

Kéri Gerzson:

Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok néhány fajtája direktben és faktorizáltan

Bevezetés

A többszörös szögek szögfüggvényeit az egyszeres szög szinuszának és koszinuszának polinomjai használatával a jól ismert $T_n(x)$ elsőfajú és $U_n(x)$ másodfajú Csebisev-polinomokkal lehet kifejezni. Hasonló (bár kissé furcsa) összefüggéseket fejeznek ki a kevésbé ismert $V_n(x)$ harmadfajú és $W_n(x)$ negyedfajú Csebisev-polinomok, lásd Mason és Handscomb [7, 17. old.]. Ha a többszörös szögek szögfüggvényeinek a kérdését azzal az apró módosítással tanulmányozzuk, hogy $\sin \vartheta$ és $\cos \vartheta$ helyett $\sin 2\vartheta$ és $\cos 2\vartheta$ polinomjait vesszük alapul, akkor a Csebisev-polinomok helyett a $t_n(x) = 2T_n(x/2)$, $u_n(x) = U_n(x/2)$, $v_n(x) = V_n(x/2)$ és $w_n(x) = W_n(x/2)$ polinomokkal kell foglalkoznunk. Ezeknek a polinomoknak, amiket szokás módosított Csebisev-polinomoknak nevezni, több előnyük van az eredeti Csebisev-polinomokkal szemben. Az egyik előnyük az, hogy az általam szimmetrizáló operátornak nevezett leképezéssel olyan kétszeres fokszámú, de mégis egyszerűbb polinomokra képezhetők le, amelyeknek az irreducibilis faktorizációja könnyebben elvégezhető, és így áttételeken meg tudjuk határozni a többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok irreducibilis faktorizációját is. Konkrétan, a szimmetrizáló operátor a $t_n(x)$ polinomot az $x^{2n} + 1$ polinomba, az $u_n(x)$ polinomot az $(x^{2n+2} - 1)/(x^2 - 1)$ osztás eredményeként értelmezett polinomba, a $v_n(x)$ polinomot az $(x^{2n+1} + 1)/(x + 1)$ osztás eredményeként értelmezett polinomba, a $w_n(x)$ polinomot pedig az $(x^{2n+1} - 1)/(x - 1)$ osztás eredményeként értelmezett polinomba viszi.

A fentiek értelmében zsugorított $t_n(x)$, $u_n(x)$, $v_n(x)$ és $w_n(x)$ polinomoknak az is egy figyelemre méltó előnyük a Csebisev-polinomokkal szemben, hogy főegyütthatóik 1 értékűek, és ezáltal lényegesen csökkennek a Csebisev-polinomok főegyütthatóihoz képest. Ennek köszönhetően a szimmetrizáló operátor alkalmazásával belőlük származó polinomok főegyütthatója is 1. A konstans tag esetleges kivételével a többi együttható abszolút értéke is csökken vagy változatlan marad.

Foglalkozunk a szinusz és koszinusz függvények hiperbolikus megfelelőivel is, melyekre bizonyos esetekben lényegében ugyanazok a képletek érvé-

2 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

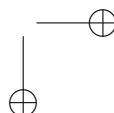
nyesek, mint amelyek a többszörös szögek szinuszára és koszinuszára, más ezekre vonatkozó hasonló képletekben viszont azok a $t_n^\oplus(x)$ és $u_n^\oplus(x)$ polinomok fejezik ki a többszörös argumentumokra vonatkozó hasonló összefüggéseket, amelyek a $t_n(x)$ és $u_n(x)$ polinomokból úgy származnak, hogy minden együtthatónak az abszolút értékét vesszük. Ezekre a csupa nemnegatív együtthatós polinomokra a szimmetrizáló operátort nincs értelme alkalmazni, viszont más módszerrel, közvetlenül a Galois-elmélethez fordulva, mégis meghatározható az irreducibilis faktorizációjuk.

Meg kell említenünk, hogy az ebben a munkában $t_n(x)$ és $u_n(x)$ jelöléssel szereplő polinomokat Witula és Słota [13] cikkében a szerzők $\Omega_n(x)$, ill. $V_n(x)$ jelöléssel definiálták első-, ill. másodfajú módosított Csebisev-polinomként. (Ennek a $V_n(x)$ polinomnak semmi köze a fentebb említett harmadfajú Csebisev-polinomhoz; az egyforma jelölés csak véletlen.) Továbbá azt is meg kell még említenünk, hogy a $t_n(x)$ polinomra szokás még a Lucas-polinom elnevezés és az $L_n(x)$ jelölés használata is, lásd Wolfram MathWorld: Lucas Polynomial [14].

A Csebisev-polinomok faktorizációjára vonatkozóan a következő előzményekről tudunk: Hsiao [1] nehezen hozzáférhető cikkére történő egy hivatkozásban olvasható, hogy a szerző meghatározta, hogyan kell csoportosítani a polinom gyökeit az irreducibilis faktorok előállítása céljából. Ennek az eredménynek a másodfajú Csebisev-polinomokra vonatkozó kiterjesztése Rivlin [11] könyvében olvasható. A *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* [12] összeállítás tartalmazza az irreducibilis faktorok darabszámának a sorozatát a $T_n(x)$ első- és $U_n(x)$ másodfajú Csebisev-polinomok, valamint a $T_n(x) - 1$, $T_n(x) + 1$, $U_n(x) - 1$ és $U_n(x) + 1$ polinomok esetére. ($T_n(x) \pm 1$ -nek $t_n(x) \pm 2$ felel meg, ha áttérünk a módosított Csebisev-polinomokra.) A $t_n(x) \pm 1$ polinom faktorizációját illetően semmilyen előzményről nem tudunk. A faktoroknak korábbi publikációkban történt explicit megadásáról sem találtam információt. Viszont sok publikáció található olyan számítógépes algoritmusok ismertetésére, amelyek a Csebisev-polinomok együtthatóinak, ill. faktorainak a kiszámításával foglalkoznak.

A Csebisev-polinomokról szólva nem szabad említés nélkül hagyni ezek alkalmazásának a jelentőségét az approximációelmélet és a differenciálegyenletek területén. Ilyen alkalmazásokkal azonban itt nem kívánunk foglalkozni. Akit a Csebisev-polinomok témakörének ez az oldala érdekel, azoknak javasoljuk pl. az oktatásban is már régóta használt Natanson [8] könyvet.

1. definíció. Egy valós vagy komplex együtthatós $\sum_{k=0}^n b_k x^k$ polinom palindrom, ha $b_k = b_{n-k}$ fennáll minden $b = 0, 1, \dots, n$ -re.

$$Q_{2n}(x) = \sigma[P_n(x)] = x^n P_n(x + x^{-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k (x^k + x^{2n-k}) + b_n x^n. \quad (1)$$
$$b_{n-l} = \sum_{k=0}^{(n-l)/2} C_k^{2k+l} a_{2k+l} \quad (l = 0, 1, \dots, n), \quad (2)$$
$$\mathbf{b} = \Sigma_n \mathbf{a}, \quad (3)$$
[illegible]

4 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

mátrix n -edik bal felső négyzetes szubmátrixa. Vegyük észre, hogy a Σ_∞ mátrixban, és következésképpen minden Σ_n mátrixban a főátló minden eleme 1, és a főátlóval párhuzamos minden második átlónak minden eleme 0 (amiket nem írtunk be a mátrixba),

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T,$$

és

$$\mathbf{b} = (b_n, \dots, b_1, b_0)^T.$$

Mivel Σ_n felső háromszög mátrix, melynek főátlójában csupa 1-esek állnak, következésképpen $b_0, b_1, \dots, b_n$ tetszőleges értéke esetén a (2) képletet $a_0, a_1, \dots, a_n$ -re vonatkozó egyenletrendszernek tekintve, ennek az egyenletrendszernek mindig van egyértelmű megoldása, amely a (2) képlet alábbi átrendezésével kapható meg nagyon egyszerűen:

$$a_l = b_{n-l} - \sum_{k=1}^{(n-l)/2} C_k^{2k+l} a_{2k+l} \quad (l = n, \dots, 1, 0). \quad (5)$$

(Az $\mathbf{a}$ vektor komponenseinek csökkenő sorrendjében végezve a számolást, azonnal adódik, hogy $a_n = b_0$ és $a_{n-1} = b_1$, mivel ebben a két esetben a szummázandó összeg üres. Ezt követően egytagú összeget kell kivonni b_2 -ből, illetve b_3 -ból, miáltal adódik, hogy $a_{n-2} = b_2 - na_n = b_2 - nb_0$, és hasonlóan $a_{n-3} = b_3 - (n-1)a_{n-1} = b_3 - (n-1)b_1$. A folytatás már nem ennyire egyszerű, de végig direkt módon kapjuk a többi a_l együtthatóra is a megoldást.)

A fenti gondolatmenet a következő tétel állítását bizonyítja:

2. tétel. *Tetszőleges $Q_{2n}(x)$ páros fokú palindrom polinom esetén létezik és egyértelmű az a $P_n(x)$ polinom, melyre $Q_{2n}(x) = \sigma[P_n(x)]$.*

Továbbá ugyanabból a gondolatmenetből az is kiderül, hogy ha $Q_{2n}(x)$ minden együtthatója valós (racionális, egész) szám, akkor $P_n(x)$ együtthatói szintén valós (racionális, egész) számok.

A továbbiakban a 2. tételben szereplő $Q_{2n}(x)$ polinomot a $P_n(x)$ polinom szimmetrizáltjának, a $P_n(x)$ polinomot pedig a $Q_{2n}(x)$ palindrom polinom hordozójának nevezzük.

A szimmetrizáló operátor legalapvetőbb tulajdonságai:

1. $\sigma[c] = c$ tetszőleges c konstans esetén.
2. $\sigma[P_n(x)Q_m(x)] = \sigma[P_n(x)]\sigma[Q_m(x)]$.
3. $\sigma[P_n(x) \pm Q_m(x)] = \sigma[P_n(x)] \pm x^{n-m}\sigma[Q_m(x)]$, ha $n \geq m$.

Ezek nyilvánvaló volta miatt a bizonyítást elhagyjuk.

A 3. tulajdonságból következik, hogy két különböző polinom szimmetrizáltja is különböző, ezért a szimmetrizáló operátor ϱ inverzére igaz a következő tétel:

3. tétel. *A $\varrho = \sigma^{-1}$ operátor egyértékű a páros fokú palindrom polinomok halmazán. Ennélfogva a σ szimmetrizáló operátor és annak ϱ inverze egyértelmű megfeleltetést hoz létre a tetszőleges fokú polinomok és a páros fokú palindrom polinomok között.*

A szimmetrizáló operátor felsorolt alaptulajdonságait a következőképpen lehet átfogalmazni a ϱ operátorra:

1. $\varrho[c] = c$ tetszőleges c konstans esetén.
2. $\varrho[P_{2n}(x)Q_{2m}(x)] = \varrho[P_{2n}(x)]\varrho[Q_{2m}(x)]$.
3. $\varrho[P_{2n}(x) \pm x^{n-m}Q_{2m}(x)] = \varrho[P_{2n}(x)] \pm \varrho[Q_{2m}(x)]$, ha $n \geq m$.

A továbbiakban csak páros fokú $Q_{2n}(x)$ palindrom polinomokkal foglalkozunk, ezek közül is csak olyanokkal, melyek b_0 főegyütthatójának az értéke 1 (és következésképpen a hordozó $P_n(x)$ polinom a_n főegyütthatója is 1).

Az alábbiakban néhány példát mutatunk, egyelőre legfeljebb másodfokú palindrom polinomokkal:

A főegyütthatóra tett korlátozás hatálya alatt egyetlen 0-adfokú palindrom polinom létezik, mégpedig az 1 konstans, melyre $\varrho[1] = 1$.

Az általános másodfokú $P_2(x) = x^2 + cx + 1$ palindrom polinomra $\varrho[P_2(x)] = x + c$.

Ha $|c| < 2$, akkor jelölje ϑ azt a szöget, melyre $c = -2 \cos \vartheta$. E jelöléssel a $P_2(x) = x^2 - (2 \cos \vartheta)x + 1$ polinomra $\varrho[P_2(x)] = x - 2 \cos \vartheta$. Ez a $P_2(x)$ polinom komplex aritmetikában az

$$\begin{aligned} x^2 - (2 \cos \vartheta)x + 1 &= (x - \cos \vartheta - i \sin \vartheta)(x - \cos \vartheta + i \sin \vartheta) \\ &= (x - e^{i\vartheta})(x - e^{-i\vartheta}) \end{aligned}$$

szorzattá alakítható, tehát ilyen c konstans esetén $P_2(x)$ gyökei egységnyi abszolút értékű konjugált komplex számok.

Ennek egy, a további tárgyalás során fontos speciális esete az az eset, amikor a ϑ szög osztója 2π -nek vagy 2π valamelyik egész számú többszörösének. Ezzel közel járunk már ahhoz, hogy eljussunk a primitív egységgyökökhöz és a körsztási polinomokhoz, majd az utóbbiak hordozó polinomjai segítségével a többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomokhoz.

6 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

Megjegyzés. A σ és ϱ operátor alkalmazására ezek elnevezése és jelölése nélkül Kearnes, Kiss és Szendrei [2] mutat be körosztási polinomokra vonatkozó példákat. Egy $\Phi_n(x)$ körosztási polinomhoz tartozó $\varrho[\Phi_n(x)]$ polinomot egyszerűen a $\Phi_n(x)$ körosztási polinom analogonjaként említik.

2. Körosztási polinomok és körosztási előpolinomok

Ismeretes, hogy az n -edik egységgyököknek nevezett komplex számok, vagyis az $x^n - 1$ polinom gyökei a komplex számok körében az alábbi felsorolással adhatók meg:

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

4. definíció. Egy n -edik egységgyök primitív egységgyök, ha semmilyen n -nél kisebb m pozitív egész szám esetén nem m -edik egységgyök.

S_n -nel jelölve az $1 \leq k \leq n$ feltételnek eleget tevő, n -hez relatív prím k egészeknek a halmazát, az n -edik primitív egységgyökök S_n halmaza azokat az $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ egységgyököket tartalmazza, melyekre $k \in S_n$.

5. definíció. Az n -edik körosztási polinom, szokásos jelöléssel $\Phi_n(x)$, az a polinom, melynek gyökei az n -edik primitív egységgyökök, képlettel

$$\Phi_n(x) = \prod_{k \in S_n} (x - e^{\frac{2k\pi i}{n}}).$$

A körosztási polinomok ismert (bár nem könnyen bizonyítható) tulajdonsága, hogy irreducibilisek a racionális számtest fölött.

$\Phi_1(x) = x - 1$ -nek és $\Phi_2(x) = x + 1$ -nek egyetlen valós gyöke van ($x = 1$, illetve $x = -1$).

$n \geq 3$ esetén $\Phi_n(x)$ -nek csak valódi komplex gyökei vannak, mégpedig konjugált komplex gyökpárok:

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}} \text{ és } e^{\frac{(2n-2k)\pi i}{n}} = e^{-\frac{2k\pi i}{n}} \quad (1 \leq k < n/2, \text{ } k \text{ és } n \text{ relatív prímek}).$$

Ezért $n \geq 3$ esetén az n -edik körosztási polinomra felírt előző képletet a konjugált komplex gyökpárok szerint csoportosítva írhatjuk, hogy

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{k \in S_n \\ k < n/2}} (x - e^{\frac{2k\pi i}{n}})(x - e^{-\frac{2k\pi i}{n}}) = \prod_{\substack{k \in S_n \\ k < n/2}} \left[x^2 - \left(2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right) x + 1 \right].$$

Mivel a jobb oldalon álló szorzatban a szögletes zárójelbe foglalt kifejezések másodfokú palindrom polinomok, következésképpen $n \geq 3$ esetén az n -edrendű körosztási polinom is palindrom, melynek hordozó polinomja

$$\begin{aligned}\Psi_n(x) &= \varrho[\Phi_n(x)] \\ &= \prod_{\substack{k \in S_n \\ k < n/2}} \varrho \left[x^2 - \left(2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right) x + 1 \right] = \prod_{\substack{k \in S_n \\ k < n/2}} \left[x - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right].\end{aligned}$$

Ezzel eljutottunk a körosztási előpolinom fogalmához.

6. definíció. *Tetszőleges $n \geq 3$ egész esetén az n -edik körosztási előpolinom az a $\Psi_n(x)$ polinom, melynek szimmetrizáltja az n -edik körosztási polinom, és amely képlettel direkt módon a következőképpen adható meg:*

$$\Psi_n(x) = \prod_{\substack{k \in S_n \\ k < n/2}} \left(x - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right).$$

Az S_n halmazok elemszámainak, és egyúttal az n -edik körosztási polinom fokainak a sorát a $\varphi(n)$ Euler-függvény fejezi ki. Az n -edik körosztási előpolinom foka feleannyi, tehát $\varphi(n)/2$.

A körosztási polinomok irreducibilitásából következik, hogy a körosztási előpolinomok is irreducibilisek. A σ operátor alaptulajdonságaiból következően általánosan igaz, hogy reducibilis polinom szimmetrizáltja is reducibilis, azaz más ekvivalens megfogalmazásban: irreducibilis páros fokú palindrom polinom hordozója is irreducibilis.

Ám vigyázat! Az előbbi állítás fordított irányban nem igaz. Az ugyanis nem állítható, hogy irreducibilis polinom szimmetrizáltja is irreducibilis. Egy ellenpélda az irreducibilis $x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ polinom, melynek szimmetrizáltja az alábbi reducibilis polinom:

$$x^6 + 3x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 3x + 1 = (x^3 + 2x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 2x + 1).$$

Az első két körosztási polinom sajnos páratlan fokú, négyzetre emelve viszont páros fokú palindrom polinomokat kapunk belőlük, melyekre már alkalmazható a ϱ operátor, tehát

$$\varrho \left[(\Phi_1(x))^2 \right] = \varrho[x^2 - 2x + 1] = x - 2 \quad (7)$$

és

$$\varrho \left[(\Phi_2(x))^2 \right] = \varrho[x^2 + 2x + 1] = x + 2. \quad (8)$$

8 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

A körosztási polinomok hosszú listái ismeretesek az irodalomból. Az angol nyelvű wikipédia „Cyclotomic polynomials” c. szócikke $n = 30$ -ig listázza a körosztási polinomokat. A 100 elemnél rövidebb listák alapján azt hihetnénk, hogy a körosztási polinomok 0-tól különböző együtthatói csak $+1$ és -1 lehetnek. Ez azonban általánosan nem igaz. Ha 100-nál csak egy kicsit megyünk tovább, a

$$\begin{aligned}\Phi_{105}(x) = & x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} + x^{35} + x^{34} \\ & + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} \\ & + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^9 - x^8 - 2x^7 - x^6 - x^5 + x^2 + x + 1\end{aligned}$$

polinomban, mint látjuk, vannak -2 értékű együtthatók. A wikipédia krónikája szerint egy 5 decimális számjegyű n -hez tartozó körosztási polinomban találtak 20-nál nagyobb, egy 6 decimális számjegyű n -hez tartozó körosztási polinomban pedig 500-nál nagyobb abszolút értékű együtthatót.

3. Többszörös szögek szögfüggvényei: 1. $\cos n\vartheta$

Elemi trigonometriában tanítják, hogy egy tetszőleges szög kétszeresének, háromszorosának a koszinusza kifejezhető az egyszeres szög koszinuszának másodfokú, harmadfokú polinomjaként, és hasonló állítás igaz más többszörös szögekre is. Megadjuk az első néhány ilyen kifejezést:

$$\begin{aligned}\cos 2\vartheta &= 2 \cos^2 \vartheta - 1, \\ \cos 3\vartheta &= 4 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta, \\ \cos 4\vartheta &= 8 \cos^4 \vartheta - 8 \cos^2 \vartheta + 1,\end{aligned}$$

stb. Az általános esetben

$$\cos n\vartheta = T_n(\cos \vartheta), \quad (9)$$

ahol $T_n(x)$ az ún. elsőfajú Csebisev-polinom.

A következő tétel azt fejezi ki, hogy az $x^{2n} + 1$ polinom hordozója és $T_n(x)$ lineáris kapcsolatban van egymással.

7. tétel. *Tetszőleges pozitív egész n esetén fennáll*

$$\varrho[x^{2n} + 1] = 2T_n(x/2). \quad (10)$$

Bizonyítás. Az n -edik egységgyökök felsorolására vonatkozó (6) képlet alapján az $x^{4n} - 1$ polinom gyökei ± 1 , valamint az alábbi konjugált komplex számpárok:

$$e^{\pm \frac{\pi i}{2n}}, e^{\pm \frac{2\pi i}{2n}}, \dots, e^{\pm \frac{(2n-1)\pi i}{2n}}, \text{ vagyis } e^{\pm \frac{k\pi i}{2n}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 2n-1). \quad (11)$$

Hasonlóan az $x^{2n} - 1$ polinom gyökei ± 1 , valamint az alábbi konjugált komplex számpárok:

$$e^{\pm \frac{\pi i}{n}}, e^{\pm \frac{2\pi i}{n}}, \dots, e^{\pm \frac{(n-1)\pi i}{n}}, \text{ vagyis } e^{\pm \frac{k\pi i}{2n}} \quad (k = 2, 4, 6, \dots, 2n-2). \quad (12)$$

Következésképpen az $x^{2n} + 1 = \frac{x^{4n}-1}{x^{2n}-1}$ polinomnak csak konjugált komplex számpárok a gyökei, mégpedig azok a párok, amelyek a (11) felsorolásban szerepelnek, de a (12) felsorolásban nem szerepelnek, tehát $x^{2n} + 1$ gyökei az alábbiak:

$$e^{\pm \frac{\pi i}{2n}}, e^{\pm \frac{3\pi i}{2n}}, \dots, e^{\pm \frac{(2n-1)\pi i}{2n}}, \text{ vagyis } e^{\pm \frac{k\pi i}{2n}} \quad (k = 1, 3, 5, \dots, 2n-1). \quad (13)$$

A palindrom polinomok példái között láttuk, hogy tetszőleges ϑ esetén $(x - e^{i\vartheta})(x - e^{-i\vartheta})$ másodfokú palindrom polinom, amit a ϱ operátor az $x - 2 \cos \vartheta$ lineáris polinomra rövidít, ennél fogva a ϱ operátort az

$$x^{2n} + 1 = \prod_{k=1,3,5,\dots,2n-1} (x - e^{\frac{k\pi i}{2n}})(x - e^{-\frac{k\pi i}{2n}}) \quad (14)$$

polinomra alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\varrho[x^{2n} + 1] = \prod_{k=1,3,5,\dots,2n-1} \left(x - 2 \cos \frac{k\pi}{2n} \right). \quad (15)$$

Ismeretes (és a (9) képlet alapján elemi úton könnyen bizonyítható), hogy a $T_n(x)$ elsőfajú Csebisev-polinom gyökei, amiket a polinomiális interpolációban Csebisev-csomópontoknak is neveznek, az alábbi valós számok:

$$\cos \frac{k\pi}{2n} \quad (k = 1, 3, 5, \dots, 2n-1), \quad (16)$$

tehát

$$T_n(x) = \prod_{k=1,3,5,\dots,2n-1} \left(x - \cos \frac{k\pi}{2n} \right). \quad (17)$$

10 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

A (15) és (17) képletek egybevetése azt mutatja, hogy a $\varrho[x^{2n} + 1]$ polinom gyökei egybeesnek a $T_n(x/2)$ polinom gyökeivel, ám mivel $\varrho[x^{2n} + 1]$ főegyütthatója 1, az x polinomjaként kifejezett $T_n(x/2)$ főegyütthatója pedig $1/2$, ezért az utóbbi polinomot még meg kell szorozni 2-vel ahhoz, hogy azonos legyen a $\varrho[x^{2n} + 1]$ polinommal. Ezzel bebizonyítottuk a tétel állítását.

Mivel a $\varrho[x^{2n} + 1]$ kifejezést már eddig is többször használtuk, és még nagyon sokszor fogjuk használni ezután is, érdemes rá egy egyszerűbb jelölést használni. A Csebisev-polinommal való lineáris összefüggése miatt a továbbiak során legyen

$$t_n(x) = \varrho[x^{2n} + 1]. \quad (18)$$

Ekkor az 7. tétel képletét úgy is írhatjuk, hogy

$$t_n(x) = 2T_n(x/2), \text{ vagy ekvivalens módon átalakítva: } T_n(x) = \frac{1}{2}t_n(2x). \quad (19)$$

A 7. tételből a (9) azonosság figyelembevételével kapjuk, hogy

$$2 \cos n\vartheta = t_n(2 \cos \vartheta). \quad (20)$$

A $t_n(x)$ polinom segítségével tehát a többszörös szögek koszinuszának a kétszeresét tudjuk az egyszeres szög kétszeresének a koszinuszával kifejezni.

Most rátérünk a $t_n(x)$ polinom irreducibilis faktorizációjára.

A primitív egységgyökök definíciója alapján nyilvánvaló, hogy tetszőleges n esetén minden n -edik egységgyök szükségszerűen n valamelyik d osztójához (de közülük csak egyhez) tartozó d -edik primitív egységgyök. Ezért az n osztóihoz tartozó körosztási polinomok szorzata az $x^n - 1$ polinomot adja eredményül. Képlettel:

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x). \quad (21)$$

Ha az utóbbi képletet $2n$ -re és $4n$ -re is felírjuk, akkor ezekből megkapjuk, hogy

$$x^{2n} + 1 = \frac{x^{4n} - 1}{x^{2n} - 1} = \frac{\prod_{d|4n} \Phi_d(x)}{\prod_{d|2n} \Phi_d(x)} = \prod_{\substack{d|4n \\ d \nmid 2n}} \Phi_d(x). \quad (22)$$

Az utolsó egyenlőségjeltől jobbra álló szorzatban a $d \nmid 2n$ korlátozás folytán csak 2-nél nagyobb d -khez tartozó körosztási polinomok fordulhatnak elő,

ezért a szorzatra a ϱ operátort tényezőnként alkalmazva, a $t_n(x)$ polinom irreducibilis faktorizációjára az alábbi képletet kapjuk:.

$$t_n(x) = \prod_{\substack{d|4n \\ d \nmid 2n}} \Psi_d(x). \quad (23)$$

Megmutatjuk, hogy a $t_n(x)$ polinom néhány lineáris eltoltjának az irreducibilis faktorizációját is ki lehet fejezni a körosztási előpolinomok segítségével. Ehhez lényegében ahhoz hasonló, de valamivel bonyolultabb eljárást kell alkalmaznunk, mint amit $t_n(x)$ faktorizálására is alkalmaztunk, aminek csak vázoljuk a levezetését az alábbiakban. Kiindulásként tekintsük a

$$\begin{aligned} \sigma[t_n(x) + 1] &= x^{2n} + x^n + 1 = \frac{x^{3n} - 1}{x^n - 1}, \\ \sigma[t_n(x) - 1] &= x^{2n} - x^n + 1 = \frac{(x^{6n} - 1)(x^n - 1)}{(x^{2n} - 1)(x^{3n} - 1)}, \\ \sigma[t_n(x) + 2] &= x^{2n} + 2x^n + 1 = (x^n + 1)^2 = \frac{(x^{2n} - 1)^2}{(x^n - 1)^2}, \\ \sigma[t_n(x) - 2] &= x^{2n} - 2x^n + 1 = (x^n - 1)^2 \end{aligned}$$

azonosságokat. Következő lépésként a felsoroltak mindegyikét előállítjuk faktorizált alakban:

$$\begin{aligned} \sigma[t_n(x) + 1] &= \prod_{\substack{d|3n \\ d \nmid n}} \Phi_d(x), \\ \sigma[t_n(x) - 1] &= \prod_{\substack{d|6n \\ d \nmid 2n \\ d \nmid 3n}} \Phi_d(x), \\ \sigma[t_n(x) + 2] &= \prod_{\substack{d|2n \\ d \nmid n}} [\Phi_d(x)]^2, \\ \sigma[t_n(x) - 2] &= \prod_{d|n} [\Phi_d(x)]^2. \end{aligned}$$

Végül a ϱ operátor alkalmazásával a $\Phi_d(x)$ körosztási polinomokról a $\Psi_d(x)$ körosztási előpolinomokra áttérve, illetve $d = 1$ és $d = 2$ esetén a csak négyzetre emelt formában előforduló körosztási polinomokról az $x \pm 2$ polinomokra áttérve adódik, hogy

$$t_n(x) + 1 = \prod_{\substack{d|3n \\ d \nmid n}} \Psi_d(x), \quad (24)$$

12 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

$$t_n(x) - 1 = \prod_{\substack{d|6n \\ d \nmid 2n \\ d \nmid 3n}} \Psi_d(x), \quad (25)$$

$$t_n(x) + 2 = (x + 2) \prod_{\substack{d|2n \\ d \nmid n \\ d \geq 3}} [\Psi_d(x)]^2, \text{ ha } n \text{ páratlan}, \quad (26)$$

$$t_n(x) + 2 = \prod_{\substack{d|2n \\ d \nmid n \\ d \geq 3}} [\Psi_d(x)]^2, \text{ ha } n \text{ páros}, \quad (27)$$

$$t_n(x) - 2 = (x - 2) \prod_{\substack{d|n \\ d \geq 3}} [\Psi_d(x)]^2, \text{ ha } n \text{ páratlan}, \quad (28)$$

$$t_n(x) - 2 = (x - 2)(x + 2) \prod_{\substack{d|n \\ d \geq 3}} [\Psi_d(x)]^2, \text{ ha } n \text{ páros}. \quad (29)$$

4. Többszörös szögek szögfüggvényei: 2. $\sin n\vartheta$

Helyettesítsük a (20) képletbe ϑ helyére a $\vartheta - \frac{\pi}{2}$ kifejezést:

$$2 \cos \left(n \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right) \right) = t_n \left(2 \cos \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right) \right) = t_n(2 \sin \vartheta). \quad (30)$$

Ebből páratlan n esetén azt kapjuk, hogy

$$2 \sin n\vartheta = t_n(2 \sin \vartheta), \text{ ha } n \equiv 1 \pmod{4}, \quad (31)$$

és

$$2 \sin n\vartheta = -t_n(2 \sin \vartheta), \text{ ha } n \equiv 3 \pmod{4}. \quad (32)$$

Páros n esetén azonban $\sin n\vartheta$ sajnos nem fejezhető ki (de négyzete már kifejezhető) $\sin \vartheta$ polinomjaként, ugyanis már $n = 2$ -nél azt látjuk, hogy

$$\sin 2\vartheta = 2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 2 \sin \vartheta \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta}, \quad (33)$$

és így

$$\sin^2 2\vartheta = 4 \sin^2 \vartheta (1 - \sin^2 \vartheta) = -4 \sin^4 \vartheta + 4 \sin^2 \vartheta. \quad (34)$$

A két utóbbi képlethez hasonló képleteket meg lehet adni tetszőleges páros n esetére, de hadd ne foglalkozzunk ezek előállításával, mivel tetszetősebb kifejezés található a többszörös szögek szinuszára páros n esetén az ún. másodfajú Csebisev-polinom használatával.

Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok 13

A másodfajú Csebisev-polinom segítségével n paritásától független formulát lehet megadni a többszörös szögek szinuszára olyan képlettel, melyben $\sin \vartheta$ polinomja szerepel. Ennek jól ismert, a wikipédiában is megtalálható képletét az általános gyakorlatnak megfelelően az $(n+1)$ -szeres szög szinuszával adjuk meg:

$$\sin((n+1)\vartheta) = \sin \vartheta U_n(\cos \vartheta). \quad (35)$$

Ez a képlet minden nemnegatív n esetén érvényes.

A másodfajú Csebisev-polinomra a 7. tételhez hasonló jellegű következő tételt lehet bizonyítani:

8. tétel. *Tetszőleges pozitív egész n esetén fennáll*

$$\varrho \left[\sum_{k=0}^n x^{2k} \right] = U_n(x/2). \quad (36)$$

A bizonyítás hasonló a 7. tétel bizonyításához, ezért annál rövidebbre fogjuk. Lényege abból áll, hogy a másodfajú Csebisev-polinomnak az irodalomból is ismert gyökeket összevetjük a

$$\sum_{k=0}^n x^{2k} = \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1} \quad (37)$$

polinom gyökeivel.

Bevezetve az $u_n(x) = U_n(x/2)$ jelölést, az $u_n(x)$ polinom gyökei a másodfajú Csebisev-polinom gyökeinek kétszeresei, azaz

$$2 \cos \frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 1, \dots, n), \quad (38)$$

tehát fennáll az

$$u_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(x - 2 \cos \frac{k\pi}{n+1} \right) \quad (39)$$

egyenlőség és ennek folyományaként a

$$\sigma[u_n(x)] = \prod_{k=1}^n \left(x^2 - \left(2 \cos \frac{k\pi}{n+1} \right) x + 1 \right) = \prod_{k=1}^n \left(x - e^{\frac{k\pi i}{n+1}} \right) \left(x - e^{-\frac{k\pi i}{n+1}} \right) \quad (40)$$

14 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

egyenlőség, ahol a jobb oldali gyöktényezős felbontásból látszik, hogy a $\sigma[u_n(x)]$ polinom gyökei azonosak a $\sum_{k=0}^n x^{2k}$ polinom gyökeivel, mindkettőnek a főegyütthatója 1, ennél fogva igaz a tétel állítása.

A (35) képletet átírva az $u_n(x)$ polinomra,

$$\sin((n+1)\vartheta) = \sin \vartheta u_n(2 \cos \vartheta). \quad (41)$$

Megint ϑ helyére a $\vartheta - \frac{\pi}{2}$ kifejezést helyettesítve ϑ páros számú többszöröseinek a szinuszára az alábbi képleteket kapjuk:

$$\sin((n+1)\vartheta) = \cos \vartheta u_n(2 \sin \vartheta), \text{ ha } n+1 \equiv 2 \pmod{4} \quad (42)$$

és

$$\sin((n+1)\vartheta) = -\cos \vartheta u_n(2 \sin \vartheta), \text{ ha } n+1 \equiv 0 \pmod{4}. \quad (43)$$

A soron következő gondolatmenettel $u_n(x)$ irreducibilis felbontásának a meghatározását tűzzük ki célul. A (36), (37) és (21) képletek szerint

$$\sigma[u_n(x)] = \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1} = \frac{\prod_{d|2n+2} \Phi_d(x)}{x^2 - 1} = \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n+2}} \Phi_d(x). \quad (44)$$

Most mindkét oldalra alkalmazva a ϱ operátort, azt kapjuk, hogy

$$u_n(x) = \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n+2}} \Psi_d(x). \quad (45)$$

A következő képletekkel megadjuk $u_n(x) + 1$ és $u_n(x) - 1$ irreducibilis faktorizációját is. A (44) képlet első egyenlőtlensége alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sigma[u_n(x) + 1] &= \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1} + x^n = \frac{(x^{n+2} - 1)(x^{2n} - 1)}{(x^n - 1)(x^2 - 1)} \\ &= \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|n+2}} \Phi_d(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n \\ d \nmid n}} \Phi_d(x) \end{aligned} \quad (46)$$

és

$$\sigma[u_n(x) - 1] = \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1} - x^n = \frac{(x^n - 1)(x^{2n+4} - 1)}{(x^{n+2} - 1)(x^2 - 1)} = \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|n}} \Phi_d(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n+4 \\ d \nmid n+2}} \Phi_d(x), \quad (47)$$

Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok 15

így tehát

$$u_n(x) + 1 = \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|n+2}} \Psi_d(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n \\ d \nmid n}} \Psi_d(x) \quad (48)$$

és

$$u_n(x) - 1 = \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|n}} \Psi_d(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n+4 \\ d \nmid n+2}} \Psi_d(x). \quad (49)$$

5. Hiperbolikus függvények többszörös argumentummal

Nézzük először a ch függvényre az n -szeres és az 1-szeres függvényérték közötti összefüggést. Mivel $\operatorname{ch} \zeta = \cos i\zeta$ és hasonlóan $\operatorname{ch} n\zeta = \cos in\zeta$, ezért a (20) képletben ϑ helyére az $i\zeta$ kifejezést helyettesítve egyszerű komplex aritmetikával azt kapjuk, hogy

$$2 \operatorname{ch} n\zeta = t_n(2 \operatorname{ch} \zeta). \quad (50)$$

A sh függvény esete már nem ennyire egyszerű. Látni fogjuk, hogy páratlan n esetén a (31)-hez és (32)-höz nagyon hasonló képletek adhatók meg, azonban a $t_n(x)$ polinomot az a csupa nemnegatív együtthatós $t_n^\oplus(x)$ polinom váltja fel, melynek együtthatói $t_n(x)$ együtthatóinak az abszolút értékei.

A $T_n(x)$ elsőfajú Csebisev-polinom ismert tulajdonsága, hogy valamennyi tagja páros n esetén csak páros kitevőjű hatvánnyal, páratlan n esetén csak páratlan kitevőjű hatvánnyal fordul elő benne 0-tól különböző együtthatóval, oly módon, hogy a szomszédos nemzéró együtthatók előjele mindenütt egymással ellentétes. Nyilvánvalóan ugyanez igaz a Csebisev-polinom általunk használt módosulatára, $t_n(x)$ -re is. Ezek alapján a $t_n(x)$ és a $t_n^\oplus(x)$ polinom közötti kapcsolat formálisan, komplex aritmetika használatával, a következőképpen, n paritásától függően kissé eltérő módon adható meg. (Bár egyelőre csak páratlan n esetén van rá szükségünk, világosabb az összkép, ha tetszőleges pozitív egész n esetére felírjuk az összefüggést.)

$$t_n^\oplus(x) = -it_n(ix), \text{ ha } n \equiv 1 \pmod{4}, \quad (51)$$

$$t_n^\oplus(x) = -t_n(ix), \text{ ha } n \equiv 2 \pmod{4}, \quad (52)$$

$$t_n^\oplus(x) = it_n(ix), \text{ ha } n \equiv 3 \pmod{4}, \quad (53)$$

$$t_n^\oplus(x) = t_n(ix), \text{ ha } n \equiv 0 \pmod{4}. \quad (54)$$

Folytatva a megszakított gondolatmenetet a sh függvény polinomként törté-
nő előállítására, helyettesítsük most a (31) és a (32) képletekben ϑ helyére az

16 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

$i\zeta$ kifejezést. Ekkor a $\operatorname{sh} \zeta = -i \operatorname{sh} i\zeta$ és $\operatorname{sh} n\zeta = -i \operatorname{sh} in\zeta$ összefüggések alapján páratlan n esetén azt kapjuk, hogy

$$2 \operatorname{sh} n\zeta = -it_n(2i \operatorname{sh} \zeta), \text{ ha } n \equiv 1 \pmod{4}, \quad (55)$$

és

$$2 \operatorname{sh} n\zeta = it_n(2i \operatorname{sh} \zeta), \text{ ha } n \equiv 3 \pmod{4}. \quad (56)$$

A (51) és a (53) összefüggések alkalmazása segítségével (55) és (56) az alábbi egyetlen képletté olvad össze, ami minden páratlan n egész esetén érvényes:

$$2 \operatorname{sh} n\zeta = t_n^\oplus(2 \operatorname{sh} \zeta), \text{ ha } n \equiv 1 \pmod{2}. \quad (57)$$

A páros esetre hasonló gondolatmenettel, ezért a részletesebb magyarázatot itt már mellőzve, a (42) és (43) képletekben ϑ helyére az $i\zeta$ kifejezést helyettesítve, ζ páros számú többszöröseinek a hiperbolikus szinuszára, megint két képletből egyetlen közös képletet kapunk:

$$\operatorname{sh}((n+1)\zeta) = \operatorname{ch} \zeta u_n^\oplus(2 \operatorname{sh} \zeta), \text{ ha } n+1 \equiv 2 \pmod{2}. \quad (58)$$

Az $u_n^\oplus$ polinomot ugyanúgy állítjuk elő u_n -ből, ahogy korábban a $t_n^\oplus$ polinomot állítottuk elő t_n -ből. Más szóval, $u_n^\oplus$ minden együtthatója u_n megfelelő együtthatójának az abszolút értéke.

6. A $t_n^\oplus$ és $u_n^\oplus$ polinomok faktorizációja

Egyszerű átalakításokkal a $t_n(x)$ és $u_n(x)$ polinomok faktorizációs képlete, (23) és (45), a következő két képletre módosítható:

$$t_n(x) = \prod_{\substack{d|n \\ 2d \nmid n}} \Psi_{4d}(x), \quad (59)$$

és

$$u_n(x) = \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n+2 \\ d \equiv 0 \pmod{4}}} \Psi_d(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n+2 \\ d \equiv 1 \pmod{2}}} \Psi_d(x) \Psi_{2d}(x). \quad (60)$$

Az átalakításhoz a második esetben felhasználtuk a páratlan indexű körosztási polinomoknak azt az ismert tulajdonságát, hogy tetszőleges 1-nél nagyobb páratlan n -hez és annak kétszereséhez tartozó körosztási polinom között fennáll a $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$ összefüggés, melynek folytán a körosztási

Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok 17

előpolinomokra lényegében hasonló állítható. Csak az a bökkenő, hogy a körosztási polinomoktól eltérően a körosztási előpolinomok foka páratlan is lehet, ezért ilyen esetben az egyik polinomnak a (-1) -szeresét kell venni. Képlettel:

$$\Psi_{2n}(x) = \Psi_n(-x), \text{ ha } \varphi(n) \text{ páros,} \quad (61)$$

és

$$\Psi_{2n}(x) = -\Psi_n(-x), \text{ ha } \varphi(n) \text{ páratlan,} \quad (62)$$

ahol $\varphi(n)$ a korábban már említett Euler-függvény.

Az (59) és (60) kéletpárban álló

$$\Psi_{4d}(x) = \prod_{\substack{0 < k < d \\ \gcd(k, 4d)=1}} \left[x^2 - 4 \cos^2 \left(\frac{k\pi}{2d} \right) \right],$$

ill.

$$\Psi_d(x)\Psi_{2d}(x) = \prod_{\substack{0 < k < d/2 \\ \gcd(k, d)=1}} \left[x^2 - 4 \cos^2 \left(\frac{2k\pi}{d} \right) \right]$$

polinomokban x helyére ix -et téve, majd itt is szükség esetén egy előjelváltást alkalmazva, a $t_n^\oplus(x)$ és $u_n^\oplus(x)$ polinomokra a

$$t_n^\oplus(x) = \prod_{\substack{d|n \\ 2d \nmid n}} \Psi_{4d}^\oplus(x), \quad (63)$$

és

$$u_n^\oplus(x) = \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n+2 \\ d \not\equiv 2 \pmod{4}}} \Psi_d^\oplus(x) \quad (64)$$

kifejezéseket kapjuk, ahol $\Psi_4^\oplus(x) = \Psi_4(x) = x$,

$$\Psi_{4d}^\oplus(x) = \prod_{\substack{0 < k < d \\ \gcd(k, 4d)=1}} \left[x^2 + 4 \cos^2 \left(\frac{k\pi}{2d} \right) \right], \text{ ha } d \geq 2, \quad (65)$$

és 1-nél nagyobb páratlan d esetén

$$\Psi_d^\oplus(x) = \prod_{\substack{0 < k < d/2 \\ \gcd(k, d)=1}} \left[x^2 + 4 \cos^2 \left(\frac{2k\pi}{d} \right) \right]. \quad (66)$$

18 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

Nyilvánvalóan tetszőleges pozitív c_i konstansok esetén a $\prod_{i \in I} (x^2 - c_i)$ és $\prod_{i \in I} (x^2 + c_i)$ polinomok abszolút értékekben rendre ugyanazokat az együtt-hatókat tartalmazzák, csak annyi köztük a különbség, hogy az első esetben váltakozó előjellel, a második esetben viszont csupa pozitív előjellel tartalmazzák az abszolút értékekben azonos együtt-hatókat. Ezért $\Psi_{4d}^{\oplus}(x)$ úgy is megkapható $\Psi_{4d}(x)$ -ből, hogy a negatív együtt-hatókat az abszolút értékükre módosítjuk. (Hasonló módon kapható meg $\Psi_{2n+1}^{\oplus}(x)$ a $\Psi_{2n+1}(x)\Psi_{4n+2}(x)$ szorzatból.)

A (65) és a (66) képletben szereplő $\Psi_n^{\oplus}(x)$ polinomokról én csak sejtetem, Pálffy Péter Pál [10] bebizonyította, hogy a racionális számtest fölött irreducibilis polinomok.

(Ha teljesen precízek akarunk lenni, külön megfontolást igényel az az eset, amikor a faktorok között $\Psi_4^{\oplus}(x) = \Psi_4(x) = x$ is előfordul. Ilyenkor a fenti gondolatmenet szó szerint nem alkalmazható, de nem nehéz belátni, hogy az irreducibilis faktorizációra vonatkozó fentebb és lentebb megadott képletek ekkor is változatlanul érvényesek.)

A továbbiakban a (65) és (66) egyenlőségekkel definiált polinomokat pszeudo-körosztási előpolinomoknak nevezzük, mivel formájukban nagyon hasonlóak a körosztási előpolinomokhoz, de körosztási polinomok nem készíthetők belőlük.

Az alábbiakban páros n -ekre vonatkozóan felsoroljuk a $t_n^{\oplus}(x)$ és $u_n^{\oplus}(x)$ polinomokból származó néhány további polinomnak a pszeudo-körosztási előpolinomok segítségével történő irreducibilis faktorizációját:

$$t_{2n}^{\oplus}(x) + (-1)^n = \prod_{\substack{d|6n \\ d \nmid 2n \\ d \not\equiv 2 \pmod{4}}} \Psi_d^{\oplus}(x), \quad (67)$$

$$t_{2n}^{\oplus}(x) - (-1)^n = \prod_{\substack{d|12n \\ d \nmid 4n \\ d \nmid 6n}} \Psi_d^{\oplus}(x), \quad (68)$$

$$t_{2n}^{\oplus}(x) + 2 \cdot (-1)^n = \prod_{\substack{d|4n \\ d \nmid 2n}} [\Psi_d^{\oplus}(x)]^2, \quad (69)$$

$$t_{2n}^{\oplus}(x) - 2 \cdot (-1)^n = (x^2 + 4) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n \\ d \not\equiv 2 \pmod{4}}} [\Psi_d^{\oplus}(x)]^2, \quad (70)$$

$$u_{2n}^{\oplus}(x) + (-1)^n = \prod_{\substack{d|4n \\ d \nmid 2n}} \Psi_d^{\oplus}(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n+2 \\ d \not\equiv 2 \pmod{4}}} \Psi_d^{\oplus}(x), \quad (71)$$

Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok 19

$$u_{2n}^{\oplus}(x) - (-1)^n = \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|2n \\ d \not\equiv 2 \pmod{4}}} \Psi_d^{\oplus}(x) \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d|4n+4 \\ d \nmid 2n+2}} \Psi_d^{\oplus}(x). \quad (72)$$

A páratlan n -ekre vonatkozóan a körosztási polinomokon és körosztási előpolinomokon alapuló módszertan itt nem alkalmazható. Számítógépes faktorizáló programok ([15, 16]) alkalmazásával az is kiderült, hogy $n \leq 20$ esetén az ilyen páratlan fokú polinomok vagy valamennyien, vagy néhány kivétellel valamennyien irreducibilisek. Utólag nem emlékszem határozottnak, hogy a két eset közül melyik áll fenn.

7. Kiterjesztések és általánosítások

Kezdjük a polinomsorozataink kiterjesztésével. A $t_n(x)$ és $u_n(x)$ polinomsorozatokat a következő módon érdemes kiterjeszteni 0 és negatív értékű n indexekre. Legyen

$$t_0(x) = 2 \text{ és } t_{-n}(x) = t_n(x), \text{ ha } n \geq 1 \text{ egész}, \quad (73)$$

illetve

$$u_0(x) = 1, u_{-1}(x) = 0 \text{ és } u_{-n}(x) = -u_{n-2}(x), \text{ ha } n \geq 2 \text{ egész}. \quad (74)$$

Első ránézésre nem tűnik logikusnak, hogy miért pont így és ennyire egymástól eltérő módon terjesztjük ki negatív irányba ezt a két polinomsorozatot. Az ily módon történő kiterjesztésnek a logikája azáltal válik teljes mértékben megalapozottá és érthetővé, ha megállapítjuk, hogy a két Csebisev-polinomsorozatra ismert rekurziót úgy tudjuk adaptálni a mi polinomjainkra, hogy minden pozitív vagy negatív, vagy 0 indexű polinomra ugyanaz a rekurzió érvényes, nevezetesen

$$t_{n+1}(x) = xt_n(x) - t_{n-1}(x) \quad (75)$$

és

$$u_{n+1}(x) = xu_n(x) - u_{n-1}(x). \quad (76)$$

Tehát a két polinomsorozatra teljesen azonos a rekurzió akciója. (Megjegyezzük, hogy a két eredeti Csebisev-polinomsorozatra ez nem áll fenn.)

Egy másik döntő érv az ilyen kiterjesztés mellett, hogy így a többszörös szögek szögfüggvényeinek a képletei negatív n -ek esetén is érvényben maradnak. Ezért felírjuk újra a két legfontosabb (a $t_n(x)$ és $u_n(x)$ polinomok

20 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

egyfajta definíciójára is szolgáló) képletet a kiterjesztett formában. Könnyű belátni, hogy a

$$2 \cos n\vartheta = t_n(2 \cos \vartheta) \quad (77)$$

és a

$$\sin((n+1)\vartheta) = \sin \vartheta u_n(2 \cos \vartheta) \quad (78)$$

képlet mindegyike érvényes marad kiterjesztett megfogalmazásban, azaz tetszőleges n egész esetére kimondva.

Ezekkel az érvekkel még azt az egyet nem indokoltuk meg, hogy mire jó ez a kiterjesztés. Egy indok erre, hogy könnyebbé és gördülékenyebbé válik a $t_n(x)$ és $u_n(x)$ polinom közötti összefüggés tárgyalása. A szóban forgó összefüggést az alábbi tételben mondjuk ki.

9. tétel. *Tetszőleges egész n esetén fennáll*

$$t_n(x) = u_n(x) - u_{n-2}(x). \quad (79)$$

A bizonyítás nagyon egyszerű. Először konstatáljuk, hogy két szomszédos n -re, például $n = 1$ -re és $n = 2$ -re igaz a tétel állítása. A két szomszédos n -re való érvényességből, valamint a $t_n(x)$ és $u_n(x)$ polinomokra vonatkozó rekurziós képletek szinkronjából következik, hogy a tétel állítása minden egész n esetén fennáll. (Vissza irányba, vagyis az n indexek csökkenő értékeire úgy bizonyítunk, hogy a rekurziós képleteket átrendezzük: $t_{n-1}(x) = xt_n(x) - t_{n+1}(x)$ és $u_{n-1}(x)$ -re ugyanígy.)

Megjegyezzük, hogy a polinomjainknak a zéró és negatív indexekre történő kiterjesztése nélkül a 9. tétel még a pozitív n indexekre sem lenne érvényes teljeskörűen, mivel a tétel képlete úgy csak $n \geq 3$ esetén volna értelmes.

Másik megjegyzésünk. Meglepő módon a 9. tétel azt sugalmazza, hogy talán a másodfajú Csebisev-polinomból származtatható $u_n(x)$ polinomot kellene elsődlegesnek, és az elsőfajú Csebisev-polinomból származtatható $t_n(x)$ polinomot másodlagosnak tekinteni, mivel a (79) képlet segítségével $u_n(x)$ -ből előállítható.

A Csebisev-polinomokra az általános esetre vonatkozó jól ismert explicit képletek léteznek, amelyeket nagyon egyszerű a mi $t_n(x)$ és $u_n(x)$ polinomjainkra átültetni. A 9. tétel ismeretében elég közülük egyet, $u_n(x)$ egyszerűbb explicit képletét megadni, mivel ennek alapján $t_n(x)$ explicit képlete a tétel (79) képlete használatával nagyon könnyen előállítható.

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} x^{n-2k}. \quad (80)$$

Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok 21

Ennek a képletnek az az előnye is megvan $t_n(x)$ explicit képlettel szemben, hogy a képlet $u_n(x)$ minden együtthatóját (pozitív vagy negatív előjelű) binomiális együtthatóval adja meg. A (80) képlet természetesen csak nemnegatív n -ek esetére érvényes.

Az $u_n(x)$ polinomra mint alapra egy végtelen sok polinomból álló polinomsereg építhető fel. E polinomsereg elemének tekintjük magát az $u_n(x)$ polinomot is. Közvetlenül az $u_n(x)$ polinom mögé, a sereg első sorába sorakoztathatók fel azok a polinomok, amelyek

$$u_n(x) + u_{n-k}(x) \text{ és } u_n(x) - u_{n-k}(x) \quad (81)$$

összeadással vagy kivonással képezhetők. Mindkét esetben k tetszőleges pozitív egész.

Az általánosításunk tárgyát képező polinomsereg összes eleme a

$$G_n(x) = u_n(x) + \sum_{\substack{R \subseteq S_j \\ R \neq \emptyset}} \left(\prod_{i \in R} \varepsilon_i \right) u_{n - \sum_{i \in R} k_i}(x) \quad (82)$$

képlettel adható meg. Itt j adott tetszőleges nemnegatív egész, $j = 0$ esetén S_j üres halmaz, egyébként $S_j = \{1, 2, \dots, j\}$, a k_i adatok egymástól különböző pozitív egészek, az ε_i -k pedig előjel kifejezésére szolgáló adatok, melyekre $\varepsilon_i = +1$ vagy $\varepsilon_i = -1$ ($i \in S_j$).

Az általános eset faktorizálásának könnyebb interpretálása érdekében vesszük be az $\varepsilon_0 = -\prod_{i=1}^j \varepsilon_i$ és $k_0 = 2n + 2 - \sum_{i=1}^j k_i$ jelöléseket. Jelöljük továbbá γ_1 -gyel az $S_j \cup \{0\}$ halmazban lévő indexekhez tartozó negatív ε_i -k számát, γ_2 -vel pedig az $S_j \cup \{0\}$ halmazban lévő indexekhez tartozó azon negatív ε_i -k számát, melyekre k_i páros, plusz azon pozitív ε_i -k számát, melyekre k_i páratlan. Ezekkel a jelölésekkel $G_n(x)$ irreducibilis faktorizációjára a következő általános képlet érvényes, melynek bizonyítása és további diszkussziója a Kéri [6] cikkben található.

$$G_n(x) = (x-2)^{(\gamma_1-1)/2} (x+2)^{(\gamma_2-1)/2} \left(\prod_{\substack{i \in S_j \cup \{0\} \\ \varepsilon_i < 0}} \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d | k_i}} \Psi_d(x) \right) \left(\prod_{\substack{i \in S_j \cup \{0\} \\ \varepsilon_i > 0}} \prod_{\substack{d \geq 3 \\ d | 2k_i}} \Psi_d(x) \right). \quad (83)$$

(Mivel nyilvánvalóan $\prod_{i=0}^j \varepsilon_i = -1$ és $\sum_{i=0}^j k_i$ páros, következésképpen γ_1 és γ_2 páratlan, tehát az ezekkel kifejezett kitevők egészek.)

Tehát a (82) képlettel adott valamennyi polinom a körosztási előpolinomok segítségével faktorizálható.

22 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

8. Korlátossági kérdések

Ebben a szakaszban az előző szakaszban bevezetett polinomsereg alapját képező $u_n(x)$ polinom és a sereg első sorát alkotó (81) polinomok korlátosságát vizsgáljuk a $-2 \leq x \leq 2$ intervallumban, ahol az x argumentum helyére $2 \cos \vartheta$ helyettesíthető. Először egy tételt mondunk ki és bizonyítunk a polinomsereg négy nevezetes polinomjára, melyek közül kettő az első- és másodfajú Csebisev-polinommal lineáris kapcsolatban álló $t_n(x)$ és $u_n(x)$ polinom. A másik kettő a kevésbé ismert harmadfajú $V_n(x)$ és negyedfajú $W_n(x)$ Csebisev-polinommal van lineáris kapcsolatban, ugyanis fennáll

$$v_n(x) = u_n(x) - u_{n-1}(x) = V_n(x/2),$$

és

$$w_n(x) = u_n(x) + u_{n-1}(x) = W_n(x/2).$$

Ezek a ϱ operátorral az alábbi palindrom polinomokból állíthatók elő:

$$v_n(x) = \varrho[(x^{2n+1} + 1)/(x + 1)],$$

$$w_n(x) = \varrho[(x^{2n+1} - 1)/(x - 1)].$$

Ismert trigonometriai azonosságok velük:

$$\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta = \cos \frac{1}{2}\vartheta v_n(2 \cos \vartheta),$$

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta = \sin \frac{1}{2}\vartheta w_n(2 \cos \vartheta).$$

10. tétel. *A $t_n(x)$ polinomoknak létezik univerzális (azaz minden pozitív egész n esetére érvényes) korlátja a $-2 \leq x \leq 2$ intervallumban, az $u_n(x)$, $v_n(x)$ és $w_n(x)$ polinomoknak viszont nem létezik ilyen univerzális korlátja ugyanabban az intervallumban.*

Bizonyítás. Helyettesítsük be a felsorolt négy polinom mindegyikében x helyére a $2 \cos \vartheta$ kifejezést. Ekkor

$$|t_n(2 \cos \vartheta)| = |2 \cos n\vartheta| \leq 2,$$

tehát a tétel első részének az állítása igaz az univerzális 2 korláttal. A második rész bizonyításához tekintsük az

$$u_n(2 \cos \vartheta) = \frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin \vartheta}$$

Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

23

kifejezést a $\vartheta_1 = \frac{(2n+1)\pi}{2n+2}$ helyen, a

$$v_n(2 \cos \vartheta) = \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta}{\cos \frac{1}{2} \vartheta}$$

kifejezést a $\vartheta_2 = \frac{(2n+2)\pi}{2n+1}$ helyen, a

$$w_n(2 \cos \vartheta) = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta}{\sin \frac{1}{2} \vartheta}$$

kifejezést pedig a $\vartheta_3 = \frac{(4n+3)\pi}{2n+1}$ helyen. Kis számolással azt kapjuk, hogy

$$|u_n(2 \cos \vartheta_1)| = \frac{1}{\left| \sin \frac{(2n+1)\pi}{2n+2} \right|}, \quad |v_n(2 \cos \vartheta_2)| = \frac{1}{\left| \cos \frac{(n+1)\pi}{2n+1} \right|}$$

és

$$|w_n(2 \cos \vartheta_3)| = \frac{1}{\left| \sin \frac{(4n+3)\pi}{4n+1} \right|}.$$

Itt mindhárom nevező 0-hoz tart, ha $n \rightarrow \infty$, és ezzel igazolást nyert a tétel második része.

11. következmény. A (81) képlettel megadott polinomok közül az $u_n(x) + u_{n-k}(x)$ polinomoknak semmilyen pozitív egész k esetén nincs univerzális korlátjuk, az $u_n(x) - u_{n-k}(x)$ polinomoknak páratlan k esetén nincs univerzális korlátja a $-2 \leq x \leq 2$ intervallumban. Az $u_n(x) - u_{n-k}(x)$ polinomoknak páros $k \geq 2$ esetén létezik univerzális korlátja ugyanabban az intervallumban.

A bizonyítás kulcsa azon a tényen alapul, hogy véges számú korlátos polinomsorozat összege is korlátos, viszont egy nem korlátos és egy korlátos polinomsorozat összege nem korlátos. (A korlátosság alatt itt univerzális korlát létezését értjük.) Ennek alapján a bizonyítás könnyű, és ezért az olvasóra hagyjuk.

9. Kiegészítés a körosztási polinomok és körosztási előpolinomok témájához

A következő tételben összefoglaljuk a körosztási polinomok és körosztási előpolinomok explicit képletét néhány könnyen kezelhető esetben, mivel világosabb az összkép, ha ezekről tudunk a szóban forgó polinom kategóriák

24 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

listázása előtt. A körosztási polinomokról szóló korábbi 2. szakaszban erre azért nem kerülhetett még sor, mert csak később értelmeztük a $t_n(x)$, $u_n(x)$, $v_n(x)$, $w_n(x)$ polinomokat.

12. tétel.

1. Ha p páratlan prím, akkor

$$\Phi_p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} x^k \text{ és } \Psi_p(x) = w_{(p-1)/2}(x) = u_{(p-1)/2}(x) + u_{(p-3)/2}(x). \quad (84)$$

2. Ugyancsak páratlan prím esetén

$$\Phi_{2p}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k x^k \text{ és } \Psi_{2p}(x) = v_{(p-1)/2}(x) = u_{(p-1)/2}(x) - u_{(p-3)/2}(x). \quad (85)$$

3. Ha $n = 2^q$, ahol $q \geq 2$, akkor

$$\Phi_n(x) = x^{n/2} + 1 \text{ és } \Psi_n(x) = t_{(n/4)}(x). \quad (86)$$

4. Ha $n = 3^r$, ahol $r \geq 1$, akkor

$$\Phi_n(x) = x^{2n/3} + x^{n/3} + 1 \text{ és } \Psi_n(x) = t_{(n/3)}(x) + 1. \quad (87)$$

5. Ha $n = 2^q 3^r$, ahol $q, r \geq 1$, akkor

$$\Phi_n(x) = x^{2n/6} - x^{n/6} + 1 \text{ és } \Psi_n(x) = t_{(n/6)}(x) - 1. \quad (88)$$

6. (4. általánosítása) Ha $n = p^r$, ahol $p > 2$ prím és $r \geq 1$, akkor

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{p-1} x^{kn/p} \text{ és } \Psi_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{(p-1)/2} t_{(k \cdot p^{r-1})}(x). \quad (89)$$

7. (5. általánosítása) Ha $n = 2^q p^r$, ahol $p > 2$ prím és $q, r \geq 1$, akkor

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) &= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k x^{kn/p/2}, \\ \Psi_n(x) &= (-1)^{(p-1)/2} \left[1 + \sum_{k=1}^{(p-1)/2} (-1)^k t_{(k \cdot 2^{q-1} p^{r-1})}(x) \right]. \end{aligned} \quad (90)$$

A tételnek a körosztási polinomokra vonatkozó állításai ismertek és bizonyításuk megtalálható a szakirodalomban. A körosztási előpolinomokra vonatkozó állítások közül a három elsőnek a bizonyítása a Kéri [5, 10. old.] könyvben található. Ugyanott, a 21. és 22. oldalon a $v_n(x)$ és $w_n(x)$ polinomok listázása és a velük kapcsolatos faktorizálások listázása is megtalálható. (A jelen kiadványból a terjedelem korlátozása érdekében ezeket a listákat kihagytam.)

A körosztási előpolinomokra vonatkozó állítások közül a két utolsó állításnak a bizonyítását két konkrét prímre: $p = 5$ -re és $p = 7$ -re vázoljuk. (Az általános esetre ugyanúgy, csak jóval hosszadalmasabban lehet bizonyítani.) A $t = 5$ esetre a

$$\begin{aligned}\sigma[t_{10k}(x) \pm t_{5k}(x) + 1] &= \sigma[t_{10k}(x)] \pm x^{5k} \sigma[t_{5k}(x)] + x^{10k} = \\ &= (x^{20k} + 1) \pm x^{5k}(x^{10k} + 1) + x^{10k} = \sum_{j=0}^4 (\pm 1)^j x^{5jk}\end{aligned}$$

azonosságlánc, a $t = 7$ esetre pedig a

$$\begin{aligned}\sigma[t_{21k}(x) \pm t_{14k}(x) + t_{7k}(x) \pm 1] &= \sigma[t_{21k}(x)] \pm x^{7k} \sigma[t_{14k}(x)] + x^{14k} \sigma[t_{7k}(x)] \pm x^{21k} \\ &= (x^{42k} + 1) \pm x^{7k}(x^{28k} + 1) + x^{14k}(x^{14k} + 1) \pm x^{21k} = \sum_{j=0}^6 (\pm 1)^j x^{7jk}\end{aligned}$$

azonosságlánc bizonyítja az állítások helyességét, a 6. állítás esetére $k = p^{r-1}$, a 7. állítás esetére pedig $k = 2^q p^{r-1}$ szereposztással.

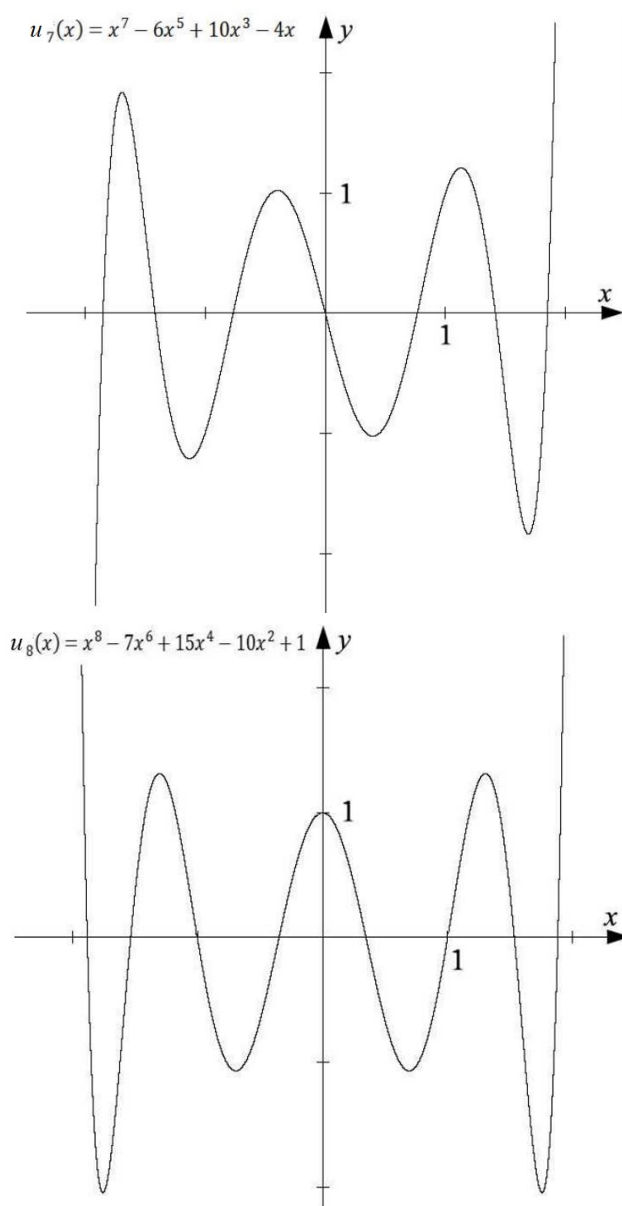
Problémafelvetések

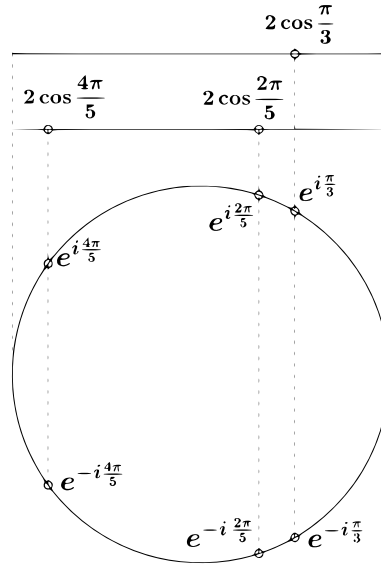
1. probléma. Bizonyítsuk be, vagy cáfoljuk meg, hogy a $t_n^\oplus(x) + 1$, $t_n^\oplus(x) - 1$, $t_n^\oplus(x) + 2$, $t_n^\oplus(x) - 2$, $u_n^\oplus(x) + 1$ és $u_n^\oplus(x) - 1$ polinomok irreducibilisek minden páratlan n esetén.
2. probléma. Általánosítsuk a 11. következmény állítását a (82) képlettel megadott polinomsereg további elemeire (vagyis a cikkben diszkutált $j = 1$ eset helyett tetszőleges pozitív egész j esetére).

26 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

1. melléklet: Ábrák

A tárgyalt téma illusztrációja céljából mellékelek három ábrát. Az első két ábrával (Szilágyi Ferenc rajzai) az $u_n(x)$ polinomok görbáját szemléltetjük egy páratlan és egy páros n esetére. A harmadik ábrán (Szilassi Lajos rajza) egy polinom és szimmetrizáltja közötti kapcsolatot illusztráljuk az $u_3(x) + 1 = \Psi_5(x)\Psi_6(x)$ és $\sigma[u_3(x) + 1] = \Phi_5(x)\Phi_6(x)$ polinomokkal.





2. melléklet: Listázások

Viszonylag kisebb n egészek tartományában felsoroljuk a körosztási polinomokat, a körosztási előpolinomokat, a pseudo-körosztási előpolinomokat, a $t_n(x)$, $u_n(x)$ polinomokat explicit formában, valamint a $t_n(x)$, $u_n(x)$, $t_n^\oplus(x)$ és $u_n^\oplus(x)$ polinomokra az előző szakaszokban feltárt irreducibilis faktorizációkat. A körosztási polinomok esetén $n = 50$ -ig, a körosztási előpolinomok esetén hézagmentesen $n = 52$ -ig, a további listákban $n = 20$ -ig megyünk el a felsorolásban. Szükségtelen külön felsorolni a $\Psi_{4d}^\oplus(x)$ típusú pseudo-körosztási előpolinomokat, a $t_n^\oplus(x)$ polinomokat akár explicit, akár faktorizált formában, valamint az $u_n^\oplus(x)$ polinomokat explicit formában, mivel mindezek megkaphatók más polinomlisták elemeiből úgy, hogy minden mínuszjelet pluszjelre cserélünk. (A $t_n(x)$, $u_n(x)$, $t_n^\oplus(x)$ és $u_n^\oplus(x)$ polinomok általam korábban készített hosszabb, $n = 50$ -ig terjedő listái megtalálhatóak a [3] webhelyen.)

Az 1-től 20-ig teljeskörűen felsorolt faktorizációs listák esetében megadjuk n függvényében a faktorok számát az n egész osztóinak a számát jelölő $\tau(n)$ számelméleti függvény kifejezéseként, és ahol már létezik, ott megadjuk a faktorok számához tartozó OEIS (Egész számok sorozatainak on-line enciklopédiája) azonosító sorszámot is. A faktorok számának kiszámítása

28 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

elemi, bár egyes esetekben elég komplikált. Rövid indoklás a faktorok számának különböző kifejezéseire a Kéri [4, 39. old.] könyvben található.

A listáinkban szereplő polinomok az esetek döntő többségében egy-egy sort foglalnak el. Ha viszont valamelyik polinom túl hosszú ahhoz, hogy egy sorban elférjen, akkor két megoldás valamelyikét választjuk. Amennyiben a szóban forgó polinom $(x - 1)$ -gyel vagy $(x + 1)$ -gyel megszorozva kéttagú eredményt ad, akkor tört formájában, két polinom hányadosaként írjuk fel. Az ilyen törtekről a konkrét esetekben ránézésre látszik, hogy mik a lista adott helyére való polinom együtthatói. Más esetekben a szóban forgó polinomot két, néha három olyan részre daraboljuk, hogy ezek a részek szépen elférjenek egy-egy sorban.

A körosztási polinomok listája ($1 \leq n \leq 24$)

$$\Phi_1(x) = x - 1$$

$$\Phi_2(x) = x + 1$$

$$\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$$

$$\Phi_4(x) = x^2 + 1$$

$$\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\Phi_6(x) = x^2 - x + 1$$

$$\Phi_7(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\Phi_8(x) = x^4 + 1$$

$$\Phi_9(x) = x^6 + x^3 + 1$$

$$\Phi_{10}(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

$$\Phi_{11}(x) = x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\Phi_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1$$

$$\Phi_{13}(x) = x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\Phi_{14}(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

$$\Phi_{15}(x) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$$

$$\Phi_{16}(x) = x^8 + 1$$

$$\Phi_{17}(x) = (x^{17} - 1)/(x - 1)$$

$$\Phi_{18}(x) = x^6 - x^3 + 1$$

$$\Phi_{19}(x) = (x^{19} - 1)/(x - 1)$$

$$\Phi_{20}(x) = x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$$

$$\Phi_{21}(x) = x^{12} - x^{11} + x^9 - x^8 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1$$

$$\Phi_{22}(x) = x^{10} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

$$\Phi_{23}(x) = (x^{23} - 1)/(x - 1)$$

$$\Phi_{24}(x) = x^8 - x^4 + 1$$

30 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

A körosztási polinomok listája ($25 \leq n \leq 44$)

$$\Phi_{25}(x) = x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1$$

$$\Phi_{26}(x) = x^{12} - x^{11} + x^{10} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

$$\Phi_{27}(x) = x^{18} + x^9 + 1$$

$$\Phi_{28}(x) = x^{12} - x^{10} + x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$$

$$\Phi_{29}(x) = (x^{29} - 1)/(x - 1)$$

$$\Phi_{30}(x) = x^8 + x^7 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1$$

$$\Phi_{31}(x) = (x^{31} - 1)/(x - 1)$$

$$\Phi_{32}(x) = x^{16} + 1$$

$$\Phi_{33}(x) = x^{20} - x^{19} + x^{17} - x^{16} + x^{14} - x^{13} + x^{11} - x^{10} + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1$$

$$\Phi_{34}(x) = (x^{17} + 1)/(x + 1)$$

$$\Phi_{35,1}(x) = x^{24} - x^{23} + x^{19} - x^{18} + x^{17} - x^{16} + x^{14} - x^{13}$$

$$\Phi_{35,2}(x) = x^{12} - x^{11} + x^{10} - x^8 + x^7 - x^6 + x^5 - x + 1$$

$$\Phi_{35}(x) = \Phi_{35,1}(x) + \Phi_{35,2}(x)$$

$$\Phi_{36}(x) = x^{12} - x^6 + 1$$

$$\Phi_{37}(x) = (x^{37} - 1)/(x - 1)$$

$$\Phi_{38}(x) = (x^{19} + 1)/(x + 1)$$

$$\Phi_{39,1}(x) = x^{24} - x^{23} + x^{21} - x^{20} + x^{18} - x^{17} + x^{15} - x^{14}$$

$$\Phi_{39,2}(x) = x^{12} - x^{10} + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1$$

$$\Phi_{39}(x) = \Phi_{39,1}(x) + \Phi_{39,2}(x)$$

$$\Phi_{40}(x) = x^{16} - x^{12} + x^8 - x^4 + 1$$

$$\Phi_{41}(x) = (x^{41} - 1)/(x - 1)$$

$$\Phi_{42}(x) = x^{12} + x^{11} - x^9 - x^8 + x^6 - x^4 - x^3 + x + 1$$

$$\Phi_{43}(x) = (x^{43} - 1)/(x - 1)$$

$$\Phi_{44}(x) = x^{20} - x^{18} + x^{16} - x^{14} + x^{12} - x^{10} + x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$$

A körosztási polinomok listája ($45 \leq n \leq 60$)

$$\Phi_{45}(x) = x^{24} - x^{21} + x^{15} - x^{12} + x^9 - x^3 + 1$$

$$\Phi_{46}(x) = (x^{23} + 1)/(x + 1)$$

$$\Phi_{47}(x) = (x^{47} - 1)/(x - 1)$$

$$\Phi_{48}(x) = x^{16} - x^8 + 1$$

$$\Phi_{49}(x) = x^{42} + x^{35} + x^{28} + x^{21} + x^{14} + x^7 + 1$$

$$\Phi_{50}(x) = x^{20} - x^{15} + x^{10} - x^5 + 1$$

$$\Phi_{51,1}(x) = x^{32} - x^{31} + x^{29} - x^{28} + x^{26} - x^{25} + x^{23} - x^{22} + x^{20} - x^{19} + x^{17} - x^{16}$$

$$\Phi_{51,2}(x) = x^{15} - x^{13} + x^{12} - x^{10} + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1$$

$$\Phi_{51}(x) = \Phi_{51,1}(x) + \Phi_{51,2}(x)$$

$$\Phi_{52}(x) = x^{24} - x^{22} + x^{20} - x^{18} + x^{16} - x^{14} + x^{12} - x^{10} + x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$$

$$\Phi_{53}(x) = (x^{53} - 1)/(x - 1)$$

$$\Phi_{54}(x) = x^{18} - x^9 + 1$$

$$\Phi_{55,1}(x) = x^{40} - x^{39} + x^{35} - x^{34} + x^{30} - x^{28} + x^{25} - x^{23}$$

$$\Phi_{55,2}(x) = x^{20} - x^{17} + x^{15} - x^{12} + x^{10} - x^6 + x^5 - x + 1$$

$$\Phi_{55}(x) = \Phi_{55,1}(x) + \Phi_{55,2}(x)$$

$$\Phi_{56}(x) = x^{24} - x^{20} + x^{16} - x^{12} + x^8 - x^4 + 1$$

$$\Phi_{57,1}(x) = x^{36} - x^{35} + x^{33} - x^{32} + x^{30} - x^{29} + x^{27} - x^{26} + x^{24} - x^{23} + x^{21} - x^{20}$$

$$\Phi_{57,2}(x) = x^{18} - x^{16} + x^{15} - x^{13} + x^{12} - x^{10} + x^9 - x^7 + x^6 - x^4 + x^3 - x + 1$$

$$\Phi_{57}(x) = \Phi_{57,1}(x) + \Phi_{57,2}(x)$$

$$\Phi_{58}(x) = (x^{29} + 1)/(x + 1)$$

$$\Phi_{59}(x) = (x^{59} - 1)/(x - 1)$$

$$\Phi_{60}(x) = x^{16} + x^{14} - x^{10} - x^8 - x^6 + x^2 + 1$$

32 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

A körosztási előpolinomok listája ($3 \leq n \leq 26$)

$$\Psi_3(x) = x + 1$$

$$\Psi_4(x) = x$$

$$\Psi_5(x) = x^2 + x - 1$$

$$\Psi_6(x) = x - 1$$

$$\Psi_7(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$$

$$\Psi_8(x) = x^2 - 2$$

$$\Psi_9(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$\Psi_{10}(x) = x^2 - x - 1$$

$$\Psi_{11}(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Psi_{12}(x) = x^2 - 3$$

$$\Psi_{13}(x) = x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1$$

$$\Psi_{14}(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$$

$$\Psi_{15}(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$$

$$\Psi_{16}(x) = x^4 - 4x^2 + 2$$

$$\Psi_{17}(x) = x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1$$

$$\Psi_{18}(x) = x^3 - 3x - 1$$

$$\Psi_{19}(x) = x^9 + x^8 - 8x^7 - 7x^6 + 21x^5 + 15x^4 - 20x^3 - 10x^2 + 5x + 1$$

$$\Psi_{20}(x) = x^4 - 5x^2 + 5$$

$$\Psi_{21}(x) = x^6 - x^5 - 6x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 8x + 1$$

$$\Psi_{22}(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

$$\Psi_{23}(x) = x^{11} + x^{10} - 10x^9 - 9x^8 + 36x^7 + 28x^6 - 56x^5 - 35x^4 + 35x^3 + 15x^2 - 6x - 1$$

$$\Psi_{24}(x) = x^4 - 4x^2 + 1$$

$$\Psi_{25}(x) = x^{10} - 10x^8 + 35x^6 + x^5 - 50x^4 - 5x^3 + 25x^2 + 5x - 1$$

$$\Psi_{26}(x) = x^6 - x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 3x - 1$$

A körosztási előpolinomok listája ($27 \leq n \leq 40$)

$$\Psi_{27}(x) = x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x + 1$$

$$\Psi_{28}(x) = x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7$$

$$\Psi_{29,1}(x) = x^{14} + x^{13} - 13x^{12} - 12x^{11} + 66x^{10} + 55x^9 - 165x^8 - 120x^7$$

$$\Psi_{29,2}(x) = 210x^6 + 126x^5 - 126x^4 - 56x^3 + 28x^2 + 7x - 1$$

$$\Psi_{29}(x) = \Psi_{29,1}(x) + \Psi_{29,2}(x)$$

$$\Psi_{30}(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1$$

$$\Psi_{31,1}(x) = x^{15} + x^{14} - 14x^{13} - 13x^{12} + 78x^{11} + 66x^{10} - 220x^9 - 165x^8$$

$$\Psi_{31,2}(x) = 330x^7 + 210x^6 - 252x^5 - 126x^4 + 84x^3 + 28x^2 - 8x - 1$$

$$\Psi_{31}(x) = \Psi_{31,1}(x) + \Psi_{31,2}(x)$$

$$\Psi_{32}(x) = x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2$$

$$\Psi_{33}(x) = x^{10} - x^9 - 10x^8 + 10x^7 + 34x^6 - 34x^5 - 43x^4 + 43x^3 + 12x^2 - 12x + 1$$

$$\Psi_{34}(x) = x^8 - x^7 - 7x^6 + 6x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 4x + 1$$

$$\Psi_{35,1}(x) = x^{12} - x^{11} - 12x^{10} + 11x^9 + 54x^8 - 43x^7 - 113x^6$$

$$\Psi_{35,2}(x) = 71x^5 + 110x^4 - 46x^3 - 40x^2 + 8x + 1$$

$$\Psi_{35}(x) = \Psi_{35,1}(x) + \Psi_{35,2}(x)$$

$$\Psi_{36}(x) = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 3$$

$$\Psi_{37,1}(x) = x^{18} + x^{17} - 17x^{16} - 16x^{15} + 120x^{14} + 105x^{13} - 455x^{12} - 364x^{11} + 1001x^{10}$$

$$\Psi_{37,2}(x) = 715x^9 - 1287x^8 - 792x^7 + 924x^6 + 462x^5 - 330x^4 - 120x^3 + 45x^2 + 9x - 1$$

$$\Psi_{37}(x) = \Psi_{37,1}(x) + \Psi_{37,2}(x)$$

$$\Psi_{38}(x) = x^9 - x^8 - 8x^7 + 7x^6 + 21x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 10x^2 + 5x - 1$$

$$\Psi_{39,1}(x) = x^{12} - x^{11} - 12x^{10} + 12x^9 + 53x^8 - 53x^7 - 103x^6 + 103x^5$$

$$\Psi_{39,2}(x) = 79x^4 - 79x^3 - 12x^2 + 12x + 1$$

$$\Psi_{39}(x) = \Psi_{39,1}(x) + \Psi_{39,2}(x)$$

$$\Psi_{40}(x) = x^8 - 8x^6 + 19x^4 - 12x^2 + 1$$

34 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

A körosztási előpolinomok listája ($41 \leq n \leq 52$)

$$\Psi_{41,1}(x) = x^{20} + x^{19} - 19x^{18} - 18x^{17} + 153x^{16} + 136x^{15} - 680x^{14} - 560x^{13} + 1820x^{12}$$

$$\Psi_{41,2}(x) = 1365x^{11} - 3003x^{10} - 2002x^9 + 3003x^8 + 1716x^7 - 1716x^6 - 792x^5$$

$$\Psi_{41,3}(x) = 495x^4 + 165x^3 - 55x^2 - 10x + 1$$

$$\Psi_{41}(x) = \Psi_{41,1}(x) + \Psi_{41,2}(x) + \Psi_{41,3}(x)$$

$$\Psi_{42}(x) = x^6 + x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 8x + 1$$

$$\Psi_{43,1}(x) = x^{21} + x^{20} - 20x^{19} - 19x^{18} + 171x^{17} + 153x^{16} - 816x^{15} - 680x^{14} + 2380x^{13}$$

$$\Psi_{43,2}(x) = 1820x^{12} - 4368x^{11} - 3003^{10} + 5005x^9 + 3003x^8 - 3432x^7 - 1716x^6$$

$$\Psi_{43,3}(x) = 1287x^5 + 495x^4 - 220x^3 - 55x^2 + 11x + 1$$

$$\Psi_{43}(x) = \Psi_{43,1}(x) + \Psi_{43,2}(x) + \Psi_{43,3}(x)$$

$$\Psi_{44}(x) = x^{10} - 11x^8 + 44x^6 - 77x^4 + 55x^2 - 11$$

$$\Psi_{45}(x) = x^{12} - 12x^{10} - x^9 + 54x^8 + 9x^7 - 112x^6 - 27x^5 + 105x^4 + 31x^3 - 36x^2 - 12x + 1$$

$$\Psi_{46}(x) = x^{11} - x^{10} - 10x^9 + 9x^8 + 36x^7 - 28x^6 - 56x^5 + 35x^4 + 35x^3 - 15x^2 - 6x + 1$$

$$\Psi_{47,1}(x) = x^{23} + x^{22} - 22x^{21} - 21x^{20} + 210x^{19} + 190x^{18} - 1140x^{17} - 969x^{16} + 3876x^{15}$$

$$\Psi_{47,2}(x) = 3060x^{14} - 8568x^{13} - 6188^{12} + 12376x^{11} + 8008x^8 - 11440x^9 - 6435x^8$$

$$\Psi_{47,3}(x) = 6435x^7 + 3003x^6 - 2002x^5 - 715x^4 + 286x^3 + 66x^2 - 12x - 1$$

$$\Psi_{47}(x) = \Psi_{47,1}(x) + \Psi_{47,2}(x) + \Psi_{47,3}(x)$$

$$\Psi_{48}(x) = x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 1$$

$$\Psi_{49,1}(x) = x^{21} - 21x^{19} + 189x^{17} - 952x^{15} + x^{14} + 2940x^{13} - 14x^{12} - 5733x^{11} + 77x^{10}$$

$$\Psi_{49,2}(x) = 7007x^9 - 210x^8 - 5147x^7 + 294x^6 + 2072x^5 - 196x^4 - 371x^3 + 49x^2 + 14x - 1$$

$$\Psi_{49}(x) = \Psi_{49,1}(x) + \Psi_{49,2}(x)$$

$$\Psi_{50}(x) = x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - x^5 - 50x^4 + 5x^3 + 25x^2 - 5x - 1$$

$$\Psi_{51,1}(x) = x^{16} - x^{15} - 16x^{14} + 16x^{13} + 103x^{12} - 103x^{11} - 339x^{10} + 339x^9$$

$$\Psi_{51,2}(x) = 596x^8 - 596x^7 - 526x^6 + 526x^5 + 188x^4 - 188x^3 - 16x^2 + 16x + 1$$

$$\Psi_{51}(x) = \Psi_{51,1}(x) + \Psi_{51,2}(x)$$

$$\Psi_{52}(x) = x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 156x^6 + 182x^4 - 91x^2 + 13$$

További körosztási előpolinomok, amelyek a későbbi listáinkban előfordulnak

$$\Psi_{54}(x) = x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x - 1$$

$$\Psi_{56}(x) = x^{12} - 12x^{10} + 53x^8 - 104x^6 + 86x^4 - 24x^2 + 1$$

$$\Psi_{57,1}(x) = x^{18} - x^{17} - 18x^{16} + 18x^{15} + 134x^{14} - 134x^{13} - 531x^{12} + 531x^{11} + 1198x^{10}$$

$$\Psi_{57,2}(x) = -1198x^9 - 1519x^8 + 1519x^7 + 989x^6 - 989x^5 - 265x^4 + 265x^3 + 20x^2 - 20x + 1$$

$$\Psi_{57}(x) = \Psi_{57,1}(x) + \Psi_{57,2}(x)$$

$$\Psi_{60}(x) = x^8 - 7x^6 + 14x^4 - 8x^2 + 1$$

$$\Psi_{64}(x) = x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10} + 660x^8 - 672x^6 + 336x^4 - 64x^2 + 2$$

$$\Psi_{66}(x) = x^{10} + x^9 - 10x^8 - 10x^7 + 34x^6 + 34x^5 - 43x^4 - 43x^3 + 12x^2 + 12x + 1$$

$$\Psi_{68}(x) = x^{16} - 17x^{14} + 119x^{12} - 442x^{10} + 935x^8 - 1122x^6 + 714x^4 - 204x^2 + 17$$

$$\Psi_{72}(x) = x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36x^2 + 1$$

$$\Psi_{76}(x) = x^{18} - 19x^{16} + 152x^{14} - 665x^{12} + 1729x^{10} - 2717x^8 + 2508x^6 - 1254x^4 + 285x^2 - 19$$

$$\Psi_{78,1}(x) = x^{12} + x^{11} - 12x^{10} - 12x^9 + 53x^8 + 53x^7 - 103x^6 - 103x^5$$

$$\Psi_{78,2}(x) = 79x^4 + 79x^3 - 12x^2 - 12x + 1$$

$$\Psi_{78}(x) = \Psi_{78,1}(x) + \Psi_{78,2}(x)$$

$$\Psi_{80}(x) = x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10} + 659x^8 - 664x^6 + 316x^4 - 48x^2 + 1$$

$$\Psi_{84}(x) = x^{12} - 11x^{10} + 44x^8 - 78x^6 + 60x^4 - 16x^2 + 1$$

$$\Psi_{90}(x) = x^{12} - 12x^{10} + x^9 + 54x^8 - 9x^7 - 112x^6 + 27x^5 + 105x^4 - 31x^3 - 36x^2 + 12x + 1$$

$$\Psi_{96}(x) = x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10} + 660x^8 - 672x^6 + 336x^4 - 64x^2 + 1$$

$$\Psi_{102,1}(x) = x^{16} + x^{15} - 16x^{14} - 16x^{13} + 103x^{12} + 103x^{11} - 339x^{10} - 339x^9$$

$$\Psi_{102,2}(x) = 596x^8 + 596x^7 - 526x^6 - 526x^5 + 188x^4 + 188x^3 - 16x^2 - 16x + 1$$

$$\Psi_{102}(x) = \Psi_{102,1}(x) + \Psi_{102,2}(x)$$

$$\Psi_{108}(x) = x^{18} - 18x^{16} + 135x^{14} - 546x^{12} + 1287x^{10} - 1782x^8 + 1386x^6 - 540x^4 + 81x^2 - 3$$

36 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

További körosztási előpolinomok, amelyek a későbbi listáinkban előfordulnak

$$\Psi_{114,1}(x) = x^{18} + x^{17} - 18x^{16} - 18x^{15} + 134x^{14} + 134x^{13} - 531x^{12} - 531x^{11} + 1198x^{10}$$

$$\Psi_{114,2}(x) = 1198x^9 - 1519x^8 - 1519x^7 + 989x^6 + 989x^5 - 265x^4 - 265x^3 + 20x^2 + 20x + 1$$

$$\Psi_{114}(x) = \Psi_{114,1}(x) + \Psi_{114,2}(x)$$

$$\Psi_{120}(x) = x^{16} - 16x^{14} + 105x^{12} - 364x^{10} + 714x^8 - 784x^6 + 440x^4 - 96x^2 + 1$$

A páratlan rendű pseudo-körosztási előpolinomok listája

$$\Psi_3^\oplus(x) = x^2 + 1$$

$$\Psi_5^\oplus(x) = x^4 + 3x^2 + 1$$

$$\Psi_7^\oplus(x) = x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$$

$$\Psi_9^\oplus(x) = x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 1$$

$$\Psi_{11}^\oplus(x) = x^{10} + 9x^8 + 28x^6 + 35x^4 + 15x^2 + 1$$

$$\Psi_{13}^\oplus(x) = x^{12} + 11x^{10} + 45x^8 + 84x^6 + 70x^4 + 21x^2 + 1$$

$$\Psi_{15}^\oplus(x) = x^8 + 9x^6 + 26x^4 + 24x^2 + 1$$

$$\Psi_{17}^\oplus(x) = x^{16} + 15x^{14} + 91x^{12} + 286x^{10} + 495x^8 + 462x^6 + 210x^4 + 36x^2 + 1$$

$$\Psi_{19}^\oplus(x) = x^{18} + 17x^{16} + 120x^{14} + 455x^{12} + 1001x^{10} + 1287x^8 + 924x^6 + 330x^4 + 45x^2 + 1$$

$$\Psi_{21}^\oplus(x) = x^{12} + 13x^{10} + 64x^8 + 146x^6 + 148x^4 + 48x^2 + 1$$

$$\Psi_{23,1}^\oplus(x) = x^{22} + 21x^{20} + 190x^{18} + 969x^{16} + 3060x^{14}$$

$$\Psi_{23,2}^\oplus(x) = 6188x^{12} + 8008x^{10} + 6435x^8 + 3003x^6 + 715x^4 + 66x^2 + 1$$

$$\Psi_{23}^\oplus(x) = \Psi_{23,1}^\oplus(x) + \Psi_{23,2}^\oplus(x)$$

$$\Psi_{25,1}^\oplus(x) = x^{20} + 20x^{18} + 170x^{16} + 800x^{14} + 2275x^{12}$$

$$\Psi_{25,2}^\oplus(x) = 4003x^{10} + 4280x^8 + 2605x^6 + 775x^4 + 75x^2 + 1$$

$$\Psi_{25}^\oplus(x) = \Psi_{25,1}^\oplus(x) + \Psi_{25,2}^\oplus(x)$$

$$\Psi_{27}^\oplus(x) = x^{18} + 18x^{16} + 135x^{14} + 546x^{12} + 1287x^{10} + 1782x^8 + 1386x^6 + 540x^4 + 81x^2 + 1$$

A $t_n(x)$ polinomok listája

$$\begin{aligned}
 t_1(x) &= x \\
 t_2(x) &= x^2 - 2 \\
 t_3(x) &= x^3 - 3x \\
 t_4(x) &= x^4 - 4x^2 + 2 \\
 t_5(x) &= x^5 - 5x^3 + 5x \\
 t_6(x) &= x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2 \\
 t_7(x) &= x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x \\
 t_8(x) &= x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2 \\
 t_9(x) &= x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x \\
 t_{10}(x) &= x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 25x^2 - 2 \\
 t_{11}(x) &= x^{11} - 11x^9 + 44x^7 - 77x^5 + 55x^3 - 11x \\
 t_{12}(x) &= x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36x^2 + 2 \\
 t_{13}(x) &= x^{13} - 13x^{11} + 65x^9 - 156x^7 + 182x^5 - 91x^3 + 13x \\
 t_{14}(x) &= x^{14} - 14x^{12} + 77x^{10} - 210x^8 + 294x^6 - 196x^4 + 49x^2 - 2 \\
 t_{15}(x) &= x^{15} - 15x^{13} + 90x^{11} - 275x^9 + 450x^7 - 378x^5 + 140x^3 - 15x \\
 t_{16}(x) &= x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10} + 660x^8 - 672x^6 + 336x^4 \\
 &\quad - 64x^2 + 2 \\
 t_{17}(x) &= x^{17} - 17x^{15} + 119x^{13} - 442x^{11} + 935x^9 - 1122x^7 + 714x^5 \\
 &\quad - 204x^3 + 17x \\
 t_{18}(x) &= x^{18} - 18x^{16} + 135x^{14} - 546x^{12} + 1287x^{10} - 1782x^8 + 1386x^6 \\
 &\quad - 540x^4 + 81x^2 - 2 \\
 t_{19}(x) &= x^{19} - 19x^{17} + 152x^{15} - 665x^{13} + 1729x^{11} - 2717x^9 + 2508x^7 \\
 &\quad - 1254x^5 + 285x^3 - 19x \\
 t_{20,1}(x) &= x^{20} - 20x^{18} + 170x^{16} - 800x^{14} + 2275x^{12} - 4004x^{10} \\
 t_{20,2}(x) &= 4290x^8 - 2640x^6 + 825x^4 - 100x^2 + 2 \\
 t_{20}(x) &= t_{20,1}(x) + t_{20,2}(x)
 \end{aligned}$$

38 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

A $t_n(x)$ polinomok szorzattá alakítása irreducibilis faktorizációval
(A faktorok száma $\tau(2n) - \tau(n)$, OEIS azonosító: A001227)

$$\begin{aligned}
 t_1(x) &= \Psi_4(x) \\
 t_2(x) &= \Psi_8(x) \\
 t_3(x) &= \Psi_4(x)\Psi_{12}(x) \\
 t_4(x) &= \Psi_{16}(x) \\
 t_5(x) &= \Psi_4(x)\Psi_{20}(x) \\
 t_6(x) &= \Psi_8(x)\Psi_{24}(x) \\
 t_7(x) &= \Psi_4(x)\Psi_{28}(x) \\
 t_8(x) &= \Psi_{32}(x) \\
 t_9(x) &= \Psi_4(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{36}(x) \\
 t_{10}(x) &= \Psi_8(x)\Psi_{40}(x) \\
 t_{11}(x) &= \Psi_4(x)\Psi_{44}(x) \\
 t_{12}(x) &= \Psi_{16}(x)\Psi_{48}(x) \\
 t_{13}(x) &= \Psi_4(x)\Psi_{52}(x) \\
 t_{14}(x) &= \Psi_8(x)\Psi_{56}(x) \\
 t_{15}(x) &= \Psi_4(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{20}(x)\Psi_{60}(x) \\
 t_{16}(x) &= \Psi_{64}(x) \\
 t_{17}(x) &= \Psi_4(x)\Psi_{68}(x) \\
 t_{18}(x) &= \Psi_8(x)\Psi_{24}(x)\Psi_{72}(x) \\
 t_{19}(x) &= \Psi_4(x)\Psi_{76}(x) \\
 t_{20}(x) &= \Psi_{16}(x)\Psi_{80}(x)
 \end{aligned}$$

Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

39

A $t_n(x) - 1$ polinomok szorzattá alakítása irreducibilis faktorizációval
(A faktorok száma $\tau(6n) - \tau(3n) - \tau(2n) + \tau(n)$, OEIS azonosító: nincs)

$$\begin{aligned}
 t_1(x) - 1 &= \Psi_6(x) \\
 t_2(x) - 1 &= \Psi_{12}(x) \\
 t_3(x) - 1 &= \Psi_{18}(x) \\
 t_4(x) - 1 &= \Psi_{24}(x) \\
 t_5(x) - 1 &= \Psi_6(x)\Psi_{30}(x) \\
 t_6(x) - 1 &= \Psi_{36}(x) \\
 t_7(x) - 1 &= \Psi_6(x)\Psi_{42}(x) \\
 t_8(x) - 1 &= \Psi_{48}(x) \\
 t_9(x) - 1 &= \Psi_{54}(x) \\
 t_{10}(x) - 1 &= \Psi_{12}(x)\Psi_{60}(x) \\
 t_{11}(x) - 1 &= \Psi_6(x)\Psi_{66}(x) \\
 t_{12}(x) - 1 &= \Psi_{72}(x) \\
 t_{13}(x) - 1 &= \Psi_6(x)\Psi_{78}(x) \\
 t_{14}(x) - 1 &= \Psi_{12}(x)\Psi_{84}(x) \\
 t_{15}(x) - 1 &= \Psi_{18}(x)\Psi_{90}(x) \\
 t_{16}(x) - 1 &= \Psi_{96}(x) \\
 t_{17}(x) - 1 &= \Psi_6(x)\Psi_{102}(x) \\
 t_{18}(x) - 1 &= \Psi_{108}(x) \\
 t_{19}(x) - 1 &= \Psi_6(x)\Psi_{114}(x) \\
 t_{20}(x) - 1 &= \Psi_{24}(x)\Psi_{120}(x)
 \end{aligned}$$

40 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

A $t_n(x) + 1$ polinomok szorzattá alakítása irreducibilis faktORIZÁCIÓVAL
(A faktorok száma $\tau(3n) - \tau(n)$, OEIS azonosító: nincs)

$$\begin{aligned}
 t_1(x) + 1 &= \Psi_3(x) \\
 t_2(x) + 1 &= \Psi_3(x)\Psi_6(x) \\
 t_3(x) + 1 &= \Psi_9(x) \\
 t_4(x) + 1 &= \Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_{12}(x) \\
 t_5(x) + 1 &= \Psi_3(x)\Psi_{15}(x) \\
 t_6(x) + 1 &= \Psi_9(x)\Psi_{18}(x) \\
 t_7(x) + 1 &= \Psi_3(x)\Psi_{21}(x) \\
 t_8(x) + 1 &= \Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{24}(x) \\
 t_9(x) + 1 &= \Psi_{27}(x) \\
 t_{10}(x) + 1 &= \Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_{15}(x)\Psi_{30}(x) \\
 t_{11}(x) + 1 &= \Psi_3(x)\Psi_{33}(x) \\
 t_{12}(x) + 1 &= \Psi_9(x)\Psi_{18}(x)\Psi_{36}(x) \\
 t_{13}(x) + 1 &= \Psi_3(x)\Psi_{39}(x) \\
 t_{14}(x) + 1 &= \Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_{21}(x)\Psi_{42}(x) \\
 t_{15}(x) + 1 &= \Psi_9(x)\Psi_{45}(x) \\
 t_{16}(x) + 1 &= \Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{24}(x)\Psi_{48}(x) \\
 t_{17}(x) + 1 &= \Psi_3(x)\Psi_{51}(x) \\
 t_{18}(x) + 1 &= \Psi_{27}(x)\Psi_{54}(x) \\
 t_{19}(x) + 1 &= \Psi_3(x)\Psi_{57}(x) \\
 t_{20}(x) + 1 &= \Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{15}(x)\Psi_{30}(x)\Psi_{60}(x)
 \end{aligned}$$

**A $t_n(x) - 2$ polinomok szorzattá alakítása irreducibilis faktorizációval
(A faktorok száma $2\tau(n) - 1$, ha n páratlan, $2\tau(n) - 2$, ha n páros, OEIS azonosító: A086369)**

$$\begin{aligned}
 t_1(x) - 2 &= x - 2 \\
 t_2(x) - 2 &= (x - 2)(x + 2) \\
 t_3(x) - 2 &= (x - 2)[\Psi_3(x)]^2 \\
 t_4(x) - 2 &= (x - 2)(x + 2)[\Psi_4(x)]^2 \\
 t_5(x) - 2 &= (x - 2)[\Psi_5(x)]^2 \\
 t_6(x) - 2 &= (x - 2)(x + 2)[\Psi_3(x)]^2[\Psi_6(x)]^2 \\
 t_7(x) - 2 &= (x - 2)[\Psi_7(x)]^2 \\
 t_8(x) - 2 &= (x - 2)(x + 2)[\Psi_4(x)]^2[\Psi_8(x)]^2 \\
 t_9(x) - 2 &= (x - 2)[\Psi_3(x)]^2[\Psi_9(x)]^2 \\
 t_{10}(x) - 2 &= (x - 2)(x + 2)[\Psi_5(x)]^2[\Psi_{10}(x)]^2 \\
 t_{11}(x) - 2 &= (x - 2)[\Psi_{11}(x)]^2 \\
 t_{12}(x) - 2 &= (x - 2)(x + 2)[\Psi_3(x)]^2[\Psi_4(x)]^2[\Psi_6(x)]^2[\Psi_{12}(x)]^2 \\
 t_{13}(x) - 2 &= (x - 2)[\Psi_{13}(x)]^2 \\
 t_{14}(x) - 2 &= (x - 2)(x + 2)[\Psi_7(x)]^2[\Psi_{14}(x)]^2 \\
 t_{15}(x) - 2 &= (x - 2)[\Psi_3(x)]^2[\Psi_5(x)]^2[\Psi_{15}(x)]^2 \\
 t_{16}(x) - 2 &= (x - 2)(x + 2)[\Psi_4(x)]^2[\Psi_8(x)]^2[\Psi_{16}(x)]^2 \\
 t_{17}(x) - 2 &= (x - 2)[\Psi_{17}(x)]^2 \\
 t_{18}(x) - 2 &= (x - 2)(x + 2)[\Psi_3(x)]^2[\Psi_6(x)]^2[\Psi_9(x)]^2[\Psi_{18}(x)]^2 \\
 t_{19}(x) - 2 &= (x - 2)[\Psi_{19}(x)]^2 \\
 t_{20}(x) - 2 &= (x - 2)(x + 2)[\Psi_4(x)]^2[\Psi_5(x)]^2[\Psi_{10}(x)]^2[\Psi_{20}(x)]^2
 \end{aligned}$$

42 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

**A $t_n(x) + 2$ polinomok szorzattá alakítása irreducibilis faktorizációval
(A faktorok száma $2\tau(2n) - 2\tau(n) - 1$, ha n páratlan, $2\tau(2n) - 2\tau(n)$,
ha n páros, OEIS azonosító: A086374)**

$$\begin{aligned}
 t_1(x) + 2 &= x + 2 \\
 t_2(x) + 2 &= [\Psi_4(x)]^2 \\
 t_3(x) + 2 &= (x + 2)[\Psi_6(x)]^2 \\
 t_4(x) + 2 &= [\Psi_8(x)]^2 \\
 t_5(x) + 2 &= (x + 2)[\Psi_{10}(x)]^2 \\
 t_6(x) + 2 &= [\Psi_4(x)]^2[\Psi_{12}(x)]^2 \\
 t_7(x) + 2 &= (x + 2)[\Psi_{14}(x)]^2 \\
 t_8(x) + 2 &= [\Psi_{16}(x)]^2 \\
 t_9(x) + 2 &= (x + 2)[\Psi_6(x)]^2[\Psi_{18}(x)]^2 \\
 t_{10}(x) + 2 &= [\Psi_4(x)]^2[\Psi_{20}(x)]^2 \\
 t_{11}(x) + 2 &= (x + 2)[\Psi_{22}(x)]^2 \\
 t_{12}(x) + 2 &= [\Psi_8(x)]^2[\Psi_{24}(x)]^2 \\
 t_{13}(x) + 2 &= (x + 2)[\Psi_{26}(x)]^2 \\
 t_{14}(x) + 2 &= [\Psi_4(x)]^2[\Psi_{28}(x)]^2 \\
 t_{15}(x) + 2 &= (x + 2)[\Psi_6(x)]^2[\Psi_{10}(x)]^2[\Psi_{30}(x)]^2 \\
 t_{16}(x) + 2 &= [\Psi_{32}(x)]^2 \\
 t_{17}(x) + 2 &= (x + 2)[\Psi_{34}(x)]^2 \\
 t_{18}(x) + 2 &= [\Psi_4(x)]^2[\Psi_{12}(x)]^2[\Psi_{36}(x)]^2 \\
 t_{19}(x) + 2 &= (x + 2)[\Psi_{38}(x)]^2 \\
 t_{20}(x) + 2 &= [\Psi_8(x)]^2[\Psi_{40}(x)]^2
 \end{aligned}$$

Az $u_n(x)$ polinomok listája

$$u_1(x) = x$$

$$u_2(x) = x^2 - 1$$

$$u_3(x) = x^3 - 2x$$

$$u_4(x) = x^4 - 3x^2 + 1$$

$$u_5(x) = x^5 - 4x^3 + 3x$$

$$u_6(x) = x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1$$

$$u_7(x) = x^7 - 6x^5 + 10x^3 - 4x$$

$$u_8(x) = x^8 - 7x^6 + 15x^4 - 10x^2 + 1$$

$$u_9(x) = x^9 - 8x^7 + 21x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$u_{10}(x) = x^{10} - 9x^8 + 28x^6 - 35x^4 + 15x^2 - 1$$

$$u_{11}(x) = x^{11} - 10x^9 + 36x^7 - 56x^5 + 35x^3 - 6x$$

$$u_{12}(x) = x^{12} - 11x^{10} + 45x^8 - 84x^6 + 70x^4 - 21x^2 + 1$$

$$u_{13}(x) = x^{13} - 12x^{11} + 55x^9 - 120x^7 + 126x^5 - 56x^3 + 7x$$

$$u_{14}(x) = x^{14} - 13x^{12} + 66x^{10} - 165x^8 + 210x^6 - 126x^4 + 28x^2 - 1$$

$$u_{15}(x) = x^{15} - 14x^{13} + 78x^{11} - 220x^9 + 330x^7 - 252x^5 + 84x^3 - 8x$$

$$u_{16}(x) = x^{16} - 15x^{14} + 91x^{12} - 286x^{10} + 495x^8 - 462x^6 + 210x^4 - 36x^2 + 1$$

$$u_{17}(x) = x^{17} - 16x^{15} + 105x^{13} - 364x^{11} + 715x^9 - 792x^7 + 462x^5 - 120x^3 + 9x$$

$$u_{18}(x) = x^{18} - 17x^{16} + 120x^{14} - 455x^{12} + 1001x^{10} - 1287x^8 + 924x^6 - 330x^4 + 45x^2 - 1$$

$$u_{19}(x) = x^{19} - 18x^{17} + 136x^{15} - 560x^{13} + 1365x^{11} - 2002x^9 + 1716x^7 - 792x^5 + 165x^3 - 10x$$

$$u_{20,1}(x) = x^{20} - 19x^{18} + 153x^{16} - 680x^{14} + 1820x^{12} - 3003x^{10} + 3003x^8 - 1716x^6$$

$$u_{20,2}(x) = 495x^4 - 55x^2 + 1$$

$$u_{20}(x) = u_{20,1}(x) + u_{20,2}(x)$$

44 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

Az $u_n(x)$ polinomok szorzattá alakítása irreducibilis faktorizációval
(A faktorok száma $\tau(2n + 2) - 2$, OEIS azonosító: A086327)

$$\begin{aligned}
 u_1(x) &= \Psi_4(x) \\
 u_2(x) &= \Psi_3(x)\Psi_6(x) \\
 u_3(x) &= \Psi_4(x)\Psi_8(x) \\
 u_4(x) &= \Psi_5(x)\Psi_{10}(x) \\
 u_5(x) &= \Psi_3(x)\Psi_4(x)\Psi_6(x)\Psi_{12}(x) \\
 u_6(x) &= \Psi_7(x)\Psi_{14}(x) \\
 u_7(x) &= \Psi_4(x)\Psi_8(x)\Psi_{16}(x) \\
 u_8(x) &= \Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_9(x)\Psi_{18}(x) \\
 u_9(x) &= \Psi_4(x)\Psi_5(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{20}(x) \\
 u_{10}(x) &= \Psi_{11}(x)\Psi_{22}(x) \\
 u_{11}(x) &= \Psi_3(x)\Psi_4(x)\Psi_6(x)\Psi_8(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{24}(x) \\
 u_{12}(x) &= \Psi_{13}(x)\Psi_{26}(x) \\
 u_{13}(x) &= \Psi_4(x)\Psi_7(x)\Psi_{14}(x)\Psi_{28}(x) \\
 u_{14}(x) &= \Psi_3(x)\Psi_5(x)\Psi_6(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{15}(x)\Psi_{30}(x) \\
 u_{15}(x) &= \Psi_4(x)\Psi_8(x)\Psi_{16}(x)\Psi_{32}(x) \\
 u_{16}(x) &= \Psi_{17}(x)\Psi_{34}(x) \\
 u_{17}(x) &= \Psi_3(x)\Psi_4(x)\Psi_6(x)\Psi_9(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{18}(x)\Psi_{36}(x) \\
 u_{18}(x) &= \Psi_{19}(x)\Psi_{38}(x) \\
 u_{19}(x) &= \Psi_4(x)\Psi_5(x)\Psi_8(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{20}(x)\Psi_{40}(x) \\
 u_{20}(x) &= \Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_7(x)\Psi_{14}(x)\Psi_{21}(x)\Psi_{42}(x)
 \end{aligned}$$

**Az $u_n(x) - 1$ polinomok szorzattá alakítása irreducibilis faktorizációval
(A faktorok száma $\tau(2n + 4) - \tau(n + 2) + \tau(n) - 2$, OEIS azonosító:
A086389)**

$$\begin{aligned}
 u_1(x) - 1 &= \Psi_6(x) \\
 u_2(x) - 1 &= \Psi_8(x) \\
 u_3(x) - 1 &= \Psi_3(x)\Psi_{10}(x) \\
 u_4(x) - 1 &= [\Psi_4(x)]^2\Psi_{12}(x) \\
 u_5(x) - 1 &= \Psi_5(x)\Psi_{14}(x) \\
 u_6(x) - 1 &= \Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_{16}(x) \\
 u_7(x) - 1 &= \Psi_6(x)\Psi_7(x)\Psi_{18}(x) \\
 u_8(x) - 1 &= [\Psi_4(x)]^2\Psi_8(x)\Psi_{20}(x) \\
 u_9(x) - 1 &= \Psi_3(x)\Psi_9(x)\Psi_{22}(x) \\
 u_{10}(x) - 1 &= \Psi_5(x)\Psi_8(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{24}(x) \\
 u_{11}(x) - 1 &= \Psi_{11}(x)\Psi_{26}(x) \\
 u_{12}(x) - 1 &= \Psi_3(x)[\Psi_4(x)]^2\Psi_6\Psi_{12}(x)\Psi_{28}(x)(x) \\
 u_{13}(x) - 1 &= \Psi_6(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{13}(x)\Psi_{30}(x) \\
 u_{14}(x) - 1 &= \Psi_7(x)\Psi_{14}(x)\Psi_{32}(x) \\
 u_{15}(x) - 1 &= \Psi_3(x)\Psi_5(x)\Psi_{15}(x)\Psi_{34}(x) \\
 u_{16}(x) - 1 &= [\Psi_4(x)]^2\Psi_8(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{16}(x)\Psi_{36}(x) \\
 u_{17}(x) - 1 &= \Psi_{17}(x)\Psi_{38}(x) \\
 u_{18}(x) - 1 &= \Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_8(x)\Psi_9(x)\Psi_{18}(x)\Psi_{40}(x) \\
 u_{19}(x) - 1 &= \Psi_6(x)\Psi_{14}(x)\Psi_{19}(x)\Psi_{42}(x) \\
 u_{20}(x) - 1 &= [\Psi_4(x)]^2\Psi_5(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{20}(x)\Psi_{44}(x)
 \end{aligned}$$

46 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

**Az $u_n(x) + 1$ polinomok szorzattá alakítása irreducibilis faktorizációval
(A faktorok száma $\tau(2n) + \tau(n + 2) - \tau(n) - 2$, OEIS azonosító: A086375)**

$$\begin{aligned}
 u_1(x) + 1 &= \Psi_3(x) \\
 u_2(x) + 1 &= [\Psi_4(x)]^2 \\
 u_3(x) + 1 &= \Psi_5(x)\Psi_6(x) \\
 u_4(x) + 1 &= \Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_8(x) \\
 u_5(x) + 1 &= \Psi_7(x)\Psi_{10}(x) \\
 u_6(x) + 1 &= [\Psi_4(x)]^2\Psi_8(x)\Psi_{12}(x) \\
 u_7(x) + 1 &= \Psi_3(x)\Psi_9(x)\Psi_{14}(x) \\
 u_8(x) + 1 &= \Psi_5(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{16}(x) \\
 u_9(x) + 1 &= \Psi_6(x)\Psi_{11}(x)\Psi_{18}(x) \\
 u_{10}(x) + 1 &= \Psi_3(x)[\Psi_4(x)]^2\Psi_6(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{20}(x) \\
 u_{11}(x) + 1 &= \Psi_{13}(x)\Psi_{22}(x) \\
 u_{12}(x) + 1 &= \Psi_7(x)\Psi_8(x)\Psi_{14}(x)\Psi_{24}(x) \\
 u_{13}(x) + 1 &= \Psi_3(x)\Psi_5(x)\Psi_{15}(x)\Psi_{26}(x) \\
 u_{14}(x) + 1 &= [\Psi_4(x)]^2\Psi_8(x)\Psi_{16}(x)\Psi_{28}(x) \\
 u_{15}(x) + 1 &= \Psi_6(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{17}(x)\Psi_{30}(x) \\
 u_{16}(x) + 1 &= \Psi_3(x)\Psi_6(x)\Psi_9(x)\Psi_{18}(x)\Psi_{32}(x) \\
 u_{17}(x) + 1 &= \Psi_{19}(x)\Psi_{34}(x) \\
 u_{18}(x) + 1 &= [\Psi_4(x)]^2\Psi_5(x)\Psi_{10}(x)\Psi_{12}(x)\Psi_{20}(x)\Psi_{36}(x) \\
 u_{19}(x) + 1 &= \Psi_3(x)\Psi_7(x)\Psi_{21}(x)\Psi_{38}(x) \\
 u_{20}(x) + 1 &= \Psi_8(x)\Psi_{11}(x)\Psi_{22}(x)\Psi_{40}(x)
 \end{aligned}$$

A $t_n^\oplus(x) - 1$ polinomok szorzattá alakítása irreducibilis faktorizációval

$$\begin{aligned} t_2^\oplus(x) - 1 &= \Psi_3^\oplus(x) \\ t_4^\oplus(x) - 1 &= \Psi_{24}^\oplus(x) \\ t_6^\oplus(x) - 1 &= \Psi_9^\oplus(x) \\ t_8^\oplus(x) - 1 &= \Psi_{48}^\oplus(x) \\ t_{10}^\oplus(x) - 1 &= \Psi_3^\oplus(x) \Psi_{15}^\oplus(x) \\ t_{12}^\oplus(x) - 1 &= \Psi_{72}^\oplus(x) \\ t_{14}^\oplus(x) - 1 &= \Psi_3^\oplus(x) \Psi_{21}^\oplus(x) \\ t_{16}^\oplus(x) - 1 &= \Psi_{96}^\oplus(x) \\ t_{18}^\oplus(x) - 1 &= \Psi_{27}^\oplus(x) \\ t_{20}^\oplus(x) - 1 &= \Psi_{24}^\oplus(x) \Psi_{120}^\oplus(x) \end{aligned}$$

A $t_n^\oplus(x) + 1$ polinomok szorzattá alakítása irreducibilis faktorizációval

$$\begin{aligned} t_2^\oplus(x) + 1 &= \Psi_{12}^\oplus(x) \\ t_4^\oplus(x) + 1 &= \Psi_3^\oplus(x) \Psi_{12}^\oplus(x) \\ t_6^\oplus(x) + 1 &= \Psi_{36}^\oplus(x) \\ t_8^\oplus(x) + 1 &= \Psi_3^\oplus(x) \Psi_{12}^\oplus(x) \Psi_{24}^\oplus(x) \\ t_{10}^\oplus(x) + 1 &= \Psi_{12}^\oplus(x) \Psi_{60}^\oplus(x) \\ t_{12}^\oplus(x) + 1 &= \Psi_9^\oplus(x) \Psi_{36}^\oplus(x) \\ t_{14}^\oplus(x) + 1 &= \Psi_{12}^\oplus(x) \Psi_{84}^\oplus(x) \\ t_{16}^\oplus(x) + 1 &= \Psi_3^\oplus(x) \Psi_{12}^\oplus(x) \Psi_{24}^\oplus(x) \Psi_{48}^\oplus(x) \\ t_{18}^\oplus(x) + 1 &= \Psi_{108}^\oplus(x) \\ t_{20}^\oplus(x) + 1 &= \Psi_3^\oplus(x) \Psi_{12}^\oplus(x) \Psi_{15}^\oplus(x) \Psi_{60}^\oplus(x) \end{aligned}$$

48 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

A $t_n^\oplus(x) - 2$ polinomok szorzattá alakítása irreducibilis faktorizációval

$$\begin{aligned}
 t_2^\oplus(x) - 2 &= [\Psi_4^\oplus(x)]^2 \\
 t_4^\oplus(x) - 2 &= (x^2 + 4)[\Psi_4^\oplus(x)]^2 \\
 t_6^\oplus(x) - 2 &= [\Psi_4^\oplus(x)]^2[\Psi_{12}^\oplus(x)]^2 \\
 t_8^\oplus(x) - 2 &= (x^2 + 4)[\Psi_4^\oplus(x)]^2[\Psi_8^\oplus(x)]^2 \\
 t_{10}^\oplus(x) - 2 &= [\Psi_4^\oplus(x)]^2[\Psi_{20}^\oplus(x)]^2 \\
 t_{12}^\oplus(x) - 2 &= (x^2 + 4)[\Psi_3^\oplus(x)]^2[\Psi_4^\oplus(x)]^2[\Psi_{12}^\oplus(x)]^2 \\
 t_{14}^\oplus(x) - 2 &= [\Psi_4^\oplus(x)]^2[\Psi_{28}^\oplus(x)]^2 \\
 t_{16}^\oplus(x) - 2 &= (x^2 + 4)[\Psi_4^\oplus(x)]^2[\Psi_8^\oplus(x)]^2\Psi_{16}^\oplus(x)]^2 \\
 t_{18}^\oplus(x) - 2 &= [\Psi_4^\oplus(x)]^2[\Psi_{12}^\oplus(x)]^2\Psi_{36}^\oplus(x)]^2 \\
 t_{20}^\oplus(x) - 2 &= (x^2 + 4)[\Psi_4^\oplus(x)]^2[\Psi_5^\oplus(x)]^2\Psi_{20}^\oplus(x)]^2
 \end{aligned}$$

A $t_n^\oplus(x) + 2$ polinomok szorzattá alakítása irreducibilis faktorizációval

$$\begin{aligned}
 t_2^\oplus(x) + 2 &= x^2 + 4 \\
 t_4^\oplus(x) + 2 &= [\Psi_8^\oplus(x)]^2 \\
 t_6^\oplus(x) + 2 &= (x^2 + 4)[\Psi_3^\oplus(x)]^2 \\
 t_8^\oplus(x) + 2 &= [\Psi_{16}^\oplus(x)]^2 \\
 t_{10}^\oplus(x) + 2 &= (x^2 + 4)[\Psi_5^\oplus(x)]^2 \\
 t_{12}^\oplus(x) + 2 &= [\Psi_8^\oplus(x)]^2[\Psi_{24}^\oplus(x)]^2 \\
 t_{14}^\oplus(x) + 2 &= (x^2 + 4)[\Psi_7^\oplus(x)]^2 \\
 t_{16}^\oplus(x) + 2 &= [\Psi_{32}^\oplus(x)]^2 \\
 t_{18}^\oplus(x) + 2 &= (x^2 + 4)[\Psi_3^\oplus(x)]^2\Psi_9^\oplus(x)]^2 \\
 t_{20}^\oplus(x) + 2 &= [\Psi_8^\oplus(x)]^2[\Psi_{40}^\oplus(x)]^2
 \end{aligned}$$

Az $u_n^\oplus(x)$ polinomok szorzattá alakítása irreducibilis faktorizációval
(A faktorok száma $\tau(n+1) - 1$, OEIS azonosító: nincs)

$$\begin{aligned}
 u_1^\oplus(x) &= \Psi_4^\oplus(x) \\
 u_2^\oplus(x) &= \Psi_3^\oplus(x) \\
 u_3^\oplus(x) &= \Psi_4^\oplus(x) \Psi_8^\oplus(x) \\
 u_4^\oplus(x) &= \Psi_5^\oplus(x) \\
 u_5^\oplus(x) &= \Psi_3^\oplus(x) \Psi_4^\oplus(x) \Psi_{12}^\oplus(x) \\
 u_6^\oplus(x) &= \Psi_7^\oplus(x) \\
 u_7^\oplus(x) &= \Psi_4^\oplus(x) \Psi_8^\oplus(x) \Psi_{16}^\oplus(x) \\
 u_8^\oplus(x) &= \Psi_3^\oplus(x) \Psi_9^\oplus(x) \\
 u_9^\oplus(x) &= \Psi_4^\oplus(x) \Psi_5^\oplus(x) \Psi_{20}^\oplus(x) \\
 u_{10}^\oplus(x) &= \Psi_{11}^\oplus(x) \\
 u_{11}^\oplus(x) &= \Psi_3^\oplus(x) \Psi_4^\oplus(x) \Psi_8^\oplus(x) \Psi_{12}^\oplus(x) \Psi_{24}^\oplus(x) \\
 u_{12}^\oplus(x) &= \Psi_{13}^\oplus(x) \\
 u_{13}^\oplus(x) &= \Psi_4^\oplus(x) \Psi_7^\oplus(x) \Psi_{28}^\oplus(x) \\
 u_{14}^\oplus(x) &= \Psi_3^\oplus(x) \Psi_5^\oplus(x) \Psi_{15}^\oplus(x) \\
 u_{15}^\oplus(x) &= \Psi_4^\oplus(x) \Psi_8^\oplus(x) \Psi_{16}^\oplus(x) \Psi_{32}^\oplus(x) \\
 u_{16}^\oplus(x) &= \Psi_{17}^\oplus(x) \\
 u_{17}^\oplus(x) &= \Psi_3^\oplus(x) \Psi_4^\oplus(x) \Psi_9^\oplus(x) \Psi_{12}^\oplus(x) \Psi_{36}^\oplus(x) \\
 u_{18}^\oplus(x) &= \Psi_{19}^\oplus(x) \\
 u_{19}^\oplus(x) &= \Psi_4^\oplus(x) \Psi_5^\oplus(x) \Psi_8^\oplus(x) \Psi_{20}^\oplus(x) \Psi_{40}^\oplus(x) \\
 u_{20}^\oplus(x) &= \Psi_3^\oplus(x) \Psi_7^\oplus(x) \Psi_{21}^\oplus(x)
 \end{aligned}$$

50 Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok

Az $u_n^\oplus(x) - 1$ polinomok szorzattá alakítása irreducibilis faktorizációval

$$\begin{aligned}
 u_2^\oplus(x) - 1 &= [\Psi_4^\oplus(x)]^2 \\
 u_4^\oplus(x) - 1 &= [\Psi_4^\oplus(x)]^2 \Psi_{12}^\oplus(x) \\
 u_6^\oplus(x) - 1 &= [\Psi_4^\oplus(x)]^2 \Psi_8^\oplus(x) \Psi_{12}^\oplus(x) \\
 u_8^\oplus(x) - 1 &= [\Psi_4^\oplus(x)]^2 \Psi_8^\oplus(x) \Psi_{20}^\oplus(x) \\
 u_{10}^\oplus(x) - 1 &= \Psi_3^\oplus(x) [\Psi_4^\oplus(x)]^2 \Psi_{12}^\oplus(x) \Psi_{20}^\oplus(x) \\
 u_{12}^\oplus(x) - 1 &= \Psi_3^\oplus(x) [\Psi_4^\oplus(x)]^2 \Psi_{12}^\oplus(x) \Psi_{28}^\oplus(x) \\
 u_{14}^\oplus(x) - 1 &= [\Psi_4^\oplus(x)]^2 \Psi_8^\oplus(x) \Psi_{16}^\oplus(x) \Psi_{28}^\oplus(x) \\
 u_{16}^\oplus(x) - 1 &= [\Psi_4^\oplus(x)]^2 \Psi_8^\oplus(x) \Psi_{12}^\oplus(x) \Psi_{16}^\oplus(x) \Psi_{36}^\oplus(x) \\
 u_{18}^\oplus(x) - 1 &= [\Psi_4^\oplus(x)]^2 \Psi_5^\oplus(x) \Psi_{12}^\oplus(x) \Psi_{20}^\oplus(x) \Psi_{36}^\oplus(x) \\
 u_{20}^\oplus(x) - 1 &= [\Psi_4^\oplus(x)]^2 \Psi_5^\oplus(x) \Psi_{20}^\oplus(x) \Psi_{44}^\oplus(x)
 \end{aligned}$$

Az $u_n^\oplus(x) + 1$ polinomok szorzattá alakítása irreducibilis faktorizációval

$$\begin{aligned}
 u_2^\oplus(x) + 1 &= \Psi_8^\oplus(x) \\
 u_4^\oplus(x) + 1 &= \Psi_3^\oplus(x) \Psi_8^\oplus(x) \\
 u_6^\oplus(x) + 1 &= \Psi_3^\oplus(x) \Psi_{16}^\oplus(x) \\
 u_8^\oplus(x) + 1 &= \Psi_5^\oplus(x) \Psi_{16}^\oplus(x) \\
 u_{10}^\oplus(x) + 1 &= \Psi_5^\oplus(x) \Psi_8^\oplus(x) \Psi_{24}^\oplus(x) \\
 u_{12}^\oplus(x) + 1 &= \Psi_7^\oplus(x) \Psi_8^\oplus(x) \Psi_{24}^\oplus(x) \\
 u_{14}^\oplus(x) + 1 &= \Psi_7^\oplus(x) \Psi_{32}^\oplus(x) \\
 u_{16}^\oplus(x) + 1 &= \Psi_3^\oplus(x) \Psi_9^\oplus(x) \Psi_{32}^\oplus(x) \\
 u_{18}^\oplus(x) + 1 &= \Psi_3^\oplus(x) \Psi_8^\oplus(x) \Psi_9^\oplus(x) \Psi_{40}^\oplus(x) \\
 u_{20}^\oplus(x) + 1 &= \Psi_8^\oplus(x) \Psi_{11}^\oplus(x) \Psi_{40}^\oplus(x)
 \end{aligned}$$

Irodalom

- [1] Hsiao, H. J., *On factorization of Chebyshev's polynomials of the first kind*, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica **12** (1) (1984) 89–94.
- [2] Kearnes, K. Kiss, E. és Szendrei, Á., *Gauss-egészek és Dirichlet tétele, 2. rész*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (2010 április).
<https://ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/wp-content/uploads/2014/11/Dirichlet2.pdf>
- [3] Kéri, G., *Többszörös szögek táblázatai*, MTA SZTAKI, 1997.
<http://old.sztaki.hu/~keri/math/mult.htm>
- [4] Kéri, G., *Compressed Chebyshev Polynomials and Multiple-Angle Formulas*, Omniscryptum Publishing Group, 2021.
- [5] Kéri, G., *Compressed Chebyshev Polynomials and Multiple-Angle Formulas II*, Omniscryptum Publishing Group, 2022.
- [6] Kéri, G., *The factorization of compressed Chebyshev polynomials and other polynomials related to multiple-angle formulas*, Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eotvos Nominatae Sectio Computatorica **53** (2022) 93–108.
- [7] Mason, J. C. és Handscomb, D. C., *Chebyshev Polynomials*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (2003).
- [8] Natanson, I. P., *Konstruktív függvénytan*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.
- [9] Niven, I. M., *Irrational Numbers*, The Carus Mathematical Monographs, No. 11. The Mathematical Association of America, Wiley, New York (1956).
- [10] Pálffy, P. P., *Private communication*, (2023).
- [11] Rivlin, T. J., *The Chebyshev Polynomials—From Approximation Theory to Algebra and Number Theory*, Wiley-Interscience, John Wiley, (1990).
- [12] Sloane, N. J. A., *Egész számok sorozatainak on-line enciklopédiája*.
<https://oeis.org/?language=hungarian>
- [13] Witula, R. és Słota, D. *On modified Chebyshev polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **324** (2006) 321–343.
- [14] Wolfram MathWorld: Lucas Polynomial
<https://mathworld.wolfram.com/LucasPolynomial.html>
- [15] Factoring Polynomials Calculator - eMathHelp
<https://www.emathhelp.net/calculators/algebra-1/factoring-polynomials-calculator/>
- [16] Polynomial Factorization <https://www.dcode.fr/polynomial-factorization>

Maga Balázs, Simon L. Péter: Hogyan tanul a neurális háló?

Bevezetés

Amint arról a decemberi Érintő is beszámolt, 2024-ben az amerikai John J. Hopfieldnek és a kanadai Geoffrey E. Hintonnak ítelték oda a fizikai Nobel-díjat a gépi tanulás és mesterséges neurális hálózatok területén – közkeletű kifejezéssel: a mesterséges intelligenciában – elért elévülhetetlen érdemeiért. *Simon L. Péter* akkor megjelent cikke már nyújtott némi betekintést a neurális hálók alapjaiba. A mostani, *Maga Balázssal* közös írásukban már a neurális hálók játsszák a főszerepet.

Noha a neurális hálók tanításának mélyebb megértése hosszú és esetleg fáradtságos matematikai előkészületeket igényel, mindannyian szeretnénk legalább intuitív képet kapni arról, hogy nagyjából mi is történik egy neurális háló tanítása és működése során. A jelen cikk ezt a célt igyekszik megvalósítani.

Mi is egy neurális háló?

2025-ben már számtalan dologra használunk mesterséges intelligenciát (AI) alapuló eszközöket. Az AI képeket vagy egyéb, szenzorokkal érzékelhető jeleket, adatsorokat osztályoz – ezek bonyolult összehangolása révén például autót vezet –, emberi vagy programozási nyelvek között fordít, CT-felvételeken rákos elváltozásokat azonosít, vagy éppen sakkozik. A viszonylag frissen nagy népszerűséget kivívott alkalmazások szöveget, képet vagy akár zenét generálnak, ezek révén pedig a technikai dolgokkal kevésbé foglalkozó emberek számára is testközelbe kerülnek. Ezen eszközök mélyén neurális hálók találhatók, amelyek bizonyos szempontból igen egyszerű gépek: kapnak egy bemenetet, azzal valamit manipulálnak, majd legyártanak egy kimenetet. Azaz egy neurális háló valójában nem más, mint egy függvény, ráadásul sok szempontból egyszerűbb, mint amilyenekkel akár a középiskolai órákon találkozhatunk.

Persze ez a bemenet–kimenet pár olyasmi, amit egy számítógép kezel, így mindkettő számokból kell álljon. Nagyon sok típusú adat eleve olyan, hogy számokból áll, még ha ez nem is látszik róla közvetlenül. Példának okáért egy digitális képet eszközeink egy hatalmas számtömbként tárolnak:

egy RGB (piros-zöld-kék) színkódolású, 800×600 pixeles digitális kép valójában egy $800 \times 600 \times 3 = 1\,440\,000$ számból álló számtömb, amelynek minden egyes pixelét három darab, 0 és 255 közötti egész írja le, rendre megadva a vörös, a zöld és a kék szín intenzitását az adott képponton. Így az az ember számára (általában) nyilvánvaló példafeladat, ahol egy kutyát vagy egy macskát ábrázoló $W \times H$ méretű színes képről kell eldöntenünk, hogy azon kutya vagy macska szerepel, a neurális háló számára a következőképpen fordítható le: kedves neurális háló, a bemeneti $W \times H \times 3$ méretű számtömbre adj kimenetként 0-t, ha a képen kutya található, és 1-et, ha macska. Az alábbiakban ezt az iskolapéldát vesszük górcső alá, ezen keresztül mutatjuk be nagy vonalakban egy neurális háló működését.

Tanulni, tanulni, tanulni

Hogyan oldja meg ezt a feladatot a mesterséges neurális háló, ha sem kutyát, sem macskát nem látott még soha? Nagyon leegyszerűsített értelemben ugyanúgy, mint ahogy a kisgyermek idegrendszerének természetes neurális hálója: ha sokszor lát kutyát/macskát, és ezekre sokszor mondják rá neki, hogy kutya/macska, akkor egy idő után maga is meg tudja különböztetni a kutyaszerű és macskaszerű sajátosságokat. Egy kardinális különbség az, hogy míg a kisgyermeknek mindenféle más napi tevékenységei vannak, és temérdek egyéb dolgot lát (és tanul) a világról, addig az erre a feladatra létrehozott neurális hálót kizárólag ennek a feladatnak az elvégzésére tanítjuk roppant célirányosan. Újra meg újra, több milliószor feleltetjük, ahol egy felelés annyiból áll, hogy beadunk neki egy képet, választ várunk tőle, és visszajelzünk neki, hogy talált-e, vagy sem. Ezt nevezzük felügyelt tanulásnak (supervised learning).

Ez egy kisgyermeknél vélhetőleg hatásos, noha kifogásolható eljárás lenne. Például, ha kétszer egymás után odaadjuk neki ugyanazt a képet, másodjára már jól fog válaszolni. De a neurális háló miért válaszolna másodjára jól? Ugyanarra a bemenetre ugyanazt a kimenetet várnánk egy géptől, bármilyen fejszóval is mondtuk neki, hogy elsőre nem talált. Kell valaminek történnie két felelés között, módosítani kell a függvényt! Ezt hogyan kivitelezzük? A neurális háló egy olyan függvény lesz, amelynek kimenete számos, akár sok millió paramétertől függ, ezt a függést a neurális háló általunk megadott szerkezete, architektúrája írja le. Viszont a paraméterek finomhangolását, bizonyos előzetesen rögzített szabályok szerint, bármely két felelés között a

háló már automatikusan végzi el az előző felelésen elért eredménye alapján. Emiatt beszélünk gépi tanulásról (machine learning).

Például egy nagyon buta függvény lehetne az, hogy adjunk össze minden pixelintenzitást valamekkora súllyal, és ha ez kisebb, mint 0, akkor legyen 0 a kimenet, egyébként pedig 1. A formulák kedvelőinek, ha a képet a $W \times H \times 3$ méretű I tömbben tároljuk, akkor például az $I_{3,8,2}$ szám (értéke 0 és 255 közötti) azt adja meg, hogy a kép 3. sorának 8. oszlopában lévő pixelben a zöld szín intenzitása mekkora (a harmadik, színcsatornát kódoló koordinátában a $c = 1$ a piros, $c = 2$ a zöld és $c = 3$ a kék színhez tartozik). Az ebből alkotott neurális háló egy f függvény, amely így írható le:

$$f(I) = \sum_{x=1}^W \sum_{y=1}^H \sum_{c=1}^3 w_{x,y,c} I_{x,y,c} \geq 0.$$

Ezzel tehát a függvény szerkezetét meghatároztuk, a $w_{x,y,c}$ súlyok pedig azok a paraméterek, amelyeket felelések között módosít a háló. Ezeket valamilyen módszerrel addig változtatja, amíg a felelések során egyre gyakrabban, vagy egyre nagyobb valószínűséggel jó választ ad. Valójában ez persze önmagában egy rémes szerkezet a fenti célra, amivel a képnek semmilyen jellegzetessége nem ragadható meg jól, de a későbbiekben még vissza fogunk térni rá.

Hogyan módosítsunk?

Még ha a szerkezet stimmel is, nehéz persze úgy módosítani a milliányi paraméter által leírt bonyolult függvényt, hogy az imént még rossznak ítélt 0 helyett 1-et adjon vissza kimenetként a háló. Ráadásul itt megbújik egy finomság, amire elsőre talán nem gondolnánk, mert olyan példafeladatot választottunk, amiben könnyen ítélnék magabiztosan. De ha mondjuk Ausztriában és Magyarországon készített fényképekről kellene megmondanunk, hogy melyik országban készültek, valószínűleg sokkal többször lennénk bizonytalanok. Hogy járnánk el ekkor egy felelési szituációban? Természetesen tippelnénk a legjobb tudásunk szerint. Bár bizonyára nem nagyon precízen, de mindkét kimenetelnek adnánk valamilyen valószínűséget, és aztán arra tippelnénk, amit valószínűbbnek tartunk. Valójában a neurális háló is a számításai végén egy ilyen valószínűségi kimenetre jut: 64,7%, hogy macska van a képen, 35,3%, hogy kutya.



Az egyik legkiemelkedőbb objektumdetekcióra és -klasszifikációra szolgáló háló, a Mask R-CNN kimenete a bemeneti képre illesztve. A tárgyalt példánál egy komplexebb feladattal megbirkózva a háló megkeresi és beazonosítja a „céltárgyakat”, az adott képen az embereket és a repülőket. Az egyes találatok sarkában lévő számok a tippelt kategóriákhoz tartozó valószínűségek 1-re normálva. Ezek csaknem elérik az 1-et, ami arról árulkodik, hogy ezekben az esetekben a háló magabiztos. (Forrás: https://github.com/matterport/Mask_RCNN.)

Ebben az a jó az előbbi, kategorikus kimenettel szemben, hogy folytonos, bármilyen 0 és 1 (vagy százalékban kifejezve: 0 és 100) közötti értéket felvehet. Így van értelme arról beszélni, hogy egy-egy paraméter apró módosítása

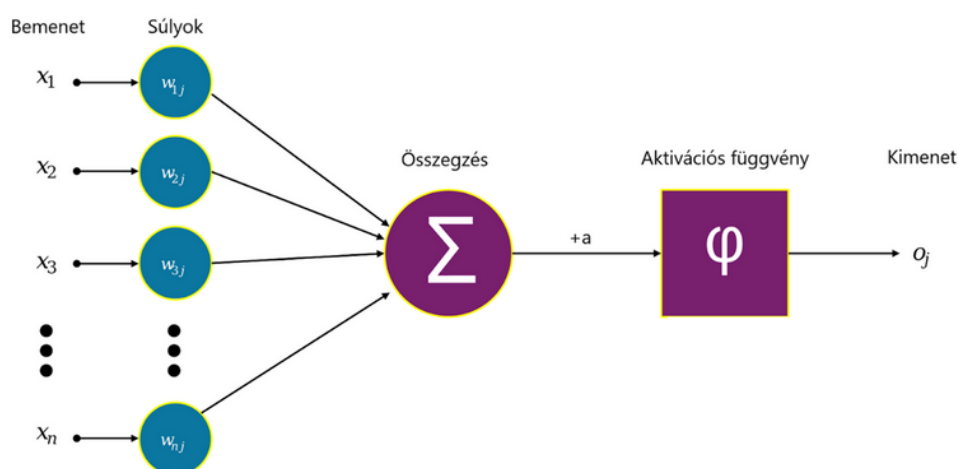
mennyiben javítaná vagy rontaná a feleletet, és alkalmas differenciálszámításokat elvégezve – analógiaként gondoljunk a szélsőérték-keresési feladatokra – a háló meg tudja találni azt az optimális módosításhalmazt, ami az adott feleletre a legjobb hatással bír, azt a legközelebb viszi az ideálisan elvárt 0%, 100% (vagy 100%, 0%) kimenethez. Persze mindig csak apró lépéseket téve módosíthatunk, különben elfajuló esetben az új paraméterek teljesen a legfrissebb felelet hatása alá kerülnének, és az azelőtti tapasztalok jelentősége elveszne. Ez az óvatosság például azt is eredményezi, hogy a kisgyermekkel ellentétben, ha egy neurális hálónak ugyanazt a képet kétszer egymásután odaadjuk, könnyen lehet, hogy másodjára is tévedni fog. Ez egyáltalán nem meglepő, ha figyelembe vesszük, hogy nincs is benne olyan alkatrész, ami alapján észrevenné, hogy ugyanazt a képet kapta meg még egyszer! Memóriával csak valamilyen közvetett értelemben rendelkezik, annyira, hogy paramétereinek jelenlegi értékét befolyásolják a korábbi hibái.

Elég ez? Igen, a tapasztalat azt mutatja, hogy ezzel a megközelítéssel lehetséges olyan függvény létrehozása, amely emberi pontossággal oldja meg a feladatot. A betanított neurális háló beépíthető például egy telefonos alkalmazásba, ahol már nem tanul, csak felel, méghozzá kitűnő eredménnyel. Ehhez természetesen kellően reprezentatív tanítóadatra van szükség: ha a tanítás során csak egy-egy kutyás és macskás képből feleltetnénk újra meg újra a neurális hálót, azokat ugyan kiválóan megtanulná, de vélhetőleg csúfosan elbukna egyéb képeken. Ekkor valószínűleg az történne, hogy valójában nem is a képen látható állat alapján osztályozná a képeket, hanem valami egyéb, egyszerűbb jellegzetesség alapján. Ha a kutya a gondozott zöld pázsiton ül, a macska meg egy piros takarón fekszik, a neurális hálóban bizonyára az a sokkal könnyebben tanulható, de sajnos hibás meggyőződés alakulna ki, hogy a „kutyakép” az, amin sok a zöld, a „macskakép” pedig az, amin sok a piros. Ennek megelőzése érdekében a tanítóadatnak a szó szoros és átvitt értelmében is sokszínűnek kell lennie.

A függvény szerkezetének megválasztása: az architektúra

Nehéz és nagyon problémáspecifikus kérdés az, hogy adott feladatot milyen szerkezetű paraméteres függvény – vagy szaknyelven fogalmazva: milyen architektúrájú neurális háló – oldhatja meg a leghatékonyabban. Noha az intuíció szerepe fontos a főbb építőelemek meghatározásában, ezt a kérdést tipikusan nem elmélyült gondolkodás, hanem kitartó kísérletezés alapján tudjuk megválaszolni.

Fentebb leírtunk egy nagyon butának nevezett függvényt. Ez a bemeneti pixelintenzitásokra alkalmazott egy lineáris függvényt, majd ezt összehasonlította a 0 küszöbértékkel. A tanulható paraméterek a lineáris függvény együtthatói voltak. Egyelőre feledkezzünk meg a küszöbről, ez csak a kategóriák véglegesítésére szolgált, és tekintsük csak a lineáris függvényt. Erre úgy gondolunk, mint egyetlen neuronra, ami a bemeneti számok egy lineáris kombinációjának egy eltoltját adja vissza. Képlettel egy $\mathbf{x}$ bemeneti vektorhoz (amelynek a dimenzióját most tetszőlegesnek tekintjük, a képfeldolgozás példájában ez $3 \times n \times m$ volt, ahol n és m azt jelenti, hogy a képen hány sorban és oszlopban voltak a pixelek, azaz akár százezres nagyságrendű is lehet a koordináták száma a vektorban) a $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + a$ számot rendeli hozzá, ahol a $\mathbf{w}$ ugyanolyan hosszú vektor, mint $\mathbf{x}$, a szorzás skalárszorzatot jelent (azaz összeszorozzuk a megfelelő koordinátákat, majd ezeket a számokat összeadjuk), a pedig egy szám. Az alábbi ábrán egy ilyen neuron sematikus rajza látható.



Egy mesterséges neuron struktúrája (Forrás: Wikipédia)

Egy neurális háló temérdek ilyen neuronból áll, amelyek rétegekbe tömörülnek. Az első, bemeneti réteg neuronjainak az eredeti bemeneti kép pixelintenzitásai jelentik a bemenetet, ezekből számol ki mindegyikük egy saját kimenetet. Ha a fenti $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + a$ számokat kiszámoljuk a rétegben lévő összes neuronra és ezeket egy vektorba rendezzük mint koordinátákat, akkor az első réteg kimenete $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$ alakban írható, ahol $\mathbf{A}$ egy mátrix (sorai az egyes neuronok $\mathbf{w}$ vektorai), $\mathbf{b}$ pedig egy vektor, koordinátái az egyes neuronokhoz

tartozó a számok. Ezek a kimeneti értékek szolgálnak bemenet gyanánt a második réteg neuronjainak, és így tovább, egészen az utolsó, kimeneti rétegig, amely a neurális háló egészének kimenetét adja vissza. A köztes rétegek az úgynevezett rejtett rétegek. Egy csúcskategóriás képfelismerő háló több száz ilyen réteget is tartalmaz, rajtuk összesen százmilliós nagyságrendű hangolható paraméterrel. A rétegek nagy számából ered a divatos mélytanulás – deep learning kifejezés. Egy ilyen típusú neurális hálót, amiben nincsenek visszacsatolások, azaz minden neuron csak egyszer végez számítást egy bemenet feldolgozása során, előrecsatoltnak (feed-forward) nevezzük.

Fentebb nem voltunk precízek. Hiszen lineáris függvények kompozíciója is lineáris, mi értelme van akár csak két egymást követő neuronnak, nemhogy több száz rétegnyinek... Ahhoz, hogy valami nemtriviális kisüljön ebből a felépítésből, minden neuron mögé be van építve egy úgynevezett aktivációs függvény, ami nemlineáris. Méghozzá gyakran szemtelenül egyszerűen nem az: az egyik legnépszerűbb aktivációs függvény az úgynevezett *ReLU* (rectified linear unit) függvény, amely a következő képlettel írható le:

$$ReLU(x) = \max(0, x).$$

Azaz a neuron kiszámítja a bemeneteinek általa használt lineáris függvényét, és ha az eredmény pozitív, akkor ebben a formában tovább is adja, ha pedig nem, akkor 0-t ad tovább. Képlettel felírva, egy x bemeneti vektorhoz egy neuronréteg által adott kimenet $ReLU(A \cdot x + b)$. Ez már kinyitja a világot: az univerzális approximáció tétele szerint tetszőleges függvény közelíthető neurális hálókkal, amelyben *ReLU* aktivációval ellátott neuronok rétegei követik egymást. E tétel természetesen elsősorban matematikai érdekesség, semmint praktikus áttörés, de nagyon jól érzékelteti, hogy egészen kevés nemlinearitás mennyire meg tud bolygatni egy egyszerű rendszert. A *ReLU* gyakorlati jelentőségét ugyanakkor az adja, hogy praktikus problémákban is rendkívül hatékonyak bizonyul. Analógiaként érdemes megemlíteni az egyetemi tanulmányokból a Taylor-polinomot, ami szintén képes bonyolult függvényeket, például exponenciális vagy trigonometrikus függvényeket, közelíteni annak ellenére, hogy ő maga „csak” polinom, azaz mindössze szorzásokat és összeadásokat tartalmaz. Az analógia a neurális háló újszerűségére is segít rávilágítani. Míg a Taylor-polinom esetében egy ismert képletű függvényt, például $\sin(2x - 1)$ szeretnénk polinommal közelíteni – akár csak azért, hogy az értékét egy adott x -re (legalább közelítőleg) kiszámítsuk –, addig a neurális háló egy olyan függvényt közelít, aminek a

képletét nem ismerjük. A kutya/macska megkülönböztetés esetében x egy képet reprezentál, ami egy akár százezer koordinátából álló vektor, a kimenet pedig 0 vagy 1 aszerint, hogy kutya vagy macska van a képen. Természetesen ezt a függvényt senki nem ismeri, mindössze annyit tudunk, hogy képek százaira vagy ezreire ismerjük, hogy 0 vagy 1 kimenet tartozik-e hozzájuk. Ezeket a képeket beadhatjuk bemenetként egy neurális hálónak, amely $ReLU(A \cdot x + b)$ alakú függvények egymás utáni alkalmazását jelenti, és megfelelő algoritmussal rábírnak arra, hogy az A mátrixban és a b vektorban szereplő számokat úgy állítsa be, hogy az általunk kívánt kimenetet adja.

Még egy fontos és egyszerű architektúrális megjegyzést szeretnénk tenni. A fentiek alapján minden neuron az előző réteg összes neuronjával össze van kötve, illetve a bemeneti réteg neuronjai az összes bemeneti pixelből számolják ki a maguk kimenetét, azaz az A mátrix lényegében minden eleme nem 0. A példafeladatunkban nagyon rossz kezdés, ha így esünk neki a bemeneti képnek; a neuronok nem is vesznek tudomást a kép egyes pixeleinek geometriai viszonyáról. Olyan, mintha kezdés előtt minden képen összekevernénk az összes pixelt egy előre adott módon, és a hálót így próbálnánk tanítani. Az elvi lehetőség persze így is megvan arra, hogy a háló idővel rátalál a megfelelő súlyokra, de ez ebben a formában gyakorlatilag kivitelezhetetlen. A tanítás működőképességének egyik kulcsa annak észrevétele, hogy a geometriai viszonyrendszert érdemes a háló rétegeiben is megőrizni: például az első réteg neuronjai rendre feleljenek a bemeneti kép pixeleinek, és egy-egy neuron csak a nagyon szűk, mondjuk 3×3 -as környezetében lévő pixelek intenzitását vegye be bemenetként, azaz az A mátrix speciális szerkezetű, rengeteg eleme 0. Ez a gondolat vezet el minket a képfeldolgozás területét 2010 körül forradalmasító konvolúciós neurális hálókhoz. Vegyük azt is észre, hogy a kapcsolatok megnyírbálásával a paraméterek száma is drasztikusan csökken, a fenti példában az első rétegbeli neuronjaink által hordozott lineáris függvényeket 800×600 helyett 3×3 súly megadásával specifikálhatjuk.

Képosztályzás mesterfokon

A fent megoldott feladat banálisnak és mondvacsínáltnak is tűnhet, és talán az sem nyűgöz le minket túlzottan, hogy a gép emberi pontosságot ér el rajta. A fenti módszerek segítségével azonban olyan képosztályzási feladatokra is taníthatók hatékony konvolúciós neurális hálók, amelyek nagyon is húsbavágók, és egy átlagember teljesen eszköztelen velük szemben. Ta-

lán a legpompásabb példa az orvosi képek (röntgenfelvétel, CT, MR) osztályozása aszerint, hogy a képen látható szerven milyen betegségek figyelhetők meg (például az adott mellkasi CT-n látható-e rákos elváltozás). Ez egy olyan kérdés, amelynek megválaszolására csak speciálisan képzett szakemberek, radiológusok alkalmasak, méghozzá meglehetősen sok munka árán. Egy CT-felvétel például egy háromdimenziós kép, amelyre legegyszerűbb úgy gondolni, mint többszáz egymásra pakolt röntgenfelvételre. Egy ilyen képen korai stádiumú, csak kevés voxelt (a pixel háromdimenziós megfelelője) érintő rákos elváltozások megkeresése igen fáradságos feladat. Ebből könnyen belátható, hogy a széleskörű szűrések elvégzésében a képzett szakemberek munkaórái is szűk keresztmetszetnek bizonyulhatnak. Éppen ezért elvitathatatlan jelentőséggel bír, hogy gépi tanulás révén olyan automatizált eszközöket tudunk létrehozni, amelyek a képek hadának minél gyorsabb áttekintésében segítik őket.

Zárókép

A fentiekben – bár nem bocsátkoztunk mélyebb részletekbe – bemutattuk, hogyan működik egy képeket osztályozó mély neurális háló, mit értünk ennek felügyelt tanítása alatt, és milyen elemekből épül fel egy előrecsatolt neurális háló. A felhasznált példafeladatra ezek a bevett megközelítések. Ugyanakkor vannak olyan problémák, amelyek gyökeresen eltérő módszertant igényelnek. Például a Google Deepmind által 2017-ben fejlesztett, mesterséges intelligencia alapú AlphaZero rendkívül egyoldalú mérkőziesen győzte le az akkor legerősebb klasszikus sakkprogramot, a Stockfisht. Noha az összecsapás technikai feltételeit érték kritikák, az AlphaZero forráskódja alapján készült Leela Chess Zero a sakkprogramok 2019-es bajnokságának döntőjében egyenlőnek elismert feltételek mellett is felülmúlta a Stockfisht egy kiélezett összecsapáson. Ebből már magunk is sejthetjük, hogy az AlphaZero nem felügyelt tanulásban részesült, nem az történt, hogy kapott temérdek állást, amire meg kellett mondania a „legjobb ismert” lépést, hiszen akkor nemigen kerekedhetett volna felül a legjobb ismert lépéseket szolgáltató korábbi megközelítéseken. Ehelyett megerősítéses tanulással (reinforcement learning) lett betanítva, ami egy rendkívül érdekes, de a terjedelmi kereteinken túlmutató gépi tanulási paradigma. Ennek keretében a gép önmagával játszik elképesztő mennyiségű sakkpartit, és így a saját bőrén tapasztalja meg, hogy adott helyzetekben merre érdemes alakítania az állást, ha nyerni akar. Ezáltal az AlphaZero korábbi emberi játszmákra nem jellemző straté-

Maga Balázs, Simon L. Péter: Hogyan tanul a neurális háló?

61

giai motívumokat is felfedezett, amelyekből bizonyos elemeket a sakknagy-mesterek is átvettek. Ennek szépségét nem lehet eltúlozni: olyan jól tanítottuk a neurális hálót, hogy már mi tanulunk tőle. Lehet-e ennél nagyobb öröme a mesternek?

Maga Balázs

HUN REN Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Simon L. Péter

ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

A fenti cikket az Érintő 2025. márciusi számából vettük át.

Prima Primiissima 2024 – Lajos Józsefné

A december 6-i díjátadó ünnepségen átadták a 2024-es Prima Primiissima díjakat. „A díj életre hívóinak, mai gondozóinak és támogatóinak célja, hogy az értékek elismerésével értéket teremtsen, s a példaképek kiemelésével példát nyújtson.” A díjazottak egyike Lajos Józsefné, aki sokak példaképe lehet.

A <https://www.primaprimiissima.hu/primaprimiissima-dij/> oldalon olvasható az elismerés indoklása. Mindenképpen ide kívánczik egy „matematikai” lista néhány korábbi díjazottjával:

Magyar tudomány kategória matematikus Prima díjazottjai:

2012 Szemerédi Endre

2017 Pintz János

2019 Szász Domokos

2022 Lovász László (Prima primiissima)

2023 Prószéky Gábor

Magyar oktatás és köznevelés kategória Prima díjazottjai:

2014 Pósa Lajos

2017 Hámori Veronika (Prima primiissima)

2021 Bolyai János Matematikai Társulat (Prima primiissima)

2023 Katz Sándor (Prima primiissima)

Ebbe a nevezetes sorba lépett be a szakma újabb kiváló képviselője.



Lajos Erzsit rengetegen ismerik az országban, sőt a határon túl is, akik azért szavaztak rá, mert úgy érzik, hogy a lehető legjobb helyre került a díj: Erzsit aktív és nyugdíjas éveit is a matematikatanítás jobbítására áldozta. Ezt az új tantervek kifejlesztésétől a módszertani kultúra emelésén át az egyes gyerekek vagy tanítók-tanárok, szülők – vagyis az iskolai élet minden résztvevőjének – konkrét segítségig terjedő munkát nagy energiával, hatalmas elszántsággal, kitartással végzi. Empátiája szakmai, magánéleti, szociális érzékenységgel és humorral társulva, példát mutat pályatársainak. Minden feladatában a maximalizmus jellemzi tevékenységét, ami biztos alapokon álló tudással, nagy műveltséggel, innovatív szemlélettel párosul.

1968-ban szerzett középiskolai tanári diplomát az ELTE TTK matematika-fizika szakán, majd hat évig programozóként dolgozott a Kohó- és Gépipari Minisztérium informatikai és számítástechnikai háttérintézményében. 1974 és 1986 között Szigetszentmiklóson a József Attila, majd a 3. számú Általános Iskolában matematika, orosz, magyar nyelv és irodalom tárgyakat is tanított.

Itt kapcsolódott be a Varga Tamás-féle matematikatanítási kísérletbe, és ettől kezdve kiemelkedően sokat tett Varga Tamás szellemi örökségének elterjesztéséért, megőrzéséért.

Előadásokat, bemutató órákat tartott, továbbképzéseket szervezett, és részt vett tantervi és tankönyvi munkálatokban. Tanítványai közül voltak, akik országos versenyek döntőibe jutottak.

Pest megyei szakfelügyelője felismerve képességeit, gondolkodását, szemléletét, az Országos Pedagógiai Intézet munkatársának ajánlotta be. Az OPI-ban, illetve az intézmény utódaiban (Országos Köznevelési Intézet, Országos Köznevelési Szolgáltató Iroda, majd Kiss Árpád Országos Köznevelési Szolgáltató Iroda) dolgozott 1986-tól 2003-ig mint főmunkatárs, matematika tantárgyi szakértő, és 2002-től megbízott igazgató. Emellett óraadóként tanított Szigetszentmiklóson, továbbá a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumban, majd a Móróc Zsigmond Gimnáziumban.

Feladatai közé tartoztak a tantervi, tankönyvi véleményezések a köznevelés minden szintjén, sőt a felnőttoktatás matematika kerettantervének elkészítése is. Ő volt a felelős az országos matematikaversenyekért (Varga Tamás Verseny, Arany Dániel Verseny, OKTV I.-II.-III. kategória), matematika módszertani folyóiratot indított, előadásokat, továbbképzéseket tartott. Regionális mérések feladatlapjainak kidolgozásában, értékelésében, a NAT (1995, 2003, 2007) matematikai bizottságaiban, illetve a kerettantervi munkákban, és az ezektől eltérő programok bírálatában vett részt. Több éven át

ő készítette a matematika érettségi írásbeli tételeit, és érettségi elnök is volt több iskolában.

Mindeközben országos rálátása és hatalmas tapasztalata lett az iskola valamennyi szereplőjének helyzetéről, problémáiról, munkáiban minden erejével ezek megoldására törekedett.

Az Országos Értékelési és Vizsgaközpont (OKÉV) Érettségi- és Versenyszervezési Osztályának, majd az Oktatási Hivatal Közoktatás-értékelési Programok Központja Érettségi és Versenyszervezési Osztályának vezetőjeként feladata volt a kétszintű érettségi tartalmi munkálatainak kidolgozása, az érettségi tantárgyi bizottságok kialakítása, a feladatlapok, szóbeli tételek megjelenítési formájának tervezése, kialakítása beosztottjaival, lektoráltatás, a működtetési algoritmus kidolgozása, az országos versenyek (OKTV, egyéb támogatott művészeti versenyek) koordinálása (országos lefedettségű bizottságok kialakítása), a munkafolyamatok algoritmusának létrehozása, 2006-tól a középiskolai felvételi vizsga szakanyagának előállíttatása és lektorálása.

2004 és 2008 között a Sulinova, majd az Educatio Programfejlesztési Központ Kompetencia alapú matematika programcsomag koncepciójának kidolgozásában vett részt, és a fejlesztést a Matematika Szakmai Bizottság tagjaként kísérte végig. A Szegedi Tudományegyetem Tudásszintmérés és -értékelés tesztjeinek kidolgozásában tanácsadóként, majd 2010-től 2017-ig Oktatásméleti Kutatócsoportjának kutatási-fejlesztési projektjében az eDia és eLea feladatbank fejlesztésében és kipróbálásában koordinátorként tevékenykedett.

Szakmai életének egyik legfontosabb eleme a matematikai tehetséggondozás és ismeretterjesztés. Az MTV „Aki mer, az nyer!” c. matematikai vetélkedő zsűritagja, a Magyar Rádió „Törd a fejed!” c. műsorának rovatvezetője volt. A TIT a '60-as években indította el a Kis Matematikusok Baráti Körét (KMBK), országos szintű szakköröket a matematikából tehetséges általános iskolásoknak. A KMBK vezetői részére a Varga Tamás-féle új matematika módszereinek megismertetése érdekében Erzsébet is bekapcsolódott a tanári konferenciákba, többnapos tanfolyamokat szervezett Budapesten és a vidéki városokban, lektorálta az új munkafüzeteket és tanári anyagokat. Az Országos Feladatmegoldó Verseny (amiben több mint 20 000 magyarországi és határon túli tanuló vett részt) legjobb versenyzőinek egyhetes táborozásának programjához gondolkodtató, érdekes feladatsorokat állított össze. A KMBK Országos Feladatmegoldó Verseny utódként létrejövő Kalmár László Matematikaverseny döntőinek évtizedek óta ő az egyik irányítója, a döntős dolgozatok egyik évfolyamának vezető javítója.

Ez adta az ötletet a Matematika Tanárok Nyári Egyeteme Akadémiája nevet viselő táborhoz, amelyhez Erzsi maga keresett szponzorokat, kiemelkedő képességű vezetőtanárokat, és szervezte a kulturális programokat is. Az első helyszín Zamárdiban volt. A későbbiekben Vácra, Szegedre, Kőszegre majd ismét Vácra költözött, de 1992 és 2004 között minden évben megrendezésre került „Lajos Erzsi tábora” a matematika versenyek 4–8. évfolyamos győzteseit jutalmazta, ami a tanár kollégák számára továbbképzés, gyümölcsöző szakmai fórum lett.

1998-ban alapította meg Bojár Gábor a Graphisoft-díjat, ennek kuratóriumi titkára, a díjkiosztó szervezője két évtizeden át Lajos Józsefné. Szintén az alapítástól tagja a Rátz Tanár Úr Életműdíj bizottságnak (a kuratórium elnöke, Dr. Kroó Norbert professzor, akadémikus, valamint Dr. Falus András professzor emeritus, akadémikus, és Dr. Ifj. Szántay Csaba professzor, az MTA doktora mellett), s e munkáját a mai napig végzi.

Erzsi 1968 óta tagja a Bolyai János Matematikai Társulatnak, 1997 óta az Oktatási Bizottságban az éves Rátz László Vándorgyűlések egyik szakmai programfelelőse.

2000-től folyamatosan bevásztják a BJMT vezetésébe, a Választmányba. Azóta aktív résztvevője mind az Ericsson-díjakat, mind a Rátz Tanár Úr Életműdíjakat elbíráló társulati matematika bizottság üléseinek. A BJMT Beke Manó- emlékdíját odaítélő bizottságban 2013-tól dolgozik, 2023-tól elnökként vezeti.

Arról, hogy milyen személyiség, engedje meg az Olvasó, hogy két kollégám sorait idézzem:

„Lajos Erzsi tehetséggondozó táborába hét diákkal Pósa Lajos meghívására jutottam el először 1995-ben Vácra. Az itt megismert anyaországbeli és határon túli kollégák munkáját látva ösztönzést kaptam az effajta tehetséggondozó matematikaoktatáshoz. Diákjaimmal elkezdődött a szakköri munka, és 1996-tól bekapcsolódhattak a színvonalas magyarországi matematikaversenyekbe is (Kenguru Nemzetközi Matematikaverseny, Zrínyi Ilona Matematikaverseny, Bátaszéki Matematikaverseny), amelyeknek a szervezőit Lajos Erzsi táborában ismertem meg. Ezek a versenyek később évről évre nagyobb teret nyertek a Felvidéken is.

Diákjaink sikerein felbuzdulva László Béla és Horváth Géza kezdeményezésére 1995-ben elindult Felvidéken a levelező Katedra Matematikaverseny. A mai napig életben tartott versenybe felvidéki diákok százai, de anyaországbeli diákok is bekapcsolódtak. Lajos Erzsi határokon is átnyúló munkásságával hozzájárult a magyar anyanyelvű diákok matematikai tehetség-

gondozásának magasabb szintre emeléséhez. Empátiájával, segítőkészségével, céltudatosságával mindig minőségi munkára ösztönözte a kollégáit. A táborokban megismert kollégákkal életre szóló szakmai kapcsolataim, barátságaim születtek. Köszönet érte.”

(Paed Dr. Könözi Éva, Szlovákia, Párkány)

„Lajos Erzsi bennem úgy él, mint olyan vezető, aki előtt nem volt megoldhatatlan probléma, akinek az ajtaja előtt mindig várt valaki, hogy a kérdésével, kérésével megkeresse, és Erzsi könnyedén váltott át az egyik témából a másikba és harmadikba, és mindegyikre volt előbb vagy utóbb gondolata, megoldása, fáradhatatlanul. És ha kellett, tudta mozgósítani a kollégákat, a plusz munkákat pedig nem felejtette el, mindig nagylelkűen kompenzálta, ha tőle kértek segítséget, támogatást. A százszor átgondolt és ellenőrzött produktumhoz is hozzá tudott tenni új elemet, vagy észrevette a mégis benne maradt hibát. A mindennapokat is színesítette a humora, egyedi véleménye, spontán reakciói, és ha lazítani gyűltünk össze, ugyanolyan lelkesedéssel adta át magát az örömnak, ahogyan dolgozott, és a csapat és a közös sikerek feletti elégedettségének is hangot tudott adni. Sosem hittem el, hogy valaha a nyomába léphetek, de hogy ez megtörtént, neki is nagyban köszönhető. A mai napig vezeti az eszemet és szívemet mindaz, amit tőle beosztottként kaptam szakmailag és emberileg.”

(Sümei Laura, Oktatási Hivatal KPF Érettségi és Verseny Osztály)

Gratulálunk Erzsinek, és köszönjük!

Lajos Józsefné Balázs Erzsébet méltatását készítette: Ács Katalin

A fenti cikket az Érintő 2025. márciusi számából vettük át.

Hujter Mihály: Martin Gardner legkedvesebb fejtörői (Könyvespolc – ajánló)

Martin Gardner: *Legkedvesebb matematikai és logikai fejtörőim*, Typotex, Budapest, 2024. Fordította: Kepes János, lektorálta: Fried Katalin. Eredeti kiadás, amelyből a fordítás készült: *My Best Mathematical and Logical Puzzles*, Dover, New York, 1994.

Két éve jelent meg a szerző egy korábbi kötetének magyar fordítása *Szórakoztató matematikai fejtörők* címmel. Ezt folytatja a most ismertetendő könyv. A múltkori kötet eredeti amerikai illusztrátorát egy másikra cserélték. A jelen kötet esetében nincs feltüntetve, ki az illusztrátor. A kiadó mentségére szolgál, hogy az amerikai könyv sem közli, hogy ki ő, és a magyar kiadás ugyanazokat az ábrákat használja, mint az eredeti amerikai kiadás. Sőt, a *Pi-rulásnyi idő* rejtvényénél egy fényképet is közöl a magyar változat, ami nem szerepel az eredeti könyvben.

Szándékosan nem közöljük, kit vagy mit ábrázol ez a fénykép. Hadd rágja a kíváncsiság a nyájas olvasót, főleg akkor, ha az angol nyelvű változat már megvan neki a könyvespolcán (vagy a merevlemezén)! Vegye meg a magyar fordítást, és elégítse ki a kíváncsiságát! Az illusztrációkra tekintve még egy dolgot szóvá kell tennünk: Az *Egy váltós feladat* ábrája meglehetősen csúnya. Ez nem a magyar fordítás hibája, mert az amerikai kiadásban is ugyanolyan elmosódott a rajz. Elméletileg kellene látnunk egy keskeny mozdonyt és két különböző, széles vasúti kocsit. Gyakorlatilag látunk három egyforma, téglalap alakú fekete pacnit. Pedig eléggé egyszerű lett volna egy rendesebb vasúti szerelvényt megalkotni.

A szerzővel folytatjuk: Martin Gardner (1916–2010) talán a legismertebb rejtvényyszerkesztő a világban az utolsó 100 évből. Szándékosan írtam azt, hogy *rejtvényyszerkesztő*, és nem azt, hogy *matematikus*. Bár a magyar nyelvű Wikipédia matematikusnak mondja, de ez téves adat. Akinek nincs orvosi diplomája, azt nem nevezhetjük orvosnak, esetleg csak természetgyógyásznak. Martin Gardner nem volt tanult tudós; csak BSc szintű diplomát szerzett, de azt sem matematikából, hanem filozófiából, 24 évesen. Az angol nyelvű Wikipédia alapján azt mondhatjuk, hogy Gardner egyik foglalkozása: *matematikai író*. Ebbe beleértjük azt is, hogy *rejtvényyszerkesztő újságíró*. A másik foglalkozása: *matekbűvész*. Az angol nyelvű Wikipédia jelenleg tucatnyi személyt sorol fel a *mathemagician* foglalkozásnál, és ezek egyike éppen

68 Hujter Mihály: Martin Gardner legkedvesebb fejtörői. Könyvespolc – ajánló

Martin Gardner. Híres idézet Gardnertől: „Mathemagical mathematics combines the beauty of mathematical structure with the entertainment value of a trick.” (Azon keveseknek, akik nem olvasnak angolul, megadjuk a magyar fordítást: „A matekbűvészkedés egyesíti a matematikai struktúrák szépségét és a bűvésztükkök lenyűgöző hatását.”)

Donald Ervin Knuth, a világhírű matematikus és számítógéptudós így vélekedik Gardnerről: „More people have probably learned more good mathematical ideas from Gardner than from any other person in the history of the world.” (Magyarul: „Valószínűleg több ember tanult jobb matematikai alapokat Gardnertől, mint bárki mástól a világtörténelemben.”) Sokra tartjuk Knuth véleményét, de azért kiigazítjuk: Eukleidész után valószínűleg Gardner a legjobb ezen a téren. Azonban Eukleidész 22 évszázados előnnyel indult, miközben a jelen könyvismertető tárgya is Gardner malmára hajtja a vizet.

Gardner sikerének egyik titka, hogy egyfajta rafinált naivitással, huncut humorral fordult a nehéz matematikai és feladvány-logikai témák felé, és ezt a gondolkodásmódot olvasóinak tömege szerette meg, hiszen a nagyképű tudós kinyilatkozásoktól senkinek sem az agya bizsereg kellemesen, hanem csak a bőre viszket idegesítően. A rejtélyek megfejtésében Gardner nem egy Sherlock Holmes, nem is egy Maigret felügyelő vagy Poirot magándetektív, vagy Marple vénkisasszony, hanem egy Columbo hadnagy. Annál is inkább nem Poirot, hanem Columbo, mert nem kristálytiszta logikával és csalhatatlan megérzéssel jut végül sikerre, hanem sok-sok próbálkozással és a dolgok lényegébe való vesződséges beletanulással.

Ugyanaz a személy magyarította ezt a kötetet is, mint az előzőt. A fordító – Kepes János – sem matematikus. Ennek meglett az előnye és a hátránya is. Ahogy Gardner is ritkán használt matematikai szakkifejezéseket, úgy a fordítónak sem azok jutottak elsőként az eszébe. Az eredeti szövegben sok a szójáték, és ezek a fordítónak feladták a leckét. Nem volt könnyű dolga, hiszen az ötvenes, hatvanas, hetvenes években használatos amerikai kifejezésformákat kellett átültetni a huszonegyedik század második negyedében használatos magyar nyelvre. Nézzünk egy példát: A 2. fejtörő címe: *Különleges póker*. Ugyanakkor a tartalomjegyzékben már *Ötlapos póker* szerepel. Az eredeti cím viszont ez: *Draw Poker*. A helyzet az, hogy a póker kártyajáték különböző változatai széles körben elterjedtek voltak az Egyesült Államokban a huszadik században. De ezek Magyarországon nem annyira közismertek már a huszonegyedik században. Amerikában pár évtizede még minden okos ember tudta, hogy a *Draw Poker* ötlapos, de véletlenül kivá-

Hujter Mihály: Martin Gardner legkedvesebb fejtörői. Könyvespolc – ajánló 69

lasztott 10 mai magyar matematikatanár közül vajon hányan tudnák ezt? De nem is kell tudniuk!

A kiadó és a fordító munkáját segítette a lektor: Fried Katalin. A jelen könyvismertető írója szerencsés helyzetben van, mert már öt évtizede személyesen ismeri őt. Igazi matematikus és vérbeli pedagógus. Értesüléseink szerint nagyon keményen harcolt a matematikai színvonal és a pedagógiai hatékonyság fenntartásáért. Az ő érdeme például a fent említett fénykép beillesztése is a *Pirulásnyi idő* feladatánál. Az egyik esetben Gardner eredeti bizonyítását egy könnyebben követhető változatra cseréltette le.

Itt az ideje, hogy rátérjünk a könyv tartalmára. A 66 témakörből most csak néhányat szemrevételezünk. Ha egy jó amerikai vagy angol krimi nézünk, már érdemes figyelniük a film legelején is, mert nem tudjuk, nem tűnik-e fel egy olyan arc, nem hangzik-e el egy olyan név, nem látszik-e egy olyan tárgy csak úgy mellékesen, háttérként, hangulati felvezetésként, aminek a bűnügy felderítésében majd lényeges szerepe lesz. Pedig lehet, hogy a bűntény majd csak később történik meg a filmben. A jelen könyvismertetés írója tudja ezt, és az ismertető könyvből már a legelső fejtörő esetében észrevesz egy bakit a magyar fordításban: „Egy utazó egy kilométert halad egyenesen dél felé, ott elfordul, és megtesz egy kilométert egyenesen kelet felé, majd ott ismét elfordul, és egy kilométert halad egyenesen észak felé. Visszaérkezik oda, ahonnan elindult.” Itt háromszor szerepel az *egyenesen* szó, de a középső szereplése súlyos matematikai hiba. Arról van szó, hogy az utazó három kilométeres sétája közben lő egy medvét, és ez a medve logikai szükségszerűségből csak jegesmedve lehet, hiszen az idézett feltételek csak a sarkvidéken teljesülhetnek. Ha az Északi-sarkról indulunk délre, aztán keletre fordulunk, és folyamatosan tartjuk a keleti irányt, akkor északra fordulva visszajutunk az Északi-sarkra.

Ha olvasónk már kezd ránk dühös lenni, miért nem bökjük már ki, hogy miben áll a matematikai hiba lényege, akkor már jó úton járunk, mert biztosan tovább fogja olvasni ezt a könyvismertetőt. Mivel a szerző tengerésztisztként – pontosabban fogalmazva: tiszthelyettes haditengerészként – védte a hazáját a második világháború idején, stílszerűnek látszik, ha a következő párbeszéddel fokozzuk a feszültséget:

– Teljes gőzzel előre! – kiáltotta a kapitány. – Lapátolni gyorsabban, fűtők!

– De már majdnem szétrobbanik a kazán! – kiált vissza a tizedes.

A robbanás elkerülése érdekében gyorsan közöljük, hogy a három *egyenesen* szó közül a középsőt ki kellett volna hagyni. Ugyanis az Északi-sarktól

70 Hujter Mihály: Martin Gardner legkedvesebb fejtörői. Könyvespolc – ajánló

egy kilométer távolságban folyamatosan keletre haladva nem lehet egyenesen menni. Aki ugyanis folyamatosan tartja a keleti irányt, az egy 2 kilométer átmérőjű körön egy 1 radián nagyságú körívet ír le a lépteivel. Tudjuk, hogy a Sarkvidéken az iránytű használhatatlan, tehát valamiféle dzsí-pí-esz-féleség (a csak az angol rövidítést ismerők kedvéért: GPS) is kell, hogy minden egyes lépés pontosan keletre történjen. (Természetesen Gardner feladatának kitűzésekor még nem volt dzsí-pi-esz; nem tudjuk, az utazó hogyan tartotta az irányt.) Aki viszont a keletre fordulás pillanatában nézi ki azt az egyenest, amerre tovább indul, akkor 1 kilométer egyenes vonalú megtétele után körülbelül 1414 méter távolságra kerül az Északi-sarktól. Újabb 1 kilométer megtétele után tehát nem érhetne vissza a kiindulási helyre. Akár találkozik jegesmedvével, akár nem, bármilyen irányba is indul.

Na jó, kihagyjuk a középső *egyenesen* szót, és megkérdezzük: Biztos, hogy csak az Északi-sark környéke jön szóba? Ez a könyv első fejtörője. Egészen jó fejtörő! A jelen sorok írójának hat évtizedes tapasztalata van a hasonló rejtvények megfejtésében, és még neki is majdnem egy egész percig kellett gondolkodnia, mire meglett a teljes megoldás. Megnyugtató, hogy a könyv hivatalos megfejtése is lényegében ugyanaz. Viszont szomorúságra ad okot, hogy Gardner *végtelenül sok* megoldást emleget. Ha hitelt adnánk neki, akkor azt is el kellene fogadnunk, hogy az utazónk végtelenül kicsi lépésekkel is toporoghat és közben végtelenül sebesen is foroghat, miközben állandóan keletre fordul. Ne rám haragudjon, nyájas olvasó, nem én találtam ki a *végtelenül sok* kifejezést! Annyi gyakorlati érzékem már van, hogy én ilyen butaságot nem mondanék! Főleg akkor nem, ha bárhol ólálkodhat egy hatalmas medve egy hóbucka mögött, amit még gyors forgolódás közben el is kellene találni!

De ne legyünk igazságtalanul kegyetlenek Gardnerrel szemben! Értsük úgy a *végtelenül sok* kifejezést, hogy megszámolni is nehéz az összes lehetőségeket, kivitelezni pedig még nehezebb. Sikerült a nyájas olvasót felmérgetenünk? Ez volt a célunk! Vegye meg a könyvet, és döntse el maga, hogy jól okoskodott-e Gardner, és hibázott-e a megoldás ismertetésében!

A második fejtörő a fent említett *Öt lapos póker*. Sajnos, nem érthető a kérdés! Én még elboldogulok valahogy, mert éltem pár évig Amerikában, tudom, hogy milyen lapok vannak az 52 lapos kártyacsomagban, pókerezésről is hallottam már, és kétszemélyes játékokról szóló PhD-értekezést is bíráltam pár éve. Az olvasó joggal várja, hogy tisztázzam a helyzetet. De semmi értelmét nem látom most az érthetetlen kérdés és a még érthetlenebb megoldás leírásának. Helyette inkább leírom a feladvány egy egyszerűsített változatát,

Hujter Mihály: Martin Gardner legkedvesebb fejtörői. Könyvespolc – ajánló 71

és aki nem boldogulna a megfejtéssel, annak leírom az egyik lehetséges megoldást is a sok közül. Így már akár a 7 éves unokámnak is lesz esélye, hogy élvezze a rejtvényt, és tanuljon a megoldásból.

Adott 40 darab kártyalap, rajtuk számok; 10 darabra pirossal, 10 darabra feketével, 10 darabra kékkel és 10 darabra zölddel írták fel a számokat 1-től 10-ig. A kártyákat mind számmal felfelé helyezték az asztalra. Két játékos felváltva vesz fel tetszőlegesen kiválasztva öt-öt lapot, majd ezt megismétlik, így összesen 10–10 lap lesz a kezükben. Ezután a játékosok a náluk lévő azonos színű számokat összeadják, de legfeljebb 5 darabot egy-egy színből. A nyolcféle összeg közül a legnagyobb nyer. Bizonyítandó, hogy az okosan játszó kezdő tud nyerni.

Egy jó kezdés például ez lesz: elsőre felvenni a négy 10-est és a kék 1-est. Ha a második játékos nem vesz fel első választásakor négy különböző színű kártyát, akkor a kezdő játékos el tudja érni a $10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 40$ összeget. Ezzel nyer, hiszen a 10-esek hiányában csak $9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35$ vagy kisebb lehet az összeg. Ha viszont a második játékos mind a négy színből vesz fel kártyát, legjobban teszi, ha a legnagyobb számokat veszi fel, azaz felveszi a négy darab 9-est és mondjuk a fekete 8-ast. Ekkor a kezdő játékos el tudja érni piros színből a $10 + 8 + 7 + 6 + 5 = 36$ összeget, a másik játékos pedig bármely színből legfeljebb a $9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35$ összeget.

Az a gond, hogy az ismertető könyvből a feladatoknak még csak a 3 százalékával foglalkoztunk. A többi rejtvény közül most kiválasztunk egyet, egy olyat, ami nehézség szempontjából közepesnek tekinthető. Legyen ez a szórakozott banki alkalmazottról szóló példa: Egy csekk beváltásakor a bankpénztáros tévedésből a dollárok helyett centeket, a centek helyett dollárokat adott ki. Mr. Brownnak, aki a bankból kijövet 5 centért vett egy újságot, éppen kétszer annyi pénze maradt, mint amennyiről a beváltott csekke eredetileg szólt. Mennyi volt az?

A feladatnak az a szépsége, hogy két ismeretlen van benne, de ezekre csak egyetlen egyenletet tudunk felírni. De a két ismeretlen szám mindegyike – abból, hogy a pénztáros egyáltalán felcserélhette azokat – az 1, 2, ..., 99 számok közül kerül ki. Az eredeti csekken legyen a dollárok száma x , a centeké pedig y . Az egyenletünk ez lehet: $2(100x + y) + 5 = 100y + x$. Átrendezve: $3x + 5 = 98(y - 2x)$. A bal oldal legalább 8 és legfeljebb 302, továbbá 3-mal osztva 2 maradékot ad. Mivel osztható 98-cal, ezért csak 98 lehet. Ebből $x = 31$ és $y = 63$. Büszkén jelenthetem, ez a megoldás rövidebb a könyvben közölt megoldások mindegyikénél.

72 Hujter Mihály: Martin Gardner legkedvesebb fejtörői. Könyvespolc – ajánló

Valamikor meg kell szakítanunk a könyvismertetést, de kijelenthetjük: a könyvben tárgyalt további 63 rejtvény ugyanolyan érdekes, mint ez a három, amit kiveséztünk. A nyájas olvasó vegye meg a könyvet, gondolkozzon a rejtvényeken! Ha kérdése van, forduljon hozzám bizalommal!

Hujter Mihály
kandidátus,
az MTA Tudomány- és Technikatörténeti Bizottság tagja

A fenti cikket az Érintő 2025. márciusi számából vettük át.

Páles Zsolt, Pálfy Péter Pál: Beszámoló a Big Five Centenáriuma rendezvényéről

A magyar matematika öt meghatározó, nemzetközi mércével mérve is jelentős alakja, Aczél János, Császár Ákos, Fuchs László, Gál (Gaál) István és Horváth János 1924-ben születtek. Tanáruk, a legendás Fejér Lipót már egyetemi tanulmányaik idején így nevezte őket: a „Big Five”.

Az alábbiakban először a Big Five tagjainak rövid életrajzát foglaljuk össze.

Aczél János Budapesten született 1924. december 26-án, és a kanadai Waterloo-ban hunyt el 2020. január 1-én. 1943–1947 között a Pázmány Péter Tudományegyetem matematika–fizika szakán tanult. Témavezetői Fejér Lipót és Riesz Frigyes voltak. 1945–1948 között az ELTE díjtalan gyakornoka, 1948–1950 között a Szegedi Tudományegyetem tanársegéde, 1950–1952 között a miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem docense volt. 1952–1959 között a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem tanszékvezető docense, majd 1959–1965 között tanszékvezető egyetemi tanára volt. Ezután Kanadába ment, ahol a Waterloo Egyetem matematikaprofesszora, 1969-től pedig kiemelt professzora lett, 1993-tól professor emeritus. 1990-ben a Karlsruhe-i Egyetem, 1995-ben a Grazi Egyetem, 1996-ban a Katowicei Egyetem, 1999-ben a Miskolci Egyetem, 2003-ban a Debreceni Egyetem fogadta tiszteletbeli doktorává. A Royal Society of Canada 1971-ben választotta tagjává, 1990-ben lett a Magyar Tudományos Akadémia külső tagja. 1961-ben Beke Manó-émlékdíjat, 1962-ben Akadémiai Díjat kapott. 1988-ban a spanyolországi Cajal-éremmel, 2004-ben pedig a Kampé de Fériet-éremmel tüntették ki. Kutatási területe a függvényegyenletek és alkalmazásaik az információelméletre, valamint a társadalom- és magatartástudományokra. Első monográfiája, az 1966-ban megjelent *Lectures on Functional Equations and their Applications* a függvényegyenletek elméletének bibliájává vált.

Császár Ákos Budapesten született 1924. február 26-án és itt is hunyt el 2017. december 14-én. A Pázmány Péter Tudományegyetem matematika–fizika szakán 1947-ben szerzett középiskolai tanári diplomát. 1948-ban védte meg egyetemi doktori disszertációját. Diplomájának megszerzése után a Budapesti Műszaki Egyetemen kapott tanársegédi, majd beosztott tanári állást. Majd az Eötvös Loránd Tudományegyetem Analízis I. Tanszékére került,

74 Páles Zsolt, Pálffy Péter Pál: Beszámoló a Big Five Centenárium rendezvényéről

ahol 1957-ben nevezték ki egyetemi tanárnak. Ezt a tanszéket hároméves megszakítással harmincöt éven keresztül, 1992-ig vezette. 1994-ben nyugdíjba vonult, majd 1996-ban professor emeritusi címet kapott. 1955-től az MTA Matematikai Kutatóintézet munkatársa, majd 1970-től főmunkatársa volt. 1972 és 1991 között az intézet topológiai osztályát vezette. 1952-ben védte meg a matematikai tudományok kandidátusi, 1954-ben akadémiai doktori értekezését. 1970-ben a Magyar Tudományos Akadémia levelező, 1979-ben pedig rendes tagjává választották. Az MTA Matematikai és Fizikai Osztályának elnöki tisztét 1973–1976 között és 1990–1993 között, majd az osztály kettéválása után a Matematikai Osztályét a 1993–1999 időszakban töltötte be. 1997-ben a Közép-európai Tudományos és Művészeti Akadémia, később a Szent István Akadémia is felvette tagjai sorába. Jelentős a tudományos közéletben betöltött szerepe is: 1966-ban a Bolyai János Matematikai Társulat főtitkárává választották, ezt a tisztségét tizennégy éven át töltötte be, ekkor vette át a BJMT elnöki tisztségét. 1990-ben a társulat tiszteletbeli elnökévé választották. Emellett 1971 és 1992 között a Nemzetközi Banach Központ tudományos tanácsának tagja, közben 1974 és 1977 között elnöke volt. 1975-ben a Tudományos Ismeretterjesztő Társulat által alapított József Attila Szabadegyetem tanácsának elnöki feladatait is ellátta. 1958-tól az Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis Sectio Mathematica, valamint 1976 és 1990 között a Matematikai Lapok, később a Magyar Tudomány című tudományos szakfolyóiratok szerkesztőbizottságának tagja, valamint az Acta Mathematica Hungarica szerkesztőbizottságának elnöke. Fő kutatási területei a valós függvénytan és az általános topológia voltak. Nevéhez fűződő nevezetes konstrukciója az úgynevezett Császár-féle test. Legfontosabb kitüntetései: Akadémiai Díj (1962), Kossuth-díj (1963), MTESZ-díj (1981), Bolzano-aranyérem (1981), Szele Tibor-emlékérem (1983), Bugát Pál-emlékérem (1992), a Magyar Köztársasági Érdemrend középkeresztje (1994), az Arany János Közalapítvány Nagydíja (1999), Szily Kálmán-emlékérem (2008), Akadémiai Aranyérem (2009).

Fuchs László Budapesten született 1924. június 24-én. 1946-ban diplomázott a Pázmány Péter Tudományegyetemen, és 1947-ben szerezte meg doktori fokozatát. Két évig középiskolai tanárként dolgozott, ezután az ELTE Természettudományi Karán tanított és az MTA Matematikai Kutatóintézetében dolgozott. 1952-ben Kossuth-díjjal tüntették ki. Több éven keresztül a Bolyai János Matematikai Társulat pénztárosa, majd főtitkára volt. Amerikában előbb a Miami Egyetemen, majd 1968 óta a Tulane Egyetemen tanított,

Páles Zsolt, Pálffy Péter Pál: Beszámoló a Big Five Centenárium rendezvényéről 75

ahonnan 2004-ben vonult nyugdíjba. Ekkor nyerte el az Evelyn and John G. Phillips Distinguished Professor Emeritus in Mathematics címet. 1990-ben a Magyar Tudományos Akadémia választotta külső tagjává, 2012-ben pedig az American Mathematical Society „fellow”-ja lett. 2024-ben az MTA Arany János-életműdíjával tüntették ki. Fő kutatási területe az Abel-csoportok elmélete. Ebben a témában három alapvető monográfiát írt.

Gál István Budapesten született 1924. február 24-én és 2016. március 17-én hunyt el az USA-ban. 1946-ban diplomázott a Pázmány Péter Tudományegyetemen, majd 1947-ben doktorált Riesz Frigyes és Fejér Lipót vezetésével. Később Párizsba ment, ahol először a Centre National de la Recherche Scientifique-ben dolgozott tudományos munkatársként. Itt sok francia matematikussal került kapcsolatba, köztük Jean Lerayvel, Élie és Henri Cartannel. Miután az Amerikai Egyesült Államokba emigrált, először a Yale és a Princetoni Egyetemeken dolgozott, majd csatlakozott a Minnesotai Egyetem matematika tanszékéhez. Kutatási területe a számelmélet és az analízis volt. Princetonban találkozott Albert Einsteinnel is. Erdős Pállal Párizsban került kapcsolatba, vele később több közös dolgozatot jelentetett meg. Robert Langlands kutatásaira nagy hatással voltak Gálnak a zétafüggvénnyel és az Eisenstein-sorokkal kapcsolatos eredményei. 1993-ban nyugdíjba vonult és Nevadába költözött.

Horváth János Budapesten született 1924. július 30-án és 2015. március 12-én hunyt el az USA-ban. 1946-ban diplomázott a Pázmány Péter Tudományegyetemen, majd 1947-ben doktorált Fejér Lipót tanítványaként. A doktori cím megszerzése után Párizsba ment, ahol a Centre National de la Recherche Scientifique-ben dolgozott tudományos munkatársként. Innen Kolumbiába került, ahol a bogotai University of Los Andes professzora lett. 1957-től az Amerikai Egyesült Államokban volt professzor a University of Marylanden, itt 1994-ben professor emeritus címet kapott. A Magyar Tudományos Akadémia külső tagjává választotta 2000-ben. Az analízis több területén alkotott, leginkább a funkcionálanalízis és annak a disztribúcióelmélet nevű területén ért el jelentős sikereket. A MathSciNet szerint a Topologikus vektorterekről és disztribúciókról írott monográfiája a valaha írt legolvasmányosabb bevezetés a témakörbe. Munkássága nagy hatással volt Laurent Schwarzra, aki a 40-es években megalkotta a „teljes” disztribúcióelméletet.

Felidézhetjük az 1947. június 24-én rendezett előadórészt programját a Fuchs László által rendelkezésünkre bocsátott egykori meghívó alapján. (Tessék figyelmesen elolvasni!)

76 Páles Zsolt, Pálffy Péter Pál: Beszámoló a Big Five Centenárium rendezvényéről

1. Bevezető
2. Horváth János: Egy Fejér-problémáról. Előadja: Császár Ákos
3. Gál István Sándor: Egy konvex görbére vonatkozó tétel. Előadja: Horváth János
4. Aczél János: A függvényegyenletek egy osztályáról. Előadja: Fuchs László
5. Császár Ákos: H. E. Vaughan egy tételének elemi bizonyítása. Előadja: Horváth János
6. Fuchs László: Hardy, Littlewood és Pólya egy egyenlőtlenségéről. Előadja: Aczél János

A Big Five Centenárium elnevezésű eseménysorozat 2024. június 5-én a Rényi Intézet Nagytermében került megrendezésre. A rendezvény házigazdái szerepét Pálffy Péter Pál (a Rényi Intézet korábbi igazgatója, az MTA Matematikai Osztályának korábbi elnöke) töltötte be, aki köszöntötte a megjelent vendégeket. Ezt követően Páles Zsolt, az MTA Matematikai Osztályának elnöke üdvözölte a centenáriumi ünnepség résztvevőit:

„Tisztelt Hölgyeim és Uraim, kedves Kollégák! Egy nem mindennapi esemény miatt gyűltünk ma össze: Öt világhírű matematikus 100. születésnapját ünnepeljük. Ez alkalomból örömmel és tisztelettel köszöntöm Fuchs László professzor urat, az MTA külső tagját, a Nagy Ötös, a Big Five egyetlen velünk ünneplő tagját és Freund Tamást, az MTA elnökét, Hudecz Ferencet, az MTA alelnökét és Kacs Kovics Imrét, az ELTE Természettudományi Karának dékánját. Köszöntöm továbbá a mai tudományos előadás-sorozat előadóit és megjelent vendégeinket is.

Ha az interneten rákeresünk a Big Five kifejezésre, akkor rábukkanhatunk a pszichológiai személyiségvizsgálattal kapcsolatos Big Five-elméletre, vagy az öt legnehezebben vadászható afrikai vadállatra. Nekünk matematikusoknak azonban nem ez az elsődleges jelentése ennek a kifejezésnek. Ennek hallatán többségünknek öt matematikus neve jut az eszünkbe: Aczél János, Császár Ákos, Fuchs László, Gál István és Horváth János. Egyikük, Aczél János, a 2004-ben Staar Gyulának adott interjújában (amely csak 10 évvel később, 2014-ben jelent meg a Természet Világában) így vallott a Big Five történetéről: Bár ugyanabban az évben születtünk, mégsem ugyanarra az évfolyamra jártunk. Én decemberben születtem, így már az elemi iskolától kezdve évvésztessnek számítottam. Az egyetemen abban az időben nem volt sok matematika iránt elkötelezett hallgató, így mi öten hamar egymásra

Páles Zsolt, Pálffy Péter Pál: Beszámoló a Big Five Centenárium rendezvényéről 77

találtunk. Van ebben némi bizonytalanság, mert nem ugyanúgy emlékezünk a kezdetekre. Azt a változatot mondom, amellyel többen egyetértünk. Bár az egyetemen jó tanáraink voltak, de a matematika számos területe fehér folt maradt az oktatásunkban. Az életünk pedig nem tűnt elég hosszúnak ahhoz, hogy kivádjuk, amíg ez megváltozik. Különben is, fiatalon minden olyan sürgős az embernek. Valamelyik külső szervezet, talán a Magyar Demokratikus Ifjúsági Szövetség szervezett olyan előadásokat, amelyeken a társaiknál valamivel többet tudó diákok beszéltek a matematika őket érdeklő új területeiről. Így kezdődött. Akik ott diákként előadtunk, többségünkben elég jó tanár lett. Mégis, akkor néhány hét alatt sikerült kipusztítanunk a teljes hallgatóságot. Öten maradtunk. Mi azután is rendszeresen összejöttünk, de már csak egymásnak magyaráztuk, hogy ki min dolgozik. Arra határozottan emlékszem, hogy évenként egyszer nyilvános ülést is tartottunk, amelyre bárki eljöhett. Egyes emlékezők szerint Fejér Lipót volt a keresztapánk, ő nevezett el minket Big Five-nak. A Big Five fénykora az 1946–47-es tanévben kezdődött, és 1948 őszéig tartott. 1947-ben mindannyian doktoráltunk. Fejér Lipót akkor már nagyon öreg volt, bár, ha belegondolok, jóval fiatalabb, mint én most. Az 1944–45-ben történtek azonban nagyon megviselték. Legtöbbet akkor lehetett tőle tanulni, amikor nem tanított, hanem a dolgok háttéréről beszélt, hogy mi mivel függ össze. Azokról a nagy matematikusokról mesélt, akiket személyesen is jól ismert.

Fuchs László egy – a Magyar Tudományban megjelent – cikkben így emlékezik vissza: Összejöveteleink nemcsak abban különböztek a közönséges szeminárium előadásoktól, hogy állandóan közbevágtunk kérdésekkel és ötletekkel, hanem abban is, hogy szinte megállás nélkül nevettünk, tréfáltunk. Aczél János volt a legtöbb vicc szerzője, de a tréfákozásban mindegyikünk nagyon is aktív volt. A tréfa tárgya többnyire a tárgyalt téma vagy annak tállalási módja volt. Csodálatos, hogy a sok tréfa mellett komoly matematikát tudtunk tanulni. Talán a legjellegzetesebb tevékenységünk a plakátkészítés volt. Számos összejövétel után a legviccesebb helyzeteket rögzítettük plakát formájában. A plakát meghívó formájában készült, meghívóként a lezajlott előadásra, mintha előre tudtuk volna a vicces eseményeket. Az előadások helyét mindenkor Lipót-mezőként jeleztük, hivatkozással Lipi bácsira és a közismert lipótmezei elmegyógyintézetre. Mindegyikünknek más neve lett, például Gál Pista Log-log Pista néven szerepelt. A plakátszerkesztéshez mindegyikünk hozzájárult ötleteivel, és az én feladatomból volt a végleges forma megszerkesztése Aczél János aktív közreműködésével.

78 Páles Zsolt, Pálffy Péter Pál: Beszámoló a Big Five Centenárium rendezvényéről

Én a Big Five kifejezést és annak igazi tartalmát 20 évvel ezelőtt, 2004 júniusában ismertem meg, amikor először került megrendezésre Budapesten egy velük kapcsolatos esemény „400 év matematika” címmel: Ezen az akkor 80 éves Big Five tagok még mindannyian tartottak előadást:

- Horváth János: Visszapillantás az elmúlt 62 évre
- Aczél János: Mi a teendő, ha egy (függvény)egyenlet érvényességi tartománya túl kicsi?
- Fuchs László: Abel-csoportok és modulusok
- Gál István: Mikor periodikus egy Fibonacci-sorozat?
- Császár Ákos: Természetes operációk általános topológiákon
- Horváth János: A Riesz–Fischer-tételről

2014-ben, 10 évvel később, a 90. születésnap megünneplésére már csak Aczél János és Fuchs László tudtak eljönni, a többiek nem tudták vállalni a megterhelő utazást.

Ki kell hangsúlyoznom, hogy a Big Five tagjai a második világháború utáni időszakban fontos szerepet játszottak a hazai matematika újraindításában és nemzetközi szintre emelésében. Sokat tettek a magyar matematikusok nemzetközi kapcsolatrendszerének bővítéséért is. Életük során mindvégig szoros baráti kapcsolatban maradtak, annak minden lényeges fejleményről informálták egymást, és folyamatosan figyelemmel kísérték egymás életpályáját. A Big Five tagjainak hatása csaknem felmérhetetlen. Túlzás nélkül mondhatom, hogy nincs ma Magyarországon olyan matematikus, aki első-éves egyetemista korában ne forgatta volna Fuchs László *Bevezetés az algebra*-ba című tankönyvét. De Aczél János függvényegyenletekről és Császár Ákosnak a topológiáról írt könyvei is a tudományterületük bibliáivá váltak. A mai tudományos ülészak keretében az előadóink segítségével megpróbáljuk feleleveníteni a Big Five tagjainak lényeges eredményeit, életútjuk legfontosabb állomásait. Remélem, hogy a megjelent hallgatóság is sokat profitál majd az elhangzottakból. Mindenkinek kellemes és tartalmas ismeretszerzést kívánok. Ezzel a mai ülészakot megnyitom.”

Ezt követően Pálffy Péter Pál felkérte Freund Tamást elnöki köszöntője megtartására. Ő így fogalmazott:

„Tisztelt Professzor Úr! Tisztelt Hölgyeim és Uraim! Kedves Akadémikustársak! Kedves Barátaim! Azt hiszem, nem kell túl sok eszköz ahhoz, hogy ma ezt az állítást bizonyítottan fogadjuk el: »A matematikusok sokáig élnek; a matematika egy egészséges hivatás.« Az egyik bizonyíték, hogy

Páles Zsolt, Pálffy Péter Pál: Beszámoló a Big Five Centenárium rendezvényéről 79

az idézett gondolat Dirk Jan Struik holland matematikustól származik, aki 106 évet élt. A másik, hogy az idei Arany János-életműdíj átadása egy 100. születésnap ünneplése is egyben.

Tudom persze, hogy az élet törvényei ennél árnyaltabbak – hiszen elég, ha csak a Matematikai Kutatóintézet korán elhunyt névadójára, Rényi Alfrédra gondolunk –, de az ünnep fényében engedjék meg nekem, hogy ma az egészséges hivatást űző matematikusok hosszú életére, és különösen Fuchs László több mint háromnegyed százada töretlen tudományos aktivitására fókuszáljak.

Kedves Ünneplő Közösség! Húsz éve hagyomány immár itt a Rényiiben, hogy tízévente köszöntjük a legendás Fejér Lipót által »Big Five«-nak nevezett, szintén legendás magyar matematikusokat – Aczél Jánost, Császár Ákost, Fuchs Lászlót, Gál Istvánt és Horváth Jánost –, és tisztelgünk munkásságuk előtt. Ez a mostani tehát a harmadik ilyen összejövétel.

Tíz évvel ezelőtt, 90. születésnapjukon »a magyar matematika nagy ötös-fogatának« – ahogyan Lovász László nevezte őket – tagjai még mindnyájan meghívottak lehettek az ünnepségre. Akkor mondott köszöntőjében Fuchs László így fogalmazott: »Legyen szabad megköszönnöm BIGFIVÉreim nevében is a bennünket ért megtiszteltetést, hogy a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Osztálya ezt az ünnepi rendezvényt szervezte 90. születésnapjaink alkalmából. Mély hálával tartozunk.«

Kedves Professzor Úr! Mi tartozunk mély hálával. Miénk volt a megtiszteltetés tíz éve is, és miénk most, amikor 100. születésnapján köszönhetjük, és több mint 75 éve folyamatosan végzett tudományos munkássága iránti tiszteletünkkel átadhatjuk Önnek az Arany János-életműdíjat.

Bertrand Russell *Study of Mathematics* című esszéjében így ír a matematikáról: »A matematikát, ha helyesen fogjuk fel, nemcsak igazság, hanem egyszersmind magasrendű szépség is jellemzi: hideg és szigorú, a szobrászathoz hasonló szépség. (...) fenségesen tiszta, és oly szigorú tökélyre képes, amilyent csak a legnagyobb művészet tud felmutatni.« Henri Poincaré pedig így fogalmazott: »A matematika olyan nyelv, amelyen nem lehet ködös vagy pontatlan gondolatokat kifejezni.«

Mi az tehát, amiért a matematikusok – ha az élet más törvényei másképp nem rendelik – sokáig élnek? Talán éppen a tisztaságnak, a tökélynek, a rendnek ez a szenvedélyes keresése. Szeretete. Amit a pályája kezdetén, 1947-ben megjelent négy angol nyelvű cikkétől kezdve egészen a tavaly megjelent két publikációjáig és a most is folyamatban lévő munkáiig Fuchs László is példaként elénk él és képvisel.

80 Páles Zsolt, Pálfy Péter Pál: Beszámoló a Big Five Centenárium rendezvényéről

És képviselte és képviselték BIGFIVÉreivel akkor is, amikor ezt a történelem árnyékában kellett tenniük. Amikor a háború után, 1945-ben önszervező erővel, hétről hétre öten összeültek, és a »kellemes matematikának« kemény munkával átadták magukat. Up-to-date matematikát tanultak, és megkövetelték önmaguktól, hogy mindig valami újat is hozzátegyenek ahhoz, amit olvastak. És néhány év alatt újraindították és ismét nemzetközi szintre emelték a magyar matematikát. És azt szerették és képviselték, bárhol is éltek vagy adtak elő az öt világrészen.

Tisztelt Hölgyeim és Uraim! Kedves Ünneplő Közösség! Arról, hogy a történelem milyen súlyokat tesz ránk, személyesen legtöbbször nem tehetünk. Ez nem a mi döntésünk. Kívülről ér minket. De hogy abban a helyzetben, amelyben vagyunk, mit teszünk, hogy helyzetünkhöz hogyan viszonyulunk, az elsősorban a mi kezünkben van. A belső szabadság és a hivatásunk iránti hűség mellett, munkánk minőségi volta mellett tudunk dönteni. Fuchs László és a Big Five tagjai egyetemi éveik idején így döntöttek. A matematika iránti odaadó szeretet végigkísérte életüket, és munkásságuk megajándékozta a nemzetközi és a magyar tudományt.

Tisztelt Professor Úr! Turán Pál egyik cikkében ezt a gondolatot idézi Rényi Alfréd: »Ha boldogtalan vagyok, matematikával foglalkozom, hogy felviduljak. Ha boldog vagyok, matematikával foglalkozom, hogy az is maradjak.« 100. születésnapja és az Arany János-életműdíj elnyerése alkalmából Rényi Alfréd nyomán azt kívánom Önnek, hogy boldog legyen – és az is maradjon.”



Beszédét követően Freund Tamás átadta az Arany János-életműdíjat Fuchs Lászlónak, aki azt az alábbi szavakkal köszönte meg:

Páles Zsolt, Pálffy Péter Pál: Beszámoló a Big Five Centenárium rendezvényéről 81

„Mélyen tisztelt Elnök úr, kedves kollégák és vendégek! Hálásan köszönöm a rendkívüli megtiszteltetést, az Arany János-életműdíjat. Nagyra értékelem ezt a nem várt magas kitüntetést. Köszönet Freund Tamás elnök úrnak, Kocsis Károly akadémikusnak és a matematikai osztálynak ezért a nagyon megtisztelő elismerésért.

Mielőtt néhány szót szólnék életpályámról, nem mulaszthatom el, hogy ne idézzem fel mély hálával szüleim emlékét. Édesanyámnak sikerült átültetni apjától örökölt lappangó matematikai tehetségének egy töredékét. Édesapám, az egyik vezető finnugor nyelvész, példát mutatott (állami elismerés hiányában is) a nagy áldozatokat követelő, önzetlen kutatómunkára, az alapvető tudományos kérdések vizsgálatának fontosságára. Az ő hatása életemre mérhetetlenül nagyobb, mint mindenki másé.

Fiatalon, tizennégy éves koromban kezdtem komolyan érdeklődni a matematika iránt. Egy régi geometria tankönyv anyagát alaposan tanulmányoztam, de csak utolsó gimnáziumi évemben jutottam komoly anyaghoz. Ekkor lettem jó problémamegoldó, Gallai Tibor jóvoltából. A numerus clausus miatt nem vettek föl a Műegyetemre, de fél évi gyári munka után beiratkozhatam a bölcsészkarra, mint matematika–fizika szakos tanárjelölt. 1945-ben, közvetlenül a háború után a pesti egyetemen nem lehetett sok matematikát tanulni. Fejér professzor nagyon legyengült a német megszállás alatt. Kerekjártó professzor úr betegsége miatt már előadni se tudott. Csak Szász Pál docenstől tudtunk tanulni. De ő nem dolgozott doktorjelöltekkel.

A katonai szolgálat, a szörnyű hadifogság és az embertelen munkaszolgálat okozta háborús szenvedések nem törtek meg bennünket. Elhatároztuk, hogy együtt tanulunk komoly matematikát. Öten, mind 1924-es születésűek jöttünk össze a nyáron, és hetente találkoztunk a tanévben. Egyikünknek sem volt tanácsadója (témavezetője), de egy év után mindegyikünk dicsekedhetett a közel kész disszertációjával.

Van der Waerden nevezetes modern algebra könyvének hatására kezdtem el ideálmélettel foglalkozni. Engem Emmy Noether leghíresebb alapvető matematikai cikke vonzott, és az ott bizonyított négy analóg tételhez egy ötödiket találtam. Ez lett disszertációm fő eredménye. A rendezett algebrai struktúrák elmélete kezdett érdekelni, de nem sokáig maradtam ennél a témánál. Szoros barátság fűzött Szele Tibor debreceni professzorhoz, aki egyre nagyobb lelkesedéssel szólt Abel-csoportokról és saját eredményeiről. Mindig említett érdekes megoldatlan problémákat is, amelyek felkeltették érdeklődésemet, és hamarosan Tibor kutatócsoportjához csatlakoztam. Szele korai halála nagy csapás volt, de jó ideig Magyarország maradt

82 Páles Zsolt, Pálfy Péter Pál: Beszámoló a Big Five Centenárium rendezvényéről

az Abel-csoportok elméletének nemzetközi központja. A Matematikai Unió bennünket bízott meg egy nemzetközi Abel-csoport konferencia szervezésével. Ez maradt kedvenc témám is, egész életemben három könyvet írtam Abel-csoportokról. Az Abel-csoportok elméletének rohamos fejlődése inspirálta Salce páduai professzorral közös programunkat. Az új, hatásos módszerek szisztematikus átültetését és továbbfejlesztését terveztük modulusokra integritási tartományok felett. Számos cikket és két könyvet publikáltunk az új eredményekről. Hosszú időn át dolgozataink témáit főként az Abel-csoportok, modulusok, gyűrűk és a rendezett algebrai struktúrák elméletéből választottam. Talán hibát követtem el, hogy gyakran váltottam kutatási problémáimat, de megvallom, nem tudtam ellenállni annak, hogy egy felmerült, érdekes problémát ne próbáljak megoldani.

Már nyolcvanéves voltam, amikor nyugdíjba mentem, de a matematizálást semmiképpen nem tudtam abbahagyni. Az elmúlt húsz év alatt számos régi problémáról írtam, és több érdekes kérdést tisztáztam számomra új területen, a kommutatív gyűrűk új ágában. Örömmel állíthatom, hogy sikerült bizonyítanom egy fontos egzisztenciátételt. A tétel: matematika létezik kilencven év után is. Ez nem új tétel, de abban egyetérthetünk, hogy ezt nem könnyű bizonyítani.

Elterjedt szokás elismerés alkalmával ígéretet tenni a jövőbeli munkára. Az én koromban ennek nincs értelme. De azt nyugodtan állíthatom, hogy kitüntetésem megerősít abban a törekvésemben, hogy bizonyítsam, matematika létezik még száz év után is. És ebben maradunk. Köszönöm szépen.”



Fuchs László beszédét követően Kacsovics Imre, az ELTE Természettudományi Karának dékánja nyújtotta át az ünnepelt matematikusnak az ELTE TTK platina oklevelét „egy kiváló életmű elismeréseként” és arra is emlékez-

Páles Zsolt, Pálffy Péter Pál: Beszámoló a Big Five Centenárium rendezvényéről 83

ve, hogy Fuchs László 1954 és 1957 között az ELTE Matematikai–Fizikai–Kémiai Kar dékánja volt.

A köszöntők és Fuchs professzor úr szavai után kezdődött el az öt angol nyelvű előadásból álló tudományos program. Ennek első előadója Luigi Salce páduai professzor volt, aki „Fascinating modules over valuation domains” címmel Fuchs László eredményeit méltatta. A következő előadó Berkes István, a Rényi Intézet kutatóprofesszor emeritusa volt, aki „István Gál’s mathematical work” címmel tartott előadást. Az ebédszünet után elsőnek Miroslav Hušek, a prágai Károly Egyetem professzora tartott előadást „Mathematics of Ákos Császár” címmel. Ezt követte Norbert Ortnernek, az Innsbrucki Egyetem professor emeritusának az előadása „János Horváth, born July 30th, 1924, in Budapest” címmel. A záró előadást Ludwig Reich, a Grazi Egyetem professor emeritusa tartotta „János Aczél – Functional Equations in Mathematics and in Applications” címmel.

Az eseménysorozat lezárásaként Fuchs professzor úr megköszönte a szervezőknek és az előadónak az érdekes és gondolatébresztő programot, illetve előadásokat.

A Rényi Intézet Nagytermében a hallgatóság, az előadók, a szervezők ezt követően még sokáig együtt maradtak, talán valamelyik beszélgetés egy új barátság, egy új tudományos együttműködés kezdete is lehet.

Páles Zsolt, Debreceni Egyetem, TTK Matematikai Intézet

Pálffy Péter Pál, Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

A fenti cikket az Érintő 2024. decemberi számából vettük át.

Daniel Glasscock: Mi is... a grafon?

(ford. Tóth László Márton)

A nagyméretű gráfok mindenütt jelen vannak a matematikában, és a szerkezetük leírása a modern kombinatorika egyik fontos célja. A leghíresebb leírást a Szemerédi-féle regularitási lemma (1978) adja meg, amely azt állítja, hogy bármely kellően nagyméretű gráf csúcsai feloszthatók nagyjából azonos méretű halmazokra úgy, hogy az élek a halmazok többsége között jó közelítéssel véletlenszerűnek tűnnek.

A nagy véges objektumok tanulmányozásának egyik módja az, hogy az egyre nagyobb és nagyobb objektumok sorozatai helyett áttérünk ideális limeszobjektumokra. Ha megfelelően járunk el, a limeszobjektumok tulajdonságai tükrözik az őket közelítő véges objektumok tulajdonságait, és fordítva.

A grafonok a nagy véges gráfok sorozataihoz tartozó limeszobjektumok az úgynevezett vágásmetrikára nézve. Angol nevét (graphon) a gráf (graph) és függvény (function) szavak összevonásával alkották.

A fogalmat Borgs, Chayes, Lovász, T. Sós, Szegedy és Vesztergombi vezette be és dolgozta ki [1, 3]. A grafonok természetes módon bukkannak fel olyan területeken, ahol nagy gráfok sorozatai fordulnak elő: extrémális gráfelmélet, nagy gráfok tulajdonságtesztelése, kvázi-véletlen gráfok, véletlen hálózatok, statisztikus fizikai rendszerek termodinamikai limeszei és így tovább.

Kezdjük néhány definícióval és motivációként egy példával. Egy G gráf alatt csúcsoknak egy $V(G)$ halmazát és éleknek egy $E(G)$ halmazát értjük, utóbbinak az elemei különböző csúcsokból alkotott párok. Egy *gráfhomomorfizmus* H -ből G -be egy olyan φ leképezés $V(H)$ -ből $V(G)$ -be, amely megőrzi az élek menti szomszédságot. Azaz minden $\{v, w\}$ élre $E(H)$ -ből a $\{\varphi(v), \varphi(w)\}$ egy él $E(G)$ -ben. Jelöljük $\text{hom}(H, G)$ -vel a homomorfizmusok számát H -ből G -be. Például $\text{hom}(\bullet, G) = |V(G)|$, $\text{hom}(\bullet\bullet, G) = 2|E(G)|$ és $\text{hom}(\triangle, G)$ a G -ben lévő háromszögek számának 6-szorosa.

A lehetséges leképezések számával normalizálva kapjuk a H *homomorfizmus-sűrűségét* G -ben,

$$t(H, G) = \frac{\text{hom}(H, G)}{|V(G)|^{|V(H)|}},$$

ami annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott leképezés $V(H)$ -ből $V(G)$ -be megőrzi az élek menti szomszédságot. Ez a szám egyben a H mint részgráf sűrűségét is méri G -ben, aszimptotikusan, ahogy

Daniel Glasscock: Mi is... a grafon?

85

$n = |V(G)| \rightarrow \infty$. Például $t(\bullet\bullet, G) = 2|E(G)|/n^2$, míg a G -ben lévő élek sűrűsége $2|E(G)|/n(n-1)$. Ez a két kifejezés nagy n -re közel azonos.

Tekintsük a következő extrémális gráfelméleti problémát: *Hány 4 hosszú körnek kell lennie egy olyan gráfban, amelynek élsűrűsége legalább $1/2$?* Könnyű belátni, hogy bármely n csúcsú gráfban a 4 hosszú körök száma nagyságrendileg legfeljebb n^4 . Erdős egyik tétele szerint a lehetséges élek legalább felét tartalmazó gráfokban a 4 hosszú körök száma nagyságrendileg legalább n^4 . Pontosabban, bármely G gráfra

$$t(\square, G) \geq t(\bullet\bullet, G)^4.$$

Speciálisan, ha $t(\bullet\bullet, G) \geq 1/2$, akkor $t(\square, G) \geq 1/16$. Ennek fényében a probléma újrafogalmazható minimalizálási problémaként: minimalizáljuk $t(\square, G)$ -t olyan véges G gráfokon, amelyek kielégítik $t(\bullet\bullet, G) \geq 1/2$ -et. Némiképp munkával megmutatható, hogy nincs olyan véges G gráf, amelyre $t(\bullet\bullet, G) \geq 1/2$, és melyre $t(\square, G)$ eléri az $1/16$ -ot.

Ezen a ponton érdemes párhuzamot vonnunk egy elemi analízis problémával: minimalizáljuk $(x^3 - 6x)$ -et az $(x \geq 0)$ -t kielégítő racionális számok között. Ennek a polinomnak $[0, \infty)$ -en globális minimuma van $x = \sqrt{2}$ -nél, így a legjobb, amit a racionális számok körében tehetünk az, hogy megmutatjuk, hogy a polinom a minimumhoz közelítő értékeket vesz fel racionális számok egy $\sqrt{2}$ -höz tartó sorozata mentén. Jól tudjuk, hogy ezt a bonyolalmat úgy kell elkerülni, hogy a racionális számokat (mint metrikus teret) teljessé tesszük, kiegészítjük a valós számokkal, és egy ilyen sorozat határértékét $\sqrt{2}$ -vel realizáljuk.

Van olyan véges gráfokból álló sorozat, amelyben az élsűrűség legalább $1/2$, és a 4 hosszú körök sűrűsége megközelíti az $1/16$ -ot. Legyen R_n egy n csúcsú véletlen gráf, ahol minden él beválasztása függetlenül, $1/2$ valószínűséggel dől el. Elhagyva azokat az R_n -eket amelyekben $t(\bullet\bullet, R_n) < 1/2$, egy olyan gráfsorozatot kapunk, amiben a 4 hosszú körök sűrűsége 1 valószínűséggel konvergál $1/16$ -hoz. Követve a $\sqrt{2}$ analógiáját, érdemes megpróbálnunk realizálni ennek a véges gráfsorozatnak a limeszét, és megérteni, hogyan oldja meg az adott minimalizálási problémát.

Mi lehet ennek az R_n véletlen gráfsorozatnak a limesze? Egy címkézett gráf szomszédsági mátrixából konstruáljuk meg a gráf *pixelképét* úgy, hogy az 1-eseket fekete négyzetekké alakítjuk, a 0-akat pedig fehérrekké, és a $[0, 1]^2$ egységnégyzetre skálázunk:

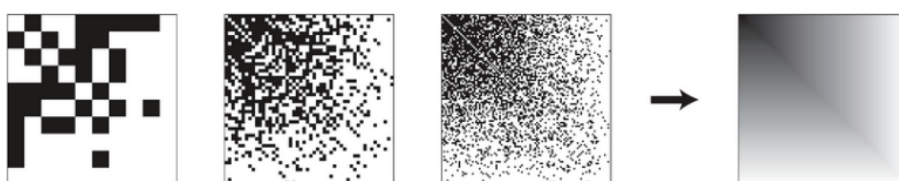
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{white} & \text{black} & \text{white} & \text{black} \\ \hline \text{black} & \text{white} & \text{black} & \text{white} \\ \hline \text{white} & \text{black} & \text{white} & \text{black} \\ \hline \text{black} & \text{white} & \text{black} & \text{white} \\ \hline \end{array}$$

A pixelképeken látható, hogy grafikusán „konvergálnak”: az egyre nagyobb és nagyobb $1/2$ élvalószínűségű véletlen gráfok (bármilyen címkézéssel) egy szürke négyzethez konvergálnak, a konstans $1/2$ függvényhez $[0, 1]^2$ -en.

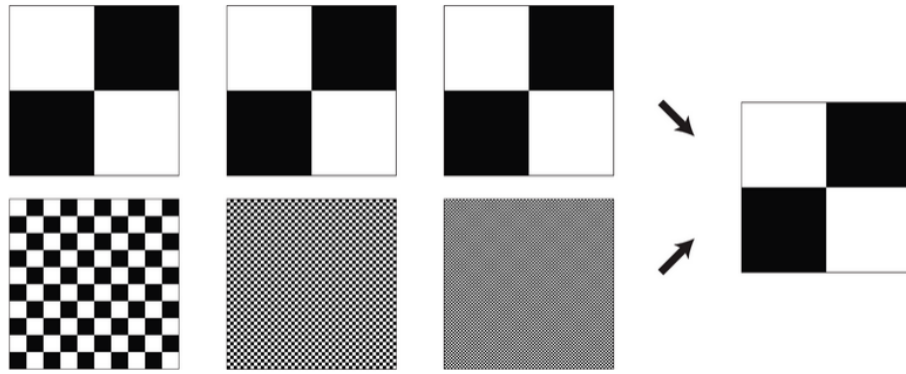


A konstans $1/2$ függvény a $[0, 1]^2$ -en egy példa *címkézett grafonra*. A címkézett grafon egy szimmetrikus, Lebesgue-mérhető függvény $[0, 1]^2$ -ből $[0, 1]$ -be (a szokásos, nullmértékű eltérés esetén azonosítással). Az ilyen függvényekre tekinthetünk a $[0, 1]$ csúcshalmazon vett élsúlyozott gráfokként. A *címkézetlen grafon* egy átcímkezés erejéig megadott grafon, ahol átcímkezés alatt a $[0, 1]$ intervallum egy invertálható és mértéktartó transzformációjának végrehajtását értjük. Vegyük észre, hogy bármely pixelkép egy címkézett grafon, vagyis a (címkézett) gráfok egyben (címkézett) grafonok.

Ennek a konvergenciának egy másik példaként tekintsük a *növekvő egyenletes kapcsolódási gráfok* G_n sorozatát, amelyet induktív módon a következőképpen definiálunk. Legyen $G_1 = \bullet$, és $n \geq 2$ esetén konstruáljuk G_n -t a G_{n-1} -ből úgy, hogy hozzáadunk egy új csúcsot, majd minden egyes élt, amely még nem szerepel $E(G_{n-1})$ -ben, egymástól függetlenül $1/n$ valószínűséggel beveszünk. Kiderül, hogy ez a gráfsorozat 1 valószínűséggel konvergál az $1 - \max(x, y)$ grafonhoz. (Mivel a mátrixok indexelésénél a $(0, 0)$ a bal felső sarok, így a grafonoknál is).



A teljes páros gráfok címkézésének két természetes módja is van, és ezek a teljes páros gráfok sorozatának különböző limeszgrafonjaira utalnak. Valójában mindkét címkézett grafonsorozatnak ugyanaz a limesze, amint az ábra is mutatja. Arra biztatjuk az olvasót, hogy térjen vissza ehhez a példához, miután a konvergenciát pontosabban definiáltuk.



A homomorfizmus-sűrűségek természetes módon kiterjednek grafonokra is. Egy véges G gráf esetén a $t(\bullet\rightarrow, G)$ sűrűség kiszámítható úgy, hogy a G minden egyes csúcsának adunk $1/n$ tömeget, és a csúcspárokra integráljuk az élek indikátorfüggvényét. Pontosan ugyanígy, egy W címkézett grafon $t(\bullet\rightarrow, W)$ élsűrűsége

$$\int_{[0,1]^2} W(x, y) \, dx dy,$$

és a 4 hosszú körök $t(\square, W)$ sűrűsége

$$\int_{[0,1]^4} W(x_1, x_2)W(x_2, x_3)W(x_3, x_4)W(x_4, x_1) \, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

Innen már egyszerű egy H véges gráfnak a W grafonban vett $t(H, W)$ homomorfizmus-sűrűségére felírni a megfelelő kifejezést. A felírt formulák alapján látjuk, hogy a $W \equiv 1/2$ konstans grafon megoldja a minimalizálási problémát: $t(\bullet\rightarrow, W) = 1/2$, míg $t(\square, W) = 1/16$.

Azért, hogy a véges gráfok terének teljessé tételével megkapjuk a grafonok terét, és hogy a grafonok konvergenciáját precízen definiálhassuk, bevezetjük a W és U címkézett grafonok $\delta_{\square}(W, U)$ vágástávolságát:

$$\inf_{\varphi, \psi} \sup_{S, T} \left| \int_{S \times T} W(\varphi(x), \varphi(y)) - U(\psi(x), \psi(y)) \, dx dy \right|,$$

ahol az infimumot a W és U összes φ és ψ átcímkeztése felett vesszük, a szuprémumot pedig a $[0, 1]$ összes mérhető S és T részhalmazán. A vágástávolság először a maximális eltérést méri két felcímkeztett grafon integráljai között $[0, 1]^2$ mérhető szorzathalmazain (innen a $\square$ jelölés), majd minimalizálja ezt a maximális eltérést az összes lehetséges átcímkeztés felett. (Két véges gráf vágástávolságát kombinatorikusan is definiálhatjuk, bárminemű analízis nélkül, de a definíció meglehetősen komplikált.)

A vágástávolságot a definícióban szereplő infimum jól definiálttá teszi a címkeztetlen grafonok terén, de még nem válik metrikává. Az olyan W és U grafonokat, amelyekre $t(H, W) = t(H, U)$ minden véges H gráfra, *gyengén izomorf*nak nevezzük. Kiderül, hogy W és U akkor és csak akkor gyengén izomorf, ha $\delta_{\square}(W, U) = 0$. A vágástávolság ténylegesen metrikává válik a címkeztetlen grafonok $\mathcal{G}$ terén, ha azokat gyenge izomorfizmus erejéig tekintjük. A pixelképek konvergenciájának imént bemutatott példáit tekinthetjük konvergens sorozatoknak és azok határértékeinek $\mathcal{G}$ -ben (gyenge izomorfizmus erejéig).

Végezetül kiemelünk néhány alapvető eredményt a grafonokkal kapcsolatban. Az oldalhivatkozások Lovász könyvéből [2] származnak, amit bátran ajánlunk a további részletek után érdeklődő olvasó figyelmébe.

1. tétel. (Prop. 11.32, 185. oldal) *Minden grafon véges gráfok egy sorozatának $\delta_{\square}$ -limesze.*

Egy W címkeztet grafon egy véges címkeztet gráffal való közelítéséhez legyen S egy $[0, 1]$ -ből véletlenszerűen kiválasztott, n pontból álló halmaz, majd konstruáljunk egy olyan gráfot S -en, amelyben a $\{s_i, s_j\}$ él $W(s_i, s_j)$ valószínűséggel szerepel. Ez a címkeztet gráf vágástávolságban nagy valószínűséggel jól közelíti W -t (ahogy $|S| \rightarrow \infty$).

2. tétel. (Thm. 9.23, 149. o.) *A $(G, \delta_{\square})$ tér kompakt.*

Ebből következik, hogy $(G, \delta_{\square})$ egy teljes metrikus tér. Ezt a tényt az 1. tétellel kombinálva azt látjuk, hogy a grafonok tere a véges gráfok terének a teljessé tétele a vágásmetrikára! Ez a tétel azt is mutatja, hogy a grafonok hogyan képeznek hidat Szemerédi regularitási lemmájának különböző alakjai között: a 2. tétel levezethető a lemma egy gyenge formájából, míg egy erősebb regularitási lemma a $\mathcal{G}$ kompaktságából következik.

3. tétel. (Lem. 10.23, 167. o.) *Minden H véges gráfra a $t(H, \cdot): \mathcal{G} \rightarrow [0, 1]$ Lipschitz-folytonos.*

Daniel Glasscock: Mi is... a grafon?

89

A 2. és 3. tételek és némi elemi analízis segítségével megmutatható, hogy az extrémális gráfelmélet minimalizálási problémái (mint a fentiekben tárgyalt példa) garantáltan megoldhatók a grafonok terében. Ezek a grafonmegoldások az 1. tételen keresztül „sablon” adnak közelítő megoldások konstruálásához a véges gráfok terében.

Daniel Glasscock

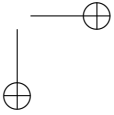
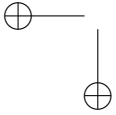
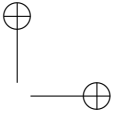
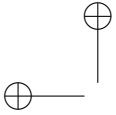
Fordította: Tóth László Márton, Rényi Alfréd Matematikai Intézet

Irodalom

- [1] C. Borgs, J. T. Chayes, L. Lovász, V. T. Sós, and K. Vesztegombi, Convergent sequences of dense graphs. I. Subgraph frequencies, metric properties and testing, *Adv. Math.* **219** (2008), no. 6, 1801–1851. MR 2455626 (2009m:05161)
- [2] L. Lovász, *Large Networks and Graph Limits*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 60, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. MR 3012035
- [3] L. Lovász and B. Szegedy, Limits of dense graph sequences, *J. Combin. Theory Ser. B* **96** (2006), no. 6, 933–957. MR 2274085 (2007m:05132)

Daniel Glasscock az Ohio Állami Egyetem doktorandusz hallgatója volt 2015-ben, amikor a cikk megjelent az AMS-ben. Most Assistant Professor a University of Massachusetts Lowellen. A fordítást a szerző engedélyével közöljük. (A szerk.)

A fenti cikket az Érintő 2024. decemberi számából vettük át.



Tartalom

Kéri Gerzson: Többszörös szögek szögfüggvényeit kifejező polinomok néhány fajtája direktben és faktorizáltan	1
Maga Balázs, Simon L. Péter: Hogyan tanul a neurális háló? . . .	52
Prima Primiissima 2024 – Lajos Józsefné	62
Hujter Mihály: Martin Gardner legkedvesebb fejtörői. Könyvespolc – ajánló	67
Páles Zsolt, Pálffy Péter Pál: Beszámoló a Big Five Centenáriuma rendezvényről	73
Daniel Glasscock: Mi is... a grafon? (ford. Tóth László Márton) .	84

Contents

Some polynomials related to multiple-angle formulas and their factorization	1
How do neural networks learn?	52
Prima prmissima 2024 – Lajos Józsefné	62
Martin Gardner’s Favorite Puzzles – book recommendation	67
Report on the Big Five centenary event	73
What is a graphon?	84