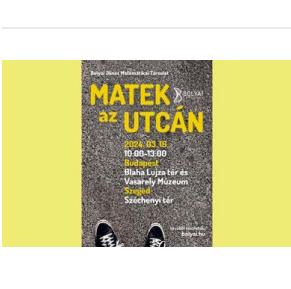
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

31. szám 2024. március



2024. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Idén is lesz „Matek az Utcán”!

A Bolyai János Matematikai Társulat a Nemzetközi π-nap (3.14 azaz március 14 – a Matematika Világnapja) alkalmából ismét „**Matek az Utcán**” rendezvényt szervez **2024. március 16-án szombaton 10-13 óráig.** Tavaly települt ki először ebben a formában a matematika az utcára, amit az ország több városában is élveztek a szervezők és a véletlenül arra járók. *Barbarics Márta* árult el néhány részletet az idei eseményről.

2024. MÁRCIUS, HÉTTUSA

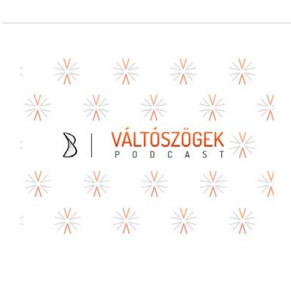
Héttusa 4. forduló (2024. március)

A Héttusa rovatban kitűzött feladatokra bárki küldhet megoldást. Elég a feladat kérdésére a feladatok sorszámát és a feltett kérdésekre a válaszokat megküldeni, indoklást, részletes megoldást nem szükséges írni. A beküldési határidő: **2024. április 8.** Következnek a 4. forduló feladatai.

2024. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Ki akar ma tanítani? – I. rész

Miért választja valaki ma a matematikatanári hivatást, és miért marad a pályán? „Egyelőre nem mondhatjuk, hogy minden könnyű és vidám, de hiszünk abban, hogy lehet ez jó, ezért próbálunk kitartani. Talán itt és most több a nehézség, mint az öröm, de megéri várni.” Hogy mik az örömök és mik a nehézségek, és mi is az Iváncsán tanító fiatal matematika-fizika szakos pedagógus pár küldetése, kiderül *Paulovics Zoltán* interjújából.



2024. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

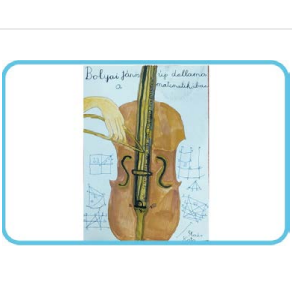
Váltószögek – podcast adás indul a matematikatanításról

„Ültessünk le beszélgetni egy idősebb matematikatanárt, aki már régóta a pályán van, és egy kezdő tanárt, aki nemrég óta él ennek a hivatásnak, és beszélgessünk velük arról, mit jelent számukra a matematikatanítás, és úgy általában ez a hivatás.” *Kosztra Gábor* ötletével és segítségével indul el áprilisban a Bolyai János Matematikai Társulat podcast sorozata.

2024. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Elveszett Bolyai-relikviák nyomában

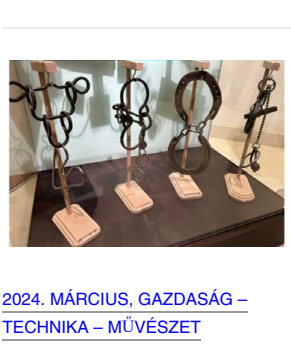
Szabó Péter Gábor kutatása *Bolyai János hegedűjének* eredt a nyomába, amelyről a szakirodalom eddig úgy tudta, hogy 120 éve elveszett. A fellelt újabb adatok alapján azonban halvány remény adódott arra, hogy egyszer talán mégis előkerülhet ez a becses Bolyai-relikvia. A szerző 2023 novemberében Szegeden az SZTE Bolyai Intézet Bolyai Emlékülésén tartott előadásának írott változatát az Érintő másodközlésben adja közre



2024. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Az APP&X alkotópályázat eredményei

A Bolyai János Matematikai Társulat APP&X matematikai alkotópályázatán 16 diákot és 12 tanárt díjaztak. A díjakat Szilágyi Áron olimpiai bajnok vívó, Kollár László, a Magyar Tudományos Akadémia főtitkára, Pálfy Péter Pál, a Bolyai Társulat elnöke és Laczkovich Miklós, az MTA rendes tagja adta át a budapesti Vasarely Múzeumban. Képünkön Staár Kata, az egyik legfiatalabb díjazott alkotása: Bolyai János új dallama a matematikában. *Szász Réka* számolt be a pályázat tapasztalatairól és eredményeiről.



2024. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Evolúciós játékelmélet Szegeden

Január 22. és 26. között Szegeden, az SZTE Bolyai Intézetben rendezték az EVOGAMESPLUS európai innovatív képzési hálózat téli iskoláját. A program négy éve alatt 15 doktorandusz képeznek ki egy széleskörű nemzetközi együttműködés keretében. A projekt központi témája az evolúciós játékelmélet és alkalmazásai az ökológia, az epidemiológia és a rákkutatás területén. Az eseményről *Garab Ábel*, a projekt egyik témavezetője készített beszámolót.

2024. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

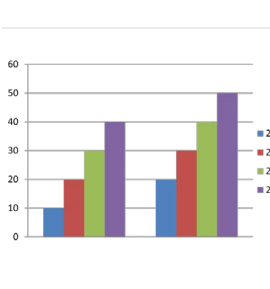
Hatszögletű inspiráció

„Először gyerekeket, tizenéveseket és felnőtteket kértem meg, hogy rakják össze a kirakót tengelyes szimmetria szerint. Mivel láttam, hogy nehezen boldogulnak, megkértem a tesztelőket, hogy az elemek elforgatásával, azaz a középpontos szimmetria szabályai szerint rakják össze. Percek alatt elkészültek.” – írja *Juhász Litza*, a budapesti Vasarely Múzeum munkatársa. „Múzeumpedagógusként nekem az a szerepem, hogy hidat építsek a látogatók és a kiállított tárgyak között. Minden csoportnál alkalmazok közös kreatív játékot kézzel fogható eszközkészletekkel. Írásom egy konkrét kézzel fogható készletet mutat be – a Hexamandala kirakót.”

2024. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Beszámoló a 2024-es RMM-ről

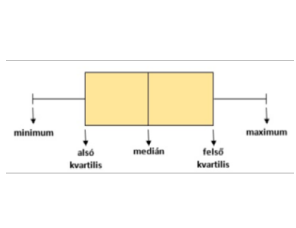
Ismét szép eredményekkel tért haza a 2024. február 26. és március 2. között 15. alkalommal megrendezett Romanian Master of Mathematics (RMM) verseny magyar csapata: Simon László aranyéremmel, Szakács Ábel bronzéremmel, Varga Boldizsár és Tarján Bernát dicsérettel, a csapatvezetők, *Lenger Dániel* és *Borbényi Márton* pedig újabb tapasztalatokkal lettek gazdagabbak.



2024. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – V. rész

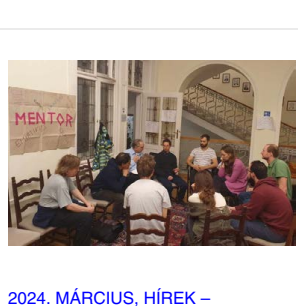
Közeledik az új követelmények szerinti érettségi, tavaly elkezdett sorozatunk 5. része is ehhez nyújt segítséget. A valószínűségszámítás és statisztika témakörben sok változás történt: új ismeretek, elvárások kerültek be mind a közép-, mind az emelt szintű követelmények közé. Ezek tanulása elengedhetetlennek tűnik ahhoz, hogy megfelelően el tudjunk igazodni a ránk zúduló adathalmazok, a sokszor manipulatív diagramok között. Csapodi Csaba cikkében ismertet néhány szükséges fogalmat és pár olyan feladatot, amelyet elképzelhetőnek tart ebben a témában az érettségin.



2024. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Mi várható a 2024. májusi érettségin?

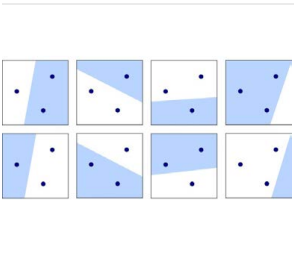
Az érettségiztető tanárok már bizonyára utánanéztek azoknak a változásoknak, amelyek a NAT2020 bevezetésével idén már az érettségi feladataiban is megjelenhetnek. Az Érintő minden tavalyi és a jelen számában is témakörönként foglalkozik a matematika érettségi követelmények változásával. *Geszler Evelin Anna*, az ELTE Matematika Doktori Iskola didaktika programjának végzős doktorandusz hallgatója a hivatalosan közölt középszintű mintafeladatok elemzésével szeretné felhívni a figyelmet a 2024-es érettségin várható újdonságokra és az elkerülendő buktatókra, valamint az általános tudnivalókra.



2024. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

DoktoriSOKK

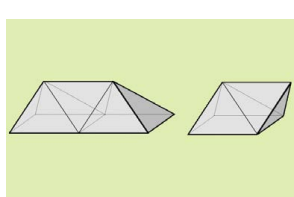
2023-ban a Bolyai János Matematikai Társulat kezdeményezésére hat rendhagyó workshop zajlott a HUN-REN Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben. A tavaszi alkalmakról Workshop rólunk, matematikusokról... címmel Tardos Zsófia írt összefoglalót. Ősszel „DoktoriSOKK workshopok” címmel folytatódott a közös gondolkodás a sokakat érintő, ELTE és BME matematikus doktori iskolákban tapasztalt nehézségekről. *Szathmári Nóra Keszthelyi Gabriella* közreműködésével számolt be a tapasztalatokról.



2024. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Statisztikus tanuláselmélet I. rész

A *mesterséges intelligencia* fogalmának meghatározására sokfajta megközelítés létezik, de abban szinte minden kutató egyetért, hogy a *gépi tanulás* a terület kulcsfontosságú módszere. Noha sok heurisztikus megoldást is használnak a gyakorlatban, a gépi tanulás elmélete mostanra gazdag múlttal rendelkezik, amelynek fontos része a *statisztikus tanuláselmélet*. *Tamás Ambrus és Csáji Balázs Csanád* a statisztikus tanuláselmélet egyik klasszikus módszerébe, a *szupport vektor gépek* elméletébe ad bevezetést.



2024. MÁRCIUS, HÉTTUSA

Megoldások, megjegyzések a Héttusa 3. fordulójának feladataihoz

2024 januárjában lezárult a Héttusa versenyének 3. fordulója is, a versenypéldák a 2023. decemberi Érintőben jelentek meg. A feladatok kitűzője néha nem is gondol olyan megoldásra, mint amit egy-egy beküldőtől kap. A megoldók időnként hasznos kiegészítésekkel, megjegyzésekkel örvendeztetik meg a rovat szerkesztőjét, *Róka Sándort*. Így történt ez a decemberben kitűzött feladatok megoldásainál is

2024. MÁRCIUS, HÉTTUSA

Mastermind, bástyák és ismerősök

A Héttusa feladatok egyik lelkes megoldója érdekes kérdéseket vet fel a legutóbbi feladatok némelyike kapcsán. Például hányféleképpen helyezhető el egy sakktáblán 56 bástya a 17. feladat feltételeivel? Mi az, ami kiszámítható számítógéppel és mi az, ami nem? A 18. feladat megoldása lényegében a Mastermind játék 4 bábuval. Milyen stratégiával működjön egy Mastermind-ot játszó program? Végül a 20. feladatnak hányféle megoldása lesz, és hogyan általánosítható? *Makay Géza* ír mindezekről a következőkben.

2024. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Imrecze Zoltánné, Ani (1923 – 2010)

Pármunka, csoportmunka, kooperatív tanulás – ma így mondanánk – természetes volt számára. Minden porcikájával, tekintetével, gesztusával, kérdéskultúrájával tanított. Aktív résztvevője az 1960-as évektől kezdődő matematikatanítási, tantervi megújulásnak, tankönyvek, tanári segédanyagok, népszerűsítő cikkek és könyvek írója, előadások, műsorok készítője volt Imrecze Zoltánné Hammer Anna. Rá emlékezik, másokat is idézve, volt tanítványa és kollégája, *Ács Katalin*, bemutatva Ani nénit

2024. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

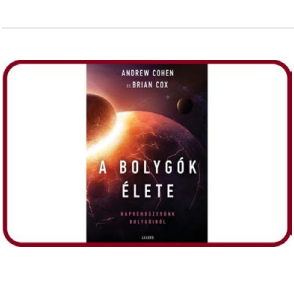
Mentál-matematika

Székely Péter két kollégájáról, *Bertalan Zoltánról* és *Berkó Erzsébetről* írt az Érintő szerkesztőségének. Azaz egy karácsonyi ünnepi matekozásról, ami szó szerint elvarázsolta őt is, és a tanítványait is. Egy különleges példa arra, hogyan lehet a játékból kiindulva megmutatni a matematikát, és arra is, hogy miféle bűvészkedésre képes néhány tanár, csak hogy elkápráztassa a diákokat. De jó, hogy van ilyen!

2024. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Paradoxonok és sportversenyek

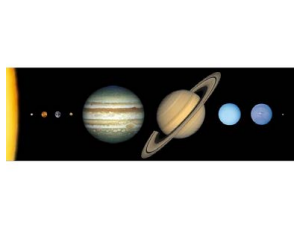
A tudomány és a futball kapcsolata nem újkeletű. Írtak már könyvet a labdarúgás és a játékelmélet, illetve a labdarúgás és a statisztika kapcsolatáról. (Az Érintőben is olvasható egy 2017-es jégkorongos cikk.) Három évvel ezelőtt angol nyelven már jelent meg *Csató Lászlónak* könyve az operációkutatás sportban történő alkalmazásairól. Most *Petróczy Dóra Gréta* ismerteti Csató László legújabb, Paradoxonok a sportversenyek szabályaiban című könyvét...



2024. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A bolygók élete

A bolygók élete a csillagászatban teljesen járatlan csillagokat csodálóknak is (és ki ne csodálná az éjszakai égbolt csillagait?) kifejezetten élvezetes olvasmány. Én magam mintha egy regényt olvastam volna, nem tudtam letenni. Az érdekfeszítő, olvasmányos stílus, a tények, az űrutazások és eredményeik ismertetésével, érthető elemzésével, az óvatos feltételezések hangsúlyozásával, a tudománytörténeti háttérrel Földön túli gondolatokat ébresztenek az olvasóban, és elgondolkodtató kérdéseket is felvetnek a Világegyetem és Naprendszerünk múltja és jövője kapcsán. A *The Planets* nagy sikerű tévésorozat ihlette mű magyar változata az Akkord Kiadónál jelent meg.



2024. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Földtudományok a Földön kívül

Fröchlich Viktória ajánlójának tárgya *Kereszturi Ákos*: Bolygótudomány című, nemrégiben megjelent kötete, amelyben az elmúlt évek, évtizedek felfedezéseinek érdekfeszítő és alapos összefoglalását olvashatjuk a planetológia, azaz a bolygótudomány egyre szerteágazóbb témakörében. A könyv elejétől végéig egzotikus, már-már scifibe illő tájakra kalauzolja olvasóit, feltételezve, hogy már rendelkeznek valamilyen alaptudással mind a csillagászat, mind a földi geológia terén, és tudásukat a Naprendszer égitestjeire is ki szeretnék terjeszteni a 21. századi űrkutatások alapján...

2024. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Matematikusok az idegösszeomlás szélén

A matematikus elme mélységeinek történelmi hátteréből emel ki néhány érdekes szemelvényt sajátos megközelítéssel *Eper Miklós* doktorandusz hallgató. Kéziratának első változata az Élet és Tudomány és a BME – Pro Progressio Alapítvány közös kutatásismertető cikkpályázatának felhívására született. Márciusban jelenik meg az Élet és Tudomány idei felhívása, amelyre ismét várják a pályázókat. De most lássuk, hogyan formálja a kutatók lelkülete a tudomány irányát...

2024. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Möbius-síkok, blokkrendszerek, Møbee játék

Tavaly év végén került piacra a Møbee nevű kártyajáték, aminek a szabálya nagyon egyszerű, egymondatos: Csapj fel három lapot a pakliból, és keresd meg azt az egyetlen figurát, amelyik mindhármon szerepel! A leggyorsabb játékos nyeri a kört. Ahhoz, hogy ilyen paklikat gyártsunk (a kiadott játék három különböző nehézségi szinthez tartozó paklit tartalmaz), érdekes kombinatorikai struktúrákra, az ún. 3-blokkrendszerekre van szükségünk. *Ruff János* egy szuper társasjáték matematikai alapjairól írt...

Molnár Lajos

2024. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Decemberi díjazottak

2023. december 14-én, a Bolyai János Matematikai Társulat rendezvényén, a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben adták át a BJMT évenként kiosztásra kerülő díjait. A Szele Tibor Emlékérmet (képünkön) *Molnár Lajos* tanszékvezető egyetemi tanárnak (SZTE Bolyai Intézete Analízis Tanszék) adta át Laczkovich Miklós, a díjbizottság elnöke. Kiemelkedő fiatal kutatóknak ítélték oda a Grünwald Géza Emlékérmet, valamint a Farkas Gyula, illetve Rényi Kató emlékdíjakat. Ezután hirdették ki a Kürschák és a Schweitzer matematikai tanulóversenyek eredményét (ez utóbbiról 2023. decemberi számunkban már beszámoltunk). A díjazottakat olvasóink is megismerhetik a most közölt jelentésekből...

A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

A **HÍREK – ÚJDONSÁGOK** ROVAT A MATEMATIKÁHOZ ÉS A BOLYAI TÁRSULATHOZ KAPCSOLÓDÓ ESEMÉNYEKRŐL, ÚJDONSÁGOKRÓL SZÓL. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÁKÓCZI ILDIKÓ.*)

Lenger Dániel, Borbényi Márton
2024. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

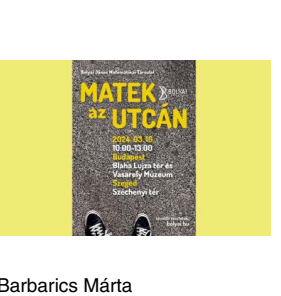
Beszámoló a 2024-es RMM-ről

Ismét szép eredményekkel tért haza a 2024. február 26. és március 2. között 15. alkalommal megrendezett Romanian Master of Mathematics (RMM) verseny magyar csapata: Simon László aranyéremmel, Szakács Ábel bronzéremmel, Varga Boldizsár és Tarján Bernát dicsérettel, a csapatvezetők, *Lenger Dániel* és *Borbényi Márton* pedig újabb tapasztalatokkal lettek gazdagabbak.

Szathmári Nóra, Keszthelyi Gabriella
2024. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

DoktoriSOKK

2023-ban a Bolyai János Matematikai Társulat kezdeményezésére hat rendhagyó workshop zajlott a HUN-REN Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben. A tavaszi alkalmakról Workshop rólunk, matematikusokról... címmel Tardos Zsófia írt összefoglalót. Ősszel „DoktoriSOKK workshopok” címmel folytatódott a közös gondolkodás a sokakat érintő, ELTE és BME matematikus doktori iskolákban tapasztalt nehézségekről. *Szathmári Nóra Keszthelyi Gabriella* közreműködésével számolt be a tapasztalatokról.



Barbarics Márta
2024. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Idén is lesz „Matek az Utcán”!

A Bolyai János Matematikai Társulat a Nemzetközi π-nap (3.14 azaz március 14 – a Matematika Világnapja) alkalmából ismét „**Matek az Utcán**” rendezvényt szervez **2024. március 16-án szombaton 10-13 óráig.** Tavaly települt ki először ebben a formában a matematika az utcára, amit az ország több városában is élveztek a szervezők és a véletlenül arra járók. *Barbarics Márta* árult el néhány részletet az idei eseményről.

Szerkesztő
2024. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Decemberi díjazottak

2023. december 14-én, a Bolyai János Matematikai Társulat rendezvényén, a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben adták át a BJMT évenként kiosztásra kerülő díjait. A Szele Tibor Emlékérmet (képünkön) *Molnár Lajos* tanszékvezető egyetemi tanárnak (SZTE Bolyai Intézete Analízis Tanszék) adta át Laczkovich Miklós, a díjbizottság elnöke. Kiemelkedő fiatal kutatóknak ítélték oda a Grünwald Géza Emlékérmet, valamint a Farkas Gyula, illetve Rényi Kató emlékdíjakat. Ezután hirdették ki a Kürschák és a Schweitzer matematikai tanulóversenyek eredményét (ez utóbbiról 2023. decemberi számunkban már beszámoltunk). A díjazottakat olvasóink is megismerhetik a most közölt jelentésekből...

VÁLTÓSZÖGEK
PODCAST

Kosztra Gábor
2024. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Váltószögek – podcast adás indul a matematikatanításról

„Ültessünk le beszélgetni egy idősebb matematikatanárt, aki már régóta a pályán van, és egy kezdő tanárt, aki nemrég óta él ennek a hivatásnak, és beszélgessünk velük arról, mit jelent számukra a matematikatanítás, és úgy általában ez a hivatás.” *Kosztra Gábor* ötletével és segítségével indul el áprilisban a Bolyai János Matematikai Társulat podcast sorozata.

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

Lenger Dániel, Borbényi Márton 2024. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Beszámoló a 2024-es RMM-ről

2024. február 26. és március 2. között 15. alkalommal rendezték meg a Romanian Master of Mathematics (RMM) versenyt, amelyre szokás szerint a magyar csapatot is meghívták. A helyszín, mint a pár covidos évet leszámítva mindig, Bukarest volt, a Tudor Vianu nevét viselő középiskolában.

A versenyen, a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiához (IMO-hoz) hasonlóan, a versenyzőknek két egymást követő nap 3-3 feladatot kell megoldaniuk, amire mindkét nap 4 és fél óra áll rendelkezésükre. A feladatok nehézsége is IMO-szintű, sőt előfordul, hogy még nehezebbek. A megszerezhető maximális pontszám most is 42 volt.

A magyar versenyzők eredménye:

Simon László *(Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium, 12. osztály)* 35 ponttal

abszolút 1. helyezést ért el, és ezzel **aranyérmet,**

Szakács Ábel *(Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium, 10. osztály)* 23 ponttal

bronzérmet,

Varga Boldizsár *(Budapest, Veres Péter Gimnázium, 11. osztály)* 19 ponttal,

Tarján Bernát *(Budapest, Veres Péter Gimnázium, 12. osztály)* 15 ponttal

dicséretet kapott.

Köszönjük a Bolyai János Matematikai Társulat segítségét az utazás támogatásában!

Lenger Dániel csapatvezető (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn. és ELTE)

és *Borbényi Márton csapatvezető-helyettes* (ELTE és Rényi Intézet)

Következik a diákok rövid beszámolója:

A versenyre vasárnap 15:10-kor indultunk a Keleti pályaudvarról. Életünk legpihentetőbb éjszakája után másnap reggel 9-kor érkeztünk meg Bukarestbe. A pályaudvarról elvittek minket a szállásunkra, ami idén egy 4 csillagos szálloda volt. Kétfős szobákba voltunk beosztva, a csapatvezetők, Berci és Boldi, illetve Ábel és Laci kerültek egy-egy szobába. Ábel és Laci szobája volt a legnagyobb, bár ebben a családias hangulatot egyetlen franciaágy biztosította.

Hétfőn még nem volt hivatalos program, ezért együtt elmentünk Bukarest legnevesebb éttermébe, a főtéren található Burger Kingbe. A délután folyamán jutott eszünkbe, hogy a magyar zászló sajnos otthon maradt, a zászló beszerzésére tett kísérletek határozták meg a következő pár napot. Sajnos a „János bácsi" nevű bolt román eladói nem tudtak nekünk segíteni.

Kedden volt a megnyitó, ahol a helyi iskola diákjai egy zenés műsorral kedveskedtek nekünk. Ezután minden ország egyesével felvonult zászlajával a színpadra, mi jobb híján kölcsön kértük az olaszok zászlóját. A megnyitó után egy, a Jane Street által szervezett Estimathon nevű csapatversenyben vettünk részt Transylvania csapatnévvel, és végül a kínaiakat megelőzve negyedikek lettünk.

Megnyitó egy elfordított olasz zászlóval.

Szerdán következett az első versenynap, ez mindenkinek nagyon jól sikerült, mert három kombinatorika feladat volt . Egy kiadós ebéd után elsétáltunk a Petőfi Sándor és Ady Endre utcák kereszteződéséhez, majd a diadalívhez. Ezután stresszlevezetés céljából meglátogattuk a legközelebbi focipályát. Este Danival és Marcival beszélgettünk a megoldásainkról, hogy számukra könnyebb legyen a másnapi koordinálás.

Strada Sándor Petőfi
Strada Ady Endre

Séta a Petőfi Sándor és Ady Endre utca sarkán

Csütörtökön a második versenynap már vegyesen sikerült a csapatnak, mert aznap már volt geometria feladat is. A másnapi záróünnepségre viszont még mindig nem volt zászlónk, ezért a zászlóbolt felé vettük az irányt. Háromnegyed óra séta után odaértünk a Google Maps által kijelölt helyre, azonban se közel, se távol nem találtuk a boltot. Nagy elkeseredésünkben a magyar követség felé vettük az irányt, hátha ők tudnak nekünk zászlót adni. Becsöngettünk, de nem keltettünk bennük bizalmat, ezért azt mondták, hogy nincs magyar zászlójuk. Véletlenül hazafele épp útbaesett a focipálya, ezért a vacsora előtt még fociztunk egy jót.

Péntek reggel Marci felhívta a nagykövetséget, és kiderült, hogy mégis van zászlójuk, ezért Marci és Dani elmentek érte. Nem sokkal később pedig kiderült a végeredmény, volt, aki elégedett volt vele, és volt, aki kevésbé. A záróünnepségre büszkén vonultunk frissen szerzett zászlónkkal. Sajnos ezúttal elmaradt a várva várt táncos bemutató. Következett a búcsúvacsora, ahol az előző három napi maradékokat szolgálták fel, ennek ellenére mindenki nagyon jól lakott.

A magyar csapat érmekkel és a magyar zászlóval

Szombat reggel még a szállodában reggeliztünk, bevásároltunk helyi nyalánkságokból, az ebédre már a pályaudvaron került sor, a McDonalds-ban vagy a KFC-ben kinek-kinek ízlése szerint. Következett a már jól ismert 16 órás vonatút, azzal a különbséggel, hogy most hajnali 2-kor keltettek minket a határon. Vasárnap hajnali 5-kor érkeztünk meg a Keleti pályaudvarra, elbúcsúztunk egymástól, és – hazamentünk aludni.

És akkor pár szó a feladatokról (amelyek megtalálhatók itt):

Az 1. feladat egy kevésbé nehéz kombinatorika feladat volt, egy nagy sakktáblán kellett futókat mozgatni úgy, hogy mindig pontosan egy teljes sort foglaljanak el. A kérdés az volt, hogy hányféle sorrendben lehetnek a futók ilyen mozgatások után.

A 2. feladat egy olyan számelmélet feladat volt, ahol az ötlet (hogy mindig mohón válasszuk azt a maradékosztályt, amelyből a legtöbb van) elég kézenfekvőnek tűnt, azonban a kidolgozása nem volt triviális. Az viszont egyikünknek se tetszett, hogy a „minden második lépésben tudunk abból a maradékosztályból választani, amiből a legtöbb van" ötlet megoldja a feladatot az $\frac{51}{100}N$ helyett $\frac{N}{2}$-vel, és ezen szinte jelentéktelen élesítéshez így még egy ötletet be kellett vetni (szerencsére a csapatból így is mindenki megoldotta ezt a feladatot).

A 3. feladat egy nehéz, egyetlen adott témakörbe nehezen besorolható feladat volt. Az elején geometriának látszó állítást ügyesen át lehetett fogalmazni kombinatorikussá, és végül lineáris algebrával vagy egy nehezebb tétellel lehetett befejezni a feladatot.

A 4. számelméleti feladat mint kiderült, inkább algebra volt. A megoldása viszonylag rövid, ennek ellenére nehéz volt rájönni.

Az 5. egy nem szokványos, elég nehéz geometria példa volt, mozgó körökről kellett belátni, hogy két fixpontban metszik egymást. Megsejthető volt, hogy a fixpontok szabályos háromszöget alkotnak az adott két csúccsal, és ezt sokféleképpen lehetett bizonyítani.

A 6. egy nagyon nehéz algebra feladat volt, a 0,1 együtthatós négyzetmentes polinomokról szólt, az egész mezőnyből csak egy online résztvevő tudta megoldani.

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Adatkezelés
Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

Szathmári Nóra, Keszthelyi Gabriella 2024. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

DoktoriSOKK

2023-ban a Bolyai János Matematikai Társulat kezdeményezésére hat rendhagyó workshop zajlott a HUN-REN Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben. Workshop rólunk, matematikusokról... címmel Tardos Zsófia írt a tavaszi alkalmakról: ezeken az volt a cél, hogy megtaláljuk a témákat, amik sokakat érintenek ugyan, de valami miatt nem kapnak elég nyilvánosságot, emiatt többnyire egyedül küzdünk velük. A harmadik workshopon kirajzolódtak a doktori képzéshez kapcsolódó nehézségek. Vannak például, akik olyan témából doktorálnak, ami nem igazán érdekli őket, illetve előfordul, hogy a doktorandusznak és a témavezetőnek nem sikerül kellően hatékonyan kommunikálni egymással a közös munka során. Erre alapozva indult ősszel a következő három workshop DoktoriSOKK címmel, ahol Tardos Zsófia és Keszthelyi Gabriella a PhD képzés folyamán fellépő problémák közös átgondolására invitálták a matematikusokat.

Első alkalommal, október 11-én szokás szerint információgyűjtés zajlott, brainstorming az összegyűlt doktoranduszok és témavezetők részvételével arról, hogy melyek a doktori folyamat bizonytalanságot okozó pontjai, hol lenne érdemes fejleszteni, változtatni a közeljövőben. Mindenekelőtt felmerült a kérdés, hogyan lehetne a hallgatókat az MSc képzés alatt abban segíteni, hogy minél több információjuk legyen az előttük álló lehetőségekről, és ezek birtokában a lehető legjobb döntést hozhassák meg a továbblépésről. A matematika doktori iskola aktív hallgatóinak és oktatóinak segítségével lehetne egy tapasztalatmegosztással egybekötött kerekasztal-beszélgetést szervezni a kutatói életpályáról. Ez lehetőséget biztosítana az MSc hallgatókban felmerülő kérdések megvitatására, a várható feladatok tudatosítására, egyéni tanácsadásra.

A következő lépés azokat érinti, akik már elkezdtek doktorálni: a doktori folyamat kezdetekor erősen ajánlott, hogy a témavezető és a doktorandusz kölcsönösen megismerje egymás elvárásait, tudatosabban tisztázza a munkafolyamat kereteit. Sok későbbi nézeteltérést megelőzhetne egy ilyen beszélgetés, illetve ennek egyenes folytatásaként a kölcsönös visszajelzések tudatos elősegítése. A nehézségek megosztása, a részeredmények sikereinek ünneplése nagyban segíthetné a sikeres együttműködést. A résztvevők jelezték, hogy mennyire jó lett volna többet kommunikálni mind seniorokkal, mind peer-ekkel. Erre született egy javaslat mentorcsoportok létrehozására, a doktoranduszok tapasztalatmegosztásának elősegítésére. Ez nagyban segíthetné a hallgatókat, hogy tudatosodjon bennük, nincsenek egyedül a nehézségeikkel, más hallgató is hasonlóan éli meg ezt a nehéz időszakot vagy érez hasonlóan egy előtte álló feladattal kapcsolatban. Fontos, hogy a kutatószemináriumokon olyan légkör alakuljon ki, ahol nem kínos „hülyeséget kérdezni”. A hallgatók részvétele konferenciákon a tágabb kutatói közösség megismerését is elősegíti.

A témavezetők közül sokan hangot adtak annak a szándékuknak, hogy szeretnének fejlődni, illetve, hogy nekik is jól jönne egy támogató, tapasztalatmegosztó közösség: félévenként minimum egy alkalommal fontos lenne egymással megvitatniuk olyan kérdéseket, mint hogyan írjunk ki felelősen jó témát, hogyan tanítsunk cikket írni.

A második, október 24-ei alkalom az igények alapján teljes egészében annak a kérdésnek volt szentelve, hogy **mitől lesz valaki jó mentor?** Kertész Gergely, aki már előtte más doktori program fejlesztésében is részt vett, meghívott vendégelőadóként segített a szervezőknek tisztázni a kérdést.

Az általános szakmai és intellektuális erények, mint a nagy szakmai tapasztalat, a széles látókör, a magas intelligencia a legtöbb résztvevő szerint csak szükséges feltételei annak, hogy valaki jó mentor legyen, és együtt sem elégségesek. A mentor „atyai/anyai jóbarát", ezért jó, ha rendelkezik még további erényekkel:

Türelmes – abból indul ki, hogy a másik kevésbé tapasztalt, ennek megfelelően alakítja ki az elvárásait és segít a fejlődésben.

Empatikus – kíváncsi a másik nézőpontjára, ennek megértéséből próbál kiindulni.

Jóindulatú – egy felvetés, megnyilvánulás értelmezési lehetőségei közül mindig azt választja, ami a leginkább segíti a másikat és a két fél kapcsolatát.

Kreatív – a jó mentor beveti a kreativitását, hogy segítsen utakat találni a mentorált számára.

Partneri viszonyt ajánl – bár a doktori folyamatban nem egyenlő felek szakmailag, a mentor mégis egyenrangú viszonyt kínál a mentoráltnak.

Felelősségvállaló – teljes felelősséget vállal, mind a befektetett munkában, mind a mentoráltnak adott visszajelzésekben.

Ezeket az erényeket akkor tudja a legjobban megvalósítani, ha világosan és őszintén kommunikál, anélkül, hogy bántó, ítélkező, vagy agresszív lenne.
Az asszertív kommunikáció eszköztára ennek megfelelő keretet ad, jelenlegi és leendő mentoroknak érdemes lenne szervezett tanfolyamon biztosítani ennek elsajátítását.

A sorozat harmadik részének célja kimondottan a „megcselekedhető" megoldási javaslatok kigondolása volt, Open Space módszer segítségével. Ennek lényege, hogy a csoport teljesen szabad kezet kap, és bár a workshopokat koordináló Zsófi és Gabi utaltak néhány, korábban begyűjtött információra, de alapvetően a résztvevőknek kellett előállniuk a szerintük legfontosabb kérdésekkel, és aztán csoportosan megvitatni őket.
A következő kérdések fogalmazódtak meg:

– Hogyan segítsük a doktorizni készülő diákokat az MSc végén a megfelelő témaválasztásban?

– Hogyan lehetne megvalósítani, hogy csak később kelljen a téma vagy a témavezető iránt elköteleződni?

– Hogyan segítsük a témavezetőket mentorokká válni?

– Milyen hasznos ellenőrzési pontok lehetnének a PhD alatt?

Minden kérdésnek volt egy gazdája, és mindenki, akit érdekelt az adott kérdés, odaülhetett az illetőhöz, hogy beszéljenek róla. Így mód volt arra is, hogy mozogjanak az asztalak között, azaz egyvalaki több kérdésbe is belefolyhatott.

Végső soron a kérdések mentén 13 különböző javaslat érkezett.

Voltak közöttük teljesen közösségi alapon megvalósíthatók, és a képzés struktúráját jóval erőteljesebben érintők is. Az utóbbira volt példa, hogy külföldi mintára lehetne a diák kevésbé kötve egy témához, illetve témavezetőhöz, azaz hogy ne rögtön belépéskor kelljen választaniuk, hanem az első év végén. Ez a javaslat a doktori iskola részéről világos kommunikációt, a diákok részéről önállóságot kívánna - keressenek más lehetőségeket is, ha erre igényük van -, a tanárok részéről pedig nagy rugalmasságot és nagyvonalúságot abban, hogy esetenként elengedjék a diákot és a befektetett munkát.

Egy másik ötlet az volt, hogy minden kiírt témához tartozzon egy leírás és konzultációs lehetőség azzal kapcsolatban, hogy mi a várható munkaterv, mennyi előzetes tudásra van szükség ahhoz, hogy elkezdhessen kutatni a diák, mikorra várható eredmény, milyen kockázatok lehetnek stb. Ez egy kevésbé erőforrásigényes, ugyanakkor várhatóan jól megtérülő befektetés, jelentősen csökkenthetné a későbbi kommunikációs problémákat és súrlódásokat, ha a doktori elején ezek világosan tisztázva vannak.

Az elképzelések között volt még a megfelelő fórum, illetve támogatás biztosítása a témavezetőknek, hogy jelezhessék a problémáikat, illetve a mentorálás szempontjából a fejlődés biztosítása, akár külső szakemberek bevonásával. A jelenlevők közül sokan szerint a témavezetők számára biztosított szupervízió lehetősége nagyon sokat segítene a terhek csökkentésében.

A workshop második felében került sor a szavazásra, ahol minden résztvevő 1-től 10-ig terjedő skálán osztályozott két szempont szerint: **mekkora lenne a javaslat várható hatása**, illetve **mekkora erőfeszítésbe kerülne megvalósítani**.

A sorozat lezárásaként január 15-én egy nyílt kerekasztal-beszélgetésre került sor, ahol Gabi és Zsófi meghívására a BME-s és ELTE-s vezetőkkel közösen tárgyalták meg a felmerült javaslatokat. A vezetőket Simon Péter (ELTE Matematikai Intézet), Horváth Miklós (BME Matematika Intézet) és Simon Károly (BME Matematika Doktori Iskola) képviselte. A hivatalos részvétel ellenére a megbeszélés közvetlen és átütő sikerű volt, a résztvevők szívesen osztották meg véleményüket és élményeiket a vezetőkkel, a vezetők pedig nyitottnak és lelkesnek bizonyultak. Sikerült megpendíteni azokat a húrokat is, hogy a három matematikai intézet (ELTE, BME, Rényi) között lehetne szorosabb együttműködés és nagyobb átjárhatóság. A Rényi Intézetben ugyan nincs doktori iskola, de rengeteg témavezetőnek és diáknak is van rényis (fél)állása, miközben több olyan kutató is van a Rényi Intézetben, aki nem tanít, tehát nem tud potenciális doktoranduszokkal találkozni. Felmerült, hogy az információáramlást elősegítve létre lehetne hozni például egy közös, intézetek közötti adatbázist, amiből a diákok tetszőlegesen választhatnának témákat, témavezetőket. A BME-n már bevált Témaválasztó Napot átvehetné a Rényi Intézet és az ELTE is. Összességében a vezetők nagy nyitottságot mutattak a workshop eredményeinek megvalósítására az egyes intézmények egyedi helyzete és lehetőségei mentén. A szervezők és a résztvevők most tőlük várják a következő lépést.

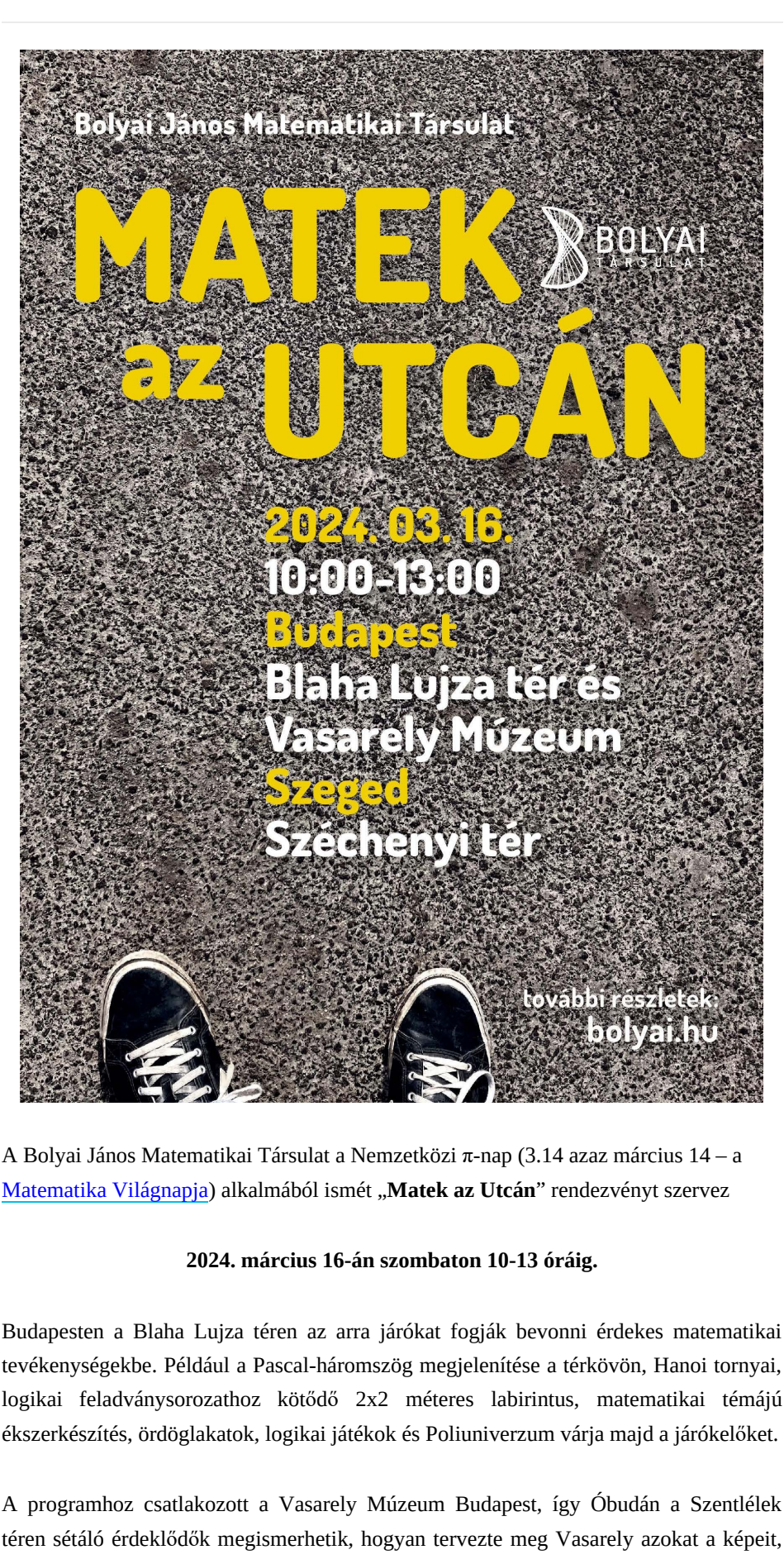
Szathmári Nóra, Keszthelyi Gabriella

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

Barbarics Márta 2024. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Idén is lesz „Matek az Utcán”!



A Bolyai János Matematikai Társulat a Nemzetközi π-nap (3.14 azaz március 14 – a Matematika Világnapja) alkalmából ismét „**Matek az Utcán**” rendezvényt szervez

2024. március 16-án szombaton 10-13 óráig.

Budapesten a Blaha Lujza téren az arra járókat fogják bevonni érdekes matematikai tevékenységekbe. Például a Pascal-háromszög megjelenítése a térkövön, Hanoi tornyai, logikai feladványsorozathoz kötődő 2x2 méteres labirintus, matematikai témájú ékszerkészítés, ördöglakatok, logikai játékok és Poliuniverzum várja majd a járókelőket.

A programhoz csatlakozott a Vasarely Múzeum Budapest, így Óbudán a Szentlélek téren sétáló érdeklődők megismerhetik, hogyan tervezte meg Vasarely azokat a képeit, amelyek látszólag kiugranak a papír felületéből, vagy épp belesüllyednek, majd bárki megtervezheti saját, a földben vagy a falon egy lyukat ábrázoló kollázsát.

Szegeden a Széchenyi téren lehet majd megtanulni, hogyan kell szorobánnal összeadni, kivonni, poliuniverzum titkos nevét megoldani, vagy Hanoi tornyait kirakni.

A Bolyai Társulat célja, hogy a matematikát közelebb vigye az utca emberéhez, amihez bárhol az országban lehet saját programmal kapcsolódni. Arról, hogy hogyan lehet csatlakozni, az Érintő előző számában írtunk.

Folyamatosan frissülő részleteket és az esemény után beszámolót és fényképeket lehet találni a Társulat honlapján: https://www.bolyai.hu/

Barbarics Márta, Bolyai János Matematikai Társulat

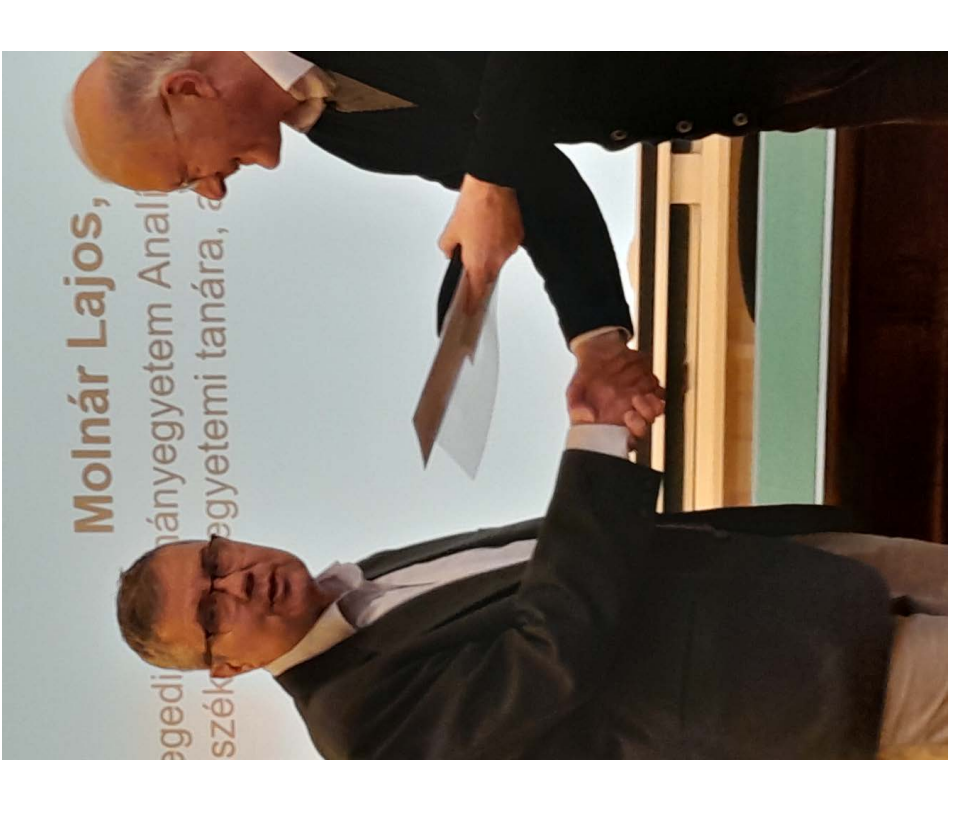
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Szerkesztő 2024. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Decemberi díjazottak

Szele Tibor Emlékérem 2023

Kiemelkedő tudományos és utánpótlás-nevelő munkássága alapján a Bolyai János Matematikai Társulat 2023-ban **Molnár Lajosnak** ítélte a Szele Tibor emlékérmet. A díjat Laczkovich Miklós, a bizottság elnöke adta át.



Molnár Lajos 1964-ben született Kemecsén. A Debreceni Egyetemen szerzett matematikus diplomát (1988), majd PhD fokozatot (1990). 2005-ben lett az MTA doktora. 2007 óta egyetemi tanár. 2015-ben költözött Szegedre, azóta a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete Analízis Tanszékének tanszékvezető egyetemi tanára.

Kutatási területe a funkcionálanalízis, az operátorelmélet, illetve a lineáris algebra. Az MTMT szerint 169 tudományos közleménye jelent meg, amelyekre 1907 független hivatkozást kapott. Dolgozatai rendszeresen jelennek meg a fenti területek, valamint a matematikai fizika rangos, vezető folyóirataiban. Szűkebb kutatási témája az úgynevezett megőrzési problémák vizsgálata, amelyek (elsősorban függvények, mátrixok vagy operátorok alkotta) különböző matematikai struktúrák különféle szimmetriáinak a meghatározásával kapcsolatosak. Molnár Lajos alapvető szerepet játszott abban, hogy a korábbi, ún. lineáris megőrzési problémák vizsgálatáról a hangsúly az utóbbi két évtizedben fokozatosan áttevődött a nemlineáris problémákra, és ma egyértelműen ezek jelentik a fő kutatási irányt a területen. Eredményeinek jelentőségére két példa a következő: A Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures kézikönyv Wigner Jenő nevezetes, a kvantummechanikai szimmetriatranszformációkról szóló alaptételével kapcsolatos fejezetében több mint két tucat esetben említik, ill. tárgyalják az ezen tétellel és annak különböző kiterjesztéseivel kapcsolatos eredményeit. MTA doktori disszertációját a Springer könyv alakban jelentette meg.

Tudományos tevékenysége elismeréseként 1992-ben Grünwald Géza díjat, 1999-ben Erdős Pál díjat, 2011-ben Akadémiai Díjat kapott. 2012-ben MTA Lendület pályázatot nyert, emellett összesen 20 kutatási pályázatnak volt a vezetője. Elnyerte a Széchenyi Professzori ösztöndíjat, volt Humboldt ösztöndíjas Németországban, distinguished visiting professor az USA-ban. Eredményeiről mintegy 200 tudományos előadást tartott nemzetközi konferenciákon, külföldi egyetemeken és kutatóintézetekben a világ számos pontján Ázsiától Észak-Amerikáig. Vendégkutató volt többek között Franciaországban, Olaszországban, Szlovéniában, Tajvanon, az USA-ban.

Aktív szakmai közéleti tevékenységéből a legfontosabbak: 2014-20 között tagja volt az MTA Doktori Tanácsának, 2016-17-ben az NKFIH Matematika-Számítástudomány szakértői csoportjának volt elnöke. Nyolc nemzetközi folyóirat szerkesztésében vesz részt. 2018-tól főszerkesztője a Szegedi Acta folyóiratnak, amelyet nagy munkával sikerült megújítania, és ennek eredményeképpen a folyóirat kiadása a Springer kiadóhoz került.

Molnár Lajos kiemelkedő szerepet vállal az utánpótlás nevelésében, a fiatalok kutatómunkába történő bevonásában. Hét OTDK dolgozatnak volt témavezetője. Ezek közül több országos első díjat nyert, és volt olyan, amelyet az OTDK Pro Scientia Aranyéremmel jutalmazott. Hat, fokozatot szerzett PhD hallgató témavezetője volt. Közülük hárman is elnyerték a Grünwald Géza díjat, és többen is vezető oktatói állást töltenek be magyar, illetve külföldi egyetemeken. Jelenleg két aktív PhD hallgatója van. Ugyan hivatalosan nem voltak doktoranduszai, de Gehér György és Virosztek Dániel tudományos munkáját a kezdetektől évekig segítette és irányította. Gehér György ezen periódusban kapott Grünwald Géza díjat illetve nyerte el a JMAA folyóiratnak az év legjobb cikkét jutalmazó díját. Virosztek Dániel (szintén Grünwald Géza díjas), a Lendület-pályázat nyerteseként került a Rényi Intézetbe.

Grünwald Géza Emlékérem 2023

A Grünwald Géza Emlékérem jogelődjét, a Grünwald Géza Emlékdíjat a Bolyai János Matematikai Társulat 1951-ben alapította a matematikai alapkutatásban kiemelkedő tudományos eredményeket elérő, fiatal magyar matematikusok jutalmazására. 2018-ban a Társulat a jutalmazhatók körét kiterjesztette a Magyarországon tanulmányokat folytatott külföldi kutatókra is. 2023-ban a Grünwald Géza Emlékéremre mindössze egy felterjesztés érkezett: **Garamvölgyi Dániel** pályázata, melyet a Bizottság, egyhangú döntéssel, támogatásra méltónak talált.

Garamvölgyi Dániel 1995-ben született. Matematikus alap-, majd mesterszakos tanulmányait az Eötvös Loránd Tudományegyetemen végezte el, és 2023-ban az ELTE doktori iskolájában szerzett abszolutóriumot. Jelenleg a HUN-REN-ELTE Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálási Kutatócsoportban dolgozik, valamint a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet fiatal kutatója.

Garamvölgyi Dániel 6 cikket jegyez színvonalas nemzetközi folyóiratokban, további két publikációja konferenciakötetekben jelent meg, három munkája pedig jelenleg bírálat alatt áll. Kombinatorikai problémákon dolgozik, fő érdeklődési területe a gráfok merevségi tulajdonságainak vizsgálata. A terület alapkérdése a következő: egy adott G gráf csúcsait a d-dimenziós euklideszi térbe leképezve, kongruencia erejéig egyértelműen meghatározzák-e a beágyazást a G éleihez tartozó szakaszok hosszai? Garamvölgyi Dániel, társszerzőivel együtt, a témakör több fontos kérdését vizsgálta: többek között a gráf rekonstruálhatóságát éleinek hosszából, csúcsainak globális összekapcsolódását, illetve a gráf globális merevségének kérdését (utóbbi azt jelenti, hogy a gráf tetszőleges realizációja, kongruencia erejéig, egyértelműen meghatározott az élhosszai által). A kombinatorikus módszereken túl eredményesen alkalmazta a algebrai geometria eszköztárát is, amelyek segítségével mély eredményeket ért el. Az elmúlt időszakban a területen az algebrai geometriai megközelítés egyik fő szakértőjévé vált.

Farkas Gyula Emlékdíj 2023

A matematika alkalmazásával szoros kapcsolatban álló jelentős tudományos eredményeikért Farkas Gyula Emlékdíjban részesült **Varga Anita** és **Tóbiás András**. A díjakat Simon Péter, a Bolyai Társulat főtitkára adta át a díjazottaknak.

A Farkas Gyula-emlékdíj 2023. évi kitüntetettjei:
Tóbiás András
Varga Anita

Varga Anita 1992-ben született. A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen szerzett 2014-ben matematika BSc, majd 2016-ban alkalmazott matematika MSc diplomát. Az MSc diplomamunkájában az Xpress optimalizáló szoftverhez készített egy új modult, amely az ELTE-n fejlesztett LEMON C++ gráfelméleti könyvtár objektumait és függvényeit teszi elérhetővé az Xpress keretein belül.

Varga Anita az egyetemi évei alatt kezdett el dolgozni a BME Építészmérnöki Karán anyagdepók elhelyezési problémáin és az egyetem elvégzése után még két évig félállású tudományos segédmunkatársként dolgozott itt. Ezen időszak alatt több publikáció is született főként a projekttervezés témakörében.

Mester diplomája megszerzése után, 2016 őszétől folyamatosan tanított a BME Differenciálegyenletek tanszékén. 2022 őszétől teljes állásban dolgozott itt. Doktori fokozatát 2023-ban szerezte a BME Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolájában, ahol a 2020/21 tanévben ÚNKP ösztöndíjas volt.

Varga Anita jelenleg a Budapesti Corvinus Egyetemen félállású tudományos segédmunkatárs és félállású adjunktus. 2023-tól a Corvinus Operációkutatási Kutatócsoport tagja. Érdeklődési területei a lineáris és konvex optimalizálás elmélete, belsőpontos algoritmusok és az operációkutatás ipari, gazdasági alkalmazásai.

A doktori értekezésében általános elemzését adta a belsőpontos algoritmusok egy családjának. Ezek a belsőpontos algoritmusok polinom időben megoldják a lineáris programozási feladatokat, bizonyos speciális lineáris komplementaritási feladatokat (LCP) és általánosíthatóak szemidefinit programozási feladatokra, kúpoptimalizálási feladatokra is.

Kutatásának egyik fő kérdése az volt, hogy az algoritmus során milyen keresési irányok alkalmazásával szavatolható még az elméletben ismert legjobb komplexitás megtartása. Ennek jelentősége például lineáris komplementaritási feladatok megoldásánál lehet. Ugyanis általános esetben az LCP NP-nehéz probléma, így nem reménykedhetünk olyan hatékony algoritmusban, ami mindegyik LCP feladatot meg tudja oldani. A numerikus tesztek azt mutatják, hogy az algoritmus során a keresési irány változtatása lehetővé teheti a nehéz LCP feladatok esetén a „problémás" régiók elkerülését. Az eredményei jó alapot adhatnak egy hibrid algoritmus konstruálása felé, mellyel hatékonyan lehetne általános LCP feladatokat kezelni.

Az elméleti eredmények mellett numerikusan is vizsgálta a kérdéskört: különböző algoritmusokat implementált Matlabban, és számos feladat megoldásán tesztelte a tárgyalt eljárásokat és azok paraméterbeállításait.

A tanítás mellett 3 BSc diák témavezetője volt, illetve közreműködött mérnök és közgazdász hallgatók részére készített matematikai e-tananyagok fejlesztésében.

Az évek során számos alkalmazott projektben is részt vett, mert fontosnak tartja, hogy az elmélet mellett valódi alkalmazásokba is betekintést nyerjen. Foglalkozott villamosenergia-termelés tervezés optimalizációs feladattal, illetve az előző évben tagja volt annak a Koi Tamás vezette csoportnak a BME-n, akik az NKHV Zrt megbízásából hulladékgazdálkodási feladatokon dolgoztak. Ebben a munkában a modellezésért, majd a kapott feladatok számítógépes megvalósításáért volt felelős. 2023 januárjától félállásban dolgozik az EPIC InnoLabs Nonprofit Kft-nél, ahol operációkutatóként tevékenykedik.

Rendszeres résztvevője, előadója nemzetközi konferenciáknak. Aktívan részt vett az Operációkutatási Szeminárium szervezésében a BME-n, jelenleg pedig a Corvinus Egyetemen végez hasonló tevékenységet. 2023 augusztusában a Corvinus Egyetemen került megrendezésre a EUROPT Workshop, melynek szervezőbizottságának aktív helyi tagjaként járult hozzá a rendezvény sikerességéhez.

A Farkas Gyula-emlékdíj 2023. évi kitüntetettjei:

Tóbiás András 1992-ben született Budapesten. Alapszakos matematika diplomáját a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen szerezte 2014-ben, míg mesterszakos diplomáját 2016-ban a Technische Universität Berlin-en, szintén matematikából. Ugyanitt szerzett PhD fokozatot 2019-ben Wolfgang König témavezetésével. Ezután három évig szintén a TU Berlin munkatársaként dolgozott Noemi Kurt kutatócsoportjában. 2022 óta Budapesten él, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Villamosmérnöki és Informatika Karán, a Számítástudományi és Információelméleti Tanszéken adjunktus, valamint a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet részmunkaidős munkatársa.

Tóbiás András fő kutatási eredményeit a populációgenetika matematikai modelljeinek vizsgálatával érte el, többek között a dormancia, logisztikus versengés, horizontális géntranszfer témájában.

Megmutatta, hogy bizonyos sztochasztikus adaptív dinamikai modellekben a dormanciára való képesség (ami az élőlények/sejtek inaktív állapotára utal), szelekciós előnyt ad egy mutáns részpopulációnak, annak ellenére, hogy a mutáns a rezidenshez képest rosszabbul szaporodik. Ezt a jelenséget (versengés által indukált dormancia) az elméleti biológusok is plauzibilisnek tartják, és az eredményeit idézik. A módszertan elágazó folyamatokra és differenciálegyenlet-rendszerek kvalitatív viselkedésére épül. Egy másik kutatásban a dormancia és a horizontális géntranszfer kölcsönhatását vizsgálták. A horizontális géntranszfer bizonyos paraméterválasztások esetén lehetővé teszi rezidens és mutáns koegzisztenciáját.

Egy másik kutatási irány az olyan részecskerrendszereknek a szisztematikus vizsgálata, amelyekre az a jellemző, hogy a részecskék nem egymástól függetlenül, hanem gyakran egyszerre végeznek bizonyos „tevékenységeket" (pl. szaporodás, halálozás, migráció, összeolvadás) Poisson-pontfolyamatok által vezérelve, amit koordinációnak nevezünk. Ennek egyik első példája a Lambda-koalescens volt 1999–2000-ben (Pitman, Sagitov), és azóta számos biológiailag releváns példát vizsgáltak. Ezek a folyamatok rendszerint populációgenetikai modellek skálázási limeszeinek (momentum)duálisaként lépnek fel, amit Tóbiás András társszerzőivel igazolt. A részecskerendszer koordinációja ritka, de nagy hatású – a populációnak nagy populációméret esetén is pozitív hányadát érintő – szelekciós/mutációs/migrációs/genetikai sodródásos eseményeknek felel meg a duális folyamatban. Megmutatták azt is, hogy ha nincs összeolvadás a modellben, akkor a folyamat részecskeszámának várható értéke csak a Poisson-pontfolyamatok intenzitási mértékeinek összsúlyától függ, és hasonló módszerekkel becsülték a részecskeszám szórásnégyzetét is.

Legújabban, egy Annals of Probability folyóiratban elfogadott cikkben az adaptív dinamikai inváziómodellek vannak általánosítva kontakt folyamatra. Itt egy nagy tóruszon a kontakt folyamatban bizonyos szaporodási (fertőzési) események során mutáció következik be, ami a szaporodási ráta növekedéséhez vezet. A határértékben megjelenő folyamat érdekessége, hogy a térbeliség fontos szerepet játszik benne: a mutáns túlélési esélyénél számít például, hogy hány fertőzött szomszédja volt, amikor született.

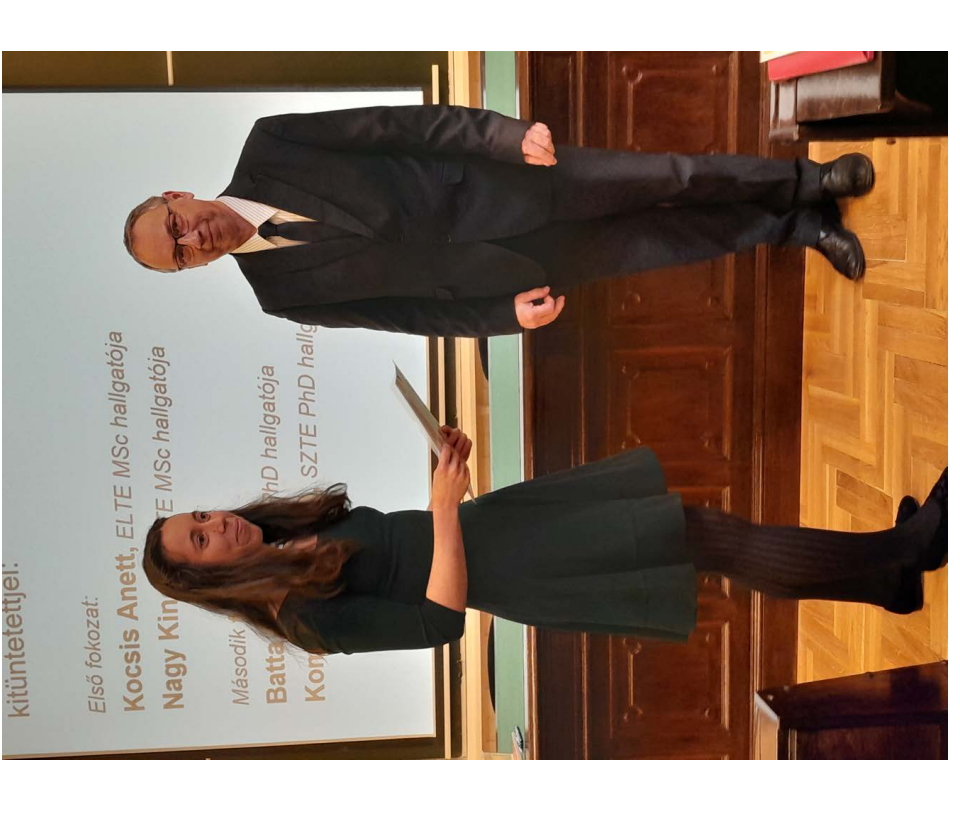
A populációgenetikai modelleken kívül Tóbiás András általános véletlen intenzitású Poisson-pontfolyamatok perkolációjáról is több cikket írt, amelyek eredményeit a mobil-hálózatok összefüggőségi tulajdonságainak elméletében széleskörűen használják.

Tóbiás András 16 cikk, három könyvrészlet és egy konferenciaközlemény szerzője. Publikációi többek között a valószínűségelmélet vezető folyóirataiban, az Annals of Probability, Stochastic Processes and Their Applications, Electronic Journal of Probability folyóiratokban jelentek meg. Szemináriumi előadásokat és konferenciaelőadásokat tartott többek között Freiburgban, Bielefeldben, Bochumban, Bath-ban és Bécsben. A Berlinben töltött évek alatt több PhD-diákoknak szóló szeminárium és egyéb rendezvény szervezője volt.

Rényi Kató Emlékdíj 2023

2023-ban a Bolyai János Matematikai Társulat négy jelöltnek ítélte oda a Rényi Kató Emlékdíját, melyből **Kocsis Anett** és **Nagy Kinga** a díj I. fokozatában, **Batta Gergely** és **Komálovics Ábel** pedig a díj II. fokozatában részesült.

A továbbiakban bemutatjuk a díjak indoklását, de szeretnénk hozzátenni, hogy mindegyik jelöltről elmondható, hogy a kutatás mellett aktívan részt vesznek oktatási tevékenységben vagy tudományos versenyeken, mint az OTDK, emellett a tudományos közösségért is aktívan tesznek. Az indoklások csak betekintést nyújtanak a kitüntetettek eddigi munkásságába, amelyhez a Rényi Kató Emlékdíj bizottság (Pete Gábor megbízott elnök, Kiss Gergő titkár) további sok sikert kíván.

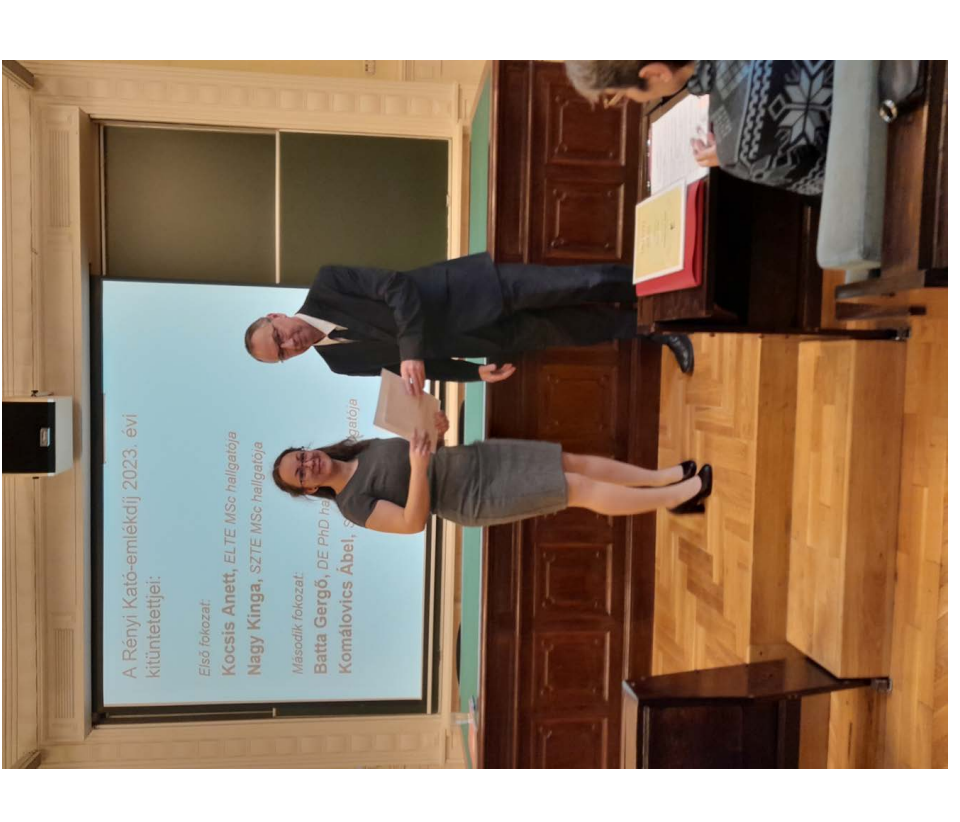

kitüntetettjei:
Első fokozat:
Kocsis Anett, ELTE MSc hallgatója
Nagy Kinga, SZTE MSc hallgatója
Második fokozat:

Kocsis Anett az Eötvös Loránd Tudományegyetem elsőéves MSc hallgatójaként kiemelkedő teljesítményt nyújtott. Már BSc hallgatóként aktív és érdemi kutatói tevékenységet folytatott a matematika több különböző területén. Eleddig 6 cikket nyújtott be, különböző társszerzőkkel, melyből 2 már meg is jelent a Discrete Mathematics illetve az Acta Arithmetica folyóiratokban.

Eddigi kutatásaiból három témát lehet kiemelni. Egyrészt a kombinatorikus számelméleti eredményeket, melyek Matolcsi Dáviddal, Sándor Csabával és Tőkős Györggyel közösek. Ebben multiplikatív bázisok méretére adnak aszimptotikus eredményeket. (Például, milyen sűrű lehet a pozitív egészek egy olyan halmaza, hogy két ilyen szám szorzataként bármilyen pozitív egész előáll?)

A második, jóval komplexebb projekt témavezetőjével, Elekes Mártonnal, valamint Kátay Tamással, Pálfy Mátéval és más jeles kutatókkal közösen valósult meg, melynek egy reprezentatív kérdése: Hogyan néz ki egy Baire-kategória értelemben tipikus Abel-csoport?

A csak a BSc szakdolgozatában leírt újabb kutatásai, szintén az előbb említett kutatócsoporttal közösen, azt a leíró halmazelméleti problémakört vizsgálják, hogy általános lengyel terekben a különböző értelemben vett kicsinység tulajdonságok (mint pld Haar-null és Haar-első kategória) milyen számosság típusú következményekkel járnak (uniformitás, fedési szám, kofinalitás, Erdős-Sierpinski-jellegű eredmények).


A Rényi Kató-emlékdíj 2023. évi kitüntetettjei:
Első fokozat:
Kocsis Anett, ELTE MSc hallgatója
Nagy Kinga, SZTE MSc hallgatója
Második fokozat:
Batta Gergő, DE PhD hallgatója
Komálovics Ábel

Nagy Kinga a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének II. éves MSc hallgatója. Már első évesként aktív kutatásba kezdett Vígh Viktor témavezetése mellett. Ez eddig 3 geometriai tartalmú kéziratban jelent meg, melyből az egyiket a Discrete Mathematics, míg egy másikat a Discrete and Computational Geometry folyóirat közölt, mindkettő Q1-es lap.

Az előbbiben azt a természetes kérdést válaszolták meg, hogy hogyan nézhetnek ki a körlap legfeljebb három részre bontásai (a határtól eltekintve) egybevágó részekre, melyek határa szakaszonként sima. Ez a karakterizációs eredmény egy többlépcsős folyamat eredménye, mely Kurusa, Lángi és Vígh korábbi munkájára épül.

Második cikkükben aszimptotikus eredményeket bizonyítottak azon kérdésre, hogy ha adott egy konvex síkidom L, akkor milyen jól lehet közelíteni egy sima határú konvex síktartományt úgynevezett L-konvex poligonokkal.

Harmadik cikkükben szférikus halmazok véletlen konvex közelítéseit vizsgálták, különböző szférikus konvexitás fogalmak közötti folytonos átmeneteket definiálva.

A Rényi Kató-emlékdíj 2023. évi kitüntetettjei:

Batta Gergő a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolájának elsőéves doktorandusz hallgatója. Korán bekapcsolódott a Debreceni Egyetem egyik nagy témakörében folyó kutatásba, melyet Győry Kálmán és az egyetem Algebra és Számelmélet tanszéke fémjelez.

Szikszai Márton témavezetése mellett diofantoszi típusú halmazokat vizsgált, ahol a halmaz elemei olyanok, hogy bármely kettő szorzatához 1-et adva egy egész szám magasabb rendű hatványát kapjuk. Azon esetről, amikor a hatványok négyzetszámok, sok ismerettel rendelkezünk, ám az általános eset még erősen nyitott. Ezen halmazok vizsgáltatát terjesztették ki arra az esetre, ha a halmaz elemei racionális számok. Ezen belül is 3 és 4 pontú racionális diofantikus halmazok körében értek el számottevő eredményeket és találtak új konfigurációkat. Jelenleg Hajdu Lajos témavezetésével a diofantikus halmazok gráfelméleti vonatkozásait vizsgálja.

A Rényi Kató-emlékdíj 2023. évi kitüntetettjei:

Komálovics Ábel jelenleg Szegedi Tudományegyetem Matematikai Doktori Iskola elsőéves PhD hallgatója; egyetemi tanulmányait a Budapesti Műszaki Egyetemen végezte Molnár Lajos témavezetése mellett. A közös munka eredményeként 1 cikkük jelent meg a Q1-es Journal of Mathematical Analysis and Applications folyóiratban.

Cikkükben C*-algebrák pozitív kúpjain bevezetett olyan távolság fogalmakat vizsgáltak, mint a Bures- és Hellinger-metrikák, amelyek fontos szerephez jutnak a kvantuminformáció-elméletében is. Ezen speciális metrikák hasonló tulajdonságai mentén indulva távolságmértékeknek egy egy-paraméteres családját vezették be, felölelve a fenti eseteket is. Ezen család létezésével, pozitivitásával és alapvető tulajdonságaival foglalkozik a fenti munka. A cikk eszköztára a funkcionálanalízis széles tárházából merít, olyan kurrens fogalmakat is alkalmazva, mint a „Kadison transitivity" vagy a C*-algabrák nyom-szerű lineáris operátorainak elmélete. A dolgozat szisztematikusan kitér a Hilbert-tér esetére is, ami a kvantuminformáció-elméletben különösen fontos.

Jelentés a 2023. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2023. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 6-án, közép-európai idő szerint 14 órai kezdettel rendezte meg a következő tizenkét helyszínen: Budapest, Cambridge, Debrecen, Kaposvár, Kecskemét, Miskolc, Nyíregyháza, Pécs, Szeged, Székesfehérvár, Tatabánya és Zalaegerszeg.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: Biró András, Fleiner Tamás (elnök), Frenkel Péter, Harangi Viktor, Kós Géza, Kovács Benedek, Maga Péter, Pach Péter Pál és Tóth Géza. A bizottság szeptember 20-i ülésén a következő feladatokat tűzte ki:

1. Legyen $f(x)=\sum_{i=0}^{d} a_i x^i$, ahol $d \geq 1$, az $a_0, \ldots, a_d$ együtthatók nemnegatív egészek, $a_d > 0$. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan n pozitív egész szám van, amelyre $f(n)$ az $f(2), f(3), \ldots, f(n-1)$ számok egyikével sem osztható.

2. Legyen n pozitív egész szám. Nevezzük *csúcs*nak a síkbeli derékszögű koordinátarendszer azon pontjait, amelyeknek mindkét koordinátája az $1, 2, \ldots, n$ számok közül kerül ki. Nevezzük *él*nek azon egységnyi hosszúságú szakaszokat, amelyeknek mindkét végpontja csúcs. Néhány élt pirosra színeztünk úgy, hogy bármely két különböző csúcs között pontosan egy piros töröttvonal vezessen. Az f piros él *fontos* az e él számára, ha az e két végpontját összekötő piros töröttvonal áthalad f-en. Bizonyítandó, hogy van olyan piros él, amely legalább n él számára fontos.

3. Adott egy $ABCDE$ konvex húrötszög és egy belső P pontja úgy, hogy $AB=AE=AP$ és $BC=CE$. Az AD és BE egyenesek metszéspontja Q. Az R és S pontok a CP, illetve a BP szakaszokon fekszenek úgy hogy $DR=QR$ és $SR \parallel BC$. Mutassuk meg, hogy a BEP és PQS körök érintik egymást.

A bizottság a beérkezett dolgozatok átnézése után, december 6-i ülésén a következő jelentést fogadta el:

„A verseny minden helyszínen rendben zajlott le, 116 regisztrált versenyzőtől összesen 90 dolgozat érkezett be.

Az idei versenyen 14-en oldották meg esetleg kisebb hiányossággal az első feladatot. A második feladat esetén 7-en értek el hasonló eredményt, és további 8 versenyzőnek van értékelhető részeredménye. A harmadik feladat bizonyult a legnehezebbnek: erre mindössze egyetlenegy helyes megoldás érkezett, további két versenyző pedig jó irányba indult, de elakadt.

Egy versenyző helyesen oldotta meg az első és a harmadik feladatot, a másodikra adott megoldása pedig lényegében helyes. Ezért

I. díjat és 60000 Ft pénzjutalmat nyer

Molnár-Szabó Vilmos, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai Dobos Sándor, Fazakas Tünde, Ádám Réka, Hujter Bálint, Bán-Szabó Áron, Szűcs Gábor, Fey Dávid és Seres-Szabó Márton).

Két versenyző oldotta meg helyesen az első két feladatot. Ezért a teljesítményért

II. díjban és 30000 Ft pénzjutalomban részesül

Móricz Benjamin, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai Dobos Sándor, Fazakas Tünde, Ádám Réka és Hujter Bálint) és

Szakács Ábel, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 10. osztályos tanulója (tanárai Hujter Bálint, Kiss Géza és Terpai Tamás).

Egy versenyző az első feladat helyes megoldása mellett javítható hibától eltekintve megoldotta a második feladatot is. Ennek megfelelően

I***II. díjat*** és 20000 Ft pénzjutalmat kap

Varga Boldizsár, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanára Holló Gábor).

Egy versenyző megoldotta az első feladatot, és a második feladatra olyan javítható megoldást adott, amiből lényeges elemek hiányoznak. Ez alapján

1. dicsérettel és 10000 Ft pénzjutalommal díjazzuk

Czanik Pált, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulóját (tanárai Lenger Dániel és Kocsis Szilveszter).

Végül három versenyző az első feladatra adott helyes megoldás mellett érdemi részeredményt ért el a második vagy harmadik feladatban. Így

2. dicsérettel jutalmazzuk

Bognár András Károlyt, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulóját (tanárai Ádám Réka, Dobos Sándor, Fazakas Tünde, Hujter Bálint és Rubóczky György),

Forrai Boldizsárt, az SZTE Gyakorló Gimnázium és Általános Iskola 10. osztályos tanulóját (tanárai Matos Zoltán és Torma Bence), valamint

Tarján Bernátot, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium 12. osztályos tanulóját (tanárai Holló Gábor, Dobos Sándor és Nagy Zoltán Lóránt).

A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző, felkészítő tanár és a lebonyolításban közreműködő kolléga munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva gratulál."

A feladatok megoldásai idén is a KöMaL februári számában (74. évf. 2. sz) jelentek meg.

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

Kosztra Gábor 2024. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Váltószögek – podcast adás indul a matematikatanításról

Nem ritka, hogy nehezemre esik bemenni a saját matematikaórámra. Közel 20 éve tanítok, de a kelleténél még most is gyakrabban fog el szorongás óra előtt. Eléggé felkészültem? Elég hatékony leszek? Be tudom vonni rendesen a diákokat úgy, hogy legyen sikerélményük, és még a tananyaggal is „haladjak”? Vajon amit mondok majd, eléggé leköti a tehetségesebb diákokat, nem lesz túl unalmas nekik? Vajon ahogy mondom majd, nem lesz túl gyors a kevésbé ügyeseknek, nem veszítem el őket nagyon hamar?

Elvégeztem az egyetemet, pecsétes papírom van róla, hogy egész sokat tudok matematikából. Régóta a pályán vagyok, így megfelelő tapasztalatom is van, több mint 10 000 matematikaórát megtartottam már. És ennek ellenére 20 év után is sokszor van bennem bizonytalanság, hogy jó úton járok-e. Megfelelő az óráim felépítése? Jól végiggondoltam a tanévet, nem fogok elcsúszni a tananyaggal? Jó, hogy így kérek számon? Úgy is mondhatnám, sokszor felmerül bennem a kérdés: Elég jó matematikatanár vagyok?

Ha bennem felmerül ez a kérdés 20 év után, akkor vajon hogy élheti ezt meg egy ötöd- vagy hatodéves hallgató, aki épp a rövid vagy hosszú gyakorlatán van? És hogy élheti ezt meg egy kezdő tanár, akinek már a vezetőtanára támogatása nélkül kell nap mint nap bemenni, és megtartani a saját heti 20, vagy ha már több éve a pályán van, 24 óráját? És vajon hogyan lehet segíteni ezeknek a fiatal kollégáknak, akik a jövőt jelentik a szakmánkban? Hogyan lehet úgy megtámogatni a munkájukat, hogy túllendüljenek a saját szakmai holtpontjaikon, és ebben a hivatásban jussanak el a nyugdíjas korukig?

Azt hiszem, ezek a kérdések formálták és hozták végül létre bennem azt a podcast ötletet, amit a Bolyai János Matematikai Társulat segítségével előkészítettünk, majd elkészítettünk, és reményeink szerint még sok adást el tudunk készíteni.

Váltószögek – Így tanítanak ők

Mi segíthet minden kezdő tanárnak? Ha van egy rutinosabb kolléga, aki kíséri a pályája elején, és tanácsokkal látja el. Ha kell, bátorítja, ha kell, ad neki segédanyagot az órára, ha kell, elmondja, mit kellett volna másképp csinálni, ha kell, megvigasztalja. Innen jött az ötlet, hogy ültessünk le beszélgetni egy idősebb matematikatanárt, aki már régóta a pályán van, és egy kezdő tanárt, aki nemrég óta él ennek a hivatásnak, és beszélgessünk velük arról, mit jelent számukra a matematikatanítás, és úgy általában ez a hivatás. És ha jó a beszélgetés, akkor el fog hangozni sok hasznos gondolat, ami sokaknak segíthet a szakmánkban. Ha elég érdekesen tudunk a matematikatanári hivatásról beszélgetni, még az is lehet, hogy egy 16-17 éves fiatal, aki jó matematikából, kedvet kap ehhez a szakmához. A lényeg, hogy változzanak a nézőpontok, mert mást lát a kérdező, mást lát a rutinosabb tanár és mást a pályakezdő. Mondhatnám úgy is, hogy lássunk különböző szemszögekből, azaz váltsunk szöget.

Váltószögek – Így tanultak ők

És mi az, ami még árnyalhatja, mennyire is sikeres a munkánk? Nem más, mint a tanítványaink és persze mások tanítványai. Azok a tömegek, akik legalább 12 éven keresztül ültek a matematikaórákon. Vannak, akikben ez mély traumaként maradt meg, vannak, akik teljesen közömbösek ezzel kapcsolatban, és vannak, akiknek életreszóló élmény volt matematikát tanulni. Vajon min múlik, hogy a diákjaink melyik csoportba kerülnek? Szóval váltsuk másképp is a szöget. Keressünk két nem matematikatanárt, akik egy szakmából érkeznek. Lehetőség szerint az egyik itt is legyen idősebb, tapasztaltabb, a másik fiatalabb, pályája elején lévő. És velük is beszélgessünk, nekik milyen volt hétről hétre beülni a matematikaórákra. Mit éltek ott meg? Mennyire tartották hasznosnak? Mit használnak ma is az ott tanultakból? Mit gondolnak ők a tanári hivatásról és a tanításról?

Ezekről fog szólni a Váltószögek podcast, amelynek első két adása hamarosan elkészül. Ezeket még ebben a tanévben megmutatjuk a szélesebb közönségnek, és terveink szerint a következő tanévben folytatjuk a munkát, és egyre több párost ültetünk le beszélgetni a matematikatanításról. Akinek felkeltettük érdeklődését, az figyelje a honlapunkat és facebook oldalunkat! Április elején érkezik az első beszélgetés, reméljük tetszeni fog.

Kosztra Gábor

középiskolai matematikatanár, a Váltószögek podcast házigazdája

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Adatkezelés
Elfogadom.

facebook

AZ **INTERJÚ-PORTRÉ** MENÜPONT JÓL VAGY KEVÉSBÉ ISMERT MATEMATIKUSOKAT, VAGY OLYAN, EGYKOR MATEMATIKUSKÉNT VÉGZETTEKET SZERETNE BEMUTATNI, AKIK MA MÁS SZAKMA ELISMERT KÉPVISELŐI, SPORTOLÓK, MŰVÉSZEK...(ROVATSZERKESZTŐ: *OLÁH VERA*.)

Paulovics Zoltán

2024. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Ki akar ma tanítani? – I. rész

Miért választja valaki ma a matematikatanári hivatást, és miért marad a pályán? „Egyelőre nem mondhatjuk, hogy minden könnyű és vidám, de hiszünk abban, hogy lehet ez jó, ezért próbálunk kitartani. Talán itt és most több a nehézség, mint az öröm, de megéri várni.” Hogy mik az örömök és mik a nehézségek, és mi is az Iváncsán tanító fiatal matematika-fizika szakos pedagógus pár küldetése, kiderül *Paulovics Zoltán* interjújából.

Ács Katalin

2024. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Imrecze Zoltánné, Ani (1923 – 2010)

Pármunka, csoportmunka, kooperatív tanulás – ma így mondanánk – természetes volt számára. Minden porcikájával, tekintetével, gesztusával, kérdéskultúrájával tanított. Aktív résztvevője az 1960-as évektől kezdődő matematikatanítási, tantervi megújulásnak, tankönyvek, tanári segédanyagok, népszerűsítő cikkek és könyvek írója, előadások, műsorok készítője volt Imrecze Zoltánné Hammer Anna. Rá emlékezik, másokat is idézve, volt tanítványa és kollégája, *Ács Katalin*, bemutatva Ani nénit

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI
GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

Paulovics Zoltán 2024. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Ki akar ma tanítani? – I. rész

Mit jelent ma matektanárnak lenni? Kap-e egy tanár ma elég megbecsültséget, versenyképes fizetést? Vonzó-e egy fiatal számára a pedagógusi pálya? Miért választja valaki ma a matematikatanári hivatást, és miért marad a pályán?

Mindig releváns és fontos kérdés egy társadalom számára, hogyan kívánja képezni a fiataljait, milyen utakat jelöl ki a számukra, hogyan segíti őket. Végső soron: általuk hogyan akar tovább élni. Az elmúlt években ezek a kérdések itthon különösen reflektorfénybe kerültek, nagyon sokan akartak változást, nyilvánítottak véleményt. Cikksorozatunk nem kívánja értékelni az oktatáspolitikát. Nem keresünk általános igazságokat, hanem egy-egy matektanár mellé szegődve szeretnénk belelátni a mindennapi munka örömeibe és nehézségeibe, a munka utáni munka kihívásaiba és a kikapcsolódás nyugalmába. És ezzel együtt példaként felmutatni a mai matematikatanár-közösség egy értékes metszetét.

Ahol számít a személyiségem – Beszélgetés a Szauer házaspárral

Kedd reggel van. A suhanó vonat lassan elhagyja Pest megyét; Iváncsa felé tartok. A Dr. Fejérpataky László Sportiskolai Általános Iskola matematikatanárának, Szauer Marcellnek megyek meglátogatni két óráját. Feleségével, Hannával – miután matematika-fizika szakos tanárként mindketten lediplomáztak, majd rá pár hónapra összeházasodtak – 2022. szeptemberétől élnek és tanítanak itt. Pontosabban ebben a tanévben már csak Marci tanít, ugyanis Hanna már otthon készül a február második felében születendő gyermekük fogadására. Az első tanévben fizikát és matekot is tanítottak, közben Marci hittantanár végzettséget szerzett. Jelenleg Marci az iskola egyedüli felső tagozatos matektanára, heti 25 órában.

Az iváncsai iskola (Forrás: Facebook)

Szelestei Hanna a Keszthelyi Vajda János Gimnáziumban érettségizett, Marci az egri Gárdonyi Géza Ciszterci Gimnáziumban. Egyetemi tanulmányaik alatt szabadidejükben szívesen önkénteskedtek: táborokat, hétvégéket szerveztek a fiatalabb korosztályoknak. Nem a tanulás rovására. Marci 2021-ben vehette át az ELTE Természettudományi Kar Kiváló Hallgatója oklevelét, sőt az évek során gyakorlatokat is tartott az egyetemen. Minden adott egy szép és sikeres karrierhez: a közös diplomázás után esküvő, majd irány az ország egyik kiváló gimnáziuma... De nem így történt: a Szauer házaspár a Fejér megyei Iváncsa településére költözött, hogy a helyi iskola felső tagozatában taníthassanak. „Miért éppen Iváncsa?" Talán lehetne ez az egyik kérdésem hozzájuk – gondolom a jegyzeteimet lapozgatva…

A vonat messze a falu központjától tesz le, a csatlakozó buszjárattal lekésném az órát. Szerencsére Marcinak előtte éppen lyukas órája van, és helyettesíteni sem küldik be, úgyhogy kijön elém.

Az igazgató asszony örömmel köszönt, és lelkesen mesél a fiatal házaspárról. „Ritka, mint a fejér holló a matek-fizika szakpár. Főleg egy házaspárnál!"

A diákok hol érdeklődve, hol új matektanárt sejtve, hol közönyösen néznek rám. Középpontosan szimmetrikus alakzatok, illetve Pitagorasz-tétel van terítéken. Látszik, hogy nagy a szórás mindkét csoportban: a diákok között páran tanulni, páran csak túlélni akarnak. Az órák után Hanna és Marci az otthonukban ebéddel fogadnak, majd végre kérdezhetek is tőlük…

Szauer-Szelestei Hanna és Szauer Marcell (Forrás: Miklósi Máté felvétele)

Miért választottátok a matematikatanári hivatást?

Szauer Marcell: Nekem nem gyerekkori álmom volt a tanári hivatás. A felvételi jelentkezés előtt, amikor az osztályfőnököm kérdezte, hogy mi szeretnék lenni, nem igazán tudtam válaszolni. Mivel a reál tárgyak érdekeltek, azokkal szerettem volna kezdeni valamit, de nem vonzott a mérnöki vagy a kutatói munka. Nem akartam olyan pályára menni, ami kifejezetten csak egy szakterületre koncentrál. A másik oldalról megfogalmazva: a tanári pályában az volt vonzó, hogy láttam benne a tudományos és a személyes emberi oldalt is.

Szauer-Szelestei Hanna: Az én utam is hasonló, csak talán egy kicsit tudatosabban alakult. 9. osztályban meg tudtam fogalmazni magamnak, hogy a fizikát annyira szeretem, hogy azzal szeretnék foglalkozni. Utánajártam, mit lehet vele kezdeni és világossá vált, hogy mérnök nem szeretnék lenni. Nem tetszett a gondolat, hogy íróasztal és számítógép mellett ülve teljenek a munkanapjaim, jobban szerettem volna emberekkel foglalkozni Olyan pályára szerettem volna menni, ahol továbbra is művelhetem a fizikát, és egyben számít a személyiségem: amit más nem tudna ugyanúgy csinálni, mint én.

Kicsit előre ugorva, megosztanál egy olyan esetet, ahol különösen is számított a személyiséged?

H: Elsőnek az jut eszembe, hogy én nagyon-nagyon szeretek játszani, illetve játékokat kitalálni. És jól tud elsülni, ha egyszer-egyszer szánok rá időt, hogy játékosabb legyen az óra. Például a szabadulószobás összefoglaló órát nagyon szokták élvezni a diákok. Szerintem az egy jó tanári tulajdonság, hogy én magam szívesen játszom, állítok össze játékos feladványokat, és ez a tanítási stílusomban is megnyilvánul. Ráadásul, ha sikerül rá időt szánni, tényleg nagyon tudják élvezni a diákok, és ilyenkor érezhetően motiváltabbak.

Köszönöm! Visszatérve, tehát elsősorban nem is matektanár akartál lenni.

H: Nem, fizikatanár. Annyira rajongtam a fizikáért, hogy azt szerettem volna, mások is megértsék. Olyan nagy lelkesedést váltott ki belőlem, hogy ezt tovább szerettem volna adni: szerettem volna, hogy más gyerekek is annyira élvezhessék, mint én. Elsősorban a fizikát, de a matematikát is. Már kilencedikes koromban találkoztam az organikus pedagógiával, és ennek hatására a középiskolai órákat is más szemmel néztem: érdekelt, hogyan lehet jól tanítani.

A fizika ilyen mély szeretete hogyan alakult ki benned?

H: A középiskolai fizikatanáromtól jött, Farkas László tanár úrtól. Nem mondom, hogy folyton kísérleteztünk, de a középpontban a jelenségek vizsgálata, mély megértése állt. Ez nagyon elvarázsolt!

És te, Marci?

M: Általános iskolában azt szerettem nagyon a fizikában, hogy van egy képlet, behelyettesítek és kiszámolom. Mai fejjel nem értem, hogy mi volt ebben olyan nagy élvezet…talán az, hogy bizonyos dolgokat ki tudtam számolni. A középiskolában már határozottan a matekot szerettem jobban, aztán egyetemen újra közel került hozzám a fizika. Egyébként érdekes, hogy ezek a változások általában a tanáraim személyiségével, tevékenységével függtek össze.

Melyik tantárgyat könnyebb tanítani?

M: Úgy érzékeljük, hogy a fiataloknak egyre kevésbé kell gondolkodniuk, és mintha a társadalom is összességében egyre kevésbé gondolkodna. Ezért különösen is fontosnak érezzük, hogy a gondolkodásra neveljük a diákokat. Úgy véljük, szinte mindegy, hogy a diák emlékezni fog-e arra, mi a paralelogramma definíciója, de az tényleg fontos, hogy amikor tanulja, akkor elgondolkozzon, azaz összefüggéseket felismerjen, következtetéseket tegyen, alkalmazza az ismereteit. Viszont elég nehéz mérni, hogy a gondolkodásra való ösztönzés mennyire eredményes... Most mindketten úgy éljük meg, hogy a matekot nehezebb tanítani, mert az a tapasztalatunk, hogy a fizika tanításában könnyebb visszajelzést kapni arról, hogy tényleg megértette-e, elsajátította-e az anyagot a tanuló. A matekban nehezebb mérni, hogy hogyan fejlődik a gondolkodása, logikája, matematikai képességei. Nyilván van valamennyi visszajelzés, de egy-két éves távlatban csak remélni lehet, hogy tényleg volt értelme annak, amit csináltunk. Pedig a fejlődés kimutatása tényleges segítség lenne.

Ami még szintén nehéz, vagy kihívás: sok idő mindig találni jó példákat, alkalmazásokat, amelyekkel kézzelfoghatóbbá, és így talán befogadhatóbbá válik a tananyag.

A végzettségetekkel, illetve kvalitásaitokkal a versenyszférában is megtalálnátok és megállnátok a helyeteket. A pályakezdő matektanárok egy része hamar biztosítói, programozói állásokban köt ki. Mi az, ami annyira értékes a tanári pályában, hogy ti itt maradtok?

H: Persze lehetne más munka után nézni, de hat év egyetemi tanulást, rengeteg éjszakázást, belefektetett energiát, és a kezdeti évek küzdelmeit nem akarjuk kidobni az ablakon.

M: Matektanárból valódi hiány van, és ebben tényleg azt érzem, hogy nagy szükség van a munkámra. Más lenne az érzés például egy programozói állásban, ahol talán ma kisebb a munkaerőhiány.

H: Olyan munkát szeretnénk végezni, ahol fontosak vagyunk mi is, azaz a személyiségünk is, nem csak a tudásunk. Egész nap kapcsolatban vagyunk a gyerekekkel, nem mindegy, hogy kik vagyunk, mit mutatunk meg magunkból, hogyan-mennyire adjuk önmagunkat.

M: Nagyon igénybe vesz ez a munka, de nehezen tudom csak elképzelni, hogy mást dolgozzak. Sokszor eszembe jut, hogy annyi munkakör van, ami bizonyos szempontból nyugodtabb, mechanikusabb, például nem igényel otthoni készületet és folyamatos szellemi és fizikai készenlétet. Például egy irodai munka – persze nyilván ennek is megvan a maga nehézsége. De ott lenne bennem a kérdés, hogy biztos ez-e a feladatom. Úgy érezzük, a gyerekekhez szól a küldetésünk.

Itt éltek igazán.

M: Huh, hát igen, de ezt jól kell érteni. A mindennapok rohanásában inkább az dübörög bennem, hogy mikor lesz már vége a napnak, menjünk már haza.

A kezdet kezdetén volt sok lámpaláz, izgalom, stressz. A folytonos szereplés újdonsága, a tanárszerep kezdeti nyomása mind-mind hatással volt ránk, ezekkel meg kellett küzdeni.

Az óráidon ebből már semmit sem érzékeltem rajtad.

M: Nyilván most már nincs, vagy legalábbis sokkal kevesebb. Viszont van más. Például, ha olyat csinálnak, amire nem tudok jól reagálni, és onnantól szétesik az óra. Vagy nem értem meg, mi az, amit nem ért a diák egy számomra nyilvánvaló fogalmon, vagy egyszerűen csak nincs kedvük dolgozni. Tehát rajtam van a nyomás, hogy bármikor előállhat egy olyan szituáció, amit nem fogok tudni megoldani, holott tanárként úgy gondolom, hogy mindent tudnom kellene kezelni. Ennek a magabiztossága még nincs meg.

Én úgy tapasztaltam, hogy a gyakorlóiskolában a diákok részéről is magasak az elvárások a tanárok felé. Igen nagy szakmai képzettség kell ahhoz, hogy lenyűgözzük őket. Teret adtam az érdeklődésüknek, és így a jobbnál jobb kérdések záporában hamar az egyetemen tanult felsőbb matematika területein találtam magam. És bizony nem egyszer előfordult, hogy nem tudtam válaszolni nekik. Itt, gondolom egészen más a helyzet.

M: Itt a felső tagozaton főként nem matematikai kihívásokat élünk meg. A gyakorlóiskolában a többséghez el lehetett jutni azzal, hogy a táblánál bemutattam valamit. Itt nem ritka, hogy csak akkor van esélyem egy diáknál, ha odaülök mellé, csak neki elmagyarázom – újra, lassabban, máshogy. Ehhez közben a többieket le kell kötni valamivel. Persze itt is tudják a diákok, hogy tanulni kell, de sokszor hiányzik a motiváció, a támogatás, az akaraterő. Ugyanakkor fontosnak tartom azt leszögezni, hogy a gyakorlóiskolához képest sokszínűbbek itt a diákok – mármint adottságok és hozzáállás tekintetében. Így az előbb leírt nehézségek mellett máskor pedig nem várt érdeklődéssel találkozik az ember, sőt meglepő módon ez nem is mindig a matekot szerető diákoktól érkezik. Különösen nagy öröm ezt néha megtapasztalni, ha valaki érdeklődő, akkor azért, ha egyébként nem az, de éppen van egy jó meglátása, gondolata, kérdése, akkor pedig azért.

H: Az egyetem végeztével az ismerősök 99%-ának az volt az elvárása felénk, hogy valami elit iskolát keressünk. De nem arra vágytunk. A gyakorlóban megtapasztaltuk, hogy az milyen.

M: Az egy egészen szűrt társaság, mi pedig látni akartuk, hogy színesebb a világ. Nagyon fontos az a tehetséggondozás, ami ott van, de nem csak erre a szűk rétegre akartunk rálátni.

H: Nagy a tanárhiány. Ha mindenki a „legjobb" helyekre pályázik, és azok lesznek feltöltve, úgy a kis iskolákban ki fog tanítani? Így élveztük azt is, hogy nem versenyezni kellett egy állásért, hanem itt tényleges szükség volt matektanárra.

Nem egyszer hallottam matematika BSc-s hallgatóktól a félév eleji bemutatkozó körben, hogy matektanárok szerettek volna lenni, de inkább tanulnak matematikusnak és elmennek egy céghez dolgozni, mert az sokkal kényelmesebb. Hogy néznek rátok az ismerőseitek, barátaitok? Nem furcsállják, hogy ti – habár lenne rá lehetőségetek – nem a kényelmesebb utat járjátok? Akár azzal, hogy tanítotok, akár azzal, hogy itt tanítotok.

H: Volt olyan barátunk, aki a döntésünket úgy értelmezte, hogy kidobjuk az adottságainkat, tehetségünket az ablakon azzal, hogy nem egy elit gimnáziumban tanítunk, hanem olyan helyen, ahol nem lesznek fogékonyak arra, amit adni tudnánk. Az persze igaz, hogy míg a gyakorlóiskolákban a diákok részéről alapvetően nyitottságot, tudásszomjat érzékeltünk, itt inkább egyfajta ellenállást. Ezzel a látásmóddal viszont mégsem értünk egyet, számunkra ennél árnyaltabb kérdés ez.

M: Azért sem tetszett ez a megfogalmazás, mert azt sejteti, hogy akkor vagy jó tanár, ha sokat tudsz, adsz. Ezek persze szükségesek, de inkább úgy fogalmaznék, hogy ahogyan mi jelenleg adni tudunk, az nekik nem olyan könnyen befogadható. Keresgéljük még a közös nyelvet, hol több, hol kevesebb sikerrel, de úgy érzem, amikor ezt sikerül megtalálni, akkor meg tud valósulni az együttműködés, akkor sikerül valamit elkezdeni felépíteni abból, amit egy tanár célként kitűz. De azért ebben a közös forma megtalálásában még van feladatunk. Ebben ők is, mi is tudunk még fejlődni.

Úgy tudom, a tanítási gyakorlatok alatt sok, nagyon pozitív visszajelzést kaptatok. Ért-e benneteket „első sokk" az éles helyzetben?

H: Kaptunk pozitív visszajelzéseket, úgy éreztük, hogy jól mennek a dolgok. De ez talán kell is, mert akinek a gyakorlat rossz élmény volt, az esetleg már nem is jut el odáig, hogy szeretné folytatni. Szükséges az az élmény, hogy „valami már sikerült, jó lenne folytatni". Biztos, hogy nagy önbizalommal érkeztünk ide. Talán kicsit túl nagy is volt az arcunk.

M: Volt egy elképzelésünk arról, hogy hogyan érdemes tanítani, és a gyakorlatok tényleg azt jelezték vissza, hogy nem gondolunk teljesen hülyeségeket. Ahogyan akkor tartottuk az órákat, az tetszett a gyerekeknek. Igaz, a mostani idő sokszorosát szántuk akkor egy-egy órára való felkészülésre, és világos volt, hogy az nem fenntartható. Heti 5-10 órával is sok volt, tudtuk, hogy mondjuk 25 óra esetén lehetetlen.

A sok meglepetés között azzal szembesültünk, hogy amit mi gondolunk a tanításról, az egyáltalán nem működőképes mindenhol, például itt sem. Amiért a gyakorlóiskolákban lelkesedtek a diákok, az itt hidegen hagyta őket. Maga az óra iránti lelkesedés is igencsak foghíjas volt.

Az első ilyen fájdalmas felismerés az volt, hogy nem adott az, hogy ők figyelnek és hajlandók dolgozni, hanem ezt nekünk kell felépíteni, megteremteni. Olyan határozott elvárásokat állítani, amelyek ezt megkövetelik. Korábban ehhez nem kellett energiát befektetnünk, de itt azzal szembesültünk, hogy muszáj.

A másik nagy nehézségbe a partneri viszony kialakítása során ütköztünk. Ez alatt azt értem, hogy vannak dolgok, amelyeket meg lehet beszélni a diákokkal, nekik is lehet beleszólásuk, alakíthatják a keretet. Megtanultuk az egyetemen, hogy ez fontos, és próbálkoztunk is például közös szabályrendszer kialakításával. Szépen lassan rájöttünk, hogy a partnerséghez érettség is kell, illetve ezen viszony kultúráját is ki kell alakítani, mert nem magától értetődőek a szükséges feltételek hozzá.

Itt első körben nem partnerségre van szükség, hanem nagyon világos és határozott szabályokra. És ha már tudunk együtt dolgozni, akkor lehet alakítani, hogy kétirányú legyen a kapcsolat a tanár és a diák között.

Sikerült idáig eljutni?

H: Valamikor igen, valamikor nem. Következetesen tényleg nem, tehát biztonságos kötődést nem sikerült kialakítani az osztályokkal, de időnként létrejött valamilyen együttműködés.

M: Nagyon igyekszem határozott és világos szabályokat alkotni, de még mindig vannak olyan rések, amelyeket megtalálnak. És ha megtalálják, akkor könnyen felborul a stabil közös munka. Ráadásul a diákok kitartóan próbálkoznak, és egy idő után az emberben csökken a kitartás, kezdi elengedni a dolgokat. Ez is része volt az „első sokknak". A gyakorlat alatt nem állt elő olyan helyzet, amelyet ne tudtam volna kezelni. De itt másfél év után még mindig előfordul. Például aznap valamiért nem hajlandók dolgozni.

H: Vagy bejön egy poloska, és annyi az órának.

Mesélnétek még az első tanévetekről?

H: Egész tanítás alatt a matekteremben voltunk (ahol minden felsős osztálynak, csoportnak az órái vannak), órák után otthon ebédeltünk, aztán aludtunk egy órát: nem bírtunk már semmi mást csinálni. 17-18 óra körül elkezdtünk készülni a másnapi órákra, és hát ki mikor végzett, vagy ameddig bírta…

M: Most már nem szoktunk mindig aludni délután, de tartunk egy kis szellemi pihenőt. Egyszerűen kell valami más. De azzal, hogy aznapra a tanításnak vége, még a munkának nem. Az tény, hogy hétköznap nem sok másra jut idő, lehetőség és gondolat. Teljesen kitölti a gondolatvilágunkat: mit kell még reggel fénymásolni, ki fog hiányozni, mihez kell engedélyt kérni stb.

Azt gondoljuk, hogy lehet úgy tanárnak lenni, hogy az embernek van mellette élete, de ebbe bele kell jönni… Megtanulni határokat húzni, hatékonyabban dolgozni, bizonyos esetekben lejjebb adni az igényességből.

Mi segített, segít ezen készségek fejlesztésében?

M: Nyilván a rutin segít, de egyelőre abból van kevés. Egymásnak is nagyon sokat tudunk segíteni. Sokszor itthon is beszélgetünk az iskoláról, ami azért is nagyon felszabadító, mert pontosan értjük, hogy min megy keresztül a másik, mik a nehézségei, örömei.

Gyakran van olyan, hogy megkérdezem Hannát, van-e még tavalyról ebben vagy abban a témában valamilyen anyaga, és amikor megmutatja, elámulok, hogy ezt így is lehet csinálni. Mert nekem ez eszembe sem jutott volna, pedig mennyire jó ötlet.

H: Persze előfordul az is, hogy a másiknak nem tetszik az ötletünk. Ezt néha nehéz feldolgozni, de segít, ha tudatosítjuk, hogy ettől még az lehet egy jó ötlet, óravázlat, csak nem vagyunk egyformák.

M: Figyelnünk kell rá, hogy a munka ne menjen a családi élet rovására, mert elsősorban mi házaspár vagyunk, és csak utána matektanárok.

H: Nekünk nagyon egyszerre kezdődött a házasságunk és az itteni munkánk, körülbelül egy hónap különbség volt a kettő között.

M: Párhuzamosan futnak, de ahogyan mélyül a családi hivatásunk, például a nemsokára születendő gyermekünkkel, úgy alakul hozzá a tanári hivatásunk is: valószínűleg most majd hamarabb jönnek el azok a pontok, amikor kimondom, hogy ennyit tudtam ezzel foglalkozni, több órát nem készülök másnapra.

Mi lenne a legnagyobb segítség, amit kaphatnátok?

M: Tíz év tapasztalat!

H: Anyagok! Nagyon sokat segítene, ha például lenne egy szuper online adatbázis, ahol más tanárok ötletei, kidolgozott feladatai, vagy konkrét, órára bevihető, rögtön nyomtatható feladatsorai, óratervei lennének.

Tankönyv, tanári segédlet?

H: Van, de az nagyon kevés. Persze nyitogatom most is a könyveket, ötletelek, de nagyon más, ha nem a nulláról kell elindulni, hanem csak egy kicsit alakítani a letölthető és szerkeszthető fájlokat. Hatalmas nagy segítség lenne már az is, ha „csak" a szakmai, kreatív részét kellene elvégezni, nem kellene begépelni, megformázni, szerkeszteni, nyomtatni, kivágni…

M: Nyilván meg kell ismerni ezeket az anyagokat, mert a tankönyvben is sokszor vannak jó feladatok, de amikor a tankönyvvel nem kompatibilis a csoport, akkor keresnünk kell mást.

Mitől lesz könnyebb 10 év múlva?

M: Egyrészt attól, amit Hanna is említett, hogy lesz sok kipróbált, bevált, jó anyagunk, amiből lehet válogatni és nem kell készülés során végignézni az internetet.

Másrészt a fegyelmezéssel kapcsolatos tapasztalatokra is gondolok: hogyan kell reagálni, melyik az a helyzet, amikor nem érdemes megakasztani az óra menetét a fegyelmezéssel, hanem bölcsebb elengedni a fülünk mellett. Továbbá könnyebb lesz felmérni, hogy ez a csoport képes-e arra, amit és ahogyan szeretnénk tanítani, vagy hogy így nem fog átmenni nekik. Amikor tapasztaljuk, hogy a tankönyvet ebben a formában nem tudjuk leadni nekik, akkor mit és hogyan alakítsunk át. Tehát összességében azt reméljük, hogy a sok tapasztalat jelentősen csökkenteni fogja a felkészüléshez szükséges időt, azaz sokkal hatékonyabbak leszünk.

Illetve reméljük, hogy akkor már nem lesznek olyan anyagrészek, amelyeknél nem tudjuk, hogy hova nyúljunk, hogyan érdemes bevezetni, mire kell különösen is figyelni.

Marci bácsi matekórája (Forrás: a szerző felvétele)

Az óralátogatások alapján azt hinném Marci, hogy téged nem lehet kihozni a sodrodból. Volt már olyan, hogy felemelted a hangodat?

M: Persze, de kívülről nyugalomnak tűnhet a beletörődés is. Egy idő után feljebb kerül az ingerküszöb: ha minden egyes apróságon feldühíteném magam, akkor nagyon hamar elfáradnék. És mivel a tanév előrehaladtával egyre fáradtabb vagyok, így egyre kevesebb akcióra adok látványos reakciót. Továbbá élvezik a drámai jeleneteket: amikor úgy reagálok, akkor hallom az „Uh, már ideges!" összesúgásokat, ezért van, hogy már csak azért sem reagálok.

Az nagyon tud dühíteni, amikor úgy érzékelem, hogy szándékosan akadályozzák az órát, direkt húzzák vissza, és így nem tudok az aznapra tervezetteken végigérni.

H: Marci tényleg nagyon nyugodt és türelmes, éppen ezért, ha valamikor „Marci bácsi" kiabál, vagy sikerül feldühíteniük, akkor annak hamar híre megy a diákok között az iskolában.

M: Az szokott zavarni, amikor úgy érzem, hogy nem csak rászóltam, hanem talán beszóltam egy diáknak. Ilyenkor vissza szoktam térni a helyzetre a diákkal, és bocsánatot kérek.

A hangerő időnkénti megemelése, ezzel valamilyen megengedhetetlen viselkedési forma helytelenítése szerintem nem hiba. A heves reakciókat általában utólag is indokoltnak látom és nem szokott emiatt bűntudatom lenni, hanem inkább a fordítottja: utólag belátom, hogy erőteljesebben kellett volna reagálnom, mert így nem biztos, hogy megértette a helyzet komolyságát.

H: Ebben nagyon sokat változtunk. Amikor tavaly idejöttünk, hallottuk, hogy néhány kolléga olykor azért erőteljesebb hangnemben fegyelmezi a diákokat, akkor ezt nem értettük, korábbi tapasztalataink alapján ezeket nem láttuk célravezetőnek. Eltelt pár hónap, és rájöttünk, hogy bizony néha adni kell szaktanári figyelmeztetőt, illetve rájuk kell kiabálni, mert csak azt értik meg. Ha csak rövid távú haszna is van, de olyankor legalább egy kis ideig lehet haladni.

M: Másik pedig az, hogy miként lesz az embernek tekintélye a gyerekek előtt. Ideális esetben egy-két éves közös munka és ismeretség után kialakul a korrektség, következetesség, ugyanakkor (jó értelemben vett) szeretetteljes hozzáállás folytán. De mi van addig, amíg ez nincs? Valahogyan akkor is rendet kell tartani, és akkor választhat a tanár, hogy miként mutatja meg, hogy „ő az úr a háznál". A hangerő megemelése nem túl szimpatikus számomra, de megint csak azokban a helyzetekben, amelyeket akkor és ott kezelni kell, nem látok más hatékonyabb módszert. (Egyébként ennek előnye a kollektív büntetődolgozathoz képest, hogy a címzettnek szól, nincsenek járulékos veszteségek, „ártatlanul szenvedők".)

A gyakorlóiskolákban lényegében sohasem kellett erélyesebben fellépnetek. Mi a fő oka ennek a különbségnek? A nyersebb környezet?

H: Talán igen. Hozzászoktak, hogy a szép szónak nem feltétlenül kell engedelmeskedni. Más kultúrkörnyezetben más az ingerküszöb.

M: Osztályfüggő is. Érződik, hogy melyik osztályfőnök hogyan foglalkozik velük, milyen témákról beszélgetnek az osztályfőnöki órákon.

H: De vannak más trükkök is, nem csak a hangerő fokozása. Marcinak van egy jó megfigyelése.

Mesélj!

M: Bevezettük, hogy n darab figyelmeztetés után a következő órán dolgozatot kell írnia az illetőnek. Rászóltam már többször, eljutottunk n-ig, közöltem vele, hogy akkor különösen is készüljön legközelebbre. Válaszul odabökte, hogy „Nem veszi észre a Tanár Úr, hogy ezzel nem ér el semmit?". És itt kell megfordítani a helyzetet, a számonkérő diákot számonkérni. „És te mit érsz el a rendbontásoddal? Na, mit? Mondjad!". Persze erre már nem szokott olyan nagymellényű válasz érkezni. Úgy tapasztaltam, hogy ha váratlanul szót kapnak azok a diákok, akiknek nagyon nagy a szája, akkor hirtelen semmit nem tudnak mondani, és meghunyászkodnak, csöndben maradnak.

A bemutatóórán én is hallottam, hogy van olyan diákod, aki – mondjuk úgy finoman – szeret a szavaival feltűnést kelteni. El tudnád-e képzelni, hogy ezért elégtelent adjál, azaz magatartásbeli probléma miatt a szakmai teljesítményét rontsd le?

H: Ez is olyan, amit nagyon nem így gondoltunk, illetve tanultunk. De van az a helyzet, amikor hónapok óta próbálkozol és semmit sem érsz el. A kollégák pedig mind azt mondják, hogy talán még az „órai munka elégtelen" eszköze segíthet.

M: Nyilván minden diákra más hat, de van egy olyan csoport, akikre a jegy még hat. És őket ezzel még el lehet érni. Nem szeretek így elégtelent adni, nagyon ritkán szoktam, mondjuk órai munkára, ha sokszoros kérés, figyelmeztetés után sem csinál semmit az illető egész órán. Inkább élek a – már említett – következő órán (egyéni) röpdolgozat íratásának módszerével. Igyekszem nem „övön aluli" feladatokat feladni, volt már, aki ötöst írt. Így próbálom a magatartás és a szakmai munka értékelését szétválasztani: a jegy már tényleg a tudását tükrözi, hiszen van lehetősége készülni a következő órára.

Nap, mint nap azt tapasztaljuk, hogy a pedagógiai helyzetekben ritkán van tökéletes megoldás. Olyat igyekszünk keresni, ami a legtöbb szempont szerint megfelelő. Ha találunk jobbat, akkor átállunk arra.

H: Ez sok mindenre igaz. Jöttünk a nagy, ideális elképzeléseinkkel, és a hónapok alatt ezek lerombolódtak. Azt a kérdést kellett feltennünk magunknak, hogy kitartunk a szép, ideális elképzeléseink, elveink mellett és közben tönkremegyünk, vagy ebből-abból engedünk most, ebben az évben… És ahogyan egyre tapasztaltabbak, ügyesebbek leszünk, és jobban fogjuk tudni kezelni a helyzeteket, majd változtatunk. Avagy: lehetünk iszonyatosan aranyosak, csinálhatunk mindent ideálisan, de esetleg senki sem figyel az órára. Ez egy nagy belső harc.

Meséljetek még erről a belső harcról! Van még olyan magatokkal szemben állított elvetek, melyet megszegtetek?

H: „Én nem fogok feladatokat adni egy matekkönyvből." A gyakorlatokon mindent próbáltunk magunk megkreálni: a bevezetőt, a gyakorló feladatokat, mindent. Figyelembe véve az ő igényeiket, a már átélt közös élményeket… Na, lehetetlen minden órára bevinni egy saját feladatsort, és így a félév végére megírni egy saját tankönyvet. Ezt el kellett engedni! Van olyan, hogy azt mondom: „56. oldal 34. feladat, oldd meg!".

Van olyan, vagy csak ilyen van?

H: Van olyan.

M: Ez nem annyira kompromisszum, mint inkább felismerés: nekem két évvel ezelőtt a nagyon mechanikus feladatok nem igazán tetszettek, szerettem valamilyen izgalmas keretsztorikat kitalálni. De azt tapasztaltam itt, hogy nagyon elviszi a figyelmet. Csoportfüggő, de szükség van a csak a lényeget tartalmazó feladatokra is. Sokszor nem egyre, hanem tízre.

H: A különböző tanulási nehézségek számának emelkedésével nő azok aránya, akik számára egy kicsit összetettebb, vagy több – a feladat szempontjából – irreleváns információt tartalmazó szöveges feladat lényegében érthetetlenné válik.

M: Nagy kihívás, hogy tanárként minden gyerekért felelős vagyok, így az egész csoport érdekeit kell néznem. Ha három diák miatt nem halad az óra, akkor az a többi húszat hátrányosan érinti. Ilyenkor azt érzem, hogy még mindig jobb bevetni olyan eszközöket – habár tudom, hogy ez csupán tüneti kezelés –, amelyek számomra drasztikusabbak, de legalább elérem, hogy húszan azt csinálhassák, amit akarnak és kötelességük: tanulhassanak.

H: Még egy kompromisszum, a dolgozatjavítás. Kisregényt írtunk minden dolgozatra: mi ment jól, miben lenne még érdemes fejlődnöd, mikor-hogyan fogsz tudni javítani. Egyrészt ez egy teljes általános iskolai osztály esetén képtelenség, másrészt – ami talán a fájóbb, hogy – sokszor nem is érdekli őket. Volt olyan élményem, amikor megkérdezte, hogy összetépheti-e a kijavított dolgozatot, amivel én rengeteget dolgoztam. Fontos kompromisszum, hogy van, amikor tényleg szükséges külön megkeresni a diákokat, hogy beszéljünk egy dolgozatról, visszatérő hibáiról, és van, amikor kevésbé.

M: És egy utolsó: ha a semmire is lehet jó jegyet kapni, akkor azért alulmotiváltak, ha rossz jegyeket kapnak, akkor pedig azért. Ráadásul nagyok a különbségek osztályokon belül, egyszerre kell különbséget tenni tényleges teljesítmények között, de egyben figyelembe venni mindenki adottságait. Mindenki számára legyen elérhető a jó jegy, de ugyanakkor az értékelés valahogyan tükrözze is a tudást. Ez egy nagy keresgélés. Ahogyan az is, hogy mikor lehet azt mondani, hogy „már nem magyarázom tovább, nem adok még könnyebb feladatot, ennyi a jegy"? Sokszor viszont azt érzem, hogy nekem fontosabb az ő jegye és tudása. Ha én nem megyek utána, akkor ő nem foglalkozik vele.

Te vagy az, aki érted, hogy ez miért fontos…

M: Igen... Mondom, hogy akinek van kérdése, jöjjön, de abszolút elenyésző az óra utáni kérdések száma. Jelentkeznek egy délutáni javítódolgozatra tízen, és nagyjából a fele fog ténylegesen megjelenni.

Nulladik órában, vagy órák után maradtok korrepetálni?

H: Ebben sokat fejlődtünk. Egyszerűen nincs rá erőnk, esetleg szünetekben magyarázunk még, ha kérik, illetve havonta egyszer-kétszer ratunk javítódolgozatot délután.

Marci, volt az óráidon többször is olyan, hogy pluszt kaptak azok a diákok, akik az adott feladatot hibátlanul megoldották, vagy elértek sok pontot. De nem ellenőrizted le őket, maguknak írhatták be. Mi ezzel a célod?

M: Ez nem egyedi dolog, több kollégától hallottam, hogy így csinálja. Különben ebben meg is bízom bennük. Biztos előfordul, hogy néha bekerül óra közben egy-egy plusz a füzetbe, amit aztán gyanútlanul aláírok az óra végén, de igazából nem is akarom ellenőrizni. Kapacitásom sem lenne rá, továbbá aki csak úgy beírogat magának, az szembesüljön azzal, hogy ezért ő a felelős. Alapvetően úgy tapasztaltuk a gyerekek hozzáállásán, hogy nem érzik a saját felelősségüket, mindenért a tanár tehet, az ő dolga. Itt átélheti, hogy bizony vannak dolgok, amiről ők tehetnek, ők vállalhatnak érte felelősséget.

H: Úgy alakulhat csak ki, ha megelőlegezett bizalmat kapnak. Amit különben sokszor mi is megkapunk tőlük. A Radnótiban tanítottam ötödikeseket a gyakorlat során, és ha szünetben bementem, elkezdtem kipakolni a szükséges eszközöket, előkészíteni az órát, akkor már rohantak lelkesen oda, kérdezték, hogy mit fogunk aznap csinálni, örömmel mondták, hogy „De jó, az nagyon érdekes!" – holott esetleg még azt sem tudták, hogy az mit jelent. De attól, hogy megjelent a matektanár és letette a füzetét, már érdeklődővé és izgatottá váltak. Nagyon aranyosak voltak!

M: Sokféle módon kapcsolódnak hozzánk a gyerekek. Hol szót fogadnak, hol ellentmondanak, vagy csak elmesélnek nekünk valamit. Jó érzés, hogy – úgymond – hozzánk tartoznak.

Egyértelműen azt érzékeltem a diákokon az óráidon is, hogy tisztelnek és szeretnek. És nekem úgy tűnt, hogy ez nem csak a tanárszerepnek szól, hanem alapvetően neked. A kapcsolódás-kapcsolat nyilván rátok is hatással van. Én mindig azt tapasztalom, hogy amikor nem oktatok, hanem tanítok, akkor tanulok is. Ti hogy vagytok ezzel? Az elmúlt időszakban miben változtatok?

M: Nemrég algebrát tanultunk a nyolcadikosokkal, sok példát néztünk, ahol az együtthatót, vagy az együtthatóból kellett kiemelni, és utána volt egy olyan feladat is, ahol a változót kellett kiemelni. Az egyik lány nagyon tanácstalan volt, próbáltam rávezetni.

„– Mi az, ami benne van mind a két tagban?

– A b betű.

– Akkor emeljük ki azt.

– Ahh, azt is ki lehet emelni!? Hú, de menő!"

Ha valami nem dobogtatja meg a szívemet a matekban, akkor az az algebra. Meglepő és tanulságos élmény volt, hogy ez neki örömöt tudott okozni!

H: Az empatikus készségünk biztosan sokat fejlődött. Látjuk, hogy milyen családok, élethelyzetek vannak, gyerekek milyen problémákkal küzdenek. Ez rendesen hozzátett a világképünkhöz: amilyen keretek között éldegéltünk eddig, az itt egyáltalán nem adott minden gyerek számára. Például a karácsony utáni első órán kérdeztem, hogy kivel milyen jó dolog történt a szünetben, és egy kislány azt mesélte el, hogy meglátogathatta az édesapját a börtönben… Sok olyan élethelyzettel találkozhatunk, amivel korábban nem.

Egyelőre nem mondhatjuk, hogy minden könnyű és vidám, de hiszünk abban, hogy lehet ez jó, ezért próbálunk kitartani. Talán itt és most több a nehézség, mint az öröm, de megéri várni. Nagy bennünk a vágy, hogy a jelen lévő apró örömöket még erőteljesebben megtapasztalhassuk.

Nyilvánvaló, hogy a hatéves tanárképzés az ELTE-n rengeteg mindenre felkészített benneteket, meghatározó része (és hányada) eddigi életeteknek. Mire nem készített fel?

H: Az kevés volt, hogy hogyan kell a matekot tanítani.

De erre vannak külön tárgyak, nem?

H: Vannak, de én azt éltem meg, hogy ott versenyfeladatok megoldására készítenek fel. Például az egyik ilyen tárgy ZH-jában lévő nehezebb feladatot nem tudtam megoldani, és erre azt jelezte vissza a gyakorlatvezető, hogy gondolkodjak el azon, vajon tényleg tanár akarok-e lenni.

Nyilván nem lehet minden témakört, fogalmat alaposan átbeszélni: milyen osztálynál hogyan érdemes bevezetni, milyen nehézségek várhatók, mik a sarokpontok. Viszont, ha nem nagyon kerül elő a „Hogyan érdemes tanítani ezt a témakört?" kérdés, akkor talán nem meglepő a hiányérzet.

M: Általánosságban azt látom az egyetemi képzésen, hogy sok kérdést felvetett, de konkrét megoldási módokat nem nagyon láttunk. Nyilván tisztában vagyok vele, hogy a legtöbb problémára nem lehet általános receptet adni, és ez főleg pedagógiai, szakmódszertani helyzetekben rendjén is van. De ez nem azt jelenti, hogy ne lehetne különböző megoldási módokat, ötleteket, stílusokat, gyakorlatokat alaposan átbeszélni. Például emlékszem rá, hogy szó volt arról, hogy ilyen-olyan tanulási nehézséggel küzdő diákokra oda kell figyelni. Na, de hogy hogyan, odáig sosem jutottunk el.

A képzés problémafelvető oldala elég erős, de azt, hogy hogyan kezeljük, legtöbbször ránk hagyták, nekünk kell találni rá valamilyen megoldást. Persze ez most is így van az éles szituációkban, de elég nehéz úgy, hogy az ember nem látott tanulságos példákat.

Nem könnyíti meg a helyzetet az sem, hogy a felső tagozaton egyedül vagyunk ezzel a szakpárral, így szaktárgyi kérdésekben „messzebbre" kell menni válaszért. Ugyanakkor az is igaz, hogy alsós kollégáktól is sokat tanultunk, tanulunk.

M: Az egyetemen is a legtöbb gyakorlati ismeretet az olyan oktatóktól kaptuk, akik középiskolában tanítottak mellette. Nagyon fontos az ő jelenlétük is a tanárképzésben, hogy behozzák a mindennapi iskolai szempontokat, tapasztalatokat a hallgatóknak.

És miért vagytok hálásak?

M: Én Hannáért, ugyanis ott ismerkedtünk meg.

H: A legnagyobb erőssége a képzésnek, hogy nagyon okossá tesz: magas szinten sokat foglalkoztunk matematikával, és ez rengeteget fejlesztett rajtunk. Ezek után egy általános iskolai, vagy középiskolai feladat megoldása ritkán okoz nehézséget.

néha fel is tudjuk használni. Nemrég néhány diákkal részt vettünk egy versenyen, és utána – a feladatok megbeszélése közben, azokhoz kapcsolódva – meséltem nekik néhány gráfelméleti érdekességet az Euler-körről.

A Véges matematika 1-2. tárgyak nekem nagyon jól megalapozták a kombinatorika tudásomat. Vagy például többször, még most is az egyetemi fizikakísérletek leírását veszem elő, azokra gondolok vissza, azok alapján építek fel egy-egy órát. Ezek nagyon erős, hasznos tapasztalatok.

H: Az egyetem alatt szoros és megtartó baráti társaság alakult ki, akikkel most is tartjuk a kapcsolatot. És jó arról beszélgetni, hogy ki hogyan áll most a tanári hivatásával. Vagy akár tapasztalatot, anyagokat cserélni. Ez igen nagy érték.

M: Továbbá a családias hangulat…

Bizony mostanra már sajnos felettébb családias létszámúvá vált a tanárképzés…

M: Igen, de az, hogy 10-20 fős gyakorlati csoportok vannak, azt is segítette, hogy sok oktatóval nagyon jó viszony alakulhatott ki. Mai napig többekkel szoktunk levelet váltani.

H: Vagy segítséget kérni: valamelyik egyetemi oktatómnak írtam, hogy ő ezzel a helyzettel mit kezdene, mit válaszolna. És nagyon készségesen reagált.

Habár a bankszámlára megérkező fizetésről most már talán elsőre nem az epszilon jut az eszünkbe, egy fiatalnak megélni egy tanárfizetésből nem mindig egyszerű. Na, de kettőnek!?

H: Azt most nem látjuk, hogy hosszú távon hogyan fogunk kijönni a tanári fizetésből. Különben is sok minden változik most. Viszont az, hogy szolgálati lakásban lakhatunk, nagyon nagy segítség. Nem ingyen, de lényegében ingyen lakunk itt, ami most a kezdetekben tényleg jól jön.

M: Persze ez attól is függ, hogy milyen igényei vannak az embernek, illetve hol akar élni. Talán egy városi, mondjuk budapesti életmód akár költségesebb lehet. Számunkra a jelenlegi tanárhiány haszna az volt, hogy válogathattunk az állások közül.

H: A mi generációnk tisztában van azzal, illetve tisztában volt, amikor jelentkezett a tanárképzésre, hogy nem fog rengeteget keresni. Tehát jó ideje része a jövőképünknek, hogy nem a luxus a cél. Megélni pedig meg tudunk.

M: A barátainkon, ismerőseinken is érzünk egyfajta segítőkész hozzáállást: amikor egy közös program során arról van szó, hogy ki mennyit fizessen bele a költségekbe, akkor – habár nem arról van szó, hogy ne tudnánk fizetni – előfordul, hogy nagylelkűen meghívnak minket.

Ezt a nagyon nagyfokú segítőkészséget a diákok szülei, nagyszülei részéről is sokszor tapasztaljuk. Például amikor tuja kellett az adventi koszorúhoz, rögtön kérdezték „Mennyit vágjunk, Tanár Úr? Jó lesz-e így, Tanár Úr?”.

H: Én egy fizikai kísérletet szerettem volna bemutatni a diákoknak, de nem volt hozzá minden eszköz. Egy édesapa készségesen jelentkezett: „Nekünk van otthon, Tanárnő! Szívesen behozom, Tanárnő!”.

M: Tehát vannak olyan kapcsolatok, ahol érzünk egyfajta megbecsültséget.

H: Persze nem csak ilyen esetek vannak, nem ennyire idilli a kép. Többször van, hogy szülők jelzik, hogy szerintük nem jól csináltunk valamit, továbbá hogyan kellett volna… Átgondoljuk, mennyiben tudjuk ezeket a jelzéseket felhasználni, ugyanakkor minden érintett személy más-más szempontok alapján lát egy helyzetet.

Az interjú készítésekor még csak várjátok a babátok érkezését. Hanna, milyen érzés, hogy most otthon vagy és nem tanítasz?

H: Nagyon jó. Az évnyitóra – tehát az első napra – úgy emlékszem, hogy az akkor nagyon rossz volt. Az elmúlt majdnem 20 évben vagy diákként vagy tanárként, de tanévet kezdtem. Furcsa volt, hogy egy tanév nélkülem is elkezdődhet. Azóta viszont semmilyen negatív érzés nem kötődik ehhez, nagyon jó itthon lenni, nem szoktam azon gondolkodni, hogy nekem inkább tanítanom kellene.

Várjátok már, hogy matekot taníthassatok neki?

H: (mosolyogva) Nem tudom elképzelni, hogy ne legyen nagyon okos a gyerekünk. Ha pedig mégsem így lesz, akkor azt nem tudom elképzelni, hogy ez minket zavarna vagy felháborítana. Úgy állunk hozzá, hogy amilyen lesz, úgy fogjuk szeretni.

M: Minél több dolgot szeretnénk neki megmutatni a világból. Az gyakran jár a fejemben, hogy milyen jó lesz majd vele együtt elmenni ide, megnézni ezt, felfedezni azt. De biztos sokat fog alakítani rajtunk, illetve a tanári énünkön, stílusunkon is az, hogy szülőkké válunk.

Marci kivisz az állomásra, de a beszélgetést útközben is folytatjuk. Mintegy összegzésképpen megfogalmazza: „Annak ellenére, hogy tényleg sok szempontból nehéz, ebben érezzük, hogy feladatunk van.”

Az interjút Paulovics Zoltán készítette.

Utóirat. Március elsején megszületett Szauer Mihály, pár nappal később pedig Paulovics Teréz.

Az Érintő szeretettel gratulál mindkét családnak!

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

Ács Katalin 2024. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Imrecze Zoltánné, Ani (1923 – 2010)

Imrecze Zoltánné születésének 100. évfordulójára Kovács Csongorné, Ács Katalin, Fried Katalin, Lajos Józsefné és Szolgáné Kurovszki Ilona készítettek egy visszaemlékezést, amely a 2023. novemberi Varga Tamás Módszertani Napokon hangzott el. Idő hiányában nem sikerült mindazt elmondani, amit szerettek volna egykori pedagógustársukról, példaképükről, Ani néniről. Leírva azonban többekhez is eljut személyes véleményük egy igazi tanáregyéniségről.

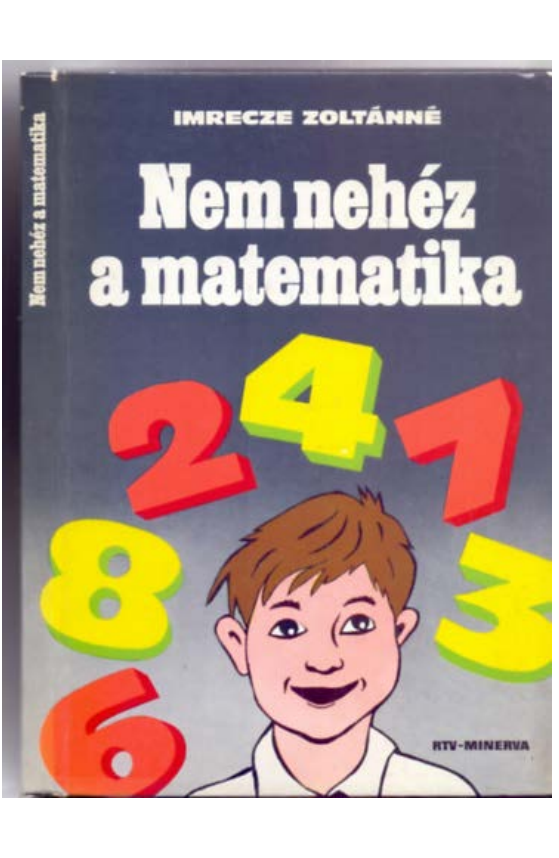
„Hatodiktól, 1965 szeptemberétől matematikatanárom volt, sőt, annál sokkal több. Előttem van, mint egy istennő: mindent tud, mindig mosolyog, szép, fitt. Vagyis szép a frizurája, csillogó a szeme, ciklámenszínű rúzsa mindig ragyogott. Csinos, jól szabott kék – ám kicsi színnel díszített – köpenye, s mindig elegáns cipője örök eleganciát rögzített gyermeki agyamban. (Ne felejtsük, ez a kor alig ismerte az öltözködésben a színeket! Még csupán ismerkedik a szürke ’50-es évek után az élénkebb színvilággal.) 11 évesen egy életre szóló nyomot hagyott bennem hangja csengése, nevetése, ízléses öltözéke. Mindig és mindannyiunk iránt érdeklődött: mit olvastunk, merre jártunk, ki mit sportol… Humora, műveltsége, jókedélye lenyűgözött.

Bár nem tudatosan, már a pályám elején beugrott, hogy óravezetése mennyire hatott rám. Színes kréták, applikációk – ezen akkor természetesen kartonból kivágható, ragasztható dolgokat értettünk –, fóliák, kirakósok a táblán. Bár mindig arra hivatkozott, pocsék a kézügyessége, én ezt nem vettem észre. Játékok! Akkor fogalmunk sem volt, hogy a Dienes- és a logikai készletet, a színesrudakat komoly matematikára használjuk. Halmazok, parkettázás, lyukas, kicsi…, ezek a fogalmak már akkor bevésődtek. Gyerekként, az óráin megismerhettem az eszközhasználat hatékonyságát és természetességét.

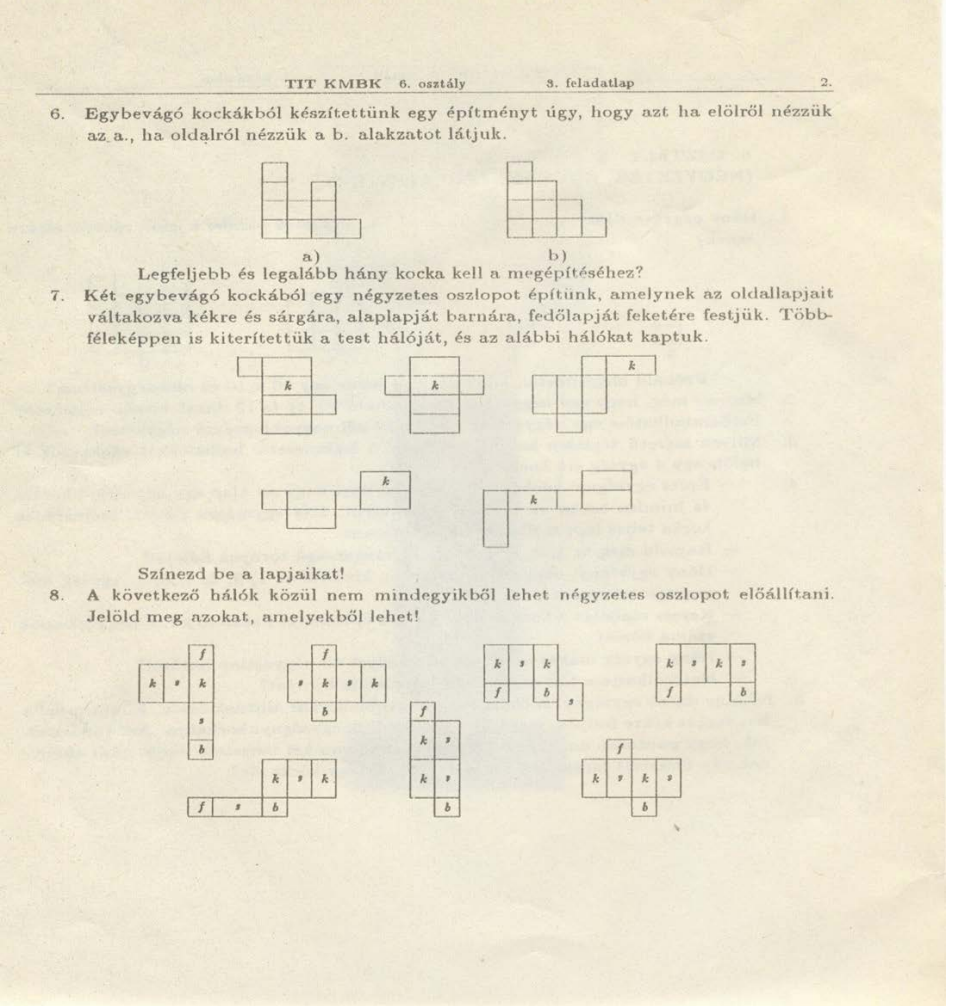
Az Iskolatelevízió műsoraiban[1] szerepeltünk – ma azt mondanánk, mikrotanítás –, felvételekre jártunk a Televízióba, a Szabadság térre.

Tudtam róla, hogy szakköri füzetek, versenyfeladatok társírója volt. Cikkei, könyvei jelentek meg, az új matekot népszerűsítve képzéseket tartott szerte az országban. Szüleimtől is sokat hallottam, és láttam könyveit. Otthon akaratlanul is fültanúja voltam édesapám (Ács Pál középiskolai matematika-fizika szakos tanár, a Művelődésügyi Minisztérium Középiskolai Főosztályán oktatás- és matematika-felelős) telefonos munkabeszédeinek, „baráti felnőtt” társalgásoknak: „ne akard, hogy Ani a gimnáziumban legyen; túlterheled, hagyd meg az általános iskolának” (nagy szerencsénkre).” (*Ács Katalin, a Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Bizottságának tagja*)

Tanári kézikönyv
Általános iskola
tk
Imrecze Zoltánné Novák Lászlóné
Szerediné Loparits Éva
Sztrókayné Földvári Vera
MATEMATIKA 8.



„Az általános iskola hetedik osztályának kezdetekor megkeresett szeretett számtantanárnőm, Jutka néni (Kovács Tiborné): „Tudod, Vili, én nem tudok sokkal többet matematikából, mint amit az általános iskolában tanítani kell. Viszont most indul egy matematika szakkör a kerületben, és ott biztosan sok érdekes új dolgot tanulhatnál. Jó volna, ha beiratkoznál.” Megfogadtam a tanácsát, és egy évig jártam Imrecze Zoltánné csodálatos szakköri foglalkozásaira a „Kis Matematikusok Baráti Körébe”. Megismerkedtünk a kettes és más alapú számrendszerek rejtélyeivel, rengeteg izgalmas logikai és egyéb szöveges feladatot oldottunk meg, nagyon szép mértani feladatokon törtük a fejünket. Imrecze Zoltánné felfedeztette velünk a matematika rejtett szépségeit és átláthatatlan perspektíváit. A szakköri foglalkozások között érdekfeszítő házi feladatokat kellett írásban megoldanunk. A tanév végére már eldöntöttem, hogy én is matematikus leszek. Máig őrzöm a pontverseny stencilezett feladatlapjait és egy jutalomkönyvet Imrecze Zoltánné szavaival.



TIT KMBK 6. osztály 3. feladatlap 2.

6. Egybevágó kockákból készítettünk egy építményt úgy, hogy azt ha elölről nézzük az a., ha oldalról nézzük a b. alakzatot látjuk.

a) b)

Legfeljebb és legalább hány kocka kell a megépítéséhez?

7. Két egybevágó kockából egy négyzetes oszlopot építünk, amelynek az oldallapjait váltakozva kékre és sárgára, alaplapját barnára, fedőlapját feketére festjük. Többféleképpen is kiterítettük a test hálóját, és az alábbi hálókat kaptuk.

Színezd be a lapjaikat!

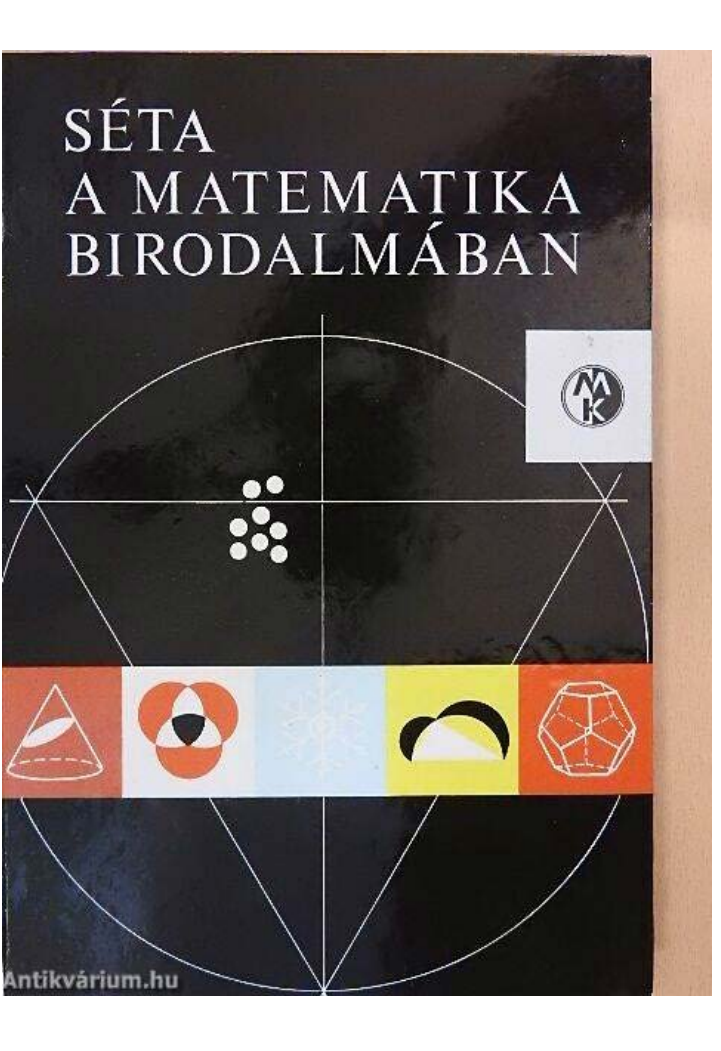
8. A következő hálók közül nem mindegyikből lehet négyzetes oszlopot előállítani. Jelöld meg azokat, amelyekből lehet!

Tőle tudtuk meg azt is, hogy van egy nagyon jó gimnázium Budapesten, ahol speciális matematikai osztályokat is indítanak. Minthogy ő nem tartott szakkört nyolcadikosoknak, a Fazekas Gimnáziumbelibe iratkoztam be. Egy év múlva sikeresen felvételiztem a gimnázium matematika tagozatára, ahol újra találkoztam a hetedikes szakkör két másik résztvevőjével, akikre hozzám hasonló hatással volt. Ma mindketten neves kutatók és egyetemi tanárok. A gimnáziumban Urbán János és Kőváry Károly tanított matematikára hasonló stílusban. Máig hálásan gondolok vissza a négy említett tanáromra, hogy felkészítettek a matematikus pályára. Pályaválasztásomban Imrecze Zoltánné meghatározó szerepet játszott.” (*Komornik Vilmos, a matematikai tudományok doktora, az MTA külső tagja*)

A budapesti Fazekas matematika munkaközössége a 70-es években:
Állnak (balról jobbra): Hints Tivadar, Nizsalovszky Ferenc, Reményi Gusztáv, Kardos Gyula, Kavics, Solti Lajos,
Ülnek: Vincze Márta, Imrecze Zoltánné, Pálmay Lóránt, Tóth Éva (ig.), Hutai Ferenc, Tanos Zsuzsa, Kovács Csongorné (Forrás: az iskola honlapja)

„A matematika sokszor játék volt, de mégis rengeteget tanultunk. Közben persze szabad (sőt kötelező volt) gondolkodni. Sok évtizednek kellett eltelnie ahhoz, hogy megértsem: azon kevesek közé tartoztam, akik nemcsak a matematikát tanulták, de a módszerek mögé láttak: sokszor átláttam, azért csináltunk valamit, hogy megértsük, hogy arra miként lehet felépíteni valami újat. Két példát mesélnék erről. Az egyik a műveletek változtatása. Ha egy összeadásban rögzítünk egy számot, akkor az egyiket változtatva hogyan változik a másik. Nagyon sok órát kezdtünk egy-egy ilyen gyakorló feladatsorral. Ezzel a műveleti tulajdonságokra következtethettünk, érezhettünk rá. Ez vezet el például a permanenciaelvre, hogy a műveleti tulajdonságokat egy tágabb halmazban megtartjuk, pontosabban a műveletek kiterjesztését a műveleti tulajdonságok felhasználásával definiáljuk. Ez egy nagyon mély absztrakció, amelyre sok diáknak csak egyetemi tanulmányai alapján sikerül eljutni, van, akinek még akkor sem. Tankönyvíróként nagyon nagy hangsúlyt helyeztem erre magam is, digitális tananyag-fejlesztésben ilyen tananyagot terveztem. volt is némi lelkiismeretfurdalásom. Ugyancsak a művelet változásai segítségével lehet eljutni a törttel való osztáshoz is. És ez a másik történetem: Vettük a tört és reciproka fogalmát, és gyakoroltunk és gyakoroltunk és gyakoroltunk. Aztán azt a feladatot kaptuk, hogy mondjuk meg, mennyi annak a téglalapnak a hiányzó oldala, amelynek a területe 2, az adott oldala pedig 3/4. (A törtre már nem emlékszem, a terület 2 volt, erre biztosan emlékszem.) Így okoskodtam: ha a terület 1 lenne, akkor a másik oldal 4/3 lenne, de mivel a terület kétszer akkora, ezért a másik oldala is kétszer akkora lesz: 8/3. Azaz 2 osztva 3/4-del az 8/3.

De Ani nénitől nemcsak matematikát tanultunk, tanultunk emberséget is, én ráadásul tanultam módszertant is, sőt olyan matematikai szemléletet, absztrakciót, amelyről talán nem is tudta, hogy mekkora hatása lehet. Emlékszem, az egyik mondata az volt: Az is megoldás, ha nincs megoldás. Vagyis egy problémára az is lehet a válasz, hogy nincs megoldása.” (*Fried Katalin, az ELTE TTK Matematikai Intézet Matematikatanítási és Módszertani Központ főiskolai docense*)



Lektorálta Imrecze Zoltánné

„Hogy pontosan miért, már nem tudom, de többször voltam Aniéknál. Vagy dolgoztak valamin Édesapával, vagy volt valami feladatom, amire nem emlékszem? Csodáltam a modern lakást, büszkén mesélte, ő tervezte a lakásbelsőt. Ami erősen megmaradt, egy vizuális emlék: egy csodálatosan modern, szép és meleg térelválasztó – telis-teli gyönyörű zöld növénnyel. Imádta a természetet – Kenese (szülővárosa) és a Balaton szerelmese volt.

Azt már tudtam gyerekfejjel – hiszen a szüleim ebben éltek és dolgoztak –, hogy a ’60-as évekkel valami megváltozott a matematikaoktatásban. Komoly izgalmak voltak a család fenntartásában, hiszen a gimnáziumi reform miatt édesapámat a minisztériumban és minden iskolában – néhány hónapra – felfüggesztették. Varga Tamás neve nagyon korán elhangzott otthon. Azt is tudtam, hogy amiket használunk a matekórán, azok Varga Tamáshoz kötődnek – én akkor neki tulajdonítottam ezt, s pontosan tudtam, Imrecze Zoltánné ezt kísérletezi ki velünk. Persze, már felnőttként szélesedett az az ismeret, hogy több résztvevős gárda van emögött. Ani egyértelműen kiállt és hitt a „vargatamási” módszerekben, tananyagfejlesztésben. Játszottunk, élmény volt a matekóra.

A Tudományos Ismeretterjesztő Társulat (TIT) még az 1960-as években indította el a Kis Matematikus Baráti Körök (KMBK) mozgalmat, amelyhez kezdetben területi, 1971-től országos verseny kapcsolódik. A mozgalom lényege, egy az egész országra kiterjedő szakköri formában megvalósuló tehetséggondozás. A rendszeresen megjelenő feladatsorok segítették a tanárok felkészülését, de „megtámogatta” őket az évenkénti nyári néhány napos tanártovábbképzés is.

Versenydolgozatokat javít a KMBK országos döntőjén (1980-as évek eleje) Imrecze Zoltánné és Kovács Csongorné

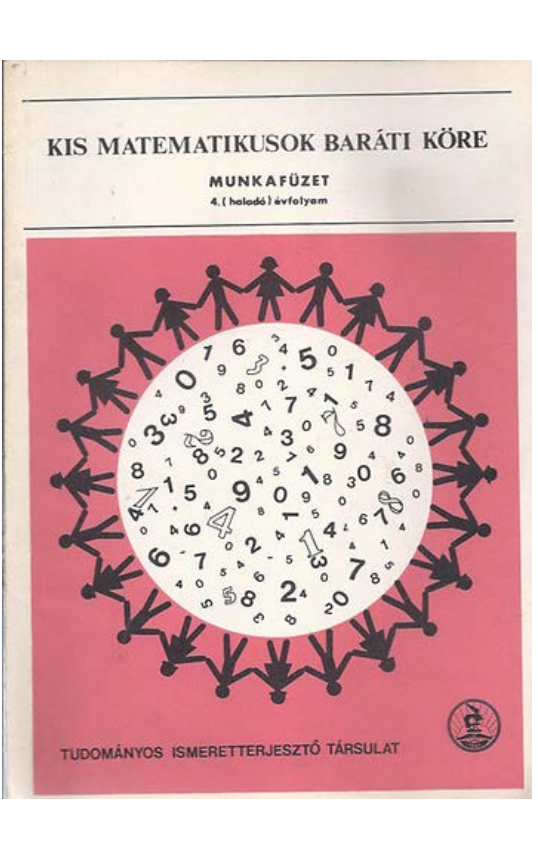
Versenydolgozatokat javít a KMBK országos döntőjén (1980-as évek eleje) Békefi Zsuzsa és Pogáts Ferenc

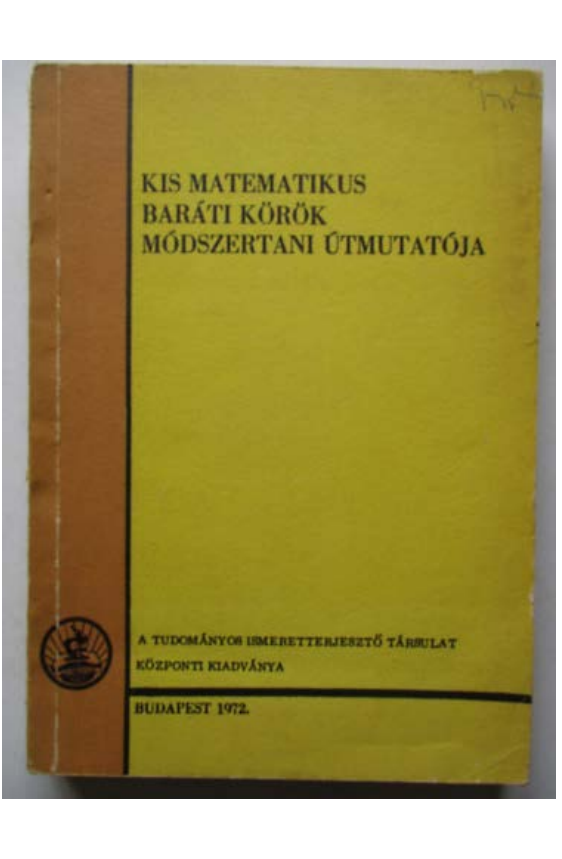
A KMBK – népszerű szakköri forma – hamarosan országos méreteket öltött, s ahol megfelelő vállalkozó szellemű tanár akadt, aki kezébe vette ennek irányítását, tartását, a módszer vonzotta a matematika iránt érdeklődő kisiskolásokat, majd a nagyobbakat is.

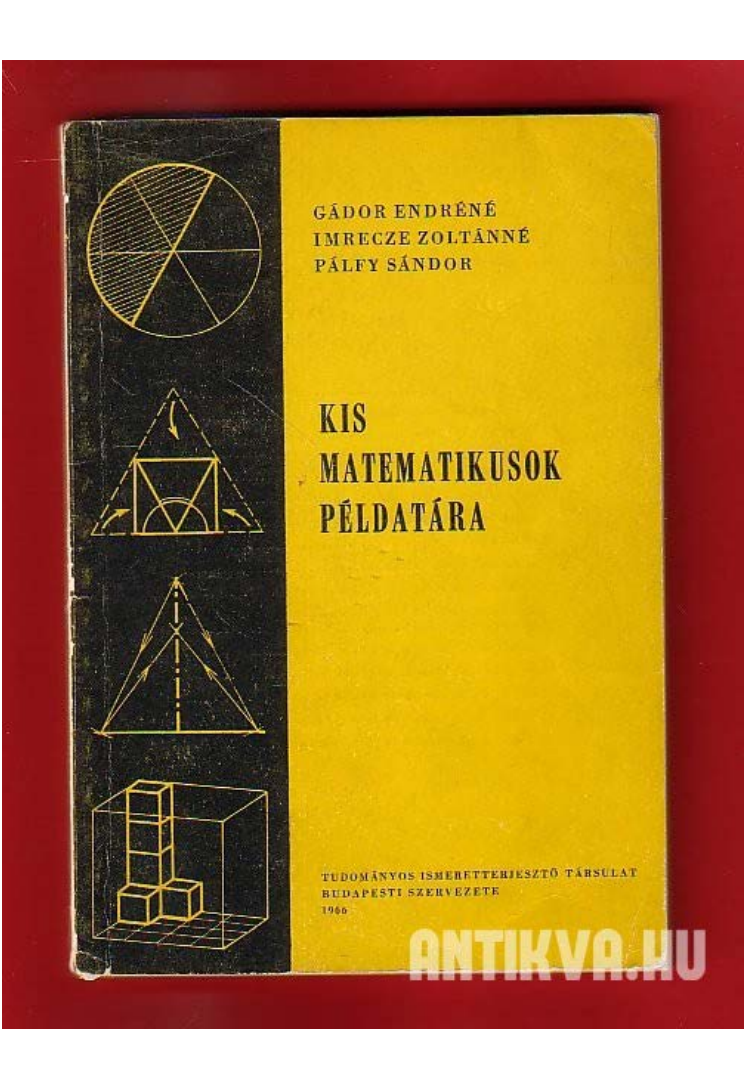
Már akkor a Varga Tamás-féle „új matematikai felfogás” bontogatta szárnyait. Célja volt a matematika megszerettetésén túl az önálló, gyakorlatiasabb gondolkodásra nevelés. A foglalkozásokon a feladatokat sokszor közösen, a problémát felfedezve, körüljárva oldottuk meg a gyerekek, játékosan keresve meg a megoldási módszerek esetleges sokszínűségét.

A TIT a KMBK vezetők részére a módszerek megismertetése érdekében tanári konferenciákat szervezett Budapesten és néhány vidéki városban. Ezek az előadói konferenciák gyakran egyhetes (esetleg bentlakásos) továbbképzések voltak többféle témában, gyakorlati felkészítésekkel. Ebben végzett Ani (is) úttörő munkát.” (*Ács Katalin*)

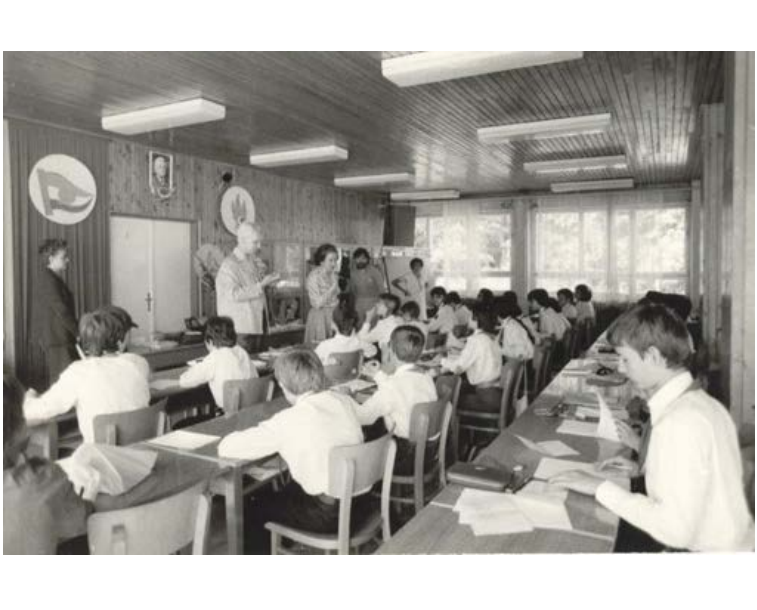
„Ez a szakköri innováció párhuzamosan fejlődött és terjedt el a komplex matematikatanítással, illetve Varga Tamáshoz kapcsolódó új matematikatanítási reformmal. E reform lényege a saját tapasztalatszerzés, felfedezésre épülő gondolkodásra nevelés, a gondolkodás örömének megismertetése a tanulókkal új tananyagtartalmakon és új módszerekkel. Az új matematikai nevelést új tankönyvek, munkafüzetek, feladatgyűjtemények, tanári segédkönyvek, illetve a tanórai tevékenységet támogató színes és változatos eszközök sokasága segítette.


KIS MATEMATIKUSOK BARÁTI KÖRE
MUNKAFÜZET
4. (haladó) évfolyam
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT





A TIT messzemenően támogatta ezt a reformot. A KMBK vezetők részére a módszerek megismertetése érdekében tanári konferenciákat, többnapos tanfolyamokat szervezett Budapesten és a vidéki városokban. Új munkafüzetek és tanári útmutatók készültek a KMBK foglalkozásokhoz. Ezeket az anyagokat és a sokrétű munkát a reform elhivatott, neves szakemberei (Demeter Éva, Pálfy Sándor, Imrecze Zoltánné, Karádi Károlyné, Abonyi Magda és Békefi Zsuzsa, valamint Kuti Gusztávné, Hasmann Károlyné, Nagy Józsefné, Terei Andrásné, Pálfalvi Józsefné[2], Sztrókayné Földvári Vera, Kovács Csongorné, Csahóczi Erzsébet, Török Judit) készítették, lektorálták (Lajos Józsefné, Pálmay Lóránt, Pogáts Ferenc). A kiadványok felelős szerkesztője Urbán János volt. Ezek az anyagok sikeresek, népszerűek voltak, sok ezer példányban jelentek meg.

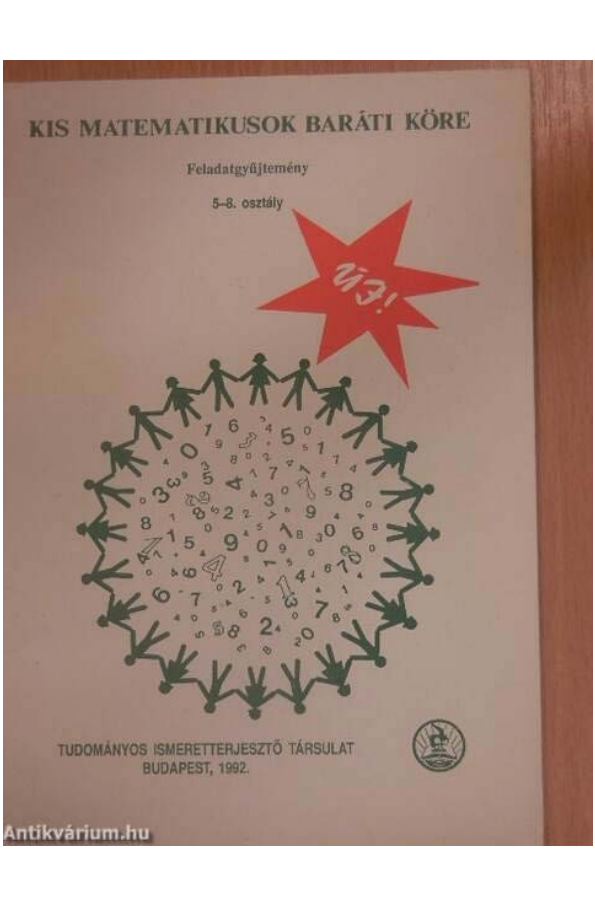


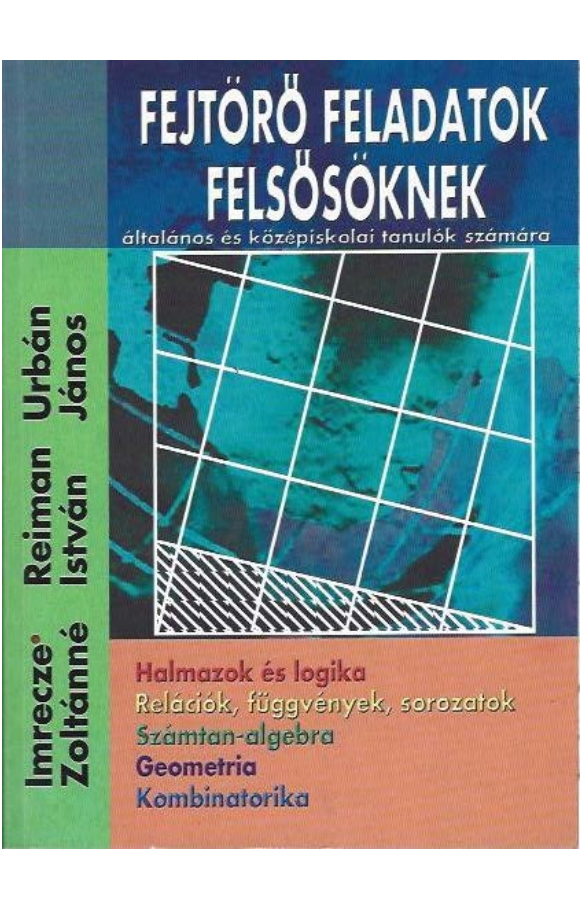
A KMBK verseny országos döntője a 70-es évek végefelé

A KMBK verseny országos döntőjén a 70-es évek végefelé Urbán János, Imrecze Zoltánné, Kalmár Lászlóné, Pálffy Sándor, Reiman István, Demeter Éva, Miklós Györgyi, Novák Lászlóné

Az új anyagok alapján működő tehetséggondozó munkához, az 1971-72-es tanévtől kezdődően versenyeket is szervezett a TIT matematikából. Először csak az 5-6. osztályosok részére. A többi évfolyam számára akkoriban az Úttörő Szövetség és a Bolyai János Matematikai Társulat szervezte a matematikaversenyeket. A versenyek a tehetségkutatást, a tehetségek kiválasztását szolgálták. Urbán János 1974-től a TIT Matematikai Választmányának titkára lett, és javaslatára a versenyt 1977-től Kalmár László (1905-1976) tiszteletére Kis Matematikus Baráti Körök Kalmár László Versenyének nevezték el.” (Magyar Elektronikus Könyvtár, https://mek.oszk.hu/15000/15024/fulszoveg.html)

A verseny feladataiból összeállított feladatgyűjtemény szerkesztője Urbán János, lektora Reiman István volt. Ők voltak Imreczené társszerzői is a Fejtörő feladatok felsősöknek című könyv megírásában.


KIS MATEMATIKUSOK BARÁTI KÖRE
Feladatgyűjtemény
5–8. osztály
ÚJ!
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
BUDAPEST, 1992.
Antikvárium.hu



Imrecze Zoltánné az 1960-as évek elejétől tartott szakköröket, az 1964/65-ös tanévtől kezdve a Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumban tanított, a 70-es évektől mint vezető tanár. A Fővárosi Pedagógiai Intézet matematikai szakosztályának vezető szakfelügyelőjeként tartott az új matematikával és annak bevezetésével kapcsolatos képzéseket és foglalkozásokat, és a ’70-es évek végén a Budapesti Tanítóképzőben is tanított. A Bolyai Társulat Beke Manó díjának mindkét fokozatát elnyerte 1964-ben és 1988-ban. 1974-ben Apáczai Csere János-díjban részesült. A Magyar Televízióban rendszeresen részt vett az Iskolatelevízió adásaiban és az iskolásoknak szóló matematika vetélkedőkben, nemcsak műsorvezetőként, de forgatókönyvíróként is. Nyitottságára és kreativitására jellemző, hogy 1985-86-ban a Pannónia Filmstúdió ***Gyurmatek*** c. filmsorozatának dramaturgja és szerkesztője is. Érdemes felsorolni a stáblistát (idősebb olvasóink kedvéért):

Rendezte: Varga Csaba, Írta: Mosonyi Alíz, Votisky Zsuzsa, Dramaturg és szerkesztő: Imrecze Zoltánné, Pálmai Kati, Votisky Zsuzsa.

Zenéjét szerezte: Másik János (2 rész), Melis László (5 rész).

Operatőr: Baksa Balázs. Hangmérnök: Bársony Péter. Vágó: Czipauer János, Hap Magda. Animáció: Papp Károly. Műteremvezető: Herendi János. Gyártásvezető: Magyar Gergely Levente, Tarr Erika.

Szereplők:

Gombóc, a dagadt – Vajda László

Gigi, a hosszú – Benedek Miklós

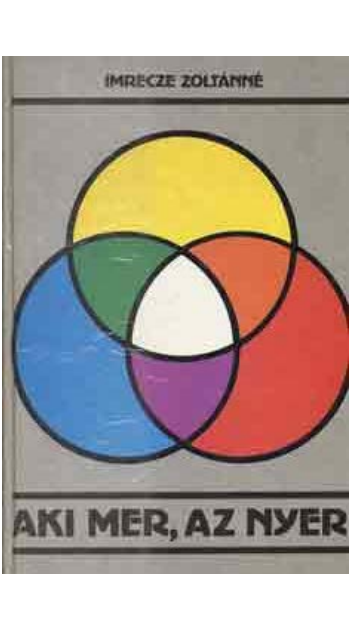
Fofó, a kétfejű – Gyurkovics Zsuzsa

Kezeslábas – Fodor Tamás/ Szombathy Gyula

Professzor – Képessy József/ Kristóf Tibor.

A sorozat egyik darabját a rendező feltette a Youtube-ra: Gyurmatek – Mi közöm hozzá?

Imrecze Aninak volt köze ehhez is.



A visszaemlékezéseket összegyűjtötte: Ács Katalin

---

[1] Imreczéné Anit 1966-tól az egész ország ismerhette az Iskolatelevízióból (a mai online oktatás őse volt), ahol az osztályokra bontott matematika foglalkozássorozatok fogatókönyv-írója, műsorvezetője és tanára volt a magyar tv egyetlen csatornájának délelőtti vagy kora délutáni adásában. Máig emlékszem azokra a számtanóráinkra, amelyeket (elcserélve egy másik tanórát, hogy az egész osztály meg tudja nézni) az osztálytermeben (felelés vagy dolgozatírás helyett) a tévét nézve (!) töltöttünk, csodálva a fiatalos, kedves műsorvezetőt, akitől tanulni lehetett. (Persze az egész iskolában egy, legfeljebb két tévékészülék volt.) *A szerk.*

[2] mint Pálfalviné Csekő Sári. Az ideiglenes, majd az új tanári-tanulói anyagokat készítő neves szakemberek sora még tovább folytatható, mint például Szendrei Julianna (Radnai Gyuláné ill. R. Szendrei Júlia néven), Gádor Endréné, Halmos Istvánné, Szerediné Loparits Éva (Szeredi Éva) és még sokan mások. *A szerk.*

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

SOKSZOR TALÁLKOZUNK OLYAN FELADATTAL, ÖTLETTEL, AMIT SZÍVESEN ELTESZÜNK KÉSŐBBI HASZNÁLATRA. A **TANÓRA – SZAKKÖR** ROVAT SZERETNE HOZZÁJÁRULNI A MATEMATIKATANÁROK ESZKÖZTÁRÁNAK GAZDAGÍTÁSÁHOZ, FÓRUMOT KÍVÁN ADNI A GONDOK, NEHÉZSÉGEK MEGTÁRGYALÁSÁRA IS. (ROVATSZERKESZTŐ: *HORVÁTH ESZTER*.)

Székely Péter

2024. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Mentál-matematika

Székely Péter két kollégájáról, *Bertalan Zoltánról* és *Berkó Erzsébetről* írt az Érintő szerkesztőségének. Azaz egy karácsonyi ünnepi matekozásról, ami szó szerint elvarázsolta őt is, és a tanítványait is. Egy különleges példa arra, hogyan lehet a játékból kiindulva megmutatni a matematikát, és arra is, hogy miféle bűvészkedésre képes néhány tanár, csak hogy elkápráztassa a diákokat. De jó, hogy van ilyen!

Csapodi Csaba

2024. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – V. rész

Közeledik az új követelmények szerinti érettségi, tavaly elkezdett sorozatunk 5. része is ehhez nyújt segítséget. A valószínűségszámítás és statisztika témakörben sok változás történt: új ismeretek, elvárások kerültek be mind a közép-, mind az emelt szintű követelmények közé. Ezek tanulása elengedhetetlennek tűnik ahhoz, hogy megfelelően el tudjunk igazodni a ránk zúduló adathalmazok, a sokszor manipulatív diagramok között. Csapodi Csaba cikkében ismertet néhány szükséges fogalmat és pár olyan feladatot, amelyet elképzelhetőnek tart ebben a témában az érettségin.

minimum
alsó kvartilis
medián
felső kvartilis
maximum

Geszler Evelin Anna

2024. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Mi várható a 2024. májusi érettségin?

Az érettségiztető tanárok már bizonyára utánanéztek azoknak a változásoknak, amelyek a NAT2020 bevezetésével idén már az érettségi feladataiban is megjelenhetnek. Az Érintő minden tavalyi és a jelen számában is témakörönként foglalkozik a matematika érettségi követelmények változásával. *Geszler Evelin Anna*, az ELTE Matematika Doktori Iskola didaktika programjának végzős doktorandusz hallgatója a hivatalosan közölt középszintű mintafeladatok elemzésével szeretné felhívni a figyelmet a 2024-es érettségin várható újdonságokra és az elkerülendő buktatókra, valamint az általános tudnivalókra.

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

Székely Péter 2024. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Mentál-matematika

Mentál-matematika, karácsonyi ünnepi matekozás Bertalan Zoltán és Berkó Erzsébet segedelmével

RLV

Évek óta részt veszek a Rátz László Vándorgyűléseken, nagyon igyekszem szabaddá tenni magam a nyári szünet elején erre a néhány napra. Jó találkozni a kollégákkal, jó részt venni az érdekes előadásokon, szemináriumokon, s jó utána közösen vacsorázni, játszani... S játék közben annyi mindenről lehet beszélgetni – hiszen a „mocsárból" úgysem jövünk ki egyhamar, vagy MaZso úgyis tud egy „pontos lépést"... Mindez persze igen fárasztó, s jól meg kell választani, hogy mire is ülünk be, hiszen komoly munka több órán át előadásokat hallgatni, feladatokon gondolkozni ... De aztán, hazafelé a teljes kimerültség és a szellemi feltöltöttség vegyes érzésével ülünk buszra, vonatra, miközben lelkesen érdeklődünk utastársunktól, hogy mit hibáztunk, milyen érdekes eseményt is hagytunk ki. Én mindig úgy érzem, hogy a lehető legjobbat választottam, hiszen annyi érdekességet hallok!
Aztán nyáron lehet ezeken tovább gondokozni, a saját matektáborban az újonnan hallott ötleteket kipróbálni. Olyan jó dolgokat lopok!
S aztán olyan is van, amit nem fogok tudni így (ahogy kaptam) sosem elmesélni, bemutatni a gyerekeknek. Ilyen volt Bertalan Zoli és Berkó Erzsi fantasztikus „Mentál-matek" előadása. Ezt látni kellett, ez nem elmesélős.

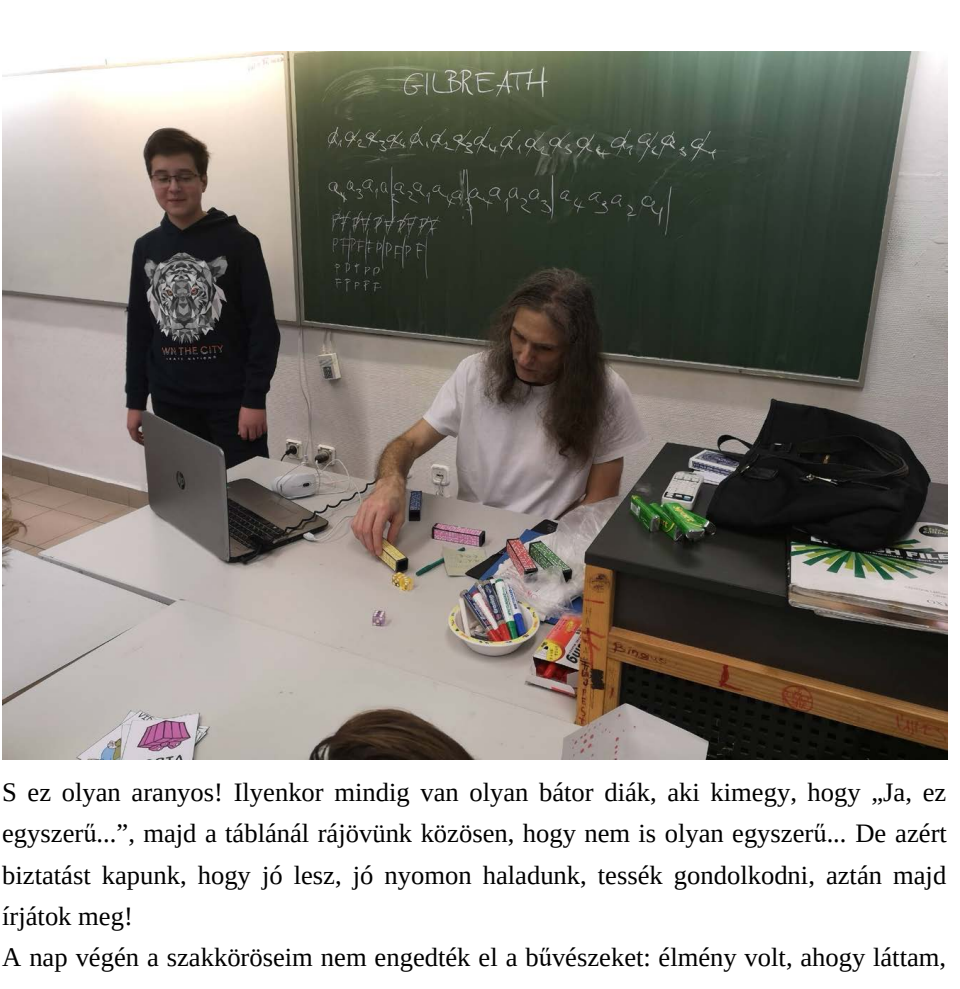
Merthogy úgy volt, hogy Erzsi és Zoli komolyan, mindenféle hókusz-pókuszoktól mentesen elővezettek valamit, mondták, hogy figyeljünk, meg hogy számoljunk, meg azt is, hogy rakjuk ide meg oda, emeljünk, keverjünk, ... aztán leesett az állunk, mert mindenféle előzetes figyelmeztetés nélkül beleszaladtunk abba, hogy már vége, mert már elő is bukkant az elrejtett kártyalap, a törpék karácsonyi ajándékozása az előre megrajzolt gráf alapján történt, s még sorolhatnám hosszasan. Mondhatnám, hogy micsoda dolog, hogy ezt így nem lehet, hogy tessék előre szólni, hogy most fogok elképedni... De ez így volt jó, ez így volt izgalmas. Zoli és Erzsi csak úgy, spontán belevittek minket a játékba, s nem volt nagy dobpergés, de máris elámultunk, s kértük, hogy „Még egyszer!" S akkor jött a trükk még egyszer, s mondták, hogy mire figyeljek, s mit számoljak, meg írjak, videózzak... S azt is mondták, hogy addig csinálják, amíg rá nem jövünk – de csak sejtettük, s sejtéseink lettek nyári házi feladatnak.
Ez nem elmesélős előadás, ezt látni kell.

Már minálunk...

Szóval, ha nem tudjuk bemutatni, akkor kérjük meg... S ez így is történt, írtam egy óvatlan levelet Bertalan Zolinak, hogy lenne-e kedve a tanítványinkat elszórakoztatni? A válasz pedig azonnal jött: Nagyon szívesen, mikor jöhetek?
Igen elszégyelltem magam, amikor megtudtam, hogy ez a kis kiruccanás Zolinak Békéscsabáról, Erzsinek pedig Szolnokról egy-egy hosszú utazást fog jelenteni. Kérték, hogy ne egy nagy közönségnek kelljen bemutatni a trükköket, hanem – mivel zömében kártyás trükkök – legfeljebb osztálynyi gyerek legyen egyszerre jelen.
Így is szerveztük. Megszerveztünk részükre egész napra egymás után hat bemutatót, s hozzá ennyiszer 30 diákot. (Ugye, ismerős, milyen egymás után hat órát megtartani? S milyen lehet hat egymás utáni élménymatekot, előadást?!)

Egész napos ünnep

A megbeszélt napon az előadások előtt két órával megjelent Zoli egy bőrönddel (bőröndnyi eszköz, csoki, ajándék...), majd Erzsi is hamarosan, hasonlóképpen felszerelkezve. Beszélgetni nem volt idő, készülni kellett. Hat tanórára.
Úgy alakult, hogy a téli szünet előtti utolsó matematikaórákra tudtuk megszervezni ezeket az ünnepi bemutatókat, és bevallom, mindegyik méltó volt a karácsony előtti időszak ünnepi zárására.
Élmény volt megfigyelni a gyerkőcöket, ahogy – számukra aztán végképp újszerűen – a „bűvészek" belerohantak egy-egy trükkbe. Figyeltek, jegyezték a sorrendet (a kihívott segítők igyekeztek mindenbe belekötni, s alaposan megkeverni a kártyapaklit!), de ennek ellenére váratlanul érte őket, hogy már „át is vágták őket", már észrevétlenül ki is választotta a bűvész a gondolt lapot. Tanakodtak, hogy hol van a csalás, hogyan, s ki figyelmeztette a bűvészt, hogy melyik lapot választották... De a két kollégánk kedvesen, nyitott lapokkal is lejátszotta velük újra, s megmutatta, hogy a lapok járását nem ők befolyásolták, az törvényszerű. Már csak be kellene bizonyítani!



S ez olyan aranyos! Ilyenkor mindig van olyan bátor diák, aki kimegy, hogy „Ja, ez egyszerű...", majd a táblánál rájövünk közösen, hogy nem is olyan egyszerű... De azért biztatást kapunk, hogy jó lesz, jó nyomon haladunk, tessék gondolkodni, aztán majd írjátok meg!
A nap végén a szakköröseim nem engedték el a bűvészeket: élmény volt, ahogy láttam, hogyan melegednek bele egy probléma elemzésébe, fejtegetésébe. Igazán irígykedtem, hogy a gyerekeimet ennyire megfogta a példa, megfogták őket a kollégáim. Valahogy így kellene a többi matematikai „trükköt" is bevezetnem, tanítanom!

Visszaemlékezés

Nem tudok elég hálás lenni ezért a napért, ezekért a vidám percekért. Erzsi és Zoli komoly készüléssel, s nehéz logisztikával, óracserékkel készültek, hogy számunkra örömet okozzanak. Én biztosra mentem, hiszen láttam a vándorgyűlésen, s átéltem ezt az érzést.
Kívánom, hogy sokan részesüljetek benne, nagy szeretettel ajánlom ezt a „műsort"! (Erzsi és Zoli hozzájárulásával.)

https://www.bolyai.hu/files/RLV_2023_eloadas_BerkoE_BertalanZ.pdf

https://freud.web.elte.hu/bertalan/index.html

Székely Péter
Eötvös József Gimnázium, Budapest

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

Csapodi Csaba 2024. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – V. rész

A cikksorozat negyedik részében közölt feladatok megoldása itt található. Az ötödik, egyben befejező részben a valószínűségszámítás és statisztika témakörének változásait ismertetjük. Először bemutatjuk az érettségi követelmények változását táblázatos formában. A táblázatban (piros színnel) jelezzük az újonnan megjelenő követelményeket és a törölt ismereteket is. (Ha egy követelmény átkerült középszintről emelt szintre, akkor azt csak a középszinten jelöljük kihúzással és emelt szinten nem pirosítottuk, hiszen eddig is része volt az emelt szintű követelményeknek.) A táblázat után a legfontosabb változásokat röviden megmagyarázzuk, értelmezzük, indokoljuk. Ezután néhány, újdonságnak számító ismeret esetén mutatunk olyan feladatokat, amelyeket a követelmények alapján el tudnánk képzelni egy feladatsorban. Hangsúlyozzuk, hogy ezek személyes elképzelések, az érettségi feladatokat összeállító bizottság nyilvánvalóan saját ötletei és szakmai meggyőződése szerint fog dolgozni.

5. Valószínűségszámítás és statisztika

TÉMÁK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	**Emelt szint**
5.1 Leíró statisztika	Tudjon adott adathalmazt szemléltetni.	
5.1.1 Statisztikai adatok gyűjtése, rendszerezése, különböző ábrázolásai	Tudjon adathalmazt táblázatba rendezni és táblázattal megadott adatokat feldolgozni. Értse a véletlenszerű mintavétel fogalmát. Tudjon kördiagramot, oszlopdiagramot **és sodrófa (box-plot) diagramot** készíteni. **Tudjon választani megfelelő diagramtípust egy adathalmaz ábrázolásához, és tudjon a választása mellett érvelni.** Tudjon adott diagramról információt kiolvasni. **Tudjon grafikus manipulációkat felismerni és javítani diagramok esetén.** Tudja és alkalmazza a következő fogalmakat: osztályba sorolás, gyakorisági diagram, relatív gyakoriság.	**Tudjon adathalmazokat összehasonlítani sodrófa-diagramok alapján.**
5.1.2 Nagy adathalmazok jellemzői, statisztikai mutatók	Ismerje és alkalmazza a következő fogalmakat: átlag, ~~súlyozott számtani közép,~~ **kvartilisek**, medián, módusz, terjedelem, ~~átlagos abszolút eltérés~~, szórás. Tudja kiszámítani ismert átlagú adathalmazok egyesítésének átlagát. Tudja a szórást kiszámolni adott adathalmaz esetén a definíció alkalmazásával vagy számológéppel. Tudjon adathalmazokat összehasonlítani a tanult statisztikai mutatók segítségével.	Ismerje és alkalmazza a következő fogalmakat: súlyozott számtani közép, átlagos abszolút eltérés. **Tudjon választani az adathalmazt jól jellemző középértéket, és tudjon a választása mellett érvelni.** **Tudjon statisztikai adatokat értelmezni, értékelni, azokból tudjon statisztikai következtetéseket levonni.**
5.2 A valószínűségszámítás elemei	Ismerje és alkalmazza konkrét példák esetén a következő fogalmakat: esemény, eseménytér, elemi esemény, **események összege és szorzata, esemény komplementere, egymást kizáró események, független események.** Ismerje és alkalmazza a klasszikus (Laplace)-modellt. Tudja meghatározni esemény komplementerének a valószínűségét. Ismerje a szemléletes kapcsolatot a relatív gyakoriság és a valószínűség között. **Ismerje és alkalmazza a geometriai valószínűség modelljét.**	Definiálja és alkalmazza a középszinten felsorolt fogalmakat. Definiálja és alkalmazza a feltételes valószínűség fogalmát.
	Tudjon valószínűséget számítani visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel esetén. ~~Ismerje és alkalmazza a binomiális eloszlás képletét.~~ **Tudja meghatározni a várható értéket konkrét feladatokban.**	Tudja értelmezni a binomiális eloszlást (visszatevéses modell) és a hipergeometriai eloszlást (visszatevés nélküli modell). Tudjon ezek alkalmazásával konkrét valószínűségeket kiszámítani. ~~Ismerje és tudja kiszámítani a várható értéket a diszkrét egyenletes és a binomiális eloszlás esetén.~~ Ismerje és alkalmazza a várható érték fogalmát.

Látható, hogy ebben a témakörben sok változás történt: új ismeretek, elvárások kerültek be mind a közép-, mind az emelt szintű követelmények közé. (Ennek megítélésével nem szeretnénk túl sokat foglalkozni, de azt megemlítjük, hogy egyfelől nem túl nehezek az új fogalmak, másfelől ezek tanulása elengedhetetlennek tűnik ahhoz, hogy megfelelően el tudjunk igazodni a ránk zúduló adathalmazok, a sokszor manipulatív diagramok között. Azt sem felejthetjük el, hogy a pandémia alatt milyen fontos döntéseket kellett meghoznunk tesztek megbízhatóságát vagy oltások hatékonyságát ismerve.)

A sok változás között az egyetlen igazi újdonságot a kvartilisek fogalmának és a sodrófa (másnéven box-plot vagy doboz-) diagram ismeretének követelménye jelenti. Ezért ezekkel az alábbiakban egy kicsit részletesebben foglalkozunk. Előrebocsátjuk, hogy a kvartilisek ismerete arra ad lehetőséget, hogy az adathalmazokat néhány számadattal jobban tudjuk jellemezni, mint kizárólag középértékekkel (átlag, medián). Fontos azt is tudni, hogy a kvartilisek elsősorban nagy adathalmazok jellemzésére használhatók és használandók, de nyilvánvaló, hogy a jelenlegi érettségi viszonyok között nincs lehetőség ilyenek elemzésére.

A **kvartilisek** azok a helyzetmutatók, amelyek a nagyság szerint növekvő sorba rendezett adatokat négy, lehetőleg egyenlő nagyságú részre osztják.

- Az **alsó kvartilis** az a szám, amelynél az adatok (körülbelül) 25%-a kisebb (jele: Q_1, használjuk az *első kvartilis* megnevezést is);
- a medián (Q_2 = Me, a *második kvartilis*);
- a **felső kvartilis** az a szám, amelynél az adatok (körülbelül) 75%-a kisebb (jele: Q_3, a *harmadik kvartilis*).

A kvartilisek meghatározása

A kvartilisek meghatározásának diszkrét eloszlások esetén nincs általánosan elfogadott módszere. A 2020-as Nat-nak megfelelően átdolgozott tankönyvek a következő módszerrel dolgoznak, így ezt javasoljuk a diákoknak az érettségi vizsgán is:

- A nagyság szerint növekvő sorba rendezett adatokat a mediánnál két részre osztjuk.
- Ha páratlan számú adattal dolgozunk, akkor a mediánt (tehát a sorbarendezett adatok középső elemét) elhagyjuk az adatok közül. Ha páros számú adattal dolgozunk, akkor egyszerűen középen kettéválasztjuk az adatokat.
- Az alsó kvartilis az eredeti adathalmaz „alsó felének", a felső kvartilis pedig a „felső felének" a mediánja.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a leggyakrabban használt számítógépes programok közül a GeoGebra ugyanezzel a módszerrel számol, viszont a legtöbb táblázatkezelő program (köztük az MS Excel) eltérő módszerrel dolgozik, ami bizonyos elemszámok esetén a fentiektől eltérő eredményt ad.

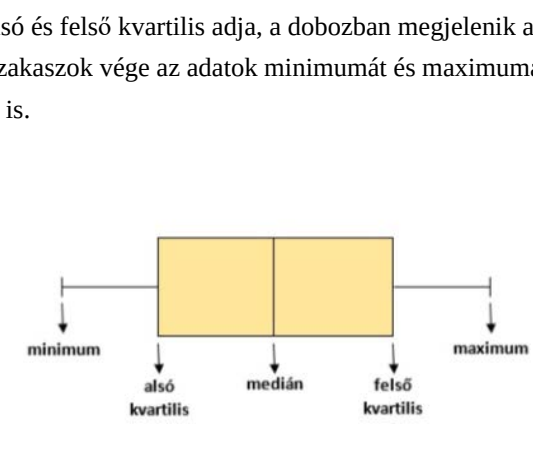
A **kvartilis értékek** az első 8, 9, 10, illetve 11 pozitív számból álló adatsokaság esetén:

Adatok	**Kvartilisek**		
	Q_1	Q_2	Q_3
1-8	2,5	4,5	6,5
1-9	2,5	5	7,5
1-10	3	5,5	8
1-11	3	6	9

A statisztikában **kiugró adat**nak (outlier) azt az adatot nevezzük, amelyik jelentősen eltér a többi adattól. Ilyen adat keletkezhet pl. egy mérés nagy szórása esetén, de jelezhet mérési hibát is. Általános definíció nincs arra nézve, hogy mit értünk „jelentős" eltérés alatt. Egy gyakran használt megközelítés szerint azok az adatok tekinthetők kiugrónak, amelyek eltérése a felső (alsó) kvartilistól a félterjedelem 1,5-szeresénél nagyobb „felfelé" („lefelé"). Miután az érettségi követelmények nem tesznek említést a kiugró adat ismeretéről, ezért nem várható olyan feladat a vizsgán, ami ennek ismeretét kérné számon.

A sodrófa- vagy dobozdiagram (box-plot)

Ez a diagram alapvetően a fent említett öt érték vizuális megjelenítésére szolgál. A doboz széleit az alsó és felső kvartilis adja, a dobozban megjelenik a medián is. A dobozból induló szakaszok vége az adatok minimumát és maximumát jelzi. A diagram lehet fekvő és álló is.



1. feladat

Kördiagrammal vagy oszlopdiagrammal ábrázolná inkább az alábbi adatokat? Válaszát indokolja!

a) Egy iskola tanulói létszámának alakulása 2020 és 2024 között.

b) Az osztály tanulóinak megoszlása a szülők legmagasabb iskolai végzettsége szerint.

c) Egy osztályban a matematika érettségi jegyek eloszlása.

2. feladat

Ádám egy év júliusában feljegyzi mind a 31 napon a lakóhelyén mért legmagasabb napi hőmérsékletet (Celsius fokban), majd az adatokat nagyság szerint sorbarendezi. Így ezt az adatsokaságot kapja:

19, 22, 22, 23, 23, 23, 25, 26, 26, 26, 26, 27, 27, 27, 27, 27, 28, 28, 29, 31, 31, 32, 32, 33, 33, 35, 38, 39, 40, 40, 42

Ábrázolja az adatokat sodrófa-diagramon!

3. feladat

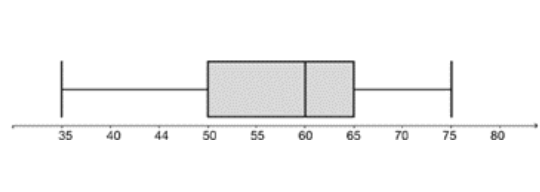
Egy 24 fős osztályba 12 fiú és 12 lány jár. Egy próbaérettségi dolgozat eredményei a fiúk között: 32, 38, 40, 52, 53, 54, 56, 60, 61, 64, 66, 84.

a) Sorolja az adatokat osztályokba, és ábrázolja ennek alapján a fiúk eredményét oszlopdiagrammal!

A lányok eredményei ugyanennél a dolgozatnál: 37, 38, 44, 53, 54, 57, 59, 60, 61, 62, 63, 65. Timi szerint a lányok eredményei jobbak, mint a fiúk eredményei. Gergő szerint pont fordítva: a fiúk értek el jobb eredményt, mint a lányok.

b) Mondjon egy érvet, ami Timi, és egy másikat, ami Gergő álláspontját támasztja alá!

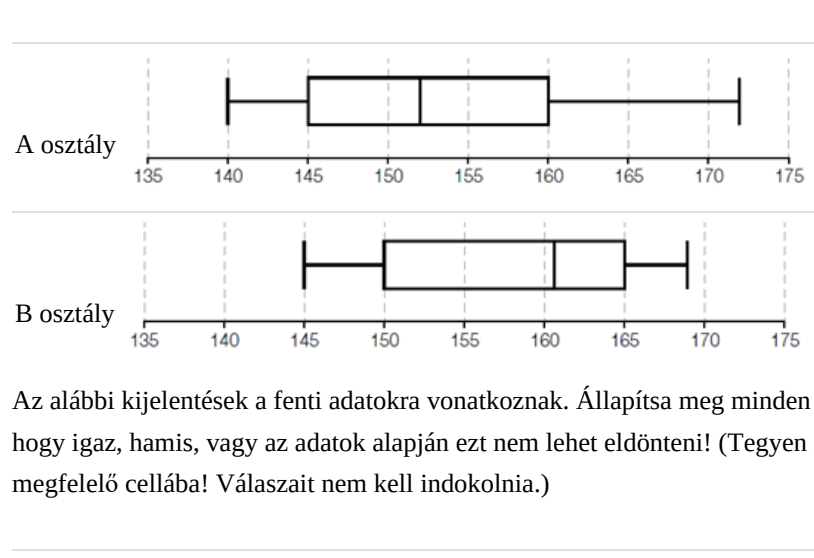
Az évfolyam egy másik osztályában ugyanezen dolgozaton elért eredményekről az alábbi diagram készült.



c) Hasonlítsa össze a két osztály eredményét az adatok terjedelme és mediánja alapján!

4. feladat

Az alábbi sodrófadiagramok egy iskola két párhuzamos osztályába járó diákok centiméterben mért magasságának eloszlását mutatják. A két osztályba ugyanannyi diák jár.



Az alábbi kijelentések a fenti adatokra vonatkoznak. Állapítsa meg minden kijelentésről, hogy igaz, hamis, vagy az adatok alapján ezt nem lehet eldönteni! (Tegyen X-et a megfelelő cellába! Válaszait nem kell indokolnia.)

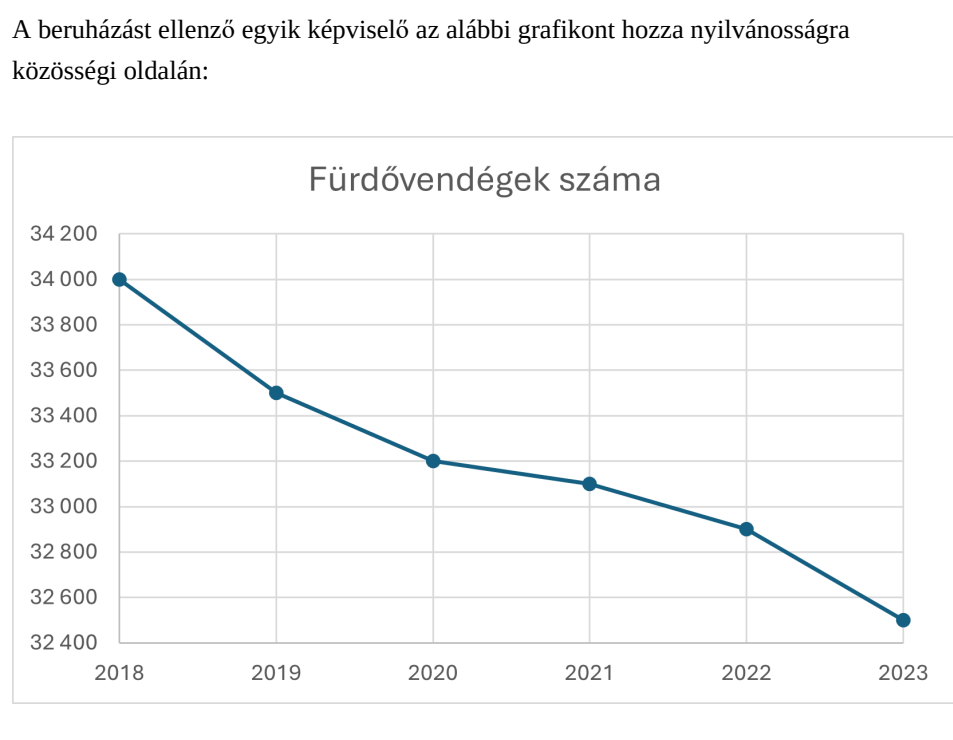
	Igaz	Hamis	Nem lehet eldönteni
Az A osztályba járó gyerekek több mint fele alacsonyabb 150 cm-nél.			
A B osztályban több olyan gyerek van, aki 160 cm-nél magasabb, mint az A osztályban.			
A magasságok terjedelme az A osztályban nagyobb, mint a B osztályban.			
A két osztály összes tanulója közül a legmagasabb az A osztályba jár.			

5. feladat

Egy kisváros fürdőjét 2024 nyarán szeretné felújítani a helyi önkormányzat. Az alábbi táblázat tartalmazza, hogy az elmúlt 8 évben hogyan alakult a fürdő látogatottsága éves szinten:

Év	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Fürdővendégek száma	33 200	32 500	34 000	33 500	33 200	33 100	32 900	32 500

A beruházást ellenző egyik képviselő az alábbi grafikont hozza nyilvánosságra közösségi oldalán:



a) Írjon két olyan jellemzőt, amiért ez a grafikon téves következtetések levonására alkalmas!

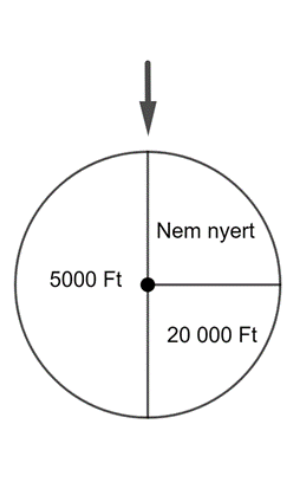
b) Ábrázolja az adatokat úgy, hogy nehezebben lehessen belőlük téves következtetéseket levonni!

6. feladat

András az első félévben négy jegyet kapott matematikából. Tanára szerint a jegyei alapján félévkor 4-est érdemel, mert ez a jegyek átlaga. András szerint viszont 5-öst kéne kapnia, mert ez a jegyeinek az egyetlen módusza, és 4-es jegye nem is volt a félév során. Milyen jegyeket kapott András a félév során? Válaszát indokolja!

7. feladat

Egy új bevásárlóközpontban nyitási akcióként minden vásárló megpörgetheti az ábrán látható szerencsekereket. Amelyik mezőnél a kerék megáll a pörgetés után, azt az összeget nyeri meg a vásárló. Mennyi a nyeremény várható értéke egy pörgetés esetén? Megoldását részletezze!



Csapodi Csaba

Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanárképző Központ,

ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Geszler Evelin Anna 2024. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Mi várható a 2024. májusi érettségin?

MEGOSZTÁS

A matematika mintafeladatsor didaktikai elemzése a NAT2020 változásainak tükrében

Változások a közoktatásban

A hazai közoktatás egyik alapvető tartalmi szabályozó dokumentuma a Nemzeti Alaptanterv (NAT). Fejlesztése, jóváhagyása központilag koordinált, a benne foglaltak pedig az oktatás minden szereplőjére egyöntetűen vonatkoznak. A NAT-ot ([1]) a Magyar Közlönyben hirdetik ki, és az aktuális kerettanterveket ([2]) is ehhez igazítják. Rendszeres felülvizsgálatának és átdolgozásának köszönhetően a jelenleg hatályban lévő 2020-as változata már az 5. Nemzeti Alaptantervünk az első, 1995-ös megjelenése óta. (A továbbiak 2003-ból, 2007-ből és 2012-ből származnak.)

Az érettségi vizsga követelményeinek minden esetben követnie kell a tantervben eszközölt változtatásokat, így az alaptanterv megjelenésével párhuzamosan szükség volt a részletes érettségi vizsgakövetelmények tárgyanként eltérő fokú átdolgozására. Matematikából az új követelményrendszer bevezetése nem hozott drasztikus változásokat. Általánosságban elmondható, hogy a középszintről kikerülő ismereteket emelt szinten továbbra is kérdezhetik majd, a középszint követelményei pedig pár új elemmel gazdagodtak, a korábbi hangsúlyok némiképp eltolódtak. Ezekre példa az exponenciális egyenletekkel leírható folyamatok modellezése, a megtakarítási és hitelfelvételi lehetőségekkel kapcsolatos pénzügyi számítások elvégzése, valamint a statisztikai ismeretek egy eddiginél jóval szélesebb tárháza.

Az érettségivel kapcsolatos minden hivatalos dokumentum megtalálható az Oktatási Hivatal honlapján. Az idei évtől kezdődően minden érettségizőre egységesen a „Közismereti érettségi vizsgatárgyak 2024. május–júniusi vizsgaidőszaktól érvényes vizsgakövetelményei vonatkoznak ([8]). A régi, 2012-es NAT-ra épülő dokumentumok viszont továbbra is fellelhetők az archív anyagok között ([9]). Szintén itt találjuk a 2024. május–júniusi vizsgaidőszaktól érvényes vizsgakövetelmények szerint készült érettségi mintafeladatokat ([11]). Jelen cikk keretein belül én ezek közül a középszintű matematika feladatsor elemzésével foglalkozom, hiszen egyrészt itt következett be jelentősebb változás, másrészt a korábbi évek tendenciái alapján a matematikából érettségiző diákok átlagosan 90-95%-a a középszintű érettségi vizsgát választja. (Pontos létszámadatok az elmúlt évek érettségi vizsgáiról a `www.ketszintu.hu/publicstat.php` oldalon érhetők el.)

A témával korábban az Érintőben már foglalkozott Csapodi Csaba 5 részből álló cikksorozata ([3], [4], [5], [6], [7]), amely témakörönként járja körbe az újításokat, valamint mutat pár elképzelhető, új típusú feladatot.

A középszintű matematika érettségi vizsga

Az érettségi vizsgák időpontját a tanév rendjére vonatkozó miniszteri rendelet határozza meg ([10]). Tavasszal a fő tárgyak a 2020-as vészhelyzetben bevezetett intézkedések óta 9 órakor kezdődnek, így a 2024. évi május–júniusi matematika írásbeli érettségi vizsga 2024. május 7-én 9 órakor veszi kezdetét.

Az 5 nagy témakör nem változott (1. Gondolkodási módszerek (20%), 2. Számelmélet, algebra (25%), 3. Függvények (15%), 4. Geometria (25%), 5. Valószínűségszámítás, statisztika (15%)), valamint azok adott feladatsoron belüli hozzávetőleges aránya (zárójelben) sem. Középszinten, a szóbeszédek ellenére, szóbeli vizsgára továbbra is csak abban az esetben kerül sor, ha az írásbeli vizsgán a vizsgázó pontszáma eléri a 12 pontot (a maximális 100 pontból), de az elégséges érdemjegyhez szükséges 25-öt nem, vagy ha mentesül az írásbeli érettségi vizsga alól.

A mintafeladatsorral ([12]) kapcsolatban az egyik legszembetűnőbb változás annak felépítése lehet. A feladatlap szerkezete azonban nem változik 2024-től sem. Az első rész továbbra is 12 rövid, alapösszefüggésekre irányuló, jellemzően csak a végeredmény közlését kérő feladatot fog tartalmazni. Ezt a második rész szintén módosítás nélkül követi; vagyis három kötelező példa lesz a 15. feladatig bezárólag, az utolsó három közül pedig továbbra is csak kettő tetszőlegesen választottat kell majd megoldani, a kihagyott feladat sorszámát pedig az erre a célra fenntartott helyen jelölni. Amennyiben ez nem történik meg, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor automatikusan az utolsó feladat nem kerül értékelésre. Itt hosszabb, több részfeladatból álló feladatok találhatók, amelyek esetében már az eredményhez vezető lépések adják a pontszám döntő részét, maga a megoldás, illetve esetenként annak ellenőrzése csupán 1-1 pontot ér.

Segédeszközként továbbra is használható többek között bármilyen szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas számológép, valamint a négyjegyű függvénytáblázat tetszőleges példánya, egyidejűleg akár több is.

Érettségi 2024: A mintafeladatsor elemzése

Első rész

A halmazok, gráfok és kombinatorika témaköréből származó első három feladat jellege a korábbiakkal teljes egyezést mutat, hiszen itt a követelményrendszerben sem történt jelentős változás. A logikai szita elve implicite eddig is megjelent a halmazos feladatokban, mostantól azonban fel kell készíteni a diákokat arra, hogy ezt az ismeretet tudatosan használják. Ehhez támpontot szolgáltathat [3, 1.6. feladat].

Bevették a gráf csúcsainak fokszámösszege és az éleinek száma közti összefüggés ismerete mellé annak alkalmazását a gyakorlatban, ez azonban csak formai finomítás, hiszen ezt az ismeretet korábban is számon kérték a gráfokkal modellezhető feladatoknál.

Feladat. Írja fel a 2021-et 8-as számrendszerben!

Ez a feladat abszolút újszerű. Míg korábban középszinten csak a kettes és tízes számrendszer közti átváltások jelentek meg, és inkább csak az idegen nyelvű feladatsorokban, addig az új követelményrendszer már elvárja az áttérés módjának ismeretét a 10-es és bármely n alapú számrendszer között, ahol $2 \leq n \leq 9, n \in \mathbb{N}$.

Napjainkban a számrendszerek az informatikában és a számítástechnikában fontos szerepet játszanak. Itt a bináris, oktális és hexadecimális számrendszereket használják. Az, hogy a mintafeladatsorban épp a 8-as számrendszer jelenik meg, lehet puszta véletlen, de a 2021 szám használata már bizonyosan tudatos volt, a feladatokat ugyanis ebben az évben publikálták. Talán érdemes lehet a számrendszerek közötti átváltás gyakoroltatásánál feladni a 2024-es számot.

Feladat. Egy mértani sorozat második tagja 2, negyedik tagja 4. Adja meg a sorozat hatodik tagját! Válaszát indokolja!

A mértani, vagy éppen számtani sorozat n-edik tagjára vonatkozó feladattípus szintén ismert. Bár az általános tag felírása a kis indexeknek köszönhetően itt mellőzhető, a tapasztalataim azt mutatják, hogy a diákok mégis előszeretettel választják a képletbe helyettesítést a „lépkedés" helyett.

Feladat. Ábrázolja az $[1;4]$ zárt intervallumon értelmezett $x \mapsto |2x-4|$ függvényt!

Az abszolútérték-függvény, néhány egyéb függvénnyel együtt, átkerült középről emelt szintre, a függvénytranszformációknál viszont új elemként megjelenik az $|f(x)|$. Ez szerepel is a 8. példában, ahol a feladat egy korlátos, zárt intervallumon értelmezett függvény ábrázolása. Ilyen formában nem csupán egy lineáris, hanem egy tetszőleges másodfokú, a $\sqrt{x}$, az $\frac{1}{x}$, vagy akár egy exponenciális függvény abszolútértékét is számon lehet kérni.

Feladat. Adja meg az 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 5 minta alsó és felső kvartilisét!

Az egyik legjelentősebb változáson átesett témakör a statisztika, összhangban a XXI. századi adatvezérelt társadalmunkkal. A rövid feladatrészben az eddig megszokott statisztikai mutatók, úgymint középértékek (átlag, módusz, medián) és szóródási mérőszámok (terjedelem, szórás) mellett megjelennek a kvartilisek (negyedelők), viszont kikerül a súlyozott számtani közép és az átlagos abszolút eltérés. A fenti feladat éppen a kvartilisek kiszámítását kívánja meg egy 8 adatot tartalmazó mintából. Mivel meghatározásukra nincs egységes megállapodás, a táblázatkezelő programokkal vagy a különböző számológépekkel kapott értékek eltérhetnek a tanórán tanultaktól. Bár nagy számú adat esetén ez a különbség irreleváns, fontos, hogy a tantervben szereplő módon számítsuk őket. Ehhez először nagyság szerint növekvő sorba rendezzük az adatokat, majd páros elemszám esetén a mediánnal kettéosztott két részsokaságnak külön-külön vesszük a mediánját, páratlan elemszámnál pedig kettéosztás után a mediánt elhagyva tesszük ugyanezt.

Nem tisztázott kérdés viszont, hogy a kvartilisek kiszámítására további matematikai indoklás nélkül használhatók-e a számológépek, ahogyan az átlag és a szórás esetén. Megjegyzendő továbbá, hogy bár a feladat mintát említ, középszinten a tanulóktól nem elvárt, hogy tisztában legyenek a sokaság és az abból vett minta fogalmával és a köztük levő különbözőséggel.

Feladat. Egy hegyesszög koszinusza $0{,}6$. Mennyi a kiegészítő szögének a koszinusza?

Fontosnak tartom felhívni a figyelmet arra is, hogy bár a szögfüggvények általános definíciója, a negatív szögekre vonatkozó összefüggések és a trigonometrikus egyenletek szintén átkerültek emelt szintre, középszinten továbbra is elvárt a szögfüggvény értékének ismeretében a szög visszakeresése (számológéppel), valamint meg kell tudni határozni tompaszögek szögfüggvényeit is a kiegészítő szögük szinuszának/koszinuszának ismeretében. Erre a szinusztétel kapcsán különösen nagy szükség lehet, noha az érettségin nem jellemző olyan feladat, ahol a megadott feltételeknek egy hegyes-, illetve egy tompaszögű háromszög egyaránt eleget tenne. Úgy gondolom, hogy ez a változtatás nagy könnyebbség lehet a tanulók számára, hiszen a tapasztalatok azt mutatják, hogy a valós számok halmazán értelmezett trigonometrikus egyenletek megoldását a többségnek nem sikerül megfelelően elsajátítania. Szintén nagy terhet vesz le a vállukról az, hogy a szögeket csak fokokban kell mérni, mivel az ívmérték (radián) átkerült emelt szintre.

Egy másik számottevő változáson átesett témakör a koordinátageometria. A továbbiakban nincs szükség sem a szakasz harmadolópontjának, sem pedig a háromszög súlypontjának meghatározására. A középszinten megmaradt az egyenes $y = m \cdot x + b$ (és az $x = c$) alakban megadott egyenletének ismerete, az ettől különböző felírásai azonban átkerültek emelt szintre. Vagyis elvárható a két adott ponton átmenő egyenes egyenletének meghatározása, ami szerepel is a feladatsorban. A pontok koordinátáit a fenti alakba behelyettesítve, egy egyenletrendszer megoldásaként kapjuk meg a meredekséget és az y tengelymetszetet.

Szintén számonkérhető a fenti alak kizárólagos ismerete mellett az egyenes meredeksége és az egymással párhuzamos, illetve egymásra merőleges egyenesek meredekségére vonatkozó összefüggések. Jóllehet a normálvektoros vagy az irányvektoros alak már egyáltalán nem követelmény, ettől függetlenül a tapasztalataim szerint sok helyen még a mai napig tanítják őket.

A kör egyenletének felírása csak a középpont és a sugár (esetleg az átmérő, vagy annak két végpontjának) ismeretében kerülhet elő, ezek visszakeresése a kétismeretlenes másodfokú egyenletből már nem elvárás többé (a teljes négyzetté alakítás módszerét ettől függetlenül továbbra is ismerni kell). Nem kell tudni meghatározni kör és egyenes metszéspontját, ahogyan a kör adott pontjához húzott érintő egyenletét sem.

A 12. feladat nem meglepő módon egy valószínűségszámítási példa. Az e témakörhöz tartozó ismeretek sora jelentősen bővült, tudni kell ezentúl a következőket: elemi esemény, események összege, szorzata, adott esemény komplementere, továbbá egymást kizáró és független események. Bár a feladat független események együttes bekövetkezésének valószínűségének a kiszámítását kívánja meg, megoldható a klasszikus kombinatorikus modellel is. A megoldókulcs itt mindkét megközelítést közli.

Második rész

Általában a 13. feladatban valamilyen egyenlet, egyenlőtlenség vagy egyenletrendszer szokott szerepelni. Nincs ez másképp a mintafeladatsorban sem, ahol egy egyszerű exponenciális egyenlet megoldásával 5 pont szerezhető az a) részben. A megoldókulcsban szemet szúrhat, hogy a helyes $x = \frac{4}{3}$ eredmény közlése helyett kerekített érték esetén nem adható meg a megoldásért járó 1 pont. Ez annak fényében különös, hogy korábban a javítókulcs úgy rendelkezett, hogy amennyiben „egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, észszerű és helyes kerekítésekkel kapott rész- és végeredmény is elfogadható" legyen. Szintén nem világos, hogy az eredmény ellenőrzése továbbra is kiváltható-e az alaphalmaz vizsgálatával és az ekvivalens átalakításokra való hivatkozással. Ezért inkább minden esetben azt javasoljuk, hogy a megoldás helyességét az eredeti egyenletbe visszahelyettesítéssel ellenőrizzük.

Az egyenlet valóstól eltérő alaphalmazát a 13. b) feladatban vastag betűvel emelték ki. Ezt figyelemfelkeltés gyanánt hasznosnak tartom.

A 14. feladat komplexebb statisztikai ismereteket kér számon. A feladat egy box-plot (más néven doboz-, vagy sodrófa-) diagram értelmezése, amely teljesen új elem, csakúgy, mint a rá vonatkozó állítások igazságértékének eldöntése. A következő szint az adott adatok ábrázolásához leginkább megfelelő diagramtípus kiválasztása és a választás indoklása lenne. Ez a követelményrendszerben már ugyan megjelenik, ugyanakkor úgy gondolom, hogy az eddig számonkért statisztikai ismeretekhez képest ez túl nagy ugrás lenne. A grafikus manipulációk felismerése és javítása grafikonok esetében külön említést érdemel, gyakorlati haszna megkérdőjelezhetetlen, ám ez is egyelőre csak a követelményrendszerbe került bele, a mintafeladatok szintjén még nem találkoztunk vele. (A [7] cikk azonban tartalmaz ilyen feladatokat, ezeket mindenképpen érdemes megnézni. A megoldásuk az Érintő Facebook-oldalán jelenik majd meg. *A szerkesztő megjegyzése.*)

Középszinten innentől kezdve követelményként jelenik meg az egyszerű állítások, tételek bizonyítása, úgymint a hatványozás azonosságai konkrét alap és pozitív egész kitevő esetén, számtani és mértani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képletek, a háromszög oldalfelező merőlegesei, illetve a belső szögfelezők metszéspontjára vonatkozó tételek, Pitagorasz-tétel, sokszögek átlóinak számára, a belső- és külső szögeiknek összegére vonatkozó összefüggések, Thalész-tétel vagy a szinusztétel, amelyek azonban egyelőre kizárólag a szóbeli vizsgán jelennek majd meg.

A „bizonyítsa" kifejezés szerepel a 15. feladatban, amely komolyabb hangzása miatt elsőre talán ijesztően hathat. Problémát okozhat, ha a tanuló nincs tisztában azzal, hogy mit várunk tőle bizonyítás címszó alatt, netán túlgondolja annak mélységét, és emiatt esetleg egyáltalán nem is próbálkozik a feladat megoldásával. Érdemes tehát az alábbiak tudatosítása.

A bizonyítandó állításokon a „Mutassa meg", „Igazolja" típusú bizonyításokat kell érteni, amelyek mellett ezentúl megjelenik a korábban szándékosan mellőzött „Bizonyítsa" szó is, ám ez továbbra is inkább az eredmény igazolását számítással, logikus érveléssel fogja jelenteni az írásbeli vizsgán, mintsem deduktív bizonyítást. Az állítás maga a matematika szinte bármely területéről származhat, várhatók például geometriai, számelméleti kijelentések. (Erre példákat [3]-ban érdemes nézni.)

Szintén új elem a várható érték megjelenése az emelt mellett középszinten. A 16. feladat egy fiktív nyereményjáték részleteit tartalmazza, amely 300 Ft-os eladási áron kínál eltérő nyereményű sorsjegyeket, a kérdés pedig a cég egy sorsjegyre jutó nyereségének várható értéke. Könnyítésképpen a szövegből is kinyerhető, mit értünk nyereségen. Az ehhez szükséges kiadások kiszámítása történhet a nyereményértékek valószínűségeivel (relatív gyakoriságokkal) súlyozott átlagaként, vagy számolhatunk a táblázatban szereplő gyakoriságokkal, ez esetben a sorsjegyek darabszámával a számolás végén kell osztani.

Az, hogy a jövőben a megtakarítási, befektetési és hitelfelvételi lehetőségekkel és azok kockázati tényezőivel kapcsolatos feladatokra a tananyagban és a számonkérésben egyaránt számítani kell, mind a pénzügyi tudatosságra nevel. A kamatos kamatszámítási feladatok mellett így a gyűjtőjáradék és törlesztőrészlet meghatározása is alapvető jelentőségű lesz.

Mindkét feladattípus begyakorlásához a korábbi évek emelt szintű feladatsorai jó mankót jelenthetnek, vagy inspirálódhatunk innen: [5]. Előbbiről akkor beszélünk, ha egyenlő időközönként ugyanakkora összeggel növelünk egy kiindulási értéket, vagyis például egy bankban vezetett megtakarítási számlánkra évente mindig azonos összeget fizetünk be, ahol így minden befizetésünkre kamatos kamatot számolnak fel. A törlesztőrészlet esetében pedig a felvett hitelt fizetjük vissza szintén azonos időközönként és egyenlő részletekben, a fennálló hiteltartozásunkat, amelyre szintén kamatos kamatot terhelnek, így fokozatosan csökkentve.

Értékelésük, megfelelő pontozásuk azonban annál alaposabb megfontolást kíván meg, mint ahogy az ebben a mintafeladatsorban szerepel.

A 17. feladat b) részében 7 pont szerezhető a gyűjtőjáradék helyes kiszámításával, amely a függvénytáblázatban szereplő képletbe helyettesítéssel megoldva egész biztosan nem a feladat kitűzőjének eredeti szándékát szolgálja. Bár a feladatra adható pontszám jelentős hányada a gondolatmenetre, nem pedig a kapott eredményre jár, és kiemelt jelentőségű a részszámítások nyomonkövethetősége, mindenféleképpen felmerül a kérdés, hogy a függvénytáblázatban található képlet indoklás nélkül átemelhető-e. Maga a feladat a következő:

Feladat. Dóri szülei elhatározzák, hogy most született gyermekük felsőoktatási tanulmányainak fedezésére 18 éven keresztül minden év elején elhelyeznek 100 000 Ft-ot a fenti kamatfeltétellel (évi 4%-os kamat) egy számlára.

b) Mutassa meg, hogy ilyen módon a 18. év végére több mint 2 600 000 Ft lesz a számlán!

Az $S_n = a \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ képletbe való behelyettesítés pedig pont az a járadéknak az n-edik év végére felnövekedett értékét adja meg, amennyiben a befizetések az év elején történnek.

Feladat. Dóri egyetemi évei alatt tanulmányai költségeire szeretne felhasználni az összegyűlt pénzből 2 600 000 Ft-ot. Azt tervezi, hogy hat éven keresztül minden év elején ugyanakkora összeget vesz fel egy olyan számláról, amelyen kezdetben ez az összeg szerepel (a számlán maradó összeg továbbra is minden év végén 4%-ot kamatozik). Az a célja, hogy amikor a hatodik év elején felveszi az adott összeget, akkor pont elfogyjon a számláról a 2 600 000 Ft.

c) Mekkora összeget vegyen fel Dóri minden év elején, hogy a célja teljesüljön? Válaszát száz forintra kerekítve adja meg!

A fenti példa felfogható egy fordított hitelkonstrukcióként is, amikor is Dóri pénze van a banknál, és a pénzintézet azt „törleszti" számára évente azonos összegekben. Arra kell csak figyelnünk, hogy míg a hiteltörlesztés rendszerint az adott periódus végén történik addig itt év elején csökken a fennálló tartozás mindig x összeggel, ez azonban nem jelent lényegi különbséget. A folyamat tehát egy az egyben egy olyan hitelfelvételnek feleltethető meg, ahol a kiindulási összeg $2\,600\,000 - x$, és így éppen az 5. év végére (a 6. év elejére) merül ki a keret.

Bár ez a gondolatmenet szintén képes kiváltani a folyamat évről évre történő nyomonkövetését, az analógiára való hivatkozás a tanárokat éppen olyan szintű ismeretét, összefüggéseinek átlátását kívánja meg, hogy ezért véleményem szerint már jogosan ítélhető oda a feladatért járó 7 pont teljes egésze.

A feladat kitűzőjének ugyanakkor eredeti szándéka egyértelműen az lenne, hogy a diák modellezze a pénz útját az első időszaktól kezdve bizonyos számú köztes időszakot átugorva az utolsóig bezárólag, valamint ismerje fel, hogy az így kapott összeg egy része éppen egy mértani sorozat első n tagjának összege, amelyre így alkalmazható az összegképlet. Mindez azonban megkerülhető a függvénytáblázatban található képletekbe helyettesítéssel. Ebből pedig nem derül ki, hogy tudatosan használja-e a diák a képletet, ezt nehéz utólag ellenőrizni.

Bár a függvénytáblázatok terén a jövőben változásokra számíthatunk ([14]), a témakörrel kapcsolatban nem pusztán a kitűzhető feladatok köre érdemel említést, hanem a hozzájuk kapcsolódó, a függvénytáblázatban fellelhető képletek is. A „fehér" függvénytáblázatban $S_n = S_n^* = a \cdot \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$ képlet adja meg az a járadéknak az n-edik év végére felnövekedett értékét, amennyiben a befizetés minden év végén esedékes. Ugyanerre az $S_n = \frac{100a}{p} \cdot (q^n - 1)$ képlet is szerepel, amely az előzőből adódik a $q = \frac{100+p}{100}$ helyettesítéssel. Félrevezető lehet a T hitel évente azonos összegben megfizetett törlesztőrészletére vonatkozó képlet (év végi törlesztés esetén)

$$A = \frac{T}{100} \cdot \frac{q^n \cdot p'}{q^n - 1},$$

amelyben p' helyett p-nek kellene szerepelnie. A „sárga" függvénytáblázatban ez a képlet helyesen van benne, és emellett a $p' = \frac{p}{100}$ összefüggés is megjelenik.

A függvénytáblázatok eltérő képletei szólhatnak amellett, hogy a feladatok helyes megoldása pusztán a képletekbe való behelyettesítéssel valóban nem kapható meg, a megoldást azonban sokkal inkább olyan feladatok kitűzése jelentené, amelyek komplexitásukból adódóan ennél többet kívánnak meg.

Megjegyezném, hogy a jelenleg forgalomban lévő függvénytáblázatok („fehér" és „sárga") használata kellő gyakorlat hiányában értékes, elvesztegetett perceket jelenthet a diák számára a vizsgán. Éppen ezért fontos lehet ezek előzetes áttanulmányozása, a birtokolt ismeretek matematikán belül elfoglalt helyének, a témaköröknek a beazonosítása.

A 18. feladat mindössze a) és b) részeket tartalmaz. Az elmúlt évek feladatsorai struktúrájának tükrében ez meglehetősen szokatlan, inkább a kétszintű érettségi vizsga kezdeti időszakát jellemezték a nagyobb pontértékű, kevesebb, egymással összefüggő részekből álló feladatok. A tagoltság és a megoldhatóság szempontjából való függetlenség – ami 2017 óta elvárás – mellett szól az, hogy ily módon egy-egy jó gondolat meglétén, vagy éppen hiányán nem múlik túl sok pont, és az esetleges elkövetett hibák nem öröklődnek.

Középszinten teljesen új anyag a geometriai valószínűség, amikor az elemi eseményeket egy geometriai alakzat pontjaihoz rendeljük hozzá, azt feltételezve, hogy az eseményhez tartozó ponthalmaz mértéke (pl. a hossza, a területe, illetve a térfogata egy, két és három dimenzióban) egyenesen arányos az esemény valószínűségével, amely ily módon megkapható a részhalmaz és a teljes alakzat mértékének a hányadosaként. Egyik klasszikus példája a céltáblára lövés, ahol magát a céltáblát 1 valószínűséggel eltaláljuk, a klasszikus modell esetében megszokottól eltérő módon azonban 0 valószínűség tartozik a tábla egy adott pontjának eltalálásához, amely azonban korántsem lehetetlen esemény.

Az eseménytér végtelen, ez szemben áll az eddig ismert diszkrét esetekkel. A geometriai valószínűség tehát a valószínűségi változó fogalmának bevezetése és az eloszlások csoportosításának ismerete nélkül biztosít lehetőséget a folytonosság kezelésére. Jelentősége miatt éppen ezért úgy vélem, hogy a végleges feladatsorban nem a kihagyható példák között lenne a helye, komplexitása pedig indokolná, hogy egyszerűbben, kevesebb pontértékkel és kisebb kockázattal járó feladatként jelenjen meg a bevezetése utáni első években. Jóllehet, hogy itt a 8-ból 6 pont a térgeometriai számításokra jár, de az új ismeret hiányában elképzelhető, hogy ezeknek a tanuló neki sem kezd.

A geometriai valószínűség valódi ereje azonban abban rejlik, hogy olyan problémákra alkalmazzuk, amelyek alapvetően nem geometriai jellegűek. A későbbiekben éppen ezért fontosnak tartanám a geometriai objektumok mellett az azoktól való elrugaszkodást, és például annak a valószínűségének kiszámítását, hogy amennyiben 12:30-kor érünk a megállóba, elérjük a buszt, ami egy véletlenszerű időpontban érkezik dél és délután 1 óra között.

További megjegyzések

A logaritmus „kikerülésének" híre sokakat felvillanyozott, hiszen a nehezen emészthető anyagrészek közé tartozott. A félreértések elkerülése végett, a logaritmus definíciójának és fogalmának ismeretére továbbra is szükség van, csupán az azonosságok és a tízestől eltérő alapra való áttérés vált emelt szintű ismeretanyaggá. Középszinten ehelyett megjelenik a tetszőleges alapú logaritmus értékének kiszámítása tízes alapú logaritmussal. Mindkét irányú változást üdvözölni lehet. Egyfelől lényeges, hogy tisztában legyenek a diákok a tízes alapú logaritmus jelentőségével a szám nagyságrendjének meghatározásában, tudják, hogy megkapható általa a kérdéses szám számjegyeinek száma. (Vonatkozott is erre feladat 2019 májusában az idegen nyelvű feladatsorban.) Másfelől a zsebszámológépek megjelenése és elterjedése mára már teljesen kiszorította a logaritmustáblázatok használatát, a mai számítási kapacitások mellett már felesleges a szorzás és osztás visszavezetése összeadásra, illetve kivonásra logaritmussal. A hatványkitevőre vonatkozó azonossággal azonban elképzelhető, hogy továbbra is számolni kell, hiszen az megjelenhet az exponenciális folyamatok modellezésében, amelyek 2024-től is várhatóan a középszintű feladatsorok állandó szereplői lesznek.

Azokhoz a követelményrendszerbeli változásokhoz, amelyekre a mintafeladatsorban nem találunk példát, jó mankót jelenthet a [13] dokumentum, amely tételesen listázza a legfontosabb középszinten megjelenő új ismereteket és az egyik szintről a másikra átkerülő fogalmakat egyaránt. A bevezetőben említett Érintőben megjelent öt cikkből álló sorozat pedig a változások ismertetése mellett további konkrét feladatokkal biztosít a diákok számára ingyenes, akár önálló gyakorlási lehetőséget.

Mivel a mintafeladatsor az újdonságok ellenére is nagyfokú egyezést mutat a korábbi évekével, így a felkészülés egyik további, de nem kizárólagos módja lehet az elmúlt évek középszintű érettségijeinek, az emelt szintről lekerülő témakörök esetében pedig a korábbi emelt írásbeli vizsgák megfelelő feladatainak megoldása.

Irodalomjegyzék

[1] Magyar Közlöny 2020. évi 17. szám. `https://magyarkozlony.hu/dokumentumok/3288b6548a740b9c8daf918a399a0bed1985db0f/megtekintes`. (Letöltve: 2024. január 25.)

[2] A 2020-as NAT-hoz ill. tartalmi szabályozók. `https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek/2020_nat`. (Letöltve: 2024. január 25.)

[3] Csapodi Csaba, A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – I. rész, Érintő, 2023. március, 27. szám. `https://ematlap.hu/tanora-szakkor-2023-3/1318-a-matematika-erettsegi-kovetelmenyeinek-valtozasa-2024-tol-iii-resz`. (Letöltve: 2024. január 25.)

[4] Csapodi Csaba, A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – II. rész, Érintő, 2023. június, 28. szám. `https://ematlap.hu/tanora-szakkor-2023-2/1284-a-matematika-erettsegi-kovetelmenyeinek-valtozasa-2024-tol-ii-resz`. (Letöltve: 2024. január 25.)

[5] Csapodi Csaba, A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – III. rész, Érintő, 2023. szeptember, 29. szám. `https://ematlap.hu/tanora-szakkor-2023-3/1318-a-matematika-erettsegi-kovetelmenyeinek-valtozasa-2024-tol-iii-resz`. (Letöltve: 2024. január 25.)

[6] Csapodi Csaba, A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – IV. rész, Érintő, 2023. december, 30. szám. `https://ematlap.hu/tanora-szakkor-2023-4/1343-a-matematika-erettsegi-kovetelmenyeinek-valtozasa-2024-tol-iv-resz`. (Letöltve: 2024. január 25.)

[7] Csapodi Csaba, A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – V. rész, Érintő, 2024. március, 31. szám. `https://ematlap.hu/tanora-szakkor-2024-5/1367-a-matematika-erettsegi-kovetelmenyeinek-valtozasa-2024-tol-v-resz`. (Letöltve: 2024. március 10.)

[8] Közismereti érettségi vizsgatárgyak 2024. május–júniusi vizsgaidőszaktól érvényes vizsgakövetelményei. `https://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/kozismereti_vizsgatargyak_2024tol`. (Letöltve: 2024. január 25.)

[9] Közismereti érettségi vizsgatárgyak 2023. október-novemberi vizsgaidőszakig érvényes vizsgakövetelményei. `https://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/kozismereti_vizsgatargyak_2023ig`. (Letöltve: 2024. január 25.)

[10] A 2024. évi május–júniusi írásbeli érettségi vizsgák időpontjai. `https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/erettsegi/2024/vizsgaidopontok_2024maj_jun.pdf`. (Letöltve: 2024. január 25.)

[11] Mintafeladatok a 2024. május–júniusi vizsgaidőszaktól érvényes vizsgakövetelmények szerint. `https://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/mintafeladatok_2024`. (Letöltve: 2024. január 25.)

[12] Matematika középszintű írásbeli érettségi vizsga mintafeladatsor. `https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/erettsegi/vizsgakovetelmenyek2024/mintafeladatok_2024/mat_kozep_irasbeli_minta.pdf`. (Letöltve: 2024. január 25.)

[13] Csapodi Csaba, Az érettségi követelmények változása 2024-től. `https://nemzetipedkar.hu/wp-content/uploads/2023/12/nat-2020-erettsegi-valtozasai.pdf`. (Letöltve: 2024. március 8.)

[14] Wintsche Gergely: Kell-e nekünk függvénytáblázat? Érintő, 29. szám 2023. szeptember. `https://ematlap.hu/tanora-szakkor-2023-3/1301-kell-e-nekunk-fuggvenytablazat`. (Letöltve: 2024. március 8.)

Geszler Evelin Anna,
az ELTE Matematika Doktori Iskola
didaktika programjának végzős doktorandusz hallgatója

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Adatkezelés Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

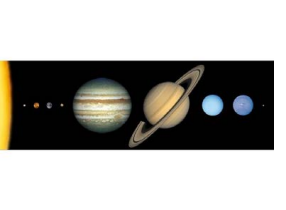
Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon: ›

A **KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ** ROVATBAN ELSŐSORBAN OLYAN KÖNYVEKRŐL SZERETNÉNK TUDÓSÍTANI ÉS OLYAN ELEKTRONIKUSAN ELÉRHETŐ ÍRÁSOKAT AJÁNLUNK, AMELYEK A MATEMATIKA BÁRMELY RÉSZE VAGY KAPCSOLATAI IRÁNT ÉRDEKLŐDŐK SZÁMÁRA KÍVÁNATOSAK LEHETNEK. (ROVATSZERKESZTŐ: *TÓTH JÁNOS.*)

Oláh Vera
2024. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A bolygók élete

A bolygók élete a csillagászatban teljesen járatlan csillagokat csodálóknak is (és ki ne csodálná az éjszakai égbolt csillagait?) kifejezetten élvezetes olvasmány. Én magam mintha egy regényt olvastam volna, nem tudtam letenni. Az érdekfeszítő, olvasmányos stílus, a tények, az űrutazások és eredményeik ismertetésével, érthető elemzésével, az óvatos feltételezések hangsúlyozásával, a tudománytörténeti háttérrel Földön túli gondolatokat ébresztenek az olvasóban, és elgondolkodtató kérdéseket is felvetnek a Világegyetem és Naprendszerünk múltja és jövője kapcsán. A *The Planets* nagy sikerű tévésorozat ihlette mű magyar változata az Akkord Kiadónál jelent meg.



Fröhlich Viktória
2024. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Földtudományok a Földön kívül

Fröchlich Viktória ajánlójának tárgya *Kereszturi Ákos*: Bolygótudomány című, nemrégiben megjelent kötete, amelyben az elmúlt évek, évtizedek felfedezéseinek érdekfeszítő és alapos összefoglalását olvashatjuk a planetológia, azaz a bolygótudomány egyre szerteágazóbb témakörében. A könyv elejétől végéig egzotikus, már-már scifibe illő tájakra kalauzolja olvasóit, feltételezve, hogy már rendelkeznek valamilyen alaptudással mind a csillagászat, mind a földi geológia terén, és tudásukat a Naprendszer égitestjeire is ki szeretnék terjeszteni a 21. századi űrkutatások alapján...

Petróczy Dóra Gréta
2024. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Paradoxonok és sportversenyek

A tudomány és a futball kapcsolata nem újkeletű. Írtak már könyvet a labdarúgás és a játékelmélet, illetve a labdarúgás és a statisztika kapcsolatáról. (Az Érintőben is olvasható egy 2017-es jégkorongos cikk.) Három évvel ezelőtt angol nyelven már jelent meg *Csató Lászlónak* könyve az operációkutatás sportban történő alkalmazásairól. Most *Petróczy Dóra Gréta* ismerteti Csató László legújabb, Paradoxonok a sportversenyek szabályaiban című könyvét...

HÍREK CIKKEI | PORTRÉ CIKKEI | TANÓRA CIKKEI | KÖNYVESPOLC CIKKEI | TUDOMÁNY CIKKEI | GAZDA(G)SÁG CIKKEI | HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

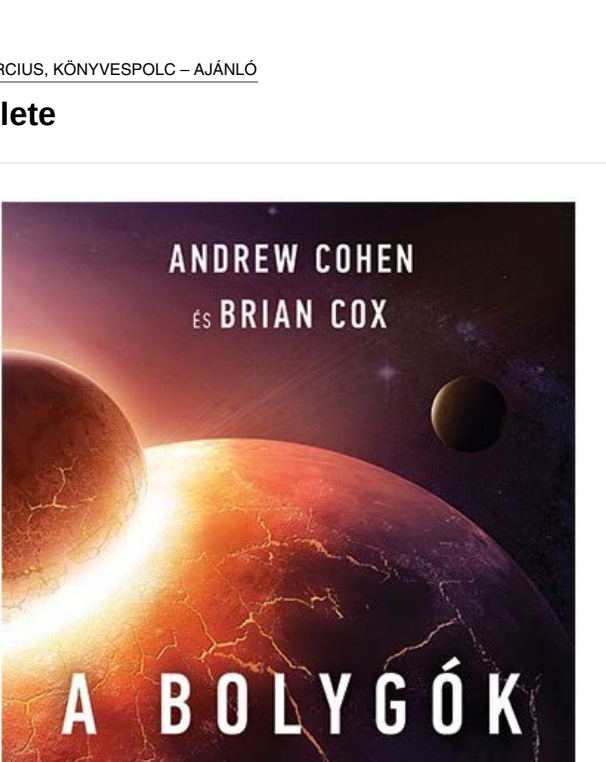
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon: ›

Oláh Vera 2024. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A bolygók élete



A sejtelemesen vöröses borítóján gömböket ábrázoló könyvet egyik szerzője miatt vettem kézbe: Brian Cox részecskefizikus neve ismerős volt, ő a manchesteri egyetem professzora. Írótársa Andrew Cohen, a BBC Planets sorozatának vezető producere, éveken át együtt dolgozott a tudomány-népszerűsítő Coxszal. Könyvük, *The Planets* a nagy sikerű tévésorozat nyomán, 2019-ben látott napvilágot. A magyar Akkord Kiadó évtizedek óta világszerte népszerű tudományos ismeretterjesztő írók (Stephen Hawking, Brian Greene, Michio Kaku…) könyveit jelenteti meg magyarul, többek között a fizika és a matematika témáiban. 2023-ban náluk jelent meg *A bolygók élete.* A könyv a csillagászatban teljesen járatlan csillagokat csodálóknak is (és ki ne csodálná az éjszakai égbolt csillagait?) kifejezetten élvezetes élmény. Én magam mintha egy regényt olvastam volna, nem tudtam letenni. Az érdekfeszítő, olvasmányos stílus, a tények, az űrutazások és eredményeik ismertetésével, érthető elemzésével, az óvatos feltételezések hangsúlyozásával, a tudománytörténeti háttérrel Földön túli gondolatokat ébresztenek az olvasóban, és elgondolkodtató kérdéseket is felvetnek a Világegyetem és Naprendszerünk múltja és jövője kapcsán. Az igényes magyar kiadás a fordítót, Both Elődöt, a lektort, Horvai Ferencet és a szerkesztőt, Oláh Juditot is dicséri.

A kötet elején a bolygók méretarányait tükröző képecskékkel ellátott és elrendezésében is rendhagyó tartalomjegyzék sorolja a fejezeteket: Merkúr, Vénusz – A Nap vendégszeretete; Föld, Mars – A két testvér; Jupiter – Istenek atyja; Szaturnusz – Az égi drágakő; Uránusz, Neptunusz, Plútó – A sötétségben.

A fejezetekből sorra bepillantást nyerhetünk a Naprendszert alkotó bolygók, holdak, kisbolygók és a többi égitest elképzelhetetlen méretű térbeli és időbeli változásaiba és az ezeket felderíteni szándékozó tudományos kísérletekbe. Képet kapunk a Merkúr titokzatos történetéről, elnyúlt ellipszis alakú pályájának és krátereinek titkairól, a Mariner és a Messenger űrszondák közvetített adatokról. A lassan keringő Vénuszról a 90-es évek Magellán űrszondája radarmérései adtak hírt. A szerzők nem tudták megállni, hogy (az egész írás során több szellemes szófordulattal színesítve mondanivalójukat) az egyik alfejezetnek ezt a címet adják: A Vénusz születése. A Mars a Földdel párosítva jelenik meg a könyvben, valószínűsítve azt az elképzelést, hogy a marsi űrszondák fényképei és térképei alapján valamikor a Mars hasonló lehetett a Földhöz, de elvetve a marslakók létezésének elméletét. Részletesen beszámolnak a Curiosity leszállásáról és munkájáról a Marson, és leírják a Mars felszínét, megnevezve, jellemezve hegységeit, krátereit. Kiderül az is, miért lett évtizedek után újra fontos a mi Holdunk tanulmányozása. A Naprendszer legnagyobb és valószínűleg legrégebbi bolygója, a Jupiter külön fejezetet kapott. A Pioneer-10, a Voyager-1 és 2, a Dawn-, a Galilei-űrszondák és a New Horizons küldetés eredményei alapján az űrkutatóknak egyre pontosabb képe lett róla és egyre több holdját fedezték fel. Közülük is megismerheti az olvasó az Io, a legerősebb vulkanizmust mutató hold gravitációs kölcsönhatásait. Szintén saját fejezetet érdemelt ki a Szaturnusz, a másik gázóriás, és természetesen rengeteg szó esik holdjairól, gyűrűinek kialakulásáról, felfedezéséről, Galilei anagrammájától napjainkig. A Cassini-szonda megvizsgálta holdjának, a Titánnak a felszínét, és az Enceladus holdból kilövellő gejzírben nemcsak vizet, de szerves anyagot is talált. Végül az utolsó fejezet témája a távoli és jeges Uránusz, Neptunusz és szegény, lefokozott Plútó. A hihetetlenül kalandos úton levő New Horizons nagyfelbontású képein azonban változatos geológiai formák tűntek fel: akár bolygó, akár nem, a Plútó gyönyörű!

Úgy gondolom, amit Kereszturi Ákos: *Bolygótudomány* című munkájából hiányol a recenzor (ugyanebben a számunkban, itt), *A bolygók élete* c. könyvben legalábbis részben megtalálható. Megjelenik benne a felszínformák bemutatásán túl a kialakulásuk lehetséges forgatókönyve, az űrszondák bemutatása: mely szondák és mikor jártak egy adott égitestnél, illetve milyen méréseket végeztek el, és bepillantást kaphatunk abba is, hogyan történik az űrszondák fényképeinek elemzése és feldolgozása. A könyv közepén jó minőségű színes felvételek támogatják fantáziánkat, segítségül a leírt szöveghez.

A bolygók élete magyar címe nagyon találó, és a könyvben leírtak nyomán legalább kétféleképpen értelmezhető: megjelenik mindegyik bolygó valószínűsíthető keletkezése, vándorlása és változása (tehát a bolygó „élete”), de az a kérdés is minduntalan felvetődik, hogy az adott bolygón (légkörében, holdjain) mai tudásunk szerint lehetséges volt-e valaha, vagy lehet-e valamikor élet (ami hasonló a mi életünkhöz a Földön (megfelelő hőmérséklet, vegyületek, mikroorganizmusok, növények, állatok és talán gondolkodó lények). És persze mi lesz milliárd év múlva a földi élettel, vajon a Föld különleges és egyedi, vagy Naprendszerünkön belül vagy egy másik csillagrendszerben újra megtörténhet mindaz, ami velünk történt?

Oláh Vera

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Copyright © BOLYAI TÁRSULAT Bolyai János Matematikai Társulat RI Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

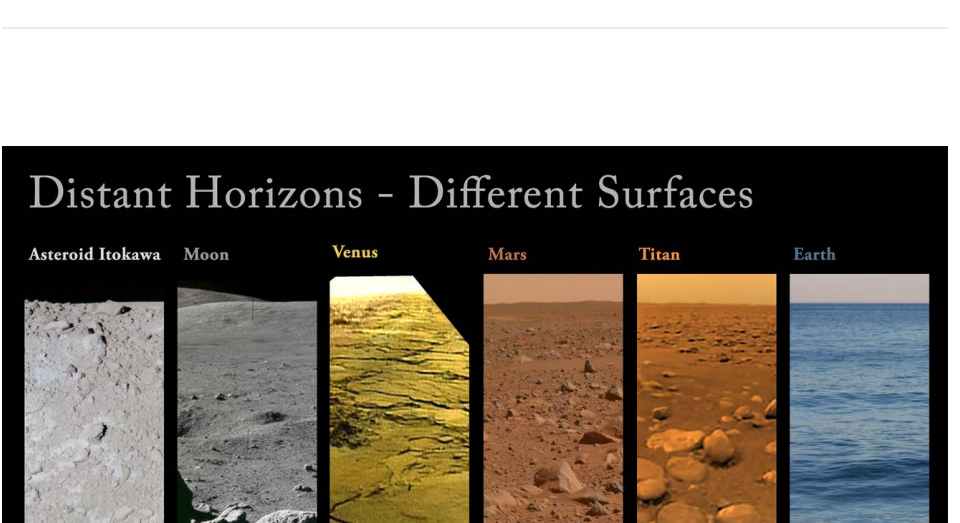
Adatkezelés
Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

Fröhlich Viktória 2024. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Földtudományok a Földön kívül


Distant Horizons - Different Surfaces
Asteroid Itokawa
Moon
Venus
Mars
Titan
Earth
Image Credits:
Asteroid Itokawa [Hayabusa]: ISAS / JAXA / Gordan Ugarkovic
Moon [Apollo 17]: NASA
Venus [Venera 14]: IKI / Don Mitchell / Ted Stryk / Mike Malaska
Mars [Mars Exploration Rover Spirit]: NASA / JPL / Cornell / Mike Malaska
Titan [Cassini Huygens]: ESA / NASA / JPL / University of Arizona
Earth: Mike Malaska
Composition by Mike Malaska

Az emberiség által meglátogatott néhány naprendszerbeli égitest (köztük a Föld) felszínéről készült fényképek.

Kereszturi Ákos könyve ezekhez hasonló tájakra kalauzol minket, bemutatva, miben hasonlítanak az elsőre merőben különbözőnek tűnő világok.

Az elmúlt évtizedek során az űrtechnológia rohamos fejlődésével lehetségessé vált a Naprendszer többi égitestjének közvetlen vizsgálata. E Földön túli világok felszínének feltérképezéséhez, illetve a bennük lezajló folyamatok leírásához elsősorban űrszondák fényképeire, radaros méréseire, illetve néhány esetben (pl. Mars, Vesta, 67P/Csurjumov–Geraszimenko üstökös) leszállóegységek helyi méréseinek adataira támaszkodhatunk. A Hold esetében ezeken felül számos, űrhajósok által a Földre visszahozott minta is rendelkezésünkre áll. Egyre többet tudhatunk meg a naprendszerbeli, összetételükben Földünkhöz hasonlító kőzetbolygókról (Merkúr, Vénusz, Mars), a gázóriások jégholdjairól (pl. Europa, Enceladus, Ganymedes), illetve további kisbolygókról és üstökösökről.

Jelen ajánló tárgya Kereszturi Ákos nemrégiben megjelent kötete, amelyben az elmúlt évek, évtizedek felfedezéseinek érdekfeszítő és alapos összefoglalását olvashatjuk a planetológia, azaz a bolygótudomány egyre szerteágazóbb témaköréiben. A könyv elejétől végéig egzotikus, már-már scifibe illő tájakra kalauzolja az olvasót. Mindeközben olyan kérdésekre igyekszik választ adni, mint hogy miért különlegesek a kriovulkánok? Miből áll és hogyan keletkezik a regolit? Milyen erők késztethetik egy égitest teljes kérgét annak egységes elmozdulására? Miért vannak tigriskarmolások az Európa jégholdon? Illetve melyek azok a helyek a Naprendszerben, ahol a legvalószínűbb, hogy (egykori) élet nyomaira bukkanhatunk?

A könyv nem égitestenként, hanem az egyes földtani folyamatok szerint bontja fejezetekre mondanivalóját, így minden fejezet egy-egy felszínformáló erő átfogó leírását adja az olvasó kezébe. Az első két fejezet – a tektonikus, illetve vulkanikus eredetű felszínformák – kapják messze a legtöbb figyelmet. A továbbiakban szó esik még többek közt gáz- és folyadékáramlásokról, illetve jeges képződmények kialakulásáról is. Az egyes fejezetek először az adott felszínforma lehetséges eredetével foglalkoznak, majd a különböző altípusaikat veszik sorra. Ezt követően különleges, az átlagostól eltérő eseteket tárgyalnak, ekkor már sok esetben égitestek szerinti bontásban. Az összehasonlításokat az egyes égitesteken jellemző területi eloszlás számbavétele zárja. Olvasás közben megtudhatjuk, mik azok a palimpszesztek, alluviális legyezők, illetve tesszerák, avagy miként képződtek a Naprendszer földszerű égitestjein gullyk, makulák és fakulák.

Az írás tömör, azonban vizuális, az egyes felszínformák szerkezete, illetve az őket formáló folyamatok szinte megelevenednek a képzeletemben. Olvasás közben többször felötlött bennem a kérdés, milyen lehet ezeknek az égitesteknek a felszínén sétálni. Azon is eltöprengtem, vajon milyen megállapításokat tehetnének a hipotetikus mars- vagy vénuszlények a Föld felszínének hasonló vizsgálata során, ha bolygónkon nem lenne bioszféra – vagyis élet – és így jelentős erózió sem.

Rendkívül érdekes volt látni, hogy bár javarészt űrszondák fényképeire kell támaszkodnunk, már ezekből is milyen sokat megtudhatunk Naprendszerünk égitestjeinek múltjáról és jelenéről. Olvasás közben többször is felébredt bennem a kényszer, hogy kezembe ragadjak egy mars-, vénusz- vagy holdgömböt, vagy -térképet, így megszemlélhessem és kontextusba helyezhessem a szövegben említett formákat és területeket.

Kiemelten fontos helyet kapott a kötetben a nomenklatúra, különösen a magyar szakszavak értelmezése, illetve használatuk helyreigazítása, pontosítása. A szerző többhelyütt is kiemeli, hogy bár hasonló szavakat használunk az idegen égitestek felszínformáinak leírására, mint a földi jelenségekre, ezek nem minden esetben feleltethetők meg egymásnak maradéktalanul. Ahhoz, hogy elkerüljük a nehézkesen használható, körülíró elnevezéseket, gyűjtőfogalmakat használunk, melyek a legtöbb esetben a földi, hasonló alakzatok nevével egyeznek meg. A szerző több esetben ismerteti az angol, valamint latin elnevezéseket, így aki mélyebbre szeretne ásni egyes témákban, az a külföldi szakirodalom, illetve internetes cikkek megértésével is könnyedén boldogulni fog.

A könyv kevéssé fókuszál a folyamatok fizikai leírására, elsődleges célja inkább az égitestek és felszínformák sokszínűségének részletes bemutatása. Ehhez pedig a szerző túlnyomó többségben az észlelési adatokból (fényképelemzésből, radarmérésekből) nyert eredményekre támaszkodik. Személy szerint rendkívül szívesen olvastam volna az egyes felszínformákhoz tartozó bemutatásokon túl a kialakulásuk lehetséges forgatókönyveiről, valamint a kialakulás és időfejlődés mikéntjeit feltáró numerikus modellek részleteiről. Továbbá kissé hiányoltam a mérések, űrszondák bemutatását is: érdekes adalékot szolgáltatott volna, mely szondák és mikor jártak egy adott égitestnél, illetve milyen méréseket végeztek el. Ezen felül véleményem szerint több figyelmet érdemelt volna egyes mérések technikai leírása, elsődlegesen kiemelve, hogy miként történik az űrszondák fényképeinek elemzése és feldolgozása?

Egy sajnálatos kritika illeti továbbá a könyv képmellékleteit. A kötethez mellékelt képek kicsik, illetve fekete-fehérek, ami nehézkessé teszi a szóban forgó felszínformák azonosítását, illetve a jellegzetes jegyek megkülönböztetését és megjegyzését. Továbbá, mivel a képek nem szövegközi elhelyezésűek, hanem hatosával vannak csoportosítva egy-egy dupla oldalra, az állandó, sokszor tíz oldalt is meghaladó lapozgatás jelentősen megtörte az olvasási élményt. Ezen felül a képekre a szerző nem sorban hivatkozik, (némely képre pedig egyáltalán nincs hivatkozás a szövegben), így néha nehézkes összekötni, melyik szövegrészhez is illenek az egyes ábrák. Mindezeket figyelembe véve, bár jómagam általában az ellenkezőjét szoktam javasolni, a könyv pdf verzióját ajánlom elolvasásra, amennyiben elérhetővé válik.

Összességében a könyvet olyanoknak tudom ajánlani, akik már rendelkeznek valamilyen alaptudással mind a csillagászat, mind a földi geológia terén, és tudásukat a Naprendszer égitestjeire is ki szeretnék terjeszteni. Azoknak, akik Naprendszerünk csodáival most kezdenének el megismerkedni, csak némi óvatossággal ajánlanám a könyvet. (Nekik esetleg érdemes előtte elolvasni ezt a másik, hasonló témájú könyvet. *A szerkesztő megjegyzése.*) Sok helyütt szükség van ugyanis csillagászati, illetve főleg geológiai alapismeretekre, amelyek túlmutatnak a középiskolában elsajátítható általános ismeretanyagon. A téma iránt mélyebben érdeklődő laikusok, és különösen a földtudománnyal vagy csillagászattal foglalkozó egyetemisták azonban könnyedén örömüket lelhetik jelen kötet fellapozásában.

Fröhlich Viktória kutatóasszisztens
CSFK Konkoly Thege Miklós Csillagászati Intézet

ÚJ TUDOMÁNYOS ZSEBKÖNYVTÁR | MATEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYOK
KERESZTURI ÁKOS
BOLYGÓTUDOMÁNY
VULKÁNOK, GLECCSEREK, FOLYÓK ÉS TAVAK A FÖLDÖN KÍVÜL
TYPOTEX
ELKH Eötvös Loránd Kutatási Hálózat

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Petróczy Dóra Gréta 2024. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Paradoxonok és sportversenyek

Csató László: Paradoxonok a sportversenyek szabályaiban (Typotex, Budapest, 2023)

Csató László
Paradoxonok a sportversenyek szabályaiban
TYPOTEX

A tudomány és a futball kapcsolata nem újkeletű. Írtak már könyvet a labdarúgás és a játékelmélet (Palacios-Huerta, Ignacio: *Beautiful Game Theory: How Soccer Can Help Economics*. Princeton University Press, 2014), illetve a labdarúgás és a statisztika (Sumpter, David: *Soccermatics: Mathematical Adventures in the Beautiful Game*. Bloomsbury Publishing Plc, 2016) kapcsolatáról. Sőt, három évvel ezelőtt angol nyelven már jelent meg Csató Lászlónak könyve az operációkutatás sportban történő alkalmazásairól (*Tournament Design: How Operations Research Can Improve Sports Rules?* Palgrave Pivots in Sports Economics, Palgrave Macmillan, 2021), amiről Szádoczki (2022) írt könyvismertetést.

Az operációkutatás és a sport kapcsolata első pillantásra szokatlannak tűnhet. Még a közelmúltban is komolytalannak tartották azokat a kutatókat, akik ilyen „hobbi" témákkal foglalkoztak. Személyes tapasztalatom, amikor egy konferenciaelőadásom hozzászólásában elhangzott, hogy összekeverem a munkát a szórakozással. Tekintettel azonban arra, hogy a sport a világ népességének nagy százalékát érdekli, ellenérvként felhozható, hogy kevés olyan dolog van, amit fontosabb lenne kutatni (Wright, 2014). Szerencsére a témának már rangos folyóiratai (Journal of Quantitative Analysis in Sports, Journal of Sports Analytics, Journal of Sports Economics) léteznek, és számos operációkutatással foglalkozó lap (Annals of Operations Research, European Journal of Operational Research, Management Science) jelentet meg sport témájú tanulmányokat. 2023-ban két sportközgazdaságtannal foglalkozó konferenciának is Budapest adott helyszínt. Az inkább gazdasági fókuszú 6th International Conference Sport Economics & Sport Management (SESM)-nek; és a matematikai témájú 10th Mathsport International Conference-nek, utóbbi főszervezője Csató László volt.

A könyv szerzője a SZTAKI tudományos munkatársa és a Budapesti Corvinus Egyetem docense, kétségtelenül az „operations research in sports" téma hazai úttörője, és voltam olyan szerencsés, hogy a doktori értekezésem témavezetője. Az elmúlt évek kutatásainak eredménye lett a Paradoxonok a sportversenyek szabályaiban című e-könyv, amelyet a Typotex könyvkiadó honlapjáról az érdeklődők ingyenesen letölthetnek.

Azt, hogy miért fontos a sportversenyek tudományos vizsgálata, a könyv 4. fejezetében szereplő példával szeretném megvilágítani. Az 1994. évi karibi kupa selejtezőjén az országok hármasával alkottak egy csoportot, és csupán a csoportelső jutott tovább. A mérkőzések eredménye nem lehetett döntetlen, a hosszabbításban szerzett, a mérkőzés végét jelentő aranygól duplán számított.

Az 1994-es karibi kupa 1. csoportjának eredménye az utolsó meccs nélkül

M: lejátszott meccsek száma; Gy: győzelmek, D: döntetlenek, V: vereségek; G+: szerzett gólok, G-: kapott gólok, Gk: gólkülönbség.

Csapat	M	Gy	D	V	G+	G -	Gk	**Pont**
Grenada	1	1	0	0	2	0	2	**3**
Puerto Rico	2	1	0	1	1	2	-1	**3**
Barbados	1	0	0	1	0	1	-1	**0**

Az 1. csoport állása az 1994. január 25-én, Barbadoson lejátszott utolsó mérkőzés előtt a táblázatban látható. Törési szabályként a gólkülönbséget használták, ezért Barbadosnak legalább két góllal kellett legyőznie Grenadát a továbbjutáshoz.

A mérkőzés során a 2:0-ra vezető Barbados megszerezte a szükséges előnyt, de a 83. percben Grenadának sikerült gólt lőnie. Barbados megpróbált visszatámadni, de az idő rövidsége miatt inkább öngólt rúgtak, így a hosszabbításban még 30 perc állt rendelkezésükre, hogy megszerezzék a kétgólos előnyt. A grenadai játékosok azonban felismerték, az aktuális 2:2-es állás esetén bármelyik kapuba lőnek gólt, ők jutnak tovább. Ezért a barbadosi játékosok fele a saját kapujukat, míg a másik fele a grenadai kaput védte. Végül a hosszabbításban Barbados nyert, és továbbjutott. A probléma gyökerét jelentő, a hosszabbításban szerzett gól(oka)t kétszeresen díjazó szabályt tudomásunk szerint soha többé nem alkalmazták. Az eset elemzése, beleértve az öngól felvételét, elérhető ezen a youtube linken. Az érintettek részéről jogos elvárás, hogy ilyen, vagy hasonló esetek ne fordulhassanak elő. Hasonló problémákat és lehetséges megoldásait ismerteti a könyv.

Az 1. fejezet egy igazán aktuális problémát tárgyal, hogyan rangsoroljunk, esetünkben a koronavírus miatt, félbeszakadt körmérkőzéses bajnokságokban. Például a Magyar Kézilabda Szövetség úgy döntött, a 2019/20-as szezont törli, nem hirdettek bajnokot, nem voltak kiesők és a nemzetközi kupasorozatokba az előző évi szereplőket delegálták. Ez a módszer nyilvánvalóan igazságtalan azokkal a csapatokkal szemben, amelyek a csonka szezonban jobban szerepeltek, mint az előző évben.

A német elsőosztályú férfi kézilabda-bajnokságban az első és másodosztályú csapatok többségi szavazása alapján a másodosztályból az első két klub feljutott, de az első osztályból senki nem esett ki. A rangsoroláshoz mindkét esetben a csapatok által elért pontok számát elosztották a lejátszott mérkőzések számával (kvóciens szabály), míg az esetleges holtversenyeket a gólkülönbség alapján döntötték el.

A szerző ezek helyett egy páros összehasonlításon alapuló rangsorolási módszert javasol a döntéshozóknak, amely nem csak az egymás ellen elért eredményeket, hanem egy paraméter segítségével az ellenfelek erejét is figyelembe veszi.

A 2. fejezetben a szerző különböző tizenegyesrúgási modelleket hasonlít össze az igazságosság és a bonyolultság szempontjából. A labdarúgásban – több más sportághoz hasonlóan –, ha egy mérkőzésen a rendes játékidőt követő hosszabbításban sem dől el, hogy melyik csapat jut tovább, akkor ezt egy büntetőpárbaj segítségével határozzák meg. Az érvényben levő ABAB szabály szerint mind az első öt körben, mind az esetleg szükségessé váló „hirtelen halál" szakaszban az egyik, pénzfeldobás révén kiválasztott csapat rúgja az első tizenegyest. Empirikus megfigyelések alapján a másodiknak rúgó csapat kisebb eséllyel talál be, bár ennek oka még nem teljesen tisztázott. Egyes kutatások szerint a sorrendben később következés növeli a mentális terhelést, míg mások azt találták, hogy a hátrányban lévő csapatra nehezedik nagyobb nyomás.

Igazságosság szempontjából jelentős javulást érhetünk el már az ABBA módosítással is, azaz, ha a páros számú körökben az előző körben másodikként rúgó csapat kezd. A szerző nem csak statikus, azaz a sorrendet eleve meghatározó, hanem dinamikus szabályokat is vizsgál. A Felzárkóztató szabály (Anbarcı et al., 2021) értelmében minden kört a hátrányban lévő csapat kezd, ha nincs ilyen, akkor a rúgási sorrend az előző kör fordítottja. A szerző által sok szempontból legjobbnak talált Változó Felzárkóztató szabály (Csató és Petróczy, 2019, 2022) az első öt körben megegyezik a Felzárkóztató szabállyal, de a hirtelen halál szakaszt mindig a B csapat kezdi.

A 3. fejezetben arra kapunk választ, hogyan szervezzünk 24 csapatos labdarúgótornát. A legtöbb nagy nemzetközi labdarúgótornán a résztvevők száma a kettő hatványa (jellemzően 16 vagy 32), a csoportkör négycsapatos csoportjaiból az első két helyezett jut tovább az egyenes kieséses szakaszba. Ebben a formátumban rendezik többek között a világ- és Európa-bajnokságokat, az UEFA Bajnokok Ligáját, az UEFA Európa Ligát és az UEFA Európa Konferencia Ligát (utóbbiakat a 2023/24-es szezonig).

A sportág népszerűségének és az esemény nézettségének növelése érdekében felmerült a csapatok számának növelése, ez azonban nem mindig lehetséges 16-ról 32-re. Egy köztes megoldás a 24 csapatos torna, de ekkor az egyenes kieséses szakasz nem bonyolítható le a szokásos módon. Ez volt a helyzet az 1982 és 1994 közötti labdarúgó-világbajnokságokon, két női labdarúgó-világbajnokságon (2015, 2019) és az Európa-bajnokságokon 2016 óta. A fejezet bemutatja ezen tornák problémáit, illetve összehasonlítja a fenti tornák formátumait. Kellemetlen átváltásként a csoportok közötti egyenlőtlenségek mérséklése csak a győzelemre ösztönzés hiányának fokozásával érhető el, ugyanakkor utóbbi a mérkőzések megfelelő ütemezésével részben elkerülhető. Az elemzés fontosságát növeli, hogy 2026-tól a labdarúgó-világbajnokságon 48 csapat fog részt venni, ami a 24 csapatos tornákkal analóg módon kezelhető. Remélhetőleg a Nemzetközi Labdarúgó-szövetség (FIFA) is átveszi az Európa-bajnokságon 2020 óta használt, Guyon (2018) által javasolt optimális lebonyolítást.

A 4. fejezet valós és hipotetikus eseteket mutat be arra, hogy különböző versenysorozatokban a párhuzamos kvalifikáció (amikor egy csapat több úton is indulási jogot szerez, ezért „helyettesíteni" kell) rossz kezelése miatt nem mindig áll a csapatok érdekében a győzelem. Dagaev és Sonin (2018, 3. Állítás) eredménye szerint az ösztönzéskompatibilitás megteremtésének egyetlen lehetséges útja, ha az üresedések kezelésekor az egyetlen körmérkőzéses bajnokság élvez prioritást. Az Európai Labdarúgó-szövetség (UEFA) az utóbbi években legalább három alkalommal nem ezt a megoldást választotta.

Az 5. fejezet egy olyan sportbajnokság második fordulós kiemelési eljárását modellezi, ahol a csapatok az első forduló körmérkőzéses selejtezőiből jutnak tovább, és mindegyikük a múltbeli teljesítményt megfelelően tükröző együtthatóval rendelkezik. A matematikai keret számos torna leírására alkalmas, ezek közé tartoznak a legnagyobb presztízsű labdarúgóversenyek, a világbajnokság, az Európa-bajnokság vagy az UEFA Bajnokok Ligája. A fejezet fő eredménye, hogy elérhető az ösztönzéskompatibilitás, ha a második fordulóban minden csapat kiemelési értéke a körmérkőzéses selejtezőben mögötte végző csapatok együtthatóinak maximumával egyezik meg.

A 6. fejezet két valós példával illusztrálja, hogy több nagy labdarúgótorna selejtezője, illetve számtalan magas presztízsű kézilabdatorna potenciálisan rosszul ösztönözhetett bizonyos csapatokat. A szabályok egy „ártatlan" harmadik válogatott kieséséhez vezethettek, vagy a játékosok a gólok száma helyett más statisztikai mutatók javításában lehettek érdekeltek.

Végül az utolsó, 7. fejezet a 2020-as labdarúgó-Európa-bajnokság kvalifikációjának három, egymástól független problémáját ismerteti. Bizonyos csapatok érdekeltek lehettek abban, hogy szándékosan vereséget szenvedjenek az Európa-bajnokság selejtezőjén, mert ezzel a pótselejtező mezőnyében számukra előnyös üresedést idézhetnek elő. A második hiányosság a pótselejtezőt játszó csapatok kiválasztási kritériumainak logikai inkonzisztenciája, valamint a pótselejtező ágainak potenciális méltánytalansága formájában jelentkezik. A harmadik, legsúlyosabb anomália szerint az Európa-bajnokságon történő részvétel szempontjából lényegesen kedvezőbb volt a 2018/19-es UEFA Nemzetek Ligája gyengébb D ligájába kerülni, mint az erősebb C ligába. Bizonyára nem véletlen, hogy a Nemzetek Ligája következő, 2020/21-es szezonjában átszervezték a ligák struktúráját, és a leggyengébb, D liga már nem kapott garantált helyet a pótselejtezőn keresztül.

Összességében Csató László munkája hozzájárul a sportversenyek szabályainak fejlesztéséhez, és izgalmas olvasmány lehet mindazoknak, akik érdeklődnek a sport és az operációkutatás találkozása iránt.

Hivatkozások:

Anbarcı, N., Sun, C.-J. és Ünver, M. U. (2021). Designing practical and fair sequential team contests: The case of FIFA penalty shootouts. *Games and Economic Behavior*, 130:25–43.

Csató, L. és Petróczy, D. G. (2019). Hogyan tehető igazságosabbá a labdarúgó mérkőzéseket követő büntetőpárbaj? *Statisztikai Szemle*, 97(8):779–798.

Csató, L. és Petróczy, D. G. (2022). Fairness in penalty shootouts: Is it worth using dynamic sequences? *Journal of Sports Sciences*, 40(12), 1392-1398.

Dagaev, D. és Sonin, K. (2018). Winning by losing: Incentive incompatibility in multiple qualifiers. *Journal of Sports Economics*, 19(8):1122–1146.

Guyon, J. (2018). What a fairer 24 team UEFA Euro could look like. *Journal of Sports Analytics*, 4(4), 297-317.

Szádoczki, Z. (2022). Operációkutatás a sportok profitabilitásáért. *Közgazdasági Szemle*, LIX(2), 283-288.

Wright, M. (2014). OR analysis of sporting rules – A survey. *European Journal of Operational Research*, 232(1):1–8.

Petróczy Dóra Gréta adjunktus

MNB Intézet Neumann János Egyetem

Megjegyzés: Az Érintőben korábban megjelent, sporttal foglakozó cikk:

https://ematlap.hu/gazda-g-sag-2017-03/424-megjegyzesek-az-adatbanyaszatrol-jegkorongcsapatok-osszeallitasa-urugyen

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

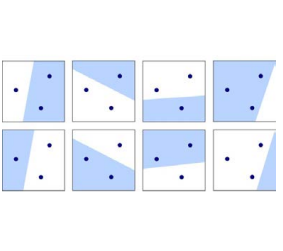
Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

A **TUDOMÁNY** MENÜPONT TÖBBFÉLE, A MATEMATIKA TUDOMÁNYÁHOZ KAPCSOLÓDÓ FUNKCIÓT TAKAR..**A TUDOMÁNY– TÖRTÉNET ROVAT** CÉLJA ELSŐSORBAN MATEMATIKATÖRTÉNETI JELLEGŰ ÍRÁSOK KÖZLÉSE. **A MI IS ...?ROVAT** A MAI MATEMATIKA TUDOMÁNYÁRÓL KÍVÁN SZÓLNI A HOZZÁÉRTŐKNEK.
(ROVATSZERKESZTŐK: *BESENYEI ÁDÁM; STIPSICZ ANDRÁS.*)

Eper Miklós
2024. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Matematikusok az idegösszeomlás szélén

A matematikus elme mélységeinek történelmi hátteréből emel ki néhány érdekes szemelvényt sajátos megközelítéssel *Eper Miklós* doktorandusz hallgató. Kéziratának első változata az Élet és Tudomány és a BME – Pro Progressio Alapítvány közös kutatásismertető cikkpályázatának felhívására született. Márciusban jelenik meg az Élet és Tudomány idei felhívása, amelyre ismét várják a pályázókat. De most lássuk, hogyan formálja a kutatók lelkülete a tudomány irányát...



Csáji Balázs Csanád, Tamás Ambrus
2024. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Statisztikus tanuláselmélet I. rész

A *mesterséges intelligencia* fogalmának meghatározására sokfajta megközelítés létezik, de abban szinte minden kutató egyetért, hogy a *gépi tanulás* a terület kulcsfontosságú módszere. Noha sok heurisztikus megoldást is használnak a gyakorlatban, a gépi tanulás elmélete mostanra gazdag múlttal rendelkezik, amelynek fontos része a *statisztikus tanuláselmélet*. *Tamás Ambrus és Csáji Balázs Csanád* a statisztikus tanuláselmélet egyik klasszikus módszerébe, a *szupport vektor gépek* elméletébe ad bevezetést.

Szabó Péter Gábor
2024. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Elveszett Bolyai-relikviák nyomában

Szabó Péter Gábor kutatása *Bolyai János hegedűjének* eredt a nyomába, amelyről a szakirodalom eddig úgy tudta, hogy 120 éve elveszett. A fellelt újabb adatok alapján azonban halvány remény adódott arra, hogy egyszer talán mégis előkerülhet ez a becses Bolyai-relikvia. A szerző 2023 novemberében Szegeden az SZTE Bolyai Intézet Bolyai Emlékülésén tartott előadásának írott változatát az Érintő másodközlésben adja közre

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

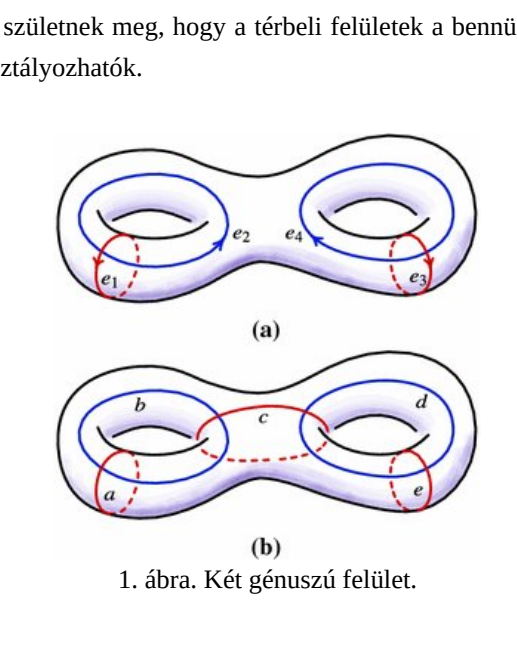
Eper Miklós 2024. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Matematikusok az idegösszeomlás szélén

Niels Bohr írja valahol: „Az igazság a mélyben lakozik”. Nem vagyok benne biztos, hogy a mélység szó inkább pozitív vagy negatív jelentéssel bír, azt gondolom, van egy provokatív kettőssége. Egyrészt a kutatót vonzza a feltárás, az ismeretlen megismerése, és a kutatás tárgyát a mélysége érdekesebbé teszi számára, másrészt a mélység szorongat, és a parttalanba, ismeretlenbe való merülés félelmet kelt. Ha az ember elég sokat néz a mélységbe, akkor a mélység visszanéz rá. A mély jelző, azt gondolom, nagyon erősen ráillik azokra az elméletekre, amelyekben kutatásomat csinálom (algebrai geometria, differenciálgeometria és -topológia) jelenleg a BME TTK Geometria Tanszékén, másodéves doktorandusz hallgatóként. A témám (mondjuk azt, hogy geometriai Hodge-elmélet) olyan messze van a közérthetőtől, hogy meg sem próbálom azzá tenni, nekem is éppen elég gondot okoz a fent említett kettősség: az elmélet bonyolultsága felizgat és minél többet meg akarok érteni belőle, ugyanakkor nehezen adja magát, és sokszor elbizonytalanodom, hogy meddig tudok én itt eljutni. Ma például az egész napot ezzel töltöttem, mégis alig haladtam valamennyit és nagyon nehezen értettem meg dolgokat. Most pedig összegörnyedve fekszem az ágyon, és sírás kerülget. Azon gondolkozom, mi játszódhat le más matematikusokban, amikor hasonló mélységekkel néznek szembe, mi vezette a fentebb felsorolt elméletek nagyjait, hogyan formálja a kutatók lelkülete a tudomány irányát. Azt gondolom, nem tekinthetünk el a történelmi háttértől, mint a kutatók pszichéjét meghatározó tényezőtől.

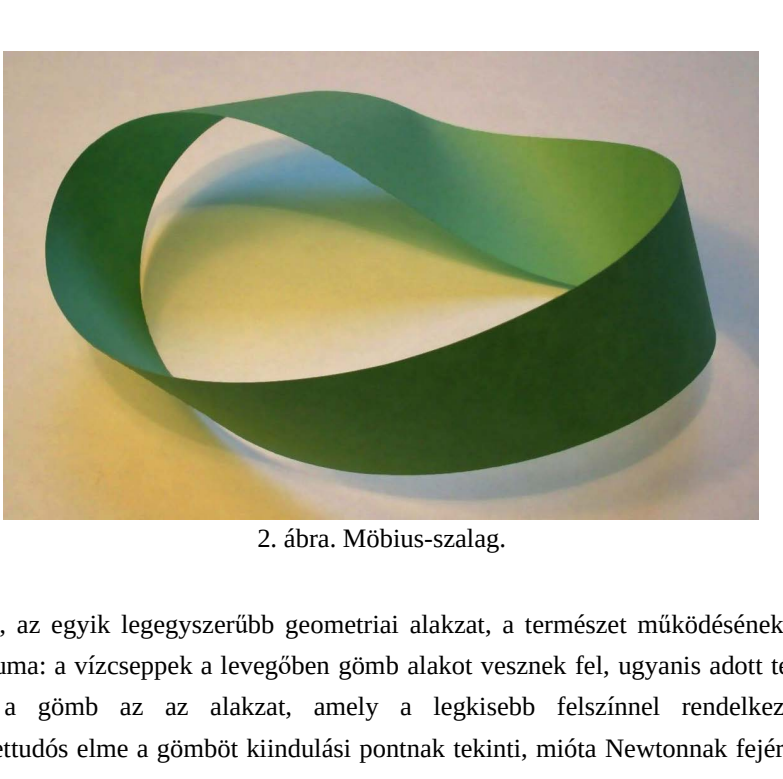
Az 1945 és 1955 között robbanásszerű fejlődés történt az algebrai topológiában, egészen váratlan tömegével születtek új eredmények és módszerek, majd a következő évtized is hasonlóan (váratlanul) sikeres volt. Az algebrai topológia új módszerei és fogalmai (karakterisztikus osztályok, kéve kohomológia stb.) nyomán ekkor született meg a kobordizmus-elmélet és a K-elmélet, amelyek aztán komoly hatást gyakoroltak, és mai napig tartó lendületet adtak a differenciál- és algebrai geometria fejlődésének. Ezen fejlemények jelentőségét mi sem mutatja jobban, mint hogy Fields-érmek egész sora kíséri útjukat. És mi történt ekkor a világban? A második világháborút megtapasztalt emberiség idegeit a hidegháború tépázta, számos pattanásig feszült helyzettel az 50-es és 60-as években (koreai háború, magyar szabadságharc, szuezi válság, kubai rakétaválság stb.). Egy újabb világháború lehetősége félelmet és szorongást keltett, ennek hatása pedig meg kellett jelenjen a matematikában is. Hogyan történt ez meg, teszem fel a kérdést. A válaszom pedig az a kérdésre, hogy amíg 60-70 évvel ezelőtt az atomháború lehetősége lebegett az emberiség felett, addig a matematikusok rettegve vetették bele magukat minden korábbinál mélyebb elméletekbe, a fentiekben írt fejlődést eredményezve. Ezekből az időkből szeretnék most néhány érdekes matematikatörténeti szemelvényt kiemelni.

A nagy rohanás előtt néhány alapvető fogalmat kell bemutatnunk, habár ugyan nem az a cél, hogy az említett időszak eredményeit megértsük, de azoknak legalább a dallamára ráérezzünk. Talán a legközpontibb fogalom a sokaság, bevezetésének igénye már a 18. században megjelenik a nemeuklideszi geometriák felfedezésével, majd számos neves matematikus (Riemann, Poincaré stb.) munkáján keresztül a 20. század elején Hermann Weyl-nél fogalmazódik meg a ma is leginkább használt definíció a differenciálható sokaságra. A sokaság a klasszikus értelemben vett görbék és felületek egy általánosítása, a koordináta-rendszertől független vizsgálatra törekszik. A sokaságok nagyon fontos invariánsai, „mérőszámai” a homotópia és a (ko)homológia. Ezek a fogalmak azon észrevétel nyomán születnek meg, hogy a térbeli felületek a bennük lévő lyukak száma (génusz) alapján osztályozhatók.



1. ábra. Két génuszú felület.

Sokaságok konstruálásának egy módja a fibrálás (vagy fibrált nyaláb), amelynek lényege, hogy lokális (Descartes-)szorzatokból ragasztunk össze egy alakzatot, amelyben globálisan azonban már megjelenhetnek csavarodások is. Gondoljunk például a Möbius-szalagra, amelyből bármely kis darabkát kivágva egy téglalapot kapunk, amely két szakasz (Descartes-)szorzata, globálisan azonban van benne egy csavarodás.



2. ábra. Möbius-szalag.

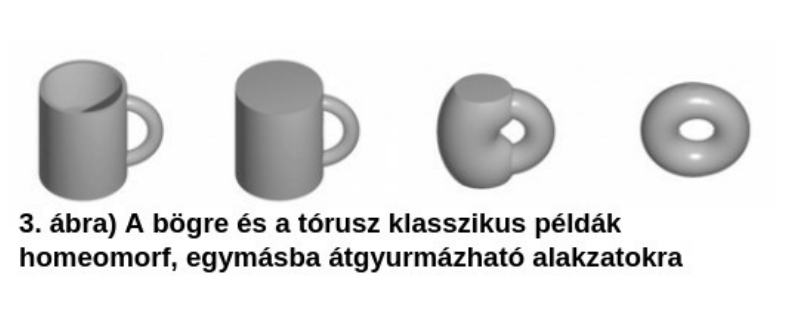
A gömb, az egyik legegyszerűbb geometriai alakzat, a természet működésének egyik szimbóluma: a vízcseppek a levegőben gömb alakot vesznek fel, ugyanis adott térfogat mellett a gömb az az alakzat, amely a legkisebb felszínnel rendelkezik. A természettudós elme a gömböt kiindulási pontnak tekinti, mióta Newtonnak fejére esett az alma. Ezt mi sem mutatja jobban, mint hogy a matematikusok számos kutatása, kérdése és sejtése az 1950-es években, az algebrai topológiában nyakig gázolva, még mindig ezekre az egyszerű dolgokra, a gömbökre vonatkozott. 1954-ben Jean-Pierre Serre francia matematikus többek között a gömbök magasabb homotópiacsoportjainak vizsgálatában elért eredményeiért kapott Fields-érmet. Az ő munkáival körülbelül egy időben, a vasfüggöny másik oldalán Lev Szemjonovics Pontrjagin orosz matematikus fejében hasonló gondolatok jártak. Az ő célja az volt, hogy kiszámítsa az *n*-dimenziós gömb n-nél magasabb homotópia csoportjait, amely 1950-es munkájában sikerült is neki, itt a központi mozzanat a paralelizálható sokaságok bevezetése, ami által újabb fontos tulajdonsággal bővült a sokaságok leírása. Pontrjagin nem kapott Fields-érmet, viszont 1962-ben Lenin-rend kitüntetésben részesült. Érdekesség, hogy 1952-től teljesen megváltozott kutatásainak iránya, és alkalmazott matematikai problémákat kezdett el kutatni.

Pontrjagin munkássága a kobordizmus-elmélet csírájának is tekinthető, amelyet René Thom vezetett be a matematika nagykönyvébe. Mindketten sokat tettek a karakterisztikus osztályok vizsgálatában: a karakterisztikus osztályok a fibrált nyalábok globális állandói, melyek egyszerűen fogalmazva azt mérik, hogy a fibrálással kapott sokaság mennyire tér él el a direkt szorzattól, mennyire „csavarodik” a kapott alakzat. Nagyon fontos fogalom, és ez a mag, amiből aztán Thom 1954-es cikkében kinő a kobordizmus fogalma, amely egy a sokaságok nehezen látható, háttérben húzódó összefüggéseire tapint rá: a sokaságok peremének (vagy határának, határ – board) vizsgálatán keresztül sok minden megérthető velük kapcsolatban. Példa arra, hogy mi is egy sokaság határa: a Möbius-szalag pereme egy körvonal, míg a tórusznak nincsen pereme.

Thom 1958-ban kapott Fields-érmet munkájáért, amiből aztán a későbbiekben egy nagyon gyümölcsöző elmélet fejlődött ki. Innen indult útnak a Poincaré-sejtés bizonyítása, amely egyike a híres Milleniumi problémáknak, azaz a matematika olyan fontos nyitott kérdéseinek, melyekre a Clay Matematikai Intézet 2000-ben egyenként 1 millió dolláros díjat akasztott. A sejtést Stephen Smale 1960-ban 7-nél nagyobb dimenziókra, majd később 5 és 6 dimenzióra is belátta, azután 1982-ben Michael Freedman 4 dimenzióra bizonyította azt. Csak úgy potyogtak a Fields-érmek: Smale 1966-ban, Freedman 1982-ben kapta meg a díjat (mindketten amerikai származásúak). Végül Grigorij Perelman 2003-ban teljessé tette a sejtés bizonyítását a háromdimenziós eset belátásával, fel is ajánlották neki a Fields-érmet, amelyet azonban Perelman visszautasított. 2006-ban a Nemzetközi Matematikai Unió elnöke Szentpétervárra utazott, ahol 2 napon keresztül személyesen győzködte Perelmant, hogy fogadja el a Fields-érmet, ő azonban nem kért belőle, mondván, hogy nem akarja, hogy mutogassák, mint az állatokat az állatkertben, és különben sem érdemli meg a díjat.

Egy másik érdekes történet a hidegháború korabeli matematikából a Riemann-Roch-Hirzebruch- tétel bizonyításának folyamata, amely egy algebrai geometriai állítás, de mégis az azt megelőző évek topológiai fejleményei ágyaztak meg neki. Az algebrai varietást klasszikus értelemben polinomegyenletekből álló, komplex számok feletti egyenletrendszerek megoldásaként definiáljuk, dimenziótól függően beszélhetünk görbékről vagy felületekről. Ezen objektumok vizsgálata egészen a 20. század elejére nyúlik vissza, és a váratlan jelenségek ott kezdték felütni a fejüket, amikor a kutatók növelni kezdték a vizsgált objektumok dimenzióját. Komplex algebrai görbék osztályozásához egy szignifikáns invariánst használtak, a Riemann-génuszt, azonban felületeknél kiderült, hogy két különböző ilyen invariáns, az aritmetikai génusz és a geometriai génusz is bevezethető. Általános dimenzióra a varietások vizsgálatában 1949-ben érkezett meg az áttörés, amikor André Weil francia matematikus a divizor fogalmának általánosításán keresztül utat talált a várva várt kapcsolatra az algebrai topológia és az algebrai geometria között. Az ő gondolata azon alapult, hogy a sokaságok tulajdonságait a rajtuk értelmezett bizonyos tulajdonságú függvényeken keresztül érthetjük meg. Mindezen eszközök és fogalmak közötti összefüggést a Riemann-Roch-Hirzebruch-tétel mondja ki egy egyenlet formájában. Ennek bizonyítására azután őrült sprint indult az ezt követő években, neves matematikusok egész sora révén, a világ minden tájáról, úgy mint Kunihiko Kodaira japán (Fields-érem 1954-ben), Oscar Zariski orosz születésű amerikai, Donald Spencer amerikai, Pierre Dolbeault és Élie Cartan francia (utóbbihoz fűződik a kéve fogalmának bevezetése, amely egy elég kevéssé szemléletes de borzasztóan hasznos és erős koncepciónak bizonyult stb. Zárójelenetként pedig 1953 végére meg is lett a bizonyítás, amelyre Friedrich Hirzebruch német matematikus tette fel a pontot. Ezen folyamat csodálatos példája annak, hogyan rezonálnak egymásra a matematika különböző ágaiban elért eredmények, és hogy néhány év alatt hogyan tud összeállni sok-sok kutató munkája egy korábban nehezen megtámadhatónak tűnő állítás bizonyításává.

Talán a legmeglepőbbnek azonban az alábbi eseménysor bizonyult az említett időszakból. A topológiában két alakzat homeomorf, ha folytonosan egymásba képezhetőek kölcsönösen egyértelmű módon, magyarul mondva, ha elképzeljük, hogy a két alakzat gyurmából van, akkor átgyurmázhatók egymásba anélkül, hogy elszakítanánk a gyurmát. Klasszikus példa a bögre és a tórusz esete.



3. ábra) A bögre és a tórusz klasszikus példák homeomorf, egymásba átgyurmázható alakzatokra

3.ábra. A bögre és a tórusz.

Két alakzat diffeomorf, ha ez az egymásba képezhetőség a folytonosság mellett akárhányszor deriválható is, ami már egy jóval kevésbé látható, belső szerkezetre mutató tulajdonság. Sokáig nem volt világos, hogy az utóbbi fogalom nagyobb ereje hogyan érhető tetten, azonban 1956-ban John Milnor valósággal sokkolta a matematikus társadalmat egy váratlan eredménnyel, amire senki sem volt felkészülve. Megmutatta, hogy a 7-dimenziós gömb többféleképpen is differenciálható sokasággá tehető, azaz léteznek nem diffeomorf 7-dimenziós gömbök, ezeket nevezik egzotikus 7-gömböknek. Ez a tétel tekinthető a differenciáltopológia megszületésének is, ami a következő évtizedekben komoly matematikai programmá teljesedett ki, és komoly jelentőséget nyert. Bár Milnor eredménye kezdetben érthetetlennek tűnt, 1962-ben megkapta érte a Fields-érmet, 1985-ben pedig Edward Witten amerikai matematikus és fizikus, a húrelmélet jelentős alakja, elméletet adott arra, hogy az egzotikus gömbök létezése bizonyos globális gravitációs anomáliák megmagyarázásához kellhet. Witten 1990-ben kapott Fields-érmet, a következő indoklással: „időről időre meglepi a matematikus társadalmat fizikai intuíciók matematikai alkalmazásaival, melyek új, mély matematikai tételekre vezetnek”.

Példa egy másik nagyon különös tételre, amely ebből a tudományterületből nőtt ki: Simon Donaldson és Michael Freedman munkája nyomán 1982-ben felfedeztek egzotikus 4-dimenziós valós tereket. Ennek az eredménynek az érdekessége, hogy rögzített *n*-re az *n*-dimenziós valós terek mindig diffeomorfak, kivéve, ha *n* egyenlő 4-gyel, azaz léteznek nem diffeomorf 4-dimenziós valós terek. Mai napig értetlenül állnak a tudósok a jelenség előtt, hogy mi adja a négy dimenzió különlegességét, és persze mozgatja a fantáziájukat, hogy vajon van-e valami köze ennek ahhoz, hogy 4-dimenziós téridőben élünk.

Számos történetet lehetne még mesélni, például Alexander Grothendieck-ét, akinek nevéhez a fenti időszak vívmányai folyamán rengeteg neves eredmény fűződik az algebrai geometriában, vagy éppen a K-elmélet megszületése, illetve egy 1966-os Fields-érem is. Az ő életútja elég jól prezentálja a korszakot, amiben élt: gyerekkorát a náci Németország, katonai fogolytáborok árnyékolták, majd később radikális pacifistaként vált politikai aktivistává, élete utolsó éveit pedig a világtól félrevonulva töltötte. Mindezen történelmi hátterek közepette pedig – számos, a fentiekben teljesség igénye nélkül bemutatott sorstársához hasonlóan – ami az életét jellemezte, az az egyre mélyebbre és mélyebbre merülés volt a matematikába elképzelni az elképzelhetetlent, rágondolni arra, amire addig még senki sem mert.

Ezeknek a történeteknek a relevanciáját az adja egyrészt, hogy az akkori folyamatok tükrében talán jobban megérthetjük a mai nehéz történelmi helyzetet is. A másik, hogy tanulságosak, nekem legalábbis biztosan. Felkelek az ágyról, és holnap tovább folytatom. Nem jó, ahogy az manapság divat a matematikusoknál, hogy a filozófiát és a pszichológiát kiszervezik a bölcsész tudományoknak.. Legyenek ezek a történetek tanulságok arról, hogy máshogy is lehetne tekinteni a matematikus elmére, mint szoktunk, miközben az mélységekbe merül, idegenben jár, új világokat keres.

Hivatkozások:

Jean Dieudonné: A History of Algebraic and Differential Topology, 1900-1960

Eper Miklós másodéves doktorandusz hallgató

BME TTK Geometria Tanszék

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

Csáji Balázs Csanád, Tamás Ambrus 2024. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Statisztikus tanuláselmélet I. rész

Statisztikus tanuláselmélet: Szupport vektor gépek

1. Bevezető

A *mesterséges intelligencia* (MI) technológiák ma már a mindennapjaink részét képezik, számos szolgáltatás alapjául szolgálnak – az egészségügytől az iparig –, és a gazdasági fejlődés egyik lehetséges motorjai, állapítja meg egy az MI-t az Európai Unió (EU) szemszögéből vizsgáló tanulmány [4]. Az MI fogalmának meghatározására sokfajta megközelítés létezik [3], de abban szinte minden kutató egyetért, hogy a *gépi tanulás* a terület kulcsfontosságú módszere, amely a legtöbb MI megoldás esszenciális részét képezi [4].

A gépi tanulás matematikai megalapozása rendkívül fontos a terület hosszútávú fejlődése szempontjából. Noha sok heurisztikus megoldást is használnak a gyakorlatban, a gépi tanulás elmélete mostanra gazdag múlttal rendelkezik, amelynek fontos része a *statisztikus tanuláselmélet*. Tanulmányunk első részében a statisztikus tanuláselmélet egyik klasszikus módszerébe, a *szupport vektor gépek* elméletébe adunk bevezetést, a gépi tanulás egyik alapproblémáján, a (bináris) *osztályozáson* keresztül. A megoldást első lépésként *lineárisan szeparálható* problémák esetére vezetjük be, amit a tanulmányunk folytatásában *kernel módszerek* segítségével terjesztünk majd ki *nemlineáris* problémákra.

2. Bináris osztályozás

Az *osztályozás* (más néven klasszifikáció vagy mintafelismerés) a statisztikus tanuláselmélet egyik alapvető problémája. Fő feladata *bemenet* és (véges értékkészletű) *kimenet* (címke) párokból álló megfigyelések alapján az adatgeneráló mechanizmus modellezése. A modell segítségével *általánosíthatunk*, azaz ismeretlen bemenetek esetén is becsülni tudjuk a megfelelő kimenetet. Egy osztályozási feladat *bináris*, ha a címke csak kétféle lehet.

Az osztályozásnak számtalan alkalmazása van, amelyek közül most hármat említünk. Tanulmányunk során az első példán keresztül szemléltetünk majd néhány alapfogalmat.

Betegség diagnosztizálása: Az egészségügyben az orvos feladata, hogy diagnosztizáljon egy adott betegséget a páciens tünetei és leletei alapján. Ez egy tipikus osztályozási feladat, amely során a cél a betegség meglétének eldöntése a rendelkezésére álló adatok (magyarázóváltozók) alapján (például: nem, kor, súly, vérnyomás, pulzus, EKG, CT).

Szerszámgép karbantartása: Annak érdekében, hogy a szerszámgépek váratlan meghibásodásának számát csökkentsék, a gépek részegységeinek állapotát rendszeresen mérik. A meghibásodás előrejelzése a mért értékek alapján egy osztályozási feladat, amely megoldása elengedhetetlen hatékony karbantartási stratégiák kialakításához.

Levélszemét (spam) felismerése: A levelezőrendszerek a bejövő üzeneteket számos tényező (például: szöveges tartalom, címzettek, csatolmányok, linkek, a rendszer címjegyzéke, a feladó címéről feladott levelek száma és hasonlósága) alapján osztályozzák, hogy a veszélyes és nem kívánt emailek elkülönüljenek a levelezőkliens beérkező leveleitől.

Adott egy vektor magyarázó változókból, $X_i \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^d$, és bináris osztályváltozókból, $Y_i \in \mathbb{Y} = \{-1,+1\}$, álló független azonos eloszlású minta $\{(X_i,Y_i)\}_{i=1}^n$ egy ismeretlen $\mathbb{P}$ eloszlásból. Tekintsük az $\mathbb{R}^d \to \mathbb{Y}$ típusú (mérhető) *osztályozó* függvényeket és egy (mérhető) nemnegatív $\ell\colon \mathbb{Y}\times\mathbb{Y} \to [0,\infty)$ típusú veszteségfüggvényt. Ebben a cikkben az $\ell(y_1,y_2) = \mathbb{I}(y_1 \neq y_2)$ ún. $0/1$-veszteségfüggvényre szorítkozunk, ahol $\mathbb{I}$ egy indikátor, de az eredmények általánosíthatóak más, bonyolultabb veszteségfüggvényekre is. Általában az osztályozás célja egy minimális kockázatú osztályozó f_* becslése, ahol

$$R(f) \doteq \mathbb{E}\big[\ell(f(X),Y)\big],$$

az ún. *kockázatfüggvény* és $(X,Y) \overset{d}{=} (X_1,Y_1)$. A $0/1$-veszteségfüggvény esetén könnyen látható, hogy $R(f) = \mathbb{P}(f(X) \neq Y)$, azaz a kockázat megegyezik a félreosztályozás valószínűségével. Ha $\mathbb{P}$ ismert volna, akkor egy optimális osztályozó – az ún. Bayes optimális osztályozó – meghatározható lenne a feltételes várható érték segítségével:

$$f^*(x) = \operatorname{sign}(\eta(x)),$$

ahol $\eta(x) \doteq \mathbb{E}[Y\,|\,X=x]$, amit tipikusan *regressziós függgvénynek* neveznek. Az egészségügyi példában a már megfigyelt páciensek egészségügyi adatai (nem, kor, EKG...) alkotják a magyarázó változókat és egy adott betegség előfordulásának indikátorai a kimeneti változókat. Feltehető, hogy ezek az adatok egy euklideszi térbe ágyazhatók be, ugyanis a megfigyelések egy része euklideszi térből vesz fel értéket, a magyarázó változók további része pedig vektorrá transzformálható valamilyen módon, például segéd indikátorváltozók bevezetésével. Egy leegyszerűsített modellben a ismeretlen eloszlást minden ember egészségügyi adata és betegsége határozná meg. Ha a $0/1$ veszteségfüggvényt használjuk és az ehhez tartozó kockázatot, azaz a betegségek félrediagnosztizálásának valószínűségét szeretnénk minimalizálni, akkor egy Bayes optimális osztályozó pontosan akkor diagnosztizál egy pácienst betegnek, ha a betegség feltételes valószínűsége a páciens egészségügyi adataira nézve nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy a páciens egészséges. Ezt az optimális függvényt becsüljük az osztályozáskor a megfigyelt adatok alapján.

A $\mathbb{P}$ együttes eloszlás általában ismeretlen, ezért a kockázatfüggvényt becsülnünk kell. A legismertebb becslés az ún. *tapasztalati kockázat*, a megfigyelt veszteségek átlaga:

$$\widehat{R}(f) \doteq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ell(f(X_i),Y_i).$$

A nagy számok (erős) törvényének értelmében minden f osztályozóra $\widehat{R}(f)$ konvergál az $R(f)$ értékhez, 1 valószínűséggel. A *tapasztalati kockázat minimalizálásának* módszere értelemszerűen az $\widehat{R}$ függvény minimumhelyét keresi. Általában azonban minden f osztályozóhoz található egy $\tilde{f}$ osztályozó, ami a mintapontokban megegyezik f-fel, azaz $f(X_i) = \tilde{f}(X_i)$ minden $i = 1,\dots,n$, de mindenhol máshol $f \neq \tilde{f}$, ezért önmagában a minta alapján nem lehet egyértelműen meghatározni a tapasztalati kockázatot minimalizáló osztályozót. Általában a tapasztalati kockázatminimalizálás esetében egy előre rögzített *modellosztályra* szorítkozunk. A modellosztályt gyakran egy véges dimenziós paramétervektor segítségével adjuk meg. Példaként tekinthetjük a lineáris (pontosabban az affin) osztályozókat, melyeket szeparáló hipersíkok definiálnak: $\mathscr{F} = \{f\colon f(x) \doteq \operatorname{sign}(w^\top x + b), w \in \mathbb{R}^d, b \in \mathbb{R}\}$.

Legyen (f_n) a Bayes optimális osztályozó egy becslése (ahol n a megfigyelések száma). Azt mondjuk, hogy az (f_n) becslés (erősen) *konzisztens*, ha $R(f_n) \to R(f^*)$, ahogy $n \to \infty$, 1 valószínűséggel (mivel f_n függ a megfigyelésektől, ezért $R(f_n)$ véletlen).

Ismeretlen eloszlás mellett adott mintaméretre hatékony osztályozót nehéz találni, az ún. *„nincs ingyen ebéd”* elve érvényesül [2, Theorem 7.1]:

1. tétel. *Legyen $\mathbb{X}$ egy végtelen halmaz. Ekkor minden (f_n) becsléshez, n mintamérethez és $\varepsilon > 0$ hibavalószínűséghez létezik egy $\mathbb{P}$ eloszlás, amelyre $R(f^*) = 0$ és $\mathbb{E}[R(f_n)] \geq 1/2 - \varepsilon$.*

Ha a megfigyelésektől teljesen függetlenül, véletlenszerűen (1/2 - 1/2 valószínűséggel) rendelnénk minden ponthoz egy osztályt, akkor lenne $1/2$ az osztályozónk kockázata. A fenti tétel azt mondja, hogy egy adott becsléshez tudunk olyan „rossz” eloszlást konstruálni, amelyre a becslésünk kockázata tetszőlegesen közel lehet ehhez a teljesen véletlenített osztályozóhoz, noha van az adott problémára tökéletes, nulla kockázatú megoldás.

Megjegyezzük, hogy ez a tétel nem jelenti azt, hogy lehetetlen olyan becslést találni, amely *univerzálisan* minden eloszlásra konzisztens lenne, azaz $R(f_n) \to R(f^*)$ teljesülne. Azt viszont igen, hogy a konzisztens becslések esetében is a konvergencia sebessége az eloszlás függvényében változik és lehet tetszőlegesen lassú. Egy meglepően egyszerű univerzálisan konzisztens módszert ad a *k-legközelebbi szomszéd* (*k*-NN) becslés. Jelölje

$$N_k(x) \doteq \Big\{ j \in [n]\colon \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}(\|x-X_j\| > \|x-X_i\|) < k \Big\},$$

ahol $[n] \doteq \{1,2,\dots,n\}$. Tehát egy tetszőleges x pont esetén az $N_k(x)$ halmaz a $\{X_i\}_{i=1}^n$ halmazban az x pont k legközelebbi szomszédainak indexeit tartalmazza. Továbbá legyen

$$f_{k\mathrm{NN}}(x) \doteq \operatorname{sign}\Big(\frac{1}{k}\sum_{j \in N_k(x)} Y_j\Big).$$

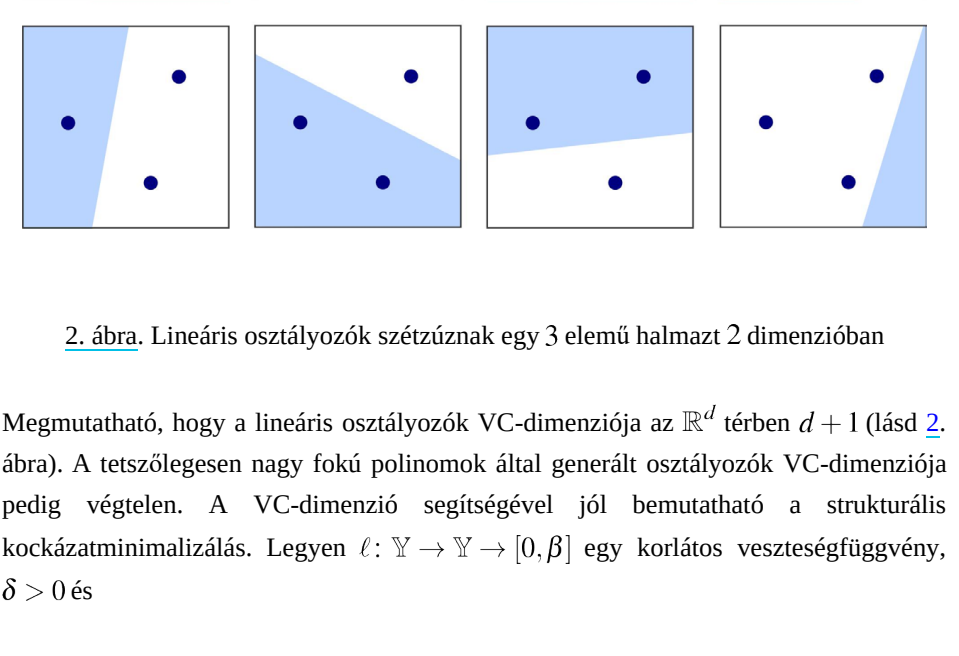
A szomszédok számát a minta elemszámának függvényében növelhetjük, hogy egy konzisztens becslést kapjunk. Ha a (k_n) sorozat olyan, hogy $k_n \to \infty$ és $k_n/n \to 0$, ha $n \to \infty$, akkor a k_n-NN becslés kockázata tart az optimális $R(f^*)$ kockázat értékhez [2].

Az 1. Tétel miatt azonban nem várható el, hogy egy tetszőleges eloszlásból vett véges mintára is mindig használható becslést kapjunk, ezért érdemes megkötésekkel élnünk a lehetséges modelleket illetően. Általában a becslést egy $\mathscr{F}$ modellosztályban fogjuk keresni. Mivel a tapasztalati kockázatminimalizálás már előfeltételezi egy modellosztály létezését, ezért ez a feltevés a gyakorlatban alapvető, mindazonáltal érdemes észben tartani, hogy ennek a feltevésnek lehet torzító hatása. Ezt nevezik a feladatban rejlő *induktív torzításnak*. Egy $\mathscr{F}$-ből származó becslés kockázattöbbletét felbonthatjuk két részre.

$$R(f_n) - R(f^*) = \underbrace{R(f_n) - \inf_{f \in \mathscr{F}} R(f)}_{\text{becslési hiba}} + \underbrace{\inf_{f \in \mathscr{F}} R(f) - R(f^*)}_{\text{approximációs hiba}},$$

Ha $f^* \in \mathscr{F}$, akkor az approximációs hiba 0, azonban ez elég ritkán teljesül a gyakorlatban. Ha bővítjük a modellosztályt, akkor az approximációs hiba csökken, viszont a becslési hiba növekedhet. A túl nagy modellosztály eredményezhet *túltanulást*, ilyenkor a modellbecslés a mintában lévő zajra is illeszkedik. Megfordítva, ha túl szűk modellosztályt választunk, akkor a becslési hibánk lecsökken, nem lesz nagy különbség a modellosztályban található legkisebb kockázatú becslés kockázata és az általunk talált becslés kockázata között, azonban az approximációs hiba ilyenkor megnő. Ezt a szintén nem előnyös jelenséget *alultanulásnak* nevezik. Ha növeljük a mintaméretet, akkor a becslési hibát tudjuk csökkenteni, viszont az approximációs tag csak a modellosztálytól függ.

A *strukturális kockázatminimalizálás* elve szerint érdemes a modellosztályt úgy bővíteni a mintamérettel együtt, hogy a becslési hiba és az approximációs hiba is csökkenjen, lásd az 1. ábrát. Az approximációs hiba modellosztálytól való függésére több „mérőszámot” is megalkottak. Ezek a mérőszámok elsősorban a modellosztály kifejezőképességét hívatottak leírni. Ebben a cikkben az ún. *Vapnik–Cservonenkisz-dimenziót* (VC-dimenziót) mutatjuk be és ennek alkalmazását a bináris osztályozás esetére, lásd [7].



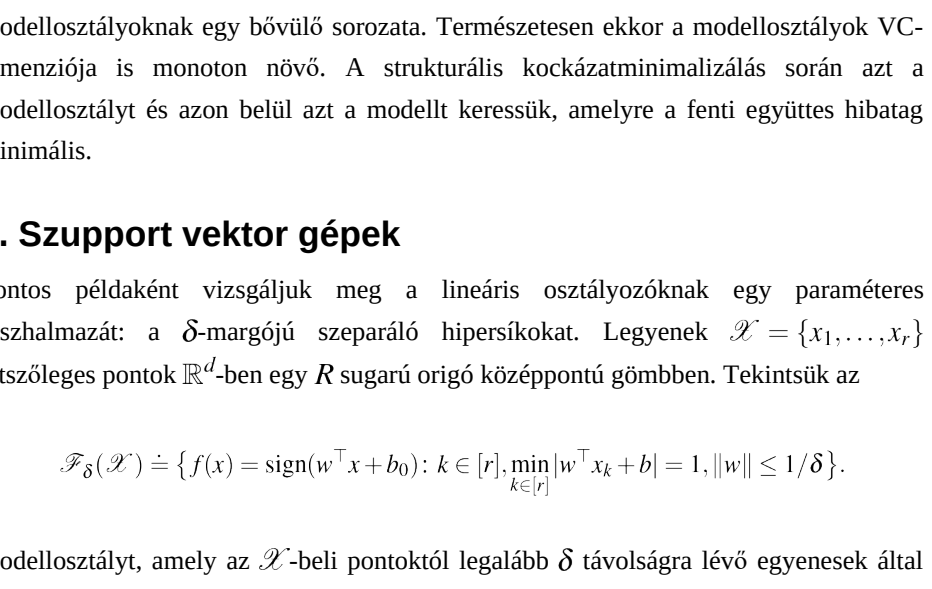
1. ábra. Torzítás-variancia dilemma, strukturális kockázatminimalizálás

Legyen $\mathscr{C}$ egy halmazrendszer. Azt mondjuk, hogy $\mathscr{C}$ *szétzúzza* az A halmazt, ha

$$\forall S \subseteq A\colon \exists C \in \mathscr{C}\colon S = A \cap C.$$

Hasonlóan, bináris osztályozók egy $\mathscr{F}$ osztálya szétzúzza az A halmazt, ha az osztályozók által generált $\mathscr{C}_{\mathscr{F}} \doteq \{C\colon \exists f \in \mathscr{F}, C = f^{-1}(\{1\})\}$ halmazrendszer szétzúzza A-t.

2. definíció. (VC-dimenzió) Legyen $\mathscr{F}$ osztályozóknak egy családja. Az $\mathscr{F}$ halmaz $V_{\mathscr{F}}$ VC-dimenziója az a legnagyobb $n \in \mathbb{N}$, amire létezik egy n-elemű $\mathscr{F}$ által szétzúzott A halmaz. Ha ez a maximum nem létezik, akkor $\mathscr{F}$ VC-dimenziója végtelen.



2. ábra. Lineáris osztályozók szétzúznak egy 3 elemű halmazt 2 dimenzióban

Megmutatható, hogy a lineáris osztályozók VC-dimenziója az $\mathbb{R}^d$ térben $d+1$ (lásd 2. ábra). A tetszőlegesen nagy fokú polinomok által generált osztályozók VC-dimenziója pedig végtelen. A VC-dimenzió segítségével jól bemutatható a strukturális kockázatminimalizálás. Legyen $\ell\colon \mathbb{Y}\to\mathbb{Y}\to[0,\beta]$ egy korlátos veszteségfüggvény, $\delta > 0$ és

$$\varepsilon(n, V_{\mathscr{F}}, \beta, \delta) \doteq \beta\sqrt{\frac{V_{\mathscr{F}}\log\left(\frac{2n}{V_{\mathscr{F}}}+1\right) - \log\left(\frac{\delta}{4}\right)}{n}}.$$

Ekkor megmutatható, hogy

$$\mathbb{P}\Big(R(f) \leq \widehat{R}(f) + \varepsilon(n,h,\beta,\delta)\Big) \geq 1-\delta. \tag{1}$$

Az ilyen típusú korlátokat *nagy valószínűséggel megközelítőleg helyes* – angol nevéből PAC – korlátoknak nevezik. A PAC korlátok nagyon elterjedtek a gépi tanulásban, és a gyakorlatban is jól használhatók. Fontos előnyük, hogy véges mintára is érvényes garanciával szolgálnak. Az (1) egyenlőtlenség alapján érdemes az $\widehat{R}(f) + \varepsilon(n,h,\beta,\delta)$ tagot együttesen minimalizálni a tapasztalati kockázat helyett. Legyen $\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2 \subseteq \dots$ modellosztályoknak egy bővülő sorozata. Természetesen ekkor a modellosztályok VC-dimenziója is monoton növő. A strukturális kockázatminimalizálás során az a modellosztályt és azon belül azt a modellt keressük, amelyre a fenti együttes hibatag minimális.

3. Szupport vektor gépek

Fontos példaként vizsgáljuk meg a lineáris osztályozóknak egy paraméteres részhalmazát: a δ-margójú szeparáló hipersíkokat. Legyenek $\mathscr{X} = \{x_1,\dots,x_r\}$ tetszőleges pontok $\mathbb{R}^d$-ben egy R sugarú origó középpontú gömbben. Tekintsük az

$$\mathscr{F}_\delta(\mathscr{X}) \doteq \{f(x) = \operatorname{sign}(w^\top x + b_0)\colon k \in [r], \min_{k \in [r]} |w^\top x_k + b| = 1, \|w\| \leq 1/\delta\}.$$

modellosztályt, amely az $\mathscr{X}$-beli pontoktól legalább δ távolságra lévő egyenesek által meghatározott osztályozókat tartalmazza. A $\min_{k\in[r]} |w^\top x_k + b| = 1$ kitétel egyértelműsíti a hipersíkok paraméterezését, a statisztikus tanuláselméletben ezt a paraméterezést szokás *kanonikus* paraméterezésnek nevezni (tehát itt w tipikusan nem egységvektor). Az $\mathscr{F}_\delta(\mathscr{X})$ halmaz VC-dimenziójára adható egy felső korlát a δ függvényében [5,6].

3. tétel. *Legyen $\mathscr{X} \subseteq \mathbb{R}^d$ egy véges halmaz. Tegyük fel, hogy $\mathscr{X} \subseteq B(\mathbf{x},R)$ egy valamilyen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ elemre. Tekintsük az $\mathscr{F}_\delta(\mathscr{X})$ osztályozókat az $\mathscr{X}$ halmazon. Ekkor*

$$V_{\mathscr{F}_\delta(\mathscr{X})} \leq \min\Big(\Big\lceil \frac{R^2}{\delta^2} \Big\rceil, n\Big) + 1.$$

Ez az állítás motiválja, hogy érdemes a margót növelni, ha a függvényosztály komplexitását csökkenteni szeretnénk. Megjegyezzük azonban, hogy az (1) egyenletben szereplő korlát csak akkor érvényes, ha a strukturális kockázat minimalizálásban szereplő függvényosztályok nem függnek a mintától [6].

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor az osztályok lineárisan szeparálhatók, azaz $R(f_*) = 0$. Ilyenkor mindig található egy olyan lineáris osztályozó is, aminek a tapasztalati hibája 0. Egy optimalizálási feladat segítségével megkereshető a maximális margójú hipersík is. Belátható, hogy ez egyértelműen létezik.

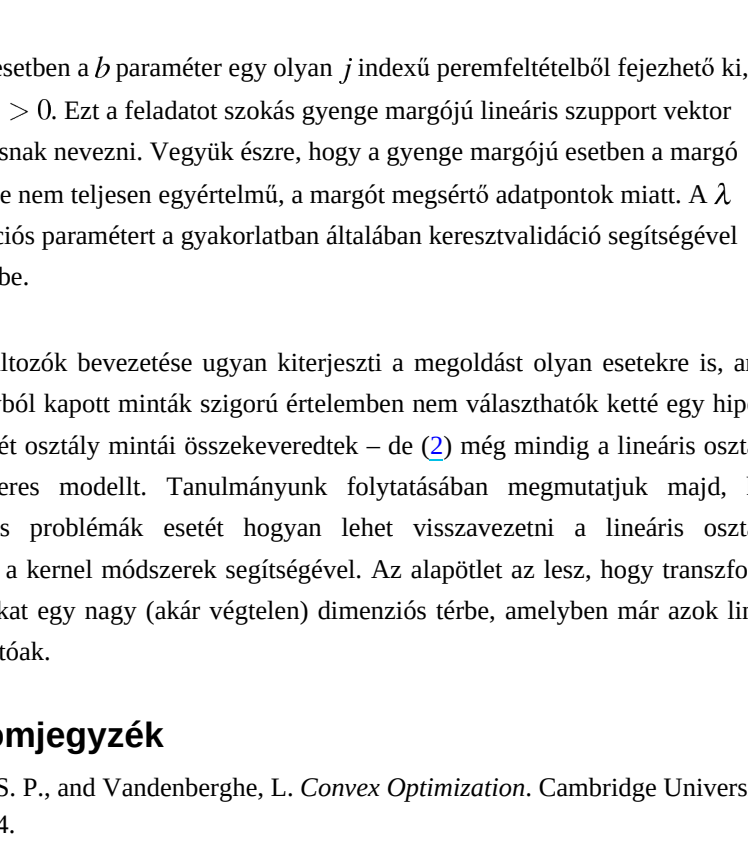
Egy $x \in \mathbb{R}^d$ pont *algebrai távolsága* egy (w,b) paraméterekkel meghatározott hipersíktól az r valós szám, ha $x = x_p + (w/\|w\|)r$ fennáll egy x_p hipersíkon lévő pontra, azaz $w^\top x_p + b = 0$. Az algebrai távolság a kanonikus paraméterezés mellett fordítottan arányos a w vektor normájával, ugyanis

$$d(x)$$ [illegible]

Az x pont euklideszi távolsága a (w,b) által meghatározott egyenestől (hipersíktól) értelemszerűen $|d(x)|$. A hipersík margója a mintákra nézve $\delta_* \doteq \min_{k\in[n]} |d(x_k)|$. Azokat az $\{x_k\}$ magyarázóvektorokat, amelyekre $|d(x_k)| = \delta_*$, *szupport vektoroknak* nevezzük. Belátható, hogy ugyanezekre a vektorokra teljesül a $|w^\top x_k + b| = 1$ egyenlőség. Ezen meggondolások alapján a $\|w\|$ mennyiséget kell maximalizálni a kanonikus paraméterezés által meghatározott peremfeltételek mellett, lásd a 3. ábrát. Evvel ekvivalens módon az alábbi konvex kvadratikus optimalizálási problémát kell megoldanunk:

$$\begin{array}{lll} \underset{w\in\mathbb{R}^d, b\in\mathbb{R}}{\text{minimalizáljuk}} & \frac{1}{2}\|w\|^2 & \\ \text{feltéve, hogy} & & \text{minden } k = 1,\dots,n \\ & y_k\big(w^\top x_k + b\big) \geq 1 & \end{array}$$

A nemlineáris optimalizálás elméletéből ismert Karush–Kuhn–Tucker-feltételek [1] alapján belátható, hogy az optimális w megoldáshoz legalább két szupport vektor, x^+ és x^-, tartozik, ugyanis ellenkező esetben a margót növelni lehetne. Ezekre a vektorokra teljesülnek a $w^\top x^\pm + b = \pm 1$ egyenletek, amelyek segítségével az optimális b paraméter is meghatározható. Ezt a módszert a szigorú margójú szupport vektor gépek módszerének nevezzük, és az így kapott osztályozót (lineáris) szupport vektor osztályozónak hívjuk.



3. ábra. Optimális hipersík maximális margóval

Természetesen a gyakorlatban ritka az, hogy a mintában szereplő adatok lineárisan szeparálhatók. Ezt a problémát először úgy oldjuk fel, hogy ugyan továbbra is egy lineáris osztályozót konstruálunk, de segédváltozókat adva a korábbi optimalizálási probléma peremfeltételeihez megengedjük, hogy az osztályozó hibázzon a mintapontokban. A hibákat egy $\lambda > 0$ segédparaméterrel súlyozzuk a költségfüggvényben. A relaxált megoldást szolgáltató új feladat szintén konvex kvadratikus, így hatékonyan megoldható:

$$\begin{array}{lll} \underset{w,\xi\in\mathbb{R}^d, b\in\mathbb{R}}{\text{minimalizáljuk}} & \frac{1}{2}\|w\|^2 + \lambda\sum_{k=1}^{n}\xi_k & \\ \text{feltéve, hogy} & y_k\big(w^\top x_k + b\big) \geq 1 - \xi_k & \text{minden } k = 1,\dots,n \\ & \xi_k \geq 0 & \text{minden } k = 1,\dots,n \end{array} \tag{2}$$

Ebben az esetben a b paraméter egy olyan j indexű peremfeltételből fejezhető ki, amelyre $\xi_j > 0$. Ezt a feladatot szokás gyenge margójú lineáris szupport vektor osztályozásnak nevezni. Vegyük észre, hogy a gyenge margójú esetben a margó értelmezése nem teljesen egyértelmű, a margót megsértő adatpontok miatt. A λ regularizációs paramétert a gyakorlatban általában keresztvalidáció segítségével hangolják be.

A segédváltozók bevezetése ugyan kiterjeszti a megoldást olyan esetekre is, amikor a két osztályból kapott minták szigorú értelemben nem választhatók ketté egy hipersíkkal – mert a két osztály mintái összekeveredtek – de (2) még mindig a lineáris osztályozók terében keres modellt. Tanulmányunk folytatásában megmutatjuk majd, hogy a nemlineáris problémák esetét hogyan lehet visszavezetni a lineáris osztályozók elméletére a kernel módszerek segítségével. Az alapötlet az lesz, hogy transzformáljuk az adatainkat egy nagy (akár végtelen) dimenziós térbe, amelyben már azok lineárisan szeparálhatóak.

Irodalomjegyzék

[1] Boyd, S. P., and Vandenberghe, L. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.

[2] Devroye, L., Györfi, L., and Lugosi, G. *A Probabilistic Theory of Pattern Recognition*, vol. 31. Springer Science & Business Media, 2013.

[3] Russel, S. J., and Norvig, P. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*, 4th ed. Prentice Hall Series in Artificial Intelligence. Pearson, 2020.

[4] Samoili, S., Cobo, M. L., Gómez, E., De Prato, G., Martínez, Plumed, F., and Delipetrev, B. AI Watch: Defining artificial intelligence. Towards an operational definition and taxonomy of artificial intelligence. *JRC Research Reports of the European Commission*, JRC118163 (2020).

[5] Schölkopf, B., and Smola, A. J. *Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond*. MIT Press, 2002.

[6] Shawe-Taylor, J., Bartlett, P. L., Williamson, R. C., and Anthony, M. Structural risk minimization over data-dependent hierarchies. *IEEE Transactions on Information Theory 44*, 5 (1998), 1926–1940.

[7] Vapnik, V. *Statistical Learning Theory*. Wiley-Interscience, 1998.

Tamás Ambrus és Csáji Balázs Csanád

HUN-REN SZTAKI és ELTE Matematikai Intézet

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

Szabó Péter Gábor 2024. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

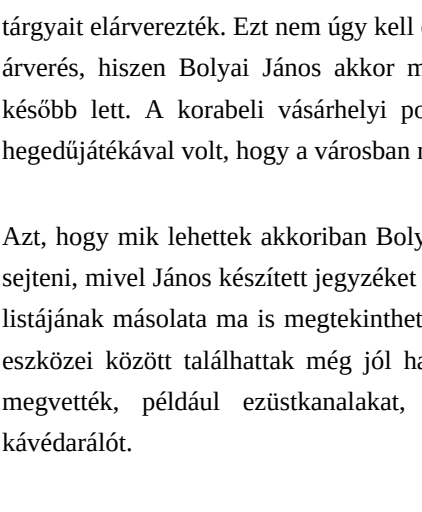
Elveszett Bolyai-relikviák nyomában

Bolyai János hegedűje

A dolgozat Bolyai János temesvári levelének 200. évfordulója alkalmából a szerzőnek 2023 novemberében Temesvárott a Bolyai 200 Művészeti és tudományos fesztiválon, valamint Szegeden az SZTE TTIK Bolyai Intézetének Bolyai Emlékülésén tartott előadásainak lejegyzése alapján készült [1]. *A kutatás Bolyai János hegedűjének eredt a nyomába, amelyről a szakirodalom eddig úgy tudta, hogy 120 éve elveszett. A fellelt újabb adatok alapján azonban halvány remény adódott arra, hogy egyszer talán mégis előkerülhet ez a becses Bolyai-relikvia.*

Marosvásárhelyen, a Bolyaiak városában van egy különleges atmoszférájú hely, a Teleki Téka, mai nevén: Teleki-Bolyai Könyvtár. Már a két Bolyai, Bolyai Farkas és Bolyai János is el-eljárt ide olvasgatni. Ez az a könyvtár, amelyről Bolyai Farkas egyszer azt írta a fiának, hogy „*a Teleki Tékában kedvesen lehet elálmodni az alig kiállható kedvetlen életet*". Ma itt őrzik a Bolyaiak kb. 20.000 oldalnyi kéziratos hagyatékát, Jánostól kb. 14.000, Farkastól kb. 6.000 oldalnyi kéziratot.

A Teleki-Bolyai Könyvtárnak van egy Bolyai Emlékszobája, az ún. Bolyai Múzeum. A két világhírű matematikus tárgyi emlékeiből összeállított kiállítás régóta vonzza ide a matematikatörténet szerelmeseit. Minden matematikatanár számára ajánlható is, hogy az élete során legalább egyszer zarándokoljon el Marosvásárhelyre a két Bolyai sírjához, és ha már a városban jár, ne menjen úgy haza, hogy nem látta a Bolyai Múzeumot.


A Bolyai Múzeum (Forrás: *a szerző felvétele*)

A Bolyai Múzeumban olyan relikviák láthatók, mint például Bolyai Farkas diákládája, amellyel szülei hat és féléves korában a nagyenyedi kollégiumba küldték tanulni. Megcsodálhatók itt Farkas korai olajfestményei és még az a fakupa is, amelyben elégetett verseinek hamvát gyűjtötte össze. A látogató számára azonban feltűnhet, hogy bár van itt külön Bolyai János tárló is, mégis Farkasnak jóval több emléke van a múzeumban, mint Jánosnak. Ennek az az oka, hogy Bolyai János után sajnos kevés relikvia maradt, ingóságait a halála után elárverezték és széthordták. A kéziratainak nagy része szerencsére megmaradt.

Amikor Bolyai János 1860. január 27.-én Marosvásárhelyen meghalt, a helyi erődparancsnokság utasításba adta, hogy a Kapitány úr kéziratait tegyék ládákba és vigyék be a várba. Bolyai János hadmérnök volt, a munkája során többször kapott olyan feladatot, amikor várakat és különböző katonai épületeket kellett felmérnie, így a halála után bizonyára meg kellett vizsgálni, hogy nincs-e esetleg a hagyatékában olyan feljegyzés vagy tervrajz, amely jobb, ha nem kerül illetéktelenek kezébe.

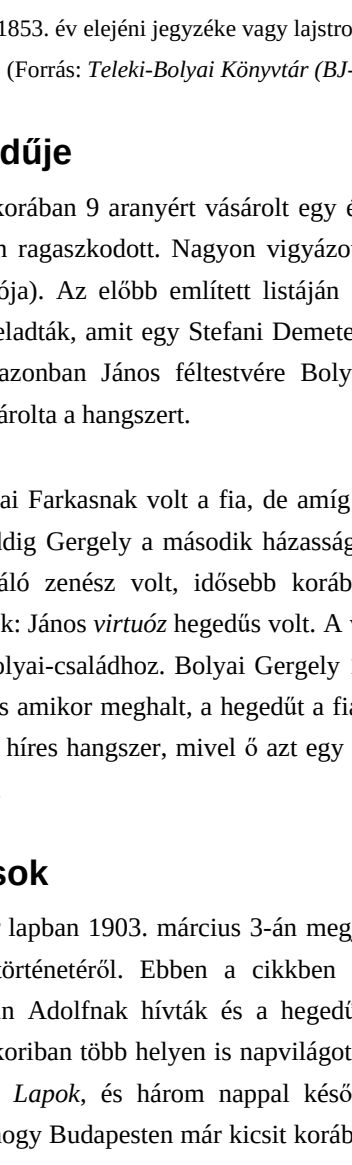
Bolyai János hagyatéka

Bolyai János kéziratos hagyatéka bárki számára kutatható. A Teleki-Bolyai Könyvtárban őrzött eredeti iratokat, ma már nem csak mikrofilmen, de az interneten keresztül akár otthonról is lehet a legmodernebb eszközök segítségével vizsgálni. Kell is kutatni, hiszen lehetnek még feltárandó tudománytörténeti kincsek a Bolyai-hagyatékban. Bolyai János nem papíralapú tárgyi emlékeivel azonban sajnos rosszabbul állunk, alig ismerünk néhány olyan tárgyat, amelyek bizonyíthatóan valamikor Jánosé voltak.

Bolyai János halála után ingóságait igyekeztek mind pénzzé tenni, az otthonában talált tárgyait elárverezték. Ezt nem úgy kell elképzelnünk, mint ahogyan ma zajlana egy ilyen árverés, hiszen Bolyai János akkor még nem volt olyan híres ember, mint amilyen később lett. A korabeli vásárhelyi polgárok persze azért ismerhették, hiszen kiváló hegedűjátékával volt, hogy a városban még közönség előtt is fellépett.

Azt, hogy mik lehettek akkoriban Bolyai Jánosnál, amiket elárvereztek nagyjából lehet sejteni, mivel János készített jegyzéket az otthoni tárgyairól. Egy ilyen 1853-ban készült listájának másolata ma is megtekinthető a Bolyai Múzeumban. A különböző háztartási eszközei között találhattak még jól használható tárgyakat, így azokat mások nyilván megvették, például ezüstkanalakat, fazekakat, pulicka-keverőt vagy éppen egy kávédarálót.

Tudománytörténeti szempontból persze annyira nem bánkódunk, hogy ma már nem csodálhatjuk meg Bolyai János pulicka-keverőjét, mindenesetre voltak azért olyan tárgyai, amelyekért ma is fáj a szívünk, hogy elvesztek, hiszen a Bolyai Múzeum ékességei lehetnének. Ilyen például Bolyai János csodás tiszti fövege, a kardja és természetesen a becses hegedűje.


Bolyai János feljegyzése. „Az 1853. év elejéni jegyzéke vagy lajstroma vagy számbavétele ingó javaimnak." (Forrás: *Teleki-Bolyai Könyvtár (BJ-748/2v)*)

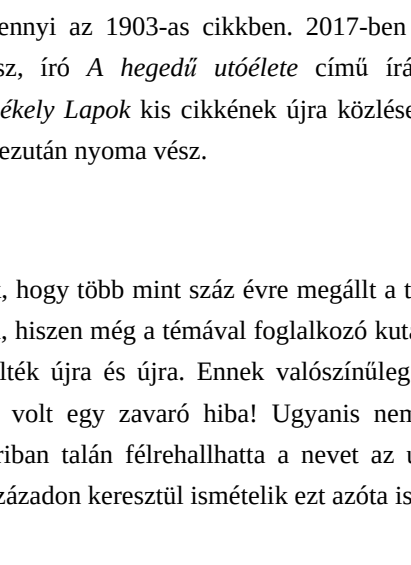
Bolyai János hegedűje

Bolyai János még hadnagy korában 9 aranyért vásárolt egy értékes hegedűt, amelyhez aztán élete végéig különösen ragaszkodott. Nagyon vigyázott rá, tokban tartotta, volt hozzá több nyirettyűje (vonója). Az előbb említett listáján ezeket szintén feltüntette. János halála után a hegedűt eladták, amit egy Stefani Demeter nevű kereskedő vásárolt meg. Ettől a kereskedőtől azonban János féltestvére Bolyai Gergely 2 ökörtinóért cseréje hamarosan visszavásárolta a hangszert.

Bolyai Gergely szintén Bolyai Farkasnak volt a fia, de amíg János az elsőszülött volt, Farkas első házasságából, addig Gergely a második házasságából született. Gergelyről azt írják, hogy szintén kiváló zenész volt, idősebb korában is *csinosan* hegedült. Jánosról nem így fogalmaznak: János *virtuóz* hegedűs volt. A visszavásárlással viszont a hegedű így visszakerült a Bolyai-családhoz. Bolyai Gergely 1890-ben hunyt el, vagyis 30 évvel János halála után, és amikor meghalt, a hegedűt a fia, Bolyai Gáspár örökölte. Gáspártól azonban elkerült a híres hangszer, mivel ő azt egy medgyesi ügyvédnek adta oda ügyvédi honoráriumként.

Az 1903-as híradások

A kolozsvári *Magyar Polgár* lapban 1903. március 3-án megjelent egy kis cikk Bolyai János hegedűjének addigi történetéről. Ebben a cikkben az is olvasható, hogy a medgyesi ügyvédet dr. Klein Adolfnak hívták és a hegedű most az ő fiánál Klein Ottónál van. A rövid írás akkoriban több helyen is napvilágot látott. Még aznap lehozta Marosvásárhelyen a *Székely Lapok*, és három nappal később Sepsiszentgyörgyön a *Székely Nemzet* is. Érdekes, hogy Budapesten már kicsit korábban a *Budapesti Hírlap* és a *Pesti Napló* is közölte. Érdemes itt külön megjegyezni, hogy a Budapesti Hírlapban azt is odaírták dr. Klein Adolf neve mellé, hogy lovag!


— (Bolyai János hegedűje.) Bolyai János, a világhírü matematikus, tudvalevőleg kiváló hegedűművész is volt. Hegedűje, mely nemcsak mint ereklye becses, hanem mint hangszer is elsőrendü s a magyar müvész, székelyudvarhelyi levelezőnk tudósítása szerint most Medgyesen Klein Adolf dr. lovag fiánál, Klein Ottónál birtokában van. A hegedű története Bolyai Gáspár mühelyudvarhelyi lakos, Bolyai János unokaöccse a következőkben beszéli el: Bolyai János hegedűjét hadnagy korában vásárolta kilenc darab cs. és kir. aranyon s egész élete végéig megtartotta. Mikor Bolyai János Marosvásárhelyen meghalt, minden ingóságát s ezek között hegedűjét is eladták. A hegedűt Stefani Demeter kereskedő vásárolta meg s tőle Bolyai Gergely fénykorában hangszerét, a ki testvérével Bolyai Gergely a vásárolt az elhunyt testvérecséért, Bolyai Gergely fénmegkapta két ökörtinóért. Bolyai Gergely bátyja hegedűjét két ökörtinóért cserélte vissza a tőle örökölte azután a hegedűt egyetlen fia, Bolyai Gáspár, a ki ügyvédi honorárium fejében adta azt Klein Adolf dr. medgyesi ügyvédnek.

Cikk a Budapesti Hírlap 1903. február 21-én megjelent számában. (Forrás: *Budapesti Hírlap*)

Teltek az évek, teltek az évtizedek, amikor is 1971-ben megjelent Lakatos István zenetörténésznek a *Zenetörténeti írások* című könyve, benne egy külön fejezettel a Bolyaiak és a zene kapcsolatáról. Olvashatunk itt Bolyai János hegedűjének történetéről is, de csak annyit, amennyit az 1903-as cikkben találunk. Néhány évvel később, 1975-ben jelent meg Benkő András zenetörténésznek könyve *A Bolyaiak zeneelmélete* címmel, amiben szintén szó esett János hegedűjéről. De ott is csak annyi, amennyi az 1903-as cikkben olvasható. Az erről szóló részt a szerző azzal zárta, hogy 1903 után a hegedűnek *nyoma veszett*.

2003-ban Bolyai János születésének 200. évfordulója alkalmából adták ki Marosvásárhelyen a *Tér üttörője* című kötetet, amelyben Oláh-Gál Róbert Bolyai-kutató tanulmányában külön kis fejezet foglalkozott János hegedűjének sorsával. De ebben is csak annyi olvasható, amennyi az 1903-as cikkben. 2017-ben jelent meg Sebestyén Mihály művelődéstörténész, író *A hegedű utóélete* című írása a marosvásárhelyi *Népújságban*, amiben a *Székely Lapok* kis cikkének újra közlése után a szerző szintén azt írja, hogy a hegedűnek ezután nyoma vész.

Egy zavaró hiba

Viccesen szólva, úgy tűnik, hogy több mint száz évre megállt a tudomány Bolyai János hegedűjének kutatása terén, hiszen még a témával foglalkozó kutatók is csak az 1903-as cikkben közölteket ismételték újra és újra. Ennek valószínűleg az is lehetett az oka, hogy az 1903-as cikkben volt egy zavaró hiba! Ugyanis nem Klein-nek hívták az ügyvédet és a fiát! Akkoriban talán félrehallhatta a nevet az újságíró és utána az ő nyomán több mint egy évszázadon keresztül ismételik ezt azóta is a kutatók.

2023 tavaszán került fel egy népszerű internetes családfakutató oldalra dr. Kein [!] Adolf medgyesi ügyvédnek, a Ferencz József rend lovagjának gyászjelentője. Az 1913-as partecédulán olvasható az elhunyt ügyvéd családtagjainak is a részletes névsora, amely alapján egyértelműen be lehet azonosítani, hogy ő az a bizonyos ügyvéd, vagyis dr. Kein Adolf és nem dr. Klein Adolf, akihez János hegedűje került. Természetesen merülhet fel persze az olvasóban a kérdés, hogy honnét tudja ezt a jelen sorok írója, hogy tévesen jelent meg 1903- ban az ügyvéd neve.

Egy egyedülálló adatközlő: Horváth László

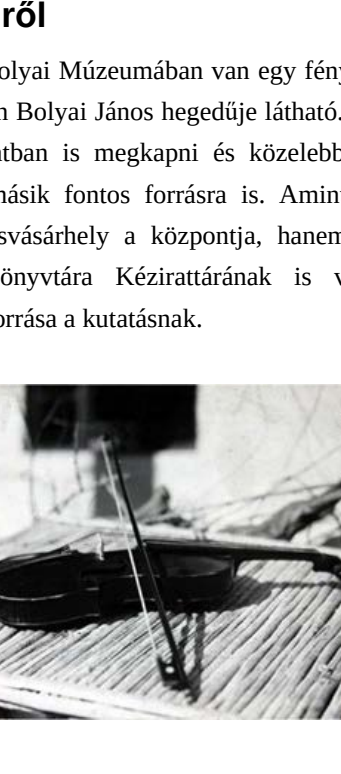
1982-ben a bukaresti *A Hét* című laphoz érkezett egy olvasói levél, amelynek szerzője egy marosvásárhelyi nyugalmazott cukorgyári főmérnök volt, Horváth László. Az ő anyai nagymamája, bizonyos Kein Jozefa édestestvére volt annak a dr. Kein Adolf medgyesi ügyvédnek, akihez János hegedűje került. Kein Adolf halála után a hegedűt annak lánya Kein Leona örökölte. Kein Leona maga is zenét tanult Budapesten és Bécsben, majd zenetanárként Marosvásárhelyen működött és közös fedél alatt lakott a Köteles Sámuel utcában a mérnök úr édesanyjával.

Kein Leona 1934-ben halt meg Marosvásárhelyen, a temetése Medgyesen volt. A hegedűt az ő testvére Kein Mariette örökölte, aki Pfundtner Károlynak volt a felesége és lett az özvegye. Bolyai János hegedűje így bekerült a Pfundtner családba. Mariette halála után, annak lánya Pfundtner Marietta örökölte meg a becses hangszert Temesváron. Horváth László abban reménykedett, hátha a Pfundtner család tagjait felkutatva további információkhoz lehetne megtudni a hegedűről. Konkrétan a Budapesten mérnökként dolgozó Pfundtner Károlyt (Marietta testvérét) próbálta volna felkutatni. Magam szintén utána néztem ennek a szálnak, de sajnos az derült ki, hogy már akkoriban az 1980-as években is ez reménytelen dolog lett volna, lévén a keresett személy az 1960-as években elhunyt. (Megtaláltam a halotti anyakönyvi bejegyzését.)

Meglepetésként ért, amikor a kutatás során kiderült, hogy akkoriban, 1938-ban egy matematikatörténész szintén ellátogatott Temesvárra, hogy közelebbről is szemügyre vegye Bolyai János hegedűjét. Jelitai József volt ez a szakember és egy különösen érdekes dolgot vett észre, amikor megkapta a hegedűt. Mielőtt azonban elmondanám, hogy mit látott, érdemes előtte elindítani a kutatásnak egy másik szálát is.

Képek egy hegedűről

A Teleki-Bolyai Könyvtár Bolyai Múzeumában van egy fénykép, amit azzal a felirattal szoktak bemutatni, hogy azon Bolyai János hegedűje látható. Volt szerencsém a képet a Téka munkatársaitól másolatban is megkapni és közelebbről tanulmányozni. Ekkor azonban felfigyeltem egy másik fontos forrásra is. Amint az jól ismert, a Bolyai-kutatásnak nem csak Marosvásárhely a központja, hanem Budapest is. A Magyar Tudományos Akadémia Könyvtára Kézirattárának is van egy értékes Bolyai-gyűjteménye, amely fontos forrása a kutatásnak.

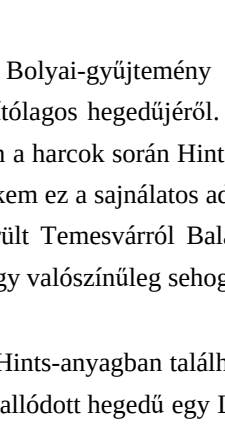

Egy fénykép Bolyai János (?) hegedűjéről. (Forrás: *Teleki-Bolyai Könyvtár, Bolyai Múzeum*)

A Bolyai-gyűjtemény egyik fontos része az ún. Hints-anyag. Id. Hints Elek Marosvásárhelyen volt kórházigazgató főorvos, rokoni szálak is fűzték Bolyai Jánoshoz. Egyik fia, ifj. Hints Elek szintén orvos lett, aki egy időben (midőn e sorokat írom éppen száz éve ennek) Szegeden is működött. Id. Hints Eleknek azonban volt egy másik fia is Hints Ferenc, aki jogászként Balassagyarmatra került.

A Bolyai-gyűjtemény Hints-anyagában több fénykép is található Bolyai János állítólagos hegedűjéről. Az is szerepel ott feljegyzésként, hogy János hegedűje 1945-ben a harcok során Hints Ferenc tulajdonából elkallódott. Hosszú időre okozott fejtörést nekem ez a sajnálatos adat. Hiszen természetesen merül fel a kérdés, hogy akkor hogyan került Temesvárról Balassagyarmatra János hegedűje. A jelen helyzetben úgy látom, hogy valószínűleg sehogy. Két különböző hegedűről lehet itt szó.

A Hints-anyagban található feljegyzésekből sikerült ugyanis azt is kibetűznöm, hogy az elkallódott hegedű egy Leidolff-hegedű volt. A név mellett még egy 1850-es dátumot is olvastam, amit aztán valaki átjavított 1750-re. Joannes Christophorus Leidolff bécsi mester munkájáról lehet itt szó. Persze kérdés, hogy honnan tudhatta ezt, aki a feljegyzést készítette. Nem tudom. De azt igen, hogy elvileg tudhatta, ha benézett a hegedű hangrésén, az ún. f- lyukán, hiszen ott elvileg egy kis címkén olvashatta. Ez azonban egy nagyon meglepő adat! Mindjárt világos lesz az is, hogy miért.

Egy másik mester


Jelitai József (Forrás: *Tudósnaptár*)

Jelitai Józsefnek 1938-ban Temesváron megmutatták Bolyai János hegedűjét. Mielőtt arra gondolnánk, hogy esetleg akkor valaki megtréfálta őt, mondván, hogy hát higgye csak el, hogy az a Bolyai János hegedűje csak ezért, mert az illető mondja… Nem, nem ez történt! A hegedűhöz ugyanis tartozott egy kézjegyzői[!] által hitelesített dokumentum, amelyben Bolyai Gáspár pontosan leírta, hogy a hegedű az egyetlen és igazi Bolyai János hegedű! És akkor Jelitai József Temesváron benézett a kapott hegedű f-lyukán! Mit látott? Azt, hogy az egy Andreas Thier hegedű! Pressburg! Pozsony! Mi következik ebből? Az egy másik mester hegedűje, vagyis két különböző hegedűről lehet itt szó.

Tudomásom szerint a fenti két adatot eddig így még senki nem ütköztette. Nagy Ferenc tudománytörténész, aki 1991-ben a temesvári *Új Szó*ban hírt adott a Jelitai-hagyatékban talált feljegyzésről, már gyanakodott, hogy két különböző hegedűről lehet szó. Viszont, amennyiben a két hegedűkészítő mesterre vonatkozó adat helyes, vagyis ha esetleg valóban Balassagyarmaton elkallódott az a bizonyos „Bolyai-hegedű", akkor az nem az a híres Bolyai János-féle hegedű lehetett, amely végigment a Bolyai János – Stefani Demeter – Bolyai Gergely – Bolyai Gáspár– dr. Kein Adolf – Kein Ottó – Kein Leona – Kein Mariette – Pfundtner Marietta vonalon, hanem egy másik hegedű. (A Bolyai családban nem csak János szerette a zenét, nem csak neki volt hegedűje.)

Mindenesetre a fenti eszmefuttatás egy halvány reményt ad arra, hogy talán mégsem veszett el Bolyai János hegedűje, talán egyszer mégis előkerülhet. Azt, hogy mi történt a hegedűvel 1938 után, nem tudjuk. Sajnos Jelitai József néhány évvel később 1944-ben szerencsétlen körülmények között meghalt, valószínűleg azonban nem egészen úgy, ahogyan azt a hivatalos halotti anyakönyvébe beírták.

Konklúzió

Talán mondanom sem kell, hogy Bolyai János hegedűje egy páratlan műkincs lehetne, ha előkerülne. Micsoda nagyszerű dolog volna, ha olyan jeles alkalmakkor, mint például a mostani kétszáz éves évforduló is, meg lehetne szólaltatni. De sajnos nem tudjuk, hogy hol van. Viszont érdemes lenne tovább folytatni a kutatást Temesváron is! Fel kellene kutatni a Pfundtner család ma élő leszármazottait. Tudomásom szerint Pfundtner Marietta 1949 nyarán hunyt el. Azt, hogy mi lett aztán a hegedűvel nem tudjuk. Fel lehetne térképezni a világ összes Andreas Thier hegedűjét (és akkor már a Leidolff-hegedűket is), múzeumokban, magángyűjteményekben, árveréseken. Jelitai József feljegyzett ugyanis egy számot is, amit a hegedűben látott, amit persze még ellenőrizni kell, és így akár az is iránymutató lehet később az azonosításnál. Hátha… Hátha egyszer még előkerül Bolyai János hegedűje.

Szabó Péter Gábor

SZTE TTIK Informatikai Intézet

Irodalomjegyzék

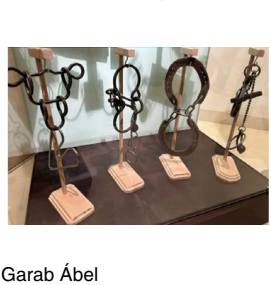
1. Benkő András: *A Bolyaiak zeneelmélete*, Kriterion Könyvkiadó, Bukarest,
2. Bolyai János hegedűje, *Magyar Polgár*, Kolozsvár, 1903. március 3. A cikk megjelent még: *Székely Lapok* (Marosvásárhely), 1903. március 3., *Székely Nemzet* (Sepsiszentgyörgy), 1903. március 6., *Budapesti Hírlap*, 1903. február 21., *Pesti Napló*, február 28.
3. Gyarmati Béla: Jelitai (Woyciechowsky) József (1889–1944). In: *Jelitai Woyciechowsky József (1889–1944) matematikatörténész, csillagászattörténész, egyetemi magántanár rövid életrajza és tudománytörténeti publikációinak bibliográfiája*. Összeállította: Gazda István. A Magyar Tudománytörténeti Intézet Tudományos Közleményei 49. Budapest, 2015.
Kézirat. http://real.mtak.hu/19913/1/gazda_jelitai.pdf
4. Horváth László: Hol található Bolyai János hegedűje? (Jegyzetek), *A Hét*, Bukarest, 1982. április 23.
5. Lakatos István: *Zenetörténeti írások*, Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1971.
6. Nagy Ferenc: Hova lett Bolyai hegedűje? *Új Szó*, Temesvár, 1991. március
7. Oláh-Gál Róbert: Szemelvények Bolyai Jánosnak Marosvásárhelyen eltöltött éveiből. In. *A tér úttörője*, Mentor Kiadó, Marosvásárhely,
8. Sebestyén Mihály: A hegedű utóélete, *Népújság*, Marosvásárhely, 2017. március
9. Szabó Péter Gábor: Újabb adatok Bolyai János hegedűjének sorsáról, *Népújság*, Marosvásárhely, 2019. szeptember 6.https://www.e-nepujsag.ro/articles/ujabb-adatok-bolyai-janos-hegedujenek-sorsarol
10. Szabó Péter Gábor: *Bolyai hegedűje*. Temesvári Rádió. App.Box. 2023.11.04. Hangfelvétel.

---

[1] Szabó Péter Gábor cikke a Haladvány Kiadvány oldalán jelent meg 2023. dec. 12-én, Gazda István tudománytörténész 75. születésnapjára. https://math.bme.hu/~hujter/231212.pdf

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

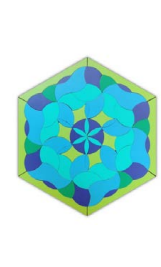
A **GAZDA(G)SÁG** NEVET ADTUK A **GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET ROVATNAK**, AMELYBEN BEMUTATJUK, HOL, MIKÉPPEN HASZNÁLJÁK FEL A MATEMATIKÁT, MILYEN GAZDAG IS AZ A KÖR, AMELYIK ÉRINTI EZT A TUDOMÁNYÁGAT. (ROVATSZERKESZTŐK: *ILLÉS TIBOR, MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR ÉS RÖST GERGELY.*)



Garab Ábel
2024. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Evolúciós játékelmélet Szegeden

Január 22. és 26. között Szegeden, az SZTE Bolyai Intézetben rendezték az EVOGAMESPLUS európai innovatív képzési hálózat téli iskoláját. A program négy éve alatt 15 doktoranduszt képeznek ki egy széleskörű nemzetközi együttműködés keretében. A projekt központi témája az evolúciós játékelmélet és alkalmazásai az ökológia, az epidemiológia és a rákkutatás területén. Az eseményről *Garab Ábel*, a projekt egyik témavezetője készített beszámolót.



Juhász Litza
2024. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

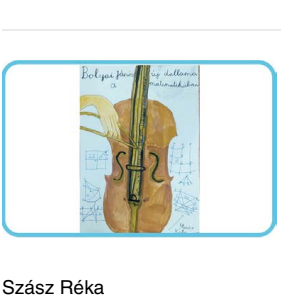
Hatszögletű inspiráció

„Először gyerekeket, tizenéveseket és felnőtteket kértem meg, hogy rakják össze a kirakót tengelyes szimmetria szerint. Mivel láttam, hogy nehezen boldogulnak, megkértem a tesztelőket, hogy az elemek elforgatásával, azaz a középpontos szimmetria szabályai szerint rakják össze. Percek alatt elkészültek." – írja *Juhász Litza*, a budapesti Vasarely Múzeum munkatársa. „Múzeumpedagógusként nekem az a szerepem, hogy hidat építsek a látogatók és a kiállított tárgyak között. Minden csoportnál alkalmazok közös kreatív játékot kézzel fogható eszközkészletekkel. Írásom egy konkrét kézzel fogható készletet mutat be – a Hexamandala kirakót."

Ruff János
2024. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Möbius-síkok, blokkrendszerek, Møbee játék

Tavaly év végén került piacra a Møbee nevű kártyajáték, aminek a szabálya nagyon egyszerű, egymondatos: Csapj fel három lapot a pakliból, és keresd meg azt az egyetlen figurát, amelyik mindhármon szerepel! A leggyorsabb játékos nyeri a kört. Ahhoz, hogy ilyen paklikat gyártsunk (a kiadott játék három különböző nehézségi szinthez tartozó paklit tartalmaz), érdekes kombinatorikai struktúrákra, az ún. 3-*blokkrendszerekre* van szükségünk. *Ruff János* egy szuper társasjáték matematikai alapjairól írt...



Szász Réka
2024. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Az APP&X alkotópályázat eredményei

A Bolyai János Matematikai Társulat APP&X matematikai alkotópályázatán 16 diákot és 12 tanárt díjaztak. A díjakat Szilágyi Áron olimpiai bajnok vívó, Kollár László, a Magyar Tudományos Akadémia főtitkára, Pálfy Péter Pál, a Bolyai Társulat elnöke és Laczkovich Miklós, az MTA rendes tagja adta át a budapesti Vasarely Múzeumban. Képünkön Staár Kata, az egyik legfiatalabb díjazott alkotása: Bolyai János új dallama a matematikában. *Szász Réka* számolt be a pályázat tapasztalatairól és eredményeiről.

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

Garab Ábel 2024. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Evolúciós játékelmélet Szegeden

Január 22. és 26. között Szegeden, az SZTE Bolyai Intézetben rendezték az EU Marie Skłodowska-Curie programja által támogatott projekt, az EVOGAMESPLUS európai innovatív képzési hálózat téli iskoláját. A program négy éve alatt 15 doktoranduszt képeznek ki egy széleskörű nemzetközi együttműködés keretében. A konzorciumot a Delfti Műszaki Egyetem vezeti, tagjai között több nemzetközi egyetem és ipari partner mellett Magyarországról több intézmény is szerepel: Kun Ádám, Garay József témavezetők és Nandakishor Krishnan doktorandusz révén az Ökológiai Kutatóközpont, továbbá Röst Gergely és Garab Ábel témavezetők és Golsa Sayyar doktorandusz révén a Szegedi Tudományegyetem is tagja a nemzetközi konzorciumnak. A projekt központi témája az evolúciós játékelmélet és alkalmazásai az ökológia, az epidemiológia és a rákkutatás területén.

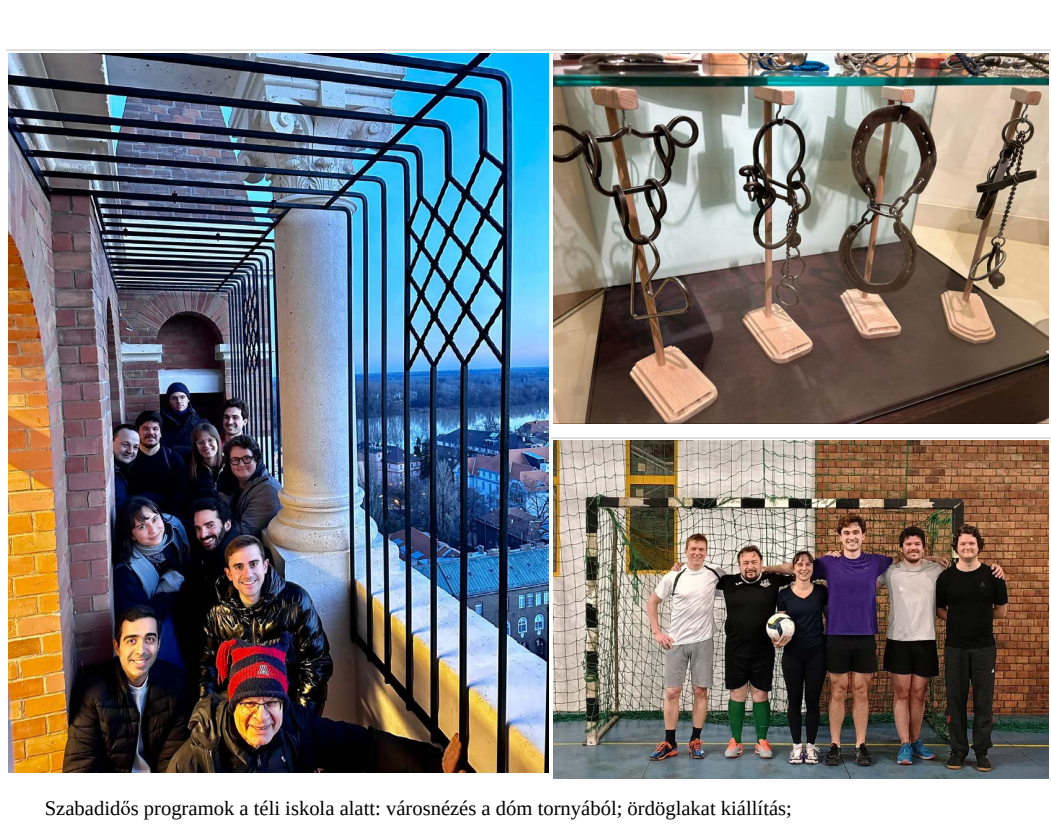
EVOGAMESPLUS csoportkép a szegedi Fogadalmi templom előtt.

A játékelmélet megalapítása Neumann János matematikushoz kötődik. Az elmélet kiindulópontja, hogy a résztvevő felek játszanak valamilyen szabályok szerint egy játékot (átvitt vagy szoros értelemben véve), amely során mindenki különböző stratégiák közül választhat. Az alkalmazott stratégiák összességének függvényében pedig különböző jutalmakban részesülnek. A játékelméletet először a közgazdaságtanban kezdték el használni. Az egyik legismertebb alkalmazás John. F. Nash nevéhez fűződik, akinek az életéről egy Oscar-díjas film is készült Egy csodálatos elme címmel, Russell Crowe főszereplésével. Az 1950-es években Nash bebizonyította, hogy (bizonyos feltételek mellett) minden játéknak létezik ún. Nash-egyensúlya, azaz egyéni stratégiáknak olyan együttese, amelyre igaz, hogy egyik játékosnak sem éri meg változtatni a stratégiáján, amennyiben azt a többi játékos sem teszi. Az eredmény jelentőségét 1994-ben közgazdasági Nobel-díjjal is elismerték, amit a magyar származású Harsányi Jánossal és Reinhard Selten-nel megosztva kapott.

Amint a fenti példa is sugallja, a játékelmélet első, úttörő alkalmazásai a közgazdaságtanban jelentkeztek, amelyekben a különböző gazdasági szereplők töltik be a játékosok szerepét, és az elmélet az ő versengésük leírását, előrejelzését teszi lehetővé. Később társadalmi problémák és geopolitikai játszmák modellezésére is elkezdték használni az elmélet vívmányait. Az első biológiai alkalmazások két nagy hatású elméleti biológus, John Maynard Smith and George R. Price nevéhez fűződnek, akik lefektették az evolúciós játékelmélet alapjait.

Az evolúciós játékelméletben különböző organizmusok (baktériumok, sejtek, növények, állatok stb.) kooperálnak vagy éppen versengenek egymással, vagyis játékelméletes megfogalmazással: különböző stratégiákat követnek. Az EVOGAMESPLUS projekt a valós populációk realisztikus evolúciós játékelméleti modelljeinek fejlesztésére összpontosít, a matematikai modellezés, a biológiai ismeretek, valamint a számítási és adatelemzési szakértelem ötvözésével.

A téli iskolán az evolúciós játékelmélet három fő alkalmazási területe került fókuszba, nevezetesen az ökológiában, az epidemiológiában és a rákkutatásban betöltött szerepére. Az előadások sorát a doktoranduszok soft és hard skill-jeinek (személyes készségeinek és szakmai kompetenciáinak) fejlesztését célzó gyakorlatok és versenyek színesítették, továbbá a hét közepén a résztvevők ellátogattak a kuriózumszámba menő ördöglakat kiállításra is, amit Vígh Viktor, a kiállítás egyik főszervezője és kiállítója, a Bolyai Intézet docense mutatott be az érdeklődőknek.



Szabadidős programok a téli iskola alatt: városnézés a dóm tornyából; ördöglakat kiállítás; barátságos focimeccs a résztvevők és az intézet tagjai között.

A hét fénypontját – az EVOGAMESPLUS résztvevői és a Bolyai Intézet dolgozói és hallgatói közti szoros játékot hozó focimeccset leszámítva – a két főelőadás jelentette. A nagy érdeklődésre való tekintettel ezek nyíltak voltak a nagyközönség számára is.

A keddi plenáris előadást Szathmáry Eörs, az Ökológiai Kutatóintézet professzora tartotta az evolúció többszintű modelljeiről. Előadásában többek között arról is hallhattunk, hogy milyen fontos szerepet tölthetnek be a mutációk egy populáció vagy akár egy faj fennmaradásában. Egy hirtelen megváltozott környezetben a nagyobb mutációs rátájú organizmusnak lehet több esélye a fennmaradásra, hiszen neki lehet nagyobb valószínűséggel olyan utódja, amely az új körülmények között életképes.

A szerdai főelőadást Joel S. Brown, a floridai Moffitt Rákközpont alkalmazott matematikus professzora tartotta egy ígéretes új módszerről, az evolúció alapú rákterápiáról. Ennek lényege, hogy a daganatos betegségre úgy tekintünk, mint a rákos és egészséges sejtek közti evolúciós játszmájára a páciens testén belül. A rákos sejtek fő stratégiáját a gyors szaporodóképességük jelenti. A természetben rendszerint, ha egy organizmus valamilyen evolúciós előnyt élvez vetélytársaival szemben (jelen példánál maradva: a rákos sejtek gyorsabban képesek szaporodni, mint egészséges társaik), azért valamilyen „árat fizet", vagyis más szempontból sérülékenyebbé válik. Brown professzor és csapata – abban bízva, hogy ez a rákos sejtek esetében sincs másképp – azt próbálják kideríteni, illetve előrejelezni, hogy mi a rákos szövetek gyengesége, és ennek ismeretében új terápiás eljárásokat próbálnak kifejleszteni.

Models of multilevel selection
and their applications
Eörs Szathmáry

Szathmáry Eörs (balra) és Joel S. Brown (jobbra) professzorok előadásai a Bolyai Intézet dísztermében.

A EVOGAMESPLUS téli iskolájáról a Szeged TV tudományos műsora, a Kvantum is beszámolt.

Garab Ábel

SZTE Bolyai Intézet, Alkalmazott és Numerikus Matematika Tanszék

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Adatkezelés Elfogadom.

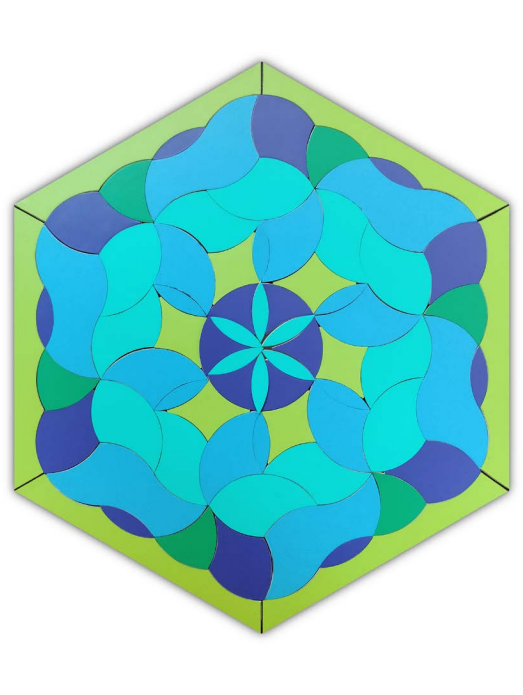
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon: ›

Juhász Litza 2024. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Hatszögletű inspiráció

Mindig is szakácsként szerettem volna dolgozni, és a konyha – bármilyen konyha – számomra az a hely, ahol a kreativitásom felragyog, ahol természetes módon jutok el a flow állapotába, ezért gyakran szoktam mondani, hogy a múzeumpedagógia nagyon hasonlít a főzéshez. Mindkettőhöz hozzátartozik az összetevők megfelelő aránya, a tetszetős tálalás és kivitelezés. A múzeumpedagógusok többnyire besétálnak a már berendezett kiállításokra, elolvassák, amit a kurátorok a képekről kiírtak, és értelmezik az egészet. A múzeumpedagógusoknak általában nincs beleszólásuk abba, hogy mi hova kerüljön, és a tárgyak hogyan legyenek bemutatva. Múzeumpedagógusként nekem az a szerepem, hogy hidat építsek a látogatók és a kiállított tárgyak között. Mi a siker receptje? Megfelelő összetevők a megfelelő mennyiségben, a megfelelő pillanatban. Milyen összetevők? Eddigi tapasztalataim alapján a kontextus megadása, a művek csendes szemlélése, a gondolatok megosztása egymással, a háttérinformáció megértése és közös kreatív játék kézzel fogható eszközkészletekkel az az öt megközelítés, amelyet minden csoportnál alkalmazok, függetlenül a látogatók korától vagy attól, hogy milyen minőségükben látogatnak ide. Írásom egy konkrét kézzel fogható készletet mutat be – a *Hexamandala* kirakót.

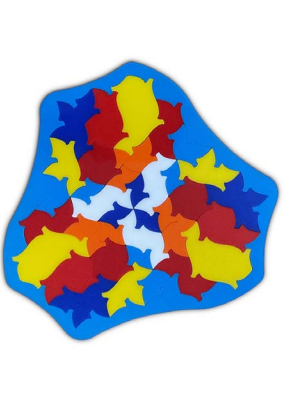


1. ábra. Hexamandala

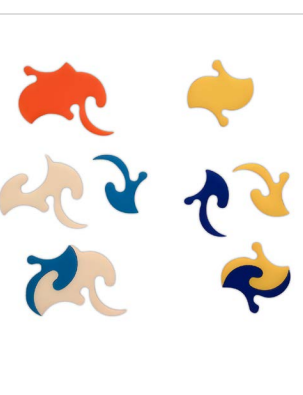
A Hexamandala *Gondos Gábor* kirakójátékai iránti szenvedélyemből született. Miután először meglátogattam Gábor honlapját, tudtam, hogy ezeket a puzzle-okat be szeretném építeni a múzeumpedagógiai munkámba. Nemcsak gyönyörűek voltak, de közelebbről megvizsgálva őket, rájöttem, hogy bennük rejlik a lehetőség, hogy a látogatók jobban megértsék Victor Vasarely (1906–1997) néhány műalkotásának szerkezetét, valamint a műalkotások alapjául szolgáló matematikai és művészeti fogalmakat.

Miután összeraktam néhány kirakójátékát, azonnal megvettem a *Napszirom* és a *Juhar* kirakóit (2.ábra). A legegyszerűbben úgy lehet őket összerakni, ha a középpontos szimmetriát használjuk, és az azonos méretű darabokat körkörösen ugyanabba a pozícióba helyezzük a keret szélén. Gábor elmagyarázta, mi a siker titka: a nagyobb darabokkal kell kezdeni. Hamar rájöttem, hogy a nagyobb darabok a kisebbekből állnak össze (3. ábra). A kirakóinak ez a felépítése lehetővé teszi, hogy sokféleképpen össze lehessen rakni őket. Mi döntjük el, hogy milyen lesz a végleges kompozíció.

2. ábra. Napszirom



Juhar



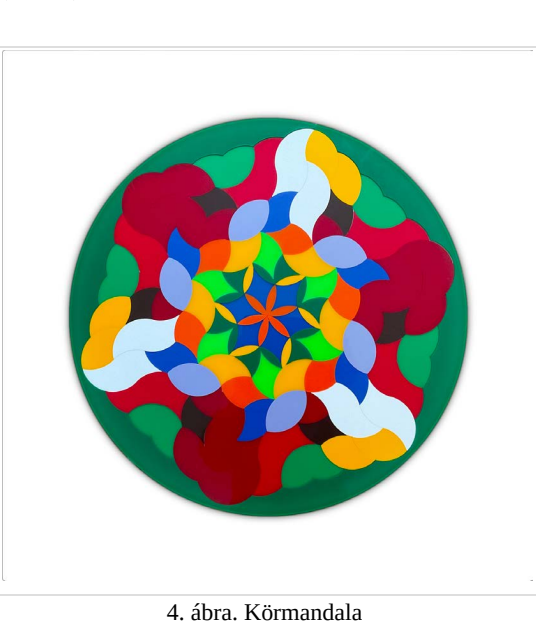
3. ábra. Napszirom (részletek)

Victor Vasarely, a magyar-francia művész, aki az op-art művészeti irányzat egyik kimagasló képviselője volt, hasonló módon használta a síkidomokat. A Napszirom puzzle-hoz hasonlóan Vasarely is sok hatszögletű kompozíciót töltött meg más síkidomokkal. Néha rombuszokat használt, különbözőképpen elrendezve őket (https://vasarely.hu/mutargyak/15530/, https://vasarely.hu/mutargyak/15550/).

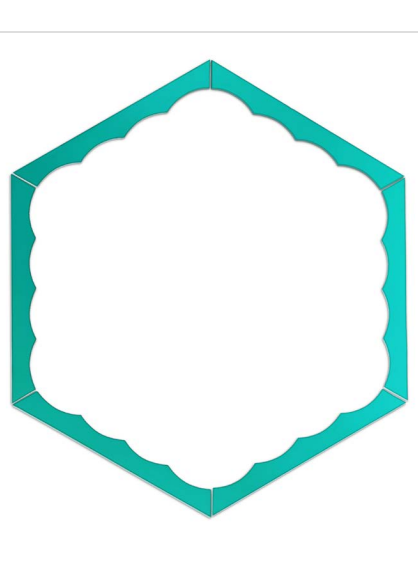
A Trybox című festmény esetében három nagyobb rombuszon belül köröket, ellipsziseket és oválisokat (íves formákat) rendezett el.

Vasarely Múzeum Budapest

Amikor a budapesti Vasarely Múzeum gyűjteményének egy műalkotásával párba állítható kirakót kerestem, félretettem a Napszirom puzzle-t, mert vékony darabjai nem bírták volna a múzeumi foglalkozásokkal járó igénybevételt. Amikor Gábor meglátta a Trybox című festmény ellipszisekből és körökből álló belső szerkezetét, a *Körmandala* kirakót javasolta, és kölcsön is adta (4. ábra). Egyébként ez volt Gábor első kirakójátéka. Az ösztöneim azonban azt súgták, hogy a Körmandala túl nagy, és túl sok darabból áll a múzeumlátogatás során rendelkezésre álló időhöz és helyhez képest. Megkérdeztem, hogy nem lehetne-e egy kisebb változatot készíteni belőle. Gábor azonnal igent mondott. Közösen döntöttük el, hogy milyen alakzatokat fogunk használni. Mivel a Körmandala kirakó és a Trybox című festmény belső szerkezete is hatszög, megegyeztünk abban, hogy az új kirakó kerete is hatszög (hexagon) lesz, és így Gábor Hexamandalának nevezte el. Mivel a múzeumban a kirakóst és a keretet is stancgéppel szerettem volna kivágni, úgy döntöttünk, hogy a keret is darabok közé kerül (5. ábra).

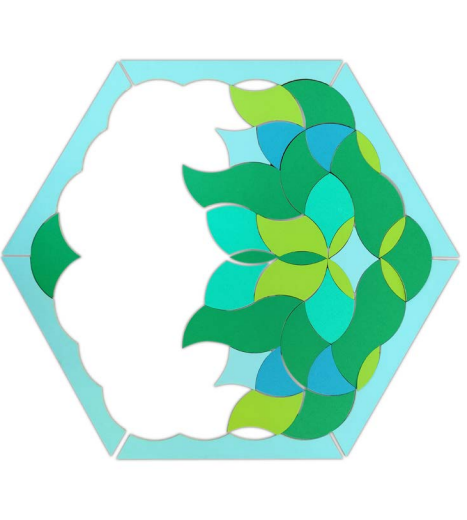


4. ábra. Körmandala

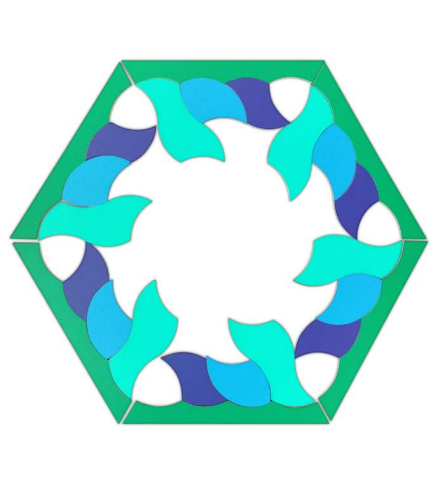


5.ábra. Hexamandala (részlet)

A Hexamandala egyik legfontosabb jellemzője, hogy a tükrözést és a forgatást, azaz a tengelyes és a középpontos szimmetriát is használhatjuk az összerakásához (6. és 7. ábra). Először gyerekeket, tizenéveseket és felnőtteket kértem meg, hogy rakják össze a kirakót tengelyes szimmetria szerint. Mivel láttam, hogy nehezen boldogulnak, megkértem a tesztelőket, hogy az elemek elforgatásával, azaz a középpontos szimmetria szabályai szerint rakják össze. Percek alatt elkészültek.

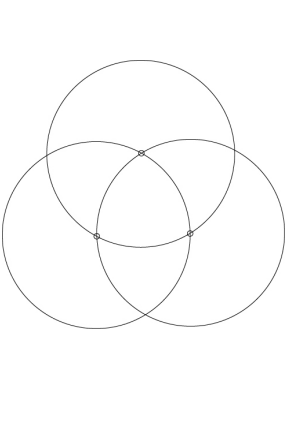


6. ábra. Hexamandala (részlet)



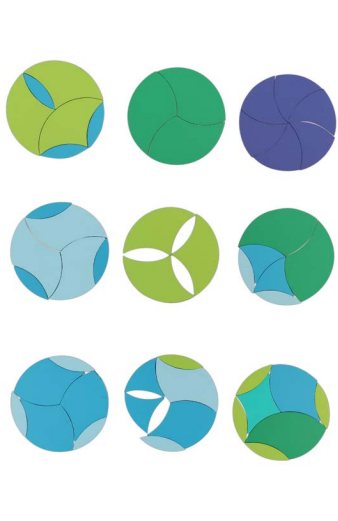
7. ábra. Hexamandala (részlet)

Nem sokkal később a kezembe került Miranda Lundy *Sacred Geometry* című könyve. Alig hittem a szememnek, amikor megláttam a 7. oldalon lévő ábrát (8. ábra). A körök által kimetszett alakzatok pontosan úgy néztek ki, mint a Hexamandala darabjai. Gábor megerősítette a felvetésemet. Amikor annakidején a Körmandala kirakót megtervezte, körzővel rajzolta meg az alakzatokat. A könyvben látott alakzatok arra inspiráltak, hogy a Hexamandalát és a Tryboxot új módon használjam fel. Miután kivettem a kirakó elemei közül a keretet és a legnagyobb elemet (9. ábra), megkértem a látogatókat, hogy nézzék meg, hány kört tudnak létrehozni a megmaradt darabokból. (10. ábra).



8. ábra

9. ábra. Hexamandala (részlet)



10. ábra. Hexamandala (részlet)

Vasarely gyakran töltött ki formákat körökkel és ellipszisekkel, mert ezekkel mozgást ábrázolhatott. Ahhoz, hogy lássuk, mi volt a szándéka, vágjunk ki egy kört kartonból. Álljunk egy fal mellé, amelyet erős fény világít meg. Fogjuk meg a kört a legszélén, mozgassuk a fény előtt, és nézzük meg, hogyan változik az árnyék alakja ellipszissé. Azzal, hogy keskenyebb és szélesebb ellipsziseket ábrázolt, és más, íves síkidomokká torzította őket, Vasarely a tér, a mozgás és az idő fogalmát építette be a kompozícióba. A három szabályos rombusz közepén lévő alakzatok felnagyításával a távolságot – a nézőtől való távolságot – is ábrázolta, mivel az emberi látórendszer a nagyobb tárgyakat közelebbinek, a kisebbeket pedig távolabbinak érzékeli.

A fenti leírás összefoglalja a Hexamandala kirakóval és a Trybox című festménnyel végzett eddigi munkámat. Mit hoz a jövő? Remélem, hogy a Hexamandalához, a Tryboxhoz és a hatszögekhez kapcsolódó következő matematikai fogalmakat is bemutathatom a budapesti Vasarely Múzeum látogatóinak.

Az alábbi témák felhasználhatók a kirakóban, a festményben és általában a hatszögekben rejlő egyes matematikai fogalmak bemutatására, megértésük elmélyítésére vagy felmérésére.

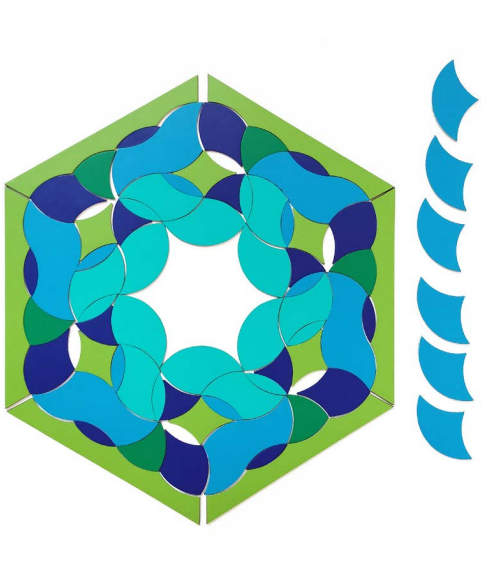
Minden hatszögnek hat oldala van. A hat a legkisebb **tökéletes szám**, mivel önmagánál kisebb **pozitív osztóinak** összege (1+2+3=6). A Hexamandala kirakóban minden színes darabból hat példány van. A kirakós összesen tizenháromféle darabból áll. A tizenhárom **prímszám**, akárcsak a három, a rombuszok száma, amelyekre Vasarely a Trybox című festményt felosztotta. Hány darab van összesen? Az iskolások gyakorolhatják a **szorzá**st és az **összeadást** (vagy **kivonást**), hogy megtalálják a 13 × 6 összeszorzásának leggyorsabb módját. Vajon kiszámolják, mennyi 10 x 6 és 3 × 6, majd összeadják?? Azok, akik a **műveleti sorrend**et tanulják, hogyan írnák fel a matematikai gondolatmenetüket visszaadó **képletet**? Használhatjuk **szöveges feladat**ként is: ha összesen tizenháromféle elem van, és minden elemből hat-hat példány, hány darabból áll a kirakós?

Az összeadást gyakorló tanulók felsorolhatják az összes lehetőséget, hogy 1-től 13-ig **pozitív egész szám**ok felhasználásával 2, 3, 4,…tagból álló összegként állítsák elő a 13-atas összeget: 1+12, 1+1+11, 1+2+3+7. A negatív egész számok gyakorlására olyan feladatokat is fel lehet adni, amelyekben az összeg negatív számokat is tartalmaz.

Visszatérve **a pozitív osztók**ra, a diákok megkereshetik a 78-as szám összes osztóját. Hasonlóképpen, mivel a Trybox című festményben minden egyes rombusz 15 × 15 íves alakzatból álló rácsot tartalmaz, a tanulók a 225 osztóit is megkereshetik, vagy megtehetik ugyanezt akár a két vagy mindhárom rombuszban lévő alakzatok teljes számával, a 450-nel, illetve a 675-tel. Hasonlóképpen a **négyzetgyök**ök és **hatvány**ok témáját is be lehet vezetni, hiszen $\sqrt{225} = 15$, illetve $15^2 = 225$.

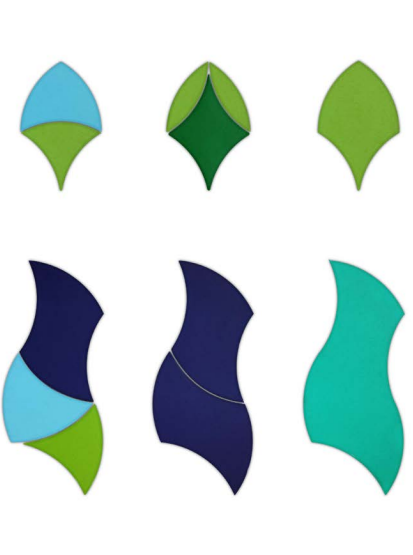
Ha csoportban oldják meg a feladványt, az is lehet, hogy a puzzle darabokat **egyenlő**en osztják el a csoport tagjai között. Nehezíti a feladatot, hogy a 13 prímszám. Megkérdezhetjük, hogyan osztanák el egyenlően a darabokat 2 vagy 3 tagú csoportokban, és milyen javaslatot tennének a 4 fős csoportokra.

Ha megkérdezzük a tanulókat, hogy melyik darabbal kezdték és hogyan folytatták a kirakóst, kérhetjük, hogy **római szám**okkal írják le a sorrendet. Bár a Hexamandala kirakó sokféleképpen összerakható, néha üres helyekre és oda nem illő darabokra bukkanunk (11. ábra). A kirakós befejezéséhez néhány darabot ki kell venni a már kirakottak közül, és másikkal helyettesíteni. Ezekben az esetekben, amikor leírják, hogyan sikerült befejezniük, a olyan szavakat használhatnak a **sorrend** leírására, mint az utolsó vagy utolsó előtti.



11. ábra. Hexamandala (részlet)

Fent említettem, hogy Gábor kirakóinak nagyobb darabjai a kisebbekből állnak össze. Ezért a Hexamandala darabjaival az **egybevágóság**, és ezen belül a **nagyobb mint**, a **kisebb mint** és az **egyenlő** fogalmát is vizsgálhatjuk. A tanulók továbbá a darabok (12.ábra) elrendezésével és kombinálásával gyakorolhatják az egybevágóság megértését, és felfedezhetik a **tört**ek és a **terület** témakörét. Ha ezekben a témákban már járatosak, akkor használhatják a kirakót a **százalék**okról **tizedes szám**okra való átváltás gyakorlására is. Utolsó kihívásként megkérdezhetjük tőlük, hogy a kereten belüli terület teljesen lefedhető-e csak egyfajta elemmel, és ha igen, van-e többféle elem, amely erre alkalmas?

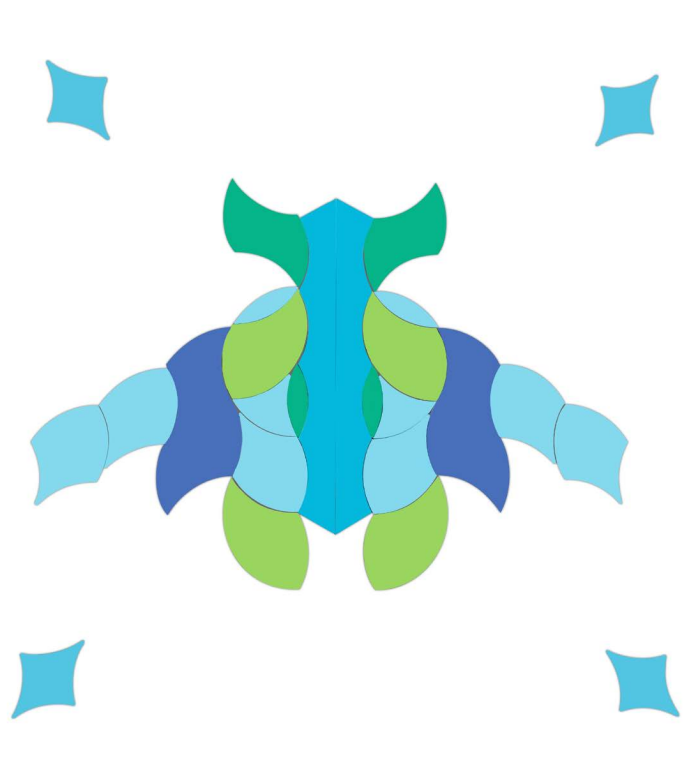


12. ábra. Hexamandala (részlet)

A Trybox című festményben Vasarely ugyanannyi zöld, piros és narancsbarna színt használt. A Hexamandala nálunk meglévő hat példánya más-más **mennyiség**ben tartalmazza a kék három és a zöld két árnyalatát. A tanulók kiszámolhatják, hogy az egyes színek milyen **arány**ban vannak jelen az egyes kirakókban.

A Trybox példaként használható a **szabályos hatszög**ek és **rombusz**ok meghatározó tulajdonságainak, köztük az élek számának megértéséhez, valamint a **belső** és **külső szög**ek **mérés**éhez.

Bár minden hatszögnek több **szimmetriatengely**e van, a puzzledaraboknak már nem feltétlenül. A diákokat meg lehet kérni, hogy a Hexamandala darabjait két **csoport**ra osszák: azokra, amelyeknek van legalább egy szimmetriatengelye, és azokra, amelyeknek nincs. A diákokat arra is meg lehet kérni, hogy kreatívan használják fel a kirakó darabjait, és alkossanak olyan kompozíciót, amely legalább egy szimmetriatengellyel rendelkezik. (13. ábra).



13. ábra. Hexamandala (részlet)

A **geometriai transzformációk** témáját a Trybox című festmény megtekintésekor lehet megbeszélni, mivel minden rombusz és minden rombuszban található íves alakzat kétszeres eltolással keletkezik a másikból. Ezt a témát a tanulók jobban megérthetik úgy, ha a Hexamandala kirakót rakják össze. Azokat a tanulókat, akik jártasak a grafikai tervezőprogramok használatában, megkérhetjük, hogy állapítsák meg, vajon a Trybox nagyobb íves síkidomai **nagyításai**-e valamelyik kisebbnek.

Ahogy írtam: a kirakós darabjai közül kettő kivételével mindegyikből össze tudunk állítani köröket. A tanulókat megkérdezhetjük, hogy melyik darabot használnák a körök **sugar**ának mérésére, és a darab melyik részét mérnék. Az összes lehetséges darab megmérésével meglátják, hogy az egyiket könnyebb-e megmérni, mint a másikat, és hogy ugyanazt a **hosszúság**ot kapják-e. A budapesti Vasarely Múzeumban kézzel, stancoló géppel elkészítendő kirakó tervezésekor némileg módosítani kellett a darabok méretét. Emiatt nem illeszkednek olyan szorosan egymás mellé, mint ahogyan lehetne. Bár ez a kérdés inkább a mérnöki munkával és az alapanyagok természetével kapcsolatos, nem a matematikával, jelentős szerepet játszott a kirakó elkészítésében. Ha a tanulók ismerik az összerakott kör (hozzávetőleges) sugarát, akkor ki tudják számítani a kör hozzávetőleges **kerület**ét és hozzávetőleges **terület**ét, valamint az egyes darabok területét és néhány darabon lévő **ív** hosszát (14. ábra).

14. ábra. Hexamandala (részlet)

Azáltal, hogy a tanulók a különböző feladatok során újra és újra visszatérnek a kirakókészlethez, kézzel fogható eszközökkel tanulnak. Mind Gábor, mind én azt reméljük, hogy ez megerősíti a különböző matematikai fogalmak megértését és azokkal kapcsolatos ismereteiket, és lehetővé teszi, hogy ezeket más helyzetekben is alkalmazzák, például amikor műalkotásokat vitatnak meg, és saját innovatív kompozícióikat tervezik.

Juhász Litza múzeumpedagógus

Vasarely Múzeum Budapest

Hivatkozás

Lundy, Miranda. *Sacred Geometry*. Wooden Books Ltd. Shanghai, 2012

© Szépművészeti Múzeum, Budapest, 2024

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

Ruff János 2024. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Möbius-síkok, blokkrendszerek, Møbee játék

Tavaly év végén került piacra a Møbee nevű kártyajáték, aminek a szabálya nagyon egyszerű, egymondatos: Csapj fel három lapot a pakliból, és keresd meg azt az egyetlen figurát, amelyik mindhármon szerepel! A leggyorsabb játékos nyeri a kört. Ahhoz, hogy ilyen paklikat gyártsunk (a kiadott játék három különböző nehézségi szinthez tartozó paklit tartalmaz), érdekes kombinatorikai struktúrákra, az ún. 3-*blokkrendszerekre* van szükségünk.

1. definíció. Legyen U nemüres, n-elemű halmaz. Az *U feletti $3-(n,k,\lambda)$ blokkrendszeren* U olyan kitüntetett k-elemű részhalmazainak (amelyeket *blokkoknak* nevezünk) halmazát értjük, amire teljesül, hogy U bármely három különböző elemét választva mindig éppen λ olyan blokk van, ami mindhármat tartalmazza.

Az első természetes kérdés, hogy mely paraméterek esetén léteznek ilyen 3-blokkrendszerek. A kérdésre a (részleges) választ, pontosabban három szükséges feltételt ad az alábbi tétel:

1. tétel. (Oszthatósági feltételek) *Ha létezik $3-(n,k,\lambda)$ blokkrendszer, akkor teljesülnek az alábbi oszthatóságok.*

1. $k(k-1)(k-2) \mid \lambda n(n-1)(n-2)$,
2. $(k-1)(k-2) \mid \lambda (n-1)(n-2)$,
3. $(k-2) \mid \lambda (n-2)$.

A bizonyítás egyszerűen elvégezhető, elegendő rendre a blokkok számát, az egy rögzített U-beli elemet tartalmazó blokkokat, illetve egy rögzített U-beli elempárt tartalmazó blokkokat összeszámolni és felhasználni, hogy az eredményül kapott törtek mind egészek.

A továbbiakban feltételezzük, hogy $\lambda = 1$. Az ilyen blokkrendszereket *Steiner-rendszereknek* szokták nevezni.

Kiindulva egy $3-(n,k,1)$ Steiner-rendszerből, természetes módon tudunk gyártani olyan n-lapos paklit, ahol minden lapon ugyanannyi figura szerepel és bármely három lapon pontosan egy azonos közöttük (de bármely kettő lapon több közös figura is szerepel, elkerülendő azt a „triviális” paklit, ahol van egy olyan figura, ami minden lapon szerepel). Legyenek a pakli lapjai az U elemei, a figurák pedig a blokkrendszer blokkjai. Egy figura pontosan akkor szerepeljen egy lapon, ha a neki megfelelő blokk tartalmazza a lapnak megfelelő U-beli elemet. Az így kapott pakli a definíció szerint rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy bármely három lapján mindig pontosan egy figura közös, továbbá a lapok száma n, a felhasznált figurák száma $\frac{n(n-1)(n-2)}{k(k-1)(k-2)}$, az egy lapon szereplő figurák száma pedig $\frac{(n-1)(n-2)}{(k-1)(k-2)}$. Két lapon a közös figurák száma éppen $\frac{n-2}{k-2}$ és minden figura k lapon fordul elő. (Ezeket az értékeket kaptuk, amikor a fenti oszthatósági feltételeket bizonyítottuk.)

Az oszthatósági feltételeket végignézve $n \geq 8$ esetekre, a legkisebb nemtriviális (azaz $k \geq 4$) lehetőség megkonstruálása az alábbi feladat.

Házi feladat. Konstruáljunk $3-(8,4,1)$ blokkrendszert!

Segítség. Az alaphalmaz elemei legyenek egy kocka csúcsai, a blokkok pedig olyan 4 csúcsot tartalmazó részhalmazok, mint például a kocka oldallapjai, szimmetriasíkjai (ezek eddig mind olyan síkok, amik a kockának pontosan 4 csúcsára illeszkednek). Ezeken kívül még 2 olyan csúcsnégyes kell, ahol semelyik kettő csúcs közt nem halad él. Ezeknek a blokkoknak a száma a fentiek alapján éppen $\frac{n(n-1)(n-2)}{k(k-1)(k-2)} = 14$ és minden csúcsot $\frac{(n-1)(n-2)}{(k-1)(k-2)} = 7$ blokk tartalmaz.

A feladatot megoldva megkonstruálhatjuk a Møbee játékban szereplő legkisebb, 8-lapos paklit.

A konstrukció könnyen általánosítható, egy d-dimenziós kocka csúcsaiból kiindulva, megfelelő 4-elemű blokkokat (csúcsnégyeseket) véve kapható $3-(2^d,4,1)$ paraméterű blokkrendszer. Ennek kidolgozását az olvasóra hagyjuk.

Az oszthatósági feltételeket teljesítő $n \geq 9$, nemtriviális blokkrendszerekhez ($k \geq 4$) tartozó paraméterhármasok, ahol az egy rögzített elemet tartalmazó blokkok száma, azaz $\frac{(n-1)(n-2)}{(k-1)(k-2)}$ legfeljebb 35 (ez a konstruált pakliban az egy lapon szereplő figurák száma, így természetes, hogy érdemes korlátozni a játszhatóság érdekében):

$$3-(10,4,1); \quad 3-(14,4,1); \quad 3-(16,4,1); \quad 3-(17,5,1); \quad 3-(22,6,1); \quad 3-(26,6,1).$$

Ezek közül a harmadik az előbb említett módon egy 4-dimenziós kocka csúcsaiból konstruálható meg. Az első, negyedik, és hatodik blokkrendszerek konstrukciója pedig elvezet a jelen cikk legfontosabb véges geometriai objektumainak, a *Möbius-síkoknak* a fogalmához.

A listán a második blokkrendszer konstrukciója nem véges geometriai jellegű, azt itt most nem tárgyaljuk. Az ötödik blokkrendszer (a $3-(22,6,1)$) pedig a 4-rendű projektív síkot (aminek $4^2+4+1=21$ pontja és ugyanennyi egyenese van) 1 ponttal bővítve konstruálható, ahol az új blokkok (összesen 77) a sík bizonyos oválisait (ezek itt olyan ponthalmazok amelyeknek semelyik 3 pontja nem kollineáris, összesen 56-ra lesz szükségünk belőlük) és az összes egyenesét (ez 21 darab egyenes) felhasználva adhatók meg.

Möbius-síkok

A *klasszikus Möbius-sík* egy illeszkedési struktúra, amelynek *pontjai* a háromdimenziós euklideszi térben egy rögzített gömb felszíni pontjai, *körei* pedig a gömbfelszín nemérintő síkmetszetei. Az illeszkedési reláció a természetes módon definiált illeszkedés. Erre a struktúrára nyilvánvalóan teljesül hogy bármely 3 különböző pontjára pontosan egy olyan kör van, ami mindháromra illeszkedik, mégpedig a három (nem-kollineáris) pont által meghatározott sík és a gömbfelszín metszete.

A klasszikus Möbius-sík véges analógiái a *véges Möbius-síkok*, amelyeket az alábbi három axiómával definiálunk:

2. definíció. Egy $(\mathscr{P},\mathscr{K},\mathscr{I})$ hármas *véges Möbius-sík*, ahol $\mathscr{P}$ a *pontok* véges halmaza, a *körök* véges halmaza $\mathscr{K}$, $\mathscr{I} \subset \mathscr{P} \times \mathscr{K}$ pedig az *illeszkedési reláció*, ha:

1. minden A, B, $C \in \mathscr{P}$ páronként különböző pontra létezik pontosan egy olyan $c \in \mathscr{K}$ kör, amire $(A,c) \in \mathscr{I}, (B,c) \in \mathscr{I}, (C,c) \in \mathscr{I}$,
2. minden $c \in \mathscr{K}$ körre és A, $B \in \mathscr{P}$ pontokra, ahol $(A,c) \in \mathscr{I}$, de $(B,c) \notin \mathscr{I}$, létezik pontosan egy olyan $d \in \mathscr{K}$, amely illeszkedik A és B pontokra is és c körrel csak A a közös pontja,
3. van 4 olyan pont, amely nem egy körre illeszkedik.

Könnyen látható, hogy a klasszikus Möbius-sík a végességi feltételeken kívül mindent teljesít ezek közül.

Tekintsünk egy véges Möbius-síkot és rögzítsük egy P pontját. Ha a ponthalmazból elhagyjuk ezt a rögzített pontot, és egyeneseknek hívjuk a P-re illeszkedő köröket (persze P nélkül), belátható, hogy az így adódó illeszkedési struktúra egy véges affin sík (gondoljuk meg, hogy ugyanez történik a klasszikus Möbius-síkon amikor a gömbfelszín egy kijelölt pontjából sztereografikus projekciót hajtunk végre), aminek ismertek a kombinatorikus tulajdonságai (pontok száma, egyenesek száma, egy egyenesre illeszkedő pontok száma stb.). Így a kiindulási Möbius-sík rendelkezik az ezekből következő kombinatorikus tulajdonságokkal, amelyeket az alábbi tétel foglal össze.

2. tétel. *Legyen $(\mathscr{P},\mathscr{K},\mathscr{I})$ véges Möbius-sík, ahol egy $k \in \mathscr{K}$ kör pontosan $n+1$ pontra illeszkedik. Ekkor teljesülnek a következők.*

1. *Minden $c \in \mathscr{K}$ körre pontosan $n+1$ pont illeszkedik.*
2. *A pontok száma n^2+1, a körök száma pedig $n(n^2+1)$.*
3. *Minden pontra $n(n+1)$ kör illeszkedik.*

A következőkben megmutatjuk, hogy hogyan lehet véges Möbius-síkokat konstruálni. Ehhez először egy véges testtel koordinátázott háromdimenziós projektív térre lesz szükségünk, ahol a pontok homogén koordinátákkal írhatók le. Jelölje $\mathbb{F}_q$ a q elemű testet, ahol q prímhatvány.

Definiáljunk az $\mathscr{A} = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \setminus \{(0,0,0,0)\}$ halmazon egy relációt a következőképpen:

$\rho \subset \mathscr{A} \times \mathscr{A} : ((x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)) \in \rho \iff$ létezik $\lambda \in \mathbb{F}_q$, $\lambda \neq 0$, amire $\lambda x_i = y_i$, minden i-re.

Megmutatható, hogy a ρ reláció ekvivalencia-reláció.

Legyen a $\mathscr{P}$ ponthalmazunk az $\mathscr{A}$ halmazon ρ relációhoz tartozó osztályok halmaza. Bevezetve az egyenesek és a síkok fogalmát ezen a ponthalmazon, kapjuk a $PG(3,q)$-val jelölt háromdimenziós projektív teret. Egyszerűen adódik, hogy a tér pontjainak száma: $|\mathscr{P}| = \frac{q^4-1}{q-1} = q^3+q^2+q+1$.

A klasszikus Möbius-sík definíciójánál felhasznált gömb analógiájaként most $PG(3,q)$-ban tekintsünk egy nemelfajuló másodrendű felületet, egy elliptikus kvádrikát, amit (legalábbis páratlan q esetén) az $X_1^2+X_2^2+X_3^2+aX_4^2=0$ egyenlet ír le egy megfelelően választott $a \in \mathbb{F}_q$ elemre (páros, azaz kettőhatvány q-ra ez az egyenlet kicsit bonyolultabban adható meg). Megmutatható, hogy pontosan q^2+1 olyan $\mathscr{P}$-beli pont (osztály) van, amire ez teljesül. Ez a q^2+1 elemű ponthalmaz lesz a Möbius-síkunk *ponthalmaza*. Az is könnyen látszik, hogy ebben a ponthalmazban semelyik három pont nem kollineáris (mellesleg ezzel a tulajdonsággal, a lehető legnagyobb méretű ponthalmaz a térben, ún. *ovoid*). Megmutatható továbbá, hogy a $PG(3,q)$ tér minden síkja vagy érinti vagy pontosan $q+1$ pontban metszi az ovoidot. A Möbius-sík *körei* legyenek ezen utóbbi, $q+1$ pontot tartalmazó részhalmazok, az *illeszkedés* pedig legyen a tartalmazás. A véges Möbius-sík axiómái teljesülnek az így definiált struktúrára, ellenőrzésük nem túl bonyolult számolási feladat. Az így kapott, q-elemű testre épített véges Möbius-síkok valóban $3-(q^2+1,q+1,1)$ blokkrendszereknek is tekinthetők, melyekből $q=3,4,5$ esetekben rendre 10, 17 és 26 lapos Møbee paklikat tudunk gyártani, 12, 20 és 30 figurával egy-egy lapon.

Természetesen a probléma (és a játék) tovább általánosítható például a $4-(n,k,1)$ blokkrendszerek fogalmának bevezetésével, amikből olyan kártyajátékok készíthetők, ahol bármely 4 lapon van mindig pontosan 1 közös figura (míg 4-nél kevesebb lapon mindig egynél több közös figura van). Egy ilyen nemtriviális (azaz $k \geq 5$) 4-blokkrendszer, a $4-(11,5,1)$ blokkrendszer, aminek konstrukciója az egyik (a legkisebb elemszámú, szokásosan M_{11}-gyel jelölt) Mathieu-csoportot használja. A származtatott pakli minden lapján 30 figura szerepel, és már kevesen tudják élvezettel játszani. Ha továbbmegyünk, és nemtriviális $5-(n,k,1)$ blokkrendszereket szeretnénk konstruálni, majd a megfelelő játékot legyártani, ezt is megtehetjük, de nem kapunk olyan paklit, ami a „játszható” tartományba esne. Ha esetleg még nehezíteni szeretnénk és nemtriviális $6-(n,k,1)$ blokkrendszereket gyártanánk (ahol $k \geq 7$), sajnos azzal a problémával szembesülünk, hogy ezidáig nem találtak ilyet (Peter Keevash egy eredménye szerint biztosan léteznek ilyenek, bár nyilván a játszhatósági tartományon jócskán kívül eső paklikat eredményeznek).

A másik továbblépési lehetőség a λ értékének 2-re változtatásával, $3-(n,k,2)$ blokkrendszerekből olyan paklikat gyárthatunk, amelyeknél bármely három lapon mindig pontosan két közös figura szerepel. Ezek gyors megtalálása a játékosok feladata.

A játékban benne van az edukációs felhasználás lehetősége is, például ha a figurákat helyettesíthetjük festményekkel, irodalmi művekekkel, városokkal, akkor három lapot felcsapva kereshetjük azt a festőt, írót, országot akinek/aminek mindhárom lapon van műve, városa. Elképzelhető, hogy ilyen gamifikációs megoldásokkal a közoktatásban is hasznosítható lesz a Møbee, illetve annak verziói.

A cikk megjelenését támogatta az NKFI az SNN 132625 számú OTKA pályázat keretében.

Irodalomjegyzék

[1] Hajnal Péter: Halmazrendszerek – Polygon jegyzettár 2002.
[2] Kárteszi Ferenc: Bevezetés a véges geometriákba, Akadémiai kiadó, 1973.
[3] Kiss György, Szőnyi Tamás: Véges geometriák, Polygon, 2001.
[4] Keevash, P.: The existence of designs, https://doi.org/10.48550/arXiv.1802.05900.

Ruff János
PTE TTK Matematikai és Informatikai Intézet

A Pécsi Tudományegyetem Természettudományi Kar Matematikai és Informatikai Intézet adjunktusa, Ruff János és csapata készítette el a MØBEE kártyajátékot, ami hasonlít arra a népszerű (Dobble) kártyajátékra, amelyben az egyforma ábrákat kell megkeresni a lapokon, de annál komplexebb, más játékélményt nyújt. Honlapja a https://mobeecards.store. A játékot bemutató youtube-videó itt található.

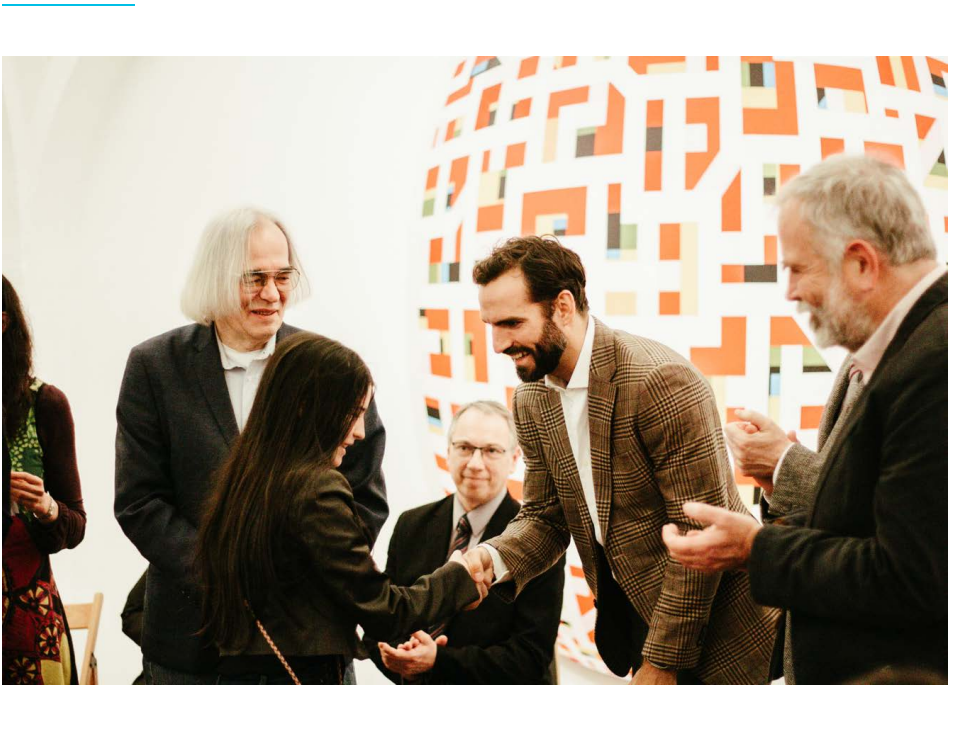
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. NKA Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

Adatkezelés
Elfogadom.

Szász Réka 2024. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

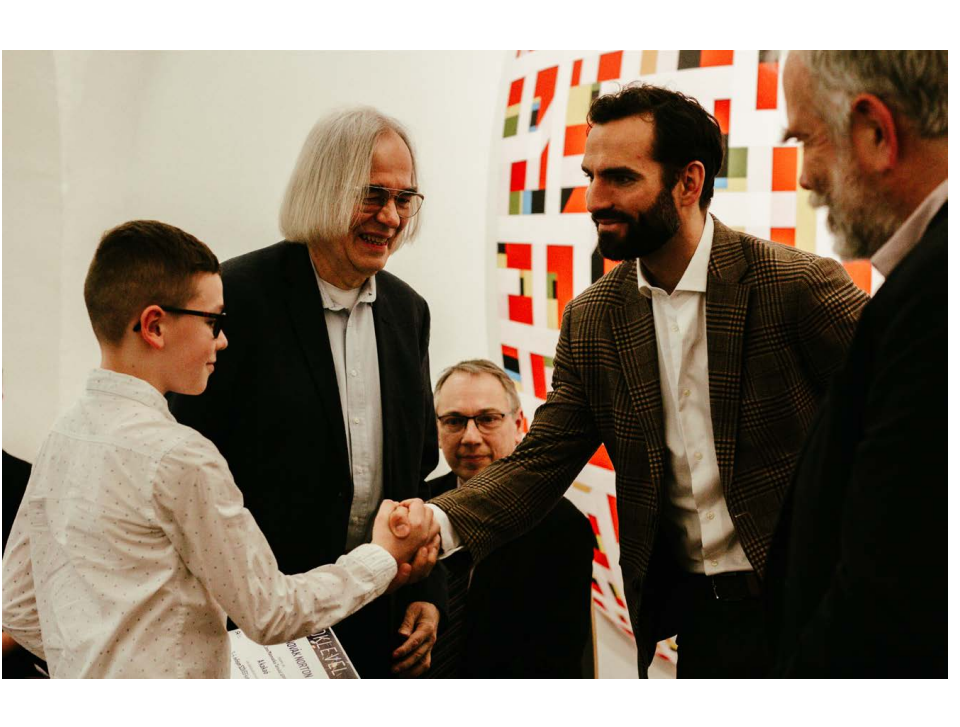
Az APP&X alkotópályázat eredményei

A Bolyai János Matematikai Társulat az UNESCO Bolyai Emlékévhez kapcsolódva hirdette meg APP&X pályázatát, amire 3-13. évfolyamos diákoktól összesen 238 kép, szöveg és videó érkezett Bolyai János Appendix című művéhez kapcsolódva. A pályázatok az ország minden tájáról különféle iskolákból érkeztek, erről előző számunkban írtunk részletesen.



Pálfy Péter Pál, Simon Péter, Szilágyi Áron, Kollár László a díjátadón. A háttérben a Vasarely Múzeum időszaki kiállításán Szentpétery Ádám festőművész alkotásának részlete látható.

A zsűri tiszteletbeli elnöke Szilágyi Áron olimpiai bajnok vívó volt, aki a Fazekas Gimnázium speciális matematika tagozatára járt, és matematika versenyeken is kiváló eredményeket ért el. A három műfajt a zsűrin belül három csoport bírálta el, mindegyikben jelen volt egy külső szakértő és a Bolyai Társulat egy vagy két képviselője. A zsűri 7 képet, 1 videót és 2 szöveget díjazott, és az internetes közönségszavazás eredményeként egy közönségdíj is született. A zsűri méltányolta a díjazott csapatok tanárait, és 5 különdíjat is kiosztott azoknak a tanároknak, akiknek kiemelkedően sok diákja nyújtott be magas színvonalú alkotást. A díjazottak alkotásai (és nevük, iskolájuk és tanáruk neve) megtekinthetők a Bolyai Társulat honlapján.



A díjátadót a budapesti Vasarely Múzeumban, Óbudán 2024. január 20-án rendezték több neves vendég részvételével. *Szilágyi Áron* arról beszélt, hogy a matematika hogyan segítette őt a vívásban elért eredményeiben. *Kollár László* akadémikus, a Magyar Tudományos Akadémia főtitkára hangsúlyozta, hogy az MTA fontosnak tartja a diákok támogatását a jövő szempontjából. (Az MTA Alumni programja 1.3 millió forinttal támogatta a pályázatot, amit a diákok és a tanárok nyereményeire fordított a Társulat.) *Laczkovich Miklós* akadémikus, az MTA Matematikai Tudományok Osztályának korábbi elnöke a pályázatok sokszínűségét emelte ki. *Pálfy Péter Pál* akadémikus, a Bolyai János Matematikai Társulat elnöke Bolyai János munkásságát és a Bolyai Társulat történetét foglalta össze.

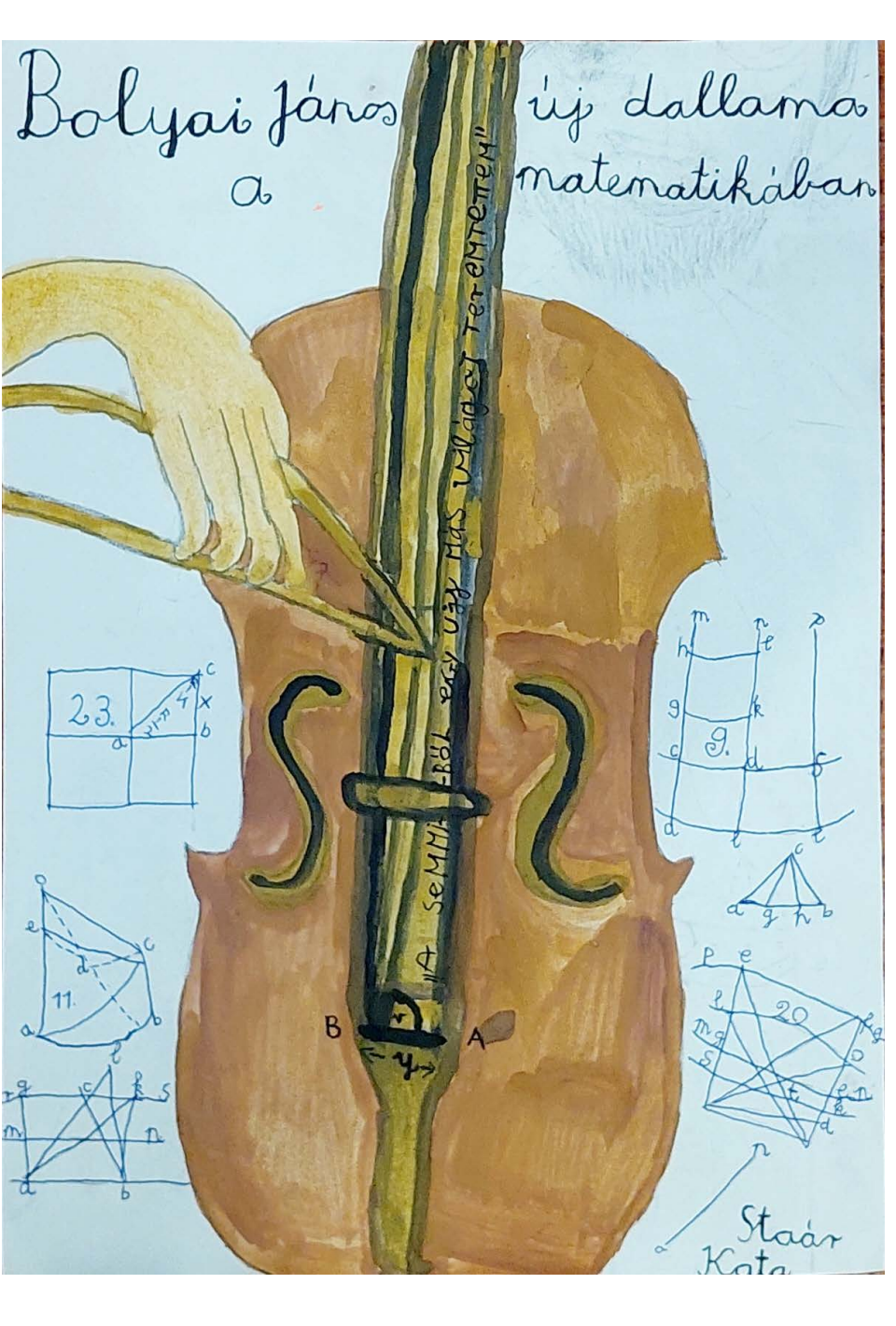
Huszti Melinda zsűritag, divat- és textiltervező művész így jellemezte a beérkezett 212 kép színvonalát és sokszínűségét: „Rendkívül szép napokat hozott a zsűri életébe a pályázatok beérkezése, és azok feldolgozása. Beszélgethettünk érzésekről, benyomásokról, amelyet az adott alkotás nyújtott számunkra, gyönyörködhettünk abban, hogy mennyiféle képalkotáshoz alkalmas eszközt és technikát sorakoztattak fel elénk a pályázó diákok – hitelesen képviselve a vizuális műfaj kifejezésmódjainak sokszínűségét. Több pályamű esetében egyetértettünk abban, hogy akár egy kortárs galériában is méltán megállná a helyét a mű, vagy éppen valamelyikünk otthonának a falán is örömmel nézegetnénk nap mint nap. Mind a manuális, mind a digitális képalkotó módszerek tekintetében igaznak mondható az, hogy igen széleskörű és magas minőségű ismeretekről, hozzáértésről tettek tanúbizonyságot a diákok, és külön öröm volt számunkra, hogy mindkét irány ugyanúgy megjelent mind a három korosztályban. A „kicsik" is bátran, és ügyesen használták a számítógépes grafika eszköztárát, és a „nagyok" sem restelkedtek megmutatni azt, hogy akár egyetlen grafitceruza is mennyire nagyszerűen alkalmas tud lenni arra, hogy ötleteiket, gondolataikat a vizualitás nyelvére fordítsák. A fantázia, a szabad asszociációk, a mélyebb tartalom és az áttételes jelentés, a szimbolikus képek használata mind-mind arra engedett következtetni minket, hogy mennyire sokrétű gondolkodással, széleskörű ismeretanyaggal rendelkeznek a diákok. Ez a motívum ugyanúgy megjelent a munkákban a tartalmi síkon, mint ahogyan az előbb említett eszközhasználati sokszínűségben."

Horváth Beáta zsűritag, az ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskola mozgókép szakos vezetőtanára elmondása szerint a videópályázók több mozgóképes formával éltek: volt aki szimulációt, mások animációt készítettek, de láthattunk kisfilmet és szórakoztató oktató anyagokat (edutainmenteket) is. *Szmerka Gergely* zsűritag, a Bolyai Társulat Oktatási Bizottságának tagja, a Veres Péter Gimnázium matematika-magyar szakos tanára és az ELTE TTK oktatója a szöveg kategória zsűrijében értékelte a beérkezett pályműveket. "Minden korosztályból küldtek be alkotásokat a pályázók, összesen tizenhetet. Izgalmas írások születtek, amelyek a matematika és a szövegek világa közti összefüggésekre világítanak rá."

Simon Péter, a Bolyai Társulat főtitkára, az ELTE Matematikai Intézetének igazgatója a képzsűri tagjaként ezt mondta: „Nehéz dolga volt a zsűrinek. Akármennyire közhelyszerűen hangzik is ez a mondat, ki kell mondanunk, mert valóban sokszori nekifutásra sikerült néhány munka tekintetében döntésre jutnunk, és fájó szívvel engedtük el egyik-másik kedvenc alkotásunkat, mire sikerült megtalálnunk a mindannyiunk által legkiemelkedőbbként elfogadott pályaműveket".

Ács Katalin zsűritag, a Bolyai Társulat Oktatási Bizottságának tagja, a pályázat megálmodója és az APP&X elnevezés ötletgazdája így foglalta össze a zsűrizés szempontjait: "A döntéshozatalnál sokféle szempontot kellett figyelembe vennünk. Az egyik legfontosabb alapkritérium az volt, hogy egyértelműen és ötletesen jelenjen meg a pályázati kiírásban felsorolt, Bolyai munkásságához kapcsolható fogalmak közül minimum kettő: végtelen, távolság, találkozások, világok, tér, párhuzamosok, appendix. A másik fontos szempont emellett az volt, hogy a létrehozott mű, a technikától függetlenül vizsgálva önmagában is kiemelkedő művészeti, esztétikai értékkel bírjon. Nagyra értékeltük még az alkotások vonatkozásában az egyéniességet, szellemességet, az adaptációk megvalósításában rejlő kreativitás mértékét, az alkotó által kiválasztott technikában való jártasságot."

A díjazott diákok nyereményként több élmény közül választhattak: 8 diák szabadulószobát és ingyenes Medve Szabadtéri Matematikaverseny nevezést, 4 diák Medve Matek Élménytábort, 2 diák Noha alkotótábort illetve kerámiatanfolyamot, és 2 diák online videofilmes tanfolyamot választott. A díjazott tanárok a Vasarely Múzeum csapata által készített ajándéktárgyat és könyv- vagy élményutalványt nyertek. A rövid díjkiosztó ceremónia után a diákok múzeumpedagógiai foglalkozáson, a tanárok és vendégek pedig tárlatvezetésen vettek részt.


Bolyai János új dallama a matematikában
Staár Kata

Staár Kata: Bolyai János új dallama a matematikában

A díjazott alkotások a Bolyai Társulat honlapján tekinthetők meg.

Szász Réka, Bolyai János Matematikai Társulat

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

AZ ÉRINTŐ 7 ÉVES ÉVFORDULÓJÁRA ÚJ ROVAT INDULT, A **HÉTTUSA:** MINDEN LAPSZÁMUNKBAN 7 MEGOLDHATÓ ÉS BÁRKI ÁLTAL BEKÜLDHETŐ FELADATOT TESZÜNK KÖZZÉ, AMELYEKEN JÓ GONDOLKOZNI, ÉRDEKESEK, ÉS AMELYEK ÚJABB KÉRDÉSEKET, MÉLYEBB ÉS ÁLTALÁNOSABB VIZSGÁLATOKAT IS INSPIRÁLHATNAK. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÓKA SÁNDOR*.)

Róka Sándor

2024. MÁRCIUS, HÉTTUSA

Héttusa 4. forduló (2024. március)

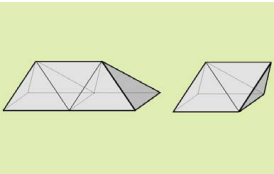
A Héttusa rovatban kitűzött feladatokra bárki küldhet megoldást. Elég a feladat kérdésére a feladatok sorszámát és a feltett kérdésekre a válaszokat megküldeni, indoklást, részletes megoldást nem szükséges írni. A beküldési határidő: **2024. április 8.** Következnek a 4. forduló feladatai.

Makay Géza

2024. MÁRCIUS, HÉTTUSA

Mastermind, bástyák és ismerősök

A Héttusa feladatok egyik lelkes megoldója érdekes kérdéseket vet fel a legutóbbi feladatok némelyike kapcsán. Például hányféleképpen helyezhető el egy sakktáblán 56 bástya a 17. feladat feltételeivel? Mi az, ami kiszámítható számítógéppel és mi az, ami nem? A 18. feladat megoldása lényegében a Mastermind játék 4 bábuval. Milyen stratégiával működjön egy Mastermind-ot játszó program? Végül a 20. feladatnak hányféle megoldása lesz, és hogyan általánosítható? *Makay Géza* ír mindezekről a következőkben.



Róka Sándor

2024. MÁRCIUS, HÉTTUSA

Megoldások, megjegyzések a Héttusa 3. fordulójának feladataihoz

2024 januárjában lezárult a Héttusa versenyének 3. fordulója is, a versenypéldák a 2023. decemberi Érintőben jelentek meg. A feladatok kitűzője néha nem is gondol olyan megoldásra, mint amit egy-egy beküldőtől kap. A megoldók időnként hasznos kiegészítésekkel, megjegyzésekkel örvendeztetik meg a rovat szerkesztőjét, *Róka Sándort*. Így történt ez a decemberben kitűzött feladatok megoldásainál is…

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

Róka Sándor 2024. MÁRCIUS, HÉTTUSA

Héttusa 4. forduló (2024. március)

A Héttusa rovatban kitűzött feladatokra bárki küldhet megoldást. Elég a feladat kérdésére a feladatok sorszámát és a feltett kérdésekre a válaszokat megküldeni, indoklást, részletes megoldást nem szükséges írni.

A válaszokat a hettusa@ematlap.hu címre várjuk. A beküldési határidő: **2024. április 8.**

A verseny nyilvántartása érdekében kérjük, hogy megoldásaikat névvel vagy olyan álnévvel írják alá, amit nyilvánosan közzé tehetünk.

Fordulónként a legjobb megoldók közül néhányan könyvjutalmat kapnak.

Versenyzőinket két kategóriában jutalmazzuk: diák (azaz általános vagy középiskolás), illetve felnőtt. Kérjük, hogy beküldéskor jelezzék, melyik kategóriában indulnak. Ha valaki ezt nem jelzi, őt a felnőttek közé soroljuk.

A 4. forduló után az első négy forduló összesítése alapján az élmezőny (10-20 versenyző) jutalomkönyvet kap.

A határidőt követően a megoldások megjelennek a Facebook-oldalunkon. Az ezután beküldött megoldásokat nem értékeljük a versenyben. Az Érintő következő számában olvashatják a legjobb megoldók nevét és a megjegyzéseket, kiegészítéseket a megoldásokhoz.

Feladatrovatunkhoz örömmel veszünk minden segítő szándékot, várjuk új feladatjavaslataikat, valamelyik feladat szép megoldását, vagy a feladat általánosítását.

A 4. forduló feladatai

22. Igaz-e, hogy tetszőleges a és b pozitív egészekhez van olyan c pozitív egész szám, amelyre $a \cdot c$ négyzetszám, $b \cdot c$ köbszám?

23. Hányféle módon lehet szétosztani 17 golyót néhány egymás után sorakozó edénybe úgy, hogy mindegyikbe legalább annyi golyót teszünk, mint amennyi az előző edényekbe összesen került? (Így például 6 golyó szétosztása eszerint a feltétel szerint 6-féleképp történhet: 1-1-4, 1-2-3, 1-5, 2-4, 3-3 és 6.)

24. Zsófi bábukat rak egy üres sakktáblára. Akkor helyezhet el egy bábut egy üres mezőre, ha annak van legalább három üres oldalszomszédja. Legfeljebb hány bábut helyezhet a táblára Zsófi?

25. Az {1,2,3,...,99,100} halmaz legalább kételemű részhalmazát nevezzük *átlagosnak*, ha a részhalmazban lévő számok átlaga (számtani közepe) egész szám. Az átlagos részhalmazok száma páros vagy páratlan?

26. A síkon felvettünk 11 pontot úgy, hogy nincs közte három olyan, amely egy egyenesre esne, így bármely három pont egy háromszög csúcsait alkotja. Lehetséges-e, hogy a háromszögeknek legalább a fele ugyanakkora területű?

27. Egy kisvárosban 7 buszmegálló van, és néhány autóbuszjárat. Mindegyik buszjáratnak 3 buszmegállója van, és két buszjáratnak legfeljebb egy közös megállója lehet. Legfeljebb hány buszjárat lehet ebben a városban?

28. A hét törpe körbeüli az asztalt, és Hófehérke mindegyiknek annyi cukorkát ad, ahány hüvelyk a különbség a törpe két szomszédjának magassága között. Legfeljebb hány cukorkát oszthat szét közöttük Hófehérke, ha a törpék magassága 31, 32, 33, 34, 35, 36 és 37 hüvelyk?

A feladatokat válogatta: Róka Sándor

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI
GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Adatkezelés
Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon:

Makay Géza 2024. MÁRCIUS, HÉTTUSA

Mastermind, bástyák és ismerősök

A Héttusa 17., 18. és 20. feladata továbbgondolható, olyan, amit érdemes számítógép segítségével is megvizsgálni.

17. *Marci bástyákat rak egy üres sakktáblára. Akkor helyezhet el egy bástyát egy üres mezőre, ha annak legalább két oldalszomszédja üres. Legfeljebb hány bástyát helyezhet a táblára Marci?*

Megoldás. 56-ot például így; itt a számok azt jelzik, hogy az adott mezőbe hányadik lépésben rakunk le bástyát:

1	2	3	4	5	6	7	
8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	
23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	
38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	
	53		54		55		56

1	2	3	4	5	6	7	
8	9	10	11	12	13		56
14	15	16	17	18		55	54
19	20	21	22		53	52	51
23	24	25		50	49	48	47
26	27		46	45	44	43	42
28		41	40	39	38	37	36
	35	34	33	32	31	30	29

Hogy 56-nál több bástya nem helyezhető el, az belátható a mintamegoldás alapján is (lásd a Héttusa 3. fordulójának megoldásait). De a kitűző felhívta a szerző figyelmét egy ehhez kapcsolható feladatra:

Adott egy $n \times n$-es négyzetrács, amelynek minden négyzete vagy gyepes, vagy üres. Egy üres négyzet akkor válik gyepessé, ha legalább két szomszédja már gyepes. Egy gyepes négyzet mindig gyepes marad. Legalább hány négyzetnek kell gyepesnek lennie ahhoz, hogy a gyep átterjedjen az összes négyzetre?

Először is belátjuk, hogy a két probléma tényleg ekvivalens a következő értelemben: ha egy megfelelő bástyalerakásnál kimaradó mezőket tesszük gyepessé, akkor az át fog terjedni az összes négyzetre, illetve ha van egy megfelelő kiindulási gyepesítés, akkor a nem gyepes négyzetekre megfelelő sorrendben lehelyezhetőek a bástyák. Ehhez azt kell meggondolni, hogy egy új mező gyepesedése pontosan akkor történhet meg, ha a bástyalerakásos példánál annak a mezőnek két üres szomszédja van, és ezért oda lerakható a bástya. Másképpen fogalmazva (összevonva a két feladatot), a bástyákat csak „zöldmezős beruházás” keretei között lehet lerakni: eredetileg minden mező gyepes, és bástya akkor rakható le, ha legalább két szomszédja gyepes. De (mint minden emberi alkotás esetén) a természet igyekszik visszahódítani az elfoglalt területet: két gyepes szomszédból „a gyökerek feltörik a bástya alapját”, és abból a négyzetből ismét gyepes lesz. Vagyis a két probléma megoldása pontosan ugyanannak a folyamatnak az előre, illetve hátra történő végrehajtását jelenti. A fenti bástyaelhelyezések például a következő gyepesedési sorrendnek felelnek meg (0 a kezdeti gyepes mezőket jelöli):

56	55	54	53	52	51	50	0
49	48	47	46	45	44	43	42
41	40	39	38	37	36	35	0
34	33	32	31	30	29	28	27
26	25	24	23	22	21	20	0
19	18	17	16	15	14	13	12
11	10	9	8	7	6	5	0
0	4	0	3	0	2	0	1

56	55	54	53	52	51	50	0
49	48	47	46	45	44	0	1
43	42	41	40	39	0	2	3
38	37	36	35	0	4	5	6
34	33	32	0	7	8	9	10
31	30	0	11	12	13	14	15
29	0	16	17	18	19	20	21
0	22	23	24	25	26	27	28

Gyakorlatilag a számokat 57-ből kivonva (a műveletek sorrendjét megfordítva) megkaptuk a gyepesedés egy lehetséges sorrendjét. A fentieknek megfelelően akkor a bástyalerakásnál kimaradó mezők lesznek a másik példában a kezdetben gyepesítendő mezők. Az pedig ismert állítás (ld. [1]), hogy a gyepesítési probléma esetén egy $n \times n$-es táblán legalább n mezőt kell gyepesíteni, hogy elterjedjen a gyep. Ennek a hivatkozásban is leírt bizonyítása a következő. Vegyük a kezdetben gyepesített mezők kerületét. Amikor terjed a gyep, akkor egy új gyepes mező legalább két oldala fog érintkezni a régebbi gyepes mezők oldalaival, úgyhogy azok nem lesznek a gyepes terület kerületén a továbbiakban. Másrészt az új gyepes mező nem gyepes szomszédaival közös oldalai bekerülnek a kerületbe. Ez alapján a gyepes terület kerülete nem nőhet. Ha az $n \times n$-es tábla minden mezője gyepes lesz a végén, akkor annak kerülete $4n$, így kezdetben is legalább $4n$-nek kell lennie a kerületnek, tehát legalább n mezőnek gyepesnek kell lennie, és lehet ilyen konfigurációt találni. Visszatérve az eredeti problémára ez azt jelenti, hogy a bástyalerakások végén még legalább n üres mezőnek lennie kell, vagyis a 8×8-as tábla esetén legfeljebb $8 \times 8 - 8 = 56$ bástya helyezhető el, és ez is megvalósítható.

Érdekes kérdés lehet, hogy hányféleképpen rakhatja le Marci a bástyákat úgy, hogy végül 56 bástya legyen a táblán. Igazából két lehetséges értelmezése van ennek a kérdésnek is: hány bástya végállás lehetséges, illetve hogy ha a lerakás sorrendje is számít, akkor azokból hány van.

Az első lehetséges értelmezése a kérdésnek (hogy t.i. hány különböző bástya végállás lehetséges) elérhetőnek tűnik: 64 mezőből 8 lesz üres, ilyenből $\binom{64}{8} = 4\,426\,165\,368$ eset van. A gyepes példával való összekötésből tudjuk, hogy ezek az üres mezők nem lehetnek oldalszomszédosak, hiszen akkor a kerületük nem adná ki a gyepes példa végállásának 32-es kerületét, ez tovább csökkenti a lehetséges elhelyezések számát (abból már „csak” $771\,464\,278$ darab van). Erre már írhatunk egy olyan programot, ami különösebb optimalizálás nélkül is végigellenőrzi ezeket kevesebb, mint 10 perc alatt. Eszerint $7\,006\,916$ bástya végállás lehetséges. Csak a kíváncsiság kedvéért kiszámoltattam kisebb táblákra is a lehetséges bástyaelhelyezések számát, és kikerestem megvizsgálandó esetek számát és az eredmények sorozatát is az On-Line Encyclopedia of Integer Sequences oldalon, és mindkettőt megtaláltam (`https://oeis.org/A201511`, `https://oeis.org/A146971`).

Ha a lerakás sorrendje is számít, akkor nyilván sokkal több esetet kell végignézetnünk a programmal, becsüljük meg, hogy mennyit. Induljunk ki a fenti második megoldásból, amikor a mellékátlóban nincsenek bástyák. Ebben az esetben a mellékátló feletti és a mellékátló alatti bástyák egymástól függetlenül lerakhatóak, így ha csak azt nézzük, hogy minden lépésben kiválaszthatjuk, hogy melyik oldalt építjük tovább, már akkor $\binom{56}{28} \approx 7{,}65 \cdot 10^{15}$ lehetőségünk van, és ez már túl sok. De akár egy még nagyobb alsó becslést is mondhatunk. A mellékátló felett és alatt is alkalmazhatjuk a következő lerakási módszert: rakjuk le a sarokba az első bástyát, a mellékátlóval párhuzamos vonalon levő, a sarokkal szomszédos 2 bástyát bármilyen sorrendben, ezután a mellékátlóval párhuzamos vonalon levő ezekkel szomszédos 3 bástyát bármilyen sorrendben, és így tovább. Így a mellékátló alatt és felett is már legalább $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 6! \cdot 7! = 125\,411\,328\,000$ lerakási sorrendünk van, és ebből az egész táblára kapunk egy alsó becslést:

$$\binom{56}{28}(1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 6! \cdot 7!)^2 \approx 1{,}2 \cdot 10^{38}.$$

Eszerint az összes ilyen sorrend kiszámolása egy mai számítógép számára messze túl van a lehetőségeken még erre az egyetlen végállásra is…

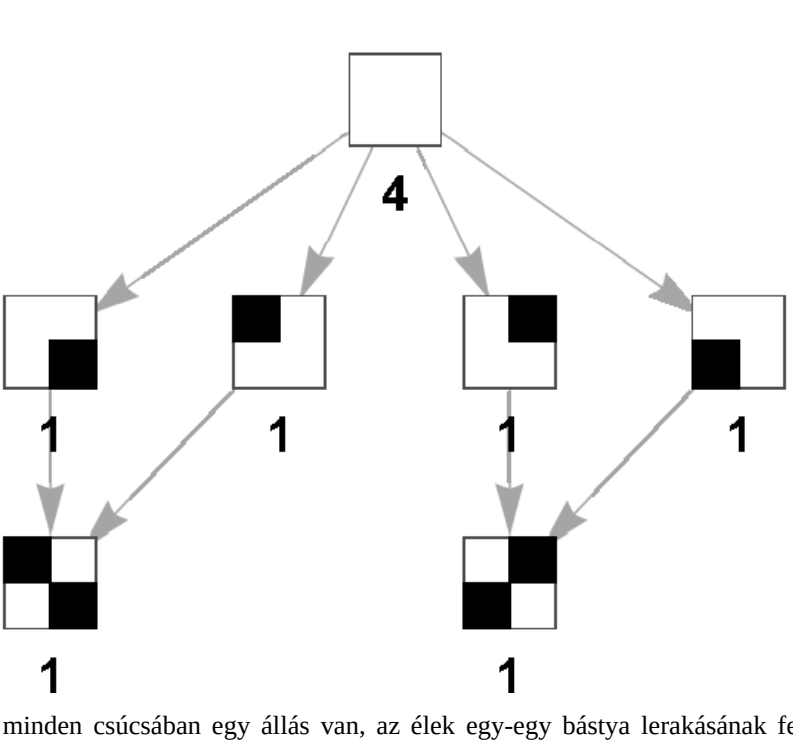
Ez az alsó becslés elég pontosra sikeredett, mert a lehetséges lerakási sorrendek száma az átlós végállásra „csak” kb. 150 000-szer ekkora:

$$18072441022044356917599235013006699003904000 \approx 1.81 \cdot 10^{43}.$$

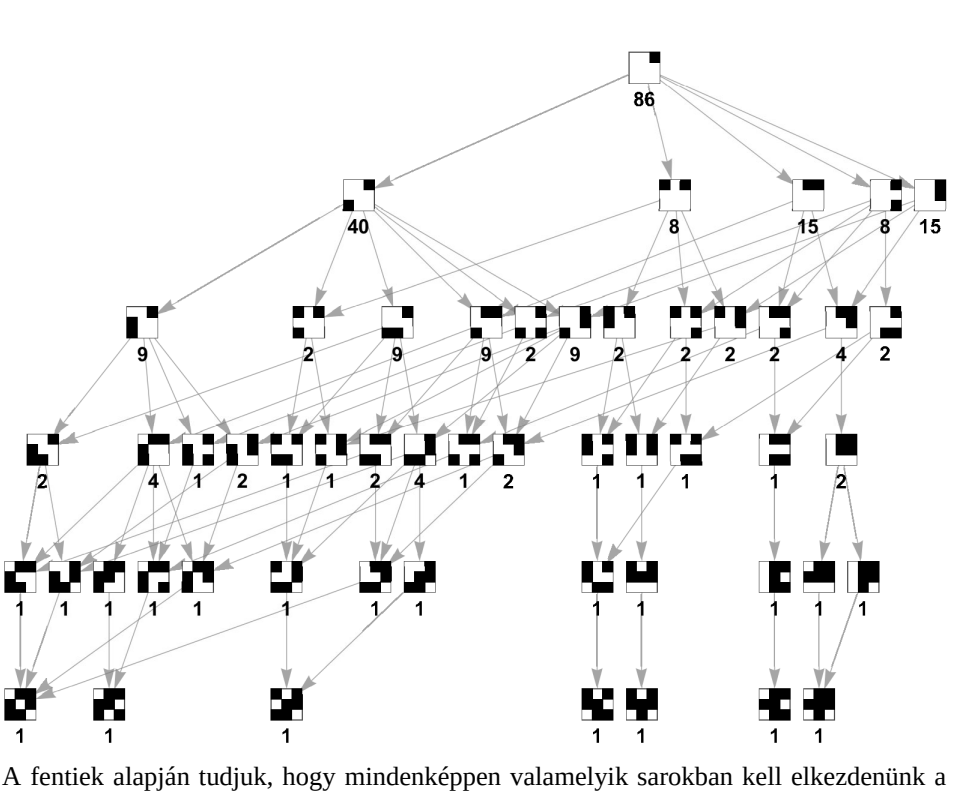
(Csak ellenőrzésképpen: ezt a számot osztva az $\binom{56}{28}$ számmal és gyököt vonva belőle kapjuk meg, hogy az átló egyik oldalán hányféle sorrendben rakhatjuk le a bástyákat, és valóban egész számot kapunk: 48 608 795 688 960, ami tényleg nagyobb a 125 411 328 000-nél.)

Hogy honnan tudom ezt a számot? Annak ellenére, hogy megpróbáltam meggyőzni az olvasót (ahogy korábban saját magamat is) arról, hogy ez túl nagy szám ahhoz, hogy számítógéppel vizsgálható legyen a probléma, mégis vizsgálható. Ugyanis a cél nem az, hogy az összes lehetséges lerakási sorrendet meghatározzuk, hanem „csak” annyi, hogy ezek számát megkapjuk. Ezt a konkrét számot kevesebb, mint 7 másodperc alatt ki lehet számolni az alábbiakban ismertetett algoritmussal.

Nézzünk először egy egyszerű esetet, a 2×2-es „sakktáblát”. Itt 2 lehetséges végállás van: az átellenes sarokpárok adják meg ezeket. Könnyen végigkövethetjük egy irányított gráfon, hogy hányféleképpen lehet azokat kihozni:



A gráf minden csúcsában egy állás van, az élek egy-egy bástya lerakásának felelnek meg. A lehetséges befejezések száma (a csúcs alatti szám) a belőle kiinduló élek végpontjainál levő csúcsok lehetséges befejezéseinek összege. A legalsó csúcsoknál (a végállásoknál) ez a szám nyilván 1, így alulról felfelé kitölthetjük a lehetséges befejezések számát. Az algoritmus (a technikai megvalósítás nehézségeitől eltekintve) így annyiból áll, hogy a már kiszámolt végállásokból határozzuk meg azokat a bástyaállásokat, amelyeken keresztül azok elérhetőek, rakjuk össze ezeket egy irányított gráfba, és számoljuk össze az esetek számát a fenti módon. Példaként legyen itt a 3×3-as táblához tartozó gráfnak az a része, amelyik a jobb felső sarkot tartalmazó kitöltéseket mutatja:



A fentiek alapján tudjuk, hogy mindenképpen valamelyik sarokban kell elkezdenünk a kitöltést, így a 3×3-as esetben $86 \cdot 4 = 344$ az összes lehetséges kitöltések száma. Ugyanez az algoritmus (optimális módon megírva) működik a 8×8-as tábla esetén is: 30.2 Gb memória felhasználással (a gráfunkban 870 540 024 csúcs és több mint 4.6 milliárd él lesz) 43 perc alatt megkapjuk az eredményt:

$$16666991439774589766595679979674884202770708096 \approx 1.6667 \cdot 10^{46}$$

Ez nem kicsi szám. Ha a mai leggyorsabb szuperszámítógéppel próbálnánk az összes lehetséges lerakási sorrendet meghatározni, akkor az több, mint 30 000 milliárdszor milliárd évbe telne...

18. *Gondoltam egy különböző jegyekből álló négyjegyű számra. A számnak az 5870, 1763, 9342, 4016 számok mindegyikével pontosan két közös számjegye van, és ezek a jegyek más helyeken állnak, mint a gondolt számban. Mi ez a szám?*

Megoldás: Ez a Mastermind nevű játék egy állásának felel meg, ahol 4 színt kell kitalálni tippekkel, amelyekre a lehetséges válaszok, hogy egy szín helyes és a helyén van, vagy egy szín helyes, de nincs a helyén. Gyerekkoromban sokat játszottam ezzel a játékkal (még mindig megvan és unokaöcsikéimmel is játszottuk), így becsületbeli ügynek tekintettem, hogy ezt számítógép segítsége nélkül megoldjam (amúgy könnyű lenne programot írni rá).

A megadott négy számban az egyes számjegyek száma a következő:

$$0:2 \text{ db},\ 1:2 \text{ db},\ 2:1 \text{ db},\ 3:2 \text{ db},\ 4:2 \text{ db},\ 5:1 \text{ db},\ 6:2 \text{ db},\ 7:2 \text{ db},\ 8:1 \text{ db},\ 9:1 \text{ db}.$$

A négy számból összesen 8 helyes számjegynek kell összejönnie, így a négy különböző számjegy mindegyike pontosan kétszer kell előforduljon, hiszen ha egy olyan számjegy szerepelne a gondolt számban, ami a csak egyszer fordul elő a fenti négy számban, akkor kellene lennie olyan számjegynek is, ami legalább háromszor fordul elő, olyan pedig nincs. Így kizárhatjuk a 2, 5, 8, 9 számjegyeket. Ezeket (gondolatban) kihúzva az első és harmadik számból a 0, 3, 4, 7 számjegyek maradnak meg. A százas helyiértéken a számokban szerepel a 7, 3 és 0 számjegy, így ott csak a 4-es lehet. Az egyes helyiértéken szerepel a 0 és a 3, a 4-est már elhelyeztük, úgyhogy oda a 7-est kell írnunk. Mivel a gondol szám négyjegyű, az első számjegye nem lehet a 0, oda kerül a 3-as és a tízesek helyére a 0. A gondolt szám tehát a 3407.

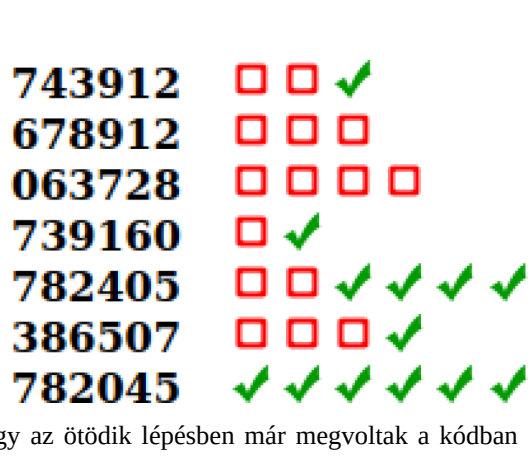
De ha már emlegettem a programozást: érdekes feladat egy olyan programot írni a Mastermind játékra, ami az ember által kigondolt számot (színkombinációt) minél kevesebb tippel kitalálja. Egy adott állásban még lesznek lehetséges megoldások, ezek számát próbáljuk csökkenteni. A programban több stratégia is elképzelhető:

1. Olyat tippeljünk, ami az arra adható válaszok alapján a legrosszabb esetben is minél több lehetséges megoldást kizár. Ez az okos (és „ellenséges”) emberi ellenfelek esetén jó: ha az ember a kitalált számát mindig úgy változtatja meg, hogy az az eddig általa adott információknak megfeleljen, de minél több legyen a még lehetséges megoldások száma.

2. Olyat tippeljünk, ami az arra adható válaszok alapján a legjobb esetben minél több lehetséges megoldást kizár. Ez az okos (és „jóindulatú”) emberi ellenfelek esetén jó: ha az ember a kitalált számát mindig úgy változtatja meg, hogy az eddig általa adott információknak megfeleljen, és minél kevesebb legyen a még lehetséges megoldások száma. Persze, ha ezt szó szerint vesszük, akkor a gép első tippjére azt kellene mondania az embernek, hogy az volt a helyes...

3. A legkiegyensúlyozottabb stratégia valószínűleg az, hogy olyat tippelünk, ami az arra adható válaszok alapján átlagban minél több lehetséges megoldást kizár. Ez a „fair” emberi játékosok esetén lesz hatékony, akik nem változtatgatják a kitalált számukat.

Érdekes dolog, hogy (bármelyik esetet is nézzük) nem az az elsődleges cél, hogy jót tippeljünk, hanem hogy kizárjuk a rosszakat. Az emberek többsége hajlamos az előbbire törekedni a játékban, márcsak azért is, mert az utóbbit végiggondolni sokkal bonyolultabb. Végül meg is írtam ezt a programot az 1. stratégiával [2], itt egy példa futtatás eredménye:



```
743912 ☐☐✓
678912 ☐☐☐
063728 ☐☐☐☐
739160 ☐✓
782405 ☐☐✓✓✓✓
386507 ☐☐☐✓
782045 ✓✓✓✓✓✓
```

Figyeljük meg, hogy az ötödik lépésben már megvoltak a kódban levő számjegyek, a hatodik lépésben a gép mégsem azokat a számjegyeket használva tippelt: több esetet tudott kizárni egy „rosszabb” tippel.

Persze, a programmal meg lehet oldatni a feladatot is erre a linkre kattintva. Próbáljuk meg többször is újratölteni az oldalt. Ez megadja a feladat két lehetséges megoldását: a kódban lehet 0 az első számjegy, a feladatban nem, de ez utóbbit nem programoztam bele a programba. Az olvasónak egy kis gondolkodnivaló, hogy a Status változó értéke milyen módon írja le a feladat problémáját...

A program megírása után fedeztem fel Donald Knuth (A számítógép-programozás művészete című mű szerzője, a TEX tördelőszerkesztő rendszer megalkotója [ezt a cikket is TEX-ben írom]) egyik cikkét [3], amelyben az eredeti MasterMind játékot elemzi. Ebben az 1. stratégia alapján bizonyítja, hogy 6 szín és 4 hely esetén legfeljebb öt tippel kitalálható a titkos kombináció. Ehhez már 1977-ben (!) számítógépet használt, és már Ő is felfedezte, hogy nem feltétlenül egy lehetséges megoldást kell tippelni.

20. *Lehetséges-e egy társaságban, hogy a jelenlévők közül mindenki 4 másikat ismer, és a társaság bármely két egymást nem ismerő tagjának a többiek között pontosan 2 közös ismerőse van? (Az ismeretségek kölcsönösek, és a társaságnak vannak tagjai.)*

Megoldás: Igen, egy 5 tagú társaságban, ha mindenki ismer mindenkit, akkor az megfelel a feladat feltételeinek.

Persze, túl egyszerű lenne ennyivel elintézni a dolgot, hiszen akkor a feladat második tagmondata egy üreshalmazra vonatkozik. Szokás szerint programot írtam rá, és van megoldás 8 és 9 tagú társaságra is. Ezekben a szomszédsági mátrixokban az x jelöli, hogy ki ismer kit, és gráfizomorfiától eltekintve ez az összes lehetséges megoldás:

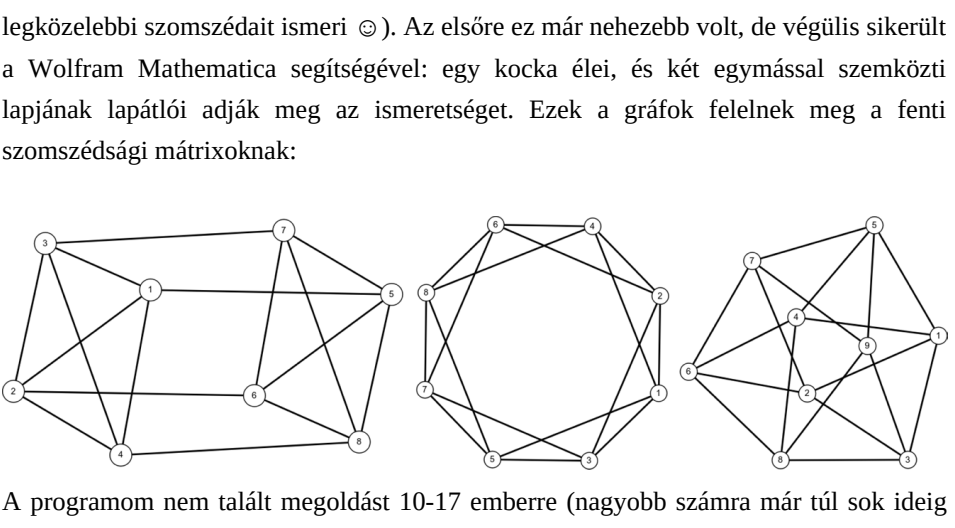
	×	×	×	×			
×		×	×		×		
×	×		×			×	
×	×	×					×
×					×	×	×
	×			×		×	×
		×		×	×		×
			×	×	×	×	

	×	×	×	×			
×		×	×		×		
×	×			×		×	
×	×				×		×
×		×				×	×
	×		×			×	×
		×		×	×		×
			×	×	×	×	

	×	×	×	×				
×		×			×	×		
×	×						×	×
×				×	×		×	
×			×			×		×
	×		×			×	×	
	×			×	×			×
		×	×		×			×
		×		×		×	×	

Nyilván 5-nél kevesebb ember nem lehet a társaságban, 5 ember esetén pedig mindenkinek ismernie kell mindenkit. Az könnyen belátható, hogy 6 és 7 tagú társaság nem felelhet meg a feltételnek: ekkor ugyanis lesznek olyan emberpárok, akik nem ismerik egymást, viszont „túl sok” embert ismernek, így a közös ismerőseik száma legalább 4, illetve 3 lesz.

Érdekes a mintamegoldásban a 9 emberre vonatkozó konstrukció, a fenti szomszédsági mátrix persze megfelel annak. De emiatt elgondolkodtam a 8 emberes megoldásokon, hogy azoknak van-e valami „geometriai” jelentése. A középső szomszédsági mátrixra viszonylag könnyen találtam jelentést: egy szabályos nyolcszögben a szomszédok és a második szomszédok legyenek ismerősök (ez amúgy is teljesen „normális”, az ember a legközelebbi szomszédait ismeri ☺). Az elsőre ez már nehezebb volt, de végülis sikerült a Wolfram Mathematica segítségével: egy kocka élei, és két egymással szemközti lapjának lapátlói adják meg az ismeretséget. Ezek a gráfok felelnek meg a fenti szomszédsági mátrixoknak:



A programom nem talált megoldást 10-17 emberre (nagyobb számra már túl sok ideig futott volna). Úgyhogy az a sejtés, hogy 10-nél több ember esetén nem lehetséges a feladat állítása. Számoljunk egy kicsit. 2 egymásnak ismeretlen ember között van 2 darab kettő hosszú út. Így ha n ember van a társaságban, akkor mindenkinek $n-5$ ember lesz ismeretlen, vagyis az ismeretlen párok száma $n(n-5)/2$, és a köztük lévő különböző kettő hosszú utak száma $n(n-5)$. A kettő hosszú utak számát úgy is meghatározhatjuk, hogy ha egy adott ember ismerősei nem ismerik egymást, akkor $\binom{4}{2} = 6$ darab kettő hosszú út keletkezik, amelyiken az adott ember „középen” van. Ezek a kettő hosszú utak különbözőek, hiszen különbözőek a középen álló emberek, így az összes kettő hosszú utak száma $6n$. Eszerint $n \geq 12$ esetén legalább $7n$ darab kettő hosszú út kellene, de csak $6n$ darab van. Mivel 10-re és 11-re programmal ellenőriztük, hogy nincs megfelelő ismeretség, 12-től pedig beláttuk, hogy nem is lehetséges ilyen ismeretség, ezért igaz, hogy 10-nél több emberre nincs megoldása a feladatnak. A fentiek alapján ezek szerint csak 4 lényegesen különböző megoldás van: 5 és 9 emberre 1-1, 8 emberre 2.

Érdemes megjegyezni, hogy a fenti bizonyítás alapján véges sok megoldás van akkor is, ha egy n tagú társaságban mindekinek legfeljebb k ismerőse van, és bármelyik két ismeretlennek van legalább l közös ismerőse ($0 < l \leq k < n$). Ugyanis az ismeretlen párok száma az ilyen esetekben n^2 nagyságrendű lesz: $(n(n-l-1)/2)$, míg a közös ismerősök alapján az ismeretlen párokat összekötő kettő hosszú utak száma n-nel arányos: $(\binom{k}{2}n)$.

Makay Géza
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

Ezt a kutatást a TKP2021-NVA-09 projekt támogatta. A TKP2021-NVA-09 számú projekt a Magyar Innovációs és Technológiai Minisztérium támogatásával valósult meg a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból, a TKP2021-NVA támogatási konstrukció keretében.

Irodalomjegyzék

[1] Bollobás Béla: The Art of Mathematics, 34. probléma.
[2] `https://www.math.u-szeged.hu/~makay/MM/`
[3] `https://www.cs.uni.edu/~wallingf/teaching/cs3530/resources/knuth-mastermind.pdf`

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. NKA Nemzeti Kulturális Alap. Emberi Erőforrások Minisztériuma. Petőfi Kulturális Ügynökség

Adatkezelés
Elfogadom.

Róka Sándor 2024. MÁRCIUS, HÉTTUSA

Megoldások, megjegyzések a Héttusa 3. fordulójának feladataihoz

A 3. forduló feladataira 19 beküldőtől 107 jó válasz érkezett.

A táblázat mutatja, hogy a legeredményesebb beküldők mely feladatokra adtak helyes választ. (Vannak, akik a saját nevükkel szerepelnek, és vannak, akik más nevet választottak maguknak.)

A feladat sorszáma	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.
Orangestripes	x	x	x	x	x	x	x
D & 2d	x	x	x	x	x	x	x
Dombi Péter	x	x	x	x	x	x	x
Keresztvölgyi József	x	x	x	x	x	x	x
Makay Géza		x	x	x	x	x	x
vukung		x	x	x	x	x	x
Udvari Tibor		x	x	x	x	x	x
Szemerédi Ferenc		x	x	x	x	x	x
Emil		x	x	x	x	x	x
Belzebub		x	x	x	x	x	x
Jankó Zsuzsanna		x	x	x	x	x	x
Berkó Erzsébet	x	x		x	x	x	x
Kovach M. László		x	x	x		x	x
Megérek egy Petákot		x	x	x	x	x	
Danka Emma (diák)	x	x		x		x	x
Kengyelfutó Einstein (diák)	x	x	x	x		x	
Vaszary Krisztián (diák)			x	x	x	x	x

Fordulónként a legjobb megoldók közül néhányan könyvjutalmat kapnak. A jutalmazottak, „D & 2d” a **Polygon Jegyzettárból** (Csákány Béla: Diszkrét matematikai játékok), „Orangestripes” pedig a **Bolyai Társulat és a Springer közös kiadványaiból** (Volume 28: Building Bridges II., Szerkesztette: Bárány Imre, Katona Gyula, Sali Attila) választott könyvet.

A feladatok megoldása (további megjegyzésekkel)

15. Az a, b, c egész számokra az $a \cdot b$ és $b \cdot c$ számok négyzetszámok.

Igaz-e, hogy ekkor $a \cdot c$ is egy egész szám négyzete?

Megoldás. A válasz: Hamis.

Egy példa erre: $a = 1,\ b = 0,\ c = 2.$ Ekkor $a \cdot b = 0$ és $b \cdot c = 0$ (és a 0 négyzetszám!), de $a \cdot c = 2$.

Az állítás igaz, ha a nulla nem szerepelhet a számok között.

Ha az a, b, c pozitív egész számokra az $a \cdot b$ és $b \cdot c$ számok négyzetszámok, akkor $a \cdot c$ is egy egész szám négyzete.

Ez igaz, kétféleképpen is indokoljuk.

a) Legyen $a \cdot b = n^2$ és $b \cdot c = m^2$, ekkor $a \cdot c = \frac{(a \cdot b) \cdot (b \cdot c)}{b^2} = \frac{n^2 \cdot m^2}{b^2} = \left(\frac{n \cdot m}{b}\right)^2$. A feltételek miatt b osztója n^2-nek és m^2-nek, tehát b^2 osztója $n^2 \cdot m^2$-nek, azaz b osztója $n \cdot m$-nek. Tehát $\frac{n \cdot m}{b}$ egész szám. Ezzel igazoltuk, hogy $a \cdot c$ négyzetszám. (Az átalakításokban felhasználtuk, hogy $b \neq 0$, ezért oszthatunk vele.)

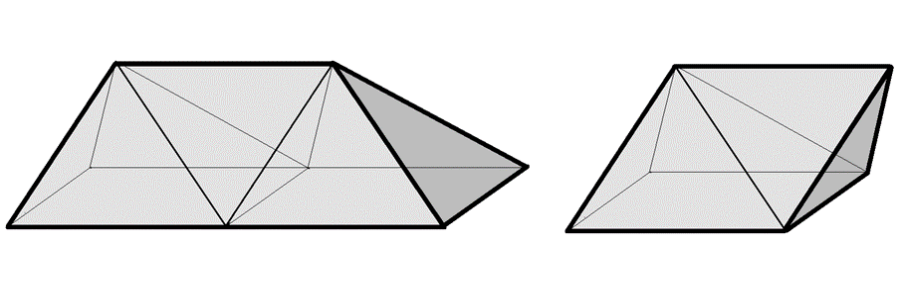
b) Nézhetjük az a, b, c számok prímtényezőit. Ha az a és b számoknak p közös prímtényezője, és p páratlan kitevővel szerepel az a szám prímtényezős felbontásában, akkor páratlan kitevője lesz a b szám prímtényezős alakjában is, hiszen $a \cdot b$ négyzetszám. Mivel $b \cdot c$ is négyzetszám, és a b szám prímtényezős alakjában p páratlan kitevővel szerepel, emiatt a c szám prímtényezős felbontásában is páratlan kitevője lesz. Ekkor az $a \cdot c$ szorzatban ennek a prímnek a kitevője két páratlan szám összege, páros szám lesz. Az $a \cdot c$ szorzatban a prímkitevőket nézve mindegyik páros, így a szorzat négyzetszám. (A 0-nak nincs prímtényezős alakja.)

Megjegyzés. A nulla zavart okozott, emiatt sokan hibás választ adtak. A nullát van, aki természetes számnak nevezi, és van aki nem, mindkét gyakorlat indokolható, érthető. Négyzetszám esetén nincs megfontolható ok, hogy a nullát kizárjuk. Persze, ha négyzetszámokról beszélünk, a nullát ritkán emlegetjük[1].

16. Adott egy négyzetalapú gúla és egy tetraéder. Ezeknek minden éle 1 egység hosszú. A tetraédert a gúla egyik oldallapjára illesztettük úgy, hogy az illeszkedő lapok fedik egymást. Hány oldallapja van az így kapott testnek?

1. megoldás. A válasz: 5.

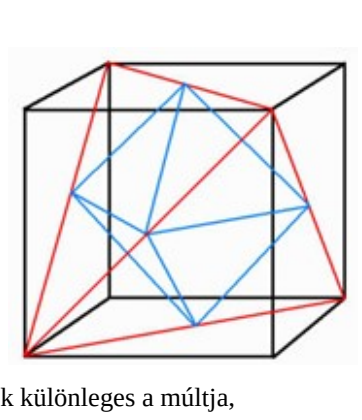
Az ábra szerint helyezzünk a gúla mellé egy másik, vele egybevágó gúlát. A két gúla között látunk egy tetraédert, amelynek minden éle 1 egység. A két gúlából és a tetraéderből álló testnek 5 lapja van.



A most kapott testből vegyük el az egyik gúlát, és megkapjuk azt a testet, amiről a feladat beszél. Ennek a testnek 5 lapja van.

2. megoldás. (*Dombi Péter* megoldása.) A testnek öt oldala van. Az egyesítés egy háromszög alapú ferde hasáb lesz, a palást egyik oldallapja négyzet, a másik kettő pedig 60 fokos rombusz.

Egyszerű belátni, hogy a tetraéder és a gúla megfelelő oldallapjai a gúla oldaléleinél egy síkba esnek. Képzeljük a gúlát egy kocka oldalközéppontjai által meghatározott fél oktaédernek, ekkor a hozzá illesztett szabályos tetraédert a kocka egyik csúcsa és az ehhez illeszkedő 3 lapközéppont alkotja, viszont a gúla oldallapja is, és ennek a „kis” tetraédernek a megfelelő oldallapja is a kockacsúcsok által meghatározott „nagy” tetraéder megfelelő lapsíkjában fekszenek.

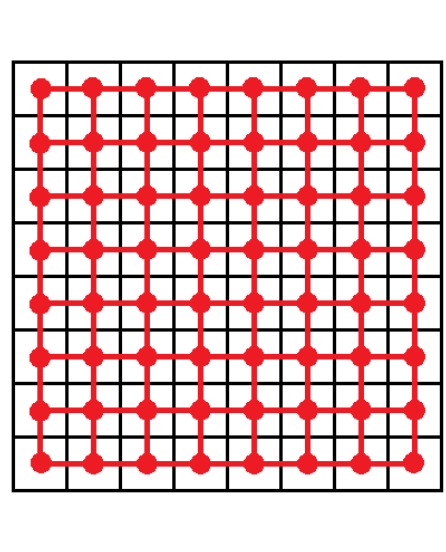


Megjegyzés. A feladatnak különleges a múltja, lásd `https://www.nytimes.com/1981/03/17/us/youth-outwits-merit-exam-raising-240000-scores.html`

17. Marci bástyákat rak egy üres sakktáblára. Akkor helyezhet el egy bástyát egy üres mezőre, ha annak legalább két oldalszomszédja üres. Legfeljebb hány bástyát helyezhet a táblára Marci?

Megoldás. A válasz: 56.

A tábla mezőit jelöljük egy-egy ponttal, és ha két mező szomszédos, akkor a két pontot kössük össze szakasszal. Így a 64 pont között $2 \cdot 8 \cdot 7 = 112$ szakaszt rajzolunk.



Ha elfoglalunk egy mezőt, akkor szüntessük meg az innen induló szakaszokat. Ilyenkor legalább két szakaszt törlünk. Egy újabb bástyát csak olyan mezőre tehetünk, ahonnan legalább 2 szakasz indul.

Ezért legfeljebb 56 bábut tehetünk fel, hiszen 57 bábu elhelyezésével legalább $2 \cdot 57 = 114$ szakaszt szüntetnénk meg.

Elhelyezhetünk 56 bábut, ezt látjuk az ábrán. A táblán a számok mutatják a felhelyezés sorrendjét.

	50	44	39	35	32	30	29
22		51	45	40	36	33	31
16	23		52	46	41	37	34
11	17	24		53	47	42	38
7	12	18	25		54	48	43
4	8	13	19	26		55	49
2	5	9	14	20	27		56
1	3	6	10	15	21	28	

Megjegyzés. A beküldött megoldások alapján három kiegészítés következik.

Udvari Tibor egy másik elhelyezést mutatott: 56 bástya elhelyezhető. A bal felső sarokból kiindulva soronként helyezzünk el annyi bástyát, amennyit csak lehet. Így az első sorban 7, a másodikban 8, majd megint 7, 8, 7, 8, 7 tehető a táblára. Az utolsó sorban a másodiktól kezdve 4 tehető le, ez együtt 56. (Más módon is letehető 56 bástya.)

Dombi Péter bizonyítása arra, hogy 56-nál több több bástyát sehogy sem lehet lerakni, nem könnyű, de nagyon rövid. Az *üres területrész kerülete* egy-egy bástya elhelyezésénél legalább 2 éllel nő (ti. ott, ahol üres szomszédokkal érintkezik), és legfeljebb kettővel csökken (ahol foglaltakkal érintkezik), tehát *összességében nem csökken.* Kiinduláskor $4 \cdot 8 = 32$ volt a kerülete, de ez véghelyzetben, 7 üres mezővel csak $7 \cdot 4 = 28$, vagy még kevesebb lenne. (Tehát az üres mezők száma legalább 8.)[2]

Adható teljes indukciós bizonyítás is arra, hogy $n \times k$-as táblán legalább $\frac{n+k}{2}$ mező üresen marad.

A feladat eléggé közismert fordított szemléletben, amikor néhány „gazos” mező kezd terjedni az egynél több gazos szomszéddal rendelkező mezőkre (lásd pl. KöMaL, F.3220., 1998. március)[3].

Megemlíthető, hogy bárhogyan rakosgatjuk – a szabályt betartva – a bástyákat a 8 x 8-as táblára, 32 darabot mindenképpen el tudunk helyezni. Ugyanis 31 bástya után még biztosan található olyan 2×2-es rész, ahova a cellaszám felénél kevesebb, azaz legfeljebb 1 figura jutott.

Végül *Makay Géza* még tovább gondolta a feladatot: vajon hányféleképpen rakhatja le Marci a bástyákat úgy, hogy végül 56 bástya legyen a táblán? Erről, továbbá a következő, 18. és 20. feladatokhoz fűzött kiegészítéseiről a Mastermind, bástyák és ismerősök című cikkünkben olvashatnak.

18. Gondoltam egy különböző jegyekből álló négyjegyű számra. A számnak az 5870, 1763, 9342, 4016 számok mindegyikével pontosan két közös számjegye van, és ezek a jegyek más helyeken állnak, mint a gondolt számban. Mi ez a szám?

Megoldás. A válasz: 3407.

A négy számban összesen 8 számjegyet találtunk el.

Mivel nincs olyan számjegy, amely háromszor ismétlődne a számokban, ezért gondolt szám mindegyik jegyét kétszer találtuk el.

Az adott négy számban kétszer szereplő számjegyek 0, 1, 3, 4, 6, 7. Ezek között vannak a gondolt szám számjegyei.

Tehát a 2, 5, 8 és 9 jegyek egyike sincs a gondolt számban.

Ezért 5870-ben eltaláltuk a 0 és 7 jegyeket.

A 9342 számban 3 és 4 talált.

Már tudjuk, hogy a gondolt szám jegyei 0, 3, 4 és 7.

Hol állhatnak ezek a számjegyek?

A 0 az 1. vagy 3. helyen, de 0 nem állhat az első helyen, tehát a 3. lesz.

A 3 is az 1. vagy 3. helyen állhat, a 3. helyen 0 áll, így marad az 1. hely.

A 7 az 1. vagy 4. helyen lehet, foglalt az 1. hely, így a 4. helyen áll.

A 4-nek marad a 2. hely.

A gondolt szám: 3407.

19. A síkon felvettünk 8 pontot úgy, hogy nincs közte három, amely egy egyenesre esne. Az egyik pont piros, a többi kék. Nevezzünk egy kék csúcsú háromszöget pirosnak, ha a belsejében ott van a piros pont. Lehetséges-e, hogy a háromszögeknek legalább a fele piros?

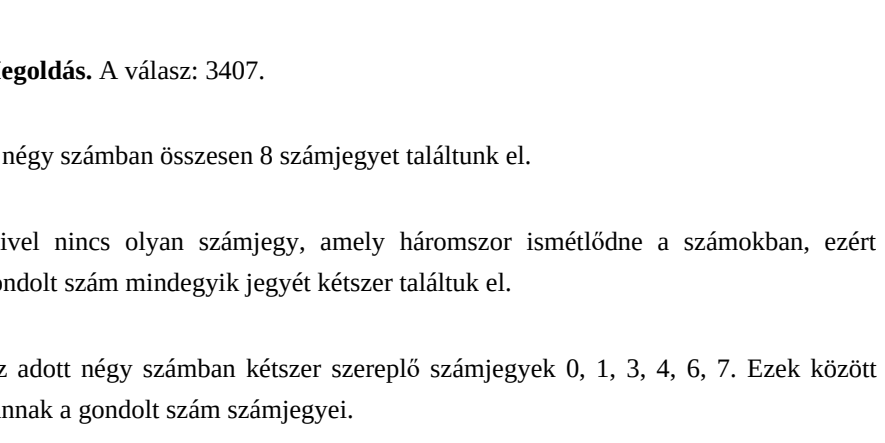
Megjegyzés. A feladat kérdése eredetileg így szólt volna: Lehetséges-e, hogy a *kék csúcsú* háromszögeknek legalább a fele piros? A kitűzött feladat kérdésére és erre a kérdésre is ugyanaz a válasz: Nem lehet.

Mindkét kérdésre adunk megoldást:

1. megoldás. Az összes háromszög felénél kevesebb a pirosak száma.

A 8 pontból hármat-hármat választva $\binom{8}{3} = 56$ háromszöget kapunk. A kék csúcsú háromszögek száma $\binom{7}{3} = 35.$ Nevezzünk egy háromszöget kéknek, ha a csúcsai kék pontok és a háromszög nem tartalmazza a piros pontot. Megmutatjuk, hogy van legalább 8 kék háromszög, ezért a piros háromszögek száma legfeljebb $35 - 8 = 27$ lehet, és ez kevesebb 28-nál, az összes lehetőség felénél.

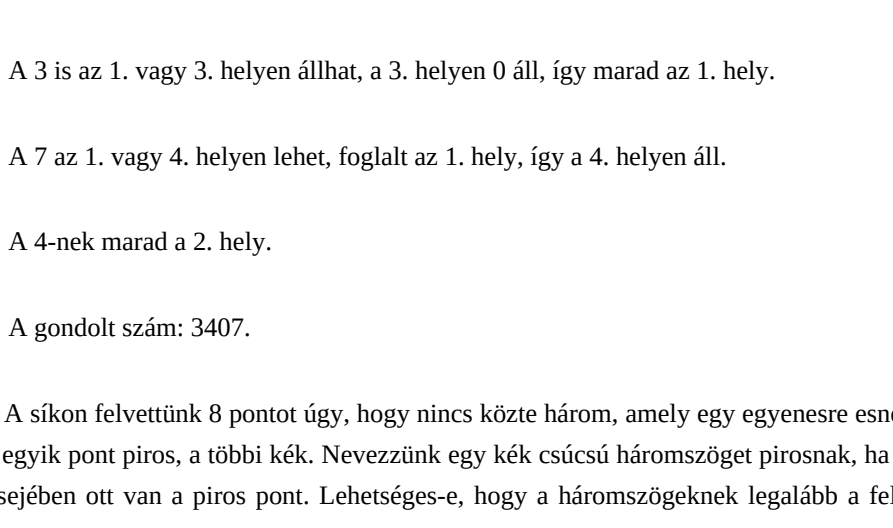
Vegyünk fel egy olyan egyenest, amely illeszkedik a piros pontra, és nincs rajta kék pont. Az egyenes egyik oldalán a 7 kék pontból legalább 4 pont fekszik. Nézzük ezt a 4 pontot. Egyet-egyet kihagyva, a megmaradó három pont kék háromszöget alkot. Ez eddig 4 kék háromszög.



Van még 3 kék pont, amelyeket nem vizsgáltunk. Vegyünk fel egy második egyenest a piros ponton keresztül úgy, hogy ne legyen rajta kék pont, és az egyenes „felezze el” az előbb kiszemelt 4 pontot, azaz a 4 pontból 2 pont az egyenes egyik oldalán, 2 pont a másik oldalán legyen. Az egyenes egyik oldalán a 3 kék pontból legalább 2 fekszik. Így a második egyenes egyik oldalán $2 + 2 = 4$ olyan pont fekszik, amelynek az előbbi 4 ponttal csak két közös pontja van. A most választott 4 pont meghatároz 4 újabb kék háromszöget.

2. megoldás. A kék csúcsú háromszögek felénél kevesebb a pirosak száma.

Válasszunk 4 kék pontot, az A, B, C, D pontokat. Ha $ABCD$ konvex négyszög, akkor ezt egy átlója két háromszögre vágja, és csak az egyikben lehet piros pont. Ekkor az $A,\ B,\ C,\ D$ pontnégyesből választható 4 háromszög közül legfeljebb 2 háromszög piros.



Ha az $ABCD$ négyszög konkáv, akkor is legfeljebb 2 háromszög piros az A, B, C, D pontnégyesből választható 4 háromszög közül.

Tehát 4 kék pont esetén legfeljebb 2 olyan piros háromszög van, amelynek csúcsait ezen pontok közül választjuk.

Így számlálva legfeljebb $2 \cdot \binom{7}{4}$ piros háromszöget számolunk, persze egy-egy piros háromszöget többször is megszámolunk. Egy piros háromszög három kék csúcsához a negyedik kék csúcsot $7 - 3 = 4$ pont közül választhatjuk, azaz a számlálás során egy piros háromszöget 4-szer számolunk meg.

Ezért a piros háromszögek száma legfeljebb

$$\frac{2 \cdot \binom{7}{4}}{4} = \frac{2}{4} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{35}{2}.$$

Legfeljebb $\left[\frac{35}{2}\right] = 17$ piros háromszög van, míg a kék csúcsú háromszögek száma $\binom{7}{3} = 35.$ Ezért nem lehet a háromszögeknek legalább a fele piros.

3. megoldás. (*Dombi Péter* megoldása.) **A 35 háromszögből legfeljebb 14-ben lehet a piros pont.**

Válasszuk a piros pontot origónak, a kék pontokba mutató vektorok legyenek $v_1, \dots, v_7$. Három végpont háromszöge pontosan akkor tartalmazza az origót, ha a három vektor által generált kúp az egész sík, vagy másképp, ha a belőlük képzett $v_i/\|v_i\|$ egységvektorok végpontjai az egységkörön hegyesszögű háromszöget alkotnak. Elég tehát megbecsülni, hogy az egységkörön 7 általános helyzetű $A_1, \dots, A_7$ pont legalább hány tompaszögű háromszöget határozhat meg (derékszögű nem léphet fel).

Rögzítve pl. az A_1 pontot, olyan tompaszögű háromszöget, amelynek egyik hegyesszöge A_1-nél van, akkor és csak akkor kapunk, ha a háromszög másik két csúcsa az A_1 végpontú átmérő azonos oldalára esik. Ilyenből a legkevesebb (6) akkor áll elő, ha a többi hat pontból 3-3 pont esik egy-egy félkörre. Ugyanezt elmondva $A_2, \dots, A_7$-re, legalább $7 \cdot 6 = 42$ tompaszögű háromszöget kapunk, viszont minden tompaszögű háromszöget kétszer is megszámoltunk, mert két hegyesszöge van, ezért a helyes becslés ennek a fele: $42/2 = 21$. Legalább 21 tompaszögű háromszög mellett legfeljebb $35 - 21 = 14$ hegyesszögű háromszög lehet, és így a piros pontot tartalmazó háromszögből is legfeljebb ennyi lehet.

Általános esetben, az egységkörön felvett $2n+1$ pont esetén, bármelyik ponthoz a rajta átmenő átmérő két félkörén legalább $2\binom{n}{2} = n(n-1)$ tompaszögű háromszög illeszkedik (ha a maradék $2n$ pontot nem felezi az átmérő, akkor még több). Így a tompaszögű háromszögek száma legalább $\frac{1}{2}(2n+1)n(n-1)$, ami közelítőleg $\frac{3}{4}\binom{2n+1}{3}$, vagyis nagy *n*-ekre a háromszögeknek közelítőleg $3/4$ része biztosan tompaszögű, vagy ami ugyanaz, a feladatbeli háromszögeknek jó közelítéssel legfeljebb a negyed része tartalmazhatja a piros pontot.

20. Lehetséges-e egy társaságban, hogy a jelenlévők közül mindenki 4 másikat ismer, és a társaság bármely két egymást nem ismerő tagjának a többiek között pontosan 2 közös ismerőse van? (Az ismeretségek kölcsönösek, és a társaságnak vannak tagjai.)

Megjegyzés. Pontatlan a feladat, nehezebb akart lenni. A nehezebb változathoz ez a fogalmazás kell: Az ismeretségek kölcsönösek, és a társaságnak vannak *egymást nem ismerő* tagjai.

A kitűzött feladat kérdésére és erre a kérdésre is ugyanaz a válasz: Lehetséges.

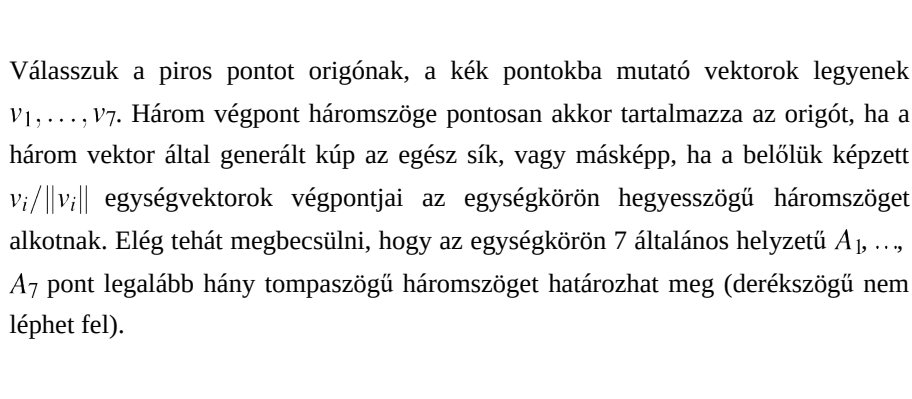
Belzebub írja: Lehetséges, több módon is, pl ha a társaság 5 tagú, és mindenki ismer mindenkit, azaz mindenkinek 4 ismerőse van, továbbá az egymást nem ismerők halmaza üres, ami miatt a második feltétel is teljesül.

Szebb megoldásnak tartom a 8 tagú társaságot. Ültessünk le 8 egymást nem ismerő embert egy kerek asztal köré. Mindenki megismeri a közvetlen és az amellett ülő 1-1 embert (azaz ismeri a legfeljebb 2. szomszédját). Az így kialakuló ismeretségi rendszer is megfelel a kért feltételnek. (Mindenkinek 3 ember marad idegen, a vele szemben ülő, és annak két szomszédja, a szemben ülővel a közös ismerősök a tőlük 2 távolságra ülők, annak szomszédaival pedig a köztük ülő két ember.)

Udvari Tibor konstrukciója 8 fős társaságra: a 8 fő egy kocka 8 csúcsa, az ismeretségek közöttük a kocka élei, és két szemközti lapon a lapátlók.

Megoldás.

Például legyen a társaság 9 fős. A táblázatban lévő 9 kör szemléleti őket, és mindenki a vele egy sorban, valamint a vele egy oszlopban lévőket ismeri, a többieket nem. (A ismerősei 1, 2, 3, 4; A és B közös ismerősei 1 és 2.)



Ilyen ismeretségi kapcsolatok esetén teljesül a feladat elvárása.

Makay Géza: Mastermind, bástyák és ismerősök c. cikke tisztázza, hogy a társaság létszáma 5, 8 vagy 9. Nyolc fő esetén két konstrukció van, 5 és 9 esetén csak egy.

21. Hófehérke a törpék kerek asztalánál névtáblákkal megjelölte mind a hét törpe helyét. Kuka érkezett elsőként, de figyelmetlenségből nem a helyére, hanem az óramutató járása szerint következő szomszédos helyre, Szundi helyére ült. Ezután, ha jött egy törpe, megkereste a helyét, és ha az üres volt, akkor elfoglalta, ha pedig már ült ott törpe, akkor az óramutató járását követve tovább ment az asztal körül, és leült az első szabad székre. Így hányféle ülésrend alakulhat ki?

Megoldás. A válasz: 32.

Két törpe, Kuka és Szundi biztos, hogy rossz helyre, más helyére ült. A többi törpénél választhatunk, hogy a szerencsések közé tartozik, vagy sem. Egy törpe szerencsés, ha a számára kijelölt helyre ül.

A szerencsés törpék csoportját $2^5 = 32$-féleképp állíthatjuk össze.

Ha a törpék leültek az asztal köré, akkor adott, hogy kik tartoznak a szerencsés csoportba. Ez fordítva is meghatározott, ha kiválasztottuk a szerencsés csoportot, akkor ahhoz tartozik egy ülésrend. Ebből adódik, hogy a szerencsés csoportok száma azonos az ülésrendek számával.

Válasszunk egy szerencsés csoportot és keressük meg, milyen ültetési sorrend tartozik hozzájuk. A törpék másik csoportja a balszerencsések csoportja. Előbb a szerencséseket ültetjük le, majd jönnek a balszerencsések. Legyenek balszerencsések Szundi, Kuka, Tudor és Vidor, székük ebben a sorrendben követi egymást az asztal körül az óramutató járása szerint haladva. Kuka és a szerencsés törpék már helyet foglaltak. Érkezik Szundi, a helyén Kuka ül, ezért megy tovább az asztal körül, és leül az első szabad helyre, Tudor helyére. Jön Tudor, leül Vidor helyére, majd Vidor érkezik, aki Szundi helyére ül.

Általánosítás. *Dombi Péter* a következőket írta: A lehetséges sorrendek száma 32, *n* törpe esetén $A_n = 2^{n-2}$.

Bizonyítás. Legyen az utolsó, Kuka előtti hely Z részére fenntartva. Két esetet érdemes szétválasztani.

- Ha Z utolsónak megy asztalhoz, akkor egy kivétellel minden hely hézagmentesen fel lesz töltve az óramutató járása szerint, ezért Z az utolsó szabadon hagyott székre, Kuka helyére kerül. A lehetséges sorrendek száma így megegyezik a maradék 6 törpe által produkálható sorrendek számával, jelöljük ezt A_6-tal.
- Ha Z nem az utolsó, akkor amikor asztalhoz indul, még legalább két szék üres, és nyilván az asztal „végén", tehát Z a saját helyére fog ülni. Ilyen esetekben tehát Z széke a többi törpe számára nem létezik, így ismét csak A_6 különböző sorrend alakulhat ki.

Ezt minden lépésre elmondva $A_n = 2A_{n-1}$, és így $A_2 = 1$, $A_3 = 2$ stb. miatt $A_n = 2^{n-2}$ adódik.

Lábjegyzetek

---

[1] Varga Tamás: Matematika lexikon (Műszaki Kiadó, SHL Hungary, 2001) c. könyvében a 300. oldalon ezt olvassuk: „*Négyzetszám* egész szám négyzete. A legkisebb négyzetszám a 0, a többi mind pozitív." A Freud–Gyarmati: Számelmélet c. könyv is négyzetszámnak tekinti a nullát. Így szól a 7.7.3. Lemma: Két (nemnulla) négyzetszám összege és különbsége nem lehet egyszerre négyzetszám.

[2] A fenti, különlegesen szép gondolatmenet tudomásom szerint Laczkovich Miklóstól származik – írja Dombi Péter. Laczkovich Miklós azonban úgy emlékszik, Kós Gézától hallotta a feladat különböző változatait és azok elegáns bizonyítását.

[3] Érdemes megkeresni az F3220-as feladatot a KöMaL archívumában, a `http://db.komal.hu/KomalHU/` oldalon. Ebben 10 x 10-es tábla 9 parcellája gazos, kérdés, hogy az egész mező elgazosodik-e? Gyenes Zoltán (akkor 10. o. tanuló) megoldása az 1999. januári számban jelent meg, a fentihez hasonló meggondolással belátja, hogy 9 esetén nem, de 10 parcellánál már elgazosodhat a mező.

Róka Sándor, a Héttusa rovat szerkesztője

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 31. szám 2024. március Válasszon: ›

100

Cím	Szerző
Idén is lesz „Matek az Utcán"!	Írta: Barbarics Márta
Váltószögek – podcast adás indul a matematikatanításról	Írta: Kosztra Gábor
Beszámoló a 2024-es RMM-ről	Írta: Lenger Dániel, Borbényi Márton
Decemberi díjazottak	Írta: Szerkesztő
DoktoriSOKK	Írta: Szathmári Nóra, Keszthelyi Gabriella
Ki akar ma tanítani? – I. rész	Írta: Paulovics Zoltán
Imrecze Zoltánné, Ani (1923 – 2010)	Írta: Ács Katalin
Mentál-matematika	Írta: Székely Péter
Mi várható a 2024. májusi érettségin?	Írta: Geszler Evelin Anna
A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – V. rész	Írta: Csapodi Csaba
Földtudományok a Földön kívül	Írta: Fröhlich Viktória
A bolygók élete	Írta: Oláh Vera
Paradoxonok és sportversenyek	Írta: Petróczy Dóra Gréta
Elveszett Bolyai-relikviák nyomában	Írta: Szabó Péter Gábor
Statisztikus tanuláselmélet I. rész	Írta: Csáji Balázs Csanád, Tamás Ambrus
Matematikusok az idegösszeomlás szélén	Írta: Eper Miklós
Hatszögletű inspiráció	Írta: Juhász Litza
Az APP&X alkotópályázat eredményei	Írta: Szász Réka
Evolúciós játékelmélet Szegeden	Írta: Garab Ábel
Möbius-síkok, blokkrendszerek, Møbee játék	Írta: Ruff János
Mastermind, bástyák és ismerősök	Írta: Makay Géza
Megoldások, megjegyzések a Héttusa 3. fordulójának feladataihoz	Írta: Róka Sándor
Héttusa 4. forduló (2024. március)	Írta: Róka Sándor

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség