Bojár Gábor: Matematikaoktatás – az ország valós gazdasági kitörési pontja

A Rátz László Vándorgyűlésen 2023. július 4-én elhangzott előadás rövidített változata

Ezt a cikket elsősorban egykori cégem, a Graphisoft tapasztalatai inspirálták. Még ha nem is általánosíthatók a konklúziók, érdemes megosztani őket.

Minek köszönhettük az első sikereket Amerikában?

1989 elején nyitottuk meg irodánkat a kaliforniai Szilícium-völgyben. Az építész-tervező szoftverünkkel elért kezdeti nyugat-európai eredmények után úgy éreztük, itt az ideje az amerikai piac meghódításának is. Tulajdonképpen fogalmunk sem volt róla, hogy mibe vágunk, ottani partnereink szerint ha tudjuk, el sem kezdjük. Ebben az iparágban messze az amerikai cégek a legerősebbek, és a hazai pályájukon versenyezni a legerősebbekkel – enyhén szólva – elég bátor vállalkozás. A legnagyobb akadály azonban az a hatalmas marketingzaj, amelyben egy kicsi európai cégnek felhívni magára a figyelmet szinte reménytelen. De a sikerhez a kitartás mellett szerencse is kell, nekünk pedig szerencsénk volt az időzítéssel.

Alig melegedtünk meg a Szilícium-völgyben, amikor Magyarországon nagy dolog történt. Lebontottuk a vasfüggönyt, kiengedtük a keletnémeteket, ez volt az első lépés a berlini fal lebontásához és az ún. „szocialista világrendszer” összeomlásához. Ezért Magyarország kiemelt figyelmet élvezett a világban, Amerikában is. Csak illusztrációként egy kis helyi újság cikkeinek arányairól: a San Francisco-öböl mentén fekvő San Mateo nevű városka (itt laktunk) helyi lapja, a San Mateo Times 20 oldalából 19 helyi hírekkel volt tele, csak az utolsó oldal foglalkozott a világ többi részével „Túl az Öblön” címmel. Ebből fél oldal még mindig Amerika többi részével, de a világ Amerikán túli részéről szóló legutolsó fél oldalon már Magyarországnak is jutott hely.

A publicitást sztorival lehet megvenni, és a hazánkra irányuló figyelem közepette egy magyar cég a Szilícium-völgyben sztorinak számított. Kis irodánkban egymásnak adták a kilincset az újságírók, mi pedig boldogan és büszkén adtuk az interjúkat. Volt egy visszatérő kérdés: hogyan lehetett mindezt elérni a vasfüggöny mögött? Hiszen nem jutottunk tőkéhez (azt sem tudtunk még mi az), nem jutottunk a legmodernebb számítógépekhez sem (Magyarország rajta volt a modern nyugati számítógépek keleti exportját tiltó ún. COCOM-listán), és útlevelet sem lehetett könnyen kapni nyugatra. Mindennek ellenére ekkor már jelentős piaci részedésünk volt Nyugat-Európában, és fél év után már az amerikai piacon is látszottunk egy kicsit. – Mi lehetett volna ebből a cégből, ha itt a Szilícium-völgyben alakul?! – szólt a költői kérdés. – Itt valószínűleg nem sikerül, ami sikerült Magyarországon – válaszoltam őszintén. Az útlevelet kisírtam a Belügyminisztériumban azzal, hogy keményvalutát hozunk az országnak; a legmodernebb PC-ket becsempésztük a Trabant csomagtartójában; és tőke sem kellett nagyon, olcsó volt még az élet itthon, és megtanultunk a vevőink pénzéből élni. (Ez utóbbit egyébként melegen ajánlom a mai vállalkozóknak is.) Volt viszont egy olyan előnyünk, ami a szilícium-völgyi kezdő vállalkozóknak a legnehezebb: megszerezni a legjobb fiatal tehetségeket. Mert ott ezekért folyik a legádázabb verseny. Akik biztonságra vágynak, elmehetnek egy ottani nagy sztárcéghez (Apple, Microsoft stb.), akiben pedig van kurázsi és ambíció, saját céget alapít. De ki megy el egy másik kezdő céghez, ahol nem garantált a siker? Nekünk ebben volt előnyünk itthon. A magánvállalkozások kezdetén (az idősebb olvasók talán még emlékeznek a „gmk” és a „kisszövetkezet” fogalmára) vonzónak tűnt egy ilyenhez csatlakozni, a hazai állami vállalatok nem jelentettek konkurenciát a tehetségek csábításában, a nagy nyugati cégekhez pedig nem volt még egyszerű kijutni. Amikor pedig valóban hoztunk némi keményvalutát, a Graphisoft minden munkatársa megkapta a kivételes privilégiumnak számító állandó kilépésre jogosító szolgálati útlevelet. Így könnyű volt a legjobbakat felvenni. És a legjobbak tényleg nagyon jók voltak. Mert még létezett egy magas szintű oktatás Magyarországon, Eötvös József és Klebelsberg Kuno hagyatékának maradéka, ezen belül különösen a matematikai oktatás, amit a Rákosi- és a Kádár-rendszer még nem vert szét.

Az oktatás színvonala mint gazdasági versenyelőny

Az ún. „szoftverexport" már a hetvenes-nyolcvanas években is nagy üzlet volt, ami akkor még valójában csak szoftvermérnökök órabérben történő bérbeadását jelentette. A vevők számítástechnikai fejlesztésekkel foglalkozó nyugat-európai nagyvállatok voltak (pl. Siemens, Ericson), a jó szoftveresekre már akkor is sokkal nagyobb volt a kereslet, mint a kínálat. Ezt az üzletet a nagyobb állami cégek és külkereskedelmi vállalatok fölözték le, de amikor a nyolcvanas évek elején megindultak a kisvállalkozások, ez is hamar a magánszférába ment át. Az ambiciózusabb kisvállalkozások pedig már nem álltak meg a szoftverfejlesztők bérbeadásánál, megkísérelték saját termékek kifejlesztését. A Graphisoft mellett komoly sikereket ért el a nyugati piacon az SzKI nevű állami vállalatból kivált Recognita, később például a Kürt Kft, és mellettük sok kevésbé ismert, tudatosan árnyékban maradó kisvállalkozás. Köszönhettük mindezt a még mindig jó matematikai és természettudományi közoktatásnak és az erre épülő jó minőségű műszaki felsőoktatásnak.

Amikor a világpolitikai fordulat nyomán magyarként élvezett publicitást igyekeztem egy kicsit szakmai síkra terelni, és a magyar műszaki tudományos eredményekre hivatkozva próbáltam cégem szakmai hátterének tekintélyt szerezni, akkor már nem jártam sikerrel. Szeretünk Nobel-díjasaink relatív nagy számával dicsekedni, de arról szemérmesen hallgatunk, hogy nagy többségük nem Magyarországon alkotta, amiért Nobel-díjat kapott, ezért nem magyarnak ismeri őket a világ, és Neumann Jánost, a számítógép egyik atyját sem magyarként tisztelik. Miután sokszor hivatkoztam rá, valaki egyszer megkérdezte, hogy miért büszkélkedem annyit vele, talán rokonom volt? Mert von Neumannt, a Princeton kutatóját, alighanem csak itthon tartjuk számon magyarként, hogy honnan jött, az Amerikában senkit sem érdekel. (Itt most csak mellékesen jegyzem meg, hogy Nobel-díjasaink többségét és Neumannt azok sem tartották magyarnak, akik a harmincas években elüldözték őket hazánkból.)

Világhírű matematikusaink nagy többségét viszont magyarként tartják számon a világban, joggal lehetünk tehát büszkék arra a matematikaoktatási hagyományra, amit a Fasori Evangélikus Gimnáziumban Neumann János és több Nobel-díjasunk tanárának neve, Rátz László tanár úr is fémjelez. Jelenlegi felsőoktatási vállalkozásom képviseletében sokat járok amerikai egyetemeken diákokat toborozni, és amikor a fogadó matematikus professzorok megtudják, hogy magyar vagyok, szinte az első kérdés, hogy mennyi az én „Erdős-számom". (Ezt a számot Erdős professzor hálózatelméleti illusztrációként fogalmazta meg, azt fejezi ki, hogy egy matematikus a publikációit tekintve milyen távol áll tőle.) Mivel matematikai tárgyú publikációkkal nem dicsekedhetek, nekem nincs Erdős-számom, de Erdős professzort a világ matematikusai magyarként ismerik, és alacsony Erdős-számukra büszkék szoktak lenni. Egy másik jellemző példával találkoztam a Columbia Universityn, ahol egy fiatal matematikus, Julianna Stockton (leánykori neve Connelly, tehát nincs magyar kötődése) a magyar matematikaoktatás titkairól írta PhD-dolgozatát. Ugyanezektől a professzoroktól hallottam egy másik színes történetet a magyar matematika tiszteletéről. Még a múlt század első felében a Princeton Universityn egy Harold W. Kuhn nevű matematikus az ún. „optimális hozzárendelési probléma" megoldásán dolgozott. Véletlenül felfigyelt egy magyar nyelvű matematikai publikációban a képletekre, ezekből látta, hogy a cikk szerzője, Egerváry Jenő is ezen a problémán dolgozik, sőt, mintha meg is oldotta volna. Gyorsan megtanult valamennyire magyarul, hogy megértse az egész cikket, és valóban, Egerváry megoldotta a problémát, a megoldást azóta is „Hungarian Method" néven ismerik a világban. De hogy ne menjek ennyire messzire, az eredetileg geometriai oktatási segédeszközként megalkotott, és a világ máig legsikeresebb logikai játékáról, a Rubik-kockáról is azt tartják, hogy azt csak magyarok találhatták fel.

Honnan eredhet mindez?

Sokak szerint nyelvünk sajátos, az indoeurópai nyelvektől eltérő szerkezete segíti a matematikai gondolkodást. Ehhez nem tudok hozzászólni, én inkább történelmi okokat vélek látni. Egy gyerekkori élményemet idézném. Hatévesen kezdtem az általános iskolát, és két hét után nagyapám megkérdezte, jó vagyok-e számtanból. Jó voltam, de miért fontosabb ez, mint más, kérdeztem vissza. Mert kétszer kettő az oroszoknak és a németeknek is négy, válaszolta két világháborút és két megszállást túlélt nagyapám. Ezért gondolom, hogy a matematika tisztelete talán a túlélését segíthette viharos történelmünk sok különböző kultúrájú nagyhatalmának megszállása során.

Mivel az informatika alapja a matematika, ennek köszönhettük, hogy magyar programozók keresettek lettek. A rendszerváltás után pedig már nemcsak a programozóinkat keresték az informatikai világcégek, hanem kutató-fejlesztő központokat telepítettek Magyarországra. Így lett Budapesten az Ericson egyik legnagyobb fejlesztő központja, és ha csak szűkebb környezetemben, a Graphisoft Parkban nézek körül, ott is sok nagy világcég kutató-fejlesztő központját találjuk. Több mint ezer szoftverfejlesztőt foglalkoztat nálunk Európa legnagyobb szoftveróriása, a német SAP, és 1998 óta nálunk van a világ legnagyobb szoftvergigásza, a Microsoft magyarországi vállalata is. A közel száz informatikai kis- és nagyobb vállalkozás között a Graphisoft Parkban működik a digitális filmgyártásnak technológiát fejlesztő és Hollywoodnak szállító DIGIC Pictures nevű vállalat, a félvezető fejlesztést kiszolgáló amerikai Silicon Labs, vagy Európa második legnagyobb gyógyszergyárának, a Servier-nek egyetlen Franciaországon kívüli kutató-fejlesztő központja.

A hazai alapítású és világsikert elért magyar szoftvercégek fentebb említett első generációját is újabbak követték, legismertebbek a prezentációs szoftverével a Microsofttal konkuráló Prezi, a video-streaming technológia egyik vezetője, a Ustream (ők az IBM része lettek) és a New Yorki Nasdaqon jegyzett LogMeIn. A bizalmas adatok biztonságos tárolását kínálja a világ erre érzékeny cégeinek a Tresorit, a Shapr3D nevű startup vállalkozás pedig tableteken forradalmasítja a háromdimenziós tervezést.

De miért csak ennyi?

Ezek a sikerek jól hangzanak, de a szoftveripar lehetőségeit tekintve sajnos nagyon kevesen vannak. Felmerül a kérdés, hogy miért nem valósult meg az „internet királynőjének" is hívott Esther Dyson jóslata, aki meg volt róla győződve, hogy matematikaoktatási kultúrájára építve az informatikai forradalom egyik győztese lehet a piacgazdaságra átálló Magyarország. Esther publikált először az informatikai forradalom várható társadalomátalakító hatásáról, és a kilencvenes években sokat járt Magyarországon, keresve azokat a vállalkozókat, akik ezt a páratlan kincset, a matematikai kultúrát üzleti sikerré konvertálják. De miért nem valósult meg Esther Dyson álma, miért csak ilyen kevés globális bajnokot talált Magyarországon?

Sokan abban látják ennek okát, hogy műszaki-tudományos és matematikai kultúránkhoz nem társul elegendő menedzsment és üzleti tudás. Ebben is lehet valami, de azt hiszem nem ez a fő ok, idézhetném nagy világcégekben felsővezetői karriert befutott honfitársaim listáját. Az az igazi baj, hogy a kincset érő oktatási kultúránk mára elolvadt. Nemcsak a korábbi magyar sikersztorikat nem követik újabb hazai alapítású informatikai startupok ezrei, de a multik is leálltak magyarországi kutató-fejlesztő bázisaik növelésével. Megkérdezhetjük őket: miért? A válasz egyértelmű: ma már nem kapják meg azokat a jól képzett szakembereket, akiket egy-két évtizede még megkaptak. Nincs utánpótlás, közvetlenül is érzékelhető az oktatás züllése.

Egy rövid kitérőt tennék, érzékeltetni, milyen hatalmas gazdasági lehetőséget hagyunk ki.

Ipar 4.0? Sokkal több!

2016-ban, a davosi Világgazdasági Fórumon hangzott el először a „Negyedik Ipari Forradalom” kifejezés, ezzel a címmel a Világgazdasági Fórum alapítója, Klaus Schwab könyvet írt, és azóta elterjedt az „Ipar 4.0” megjelölés. De azt hiszem, Klaus Schwab tévedett, mint ahogy Neumann János is tévedett, amikor „gépnek” nevezte alkotását. Azt hitte, hogy gépének fő feladata a bonyolult számítások automatizálása. Hasonló tévedésben volt, mint Kolumbusz Kristóf, aki azt hitte, hogy új utat fedezett fel Indiába, és élete végéig nem tudta, hogy sokkal többet, egy új világot fedezett fel. Neumann János is csak gyorsabban és pontosabban akart számolni, nem sejtve, hogy gépének legegyszerűbb műveletével, a „compare”-rel, két bit összehasonlításával, hogy egyeznek-e, egy új világot fedezett fel. Ez az egyszerű művelet ugyanis az alapja a keresésnek, tehát a digitálisan tárolt szinte végtelen méretű információtömegben bizonyos minták beazonosításának.

Klaus Schwab könyvének bevezetőjében ezt írja: „. . . az új technológiai forradalom nem kevesebbet jelent, mint az emberiség átalakítását. Egy olyan forradalom kezdeténél vagyunk, amely alapvetően változtatja meg életünket, munkánkat és egymáshoz való viszonyunkat.” Ezzel száz százalékban egyetértek. De amikor a robotokat, a drónokat, a holdraszállást, a távsebészetet, a 3D nyomtatást, az önvezető autót vagy akár a mesterséges intelligenciát sorolja az informatikai forradalom leghatásosabb termékeiként, és az ipari forradalom egyes mérföldköveivel állítja párhuzamba az egész informatikai forradalmat, akkor azt hiszem, félreérti a lényeget. A Google Search már eddig is sokkal jobban megváltoztatta „életünket, munkánkat és egymáshoz való viszonyunkat”, mint az önvezető autó fogja, ha elterjed végre. Ha a napjainkban zajló informatikai forradalom várható hatásának mértékét szeretnénk érzékeltetni, akkor ezt nem az ipari forradalom egyes fejezeteihez kell hasonlítanunk, hanem inkább két korábbi „informatikai forradalom” hatását érdemes nézni.

Az első informatikai forradalom a homo sapiens által elsőként megvalósított szofisztikált *információcsere*, a tagolt *beszéd* megjelenése volt, mintegy negyven-, ötvenezer évvel ezelőtt. Ez tette képessé az embert viszonylag bonyolult szerszámok és fegyverek (kőbalta, dárda, nyíl stb.) megalkotására, a beszéd révén tudott a hordáknál nagyobb és jobban működő törzseket megszervezni, ez tette a homo sapienst erősebbé minden más állatnál. Őseink azt is felismerték, hogy a megőrzött információ mennyire értékes, ezért élveztek az őskori törzsek öregjei mint az információ őrzői kiemelt státuszt.

A következő informatikai forradalmat az *írás*, tehát az *információ tárolásának* fejlettebb módja hozta el, elérhetővé téve a generációk által felhalmozott információt időbeli és térbeli korlátok nélkül. Az írás nyomán civilizációk és birodalmak születtek. A nemzedékek gyűjtötte és írásban megőrzött információ révén a tudás kumulatívvá vált, és bekövetkezett az ún. „információrobbanás”, már a kétezer évvel ezelőtti alexandriai könyvtár félmilliónyi kötetét sem lehetett könnyen feldolgozni. Ez a kihívás hozta el napjaink informatikai forradalmát, a digitálisan tárolható, akár végtelen mennyiségű információ feldolgozásának képességét. Ez a harmadik (digitális) informatikai forradalom igazi jelentősége, és azt hiszem, nem szakmai sovinizmus mondatja velem, hogy a „negyedik ipari forradalom” vagy „Ipar 4.0” megjelölés alábecsüli napjaink forradalmának valódi súlyát.

Még nem tudhatjuk, hogy mindez hová vezet. Az egymással beszélő, összetett információt cserélő homo sapiens sem sejthette eleinte, hogy ez teszi majd képessé fegyverek magalkotására, mellyel a Föld legerősebb élőlényévé válik. A sumérok sem sejthették még, hogy a felfedezésük, az írásban megőrzött, kumulatívvá váló tudás nyomán gazdag civilizációk születnek. Mi sem tudhatjuk még, hogy hová vezet a végtelen mennyiségű információ feldolgozását megoldó harmadik informatikai forradalom, de annyit megjósolhatunk, hogy az előző kettőhöz hasonló méretű változásokhoz.

Ezt hagyjuk ki!

Mivel az informatika alapja a matematika, az informatikai forradalommal Magyarország előtt óriási lehetőség nyílt. Akár az ipari forradalmat is nézhetjük analógiaként arra, hogy nagy változásokkal járó időszakban hogyan tehetnek hagyományai győztessé egy nemzetet. A korábban nem túl gazdag Anglia úgy lett az ipari forradalom győztese, hogy előzőleg a nagy felfedezéseket követő gyarmatosítási versenyt nyerte meg. És a gyarmatosítási versenyben miért győzött, miért tudta legyőzni az előtte legsikeresebben gyarmatosító spanyol birodalmat? Arra gondolok (és elnézést a képzett történészektől, ha ez túlzott egyszerűsítés), hogy talán azért, mert az angolok szigetországban élvén jobban tudtak hajózni, és volt egy kivételesen ügyes hajósuk, Francis Drake, aki legyőzte a náluk sokkal nagyobb spanyol armadát. Ehhez persze az is kellett, hogy legyen egy olyan uralkodójuk I. Erzsébet személyében, aki felismerte a lehetőséget, felismerte, hogy a nagy felfedezések után a világtengereken dől el a világ sorsa, ezért erőforrásait hajóhad építésébe fektetette.

Ma az ipari forradalomnál sokkal jelentősebb informatikai forradalomban az lehet győztes, aki világtengerek helyett a cyber-térben tud jól hajózni. A cyber-tér meghódítására alkalmas „hajóhad” pedig az informatika alapját jelentő matematika magas szintű oktatása. Az lehet most a győztes, akinek ebben vannak erős hagyományai. Ehhez persze az is kellene, hogy az uralkodó felismerje a lehetőséget.

Mostanában vállalkozási ismereteket oktatok fiatal vállalkozójelölteknek, és az egyik első órám arról szól, hogyan válasszunk piacot. Ne azt nézzük, hogy melyik a legjobb piac, hol van egy „rés”, amit még nem fedezett fel senki, hanem azt, hogy mi miben vagyunk jobbak versenytársainknál, és ahhoz keressük meg a piacot. Nem érdemes egy nagy piacért küzdeni, ha abban mások jobbak lehetnek. Az sem baj, ha a mi tudásunkat értékelő piac nem nagy, kis piacon kisebb a tülekedés. Persze az a legjobb, ha a tudásunkat értékelő piac nagy. Magyarország a sors adományaként most kivételesen szerencsés helyzetbe került. A világ által elismert és csodált matematikai hagyományainkat a világ szoftverpiaca értékeli, ez egy nagyon nagy és növekvő piac. Ennek meghódításához csak egy dolog kell: a közoktatás és ezen belül különösen a világ csodálatát egykor joggal kiváltó matematikaoktatási kultúránk megbecsülésének helyreállítása.

Egy amatőr matematikus bemutatása

Az amatőr matematikusok tudnak kellemetlen perceket okozni. Ugyanis általában csak felületesen értik a megoldatlan problémákat, „apróbb" logikai bakugrások nem zavarják őket, viszont meg vannak győződve, hogy valami nagyon fontosat találtak ki. És feltétlenül szeretnék eredményeiket a világgal tudatni. Kedvencem e témából egy saját kiadású kis könyvecske, amiben az amerikai szerző a négyszínsejtést „bizonyította be" még akkor, amikor az nem volt megoldva. Az első fejezet arról szólt, hogy természetesen csak egy mérnök találhatta meg a bizonyítást, mert a matematikusokat mindenféle rögeszmék hátráltatják. Itt a pontos következtetési szabályokra gondolt. Nagyon sajnálom, de a kis kék könyvecske elveszett az évek során. Na ja, már nem is fontos, mert a négyszínsejtés azóta tétel lett.

Egyszer a Rutgers University tanszéki kávézásánál elegyedett szóba velem egy indiai külsejű „kolléga". Amikor kiderült, hogy Bengáliából származik, egy pár szót mondtam neki bengáliul, teljesen a bizalmába fogadott. Elárulta, hogy van egy egyszerű bizonyítása a négyszíntételre. (Tudta, hogy már tétel!) Gyorsan adott is egy példányt, hogy nézzem meg. Mivel már „annyira összebarátkoztunk", úgy éreztem, muszáj megnéznem. Meg is néztem, és azt írtam neki, hogy „nincs benne hiba", ugyanis nem követi a matematikai logika szabályait. A válasza ez volt: „Szóval nincs benne hiba, akkor publikálható, hova adjam le?"

Itt viszont egy olyan amatőrt mutatunk be, aki – üdítő kivételként – érti a matematikai gondolkozás lényegét. De életsora nem engedte meg neki, hogy komolyan tanuljon matematikát. Amatőrként sok mindent megértett, és hajtja az új kitalálásának vágya, de tudása – sajnos – nem elégséges. Az alábbiakban Benkő Miklós rövid életrajza található, utána az általa a Matematikai Lapokhoz beküldött cikkére írt – elutasító – lektori vélemény, végül maga a cikk.

Katona Gyula

Benkő Miklós rövid életrajza

1959-ben született. Édesapja öntvényberajzoló volt a Csepel Vas- és Fémművekben. Édesanyja háztartásbeli (7 gyermekkel), majd idegennyelvű leíró (gépírónő) az Út-Vasúttervező Vállalatnál. Gyermekeik nevelésére és oktatására nagy hangsúlyt helyeztek. Miklós fiuk 7 éven át tanult zongorázni, majd a Budapesti Piarista Gimnázium diákkántora lett. 1977-ben elvégezte a (római katolikus) nyári kántorképzőt. 1978-ban papnövendéknek jelentkezett, és fel is vették a R.K. Hittudományi Akadémiára. Ez a pályaválasztás (utólag megítélve) elhibázott volt. Miklóst mindig a természettudományok vonzották, matematikából és fizikából jelesre érettségizett, ezzel szemben magyar nyelv és irodalomból, valamint történelemből is 3-ast kapott. Elsősorban az motiválta, hogy lelkiatyjának a kedvében járjon. Így aztán fél év múlva vizsgáinak a felét sem tudta letenni. Idegösszeomlást kapott, mert arra nevelték, hogy ha elkezdett valamit, akkor azt fejezze is be. Ekkor a vallásos hitét is elveszítette, mert úgy érezte, elöljárói betegségével magára hagyták. Könyvesbolti eladó lett. A Váci utcai Gondolat könyvesboltban dolgozott, megtanulta, hogy az „ismeretterjesztés" nem azonos a „szakkönyvekkel". Szabad idejében annyit olvashatott, amennyit csak akart. 1980 tavaszán felvételre jelentkezett a Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskolára, és fel is vették. A katonaságot (kórházi zárójelentésére való tekintettel) elkerülte, tanulmányait a nappali tagozaton 1981-ben kezdte meg, és 4 év alatt fejezte be (egy félévet halasztott). Elsőéves korában részt vett a „házi" matematikaversenyen, pénz- és könyvjutalmat kapott a helyezéséért. Az 1986-os évben 4 cikke jelent meg, egy a Mikroszámítógép Magazinban a negyedfokú algebrai egyenlet Ludovico Ferrari-féle megoldóképletéről, a másik három a Mérés és Automatikában. Utóbbiak egy negyedrendű differenciálegyenlet megoldásáról szóltak, melynek elvégezte differenciálszámítását egy speciális esetre, és burkológörbe-analízisét is, általános esetre.

„Civil" élete 1985-ben kezdődött a Kohászati Gyárépítő Vállalat Műszer-Automatika gyáregységének mikroszámítógépes csoportjában, ahol mérnöki-számítástechnikai munkát végzett. 1988 őszén beiratkozott az ELTE programozó matematikus szak esti tagozatára, kis túlzással azért, hogy legyen papírja arról, amit csinál. Az első félévet sikerrel abszolválta, de tavasszal új tantárgyat kaptak („Bevezetés a Programozásba" címmel), amelynek tárgyalásmódját, az absztrakt matematikai („halmazelméleti") jelöléseket nem volt képes megtanulni, használni, ezért kimaradt, lemorzsolódott.

1992-ben vállalata csődbe jutott, megszűnt a magyar nehézipar és kohászat. Megint könyvesbolti eladó lett, ezúttal a Liszt Ferenc téri Műszaki Könyváruházban. Nem volt érzéke az üzlethez, feladatát úgy fogta fel, mintha könyvtáros lenne, akinek az a dolga, hogy a megfelelő ember számára előhozza a megfelelő könyvet. Két évig dolgozott itt, utána egy év betegállomány, egy év munkanélküliség után rokkantnyugdíjas lett.

Lektori vélemény Benkő Miklós dolgozatáról: Prímszámvadászat homogén lánctörtekkel

Benkő Miklós dolgozatában bevezeti a lánctörteket és két kapcsolódó polinomcsaládot, $f_1(C,n)$ és $f_2(C,n)$. A lánctörtek lényeges szerepet nem játszanak, a két függvény két jól ismert rekurzív családból érkezik. Ezek az alábbiak:

$$A_0 = 0,\ A_1 = 1, \qquad A_{n+2} = CA_{n+1} + A_n,\ \text{ ha } n \geq 0,$$
$$B_0 = 0,\ B_1 = 1, \qquad B_{n+2} = CB_{n+1} - B_n,\ \text{ ha } n \geq 0.$$

A sorozat prímosztóinak vizsgálata klasszikus témakör a számelmélet területén, a rekurzív sorozatok primitív osztóinak irodalma igen gazdag. Így alapjában véve nagy prímekre vadászni a sorozatok segítségével úgy is lehet, hogy a felmerülő prímosztókat nézzük, ahogyan a dolgozatban található táblázatokból is látjuk, (általában) a sorozat új elemei rendelkeznek a korábbi tagokban nem fellépő prímosztóval. A szakirodalomban szép jellemzést adtak az előzőleg zárójeles általában pontossá tételére. Itt Bilu, Hanrot és Voutier munkáit emelném ki. A $C = 20$ speciális esetben a szerző oszthatósági tulajdonságokat is kiemel, ezeknél több is tudható, az $A_n \mod N$ és $B_n \mod N$ sorozatok is periodikusak, például $N = 401$ esetében a periódus hossza 12, azaz elegendő az első 12 tagot megnézni, utána ismétlődés következik, így nemcsak azt tudjuk, hogy a $3, 6, 9, 12, 15$ indexű tagok lesznek oszthatóak a 401 számmal, de minden hárommal osztható indexű is. A szerző a polinomokkal kapcsolatban is megfogalmaz egy sejtést, ez a család egyébként a Fibonacci-polinomok családja:

https://mathworld.wolfram.com/FibonacciPolynomial.html

Az irreducibilitási sejtés jól ismert, 1969-ben be is lett bizonyítva, ez Webb és Parberry eredménye:

https://www.mathstat.dal.ca/FQ/Scanned/7-5/webb.pdf

A szerző a dolgozatot egy LaTeX-szerű formátumban nyújtotta be, ami tartalmaz formulákat, azonban a fájl igen messze áll attól, hogy egy pdf-re fordítható verzió legyen.

Összegezve: a dolgozatban bináris rekurziók klasszikus eredményeivel kapcsolatban találunk információkat, a szerző numerikus számítások alapján fogalmaz meg sejtéseket, tesz észrevételeket. Ahogyan ki is emeltem, ezeknél több is tudható a szakirodalom alapján.

Benkő Miklós:
Prímszámvadászat homogén lánctörtekkel

A cikk két kétváltozós függvényt ismertet. Az egyik alkalmas prímszámok keresésére, a másik sohasem eredményez prímszámot. Bevezetésre kerül a „homogén reguláris lánctört” fogalma, számítógépes programozók számára gyakorlati útmutatóval.

Bevezetés

Lánctörtön a következő matematikai alakzatot értjük $(a, b \in N)$:

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \dots}}.$$

A reguláris lánctört számlálóiban csupa 1-es szerepel $(b_1, b_2, \dots, b_n = 1)$:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}.$$

A reguláris lánctörtet a következő formában szokás ábrázolni: $[a_0; a_1, a_2, \dots]$. A lánctört a racionális számok esetében véges, az irracionális és transzcendens számok esetében végtelen.

1.) A Fibonacci számokat előállító generátorfüggvény általánosítása

Vegyük a következő másodfokú egyenletet: $x^2 - x - 1 = 0$. Rendezzük át: $x^2 = x + 1$, majd osszuk el mindkét oldalt x-szel:

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Ha a jobb oldali x helyébe behelyettesítjük az egész jobb oldalt, egy emeletes törtet kapunk:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}.$$

A behelyettesítés a végtelenségig folytatható:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}.$$

Az így kapott lánctört $[1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots]$ határértéke a fenti $x^2 - x - 1 = 0$ egyenlet egyik gyökével egyezik meg:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

A másik gyök ennek reciproka (előjelcserével):

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Ezzel a két gyökkel levezethető egy generátorfüggvény, mely n kitevő különböző értékei esetén a Fibonacci-számokat állítja elő:

$$f_1(1,n) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}},$$

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 6765 10946 17711 28657 46368 75025 121393 196418 317811 514229.

Ha módosítunk a másodfokú egyenleten: $x^2 - C \cdot x - 1 = 0$, akkor a két gyök

$$\frac{C+\sqrt{C^2+4}}{2}$$

és

$$\frac{C-\sqrt{C^2+4}}{2},$$

az ezekből alkotott generátorfüggvény:

$$f_1(C,n) = \frac{\left(\frac{C+\sqrt{C^2+4}}{2}\right)^n - \left(\frac{C-\sqrt{C^2+4}}{2}\right)^n}{\sqrt{C^2+4}}.$$

Ez a formula tartalmazza mind a négy alapműveletet (a négyzetre emelés önmagával való szorzás), valamint egy négyzetgyökös kifejezést is. Ha C és (a kitevőben szereplő n) 0-nál nagyobb természetes számok, mindig egész számokat kapunk, mert a számlálóban azok a tagok, melyek nem tartalmazzák a négyzetgyökös kifejezést, a két hatványkifejezésben azonos előjellel lépnek fel, ezért a kivonás miatt kiesnek. A maradék tagok mind tartalmazzák a négyzetgyökös kifejezést, ezért $\sqrt{C^2+4}$-gyel végig lehet osztani.

A generátorfüggvényhez tartozó lánctört $[C; C, C, C, C, C, C, C, \ldots]$ alakú:

$$C + \cfrac{1}{C + \frac{1}{C + \ldots}}$$

és „homogén reguláris lánctört” a neve (vagy egyszerűen „homogén lánctört”).

2.) Az $f_1(C, n)$ függvénynek két változója van, C és n.

Nézzük meg, hogyan viselkedik rögzített n kitevő esetén.

I. Ha $n = 1$, $f_1(C, n) = 1$, azaz konstans.

II. Ha $n = 2$, $f_1(C, n) = C$, azaz visszakapjuk C értékét.

III. Ha $n = 3$, $f_1(C, 3) = C^2 + 1$.

Ha vizsgáljuk a $C^2 + 1$ formulát, és különböző értékeket adunk C-nek, azt tapasztaljuk, hogy vegyesen kapunk összetett számokat és prímszámokat. Ha csak azokat az értékeket tüntetjük fel, melyek prímszámok, a következő táblázatot kapjuk:

1.	$C =$	2	5	Fermat-féle prímszám
2.	$C =$	4	17	Fermat-féle prímszám
3.	$C =$	6	37	
4.	$C =$	10	101	
5.	$C =$	14	197	
6.	$C =$	16	257	Fermat-féle prímszám
7.	$C =$	20	401	
8.	$C =$	24	577	
9.	$C =$	26	677	
…	…	…	…	
42.	$C =$	256	65537	Fermat-féle prímszám

Tehát ha C 2-től 256-ig változik, az előállított számok között 42 prímszám található, közöttük 4 Fermat-féle prím.

IV. Ha $n = 4$, $f_1(C, 4) = C^3 + 2 \cdot C$. Látható, hogy a polinomból C kiemelhető, ezért a függvény mindig összetett számot állít elő.

V. Ha $n = 5$, $f_1(C, 5) = C^4 + 3 \cdot C^2 + 1$, és C értéke 1-től $10\,000$-ig változik, 1148 prímszámot állít elő, melyből az első 30 a következő ($C \leq 100$):

5 29 109 701 2549 4289 10301 21169 84389 161201 281429 812701 1051649 1189189 4106701 5315329 7898909 11326589 14787869 20164589 21395249 24024701 31657501 35170829 37033309 40979201 57312469 65634301 88557509 100030001

VI. Ha $n = 6$, $f_1(C, 6) = C^5 + 4 \cdot C^3 + 3 \cdot C$, amiből C kiemelhető, tehát mindig összetett számot kapunk.

VII. Ha $n = 7$, $f_1(C, 7) = C^6 + 5 \cdot C^4 + 6 \cdot C^2 + 1$.

Ez a formula, ha C értéke 1-től 1000-ig változik, 80 prímszámot állít elő, ebből az első 23:

13 53353 283009 34539049 64802401 1297404109 10803626989 139448469889 282644809453 404840783593 783182518273 886303622569 1871173661293 3298411715689 3815918062501 6613617740029 12830433853789 29726659302913 36349118326249 45586013273893 65952322047613 88255850497093 98781981671101

Láthatjuk, hogy ha n páros szám, akkor az $f_1(C, n)$ generátorfüggvényből származó polinom osztható C-vel, tehát (ha ezt tartjuk szem előtt) csak akkor kaphatunk prímszámot, ha n páratlan. További számítógépes vizsgálatokból fogalmazódott meg az a SEJTÉS, hogy az $f_1(C, n)$ függvény csak akkor állít elő prímszámot, ha n értéke maga is prím. Ezért érdemes átugorni $n = 8, 9, 10$ értékét (a teljesség kedvéért a polinomokat közöljük):

VIII. Ha $n = 8$, $f_1(C, 8) = C^7 + 6 \cdot C^5 + 10 \cdot C^3 + 4 \cdot C$.

IX. Ha $n = 9$, $f_1(C, 9) = C^8 + 7 \cdot C^6 + 15 \cdot C^4 + 10 \cdot C^2 + 1$.

X. Ha $n = 10$, $f_1(C, 10) = C^9 + 8 \cdot C^7 + 21 \cdot C^5 + 20 \cdot C^3 + 5 \cdot C$.

Ha $n = 11$, $f_1(C, 11) = C^{10} + 9 \cdot C^8 + 28 \cdot C^6 + 35 \cdot C^4 + 15 \cdot C^2 + 1$.

Ez a polinom a számok géppel ábrázolható tartományában (18 jegyig) 19 prímszámot eredményezett a gép segítségével, a következő „C”-k esetén:

$C = 1, 2, 3, 5, 6, 8, 17, 19, 20, 23, 33, 39, 41, 43, 46, 48, 50, 51, 56.$

A fenti polinomok együtthatói nem mások, mint a *binomiális együtthatók*, melyeket a *Pascal-háromszögből* lehet kiolvasni, de nem „vízszintesen”, mint a binomiális tétel alkalmazása esetén az $\binom{n}{k}$ képletet használva, hanem „ferdén”, az

$$\binom{n-1-k}{k}$$

formulával. Ellenőrzésképpen, ha soronként összeadjuk az együtthatókat, eredményül Fibonacci-számokat kell kapnunk.

3.) Választhatjuk azt az utat is, hogy C-t rögzítjük és n-et változtatjuk. Az $f_1(C,n)$ fügvénnyel $C = 20$ és $n = 3, 5, 7, 11$ esetén prímszámot kapunk, $n = 13$-ra nem.

n	$f_1(20,n)$	
1.	1	–
2.	20	$2 \times 2 \times 5$
3.	401	–
4.	8040	$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 67$
5.	161201	–
6.	3232060	$2 \times 2 \times 5 \times 13 \times 31 \times 401$
7.	64802401	–
8.	1299280080	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 17 \times 67 \times 97$
9.	26050404001	$37 \times 401 \times 1755773$
10.	522307360100	$2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 32401 \times 161201$
11.	10472197606001	–
12.	209966259480120	$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11 \times 13 \times 31 \times 59 \times 67\times$ $\times 83 \times 401$
13.	4209797387208401	$337 \times 5381 \times 2321497933$
14.	84405914003648140	$2 \times 2 \times 5 \times 43 \times 1514549 \times 64802401$

Megjegyzés a (fenti) táblázathoz: A 3. szám 401-gyel egyenlő, a 6., 9., 12. szám osztható vele. Az 5. szám 161201-gyel egyenlő, a 10. szám osztható vele. A 7. szám 64802401-gyel egyenlő, a 14. szám osztható vele. Csak akkor kaphatunk prímszámot, ha az n kitevő maga is prím.

4.) A lánctörtben a kivonás művelete is meg van engedve, ekkor a kiindulási egyenlet az $x^2 - C \cdot x + 1 = 0$ alakot ölti, átrendezve: $x = C - \frac{1}{x}$,

$$x = C - \frac{1}{C - \frac{1}{x}}.$$

Látható, hogy a lánctörtben sorozatos kivonás van. Így kapjuk meg a második, $f_2(C,n)$ függvényünket, mely – bár csak egy előjelben különbözik az elsőtől – egészen másként viselkedik.

$$f_2(C,n)=\frac{\left(\frac{C+\sqrt{C^2-4}}{2}\right)^n-\left(\frac{C-\sqrt{C^2-4}}{2}\right)^n}{\sqrt{C^2-4}}.$$

Ha n-et 1-től 16-ig változtatjuk, a következő polinomokat kapjuk:

$$\begin{array}{l}
1\\
C\\
C^2-\ 1\\
C^3-\ 2\cdot C\\
C^4-\ 3\cdot C^2+1\\
C^5-\ 4\cdot C^3+3\cdot C\\
C^6-\ 5\cdot C^4+6\cdot C^2-1\\
C^7-\ 6\cdot C^5+10\cdot C^3-4\cdot C\\
C^8-\ 7\cdot C^6+15\cdot C^4-10\cdot C^2+1\\
C^9-\ 8\cdot C^7+21\cdot C^5-20\cdot C^3+5\cdot C\\
C^{10}-\ 9\cdot C^8+28\cdot C^6-35\cdot C^4+15\cdot C^2-1\\
C^{11}-10\cdot C^9+36\cdot C^7-56\cdot C^5+35\cdot C^3-6\cdot C\\
C^{12}-11\cdot C^10+45\cdot C^8-84\cdot C^6+70\cdot C^4-21\cdot C^2+1\\
C^{13}-12\cdot C^11+55\cdot C^9-120\cdot C^7+126\cdot C^5-56\cdot C^3+7\cdot C\\
C^{14}-13\cdot C^12+66\cdot C^10-165\cdot C^8+210\cdot C^6-126\cdot C^4+28\cdot C^2-1\\
C^{15}-14\cdot C^13+78\cdot C^11-220\cdot C^9+330\cdot C^7-252\cdot C^5+84\cdot C^3-8\cdot C
\end{array}$$

Ezek a polinomok az $f_1(C,n)$ függvény polinomjaitól csak abban különböznek, hogy alternálva szerepelnek bennük kivonások és összeadások. Ugyanakkor az $f_2(C,n)$ függvény esetében ki kell kötni, hogy $C>2$, mert (bár a polinomok nem vezetnek hibára) $C=2$ esetén a négyzetgyökös kifejezés 0-val egyenlő, és ezzel osztani is kellene, $C=1$ esetében pedig képzetes számokat kapnánk. Második számú SEJTÉS: az $f_2(C,n)$ formula, amennyiben C és n 2-nél nagyobb pozitív egész számok, sohasem eredményez prímszámot, csak összetett számot. Ez az állítás csak számítógéppel van ellenőrizve, a gép nem talált ellenpéldát.

5.) Az $f_2(C,n)$ függvény érdekes alkalmazása: $C=6$ esetén a „háromszögű négyzetszámokat" állítja elő, azokat a számokat, melyeknek a négyzete egyben háromszögszám is, tehát az

$$M^2 = N \times \frac{N+1}{2}$$

egyenlet egész „M” megoldásait, például $6 \times 6 = 8 \times 9/2 = 36$.

$$M = 1 \;\; 6 \;\; 35 \;\; 204 \;\; 1189 \;\; 6930 \;\; 40391 \;\; 235416 \;\; 1372105 \;\; 7997214$$
$$46611179 \;\; 271669860 \;\; 1583407981 \;\; 9228778026$$

$$f_2(6, n) = \frac{\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n - \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n}{4\sqrt{2}}.$$

(Ezt a formulát már Leonhard Euler is ismerte.) Az $f_2(C, n)$ függvény alkalmas további sokszögszámok között fennálló egyenlőségek megkeresésére is.

6.) További gyakorlati alkalmazások

Amennyiben valaki számítógépbe szeretné programozni a fenti képleteket, két módszer közül választhat. Ha megelégszik legfeljebb 18-jegyű prímszámok előállításával, akkor az $f_1(C, n)$ formulát kell választani, amely tartalmazza mind a négy alapműveletet és egy négyzetgyökös kifejezést is (amellyel osztani is kell). Ebben az esetben szükség van lebegőpontos aritmetikára (és lebegőpontos változókra) is. Eredményül egész számokat kapunk, de ehhez irracionális számok kiszámításán keresztül vezet az út.

Amennyiben minél nagyobb („rekord”) prímszámokra vadászik valaki, akkor célszerű kijelölni egy „n” hatványkitevőt, és csak az ehhez az n-hez tartozó egyetlen sort beprogramozni.

Például ha az $n = 19$-es értéket választjuk, akkor a képletünk a következő:

$$C^{18} + 17 \cdot C^{16} + 120 \cdot C^{14} + 455 \cdot C^{12} + 1001 \cdot C^{10} + 1287 \cdot C^8$$
$$+ 924 \cdot C^6 + 330 \cdot C^4 + 45 \cdot C^2 + 1.$$

Ez a formula csak összeadást és szorzást tartalmaz (a hatványozást szorzások sorozatára vezetjük vissza). Ha például 100 millió jegyet tartalmazó prímszámokat keresünk (amelyek megtalálásáért pénzjutalmat tűzött ki a „GIMPS project”), akkor a $C = 10^{5555555}$ értékkel célszerű indítani, és C-t egyesével növelni, léptetni. Ugyanis C mibenlétére semmiféle korlátozás nincsen, lehet páros, páratlan, prím- vagy összetett szám is.

Voltaképpen nem egyetlen prímszámképletről beszélhetünk, hanem prímszámképletek (végtelen) sorozatáról. Annyi prímszámképlet van, ahány prímszám. Minden prím „n”-hez hozzárendelhetünk egy prímszámképletet. A táblázatban felsorolt azon polinomokat, melyek sorszáma összetett szám, figyelmen kívül kell hagyni.

n	$f_1(C,n)$
3	C^2+1
5	$C^4+3\cdot C^2+1$
7	$C^6+5\cdot C^4+6\cdot C^2+1$
11	$C^{10}+9\cdot C^8+28\cdot C^6+35\cdot C^4+15\cdot C^2+1$
13	$C^{12}+11\cdot C^{10}+45\cdot C^8+84\cdot C^6+70\cdot C^4+21\cdot C^2+1$
17	$C^{16}+15\cdot C^{14}+91\cdot C^{12}+286\cdot C^{10}+495\cdot C^8+462\cdot C^6+210\cdot C^4+36\cdot C^2+1$

Vizsgálataim során a legnagyobb prímszám $C = 64$ és $n = 47$ esetén lépett fel, ez egy 84-jegyű prímszám, melynek első 75 számjegye a következő:

122757598692418781147104210611116761516797358732284384882390533627837932878...

Abban bízom, hogy ez a képlet ($f_1(C,n)$ függvény) a legnagyobb („largest”) prímek tartományában ugyanúgy viselkedik, mint az általam vizsgált (legalacsonyabb) nagyságrendben. Azt is elképzelhetőnek tartom, hogy egyszer a prímszámrekordot is ezzel a képlettel állítják majd be.

Irodalomjegyzék

[1] Maurer I. Gyula, *Tizedes törtek és lánctörtek*, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár-Napoca, 1981.

[2] Gerőcs László, *A Fibonacci-sorozat általánosítása*, Tankönyvkiadó, 1988.

[3] Freud Róbert, Gyarmati Edit, *Számelmélet*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2000.

[4] Ian Stewart, *A matematika problémái*, Akadémiai Kiadó, 1991.

[5] Sain Márton, A Fibonacci-sorozattól lánctörtekkel az aranymetszésig. In: *A lánctörtektől a számítógépig*, Tankönyvkiadó, 1975.

Társulati élet – 2019

Szele Tibor-emlékérem

A Bolyai János Matematikai Társulat Szele Tibor-emlékérem bizottsága a 2019. évi érmet **Pach Jánosnak** ítélte oda.

Indoklás:

Pach János 1977 óta a Rényi Intézet munkatársa, jelenleg tudományos tanácsadó. A kombinatorikus geometria és geometriai algoritmusok elméletének egyik legelismertebb és legaktívabb világhírű kutatója. Iskolateremtő matematikus. 2014-ben meghívott előadó volt a Matematikusok szöuli Világkongresszusán, jövőre pedig plenáris előadó lesz az Európai Matematikai Kongresszuson. (Ebben a megtiszteltetésben a hazai matematikusok közül eddig csak Lovász László és Babai László részesült.) 2014 óta az Academia Europaea tagja.

A. Pályafutása. 1954-ben született Budapesten. 1977-ben az ELTE-n végzett matematikus szakon. Szakdolgozatában többek között megoldotta Ulam egy fontos problémáját: bebizonyította, hogy nincs olyan megszámlálható síkgráf, amelynek minden megszámlálható síkgráf részgráfja. Ehhez kapcsolódó eredményei alapvető jelentőségűnek bizonyultak az univerzális gráfok kutatásában.

1983-ban kandidátusi fokozatot szerzett és aranygyűrűs doktorrá avatták. Kandidátusi értekezését, melyben főképp Erdős Páltól származó extremális gráfelméleti problémákat oldott meg, Simonovits Miklós vezetésével írta. Erdőssel később több mint 20 közös dolgozatot írt. 1995-ben lett a matematikai tudományok doktora.

Az MTA Matematikai Kutatóintézetben Fejes Tóth László hatására érdeklődése részben a diszkrét geometria felé fordult. A geometriai algoritmusok elméletének egyik megalapozója és egyik legnagyobb szakértője. 1992-től 2008-ig a Courant Intézet és a City College of New York professzora (2003-tól Distinguished Professor), 2008-tól 2018-ig az EPFL Lausanne tanszékvezető professzora.

B. Hatása, diákjai. Pach János területének egyik legnagyobb tekintélyű és hatású kutatója. Három könyvet írt, további kilencet szerkesztett. Közülük kettő a Bolyai Társulat kiadványa. Brass-szal és Moserral közös Research

Problems in Discrete Geometry c. problémagyűjteménye, melyet japánra és oroszra is lefordítottak, számos fiatal tehetségnek segített abban, hogy bekapcsolódjon a tudományos kutatásba. Agarwallal együtt írt Combinatorial Geometry c. monográfiája (1995) a témakör egyik alaptankönyve, amely kínai nyelven is megjelent.

Erdős Pál és Fejes Tóth László halála után a magyar diszkrét geometriai iskola egyik fő motorja. Eddig 21 PhD diákja volt, közülük sokan ma nemzetközi hírű kutatók. A magyarok közül négy:

1. *Csizmadia György* (Grünwald-díjas, a Courant Intézet legjobb matematikai disszertációjáért járó díjának nyertese);
2. *Pálvölgyi Dömötör* (Lendület-díjas kutatócsoport-vezető az ELTE-n);
3. *Solymosi József* (Emo Welzllel közösen vezetett diák, a Rényi Intézet külső munkatársa, az MTA doktora, a UBC professzora, volt Sloan ösztöndíjas);
4. *Tóth Géza* (a BME professzora, a Rényi Intézet osztályvezetője, az MTA doktora, Erdős-díjas, elnyerte a New York Universityn a legjobb doktori értekezésért járó díjat – az összes tudományterületet egybevéve).

A külföldiek közül a legismertebbek:

5. *Radoslav Fulek* (a Columbia egyetemen postdoc, majd Meitner Fellow a bécsi IST-n);
6. *Dan Ismailescu* (a Hofstra University Full Professora, Stessin-díjas kutató, a Courant Intézet legjobb matematikai disszertációjáért járó díjának nyertese);
7. *Rom Pinchasi* (Gil Kalaival közösen vezetett diák, a Technionon Full Professor);
8. *Andrew Suk* (Associate Professor a UC San Diegoban, Sloan-ösztöndíjas, az NSF Carreer Award nyertese; leghíresebb eredménye: aszimptotikusan pontos megoldás az Erdős–Szekeres Happy ending problémára);
9. *Radoš Radoičić* (Full Professor a City University of New Yorkban);
10. *Thang Pham* (a legjobb matematikai disszertációért járó díj nyertese az EPFL-en, jelenleg postdoc New Yorkban).

Irányításával 25 posztdoktori ösztöndöndíjas dolgozott, köztük *Ambrus Gergely, Hubai Tamás, Keszegh Balázs, Korándi Dániel, Lángi Zsolt, Naszódi Márton és Tomon István*. Sokuknak jelentett meghatározó élményt és kutatási irányt a Pach Jánossal közös munka. Nagy befolyással volt olyan világhírű kutatók témaválasztására és munkásságára, mint *Jacob Fox, Tar-*

dos Gábor és Natan Rubin. Különös tehetsége van ahhoz, hogy diákjai és kollégái érdeklődését felkeltse az általa vizsgált kérdések iránt. Több mint száz társszerzője van, igazi iskolateremtő matematikus. 2003 óta témaköre vezető folyóiratának (*Discrete & Computational Geometry*) főszerkesztője és tucatnyi más folyóirat szerkesztőbizottsági tagja.

C. Tudományos munkássága. Több mint 300 cikke jelent meg, melyekre mintegy 7000 hivatkozást kapott. Az alábbiakban kiemeljük néhány fontos eredményét, elsősorban az epszilonhálók, a szemialgebrai gráfok, metszésgráfok és gráf-lerajzolások területéről.

A 80-as években a számítógépes technológia terjedésével egy új kutatási irány jelent meg, a geometriai algoritmusok elmélete. A terület azóta is robbanásszerűen fejlődik, és ebben a kezdetek óta kulcsszerepe van Pach Jánosnak. Kiderült, hogy a hagyományos, részben Erdős és Fejes Tóth vezetésével kifejlesztett kombinatorikai és diszkrét geometriai módszerek ezen a téren igen hatékonyan alkalmazhatóak.

1. Az egyik – algoritmikus szempontból is – fontos kérdéskör, hogy különböző tulajdonságú geometriai alakzatok uniójának mi a *bonyolultsága*, vagyis legfeljebb hány csúcsa és lapja lehet. Erre vonatkozóan Pach – részben Micha Sharirral közösen – számos alapvető eredményt ért el. Egy szép példa (1986): Ha n síkbeli alakzat olyan, hogy bármely kettő határa csak kétszer metszheti egymást, akkor az uniójuk bonyolultsága lineáris.

2. Egy másik alapvető probléma, hogy egy halmazrendszerben hány elem elegendő az összes „nagy” halmaz lefogására. Elemek egy ilyen halmazát *epszilon-hálónak* hívjuk. Tanulmányozásukat Vapnik és Chervonenkis kezdeményezte. Ők vezették be a *VC dimenzió* fogalmát, amely igen hatásosnak bizonyult halmazrendszerek bonyolultságának leírására. Egyebek között – egy logaritmikus faktortól eltekintve – korlátos bonyolultságú halmazrendszerekre meghatározták a legkisebb epszilon-háló méretét. Pach János és társszerzői (1992) véletlen módszerek alkalmazásával belátták, hogy a logaritmikus faktorra tényleg szükség van. Később Tardos Gáborral (2013) belátták, hogy a logaritmikus faktorra akkor is szükség van, ha bizonyos természetes geometriai alakzatok által definiált halmazrendszereket tekintünk. Ez a felfedezés nagy áttörést jelentett az epszilon-hálók elméletében.

Szemerédi és Trotter híres tétele pontos becslést ad egyenesek és pontok közötti illeszkedések maximális számára. Pach és Sharir (1998,

2005) epszilon-hálók segítségével messzemenően általánosították ezt az eredményt, egyenesek helyett korlátos fokú algebrai görbékre.

3. Tardos Gáborral és Natan Rubinnal közösen (2016, 2018) igazolta Richter és Thomassen régi sejtését, amely szerint n páronként metsző vagy érintkező zárt görbe legalább $n^2 - o(n^2)$ metszéspontot határoz meg.

4. Rosenstiehl és Tarjan egy régi sejtését megcáfolva de Fraisseix, Pach és Pollack (1990) belátta, hogy minden n csúcsú síkgráf lerajzolható nem metsző, egyenes szakasz élekkel úgy, hogy a csúcsok egy $2n$-szer n-es négyzetrács csúcsaiban vannak. Az eredmény lényegében optimális. Egyúttal nagyon hatékony algoritmust is találtak a fenti lerajzolásra, melyet azóta széles körben használnak és több irányban általánosítottak. Ez az egyik legtöbbet idézett cikk az egész területen.

5. Ha egy gráfot (esetleg metsző) szakaszokkal (vagy görbékkel) lerajzolunk a síkban, akkor egy *geometriai* (ill. *topológiai*) gráfot kapunk. Az elnevezés is részben Pach Jánostól (1991) származik, aki a geometriai és topologikus gráfok elméletének egyik megalapozója. A szokásos, gráfokra vonatkozó Ramsey-, illetve Turán-típusú kérdések általánosításán túl számos mély strukturális, leszámlálási és topológiai kérdést tett fel. Ebbe a szerteágazó, izgalmas témakörbe nagyon sok kutatót sikerült bevonnia. Rengeteg fontos eredmény született, de még bőven van tennivaló. Egy gyönyörű eredmény a múlt évből a következő. 25 éve Erdős, Pach és társai (1994) megmutatták, hogy n pont a síkon mindig meghatároz $c\sqrt{n}$ páronként metsző szakaszt, de mindenki azt sejtette, hogy cn páronként metsző szakasz is létezik. Ez a témakör egyik legizgalmasabb sejtése, melyen sokan dolgoztak. A múlt évben a $c\sqrt{n}$-es korlátot Pach, Rubin és Tardos $n^{1-o(1)}$-re javította, ami közel optimális.

6. Alonnal, Solymosival (2001) majd később további társszerzőkkel belátták, hogy n szakasz között a síkon mindig van két cn méretű részhalmaz úgy, hogy az első cn szakasz mind metszi a második cn szakaszt, vagy mind diszjunkt a második cn szakasztól. Sőt, ennek egy messzemenő általánosítását is belátták, a sík helyett a d dimenziós térben, szakaszok helyett D bonyolultságú szemialgebrai halmazokkal is igaz az állítás (2005). Ennek a felfedezésnek igen fontos következményei vannak. Például minden ilyen módon definiált metszésgráfban van egy n^c méretű teljes vagy üres részgráf. Az Erdős–Hajnal-sejtés szerint, ami a Ramsey-elmélet talán legizgalmasabb megoldatlan kérdése, ez az állítás igaz minden öröklődő tu-

lajdonságú gráfosztályban. Foxnak és Pachnak (2008, 2010, 2012, 2014, 2019) – a Lipton–Tarjan-szeparátortétel messzemenő általánosításainak bizonyításával és felhasználásával – ezt több fontos, geometriai módon definiált gráfosztályra is sikerült belátnia.

Egy nagyon fontos ehhez kapcsolódó tétel a Szemerédi-féle regularitási lemma szemialgebrai hipergráfokra való élesítése és általánosítása, amely Fox, Gromov, Lafforgue, Naor és Pach (2012) eredménye. Később Fox, Pach és Suk (2016, 2017) ezt tovább javította.

Összefoglalás. Pach János a kombinatorikus geometria világszerte elismert vezető kutatója, aki több területen is úttörő eredményeket ért el. A témakör kutatóinak egész generációját nevelte ki. Megbecsülni is nehéz azon kollégáinak számát, akiknek témaválasztására, munkájára és pályafutására döntő hatással volt.

Beke Manó-emlékdíj

A 2019. évi Beke Manó-emlékdíj Bizottság körültekintő mérlegelés után úgy határozott, hogy a díjat **Balga Attila**, **Gajárszki Rozália**, **Pálovicsné Tusnády Katalin**, **Regősné Jancsovics Julianna**, **Takács Sándor**, **Törökné dr. Bodzsár Mária** és **Varga Vince** kapják.

Indoklások:

Balga Attila 1989 óta tanít jelenlegi munkahelyén. Első pillanattól kezdve aktívan vesz részt a matematikai tehetséggondozásban: szakkört vezet, diákjait ösztönzi a KöMaL-ban kitűzött feladatok megoldására és a pontversenyben való részvételre. Már pályája első éveiben volt az OKTV-n előkelő helyezést elérő tanítványa, és diákjai azóta is évről-évre ott vannak a megfelelő korosztályos országos matematika versenyek döntőjében.

Az iskola életében a matematikaoktatáson túl is sok feladatot vállal. Évtizedek óta vezeti az iskola nyári tehetséggondozó táborát. Az osztályfőnöki munkát kiemelkedően fontosnak érzi, a gyerekek nevelésének kérdését talán még a matematika oktatásánál is előbbre helyezi. Éveken át vezette az osztályfőnöki munkaközösséget. Az új tantervek megjelenésekor már a matematika munkaközösség vezetőjeként irányította a helyi tantervek kialakítását. Vezetése alatt az iskolában egy erős, sokféle feladatot vállaló szakmai közösség alakult ki. 2014 óta az iskola igazgatóhelyetteseként dolgozik, a matematika és informatika tantárgyak tanítását felügyeli, segíti az iskola digitális megújulását.

Munkája során egyre több iskolán kívüli feladatot is ellát. Évekkel ezelőtt bekapcsolódott az Arany Dániel verseny haladó bizottságának munkájába, jelenleg ő a bizottság vezetője. Tagja a Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Bizottságának, a Pedagógus Karban pedig a matematika szekciót vezeti. Az Eötvös Kollégium vezetőségének tagjaként a tanárképzés megújításában is fontos szerepet játszik. Rendszeres résztvevője a Rátz László Vándorgyűléseknek.

Balga Attila egész életútja a tanári elköteleződésről és a matematika tantárgy szenvedélyes szeretetéről szól. Eredményei, elvégzett munkája alapján méltó a Beke Manó-emlékdíjra.

Gajárszki Rozália 32 éve, 1987 augusztusa óta dolgozik jelenlegi munkahelyén. Megbízható, következetes és céltudatos pedagógus. Pozitív személyisége, elhivatottsága hozzájárul ahhoz, hogy mindig kiváló kapcsolatot épít ki a tanítványaival. Diákjai minden rezdülését figyeli, és személyre szabottan ösztönzi, bátorítja őket. Fegyelmezett és ugyanakkor felszabadult munka folyik az óráin, a gyerekek figyelme nem lankad, jól kiaknázza a természetes kíváncsiságot, érdeklődést és a tanulók kreativitását. A matematika megszerettetése, hasznosságának, érdekességének megmutatása és a logikus gondolkodásra nevelés áll óráinak a középpontjában. Határozott vezető, a szülők körében is népszerű. Több iskolai szintű, területi, megyei és országos matematikaversenyre készíti fel tanulóit évek óta. Számos művészeti tábor – mely a tököli és környékbeli diákoknak szerveződött – programjához adott javaslatot, és személyesen is vezetett foglalkozásokat a matematika és a művészeti területek, valamint a természet kapcsolatának témájában. Kollégáival együtt többször részt vett a Varga Tamás Napokon és a Rátz László Vándorgyűlésen.

Varga Tamás születésének 100. évfordulója alkalmából már most tervezi a minden korosztályt érintő őszi megemlékezést „Játsszunk matematikát!” címmel. Ennek keretében számos, nemcsak matekosoknak szóló vetélkedőre, kiállításra, valamint a Varga Tamás módszerrel történő tanítás, fejlesztés hatékonyságát bemutató foglalkozásokra, beszélgetésekre kerül sor.

Gajárszki Rozália tanárnő a matematikai nevelés területén végzett munkájáért, valamint a matematikát népszerűsítő tevékenységéért méltó a

Beke Manó-emlékdíjra.

Pálovicsné Tusnády Katalin pályáját 1986-ban az ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Iskolában kezdte, ahol matematikát, fizikát és informatikát is tanított. 1989-től tanít a Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnáziumban. 1997-ben indult újra a gimnáziumban a nyolcosztályos képzés, ahol a matematika tantárgy tehetséggondozásának irányítása a nevéhez fűződik. A Zrínyi Ilona Matematikaverseny megyei fordulóján az első tíz helyezett közé a tanított osztályaiból mindig többen bekerültek, minden alkalommal díjazott tanár volt. Éveken keresztül tartott városi és megyei matematika szakkört általános és középiskolás diákoknak. Előadóként részt vett a nyári matematika tábor munkájában. 2001-ben Miskolcon a Rátz László Vándorgyűlésen „Elemi geometriai problémák, feladatok" címmel, 2002-ben pedig a nagykanizsai „Új utak és lehetőségek a matematikai tehetséggondozásban" országos konferencián „Vegyük észre a szabályos háromszöget!" címmel tartott előadást. 2004 őszétől 2009 májusáig az akkori Zala Megyei Művelődési és Pedagógiai Intézet, Szakképző Iskola megbízásából a matematika szaktanácsadói teendőket is ellátta. Ezekben az években megszervezte a megyei Középiskolai Matematikaversenyt, amelyen feladatsor-összeállító és javító feladatokat is ellátott. Szaktanácsadóként a kétszintű érettségi bevezetésével párhuzamosan szervezett és tartott emelt szintű matematikaérettségire felkészítő megyei szakköröket. 2006 júliusában a Rátz László Vándorgyűlésen „Barangolás a geometria szépségeiben" címmel tartott előadást. Tankönyvszerző. A 2007-től 2013-ig az Apáczai Kiadó felkérésére a kiadó középiskolai matematika tankönyvcsaládjának geometriai tárgyú fejezeteit írta folyamatosan. A tankönyvek megjelenésekor a megyében több helyen tankönyvbemutatót tartott. 2009 szeptemberében a gimnázium tantestülete Móra János-emlékgyűrűvel ismerte el a tehetséggondozásban végzett munkáját. 2006 és 2010 között minden évben az ABACUS matematikai lapok matematika pontversenyének legeredményesebb felkészítő tanára lett. 2015-ben innovatív profilú mestertanár lett. Tanítványai kiemelkedő eredményeket értek el a Magyarországon meghirdetett szinte minden középiskolai matematikaversenyen.

Pálovicsné Tusnády Katalin hosszú időn át végzett kiváló és eredményes munkája alapján méltó a Beke Manó-emlékdíjra.

Regősné Jancsovics Julianna általános iskolai matematika-kémia szakos tanári diplomáját 1995-ben szerezte Szegeden a Juhász Gyula Tanárképző Főiskolán. Ezt 1996-ban kiegészítette a Szegedi József Attila Tudományegyetemen matematikából szerzett középiskolai tanári diplomával. 1998-ban pedig Székesfehérváron a Pénzügyi és Számviteli Főiskolán kapott újabb diplomát.

Már főiskolai tanulmányai során kiemelkedett csoporttársai közül rátermettségével, pedagógiai érzékenységével és a matematikatanításban mutatott szakmai-didaktikai tájékozottságával. 2007 augusztusától dolgozik jelenlegi munkahelyén. Tantestületének és munkaközösségének elismert, megbecsült tagja. Munkaközösség-vezetőként koordinálja iskolájában a matematikatanárok tevékenységét. Munkájára a határtalan szorgalom, az abszolút megbízhatóság és a kitartó lelkesedés jellemző. Számára egyaránt fontos a szakmai pontosság és a gyermekszeretet. Folyamatosan törekszik a legújabb szakmai, módszertani ismeretek megszerzésére és alkalmazására. Szakmai fejlődése érdekében rendszeresen részt vesz a Rátz László Vándorgyűléseken, ahol a tanárversenybe is többször benevezett és eredményesen szerepelt.

Az elmúlt 12 év alatt mindig volt olyan versenyzője, aki a Zrínyi Ilona Matematikaversenyen az első három hely valamelyikén végzett, sőt csapatban többször voltak első helyezést elérő versenyzői. 2011-ben és 2013-ban – mint felkészítő tanár – is díjazásban részesült. Iskolai szinten feladatai közé tartozik a matematikaversenyek szervezése. A nyolcadikosoknak évről-évre a felvételire előkészítő tanfolyamot szerveznek munkaközösségével, amelyeknek szerves részét képezi a leendő felvételizőknek általa létrehozott és meghirdetett Vasváris Matematikaverseny. Ennek feladatsorait vezetésével munkaközössége állítja össze.

A Makkosházi Matematikaverseny értékelő zsűrijének tagja lassan egy évtizede. A Bonifert Domonkos Nemzetközi Matematikaverseny hetedik évfolyama számára készülő feladatsorok összeállítója és javító csoportjának tagja.

Regősné Jancsovics Julianna tanárnő a fentiek alapján méltó a Beke Manó-emlékdíjra.

Takács Sándor 1990-ben érkezett Erdélyből Magyarországra. Nagy erőfeszítéseket tett iskolájában az informatikaoktatás tárgyi feltételeinek megteremtéséért. A Fejér Megyei Középiskolai Matematikaverseny feladatsorokat összeállító bizottságának tagja, feladatsorokat, javítási útmutatókat készít, emellett a javításban is szerepet vállal. A Farkas Gyula Emléknap keretében szervezett természettudományos vetélkedő állandó résztvevője, évek óta a nyertes csapatok felkészítője. Az iskolában több tehetséggondozó szakkört is vezet, emellett pedig a 11. és a 12. évfolyamon az emelt szintű matematikaoktatás az ő kezében összpontosul. Iskolai versenyeken népszerűsíti a matematikát, melynek oktatásába a korszerű taneszközöket is bevonja. A pályázati lehetőségeket mindig kihasználja. Részt vett a kompetencia alapú oktatás bevezetésében is. Magas színvonalú tevékenységének köszönhetően nőtt az emelt szintű matematikaérettségit választó diákok száma, akik kimagasló eredményt érnek el nemcsak az érettségi vizsgán, de utána az egyetemi vizsgákon is. A matematika népszerűsítése érdekében szervezett cserkésztábort Erdélybe a Bolyaiak nyomában, de szervezett nyári tehetséggondozó tábort is az iskolában.

A matematika tárgyat magas színvonalon műveli, s ezt várja el tanítványaitól is. Munkája rendkívül eredményes a kimagaslóan tehetséges diákok, de a matematikát kevésbé kedvelők körében is. A rábízott diákok szülei biztosak lehetnek abban, hogy gyermekük a matematikai ismereteket tekintve eljut arra a szintre, ami képességei folytán elérhető. Sok mérnök, közgazdász, matematikatanár került ki tanítványai közül, de ha egy gyengébb eredményekkel rendelkező osztályt kapott, akkor is biztosak lehettek benne, hogy sikeresen teljesítik az érettségi követelményeket. A heti órakereten túl időt és energiát nem kímélve tart többletórákat azoknak, akiket erre alkalmasnak tart, vagy akik erre rászorulnak. Sokoldalú műveltséggel rendelkezik, sokat olvas, zenél, s erre inspirálja tanítványait is.

Takács Sándor hosszú időn át végzett kiváló és eredményes matematikai nevelő- és oktatómunka alapján méltó a Beke Manó-emlékdíjra.

Törökné dr. Bodzsár Mária 1988 óta tanít a Gödöllői Török Ignác Gimnáziumban. A debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetemen szerzett matematika-fizika szakos tanári diplomát. Diplomája megszerzése után 1981-ben visszakerült Szlovákiába. A Pozsonyi Komensky Egyetem Természettudományi Karán 1983-ban természettudományi doktori fokozatot szerzett. 1983 őszén települt át férjével Magyarországra.

A tanítás mellett részt vett a NAT követelményrendszerének a kidolgozásában. A Szegedi Tudományegyetem megbízásából diagnosztikus tesztfeladatsorokat készített matematikából a 9–12. osztály számára. A korszerű tanítás érdekében részt vett egy háromszor 30 órás továbbképzésen, és az ott megszerzett tudást kamatoztatta a *Kompetencia alapú oktatás, egyenlő hozzáférés bevezetése Gödöllőn 2009-2010* pályázatának megvalósításában. Még a 2011-es tanévben elindult a „SMART – Kreatív Interaktivitás” tananyagkészítő pályázaton egyik kollegájával, melynek a témája a *Sík és gömb összehasonlító geometriájának tanítása a Lénárt-gömbmodell segítségével*. A célja, hogy a gyerekek földrajzórán alkalmazni tudják a matematikaórákon megszerzett geometriai ismereteiket. Ezzel a pályamunkával elnyerték a Műszaki Kiadó különdíját és az *Educatio* szakmai különdíját is. Elkötelezett híve lett a projekt alapú oktatásnak. 2012-ben Az eTwinning Magyarországi Szolgáltatópontja által meghirdetett projektversenyen az *M and M* projekttel a középiskolai kategóriában országos 1. helyezést ért el. Pedagógiai fejlesztő tevékenysége is kiemelkedő, interaktív táblára átdolgozott 5-6-7-8. osztályos matematikacsomagját több iskolában alkalmazzák a Dunakeszi Tankerületben.

Az elmúlt három évben az iskolai oktató- és nevelőmunka mellett az egyéni tehetséggondozás került nála előtérbe. A 2017/18-as tanévben az iskola hatodikosainak négyfős csapata a Bolyai Matematika Csapatverseny megyei, országos és nemzetközi döntőjén is első helyezést ért el. Az idei tanévben a Bolyai Matematika Csapatversenyen az immár 7. osztályos tanítványok a megyei első és az országos harmadik helyezést érték el.

Harmincéves pedagógiai munkájáért 2018. október 6-án a Török Ignác Gimnáziumért Alapítvány neki adományozta a Török Ignác Emlékgyűrűt.

Törökné dr. Bodzsár Mária hosszú időn át végzett kiváló és eredményes nevelő- és oktatómunkája alapján méltó a Beke Manó-emlékdíjra.

Varga Vince pályakezdése óta, az 1981/82-es tanévtől tanít a Veszprémi Lovassy László Gimnáziumban. Egyetemi tanulmányait az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika-fizika szakán végezte, amit rövid időn belül technika szakos diplomával egészített ki.

A Lovassy László Gimnázium meghatározó, emblematikus tanáregyénisége. Közel négy évtizedes pedagógusi pályája során sok száz diákkal szerettette meg a matematikát és a fizikát, indította el tanítványait a műszaki, gazdasági, kutatói vagy tanári pályán. Kiemelkedő szakmai tudással rendelkezik, és hasonlóan nagyok az elvárásai tanítványaival szemben is, de olyan empátiával fordul feléjük, hogy ezeket az elvárásokat sikerül elfogadtatni velük. Átütő erejű a szakmai tudása, gyerek- és munkaszeretete példamutató. Barátságos, nyitott személyiség, aki még a gyengébb képességű tanulókkal is hamar megszeretteti a matematikát és a fizikát egyaránt. Tanítványai közül sokan a műszaki, a gazdasági és a pedagóguspálya elismert képviselőivé lettek. Szakmai tudásuk alapjait, a természettudományok szeretetét, a logikus gondolkodást mind tőle tanulták meg. A tanár úr segített abban, hogy mindenki megtalálja azt a tehetséget önmagában, amit kibontakoztatva életében sikeres szakmai pályát futhat be. Több éven át vezetett és vezet iskolánkban a gimnazistáknak és az érdeklődő nyolcadikosoknak is tehetséggondozó szakköröket. Kiemelkedő szakmai és pedagógiai munkáját támasztják alá tanítványai versenyeredményei matematikából és fizikából egyaránt, melyek közül a legkiemelkedőbbek matematikából az Arany Dániel Matematikaverseny; Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematikaverseny; Nemzetközi Magyar Matematikaverseny; OKTV; Polygon Pályázat matematikából első és második díjai.

2009-ben a tehetséggondozás terén több éve kiemelkedően végzett, példaértékűen eredményes munkája elismeréseként Pro Talento kitüntető oklevelet kapott, 2010-ben Pólya György-díjban, 2013-ban Bonis Bona-díjban részesült.

Varga Vince tanári pályájának eredményei, szakmai tudása, értékteremtő és értékközvetítő munkája alapján méltó a Beke Manó-emlékdíjra.

Grünwald Géza-emlékérem

A Grünwald Géza-emlékérem jogelődjét, a Grünwald Géza-emlékdíjat a Bolyai János Matematikai Társulat 1951-ben alapította a matematikai alapkutatásban kiemelkedő tudományos eredményeket elérő, fiatal magyar matematikusok jutalmazására.

2018-ban a Társulat a jutalmazhatók körét kiterjesztette a Magyarországon tanulmányokat folytatott külföldi kutatókra is.

2019-ben a Grünwald Géza-emlékéremre mindössze három felterjesztés érkezett. Mindhárom jelölt messzemenően rászolgált a kitüntetésre, ennek megfelelően a Bizottság egyhangú döntése alapján az idei díjazottak: **Bencs Ferenc**, **Soltész Dániel** és **Virosztek Dániel**.

Indoklások:

Bencs Ferenc 1990-ben született. Matematikus B.Sc., majd M. Sc. diplomáját 2013-ban, illetve 2015-ben szerezte az ELTE-n. Jelenleg a CEU Matematika Doktori Iskola hallgatója Csikvári Péter témavezetésével.

Bencs Ferencnek négy publikációja jelent meg, és további öt cikkének kézirata készült el. Ezek között egyaránt találhatóak egyszerzős munkák és nemzetközi együttműködések eredményei is. Fiatal kora ellenére is széles körű az érdeklődése: van invariáns véletlen részcsoportokkal foglalkozó cikke, mérhető csoportok elméletéhez kapcsolódó munkája, valamint az antiferromagnetikus Potts-modellel kapcsolatos publikációja is. Legtöbbet azonban a gráfok függetlenségi polinomjait vizsgálta. Ez a terület a statisztikus fizikában hard-core model név alatt szerepel, míg a kombinatorikához a Lovász-féle lokális lemmán keresztül kapcsolódik. Első cikkében új, a korábbinál lényegesen egyszerűbb bizonyítást adott Seymour és Chudnovsky azon tételére, mely szerint karommentes gráfok függetlenségi polinomjának minden gyöke valós. Csikvári Péterrel közös publikációjában korlátos fokú gráfok függetlenségi polinomjának határozzák meg egy gyökmentes tartományát. Egy másik munkájában belátta Galvin és Hilyard sejtését, mely szerint bizonyos fák függetlenségi polinomjának minden gyöke valós. Szintén a függetlenségi polinomot használta gráfok adjoint polinomjának vizsgálatára és vonatkozó eredmények alternatív bizonyítására.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Bencs Ferenc a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Soltész Dániel 1989-ben született. BSc és MSc diplomájáit egyaránt a BME Matematika szakán szerezte 2011-ben, illetve 2013-ban. 2013-tól 2016-ig a BME Matematika- és Számítástudományi Doktori Iskola hallgatója, 2016-tól 2019-ig pedig fiatal kutató az MTA Rényi Intézetben.

Soltész Dánielnek hét cikke jelent meg, további egy van közlésre elfogadva, három kézirata pedig közlésre benyújtva. A kombinatorikában, azon belül elsősorban a gráfelméletben ért el számos eredményt. Legtöbbet bizonyos feltételeknek eleget tevő Hamilton-utak maximális számára vonatkozó becslésekkel foglalkozott. Kovács Istvánnal közös munkájukban egy közös csúcshalmazon adott olyan Hamilton-utakat vizsgáltak, melyek közül bármely kettő uniója tartalmaz háromszöget. Összetett konstrukcióval igazolták, hogy a korábban ismert természetes felső korlát elérhető.

Egy későbbi cikkükben ezt az eredményt terjesztették ki k hosszú körök esetére, ahol a feltétel szerint a résztvevő két Hamilton-út egyike tartalmazza a k hosszú kör egy híján összes élét – itt nagyságrendileg éles eredményt sikerült elérniük. A páros körök bonyolultabb kérdését két további munkájában tanulmányozta, ezek közül a Harcos Gergellyel közös eredményük komoly számelméleti megfontolásokat is tartalmaz. Ron Aharonival közös eredményükben pedig Hamilton-körök olyan maximális halmazait vizsgálták, ahol bármely két kör uniójának függetlenségi száma egy bizonyos korlát alatt marad. További cikkeiben többek között extremális halmazelméleti kérdésekkel, illetve élszínezésekkel foglalkozott. A Rényi Intézetben pedig egy adott fokszámsorozatot megvalósító gráfok, illetve az ezeken értelmezett Markov-láncok keverési tulajdonságainak vizsgálatával foglalkozó csoport munkájába kapcsolódott be.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Soltész Dániel a Grünwald Gézaemlékéremben részesül.

Virosztek Dániel 1989-ben született, 2011-ben végzett a BME matematikus alapszakán kiváló minősítéssel, majd 2013-ban ugyanitt kitüntetéses mesteri diplomát szerzett. 2016-ban doktorált ugyancsak a BME-n. A fokozatszerzés után egy évig a BME Matematika Intézet posztdoktori ösztöndíjasa, 2017 júliusától három hónapig az SZTE tudományos munkatársa. 2017-ben elnyerte az Institute of Science and Technology Austria kétéves „ISTFellow” posztdoktori ösztöndíját, majd 2019-ben az Európai Unió Marie Skłodowska-Curie posztdoktori ösztöndíját. Eddigi kutatómunkájának eredményeként 17, referált nemzetközi folyóiratban megjelent publikációval, valamint 2 kézirattal rendelkezik. Bár 11 társszerzővel jegyez közös cikket, dolgozatai közül 7 egyszerzős. Publikációi jelentős részben az adott témakörben vezetőnek számító folyóiratokban jelentek meg. Munkássága igen szerteágazó. Első cikkében háromdimenziós Riemann-sokaságok geometriáját vizsgálta. Ezután érdeklődése a kvantuminformációelmélet felé fordult. Vizsgálta Pauli-csatornák optimális tomográfiáját, mátrix varianciák felbonthatóságát, illetve Tsallis-entrópiák erős szubadditivitás jellegű tulajdonságait. Molnár Lajossal közösen több geometriai jellegű megőrzési problémát oldott meg. A témakörben elért önálló eredményei közé tartozik a pozitív definit kúp kvantum f-divergenciákat megőrző transzformációinak leírása, valamint a kvantum állapottér Jensen- és Bregman-divergenciákat megőrző transzformációiról szóló struktúratétel. Később algebrai és analitikus tulajdonságok közötti összefüggéseket tárt fel C^*-algebrákon. A klasszikus harmonikus analízis és a funkcionálanalízis határterületén is dolgozott, és Fourier-analízisbeli extremális problémákat vizsgált. Legújabb kutatási területe, Gehér Györggyel és Titkos Tamással közösen, az optimális transzport elmélet motiválta megőrzési problémák vizsgálata, ezen belül is a Wasserstein-terek izometriáinak leírása. Kiemelkedő eredményeire tekintettel Virosztek Dániel a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Farkas Gyula-emlékdíj

A Bizottság a beérkezett javaslatok alapján 2019-ben egy Farkas Gyula-emlékdíjat adományozott, a díjazott **Györgyi Péter**.

Indoklás:

Györgyi Péter 1989-ben született. 2013-ban szerzett alkalmazott matematikusi diplomát az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán, „kitüntetéses” minősítéssel. 2013 és 2016 között az ELTE TTK Matematika Doktori Iskola ösztöndíjas hallgatója, 2016-tól pedig a SZTAKI tudományos munkatársa. 2018-ban summa cum laude minősítéssel védte meg PhD értekezését, témavezetője Kis Tamás volt. 2016 és 2019 között MTA Fiatal Kutatói Ösztöndíjában részesült.

2018-ban elnyerte a SZTAKI publikációs díját, és ugyanebben az évben a Rómában rendezett 16th International Conference on Project Management and Scheduling konferencián második helyezést ért el a doktoranduszi cikkekre kiírt pályázaton. 2019-ben Bolyai János Kutatási Ösztöndíjat nyert.

Eddigi eredményeit főleg az ütemezéselmélet területén érte el. Elsősorban nem megújuló erőforrásos ütemezési problémák bonyolultságát és approximálhatóságát vizsgálta, ebben a témában jelent meg a legtöbb tudományos dolgozata. Ezen túlmenően részt vett egy új egzakt módszer kidolgozásában a feladat egy variánsának a megoldására. Egy másik témája az online jármű hozzárendelési feladat, valamint a konfliktusmentes irányítás gráfokon. Eredményei felhasználásra kerültek a SZTAKI győri, Ipar 4.0 kísérleti laborjában, az autonóm jármű flotta (AGV) irányításában.

Eddig összesen 9 tudományos dolgozata jelent meg – témavezetőjével, mint egyedüli társszerzővel – nemzetközi, lektorált szakfolyóiratban, amelyek közül 2 cikk Q2-es, 5 cikk D1-es, 2 cikk pedig Q1/D1-es besorolású, ezen belül egy dolgozata egyszerzős. 2019-ben meghívott előadó volt a leideni Lorentz Center „Scheduling Meets Fixed-Parameter Tractability" megnevezésű workshopján.

Részt vett a 2016-ban Budapesten megrendezett European Chapter on Combinatorial Optimization Conference (ECCO 2016, http://ecco2016.weebly.com/committees.html) nemzetközi konferencia szervezésében. Számos rangos nemzetközi szakfolyóirat számára bírál rendszeresen kéziratokat.

A felsorolt érdemei alapján Györgyi Péter Farkas Gyula-emlékdíjban részesül.

Rényi Kató-emlékdíj

A Rényi Kató-emlékdíj Bizottság a következő döntést hozta: 2019-ben a Rényi Kató-emlékdíj első fokozatát kapja **Pénzes Evelin**, a Debreceni Egyetem másodéves alkalmazott matematikus MSc szakos hallgatója.

Indoklás:

Pénzes Evelin [1] dolgozatában a szerzők a konvexitás egy általánosításáról megmutatják, hogy a klasszikus esettől eltérve a h-affin tartók halmaza csak konstans függvényeket tartalmaz. A [2] cikkben az Hermite–Hadamard-egyenlőtlenség karakterisztikus tulajdonságát igazolják olyan esetekre, amikor a konvexitást kvázipolinomiális rendszerek származtatják. [3] dolgozatukban „struktúramentes" Hutchinson-típusú eredményt közölnek. [4]-ben a fraktálelmélet alaptételére adnak új bizonyítást, a Kuratowski-féle nemkompaktsági mérték tulajdonságait használva. Az ismeretterjesztő [5] és [6] dolgozatok egy régi KöMal feladatból kiindulva a Knaster–Tarski-féle fixponttételt és két alkalmazást mutatnak be.

Pénzes Evelin publikációi

[1] M. Bessenyei, E. Pénzes: Separation problems in the context of h-convexity, *J. Conv. Anal.* **25**(2018), 1033–1043.

[2] M. Bessenyei, E. Pénzes: Higher order quasimonotonicity and intergral inequalities, *Math. Inequal. Appl.* **21**(2018), 897–909.

[3] M. Bessenyei, E. Pénzes: Fractals for minimalists, *Aeqat. Math.*, megj. alatt.

[4] M. Bessenyei, E. Pénzes: Hutchinson without Blaschke, *Exp. Math.*, megj. alatt.

[5] M. Bessenyei, E. Pénzes: Monoton leképezések fixpontjai, I, *Középiskolai Mat. Lapok*, megj. alatt.

[6] M. Bessenyei, E. Pénzes: Monoton leképezések fixpontjai, II, *Középiskolai Mat. Lapok*, megj. alatt.

Patai László-díj

2019-ben felterjesztés hiányában a díj nem került kiosztásra.

Jelentés a 2019. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

Eredmények

A Bolyai János Matematikai Társulat 2019-ben október 25. és november 4. között rendezte meg a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A BJMT elnöksége a verseny megrendezésére a következő bizottságot jelölte ki: Pap Gyula (elnök), Kevei Péter (titkár), Barczy Mátyás, B. Szendrei Mária, Czédli Gábor, Fodor Ferenc, Gyenizse Gergő, Hajnal Péter, Hatvani László, Kérchy László, Kincses János, Krisztin Tibor, Maróti Miklós, Makay Géza, Molnár Lajos, Nagy Gábor Péter, Röst Gergely, Totik Vilmos, Vígh Viktor, Waldhauser Tamás, Zádori László.

A versenybizottság 10 feladatot tűzött ki. Ezekre 9 versenyző összesen 49 megoldást nyújtott be. A bizottság az alábbi döntést hozta.

I. díjat a bizottság nem ad ki.

II. díjat kap 6 feladat helyes megoldásáért

– *Csernák Tamás*, az ELTE 2019-ben végzett matematika mesterszakos hallgatója és
– *Gáspár Attila*, az ELTE másodéves matematika alapszakos hallgatója.

III. díjat kap 5 feladat helyes megoldásáért

– *Fehér Zsombor*, a University of Oxford elsőéves matematika doktorandusza és
– *Matolcsi Dávid*, az ELTE elsőéves matematika alapszakos hallgatója.

A 2019. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai és megoldásai

1. feladat. Kitűző: *Juhász István*. Bizonyítandó, hogy ha egy X Hausdorff-tér minden altere σ-kompakt, akkor X megszámlálható.

Megoldotta Borbényi Márton, Csernák Tamás, Gáspár Attila és Luo Haoran.

Totik Vilmos megoldása. Jelölje $\mathcal{T}$ a nyílt halmazok rendszerét X-en, és tetszőleges $A \subset X$ esetén legyen $\mathcal{T}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$ az A által generált altértopológia. Felhasználjuk, hogy $B \subset A$ pontosan akkor kompakt a $\mathcal{T}_A$ altértopológiában, ha kompakt az eredeti topológiában is.

A feltevés szerint X σ-kompakt. Mivel megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható, ezért feltehetjük, hogy X kompakt.

Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel, hogy X nem megszámlálható. Ekkor van olyan $x \in X$, amelynek bármely környezete nem megszámlálható. Ez világos, mert ha minden pontnak lenne megszámlálható környezete, akkor ezekből a környezetekből vett nyílt fedés egy véges részfedése (a kompaktság miatt ilyen van) mutatná, hogy X megszámlálható.

Vegyük észre, hogy létezik egy x-től különböző y pont is ezzel a tulajdonsággal. Ugyanis a feltétel szerint $X \setminus \{x\} = \cup_{i\in I} K_i$, ahol a K_i-k kompaktak és I megszámlálható indexhalmaz. Ezért van olyan $i_0 \in I$, hogy K_{i_0} nem megszámlálható. A K_{i_0} halmazra alkalmazva az előző gondolatmenetet, kapjuk y létezését.

Mivel X Hausdorff-tér, x-nek és y-nak léteznek diszjunkt U_x, U_y környezetei. Ezek is σ-kompaktak, így van bennük nem megszámlálható $X_1 \subset U_x$, $X_2 \subset U_y$ kompakt részhalmaz. Ekkor $U_1 = U_x$ az X_1, míg $U_2 = U_y$ az X_2 diszjunkt környezetei.

Az előzőkben eljutottunk X-ből az X_1, X_2 halmazokhoz, amelyknek van diszjunkt U_1, U_2 környezete, és itt X_1 és X_2 is nem megszámlálható kompakt halmazok. Ezt iterálhatjuk egy Cantor-séma szerint, és kapunk egy végtelen bináris fát. A fa ágain csökkenő nemüres kompakt halmazok vannak, melyek metszete nemüres. Vegyünk ki minden ilyen metszetből egy pontot. Így kapjuk az Y alteret, amelynek számossága $\mathfrak{c}$, mert a fának $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ ága van.

Legyen $\mathcal{S}$ az a topológia Y-on, amit a Cantor-konstrukcióban szereplő U környezetek generálnak. Ekkor $\mathcal{S}$ durvább $\mathcal{T}_Y$-nál, azaz $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_Y$. Ezért ha $H \subset Y$ kompakt $\mathcal{T}_Y$-ban, akkor $\mathcal{S}$-ben is az. Az $\mathcal{S}$ topológiának az U halmazok egy megszámlálható környezetbázisát adják. Ezért $\mathcal{S}$ számossága legfeljebb $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Tehát a zárt halmazok, és mivel Hausdorff-téren minden kompakt halmaz zárt, ezért a kompakt halmazok számossága is legfeljebb $\mathfrak{c}$. Következésképp $\mathcal{T}_Y$ kompakt halmazainak számossága is legfeljebb $\mathfrak{c}$, és így a σ-kompakt halmazok számossága is legfeljebb $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Ugyanakkor Y-nak $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$ különböző altere van, így nem lehet mind σ-kompakt.

Ez az ellentmondás igazolja az állítást. $\square$

2. feladat. Kitűző: *Waldhauser Tamás*. Legyen R nemkommutatív egységelemes véges gyűrű. Mutassuk meg, hogy ha R minden nemnulla I ideálja esetén az $I \cup \{1\}$ halmaz által generált részgyűrű maga R, akkor R egyszerű gyűrű.

Megoldotta Borbényi Márton és Csernák Tamás. Részeredményt ért el Gáspár Attila, Luo Haoran és Markó Ádám.

Borbényi Márton megoldása. A feladat feltétele szerint minden nemnulla $I \triangleleft R$ esetén $[I \cup \{1\}] = I + [1] = R$. Ebből rögtön következik, hogy I nem lehet kommutatív, mert akkor R is az lenne. Legyen M minimális ideálja R-nek; ekkor tehát $R = M + [1]$, és azt kell belátnunk, hogy $M = R$.

Megmutatjuk, hogy M egyszerű gyűrű. Ha $I \triangleleft M$, akkor $I \triangleleft R$ is teljesül, mert $IR = I(M + [1]) = IM + I[1] \subseteq I + I = I$, és hasonlóan $RI \subseteq I$. Mivel M minimális ideál, ezért $I = \{0\}$ vagy $I = M$, azaz M valóban egyszerű gyűrű. A véges egyszerű gyűrűk leírása ismert (Wedderburn–Artin-tétel): minden egyszerű (nem feltétlenül egységelemes) véges gyűrű vagy véges test feletti mátrixgyűrű, vagy pedig prímrendű zérógyűrű. Láttuk, hogy R-ben a nemzéró ideálok nem lehetnek kommutatívak, ezért M csak mátrixgyűrű lehet. Ekkor M-nek van egységeleme, jelölje ezt 1_M. Valójában M-ről ennél többet nem is fogunk felhasználni.

Legyen $J = \{k(1 - 1_M) : k \in [1]\}$, ekkor $JM = \{0\}$, mert minden $k \in [1]$ és $m \in M$ esetén $k(1 - 1_M)m = k(m - m) = 0$. Ebből következik, hogy $JR = J(M + [1]) = JM + J[1] \subseteq \{0\} + J = J$, és hasonlóan $RJ \subseteq J$. Tehát $J \triangleleft R$, és mivel J szemlátomást kommutatív, szükségképpen $J = \{0\}$. Ez azt jelenti, hogy $1 = 1_M$, azaz R egységeleme benne van az M ideálban, ez pedig csak $M = R$ esetén lehetséges.

3. feladat. Kitűző: *Ruzsa Z. Imre*. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan egész számokból álló m, n számpár van, hogy $1 < m < n$ és az $(m, n), (m, n + 1), (m + 1, n)$, és $(m + 1, n + 1)$ legnagyobb közös osztók mindegyike nagyobb, mint $\sqrt{n}/999$.

Megoldotta Csernák Tamás, Fehér Zsombor és Gáspár Attila. Kisebb hiányosságokkal megoldotta Tran Hoang Anh.

Gáspár Attila és Fehér Zsombor megoldása. Tekintsük az $a^2 - 2b^2 = 1$ Pell-egyenlet egy megoldását, melyre $a, b \geq 1$. Legyen $m = ab + 2b^2$ és $n = 2ab + 2b^2$. Ekkor $b < a$, $1 < m < n$, és

$$n = 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 = 6b^2 + 2 < 9b^2.$$

A legnagyobb közös osztókra kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(m,n) &= (ab+2b^2, 2ab+2b^2) = b\cdot(a+2b, 2a+3b) \geq b,\\ (m,n+1) &= (ab+2b^2, 2ab+a^2) = (a+2b)\cdot(b,a) \geq a+2b,\\ (m+1,n) &= (a^2+ab, 2ab+2b^2) = (a+b)\cdot(a,2b) \geq a+b,\\ (m+1,n+1) &= (a^2+ab, 2ab+a^2) = a\cdot(a+b, a+2b) \geq a.\end{aligned}$$

Ezek mindegyike legalább $b > \sqrt{n}/3$. Mivel az $a^2 - 2b^2 = 1$ Pell-egyenletnek végtelen sok megoldása van, az állítást beláttuk. □

A kitűző megoldása. Belátjuk, hogy az

$$n(n+1) = 2m(m+1), \qquad 1 < m < n \tag{1}$$

egyenlet megoldásai teljesítik a feladat feltételeit, és végtelen sok megoldás van.

Nyomban látható, hogy $n \sim \sqrt{2}m$ amint $n \to \infty$, pontosabban

$$\sqrt{2}m < n < \sqrt{2}m + 1.$$

Az (1) egyenletből leolvasható, hogy

$$m = (m,n)(m,n+1), \quad m+1 = (m+1,n)(m+1,n+1),$$

így az alsó becslésekhez elegendő felső becslést találni.

Világos, hogy (1) miatt

$$(m,n)^2 \mid n^2 - 2m^2 = 2m - n < 2m,$$

tehát $(n,m) < \sqrt{2m}$. Hasonlóan

$$\begin{aligned}(m,n+1)^2 &\mid (n+1)^2 - 2m^2 = 2m+n+1 < \left(2+\sqrt{2}\right)m+2,\\ (m+1,n)^2 &\mid 2(m+1)^2 - n^2 = 2m+n+2 < \left(2+\sqrt{2}\right)m+3,\\ (m+1,n+1)^2 &\mid 2(m+1)^2 - (n+1)^2 = 2m-n+1 < 2m.\end{aligned}$$

Így mindegyik legnagyobb közös osztó kisebb, mint $\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)m+3}$, és ezért mindegyik nagyobb, mint

$$\frac{m}{\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)m+3}} \sim \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2+\sqrt{8}}},$$

a nevező kb. $2,2$.

Belátjuk, hogy az (1) egyenletnek végtelen sok megoldása van.

Az $x = 2m+1$, $y = 2n+1$ változók bevezetésével (1) a

$$2x^2 - y^2 = 1 \tag{2}$$

Pell-szerű egyenletté változik. Modulo 4 megnézve láthatjuk, hogy (2) megoldásaiban x, y szükségképpen páratlanok, vagyis a két egyenlet ekvivalens. A (2) egyenlet végtelen sok megoldása megkapható az $x_0 = 5$, $y_0 = 7$ alapmegoldásból az

$$x_{k+1} = 3x_k + 2y_k, \quad y_{k+1} = 4x_k + 3y_k, \quad k \geq 0$$

rekurzióval. $\square$

Megjegyzések. 1. A fenti példában a lnko-k kis erőfeszítéssel pontosan kiszámíthatók, a becslés aszimptotikusan pontos. A tényezők maguk is kielégítenek egy Pell-szerű egyenletet, ebből kiindulva megkapható a versenyzők fenti megoldása.

2. A feladat feltételeiből következik, hogy $n(n+1)/(m(m+1))$ nevezője és számlálója korlátos, tehát a megoldásnak szükségszerűen a fentihez hasonlónak kell lennie. Jobb arányt kapunk az $n(n+1) = 3m(m+1)$ egyenlettel kezdve, ez egyszersmind az optimális konstans, értéke $\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)/3}$.

4. feladat. Kitűzők: *Pach János* és *Tardos Gábor*. Egy $n \times m$-es mátrixot szépnek mondunk, ha minden egész számot 1-től nm-ig pontosan egyszer tartalmaz, és az 1 az egyetlen olyan elem, ami mind a sorában, mind az oszlopában a legkisebb. Mutassuk meg, hogy a szép $n \times m$-es mátrixok száma $(nm)!n!m!/(n+m-1)!$.

Megoldotta Fehér Zsombor, Gáspár Attila és Matolcsi Dávid.

Gáspár Attila megoldása alapján. Legyen $1 \leq a \leq n$ és $1 \leq b \leq m$, és rögzítsünk egy szép $a \times b$-s mátrixot. Az alábbiakból látszik, hogy mindegy melyiket rögzítjük. Legyen $g(n,m,a,b)$ annak a valószínűsége, hogy ha a bal felső $a \times b$-s részmátrixba a rögzített szép mátrixot írjuk, a többi helyre meg $ab+1$-től nm-ig a számokat véletlen sorrendben, akkor szép mátrixot kapunk.

Mivel mindegy, hogy hova kerül az 1-es, ezért $g(n,m,1,1)$ éppen annak a valószínűsége, hogy egy $n \times m$-es mátrix mezőit véletlenszerűen kitöltve az $1, 2, \dots, nm$ számokkal egy szép mátrixot kapunk. Vagyis az $n \times m$-es szép mátrixok száma $g(n, m, 1, 1)(nm)!$.

Ha $a = n$ vagy $b = m$, akkor $g(n, m, a, b) = 1$, mert nem lehet elrontani a mátrix szépségét. Legyen $a < n$, $b < m$. Világos, hogy az $ab + 1$-es számnak vagy az első a sorban, vagy az első b oszlopban kell lennie. Az első a sorban $a(m-b)/(nm-ab)$ eséllyel van. Ha ott van, akkor mindegy, hogy azon belül hol, és az is mindegy, hogy a többi $a-1$ elem az ő oszlopában és az első a sorban micsoda. Ezért annak a feltételes valószínűsége, hogy szép mátrixot kapunk, éppen $g(n, m, a, b+1)$. Ebből adódik a

$$g(n, m, a, b) = \frac{a(m-b)}{nm-ab} g(n, m, a, b+1) + \frac{(n-a)b}{nm-ab} g(n, m, a+1, b)$$

rekurzió. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy a rekurzió megoldása

$$g(n, m, a, b) = \frac{(a+m-1)!(n+b-1)!}{(n+m-1)!(a+b-1)!}.$$

Tehát az $n \times m$-es szép mátrixok száma

$$(nm)!g(n, m, 1, 1) = \frac{(nm)!n!m!}{(n+m-1)!},$$

amint állítottuk. □

Fehér Zsombor megoldása alapján. Legyen S azon $n \times m$ méretű mátrixok halmaza, amelyek minden egész számot 1-től nm-ig pontosan egyszer tartalmaznak. Nyilván $|S| = (nm)!$.

Legyen $A_{s,t} \subset S$ $(1 \le s \le n,\ 1 \le t \le m)$ azon $M = (m_{i,j}) \in S$ mátrixok halmaza, amelyben az $m_{s,t}$ elem sorában és oszlopában is a legkisebb elem. A feladat az S halmaz azon elemeinek számára ad formulát, amelyek pontosan egy $A_{s,t}$ halmazban vannak benne. Ezen számot szitálással meghatározhatjuk. Ehhez szükségünk lesz az $A_{s,t}$ halmazokból képezhető metszetek elemszámaira, pontosabban k különböző A-halmaz metszetének elemszámainak σ_k összegére.

Az összes $A_{s,t}$ halmaznak ugyanaz az elemszáma, $\frac{(nm)!}{n+m-1}$. Valóban, hogy egy $M = (m_{i,j}) \in A_{s,t}$ mátrixot kapjunk, ahhoz az s-edik sor és t-edik oszlopon kívüli $(n-1)(m-1)$ pozícióba tetszőlegesen írhatunk különböző $[nm] = \{1, 2, \dots, nm\}$-beli elemeket, a fel nem használt $n+m-1$ elemből a minimális lesz $m_{s,t}$, míg a maradék pozíciókat tetszőlegesen tölthetjük fel az eddig fel nem használt számokkal. Ebből adódik, hogy $\sigma_1 = \sum_{s,t} \Big| A_{s,t} \Big| = nm \cdot \frac{(nm)!}{n+m-1}$.

Nézzük két különböző $A_{s,t}$ és $A_{s',t'}$ halmaz metszetét. Nyilván a metszet pontosan akkor üres, ha $s = s'$ vagy $t = t'$. (Így $2\binom{n}{2}\binom{m}{2}$ kéttagú metszet lesz nem üres.) A nem üres metszetek elemszáma ugyanaz, $(nm)!/(2n + 2m-4)(n+m-1)$. Valóban: az $M = (m_{i,j})_{i=1,j=1}^{i=n,j=m} \in A_{s,t} \cap A_{s',t'}$ mátrixokat az $m_{s,t}$ és $m_{s',t'}$ elemek nagyságrendi viszonya alapján két csoportba oszthatjuk. Mi csak az $m_{s,t} < m_{s',t'}$ esetet vizsgáljuk. Az ilyen M mátrixokat listázhatjuk úgy, hogy az s-edik, s'-edik sor és a t-edik, t'-edik oszlopon kívüli pozíciókat kitöltjük, ahogy korábban (az ismétlődés elkerülésével, egymástól függetlenül), majd az $m_{s,t}$ elem értéke az eddig nem használt értékek minimuma lesz (determinált döntés), folytatjuk a s-edik sor és a t-edik oszlop szabályok szerinti kitöltésével, majd az $m_{s',t'}$ elem érték az eddig nem használt értékek minimuma lesz (determinált döntés), végül kitöltjük az s'-edik sor és a t'-edik oszlop hátralévő pozícióit. A két determinált döntés miatt az első osztályba tartozó mátrixok száma $\frac{(nm)!}{(2n+2m-4)\cdot(n+m-1)}$. A kettős metszetek elemszámainak σ_2 összege

$$\left[2\binom{n}{2}\binom{m}{2}\right] \cdot 2 \cdot \frac{(nm)!}{(2n+2m-4)\cdot(n+m-1)},$$

ahol az első tényező a nem üres metszetekhez tartozó s, t, s', t'-re vonatkozó lehetőségek száma, a második tényező a két esetből jön.

A k-s metszetek elemszámainak meghatározása teljesen hasonlóan történhet. $A_{s_1,t_1} \cap A_{s_2,t_2} \cap \ldots \cap A_{s_k,t_k}$ pontosan akkor üres, ha valamely $i \neq j$ esetén $s_i = s_j$ vagy $t_i = t_j$. A $k!\binom{n}{k}\binom{m}{k}$ nem üres metszet elemszámai mind ugyanazok:

$$\begin{aligned} k! \cdot &\frac{(nm)!}{(kn+km-k^2)\cdot\ldots\cdot(2n+2m-4)\cdot(n+m-1)} \\ &= \frac{(nm)!}{(n+m-k)\cdot\ldots\cdot(n+m-2)\cdot(n+m-1)}, \end{aligned}$$

ahol a $k!$ tényező abból jön, hogy most $k!$ osztályba soroljuk a mátrixainkat.

Innen adódik, hogy

$$\begin{aligned}\sigma_k &= \left[k!\binom{n}{k}\binom{m}{k}\right]\cdot\frac{(nm)!}{(n+m-k)\cdot\ldots\cdot(n+m-2)\cdot(n+m-1)}\\ &= \frac{n!m!\cdot(nm)!(n+m-k-1)!}{(n-k)!(m-k)!k!\cdot(n+m-1)!}\\ &= \frac{n!m!(nm)!}{(n+m-1)!}\cdot\frac{(n+m-k-1)!}{(n-k)!(m-k)!k!},\end{aligned}$$

ahol az első tényező a nem üres metszetekhez tartozó $s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots$-re vonatkozó lehetőségek száma, a második tényező pedig a metszet elemszáma.

Megjegyezzük, hogy pontosan akkor létezik nem üres k-tagú metszet, ha $k \le \min\{n, m\}$.

A szép mátrixok azok, amelyek pontosan egy $A_{s,t}$ halmazba esnek bele. Valóban: $M \in S$ mátrix esetén ha s az '1' elem sora és t az '1' elem oszlopa, akkor $M \in A_{s,t}$. Szép mátrix más A-halmazban nem lehet benne. Ezek száma a szita formula egy alakja szerint

$$\sum_{k=1}^{nm}(-1)^{k-1}k\sigma_k.$$

Tehát a szép mátrixok száma

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\min\{n,m\}}(-1)^{k-1}k\cdot\frac{n!m!(nm)!}{(n+m-1)!}\cdot\frac{(n+m-k-1)!}{(n-k)!(m-k)!k!}\\ &= \frac{n!m!(nm)!}{(n+m-1)!}\cdot\sum_{k=1}^{\min\{n,m\}}(-1)^{k-1}\frac{(n+m-k-1)!}{(n-k)!(m-k)!(k-1)!}.\end{aligned}$$

A bizonyítás befejezéséhez azt kell belátni, hogy az utolsó szumma értéke 1:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}(-1)^{k-1}\frac{(n+m-k-1)!}{(n-k)!(m-k)!(k-1)!}\\ &= \sum_{k=1}(-1)^{k-1}\binom{n+m-k-1}{n-k}\binom{m-1}{k-1}\\ &= \sum_{k=1}(-1)^{k-1}(-1)^{n-k}\binom{-m}{n-k}\binom{m-1}{k-1}\\ &= (-1)^{n-1}\sum_{k=1}\binom{-m}{n-k}\binom{m-1}{k-1}\end{aligned}$$

$$= (-1)^{n-1}\binom{-1}{n-1} = (-1)^{n-1}(-1)^{n-1} = 1. \qquad \square$$

5. feladat. Kitűző: *Totik Vilmos*. Igazoljuk, hogy minden $S \subset \mathbb{R}^d$ konvex (kompakt, belső ponttal rendelkező) testre van olyan pozitív α konstans, amelyre igaz az, hogy ha S-et előállítjuk félterek metszeteként, akkor $\mathbb{R}^d$ minden P pontjára P távolsága valamelyik féltértől legalább α-szorosa a P pont S-től vett távolságának.

Megoldotta Ágoston Péter, Gáspár Attila és Matolcsi Dávid. Részeredményt ért el Markó Ádám.

A kitűző megoldása. Legyen O az S egy belső pontja, és legyenek $0 < r < R < \infty$ olyanok, hogy az O középpontú r sugarú B_r gömb az S belsejében van, az O középpontú R sugarú B_R gömb pedig belsejében tartalmazza S-et. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\alpha < r/R$ szám megfelelő.

A következőkben az AB szakasz hosszát $\overline{AB}$ jelöli. Legyen $\alpha = \beta r/R$, ahol $\beta < 1$. Válasszunk egy tetszőleges S-en kívüli P pontot. Az OP szakasz metssze S határát a Q pontban. Mivel $\overline{PQ} \geq \operatorname{dist}(P,S)$ és $B_R \supset S$, ezért választhatunk egy Q_0 pontot a PQ szakaszon, melyre $\overline{PQ_0} \geq \beta \operatorname{dist}(P,S)$ és $\overline{OQ_0} < R$. Az S-et előállító félterek között van olyan K, ami nem tartalmazza a Q_0 pontot. Legyen H a K félteret határoló hipersík. Jelölje A a H hipersík és az OP szakasz metszéspontját. Az A pontot tartalmazó H-ra merőleges e egyenes és az OP szakasz által meghatározott egyenes kifeszít egy L síkot. Legyen $\ell = H \cap L$. Jelölje B, illetve C az ℓ egyenes O-hoz, illetve P-hez legközelebbi pontját. Ekkor $\overline{PC} = \operatorname{dist}(P,K)$. Továbbá $\overline{OB} \geq r$, hiszen $K \supset B_r$. Az L síkban levő ACP és ABO háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} > \frac{r}{R}.$$

Végül, a $\overline{PA} \geq \overline{PQ_0} \geq \beta \operatorname{dist}(P,S)$ egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\operatorname{dist}(P,K) = \overline{PC} > \frac{r}{R}\overline{PA} \geq \frac{r}{R}\beta \operatorname{dist}(P,S).$$

Tehát tetszőleges P-hez találtunk megfelelő K félteret.

Ha OP merőleges H-ra, akkor e és OP egyenese egybeesik (és így L nem meghatározott), de ekkor

$$\operatorname{dist}(P,K) = \overline{PA} \geq \overline{PQ_0} \geq \beta \operatorname{dist}(P,S). \qquad \square$$

6. feladat. Kitűző: *Krisztin Tibor*. Legyen d pozitív egész és $1 < a \le (d+2)/(d+1)$. Adott $x_0, x_1, \dots, x_d \in (0, a-1)$ esetén definiáljuk az $\{x_k\}_{k\ge 0}$ sorozatot az $x_{k+1} = x_k(a - x_{k-d})$, $k \ge d$ rekurzióval. Mutassuk meg, hogy $\lim_{k\to\infty} x_k = a - 1$.

Megoldotta Csernák Tamás és Fehér Zsombor. Kisebb hiányosságokkal megoldotta Matolcsi Dávid. Részeredményt ért el Ágoston Péter, Borbényi Márton és Luo Haoran.

Csernák Tamás és Fehér Zsombor megoldása alapján. Könnyű megmutatni, hogy $1 < a \le \frac{d+2}{d+1}$ esetén

$$a^{d+1} - a^d < 1. \tag{3}$$

A rekurzióból következik, hogy ha $x_k > 0$, akkor $x_{k-d} \le a - 1$ pontosan akkor, ha $x_{k+1} \ge x_k$. Innen kapjuk, hogy

(A1) ha $n \ge d$ és $x_{n-d}, \dots, x_n \in (0, a-1]$, akkor $x_n \le x_{n+1} \le x_{n+2} \le \ldots \le x_{n+d+1}$, és $x_{n+d+1} = x_n(a - x_n)\dots(a - x_{n-d}) \le (a-1)a^{d+1} < a$;

(A2) ha $n \ge d$ és $x_{n-d}, \dots, x_n \in [a-1, a)$, akkor $x_n \ge x_{n+1} \ge x_{n+2} \ge \ldots \ge x_{n+d+1}$, és $x_{n+d+1} = x_n(a - x_n)\dots(a - x_{n-d}) > 0$.

Ebből adódik, hogy $x_k \in (0, a)$ minden k-ra.

Ha a sorozat valamilyen indextől kezdve monoton, akkor az $x^* \in [0, a]$ határérték létezik, és megoldása az $x = x(a - x)$ egyenletnek. Vegyük észre, hogy 0 nem lehet a határérték, mert ekkor (A1) szerint valahonnan kezdve monoton nő a sorozat, ami ellentmondás. Ezért ekkor $x^* = a-1$ a határérték.

Tehát feltehetjük, hogy a sorozat nem monoton. Ekkor (A1) és (A2) szerint a sorozat végtelen sok eleme nagyobb, mint $a-1$, és végtelen sok eleme kisebb, mint $a-1$.

Legyen N_1+1 az első olyan index, amire $x_{N_1+1} > a-1$. Nyilván $N_1 \ge d$. Mivel $x_{N_1-d}, \dots, x_{N_1} \in (0, a-1]$, ezért (A1) szerint $x_{N_1} \le x_{N_1+1} \le \ldots \le x_{N_1+d+1}$. Tehát $N_1 + 1$ után van legalább d elem, melyek mindegyike nagyobb, mint $a - 1$. Ugyanakkor az $(N_1 + d + 1)$-edik tag után a sorozat csökkenni kezd. N_1 után végtelen sok $(a-1)$-nél kisebb tagja van a sorozatnak, legyen $L_1 + 1$ az első ilyen index. Ekkor $x_{L_1} \ge a - 1 > x_{L_1+1}$, és a megelőző legalább d elem nagyobb, mint $a - 1$, ezért (A2) szerint

$x_{L_1} \geq x_{L_1+1} \geq \ldots \geq x_{L_1+d+1}$. Most (A1) szerint a sorozat megint nőni kezd. Ezt folytatva látjuk, hogy vannak olyan

$$d \leq N_1 < N_1 + d + 1 \leq L_1 < L_1 + d + 1 \leq N_2 < N_2 + d + 1 \leq L_2 < \ldots$$

indexek, hogy az $[N_k+1, L_k]$ indexintervallumban a sorozat tagjai $(a-1)$-nél nagyobbak, míg az $[L_k + 1, N_{k+1}]$ intervallumban $(a-1)$-nél kisebbek. Az is adódik az (A1) és (A2) észrevételekből, hogy a sorozat monoton csökken az $[N_k + d + 1, L_k + d + 1]$, és monoton nő az $[L_k + d + 1, N_{k+1} + d + 1]$ indexintervallumban.

Definiáljuk az (m_k, M_k) sorozatot a következőképpen: $(m_0, M_0) = (0, a)$, és minden $k \geq 0$-ra legyen

$$M_{k+1} = (a-1)(a-m_k)^d, \qquad m_{k+1} = (a-1)(a-M_{k+1})^d.$$

A (3) egyenlőtlenség szerint $M_1 \leq M_0$, és így $m_1 \geq m_0$. Innen indukcióval kapjuk, hogy M_k monoton csökken, m_k pedig monoton nő. Az is indukcióval adódik, hogy $m_k \leq a-1 \leq M_k$ minden k-ra. Legyen $m = \lim_{k\to\infty} m_k$, $M = \lim_{k\to\infty} M_k$, amelyekre $m \leq a-1 \leq M$.

Állítjuk, hogy az $[N_s, L_s]$ indexintervallumban legnagyobb elem, azaz x_{N_s+d+1} és az $[L_s, N_{s+1}]$ indexintervallumban legkisebb elem, azaz x_{L_s+d+1} kielégítik az

$$m_s \leq x_{L_s+d+1} \leq x_{N_s+d+1} \leq M_s \tag{4}$$

egyenlőtlenségeket. Ezt s szerinti indukcióval igazoljuk – $s = 1$-re könnyen látható az állítás. A fent mondottak alapján

$$x_{N_{s+1}+d+1} \leq x_{N_{s+1}}(a-x_{N_{s+1}-d})(a-x_{N_{s+1}+1-d}) \ldots (a-x_{N_{s+1}-1})(a-x_{N_{s+1}}). \tag{5}$$

Itt használjuk fel, hogy – mivel $x(a-x)$ növő a $(0, a-1)$ intervallumon –

$$x_{N_{s+1}}(a - x_{N_{s+1}}) \leq (a-1)(a-(a-1)) \leq a-1 \tag{6}$$

és más indexekre a szorzatban $m_s \leq x_k \leq a-1$, amivel adódik, hogy

$$x_{N_{s+1}+d+1} \leq M_{s+1}.$$

Innen az

$$m_{s+1} \leq x_{L_{s+1}+d+1}$$

egyenlőtlenség ugyanígy igazolható m_s definíciója és a rekurzió alapján.

Mivel (4) mutatja, hogy az $[N_s, N_{s+1})$ indexintervallumban x_k az $[m_s, M_s]$ intervallumba esik, az állításhoz elegendő megmutatni, hogy $M_s \to a-1$ és $m_s \to a-1$, azaz $m = M = a-1$.

A definíció alapján világos, hogy

$$M = (a-1)(a-m)^d, \qquad m = (a-1)(a-M)^d, \tag{7}$$

azaz

$$M = (a-1)\Big(a-(a-1)(a-M)^d\Big)^d. \tag{8}$$

Állítjuk, hogy az

$$f(x) = (a-1)\Big(a-(a-1)(a-x)^d\Big)^d$$

függvény szigorúan kisebb x-nél az $(a-1, a)$ intervallumon. Mivel $x = (a-1)$-re $f(x) = x$, elegendő igazolni, hogy $f'(x) < 1$, azaz

$$d^2(a-1)^2\Big(a-(a-1)(a-x)^d\Big)^{d-1}(a-x)^{d-1} < 1.$$

Ez igaz $x = (a-1)$-re, mert $d(a-1) \le d/(d+1) < 1$, és mivel

$$\Big(a-(a-1)(a-x)^d\Big)(a-x)$$

csökkenő függvény (a deriváltja $(a-1)(d+1)(a-x)^d - a \le (a-x)^d - a < 0$), az állítás igaz marad minden $a-1 < x < a$-ra.

Mivel $f(x) < x$ az $(a-1, a)$ intervallumon, (8) miatt M nem lehet eleme ennek az intervallumnak, amiből $M = a-1$ adódik. Innen (7) miatt $m = a-1$, és ezt akartuk igazolni. $\square$

7. feladat. Kitűző: *Totik Vilmos*. Legyen P polinom, és tegyük fel, hogy $L = \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| = 1\}$ Jordan-görbe (körrel homeomorf). Igazoljuk, hogy P' minden zérushelye L belsejében van.

Megoldotta Fehér Zsombor, Gáspár Attila és Matolcsi Dávid.

Gáspár Attila megoldása alapján. Feltehető, hogy P nem konstans. Először is vegyük észre, hogy L belsejében $|P(z)| < 1$, külsejében pedig $|P(z)| > 1$. Valóban, ha lenne olyan z_0 az L külsejében, melyre $|P(z_0)| < 1$, akkor véve egy, a z_0-ből végtelenbe tartó γ görbét, mely elkerüli L-et, ellentmondásra jutnánk, hiszen $|P(z)| \to \infty$ amint $|z| \to \infty$. A maximumtételből azonnal adódik, hogy L belsejében $|P(z)| < 1$.

Innen kapjuk, hogy P minden zérushelye L belsejében van.

Megmutatjuk, hogy ha σ egy zárt görbe, melyen $|P(z)| \equiv c > 0$, akkor σ belsejében P-nek van zérushelye. Jelölje G a σ görbe belsejét. A maximumtétel szerint $\sup_{z\in G}|P(z)| \le c$. Tegyük fel, hogy nincs gyöke P-nek G-ben. Ekkor $1/P$ is holomorf, így a maximumtétel szerint $\sup_{z\in G}|P(z)|^{-1} \le c^{-1}$, azaz $\inf_{z\in G}|P(z)| \ge c$. Mivel P nem konstans, ellentmondásra jutottunk.

Ezek után rátérünk a bizonyításra. Jelölje M az L görbe belsejét. Indirekten tegyük fel, hogy $z_0 \notin M$ és $P'(z_0) = 0$. Tekintsük a $\sigma = \{z : |P(z)| = |P(z_0)|\}$ szintvonalat. Itt $|P(z_0)| \ge 1$. Mivel $P'(z_0) = 0$, σ önmagát átmetszi a z_0 pontban. Valóban, ha a P polinom z_0 körüli alakja $P(z) = P(z_0) + c_k(z - z_0)^k + \cdots$, $k \ge 2$, akkor z_0 egy környezetében a σ lemniszkáta k analitikus ívből áll, amelyek egyenlő szögű szektorokra osztják a környezetét. Azaz σ átmetszi önmagát a z_0 pontban. Innen azonnal adódik, hogy $z_0 \notin L$, hiszen L Jordan-görbe.

Ezért a $\mathbb{C} \setminus \sigma$ halmaznak legalább két korlátos összefüggő komponense van, és a fentiek miatt minden ilyen komponens tartalmazza P legalább egy zérushelyét. De a maximumtétel miatt L minden pontja ezekben a korlátos komponensekben van, így L összefüggősége miatt L ezen komponensek egyikében van. Mivel P összes zérushelye L belsejében van, ez ellentmond annak, hogy a többi komponensben is van P-nek zérushelye.

Ez az ellentmondás igazolja az állítást. $\square$

Fehér Zsombor megoldása. Mint az előző bizonyításban, vegyük észre, hogy P' nem lehet 0 L-en, mivel egy ilyen pont az L-nek többszörös pontja lenne, így L nem lehetne Jordan-görbe.

Jelölje M az L belsejének és L-nek az unióját. Tekintsük a $v(z) = P(z)\overline{P'(z)}$ függvényt. Legyen $z_0 \in L$ tetszőleges. Mivel $P'(z_0) \ne 0$, ezért P szögtartó leképezés a z_0 kis környezetében. Továbbá az L görbe P melletti képe az egységkör, tehát az L görbe z_0 pontbeli érintőjének iránya $\mathrm{i}P(z_0)/P'(z_0)$. Ebből következik, hogy v iránya L-en éppen a külső normális iránya. Ezek szerint alkalmazhatjuk a Poincaré–Hopf-tételt M-re, miszerint $\sum_i \operatorname{index}_{x_i}(v) = 1$, ahol az összegzést a v függvény M-beli zérushelyeire vesszük. A $v = P\overline{P'}$ zérushelyei éppen P és P' zérushelyeinek uniója. Ha x_i zérushely P-nek k-szoros, P'-nek pedig ℓ-szeres zérushelye, $(k+\ell > 0)$, akkor $\mathrm{index}_{x_i}(v) = k - \ell$. Tehát a $\sum_i \mathrm{index}_{x_i}(v)$ összeg éppen a P és a P' multiplicitásokkal számolt M-beli zérushelyei számának a különbsége. Mivel P minden zérushelye M-beli, így azt kaptuk, hogy P'-nek $n-1$ zérushelye van M-ben. Vagyis P' minden zérushelye M-ben van. $\square$

Megjegyzések. 1. Az előző megoldásban a Poincaré–Hopf-tétel helyett az argumentumelvet is használhatjuk a következőképpen.

Legyen $z_0 \in L$. A Taylor-formula alapján

$$\frac{P(z)}{P'(z_0)} = \frac{P(z_0)}{P'(z_0)} + (z - z_0) + \text{magasabb fokú tagok},$$

és itt z_0-hoz nagyon közeli $z \in L$-re csak úgy lehet

$$\left|\frac{P(z)}{P'(z_0)}\right| = \left|\frac{P(z_0)}{P'(z_0)}\right|,$$

ha a $\frac{P(z_0)}{P'(z_0)}$ vektor merőleges az L görbe z_0 pontbeli érintővektorára.

Azt kaptuk tehát, hogy $P(z)/P'(z)$ minden $z \in L$ pontban merőleges az érintővektorra (ezt az előző megoldás is adta), és ebből következik, hogy $P(z)/P'(z)$ körülfordulási száma 1, amint z végigfut L-en pozitív irányban. Az argumentumelv miatt ez a körülfordulási szám ugyanaz, mint a $g(z) = P(z)/P'(z)$ meromorf függvényre az L-en belüli zérushelyek száma mínusz a pólusok száma. Mivel P-nek n zérushelye van L-en belül, ha a P polinom n-ed fokú, azt kapjuk, hogy P'-nek $n-1$ zérushelye kell, hogy legyen L-en belül, és ezt kellett igazolni.

Kicsit precízebben: ha P-nek $k_1, \ldots, k_m$-szeres zérushelye van a $z_1, \ldots, z_m$ pontokban (azaz $n = k_1 + \ldots + k_m$), akkor g-nek összesen m zérushelye van, így $m-1$ pólusa kell, hogy legyen L-en belül (és ezek mind különböznek a z_j pontoktól). Ez adja $m-1$ zérushelyét P'-nek, amelyekhez hozzávéve még a $k_j - 1$ zérushelyet a z_j, $j = 1, \ldots, m$ pontokban, kapjuk $k_1 + \cdots + k_m - m + (m-1) = n-1$ zérushelyét P'-nek L-en belül.

2. A második megoldásból az is következik, hogy ha f analitikus függvény az L Jordan-görbén és belsejében úgy, hogy $|f(z)| = 1$, ha $z \in L$ (azaz L a $\{z : |f(z)| = 1\}$ szinthalmaz egy komponense), akkor f'-nek pontosan 1-gyel kevesebb zérushelye van L-en belül, mint f-nek.

3. Mindkét megoldás adja a következőt: ha az $L = \{z : |P(z)| = 1\}$ szinthalmaz k diszjunkt komponensből áll, amelyek határa Jordan-görbe, akkor P'-nek ezeken kívül (azaz $\mathbb{C}\setminus L$ végtelen komponensében) pontosan $k-1$ zérushelye van.

8. feladat. Kitűzők: *Totik Vilmos és Varjú Péter*. Bizonyítsuk be, hogy ha egy mérhető valós $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $f(x+t) - f(x)$ mint x függvénye lokálisan integrálható minden t esetén, akkor f is lokálisan integrálható.

Megoldotta Csernák Tamás.

A kitűzők megoldása. Mivel $||f(x+t)|-|f(x)|| \le |f(x+t)-f(x)|$, feltehető, hogy f nemnegatív. Legyen T_n azon t-k halmaza, amelyekre

$$\int_0^2 |f(x+t) - f(x)|\mathrm{d}x < n.$$

Ekkor van olyan N, hogy a $T_N \cap [0, 1/2]$ halmaz (Lebesgue-) mértéke pozitív, hiszen $\cup_{n=1}^{\infty} T_n = \mathbb{R}$. Ha $t, s \in T_N \cap [0, 1/2]$, akkor

$$\begin{aligned}&\int_0^1 |f(x+t+s) - f(x)|\mathrm{d}x\\ &\le \int_0^1 |f(x+t+s) - f(x+s)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f(x+s) - f(x)|\mathrm{d}x \le 2N.\end{aligned}$$

Mivel pozitív mértékű halmazok összege tartalmaz nem üres nyílt intervallumot, ezért a $\{t+s : t, s \in T_N \cap [0, 1/2]\} = (T_N \cap [0, 1/2]) + (T_N \cap [0, 1/2])$ halmaz tartalmaz egy I nem üres nyílt intervallumot. Tehát minden $u \in I$ esetén

$$\int_0^1 |f(x+u) - f(x)|\mathrm{d}x \le 2N,$$

és így

$$\int_I \int_0^1 |f(x+u) - f(x)|\mathrm{d}x\mathrm{d}u \le 2N|I|.$$

Azaz

$$\int_0^1 \left(\int_I |f(x+u) - f(x)|\mathrm{d}u \right)\mathrm{d}x \le 2N|I|.$$

Speciálisan, valamilyen $x_0 \in [0, 1]$ számra

$$\int_I |f(x_0+u) - f(x_0)|\mathrm{d}u < \infty,$$

amiből következik, hogy

$$\int_{I+x_0} f(t)\mathrm{d}t = \int_I f(x_0+u)\mathrm{d}u < \infty.$$

Tehát f integrálható az $I + x_0$ intervallumon. Ekkor a feltevés szerint ennek bármely eltoltján is integrálható, ami adja az állítást. □

9. feladat. *Carl Schildkrauttól ered.* Van-e olyan függvényegyenlet[1], amelynek van megoldása, és minden megoldásának értékkészlete az egész számok halmaza?

Megoldotta Ágoston Péter, Csernák Tamás, Fehér Zsombor, Gáspár Attila és Matolcsi Dávid.

A feladat alapjául a 2019-es ELMO matematikaverseny 6. feladata szolgál, melynek kitűzője Carl Schildkraut. Az ELMO verseny hivatalos weboldala: https://web.evanchen.cc/elmo/problems.html.

Totik Vilmos megoldása. A válasz igen. Legyen $f_0(x) = [x]$ az egészrész függvény. Az alábbiakban konstruálunk egy olyan függvényegyenletet, amelynek az egyetlen megoldása f_0.

A következőkben felhasználjuk, hogy véges sok $E_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$ függvényegyenletet egyetlen $E = 0$ egyenletté írhatunk át (abban az értelemben, hogy pontosan akkor van olyan f, ami megoldása minden E_i-nek, ha f megoldása E-nek), ahol $E = \sum_{i=1}^{N} E_i^2$ (vagy csak $\sum_{i=1}^{N} E_i$, ha az E_i egyenletek megoldásai szükségképpen nemnegatívak).

Tekintsük az

$$x^2 g(x)^2 + (g(0) - 1)^2 = 0 \tag{9}$$

függvényegyenletet. Világos, hogy ennek egyetlen megoldása az a g_0 függvény, melyre $g_0(x) = 0$, ha $x \neq 0$, $g_0(0) = 1$.

Vegyük észre, hogy $h_0(x) = f_0(x) + f_0(1 - x)$ értéke 1, ha $x \in \mathbb{Z}$, különben 0. Tehát $g_0(x) = h_0(x) h_0\left(\sqrt{2}x\right)$. A (9) függvényegyenletben helyettesítsük g helyére a

$$g(x) = (f(x) + f(1 - x))\left(f\left(\sqrt{2}x\right) + f\left(1 - \sqrt{2}x\right)\right) \tag{10}$$

kifejezést. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$x^2\left[(f(x)+f(1-x))\left(f\left(\sqrt{2}x\right)+f\left(1-\sqrt{2}x\right)\right)\right]^2+\left((f(0)+f(1))^2-1\right)^2 = 0.$$

[1]Egy függvényegyenlet $E = 0$ alakú, ahol E függvényforma. A függvényformák halmaza a legszűkebb olyan véges jelsorozatokból álló $\mathcal{F}$ halmaz, amely tartalmazza az összes x_i, $i = 1, 2, \ldots$ változót, az összes $r \in \mathbb{R}$ valós konstanst, és amely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy ha $E, E_1, E_2 \in \mathcal{F}$, akkor $E_1 + E_2$, $E_1 \cdot E_2$ és $f(E)$ is $\mathcal{F}$-beliek (itt f előre rögzített függvényszimbólum). Az $E = 0$ függvényegyenlet megoldása olyan valós f függvény, amelyre $E = 0$ a változók minden valós értékére fennáll. Pl. $f\left(x_1 + f\left(\sqrt{2} \cdot x_2 \cdot x_2\right)\right) + (-\pi) + (-1) \cdot x_1 \cdot x_1 \cdot x_2 = 0$ függvényegyenlet.

Az utolsó tag helyett az $f(0)^2+(f(1)-1)^2$ kifejezést írva, egy f megoldásra $f(0)=0$ és $f(1)=1$ adódik. Ezek szerint f_0 megoldása az

$$x^2\Big[(f(x)+f(1-x))\Big(f\Big(\sqrt{2}x\Big)+f\Big(1-\sqrt{2}x\Big)\Big)\Big]^2+f(0)^2+(f(1)-1)^2=0 \tag{11}$$

egyenletnek.

Azt, hogy az $f(x+1)=f(x)+1$ teljesüljön, elérhetjük az

$$(f(x+1)-f(x)-1)^2=0 \tag{12}$$

függvényegyenlettel.

Végül elérjük, hogy $f(x)=0$ teljesüljön minden $0<x<1$ esetén. Ehhez tekintsük a

$$g_0\Big(x(1-x)-y^2\Big)y^2f(x)^2=0$$

egyenletet, ahol g_0 (az egyetlen) megoldása (9) egyenletnek. Ha $x\notin[0,1]$, akkor $x(1-x)<0$, így $g_0(x(1-x)-y^2)=0$, tetszőleges $y\in\mathbb{R}$ esetén. A $g_0(x(1-x)-y^2)y^2\neq 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x\in(0,1)$ és $y=\sqrt{x(1-x)}$. Ekkor szükségképpen $f(x)=0$. A fenti egyenletben g_0-t kiküszöbölhetjük a (10) formulával, és kapjuk, hogy f_0 megoldása az

$$\begin{aligned}&\Big[f\Big(x(1-x)-y^2\Big)+f\Big(1-\Big(x(1-x)-y^2\Big)\Big)\Big]\\&\times\Big[f\Big(\sqrt{2}\Big(x(1-x)-y^2\Big)\Big)+f\Big(1-\sqrt{2}\Big(x(1-x)-y^2\Big)\Big)\Big]y^2f(x)^2=0\end{aligned}$$

egyenletnek.

Összegezve, azt kaptuk, hogy f_0 megoldása a (11), (12), (13) egyenleteknek. Ezeket a feladat elején említett módon egyetlen egyenletként írva az

$$\begin{aligned}&x^2\Big[(f(x)+f(1-x))\Big(f\Big(\sqrt{2}x\Big)+f\Big(1-\sqrt{2}x\Big)\Big)\Big]^2+f(0)^2+(f(1)-1)^2\\&+(f(x+1)-f(x)-1)^2\\&+\Big[f\Big(x(1-x)-y^2\Big)+f\Big(1-\Big(x(1-x)-y^2\Big)\Big)\Big]\\&\times\Big[f\Big(\sqrt{2}\Big(x(1-x)-y^2\Big)\Big)+f\Big(1-\sqrt{2}\Big(x(1-x)-y^2\Big)\Big)\Big]y^2f(x)^2=0\end{aligned} \tag{14}$$

függvényegyenletet kapjuk.

Állítjuk, hogy ez a függvényegyenlet megfelelő, azaz egyetlen megoldása f_0. Az, hogy f_0 megoldás, az eddigiekből következik. Megmutatjuk, hogy nincs más megoldás.

Legyen f megoldása a (14) egyenletnek. Az első sorból világos, hogy $f(0)=0$, $f(1)=1$, és

$$(f(x)+f(1-x))\Big(f\big(\sqrt{2}x\big)+f\big(1-\sqrt{2}x\big)\Big)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\neq 0,\\ 1, & \text{ha } x=0.\end{cases}$$

Legyen $x\in(0,1)$, és írjunk a (14) egyenlet utolsó két sorában $y=\sqrt{x(1-x)}$-et. Ekkor szükségképpen $f(x)=0$. Tehát $f(x)=[x]=f_0(x)$ minden $x\in[0,1]$ esetén. Az $f(x+1)=f(x)+1$ egyenlőségből következik, hogy $f=f_0$, azaz a megoldás egyértelmű. □

Matolcsi Dávid megoldása. Azt állítjuk, hogy az

$$\begin{aligned}&f(4x(1-x))^2(4x(1-x)-1)^2\\&+(f(1)+1)^2\\&+\Big(f(x^2+1)-f(x^2)-1\Big)^2\Big(f(x^2)+x^2\Big)^2\\&+\Big(f(x^2+1)-f(x^2)-1\Big)^2\Big(f(x^2+2)-f(x^2+1)+1\Big)^2=0\end{aligned}\tag{15}$$

függvényegyenlet teljesíti a feladat feltételeit.

Mivel f valós értékű, f pontosan akkor megoldása a (15) függvényegyenletnek, ha a bal oldali összeg minden tagja azonosan 0. A $4x(1-x)$ függvény minden 1-nél kisebb valós értéket felvesz, ezért az

$$f(4x(1-x))(4x(1-x)-1)=0$$

egyenletből következik, hogy $f(y)=0$ minden $y<1$ esetén.

Továbbá az $\Big(f(x^2+1)-f(x^2)-1\Big)\Big(f(x^2)+x^2\Big)=0$ egyenlőségből következik, hogy

$$\text{tetszőleges } y\geq 0 \text{ esetén } f(y)=-y \text{ vagy } f(y+1)=f(y)+1.\tag{16}$$

Ebből teljes indukcióval adódik, hogy ha k nemnegatív egész és $y\in(k,k+1)$, akkor $f(y)=k$. Valóban, $k=0$-ra beláttuk, hogy $f(y)=0$. Legyen $k\geq 1$, $y\in(k,k+1)$ és tegyük fel, hogy $k-1$-ig igaz az állítás. Ekkor az indukciós feltevés szerint $f(y-1)=k-1$, tehát $f(y-1)\neq-(y-1)$. Ekkor szükségképpen $f(y)=f(y-1)+1=k$, amint állítottuk.

A (15) egyenlet bal oldalán szereplő második tagból világos, hogy $f(1) = -1$. A negyedik tagot megvizsgálva látjuk, hogy

$$f(y+1) = f(y) + 1 \text{ vagy } f(y+2) = f(y+1) - 1 \text{ minden } y \geq 0 \text{ számra.} \tag{17}$$

Ebből teljes indukcióval következik, hogy $f(k) = -k$ minden $k \geq 0$ egészre. Valóban, $k = 0,\ 1$ esetén igaz az állítás. Legyen $k \geq 2$, és tegyük fel, hogy $k-1$-re igaz az állítás. A (17) formulába $y = k - 2 \geq 0$ értéket beírva $f(k-1) = f(k-2) + 1$ vagy $f(k) = f(k-1) - 1$ adódik. Ezek közül az indukciós feltevés szerint az első nem teljesülhet, ezért a második teljesül, ami éppen az állításunk.

Összegezve, azt kaptuk, hogy ha f megoldása a (15) egyenletnek, akkor

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1, \\ k, & \text{ha } x \in (k, k+1),\ k \geq 1 \text{ egész,} \\ -k, & \text{ha } x = k,\ k \geq 1 \text{ egész.} \end{cases}$$

Világos, hogy f értékkészlete éppen az egész számok halmaza. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy f valóban kielégíti a (15) egyenletet. □

Fehér Zsombor megoldása. Van ilyen függvényegyenlet, például az

$$\begin{aligned} &f(0)^2 + (f(1)-1)^2 + (f(2)+1)^2 + (f(3)-2)^2 \\ &+ \Big(f(4-x^2)\big(f(4-x^2)^2 - 1\big)\big(f(4-x^2)^2 - 4\big)\Big)^2 \\ &+ \Big(\big(f(4+x^2) - f(2+x^2)\big)^2 - 1\Big)^2 \\ &+ \Big(\big(f(4+x^2) - f(x^2)\big)^2 - 4\Big)^2 = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Szorzás helyett négyzetre emelést, és x_1 helyett x-et írtunk. Mivel az egyenletben valós számok négyzetösszege 0, ezért f pontosan akkor megoldása a függvényegyenletnek, ha megoldása a következő egyenletrendszernek:

$$f(0) = 0,\ \ f(1) = 1,\ \ f(2) = -1,\ \ f(3) = 2, \tag{19}$$

$$f(4-x^2) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \tag{20}$$

$$f(4+x^2) - f(2+x^2) \in \{-1, 1\}, \tag{21}$$

$$f(4+x^2) - f(x^2) \in \{-2, 2\}. \tag{22}$$

Megmutatjuk, hogy az egyenletrendszer minden megoldásának értékkészlete $\mathbb{Z}$. Valóban, (20) alapján minden $y \le 4$ esetén $f(y)$ egész, és (21) alapján minden $y \ge 4$ esetén $f(y) = f(y-2) \pm 1$, tehát ha $f(y-2)$ egész, akkor $f(y)$ is az. Így indukcióval adódik, hogy f mindenhol egész.

Ezután belátjuk k szerinti indukcióval, hogy $f(2k) = -k$ és $f(2k+1) = k+1$ minden $k \in \mathbb{N}$ természetes számra. A (19) egyenlet alapján $k = 0$ és $k = 1$ esetén ez teljesül. Ha $k \ge 2$, és már tudjuk, hogy $f(2k-4) = -k+2$ és $f(2k-2) = -k+1$, akkor (21) alapján $f(2k) \in \{-k, -k+2\}$, (22) alapján pedig $f(2k) \in \{-k, -k+4\}$, így $f(2k) = -k$. Ugyanígy, ha $f(2k-3) = k-1$ és $f(2k-1) = k$, akkor (21) és (22) alapján $f(2k+1) = k+1$. Ezzel beláttuk, hogy f minden egész számot felvesz legalább 1 helyen, így értékkészlete valóban $\mathbb{Z}$.

Végül pedig van megoldása az egyenletrendszernek, például:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le -1, \\ -k, & \text{ha } 2k-1 < x \le 2k,\ k \in \mathbb{N}, \\ k+1, & \text{ha } 2k < x \le 2k+1,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Megjegyzés. Az utolsó megoldásban megadott függvényegyenlet megoldása nem egyértelmű. A (19)–(22) egyenletekből látjuk, hogy f értékeire a negatív félegyenesen az egyetlen megszorítás, hogy a $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ halmazban legyenek. Vagyis a lehetséges megoldások száma $2^{\mathfrak{c}}$.

10. feladat. Kitűző: *Molnár Lajos*. Igazoljuk, hogy ha A és B pozitív önadjungált operátorok a H komplex Hilbert-téren, akkor

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n x\|^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} \|B^n x\|^{1/n}$$

pontosan akkor teljesül minden $x \in H$ esetén, ha $A^n \le B^n$ minden pozitív egész n-re.

A kitűző megoldása. Tegyük fel, hogy $A^n \le B^n$ minden n-re. Ez pontosan azt jelenti, hogy $\langle A^n x, x\rangle \le \langle B^n x, x\rangle$ minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in H$ esetén. Ekkor az önadjungáltság miatt (ami egyébként komplex tér esetén a pozitivitásból automatikusan következik)

$$\|A^n x\|^2 = \langle A^n x, A^n x\rangle = \left\langle A^{2n} x, x\right\rangle \le \left\langle B^{2n} x, x\right\rangle = \|B^n x\|^2.$$

Azaz pontonként $\|A^n x\| \le \|B^n x\|$ fennáll minden n-re, amiből adódik az állítás.

Megfordítva, tegyük fel, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n x\|^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty} \|B^n x\|^{1/n} \tag{23}$$

teljesül minden $x \in H$ vektorra.

Legyen T egy tetszőleges pozitív operátor H-n, és jelölje E_T a spektrálmértékét. Mivel T pozitív, spektruma a nemnegatív félegyenesen van, ezért $E_T : \mathcal{B}([0,\infty)) \to \mathcal{P}(H)$, ahol $\mathcal{B}([0,\infty))$ a Borel-halmazokat, $\mathcal{P}(H)$ pedig a H ortogonális projekcióinak összességét jelöli. Legyen $x \in H$ rögzített egységvektor. Ekkor $\langle E_T(\cdot)x, x\rangle = E_{T,x}(\cdot)$ valószínűségi mérték a $[0,\infty)$ Borel-halmazain. Mivel $T = \int_{[0,\infty)} u \mathrm{d}E_T(u)$, így a spektrálmérték tulajdonságai szerint

$$T^{2n} = \int_{[0,\infty)} u^{2n} \mathrm{d}E_T(u)$$

és

$$\|T^n x\|^2 = \langle T^n x, T^n x\rangle = \left\langle T^{2n} x, x\right\rangle = \int_{[0,\infty)} u^{2n} \mathrm{d}E_{T,x}(u).$$

Vagyis

$$\|T^n x\|^{1/n} = \left(\int_{[0,\infty)} u^{2n} \mathrm{d}E_{T,x}(u)\right)^{1/(2n)}.$$

A jobb oldalon éppen az $([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)), E_{T,x})$ valószínűségi mezőn definiált identikus függvény L^{2n}-normája szerepel. Ismert, hogy valószínűségi mezőn az L^p-normák határértéke $p \to \infty$ esetén éppen az L^∞-norma, azaz

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|T^n x\|^{1/n} &= \inf\{t \ge 0 : E_{T,x}((t,\infty)) = 0\}\\ &= \min\{t \ge 0 : E_{T,x}((t,\infty)) = 0\}.\end{aligned}$$

Ezzel azt is beláttuk, hogy a feladatban szereplő $\limsup$ valójában $\lim$. Mivel $E_{T,x}((t,\infty)) = \langle E_T((t,\infty))x, x\rangle$, a fenti határérték a legkisebb olyan $t \ge 0$ szám, melyre x az $E_T((t,\infty))$ képterének ortogonális komplementerében, azaz $E_T([0,t])$ képterében van. Ezért

$$\min\Big\{t \ge 0 : E_{T,x}((t,\infty)) = 0\Big\} = \min\Big\{t \ge 0 : x \in \text{ran } E_T([0,t])\Big\}.$$

Összegezve, a (23) egyenlőtlenség azt jelenti, hogy tetszőleges $x \in H$ vektorra

$$\min\Big\{t \ge 0 : x \in \text{ran } E_A([0,t])\Big\} \le \min\Big\{t \ge 0 : x \in \text{ran } E_B([0,t])\Big\}.$$

Azaz ha valamely t esetén $x \in \operatorname{ran} E_B([0,t])$, akkor $x \in \operatorname{ran} E_A([0,t])$, vagyis $\operatorname{ran} E_A([0,t]) \supset \operatorname{ran} E_B([0,t])$. Tehát tetszőleges x-re

$$E_{B,x}([0,t]) = \langle E_B([0,t])x, x\rangle \le \langle E_A([0,t])x, x\rangle = E_{A,x}([0,t]).$$

A spektrálmérték tulajdonságai szerint tetszőleges $x \in H$ vektorra és n pozitív egészre

$$\begin{aligned}\langle A^n x, x\rangle &= \int_{[0,\infty)} u^n \mathrm{d}E_{A,x}(u) = \int_0^\infty n u^{n-1}\Big[1 - E_{A,x}([0,u])\Big]\mathrm{d}u \\ &\le \int_0^\infty n u^{n-1}\Big[1 - E_{B,x}([0,u])\Big]\mathrm{d}u = \int_{[0,\infty)} u^n \mathrm{d}E_{B,x}(u) = \langle B^n x, x\rangle,\end{aligned}$$

ami éppen azt jelenti, hogy $A^n \le B^n$ teljesül minden n-re. $\square$

Tartalom

Contents