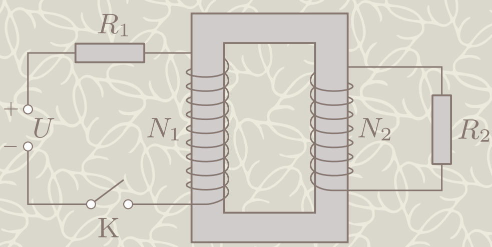
Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

Pelikán József



Ábra a P. 5477. feladathoz

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire | A *d*-dimenziós tér fedése

Pelikán József (1947–2023)

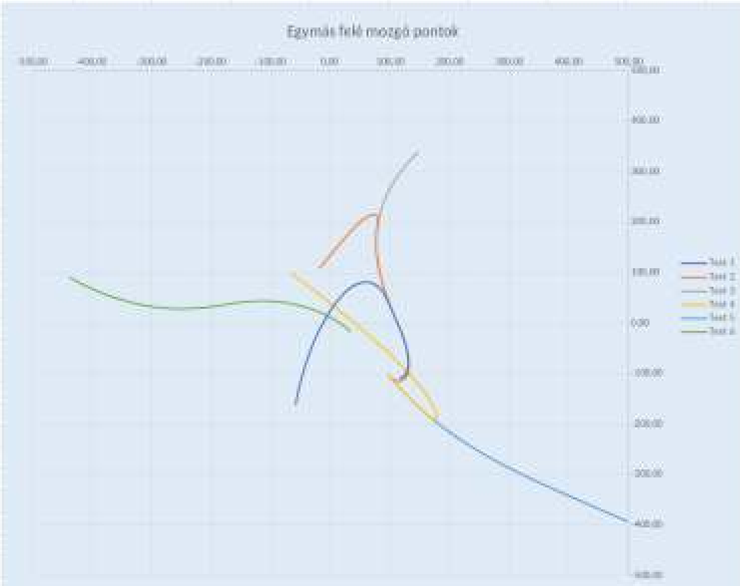
Matematika és fizika feladatok mintamegoldásai

KöMaL

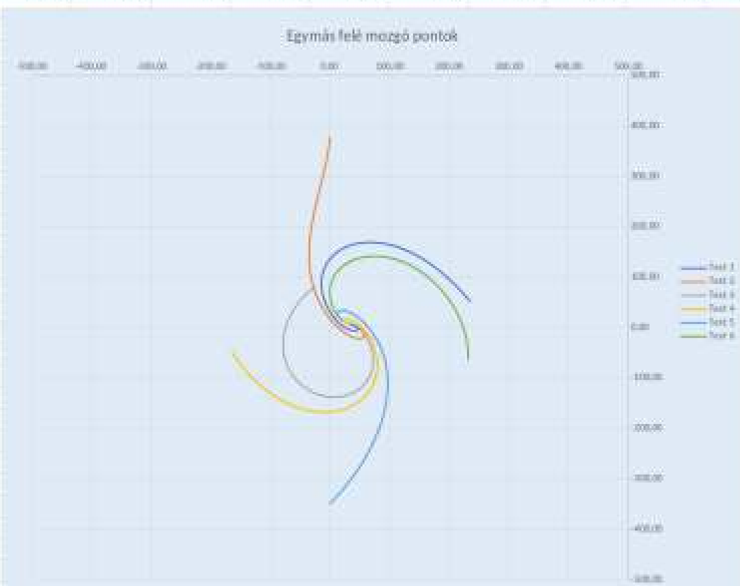
73. évfolyam
3. szám
2023.
március

További minták az I. 587. feladathoz

x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	x_5	y_5	x_6	y_6	v
-57,86	-159,62	-17,91	109,07	146,71	339,26	-65,91	99,27	497,38	-392,49	-436,08	90,74	0,50



x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	x_5	y_5	x_6	y_6	v
234,52	52,54	0,00	377,90	-25,16	81,94	-164,36	-48,82	0,00	-348,76	231,30	-62,99	0,50



KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

73. évfolyam 3. szám — Budapest, 2023. március

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1100 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 9200 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from
the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Pelikán József

Pótolhatatlan veszteség érte a magyar matematikai életet és a nemzetközi matematikaversenyzést: Pelikán József 75 éves korában, 2023. január 20-án Budapesten elhunyt.

Pelikán József középiskolás korában
fotó: KöMaL arcképcsarnok

1947. október 26-án született Budapesten. A matematikai versenyzés útján édesapja, Pelikán József építészmérnök, tanszékvezető egyetemi tanár indította el, KöMaL feladatok megoldására buzdítva őt már általános iskolás korában. 1962 és 1966 között a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium nevezetes, legelső speciális matematika tagozatos osztályába járt. Osztálytársa volt számos későbbi kiváló matematikus: *Andréka Hajnal, Baranyai Zsolt, Berkes István, Laczkovich Miklós, Lovász László, Major Péter, Pósa Lajos, Vesztergombi Katalin.* Ebben a nagyon motiváló és inspiráló közegben a diákok nemcsak tanáruktól, *Rábai Imrétől,* hanem egymástól is tanultak matematikát és sok minden mást, miközben egyfajta nemes versengés is kialakult. Pelikán József emellett *Surányi Jánostól* tanult számelméletet, majd *Fried Ervintől* algebrát.

1964-ben első díjat nyert a Magyar Televízió „Ki miben tudós?” versenyének matematika kategóriájában. A KöMaL matematikai és fizikai pontversenyeit több ízben megnyerte; 1965-ben a matematika OKTV-t is. Mind a négy gimnáziumi évében tagja volt a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára (IMO) utazó magyar csapatnak; egyszer ezüst-, háromszor aranyérmet szerzett; ezzel jelenleg a 12–18. helyen áll az IMO örökranglistáján. 1965-ben és 1966-ban különdíjat is kapott egy-egy feladat kiemelkedő megoldásáért. Negyedik osztályos gimnazistaként második díjat nyert a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyen (amelyet egyetemisták, valamint az ötéves egyetemi képzésben frissen végzett hallgatók számára rendeznek).

1966 és 1971 között az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematikushallgatója volt. 1973-ban aranygyűrűs kitüntetéssel szerezte meg az egyetemi doktori fokozatot.

Tíz tudományos publikációja jelent meg a diszkrét matematika, a (fél)csoportelmélet és a számelmélet területén. Lovász Lászlóval és Vesztergombi Katalinnal még egyetemista korukban közösen írt, Kombinatorika című szakköri füzetüket, amely magyarul, németül és japánul is megjelent, később könyvvé bővítették ki, amely angolul, portugálul, németül és (számos kiadásban) magyarul is megjelent.

Energiáinak legnagyobb részét a kimagasló színvonalú egyetemi tanításra és saját tudásának az ezt megalapozó, állandó bővítésére fordította. 1971 és 2020 között tanított az ELTE Természettudományi Karának Algebra és Számelmélet Tanszékén. A matematikushallgatók számára tartott kétéves bevezető algebrakurzusban a hivatalos tananyagon felül Lie-algebrákról, reprezentációelméletről, a lineáris algebra kombinatorikai alkalmazásairól és sok minden másról is beszélt. Legsajátabb szakterülete a csoportelmélet volt, de azon kívül is rengeteg, szerteágazó témakörben tartott magas szintű kurzusokat, olyan témákról is (pl. algebrai geometria, homologikus algebra), amelyekhez Magyarországon akkoriban még kevesen értettek, és a hallgatók mástól nehezen tanulhatták volna meg. Előadásai legendásak voltak. Hatalmas tudása, képessége a lényeg kiemelésére és érthető, tiszta, egyszerű megfogalmazására, briliáns stílusa, humora lenyűgözte hallgatóságát. Meg tudta mutatni, milyen izgalmas az algebra, hangsúlyt fektetve a matematika más ágaival való kapcsolatokra, a meglepő, váratlan jelenségekre és az elegáns, gyönyörű bizonyításokra. Kiváló matematikusok egész sora, a nála alig fiatalabbaktól a mai fiatalokig, számol be arról, hogy milyen meghatározó élmény volt ezeknek az előadásoknak a meghallgatása, mennyire mélyen formálta a gondolkodásukat. Többben az ő hatásának is tulajdonítják azt, hogy részben vagy egészben az algebrának és határterületeinek szentelték kutatói pályájukat.

Gyakorlatokat vezetni kevésbé szeretett, mint előadni, de nagyszerű volt ebben is. Az általa összeállított feladatsorokat megoldva magunk fedezhettük fel egy-egy témakör legfontosabb trükkjeit, módszereit. Előfordult, hogy egy-egy mély tétel bizonyítását bontotta fel egymásra épülő feladatokra. Zárthelyi dolgozatai hírhedten nehezek voltak; egyes visszaemlékezések szerint ezt azzal kompenzálta, hogy a félév végén a két dolgozat jegyét nem átlagolta, hanem összeadta. Óriási tekintélye ellenére közvetlen, pózmentes emberi viszonyt alakított ki diákjaival, akik tegezték és Jocónak szólították őt.

Nyugdíjaztatása után még tíz éven át, öt évfolyamnak tartotta a bevezető algebraelőadásokat. Ekkor már kevesebben merték visszategezni, a tempó kicsit lassult, a vizsgákon a szigor kicsit enyhült. A hallgatók lelkesedése megmaradt: két évfolyam diákjai is arra kérték őt, hogy a hivatalos tanrendi óraszámon felül is rendszeresen tartson nekik előadásokat, amit meg is tett.

A már említett diákkori sikerek után felnőtt élete is összefonódott a matematikaversenyek történetével. A Kürschák József Matematikai Tanulóverseny bizottságának 1972-től 2018-ig volt tagja, ezen belül nyolc évben titkára. Fontos szerepe volt a Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny magyarországi meghonosításában; három alkalommal igen aktív résztvevője volt az Association Kangourou sans Frontières feladatkiválasztó nemzetközi szemináriumainak. Az 1970. évi, Keszthelyen megrendezett IMO-n koordinátor és angol–francia–német–orosz tolmács volt. Az 1982. évi budapesti diákolimpián mindezeken felül a feladatkiválasztó bizottság elnöke is volt. 1973-ban a magyar IMO-csapat helyettes vezetője, 1988-ban és az 1990-től 2019-ig terjedő harminc évben pedig vezetője volt.

Csapatvezetőként igen elszántan és hatékonyan folytatta le az IMO-koordinátorokkal való egyeztetéseket a magyar versenyzők pontszámairól. Ennek főként a régebbi diákolimpiákon volt nagy jelentősége, mert akkor még nem készültek a maihoz hasonló részletességű pontozási útmutatók. Szakmai kompetenciájának, diplomáciai érzékének és széleskörű nyelvismeretének köszönhetően megválasztották az IMO-t irányító „Advisory Board" tagjává (1992–2002), majd két ciklusra elnökévé (2002–2010). A diákolimpiákon egyre nőtt a résztvevő országok, köztük a latin-amerikaiak száma, így egyre fontosabbá, végül – a fent említett négy mellett – az IMO ötödik hivatalos nyelvévé vált a spanyol. Jocó, már nyugdíjasként, beiratkozott egy spanyol nyelvtanfolyamra, és fiatalokat megszégyenítő lelkesedéssel és szorgalommal vetette bele magát a tanulásba. A 2020. és 2021. évi, online megrendezett diákolimpiákon a Hivatalos Nyelvek Bizottságának tagjaként segítette a munkát, ellenőrizve a világszerte készülő feladatsor-fordításokat.

A 2017-es olimpiai csapat vezetőjeként Rio de Janeiroban

Számos külföldi egyetemen volt vendégelőadó. Több országban tartott ismeretterjesztő előadásokat matematikáról és versenyekről angolul, franciául, németül és oroszul. Az ő munkája a Springer kiadó „Contests in Higher Mathematics: Miklós Schweitzer Competitions 1962–1991" című kötetének az algebrai feladatok megoldását tartalmazó fejezete.

Magyarországi tehetséggondozó tevékenysége részben, de nem kizárólag, a diákolimpiai felkészítésre irányult. Előadásokat tartott az olimpiai szakkörön, az olimpiára felkészítő és egyéb matematikatáborokban, az Ifjúsági Matematikai Körben. A KöMaL-ba az évenkénti IMO-beszámolókon kívül matematikai ismeretterjesztő cikkeket is írt, feladatokat is javasolt. Ő írta a Typotex kiadó „Új matematikai mozaik" című kötetének klasszikus algebrai görbékről szóló fejezetét.

2009-ben, Vesztergombi Katalinnal megosztva kapta meg a Bolyai János Alapítvány díját, amelyet főként magyar közgyűjtemények vezetőinek és különleges kiadványok létrehozóinak ítélnek oda. 2014-ben a Nemzeti Matematikaversenyek Világszövetségének Erdős Pál-díját, 2020-ban a Bolyai János Matematikai Társulat Beke Manó-nagydíját vehette át.

Pelikán József díjakat ad át a KöMaL Ankéton 2005-ben

Versenyszerűen bridzsezett. Nyert budapesti és országos párosbajnokságot is. A Taurus csapatának tagjaként 1985 és 1995 között hét Magyar Kupa-győzelemnek és tíz budapesti csapatbajnoksági győzelemnek, emellett 1986-ban a Bajnokcsapatok Európa-kupáján elért második helyezésnek volt részese. Az Európa-bajnokságokon 1985-ban a magyar női, 1989-ben és 1991-ben pedig a férfi (nyílt) válogatottnak volt a kapitánya.

A budapesti Ifjúsági Európa-bajnokságon 1986-ban (a sor másik szélén Ottlik Géza)
fotó: bridzs.hu

Biztos vagyok abban, hogy sem kollégái, sem tanítványai nem fogják őt elfelejteni.

Frenkel Péter

A d-dimenziós tér fedése konvex test eltoltjaival*

1. Egy fedési feladat

Egy iskolában rendszeresen beázik a mennyezet, így hát megpróbálják legalább a tanári asztalt megmenteni, nehogy az is tönkremenjen. E célból a matekszertár logikai készleteit veszik igénybe: megpróbálják egybevágó idomokkal teljesen lefedni az asztalt. Ha a kis (nem lyukas!) négyzeteket használják, akkor könnyen kitalálható, hogy hogyan lesz a legkevesebb idomra szükség. De vajon mi a helyzet, ha (szintén nem lyukas!) kör idomokkal próbálják lefedni? Akkor mi a leggazdaságosabb fedés? Még izgalmasabb – és általánosabb – kérdés, hogy mi a helyzet akkor, ha az „asztallapunk" a d-dimenziós tér, a lefedéshez használt testek pedig valamilyen egybevágó, szintén d-dimenziós konvex testek. Ez a cikk ezzel az utóbbi, általános problémával foglalkozik.

Korábbi cikkeinkben [1, 2] bevezettük $\mathbb{R}^d$-t, a d-dimenziós euklídeszi geometria ponthalmazát, és abban a konvex, illetve a zárt halmazokat. Néhány jelölés: egy $\mathbb{R}^d$-beli K halmaz eltoltja egy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ vektorral a $K + \mathbf{v} = \{\mathbf{x} + \mathbf{v} : \mathbf{x} \in K\}$ halmaz. (Vagyis a vektoroknak az a halmaza, amelyet úgy kapunk, hogy K minden elemét eltoljuk $\mathbf{v}$-vel.) A K halmaz λ-szorosa, ahol λ valós szám (skalár), a $\lambda K = \{\lambda\mathbf{x} : \mathbf{x} \in K\}$ halmaz, speciálisan $-K = (-1)K$, amely nem más, mint a K halmaz origóra vett középpontos tükörképe.

Az, hogy egybevágó – sőt azonos helyzetű – alakzatokat akarunk használni, megfelel annak, hogy egy d-dimenziós K zárt konvex halmaz eltoltjaival akarjuk a lehető leggazdaságosabban lefedni az egész $\mathbb{R}^d$ teret. Hogyan definiáljuk a gazdaságosságot? Nyilvánvalóan végtelen sok eltoltra lesz szükségünk, így azok száma nem megfelelő mennyiség. Definiálható egy fedés sűrűsége, de az technikailag némiképp izzadságos, ezért egy egyszerűbb mennyiséget használunk: célunk az, hogy egyik pont se legyen *túl sokszor fedve.* További egyszerűsítés, hogy a lefedéshez használt test legyen középpontosan szimmetrikus. (A kiindulási példában használt négyzet és kör is megfelel ennek a feltételnek.) Nyilván nem megy az általánosság rovására, ha a kiindulási test – amelynek az eltoltjaival fedünk – szimmetriaközéppontjának az origót választjuk.

2. Fedés megadása beírt oktaéder és körülírt kocka segítségével

Az első módszer, melyet bemutatunk azon alapszik, hogy tetszőleges középpontosan szimmetrikus konvex testet tudunk „szendvicselni" egy oktaéder és egy paralelotóp közé. Lássuk, mik ezek a d-dimenziós testek!

Vegyünk $\mathbb{R}^d$-ben d darab olyan vektort – $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ –, amelyek nem esnek egy hipersíkba, tehát csak úgy lehet a számszorosaik összegeként a $\mathbf{0}$ vektort előállítani,

* A cikk az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-5 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

ha mindegyiknek a 0-szorosát vesszük. Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ az $\mathbb{R}^d$ tér egy *bázisa.* A síkban például ilyen bázis két vektor, amelyek nincsenek egy egyenesen, a térben bázis három olyan vektor, amelyek nincsenek egy síkban. A bázisnak van egy fontos tulajdonsága: $\mathbb{R}^d$ minden $\mathbf{p}$ vektora előáll $\mathbf{p} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_d\mathbf{u}_d$ alakban valamely $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ skalárokra, ráadásul az előállítás egyértelmű.

Az $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ bázis segítségével meghatározunk két alakzatot. Egyrészt az

$$X(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d) = \operatorname{conv}\{\mathbf{u}_1, -\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, -\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_d, -\mathbf{u}_d\}$$

halmazt az általuk meghatározott *keresztpolitópnak* hívjuk, ahol a *conv* jelentése konvex burok, lásd [1]. Háromdimenziós térben például, ha az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ egységvektorokat vesszük, akkor éppen egy szabályos oktaédert kapunk.

Ugyanakkor egy bázis meghatároz egy másik objektumot is, amely pedig a paralelogramma d-dimenziós megfelelője, a *paralelotóp:*

$$P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d) = \big\{\mu_1\mathbf{u}_1 + \mu_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \mu_d\mathbf{u}_d : \mu_1, \ldots, \mu_d \in [-1, 1]\big\}.$$

Gondoljuk meg, hogy ez háromdimenzióban éppen egy paralelogramma alapú ferde hasáb. (Ezt három dimenzió esetén paralelepipedonnak is nevezik.)

Ugyancsak könnyen meggondolható, hogy az így megadott paralellotóp konvex, és az is, hogy középpontosan szimmetrikus, a szimmetria-középpontja pedig az origó.

Tetszőleges d dimenzióban azon hasáb d-dimenziós térfogata, mely alapjának $(d-1)$-dimenziós térfogata A, magassága pedig m:

$$Am.$$

Azon gúla d-dimenziós térfogata, mely alapjának $(d-1)$-dimenziós térfogata A, magassága pedig m:

$$\frac{1}{d}Am.$$

(Ezt a két térfogatképletet most nem igazoljuk, de látható, hogy a megfelelő háromdimenziós képletek általánosításai.)

1. feladat. *Egy K test térfogatát jelölje $\operatorname{vol}(K)$. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ bázisra*

$$\operatorname{vol}\big(X(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d)\big) = \frac{1}{d!}\operatorname{vol}\big(P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d)\big).$$

1. tétel (Auerbach-bázis létezése). *Legyen K egy $\mathbb{R}^d$-beli origóra középpontosan szimmetrikus, korlátos, zárt, konvex halmaz. Ekkor van olyan bázisa $\mathbb{R}^d$-nek, amely által meghatározott keresztpolitóp K-ban van és amely által meghatározott paralelotóp tartalmazza K-t.*

A bizonyításhoz vegyük $\mathbb{R}^d$ egy olyan bázisát, amelynek minden vektora K-beli, és amelyre a $\operatorname{vol}\big(X(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d)\big)$ térfogat maximális. Az, hogy ilyen bázis van, tehát hogy ez a maximum valóban felvétetik, igazolható abból, hogy K korlátos és zárt, de most ezt a bizonyítást sem részletezzük. Mivel K konvex, ezért $X(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d)$ benne van K-ban, hiszen minden konvex alakzat tartalmazza akárhány pontjának konvex burkát.

Be kell látnunk, hogy a $P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d)$ paralelotóp tartalmazza K-t. Legyen $\mathbf{u} \in K$ egy tetszőleges pont. A bázis definíciójánál említettük, hogy minden vektor – így u is – egyértelműen előáll $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_d\mathbf{u}_d$ alakban valamely $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in$ $\in \mathbb{R}$ skalárokra. Be kell látnunk, hogy minden i-re $\lambda_i \in [-1, 1]$. Rögzítsük mondjuk $i = 1$-et és tegyük fel, hogy $\lambda_1 > 0$. Az $X(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d)$ keresztpolitópot tekinthetjük egy kettős gúlának, melynek alapja a $(d-1)$-dimenziós $\operatorname{conv}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_d)$ keresztpolitóp, és két további csúcsa az $\mathbf{u}_1$ és $-\mathbf{u}_1$ pont. Ha a $\mathbf{u}_1$-hez tartozó gúla magassága m, akkor azon gúla magassága, melynek alapja szintén $\operatorname{conv} \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_d$, de a további pontja $\mathbf{u}$, éppen $\lambda_1 m$. Persze K konvexitásából adódóan ez a gúla is K-beli, illetve az origóra vett tükrözöttjével együtt kapott kettős gúla is. Mivel a bázist úgy választottuk, hogy az általuk meghatározott keresztpolitóp maximális térfogatú legyen, ezért azt kapjuk, hogy $\lambda_1 \leqslant 1$.

Az origóra vett középpontos szimmetriát kihasználva hasonlóan belátható, hogy $\lambda_1 < 0$ esetén λ_1 nagyobb vagy egyenlő, mint -1, tehát $\lambda_1 \in [-1, 1]$, és ugyanez belátható a többi λ_i együtthatóról is. Ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk. $\square$

Célunk a következő belátása.

2. tétel. *Legyen K egy korlátos, zárt, konvex halmaz $\mathbb{R}^d$-ben, amely az origóra középpontosan szimmetrikus, tehát $K = -K$. Ekkor létezik $\mathbf{v}$ vektorok olyan $E \subset \mathbb{R}^d$ halmaza, amely vektorokkal rendre eltolva K-t a kapott alakzatok együtt fedik $\mathbb{R}^d$-t (formálisan $\bigcup\limits_{\mathbf{v}\in E} (K + \mathbf{v}) = \mathbb{R}^d$), és $\mathbb{R}^d$ egyik pontját se fedi több, mint $(d+1)^d$ ilyen alakú halmaz.*

Hogyan használjuk az 1. tételt a tér egy fedésének konstrukciójához?

2. feladat. *Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ bázisra*

$$X(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d) \supseteq \frac{1}{d} P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d).$$

Adott tehát a $K = -K$ korlátos, zárt, konvex halmaz $\mathbb{R}^d$-ben. Vegyünk egy hozzá tartozó $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ Auerbach-bázist, tehát olyat, amely megfelel az 1. tétel feltételeinek. A 2. feladat szerint

$$\frac{1}{d} P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d) \subseteq K \subseteq P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d). \tag{1}$$

Csempézzük $\mathbb{R}^d$-t a kicsiny $\frac{1}{d}P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d)$ paralelotóp eltoltjaival úgy, hogy az eltoltak e paralelotóp éleinek egész számszorosaival – vagyis az $1/d \cdot \mathbf{u}_i$-k páros számszorosaival – legyenek odébb. Így kitöltöttük az egész $\mathbb{R}^d$ teret ezekkel, és az eltolásvektoraink halmaza

$$E = \left\{ \frac{2i_1}{d}\mathbf{u}_1 + \ldots + \frac{2i_d}{d}\mathbf{u}_d : i_1, \ldots, i_d \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ekkor tehát az $\frac{1}{d}P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d) + \mathbf{v}$ alakú halmazok, ahol $\mathbf{v} \in E$, fedik $\mathbb{R}^d$-t, így persze a $K + \mathbf{v}$ $(\mathbf{v} \in E)$ halmazok is. Kérdés, hogy egy tetszőleges $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ pontot legfeljebb hányszor fednek az utóbbiak. Az (1) tartalmazásból adódóan $\mathbf{p}$-t legfeljebb annyi $K + \mathbf{v}$ halmaz tartalmazza, ahány $P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d) + \mathbf{v}$ alakú halmaz.

3. feladat. *Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ pontra a $\mathbf{p}$ pontot tartalmazó $P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d) + \mathbf{v}$ alakú halmazok száma, ahol $\mathbf{v} \in E$, legfeljebb $(d+1)^d$.*

Ha magunk akarjuk megoldani ezt a feladatot, még ne olvassunk tovább, segítség következik!

Segítség. Lássuk be, hogy $P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d) + \mathbf{v}$ pontosan akkor tartalmazza $\mathbf{p}$-t, ha $\frac{d+1}{d}P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d) + \mathbf{p}$ tartalmazza az $\frac{1}{d}P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d) + \mathbf{v}$ paralelotópot.

Ha megoldottuk ezt a feladatot, akkor a 2. tételt beláttuk. $\square$

3. Második módszer: fél sugarú gömbök pakolása

Most bemutatunk egy egyszerű, de tanulságos módszert, amellyel ráadásul egy gazdaságosabb fedést kapunk.

3. tétel. *Legyen K egy korlátos, zárt, konvex halmaz $\mathbb{R}^d$-ben, amely az origóra középpontosan szimmetrikus, tehát $K = -K$. Ekkor létezik olyan $E \subset \mathbb{R}^d$ halmaz, amelyre a $K + \mathbf{v}$ alakú halmazok, ahol $\mathbf{v} \in E$, fedik $\mathbb{R}^d$-t (formálisan $\bigcup_{\mathbf{v} \in E} (K + \mathbf{v}) = \mathbb{R}^d$), és $\mathbb{R}^d$ egyik pontját se fedi több, mint 3^d ilyen alakú halmaz. (Ez – $d > 2$ esetén – nyilván „gazdaságosabb" fedést jelent, mint amilyet a 2. tétel ígér.)*

Először nézzük azt az esetet, amikor K az origó középpontú egység sugarú (tömör) gömb. Ekkor tetszőleges $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ vektorra és $\lambda > 0$ számra a $\lambda K + \mathbf{v}$ gömb éppen a $\mathbf{v}$-től legfeljebb λ távol lévő pontok halmaza. Egy $\mathbb{R}^d$-beli halmazt most hívjunk *tágasnak,* ha bármely két pontjának a távolsága legalább 1.

Most jön az ötlet: vegyünk egy *maximális tágas halmazt* $\mathbb{R}^d$-ben, tehát olyat, amely tágas, de amelyhez tetszőleges pontot hozzávéve már nem tágas halmazt kapunk. Intuitíve a következő módon látható be, hogy ilyen halmaz van. Veszünk egy tágas halmazt. Ha hozzávehető még pont úgy, hogy tágas maradjon, akkor hozzáveszünk egy ilyen pontot. Addig veszünk hozzá újabb pontokat, amíg már nem tudunk. Lehet, hogy végtelen sok lépésre lesz szükségünk, de ez nem baj, van időnk. (Igazából a végtelen sok lépést igénylő „bizonyításokat" nem szoktuk bizonyításnak tekinteni. De itt ez a gondolatmenet halmazelméleti eszközöket – például a Zorn-lemmát – használva korrektté tehető.) Van tehát egy maximális tágas halmazunk, jelölje E.

4. feladat. *Lássuk be, hogy tetszőleges $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ különböző pontokra az $\frac{1}{2}K + \mathbf{v}$ és az $\frac{1}{2}K + \mathbf{w}$ gömbök átfedés nélküliek, tehát a belsejeik diszjunktak.*

Most tekintsük a $K + \mathbf{v}$ alakú gömböket minden $\mathbf{v} \in E$ vektorra. Ezek a gömbök persze fedik $\mathbb{R}^d$-t, ami következik abból, hogy E maximális, hiszen ha lenne olyan pont, amit nem fednek, akkor az az E minden pontjánál 1-nél távolabb lenne, vagyis vele bővíthető lenne E, tehát E nem lenne maximális.

Legfeljebb hányszor van fedve egy pont? Legyen $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ tetszőleges pont. Mely E-beli $\mathbf{v}$ vektorokra tartalmazza a $K + \mathbf{v}$ gömb $\mathbf{p}$-t? Éppen azon $\mathbf{v}$-kre, amelyek benne vannak a $\mathbf{p}$ középpontú $K + \mathbf{p}$ gömbben. Ha viszont valamely $\mathbf{v}$ vektor benne van a $K + \mathbf{p}$ gömbben, akkor a fél sugarú $\frac{1}{2}K + \mathbf{v}$ benne van a $\frac{3}{2}$ sugarú $\frac{3}{2}K + \mathbf{p}$ gömbben. Ugyanakkor tudjuk, hogy az E pontjai körüli fél sugarú gömbök átfedés nélküliek. Tehát $\mathbf{p}$-t legfeljebb annyi $K + \mathbf{v}$ alakban írható gömb fedi (ahol $\mathbf{v} \in E$), ahány átfedés nélküli $\frac{1}{2}$ sugarú gömb belefér egy $\frac{3}{2}$ sugarú gömbbe.

Hogy ez pontosan mennyi, azt általánosságban, tetszőleges d-dimenzióra megadni nehéz. De egy felső becslést könnyen tudunk adni a térfogatot használva. Ehhez csak azt kell tudni, hogy a d-dimenziós térfogat hogyan változik, ha a halmazt nagyítjuk. Tudható – bár itt most ezt sem bizonyítjuk –, hogy tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárra és $H \subset \mathbb{R}^d$ korlátos, konvex halmazra ha H λ-szorosára változik – vagyis benne minden távolság λ-szoros lesz –, akkor a térfogata $|\lambda|^d$-szeres lesz, azaz

$$\operatorname{vol}(\lambda H) = |\lambda|^d \operatorname{vol}(H).$$

Ezt az azonosságot elfogadhatjuk azért is, mert hihető, hiszen a sík, illetve térbeli eset kiterjesztése, de azért is, mert egy kockára persze igaz, és konvex testek térfogatát kicsiny kockákra történő felbontás segítségével definiáljuk.

Innen már könnyen megkapjuk a kívánt becslést, kihasználva, hogy a p körüli $3/2$ sugarú gömbben nem lehet több $1/2$ sugarú gömböcske, mint ahányszoros a nagyobb gömb térfogata a kisebbének. Vagyis

$$\left(\frac{3}{2}K + \mathbf{p}\right)\text{-ben levő } \frac{1}{2}K + \mathbf{v} \text{ alakú gömbök száma, ahol } \mathbf{v} \in E \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{vol}\left(\frac{3}{2}K\right) \Big/ \operatorname{vol}\left(\frac{1}{2}K\right) = \frac{(3/2)^d \operatorname{vol}(K)}{(1/2)^d \operatorname{vol}(K)} = 3^d,$$

amivel a 3. tételt beláttuk, ha K az egységgömb.

A bizonyítás szó szerint megismételhető tetszőleges középpontosan szimmetrikus, korlátos, zárt, konvex K halmazra, egyetlen dolgot kell ehhez tenni, definiálni a tágas halmazt. Rögzítsük tehát K-t. Egy $E \subset \mathbb{R}^d$ halmazt *K-tágasnak* hívunk, ha bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ különböző pontokra az $\frac{1}{2}K + \mathbf{u}$ és az $\frac{1}{2}K + \mathbf{v}$ halmazok átfedés nélküliek, tehát a belsejeik diszjunktak. Az, hogy van maximális, tehát tovább nem bővíthető K-tágas halmaz $\mathbb{R}^d$-ben hasonló gondolatmenettel látható be, mint a gömbök esetén. És innentől a bizonyításban sehol nem használtuk, hogy K a gömb – ezt érdemes végiggondolni. $\square$

Felmerül a kérdés, hogy ennél gazdaságosabb fedés adható-e. Erdős és Rogers [3, 4] belátták, hogy a 3. tételnél *sokkal gazdaságosabb* fedés is megadható tetszőleges K konvex test esetén: olyan, amelynél egyik pontot sem tartalmazza több, mint $3d \ln d$ eltoltja K-nak. Ha érdekel, miért van ez így, gyere matematikusnak, az egyetemen elmesélem.

Hivatkozások

[1] Naszódi M.: *Konvex testbe írható tetraéder d-dimenzióban,* KöMaL, 2022. május. `https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`

[2] Naszódi M.: *Politópok és a gömb d-dimenzióban,* KöMaL, 2018. december. `http://db.komal.hu/KomalHU/`

[3] P. Erdős and C. A. Rogers, *Covering space with convex bodies,* Acta Arith., **7** (1961/1962), 281–285.

[4] C. A. Rogers: *A note on coverings,* Mathematatika, **4** (1957), 1–6.

Naszódi Márton

Könyvajánló

Megjelent *Bártfai Pál: A háromszög* című gyűjteményes, összefoglaló művének elektronikus változata.

`https://www.bolyai.hu/files/Bartfai_Pal_A_haromszog.pdf`

A könyv a szerző és a Bolyai János Matematikai Társulat jóvoltából szabadon letölthető, másolható, terjeszthető.

A mű összegyűjtve tartalmazza a lényegesebb tudnivalókat a háromszögről, közismert és kevésbé ismert – helyenként kifejezetten meglepő – tételeket egyaránt. Az állításokat bizonyításokkal együtt közli, melyek között egyszerűbbek és több gondolkodást igénylőek egyaránt előfordulnak.

A könyv minden matematika iránt érdeklődőnek nyújthat érdekes újdonságokat, versenyre készülő diákok (és felkészítő tanáraik) számára pedig szinte kötelező olvasmánynak tekinthető. Részleteiben is felhasználható ismeretszerzési céllal, képlettárként, vagy bizonyítási technikák elsajátítására.

A tartalomból:

– A háromszögről általában
– Baricentrikus koordináták
– Derékszögű háromszög
– Pythagorasz-tétel
– Apollóniusz-kör
– Feuerbach-kör
– A szimmedián
– Erdős-Mordell egyenlőtlenség
– Dél Keresztje
– A háromszög Apollóniusz-körei
– A háromszög szögfelezői
– Ceva tétele
– Thalesz-tétel
– Gergonne-háromszög
– Euler-egyenes
– Napóleon tétele és a panoráma pont
– Simson-egyenes
– Brocard-pontok
– Izodinamikus pont
– Egyéb nevezetes pontok

Olvasásához, használatához sok sikert kívánunk!

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Hány olyan, *egész* számokból álló számhármas van, melyben a három szám szorzata 6? (Két számhármast nem tekintünk különbözőnek, ha csak a számok sorrendjében térnek el egymástól.) (*4 pont*)

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a *valós* számok halmazán:

b) $(x+1)(x-2)(x-3)=6$; (*5 pont*)

c) $(\sin x\cos x-2\sin x)(2\sin x-1)=0$. (*5 pont*)

hang neve	frekvencia (Hz)
A	440
B	
H	
C	
Cisz	
D	
Disz	
E	
F	
Fisz	
G	
Gisz	
A′	880

2. Az úgynevezett normál zenei A hang frekvenciája 440 Hz. Az egy oktávval magasabb A hang frekvenciája éppen kétszer ekkora, azaz 880 Hz. Közöttük 11 „félhang” van, ld. a *táblázatot.*

Két szomszédos félhang frekvenciájának hányadosa állandó, jelölje ezt az állandót q.

a) Igazoljuk, hogy q értéke öt tizedesjegy pontossággal 1,059 46. (*4 pont*)

b) Határozzuk meg a táblázatban az egymás után következő félhangok hiányzó frekvenciáit egész Herzre kerekítve. (*3 pont*)

Ha két hang egyszerre szólal meg, az emberi fül általában azokat a hangközöket hallja „szépnek”, amelyekben a két megszólaló hang frekvenciájának hányadosa minél „egyszerűbb” törttel fejezhető ki. A *kvint* hangköz például két olyan hang együttes megszólalását jelenti, melyek 7 félhangnyi távolságra vannak egymástól. A két hang frekvenciájának hányadosa ilyenkor nagyon közel van a $\frac{3}{2}$-hez.

c) Számítsuk ki a két hang frekvenciájának hányadosát három tizedesjegy pontossággal és határozzuk meg, hogy a hányados hány százalékkal tér el a $\frac{3}{2}$-től. (*4 pont*)

d) Tekintsük növekvő sorrendben a félhangok frekvenciáinak pontos értékét, majd ezeknek az értékeknek a kettes alapú logaritmusát. Az ezekből képzett sorozatot jelölje $\{a_n\}$. Válasszuk ki az alábbiak közül az igaz állítás betűjelét. (*2 pont*)

A) Az $\{a_n\}$ sorozat számtani sorozat, melynek differenciája $\frac{1}{12}$.

B) Az $\{a_n\}$ sorozat számtani sorozat, melynek differenciája $\sqrt[12]{2}$.

C) Az $\{a_n\}$ sorozat mértani sorozat, melynek hányadosa $\frac{1}{12}$.

D) Az $\{a_n\}$ sorozat mértani sorozat, melynek hányadosa $\sqrt[12]{2}$.

3. A $3x-2y-7=0$ egyenletű egyenes merőleges az $ax-6y+1=0$ egyenletű egyenesre.

a) Határozzuk meg a értékét. (*4 pont*)

A $3x-2y+k=0$ egyenletű egyenes az x-tengelyt a P, az y-tengelyt a Q pontban metszi.

b) Határozzuk meg k lehetséges értékeit, ha az OPQ háromszög területe 75 egység (O a koordináta-rendszer origóját jelöli). (*7 pont*)

4. A Boci tej 1 literes dobozban 380 forintba kerül az üzletben, 2 deciliteres dobozban pedig dobozonként 220 forintba.

a) Ha 2 deciliteres dobozokban veszünk összesen 1 liter tejet, akkor hány százalékkal fizetünk többet, mint ha egy doboz 1 literes tejet vettünk volna? (*3 pont*)

A 2 dl-es tejesdoboz – matematikai értelemben – hasonló az 1 litereshez. A tejet forgalmazó cég számára a dobozokba tölthető tej ára a tej térfogatával, a tejesdoboz előállítási költsége pedig a doboz felszínével egyenesen arányos. Egy liter dobozba tölthető tej a forgalmazó cég számára 210 forintba kerül, az egy literes tejesdoboz előállítása pedig 80 forintba.

b) Hány százalékkal kerül többe az öt darab 2 dl-es kiszerelésű tej előállítása, mint az egy doboz 1 literes kiszerelésű tejé? (*6 pont*)

Minőségellenőrzéskor a legyártott tejesdobozoknak átlagosan 4%-át sérültnek találják.

c) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott tejesdoboz közül legfeljebb 1 sérültet találnak. (*4 pont*)

II. rész

5. *a*) Hány olyan egyenest határoznak meg egy téglatest csúcsai, melyek nem illeszkednek a téglatest egyik élére sem? (*3 pont*)

Egy 12 cm sugarú gömbbe téglalap alapú egyenes hasábot írunk úgy, hogy a hasáb csúcsai a gömb felületén vannak. A hasáb alaplapja éleinek aránya 1 : 2, a hasáb magassága 16 cm.

b) Mekkora a hasáb térfogata? (*5 pont*)

Egy 12 cm sugarú gömbből olyan dísztárgyat csiszolnak ki, melynek alakja téglalap alapú egyenes hasáb, és a hasáb alaplapja éleinek aránya 1 : 2.

c) Mekkora az így kicsiszolható legnagyobb dísztárgy térfogata? (*8 pont*)

6. Egy szabályos dobókockával háromszor dobunk. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a három dobott szám

a) összege kisebb 5-nél; (*3 pont*)

b) között van 4-nél nagyobb; (*3 pont*)

c) szorzata osztható 6-tal. (*5 pont*)

A három dobott számot balról jobbra egymás mellé írjuk. Azt tapasztaljuk, hogy az így kapott háromjegyű számban a középső számjegy éppen a három számjegy mediánja.

d) Hány ilyen tulajdonságú háromjegyű számot kaphatunk? (*5 pont*)

7. *a*) Tekintsük az $a_n = \sin(n \cdot 7°)$ sorozatot ($n \in \mathbb{Z}^+$). A sorozat első 100 tagja közül melyik a három legkisebb? (*6 pont*)

b) Igazoljuk, hogy a $\dfrac{3}{\cos^2 x - \cos x + 1}$ kifejezés minden valós x esetén értelmezhető. (*3 pont*)

c) Határozzuk meg az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3}{\cos^2 x - \cos x + 1}$$

függvény értékkészletét. Hol veszi fel a függvény a maximumát? (*7 pont*)

8. G egy tízpontú egyszerű gráf, melynek összesen 6 éle van.

a) Igaz-e, hogy G csúcsai közt biztosan van legalább egy olyan, amelynek a fokszáma legalább 2? (*2 pont*)

b) Igaz-e, hogy G csúcsai közt biztosan van legalább két olyan, amelynek a fokszáma legalább 2? (*2 pont*)

Egy szabályos tízszög legrövidebb átlója egységnyi hosszúságú.

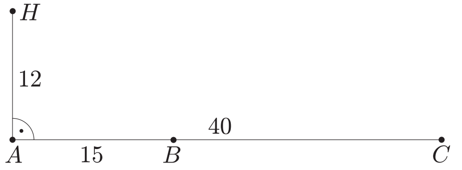
c) Határozzuk meg a tízszög oldalainak hosszát. (*3 pont*)

Az A, B, C, D és E pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen kiszínezünk négyet.

d) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az A, B, C, D, E pontokból és a színezett élekből álló gráf fagráf lesz. (*9 pont*)

9. Két város közti utat egy kamion odafelé 60 km/h, visszafelé 50 km/h átlagsebességgel tett meg.

a) Határozzuk meg a kamionnak a két út egészére vonatkozó átlagsebességét. (*4 pont*)



A tengeren lévő (pontszerűnek tekintett) H szigetről árut szállítanak a tengerparton lévő C pontba. Az egyenesnek tekinthető partvonalnak azonban csak az AB szakaszán tud kikötni a hajó ($HA \perp AB$), ezért itt átrakodják a rakományát, és közúton (a part mentén) kamionnal szállítják el C-be. A rakodás egy óráig tart. Az adatok: $HA = 12$ km, $AB = 15$ km, $AC = 40$ km.

A hajó átlagsebessége a vízen 8 km/h, a kamion átlagsebessége közúton 40 km/h.

b) Melyik útvonal a gyorsabb: a HAC vagy a HBC? Mennyi a szállítási idő az egyes útvonalakon? (*4 pont*) *c*) Az AB szakasz mely D pontján kössön ki a hajó, hogy a szállítmány a lehető leghamarabb eljusson C-be? Mennyi ekkor a szállítási idő? (*8 pont*)

Koncz Levente
Budapest

Megoldásvázlatok a 2023/2. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az*

$$f:[0;5]\to\mathbb{R},\quad f(x)=|x^2-4x+3|$$

függvényt. (*4 pont*)

b) *A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az*

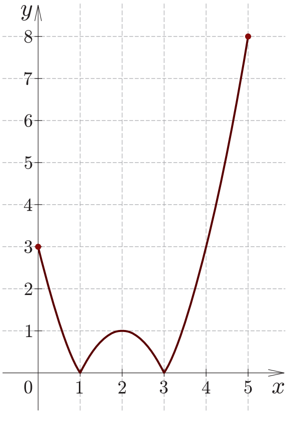
$$|x^2-4x+3|=p$$

egyenletnek a $[0;5]$ *intervallumon?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Először azonos átalakítást végzünk:

$$f(x)=|x^2-4x+3|=|(x-2)^2-1|,$$

majd ábrázoljuk a függvényt.



b) Az $|x^2-4x+3|=p$ egyenlet megoldásainak száma leolvasható a grafikonról.

– Ha $p<0$, akkor nincs megoldás.
– Ha $p=0$, akkor 2 megoldás van.
– Ha $0<p<1$, akkor 4 megoldás van.
– Ha $p=1$, akkor 3 megoldás van.
– Ha $1<p\leqslant 3$, akkor 2 megoldás van.
– Ha $3<p\leqslant 8$, akkor 1 megoldás van.
– Ha $p>8$, akkor nincs megoldás.

2. *a*) *Az* $\overline{abc}$ *háromjegyű szám kilencszerese az* $\overline{xabc}$ *alakú négyjegyű szám. Bizonyítsuk be, hogy az* $\overline{abc}$ *szám osztható* 125*-tel.* (*6 pont*)

b) *Igazoljuk, hogy* $x\in\mathbb{R}$ *esetén*

$$\frac{\lg\left(7^x\right)+\lg\left(7^{-x}\right)}{2}\leqslant \lg\left(\frac{7^x+7^{-x}}{2}\right).\qquad (8\ pont)$$

Megoldás. *a*)

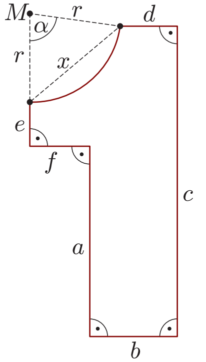
$$\begin{aligned}9\overline{abc} &= \overline{xabc},\\ 9\overline{abc} &= 1000x + \overline{abc},\\ 8\overline{abc} &= 1000x,\\ \overline{abc} &= 125x.\end{aligned}$$

Mivel eredményünk jobb oldala a 125-nek többszöröse, ezért a bal oldalnak is oszthatónak kell lennie 125-tel és éppen ezt akartuk megmutatni.

b) Tudjuk, hogy $7^x > 0$ és $7^{-x} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$-re. Ekkor

$$\begin{aligned}\frac{\lg(7^x) + \lg(7^{-x})}{2} &\leqslant \lg\left(\frac{7^x + 7^{-x}}{2}\right),\\ \frac{x\lg(7) - x\lg(7)}{2} &\leqslant \lg(7^x + 7^{-x}) - \lg(2),\\ 0 &\leqslant \lg(7^x + 7^{-x}) - \lg(2),\\ \lg(2) &\leqslant \lg(7^x + 7^{-x}).\end{aligned}$$

A 10-es alapú logaritmus függvény szigorúan monoton nő, valamint a 7^x-nek a 7^{-x} pontosan a reciproka, és tudjuk, hogy egy pozitív számnak és reciprokának összege mindig nagyobb vagy egyenlő, mint 2. Mivel az átalakítások ekvivalensek voltak, ezzel beláttuk, hogy az eredeti egyenlőtlenség helyes.



3. *Az ábrán egy gyerekek számára készült játékszőnyeg egyik – 1-es formájú – darabkája látható. Megállapítottuk, hogy centiméterben mérve $a = 13$, $b = 6$, $c = 21$, $d = 5$, $e = 3$, $f = 4$ és $r = 5{,}5$.*

a) *Határozzuk meg az α szög nagyságát.* (*6 pont*)

b) *Számítsuk ki az 1-es formájú darabka területét.* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Első lépésben meghatározzuk az x-szel jelölt szakasz hosszát:

$$x = \sqrt{(c-a-e)^2 + (b+f-d)^2} = \sqrt{(21-13-3)^2 + (6+4-5)^2} = \sqrt{50}.$$

Most már ki tudjuk számítani a szög nagyságát:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x}{2r}, \quad \alpha = 2\cdot\arcsin\left(\frac{x}{2r}\right), \quad \alpha = 2\cdot\arcsin\left(\frac{\sqrt{50}}{11}\right) \approx 80^\circ.$$

b) A síkidom területe:

$$T = a\cdot b + e\cdot(b+f) + d\cdot(c-a-e) + \\ + \frac{(c-a-e)\cdot(b+f-d)}{2} + \frac{r^2\cdot\sin\alpha}{2} - \frac{r^2\cdot\pi\cdot\alpha}{360} \approx 139{,}3\ \text{cm}^2.$$

4. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:*

$$9^{\mathrm{tg}^2(x)} + 3^{\frac{1}{\cos^2(x)}} - 4 = 0. \qquad (14\ pont)$$

Megoldás. A feladat megoldásánál segítségül kell hívnunk a trigonometrikus összefüggéseket és kikötést is kell tennünk, hiszen $\cos^2 x = 0$ nem megengedett, ezért $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

El kell végeznünk a következő átalakítást is:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}^2\, x + 1.$$

Most megoldjuk az egyenletet:

$$9^{\mathrm{tg}^2(x)} + 3^{\frac{1}{\cos^2(x)}} - 4 = 0,$$

$$9^{\mathrm{tg}^2(x)} + 3^{\mathrm{tg}^2 x+1} - 4 = 0,$$

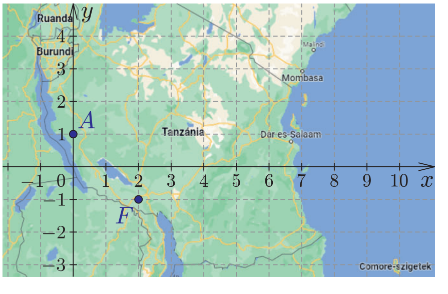
$$\left(3^{\mathrm{tg}^2(x)}\right)^2 + 3 \cdot 3^{\mathrm{tg}^2 x} - 4 = 0.$$

Legyen $3^{\mathrm{tg}^2 x} = u$, ekkor $u^2 + 3u - 4 = 0$, $u_1 = -4$, $u_2 = 1$.

A két megoldás közül csak az $u_2 = 1$ jöhet szóba. Ezt visszahelyettesítve a következőt kapjuk: $3^{\mathrm{tg}^2 x} = 1$, vagyis $3^{\mathrm{tg}^2 x} = 3^0$. A 3-as alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű tulajdonsága miatt $\mathrm{tg}^2\, x = 0$, $\mathrm{tg}\, x = 0$, amelynek megoldása $x = n \cdot \pi$, ahol $n \in \mathbb{Z}$.

II. rész

5. *Egy katonai békefenntartó szervezet két egysége állomásozik Tanzániában. Az ország koordináta-rendszerben elhelyezett térképén az egységek bázisainak koordinátái: $A(0;1)$ és $F(2;-1)$. Egy közös hadgyakorlat tervezésénél az egységek parancsnokai egy olyan találkozási (P) pontot jelölnek ki, mely mindkét bázistól egyenlő távolságra van és egy stratégiai fontosságú autóút mentén fekszik, melynek nyomvonala leírható az $x + y = 4$ egyenletű egyenessel.*



a) Hol találkoznak és milyen távol van ez a pont az egységek bázisaitól? (Egy egység a koordinátasíkon 150 kilométernek felel meg a valóságban.) (*8 pont*)

A hadgyakorlat biztosítása érdekében a parancsnokok el szeretnének helyezni egy radart az érintett területen, mely körkörös mozgással képes „letapogatni” az egész területet, így minden ellenséges mozgás előre láthatóvá válik. A parancsnokok azt a pontot jelölték ki, amely az A; F és P pontok mindegyikétől egyenlő távolságra van.

b) Határozzuk meg a radar által letapogatott kör területét. E kör területe hány százalékkal nagyobb a hadgyakorlat és a két bázis által meghatározott háromszög területénél? *(8 pont)*

Megoldás. *a*) Az, hogy a P pont az A és F pontoktól egyenlő távolságra van, azt jelenti, hogy az AF szakasz szakaszfelező merőlegesén fekszik. Ennek egyenletét úgy kaphatjuk meg, hogy először meghatározzuk a szakasz (K) felezőpontját, majd normálvektorát és ezekkel felírjuk az egyenes egyenletét.

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AF} = (2; -2), \quad K_p = \frac{A+F}{2} = (1; 0),$$

ezekből a szakaszfelező merőleges egyenlete: $x - y = 1$.

A P pont meghatározásához a szakaszfelező merőlegest metszenünk kell a feladatban megadott egyenessel:

$$\begin{aligned} x + y &= 4, \\ x - y &= 1. \end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszer megoldása $x = 2{,}5$ és $y = 1{,}5$. A keresett P találkozási pont koordinátái: $P(2{,}5; 1{,}5)$. Ez a pont mindkét egységtől

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{2,5^2 + 0{,}5^2} = 2{,}549\,51$$

egység távolságra van, amely $2{,}54951 \cdot 150 = 382{,}426$ km távolságnak felel meg.

b) Itt először a háromszög köré írt kör egyenletét keressük, melyhez szükségünk van az oldalfelező merőlegesek metszéspontjára. Mivel egyet már ismerünk, a hiányzót meghatározzuk az *a*) részhez hasonlóan:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AP} = (2{,}5; 0{,}5), \qquad K_f = \frac{A+P}{2} = (1{,}25; 1{,}25).$$

Az egyenes egyenlete: $5x + y = 7{,}5$.

A kör középpontja (M) a következő egyenletrendszer megoldása:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 5x + y &= 7{,}5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ x = \frac{17}{12},\ y = \frac{5}{12}\ \Rightarrow\ M\left(\frac{17}{12}; \frac{5}{12}\right).$$

A kör sugara:

$$r = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\left(\frac{17}{12}\right)^2 + \left(-\frac{7}{12}\right)^2} = 1{,}532\,06 = 1{,}532\,06 \cdot 150 \text{ km} = 229{,}81 \text{ km}.$$

Ebből kiszámolhatjuk, hogy a radar által a valóságban lefedett kör területe:

$$T_{\text{kör}} = 229{,}81^2 \cdot \pi = 165\,916 \text{ km}^2.$$

A háromszög oldalai a valóságban:

$$|\overrightarrow{AF}| = 424{,}264 \text{ km}, \quad |\overrightarrow{FP}| = 382{,}426 \text{ km}, \quad |\overrightarrow{PA}| = 382{,}426 \text{ km}.$$

Ezen adatok segítségével és a Héron-képlettel meghatározhatjuk a háromszög valós területét:

$$T_{\triangle} = \sqrt{594{,}558 \cdot (594{,}558 - 424{,}264) \cdot (594{,}558 - 382{,}426) \cdot (594{,}558 - 382{,}426)} =$$

$$= 67\,499{,}875\,8\ \mathrm{km}^2.$$

Ebből már ki tudjuk számítani, hány százalékkal nagyobb a kör területe:

$$\frac{T_{\text{kör}}}{T_{\triangle}} = \frac{165\,916}{67\,499{,}875\,8} \approx 2{,}458.$$

A radar által ellenőrzött terület 145,8%-kal nagyobb a hadgyakorlat tényleges területénél.

6. *Kati és Attila szabályos érmékkel játszik, ami azt jelenti, hogy a feldobásnál a fej és az írás valószínűsége egyenlő. Kati zsebében három darab* 100 *és öt darab* 200 *forintos, míg Attila zsebében két darab* 100 *és három darab* 200 *forintos érme van. Mindketten kivesznek találomra egy-egy érmét a zsebükből.*

a) Mekkora a valószínűsége, hogy a kettőjük által kihúzott érmék összege pontosan 300 *forint?* *(4 pont)*

Ezután Attila 10*-szer feldob egy* 200 *forintos érmét.*

b) Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy Attila legalább két alkalommal fejet dob. *(5 pont)*

c) Hányszor kell dobnia Katinak egy érmével, hogy 90%*-os valószínűséggel kijelenthesse, hogy a dobások között volt legalább egy fej?* *(7 pont)*

Megoldás. *a)* A húzott érmék összege pontosan akkor lesz 300 forint, ha Kati egy 100-ast húz és Attila egy 200-ast, vagy fordítva, ezek alapján a keresett valószínűség:

$$P = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{19}{40}.$$

b) Ebben a feladatrészben binomiális eloszlással kell számolnunk, melynél $n = 10$ és $p = 0{,}5$.

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 1) - P(X = 0) =$$

$$= 1 - \binom{10}{1} \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^9 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^{10}.$$

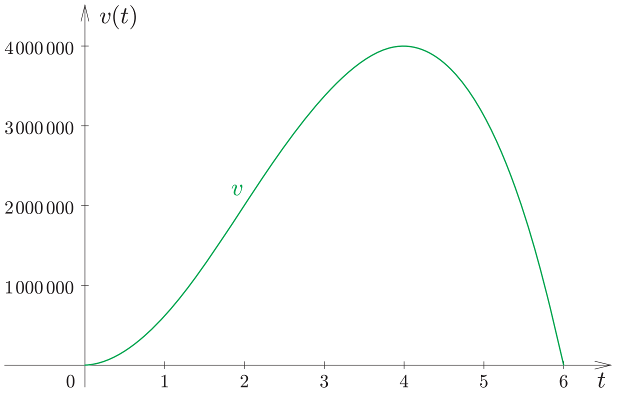
A keresett valószínűség: $P(X \geqslant 2) = 0{,}989\,3$.

c) Az előző részfeladathoz hasonlóan itt is binomiális eloszlást kell használnunk, de nem ismerjük az n paraméter értékét.

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0), \quad 0{,}9 \leqslant 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^n,$$

$$0{,}9 \leqslant 1 - 0{,}5^n, \quad -0{,}1 \leqslant -0{,}5^n, \quad 0{,}1 \geqslant 0{,}5^n, \quad n \geqslant \frac{\lg(0{,}1)}{\lg(0{,}5)} = 3{,}32, \quad n \geqslant 4.$$

Katinak legalább négyszer kell dobnia, hogy 90%-os valószínűséggel kijelenthesse, legalább egyszer dobott fejet.



7. *Egy vírusfertőzés alatt az 1 milliliter vérben található vírusok száma jól közelíthető az ábrán látható v függvénnyel. A v függvény megadható a*

$$v(t) = a \cdot (6 - t) \cdot t^2$$

($a \in \mathbb{R}$) alakban, ahol t a megfertőződéstől eltelt napok számát, $v(t)$ pedig t nap elteltével az 1 milliliter vérben található vírusok számát jelenti.

Tudjuk, hogy a megfertőződés után 4 nappal 4 millió vírus található 1 milliliter vérben.

a) Határozzuk meg az a paraméter értékét. (*2 pont*)

b) Adjuk meg az 1 milliliter vérben lévő vírusok maximális számát. (*8 pont*)

c) Hány nap után nőtt a vírusok száma a leggyorsabban? (*3 pont*)

d) Határozzuk meg a grafikon segítségével, hogy megközelítőleg hány napon keresztül van 3 milliónál több vírus 1 ml vérben. (*3 pont*)

Megoldás.

a)
$$v(t) = a \cdot (6 - t) \cdot t^2, \quad 4 \cdot 10^6 = a \cdot (6 - 4) \cdot 4^2,$$
$$4 \cdot 10^6 = a \cdot 2 \cdot 16, \quad a = 125\,000.$$

b)
$$v(t) = 125\,000 \cdot (6 - t) \cdot t^2, \quad v(t) = (750\,000 - 125\,000\,t) \cdot t^2,$$
$$v(t) = 750\,000 \cdot t^2 - 125\,000\,t^3.$$

Az első derivált:
$$v'(t) = 1\,500\,000t - 375\,000\,t^2,$$
a második derivált:
$$v''(t) = 1\,500\,000 - 750\,000\,t.$$
A szélsőértéket a $v'(t) = 0$ egyenlet megoldásával határozzuk meg:
$$1\,500\,000\,t - 375\,000\,t^2 = 0, \quad 375\,000\,t(4 - 1 \cdot t) = 0, \quad t_1 = 0,\ t_2 = 4.$$

Ezután megvizsgáljuk, hogy a kapott értékek közül melyik a maximum:

$$v''(0) = 1\,500\,000 - 750\,000 \cdot 0 = 1\,500\,000 > 0 \quad \rightarrow \quad \text{lokális minimum},$$
$$v''(4) = 1\,500\,000 - 750\,000 \cdot 4 = -1\,500\,000 < 0 \quad \rightarrow \quad \text{lokális maximum},$$
$$v(4) = 125\,000 \cdot (6 - 4) \cdot 4^2 = 4\,000\,000.$$

A vérben található vírusok maximális száma 4 000 000.

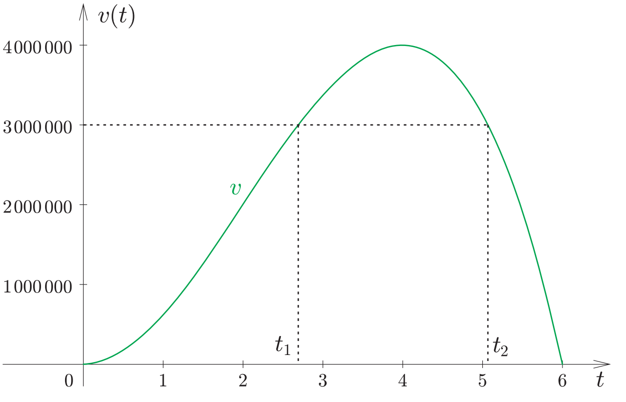
c) Azt, hogy hány nap után nőtt a vírusok száma a leggyorsabban, a $v''(t) = 0$ egyenlet megoldásával határozhatjuk meg: $0 = 1\,500\,000 - 750\,000\,t$, $t = 2$.

Már csak ellenőrizni kell, hogy az így megkapott érték valóban az inflexiós hely-e:

$$v'''(t) = -750\,000, \quad v'''(2) = -750\,000 \neq 0.$$

Beláttuk tehát, hogy 2 nap után nőtt leggyorsabban a vírusok száma.

d) A grafikon alapján $t_1 \approx 2{,}7$ és $t_2 \approx 5$ azok a helyek, melyeknél a vírusok száma pontosan 3 millió, így ezen két érték között, azaz megközelítőleg 2,3 napon keresztül haladta meg a vírusok száma a 3 milliót.



8. *A Minta család négy tagjának A betűvel kezdődik a keresztneve. Ebben a családban négyen úsznak és négyen fociznak rendszeresen. A családtagokról még azt is tudjuk, hogy*

1) *csak Andris és Attila jár úszni és focizni is;*

2) *egyedül Adrienn nem űzi egyik sportágat sem;*

3) *Norbi próbálja testvérét, Annát az úszóktól hozzájuk, a focistákhoz csábítani – sikertelenül.*

a) *A fent leírtak alapján legalább hány tagja van a Minta családnak?* (*5 pont*)

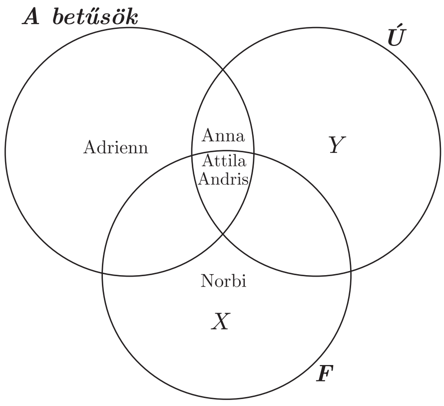
Egyik hétvégén esett az eső, ezért Anna, Adrienn, Andris és Attila barátaikkal otthon játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 5-nél nagyobb és 8-nál kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos.

b) *Legfeljebb hány tagú lehetett a baráti társaság?* (*3 pont*)

Egy másik alkalommal Anna, Adrienn, Andris és Attila osztálytársaikkal (Marcival, Marcsival, Miskával és Magdával) színházba mentek. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt.

c) *Hány különböző ülésrendben foglalhat helyet a 8 ember, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek nem kerülhetnek egymás mellé?* (*5 pont*)

d) *Mekkora a valószínűsége annak, hogy a fent leírt ülésrend alakul ki, ha minden ülésrendet egyenlően valószínűnek tekintünk?* (*3 pont*)



Megoldás. *a*) Készítsünk Venn-diagramot, legyen $Ú$ az úszók, F pedig a focisták halmaza.

A Minta család legalább 7 tagú.

b) A számjegyek kétféleképpen választhatóak meg, így összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, a feltételnek megfelelő szám létezik. Ez azt is jelenti, hogy a társaság legfeljebb 8 tagú.

c) A feladat alapján az A betűvel kezdődő nevűek vagy az 1-es, 3-as, 5-ös és 7-es helyeken ülnek, vagy a 2-es, 4-es, 6-os és 8-as számú helyeken. Mindkét esetben az általuk üresen hagyott helyeket feltöltik az M betűvel kezdődő nevű barátok. Mindkét sorrendben Anna, Adrienn, Andris és Attila 4!-féleképpen foglalhat helyet. A társaság maradék 4 tagja szintén 4!-féleképpen ülhet le. Így összesen

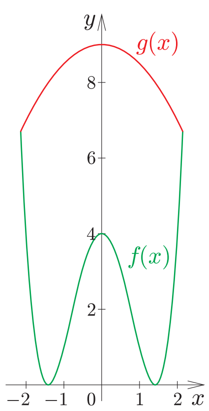
$$4! \cdot 4! + 4! \cdot 4! = 2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152\text{-féle}$$

ülésrend alakulhat ki.

d) A keresett valószínűség:

$$p = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{2 \cdot 4! \cdot 4!}{8!} = \frac{1152}{40\,320} = \frac{1}{35}.$$

9. *Egy fogászati cég logójának alsó íve modellezhető az $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ polinomfüggvény segítségével. Az A, B és C pontok mindegyike a görbére illeszkedik: $A = (-2; 4)$, $B = (0; 4)$, $C = \left(\sqrt{2}; 0\right)$.*



a) Határozzuk meg a megadott pontok segítségével az f függvény együtthatóit. *(5 pont)*

A cég szeretné a fog alakú logót rézmetszet formájában elkészíttetni. Az alakzatot az f és g függvények grafikonjainak segítségével lehet modellezni:

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4;\; g(x) = -0{,}5x^2 + 9,$$

ahol x, $f(x)$, $g(x)$ centiméterben mért távolságok. A függvénygrafikonok az ábrán *láthatóak.*

b) Adjuk meg a következő állítások logikai értékét. *(2 pont)*

Állítás	**Igaz**	**Hamis**
A logó felső határoló íve illeszkedik a g-jelű függvény grafikonjára.		
Egy negyedfokú polinomfüggvény maximum 3 szélsőértékkel rendelkezik.		
Egy negyedfokú polinomfüggvény inflexiós pontjainak száma legalább kettő.		

c) Mekkora az elkészített logó térfogata, ha vastagsága 2 *centiméter?* (*9 pont*)

Megoldás. *a*) Állítsunk fel egy egyenletrendszert a fent megadott pontok és a hozzárendelési szabály segítségével:

$$\begin{aligned} a\cdot(-2)^4+b\cdot(-2)^2+c&=4,\\ a\cdot 0^4+b\cdot 0^2+c&=4,\\ a\cdot\left(\sqrt{2}\right)^4+b\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2+c&=0.\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}16a+4b+c&=4,\\ c&=4,\\ 4a+2b+c&=0.\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}16a+4b+4&=4,\\ \\ 4a+2b+4&=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}16a+4b&=0,\\ 4a+2b&=-4.\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}16a+4b&=0,\\ 8a+4b&=-8.\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad 8a=8\quad\Rightarrow\quad a=1.$$

Innen már egyszerűen kiszámítható, hogy $b=-4$.

b)

Állítás	**Igaz**	**Hamis**
A g jelű függvény a logó felső határoló íve	**X**	
Egy negyedfokú polinomfüggvény maximum 3 szélsőértékkel rendelkezik.	**X**	
A negyedfokú polinomfüggvény inflexiós pontjainak száma legalább kettő.		**X**

c) Mivel térfogat = alapterület · magasság, kiszámítjuk a logó területét. A terület ebben az esetben a két függvénygrafikon (f,g) által határolt terület. Ennek meghatározásához először meg kell határoznunk az integrációs határokat, amelyeket a következőképpen kaphatunk meg: $x^4-4x^2+4=-0{,}5x^2+9$, rendezve $x^4-3{,}5x^2-5=0$.

Legyen $z=x^2$, ekkor $z^2-3{,}5z-5=0$, amelyből $z_1=-1{,}09$ és $z_2=4{,}59$.

Egyértelműen látszik, hogy csak a z_2 megoldás jöhet szóba, ahonnan $x_1=$ $=-2{,}14$ és $x_2=2{,}14$ adódik, ezek az integrációs határok.

$$V=\left[\int_{-2,14}^{2,14}\big(g(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x\right]\cdot 2=\left[\int_{-2,14}^{2,14}(-x^4+3{,}5x^2+5)\,\mathrm{d}x\right]\cdot 2=26{,}3\cdot 2=52{,}6.$$

A logó térfogata 52,6 cm^3.

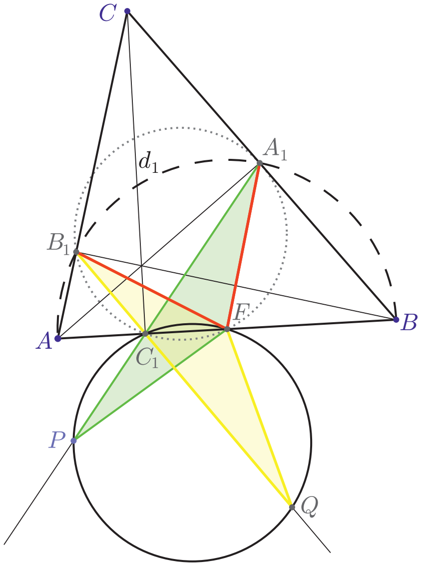
Keszeg Attila Tibor
Veszprém

Matematika feladatok megoldása

B. 5257. *Az ABC hegyesszögű háromszögben a magasságok AA_1, BB_1, illetve CC_1, az AB oldal felezőpontja F. A k kör átmegy az F és a C_1 pontokon, valamint az A_1C_1 és B_1C_1 szakaszok C_1-en túli meghosszabbítását a P, illetve a Q pontban metszi. Igazoljuk, hogy $A_1P = B_1Q$.*

(*4 pont*)

Ha az eredeti háromszög egyenlű szárú, melynek alappal szemközti csúcsa C, akkor a C_1 és F pontok egybeesnek. Ekkor a rajtuk áthaladó kört úgy értelmezzük, mint az AB oldalt a $C_1 \equiv F$ pontban érintő kört. Az ábra ebben az esetben szimmetrikus lesz a háromszög szimmetriatengelyére, $QB_1 = PA_1$.



Vizsgáljuk meg az $AC \neq BC$ esetet.

I. megoldás.

Első állítás: $\overline{FA_1} = \overline{FB_1}$.

Az A_1 és B_1 pontok a magasságok talppontjai, így $AA_1B\sphericalangle = AB_1B\sphericalangle = 90°$, az A_1 és B_1 pontok az AB oldal Thalész-körének pontjai. A Thalész-kör középpontja az F oldalfelezőpont, így $FA_1 = FB_1$ (a Thalész-kör sugara).

Második állítás: $QB_1F\triangle \sim PA_1F\triangle$.

Az F, A_1, B_1, C_1 pontok rajta vannak az ABC háromszög Feuerbach-körén, így a kerületi szögek egyezősége alapján $FB_1Q\sphericalangle = FA_1P\sphericalangle$. A k kör kerületi szögeinek egyezősége alapján pedig $A_1PF\sphericalangle = B_1QF\sphericalangle$. A két háromszög két-két szöge megegyezik, a két háromszög hasonló.

A két háromszög hasonló és egy megfelelő oldalpárjuk hossza megegyezik, ezért egybevágók is.

$$\overline{QB_1} = \overline{PA_1}.$$

Sipos Botond Örs (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Keressük meg a QB_1-et PA_1-be vivő forgatva nyújtás középpontját. Mivel $QB_1 \cap PA_1 = \{C_1\}$, ezért a középpont a QPC_1 és $B_1A_1C_1$ körök második metszéspontja lesz. Ez éppen az F pont, hiszen rajta van egyrészt a feladat szövege szerint a QPC_1 körön, másrészt az $A_1B_1C_1$ Feuerbach-körön, így a feladat jelölései szerint a (PC_1FQ) körben $C_1PF\sphericalangle$ és $C_1QF\sphericalangle$ azonos íven nyugvó kerületi szögek, továbbá a $(B_1C_1FA_1)$ körben $C_1B_1F\sphericalangle$ és $C_1A_1F\sphericalangle$ szintén azonos íven nyugvó kerületi szögek. A PFA_1 és QFB_1 azonos körüljárású hasonló háromszögek, tehát F valóban a forgatva nyújtás centruma.

Az első megoldásban láttuk, hogy A_1, B_1 a Thalész-kör pontjai, amelynek középpontja az F felezőpont. Tehát $FA_1 = FB_1$.

Eszerint a forgatva nyújtás esetében az arány 1, ez egy F pont körüli forgatás, az egymásnak megfelelő szakaszok egyenlő hosszúságúak, $PA_1 = QB_1$.

Seres-Szabó Márton (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

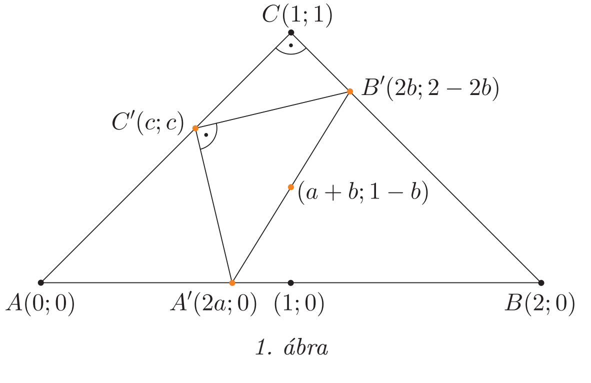
Összesen 78 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 61, 3 pontot 6 versenyző. 2 pontos 3, 1 pontos 2, továbbá 0 pontos 6 versenyző dolgozata.

B. 5271. *Legyen ABC olyan egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelyben a C csúcsnál van a derékszög. Jelöljük ki az AB oldal belsejében az A', a BC oldal belsejében a B' és a CA oldal belsejében a C' pontokat úgy, hogy az $A'B'C'$ háromszög hasonló legyen az ABC háromszöghöz.*

Mutassuk meg, hogy az AB oldal felezőpontja, az $A'B'$ szakasz felezőpontja és a C pont egy egyenesre esik.

(*3 pont*) Javasolta: *Hajdu Endre* (Sopron) és *Hujter Mihály* (Budapest)

I. megoldás. Helyezzük el a háromszöget a derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy az A, B, C csúcsok koordinátái rendre $(0;0)$, $(2;0)$, $(1;1)$. Az illeszkedési feltételek miatt az A', B', C' csúcsok koordinátái rendre $(2a;0)$, $(2b;2-2b)$, $(c;c)$ alakban írhatóak alkalmas a, b és c valósakkal. Ekkor a $\overrightarrow{C'A'}$ vektor koordinátái $(2a-c;-c)$, a $\overrightarrow{C'B'}$ vektor koordinátái pedig $(2b-c;2-2b-c)$. Az AB szakasz felezőpontjának koordinátái $(1;0)$, az $A'B'$ szakasz felezőpontjának koordinátái pedig $(a+b;1-b)$.



1. ábra

Az $A'B'C'$ háromszög pontosan akkor hasonló ABC-hez (az azonos betűzésnek megfelelően), ha a C' pont körüli $+90°$-os elforgatás a $\overrightarrow{C'A'}$ vektort $\overrightarrow{C'B'}$-be viszi, azaz ha

$$(c; 2a-c) = (2b-c; 2-2b-c).$$

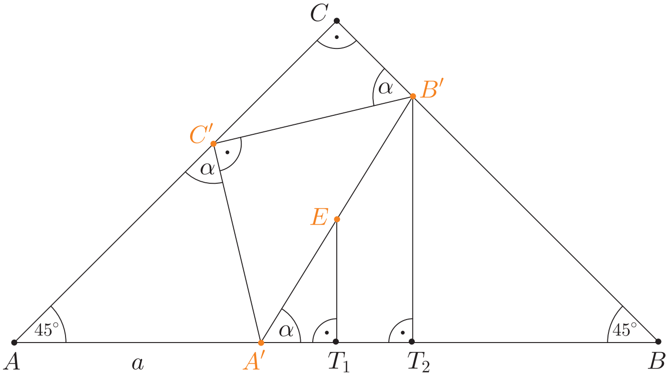
Innen, a második koordináták egyenlősége alapján $2a-c = 2-2b-c$, azaz

$$a+b=1.$$

Tehát C, valamint az $A'B'$ és az AB szakaszok felezőpontja egyaránt illeszkedik az $x=1$ egyenletű egyenesre.

(*A KÖMAL honlapon látható megoldás*)

II. megoldás. Legyen az AB és $A'B'$ szakaszok felezőpontja F, illetve E. Bocsássunk merőlegeseket az E és B' pontokból AB-re, a merőlegesek talppontjai T_1, illetve T_2. Be fogjuk bizonyítani, hogy az F és T_1 pontok azonosak. Tekintsük a *2. ábrát,* amelyen az $AC'A'\sphericalangle = \alpha$ jelölést alkalmaztuk.



2. ábra

Az $AC'A'\sphericalangle$ hegyesszög, hiszen $B'C'A'\sphericalangle = 90°$, és ugyancsak hegyesszög a $CB'C'\sphericalangle$. Az $AC'A'\sphericalangle$ és $CB'C'\sphericalangle$ szögek szárai páronként merőlegesek egymásra, és mivel hegyesszögek, ezért egyenlő nagyságúak, vagyis

$$AC'A'\sphericalangle = CB'C'\sphericalangle = \alpha.$$

Az $A'B'C'$ egyenlő szárú derékszögű háromszög, így $C'B'A'\sphericalangle = 45°$, ebből az következik, hogy

$$BB'A'\sphericalangle = 135° - \alpha,$$

valamint $B'A'B\sphericalangle = \alpha$. Hasonlóképpen kapjuk, hogy

$$AA'C'\sphericalangle = 135° - \alpha.$$

A megfelelő szögek egyenlősége alapján tehát az $AA'C'$ és $BB'A'$ háromszögek hasonlók, amely hasonlóságnál az $A'C'$ és $A'B'$ egymásnak megfelelő oldalak.

Az $A'B'C'$ háromszögben $\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ezért az $AA' = a$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$BB' = a \cdot \sqrt{2}. \tag{1}$$

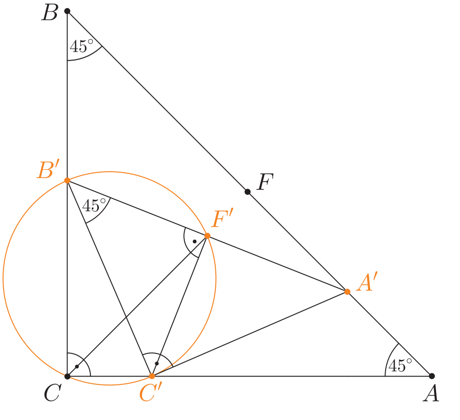
Nyilvánvaló, hogy $BB'T_2$ egyenlő szárú, derékszögű háromszög, így (1) alapján azt kapjuk, hogy $BT_2 = B'T_2 = a$.

Az $A'B'T_2$ háromszögben ET_1 középvonal, mivel E felezi az $A'B'$ szakaszt és $ET_1 \parallel B'T_2$. Ez azt jelenti, hogy a T_1 pont felezi az $A'T_2$ szakaszt, és mivel $AA' = BT_2 = a$, ezért T_1 felezi az AB szakaszt is, tehát F és T_1 azonos pontok.

Az AB-re merőleges ET_1 egyenes ezek szerint az AB szakasz felezőmerőlegese, amelyre illeszkedik az ABC háromszög C csúcsa is. A C, E, F pontok ezért valóban egy egyenesen vannak.

Kerekes András (Szeged, Radnóti Miklós Kís. Gimn., 9. évf.)

III. megoldás. Legyen az AB és $A'B'$ szakaszok felezőpontja F, illetve F'. A $C'F'$ merőlegesen felezi az $A'B'$ szakaszt. A $CC'F'B'$ négyszögben az egymással szemben fekvő C és F' csúcsoknál derékszögek vannak, ezek összege 180°, ezért a húrnégyszögek tételének megfordítása miatt $CC'F'B'$ húrnégyszög. Tekintsük a *3. ábrát.*



3. ábra

A $CC'F'B'$ húrnégyszög köré írt körben $F'B'C'\sphericalangle = 45°$, ezért a kerületi szögek tételének alkalmazásával adódik, hogy

$$F'CC'\sphericalangle = 45° \tag{2}$$

is igaz. A (2) összefüggés éppen azt jelenti, hogy CF' felezi a $C'CB'\sphericalangle = ACB\sphericalangle$ derékszöget.

Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögben az $ACB\sphericalangle$ szögfelezője az ABC háromszög szimmetriatengelye, és így áthalad az AB átfogó F felezőpontján.

Eszerint valóban teljesül, hogy a C, F', F pontok egy egyenesen vannak.

Gábor Benjámin (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.),
Keresztély Zsófia (Budapest XIV. Kerületi Szent István Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. Több versenyző az AB felezőpontját F-fel, a CF egyenes és $A'B'$ metszéspontját F'-vel jelölve azt bizonyította be, hogy F' felezi az $A'B'$ szakaszt.

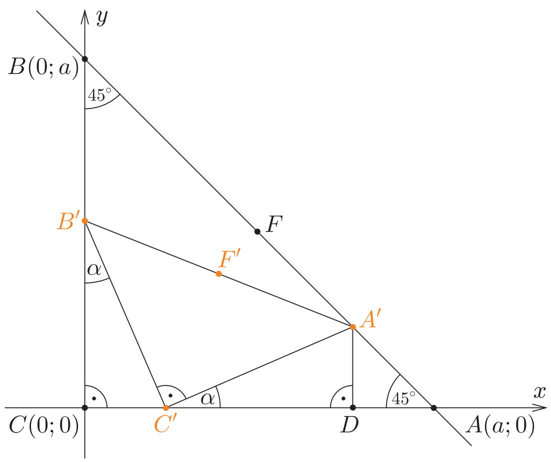
Így oldotta meg több más versenyző mellett *Fehérvári Donát* (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 11. évf.), *Juhász-Molnár Erik* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.), *Achyut Bharadwaj* (Bangalore, Geetanjali Olympiad School, 11. évf.) és *Diaconescu Tashi* (Kolozsvár, Spark Hybrid International High School, 9. évf.).

IV. megoldás. Helyezzük az ábrát a derékszögű koordináta-rendszerbe úgy, hogy a C pont legyen az origó, az A pont az x-tengely pozitív felén helyezkedjen el, koordinátái legyenek $A(a;0)$, a B pont pedig az y-tengely pozitív felén helyezkedjen el. Ekkor a B koordinátái a feltételek miatt $B(0;a)$, az AB szakasz F felezőpontjának koordinátái pedig

$$F\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right). \tag{3}$$

Ezzel az elhelyezéssel a C' és B' pontok az x, illetve y tengelyeken lesznek, koordinátáik legyenek $C'(c';0)$, illetve $B'(0;b')$, ahol $0<c'<a$ és $0<b'<a$, az A' pont pedig az $y=-x+a$ egyenletű AB egyenesen van.

Tekintsük a *4. ábrát,* amelyen $C'B'C\sphericalangle=\alpha$ és az A' pontból merőlegest állítottunk az x-tengelyre, a merőleges talppontját D-vel jelöltük.



4. ábra

A $C'B'C\sphericalangle$ és $A'C'D\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek, ezért nagyságuk egyenlő, azaz

$$C'B'C\sphericalangle=A'C'D\sphericalangle=\alpha.$$

Ebből következik, hogy a $C'B'C$ és az $A'C'D$ derékszögű háromszögek hasonlók, és a $C'A'=C'B'$ feltétel miatt egybevágók is. Eszerint $C'D=b'$ és $A'D=c'$, tehát az A' pont koordinátái

$$A'(c'+b';c'). \tag{4}$$

Az (4) összefüggés és $B'(0;b')$ felhasználásával az $A'B'$ szakasz F' felezőpontjának koordinátái

$$F'\left(\frac{c'+b'}{2};\frac{c'+b'}{2}\right). \tag{5}$$

Az ABC háromszög C pontbeli belső szögfelezőjének egyenlete $y=x$. Ezen az egyenesen minden olyan pont rajta van, amelynek első és második koordinátája egyenlő, ezért (3) és (5) szerint erre az egyenesre illeszkedik az AB szakasz F, és az $A'B'$ szakasz F' felezőpontja, valamint a $C(0;0)$ pont is.

Melján Dávid Gergő (Kecskemét, Katona József Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A megoldást küldő versenyzők döntő többsége nem foglalkozott annak igazolásával, hogy az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögbe a feladat feltételeinek megfelelően írt $A'B'C'$ háromszög létezik. Ennek bizonyítását szigorúan véve a feladat szövege sem írta elő. Ugyanakkor például a *IV. megoldás* lehetőséget ad arra, hogy eljárást adjunk az $A'B'C'$ háromszög szerkesztésére és ezzel létezésének igazolására.

Ehhez vegyük fel az AC oldalon a C' pontot úgy, hogy C' az AC oldalon legfeljebb $\frac{AC}{2}$ távolságra legyen C-től. Ekkor a feladat jelöléseivel $CC'=c'$. Ezzel az $AD=c'$ szerint egyértelműen kijelölhető a D pont helye, így pedig az AB oldalon az A' pont is. A B' pontot ezután BC oldalon a B pontból kiindulva az $BB'=2c'$ alapján szerkeszthetjük meg, ebből következően $CB'=DC'=AC-2c'$, hiszen $AC=BC$.

Ezzel a szerkesztéssel a $C'B'C$ és $A'C'D$ derékszögű háromszögek egybevágók, így egyrészt $A'C'=B'C'$, másrészt $B'C'A'\sphericalangle=90^\circ$, tehát $A'B'C'$ a feladatnak megfelelő háromszög lesz.

Ha C és C' azonosak, vagyis $c'=0$, akkor könnyen belátható, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egybeesnek. Ha pedig $c'=\frac{AC}{2}$, akkor ugyancsak egyszerűen igazolható, hogy A', illetve C' az AB, illetve AC oldalak felezőpontjai, a B', illetve C azonos pontok. Ebben a két esetben is létezik a feladatnak megfelelő $A'B'C'$ háromszög.

2. A koordináta-geometriai megoldást adó versenyzők legtöbbször a *IV. megoldás* szerinti elhelyezést választották.

Licsik Zsófia (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) megoldásában az ABC háromszög C csúcsát az origóba helyezte, és az AB szakasz felezőmerőlegesének az y-tengelyt választotta úgy, hogy az A és B pontok második koordinátái pozitívok legyenek. Ilyen elhelyezés után már csak azt kellett bizonyítania, hogy az $A'B'$ szakasz felezőpontjának első koordinátája 0, hiszen a C pont és az AB szakasz felezőpontjának első koordinátája nyilvánvalóan 0.

Összesen 104 dolgozat érkezett. 3 pontos 51, 2 pontos 11, 1 pontos 24, 0 pontos 13 dolgozat. Nem versenyszerű: 2 dolgozat, 1 dolgozat nem volt értékelhető, mert üres lapot küldött be.

Megjegyzések a beküldött dolgozatokkal kapcsolatban.

a) A beküldött megoldások többsége maximális pontszámot kapott. Ezek legnagyobb része a fenti négy megoldás valamelyikét, vagy nagyon hasonló bizonyítási eljárást tartalmazott. Volt két olyan megoldás is, amely a Menelaosz-tételt alkalmazta, egy versenyző pedig a feladatot a komplex számsíkon értelmezve oldotta meg.

b) Néhány dolgozatban apróbb hiányosságok fordultak elő, a hiba mértékétől függően ezek a dolgozatok 1 vagy 2 pontosak lettek. Azok a megoldások, amelyek felhasználták a bizonyítandó állítást, általában 0 pontot kaptak, legfeljebb 1 pontot akkor szerezhettek, ha a dolgozatban olyan részlet jelent meg, amely a helyes megoldásban is előfordult.

c) Azokra a dolgozatokra, amelyekhez a versenyző nem készített ábrát, a *KöMaL* versenykiírása értelmében a javító 0 pontot adott.

B. 5274. *Az $a<b$ pozitív egészek szorzata négyzetszám. Mutassuk meg, hogy van olyan x pozitív egész, amelyre $a \leqslant x^2 \leqslant b$.*

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

Megoldás. Legyen $ab=n^2$. A számtani–mértani közepek közti egyenlőtlenség miatt $\frac{a+b}{2}>n$ (hiszen $a\neq b$). Így $a+b>2n$, vagyis

$$a+b \geqslant 2n+1,$$

$$a-2n+b \geqslant 1,$$

$$\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2 \geqslant 1,$$

$$\sqrt{b}-\sqrt{a} \geqslant 1.$$

Tehát a $\left[\sqrt{a}, \sqrt{b}\right]$ intervallum legalább egység hosszú, ezért kell lennie benne egésznek (hiszen két szomszédos egész különbsége 1); legyen ez az egész k.

Ekkor $\sqrt{a} \leqslant k \leqslant \sqrt{b}$, azaz $a \leqslant k^2 \leqslant b$, és készen vagyunk.

Lovas Márton (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 12. évf.)

101 dolgozat érkezett. 5 pontos 58, 4 pontos 2, 3 pontos 2, 2 pontos 8, 1 pontos 10, 0 pontos 16 dolgozat. Nem versenyszerű: 2 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (759–763.)

K. 759. Egy kilencfős társaságról tudjuk, hogy mindenki pontosan négy másik embert ismer a társaság tagjai közül. (Az ismeretség kölcsönös.)

a) Lehetséges-e, hogy a társaság tagjai között bármely két embernek van közös ismerőse?

b) Igaz-e, hogy egy ilyen társaság tagjai között bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy van közös ismerősük?

K. 760. Az $A(2;4)$, $B(6;4)$, $C(4;10)$ háromszöget az $x=a$, majd az $y=2$ egyenesre tükrözzük.

a) Mennyi a két tükrözés után kapott csúcsok második koordinátáinak összege?

b) Mennyi a értéke, ha a két tükrözés után kapott csúcsok első koordinátáinak összege 36?

K. 761. Jancsi a 3/5 számlálójához és nevezőjéhez is hozzáírja – vagy elé, vagy mögé – ugyanazt a számjegyet úgy, hogy a számlálóban és a nevezőben is kétjegyű szám szerepeljen. Mekkora a legnagyobb eltérés az így kapható számok között?

K/C. 762. Egy 5×5-ös táblázat huszonöt mezőjét valamilyen sorrendben kiválasztjuk, és egy számot írunk rá. Az aktuálisan választott mezőre azt a számot írjuk, amely megmutatja, hogy annak a mezőnek addig hány olyan oldalszomszédja van már, amelyre írtunk számot.

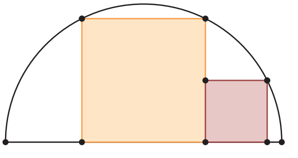
(Ezt a táblázatot pl. az alábbi sorrendben tölthettük ki: a5, b5, c5, d5, e5, e4, e3, e2, a4, a3, a2, a1, b1, c1, d1, e1, ...)

5	0	1	1	1	1
4	1	2	2	4	1
3	1	2	4	2	1
2	1	3	2	3	1
1	1	1	1	1	2
	a	b	c	d	e

Készítsünk még két ilyen kitöltést. Adjuk össze a kitöltésben lévő számokat.

Bizonyítsuk be, hogy akárhogyan töltjük ki a szabálynak megfelelően a táblázatot, a számok összege minden esetben 40 lesz.

K/C. 763. Egy egységnyi sugarú félkörbe két olyan, az átmérőre illeszkedő négyzetet írunk, melyeknek van közös oldalszakasza, és egy-egy csúcsuk a körvonalra illeszkedik.



Tudjuk, hogy a kör középpontjából a két négyzet körön lévő csúcsaihoz húzott sugarak egymásra merőlegesek. Igazoljuk, hogy a két, ilyen módon megrajzolt négyzet területének összege állandó.

❄

Beküldési határidő: 2023. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (762–763., 1758–1762.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 762. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

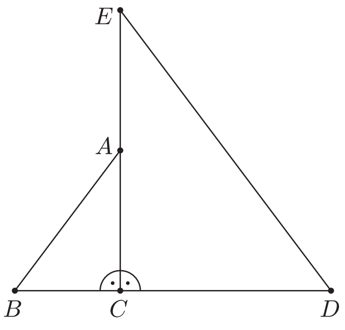
K/C. 763. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

	9	
11		3

C. 1758. Ádám az egyik rejtvényújságban talált egy bűvös négyzetet (tehát olyan 3×3-as számnégyzetet, amelyben az egyes sorokban, oszlopokban, illetve a két átlóban található számok összege megegyezik), melyet ki is töltött helyesen, majd találomra kiválasztott egy sort vagy egy oszlopot a táblázatból, és felírta a benne szereplő számokat balról jobbra vagy fentről lefele olvasva. Ezeket a számokat jelölik az a, b, c betűk az így keletkező $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletben. Ádám nagy örömmel vette tudomásul, hogy az egyenletnek két valós gyöke is van. Ezek után kiszámolta az egyenlet gyökeinek négyzetösszegét. Milyen számot kaphatott?

Javasolta: *Teleki Olivér* (Tököl)



C. 1759. Egymás mellé helyeztük az ABC és EDC derékszögű háromszögeket az *ábra* szerint.

Az ABC háromszögben $BC = 3$, $CA = 4$, az EDC háromszögben $DC = 6$, $CE = 8$. Az ABE háromszög körülírt köre a DE egyenest másodszor a P, a DB egyenest másodszor a Q pontban metszi. Határozzuk meg az $ABDE$ négyszög és az $AEPQB$ ötszög területe arányának pontos értékét.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1760. Adjuk meg az összes olyan pozitív egész számot, amelyhez a faktoriálisát hozzáadva a szám köbét kapjuk.

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1761. Egy szabályos háromszöget az egyik oldallal párhuzamos egyenessel elvágunk. Megrajzoljuk a keletkező háromszög és a trapéz köré írható két kört. Lehet-e a trapéz és a háromszög köré írt sugarának aránya $\frac{\sqrt{3}}{3}$?

Javasolta: *Tatár Zsuzsanna Mária* (Esztergom)

C. 1762. Létezik-e olyan pozitív p prímszám, amelyre teljesül, hogy

$$\log_{p-2}(4p - 11) = m,$$

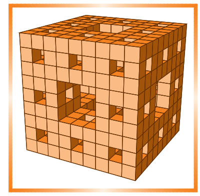
ha az m paraméter a 2023 valamelyik számjegye?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

❄

Beküldési határidő: 2023. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5302–5309.)

B. 5302. Egy 8×8-as táblázat minden mezőjébe $+1$-et vagy -1-et írtunk úgy, hogy az összes szám összege 0. Minden sorban és oszlopban kiszámoljuk a számok összegét. Legfeljebb hány pozitív szám lehet ezen 16 összeg között?

(*3 pont*) *Gáspár Merse Előd* (Budapest) ötlete nyomán

B. 5303. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögnek C-nél van a derékszöge. Vegyünk fel a BC oldal belsejében egy D pontot úgy, hogy a CDA szög $75°$ legyen. Tegyük fel, hogy az ADC háromszög területe egységnyi. Bizonyítsuk be, hogy $BD = 2$.

(*4 pont*) Javasolta: *Hujter Mihály* (Budapest)

B. 5304. *a*) Vannak-e olyan a és b pozitív egész számok, amelyekre

$$a + b \mid a^2 + b^2, \quad \text{de} \quad a + b \nmid a^4 + b^4?$$

b) Vannak-e olyan a és b pozitív egész számok, amelyekre

$$a + b \mid a^4 + b^4, \quad \text{de} \quad a + b \nmid a^2 + b^2?$$

(*4 pont*) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5305. Legyen az ABC háromszög BC oldalának B-hez közelebbi harmadolópontja A_1, C-hez közelebbi harmadolópontja pedig A_2. A CA oldalon hasonlóképpen jelöljük ki a B_1 és B_2, végül az AB oldalon a C_1 és C_2 harmadolópontokat. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög súlypontja illeszkedik az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek körülírt köreinek közös pontjait összekötő egyenesre.

(*4 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 5306. Van egy cinkelt dobókockánk és egy cinkelt érménk, amelynek egyik oldalán egy pötty van, a másik oldalán pedig kettő. Tudjuk, hogy a dobott pöttyök számának várható értéke ugyanannyi a kocka és az érme esetén. Mutassuk meg, hogy egyszerre dobva a kockával és az érmével, annak a valószínűsége, hogy az érmével több pöttyöt dobunk, mint a kockával nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy a kockával dobunk több pöttyöt, mint az érmével.

(*5 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

B. 5307. Egy hegyesszögű háromszög területe T, beírt körének sugara r, körülírt körének sugara R. Mutassuk meg, hogy

$$\sqrt{3}\,T \leqslant (r + R)^2.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Simon László Bence* (Budapest)

B. 5308. Jelölje a_n az $n+1, n+2, \ldots, n+10$ pozitív egész számok legkisebb közös többszörösét. Határozzuk meg a legnagyobb olyan λ valós számot, melyre $\lambda a_n \leqslant a_{n+1}$ mindig teljesül.

(*6 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

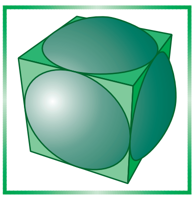
B. 5309. Szerkesszük meg a parabola fókuszpontját és vezéregyenesét, ha adott a tengelye és két pontja.

(*6 pont*) Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2023. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (848–850.)

A. 848. Legyen G egy síkgráf, amely egyben páros gráf is. Igaz-e mindig, hogy minden lapjához hozzárendelhetjük egy csúcsát úgy, hogy semelyik két laphoz ne rendeljük ugyanazt a csúcsot?

Javasolta: *Matolcsi Dávid* (Budapest)

A. 849. Az r valós szám esetén jelölje $f(r)$ az r számhoz legközelebbi egész számot (ha r törtrésze $1/2$, $f(r)$ legyen $r-1/2$). Legyenek $a>b>c$ racionális számok úgy, hogy minden n egészre $f(na)+f(nb)+f(nc)=n$ teljesüljön. Mi lehet a, b és c értéke?

Javasolta: *Damásdi Gábor* (Budapest)

A. 850. Igazoljuk, hogy létezik egy olyan N pozitív valós szám, melyre tetszőleges $a, b > N$ valós számok esetén az a és b hosszúságú oldalakkal rendelkező téglalap kerülete lefedhető egymásba nem nyúló egység sugarú körlapokkal (a körlapok érinthetik egymást).

Javasolta: *Váli Benedek* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2023. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 586. Judit és Gábor az órák közötti szünetben a táblánál játszanak. Az üres táblára felírnak háromjegyű pozitív egész számokat, összesen N darabot. Ezután felváltva letörölnek egy általuk választott számból egy számjegyet a szám elejéről vagy végéről, de csak akkor, ha a megmaradt szám osztója valamelyik táblán lévő számnak. Ha a törlés során olyan kétjegyű szám maradna, ami 0-val kezdődne, akkor a 0-t is letörlik. Tehát a 205 számból a 2-es törlése után 5 lesz. Az egyjegyű számokat nem törlik le.

A játék véget ér, ha már csak egyjegyű számok vannak, illetve akkor is, ha már nem lehet a tábláról újabb számot letörölni. Készítsünk programot, amely modellezi a fenti játékot úgy, hogy a bemenetként megadott N számhoz megad egy tetszőleges törléssorozatot egészen a játék végéig, vagyis amikor már nem lehet újabb számot törölni.

A program a standard bemenet első sorából olvassa be N értékét ($3 \leqslant N \leqslant 20$), majd a második sorából az N darab számot. A program a standard kimenet egymást követő soraiba írja ki a játék egy-egy törlése után a táblán látható számokat. A számok sorrendje a kiíráskor ne változzon. Amennyiben nincs törlési lehetőség, úgy a kimenetre ne írjunk semmit.

Példa:

Bemenet	**Kimenet** (a / jel sortörést helyettesít)
`5 / 941 517 467 983 708`	
`5 / 120 250 340 270 155`	`120 250 340 270 155 / 120 250 340 270 15` `120 250 40 270 15 / 20 250 40 270 15` `20 250 40 270 1 / 2 250 40 270 1`

Beküldendő egy tömörített `i586.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 587. Adott a síkon 6 darab $(P_1, P_2, \ldots, P_6)$ pont, mindegyik pont x és y koordinátája a $[-500; 500]$ (méter) intervallumba esik. Minden pont pillanatnyi sebességvektora a rákövetkező pont irányába mutat, tehát mindig afelé mozog: a P_1 a P_2 irányába, a P_2 a P_3 irányába, …, a P_5 a P_6 irányába, végül a P_6 a P_1 irányába, méghozzá azonos nagyságú $0 < v \leqslant 1{,}5\ \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$ sebességgel. Készítsünk szimulációt, amely másodperc időközönként közelíti a fenti folyamatot. Számítsuk ki az egyes pontok koordinátáit a kiindulási pontból a $t = 0$ kezdőértékkel a következő 1000 másodpercben és jelenítsük meg diagramon a mozgásukat.

1. Hozzuk létre a táblázatkezelő egy üres munkafüzetében az Alapadatok munkalapot.
2. Készítsük el az A1:M1 cellák szövegét a *minta* szerint. Állítsuk az A2:M2 cellák formátumát a minta szerint, adataik két tizedes pontossággal jelenjenek meg.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	x_5	y_5	x_6	y_6	v
2													
3													

3. Hozzuk létre a Pozíciók munkalapot. A munkafüzetben ne legyen több munkalap.

4. Írjunk be a feltételeknek megfelelő adatokat az Alapadatok munkalap A2:M2 celláiba. A Pozíciók munkalap A1:M1002 celláiba kerüljenek a pontok kiszámított koordinátái az első 1000 másodpercre. Segédszámításokat az M oszloptól jobbra végezhetünk. Ezen a munkalapon nem követelmény a minta szerinti formázás.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	t	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	x_5	y_5	x_6	y_6
2	0	500,00	0,00	250,00	433,00	-250,00	433,00	-500,00	0,00	-250,00	-433,00	250,00	-433,00
3	1	499,25	1,30	248,50	433,00	-250,75	431,70	-499,25	-1,30	-248,50	-433,00	250,75	-431,70
4	2	498,50	2,60	247,00	433,00	-251,50	430,40	-498,50	-2,60	-247,00	-433,00	251,50	-430,40
5	3	497,74	3,89	245,50	432,99	-252,24	429,10	-497,74	-3,89	-245,50	-432,99	252,24	-429,10
6	4	496,98	5,18	244,00	432,98	-252,98	427,79	-496,98	-5,18	-244,00	-432,98	252,98	-427,79
7	5	496,22	6,48	242,50	432,96	-253,72	426,49	-496,22	-6,48	-242,50	-432,96	253,72	-426,49
8	6	495,45	7,76	241,00	432,94	-254,45	425,18	-495,45	-7,76	-241,00	-432,94	254,45	-425,18
9	7	494,68	9,05	239,50	432,92	-255,18	423,87	-494,68	-9,05	-239,50	-432,92	255,18	-423,87
10	8	493,91	10,34	238,00	432,89	-255,90	422,55	-493,91	-10,34	-238,00	-432,89	255,90	-422,55
11	9	493,13	11,62	236,50	432,86	-256,63	421,24	-493,13	-11,62	-236,50	-432,86	256,63	-421,24

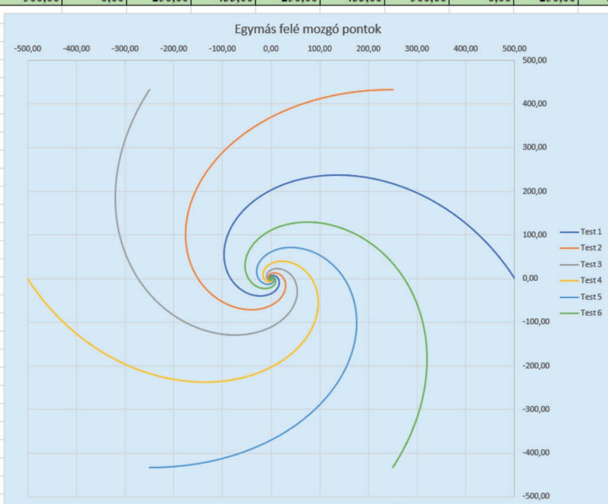
5. Végül az Alapadatok munkalapon maximum az A:J oszlopok szélességében az alapadatok alatt jelenítsük meg a mozgásvonalakat diagramon, úgy, hogy lehetőleg görgetés nélkül teljesen megjelenjen a képernyőn.

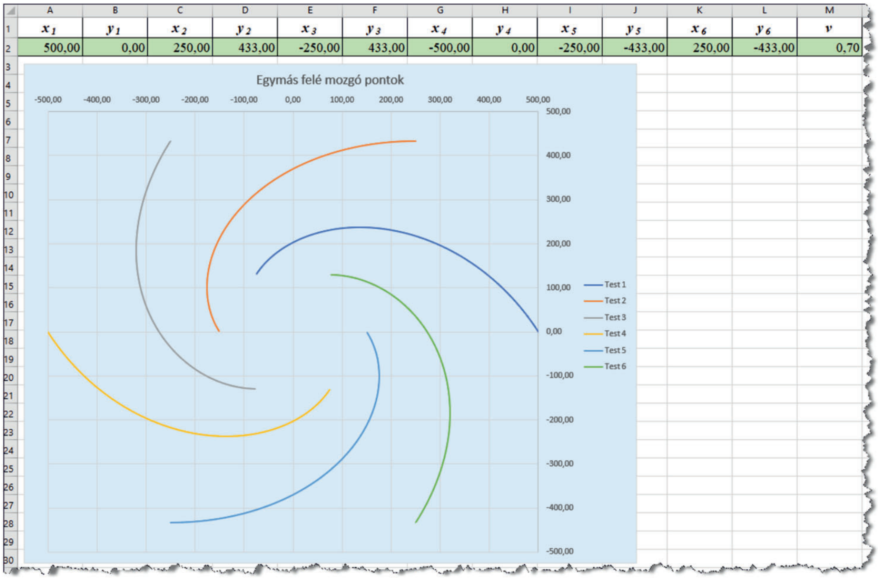
A megoldásban saját függvény vagy makró nem használható.

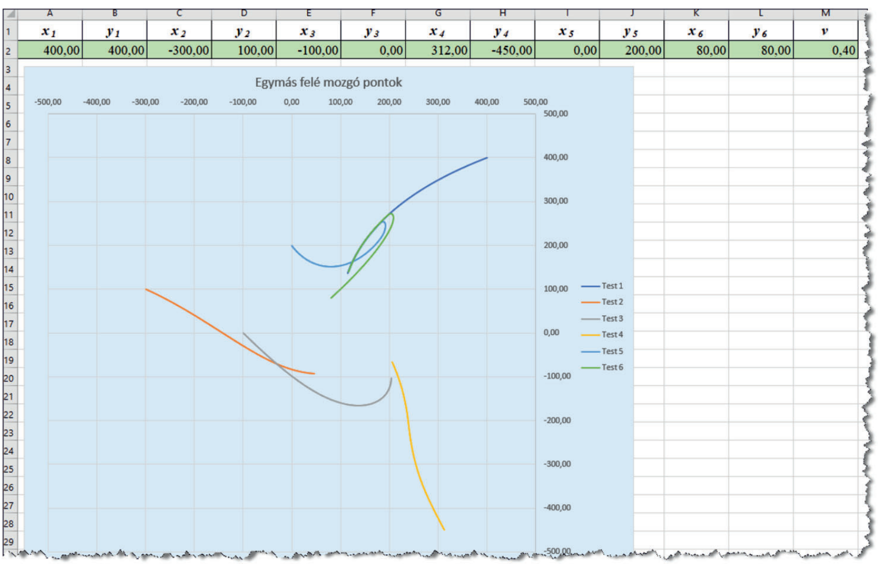
Beküldendő egy tömörített `i587.zip` állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel az egymás utáni adatsorok kiszámításának elve, a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

Minták:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	x_5	y_5	x_6	y_6	v
2	500,00	0,00	250,00	433,00	-250,00	433,00	-500,00	0,00	-250,00	-433,00	250,00	-433,00	1,50







I. 588 (É). A teniszezők világranglistáját heti gyakorisággal frissítik. A rendelkezésre álló `vilagelso.txt` és `jatekos.txt` állományok a ranglista bevezetése óta napjainkig tartó időszak férfi első helyezettjeinek adatait tartalmazzák.

A feladat megoldásához a digitális kultúra emelt szintű érettségin használható XAMPP használatát javasoljuk.

1. Készítsünk új adatbázist `tenisz` néven. A mellékelt két – tabulátorokkal tagolt, UTF-8 kódolású – szöveges állományt importáljuk az adatbázisba az általunk létrehozott táblákba, a fájlnévvel azonos néven (**vilagelso**, **jatekos**). Az állományok első sora a mezőneveket tartalmazza. A létrehozás során állítsuk be a megfelelő típusokat és a kulcsokat. A táblák kialakításához vegyük figyelembe az alábbi táblaleírásokat és kapcsolatokat.

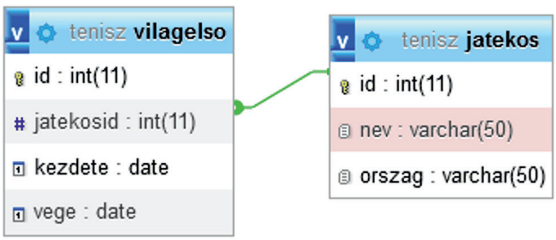
Táblák:

vilagelso (id, jatekosid, kezdete, vege)

id	a folyamatos világelsőség azonosítója (szám), ez a kulcs;
jatekosid	az aktuális világelső játékos azonosítója (szám), idegen kulcs;
kezdete	a folyamatos világelsőség kezdő dátuma (dátum);
vege	a folyamatos világelsőség befejező dátuma (dátum);

jatekos (id, nev, orszag)

id	a világelső férfi játékos azonosítója (szám), ez a kulcs;
nev	a játékos neve (szöveg), az adatbázisban névrokonok nincsenek;
orszag	a játékos születési országa (szöveg).



A következő feladatokat megoldó SQL parancsokat rögzítsük a

`tenisz_megoldas.sql`

nevű állományban a feladatok végén zárójelben megadott névvel. A javítás során csak ennek az állománynak a tartalma lesz értékelve. Ügyeljünk arra, hogy a lekérdezésekben pontosan a kívánt mezők szerepeljenek, felesleges mezőket ne jelenítsünk meg.

2. A világranglistát hetente frissítik és a listavezetést hetekben mérik. Adjuk meg lekérdezés segítségével időrendben, hogy ki hány hétig volt ranglistavezető. (`2listavezetes`)

3. Általában a játékosok megszakításokkal, de többször kerülnek ranglistavezető pozícióba. Listázzuk lekérdezés segítségével azokat a játékosokat, akik csak egyetlenegy időszakban vezették a világranglistát. A listában a játékos neve, országa, a ranglistavezetés kezdő és befejező dátuma jelenjen meg. (`3egyszer`)

4. Lekérdezéssel adjuk meg az első 20 – összesítve legtöbb héten át – ranglistavezető játékos nevét, országát és a hetek számát, utóbbi szerint csökkenő sorrendben. (`4legnagyobbak`)

5. Adjuk meg lekérdezés segítségével, hogy 2000-ben, év végén melyik játékos vezette a világranglistát. (`5evvege`)

6. Lekérdezéssel határozzuk meg, hogy *Roger Federer* utolsó világelsősége után melyik játékos volt először listavezető. (`6federerutan`)
7. Készítsünk lekérdezést, amely kilistázza azokat a játékosokat, akik 2010. és 2020. között voltak ranglistavezetők. A listában a játékosok neve és országa jelenjen meg ismétlődés nélkül, az előbbi szerint növekvő sorrendben. (`7tobb`)
8. Adjuk meg lekérdezés segítségével azt az évet, amikor a világelső személye legtöbbször változott. (`8mozgalmas`)
9. Lekérdezés segítségével adjuk meg azokat a férfi teniszezőket, akik egy naptári év minden napján világelsők voltak. (`9rekorderek`)

Beküldendő egy tömörített `i588.zip` állományban az adatbázis exportját tartalmazó `tenisz.sql` és a feladatok megoldását tartalmazó `tenisz_megoldas.sql` nevű állomány.

Letölthető állomány: `vilagelso.txt` és `jatekos.txt`

I/S. 70. Egy T betűsorozatot palindromnak nevezünk, ha az angol ábécé kisbetűiből áll, és visszafele olvasva megegyezik T-vel. Például az „abbfbba”, „e” és „tt” betűsorozatok palindromok, de az „ab”, „xyz” és „abab” betűsorozatok nem.

Egy T betűsorozatot szuperpalindromnak nevezünk, ha pontosan egy betűből áll, vagy pedig felírható PxP alakban, ahol P egy szuperpalindrom, x pedig az angol ábécé egy tetszőleges kisbetűje. Például az „a”, „xyxhxyx” és „aaa” betűsorok szuperpalindromok, de az „aa”, „xyxhyxy” és „aabcbaa” betűsorok nem.

Adott egy N darab betűből álló betűsor. Adjuk meg, hogy minimum hány betűjét kell megváltoztatni ahhoz, hogy egy szuperpalindromot kapjunk.

A bemenet első sorában az N szám található, a betűsor hossza. A második sorban az angol ábécé N darab betűje található, szóköz nélkül.

A kimenet egyetlen sorában egyetlen szám szerepeljen: a minimálisan átírandó betűk száma, hogy szuperpalindromot kapjunk. Ha ez nem lehetséges, írjunk ki (-1)-et.

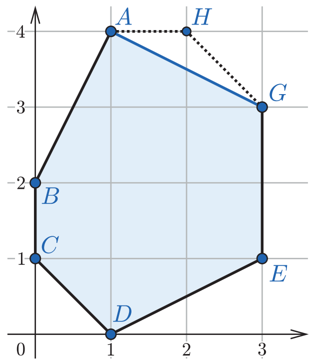
Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`7 / aaabbbb`	`3`
`3 / aba`	`0`
`2 / ab`	`-1`

Magyarázat (1. példa): 3 betű megváltoztatásával kaphatjuk például a következő szuperpalindromot: „abababa”.

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 10^5$. Időkorlát: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha a program helyes kimenetet ad az $N \leqslant 7$ esetekben.

Beküldendő egy `is70.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható. A dokumentáció tartalmazza a megoldás elméleti hátterét, az esetleg felhasznált forrásokat. Ne tartalmazzon kódrészleteket, azok magyarázata kódkommentek formájában a forrásprogramban szerepeljen.



S. 169. 2 egység magasságú egyenes hasáb alakú tárolóedényt szeretnénk készíteni. Az edény alapjának elkészítéséhez kiindulásként adott egy konvex sokszög, melynek csúcsai a koordináta-rendszer rácspontjaira esnek. Ennek a sokszögnek töröljük egy csúcsát és a csúcshoz kapcsolódó két élét, és összekötjük egy éllel a törölt élek megmaradt csúcspontjait. Az így kialakuló sokszöget tekintjük a tárolóedény alapjának.

Feladatunk, hogy a feltételek szerint adott konvex sokszög esetén határozzuk meg, mekkora a belőle készíthető legnagyobb kapacitású edény kapacitása.

A bemenet első sorában a konvex sokszög csúcsainak N száma szerepel. A következő N sorban a csúcsok x és y koordinátája pozitív körüljárási irány szerint. A listában a szomszédos pontok a sokszöget alkotó szakaszok végpontjai. Az első és az utolsó csúcs is össze van kötve.

A kimenet első és egyetlen sorába a konvex sokszögből készíthető legnagyobb kapacitású edény kapacitása kerüljön.

Minta:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`7 / 1 4 / 0 2 / 0 1 / 1 0 / 3 1 / 3 3 / 2 4`	`17`

Magyarázat: az ábrán a H csúcsot törölve az edény kapacitása 17.

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 100\,000$, $-10^8 \leqslant x, y \leqslant 10^8$. Időkorlát: 1 mp.

Értékelés: A pontok 40%-a kapható, ha a program helyes kimenetet ad az $N \leqslant 100$ esetekben.

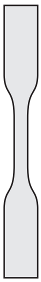
Beküldendő egy `s169.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható. A dokumentáció tartalmazza a megoldás elméleti hátterét, az esetleg felhasznált forrásokat. Ne tartalmazzon kódrészleteket, azok magyarázata kódkommentek formájában a forrásprogramban szerepeljen.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2023. április 15.

❄

Mérési feladat megoldása



M. 419. *Vágjunk ki* A4-*es fénymásolópapírból kb.* 2 cm *szélességű csíkokat a papírlap hosszabb, illetve a rövidebb oldalaival párhuzamosan. A papírcsíkok középső harmadát az ábrának megfelelően, ívelt vonalak mentén keskenyítsük el! Mérjük meg ezek használatával a papír (MPa egységekben kifejezett) szakítószilárdságát! Van-e eltérés a hosszabb, illetve a rövidebb irányban kivágott csíkok szakítószilárdsága között?*

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. A mérés elvben egyszerű volt, de a tényleges megvalósítása során számos nehézség és hibalehetőség adódott. A méréshez sok egyforma papírcsíkra van szükségünk, hiszen mindegyiket csak egyszer használhatjuk. A papírcsíkok egyformaságát *Csóka Péter* és *Schäffer Donát* (Pécsi Janus Pannonius Gimn., 11. évf.) úgy biztosította, hogy számítógépen megszerkesztették, majd kinyomtatták az elkeskenyített csíkok határgörbéit, végül kivágták a mintadarabokat.

A szakítószilárdság kiszámításához a terhelőerőt (vagy a terhelési súlyok tömegét) kellett megmérni, valamint a papír elkeskenyített részének keresztmetszetét. A szalag szélessége tipikusan 5-10 mm volt, ezt tolómérővel, vagy akár mérőszalaggal is meg lehetett határozni. A papír vastagságát tolómérővel, vagy mikrométerrel mérték a versenyzők. Azok jártak el helyesen, akik nem egy-egy, hanem viszonylag sok papírlap együttes vastagságát mérték. *Tomesz László Gergő* (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. évf.) például 1000 lapos köteg vastagságát 9 cm-nek mérte, tehát egy-egy papír vastagságát 0,09 mm-nek találta. Mások (nagyobb mérési hibával) 0,08 és 0,12 mm közötti értékeket kaptak.

A fokozatosan növelendő terhelés nagyságát többféle módszerrel is meg lehetett mérni. Voltak, akik iskolai súlysorozatot használtak, mások húzómérleget, pl. halmérleget alkalmaztak. A Csóka–Schäffer mérőpár tagjai egy kulacsba csurgattak egyre több vizet, majd megmérték az elszakadás előtti legnagyobb terhelés (víz + kulacs) tömegét. Hasonlóan járt el *Nagy Imre* (Marosvásárhely, Bolyai Farkas Líceum, 11. évf.), aki a szalaghoz erősített vederbe rézport „adagolt”. Ötletes módszert választott *Csilling Dániel* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.). Ő egy vízzel teli (1,75 l-es) műanyag palackot helyezett konyhai mérlegre. A papírcsík egyik végét a palackhoz erősítette, a másik végét pedig egyre nagyobb erővel húzta felfelé. A mérlegen le lehetett olvasni a „súlycsökkenést”, vagyis a húzóerő nagyságát.

Mindegyik mérési módszernél meg kellett oldani a papírszalag végeinek rögzítését. Ezt pl. szétszerelt satuval, kétoldalas ragasztószalaggal, szigetelőszalaggal, erős iratcsipeszekkel valósították meg a versenyzők.

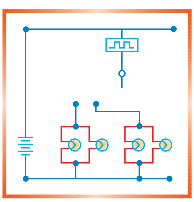
A mért húzóerőből (annak a szakítást megelőző legnagyobb értékéből) és a szalag legkisebb keresztmetszetéből kiszámítható a szakítószilárdság. Valamennyi dolgozatból az derült ki, hogy a papírlap hosszanti irányában egyértelműen nagyobb a szakítószilárdság, mint a rövidebb oldal mentén kivágott csíkoknál. Az előbbi tipikusan 40-50 MPa-nak, az utóbbi pedig 20-30 MPa-nak adódott. Sajnos a jegyzőkönyvekből (egy kivételével) nem derült ki, hogy milyen gyártmányú, milyen minőségű papírral végezték el a mérést, így az eredményeket nehéz összehasonlítani.

Kényes kérdés az elszakadás pillanatának és az akkor fellépő erő nagyságának meghatározása. A szakadás olyan gyorsan történik, hogy szabad szemmel nem (vagy csak nehezen, pontatlanul) tudjuk leolvasni a mérleg vagy erőmérő által abban a pillanatban mutatott értéket. *Kiss Kinga Lili* és *Folytán Zoltán Milán* (Debrecen, Tóth Árpád Gimn., 9. évf.) telefonnal videófelvételt készített a mérleg által mutatott értékekről, majd a felvételek elemzésével határozták meg, hogy mi történik a papírcsík elszakadásakor.

Többen utánanéztek és kiderítették, hogy a szakítószilárdság irányfüggése a papír gyártási folyamatával függ össze. A hengerléssel gyártott papír anyagának rostjai a hosszabb oldallal párhuzamosan, vagy ahhoz közeli irányban helyezkednek el, ez okozza az eltérést. (Ez az „elméleti magyarázat” azonban nem tartozik hozzá a mérési feladathoz.)

A mérési hiba nagyságrendje a papírcsík keresztmetszetének pontatlanságából, valamint a szakítóerő mért értékeinek „szórásából” becsülhető meg. Voltak, akik a szakítószilárdság irodalmi értékének (amit nem találtak meg) és a mért értéknek a különbségét nevezték volna mérési hibának. Ez helytelen, mert az adott mérés pontosságát külső hivatkozás nélkül, a saját mérési adatainkból kell kiderítenünk.

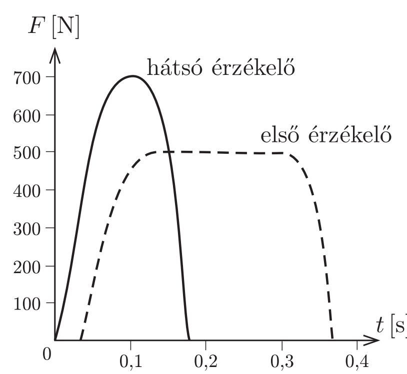
12 dolgozat érkezett. Helyes 6 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 4, hiányos (1–3 pont) 2 dolgozat.



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 798. *A százméteres síkfutás versenyzői térdelőrajtból indulnak. Az ábra azt mutatja, hogy mekkora vízszintes erő hat a rajtgépbe épített első és hátsó érzékelőre egy 70 kg tömegű atléta indulásakor. Becsüljük meg, hogy mekkora sebességgel hagyja el a sportoló a rajtgépet!*

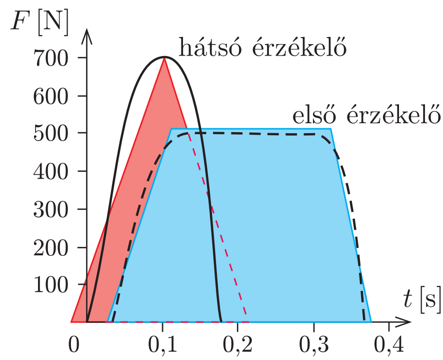
(*3 pont*)



Megoldás. A futót időben változó nagyságú erők gyorsítják. Ezen erők által létrehozott összes impulzusváltozás az $F(t)$ függvények grafikonján a görbe alatti területek nagyságával egyezik meg.

A hátsó érzékelő grafikonját egy olyan háromszöggel közelíthetjük, amelynek az egyik oldala kb. 0,23 s, az ehhez tartozó magassága 700 N, a görbe alatti terület tehát

$$I_{\text{hátsó}} = 700\ \text{N}\,\frac{0{,}23\ \text{s}}{2} = 80{,}5\ \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Az első érzékelő grafikonját egy olyan trapézzal közelítjük, amelynek alapjai 0,33 s, illetve 0,22 s, a magassága pedig 500 N, így a görbe alatti terület

$$I_{\text{első}} = 500\ \text{N}\,\frac{(0{,}33+0{,}22)\ \text{s}}{2} =$$

$$= 137{,}5\ \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A rajtgép által létrehozott teljes lendületváltozás

$$I_{\text{összes}} = I_{\text{hátsó}} + I_{\text{első}} = 218\ \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

ami az $m = 70$ kg tömegű atléta

$$v = \frac{I_{\text{összes}}}{m} = 3{,}11\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

indulási sebességének felel meg.

(Az alkalmazott közelítések és kerekítések miatt ennél pontosabb eredményt nem adhatunk meg, de mivel a feladat a sebesség *becslése* volt, ez a pontatlanság elfogadható.)

Tóth Hanga Katalin (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

31 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 4, hibás 6, nem versenyszerű 3 dolgozat.

G. 800. *Egy gyűjtőlencse egy bizonyos helyen lévő tárgyról N_1 nagyítású, valódi képet hoz létre. Ha a tárgyat az optikai tengely mentén d távolsággal messzebb visszük a lencsétől, a nagyítás N_2 lesz.*

Mekkora a lencse fókusztávolsága?

(4 pont)

Megoldás. A szokásos jelölésekkel a leképezési törvény:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f},$$

a nagyítás pedig

$$N = \frac{k}{t}, \qquad \text{vagyis} \qquad k = Nt.$$

Ezekből kapjuk, hogy

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{Nt} = \frac{1}{f},$$

amit a

$$t = \left(1 + \frac{1}{N}\right) f \tag{1}$$

alakban is felírhatunk.

Az eredeti helyzetben $t = t_1$ és $N = N_1$, a megváltoztatott helyzetű tárgynál $t = t_2 = t_1 + d$ és $N = N_2$. Ezeknek megfelelően (1) szerint

$$t_1 = \left(1 + \frac{1}{N_1}\right) f, \tag{2}$$

valamint

$$t_1 + d = \left(1 + \frac{1}{N_2}\right) f. \tag{3}$$

A (3) egyenletből (2)-t kivonva kapjuk, hogy

$$d = \left(\frac{1}{N_2} - \frac{1}{N_1}\right) f = \frac{N_1 - N_2}{N_1 N_2} f,$$

vagyis a keresett fókusztávolság

$$f = \frac{N_1 N_2}{N_1 - N_2} d.$$

Bohner Emese (Budapest, Városmajori Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

34 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 1, hiányos (1–2 pont) 8, hibás 7, nem versenyszerű 8 dolgozat.

G. 803. *Egyenes mentén állandó lassulással haladó test egy pályaszakasz végére érve elveszíti kezdősebességének a felét. Kezdősebességének hány százalékát vesztette el a pályaszakasz felezőpontjáig?*

(4 pont)

Megoldás. Jelöljük a test kezdősebességét v_0-lal, a gyorsulását a-val ($a < 0$), a pálya hosszát S-sel, a pályaszakasz felezőpontjában mérhető sebességet pedig xv_0-lal.

Az egyenletesen változó mozgás pillanatnyi sebessége és a megtett út közötti összefüggés:

$$s(v)=\frac{v^2-v_0^2}{2a}. \tag{1}$$

Írjuk fel (1)-et a pálya teljes hosszára, valamint a pálya első felére:

$$S=\frac{(v_0/2)^2-v_0^2}{2a}, \tag{2}$$

illetve

$$\frac{S}{2}=\frac{(xv_0)^2-v_0^2}{2a}. \tag{3}$$

A (3) egyenletet (2)-vel elosztva kapjuk, hogy

$$x^2-1=-\frac{3}{8},$$

vagyis

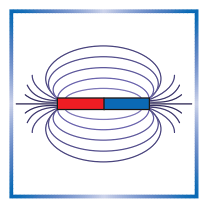
$$x=\sqrt{\frac{5}{8}}\approx 0{,}79.$$

Ezek szerint a test a pályaszakasz felezőpontjáig a kezdősebességének $(1-x)$-ed részét, kb. 21%-át veszítette el.

Biró Kata (Miskolc, Földes F. Gimn., 10. évf.)

41 dolgozat érkezett. Helyes 17 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (2 pont) 2, hibás 13, nem versenyszerű 6 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása

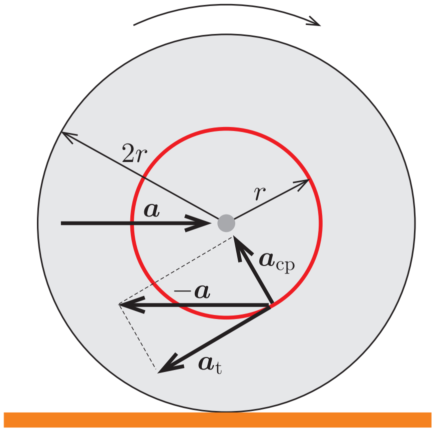


P. 5429. *Egy elektromos autó álló helyzetből indulva* 10 s *alatt egyenletes gyorsulással* 108 km/h *sebességet ér el. Kerekeinek sugara* 0,4 m, *a keréktárcsán található egy* 0,2 m *sugarú díszítőgyűrű. Az indulástól számítva mennyi idő múlva lesz ennek a vékony gyűrűnek olyan pontja, amely nem gyorsul? Mekkora ebben a pillanatban az autó sebessége?*

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. Az autó gyorsulása

$$a=\frac{108\ \mathrm{km/h}}{10\ \mathrm{s}}=\frac{30\ \mathrm{m/s}}{10\ \mathrm{s}}=3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$



A díszítőgyűrű valamelyik pontjának eredő gyorsulása akkor lehet nulla, ha ezen pont $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ tangenciális gyorsulásának és $\boldsymbol{a}_\mathrm{cp}$ gyorsulásának eredője egyenlő nagyságú és ellentétes irányú lesz az autó $\boldsymbol{a}$ gyorsulásával.

Mivel a tangenciális gyorsulás (a sugarak arányának megfelelően)

$$a_\mathrm{t}=\frac{a}{2}=1{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

nagyságú, továbbá a centripetális gyorsulás és a tangenciális gyorsulás egymásra merőleges vektorok, a Pitagorasz-tétel szerint

$$a_\mathrm{cp}=\sqrt{a^2-a_\mathrm{t}^2}=2{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A centripetális gyorsulás nagyságából kiszámíthatjuk a kerék tengelyétől $r=0{,}2$ m távol lévő pontok kerületi sebességét:

$$a_\mathrm{cp}=\frac{v^2}{r},\qquad \text{ahonnan}\qquad v=\sqrt{a_\mathrm{cp}\,r}=\sqrt{2{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}2\ \mathrm{m}}=0{,}72\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ekkora kerületi sebességre a díszítőgyűrű pontjai az autó indulásától számított

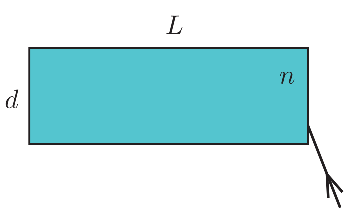
$$t=\frac{v}{a_\mathrm{t}}=0{,}48\ \mathrm{s}$$

idő alatt tesznek szert. Ekkor az autó sebessége

$$v_\text{autó}=at=\left(3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)\cdot 0{,}48\ \mathrm{s}=1{,}44\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\approx 5\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

„Bármi jó” csapat:
Esztinka Anna Karolina és *Szalóki Szonja*
(Budapest, Városmajori Gimn., 11. évf.)

54 dolgozat érkezett. Helyes 23 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 11, hiányos (1–3 pont) 20 dolgozat.



P. 5433. *Egy vízzel töltött, téglatest alakú, elhanyagolható falvastagságú akvárium három függőleges oldala a vízből rájuk eső fényt visszaveri. Az akvárium szélessége* $d=50$ cm, *hossza* $L=120$ cm. *Az akvárium rövidebb oldalához vízszintes síkban valamekkora beesési szögben lézersugár érkezik. Az ábra felülnézetet mutat.* (*A víz törésmutatója:* $n=4/3$.)

A kilépő fénysugár – többszöri tükröződés után – éppen a beeső fénysugárral párhuzamosan haladva hagyja el az akváriumot. Legfeljebb hány tükröződés történhetett?

(*5 pont*) *Zsigri Ferenc* (Budapest) feladata nyomán

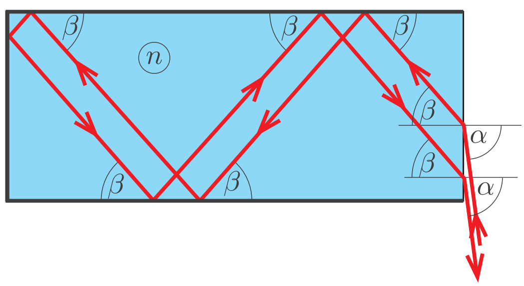
Megoldás. Legyen a fénysugár beesési szöge α, törési szöge pedig β. A törési törvény szerint

$$\sin\beta = \frac{1}{n}\sin\alpha < \frac{1}{n} = \frac{3}{4},$$

tehát β legnagyobb értéke

$$\beta_{\max} = \arcsin\frac{3}{4} \approx 48{,}6^\circ$$

lehet. (Kihasználtuk, hogy az arkuszszinusz-függvény 0 és $\pi/2$ között szigorúan monoton növekvő.) Nevezzük (a fénysugár által kijelölt vízszintes síkban) az akvárium 120 cm-es oldalával párhuzamos irányt „hosszantinak”, a rá merőlegeset pedig „keresztirányúnak”. Vegyük észre, hogy az akváriumban ide-oda tükröződő fény sebességének mind a hosszanti, mind pedig a keresztirányú komponense (azok nagysága) mindvégig ugyanakkora marad.



A fény az akvárium hosszát oda-vissza

$$t = \frac{2L}{c_{\text{víz}}\cos\beta}$$

idő alatt teszi meg ($c_{\text{víz}}$ a fény terjedési sebessége a vízben). Ennyi idő alatt a fény keresztirányban

$$h = c_{\text{víz}} t \sin\beta = 2L \operatorname{tg}\beta$$

utat tesz meg. A hosszanti falaknál történő visszaverődések N száma h/d egészrészénél legfeljebb 1-gyel nagyobb lehet:

$$N < \left[\frac{h}{d}\right] + 1 = \left[\frac{2L}{d}\operatorname{tg}\beta\right] + 1. \qquad (1)$$

Amennyiben N páratlan szám, úgy a vízben haladó fénysugár sebességének mind a hosszanti, mind pedig a keresztirányú komponense előjelet vált, tehát a kilépő fény a belépő fény irányával párhuzamosan hagyja el az akváriumot.

Mivel 0 és $\pi/2$ között a tangensfüggvény is szigorúan monoton növekvő, N legnagyobb értékét β legnagyobb értéke adja meg:

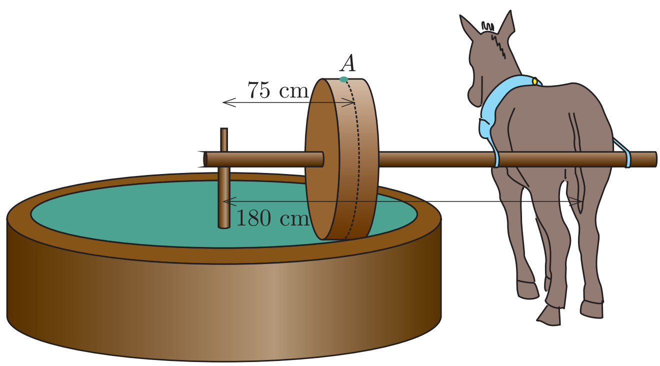
$$N < \left[\frac{2L}{d}\ \mathrm{tg}\,\beta_{\max}\right] + 1 = \left[\frac{240}{50}\ \mathrm{tg}\,48{,}6^\circ\right] + 1 = [6{,}44] = 6.$$

Mivel azonban N páratlan, $N_{\max} = 5$. A fénysugár a hosszanti oldalakon legfeljebb 5-ször, a rövidebb oldalon 1-szer, összesen tehát legfeljebb 6-szor tükröződhet.

Fajszi Karsa (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10 évf.)
dolgozatának felhasználásával

29 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 10, hibás 2 dolgozat.

P. 5438. *Egy spanyol gazdaságban a képen látható olajbogyópréssel törik péppé a bogyókat. A* 90 cm *átmérőjű zúzókerék tisztán gördülő síkja, amit az* ábrán *szaggatott vonal jelez, a tengelytől* 75 cm *távolságban van. A csacsi farka a tengelytől* 180 cm *távolságban verdesi a rudat, miközben az állat* 2,4 m/s *sebességgel körbe-körbe fut. A zúzókerékre egy* 1 g *tömegű olajbogyó ragad.*



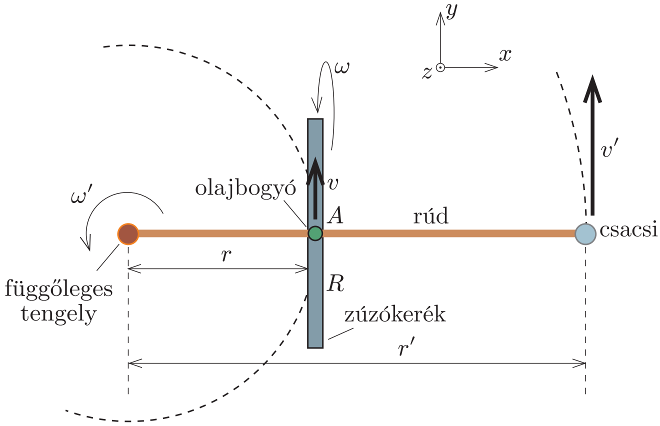
a) Mekkora az olajbogyó sebessége, amikor a felső A pontba ér?

b) Mekkora a olajbogyó gyorsulása az A pontban?

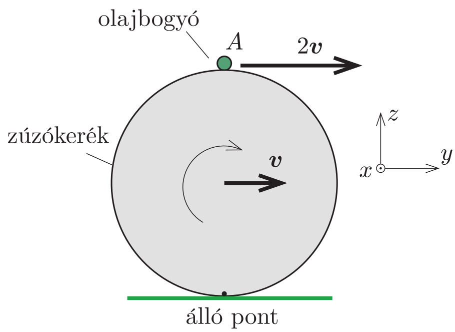
c) Mekkora és milyen irányú eredő erőt fejt ki a zúzókerék az olajbogyóra a legfelső A pontban?

(*5 pont*) Közli: *Baranyai Klára,* Veresegyház

I. megoldás. A mozgás leírásánál használjuk az *1. ábrán* látható koordinátarendszert, valamint az ábra jelöléseit. (A vektorokat félkövér betűkkel fogjuk jelölni, a nagyságukat pedig ugyanazzal a betűvel, de nem félkövérrel, pl. $|\boldsymbol{v}| = v$.)



1. ábra



2. ábra

a) A zúzókerék középpontjának sebessége a csacsi v' sebességéből és a sugarak arányából számolható:

$$v = \frac{r}{r'}v' = \frac{75\ \mathrm{cm}}{180\ \mathrm{cm}} \cdot 2{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Mivel a kerék tisztán gördül, vagyis a *2. ábrán* látható legalsó pontjának sebessége nulla, az A pont sebessége

$$v_A = 2v = 2{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b) A zúzókerék tengelye a függőleges rúd körül

$$\omega' = \frac{v}{r} = \frac{1{,}0\ \mathrm{m/s}}{0{,}75\ \mathrm{m}} = 1{,}33\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

szögsebességgel fordul körbe a vízszintes $x-y$ síkban. (Ha a szögsebességet forgástengely irányú vektornak tekintjük, akkor a jobbkéz-szabály szerint $\boldsymbol{\omega}'$ függőlegesen felfelé irányul.)

„Üljünk bele” egy olyan koordináta-rendszerbe, amelynek origója a zúzókerék középpontjánál van, és ω' szögsebességgel forog a függőleges tengely körül. Ebben a rendszerben a zúzókerék mindig ugyanazon a helyen van, de ω szögsebességgel forog a rögzített helyzetű, vízszintes tengelye körül.

A forgó rendszerben az olajbogyóra ható „valódi erő” (a nehézségi erő és a kerék által kifejtett kényszererő $\boldsymbol{F}$ eredője) mellett fellépnek ún. tehetetlenségi erők is. Az egyik ilyen erő a függőleges tengely körüli forgásból származó

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{cf}} = m\boldsymbol{r}\omega'^2$$

centrifugális erő, ahol $\boldsymbol{r}$ a függőleges forgástengelytől az A pontba mutató vízszintes vektor). Ha a forgó rendszerben egy tömegpont (esetünkben az A pontbeli olajbogyó) $\boldsymbol{v}$ sebességgel mozog, akkor hat rá még az

$$\boldsymbol{F}_{\text{Coriolis}} = 2m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}'$$

Coriolis-erő (lásd pl. a „Négyjegyű" 1.2.5. alpontját a tehetetlenségi erőkről).

A tehetetlenségi erőkkel kiegészített Newton-féle mozgásegyenlet a forgó koordináta-rendszerben:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\text{cf}} + \boldsymbol{F}_{\text{Coriolis}} = m\boldsymbol{a}_{\text{forgó}},$$

ahol $\boldsymbol{a}_{\text{forgó}} = -\boldsymbol{R}\omega^2$, hiszen az A pont R sugarú körpályán ω szögsebességgel forog. ($\boldsymbol{R}$ függőlegesen felfelé irányuló, R nagyságú vektor.) Másrészt az álló (inercia-) rendszerben igaz, hogy

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_{\text{álló}}.$$

Ezekből az egyenletekből adódik, hogy a keresett gyorsulás az olajbogyóprés álló koordináta-rendszerében:

$$\boldsymbol{a}_{\text{álló}} = -\boldsymbol{R}\omega^2 - \boldsymbol{r}\omega'^2 - 2\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}'.$$

A vektorok irányát és nagyságát figyelembe véve az utolsó tagot a $2\omega'^2\boldsymbol{r}$ módon is felírhatjuk. Ezzel az álló rendszerbeli gyorsulásvektor vízszintes komponense:

$$a_x = -3\omega'^2 r = -4{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

a függőleges komponense

$$a_z = -R\omega^2 = -\frac{v^2}{R} = -2{,}22\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

a nagysága pedig

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_z^2} = 4{,}58\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

c) Az m tömegű olajbogyóra ható erőket a Newton-egyenletből kapjuk meg:

$$F_x = ma_x = -3mr\omega'^2 = -4{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{N},$$

illetve $F_z - mg = ma_z$ szerint

$$F_z = m(g + a_z) = m\big(g - R\omega^2\big) = 7{,}59 \cdot 10^{-3}\ \text{N}.$$

Az eredő erő nagysága:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = 8{,}58 \cdot 10^{-3}\ \text{N}.$$

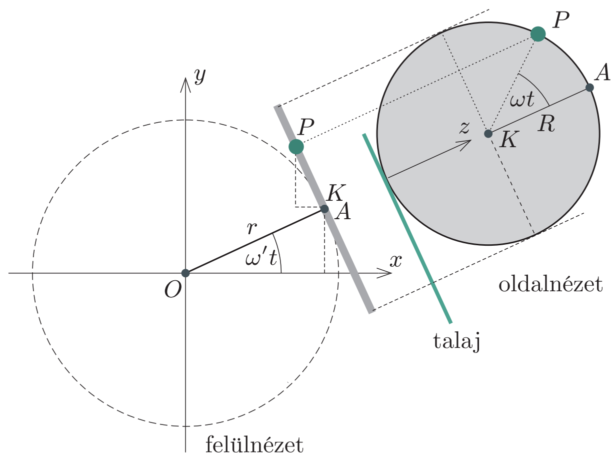
Az $\boldsymbol{F}$ vektor az x, z síkban fekszik, és az iránya a negatív x tengellyel

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{F_z}{-F_x}\right) = 62{,}2^\circ$$

nagyságú szöget zár be.

Bencz Benedek (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Az olajbogyó sebességét és gyorsulását a talajhoz képest álló inerciarendszerben is kiszámíthatjuk.*



3. ábra

A *3. ábrán* látható derékszögű koordináta-rendszerben a kerék K középpontjának koordinátái az olajbogyó A ponton való áthaladása után t idő elteltével:

$$\boldsymbol{r}_K = (r\cos\omega' t, r\sin\omega' t, R).$$

Ennyi idő alatt a zúzókerék síkja $\omega' t$ szöggel fordult el a függőleges tengely körül, a keréknek a rúd körüli elfordulása pedig ωt. Ez utóbbi miatt az olajbogyó P pontja $R\sin\omega t$ távolságra kerül az A ponton átmenő függőleges egyenestől. Az ábráról leolvasható, hogy az olajbogyó koordinátái t idő elteltével:

$$x(t) = r\cos\omega' t - R\sin\omega' t\cdot\sin\omega t, \tag{1}$$

$$y(t) = r\sin\omega' t + R\cos\omega' t\cdot\sin\omega t, \tag{2}$$

$$z(t) = R(1+\cos\omega t). \tag{3}$$

Az $x(t)$ függvény a

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

azonosság felhasználásával így is felírható:

$$x(t) = r\cos\omega' t + \frac{R}{2}\cos(\omega'+\omega)t - \frac{R}{2}\cos(\omega'-\omega)t.$$

* Ennek a tárgyalásmódnak az az előnye, hogy nem hivatkozik (a középiskolai oktatásban elkerülendőnek mondott) tehetetlenségi erőkre; hátránya viszont az, hogy a mozgást leíró függvények bonyolultabb alakúak.

Ez három koszinuszos függvény összege, éppen olyanoké, mint amelyek egy-egy kezdősebesség nélkül induló, harmonikus rezgőmozgást írnak le. Az analógia alapján a P pont x tengely irányú gyorsulása $t=0$ pillanatban:

$$a_x(0) = -r\omega'^2 - \frac{R}{2}(\omega'+\omega)^2 + \frac{R}{2}(\omega'-\omega)^2 = -r\omega'^2 - 2R\omega\omega' = -3r\omega'^2.$$

Hasonlóan számíthatjuk ki az $y(t)$ és $z(t)$ összefüggéseket. Ezekből leolvashatjuk, hogy

$$v_y(0) = 2r\omega', \qquad a_y(0) = 0,$$

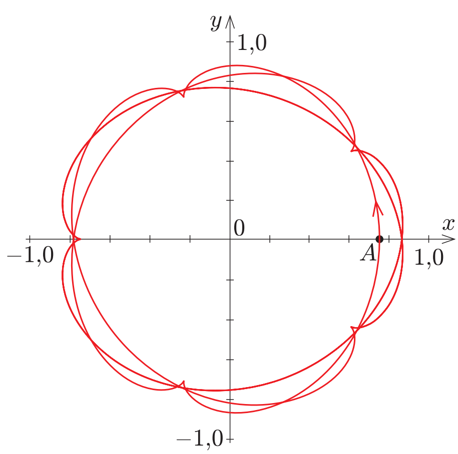
továbbá

$$v_z(0) = 0, \qquad a_z(0) = -R\omega^2.$$

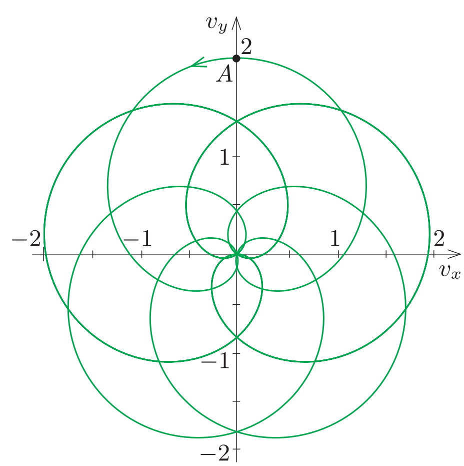
Ezeket az eredményeket felsőbb matematikai módszerekkel, az (1), (2) és (3) kifejezések első, illetve második deriváltjából is megkaphatjuk.

Megjegyzés. Hasonló módon számíthatjuk ki az olajbogyó gyorsulását abban a pillanatban, amikor az A-val átellenes helyzetben van (feltételezve, hogy még ott is hozzátapad a zúzókerékhez). Meglepő módon azt kapjuk, hogy a pálya legalsó pontjánál (vagyis ott, ahol az olajbogyó sebessége nulla) a vízszintes irányú gyorsulása $+r\omega'^2$, tehát a bogyó „kifelé” gyorsul. Ennek szemléletes magyarázata az, hogy az olajbogyó pályája nem egy r sugarú hengerpaláston fekszik, hanem egy r és egy $\sqrt{r^2+R^2}$ sugarú henger közötti térrészben található. A bogyó bizonyos helyzetekben egyre jobban eltávolodik a függőleges tengelytől, emiatt lehet kifelé irányuló sebessége és gyorsulása is.

Érdekes (és látványos) eredményhez jutunk, ha az olajbogyó mozgását (a helyét, sebességét és gyorsulását) grafikusan ábrázoljuk. A z tengely irányú mozgás ismerős lehet, az egy olyan harmonikus rezgőmozgás, aminek „egyensúlyi helyzete” $z=R$, amplitúdója R, körfrekvenciája pedig a kerék (a saját tengelye körüli) forgásának ω szögsebessége. A meglepetést a mozgás vízszintes síkbeli lefolyása okozza.

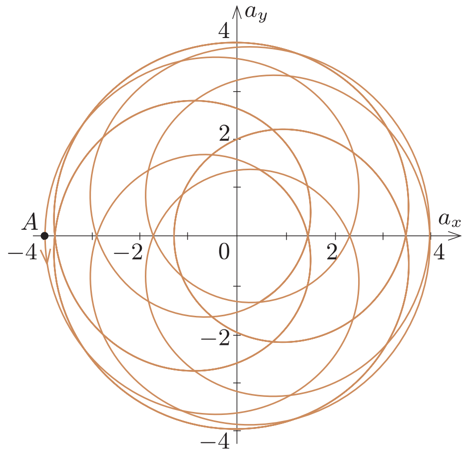


4. ábra



5. ábra

Ha egy derékszögű koordináta-rendszerben ábrázoljuk az $x(t)$ és $y(t)$ koordinátájú pontokat, tehát megadjuk a pályagörbét paraméteres alakban (ezt számítógépes program, pl. a GeoGebra vagy a WolframAlfa segítségével is megtehetjük), akkor a *4. ábrán* látható piros görbét kapjuk. Hasonlóan járhatunk el, ha a koordinátatengelyekre $v_x(t)$-t és $v_y(t)$-t mérjük fel, vagyis a sebességhodográfot rajzoljuk meg (az *5. ábrán* látható zöld görbe), illetve ha a gyorsulás komponenseit adjuk meg az idő függvényében, tehát a gyorsuláshodográfot készítjük el (a *6. ábrán* a barna görbe). (A tengelyeken a megfelelő mennyiségek SI mértékegységrendszerben mért nagyságát adtuk meg.)



6. ábra

A feladatban szereplő helyzetben az olajbogyó helyét, sebességét és gyorsulását az ábrákon A betű és egy kis fekete kör jelöli. Az idő múlásának irányára az ábrákon látható nyilak utalnak. (A hodográfokról szóló rövid cikket a KöMaL honlapján olvashatjuk*.)

(*G. P.*)

65 dolgozat érkezett. Teljes értékű Bencz Benedek megoldása. Kicsit hiányos (3–4 pont) 30, hiányos (1–2 pont) 27, hibás 5, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5444. *Egy vékony, hosszú, függőleges, szigetelőrúdon súrlódásmentesen mozoghat egy kicsiny töltött golyócska. Ha egy ezzel azonos töltésű, ugyancsak kicsiny testet helyezünk a rúd tövébe, a mozgó golyó h_0 magasságban lesz egyensúlyban. Milyen messzire távolíthatjuk el a rúdtól vízszintes irányba az alsó testet úgy, hogy a rúdon lévő golyó még egyensúlyban lehessen valahol? Milyen magasan van ez a hely?*

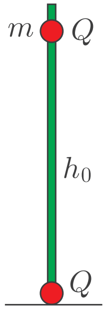
(*6 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata nyomán

Megoldás. Legyen a szigetelőrúdon lévő golyócska tömege m, töltése Q. Ha a rúd tövéhez helyezett másik töltés h_0 magasságban tudja az mg súlyú golyócskát egyensúlyban tartani (lásd az *1. ábrát*), akkor fennáll:

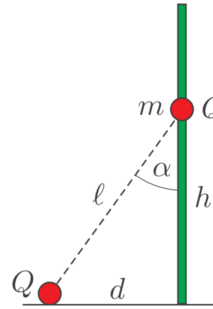
$$k\frac{Q^2}{h_0^2} = mg. \tag{1}$$

Vizsgáljuk most a rúdtól d távolságban elhelyezett töltés és a rúdon lévő golyócska egyensúlyának lehetőségét. Ha a két töltött test között h a magasság-

* `https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`



1. ábra



2. ábra

különbség, és az őket összekötő egyenes α szöget zár be a függőlegessel (*2. ábra*), akkor

$$k\frac{Q^2}{\ell^2}\cos\alpha = mg, \tag{2}$$

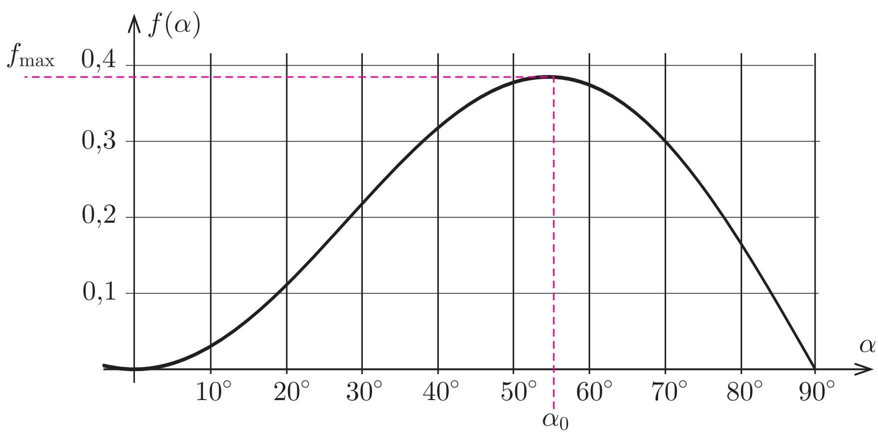
ahol $\ell = d/\sin\alpha$ a két töltés távolsága. (1) és (2) összevetéséből kapjuk, hogy az egyensúly feltétele:

$$\frac{d^2}{h_0^2} = \sin^2\alpha\,\cos\alpha. \tag{3}$$

Kérdés: Legfeljebb mekkora d mellett van megoldása a (3) egyenletnek, vagyis mekkora az

$$f(\alpha) = \sin^2\alpha\,\cos\alpha$$

függvény maximuma a $0 < \alpha < \pi/2$ intervallumon? Ábrázolva $f(\alpha)$-t, a függvény grafikonjáról (*3. ábra*) leolvashatjuk, hogy $\alpha_0 \approx 55°$ és $f_{\max} \approx 0{,}38$.



3. ábra

Ennek megfelelően

$$d_{\max} = h_0\sqrt{f_{\max}} \approx 0{,}62\,h_0 \quad \text{és} \quad h_{\min} = d_{\max}\cdot \operatorname{ctg}\alpha_0 \approx 0{,}44\,h_0.$$

Az $f(\alpha)$ függvény lokális maximumát differenciálszámítással, vagy számítógépes segítség (pl. a `WolframAlpha`) felhasználásával pontosabban is megkaphatjuk. Ezek szerint

$$\alpha_0 = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54{,}73^\circ \qquad \text{és} \qquad f_{\max} = \frac{2}{\sqrt{27}} \approx 0{,}3849,$$

továbbá

$$d_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{27}}}\,h_0 \approx 0{,}6204\,h_0$$

és

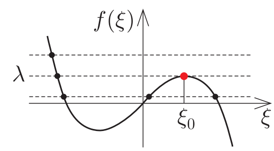
$$h_{\min} = \frac{h_0}{\sqrt[4]{27}} \approx 0{,}4387\,h_0.$$

(*Több dolgozat alapján*)

Megjegyzés. $f(\alpha)$ maximumát (*4. ábra*) nemcsak differenciálszámítással, hanem elemi módszerekkel is meg lehet határozni. Vezessük be a $\xi = \cos\alpha$ jelölést, és keressük az

$$f(\xi) \equiv \xi(1-\xi^2)$$

függvény (lokális) maximumát. Ezt ott (annál a λ értéknél) találjuk, amelynél a



4. ábra

$$\xi^3 - \xi + \lambda = 0 \tag{4}$$

harmadfokú egyenlet három valós gyöke közül kettő egybeesik. (A 4. ábrán láthatjuk, hogy (4)-nek vagy három, vagy egy valós gyöke van.) A keresett λ és ξ_0 értékeket a gyökök és együtthatók közötti összefüggésből kaphatjuk meg. Mivel (4)-ben nem szerepel másodfokú tag, a három gyök összege *nulla.* Ha a kétszeres gyök ξ_0, akkor a harmadik gyök $-2\xi_0$, és a gyöktényezős alak

$$\xi^3 - \xi + \lambda \equiv (\xi-\xi_0)^2(\xi+2\xi_0) \equiv \xi^3 - 3\xi_0^2\xi + 2\xi_0^3.$$

A különböző hatványok együtthatóit rendre összehasonlítva kapjuk, hogy

$$-3\xi_0^2 = -1, \qquad \text{azaz} \qquad \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,,$$

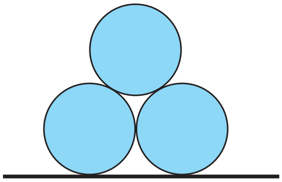
továbbá

$$\lambda = f_{\max} = 2\xi_0^3 = \frac{2}{\sqrt{27}}\,,$$

összhangban a korábban kapott eredményekkel.

(*W. F.*)

27 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 3, hiányos (2–3 pont) 4, nem versenyszerű 2 dolgozat.

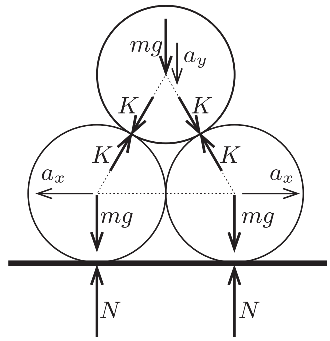


P. 5447. *Három egyforma,* 5 cm *sugarú jéghengert készítünk, és azokat az* ábrán *látható helyzetből kezdősebesség nélkül elengedjük. A súrlódás mindenhol elhanyagolható.*

Mekkora gyorsulással indulnak el a jéghengerek?

(*5 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

Megoldás. A testekre ható erőket az *1. ábrán* tüntettük fel. Súrlódás hiányában mindegyik erő hatásvonala a megfelelő jéghenger tömegközéppontján halad keresztül. A két alsó henger között nem hat erő, mert az induláskor rögtön eltávolodnak egymástól egy kicsit.



1. ábra

A hengerek középpontja az indulás pillanatában szabályos háromszöget alkot. A három test mozgásegyenlete (az ábrán jelölt gyorsulásokkal):

$$mg - 2\frac{\sqrt{3}}{2}K = ma_y, \tag{1}$$

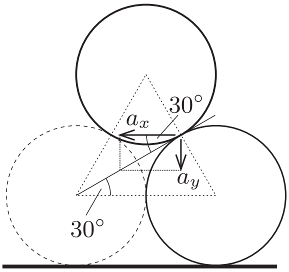
$$\frac{1}{2}K = ma_x, \tag{2}$$

továbbá az alsó testek függőleges irányú mozgásának hiánya miatt

$$mg + \frac{\sqrt{3}}{2}K - N = 0. \tag{3}$$

Az utolsó egyenletet (hacsak nem akarjuk kiszámítani a talaj által kifejtett N nyomóerőt) elhagyhatjuk, nem lesz szükségünk rá.

Az (1) és (2) egyenlet három ismeretlent tartalmaz, a megoldáshoz tehát még egy összefüggést kell keressünk. Ez egy kinematikai kényszerfeltétel lesz, ami azt fejezi ki, hogy a felső henger és az egyik (mondjuk a jobb oldali) jéghenger folyamatosan érintkezik egymással, a tengelyeik távolsága időben állandó marad.



2. ábra

A két gyorsulás kapcsolatára akkor tudunk kifejezést felírni, ha az egyik (mondjuk a jobb oldali) alsó henger vonatkoztatási rendszeréből tekintjük a mozgást. Ekkor az alsó henger áll, a felső pedig a_x gyorsulással mozog balra, miközben a_y gyorsulással mozog lefelé (*2. ábra*). (Ezek a gyorsulások nemcsak a henger tengelyére, hanem bármely pontjára, így az alsó hengerrel érintkező pontjaira is érvényesek.)

A felső henger eredő gyorsulása a vízszintessel 30°-os szöget kell hogy bezárjon, mert az alsó hengerhez se nem közeledik, se nem távolodik attól. (A hengerek kezdetben álltak, így minden pontjuknak nulla a centripetális gyorsulása.) Ezek szerint

$$a_x \sin 30^\circ = a_y \cos 30^\circ,$$

vagyis

$$\frac{a_y}{a_x} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{4}$$

Az (1), (2) és (4) egyenletekből (K kiküszöbölése után) a keresett gyorsulásokra

$$a_x = \frac{\sqrt{3}}{7} g \qquad \text{és} \qquad a_y = \frac{1}{7} g$$

adódik.

Nemeskéri Dániel (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. évf.)

48 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 18, hibás 3, nem versenyszerű 10 dolgozat.

P. 5450. *Az* $f = 5$ cm *fókusztávolságú gyűjtőlencse optikai tengelyén, a lencsétől jobbra* 30 cm-*re és balra* 18 cm-*re található, pontszerűnek tekinthető szentjánosbogarak elkezdenek egymás felé mozogni* 2 cm/s *sebességgel. Mennyi idő múlva kerül fedésbe egymással a két bogár képe?*

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

Megoldás. A leképezési törvény szerint ha egy f fókusztávolságú gyűjtőlencsétől t távol lévő tárgy képe a lencsétől k távolságban jön létre, akkor fennáll, hogy:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f},$$

ahonnan a képtávolság

$$k = \frac{tf}{t - f}. \tag{1}$$

(Előjel-konvenció: k pozitív, ha a lencsét elhagyó sugarak összetartanak, így valódi kép alakul ki a tárggyal ellentétes oldalon; k negatív, ha a fénysugarak széttartóak maradnak, ekkor a kép látszólagos és a tárgy oldalán jön létre.)

Valamekkora t idő alatt mindkét bogár ugyanakkora, $x = vt$ távolságot tesz meg. (Ha a távolságokat cm, az időt s, a sebességet pedig cm/s egységekben mérjük, akkor $x = 2t$.)

A lencsétől balra lévő (B) bogár legfeljebb a lencséig tud eljutni, tehát $x < 18$. Eközben a másik, a lencsétől jobbra lévő (J) bogár nem kerül 12 cm-nél közelebb a lencséhez, tehát annak fókusztávolságán kívül marad ($t > f$). A J bogár valódi képe a lencse bal oldalán jöhet csak létre. A B bogár képe akkor eshet fedésbe J képével, ha B a lencsétől f-nél kisebb távolságba kerülve a képe látszólagos, az tehát ugyancsak a lencse bal oldalán alakul ki.

Valamekkora x út megtétele után a J bogár tárgytávolsága $30-x$, a B bogáré $18-x$ lesz. A megfelelő képtávolságok (1) szerint:

$$k_{\mathrm{J}}=\frac{5(30-x)}{25-x}>0 \qquad \text{és} \qquad k_{\mathrm{B}}=\frac{5(18-x)}{13-x}<0.$$

(Az utóbbi egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $x>13$, vagyis a bogár már áthaladt a lencse fókuszpontján.)

A két kép átfedésének feltétele: $k_{\mathrm{B}}=-k_{\mathrm{J}}$, vagyis

$$\frac{5(30-x)}{25-x}+\frac{5(18-x)}{13-x}=0.$$

Innen a

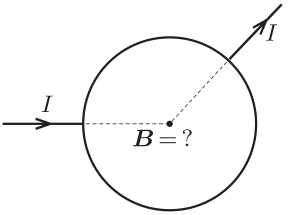
$$(30-x)(13-x)+(25-x)(18-x)=2(x^2-43x+420)=0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei: $x_1=15$ és $x_2=28$. Mivel $x_2>18$, csak az $x=15$ cm elmozdulás fogadható el. Ekkora utat a szentjánosbogarak 7,5 s alatt tesznek meg, és 15 cm, illetve 3 cm távol lesznek a lencsétől. Mindkettőjük képe a lencse bal oldalán, a lencsétől 7,5 cm távolságban jön létre.

Megjegyzés. Ha lehetővé tesszük, hogy a bogarak (pl. a lencse közepén lévő lyukon keresztül) áthaladjanak a lencsén, akkor további helyzetekben is fedésbe kerülhet a képük. $x=33$ cm elmozdulás után J a lencse bal oldalára, a lencsétől 3 cm-re, B pedig a jobb oldalon 15 cm-nyire kerül. Ez az helyzet a fentebb számolt eset tükörképe, a képek tehát itt is egybeesnek. További megoldás: $x=24$ cm; ennél a bogarak a lencse jobb oldalán, a lencsétől 6 cm távolságban találkoznak. Mivel ugyanott vannak, nyilván a képeik is egybeesnek.

Több dolgozat alapján

41 dolgozat érkezett. Helyes 26 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 11, nem versenyszerű 2 dolgozat.



P. 5459. *Egyenletes vastagságú ellenálláshuzalból R sugarú kört hajlítunk. A kör egyik pontjánál „sugárirányban” I erősségű áramot vezetünk be, egy másik pontjánál pedig (ugyancsak sugárirányban) elvezetjük azt.*

Milyen irányú és mekkora nagyságú a mágneses indukcióvektor a kör középpontjában?

(*3 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

Megoldás. A körvezető az áram bevezetési és kivezetési pontjai között haladó körívekre bontható. Ezen körívek párhuzamosan kapcsolt ellenállások. Párhuzamosan kapcsolt ellenállások esetében az $I_{1,2}$ áramerősségek fordítottan arányosak az $r_{1,2}$ ellenállásokkal. Az ellenállások viszont egyenesen arányosak az $i_{1,2}$ ívhosszakkal. Tehát az áramerősség fordítottan arányos az ívhosszal, vagyis

$$I_1\cdot i_1=I_2\cdot i_2.$$

A mágneses indukció a kör középpontjában a körívben folyó áram erősségének és az ívhossznak a szorzatával arányos. A két ívhosszdarab járuléka a mágneses indukcióvektorhoz azonos nagyságú, de ellentétes irányú, tehát a kör középpontjában az eredő mágneses indukcióvektor *nullvektor.*

Klement Tamás (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

42 dolgozat érkezett. Helyes 27 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 3, hibás 7, nem versenyszerű 5 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 421. Húzzunk fekete, puha grafitceruzával vonalakat egy papírlapra. Feltételezhetjük, hogy a grafit atomi rétegekben „kenődik”, és a szomszédos atomi rétegek közötti távolság 0,34 nm. Határozzuk meg, hogy hány szénatom magasságú egy vonal!

(*6 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

G. 809. Egy könnyű reszelővel kis méretű munkadarabot vízszintes síkban reszelünk. A két kezünk által kifejtett erők eredőjének hatásvonala átmegy a munkadarab felületének a közepén, és ez a hatásvonal 30°-os szöget zár be a függőlegessel. Mekkora a reszelő és a munkadarab közötti súrlódási együttható?

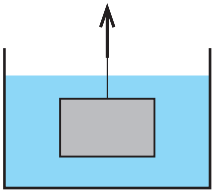
(*3 pont*)

G. 810. Tizenegyesrúgáskor a labda átlagsebessége elérheti a 150 km/h értéket is. A kapusnak mennyi ideje van a védésre, ha az elrúgás pillanatában a kapu közepén áll, és a labda a kapu egyik alsó sarka felé mozog? Van-e igazságtartalma a következő mondásnak: *„Büntetőt jól védeni nem lehet, csak rosszul rúgni.”*?

(*3 pont*)

G. 811. Vízszintes lapon három hasábot állandó F erővel húzunk az *ábrán* látható módon. A hasábok mindvégig egy egyenes mentén mozognak, pillanatnyi sebességük v_0. Hogyan függ a hasábokat összekötő fonalakban ébredő fonálerő a hasábok és a lap közötti μ csúszási súrlódási együttható értékétől?

(*4 pont*)



G. 812. Egy testet vízbe merítve 1,5 N, glicerinben pedig 1 N erővel tudunk egyensúlyban tartani. Mekkora a test térfogata és a sűrűsége?

(*3 pont*)

P. 5472. Mennyi idő alatt kerüli meg a James Webb űrtávcső a Napot?

(*3 pont*)

P. 5473. Függőlegesen, $v=50$ m/s sebességgel fellőtt, $M=3$ kg tömegű lövedék $t=3$ s múlva két részre robban. Az $m_1=1$ kg tömegű darabja $t_1=1$ s múlva földet ér.

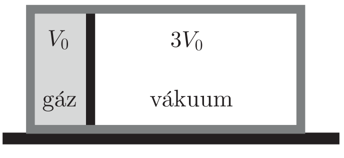
a) A robbanástól számítva mennyi idő múlva esik le a másik darab?

b) Ha az elsőnek visszaeső darab a fellövés helyétől 40 m távolságban ért földet, milyen távol lesz a két darab egymástól, amikor a másik is már földet ért?

(*4 pont*) Közli: *Holics László*, Budapest

P. 5474. Vízszintes síkon egy homogén, vékony, m tömegű, ℓ hosszúságú pálca egyik végét csuklóval rögzítjük. A másik végét egy rövid ideig ható, a rúdra merőleges, vízszintes, F nagyságú erővel megütjük. Mekkora ebben a pillanatban a pálca közepének gyorsulása, szöggyorsulása és a másik végére ható csuklóerő?

(*4 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár



P. 5475. Egy $M=32$ kg tömegű, $V=$ $=4\ \mathrm{dm}^3$ térfogatú tartály súrlódásmentesen mozoghat egy vízszintes asztallapon. A tartályt egy $m=16$ kg tömegű dugattyú két részre osztja, a bal oldalon $V_0=1\ \mathrm{dm}^3$ térfogatú, $p_0=0{,}3$ MPa nyomású és $\kappa=1{,}5$ adiabatikus kitevőjű gázkeverék található. A jobb oldalon vákuum van. Mekkora relatív sebességgel ütközik a dugattyú a henger falának, ha a dugattyú rögzítését feloldjuk? Tételezzük fel, hogy a gáz minden időpillanatban termikus egyensúlyban van!

(*5 pont*) Példatári feladat nyomán

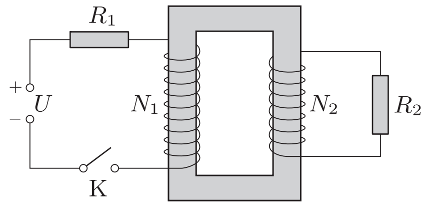
P. 5476. Három egyforma, A területű fémlemezt helyezünk el egymással párhuzamosan. A lemezek közötti távolság kicsi a lemezek méretéhez képest.

a) Mekkora az elektromos térerősség a lemezek között, ha a bal oldali lemezre $+Q$, a középsőre $+2Q$, a jobb oldalira pedig $+3Q$ töltést juttatunk?

b) Mekkora az elektromos térerősség a lemezek között, ha a bal oldali lemezre $+Q$, a középsőre $-2Q$, a jobb oldalira pedig $+3Q$ töltést juttatunk?

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

P. 5477. Egy $U = 24$ V feszültségű ideális telepből, $R_1 = 500$ Ω-os és $R_2 = 300$ Ω-os ellenállásokból, egy kapcsolóból, valamint egy ideális transzformátorból az *ábrán* látható kapcsolást állítottuk össze. A transzformátor primer tekercsének menetszáma $N_1 = 800$, a szekunder tekercsé $N_2 = 1000$. A hosszú ideje nyitva lévő kapcsolót egyszer csak zárjuk. Mekkora áram folyik a primer és szekunder körben közvetlenül a kapcsoló zárása után?



(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

P. 5478. Az üvegből készült, síkdomború lencsét a sík oldalánál víz, a domború oldalánál levegő határolja.

a) Mekkora a lencse két oldali fókusztávolságának aránya?

b) Mekkora ez az arány, ha a határoló közegeket felcseréljük?

A lencse vékony és kis nyílásszögű. Az üveg törésmutatója 3/2, a vízé 4/3.

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5479. A klasszikus elektronmodell szerint az elektron egy olyan egyenletesen feltöltött szigetelő gömbhéj, amelynek elektrosztatikus energiája az elektron mc^2 nyugalmi energiájával egyezik meg.

Mekkora mozgási energiával kellene egy elektront egy másik, kezdetben álló elektronnak ütköztetni, hogy „összeérjenek" egymással, ha a klasszikus mechanika törvényeit alkalmazzuk?

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 5480. Egy függőleges sík adott P pontján keresztül különböző hajlásszögű (a síkra merőleges) lejtőket fektetünk, és ezeken kezdősebesség nélkül indítva pontszerűnek tekinthető testeket csúsztatunk le. Hol helyezkednek el azok a pontok, ahová a lecsúszó testek adott t idő alatt eljutnak? A súrlódási együttható a lejtők és a testek között μ.

(*6 pont*) *Galileo Galilei* (1564–1642) feladata nyomán

❄

Beküldési határidő: 2023. április 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS

(Volume 73. No. 3. March 2023)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 158): **K. 759.** Each member of a group of nine people knows exactly four others. (Acquaintances are mutual.) *a*) Is it possible that every pair of people have an acquaintance in common? *b*) Is it true that any pair of people either know each other directly or have an acquaintance in common? **K. 760.** Triangle $A(2;4)$, $B(6;4)$, $C(4;10)$ is reflected (in succession) in the line $x=a$, and then in the line $y=2$. *a*) What is the sum of the second coordinates of the vertices obtained by the second reflection? *b*) What is the value of a if the sum of the first coordinates of the vertices obtained by the second reflection is 36? **K. 761.** John is making new fractions out of the fraction 3/5 by writing the same digit in both the numerator and the denominator —either in front of or behind the existing digit—to obtain two-digit numbers. What is the largest difference between the numbers that can be formed in this way? **K/C. 762.** Each field of a 5×5 table is selected in some order, and a number is written in it. The number written in a particular field is the number of fields sharing a common edge with this field and already containing some numbers. (For example, the fields of the *table* may have been filled in in the following order: a5, b5, c5, d5, e5, e4, e3, e2, a4, a3, a2, a1, b1, c1, d1, e1, ...) Fill in the table in two other possible ways. Add the numbers in all the fields. Prove that the sum of the numbers will always be 40, no matter how the table is filled in according to the rule. **K/C. 763.** Two squares are drawn in a semicircle of unit radius such that they both lie along the diameter, they have another side along a common line, and each has a vertex on the arc of the semicircle (see the *figure*). Given that the radii drawn from the centre of the circle to the vertices lying on the circular arc are perpendicular, prove that the sum of the areas of two squares drawn in this way is constant.

New exercises for practice – competition C (see page 159): **Exercises up to grade 10: K/C. 762.** See the text at Exercises **K. K/C. 763.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1758.** Adam found a magic square in a magazine. (A magic square is a 3×3 table of numbers in which the sum of the numbers is the same in all rows, columns and diagonals, see the *figure*.) He filled in the square correctly, and then selected a row or column at random. He wrote down the three numbers in the order as they appeared left to right or top down. These are the numbers a, b, c in the equation $ax^2+bx+c=0$. Adam was happy to observe that the resulting equation had two distinct real roots, and calculated the sum of the squares of the roots. What numbers may he have got as a result? (Proposed by *O. Teleki,* Tököl) **C. 1759.** Two right-angled triangles ABC and EDC are drawn next to each other, as shown in the *figure*. In triangle ABC, $BC=3$, $CA=4$, and in triangle EDC, $DC=6$, $CE=8$. The circumscribed circle of triangle ABE intersects line DE again at P, and line DB at Q. Find the exact value of the ratio of the area of quadrilateral $ABDE$ to the area of pentagon $AEPQB$. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1760.** Find all positive integers for which the sum of the number and its factorial equals the cube of the number. **Exercises upwards of grade 11: C. 1761.** An equilateral triangle is cut with a line parallel to one of the sides. The circumscribed circles of the resulting triangle and trapezium are drawn. Is it possible that the ratio of the circumradius of the trapezium to that of the triangle is $\frac{\sqrt{3}}{3}$? (Proposed by *Zs. M. Tatár,* Esztergom) **C. 1762.** Is there a positive prime number p for which $\log_{p-2}(4p-11)=m$, where the parameter m denotes one of the digits of 2023? (Proposed by *B. Bíró,* Eger)

New exercises – competition B (see page 161): **B. 5302.** Either $+1$ or -1 is written in every field of an 8×8 table so that the sum of all entries is 0. The sum of the numbers is calculated for each row and column. What is the maximum possible number of positive sums out of the 16 sums obtained in this way? (*3 points*) (Based on the idea of *M. E. Gáspár,* Budapest) **B. 5303.** The isosceles right-angled triangle ABC has its right angle at C. D is an interior point of side BC such that the angle CDA is 75°. Given that triangle ADC has unit area, prove that $BD=2$. (*4 points*) (Proposed by *M. Hujter,* Budapest) **B. 5304.** *a*) Are there positive integers a and b such that $a+b\mid a^2+b^2$, but $a+b\nmid a^4+b^4$? *b*) Are there positive integers a and b such that $a+b\mid a^4+b^4$, but $a+b\nmid a^2+b^2$? (*4 points*) (Proposed by *B. Hujter,* Budapest) **B. 5305.** Let A_1 and A_2, respectively, denote the points lying closer to B and closer to C that divide side BC of a triangle ABC in a 1:2 ratio. Define points B_1 and B_2 on side CA, and points C_1 and C_2 on side AB in an analogous way. Prove that the centroid of triangle ABC lies on the line joining the common points of the circumscribed circles of triangles $A_1B_1C_1$ and $A_2B_2C_2$. (*4 points*) (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **B. 5306.** We have a weighted (six-sided) die and a weighted coin. On one side of the coin there is one dot, and on the other side there are two dots. The expected value of the number of dots appearing on top is the same for the die and the coin. Show that if the die and the coin are thrown simultaneously then the probability of getting more dots on the coin than on the die is greater than the probability of getting more dots on the die than on the coin. (*5 points*) (Proposed by *V. Vígh,* Sándorfalva) **B. 5307.** The area of an acute-angled triangle is T, its inradius is r, and its circumradius is R. Show that $\sqrt{3}T\leqslant (r+R)^2$. (*5 points*) (Proposed by *L. B. Simon,* Budapest) **B. 5308.** Let a_n denote the least common multiple of the positive integers $n+1, n+2, \dots, n+10$. Find the greatest real number λ for which $\lambda a_n\leqslant a_{n+1}$ is always true. (*6 points*) (Proposed by *P. P. Pach,* Budapest) **B. 5309.** Given the axis and two points of a parabola, construct its focus and directrix. (*6 points*) (Proposed by *G. Holló,* Budapest)

New problems – competition A (see page 162): **A. 848.** Let G be a planar graph, which is also bipartite. Is it always possible to assign a vertex to each face of the graph such that no two faces have the same vertex assigned to them? (Submitted by *Dávid Matolcsi,* Budapest) **A. 849.** For real number r let $f(r)$ denote the integer that is the closest to r (if the fractional part of r is $1/2$, let $f(r)$ be $r-1/2$). Let $a>b>c$ rational numbers such that for all integers n the following is true: $f(na)+f(nb)+f(nc)=n$. What can be the values of a, b and c? (Submitted by *Gábor Damásdi,* Budapest) **A. 850.** Prove that there exists a positive real number N such that for arbitrary real numbers $a,b>N$ it is possible to cover the perimeter of a rectangle with side lengths a and b using non-overlapping unit disks (the unit disks can be tangent to each other). (Submitted by *Benedek Váli,* Budapest)

Problems in Physics

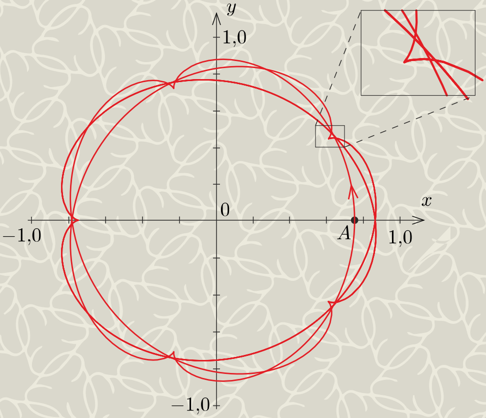
(see page 187)

M. 421. Draw lines on a piece of paper with a soft black graphite pencil. We can assume that the graphite is "smeared" in atomic layers, and that the distance between adjacent atomic layers is 0.34 nm. Determine the height of a line in terms of number of carbon atoms above each other.

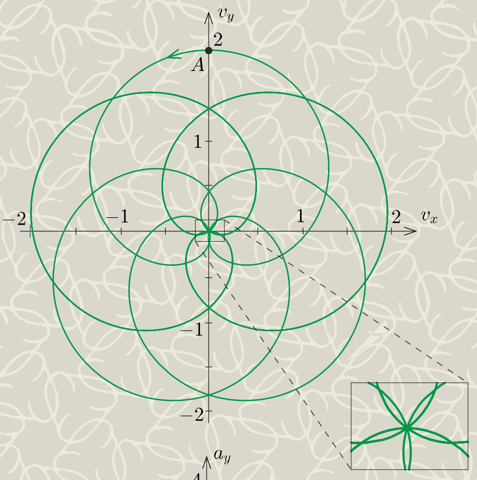
G. 809. We rub a small object with a light file in a horizontal plane. The line of action of the sum of the forces exerted by our two hands passes through the centre of the filed surface of the object, and this line of action makes an angle of 30° with the vertical. What is the coefficient of friction between the file and the object? **G. 810.** When a penalty kick is shot, the average speed of the ball can reach a speed of 150 km/h. How much time does the goalkeeper have to save the penalty if he is in the middle of the goal at the instant when the ball is kicked and the ball is moving towards one of the bottom corners of the goal? Is the following statement true: *"You can't defend a penalty kick well, they can only kick it badly."*? **G. 811.** Three rectangular blocks are pulled along a horizontal sheet, with a constant force F, as shown in the *figure.* The blocks are moving along a straight line all the time, and their instantaneous velocity is v_0. How does the tension in the threads connecting the blocks depend on the value of the coefficient of kinetic friction μ between the blocks and the sheet? **G. 812.** A body immersed into water can be kept in equilibrium with a force of 1.5 N, and with a force 1 N when it is immersed into glycerine. What is the volume and density of the body?

P. 5472. How long does it take the James Webb space telescope to orbit the Sun once? **P. 5473.** A projectile of mass $M=3$ kg is fired vertically at a speed of $v=50$ m/s, and it explodes into two parts after $t=3$ s. The piece with mass $m_1=1$ kg will land in $t_1=1$ s. *a*) How long after the explosion will the other piece hit the ground? *b*) If the first piece has landed 40 m from the firing position, how far apart will the two pieces be after the other piece has also landed? **P. 5474.** One end of a uniform density, thin stick of mass m and of length ℓ is fixed with a hinge on a horizontal surface. The other end is struck by a brief horizontal force of magnitude F, which is perpendicular to the rod. At this instant what is the acceleration of the centre of the stick, what is its angular acceleration and what is the force exerted by the hinge on the stick? **P. 5475.** A container with mass $M=32$ kg and volume $V=4\ \mathrm{dm}^3$ can move frictionlessly on a horizontal table. It is divided into two parts by a piston of mass $m=16$ kg. On the left side of the piston there is a mixture of gases of volume $V_0=1\ \mathrm{dm}^3$, at a pressure of $p_0=0.3$ MPa, and of adiabatic exponent $\kappa=1.5$. On the right side of the piston there is vacuum. What is the relative velocity at which the piston will hit the wall of the cylinder if the piston is released? Assume that the gas is in thermal equilibrium for all the time. **P. 5476.** Three alike metal plates of area A are placed parallel to each other. The distance between the plates is small compared to the size of the plates. *a*) What is the electric field strength between the plates if the charge of the plate on the left is $+Q$, the charge of the middle plate is $+2Q$ and that of the right plate is $+3Q$? *b*) What is the electric field strength between the plates if the charge of the plate on the left is $+Q$, the charge of the middle plate is $-2Q$ and that of the right plate is $+3Q$? **P. 5477.** An ideal battery of emf $U=24$ V, resistors of resistance values $R_1=500\ \Omega$ and $R_2=300\ \Omega$, a switch and an ideal transformer were used to construct the circuit shown in the *figure.* The primary coil of the transformer has a number of turns of $N_1=800$ and the secondary coil has $N_2=1000$ turns. The switch, which had been open for a long time, was once closed. What were the values of the current in the primary and secondary coils immediately after the switch was closed? **P. 5478.** A plano convex glass lens is bounded by water on its flat side and by air on its convex side. *a*) What is the ratio of the two focal lengths corresponding to the two sides of the lens? *b*) What will this ratio be if the two media at the sides of the lens are reversed? The lens is thin and has a small aperture angle. The refractive index of glass is 3/2 and that of water is 4/3. **P. 5479.** According to the classical electron model, the electron is a uniformly charged insulating spherical shell whose electrostatic energy is equal to the rest energy of the electron mc^2. Using the laws of classical mechanics, determine the kinetic energy that should be given to the electron if it is to collide with another initially stationary electron such that they "touch" each other? **P. 5480.** Through a given point P of a vertical plane, slopes with different angles of inclination are laid (perpendicularly to the plane), and point-like objects, which were released from rest, slide down the planes. What is the locus of points which are reached by the sliding objects in a given time of t? The coefficient of friction between the slopes and the objects is μ.

Görgőhengeres olajbogyóprés zúzókerekére tapadt olajbogyó

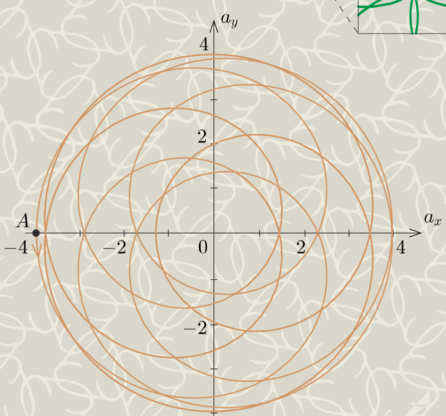


pályájának vízszintes vetülete,



a mozgás sebességhodográfja

és



gyorsuláshodográfja.

(Lásd a P. 5438. feladat megoldását.)

Fő szervező:

BOLYAI TÁRSULAT

BUDAPEST
BLAHA LUJZA TÉR
SZENTLÉLEK TÉR

DEBRECEN
NAGYKANIZSA
SZOMBATHELY
VESZPRÉM

2023. MÁRCIUS 12. VASÁRNAP

Matek az Utcán

Partnerek:

BME

LOGIFACES

DEBRECENI EGYETEM

MEDVE MATEK

minerva: TANULÁSI ALTERNATÍVA

VASARELY

MATEK OÁZIS
Matek könnyen, érthetően

Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium

Petőfi Kulturális Ügynökség
Nemzeti Együttműködési Alap
nka Nemzeti Kulturális Alap
Bethlen Gábor Alapkezelő Zrt.
Miniszterelnökség