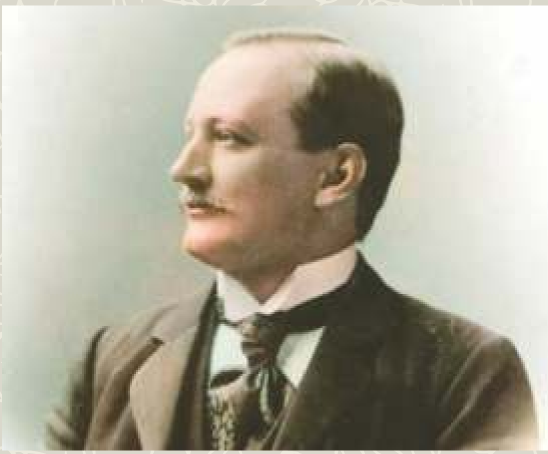
KöMaL

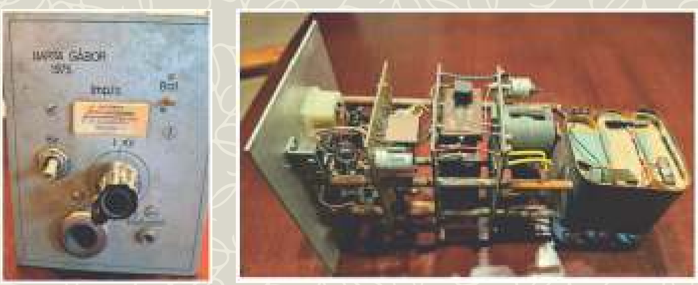
Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

Támogassa lapunk kiadását adója 1%-ával – 18157444-2-43



Rátz László



Egy régi, házi készítésű Geiger–Müller számláló

Az egyetemi felvételi rendszer matematikai háttere

Matematika és fizika feladatok mintamegoldásai

Beszámoló a 12. EGMO matematikaversenyről

160 éve született Rátz tanár úr

73. évfolyam
5. szám
2023.
május

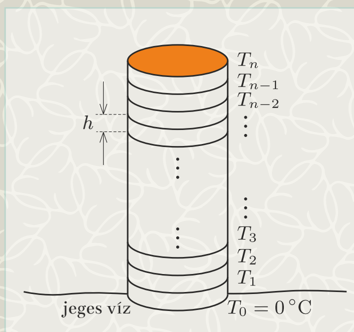
A Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata

EGMO 2023

12. Európai Matematikai Lány Diákolimpia

Díjkiosztó után

A kép a G. 5490-es feladathoz



Ábra a P. 5467-es feladathoz

A KöMaL támogatói
Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő
Kulturális és Innovációs Minisztérium

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

73. évfolyam 5. szám — Budapest, 2023. május

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1100 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 9200 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Rátz tanár úr

160 évvel ezelőtt, 1863. április 9-én született Rátz László, a XX. század egyik legjelesebb matematikatanára, akinek a munkássága még ma is érezteti hatását.

Rátz László fényképe a KöMaL 1930. november 15-i számában

Rátz László Sopronban született, apja Rátz Ágost vaskereskedő volt. E városban végezte elemi és középiskolai tanulmányait is. A Soproni Állami Főreáliskolában még nem a „mértan, mennyiségtan” volt a kedvenc tárgya, nem is igazán volt eredményes benne. 1880-tól azonban már a város evangélikus líceumába járt, a gimnázium utolsó két évét itt végezte el, ahol a matematikához való viszonya gyökeresen megváltozott. Mégpedig az iskola nagy tekintélyű tanárának, a „Nulla bácsi” névvel emlegetett Renner János Istvánnak a hatására. Róla írta egy későbbi tanítványa: „Mathematikát és fizikát tanított, olyan szeretettel s lelkesedéssel, amilyent ezeknél a szárazaknak gondolt studiumoknál szinte alig lehet elképzelni, de amellett kérlelhetetlen szigorusággal. … Előtte nem az volt a fontos, hogy a tananyagot előadja s lemorzsolja az órát, hanem, hogy minden egyes tanítvány, még a leggyengébb is, megértse. … Óráin katonás fegyelmet tartott, s síri csendben kellett várnunk reá. Sok év multán is nem egyikünk álmodta, hogy Nulla bácsinál kellett felelnie mathematikából s ez mindig legsúlyosabb lidércnyomás volt, mert mindenki tudta, hogy nála csak alapos tudással, igazi készültséggel lehet boldogulni.”

E rettegett, de kiváló tanár annyira megváltoztatta Rátz László matematikához való viszonyát, hogy érettségi után matematika–fizika szakra iratkozott be a Budapesti Tudományegyetemre, melynek 1883–1887 között hallgatója volt. Utána egy-egy évet tanult Berlinben filozófiát és Strasbourgban természettudományt. Hazatérése után egy évet a budapesti egyetem Gyakorló Főgimnáziumában – a mai ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnáziumban – töltött tanárjelöltként. Matematika–fizika szakos egyetemi oklevelét 1890-ben szerezte meg, és attól kezdve a nyugdíjazásáig, 35 éven át az Evangélikus Főgimnáziumban tanított, előbb helyettes tanárként, majd 1892. szeptember 1-jétől mint rendes tanár. Ez a mai is gyakran csak „Fasori gimnázium”-ként emlegetett iskolaépület 1904-re készült el, addig a Sütő utcában volt az iskola.

Rátz László egész élete a tanításról, tehetségek felismeréséről, a tehetséges és kevésbé tehetséges gyerekek oktatásáról, neveléséről szólt. Nem alapított családot, az iskola közelében bérelt lakást, így idejének igen nagy részét tudta tölteni az érdeklődő tanulók tehetségének gondozásával.

1909-ben a gimnázium igazgatójává választották, de még mandátumának lejárta előtt, 1914-ben lemondott e posztról, mert úgy érezte, e munkája mellett nem tud elegendő időt és energiát fordítani a tanítványaira. „Biztos kézzel vezette be növendékeit a matematika rejtelmeibe, odaadó tanári munkájával, egyéniségének lenyűgöző erejével, valósággal magával ragadta tanítványait, s tanításának érdekessége és elevensége nem csökkent a haladó idővel sem, fiatalos hévvel tanított utolsó tanári éveiben is. Tanításának fő vonzóereje abban állott, hogy nagy tudományos képzettsége mellett le tudott szállni tanítványainak lelkivilágába, jól megválogatta a tanítási anyagot. … Növendékei sokszor csodálkoztak azon, hogy a matematikát sok helyütt nehéz tárgynak tartják, holott ez szerintük egyike a legkönnyebb és legélvezetesebb disciplináknak.” – írta róla gimnáziumi kollégája Renner János Lajos, Rátz László soproni tanárának fia.

A Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium épülete ma

Híressé vált tanítványai között volt a későbbi Nobel díjas Wigner Jenő, és a Wigner által a „köztünk a legokosabb”-nak nevezett Neumann János is. „A legnagyobb hálát és szeretetet volt tanáraim között Rátz László iránt érezek. Most sokkal mélyebben értem, mint azelőtt, milyen ritka dolog az, hogy valaki lemond egy magasabb állásról – az ő esetében az iskola igazgatóságáról, – és egy szerényebb állást foglal el. Ő szeretett tanítani, szerette látni, mint hatol be a megértés a tanulók tudatába, mint értik meg milyen nagyszerű az, hogy az emberi ész képes egy gondolatot a másikhoz fűzni, képes a következtetésekből csodálatos épületet – erős épületet – alkotni. Sok nagy tudós fejezte ki csodálatát ezen képességeinkkel kapcsolatban, de ő szerette a csodát látni és érezni. Nagyobb dolognak tartotta ezt, mint a csodát csupán felismerni. Rátz László – képe az egyetemen a munkaszobámban van – nem csak az iskolában tanított. Neumann Jánosnak, kinek szinte egyedülálló tehetségét csírájában felismerte, magánórákat adott, nekem több ritka érdekességű könyvet adott olvasásra, és ezekből nem csak matematikát tanultam, de csodálatot is szereztem a következtetések bámulatosan ügyes egymáshozszövése iránt is. Megértettem nagyon korán, hogy ez a matematika lényege, ez a matematikus művészete és kiváltsága.” – emlékezett vissza rá Wigner Jenő.

A 12 éves Neumann János

Rátz tanár úr addig tanította külön is Neumann Jánost, amíg még ő tudott többet. Utána egyetemi tanárokat kért meg, hogy foglalkozzanak a különlegesen tehetséges ifjúval, például Kürschák Józsefet.

De sokak, például Mikola Sándor szerint a matematikai tanóráinál is mélyebb az a hatás, melyet Rátz László a Középiskolai Matematikai Lapok révén az ország matematikai tanítására kifejtett. „20 éven át szerkesztette e lapot. Teljesen önzetlenül csinálta, sem állami, sem másféle segítséget sehonnan sem kapott (de nem is kért), sőt a lap kiadására tetemes összegeket is áldozott. A legnagyobb gonddal válogatta meg a kis folyóirat cikkeit és feladatait, hogy a tanulókban a mathematikai problémák iránt való érdeklődést fölkeltse és az igazi mathematikai gondolkozási mód magvait elhintse. Még nagyobb gonddal és lelkiismeretséggel olvasta át és bírálta meg az ország minden részéből beérkező megoldásokat. Nagy éleslátással mindenkor fel tudta ismerni az igazi tehetségeket, úgyhogy méltán dicsekedhetnék azzal, hogy mindazok, akik az egyetemeken és a főiskolákon mint kiváló mathematikusok kitűntek, majdnem kivétel nélkül az ő lapjának szűkebb gárdájából kerültek ki”, írta Rátz nyugdíjba vonulása alkalmából Mikola, aki iskolatársa volt Rátz Lászlónak a soproni líceumban, a fasori gimnáziumban pedig tanártársa.

Bucsuzásul.

Ide s tova három esztendeje annak, hogy a **Középiskolai Mathematikai Lapok** megalapításának eszméje bennem megérlelődött. Az eszmének testet adott **Gross Gusztáv** urnak áldozatkészsége, ki egy mutatványszámnak kellő számu példányban való elkészítésére a nagyon is kétséges siker reményében vállalkozott S ime a várva várt siker bár lassú, de biztos lépésekkel megjött. Az olvasóknak eleinte csak kicsi, de annál lelkesebb gárdája sorakozott a lap körül, melynek jeligéje volt felkelteni és ápolni a középiskolai mathematikai tanulmányok iránti érdeklődést az ifjuság kebelében az iskola falain kivül is.

De nemcsak az ifjúság karolta fel az uj folyóiratot — serény tevékenységet fejtvén ki a kitűzött feladatok megoldása körül — de a magyar tanárság és a magyar középiskola is meghozta áldozatát, — támogatása által biztosítván a folyóirat fennállhatását.

Eme ifjuságtól és tanároktól, valamint a magyar középiskolák vezetőitől bucsuzom a mai napon, midőn a folyóiratomat utódom, **Rátz László,** budapesti főgymnasiumi tanár ur szakavatott vezetésére bízom.

Csakis az a remény, hogy a folyóirat fejlődése a főváros szellemi életének árjában nagyobb lendületet vesz majd és így hivatását sikeresebben tölti be, késztetett arra, hogy vezetésétől megváljak.

Igaz, hogy ez elhatározásomat a folyóirat uj vezetőjének kiváló ügyszeretete és lelkessége tetemesen könnyebbé tette.

Végre az uj szerkesztő ama megtisztelő bizalma, melylyel a folyóirat további szerkesztésében való részvételre — egyszerü közkatonaként — felszólított, arra késztet hogy a szives olvasónak istenhozzádot csak a viszontlátás reményében mondjak.

Győrött, 1896. márczius hó 15-én.

Olvasóinkhoz!

Midőn a **Középiskolai Mathematikai Lapok** szerkesztését átveszem, nem tartom szükségesnek, hogy részletes programmot adjak. A lap ezentul is a mathematikai tanítás szolgálatában fog állani, iránya nem változik, czélja marad a régi.

Jól ismerem vállalkozásaimnak nehézségeit, de elhatározásomat megkönnyítette azon kedvező körülmény, hogy a lap lelkes alapítója s eddigi buzgó szerkesztője **Arany Dániel** ur ezentul is megmarad főmunkatársnak. Tudását s bő tapasztalatait a legnagyobb készséggel bocsátja a lap rendelkezésére.

A kedvező ilélet, melylyel a hazai sajtó a Középiskolai Mathematikai Lapokat fogadta, mutatja hogy a magyar középiskolának e közlönyre szüksége van. Feladatát azonban csak ugy fogja sikeresen megoldhatni, ha minél szélesebb körökben terjed el s támogatói nem csak **olvassák,** de egyuttal **írják** is a lapot. Ez okból tiszteletteljesen felkérem t. szaktársaimat, főkép pedig a lap eddigi munkatársait, hogy engem nehéz munkámban támogassanak s közleményeikkel a Középiskolai Mathematikai Lapokat felkeresni sziveskedjenek.

Budapest, 1896. márczius hó 15-én.

Rátz László
főgymnásiumi tanár.

Arany Dániel leköszönő és Rátz László üdvözlő levele a Középiskolai Mathematikai Lapokban

Rátz László a Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztését az alapítótól, Arany Dánieltől vette át 1896-ban.

Munkássága alatt olyan későbbi matematikusokat találunk a feladatmegoldók között, mint Riesz Frigyes, Fejér Lipót, Kármán Tódor, Kőnig Dénes, Riesz Marcell, Haar Alfréd, Szegő Gábor.

Több tankönyvet írt, például Mikola Sándorral közösen (*Rátz-Mikola: Az infinitezimális számítás elemei a középiskolában*), de élete nem szorítkozott kizárólag a matematika tanítására. Hegedült és vezette a gimnáziuma Dal- és Zeneegyesületét, lelkes turista is volt. Részt vett kora közoktatási reformjainak kidolgozásában, számos bizottságnak volt tagja.

Rátz Lászlót 1925-ben, 62 éves korában saját kérésére nyugdíjazták. De nyugdíjasként sem szakította meg a kapcsolatát a gimnáziummal, oda gyakorta bejárt, továbbra is élénken érdeklődött az iskolai élet iránt és látta el tanácsokkal, azokat, akik hozzá fordultak. Ő látta el a Volt Növendékek Egyesületének ügyvezető alelnöki tisztét is.

1930-ban nyaralásából hazatérve útközben agyvérzést kapott. Az iskola közelében lévő városligeti szanatóriumba még saját lábán tudott bemenni, de állapota rosszabbodott, és pár hét múlva, szeptember 30-án elhunyt.

A gimnáziumának tanári testülete által kiadott gyászjelentésben ez áll:

„Szellemének és áldásos működésének emléke élni fog iskolánkban, egyházunkban és az egész országban”

És valóban. Az iskolában domborműves emléktábla emlékezik meg Rátz Lászlóról, Budapest XI. kerületében utca viseli a nevét.

2000-ben pedig három nagyvállalat, az Ericsson Magyarország, a Graphisoft és a Richter Gedeon Nyrt. megalapította a Rátz Tanár Úr Életmű Díjat. Ezt a díjat olyan biológiát, matematikát, fizikát vagy kémiát tanító tanárok kaphatják, akik kimagasló oktató-nevelő tevékenységet végeznek vagy végeztek a közoktatásban.

Rátz László emléktáblája a róla elnevezett budapesti utcában

Lapunk hajdani szerkesztőjének nevét viseli a matematika tanárok évenként megrendezésre kerülő Rátz László Vándorgyűlése is.

Források

[1] Kunfalvi Rezső: *Emléküket őrizzük* (KöMaL, 1980. szeptember).
[2] Némethné Pap Kornélia: *Rátz László tanár úr* (Berzsenyi Dániel Főiskola, 2006.).
[3] Renner János: *Rátz László* (KöMaL, 1930. november 15.).
[4] Révész Sándor: *Aki örömöt fakasztott a matekból* (HVG, 2023. április 9.).
[5] *Wigner Jenő saját kézzel írt előadás-vázlata* (KöMaL, 2002. november).

Korándi József

Stabil házasságok avagy hogyan működik a felvételi pontszámhatárok meghatározása

Az érettségi vizsgák eredménye jelentős mértékben meghatározza az egyetemi felvételiken figyelembe vett pontszámokat. Ugyanez igaz a középiskolai felvételi vizsgákra is. De vajon hogyan határozza meg a jelentkező pontszáma és az egyetemek, illetve középiskolák általa megadott sorrendje azt, hogy végül hova veszik fel? Erről szól ez a cikk, pontosabban arról az algoritmusról, aminek segítségével az egyetemeket, illetve középiskolákat és a felvételizőket egymáshoz rendelik.

A különböző országok egyetemei különböző felvételi eljárásokat alkalmaznak, sokszor ez még egy országon belül sem egységes. Ezeket az eljárásokat nehéz összemérni, mert sok szempont szerint hasonlíthatók össze, egyikben az egyik jobb, másikban a másik. Ráadásul egy adott tulajdonság esetén is szubjektív lehet annak megítélése, hogy melyik a jobb. Ennek ellenére megkockáztatom azt a kijelentést, hogy Magyarországon az egyetemi és a középiskolai felvételi eljárás is nagyon igazságos, és közel van az optimálishoz.

Ebben a cikkben csak a felvételi eljárás legvégére koncentrálunk, amikor már minden diáknak megvannak a pontszámai azokra a szakokra, amelyekre jelentkezett, illetve minden diák rangsorolta a szakokat, amelyekre jelentkezett, vagyis megadta, hogy melyik szakra menne a legszívesebben, melyikre a második legszívesebben stb.

Ezek után mindössze a következő elvárást fogalmazzuk meg:

Ne forduljon elő az, hogy a D_1 diákot az E_1 szakra vették fel, a D_2-t pedig az E_2-re, miközben D_1 szívesebben ment volna az E_2-re, mint E_1-re és az E_2 szak is előbbre rangsorolta D_1-et, mint D_2-t.

A *„D_1 szívesebben ment volna az E_2-re”* azt jelenti, hogy D_1 rangsorában az E_2 szak előrébb van, mint az E_1, az *„E_2 szak előbbre rangsorolta D_1-et, mint D_2-t”* pedig azt, hogy a D_1 diák E_2 szakra vonatkozó pontszáma magasabb, mint a D_2 diáké.

Ez a probléma bonyolult ahhoz, hogy itt részletesen tárgyaljuk, ezért ennek egy erősen egyszerűsített változatának megoldására mutatunk egy egyszerű, de hatékony algoritmust. Ezt az egyszerűsített helyzetet a matematikában **stabil házasság problémának** hívjuk, melynek szokásos megfogalmazása a következő:

Adott k nő ($N = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$) és k férfi ($F = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$). Mindenkiről tudjuk, hogy a másik nem tagjait hogyan rangsorolja abból a szempontból, hogy mennyire szívesen kötné össze vele az életét. Minden nő rangsorolja a férfiakat, vagyis minden n_i megad egy teljes $>_{n_i}$ rendezést a férfiakon, és minden férfi rangsorolja a nőket, vagyis minden f_i megad egy teljes $>_{f_i}$ rendezést a nőkön, holtverseny most nem megengedett. Ez felfogható úgy is, hogy minden nő esetében adott F egy permutációja, és minden férfi esetében pedig N egy permutációja. (Az eredeti problémához képest itt a nők az egyetemi szakok és a férfiak a diákok, vagy fordítva. Nyilvánvaló, hogy ez erős egyszerűsítése az eredeti problémának, hiszen ebben az esetben ugyanannyi szak van, mint ahány diák.)

Ezt a kiindulási helyzetet két $k \times k$-s táblázattal kiválóan tudjuk szemléltetni. (Vagyis a bemeneti adatok mérete $2k^2$).

Hogy jobban megértsük az algoritmust, ezért egy konkrét példán végig is nézzük a lépéseit. 5 nő és 5 férfi szerepel a mi történetünkben, vagyis két 5×5-ös táblázat írja le az algoritmus bemeneti adatait:

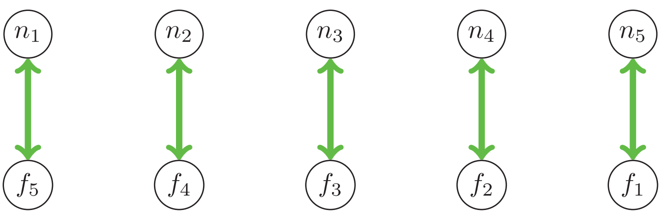
n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
f_4	f_5	f_4	f_3	f_2
f_3	f_4	f_1	f_2	f_5
f_1	f_1	f_2	f_1	f_4
f_2	f_2	f_5	f_5	f_1
f_5	f_3	f_3	f_4	f_3

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
n_1	n_1	n_5	n_4	n_5
n_2	n_4	n_1	n_2	n_2
n_5	n_5	n_3	n_3	n_3
n_4	n_2	n_2	n_5	n_1
n_3	n_3	n_4	n_1	n_4

Ez tehát azt jelenti, hogy n_1 legszívesebben f_4-hez menne feleségül, és legkevésbé f_5-höz, míg f_2-nek n_1 tetszik a legjobban és n_3 a legkevésbé.

Vizsgáljuk meg, hogy egy párbaállítást mikor tekinthetünk stabilnak, vagyis mit jelent az az egyetlen elvárásunk, amit megfogalmaztunk a párosítással kapcsolatban. Azt jelenti, hogy nincs olyan nő és férfi, akik kölcsönösen jobban vonzódnak egymáshoz, mint a párosításbeli párjukhoz. Vagyis nincs olyan n_i és f_j, akiknek a párosításbeli párjaik f_r és n_s, de $f_j >_{n_i} f_r$ és $n_i >_{f_j} n_s$. Ők ugyanis szívesebben elszöknének együtt, minthogy elfogadják az aktuális párjaikat.

Nézzük meg, hogy stabil-e az a párosítás, amikor a párban lévő tagok indexének összege 6:

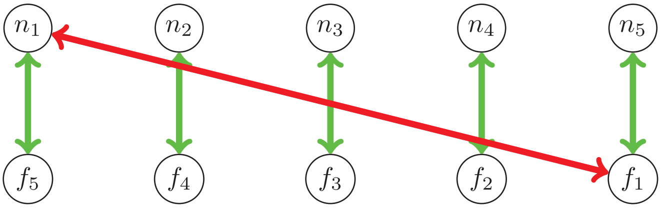


Ez nem stabil, hiszen n_1 és f_1 szívesen elszöknének. Miért? Mert f_1 rangsorában n_1 az első, így megelőzi n_5-öt, és n_1 rangsorában is előrébb van f_1 (a 3. helyen), mint f_5 (aki az utolsó).

(A következő ábrán zöld nyíllal jelöltük a párosítást, pirossal pedig a párt, akik szívesen elszöknének.)

Érdemes megnézni, hogy ha a párokat az azonos indexű nőkből és férfiakból képezzük, akkor az a párosítás stabil lesz-e.

Egy párosítást tehát akkor mondunk stabilnak, ha nincs olyan férfi és nő, akik nem egymás párjai, de együtt szívesen elszöknének.



A feladat a következő: találni egy $h : N \to F$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést (bijekciót), amelyre igaz az, hogy nincs olyan n_i és n_s, hogy

$$h(n_s) >_{n_i} h(n_i) \quad \text{és} \quad n_i >_{h(n_s)} n_s.$$

(Az eredeti jelölések és a h kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés közötti kapcsolat alapján: $f_r = h(n_i)$ és $f_j = h(n_s)$.)

A probléma az 1950-es évek elején már felvetődött és azt a National Resident Matching Program meg is oldotta, orvosrezidenseket és kórházakat párosítva megfelelően.

1962-ben *David Gale* és *Lloyd Shapley* belátta, hogy mindig létezik stabil párosítás, amelyet könnyen meg is lehet találni az azóta **Gale–Shapley algoritmusnak** nevezett eljárással. Később *Alvin E. Roth* Nobel-díjas közgazdász észrevette, hogy ez az algortimus pontosan ugyanaz, amit a National Resident Matching Program 10 évvel Gale és Shapley előtt már alkalmazott.

Az algoritmus a következő:

1. kör

1. lépés: Minden férfi megkéri a listáján első helyen szereplő nő kezét.

2. lépés: Minden nő „feltételesen” elfogadja a számára legkedvezőbb ajánlatot (eljegyzések).

Elképzelhető, hogy egy nő nem kap ajánlatot. Ekkor vár tovább.

Ha egy férfit elutasít egy nő, mert volt kedvezőbb ajánlata, akkor azt a nőt a férfi végleg kihúzza a listájáról.

...

***k*. kör**

1. lépés: Minden nem eljegyzett férfi megkéri a listáján legelöl szereplő nő kezét, akit még nem kért meg.

2. lépés: Minden nő megnézi, hogy az új ajánlatok, illetve az esetleg már meglévő eljegyzés közül melyik a legkedvezőbb a számára, és azt választja. Ha ehhez fel kell bontania a meglévő eljegyzését, akkor felbontja azt.

Addig lesznek újabb és újabb körök, amíg mindenki tagja nem lesz egy párnak. Az is elképzelhető, hogy már az első körben véget ér az algoritmus.

Nézzük meg az algoritmust a mi példánkon:

Az első körben f_1 és f_2 megkéri n_1 kezét, f_3 és f_5 pedig n_5 kezét, míg f_4 ajánlatot tesz n_4-nek.

Jelöljük az ajánlattétel tényét **A**-val egy táblázatban. Ezt követően tegyük meg a második lépést, és jöjjenek létre az eljegyzések, amiket **E**-vel jelölünk. n_1 két ajánlatot is kap, f_1-től és f_2-től. A listáján f_1 előrébb szerepel, mint f_2, így f_1 ajánlatát átmenetileg elfogadja, f_2-t viszont elutasítja. Hasonló történik n_5-tel is, aki f_5 ajánlatát fogadja el és f_3-at utasítja vissza.

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
f_1	**A**				
f_2	**A**				
f_3					**A**
f_4				**A**	
f_5					**A**

$\longrightarrow$

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
f_1	**E**				
f_2					
f_3					
f_4				**E**	
f_5					**E**

Mivel n_1 elutasította f_2-t, n_5 pedig f_3-at, ezért a férfiak ezeket a nőket kihúzzák a listájukról.

Mivel ennek a két férfinak nincs eljegyzése, így ők a listájukon legelöl álló nőnek tesznek ajánlatot. Vagyis f_2 n_4-nek, f_3 pedig n_1-nek.

Mivel n_4 jobban szimpatizál f_2-vel, mint f_4-gyel, ezért felbontja a meglévő eljegyzését. Hasonlóan jár el n_1 is.

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
f_1	**E**				
f_2				**A**	
f_3	**A**				
f_4				**E**	
f_5					**E**

$\longrightarrow$

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
f_1					
f_2				**E**	
f_3	**E**				
f_4					
f_5					**E**

Mivel n_1 elutasította f_1-et, n_4 pedig f_4-et, ezért a férfiak ezeket a nőket kihúzzák a listájukról, és a következő körben ők kérik meg az aktuális listájukon legelőkelőbb helyen álló nő kezét, vagyis mindketten n_2-ét. n_2 a saját listája alapján f_1-et elutasítja, f_4-gyel eljegyzi magát:

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
f_1		**A**			
f_2				**E**	
f_3	**E**				
f_4		**A**			
f_5					**E**

$\longrightarrow$

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
f_1					
f_2				**E**	
f_3	**E**				
f_4		**E**			
f_5					**E**

Mivel f_1-nek nincs eljegyzése, ezért ő ajánlatot tesz n_5-nek, mivel ő a legelöl álló hölgy a listáján. (n_1-et és n_2-t már kihúzta a listáról.)

Mivel n_5 listáján előbb szerepel f_5, mint f_1, így nem bontja fel a meglévő eljegyzését, hanem elutasítja f_1-et.

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
f_1					**A**
f_2				**E**	
f_3	**E**				
f_4		**E**			
f_5					**E**

$\longrightarrow$

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
f_1					
f_2				**E**	
f_3	**E**				
f_4		**E**			
f_5					**E**

Így megint csak f_1 tesz ajánlatot, mégpedig n_4-nek, de most sem jár sikerrel, mert n_4 előbbre rangsorolta f_2-t, így ő sem bontja fel az eljegyzését.

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
f_1				**A**	
f_2				**E**	
f_3	**E**				
f_4		**E**			
f_5					**E**

$\longrightarrow$

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
f_1					
f_2				**E**	
f_3	**E**				
f_4		**E**			
f_5					**E**

Az utolsó lépéshez érkeztünk, f_1 végső elkeseredésében ajánlatot tesz n_3-nak, akinek nincs eljegyzése és más ajánlata sem, így jobb híján elfogadja f_1 ajánlatát.

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
f_1		**A**			
f_2				**E**	
f_3	**E**				
f_4		**E**			
f_5					**E**

$\longrightarrow$

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
f_1			**E**		
f_2				**E**	
f_3	**E**				
f_4		**E**			
f_5					**E**

Így tehát azt kaptuk, hogy az n_1–f_3, n_2–f_4, n_3–f_1, n_4–f_2, n_5–f_5 egy stabil párosítás, senki nem akar elszökni senkivel.

Ez a „hagyományos" modell volt, hiszen a férfiak kérték meg a nők kezét. Ha a nők kérnék meg a férfiak kezét – ki lehet próbálni –, akkor is a fenti párosítást kapnánk.

Ez alapján felmerülhet az a sejtés, hogy mindig pontosan egy stabil párosítás létezik. Ez sejtés azonban gyorsan hamisnak bizonyul.

Vegyük a következő nagyon egyszerű példát: összesen két férfit és két nőt akarunk összeházasítani. A bemeneti adatokat a következő két egyszerű táblázat tartalmazza:

n_1	n_2
f_2	f_1
f_1	f_2

f_1	f_2
n_1	n_2
n_2	n_1

Mi történik, ha a férfiak tesznek ajánlatot? Akkor az első kör első lépésében mindkét nő egy-egy ajánlatot kap, így az algoritmus egy lépésben véget is ér, a kapott párosítás: f_1–n_1, f_2–n_2.

Mi történik, ha a nők tesznek ajánlatot a férfiaknak? Akkor az első kör első lépésében mindkét férfi egy-egy ajánlatot kap, így az algoritmus ekkor is egy lépésben véget ér, de a kapott párosítás: f_1–n_2, f_2–n_1.

A stabil párosítás nem mindig egyértelmű, de azt Gale és Shapley bebizonyította, hogy ilyen feltételek mellett mindig létezik megfelelő párosítás, és egy párosítást a fenti algoritmus meg is talál (méghozzá a bemeneti adatok számától lineárisan függő számú lépésben).

A fenti nagyon egyszerű példában az látszik, hogy ha a férfiak tesznek ajánlatot, akkor nekik kedvez az algoritmus (mindkét férfi a számára szimpatikusabb nővel került párba), ha pedig a nők teszik az ajánlatot, akkor nekik kedvez (mindkét nő a számára szimpatikusabb férfival került párba).

Ez általában is igaz. Mit jelent az, hogy a nőknek kedvez az algoritmus? Azt, hogy ha P_n az a stabil párosítás, amelyet úgy kaptunk, hogy a nők tettek ajánlatot, akkor nincs olyan P stabil párosítás, amelyben van olyan nő, akinek ott számára kedvezőbb párja van, mint P_n-ben. Vagyis ha vesszük az összes stabil párosítást, és megnézzük, hogy melyik nőnek kik a párjai valamelyik stabil párosításban, akkor P_n-ben ezek közül a lehetséges párok közül a saját rangsorában a legjobbat kapja meg párként.

Nézzük még meg azt, hogy miben különbözik az egyetemi felvételi rendszere a stabil párosítási problémától:

- Az egyetemi szakok és a felvételiző diákok száma nem egyezik meg.
- Az egyetemi szakokra nem egy diákot vesznek fel, hanem többet, és meg van határozva egy maximális létszám, ahány diákot fel lehet venni az adott szakra.
- A felvételizők szigorú rendezést adnak meg a számukra szimpatikus egyetemi szakok között, ahogy ez a stabil házasság problémában is szerepel. Azonban az egyetemek úgy rangsorolják a diákokat, hogy lehet közöttük holtverseny, hiszen lehet két diáknak azonos felvételi pontszáma egy adott szakra.

Tekintsünk el most az utolsó különbségtől. Ekkor az algoritmust tudjuk módosítani úgy, hogy továbbra is működjön.

Most tehát vannak az egyetemi szakok ($S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$), ezekhez adottak pozitív egészek ($M = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$) úgy, hogy az s_i szakra legfeljebb m_i diákot lehet felvenni. Illetve adottak a diákok ($D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$). Tegyük fel továbbá, hogy minden diák azokat a szakokat rangsorolta, ahová szívesen menne (nincs tehát diákonként az összes szak rendezve), illetve minden szak szigorúan rangsorolja a diákokat, akik oda jelentkeztek.

Gondoljunk most minden s_i szakra úgy, hogy hozzá van rendelve egy terem, amelyben 1-től m_i-ig számozott székek vannak.

Az első körben minden diák odamegy annak a szaknak a terméhez, amelyet elsőnek jelölt meg. Minden s_i szak terménél sorbarendezik a diákokat az s_i szakra szóló pontszámuk alapján (itt most nem lehet holtverseny). Az első m_i ember leül a székekre a sorrendnek megfelelően. A többieket az s_i szak elutasítja, és ők kihúzzák a listájukról ezt a szakot, oda már biztosan nem fogják felvenni őket.

A második körben azok, akik nem ülnek valamelyik teremben, megnézik, hogy melyik a következő szak a rangsorukban, és odamennek annak a szaknak a terméhez. Most minden s_i szak terménél az összes ott lévő diákot (tehát azokat, akik eddig a teremben voltak és azokat, akik most érkeztek) újra rendezzük, és megint az első m_i diák ül le a székekre. Vagyis a most érkezők kiszoríthatják azokat, akik már eddig ott ültek, ha magasabb a pontszámuk (előrébb vannak a szak listáján). Akik a rendezés után nem jutnak székhez, azokat az adott szak elutasítja, és ezek a diákok ezt a szakot kihúzzák a listájukról.

A további körök pontosan ugyanígy zajlanak egészen addig, amíg van még olyan diák, aki nem ül egyik teremben sem és van még a listáján szak. Amikor már nincs ilyen diák, akkor az algoritmus véget ér.

Elképzelhető, hogy az algoritmus legvégén valamelyik terem nem telik meg, maradnak üres székek. Ekkor az adott szakra nem sikerül felvenni a maximálisan lehetséges számú diákot. Sajnos az is elképzelhető, hogy egy diákot az összes listáján lévő szaknál elutasítanak.

A fenti algoritmus a diákoknak kedvez. Ez azt jelenti, hogy ha veszünk egy tetszőleges diákot, és megnézzük az összes lehetséges „stabil párosításban", hogy hová vették volna fel, akkor ez az algoritmus olyan párosítást ad, amely ezek közül a szakok közül a diák által legelőrébb rangsorolt szakot rendeli a diákhoz.

Belátható, hogy ez az algoritmus véges sok lépésben véget ér, és megfelel annak a feltételnek, amit a legelején megfogalmaztunk. Ennek átgondolását az olvasóra bízzuk.

Fontos felhívni a figyelmet arra a momentumra, hogy ha valaki egy adott terembe csak egy későbbi körben érkezik, de magas pontszáma van, akkor kiszorítja azokat, akik esetleg már körök óta ott vannak (vagyis a listájukon előrébb szerepelt az a szak), de alacsonyabb a pontszámuk, mint a később érkezőnek. Ez az oka annak, hogy nem érdemes azt a taktikát követni ebben a rendszerben, hogy első helyre olyan szakot ír a felvételiző, ahová jó eséllyel felveszik, és a rizikósabb szakokat hátrább rangsorolja. Azt kell az első helyre írni, ahová a felvételiző a leginkább menni szeretne, függetlenül attól, hogy mekkora az esélye az adott szakra bekerülni. Semmilyen mértékben nem rontja a felvételi esélyeit a diák egy hátrébb rangsorolt szakon azzal, hogy voltak számára előrébb rangsorolt szakok is.

Végezetül ejtsünk pár szót a holtversenyekről, mert Magyarországon elképzelhető, hogy több diáknak is ugyanannyi pontja van egy adott szakra. Az aktuális szabály az, hogy az azonos ponttal rendelkező diákokkal szemben egyformán kell viselkednie a szaknak, vagyis ha két diáknak ugyanaz a pontszáma, akkor vagy mindkettőt fel kell venni, vagy mindkettőt el kell utasítani. Ez nem elhanyagolható nehézség, ha ezt a problémát is kezelni akarjuk, akkor egy bonyolultabb algoritmust kell választanunk.

A holtversenyek kezelésére a különböző országok különböző stratégiákat alkalmaznak. Van, ahol az a szabály, hogy ha a határon holtverseny van, akkor mindenkit fel kell venni az adott pontszámmal, azaz növelni kell a megfelelő keretszámot. Van, ahol épp az ellenkezője történik, vagyis akkor az adott pontszámmal senkit nem vesznek fel. Előfordul olyan is, ahol ilyen esetekben sorsolással döntenek.

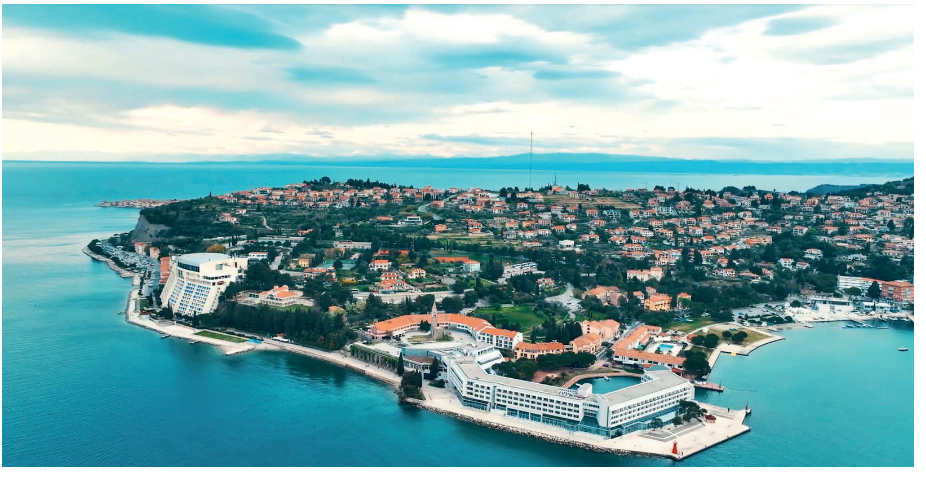
A holtversenyek problémáját el lehet úgy kerülni, hogy a pontszámítás lényegében kizárja, hogy azonos pontszáma legyen két diáknak. Illetve az is egy létező módszer, hogy a pontszám mellett egy második tényező (pl. születési dátum) is szerepet játszik a szigorú rangsor kialakításában, mert elég valószínűtlen az, hogy két azonos pontszámú diák napra pontosan egykorú is legyen.

Magyarországon még legalább két tényező bonyolítja a helyzetet. Az egyik, hogy vannak olyan szakok, ahol alsó korlátja is van a létszámnak, vagyis a szak nem indul el, ha nem tudnak megfelelő számú hallgatót felvenni. A másik, hogy az államilag finanszírozott helyek teljes számára is létezik egy közös felső korlát.

Juhász Péter

Beszámoló a 2023-as EGMO versenyről

Az idei Európai Leány Matematikai Diákolimpia (EGMO) 2023. április 13. és 19. között került megrendezésre Szlovéniában, Portorožban. Idén 55 ország 213 versenyzője kezdett neki a feladatok megoldásának.



Portorož

A magyar csapat nagyon szép teljesítménnyel, két arany-, egy ezüst- és egy bronzéremmel tért haza, ezzel az összes (55) résztvevő ország között 9., míg az európai országok (38) között 6. helyezést szerezve. Az eredmények:
Fülöp Csilla (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn.) 40 ponttal aranyérmet,
Sztranyák Gabriella (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn.) 38 ponttal aranyérmet,
Wiener Anna (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.) 35 ponttal ezüstérmet,

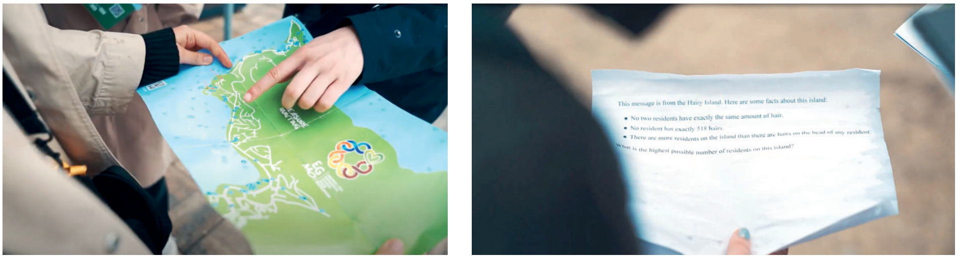
Kercsó-Molnár Anita (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.) 19 ponttal bronzérmet szerzett.

Köszönjük a Morgan Stanley és A Gondolkodás Öröme Alapítvány támogatását!

A versenyzők beszámolója alább olvasható.

❄

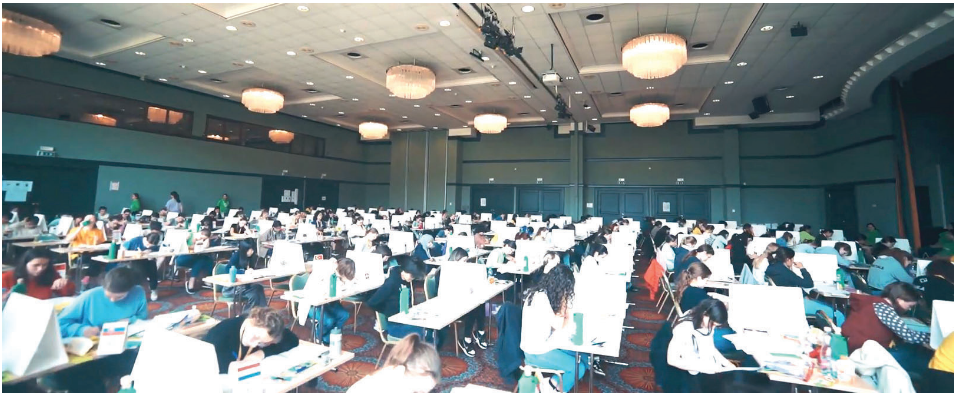
Legtöbben április 13-án, csütörtökön találkoztunk Budapesten, és indultunk neki a 7,5 órás vonatútnak Ljubljanába. Elsőre riasztóan hosszúnak tűnt, de elütöttük az időt beszélgetéssel és különböző játékokkal. A szervezők a vasútállomáson vízzel és édességekkel vártak minket, így mindenki új erőre kapott és készen álltunk a Portorožba vezető buszútra. Anitával és Zsuzsával a hotelben találkoztunk, így teljessé vált a csapat. A guideunk nagyon aranyos volt, előre tudta mindenki nevét és segített megtalálni a szobáinkat. Minden szoba különböző szinten volt, Anita és Panka egy valamivel nagyobb szobát kapott a hajókra néző kilátással, Zsuzsa, illetve Gabi és Csilla gyönyörű erkélyeket is kaptak, amik a pár méterrel előttük elterülő tengerre néztek. Sajnos Melinda nem velünk, hanem a szomszédos hotelben aludt, de csak egy rövid séta választott el minket.



Kincskeresők

A másnap reggelt egy treasure hunttal indítottuk, és Portorož és a szomszédos Piran között vezető útvonalon különböző rövid feladatokat csinálhattunk meg, például tollakat kellett üvegekbe beleejtenünk vagy magunkból ki kellett raknunk az EGMO betűit. Délután részt vettünk a megnyitón: néhány beszéd és zenés produkció után minden ország versenyzői kimentek a színpadra, feltartották a zászlójukat és megtapsoltuk őket. Zárásként mindenki odaállt a színpad elé, és készült egy nagy csoportkép.

Előző este Melinda és Zsuzsa jótanácsokkal („Nagy, SZERKESZTETT ábra; ...”) látott el bennünket és megbeszéltük, hogy mire figyeljünk majd a versenyen. Most viszont csak egy-egy bátorító ölelést adtak, mert Melinda már ismerte a feladatokat, és hamar szerettünk volna aludni menni, hogy a lehető legkipihentebbek lehessünk másnap. Ez egészen jól sikerült, és a feladatok is nekünk kedveztek: a legnehezebbnek szánt feladat egy kombinatorika volt, amit míg több ország tényleg a legnehezebbnek tartott, szerintünk viszont egy megoldható feladat volt. Délután különböző workshopokon vehettünk részt, Gabi és Csilla például fürdőbombákat készített.



Feladatmegoldás közben

Vasárnap volt a második versenynap, ahol az utolsó geometria feladat mindenki szerint nehéz volt, sokat gondolkodtunk rajta, és a versenyen senki sem oldotta meg teljesen, de Gabi még aznap este talált egy rövid befejezést a megoldáskezdeményére. Utána újabb programokat szerveztek nekünk: lehetett például kulcstartókat és karkötőket készíteni vagy ajakírt főzni.

Amíg a csapatvezetőink a dolgozatainkat javították, mi elmentünk Ljubljanába, ahol egy idegenvezetővel együtt megnéztünk egy random utcát („In these schools they didn’t teach the girls mathematics and geometry because they thought they couldn’t comprehend it *koponya megkocogtatása mutatóujjal*”), egy lakatos hidat („Ljubljana was protected by a city wall, this might be familiar for Europeans”), a várat („Ljubljana’s mascot and protector is a dragon but this here is a painting of Saint George who slayed the dragon. So my question is: is this dragon here a good dragon or a bad dragon? Do you understand my problem?”, „It wasn’t very comfortable, actually it was very uncomfortable, in those times safety was much more important. Ljubljana was very small and a lot of people lived here, so every bit of space was needed. For example some craftsmen rented the space under the stairs for their workplace.”) Ezután elmentünk a folyón hajókázni, és megettük a szendvicsünket (erre utasítva voltunk). Végül a WOOP! Arénába mentünk, ahol lehetett például szabadulószobába menni vagy laser tagezni. Gabi és Csilla lekésték a jelentkezést, így már csak bowlingozni tudtak volna, ezért inkább elmentek vásárolni.

Estére Zsuzsa és Melinda végeztek a koordinálással és megszavazták a ponthatárokat, így másnap együtt mentünk a „Kissárkány”-barlangba (Postojna). Ez egy cseppkőbarlang, ahol kis sárkányok élnek, amik igazából barlangi gőték. Kisvonattal mentünk be és ki, közte sétáltunk és hallgattuk a túravezetőnk és egyéb túravezetők magyarázását, amiben (ljubljanai idegenvezetőnkéhez hasonlóan) meglehetősen sok szó esett sárkányokról.

Barlangi kisvonat és a „sárkány”

Délután volt a closing ceremony, ahol a kivetítőn sajnos Anita neve mellett Brazíliát tüntették fel. Egyébként beszédek voltak (egyet elvileg a ChatGPT írt), hárfázás, világítós táncolás, az érmek átadása és fárasztó zászlótartás. Az ünnepség és sok sorban állás után fényképezkedés következett. (Anita betegen érkezett a versenyre, ezért a programoknak csak egy részén tudott részt venni, emiatt nem tudott megjelenni a keddi díjkiosztón sem.)

Ezután került sor a búcsúvacsorára, ahonnan a magyar csapat szokás szerint késett, de szerencsére nem ettek meg addigra mindent a többiek. Így legalább nem kellett sorban állnunk, hiszen már mindenki vett az ételekből. Az estét egy buli zárta, ahol a hotel halljában táncoltunk, beszélgettünk és tortát, koktélokat (természetesen alkoholmenteset) fogyasztottunk. A hangulat olyan jó volt, hogy a bulit több mint másfél órával tovább tartották a tervezettnél, és nagyjából 5 „utolsó dalt” kaptunk.

Szerdára már csakis a hazautazás maradt, egy újabb 7,5 órás vonatút fél óra késéssel megtoldva, így 8 kerek órát tölthettünk egy kis fülkébe zárva. Nem nagyon volt olyan pillanat, amikor mindenki ébren volt, de legalább valamennyire ki tudtuk pihenni magunkat, és felidéztük az elmúlt hét legemlékezetesebb eseményeit.

❄

A jövő évi verseny Grúziában kerül megrendezésre 2024 áprilisában. A válogatási folyamat és a felkészítő program részleteiért a

`https://cms.renyi.hu/olimpiak/`

oldal EGMO fülét érdemes ellenőrizni 2023. július közepétől. ☺

Bátran jelentkezzetek, a felkészülésbe szívesen várunk minden olyan lányt, akit érdekelne a versenyen való részvétel lehetősége vagy csak szeretne több időt tölteni komolyabb matematikafeladatok megoldásával.

A magyar küldöttség: Baran Zsuzsanna (helyettes csapatvezető), Fülöp Csilla, Sztranyák Gabriella, Wiener Anna, Kercsó-Molnár Anita, Kiss Melinda (csapatvezető), Csahók Tímea (koordinátor)

Kiss Melinda Flóra és **Baran Zsuzsa**
az EGMO felkészítő csapat nevében

Az EGMO 2023 feladatai

Első nap

1. feladat. Adott $n \geqslant 3$ darab pozitív valós szám, $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Minden $1 \leqslant i \leqslant$ $\leqslant n$-re legyen $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ (itt az a_0-t a_n-nek definiáljuk, az a_{n+1}-et pedig a_1-nek). Tegyük fel, hogy tetszőleges $1 \leqslant i, j \leqslant n$ esetén $a_i \leqslant a_j$ pontosan akkor teljesül, ha $b_i \leqslant b_j$ teljesül.

Bizonyítsuk be, hogy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2. feladat. Adott az ABC hegyesszögű háromszög. Legyen D az a pont a körülírt körén, amire AD átmérő. A K és L pontok rendre az AB, illetve AC szakaszokon helyezkednek el úgy, hogy DK és DL érintik az AKL háromszög körülírt körét.

Bizonyítsuk be, hogy a KL egyenes átmegy az ABC háromszög magasságpontján.

Egy háromszög magasságpontja a magasságvonalak metszéspontja.

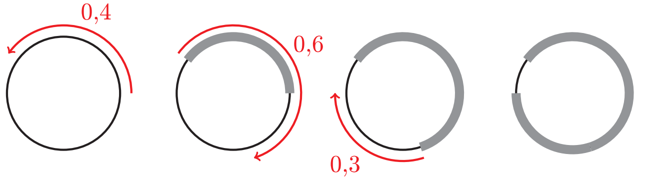
3. feladat. Legyen k egy pozitív egész szám. Lexinek van egy $\mathcal{D}$ szótára, ami valahány k betűs szóból áll és minden szó csak az A és B betűket tartalmazza. Lexi szeretné egy $k \times k$-as rács minden mezőjére vagy az A vagy a B betűt beleírni úgy, hogy mindegyik oszlop egy $\mathcal{D}$-beli szót tartalmazzon felülről lefelé olvasva, és mindegyik sor egy $\mathcal{D}$-beli szót tartalmazzon balról jobbra olvasva.

Mi az a legkisebb m egész, amire teljesül, hogy ha $\mathcal{D}$ tartalmaz legalább m különböző szót, akkor Lexi ki tudja tölteni a rácsot ezen a módon, függetlenül attól, hogy milyen szavak vannak $\mathcal{D}$-ben?

Második nap

4. feladat. Turbó, a csiga egy körvonal egyik pontján ül, melynek kerülete 1. Pozitív valós számok adott $c_1; c_2; c_3; \dots$ végtelen sorozatára Turbó egymás után megteszi a $c_1; c_2; c_3; \dots$ távolságokat a körvonalon, minden alkalommal eldöntve, hogy az óramutató járásával megegyező, vagy ellentétes irányban mászik.

Például, ha a $c_1; c_2; c_3; \dots$ sorozat a $0{,}4; 0{,}6; 0{,}3; \dots$ sorozat, akkor Turbó elkezdheti a mászást az alábbi módon:



Határozzuk meg azt a legnagyobb $C > 0$ konstanst, melyre a következő teljesül: pozitív valós számok tetszőleges $c_1; c_2; c_3; \dots$ sorozatára, ahol $c_i < C$ minden i-re, Turbó biztosítani tudja (a sorozat tanulmányozása után), hogy van egy pont a körvonalon, amin sosem fog tartózkodni és amin sosem fog átmászni.

5. feladat. Adott egy $s \geqslant 2$ pozitív egész szám. Tetszőleges k pozitív egésznek definiáljuk a *csavartját,* k'-t az alábbi módon: írjuk fel a k számot $as + b$ alakban, ahol a, b nemnegatív egészek és $b < s$, ekkor a csavartja $k' = bs + a$. Az n pozitív egészre tekintsük azt a $d_1, d_2, \dots$ végtelen sorozatot, amire $d_1 = n$ és d_{i+1} a d_i-nek a csavartja minden i pozitív egészre.

Bizonyítsuk be, hogy ebben a sorozatban pontosan akkor szerepel az 1, ha az n-nek az $s^2 - 1$-gyel való osztási maradéka 1 vagy s.

6. feladat. Legyen ABC egy háromszög, melynek a körülírt köre Ω. Jelölje rendre S_b és S_c a felezőpontját annak az AC, illetve AB ívnek, ami nem tartalmazza a harmadik csúcsot. Jelölje N_a a felezőpontját a BAC ívnek (a BC ívnek, ami A-t tartalmazza). Legyen I az ABC háromszög beírt körének középpontja. Legyen ω_b az a kör, ami érinti AB-t és belülről érinti Ω-t az S_b-ben, és legyen ω_c az a kör, ami érinti AC-t és belülről érinti Ω-t az S_c-ben. Mutassuk meg, hogy az ω_b és ω_c körök metszéspontjain átmenő egyenes és az IN_a egyenes az Ω körön metszik egymást.

A beírt kör az a kör a háromszögben, ami a háromszög mindhárom oldalát érinti.

Megoldásvázlatok a 2023/4. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Három testvér, Dia, Viki és Dávid Keszthelyről Balaton körüli kerékpártúrára egyszerre indul. Dia* 20 km/h *sebességgel haladva* 18 *óra* 30 *perckor, Dávid* 35 km/h *sebességgel tekerve* 14 *órakor ért haza. Mekkora sebességgel haladt Viki, ha ő pontosan* 15 *órakor ért vissza Keszthelyre?* (*12 pont*)

Megoldás. Jelöljük a Balaton körút hosszát km-ben mérve s-sel. Mivel Dávid menetideje $\frac{9}{2}$ órával kevesebb, mint Diáé, ezért

$$\frac{s}{20}-\frac{s}{35}=\frac{9}{2}.$$

Ebből $s=210$, amit felhasználva Dávid menetideje $\frac{210\ \text{km}}{35\ \text{km/h}}=6$ óra. Így Vikinek 7 óra állt rendelkezésre az út megtételére, ezért az ő sebessége $\frac{210\ \text{km}}{7\ \text{h}}=30$ km/h volt.

2. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:*

$$\frac{x^2+x-2}{-x^2+5x-4}+\frac{-2x^2+9x-4}{2x^2+3x-2}=2. \qquad \textit{(13 pont)}$$

Megoldás. A másodfokú kifejezéseket szorzattá alakítva:

$$\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(4-x)}+\frac{(2x-1)(4-x)}{(2x-1)(x+2)}=2.$$

Ez alapján az egyenlet értelmezési tartománya: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-2;\frac{1}{2};1;4\right\}$.

Az egyszerűsítéseket elvégezve:

$$\frac{x+2}{4-x}+\frac{4-x}{x+2}=2,$$

majd a nevezőkkel beszorozva:

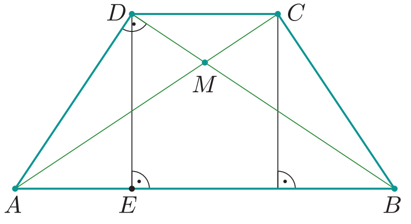
$$(x+2)^2+(4-x)^2=2(x+2)(4-x),$$
$$x^2+4x+4+16-8x+x^2=2(-x^2+2x+8),$$
$$4x^2-8x+4=0,$$
$$4(x-1)^2=0,$$

amiből $x=1$ adódik. Mivel $x\notin D$, ezért az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán.

3. *Az $ABCD$ húrtrapéz D-ből induló magasságának talppontja az AB alapon E, átlóinak metszéspontja M. Tudjuk, hogy $AE=4$, $EB=9$ és $BDA\sphericalangle=90°$.*

a) Mekkora a trapéz területe? (*6 pont*)

b) Bizonyítsuk be, hogy az MDA háromszög területe mértani közepe az MAB és MCD háromszögek területének. (*7 pont*)



1. ábra

Megoldás. *a*) Az ABD derékszögű háromszögre alkalmazva a magasságtételt:

$$DE=\sqrt{AE\cdot EB}=\sqrt{4\cdot 9}=6,$$

$$CD=AB-2AE=13-2\cdot 4=5,$$

így az $ABCD$ trapéz területe

$$t=\frac{AB+CD}{2}\cdot DE=\frac{13+5}{2}\cdot 6=54.$$

b) A húrtrapéz tengelyes szimmetriáját felhasználva: $T_{MDA}=T_{MBC}$. Másrészt

$$\frac{T_{MDA}}{T_{MCD}}=\frac{MA}{MC}=\frac{T_{MAB}}{T_{MBC}}.$$

A felírt két összefüggés alapján:

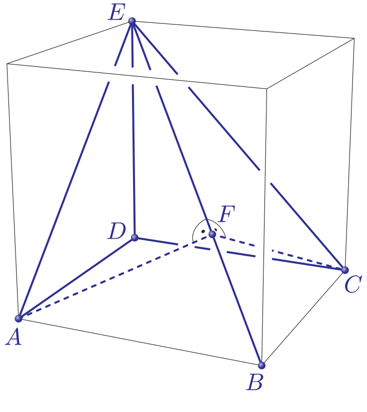
$$T_{MDA}\cdot T_{MBC}=T_{MAB}\cdot T_{MCD},$$

$$(T_{MDA})^2=T_{MAB}\cdot T_{MCD},$$

$$T_{MDA}=\sqrt{T_{MAB}\cdot T_{MCD}},$$

ezzel az állítást beláttuk.

4. *Egy gúla alaplapja egység oldalú négyzet. Egyik oldaléle szintén egységnyi hosszúságú és egybeesik a gúla magasságával. Mekkora a gúla szomszédos lapjai által bezárt szögek közül a legnagyobb?* (*13 pont*)



2. ábra

Megoldás. A *2. ábra* szerint a gúlát egy egység élű kockából származtathatjuk. $ABCD$ a gúla alaplapja, ED a magassága, $EA=EC=\sqrt{2}$ a kocka lapátlói, $EB=\sqrt{3}$ pedig a kocka testátlója.

Az EDA és ECD lapsíkok az alapsíkra és egymásra is merőlegesek. Az EAB sík az alaplap síkjával és az ECD lappal 45°-os szöget zár be, míg az EDA lapra merőleges. Hasonlóan, az EBC sík az alaplap síkjával és az EDA lappal 45°-os szöget zár be, az ECD lapra pedig merőleges. Ezért várhatóan az EAB és EBC lapok hajlásszöge a gúla keresett szöge. Ennek a szögnek a kiszámításához állítsunk A-ból és

C-ből merőlegest az EB élre. A kocka szimmetriája alapján ezek közös F pontban metszik az EB élt. Az FAB és FEA derékszögű háromszögek alapján a $BF = x$ jelölést bevezetve:

$$AF^2 = 1^2 - x^2 \quad \text{és} \quad AF^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3} - x\right)^2,$$

ezek felhasználásával

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{és} \quad AF = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Az FAC háromszögre alkalmazva a koszinusztételt, következik, hogy

$$\cos CFA\sphericalangle = \frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}{2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{2},$$

ahonnan $CFA\sphericalangle = 120°$.

A gúla szomszédos lapjai által bezárt legnagyobb szög $120°$.

II. rész

5. *Blicc úr minden hétköznap villamossal megy dolgozni, de sohasem vesz jegyet. A villamosra minden nap p valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor* 7000 Ft*-ra bünteti meg a jegy nélkül utazókat. Egy villamosjegy* 350 Ft*. Annak a valószínűsége, hogy Blicc úrnak büntetésmentes hete lesz:* 0,1935.

a) Adjuk meg p értékét. (*3 pont*)

b) Mennyi az esélye annak, hogy Blicc urat pontosan kétszer büntetik meg a következő héten? (*3 pont*)

c) Blicc urat április elsején megbüntették. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Blicc úrnak anyagilag megéri, ha a büntetés után még három hétig jegy nélkül utazik? (*4 pont*)

d) Hány utazás után lesz legalább 99,99% *az esélye annak, hogy Blicc úr nem ússza meg a büntetést?* (*6 pont*)

Megoldás.

a)

$$(1-p)^5 = 0{,}1935,$$
$$1 - p = 0{,}72,$$
$$p = 0{,}28.$$

b)

$$P = \binom{5}{2} \cdot 0{,}28^2 \cdot 0{,}72^3 = 0{,}2926.$$

c) Blicc úrnak legalább 21-szer kell büntetésmentesen utazni, ennek esélye:

$$0{,}72^{21} = 0{,}0010.$$

$d)$

$$\begin{aligned} P(\text{megússza a büntetést}) &\leqslant 0{,}0001,\\ 0{,}72^n &\leqslant 0{,}0001,\\ \lg 0{,}72^n &\leqslant \lg 0{,}0001,\\ n\cdot\lg 0{,}72 &\leqslant \lg 0{,}0001,\\ n &\geqslant \frac{\lg 0{,}0001}{\lg 0{,}72}\approx 28{,}04. \end{aligned}$$

A 28. utazás után következik be a feladat követelménye szerinti feltétel.

6. *Számológép használata nélkül határozzuk meg az alábbi kifejezések pontos értékét:*

a)
$$\log_2\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+$$
$$+\log_2\left(1+\frac{1}{14}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{15}\right); \qquad (3\ pont)$$

b)
$$\log_{36}1+\log_{36}2+\log_{36}3+\log_{36}4+\log_{36}6+\log_{36}9+$$
$$+\log_{36}12+\log_{36}18+\log_{36}36; \qquad (4\ pont)$$

c)
$$2^{\lg 2}\cdot\left(2^{\lg 5}+5^{\lg 2}\right); \qquad (4\ pont)$$

d)
$$\log_2 25\cdot\log_3 16\cdot\log_5 27. \qquad (5\ pont)$$

Megoldás.

a)
$$\log_2\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\log_2\left(1+\frac{1}{14}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{15}\right)=$$
$$=\log_2\frac{2}{1}+\log_2\frac{3}{2}+\ldots+\log_2\frac{15}{14}+\log_2\frac{16}{15}=$$
$$=\log_2\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{15}{14}\cdot\frac{16}{15}\right)=\log_2 16=4.$$

b)
$$\log_{36}1+\log_{36}2+\log_{36}3+\log_{36}4+\log_{36}6+$$
$$+\log_{36}9+\log_{36}12+\log_{36}18+\log_{36}36=$$
$$=(\log_{36}1+\log_{36}36)+(\log_{36}2+\log_{36}18)+$$
$$+(\log_{36}3+\log_{36}12)+(\log_{36}4+\log_{36}9)+\log_{36}6=$$
$$=4\log_{36}36+\log_{36}6=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}.$$

c)
$$2^{\lg 2}\cdot\left(2^{\lg 5}+5^{\lg 2}\right)=2^{\lg 2}\cdot\left(5^{\lg 2}+5^{\lg 2}\right)=$$
$$=2^{\lg 2}\cdot 2\cdot 5^{\lg 2}=2\cdot 10^{\lg 2}=2\cdot 2=4.$$

$d)\quad \log_2 25 \cdot \log_3 16 \cdot \log_5 27 = \dfrac{\lg 25}{\lg 2} \cdot \dfrac{\lg 16}{\lg 3} \cdot \dfrac{\lg 27}{\lg 5} = \dfrac{\lg 16}{\lg 2} \cdot \dfrac{\lg 27}{\lg 3} \cdot \dfrac{\lg 25}{\lg 5} =$

$$= \log_2 16 \cdot \log_3 27 \cdot \log_5 25 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

7. *Adottak a $k_1 : x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ és $k_2 : x^2 + y^2 - 12x + 12y + 63 = 0$ egyenletű körök. Tükrözzük k_1-et a $P(1;5)$ pontra, a kapott kört jelölje k_1'.*

a) Írjuk fel k_1' egyenletét. (*5 pont*)

Megrajzolva a k_1' és k_2 körök két-két közös belső és külső érintőit, azok rendre a Q és az R pontban metszik egymást.

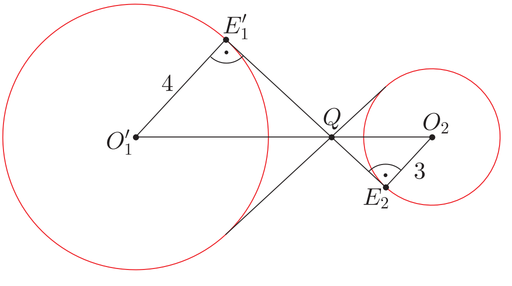
b) Határozzuk meg a Q és az R pont koordinátáit. (*11 pont*)

Megoldás. *a)* A k_1 kör egyenletét átalakítva $k_1 : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$, ebből a kör középpontja és sugara $O_1(3;2)$, $r_1 = 4$. O_1-nek P-re vonatkozó tükörképe legyen $O_1'(o_1;o_2)$. Ekkor $\frac{o_1+3}{2} = 1$ és $\frac{o_2+2}{2} = 5$, amiből $O_1'(-1;8)$, $r_1' = 4$, ezért $k_1' : (x+1)^2 + (y-8)^2 = 16$.

b) A k_2 kör egyenletét átalakítva $k_2 : (x-6)^2 + (y+6)^2 = 9$, ebből a kör középpontja és sugara $O_2(6;-6)$, $r_2 = 3$.

Tekintsük a *3. ábrát.* Az $O_1'QE_1'$, O_2QE_2 háromszögek hasonlósága alapján Q az $O_1'O_2$ szakasz $4:3$ arányú osztópontja, ezért

$$Q\left(\frac{3\cdot(-1)+4\cdot 6}{7}; \frac{3\cdot 8+4\cdot(-6)}{7}\right), \quad \text{azaz} \quad Q(3;0).$$



3. ábra

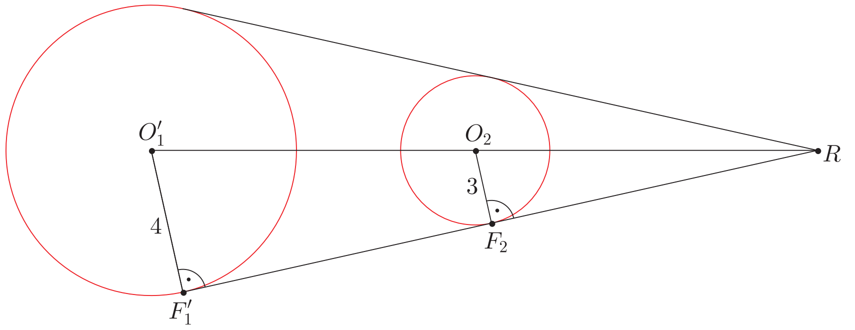
Hasonlóképpen az $O_1'RF_1'$, O_2RF_2 háromszögek hasonlósága alapján (*4. ábra*)

$$\frac{O_1'R}{O_2R} = \frac{4}{3}, \quad \text{és így} \quad \frac{O_1'O_2}{O_2R} = \frac{1}{3}.$$

Ez alapján az $R(r_1;r_2)$ pont koordinátáira fennáll, hogy

$$\frac{r_1 + 3\cdot(-1)}{4} = 6, \quad \frac{r_2 + 3\cdot 8}{4} = -6,$$

amelyek figyelembevételével $R(27;-48)$.



4. ábra

8. *Egy háromszög oldalainak hossza $a = 3$, $b = 7$ és $c = 8$ egység.*

a) Igazoljuk, hogy a háromszög szögei számtani sorozatot alkotnak. (*7 pont*)

b) Adjuk meg a háromszög beírt és körülírt körének területarányát. (*6 pont*)

c) Mekkora részekre osztják a beírt kör érintési pontjai a háromszög oldalait? (*3 pont*)

Megoldás. *a*) Legyenek a háromszög szögei $\alpha < \beta < \gamma$. Ha a szögek számtani sorozatot alkotnak, akkor $\alpha = \beta - \delta$, $\gamma = \beta + \delta$ és

$$\alpha + \beta + \gamma = (\beta - \delta) + \beta + (\beta + \delta) = 3\beta = 180^\circ,$$

amiből $\beta = 60^\circ$, tehát egy háromszög szögei akkor és csak akkor alkotnak számtani sorozatot, ha $\beta = 60^\circ$. Ezt fogjuk igazolni.

A b oldalra felírva a koszinusztételt:

$$7^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos\beta,$$

amiből $\cos\beta = \frac{1}{2}$ és $\beta = 60^\circ$ adódik.

b) Az általánosított szinusztétel alapján a háromszög körülírt körének R sugarát meghatározva:

$$R = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{7}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

A vizsgált háromszög T területét és a félkerületét kiszámolva:

$$T = \frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{3 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 6\sqrt{3} \quad \text{és} \quad s = \frac{3+7+8}{2} = 9 \quad \text{adódik.}$$

Ezek segítségével a beírt kör sugara:

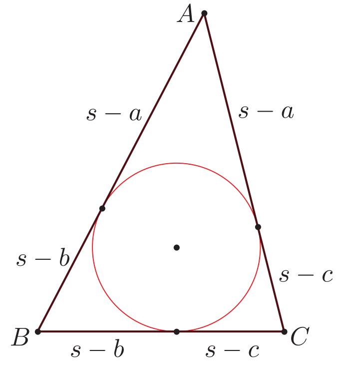
$$r = \frac{T}{s} = \frac{6\sqrt{3}}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

így a háromszög beírt és körülírt körének területaránya:

$$\frac{R^2\pi}{r^2\pi} = \frac{\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{49}{4}.$$

c) Az *5. ábra* szerint a keresett érintőszakaszok hosszai:

$$s-a=9-3=6,$$
$$s-b=9-7=2,$$
$$s-c=9-8=1.$$



5. ábra

9. *Az $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ másodfokú függvény grafikonja áthalad a $P(1;6)$, $Q(3;8)$ és $R(7;0)$ pontokon.*

a) *Határozzuk meg az a, b, c együtthatók értékét.* (*6 pont*)

b) *Írjuk fel a függvénygörbe 5 abszcisszájú pontjában az érintő egyenletét.* (*4 pont*)

c) *Számítsuk ki ezen érintő, a függvény grafikonja és az x tengely által határolt síkidom területét.* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A megadott feltételek alapján:

$$f(1)=a+b+c=6,$$
$$f(3)=9a+3b+c=8,$$
$$f(7)=49a+7b+c=0.$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$a=-\frac{1}{2},\quad b=3,\quad c=\frac{7}{2}.$$

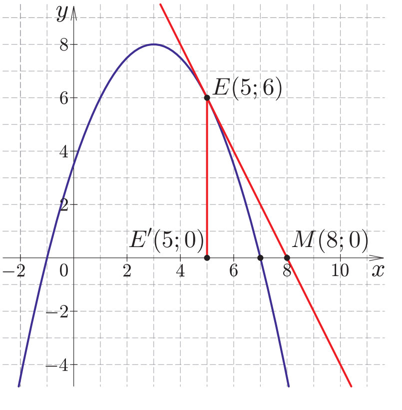
b) Mivel

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{7}{2}=$$
$$=-\frac{1}{2}(x-3)^2+8\quad (x\in\mathbb{R}),$$

ezért

$$f(5)=-\frac{1}{2}(5-3)^2+8=6,$$

így az érintési pont $E(5;6)$.



6. ábra

Az egyenes meredeksége:

$$f'(x) = -x + 3 \implies m = f'(5) = -2,$$

ezért az érintő egyenlete: $y - 6 = -2(x - 5)$, azaz $y = -2x + 16$.

c) A másodfokú függvény zérushelyei a $-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2} = 0$ egyenlet alapján: $x_1 = -1$ és $x_2 = 7$.

Az e egyenes és az x tengely M metszéspontja esetén $y = -2x + 16 = 0$, amiből $x = 8$ és $M(8;0)$ adódik.

Az $E(5;6)$ pont x tengelyre eső merőleges vetületét E'-vel jelölve $E'(5;0)$, és így a vizsgált terület:

$$T = T_{EE'M} - \int_5^7 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

A két területet külön vizsgálva:

$$T_{EE'M} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9,$$

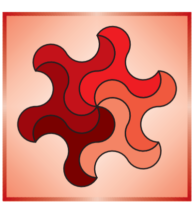
$$\int_5^7 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + \frac{7x}{2}\right]_5^7 =$$

$$= \left(-\frac{343}{6} + \frac{147}{2} + \frac{49}{2}\right) - \left(-\frac{125}{6} + \frac{75}{2} + \frac{35}{2}\right) = \frac{20}{3}.$$

A síkidom területe:

$$T = 9 - \frac{20}{3} = \frac{7}{3}.$$

Fonyóné Németh Ildikó, Fonyó Lajos
Keszthely



Matematika feladat megoldása

B. 5269. *Legyen $p \geqslant 19$ egy páratlan szám. Színezzük ki a $0, 1, \ldots, p-1$ számokat két színnel. Legyen $1 \leqslant i \leqslant p$ esetén x_i a $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ halmaz egy véletlenszerűen választott eleme (egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenek a választások). Igazoljuk, hogy legalább $3/(2^p p)$ annak a valószínűsége, hogy $x_1, \ldots, x_p$ egyforma színűek és $p \mid x_1 + \ldots + x_p$.*

(*6 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

Megoldás. Legyen a megadott színezésben a $0, 1, \ldots, p-1$ számok közül r darab piros és b darab kék. Ekkor annak a valószínűsége, hogy egy adott x_i elem piros lesz, $u=\frac{r}{p}$; annak valószínűsége pedig, hogy kék lesz, $v=\frac{b}{p}$. A kettő összege $r+b=p$, illetve $u+v=1$.

Minden $c=0,1,\ldots,p$ esetén legyen A_c az az esemény, hogy $x_1,\ldots,x_c$ mind kék színű, $x_{c+1},\ldots,x_p$ mindegyike piros, továbbá $x_1+\ldots+x_p$ osztható p-vel. (Ha $c=0$, akkor mindegyik x_i piros; ha pedig $c=p$, akkor mindegyik kék.) Azt állítjuk, hogy $0\leqslant c<p$ esetén $P(A_c)+P(A_{c+1})=u^{p-c-1}v^c\cdot\frac{1}{p}$.

Tekintsük az $A_c\vee A_{c+1}$ eseményt: ez azt jelenti, hogy $x_1,\ldots,x_c$ kék, $x_{c+2},\ldots,$ x_p piros, az x_{c+1} tetszőleges színű, és $x_1+\ldots+x_p$ osztható p-vel. Mivel A_c és A_{c+1} egymást kizáró események, $P(A_c\vee A_{c+1})=P(A_c)+P(A_{c+1})$.

A $P(A_c\vee A_{c+1})$ meghatározásához először válasszuk ki az $x_1,\ldots,x_c$ elemeket: annak valószínűsége, hogy mindegyikük kék, v^c. Ezután válasszuk ki az $x_{c+2},\ldots,x_p$ elemeket; annak valószínűsége, hogy ezek mind pirosak, u^{p-c-1}. Utolsónak válasszuk ki az x_{c+1} elemet: ennek színe piros és kék is lehet, de értéke egyértelműen meghatározott; a megfelelő választás feltételes valószínűsége $\frac{1}{p}$. Összeszorozva,

$$P(A_c)+P(A_{c+1})=P(A_c\vee A_{c+1})=v^c\cdot u^{p-c-1}\cdot\frac{1}{p}.$$

Annak a valószínűsége, hogy az x_i-k egyforma színűek és az összegük osztható p-vel:

$$\begin{aligned}
&P(A_0\vee A_p)=P(A_0)+P(A_p)=\\
&=\big(P(A_0)+P(A_1)\big)-\big(P(A_1)+P(A_2)\big)+\big(P(A_2)+P(A_3)\big)-\\
&\quad-\big(P(A_3)+P(A_4)\big)+-\ldots-\big(P(A_{p-2})+P(A_{p-1})\big)+\big(P(A_{p-1})+P(A_p)\big)=\\
&=\frac{u^{p-1}}{p}-\frac{u^{p-2}v}{p}+\frac{u^{p-3}v^2}{p}-\frac{u^{p-4}v^3}{p}+-\ldots-\frac{uv^{p-2}}{p}+\frac{v^{p-1}}{p}=\\
&=\frac{(u+v)(u^{p-1}-u^{p-2}v+u^{p-3}v^2-u^{p-4}v^3+-\ldots-uv^{p-2}+v^{p-1})}{p}=\\
&=\frac{u^p+v^p}{p}=\frac{r^p+b^p}{p^{p+1}}.
\end{aligned}$$

(Több lépésben is kihasználtuk, hogy p páratlan.)

Legyen $t=\frac{p}{2}$, $r=t+k$ és $b=t-k$. Mivel p páratlan, $|2k|=|r-b|\geqslant 1$, tehát $|k|\geqslant\frac{1}{2}$. A binomiális tétel szerint kifejtve, és az első tagokat megtartva,

$$\begin{aligned}
&r^p+b^p=(t+k)^p+(t-k)^p=\\
&\qquad=2t^p+2\binom{p}{2}t^{p-2}|k|^2+2\binom{p}{4}t^{p-4}|k|^4+\ldots+2\binom{p}{p-1}t|k|^{p-1}>
\end{aligned}$$

$$> 2t^p + 2\binom{2t}{2} t^{p-2}\frac{1}{4} + 2\binom{2t}{4} t^{p-4}\frac{1}{16} =$$

$$= 2t^p + 2 \cdot \frac{2t(2t-1)}{2} \cdot \frac{t^{p-2}}{4} + 2 \cdot \frac{2t(2t-1)(2t-2)(2t-3)}{24} \cdot \frac{t^{p-4}}{16} =$$

$$= 2t^p + \left(t^p - \frac{1}{2}t^{p-1}\right) + \left(\frac{1}{12}t^p - \frac{1}{4}t^{p-1} + \frac{11}{48}t^{p-2} - \frac{1}{16}t^{p-3}\right) =$$

$$= 3t^p + \frac{1}{12}t^{p-1}(t-9) + \frac{1}{48}t^{p-3}(11t-3).$$

Mivel $p \geqslant 19$, az utolsó tagban $t-9$ és $11t-3$ is pozitív. Tehát $r^p + b^p > 3t^p$, és így

$$P(A_0 \vee A_p) = \frac{r^p + b^p}{p^{p+1}} > \frac{3t^p}{p^{p+1}} = \frac{3}{2^p p.}$$

Ezzel beláttuk az állítást.

Wiener Anna (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11 évf.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Pontosabb számolással azt kaphatjuk, hogy

$$P(A_0 \vee A_p) \geqslant \frac{\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right)^p}{2^p p},$$

és ha $|r - b| = 1$, akkor egyenlőség áll fenn.

Belátható, hogy a számláló monoton nő, ezért

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right)^p \geqslant \left(\frac{20}{19}\right)^{19} + \left(\frac{18}{19}\right)^{19} \approx 3{,}008.$$

A számláló határértéke

$$\lim \left(\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p + \left(1 - \frac{1}{p}\right)^p\right) = e + \frac{1}{e} \approx 3{,}0862,$$

így a számlálóban a 3 helyett például 3,1-et írva a feladat állítása már semmilyen p-re sem teljesül.

2. A beküldött dolgozatokban kétféle gyakori típushiba volt. Sokan félreértették a feladatot, és a színezést is véletlenszerűnek vették. (Véletlen színezéssel a valószínűség kiszámítása triviális.)

A másik gyakori hiba, hogy a függetlenség vizsgálata nélkül, események együttes bekövetkezésének valószínűségét úgy számolták, hogy a két valószínűséget összeszorozták. Tipikusan, kiszámolták annak a valószínűségét, hogy a számok azonos színűek, meg annak a valószínűségét is, hogy az összeg osztható p-vel, majd egyszerűen összeszorozták. A feladat feltételeivel ez a számolás *véletlenül* jó eredményt ad. Viszont a kapott eredmény hibás akkor, ha p páros, vagy legalább három színnel színezünk.

3. Meglepő az a tény, hogy – legalábbis páratlan p és kétféle szín esetén – az egyszínű elemekből álló, p-vel osztható összegű sorozatok száma csak a piros és kék színű elemek

számától függ, és nem számít, hogy a $0,1,\dots,p-1$ számok között hogyan helyezkednek el a piros és kék elemek. Még meglepőbb ennek oka: az, hogy az X^p+Y^p polinom osztható az $X+Y$ polinommal. Ezt akkor értjük csak meg igazán, ha a feladatot komplex számokkal oldjuk meg. Az alábbiakban vázolunk egy ilyen megoldást; a módszer az A. 448. feladat honlapunkon megjelent második megoldását* követi.

Legyen $\varepsilon=\varepsilon^{2\pi/p}=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}$ az első p-edik komplex egységgyök, és bármely x egész szám esetén legyen

$$\chi(x)=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\varepsilon^{kx}.$$

Ha $p\mid x$, akkor az összeg mindegyik tagja 1. Ellenkező esetben a tagok egy $\varepsilon^x\neq 1$ hányadosú mértani sorozatot alkotnak, és a mértani sorozat összegképletéből következik, hogy az összeg 0. Tehát,

$$\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{ha } p\mid x;\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}\tag{1}$$

Legyen ismét a piros számok száma r, a kékek száma b, továbbá bármely k egész számra legyen

$$f(k)=\sum_{\substack{0\leqslant x<p\\ x\text{ piros}}}\varepsilon^{kx}\quad\text{és}\quad g(k)=\sum_{\substack{0\leqslant x<p\\ x\text{ kék}}}\varepsilon^{kx}.$$

A $k=0$ esetben mindegyik ε^{kx} hatvány értéke 1, így $f(0)$ és $g(0)$ éppen a piros, illetve kék elemek száma: $f(0)=r$, $g(0)=b$. Továbbá, felhasználva (1)-et,

$$f(k)+g(k)=p\cdot\chi(k).$$

Az olyan $x_1,\dots,x_p$ sorozatok száma, amelyekben mindegyik x_j piros, és az összegük osztható p-vel,

$$\sum_{x_1\text{ piros}}\ \sum_{x_2\text{ piros}}\cdots\sum_{x_p\text{ piros}}\chi(x_1+x_2+\ldots+x_p)=$$

$$=\sum_{x_1\text{ piros}}\ \sum_{x_2\text{ piros}}\cdots\sum_{x_p\text{ piros}}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\varepsilon^{k(x_1+x_2+\ldots+x_p)}\right)=$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\left(\sum_{x_1\text{ piros}}\varepsilon^{kx_1}\right)\left(\sum_{x_2\text{ piros}}\varepsilon^{kx_2}\right)\cdots\left(\sum_{x_p\text{ piros}}\varepsilon^{kx_p}\right)=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}f(k)^p.$$

* `https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=A448&l=hu`

Hasonlóan láthatjuk, hogy az olyan $x_1, \dots, x_p$ sorozatok száma, amelyekben mindegyik x_j kék, és az összegük osztható p-vel,

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} g(k)^p.$$

A feladatnak megfelelő $x_1, \dots, x_p$ sorozatok száma tehát

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f(k)^p + \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} g(k)^p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \big(f(k)^p + g(k)^p\big) =$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \big(f(k)+g(k)\big)\cdot\big(f(k)^{p-1} - f(k)^{p-2}g(k) + f(k)^{p-3}g(k)^2 - + \ldots + g(k)^{p-1}\big).$$

Ha $1 \leqslant k < p$, akkor $f(k)+g(k)=0$. Ha pedig $k=0$, akkor $f(k)=r$, $g(k)=b$, és azt kapjuk, hogy a feltételeknek megfelelő $x_1, \dots, x_p$ sorozatok száma

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \big(f(k)^p + g(k)^p\big) = \frac{f(0)^p + g(0)^p}{p} = \frac{r^p + b^p}{p},$$

ami csak a piros és kék elemek számától függ.

A feladatra 21 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 3 versenyző: Tarján Bernát, Varga Boldizsár és Wiener Anna. 2 pontos 2, 1 pontos 1, a többi 14 versenyző nem kapott pontot.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (769–773.)

K. 769. A Kozmás Étteremben túl sósra sikerült a húsleves, ezért a főnök szeretné felhigítani a hűtőben talált sótlan levessel. A sós leves 5 százaléka, a sótlan leves 1,2 százaléka só. Hány litert keverjen össze a kétféle levesből a főnök, ha 72 deciliter levesre van szüksége és szeretné, hogy a sótartalma 3,48 százalék legyen?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

K. 770. Hányszor annyi olyan mező van a sakktáblán, amelyről a huszár legalább négy mezőre léphet tovább, mint amelyről nyolc mezőre léphet?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

K. 771. Ferike pontosan kilenc négyzet alakú részre vágott fel egy téglalapot. A négyzeteket megvizsgálva Ferike észrevette, hogy az egyiknek a területe 64 cm^2, két másiké 16 cm^2, a többié pedig 4 cm^2. Mekkora volt az eredeti téglalap kerülete?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

K/C. 772. Hány olyan négyjegyű, tízes számrendszerbeli természetes szám van, amelynek első három számjegye (a magasabb helyiértéktől az alacsonyabb felé haladva) különböző, mind a négy számjegye prímszám, de a négyjegyű szám nem osztható egyik számjegyével sem?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

K/C. 773. Létezik-e olyan derékszögű háromszög, amelyre az oldalak számértéke egész szám, pontosan két oldalának a hossza prímszám és a területének számértéke is prímszám?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

Beküldési határidő: 2023. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (772–773., 1768–1772.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 772. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 773. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1768. Mutassuk meg, hogy a

$$8x^3 + 27y^3 = -6 \cdot 5^3,$$

$$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{xy}{5}$$

egyenletrendszernek nincs megoldása, ha x, y valós számok.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1769. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja M, az oldalak hosszára $AB \geqslant BC \geqslant CA$ teljesül. Az AM szakasz felezőmerőlegese az AC oldalt a D, a BM szakasz felezőmerőlegese a BC oldalt az E pontban metszi. Mekkorák az ABC háromszög szögei, ha tudjuk, hogy a D, M, E pontok egy egyenesre illeszkednek?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1770. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\sqrt{7+\frac{3}{\sqrt{x}}}=7-\frac{9}{x}$$

egyenletet.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1771. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögben a BC befogó felezőpontja D, az AB átfogó B-hez közelebbi harmadolópontja E. Igazoljuk, hogy AD és CE merőlegesek egymásra.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

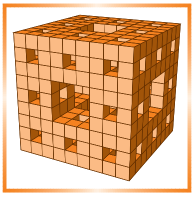
C. 1772. A tízes számrendszerben legfeljebb háromjegyű pozitív egész számok között hány olyan van, amelynek a kettes számrendszerbeli alakja palindromszám? (Palindromszámnak nevezünk egy számot, ha számjegyeit fordított sorrendben írva az eredeti számot kapjuk vissza.)

Javasolta: *Koncz Levente* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2023. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5318–5325.)

B. 5318. Egy pozitív egész számnak leírtuk az összes pozitív osztóját egy lapra. A leírt számok között két olyan van, amely 8-cal osztva 2 maradékot ad és négy olyan van, amely 8-cal osztva 4 maradékot ad. Hány olyan szám lehet a lapon, amely 8-cal osztva 6 maradékot ad?

(*3 pont*) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5319. Igaz-e minden hegyesszögű háromszögre, hogy van legalább egy olyan magasságvonala, amelynek talppontja az oldal középső harmadába esik?

(*3 pont*) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5320. Az a_n sorozat elemeire teljesül, hogy $\frac{a_{n+3}}{a_{n+1}}+\frac{a_n}{a_{n+2}}=2$, első három tagja pedig $a_1=1$, $a_2=4$ és $a_3=2$. Igazoljuk, hogy $\dfrac{2^{2021}}{a_{2023}}$ egész szám.

(*5 pont*) Javasolta: *Andrei Eckstein* (Temesvár)

B. 5321. Mutassuk meg, hogy bármely háromszög súlyvonalainak négyzetösszege kisebb a félkerület négyzetének másfélszeresénél.

(*4 pont*) Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

B. 5322. Bizonyítsuk be, hogy ha egy háromszögben a szokásos jelölésekkel

$$\frac{\cos\alpha}{s-b}-\frac{\cos\beta}{s-a}=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{s-c},$$

akkor a háromszög derékszögű vagy egyenlő szárú. (Az s a háromszög kerületének felét jelöli.)

(*5 pont*) Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

B. 5323. A következő nyereményjátékot játsszuk: 2023 darab kártyára tetszésünk szerint valós számokat írunk a $[0,100]$ tartományból. A kártyákat ezután egy urnába dobjuk, majd az urnából egy kártyát véletlenszerűen kihúzunk. Ha a kihúzott kártyán szereplő szám megegyezik az összes kártyán szereplő számok átlagának 2/3-ával, akkor a kihúzott kártyán szereplő összeget megnyerjük. Ellenkező esetben a nyereményünk 0. Milyen számokat írjunk a kártyákra, hogy a nyereményünk várható értéke a lehető legnagyobb legyen?

(*5 pont*) Javasolta: *Dura-Kovács Balázs* (Garching)

B. 5324. Artúr és Bori a következő játékot játsszák: felváltva, balról jobbra haladva írnak egy-egy számjegyet, amíg egy 2023-jegyű egész számot nem kapnak. Az írást Artúr kezdi egy nem 0 számjeggyel. Artúr győz, ha a kapott számnak van $1\overbrace{7\dots7}^{n\text{ db 7-es}}$ $(n\geqslant 1)$ alakú osztója, ellenkező esetben Bori a nyertes. Melyiküknek van nyerő stratégiája?

(*6 pont*) *Kós Géza* (Budapest) javaslata alapján

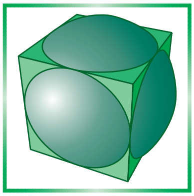
B. 5325. Adjuk meg az összes olyan korlátos, konvex poliédert, amelynek lapsíkjai $c+e+\ell+1$ részre bontják a teret, ahol c, e és ℓ rendre a poliéder csúcsainak, éleinek és lapjainak számát jelöli.

(*6 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

❄

Beküldési határidő: 2023. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (854–856.)

A. 854. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2^k} \cdot 2^{k+1}}{2^{2^k} + 3^{2^k}} < 4$$

teljesül bármely n pozitív egész szám esetén.

Javasolta: *Kovács Béla* (Szatmárnémeti)

A. 855. A nem egyenlőszárú ABC háromszög legrövidebb oldala BC. Vegyük fel az M és az N pontot az AB, illetve az AC oldalon úgy, hogy $BM = CN = BC$ teljesüljön. Jelölje D és E az AMN háromszög beírt és körülírt körének középpontját, jelölje továbbá I és O az ABC háromszög beírt és körülírt körének középpontját. Bizonyítsuk be, hogy a DE és IO egyenesek az ABC háromszög körülírt körén metszik egymást.

Javasolta: *Luu Dong* (Vietnám)

A. 856. Egy kő-papír-olló bajnokságban a versenyzők teljes körmérkőzést játszanak, és bármely két versenyző tíz menetben ütközik meg egymással. Minden versenyzőnek van egy kedvenc stratégiája, egy előre leírt tízes (például KKOPPKOPPO), és minden ellenfél ellen ugyanazt a tíz kezet mutatja (az előre leírt sorrendben). A bajnokság végén kiderült, hogy minden versenyző legyőzte legalább egy menetben mindegyik másikat.

Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb 1024 versenyző vett részt a bajnokságban.

Javasolta: *Matolcsi Dávid* (Budapest)

Beküldési határidő: 2023. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 592. Egy gyöngysorba különböző színű gyöngyöket fűztek fel. A golyók egyszínűek és színüket az angol ábécé egy-egy nagybetűjével adjuk meg. Készítsünk programot `i592` néven, amely megadja a gyöngysor leghosszabb olyan szakaszának hosszát, amelyben csak kétféle színű gyöngy van.

A program standard bemenetének első sorában a gyöngysor elemszáma van N $(1 \leqslant N \leqslant 1000)$. Az ezt követő sorban a gyöngyök színeit jelölő nagybetűk vannak szóközzel elválasztva.

A program a standard kimenetre írja ki a leghosszabb gyöngysorrészlet hosszát, amely kétféle színt tartalmaz.

Példa a bemenetre:	**Kimenet**
`11` `P K P S P S P K S K P`	`5`

Beküldendő egy tömörített `i592.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 593 (É). Rendelkezésünkre áll a `meteo.txt` (tabulátorokkal tagolt, UTF-8 kódolású) szövegfájlban a Budapesten 1900. és 2020. között mért néhány meteorológiai adat havi bontásban. Ennek segítségével készítünk a feladatban statisztikát:

1. A táblázatkezelő egy üres munkafüzetében nevezzük át meteo nevűre a munkalapot. Importáljuk ebbe a munkalapba az A1-es cellától kezdve a `meteo.txt` fájl tartalmát. Munkánkat i593 néven mentsük el a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
2. Végezzük el az alábbi formázásokat:
   a. A munkalap betűtípusa legyen Verdana, betűmérete 12 pont.
   b. Az első sor feliratai legyenek a minta szerintiek, a sormagasság beállításával érjük el, hogy a feliratok hossza ne haladja meg a két sornyit.
   c. Az oszlopszélességek legyenek optimálisak úgy, hogy minden cella tartalma olvasható legyen.
3. Feltételes formázással állítsuk be, hogy a páratlan évek adatainak cellái kapjanak #E2EFDA színkódú háttérszínt.
4. Az AE oszlopban, minden év decemberének sorában, számoljuk ki az adott év összes csapadékmennyiségét. Itt és az 5–6. feladatnál is a többi hónap sorában az adott oszlopban ne jelenjen meg adat.
5. Az AF oszlopban, minden év decemberének sorában számoljuk ki az adott év havi középhőmérsékleteinek átlagát.
6. Az AG oszlopban minden év decemberének sorába kerüljön a Forró szó, ha abban az évben volt forró nap (forró nap: amikor a maximumhőmérséklet $\geqslant 35\ {}^\circ\mathrm{C}$), különben a cella jelenjen meg üresen.
7. Határozzuk meg a szélsőségeket, azaz kerüljön a H1442:I1442, az N1442:O1442 és a V1442:W1442 cellapárokba a mért időszakban feljegyzett legalacsonyabb napi hőmérséklet értéke és dátuma, a legmagasabb napi hőmérséklet értéke és dátuma, továbbá a legcsapadékosabb nap csapadékmennyisége és dátuma.
8. Másoljuk le a hónapneveket a B1444:B1455 tartományba, és számítsuk ki a U1444:U1455 tartomány celláiban az adott hónapban az évente mért csapadékmennyiség összegét.

Minták:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	év	hónap	havi középhőmérséklet	a legmagasabb napi középhőmérséklet a hónapban	a legmagasabb napi középhőmérséklet napja	a legalacsonyabb napi középhőmérséklet a hónapban	a legalacsonyabb napi középhőmérséklet napja	havi minimumhőmérséklet	havi minimumhőmérséklet napja	napi minimumhőmérsékletek havi átlaga	fagyos napok száma, amikor a minimumhőmérséklet ≤ 0 °C	zord napok száma, amikor a minimumhőmérséklet ≤ -10 °C
2	1901	január	-4,7	5	1901.01.23	-12,2	1901.01.10	-16,9	1901.01.10	-7,9	28	16
3	1901	február	-2,1	3,5	1901.02.06	-7,9	1901.02.15	-12,8	1901.02.23	-5	24	5

25	1902	december	-3,1	7,2	1902.12.27	-17,6	1902.12.15	-18,9	1902.12.15	-5,5
26	1903	január	-0,5	8,3	1903.01.11	-11,5	1903.01.23	-12,6	1903.01.24	-2,8
27	1903	február	4,6	13,4	1903.02.23	-2,7	1903.02.17	-5	1903.02.17	1,1
28	1903	március	9	16,1	1903.03.28	4,9	1903.03.09	1,1	1903.03.16	4,7
29	1903	április	9	16,5	1903.04.29	2,6	1903.04.19	0,6	1903.04.18	5,2
30	1903	május	16,4	21,2	1903.05.03	11,3	1903.05.19	6,4	1903.05.20	11,8
31	1903	június	19	23,1	1903.06.03	15,6	1903.06.07	12,2	1903.06.06	14,9
32	1903	július	20,8	28,7	1903.07.20	12,9	1903.07.08	11,5	1903.07.08	16,3
33	1903	augusztus	20,4	24,3	1903.08.15	14,2	1903.08.20	12	1903.08.21	15,4
34	1903	szeptember	16,9	23,6	1903.09.08	12,5	1903.09.22	7,7	1903.09.23	12,4
35	1903	október	11,9	20,3	1903.10.07	2,3	1903.10.21	-0,5	1903.10.22	8,5
36	1903	november	6,8	12,8	1903.11.01	1,1	1903.11.28	-2	1903.11.28	4,6
37	1903	december	2,6	7,8	1903.12.01	-7,5	1903.12.30	-9,2	1903.12.31	0,9
38	1904	január	-1,5	4,2	1904.01.20	-6,5	1904.01.12	-9,8	1904.01.07	-3,2
39	1904	február	3,7	9,1	1904.02.22	-1	1904.02.01	-3,5	1904.02.27	1,3
40	1904	március	6,6	10,6	1904.03.11	1,3	1904.03.06	-0,8	1904.03.07	3,3
41	1904	április	11,9	18,8	1904.04.23	6,9	1904.04.08	2	1904.04.04	7,6
42	1904	május	15,8	20,8	1904.05.29	10,8	1904.05.05	5,5	1904.05.06	11
43	1904	június	20	25,1	1904.06.17	15,9	1904.06.26	11,5	1904.06.30	14,8
44	1904	július	24	28,3	1904.07.18	20,6	1904.07.20	13,7	1904.07.01	17,9
45	1904	augusztus	21,7	28,5	1904.08.07	15,6	1904.08.26	11,8	1904.08.25	16,7
46	1904	szeptember	15,9	21,6	1904.09.14	8,5	1904.09.19	7,2	1904.09.19	12,4
47	1904	október	11,6	15,7	1904.10.06	7,3	1904.10.31	3,4	1904.10.31	8,8
48	1904	november	3,2	10,5	1904.11.04	-4,1	1904.11.17	-8,8	1904.11.18	1,2
49	1904	december	2,3	7	1904.12.14	-5,5	1904.12.28	-8,6	1904.12.31	-0,1
50	1905	január	-3,2	4,8	1905.01.31	-11	1905.01.01	-13,2	1905.01.02	-6,2
51	1905	február	1,8	5,9	1905.02.23	-4	1905.02.14	-6,1	1905.02.14	-0,7
52	1905	március	7,1	14,5	1905.03.31	2,6	1905.03.06	0,5	1905.03.22	3,6
53	1905	április	9,5	16,6	1905.04.30	3	1905.04.07	-0,6	1905.04.09	5,5
54	1905	május	16,4	20	1905.05.31	11,1	1905.05.10	7,9	1905.05.24	12
55	1905	június	20,4	23,9	1905.06.04	12,8	1905.06.12	9,8	1905.06.14	16,1
56	1905	július	23,7	27,4	1905.07.02	17,6	1905.07.20	13,9	1905.07.21	18,5
57	1905	augusztus	22,4	28,9	1905.08.05	16,2	1905.08.29	12,4	1905.08.30	17,6
58	1905	szeptember	18	23,4	1905.09.13	11,3	1905.09.22	8,5	1905.09.19	14
59	1905	október	7	13,2	1905.10.01	2,8	1905.10.26	0,5	1905.10.30	4,6
60	1905	november	6,7	11,6	1905.11.08	1,4	1905.11.26	-0,1	1905.11.26	4,6
61	1905	december	2,3	6,8	1905.12.01	-4,7	1905.12.31	-6,9	1905.12.20	0,4
62	1906	január	0,1	5,8	1906.01.14	-6,5	1906.01.26	-8,9	1906.01.24	-2,5

	A	B	C	D	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG
1	év	hónap	havi középhőmérséklet	a legmagasabb napi …	hőség napok száma, amikor a maximumhőmérséklet ≥ 30 °C	forró napok száma, amikor a maximumhőmérséklet ≥ 35 °C	a csapadék havi összege	a maximális napi csapadékösszeg a hónapban	a maximális napi csapadékösszeg napja	napok száma, amikor a csapadékösszeg ≥ 0,1 mm	napok száma, amikor a csapadékösszeg ≥ 1 mm	napok száma, amikor a csapadékösszeg ≥ 5 mm	napok száma, amikor a csapadékösszeg ≥ 10 mm	napok száma, amikor a csapadékösszeg ≥ 20 mm	napok száma, amikor a csapadékösszeg ≥ 30 mm	napok száma, amikor a csapadékösszeg ≥ 50 mm			
4	1901	március	5,8	13,	0	0	71,3	25,2	1901.03.04	12	10	4	2	1	0	0			
5	1901	április	11,6	18,	0	0	39,2	20,2	1901.04.13	11	4	2	2	1	0	0			
6	1901	május	16,8	22,	1	0	44	15,9	1901.05.25	13	9	3	1	0	0	0			
7	1901	június	21	24,	3	0	50,6	12,5	1901.06.22	10	9	4	2	0	0	0			
8	1901	július	22,4	27,	11	0	92	38,8	1901.07.23	11	7	5	3	1	1	0			
9	1901	augusztus	20,7	25,	5	0	52,4	26	1901.08.17	7	5	3	2	1	0	0			
10	1901	szeptember	15,9	19,	0	0	36,2	9,8	1901.09.16	9	8	3	0	0	0	0			
11	1901	október	12,6	17,	0	0	48,4	7,3	1901.10.09	14	12	4	0	0	0	0			
12	1901	november	4,7	11,	0	0	33,1	23,5	1901.11.15	8	6	1	1	1	0	0			
13	1901	december	4,2	8,	0	0	45,4	13,7	1901.12.14	18	9	2	1	0	0	0	565,4	10,74	
14	1902	január	3,4	7,	0	0	23,6	8	1902.01.16	7	5	2	0	0	0	0			
15	1902	február	2,8	6,	0	0	83,8	16,7	1902.02.10	20	13	5	3	0	0	0			
16	1902	március	5,3	13,	0	0	41,9	11,9	1902.03.04	11	8	3	1	0	0	0			
17	1902	április	10,5	15,	0	0	42,6	20,9	1902.04.15	8	4	3	1	1	0	0			
18	1902	május	12,5	20,	0	0	111,6	36,5	1902.05.20	15	11	6	5	1	1	0			
19	1902	június	18,5	23,	2	0	45,1	19,5	1902.06.12	12	7	3	1	0	0	0			
20	1902	július	20,2	25,	3	0	39,7	12,6	1902.07.11	8	6	3	1	0	0	0			
21	1902	augusztus	21,1	25,	5	0	35,6	20,3	1902.08.09	5	2	2	2	1	0	0			
22	1902	szeptember	16,1	23,	0	0	15,3	4,1	1902.09.13	8	5	0	0	0	0	0			
23	1902	október	10,8	15,	0	0	96,8	23,1	1902.10.17	12	8	5	4	2	0	0			
24	1902	november	2,4	9,	0	0	6,1	5,7	1902.11.26	2	1	1	0	0	0	0			
25	1902	december	-3,1	7,	0	0	36,2	5,8	1902.12.18	13	10	3	0	0	0	0	578,3	10,04	
26	1903	január	-0,5	8,	0	0	22,2	6,3	1903.01.04	15	6	2	0	0	0	0			
27	1903	február	4,6	13,	0	0	7,6	3	1903.02.02	5	3	0	0	0	0	0			
28	1903	március	9	16,	0	0	10,7	4,8	1903.03.03	7	3	0	0	0	0	0			
29	1903	április	9	16,	0	0	68,9	19,5	1903.04.17	17	9	4	3	0	0	0			
30	1903	május	16,4	21,	0	0	28,6	11	1903.05.30	9	7	2	1	0	0	0			
31	1903	június	19	23,	0	0	73,5	14,5	1903.06.11	14	8	6	4	0	0	0			
32	1903	július	20,8	28,	6	1	80,3	25,5	1903.07.06	10	9	7	3	1	0	0			
33	1903	augusztus	20,4	24,	2	0	12,5	5,4	1903.08.03	6	3	1	0	0	0	0			
34	1903	szeptember	16,9	23,	0	0	46,6	10,2	1903.09.16	13	10	4	1	0	0	0			
35	1903	október	11,9	20,	0	0	22	7,1	1903.10.23	9	6	2	0	0	0	0			
36	1903	november	6,8	12,	0	0	65,7	10,8	1903.11.19	17	12	7	1	0	0	0			
37	1903	december	2,6	7,	0	0	58,6	18,1	1903.12.01	18	11	4	2	0	0	0	497,2	11,41	Forró

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
1438	2020	szeptember	19,2	24,4	2020.09.15	11,6	2020.09.26	8,2	2020.09.27	14,3	0	0	0	31,4	2020.09.15	25,1	0	18	3	0	26,4	11,3	2020.09.25	6
1439	2020	október	12,7	20	2020.10.03	7	2020.10.13	5,1	2020.10.13	9,6	0	0	0	26,9	2020.10.03	16,9	0	1	0	0	90,2	27,9	2020.10.13	14
1440	2020	november	6,6	12,7	2020.11.04	1,1	2020.11.22	-1,6	2020.11.22	4,4	4	0	0	15,1	2020.11.07	9,9	0	0	0	0	22,3	13,6	2020.11.04	8
1441	2020	december	4,7	8,8	2020.12.06	0	2020.12.02	-2,5	2020.12.27	2,9	4	0	0	12,7	2020.12.23	7,2	0	0	0	0	31	7,4	2020.12.09	15
1442								-23,4	1929.02.11					40,1	2007.07.20							115,4	2015.08.17	
1443																								
1444		január																			4586,3			
1445		február																			4371,2			
1446		március																			4440,2			
1447		április																			5223,5			
1448		május																			7636,3			
1449		június																			8142,4			
1450		július																			6108			
1451		augusztus																			6226,6			
1452		szeptember																			5180,6			
1453		október																			5562,4			
1454		november																			6776,5			
1455		december																						
1456																								
1457		június																						

9. Jelenítsük meg a `B1457` cellában a legcsapadékosabb hónap nevét.
10. Készítsünk vonaldiagramot az 1915, 1965 és 2015 évi havonta mért átlaghőmérsékletekről új munkalapra. A diagramhoz tartozzon egy alul elhelyezkedő jelmagyarázat, címe: A havi középhőmérséklet ötven évente legyen.

A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

Beküldendő egy tömörített `i593.zip` állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

Az adatok forrása:

`https://www.met.hu/eghajlat/magyarorszag_eghajlata/eghajlati_adatsorok`

A megoldáshoz szükséges letölthető állomány: `meteo.txt`.

I. 594. Az OpenAI által készített ChatGPT segítségével az **I. 591.** feladatban ADA programot készítettünk az **I. 589.** feladat megoldására.

Készítsünk programot ugyanennek a problémának a megoldására `i594` néven az általunk választott programozási nyelven, felhasználva a ChatGPT javaslatait. A javasolt algoritmus, illetve programkód részleteket elfogadhatjuk, vagy a feltételeket megváltoztatva új változatot kérhetünk, illetve módosíthatjuk, de ezeket a lépéseket a dokumentációban adjuk meg.

A megoldandó probléma leírását megismételjük: egy számjegysorozatot állítunk elő a következő leírás szerint, majd ennek átlagát, móduszát és mediánját kiíratjuk.

A feladat a középszintű digitális kultúra érettségi gyakorlati feladatsorainak programozási feladataihoz annyiban hasonlít, hogy nincs beolvasandó adatfájl, hanem a feldolgozandó sorozatot generálni kell, majd azt feldolgozni. A megoldás egyben kísérlet arra, hogy a ChatGPT mennyire segítené az érettségi feladat megoldását.

1. A program olvasson be egy időpontot óra, perc ($0 \leqslant \texttt{ora} \leqslant 23$ és $0 \leqslant \texttt{perc} \leqslant 59$) formátumban és egy időtartamot ($1 \leqslant \texttt{delta} \leqslant 1440$) percben, majd az utóbbinak megfelelő számban, percenként az időpontokat állítsa elő.

Az időpontok meghatározásánál vegyük figyelembe, hogy az egész számok bevezető 0 számjegyeit elhagyjuk, nem tároljuk, ha azok nem szükségesek. A percenkénti időpontnövelésnél figyelembe vesszük az óra- és a napváltást is.

2. Minden időpont óra és perc értékét számjegyekké alakítva egy sorozatban tároljuk.
3. Írjuk ki a sorozatot úgy, hogy az adatok között ne legyen semmilyen elválasztójel.
4. Határozzuk meg és írjuk ki az így kapott sorozat számjegyeinek átlagát két tizedesjegy pontosan.
5. Számítsuk ki és írjuk ki a sorozat mediánját két tizedesjegy pontosan.
6. Írjuk ki a sorozat móduszát.

Minta a szöveges kimenet kialakításához:

```
óra= 23
perc= 55
időtartartam= 9
2355235623572358235900010203
Átlag= 3.25
Medián= 3.00
Módusz= 2
```

Beküldendő egy tömörített `i594.zip` állományban a megoldást adó program forráskódja és egy szöveges dokumentáció, amely tartalmazza a megoldást és a ChatGPT-vel való kommunikáció leírását. A dokumentáció térjen ki arra, hogy a megoldás részletei miben térnek el a ChatGPT javaslataitól.

I/S. 72. Egy levelibéka szeretne átjutni egy patak átellenes oldalára. A patak átellenes pontja, ahova a béka szeretne eljutni, M centiméterre van a béka jelenlegi pozíciójától. Szerencsére a patakon vízinövények élnek, melyekre ugorva könnyebb lehet az átkelés. A béka útjában összesen N számú vízinövény található (egyenes vonalban, a tó átellenes pontja felé), az i-edik vízinövény $T[i]$ cm-re van a béka kiindulási helyétől.

A béka minden egyes másodpercben vagy szökken pontosan 1 cm-t (vagy a partra, vagy egy másik vízinövényre), vagy pedig ugrik legfeljebb D cm-t (vagy a partra, vagy egy másik vízinövényre). Az ugrás nagyon fárasztó, ezért minden ugrás után pihenésként szökkennie kell a békának (legalább egyszer).

Adjuk meg, hogy minimum mekkora D ugrásra kell képesnek lennie a békának, hogy át tudjon jutni a patak átellenes oldalára.

A bemenet első sorában az N és M számok találhatók szóközzel elválasztva: a vízinövények száma, és a patak szélessége. A második sor szóközzel elválasztva tartalmaz N szigorúan monoton növekvő sorrendben adott számot: az i-edik szám az i-edik növény $T[i]$ távolsága a béka indulási helyétől.

A kimenet egyetlen sorában egy szám szerepeljen: a minimális D távolság, amivel a béka át tud jutni a túlpartra.

Minták:

Bemenetek (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenetek**
`2 5 / 2 3`	`2`
`1 5 / 2`	`5`

Magyarázat: az első példában a béka ugrik az 1. növényre, aztán szökken a 2. növényre, aztán ugrik a túlpartra. A második példában a béka egyből átugrik a túlsó partra (nem tudja felhasználni a növényt, mivel nem tudna szökkenni ugrás után).

Korlátok: $1 \leqslant N, M \leqslant 10^5$, $0 < T[i] < M$, $T[\,]$ szigorú monoton növekvő. Időkorlát: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha a program helyes kimenetet ad az $N, M \leqslant 100$ esetekben.

Beküldendő egy `is72.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható. A dokumentáció tartalmazza a megoldás elméleti hátterét, az esetleg felhasznált forrásokat. Ne tartalmazzon kódrészleteket, azok magyarázata kódkommentek formájában a forrásprogramban szerepeljen.

S. 171. Jázmin készített egy listát a nyári programokról, amiken részt szeretne venni. Ismerjük továbbá minden program kezdetét és végét napokban és azt is, hogy az adott program mennyibe kerül. Jázmin nem tud egyszerre két programon ott lenni, pontosabban, ha egy program az i-edik napon befejeződik, akkor a következő program csak az $i+1$-edik napon kezdődhet. Jázmin úgy szeretné kiválasztani a programokat, hogy azok hossza összesen a lehető legnagyobb legyen, de az összköltségük ne lépjen át egy megadott K értéket. (Ha az esemény az i-edik napon kezdődik és a j-edik napon ér véget, akkor annak hossza $(j-i+1)$ nap.)

A bemenet első sorában a programok N száma és a maximális összköltség, K szerepel. A következő N sorban az egyes programok adatai szerepelnek. Minden sorban szerepel a program elejének és végének időpontja napokban (e_i, v_i), majd a költsége, k_i.

Kimenet: a kimenet első sorába a programok lehetséges legnagyobb összes hossza kerüljön. A második sorban adjuk meg a programok sorszámait, melyek összes hossza az előbb kiírt érték és teljesítik a feltételeket, azaz nem fedik át egymást és az összköltségük nem nagyobb, mint K. A programokat a listában lévő sorrend szerint, 1-től indexeljük.

Minta:

Bemenet (a `/` jel sortörést helyettesít)	**Kimenet** (a `/` jel sortörést helyettesít)
`3 3 / 1 2 2 / 2 4 3 / 4 5 2`	`3 / 2`

Magyarázat: az első és a harmadik program összköltsége túl nagy, ezért a második programot választjuk.

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 10\,000$, $0 \leqslant e_i \leqslant v_i \leqslant 100$, $1 \leqslant k_i \leqslant 10\,000$ $(i=1\ldots N)$. Időkorlát: 1 mp.

Értékelés: a pontok 40%-a kapható, ha a program helyes kimenetet ad az $N \leqslant 15$ tesztesetekre.

Beküldendő egy `s171.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható. A dokumentáció tartalmazza a megoldás elméleti hátterét, az esetleg felhasznált forrásokat. Ne tartalmazzon kódrészleteket, azok magyarázata kódkommentek formájában a forrásprogramban szerepeljen.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2023. június 15.

Egy hajdani KöMaL-pályázat emléke

Ezerkilencszázhetvenötben a debreceni Református Kollégium Gimnáziumának harmadik osztályát jártam. Az akkori KöMaL szorgalmas olvasójaként igyekeztem a matematikai és fizikai feladványokat megoldani. A lap bizonyos időnként – talán évente – kísérleti fizikai pályázatot hirdetett meg középiskolásoknak. Ez a rövid írás egy ilyen pályázatról szól.

Nyilvánvaló, hogy egy fizikai kísérlet megtervezéséhez, az eszközök elkészítéséhez, a mérések elvégzéséhez, a mérési eredmények jegyzőkönyvezéséhez, kiértékeléséhez és a következtetések dokumentálásához egy középiskolás diáknak tanári támogatásra van szüksége. A fizikaórákon bemutatott kísérletekben ilyen szinten általában a diákok nem vesznek részt, azokban a tanár szerepe elsődleges. A pályázat azonban olyan készségek meglétét igényli, amelyek egy átlagos középiskolástól nem elvárhatóak. Fontos tehát a felkészítő tanár és a diák közötti munkamegosztás határait gondosan megválasztani, hogy az érdeklődő diák a számára egyelőre ismeretlen feladatokkal boldoguljon, és természetesen közben tanulságára szolgáljon.

1975-ben családommal Ózdon laktunk. Az akkor negyvenezres város az ország egyik nehézipari központja volt. A térségben a vasércfeldolgozás kezdetei a 18. századra nyúlnak vissza. A huszadik század hetvenes éveire a tízezer embert foglalkoztató Ózdi Kohászati Üzemekben egyrészt nyersvas-előállítás, másrészt az akkori szocialista viszonyok között korszerűnek számító finomhengermű és dróthúzó üzemrész is működött.

A nehézipari tevékenység rengeteg alapanyagot és fűtőanyagot igényel, és a termelés mellékterméke az alig-alig hasznosítható salak. Akkoriban Ózd határában valóságos hegyekben állt a világ távoli tájairól – a Szovjetunióból, de talán még Indiából is – szállított, feldolgozásra váró koksz és vasérc. A salakhegyek, az úgynevezett meddőhányók, szintén részei voltak a város környezetének.

Az én pályázatom témája ezekhez az irdatlan nyersanyag- és salakhegyekhez kapcsolódott. A vizsgálandó kérdés: kimutatható-e a radioaktív háttérsugárzáshoz képest többletsugárzás a nyersanyag- és salakhegyek közelében. A vizsgálatok saját készítésű Geiger–Müller-féle számlálószerkezettel történnek.

Nem túl ambiciózus cél egy gimnazista számára? Bizonnyal az. Az akkori gimnáziumi fizika tananyag csak röviden érintette a radioaktivitás kérdését, és az elektromosságtan sem terjedt ki – érthető módon – gyakorlati barkácsolásra. Az adatkiértékelés pedig távolról sem volt része a matematikai anyagnak. Akkor hát hogyan is történt ez az egész?

Itt lesz döntő szerepe a környezetnek, amely inspirálja, az átlagosnál nagyobb erőfeszítésre ösztönzi az érdeklődő diákot, de segítő mentorként ott áll azokban a kritikus pillanatokban, amikor a tanítvány már végképp nem boldogul. Az én esetemben két ilyen személy is volt.

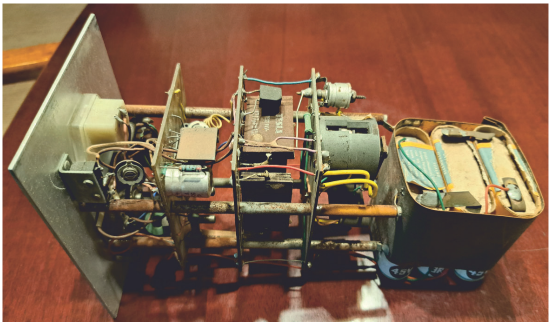
Az egyikük apám, akkortájt az ózdi kórház orvosa, aki a matematikai kiértékelésnél irányított, kezembe nyomva – ha jól emlékszem – a Hajtman-féle statisztikakönyvet, melyből a különböző t-, χ^2- és egyéb próbákat tanultam meg és alkalmaztam az adatsorokra. Másrészt pedig Sturmann Sándor tanár úr, az ózdi Bródy Imre Ipari Szakközépiskola tanára, akire a legnagyobb tisztelettel és szeretettel emlékszem, és ahogyan akkor, most is Sanyi bácsiként fogom említeni. Sanyi bácsi mindent tudott az elektronikáról. Nem volt olyan elektromos szerkezet három vármegyében, amit ne tudott volna megjavítani, kezdve a kohászat behemót vezérlőrendszereitől a kórház EKG- és röntgenkészülékéig. Ha van a tanárságnak mintamodellje, akkor ő az volt. A pályázat során mindig olyan feladatokat adott, amiket erőfeszítések árán ugyan, de meg tudtam oldani, és csak akkor lépett közbe, amikor már több kárt okoztam volna, mint hasznot. Kettejük útmutatásával, biztatásával kezdtem a pályázat elkészítésébe, mely ily módon inkább az ózdi otthonomhoz kötődött.

Sanyi bácsi először is elém tett egy számomra érthetetlen kapcsolási rajzot. A tápegységet, ellenállásokat, kondenzátorokat még csak-csak felismertem, de az ellenütemű tranzisztorkapcsolások és a jelerősítő már meghaladták a tudásomat. Sebaj, adott néhány szakközépiskolai elektronika tankönyvet, és én nekiálltam a félvezetők, a tranzisztorok és egyéb alkatrészek tanulmányozásának. Amellett el kellett kezdenem tanulni a radioaktivitásról, a háttérsugárzásról, a sugárzásmérésről és hasonlókról, de már nem emlékszem, milyen könyvekből.

A nyári szünetre hazaérve Sanyi bácsival nekiláttunk a mérőszerkezet összeállításának. Első feladatom egy transzformátor tekercselése volt, hiszen a hordozható készülék 3 darab 4,5 V-os lapos elemmel működött, de a detektálásra használt Geiger–Müller-féle számlálócsőnek 1–1,5 kV feszültségre volt szüksége. Sanyi bácsi adott rézdrótot, vasmagot és egy maga barkácsolta tekercselőt. Napokig tekercseltem, számoltam a meneteket; ha elszúrtam, kezdtem elölről. Végül is kész volt a tekercs, Sanyi bácsi kimérte, és elégedetten nyugtázta. Második feladat: nyomtatott áramköröket maratni. Sanyi bácsitól kaptam a műanyag lapokat, amire nekem kellett megtervezni a majdan rászerelendő alkatrészek helyét, valami lakkfestékkel berajzolni az összekötő vezetékeket. A felesleges réteget valami rendkívül büdös folyadékban lemarattam, amely után csak a lefestett részeken maradt meg a lapokra eredetileg felvitt rézborítás. A lapos elemek összeforrasztása is az én dolgom volt. A mérések során többször kellett cserélni az elemeket, a végére az elektródák forrasztása már csukott szemmel is ment. Nagyjából ezzel el is ment a szünidő, visszamentem Debrecenbe. A Csapó utca elején akkoriban működött egy kis boltocska, ahol rádiócsöveket meg hasonló apró elektromos alkatrészeket lehetett kapni. Nagy hezitálások után bementem a boltba és megkérdeztem a boltostól, hogy milyen tranzisztorai vannak. A boltos éppen ráért, és szerencsére hasonszőrű szaki volt, úgyhogy kisvártatva halmokban állt az asztalon a rengeteg alkatrész, és megállíthatatlanul magyarázott. Pár napon keresztül még visszajártam hozzá, ő pedig lelkesen tanított a tudományára. Nevét nem tudom, de köszönet neki ezúton is.

A téli szünetben Sanyi bácsi azzal fogadott, hogy összeszerelte és behangolta a kis készüléket, amelyben örömmel ismertem fel a sok kínlódással elkészített tekercsemet és az esztétikusnak csöppet sem mondható forrasztásaimat. A műszer kész, nyomás a terepre.

Akkorra már a radioaktivitásról szóló könyvekből megtanultam, hogy mi fán terem a háromféle sugárzás, nagyjából azt is, hogyan keletkezik, mit és hogyan mér a GM-cső. A mérésnél használt cső főleg a gamma-sugárzás mérésére volt alkalmas. A mérőeszköz lelke egy argonnal töltött, elektródákkal ellátott arasznyi üvegcső. Alaphelyzetben az áramkörben nem folyik áram, az argongáz szigetel. Egy, az üvegcsövet eltaláló gamma-részecske az Ar-atomokat ionizálja. Az így szabaddá vált elektronok és a cső falából a sugárzás hatására kiszabadult elektronok az anód felé mozdulnak el. További ütközések során újabb elektronok válnak szabaddá a kötött elektronhéjból, és az anódra elektronlavina zúdul. Egy beérkező részecske tehát a megfelelő feszültség hatására néhány mikroszekundum alatt mérhető elektromos áramimpulzust, tüskét generál. A nehézkesen mozgó gázionok a katódot elérve rekombinálódnak, és a műszer készen áll az új részecske fogadására.



A műszert a gimnázium fizikaszertárában talált, ismert aktivitású forrással kalibráltam, bár erre, mint utólag kiderült, nemigen volt szükség, hiszen csak az egyes területek sugárzásainak különbsége érdekelt, az abszolút érték nem.

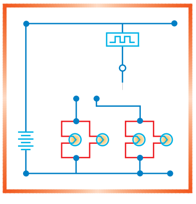
A decemberi ködös, havas reggeleken az Ózd környéki hegyekben kiránduló turista egy fura alakra lehetett figyelmes. Oldaltáskájában egy szemmel láthatóan súlyos valami, ahonnan fejhallgató vezetéke kunkorodik ki, és egy fényes csőben végződő másik vezeték. Az alak időnként megáll, nézi az óráját, tartja a fényes csövet, aztán valamit feljegyez egy kis jegyzetfüzetbe. Így mértem a kohászati területektől távol lévő, a Bükk-hegység érintetlen hegyoldalaiban jelentkező radioaktív háttérsugárzást. Az ipari területeken a mérés természetesen nem ment ilyen simán, hiszen szigorúan őrzött terület volt. Egy ismerős kohász volt segítségemre, aki elmagyarázta az őrséget ellátó cimboráinak, hogy „itt van ez a suhanc, valamit kell vacakolnia valamilyen iskolai dolgozathoz, eresszétek már be.” És míg ők jóízűen eldumálgattak a fűtött őrházban, én felkapaszkodtam a havas meddőhányókra, körüljárogattam a vasérc- és kokszkupacokat, mértem és jegyzeteltem.

Egy-két hét alatt tetemes mennyiségű adatom gyűlt össze. Mivel az Excel program csak jó tíz év múlva került kifejlesztésre, az adatokat kockás füzetlapokon tároltam. Végül is adathordozónak nem rossz. Apám irányításával és egy kis, első generációs zsebszámológéppel (Híradástechnika Szövetkezet) elkezdtem a statisztikai feldolgozást. A végeredmény: a gyári területeken a háttérsugárzás ha nem is túlságosan, de a statisztikai eredmények alapján mégis szignifikánsan magasabb volt, mint az attól távolabbi területeken.

Lett-e bármi közvetlen, gyakorlati haszna a munkámnak a kohászat radioaktív környezetszennyezése tekintetében? Aligha. A lényeg valójában az, hogy egy középiskolás diákot a KöMaL-pályázat olyan feladat elé állított, melynek minden részlete kihívás és tanulási lehetőség volt. Nekiállni egy nagyjából ismeretlen témának, annak számtalan aspektusát részben önállóan, részben segítőkkel áttanulmányozni, az eredményeket elemezni és megfelelően prezentálni egy életre szóló élmény volt. A forrasztásokról és egyéb bütykölésről nem is szólva. Köszönet mindenkinek, aki hozzásegített, köztük a KöMaL-nak is.

Azóta eltelt 47 év, néhány hete már nyugdíjas vagyok. A nyáron a pincét takarítottam. Egy dobozban valami nehéz tárgyat tapintottam ki. Mi lehet? A port lesöpörve, a dobozt felnyitva egyszer csak ott volt a kezemben a kis készülék! Az elsárgult cédulájú laposelemekkel, a saját tekercselésű trafóval, a nem szépségdíjas forrasztásaimmal. Apám és Sanyi bácsi emlékével. Ezt a kis készüléket, mely lassan muzeális korú, most szívesen felajánlom a KöMaL szerkesztőségének, ha tudják, használják egészséggel.

Barta Gábor
fizikus, informatikus



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 807. 20 *méter magasból másodpercenként indítunk acélgolyókat, összesen hármat. Az első golyó kezdősebességének a vízszintessel bezárt szöge* 30° *felfelé, a harmadiknak ugyancsak* 30°*, de lefelé, míg a második golyót kezdősebesség nélkül ejtjük le. Mindhárom golyó egyszerre éri el a talajt. Mekkora volt az első és a harmadik acélgolyó kezdősebessége?*

(*4 pont*)

Megoldás. A második golyó mozgása egyszerű (kezdősebesség nélküli) szabadesés h magasságból, így az esés ideje:

$$t_2=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\cdot 20\ \mathrm{m}}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}}=2{,}02\ \mathrm{s}.$$

A golyók 1 s időkülönbséggel indulnak és egyszerre érik el a talajt, az esésük ideje tehát $t_1=3{,}02$ s és $t_3=1{,}02$ s.

Legyen az első golyó kezdősebessége v_1, vagyis a függőlegesen felfelé mutató sebességkomponens $v_1\sin 30^\circ=v_1/2$. Ha a függőlegesen felfelé mutató irányt választjuk pozitívnak, és a golyó pillanatnyi magasságát a talajtól mérjük, akkor fennáll:

$$h+\frac{v_1}{2}\,t_1-\frac{g}{2}\,t_1^2=0,$$

vagyis a keresett kezdősebesség:

$$v_1=\frac{gt_1^2-2h}{t_1}=\frac{9{,}81\cdot 3{,}02^2-2\cdot 20}{3{,}02}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}=16{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Hasonló módon a harmadik, ferdén lefelé indított, v_2 kezdősebességű golyó út-idő összefüggése:

$$h-\frac{v_3}{2}\,t_3-\frac{g}{2}\,t_3^2=0,$$

ahonnan

$$v_3=\frac{2h-gt_3^2}{t_3}=\frac{2\cdot 20-9{,}81\cdot 1{,}02^2}{1{,}02}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}=29{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Žigó Boglárka (Révkomárom, Selye János Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. Ha a nehézségi gyorsulás közelítő, $g\approx 10\ \mathrm{m/s^2}$ értékével számolunk, akkor a következő ereményeket kapjuk: $t_2\approx 2{,}0$ s; $t_1\approx 3{,}0$ s és $t_3\approx 1{,}0$ s, illetve $v_1\approx 17$ m/s és $v_3\approx 30$ m/s. Ezeket az értékeket nincs értelme „pontosabban" (pl. 4 vagy 5 tizedesjeggyel) megadni, hiszen a kiindulási adataink ennél sokkal pontatlanabbak.

33 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 10, hibás 4, nem versenyszerű 4 dolgozat.

G. 808. *Egy dugattyúval ellátott, henger alakú tartályban* 20 °*C-os,* 30% *relatív páratartalmú levegő található. Állandó hőmérséklet mellett hányszorosára változtassuk meg a tartályban a levegő térfogatát, hogy a benne lévő vízpára elkezdjen kicsapódni?*

(*4 pont*)

Megoldás. A levegő relatív páratartalma megadja, hogy az adott hőmérsékletű levegőben tárolható maximális vízgőzmennyiséghez képest mennyi a levegő tényleges vízgőztartalma.

A 20 °C-os levegő köbméterenként 17,3 g vízgőzt képes megtartani, ez lenne a 100%-os relatív páratartalom. Ha a levegő relatív páratartalma csak 30%, az azt jelenti, hogy a vízgőz sűrűsége csak $0{,}30\cdot 17{,}3=5{,}19\ \mathrm{g/m^3}$.

A dugattyú segítségével a levegőt összenyomva csökkenteni tudjuk a vízgőz számára hozzáférhető térfogatot, és így növelni tudjuk a vízgőz sűrűségét egészen 17,3 $\mathrm{g/m^3}$-ig, amikor a vízpára elkezd kicsapódni.

Az összenyomás aránya $\frac{5{,}19}{17{,}3}=0{,}30$, tehát a levegőt az eredeti térfogatának 30%-ára kell összenyomjuk, hogy a benne lévő vízgőz telítetté váljon.

Medgyesi Júlia (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. évf.)

31 dolgozat érkezett. Helyes 17 megoldás. Hibás 10, nem versenyszerű 4 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása

P. 5455. *Egy függőleges tengelyű, 45°-os félnyílásszögű, súrlódásmentes tölcsér belső felületére, a tengelyétől 10 cm távolságban v_0 nagyságú vízszintes sebességgel egy pontszerű testet juttatunk. Mekkora lesz a test legnagyobb sebessége, ha*

a) $v_0 = 0{,}5$ m/s;

b) $v_0 = 2{,}0$ m/s?

(*5 pont*) Példatári feladat nyomán

Megoldás. Az energiamegmaradásból következik, hogy a test sebessége a pályájának legmélyebb pontjánál lesz a legnagyobb. Ebben a pontban a test sebességének nincs függőleges komponense, és így a tölcsér tengelye irányába mutató (radiális) sebességkomponens is nulla.

Jelöljük a tengelytől mért távolságot (ami megegyezik a tölcsér csúcsához viszonyított magassággal) h-val, a test sebességét v-vel, ezek kezdeti értékét pedig h_0-lal és v_0-lal. A perdületmegmaradás törvénye szerint $mv_0h_0 = mvh$ (ahol m a test tömege), vagyis

$$h = h_0\frac{v_0}{v}. \tag{1}$$

A mechanikai energia megmaradását az

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \tag{2}$$

egyenlet fejezi ki.

(1)-et (2)-be helyettesítve kapjuk:

$$\frac{1}{2}v_0^2 + gh_0 = \frac{1}{2}v^2 + gh_0\frac{v_0}{v}. \tag{3}$$

Ennek nyilvánvaló megoldása a $v = v_0$, tehát a (3) egyenlet nullára rendezett alakjából ki lehet emelni a $v - v_0$ gyöktényezőt:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 + \frac{gh_0}{v}(v_0 - v) = (v - v_0)\left[\frac{v + v_0}{2} - \frac{gh_0}{v}\right] = 0.$$

A szögletes zárójelben szereplő (a $v \neq v_0$ megoldásnak megfelelő) kifejezés akkor tűnik el, ha

$$v^2 + vv_0 - 2gh_0 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva a keresett sebességre

$$v_{1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 8gh_0}}{2}$$

adódik, de közülük csak az egyik pozitív:

$$v_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 8gh_0}}{2}.$$

Ha ez az érték kisebb, mint v_0, vagyis $h > h_0$, akkor a pontszerű test felfelé mozog és a sebessége egyre csökken. Ilyenkor a sebesség legnagyobb értéke a kezdeti v_0. Ha viszont v_1 nagyobb, mint v_0, akkor a test lefelé mozog, a sebessége a legmélyebb helyzet eléréséig növekszik, és a legnagyobb értéke v_1.

a) Ha $v_0 = 0{,}5$ m/s, akkor

$$v_1 = \frac{-0{,}5 + \sqrt{0{,}5^2 + 8 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}1}}{2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}17\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} > v_0,$$

tehát a mozgás során a test legnagyobb sebessége 1,17 m/s.

b) Ha $v_0 = 2{,}0$ m/s, akkor

$$v_1 = \frac{-2{,}0 + \sqrt{2{,}0^2 + 8 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}1}}{2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}72\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} < v_0.$$

Ebben az esetben a test legnagyobb sebessége megegyezik a kezdősebességgel, vagyis 2,0 m/s.

Nemeskéri Dániel (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. évf.) és *Szanyi Attila* (Bonyhád, Petőfi S. Ev. Gimn. és Koll., 12. évf.) dolgozata alapján

32 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 14, hibás 6, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5463. *Egy ismeretlen, légkör nélküli bolygó felett* $H = 225$ m *magasságban „lebeg” egy rozoga űrszonda. Egymás után lepottyan róla két csavar. A második csavar akkor válik le az űrszondáról, amikor az első éppen* 16 *métert esett. Mekkora a két csavar távolsága abban a pillanatban, amikor az első eléri a bolygó felszínét?*

(*4 pont*) Közli: *Baranyai Klára,* Veresegyház

Megoldás. Legyen t_0 az az idő, mely alatt az első csavar $h_0 = 16$ m-t esett, t az az idő, amely alatt az első csavar eléri a bolygó felszínét, d pedig a két csavar távolsága, amikor az első eléri a felszínt.

Alkalmazva a szabadesés általános képletét $\left(s = \frac{g}{2}t^2\right)$, fel tudjuk írni a második csavar által megtett útra az alábbi egyenletet:

$$H - d = \frac{g}{2}(t - t_0)^2. \tag{1}$$

Tudjuk továbbá, hogy (a szabadesés általános $t = \sqrt{2s/g}$ összefüggése szerint)

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}, \tag{2}$$

és

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}. \tag{3}$$

(2)-t és (3)-t az (1) egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$H - d = \frac{g}{2}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\right)^2,$$

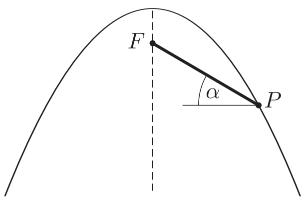
amit d-re rendezve és egyszerűbb alakra hozva a keresett távolság:

$$d = 2\sqrt{Hh_0} - h_0 = 2\sqrt{(225\ \mathrm{m})\cdot(16\ \mathrm{m})} - 16\ \mathrm{m} = 104\ \mathrm{m},$$

ami nem függ az ismeretlen bolygó ismeretlen nagyságú nehézségi gyorsulásától.

$\Delta S \geqslant 0$ csapat: *Czehlár Gergely, Pásztor Ádám* és *Polyányi Zorka*
(Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 12. évf.)

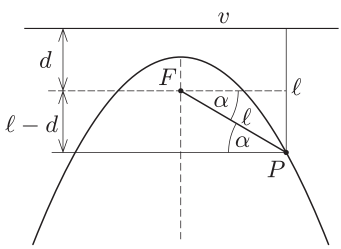
79 dolgozat érkezett. Helyes 53 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 11, hiányos (1–2 pont) 10, hibás 3, nem versenyszerű 2 dolgozat.



P. 5464. *Egy függőleges tengelyű, lefelé nyíló parabola F fókuszpontján keresztül különböző hajlásszögű lejtőket fektetünk. Mekkora a hajlásszöge annak a lejtőnek, amelyen az F pontból kezdősebesség nélkül induló, súrlódásmentesen lecsúszó pontszerű test a lehető legrövidebb idő alatt éri el a parabolát?*

(*5 pont*) *Faragó Andor* (1877–1944) feladata nyomán*

Megoldás. Használjuk ki a parabola azon tulajdonságát, hogy bármely pontja egyenlő távol van az F fókuszponttól és a v vezéregyenestől.



Legyen F és v távolsága d, a lejtő hajlásszöge α, a pálya hossza (F és P távolsága) pedig ℓ. Ekkor

$$\ell \sin\alpha = \ell - d, \quad \text{vagyis} \quad \ell = \frac{d}{1-\sin\alpha}.$$

Csúszás közben a pontszerű test egyenletesen gyorsul, a gyorsulása (súrlódásmentes esetben) $a = g\sin\alpha$, így a csúszás t idejére fennáll:

$$\frac{g\sin\alpha}{2}t^2 = \ell = \frac{d}{1-\sin\alpha},$$

* Faragó Andor indította újra 1925-ben az I. világháború miatt megszüntetett KöMaL-t, és annak 1939-ig szerkesztője, kiadója volt. Ő vezette be a kiemelkedő feladatmegoldók fényképeinek közlését.

vagyis

$$t = \sqrt{\frac{2d}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin\alpha(1 - \sin\alpha)}}.$$

A csúszás ideje akkor lesz minimális, ha az

$$f(\alpha) = \sin\alpha(1 - \sin\alpha)$$

kifejezés maximális. A fenti kifejezés a $\xi \equiv \sin\alpha$ változónak kvadratikus függvénye:

$$f(\xi) = \xi(1 - \xi),$$

ami a legnagyobb értékét $\xi = \frac{1}{2}$-nél, vagyis $\alpha = 30°$-nál éri el. (Ezt teljes négyzetté alakítással, vagy deriválással láthatjuk be.)

Seprődi Barnabás Bendegúz (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. Érdekes, hogy a legrövidebb lecsúszási időhöz tartozó α szög sem a parabola d paraméterétől, sem a nehézségi gyorsulástól nem függ. Ezt a részletes számítás elvégzése nélkül, dimenzionális megfontolásokkal (dimenzióanalízissel) is beláthatjuk. A dimenziótlan α szög csak a méter mértékegységű d-től és a m/s^2 mértékegységű g-től függhetne. Mivel az idő mértékegysége csak g-ben szerepel, α nem függhet g-től. Ekkor viszont α d-től sem függhet, hiszen nincs egy másik, hosszúság dimenziójú mennyiség, ami d mértékegységét kiejthetné.

(*G. P.*)

41 dolgozat érkezett. Helyes 34 megoldás. Hiányos (1–3 pont) 6, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5466. *Egy nyirkos tavaszi reggelen a hőmérséklet* 1 °C, *a relatív páratartalom pedig* 80%*-os. Egy szobában* 20 °C*-on a relatív páratartalom* 40%*. Nő vagy csökken a szoba páratartalma, ha szellőztetünk?*

(*4 pont*) (*Példatári feladat nyomán*)

Megoldás. Táblázati adatok szerint a 20 °C-os levegő maximális páratartalma (vagyis a telített vízgőz sűrűsége ezen a hőmérsékleten) 17,3 g/m^3. Ha a relatív páratartalom 40%, akkor a levegőben köbméterenként 6,9 g vízgőz van. Az 1 °C-os levegő maximális páratartalma 5,2 g/m^3, 80% relatív páratartalomnál ez 4,2 g/m^3-nek felel meg.

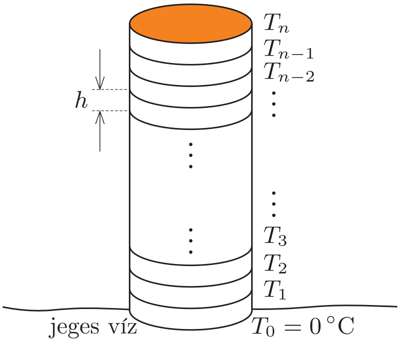
Ha szellőztetünk, a 20 °C-os levegő egy része kicserélődik az 1 °C-os levegővel. Ennek hatására a szoba páratartalma csökken, hiszen az 1 °C-os levegő maximális páratartalmának 80%-a kisebb, mint a 20 °C-os levegő maximális páratartalmának 40%-a.

Márfai Dóra (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 10. évf.)

57 dolgozat érkezett. Helyes 34 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 12, hibás 7, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5467. *Egy* 20 cm *hosszú,* 3 cm^2 *keresztmetszetetű, megfelelő elektromos szigeteléssel ellátott rézrúdon teljes hosszában egyenletesen feltekert fűtőszál van. A rudat függőlegesen tartjuk úgy, hogy az alsó vége éppen beleér egy olvadó jeget tartalmazó pohár vizébe, így folyamatosan* $0\,^\circ C$ *hőmérsékletű marad. Hány fokra melegszik fel elegendően hosszú idő alatt a rúd másik vége, ha a fűtőszál* 100 W *teljesítménnyel melegíti a rézrudat?*

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka



Megoldás. Jelöljük a rúd keresztmetszetét A-val, a hosszát ℓ-lel, a fűtőszál teljesítményét P-vel. Osszuk fel (gondolatban) a rudat n darab $h = \ell/n$ vastag szeletre, és legyen $n \gg 1$. A szeleteket számozzuk meg alulról felfelé haladva 1-től n-ig. (Az *ábrán* a fűtőszál nem látható.)

Elegendően hosszú idő alatt beáll a termikus egyensúly, amikor a rúd különböző pontjainak hőmérséklete időben már nem változik. Legyen a k-adik szelet felső részének hőmérséklete T_k, az alsó részének hőmérséklete pedig T_{k-1}. A rúd alsó vége $T_0 = 0\,^\circ$C hőmérsékletű, a felső végét jellemző T_n pedig éppen a keresett maximális hőmérséklet.

Jelöljük a k-adik réteg felső és alsó lapja közötti $T_k - T_{k-1}$ hőmérséklet-különbséget δ_k-val. A Fourier-féle hővezetési törvény szerint rétegek felső lapján Δt idő alatt

$$Q_k^{(\mathrm{be})} = \lambda A \frac{\delta_k}{h} \cdot \Delta t$$

hő áramlik a kérdéses rétegbe befelé, az alsó lapon pedig

$$Q_k^{(\mathrm{ki})} = \lambda A \frac{\delta_{k-1}}{h} \cdot \Delta t$$

hő áramlik kifelé. Ugyanakkor a fűtőszál által a vékony rétegnek átadott Joule-hő

$$Q_{\mathrm{Joule}} = P \frac{h}{\ell} \cdot \Delta t.$$

(Ez utóbbi minden kis rétegnél ugyanakkora, tehát nem függ a k indextől.)

Hőmérsékleti egyensúlyban az egyes rétegnek átadott és az onnan elvezetett hő megegyezik, vagyis

$$Q_k^{(\mathrm{be})} + Q_{\mathrm{Joule}} = Q_k^{(\mathrm{ki})},$$

tehát

$$\delta_k - \delta_{k-1} = -\frac{Ph^2}{\lambda A \ell} = \text{állandó}.$$

Ezek szerint a δ_k számok olyan (csökkenő) számtani sorozatot alkotnak, melynek differenciája

$$d = -\frac{Ph^2}{\lambda A \ell} < 0.$$

Feltételezzük, hogy a rúd felső vége nem ad át számottevő nagyságú hőt a környező levegőnek, vagyis

$$Q_n^{(\mathrm{be})} = 0, \qquad \text{tehát} \qquad \delta_n = 0.$$

Mivel a számtani sorozat elemeire igaz, hogy

$$\delta_n = \delta_1 + (n-1)d = 0,$$

megkapjuk a sorozat első elemét:

$$\delta_1 = -(n-1)d = (n-1)\frac{Ph^2}{\lambda A\ell}.$$

A vékony rétegek hőmérséklet-változásainak összege megadja a rúd felső és alsó vége közötti hőmérséklet-különbséget:

$$T_n - T_0 = T_{\max} = \sum_{k=1}^{n} \delta_k = \frac{\delta_1 + \delta_n}{2} \cdot n = \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{Ph^2}{\lambda A\ell} \approx n^2 \frac{Ph^2}{2\lambda A\ell}.$$

(Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $n \gg 1$.) Mivel $nh = \ell$, a keresett hőmérséklet

$$T_{\max} = \frac{P\ell}{2\lambda A}.$$

Az ismert adatok és $\lambda_{\text{réz}} = 395\ \mathrm{W/(m\,K)}$ felhasználásával

$$T_{\max} = \frac{100\ \mathrm{W} \cdot 0{,}2\ \mathrm{m}}{2 \cdot 395\ \mathrm{W/(m\,K)} \cdot (3 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2)} \approx 84\,^\circ\mathrm{C}.$$

Halász Henrik (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

23 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 4, hiányos (1–3 pont) 10 dolgozat.

P. 5470. *Két egyforma gyűjtőlencsét egymással szemben úgy helyezünk el, hogy fókuszpontjaik egybeesnek. Az egyik lencsét a közös optikai tengellyel párhuzamos, monokromatikus, egyenletes energiaáram-sűrűségű fénynyalábbal világítjuk meg. A lencsék antireflexiós (visszaverődést megakadályozó) réteggel vannak bevonva, a lencsék belsejében történő fényelnyelődéstől és az ottani visszaverődésektől eltekinthetünk.*

a) Milyen irányú erő hat a lencsékre?

b) Becsüljük meg a lencsékre ható erők nagyságát!

Adatok: *a lencsék fókusztávolsága* 10 cm, *átmérőjük* 5 cm, *a megvilágító nyaláb fényének hullámhossza* 590 nm, *az első lencsére* 1 W *fényteljesítmény jut.*

(*5 pont*) Közli: *Domokos Péter,* Budapest

Megoldás. Jelöljük a lencse fókusztávolságát f-fel, a sugarát R-rel, a lézernyaláb (lencsére jutó) teljesítménye legyen P és a monokromatikus fény hullámhossza λ (vagyis a frekvenciája c/λ).

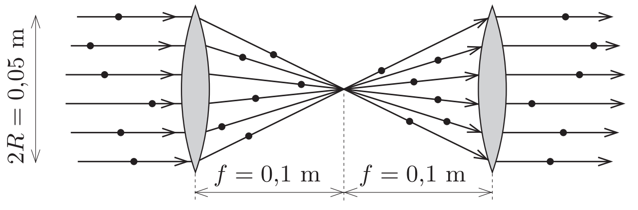
A lézerfényt fénysebességgel haladó fotonok (kicsiny „golyócskák") összességének fogjuk tekinteni (lásd a *nem* méretarányos *1. ábrát*). Mindegyik, az ábrán kicsiny golyócskaként feltüntetett fotonnak

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$$

energiája és

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{\varepsilon}{c}$$

nagyságú lendülete (impulzusa) van.



1. ábra

a) A lencsékre ható erő a fotonok eredő lendületének egységnyi idő alatti megváltozásával egyenlő. A lencsére valamekkora Δt idő alatt $E = P\,\Delta t$ energiájú fény érkezik, ami

$$\Delta N = \frac{E}{\varepsilon} = \frac{P}{\varepsilon}\,\Delta t$$

számú fotonnak felel meg. Ezen fotonok mindegyikének ugyanakkora nagyságú és irányú lendülete van, az eredő lendületük tehát

$$I_0 = \Delta N \cdot p = \frac{E}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \frac{P}{c}\,\Delta t.$$

Ha az első lencse helyén egy fényelnyelő lap lenne, akkor erre a lapra

$$F_0 = \frac{I}{\Delta t} = \frac{P}{c} = \frac{1\ \mathrm{W}}{3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}} = 3{,}3 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{N}$$

erő hatna. A lencse azonban nem nyeli el a fényt, csak a fotonok haladási irányát változtatja meg. A lencséből Δt idő alatt kilépő fény eredő lendülete (ami a szimmetria miatt az optikai tengely irányába mutató vektor) a fentebb számolt I-nél kisebb, de nullától különböző nagyságú lesz. Így az első lencsére ható erő, ami a közös fókuszpont felé mutat, ténylegesen valamekkora $F < F_0$ nagyságú.

A fénysugarak megfordíthatósága miatt a második lencsére is ugyanekkora nagyságú, de ellentétes irányú erőt fejt ki a fény, hiszen a fény lendülete a második lencsén áthaladva I-ről I_0-ra növekszik. A két lencse között tehát azonos nagyságú, de egymással ellentétes irányú „vonzóerő” jön létre. Ez a két erő azonban nem a Newton III. törvényében szereplő hatás-ellenhatás miatt ugyanakkora nagyságú, hiszen mindkét erőt a fény lendületváltozása, nem pedig a másik lencse „hatása” hozza létre.

b) A lencsékre ható erők nagyságának számszerű értékét a fotonok lendületváltozásából lehet kiszámítani (becsülni). A szimmetria miatt elegendő, ha csak az optikai tengely irányába eső lendületkomponenseket vizsgáljuk. Amennyiben egy p impulzusú foton a lencsén áthaladva φ szöggel térül el, akkor az optikai tengely irányába eső lendülete

$$\Delta p = p(1 - \cos\varphi)$$

értékkel csökken. A lencse széléhez érkező fotonok eltérülési szöge

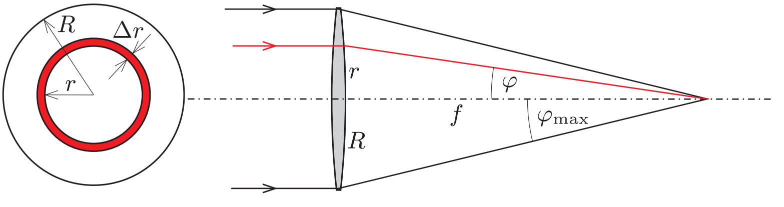
$$\varphi_{\max} = \operatorname{arctg}\frac{R}{f} = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} = 14^\circ.$$

Ha mindegyik foton ugyanekkora szöggel térülne el, akkor az eredő impulzus is ugyanilyen arányban csökkenne, tehát a lencsére ható erő

$$F^* = \frac{P}{c}\,(1 - \cos\varphi_{\max}) = 0{,}03\ F_0 \approx 10^{-10}\ \mathrm{N}$$

lenne. A fotonok azonban különböző szögekben térülnek el, az optikai tengely közelében haladó fotonoknál pl. $\varphi \approx 0$, így ezek a fotonok egyáltalán nem járulnak hozzá a lencsére ható erőhöz. Elfogadható nagyságrendi becslésnek tekinthető, ha az eredő erőt F^* és $F = 0$ valamilyen középértékével közelítjük, az tehát néhányszor 10^{-11} N nagyságú lehet.

Ha pontosabban akarjuk kiszámítani a lézerfény által kifejtett erőt, akkor valamennyi foton járulékát figyelembe kell vegyük. (Ezt a vizsgálatot a pontverseny résztvevőitől nem vártuk el, hiszen csak az erő nagyságának *becslése* volt a kérdés. – *A Szerk.*)



2. ábra

Azok a fotonok, amelyek a lencsét egy r sugarú ($r \leqslant R$), igen keskeny, Δr szélességű körgyűrű mentén érik el (lásd a *2. ábrát*), valamennyien $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{r}{f}$ szögben térülnek el, és így a lendületük megváltozása (egyenként) Δt idő alatt

$$\Delta p = p(1 - \cos\varphi) = p\left(1 - \frac{f}{\sqrt{f^2 + r^2}}\right).$$

Ezen fotonok száma (a körgyűrű és a teljes kör keresztmetszetarányából)

$$\Delta N(r)=\frac{2r\pi\Delta r}{R^2\pi}\cdot\frac{P}{\varepsilon}\,\Delta t,$$

a megfelelő lendületváltozás tehát

$$\Delta I=\frac{2P}{R^2c}\left(1-\frac{f}{\sqrt{f^2+r^2}}\right)r\Delta r\cdot\Delta t.$$

A lencsére ható teljes erő

$$F=\sum\frac{\Delta I}{\Delta t}=\frac{P}{c}\sum_{r=0}^{R}\left(1-\frac{f}{\sqrt{f^2+r^2}}\right)\frac{2r\Delta r}{R^2}. \tag{1}$$

A fenti kifejezésben szereplő összeg a körgyűrűk vastagságának csökkentésével egyre jobban közelít az

$$\int\limits_{r=0}^{R}\frac{2}{R^2}\left(1-\frac{f}{\sqrt{f^2+r^2}}\right)r\,\mathrm{d}r$$

integrálhoz, aminek értéke az ismert (SI mértékegységben megadott) számadatokkal (pl. a `https://www.wolframalpha.com/` felhasználásával) kiszámítható:

$$K=\int\limits_{0}^{0{,}025}32\left(1-\frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}01+r^2}}\right)r\,\mathrm{d}r=0{,}0152,$$

és ennek megfelelően

$$F=K\frac{P}{c}=\frac{0{,}0152}{3\cdot10^8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m/s}}=5{,}05\cdot10^{-11}\ \mathrm{N}.$$

A *Lumity csapat: Kurucz Kende* és *Vidor Nikoletta*
(Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 12/11. évf.)
dolgozatának felhasználásával

Megjegyzés. Az (1) képletben szereplő összeget elemi úton (integrálszámítás alkalmazása nélkül) is meg lehet határozni. Ehhez fizikai megfontolásokat, az egyenletesen gyorsuló mozgás ismert út–idő és sebesség-elmozdulás képleteit hívjuk segítségül.

1. Első észrevételünk: az $r\Delta r$ szorzat (ha Δr kicsi) így is felírható:

$$r\Delta r\approx\frac{1}{2}\Delta(r^2)=\frac{(r+\Delta r)^2-r^2}{2}.$$

2. Vezessük be új változónak az $x=r^2/R^2$ dimenziótlan mennyiséget ($0\leqslant x\leqslant 1$). (x azt fejezi ki, hogy egy r sugarú kör területe hányszorosa a lézersugár teljes keresztmetszetének.) Ezzel a jelöléssel $\frac{2r\Delta r}{R^2}=\Delta x$, és az (1)-ben szereplő összeg így írható:

$$K=\sum_{x=0}^{1}\left(1-\frac{f}{\sqrt{f^2+R^2x}}\right)\Delta x=K_1-K_2.$$

3. Az összeg első része könnyen számolható:

$$K_1 = \sum_{x=0}^{1} \Delta x = 1.$$

Az összeg másik fele már nem ennyire egyszerű:

$$K_2 = f \sum_{x=0}^{1} \frac{\Delta x}{\sqrt{f^2 + R^2 x}},$$

de ha a benne szereplő állandókat átjelöljük $f \to v_0$ és $R^2 \to 2a$ módon, ismerős képlethez jutunk:

$$K_2 = f \sum_{x=0}^{1} \frac{\Delta x}{\sqrt{v_0^2 + 2ax}} = f \sum \frac{\Delta x}{v(x)},$$

ahol $v(x) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ az egyenletesen gyorsuló mozgást végző test pillanatnyi sebessége x út megtétele után.

Láthatjuk, hogy

$$K_2 = f \sum \Delta t = fT,$$

ahol T az az idő, amennyi alatt a v_0 kezdősebességgel induló, állandó a gyorsulású test $x = 1$ utat tud megtenni. Az út–idő függvénykapcsolat szerint

$$\frac{a}{2} T^2 + v_0 T = 1,$$

vagyis az eredeti paraméterekkel kifejezve:

$$\frac{R^2}{4} T^2 + fT - 1 = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a pozitív megoldása:

$$T = \frac{-f + \sqrt{f^2 + R^2}}{R^2/2},$$

és így ($f = 4R$ esetén)

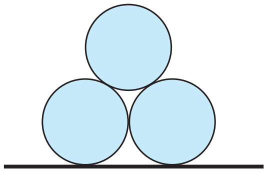
$$K_2 = 2\left[\left(\frac{f}{R}\right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{R}{f}\right)^2} - 1\right] = 8\sqrt{17} - 32,$$

és végül

$$K_1 - K_2 = 33 - 8\sqrt{17} \approx 0{,}015.$$

(*G. P.*)

7 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott a Lumity csapat megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–3 pont) 5 dolgozat.



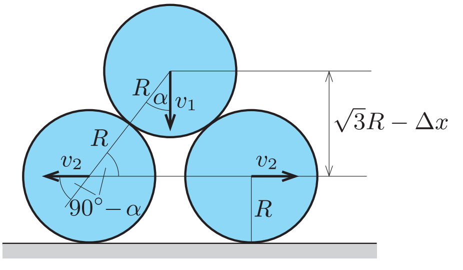
P. 5471. *Három egyforma, R sugarú, m tömegű jéghengert készítünk, és azokat az* ábrán *látható helyzetből kezdősebesség nélkül elengedjük. A jég felülete nagyon síkos, emiatt a súrlódás mindenhol elhanyagolható.*

a) Határozzuk meg és ábrázoljuk vázlatosan az egyik alsó jéghenger mozgási energiáját a felső henger elmozdulásának függvényében!

b) Mekkora sebességgel csapódik a felső jéghenger a talajhoz, és mekkora sebességre gyorsul fel a másik két jéghenger?

(*6 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

Megoldás. A szimmetria miatt a felső jéghenger függőlegesen lefelé mozog, a pillanatnyi sebességét jelöljük v_1-gyel, az alsó hengerek (vízszintes) sebességét pedig v_2-vel. A felső és az egyik alsó henger tengelyét összekötő egyenesnek a függőlegessel bezárt (időben egyre növekvő nagyságú) szöge legyen α (lásd az *1. ábrát*).



1. ábra

Ameddig a felső jéghenger érintkezik az alsókkal, a felső henger éppen olyan sebességgel közeledik a másikhoz, mint amekkora sebességgel az távolodik tőle:

$$v_1 \cos\alpha = v_2 \cos(90° - \alpha) = v_2 \sin\alpha,$$

vagyis

$$v_1 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} v_2.$$

Tekintsük azt a helyzetet, amelynél a felső henger elmozdulása Δx, vagyis amikor

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}R - \Delta x}{2R}, \tag{1}$$

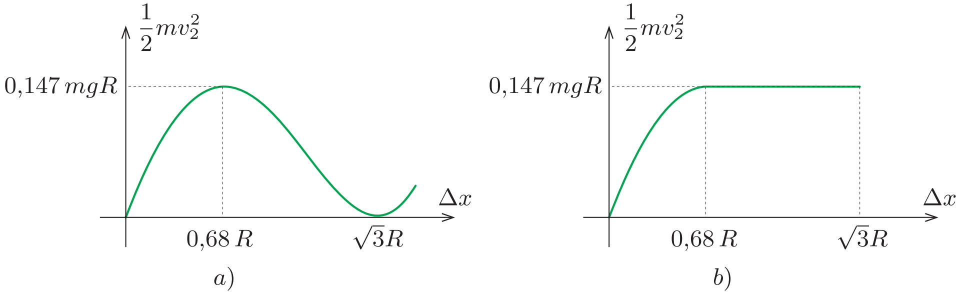
és alkalmazzuk az energiamegmaradás törvényét. (Súrlódás hiányában a jéghengerek nem jönnek forgásba, így csak a tömegközéppontok mozgásához kapcsolódó energiákkal kell számolnunk.)

$$mg\Delta x = \frac{1}{2}mv_1^2 + 2\cdot\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_2^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 2\right) = \frac{1}{2}mv_2^2\frac{1+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Innen (1) felhasználásával kapjuk, hogy bármelyik alsó test mozgási energiája a felső test elmozdulásának függvényében:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{\Delta x\left(\sqrt{3}R - \Delta x\right)^2}{4R^2 + \left(\Delta x - \sqrt{3}R\right)^2}\cdot mg. \tag{2}$$

Ábrázolva a (2) függvényt a *2.a. ábrán* látható grafikont kapjuk. Mivel az alsó jéghengerre ható nyomóerőnek folyamatosan gyorsítani kellene (vízszintes irányban) ezt a testet, nem lehetséges, hogy a mozgási energiája a felső henger bizonyos elmozdulása után csökkenni kezdene. Ténylegesen az történik, hogy $\Delta x = 0{,}68\,R$ elmozdulásnál a jéghengerek elválnak egymástól, onnantól kezdve az alsó hengerek nem gyorsulnak tovább, a mozgási energiájuk állandó marad (*2.b. ábra*).



2. ábra

A két alsó jéghenger sebessége az elválás pillanatában (és a továbbiakban):

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 0{,}147\,Rg} = 0{,}54\sqrt{Rg}\,.$$

A jéghengerek elválásának pillanatában a helyzetüket jellemző szög:

$$\arccos \frac{\sqrt{3}R - 0{,}68\,R}{2R} = 58{,}1^\circ,$$

és így a középső jéghenger sebessége ekkor (függőlegesen lefelé):

$$v_1 = v_2 \operatorname{tg} \alpha \approx 0{,}87\sqrt{Rg}\,.$$

A továbbiakban a középső test szabadon esik mindaddig, amíg meg nem tesz

$$d = \sqrt{3} - 0{,}68\,R = 1{,}05\,R$$

távolságot. Eközben

$$v_3 = \sqrt{v_1^2 + 2gd} = \sqrt{0{,}87^2\,Rg + 2 \cdot 1{,}05\,Rg} \approx 1{,}7\sqrt{Rg}$$

sebességre gyorsul fel és csapódik a talajba.

Schmercz Blanka (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. évf.)

13 dolgozat érkezett. Helyes Schmercz Blanka megoldása. Kicsit hiányos (4–5 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 9, hibás 1 dolgozat.

P. 5472. *Mennyi idő alatt kerüli meg a James Webb űrtávcső a Napot?*

(*3 pont*)

Megoldás. A James Webb űrtávcső a Nap-Föld L_2 librációs pont körül kering. Az L_2 pont a Napot és a Földet összekötő egyenesen van a Földtől 1,5 millió kilométerre. Az L_2 pont a Földdel együtt fordul el a Nap körül, és így ugyanannyi idő alatt kerüli meg a Napot, mint a Föld. Tehát a James Webb űrtávcső is pontosan 1 év alatt kerüli meg a Napot.

Több dolgozat alapján

Megjegyzés. Néhány versenyző az interneten talált 6 hónapos periódust adta meg válaszul, ami *nem a Nap,* hanem az L_2 pont körüli keringési idő.

67 dolgozat érkezett. Helyes 47 megoldás. Hiányos (1 pont) 8, hibás 9, nem versenyszerű 3 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 423. Ütköztessünk vízszintes asztallapon egyenesen és centrálisan egy nyugvó 100 forintos pénzérmének egy másik 100 forintos érmét. Mérjük le az ütközés után a megállásáig megtett utakat. Határozzuk meg ezekből az ütközés rugalmatlansági fokát jellemző *ütközési számot!* Függ-e az ütközési szám az ütköző testek relatív sebességétől?

(*6 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata nyomán

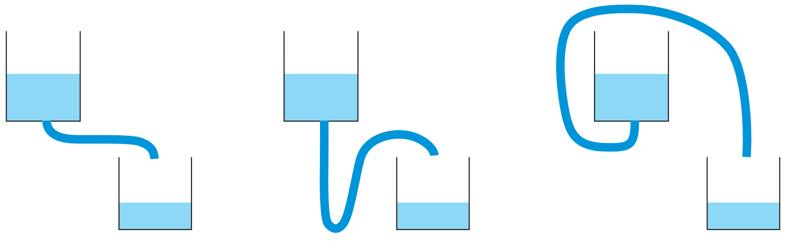
G. 817. A James Webb űrtávcső a Nap-Föld rendszer úgynevezett L_2 Lagrange-pontja körül mozog. Ez a pont 1,5 millió km távolságra van a Földtől a Nap és a Föld középpontját összekötő egyenesen úgy, hogy a Föld a Nap és az L_2 Lagrange-pont között van. Képzeljük el, hogy pontosan az L_2 Lagrange-pontban vagyunk, és a Nap felé nézünk. Szükségünk van-e védőszemüvegre? Mit látunk?

(*4 pont*)

G. 818. Egy nyitott vasúti kocsi vízszintes, egyenes pályán halad v sebességgel. A sínpár közvetlen közelében lévő ágyúval $2v$ sebességű lövedéket lövünk ki éppen akkor, amikor a vasúti kocsi vége az ágyú mellett halad el. A vízszinteshez képest milyen szögben lője ki az ágyú a lövedékét, hogy az a vasúti kocsi végére essen? A kilövés után mennyi idővel esik vissza a lövedék? (A légellenállástól tekintsünk el.)

(*4 pont*)

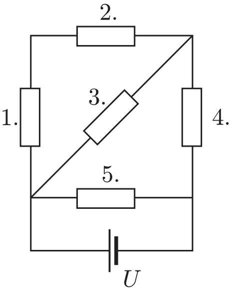
G. 819. A képen három, ugyanolyan folyadékot tartalmazó tartály látható, melyekhez leeresztő csövek csatlakoznak. Melyik tartály ürül ki leggyorsabban, ha a folyadék belső súrlódásától (viszkozitásától) eltekinthetünk?



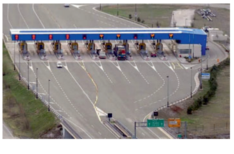
Biztos, hogy a középső tartály egyáltalán kiürül, ha a csatlakozó cső legalja nagyon mélyre kerül? Biztos, hogy a jobb szélső tartály egyáltalán kiürül, ha a csatlakozó cső legteteje nagyon magasra kerül?

(*4 pont*)

G. 820. Az *ábrán* látható áramkör mindegyik ellenállása 6 kΩ-os, a telep feszültsége $U = 60$ V. Hányszor több hő fejlődik a legjobban melegedő ellenálláson, mint a legkevésbé melegedőn?



(*4 pont*)

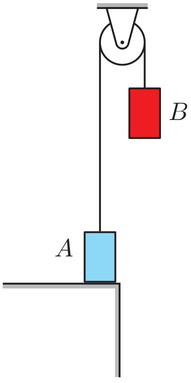


P. 5490. Horvátországban egy kétszer kétsávos autópálya-szakasz mindegyik sávján csúcsforgalomban az autók közötti átlagos távolság 150 m. A fizetős kapukon belépéskor átlagosan 10, kilépéskor 20 másodperc alatt jut át egy-egy autó. Hány kaput kellene elhelyezni az egyik, illetve a másik oldalon, hogy még csúcsforgalomban se legyen fennakadás, ha az autópályán az autók átlagos sebessége 100 km/h?

(*4 pont*) Példatári feladat nyomán

P. 5491. Egy adott térbeli ponttól induló, különböző hajlásszögű lejtőkön egy kezdősebesség nélkül induló, kicsiny test csúszhat le. Hol helyezkednek el térben a lejtők azon pontjai, amelyeknél a súrlódási hő értékei megegyeznek?

(*4 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka



P. 5492. Két egyforma, egyenként m tömegű testet egy elhanyagolható tömegű állócsigán átvetett rugalmas gumiszál köt össze. A testeket az *ábrán* látható helyzetben tartjuk – ekkor a gumiszál éppen nyújtatlan –, majd a B testet kezdősebesség nélkül elengedjük. Az A test az indítás után t_0 idővel válik el az asztaltól.

a) Mekkora a B test elmozdulása a $t = t_0$ időpillanatban?

b) Az indítástól számítva mennyi idő múlva lesz a B test sebessége először nulla?

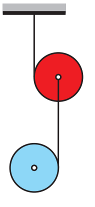
c) Mekkora a gumiszálat feszítő legnagyobb erő a mozgás során?

(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

P. 5493. A James Webb űrtávcső az úgynevezett L_2 Lagrange-pont közelében, a Földdel szinkronban járja körül a Napot. Ez a pont a Nap-Föld egyenesen, a Földtől nagyjából másfél millió kilométerre helyezkedik el a Földnek a Nappal ellentétes oldalán, és arról nevezetes (a többi Lagrange-ponttal együtt), hogy az oda helyezett testek „többé-kevésbé” a Földdel együtt mozogva „helyben maradnak”. Egyszerűsített számolással mutassuk meg, hogy valóban ilyen messze van a Földtől az L_2 Lagrange-pont!

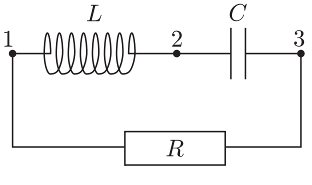
(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

P. 5494. Az *ábrán* látható „kettős jojó” két egyforma, homogén tömegeloszlású korongból és a rájuk tekert fonalakból áll.



A két testet a fonalak függőleges helyzetéből kezdősebesség nélkül indítjuk el. Mennyi idő alatt tekeredik le az alsó korongról a rajta lévő 80 cm hosszúságú fonál?

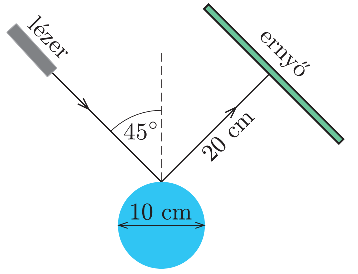
(*5 pont*) Példatári feladat nyomán



P. 5495. Az *ábrának* megfelelően egy $R = 100\ \Omega$-os ellenállást, egy $L = 1$ mH önindukciójú tekercset és egy $C = 10\ \mu$F kapacitású kondenzátort kapcsolunk össze. Az 1, 2, és 3-as pontok közül kettőre $f = 50$ Hz-es szinuszos feszültségforrást kapcsolunk. A három eset közül melyiknél fejlődik a legtöbb hő az ellenálláson?

(*5 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

P. 5496. Az *ábrán* látható módon egy 10 cm átmérőjű, tükröződő felületű hengert egy 5 mm átmérőjű lézersugárral világítunk meg. A visszaverődő lézersugárra merőlegesen egy ernyőt helyezünk el úgy, hogy a visszaverődési pont és az ernyő között a távolság 20 cm. Milyen alakú és méretű fényfolt keletkezik az ernyőn?



(*5 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

P. 5497. Tekintsük a hidrogénatom Thomson-féle atommodelljét. A hidrogénatom sugara kb. 50 pm.

a) Hol lehet egyensúlyban az elektron?

b) Mekkora frekvenciával rezeg az elektron ezen egyensúlyi helyzet körül? A színkép milyen tartományába esik az ilyen frekvenciájú fény?

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5498. Egy α hajlásszögű, h magas éket könnyen gördülő, az ékkel együtt M tömegű kocsira rögzítettünk. Az ék alján egy $m \ll M$ tömegű test nyugszik. A kis testet úgy szeretnénk feljuttatni az ék tetejéig, hogy az éket állandó nagyságú, vízszintes erővel gyorsítjuk.

a) Legalább mekkora munkát kell végezzünk eközben, ha a súrlódás elhanyagolható?

b) A legkisebb munkavégzés esetén mekkora erővel hatunk az ékre és mennyi idő alatt emelkedik a kis test h magasságra?

Adatok: $h = 1$ m; $M = 1$ kg; $\alpha = 30°$.

(*6 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

Beküldési határidő: 2023. június 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 73. No. 5. May 2023)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 286): **K. 769.** In Burger Burner Restaurant, it turned out that the soup is too salty. The chef decided to dilute it with the leftover soup from yesterday, which did not have enough salt in it. Given that 5 percent of the salty soup is salt while there is only 1.2 percent salt in the leftover soup, how much of each should the chef mix in order to obtain 72 decilitres of soup with a salt content of 3.48 percent? (Proposed by *K. A. Kozma,* Győr) **K. 770.** What is the ratio of the number of chessboard fields from which a knight may move to at least four fields to the number of fields from where the knight may move to eight fields? (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **K. 771.** Frankie cut a rectangle into exactly nine squares. On inspection, he observed that the area of one square was 64 cm^2, the areas of two other squares were 16 cm^2, and the rest of them were 4 cm^2 each. What was the perimeter of the original rectangle? (Proposed by *K. A. Kozma,* Győr) **K/C. 772.** How many four-digit natural numbers are there in decimal notation in which the first three digits (from the left) are different, all four digits are prime numbers, but the four-digit number is not divisible by any of its digits? (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **K/C. 773.** Is there a right-angled triangle in which the measures of the sides are integers, the lengths of exactly two sides are prime numbers and the area is also a prime number? (Proposed by *B. Bíró,* Eger)

New exercises for practice – competition C (see page 287): **Exercises up to grade 10: K/C. 772.** See the text at Exercises **K. K/C. 773.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1768.** Show that the simultaneous equations $8x^3+27y^3=-6\cdot 5^3$, $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{xy}{5}$ have no solution if x, y are real numbers. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1769.** The orthocentre of an acute-angled triangle ABC is M, and $AB\geqslant BC\geqslant CA$ for the sides. The perpendicular bisector of line segment AM intersects side AC at D, and the perpendicular bisector of line segment BM intersects side BC at E. Find the angles of triangle ABC, given that points D, M, E are collinear. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1770.** Solve the equation $\sqrt{7+\frac{3}{\sqrt{x}}}=7-\frac{9}{x}$ over the set of real numbers. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **Exercises upwards of grade 11: C. 1771.** In isosceles right-angled triangle ABC, the midpoint of leg BC is D, and the point closer to vertex B that divides the hypotenuse in a one to two ratio is E. Prove that AD and CE are perpendicular. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1772.** How many at most three-digit numbers are there in decimal notation that become a palindrome number if converted to binary notation? (A number is called a palindrome if its digits read the same left to right and right to left.) (Proposed by *L. Koncz,* Budapest)

New exercises – competition B (see page 288): **B. 5318.** All positive divisors of a positive integer are written down on a sheet of paper. There are two numbers on the sheet that leave a remainder of 2 when divided by 8, and there are four numbers that leave a remainder of 4. How many numbers may there be on the sheet that leave a remainder of 6 when divided by 8? (*3 points*) (Proposed by *B. Hujter,* Budapest) **B. 5319.** Is it true that every acute-angled triangle has at least one altitude whose foot lies in the middle third of the side? (*3 points*) (Proposed by *B. Hujter,* Budapest) **B. 5320.** Given that $\frac{a_{n+3}}{a_{n+1}}+\frac{a_n}{a_{n+2}}=2$ for each term of a sequence a_n, and the first three terms are $a_1=1$, $a_2=4$ and $a_3=2$, prove that $\frac{2^{2021}}{a_{2023}}$ is an integer. (*5 points*) (Proposed by *A. Eckstein,* Temesvár) **B. 5321.** Show that the sum of the squares of the medians of a triangle is smaller than one and a half times the square of the semi-perimeter. (*4 points*) Proposed by *L. Németh,* Fonyód) **B. 5322.** Prove that if $\frac{\cos\alpha}{s-b}-\frac{\cos\beta}{s-a}=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{s-c}$ in a triangle, with conventional notations, then the triangle is right-angled or isosceles. (As usual, s denotes the semi-perimeter of the triangle.) (*5 points*) (Proposed by *G. Holló,* Budapest) **B. 5323.** We are playing the following game: arbitrary real numbers from the interval $[0,100]$ are written on 2023 cards. Then the cards are dropped in an urn, and one card is pulled out at random. If the number on the card equals 2/3 of the mean of the numbers on all the cards then we will win as much money as the number on the card pulled out. Otherwise we do not win anything. What numbers should be written on the cards so that the expected value of the money gained is a maximum? (*5 points*) (Proposed by *B. Dura-Kovács,* Garching) **B. 5324.** Arthur and Barbara are playing the following game: they take turns in writing down a digit, proceeding left to right, until they obtain a 2023-digit number. Arthur starts the game, with a nonzero digit. Arthur will win if the resulting number has a divisor of the form $1\overbrace{7\ldots7}^{n\text{ pcs }7}$ $(n \geqslant 1)$. Otherwise Barbara wins. Which of them has a winning strategy? (*6 points*) (Based on the idea of *G. Kós,* Budapest) **B. 5325.** Determine all bounded convex polyhedra such that the planes of the faces divide the space into $c + e + \ell + 1$ regions, where c, e and ℓ, respectively, stand for the number of vertices, edges and faces. (*6 points*) (Proposed by *V. Vígh,* Sándorfalva)

New problems – competition A (see page 290): **A. 854.** Prove that $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{2^{2^k} \cdot 2^{k+1}}{2^{2^k} + 3^{2^k}} < 4$ holds for all positive integers n. (Submitted by *Béla Kovács,* Szatmárnémeti) **A. 855.** In scalene triangle ABC the shortest side is BC. Let points M and N be chosen on sides AB and AC, respectively, such that $BM = CN = BC$. Let I and O denote the incenter and circumcentre of triangle ABC, and let D and E denote the incenter and circumcenter of triangle AMN. Prove that lines IO and DE intersect each other on the circumcircle of triangle ABC. (Submitted by *Luu Dong,* Vietnam) **A. 856.** In a rock-paper-scissors round robin tournament any two contestants play against each other ten times in a row. Each contestant has a favourite strategy, which is a fixed sequence of ten hands (for example, RRSPPRSPPS), which they play against all other contestants. At the end of the tournament it turned out that every player won at least one hand (out of the ten) against any other player. Prove that at most 1024 contestants participated in the tournament. (Submitted by *Dávid Matolcsi,* Budapest)

Problems in Physics

(see page 314)

M. 423. There is a 100-forint coin, initially at rest, on a horizontal tabletop. Send another 100-forint coin to slide along the tabletop such that it undergoes head on collision with the stationary one. Measure the distances covered by the two coins after the collision until they stop. From the measured data determine the *coefficient of restitution* which is a number to characterise the inelasticity of the collision. Does the coefficient of restitution depend on the relative velocity of the colliding objects?

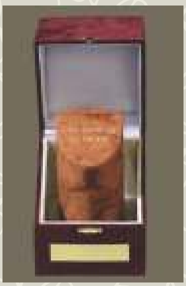
G. 817. The James Webb space telescope orbits the so-called L_2 Lagrange point of the Sun-Earth system. This point is located 1.5 million km from Earth along the line connecting the centres of the Sun and the Earth, beyond the Earth. Imagine that you are exactly at the L_2 Lagrange point, looking towards the Sun. Do we need goggles? What do we see? **G. 818.** An open railway wagon is travelling on a horizontal straight track at a speed of v. With a cannon in the immediate vicinity of the railroad track, a projectile is fired at a speed of $2v$ at the moment when the end of the wagon passes the cannon. At what angle to the horizontal should the cannon fire its projectile so that it strikes the end of the wagon? How long after firing does the projectile fall back? (Neglect air resistance.) **G. 819.** The *figure* shows three tanks, to which drain tubes are attached, and they all contain the same liquid. Which tank will drain the fastest if the internal friction (viscosity) of the liquid is negligible? Is it sure that the middle tank can even become empty, if the lowest point of the drain tube gets to a very low position? Is it sure that the right tank can even become empty, if the highest point of the drain tube gets to a very high position? **G. 820.** Each resistor in the circuit shown in the *figure* has a resistance of 6 kΩ and the voltage of the battery is $U = 60$ V. How many times more heat is dissipated in the resistor that heats up the most than in the one that heats up the least?

P. 5490. The dual carriageway road considered in this problem has two lanes for traffic going in each direction. The average distance between cars on each lane of the dual carriageway at peak times is 150 m. The average time to pass through the toll gates is 10 seconds for entering and 20 seconds for exiting. How many gates would be needed on one side and on the other to avoid congestion even at rush hour? (The average speed of the cars is 100 km/h.) **P. 5491.** A small body starting from rest at a given point in space can slide down along slopes of different angles of inclination. What is the locus of that points of the slopes, in space, at which the values of the dissipated heat due to friction are equal? **P. 5492.** Two identical bodies, each of mass m, are connected by a flexible rubber thread, threaded through a stationary pulley of negligible mass. The bodies are held in the position shown in the *figure* – at this position the rubber band is unstretched – and then body B is released without initial velocity. Body A loses the contact with the table at time t_0 after the release of body B. *a*) What is the displacement of body B at time $t = t_0$? *b*) How long after the start will the velocity of body B be zero for the first time? *c*) What is the maximum tension exerted in the rubber thread during the motion? **P. 5493.** The James Webb space telescope orbits the Sun, near the so-called L_2 Lagrange point, synchronously with Earth. This point is located 1.5 million km from Earth along the Sun-Earth line, beyond the Earth, and is notable (along with the other Lagrange points) for the fact that bodies placed there “more or less” remain there “at the same position” as they move with the Earth. Show by a simple calculation that the L_2 Lagrange point is really that far from the Earth. **P. 5494.** The “double yo-yo” shown in the *figure* consists of two identical discs of uniform density and the threads wound on them. The two bodies are released from rest such that the threads are vertical. How long does it take to unwind the thread from the lower disc, if its length is 80 cm? **P. 5495.** A resistor of resistance $R = 100\ \Omega$, a coil of inductance $L = 1$ mH and a capacitor of capacitance $C = 10\ \mu$F are connected as shown in the *figure.* A sinusoidal voltage supply of frequency $f = 50$ Hz is connected to two of the points 1, 2, and 3. In which of the three cases will the heat dissipated in the resistor be the greatest? **P. 5496.** A laser beam of diameter 5 mm is incident on the reflecting surface of the wall of a cylinder of diameter 10 cm, as shown in the figure. A screen is placed perpendicular to the reflected laser beam so that the distance between the reflection point and the screen is 20 cm. What is the shape and size of the light spot on the screen? **P. 5497.** Consider the Thomson model of the hydrogen atom. The radius of a hydrogen atom is about 50 pm. *a*) Where can the electron be in equilibrium? *b*) What is the frequency at which the electron oscillates around this equilibrium position? Into which region of the spectrum does the light of this frequency fall? **P. 5498.** A wedge of inclination angle α and height h was fixed to a trolley. The trolley can roll easily, and the total mass of the trolley and the wedge is M. At the bottom of the wedge there is a body of mass $m \ll M$ at rest. We want to get the small body up to the top of the wedge by accelerating the wedge with a constant horizontal force. *a*) What is the minimum work that we have to do in the process if friction is negligible? *b*) In the case of this minimum work, what is the force that we have to exert on the wedge, and how long does it take to raise the small body to the height of h? *Data:* $h = 1$ m; $M = 1$ kg; $\alpha = 30°$.

160 éve született Rátz László

Rátz László márvány emléktáblája a Budapest-Fasori Evangélikus Gimnáziumban

Wigner Jenő a dolgozószobájában, a falon Rátz László képével



A Rátz Tanár Úr Életműdíj kisplasztikája

AZ

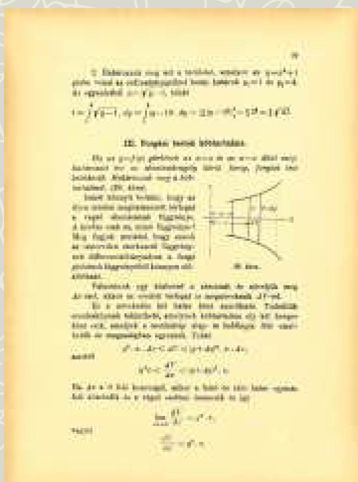
INFINITEZIMÁLIS SZÁMÍTÁSOK

ELEMEI

A KÖZÉPISKOLÁBAN

RÁTZ LÁSZLÓ és MIKOLA SÁNDOR

FRANKLIN-TÁRSULAT



A Mikola Sándorral közösen írt könyvének címlapja és egy oldal a könyvből

Nyári fizikatábor

2023. június 23. és június 29. között

Ismét megrendezzük a több évtizedes hagyományokkal rendelkező fizikatábort Dombóvár-Gunaras Üdülőfaluban, az apartman házakban és a hozzájuk tartozó zöldterületen. A táborba várjuk olyan fizika iránt nyitott tanulók jelentkezését a 9–12. évfolyamokról, akik tudják vállalni az aktív tábori részvételt a vele járó utazási viszontagságokkal együtt. Elsősorban a KöMaL feladat-megoldóit várjuk, de korlátozott számban más – a fizika iránt határozottan érdeklődő – diák is részt vehet a táborban, ha valamilyen versenyeredménye vagy a fizikatanárának ajánlása ezt alátámasztja.

A táborban (külön tanárokkal és programmal) részt vesz a nemzetközi matematikai diákolimpiára készülő „matematikus csapat” is, és az esti előadásokat (nemzetközileg is ismert előadókkal) közösen hallgathatjátok meg.

A táborba olyan határon túli magyar középiskolásokat is várunk, akik aktív KöMaL versenyzők, vagy a fizika iránt elkötelezett, más versenyeken eredményesen szereplő diákok. A Nemzeti Tehetség Program keretében elnyert 2.489.000 Ft pályázati forrás (NTP-TSZM-22-0116) biztosítja a tábor költségeinek nagyobbik részét (szállás + napi háromszori étkezés, fürdőbelépő, jutalmak, előadók tiszteletdíja stb).

Május közepén e-mailben küldjük el a diákoknak a tábori felhívást és a jelentkezési lapot, melyet azoknak kell elektronikusan visszaküldeniük, akik a nyári KöMaL Fizikatábor résztvevői akarnak lenni. A jelentkezési határidő: május 31. Túljelentkezés esetén a pontverseny pillanatnyi állása, illetve a beérkezett jelentkezések sorrendje lesz a mérvadó.

A KöMaL előfizetési árai a 2023/24-es tanévre

lapszám ár : 1250 Ft   BJMT tagoknak: 9900 Ft

együttesen megrendelt	*előfizetési ár személykenként*	*plusz ajándék példány*
1-9 db	10400 Ft	0 db
10-19 db	9900 Ft	1 vagy 2 db
20-29 db	9500 Ft	3 db
30-49 db	9000 Ft	4 vagy 5 db
50-	8500 Ft	6 vagy több db

A következő tanévre szóló megrendelésről a pontos információk várhatóan június elején kerülnek fel a honlapra.

Petőfi Kulturális Ügynökség
Nemzeti Együttműködési Alap
Nemzeti Kulturális Alap
Bethlen Gábor Alapkezelő Zrt.
Miniszterelnökség