ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

40. kötet

Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Páles Zsolt, főszerkesztő
1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.
A folyóirat e-mail címe: aml@renyi.hu
A folyóirat honlapja: http://aml.math.bme.hu

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára évfolyamonként 1200 forint. Megrendelések a szerkesztőség címén lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

ELŐSZÓ

Kassay Gábor (1956–2021) és Varga Csaba (1959–2021), a Babeş–Bolyai Tudományegyetem egyetemi tanárainak emléke előtt tisztelgünk e különszámmal. Mindketten az erdélyi tudományos élet aktív tagjai és a matematika oktatásának meghatározó egyéniségei voltak. Nemcsak a magyar oktatói közösségben, hanem a nemzetközi tudományos társadalomban is kiérdemelték az elismerést és megbecsülést. Életpályájuk során rengeteg energiát fektettek a fiatalok továbbképzésébe, sokat tettek a következő nemzedék matematikai neveléséért. Több kiváló matematikus és matematikatanár számára biztosítottak szakmai és erkölcsi útmutatást. Elvesztésük óriási űrt hagyott kollégáikban, tanítványaikban.

Illés Tibor
Kristály Sándor
Rigó Petra Renáta
vendégszerkesztők

Alkalmazott Matematikai Lapok **40** (2023), 3–6.

KASSAY GÁBOR (1956–2021) ÉLETPÁLYÁJA

SOÓS ANNA, SZENKOVITS FERENC

2021. április 19-én, 64 évesen, györgyfalvi otthonában, hosszan tartó betegségben elhunyt Kassay Gábor matematikus, a Babeş–Bolyai Tudományegyetem Magyar Matematika és Informatika Intézetének habilitált professzora. Kassay Gábor 1956. december 24-én született, Székelyudvarhelyen. Elemi és középiskolai tanulmányait szülővárosában végezte. Büszke volt arra, hogy iskolája (ma Tamási Áron Gimnázium) 375 éves ünnepségén, ötödikes diákként szavalattal köszönthette almamáterét az összesereglett ünneplő közönség előtt, majd ötven év elteltével az újabb ünnepségsorozat keretében tudományos előadással tért vissza iskolájába. Felsőbb matematikát Kolozsváron tanult, a Babeş–Bolyai Tudományegyetemen (1976–1980). Tudományos fokozatát ugyanitt szerezte 1994-ben, minimax feladatokkal kapcsolatos kutatásait összefoglaló dolgozatával, Kolumbán József professzor irányításával.

Oktatói pályáját kolozsvári középiskolákban kezdi (1980–1987), majd a Babeş-Bolyai Tudományegyetemen folytatja, bejárva az oktatói karrier minden fokozatát: tanársegéd (1987–1990), adjunktus (1990–1995), docens (1995–2002, 2004–2005), professzor (2005–2021). A 2002–2004 időszakban az észak-ciprusi Famagusta városában az Eastern Mediterranean University vendégtanára. Egyetemi előadásai a következő témákat ölelték fel: matematikai analízis, optimalizációelmélet, funkcionálanalízis, operációkutatás, konvex analízis, játékelmélet. A matematikusnevelés legmagasabb szintjén is kiváló eredményeket ért el karunk doktori iskolájában végzett kiváló munkájával. Hozzáértő irányítása alatt négyen szereztek doktori fokozatot matematikából: László Szilárd (2011), Burján-Mosoni Boglárka (2012), Nagy Erika (2013) és Mihaela Miholca (2014).

Az operációkutatás, játékelmélet és konvex analízis különböző területeinek szentelt kutatási eredményei rangos nemzetközi folyóiratokban jelentek meg, mint: Journal of Optimization Theory and Applications, Set-Valued and Variational Analysis, Journal of Global Optimization, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Optimization, SIAM Journal on Optimization, Taiwanese Journal of Mathematics, Journal of Convex Analysis, Mathematical Methods in Operation Research, Mathematical Programming, stb. Kiterjedt tudományos kapcsolatrendszerét, nemzetközi ismertségét és elismertségét az is jelzi, hogy tudományos publikációit több mint harmincöt társszerzővel jegyezte, számos rangos szakfolyóirat munkatársa volt.

Több monográfia, könyvfejezet egyedüli vagy társszerzője, eredményes csoportos kutatási programok vezetője, tudományos konferenciák társszervezője, kari szintű tudományos szeminárium vezetője az analízis és optimalizáció témakörökben. Kassay Gábor egyetemi tanár az erdélyi tudományos élet aktív tagja, a matematikatanítás meghatározó egyénisége volt. Munkabírásának, kitartó és következetes hozzáállásának köszönhetően nemcsak a magyar oktatói közösség, hanem a román és nemzetközi tudóstársadalom részéről is kiérdemelte a tiszteletet és a megbecsülést. Oktatói, tudósi és kutatásszervezői életpályája során bízott abban, hogy érdemes energiát fektetni a fiatalok felkarolásába, továbbképzésébe, és számtalanszor bizonyította, hogy megéri ápolni a szakmai együttműködést és az intézményi párbeszédet a világ számtalan felsőoktatási intézményével. Vendégtanárként, ösztöndíjasként, nemzetközi konferenciák meghívott előadójaként megfordult Magyarország, Hollandia, Németország, Olaszország, Spanyolország, Skócia, Dánia, Brazília, Peru, India, Izrael, Marokkó, Vietnam, Szaúd-Arábia, Hong Kong, Tajvan, Ciprus egyetemein, kutatóintézeteiben, ezzel is öregbítve saját és egyetemünk nemzetközi hírnevét, ismertségét. A közösségért végzett feladatát nemcsak szakmai, hanem lelkiismereti kérdésnek tekintette. A szellemi útravaló mellett erkölcsi értékrendet is közvetített hallgatói számára. Volt tanítványa szerint: „a vizsgák és a kurzusok keménységét a kirándulásokon megtapasztalt baráti viszonnyal kompenzálta.” Életére jellemző volt a természet szeretete, rendszeres résztvevője volt az őszi gólyatáboroknak és a tavaszi tehetségtáboroknak, amelyek keretében emlékezetes élménytúrákat szervezett hallgatói és tanártársai számára.

Életvidámságát, aktivitását, jövőbeli terveit, reményeit keresztülhúzta a kérlelhetetlen betegség. Tanítványai, kollégái Kassay Gábor személyében egy kiváló oktatót, jó kollégát, remek barátot tisztelhettek, akinek elvesztése igen fájó sebet, betölthetetlen űrt hagy maga után.

1978 és 1982 között egyetemi hallgató a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem matematika szakán. 1982–1991 között középiskolai matematikatanár Kézdivásárhelyen, majd 1991–1997 között Sepsiszentgyörgyön. 1994–1996 között elvégezte az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán a számítástechnika tanári szakot. 1997-től a Babes-Bolyai Tudományegyetem oktatója, 2005-től egyetemi docens. 2002-ben doktorált Kolumbán József irányításával. 2008–2012 között a matematika és informatika kar dékánhelyettese. 2012 márciusától az egyetem rektorhelyettese, a magyar tagozat vezetője.

Kutatási területei: determinisztikus és véletlen fraktálok, sztochasztikus folyamatok, frakcionális Brown-mozgás, homogenizáció fraktálokon, sztochasztikus analízis.

SOÓS ANNA
Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár,
Matematika és Informatika Kar
asoos@math.ubbcluj.ro

1983-ban matematika szakot végzett a kolozsvári Babeş–Bolyai Tudományegyetemen. 1983 és 1995 között Székelyudvarhelyen tanár, 1990-ig a Kós Károly Szakközépiskolában, majd a Tamási Áron Gimnáziumban. A Kós Károly Szakközépiskola aligazgatója (1983–1985), majd igazgatója (1990), a Tamási Áron Gimnázium aligazgatója (1991–1993).

1995 októberétől a Babeş–Bolyai Tudományegyetem oktatója, 2005-ig adjunktus, azóta docens. 1999-ben doktorált égi mechanikából Pál Árpád irányításával. 2000 és 2004 között a matematika-informatika kar dékánhelyettese, 2005-től az egyetem csillagvizsgálójának igazgatója, 2012-től 2016-ig pedig az egyetem Magyar Matematikai és Informatikai Intézetének vezetője. 2007–2011 között a Kolozsvári Akadémiai Bizottság titkára, 2011-től 2017-ig pedig annak matematikai, informatikai és csillagászati szakbizottságának az elnöke. A kolozsvári Matematikai és Fizikai Lapok szerkesztőbizottsági tagja, 2017-től főszerkesztője.

Kutatási területei: égi mechanika, mechanikai topológia, numerikus módszerek a mechanikában, csillagászattörténet.

SZENKOVITS FERENC
Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár,
Matematika és Informatika Kar
fszenko@math.ubbcluj.ro

GÁBOR KASSAY (1956–2021)

Anna Soós, Ferenc Szenkovits

The article presents the career of Gábor Kassay, a mathematics professor at Babeş–Bolyai University, Cluj-Napoca, Romania.

Alkalmazott Matematikai Lapok **40** (2023), 7–8.

ÉDESAPÁMRÓL

KASSAY SÁNDOR

Gabiról kevesen tudják, hogy fiatalkorában gyakran gitározott és nagyon jól énekelt. Az egyik legkedvesebb gyermekkori képem róla az, ahogy a zene ütemére jobbra-balra dűlve gitározik. Körülüli őt egy baráti társaság, köztük egy csomó velem egykorú kisiskolás, és gitárhangtól-énekszótól zeng a kicsi szoba.

Édesapámnak a nyolcvanas évek elején volt egy Szputnyik márkájú félverseny biciklije, annak a rúdjára szereltek egy körte alakú párnázott falemezt. Erre ültetve hordozott engem az öreg dadus nénihez, óvodába és mindenfele a városban. Négy éves lehettem, mikor a gyerekülést a húgom foglalta el, nekem pedig szaladni kellett a bicikli mellett. Tilos volt lemaradni. Hát akkor ez nem volt könnyű, de utólag azt gondolom: Ez így volt helyes. Erős tüdejű kölyök lettem és azóta is szeretem a fizikai erőfeszítéseket.

A világ sok színvonalas egyetemén tartott előadásokat a kutatási eredményeiről és rendszeresen dolgozott együtt külföldi matematikusokkal. Ennek köszönhetően eljutott messzi országokba, gyakorlatilag beutazta mind az öt földrészt. Ám távolról sem volt olyan ember, akit csak a szakmája érdekel. Utazás előtt mindig sokat olvasott az illető ország jellegzetességeiről, érdekességeiről. Valósággal felkészült arra, hogy az ott töltött idő alatt minél több érdekes, szép helyet meglátogathasson. Rácsodálkozni az egzotikus tájakra, ismerkedni a miénktől eltérő kultúrákkal és az azokat képviselő emberekkel – ez volt az egyik szenvedélye. Édesapámnak köszönhetem a hegyek szeretetét, hiszen még óvodás korú voltam, mikor magával vitt az első túrákra. A derékfájását is úgy szerezte, hogy engem átemelt egy patakon. A családi kirándulások azóta is gyermekkorom talán legszebb emlékei maradtak. Később ez adott kedvet és lendületet ahhoz, hogy egyre szebb és nehezebb hegymászásokra vállalkozzak. Ő is kedvet kapott a nagyobb kihívásokat jelentő utakhoz és kialakultak az apa-fiú hegymászótúrák. Húsz évig jártuk kettesben a hegyeket, és úgy örvendeztünk a szép tájnak, a szép időnek, mint két kisfiú. Külön örömet jelentett számunkra az, ha a gerincek tetején járva beazonosíthattuk a környező hegycsúcsokat, völgyeket, településeket.

Az ötvenedik születésnapja után rendszeresen és kitartóan kezdett sportolni, egyre jobb formába lendült. Sokat jártunk az Erdélyi-szigethegységben, számunkra ez jelentette az itthoni hegyeket. Feljutottunk együtt Románia összes 2500 méternél magasabb hegycsúcsára, és a jó teljesítményre büszke volt. A hagyományos túrázás mellett keményebb kihívást jelentő hegymászásra is vállalkoztunk. Édesapám megtanulta a jégcsákány és a hágóvas használatát a jeges meredek oldalakon. Sőt, a kitettebb helyeken a hegymászókötél kezelését is! Mindezek a dolgok nagy-nagy örömet jelentettek számára. A legemlékezetesebb hegymászásunk talán az volt, amikor téli körülmények között másztuk meg a Retyezát legmagasabb csúcsait.

A betegség miatt elhagyta az erőnléte. A természet mély szeretete, a hegyi túrák iránti lelkesedése mindig megmaradt.

Ezután is ott megy mellettem a hegyi ösvényen.

Alkalmazott Matematikai Lapok **40** (2023), 9–26.
DOI: 10.37070/AML.2023.40.1.01

KASSAY GÁBOR TUDOMÁNYOS TEVÉKENYSÉGÉRŐL

KOLUMBÁN JÓZSEF

Kassay Gábor tudományos tevékenysége a nemlineáris analízis következő fejezeteivel kapcsolatos: egyensúly-feladatok, numerikus módszerek monoton halmazértékű függvényekkel adott inkluziók közelítő megoldására, normálstruktúrával rendelkező Banach-terek és konvexitási struktúrák. Célom Kassay Gábor eredményeinek vázlatos ismertetése, inkább a tárgyalt kérdések kapcsolatait tartva szem előtt, mint a dolgozatok elemzését. Dolgozatainak idézésekor az e cikket követő 27–36. oldalakon található, Kása Zoltán által készített publikációs jegyzéket használom az ottani csillagos számozás szerint.

1. A Tiberiu Popoviciu-szeminárium

A múlt század 70-es éveitől kezdve Romániában a gazdasági élet egyre súlyosabbá vált. Ennek következtében évről-évre kevesebb pénz jutott az oktatásra is. Az egyetemen, például, minden fejlesztést leállítottak, bér- és létszámstopot rendeltek el, a szakkönyvtárakban a nyugati folyóiratok megrendelését a minimum alá csökkentették, stb. A tudomány emberét különösen az utóbbi rendelkezések érintették fájdalmasan. A kitűnő szovjet matematikai iskola termékeihez olcsón hozzá lehetett jutni ugyan, de a világ más tájain megjelenő tekintélyes szakfolyóiratokat nem lehetett beszerezni. Ezért karunk matematikusai külföldi matematikai könyvtárakhoz folyamodtak segítségért. Legjobb dolgozataikat közlés végett nem küldték el külföldi lapkiadókhoz, hanem belőlük köteteket szerkesztettek, és azokat elküldték a külföldi könyvtáraknak, azzal a kötelezettség-vállalással, hogy a dolgozatokat máshol nem publikálják. Mi „csak” annyit kértünk, hogy ők helyettünk fizessenek elő az általunk megjelölt folyóiratokra. Az ötlet bevált, és így több éven át hozzájuthattunk sok – számunkra fontos – külföldi folyóirathoz.

Ilyen körülmények között, amikor Kassay Gábor befejezte egyetemi tanulmányait, bár szükség lett volna rá, egyelőre nem lehetett kinevezni az egyetemre. Ő viszont nem akart lemondani álmairól, hogy ne csak oktassa, hanem kutassa is a matematikát. Tanulmányi eredményei alapján sok jó középiskolai állás közül választhatott volna más városban, e helyett választott egy szerényebb kolozsvári iskolát, ami lehetővé tette az analízis tanszéken működő Tiberiu Popoviciu-szeminárium látogatását. Ezen a szemináriumon heti rendszerességgel találkoznak olyan kolozsvári matematikusok, akik függvényapproximáció és alkalmazott matematikai kutatások iránt érdeklődnek. A résztvevők beszámolókat tartanak saját eredményeikről vagy más szerzők fontos közleményeiről. Gabi számára ezeken az összejöveteleken elhangzott előadások jelentették a „posztgraduális képzést”.

Így vagy úgy, a Popoviciu-szemináriumon való résztvétel indukálta első másfél tucatnyi dolgozatát, amelyek nagy része a fent említett csereakció keretében összeállított kötetekben szerepel, de köztük van az első belföldi [∗2] és az első külföldi folyóiratban megjelent [∗6] dolgozata is. A [∗2] dolgozatra alább még visszatérünk. A [∗6] dolgozatban Gabi választ adott egy külföldi szerző eredményeinek bemutatása után kialakult eszmecserén megfogalmazott kérdésre.

Az említett kötetekben közölt dolgozatok közül itt csak a [∗17] dolgozatra térek ki, mert a benne tárgyalt kérdés kulcsszerepet játszik az egyensúlyelméletben. Knaster, Kuratowski és Mazurkiewicz 1929-ben, a róluk elnevezett KKM-lemma felhasználásával új bizonyítást adtak Brouwer fixponttételére. Ez a lemma a következőt állítja. Legyenek $u_1, \ldots, u_n$ valamely véges dimenziós valós normált E tér rögzített elemei, és a zárt $C_i \subseteq E$ $(i = 1, \ldots, m)$ részhalmazok rendelkezzenek azzal a tulajdonsággal, hogy minden $k \le n$ pozitív természetes szám és minden $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ esetén az $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ konvex burkolója benne van a $C_{i_1} \cup \cdots \cup C_{i_k}$ halmazban. Ekkor $C_1 \cap \cdots \cap C_m \neq \emptyset$.

1961-ben Ky Fan a KKM-lemmát a következőképpen általánosította végtelen dimenziós terekre. Legyen E valós Hausdorff topologikus vektortér és X nemüres részhalmaza E-nek. Azt mondjuk, hogy a $F : X \to 2^E$ halmazértékű függvény végesen zárt, ha $F(x) \cap L$ az euklidészi topológia szerint zárt, minden $x \in X$ és E minden véges dimenziós L altere esetén. A F függvény KKM-tulajdonságú, ha X minden $\{x_1, \ldots, x_n\}$ véges részhalmazának konvex burkolója részhalmaza az $F(x_1) \cup \cdots \cup F(x_n)$ halmaznak. Ky Fan [10] szerint, ha F értékei zárt halmazok, és létezik olyan $\overline{x} \in X$, hogy $F(\overline{x})$ kompakt, akkor a KKM-tulajdonságból következik, hogy az $F(x)$ halmazok keresztmetszete nem üres. Következésképpen, ebben az esetben, a KKM-tulajdonságból következik a végesmetszet-tulajdonság, vagyis az $F(x_1), \ldots, F(x_n)$ halmazoknak van közös pontja, minden $x_1, \ldots, x_n \in X$ esetén. Nem nehéz igazolni, hogy ennek az állításnak a fordítottja nem igaz, ha $E = \mathbb{R}$ (lásd [∗92], Example 3.1). Felmerül tehát a kérdés: hogyan lehetne jellemezni a végesmetszet-tulajdonságot? A [∗17] dolgozat a KKM-tulajdonság megfelelő általánosításával választ ad erre a kérdésre.

Legyen X tetszőleges nemüres halmaz és E valós Hausdorff topologikus vektortér. Értelmezés szerint, az $F : X \to 2^E$ függvény általánosított KKM-tulajdonságú, ha X minden nemüres $\{x_1, \ldots, x_n\}$ véges részhalmazához hozzá lehet rendelni az E olyan nemüres $\{y_1, \ldots, y_n\}$ részhalmazát, amelyre minden $\{y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}\}$ részhalmaz konvex burkolója részhalmaza a $F(x_{i_1}), \ldots, F(x_{i_k})$ halmazok egyesítésének. A [∗17] dolgozat szerint ez a tulajdonság egyenértékű a végesmetszet-tulajdonsággal, ha F értékei végesen zártak. Érdekes, hogy ez az állítás szerepel az egy évvel később megjelent [7] dolgozatban is, viszont [∗17] említése nélkül. Később, egyensúly-feladatok tárgyalásánál több szerző használta az általánosított KKM-tulajdonság fogalmát és a vele kapcsolatos végesmetszet-tételt, hivatkozva a [∗17] dolgozatra is (lásd például [36]).

2. A minimax tételektől az egyensúlyfeladatokig

Kassay Gábor 1994-ben megvédett doktori (PhD) disszertációjának címe: *Új eredmények a minimax elméletben, alkalmazva variációs egyenlőtlenségekre és optimalizálási feladatokra.* Pályafutása során az ilyen típusú feladatokat magába foglaló *egyensúlyelmélet* volt figyelmének középpontjában. Az egyensúlyelmélet ma a nemlineáris analízis egyik legjelentősebb ága, gyakorlati és elméleti szempontból egyaránt. Magába foglalja, többek között, az optimalizálás, a minimax, a Nash-egyensúly, a komplementaritás, a fixpont és a variációs egyenlőtlenségekre vonatkozó feladatokat. Mivel az egyensúlyfeladat fogalma és elmélete a játékelméletből sarjadzott ki, célszerű néhány szóban erre kitérni.

Az első játékelméleti cikket a modern halmazelmélet egyik megalapozója, Zermelo írta 1913-ban a sakkjáték matematikájáról. Emile Borel, 1921 és 1927 között, három rövid jegyzetben foglalkozott először a kétszemélyes, nulla összegű játékok matematikai modellezésével, ahol az egyik játékos nyeresége a másik vesztesége: $f_1(s_1, s_2) = -f_2(s_1, s_2)$, minden (s_1, s_2) stratégiapárra, ahol f_1 és f_2 a játékosok stratégiafüggvényei. Ez a feltétel teljesül a sakkban és a társasjátékok többségében (például a kártyajátékokban). A legegyszerűbb játék a „fej vagy írás": mindkét játékos egyidejűleg letesz az asztalra egy 100 Ft-os érmét. Ha a letett érmék felső oldala ugyanolyan, akkor az 1. játékos elnyeri a 2. játékos érméjét; ha különbözők, akkor a 2. játékos nyeri el az 1. játékos érméjét. Fent említett jegyzeteiben Borel megfogalmazta az ilyen típusú játékok egyensúlyi megoldásának fogalmát. Ez a következőt jelenti: az 1. játékos bármilyen s_1 stratégiát választ, a $\min_{s_2 \in S_2} f_1(s_1, s_2)$ mennyiségnél többet nem kaphat, ha a 2. játékos vele szemben a legjobban játszik. Az 1. játékos ezt a mennyiséget akarja maximalizálni, azaz $\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} f_1(s_1, s_2)$ értéket akarja elérni, ahol S_1 és S_2 a játékosok stratégiahalmazai. Hasonlóan gondolkodik a 2. játékos is: az 1. játékos $\max_{s_1 \in S_1} f_1(s_1, s_2)$ maximális nyereményét akarja a minimumon tartani, azaz $\min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} f_1(s_1, s_2)$ értéket akar elérni. Ha teljesül a

$$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} f(s_1, s_2) = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} f(s_1, s_2)$$

egyenlőség, ahol $f = f_1$, akkor azt mondjuk, hogy a minimax játékfeladatnak van megoldása.

A fej vagy írás játékban azonban nincs minimax megoldás, legalábbis az eredeti stratégiatérben. Ezen segít az ún. randomizálás, vagyis a kevert stratégiák alkalmazása. Például, az 1. játékos p valószínűséggel választ fejet és $1-p$ valószínűséggel írást, ellenben a 2. játékos, az 1. játékos választásától függetlenül, q valószínšéggel választ fejet és $1-q$ valószínšéggel írást. (Tudjuk, hogy a kevert stratégia hasznosságát már a XVIII. század elején ismerték.) Borel az előbbi egyszerű megfigyelést általánosítva, megfogalmazta a kevert stratégiájú minimax tételt (ahol a stratégiafüggvény bilineáris és a stratégiahalmazok szimplexek), de bizonyítást rá nem adott. Ezt a feladatot a berlini műegyetemen alkalmazott, 25 éves Neumann János (akkori nevén Johann von Neumann) oldotta meg abban az általánosabb esetben, amikor az f stratégiafüggvény s_1 szerinti felső és s_2 szerinti alsó nivóhalmazai konvex halmazok (mai szóhasználattal, s_1 szerint kvázikonkáv és s_2 szerint kvázikonvex). Rendkívül leleményes bizonyítása, amelyet német nyelven közölt a [31] dolgozatban, a teljes indukció módszerén alapul. Ugyanakkor közölt erről egy rövid, francia nyelvű [32] cikket is, de ebben csak a Borel-féle modellről van szó, ahol a stratégiafüggvény bilineáris, és bizonyítás nélkül kijelenti a minimax tételt. A [31] dolgozat csak 1959 után vált közismerté, amikor megjelent az angol nyelvű fordítása [35]. A matematikusok többsége számára ezután vált nyilvánvalóvá, hogy a kvázikonkáv és a kvázikonvex függvényeket elsőként Neumann János használta, anélkül, hogy nevet adott volna ezeknek a fogalmaknak.

Később, a náci Németországból menekülő Neumann János a princetoni Institute for Advanced Studiesban kapott állást. A harmincas évek második felében többször látogatott Bécsbe, ahol Oskar Morgenstern közgazdasági szimpóziumokat szervezett. Ezeken tevékenyen részt vett, többek között, a modern matematikai statisztika egyik megalapítója, a kolozsvári származású Wald Ábrahám is. Az egyik ilyen szimpóziumon Neumann János bemutatta a közgazdaságtan első növekedési modelljét [34], amely a Brouwer-féle fixponttételre alapult (1941-ben S. Kakutani, Neumann bizonyítását elemezve, fedezte fel a nevét viselő fixponttételt). Ebből az együttműködésből született a nagy hatású [33] könyv is. Ez a könyv hozzájárult ahhoz, hogy a második világháborút követő években az operációkutatás hatalmas fejlődésnek indult, nemcsak a közgazdászok, hanem a matematikusok körében is. Új numerikus módszerek jelentek meg (szimplex módszer, belső pontok módszere, stb.), és az elméleti kutatások is jelentősen megszaporodtak.

A matematikus, ha egy új tételt meg akar érteni, nem elégszik meg a bizonyítás megértésével. Ilyenkor rendszerint három utat követ. Először a tétel értelmét sajátos esetekben vizsgálja, ezután más bizonyításokat keres, majd próbálja a tételt általánosítani, abból az elvből kiindulva, hogy minden javítható (és ha kell, javítandó), amit ember teremtett. A minimax tétel általánosításainak hosszú és érdekes története van, amiről, például [43]-ben olvashatunk. A minimax tételek elméleti fontossága abból is látszik, hogy a konvex analízis nagy része ilyen tételeken alapul (lásd [42]).

Amint említettem, a [31] dolgozatban szereplő minimax tételben a stratégiafüggvény szimplexek szorzatán értelmezett kvázikonvex-kvázikonkáv, folytonos függvény. Az általánosítások ezeken a feltételeken lazítanak. Az egyik fontos általánosítás a [8] dolgozatban szerepel, amelyben a stratégiafüggvény lokálisan konvex terek konvex részhalmazainak szorzatán értelmezett folytonos kvázikonkáv-kvázikonkáv függvény. Egy évvel később, Ky Fan a [9] dolgozatban a kvázikonkáv-kvázikonvex tulajdonságot egy általánosabb konvexitási feltétellel helyettesítette. Ezt H. König [19] tovább általánosította a „König-konvex függvény" fogalomának felhasználásával. Ezeket a fogalmakat a következőképpen értelmezzük: Legyen A tetszőleges, nemüres halmaz. Az $f : A \to R$ függvény Ky Fan-konvex, ha minden $a_1, a_2 \in A$ és $\lambda \in [0, 1]$ esetén létezik olyan $a_3 \in A$, hogy $f(a_3) \leq (1 - \lambda)f(a_1) + \lambda f(a_2)$. Ha ez a feltétel csak $\lambda = 1/2$ esetén kell teljesüljön, akkor f König-konvex. Az előbbi fogalomból nyilván következik az utóbbi, de fordítva nem igaz. Viszont, ha A szekvenciálisan kompakt topológikus tér és f alulról félig folytonos, akkor a két fogalom megegyezik (lásd [∗23]). Ky Fan [10] bizonyított először minimax tételeket több stratégia-függvény esetén.

Ugyanakkor, az egyensúlyelméletben megjelentek olyan tételek is, amelyekben a „konvex halmaz" szerepét a topológiából ismert „összefüggő halmaz" fogalma veszi át. Wu [51] rámutatott, hogy olyan minimax tétel is bizonyítható, amelyben a szakaszok szerepét bizonyos Jordan-görbék játsszák. Néhány évvel később Joó István [16] a nívóhalmazok módszerével ilyen típusú, egyszerű és elegáns bizonyítást adott Neumann János tételére. Ennek hatására Stachó László [26] és Komornik Vilmos [25] olyan minimax tételeket bizonyított, amelyekben a stratégiafüggvény ún. intervallum tereken értelmezett. Ezek topologikus terek, amelyeken az algebrai műveleteket az „összefüggés" tulajdonsága helyettesíti (lásd [21], [22], [27], [47], [48]). Kassay Gábor [∗48] dolgozatában minimax feladatok esetén a [∗26]-ban tárgyalt egyensúlyelvet kiterjeszti intervallumterekre. Ezt felhasználva és Joó István [15]-ban közölt minimax tételét általánosítva, rámutat arra, hogy a konvex analízisben ismert dualitási tételek topológiai természetűek. Ugyancsak a [∗26] dolgozat eredményeit általánosítják mértéktereken értelmezett minimax feladatok esetén az [∗50] dolgozatban.

A Neumann János tételének előbbi általánosításai mellett fontosnak tartom megemlíteni a következő eredményeket:

– H. Weyl bilineáris stratégiafüggvény esetén a minimax-tételt a Farkas Gyula alternatíva tételével ekvivalens, végesen generált kúpokra vonatkozó saját tételével bizonyította [50];

– C. Berge a nemlineáris alternatívatételt véges számú, zárt konvex halmaz metszetére vonatkozó saját tételével bizonyította [1];

– M. Sion nemlineáris minimax tétel bizonyításában először alkalmazta a KKM lemmát olyan kétváltozós stratégiafüggvények esetén, amelyekre az első változó szerinti felső, illetve a második változó szerinti alsó nívóhalmazok zárt konvex halmazok [39];

– J. Kindler a minimax tételek és a halmazértékű függvényekre vonatkozó metszettételek közötti kapcsolatra mutatott rá ([19]- [23]);

– S. Simons bizonyította, hogy végtelen dimenziós terek esetén a minimax-tételek és a gyenge kompaktság között szoros kapcsolat van [40]-[45].

3. Egyensúlyfeladatok megoldásainak létezése és közelítő kiszámítása

Ky Fan [11] lokálisan konvex tereken értelmezett stratégiafüggvényekre bizonyított *minimax egyenlőtlenségek* megoldhatóságára vonatkozó tételeket. Ezek ekvivalensek Tikhonov fixponttételével, és alkalmazhatók a Nash-féle egyensúlyfeladatokra is, ezért az ilyen típusú minimax feladatokat ma egyensúlyfeladatoknak nevezzük. Az utóbbi dolgozatban bizonyított tétel volt az egyensúlyfeladatokra vonatkozó első általános érvényű létezési tétel. Az „egyensúlyfeladat” elnevezés először W. Oettli és munkatársai által közölt [2, 29, 30] dolgozatokban fordul elő.

A minimax egyenlőtlenség tétele [11] szerint a következő: Legyen X Hausdorff topologikus vektortér, K legyen X-nek nemüres kompakt, konvex részhalmaza, és a $f : K \times K \to \mathbb{R}$ függvény teljesítse a következő feltételeket:

(a) $f(x, x) \geq 0$,

(b) minden rögzített $x \in K$ esetén $f(x, .)$ kvázikonvex,

(c) minden rögzített $y \in K$ esetén $f(., y)$ felülről félig folytonos.

Ekkor létezik olyan $x^* \in K$, amelyre $f(x^*, y) \geq 0$, bármely $y \in K$ esetén.

Mivel differenciál operátorokkal értelmezett variációs egyenlőtlenségek esetén a (c) feltétel nem teljesül, H. Brézis, L. Nirenberg és G. Stampacchia [5] az előbbi tételt úgy általánosítja, hogy az legyen alkalmazható azokra is.

Az egyensúlyelmélet ma a nemlineáris analízis egyik legjelentősebb ága, gyakorlati és elméleti szempontból egyaránt. Magába foglalja, többek között, az optimalizálási, a minimax, a Nash-egyensúly, a komplementaritási, a fixpont feladatokat, a variációs egyenlőtlenségeket. Ezeknek a feladatoknak egységes matematikai modellje a következőképpen fogalmazható meg. Legyen A és B két nemüres halmaz és $f : A \times B \to \mathbb{R}$ adott függvény. Az $\bar{x} \in A$ elemet egyensúlypontnak nevezzük, ha

$$\text{(EF)} \qquad f(\bar{x}, y) \geq 0, \quad \forall y \in B.$$

Az (EF) Minty típusú duálisa a következő: létezik-e $\bar{y} \in B$, amelyre

$$\text{(DF)} \qquad f(x, \bar{y}) \leq 0, \quad \forall x \in A?$$

Amint Komlósi Sándor [24] igazolta, előfordulhat, hogy ugyanolyan feltételek mellett (EF)-nek van megoldása, de (DF)-nek nincs. Ha viszont $A = B$ és az f monoton, azaz

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0, \ \forall x, y \in A,$$

továbbá f minden szakaszon felülről félig folytonos a második változóra nézve, akkor a két probléma egyenértékű.

Az egyensúlyelmélet tárgya az egyensúlypontok létezésének és tulajdonságainak vizsgálata, valamint azok (közelítő) kiszámítása. Az elméleti kérdések tisztázása mellett, a gadasági, a mechanikai, az elektrodinamikai és a mérnöki tudományok területén talált fontos alkalmazások szintén serkentik az egyensúlypontok tanulmányozását. Nem csoda tehát, hogy az utóbbi években az egyensúlyelmélet iránti érdeklődés megsokszorozódott. A matematika különböző fejezeteiben megjelenő egyensúly-feladatok közül példaként megemlítek néhányat.

1) *Minimalizálás*

Legyen X nemüres halmaz és $h : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ adott függvény. A kérdés az, hogy milyen feltételek mellett igaz a következő állítás:

$$\exists \bar{x} \in X,\ h(\bar{x}) \leq h(y), \forall y \in X.$$

Ha $K := \{x \in X : h(x) < +\infty\}$ és $f : K \times K \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := h(y) - h(x)$ minden x, $y \in K$ esetén, $\bar{x}$ akkor és csak akkor megoldása a minimalizálási feladatnak, ha $\bar{x}$ megoldása az (EF) egyensúly-feladatnak.

2) *A fixpont feladat*

Legyen X valós Hilbert tér a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalár szorzattal, és K legyen a X kompakt részhalmaza. A $T : X \to 2^X$ halmazértékű függvényre vonatkozó fixpont feladat a következő állításra vonatkozik:

$$\text{(FPF)} \qquad \exists\ \bar{x} \in K,\ \bar{x} \in T(\bar{x}).$$

Értelmezve az $f : K \times K \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \max_{u \in T(x)} \langle x - u, y - x \rangle$; x, $y \in K$ függvényt, $\bar{x}$ akkor és csak akkor megoldása az (FPF) fixpont feladatnak, ha $\bar{x}$ megoldása az (EF) egyensúly-feladatnak.

3) *A komplementaritási feladat*

Az X valós vektortér valamely K részhalmaza *kúp* , ha $tx \in K$ valahányszor $t \geq 0$ és $x \in K$. Legyen X topologikus vektortér, $K \subseteq X$ egy zárt konvex kúp, és legyen $K^* := \{x \in X^* : \langle x, y \rangle \geq 0$, ha $y \in K\}$ annak duális kúpja, ahol X^* a X duális tere és $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualitási függvény. Adott $T : K \to X^*$ operátor esetén a komplementaritási feladat a következő:

$$\text{(KF)} \qquad \exists\ \bar{x} \in K,\ T(\bar{x}) \in K^*, \quad \langle T(\bar{x}), \bar{x} \rangle = 0.$$

Értelmezve az $f : K \times K \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \langle T(x), y - x \rangle$, ha x, $y \in K$ függvényt, az $\bar{x}$ akkor és csak akkor megoldása a (KF) komplementaritási feladatnak, ha $\bar{x}$ megoldása az (EF) egyensúly-feladatnak.

4) *Variációs egyenlőtlenségek*

Az előbbi jelöléseket használva, a variációszámítási feladat a következő:

$$\exists \bar{x} \in K, \langle T(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \geq 0, \ \forall y \in K$$

Könnyen belátható, hogy ez a feladat a komplementaritási feladat általánosítása.

5) *A nyeregpont (minimax) feladat*

Legyen X, Y két nemüres halmaz és $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ adott függvény. A $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ elempár *nyeregpontja* h-nak az $X \times Y$ halmazon, ha

$$h(x, \bar{y}) \leq h(\bar{x}, \bar{y}) \leq h(\bar{x}, y), \ \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Legyen $A = B = X \times Y$ és $f : A \times B \to \mathbb{R}$,

$$f(a, b) := h(x, v) - h(u, y), \quad a = (x, y), b = (u, v).$$

6) *Nash-féle egyensúlyfeladat nemkooperatív játékok esetén*

A nemüres X_i, $i = 1, 2, ..., n$, halmazokkal értelmezzük az $X := X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ halmazt és a $h_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, függvényeket. Az $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n) \in X$ vektort a $h_1, h_2, ..., h_n$ függvények által meghatározott *Nash-egyensúlypontnak* nevezzük, ha minden $i = 1, 2, ..., n$ esetén fennáll a

$$h_i(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, ..., \bar{x}_n) \geq h_i(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, ..., \bar{x}_n), \quad \forall x_i \in X_i$$

egyenlőtlenség.

Az $f : X \times X \to \mathbb{R}$ függvény értékét az $x = (x_1, ..., x_n)$ és $y = (y_1, ..., y_n)$ által meghatározott pontban az

$$f(x, y) := \sum_{i=1}^{n} [h_i(x_1, ...x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) - h_i(x_1, ...x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)]$$

egyenlőséggel értelmezzük. Könnyen belátható, hogy $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ akkor és csak akkor egyensúlypontja f-nek, ha a $h_1, ..., h_n$ függvények által meghatározott Nash-egyensúlypont.

A konvex függvény fogalmának Ky Fan és König-féle általánosításai bizonyos algebrai relációk segítségével történnek. Kassay Gábor művei közül néhány ilyen típusú feltételeket tartalmaz. Például, a [∗26] dolgozatban az előbbieknél általánosabb algebrai feltétel szerepel. Ennek a dolgozatnak tulajdonképpeni tárgya az egyensúlyfeladattal kapcsolatos „supinf-feladat". Ez a feladat a következő: adott $f : A \times B \to \mathbb{R}$ függvény esetén milyen feltételek mellett teljesül a

$$\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} f(x, y) \geq 0 \tag{1}$$

egyenlőtlenség? Ha ez az egyenlőtlenség teljesül, akkor azt mondjuk, hogy f teljesíti az supinf-feltételt. Minimax feladatok esetén a supinf-feltétel a

$$\sup_{x\in A}\inf_{y\in B} f(x,y) = \inf_{y\in B}\sup_{x\in A} f(x,y)$$

következő egyenlőséget jelenti.

A fenti kérdésre adott válasz a konkáv függvény fogalmának következő általánosításán alapul: Az $f : A \times B \to \mathbb{R}$ függvény konkáv-szerű az A halmazon, ha létezik a $[0,1]$ intervallumnak olyan T sűrű részhalmaza, amelyre

$$\sup_{x\in A}\min_{1\le j\le m} f(x,y_j) \ge \min_{1\le j\le m}\sum_{i=1}^{n} s_i f(x_i,y_j), \tag{2}$$

minden $s_1,\ldots,s_n \in T,\ \sum_{i=1}^{n} s_i = 1,\ x_1,\ldots,x_n \in A,\ y_1,\ldots,y_m \in B$ esetén. Az f függvény konvex-szerű a B halmazon, ha $-f$ konkáv-szerű a második változóra nézve. (Az eredeti értelmezésben $T = [0,1]$.)

Hasonló fogalmak – bizonyos sajátos esetekben – szerepeltek korábban is a [3], illetve [46] dolgozatokban.

A Hahn-Banach tétel véges dimenziós változatával igazolható, hogy ha $B = \{y_1,\ldots,y_m\}$ és az f konkáv-szerű, akkor (1) egyenértékű azzal, hogy

$$\sup_{x\in A}\sum_{j=1}^{m} t_j f(x,y_j) \ge 0,\ \forall\, t_1,\ldots,t_m \in T,\ \sum_{j=1}^{m} t_j = 1. \tag{3}$$

A következő tételben szerepelnek az alábbi tulajdonságok. Az f teljesíti a gyenge zártsági feltételt, ha a $\sup_{x\in A}\inf_{y\in F} f(x,y) \ge 0$, minden $F \subseteq B$ véges részhalmaz esetén, maga után vonja az (1) egyenlőtlenséget. Az f teljesíti az erős zártsági feltételt, ha minden $F \subseteq B$ véges részhalmaz esetén a $\sup_{x\in A}\inf_{y\in F} f(x,y) \ge 0$ maga után vonja azt, hogy létezik $x \in A$, amelyre $f(x,y) \ge 0$ minden $y \in B$ esetén.

A [∗26] dolgozat főtétele szerint ha f az A halmazon konkáv-szerű és teljesül a gyenge zártsági feltétel, akkor (1) egyenértékű azzal, hogy (3) igaz minden $\{y_1,\ldots,y_m\} \subset B$ esetén. Továbbá, ha az erős zártsági feltétel is teljesül, akkor az egyensúly feladat megoldhatósága az jelenti, hogy (3) teljesül minden $\{y_1,\ldots,y_m\} \subset B$ esetén.

Könnyen belátható, hogy ha $B \subset A$ konvex halmaz, f konvex a B-n, és $f(y,y) \ge 0$ minden $y \in B$ esetén, akkor (3) teljesül minden $\{y_1,\ldots,y_m\} \subset B$ esetén.

Továbbá, abban az esetben amikor az A kompakt topologikus tér és f felülről félig folytonos az A-n, akkor teljesül az erős zártsági feltétel. A fenti tétel második része úgy tekinthető mint a Weierstrass tétel általánosítása. Valójában az említett tétel egy skalarizációs elvet fejezi ki.

A [$*$26] dolgozat, többek között, a következő okok miatt is figyelemre méltó:

1) A benne értelmezett konvexítási fogalom általánosabb, mint a König-konvexitás, és a topológiai feltételek is kevésbé megszorítóak, mint például a [9], [26] és más – algebrai egyensúly feltételeket tartalmazó – dolgozatokban. Fontos, hogy [$*$26]-ban a stratégiafüggvény értelmezési tartománya nem rendelkezik sem topológiai sem algebrai struktúrával.

2) A [$*$26]-ban vizsgált supinf-egyenlőtlenség az egyensúlypont létezésének olyan szükséges feltételét fejezi ki, amely elégséges is, ha a minimum létezésére vonatkozó Weierstrass-tétel alkalmazható, például, ha A kompakt és f az első változóra nézve felülről féligfolytonos. (A természet mindig egyensúlyra törekszik, de nem mindig éri azt el.)

3) A [$*$26] tételeiből könnyen levezethetők az operációkutatás alaptételei (Gordan-tétel, Farkas-tétel, Neumann János minimax tétele, Fritz John tétele, Karush–Kuhn–Tucker-tétel, stb.) (lásd [$*$40]).

4) Ezek a tételek alkalmazhatók végtelen programozási és vektoregyensúly feladatokra is (lásd [12],[13],[28],[$*$92]).

5) A használt matematikai apparátus egyszerű, mindössze a Hahn–Banach-tétel véges dimenziós változatára van szükség.

6) Ha $B \subseteq A$ és f mint kétváltozós függvény monoton, akkor [$*$26] tételeiből rögtön következik az egyensúlyelméletben ismert dualitási tétel.

7) A lineáris és/vagy topológiai struktúrával nem rendelkező absztrakt konvexitási tereken értelmezett egyensúlyfeladatok tárgyalásának ez az egyik legegyszerűbb modellje (lásd [14]-[23], [$*$20], [$*$22]-[$*$25], [$*$29], [$*$31], [$*$32], [$*$41], [$*$42], [$*$48], [$*$55], [$*$58], [$*$61], [$*$62], [$*$66], [$*$70]).

8) A [$*$26] dolgozat alapötlete nagyon egyszerű. Ha a minimax feladatot diszkretizáljuk, akkor egy Borel-típusú mátrixjátékhoz jutunk. Ennek randomizált alakja szimplexek szorzatán értelmezett bilineáris stratégiafüggvénnyel van megadva, ezért Neumann János tétele szerint létezik legalább egy megoldása. Ha a diszkretizálást tetszőlegesen változtatjuk, akkor az így megszerkesztett megoldások halmazának segítségével a stratégiafüggvényre vonatkozóan megfogalmazható egy egyszerű feltétel (a supinf-konkavitás), amely egy zártsági feltétellel együtt garantálja a supinf-feladat megoldhatóságát.

9) A [$*$26] dolgozat pedagógiai szempontból is érdekes, mert a használt matematikai apparátus viszonylag egyszerű és az eredmények hatósugara nagy. Ezek könnyen kiterjeszthetők, például, vektor- vagy halmazértékű függvényekkel értelmezett egyensúlyfeladatokra is (lásd [$*$92] és [$*$93]).

Az egyensúly-elmélet fontos része az egyensúlypontok közelítő kiszámítására vonatkozik. A gyakorlatban egy ilyen feladat általában nem egyszerű. Ennek okai közül csak hármat említek: Lehet, hogy a felhasznált módszerek jobb analitikai feltételeket követelnek, mint amivel az egyensúly-feladat adatai rendelkeznek. Még összetettebb a feladat, ha az adatai csak közelítőleg ismertek. Az is előfordul, hogy a feladat rosszul fogalmazott (ill-posed). Ilyenkor a mentőöv az lehet, ha a feladatot „regularizáljuk”, vagyis olyan feladat-sorozattal helyettesítjük, amelynél az említett nehézségek eltűnnek, és a megfelelő megoldások konvergálnak az eredeti feladat megoldásához, ha az létezik. Több ilyen regularizációs módszert ismerünk. Ezek közül legismertebbek a Tikhonov-féle, a Bregman-féle és a projekciós módszerek. Ezeknél a regularizáló függvények

$$f_k(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{k}\theta(x, y)$$

alakúak, ahol θ megfelelő tulajdonságokkal rendelkező függvény (lásd például [∗92], 11.5 Tétel). Kassay Gábor közelítő módszerekkel kapcsolatos eredményei közül fontosak valós- vagy halmazértékű függvényekre vonatkozó alábbi eredményei.

A [∗71] dolgozatban a Bregman-féle iteratív regularizációs módszerrel létezési és egyértelműségi tételeket bizonyítanak egyensúlyfeladatokra, reflexív Banach-terek zárt konvex részhalmazain értelmezett függvények esetén. Bizonyítják, hogy a megszerkesztett iteratív sorozat tagjaiból képzett halmaz minden gyenge torlódási pontja megoldása az adott egyensúly-feladatnak.

A [∗84] dolgozatban valós Hilbert-tereken értelmezett Brézis- pszeudomonoton kétváltozós függvényekkel megfogalmazott egyensúly feladatok megoldására egy új Popov-típusú iteratív módszer gyenge és erős konvergenciáját tanulmányozzák.

4. Halmazértékű függvényekkel értelmezett egyensúly-feladatok

Az 1980-ban megvédett *Rockafellar algoritmusa* című államvizsga-dolgozatában Kassay Gábor a következő feladatot tárgyalta.

Legyen H valós Hilbert tér. R.T. Rockafellar algoritmusa olyan eljárás, amellyel közelítőleg meghatározhatjuk valamely *maximálisan monoton* $T : H \to 2^H$ halmazértékű operátor zérushelyeit, vagyis azokat a $\bar{x} \in H$ pontokat, amelyekre $0 \in T(\bar{x})$.

Az algoritmus egy olyan $\{x_k\} \subset H$ sorozat megszerkesztéséből áll, ahol valamely $x_0 \in H$ pontból kiindulva az x_{k+1} pontot úgy értelmezzük mint a T_k operátor egyetlen zérushelye, ahol

$$T_k(x) = T(x) + \gamma_k(x - x_k)$$

itt $\{\gamma_k\}$ egy pozitív tagú korlátos valós számsorozat, amelynek tagjait regularizációs együtthatóknak nevezzük.

Rockafellar [37] bizonyította, hogy ha T maximálisan monoton és léteznek zérushelyei, akkor az $\{x_k\}$ sorozat gyengén konvergál a T valamelyik zérushelyéhez. Ha nincsenek zérushelyek, akkor a megszerkesztett sorozat nem korlátos.

1985-ben jelent meg Kassay Gábor első tudományos dolgozata [∗2], amelyben Rockafellar módszerét kiterjesztette reflexív Banach-terekre. Ebben a kérdéskörben később még néhány érdekes dolgozatot publikált társszerzőkkel.

A [∗46] dolgozatban reflexív Banach-tereken értelmezett, maximálisan monoton halmazértékű függvények Browder-típusú regularizálásával szerkesztett közelítő módszer stabilítását vizsgálták, ha az eredeti adatok szintén csak közelítőleg ismertek. Eredményeik magukba foglalják Rockafellar módszerének általánosítását arra az esetre, amikor az eredeti függvény Mosco-approximációval adott.

Az [∗53] dolgozatban a [∗2] eredményeit általánosítják reflexív Banach-téren értelmezett nem maximálisan monoton halmazértékű függvényekre. Rockafellar módszeréhez hasonló eljárással, a Bregman [4] távolságfüggvény felhasználásával olyan iteratív sorozatot szerkesztenek, amely gyengén konvergál egy megoldáshoz. Eredményeiket alkalmazzák rosszul fogalmazott (ill-posed) variációs egyenlőtlenségekre, továbbá olyan monoton (de nem maximálisan monoton) halmazértékű függvényekre, amelyek grafikonjai szekvenciálisan gyengén zártak, és olyan konvex optimalizálási feladatokra, amelyben az adatok csak közelítően vannak meghatározva.

A [∗64] dolgozatban az [∗53]-ben alkalmazott módszerrel erősen monoton, pszeudomonoton, illetve hemifolytonos többértékű függvényekkel értelmezett variációs egyenlőtlenség-rendszerek közelítő megoldására erősen konvergáló sorozatot szerkesztettek.

A [∗86] dolgozatban reflexív Banach-tereken többértékű Brézis pszeudomonoton operátorral értelmezett variációs egyenlőtlenség megoldhatóságára adnak feltételeket, általánosítva Tikhonov [49] és Browder [6] regularizációs módszerekkel kapott eredményeit.

Lgyen A és B két nemüres halmaz, Z topologikus valós vektortér, $C \subseteq Z$ egy konvex kúp, amelynek $\mathrm{int}C$-vel jelölt belseje nem üres, és $f : A \times B \to Z$ adott függvény. Ebben az esetben az egyensúly-feladat kétféleképpen is megfogalmazható: Igazoljuk, hogy

(EVEF) $\exists \bar{a} \in A$ úgy, hogy $f(\bar{a}, b) \notin C \setminus 0$, $\forall b \in B$, vagy
(GVEF) $\exists \bar{a} \in A$ úgy, hogy $f(\bar{a}, b) \notin \mathrm{int}C \setminus 0$, $\forall b \in B$.

Az első esetben erős egyensúly-feladatról, a másodikban gyenge egyensúly-feladatról beszélünk. Ezek a feladatok általánosításai a gyakorlatban gyakran előforduló vektorfüggvények optimizálási és a vektor variációs egyenlőtlenségek megoldására vonatkozó feladatoknak.

Ehhez a témakörhöz tartoznak Kassay Gábor következő dolgozatai: [∗49], [∗56], [∗62], [∗64], [∗71], [∗75], [∗80], [∗84].

A halmazértékű operátorokkal értelmezett variációs egyenlőtlenségek sajátos esetei az előbbi feladatnak.

Legyen X az E valós Hausdoff lokálisan konvex tér nemüres részhalmaza és Y nemüres részhalmaza az E^* duális térnek. Továbbá, legyen C az Y nemüres részhalmaza, és legyen $F : C \to 2^X$ halmazértékű leképezés, nemüres értékekkel.

A Minty-féle variációs egyenlőtlenség problémája a következő:

$$\mathcal{M}(F;C): \inf_{x\in F(v)} \langle x, v-u\rangle \geq 0,\ \forall v \in C.$$

A Stampacchia-féle variációs egyenlőtlenség problémája a következő:

$$\mathcal{S}(F;C): \sup_{x\in F(u)} \langle x, v-u\rangle \geq 0, \forall v \in C.$$

Legyenek $X_1,\dots X_n$, $Y_1,\dots,Y_n$ valós Hausdorff topologikus vektorterek, és $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$ az $X_i\times Y_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ halmazokon értelmezett folytonos bilineáris függvények amelyek függhetnek i-től).

A Minty- és a Stampacchia-féle variációs egyenlőtlenségek rendszerére vonatkozó problémájának megfogalmazása érdekében tételezzük fel, hogy $C_1\subset Y_1$, $\dots$, $C_n \subset Y_n$ nemüres halmazok és

$$F_i : C_1\times\cdots C_n \to 2^{X_i} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

halmazértékű függvények nemüres értékekkel. A Minty-féle variációs egyenlőtlenség problémája az $F_1,\dots,F_n$ halmazértékű függvények rendszerére a következő:

$$\mathcal{M}(F_1,\dots,F_n;C_1,\dots,C_n):$$
$$\begin{cases} \exists\ (u_1,\dots,u_n)\in C_1\times\cdots\times C_n:\ \forall i=1,\dots,n,\\ \forall v\in C_i\ \forall x\in F_i(u_1,\dots,u_{i-1},v,u_{i+1}\dots,u_n),\ \langle x,u_i-v\rangle_i\geq 0.\end{cases}$$

A Stampacchia-féle variációs egyenlőtlenség problémája ugyanazon feltételek mellett a következő:

$$\mathcal{S}(F_1,\dots,F_n;C_1,\dots,C_n):$$
$$\begin{cases} \exists\ (u_1,\dots,u_n)\in C_1\times\cdots\times C_n:\ \forall i=1,\dots,n,\\ \forall v\in C_i\ \exists x\in F_i(u_1,\dots,u_i\dots,u_n),\ \langle x,v-u_i\rangle_i\geq 0.\end{cases}$$

Fontos gyakorlati helyzetek motiválják a variációs egyenlőtlenségi rendszerek tanulmányozását. Például az folyadékok áramlása repedezett porózus közegen keresztül és a plaszticitás modelljei variációs problémákhoz vezetnek (lásd [38]).

Az ilyen rendszerek fontosságát a Nash-egyensúlyelmélet is igazolja. [∗30]-ban a szerzők kimutatták, hogy abban az esetben, ha a F_i halmazértékű függvények Clarke szubdifferenciál típusúak, akkor az $\mathcal{S}(F_1,\dots,F_n;C_1,\dots,C_n)$ problémának van megoldása megfelelő feltételek mellett. Az idézett eredményből az következik, hogy ha az i-edik potenciál típusú operátor monoton az i-edik változóra nézve, akkor az $\mathcal{S}(F_1,\dots,F_n;C_1,\dots,C_n)$ feladat minden megoldása Nash-féle egyensúlyi pont a potenciálrendszer számára.

A [∗28] dolgozatban a szerzők az optimalizálás elméletében ismert Fermat-elvet – a Clarke-derivált felhasználásával – kiterjesztették egyensúlyfeladatokra.

Normált tereken értelmezett lokálisan Lipschitz-függvények esetén [*30]-ban értelmezték a Clarke-féle iránymenti derivált erős és gyenge változatát, valamint az erős és gyenge stacionárius pont fogalmát. Minden erős staciunárius pont gyenge stacionárius pont is. Ezeket alkalmazva a Nash-féle egyensúlypontokra, konvexitási és kompaktsági feltételek nélkül igazolták, hogy minden egyensúlypont erős stacionárius pont. Ha a feladat megfogalmazásában szereplő X_i halmazok kompakt konvex halmazok, akkor a Nash feladat tág osztályára léteznek gyenge stacionárius pontok. Ily módon a Nash-egyensúlyontra egy használható szükséges feltételt kapunk. Ez a feltétel egy halmazértékű operátorokkal adott $\mathcal{S}(F_1, \dots, F_n; C_1, \dots, C_n)$ típusú variációs egyenlőtlenség-rendszerrel értelmezett. Ha ebben a feladatban az F_i potenciál típusú operátor monoton az i-edik változóra nézve, minden i esetén, akkor ennek a feladatnak minden megoldása Nash-egyensúlypont a potenciálokkal értelmezett függvényrendszerre nézve.

A [$*$39] dolgozatban elégséges feltételeket adnak a Minty és a Stampacchia-féle variációs egyenlőtlenség-rendszerek megoldására. Bebizonyították, hogy ha az egyenlőtlenségek külön-külön megoldhatók, és az $F_1, \dots, .F_n$ függvények alulról féligfolytonosak, akkor a rendszernek is van megoldása, vagyis a faktorizációs elv érvényes.

Kassay Gábor tudományos tevékenységét a [$*$92] monográfiával koronázta meg. Ez a könyv az egyensúlyelmélet legújabb eredményeit - köztük a sajátjainak egy részét - foglalja össze egységes vezérfonal szerint.

Kassay Gábor pályafutása alatt tevékenységét rendkivül tudatosan szervezte meg. Például, mindenkivel kereste a kapcsolatot, akik az őt érdeklő problémák kutatásában fontos eredményeket értek el. Ebben segítették egyéni tulajdonságai is: nyított természetű volt, mindig kereste a tanulás lehetőségét a kapcsolataiban, a fellépése kellemes benyomást keltett, hamar megértette mások mondanivalóit, tisztán tudta kifejezni magát és szeretett másokkal együtt dolgozni. Ezzel magyarázható, hogy kutatási területén a legjobb szakemberekkel dolgozott együtt és dolgozatainak többsége társszerzőkkel készült. Példák és ellenpéldák szerkesztésében, valamint a dolgozat végleges formájának kidolgozásában sikerrel pályázhatott volna a nemzetközi nagymesteri címre. Amikor tanulmányi útjairól hazatért, a tanszéki Popoviciu-szemináriumon (amelynek az utóbbi években ő volt a vezetője) mindig beszámolt tapasztalatairól.

Barátai és kollegái lelkében nagy űrt hagyott maga után.

Hivatkozások

[1] C. Berge: *Sur une propriété combinatoire des ensembles convexes*, C.R. Acad. Sci. Paris, Vol. **248**, pp. 301–319 (1959).

[2] E. Blum and W. Oettli: *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student, Vol. **63**, pp. 123–145 (1994).

[3] A. Bogmér, M. Horváth and I. Joó: *Minimax tételek és konvexitás*, Matematikai Lapok, Budapest Vol. **34**, pp. 149–170 (1987).

[4] L.M. Bregman: *The relaxation method of finding the common points of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming,* USSR Comput. Math. Phys., Vol. **7** No. **3**, pp. 200–217 (1967). DOI: 10.1016/0041-5553(67)90040-7

[5] H. Brézis, L. Nirenberg and G. Stampacchia: *A Remark on Ky Fan's Minimax Principle,* Bullettino U.M.I., Vol. **4** No. **6**, pp. 293–300 (1972).

[6] F.E. Browder: *Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. **56** No. **4** pp. 1080–1086 (1966). DOI: 10.1073/pnas.56.4.1080

[7] S.S. Chang and Y. Zhang: *Generalized KKM theorem and variational inequalitie*, J. Math, Anal. Appl., Vol. **159**, pp. 208–223 (1991). DOI: 10.1016/0022-247X(91)90231-N

[8] K. Fan: *Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. **38**, pp. 121–126 (1952). DOI: 10.1073/pnas.38.2.121

[9] K. Fan: *Minimax theorems*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. **39**, pp. 42–37 (1953). DOI: 10.1073/pnas.39.1.42

[10] K. Fan: *Sur une théoreme minimax*, C.R. Acad. Sci. Paris, Vol. **259**, pp. 3925–3928 (1964).

[11] K. Fan: *A minimax inequality and its applications*, in O. Shisha (ed.), Inequalities III, Academic Press, pp. 103–113 (1972).

[12] M.R. Galán: *An intrinsic notion of convexity for minimax*, J. Convex Anal., Vol. **21**, pp. 1105–1139 (2014).

[13] M.R. Galán: *The Gordan theorem and its implication for minimax theory*, J. Nonlinear Convex Anal., Vol. **17**, pp. 2385–2405 (2016).

[14] I. Joó: *Note on my paper*: *A simple proof of von Neumann's minimax theorem*, Acta Math. Hung., Vol. **44** No. **3–4**, pp. 363–365 (1984). DOI: 10.1007/BF01950292

[15] I. Joó: *On some convexities*, Acta Math. Hung., Vol. **54** No. **1–2**, pp. 163–172 (1989). DOI: 10.1007/BF01950717

[16] I. Joó: *A simple proof of von Neumann's minimax theorems*, Acta Sci. Math., Vol. **42**, pp. 91–94 (1980).

[17] I. Joó and L.L. Stachó: *A note on Ky Fan's minimax theorem*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar., Vol. **39**, pp. 401–407 (1982). DOI: 10.1007/BF01896709

[18] I. Joó: *Minimax theorems not involving convexities of the function*, Publ., Math., Debrecen, Vol. **45**, pp. 395–396 (1994).

[19] J. Kindler: *On a minimax theorem of Terkelsen*, Arch. Math., Vol. **55**, pp. 573–583 (1990). DOI: 10.1007/BF01191693

[20] J. Kindler: *Intersection theorems and minimax theorems based on connectedness*, J. Math. Anal. Appl., Vol. **178**, pp. 529–546 (1993). DOI: 10.1006/jmaa.1993.1323

[21] J. Kindler and R. Trost: *Minimax theorems for interval spaces*, Acta. Math. Hung., Vol. **54**, pp. 39–49 (1989). DOI: 10.1007/BF01950707

[22] J. Kindler: *Intersection theorems, minimax theorems, and abstract connectedness*, in: Minimax Theory and App;ications (Ed.: B. Riccieri and S. Simons), Kluwer, (1998). DOI: 10.1007/978-94-015-9113-3_9

[23] J. Kindler: *Intersecting sets in midset spaces*, Arch. Math., Vol. **62**, pp. 168–176 (1994). DOI: 10.1007/BF01198671

[24] S. Komlósi: *On the Stampacchia and Minty variational inequalities*, in: G. Giorgi and F.A. Rossi (Eds.) Generalized Convexity and Optimization for Economic and Financial Decisions, Pitagora Editrice, Bologna, 1999.

[25] V. Komornik: *Minimax theorems for upper semicontinuous functions*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., Vol. **40**, pp. 159–163 (1982). DOI: 10.1007/BF01897316

[26] H. König: *Über das von Neumannsche Minimax-Theorem*, Arch. Math., Vol. **19**, pp. 482–487 (1968). DOI: 10.1007/BF01898769

[27] H. König: *A general minimax theorem based on connectedness*, Arch. Math., Vol. **59**, pp. 55–64 (1992). DOI: 10.1007/BF01199015

[28] P.M. Lopez and M.R. Galán: *Infinite programming and theorems of the alternative*, Math. Meth. Appl. Sci., pp. 1–10 (2019).

[29] L.D. Muu and W. Oettli: *Convergence of an adoptive penalty scheme for finding constrained equilibria*, Nonlinear Anal., Vol. **18**, pp. 1159–1166 (1992). DOI: 10.1016/0362-546X(92)90159-C

[30] M.A. Noor and W. Oettli: *On general nonlinear complementarity problems and quasi-equilibria*, Le Matematiche (Catania) Vol. **49**, pp. 313–331 (1994).

[31] J. von Neumann: *Zur Theorie der Gesellschaftspiele*, Math. Annalen., Vol. **100**, pp. 295–320 (1928) DOI: 10.1007/BF01448847

[32] J. von Neumann: *Sur la théorie des jeux*, C.R. Acad. Sci. Paris, Vol. **186** No. **25**, pp. 1689–1691 (1928).

[33] J. von Neumann and O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.

[34] J. von Neumann: *Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes*, Ergebn. Math. Kolloq. Wien, Vol. **8**, pp. 73–83 (1937).

[35] J. von Neumann: *On the theory of games of strategy*, in A.W. Tucker, R.D. Luce (eds.) Contribution to the theory of games, Princeton Univ. Press, Vol. **4**, pp. 13–42 (1959). DOI: 10.1515/9781400882168-003

[36] *S. Park* and H. Kim: *Generalized KKM mapson generalized convex spaces*, Nonlinear Analysis Forum, Vol. **5**, pp. 15–35 (2000).

[37] R.T. Rockafellar: *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim., Vol. **14** No **5**, pp. 877–898 (1976). DOI: 10.1137/0314056

[38] R.E. Showalter: *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Vol. **49** (1996).

[39] M. Sion: *On General Minimax Theorems*, Pacific J. Math., Vol. **8**, pp. 171–176 (1958). DOI: 10.2140/pjm.1958.8.171

[40] S. Simons: *Criteres de faible compacité en termkes du theoreme de minimax,* Seminaire Choquet, Vol. **23**, p. 8 (1970/1971).

[41] S. Simons: *Maximinimax, minimax, and antiminimax theorems and a result of R.C. James*, Pac. J. Math., Vol. **40** No **3**., pp. 709–718 (1972). DOI: 10.2140/pjm.1972.40.709

[42] S. Simons: *Minimax and monotonicity*, Lecture notes in mathematics, Springer-Verlag, Vol. **1693** (1998). DOI: 10.1007/BFb0093633

[43] S. Simons: *Minimax theorems and their proofs*, Ding-Zhu Du and Panos M. Pardalos (ed.): Minimax and applications, Kluwer Acad. Publ., pp. 1–23 (1995).
DOI: 10.1007/978-1-4613-3557-3_1

[44] S. Simons: *A flexible minimax theorem*, Acta Math. Hungar., Vol. **63**, pp. 119–132 (1994). DOI: 10.1007/BF01874944

[45] S. Simons: *Addendum to "A flexible minimax theorem"*, Acta Mathematica Hungarica, Vol. **69**, pp. 359–360 (1995). DOI: 10.1007/BF01874582

[46] Z. Sebestyén: *An elementary minimax theorem,* Acta Sci. Math., Szeged, Vol. **47**, pp. 457–459 (1984).

[47] L.L. Stachó: *Minimax theorems beyond topological vector spaces*, Acta Sci.Math., Szeged, Vol. **42**, pp. 157–164 (1980).

[48] L.L. Stachó: *A note on König's minimax theorem*, Acta Math. Hung., Vol. **64** No. **2**, pp. 183–190 (1994). DOI: 10.1007/BF01874121

[49] A.N. Tikhonov: *Regularization of incorretly posed problems,* Soviet. Math. Dokl., Vol. **4**, pp. 1035–1038 (1963).

[50] H. Weyl: *Elementary Proof of a Minimax Theorem Due to von Neumann*, in H.W. Kuhn and A.W. Tucker (eds), *Contributions to the Theory of Games 1*, Annals of Mathematical Studies, Princeton University Press, Vol. **20**, pp. 19–25 (1950).

[51] Wu, Wen–tsün: *A remark on the fundamental theorem in the theory of games*, Sci. Rec., New. Ser., Vol. **3**, pp. 229–233 (1959).

Kolumbán József 1935-ben született, 1957-ben a kolozsvári Bolyai Tudományegyetem matematika-fizika szakán tanári oklevelet, majd 1958-ban a kolozsvári Victor Babeş Tudományegyetemen kutató matematikusi oklevelet szerzett. Egyetemi pályáját a Bolyai Tudományegyetemen kezdte 1959-ben, majd folytatta az egyesített Babeş–Bolyain, ahol jelenleg emeritus professzor. 1968-as doktori disszertációjában a többszempontú szélsőérték-feladatok dualitáselméletével foglalkozott.

Pályafutásának elején approximációelmélettel, majd pedig egyensúlyelmélettel foglalkozott. 1971-ben elnyerte a Humboldt Alapítvány kutatói ösztöndíját. A romániai rendszerváltás után újraalakult Erdélyi Múzeum-Egyesület választmányának tagja lett. Ő kezdeményezte a Matematika és Informatika osztály megalakítását, amelynek 9 éven át elnöke volt. 15 évig volt az általános és középiskolai matematikai oktatást segítő kolozsvári Matlap főszerkesztője. 2011 és 2014 között a Kolozsvári Akadémiai Bizottság egyik alelnöke volt. 2001-től a Magyar Tudományos Akadémia külső tagja. Közel 100 dolgozatot, két könyvet és hat egyetemi jegyzetet publikált. Balázs Mártonnal közösen 1978-ban megjelentette *Matematikai analízis* című könyvét a kolozsvári Dacia Könyvkiadónál. Ez a könyv az erdélyi magyar matematikai oktatás több generációját szolgálta.

KOLUMBÁN JÓZSEF
Babeş–Bolyai Tudományegyetem,
Matematika és Informatika Kar,
Kolozasvár, Kogălniceanu utca 1.
jokolumban@yahoo.com

THE SCIENTIFIC ACTIVITY OF PROF. GÁBOR KASSAY

József Kolumbán

The paper summarizes the scientific work of Gábor Kassay (1956–2021), professor of mathematics and university professor.

Alkalmazott Matematikai Lapok **40** (2023), 27–36.

KASSAY GÁBOR PUBLIKÁCIÓI

Összeállította: KÁSA ZOLTÁN

Cikkek

[1] G. Kassay: *Existenţa funcţiilor implicite în spaţii Banach-reflexive*, Seminarul "Theodor Angheluţă", Institutul Politehnic Cluj−Napoca, pp. 123–128 (1983).

[2] G. Kassay: *The proximal points algorithm for reflexive Banach spaces*, Studia Univ. Babeş–Bolyai, Mathematica, Vol. **30**, pp. 9–17 (1985).

[3] G. Kassay: *On solvability of nonlinear Hammerstein equations*, Babeş–Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis, Vol. **7**, pp. 93–100 (1985).

[4] G. Kassay: *A fixed point theorem for generalized contractive mappings*, Babeş−Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis, Vol. **7**, pp. 89–92 (1985).

[5] G. Kassay: *Normal convexity structure and fixed points in metric spaces*, Proceedings of the Conference on Differential Equations, Cluj, pp. 233–238 (1985).

[6] G. Kassay: *A characterization of reflexive Banach spaces with normal structure*, Bollettino della Unione Matematica Italiana, Vol. **5** No. **2**, pp. 273–276 (1986).

[7] G. Kassay: *On Takahashi's convexity and fixed points in metric spaces*, Babeş–Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis, Vol. **4** pp. 91–98 (1986).

[8] G. Kassay: *The asymptotic center and fixed points in metric spaces*, Babeş–Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis, Vol. **7** pp. 69–74 (1987).

[9] G. Kassay: *Stabilitatea soluţiilor pentru ecuaţii cu aplicaţii monotone*, Seminarul "Didactica Matematicii", Cluj, Vol. **4**, pp. 115–118 (1987−1988).

[10] G. Kassay and I. Kolumbán: *Implicit function theorems for monotone mappings*, Babeş–Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis, Vol. **7**, pp. 7–24 (1988).

[11] G. Kassay: *On a fixed point theorem of W.A. Kirk*, Babeş–Bolyai University Cluj, Seminar on Fixed Point Theory, Vol. **3**, pp. 23–28 (1988).

[12] G. Kassay and I. Kolumbán: *Remarks on local stability of fixed points*, Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity, Cluj, pp. 191–196 (1988).

[13] G. Kassay and I. Kolumbán: *On a theorem of Brezis-Nirenberg-Stampacchia*, Babeş-Bolyai University Cluj, Seminar on Optimization Theory, Vol. **8**, pp. 57–66 (1989).

[14] G. Kassay and I. Kolumbán: *Implicit functions and variational inequalities for monotone mappings*, Babeş–Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis, Vol. **7**, pp. 79–92 (1989).

[15] G. Kassay and J. Kolumbán: *On the constrained optimization*, Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity, Cluj, pp. 181–190 (1989).

[16] G. Kassay: *Funcţii vectoriale monotone*, Seminarul "Didactica Matematicii", Cluj, Vol. **5**, pp. 149–151 (1989).

[17] G. Kassay and I. Kolumbán: *On the Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz and Ky Fan's theorems*, Babeş–Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis, Vol. **7**, pp. 87–100 (1990).

[18] Z. Balogh and G. Kassay: *On convexity of the implicit function*, Babeş–Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis, Vol. **7** pp. 77–82 (1990).

[19] G. Kassay: *On Brézis-Nirenberg-Stampacchia's minimax principle*, Babeş–Bolyai University Cluj, Seminar on Mathematical Analysis, Vol. **7**, pp. 101–106 (1991).

[20] G. Kassay: *A simple proof for König's minimax theorem*, Acta Mathematica Hungarica, Vol. **63** No. **4**, pp. 371–374 (1994). DOI: 10.1007/BF01874462

[21] G. Kassay and I. Kolumbán: *On the generalized Minty's inequality*, Studia Univ. Babeş−Bolyai, *Mathematica*, Vol. **39**, pp. 37–45 (1994).

[22] I. Joó and G. Kassay: *On saddle points of set–valued mappings*, Annales Univ. Sci. Budapest, Vol. **37**, pp. 209–214 (1994).

[23] T. Illés and G. Kassay: *Farkas type theorems for generalized convexities*, Pure Mathematics and Applications, Vol. **5** No. **2**, pp. 225–239 (1994).

[24] I. Joó and G. Kassay: *Convexity, minimax theorems and their applications*, Annales Univ. Sci., Budapest, Vol. **38**, pp. 71–93 (1995).

[25] T. Illés and G. Kassay: *Perfect duality for K–convexlike programming problems*, Studia Univ. Babeş–Bolyai, Mathematica, Vol. **41**, pp. 69–78 (1996).

[26] G. Kassay and J. Kolumbán: *On a generalized sup–inf problem*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. **91** No. **3**, pp. 651–670 (1996).
DOI: 10.1007/BF02190126

[27] W.W. Breckner and G. Kassay: *A systematization of convexity concepts for sets and functions*, Journal of Convex Analysis, Vol. **4** No. **1**, pp. 109–127 (1997).

[28] G. Kassay and Zs. Páles: *A localized version of Ky Fan's minimax inequality*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Vol. **35** No. **4**, pp. 505–515 (1999).
DOI: 10.1016/S0362-546X(97)00700-1

[29] T. Illés and G. Kassay: *Theorems of the alternative and optimality conditions for convexlike and general convexlike programming*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. **101** No. **2**, pp. 243–257 (1999).
DOI: 10.1023/A:1021781308794

[30] G. Kassay, J. Kolumbán and Zs. Páles: *On Nash stationary points*, Publicationes Mathematicae Debrecen, Vol. **54** No. **3–4**, pp. 267–279 (1999).

[31] J.B.G. Frenk and G. Kassay: *On classes of generalized convex functions*, Gordan–Farkas type theorems and Lagrangian duality, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. **102** No. **2**, pp. 315–343 (1999).
DOI: 10.1023/A:1021780423989

[32] T. Illés and G. Kassay: *Generalized Farkas theorems and their consequences*, in: New Trends in Operations Research (in memoriam Gyula Farkas), Eds: S. Komlósi, T. Szántai, Proceedings of the 23−rd Hungarian Operations Research Conference, Pécs, pp. 43–57 (1999).

[33] G. Kassay and J. Kolumbán: *System of multi–valued variational inequalities*, Publicationes Mathematicae Debrecen, Vol. **56** No. **1–2**, pp. 185–195 (2000).

[34] G. Kassay and J. Kolumbán: *Multivalued parametric variational inequalities with α-pseudomonotone maps*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. **107** No. **1**, pp. 35–50 (2000). DOI: 10.1023/A:1004600631797

[35] G. Kassay and J. Kolumbán: *Variational inequalities given by semi-pseudomonotone maps*, Nonlinear Analysis Forum (Korea), Vol. **5**, pp. 35–50 (2000).

[36] G. Kassay and K. Nikodem: *Lagrangian multiplier rule for set−valued optimization*, Nonlinear Analysis Forum (Korea), Vol. **6** No. **2**, pp. 363–369 (2001).

[37] J.B.G. Frenk and G. Kassay: *Minimax results and finite dimensional separation*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. **113** No. **2**, pp. 409–421 (2002).
DOI: 10.1023/A:1014843327958

[38] L.J. Lin, Z.T. Yu and G. Kassay: *Existence of equilibria for multivalued mappings and its applications to vectorial equilibria*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. **114** No. **1**, pp. 189–208 (2002). DOI: 10.1023/A:1015420322818

[39] G. Kassay, J. Kolumbán and Zs. Páles: *Factorization of Minty and Stampacchia variational inequality systems*, European Journal of Operational Research, Vol. **143** No. **2**, pp. 377–389 (2002). DOI: 10.1016/S0377-2217(02)00290-4

[40] J.B.G. Frenk, G. Kassay and J. Kolumbán: *On Equivalent Results in Minimax Theory*, European Journal of Operational Research, Vol. **157** No. **1**, pp. 46–58 (2004).
DOI: 10.1016/j.ejor.2003.08.013

[41] P. Kas, G. Kassay and Z. Borataş–Sensoy: *On generalized equilibrium points*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. **296** No. **2**, pp. 619–633 (2004).
DOI: 10.1016/j.jmaa.2004.04.030

[42] J.B.G. Frenk, G. Kassay and V. Protassov: *On Borel probability measures and noncooperative game theory*, Optimization, Vol. **54** No. **1**, pp. 81–101 (2005).
DOI: 10.1080/02331930412331323845

[43] L.J. Lin, M.F. Yang, H.Q. Ansari and G. Kassay: *Existence results for Stampacchia and Minty type implicit variational inequalities with multivalued maps*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Vol. **61** No. **1–2**, pp. 1–19 (2005).
DOI: 10.1016/j.na.2004.07.038

[44] M. Bianchi, G. Kassay and R. Pini: *Existence of equilibria via Ekeland's principle*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. **305** No. **2**, pp. 502–512 (2005).
DOI: 10.1016/j.jmaa.2004.11.042

[45] R.I. Boţ, G. Kassay and G. Wanka: *Strong duality for generalized convex optimization problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. **127** No. **1**, pp. 45–70 (2005). DOI: 10.1007/s10957-005-6392-5

[46] Y. Alber, D. Butnariu and G. Kassay: *Convergence and stability of a regularization method for maximal monotone inclusions and its applications to convex optimization*, in: Variational Analysis and Appls., F. Giannessi and A. Maugeri (Eds.), Springer, Berlin–Heidelberg–New York, pp. 89–132 (2005). ISBN 0-387-24209-0.
DOI: 10.1007/0-387-24276-7_9

[47] J.B.G. Frenk and G. Kassay: *On noncooperative games and minimax theory*, in: Proceedings of the 4th Twente workshop on Cooperative Game Theory joint with 3rd Dutch–Russian symposium, edited by T.S.H. Driessen, J.B. Timmer, A.B. Khmelnitskaya, Enschede, June 28–30, pp. 61–69 (2005).

[48] J.B.G. Frenk and G. Kassay: *The level set method of Joó and its use in minimax theory*, Mathematical Programming, Vol. **105** No. **1A**, pp. 145–155 (2006).
DOI: 10.1007/s10107-005-0591-6

[49] M. Bianchi, G. Kassay and R. Pini: *Ekeland's principle for vector equilibrium problems*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Vol. **66** No. **7**, pp. 1454–1464 (2007). DOI: 10.1016/j.na.2006.02.003

[50] J.B.G. Frenk, P. Kas and G. Kassay: *On linear programming duality and necessary and sufficient conditions in minimax theory*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. **132** No. **3**, pp. 423–439 (2007).
DOI: 10.1007/s10957-007-9164-6

[51] J.B.G. Frenk and G. Kassay: *Lagrangian duality and cone convexlike functions*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. **134** No. **2**, pp. 207–222 (2007).
DOI: 10.1007/s10957-007-9221-1

[52] G. Bigi, M. Castellani and G. Kassay: *A dual view of equilibrium problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. **342** No. **1**, pp. 17–26 (2008).
DOI: 10.1016/j.jmaa.2007.11.034

[53] D. Butnariu and G. Kassay: *A proximal–projection method for finding zeros of set–valued operators*, SIAM Journal of Control and Optimization, Vol. **47** No. **4**, pp. 2096–2136 (2008). DOI: 10.1137/070682071

[54] R.I. Boţ, G. Kassay and G. Wanka: *Duality for almost convex optimization problems via the perturbation approach*, Journal of Global Optimization, Vol. **42** No. **3**, pp. 285–399 (2008). DOI: 10.1007/s10898-008-9300-3

[55] A.N. Iusem, G. Kassay and W. Sosa: *On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems*, Mathematical Programming, Vol. **116** No. **1–2B**, pp. 259–273 (2009). DOI: 10.1007/s10107-007-0125-5

[56] M. Bianchi, G. Kassay and R. Pini: *Well–posedness for vector equilibrium problems*, Mathematical Methods in Operations Research, Vol. **70** No. **1**, pp. 171–182 (2009).
DOI: 10.1007/s00186-008-0239-4

[57] G. Kassay, C. Pintea and F. Szenkovits: *On convexity of preimages of monotone operators*, Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. **13** No. **2B**, pp. 675–686 (2009).
DOI: 10.11650/twjm/1500405394

[58] A.N. Iusem, G. Kassay and W. Sosa: *An existence result for equilibrium problems with some surjectivity consequences*, Journal of Convex Analysis, Vol. **16** No. **3**, pp. 807–826 (2009).

[59] M. Bianchi, G. Kassay and R. Pini: *Well–posed equilibrium problems*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Vol. **72** No. **1**, pp. 460–468 (2010).
DOI: 10.1016/j.na.2009.06.081

[60] G. Kassay and C. Pintea: *On preimages of a class of generalized monotone operators*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Vol. **73** No. **11**, pp. 3537–3545 (2010). DOI: 10.1016/j.na.2010.07.028

[61] A. Capătă, G. Kassay and B. Mosoni: *On weak multifunction equilibrium problems*, in: Variational Analysis and Generalized Differentiation in Optimization and Control, In Honor of Boris S. Mordukhovich, Series: Springer Optimization and Its Applications, Vol. **47**, pp. 133–148 (2010). DOI: 10.1007/978-1-4419-0437-9_6

[62] A. Capătă and G. Kassay: *On vector equilibrium problems and applications*, Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. **15** No. **1**, pp. 365–380 (2011). DOI: 10.11650/twjm/1500406180

[63] G. Kassay, C. Pintea and Sz. László: *Monotone operators and closed countable sets*, Optimization, Vol. **60** No. **8–9**, pp. 1059–1069 (2011). DOI: 10.1080/02331934.2010.505961

[64] G. Kassay, S. Reich and S. Sabach: *Iterative methods for solving systems of variational inequalities in reflexive Banach spaces*, SIAM Journal on Optimization, Vol. **21** No. **4**, pp. 1319–1344 (2011). DOI: 10.1137/110820002

[65] M. Bianchi, G. Kassay and R. Pini: *Conditioning for optimization problems under general perturbations*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Vol. **75** No. **1**, pp. 37–45 (2012). DOI: 10.1016/j.na.2011.07.061

[66] G. Bigi, A. Capătă and G. Kassay: *Existence results for strong vector equilibrium problems and their applications*, Optimization, Vol. **61** No. **5**, pp. 567–583 (2012). DOI: 10.1080/02331934.2010.528761

[67] R. Burachik and G. Kassay: *On a generalized proximal point method for solving equilibrium problems in Banach spaces*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Vol. **75** No. **18**, pp. 6456–6464 (2012). DOI: 10.1016/j.na.2012.07.020

[68] G. Kassay, C. Pintea and Sz. László: *Monotone operators and first category sets*, Positivity, Vol. **3**, pp. 565–577 (2012). DOI: 10.1007/s11117-012-0193-5

[69] M. Bianchi, G. Kassay and R. Pini: *An inverse map result and some applications to sensitivity of generalized equations*, J. Math. Anal. Appl., Vol. **399** No. **1**, pp. 279–290 (2013). DOI: 10.1016/j.jmaa.2012.10.023

[70] G. Kassay and M. Miholca: *Existence results for variational inequalities with surjectivity consequences related to generalized monotone operators*, J. Optim. Theory Appl., Vol. **159** No. **3**, pp. 721–740 (2013). DOI: 10.1007/s10957-013-0383-8

[71] M. Bianchi, G. Kassay and R. Pini: *Stability results of variational systems under openness with respect to fixed sets*, J. Optim. Theory Appl., Vol. **164** No. **1**, pp. 92–108 (2015). DOI: 10.1007/s10957-014-0560-4

[72] G. Kassay and M. Miholca: *Existence results for vector equilibrium problems given by a sum of two functions*, J. Glob. Optim., Vol. **63** No. **1**, pp. 195–211 (2015). DOI: 10.1007/s10898-014-0264-1

[73] A. Capătă and G. Kassay: *Characterizations of vector equilibria subject to explicit constraints*, Minimax Theory and its Applications, Vol. **1** No. **1**, pp. 145–161 (2016).

[74] M. Bianchi, G. Kassay and R. Pini: *Linear openness of the composition of set-valued maps and applications to variational systems*, Set-Valued Var. Anal., Vol. **24** No. **4**, pp. 581–595 (2016). DOI: 10.1007/s11228-015-0357-0

[75] G. Kassay, M. Miholca and N. The Vinh: *Vector quasi–equilibrium problems for the sum of two multivalued mappings*, J. Optim. Theory Appl., Vol. **169** No. **2**, pp. 424–442 (2016). DOI: 10.1007/s10957-016-0919-9

[76] M. Bianchi, G. Kassay and R. Pini: *Stability of equilibria via regularity of the diagonal subdifferential operator*, Set–Valued Var. Anal., Vol. **25** No. **4**, pp. 789–805 (2017). DOI: 10.1007/s11228-017-0433-8

[77] C. Gutiérrez, G. Kassay, V. Novo and J.L. Ródenas–Pedregosa: *Ekeland variational principles in vector equilibrium problem*, SIAM Journal on Optimization, Vol. **27** No. **4**, pp. 2405–2425 (2017). DOI: 10.1137/17M111883X

[78] M. Bianchi, G. Kassay and R. Pini: *On a sufficient condition for weak sharp efficiency in multiobjective optimization*, J. Optim. Theory Appl., Vol. **178** No. **1**, pp. 78–93 (2018). DOI: 10.1007/s10957-018-1307-4

[79] G. Kassay, T.N. Hai and N. The Vinh: *Coupling Popov's algorithm with subgradient extragradient method for solving equilibrium problems*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Vol. **19** No. **6**, pp. 959–986 (2018).

[80] A. Capătă, G. Kassay and S. Al–Homidan: *Existence results for strong vector equilibrium problems with applications*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Vol. **19** No. **7**, pp. 1163–1179 (2018).

[81] S. Al-Homidan, Q.H. Ansari and G. Kassay: *On sensitivity of vector equilibria by means of the diagonal subdifferential operator*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Vol. **20** No. **3**, pp. 527–537 (2019).

[82] S. Al-Homidan, Q.H. Ansari and G. Kassay: *Takahashi's minimization theorem and some related results in quasi–metric spaces*, Journal of Fixed Point Theory and Applications, Vol. **21** No. **38** (2019). DOI: 10.1007/s11784-019-0676-0

[83] Kassay G. és Szenkovits F.: *Önálló intézet, megfiatalodott munkaközösség. Kutatás és oktatás a BBTE Magyar Matematika és Informatika Intézetében*, Korunk, pp. 19–26 (2019).

[84] S. Al-Homidan, Q.H. Ansari and G. Kassay: *Vectorial form of Ekeland variational principle with applications to vector equilibrium problems*, Optimization, Vol. **69** No. **3**, pp. 415–436 (2020). DOI: 10.1080/02331934.2019.1589469

[85] O. Chadli, G. Kassay and A. Saidi: *On the existence of antiperiodic solutions for hemivariational inequalities: an equilibrium approach*, Optimization Letters, Vol. **15** No. **1**, pp. 879–900 (2021). DOI: 10.1007/s11590-019-01490-1

[86] M. Bianchi, G. Kassay and R. Pini: *Regularization of Brézis pseudomonotone variational inequalities*, Set-Valued Var. Anal., Vol. **29** No. **1**, pp. 175–190 (2021). DOI: 10.1007/s11228-020-00543-3

[87] M. Bianchi, G. Kassay and R. Pini: *Brezis pseudomonotone bifunctions and quasi equilibrium problems via penalization*, Journal of Global Optimization, Vol. **82**, pp. 483–498 (2022). DOI: 10.1007/s10898-021-01088-x

[88] O. Chadli, G. Kassay and A. Saidi: *On the existence of antiperiodic solutions for hemivariational inequalities: an equilibrium problem approach*, Optim. Lett., Vol. **15** No. **3**, pp. 879–900 (2021). DOI: 10.1007/s11590-019-01490-1

Könyvek

[89] Illés T. és Kassay G.: *Szemelvények a matematikai programozás dualitáselméletéből*, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, p. 85 (1995).

[90] G. Kassay: *The Equilibrium Problem and Related Topics*, Risoprint, Cluj, Romania, p. 113 (2000). ISBN 973-656-023-6.

[91] Kassay G., Kolumbán J. és Marchiş J.: *Valós számok és metrikus terek*, Presa Universitară Clujeană/Kolozsvári Egyetemi Kiadó, p. 227 (2005). ISBN: 973-610-357-9.

[92] G. Kassay and Vicenţiu D. Rădulescu: *Equilibrium Problems and Applications*, Series: Mathematics in Science and Engineering, Academic Press – an imprint of Elsevier, London-San Diego–Cambridge MA–Oxford, (2019).

Könyvfejezetek

[93] G. Kassay and J. Kolumbán: *Equilibrum problems*, in: J. Kolumbán, A. Soós (eds.): Lectures on Nonlinear Analysis and Its Applications, Sapientia Books 22, Scientia Publishing House, Cluj-Napoca, pp. 17–172 (2003). ISBN 973-7953-02-9.

[94] J.B.G. Frenk and G. Kassay: *Introduction to convex and quasiconvex analysis*, in: Handbook of Generalized Convexity and Monotonicity, Series: Nonconvex Optimization and its Applications, Eds. N. Hadjisavvas, S. Komlósi, S. Schaible, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, Vol. **76**, pp. 3–87 (2005).
ISBN 0-387-23255-9

[95] J.B.G. Frenk and G. Kassay: *On noncooperative games, minimax theorems and equilibrium problems*, in: Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria, Series: Springer Optimization and Its Applications, Athanasios Migdalas (Crete), Panos Pardalos (Florida), Leonidas Pitsoulis (London) and Altannar Chinchuluun (Florida) (Eds.), Vol. **17**, XXII, pp. 53–94 (2008). ISBN: 978-0-387-77246-2.

[96] G. Kassay: On equilibrium problems, in: *Optimization and Optimal Control Theory and Applications,* Series: Springer Optimization and Its Applications, Eds.: Altannar Chinchuluun, Panos M. Pardalos, Rentsen Enkhbat, Ider Tseveendorj, Vol. **39**, pp. 55–83 (2010).

[97] G. Kassay: *The equilibrium problem and its applications to optimization*, Minimax problems and Nash equilibria, in: Topics in Nonlinear Analysis and Optimization, Ed. Qamrul Hasan Ansari, World Education, Delhi, pp. 203–226 (2012). ISBN 978-81-909873-3-2.

Szerkesztett könyv

[98] Z. Kása, G. Kassay and J. Kolumbán (Eds.), *Proceedings of the International Conference In Memoriam Gyula Farkas*, Cluj University Press, Cluj–Napoca, (2006).

Kutatási jelentések

[99] Kassay G.: *Minimax tételek és alkalmazásaik*, Operations Research Report 1992-02, Eötvös Loránd University, Budapest, (1992).

[100] T. Illés, I. Joó and G. Kassay: *On a nonconvex Farkas theorem and its application in optimization theory*, Operations Research Report 1993-02, Eötvös Loránd University, Budapest, (1992).

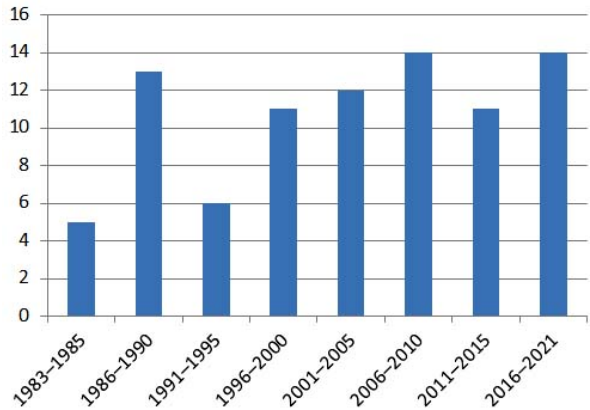
Legidézettebb tíz cikk

A.N. Iusem, G. Kassay and W. Sosa: *On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems*, Mathematical Programming, Vol. **116** No. **1–2B**, pp. 259–273 (2009).	**149**
G. Kassay, S. Reich and S. Sabach: *Iterative methods for solving systems of variational inequalities in reflexive Banach spaces*, SIAM Journal on Optimization, Vol. **21** No. **4**, pp. 1319–1344 (2011).	**130**
M. Bianchi, G. Kassay and R. Pini: *Existence of equilibria via Ekeland's principle*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. **305** No. **2**, pp. 502–512 (2005).	**124**
G. Kassay and J. Kolumbán: *System of multi-valued variational inequalities*, Publicationes Mathematicae Debrecen, Vol. **56** No. **1–2**, pp. 185–195 (2000).	**113**
W.W. Breckner and G. Kassay: *A systematization of convexity concepts for sets and functions*, Journal of Convex Analysis, Vol. **4** No. **1**, pp. 109–127 (1997).	**95**
M. Bianchi, G. Kassay and R. Pini: *Ekeland's principle for vector equilibrium problems*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Vol. **66** No. **7**, pp. 1454–1464 (2007).	**92**
G. Kassay, J. Kolumbán and Zs. Páles: *Factorization of Minty and Stampacchia variational inequality systems*, European Journal of Operational Research, **143** No. **2**, pp. 377–389 (2002).	**75**
L.J. Lin, Z.T. Yu and G. Kassay: *Existence of equilibria for multivalued mappings and its applications to vectorial equilibria*, Journal of Optimization Theory and Applications, **114** No. **1**, pp. 189–208 (2002).	**75**
R.I. Boţ, G. Kassay and G. Wanka: *Strong duality for generalized convex optimization problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. **127**, No. **1**, pp. 45–70 (2005).	**69**
D. Butnariu and G. Kassay: *A proximal–projection method for finding zeros of set–valued operators*, SIAM Journal of Control and Optimization, Vol. **47** No. **4**, pp. 2096–2136 (2008).	**66**

Legnagyobb impaktfaktorú tíz cikk

	IF 2015
J.B.G. Frenk, G. Kassay and J. Kolumbán: *On Equivalent Results in Minimax Theory*, European Journal of Operational Research, Vol. **157** No. **1**, pp. 46–58 (2004).	2.679
G. Kassay, J. Kolumbán and Zs. Páles: *Factorization of Minty and Stampacchia variational inequality systems*, European Journal of Operational Research, Vol. **143** No. **2**, pp. 377–389 (2002).	2.679
C. Gutiérrez, G. Kassay, V. Novo and J.L. Ródenas–Pedregosa: *Ekeland variational principles in vector equilibrium problem*, SIAM Journal on Optimization, Vol. **27** No. **4**, pp. 2405–2425 (2017).	2.659
G. Kassay, S. Reich and S. Sabach: *Iterative methods for solving systems of variational inequalities in reflexive Banach spaces*, SIAM Journal on Optimization, Vol. **21** No. **4** pp. 1319–1344 (2011).	2.659
A.N. Iusem, G. Kassay and W. Sosa: *On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems*, Mathematical Programming, Vol. **116** No. **1–2B**, pp. 259–273 (2009).	2.062
J.B.G. Frenk and G. Kassay: The level set method of Joó and its use in minimax theory, *Mathematical Programming*, Vol. **105** No. **1A**, pp. 145–155 (2006).	2.062
D. Butnariu and G. Kassay: *A proximal–projection method for finding zeros of set–valued operators*, SIAM Journal of Control and Optimization, Vol. **47** No. **4**, pp. 2096–2136 (2008).	1.491
G. Kassay and M. Miholca: *Existence results for vector equilibrium problems given by a sum of two functions*, J. Glob. Optim., Vol. **63** No. **1**, pp. 195–211 (2015).	1.219
M. Bianchi, G. Kassay and R. Pini: *On a sufficient condition for weak sharp efficiency in multiobjective optimization*, J. Optim. Theory Appl., Vol. **178** No. **1**, pp. 78–93 (2018).	1.160
R. Burachik and G. Kassay: *On a generalized proximal point method for solving equilibrium problems in Banach spaces*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Vol. **75** No. **18**, pp. 6456–6464 (2012).	1.125

Cikkek száma ötévenkénti bontásban



h−index: 18 (Web of Science), 19 (Scopus), 25 (Google Scholar)

Alkalmazott Matematikai Lapok **40** (2023), 37–49.

VARGA CSABA (1959–2021) ÉLETPÁLYÁJA

MEZEI ILDIKÓ ILONA

A dolgozat a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem Matematika és Informatika Karán oktató, 2021 augusztusában elhunyt Varga Csaba egyetemi professzor életútját követi végig. Megszólalnak volt tanárai, kollégái, tanítványai is, hogy teljessé váljon a kép Csabáról, mint emberről, oktatóról, kutatóról.

Kolozsváron, 2021. augusztus 16-án, 62 éves korában, a kegyetlen betegséggel való négy éves küzdelem után eltávozott Varga Csaba matematikus, a Babeş-Bolyai Tudományegyetem Magyar Matematika és Informatika Intézetének habilitált professzora.

Varga Csaba György 1959. február 5-én született Erdélyben a Maros megyei Gyulakután. Szülei egyszerű munkásemberek voltak, akik igyekeztek őt és a nővérét, Irmát egyenes, dolgos, tisztességes embernek nevelni.

Elemi és általános iskolai tanulmányait a szülőfalujában végezte. Már ekkor kiemelkedett társai közül éles logikájának köszönhetően, habár kezdetben inkább a csintalanság, állandó mozgékonyság jellemezte. Hatodik osztályban kezdte tanítani kiváló matematikatanára, Bandi Árpád. Az ő hatására fordult komolyabban a tanulás felé. Tanára vezetésével különböző szakkörökön mélyítette szerzett tudását. Egy ilyen elektronikai szakköri munkájával szerezte első díját Bukarestben egy országos versenyen hetedik osztályban.

1. ábra. Varga Csaba bemutatja pályamunkáját a bukaresti versenyen

2. ábra. Tanárával, Bandi Árpáddal Kolozsvár főterén

Sokat emlegette, hogy a matematikával való szorosabb kapcsolatát egy vesegyulladásnak köszönheti. A kórházi magányos órákban a nővére matematikatankönyvében levő feladatokat oldotta, tanulmányozta a számára még ismeretlen fogalmakat. Ekkor vett új irányt érdeklődése és ezentúl a matematikának szentelte figyelmét, életét.

Életének erről a szakaszáról így emlékezett meg volt tanára, Bandi Árpád: „*Csabát csak akkor ismertem meg amikor eljutott az V. osztályba. Szerény munkás szülők gyermeke volt, apja gépkocsivezető volt a helyi hőerőműnél. Egy testvére volt Irma, aki textilmérnöki szakot végzett. Csaba a VI. osztályban több ideig betegeskedett és rendkívül pontosan oldotta meg azokat a mértanfeladatokat, amelyeket neki kiadtam. Így a továbbiakban kedvenc tanítványom lett. (Gyulakuta az országban az elsők közé tartozott, ahol matematikai szaktanterem volt kialakítva sok színes mértani ábrával, mértani testekkel, tesztelő gépekkel.) Az iskola tanulóit különböző technikai szakkörökbe szerveztem, amelyekben országos díjazottjaink voltak. Ilyen volt például az elektronikai szakkör, amelyben Varga Csaba is szerepelt. Vele repülővel utaztam Bukarestbe a fotocellás készülékünk bemutatására. Kollektív nagydíjban volt részünk. A fotodiódát tranzisztorból alakítottuk ki. Egy kis elektromotor mozgatta a szalagra ragasztott alakzatokat, amelyek elhaladtak a számláló egység előtt … Említésre méltó, hogy miután középiskolára vagy egyetemre került, valahányszor haza jött Gyulakutára, mindig meglátogatott.*”

A tanulás mellett már általános iskolás korától kezdődően a vakációk alatt napszámosként dolgozott. Kapálni járt, krumplis zsákokat cipelt, vagonok rakodásában segédkezett, a Gyimesekbe járt kaszálni hetekig. Ezzel is igyekezett levenni a szülei válláról az anyagi terheket. Annyira beleivódott a szülei megsegítésének szándéka, hogy később is a fizetéséből rendszeresen segítette őket.

A középiskolát Erdőszentgyörgyön kezdte, majd tizedik osztálytól Segesváron folytatta a mai Mircea Eliade Líceumban. Az itteni évekről így írt az iskola emlékkönyvébe 2009-ben: „*A segesvári gimnázium kapuján 1975 szeptemberében léptem be. Szomorú kép fogadott, a 75-ös árvíz nyomai voltak még láthatóak az épület falain és a belső udvarban. Nem kellett sok idő és belerázódtam az osztályom mindennapi életébe. Ezek az évek gyorsan és kellemesen teltek. Személyiségünk alakításához hozzájárultak a tanáraink személyiségei és közösség formáló nevelése. Az órákon elhangzott információk mellett, nevelésünkben fontos szerepet játszott a munkára való nevelés és a közös színházba való járás. Nem hagyhatom ki a József Attila esteket sem, a kiszállásokat és az azután következő bulikat. Az ódon várfalak között elhelyezkedő bentlakás középkori hangulatára gyakran emlékszem vissza ebben a rohanó világban. Amikor meglátom a vonatból a vár toronyóráját, akkor mintha az idő megállna. Lejátszódnak újra előttem a focimeccsek a bentlakás udvarán és az azt követő sörözések. Szombat éjjelenkénti lógások a bentlakásból, a várfalon való leereszkedések és a visszamászások.*

A volt tanárainktól a leadott információkon kívül emberséget, kitartást és munkaszeretet tanulhattunk. Farkas tanár úr matematikaórái számomra a legszebb pedagógiai élmények voltak és maradnak. Eszembe jutnak Szentannai tanár úr órái, sokszor általános műveltségi órákba változtak, filozófia, történelem és zenetörténetet hallhattunk ezeken az órákon. A sorból nem hagyhatom ki Kiss tanárnő magyar óráit, az irodalmi elemzéseket. A tanárnő szigorú tekintete elég volt, hogy a verseket és idézeteket „kívülről" megtanuljuk és mostan is tudjak idézni József Attilától, Adytól vagy akár Radnóti eklogáiból. … a József Attila estek rendezésében és a versek kiválasztásában fontos szerepe volt Farkas Miklósnak. Itt tanultam meg Kiss Irén magyartanárnőmtől és Farkas Miklóstól a szavalás rejtelmeit. Ekkor ismertem meg a matematikatanárom irodalomszeretetét és sokoldalú tehetségét. Minden nyáron kéthetes gyalogtúrákat szervezett, amikor megismertük a Kárpátok csodálatos világát."

A segesvári líceumi évek nemcsak szakmai tudást hoztak számára, hanem életre szóló baráti és szakmai kapcsolatokat is. Mindig hálával és szeretettel beszélt elismert matematikatanáráról, Farkas Miklósról, akivel megőrizte kapcsolatát az utolsó napokig.

Ezekről az évekről írta Farkas Miklós: „*10. osztályban jött Segesvárra … gyorsan beilleszkedett az osztályközösségbe, egy nagyon jóképességű diákokból álló osztályba került. Hamarosan kitűnt matematikai tehetségével és tudásával, a matematikaolimpia megyei szakaszán már szép eredményt ért el, sajnos még nem jutott el az országos szakaszra. Meg kell jegyeznem, hogy nem volt könnyű helyt állnia, ti.*

együtt versenyzett a román tannyelvű iskolák legjobb diákjaival. Döntő jelentőségű volt számára Némethi András érkezése a XI. osztályba. András bevallása szerint, jelentős szerepe volt Csabának abban, hogy ő is Segesvárra jött. Mivel András is kiváló képességű volt, ezután együtt készítettem fel őket a különböző versenyekre, amelyeken nagyszerű eredményeket értek el. 1977-ben és 1978-ban mindketten eljutottak a matematikaolimpia országos szakaszára. Annyira kiváltak a többiek közül, hogy az osztályban, az írásbeli dolgozatokon percek alatt megoldották az összes feladatot."

Dr. Némethi András, az MTA levelező tagja, Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetének kutatója már Erdőszentgyörgyön is egy évig osztálytársa volt, majd tizenegyedik osztálytól követi Csabát Segesvárra. Itt kerültek szorosabb kapcsolatba, sokat matekoztak együtt, készültek közösen versenyekre, majd nyerték is sorra őket. Kölcsönös megbecsülés, egymás munkája iránti őszinte érdeklődés jellemezte barátságukat mindvégig.

A segesvári évek után Csaba egyetemi tanulmányait a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem Matematika Karán kezdi 1978-ban és végzi évfolyama legjobbjai közt 1983-ban. Ezt az időszakot elevenítette fel a gyászszertatáson kollégája, dr. Szenkovits Ferenc, a Babeş-Bolyai Tudományegyetem Matematika és Informatika Karának docense: „*1978-ban egyszerre felvételiztünk Kolozsváron a matematika szakra, ahová elsők között jutottál be, majd egyetemi tanulmányaink előtt együtt katonáskodtunk Bodzavásáron. Matematikai ismereteidet már a katonaságnál is sikeresen hasznosítani tudtad, ugyanis a századparancsok fiának magántanáraként rendszeresen foglalkozhattál azzal, amit igazán kedveltél, a matematikával, és ráadásként rendszeresen volt kimenőd a városba, ami egy kaszárnyába zárt katona számára igen nagy jutalomnak számított.*

Majd négy évig együtt végeztük az egyetemet. Az első három évben, míg meg nem nősültünk, szobatársak is voltunk a bentlakásban. Így gyakorta hetekig szinte éjjel-nappal együtt voltunk. A matematika szakon abban az időben se volt divat lógni az órákról, Te is mindig ott voltál, és kitartóan figyeltél és értetted a legnehezebb tárgyakat is, tanáraink is hamar felfigyeltek rád. Szinte minden szabadidődet a könyvtárban töltötted, ahol fix helyed volt, amit évekig nem adtak oda másnak, ha kissé késve érkeztél, akkor se, mert a könyvtárosok is tudták, hogy bármikor betoppanhatsz. Esténként a folyosói cigarettázások alatt is tételekről, bizonyításokról, matematikusok életéről, matematikatörténeti érdekességekről beszélgettünk. … Csak a ránk erőltetett tudományos szocializmus és politikai gazdaságtan bosszantottak, csak azokból nem volt kedved jelesre tanulni."

Az egyetemi évek alatt ismerkedtek meg az informatika szakon tanuló feleségével, Ibolyával és egyetem elvégzése után együtt kaptak kinevezést Besztercére. Itt tanított Csaba román nyelven a 2-es számú általános iskolában 1983–1990 közt és Ibolya pedig rendszerelemző-programozóként dolgozott. Nagyon nehéz évek voltak ezek számukra, tele kihívásokkal. Csabának sok gyenge képességű, komoly beilleszkedési gondokkal rendelkező diákja volt az osztályaiban, ráadásul a kommunizmus nehézségei is komoly próbák elé állították. Többször is mesélt a lakásukban megfagyott fűtőtestekről, a mindennapi megélhetési gondokról. Szerencséjére egy idő után itt is felfigyeltek a jó tanítási képességére és fontos beosztásban levő alkalmazottak gyerekeit kezdte tanítani délutánonként. Az így szerzett kapcsolatok segítették, hogy elviselhetőbbek legyenek a mindennapok. Nagy szívfájdalma volt ugyanakkor, hogy a „komolyabb” matek a besztercei évek alatt egyre távolabb került tőle.

Az 1989-es forradalom számára is elhozta a változtatás esélyét. Lehetősége nyílt arra, hogy betanítson a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem Matematika és Informatika Karára. A besztercei órái mellett vállalt több geometria tárgyú szemináriumot is, amelyekért hajnalban kelt, hogy nyolc órára Kolozsvárra érjen. Itt az egész napos kolozsvári oktatói tevékenység után este indult vissza Besztercére. Legtöbbször fizetést sem kapott ezekért az órákért, mégis nagy lelkesedéssel, szakértelemmel tartotta őket. Végül 1990-ben sikerült visszajönnie családjával együtt Kolozsvárra és elkezdődhetett egyetemi oktatói karrierje: tanársegéd (1990 – 1992), adjunktus (1992 – 1998), docens (1998 – 2005), professzor (2005 – 2021). Közben természetesen megszerezte 1996-ban a tudományos fokozatát is *Topológiai módszerek az optimalizálás elméletében* című dolgozatával dr. Kolumbán József irányításával.

3. ábra. A családdal 2008-ban

A kolozsvári újrakezdés családjában is változást hozott, hiszen ekkor született meg kisfia, Csaba is. A nagyon értelmes, tehetséges fiúval sokat foglalkozott. Az esti mesék nem csak felolvasott, hanem többnyire kitalált történetek voltak, amelyekben a felnőtt Csaba még az űrkutatás aktuális felfedezéseit is beleszőtte. Feleségével együtt nem csak a logikus gondolkodásnak, hanem az általános műveltségnek is lefektették az alapjait. A fia tehetsége hamarosan feltűnt a különböző matematikaversenyeken is, ahol sikeresen szerepelt. Szülei nyomdokába lépve jelenleg Budapesten keresi kenyerét megbecsült tesztmérnökként.

Egyetemi oktatói és kutatói tevékenysége mellett Csaba bekapcsolódott az egyetem adminisztratív vezetésébe is. Az 1996 – 1998 időszakban helyettes dékánként vezette a Matematika és Informatika Karon a kibontakozó magyar tagozatot.

Az oktatásban mindig igyekezett az új matematikai eredmények, új irányzatok szellemében modern előadásokat, szemináriumokat tartani. Széleskörű rálátása volt a legfontosabb irányvonalakra a geometriában, algebrában, nemsima analízisben, differenciálegyenletekben. Ennek eredményeképpen oktatói pályája alatt mintegy 20 különböző tárgyat tanított alapképzéstől magiszteri képzésig (Analitikus geometria, Görbék és felületek elmélete, Affin geometria, Differenciálható sokaságok elmélete, Riemann geometria, Nemeuklideszi geometria, Geometria alapjai, Projektív geometria, Homotópia-elmélet, Homológia- és kohomológia-elmélet, Karakterisztikus osztályok, Morse-elmélet, Folytonos függvények kritikuspont elmélete, Topologikus fokelmélet, Algebrai geometria és számítógépes grafika, Komputacionális geometria, Klasszikus tételek az elemi geometriában, Geometriai szerkesztések, Komplex számok alkalmazása a geometriában).

Tanórái mindig emlékezetesek voltak. Azon kevés tanárok egyike volt, akik nemcsak a matematikát tanították, hanem emberileg is törődtek a diákokkal. Mindig tudta ki hová valósi és volt anekdotája, története vagy történelmi ismerete a településsel kapcsolatosan. Remekül meg tudta oldani, hogy óráin ne unatkozzunk. Ugyanakkor látszott rajta, hogy szereti is, amivel foglalkozik. Szenvedélyesen tudta magyarázni a tananyagot és időközben egy-egy nehezebb, érdekesebb feladatot is beszúrt, hogy akit érdekel, legyen min gondolkozzon.

4. ábra. Az 1998-ban végzett matematika szakos évfolyam körében

5. ábra. A 2015-ös egyetemi banketten

Ugyanitt kell megemlítenem, hogy a végzős diákok bankettjeinek is egyik főszereplője volt. Nagyon szívesen táncoltatta meg a kolléganőket, diáklányokat. Körülötte mindig jókedv, jó hangulat uralkodott.

Báró Emőke, a székelyudvarhelyi Orbán Balázs Általános Iskola matematika szakos tanárnője, Debreceni Egyetem doktori hallgatója, volt tanítványa így búcsúztatta: „*És úgy hiszem, nem én vagyok az egyetlen volt tanítvány, aki hálás szívvel gondol a tanár úrra. Azontúl, hogy tanár volt, mindig is ember volt először, tanórán is. Nem csak az érdekelte, hogy mindenki tudja-e jól az affin geometriát, hanem az is, hogy „Mi a helyzet Parajdon, Károlyban vagy éppen Körösztúron ...". Ha valaki beteg volt, megkérdezte, nem-e aludtunk mezítláb? De azt is észrevette rajtunk, hogy ha bágyadtak, fáradtak, szomorúak vagyunk, meghallgatott, és ha tudott, mindig segített. Nem hiszem, hogy én lennék egyedül, akinek egyengette az útjait és akit biztatott arra, hogy azt csinálja, amit igazán szeretne, és ami a szíve csücske. Úgy gondolom, hogy a Tanár úr azért tudott ebben mindig jó tanácsot adni, mert ő azt csinálta, ami a szíve csücske volt.*"

És valóban, Csaba mindig felismerte a tehetséges diákokat és örömmel foglalkozott velük külön, szabad idejében is. Ajánlott nekik szakkönyveket tanulmányozásra, majd tisztázta velük a felmerülő kérdéseket. Számos tehetséges diákját irányította külföldi magiszteri, doktori képzésekre, ösztöndíjakra, majd tartotta velük a kapcsolatot, követte pályafutásukat. Különösen büszke volt Farkas Gábor (Humboldt Universität, egyetemi professzor), Marius Crainic (Universiteit Utrecht, egyetemi professzor) és Kristály Sándor (BBTE, Kolozsvár, egyetemi professzor) volt diákjaira, akiknek kezdő matematikusi lépéseit irányította Kolozsváron és akik világhírű matematikusokká váltak az évek során.

6. ábra. Farkas Gabival, volt tanítványával

Farkas Gábor így vall a Csabával való kapcsolatáról: „*Varga Csabával 1992-ben, másodéves kolozsvári egyetemistaként találkoztam egy algebrai topológia kurzuson. Abban az időben a kolozsvári geometriai tanszék Marian Ţarină hirtelen halála után szétesőben volt. Egy idősebb vezető szemelyiség helyett, volt néhány fiatal matematikus, akik különböző kutatási témákat kerestek maguknak. Csaba egy karizmatikus személyiség volt, elképesztően modern matematikai ízléssel és hozzáállással, egy ambiciózus diák számára ő volt a kanonikus választás Kolozsváron!*

Matematikai pályafutásomra gyakorolt hatása mély és maradandó volt. Az első három matematikai cikkemet közösen írtam vele (mindegyik a kritikus pontok *elméletéről szólt). De ami ennél is fontosabb számomra, hogy a megfelelő könyveket és cikkeket a megfelelő időben a kezembe adta. A diplomadolgozatomhoz egy elképesztően, mondhatnám vakmerően ambiciózus témát választott. Néhány évvel korábban Edward Witten írt egy cikket a Morse-elmélet radikálisan új megközelítéséről, amiért végül megkapta a Fields-díjat. A cikke rejtélyes fizikus stílusban volt írva, nem voltak benne a szó szoros értelmében vett matematikai bizonyítások, az én feladatom lett volna az egészet kibogozni és a részleteket kitölteni! Nagy kihívásnak éreztem, de meg voltam győződve (nyilván, Csaba szellemi hatása alatt) arról, hogy ez a legfontosabb feladatom, amit véghez kell vinnem, és hogy ez az, amiről az igazi matematika szól! Ezek után erről a diplomáról mindenütt be tudtam számolni, éreztem, hogy bárhol a világon otthonosan tudok mozogni a matematikában. Nehéz pár mondatban összegezni, hogy mennyit köszönhetek Csabának!*

Még évtizedekkel azután is, hogy áttértem az algebrai geometriára, továbbra is érzem, hogy Csaba gondolkodásmódja és matematikai ízlése formál és befolyásol. Halála valóban pótolhatatlan veszteség a kolozsvári és általában a romániai matematika számára."

Kiemelkedő egyetemi oktatói munkássága elismeréseként 2009-ben a Babeş-Bolyai Tudományegyetem az *Év Oktatója Díjjal* jutalmazta. A 2008-as évtől kezdődően a BBTE Matematika Karának doktorátusvezető tanáraként is oktatta, irányította a nemsima analízis iránt érdeklő diákokat. Vezetése alatt négyen szereztük meg a doktori címet. Mindannyian itthon a BBTE illetve a Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem oktatói vagyunk.

Tudományos eredményeinek köszönhetően az évek során számos oktatói és kutatói látogatásra, előadásra volt hivatalos a kontinens különböző országaiba (Budapest, Szeged, Debrecen, Rousse, Catania, Peruggia, Poznan, Athén, Ljubjana, Bern). Mindig fontosnak tartotta, hogy a látogatásai során megismert kollégáknak viszonozza a vendéglátást, gyakran hívta meg őket Kolozsvárra akár mint konferenciák előadóit, akár mint jó barátot. A vendégeket mindig nagyon szívélyesen, jó vendéglátóként fogadta, kirándulásokat szervezett nekik. Igyekezett minden kollaboránsával jó baráti kapcsolatot ápolni.

Az egyetem tudományos tanácsában és országos tudományos tanácsokban is eredményesen képviselte a kolozsvári matematikaiskolát. Sőt, utolsó éveiben a Pécsi Tudományegyetemen vendégoktatója is volt, ahol dr. Fialowski Alice, a PTE nyugalmazott egyetemi tanára szerint „*vállalta az oktatást és diákok szakmai gondozását, azzal a céllal, hogy segítse a Pécsi Egyetem Matematika és Informatika Intézetének szakmai erősödését. Remek előadásokat tartott, nem ijedt meg a kevéssé képzett diákok tanításától, mert neki a tehetség számított. Mindig mondta, hogy ő autodidakta módon tanulta a matematikát, és ez az út bárki számára járható, ha megvan hozzá az érdeklődése és tehetsége. Ottléte nagy lökést adott a pécsi matematikának.*"

Szakmai elismertségét a bukaresti CNATDCU tanács Matematikai Bizottságába való felkérés, a különböző szakfolyóiratoknál betöltött szerkesztői tevékenysége,

7. ábra. 2002-ben Szegeden Ceepus-ösztöndíjasként
Kristály Sándorral és Mezei Ildikóval

továbbá a Babeş-Bolyai Tudományegyetem számos kitüntetése és kiválósági díja (2004, 2005, 2007, 2009, 2011), valamint a Kolozsvári Akadémiai Bizottság által 2017-ben, a tudományos képzésben és a kutatásban kifejtett tevékenysége elismeréseként odaítélt *A Tudomány Erdélyi Mestere Díja* is jelzi.

8. ábra. A Tudomány Erdélyi Mestere Díjat veszi át Néda Zoltántól (2017)

Dr. Néda Zoltán, az MTA külső tagja, a BBTE Fizika Karának egyetemi professzora, mint kolléga és jóbarát emlékezett meg róla: „*Hosszú beszélgetéseink a heti 2 ping-pong meccs után és sokszor játék közben is, majd utólag a járvány alatt a hosszú telefonbeszélgetéseink mindig visszakanyarodtak valahol az „igaz tudomány" fogalmához és ahhoz, hogy mit is jelent elhívatott kutatónak lenni. Mit jelent az, hogy reggel az ember egy tudományos kérdessel kel fel és este ezzel fekszik le, elvonatkoztat a körülötte zajló nagy színjátéktól és a tudományt művészetként és nem intellektuális vállakozásként kezeli. A tudományos „érték" fogalma és a társadalomnak az ehhez való laza viszonyulása mindig is nagyon foglalkoztatta. Nem tudta elfogadni a tudományban levő „színészetet", a sokszor igazságtalan és könnyen szerzett népszerűséget és törtetést. Szókimondó és egyenes ember lévén, többször is konfliktusba került sok oktatóval, kutatóval. Az az ember volt aki előzetes megfontolások és politizálás nélkül azonnal kimondta azt ami a szívén volt. Ezért sokak számára talán az első benyomásra nyers és mogorva embernek tűnhetett. Azok számára azonban akiknek lehetőségük volt Őt közelebbről megismerni, és azon kevés embernek akit maga mellé fogadott, tanítványainak vagy barátainak, egy teljesen más arcot mutatott. Az első pillantra ridegnek tűnő külsőt egy mélyen érző és gondolkodó ember váltotta fel, aki segítőkész, megértő, és egy helyesen kinevelt értékrenddel rendelkezik.*

Nem egy kikövezett utat követett az életben, mindenért keményen meg kellett harcolnia és felső patrónusok hiányában tűrnie kellett a tudományos életben is jelenlevő, igazságtalanságokat, kudarcokat és főleg a társadalom felületes nemtörődömségét a tudományos eredményekkel kapcsolatosan. A kommunista idők megpecsételték karrierjének a kezdetét, és késleltették tudományos pályájának a kibontakozását. Fiatal kollégáink számára manapság talán már elképzelhetetlennek tűnik az, hogy egy tehetséges és matematikáért rajongó ember karrierét, hogyan lehet ideológiai okok miatt kettétörni. Nem kis erőre és akaratra volt szükség, hogy egy megtört életutat jó pár év után valaki Csabához hasonlóan újrakezdjen.

Nagyon sok mindenben hálás vagyok Csabának és barátságunknak. A matematika és elméleti fizika határain levő tudományos konferenciákat szerveztünk sokszor közösen, ahol Ő mindig elegánsan hátravonulva szürke eminenciásként tanácsaival és javaslataival segített, irányított. Sok érdekeset tanultam Tőle a relativitáselmélet differenciálgeometriai hátteréről, a Bolyai geometriáról és Bolyaiak munkásságáról, sok kiváló matematikussal ismerkedhettem meg általa, és számos, fizikusok számára releváns tudományos könyvet kaptam Tőle olvasásra. Mindig érezte azt, hogy kutatási terültéről mi releváns egy fizikusnak és tette ezt nem kioktatóan, hanem szerényen és barátilag. Mesteri szinten asztaliteniszezett, majdnem mindig megvert és a játékaink során állandóan javította stílusomat. Azon kevés alkalmakkor mikor sikerült nekem vagy az öcsémnek megverni Őt, úgy éreztük, hogy részben örül is, hiszen tanítványként kezelt minket, és igazi mesterhez illően nem volt féltékeny a tanítványai eredményeire, hanem örült sikerüknek még akkor is, ha valamilyen formában ezt Ő megszenvedi."

Gyerekkorából hozta magával a természet szeretetét, így nem is csoda, hogy az idő teltével egyre jobban hiányolta a kertet, a szabad levegőn való mozgást. Ennek a hiányérzetnek a pótlására 2012-ben Bánffyhunyadon elkezdett kertészkedni. Nagy gyümölcsöst kezdett gondozni, melyet tovább pótolt alma-, körtefákkal, ribizli-, szeder- és málnabokrokkal, sőt veteményest is alakított ki. Minden hétvégén igyekezett ott lenni a kertben kapálni, kaszálni, fákat metszeni, ültetgetni. Életének egyik fénypontja volt a kert, látszott rajta mennyire szereti, feltölti a kedves kertjében végzett munka. Mindig erőt tudott gyűjteni itt, még a legnehezebb pillanatokban is. Barátainak, ismerőseinek mindig büszkeséggel mutatta a kertet. Almáit, gyümölcsleveit is szívesen kínálta. Készült rá, hogy majd a nyugdíjas éveiben csak kertészkedéssel fog foglalkozni.

9. ábra. A kertjében (2020)

10. ábra. Virágzó gyümölcsfái

Farkas Miklós: „*A középiskolai és egyetemi tanulmányai befejezése után csak ritkán találkoztunk. Mikor kiderült, hogy felesége bánffyhunyadi, az én feleségem pedig a szomszédos magyarbikali és nyaranként hosszabb időt töltünk otthon, minden évben találkoztunk Bánffyhunyadon, ahol büszkén mutatta be a kertjét és a terméseit. Ilyenkor hosszabb beszélgetéseket folytattunk, nemcsak matematikáról, hanem a világ dolgairól is. Meggyőződhettem arról, hogy milyen sokoldalú volt az érdeklődése. Mindenről nagyon határozott véleménye volt, és rendkívül erős igazságtudata.*”

Tudományos karrierje csúcsán, 2017 őszén érte a megrázó diagnózis a betegségéről. Nehéz időszak következett számára, tele kezelésekkel, vizsgálatokkal. Igyekezett betartani az orvosai tanácsait. Családja odaadó gondoskodása és a komoly életmódbeli változások hatására remélte sikerül legyőznie a kórt.

Farkas Miklós így emlékezett erre az időszakra: „*Amikor Csabánál felállították a tüdőrák diagnózist, még szorosabbá vált a baráti kapcsolatunk, t.i. előtte nálam vastagbél-rákot diagnosztizáltak, s én már túl voltam a kezeléseken. Kéthetente beszélgettünk telefonon, megosztottuk egymással a tapasztalatainkat és tartottuk egymásban a lelket. Az utolsó pillanatokig optimista volt a betegsége kimenetelét* *illetően. Egy rendkívül tehetséges matematikust és sokoldalú, szerény, igaz embert vesztettünk el.*"

Betegségének évei alatt sem hagyta el magát. Amikor jobban érezte magát, továbbra is foglalkozott a matematikával és a kertjével. Sőt, utolsó évében, a világjárvány alatti on-line periódusban órákat is tartott újra a magiszteri didaktika szakos hallgatóknak.

Mindannyian meg voltunk győződve, hogy a betegséget sikerült legyőznie. Örömmel hallgattuk, hogy az utóbbi analízisek egyre jobb eredményeket mutatnak és láttuk is rajta, hogy egyre jobban nyeri vissza erejét, életkedvét. Épp ezért sokkolt mindenkit hirtelen kómába esése, majd gyors távozása.

Némethi András szerint „*Csaba az abszolútum fele törekedett, mindig jobb és tökéletesebb szeretett volna lenni. Ez volt a mércéje önmagával szemben (és néha másokkal szemben is), a csillagok megérintése. Ez a szilárd akarat jellemezte erős alapokon álló, sok tudást összeötvöző, kiteljesedő matematikai munkásságát, a matematikai iskolát építő mindennapos tevékenységét, az emberekkel való kapcsolatát. Önmagát adta a matematikáért, a környezete javításáért. Harcolt a jóért, az értékekért mindannyiunk nevében, mindannyiunk érdekében. Önmagát égette, azért hogy világítson. Nagyon sokunkban, emlékezetünkben ez a fáklyafény mindörökre megmarad.*"

Csaba távozása pótolhatatlan veszteség úgy a család, a tanítványok, a kollégák, mint a matematika számára. Közvetlen, humoros stílusával, őszinte törődésével, mély és sokrétű tudásával kivívta az elismerést, tiszteletet.

Hálás vagyok Csaba, hogy megismerhettelek, hogy tanítványod, barátod, doktoranduszod, kollégád lehettem. Nagyon sokat tanultam tőled. Köszönök mindent!

Szívünkben örökké élni fogsz!

Kolozsvár, 2022. április 25. Mezei Ildikó Ilona

Hivatkozások

[1] URL: http://www.cs.ubbcluj.ro/ csvarga/

[2] URL: http://www.cs.ubbcluj.ro/ darvay/eme/mtne2021/abstracts/abs_Bandi_Arpad.pdf

[3] URL: https://kab.ro/dijak/dijak/2017

Mezei Ildikó Ilona 1998-ben végzett a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem Matematika szakán, majd 2001-ben az Informatika szakán. Ugyanitt 2008-ban megvédte az doktori tézisét nemsima analízisből dr. Varga Csaba irányításával. 1998-tól a Babeş-Bolyai Tudományegyetem Matematika és Informatika Karának oktatója. 2018-ban megkapta a kar Kiváló oktatói díját. Kutatási területei: variációszámítás, kritikuspont elmélet, geometriai analízis.

MEZEI ILDIKÓ ILONA
Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár
ildiko.mezei@ubbcluj.ro

THE CAREER OF CSABA VARGA

Ildikó Ilona Mezei

The paper follows the career of Csaba Varga, a professor at the Faculty of Mathematics and Computer Sciences of the Babeş-Bolyai University of Cluj-Napoca, who passed away in August 2021. His former teachers, colleagues and students also spoke out in order to complete the picture of Csaba as a person, an educator and a researcher.

Alkalmazott Matematikai Lapok **40** (2023), 51–70.
DOI: 10.37070/AML.2023.40.1.02

VARGA CSABA TUDOMÁNYOS TEVÉKENYSÉGE

KRISTÁLY SÁNDOR

A dolgozat Varga Csaba matematikus tudományos munkásságát hivatott áttekinteni, melynek kiindulópontját a variációszámítás adja és alkalmazásai a parciális differenciálegyenletek elméletétől egészen a Finsler-geometriáig terjednek. A leírásban törekedtem a megfelelő matematikai háttér bemutatására, majd ezen belül elhelyezni Varga Csaba tudományos eredményeit. A leírásban felhasználom a Farkas Csaba által elkészített publikációs listát, amely az e cikket követő 71–77. oldalakon található. Az említett listában lévő n-edik dolgozatra a $[*n]$ formában történik a hivatkozás.

1. Kezdeti évek

Varga Csaba egyetemi tanulmányait 1983-ban fejezte be a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem matematika szakán. Egyetemi karrierjét 1990-ben kezdte, miután hét évet tanított a besztercei 2-es számú iskolában középiskolai tanárként. Az akkori kommunista időszak nehézségei – mely időszakra negatívan emlékezett vissza minden tekintetben – rányomták bélyegét a tudományos kibontakozására. Elmondása szerint, 1990-ben újra kellett tanulnia a magas fokú matematika művelését. Csaba jó érzékkel közeledett a „nagy matematikához”, hiszen egykori kiváló diákjaival, M. Crainic-al és G. Farkassal (akik később világklasszis matematikusokká váltak), megpróbálta feltárni az akkor épp aktuális kutatási témákat, melyeket az akkor még szegényesen (és rendszerint késéssel) ellátott könyvtárból próbált megszerezni. Csaba első próbálkozásra az algebrai topológia témákba vetette bele magát, – Ljusternik-Schnirelmann kategóriaelmélet, sűrűségi és kondenzációs problémák, – melyekből a [∗15], [∗16], [∗19], [∗22], [∗23] dolgozatok születtek. Ezek a dolgozatok meghatározóaknak bizonyultak a következő időszakban, amikor kapcsolatba lépett D. Motreanuval, akivel elkezdte mélyebben kutatni a topologikus és variációs jelenségeket. Ezekből az eredményekből született meg az 1996-ban megvédett doktori disszertációja is, melynek címe “*Topological Methods in Optimizations*”. A doktori tézisének központi témája a *variációszámítás*, ezen belül pedig a *nem-sima kritikus pontok elmélete* volt.

A következő két fejezetben rövid matematikai kalandra hívom az Olvasót, melyben egyrészt betekintést nyerünk a variációszámításba és annak alkalmazásaiba, másrészt elhelyezzük Varga Csaba fontosabb tudományos eredményeit ezekbe az igen dinamikusan fejlődő kutatási témákba.

2. Variációszámítás: kritikus pontok elmélete és alkalmazásai

A variációszámítás a matematikai analízis azon ága, mely szélsőértékfeladatok megoldásával foglalkozik. Napjainkban a variációs elvek a matematika és más természettudományok számos területén nélkülözhetetlenek: ezen elvek alkalmazásai átfogják úgy a nemlineáris analízist, a konvex analízist, a differenciálszámítást, a játék-, illetve a fixponttételek elméletét, a globális analízist, mint a közgazdaságtant és a fizikát. A variációszámítást, – mint a matematika egyik ágának megjelenését – 1696-tól, Johann Bernoullinak a matematikus társadalom, és főképp fivére, Jacob felé felvetett *brachisztochron problémájától*[1] számítják. A probléma olyan nagy matematikusok érdeklődését is felkeltette, mint G. L'Hospital, G.W. Leibniz, I. Newton és természetesen J. Bernoulli, akik szinte egy időben találtak rá a megoldásra. Később J.-L. Lagrange mellett L. Euler és K. Weierstrass is foglalkozott ezzel a problémával. A következő századokban rengeteg tudós foglalkozott a variációszámítással és ért el jelentős eredményeket e területen: ide sorolhatjuk D. Hilbert, L. Tonelli, J. Hadamard, H. Lebesgue, C. Carathéodory, I. Ekeland, J. Borwein, Pólya György vagy épp Vályi Gyula nevét.

2.1. Kritikus pontok elmélete

A XX. század második felétől kezdődően a variációs elvek egy újszerű megközelítése fejlődött ki, melyet *kritikus pontok elméleté*nek nevezünk és amely egy modern, nem szokványos tárgyalási eszköztárhoz vezetett.

Legyen X egy Banach-tér és $E : X \to \mathbb{R}$ egy differenciálható függvény; az $x_0 \in X$ az E függvény *kritikus pont*ja, ha a függvény differenciálja eltűnik az x_0 pontban, azaz

$$dE(x_0) = 0.$$

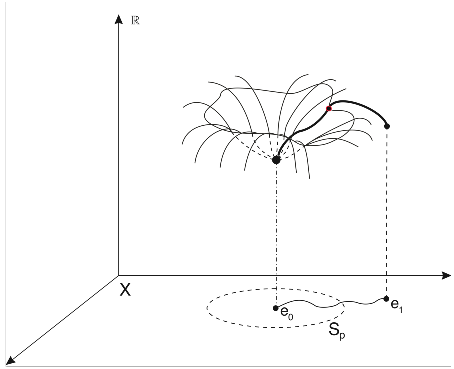
Ebbe a problémakörbe – többek között – a matematika igen fontos fejezetei sorolhatóak:

– elliptikus parciális differenciálegyenletek gyenge megoldásai a hozzájuk társított energiafüggvények kritikus pontjai lesznek;

– geodetikus vonalak Riemann/Finsler-sokaságokon a természetes energiafunkcionál kritikus pontjaiként jelentkeznek.

P. Fermat klasszikus tétele értelmében, egy adott funkcionál minimum/maximum pontjai természetes módon megjelennek mint kritikus pontok.

[1] Egy gyöngyszem kezdősebesség nélkül mozog egy dróton a gravitációs erő hatására. Adjuk meg annak a drótnak/görbének az alakját, melyen a gyöngy a lehető legrövidebb idő alatt ér el a drót egyik végpontjából a másikba!



1. ábra. A hegyátkelés tételének geometriai formája.

Felmerült a kérdés olyan kritikus pontok lokalizálására, melyek nem szélsőértékpont jellegűek. Ilyen áttörő eredményt igazolt 1974-ben A. Ambrosetti és P. Rabinowitz [3], mely az ún. *hegyátkelés tétel*eként (Moutain Pass Theorem) vonult be a köztudatba; lásd az 1. ábrát. Ennek egyik közismert formája így fogalmazható meg:

Legyen X egy Hilbert-tér, $E : X \to \mathbb{R}$ egy C^2-osztályú függvény, $e_0, e_1 \in X$ két különböző elem és $p > 0$ szám úgy, hogy

- $\inf_{\|u\|=p} E(u) > \max\{E(e_0), E(e_1)\} =: \alpha$;
- *E teljesíti a $(PS)_c$-feltételt a*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} E(\gamma(t))$$

minimax értékben, ahol

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]; X) : \gamma(0) = e_0, \gamma(1) = e_1\}.$$

Ekkor létezik $u \in X$ kritikus pontja E-nek úgy, hogy $E(u) = c \geq \alpha$.

A $(PS)_c$ kompatitási feltétel R. Palais és S. Smale [30] matematikusoktól ered, mely azt követeli meg, hogy tetszőleges $(u_k) \subset X$ sorozat esetén, melyre $E(u_k) \to c$ és $dE(u_k) \to 0$, kiválasztható az (u_k) egy konvergens részsorozata[2].

[2]H. Brezis és L. Nirenberg [6] igazolták, hogy a Palais–Smale-feltétel elengedhetetlen követelmény a hegyátkelés tételében. Erre egy elegáns példa a C^∞-osztályú $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, ahol $E(x, y) = x^2 + (1 - x)^3 y^2$. Azonnal belátható, hogy E teljesíti a hegyátkelés geometriáját, de csak a $(0, 0)$ kritikus pontja van.

A fenti tételt *deformációs lemmá*val vagy az *Ekeland variációs elv*vel[3] lehet igazolni, lásd M. Willem [38] és P. Rabinowitz [33], melynek kvantitatív változatainak igazolásában Varga Csaba központi szerepet kapott, akár jóval gyengébb simasági feltételek mellett is, lásd §2.1.1.

A hegyátkelés tétele – habár lassan 50 éves – még mindig több tucat matematikai munka kiindulópontja. Alkalmazását tekintve, peremfeltétellel ellátott vagy akár Schrödinger-típusú egyenletek megoldásának létezésére és ezek lokalizálására használható. Az egyszerűség kedvéért, tekintsük a következő modell feladatot:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u(x)) & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy korlátos $\mathcal{C}^1$-tartomány, Δ a Laplace-operátor, míg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy (legalább) folytonos függvény, mely eleget tesz bizonyos növekedési feltételeknek az origóban és a végtelenben. Ilyen esetben a szokásos eljárás az, hogy társítjuk a (P) feladathoz a természetes $E : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ energiafunkcionált, melynek alakja

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_\Omega \int_0^{u(x)} f(t)dtdx,\ u \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

ahol $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ a szokásos Szoboljev-tér, lásd H. Brezis [5]. Az f függvény megfelelő növekedési/simasági feltételei mellett igazolható, hogy E egy C^2-osztályú függvény és

$$dE(u) = 0 \Longleftrightarrow u \text{ gyenge megoldása a } (P) \text{ feladatnak.}$$

Ennek a jellemzésnek megfelelően, a (P) megoldásainak vizsgálatát visszavezethetjük az E energiafunkcionál kritikus pontjainak keresésére, melynek minimax típusú kritikus pontjait például a hegyátkelés tétele révén biztosíthatjuk.

2.1.1. Lokálisan Lipschitz függvények kritikus pontjai

A nyolcvanas évek elején, K.-C. Chang [10] a (P) feladat vizsgálatát javasolta nem folytonos, csak lokálisan esszenciálisan korlátos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények esetére. A kérdés hátterében mérnöki problémák állnak, hiszen bizonyos szakadási

[3]Matematikai érdekességként megemlítjük, hogy I. Ekeland [14] híres variációs elve - habár többnyire parciális differenciálegyenletek és egyensúlypont problémák esetén alkalmazták – a végtelen dimenziós Riemann-sokaságokon vizsgált Hopf–Rinow-tétel érvényességének eldöntésére lett kidolgozva. Míg véges dimenziós teljes Riemann-sokaságok esetén bármely két tetszőleges pont összeköthető legalább egy minimális geodetikus vonallal, addig a végtelen dimenziós esetben ez a jelenség csak egy G_δ-sűrű halmazon érvényes. Sajátosan, a sokaság majdnem bármely két pontja összeköthető minimális geodetikus vonallal, lásd I. Ekeland [15], ahol a bizonyítás gerincét épp az általa elnevezett variációs elv képezi.

pontokat tartalmazó jelenségek leírására, – mint hidak töréspontjainak vizsgálata, lásd P.D. Panagiotopoulos [31], vagy a von Kármán lemezek egyensúlyi helyzete, lásd D. Motreanu és P.D. Panagiotopoulos [28] – egy megfelelő *nemsima kritikus pont elmélet* lenne a megfelelő eszköz.

Mivel az új helyzetben a nemlineáris f tag csak lokálisan esszenciálisan korlátos, az a nem kívánt helyzet állhat elő, hogy egy elvárt jelenségre semmiféle választ ne kapjunk, azaz, a (P) feladatnak akár egy megoldása se, vagy csak a triviális nulla megoldása adódjon. Éppen ezért, az a kézenfekvő megoldás adódik, hogy a szakadási részeket kitöltjük, az $f(t)$ értéket helyettesítve egy $[\underline{f}(t), \overline{f}(t)]$ intervallummal, ahol

$$\underline{f}(t) = \lim_{\delta\to 0^+} \operatorname{essinf}_{|s-t|<\delta} f(s), \quad \overline{f}(t) = \lim_{\delta\to 0^+} \operatorname{esssup}_{|s-t|<\delta} f(s),$$

ahol $\operatorname{essinf}_A f = \sup\{a \in \mathbb{R} : f(x) \geq a$ majdnem minden $x \in A$ elemre$\}$ és $\operatorname{esssup}_A f = -\operatorname{essinf}_A(-f)$, $A \neq \emptyset$. Így hát, a (P) feladat helyett egy *differenciál inklúziót* kapunk,

$$\begin{cases} -\Delta u(x) \in \partial F(u(x)) & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{DI}$$

ahol $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)ds$ *lokálisan Lipschitz* függvény[4], melynek a Clarke-szubgradiense

$$\partial F(t) = [\underline{f}(t), \overline{f}(t)], \ t \in \mathbb{R}.$$

Természetes módon, a (DI)-hez társított $E : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ energiafunkciónál már nem lesz sima, csak lokálisan Lipschitz a $W_0^{1,2}(\Omega)$ Szoboljev-téren, míg ennek a Chang-értelemben vett kritikus pontja, azaz $0 \in \partial E(u)$, megoldása lesz a (DI) problémának.

Általában, egy adott X Banach téren értelmezett $E : X \to \mathbb{R}$ lokálisan Lipschitz függvény *Clarke-szubgradiense* (lásd F.H. Clarke [11]) egy $u \in X$ pontban

$$\partial E(u) = \{\xi \in X^* : E^o(u; v) \geq \langle \xi, v\rangle, \ \forall v \in X\},$$

ahol X^* az X duális tere, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a dualitási leképzés, míg

$$E^o(u; v) = \limsup_{w\to v, t\to 0^+} \frac{E(w+tv) - E(w)}{t}$$

az E függvény Clarke-értelembe vett iránymenti deriváltja az $u \in X$ pontban és $v \in X$ irányban.

[4] Az $F : X \to \mathbb{R}$ függvény *lokálisan Lipschitz*, ha minden $x \in X$ pontnak létezik egy olyan U környezete és $K_x > 0$ állandó úgy, hogy minden $u, v \in U$ esetén $|f(u) - f(v)| \leq K_x\|u - v\|$.

Varga Csaba legfontosabb eredményeinek egy jelentős része a Chang-kérdéskörhöz kapcsolódik. A kilencvenes évek végén D. Motreanuval azon dolgoztak, hogy a hegyátkelés tételét (és bővebben, a minimax elveket) kiterjesszék lokálisan Lipschitz függvényekre. A legnagyobb technikai kihívás számukra – a függvény simaságának elvesztése révén – egy megfelelő deformációs lemma igazolása volt. A deformációs lemma azt a természetes jelenséget hivatott leírni (pl. $X = \mathbb{R}^n$ esetén), hogy ha egy adott $E : X \to \mathbb{R}$ függvénynek a $E^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) = \{x \in X : c-\epsilon \le E(x) \le c+\epsilon\}$ halmazában nincs kritikus értéke ($\epsilon > 0$), akkor az $E^{c+\epsilon}$ nívóhalmaz topologikusan ekvivalens az $E^{c-\epsilon}$ halmazzal, ahol $E^{\alpha} = \{x \in X : E(x) \le \alpha\}$. Ellenkező esetben, az $E^{c+\epsilon}$ nívóhalmaz topologikusan felépíthető az $E^{c-\epsilon}$ halmaz és egy adott d-dimenziós topológikus fogantyú segítségével, ahol d az adott $x_0 \in E^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$ kritikus pont Morse-indexe, lásd J. Milnor [27].

Varga Csaba és D. Motreanu [∗21], [∗27] azt az ötletes megoldást találták, hogy a klasszikus gradiens-vektormező helyett egy ún. *pszeudo-gradiens-vektormezőt* használtak, melynek révén egy kvantitatív, nem-sima deformációs lemmát igazoltak reflexív Banach-tereken értelmezett lokálisan Lipschitz függvényekre. Ennek segítségével több minimax típusú tételt sikerült igazolniuk (hegyátkelés tétele, linking-típusú tételek, nyeregpont-típusú tételek és ezek csoport-invariáns formái). Később, ezeket az eredményeket kiterjesztették olyan esetekre, lásd [∗43], amikor a nemsima Palais-Smale-feltétel helyett egy jóval gyengébb, az ún. Cerami-feltételt használták.

Kiemelendő az a tény is, hogy a [∗21] dolgozatban sikerült a hegyátkelés tételének egy *null-magasságú* (zero-altitude) formáját igazolniuk, amely az alkalmazásoknál igen hasznosnak bizonyult, lásd pl. C.O. Alves és J.A. Santos [1], valamint C.O. Alves, R.C. Duarte és M.A.S. Souto [2] dolgozatait.

2.1.2. Folytonos és többértékű függvények kritikus pontjai

M. Degiovanni és M. Marzocchi [12] a kilencvenes évek elején kidolgozták tetszőleges X metrikus téren definiált $E : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvények kritikus pont elmelétét. Bármely $u \in X$ pont esetén a szerzők bevezetik a derivált normájának általánosított fogalmát, $|dE|(u)$, amelyet *gyenge meredekségnek* (weak slope) neveznek. Közvetett módon ez a fogalom akkor is definiált egy $u \in X$ esetén, ha $E : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ félig-folytonos, és $E(u) < +\infty$. Ha E valamely regularitási tulajdonsággal rendelkezik (pl. lokálisan Lipschitz), a gyenge lejtőről kiderül, hogy a nem-sima analízis más fogalmaihoz kapcsolódik, különösen a Clarke-szubdifferenciáléhoz. A szerzők a hegyátkelés tételének és a Lusternik-Schnirelmann elméletnek a metrikus tereken folytonos funkcionálokra kiterjesztett változatait igazolták, – ahol a főeszközt az Ekeland- variációs elve képezte, – majd több alkalmazással támasztották alá az általuk bevezetett új fogalom hasznosságát.

Mivel Varga Csaba a kilencvenes évek végén a lokálisan Lipschitz függvények kritikus pont elméletén dolgozott, természetes volt számára megvizsgálni, hogy milyen mértékben igazolhatóak és alkalmazhatóak különböző minimax-típusú eredmények kvantitatív deformációs lemmák révén a Degiovanni-Marzocchi-féle elméletben. Mint kiderült, a kísérletet siker koronázta, melynek során több ilyen elméleti eredmény is született; lásd a [∗26] összefoglaló dolgozatot. Egy igazán nem szokványos alkalmazása a gyenge lejtő tárgykörnek egy olyan eredmény, mely révén a szerzők igazolják a [∗32] dolgozatban izometria-invariáns geodetikus görbék létezését nem-sima geometriai objektumokon (Lipschitz-sokaságokon).

Mi több, 2000-ben, egy újszerű ötlet során, M. Frigon [16] bevezette a gyenge lejtő fogalmát metrikus tereken értelmezett többértékű leképzésekre is. Csaba és társszerzői a [∗30], [∗33], [∗34] dolgozatokban igazolni tudták kvantitatív formáit a deformációs lemmának többértékű leképzések esetén, melyek alapul szolgáltak az új kritikus pont elméletnek a kidolgozásában. A hegyátkelés tételüknek többértékű változata (lásd [∗33]) központi helyet kapott a Y. Jabri [20] által írt átfogó monográfiában.

2.2. Differenciál inklúziók, variációs és hemivariációs egyenlőtlenségek

A (DI) differenciál inklúziónak van egy alternatív megközelítése, mely a *variációs-hemivariációs egyenlőtlenségek* segítségével fogalmazható meg. Ennek egy lehetséges formája a következő:

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_\Omega F^0(u(x);-v(x))dx \geq 0, \quad \forall v\in W_0^{1,2}(\Omega), \qquad (VHE)$$

ahol $F^0(s;t)$ az $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lokálisan Lipschitz függvény Clarke-féle iránymenti deriváltja az $s\in\mathbb{R}$ pontban és $t\in\mathbb{R}$ irányban. A Clarke-analízis segítségével megmutatható (lásd F.H. Clarke [11]), hogy ha $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ megoldása a (DI) feladatnak, akkor egyúttal megoldja a (VHE)-t is. Fordítva az állítás rendszerint nem igaz, hacsak nincs további regularitása az F lokálisan Lipschitz függvénynek (pl. konvexitás, vagy C^1-osztály). A (DI) vagy (VHE) feladatokat úgy választják a szerzők, hogy a lehető legjobban illeszkedjenek a tanulmányozandó problémára: a (DI) tipikusan korlátos halmazon értelmezett, ugrás-jellegű szakadásos nemlineáris tagok esetén alkalmasak, míg a (VHE) forma akkor megfelelőbb, amikor a feladat nem feltétlenül korlátos halmazon értelmezett és már eleve egy lokálisan Lipschitz függvényt tartalmaz kiindulási adatként.

Varga Csaba talán legtöbbet művelt matematikai kutatásai a (DI) és (VHE)-típusú problémák köré csoportosulnak, melyeket két külön kategóriába osztunk, attól függően, hogy az adott probléma korlátos vagy nem korlátos halmazon adott.

2.2.1. Korlátos halmazok

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ egy korlátos halmaz és tekintsük a (DI) feladatnál egy valamivel általánosabb helyzetét, éspedig:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) \in \partial F(x, u(x)), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\widetilde{DI}$}$$

ahol $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy Carathéodory-függvény úgy, hogy

– $F(\cdot, t)$ mérhető minden $t \in \mathbb{R}$ esetén;

– $F(x, \cdot)$ lokálisan Lipschitz minden $x \in \overline{\Omega}$ esetén;

– $F(x, 0) = 0$ minden $x \in \Omega$ esetén.

A $(\widetilde{DI})$ feladatban a Clarke-szubgradiens a második változó szerint értendő, azaz $\partial F(x, \cdot)$. Mi több, feltételezzük, hogy

1. $|\zeta| \leq a_1 + a_2|t|^s$, $\forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \forall \zeta \in \partial F(x, t)$, valamely $a_1, a_2 \geq 0$ állandókra, $0 \leq s < \frac{n+2}{n-2}$ ha $n \geq 3$;
2. $\displaystyle\sup_{||v||_{H_0^1}=\rho} \int_\Omega F(x, v(x))dx \leq \frac{1}{2}\rho^2$ valamely $\rho > 0$ esetén;
3. $t\zeta - \mu^{-1}F(x, \zeta) \geq -b_1|t|^\sigma - b_2$, $\forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ és $\zeta \in \partial F(x, t)$, valamely $\mu > 2$, $1 \leq \sigma < 2$ és $b_1, b_2 \geq 0$ állandókra;
4. $\displaystyle\limsup_{s\to\infty} \frac{1}{s^\sigma} \int_\Omega F(x, sv_0(x))dx = +\infty$ valamely $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ esetén.

Ezen feltételek mellett, a szerzők [∗21] azt igazolták, hogy a $(\widetilde{DI})$ feladatnak létezik legalább egy nem-nulla megoldása a $W_0^{1,2}(\Omega)$ Szoboljev-téren. A bizonyítás a lokálisan Lipschitz függvényekre vonatkozó hegyátkelés tételén alapszik. A fő nehézség a nem-sima Palais–Smale-feltétel igazolásában áll, melyben kulcsszerepet kap a $W_0^{1,2}(\Omega)$ tér kompakt beágyazása az $L^q(\Omega)$ Lebesgue-térbe, $q \in (2, \frac{2n}{n-2})$.

A fentihez hasonló eredményeket igazolt Csaba különböző társszerzőkkel, amikor a nemlineáris F tag más viselkedéssel rendelkezik a nullában és végtelenben, vagy a feladat más peremfeltételt teljesít (pl. Neumann, Steklov), lásd a [∗36], [∗40] és [∗49] dolgozatokat.

Mi több, 2004-et követően, – miután megjelent B. Ricceri [35] három kritikus pont elve, – több multiplicitási eredményt is sikerült igazolnia Csabának olyan kontextusokban, melyek a (DI) feladat nemlineáris perturbációiként állnak elő. Ezek hátterében a P. Pucci és J. Serrin [32] által igazolt három kritikus pont tétel áll, melynek B. Ricceri egy *stabilitási* formáját igazolta. Ezekben az eredményekben érdemes megfigyelni a differenciálinklúziók (vagy akár sima verziójuk) megoldásainak számának stabilitását kicsi perturbációk esetén, lásd a [∗48], [∗53], [∗57], [∗60], [∗61], [∗64], [∗65] és [∗76] dolgozatokat.

2.2.2. Nem korlátos halmazok

A nem korlátos halmazokon megfogalmazott elliptikus problémák (sima vagy nem-sima) különös odafigyelést igényelnek, tekintettel arra, hogy a klasszikus Szoboljev-beágyazások ebben az esetben nem kompaktak. Éppen ezért, variációs és/vagy topologikus módszereket kombinálnak rendszerint különböző technikákkal ennek a nehézségnek a leküzdésére: közelítés korlátos halmazokkal; súlyozott Szoboljev-terek vagy ezek valamely szimmetrikus résztereinek használata annak érdekében, hogy kompakt beágyazásokat kapjunk.

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ egy nem kompakt tartomány (sima $\partial\Omega$ határral) és $p \in (1, n)$ egy valós szám, $p^* := np/(n-p)$ a Szoboljev-féle kritikus exponens. Jelöljük J_ϕ-vel a $\phi(t) := t^{p-1}$ normalizáló függvényhez rendelt dualitási leképzést.

Varga Csaba egyik kedvenc feladata a következőképpen fogalmazható meg: találjunk olyan $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ függvényt, melyre

$$\langle J_\phi(u), v\rangle + \lambda \int_\Omega b(x) F^0(u(x); -v(x))dx \geq 0, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \qquad (\widetilde{VHE})$$

ahol $W_0^{1,p}(\Omega)$ az $u : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényeket tartalmazó szokásos Szoboljev-tér (lásd H. Brezis [5], L. Simon [37]), $\lambda > 0$ egy paraméter, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokálisan Lipschitz függvény, melyre teljesül

(F) $F(0) = 0$ és létezik $k > 0$, $q \in (0, p-1)$ úgy, hogy

$$|\xi| \leq k|s|^q, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \partial F(s),$$

míg $b : \Omega \to \mathbb{R}$ egy nem-negatív, nem-nulla függvény úgy, hogy $b \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Varga Csaba [∗44] igazolta, hogy ha $\mathcal{F} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ úgy értelmezett, hogy

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega b(x) F(u(x))dx,$$

akkor $\mathcal{F}$ lokálisan Lipschitz és szekvenciálisan gyengén folytonos a $W_0^{1,p}(\Omega)$ téren, lásd E. Zeidler [39], valamint

$$\mathcal{F}^0(u; v) \leq \int_\Omega b(x) F^0(u(x); v(x))dx, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Mi több, további feltételek mellett az F és b függvényekre vonatkozóan, a [∗42], [∗50], [∗54], [∗55] dolgozatok szerzői igazolták, hogy létezik olyan $\lambda > 0$ paraméter, hogy a $(\widetilde{VHE})$ feladatnak három különböző megoldása van a $W_0^{1,p}(\Omega)$ Szoboljev-térben.

A fenti eredmény igazolásának egy része formailag hasonlít a korlátos halmazok esetén használt bizonyításra (ami a hegyátkelés geometriáját illeti). A lényeges különbség abból adódik, hogy a $(\widetilde{VHE})$ egyenlőtlenséghez társított energiafunkcionál *nem* teljesíti a Palais–Smale-féle kompaktitási feltétel semmilyen formáját. Ennek ellensúlyozására, az egyik kiváló módszer az ún. Palais-féle *kritikus szimmetria elv*, lásd R. Palais [29]. Mi több, a $(\widetilde{VHE})$ esetén a Palais-elv nem-sima verziójára van szükség, melyet W. Krawcewicz és W. Marzantowicz [24] igazoltak lokálisan Lipschitz függvényekre. További nem-sima formái a kritikus szimmetria elvnek a [∗47], valamint a J. Kobayashi és M. Ôtani [23] és a M. Squassina [36] dolgozatokban találhatóak, ahol egy lokálisan Lipschitz (vagy $\mathcal{C}^1$ osztályú) függvény perturbációja található egy konvex, alulról félig folytonos függvény által. A kritikus szimmetria elve azt mondja ki, hogy ha van egy lineárisan ható G csoport egy adott X Banach-téren, és az $E : X \to \mathbb{R}$ funkcionál G-invariáns, akkor minden kritikus pontja az E leszűkítésének a

$$\mathrm{Fix}_G X = \{u \in X : gu = u, \forall g \in G\}$$

fix-pontok halmazára egyúttal kritikus pontja lesz az eredeti E funkcionálnak is.

A kritikus szimmetria elv hasznossága abban rejlik (pl. $\Omega = \mathbb{R}^n$ és a $(\widetilde{VHE})$ feladat esetén), hogy az eredeti $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ Szoboljev-tér helyett (mely nem ágyazható be kompakt módon egyetlen $L^q(\mathbb{R}^n)$ térbe sem, $q \in (2, 2n/(n-2))$) a radiálisan szimmetrikus $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$-beli függvények $W^{1,p}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n)$ alterét választjuk, ami már kompakt módon beágyazható az $L^q(\mathbb{R}^n)$ térbe, $q \in (2, 2n/(n-2))$, lásd pl. P.-L. Lions [25], és amelyre a leszűkített energiafüggvény teljesíti a Palais-Smale kompaktitási feltételt. Az utolsó lépés már csak az, hogy az így kapott kritikus pontja a leszűkített energiafüggvénynek egyúttal kritikus pontja lesz az eredeti energiafüggvénynek is – ezáltal megoldása a tanulmányozandó feladatnak, – mivel

$$W^{1,p}_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Fix}_{O(n)} W^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

ahol $O(n)$ az n-ed rendű ortogonális csoportot jelöli.

Varga Csaba a kritikus szimmetria elvének egyik nagymestere volt, melyet különböző formában használt más és más problémákra (tartomány- és csoportválasztástól függően akár sima, akár nem-sima esetben). Ehhez fűződő dolgozatai [∗46], [∗47], [∗52], [∗56], [∗61], [∗62] és a [∗3]-as könyvfejezet.

Csabát érdekelték a kritikus pontok lokalizációi is, melyekre sikeresen alkalmazta a Schechter-típusú lemmákat, akár nem-sima esetben is, lásd a [∗90]-[∗95] és [∗99] dolgozatokat. Hasonló módon, központi kérdéskört töltött be számára különböző fraktálok felett értelmezett elliptikus problémák megoldásainak vizsgálata is, melyben több jelentős eredményt ért el szerzőtársaival, lásd a [∗63], [∗71], [∗74], [∗81], [∗82], [∗88] és [∗98] dolgozatokat.

3. Finsler-geometria

Általában a Finsler-geometriára a Riemann-geometria egy lehetséges általánosításaként tekintenek. S.-S. Chern, a Finsler-geometria egyik atyja, szinte érthetetlen módon úgy nyilatkozott, hogy „a Finsler-geometria nem más, mint Riemann-geometria a kvadratikus megkötés nélkül”. Jó hír a Finsler-geométerek számára, hogy S.-S. Chern ebben a tekintetben alaposan tévedett. Mint kiderült, valóban sok fontos jelenség/eredmény természetes módon átvihető a Riemann-geometriáról Finsler-geometriára (pl. Hopf-Rinow, Hadamard- Cartan és Bonnet-Myers tételek, valamint Rauch és Bishop-Gromov összehasonlítási elvek, lásd D. Bao, S.-S. Chern és Z. Shen [4]), de mint kiderült, igazán meglepő és váratlan jelenségek is megjelennek, amelyek Riemann-geometriai szemszögből nézve teljesen elképzelhetetlenek.

Ezen meglepő jelenségek érdekelték már a kezdetek óta Varga Csabát is, így geometriai kutatásai többnyire a Finsler-geometria különböző fejezeteire terjedtek ki (melyeket a 2000 évek elején kezdett el kutatni), mint:

– Busemann-egyenlőtlenségek és geodetikus vonalak létezése részsokaságok között;

– Szoboljev-terek Finsler-sokaságok felett és ezek alkalmazása parciális differenciálegyenletek elméletében.

A pontos tárgyalás érdekében, szükségünk van pár alapfogalomra a Finsler-geometriából.

Legyen M egy $n(\geq 2)$-dimenziós összefüggő differenciálható sokaság és $TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$. Az (M,F) pár egy *Finsler–sokaság*, ha az $F : TM \to [0,\infty)$ folytonos függvény kielégíti a következő feltételeket:

(a) $F \in C^\infty(TM \setminus \{0\})$;

(b) $F(x,\lambda y) = \lambda F(x,y)$ minden $\lambda \geq 0$ és $(x,y) \in TM$ esetén;

(c) $g_{ij}(x,y) = [\frac{1}{2}F^2]_{y^iy^j}(x,y)$ pozitív-definit minden $(x,y) \in TM \setminus \{0\}$ esetén, ahol $F(x,y) = F(y^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x)$.

Az (M,F) *reverzibilis*, ha a (b) pont helyett érvényes:

(b') $F(x,\lambda y) = |\lambda| F(x,y)$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és $(x,y) \in TM$ esetén.

A g_{ij} az $y = 0$ estén csak akkor értelmezett, ha (M,F) egy *Riemann-sokaság*, amikor természetszerűen a $g_{ij}(x) = g_{ij}(x,y)$ független az y iránytól. A legegyszerűbb Finsler-struktúrákat a *Minkowski-terek* képezik, amelyek egy véges dimenziós V vektortérből és egy Minkowski-normából állnak (amely egy Finsler-metrikát indukál V-n, azaz $F(x,y)$ független a x alapponttól). Míg egyetlen euklideszi tér létezik (izometriáitól eltekintve), addig végtelen sok (izometrikusan különböző) Minkowski-tér létezik.

Az $L_F(\sigma) = \int_0^r F(\sigma(t), \dot{\sigma}(t))\, dt$ mennyiség a $\sigma : [0, r] \to M$ darabonkénti C^∞-osztályú görbe *integrálhosszát* jelenti. Két tetszőleges $x_1, x_2 \in M$ pont esetén, a $d_F : M \times M \to [0, \infty)$ *távolságfüggvényt* a

$$d_F(x_1, x_2) = \inf_{\sigma \in \Lambda(x_1, x_2)} L_F(\sigma) \tag{1}$$

összefüggés adja meg, ahol $\Lambda(x_1, x_2)$ az összes $\sigma : [0, r] \to M$ darabonkénti C^∞-osztályú görbe halmaza úgy, hogy $\sigma(0) = x_1$ és $\sigma(r) = x_2$. Ha $(M, F) = (\mathbb{R}^n, F)$ Minkowski-tér, akkor $d_F(x_1, x_2) = F(x_2 - x_1)$.

A Riemann-geometriából ismert Levi–Civita-konnexióval ellentétben (lásd pl. M.P. do Carmo [13]), a Finsler-geometria nem szolgáltat egy egyedi (torzió-mentes és metrika-kompatibilis) konnexiót. Az egyik természetes konnexió a Finsler-geometriában az ún. *Chern-konnexió*, melyet a π^*TM nyalábon értelmezünk, amely torzió-mentes és *majdnem* metrika-kompatibilis, lásd D. Bao, S.-S. Chern és Z. Shen [4, 2.4.1. tétel]. A Chern-konnexió együtthatóit jelöljük a Γ^i_{jk} szimbólummal, amelyek a Riemann-geometriából jól ismert Christoffel-szimbólumoknak felelnek meg. Egy Finsler-sokaság *Berwald-típusú*, ha a természetes koordinátákban reprezentált $\Gamma^k_{ij}(x, y)$ Chern-konnexió együtthatói függetlenek az y iránytól. Azonnal felismerhető, hogy a Riemann-sokaságok és Minkowski-terek mind Berwald-struktúrákat eredményeznek.

A Chern-konnexió természetes módon indukál a π^*TM nyalábon egy R *görbületi tenzort*, melynek révén definiálható a D *kovariáns derivált.* A C^∞-osztályú görbe $\sigma : [0, r] \to M$ egy *geodetikus*, ha $D_{\dot{\sigma}}\dot{\sigma} = 0$. Kényelmi okokból a geodetikusokat ívhosszal arányosan paraméterezettnek tekintjük.

Legyen $u, v \in T_xM$ két nem-kollineáris vektor és $\mathcal{S} = \text{span}\{u, v\} \subset T_xM$. Az R görbületi tenzor segítségével értelmezhető az $\{\mathcal{S}, v\}$ objektum ún. *flag-görbülete*, melyet a

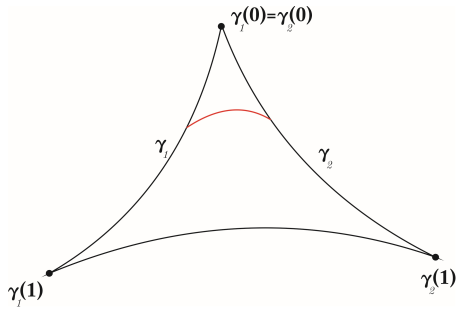
$$K(\mathcal{S}; v) = \frac{g(R(U, V)V, U)}{g(V, V)g(U, U) - g(U, V)^2}, \tag{2}$$

mennyiség ad meg, ahol $U = (v; u), V = (v; v) \in \pi^*TM$. Ha (M, F) Riemann-sokaság, akkor a flag-görbület megegyezik a szokásos metszetgörbülettel.

3.1. Metrikus összefüggések és geodetikusok létezése részsokaságok között

3.1.1. Busemann-egyenlőtlenségek

Az 1940-es évek végén H. Busemann – párhuzamosan a D.D. Alexandrov-féle elmélettel (lásd M. Bridston és A. Haefliger [7] monográfiáját), – egy szintetikus, *nem-pozitívan görbült* geometriának az axiomatikus kidolgozását javasolta metrikus tereken, amelyek eleve nem rendelkeznek differenciálstruktúrával, viszont hiva-



2. ábra. Busemann-egyenlőtlenség: az alapoldal hosszúsága legalább kétszerese a másik két oldal középpontja közötti geodetikus távolságnak.

tottak magukba hordozni a Riemann/Finsler-sokaságok kvalitatív tulajdonságait. Ezek a struktúrák az úgynevezett G-terek, lásd H. Busemann [8]. A nem-pozitív görbület ezen fogalma megköveteli – melyet ma a *Busemann-egyenlőtlenség* néven ismerünk, – hogy kis geodetikus háromszögekben egy oldal hosszúsága legalább kétszerese legyen a másik két oldal középpontja közötti geodetikus távolságnak, azaz, ha (M, d) lokálisan geodetikus metrikus tér, és adott $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to M$ két tetszőleges (természetesen paraméterezett) lokális, geodetikus vonal úgy, hogy $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, akkor

$$d\left(\gamma_1\left(\frac{1}{2}\right), \gamma_2\left(\frac{1}{2}\right)\right) \leq \frac{1}{2} d(\gamma_1(1), \gamma_2(1)), \tag{3}$$

lásd a 2. ábrát.

H. Busemann [8] rámutatott arra, hogy a (3) metrikus összefüggés természetes módon jellemzi a nem-pozitív metszetgörbületű Riemann-sokaságokat.[5] Az igazi kihívást, – H. Busemann megfogalmazása szerint, – a Finsler-tereken érvényes (3) metrikus összefüggés képezte.[6] Mint kiderült, igazán váratlan jelenségbe ütköztek, hiszen a negatív görbület semmiféle garanciát nem jelentett a (3) tulajdonság érvényességére: egy egyszerű, zárt és konvex görbe belsejének Hilbert-metrikája az euklideszi síkban – amely általánosan egy (projektív) Finsler-metrika állandó flag-görbülettel – akkor és csakis akkor elégíti ki a Busemann-féle (3) metrikus összefüggést, ha az adott görbe ellipszis, lásd P. Kelly és E. Straus [22]. Az utóbbi helyzet (azaz, ha a határgörbe ellipszis), a Hilbert-metrika Riemann-metrikává válik, tehát egy erős rigiditással állunk szembe.

[5] Eukleidészi esetben a Busemann-egyenlőtlenség a jól ismert kis Thalész-tételre redukálódik.

[6] Az Alexandrov-értelemben nem-pozitívan görbült Finsler-terek, egy rigiditási eredménynek köszönhetően, szükségszerűen Riemann-sokaságok lesznek, így ezek a jelenségek nem képeztek érdekes kérdéseket a Finsler-terek elméletében.

Természetesnek adódott az a kérdés, hogy megtalálni azon nem-riemanni Finsler-sokaságok osztályát, ahol a (3) metrikus összefüggés továbbra is érvényes.

Ez a kérdés Varga Csabát a 2000-es évek elején foglalkoztatta. A [∗39] dolgozatban a szerzők azt mutatták meg, hogy nem-pozitívan görbült Berwald-sokaságok teljesítik a (3) metrikus összefüggést. Ez volt az első olyan eredmény, mely részleges választ adott a H. Busemann által megfogalmazott kérdésre, ugyanis, megtalálták az első nem-riemanni Finsler-sokaságok osztályát, ahol a (3) összefüggés teljesül. Jóval később, 2019-ben, egy nagyon ötletes érvelés mentén, S. Ivanov és A. Lytchak [19] igazolták, hogy a fenti válasz a lehető legjobb, azaz, ha egy Finsler-sokaságon érvényes a (3) metrikus összefüggés, akkor a Finsler-sokaság szükségszerűen Berwald-sokaság kell legyen.

Tekintettel arra, hogy a (3) metrikus összefüggés iteratív alkalmazása bizonyos konvexitási tulajdonságot eredményez két geodetikus vonal távolságának mérése során, a [∗39] dolgozatban lévő eredmény alkalmazhatóvá vált különböző gazdasági/szállítási feladatok tárgyalásában is, lásd az [∗5] monográfiában.

3.1.2. Geodetikusok részsokaságok között

Varga Csaba egy másik kedvenc kérdéskörét adott Finsler-sokaság bizonyos részsokaságai között elhelyezkedő geodetikus vonalak létezése és ezek száma képezte. A problémát K. Grove [17] Riemann-sokaságokon igazolt eredményei inspirálták. Mivel a probléma általános helyzetben igen nehéznek bizonyult, ezért geometriai közegnek egyelőre egy n-dimenziós teljes (M, g) Riemann-sokaságot tekintünk, valamint az $M \times M$ térnek egy $N = N_1 \times N_2$ részsokaságát. A g Riemann-metrikát domináló F Finsler-metrika esetében a szerzők a [∗38] dolgozatban megvizsgálják a feladathoz társított Finsler-energiafüggvény tulajdonságait, melyet a Riemann-Hilbert-féle ΛN sokaságon értelmeznek. Az így értelmezett energiafüggvény kritikus pontjai épp az N_1 és N_2 részsokaságokat összekötő (és rájuk bizonyos Finsler-értelemben merőleges) geodetikus vonalak lesznek. Várható módon, a kihívást a Finsler-energiafüggvény Palais–Smale-feltételének igazolása képezi a ΛN sokaságon.

A [∗38] dolgozat második részében az $N = N_1 \times N_2$ speciális választásai találhatóak, ahol N_1 és N_2 az M zárt részsokaságai. Ha M-et egy domináns Finsler-metrikával ruházzuk fel, akkor bizonyos topologikus megkötések mellett igazolható, hogy az N_1 és N_2 részsokaságokat végtelen sok Finsler-geodetikus köti össze M-en.

A [∗38] dolgozat további kiváló eredményeket inspirált, mint G. Lu [26] vagy E. Caponio, M.Á. Javaloyes és A. Masiello [9] Finsler-típusú energiafüggvények jellemzését stacionárius téridőben.

3.2. Szoboljev-terek Finsler-sokaságokon: reverzibilitás fontossága.

Varga Csaba hitvallása szerint, a legszebb matematika akkor tárulkozik a szemünk elé, ha több matematikai irány egyidőben jelentkezik. Ilyennek tartotta a parciális differenciálegyenletek elméletét Riemann/Finsler-sokaságokon, melyet előszeretettel kutatott.

Finsler-sokaságokon értelmezett elliptikus problémák vizsgálata megköveteli a sokaság felett értelmezett Szoboljev-terek alapvető tulajdonságainak (mint például reflexivitásának és beágyazhatóságának) feltérképezését. Mint tudjuk, a Finsler-sokaságok nem feltétlenül reverzibilisek, aminek igen váratlan következményei lehetnek.

Legyen (M, F) egy Finsler-sokaság és tekintsük a hozzárendelt

$$r_F = \sup_{x \in M} \sup_{v \in T_x M \setminus \{0\}} \frac{F(x, v)}{F(x, -v)} \tag{4}$$

reverzibilitási állandót, lásd H.-B. Rademacher [34]. Nyilvánvaló, hogy $r_F \geq 1$ (sőt r_F akár végtelen is lehet), továbbá az $r_F = 1$ egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha (M, F) reverzibilis.

Tekintsük az (M, F) Finsler-sokaság felett értelmezett

$$W^{1,2}(M, F, \mathsf{m}) := \left\{ u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(M) : \int_M [F^*(x, Du(x))]^2 \, \mathrm{d}\mathsf{m}(x) < +\infty \right\}$$

Szoboljev-teret, továbbá legyen $W_0^{1,2}(M, F, \mathsf{m})$ a $C_0^\infty(M)$ térnek a

$$\|u\|_F := \left(\int_M [F^*(x, Du(x))]^2 \, \mathrm{d}\mathsf{m}(x) + \int_M u^2(x) \mathrm{d}\mathsf{m}(x) \right)^{1/2} \tag{5}$$

norma általi lezárása, ahol $\mathrm{d}\mathsf{m}(x) = \mathrm{d}V_F(x)$ a természetes Haussdorff-mértéket jelöli. Megjegyezzük, hogy $\| \cdot \|_F$ rendszerint egy aszimmetrikus norma. A továbbiakban az F függvénynek az

$$F_s(x, y) = \left(\frac{F^2(x, y) + F^2(x, -y)}{2} \right)^{1/2}, \ (x, y) \in TM$$

alakú szimmetrizáltját is használni fogjuk.

Ha az (M, F) Finsler-sokaság egy (M, g) Riemann-sokaság, a $W^{1,2}(M, F, \mathsf{m})$ Szoboljev-tér a Riemann-sokaságok felett értelmezett $H_g^1(M)$ Szoboljev-térrel esik egybe, lásd E. Hebey [18].

A [∗84] dolgozatban a szerzők igazolják, hogy amennyiben az (M, F) Finsler-sokaság reverzibilitási állandója véges, a felette értelmezett $W^{1,2}(M, F, \mathsf{m})$ Szoboljev-tér reflexív Banach-tér lesz, továbbá a $\| \cdot \|_{F_s}$ és $\| \cdot \|_F$ normák ekvivalensek. Sajátosan, fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\left(\frac{1 + r_F^2}{2} \right)^{-1/2} \|u\|_F \leq \|u\|_{F_s} \leq \left(\frac{1 + r_F^{-2}}{2} \right)^{-1/2} \|u\|_F, \ \forall u \in W_0^{1,2}(M, F, \mathsf{m}). \tag{6}$$

Azonnal következik, hogy a fenti állítás bármilyen Riemann-sokaságra, kompakt Finsler-sokaságra, vagy Minkowski-térre is alkalmazható.

Ezzel szemben, ugyanabban a [∗84] dolgozatban egy olyan nem-kompakt (M, F) Finsler-sokaságot szerkesztenek, amelynek a reverzibilitási állandója végtelen és a sokaság felett értelmezett Szoboljev-tér *még csak vektortér sem lesz.* Az utóbbi (ellen)példa a Finsler-Poincaré golyón van szerkesztve és rámutat a Riemann- és Finsler-geometriák közötti mély, lényeges különbségekre. Ez az eredmény lezárja egyúttal a nem-kompakt sokaságokon értelmezett Szoboljev-terek elméletét is.

3.3. Parciális differenciálegyenletek Finsler-sokaságokon

Csaba érdeklődési köre kiterjedt Finsler-sokaságokon értelmezett funkcionálegyenlőtlenségekre is, melyek fontos szerepet játszanak a parciális differenciálegyenletek elméletében.

A [∗100] cikkben egy olyan módszert dolgoztak ki, melynek segítségével L^2-típusú, súlyozott Hardy-egyenlőtlenségeket lehet igazolni (M, F) Finsler-sokaságokon. Igazolták, hogy a súlyfüggvény szuperharmonicitása egy elégséges feltételt biztosít Hardy-típusú egyenlőtlenségek igazolására (lásd pl. alább (7)). A szuperharmonicitási feltételt alkalmazva több Hardy-egyenlőtlenséget, egy Caccioppoli-egyenlőtlenséget, egy Gagliardo-Nirenberg-egyenlőtlenséget és egy Heisenberg–Pauli–Weyl-féle határozatlansági elvet igazoltak az (M, F) Finsler-sokaságon. Felhasználva a kapott súlyozott Hardy-egyenlőtlenségeket, a súlyfüggvény megfelelő megválasztásával további Hardy-egyenlőtlenségeket vezettek le véges reverzibilitási állandóval rendelkező Finsler-Hadamard sokaságokon. Egy ilyen eredmény a következő: ha (M, F) egy n-dimenziós Finsler–Hadamard-sokaság, ahol $n \geq 3$, $r_F < \infty$ és identikusan nulla $\mathbf{S}$-görbülettel, valamint $x_0 \in M$ pont tetszőlegesen rögzített, és jelölje $r = d_F(x_0, \cdot)$ az x_0 ponthoz tartozó távolságfüggvényt, akkor bármely $\alpha \in (-\infty, 1)$ és $u \in C_0^\infty(M)$ esetén érvényes

$$\frac{(n-2)^2(1-\alpha)^2}{4\,r_F^2} \int_M r^{\alpha(2-n)} \frac{u^2}{r^2}\, \mathsf{dm}(x) \;\leq\; \int_M r^{\alpha(2-n)} F^2(x, \boldsymbol{\nabla} u)\, \mathsf{dm}(x). \tag{7}$$

Az $\alpha = 0$ sajátos esetben a (7) egyenlőtlenség éles lesz és visszaadja a [∗84] dolgozatban leírt sajátos Hardy-egyenlőtlenséget. Ugyanebben a dolgozatban, a fenti egyenlőtlenségeket hatékonyan alkalmazták bizonyos Poisson-típusú differenciálegyenletek által implikált rigiditási eredmények igazolásában.

4. Zárszó

Varga Csaba tudomást szerezve betegségéről 2017-ben, idejének javarészét szakcikkek olvasásával töltötte. Meggyőződésem, hogy kevés embernek volt hozzá fogható lexikális tudása és rálátása a nemlineáris analízisre, differenciálgeometriára és differenciálegyenletek elméletére.

Kollégái és tanítványai rendszeresen megkeresték útbaigazítást kérve tőle, és ha nem is tudta a konkrét választ az adott kérdésre, biztosan javasolt olyan irodalmat, ahol a problémát a kérdező szempontjából hasznosan tárgyalták.

Az utolsó szakmai kívánságai között egy monográfia megírása szerepelt, és mintha érezte volna az idő szorítását, már 2017-ben nekikezdett ennek a nagyívű munkának a megírásához. A végső, nyomtatott formáját e munkának sajnos nem láthatta meg, mivel a monográfia bő egy hónappal később jelent meg távozása után, lásd [∗10], melyet egyben Csaba matematikai munkásságának megkoronázásaként is tekinthetünk.

Tudományos tevékenysége mellett Csaba legnagyobb erénye a tanítványainak kinevelésében rejlik. Több tucat diák hálás az évtizedeken átívelő oktatói tevékenységéért, mellyel több kiváló matematikus és matematikatanár számára sikerült tudományos és erkölcsi irányt mutatnia.

Távozását mély megrendüléssel vettük tudomásul, hiánya óriási űrt hagy bennünk. Mi, egykori diákjai, tanítványai és kollégái, emlékét méltó módon őrizni fogjuk szívünkben és elménkben, megpróbálva eleget tenni annak a Csaba által megfogalmazott kívánságnak, hogy munkáját tovább folytassuk.

Kolozsvár, 2021. december 4. Kristály Sándor

Hivatkozások

[1] C.O. Alves and J.A. Santos: *Multivalued elliptic equation with exponential critical growth in* $\mathbb{R}^2$, J. Differential Equations, Vol. **261** No. **9**, pp. 4758–4788, (2016). DOI: 10.1016/j.jde.2016.07.006

[2] C.O. Alves, R.C. Duarte and M.A.S. Souto: *A Berestycki-Lions type result and applications*, Rev. Mat. Iberoam., Vol. **35** No. **6**, pp. 1859–1884 (2019). DOI: 10.4171/rmi/1104

[3] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz: *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal, Vol. **14**, pp. 349–381 (1973). DOI: 10.1016/0022-1236(73)90051-7

[4] D. Bao, S.-S. Chern and Z. Shen: *Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Vol. **200** (2000). DOI: 10.1007/978-1-4612-1268-3

[5] H. Brezis: *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, (1983). ISBN: 2-225-77198-7, ISSN: 0754-4405

[6] H. Brezis and L. Nirenberg: *Remarks on finding critical points*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. **44** No. **8-9** pp. 939–963 (1991). DOI: 10.1002/cpa.3160440808

[7] M. Bridston and A. Haefliger: *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Springer-Verlag, Berlin, (1999). DOI: 10.1007/978-3-662-12494-9

[8] H. Busemann: *The Geometry of Geodesics*, Academic Press, (1955).

[9] E. Caponio, M.Á. Javaloyes and A. Masiello: *On the energy functional on Finsler manifolds and applications to stationary spacetimes*, Math. Ann., Vol. **351** No. **2**, pp. 365-392 (2011). DOI: 10.1007/s00208-010-0602-7

[10] K.-C. Chang: *Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations*, J. Math. Anal. Appl., Vol. **80** No. **1** pp. 102–129 (1981). DOI: 10.1016/0022-247X(81)90095-0

[11] F.H. Clarke: Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley, (1983).

[12] M. Degiovanni and M. Marzocchi: *A critical point theory for nonsmooth functionals*, Ann. Mat. Pura Appl., Vol. **167**, pp. 73–100 (1994). DOI: 10.1007/BF01760329

[13] M.P. do Carmo: *Riemannian geometry*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1992). DOI: 10.1007/978-1-4757-2201-7

[14] I. Ekeland: *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl., Vol. **47**, pp. 324–353 (1974). DOI: 10.1016/0022-247X(74)90025-0

[15] I. Ekeland: *The Hopf-Rinow theorem in infinite dimension*, J. Differential Geometry, Vol. **13** No. 2, pp. 287–301 (1978). DOI: 10.4310/jdg/1214434494

[16] M. Frigon: *On a critical point theory for multivalued functionals and application to partial differential inclusions*, Nonlinear Anal., Vol. **31** No. **5-6**, pp. 735–753 (1998). DOI: 10.1016/S0362-546X(97)00436-7

[17] K. Grove: *Condition (C) for the energy integral on certain path space and application to the theory of geodesics J. Diff*, Geometry, Vol. **8**, pp. 207–223 (1973). DOI: 10.4310/jdg/1214431639

[18] E. Hebey: *Nonlinear analysis on manifolds*: *Sobolev spaces and inequalities, volume 5 of Courant Lecture Notes in Mathematics*, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, (1999). DOI: 10.1090/cln/005

[19] S. Ivanov and A. Lytchak: *Rigidity of Busemann convex Finsler metrics*, Comment. Math. Helv., Vol. **94** No. **4**, pp. 855–868 (2019). DOI: 10.4171/CMH/476

[20] Y. Jabri: *The mountain pass theorem. Variants, generalizations and some applications*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, Vol. **95** (2003). DOI: 10.1017/CBO9780511546655

[21] J. Jost: *Nonpositivity Curvature*: *Geometric and Analytic Aspects*, Birkhäuser Verlag, Basel, (1997). DOI: 10.1007/978-3-0348-8918-6

[22] P. Kelly and E. Straus: *Curvature in Hilbert geometry*, Pacific J. Math., Vol. **8**, pp 119–125 (1958). DOI: 10.2140/pjm.1958.8.119

[23] J. Kobayashi and M. Ôtani: *The principle of symmetric criticality for non-differentiable mappings*, J. Funct. Anal., Vol. **214**, pp. 428–449 (2004). DOI: 10.1016/j.jfa.2004.04.006

[24] W. Krawcewicz and W. Marzantowicz: *Some remarks on the Lusternik-Schnirelman method for non-differentiable functionals invariant with respect to a finite group action*, Rocky Mount. J. Math., Vol. **20**, pp. 1041–1049 (1990). DOI: 10.1216/rmjm/1181073061

[25] P.-L. Lions: *Symétrie et compacité dans les espaces Sobolev*, J. Funct. Anal., Vol. 49, pp. 315–334 (1982). DOI: 10.1016/0022-1236(82)90072-6

[26] G. Lu: *Splitting lemmas for the Finsler energy functional on the space of H^1-curves*, Proc. Lond. Math. Soc., Vol. **113** No. **1**, pp. 24–76 (2016). DOI: 10.1112/plms/pdw022

[27] J. Milnor: *Morse theory*, Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. **51**, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1963).

[28] D. Motreanu and P.D. Panagiotopoulos: *Minimax theorems and qualitative properties of the solutions of hemivariational inequalities*, Nonconvex Optimization and its Applications, Vol. **29**. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1999).
DOI: 10.1007/978-1-4615-4064-9

[29] R.S. Palais: *The principle of symmetric criticality*, Comm. Math. Phys., Vol. **69**, pp. 19–30 (1979). DOI: 10.1007/BF01941322

[30] R.S. Palais and S. Smale: *A generalized Morse theory*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. **70**, pp. 165–172 (1964). DOI: 10.1090/S0002-9904-1964-11062-4

[31] P.D. Panagiotopoulos: *Hemivariational inequalities*, Applications in mechanics and engineering, Springer-Verlag, Berlin, (1993). DOI: 10.1007/978-3-642-51677-1_4

[32] P. Pucci and J. Serrin, *A mountain pass theorem*, J. Differential Equations Vol. **60** No. **1**, pp. 142–149 (1985). DOI: 10.1016/0022-0396(85)90125-1

[33] P.H. Rabinowitz: *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Vol. **65**. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, (1986). DOI: 10.1090/cbms/065

[34] H.-B. Rademacher: *A sphere theorem for non-reversible Finsler metrics*, Math. Ann., Vol. **328** No. **3**, pp. 373–387 (2004). DOI: 10.1007/s00208-003-0485-y

[35] B. Ricceri: *A general variational principle and some of its applications*, Fixed point theory with applications in nonlinear analysis, J. Comput. Appl. Math., Vol. **113** No. **1-2**, pp. 401–410 (2000). DOI: 10.1016/S0377-0427(99)00269-1

[36] M. Squassina: *On Palais' principle for non-smooth functionals*, Nonlinear Anal., Vol. **74** No. **11**, pp. 3786–3804 (2011). DOI: 10.1016/j.na.2011.03.026

[37] L. Simon: *Parciális Differenciálegyenletek*, I-II. Egyetemi jegyzet (1969, 1970).

[38] M. Willem: *Minimax theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Vol. **24**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1996).
DOI: 10.1007/978-1-4612-4146-1

[39] E. Zeidler: *Nonlinear functional analysis and its applications*, III. Variational methods and optimization, Springer-Verlag, New York, (1985).

Kristály Sándor (tudományos közleményekben: Kristály Alexandru) 1997-ben végzett a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem Matematika szakán. Ugyanott 2003-ban megvédte az első doktori tézisét matematikai analízisben, 2005-ben a Debreceni Egyetemen differenciálgeometriában, majd 2010-ben a Közép-Európai Egyetemen gazdasági optimizációban. Kristály Sándor két fő kutatási iránya a variációszámítás és geometriai analízis, valamint ezek alkalmazása elliptikus parciális differenciálegyenletekben, gazdasági egyensúlypontok vizsgálatában, Riemann–Finsler-geometriában és Heisenberg-csoportok elméletében. Számos nemzetközi konferencián volt meghívott plenáris előadó, továbbá vendégkutatóként olyan rangos intézetekben is tevékenykedhetett, mint a CityU of Hong Kong, Institut des Hautes Études Scientifiques, University of Kyoto, Istituto Nazionale di Alta Matematica vagy Universität Bern. Kétszer elnyerte az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíjat (2009-2012, 2013-2016), melynek során 2013-ban kiérdemelte az MTA Bolyai Plakettjét is. MTA doktori tézisét 2019-ben védte meg. A Román Akadémia 2014-ben a kutatási eredményeiért a Spiru Haret-díjjal tüntette ki, majd 2020-ban elnyerte az Ad Astra díjat is. A MathSciNet-en munkáira 1069 hivatkozás található 638 szerzőtől.

KRISTÁLY SÁNDOR
Babeş-Bolyai Tudományegyetem,
Kolozsvár & Óbudai Egyetem, Budapest
Elektronikus levelezési címek:
alex.kristaly@econ.ubbcluj.ro,
kristaly.alexandru@uni-obuda.hu

THE SCIENTIFIC ACTIVITY OF CSABA VARGA

Alexandru Kristály

The paper intends to review the mathematical work of Csaba Varga (1959-2021), presenting his contributions within the theory of calculation of variations together with applications in partial differential equations and Finsler geometry. We first present the appropriate mathematical backgrounds and within them, we place Csaba Varga's scientific results.

Keywords: calculus of variations; Riemann-Finsler geometry; partial differential equations.

Alkalmazott Matematikai Lapok **40** (2023), 71–77.

VARGA CSABA PUBLIKÁCIÓI

Öszeállította: FARKAS CSABA

Könyvek, Könyvfejezetek

[1] Alexandru Kristály and Csaba Varga: *Critical points*, in: Lectures on nonlinear analysis and its applications, Scientia Kiadó, Sapientia EMTE, Kolozsvár, pp. 245–332 (2003).

[2] Csaba Varga: *Metode topologice în calcul variaţional*, Casa Carţii de Ştiinţa (2005)

[3] Alexandru Kristály and Csaba Varga: *A nonsmooth principle of symmetric criticality and applications*, in: Critical point theory and its applications, Casa Carţii de Ştiinţa, Cluj-Napoca, pp. 69-87 (2007).

[4] Hannelore Lisei and Csaba Varga: *Multiple solutions for nonlinear equations involving Dirichlet forms*, in: Topics in mathematics, computer science and philosophy, Presa Univ. Clujeana, ClujNapoca, pp. 135–145 (2008).

[5] Alexandru Kristály, Vicenţiu D. Radulescu, and Csaba György Varga: *Variational principles in mathematical physics, geometry, and economics*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, Vol. **136** (2010).

[6] Ildikó-Ilona Mezei and Csaba Varga: *Analitikus mértan*: [egyetemi jegyzet], Kolozsvári Egyetemi Kiadó (2010).

[7] Ildikó-Ilona Mezei and Csaba Varga: *Görbék és felületek elmélete*: [egyetemi jegyzet], Abel Kiadó (2011).

[8] Brigitte E. Breckner and Csaba Varga: *On problems involving the weak Laplacian operator on the Sierpinski gasket*, in: An operator theory summer, Vol. 13 of Theta Ser. Adv. Math., Theta, Bucharest, pp. 29–37 (2012).

[9] Brigitte Erika Breckner and Csaba Varga: *Elliptic problems on the Sierpinski gasket*, in: Topics in mathematical analysis and applications, Springer Optim. Appl., Springer, Cham, Vol. **94**, pp. 119–173 (2014). DOI: 10.1007/978-3-319-06554-0_6

[10] Nicuşor Costea, Alexandru Kristály, and Csaba Varga: *Variational and Monotonicity Methods in Nonsmooth Analysis*, Springer International Publishing (2021). DOI: 10.1007/978-3-030-81671-1

Kiadványok

[11] Csaba Varga: *Extension of functions to proper functions*, in: Seminar on Geometry, Preprint, „Babeş–Bolyai" Univ., Cluj–Napoca, Vol. **91**, pp. 93–96 (1991).

[12] Csaba Varga: *A global existence theorem for hyperbolic differential equations*, in: Seminar on Fixed Point Theory, Preprint, „Babeş–Bolyai" Univ., Cluj–Napoca, Vol. **91**, pp. 47–53 (1992).

[13] Csaba Varga: A note of the relative category in Hurewicz fibrations, in: Proceedings of Symposium in Geometry (Cluj–Napoca and Tîrgu Mureş, 1992), Preprint, „Babeş–Bolyai" Univ., Cluj–Napoca, Vol. **93**, pp. 197–202 (1993).

[14] Csaba Varga and Viorica Varga: *A note on the Palais-Smale condition for non-differentiable functionals*, in: Proceedings of 23rd Conference on Geometry and Topology (Cluj–Napoca, 1993), „Babeş–Bolyai" Univ., Cluj–Napoca, pp. 209–214 (1994).

Tanulmányok

[15] Csaba Varga and Gavril Farcas: *On completeness of metric spaces*, Studia Univ. Babeş–Bolyai Math., Vol. **37** No. **4**, pp. 95–101 (1993).

[16] Csaba Varga and Gavril Farcas: *Ljusternik-Schnirelman theory on closed subsets of C^1-manifolds*, Studia Univ. Babeş–Bolyai Math., Vol. **38** No. **2**, pp. 75–89 (1993).

[17] Csaba Varga: *An application of the transversality theorem*, Publ. Math. Debrecen, Vol. **46** No. **1-2**, pp. 121–124 (1995).

[18] Paula Curt and Csaba Varga: *Jack's, Miller's and Mocanu's lemma for holomorphic mappings defined ondomains with differentiable boundary of class C^2*, Studia Univ. Babeş–Bolyai Math., Vol. **40** No. **2**, pp. 41–52 (1995).

[19] Csaba Varga and Gavril Farkas: *A multiplicity theorem in equivariant case*, Mathematica, Vol. 38(61) No. **12**, pp. 221–226 (1996).

[20] Csaba Varga and Viorica Varga: *A note on linking problems in equivariant case*, Studia Univ. Babeş–Bolyai Math., Vol. 41 No. **4**, pp. 113–119 (1996).

[21] Dumitru Motreanu and Csaba Varga: *Some critical point results for locally Lipschitz functionals*, Comm. Appl. Nonlinear Anal., Vol. **4** No. **3**, pp. 17–33 (1997).

[22] Csaba Varga and Marius Crainic: *A note on the denseness ofcomplete invariant metrics*, Publ. Math. Debrecen, Vol. **51** No. **3–4** pp. 265–271 (1997).

[23] Wolfgang W. Breckner, Tiberiu Trif, and Csaba Varga: S*ome applications of the condensation of thesingularities of families of nonnegative functions*, II. In Approximation and optimization, (ClujNapoca, 1996), Transilvania, Cluj–Napoca, Vol. **I**, pp. 193–202 (1997).

[24] Cornel Pintea and Csaba Varga: *A note on homology and homotopy groups of fiber spaces*, Mathematica, Vol. **39**(62) No. **1**, pp. 95–101 (1997).

[25] Paula Curt and Csaba Varga: *Jack, Miller and Mocanu lemma for holomorphic mappings in C^n*, Stud. Cerc. Mat., Vol. **49** No. **1-2**, pp. 39–45 (1997).

[26] Alexandru Kristály and Csaba Varga: *A note on minimax results for continuous functionals*, Studia Univ. Babeş–Bolyai Math., Vol. **43** No. **3**, pp. 35–55 (1998).

[27] Dumitru Motreanu and Csaba Varga: *A nonsmooth equivariant minimax principle*, Commun. Appl. Anal., Vol. **3** No. **1**, pp. 115–130 (1999).

[28] Wolfgang W. Breckner, Tiberiu Trif and Csaba Varga: *Some applications of the condensation of thesingularities of families of nonnegative functions*, Anal. Math., Vol. **25** No. **1**, pp. 15–32 (1999). DOI: 10.1007/BF02908424

[29] Alexandru Kristály and Csaba Varga: *Coerciveness property for a class of set-valued mappings*, Nonlinear Anal. Forum, Vol. **6** No. **2**, pp. 353–362 (2001).

[30] Alexandru Kristály and Csaba Varga: *Location of min-max critical points for multivalued functionals*, Acta Univ. Carolin. Math. Phys., Vol. **42** No. **2**, pp. 59–68 (2001).

[31] László Kozma, Radu Peter and Csaba Varga: *Warped product of Finsler manifolds*, Ann. Univ. Sci., Budapest, Eötvös Sect. Math., Vol. **44**, pp. 157–170 (2002).

[32] László Kozma, Alexandru Kristály and Csaba Varga: *Isometry-invariant geodesics with Lipschitz obstacle*, in: Differential geometry and its applications (Opava, 2001), Math. Publ., Silesian Univ. Opava, Opava, Vol. **3**, pp. 203–214, (2001).

[33] Alexandru Kristály and Csaba Varga: *Cerami (C) condition and mountain pass theorem for multivaluedmappings*, Serdica Math. J., Vol. **28** No. **2**, pp. 95–108 (2002).

[34] Alexandru Kristály and Csaba Varga: *Coercivity of set-valued mappings on metric spaces*, Math. Pannon., Vol. **13** No. **2**, pp. 241–248 (2002).

[35] Alexandru Kristály and Csaba Varga: *Set-valued versions of Ky Fan's inequality with application tovariational inclusion theory*, J. Math. Anal. Appl., Vol. **282** No. **1**, pp. 8–20 (2003). DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00335-9

[36] E. Buzogány, I.I. Mezei and Cs. Varga: *A special hemivariational inequality*, Mathematica, Vol. **45**(68) No. **2**, pp. 115–120 (2003).

[37] Zsuzsánna Dályai and Csaba Varga: *An existence result for hemivariational inequalities*, Electron. J. Differential Equations, Vol. **2004** No. **37**, pp. 1–17 (2004).
URL: http://ejde.math.txstate.edu (ISSN: 1072–6691)

[38] László Kozma, Alexandru Kristály, and Csaba Varga: *Critical point theorems on Finsler manifolds*, Beiträge Algebra Geom., Vol. 45 No. **1**, pp. 47–59 (2004).

[39] László Kozma, Alexandru Kristály and Csaba Varga: *The dispersing of geodesics in Berwald spaces ofnon-positive flag curvature*, Houston J. Math., Vol. **30** No. **2**, pp. 413–420 (2004).

[40] Alexandru Kristály and Csaba Varga: *A set-valued approach to hemivariational inequalities*, Topol. Methods Nonlinear Anal., Vol. **24** No. **2**, pp. 297–307 (2004).
DOI: 10.12775/TMNA.2004.029

[41] Csaba Varga and Hajnalka Csapó: *Contingent Nash points for set-valued maps*, Fixed Point Theory, Vol. **6** No. **1**, pp. 139–148 (2005).

[42] Alexandru Kristály, Csaba Varga and Viorica Varga: *An eigenvalue problem for hemivariational inequalities with combined nonlinearities on an infinite strip*, Nonlinear Anal., Vol. **63** No. **2**, pp. 260–272 (2005). DOI: 10.1016/j.na.2005.05.011

[43] Alexandru Kristály, Viorica Venera Motreanu and Csaba Varga: *A minimax principle with a generalPalais-Smale condition*, Commun. Appl. Anal., Vol. **9** No. **2**, pp. 285–297 (2005).

[44] Csaba Varga: *Existence and infinitely many solutions for an abstract class of hemivariational inequalities*, J. Inequal. Appl., Vol. **3** No. **2**, pp. 89–105 (2005). DOI: 10.1155/JIA.2005.89

[45] Alexandru Kristály and Csaba Varga: *On a class of quasilinear eigenvalue problems in R^N*, Math. Nachr., Vol. **278** No. **15**, pp. 1756–1765 (2005). DOI: 10.1002/mana.200510339

[46] Hannelore Lisei and Csaba Varga: *Some applications to variational-hemivariational inequalities of the principle of symmetric criticality for Motreanu-Panagiotopoulos type functionals*, J. Global Optim., Vol. **36** No. **2**, pp. 283–305 (2006). DOI: 10.1007/s10898-006-9009-0

[47] Alexandru Kristály, Csaba Varga and Viorica Varga: *A nonsmooth principle of symmetric criticality andvariational-hemivariational inequalities*, J. Math. Anal. Appl., Vol. **325** No. **2**, pp. 975–986 (2007). DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.02.062

[48] Alexandru Kristály and Csaba Varga: *Multiple solutions for elliptic problems with singular and sublinearpotentials*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. **135** No. **7**, pp. 2121–2126 (2007). DOI: 10.1090/S0002-9939-07-08715-1

[49] Francesca Faraci, Antonio Iannizzotto, Hannelore Lisei and Csaba Varga: *A multiplicity result for hemivariational inequalities*, J. Math. Anal. Appl., Vol. **330** No. **1**, pp. 683–698 (2007). DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.07.081

[50] Francesca Faraci, Antonio Iannizzotto, Pál Kupán and Csaba Varga: *Existence and multiplicity resultsfor hemivariational inequalities with two parameters*, Nonlinear Anal., Vol. **67** No. **9**, pp. 2654-2669 (2007). DOI: 10.1016/j.na.2006.09.030

[51] Csaba Varga, Pál Kupán and István Székely: *Multiple solutions for a class of parametrized elliptic problems with singular potentials*, An. Univ. Vest Timiş. Ser. Mat. Inform., Vol. **45** No. **2**, pp. 231–242 (2007).

[52] Brigitte Erika Breckner and Csaba Varga: *A multiplicity result for gradient-type systems with nondifferentiable term*, Acta Math. Hungar., Vol. 118 No. **1–2**, pp. 85–104 (2008). DOI: 10.1007/s10474-007-6165-8

[53] Alexandru Kristály, Hannelore Lisei and Csaba Varga: *Multiple solutions for p-Laplacian type equations*, Nonlinear Anal., Vol. **68** No. **5**, pp. 1375–1381 (2008). DOI: 10.1016/j.na.2006.12.031

[54] Alexandru Horváth, Hannelore Lisei and Csaba Varga: *Multiplicity results for a class of quasilineareigenvalue problems on unbounded domains*, Arch. Math. (Basel), Vol. **90** No. **3**, pp. 256–266 (2008). DOI: 10.1007/s00013-007-2398-6

[55] Ildikó Ilona Mezei and Csaba Varga: *Multiplicity results for a double eigenvalue quasilinear problem onunbounded domain*, Nonlinear Anal., Vol. **69** No. **11**, pp. 4099–4105 (2008). DOI: 10.1016/j.na.2007.10.040

[56] Brigitte Erika Breckner, Alexandru Horváth, and Csaba Varga: *A multiplicity result for a special class ofgradient-type systems with non-differentiable term*, Nonlinear Anal., Vol. **70** No. **2**, pp. 606–620 (2009). DOI: 10.1016/j.na.2007.12.029

[57] Alexandru Kristály and Csaba Varga: *Multiple solutions for a degenerate elliptic equation involving sublinear terms at infinity*, J. Math. Anal. Appl., Vol. **352** No. **1**, pp. 139–148 (2009). DOI: 10.1016/j.jmaa.2008.03.025

[58] Hannelore Lisei, Gheorghe Moroşanu, and Csaba Varga: *Multiplicity results for double eigenvalue problemsinvolving the p-Laplacian*, Taiwanese J. Math., Vol. **13** No. **3**, pp. 1095–1110 (2009). DOI: 10.11650/twjm/1500405462

[59] Hannelore Lisei and Csaba Varga: *Multiple solutions for a differential inclusion problem with nonhomogeneous boundary conditions*, Numer. Funct. Anal. Optim., Vol. **30** No. **5-6**, pp. 566–581 (2009). DOI: 10.1080/01630560902987857

[60] Alexandru Kristály, Donal O'Regan and Csaba Varga: *Parameterized nonlinear equations on Dirichletforms*, Commun. Appl. Anal., Vol. **13** No. **3**, pp. 317–325 (2009).

[61] Alexandru Kristály, Waclaw Marzantowicz and Csaba Varga: *A non-smooth three critical points theoremwith applications in differential inclusions*, J. Global Optim., Vol. **46** No. **1**, pp. 49–62 (2010). DOI: 10.1007/s10898-009-9408-0

[62] Alexandru Kristály and Csaba Varga: *Variational-hemivariational inequalities on unbounded domains*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., Vol. **55** No. **2**, pp. 3–87 (2010).

[63] Brigitte Erika Breckner, Dušan Repovš and Csaba Varga: *On the existence of three solutions for theDirichlet problem on the Sierpinski gasket*, Nonlinear Anal., Vol. **73** No. **9**, pp. 2980–2990 (2010). DOI: 10.1016/j.na.2010.06.064

[64] Alexandru Kristály, Nikolaos S. Papageorgiou and Csaba Varga: *Multiple solutions for a class of Neumannelliptic problems on compact Riemannian manifolds with boundary*, Canad. Math. Bull., Vol. **53** No. **4**, pp. 674–683 (2010). DOI: 10.4153/CMB-2010-073-x

[65] Brigitte E. Breckner and Csaba Varga: *Infinitely many solutions for a class of systems of differentialinclusions*, Proc. Edinb. Math. Soc., Vol. **54** No. **1**, pp. 9–23 (2011). DOI: 10.1017/S001309150900073X

[66] Hannelore Lisei, Andrea Eva Molnár and Csaba Varga: *On a class of inequality problems with lack of compactness*, J. Math. Anal. Appl., Vol. **378** No. **2**, pp. 741–748 (2011). DOI: 10.1016/j.jmaa.2010.12.041

[67] Hannelore Lisei and Csaba Varga: *Multiple solutions for gradient elliptic systems with nonsmooth boundary conditions*, Mediterr. J. Math., Vol. **8** No. **1**, pp. 69–79 (2011). DOI: 10.1007/s00009-010-0052-1

[68] Francesca Faraci, Antonio Iannizzotto and Csaba Varga: *Infinitely many bounded solutions for the p-Laplacian with nonlinear boundary conditions*, Monatsh. Math., Vol. **163** No. **1**, pp. 25–38 (2011). DOI: 10.1007/s00605-010-0190-3

[69] Monica Bota, Andrea Molnár and Csaba Varga: *On Ekeland's variational principle in b-metric spaces*, Fixed Point Theory, Vol. **12** No. **1**, pp. 21–28 (2011).

[70] Dušan Repovš and Csaba Varga: *A Nash type solution for hemivariational inequality systems*, Nonlinear Anal., Vol. **74** No. **16**, pp. 5585–5590 (2011). DOI: 10.1016/j.na.2011.05.043

[71] Brigitte Erika Breckner, Vicenţiu D. Radulescu and Csaba Varga: *Infinitely many solutions for the Dirichlet problem on the Sierpinski gasket*, Anal. Appl. (Singap.), Vol. **9** No. **3**, pp. 235–248 (2011). DOI: 10.1142/S0219530511001844

[72] Mihai Mihailescu and Csaba Varga: *Multiplicity results for some elliptic problems with nonlinear boundary conditions involving variable exponents*, Comput. Math. Appl., Vol. **62** No. **9**, pp. 3464–3471 (2011). DOI: 10.1016/j.camwa.2011.08.062

[73] Francesca Colasuonno, Patrizia Pucci and Csaba Varga: *Multiple solutions for an eigenvalue probleminvolving p-Laplacian type operators*, Nonlinear Anal., Vol. **75** No. **12**, pp. 4496–4512 (2012). DOI: 10.1016/j.na.2011.09.048

[74] Brigitte E. Breckner and Csaba Varga: *One-parameter Dirichlet problems on the Sierpinski gasket*, Appl. Math. Comput., Vol. **219** No. **4**, pp. 1813–1820 (2012). DOI: 10.1016/j.amc.2012.08.020

[75] Giuseppina Autuori, Patrizia Pucci and Csaba Varga: *Existence theorems for quasilinear elliptic eigenvalue problems in unbounded domains*, Adv. Differential Equations, Vol. **18** No. **1–2**, pp. 1–48 (2013).

[76] Nicuşor Costea and Csaba Varga: *Multiple critical points for non-differentiable parametrized functionalsand applications to differential inclusions*, J. Global Optim., Vol. **56** No. **2**, pp. 399–416 (2013). DOI: 10.1007/s10898-011-9801-3

[77] Nicuşor Costea and Csaba Varga: *Systems of nonlinear hemivariational inequalities and applications*, Topol. Methods Nonlinear Anal., Vol. **41** No. **1**, pp. 39–65 (2013).

[78] Francesca Faraci, Antonio Iannizzotto and Csaba Varga: *Multiplicity results for constrained Neumann problems*, in: Recent trends in nonlinear partial differential equations, II. Stationary problems, Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, Vol. **595**, pp. 219–229 (2013). DOI: 10.1090/conm/595/11815

[79] Kanishka Perera, Patrizia Pucci and Csaba Varga: *An existence result for a class of quasilinear ellipticeigenvalue problems in unbounded domains*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., Vol. **21** No. **3**, pp. 441–451 (2014). DOI: 10.1007/s00030-013-0255-9

[80] Csaba Farkas and Csaba Varga: *Multiple symmetric invariant non trivial solutions for a class of quasilinearelliptic variational systems*, Appl. Math. Comput., Vol. **241**, pp. 347–355 (2014). DOI: 10.1016/j.amc.2014.05.013

[81] Brigitte Erika Breckner and Csaba Varga: *A note on elliptic problems on the Sierpinski gasket*, Stud. Univ. Babeş–Bolyai Math., Vol. 59 No. **4**, pp. 469–477 (2014).

[82] Brigitte Erika Breckner and Csaba Varga: *A note on gradient-type systems on fractals*, Nonlinear Anal. Real World Appl., Vol. **21**, pp. 142–152 (2015). DOI: 10.1016/j.nonrwa.2014.07.004

[83] Roberta Filippucci, Patrizia Pucci and Csaba Varga: *Symmetry and multiple solutions for certain quasilinear elliptic equations*, Adv. Differential Equations, Vol. **20** No. **7-8**, pp. 601–634 (2015).

[84] Csaba Farkas, Alexandru Kristály and Csaba Varga: *Singular Poisson equations on Finsler-Hadamardmanifolds*, Calc. Var. Partial Differential Equations, Vol. **54** No. **2**, pp. 1219–1241 (2015). DOI: 10.1007/s00526-015-0823-4

[85] Mihai Mihailescu, Denisa Stancu-Dumitru and Csaba Varga: *On the spectrum of a Baouendi-Grushintype operator: an Orlicz-Sobolev space setting approach*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., Vol. **22** No. **5**, pp. 1067–1087 (2015). DOI: 10.1007/s00030-015-0314-5

[86] Arpád Baricz, Saminathan Ponnusamy and Csaba Varga: *Julia's lemma on the hyperbolic disk*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., Vol. **40** No. **2** pp. 939–948 (2015). DOI: 10.5186/aasfm.2015.4054

[87] Nicuşor Costea, Mihály Csirik and Csaba Varga: *Weak solvability via bipotential method for contactmodels with nonmonotone boundary conditions*, Z. Angew. Math. Phys., Vol. **66** No. **5**, pp. 2787–2806 (2015). DOI: 10.1007/s00033-015-0513-2

[88] Brigitte Erika Breckner and Csaba Varga: *Multiple solutions of Dirichlet problems on the Sierpinskigasket*, J. Optim. Theory Appl., Vol. **167** No. **3**, pp. 842–861 (2015). DOI: 10.1007/s10957-013-0368-7

[89] Hannelore Lisei and Csaba Varga: *A multiplicity result for a class of elliptic problems on a compact Riemannian manifold*, J. Optim. Theory Appl., Vol. **167** No. **3**, pp. 912–927 (2015). DOI: 10.1007/s10957-013-0365-x

[90] Hannelore Lisei, Radu Precup and Csaba Varga: *A Schechter type critical point result in annular conicaldomains of a Banach space and applications*, Discrete Contin. Dyn. Syst., Vol. **36** No. **7**, pp. 3775–3789 (2016). DOI: 10.3934/dcds.2016.36.3775

[91] Renata Bunoiu, Radu Precup and Csaba Varga: *Multiple positive standing wave solutions for Schrödingerequations with oscillating state-dependent potentials*, Commun. Pure Appl. Anal., Vol. **16** No. **3**, pp. 953–972 (2017). DOI: 10.3934/cpaa.2017046

[92] Radu Precup, Patrizia Pucci and Csaba Varga: *A three critical points result in a bounded domain of aBanach space and applications*, Differential Integral Equations, Vol. **30** No. **7-8**, pp. 555–568 (2017).

[93] Nicuşor Costea, Mihály Csirik and Csaba Varga: *Linking-type results in nonsmooth critical point theoryand applications*, Set-Valued Var. Anal., Vol. **25** No. **2**, pp. 333–356 (2017). DOI: 10.1007/s11228-016-0383-6

[94] Radu Precup and Csaba Varga: *Localization of positive critical points in Banach spaces and applications*, Topol. Methods Nonlinear Anal., Vol. **49** No. **2**, pp. 817–833 (2017). DOI: 10.12775/TMNA.2017.011

[95] Hannelore Lisei, Csaba Varga and Orsolya Vas: *Localization method for the solutions of nonhomogeneous operator equations*, Appl. Math. Comput., Vol. **329**, pp. 64–83 (2018). DOI: 10.1016/j.amc.2018.01.031

[96] Nicuşor Costea, Gheorghe Moroşanu and Csaba Varga: *Weak solvability for Dirichlet partial differentialinclusions in Orlicz-Sobolev spaces*, Adv. Differential Equations, Vol. **23** No. **7–8**, pp. 523–554 (2018).

[97] Mihai Mihailescu, Denisa Stancu-Dumitru and Csaba Varga: *The convergence of nonnegative solutionsfor the family of problems* $-\Delta_p u = \lambda^u$ as $p \to \infty$, ESAIM Control Optim. Calc. Var., Vol. **24** No. **2**, pp. 569–578 (2018). DOI: 10.1051/cocv/2017048

[98] Brigitte Erika Breckner and Csaba Varga: *An application of a fixed-point theorem to Neumann problemson the Sierpinski fractal*, Fixed Point Theory, Vol. **19** No. **2**, pp. 475–485 (2018). DOI: 10.24193/fpt-ro.2018.2.38

[99] Radu Precup, Patrizia Pucci and Csaba Varga: *Energy-based localization and multiplicity of radiallysymmetric states for the stationary p-Laplace diffusion*, Complex Var. Elliptic Equ., Vol. **65** No. **7**, pp. 1198–1209 (2020). DOI: 10.1080/17476933.2019.1574774

[100] Agnes Mester, Ioan Radu Peter and Csaba Varga: *Sufficient criteria for obtaining Hardy inequalities on Finsler manifolds*, Mediterr. J. Math., Vol. **18** No. **2**, p. 22 (2021). DOI: 10.1007/s00009-021-01725-5

Alkalmazott Matematikai Lapok **40** (2023), 79–85.

MATEMATIKA MAGYARUL A KOLOZSVÁRI EGYETEMI OKTATÁSBAN 1945 UTÁN

KÁSA ZOLTÁN

A cikk bemutatja a kolozsvári magyar nyelvű matematikai felsőoktatás helyzetét 1945-től, amikor megalakult a magyar nyelvű Bolyai Tudományegyetem, amelyet 1959-ben egyesítettek a román nyelvű Victor Babeş Tudományegyetemmel, létrehozván a Babeş–Bolyai Tudományegyetemet. Az 1945 előti időkről Maurer Gyula számolt be [3].

1. Bolyai Tudományegyetem

1945 májusában a kolozsvári magyar állami egyetemet új egyetemként hozták létre, és nem a Ferenc József Tudományegyetem utódaként, de megtartották azokat a tanárait, akik nem hagyták el Erdélyt. Az egyetem még abban az évben felvette a Bolyai nevet, ezzel tisztelegve Bolyai Farkas és Bolyai János emléke előtt. Az első tanév csak 1946. február 1-jén kezdődött, és megszakítás nélkül tartott augusztus 1-jéig.

A matematikán csupán Borbély Samu maradt a régiek közül, később 1947-ben Gáspár Gyula is visszatért. De 1949-ben mindketten Magyarországra távoztak, miután már csak román állampolgárok taníthattak az egyetemen, ők viszont nem akartak lemondani a magyar állampolgárságról. Érdekes, hogy az a kitétel, hogy csak román állampolgárok taníthatnak az új egyetemen, már az 1945-ös királyi rendeletben is szerepelt, de csak 1948 után szereztek ennek érvényt.

Borbély Samu, kiváló szervezőként rövid idő alatt megteremtette a megfelelő minőségű oktatás feltételeit. Mivel nagy volt a tanárhiány, külső tanárokat is bevont az oktatásba (Vescan Teofil, Tiberiu Popoviciu, Pick György, Gergely Jenő, Cseke Vilmos). Meg kell jegyezni, hogy Vescan és Popoviciu magyarul tartották az előadásokat.

Az egyetem az 1948-as tanügyi reformig teljesen a régi Ferenc József Tudományegyetem szellemében és struktúrájában működött. 1949-től, a tanárhiány csökkentésére egyszerre több személyt is alkalmaztak (docenseket, adjunktusokat, tanársegédeket, gyakornokokat). Ekkor kerültek az egyetemre: Gergely Jenő, Cseke Vilmos, Kiss Ernő, Tóth Sándor docensek, Radó Ferenc adjunktus, Maurer Gyula, Kiss Árpád, Jankó Béla tanársegédek, Kalik Károly, Orbán Béla, Balázs Márton gyakornokok és mások. Az 1950-es évek közepén kerültek az egyetemre: Szilágyi Pál, Virág Imre, Pál Árpád és később Kolumbán József. Ugyanekkor került az egyetemre adjunktusként Ney András, aki annak idején Borbély Samu tanítványa volt.

Az egyetemen tanárképzés folyt, doktori iskola nem volt, de minden tekintetben – oktatás, kutatás, egyetemen kívüli társadalmi tevékenység – egyre jobban teljesített. A matematika-fizika kar két matematikai tanszékén 1947 és 1957 között tizenkét sokszorosított egyetemi jegyzet jelent meg. Ezenkívül beindult a könyvkiadás is, több magyar és román nyelvű szakkönyv, példatár jelent meg az intézet munkatársaitól. Ezek közül mindenképpen meg kell említeni a Bolyai János születésének 150. évfordulójára kiadott *Bolyai János élete és műve* című könyvet. Az egyetem 14 éve alatt az intézet munkatársai mintegy 75 tudományos dolgozatot közöltek. Azok az oktatók, akik átkerültek az egyesített Babeş–Bolyai Tudományegyetemre, szinte mindannyian megállták a helyüket az oktatásban és a kutatásban is. Idézzük Maurer Gyula egykori professzor véleményét: „A Bolyai Tudományegyetem Matematikai intézete tehát *minden olyan elvárásnak megfelelt, amely egy egyetemi intézettel kapcsolatban megfogalmazható.* Amikor ezt már olajozottan tette, akkor a Bolyai Tudományegyetemmel együtt megszüntette a hatalom. Bizonyos jelek, pl. a közös rendezvények szerveztetése (amelyek normális körülmények között nemcsak, hogy nem elítélendők, hanem egyenesen üdvözlendők) arra utalnak, hogy erre a hatalom már legalább 1955-től kezdve készült [2]."

2. A két egyetem egyesítése: Babeş–Bolyai Tudományegyetem

A román értelmiség szemében a Bolyai Egyetem mindig szálka volt, és várták a pillanatot, amikor megszüntethetik. Az 1956-os magyar forradalommal való nyílt vagy rejtett erdélyi magyar szolidaritást, amelynek következményeként több ezer magyart, főleg fiatalt, többéves börtönre ítéltek, ilyen pillanatnak vélték. De más események is közrejátszottak. 1958-ban a román politikának sikerült elérnie, hogy a szovjet csapatok elhagyták Romániát. Ugyanebben az évben még két olyan esemény is történt, amely meggyorsíthatta a Bolyai Egyetem megszüntetésének folyamatát. 1958 januárjában meghalt Petru Groza, Románia államtanácsának elnöke, egykori miniszterelnök, az egyetlen román politikus, aki esetleg nem támogatta volna a két egyetem egyesítését. Kádár János, az MSZMP főtitkára az 1958 februári romániai látogatásán többször is kijelentette, hogy a nemzetiségek kérdését minden ország belügyének tekinti. Ez a kijelentés is egyengette az utat a Bolyai Egyetem megszüntetéséhez.

Az 1959-es egyetemegyesítéskor született egy egyezség arról, hogy a Babeş–Bolyain megmarad a magyar nyelvű oktatás minden olyan szakon, amely létezett a Bolyain. Ezt azonban nagyon hamar megszegték, már azoknak a diákoknak is, akik 1959-ben (tehát az egyesítés évében) kezdték a tanulmányiakat, első éven egy tantárgyat románul kellett hallgatniuk, és ötödévre már odajutottak, hogy minden szaktárgyat csak románul tanulhattak. 1963-ig még volt magyar nyelvű felvételi a karon, de az oktatás már 1961-től kizárólag románul folyt.[1] 1961-ben még matematika-fizika szakra felvételiztek, de ősszel már szétosztották a bejutottakat matematika és fizika szakra. Negyedéven pedig a matematika mellett megalakult a számítógépszak is. 1962-ben átszervezték a karokat, például megszűnt a matematika-fizika kar, és két kar (külön matematika és külön fizika kar) alakult belőle, teljesen új szakokkal. A matematika-mechanika karon három szak volt ettől kezdve 1971-ig: matematikai analízis, számítógép és folyadékok mechanikája. Ezekre a szakokra már egyáltalán nem vonatkozott az egyezség.

Ebben az időszakban (1962–1971), szemfényvesztés céljából, a nem szaktárgyakat lehetett magyarul is tanulni. Ilyenek voltak: a filozófia, a tudományos szocializmus, a pedagógia, a matematika tanításának módszertana, és később, a 70-es évektől volt még politikai gazdaságtan is.

1968-tól Romániában áttértek a négyéves egyetemi képzésre. Az 1970-es években néhány évig még létezett egy egyetemi képzés utáni egyéves szakosodás.

3. 1971-től 1993-ig

1971-ben újabb szerkezeti változás történt a karon. Ettől kezdve két szakon lehetett tanulni: matematika és informatika.

Meglepetésre, 1971-től három alaptárgyat (algebra, analízis, mértan) első éven lehetett magyarul tanulni (néhány évig az algebrát még másodéven is).[2]

[1] Ezek a megállapítások a matematika karra vonatkoznak, de hasonló volt a helyzet más karokon is, kevés kivétellel (filozófia, kémia-fizika szakokon például magyarul tanultak mindent). Adatközlők: Kürthy Katalin (1959–1964), Kádár Béla (1961–1966), Olosz Ferenc (1961–1966), Krámli József (1962–1967), Makkai András (1963–1968), Szántó Csaba (1963–1968), Venczel Géza (1964–1969), Majdik Kornélia (1971–1976).

[2] Dános Miklós: Egyetemi fokon, *A Hét*, 1971. július 9.
http://digiteka.ro/readme/7/27446/3/

Felvételizni magyarul már 1969-től lehetett újra.[3] Ez annak volt köszönhető, hogy az amerikai vámkedvezmény megszerzése érdekében a hatalom hajlandó volt engedményeket tenni a kisebbségi jogok biztosításában. Az amerikai kongresszus magyar származású tagjai, valamint a Hungarian Human Rights Foundation (Magyar Emberi Jogok Alapítvány) hathatós közbenjárására, nyomására sikerült ezt elérni. Ugyanebben az időszakban indult be a televízió magyar nyelvű adása, és a könyvkiadók átszervezése révén alakult meg a Kriterion Könyvkiadó Bukarestben és a Dacia Könyvkiadó Kolozsváron. Előbbi főleg a kisebbségek nyelvén jelentetett meg könyveket, legtöbbet magyarul, de románul is. Utóbbi román és magyar nyelvű könyveket adott ki, és nem zárkózott el a szakkönyvek és egyetemi tankönyvek kiadásától sem.

A karon nem volt külön beiskolázási szám a magyar hallgatóknak, hanem felvételi után kérhették, hogy a három tárgyat magyarul tanulhassák. Ezért volt olyan évfolyam is, hogy a hallgatók 40%-a magyar volt. De a magyarul tanulókat nem sorolták külön csoportba, ahogy az logikus lett volna, hanem vegyes csoportok voltak. A magyarul tanuló hallgatók csak akkor váltak ki ezekből, amikor magyar nyelvű előadásokra, szemináriumokra mentek. A órarendkészítés kész művészet volt!

Ennek, a magyarság szempontjából nagyon fontos átszervezésnek lényeges következményei lettek: a hallgatók azokat a tárgyakat, amelyeket majd az iskolában tanították,[4] magyarul tanulhatták, és hogy ezen alaptárgyak oktatói tankönyveket írtak magyar nyelven, amelyek megjelentek a Dacia Könyvkiadónál (Maurer I. Gyula, Virág Imre: *Bevezetés a struktúrák elméletébe*, 1976; Balázs Márton, Kolumbán József: *Matematikai analízis,* 1978; Radó Ferenc, Orbán Béla: *A geometria mai szemmel,* 1981). Ez a szerény engedmény megteremtette azt az környezetet, amelyre a 1989-es rendszerváltozás után alapozni lehetett a magyar nyelvű oktatás széleskörű bevezetését az egyetemen.

1984-ben a tanügy-minisztérium elérkezettnek látta az időt, hogy kicsit szorítson a felvételin, ugyanis azt vezették be, hogy továbbra is lehet ugyan magyarul írni a felvételi dolgozatot (akkor már évek óta csak írásbeli vizsga volt), de minden felvételiző csak románul kapja meg a feladatokat. És ez így maradt 1990-ig. Ugyancsak 1984-ben az egyetem neve egyik napról a másikra Kolozsvári Tudományegyetem lett, és így használták 1989. december 22-ig, annak ellenére, hogy hivatalosan soha nem változtatták meg.

[3] 1966-ban, amikor én felvételiztem, még csak románul lehetett. 1967-ben és 1968-ban szintén csak románul felvételizhettek, de 1969-ben már magyarul is engedték. Adatközlők: Ionescu (Texe) Klára és Pap (Sándor)) Éva.

[4] Az 1962-es átszervezés után lényegében megszűnt az egyetemen a tanárképzés, ellenben minden hallgatónak tanulnia kellett pedagógiát és a szaktárgy tanítási módszertanát, függetlenül attól, hogy milyen szakon tanult. Így minden végzett hallgató egyben tanári képesítést is kapott. És ez így van a mai napig, annyi változtatással, hogy az úgynevezett *pedagógiai modul* nem kötelező, és az egyetem elvégzése után is bármikor tandíjas oktatásban teljesíthető.

Az 1989-es változás után a kari tanács jóváhagyásával az első két évben minden tantárgyat lehetett magyarul is tanítani a matematika szakon. De ennek elérése nem volt egyszerű. Minden tantárgyért külön meg kellett harcolniuk a kari tanács magyar tagjainak. Informatika szakon viszont csak románul folyt az oktatás, ezt a román kollégák azzal indokolták, hogy akkor az informatika szak még nem képzett tanárokat.

Ebben az időben volt egyetemi hallgató Kassay Gábor a matematika szakon (1976–1980), és első, aki ezen hallgatók közül bekerült oktatónak az egyetemre. Tudatosan készült erre a pályára, és kitartóan dolgozott céljai eléréséért. És ez a munka meg is hozta gyümölcsét!

4. 1993-tól 2011-ig

1993 őszétől, politikai egyezség eredményeképpen, a minisztérium összesen 300 ingyenes helyet különítettek el egyetemi szinten alapképzésben a magyar hallgatók számára (matematika szakon a helyek száma 50, informatika szakon pedig 20 volt). És a sikeres felvételi után külön csoportokban minden tárgyat magyarul tanulhattak az egyetem legtöbb karán. Az egyes szakokon a helyek számát szintén a minisztérium döntötte el. Ez a 300 hely az évek folyamán 750 fölé nőtt (matematika szakon – az érdeklődés megcsappanásával – 16, informatikán 88 lett). A hallgatók tehát már külön csoportokban tanulhattak, nem mint 1971-től, amikor vegyes csoportokban voltak, és csak a magyarul hallgatott tárgyakra váltak szét. De a tanárok esetében maradt a vegyes tanszékekbe való addigi besorolás, így minden döntés, amely a magyar csoportokra vonatkozók is, a román tanárkollégák kezében volt. Tanszéki, kari, egyetemi szinten magyar vezetők csak elvétve voltak. Amikor bevezették az állami egyetemeken is a tandíjas képzést, a Babeş–Bolyai Tudományegyetemen is megjelentek a tandíjas helyek a magyar nyelvű oktatásban is, többé-kevésbé arányos módon.

A bolognai rendszer bevezetésével több magyar nyelvű mesterképzés is indult.

Amikor az 1990-es évek elején kiderült, hogy a politika nem támogatja az önálló Bolyai Egyetem visszaállítását, az egyetemi oktatók megpróbálták elérni, hogy magyar karok alakuljanak. Eleinte három, majd két karban gondolkoztak [4], de ez is nagy ellenállásba ütközött. A Romániai Magyar Demokrata Szövetségnek sikerült elérnie, hogy a 2011-es tanügyi törvénybe bekerült annak lehetősége, hogy magyar tanszékek alakuljanak olyan karokon, ahol magyar nyelvű oktatás is folyik. A multikulturálisnak nevezett egyetemeken (ide sorolták a kolozsvári Babeş–Bolyai Egyetemet és a marosvásárhelyi Orvosi és Gyógyszerészeti Egyetemet) a törvény ezt kötelezővé tette. A marosvásárhelyi egyetemen máig nem alakultak magyar tanszékek, a hatóságok és a politika cinkos összejátszása miatt. A Babeş–Bolyai Tudományegyetemen ellenben 2011-től megalakultak az intézeteknek nevezett magyar tanszékek, amelyek összessége a magyar nyelven tanuló diákokkal együtt alkotja a magyar tagozatot.

5. 2011-től napjainkig

A 2011-ben alakult Magyar Matematika és Informatika Intézetnek jelenleg negyven tagja van (3 egyetemi tanár, 13 docens, 15 adjunktus, 9 tanársegéd), ezenkívül az intézethez tartozik egy meghívott egyetemi tanár, két társult adjunktus és több doktorandusz, valamint két nyugalmazott akadémikus.

Az intézet tevékenységét Kassay Gábor és Szenkovits Ferenc a következőképpen jellemzi egy 2019-es dolgozatban: „Az intézetünkben tevékenykedő kollégák tudományos publikációi a szakterületük legnevesebb folyóirataiban jelennek meg, eredményeiket rangos nemzetközi konferenciákon mutatják be. Nemzetközi konferenciáinkat a világ legnevesebb kutatói is látogatják. A karunk által kiadott szakfolyóiratok, amelyek közlésében intézetünk munkatársai is részt vállalnak, egyre nagyobb nemzetközi elismerésnek örvendenek. Büszkék vagyunk intézetünk két nyugalmazott oktatójára, Kolumbán Józsefre és Németh Sándorra, akik a Magyar Tudományos Akadémia külső tagjai [1]."

Hivatkozások

[1] Kassay Gábor és Szenkovits Ferenc: *Önálló intézet, megfiatalodott munkaközösség, Kutatás és oktatás a BBTE Magyar Matematika és Informatika Intézetében*, Korunk, 19–26. o., 2019. május.
http://epa.oszk.hu/00400/00458/00654/pdf/EPA00458_korunk-2019-05_019-026.pdf

[2] Maurer Gyula: *A Bolyai Tudományegyetem Matematikai Intézetének tevékenysége,* in: Kiss Sándor: *Matematikus a XX. század viharaiban. Maurer Gyula életpályája*, Erdélyi Múzeum-Egyesület, Kolozsvár–Appendix Kiadó, Marosvásárhely (2003).

[3] Maurer Gyula: *Az erdélyi magyar matematikai élet vázlatos története 1945-ig*, Magiszter, Vol. **2**, 92–101. o., 2004/3.
http://docplayer.hu/2226779-Az-erdelyi-magyar-matematikai-elet-vazlatos-tortenete-1945-ig.html

[4] Péntek János, Kása Zoltán, Néda Árpád and Sárkány-Kis Endre: *Tervezet a BBTE két önálló, magyar oktatási nyelvű karának létrehozására*, Magyar Kisebbség, 2004/4.
https://www.jakabffy.ro/magyarkisebbseg/pdf/2004_4_17.pdf

Kása Zoltán 1948-ban született, 1971-ben a kolozsvári Babeş–Bolyai Tudományegyetem matematika karán számítógép szakot végzett. Még abban az évben tanársegéd lett ugyanott. 1985-ben doktorált, 1998-ban egyetemi tanár lett. Volt dékánhelyettes a matematika-informatika karon, majd rektorhelyettes 2000 és 2004 között. 2008-tól 2018-as nyugdíjazásáig a Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem professzora. Volt tudományos igazgató, a szenátus elnöke, az egyetem Scientia Kiadójának igazgatója. 2007 és 2011 között a Kolozsvári Akadémiai Bizottság egyik alelnöke volt. Jelenleg emeritus professzor.

Kutatási területe a kombinatorika, azon belül a szókombinatorika. Tizenegy szakkönyv, egyetemi tankönyv és jegyzet, negyven tudományos publikáció szerzője vagy társszerzője.

KÁSA ZOLTÁN
Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem,
Marosvásárhelyi Kar
kasa@ms.sapientia.ro

THE HUNGARIAN-LANGUAGE MATHEMATICS HIGHER EDUCATION IN CLUJ AFTER 1945

Zoltán Kása

The article presents the situation of Hungarian-language mathematics higher education in Cluj-Napoca since 1945, when the Hungarian-language Bolyai University was established, which was merged with the Romanian-language Victor Babeş University in 1959, creating the Babeş–Bolyai University.

Alkalmazott Matematikai Lapok **40** (2023), 87–100.

HOGYAN ÍRTUNK CIKKEKET KASSAY GÁBORRAL?

Szabad-e sírni a Kárpátok alatt? (Ady)

ILLÉS TIBOR

Kassay Gáborral 1991 és 1998 között négy cikket írtunk. Folyóiratban nem közöltük az első kéziratunkat, és befejezetlen maradt a kvadratikus Ky-Fan- és König-konvex függvényekkel adott optimalizálási feladatokról szóló kutatásunk, és ez a kéziratunk el is veszett. Hét év alatt, a körülmények figyelembevételével sem számít kiemelkedő mennyiségű szakmai együttműködésnek a miénk, számomra mégis emlékezetes marad. Egyetlen kutatótársammal sem alakult ki hasonlóan mély emberi kapcsolat, igazi barátság. Mindez arra késztetett, hogy megemlékezzek Kassay Gáborról, a matematikusról, kutatótársról és barátról.

1. Prológus

Kassay Gáborral először 1991. május 24-én beszélgettem az MTA SZTAKI Victor Hugo utcai épületének nagytermében, ahol éppen a Magyar Operációkutatási Társaság (MOT) megalapítására készültünk. Arra már nem emlékszem pontosan, hogy Gábor azon a napon az alakuló ülés előtt vagy egy-két héttel korábban az MTA SZTAKI Operációkutatási Szemináriumán adott elő *minimax tételekről és általánosított konvexitásról.*

Miután Terlaky Tamás 1989 őszén egy évre, majd 1990 őszén további 3 évre ideiglenesen a Delfti Műszaki Egyetemre távozott az Eötvös Loránd Tudományegyetem (ELTE) Operációkutatási Tanszékéről, mint vendég kutató. Engem pedig felvettek az Operációkutatási Tanszékre határozott időre, mint egyetemi adjunktust, és Terlaky Tamás tantárgyait örököltem meg. Így történhetett, hogy amikor Gábor az előadását tartotta, abban a félévben éppen konvex programozás dualitás elméletét tanítottam a *Nemlineáris Programozás* kurzus keretében.

Azzal a megjegyzéssel kezdtem a beszélgetést Gáborral, hogy szerintem a konvex Farkas tétel és a konvex programozás dualitás tétele is általánosítható Ky-Fan konvex, illetve König konvex függvényekre. Rögtön papírt kaptunk elő, és elkezdtük felírni az optimalizálási feladatokat, állításokat és bizonyítás vázlatokat készíteni. Annyira elmélyedtünk a szakmai beszélgetésben és a részletek kidolgozásában, hogy Rapcsák Tamás, a MOT megalakulására összehívott ülés levezető elnökének megnyitó beszéde juttatta eszünkbe, hogy hol is vagyunk.

2. Utazások Budapest és Kolozsvár között

Gábornak ez egy rövidebb budapesti látogatása volt, de jelezte, hogy az 1991/92-es tanév őszi félévét ösztöndíjjal tölti Budapesten az ELTE Analízis II. Tanszékén, Joó István vendégeként. Abban maradtunk, hogy őszig igyekszünk megfelelően átnézni a szakirodalmat, ami akkoriban nem volt olyan egyszerű, mint manapság, hiszen a folyóiratok cikkeit, a könyvtár folyóirat részlegében lehetett elolvasni és kijegyzetelni, mert akkoriban még Budapesten sem volt lehetőség cikkek fénymásolására.

Itt egy kis kitérőt kell tennem, hogy a későbbiekben néhány dolog érthető legyen. Kassay Gábor Székelyudvarhelyen született, a mai Romániában, egy magyar családban, azaz nemzeti kisebbség volt a saját szülőföldjén. Ugyanez történt velem is, mert Szabadkán születtem, Jugoszláviában, egy magyar családban, azaz nemzeti kisebbség voltam a saját szülőföldemen. A családom az Oszmán Birodalom kiűzésétől kezdve ugyanazon a bácskai területen élt, vagyis a családom az 1700-as évek legelejétől Szabadkán és környékén élt. A Kassay családhoz hasonlóan nem mi mozdultunk el, hanem 1918-ban (hivatalosan 1920-ban) Magyarország zsugorodott össze a mai méretére. Gábor Kolozsváron a Babes-Bolyai Tudományegyetemen (BBTE) szerzett matematikus diplomát 1980-ban, míg én 1987-ben Budapesten az ELTE-n. Gábor 1991 szeptemberében kezdte meg Budapesten féléves ösztöndíjas időszakát, ugyanis a Magyar Kormány alapítványokon keresztül kezdte el támogatni a határon túli, kisebbségben élő magyar, és így az erdélyi magyar kutatók magyarországi kutatásait.

Szeptembertől kezdődően Gábor heti rendszerességgel tartotta meg előadás sorozatát a *Minimax tételek és alkalmazásaik* címmel, ami az ösztöndíjas időszakának munkatervében szerepelt. Gábor nagyon felkészült előadó volt, aki pontosan akkora anyagot mondott el egy-egy alkalommal, amennyit egy átlag hallgató kényelmesen fel tudott fogni. Így néhányan lassúnak, nehézkesnek tartottuk és próbáltuk arra sarkallni, hogy gyorsabban haladjon, amit kedves mosollyal elhárított. Az előadás sorozatából készült egy kis füzet [1], amit az ELTE Operációkutatási Tanszékének az Operations Research Report (ORR) sorozatában 1992-02-es sorszám alatt jelent meg. Az ORR-t Terlaky Tamás kérésére indítottam el 1991-ben, aki 1990-ben két OTKA pályázatot is elnyert és az volt a célja, hogy kutatási közleményekbe gyűjtse össze az OTKA pályázataihoz kapcsolódó Budapesten folyó kutatásokat. Terlaky helyett az egyik pályázatot Klafszky Emil, míg a másikat Szántai Tamás vezette. Az ELTE Operációkutatási Tanszéknek 1990 és 1994 között csak ezekből a pályázatokból volt utazási és konferencia részvételi kerete.

Gábor ösztöndíjas kutatási munkatervének másik lényeges pontja volt a *minimax tételek* kutatása, leginkább Joó Istvánnal közösen. Ebből az együttműködésből két cikk [3, 6] is publikálásra került, így Joó István lett Gábor harmadik társszerzője. Gábor fennmaradó idejét, illetve az oktatás melletti munkaidőm egy részét a szakirodalom áttekintésével töltöttük és megállapítottuk, hogy olyan típusú eredmények, amilyeneket mi felvázoltunk a tavasszal, a JOTA-ban, és néhány más vezető folyóiratban nincsenek. Elkezdtük az *alternatíva tételek* kidolgozását Ky-Fan, illetve König-konvex függvényekre lokálisan konvex vektorterekben. Közben szükségünk volt a König- és Ky-Fan konvex függvények kapcsolatának és tulajdonságainak a megismerésére is. Ebben az időszakban készült el a kéziratunk [2], amelyikről később kiderült, hogy több ismert eredményt fedeztünk fel újra, illetve az új eredményeink még mérsékelt jelentőségűek voltak. A kézirat legfőbb értéke, hogy világossá tette közös kutatásunk irányát és célkitűzését.

Illés Tibor Kolozsvárott 1993 január. (Készítette Kassay Gábor)

Gábor előadás jegyzeteinek [1], illetve Joó Istvánnal közös cikkeinek [3, 6] gépeléséhez tanulta meg az AMS Tex programcsomag használatát. Eleinte ezzel is sok ideje elment, és akadtak komoly nehézségek is. Terlaky Tamás OTKA-jából végül egy egyetemi hallgatómnak fizettünk annak érdekében, hogy Gábor előadásának jegyzetét legépelje.

Nekem 1988-ban lett meg az első e-mail címem az MTA SZTAKI-ban. Az ELTE-n is gyorsan elterjedt az e-levelező rendszer, így az 1990/91-es tanévben már az ELTE-n is volt e-mail címem. Gáborék Kolozsvárott egy kicsit később kapcsolódtak a nemzetközi hálózathoz és terjedt el náluk az e-levelezési rendszer. Emlékeim szerint egy ideig csak a Matematika (és Fizika) Kar (MFK) Dékáni Irodájában a titkárnőnek volt e-mail címe, meg a Kar vezetésének, így a kommunikációnk sem volt teljesen zökkenőmentes.

Néha (vezetékes) telefonon beszéltünk, de ez csak egy-egy utazás időpontjának rögzítésére volt alkalmas.

Mivel Gábor visszautazott Kolozsvárra, ahol igen sok oktatási feladat várta, így a cikk elkészítése lelassult. Eleinte kézzel írott változatokat küldtünk egymásnak postán, és azokat javítgattuk, láttuk el megjegyzésekkel, majd visszaküldtük a másiknak. Ezek a kéziratok elvesztek, mert a cikk megjelenése után már nem tartottuk lényegesnek a megőrzésüket, pedig komoly segítséget jelentenének most, az első közös dolgozatunk elkészítésének felidézésében. Már nem emlékszem pontosan, hogy mikor készült el a cikkünk első gépelt, AMS Tex változata, de 1993 januárjában Kolozsvárra utaztam, hogy véglegesítsük a cikket, ami csak részben sikerült, de Gábor néhány hónappal később egy hétre Budapestre jött, és akkor végre befejeztük az első közös cikkünket és benyújtottuk a JOTA-ba.

Egy cikk benyújtása akkoriban nem volt igazán egyszerű feladat, mert dupla sorközös változatban ki kellett nyomtatni, majd elküldeni a folyóirat USA-beli címére a főszerkesztőnek egy kísérőlevéllel. Nekünk egy ilyen levél elküldése is komoly anyagi terhet jelentett, a levél súlya és a távoli ország miatt. Légipostával is három hétbe került, mire megérkezett a címzetthez, ahol feldolgozták a levél tartalmát és nyugtázták a kézhezvételét, sorszámot adtak a kéziratunknak stb. Az ilyen tartalmú levelet a mi levelünk elküldését követő 7. vagy 8. héten kaptuk meg, azaz már inkább nyáron, mint még tavasszal. Talán ezek a levelek megtalálhatóak valamelyik nagyon régi dossziémban, de a több költözködés miatt egyáltalán nem egyszerű ezt előbányászni majdnem 30 év távlatából. A lényeg az, hogy késő ősszel megérkezett a bírálat és a cikkünk elutasítása. A cikk kéziratában (sajnos) több gépelési, és nyelvi hiba is volt. Az egyik gépelési hiba, utólag nézve, végzetes lett, mert egy halmaz nem üressége helyett azt gépeltük le, hogy a halmaz üres. Ebből a gépelési hibából kiindulva a bíráló kolléga szerkesztett egy ellenpéldát a lemmánkra. A gond csak az volt, hogy a rész bevezetőjében ugyanerről a halmazról hangsúlyoztuk, hogy nem üres, és azt is megjegyeztük, hogy ha üres lenne, az állításunk nem volna igaz. Gábor a hírre, hogy megérkezett a bírálat, gyorsan egy hosszú hétvégére Budapestre utazott. Közben én kijavítottam a felsorolt nyelvi és gépelési hibákat. Megnézve az ellenpéldát, világossá vált számunkra, hogy az egész csak egy egyszerű félreértés, éppen ezért a főszerkesztő határozott válasza ellenére, újra 3 példányban, dupla sorközös kinyomtatott változatban és egy részletes magyarázó levéllel visszaküldtük a cikket. Levelünk karácsony környékén érkezhetett meg a JOTA szerkesztőségébe, így nem lepődtünk meg azon, hogy csak 1994 januárjának második felében érkezett meg levelünkre a válasz. A válasz viszont megdöbbentően durva volt, a főszerkesztő jelezte, hogy nem kívánnak a válaszunkkal foglalkozni és az elutasító döntésük végleges. Lényegében érdemi bírálat nélkül utasították el a cikkünket. Fogalmunk sem volt, hogy mit tegyünk.

3. Ösztöndíjas utak az ELTE és a BBTE között

Még Gábor 1991/92-es Budapesten töltött féléves tartózkodása során kitaláltuk, hogy jó lenne, ha az ELTE TTK és a BBTE MFK között valamilyen formában oktatók csereprogramja indulna el. Persze az ötletünk megvalósításához a kari hierarchiában elfoglalt helyünk nem nagyon tette lehetővé, ezért az ötletünkkel szimpatizáló idősebb kollégák segítségét kértük. Budapesten Németh Sándor (Számítógéptudományi Tanszék) és Sebestyén Zoltán (Analízis II. Tanszék, egyetemi tanár), míg Kolozsvárott Kolumbán József (Analízis és Optimalizálás Tanszék, egyetemi tanár) volt a segítségünkre. Az idősebb kollégáink nagyon hatékonyan intézték a vendégtanári program elindítását, és így 1992 ősze és 1994 tavasza között a Magyar Kormány alapítványainak támogatásával 4 vendég professzor érkezett Kolozsvárról Budapestre tanítani. Akikre emlékszem, az Kolumbán József professzor úr (1992 őszén), illetve Mureşan Marian docens úr (1993 tavaszán). A kolozsvári vendégtanárok segítése Budapesten, részben az én feladatom volt.

Goldner Gábor (BBTE, egyetemi docens) feladata, hogy az ELTE-ről érkező vendég oktatók számára megteremtse az anyagi alapokat, sokkal nehezebb feladatnak bizonyult, mint nekünk Budapesten. Végül a BBTE vendégszobát biztosított, és a kolozsvári Soros Alapítvány adta az ösztöndíjakat. Az ELTE vendégtanárainak fogadása Kolozsvárott 1993 őszi félévében indult el és szintén 4 féléves program volt.

A vendégoktatói együttműködés részeként, 1994 tavaszán több hónapot töltöttem a kolozsvári BBTE-n vendégtanárként, és egy *Hálózati Folyam* kurzust tartottam matematikus hallgatóknak.

4. Az első közös cikkünk publikálása

Visszatérve a cikkünkre, mivel az e-mail kapcsolat már jól működött, így tex állományokat is tudtunk egymással megosztani, és szakmai kérdésekről levelezni, habár komoly méret korlát volt még az üzenetek nagyságára. Aktívabban tudtuk egyeztetni utazásainkat is. Gábor egy rövidebb budapesti tartózkodása alkalmával éppen a JOTA legfrissebb köteteit lapozgatta, amikor ráakadt Tamminen cikkére [4], amelyik bírálata abban az időben folyhatott, amikor a mi cikkünket visszautasították. Gábor első olvasatra azt hitte, hogy Tamminen fő eredménye azonos a miénkkel. Körültekintőbb elemzés után rájöttünk arra, hogy Tamminen legfontosabb eredménye speciális esete a mi dualitás tételünknek. Gábor nagyon elszomorodott és a helyzetet igazságtalannak tartotta. Azonnal levelet akart írni a JOTA főszerkesztőjének. Egy kis időbe telt, mire lebeszéltem erről.

Erdély, Gábor apukájának hétvégi háza 1994 június: Gábor felesége Cili (háttal), Tibor, Gábor.
(A fotót Kassay Sándor, Gábor fia készítette.)

Mivel időközben, 1992 második felében magyar állampolgárságot kaptam, így elkezdhettem magyarországi ösztöndíjakat is pályázni. A Pro Peregrinacio (MOL) Alapítvány támogatásával jutottam el 1994. február-április időszakában a delfti Műszaki Egyetemre vendégkutatónak, Kees Roos és Terlaky Tamás csapatában. Kihasználva a delfti tartózkodásomat több hollandiai egyetemen tartottam szemináriumi előadást.

Az Erasmus Egyetem Tinbergen Intézetében az Operációkutatás Szemináriumon Gáborral közös eredményeinket mutattam be. Hans Frenkkel az előadásom után az általánosított konvexitásról és a dualitás tételeinkről beszélgettünk, amikor megjegyezte, hogy Kassay-Kolumbán JOTA-ba benyújtott cikkét bírálja éppen, de mivel nem volt kellő ismerete az általánosított konvexitásról, és a szerzőket se ismerte, nem igazán volt kedve elkezdeni a cikk olvasását. Persze az előadásom után, és a beszélgetésünk alapján, hiszen ismertem Gábor és Jóska eredményeit, Hans szívesen elolvasta a kéziratot, amelyik végül meg is jelent az JOTA-ban [8].

Gábor kérésére a delfti egyetemen vettem neki egy leselejtezett PC 286-os számítógépet és monitort. A gép megvásárlásához, miután megtudta, hogy erre készülök, a számítógép árát, Hans Frenk nagyvonalúan biztosította, így számomra az maradt csupán, hogy a négyütemű, 1100 cm^3-es Trabantommal hazaszállítsam a gépet Budapestre. Hans Frenk később meglátogatta Gábort Kolozsvárott, több közös eredményük született és igazi barátság szövődött közöttük.

Közben Gáborral azon gondolkodtunk, hogy mi legyen az első kéziratunk sorsa. Gábor az eredményeink minősége miatt másik színvonalas nemzetközi folyóiratba szerette volna beküldeni, míg nekem, Terlaky Tamás tanácsa alapján, az volt a véleményem, hogy minél előbb jelentessük meg, még akkor is, ha kevésbé ismert folyóiratba küldjük.

Végül az első közös cikkünk [5] a PUMA-ban jelent meg 1994-ben. A PUMA főszerkesztője Tallos Péter kollégánk volt, és akkor a PUMA folyóirat már egy évtizednél is hosszabb múltra tekintett vissza.

5. Készül a második cikkünk

Alig értem haza Budapestre Delftből, máris továbbutaztam Kolozsvárra, ahol az 1994. május-június időszakot ösztöndíjasként töltöttem el.

A Kolozsvárra érkező ELTE-s oktatók ösztöndíját, köztük az enyémet is, a kolozsvári Soros Alapítvány biztosította, Goldner Gábor docens úr sikeres pályázatának köszönhetően, ahogyan azt már említettem. A kolozsvári kollégák Kassay Gábor, Kolumbán József, Goldner Gábor, Marian Mureşan, Varga Csaba, Németh Sándor, Breckner és Szilágyi professzorok kiváló házigazdáknak bizonyultak. Nagyon sok kirándulásra vittek, a Kar felsővezetése fogadott, mindenki segítőkész és kedves volt. Az ösztöndíj szempontjából legfontosabb feladatom egy Hálózati Folyam IV. éves kurzus megtartása volt.

Gábor óraterhelése a budapesti adjunktusi óraterhelésnél jóval magasabb volt. Minden tanítás nélküli idejében a második cikkünkön dolgoztunk. Az újabb és újabb változatokat azokon a napokon, amikor Gábor tanított, én gépeltem le. A hétvégeken Gábor baráti körével kirándultunk vagy egy-egy értelmiségi házibulin vettünk részt, ahol a beszélgetés során a világ összes problémája szóba került. A kedvenc témák mégis a kisebbségi lét kérdéseiről, az erdélyi magyar oktatás biztosításának lehetőségeiről, a kisebbségi és magyarországi magyar irodalomról szóltak.

A második közös dolgozatunk [7] teljes egészében a kolozsvári utam alatt született és a Kolumbán József professzor úr 60. születésnapjára készülő különszámban jelent meg.

6. Erdélyi körút Gábor szervezésében

Szerencsére minden szorgalmi időszak véget ér és elkezdődik a vizsgaidőszak. Ez történt 1994 júniusában Kolozsvárott is.

Gábor egy nagyon szép, erdélyi körútra vitt el a tíz évnél is idősebb, kékszínű, kétütemű Trabantjával. Nagyon sokat beszélgettünk nemcsak matematikáról, hanem gyerekkori élményeinkről, a kisebbségi lét árnyoldalairól is. Sokszor megtörtént, hogy Gábor elkezdett egy gondolatot, mivel székelyesen lassan fonta a mondatait, én, a temperamentumos déli, ha nem tudtam kivárni, hát gyorsan befejeztem - Gábor mondandóját - pontosan azzal a tartalommal, amivel Gábor fejezte volna be. Először megdöbbentük ezen, majd nagyokat nevettünk, hogy a kisebbségi lét mennyire azonos gondolatokat, helyzeteket teremt.

Illés Tibor a segesvári Petőfi szobor előtt, 1994. június. (Készítette Kassay Gábor.)

A szülei Székelyudvarhelyen ugyanazok az elvek alapján nevelték őt, ahogyan az én szüleim engem Szabadkán, pedig a két város több mint 550 km-re van egymástól közúton, és természetesen szüleink nem ismerték egymást, sohasem találkoztak. Gábor nagyon szerette a verseket és a magyar beatzenét. Jól gitározott, és szeretett énekelni. Mivel mindketten szerettük a magyar költészetet, így nem volt kétséges, hogy a székelyudvarhelyi kirándulásra kitérővel érkezünk, azaz elmegyünk Segesvárra, ahol utoljára látták élve Petőfi Sándort. Az úton kiderült, hogy nagyon sok költőt mindketten szeretünk és idézni is eléggé sokat tudunk a verseikből. (Jó magyartanáraink voltak, ott a piros csík túloldalán.) Trabanttal döcögtünk Erdély, igencsak kopott útjain, és közben verseket mondtunk.

Petőfi, Vörösmarty, Ady, Kosztolányi, Babits, József Attila, Radnóti, Illyés, Nagy László, Dsida, Reményik, Szilágyi, Csoóri, és más magyar költők egy-egy során vitatkoztunk, meg azon, hogy mit üzen nekünk, mai (kisebbségi) magyaroknak. Gábor időnként, csak a vita kedvéért bedobta, hogy semmit se jelentenek az éppen tárgyalt sorok. Megdöbbentem, majd vehemensen elkezdtem győzködni, hogy nincs igaza, addig, amíg ő kuncogásban tört ki. Igazán pimasz dolog volt a részéről, de nagyon szeretett vitatkozni.

Székelyudvarhelyen Gábor Édesapjánál laktunk. Egynapos pihenő után Sankóval, Gábor fiával hármasban elindultunk a Trabanttal a Madarasi Hargita

Menedékházába. Nem volt világos, hogy nekem, mint magyar állampolgárnak, bejelentkezés nélkül jogom van-e megszállni a vendégházban vagy sem. Gábor mondta, hogy a vendégházi regisztrációnál ő fogja odaadni a személyijét és úgy jelentkezünk be, hogy Kassay Gábor + 2 fő, mert ha rendőrségi bejelentkezés nélkül nem tartózkodhatok ott, mint külföldi vendég, akkor le kellene mennünk az első olyan faluba, ahol van rendőrállomás, bejelentkezni és visszaautózni a Hargitára, ha egyáltalán megengedik. (Emlékezteőül: 1994-ben történt ez az esemény.)

Gábor javaslatára azonnal el is indultunk a Madarasi Hargita csúcsának meghódítására. Hargitán persze nem lehetett másról beszélgetni, mint Sütő Andrásról. Meséltem, hogy milyen katartikus élmény volt a Nemzeti Színházban (ma Magyar Színház) 1986-ban megnézni az *Advent a Hargitán* drámát Sinkovits Imre főszereplésével.

Gábor és Sankó felér a csúcsra, 1994. június, Madarasi Hargita. (Készítette Illés Tibor.)

Majd néhány évvel később a Vígszínházban döbbenten figyelni az Álomkommandó előadást, és közben esténként Chrudinák riportjait követni Erdélyből. Persze 1994-ben már tudtuk, hogy egyeseknek szemet kell adni szóért. Másnap reggel a Madarasi Hargitán lévő Vendégház előtti asztalnál éppen egy új cikken dolgoztunk (Kvadratikus optimalizálási feladatok König-konvex függvényekkel), amikor begördült egy rendőrautó a Vendégházhoz.

Vidáman mondtam Gábornak, látod mennyire rendesek, följönnek, hogy bejelentkezhessek. Gábor nem volt ennyire lelkes, de végül csak a szokásos körútjukra jöttek a rendőr urak. A kvadratikus optimalizálási feladatokkal kapcsolatos eredmények Gábornak nem tetszettek, ennek ellenére 1995-ben vagy 1996-ban legépelte. Ezekben az években először Észak-Cipruson, majd Hollandiában dolgoztam, így egyre kevesebbet leveleztünk és a kutatási tevékenységünk is inkább a meglévő és eléggé jónak ítélt eredményeink publikálására koncentrált.

Miután 2020 augusztusában kiderült, hogy súlyos beteg, javasoltam neki, hogy keresse meg a kvadratikus optimalizálással kapcsolatos kéziratunkat és fejezzük be. Gondoltam, hogy ameddig dolgozik, addig se foglalkozik a gondjával-bajával, de sajnos azt mondta, hogy szinte lehetetlen az ilyen régi állományokat megtalálni. Annyiszor cserélt számítógépet és annyiszor költözött, hogy már azt sem tudja, milyen adathordozón keresse.

7. Rövid látogatások, készülő cikkek

Kolozsvári tartózkodásom alatt, 1994-ben a kvadratikus Ky-Fan- és König-konvex függvényekkel adott optimalizálási feladatok vizsgálatával azután kezdtünk el foglalkozni, hogy befejeztük Kolumbán professzor úr 60. születésnapjára szánt cikkünk [7] kézzel írt kéziratát.

Gáborral mindig úgy dolgoztunk, hogy a bizonyításaink vázlatait kézzel írott cikké alakítottuk. Így sokszor előfordult, hogy egy-egy pontatlanság miatt többször is át kellett írni a kéziratot. Amikor egy-egy kéziratot befejezettnek nyilvánítottunk, akkor valamelyikünk legépelte. Igazából, ekkor kezdődött a cikkírás második fázisa, amikor példákkal, kötőszöveggel láttuk el az alakuló dolgozatunkat, majd végül megírtuk a bevezetőt, és az absztraktot. Gábornak többször voltak rövidebb-hosszabb időre szóló magyarországi ösztöndíjai 1995 és 1998 között, és az e-mail nyújtotta kommunikáció is egyre jobbá vált. Sokszor a jól előkészített cikkeket egy-egy hétvége alatt fejeztük be, véglegesítettük.

Gábor ezekben az években sok konferenciára is eljött Magyarországra. Minden látogatása egy-egy cikk kidolgozását vagy éppen a befejezését segítette elő. Mivel nagyon szeretett utazni, mindig érdeklődött arról, hogy mikor mehetünk el Szabadkára látogatóba, ugyanis az 1990 óta tartó jugoszláviai polgárháború sokáig nem tette lehetővé a biztonságos utazást Szabadkára.

” ... a Bagolyvár is legyen benne!”
(Készítette Illés Tibor.)

A szegedi MOK-ra 1993 októberében még a szüleim utaztak át Szabadkáról annak érdekében, hogy találkozhassunk, mert ekkor már évek óta nem járhattam Szabadkán. A politikai helyzet annyira normalizálódott, hogy Gábor legnagyobb örömére, 1995. áprilisában közösen elutazhattunk Szabadkára a korábban is említett négyütemű Trabantommal.

Ezekben az években írtuk meg két utolsó közös dolgozatunkat. Az elsőben [9], amelyet 1995-ben fejeztünk be, és nyújtottuk be publikálásra, számos ismert szerző eredményét általánosítottuk, bizonyításaink mégis egyszerűbbek voltak. A másik dolgozatunkat [10] magyar nyelven jelentettük meg a Farkas Gyula születésének 150. évfordulója előtt tisztelgő kötetben. Ebben a dolgozatunkban összegeztük közös kutatásainkat az általánosított konvexitás, alternatíva tételek, és optimalitási kritériumok területén. Dolgozatunkat 1997-1998 fordulóján fejeztük be.

Talán éppen a cikkünk véglegesítésének időszakában következett be Gábor második szabadkai látogatása, 1998 tavaszán. Természetesen a szabadkai látogatásokhoz tartozott a Mészáros család meglátogatása is. Katalin, az Újvidéki Egyetem, szabadkai Közgazdaságtudományi Karának matematikus egyetemi tanára volt akkoriban. Katalin mindkét lánya, Viola és Karola is matematikusok lettek. A család anyagi hátterét Mészáros Károly, Szabadka-szerte ismert fogorvosa, a családfő teremtette meg. Katalinnal nekem több közös cikkem is van, mégis életkoruk miatt Gábor, Katalin és Károly igazi baráti viszonyt alakítottak ki. Szinte kötelező program volt a Mészáros családban a hétvégi Palicsi-tó kerülő séta, gyaloglás. Katalin mindig készülten érkezett ezekre a sétákra. A tanyák kutyái számára étkezésekből maradt csontokat, húsokat hozott, míg a tanyasi apróságoknak csokoládét. Kisgyereke és kutyák egyaránt nagyon szerették Katalint.

Gábor még kétszer járt a mai Szerbia területén, amelynek a neve még 1995 és 1998 között is legalább egyszer megváltozott, de az is lehet, hogy kétszer. Először a Mészáros család vitte el egy belgrádi kirándulásra. Negyedszer, és utoljára 1998 szeptemberében járt Gábor Szerbiában, amikor a SYOPIS konferencián vett részt, ahogyan azt egyik utolsó levelében, 2021. januárjában tisztáztuk.

Melyik matematikusnál nincsen esernyő? Balról jobbra Mészáros Viola, Kassay Gábor, Mészáros Katalin és Illés Tibor. (Készítette Illés-Kállai Anikó.)

Nem tudhattuk, hogy ez lesz az utolsó közös publikációnk, mivel az 1995/96-os tanévet Cipruson, míg az 1996/97-es tanévet Delftben töltöttem. Majd 1998. szeptembere és 2000. júniusa között ismét Cipruson éltem és dolgoztam. A külföldi utak, a fogadó intézmény kutatóival közös munka, mind egyre több időmet vette el. Gáborral ezért ebben az időszakban nem arra törekedtünk, hogy új kutatásokat kezdjünk, hanem arra, hogy a régieket sikeresen lezárjuk.

Érdekes, hogy ezután Gábor ciprusi évei következtek. Mindketten dolgoztunk az Eastern Mediterranean University, Matematika és Számítástudományi Tanszékén. Sőt, Gábor több évet töltött Cipruson, mint én. Kolozsvárra is akkor ment vissza, amikor a nyugdíjba vonuló Kolumbán professzor úr egyetemi tanári állását ajánlották fel neki.

8. Epilógus

Gondolom, az eddigiekből mindenki számára világossá vált, hogy Kassay Gábor nem csupán az egyik társszerzőm, kutatótársam volt, hanem jóval több ennél, a barátom. Nagyon sok minden összekötött bennünket. Talán leginkább az a kisebbségi lét, amelyben felnőttünk, és bennem is elevenen élt abban az időszakban, amikor Gáborral közös kutatásainkat folytattuk.

Gábor 1991 és 1998 között összesen egy évet tartózkodott Budapesten. A Kolozsváron eltöltött napjaim száma nálam is elérték, vagy meg is haladták a negyedévet. Ha az 1991-től 2021-ig tartó közel 30 évet nézzük, akkor azt is elmondhatjuk, hogy Kolozsváron és Budapesten kívül számos külföldi konferencián (Lisszabon, Rotterdam, Isztambul, Atlanta, Firenze) voltunk együtt, illetve többször hívtam meg szemináriumi előadónak külföldi útjaim során (Delft, Famagusta, Glasgow) is.

Se szeri, se száma a közös családi ebédeknek, vacsoráknak Kolozsvárott, Budapesten, Székelyudvarhelyen, Szabadkán, Delftben, Famagustaban, Glasgowban. A nagyon sok kellemes emlék közül talán egyet elevenítenék fel.

Egy nyári vasárnap, káposztásmegyeri lakásunkban látogatott meg Gábor, Kolumbán professzor úrral 2000-ben, de az is lehet, hogy néhány évvel később. Ebédre érkeztek. Anikó, a feleségem, mint mindig, kiváló ebédet tálalt fel nekünk. Az ebéd utáni beszélgetés az asztalnál folyt.

Sándor, Gábor, és Kinga 2010-ben a Bunteanu-csúcson, Fogarasi Havasok.

Furcsa módon, Jóska eléggé fészkelődött, majd megkérdezte, hogy nem mehetnénk át a nappaliba, mert aranyeső készülődik a kajak-kenu világbajnokságon. Így mindenki a TV elé telepedett és együtt szurkoltunk a magyar kajakosoknak, kenusoknak, akik tényleg aranyesőt varázsoltak.

Gáborról kevesen tudják, hogy 2010 és 2015 között minden, 2500 méternél magasabb hegycsúcsra felment, felmászott Erdélyben/Romániában. Sőt télen is járt a Kárpát hegység bércein. Ebben hűséges társa fia, Sankó volt. Gáborék még az egyik Hazajáró epizódjában is szerepelnek, amint éppen visszatérőben vannak az egyik csúcsról a Kárpátokban.

Talán azzal tudunk igazán búcsút venni Gábortól, ha bemutatjuk az egyik csúcson, a Buteanu-csúcson a Fogarasi Havasokban, a hegyei és szerettei, Sankó és Kinga, körében.

Hivatkozások

[1] Kassay G.: *Minimax tételek és alkalmazásai*, Operations Research Report **1992-02**, Eötvös University of Sciences, Budapest, (1992).

[2] T. Illés, I. Joó, G. Kassay: *On a nonconvex Farkas theorem and its application in optimization theory*, Operations Research Report **1992–03**, Eötvös University of Sciences, Budapest, (1992).

[3] I. Joó, G. Kassay: *On saddle points of set-valued mappings*, Annales Univ. Sci. Budapest, Vol. **37**, pp. 209–214 (1994).

[4] E.V. Tamminen: *Sufficient conditions for the existence of multipliers and Lagrangian duality in abstract optimization problems*, J. Optim. Theory Appl., Vol. **82**, 93–104 (1994). DOI: 10.1007/BF02191781

[5] T. Illés, G. Kassay: *Farkas type theorems for generalized convexities*, Pure Mathematics and Applications, Vol. **5** No. **2**, pp. 225–239 (1994).

[6] I. Joó, G. Kassay: *Convexity, minimax theorems and their applications*, Annales Univ. Sci. Budapest, Vol. **38**, pp. 71–93 (1995).

[7] T. Illés, G. Kassay: *Perfect duality for K-convexlike programming problems*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, Vol. **41**, pp. 69–78 (1996).

[8] G. Kassay, J. Kolumbán: *On a generalized sup-inf problem*, J. Optim. Theory Appl., Vol. **91**, 651–670 (1996). DOI: 10.1007/BF02190126

[9] T. Illés, G. Kassay: *Theorems of the Alternative and Optimality Conditions for Convexlik and General Convexlike Programming*, J. Optim. Theory Appl., Vol. **101**, pp. 243–257 (1999). DOI: 10.1023/A:1021781308794

[10] Illés T., Kassay G.: *Általánosított Farkas tételek és következményeik*, In: Komlósi Sándor; Szántai Tamás Új utak a magyar operációkutatásban: In memoriam Farkas Gyula, Budapest/Pécs, Magyarország: Dialóg Campus Kiadó, p. 396, pp. 43-57 (1999).

Illés Tibor az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán szerezte meg matematikus diplomáját 1987-ben, egyetemi doktori címét 1989-ben, majd Phd fokozatát 1996-ban. A Budapesti Corvinus Egyetemen (BCE) habilitált 2021-ben, és 2022-ben kinevezték egyetemi tanárrá.
Először az MTA-SZTAKI kutatója, majd 1990-től 2016-ig az ELTE Operációkutatási Tanszék oktatója. 2010 és 2020 között a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem (BME) Differenciálegyenletek Tanszék (DET) egyetemi docense, majd 2020 és 2022 között felállású egyetemi docense. 2011-től lemondásáig, 2020. augusztus 31-ig, három cikluson keresztül volt a BME DET, tanszékvezetője és a BME TTK Kari Tanácsának tagja. A BCE Matematika és Statisztikai Modellezés Intézet vezetőjének meghívására, kutatócsoportjának tagjaival átment a BCE-re és megalapította Corvinus Operációkutatási Kutatóközpontot (CCOR) 2020. szeptember 1-én.

Illés Tibort a köztársasági elnök 2022. szeptember 1-ével egyetemi tanárrá nevezi ki. Jelenleg a CCOR kutató professzora, vezetője.

Külföldön tanított matematika és operációkutatás tárgyakat az Eastern Mediterranean University-n (EMU) 1995/96-os tanévben, illetve 1998 és 2000 között. A glasgow-i Strathclyde University-n John Anderson kutató volt 2007 és 2009 között, és részmunkaidős senior lecturer 2009 és 2018 között. Elsősorban operációkutatási tárgyakat tanított mester hallgatóknak.

Kutatási területei a lineáris és nemlineáris programozás és ezek ipari és gazdasági alkalmazásai. Több, mint 60 tudományos közleményére közel 900 hivatkozást kapott, h-indexe 18. Témavezetésével közel 60 hallgató készítette el szakdolgozatát 2 magyar és 2 külföldi egyetemen. Hat hallgatója szerzett doktori fokozatot három különböző egyetemen (EMU, ELTE, BME).

Díjai és ösztöndíjai: Farkas Gyula-emlékdíj (1991), DAAD-ösztöndíj (1998), Bolyai Farkas ösztöndíj (2001), Bolyai János kutatási ösztöndíj (2000-2003), Tehetségnagykövet Díj (2019, Szabadka, Szerbia). Több alapkutatási és fejlesztési projektnek volt résztvevője vagy vezetője Magyarországon és külföldön, beleértve piacvezető hazai és külföldi nagyvállalatok számára végzett projekteket is.

Alapító tagja a Magyar Operációkutatási Társaságnak (1991) és az európai folytonos optimalizálók munkacsoportjának (EUROPT WG, 2000). Az EUROPT WG tiszteletbeli koordinátora (2003), a MOT elnöke (2011-2014) és alelnöke (2014-2017). Tagja a BJMT-nek és a BJMT Alkalmazott Matematika Szakosztályának titkára 1991 és 1993 között. Az EURO Végrehajtó Bizottságának tagja 2011-től. Az MTA Operációkutatási Tudományos Bizottságának 2005 óta tagja, 2008-2010 között a titkára. Az MTA Közgyűlésének választott képviselője 2013-2019 között, két cikluson keresztül.

ILLÉS TIBOR

Budapesti Corvinus Egyetem,
Operációkutatási Kutatóközpont
tibor.illes@uni-corvinus.hu

HOW DID WE WRITE ARTICLES WITH GÁBOR KASSAY?

Tibor Illés

Gábor Kassay and I wrote four articles between 1991 and 1998. We did not publish our first manuscript in a journal, and our research on optimization problems with quadratic Ky-Fan and König-convex functions remained unfinished, and this manuscript was lost. In seven years, even considering the circumstances, ours does not count as an outstanding amount of professional cooperation, but it remains memorable for me. I did not develop a similarly deep human relationship or true friendship with any of my fellow researchers. All of this made me remember Gábor Kassay, the mathematician, fellow researcher, and friend.

Alkalmazott Matematikai Lapok **40** (2023), 101–111.
DOI: 10.37070/AML.2023.40.1.03

IZOTON VETÍTÉSEK ÉS ALKALMAZÁSAIK

NÉMETH SÁNDOR, NÉMETH SÁNDOR ZOLTÁN

Izoton a rendezett vektortérnek az a saját leképezése, amely annak rendezését megtartja. Izoton pl. a vektorhálóban a pozitív rész leképezés, vagy a Hilbert-tér sajátos kúpjaira való vetítés. Ezeknek és általánosításaiknak gyakorlati alkalmazásain kívül fontosak a kapcsolódó elméleti kutatások, amelyek további alkalmazások alapját képezhetik. A jelen dolgozat e két aspektus eredményeinek fontos részét hivatott összefoglalni abban az esetben, amikor a leképezés a metrikus vetítés.

1. Bevezető

A nemlineáris komplementaritás feladata fixpont keresésére vezethető vissza, melynek lényeges mozzanata a feladat kúpjára való vetítés. Ha utóbbi a kúp értelmezte rendezés szerint izoton, a megoldás iteratív eljárás eredménye lehet. A kúpra vetítés izotonitásának kérdését a [8] dolgozat oldotta meg, amely kapcsolódó gyakorlati és elméleti kutatások előzményéül szolgált. Ezek lényeges mozzanata, hogy, amint azt a [11] dolgozat kimondja, a vetítés izotonitás esetén rendkívül hatékony. A hatékonyság fontossága onnan adódik, hogy az alkalmazások többségében a vetítés iteratív eljárások része. Bár a komplementaritás talaján fogant, a kutatás eredményei hasznosnak bizonyultak a statisztikában és a metrikus geometriában is.

Rövid összefoglalónkban a kérdéskör néhány jelentősebb elméleti és gyakorlati eredményéről számolunk be.

2. Értelmezések

Legyen $\mathbb{H}$ valós Hilbert-tér, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a téren értelmezett skaláris szorzat, $\| \cdot \|$ a skaláris szorzat értelmezte norma.

A $\mathbb{H}$ térben értelmezett $\leq$ bináris reláció *rendezés*, ha reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus. Tételezzük föl, hogy a reláció a tér vektorstruktúrájához a következő axiómákkal kapcsolódik: (1) ha $x \leq y$, akkor $tx \leq ty$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$; (2) ha $x \leq y$, akkor $x + z \leq y + z$, $\forall\, z \in \mathbb{H}$. A $(\mathbb{H}, \leq)$ kettőst *rendezett Hilbert-térnek* nevezzük.

A $K = \{x \in \mathbb{H} : 0 \leq x\}$ halmaz a tér $\leq$ bináris relációjára vonatkozó *pozitív kúpja*. A K pozitív kúp a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(i) $K + K \subseteq K$, (ii) $tK \subseteq K$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$ és (iii) $K \cap (-K) = \{0\}$. A pozitív kúp jellemzi a rendezett Hilbert teret abban az értelemben, hogy $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K$. Ez indokolja a $\leq$ és a $\leq_K$ jelölések párhuzamos használatát.

A K kúp *származtató*, ha $K - K = \mathbb{H}$.

Az (i), (ii) és (iii) tulajdonságokkal rendelkező tetszőleges nemüres $K \subseteq \mathbb{H}$ halmazt *kúpnak* nevezzük. A K kúp által származtatott $\leq_K$ bináris relációt az $x \leq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$ ekvivalencia értelmezi. Minden K kúp a $\mathbb{H}$ Hilbert-tér egy pozitív kúpja az általa származtatott bináris relációra vonatkozóan.

A $(\mathbb{H}, \leq)$ rendezett Hilbert-tér *vektorháló*, ha tetszőleges két x és y elemére létezik a $\sup\{x, y\} = x \vee y \in \mathbb{H}$ elem és az $\inf\{x, y\} = x \wedge y \in \mathbb{H}$ elem. A $\vee$ és $\wedge$ operációkat *hálóoperációknak* nevezzük. A vektorháló pozitív kúpja ún. *hálókúp*.

Egy K kúp *duálisa* a

$$K^* := \{y \in \mathbb{H} :\ \langle x, y\rangle \geq 0,\ \forall x \in K\}$$

halmaz. A K^* halmaz egy zárt kúp. Ha a K kúp zárt is, akkor $(K^*)^* = K$. Tehát, az $L = K^*$ jelöléssel, $K = (K^*)^* = L^*$. Ezért a K és L kúpokat *kölcsönösen duális* kúpoknak nevezzük.

A $\rho : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ leképezés K*-izoton*, ha $x \leq_K y \;\Rightarrow\; \rho(x) \leq_K \rho(y)$ és K*-szubadditív*, ha $\rho(x + y) \leq_K \rho(x) + \rho(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{H}$.

3. Hálószerű operációk a Hilbert-térben

Jelölje P_D a $\mathbb{H}$ Hilbert-tér nemüres, zárt konvex D halmazára való *metrikus vetítést*, azaz a

$$P_D x \in D, \quad \|x - P_D x\| = \inf\{\|x - y\| :\ y \in D\}.$$

összefüggéssel értelmezett leképezést.

Hogyha K és L a $\mathbb{H}$ Hilbert-tér kölcsönösen duális kúpjai, értelmezzük a következő *hálószerű operációkat*:

$$x \sqcap_K y = P_{x-K} y,\ x \sqcup_K y = P_{x+K} y,\ x \sqcap_L y = P_{x-L} y,\ \text{és}\ x \sqcup_L y = P_{x+L} y.$$

Az elnevezést az indokolja, hogy az értelmezett operációk tulajdonságai a vektoráló $\vee$ és $\wedge$ hálóoperációinak tulajdonságaira hasonlítanak.

Az M halmazt K*-invariánsnak* nevezzük, ha a $\sqcap_K$, $\sqcap_L$, $\sqcup_K$ és $\sqcup_L$ operációkra invariáns, vagyis $x \,\square\, y \in M$, bármely $x, y \in M$ és bármely $\square \in \{\sqcap_K, \sqcap_K, \sqcup_K, \sqcup_L\}$ esetén.

Összefoglalónk fontos eredménye a következő állítás:

3.1. TÉTEL. (lásd [19], 1. Tétel) *Legyen* $K \subseteq \mathbb{H}$ *egy zárt kúp és* $C \subseteq \mathbb{H}$ *egy nemüres zárt konvex halmaz. A* C *halmaz akkor és csak akkor* K*-invariáns, ha* P_C K*-izoton.*

Ha a P_C K-izoton (jelölések a fenti tételből), akkor a C-t *K-izoton vetítő halmaznak* nevezzük. A $K \subseteq \mathbb{H}$ kúpot *izoton vetítő kúpnak* nevezzük, ha a P_K vetítés K-izoton, azaz a K kúp egy K-izoton vetítő halmaz.

A 3.1. Tételből adódik a

3.1. KÖVETKEZMÉNY. *A* $K \subseteq \mathbb{H}$ *kúp akkor és csak akkor izoton vetítő, ha* K*-invariáns halmaz.*

A hálószerű operációk segítségével igazolható a következő dualitási tétel:

3.2. TÉTEL. (lásd [16], 1. Tétel) *Legyenek* K *és* L *kölcsönösen duális kúpok a* $\mathbb{H}$ *térben. A következő állítások ekvivalensek:*

1. P_K K*-izoton.*
2. P_L L*-szubadditív.*

4. Izotonitás az euklideszi térben

Jelölje $\mathbb{R}^m$ az m-dimenziós euklideszi teret, $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a benne értelmezett skaláris szorzatot és $\|\cdot\|$ az általa származtatott normát.

A
$$K = \{t_1x^1 + \cdots + t_mx^m : \; t_i \in \mathbb{R}_+, \; i = 1, \ldots, m\}$$
halmaz, ahol $x^1, \ldots, x^m$ lineárisan független elemek, *szimpliciális kúp.*

Az
$$F_i = \big\{t_1x^1 + \cdots + t_{i-1}x^{i-1} + t_{i+1}x^{i+1} + \cdots + t_mx^m : \\ t_j \in \mathbb{R}_+, \; j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m\}$$
kúpok a K *maximális lapjai*, ahol $i = 1, \ldots, m$.

Az általunk tárgyalt témakör kiindulópontja és első jelentős eredménye a következő

4.1. TÉTEL. (lásd [8], az 569. oldalon szereplő tétel) *A* $K \subset \mathbb{R}^m$ *akkor és csak akkor izoton vetítő kúp, ha olyan szimpliciális kúp, hogy maximális lapjainak külső normálisai páronként nem hegyesszöget alkotnak.*

A [8], valamint a [12] tételeinek következménye a következő

4.2. TÉTEL. *Legyen* $K \subseteq \mathbb{R}^m$ *zárt származtató kúp,* K^* *ennek duálisa. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

1. *K izoton vetítő kúp;*
2. *K^* olyan szimpliciális kúp, amit páronként nem hegyes szöget bezáró vektorok generálnak;*
3. *P_{K^*} K^*-szubadditív.*

A tétel bizonyítása nem terjeszthető ki Hilbert-térre, mert az 1. $\Leftrightarrow$ 2. és a 2. $\Leftrightarrow$ 3. ekvivalenciák bizonyításából áll, ahol a 2. föltétel tipikusan véges dimenziós. Tehát a 3.2. és a 4.2. Tételek abban az értelemben függetlenek, hogy egyik sem következménye a másiknak.

A szimpliciális kúp kitüntetett szerepet játszik a rendezett euklideszi térben megfogalmazott izoton leképezések elméletében. Ha például az euklideszi normát egy bizonyos konvexitási feltételeknek engedelmeskedő φ normával helyettesítjük és a vetítést ezzel értelmezzük, kimondható, hogy

4.3. Tétel. (lásd [5], 9. Tétel) *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^m$ zárt származtató kúp. Ha a φ szerinti vetítés K-ra K-izoton, akkor K szimpliciális kúp.*

Igaz továbbá a következő állítás:

4.4. Tétel. (lásd [5], 10. Tétel) *Bármely $K \subseteq \mathbb{R}^m$ szimpliciális kúp esetén létezik egy skaláris szorzat úgy, hogy a skaláris szorzat által értelmezett vetítés szerint K izoton vetítő kúp legyen.*

Legyen az $\mathbb{R}^m$ euklideszi tér az $e^1, \dots, e^m$ ortonormális vektorrendszer származtatta vonatkoztatási rendszerrel fölruházva. Föltételezzük, hogy $\mathbb{R}^m$ minden pontja egy oszlopvektor. (A tér elemeit stiláris meggondolásból esetenként pontoknak vagy vektoroknak nevezzük.)

Az
$$\mathbb{R}^m_+ = \{t_1e^1 + t_2e^2 + \dots + t_me^m : \ t_i \in \mathbb{R}_+, \ i = 1, 2, \dots, m\}$$
szimpliciális kúpot a vonatkoztatási rendszer *pozitív ortánsának* nervezzük. A pozitív ortáns származtatta rendezés az ún. *koordinátánkénti rendezés.*

Legyenek p, q pozitív egész számok. Az $(x, u) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ jelölés a továbbiakban azt fogja jelenteni, hogy $x \in \mathbb{R}^p$ és $u \in \mathbb{R}^q$. Ha $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ és $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$ jelölik a skaláris szorzatot az $\mathbb{R}^p$, illetve $\mathbb{R}^q$ Euklideszi terekben, akkor a továbbiakban feltételezni fogjuk, hogy az $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ Euklideszi tér skaláris szorzata az $\langle (x, u), (y, v) \rangle = \langle x, y \rangle_p + \langle u, v \rangle_q$ által van értelmezve, ahol (x, u), (y, v) az $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ tetszőleges vektorai. Jelölje e az $\mathbb{R}^p$ azon vektorát, amelyiknek minden komponense 1. A [17] dolgozatban bevezettük az

$$\mathcal{L}(p, q) = \{(x, u) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : x \geq \|u\|e\}, \tag{1}$$

(ahol $\leq$ a koordinátánkénti rendezés) *kiterjesztett Lorentz-kúpot* és az

$$\mathcal{L}_{\geq}(p, q) = \{(x, u) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : x_1 \geq \dots \geq x_p \geq \|u\|\} \tag{2}$$

monoton kiterjesztett Lorentz-kúpot. Úgy az $\mathcal{L}(1,q)$, mint az $\mathcal{L}_{\geq}(1,q)$ *Lorentz-kúp.* Az $\mathcal{L}(p,q)$ (illetve $\mathcal{L}_{\geq}(p,q)$) poliedrális kúp (azaz véges számú origót tartalmazó zárt féltér metszete) akkor és csakis akkor ha $q=1$.

Az $\mathcal{L}(p,q)$ kiterjesztett Lorentz-kúp és az $\mathcal{L}_{\geq}(p,q)$ monoton kiterjesztett kúp izoton vetítő halmazai a vegyes komplementaritási feladatok és a hengereken értelmezett variációs egyenlőtlenségek megoldására használhatók [6, 17, 18]. Ezeket a halmazokat a következő két tétel adja meg:

4.5. Tétel. (lásd [17], 2. Tétel)

1. *Legyen $K=\mathbb{R}^p\times C$, ahol C egy tetszőleges nemüres belsejű zárt konvex halmaz $\mathbb{R}^q$-ban és $\mathcal{L}(p,q)$ az (1) által értelmezett kiterjesztett Lorentz-kúp. Ekkor K egy $\mathcal{L}(p,q)$-izoton vetítő halmaz.*

2. *Legyen $q>1$ egész szám és $K\subseteq\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ egy nemüres zárt konvex halmaz. A K halmaz akkor és csakis akkor $\mathcal{L}(1,q)$-izoton vetítő, ha létezik egy $C\subseteq\mathbb{R}^q$ nemüres zárt halmaz úgy, hogy $K=\mathbb{R}^p\times C$.*

3. *Legyenek $p,q>1$ egész számok, és*

$$K=\cap_{\ell\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_-(\gamma^\ell,\beta^\ell)\subseteq\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q,$$

ahol $\gamma^\ell=(a^\ell,u^\ell)\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ egy egységvektor és $\mathcal{H}_-(\gamma^\ell,\beta^\ell)$ a $\beta^\ell\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ ponton átmenő, $\gamma^\ell\in\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ külső normálisú féltér. A K halmaz akkor és csakis akkor $\mathcal{L}(p,q)$-izoton vetítő, ha bármely $\ell\in\mathbb{N}$ esetén fennáll egy a következő feltételek közül:

   (a) $a^\ell=0$,

   (b) $u^\ell=0$, *és létezik $i\neq j$ úgy, hogy $a_i^\ell=\sqrt{2}/2$, $a_j^\ell=-\sqrt{2}/2$ és $a_k^\ell=0$, bármely $k\notin\{i,j\}$ esetén.*

4.6. Tétel. (lásd [18], 3.4. Tétel) *Legyenek $p>0$ és $q>1$ egész számok és $\mathcal{L}_{\geq}(p,q)$ a (2) által értelmezett monoton kiterjesztett Lorentz-kúp. A nemüres belsejű $K\subseteq\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ halmaz akkor és csakis akkor $\mathcal{L}_{\geq}(p,q)$-izoton vetítő, ha létezik egy $C\subseteq\mathbb{R}^q$ nemüres belsejű halmaz úgy, hogy $K=\mathbb{R}^p\times C$.*

5. Példák és alkalmazások

5.1. Nemlineáris komplementaritás a Hilbert-térben

Legyen $\mathbb{H}$ Hilbert-tér, $K\subseteq\mathbb{H}$ kúp, K^* a K duálisa, $f: K\to\mathbb{H}$ adott leképezés. Az

$$NKF(K,f):\ \text{Keresett az } x^*\in K \text{ elem, amelyre } f(x^*)\in K^*,$$

valamint

$$\langle x^*, f(x^*)\rangle=0$$

feladatot *a K kúphoz és f leképezéshez rendelt nemlineáris komplementaritási feladatnak* nevezzük. Az $NKF(K, f)$ komplementaritási feladat megoldása az

$$K \ni x \mapsto P_K(x - f(x)) \tag{3}$$

leképezés fixpontja.

Az izotonitási kutatások kiindulási pontja olyan föltételek, keresése K-ra és f-re amelyekre az

$$x^{n+1} = P_K(x^n - f(x^n))$$

típusú iteráció a feladat megoldásához vezet. Ezt a iterációt ki lehet terjeszteni implicit komplementaritási feladatokra, vegyes komplementaritási feladatokra és variációs egyenlőtlenségekre is.

Hasonló iterációk vezethetők be variációs egyenlőtlenségek, valamint implicit és vegyes komplementaritási feladatok esetén. A megfelelő vetítések izotonitási és az értelmező függvények monotonitási feltételei különböző megoldási algoritmusokhoz vezetnek. Ezeket többek között az [1, 2, 3, 6, 9, 10, 15, 17, 18] cikkek tárgyalják.

5.2. Az izoton regresszió feladata

1. A derékszögű vonatkoztatási rendszer $\mathbb{R}^m_+$-szal jelölt pozitív ortánsa izoton vetítő kúp.

2. A
$$\kappa = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^\top \in \mathbb{R}^m : 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_m \right\}$$
kúp izoton vetítő kúp.

A statisztikában meghonosodott szóhasználattal a κ kúpot a következőkben *izoton kúpnak* fogjuk nevezni.

Az adott $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^\top$ pont esetén az

$$\operatorname{argmin}_x \left\{ \sum_{i=1}^{m} (y_i - x_i)^2 : \ 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_m \right\}$$

pont meghatározása az úgynevezett *izoton regresszió* feledata.

Észrevesszük, hogy a fenti összeg nem más, mint az y és az x pontok távolságának négyzete, tehát a fönti feladat megoldása nem más, mint

$$\operatorname{argmin}_x \left\{ \sum_{i=1}^{m} (y_i - x_i)^2 : \ 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_m \right\} = P_\kappa y,$$

azaz az y pontnak a κ kúpra való metrikus vetítése.

Az izoton regresszió feladatának jelentős irodalma van. Több módszer is született a feladat megoldására.

Guyader és Jégou francia statisztikusok felismerték, hogy a κ kúp izoton vetítősége és egyéb tulajdonságai lehetővé teszik bizonyos módszerek ekvivalenciájának bizonyítását [7].

Az izoton regresszióval párhuzamosan nagy fontossága van a statisztikában az általános izoton regressziónak, amely a következőképpen fogalmazható meg:

Az adott $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^\top$ pont esetén keresett az

$$\operatorname{argmin}_x \left\{ \sum_{i=1}^{m} (y_i - x_i)^2 \right\}$$

pont, midőn $x_k \geq 0$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ és $x_i \leq x_j$ és $(i, j) \in (N, G)$, ahol utóbbi az indexek alkotta teljes rendezett gráf.

Ha

$$K = \Big\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^\top \in \mathbb{R}^m : x_k \geq 0,\ \forall k \in \{1, 2, \ldots, m\},$$
$$x_i \leq x_j,\ \forall\, (i, j) \in (N, G) \Big\},$$

akkor itt is az

$$\operatorname{argmin}_x \left\{ \sum_{i=1}^{m} (y_i - x_i)^2 :\ (i, j) \in (NG) \right\} = P_K y$$

pont meghatározása a feladat.

A fönt értelmezett K kúpot *általánosított izoton regressziós kúpnak* nevezzük.

A probléma az, hogy K akkor és csak akkor izoton vetítő kúp, ha izomorf a κ kúppal, azaz izoton kúp. Tehát a kiterjesztett feladatra nem alkalmazhatók azok a megoldási módszerek, amelyek a standard izoton regressziós feladatra működnek.

Jelölje $\leq$ a koordinátánkénti rendezést az $\mathbb{R}^m$ térben, azaz $x = (x^1, ..., x^m) \leq y = (y^1, ..., y^m)$ legyen akkor és csak akkor igaz, ha $x^i \leq y^i$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$.

Keressük az $L \subseteq \mathbb{R}^m_+$ kúpot, amelyre

$$x \leq y \Rightarrow P_L x \leq P_L y.$$

5.1. Tétel. (lásd [14], 5. Tétel) *Izomorfizmustól eltekintve összesen $m(m-1)$ olyan $L \subseteq \mathbb{R}^m_+$ kúp létezik, amely a fönti tulajdonsággal rendelkezik. Minden K általánosított izoton regressziós kúp ehhez az osztályhoz tartozik.*

5.3. A képrekonstrukció feladata

Legyenek $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathbb{R}^m$ adott pontok , $d_{ij} = \|A_i - A_j\|^2$, $D = (d_{ij})$ az ún. *euklideszi távolság-mátrix, EDM*, $(D \in EDM)$. (D szimmetrikus, azaz $d_{ij} = d_{ji}$, $d_{ij} \geq 0$ és „lyukas”, azaz $d_{ii} = 0$.)

Tételezzük föl, hogy az $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ ponthalmaz esetén a $d_{ij} = \|A_i - Aj\|^2$ távolságnégyzetek valódi értékét (esetleg néhány esettől eltekintve) nem tudjuk meghatározni, de ezek viszonyát igen, azaz megvannak az eszközeink arra, hogy egy nagyságrendi sorrendet határozzunk meg a d_{ij} számok között:

$$d_{12} \leq ... \leq d_{ij} \leq ... \leq d_{kl}.$$

(Példának okáért vehető ezen számok gyanánt a természetes számok nem csökkenő sorozata.) Az így szerkesztett számsorozat tekinthető az $\mathbb{R}^N$ Descartes koordináta rendszerrel fölruházott euklideszi tér egy pontja koordinátáinak, ahol $N = m(m-1)/2$. Osszuk ki a tér koordinátáit olyképpen, hogy a d_{ij} pontnak (távolságnégyzetnek), azaz az (i, j) indexpárnak az az r-edik x_r koordináta feleljen meg, ahányadik helyen áll a sorozatban.

A gyakorlatban, ahol a térképkészítés feladata és sok más vele rokonítható feladat merül föl, eljárást dolgoztak ki arra, hogy a távolságviszonyokat felhasználva a valóságot jól megközelítő térképet rajzoljanak. Ennek lényege a következő [4]:

Legyen

$$\kappa = \{(x_1, x_2, \ldots, x_N)^\top \in \mathbb{R}^N : \ 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_N\}.$$

$$(d_{12}, ..., d_{ij}, ..., d_{kl}) \in \kappa.$$

A d_{ij} értékek folyamatos javításával, a nagyságrendi sorrend betartása mellett arra törekszünk, hogy $D = (d_{ij}) \in EDM$ legyen. Ez a κ, valamint a pozitív szemidefinit mátrixok S_+ kúpjára való alternatív vetítés sorozatával érhető el.

Megjegyezzük, hogy az S_+ kúpra könnyű vetíteni, ugyanis a vetület meghatározása a szimmetrikus mátrix sajátértékei meghatározására vezethető vissza.

Kezdetben a κ kúpra való minden vetítés egy végtelen iteratív eljárás eredménye volt. Tekintettel a κ kúp óriási dimenziójára és az iterációk nagy számára, a térkép-rekonstrukció igen lassúnak bizonyult.

John Dattorro fölismerte, hogy a κ-ra való vetítésnek van egy hatékonyabb módszere, amelyet a [11] dolgozat ír le. Az izoton vetítő kúpra való vetítés véges algoritmusának felhasználásával a konvergencia két nagyságrenddel javítható.

Azóta kiderült, hogy a κ kúpra még ennél is hatékonyabban lehet vetíteni, felhasználva a $P_\kappa = P_\mu(x)^+$ képletet (ahol $z \in \mathbb{R}^m$ esetén z^+ a z vektor nemnegatív komponenseivel alkotott vektor) [13], ahol

$$\mu = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n\},$$

mivel az úgynevezett PAVA algoritmus (lásd a [13] irodalomjegyzékét) a μ kúpra nagyon hatékonyan vetít.

Hivatkozások

[1] M. Abbas and S.Z. Németh: *Finding solutions of implicit complementarity problems by isotonicity of the metric projection*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Vol. **75** No. **4**, pp. 2349–2361 (2012). DOI: 10.1016/j.na.2011.10.033

[2] M. Abbas and S.Z. Németh: *Implicit complementarity problems on isotone projection cones*, Optimization, Vol. **61** No. **6**, pp. 765–778 (2012). DOI: 10.1080/02331934.2011.641019

[3] M. Abbas and S.Z. Németh: *Solving nonlinear complementarity problems by isotonicity of the metric projection*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. **386** No. **2**, pp. 882–893 (2012). DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.08.048

[4] J. Dattorro: *Convex Optimization and Euclidean Distance Geometry*, COandEDG version 02.24.2010. (2010).

[5] O.P. Ferreira and S.Z. Németh: *Generalized isotone projection cones,* Optimization, Vol. **61** No.**9**, pp. 1087–1098 (2012). DOI: 10.1080/02331934.2010.538057

[6] Y. Gao, S.Z. Németh, and R. Sznajder: *The monotone extended second-order cone and mixed complementarity problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, pp. 1–27 (2021). DOI: 10.1007/s10957-021-01962-4

[7] A. Guyader, N. Jégou, A.B. Németh, and S.Z. Németh: *A geometrical approach to iterative isotone regression*, Applied Mathematics and Computation, Vol. **227**, pp. 359–369 (2014). DOI: 10.1016/j.amc.2013.11.048

[8] G. Isac and A.B. Németh: *Monotonicity of metric projections onto positive cones of ordered Euclidean spaces*, Archiv der Mathematik, Vol. **46** No. **6**, pp. 568–576 (1986).

[9] G. Isac and A.B. Németh: *Isotone projection cones in Hilbert spaces and the complementarity problem*, Bollettino dell'Unione Matematica B (7), Vol. **4** No. **4**, pp. 773–802 (1990).

[10] G. Isac and A.B. Németh: *Projection methods, isotone projection cones, and the complementarity problem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. **153** No. **1**, pp. 258–275 (1990).

[11] A.B. Németh and S.Z. Németh: *How to project onto an isotone projection cone,* Linear Algebra and its Applications, Vol. **433** No. **1**, pp. 41–51 (2010). DOI: 10.1016/j.laa.2010.02.008

[12] A.B. Németh and S.Z. Németh: *A duality between the metric projection onto a cone and the metric projection onto its dual*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. **392** No. **2**, pp. 172–178 (2012). DOI: 10.1016/j.jmaa.2012.03.019

[13] A.B. Németh and S.Z. Németh: *How to project onto the monotone nonnegative cone using pool adjacent violators type algorithms*, arXiv preprint arXiv:1201.2343 (2012).

[14] A.B. Németh and S.Z. Németh: *Order isotonicity of the metric projection onto a closed convex cone*, arXiv preprint arXiv:1602.04743, (2016).

[15] S.Z. Németh: *Iterative methods for nonlinear complementarity problems on isotone projection cones*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. **350** No. **1**, pp. 340–347 (2009). DOI: 10.1016/j.jmaa.2008.09.066

[16] S.Z. Németh: *A duality between the metric projection onto a convex cone and the metric projection onto its dual in Hilbert spaces*, Nonlinear Analysis, Vol. **97**, pp. 1-3 (2014). DOI: 10.1016/j.na.2013.11.013

[17] S.Z. Németh and G. Zhang: *Extended Lorentz cones and mixed complementarity problems,* Journal of Global Optimization, Vol. **62** No. **3**, pp. 443-457 (2015). DOI: 10.1007/s10898-014-0259-y

[18] S.Z. Németh and G. Zhang: *Extended Lorentz cones and variational inequalities on cylinders,* Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. **168** No. **3**, pp. 756–768 (2016). DOI: 10.1007/s10957-015-0833-6

[19] A.B. Németh and S.Z. Németh: *Lattice-like operations and isotone projection sets,* Linear Algebra and its Applications, Vol. **439** No. **10**, pp. 2815–2828 (2013). DOI: 10.1016/j.laa.2013.08.032

Németh Sándor a kolozsvári Babes–Bolyai Tudományegyetem nyugalmazott professzora. Tanulmányait a Bolyai, majd a Babes–Bolyai egyetemen végezte 1956 és 1961 között. 1961 és 1991 között a Román Tudományos Akadémia kolozsvári fiókjának tudományos munkatársa, 1991-től a Babes–Bolyai Tudományegyetem tanára 2006-os nyugdíjazásáig. Fontosabb kutatási területei: approximációelmélet, differenciálegyenletek, konvex geometria, vektoriális optimalizáció, rendezett vektorterek. Az MTA külső tagja.

NÉMETH SÁNDOR
Babeş-Bolyai Tudományegyetem,
Matematika-Informatika Fakultás,
Kolozsvár

Németh Sándor Zoltán a University of Birmingham angliai egyetem matematika iskolájának docense. A Kolozsvári Babeş–Bolyai Egyetemen folytatott matematikus tanulmányait (1988–1993) követően a Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetemen szerzett matematikus PhD fokozatot 1999-ben. 1992–1993 között Skóciában a University of Edinburgh egyetemen tanul TEMPUS ösztöndíjjal. 1998–2001 között az MTA Bolyai János kutatási ösztöndíjával az MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Laboratóriumába kerül, ahol 1999–2005 között már kutatói állásban dolgozik. 2000-ben a Bolyai János Matematikai Társaság Farkas Gyula Alkalmazott Matematika Díjában részesül. Kutatási területei az általánosított konvexitás és optimalizálás Riemann sokaságokon, valamint a konvex analízis és egyensúlyi rendszerek.

NÉMETH SÁNDOR ZOLTÁN
University of Birmingham,
School of Mathematics,
Birmingham, B15 2TT, UK

ISOTONE PROJECTIONS AND THEIR APPLICATIONS

Alexander B. Németh, Sándor Zoltán Németh

A self-mapping of a vector space is called isotone if it retains its order. For example, the positive part mapping of a vector lattice, or the projections onto specific cones of a Hilbert space are isotone. Besides of the practical applications of these mappings and their generalisations, the related theoretical investigations, which can be the source of further practical applications, are also important. The present article is dedicated to summarise these two important aspects in the case when the mapping is the metric projection.

Keywords: metric projections, cones, simplicial cones, isotone mappings

Mathematics Subject Classification (2000): 90C33, 15A48

Alkalmazott Matematikai Lapok **40** (2023), 113–123.
DOI: 10.37070/AML.2023.40.1.04

KORRELÁLT EGYENSÚLY A FUZZY JÁTÉKOKBAN

MAKÓ ZOLTÁN, SALAMON JÚLIA

A cikkben a kétszemélyes, véges, nem-kooperatív, fuzzy játékok Nash- és korrelált egyensúlyai közötti összefüggést tárgyaljuk. Igazoljuk, hogy hasonlóan a klasszikus játékokhoz, a Nash-egyensúly egy olyan korrelált egyensúly, amely független peremeloszlásokat eredményez.

1. Bevezetés

A hagyományos játékelmélet feltételezi, hogy a játék kifizetései minden játékos számára pontosan ismertek és a játékosok a várható hasznukat akarják maximalizálni. Valós játékhelyzetekben, a rendelkezésre álló információk pontatlansága miatt a játékosok többnyire nem képesek pontosan értékelni a kifizetéseket. A pontatlanság és a bizonytalanság különböző típusú lehet (például: sztochasztikus, fuzzy és fuzzy sztochasztikus). A fuzzy szó jelentése: homályos, elmosódott, lágy körvonalú, életlen vonalú. Ha valamely stratégiához tartozó kifizetés például így van megadva „a kifizetés közel van az a értékhez”, akkor ez a pontatlanság fuzzy típusú. Ezt a kijelentést kvantitatívan fuzzy számmal lehet leírni.

A fuzzy számokkal megadott játékokat fuzzy játékoknak (angolul: fuzzy games) nevezzük. A fuzzy halmazokat először Butnariu használta a nem-kooperatív játékelméletben [5]. Nishizaki és Sakawa tanulmányozták a fuzzy kifizetésekkel és fuzzy célokkal egyaránt rendelkező játékokat. Eredményeiket általánosították a többcélú játékokra is [19]. Bector és Chandra olyan modellt javasoltak a kétszemélyes, nem-kooperatív, fuzzy játékok tanulmányozására, amelyben a bizonytalanság kezelése a lineáris programozási feladatok dualitásán alapul [4]. Larbani a fuzzy paraméterekkel rendelkező játékok egy olyan új osztályát vezette be, amely úgy a játékelméleti, mint a bizonytalanság melletti döntéshozatal mechanizmusát is beépíti a modellbe [13]. Maeda a lehetőségi fok (angolul: possibility degree) segítségével értelmezte a Nash-egyensúly fogalmát [14]. Cunlin és Zhang általánosították Maeda modelljét az aszimmetrikus háromszög alakú fuzzy számokra [6].

Az elméleti közgazdasági modellek egyik érdekes feladata a Nash-egyensúly [17] egyértelműségét biztosító feltételek megállapítása. De mi történik, ha a modellnek több Nash-egyensúlya van? Ebben az esetben az optimális választás csak a játékosok közötti kommunikációval vagy külső jel segítségével történhet. A külső jeleket használó döntéshozatali eljárások többek közt az úgynevezett korrelált egyensúly fogalmához vezetnek.

A korrelált egyensúly fogalmát Robert Aumann vezette be [2, 3]. Informális definíciója a következő. *Minden játékos egy jelet generáló, köztudott folyamat megfigyelése alapján választ egy cselekvést. Ha egyetlen játékosnak sem érdeke eltérni a kiválasztott cselekvéstől, feltéve, hogy a többiek sem térnek el, akkor ezt a stratégiát leíró együttes valószínűségi eloszlást* korrelált egyensúly*nak nevezzük.* A jelt generáló folyamat tulajdonképpen összehangolja (korrelálja) a cselekvéseket, de nem kötelezi a játékosokat az összehangolt cselekvésre, így nem kell elhagyni a nemkooperatív játékok körét. A korrelált egyensúlyok halmaza egy konvex politóp, és lineáris programozási módszerekkel meghatározható, lásd pl. [7, 8, 9, 11].

Tudjuk azt, hogy a klasszikus játékokban a Nash-egyensúly egy olyan korrelált egyensúly, amely független peremeloszlásokat eredményez [7, 8, 9]. A kérdés az, hogy ez az alaptulajdonság más struktúrákban is megmarad-e. Igazoljuk, hogy ez a tulajdonság érvényes marad abban az esetben is, amikor a kifizetések fuzzy számokkal vannak jellemezve és a játékosok preferenciái nem teljes előrendezések.

A cikk első része a megértéshez szükséges alapfogalmakat tartalmazza. A második részben megadjuk a korrelált és a Nash-egyensúly értelmezését a fuzzy játékok esetére, illetve a közöttük levő összefüggést. Példák segítségével szemléltetjük az egyensúlyok közti kapcsolatot.

A cikkben bemutatott általános keret lehetővé teszi az alkalmazott t-normák és a nem teljes előrendezések megfelelő megválasztásával egyedi modellek készítését és tanulmányozását.

2. Fuzzy számok előrendezése

Egy fuzzy halmazhoz való hozzátartozás fokát a tagsági függvény segítségével tudjuk leírni. Legyen $X \neq \varnothing$ egy alaphalmaz. Az X egy A fuzzy részhalmazát a $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$ tagsági függvénnyel jellemezzük. Bármely $x \in X$ esetén a $\mu_A(x)$ azt fejezi ki, hogy x milyen mértékben tartozik hozzá az A-hoz. Tulajdonképpen a μ_A tagsági függvény egy halmazhoz való hozzátartozást megadó $\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$ karakterisztikus függvény általánosítása.

Legyen $p \in (1,+\infty)$ és $g : [0,1] \to [0,1]$ egy folytonos, szigorúan csökkenő függvény, amelyre $g(1) = 0$ és $g(0) = 1$. A $g^{[-1]} : [0,+\infty) \to [0,1]$ pszeudo-inverze a g-nek, ahol $g^{[-1]}(t) = g^{-1}(t)$, ha $0 \le t \le 1$, illetve $g^{[-1]}(t) = 0$, ha $t > 1$.

2.1. Definíció. ([12]) A kvázi-háromszögű fuzzy szám egy olyan $\tilde{a} = \langle a, d\rangle$-vel jelölt fuzzy halmaz, amelynek tagsági függvénye $\mu_{\tilde{a}}(t) = g^{[-1]}(|a-t|/d)$ bármely $t \in \mathbb{R}$ esetén, ahol $a \in \mathbb{R}$ az $\tilde{a}$ középpontja, $d > 0$ pedig a kiterjedése. $d = 0$ esetén $\mu_{\tilde{a}}(a) = 1$ és $\mu_{\tilde{a}}(t) = 0$, ha $t \neq a$. A továbbiakban $\mathcal{N}_{g,p} = \{\langle a, d\rangle \mid a \in \mathbb{R},\ d \ge 0\}$ jelöli a kvázi-háromszögű fuzzy számok halmazát.

Például, ha a generáló függvény $g(t) = 1 - t^2$, a kifizetés $\tilde{a} = \langle 3; 0{,}2 \rangle$, akkor az $\tilde{a}$ középpontja $a = 3$, kiterjedése $d = 0,2$ és tagsági függvénye

$$\mu_{\tilde{a}}(t) = \begin{cases} \sqrt{1 - |3-t|/0,2}, \text{ ha } t \in [2{,}8; 3{,}2], \\ 0, \text{ ha } t \in (-\infty; 2{,}8) \cup (3{,}2; +\infty). \end{cases}$$

Az „a közel van a 3-hoz” kijelentés egy lehetséges kvantitatív interpretációja az $\tilde{a} = \langle 3; 2 \rangle$ kvázi-háromszögű fuzzy szám.

A t-normákon alapuló kiterjesztési elv alapján [10] a fuzzy számok összeadási operátorának tagsági függvényét, a g által generált t-norma segítségével az alábbi módon definiáljuk:

$$\mu_{\tilde{a}+\tilde{b}}(t) = \sup_{t=x+y} g^{[-1]}\left(\left(g^p\left(\mu_{\tilde{a}}(x)\right) + g^p\left(\mu_{\tilde{b}}(y)\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right), \text{ bármely } t \in \mathbb{R} \text{ esetén.} \quad (1)$$

Felhasználva azt a tényt, hogy két fuzzy halmaz egyenlő, ha tagsági függvényeik is egyenlők, a (1) képlettel megadott összeadási műveletre igazolható az alábbi tulajdonság.

2.2. Állítás. ([12]) Bármely $\tilde{a} = \langle a, d_1 \rangle, \tilde{b} = \langle b, d_2 \rangle \in \mathcal{N}_{g,p}$ esetén

$$\tilde{a} + \tilde{b} = \left\langle a + b, \left(d_1^q + d_2^q\right)^{1/q} \right\rangle \in \mathcal{N}_{g,p}, \text{ ahol } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Az összeg képlete alapján $2 \cdot \langle a, d \rangle = \langle a, d \rangle + \langle a, d \rangle = \left\langle 2a, 2^{1/q} d \right\rangle$. Ezért a skalárral való szorzás művelete: $\lambda \cdot \langle a, d \rangle = \left\langle \lambda a, \lambda^{\frac{1}{q}} d \right\rangle$, bármely $\langle a, d \rangle \in \mathcal{N}_{g,p}$ és $\lambda \geq 0$ esetén.

A [15]-ös cikk igazolja, hogy az $(\mathcal{N}_{g,p}, +)$ struktúra olyan félcsoport, amely vektortérré bővíthető, ahol a zérus elem $\tilde{0} = \langle 0, 0 \rangle$ és teljesülnek a $(\lambda_1 + \lambda_2)\tilde{a} = \lambda_1 \cdot \tilde{a} + \lambda_2 \cdot \tilde{a}$, $\lambda_1 \left(\tilde{a} + \tilde{b}\right) = \lambda_1 \cdot \tilde{a} + \lambda_1 \cdot \tilde{b}$, $\lambda_1 \lambda_2 \tilde{a} = \lambda_1 (\lambda_2 \tilde{a})$, $1\tilde{a} = \tilde{a}$ összefüggések, bármely $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{N}_{g,p}$ esetén.

A preferencia reláció megválasztásának problémája kulcsfontosságú a fuzzy kifizetésekkel rendelkező kétszemélyes játékokban. Ebben a dolgozatban az $(\mathcal{N}_{g,p}, +)$ félcsoporttal kompatibilis, nem teljes preferencia rendezést használunk. Az alapfeltételeket formálisan a következőképpen fogalmazzuk meg.

Legyen $\preccurlyeq$ egy bináris reláció az $\mathcal{N}_{g,p}$ halmazon. Két $\tilde{a}$ és $\tilde{b}$ kvázi-háromszögű fuzzy szám $\preccurlyeq$-összehasonlítható, ha vagy $\tilde{a} \preccurlyeq \tilde{b}$ vagy $\tilde{b} \preccurlyeq \tilde{a}$ teljesül. Ellenkező esetben $\tilde{a}$ és $\tilde{b}$ $\preccurlyeq$-összehasonlíthatatlanok. A $\preccurlyeq$ reláció teljes az $\mathcal{N}_{g,p}$ halmazon, ha bármely két $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{N}_{g,p}$ kvázi-háromszögű fuzzy szám $\preccurlyeq$-összehasonlítható. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a $\preccurlyeq$ reláció nem teljes.

2.3. Definíció. A $\preccurlyeq$ reláció az $\mathcal{N}_{g,p}$ összeadási és skalárral való szorzási műveleteivel kompatibilis, nem teljes előrendezés, ha bármely $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathcal{N}_{g,p}$ esetén teljesülnek az alábbi feltételek:

C1) a $\preccurlyeq$ reláció reflexív és tranzitív;
C2) bármely $\lambda \in]0,1[$ esetén az $\tilde{a} \preccurlyeq \tilde{b}$ akkor és csakis akkor teljesül, ha

$$\lambda\tilde{a} + (1-\lambda)\,\tilde{c} \preccurlyeq \lambda\tilde{b} + (1-\lambda)\,\tilde{c}.$$

A definícióban C1 az előrendezés, C2 pedig a kompatibilitás feltételét adja meg.

Az $\mathcal{N}_{g,p}$, az összeadási és skalárral való szorzási műveletekkel, valamint a 2.3. Definíció feltételeit teljesítő $\preccurlyeq$ relációval megadja azt a fuzzy környezetet, amelyben a kétszemélyes nem-kooperatív játékokat vizsgáljuk. Ezt a struktúrát a továbbiakban $(\mathcal{N}_{g,p}, +, \cdot, \preccurlyeq)$-vel jelöljük.

3. Korrelált egyensúly a fuzzy játékokban

Egy $\tilde{\Gamma} = (I, J, S_I, S_J, \tilde{A}, \tilde{B}, \preccurlyeq_I, \preccurlyeq_J)$ kétszemélyes, véges, nem-kooperatív, fuzzy játéknál a játékosok tiszta stratégiáit az $I = \{1, 2, ..., m\}$ és a $J = \{1, 2, ..., n\}$ indexhalmazokkal jelöljük. Az első játékos jellemzésére az $(\mathcal{N}_{g_1,p_1}, +, \cdot, \preccurlyeq_I)$ struktúrát, a másodikéra pedig a $(\mathcal{N}_{g_2,p_2}, +, \cdot, \preccurlyeq_J)$ struktúrát használjuk. Ha az első játékos az i, a második játékos a j stratégiát választja, akkor az első játékos kifizetését az $\tilde{a}_{ij} = \left\langle a_{ij}, d_{ij}^a \right\rangle \in \mathcal{N}_{g_1,p_1}$, a második játékos kifizetését pedig $\tilde{b}_{ij} = \left\langle b_{ij}, d_{ij}^b \right\rangle \in \mathcal{N}_{g_2,p_2}$ fuzzy számok adják meg minden $(i,j) \in I \times J$ esetén. A továbbiakban $\widetilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$ és $\widetilde{B} = \left(\tilde{b}_{ij}\right)_{m\times n}$ jelöli a játékosok fuzzy kifizetési mátrixait. Ebben az esetben a kevert stratégiák halmazai:

$$S_I = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m | x_i \geq 0, i \in I, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\};$$

$$S_J = \left\{ (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n | y_j \geq 0, j \in J, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \right\}.$$

Ha feltételezzük, hogy a játékosok a preferencia döntéseiknél nem teljes előrendezést használnak, akkor Aumann tétele [1] és az összeg képlete alapján a játékosok célfüggvényei

$$\tilde{E}_I(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \tilde{a}_{ij} y_j,\ \ \tilde{E}_J(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i \tilde{b}_{ij} y_j, \tag{2}$$

kvázi-háromszögű fuzzy számot adó $\tilde{E}_I(x,y) \in \mathcal{N}_{g_1,p_1}$ és $\tilde{E}_J(x,y) \in \mathcal{N}_{g_2,p_2}$ mennyiségek lesznek, ahol $(x,y) \in S_I \times S_J$.

3.1. Definíció. Egy $(x^*, y^*) \in S_I \times S_J$ a $\tilde{\Gamma}$ játék Nash-egyensúlya, ha $x^T \tilde{A} y^* \preccurlyeq_I x^{*T} \tilde{A} y^*$ és $x^{*T} \tilde{B} y \preccurlyeq_J x^{*T} \tilde{B} y^*$ bármely $(x,y) \in S_I \times S_J$ esetén.

Hasonló módon érvelve, mint a klasszikus játékoknál, figyelembe véve a $\preccurlyeq_I$ és $\preccurlyeq_J$ nem teljes előrendezések tulajdonságait, a fuzzy játékokra a korrelált egyensúlyt a következőképpen értelmezzük.

3.2. Definíció. ([16]) A P együttes valószínűségi eloszlás korrelált egyensúlya a $\tilde{\Gamma}$ játéknak, ha

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\tilde{a}_{kj} \preccurlyeq_I \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\tilde{a}_{ij} \text{ bármely } i \in I \text{ és } k \in I \setminus \{i\}\,;$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij}\tilde{b}_{il} \preccurlyeq_J \sum_{i=1}^{m} p_{ij}\tilde{b}_{ij} \text{ bármely } \; j \in J \text{ és } l \in J \setminus \{j\}\,.$$

3.3. Megjegyzés. Úgy a Nash-, mint a korrelált egyensúly értelmezésében azt feltételezzük, hogy a reláció két oldalán levő kvázi-háromszögű fuzzy számok összehasonlíthatóak. Ezeket a típusú értelmezéseket a szakirodalomban „erős” jelzővel illetik. A „gyenge” jelzőt használnánk, ha az értelmezések így lennének megfogalmazva: „a relációk bal és jobb oldalán szereplő két kvázi-háromszögű fuzzy szám nem összehasonlítható, vagy ha összehasonlítható, akkor teljesülnek a megadott relációk”.

A következő tétel szemlélteti a fuzzy játékokban a Nash- és a korrelált egyensúlyok közötti kapcsolatot. A tétel bizonyítása a [16] cikkben található.

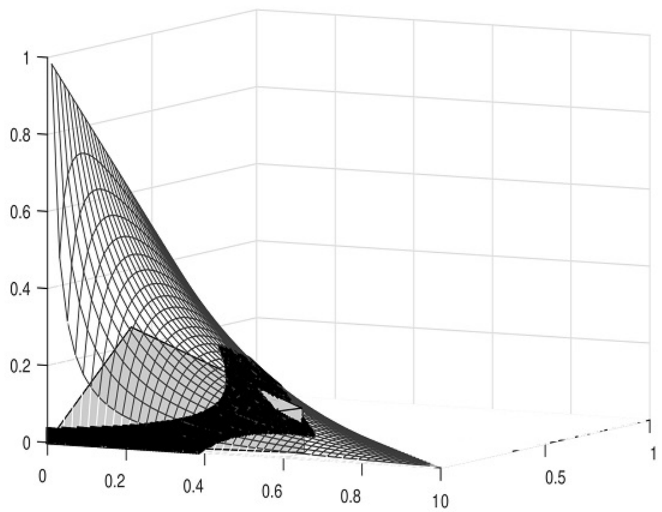
3.4. Tétel. (Makó-Salamon, 2020) Tekintsük a $\tilde{\Gamma}$ kétszemélyes, nem-kooperatív, fuzzy játékot.

i) Ha $(x^*, y^*) \in S_I \times S_J$ egy Nash-egyensúlya a $\tilde{\Gamma}$ játéknak, akkor a $P = (p_{ij})_{m\times n}$ együttes valószínűségi eloszlás, ahol $p_{ij} = x_i^* y_j^*$ $(i \in I, j \in J)$ korrelált egyensúlya a $\tilde{\Gamma}$ játéknak.

ii) Ha $P = (p_{ij})_{m\times n}$ együttes valószínűségi eloszlás a $\tilde{\Gamma}$ játék korrelált egyensúlya, és az $(x, y) \in S_I \times S_J$ peremeloszlásokra teljesül a $p_{ij} = x_i y_j$ összefüggés bármely $i \in I$, $j \in J$ esetén, akkor (x, y) Nash-egyensúlya a $\tilde{\Gamma}$ játéknak.

A klasszikus játékok geometriáját Nau, Canovas és Hansen [18] tanulmányozta. Ezen játékok esetén jelöljük Π-vel az összes P együttes valószínűségi eloszlás halmazát. Geometriailag Π egy $mn - 1$ dimenziós szimplexet határoz meg. Jelöljük D-vel az egyenlőtlenségi feltételek által meghatározott korrelált egyensúlyok halmazát. Geometriailag ez egy konvex politóp.

Legyen E az összes független, együttes valószínűségi eloszlások halmaza. Ha a Nash-egyensúlyokat együttes eloszlásoknak tekintjük, akkor a Nash-egyensúlyok halmaza $D \cap E$, amely Nash tétele alapján nem üres. A klasszikus, kétszemélyes, véges, nem-kooperatív játékok esetén a Nash-egyensúlyok, mint együttes eloszlások a korrelált egyensúlyok halmazának a határán helyezkednek el [18].



1. ábra. A Nash- és korrelált egyensúlyok közötti kapcsolat Maeda modelljében.

3.5. Megjegyzés. A 3.4. Tétel állítása nem triviális, függ a preferencia rendezés tulajdonságaitól. Maeda a [14] cikkében a preferencia rendezést a lehetőségi mérték (angolul: possibility degree) segítségével értelmezte. Így az ő modelljében nem teljesül a 2.3. Definíció tranzitivitási feltétele, valamint a C2 feltétel direkt iránya. Igazolható, hogy ekkor létezik olyan fuzzy játék, amelyben a 3.4. Tétel i) tulajdonsága nem teljesül. Az ilyen játékoknál, a Maeda modelljében a korrelált egyensúlyok politópja és a Nash-egyensúlyok között a 1. ábrán szemléltetett kapcsolat mutatható ki. Fekete szín jelöli a Nash-féle egyensúlypontokat, szürke szín a korrelált egyensúlyok politópját (D), hálórács a játékosok között független eloszlások nyeregfelületét (E). Megfigyelhető, hogy $D \cap E$ szigorú részhalmaza a Nash-egyensúlypontok halmazának. Tehát vannak olyan Nash-egyensúlyok, amelyek nem korreláltak.

Sajátos esetként tekintsük azt a $\tilde{\Gamma}$ játékot, amelyben a nem teljes előrendezés az alábbi összefüggésekkel van megadva:

$$\tilde{a}_1 \preccurlyeq_I \tilde{a}_2 \;\Leftrightarrow\; a_1 - (d_1)^{q_1} \le a_2 - (d_2)^{q_1} \text{ és } a_1 + (d_1)^{q_1} \le a_2 + (d_2)^{q_1}$$

bármely $\tilde{a}_1 = \langle a_1, d_1 \rangle \in \mathcal{N}_{g_1,p_1}$, $\tilde{a}_2 = \langle a_2, d_2 \rangle \in \mathcal{N}_{g_1,p_1}$ esetén. Hasonlóan értelmezzük a $\preccurlyeq_J$ nem teljes előrendezést az $\mathcal{N}_{g_2,p_2}$-ben is.

Mivel $\preccurlyeq_I$ és $\preccurlyeq_J$ olyan nem teljes előrendezések, amelyek teljesítik a

2.3. Definíció feltételeit, ezért a 3.4. Tételben megfogalmazottak itt is érvényesek maradnak.

Ha $\Gamma_{bal} = \big(I, J, S_I, S_J, A^{bal}, B^{jobb}\big)$ és $\Gamma_{jobb} = \big(I, J, S_I, S_J, A^{jobb}, B^{jobb}\big)$ jelöli azokat a kétszemélyes, klasszikus játékokat, amelyek kifizetési mátrixai $A^{bal} = \big(a_{ij}^{bal}\big)_{m\times n}$, $B^{bal} = (b_{ij}^{bal})_{m\times n}$, illetve $A^{jobb} = (a_{ij}^{jobb})_{m\times n}$, $B^{jobb} = \Big(b_{ij}^{jobb}\Big)_{m\times n}$, ahol $a_{ij}^{bal} = a_{ij} - \big(d_{ij}^{a}\big)^{q_1}$, $a_{ij}^{jobb} = a_{ij} + \big(d_{ij}^{a}\big)^{q_1}$, $b_{ij}^{bal} = b_{ij} - \big(d_{ij}^{b}\big)^{q_2}$ és $b_{ij}^{jobb} = b_{ij} + \big(d_{ij}^{b}\big)^{q_2}$, akkor az alábbi tulajdonság fogalmazható meg.

3.6. Állítás. ([16]) Egy P együttes valószínűségi eloszlás akkor és csakis akkor korrelált egyensúlya a $\tilde{\Gamma} = \Big(I, J, S_I, S_J, \tilde{A}, \tilde{B}, \preccurlyeq_I, \preccurlyeq_J\Big)$ fuzzy játéknak, ha P korrelált egyensúlya a Γ_{bal} és Γ_{jobb} klasszikus játékoknak, azaz

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} a_{ij}^{bal} \geq \sum_{j=1}^{n} p_{ij} a_{kj}^{bal}, \quad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} a_{ij}^{jobb} \geq \sum_{j=1}^{n} p_{ij} a_{kj}^{jobb}, \text{ bármely } i, k \in I;$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} b_{ij}^{bal} \geq \sum_{i=1}^{m} p_{il} b_{il}^{bal}, \quad \sum_{i=1}^{m} p_{ij} b_{ij}^{jobb} \geq \sum_{i=1}^{m} p_{ij} b_{il}^{jobb}, \text{ bármely } j, l \in J.$$

Az alábbiakban olyan fuzzy játékra adunk példát, amelynek van korrelált egyensúlya, de nincs Nash-egyensúlya.

3.7. Példa. Tekintsük azt a játékot, amelyben a bal, illetve a jobb oldali játékok kifizetési mátrixai a következők:

Γ_{bal}	1	2	3
1	$(15, 2)$	$(6, 11)$	$(13, 10)$
2	$(8, 19)$	$(16, 16)$	$(5, 7)$
3	$(18, 6)$	$(11, 4)$	$(9, 15)$

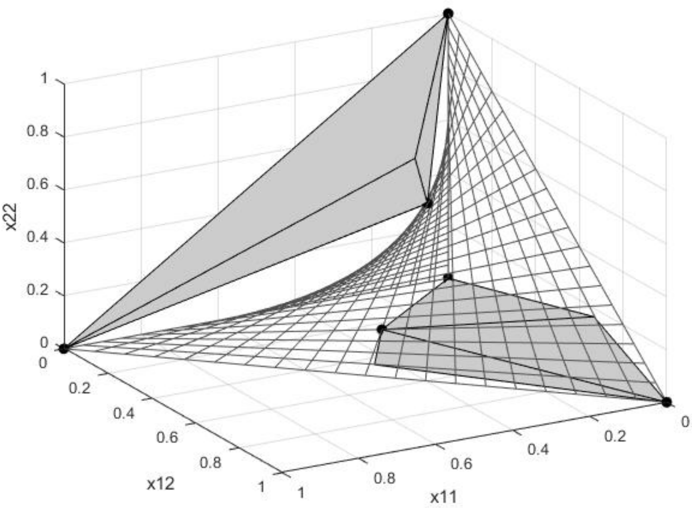
Γ_{jobb}	1	2	3
1	$(16, 5)$	$(8, 17)$	$(18, 15)$
2	$(14, 23)$	$(20, 20)$	$(12, 12)$
3	$(23, 13)$	$(15, 10)$	$(14, 20)$

A Γ_{bal} játék egyetlen Nash-egyensúlya:

$$x_0^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{19}{45}, \frac{17}{45}\right), \quad y_0^* = \left(\frac{3}{77}, \frac{25}{77}, \frac{7}{11}\right),$$

ami nem Nash-egyensúlya a Γ_{jobb} játéknak.

Ha $(x^*, y^*) \in S_I \times S_J$ Nash-egyensúlya lenne a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játéknak, akkor a 3.4. Tétel alapján $P = (p_{ij})_{m\times n}$, ahol $p_{ij} = x_i^* y_j^*$, korrelált egyensúlya lenne a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játéknak. Azaz a 3.6. állítás alapján P korrelált egyensúlya a Γ_{bal} és Γ_{jobb} klasszikus játékoknak is. Ebből következik, hogy (x^*, y^*) Nash-egyensúlya a Γ_{bal} és Γ_{jobb} klasszikus játékoknak. Mivel a Γ_{bal} játéknak egyetlen Nash-egyensúlya van $(x^*, y^*) = (x_0^*, y_0^*)$. Tehát (x_0^*, y_0^*) Nash-egyensúlya a Γ_{jobb} játéknak, ami ellentmond az előző bekezdés kijelentésének. Következésképpen, a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játéknak nincs Nash-egyensúlya.



2. ábra. A Nash- és korrelált egyensúlyok geometriája a 3.8. Példában.

A korrelált egyensúly definícióját felhasználva könnyen igazolható, hogy a

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \text{ és } P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

együttes valószínűségi eloszlások korrelált egyensúlyai a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játéknak.

Tudjuk, hogy a klasszikus kétszemélyes, véges játékok kevert bővítésének mindig van Nash- és korrelált egyensúlya. Az alábbi példa azt szemlélteti, hogy ezen játékokkal ellentétben nem minden fuzzy játéknak létezik korrelált egyensúlya.

3.8. Példa. Tekintsük azt a játékot, amelyben a bal, illetve a jobb oldali játszmák kifizetési mátrixai a következők:

Γ_{bal}	1	2
1	$(10,10)$	$(7,4)$
2	$(7,4)$	$(10,6)$

Γ_{jobb}	1	2
1	$(21,22)$	$(17,23)$
2	$(25,19)$	$(13,15)$

Amikor a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játék geometriáját szeretnénk szemléltetni, az előbbiekben Nau, Canovas és Hansen [18] által megfogalmazott tulajdonságot alkalmazzuk a Γ_{bal} és a Γ_{jobb} klasszikus játékokra. A 2. ábra a Nash- és korrelált egyensúlyok geometriáját mutatja. A kis fekete körök a bal, illetve a jobb oldali játék

Nash-egyensúlypontjai. Mivel ezek különböznek, a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játéknak nincs Nash-egyensúlya. A hálórács a játékosok között független eloszlások nyeregfelületét (E), a szürke politópok pedig a bal és jobb oldali játékok korrelált egyensúlyainak halmazait szemléltetik. Megfigyelhető, hogy a politópok az E felület különböző oldalain helyezkednek el és nincs közös pontjuk. Ezért ennek a $\tilde{\Gamma}$ fuzzy játéknak nincs korrelált egyensúlya.

Hivatkozások

[1] R.J. Aumann: *Utility theory without the completeness axiom*, Econometrica, Vol. **30**, pp. 445–462 (1962). DOI: 10.2307/1909888

[2] R.J. Aumann: *Subjectivity and correlation in randomized strategies*, J. Math. Econ., Vol. **1**, pp. 67–96 (1974). DOI: 10.1016/0304-4068(74)90037-8

[3] R.J. Aumann: *Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality*, Vol. **55**, pp. 1–18 (1987). DOI: 10.2307/1911154

[4] C.R. Bector, S. Chandra: *Fuzzy mathematical programming and fuzzy matrix games*, Springer (2005). DOI: 10.1007/3-540-32371-6

[5] D. Butnariu: *Fuzzy games: A description of the concept*, Fuzzy Sets Syst., Vol. **1**, pp. 181–192 (1992). DOI: 10.1016/0165-0114(78)90003-9

[6] L. Cunlin, Z. Qiang: *Nash equilibrium strategy for fuzzy non-cooperative games*, Fuzzy Sets Syst., Vol. **176**, pp. 46–55 (2011). DOI: 10.1016/j.fss.2011.03.015

[7] F. Forgó, J. Szép, F. Szidarovszky: *Introduction to the Theory of Games, Concepts, Methods, Applications*, Kluwer Academic Publishers (1999). `https://link.springer.com/book/9780792357759`

[8] F. Forgó: *A generalization of correlated equilibrium: A new protocol*, Math. Soc. Sci., Vol. **60**, pp. 186–190 (2010). DOI: 10.1016/j.mathsocsci.2010.08.002

[9] F. Forgó: *Egyensúly a játékelméletben: egzisztencia és általánosítások*, Akadémiai doktori értekezés (2014). `http://real-d.mtak.hu/728/7/dc_837_14_doktori_mu.pdf`

[10] C. Carlsson, R. Fullér: *Fuzzy Reasoning in Decision Making and Optimization*, Studies in Fuzziness and Soft Computing Series, Vol. **82**, Springer (2002). DOI: 10.1007/978-3-7908-1805-5

[11] A.X. Jiang, K. Leyton-Brown: *Polynomial-time computation of exact correlated equilibrium in compact games*, Games Econ. Behav., Vol. **91**, pp. 347–359 (2015). DOI: 10.1515/crll.1902.124.1

[12] M. Kovács: *A stable embedding of ill-posed linear systems into fuzzy systems*, Fuzzy Sets Syst., Vol. **45**, pp. 35–312 (1992). DOI: 10.1016/0165-0114(92)90148-W

[13] M. Larbani: *Solving bimatrix games with fuzzy payoffs by introducing Nature as a third player*, Fuzzy Sets Syst., Vol. **160**, pp. 657–666 (2009). DOI: 10.1016/j.fss.2008.06.010

[14] T. Maeda: *Characterization of the equilibrium strategy of the bimatrix game with fuzzy payoff*, J Math Anal Appl., Vol. **251**, pp. 885–896 (2000). DOI: 10.1006/jmaa.2000.7142

[15] Z. Makó: *Real vector space of LR-fuzzy intervals with respect to the shape-preserving t-norm-based addition*, Fuzzy Sets Syst., Vol. **200**, pp. 136–149 (2012). DOI: 10.1016/j.fss.2012.02.014

[16] Z. Makó, J. Salamon: *Correlated equilibrium of the games in fuzzy environment*, Fuzzy Sets Syst., Vol. **398**, pp. 112–127 (2020). DOI: 10.1016/j.fss.2020.03.001

[17] J. Nash: *Noncooperative games*, Ann. Math., Vol. **54**, pp. 286–295 (1951). DOI: 10.2307/1969529

[18] R. Nau, S.G. Canovas, P. Hansen: *On the geometry of Nash equilibria and correlated equilibria*, Int. J. Game Theory, Vol. **32**, pp. 443–453 (2003). DOI: 10.1007/s001820300162

[19] I. Nishizaki, M. Sakawa: *Fuzzy and Multiobjective Games for Conflict Resolution*, Physica-Verlag, Heidelberg, (2001). DOI: 10.1515/9781400829460

Makó Zoltán a középiskolát a sepsiszentgyörgyi Székely Mikó Kollégiumban végezte, majd a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem matematika szakán szerzett egyetemi oklevelet. Doktorátusi tézisét a fuzzy optimalizálás témaköréből írta, amelyet 2002-ben mutatott be. Az egyetem elvégzése után, 1992-ben a kézdivásárhelyi Gábor Áron Szakközépiskolába kapott tanári kinevezést. 1997-ben a Babeş-Bolyai Tudományegyetem Mechanika és Csillagászati tanszékének tanársegédje, majd adjunktusa lett. 2006-tól a Sapientia-EMTE Csíkszeredai Karának főállású oktatója. Jelenleg (2016-tól) a Sapientia-EMTE Csíkszeredai Karának egyetemi tanára, ahol a matematikai analízis, a gazdasági döntések matematikai modellezése és a döntéselmélet tantárgyakat oktatja. Kutatási területei: fuzzy optimalizálás, játékelmélet, mesterséges intelligencia és égi mechanika.

MAKÓ ZOLTáN
Sapientia-Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Csíkszeredai Kar
makozoltan@uni.sapientia.ro

Salamon Júlia a középiskolát a csíkszeredai Márton Áron Gimnáziumban végezte. A kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem matematika-informatika szakán szerzett egyetemi oklevelet 2002-ben, majd ugyanitt folytatta doktorátusi tanulmányait. Doktorátusi tézisét a paraméteres vektor egyensúlyi feladatok témaköréből írta, amelyet 2009-ben mutatott be. 2002-től a Sapientia-EMTE Csíkszeredai Karának főállású oktatója. Jelenleg (2013-tól) a Sapientia-EMTE Csíkszeredai Karának egyetemi docense, ahol az informatika (Matlab), operációkutatás, programozás és adatstruktúrák tantárgyakat oktatja. Kutatási területei: vektor egyensúlyi feladatok, játékelmélet.

SALAMON JúLIA
Sapientia-Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Csíkszeredai Kar
salamonjulia@uni.sapientia.ro

CORRELATED EQUILIBRIA IN FUZZY GAMES

Zoltán Makó, Júlia Salamon

In this paper, we discuss the relationship between correlated and Nash equilibria for two-player, non-cooperative fuzzy games. We show that, similarly to classical games, the Nash equilibrium can be constructed as a correlated equilibrium that yields independent marginal distributions.

Keywords: Fuzzy game; Fuzzy number; Correlated equilibrium; Nash equilibrium

Mathematics Subject Classification (2000): 90C70, 91A05.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok megjelenését támogatja
a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

A kiadásért felelős a BJMT főtitkára
Szedte és tördelte: Moczár Károly

Nyomta a Coradix Kft., Budapest
Felelős vezető: Szűcs Ernőné

Budapest, 2023
Megjelent 18 (A/5) ív terjedelemben
100 példányban
HU ISSN 0133-3399

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A közlésre szánt dolgozatokat és mellékleteiket egy tömörített zip fájlban e-mailen az `aml@renyi.hu` címre kérjük elküldeni.

A részletes instrukciók és a LaTeX minta fájl megtalálhatók az AML honlapján, a cikkek benyújtása http://aml.math.bme.hu/?page_id=7 címén. Mivel az Alkalmazott Matematikai Lapokban megjelenő cikkek 2019 óta DOI azonosítót kapnak, az irodalomjegyzékben szereplő minden forrás adatai között szerepeltetni kell a DOI azonosítót is, amennyiben rendelkezik ilyennel.

Kérjük a szerzőket, hogy a cikk benyújtása előtt ellenőrizzék az alábbi elemek meglétét:

A teljes cikk, benne:

magyar nyelvű kivonat

a cikk szövege, valamint ábrák és táblázatok, ha vannak

irodalomjegyzék, DOI azonosítókkal együtt

szerzők bemutatása és fotói, munkahelyei és e-mail címei

angol nyelvű cím és kivonat

Mellékelt fájlok:

a cikk LaTeX forráskódja, és a teljes cikk pdf formátumban

ábrák, képek fájljai

szerzők fotói

A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX