlja a könyvet.



Ács Bernadett
2024. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Wettl Ferenc: Lineáris algebra

Az egyszerű, de elegáns sötétzöld címlap egy nagy méretű és vaskos kötetet takar, ami több mint ötszáz sűrűn szedett oldalon minél természetesebb módon bevezetve, gondosan felépítve tartalmazza a lineáris algebra témáit az alapoktól kezdve egészen a határterületekig. *Wettl Ferenc* Lineáris algebrájának moduláris felépítése lehetővé teszi, hogy különböző, mérnöki, közgazdasági vagy természettudományios képzések akár alap-, akár mesterfokú kurzusain tankönyvként és kiegészítő anyagként is szolgáljon. *Ács Bernadett* mutatja be a könyvet.



Simonovits András
2024. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Marguerite, a számok szerelmese

A cím egy 2024 májusában bemutatott érdekes játékfilmre utal, amelynek főhősnője a Szemerédi-tételből kiindulva bebizonyítja a Goldbach-sejtést (a következtetés nem igaz). A Wikipédia segítségével elolvasható a film leírása, a Goldbach-sejtés és a Szemerédi-tétel, mégsem tartom feleslegesnek a három kérdést egy rövid cikkben tárgyalni – írja *Simonovits András*.

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

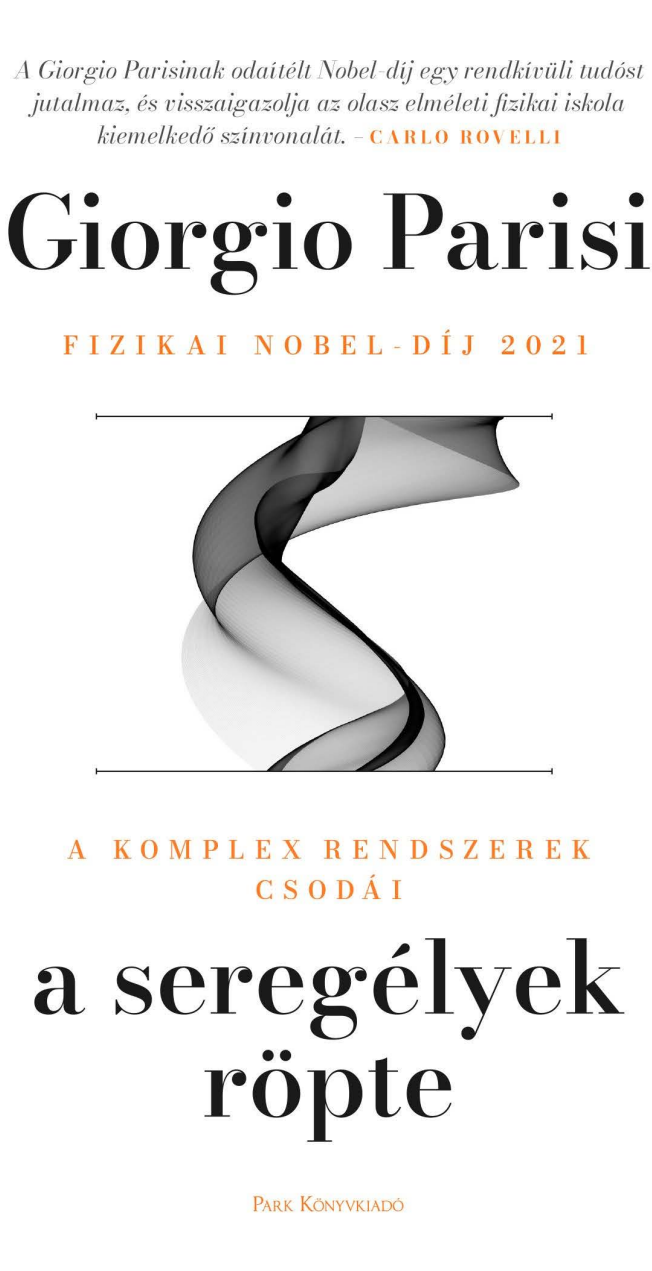
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon: ›

Lente Gábor 2024. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A seregélyek röpte


A Giorgio Parisinak odaítélt Nobel-díj egy rendkívüli tudóst jutalmaz, és visszaigazolja az olasz elméleti fizikai iskola kiemelkedő színvonalát. – CARLO ROVELLI
Giorgio Parisi
FIZIKAI NOBEL-DÍJ 2021
A KOMPLEX RENDSZEREK CSODÁI
a seregélyek röpte
PARK KÖNYVKIADÓ

A seregélyek röpte című könyv (2023, Park Kiadó, Balázs István fordítása) szerzője, Giorgio Parisi, Nobel-díjas fizikus. Az elismerést 2021-ben kapta annak felfedezéséért, hogy a rendezetlenség és az ingadozások kölcsönhatása hogyan határozza meg a fizikai rendszereket az atomoktól a bolygók szintjéig. Tudományos munkája szakmai szempontból leginkább arról nevezetes, hogy a komplex rendszerek ultrametrikus szerkezetének matematikai fogalmára építve olyan új megközelítést dolgozott ki, amely a biológiai különböző területein és a kombinatorikus optimalizálásban is alkalmazható (ezt a könyv alcíme is tükrözi: *A komplex rendszerek csodái*). A szerző a helytől és időtől függő véletlen magasságfüggvények növekedését leíró, Kardar–Parisi–Zhang-féle sztochasztikus differenciálegyenlet egyik névadója.

A Nobel-díjasok által írott, önéletrajzi elemekkel is átszőtt könyvek gyakran elég sematikusak. Bennük a címszereplő rettenthetetlen kitartással, nem egyszer mások észérveit semmibe véve követi saját tudományos meggyőződését, majd számos akadályon átjutva győz és megdicsőül. A tanulság általában valami olyasmi, hogy ha kellő kitartással próbálod az igazadat bizonyítani, akkor győzni fogsz. Kár (vagy talán még csak nem is kár), hogy ez a valóságban a legkevésbé sem igaz. A tudományos pályafutások rengetegében sok ezernyi ellenpéldát lehet találni, de ezen történetek balszerencsés hősei közül senki nem írt könyvet. Vagy ha mégis, akkor meg az olvasók hadáról derül ki, hogy senki nem is kíváncsi a sikertelenség titkára. A rettenhetetlen elszántsággal küzdő, s végül megüdvözülő tudósi szerep világából Richard Feynman fizikus művei jelentenek felüdítő kilépést, s Giorgio Parisi könyvét az teszi érdekessé, hogy inkább amerikai elődjét próbálja követendő példának tekinteni, semmint a Nobel-díjasok hagyományosabb gondolatkörét magáévá tenni. A könyvben nyolc önálló, egymásra nem épülő írás van, amelyek közös jellemzője, hogy mind a Nobel-bizottság döntése előtt születtek. Néhányat korábban már publikáltak is, mások ebben a kötetben olvashatók először. A tény, hogy a szerző mégiscsak Nobel-díjas, a címlapon, illetve a Megjegyzések címet viselő utószón kívül sehol nem jelenik meg.

Az első fejezet *A seregélyek röpte* címe nem metafora, hanem a lehető legkonkrétabban kell érteni. A Rómában nagy csapatokban repkedő madarak mozgásának összehangolási mechanizmusát a 21. század elején vizsgálták meg tudományos alapossággal, ehhez először is módszert kellett kifejleszteni arra, hogy egy nagy rajban az egyedek pályáját tudják megfelelő pontossággal követni. Ehhez három, milliszekundumos pontossággal összehangolt, egymástól néhány tucat méterre elhelyezett fényképezőgép adataira volt szükség, s a képek feldolgozása húsz éve még alighanem csúcstechnológiát jelentett a számítástechnikában. A munka legérdekesebb tanulsága az a megfigyelés volt, hogy a raj egyedeinek mozgását leginkább az hangolja össze, hogy mindenki a közvetlen szomszédjait követi, s ez független attól, hogy azok mennyire távol vannak tőle.

A fizika Rómában, úgy ötven évvel ezelőtt című fejezet 1966-ba kalauzolja vissza az olvasót, amikor a szerző egyetemi tanulmányait kezdte a római La Sapienza egyetemen fizika szakon – mintegy négyszáz évfolyamtársával együtt. Az egyetemisták számára a legtöbb európai országban különösen emlékezetes 1968-as évről is leírja emlékeit, de nem ez a magával ragadó elem a történetben, hanem Giorgio Parisi elméleti fizika irány érzett, talán még szenvedélyektől sem teljesen mentes érdeklődése. „Az volt a benyomásom – teljesen indokolatlanul –, hogy a fizika nehezebb a matematikánál, ezért arra jutottam, hogy a fizika jobban kérdőre von, nagyobb próbatétel nekem.” Ez a mondat adja meg a fejezet alaphangját, s ezen ismertető írójában keserédes emlékeket ébresztett: néhai Pálinkó István, a Szegedi Tudományegyetem vegyészprofesszora mondta egy pécsi előadása után, hogy ő azért lett kémikus, mert fizikusnak nem volt elég jó, amire így válaszoltam: én meg matematikusnak nem. Azt hiszem, Giorgio Parisi élettörténete (ld pl. itt) elég világosan igazolta, hogy mind matematikusnak, mind fizikusnak jó, s az esetében kizárólag az ő saját választása, hogy melyiknek tartja inkább magát.

A következő két fejezet, amelyek címe *Fázisátalakulások, azaz a kollektív jelenségek* és *Spinüvegek: a rendezetlenség bevezetése* meglehetősen hagyományosnak mondható tudományos ismeretterjesztés. Régi megfigyelésem, hogy a saját kutatásiak során egyébként felettébb elvont fogalmakkal és egyenletekkel bűvészkedő elméleti fizikusok körében a tudományos ismeretterjesztés becsülete igencsak nagy, a legkiválóbb elmék komolyan foglalkoztak ilyesmivel. Richard Feynmannon kívül Stephen Hawking, John D. Barrow, Paul Davies, vagy a tudományos-fantasztikus filmek készítésében is nagy szerepet vállaló Kip Thorne mind jeleskedtek ebben a műfajban, de történetesen még George Gamow is írt közérthető tudományos könyvet *Tompkins úr kalandjai a fizikával* címmel. Ugyanez a belső késztetés megvan Giorgio Parisi intellektusában is.

A Metaforák cseréje a fizika és a biológia között című fejezet számomra kétségtelenül a legtanulságosabb volt a könyvben. A szerző gondolatmenete elsősorban az evolúció-kvantummechanika-genetika háromszögben jár köröket, és a különböző tudományágak közös nyelve a matematika, amiről a legemlékezetesebb állítás: „Claudio Procesi, egyik kollégám az Accademia dei Lincein határozottan állítja, hogy a jó matematikus és a rossz matematikus között az a különbség, hogy a jó matematikus azonnal rájön, melyik matematikai állítás igaz és melyik hamis, a rossz matematikusnak viszont ehhez meg kell próbálnia bizonyítani őket.”

A *Hogyan születnek a gondolatok?* című fejezetben található a legtöbb olyan meglátás, amely közvetlenül a matematikával foglalkozik. Henri Poincaré és Jacques Hadamard a 19. és 20. század fordulóján meglehetősen részletes leírását adta annak a pszichológiai folyamatnak, amely egy matematikai ötlet, tétel megszületése és bizonyítása alatt bennük végigmegy. Ezen a nyomon elindulva és mindenekelőtt saját kutatási gyakorlatára visszagondolva Giorgio Parisi két fontos és tanulságos gondolatot is kibont. Az első a hibakeresés szerepe. Működőképes számítógépes programok készítése közben a hibák azonosítása és kijavítása tipikusan sokkal több időt vesz igénybe, mint maga a programírás, s ez a jelenség az elméleti kutatásokban is gyakran tetten érhető. Egy sikeres matematikai bizonyítás után többnyire már az homályos, hogy mi is tartott benne ennyi ideig, miért nem volt nyilvánvaló a kezdetektől. A másik a nyelvi eszközökkel kapcsolatos: vajon a szavak és a nyelvtani szabályok mennyiben korlátozzák a tudományos gondolatok kifejlődését? Amióta ilyesmiken gondolkozom, azóta nehezen hiszem el azt, hogy az ókori görögök intelligensebbek lettek volna a többi korabeli népnél. Inkább hajlok arra, hogy a görög nyelv sajátságaiban volt véletlenül valami olyasmi, ami a tudományos gondolatok emberek közötti cseréjét különösen könnyűvé tette.

A tudomány értelme címet viselő rövid rész kevés meglepetést tartogat. Richard Feynman egy elmés mondásával indul: „A fizika olyan, mint a szex. Időnként van valami haszna is, de nem ezért csináljuk.” Ennek megfelelően a szerző nem vallja azt, hogy tudománnyal mindenekelőtt a hétköznapi haszna miatt lenne érdemes foglalkozni, a kutatók számára szórakoztatónak is kell lennie. A tudósok felelősségét megkerülhetetlennek tartja: ismertetnünk kell a társadalommal azt, amit felismertünk az igazságból, de egyúttal kerülni kell az eredmények vagy a módszerek misztifikálását, hiszen ha a tudomány egyfajta pszeudomágiává válik, akkor vajon a társadalomnak mi oka lenne nem a „valódi” mágiát választani helyette?

`Je ne regrette nien’. Ez egy Édith Piaf dal címe volt eredetileg, Giorgio Parisi a zárófejezet címének vette kölcsön a francia sanzonénekestől. Magyarul annyit tesz: semmit nem sajnálok. Mit sajnálhatna egy Nobel-díjas tudós? A fejezet első bekezdése mindjárt el is igazít ebben a fontos kérdésben: „Soha nem tudtam eldönteni: büszkén mesélje-e az ember, ha huszonöt évesen hagyta, hogy az orra elől elhappoljanak egy Nobel-díjat, vagy ez inkább valami szégyenletes titok, amit jó lenne elfelejteni. Jómagam, a második eshetőség felé hajlok, de mert a történet szórakoztató, mégiscsak beszámolok róla.” A második mondatból így a könyv végén egy szót sem hittem el. A mű hangulata, de különösen ezen fejezet címe alapján számomra ekkorra már teljesen világos volt, hogy Giorgio Parisi egy ilyen történetet igenis büszkén elmesél. Az olvasó nagyobb örömére.

Lente Gábor
egyetemi tanár
PTE Kémiai Intézet

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Copyright © BOLYAI TÁRSULAT Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

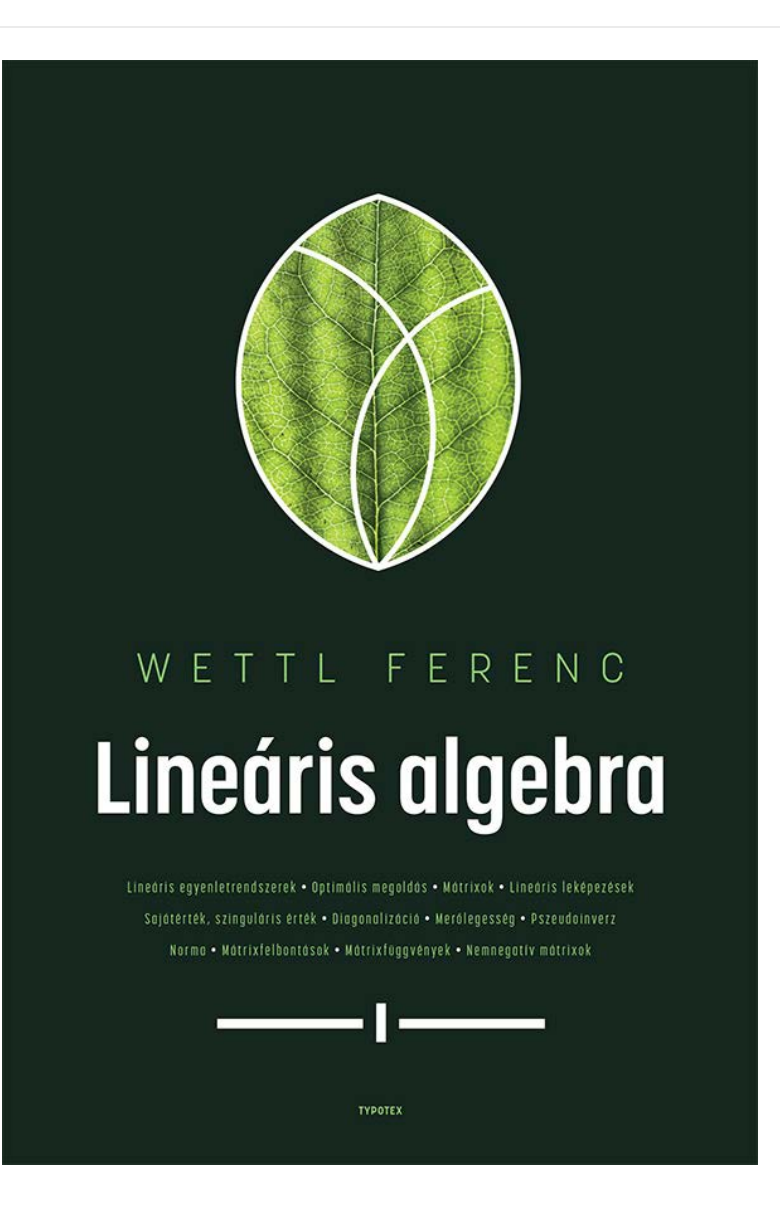
Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Adatkezelés
Elfogadom.

Ács Bernadett 2024. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Wettl Ferenc: Lineáris algebra


WETTL FERENC
Lineáris algebra
Lineáris egyenletrendszerek • Optimális megoldás • Mátrixok • Lineáris leképezések
Sajátérték, szinguláris érték • Diagonalizáció • Merőlegesség • Pszeudoinverz
Norma • Mátrixfelbontások • Mátrixfüggvények • Nemnegatív mátrixok
TYPOTEX

Wettl Ferenc: Lineáris algebra, Typotex Kiadó, 2023 https://www.typotex.hu/book/12965/linearis_algebra

Az egyszerű, de elegáns sötétzöld címlap egy nagy méretű és vaskos kötetet takar, ami több mint ötszáz sűrűn szedett oldalon gondosan felépítve tartalmazza a lineáris algebra témáit az alapoktól kezdve egészen a határterületekig. Olyan területeket is érint, amelyek bár a legtöbb algebra témájú egyetemi kurzusnak részei, a lineáris algebrával foglalkozó könyvekből általában kimaradnak, mint például a vektoralgebra vagy az absztrakt algebra alapjai. A kötet végén pedig fontos alkalmazásokról is olvashatunk, differencia- és differenciálegyenletekről, nemnegatív mátrixok elméletéről illetve Markov-láncokról.

A kötet moduláris szerekesztésű, az egyes témák apró részekre vannak bontva, amelyek külön-külön kezelhetők, egyesek szükség szerint kihagyhatók, így különböző (BSc, MSc, természettudományos és mérnöki) képzések kurzusain, és eltérő felkészültségű diákok számára is jól használható, ha kapnak ehhez némi iránymutatást az oktatóktól.

Az eligazodást a könyvben a részletes tartalomjegyzéken túl tételjegyzék, illetve a kötet végén névmutató is segíti. A tartalomjegyzék használhatóságát növelné azonban, ha minden egység számozással lenne ellátva, és az egyes alfejezetek egymás alatt, nem pedig sorfolytonosan szerepelnének.

A leírt anyag jól áttekinthető, az egyes definíciókat, tételeket, és példákat színes kiemelés jelöli, és minden képlet külön sorban szerepel, kiemelkedve a folyószövegből. A gondosan felépített ismeretanyagot számos megjegyzés, történelmi háttéranyag, ábra, programkódok és részletesen végigszámolt példák egészítik ki. Minden modul végén szerepel egy rövid összefoglaló és sok gyakorlófeladat is, amelyek megoldása szabadon letölthető a kiadó honlapjáról. Ugyanitt hibajegyzék is található a könyvhöz, ami a megoldásfájlokkal együtt folyamatosan frissül (verziószámok jelzik a változatokat), köszönhetően a szerző biztatására beküldött olvasói visszajelzéseknek. Ez a megoldás, illetve a szerző ilyenfajta hozzáállása véleményem szerint nagyon pozitív, mindenképpen követendő példa.

A könyv megírásának legfontosabb motiváló tényezője a didaktikai célszerűség volt, vagyis a lineáris algebra absztrakt fogalmainak minél természetesebb bevezetése. A hagyományos megközelítésű algebra könyvek, jegyzetek esetén a kiinduló fogalmak valóban szinte teljesen indokolatlanul jelennek meg, csak az ezekre alapozott elmélet van matematikailag precízen felépítve. Az egyetemi tanulmányok kezdetén a hallgatók többségének igen nagy absztrakciós ugrással kell megküzdenie, és az új fogalmak jelentésének, motivációjának meg nem értése ekkor azt okozhatja, hogy egy idő után már nem is akarja megérteni, pontosan mi történik a számolások hátterében. Elég, ha van egy jól meghatározott képletgyűjtemény, aminek alkalmazásával képes megoldani az előírt feladatokat. Az ilyen tudásra viszont nagyon nehéz építeni.

Az egyes fogalmak megértésének elősegítése érdekében a szerző a természetes esetekből indul ki, tehát pl. vektorterek esetében a sík és a tér vektorait, az ezekkel végezhető műveleteket vizsgálja először, és több lépésben általánosítva jut el a vektortér általános definíciójához. A motivációk feltárása több esetben azt is eredményezi, hogy az egyes témák nem a megszokott sorrendben követik egymást, illetve több különböző helyen is szerepelnek, de az egyes fejezetek elején erre találhatók hivatkozások. További zavaró tényező, hogy egyes tételek és definíciók nem a modern jegyzetekben megszokott néven szerepelnek. Ez a megközelítés összességében azt eredményezi, hogy a könyv egy átlagos egyetemi jegyzethez képest lényegesen hosszabb, és nehezebb eligazodni benne. Ajánlott irodalomként valamely egyetemi kurzushoz így érdemes pontosan megadni a szükséges részeket. Ennek hiányában ugyanis a hallgatókat könnyen elrettentheti a kötet terjedelme, vagy beleeshetnek abba a hibába, hogy megpróbálják feldolgozni az egész könyvet, ami az egy-két féléves egyetemi kurzusok esetén nem reális.

Wettl Ferenc több évtizednyi oktatási tapasztalatait felhasználva egy olyan könyvet alkotott meg, amely sokaknak megváltoztathatja az algebrához való hozzáállását. A jobb megértés által hatékonyabb és élvezetesebb lehet a tanulás és a tanítás egyaránt, a bemutatott számos alkalmazási lehetőség pedig további fejlődésre inspirál.

Ács Bernadett
egyetemi adjunktus
Pázmány Péter Katolikus Egyetem

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült
Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon: ›

Simonovits András 2024. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Marguerite, a számok szerelmese

A cím egy érdekes játékfilmre utal, amelynek főhősnője a Szemerédi-tételből kiindulva bebizonyítja a Goldbach-sejtést (a következtetés nem igaz). A Wikipédia segítségével elolvasható a film leírása, a Goldbach-sejtés és a Szemerédi-tétel, mégsem tartom feleslegesnek a három kérdést egy rövid cikkben tárgyalni. Egyébként az Érintő egy korábbi cikke [Titkos (2021)] a Szemerédi-tétel történetét részletesen bemutatta.

A filmről

Hiszek abban, hogy egy jó játékfilm is szólhat komoly dolgokról, mint amilyen például a matematika. A múltból két olyan játékfilmre emlékszem, amely matematikusokról szólt: a Good Will Hunting (1997) és az Egy csodálatos elme (2001). Az első nem kapcsolódott konkrét témához, és mégis kiemelkedőnek tartom; a másik John Nash-ről szólt, aki 1994-ben közgazdasági Nobel-díjat kapott (és a film elkészítése után, 2015-ben matematikai Abel-díjjal tüntették ki), és mégsem tartottam művészileg hitelesnek.

A jelen filmben szereplő matematikusnő nem létezett, és a Goldbach-sejtés már 1742 óta ellenáll a bizonyítási kísérleteknek, és a Szemerédi-tételnek kevés köze van a Goldbach-sejtéshez. A filmet mégis jónak tartom, mert lélektanilag hitelesen mutatja be, milyen lehet egy PhD-jén dolgozó matematikusnő élete: nehéz matematikai feladatot kell megoldania, hogy figyelmet kapjon; de fenyegeti a veszély, hogy nem sikerül a feladatot megoldania. A film elején is az utóbbi esettel találkozunk: egy PhD-s fiútársa megmutatja, hogy a lány bizonyítása nem jó.

Ezért a lány otthagyja a doktori programot, megpróbál szakképzetlen munkákból megélni, végül is kiváló számolóképességét kamatoztatva, illegális szerencsejátékból él. Aztán előkerül a fiú, segít a lánynak a bizonyítást kijavítani, és végül a lány egyedül bizonyítja be a Goldbach-sejtést.

Bár lehet, hogy matematikatörténetet tanító matematikus-közgazdászként elfogult vagyok, remélem, hogy másoknak is tetszik a film. Talán nem felesleges, ha a cikk hátralévő részében röviden ismertetem a két matematikai témát.

A Goldbach-sejtés

A Goldbach-sejtésről kiváló áttekintést nyújt Pintz János előadása [Pintz (2004/2014)]. A sejtést Euler tette nevezetessé:

Goldbach-sejtés. *Minden 2-nél nagyobb páros szám felírható 2 prímszám összegeként.*

Például $4=2+2,\ 6=3+3,\ 8=3+5$ stb. Nagyon egyszerű megérteni, nagyon nehéz lesz bebizonyítani.

Goldbach eredetileg egy könnyebb sejtést fogalmazott meg: minden 6-nál nagyobb páratlan szám fölírható legfeljebb 3 prímszám összegeként. (Valóban, az Euler-alakban szereplő felbontáshoz hozzáadva 3-at, adódik a gyengébb sejtés, de fordítva nem.) Jellemző, hogy a matematikusok egész sora megpróbált a sejtésnél egyszerűbb tételt igazolni. Például Rényi Alfréd a következő tételt igazolta:

1. tétel. (Rényi, 1948). *Minden 2-nél nagyobb páros szám felírható egy prímszám és egy olyan szám összegeként, amelynek legfeljebb K prímtényezője van, ahol K elegendően nagy természetes szám.*

Megjegyzés. Chen (1973) igazolta, hogy $K \le 2$. A sejtés bizonyítását $K=1$ adná.

A Szemerédi-tétel

Bonyolultabb a Szemerédi-tétel. Kimondásához szükség lesz egy előzetes tételre, egy sejtésre és egy definícióra.

2. tétel (van der Waerden, 1928). *Ha az egész számokat két diszjunkt részhalmazra bontjuk, akkor legalább az egyikük tartalmaz tetszőleges hosszúságú számtani sorozatot.*

Megjegyzés. Az egész számokat két diszjunkt részhalmazra oszthatjuk úgy, hogy egyik sem tartalmaz végtelen hosszúságú számtani sorozatot. Képletben: adott k természetes számra a kijelölt részhalmazba tartozó $x_1(k),\ x_2(k),\ \ldots,\ x_k(k)$ folytatása, $x_k(k)+x_2(k)-x_1(k)$ nem tartozik a kijelölt részhalmazba.

Fölvetődik a természetes kérdés: mit kell föltenni az egész számok egy részhalmazáról, hogy tartalmazzon tetszőlegesen hosszú számtani sorozatot?

Definíció. Egész számok részhalmazát *pozitív felső sűrűségűnek* nevezzük, ha létezik olyan pozitív valós ε szám, hogy végtelen sok n-re teljesül, hogy az n-nél kisebb elemek száma legalább εn.

Például a páratlan számok felső sűrűsége $1/2$, a prímszámoké 0. A kérdésre vonatkozik a következő

Sejtés (Erdős–Turán, 1936). *Az egész számok minden pozitív felső sűrűségű részhalmazában létezik tetszőleges hosszúságú számtani sorozat.*

Szemerédi tétele igazolta a nevezett sejtést.

3. tétel (Szemerédi, 1975). *Az egész számok minden pozitív felső sűrűségű részhalmazában tetszőleges hosszúságú számtani sorozat létezik.*

A bizonyítás eléggé hosszú, és az úgynevezett regularitási lemmán alapul, amely talán még az eredeti tételnél is fontosabb, ezt azonban már nem részletezzük. (vö. Titkos, 2021)

Érdekes, hogy erre a tételre hamarosan többféle bizonyítás született, és az egyiket a következő irányban fejlesztették tovább.

4. tétel (Green–Tao, 2008). *A prímszámok halmazában is létezik tetszőleges hosszúságú számtani sorozat.*

Megjegyzések.

1. Bár a bizonyításban fölhasználták a Szemerédi-tételt, messze túlléptek az eredeti érvényességi körön, hiszen a prímszámok 0 sűrűségű részhalmaz.

2. A konkrét számszerű válasz nehézséget jól érzékelteti az a Wikipédiáról letölthető információ, hogy 2019-ben a leghosszabb ilyen számtani sorozat 27 tagú volt és az induló tagja 18 jegyű volt.

Irodalomjegyzék

Chen, J. R. (1973): On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes. Sci. Sinica. 16: 157–176.

Erdős, P.–Turán, P. (1936): On some sequences of integers, J. of London Math Soc., 11, 261–264.

Green, B.–Tao, T. (2008): The primes contain arbitrary long arithmetic progressions, Annals of Mathematica, 167:2, 481–541.

Pintz, J. (2004/2014): A Goldbach sejtésről, Budapest, MTA.

Rényi, A. A. (1948): Egy páros szám előállításáról mint egy prím és egy majdnem prím összege. Izvestiya Akademii Nauk SSSR Seriya Matematicheskaya (oroszul). 12: 57–78.

Szemerédi, E. (1975): On sets of integers containing no k elements of arithmetic progression, Acta Arithmetica, 27:1, 199–245.

Titkos, T (2021): Mi is...a regularitási lemma? https://ematlap.hu/tudomany-tortenet-2021-7/1098-a-regularitasi-lemma

van der Waerden, B. L. (1928): Beweis einer Baudetchen Vermutung, Niew. Arch. Wiks. 15, 212–216.

Simonovits András

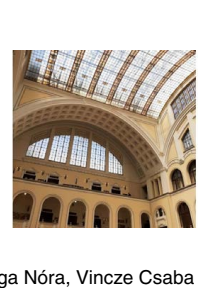
Szemerédi Endre interjúja a filmmel kapcsolatban:

Nemrég jelent meg a fenti film apropóján egy interjú a Magyar Hírlapban az Ábel-díjas matematikussal, aki hallott a filmről, még nem látta, őt a filmesek nem keresték meg. Akit a témának ez a háttere is érdekel, kattintson ide: https://www.magyarhirlap.hu/kultura/20240526-a-szemeredi-tetel-egy-francia-filmben#google_vignette (2024. jún 10-én elérhető).

Copyright © BOLYAI TÁRSULAT Bolyai János Matematikai Társulat Ri Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

A **TUDOMÁNY** MENÜPONT TÖBBFÉLE, A MATEMATIKA TUDOMÁNYÁHOZ KAPCSOLÓDÓ FUNKCIÓT TAKAR..**A TUDOMÁNY– TÖRTÉNET ROVAT** CÉLJA ELSŐSORBAN MATEMATIKATÖRTÉNETI JELLEGŰ ÍRÁSOK KÖZLÉSE. **A MI IS …?ROVAT** A MAI MATEMATIKA TUDOMÁNYÁRÓL KÍVÁN SZÓLNI A HOZZÁÉRTŐKNEK.
(ROVATSZERKESZTŐK: *BESENYEI ÁDÁM; STIPSICZ ANDRÁS.*)



Varga Nóra, Vincze Csaba
2024. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

100 éves a matematika oktatása a Debreceni Egyetemen

„Debrecen mindig elsőrangú szerepet játszott a matematika magyarországi sorsában. Egyetemünk hivatása arról is gondoskodni, hogy folytatódjanak e régi és nemes tradíciók…” *Varga Nóra* és *Vincze Csaba* hitelesen, szeretettel és büszkén ismerteti meg az Érintő olvasóival a Debreceni Egyetem Matematikai Intézetének százéves történetét.

ifj. Székelyhidi László
2024. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A logika szörnyei és a turbulencia

„A logika néha szörnyeket szül. Az elmúlt fél évszázadban rengeteg olyan bizarr függvény megjelenésének lehettünk tanúi, amelyek látszólag arra törekednek, hogy a lehető legkevésbé hasonlítsanak a célt szolgáló, becsületes függvényekre. Nincs több folytonosság, vagy van folytonosság, de nincs derivált, és így tovább." – írta a 19-20. század fordulóján Poincaré. Ezektől a szörnyektől indult el *ifj. Székelyhidi László* 2024. ápr. 8-án a Rényi Intézetben tartott előadása, amelyben még kukacos almák, biciklik és turbulens áramlások is előfordultak.

Szerkesztő
2024. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Matematika a díjak hátterében

A Magyar Tudományos Akadémia 197. Közgyűlésének ünnepi ülésén, illetve a Közgyűléshez kapcsolódó osztályrendezvényeken számos rangos tudományos díjat és elismerést adtak át. Ebben a cikkben röviden bemutatjuk a matematikus díjazottakat és azokat a területeket is, amelyekben elérték eredményeiket.

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

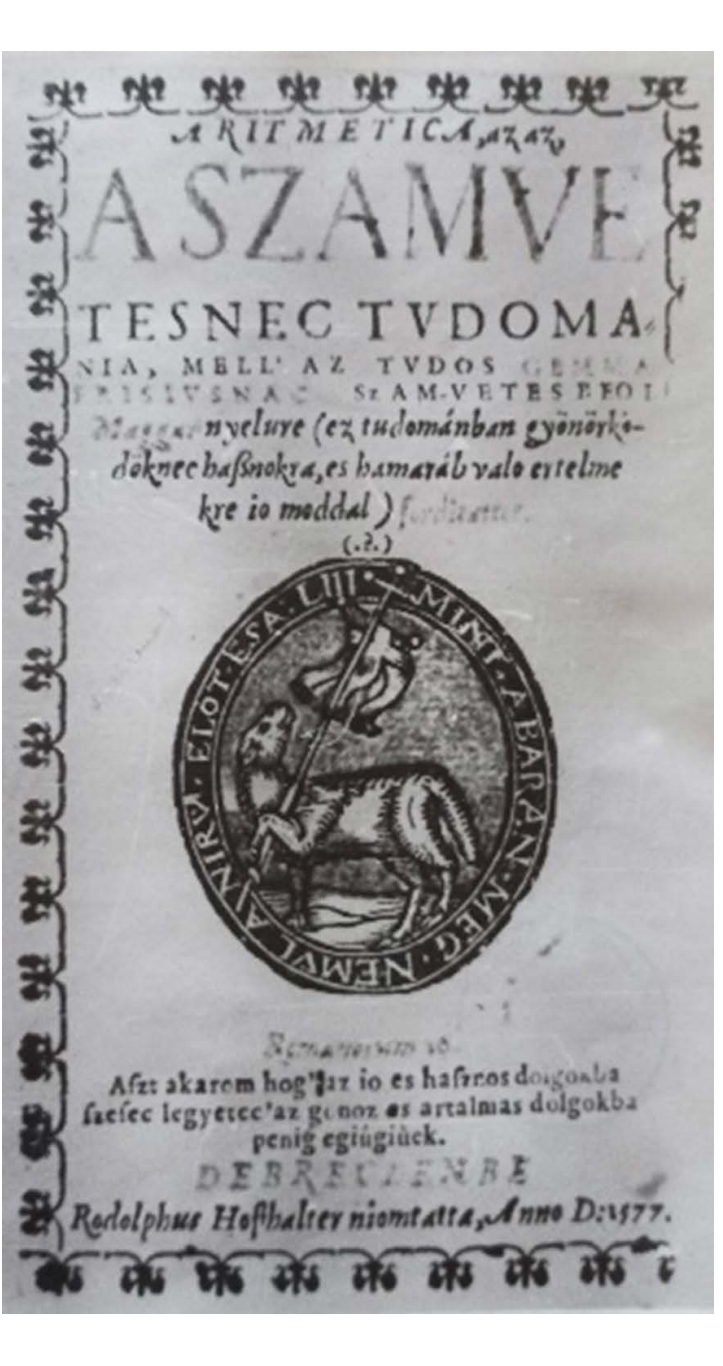
Varga Nóra, Vincze Csaba 2024. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

100 éves a matematika oktatása a Debreceni Egyetemen

A Debreceni Egyetem Matematikai Intézetének története

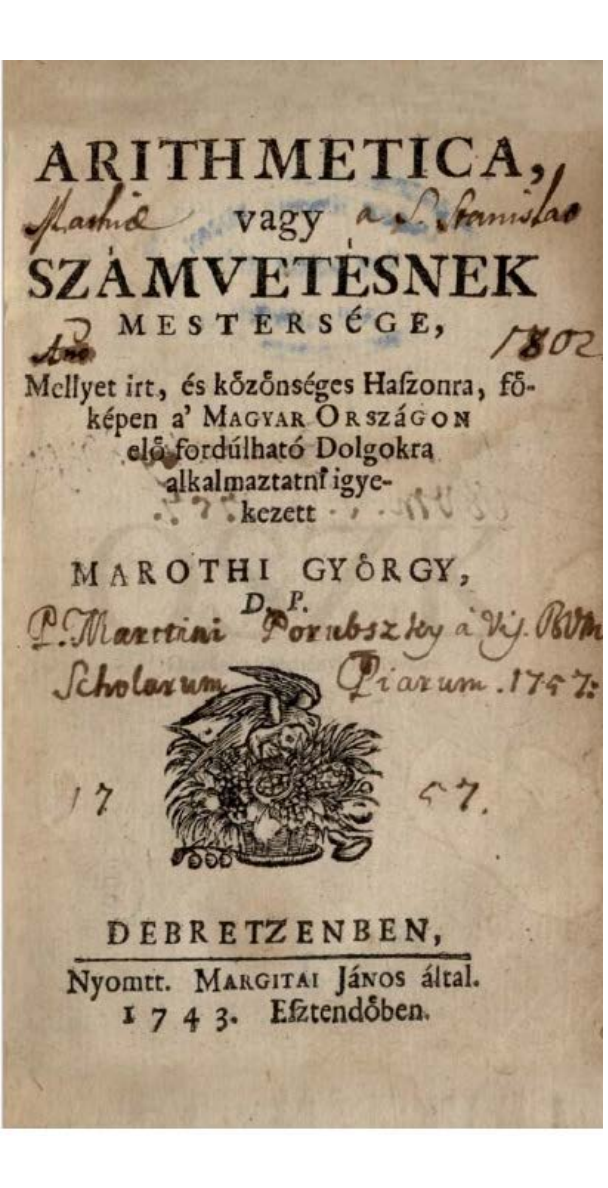
A 19. század második felében merült fel az igény arra, hogy a budapesti és kolozsvári tudományegyetemek mellett egy harmadikat is alapítsanak. A címre több nagyváros pályázott, köztük Debrecen, amelynek vezetői a Tiszántúli Református Egyházkerület vezetőivel összefogva mindent elkövettek, hogy a cívisváros tudhassa magáénak az új egyetemet: a város biztosította a helyszínt az épülő intézménynek, az Egyházkerület pedig több fakultásáról lemondott, hogy egy új tudományegyetem létrejöhessen. A végeredményt ismerjük és látjuk: 1912 nyarán Ferenc József osztrák császár (magyar és cseh király) szentesítette a törvényt a Debreceni Magyar Királyi Tudományegyetem megalapításáról. A kialakulóban lévő oktatási és tudományos életet az első világháború akasztotta meg, amely csak Klebelsberg Kuno vallás- és közoktatásügyi miniszter hivatali ideje alatt (1922–1931) kezdett újra magára találni az immár Tisza István nevét viselő intézményben.

A Debreceni Tudományegyetem Bölcsészettudományi Karán 1923-ban kezdeményezték természettudományos, közte matematikai szakelőadások tartását. A megvalósításra egy évet kellett várni: az 1924/25-ös tanévben tartott először Wodetzky József matematikai témájú szakelőadást. Kezdetben ő volt a fizika szakelőadója is. Munkáját könnyítendő 1925 őszén a matematikai előadások irányítását átadta egy budapesti magántanárnak, Dávid Lajosnak, akinek vezetése alatt nemcsak kezdetét vette a felsőfokú matematikaoktatás Debrecenben, hanem megalakult a Matematikai Szeminárium (1929), és útjára indult a *Közlemények a Debreceni Tudományegyetem Matematikai Szemináriumából* című tudományos jellegű kiadványsorozat (röviden *Közlemények*). Ennek a sorozatnak az 1938-ban, a 14. köteteként megjelent kiadványa híven tükrözi azt, hogy Debrecenben a matematika oktatására mindig is nagy hangsúlyt fektettek. Ebben a számban kapott helyet ugyanis Hárs János írása, aki a legrégebbi magyar nyelvű matematikai tankönyv teljes szövegét adta ki magyarázattal és kritikával együtt. Az eredeti munka 1577-ben látott napvilágot Debrecenben, amelynek rövid címe az *Aritmetika, avagy a Számvetésnek Tudománya*[1]. Hárs Jánost professzora, Dávid Lajos biztatta a munka elvégzésére, illetve ugyancsak Dávid Lajos volt az, aki a *Debreceni Aritmetika* címet javasolta a munkának. Az első magyar nyelvű matematikai tankönyv tehát Debrecenben született, amelyre méltán lehetünk büszkék. A munka szerzője ismeretlen, célja az volt, hogy a Kollégium diákjai magyarul tanulhassanak matematikát. A *Debreceni Aritmetika* még két kiadást megélt, 1582-ben és 1591-ben ismét megjelent, bár utóbbi során már lényeges változásokon esett át. Sokáig azt gondolták, hogy „csak" egy fordítás[2], de Hárs János 1938-as munkájában bizonyította, hogy teljes mértékben eredeti műről van szó. A *Debreceni Aritmetika* 140 oldalas, amelyből 126 oldalon keresztül ismerkedhetünk többek között az arab számjegyekkel történő számolással egész és törtszámok esetén, az arányos osztással, a számtani sorozatokkal és az egyenes arányossággal. A szabályokat mindenhol igyekszik mindennapi példákkal is illusztrálni. Az eredeti Aritmetikát olvasva azt érezzük, hogy bár valóban magyar nyelven íródott, de a matematikai szakszavak között még továbbra is a latin az uralkodó, amelyet az alábbi példa is jól szemléltet: *„Az additionak fractiojáról való exemplomok, melyek igen hasznosak a többi között. Micsoda az Additio fractioja? Semmi nem egyéb, hanem részre szegdelt számoknak avagy numerusoknak egy formába való igaz addálása avagy redigalása, ez féle szám pedig igen hasznos a kereskedő uramnak, mert az Fractio tanít meg, egy singben hány félsing vagyon, hány fertály, és hány fél fertály és ezeket mi móddal kell egybe addálnod*[3]…". (Hárs, 74.o.) A *Debreceni Aritmetika* másik, jóval rövidebb része csupán 14 oldal, és a kalkulusokkal való számolásról ír. Ebben a szakaszban nem számokkal, hanem vonalakon elhelyezett „kavicsokkal", korongokkal történik a számolás. A *Debreceni Aritmetikának* csupán egyetlen megmaradt példánya ismert, amelyet a Nemzeti Múzeumban őriznek.



ARITMETICA, azaz ASZAMVETESNEC TVDOMANIA, MELL' AZ TVDOS GEMMA FRISIVSNAC SZAMVETESEBOL Magyar nyelvre (ez tudományban gyönyörködőknec haßnokra, es hamaráb valo ertelmekre io móddal) fordittatot.
Aſz: akarom hog' az io es haſznos dolgokba faſcec legyetec az gonoz es artalmas dolgokba penig egiűgiűek.
DEBRECENBE
Rodolphus Hoffhalter niomtatta, Anno D. 1577.

Dávid Lajos *Közlemények* sorozatának egy másik megemlítendő kiadványa Keresztesi Mária dolgozata, aki az 1935-ben megjelent munkájában sorra veszi a legfontosabb állomásait, szereplőit a magyar matematikai műnyelv megteremtésének. A részletes felsorolásból csupán egy, debreceni kötődésű személyt ragadunk ki, Maróthi Györgyöt (1715-1744), aki 1743-ban megjelent *Arithmetica, vagy számvetésnek mestersége* című munkájában több magyar matematikai műszót is bevezet a latin helyett: *„…hasznosnak ítéltem, mind azok* [latin szavak] *helyett Magyar Szókat tenni, mellyeket még az Aszszony-nép is megérthessen. Még pedig ahol az eddig való Magyar Szókban nem találtam alkalmatost, új szót is tsináltam egynéhányat […] p.o. Fractio, Magyarul Törtt-Szám, multus, multiplex, multiplicare, Magyarul Sok, Sokszoros, Sokszorozni.*" (Maróthi, 3-4. o.) Műve tudományos és módszertani szempontból is a korszak kiemelkedő alkotása.



ARITHMETICA, vagy SZÁMVETÉSNEK MESTERSÉGE, Mellyet irt, és közönséges Haſzonra, főképen a' MAGYAR ORSZÁGON elő fordúlható Dolgokra alkalmaztatni igyekezett MAROTHI GYÖRGY, D. P.
DEBRETZENBEN, Nyomtt. MARGITAI János által. 1743. Eſztendőben.

A kiragadott példák a *Debreceni Aritmetikáról* és Maróthi Györgyről jól szemléltetik, hogy bár a felsőfokú matematika oktatása csupán 1924-ben indult meg a városunkban, korábban is volt igény a művelésére és fejlesztésére. 1927-ben már az alábbi sorokat olvashatjuk a *Debreceni Szemlében: „Debrecen mindig elsőrangú szerepet játszott a matematika magyarországi sorsában. Egyetemünk hivatása arról is gondoskodni, hogy folytatódjanak e régi és nemes tradíciók. Evégre már harmadik éve rendszeres matematikai előadások folynak úgy a Bölcsészeti Karon, mint a Középiskolai Tanárképzőn."* (Török, 356.o.)

Debreceni SZEMLE
tudomány kultúra

1929-től már intézményi szinten folytatódott az oktatás (létrejött a Matematikai Szeminárium Dávid Lajos professzor vezetésével). Mivel egyetemünk mai főépületét csak 1932-ben adták át, addig az Arany János és Piac utcák sarkán lévő (a mai gyorsétteremmel szemben) épület első emeletén két szobában tartották a matematikai előadásokat. Kezdetben rendkívül kevés (fizetett) oktató és évfolyamonként 8-10 hallgató volt. A munkát, az oktatást, a könyvtári állomány összetételét nagyban befolyásolta a Szeminárium vezetője. Az 1942-ig irányító pozíciót betöltő Dávid Lajos igyekezett a matematika tudományának minél szélesebb spektrumát bemutatni. Dávid Lajos (1881-1962) 1925-től az Egyetem ún. szakelőadója, 1929-től nyilvános, rendkívüli tanára, majd 1933-tól nyilvános rendes tanára lett, amely a mai professzori címnek felel meg. 1935-1936 között a Bölcsészettudományi Kar dékánja volt. Ábrázoló geometriát ugyanúgy tanított, mint függvénytant vagy valószínűségszámítást; a hallgatók, akikkel rendkívül jó viszonyt ápolt, szerették és tisztelték. Nem engedte, hogy méltóságos úrnak szólítsák, mondván, hogy *„méltóságos úr akárki lehet Magyarországon, de matematikaprofesszor nem."* (Dávid, 60.o.) Dávid Lajost 1942-ben Kolozsvárra helyezték, helyét Varga Ottó vette át, de a fejlődésnek a zajló világháború ismét gátat szabott. Az újrakezdés feladataiból már Gyires Béla és Rapcsák András is kivette a részét, majd 1948-ban Szele Tibor és Rényi Alfréd csatlakozott a munkához. Nekik köszönhetően jött létre a két tanszékkel működő „Matematikai Intézet", mely kezdetben a Simonyi úton, a korábbi Tanárképző Intézet épületében kapott helyet. 1949-ben a Természettudományi Kar (jelenleg Természettudományi és Technológiai Kar) megalakulásával a Matematikai Intézet is tovább fejlődött: egyre több állást hirdettek meg, a kezdeti, évfolyamonként egy előadás helyett három-négy kurzusra is sor került, továbbá az Akadémia által szervezett egyetemi utánpótlásképzés is megindult (aspirantúra). A megfelelő szakmai háttér biztosításához elengedhetetlen volt egy színvonalas könyvtár, illetve folyóirattár létrehozása, amelyben elévülhetetlen érdeme van Erdős Pálnak, de Rényi Alfréd és Varga Ottó is sokat tett ennek érdekében. Ebben az időszakban (1949-1950) jelent meg a (napjainkban is működő) *Publicationes Mathematicae Debrecen* tudományos folyóirat első kötete, amely kiváló cserelehetőségeket biztosított, és amelynek szerkesztését elsősorban Szele Tibor végezte Rényi Alfréd és Varga Ottó segédletével. A Matematikai Intézet teljességében a Természettudományi Kar megalakulása után fejlődött ki a háború előtti egy tanszékből álló *Matematikai Szemináriumból*. 1949-ben két tanszékkel működött. A Geometria Tanszéket Varga Ottó, a 2. számú Matematika Tanszéket pedig Rényi Alfréd akadémikus vezette. 1953-tól pedig már négy tanszék között oszlottak meg a matematikai kutatások:

- Geometria Tanszék, tanszékvezető: Varga Ottó (1942–1958) akadémikus,
- Algebra és Számelmélet Tanszék, tanszékvezető: Szele Tibor (1952–1955),
- Analízis Tanszék, tanszékvezető: Aczél János (1953–1964),
- Valószínűségszámítási és Alkalmazott Matematikai Tanszék, tanszékvezető: Gyires Béla (1952–1974).

1973-ban jött létre a Számítástudományi Tanszék Kertész Andor, illetve Gesztelyi Ernő vezetésével, és egy évvel később, 1974-ben megjelent a már régóta esedékes és indokolt *Matematikai Tanszékcsoport* elnevezés. 1983-tól az integrációs törekvések következtében lett a Matematikai Tanszékcsoportból hivatalosan is *Matematikai Intézet*. A belső struktúra követelményeihez igazodva 1985-től a Matematikai Intézet igazgatóit egy-egy matematikus, illetve informatikus igazgatóhelyettes segítette. 1991-ig öt tanszék működött, végül a fejlődés újabb állomásaként 1991-ben megalakult az Alkalmazott Informatikai Tanszék (tanszékvezető: Arató Mátyás). A Matematikai Intézet elismerte a keretei között felnövő informatikai oktatás és kutatás egyenrangúságát, ezért 1992-től *Matematikai és Informatikai Intézet*ként működött tovább. A tanszékek fontos szerepet játszottak az oktatásban és a kutatómunkában, de az intézet szoros integratív jellegét mutatta, hogy mindvégig osztatlan és közös maradt a gazdálkodás, az adminisztráció és a könyvtár. Az egyetemi integráció tapasztalatait elemezve az Intézeti Tanács, illetve a Debreceni Akadémiai Bizottság Matematikai és Informatikai Szakbizottságai úgy döntöttek, hogy 1992-1994 között átmenetileg megszüntetik a tanszékeket. Az átmeneti időszakot követően 1994-ben alakult meg az Információtechnológia Tanszék (tanszékvezető: Kormos János) és ugyanebben az évben lett a Számoló Központ önálló egység, majd a későbbiekben kari egység. Az Intézetben 1993-tól zajlik az ún. Intézeti Szeminárium, egyfajta tudományos előadássorozat, ahol heti rendszerességgel debreceni, magyarországi és külföldi kutatók számolnak be legújabb eredményeikről, vagy egy adott kutatási terület fejleményeit osztják meg az érdeklődőkkel. Ugyanebben az évben indult útjára a (doktori) PhD képzés, 1996-ban pedig megtörtént az Intézet akkreditációja, annak a hivatalos elismerése, hogy érvényesülnek mindazok a normák, amelyek garantálják, hogy a különböző képzési szinteken nyújtott ismeretek megfelelnek a hazai, illetve a nemzetközi elvárásoknak.

A Matematikai és Informatikai Intézet 1999-ben már 7 tanszékből állt. A matematika szakterületén 3 tanszék (Algebra és Számelmélet Tanszék, Analízis Tanszék, Geometria Tanszék), az informatika területén pedig 4 tanszék volt (Alkalmazott Matematika és Valószínűségszámítás Tanszék, Információtechnológia Tanszék, Komputergrafika és Könyvtárinformatika Tanszék, Számítógéptudományi Tanszék). A matematika és az informatika szakmódszertanának oktatása a szakterületek egységeihez kötődött. 2003 tavaszán alapvető szerkezeti változás történt. Az Egyetemi Tanács 2003. április 10-én kelt határozatában önálló Informatikai Intézet létrehozásáról döntött. Ez négy tanszék, Alkalmazott Matematika és Valószínűségszámítás, Információtechnológia, Komputergrafika és Könyvtárinformatika, Számítógéptudomány (mintegy 70 oktató és kutató) kiválásával, valamint a rendszergazdai csoport és az adminisztráció egy-egy részének csatlakozásával jött létre. Az önálló Informatikai Intézet 2004 augusztusában kivált az anyakarból és megalakult az Informatikai Kar. Így a korábbi Matematikai és Informatikai Intézetből *Matematikai Intézet* lett, három matematikai tanszékkel: Algebra és Számelmélet Tanszék, Analízis Tanszék és Geometria Tanszék (kiegészülve a matematika szakmódszertannal).

A debreceni felsőoktatást egyesítő Debreceni Egyetem megalakulásának (2000), ezen belül pedig a Természettudományi és Technológiai Kar 2006-os (részben a bolognai folyamattal összefüggő) profilbővítésének hatására a matematikus és programozó szakos, matematikatanár szakos hallgatók, illetve a természettudományi képzési terület szakjainak hallgatói mellett a mérnökök számára szükséges matematika oktatása is egyre erőteljesebben jelent meg az Intézet oktatási palettáján. Az átoktatási tevékenység ma már a Természettudományi és Technológiai Karon túl érinti az egyetem számos egységét: Gazdaságtudományi Kar, Informatikai Kar, Mezőgazdaság-, Élelmiszertudományi és Környezetgazdálkodási Kar és Műszaki Kar. Ez paradigmaváltást jelent, mert bár a matematikus képzésre mindig is nagy gondot fordított az Intézet, az oktatás tömegbázisát a tanárszakos hallgatóság jelentette. Mindez annak dacára volt így, hogy annak idején a matematikus szak és a tanárszak képzési programja szorosan összefonódott, a kísérleti (később megszűnő) egyszakos matematikatanár-képzésben pedig szinte egybeesett. A tanárképzés eszménye a tudós tanár volt abban az értelemben is, hogy a végzett tanárok számára képzettségük alapján akadálytalan volt a bemenet a Doktori Iskola bármelyik programjába. Ez a 21. század elejétől változó tendenciát mutat. Egyrészt a matematikaoktatás tömegbázisát jelenleg a mérnökszakok adják, amiknek jelentős részét az átoktatás révén érjük el, másrészt a tanárképzés képzési és kimeneti követelményei is folyamatosan enyhülnek, illetve módszertani irányba tolódnak. A matematikai tehetséggondozás a személyre szabott tutoriális rendszerben zajlik, hivatalosan a 2008 szeptemberétől működő Debreceni Egyetem Tehetséggondozó Program (DETEP) keretein belül. A tanárképzés doktori szintű perspektívája a doktori iskola Didaktika programja.

Az Európai Felsőoktatási Térség létrehozását célzó független, kormányközi reformfolyamat, röviden a felsőoktatás bolognai folyamat szerinti átalakulása mentén 2006-ban kezdődött a Matematikai Intézetben a Matematika BSc képzés. A nappali Matematika MSc képzés pedig 2009 szeptemberében indult el. A magyar nyelvű képzésekkel szinte párhuzamosan az angol nyelvű Mathematics BSc, Applied Mahematics MSc, illetve Mathematics MSc akkreditációjára is sor került. Az angol nyelvű képzéshez tartozó szakok 2007, illetve 2008 óta szerepelnek a képzési palettán. A képzési keretek változásaihoz alkalmazkodva, egykor a Bölcsésztudományi Kar keretei között elinduló Matematikai Szeminárium ma már a képzés teljes skáláját kínálja az alap-, a mester- és a tanárképzésen át a doktori tanulmányokig magyar és angol nyelven egyaránt. A képzési formák innovációja és modernizálása azonban folyamatos: részt veszünk a kínai Guangxi University of Finance and Economics egyetem kettős diplomát adó képzésében, és követve a Természettudományi és Technológiai Kar progresszív trendjeit, a 2022. évtől duális képzést is kínálunk piackutatási adatfeldolgozással foglalkozó partnercéggel (DataExpert) együttműködésben. A korábbi hagyományokat felelevenítve, középiskolai tanár kollégák is részt vesznek oktatóként a tanárképzésben. Jelenlétük, szakmai tudásuk és tapasztalataik nélkül elképzelhetetlen a tanárjelöltek sikeres felkészítése a pályára.

Általánosságban elmondható (a pandémia átmeneti időszakának tanulságaként, vagy a különböző felfutó képzésekben érdekelt hallgatóság speciális igényeinek köszönhetően), hogy az egyetemi matematikaoktatás hallgatócentrikusabb hozzáállást követel, mint korábban bármikor. Ez vonatkozik a már felvett, de a leendő hallgatókra is. Munkatársaink részt vesznek a Kar beiskolázási programjának elemeiben (TTK nyári Tábor, Kutatók éjszakája, stb.) és a kínálatot önálló programelemekkel (Fazekas-nap, Matematikai Játszóház, stb.) színesítik hallgatóink öntevékeny csoportja, a Thalész-kör tagjainak segítségére támaszkodva. Egyetemi szintű stratégiai jelentőséggel bír az Intézet által szervezett ingyenes emeltszintű matematika érettségire felkészítő tanfolyam. Elsőéves hallgatóink számára olyan kurzusok kötelező teljesítését írjuk elő, melyek hidat képeznek a középiskolai és egyetemi matematika között. Intézetünk hallgatóinak mentorprogram áll a rendelkezésére, illetve speciális felkészítő kurzusok szervezésével segítjük elő a tanulmányok sikeres lezárását.

„Az én véleményem az, hogy a matematika a kultúrának azon része, amelyet ***önmagáért, a szépségéért is lehet művelni****…"* (Szegedi Magdolna: „A matematika a kultúrának azon része, amelyet önmagáért, a szépségéért is lehet művelni…", Beszélgetés Daróczy Zoltán matematikus professzorral, Egyetemi Élet, 2016. február, 26-27. old.) Az interjúban azonban szó esik a gyakorlati alkalmazásokról és arról is, hogy a felsőoktatásban milyen sok matematikát oktatnak minden szakterületen. Értelemszerű, hogy a tradicionális értékek képviseletén túl alkalmazkodni kell a jelen kihívásaihoz. Ezek közül a legmeghatározóbb a 2021. évi egyetemi szintű átalakulás: a Debreceni Egyetem egyike az ún. modellváltó egyetemeknek. A modellváltásnak köszönhetően az egyetem kikerült a közvetlen állami fenntartású intézmények köréből. Az új működési szabályzat szerint egy – a kormány által jóváhagyott – vagyonkezelő alapítvány az egyetem fenntartója (Gróf Tisza István Debreceni Egyetemért Alapítvány), bár továbbra is számíthat állami forrásokra. Mindezt az állam és az Egyetem között megkötött, hosszú távú garanciákat magába foglaló keretszerződés biztosítja. A tervek szerint az egyetem autonómiája – és ezzel együtt felelőssége – jelentősen növekszik. Képzéseit flexibilisebben alakíthatja majd a munkaerőpiac elvárásainak megfelelően.

Egyetemi szintű stratégiai jelentőségét a minősített oktatók utánpótlásával és az átoktatás révén nyeri el az Intézet. Döntően a Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolából kerülnek ki a minősített oktatók/kutatók a matematika területén mind a Matematikai Intézetben, mind pedig a Debreceni Egyetemen. A doktori iskola végzett hallgatóinak révén kibontakozó kapcsolatrendszer azonban regionálisan, országosan, illetve nemzetközi szinten is jelentős.

Az eltelt 100 év erőfeszítései

- tükröződnek a sikeres pályázati tevékenységben: *„Büszke vagyok rá, hogy az OTKA* [Országos Tudományos Kutatási Alap] *kutatástámogatási rendszer 1986-os megalakulása óta egészen mostanáig folyamatosan van elnyert pályázatunk…"* (Mathesis necesse est: 45 éves a DAB Matematikai Munkabizottsága, Interjú Győry Kálmán akadémikussal, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2021).
- tükröződnek abban, hogy 2022-ben az Intézet elnyerte az MTA által elismert kiváló kutatóhely címet: *„A minősítés megalapításával és működtetésével a legkimelkedőbb magyar kutatóhelyeknek méltó elismerést, a feltörekvőknek reális perspektívát, az érdeklődő hazai és külföldi döntéshozóknak döntési alapul is szolgáló objektív helyzetképet, a hazai tudomány kiválóságában érdekelt társadalomnak pedig tájékozódási lehetőséget kívánunk adni."* (Részlet a pályázati felhívásból)
- tükröződnek megtisztelő kinevezésekben és díjakban:

  Győry Kálmán (professor emeritus, DE TTK Matematikai Intézet, Algebra és Számelmélet Tanszék): Széchenyi díjas matematikus, az MTA rendes tagja, tagja az Európai Akadémiának és a Lengyel Tudományos és Művészeti Akadémiának,

  Páles Zsolt (egyetemi tanár, DE TTK Analízis Tanszék): Széchenyi díjas matematikus, az MTA rendes tagja, az MTA III. (matematikai) osztályának elnöke.

- tükröződnek abban, hogy a Debreceni Egyetem Matematikai Intézetének gondozásában és munkatársainak szerkesztésében megjelenő *Publicationes Mathematicae Debrecen* tudományos folyóirat a 100. kötetét adta ki a 2022. évben.
- tükröződnek abban, hogy a Tanszékekhez kötődő kutatócsoportok a mai napig képesek vezető kutatási területükön a nemzetközileg elismert kutatóközönség színe-javát Debrecenbe vonzani vendégkutatói meghívások, illetve nemzetközi konferenciák szervezése segítségével:

  Number Theory Conference 2022, In honour of Professors Kálmán Győry, János Pintz and András Sárközy (4-8 July 2022, Debrecen, Hungary),

  Colloquium on Finsler Geometry and its Applications (12-16 June 2023, Debrecen, Hungary),

  59th International Symposium on Functional Equations (Series 2023 of Debrecen University Symposium, 18-25 June, Hajdúszoboszló, Hungary).

PUBLICATIONES MATHEMATICAE DEBRECEN
TOMUS 100. FASC. 1-2 (2022)
ISSN 0033-3883

A Matematikai Intézet klasszikus kutatási területei: számelmélet (Algebra és Számelmélet Tanszék), függvényegyenletek és - egyenlőtlenségek (Analízis Tanszék), differenciálgeometriai terek elmélete és matematikai didaktika (Geometria Tanszék). Részletesebb és árnyaltabb képet a Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola futó programjait áttekintve nyerhetünk. Ezek az elméleti matematikai alapkutatások állnak mind az akadémiai sikerek, mind pedig a lehetséges alkalmazások mögött. Intézetünkben 2012 óta folyamatosan működik akadémiai kutatócsoport, jelenleg HUN-REN–DE Egyenletek, Függvények, Görbék és Alkalmazásaik elnevezéssel. A csoport tevékenységében a Matematikai Intézet és az Informatikai Kar több kollégája vesz részt, akik a matematika és az alkalmazott matematika egymással különböző mélységben összefüggő, helyenként átfedő területein folytatnak kutatómunkát. Az akadémiai kutatócsoport jelenlegi profilja szempontjából közvetlen előzmény a matematikus kollégák részvétele az EFOP-3.6.2-16-2017-00015 „A HU-MATHS-IN — Magyar Ipari Innovációs Matematikai Szolgáltatási Hálózat tevékenységének elmélyítése" projektben. A projekt keretében jött létre, de a mai napig működik a DE Ipari Matematika Kutatócsoport, amelynek tagjai a TTK mellett az Informatikai Karról és a Gyógyszerésztudományi Karról kerültek ki. További példa karközi együttműködésre (Pszichológiai Intézet, Bölcsésztudományi Kar) az intézeti Aktív Matematikatanulás kutatócsoport, mely elkötelezett az aktív tanulás elve mellett, azaz a tanulók aktív részvételét hangsúlyozza saját matematikai tudásuk felépítésében. A csoport tevékenységét az Akadémia Közoktatás-fejlesztési Kutatási Programja támogatja.

„Debrecen mindig elsőrangú szerepet játszott a matematika magyarországi sorsában. Egyetemünk hivatása arról is gondoskodni, hogy folytatódjanak e régi és nemes tradíciók…"

Az Akadémia által alapított Kiváló Kutatóhely cím 2022. évi elnyerésével a centenáriumi évfordulóhoz méltó sikert értünk el, de nem egyetlen ember, vagy az Intézet jelenlegi munkatársainak sikere ez, hanem ennél jóval több, a debreceni matematika sikere. Egy olyan léptékű siker, amihez matematikusok generációi járultak hozzá áldozatos munkájukkal, hiszen minden tanítvány mögött mesterek sora áll és minden tanítvány mesterként áll majd a sorban valaki mögött a régi és nemes tradíciók szerint.

A Matematikai Intézetet érintő eseményekről az intézeti honlapon https://math.unideb.hu/ és az intézeti Kommunikációs Bizottság által szerkesztett Facebook oldalon tájékozódhatnak az érdeklődők https://www.facebook.com/DEmatematika/.

Varga Nóra egyetemi adjunktus és Vincze Csaba egyetemi tanár

Debreceni Egyetem, Természettudományi és Technológiai Kar, Matematikai Intézet

Felhasznált irodalom:

Bazsa György: *A Természettudományi Kar.* In: A Debreceni Egyetem története 1912-2012. (Szerk.: Orosz István és Barta János), DUP, Debrecen, 2012.

Bérczes et al.: *60 éves a Debreceni Egyetem Természettudományi és Technológiai Kara, 1949-2009.* Center-Print Kft., Debrecen, 2009.

Dávid Péter: *Dávid Lajos – a debreceni tudományegyetem első matematikaprofesszora.* Múzeumi Kurír, 39. szám (IV. kötet 9. szám), 1982.

Hárs János: *A Debreceni Aritmetika, a legrégebbi magyar matematikai munka teljes szövege, magyarázata, kritikája*. Sárospatak, 1938.

Kerepeszki Róbert*: Tudomány életközelben. AZ MTA Debreceni Területi Bizottságának története (1976-2010)*. Rexpo Nyomda, Debrecen, 2010.

Kerepeszki Róbert: *A DE Bölcsészettudományi Karának története, 1912-1949*. In: A Debreceni Egyetem Bölcsészettudományi Karának története I. (Szerk.: Papp Klára), Debrecen, 2014.

Keresztesi Mária: *A magyar matematikai műnyelv története*. Debrecen, 1935.

Maróthi György: *Arithmetica, vagy számvetésnek mestersége, Mellyet írt és közönséges Haszonra, főképen a Magyar Országon elő fordulható Dolgokra alkalmaztatni igyekezett Marothi György D.P.*, Debrecen, 1743.

Mudrák József: *A Debreceni Tudományegyetem Bölcsészettudományi Karának története (1914-1949)*, DUP, Debrecen, 2012.

Szegedi Magdolna*: „A matematika a kultúrának azon része, amelyet önmagáért, a szépségéért is lehet művelni…", Beszélgetés Daróczy Zoltán matematikus professzorral*, Egyetemi Élet, 2016. február, 26-27. old.

Tamássy Lajos: *A Matematikai Tanszékcsoport Története.* In: 25 éves a Kossuth Lajos Tudományegyetem Természettudományi Kara 1949-1974. (Szerk.: Szénássy Barna.) A KLTE Természettudományi Karának Kiadványa, Alföldi Nyomda, Debrecen, 1975.

Törös László: *Matematikai élet Debrecenben*. Debreceni Szemle, 1927, 1. évf., 6. szám, 356. o.

Varga Nóra: *A DAB Matematikai munkabizottság megalakulásának története*. In: 45 éves a Debreceni Akadémiai Bizottság Matematikai Munkabizottsága. (Szerk.: Gselmann Eszter el al.), Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2021.

Varga Nóra: *Interjú Győry Kálmán akadémikussal*. In: 45 éves a Debreceni Akadémiai Bizottság Matematikai Munkabizottsága. (Szerk.: Gselmann Eszter el al.), Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2021.

Lábjegyzetek:

[1] Teljes cím: *Aritmetika, azaz a Számvetésnek Tudománya, mely az tudós Gemma Frisiusnak Számvetésből magyar nyelvre (ez tudományban gyönyörködőknek hasznokra és hamarább való értelmekre is jó móddal) fordíttatott.*

[2] Gemma Frisius Reinerus 16. századi németalföldi tudós, akinek latin nyelvű aritmetikája 1540-ben jelent meg. A Debreceni Aritmetika eredeti szerzője hivatkozik is rá a mű teljes címében, de Hárs kimutatta, hogy az 1577-es magyar nyelvű munkának semmi köze sincs Gemma Frisius művéhez.

[3] additio = összeadás, fractio = törtszám, exemplom = példa, addálás = összeadás, redigalás = egy összegbe való összevonás, fertály = negyed, fél fertály = nyolcad

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon:

ifj. Székelyhidi László 2024. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A logika szörnyei és a turbulencia

I. Poincaré

„Miért van az, hogy annyi elme nem hajlandó megérteni a matematikát? Nincs ebben valami paradoxon? Hogy lehet az, hogy egy olyan tudomány, amely csak a logika alapelveire, például az ellentmondás elvére hivatkozik, arra, ami úgymond az értelmünk csontváza, arra, amit nem tudunk levetkőzni anélkül, hogy megszűnne a gondolkodásunk, és vannak emberek, akik ezt homályosnak találják! és még ők vannak többségben! Az, hogy képtelenek újat kitalálni, az rendben van, de hogy nem értik a nekik bemutatott demonstrációkat, hogy vakok maradnak, amikor olyan fényt mutatunk nekik, amely számunkra tiszta fénnyel ragyog, az egészen rendkívüli.

Pedig nem kell sok tanári tapasztalat ahhoz, hogy tudjuk, ezek a vak emberek semmiképpen sem kivételesek. Van itt egy probléma, amelyet nem könnyű megoldani, de amelynek foglalkoztatnia kell mindazokat, akik a tanításnak akarják szentelni magukat.”

Ezeket a sorokat Poincaré írta 1908-ban a „Tudomány és módszer” című kötetében. A probléma, amit itt megnevez, a helyes matematikai definíció problémája. Poincaré szerint a jó definíciónak két fontos tulajdonsága kell hogy legyen: le lehessen belőle vezetni matematikai szigorral az objektum kívánt (vagy megfigyelhető) tulajdonságait, de ugyanakkor intuitív legyen hogy egyrészt a tanításnál meg lehessen értetni a dolog lényegét és másrészt hogy ne szüljön szörnyeket. Az, hogy milyen szörnyekre gondol itt Poincaré, azt egy pár oldallal később írja le:

„A logika néha szörnyeket szül. Az elmúlt fél évszázadban rengeteg olyan bizarr függvény megjelenésének lehettünk tanúi, amelyek látszólag arra törekednek, hogy a lehető legkevésbé hasonlítsanak a célt szolgáló, becsületes függvényekre. Nincs többé folytonosság, vagy van folytonosság, de nincs derivált, és így tovább. Ráadásul logikai szempontból ezek a furcsa függvények a legáltalánosabbak; azok, amelyekkel anélkül találkozunk, hogy kerestük volna őket, csak speciális esetként jelennek meg….

A múltban, amikor feltaláltunk egy új függvényt, az valamilyen gyakorlati célt szolgált; ma már direkt azért találjuk fel őket, hogy megkérdőjelezzük apáink gondolkodását, és ez minden, amit valaha is kihozunk belőlük.”

A szörny, amire Poincaré itt hivatkozott, 1872-ben született Karl Weierstrass, a híres berlini professzor egyik előadásán, és így néz ki:

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos(3\pi x)+\frac{1}{4}\cos(9\pi x)+\frac{1}{8}\cos(27\pi x)+\ldots,$$

illetve, általánosabban[1]

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b^n\cos(a^n\pi x)\qquad 0<b<1,\quad ab>1+\frac{3}{2}\pi.$$

Ez a függvény, amelyről Weierstrass bebizonyította hogy folytonos, de sehol sem differenciálható, nagy port kavart, főleg az akkori matematika fellegvárában, Párizsban. Ennek két oka volt. Az egyik, hogy akkoriban a differenciál- és integrálszámítás (tehát a valós függvénytan) egyik alaptételének számított a híres francia matematikus és fizikus André-Marie Ampére tétele 1806-ból „théorème fondamental”, amely szerint **minden folytonos függvény egy pontosan meghatározható kivételes és izolált halmazon kívül differenciálható** („certaines valeurs particulières et isolées”). Ezt sok egyetemi könyvben és jegyzetben megtalálni a 19. században, bár egyes szerzők, pl. Weierstrass, hozzátette gondos előrelátással, hogy a függvény nem csak folytonos hanem szakaszonként monoton legyen. A másik ok bizonyára a francia-porosz háború volt, amelyet a franciák 1871-ben csúfosan elvesztettek. Tehát hogy egy porosz professzor még a francia tételeket is döntögeti, biztos szálka volt a franciák szemében. A híres Charles Hermite, akkoriban a Sorbonne egyetem professzora, a francia akadémia tagja és a francia becsületlégió nagytisztje, 1893-ban egy Stietjes-hez írt levélben ezt írta:

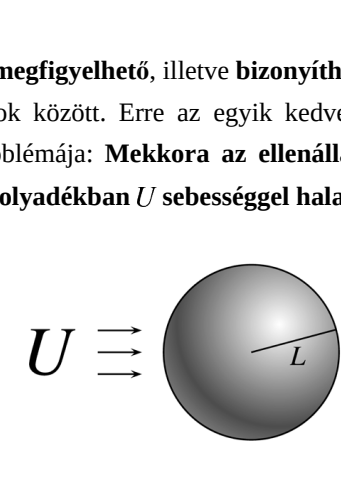
„Az Analízis az egyik kezével elveszi azt, amit a másikkal ad. Elborzadva és megdöbbenve fordulok el a folytonos függvények e siralmas csapásától, amelyeknek nincsenek deriváltjaik…”

Egyszóval nem voltak jó véleménnyel Weierstrass szörnyéről, és hasznát semmiképpen sem látták. Ugyanakkor, mint azt más kontextusból is ismerjük, Poincaré tévedései utólag majdnem hogy fontosabbnak nyilvánultak mint a helyes bizonyításai, és ebben az előadásban erről is van szó.

II. Hidrodinamika

A 20. század elején közismert mondás volt, hogy a hidrodinamikával foglalkozó kutatók társadalma két csoportra osztható: azok, akik a folyadékok olyan tulajdonságait észlelik amiket nem tudunk bizonyítani, és azok, akik a folyadékok olyan tulajdonságait bizonyítják, amiket nem tudunk észlelni. Tehát volt (és bizonyos fokig még mindig van) egyfajta disszonancia a

megfigyelhető, illetve **bizonyítható**
jelenségek és tulajdonságok között. Erre az egyik kedvenc példám a hidrodinamika egyik nagy klasszikus problémája: **Mekkora az ellenálláserő, amely az egyenletes, stacionárius ρ-sűrűségű folyadékban U sebességgel haladó L sugarú gömbre hat?**



Ezzel már maga Newton foglalkozott, és a Principia-jában megtaláljuk a választ:

$$F\sim\rho L^2U^2.$$

Ezt Newton egyszerűen úgy vezette le, hogy ha feltesszük, hogy F csak ettől a három paramétertől függhet, ez az egyetlen képlet, amelynek helyes a mértékegysége.

Ez a képlet nagyjából megfelel a valóságnak sok esetben, ezt számos kísérlettel lehet igazolni. De mi ezzel a baj? Az, hogy látszólag nem bizonyítható. Ezalatt azt értem, hogy a Newton törvényeket leíró kontinuum egyenletekből, a Navier–Stokes vagy az Euler-egyenletekből nem ez a képlet, hanem valami egész más következik:

$$\begin{gathered}\rho(\partial_t u+u\cdot\nabla u)=-\nabla p+\nu\Delta u\\ \nabla\cdot u=0\end{gathered}$$

Amennyiben a folyadék viszkozitása 0, d’Alembert bizonyította 1752-ben, hogy $F=0$. Ez nyilván paradoxon és a valóságnak ellentmond. D’Alembert eredményét Stokes általánosította 1851-ben viszkózus folyadékokra, amely szerint:

$$F=6\pi\rho\nu LU.$$

Stokes képlete is helyes bizonyos esetekben. Hogy Stokes-nak vagy Newtonnak van igaza, az attól függ, hogy mennyire turbulens a folyadék. Ezt egy dimenziómentes mérőszámmal, a Reynolds-számmal szokás kvantifikálni.

$$Re=\frac{LU}{\nu}.$$

Ha Re kicsi (kb. 1), akkor Stokes-nak van igaza. Ha Re nagy (kb. 10^6), akkor Newtonnak. A 10^6 soknak tűnik, de ez a tipikus Reynolds-szám pl. egy autónál városi közlekedésnél. Megfigyelhetjük, hogy ha a viszkozitás 0-hoz tart, akkor a Reynolds-szám divergál végtelenhez, tehát egyrészt Newton turbulens esetében vagyunk, másrészt az egyenletrendszer formálisan leegyszerűsödik az Euler-egyenletté, ahol viszont d’Alembert tétele érvényes. Ez a baj.

III. Gyenge megoldások

A kulcskérdés az, hogy mit fogadunk el mint megoldás definíciója, és ehhez tudni kell hogy a

$$\nu\to 0$$

határátmenet egy **szinguláris perturbáció**.

Hogy ez mit jelent, azt Michael Berry írta le nagyon találóan:

Ha beleharapunk egy almába, és egy kukacot találunk benne, az elég kellemetlen felfedezés. De ha csak egy fél kukacot találunk, az még rosszabb; ha egy kukac egyharmadát, az még kellemetlenebb. Ugye minél kevesebb hányadát találjuk meg a kukacnak az első harapás után, annál többet ehettünk meg. Ugyanakkor, ha nincs egyáltalán kukac az almában a harapás után, akkor minden oké. Erre mondjuk azt, hogy a „kukachányad tart nullához” határérték szinguláris.

Ugyanez a szituáció áll fenn ha a Navier–Stokes-egyenletnél a viszkozitás nullához tart – illetve a Reynolds-szám tart végtelenhez. A probléma az, hogy az Euler-egyenletnek létezik sima megoldása, de ez a sima megoldás nem írja le a turbulens mozgást, amit a gömb körül, illetve a gömb mögött észlelünk. Tehát meg kell változtatni a megoldásfogalmat, itt jönnek a képbe a gyenge megoldások.

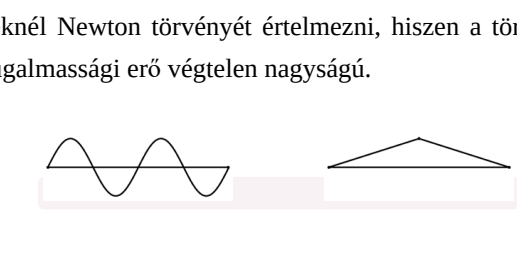
Bár azt hihetnénk, hogy a parciális differenciálegyenletek gyenge megoldáselmélete a huszadik században keletkezett a modern funkcionálanalízis születésével párhuzamosan, de igazából a gyenge megoldások története olyan régi, mint a parciális differenciálegyenleteké. Az első egyenletek egyike a kifeszített húr rezgését leíró lineáris hullámegyenlet,

$$\partial_t^2y-c^2\partial_x^2y=0,$$

amelyet d’Alembert 1747-ben írt fel, és lényegében azt a fizikai tételt írja le, hogy a húrra ható függőleges erő (és ezáltal a gyorsulása) egyenesen arányos a húr görbületével. d’Alembert le is vezette ennek az egyenletnek az általános megoldását,

$$u(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct),$$

szóval az általános rezgőmozgás leírható mint két utazóhullám szuperpozíciója, az egyik c sebességgel jobbra, a másik c sebességgel balra tart. Itt egyből felmerült a kérdés, hogy ez a képlet hogyan értelmezhető, ha a két hullámot leíró f és g függvények nem deriválhatóak. d’Alembert ezt a lehetőséget egyszerűen kizárta, mert ugye a hullámegyenletben két deriváltat kell tudni értelmezni, viszont Euler azt állította hogy ebben az esetben is kell tudni értelmezni a megoldást. Kettejük között heves intellektuális vita alakult ki, amely arra összpontosult, hogy hogyan lehet egy tört vonal alakú kezdeti értéknél Newton törvényét értelmezni, hiszen a töréspontnál a görbület, így a húrra ható rugalmassági erő végtelen nagyságú.



A vitának végül 1760-ban Lagrange vetett véget azzal az érvvel, hogy az erőviszonyokat és Newton második törvényét nem pontonként, hanem, mivel egy kontinuum-modellről van szó, infinitezimális intervallumokon kell tudni értelmezni. Tehát a görbületet kis delta-nagyságú intervallumokon kell átlagolni, ez megadja az átlagolt erőt, amely delta-nagyságú intervallumokra hat, és ha az ebből keletkező delta-átlagolt mozgásnak van egyértelmű $\delta\to 0$ limesze, akkor ez a limesz az egyértelmű megoldás.

Ezzel tulajdonképpen Lagrange bevezette a gyenge megoldások elméletét, amit manapság disztribúció-értelemben vett megoldásnak nevezünk. A Navier–Stokes-egyenlet esetében a gyenge megoldás egzisztenciaelmélete sokkal bonyolultabb, ezt csak 1934-ben sikerült Jean Leray-nek megalkotnia. Mellesleg ezt a megoldásfogalmat Leray „solution turbulent”-nek nevezte.

Van még egy másik definíciója is a gyenge megoldásnak, és ez is a hullámegyenlettel kezdődött. Ha a húr két végét fixáljuk, akkor természetesebb elképzelni a húr mozgását mint sajátrezgések szuperpozícióját, nem pedig utazóhullámok szuperpozíciójaként. Így a Fourier sorfelbontáshoz jutunk, miszerint

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(t)\sin(2\pi kx),$$

és minden amplitúdó egy közönséges differenciálegyenletet kell hogy megoldjon:

$$\frac{d^2}{dt^2}a_k(t)=-4\pi^2c^2k^2a_k(t).$$

Ez a megoldás akkor értelmezhető, ha a sor abszolút konvergál, de ebben az esetben a megoldás nem feltétlenül deriválható. Az Euler-egyenletre Lars Onsager alkalmazta ezt a megoldás-definiciót, erre még visszatérünk.

Azt is hozzáteszem, hogy ha más kikötést nem teszünk, ez a két definíciója a gyenge megoldásnak ekvivalens.

Mint említettem, a Navier–Stokes-egyenletre Leray dolgozta ki a gyenge megoldások egzisztenciatételét, de unicitást nem tudott bizonyítani. A gyenge megoldások egyértelműsége mai napig megoldatlan probléma. Az Euler-egyenletre sokkal később sikerült gyenge megoldásokat konstruálni, először Vladimir Scheffernek sikerült 1993-ban. Viszont ami itt született, az megint egy szörny (Cedric Villani fogalmazása szerint): Scheffer bizonyította, hogy az Euler-egyenletnek létezik olyan gyenge megoldása, amely egy kezdeti időintervallumban 0, tehát a folyadék sebessége nulla, azután a folyadék egyszer csak el kezd magától mozogni, és egy még későbbi időintervallumban magától a folyadék megint megáll és a sebessége nulla. Nyilván egy olyan megoldásról van szó, ami fizikai szempontból semmiképpen sem értelmezhető. Tehát azzal, hogy a megoldásfogalmat általánosítottuk, átestünk a ló másik oldalára, és az új kérdés az hogy milyen plusz kikötésekkel tudnánk a gyenge megoldások közül a fizikailag értelmezhetőeket kiválasztani.

IV. Energiakaszkád

Ennél a pontnál vizsgáljuk meg újra a Fourier-soros definíciót. A hullámegyenletnél minden sajátrezgés amplitúdója egymástól függetlenül változott, és minden sajátrezgés kinetikus energiája külön-külön időben konstans volt – ezért volt könnyű dolgunk. Viszont a Navier–Stokes és az Euler-egyenlet nem lineáris, a nemlinearitás miatt a különböző sajátrezgések egymással kapcsolatban vannak, és egymásnak átadhatják a kinetikus energiájuk egy részét. Így egy energiakaszkád jön létre, ezt egy egyszerű modellel szeretném illusztrálni.

Képzeljünk el különböző méretű kerekeket, amelyek szabadon tudnak forogni. Ezek a kerekek szimbolizálják a különböző nagyságrendű Fourier-sajátrezgéseket, illetve folyadékáramlás esetében a különböző karakterisztikus méretű folyadékmozgásokat. A hullámegyenlet esetében minden kerék egymástól függetlenül forog, és mindegyiket külön erő forgatja. De a nemlinearitás miatt a Navier–Stokes és Euler-egyenleteknél van kapcsolat, ez itt legyen egy plusz áttétel és lánc, ami a szomszédos kerekeket összeköti. Mint egy bicikli végtelen sok kerékkel, mondhatjuk: **Hilbert-bicikli**.

Most képzeljünk el egy turbulens áramlást. Az első, amit észreveszünk turbulens áramlásnál, hogy részleteiben kaotikus és megismételhetetlen, de a mozgás statisztikája (pl. egy pontban vett sebesség változásainak disztribúciófüggvénye) időben eltolás-invariáns, más szóval stacionárius. Itt kézenfekvő a statisztikus fizika eszközeit bevetni, de figyelembe kell venni, hogy nem egy zárt rendszerről van szó, mert egy turbulens folyamat állandóan keverni kell, hogy mozgásban maradjon és állandóan kinetikus energiát veszít ugyanolyan arányban a belső súrlódás miatt. Neumann János szavaival élve itt **a stacionárius állapotot nem az energia ekvipartíciója, hanem a disszipáció ekvipartíciója írja le**. Ez ezt meghatározó paraméter tehát az energiadisszipáció mértéke ε. A turbulencia egyik empirikus alaptétele (sokan ezt a turbulencia nulladik tételének nevezik) az, hogy az energiadisszipáció mértéke nem függ a Reynolds-számtól (illetve a viszkozitástól).

A Hilbert-biciklin ezt úgy tudjuk modellezni, hogy pedált rakunk az első kerékre, és féket az utolsóra. A kérdés, hogy a $Re\to\infty$ „turbulens limeszben” a stacionárius állapotban mekkora lesz az egyes kerekek kinetikus energiája. Ha feltesszük, hogy az ℓ-sugarú kerék energiája csak az ℓ hossztól és ε-tól függhet, ezt kapjuk:

$$E(\ell)\sim\varepsilon^{2/3}\ell^{2/3}.$$

Ez egy variánsa a Kolmogorov-féle $5/3$ tételnek (ami ennek a Fourier-transzformáltja). Mivel a kinetikus energia a sebesség négyzetével arányos, ez egy sebességfüggvénynek felel meg, amely kísértetiesen hasonlít Weierstrass szörnyére:

$$u(x,t)\sim\varepsilon^{2/3}\sum_n a^{-\frac{1}{3}n}\cos(a^n\pi x)\qquad \ell_n\sim a^{-n}.$$

Mivel a disszipáció mértéke független a viszkozitástól, a $Re\to\infty$ limeszben olyan gyenge megoldásokat kell keresni az Euler-egyenlethez, amelyeknél az energia nem marad meg, pedig nincs külső erő – mert a fék infinitezimális és nem látni. Olyan ez, mint az infinitezimális kukac az almában. Onsager 1941-ben megfogalmazott sejtése pont erről szól, tehát hogy létezhetnek ilyen struktúrájú gyenge megoldások. Pontosabban, léteznek Hölder-folytonos de nem deriválható sebességfüggvények az $1/3$ exponensig, amelyeknél a kinetikus energia nem állandó, $1/3$ exponens felett viszont a kinetikus energia szükségképpen állandó minden gyenge megoldásnál. Ezt kb. 5 éve sikerült igazolnunk.

A tételünknek viszont volt egy szépséghibája: az energia csökkenhet, de nőhet is, és a kettő között csak mesterségesen tudunk különbséget tenni. Ugyanis a módszerünk, a Hilbert-biciklin illusztrálva, a következő. Nem az első kerékre rakjuk a pedált, hanem a másodikra. Persze, mivel ez a kerék kisebb, ugyanakkor kinetikus energia generálásához gyorsabban kell tekerni. Ha a harmadikra rakjuk a pedált, akkor még gyorsabban és így tovább. Ad infinitum azt kapjuk, hogy az infinitezimálisan kis pedált tekerjük végtelen sebességgel, vagyis mintha **Maxwell démonja tekerné Hilbert bicikliét**.

És nemcsak tekerni hanem kontrázni is tud, persze. Ezt az egyszerű konstrukciós elvet Gromov konvex integrálás módszerével sikerült megvalósítanunk, de persze ez a Scheffer-féle szörnyekhez is vezetett.

V. A nulladik törvény

Egy turbulens áramlásnál, ha átlagolunk kis δ-méretű tartományokon, akkor meg kellene kapnunk egy nagyobb, effektív viszkozitást, ami azon a skálán megfelel a disszipáció mértékének – ugyanúgy, ahogy Lagrange átlagolása megadta az effektív rugalmassági erőt a kifeszített húr kis δ-szakaszain. Ennek a matematikai módszere a homogenizálás. Egy tavaly ősszel megjelent cikkben a lipcsei kollegáimmal sikerült együtt alkalmaznunk a homogenizálást a konvex integrációval: bár még nem a Navier–Stokes-egyenletre, hanem a lineáris transzport-diffúzió egyenletre:

$$\partial_t f_\kappa+u\cdot\nabla f_\kappa=\kappa\Delta f_\kappa,$$

ahol az u vektormező az Euler-egyenlet Onsager-féle gyenge megoldása. Ez az egyenlet azt írja le, hogy hogyan változik pl. egy, a turbulens áramlásba befecskendezett, anyag sűrűsége f, ha ez egyrészt az áramlással együtt sodródik (transzport), másrészt kis kappa diffúziós együtthatóval terjed. A tételünk azt mondja ki, hogy az effektív diffúzió mértéke független a kappától:

$$\limsup_{\kappa\to 0}\frac{\int|f_\kappa(x,t)|^2\,\mathrm{d}x}{\int|f_\kappa(x,0)|^2\,\mathrm{d}x}<1.$$

Itt a négyzetintegrál nem más mint az f sűrűség szórása. Enyhén túlzással ez egy matematikai bizonyítása a turbulencia nulladik törvényére, legalábbis a passzív transzport speciális esetében.

VI. Pillangóhatás

Visszatérve a Scheffer-szörnyhöz, most szeretnék arra rámutatni, hogy ez a Scheffer-szörny, tehát a Maxwell-démon által hajtott Hilbert-bicikli, mégis hasznos kapcsolatban van valós jelenségekkel, de nem a hagyományos, Kolmogorov-féle energiakaszkáddal kapcsolatban, hanem egy úgynevezett inverz-energiakaszkáddal kapcsolatban. Ehhez kicsit ki kell térnem a **Lorenz-féle pillangóhatásra**.

Ennek a közismert változata, amely Edward Lorenz 1963-as cikkére van alapozva, azt jelenti, hogy véges dimenziós kaotikus dinamikus rendszereknél a apró (de véges) változtatása a kezdeti feltételeknek nagy változásokat okoz a későbbi dinamikában: **„egy pillangó egyetlen szárnycsapása a Föld egyik oldalán tornádót idézhet elő a másikon”**. Most én egy sokkal komolyabb pillangóhatásról szeretnék beszélni, ami Edward Lorenz kevésbé ismert 1969-es cikkére alapul. Itt nem alacsony-dimenziós dinamikus rendszerekről van szó, mint a klasszikus értelemben (az eredeti Lorenz-rendszer háromdimenziós), hanem magas-dimenziós rendszerekről.

Lorenz ebben a cikkben bevezette a **kiszámíthatósági tartomány**, illetve kiszámíthatósági idő fogalmát. Ez alatt egy olyan időintervallumot kell érteni, amelyen belül, ha tipikus nagyságú mérési hibákat végzünk a kezdeti állapot meghatározásánál, akkor ez még elfogadható nagyságú hibát eredményez. Tehát ennyi ideig még egy elfogadható hibahatáron belül maradunk. A kiszámíthatósági idő nyilván arányos lesz egy adott skálán adott kinetikus energiával rendelkező dinamikus rendszer tipikus időskálájával, tehát

$$\tau(\ell)\sim\frac{\ell}{v(\ell)}=E(\ell)^{-1/2}\ell.$$

Vegyünk most egy olyan dinamikus rendszert, amely nagy szabadsági fokszámmal rendelkezik, tehát sok különböző skálán történik a dinamika – ilyen a föld alsó atmoszférájában a levegő áramlása. Tegyük fel azt is, hogy a dinamika nemlineáris, és minden skálán vett mozgás előbb-utóbb instabillá válik, ezután pedig lényegesen hat nagyobb skálákon is. Tehát pl. az ℓ skálán vett mozgás $\tau(\ell)$ idő után instabillá válik és hatással lesz a 2ℓ skálán történő dinamikára. Ebben az esetben azt kérdezhetjük, hogy egy, kis ℓ skálán vett hiba mennyi idő múlva van lényeges hatással a nagy $L=2^n\ell$ skálán történő dinamikára? A válasz nagyon egyszerű:

$$\tau(L)+\tau(2^{-1}L)+\ldots+\tau(2^{-n}L).$$

Lorenz rámutatott, hogy két lehetséges szituáció létezik, attól függően, hogy a

$$\sum_n\tau(2^{-n}L)$$

sor konvergál-e vagy sem. Ha konvergál, az azt jelenti, hogy bármilyen kis skálán vett hiba fix véges időn belül (ami arányos a $\tau(L)$ idővel) lényegesen befolyásolja a dinamikát. **Ez a pillangóhatás erős változata!** Ha viszont divergál, akkor minél kisebb skálán történik hiba, annál tovább tart, mire az a hiba látszani fog a nagy skálán. Ugyanez megfogalmazva a kiszámíthatósági idővel: ha a sor konvergál, akkor a rendszer kiszámíthatósági ideje felülről korlátos, bármilyen precíz méréseket is végzünk.

Mint láttuk, a Navier–Stokes turbulens áramlásában

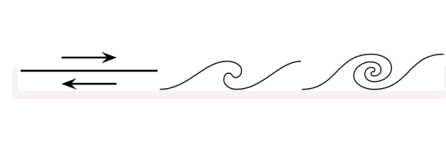
$$E(\ell)\sim^{\ell^{2/3}}\qquad\tau(\ell)\sim\ell^{2/3},$$

tehát a fenti sor konvergál. Ha ezt a föld alsó atmoszféráján vett áramlásra alkalmazzuk, akkor a következő megdöbbentő eredményt kapjuk: ha mondjuk az 1000 km-es skálán vett kiszámíthatósági idő 3 nap (tipikus számok az európai meteorológiai előrejelzésnél), akkor a hasonlósági elv miatt az 1 km-es skálán vett kiszámíthatósági idő kb. $3/4$ óra (ez pl. egy tipikus felhő mérete) és 1 m-es skálán vett kiszámíthatósági idő kb. fél perc. Tehát, ha sok pénzből elhatároznánk, hogy a meteorológiai előrejelzéshez a numerikus felbontást és az ehhez szolgáltatott mérési adathálózatot (amely jelenleg kb. 5–10 km felbontású) 1 m-es felbontásra finomítjuk, akkor ezzel a kiszámíthatósági időt, tehát az időt, amelyen belül a mérési és numerikus hibahatár elfogadható marad, csak kb. fél perccel javítanánk!

Persze nagyobb távolságokon (pl. nagyobb mint 10 km) a tipikus atmoszferikus dinamikát nem a 3D Navier–Stokes-egyenlet írja le, hanem 2D egyenletek, pl. a kvázi-geosztrófikus egyenlet (amely hasonlít a 2D Euler-egyenlethez) – az első numerikus időjárás-előrejelzésnél, amelyet Neumann János vezetésével végeztek a princetoni Institute for Advanced Study-ban 1950-ben, ezt az egyenletet használták. Ennél az egyenletnél az energiaspektrum más, itt

$$E(\ell)\sim\ell^2\qquad\tau(\ell)\sim 1,$$

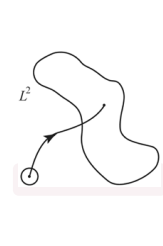
tehát itt Lorenz jobbik esetében vagyunk, ahol a sor divergál.



Tisztán matematikai szemszögből nézve Lorenz gondolatmenete azzal áll kapcsolatban, hogy a kezdetiérték-problémának létezik-e egyértelmű megoldása. Ehhez pedig nem feltétlenül a stacionárius állapot energiaspektruma mérvadó, hanem a kezdeti sebességmezőé. Itt egy érdekes példa a 2D Euler-egyenletnél fellépő Kelvin–Helmholtz instabilitás, amelynél a kezdeti sebességmező nem folytonos hanem van egy szakadása, ebből pedig következik hogy a kezdeti energiaspektrum nem a fenti, hanem

$$E(\ell)\sim\ell\qquad\tau(\ell)\sim\ell^{1/2},$$

és ismét a konvergáló esetnél vagyunk. Azt ugyan nem nehéz igazolni, hogy ebben a speciális esetben végtelen sok gyenge megoldás létezik, viszont a kérdés megint az, hogy melyik megoldás-definíció szerint? Ugyanis ennél a végtelen sok gyenge megoldásnál (úgy mint a Scheffer-féle szörnynél) a sebességmező „csak” egy $L2$ függvény, tehát mérhető, és a négyzete integrálható, viszont a Kelvin–Helmholtz kezdeti sebességmező vorticitása egy véges mérték (ez majdnem azzal ekvivalens hogy a sebességmező korlátos változású), és azt tudjuk (ez Jean Delort francia matematikus híres cikke 1992-ből), hogy létezik olyan gyenge megoldás, amelynek ez a tulajdonsága megmarad. Továbbá, ez az a megoldástípus, amit akkor kapunk ha a sima megoldások terét lezárjuk, vagyis klasszikus megoldások limeszeit vesszük.



A matematikai probléma tehát az, hogy tudjuk-e igazolni a Lorenz-féle erős pillangóhatást a Kelvin–Helmholtz instabilitásra, tehát azt, hogy ha a kezdeti sebesség a Kelvin–Helmholtz-nak tetszőlegesen közeli sima approximációja, akkor egységnyi idő alatt a Kelvin–Helmholtz stacionárius megoldástól, lényeges, egységnyi eltérést tapasztalunk. De ez már a jövő muzsikája.

ifj. Székelyhidi László

A Kelvin-Helmholtz instabilitás hatására kialakuló spirális örvények:

https://www.idojarasesradar.hu/idojaras-info/hullamzo-egbolt-ritka-fotok-kelvin-helmholtz-felhok--52f69d0e-cff3-4402-ae7e-a4f1b11271c1

Lábjegyzet

[1] Aki figyel a részletekre, észre fogja venni hogy a fenti példa nem teljesíti Weierstrass kikötését az a és b paraméterekre. Viszont 1916-ban Hardy bizonyította, hogy elégséges az $ab\geq 1$ feltétel is.

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Adatkezelés
Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon:

Szerkesztő 2024. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Matematika a díjak hátterében

Az MTA 197. közgyűlésének matematikus díjazottjai

A Magyar Tudományos Akadémia 197. Közgyűlésének ünnepi ülésén, illetve a Közgyűléshez kapcsolódó osztályrendezvényeken számos rangos tudományos díjat és elismerést adtak át. Ebben a cikkben röviden bemutatjuk a matematikus díjazottakat.

1. Akadémiai Díj

Az **Akadémiai Díj**at 1960-ban alapították. A díj az évek során több változáson ment át, de azok magát az érmet nem érintették. A díjat az MTA Elnöksége adományozza évente 11 kiemelkedő tudományos tevékenységet végző kutatónak vagy kutatócsoportnak, az utolsó öt évben elért tudományos eredményük elismerésére.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
1825 · 1975
A TUDOMÁNYOS EMBERFŐ MENNYISÉGE A NEMZET IGAZI HATALMA
SZÉCHENYI ISTVÁN

Forrás: mta.hu

A díj idei matematikus díjazott *Matolcsi Máté*, a HUN-REN Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet tudományos tanácsadója, a BME Analízis és Operációkutatás Tanszékének egyetemi tanára. Az indoklás szerint a díjat a Fourier-analízis sokrétű alkalmazásaiban – többek között Fuglede spektrális halmazokra vonatkozó, valamint Erdős egységtávolságot elkerülő halmazokra vonatkozó több évtizedes sejtéseinek a megoldásában – vállalt kiemelkedő szerepének elismeréseként kapta.

Középen a díjazott Matolcsi Máté. (Forrás: Szigeti Tamás, mta.hu)

Matolcsi Máté 2003-ban szerzett PhD fokozatot az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, 2015 óta az MTA doktora. Pályafutása során dolgozott a Rényi Intézetben, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen, a University of Crete-n, a University of Orleans-on, és az Erwin Schrödinger Intézetben.

Az utóbbi évek tudományos eredményei közül arról a kettőről számolunk be röviden, amelyeket a méltatás is megemlít. Az első Bent Fuglede világhírű dán matematikus régóta vizsgált sejtésével kapcsolatos. Fuglede 1974-ben bevezette a spektrális halmaz fogalmát, és megfogalmazta a sejtést, miszerint egy halmaz pontosan akkor spektrális, ha hézagmentesen parkettázza a teret. Matolcsi és Kolountzakis 2006-ban olyan halmazokat konstruáltak, amelyek parkettáznak, de nem spektrálisak. Ez a negatív eredményük ugyan cáfolta a sejtést, de nem cáfolta a sejtés egy konvex testekre vonatkozó változatát. Végül 2019-ben Nir Levvel közös munkájukban sikerült megmutatniuk, hogy a sejtés ebben a módosított formában igaz. Dolgozatuk az Acta Mathematica-ban, a világ egyik vezető matematikai folyóiratában jelent meg, a szerzők pedig Frontiers of Science Award díjban részesültek.

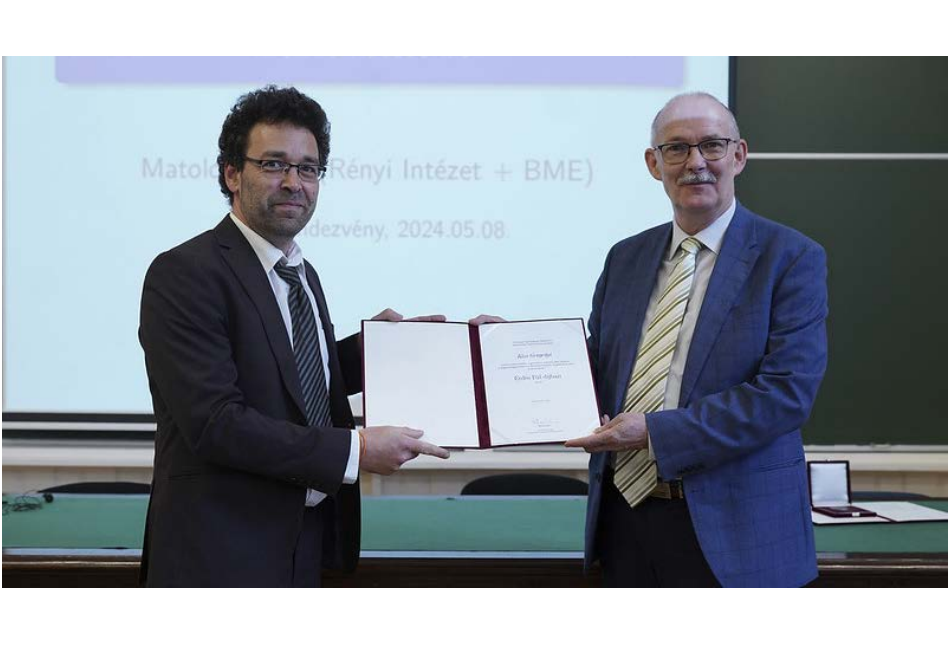
Matolcsi másik kiemelkedő eredménye Erdős Pál egy sejtéséhez kapcsolódik. Azt mondjuk, hogy egy síkbeli halmaz elkerüli az egységtávolságot, ha bármely két pontja között a távolság nem egyenlő 1-gyel. Erdős 1985-ben azt a sejtést fogalmazta meg, hogy egy ilyen egységtávolságot elkerülő halmaz sűrűsége kisebb, mint $1/4$. A sejtéssel kapcsolatban az utóbbi évtizedben számos komoly eredmény látott napvilágot, ezek közül több is Matolcsi nevéhez fűződik. A végső áttörést *Ambrus Gergely, Csiszárik Adrián, Matolcsi Máté, Varga Dániel*, és *Zsámboki Pál* cikke hozta meg, amelyben a Fourier-analízis, a geometria és a kombinatorika módszereit kombinálták. A cikk a Mathematical Programming című folyóiratban jelent meg 2023-ban.

Az eredményről mi is írtunk az Érintőben.

2. Az MTA III. osztályának díjai

2024. május 8.-án 14:00 órától a Magyar Tudományos Akadémia 197. közgyűléséhez kapcsolódó rendezvénysorozat keretében a Matematikai Tudományok Osztálya *„Pozitív definit függvények alkalmazásai”* címmel ünnepi délutánt rendezett a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben Nagytermében. Ezen a rendezvényen adta át *Páles Zsolt*, a Matematikai Tudományok Osztályának elnöke az MTA III. osztályának díjait.

Az MTA Elnöksége 1972-ben – Erdős Pál akadémikus kezdeményezésére és szülei emlékére – a tudományos munkára való ösztönzés és a tudományos utánpótlás támogatása érdekében a matematika és annak ágazatai bármelyikében elért, világviszonylatban is kiemelkedő eredmény elismerésére megalapította a Matematikai Díjat. Erdős Pál halála után a díj nevét az osztály **Erdős Pál-díj**ra változtatta. A díjat évente ítélik oda, az elbírálás előtti három év folyamán elért teljesítményért. Az idei évben a díjat *Kiss Gergely* kapta a harmonikus analízis, a geometria, a kommutatív algebra, a függvényegyenletek és a félcsoportelmélet vizsgálatában elért eredményei elismeréséül.

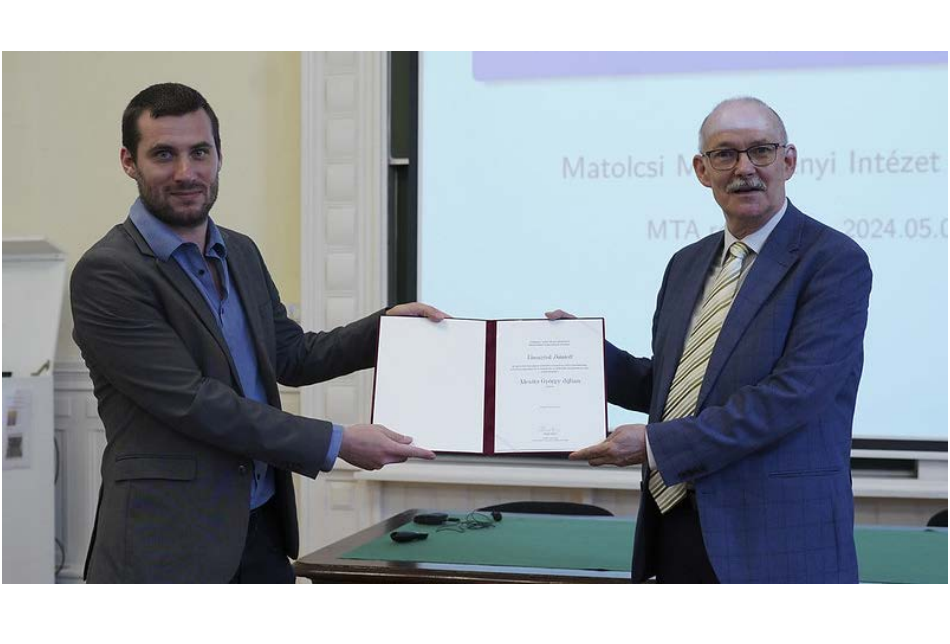


Kiss Gergely Erdős Pál-díjas Páles Zsolttal. (Forrás: Nagy Roland, mta.hu)

Kiss Gergely 2015-ben szerzett PhD-t az ELTÉ-n. 2013-2015 között a BME tanársegédje volt, 2015-2018 között posztdoktori állást töltött be a Luxembourgi Egyetemen. 2019-ben az MTA Prémium posztdoktori ösztöndíj elnyerésével tért haza, azóta a Rényi Intézetben dolgozik. Tudományos munkássága rendkívül sokoldalú, foglalkozott harmonikus analízissel, geometriával, kommutatív algebrával, és félcsoportelmélettel is. Ebben a rövid írásban csak egy témát, a diszkrét Pompeiu problémával foglalkozunk.

A diszkrét Pompeiu probléma a $\mathbb{R}^n$-en a következőképpen formalizálható. Legyen f egy olyan valós (avagy komplex értékű) függvény $\mathbb{R}^n$-en, melyre igaz, hogy egy adott véges $\mathbb{R}^n$-beli A minta minden, egy adott transzformációcsoport általi képén vett függvényértékeinek összege 0. Igaz-e, hogy az f függvény csakis azonosan 0 lehet? Ha ez az következtetés fennáll, akkor a halmazt Pompeiunak hívjuk az adott traszformációcsoportra nézve. A három legtermészetesebb eset $\mathbb{R}^n$-en az, amikor a szóban forgó transzformációcsoport az eltolások, a hasonlóságok illetve az egybevágóságok csoportja. *Kiss Gergely, Laczkovich Miklós*, és *Vincze Csaba* 2018-ban megmutatták, hogy semmilyen legalább 2 elemszámú halmaz nem Pompeiu eltolásokra nézve, illetve $\mathbb{R}^2$ minden részhalmaza Pompeiu a hasonlóságokra nézve. A kérdés egybevágóságokra nézve már a síkon is csak speciális esetben volt ismert. Azonban a közelmúltban egy friss, még nem publikált eredményükben Kiss és Laczkovich megmutatták, hogy $\mathbb{R}^n$ minden véges részhalmaza Pompeiu az egybevágóságokra nézve. Az eredmény jelentősége az is, hogy választ ad *Steve Jackson* véges Steinhaus-halmazokra vonatkozó alábbi kérdésére: Van-e olyan véges A halmaz a síkon (avagy $\mathbb{R}^n$-en), melyhez található olyan S halmaz a síkon (avagy $\mathbb{R}^n$-en), úgy, hogy A minden egybevágó példánya S-sel pontosan egy pontban metsz össze. A fenti eredmények következménye, hogy ilyen halmaz nincsen, ha $n \geq 2$. $n = 1$ esetben ismert, hogy ilyen véges halmazok léteznek. A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy fenti kétszerzős munkában a hasonlóságok esetét kiterjesztették $\mathbb{R}^n$-re tetszőleges $n \geq 2$ esetére, ezzel tisztázva $\mathbb{R}^n$ három legtermészetesebb transzformációcsoportjára a Pompeiu problémát.

Alexits György-díjban részesült *Virosztek Dániel* az optimális transzport elmélete, a kvantum információelmélet, a funkcionálanalízis és a megőrzési problémák vizsgálatában elért eredményeinek elismeréséül. Az 1984-ben alapított díj az Alexits György által elsősorban művelt tudományág, az analízis és annak alkalmazása területén elért kimagasló tudományos eredményekért ítélhető oda.



Virosztek Dániel Alexits György-díjas Páles Zsolttal. (Forrás: Nagy Roland, mta.hu)

Virosztek Dániel 2016-ban szerzett PhD fokozatot a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen Petz Dénes témavezetésével. Egy évig a BME-n volt posztdoktori állásban, illetve tagja volt a Molnár Lajos által vezetett Funkcionálanalízis Lendület kutatócsoportnak. 2017-től négy éven át a klosterneuburgi IST Austria posztdoktori kutatója volt Erdős László kutatócsoportjában, ebből két évig IST fellowship, két évig pedig Marie Skłodowska-Curie ösztöndíjjal. 2021-ben tért haza az MTA Lendület programjának keretében, azóta a HUN-REN Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet kutatója.

Első jelentősebb eredményeit témavezetőjével, *Petz Dénessel* érte el a kvantum információelmélet területén, majd *Molnár Lajos* hatására figyelme a megőrzési problémák felé fordult. Első közös cikkükben karakterizálták az Einstein giro-csoport folytonos algebrai endomorfizmusait: megmutatták, hogy minden ilyen endomorfizmus a háromdimenziós euklideszi tér egy ortogonális transzformációjából származik. Később *Gehér György Pállal* és *Titkos Tamással* egy valószínűségi mértékek tereivel kapcsolatos speciális megőrzési problémát, nevezetesen p-Wasserstein terek izometriáit és izometrikus beágyazásait kezdték vizsgálni. Kiemelkedőek a Transactions of the American Mathematical Society-ban és a Journal of the London Mathematical Society-ben közölt eredményeik, amelyekben a számegyenesre és a kompakt intervallumra épített p-Wasserstein terek rigiditását vizsgálták. Régóta nyitott kérdés volt, hogy egy teljes szeparábilis metrikus térre épített 2-Wasserstein térnek lehetnek-e tömeghasító izometriái. Virosztek és szerzőtársai megmutatták, hogy ilyen p-Wasserstein teret nem csak $p = 2$, hanem minden $p \geq 1$-re lehet konsturáulni, ám $p < 1$ esetén ilyen egzotikus p-Wasserstein tér nem létezhet.

Virosztek Dániel jelentős eredményeket ért el a (kvantum) Bregman- és Jensen-divergenciak elméletben is, ezek közül kiemelkedik Lamberti egy több mint tíz éves sejtésének bizonyítása. Az Advances in Mathematicsban közölt cikkben bebizonyította, hogy a kvantum Jensen-Shannon divergencia négyzetgyöke egy valódi metrika a pozitív mátrixok kúpján.

Az MTA 2003-ban a magyar matematika kiemelkedő alakja emlékének méltó megörökítésére **Gyires Béla-díj** alapítását határozta el. A díjat kétévente ítélik oda a matematikában, elsősorban a Gyires Béla által művelt tudományágak és annak alkalmazásai területén elért kimagasló tudományos eredményekért. A díjat idén *Ferenci Tamás* kapta a biostatisztikai (orvosi statisztikai) területen, azon belül különösen az orvosi statisztikai kutatások kritikus értékelése terén elért eredményei elismeréséül.

Páles Zsolt átadja a Gyires Béla-díjat Ferenci Tamásnak. (Forrás: Nagy Roland, mta.hu)

Ferenci Tamás 2013-ban szerzett doktori fokozatot az Óbudai Egyetemen, 2019-ben habilitált. Jelenleg az Óbudai Egyetem Élettani Szabályozások Kutatóközpontjának egyetemi docense és a Budapesti Corvinus Egyetem félállású egyetemi docense, emellett óraadó oktató a Semmelweis Egyetem Népegészségtani Intézetében. Tudományos eredményeit 2010-ben Mundruczó György-díjjal, 2013-ban Nyerges Gábor Díjjal, 2017-ben Kemény János-díjjal ismerték el, két alkalommal nyerte el a Markusovszky Lajos-díjat (2017 és 2021), emellett 2011-ben az év fiatal biostatisztikusának választották.

Eredményeit elsősorban biostatisztikai területen, különösen annak epidemiológiával érintkező részein érte el. Munkájának egy jelentős része a HUNVASCDATA projekthez kötődik, melynek keretében kutatótársaival együtt már majdnem egy évtizede vizsgálja a magyarországi érbetegeket és ellátásuk jellemzőit, de számos orvosi terület kutatásaiban működött közre kardiológiától a gyermekgyógyászaton át az infektológiáig. A koronavírus-járvány alatt biostatisztikusaként vett részt a védekezésben, jelenleg is az Egészségbiztonság Nemzeti Laboratórium tagja.

A matematikai területen jelentős az oktatási tevékenysége is, amelynek egy része az utóbbi években már a YouTube-csatornájához kötődik. A tudománynépszerűsítés, ismeretterjesztés területén is aktív, a védőoltásokról írt könyve már két kiadást élt meg, emellett az orvosi kutatások kritikus értékelése kapcsán a szélesebb közvélemény számára írt érvelő, vitatkozó esszéket is rendszeresen publikál (`https://www.medstat.hu/`).

A **Prékopa András-díj** a matematikában, elsősorban a Prékopa András által művelt tudományágak: az operációkutatás és az alkalmazott matematika területén elért kimagasló tudományos eredményekért ítélhető oda. Kétévente egy díj kerül átadásra, amelynek odaítélésére javaslatot tehetnek a Matematikai Tudományok Osztálya tagjai és az Osztály Matematikai Tudományos Bizottságának, Operációkutatási Tudományos Bizottságának és az Informatika- és Számítástudományi Tudományos Bizottságának tagjai. A díjat az idei évben *Deák István* kapta a Monte Carlo-módszerek, véletlenszám-generálási algoritmusok, szimulációs és numerikus módszerek vizsgálatában elért elismeréséül.

Deák István Prékopa András-díjas Páles Zsolttal (Forrás: Nagy Roland, mta.hu)

Deák István az Eötvös Loránd Tudományegyetemen szerzett egyetemi doktori, kandidátusi, majd PhD fokozatot, 2006 óta az MTA Doktora. Pályafutása során dolgozott a BME-n, a SZTAKI-ban, a Nyíregyházi Főiskolán és a Budapesti Corvinus Egyetemen, valamint olyan neves külföldi egyetemeken tanított vendégprofesszorként, mint a kanadai Dalhousie Egyetem, a Wisconsin-Madison Egyetem, a Zürichi Egyetem, és a Rutgers Egyetem. 2014 óta Corvinus Egyetem Professor Emeritusa. Munkásságát korábban Farkas Gyula díjjal (1976) és Egerváry díjjal (2020) ismerték el.

Deák Istvánnak a Monte Carlo-módszerekkel, véletlenszám-generálási algoritmusokkal, szimulációs és numerikus módszerekkel kapcsolatos eredményei között különösen nagy jelentőségűek a többdimenziós normális eloszlás eloszlásfüggvényének kiszámítására kidolgozott eljárása, valamint néhány véletlenszám-generálási algoritmusa. Fontos eredményeket ért el szukcesszív regressziós közelítéseknek a sztochasztikus programozásban való felhasználásával. Új, regresszión alapuló nemlineáris optimalizálási eljárásokat dolgozott ki, amelyek zajos függvények esetén is alkalmazhatók. Eredményeit más elméleti területeken is alkalmazták, ezek között jelentős a térfogatszámítás. Elméleti kutatási tevékenysége több területen is kapcsolódik az alkalmazásokhoz, ipari és gazdasági rendszerek nagyméretű és sztochasztikus optimalizálásával kapcsolatos kérdésekhez.

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

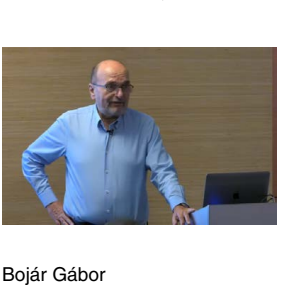
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült

Adatkezelés

Elfogadom.

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon: ›

A **GAZDA(G)SÁG** NEVET ADTUK A **GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET ROVATNAK**, AMELYBEN BEMUTATJUK, HOL, MIKÉPPEN HASZNÁLJÁK FEL A MATEMATIKÁT, MILYEN GAZDAG IS AZ A KÖR, AMELYIK ÉRINTI EZT A TUDOMÁNYÁGAT. (ROVATSZERKESZTŐK: *ILLÉS TIBOR, MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR ÉS RÖST GERGELY.*)



Bojár Gábor
2024. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matematikaoktatás – az ország valós gazdasági kitörési pontja

„Ezt a cikket elsősorban egykori cégem, a Graphisoft tapasztalatai inspirálták. Még ha nem is általánosíthatók a konklúziók, érdemes megosztani őket." *Bojár Gábor* írása a Rátz László Vándorgyűlésen 2023. július 4-én elhangzott előadás rövidített változata. Megjelent a Matematikai Lapok 2020/1. számában. Azok számára, akik nem hallották vagy még nem olvasták, az Érintőben is közöljük.

Tóth Csaba László
2024. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Vélemény „A 6 szigma statisztikai eszközei" című könyvről

„A Six Sigma egy új minőségügyi kezdeményezés, filozófia és módszertan is egyszerre. De mi is az a Hat szigma módszertan? Mi benne az új? Ez egy strukturált, egymásra épülő fázisokból (definíció, mérés, elemzés, fejlesztés és szabályozás) álló fejlesztési folyamat, amelynek fókuszában a vevői elvárás áll. A szigma alapvetően támaszkodik a matematikai statisztikára. Itt jön a képbe az elmélkedésünk témáját jelentő könyv." *Tóth Csaba László* fizikus vezet be a különleges témába.

Szerkesztő
2024. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Szilánkok a szegedi Alkalmazott Matematikai Konferenciáról

A 2024. június 3. és 5. között megtartott szegedi Alkalmazott Matematikai Konferencia bizonyította, hogy ma Magyarországon jelentős – jellemzően ipari és egészségügyi – területeken megkerülhetetlen a matematikára alapozott kutatás és a ráépülő fejlesztés. A sikeres konferencia rendkívül sok matematikai alkalmazást felvetett, közülük néhány szilánkot mutatunk be.

Copyright © BOLYAI TÁRSULAT Bolyai János Matematikai Társulat Ri Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. PANEM A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

Bojár Gábor 2024. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matematikaoktatás – az ország valós gazdasági kitörési pontja

Ezt a cikket elsősorban egykori cégem, a Graphisoft tapasztalatai inspirálták. Még ha nem is általánosíthatók a konklúziók, érdemes megosztani őket.

Minek köszönhettük az első sikereket Amerikában?

1989 elején nyitottuk meg irodánkat a kaliforniai Szilícium-völgyben. Az építésztervező szoftverünkkel elért kezdeti nyugat-európai eredmények után úgy éreztük, itt az ideje az amerikai piac meghódításának is. Tulajdonképpen fogalmunk sem volt róla, hogy mibe vágunk, ottani partnereink szerint, ha tudjuk, el sem kezdjük. Ebben az iparágban messze az amerikai cégek a legerősebbek és a hazai pályájukon versenyezni a legerősebbekkel – enyhén szólva – elég bátor vállalkozás. A legnagyobb akadály azonban az a hatalmas marketingzaj, amelyben szinte reménytelen egy kicsi európai cégnek felhívni magára a figyelmet. De a sikerhez a kitartás a mellett szerencse is kell, nekünk pedig szerencsénk volt az időzítéssel.

Alig melegedtünk meg a Szilícium-völgyben, amikor Magyarországon nagy dolog történt. Lebontottuk a vasfüggönyt, kiengedtük a keletnémeteket, ez volt az első lépés a berlini fal lebontásához és az ún. „szocialista világrendszer” összeomlásához. Ezért Magyarország kiemelt figyelmet élvezett a világban, Amerikában is. Csak illusztrációként egy kis helyi újság cikkeinek arányairól: a San Francisco öböl mentén fekvő San Mateo nevű városka (itt laktunk) helyi lapja, a San Mateo Times 20 oldalából 19 helyi hírekkel volt tele, csak az utolsó oldal foglalkozott a világ többi részével „Túl az Öblön” címmel. Ebből fél oldal még mindig Amerika többi részével, de a világ Amerikán túli részéről szóló legutolsó fél oldalon már Magyarországnak is jutott hely.

A publicitást sztorival lehet megvenni és a hazánkra irányuló figyelem közepette egy magyar cég a Szilícium-völgyben sztorinak számított. Kis irodánkban egymásnak adták a kilincset az újságírók, mi pedig boldogan és büszkén adtuk az interjúkat. Volt egy visszatérő kérdés: Hogyan lehetett mindezt elérni a vasfüggöny mögött? Hiszen nem jutottunk tőkéhez (azt sem tudtunk még, mi az), nem jutottunk a legmodernebb számítógépekhez sem (Magyarország rajta volt a modern nyugati számítógépek keleti exportját tiltó un. COCOM-listán), és útlevelet sem lehetett könnyen kapni nyugatra. Mindennek ellenére ekkor már jelentős piaci részedésünk volt Nyugat-Európában, és fél év után már az amerikai piacon is látszottunk egy kicsit. – Mi lehetett volna ebből a cégből, ha itt a Szilícium-völgyben alakul?! – szólt a költői kérdés. – Itt valószínűleg nem sikerül, ami sikerült Magyarországon – válaszoltam őszintén. Az útlevelet kisírtam a Belügyminisztériumban azzal, hogy keményvalutát hozunk az országnak; a legmodernebb PC-ket becsempésztük a Trabant csomagtartójában; és tőke sem kellett nagyon, olcsó volt még az élet itthon és megtanultunk a vevőink pénzéből élni. (Ez utóbbit egyébként melegen ajánlom a mai vállalkozóknak is.) Volt viszont egy olyan előnyünk, ami a szilícium-völgyi kezdő vállalkozóknak a legnehezebb: megszerezni a legjobb fiatal tehetségeket. Mert ott ezekért folyik a legádázabb verseny. Akik biztoságra vágynak, elmehetek egy ottani nagy sztárcéghez (Apple, Microsoft stb.), akiben pedig van kurázsi és ambíció, saját céget alapít. De ki megy el egy másik kezdő céghez, ahol nem garantált a siker? Nekünk ebben volt előnyünk itthon. A magánvállalkozások kezdetén (az idősebb olvasók talán még emlékeznek a „gmk” és a „kisszövetkezet” fogalmára) vonzónak tűnt egy ilyenhez csatlakozni, a hazai állami vállalatok nem jelentettek konkurenciát a tehetségek csábításában, a nagy nyugati cégekhez pedig nem volt még egyszerű kijutni. Amikor pedig valóban hoztunk némi kemény valutát, a Graphisoft minden munkatársa megkapta a kivételes privilégiumnak számító állandó kilépésre jogosító szolgálati útlevelet. Így könnyű volt a legjobbakat felvenni. És a legjobbak tényleg nagyon jók voltak. Mert még létezett egy magas szintű oktatás Magyarországon, Eötvös József és Klebelsberg Kunó hagyatékának maradéka, ezen belül különösen a matematikai oktatás, amit a Rákosi- és a Kádár-rendszer még nem vert szét.

Az oktatás színvonala, mint gazdasági versenyelőny

Az ún. „szoftverexport” már a hetvenes-nyolcvanas években is nagy üzlet volt, ami akkor még valójában csak szoftvermérnökök órabérben történő bérbeadását jelentette. A vevők számítástechnikai fejlesztésekkel foglalkozó nyugat-európai nagyvállatok voltak (pl. Siemens, Ericsson), a jó szoftveresekre már akkor is sokkal nagyobb volt a kereslet, mint a kínálat. Ezt az üzletet a nagyobb állami cégek és külkereskedelmi vállalatok fölözték le, de amikor a nyolcvanas évek elején megindultak a kisvállalkozások, ez is hamar a magánszférába ment át. Az ambiciózusabb kisvállalkozások pedig már nem álltak meg a szoftverfejlesztők bérbeadásánál, megkísérelték saját termékek kifejlesztését. A Graphisoft mellett komoly sikereket ért el a nyugati piacon az SZKI (Számítástechnikai Koordinációs Intézat) állami vállalatból kivált Recognita, később például a Kürt Kft, és mellettük sok kevésbé ismert, tudatosan árnyékban maradó kisvállalkozás. Köszönhettük mindezt a még mindig jó matematikai és természettudományi közoktatásnak és az erre épülő jó minőségű műszaki felsőoktatásnak.

Amikor a világpolitikai fordulat nyomán magyarként élvezett publicitást igyekeztem egy kicsit szakmai síkra terelni és a magyar műszaki tudományos eredményekre hivatkozva próbáltam cégem szakmai hátterének tekintélyt szerezni, akkor már nem jártam sikerrel. Szeretünk Nobel-díjasaink relatív nagy számával dicsekedni, de arról szemérmesen hallgatunk, hogy nagy többségük nem Magyarországon alkotta, amiért Nobel-díjat kapott, ezért nem magyarnak ismeri őket a világ, és Neumann Jánost, a számítógép egyik atyját sem magyarként tisztelik. Miután sokszor hivatkoztam rá, valaki egyszer megkérdezte, hogy miért büszkélkedem annyit vele, talán rokonom volt? Mert von Neumannt, a Princeton kutatóját, alighanem csak itthon tartjuk számon magyarként, hogy honnan jött, az Amerikában senkit sem érdekel. (Itt most csak mellékesen jegyzem meg, hogy Nobel-díjasaink többségét és Neumannt azok sem tarották magyarnak, akik a harmincas években elüldözték őket hazánkból.)

Világhírű matematikusaink nagy többségét viszont magyarként tartják számon a világban, joggal lehetünk tehát büszkék arra a matematikaoktatási hagyományra, amit a Fasori Evangélikus Gimnáziumban Neumann János és több Nobel-díjasunk tanárának neve, Rátz László tanár úr is fémjelez. Jelenlegi felsőoktatási vállalkozásom képviseletében sokat járok amerikai egyetemeken diákokat toborozni, és amikor a fogadó matematikus professzorok megtudják, hogy magyar vagyok, szinte az első kérdés, hogy mennyi az én „Erdős-számom”.(Ezt a számot Erdős professzor hálózatelméleti illusztrációként fogalmazta meg, azt fejezi ki, hogy egy matematikus a publikációit tekintve milyen távol áll tőle.) Mivel matematikai tárgyú publikációkkal nem dicsekedhetek, nekem nincs Erdős-számom, de Erdős professzort a világ matematikusai magyarként ismerik és alacsony Erdős-számukra büszkék szoktak lenni. Egy másik jellemző példával találkoztam a Columbia Universityn, ahol egy fiatal matematikus, Julianna Stockton (leánykori neve Connelly, tehát nincs magyar kötődése) a magyar matematikaoktatás titkairól írta PhD dolgozatát. Ugyanezektől a professzoroktól hallottam egy másik színes történetet a magyar matematika tiszteletéről. Még a múlt század első felében a Princeton Universityn egy Harold W. Kuhn nevű matematikus az un. „optimális hozzárendelési probléma” megoldásán dolgozott. Véletlenül felfigyelt egy magyar nyelvű matematikai publikációban a képletekre, ezekből látta, hogy a cikk szerzője, Egerváry Jenő is ezen a problémán dolgozik, sőt, mintha meg is oldotta volna. Gyorsan megtanult valamennyire magyarul, hogy megértse az egész cikket, és valóban, Egerváry megoldotta a problémát, a megoldást azóta is „Hungarian Method” néven ismerik a világban. De hogy ne menjek ennyire messzire, az eredetileg geometriai oktatási segédeszközként megalkotott, és a világ máig legsikeresebb logikai játékáról, a Rubik-kockáról is azt tartják, hogy azt csak magyarok találhatták fel.

Honnan eredhet mindez?

Sokak szerint nyelvünk sajátos, az indoeurópai nyelvektől eltérő szerkezete segíti a matematikai gondolkodást. Ehhez nem tudok hozzászólni, én inkább történelmi okokat vélek látni. Egy gyerekkori élményemet idézném. Hatévesen kezdtem az általános iskolát és két hét után nagyapám megkérdezte, jó vagyok-e számtanból. Jó voltam, de miért fontosabb ez, mint más, kérdeztem vissza. Mert kétszer kettő az oroszoknak és a németeknek is négy, válaszolta két világháborút és két megszállást túlélt nagyapám. Ezért gondolom, hogy a matematika tisztelete talán a túlélését segíthette viharos történelmünk sok különböző kultúrájú nagyhatalmának megszállása során.

Mivel az informatika alapja a matematika, ennek köszönhettük, hogy a magyar programozók keresettek lettek. A rendszerváltás után pedig már nemcsak a programozóinkat keresték az informatikai világcégek, hanem kutató-fejlesztő központokat telepítettek Magyarországra. Így lett Budapesten az Ericsson egyik legnagyobb fejlesztő központja, és ha csak szűkebb környezetemben, a Graphisoft Parkban nézek körül, ott is sok nagy világcég kutató-fejlesztő központját találjuk. Több mint ezer szoftverfejlesztőt foglalkoztat nálunk Európa legnagyobb szoftver óriása, a német SAP, és 1998 óta nálunk van a világ legnagyobb szoftvergigásza, a Microsoft magyarországi vállalata is. A közel száz informatikai kis- és nagyobb vállalkozás között a Graphisoft Parkban működik a digitális filmgyártásának technológiát fejlesztő és Hollywoodnak szállító DIGIC Pictures nevű vállalat, a félvezető fejlesztést kiszolgáló amerikai Silicon Labs, vagy Európa második legnagyobb gyógyszergyárának, a Servier-nek egyetlen Franciaországon kívüli kutató-fejlesztő központja.

A hazai alapítású és világsikert elért magyar szoftvercégek fentebb említett első generációját is újabbak követték, legismertebbek a prezentációs szoftverével a Microsofttal konkuráló Prezi, a video-streaming technológia egyik vezetője, a Ustream (ők az IBM része lettek) és a New York-i Nasdaq-on jegyzett LogMeIn. A bizalmas adatok biztonságos tárolását kínálja a világ erre érzékeny cégeinek a Tresorit, a Shapr3D nevű startup vállalkozás pedig tableteken forradalmasítja a háromdimenziós tervezést.

De miért csak ennyi?

Ezek a sikerek jól hangzanak, de a szoftveripar lehetőségeit tekintve sajnos nagyon kevesen vannak. Felmerül a kérdés, hogy miért nem valósult meg az „internet királynőjének” is hívott Esther Dyson jóslata, aki meg volt róla győződve, hogy matematikaoktatási kultúrájára építve az informatikai forradalom egyik győztese lehet a piacgazdaságra átálló Magyarország. Esther publikált először az informatikai forradalom várható társadalomátalakító hatásáról és a kilencvenes években sokat járt Magyarországon, keresve azokat a vállalkozókat, akik ezt a páratlan kincset, a matematikai kultúrát üzleti sikerré konvertálják. De miért nem valósult meg Esther Dyson álma, miért csak ilyen kevés globális bajnokot talált Magyarországon?

Sokan abban látják ennek okát, hogy műszaki-tudományos és matematikai kultúránkhoz nem társul elegendő menedzsment és üzleti tudás. Ebben is lehet valami, de azt hiszem nem ez a fő ok, idézhetném nagy világcégekben felsővezetői karriert befutott honfitársaim listáját. Az az igazi baj, hogy a kincset érő oktatási kultúránk mára elolvadt. Nemcsak a korábbi magyar sikersztorikat nem követik újabb hazai alapítású informatikai startupok ezrei, de a multik is leálltak magyarországi kutató-fejlesztő bázisaik növelésével. Megkérdezhetjük őket miért, a válasz egyértelmű: ma már nem kapják meg azokat a jól képzett szakembereket, akiket egy-két évtizede még megkaptak. Nincs utánpótlás, közvetlenül is érzékelhető az oktatás züllése.

Egy rövid kitérőt tennék, érzékeltetni, milyen hatalmas gazdasági lehetőséget hagyunk ki.

Ipar 4.0? Sokkal több!

2016-ban, a davosi Világgazdasági Fórumon hangzott el először a „Negyedik Ipari Forradalom” kifejezés, ezzel a címmel a Világgazdasági Fórum alapítója Klaus Schwab könyvet írt, és azóta elterjedt az „Ipar 4.0” megjelölés. De azt hiszem, Klaus Schwab tévedett, mint ahogy Neumann János is tévedett, amikor „gépnek” nevezte alkotását. Azt hitte, hogy gépének fő feladata a bonyolult számítások automatizálása. Hasonló tévedésben volt, mint Kolumbusz Kristóf, aki azt hitte, hogy új utat fedezett fel Indiába, és élete végéig nem tudta, hogy sokkal többet, egy új világot fedezett fel. Neumann János is csak gyorsabban és pontosabban akart számolni, nem sejtve hogy gépének legegyszerűbb műveletével, a „*compare*”-rel, két bit összehasonlításával, hogy egyeznek-e, egy új világot fedezett fel. Ez az egyszerű művelet ugyanis az alapja a *keresésnek*, tehát a digitálisan tárolt szinte végtelen méretű információtömegben bizonyos minták beazonosításának.

Klaus Schwab könyvének bevezetőjében ezt írja: „*… az új technológiai forradalom nem kevesebbet jelent, mint az emberiség átalakítását. Egy olyan forradalom kezdeténél vagyunk, amely alapvetően változtatja meg életünket, munkánkat és egymáshoz való viszonyunkat.”* Ezzel száz százalékban egyetértek. De amikor a robotokat, a drónokat, a holdraszállást, a távsebészetet, a 3D nyomtatást, az önvezető autót vagy akár a mesterséges intelligenciát sorolja az informatikai forradalom leghatásosabb termékeiként és az ipari forradalom egyes mérföldköveivel állítja párhuzamba az egész informatikai forradalmat, akkor azt hiszem félreérti a lényeget. A Google Search már eddig is sokkal jobban megváltoztatta „életünket, munkánkat és egymáshoz való viszonyunkat”, mint az önvezető autó fogja, ha elterjed végre. Ha a napjainkban zajló informatikai forradalom várható hatásának mértékét szeretnénk érzékeltetni, akkor ezt nem az ipari forradalom egyes fejezeteihez kell hasonlítanunk, hanem inkább két korábbi „informatikai forradalom” hatását érdemes nézni.

Az első nformatikai forradalom a homo sapiens által elsőként megvalósított szofisztikált *információcsere*, a tagolt *beszéd* megjelenése volt, mintegy negyven-, ötvenezer évvel ezelőtt. Ez tette képessé az embert viszonylag bonyolult szerszámok és fegyverek (kőbalta, dárda, nyíl, stb.) megalkotására, a beszéd révén tudott a hordáknál nagyobb és jobban működő törzseket megszervezni, ez tette a homo sapiens-t erősebbé minden más állatnál. Őseink azt is felismerték, hogy a megőrzött információ mennyire értékes, ezért élveztek az őskori törzsek öregjei kiemelt státuszt, mint az információ őrzői.

A következő informatikai forradalmat az *írás*, tehát az *információ tárolásának* fejlettebb módját hozta el, elérhetővé téve a generációk által felhalmozott információt időbeli és térbeli korlátok nélkül. Az írás nyomán civilizációk és birodalmak születtek. A nemzedékek gyűjtötte és írásban megőrzött információ révén a tudás kumulatívvá vált és bekövetkezett az un. „információrobbanás”, már a kétezer évvel ezelőtti alexandriai könyvtár félmilliónyi kötetét sem lehetett könnyen feldolgozni. Ez a kihívás hozta el napjaink informatikai forradalmát, a digitálisan tárolható, akár végtelen mennyiségű *információ feldolgozásának* képességét. Ez a harmadik (digitális) informatikai forradalom igazi jelentősége, és azt hiszem nem szakmai sovinizmus mondatja velem, hogy a „negyedik ipari forradalom”, vagy „Ipar 4.0” megjelölés alábecsüli napjaink forradalmának valódi súlyát.

Még nem tudhatjuk, hogy mindez hová vezet. Az egymással beszélő, összetett információt cserélő homo sapiens sem sejthette eleinte, hogy ez teszi majd képessé fegyverek magalkotására, mellyel a Föld legerősebb élőlényévé válik. A sumérok sem sejthették még, hogy a felfedezésük, az írásban megőrzött, kumulatívvá váló tudás nyomán gazdag civilizációk születnek. Mi sem tudhatjuk még, hogy hová vezet a végtelen mennyiségű információ feldolgozását megoldó harmadik informatikai forradalom, de annyit megjósolhatunk, hogy az előző kettőhöz hasonló méretű változásokhoz.

Ezt hagyjuk ki!

Mivel az informatika alapja a matematika, az informatikai forradalommal Magyarország előtt óriási lehetőség nyílt. Akár az ipari forradalmat is nézhetjük analógiaként, hogy nagy változásokkal járó időszakban hogyan tehetnek hagyományai győztessé egy nemzetet. A korábban nem túl gazdag Anglia úgy lett az ipari forradalom győztese, hogy előzőleg a nagy felfedezéseket követő gyarmatosítási versenyt nyerte meg. És a gyarmatosítási versenyben miért győzött, miért tudta legyőzni az előtte legsikeresebben gyarmatosító Spanyol birodalmat? Arra gondolok (és elnézést a képzett történészektől, ha ez túlzott egyszerűsítés), hogy talán azért, mert az angolok szigetországban élvén jobban tudtak hajózni, és volt egy kivételesen ügyes hajósuk, Francis Drake, aki legyőzte a náluk sokkal nagyobb spanyol armadát. Ehhez persze az is kellett, hogy legyen egy olyan uralkodójuk I. Erzsébet személyében, aki felismerte a lehetőséget, felismerte, hogy a nagy felfedezések után a világtengereken dől el a világ sorsa, ezért erőforrásait hajóhad építésbe fektetette.

Ma az ipari forradalomnál sokkal jelentősebb informatikai forradalomban az lehet győztes, aki világtengerek helyett a cyber-térben tud jól hajózni. A kibertér meghódítására alkalmas „hajóhad” pedig az informatika alapját jelentő matematika magas szintű oktatása. Az lehet most a győztes, akinek ebben vannak erős hagyományai. Ehhez persze az is kellene, hogy az uralkodó felismerje a lehetőséget.

Mostanában vállalkozási ismereteket oktatok fiatal vállalkozójelölteknek, és az egyik első órám arról szól, hogyan válasszunk piacot. Ne azt nézzük, hogy melyik a legjobb piac, hol van egy „rés”, amit még nem fedezett fel senki, hanem azt, hogy mi miben vagyunk jobbak versenytársainknál és ahhoz keressük meg a piacot. Nem érdemes egy nagy piacért küzdeni, ha abban mások jobbak lehetnek. Az sem baj, ha a mi tudásunkat értékelő piac nem nagy, kis piacon kisebb a tülekedés. Persze az a legjobb, ha a tudásunkat értékelő piac nagy. Magyarország a sors adományaként most kivételesen szerencsés helyzetbe került. A világ által elismert és csodált matematikai hagyományainkat a világ szoftverpiaca értékeli, ez egy nagyon nagy és növekvő piac. Ennek meghódításához csak egy dolog kell: a közoktatás és ezen belül különösen a világ csodálatát egykor joggal kiváltó matematikaioktatási kultúránk megbecsülésének helyreállítása.

Bojár Gábor, a Graphisoft CAD-szoftverfejlesztő cég és a budapesti Aquincum Institute of Technology magánegyetem alapítója

2023
RÁTZ TANÁR ÚR
ÉLETMŰDÍJ

Bojár Gábor 2023 decemberében a Rátz Tanár Úr Életműdíj átadó ünnepségén a Graphisoft képviseletében

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon:

Tóth Csaba László 2024. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Vélemény „A 6 szigma statisztikai eszközei” című könyvről

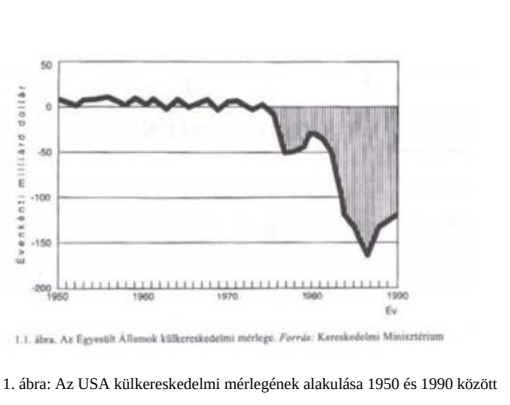
Kemény Sándor, Pusztai Éva, Lakné Komka Kinga, Deák András, Mihalovits Máté, Bodnár-Kemény Klára
A 6 szigma statisztikai eszközei
TYPOTEX

Kemény Sándor, Pusztai Éva, Lakné Komka Kinga, Deák András, Mihalovits Máté, Bodnár-Kemény Klára:

A 6 szigma statisztikai eszközei. Typotex Kiadó, 2021 (ISBN: 978-963-493-123-2)

Úgy gondoljuk, hogy bevezetésként pár szót kellene mondani arról, hogy mit is jelent a könyv címében a „6 szigma”. Magyarországon leginkább az angol elnevezés terjedt el, a „Six Sigma”, de használatos a „Hat szigma” megnevezés is.

A Six Sigma egy új minőségügyi kezdeményezés, filozófia és módszertan is egyszerre. Megszületésének időpontja 1987. január 15. Ezen a napon jelentette be a Motorola, hogy megalkotta ezt az új minőségügyi eszközt. Az mindannyiunk számára világos, hogy az ilyen korszakalkotó szellemi termékek nem jönnek létre előzmények nélkül, hanem azokat mindig valamilyen szükségszerűség hozza létre. Magam is kerestem rá a választ, és úgy gondolom, hogy a választ Tenner és DeToro könyvében [1] találtam meg, ide is illesztem a kedvenc ábrámat.



1. ábra: Az USA külkereskedelmi mérlegének alakulása 1950 és 1990 között

Az ábrán világosan látszik, hogy a 70-es évek közepéig egy enyhe pozitívummal rendelkező, kiegyensúlyozott gazdaságról van szó. Azonban ekkor pár év alatt óriási deficitet halmoztak fel. Ennek nem csak az volt az oka, hogy erős volt a dollár, hanem a fő kiváltó tényező a japán áruk – amelyek kiváló minőségűek és olcsók voltak – megjelenése volt. Ez az akkoriban a nyugatinak nevezett egész gazdaságra is igaz volt. Nem véletlenül hangzott Deming szájából 1980. június 24-én az NBC televíziós társaság műsorában a híressé vált kérdés: „If Japan can, why can’t we?” „Ha Japán tudja, mi miért nem?”

Errre a kihívásra választ kellett adni. Ilyen szempontból 1987 meghatározó esztendő volt. Lássuk mi is történt!

- Megjelenik az ISO 9000-es szabványsorozat.
- Az USA-ban megalapítják a Malcolm Baldrige-díjat.
- A Motorola bejelenti a Hat Szigma megalkotását.
- Magyarországra meghívják a japán SHIBA Shoji professzort a japán módszerek elterjesztésének megszervezéséhez.

1989-ben Európában létrehozzák az Európai Minőségmenedzsment Alapítványt (EFQM – European Foundation for Quality Management), 1991-ben megalapítják az Európai Minőségügyi Díjat, amely manapság Európai Kiválósági Díjként ismert.

A Lean Menedzsment kezdetét 1990-re szokták tenni [2], de az MIT-n már a 80-as évek közepén elindult egy autóipari kutatás (International Motor Vehicle Program) és 1988-ban Krafcik már leírta a lean szót. (A lean röviden azt jelenti, hogy az értékáramlással kell törődni, ebből a szempontból például ha valamit javítani kell, az elpocsékolt idő, a vevő nem fizeti meg.)

A fentiekből látható, hogy különféle válaszok születtek a japán kihívásra, amelyek egyike a Six Sigma.

De mi is az a Hat szigma módszertan? Mi benne az új? Ez egy strukturált, egymásra épülő fázisokból (definíció, mérés, elemzés, fejlesztés és szabályozás) álló fejlesztési folyamat, amelynek fókuszában a vevői elvárás áll. A szigma alapvetően támaszkodik a matematikai statisztikára. Itt jön a képbe az elmélkedésünk témáját jelentő könyv.

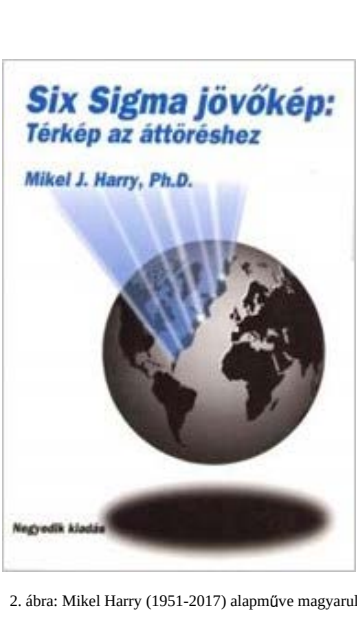
Hat szigmásnak nevezünk egy folyamatot (akár termék, akár szolgáltatás), ahol egymillió legyártott darabból mindössze 3,4 db a hibás, más szavakkal, a vizsgált paraméter szórása 12-szer fér bele a tűrésmezőbe. Vannak persze olyan termékek, ahol a milliós darabszám nem realitás (gázturbinás erőmű, villanymozdony vagy repülőgép hajtómű). Ezekre is érvényes a hat szigmás minőség, csupán átfogalmazzuk a definíciót, amely így szól: annak a valószínűsége, hogy egy termék vagy szolgáltatás elsőre megfelel a vevő igényeinek: 99,99966%.

Ez annyiban új megközelítés, hogy nem a nulla hibát helyezi a középpontba, mint Crosby [3] vagy Shingo [4], hanem megengedő 3,4 ppm (azaz milliomonként egy) kiesővel.

Jómagam 1978-ban léptem be az Egyesült Izzóba, majd onnan a Tungsramba és végül a GE Lighting Tungsram Rt-be 1989 végén. A Six Sigma 1995 őszén/telén robbant be a GE Fényforrás üzletágába, 96-ban már egy teljes szervezet foglalkozott a bevezetéssel és alkalmazással. Mi egyszerű halandók csak annyit tudtunk a Hat szigmáról, ha nem csináljuk, kirúgnak bennünket. Az nem volt világos, hogy mit kellene tennünk a munkahelyváltás elkerülése érdekében. Minden felsőfokú végzettséggel rendelkezőnek el kellett végeznie a kéthetes Zöldöves tréninget (ami nem volt olcsó, mivel ez a két hét több mint 100 ezer forintba került fejenként a vállalatnak – ezt állítólag kompenzálta a projektekből adódó megtakarítás). (Itt és az alábbiakban a tudásszint megjelölését a szokásoknak megfelelően a karatéban alkalmazott kifejezésekkel írjuk le.)

Nem volt a szívem csücske ez az új módi, de el kellett végezni a tréninget. Erre 1997 őszén került sor. A tréning a fonyódi vállalati üdülőben volt (mára porig rombolták és lakópark van a helyén). Számomra a 7-es út volt a damaszkuszi út: mire Pestre értünk, már megvolt bennem a Six Sigma szervezethez való csatlakozás igénye. De jure 1998. január elsejével lettem Black Belt (feketeöves) a szervezetben (a valódi címet csak több körös vizsgáztatás után, később kaptuk meg).

Mi volt a pálfordulás oka? A tréninget nemcsak saját embereink tartották, hanem főként műegyetemi oktatók Kemény Sándor professzor vezetésével, a könyv szerzői közül még Deák András tartott előadásokat. Rájöttem, hogy munkatársaimmal mi is hasonló módon gondolkodtunk, de kevésbé rigorózusan. Aztán ott volt a Minitab nevű szoftver, ami könnyítette és gyorsította a munkát.



2. ábra: Mikel Harry (1951-2017) alapműve magyarul

Az én feladatom a kollégák képzése volt. A tananyagnak volt egy szakfilozófiai része, azzal nem volt probléma. A vállalat lefordította a szigma egyik nagy alakjának, Mikel Harry-nak (akit mi csak a szigma pápájának nevezünk) könyvét, ez kiváló kiegészítő olvasmánynak bizonyult (2. ábra).

A könyv 1996-ban jelent meg, ezres nagyságú példányszámot nyomtattak, még olyan helyeken is találkoztam vele, ahol 100 km-es környezetben nem volt Tungsram gyár. 2001-ben már mindössze 30 példányt sikerült megtalálnom egy raktárban.

A statisztikai részek voltak a problémásak, a vállalattól kapott anyag eléggé elnagyolt volt, sok dologra nem adott magyarázatot. Így egyrészt át kellett írni a tananyagot, másrészt megfelelő magyar nyelvű irodalmat is kellett ajánlani. Ez eléggé nehéz volt, csupán néhány könyv állt rendelkezésre:

- Prékopa András: Valószínűségelmélet (1972 – 4300 példány)
- Vincze István: Statisztikai minőségellenőrzés (1958 – 1600 példány)
- Yule-Kendall: Bevezetés a statisztika elméletébe (1964 – 2100 példány)
- Ezekiel-Fox: Korreláció és regresszió analízis (1970 – 3100 példány)
- Vincze-Varbanova: Nemparaméteres matematikai statisztika (1993)
- Hajtman: Bevezetés a matematikai statisztikába pszichológusok számára (1971)

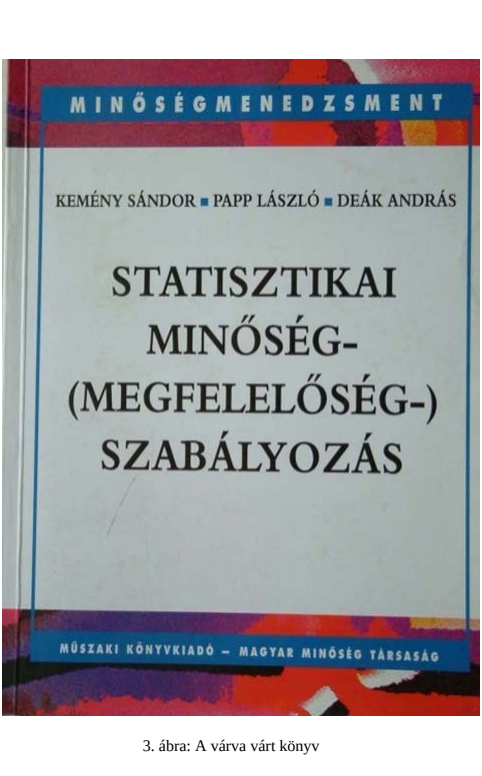
Ezek a mai napig jól használható művek, de nem a digitalizáció korában íródtak, így használatuk körültekintést kíván. Ugyanakkor az alacsony példányszámok miatt a 90-es évek közepén, végén már nem nagyon voltak elérhetőek, pedig akkoriban még nagyon sok antikvárium működött.

Létezett azonban a Kemény–Deák szerzőpárosnak a „Mérések tervezése és kiértékelése” című műve, amely két kiadást is megért (1990 és 1993). Ez bemutatja a statisztikai alapjait, a lehetséges próbákat, tárgyalja a regressziót és a kísérlettervezést is. A mű a kézi számoláson alapul, szoftverhasználat nincs benne, ugyanakkor a példákat be lehet vinni egy statisztikai szoftverbe, és máris lehet gyakorolni. Mivel nagy sikere volt a könyvnek, hamar elfogyott és nem akartak tőle megválni.

1998-ban kollégámmal együtt több mint 500 zöldövest képeztünk ki, és minden egyes csoportban felmerült egy megfelelő háttéranyag hiánya.

Mint már említettem, a hat szigma képzés egyik kritikus eleme volt a statisztikai módszerek megismertetése, hiszen ezen modulok esetén – előadótól függően – négy vagy öt napba kellett belesűríteni azt az anyagmennyiséget, amit a szakirányú egyetemi tanulmányok során minimum egy, de inkább két félév alatt kellett elsajátítani.

A hallgatók ezért érthető irodalmat követeltek, és annak bizony igazodnia kellett ahhoz, hogy nekik volt egy munkakörük, amit el kellett látni. A statisztikai ismeretek bővítésére csak a szabadidő állt rendelkezésre. A rendelkezésre álló irodalom vagy túl alacsony, vagy túl magas szintű volt, igazából egyaránt alkalmatlan. Angol nyelvű irodalom lett volna, de aki kezdő a statisztikában, az magyarul sem érti.

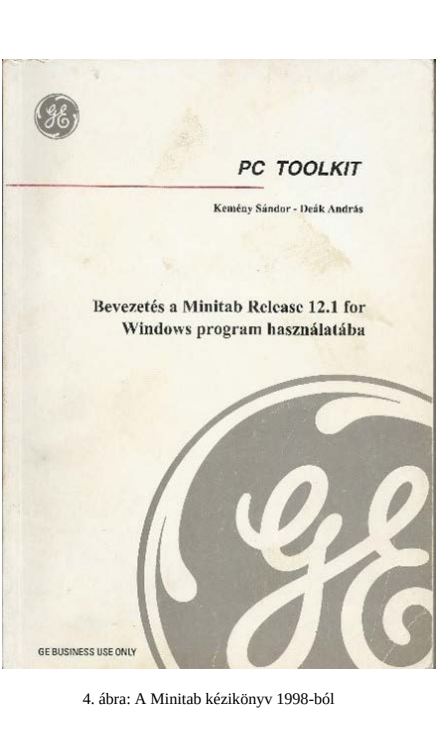

MINŐSÉGMENEDZSMENT
KEMÉNY SÁNDOR ▪ PAPP LÁSZLÓ ▪ DEÁK ANDRÁS
STATISZTIKAI MINŐSÉG-(MEGFELELŐSÉG-)SZABÁLYOZÁS
MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ – MAGYAR MINŐSÉG TÁRSASÁG

3. ábra: A várva várt könyv

Ekkor már készülőben volt Kemény Sándor, Papp László és Deák András új könyve, a „Statisztikai minőség-(megfelelőség-)szabályozás” (3. ábra). A GE Tungsram tisztában volt a fennálló problémával, ezért a könyvből előzetesen 500 példányra adta le a rendelését. 1998 végén a GE Lighting Tungsram Rt. Hat Szigma Szervezete évértékelő ülését tartotta, amelyen a jelenlévő fekete övesei (BB) és mester feketeövesei (MBB) kézhez kapták a könyvet. Rendkívüli öröm volt, hiszen Kemény Sándor és Deák András akkor már „tungsramosnak” számítottak, nagyon sok embert, köztük a BB-ket és MBB-ket, ők oktatták e tudományra.

A 3. ábra érdekessége, hogy az a második kiadást mutatja be, ugyanis az elsőnél elrontották a fedőlapot és csak Kemény Sándor neve szerepelt rajta. Természetesen az is megvolt, ott volt a gyári könyvespolcomon. Aztán egy szabadság után visszatérve már nem találtam meg.

Ebben a könyvben minden benne volt, amire egy szigmaövesnek szüksége lehet. Az alapismereteken túl megtalálhatjuk a mintavételezést, a szabályozókártyákat, a folyamatképesség-vizsgálatokat, a mérőrendszer-elemzést. A kísérlettervezésben említik a Taguchi-terveket, sőt a Shainin-módszerről is szó esik. Érthető példákkal, a kiszámolási módszerek bemutatásával, a használható szoftverek alkalmazásával kitöltötte a meglévő nagy űrt. A GE-n belül (több száz kiképzendő ember) a könyv a mindennapok részévé vált.


PC TOOLKIT
Kemény Sándor - Deák András
Bevezetés a Minitab Release 12.1 for Windows program használatába
GE BUSINESS USE ONLY

4. ábra: A Minitab kézikönyv 1998-ból

A könyvben általában a Statistica nevű szoftvert mutatják be, a GE-ben viszont a Minitabot használtuk. Ezért a Kemény–Deák szerzőpáros írt kimondottan a számunkra egy használati útmutatót (4. ábra). Ebben minden benne van, ha valaki ez alapján sem tud a szoftverben egy feladatot megoldani, akkor jobb, ha nem a derekára köti az övet. A Minitab 2024. áprilisában jelentette be, hogy kilépett a piacra a 22-es verzióval. Mivel az alapstruktúra változatlan maradt, a statisztikai eredmények és magyarázatok nem változtak, ez a 25 éves verzió – korlátozottan ugyan – még használható a munkához.

2008 után – amikor tanácsadóvá váltam – ugyancsak ezt a könyvet ajánlottam a hallgatóimnak. Voltak, akik ismerték, ők igen elismerően nyilatkoztak a használhatóságáról. Akik még nem, de a kezükbe vehették, úgy kezelték, mint a Bibliát, ebben minden fontos dolgot megtaláltak, amire napi tevékenységük során szükség volt.

2015 környékén szembesültem azzal, hogy olyan könyvet ajánlok, ami nem kapható. Magam is ellenőriztem, még előjegyzést sem vesznek fel rá. Jeleztem Kemény professzornak, újra ki kellene adni. Sanyi azt válaszolta, nem a régi lesz, hanem egy új. És lett, ezt a könyvet érhették el az érdeklődők 2021. végén.

Egy új könyvet több szempontból is lehet értékelni. Lehetnek tartalmi, alkalmazhatósági kritériumok is. Nem kívánok teljes körű áttekintést nyújtani, most elsősorban azokat az elemeket emelném ki, amelyeket egy oktató/tréner fontosnak tart.

Egyik ilyen az érthetőség. A könyv megtartotta elődeinek értékeit, közérthető, intelligens példákkal alátámasztott módon mutatja be az egyes módszereket. Aki csak a képletre, és a mögötte lévő filozófiára kíváncsi, megtalálja a számítását. Akit viszont érdekel a konkrét kiszámítás módja, az követheti az egyes példák számszerű megoldását is.

Az előd mű 400 oldal volt, a jelenlegi majdnem 600. Ez a plusz 200 oldal azonban az újdonságot jelenti. Mire volt igény a megváltozott körülmények (ne a nehézségekre gondoljunk, hanem a természetes fejlődésre) miatt? Ezek az elvárások, főként a statisztikai módszerek tekintetében már részét képezik a könyvnek. Azaz, naprakész!

Nem kívánom most részletesen tárgyalni a könyvet, csupán néhány nagyon fontos dolgot emelnék ki belőle.

Az ipari statisztikai ismeretek egymásra épülnek, és ez a folyamatos építkezés megtalálható a könyvben. Ez a mű egyik fontos erénye.

Az első részben a szerzők nagy teret szentelnek a stabilitásvizsgálat eszközének, az ellenőrző kártyáknak. Részletesen tárgyalják a klasszikus, méréses és minősítéses kártyákat, azok szerkesztését és használatát, valamint megadják ezek bírálatát is. Ismertetik a kevésbé elterjedt módszereket is, amilyen a mozgó átlag, CUSUM, EWMA kártyák. A felsorolást teljessé teszi a „Bonyolultabb méréses ellenőrző kártyák” tárgyalása. Újdonságot jelent a keverék eloszlások elemzése.

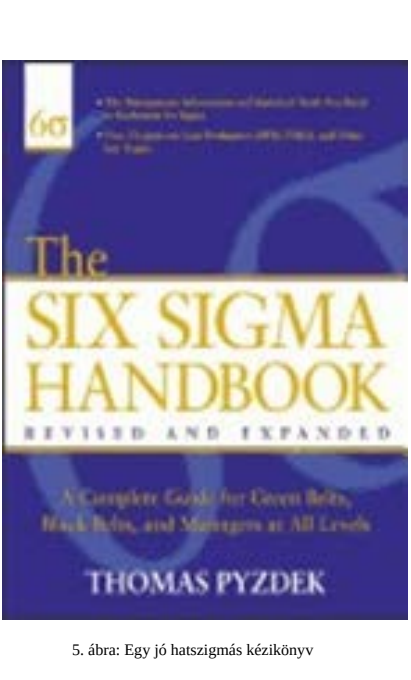
A könyv második hangsúlyos része a folyamatok megfelelőségének vizsgálata, azaz a képességvizsgálatok. Itt is először az egyszerűbb (elterjedtebb) módszert mutatják be: a képesség- és teljesítményindexek képzése, használatuk feltételei és kritikájuk. Természetesen szó esik a hatszigmások kedvelt folyamatjóság-mutatóiról (szigma-képesség, DPOMO, First Pass Yield, Rolled Throughput Yield).

A képességvizsgálatok esetén nem hagyható ki a mérőrendszerek képességvizsgálata. Az MSA témakörét érthetően, jó példákon keresztül mutatják be.

Hiánypótló a könyv mintavételes ellenőrzéssel foglalkozó része. Az eljárás elméleti alapjainak tárgyalása után a könyv ismerteti a vonatkozó szabványok használatát is.

Megállapítható, hogy bár a könyv elsősorban a gyártási folyamatok szemmel tartására ad statisztikai eszközöket, mégis részletesen tárgyalja a gyártmány/gyártás fejlesztés eszközeit is (kísérlettervezés, Taguchi- és Shainin-módszer, tűréstervezés).

2021-ben volt egy felkérésem egy nagy nemzetközi cégtől, hogy tartsak ismertetőt a Shainin-módszerről (manapság Red-X néven ismeretes). Ma hivatalosan semmit nem lehet elérni, mivel a Shainin-utód szervezet csak pénzért hajlandó bármilyen információ megadására. A Red-X a 60-as, 70-es évek „üdvöskéje” volt, még a személyi számítógépek megjelenése előtt. A módszerről volt némi fogalmam, egyes elemei valahogyan bekerültek a GE akkori szigmás anyagába is, gondosan elhallgatva a módszert megalkotó nevét. Sőt, kaptunk is egy könyvet, amit Keki Bothe Shainin-tanítvány írt. [5]. A könyv nagyon jó és hasznos, egy baja van, angolul íródott! Magyar nyelven viszont csak Kemény és mtsai korábbi könyve tárgyalta a Shainin-módszert, de az is nagy segítség volt. Akkor mindössze 7 oldal foglalkozott Shainin (érdekes és megfontolandó) eszközeivel, ez a mostani könyvben több, mint négyszeresére nőtt, köszönet érte.

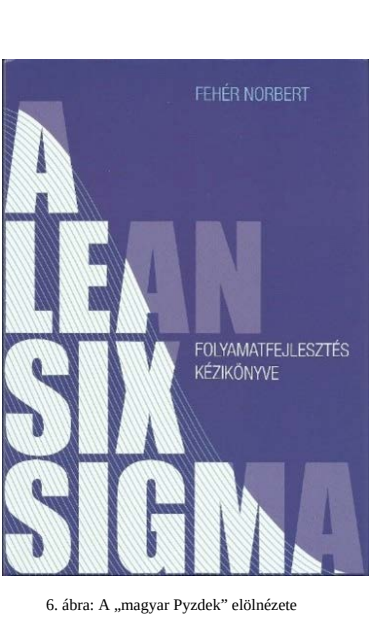

6σ
The
SIX SIGMA
HANDBOOK
REVISED AND EXPANDED
A Complete Guide for Green Belts, Black Belts, and Managers at All Levels
THOMAS PYZDEK

5. ábra: Egy jó hatszigmás kézikönyv

Kemény Sándor és munkatársainak könyve tette teljessé a magyar nyelvű hatszigmás irodalmat. Korábban említettem, hogy a kezdetekben Mikel Harry könyvéből dolgoztunk. Később már Harry is Tom Pyzdek munkáját, a Hat Szigma Kézikönyvet ajánlotta az érdeklődők figyelmébe. Az 5. ábrán a második kiadás látható.

Jelenleg a 2018-as kiadás a legújabb, de véleményem szerint a második a legjobb, mind oldalszámra, mind tartalomra. (Megjegyzés: az első kiadás elolvasás előtt elégetendő!)

Ebben minden benne van: a hat szigma infrastruktúra kiépítése, a bevezetés feltételei, a különböző színű övesektől elvárt tudás, valamint a legegyszerűbb eszközök megismertetése, ami értelemszerűen a Kemény-csapat művében nem szerepel. Szóval egy ilyen könyv nagyon hiányzott.



6. ábra: A „magyar Pyzdek” előlnézete

2018-ban aztán megjelent a „magyar Pyzdek”, Fehér Norbert személyében. Ekkor adta ki A Lean Six Sigma Kézikönyvet [6], ezt látjuk a 6. ábrán.

Fehér Norbert művében minden benne van, amire a Hat szigmának szüksége van. A statisztikai részek amerikai stílusúak, a háttérmatematikának csak a legszükségesebb részét közli, pont azt, amire egy átlagos magyar szakembernek szüksége van. Aki ennél többre vágyik, annak pedig ott van a Kemény-könyv.

Azt hiszem kiderült, hogy a mai napig elkötelezett híve vagyok a Six Sigmának, pontosabban a Harry–Pyzdek interpretációnak. Káros vadhajtások ezen a területen is megjelentek, de ezekkel nem foglalkoztam.

Mikor belekezdtem ezen ismertető megírásába, még nem gondoltam, hogy ez egyben a magyar hatszigma-élet történetének rövid összefoglalója lesz. Ahhoz, hogy a könyv fontosságát megérthessük, szükség volt arra, hogy lássuk, a kezdeti nehézségek után hová jutottunk el. Ma már minden adott arra, hogy egy vállalkozás, nagyságtól és tevékenységtől függetlenül eredményesen alkalmazza a Hat szigmát. Minden rendelkezésre áll és ami fontos, magyar nyelven. Most már csak a menedzsmenten múlik, hogy mennyire támogatja az ilyen irányú kezdeményezéseket. A halszálka-diagramban is a hal fejébe írjuk a problémát, mert attól büdösödik.

Kívánok mindenkinek jó olvasást, tanulást és nagyon sok sikert!

Tóth Csaba László okl. fizikus

Six Sigma Black Belt (GE Certified)

egyéni IIASA-Shiba minőségdíjas (2006)

Hivatkozások:

[1] Tenner-DeToro: Teljeskörű minőségmenedzsment

Műszaki Könyvkiadó 1996, ISBN: 963-16-3043-9

[2] J. F. Krafcik: Triumph of the Lean Production System

Sloan Management Review; Fall 1988; 30, 1; ABI/INFORM Global, p41

https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6889199/mod_resource/content/4/krafcik_TEXTO_INTEGRAL.pdf

[3] A nulla hiba (zéró defekt) fogalmát Phil Crosby vezette be még a 60-as évek közepén a Pershing atomrakéták gyártása kapcsán. "doing it right the first time" (DIRFT) azaz csináld jól az első alkalommal”. Részletesebben olvasható a könyveiben, például az 1979-ben megjelent „Quality is free” vagyis a minőség ingyen van.

[4] Sokan Shigeo Shingo nevéhez kötik a zéró defekt teória megjelenését, amiben van igazság, de ő a kívánt hibamentesség elérésének két útját látja, a bolondbiztos (poka yoke) és/vagy a hibaforrások ellenőrzése és kiküszöbölése, mert ezzel kiküszöbölhető a statisztikai minőség-ellenőrzés. Érdeklődőknek ajánlható Shingo könyve a „Zero Quality Control” 1986-ból, de sok hasonló mű is elérhető.

[5] Keki R. Bothe: World Class Quality. Amacom 1991, ISBN:0-8144-5053-9

[6] Fehér Norbert: A lean six sigma folyamatfejlesztés kézikönyve

CashFlowNavigátor Tanácsadó Kft., 2018. ISBN:978-615-00-0208-8

A könyv 2022-ben elnyerte a Magyar Minőség Társaság szakirodalmi díját. A szerzők képviseletében Pusztai Éva veszi át a díjat Szabó Mirtill elnökasszonytól, mellettük Balázs Péter főszerkesztő a kiadó – Typotex – részéről:

MAGYAR MINŐSÉG TÁRSASÁG

Fehér Norbert 2019-ben kapta meg a Társaság szakirodalmi díját.

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Adatkezelés Elfogadom.

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon:

Szerkesztő 2024. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Szilánkok a szegedi Alkalmazott Matematikai Konferenciáról

A 2024. június 3. és 5. között megtartott szegedi Alkalmazott Matematikai Konferencia bizonyította, hogy ma Magyarországon jelentős – jellemzően ipari és egészségügyi – területeken megkerülhetetlen a matematikára alapozott kutatás és a ráépülő fejlesztés. A számítógépek kapacitásának megsokszorozódása lehetővé tette korábban korlátozott technikák megújulását, finomítását, és evvel olyan problémák felvetését vagy megoldását, amelyekre régebben gondolni sem lehetett. A Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) négyévente rendezi meg az Alkalmazott Matematikai Konferenciát, a 2016-os alkalomról az Érintő is beszámolt (2020-ban a Covid miatt elmaradt).

A konferenciára 130 résztvevő érkezett, matematikusok, mérnökök, programozók, sőt, az orvostudomány képviselői is. Öröm volt látni, hogy a neves tapasztalt előadókon kívül nagy számban voltak fiatalok. A matematikai modellezés, a gyártásokat, vagy a pénzügyi és egyéb szolgáltatásokat előkészítő szimulációs folyamatok az utóbbi két évtizedben mindenhol előtérbe kerültek, a nagy cégek erre ma már adattudósokat alkalmaznak. Az adatvezérelt gépi tanulás és a neurális hálók a konferencián szinte minden előadásban említésre kerültek.

A kiválóan szervezett konferencia nemcsak érdekes és változatos előadásokból, de informatív poszterekből és több, aktuális témákat feszegető panelbeszélgetésből állt (nem beszélve a Hági étterem, a Városházán tartott fogadás vagy a Halászcsárda finom fogásairól).

A BJMT – a Szegedi Tudományegyetem (SZTE) Bolyai Intézetével, a Magyar Ipari és Innovációs Matematikai Hálózattal (HU-MATHS-IN) és az Egészségbiztonság Nemzeti Laboratóriummal közös – AMK2024 konferenciájának elnöke **Röst Gergely**, az SZTE Alkalmazott és Numerikus Matematika Tanszékének vezetője, az Egészségbiztonság Nemzeti Laboratórium szakmai vezetője, társelnöke **Simon L. Péter**, a BJMT főtitkára, az ELTE Matematikai Intézetének vezetője, titkára **Dénes Attila**, az SZTE Bolyai Intézetének egyetemi docense volt.

A helyi szervezőbizottság, a Bolyai Intézet munkatársai (**Marótiné Pántos Szilvia** irányításával, aki hol láthatóan, hol láthatatlanul mindenhol ott volt és mindent elintézett) mindent megtettek azért, hogy a résztvevők számára jól teljen el ez a három nap.

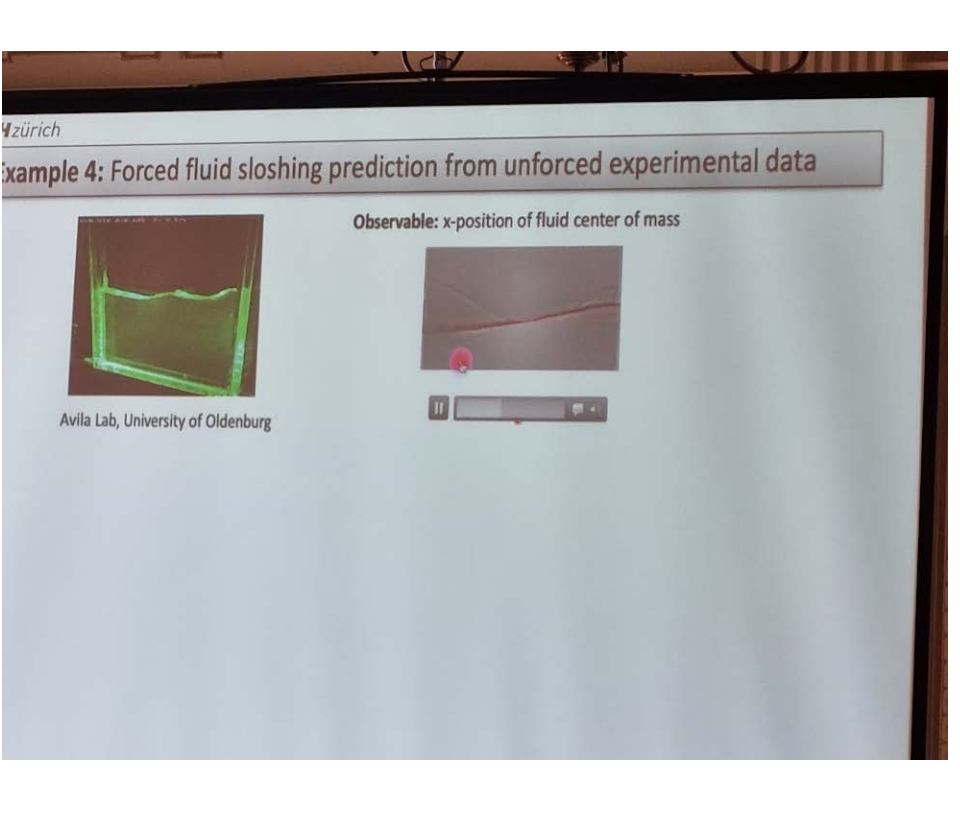
A korábbi konferenciák szervezője, **Gerencsér László**, a HUN_REN SZTAKI tudományos tanácsadója, az Alkalmazott Matematikai Lapok helyettes főszerkesztője most tiszteletbeli elnökként követte végig a háromnapos eseménysorozatot.

A plenáris előadások délelőttönként zajlottak:

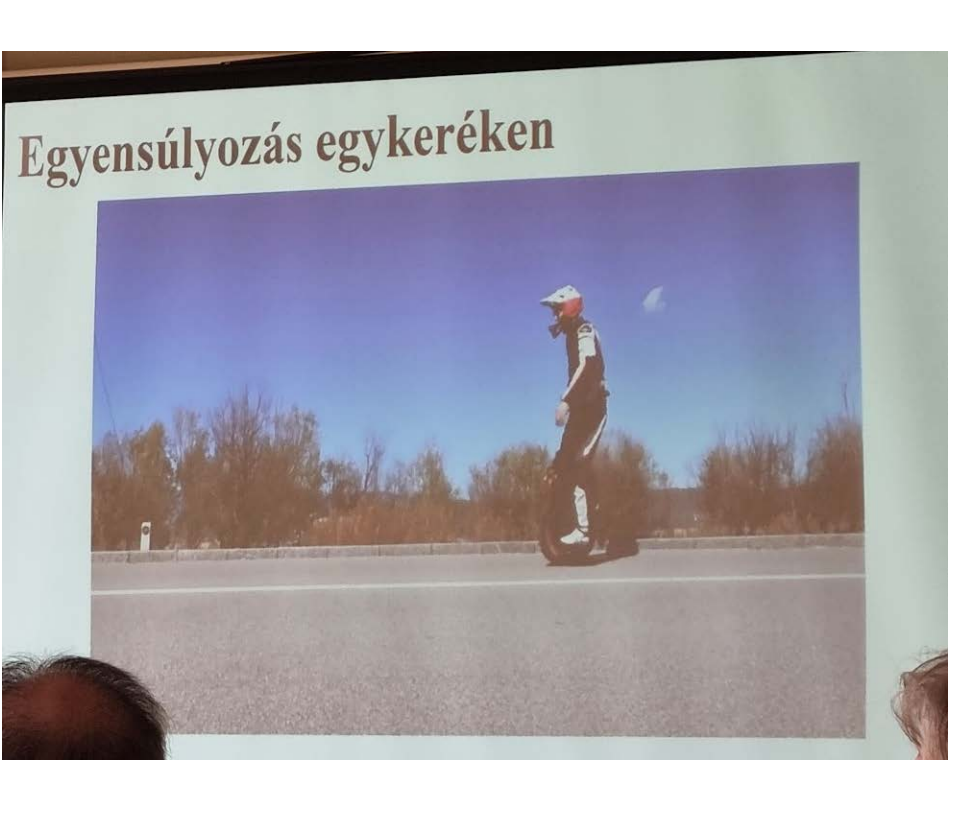
Hétfő:

Haller György, az ETH Zürich professzora: ***Nemlineáris rendszerek adatalapú modellezése***

> Többek között olyan fizikai folyamatok modellezését láthattuk, ahol gerjesztés hatására rezonancia keletkezik. Ilyen a folyadékok, például üzemanyagok „lötykölődése", vagy rugalmas lap viselkedése áramlással szemben. Ezek előrejelezhetőségét vizsgálták a zürichi kutatócsoportban.


zürich
Example 4: Forced fluid sloshing prediction from unforced experimental data
Observable: x-position of fluid center of mass
Avila Lab, University of Oldenburg

Takács Dénes (BME, Műszaki Mechanikai Intézet): ***Egyensúlyozás egykeréken***


Egyensúlyozás egykeréken

> A meghökkentő cím után érdekes, széleskörű információkhoz jutottunk Dugonics Andrásról, arról, hogy Szeged „a magyar Göttingen" és „az operátorelmélet Mekkája" elnevezéseket miként érdemelte ki. Hallhattunk klímahatások modellezéséről, a szegedi közlekedés szenzoros kameráiról, forgalomszámlálásról a Belvárosi hídon, utasszámlálásról a tram-trainen. A BME-sek modellezték autók sávtartását, 2 pótkocsival tolató teherautó mozgásának megjósolhatatlanságát és igen, a gördülő korong stacionárius mozgásai (és a bátrabbak saját tapasztalatai) alapján az elektromos egykerekű instabil rezgéseit.

Az SZTE honlapján a megnyitóról és a két plenáris előadásról szóló cikket itt találják.

Kedd:

Prószéky Gábor (HUN-REN Nyelvtudományi Kutatóközpont): ***Nyelvi képességek a MI esetében és a mi esetünkben***

> Különlegesnek számított Prószéky Gábor nyelvészeti előadása (MI és mi), amelyből képet kaptunk arról, hogyan lett a karakteres világból 300 dimenziós vektortér, hogyan lehet a ragozást, a nyelv szintaktikáját, sőt szemantikáját vektorösszeadással reprezentálni ebben a vektortérben. Milyen gondokat jelentenek a statisztika alapú módszereknek a magyar nyelv kétértelmű szavai vagy az ékezetek, és mi a különbség a nagy nyelvi alapmodellek, az LLM-ek és a magyar nyelvű új fejlesztések között, összehasonlítva a ChatGPT és a magyar PULI szövegértését illetve szövegkészítését.

Horváth Péter (HUN-REN Szegedi Biológiai Központ): ***Élet a pixelek mögött***

> Horváth Péter és munkatársai fantasztikus kutatásokat végeznek: mesterséges intelligenciát használnak sejtszegmentáláshoz, amivel például daganatos betegek számára fejlesztett gyógyszerek pontos hatását lehet meghatározni, mélytanulással analizált képekkel tudnak segíteni a gyermekkori leukémia egyéni gyógyszerezésében.

Thank you
FIDIPRO
EMBO

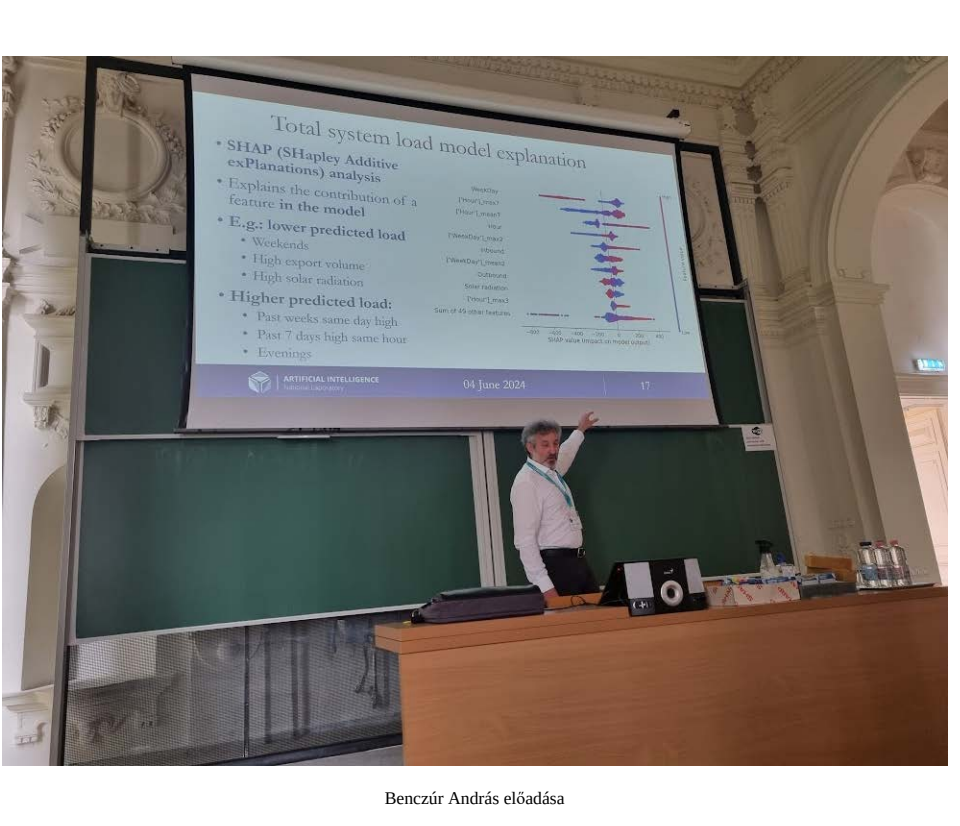
Horváth Péter előadása

Oroszi Beatrix (Semmelweis Egyetem Epidemiológiai és Surveillance Központ): ***Miért érdemes járványt modellezni?***

> Az epidemiológus a járványmatematikus társa: együtt tudnak optimális beavatkozási stratégiát kialakítani a folyamatszabályozásban. Az előadás végigvitte a hallgatóságot a Covid magyarországi történetén.

Benczúr András (HUN-REN SZTAKI, Mesterséges Intelligencia Nemzeti Laboratórium (MILAB)): ***Gépi tanulás és adatvezérelt megközelítések***

> Az iparban ma már mindenki adatot gyűjt neurális hálók tanításához, azonban minden eset kicsit más. A SZTAKI az Audival, a Bosch-sal már évek óta együttműködik, Benczúr András ezek részleteiről is elárult annyit, amennyit lehetett.


Total system load model explanation
SHAP (SHapley Additive exPlanations) analysis
Explains the contribution of a feature in the model
E.g.: lower predicted load
Weekends
High export volume
High solar radiation
Higher predicted load:
Past weeks were also high
Past 7 days high same hour
Evenings
04 June 2024

Benczúr András előadása

Szerda:

Horváth Zoltán (Széchenyi István Egyetem, Győr): ***Új európai kezdeményezések az ipari matematikában***

A Horváth Zoltánnal korábban készült interjú az Érintőben.

Takarics Béla (HUN-REN SZTAKI): ***A jövő repülőgépe***

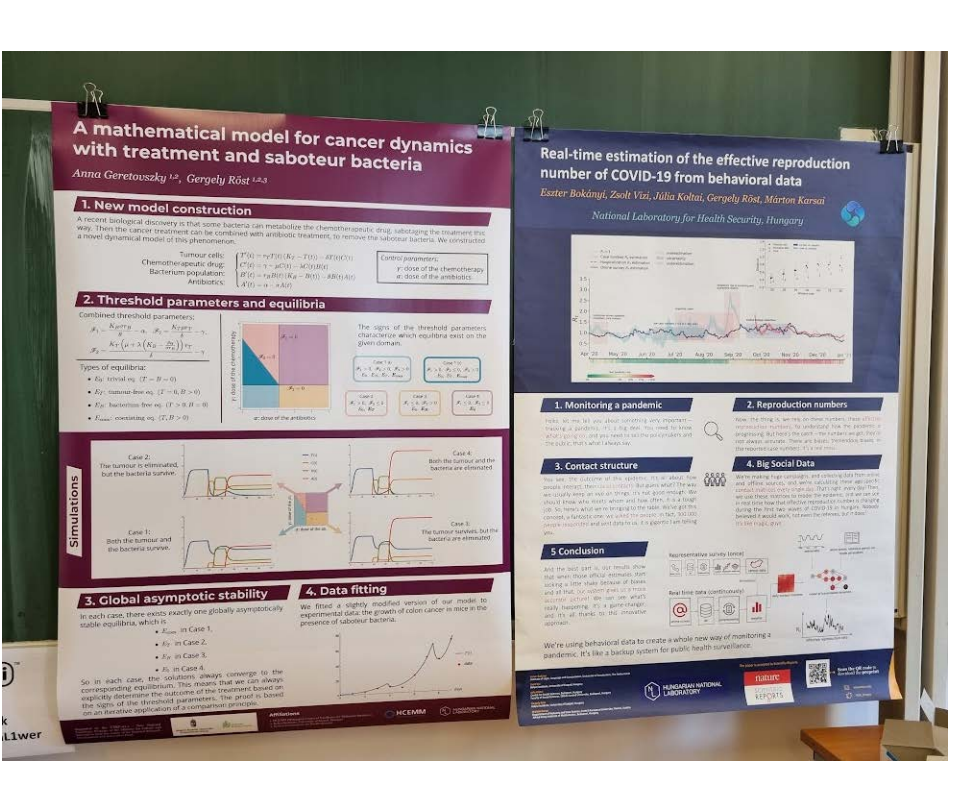
> Matematikai modellek segítségével lehet olyan repülőgépet építeni, amely egyszerre megfelel a környezetkímélés érdekében a minimális súly követelményének, és a biztonságos repülés követelményének nagy sebességű repülés esetében is.

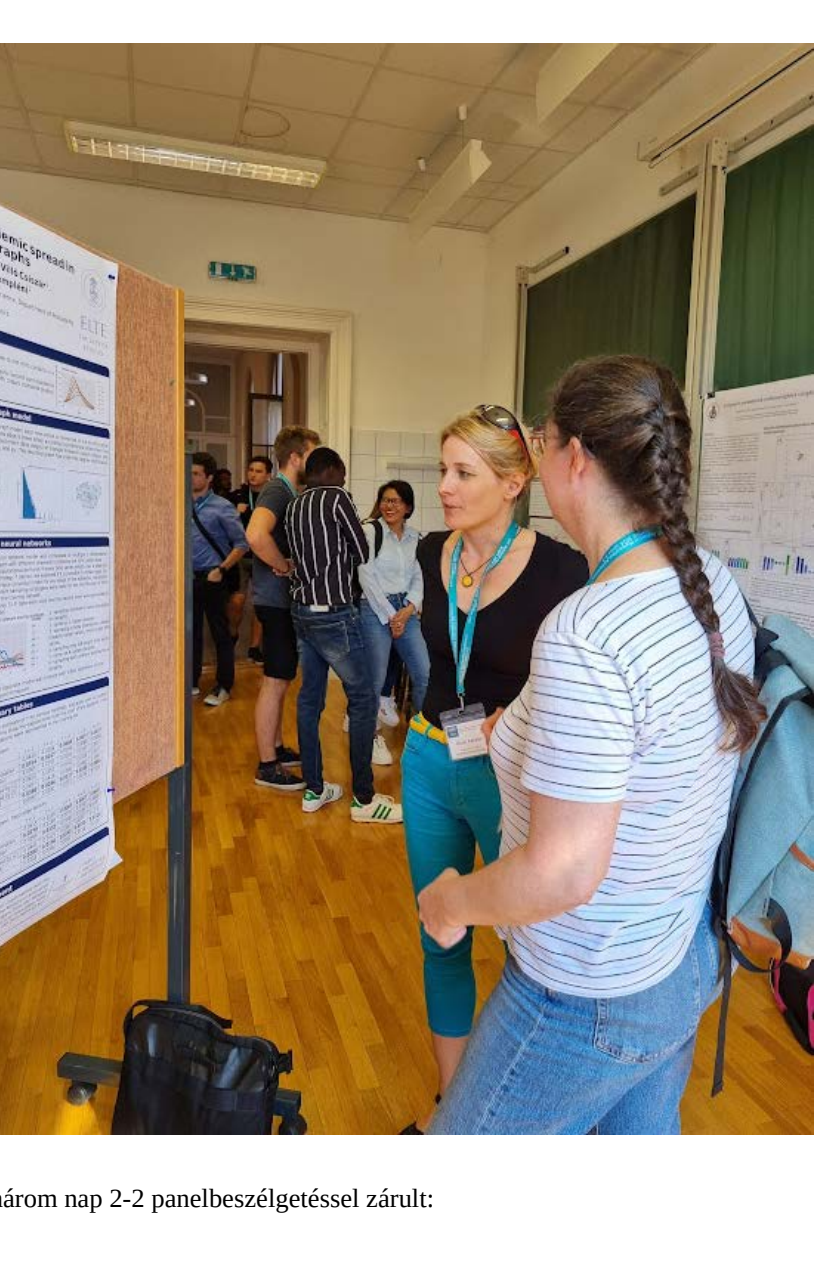
Délutánonként négy szekcióban folytak az előadások:

- Pénzügy és gazdaság
- Egészség és matematika
- Ipari matematika
- Mesterséges intelligencia (MI) és adattudomány

Itt összesen 42 előadás hangzott el a járványtan, a gyógyszerkutatás, az agykutatás, a rákkutatás, a járműipar, a vízügy, a közlekedés, az energiagazdálkodás területeiről, hogy csak néhányat említsünk.

Az első nap délutánján a kávészünettel egybekötve lehetett végignézni a fiatalabbak eredményeit bemutató posztereket.


A mathematical model for cancer dynamics with treatment and saboteur bacteria
1. New model construction
2. Threshold parameters and equilibria
3. Global asymptotic stability
4. Data fitting
Real-time estimation of the effective reproduction number of COVID-19 from behavioral data
National Laboratory for Health Security, Hungary
1. Monitoring a pandemic
2. Reproduction numbers
3. Contact structure
4. Big Social Data
5. Conclusion



Mindhárom nap 2-2 panelbeszélgetéssel zárult:

Hogyan készítsük fel a diákokat az ipari matematikai pályára?

Moderátor: **Vizi Zsolt** (SZTE Egészségbiztonság Nemzeti Laboratórium), résztvevők: **Haller György** (ETH Zürich), **Kis Tamás** (HUN-REN SZTAKI), **Kis Levente** (Bosch Magyarország).

Panelbeszélgetés a szegedi Városházán

Matematika és Szeged városa

Moderátor: **Csendes Tibor** (SZTE Informatikai Intézet), résztvevők: **Krisztin Tibor** (SZTE Bolyai Intézet, Szegedi Akadémiai Bizottság elnöke), **Nagy Sándor** (Szeged városfejlesztési alpolgármestere), **Vajda Tamás** (igazgató, Szegedi Tudományegyetem Levéltára).

> A panelbeszélgetésben, amelyben a résztvevők mindegyike a saját szakmája felől közelítette meg a szegedi matematikát, az ismertebb tudománytörténeti tudnivalókon kívül is kapott a hallgatóság egy-két érdekes történetet, eljutva a 20.század Kolozsvárától a mai Szegedig.

Matematika, mint az innováció motorja

Moderátor: **Röst Gergely** (SZTE Egészségbiztonság Nemzeti Laboratórium), résztvevők: **Bódis László** (innovációért felelős helyettes államtitkár), **Szabó Gábor** (Szegedi Tudományegyetemért Alapítvány elnöke, Magyar Innovációs Szövetség elnöke), **Simon L. Péter** (Bolyai Társulat főtitkára).

> A beszélgetés különböző szempontok mentén közelítette meg a fő problémát, amelyben mindenki egyetértett: Magyarországon egyre több matematikailag képzett szakembert igényelnek az innovációorientált szektorok, de hiába van pénz az innovációra, ha nem fejlődik a szakember-utánpótlás. Itt olvasható erről az SZTE honlapján megjelent tudósítás, ahonnan Zentai Péter fotóját is közöljük:

SZTE
SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITY OF SZEGED

Panelbeszélgetés az innovációról (Zentai Péter fotója)

Alkalmazott matematika jövője a mesterséges intelligencia tükrében

Moderátor: **Daróczy Bálint** (HUN-REN SZTAKI, MILAB), résztvevők: **Benczúr András** (HUN-REN SZTAKI, MILAB szakmai vezetője), **Jelasity Márk** (SZTE Mesterséges Intelligencia Tanszék vezetője), **Haller György** (ETH Zürich).

SZTE
SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
UNIVERSITY OF SZEGED

Alkalmazott matematika és az MI

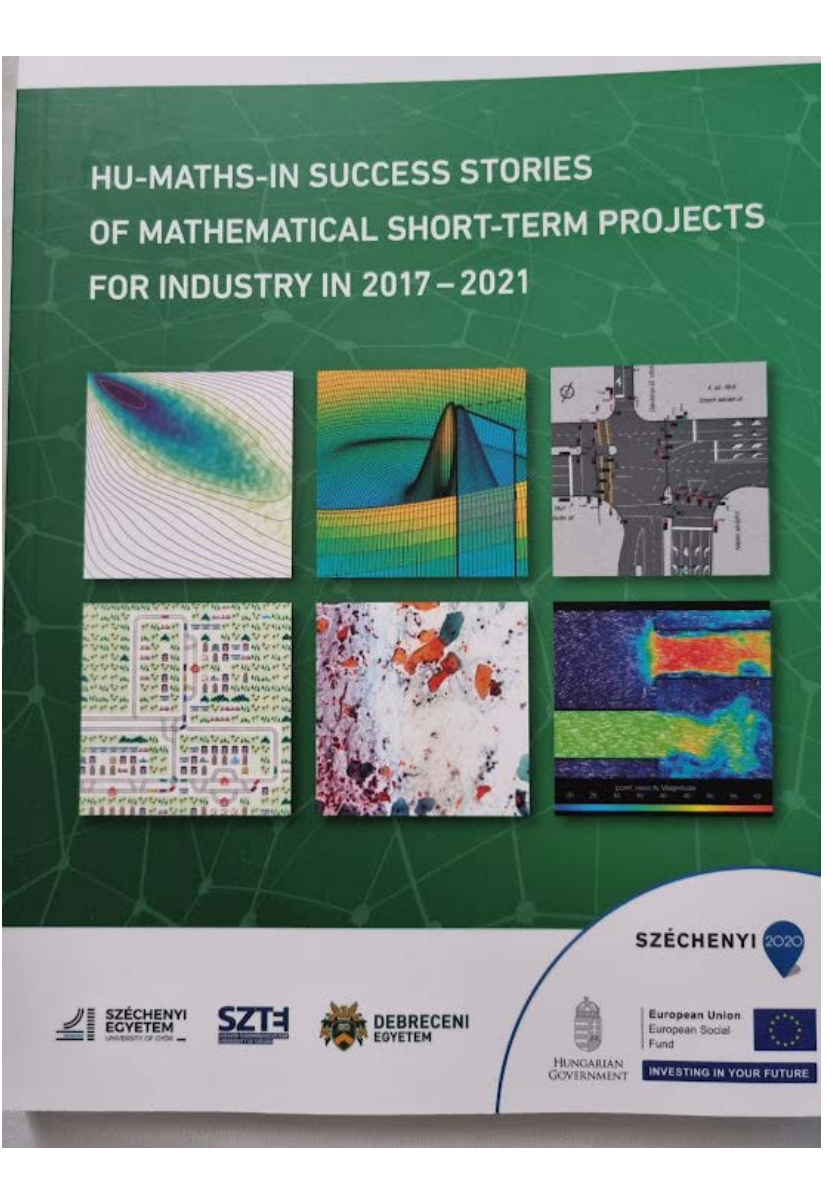
A magyar nyelvű matematikai publikációk jövője

Moderátor: **Bozóki Sándor** (Budapesti Corvinus Egyetem, Alkalmazott Matematikai Lapok felelős szerkesztője), résztvevők: **Simon L. Péter** (ELTE Matematikai Intézet igazgatója, Érintő magazin főszerkesztője, BJMT főtitkára), **Zeller Rozália** (SZTE Klebelsberg Könyvtár osztályvezető), **Gerencsér László** (SZTAKI, AML főszerkesztő-helyettese)

> A panelbeszélgetésben folyóiratunkat, az Érintőt főszerkesztőnk képviselte. Abban a résztvevők egyetértettek, hogy fontos a magyar nyelvű matematikai publikáció inkább az általános és az ismeretterjesztő szinten, a speciális szakmai témákat azonban angolul érdemes megírni és olvasni.

A sikeres konferencia rendkívül sok matematikai alkalmazást felvetett, itt csak szilánkokat tudtunk megmutatni belőlük. Reméljük, hogy sor kerülhet egy-egy kutatás részletesebb kifejtésére az Érintő későbbi számaiban.

A szerk.


HU-MATHS-IN SUCCESS STORIES
OF MATHEMATICAL SHORT-TERM PROJECTS
FOR INDUSTRY IN 2017 – 2021
SZÉCHENYI 2020
SZÉCHENYI EGYETEM
SZTE
DEBRECENI EGYETEM
HUNGARIAN GOVERNMENT
European Union
European Social Fund
INVESTING IN YOUR FUTURE

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

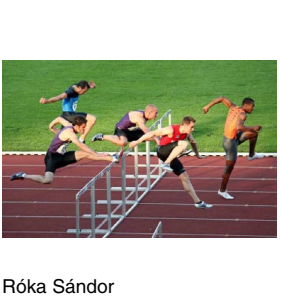
Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon: ›

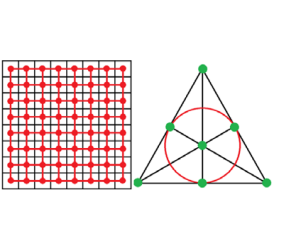
AZ ÉRINTŐ 7 ÉVES ÉVFORDULÓJÁRA ÚJ ROVAT INDULT, A **HÉTTUSA:** MINDEN LAPSZÁMUNKBAN 7 MEGOLDHATÓ ÉS BÁRKI ÁLTAL BEKÜLDHETŐ FELADATOT TESZÜNK KÖZZÉ, AMELYEKEN JÓ GONDOLKOZNI, ÉRDEKESEK, ÉS AMELYEK ÚJABB KÉRDÉSEKET, MÉLYEBB ÉS ÁLTALÁNOSABB VIZSGÁLATOKAT IS INSPIRÁLHATNAK. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÓKA SÁNDOR*.)



Róka Sándor
2024. JÚNIUS, HÉTTUSA

Beszámoló a Héttusa 4. fordulója után

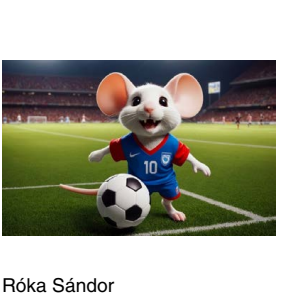
Az egy évvel ezelőtt indult Héttusa 4. alkalma után készült egy kis számvetés arról, milyen eredményt értek el a négy forduló során a versenyzők. A 4. forduló feladataira 126 helyes válasz érkezett. Az összesített verseny 32 résztvevője közül 17-en kaptak könyvjutalmat. Minden kedves olvasónkat arra biztatjuk, próbálja ki magát az 5. forduló mostani számunkban megjelenő feladatainak megoldásával. Az eddigi állás a következő.



Róka Sándor
2024. JÚNIUS, HÉTTUSA

Megoldások, megjegyzések a Héttusa 4. fordulójának feladataihoz

Az Érintő Facebook-oldalán már megjelent megoldásokat a rovatszerkesztő, *Róka Sándor* kibővítette néhány olyan megoldással és megjegyzéssel, amit a beküldőktől kapott. Ezek újabb kérdéseket, pontosításokat vagy éppen általánosításokat, számítógépes megközelítéseket mutatnak be. Érdemes áttekinteni a különböző meggondolásokat!



Róka Sándor
2024. JÚNIUS, HÉTTUSA

Héttusa 5. forduló (2024. június)

Lezárult az első 4 forduló, várjuk új versenyzőinket is! A Héttusa rovatban kitűzött feladatokra bárki küldhet megoldást. Elég a feladat kérdésére a feladatok sorszámát és a feltett kérdésekre a válaszokat megküldeni, indoklást, részletes megoldást nem szükséges írni. A beküldési határidő: **2024. július 1.** Következnek az 5. forduló feladatai.

HÍREK CIKKEI | PORTRÉ CIKKEI | TANÓRA CIKKEI | KÖNYVESPOLC CIKKEI | TUDOMÁNY CIKKEI | GAZDA(G)SÁG CIKKEI | HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon:

Róka Sándor 2024. JÚNIUS, HÉTTUSA

Beszámoló a Héttusa 4. fordulója után

A 4. forduló feladataira 20 beküldőtől 126 jó válasz érkezett.

A táblázat mutatja, hogy a beküldők mely feladatokra adtak helyes választ. (Vannak, akik a saját nevükkel szerepelnek, és vannak, akik más nevet választottak maguknak.)

A feladat sorszáma	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.
Kovach M. László	x	x	x	x	x	x	x
Makay Géza	x	x	x	x	x	x	x
Orangestripes	x	x	x	x	x	x	x
Dombi Péter	x	x	x	x	x	x	x
vukung	x	x	x	x	x	x	x
Udvari Tibor	x	x	x	x	x	x	x
Bubatov	x	x	x	x	x	x	x
Berkó Erzsébet	x	x	x	x	x	x	x
Gaizer Tamás	x	x	x	x	x	x	x
Izsák Beatrix	x	x	x	x	x	x	x
Jankó Zsuzsa	x	x	x	x	x	x	x
Turchányi Gyula (Belzebub)	x	x	x	x	x	x	x
Szemerédi Ferenc	x	x	x	x	x	x	x
D & 2d	x	x		x	x	x	x
megérek egy Petákot	x	x		x	x	x	x
Keresztvölgyi József	x	x		x	x	x	x
Emil	x	x			x	x	x
Danka Emma (diák)	x			x	x	x	x
P. Balázs	x				x	x	x
Kengyelfutó Einstein (diák)				x	x		x

Fordulónként a legjobb megoldók közül néhányan könyvjutalmat kapnak. A 4. fordulóban a jutalmazottak Keresztvölgyi József és Kengyelfutó Einstein, ők a Typotex Kiadó könyveit választották:

- Korgyemszkij: *A nyúl nem tanult matematikát*
- Róka Sándor: *Hány éves a kapitány?*

A Héttusa első négy fordulójának összesen 32 beküldője volt. A táblázat mutatja, hogy egy-egy fordulóban hány helyes válasz érkezett a beküldőktől. A versenyzők sorrendje nem rangsor, hiszen azt egyértelműen nem lehet felállítani.

Fordulók	1.	2.	3.	4.
Orangestripes	7	6	7	7
Kovach M. László	7	7	5	7
Jankó Zsuzsanna	6	6	6	7
Turchányi Gyula (Belzebub)	4	7	6	7
Makay Géza	3	7	6	7
D & 2d	4	4	7	6
Emil	7	3	6	5
Megérek egy Petákot	4	5	5	6
Keresztvölgyi József	1	2	7	6
Szemerédi Ferenc		5	6	7
Berkó Erzsébet		4	6	7
Dombi Péter			7	7
vukung			6	7
Bubatov	6			7
Udvari Tibor			6	7
Izsák Beatrix				7
Gaizer Tamás				7
P. Balázs			3	4
Ujházy Márton		6		
Beke Márton	5	2		
Nicolcescu Magdalena		4		
Saran Phosuwan	2			
Andics Mariann	2			
Danka Emma (diák)	3	5	5	5
Vaszary Krisztián (diák)	5	6	5	
Kengyelfutó Einstein (diák)			5	3
Drágos Rolland (diák)		4		
Martin-Hajdu Péter (diák)			3	
BZsófi (diák)	1	2		
Világos Olivér (diák)	1			
Grenács Áron (diák)	1			
Gombos Szabolcs (diák)	0			

A négy fordulóban összesített eredményes szereplésük alapján 17 versenyzőnek ajánlottunk könyveket jutalmul, ők ezeket a könyveket választották:

A **Typotex Kiadó** felajánlásából:

- Raymond Smullyan: *A hölgy vagy a tigris?*
- Dennis E. Shasha: *Kiberrejtvények*
- Korgyemszkij: *Piruett körzővel*
- Dobos Sándor – Reiman István: *Nemzetközi matematikai diákolimpiák (1959–2003)*
- Lovász László – Pelikán József – Vesztergombi Katalin: *Diszkrét matematika*

A **Polygon Kiadó (SZTE)** felajánlásából:

- Kosztolányi J., Makay G., Pintér K., Pintér L.: *Matematikai problémakalauz I.*
- *Dialógusok egy matematikusról* (Rényi Alfréd)
- Hajnal Péter: *Elemi kombinatorikai feladatok*
- Erdős – Surányi: *Válogatott fejezetek a számelméletből*

A **Zalamat** Kiadótól:

- Fonyó Lajos - Fonyóné Németh Ildikó: *Geometriai problémakalauz*
- Katz Sándor: *Játékos matematika*
- Schultz János: *Elemi matematika mesterfokon*

A Bolyai Társulat és a Springer közös kiadványaiból:

- Volume 10: *Contemporary Combinatorics*, 2002. Szerkesztette: B. Bollobás
- Volume 17: *Horizons of Combinatorics*, 2008. Szerkesztette: Győri, Ervin; Katona, Gyula O.H.; Lovász, László
- Volume 22: *Cylindric-like Algebras and Algebraic Logic*, 2012. Szerkesztette: H. Andréka, M. Ferenczi, I. Németi

Minden, jó megoldást beküldött versenyzőnknek gratulálunk! Hasonlóképpen szeretnénk jutalmazni a következő négy forduló legjobbjait, már ebben a fordulóban várjuk az új megoldókat is!

Róka Sándor

Copyright © BOLYAI TÁRSULAT Bolyai János Matematikai Társulat Ri Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. PANEM A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. nka Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon:

Róka Sándor 2024. JÚNIUS, HÉTTUSA

Megoldások, megjegyzések a Héttusa 4. fordulójának feladataihoz

Az Érintő Facebook-oldalán már megjelent megoldásokat a rovatszerkesztő, *Róka Sándor* kibővítette néhány olyan megoldással és megjegyzéssel, amit a beküldőktől kapott. Ezek újabb kérdéseket, pontosításokat vagy éppen általánosításokat, számítógépes megközelítéseket mutatnak be. Érdemes áttekinteni a különböző meggondolásokat!

22. Igaz-e, hogy tetszőleges a és b pozitív egészekhez van olyan c pozitív egész szám, amelyre $a\cdot c$ négyzetszám, $b\cdot c$ köbszám?

A válasz: Igaz.

Megoldás. Legyen $c=a^3\cdot b^2$. Ekkor $a\cdot c=a^4\cdot b^2=\left(a^2\cdot b\right)^2$ és $b\cdot c=a^3\cdot b^3=(a\cdot b)^3$.

Makay Géza megoldása: Legyenek $p_1, p_2, \ldots, p_k$ az a és b számok prímfelbontásában szereplő prímek, legyen

$$a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\dots\cdot p_k^{\alpha_k}$$

és

$$b=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\dots\cdot p_k^{\beta_k}.$$

Olyan c számot keresünk, amelyet ugyanezen prímtényezőkkel fel lehet írni: felesleges újabb prímet belekeverni a dologba, de előfordulhat, hogy néhány prím nem szerepel majd a c felbontásában. Ha

$$c=p_1^{\gamma_1}\cdot p_2^{\gamma_2}\cdot\dots\cdot p_k^{\gamma_k},$$

akkor a feltételek szerint $\alpha_i+\gamma_i$ osztható 2-vel és $\beta_i+\gamma_i$ osztható 3-mal minden $i=1,2,\ldots,k$ esetén. Ez könnyen elérhető, az alábbi táblázatban α_i 2-vel és β_i 3-mal való osztási maradéka alapján megadhatjuk a γ_i-t (vagy annak 6-tal való osztási maradékát), ami kielégíti a fenti feltételt:

α_i	0	0	0	1	1	1
β_i	0	1	2	0	1	2
γ_i	0	2	4	3	5	1

Megjegyzés. Diofantoszi egyenletrendszer-megoldással nemcsak négyzetszámra és köbszámra bizonyítható hasonlóan a feladat, hanem bármely két relatív prím pozitív kitevő esetére.

23. Hányféle módon lehet szétosztani 17 golyót néhány egymás után sorakozó edénybe úgy, hogy mindegyikbe legalább annyi golyót teszünk, mint amennyi az előző edényekbe összesen került? (Így például 6 golyó szétosztása eszerint a feltétel szerint 6-féleképp történhet: 1-1-4, 1-2-3, 1-5, 2-4, 3-3 és 6.)

A válasz: 36.

Megoldás. Vizsgáljuk az általános kérdést, ha n db golyót osztunk szét. A szétosztások számát jelölje $g(n)$.

6 golyó szétosztása 6-féleképpen történhet: 1-1-4, 1-2-3, 1-5, 2-4, 3-3 és 6.

7 golyó szétosztása is 6-féleképpen történhet: 1-1-5, 1-2-4, 1-6, 2-5, 3-4 és 7.

Ha 6 golyó egy-egy szétosztásánál az utolsó edénybe 1-gyel több golyót teszünk, megkapjuk 7 golyó egy alkalmas szétosztását.

A lehetőségek száma azonos, hiszen 7 golyó esetén az utolsó edénybe legalább 4 golyó, az előző edényekbe legfeljebb 3 golyó kerül, míg 6 golyó szétosztásánál az utolsó edénybe legalább 3, az előző edényekbe legfeljebb 3 golyót teszünk.

Hasonló meggondolással látható be általánosan is: $g(2n)=g(2n+1)$. 8 golyó szétosztása pedig 10-féleképpen történhet: 1-1-2-4, 1-1-6, 1-2-5, 1-3-4, 1-7, 2-2-4, 2-6, 3-5, 4-4 és 8.

Felsorolás nélkül is megkaphatjuk, hogy hányféleképpen lehet 8 golyót szétosztani. Az utolsó edénybe vagy 4, vagy legalább 5 golyó kerül.

Ha 4 golyó kerül az utolsó edénybe, akkor az előtte levő edényekbe a többi 4 golyót $g(4)$-féleképpen tudjuk szétrakni.

Ha az utolsó edénybe legalább 5 golyó kerül, abból 1-et félretéve, azokat a szétosztásokat kapjuk, mint 7 golyó esetén.

Hasonló meggondolással látható be általánosan is: $g(2n)=g(2n-1)+g(n)$.

A $g(n)$ sorozat első két tagja 1 és 2, innen a $g(2n)=g(2n-1)+g(n)$ és a $g(2n+1)=g(2n)$ összefüggésekkel rekurzív módon számíthatjuk ki a sorozat többi tagját: 1, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 10, 10, 14, 14, 20, 20, 26, 26, 36, 36, így $g(17)=36$.

Turchányi Gyula (Belzebub) megoldása:

Megjegyzés: A feladatot a zárójelben szereplő példa egyértelműsíti (tehát nem lehetnek üresen hagyott edények).

Ha egy kicsit fordítva gondolkodunk, először azt döntsük el, hogy az utolsó edénybe mennyit teszünk. Az aktuális golyószámnak legalább a felét az utolsó edénybe kell tenni. Utána a megmaradt golyóknak (ha még van) legalább a felét az utolsó előtti edénybe, és így tovább.

A következő módokon lehet a feladat szabálya szerint a golyókat elosztani – akár kézzel is könnyű előállítani, a konstrukció közben jobbról balra haladva, a feladat példájában használt jelölést alkalmazva:

17
1-16
2-15
1-1-15
3-14
1-2-14
4-13
1-3-13
2-2-13
1-1-2-13
5-12
1-4-12
2-3-12
1-1-3-12
6-11
1-5-11
2-4-11
1-1-4-11
3-3-11
1-2-3-11
7-10
1-6-10
2-5-10
1-1-5-10
3-4-10
1-2-4-10
8-9
1-7-9
2-6-9
1-1-6-9
3-5-9
1-2-5-9
4-4-9
1-3-4-9
2-2-4-9
1-1-2-4-9.

Ha nem vagyunk kíváncsiak az összes megoldásra, csak arra, hogy összesen hány megoldás létezik, akkor egyszerűbben is számolhatunk.

Jelölje $M(n)$ az n golyó esetén fennálló megoldások számát n golyóra, akkor ezt a fordított gondolkodást követve az alábbi képleteket kapjuk, ha bevezetjük az $M(0)=1$ értéket is (mondhatjuk, hogy 0 golyót csak egyféleképpen helyezhetünk el).

$$M(17)=M(8)+M(7)+M(6)+M(5)+M(4)+M(3)+M(2)+M(1)+M(0)$$

(kirakunk 9-et az utolsó edénybe, az előtte levőkbe $M(8)$ féle módon rakjuk be a megmaradt 8 golyót, vagy kirakunk 10-et az utolsó edénybe, az előtte levőkbe $M(8)$ -féle módon rakjuk be a megmaradt 7 golyót, és így tovább, az utolsó edénybe rakjuk az összeset). Hasonlóan folytatva

$M(8)=M(0)+M(1)+M(2)+M(3)+M(4)$,
$M(7)=M(0)+M(1)+M(2)+M(3)$,
$M(6)=M(0)+M(1)+M(2)+M(3)$,
$M(5)=M(0)+M(1)+M(2)$,
$M(4)=M(0)+M(1)+M(2)$,
$M(3)=M(0)+M(1)$,
$M(2)=M(0)+M(1)$,
$M(0)=M(1)=1$, nyilván
$M(2)=M(3)=2$, számolva
$M(4)=M(5)=4$, számolva
$M(6)=M(6)=6$, számolva
$M(8)=10$, számolva
$M(10)=10+6+6+4+4+2+2+1+1=36$.

A fenti sorozat egyébként ismert: `https://oeis.org/A018819` (Az OEIS egész számok sorozatainak online enciklopédiája.)

Ezen keresztül megtaláltam az egymást nem összelapító dobozok problémáját, amely azonos a feladattal:

https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=431e13433764bacfc36fc81a8740047eab909ae7.

Gaizer Tamás megoldása:

Tetszőleges $n\in\mathbb{N}$-re jelöljük $G(n)$-nel a feltételeknek megfelelő szétosztások számát.

Egyrészt világos, hogy $G(0)=1$ (hiszen 0 darab golyót egyetlen módon oszthatunk szét: egyetlen edénybe se teszünk semmit), másrészt az is könnyen látható, hogy $n>0$-ra a szétosztások számát az alábbi rekurzióval határozhatjuk meg:

$$G(n)=G(0)+G(1)+\cdots+G\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right).$$

A képlet magyarázata egyszerű: jelölje k az utolsó edénybe kerülő golyók számát. Mivel ennek nagyobbnak kell lennie a többi edénybe rakott golyók összegénél, $k\in\left\{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil,\ldots,n\right\}$. Nyilvánvaló, hogy tetszőleges k-ra a maradék golyókat $G(n-k)$ féleképpen oszthatjuk szét, ezért ha k befutja a $\left\{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil,\ldots,n\right\}$ halmazt, akkor $n-k$ lehetséges értékei éppen a $\left\{0,\ldots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$ halmaz elemei lesznek.

Mivel $\left\lfloor\frac{17}{2}\right\rfloor=8$, a fentiek alapján a feladat megoldásához a $G(0), G(1), \ldots, G(8)$ értékeket kell meghatároznunk, ezt az alábbi táblázatban tesszük meg (a számolást valamennyivel gyorsítja, ha kihasználjuk, hogy tetszőleges $l\in\mathbb{N}$-re $G(2l+1)=G(2l)$):

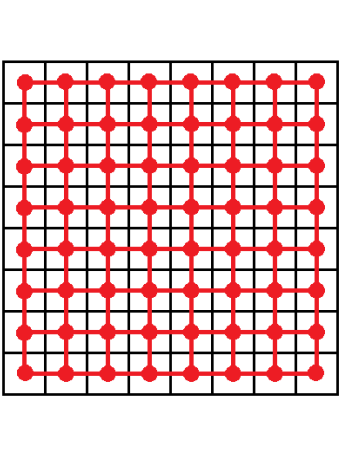
$G(0)$	$G(1)$	$G(2)$	$G(3)$	$G(4)$	$G(5)$	$G(6)$	$G(7)$	$G(8)$
1	1	2	2	4	4	6	6	10

Az előzőek szerint $G(17)$ a táblázat második sorában szereplő számok összege lesz, azaz $G(17)=36$, ennyi módon oszthatjuk szét a golyókat.

24. Zsófi bábukat rak egy üres sakktáblára. Akkor helyezhet el egy bábut egy üres mezőre, ha annak van legalább három üres oldalszomszédja. Legfeljebb hány bábut helyezhet a táblára Zsófi?

A válasz: 36.

Megoldás. A tábla mezőit jelöljük egy-egy ponttal, és ha két mező szomszédos, akkor a két pontot kössük össze szakasszal. Így a 64 pont között $2\cdot 8\cdot 7=112$ szakaszt rajzolunk.



Ha elfoglalunk egy mezőt, akkor szüntessük meg az innen induló szakaszokat. Ilyenkor legalább három szakaszt törlünk. Egy újabb bábut csak olyan mezőre tehetünk, ahonnan legalább 3 szakasz indul.

Így a négy sarokba nem tehetünk bábut. Tekintsük a legfelső sort, ebben hét vízszintes szakasz van. Ha ezekből egy bábu elhelyezésekor eltűnik egy szakasz, akkor egy másik, a közvetlen mellette levő szakasz is eltűnik, azaz a felső sorból csak kettesével tudunk szakaszt törölni, tehát a hét szakaszból egy biztosan megmarad. Ugyanez igaz a legalsó sorra, valamint a két szélső oszlop függőleges szakaszaira, azaz a széleken megmarad egy-egy szakasz.

A 112 szakaszból legfeljebb $112-4=108$ szakaszt törölhetünk. Ezért legfeljebb 36 bábut tehetünk fel, hiszen 37 bábu elhelyezésével legalább $37\cdot 3=111$ szakaszt szüntetnénk meg.

Elhelyezhetünk 36 bábut, ezt látjuk az ábrán. A táblán a számok mutatják a felhelyezés sorrendjét.

	14		18		22		
1		13		29	23	33	
	15	12	19		24		4
2		11		30	25	34	
	16	10	20		26		5
3		9		31	27	35	
	17	8	21		28		6
		7		32		36	

Megjegyzés: Sokan észrevették, hogy a feladat rokonságban van 17. feladattal, az ottani bizonyítás itt is működik.

25. Az $\{1,2,3,4,\ldots,99,100\}$ halmaz legalább kételemű részhalmazát nevezzük átlagosnak, ha a részhalmazban lévő számok átlaga (számtani közepe) egész szám. Az átlagos részhalmazok száma páros vagy páratlan?

A válasz: Páros.

Megoldás. Az átlagos részhalmazok párokba rendezhetők.

Az S átlagos részhalmazban lévő számok átlaga legyen m. Két eset lehet.

Ha $m\in S$, akkor $|S|\geq 3$, mert kételemű halmaz esetén ha az egyik elem m, nem lehet az átlag is m. Legyen az S halmaz párja: $S'=S\setminus\{m\}$. Mivel S elemeinek átlaga m volt, ezért az S' halmaz elemeinek átlaga is m lesz (ez könnyen látható), és teljesül, hogy $|S'|\geq 2$, így S' egy átlagos részhalmaz.

Ha pedig $m\notin S$, akkor az S halmaz párja: $S'=S\cup\{m\}$. Az S elemeinek átlaga m volt, ezért az S' halmaz elemeinek átlaga is m lesz.

A két párbaállítás ugyanaz, csak a szerepek cserélődnek.

Dombi Péter szép megfogalmazásában a megoldás:

Az átlagos halmazok száma mindig páros. Vegyük azt a megfeleltetést, ami az A halmazhoz hozzáveszi a μ átlagot, ha az nincs benne a halmazban, illetve törli a μ átlagelemet a halmazból, ha az benne volt. Ez egy fixpontmentes leképezés, ami párba állítja az átlagos halmazokat, tehát ezek száma páros.

Találhatunk másik megfeleltetést is, ha az $A=\{a_1,\ldots,a_k\}\subset[1,100]$ halmazhoz az $A'=\{101-a_1,\ldots,101-a_k\}$ halmazt rendelnénk, akkor az előbbihez hasonlóan ez is fixpontmentes – kölcsönösen egyértelmű – involúció, ez viszont kihasználja, hogy 101 páratlan, tehát csak páros elemszámú halmazokra működik.

Makay Géza: Erre egy rövidebb (30 soros) programot lehet írni, amivel 20 elemű halmazokig kiszámolva az összes nem üres részhalmazt, megkapjuk, hogy azok közül hány átlagos:

1, 2, 5, 8, 15, 26, 45, 76, 135, 238, 425, 768, 1399, 2570, 4761, 8856, 16567, 31138, 58733, 111164.

Természetesen ezt is megtaláltam az OEIS-en, ráadásul pontosan ugyanezzel a definícióval: A051293 (Number of nonempty subsets of $1,2,3,\ldots,n$ whose elements have an integer average). Nem tudom, szándékos volt-e a kitűző részéről, de a legalább kételemű átlagos részhalmazok száma nincs benne az OEIS-ben. Viszont az a fentiből könnyen kiszámolható, hiszen minden egyelemű részhalmaz természetesen átlagos is, vagyis a fenti számokból le kell vonni az elemek számát, hogy megkapjuk az eredményt:

0, 0, 2, 4, 10, 20, 38, 68, 126, 228, 414, 756, 1386, 2556, 4746, 8840, 16550, 31120, 58714, 111144.

Itt minden szám páros, tehát várható, hogy 100-elemű halmazra is páros lesz az eredmény.

Az OEIS nem ad sem zárt, sem rekurzív képletet a fenti sorozatra, így nem nagyon van esélyünk meghatározni a százelemű halmaz esetén az átlagos halmazok konkrét számát (túl sok van belőlük), más ötlet kell.

Turchányi Gyula (Belzebub) programot írt, amely kiszámolta az átlagos részhalmazok számát:

25 614 498 136 037 427 320 017 104 168.

(A programot kiteszi a github.com-ra.)

Keresztvölgyi József teljes indukcióval bizonyította, hogy az n-elemű halmaz ($n\geq 2$) átlagos részhalmazainak száma páros.

Izsák Beatrix utalt a KöMaL-ban 2019-ben megjelent B. 5043. feladatra (amiről a kitűző már megfeledkezett): Mutassuk meg, hogy az $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$ halmaznak páratlan sok olyan nemüres részhalmaza van, amelyben az elemek átlaga egész szám.

Az ott közölt megoldás segít itt is.

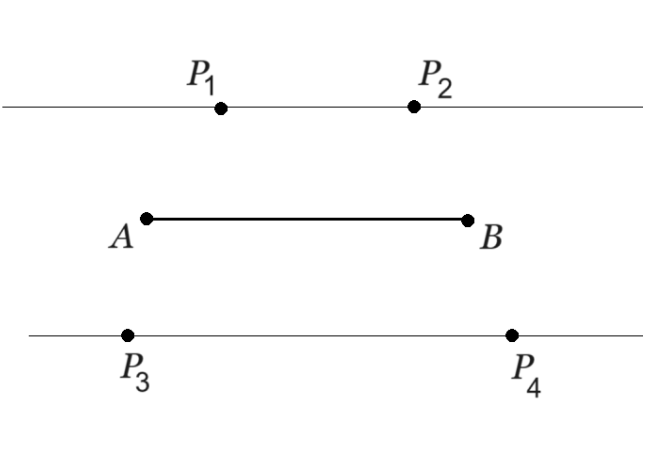
26. A síkon felvettünk 11 pontot úgy, hogy nincs közte három olyan, amely egy egyenesre esne, így bármely három pont egy háromszög csúcsait alkotja. Lehetséges-e, hogy a háromszögeknek legalább a fele ugyanakkora területű?

A válasz: Nem lehet.

Megoldás. Az ugyanakkora területű háromszögek száma legyen k.

Számoljuk meg az ugyanakkora területű háromszögek oldalait, azaz háromszögenként 3 oldalt, az eredmény $3k$.

Lehetnek olyan oldalak, amelyeket többször is számoltunk. Egy AB háromszögoldalt legfeljebb 4-szer számolhatunk, hiszen az ugyanakkora terület miatt a háromszög harmadik csúcsa az AB egyenes valamelyik oldalán fekvő AB-vel párhuzamos egyenesen lehet, ahol a párhuzamos egyenes és AB távolsága egyértelmű a terület miatt, és egy egyenesen nem lehet 3 pont.



Az AB-nek választott oldal a $\binom{11}{2}$ pontpár bármelyike lehet, ezért legfeljebb $4\cdot\binom{11}{2}=220$ háromszögoldalt számolhattunk.

$3k\leq 220$, $k\leq 73$. Az ugyanakkora területű háromszögek száma legfeljebb 73.

A 11 pont összesen $\binom{11}{3}=165$ háromszöget határoz meg, és $73<\frac{165}{2}$, így nem lehet a háromszögeknek legalább a fele ugyanakkora területű.

Turchányi Gyula (Belzebub) megjegyzi, hogy a szabályos hatszög jó példa arra, hogy 6 pont esetén még teljesül a feladat kritériuma.

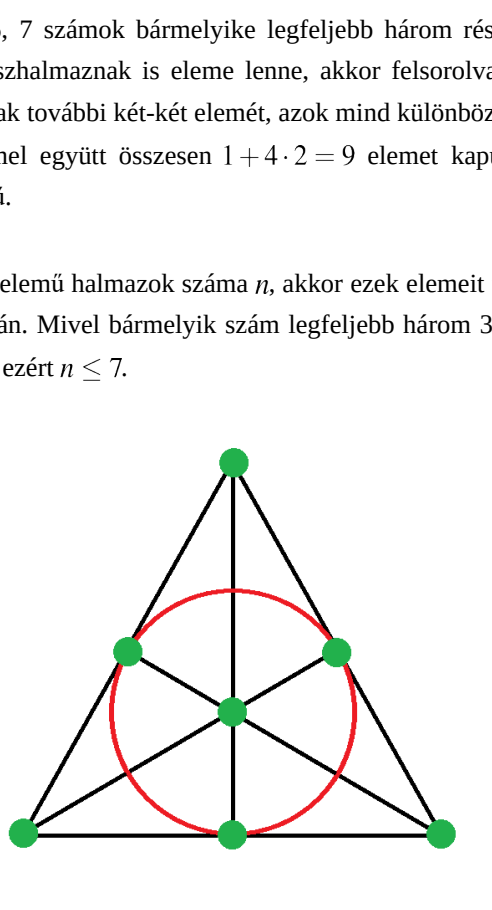
27. Egy kisvárosban 7 buszmegálló van, és néhány autóbuszjárat. Mindegyik buszjáratnak 3 buszmegállója van, és két buszjáratnak legfeljebb egy közös megállója lehet. Legfeljebb hány buszjárat lehet ebben a városban?

A válasz: 7.

Megoldás. Az a feladat, hogy az $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ halmaznak válasszuk ki a lehető legtöbb 3-elemű részhalmazát úgy, hogy bármely két részhalmaznak legfeljebb egy közös eleme legyen.

Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számok bármelyike legfeljebb három részhalmazban lehet. Hiszen ha négy részhalmaznak is eleme lenne, akkor felsorolva ennek a négy 3-elemű részhalmaznak további két-két elemét, azok mind különbözők a feltétel miatt, így a közös elemmel együtt összesen $1+4\cdot 2=9$ elemet kapunk, miközben az alaphalmaz 7-elemű.

Ha a kiválasztott 3-elemű halmazok száma n, akkor ezek elemeit felsorolva $3n$ elem szerepel ezen a listán. Mivel bármelyik szám legfeljebb három 3-elemű halmazban van, így $3n\leq 7\cdot 3$, ezért $n\leq 7$.



Van 7 ilyen részhalmaz, azaz 7 alkalmas buszjárat. Az ábrán a 7 pont a 7 megálló, a 7 buszjárat a háromszög 3 oldala, a háromszög 3 magasságvonala és a körformájú útvonal.

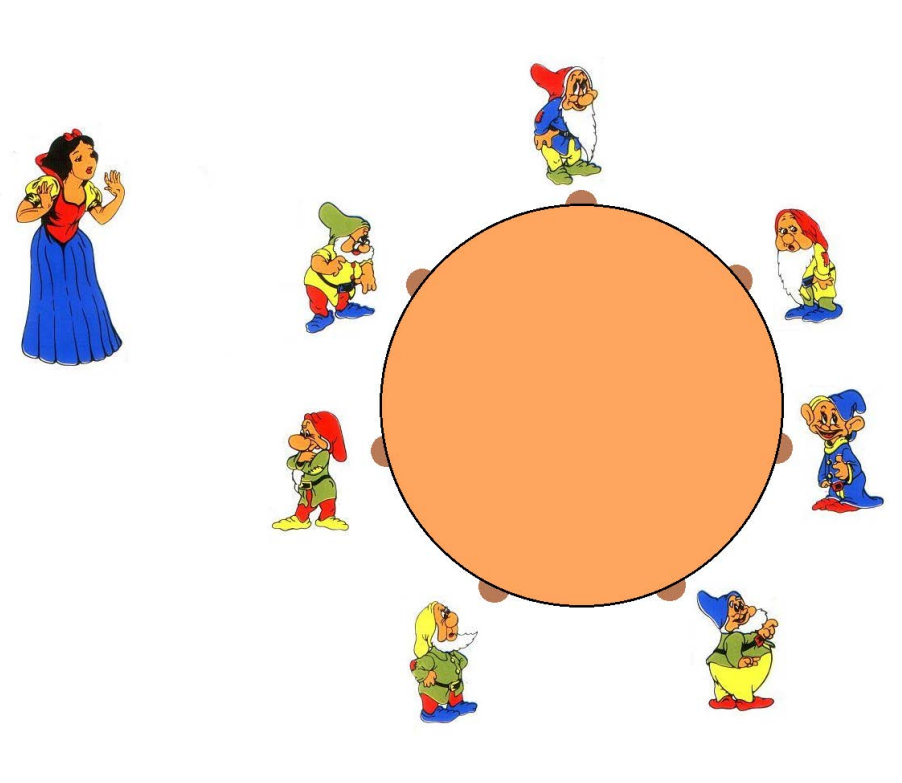
Kovach M. László elegáns megoldása:

Minden buszmegálló legfeljebb 3 járatnak lehet megállója, hiszen (járatonként) a többi 2-2 megálló különböző kell legyen. Tehát legfeljebb $(7\cdot 3)/3=7$ járat lehet.

Azt, hogy a 7 elérhető, a híres ún. Fano-sík mutatja, lásd: `https://en.wikipedia.org/wiki/Fano_plane`.

Izsák Beatrix indoklása: A 7 buszmegálló $\binom{7}{2}=21$ útszakaszt határoz meg. Minden buszjárat 3 ilyen szakaszból áll, és mivel minden szakaszhoz 2 megálló tartozik, ezért 1 szakasz csak 1 buszjárathoz tartozhat. $21/3=7$, tehát legfeljebb 7 buszjárat lehet a városban. (Ez azonban többféleképpen is lehetséges..., pl. 125, 136, 147, 234, 267, 357, 456 ahol 1-től 7-ig a számok a buszmegállókat jelölik.)

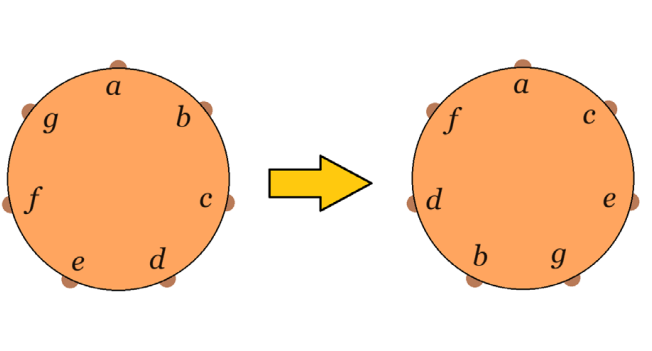
28. A hét törpe körbeüli az asztalt, és Hófehérke mindegyiknek annyi cukorkát ad, ahány hüvelyk a különbség a törpe két szomszédjának magassága között. Legfeljebb hány cukorkát oszthat szét közöttük Hófehérke, ha a törpék magassága 31, 32, 33, 34, 35, 36 és 37 hüvelyk?



A válasz: 24.

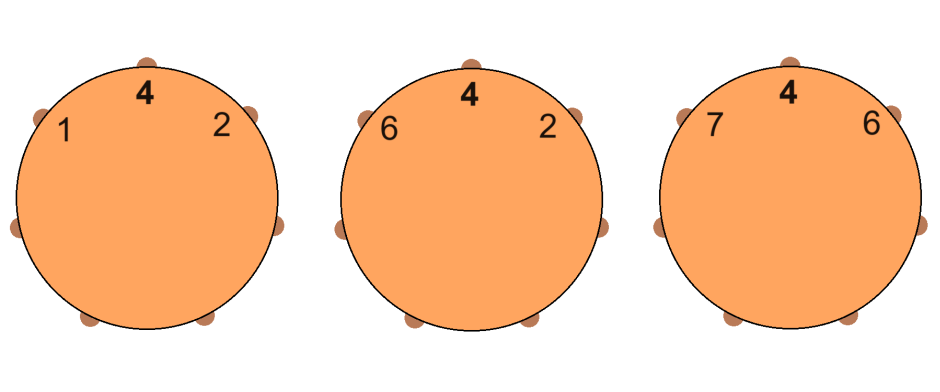
Megoldás. A 31, 32, ..., 37 számok helyett az 1, 2, ..., 7 számokat nézzük. Ez nem változtatja meg a kiosztott cukorkák számát.

Rendezzük át a hét számot az ábra szerinti új sorrendbe. Az új helyzetben a szomszédos számok különbségeit kell figyelnünk a másodszomszédos számok különbsége helyett.



Az így módosított feladat: Egy körre felírjuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számokat valamilyen sorrendbe, majd kiszámoljuk a szomszédos számok közti pozitív különbséget, és a kapott hét különbséget összeadjuk. Mekkora ennek az összegnek a legnagyobb értéke?

Válasszunk egy számot, legyen ez a 4, és nézzük meg, hogyan befolyásolja a számolt összeget. Három lehetőségre figyelhetünk: a szomszédos két szám kisebb nála; vagy az egyik nagyobb, a másik kisebb; vagy azok nagyobbak.



Amikor kiszámoljuk a szomszédos számok közti pozitív különbségek összegét, ebben a műveletsorban az 1, 2, ..., 7 számok mindegyike két különbségben szerepel.

Az ábrák szerinti helyzetekben a különbségek összegében a 4 összeadandóként $(+2)$-szer, 0-szor vagy (-2)-szer szerepel.

$\cdots+(4-1)+(4-2)+\cdots=\cdots+2\cdot 4-(1+2)+\ldots$, azaz $(+2)$-szer;

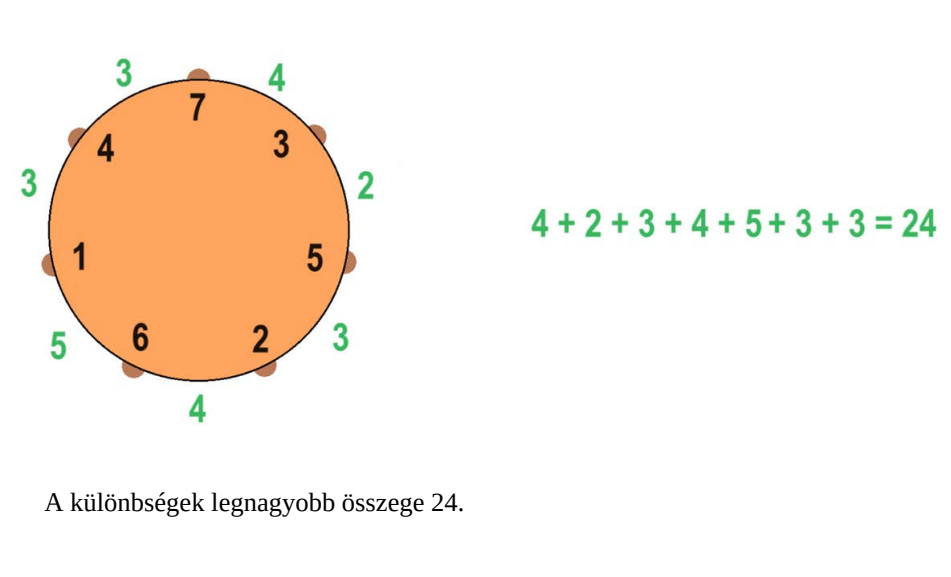
$\cdots+(6-4)+(4-2)+\cdots=\cdots+6-2+\ldots$, azaz 0-szor;

$\cdots+(7-4)+(6-4)+\cdots=\cdots+(7+6)-2\cdot 4+\ldots$, azaz (-2)-szer.

Ez mindegyik számra teljesül.

Ha az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számok közül valamelyik $(+2)$-szer szerepel, akkor ez a szám kiemelkedik, azaz nagyobb, mint a két szomszédja. Ezért nem állhat egymás mellett két kiemelkedő szám, a hét szám közül legfeljebb három szám lehet kiemelkedő. Ekkor van három olyan, alacsony szám is, amely kisebb, mint a két szomszédja. Az alacsony számok az összegben (-2)-szer szerepelnek. Amiatt, hogy az összeg értéke kevéssel csökkenjen, alacsony számoknak a kis számokat választjuk.

Így kaphatjuk meg a legnagyobb összeget, ha az 5, 6 és 7 számok kiemelkednek, közöttük vannak egyenként az alacsony számok, az 1, 2 és 3, míg a 4 bárhol lehet.



A különbségek legnagyobb összege 24.

Hófehérke legfeljebb 24 cukorkát oszthat szét a törpék között.

Róka Sándor

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon: ›

Róka Sándor 2024. JÚNIUS, HÉTTUSA

Héttusa 5. forduló (2024. június)

A Héttusa rovatban kitűzött feladatokra bárki küldhet megoldást. Elég a feladat kérdésére a feladatok sorszámát és a feltett kérdésekre a válaszokat megküldeni, indoklást, részletes megoldást nem szükséges írni.

A válaszokat a hettusa@ematlap.hu címre várjuk. A beküldési határidő: **2024. július 1.**

A verseny nyilvántartása érdekében kérjük, hogy megoldásaikat névvel vagy olyan álnévvel írják alá, amit nyilvánosan közzé tehetünk.

A határidőt követően a megoldások megjelennek a Facebook-oldalunkon. Az ezután beküldött megoldásokat nem értékeljük a versenyben. Az Érintő következő számában olvashatják a legjobb megoldók nevét és a megjegyzéseket, kiegészítéseket a megoldásokhoz.

Versenyzőinket két kategóriában jutalmazzuk: diák (általános vagy középiskolás), illetve felnőtt. Kérjük, hogy beküldéskor jelezzék, melyik kategóriában indulnak. Ha valaki ezt nem jelzi, őt a felnőttek közé soroljuk

Fordulónként a legjobb megoldók közül néhányan könyvjutalmat kapnak. A 4. forduló után az első négy forduló összesítése alapján az élmezőnynek jutalomkönyveket ajánlottunk fel. A részletesebb eredmények másik cikkünkben olvashatók.

Feladatrovatunkhoz örömmel veszünk minden segítő szándékot, várjuk új feladatjavaslataikat, valamelyik feladat szép megoldását, vagy a feladat általánosítását.

Az 5. forduló feladatai

29. Elhelyezhető-e 32 huszár a sakktáblán úgy, hogy mindegyik huszár pontosan két másikat tartson ütés alatt?

30. Lehet-e egy kocka csúcsait 8 különböző természetes számmal ellátni úgy, hogy a kocka mindegyik lapja esetén az adott lap csúcsaiban álló négy szám szorzata ugyanaz az érték legyen?

31. Egy labdarúgó-bajnokságon legalább 7 csapat indul, és bármely két csapat pontosan egy mérkőzést játszik egymással. Lehetséges-e, hogy a bajnokság győztese a régi pontozási rendszer szerint az utolsó helyen végezne?

> A mostani pontozás szerint a mérkőzés győztese 3 pontot, a vesztes 0 pontot kap, döntetlen esetén pedig 1-1 pontot kap a két csapat. A régi rendszer abban különbözik a jelenlegitől, hogy a győzelemért 3 pont helyett 2 pont jár.

32. Egy 7×7-es tábla egyik mezőjére leteszünk egy bábut. Újabb bábut akkor tehetünk valamelyik üres mezőre, ha ez a mező legfeljebb egy foglalt mezővel szomszédos. (Két mező akkor szomszédos, ha van közös oldaluk.) Legfeljebb hány bábut tehetünk a táblára?

33. Egy 12-oldalú szabályos sokszögnek legfeljebb hány átlóját tudjuk megrajzolni úgy, hogy bármelyik legfeljebb egy másikat metszhet a sokszög belsejében?

34. Pongrác, a kockafestő művész, egy kocka mindegyik lapját 49 darab egybevágó kis négyzetre osztotta, majd a kis négyzetek mindegyikét befestette pirosra, kékre vagy zöldre úgy, hogy ne legyenek azonos színű szomszédos négyzetek. (Két négyzet szomszédos, ha van közös oldala; és ez a két négyzet lehet a kocka két különböző oldallapján is.) Legkevesebb hány olyan négyzet van, amelyeket Pongrác pirosra festett?

35. Egy távoli szigeten 100 különböző korú bennszülött él. A lakosok egy része igazmondó, a többiek hazugok. Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazugok minden állítása hamis. Egyik nap a száz lakos körbeállt, és mindenki azt mondta, hogy mindkét szomszédja idősebb nála. Következő nap néhányan otthon maradtak, a többiek ismét körbeálltak, és mindegyikük azt mondta, hogy mindkét szomszédja fiatalabb nála. Legkevesebb hány bennszülött maradt otthon ezen a napon?

A feladatokat válogatta: Róka Sándor

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 32. szám 2024. június Válasszon: ›

100

Cím	Szerző
Nyári olvasni- és néznivalók	Írta: Szerkesztő
Gács András-díj a Matematikus Hangversenyen	Írta: Szerkesztő
Matek az Utcán a Matematika Világnapja (π-nap) alkalmából	Írta: Barbarics Márta
Pi-napi előadások a szegedi Bolyai Intézetben	Írta: Győrffy Lajos
Ki akar ma tanítani? – II. rész	Írta: Paulovics Zoltán
Big Five centenáriuma	Írta: Szerkesztő
Szintfelmérés a Miskolci Egyetemen	Írta: Homolya Szilvia, Rozgonyi Erika
Tehetséggondozás a szegedi Radnótiban	Írta: Ábrahám Gábor, Szaszkó-Bogárné Eckert Bernadett, Schultz János
Egy Schweitzer-feladat megoldása középiskolás eszközökkel	Írta: Szőke Tamás
Speciális másodfokú egyenletpárok	Írta: Tritz Árpád
Marguerite, a számok szerelmese	Írta: Simonovits András
Wettl Ferenc: Lineáris algebra	Írta: Ács Bernadett
A seregélyek röpte	Írta: Lente Gábor
100 éves a matematika oktatása a Debreceni Egyetemen	Írta: Varga Nóra, Vincze Csaba
Matematika a díjak hátterében	Írta: Szerkesztő
A logika szörnyei és a turbulencia	Írta: ifj. Székelyhidi László
Szilánkok a szegedi Alkalmazott Matematikai Konferenciáról	Írta: Szerkesztő
Vélemény „A 6 szigma statisztikai eszközei” című könyvről	Írta: Tóth Csaba László
Matematikaoktatás – az ország valós gazdasági kitörési pontja	Írta: Bojár Gábor
Héttusa 5. forduló (2024. június)	Írta: Róka Sándor
Megoldások, megjegyzések a Héttusa 4. fordulójának feladataihoz	Írta: Róka Sándor
Beszámoló a Héttusa 4. fordulója után	Írta: Róka Sándor

Copyright © BOLYAI TÁRSULAT Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Adatkezelés
Elfogadom.