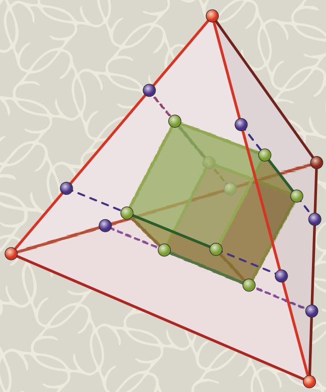
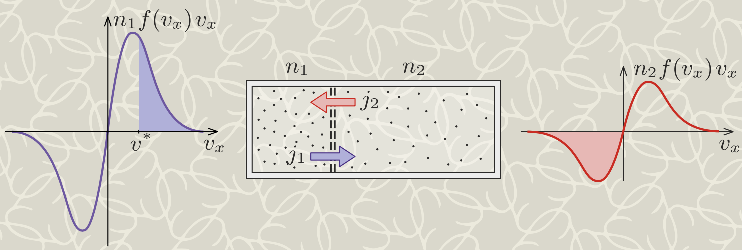
Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

B. 5300.



Eötvös-verseny, 2. feladat



Kürschák verseny | Eötvös-verseny

Egy matematikai diákolimpiai feladatról

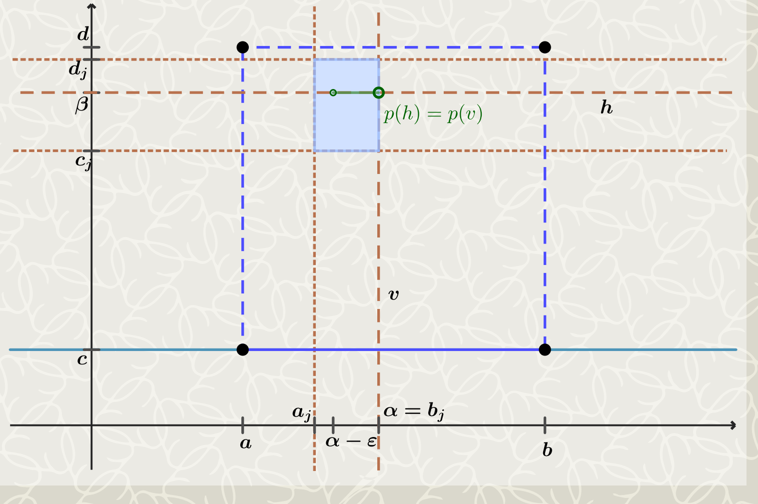
Rátz Tanár Úr Életműdíj

KöMaL

73. évfolyam
2. szám
2023.
február

Kürschák-verseny 2022

Hátul: Czanik Pál, Seres-Szabó Márton, Molnár-Szabó Vilmos, Simon László Bence, Németh Márton, Fleiner Zsigmond. Elöl: Jánosik Máté, Lovas Márton, Móricz Benjamin.



Ábra a verseny 1. feladatához

A KöMaL támogatói
Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő
Kulturális és Innovációs Minisztérium

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

73. évfolyam 2. szám — Budapest, 2023. február

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1100 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 9200 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Jelentés a 2022. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2022. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 7-én 14 órai kezdettel rendezte meg. A következő nyolc helyszínen írták meg a versenydolgozatot a résztvevők: Budapest, Debrecen, Kecskemét, Miskolc, Pécs, Szeged, Tatabánya és Zalaegerszeg.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: *Biró András, Frenkel Péter, Harangi Viktor, Kovács Benedek, Maga Péter* (titkár), *Pach Péter Pál* (elnök), *Tóth Géza.* A bizottság a következő feladatokat tűzte ki:

1. *Egy négyzetet felbontottunk* 2022 *téglalapra (úgy, hogy semelyik két téglalapnak nincs közös belső pontja). Tekintsük az összes téglalap összes oldalegyenesét. Maximálisan hány különböző egyenest kaphatunk?*

2. *Tegyük fel, hogy a* 4*-gyel osztva* 3 *maradékot adó p, q prímszámokra az $x^2 - pqy^2 = 1$ egyenletnek van pozitív egész x, y megoldása. Igazoljuk, hogy a $|px^2 - qy^2| = 1$ egyenletnek is van pozitív egész x, y megoldása.*

3. *Legyen n pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha az $a_{i,j}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ valós számokra $a_{i,j} + a_{j,i} = 0$ minden i, j esetén (speciálisan $a_{i,i} = 0$ minden i-re), akkor fennáll az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

A bizottság november 24-ei ülésén a következő jelentést fogadta el:

„A verseny minden helyszínen rendben zajlott le: a versenyre 115-en regisztráltak, akiktől végül összesen 93 dolgozat érkezett be.

Az idei versenyen az első feladatra közel 40 lényegében teljes megoldás érkezett, a második feladatot 8-an, a harmadik feladatot pedig 7-en oldották meg helyesen vagy lényegében helyesen.

Két versenyző helyesen oldotta meg az első két feladatot, és apró hiányosságtól eltekintve a harmadik feladatra is helyes megoldást adott. Ezért

I. díjban és 55 000 Ft pénzjutalomban részesül

Jánosik Máté, a győri Révai Miklós Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Árki Tamás, Nagy Róbert* és *Pósa Lajos*),

Lovas Márton, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Simon János* és *Szűcs Gábor*).

Egy versenyző helyesen oldotta meg a harmadik feladatot és hiányosságoktól eltekintve megoldotta az első és második feladatokat. Ezért a teljesítményért

II. díjban és 40 000 Ft pénzjutalomban részesül

Németh Márton Tamás, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Erdős Gábor* és *Dobos Sándor*).

Dicséretben részesülnek két feladat teljes vagy lényegében teljes megoldásáért

Chrobák Gergő, a Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai *Gaál Istvánné* és *Balázs Tivadar*),

Csonka Illés, a pécsi Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanára *Baráti Ákos*),

Czanik Pál, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 10. osztályos tanulója (tanárai *Lenger Dániel* és *Kocsis Szilveszter*),

Fleiner Zsigmond, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Hujter Bálint* és *Gyenes Zoltán*),

Fülöp Csilla, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Schultz János* és *Mike János*),

Molnár-Szabó Vilmos, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Dobos Sándor, Ádám Réka, Fazakas Tünde* és *Fey Dávid*),

Móricz Benjamin, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Ádám Réka, Dobos Sándor, Fazakas Tünde* és *Szűcs Gábor*),

Seres-Szabó Márton, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Dobos Sándor, Fazakas Tünde* és *Hujter Bálint*),

Simon László Bence, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai *Gyenes Zoltán, Kiss Géza, Hujter Bálint, Surányi László, Mazug Péter* és *Sokvári Olivér*).

A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző, felkészítő tanár és a lebonyolításban közreműködő kolléga munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva gratulál."

A 2022. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása

1. *Egy négyzetet felbontottunk* 2022 *téglalapra (úgy, hogy semelyik két téglalapnak nincs közös belső pontja). Tekintsük az összes téglalap összes oldalegyenesét. Maximálisan hány különböző egyenest kaphatunk?*

Megoldás. A négyzetet $n-1$ darab, az egyik oldalával párhuzamos egyenessel n téglalapra oszthatjuk. A négy eredeti oldalegyenessel együtt ez összesen $(n-1)+$ $+4=n+3$ egyenest jelent.

Most négy bizonyítást adunk arra, hogy $(n+3)$-nál több különböző egyenest nem kaphatunk, tehát a feladat kérdésére a válasz 2025.

1. bizonyítás: Legyen a négyzet $N=[a,b]\times[c,d]$, a kis téglalapok $T_i=[a_i,b_i]\times$ $\times[c_i,d_i]$, $i=1,\dots,n$. Be kell látnunk, hogy

$$\big|\{a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\}\big|+\big|\{c_1,\dots,c_n,d_1,\dots,d_n\}\big|\leqslant n+3.$$

Legyen V a vízszintes oldalegyenesek halmaza, kivéve az $(y=d)$ egyenest, ami N felső oldalegyenese, és legyen F a függőleges oldalegyenesek halmaza, kivéve az $(x=a)$ és $(x=b)$ egyeneseket, amelyek N függőleges oldalegyenesei. Mivel $V\cup F$ nem tartalmazza N három oldalegyenesét, elég belátnunk, hogy $|V\cup F|\leqslant n$.

Tetszőleges $\ell\in V\cup F$ egyenesre definiáljuk a $p(\ell)$ pontot a következő módon.

Ha ℓ vízszintes, akkor legyen $p(\ell)$ a $T_1,\dots,T_n$ kis téglalapok ℓ-en levő csúcsai közül a leginkább balra lévő. Ha ℓ függőleges, akkor pedig a legalsó. Könnyen látható, hogy minden $p(\ell)$ pont egy kis téglalap bal alsó sarka, ezért elég belátni, hogy a p leképezés injektív a $V\cup F$ halmazon.

Az világos, hogy ha ℓ és ℓ' különbözők és mindketten vízszintesek, vagy mindketten függőlegesek, akkor $p(\ell)\neq p(\ell')$.

Tegyük most fel, hogy $(y=\beta)=h\in V$, $(x=\alpha)=v\in F$ és $p(h)=p(v)=$ $=(\alpha,\beta)$. Mivel F nem tartalmazza az $(x=a)$ egyenest, $\alpha>a$. Ha $\beta=c$, akkor $p(h)=(a,c)\neq p(v)$, ezért $\beta>c$. Tehát ha $\varepsilon>0$ elég kicsi, akkor az $(\alpha-\varepsilon,\alpha)\times\{\beta\}$ nyílt szakaszt tartalmazza egy $T_j=[a_j,b_j]\times[c_j,d_j]$ kis téglalap a belsejében. De ekkor $b_j=\alpha$ és $c_j<\beta<d_j$, tehát a (b_j,c_j) csúcs v-n van és $c_j<\beta$, ami ellentmond $p(v)$ választásának.

Ezzel beláttuk, hogy legfeljebb $n+3$ oldalegyenes van.

2. bizonyítás: Tegyük fel, hogy van olyan e egyenes, amely metszi az N négyzet belsejét és pontosan egy T kis téglalap alsó oldalegyenese. Ekkor módosíthatjuk úgy a felbontást, hogy a kis téglalapok száma és az oldalegyenesek száma is pontosan eggyel csökken: az e egyenes másik, alsó oldalán lévő, T-vel szomszédos téglalapokat meghosszabbítjuk e-n keresztül úgy, hogy T megszűnik. Hasonlóan járhatunk el, ha van olyan e egyenes, amely metszi N belsejét és pontosan egy T kis téglalap felső, jobb oldali vagy bal oldali oldalegyenese. Hajtsuk végre ezt a műveletet, amíg lehetséges, tegyük fel, hogy a kapott felosztásban m kis téglalap van. Elég a kapott felosztásra belátni az állítást, hogy az oldalegyenesek száma legfeljebb $m+3$. Legyen O a kis téglalapok oldalegyeneseinek a halmaza, $O'\subset O$ pedig az olyan oldalegyenesek halmaza, amelyek N-nek nem oldalegyenesei. Tudjuk, hogy most minden O'-beli oldalegyenes legalább négy kis téglalaphoz tartozik, ugyanakkor egy kis téglalaphoz legfeljebb négy O'-beli oldalegyenes tartozik. Ebből azt kapjuk, hogy $|O'|\leqslant m$. Ráadásul azokhoz a téglalapokhoz, amelyeknek van N-nel közös oldalegyenese, legfeljebb három O'-beli oldalegyenes tartozik. Ezért $|O'|\leqslant m-1$. Mivel $|O|=|O'|+4$, $|O|\leqslant m+3$, ezzel beláttuk az állítást.

3. bizonyítás: A következő állítást igazoljuk, n-re vonatkozó indukcióval: Egy T téglalapot n kisebb téglalapra bontva a különböző oldalegyenesek száma legfeljebb $n+3$. Az $n=1$ eset triviális, ilyenkor négy oldalegyenes lesz. Tegyük fel, hogy $n>1$ és $(n-1)$-ig már beláttuk az állítást. A vízszintes oldalegyenesek közül a legalsó T alsó oldala, legyen e alulról a második. Ha az e egyenes T felső oldala, akkor

T-t $n-1$ darab függőleges egyenessel bontottuk fel, ilyenkor éppen $n+3$ különböző oldalegyenes van. Tegyük fel, hogy e nem T felső oldala. Mivel e egy oldalegyenes volt, van legalább egy olyan kis téglalap, amelynek e a felső oldala. Tegyük fel, hogy k ilyen kis téglalap van, nevezzük ezeket *alacsony* téglalapoknak.

Vágjuk el T-t és az e-t metsző kis téglalapokat az e egyenessel. Legyen a T téglalap e fölötti része T_1. A T_1 téglalap $n-k$ téglalapra van bontva, hiszen a k alacsony téglalap kivételével mindegyiknek van e fölötti része. Az indukciós feltevés alapján ez a felbontás legfeljebb $n-k+3$ oldalegyenest határoz meg. Ezek az oldalegyenesek az eredeti felbontásban is szerepelnek oldalegyenesként. Az eredeti felbontás további oldalegyenese a T alsó oldala, és még olyan oldalegyenesek, amiket két alacsony téglalap közös, függőleges oldala határoz meg. Ez utóbbiból legfeljebb $k-1$ darab lehet. Tehát T felbontása legfeljebb

$$n-k+3+1+k-1=n+3$$

oldalegyenest határoz meg.

4. bizonyítás: Tekintsük az N négyzet egy olyan darabolását n darab kis téglalapra, ahol a különböző oldalegyenesek száma maximális. Nevezzük a kis téglalapok csúcsait röviden csúcsoknak. Ezeket három osztályba sorolhatjuk: *eredeti csúcsok,* vagyis N négy csúcsa, *szélső csúcsok,* amelyek N oldalain, de nem a csúcsaiban vannak és *belső csúcsok,* amelyek N belsejében vannak. A kis téglalapok oldalainak uniója legyen S. A két csúcs által meghatározott $s\subset S$ szakaszokat *oldalszakasznak* hívjuk.

Tegyük fel, hogy egy P belső csúcsból mind a négy irányba indul oldalszakasz. Ekkor a P pontból felfelé induló maximális (felfelé nem bővíthető) oldalszakaszt kellően kicsi távolsággal jobbra tolva elérhető, hogy ez az oldalszakasz az eddigiektől eltérő függőleges oldalegyenest határozzon meg. Tehát az oldalegyenesek száma nőtt, miközben a kis téglalapok száma megmaradt, ez ellentmond annak, hogy a különböző oldalegyenesek száma maximális volt.

Vagyis minden belső csúcsból legfeljebb három irányban indul oldalszakasz. Mivel minden belső csúcsra illeszkedik legalább két kis téglalap, minden belső csúcsból pontosan három irányban indul ki oldalszakasz, és ugyanez természetesen a szélső csúcsokra is igaz. Tekintsük most a felosztásban szereplő maximális (nem bővíthető) oldalszakaszokat, legyen ezek száma m. Ezek közül négy oldalszakasz az eredeti négyzet oldala, a többi oldalszakasznak pedig a két végpontja belső vagy szélső csúcs. Továbbá minden belső vagy szélső csúcs pontosan egy maximális oldalszakasznak a végpontja, így a belső és szélső csúcsok száma összesen $2(m-4)$.

Most számoljuk össze az n darab téglalap belső szögeinek összegét kétféleképpen. Egyrészt minden téglalapnak 4 darab derékszöge van, ez összesen $n\cdot 360^\circ$. Másrészt a téglalapok derékszögei leszámlálhatók csúcsonként: N csúcsainál egyenként 90°, a belső és szélső csúcsoknál egyenként 180° az ottani derékszögek összege, azaz a teljes összeg

$$4\cdot 90^\circ+2(m-4)\cdot 180^\circ=(m-3)\cdot 360^\circ.$$

Ezek alapján tehát $n=m-3$, azaz a különböző oldalegyenesek száma legfeljebb $m=n+3$.

2. *Tegyük fel, hogy a 4-gyel osztva 3 maradékot adó p, q prímszámokra az $x^2 - pqy^2 = 1$ egyenletnek van pozitív egész x, y megoldása. Igazoljuk, hogy a $|px^2 - qy^2| = 1$ egyenletnek is van pozitív egész x, y megoldása.*

Megoldás. Legyenek x_0, y_0 olyan pozitív egészek, melyekre

$$x_0^2 - pqy_0^2 = 1,$$

és x_0 minimális azzal a tulajdonsággal, hogy $x^2 - pqy^2 = 1$ megoldható ezzel az x_0-lal és egy $y > 0$ egésszel. Mivel a pq szám 4-es maradéka 1, ezért y_0 nem lehet páratlan, hiszen az $x_0^2 = pqy_0^2 + 1$ négyzetszám 4-gyel osztva nem adhat 2 maradékot. Vagyis $2 \mid y_0$, azaz az

$$\frac{x_0 - 1}{2} \cdot \frac{x_0 + 1}{2} = pq\left(\frac{y_0}{2}\right)^2. \tag{1}$$

egyenletben szereplő összes tényező egész szám. Tehát p és q is osztja a bal oldal egyik tényezőjét. Először megmutatjuk, hogy egyik tényező sem lehet osztható pq-val.

Ha ugyanis (1)-ben pq osztaná valamelyik tényezőt, akkor vagy

$$\frac{x_0 - 1}{2pq} \cdot \frac{x_0 + 1}{2} = \left(\frac{y_0}{2}\right)^2,$$

vagy

$$\frac{x_0 - 1}{2} \cdot \frac{x_0 + 1}{2pq} = \left(\frac{y_0}{2}\right)^2$$

a jobb oldalon szereplő négyzetszám két egész szám szorzatára bontását adná. Mivel a két tényező mindkét esetben relatív prím, így külön-külön is négyzetszámok, azaz léteznek olyan a, b pozitív egész számok, melyekre

$$\frac{x_0 - 1}{2pq} = a^2, \qquad \frac{x_0 + 1}{2} = b^2, \tag{2}$$

vagy

$$\frac{x_0 - 1}{2} = a^2, \qquad \frac{x_0 + 1}{2pq} = b^2. \tag{3}$$

Az első esetben $b^2 - pqa^2 = 1$, de b és a is pozitív egészek, ez tehát ellentmondana x_0 minimalitásának, hiszen (2) miatt $b < x_0$. Ha pedig (3) teljesülne, akkor

$$a^2 - pqb^2 = -1$$

alapján az $a^2 \equiv -1 \pmod p$ kongruencia megoldható lenne, azonban $p \equiv -1 \pmod 4$ miatt ez nem lehetséges. (Ugyanis a kis Fermat-tétel alapján $p \nmid a$ esetén

$$\left(a^2\right)^{(p-1)/2} \equiv a^{p-1} \equiv 1 \not\equiv -1 \equiv (-1)^{(p-1)/2} \pmod p.)$$

Tehát (1)-ben pq nem osztja egyik tényezőt sem, így vagy

$$\frac{x_0 - 1}{2p} \cdot \frac{x_0 + 1}{2q} = \left(\frac{y_0}{2}\right)^2,$$

vagy

$$\frac{x_0-1}{2q}\cdot\frac{x_0+1}{2p}=\left(\frac{y_0}{2}\right)^2$$

a jobb oldalon szereplő négyzetszám két, egymáshoz relatív prím szorzatára bontását adja. Ekkor a korábbiakhoz hasonlóan léteznek a, b pozitív egészek, melyekre vagy

$$\frac{x_0-1}{2p}=a^2,\quad \frac{x_0+1}{2q}=b^2,$$

vagy

$$\frac{x_0-1}{2q}=a^2,\quad \frac{x_0+1}{2p}=b^2,$$

azaz $qb^2-pa^2=1$ vagy $pb^2-qa^2=1$, és készen vagyunk, mert $x=a$, $y=b$ vagy $x=b$, $y=a$ a $|px^2-qy^2|=1$ egyenlet pozitív egész megoldását adja.

3. *Legyen n pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha az $a_{i,j}$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$ valós számokra $a_{i,j}+a_{j,i}=0$ minden i, j esetén (speciálisan $a_{i,i}=0$ minden i-re), akkor fennáll az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}^2.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Megoldás. Először $a_{i,j}$ jelöljön tetszőleges valós számokat, és tekintsük a következő négyzetösszeget:

$$\sum_{i,j,i',j'}\left(a_{i,j}+a_{i',j'}-a_{i,j'}-a_{i',j}\right)^2\geqslant 0.$$

Ha a négyzetre emelést kifejtjük és tagonként szummázunk, akkor a következőképpen egyszerűsödnek az összegek. Egyrészt,

$$\sum_{i,j,i',j'}a_{i,j}^2=n^2\sum_{i,j}a_{i,j}^2.$$

Pontosan ugyanezt kapjuk a többi négyzetes tag esetén is:

$$\sum_{i,j,i',j'}a_{i',j'}^2=\sum_{i,j,i',j'}a_{i,j'}^2=\sum_{i,j,i',j'}a_{i',j}^2=n^2\sum_{i,j}a_{i,j}^2.$$

A kettős szorzatoknál háromféle eredményt kapunk: két esetben (amikor az első indexek megegyeznek)

$$-\sum_{i,j,i',j'}2a_{i,j}a_{i,j'}=-\sum_{i,j,i',j'}2a_{i',j}a_{i',j'}=-2n\sum_{i}\left(\sum_{j}a_{i,j}\right)^2;$$

két esetben (amikor a második indexek megegyeznek)

$$-\sum_{i,j,i',j'} 2a_{i,j}a_{i',j} = -\sum_{i,j,i',j'} 2a_{i,j'}a_{i',j'} = -2n\sum_j\left(\sum_i a_{i,j}\right)^2;$$

illetve a maradék két esetben

$$\sum_{i,j,i',j'} 2a_{i,j}a_{i',j'} = \sum_{i,j,i',j'} 2a_{i',j}a_{i,j'} = 2\left(\sum_{i,j} a_{i,j}\right)^2.$$

Ezeket összeadva és $4n^2$-tel osztva kapjuk a következő általános egyenlőtlenséget:

$$\sum_{i,j} a_{i,j}^2 - \frac{1}{n}\sum_i\left(\sum_j a_{i,j}\right)^2 - \frac{1}{n}\sum_j\left(\sum_i a_{i,j}\right)^2 + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i,j} a_{i,j}\right)^2 \geqslant 0.$$

Felhasználva, hogy esetünkben $a_{i,j} = -a_{j,i}$, az utolsó tag eltűnik, a középső két tag pedig megegyezik, és a kívánt egyenlőtlenség azonnal adódik.

Mikor áll fenn egyenlőség? Ehhez a (megoldás elején szereplő) négyzetösszeg minden tagjának nullának kell lennie, azaz

$$a_{i,j} + a_{i',j'} = a_{i,j'} + a_{i',j}$$

minden i, j, i', j' esetén.

Legyen $b_r = a_{r,1}$. Ekkor persze $a_{1,r} = -b_r$. A fenti egyenlőséget $i' = j' = 1$ esetben használva kapjuk, hogy

$$a_{i,j} + \underbrace{b_1}_{=0} = b_i - b_j.$$

Tehát ha egyenlőség áll fenn, akkor $a_{i,j}$ felírható $b_i - b_j$ alakban valamilyen $b_1, \ldots, b_n$ valós számokra. Megfordítva, könnyen látható, hogy ilyen alakú $a_{i,j}$ számokra a négyzetösszeg minden tagja 0, és így valóban egyenlőség van.

2. megoldás: Vegyük észre, hogy tetszőleges i, j, k indexek esetén

$$0 \leqslant (a_{i,j} + a_{j,k} + a_{k,i})^2 = a_{i,j}^2 + a_{j,k}^2 + a_{k,i}^2 + \underbrace{2(a_{i,j}a_{j,k} + a_{k,i}a_{i,j} + a_{j,k}a_{k,i})}_{=-2(a_{j,i}a_{j,k}+a_{i,k}a_{i,j}+a_{k,j}a_{k,i})},$$

ahol felhasználtuk, hogy a két index cseréje előjelváltást eredményez. Most adjuk össze ezeket az egyenlőtlenségeket minden olyan i, j, k hármasra, mely páronként különböző indexekből áll.

Könnyen látható, hogy minden $i \neq j$ esetén $3(n-2)$-szer kapjuk meg az $a_{i,j}^2$ tagot. Ami a kettős szorzatokat illeti, minden $a_{i,j}a_{i,k}$ alakú tag együtthatója -6 lesz. Innen 3-mal osztás után egyszerű átalakításokkal kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. Egyenlőség pedig akkor áll fenn, ha $a_{i,j} + a_{j,k} + a_{k,i} = 0$ minden indexhármasra. Ebből $k = 1$ mellett adódik, hogy $a_{i,j} = -a_{1,i} - a_{j,1} = a_{i,1} - a_{j,1}$, vagyis ekkor a számok felírhatók $b_i - b_j$ alakban, amely esetben pedig valóban mindig egyenlőség áll.

Pach Péter Pál

Egy matematikai diákolimpiai feladatról*

A 60. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 5. feladata ([1]) így szólt:

Bath Bankja érméket bocsát ki, melyeknek egyik oldalán H*, másik oldalán* T *betű látható. Harrynek n ilyen érméje van, amelyek előtte balról jobbra, egy sorban vannak elrendezve. Harry ismételten végrehajtja a következő műveletet: ha pontosan $k > 0$ olyan érme van, amin* H *van felül, akkor megfordítja a balról k-adik érmét; máskülönben minden érmén* T *van felül, és ekkor Harry megáll. Például $n = 3$ esetén a* THT *sorozatból indulva* THT $\to$ HHT $\to$ HTT $\to$ TTT *a lépések sorozata, ami három lépés után megáll.*

(*a*) *Bizonyítsuk be, hogy bármi legyen is a kiindulási sorozat, Harry véges sok lépés után megáll.*

(*b*) *Minden C kiindulási sorozatra jelölje $L(C)$ azt a lépésszámot, ahány lépés után Harry megáll. Például $L(\mathrm{THT}) = 3$ és $L(\mathrm{TTT}) = 0$. Határozzuk meg $L(C)$ átlagos értékét, amint C végigfut a 2^n lehetséges kiinduló sorozaton.*

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 2019. novemberi számában megjelent a feladat egy lehetséges megoldása ([2]). Ebben a cikkben megadunk egy másik (talán egyszerűbb) megoldást és továbbgondoljuk a feladatot.

Az (*a*) részt bizonyítsuk teljes indukcióval. $n = 1, 2$ érme esetén az állítás könnyen ellenőrizhető a kevés lehetséges eset végigvizsgálásával. Tegyük fel, hogy n-ig igaz az állítás, tekintsük az $n + 1$ érme esetét. Három esetre bontjuk a feladatot.

1. Ha az utolsó, $(n + 1)$-edik érmén T látható (ez az esetek felében fordul elő), akkor azt az érmét sosem fogjuk megfordítani, hiszen ahhoz az kellene, hogy az összes érmén a H legyen látható. Így az első n érmére alkalmazva az indukciós feltevést beláttuk ezt az esetet.
2. Ha az utolsó érmén H, az elsőn pedig T van. Ekkor, ha csak az utolsó érmén van H, (a művelet szerint) sorrendben az elsőtől az n-edik érmet megfordítva mindenütt H lesz felül, és végül az $(n + 1)$-ediktől az elsőig haladva mindegyiket átfordítjuk T-re. Egyébként a megadott művelet szerint mindaddig, amíg az első érmén T és az $(n + 1)$-edik érmén H van csak a másodiktól az n-edik érméket forgathatjuk, méghozzá pontosan úgy, mintha az első és az $(n + 1)$-edik elem ott sem lenne. Alkalmazva az indukciós feltevést $(n - 1)$-re elérhetjük, hogy a másodiktól az n-edik érméig mindegyiken T látsszon. Ezután a már leírtak szerint járunk el, és végül mindegyik érmét átfordítjuk T-re, amivel beláttuk ezt az esetet is.

* Ezt a kutatást a TKP2021-NVA-09 projekt támogatta. A TKP2021-NVA-09 számú projekt a Magyar Innovációs és Technológiai Minisztérium támogatásával valósult meg a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból, a TKP2021-NVA támogatási konstrukció keretében.

3. Ha utolsó és az első érmén H van, akkor a megadott művelet szerint mindaddig, amíg az első érmén H van csak a másodiktól az $(n+1)$-edik érméket forgathatjuk, méghozzá pontosan úgy, mintha az első elem ott sem lenne. Alkalmazva az indukciós feltevést n-re elérhetjük, hogy a másodiktól az $(n+1)$-edik érméig mindegyiken T látsszon, majd az első érmét megfordítva befejeztük az indukciós bizonyítást.

Az a jó ebben a bizonyításban, hogy a (b) részre is ad egy rekurzív képletet. Jelöljük n elem esetén A_n-nel az átlagos lépésszámot. A fenti 1. pont A_{n+1}-hez $\frac{1}{2}A_n$-el járul hozzá, hiszen az esetek felében fordul az elő. Hasonlóan, a 2. pont $\frac{1}{4}(A_{n-1}+2n+1)$-et ad A_{n+1}-hez, hiszen az az esetek negyedrészében fordul elő, első lépésként a „középső" $n-1$ elemet kell T-re fordítani, és utána további $2n+1$ lépés kell a feladat befejezéséhez. A 3. pont egy kicsit trükkösebb: az is az esetek negyedrészében fordul elő, de ott a második elemtől kell mindent T-re fordítani úgy, hogy tudjuk, hogy az utolsó elem H. Az összes lehetséges esetben szükséges lépések száma ebben az esetben $2^nA_n-2^{n-1}A_{n-1}$, hiszen „megszorítások" nélkül lenne 2^nA_n lépés, de ebből ki kell vonni azon lépések számát $(2^{n-1}A_{n-1})$, amikor az utolsó elem T. Ez alapján a 3. pont hozzájárulása A_{n+1}-hez

$$\frac{1}{4}\big((2^nA_n-2^{n-1}A_{n-1})/2^{n-1}+1\big).$$

Így a következő rekurzív képletet kapjuk:

$$A_{n+1}=\frac{1}{2}A_n+\frac{1}{4}(A_{n-1}+2n+1)+\frac{1}{4}\left(\frac{2^nA_n-2^{n-1}A_{n-1}}{2^{n-1}}+1\right)=A_n+\frac{n+1}{2}.$$

Kiindulva akár az $A_0=0$ értékből kapjuk, hogy

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2}=\frac{n(n+1)}{4},$$

amivel a feladatot megoldottuk.

Bár a (b) rész egy érdekes kérdést vet fel, mégis természetesebb lenne azt kérdezni, hogy maximum hány lépésen belül fejeződik be a művelet. Persze attól, hogy ez természetesebb kérdés, nem lesz feltétlenül egyszerűbb, mint ahogy ebben az esetben sem az. Egy felső becslést könnyen tudunk adni a fentiek alapján: a 2. pontbeli eljáráshoz szükséges a legtöbb „extra" lépés, miután befejeztük a többi elem megfelelő oldalra fordítását. Eszerint ha M_n-nel jelöljük az n elem esetén szükséges lépések maximális számát, akkor kapjuk az $M_{n+1}\leqslant M_n+(2n+1)$ egyenlőtlenséget, amiből a fentiekhez hasonlóan $M_0=0$-ból kiindulva nyerhetjük az $M_n\leqslant n^2$ becslést. De ha akár csak $n=2$-re ellenőrizzük a négy lehetséges esetet, már ott sem érhető el a 4 lépéses maximum. Márcsak azért sem, mert a fentiek alapján mindenképpen véget ér az eljárás, így az eljárás során érmék állásai nem ismétlődhetnek, és a 4 lehetséges állás között maximum 3 átmenet/lépés lehet. Elméleti úton is viszonylag könnyen belátható, hogy a felső becslés nem lehet szigorú $n\geqslant 2$-re, hiszen a 2. pont csak akkor működik, ha az utolsó elem H, a rekurzió miatt az előtte lévő elemnek is H-nak kell lennie, és így tovább, vagyis az összes elem H lenne, azzal viszont n lépésben végez az eljárás.

Ahogy a jól ismert mondás tartja: „a probléma félig meg van oldva, ha **tudjuk,** hogy mi a probléma". Próbáljunk meg tehát sejtést szerezni a maximális lépésszámra. Leghatékonyabb, ha erre programot írunk, hiszen már $n = 5$ érmére is elég hosszadalmas végigszámolni a 32 esetet. A következő eredményt kapjuk:

n	max	példa	n	max	példa
1	1	H	9	45	TTTTHHHHH
2	3	TH	10	55	TTTTTHHHHH
3	6	THH	11	66	TTTTTHHHHHH
4	10	TTHH	12	78	TTTTTTHHHHHH
5	15	TTHHH	13	91	TTTTTTHHHHHHH
6	21	TTTHHH	14	105	TTTTTTTHHHHHHH
7	28	TTTHHHH	15	120	TTTTTTTHHHHHHHH
8	36	TTTTHHHH	16	136	TTTTTTTTHHHHHHHH

A minta könnyen felismerhető: az első $[n/2]$ ($n/2$ egészrész) érmén T van felül, a többin H. A maximális lépésszámot sem nehéz kitalálni: az egymás utáni számok különbségei a természetes számokat adják, ami alapján

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$$

lenne. Ez a probléma, ezt kellene belátni.

Nézzük meg pontosan, hogyan is működik az eljárás. Minden érme megfordításával eggyel nő vagy csökken a H-k száma, így a következő lépésben az eggyel jobbra (nőtt) vagy eggyel balra (csökkent) levő érmét fogjuk megfordítani. Vagyis amíg T-ket találunk, addig H-kat hagyunk magunk mögött és jobbra lépünk, akkor „fordulunk vissza", amikor H-t találunk. Hasonlóan: amíg H-kat találunk, addig T-ket hagyunk magunk mögött és balra lépünk, akkor fordulunk vissza, amikor T-t találunk (vagy megállunk, ha nem találunk T-t). Ebből elég világos módon kirajzolódik egy balra-jobbra (vagy jobbra-balra) söprés jellegű művelet, amelyik minden irányban mindig legalább eggyel túllép az addig végigsöpört területen és jobbra haladva H-kat, balra haladva T-ket hagy maga mögött. Mennyi lehet akkor a maximális lépésszám? Visszafelé haladva az utolsó maximum n lépés hagyhat T-t maga mögött balra lépve, előtte $n-1$ lépés jobbra, azelőtt $n-2$ lépés balra stb. Ezzel beláttuk, hogy a maximális lépésszám legfeljebb

$$n + (n-1) + \ldots + 1 = n(n+1)/2$$

lehet. Ahhoz, hogy ez a maximális lépésszám előállhasson az kell, hogy

1. ténylegesen minden irányú söprésnél (kivéve az utolsó) legyen egy „visszafordító érme" és hogy
2. minden visszafordulásnál pontosan eggyel több lépést tegyünk meg, mint az előző, ellentétes söprési iránynál.

Balra menve a T fordít vissza, jobbra menve pedig a H, és a balra illetve jobbra söprések száma legfeljebb eggyel térhet el egymástól. Ez megmagyarázza a fenti mintákat is, amelyekben a bal oldalon vannak a T-k, a jobb oldalon a H-k, és ezek száma legfeljebb eggyel tér el. Direkt módon is könnyen ellenőrizhető, hogy ezek a minták jó példát, sőt, minden n-re az egyetlen lehetséges példát adják a maximális lépésszámra.

Érdekes, hogy a maximális és minimális (0) lépésszám átlaga éppen az átlagos lépésszám. Nézzük meg, hogy hány példa van a lehetséges lépésszámokra. Ha már úgyis programot írtunk a problémára, akkor ez sem okoz semmi nehézséget:

n	db lépésszámonként $\big([0,\ldots,n(n+1)/2]\big)$
1	1 1
2	1 1 1 1
3	1 1 1 2 1 1 1
4	1 1 1 2 2 2 2 2 1 1 1
5	1 1 1 2 2 3 3 3 3 3 3 2 2 1 1 1
6	1 1 1 2 2 3 4 4 4 5 5 5 5 4 4 4 3 2 2 1 1 1
7	1 1 1 2 2 3 4 5 5 6 7 7 8 8 8 8 8 7 7 6 5 5 4 3 2 2 1 1 1
8	1 1 1 2 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ... 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 2 1 1 1
9	1 1 1 2 2 3 4 5 6 8 9 10 12 13 15 ... 15 13 12 10 9 8 6 5 4 3 2 2 1 1 1
10	1 1 1 2 2 3 4 5 6 8 10 11 13 15 17 ... 17 15 13 11 10 8 6 5 4 3 2 2 1 1 1

Ez alapján úgy tűnik, hogy a darabszámok szimmetrikusak az $n(n+1)/4$ átlagos lépésszámra, ami megmagyarázná az átlagot a maximum alapján, vagy éppen fordítva, a maximumot az átlag alapján. Az a kérdés, hogy be tudjuk-e látni ezt a szimmetriát.

Legegyszerűbb lenne párbaállítani az érmék H$-$T sorozatait úgy, hogy egy k lépéses mintához egy $n(n+1)/2-k$ lépéses minta tartozzon. Eszerint például $n=7$ esetén a TTTHHHH maximális lépésszámú mintához a TTTTTTT minimális lépésszámú minta tartozna. Hát, első ránézésre nagyon nem világos, hogy mi alapján rendelnénk egymáshoz pont ezt a két mintát. Közelítsük meg a problémát egy másik oldalról. Mik ezek a fenti táblázatban lévő számsorozatok? Szerencsére az interneten van segítség: az On-Line Encyclopedia of Integer Sequences ([3]). Abba beírva/bemásolva a hosszabb számsorozatokat (a rövidebbek túl sokféleképpen magyarázhatóak), a következő választ kapjuk például $n=10$-re: *A034140: Number of partitions of k into distinct parts from* $[1,2,3,\ldots,10]$ ([4]). (Az eredeti szövegben levő n-et k-ra cseréltük, hogy ne keveredjen a cikkben használt jelöléssel, a k a mi esetünkben a lépésszámot jelenti, tehát 0-tól $n(n+1)/2$-ig mehet.) Vagyis: hányféleképpen bontható a k szám az $1,\ldots,10$ számok ismétlés nélküli összegére. Hogy ennek mi köze a mi problémánkhoz? Egy kis utánagondolással ez világossá válik. A fenti jobbra-balra söprésnél a söprések hossza szigorúan növekszik (maximum n lehet), tehát különböző söpréshosszakat kapunk és azok összege adja ki a teljes lépésszámot. Vagyis a mi problémánk lefordítható a lépésszám különböző számok összegére bontásának feladatára. De a dolog fordítva is működik: egy adott számösszeghez tartozik egy megfelelő H – T sorozat, amit a következő módon konstruálhatunk meg. Rendezzük az összeadott számokat csökkenő sorrendbe és hajtsuk végre a műveletünket a számoknak megfelelően fordítva. Ez azt jelenti, hogy a csupa T állásból és az első pozícióból kiindulva jobbra haladva a legnagyobb szám darabszámú érmét H-ra fordítunk, a visszafordító érmét úgy hagyva balra haladva a második szám darabszámú érmét visszafordítjuk T-re stb. Talán egy példán legegyszerűbb bemutatni az eljárást. Legyen $n = 10$, $k = 30 = 9+8+7+4+2$, ekkor az egyes számok alapján kialakuló H – T sorozatok a következők lesznek (pirossal a változtatott érméket, kékkel az úgy hagyott, visszafordító érméket jelöljük):

	T T T T T T T T T T
9	H H H H H H H H H T
8	T T T T T T T T H T
7	T H H H H H H H H T
4	T H H T T T T H H T
2	T H H T H H T H H T

Eszerint van egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésünk a H – T sorozatok és az $\{1, \ldots, n\}$ számhalmaz részhalmazai között (ez utóbbiak felelnek meg az $\{1, \ldots, n\}$ számok ismétlés nélküli összegeinek). Most már a párbaállítás könnyen kitalálható: egy adott $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ halmazhoz tartozzon az $\overline{A} = \{1, \ldots, n\} \setminus A$ halmaz, az A komplementere. Egyrészt ez tényleg párokat ad: a komplementer komplementere az eredeti halmaz. Másrészt megfelelő párokat ad: ha az A halmazban a számok összege k, akkor az $\overline{A}$ halmazban a számok összege azon számok összege lesz, amelyek nincsenek benne A-ban, vagyis a $\{1, \ldots, n\}$ halmazbeli számok összege $\big(n(n+1)/2\big)$ mínusz k, és pontosan erre volt szükségünk. A fenti példánknál $n = 7$ esetén a TTTHHHH maximális lépésszámú mintához az $\{1, \ldots, 7\}$ halmaz tartozik, ennek komplementere az üres halmaz, ami valóban a TTTTTTT minimális lépésszámú mintának felel meg.

Hivatkozások

[1] Középiskolai Matematikai és Fizikai lapok 2019. szeptember, 324–325. (`http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=202207`)

[2] Középiskolai Matematikai és Fizikai lapok 2019. november, 450–455. (`http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=202254`)

[3] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (`http://oeis.org/`)

[4] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences: A034140 számú sorozat. (`http://oeis.org/A034140`)

Makay Géza
SZTE, TTIK, Bolyai Intézet
E-mail: makayg@math.u-szeged.hu

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az

$$f:\ [0;5]\to\mathbb{R},\qquad f(x)=|x^2-4x+3|$$

függvényt. (*4 pont*)

b) A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az

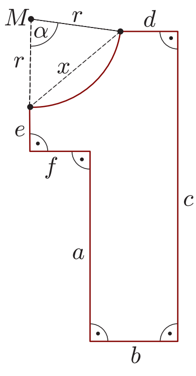
$$|x^2-4x+3|=p$$

egyenletnek a $[0;5]$ intervallumon? (*6 pont*)

2. *a*) Az $\overline{abc}$ háromjegyű szám kilencszerese az $\overline{xabc}$ alakú négyjegyű szám. Bizonyítsuk be, hogy az $\overline{abc}$ szám osztható 125-tel. (*6 pont*)

b) Igazoljuk, hogy $x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\lg\left(7^x\right)+\lg\left(7^{-x}\right)}{2}\leqslant \lg\left(\frac{7^x+7^{-x}}{2}\right).\qquad (\textit{8 pont})$$



3. Az *ábrán* egy gyerekek számára készült játékszőnyeg egyik – 1-es formájú – darabkája látható. Megállapítottuk, hogy centiméterben mérve $a=13$, $b=6$, $c=21$, $d=5$, $e=3$, $f=4$ és $r=5{,}5$.

a) Határozzuk meg az α szög nagyságát. (*6 pont*)

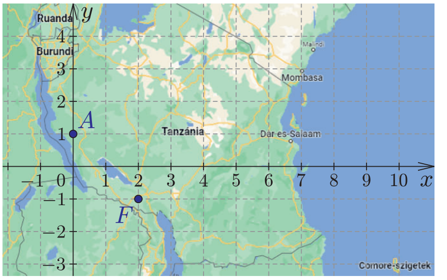
b) Számítsuk ki az 1-es formájú darabka területét. (*7 pont*)

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$9^{\operatorname{tg}^2(x)}+3^{\frac{1}{\cos^2(x)}}-4=0.\qquad (\textit{14 pont})$$

II. rész

5. Egy katonai békefenntartó szervezet két egysége állomásozik Tanzániában. Az ország koordináta-rendszerben elhelyezett térképén az egységek bázisainak koordinátái: $A(0;1)$ és $F(2;-1)$. Egy közös hadgyakorlat tervezésénél az egységek parancsnokai egy olyan találkozási (P) pontot jelölnek ki, mely mindkét bázistól egyenlő távolságra van és egy stratégiai fontosságú autóút mentén fekszik, melynek nyomvonala leírható az $x+y=4$ egyenletű egyenessel.



a) Hol találkoznak és milyen távol van ez a pont az egységek bázisaitól? (Egy egység a koordinátasíkon 150 kilométernek felel meg a valóságban.) (*8 pont*)

A hadgyakorlat biztosítása érdekében a parancsnokok el szeretnének helyezni egy radart az érintett területen, mely körkörös mozgással képes „letapogatni” az egész területet, így minden ellenséges mozgás előre láthatóvá válik. A parancsnokok azt a pontot jelölték ki, amely az A; F és P pontok mindegyikétől egyenlő távolságra van.

b) Határozzuk meg a radar által letapogatott kör területét. E kör területe hány százalékkal nagyobb a hadgyakorlat és a két bázis által meghatározott háromszög területénél? (*8 pont*)

6. Kati és Attila szabályos érmékkel játszik, ami azt jelenti, hogy a feldobásnál a fej és az írás valószínűsége egyenlő. Kati zsebében három darab 100 és öt darab 200 forintos, míg Attila zsebében két darab 100 és három darab 200 forintos érme van. Mindketten kivesznek találomra egy-egy érmét a zsebükből.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy a kettőjük által kihúzott érmék összege pontosan 300 forint? (*4 pont*)

Ezután Attila 10-szer feldob egy 200 forintos érmét.

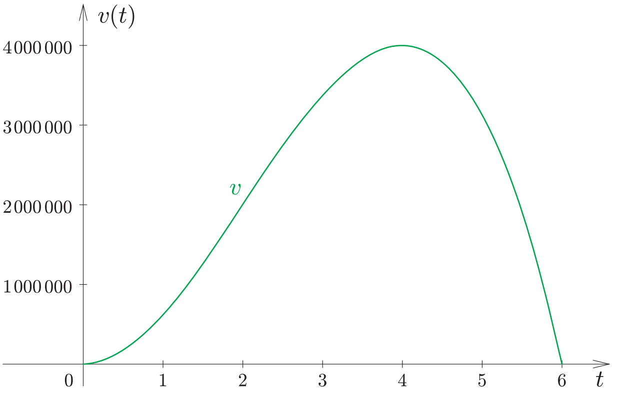
b) Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy Attila legalább két alkalommal fejet dob. (*5 pont*)

c) Hányszor kell dobnia Katinak egy érmével, hogy 90%-os valószínűséggel kijelenthesse, hogy a dobások között volt legalább egy fej? (*7 pont*)

7. Egy vírusfertőzés alatt az 1 milliliter vérben található vírusok száma jól közelíthető az *ábrán* látható v függvénnyel. A v függvény megadható a

$$v(t)=a\cdot(6-t)\cdot t^2$$

$(a\in\mathbb{R})$ alakban, ahol t a megfertőződéstől eltelt napok számát, $v(t)$ pedig t nap elteltével az 1 milliliter vérben található vírusok számát jelenti.



Tudjuk, hogy a megfertőződés után 4 nappal 4 millió vírus található 1 milliliter vérben.

a) Határozzuk meg az a paraméter értékét. (*2 pont*)

b) Adjuk meg az 1 milliliter vérben lévő vírusok maximális számát. (*8 pont*)

c) Hány nap után nőtt a vírusok száma a leggyorsabban? (*3 pont*)

d) Határozzuk meg a grafikon segítségével, hogy megközelítőleg hány napon keresztül van 3 milliónál több vírus 1 ml vérben. (*3 pont*)

8. A Minta család négy tagjának A betűvel kezdődik a keresztneve. Ebben a családban négyen úsznak és négyen fociznak rendszeresen. A családtagokról még azt is tudjuk, hogy

1) csak Andris és Attila jár úszni és focizni is;

2) egyedül Adrienn nem űzi egyik sportágat sem;

3) Norbi próbálja testvérét, Annát az úszóktól hozzájuk, a focistákhoz csábítani – sikertelenül.

a) A fent leírtak alapján legalább hány tagja van a Minta családnak? (*5 pont*)

Egyik hétvégén esett az eső, ezért Anna, Adrienn, Andris és Attila barátaikkal otthon játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 5-nél nagyobb és 8-nál kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos.

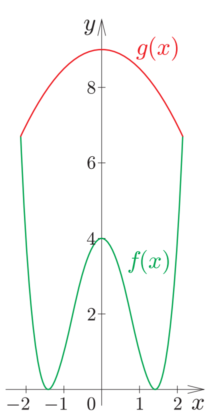
b) Legfeljebb hány tagú lehetett a baráti társaság? (*3 pont*)

Egy másik alkalommal Anna, Adrienn, Andris és Attila osztálytársaikkal (Marcival, Marcsival, Miskával és Magdával) színházba mentek. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt.

c) Hány különböző ülésrendben foglalhat helyet a 8 ember, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek nem kerülhetnek egymás mellé? (*5 pont*)

d) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a fent leírt ülésrend alakul ki, ha minden ülésrendet egyenlően valószínűnek tekintünk? (*3 pont*)

9. Egy fogászati cég logójának alsó íve modellezhető az $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ polinomfüggvény segítségével. Az A, B és C pontok mindegyike a görbére illeszkedik: $A = (-2; 4)$, $B = (0; 4)$, $C = \left(\sqrt{2}; 0\right)$.



a) Határozzuk meg a megadott pontok segítségével az f függvény együtthatóit. (*5 pont*)

A cég szeretné a fog alakú logót rézmetszet formájában elkészíttetni. Az alakzatot az f és g függvények grafikonjainak segítségével lehet modellezni:

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4;\ g(x) = -0,5x^2 + 9,$$

ahol $x, f(x), g(x)$ centiméterben mért távolságok. A függvénygrafikonok az *ábrán* láthatóak.

b) Adjuk meg a következő állítások logikai értékét. (*2 pont*)

Állítás	**Igaz**	**Hamis**
A logó felső határoló íve illeszkedik a g-jelű függvény grafikonjára.		
Egy negyedfokú polinomfüggvény maximum 3 szélsőértékkel rendelkezik.		
Egy negyedfokú polinomfüggvény inflexiós pontjainak száma legalább kettő.		

c) Mekkora az elkészített logó térfogata, ha vastagsága 2 centiméter? (*9 pont*)

Keszeg Attila Tibor
Veszprém

Megoldásvázlatok a 2023/1. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő feladatokat:*

a) $|\sin x| > \cos x - 1$; (*5 pont*)

b) $27x^6 + 26x^3 - 1 = 0$. (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Nézzük meg a relációs jel két oldalán levő függvények értékkészletét:

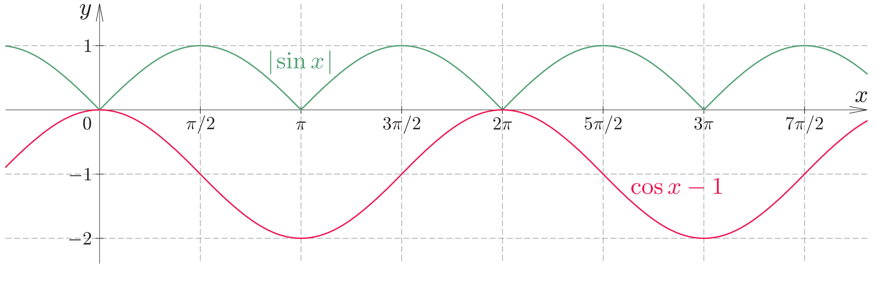
$$0 \leqslant |\sin x| \leqslant 1, \quad \text{illetve} \quad -2 \leqslant \cos x - 1 \leqslant 0.$$

Ezekből következik, hogy a feladatban szereplő egyenlőtlenség a

$$|\sin x| = \cos x - 1 = 0$$

eset kivételével mindig teljesül. Ezért az egyenlőtlenség megoldáshalmaza:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$



b) Az $y = x^3$ új ismeretlen bevezetésével a

$$27y^2 + 26y - 1 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, ahonnan

$$y_1 = -1, \quad y_2 = \frac{1}{27},$$

ezért az egyenlet megoldása:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

Ezek valóban kielégítik az eredeti egyenletet.

2. *Egy fagráf éleit újabb* 435 *él behúzásával kiegészítettük, így egy egyszerű, összefüggő teljes gráfot kaptunk. Hány pontú ez a gráf?* (*4 pont*)

b) *Igazoljuk a következő állítást: bármely n pontú fagráf annyi újabb él behúzásával tehető egyszerű, összefüggő teljes gráffá, amennyi az $n-1$ pontú teljes gráf éleinek száma.* (*4 pont*)

Leonardo Pisano *(kb. 1170 – kb. 1250?) olasz matematikus Fibonacci néven lett ismert. Több érdekes könyve, feladata maradt fenn. Róla nevezték el a következő sorozatot:* $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$ *. A sorozat tetszőleges tagja úgy kapható meg, hogy az előző két tagot összeadjuk. Az első és második tag is* 1.

c) *Egy pozitív tagú mértani sorozat három egymást követő tagjának összege* 700*. Ha az első számhoz* 44*-et, a második számhoz* 33*-at adunk, a harmadik számból pedig* 23*-at kivonunk, a Fibonacci-sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Melyek ezek a számok?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Az n pontú fagráf éleinek száma: $n-1$, az n pontú teljes gráf éleinek száma: $\frac{n(n-1)}{2}$. Ezért felírhatjuk, hogy:

$$n - 1 + 435 = \frac{n(n-1)}{2},$$

majd az összefüggést rendezve:

$$n^2 - 3n - 868 = 0.$$

Az egyenlet pozitív megoldása: 31, tehát 31 pontú a gráf.

b) Az $n-1$ pontú teljes gráf éleinek száma: $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, ezért

$$n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{2n - 2 + n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

amely éppen az n pontú teljes gráf éleinek száma.

c) A mértani sorozat három egymást követő tagja legyen: a, aq, aq^2, így a Fibonacci-sorozat három egymást követő tagja:

$$a + 44, \quad aq + 33, \quad aq^2 - 23.$$

A fentiekből az

$$(1) \qquad a + aq + aq^2 = 700,$$

$$(2) \qquad a + 44 + aq + 33 = aq^2 - 23$$

összefüggéseket kapjuk. A kapott egyenletrendszer egy lehetséges megoldása: összeadjuk a két egyenletet, és rendezzük az összefüggést:

$$a + aq = 300, \quad a = \frac{300}{1+q}, \quad q \neq -1,$$

hiszen a Fibonacci-sorozat tagjai nem lehetnek negatívak. Ezt behelyettesítve az (1) egyenletbe:

$$\frac{300}{1+q}\left(1 + q + q^2\right) = 700.$$

Rendezve:

$$3q^2 - 4q - 4 = 0,$$

ahonnan a pozitív gyök $q = 2$.

Az eredeti sorozat tagjai: 100, 200, 400, a Fibonacci-sorozat tagjai pedig: 144, 233, 377.

3. *A Derelye pékségben jártunk.*

a) A pékség polcán 30 *darab mákos kifli van. Vannak közte olyan darabok, amelyek nem felelnek meg a szigorú minőségi követelményeknek. Ha két kiflit – visszatevés nélkül – kiveszünk, akkor annak a valószínűsége, hogy mind a kettő hibátlan* $\frac{38}{9}$*-szer nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy mindkét kivett darab hibás. Hány nem megfelelő mákos kifli van a polcon?* *(7 pont)*

A túrós batyukat is szigorú ellenőrzés alá vonjuk a pékségben. Lemérve a polcon található darabokat, a következő értékeket kapjuk grammban: 132, 132, 133, 132, 130, 129, 129, 131, 130, 130, 132, 130, 130, 128, 127, 129, 132, 131, 133, 131, 129, 127, 128, 127, 129.

b) Készítsünk az adatokból gyakorisági táblázatot. Igazoljuk, hogy az adatok szórása nem haladja meg a megengedett 2 *értéket.* *(5 pont)*

Megoldás. *a)* Tegyük fel, hogy a pékségben h darab hibás mákos kifli van. Ekkor annak a valószínűsége, hogy a két kivett darab hibátlan: $\frac{\binom{30-h}{2}}{\binom{30}{2}}$, annak a valószínűsége, hogy a kivett két darab hibás: $\frac{\binom{h}{2}}{\binom{30}{2}}$, így:

$$\frac{\binom{30-h}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{38}{9} \cdot \frac{\binom{h}{2}}{\binom{30}{2}},$$

$$\frac{(30-h)!}{2! \cdot (28-h)!} = \frac{38}{9} \cdot \frac{h!}{2! \cdot (h-2)!},$$

$$9(30-h)(29-h) = 38h(h-1),$$

$$h^2 + 17h - 270 = 0.$$

Az egyenlet pozitív megoldása $h = 10$. Tehát 10 hibás volt a mákos kiflik között.

b) Gyakorisági táblázat:

gramm	127	128	129	130	131	132	133
darab	3	2	5	5	3	5	2

Az értékek átlaga: $a = 130{,}04$ gramm, ezt felhasználva a szórásnégyzet:

$$\sigma^2 = \frac{3(a-127)^2 + 2(a-128)^2 + 5(a-129)^2 + 5(a-130)^2}{25} +$$

$$+ \frac{3(a-131)^2 + 5(a-132)^2 + 2(a-133)^2}{25} \approx \frac{80{,}96}{25} \approx 3{,}2384.$$

A szórás ennek négyzetgyöke: $\sigma \approx 1{,}8$, tehát az adatok szórása kisebb, mint 2.

4. *Bármely szabályos sokszögnek van beírt és köréírt köre is.*

a) *Mekkora a szabályos nyolcszögnél a beírható és köré írható kör sugarának aránya?* *(3 pont)*

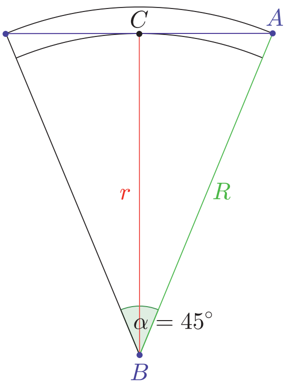
Egy szabályos sokszög beírható körének sugara (r) *és köré írható körének sugara* (R) *között a következő összefüggés áll fenn:*

$$4r^2 + 3R^2 = 4\sqrt{3}rR.$$

b) *Mekkora az* $\frac{r}{R}$ *arány értéke?* *(6 pont)*

c) *Hány oldalú lehet a sokszög?* *(4 pont)*

Megoldás. a) Az *ábra* egy szabályos nyolcszög egy részletét mutatja. Az ABC derékszögű háromszögből: $\frac{r}{R} = \cos 22{,}5^\circ \approx 0{,}9239$.



b) *Első megoldás:* Mivel $r \neq 0$ és $R \neq 0$, a

$$4r^2 + 3R^2 = 4\sqrt{3}rR$$

egyenletet eloszthatjuk $r \cdot R$-rel. Egyszerűsítés után kapjuk, hogy:

$$4\frac{r}{R} + 3\frac{R}{r} = 4\sqrt{3}.$$

Az $x = \frac{r}{R}$ új ismeretlen bevezetésével és rendezéssel a

$$4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek egyetlen megoldása $x = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Második megoldás: Adott, hogy

$$4r^2 + 3R^2 - 4\sqrt{3}rR = 0.$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet bal oldala egy kéttagú kifejezés négyzete:

$$\left(2r - \sqrt{3}R\right)^2 = 0,$$

ez pedig csak akkor teljesül, ha $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Az $\frac{r}{R} = \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ összefüggés segítségével az a) feladathoz hasonlóan a szabályos sokszögbe rajzolható egyenlő szárú, egybevágó háromszögek szárszögét kapjuk meg: $\frac{\alpha}{2} = 30^\circ$, ahonnan a szárak szöge: $\alpha = 60^\circ$, tehát szabályos hatszögről van szó.

II. rész

5. *Adott két, pozitív valós számok halmazán értelmezett függvény:*

$$f(x) = x^{2-\log_2 x} + x \quad \textit{és} \quad g(x) = x^{3-\log_2 x} - x.$$

a) *Igazak, vagy hamisak az alábbi állítások?* *(5 pont)*

A) $f(1) = 2$;
B) $2 \cdot f(2) = g(2)$;
C) $g(1) + g(2) + g(4) + g(8) = -5$.

b) *Adjuk meg az összes olyan $a \in D_f \cap D_g$ valós számot, melyre $f(a) - g(a) = 2$.* *(11 pont)*

Megoldás. a) Az állítások igaz, vagy hamis tartalmáról meggyőződhetünk egyszerű behelyettesítéssel:

$$f(1) = 1^{2-\log_2 1} + 1 = 2,$$

$$f(2) = 2^{2-\log_2 2} + 2 = 4,$$

$$g(1) = 1^{3-\log_2 1} - 1 = 0,$$

$$g(2) = 2^{3-\log_2 2} - 2 = 2,$$

$$g(4) = 4^{3-\log_2 4} - 4 = 0,$$

$$g(8) = 8^{3-\log_2 8} - 8 = -7.$$

Ezek szerint
A) igaz,
B) hamis,
C) igaz.

b) Ha létezik $a \in D_f \cap D_g$, amelyre $f(a) - g(a) = 2$, akkor

$$a^{2-\log_2 a} + a - \left(a^{3-\log_2 a} - a\right) = 2,$$

$$a^{2-\log_2 a} - a^{3-\log_2 a} + 2a - 2 = 0,$$

$$a^{2-\log_2 a}(1-a) - 2(1-a) = 0,$$

$$(1-a)\left(a^{2-\log_2 a} - 2\right) = 0,$$

innen $a_1 = 1$, vagy $a^{2-\log_2 a} = 2$. Tudjuk, hogy $a > 0$ a logaritmusfüggvény értelmezési tartománya miatt, ezért az egyenlet mindkét oldala pozitív, így, ha $a \neq 1$, vehetjük mindkét oldal a alapú logaritmusát. A logaritmus azonosságait felhasználva:

$$2 - \log_2 a = \log_a 2.$$

Vezessük be az $y = \log_2 a$ új ismeretlent, ekkor $\log_a 2 = \frac{1}{y}$, így

$$2 - y = \frac{1}{y},$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0,$$

$$(y-1)^2 = 0,$$

tehát $\log_2 a = 1$, $a_2 = 2$, így két olyan a érték létezik, amelyre $f(a) - g(a) = 2$.

6. *Egy baráti társaság együtt lottózik. Minden alkalommal a hagyományos ötöslottón töltenek ki szelvényeket (kilencven számból kell ötöt eltalálni). Az egyik héten a nagy nyeremény reményében újra összeültek és megtervezték a kitöltés módszerét. A csoport minden tagja ugyanannyi szelvényt töltött ki, de ügyeltek arra, hogy minden szelvény különbözőképpen legyen kitöltve.*

a) Hányan voltak a csoportban, ha ügyes szervezéssel mindenki 25 különböző szelvényt töltött ki és így pontosan annyi különbözően kitöltött szelvényük lett, amennyi egy sorsolásnál a különböző négytalálatos szelvények lehetséges száma? (*6 pont*)

b) Az azon a héten kihúzott öt szám (x, y, z, u, v) *értékére a következő összefüggések írhatók fel:*

$$x+y+z=49, \qquad y+z+u=101, \qquad z+u+v=173,$$
$$u+v+x=147, \qquad v+x+y=109.$$

Mik voltak a nyerőszámok? (*10 pont*)

Megoldás. *a*) Egy húzásnál a különböző négytalálatos szelvények száma:

$$\binom{5}{4}\cdot\binom{85}{1}=5\cdot 85=25\cdot 17,$$

azaz 17-en voltak a csoportban.

b) Egy lehetséges megoldás:

$$x+y+z=49, \tag{1}$$
$$y+z+u=101, \tag{2}$$
$$z+u+v=173, \tag{3}$$
$$u+v+x=147, \tag{4}$$
$$v+x+y=109. \tag{5}$$

Adjuk össze mind az öt egyenletet:

$$3(x+y+z+u+v)=579,$$
$$x+y+z+u+v=193. \tag{6}$$

Az (1)-ből $x+y+z=49$, (4)-ből: $u+v=147-x$, ezért:

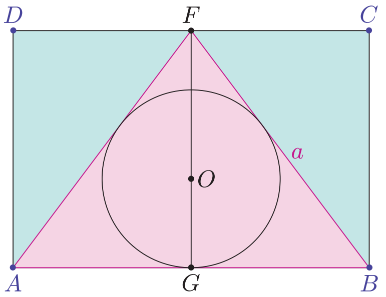
$$49+147-x=193, \quad x=3,$$

ezt és a (2) összefüggést visszahelyettesítve (6)-ba:

$$3+101+v=193, \quad v=89.$$

Mivel $x=3$, $v=89$, az (5) összefüggésből: $y=17$, az (1)-ből: $z=29$, a (4)-ből: $u=55$.

Az ötöslottó nyerőszámai azon a héten a következők voltak: 3, 17, 29, 55, 89.



7. *Gábor egy különleges kis dartstáblát készít kisfiának: egy téglalapban egyenlő szárú háromszög és annak beírt köre látható az ábra szerint. A téglalap és a háromszög közös oldala 6 deciméter, a háromszögbe írt kör sugara 15 centiméter.*

a) Mekkora a háromszög területének és kerületének pontos értéke? *(10 pont)*

Feltételezzük, hogy a játékkal játszó kisfiú minden lövése egyenlő eséllyel éri el a téglalap alakú céltábla bármely pontját.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a körbe talál a lövés? *(3 pont)*

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a háromszög körön kívüli pontját találja el a lövés? *(3 pont)*

Megoldás. *a*) Legyen az egyenlő szárú háromszög szára: a, ekkor az ABF háromszög t területét kétféleképpen felírva:

$$t = 15 \cdot s = \frac{60 \cdot m}{2},$$

ahol s a háromszög kerületének fele:

$$\frac{2a + 60}{2} = a + 30,$$

m pedig a háromszög magassága: $m = \sqrt{a^2 - 30^2}$. Az előzőek alapján:

$$15(a + 30) = 30\sqrt{a^2 - 30^2},$$

$$(a + 30)^2 = 4(a^2 - 900),$$

$$a^2 - 20a - 1500 = 0,$$

amelynek a pozitív gyöke: $a = 50$ cm, így $m = 40$ cm.

A háromszög területe 1200 négyzetcentiméter, a kerülete 160 centiméter.

b) Mivel a kisfiú minden lövése egyenlő eséllyel éri el a téglalap alakú céltábla bármely pontját, alkalmazhatjuk a geometriai valószínűség összefüggését:

$$p(\text{kör}) = \frac{\text{kör területe}}{\text{téglalap területe}} = \frac{15^2\pi}{40 \cdot 60} \approx 0{,}2944,$$

azaz 29,4% valószínűséggel találja el a céltábla kör alakú részét.

c) $$p(\text{háromszög körön kívül}) = \frac{\text{háromszög területe} - \text{kör területe}}{\text{téglalap területe}} =$$

$$= \frac{1200 - 225\pi}{2400} \approx 0{,}2056,$$

tehát 20,56% valószínűséggel találja el a céltábla háromszögének körön kívüli részét.

8. *Adott az $n^4 + 64 \cdot m^4$ kifejezés, ahol n és m pozitív egész számok.*

a) Igazoljuk, hogy ha $n = m = 2$, a kifejezés osztható 13-mal. (*2 pont*)

b) Adjunk meg olyan n és m értéket, amelyek relatív prímek és amelyekre a kifejezés értéke osztható 5-tel. (*3 pont*)

c) Igazoljuk, hogy bármely n és m pozitív egész esetén a kifejezés értéke nem prímszám. (*11 pont*)

Megoldás. *a*) Ha $n = m = 2$, a kifejezés értéke $2^4 + 64 \cdot 2^4 = 2^4 \cdot 65 = 16 \cdot 5 \cdot 13$, azaz osztható 13-mal.

b) Ha $n = 2$, $m = 3$, akkor $(2; 3) = 1$, ekkor a kifejezés a következő: $2^4 + 64 \cdot 3^4$. Az összeg első tagja 6-ra, a második tagja 4-re végződik, ezért az összeg osztható 5-tel.

c) Alakítsuk szorzattá a kifejezést:

$$n^4 + 64m^4 = (n^2 + 8m^2)^2 - 16n^2m^2 = (n^2 + 8m^2 - 4nm)(n^2 + 8m^2 + 4nm).$$

A szorzat egyik tényezője sem lehet 1, hiszen $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, és

$$n^2 + 8m^2 - 4nm = (n - 2m)^2 + 4m^2,$$

vagyis a kifejezés felbontható két, 1-nél nagyobb, pozitív egész szám szorzatára, tehát nem lehet prímszám.

9. *Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ függvény.*

a) Határozzuk meg a függvény és a koordinátatengelyek által alkotott, első negyedben levő síkidom területét. (*6 pont*)

b) Egy egyenes áthalad az előbbi f függvény $P(2; 3)$ koordinátájú pontján. Mi lehet ennek az egyenesnek az egyenlete, ha tudjuk, hogy az első negyedben létrejött síkidomot úgy vágja két részre, hogy az egyik rész területe kétszer akkora, mint a másik rész területe? (*10 pont*)

Megoldás. *a*) Határozzuk meg a függvény és a koordinátatengelyek által alkotott, első negyedbeli síkidom területét. A függvénygrafikon koordinátatengelyekkel alkotott metszéspontjai: $(0; 3)$ és $(3; 0)$, ezért a síkidom területe:

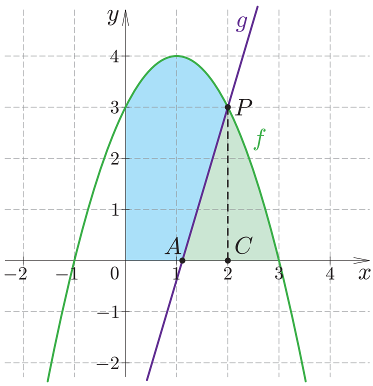
$$\int_0^3 (-x^2 + 2x + 3)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_0^3 = 9 \text{ területegység.}$$

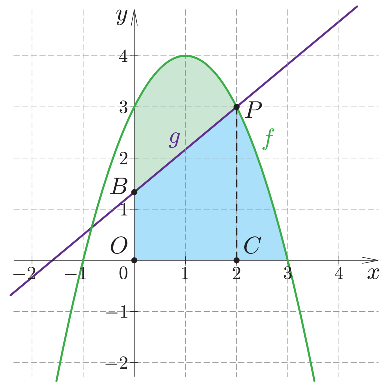
b) Először nézzük azt az esetet, amikor $2 : 1$ arányban osztja a területet az egyenes. Ebben az esetben egy 6 területegység és egy 3 területegység méretű rész keletkezik, az x tengely, a függvény egy darabja és a keresendő egyenes zárja közre a kisebb területet. Ekkor a $[0; 3]$ intervallum egy pontjában metszi a kívánt egyenes az x tengelyt. Ha az origóban metszené, akkor már 3 területegységnél nagyobb területű síkidom keletkezne, mint azt könnyen ellenőrizni tudjuk.

Legyen az egyenes és az x tengely metszéspontja: $A(a;0)$, ekkor a függvény alatti terület $[2;3]$ intervallumra eső darabja és egy derékszögű háromszög területe adja a 3 t.e. nagyságú területet.

$$\int_2^3 (-x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}.$$

A derékszögű háromszög területe: $\frac{(2-a)\cdot 3}{2} = 3-\frac{5}{3}$, amelyből $a=\frac{10}{9}$. A kérdéses egyenes két pontja: $A\left(\frac{10}{9};0\right)$, $P(2;3)$, innen az egyenes egyenlete: $8y-27x=-30$.





Másik eset: az egyenes úgy vágja két részre a kérdéses területet, hogy a nagyobb rész illeszkedik az x tengelyre. Legyen a keresett egyenes és az y tengely metszéspontja: $B(0;b)$, ekkor egy derékszögű trapéz és az $\frac{5}{3}$ t.e. görbe alatti terület összegeként kapjuk meg a 6 t.e. területet. A trapéz alapjai b és 3 egység hosszúak, a magassága 2 egység, innen $b=\frac{4}{3}$. A keresett egyenes két pontja: $P(2;3)$ és $B\left(0;\frac{4}{3}\right)$.

Az egyenes egyenlete: $6y-5x=8$.

Tatár Zsuzsanna Mária
Esztergom

Matematika feladatok megoldása

B. 5197. *Jelölje $\mathbb{N}$ a nemnegatív egész számok halmazát, és legyen k adott pozitív egész. Van-e olyan monoton növő $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvény, amelyre*

$$(*)\qquad f\big(f(x)\big)=f(x)+x+k$$

minden $x\in\mathbb{N}$ esetén?

(6 pont)

I. megoldás. Jelölje a feladatbeli feltételt $(*)$. Megmutatjuk, hogy létezik legalább egy ilyen függvény. Legyen $\mathcal{S}_n=\{1,2,\ldots,n\}$. Definiáljuk f-et rekurzív módon. Legyen $f(0)=1$, és tegyük fel, hogy f definiálva van már $\mathcal{S}_n$-en úgy, hogy $(*)$ teljesül. Ekkor $f(n+1)$-et definiáljuk a következő módon: Ha $n+1\in f(\mathcal{S}_n)$, és $f(p)=n+1$, akkor

$$f(n+1)\overset{\text{def}}{=}f\big(f(p)\big)=f(p)+p+k=n+p+k+1.$$

Ha $n+1\notin f(\mathcal{S}_n)$, akkor pedig

$$f(n+1)\overset{\text{def}}{=}f(n)+1.$$

Ezzel a rekurzív definiálással nyilván teljesül a $(*)$ feltétel $\mathbb{N}$-en.

Annyi a dolgunk, hogy megmutassuk, hogy f monoton növekvő. Ennél többet mutatunk meg indukcióval:

$(**)$ a pozitív egészek halmazán teljesül a következő: $f(n+1)=f(n)+1$, ha $n+1\notin f(\mathcal{S}_n)$ és $f(n+1)=f(n)+2$, ha $n+1\in f(\mathcal{S}_n)$. Ebből az előbbi eset f definíciója alapján biztosan teljesül, csak az utóbbi eset bizonyítandó. Az első néhány számra ez valóban igaz, mert $f(1)=k+1$, $f(2)=k+2$, $\ldots$, $f(k)=2k$, $f(k+1)=2k+2$. Tegyük fel, hogy ez igaz $\mathcal{S}_n$-en. Ekkor három eset lehetséges:

A) Ha $n+1\notin f(\mathcal{S}_n)$, akkor definíció szerint $f(n+1)=f(n)+1$.

B) Ha $n+1\in f(\mathcal{S}_n)$ és $f(p)=n+1$, illetve $f(p-1)=n$. Ekkor

$$f(n+1)=n+p+k+1,$$
$$f(n)=f\big(f(p-1)\big)=f(p-1)+p-1+k=n+p+k-1,$$

ekkor $f(n+1)=f(n)+2$.

C) Ha $n+1\in f(\mathcal{S}_n)$ és $f(p)=n+1$, illetve $f(p-1)=n-1$. Ekkor

$$f(n+1)=n+p+k+1.$$

Mivel f az indukciós feltevés alapján szigorúan monoton nő $\mathcal{S}_n$-en, tudjuk, hogy $n\notin f(\mathcal{S}_{n-1})$, amiből következik, hogy

$$f(n)=f(n-1)+1=f\big(f(p-1)\big)+1=f(p-1)+p-1+1+k=n+p+k-1.$$

Ebből pedig kapjuk, hogy $f(n+1)=f(n)+2$. Ezzel beláttuk $(**)$-et, vagyis f szigorúan monoton növekvő a pozitív egészek halmazán. Még annyit meg kell mutatni, hogy $f(0)<f(1)$, ami könnyű, mert tudjuk, hogy $f(0)=1$, $f(1)=k+1$, ahol k egy pozitív egész.

Zömbik Barnabás (Budapest V. Ker. Eötvös József Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Mutatunk tetszőleges k-ra egy jó függvényt.

Legyen F_n az n-edik Fibonacci-szám, ahol $F_1=F_2=1$. Ennek alkalmazásához írjuk át a számokat az úgynevezett „Fibonacci-számrendszer"-be: az a_2F_2+ $+a_3F_3+\ldots+a_nF_n=X$ számot $\overline{a_na_{n-1}\ldots a_3a_2}$ módon írjuk le. Itt az $a_2,a_3,\ldots,a_n$

együtthatók egy olyan $0-1$ sorozatot alkotnak, mely nem tartalmaz két szomszédos 1-est. Ismert tétel, hogy minden pozitív egész szám egyértelműen felírható ilyen alakban (F_1-et nem vettük bele, különben $F_1=F_2=1$ miatt ez a felírás nem lenne egyértelmű).

Rendelje hozzá a függvényünk az $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2}-k$ számhoz az $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2 0}-k$ számot.

Nézzük, miért jó ez a függvény. Először lássuk be, hogy $f\big(f(x)\big)=f(x)+x+k$.

A Fibonacci-számok rekurziója miatt $a_x F_x + a_x F_{x+1} = a_x F_{x+2}$, ezért

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2} + \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2 0} = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2 00}.$$

Tehát $x+k+f(x)+k=f\big(f(x)\big)+k$. Mindkét oldalból k-t kivonva éppen a bizonyítandót kapjuk.

Ezután belátjuk, hogy monoton növő a függvény. Az $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2}-k$ szám pozitív, ezért a nála nagyobb $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2 0}-k$ is az, vagyis a függvény a pozitív egészeken értelmezett, és értékei is pozitív egészek. Két Fibonacci-számrendszerbeli alak közül először is az a nagyobb, amelyiknek első (első nem 0) jegye „előrébb” van, tehát több számjegyből áll.

Ha ugyanannyi számjegyből állnak, akkor $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2} > \overline{b_n b_{n-1} \dots b_2}$ pontosan akkor teljesül, ha $k>i$-re $b_k=a_k$, és $a_i>b_i$ (hasonlóan a 10-es számrendszerben felírt számok rendezéséhez).

Ebből pedig egyenesen következik, hogy $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2} > \overline{b_n b_{n-1} \dots b_2}$ ekvivalens azzal, hogy $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 0} > \overline{b_n b_{n-1} \dots b_2 0}$. Így mindkét oldalból k-t kivonva nem változik, hogy a függvény kisebb számhoz kisebb számot rendel (azaz nem csak monoton, hanem szigorúan monoton is.)

Ezzel beláttuk, hogy van egy ilyen függvény.

Sztranyák Gabriella (Budapest XIII. Ker. Berzsenyi Dániel Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. Mutatunk egy, a feltételnek megfelelő függvényt; ehhez felhasználjuk a **B. 3429.** feladat* ötleteit.

A $f(x)$ függvényt egy valós értékű lineáris függvény egész értékekre kerekítésével fogjuk megkonstruálni.

Legyen $q=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618$ a $q^2=q+1$ egyenlet pozitív megoldása, továbbá legyen $d=\frac{k}{q}$. Bármely pozitív egész x esetén legyen $f(x)$ az az egész szám, amely a $\left[qx+d-\frac{1}{2}, qx+d+\frac{1}{2}\right)$ intervallumba esik.

Mivel $qx+d-\frac{1}{2}>q+0-\frac{1}{2}>0$, az $f(x)$ érték pozitív egész, tehát f valóban egy $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvény (és mivel $q>1$, szigorúan monoton növő).

Az $f(x)$ definíciója szerint

$$(1) \qquad -\frac{1}{2} \leqslant f(x)-qx-d<\frac{1}{2}.$$

* `https://www.komal.hu/verseny/2001-01/B.h.shtml#b3429`

Ugyanezt x helyett $f(x)$-szel felírva,

$$-\frac{1}{2} \leqslant f\big(f(x)\big) - qf(x) - d < \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Adjuk össze (2)-t és (1) $(q-1)$-szeresét:

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(q-1) \leqslant \Big(f\big(f(x)\big) - qf(x) - d\Big) + (q-1)\big(f(x) - qx - d\big) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(q-1),$$

$$-\frac{q}{2} \leqslant f\big(f(x)\big) - f(x) - (q^2 - q)x - qd < \frac{q}{2},$$

$$-\frac{q}{2} \leqslant f\big(f(x)\big) - f(x) - x - k < \frac{q}{2}.$$

Az $f\big(f(x)\big) - f(x) - x - k$ egy egész szám, és mint láttuk, $-\frac{q}{2} \approx -0{,}809$ és $\frac{q}{2} \approx 0{,}809$ közé esik. Ez az egész szám csak a 0 lehet, tehát $f\big(f(x)\big) - f(x) - x - k = 0$, vagyis $f\big(f(x)\big) = f(x) + x + k$.

39 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 15 versenyző: Bencsik Dávid, Bényei Borisz, Berkó Sebestyén, Bognár András Károly, Kalocsai Zoltán, Kercsó-Molnár Anita, Lovas Márton, Mohay Lili Veronika, Nádor Benedek, Németh Márton, Romaniuc Albert-Iulian, Sebestyén József Tas, Sztranyák Gabriella, Varga Boldizsár, Zömbik Barnabás. 5 pontos 2, 4 pontos 3, 3 pontos 6, 2 pontos 1, 0 pontos 11 dolgozat.

B. 5264. *Ketten a következő játékot játsszák. Először Kezdő előírja egy* 0–1 *sorozat tetszőleges számú (akár végtelen sok) elemét úgy, hogy végtelen sok elem még ne legyen előírva. Ezután Második előírja a sorozat legkisebb indexű még nem előírt elemének értékét. Majd ezeket a lépéseket ismételgetik felváltva a végtelenségig. Kezdő nyer, ha a kapott sorozat valahonnan kezdve periodikus, Második nyer, ha nem az. Van-e valakinek nyerő stratégiája (és ha igen, kinek)?*

(*4 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

I. megoldás. Másodiknak van nyerő stratégiája, például a következő. A páratlanadik lépéseiben mindegy, hogy mit ír elő, a párosadikokban pedig, ha az a $2k$-adik lépés és az n-edik helyre kell tennie, akkor megnézi, hogy mi áll az $n-k$-adik helyen, és nem azt írja az n-edik helyre.

Bizonyítás. Indirekten tegyük fel, hogy a $q+1$-edik elemétől kezdve periodikus lesz az így kapott sorozat, a periódus legyen p tagú. Válasszuk meg az a pozitív egészet úgy, hogy $ap > q$ teljesüljön. Mi történik a $2k = 2ap$-edik lépésben? Mivel $n \geqslant 2k$, azért $n - k \geqslant k$, azaz $n - ap \geqslant ap$, így $n - ap > q$. Tehát a sorozat $n - ap = n - k$-adik és n-edik elemének meg kellene egyeznie, ami ellentmondás.

Szakács Domonkos (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Másodiknak van nyerő stratégiája. Ismert, hogy a periodikus 0-1 sorozatok megszámlálhatóan végtelen sokan vannak. Ennek egy gyors indoklása: Minden ilyen sorozat leírható két véges sorozattal, melyek közül az első lesz a periódus előtti rész, a második a periódus. Ezeket a véges sorozatokat egy-egy nemnegatív a és b egész szám 2-es számrendszerben felírt alakjának is tekinthetjük. Minden ilyen a, b párhoz rendeljük hozzá a $2^a \cdot 3^b$ számot. A prímtényezős alak egyértelműsége miatt ez a hozzárendelés injektív, ezáltal a valahonnan kezdve periodikus $0-1$ sorozatok halmaza a pozitív egészek egy részhalmazának felel meg, ami nyilván megszámlálható.

Ha $\underline{s_1}, \underline{s_2}, \ldots$ a valahonnan kezdve periodikus $0-1$ sorozatok egy felsorolása, akkor Második számára egy – elvileg létező – nyerő stratégia az, ha minden i-re az i-edik lépésében előírandó n_i-edik elemet az $\underline{s_i}$ sorozat n_i-edik elemétől különbözőnek adja meg. Ekkor a kapott sorozat biztosan különbözni fog mindegyik $\underline{s_i}$ sorozattól, tehát nem periodikus.

Duchon Márton (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

59 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 23 versenyző: Ali Richárd, Christ Miranda Anna, Chrobák Gergő, Czanik Pál, Domján Olivér, Duchon Márton, Fórizs Emma, Fülöp Csilla, Kovács Benedek Noel, László Anna, Melján Dávid Gergő, Molnár István Ádám, Nagy Leila, Nguyen Kim Dorka, Simon László Bence, Szakács Ábel, Szakács Domonkos, Szeibert Dominik, Tarján Bernát, Varga Boldizsár, Virág Rudolf, Wiener Anna, Zömbik Barnabás. 3 pontot 6, 2 pontos 5, 1 pontos 10, 0 pontos 10 dolgozat. Nem versenyszerű: 3 dolgozat. Nem számítjuk a versenybe a születési dátum vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt: 1 dolgozat.

Nehezebb feladat megoldása*

A. 827. *Legyen $n > 1$ egész szám. Egy pakliban n-féle színű és n-féle értékű kártya van, minden szín és érték párból pontosan egy, azaz összesen n^2 darab. A paklit megkeverjük, és kiosztjuk n játékos között úgy, hogy mindenki n darab kártyát kapjon. A játékosok azt akarják megcsinálni, hogy egy általuk választott sorrendben leülnek egy kör alakú asztalhoz, és az első játékostól kezdve sorban leraknak egy-egy lapot, míg végül mindenki lerakta az összes lapját úgy, hogy mindig olyan kártyát kell rakni, amely sem színben, sem értékben nem egyezik meg a közvetlenül előtte lerakott kártyával (az elsőnek lerakott kártya bármi lehet). Mely n-ekre lehetséges, hogy úgy lett kiosztva a pakli, hogy a játékosok ezt nem tudják megcsinálni? (A játékosok együttműködnek egymással, és látják egymás lapjait.)*

Javasolta: *Kocsis Anett* (Budapest)

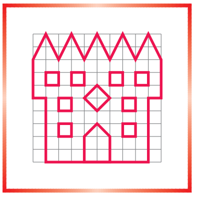
Megoldás. Válasz: Minden n-re lehetséges, hogy úgy lett kiosztva a pakli, hogy ezt nem tudják megcsinálni.

* 2021. szeptembertől ismét minden A-jelű feladat megoldása megtalálható honlapunkon, ez az egyik közülük.

Rendeljük a pakliban lévő i. színű és j értékű kártyához az (i, j) számpárt. Most megadunk egy leosztást, aminél nem tudnak megfelelően leülni a játékosok. A k. játékos $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ kapja meg az összes (k, l) alakú kártyát, ahol $1 \leqslant l \leqslant n$ és $k \neq l$, továbbá kapja meg az (n, k) kártyát. Az n. játékos a megmaradó kártyákat kapja, tehát az (l, l) alakú kártyákat $(1 \leqslant l \leqslant n)$. Világos, hogy ez egy szabályos kiosztás, azaz minden kártya ki lett osztva, és mindenki pontosan n kártyát kapott.

Tegyük fel, hogy le tudnak ülni megfelelő sorrendben, és ki tudják játszani az összes kártyájukat. Ha az n. játékos nem a kezdő, akkor jelöljük k-val annak a játékosnak a sorszámát, aki közvetlenül az n. játékos előtt ül a körben, ha pedig az n. játékos a kezdő, akkor k-val a körben másodikat, azaz a közvetlenül utána következő játékost jelöljük. Figyeljük meg, hogy k-t úgy választottuk, hogy n-szer fog egymás után rakni az n. és a k. játékos. Emiatt párba állíthatóak a kártyáik úgy, hogy a párok egymás után lerakhatóak, azaz egy páron belül a két kártyának sem a színe, sem a száma nem egyezik meg. Ez azonban nem lehetséges, mert az n. játékosnál van a (k, k) kártya, míg a k. játékos összes lapja vagy (k, l) alakú, vagy az (n, k), így egyik lapja sem állhat a (k, k) lappal párba. Ellentmondás, mégsem tudják kijátszani az összes lapjukat ebben a kiosztásban.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (754–758.)

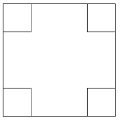


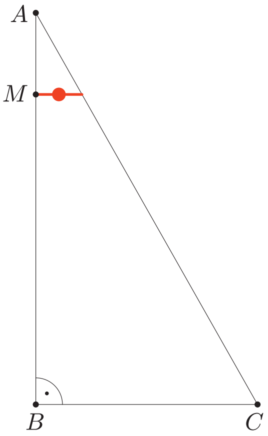
K. 754. Matyi és Sebi amőbáznak. Ha Sebi nyer, kap 3 cukrot Matyitól, ha Matyi nyer, kap 2 cukrot Sebitől (döntetlen nincs). 30 játék után Sebinek ugyanannyi cukra van, mint kezdetben volt. Hány játékot nyert Sebi?

K. 755. Legfeljebb hány oldala lehet egy olyan konvex sokszögnek, amelynek pontosan 3 tompaszöge van? Adjunk meg egy ilyen sokszöget.

K. 756. Egy boltban 1 cm-es élhosszúságú és 2 cm-es élhosszúságú festett fakockát lehet vásárolni. A kisebb méretű kocka anyagköltségének 60%-a a festék ára, a többi pedig a fa ára. Mindkét fajta kocka ugyanolyan fából készül, és a nagyon vékony festékréteg vastagsága is azonos a felületükön. A kockák elkészítésének munkadíja egységes, a mérettől független összeg. A kockák előállításának költségeit figyelembe véve a boltnak 10 kis kocka és 5 nagy kocka előállítása 830 Ft-ba kerül, 5 kicsi és 15 nagy kockáé pedig 1490 Ft-ba. Hány Ft munkadíjat fizet a bolt egy kocka elkészítéséért?

K/C. 757. Kati egy 4×4-es négyzetrácsos papírlapot szeretne a rácsvonalak mentén kisebb darabokra vágni ollóval. Mutassuk meg, hogy pontosan 11-féle puzzle-t tudna kivágni úgy, hogy a kivágásnak megfelelően kirakott puzzle az eredeti 4×4-es négyzet mind a négy szimmetriatengelyére szimmetrikus lesz. Ez például egy megfelelő puzzle:





K/C. 758. Egy derékszögű háromszög alakú vitorlán a hajóosztály piros jele olyan magasságban van felfestve, hogy $MA+AC=CB+BM$. Ha $BM=7$ m és $CB=5$ m, akkor mennyivel van magasabban a vitorla felső csúcsa a jeltől?

❄

Beküldési határidő: 2023. március 10.
Elektronikus munkafüzet:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (757–758., 1753–1757.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 757. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 758. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1753. Egy hosszú négyzetrácsos papírcsík első tíz négyzetére sorban leírjuk az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ számokat, a következő tíz négyzetre ugyanezeket, és így tovább. Ezen a módon pontosan 2030 négyzetet számozunk meg. Egy bábut az első, 1-gyel jelölt négyzetre helyezünk. A bábu egy lépése ezután abból áll, hogy annyi mezőt halad előre, mint amilyen szám áll az általa éppen elfoglalt mezőn. Milyen szám van azon a mezőn, amelyen a bábu akkor áll, amikor következő lépésével már le kellene lépnie a 2030 hosszúságú papírcsíkról?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1754. Egy síkban egymás mellé helyeztük az $ABCD$, $BEFC$ és $EGHF$ négyzeteket. A B-ből a DE-re bocsátott merőleges talppontja K. Mutassuk meg, hogy az A, K, H pontok egy egyenesen vannak.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1755. Milyen a, b és c egész számokra teljesül az $a^2+b^2-8c=6$ egyenlőség?

(*Kanadai feladat*)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1756. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$4 \cdot \cos\big(\pi \cdot \sin(\pi \cdot x)\big) = -5x^2 + 15x - \frac{61}{4}$$

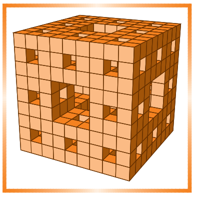
egyenletet.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1757. Jánoska egy négyzet alakú szőnyegen próbálja ki azt az új robotot, amelyet karácsonyra kapott. A négyzet oldalainak hossza 4 méter, csúcsai pedig rendre az A, B, C és D pontok. Legyen a P pont az $ABCD$ négyzet azon belső pontja, amely az AB és a BC oldaltól egyaránt 1 méter távolságra van. A P pontban álló robot egy véletlenszerűen kiválasztott irányban egyenesen elindul és 2 méterre eltávolodik a P ponttól, majd megáll. Mekkora a valószínűsége, hogy ekkor a robot a szőnyegen kívül van?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

Beküldési határidő: 2023. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5294–5301.)

B. 5294. A hegyesszögű ABC háromszög két magasságvonala AT_A és BT_B. Az AB oldal felezőpontja F, míg T_AT_B felezőpontja G. Bizonyítsuk be, hogy FG merőleges T_AT_B-re.

(*3 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

B. 5295. Adjuk meg a legnagyobb olyan k egész számot, amelyre 1722-t k-val elosztva a maradék $2m$, míg 2179-et k-val elosztva a maradék $3m$ (alkalmas $0 \leqslant m < k/3$ természetes számra).

(*3 pont*) Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

B. 5296. Hány különböző lépéssorozattal juthat el egy bástya a 8×8-as sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába, ha felváltva lép jobbra és felfelé, továbbá először jobbra lép és utoljára felfelé?

(*4 pont*) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5297. Az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle = 2CBA\sphericalangle$. Legyenek A', B', C' rendre az CA, AB és BC oldalak olyan belső pontjai, amelyekre az $A'B'C'$ háromszög hasonló az ABC háromszöghöz. Mutassuk meg, hogy a BAC és a $B'A'C'$ szögek felezői a $B'C'$ szakaszon metszik egymást.

(*4 pont*) Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

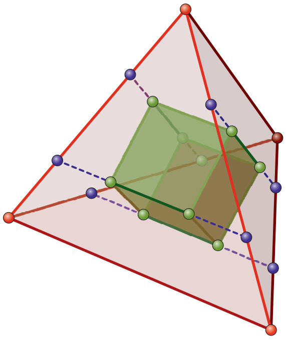
B. 5298. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$y + yx^2 - 2x = 0,$$
$$z + zy^2 - 2y = 0,$$
$$x + xz^2 - 2z = 0.$$

(*5 pont*) (*Amerikai feladat*)

B. 5299. A számegyenes $1, 2, 3$ pontjában egy-egy bolha ül. Ha egy bolha az a pontban, míg egy másik bolha a b pontban van, akkor az a-ban levő bolha átugorhat a $2b - a$ pontba. Előfordulhat-e véges sok ilyen ugrást követően, hogy a bolhák a $2^{100}, 3^{100}, 2^{100} + 3^{100}$ pontokban vannak?

(*6 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)



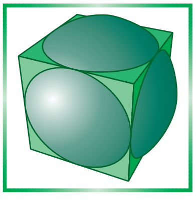
B. 5300. Legyen T egységnyi élhosszúságú szabályos tetraéder. Írjunk T-be egy kockát úgy, hogy T minden lapjára a kockának pontosan két csúcsa illeszkedjen az *ábra* szerint (a szaggatott vonalak párhuzamosak a tetraéder megfelelő éleivel). Mekkora a kocka térfogata?

(*5 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

B. 5301. Tegyük fel, hogy tíz pozitív egész szám reciprokának összege 1. Igazoljuk, hogy mindegyikük kisebb, mint 10^{1000}.

(*6 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

Beküldési határidő: 2023. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (845–847.)

A. 845. Az ABC háromszög beírt köre a BC, CA, AB oldalakat rendre a D, E, F pontokban érinti. Jelölje A' azt a pontot a beírt körön, melyre az $A'BC$ háromszög körülírt köre érinti a beírt kört. Hasonlóan definiáljuk a B' és C' pontot. Igazoljuk, hogy az $A'D$, $B'E$ és $C'F$ egyenesek átmennek egy ponton.

Javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Budapest)

A. 846. Legyen n egy pozitív egész szám, és legyenek adva a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorok a síkon. Az origóból indulva egy bolha a következő szabály szerint ugrál: $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén az i. percben 1/2 eséllyel ott marad, ahol éppen van, 1/4 eséllyel a v_i vektorral ugrik arrébb, 1/4 eséllyel pedig a $-v_i$ vektorral ugrik arrébb. Bizonyítandó, hogy az n. perc után nincs olyan pont, ahol nagyobb valószínűséggel tartózkodik a bolha, mint az origóban.

Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

A. 847. Adott egy véges A alaphalmaz, melynek néhány részhalmazát *szépnek* nevezzük. Legyen egy halmaz *kicsi,* ha részhalmaza egy szép halmaznak. Legyen egy halmaz *nagy,* ha van szép részhalmaza. (Egy halmaz lehet egyszerre kicsi és nagy is, és az is előfordulhat, hogy egy halmaz se nem kicsi, se nem nagy). Legyen $|A| = a$, továbbá jelölje a szép, a kicsi és nagy halmazok számát rendre s, k és n. Igazoljuk, hogy

$$2^a \cdot s \leqslant k \cdot n.$$

Javasolta: *Imolay András* (Budapest)

Beküldési határidő: 2023. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Informatikából kitűzött feladatok

I. 583. Egy tesztpályán egy robot mozgásának útvonalát vizsgáljuk. A robot mozgását az `E`, `J`, `B` betűk sorozatával vezéreljük. Az `E` hatására 1 egységet előre lép az aktuális irányba. A `J` és a `B` hatására jobbra, illetve balra fordul 90 fokot. A pályán a robot helyzetét derékszögű koordináta-rendszerben adjuk meg. A robot a $(0, 0)$ pontból indul, és kezdetben az y tengely pozitív irányába néz. A robot a mozgás során nem lép ki a $(-100, -100)$ és $(100, 100)$ szemközti csúcsokkal jellemzett rácsnégyzetből.

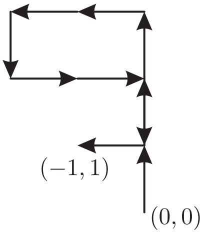
Készítsünk programot, amely megadja, hogy a robot milyen koordinátájú pontra jutott és milyen hosszú nyomvonalat hagyott a tesztpályán.

A program parancssori argumentuma legyen egy adatállomány neve. A fájl egyetlen sort tartalmaz, egy legfeljebb 1000 karakterből álló utasítássorozatot E, J és B betűkből.

A kimenet első sorában jelenítsük meg, hogy a robot a mozgás végén milyen koordinátájú pontra jutott, és a kimenet második sorában adjuk meg a robot nyomvonalának hosszát.

Például:

Bemenet (pl. a `be.txt` tartalma)	**Kimenet**
`EEEBEEBEBEEJEJE`	`-1 1` `9`



Beküldendő egy tömörített `i583.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 584 (É). A 60. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia 5. feladatában szerepel a következő: *„Bath Bankja érméket bocsát ki, melyeknek egyik oldalán* H*, másik oldalán* T *betű látható. Harrynek n ilyen érméje van, amelyek előtte balról jobbra, egy sorban vannak elrendezve. Harry ismételten végrehajtja a következő műveletet: ha pontosan $k>0$ olyan érme van, amin* H *van felül, akkor megfordítja a balról k-adik érmét; máskülönben minden érmén* T *van felül, és ekkor Harry megáll. Például $n=3$ esetén a* THT *sorozatból indulva* THT → HHT → HTT → TTT *a lépések sorozata, ami három lépés után megáll.”*

Modellezzük a feladatban leírt n ($n \leqslant 30$) hosszú sorozat viselkedését legfeljebb 100 lépésen keresztül táblázatkezelő segítségével!

1. Hozzunk létre egy táblázatkezelő munkafüzetet és mentsük `bathbankja` néven a program alapértelmezett formátumában.
2. Helyezzük el egy munkalapon a „Bath bankja” szöveget az A1-es cellába, valamint az „n=” szöveget az A3-as cellába.
3. Hozzunk létre a D3-as cellában és a sorban tőle jobbra egy „T” és „H” betűkből álló 30-tagú sorozatot véletlenszám felhasználásával úgy, hogy a két betűt egyenlő eséllyel kapjuk minden cellában.
4. Írjunk be egy pozitív egész számot a B3-as cellába, amely megadja a vizsgált sorozat hosszát. A 3. sorban generált sorozatból, illetve a később létrehozott sorozatokból csak az első n darab betűvel foglalkozunk a szimulációban.
5. Adjuk meg képlettel, hogy a generált számokból az első n darab az 5. sor megfelelő celláiban is megjelenjen, míg a sor további cellái üresen jelenjenek meg.
6. Adjunk meg a B6:B105 tartomány celláiban olyan képletet, amely megadja az adott cella feletti sorban a D oszlopban és attól jobbra lévő betűsorozatban a „H” betűk számát.
7. Adjunk meg a D6:M105 tartomány celláiban olyan képletet, amely a feladat leírásának megfelelően a sorozat k-adik betűjét kicseréli, míg a többi betűt átveszi a felette lévő sorozatból, ahol k az előző sorban lévő „H” betűk száma.
8. Állítsunk be a munkalap minden cellájára a mintához hasonló, a tartalom megjelenítéséhez megfelelő oszlopszélességet és formázzuk a munkalapot a *mintának* megfelelően.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	Bath bankja																	
2																		
3	n=	6		T	T	T	H	T	H	T	T	T	H	H	H	H	T	T
4																		
5	Lép	H db		T	T	T	H	T	H									
6	1	2		T	H	T	H	T	H									
7	2	3		T	H	H	H	T	H									
8	3	4		T	H	H	T	T	H									
9	4	3		T	H	T	T	T	H									
10	5	2		T	T	T	T	T	H									
11	6	1		H	T	T	T	T	H									
12	7	2		H	H	T	T	T	H									
13	8	3		H	H	H	T	T	H									
14	9	4		H	H	H	H	T	H									
15	10	5		H	H	H	H	H	H									
16	11	6		H	H	H	H	H	T									
17	12	5		H	H	H	H	T	T									
18	13	4		H	H	H	T	T	T									
19	14	3		H	H	T	T	T	T									
20	15	2		H	T	T	T	T	T									
21	16	1		T	T	T	T	T	T									
22	17	0		T	T	T	T	T	T									

Beküldendő egy tömörített `i584.zip` állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

I. 585. Aladdin egy szelencében N darab pénzérmét talált, melyek közül $0 < k < N$ hamis, a többi valódi. Azt, hogy melyik valódi és melyik hamis, csak Abu, a kismajom tudja megmondani. Aladdin véletlenszerűen kivesz három érmét a szelencéből, az egyiket Abunak adja, cserébe Abu megmondja a másik kettőről, van-e közte hamis. Abu valódi érméért igazat mond, és hazudik, ha hamis érmét kap. Ezután Aladdin megtartja a két érmét, ha Abu szerint nincs közte hamis, és visszateszi a szelencébe, ha Abu szerint van. Ezt addig ismétlik, amíg a szelencében már kevesebb, mint három érme van. Ekkor Aladdin elveszi a maradék érméket.

Készítsünk programot, amely modellezi a fenti folyamatot, és megadja, hogy adott k és $3 \leqslant N \leqslant 30$ esetén hány valódi érmére számíthat Aladdin és Abu. A program a standard bemenet első sorából olvassa be N és k értékét, majd 1000 véletlenszerű pénzérmesorozattal játssza végig Aladdin és Abu fenti lépéseit. A program a standard kimenet egyetlen sorába két értéket írjon: átlagosan hány valódi érmére számíthat Aladdin és Abu, ha N érméből k hamis.

Minta:

Bemenet	Kimenet
`20 3`	`10.0 7.0`
`25 9`	`8.4 7.6`
`12 10`	`1.3 0.7`

Beküldendő egy tömörített `i585.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

(A 2023. januári **K. 749.** feladat alapján)

I/S. 69. Adott egy N elemű T tömb, melynek i-edik elemét $T[i]$-vel jelöljük (1-től indexelve). Egy (i,j) számpárt *inverziónak* nevezünk, ha $1 \leqslant i < j \leqslant N$ és $T[i] > T[j]$. Szeretnénk a tömbben előforduló inverziók számát csökkenteni, és ehhez pontosan egy elemét törölhetjük a tömbnek. Adjuk meg, hogy minimum mennyi az inverziók száma a T tömbben, miután annak egy tetszőleges elemét töröltük.

A bemenet első sorában az N szám található, a tömb hossza. A második sorban N szám található szóközzel elválasztva, a tömb elemei. A kimenet egyetlen sorában egy szám szerepeljen: a törléssel kapható legkisebb inverziószám.

Minták:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`6 / 4 4 2 5 1 5`	`2`
`4 / 4 3 2 1`	`3`
`4 / 1 2 3 4`	`0`

Magyarázat (1. példa): ha töröljük a tömb 5. elemét, akkor az új tömb: $[4,4,2,5,5]$, melyben az inverziók száma 2, és ez a legkisebb elérhető inverziószám.

Korlátok: $2 \leqslant N \leqslant 10^5$; $1 \leqslant T[i] \leqslant 10^5$ egész számok. Időkorlát: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 30%-a kapható, ha a program helyes kimenetet ad az $N \leqslant 100$ esetekben. További 30% kapható, ha a program helyes kimenetet ad az $N \leqslant 1000$ esetekben.

Beküldendő egy `is69.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható. A dokumentáció tartalmazza a megoldás elméleti hátterét, az esetleg felhasznált forrásokat. Ne tartalmazzon kódrészleteket, azok magyarázata kódkommentek formájában a forrásprogramban szerepeljen.

S. 168. Egy leegyszerűsített felvételi eljárásban minden felvételiző legfeljebb 6 egyetemi szakra adhatja le a jelentkezését. Mindenki a saját listáján szereplő sorrend szerint szeretne bekerülni az adott képzésekre. Ha az első helyről elutasítják, akkor a második helyre kerül, ha a másodiktól is elutasítják, akkor a harmadikra stb. Ha egyik szakra sem veszik fel, akkor nem mehet egyetemre. Mivel a képzések pontszámítási rendszere eltérhet, ezért a felvételiző pontját minden szakra külön meg kell adni.

A felvételi a ponthatárok meghúzásával történik. Minden egyetem minden szakra megad egy ponthatárt. Ha egy felvételiző a ponthatárnál nagyobb vagy egyenlő pontszámot ért el, és a listájában előbb lévő szakokra nem vették fel, akkor az adott szakra veszik fel. Ha valakit több helyre is felvennének a pontjai alapján, akkor is csak a listájában legelöl lévő szakra iratkozhat be.

A ponthatárokat úgy kell meghúzni, hogy azok mindenhol a lehető legalacsonyabbak legyenek, de az egyetem ne lépje át az egyes szakokra kiszabott kvótát, azaz ne vegyen fel adott számú hallgatónál többet. Fontos szabály, hogy az azonos pontszámú hallgatókat csak együtt lehet felvenni, illetve elutasítani.

Adott az összes felvételiző preferencialistája a kiszámított felvételi pontokkal együtt és a szakok kvótái. Adjuk meg, melyik a legalacsonyabb ponthatár, amivel még valamelyik szakra be lehet kerülni, valamint adjuk meg, hogy hány felvételizőt nem vettek fel sehova.

A bemenet első sorában a felvételizők száma, F és az egyetemi szakok E száma szerepel. A következő F sor mindegyikében egy-egy felvételiző preferenciasorrendje, azaz legfeljebb 6 számpár szerepel. Minden számpár első tagja a szak sorszáma, a második tagja pedig a felvételiző pontszáma arra a szakra. A következő sorban a szakok E száma szerepel. Az alatta lévő sorban E szám szerepel. Az i-edik szám az i-edik szak kvótája, amit a felvettek száma nem léphet át.

A kimenet első sorába a legalacsonyabb ponthatárt kell írni. A kimenet második sorába azon felvételizők száma kerüljön, akik nem jutottak be sehova.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`4 2 / 1 480 / 1 450 2 450`	`430`
`1 420 2 430 / 2 400 / 2 1`	`1`

Magyarázat: az első szakra az első két felvételiző jut be. A harmadik lemarad az első szakról, így kiejti a negyedik felvételizőt a második szakról.

Korlátok: $1 \leqslant F \leqslant 10\,000$, $1 \leqslant E \leqslant 1000$. Az egyetemek 1-től E-ig sorszámozottak. A pontszám 0 és 500 közötti egész szám. Időkorlát: 1 mp.

Értékelés: a pontok 40%-a kapható, ha a program helyes kimenetet ad az $F, E \leqslant 100$ bemenetekre.

Beküldendő egy `s168.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható. A dokumentáció tartalmazza a megoldás elméleti hátterét, az esetleg felhasznált forrásokat. Ne tartalmazzon kódrészleteket, azok magyarázata kódkommentek formájában a forrásprogramban szerepeljen.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2023. március 15.

Rátz Tanár Úr Életműdíjak átadása 2022 decemberében

A magyar történelemre az évek során számos pedagógus volt nagy hatással. *Apáczai Csere János, Öveges József,* vagy éppen *Rátz László* csak néhány név azon tanárok közül, akik nemcsak újító módszereikkel és világfelfogásukkal hagytak nyomot a magyar oktatás és közélet területén, de olyan kiemelkedő tudósokat, szakembereket és gondolkodókat neveltek, akik mentoraik tanításait követve, munkájukkal tovább formálták nemcsak Magyarországot, de az egész világot.

Az díjat alapító három nagyvállalat, az Ericsson Magyarország, a Graphisoft és a Richter Gedeon jól tudja, hogy az igazán tehetséges pedagógus bárhonnan érkezhet. A Magyar Természettudományos Oktatásért Alapítvány létrehozásával egyedülálló módon immár két évtizede közös céljuk, hogy tisztelettel adózzanak azon tanárok előtt, akik kiemelkedő eredménnyel képezik a jövő tehetségeit és hozzájárulnak az új pedagógusgeneráció szakmai pályájának elindításához. Felismerve a közoktatásban dolgozók nehéz helyzetét és kifejezve támogatásukat, minden évben az ország egész területén bátorítják az embereket és intézményeket, hogy nevezzék azokat a reáltárgyakat oktató tanárokat, akik érdemesek a díjra. Fontosnak tartják, hogy a díjazás során mindenekelőtt a tudás és elhivatottság értéke legyen az, amely megkülönbözteti a jutalmazott pedagógusokat, ők pedig mindenkori céljuknak tekintik ezeket a tulajdonságokat felismerni és értékelni, bárhol is bukkannak rá a kiváló szakemberre.

A Rátz Tanár Úr Életműdíj ünnepélyes díjátadóját idén decemberben ismét a Magyar Tudományos Akadémia Dísztermében rendezték meg. Az elismerésben ez alkalommal is 8 kiváló pedagógus részesült, akik a matematika-, fizika-, kémia-, biológiaoktatás területén nyújtott kimagasló teljesítményükért vehették át a rangos kitüntetést. A 2022-es pályázati időszak fontos fejleményeként, a pedagógus Kossuth-díjként is emlegetett szakmai elismeréssel járó pénzjutalom összege is tovább növekedett – az idei évtől fejenként kétmillió forintot kaptak a díjazott tanárok.

„Ideális tanár az, aki nemcsak jól tanít, de elhivatottan teszi azt. Ez természetesen meglátszik munkáján, éleslátásán, a fiataloknak átadott tudáson, saját és diákjai szorgalmán, eredményein. Az elmúlt évek pályázati időszakai során megtapasztaltuk, e tulajdonságok igazán különlegesek és sosem tudhatjuk végül hol fedezzük fel őket. Nagy örömünkre szolgál, hogy idén is az ország minden területéről érkeztek hozzánk kiemelkedő nevezések, megadva ezzel a lehetőséget az ott dolgozó pedagógusok munkájának elismerésére.” – Mondta *Kroó Norbert,* az Alapítvány kuratóriumának elnöke.

2022-ben a következő pedagógusoknak ítélte oda a díjat a kuratórium:

Kémiából **Hotziné Pócsi Anikó Judit** (Debrecen, Tóth Árpád Gimnázium) és **Tölgyesné Kovács Katalin** (Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium);

Biológiából **Bertáné Kövesdi Gabriella** (Keszthelyi Vajda János Gimnázium) és **Fazekas Andrea** (Budapest, Deák Téri Evangélikus Gimnázium);

Matematikából **Erdős Gábor** (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimnázium) és **Varga József** (Kecskemét, Bányai Júlia Gimnázium);

Fizikából **Koncz Károly** (Pécs, PTE Babits Mihály Gyakorló Gimnázium) és **Moróné Tapody Éva** (Szegedi Tömörkény István Gimnázium, Művészeti Szakgimnázium).

A KöMaL szerkesztősége is kíván mindannyiuknak – és tanártársaiknak is – további erőt a tehetséges diákok felkutatásához, felkarolásához és támogatásához!

A részletes indoklások és az évente megújuló felhívás megtalálható a Díj honlapján: `http://ratztanarurdij.hu`, a díjazottakat bemutató kisfilmek pedig megtekinthetőek a Rátz Tanár Úr Életműdíj youtube-csatornáján:

`https://www.youtube.com/ratztanarureletmudij5822/videos`.

Beszámoló a 2022. évi Eötvös-versenyről

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2022. évi Eötvös-versenye október 14-én délután 3 órai kezdettel tíz magyarországi helyszínen[1] került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 60 versenyző adott be dolgozatot, 21 egyetemista és 39 középiskolás.

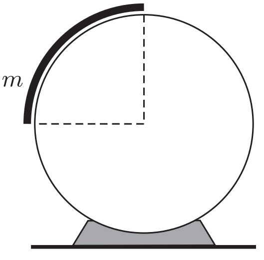
Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.

❄

1. feladat. *Vízszintes tengelyű, rögzített hengerre egy vékony, hajlékony, m tömegű láncot helyezünk az* áb*rán* *látható módon, és nyugalomban tartjuk. A henger és a lánc közötti súrlódás elhanyagolható.*

a) *Mekkora gyorsulással indul el a lánc, ha szabadon engedjük?*

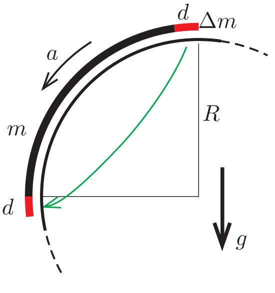
b) *Mekkora a láncot feszítő erő legnagyobb értéke az elengedés utáni pillanatban?*



(*Gelencsér Jenő*)

Megoldás. a) Számítsuk ki a lánc gyorsulását az indulás pillanatában. Ezt többféle módszerrel is megtehetjük.

I. módszer. Ha a lánc a gyorsulással indul, akkor egy nagyon rövid t időtartam alatt az elmozdulása $d = \frac{a}{2}t^2$, a sebessége pedig $v = at$ lesz. Alkalmazzuk a mechanikai energiamegmaradás törvényét erre a mozgásra (*1. ábra*).



1. ábra

A lánc mozgási energiája (annak megváltozása)

$$\Delta E_{\text{mozgási}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ma^2t^2.$$

A helyzeti energia változását legegyszerűbben úgy kaphatjuk meg, hogy gondolatban levágunk a lánc felső végéről egy d hosszúságú darabot, és azt a lánc alsó

[1] Részletek a verseny honlapján: `http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm`

végéhez „ragasztjuk". Ennek a darabkának a tömege

$$\Delta m = \frac{m}{\frac{1}{2}R\pi}d,$$

és mivel R távolsággal mélyebbre kerül,

$$\Delta E_{\text{helyzeti}} = -\Delta m\, gR = -\frac{2mg}{\pi}d = -\frac{mg}{\pi}at^2.$$

Az energiamegmaradás tétele szerint

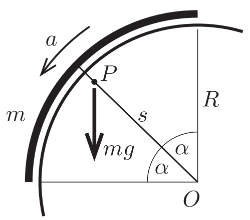
$$\Delta E_{\text{mozgási}} + \Delta E_{\text{helyzeti}} = 0,$$

ahonnan

$$\frac{1}{2}mat^2\left(a - \frac{2}{\pi}g\right) = 0.$$

Mivel $mat^2 \neq 0$, a keresett gyorsulás:

$$a = \frac{2}{\pi}g.$$



2. ábra

II. módszer. Ismert (vagy táblázatokban megtalálható), hogy az R sugarú, 2α nyílásszögű homogén körív P tömegközéppontja a kör O középponttól

$$s = \frac{\sin\alpha}{\alpha}R$$

távolságra van (*2. ábra*). Esetünkben $\alpha = \pi/4$, így

$$s = \frac{\sqrt{8}}{\pi}R \approx 0{,}9R.$$

Az éppen meginduló láncot tekinthetjük merev testnek, amelynek az O pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = mR^2$. A láncra (merev testre) ható külső erők forgatónyomatéka csak a nehézségi erőből származik, nagysága

$$M = mgs\,\sin\frac{\pi}{4} = mgR\frac{\sqrt{8}}{\pi}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\pi}mgR.$$

(A láncra hatnak még a henger által kifejtett, helyről helyre változó kényszererők is, ezen erők azonban – súrlódásmentes esetben – mindenhol sugárirányúak, tehát az O pontra vonatkoztatott forgatónyomatékuk nulla.)

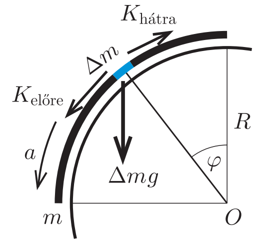
A forgómozgás alaptörvénye szerint a test szöggyorsulása

$$\beta = \frac{M}{\Theta} = \frac{2}{\pi}\,\frac{mgR}{mR^2} = \frac{2}{\pi}\,\frac{g}{R},$$

a lánc „kerületi" gyorsulása pedig

$$a = R\beta = \frac{2}{\pi}\,g.$$

b) A láncot feszítő K erő a lánc végeinél nulla, közöttük pedig valahol maximuma van. Ezt a helyet, valamint a maximális feszítőerő nagyságát keressük. A lánc egy-egy kicsiny, φ szöggel jellemezhető helyen lévő darabkájára ható nehézségi erő önmagában (éppen úgy, mint egy φ hajlásszögű lejtőn) $g\sin\varphi$ gyorsulást hozna létre, ami a lánc felső részén kisebb, az aljának közelében nagyobb, mint az egész lánc a gyorsulása (*3. ábra*).



3. ábra

Emiatt a felső részeken a láncszemekre ható feszítőerők különbsége általában nullától különböző, hiszen egy Δm tömegű, kicsiny lánc-darabka mozgásegyenlete

$$K_{\text{előre}} - K_{\text{hátra}} + \Delta m\, g \sin\varphi = \Delta m\, a = \Delta m\, g\frac{2}{\pi},$$

vagyis

$$K_{\text{előre}} = K_{\text{hátra}} + \Delta m \cdot g\left(\frac{2}{\pi} - \sin\varphi\right).$$

Látható, hogy a lánc felső végétől ($\varphi = 0$ helytől) elindulva mindaddig, amíg

$$\sin\varphi < \frac{2}{\pi}, \quad \text{addig} \quad K_{\text{előre}} > K_{\text{hátra}},$$

vagyis a $K(\varphi)$ kényszererő (a láncot feszítő erő) φ növekvő függvénye. Ha viszont

$$\sin\varphi > \frac{2}{\pi}, \quad \text{akkor} \quad K_{\text{előre}} < K_{\text{hátra}},$$

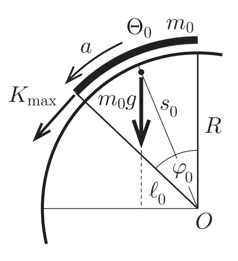
tehát ebben a tartományban a $K(\varphi)$ kényszererő φ csökkenő függvénye. Ezek szerint a kényszererő

$$\varphi_0 = \arcsin\frac{2}{\pi} \approx 0{,}69 \text{ radián} \approx 39{,}5^\circ$$

szögnél a legnagyobb. Itt

$$K_{\text{előre}} = K_{\text{hátra}} = K_{\max}.$$

Kérdés, hogy mekkora $K_{\max}$ értéke. Ezt a lánc felső ($\varphi \leqslant \varphi_0$ szögekkel jellemzett) darabjának forgási mozgásegyenletéből kaphatjuk meg (*4. ábra*).



4. ábra

A kérdéses láncdarab tömege

$$m_0 = \frac{m}{\frac{1}{2}\pi}\varphi_0,$$

a tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_0 = m_0 R^2,$$

tömegközéppontjának az O ponttól mért távolsága

$$s_0 = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right)}{\frac{1}{2}\varphi_0} R,$$

és a tömegközéppont távolsága az O ponton átmenő függőleges egyenestől

$$\ell_0 = s_0 \sin\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right).$$

A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$K_{\max} R + m_0 g \ell_0 = \Theta_0 \frac{a}{R},$$

ahonnan a fentebb kiszámított értékek behelyettesítése után kapjuk, hogy

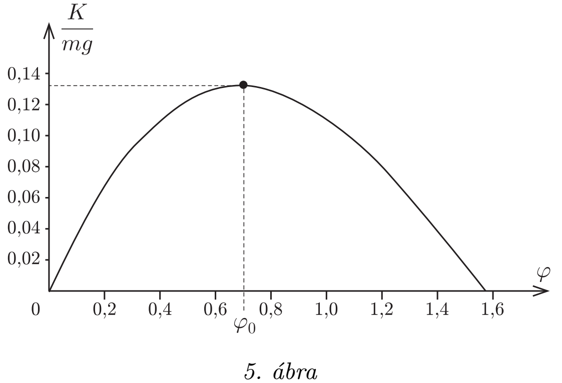
$$K_{\max} = mg\left(\frac{4}{\pi^2}\varphi_0 - \frac{4}{\pi}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right) \approx 0{,}13\, mg.$$

Ugyanezt az eredményt megkaphatjuk a munkatételből is, ha felírjuk, hogy egy nagyon rövid időtartam alatt a nehézségi erő munkájának és a K kényszererő munkájának összege a kezdetben álló láncdarab mozgási energiájával lesz egyenlő.

A láncot feszítő erőt a fentiek mintájára tetszőleges pontban (tetszőleges φ szögre) kiszámíthatjuk:

$$K(\varphi) = mg\left(\frac{4}{\pi^2}\varphi - \frac{4}{\pi}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right),$$

és ábrázolhatjuk is (*5. ábra*).



5. ábra

2. feladat. *Egy téglatest alakú gáztartályt egy kétrétegű, finom szövésű fémháló oszt két részre; a két térrész térfogatának aránya* $1:2$. *A fémháló két rétege a közöttük lévő, igen keskeny rés miatt nem ér össze. A tartályban egyszeresen pozitív töltésű ionokból álló gáz található. A hőmérsékletet mindkét térrészben állandó,* 1200 K *értéken tartjuk. Milyen polaritású és mekkora egyenfeszültséget kell* *kapcsolni a fémháló rétegei közé ahhoz, hogy hosszú idő után a két térrészben található ionok száma megegyezzen? (A gáz elég ritka ahhoz, hogy a részecskék közötti kölcsönhatás elhanyagolható legyen, az átlagos szabad úthossz pedig jóval nagyobb a fémháló rétegeinek távolságánál. Az ionok töltése állandó.)*

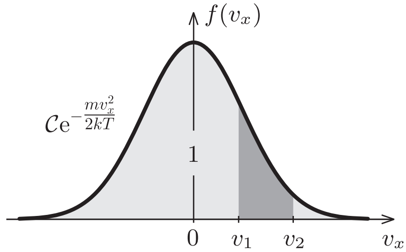
(*Vigh Máté*)

I. megoldás. Ez a gondolatmenet a kinetikus gázelméleten alapul. Elöljáróban összefoglalunk néhány fontosabb tudnivalót, amit a megoldás során fel fogunk használni[2].

Ismert, hogy adott T hőmérsékletű gázban a részecskék sebességének egy adott (például x) irányba eső vetülete nem mutat egyenletes eloszlást: kisebb sebességértékek előfordulása gyakoribb, míg a nagy értékek kevésbé valószínűek. Ezt az előfordulási gyakoriságot az $f(v_x)$ Maxwell–Boltzmann-féle eloszlásfüggvénnyel lehet jellemezni, amely megadja, hogy a részecskék mekkora hányada rendelkezik egy adott $(v_x, v_x + \mathrm{d}v_x)$ intervallumba eső sebességkomponenssel:

$$\frac{\text{a } (v_x, v_x + \mathrm{d}v_x) \text{ tartománynak megfelelő részecskék száma}}{\text{összes részecske száma}} = f(v_x)\mathrm{d}v_x.$$

Ebből a meghatározásból következik, hogy az $f(v_x)$ függvény görbe alatti területe *tetszőleges* (tehát nem csak infinitezimálisan kicsiny) sebességintervallumon megadja az abba a tartományba eső részecskék számának arányát a teljes részecskeszámhoz viszonyítva (lásd a *6. ábrát*). Ennek értelmében az $f(v_x)$ eloszlásfüggvény teljes görbe alatti területe szükségszerűen 1 (más szóval a függvény normált).



6. ábra

Az $f(v_x)$ függvény alakját egy $\mathcal{C}$ normálási tényező erejéig az x irányú mozgáshoz tartozó $mv_x^2/2$ energia határozza meg a Boltzmann-faktor alapján:

$$f(v_x) = \mathcal{C}\mathrm{e}^{-\frac{mv_x^2}{2kT}},$$

amelyet *normáleloszlásnak* vagy *Gauss-eloszlásnak* neveznek.

Ezután térjünk rá a konkrét feladat megoldására. A koordináta-rendszerünk x tengelyét válasszuk a fémháló síkjára merőlegesen, a kisebb térrész felől a nagyobb felé mutató irányban. A kisebb térrészre vonatkozó fizikai mennyiségeket jelöljük 1-es indexszel, míg a nagyobb térrészhez tartozó mennyiségeket 2-es indexszel.

Ha a fémháló két rétege közé nem kapcsolunk feszültséget, a gáz egyenletesen tölti ki az egész tartályt, azaz a két térrészben a részecskeszám-sűrűség (n) megegyezik, az ionok számának aránya pedig a térfogatok arányával egyezik meg. A kívánt végállapotban azonban a két térrész részecskeszáma egyenlő, így a részecskeszám-sűrűségek viszonya:

$$n_1 = 2n_2.$$

[2] Az Eötvös-versenyen bármely nyomtatott szakirodalom szabadon használható.

Ez az inhomogén elrendeződés olyan polaritású elektromos térrel tartható fenn, amelyben a térerősség akadályozza a pozitív töltésű ionok áramlását a kisebb térrészből a nagyobb térrész irányába. A síkkondenzátornak tekinthető fémhálónak tehát a kisebb térrész felőli oldala lesz negatív töltésű, a nagyobb térrész felé eső oldala pedig pozitív polaritású.

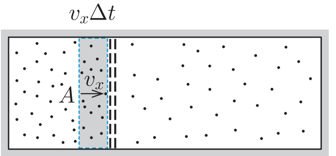
A feladat szövege szerint a részecskék átlagos szabad úthossza jóval nagyobb a fémháló rétegeinek távolságánál, ezért a „kondenzátor" belsejében az ionok egymással nem (pontosabban elhanyagolhatóan kis eséllyel) ütköznek, kizárólag az itt uralkodó elektromos mező hatása alatt állnak. A nagyobb térrészből a fémháló rétegei közé belépő ionok az elektromos tér hatására felgyorsulnak, majd a kisebb térrészbe érve az ott lévő részecskékkel ütközve termalizálódnak. Ebben az irányban tehát az ionok akadály nélkül áthaladnak a hálón. A kisebb térrész felől belépő ionok azonban csak akkor tudnak áthaladni a fémhálón, ha az x irányú sebességkomponensük nagyobb egy bizonyos v^* értéknél, ellenkező esetben az elektromos tér visszafordítja őket. Az ilyen irányú áthaladáshoz szükséges határsebességet a munkatételből kaphatjuk meg:

$$-eU = 0 - \frac{1}{2}mv^{*2} \quad \longrightarrow \quad v^* = \sqrt{\frac{2eU}{m}},$$

ahol e az elemi töltés, U pedig a fémhálóra kapcsolt feszültség. Itt is igaz, hogy a $v_x > v^*$ feltételt teljesítő ionok a nagyobb térrészbe érve termalizálódnak. Hogy pontosan mekkora az a v^* sebesség (és mekkora az ehhez tartozó U feszültség), amelynél a két térfélben a részecskék száma azonos marad, azt vizsgáljuk meg részletesebben!

Tekintsük a kisebb térrészben lévő részecskék közül azokat, melyeknek x irányú sebességkomponense a rács felé mutat és a $(v_x, v_x + \mathrm{d}v_x)$ tartományba esik. Ezek az ionok az eloszlásfüggvény definíciója alapján $n_1 f(v_x)\,\mathrm{d}v_x$ térfogati sűrűségben helyezkednek el a kisebb térrészben. Kicsiny Δt időtartam alatt a részecskék ezen csoportjából csak azok az ionok érnek el a fémhálóig, melyek legfeljebb $v_x \Delta t$ távolságra vannak attól. A fémháló teljes A területére tehát Δt idő alatt a megadott sebességtartományban

$$n_1 f(v_x)\mathrm{d}v_x \cdot A v_x \Delta t$$



7. ábra

számú ion érkezik be a kisebbik térrész felől. A fémhálóra kapcsolt feszültség miatt csak a $v_x > v^*$ feltételt teljesítő részecskék jutnak át a nagyobb térrészbe (*7. ábra*), ezért az átjutó ionok számát a sebesség szerinti integrálként a következőképp fejezhetjük ki:

$$\Delta N_1 = \int_{v^*}^{\infty} n_1 f(v_x) \cdot A v_x \Delta t \, \mathrm{d}v_x.$$

Ha ezt a mennyiséget elosztjuk az A területtel és a Δt időtartammal, akkor megkapjuk a kisebb térrészből a nagyobb térrészbe belépő részecskeáram-sűrűséget:

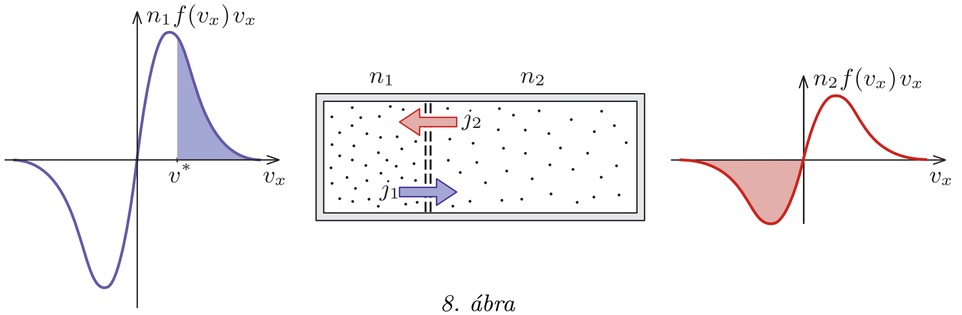
$$j_1 = \frac{\Delta N_1}{A\Delta t} = n_1 \int\limits_{v^*}^{\infty} f(v_x) v_x \, \mathrm{d}v_x .$$

Teljesen hasonlóan számolhatjuk ki a nagyobb térrészből a kisebbe átlépő részecskék áramsűrűségét, azzal a különbséggel, hogy ilyen irányban minden olyan részecske átjut a fémhálón, amelynek x irányú sebességkomponense negatív:

$$j_2 = n_2 \int\limits_{-\infty}^{0} f(v_x) v_x \, \mathrm{d}v_x .$$

Látható, hogy j_2 negatív, hiszen a negatív x tengely irányába történő részecskeáramlást ír le. Állandósult állapotban (lásd a *8. ábrát*) a nagyobb térrészbe belépő és onnan kilépő részecskék áramsűrűségének előjeles összege zérus:

$$j_1 + j_2 = 0.$$



8. ábra

Felhasználva $f(v_x)$ korábban felírt alakját:

$$n_1 \int\limits_{v^*}^{\infty} \mathcal{C}\mathrm{e}^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} v_x \, \mathrm{d}v_x + n_2 \int\limits_{-\infty}^{0} \mathcal{C}\mathrm{e}^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} v_x \, \mathrm{d}v_x = 0.$$

Az integrálok kiszámításához érdemes áttérni a $w = mv_x^2/(2kT)$ változóra. Ennek segítségével

$$\mathrm{d}w = \frac{m}{kT} v_x \, \mathrm{d}v_x ,$$

így a fenti egyenlet egyszerűsítések és az integrálási határok megváltoztatása után így írható:

$$n_1 \int\limits_{\frac{eU}{kT}}^{\infty} \mathrm{e}^{-w} \mathrm{d}w + n_2 \int\limits_{\infty}^{0} \mathrm{e}^{-w} \mathrm{d}w = 0.$$

Az integrálokat most már elvégezhetjük:

$$n_1[-\mathrm{e}^{-w}]_{\frac{eU}{kT}}^{\infty} + n_2[-\mathrm{e}^{-w}]_{\infty}^{0} = 0.$$

A primitív függvényeket a határokon kiértékelve kapjuk:

$$n_1\mathrm{e}^{-\frac{eU}{kT}} - n_2 = 0,$$

ahonnan a keresett U feszültség:

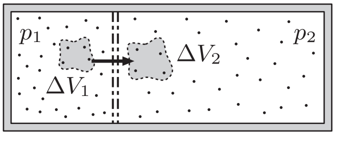
$$U = \frac{kT}{e}\ln\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \frac{kT}{e}\ln 2 \approx 72\ \mathrm{mV}.$$

Megjegyzés. Voltak versenyzők, akik a fizikai jelenséget részletesen átlátták, az áramsűrűségekre felírt integrálokat azonban nem számolták ki, ehelyett észszerű becsléseket végeztek. A Versenybizottság ezeket a közelítéseket is értékelte.

II. megoldás. Az állandósult állapot kialakulása után a kisebb térrészben kétszer akkora lesz a nyomás, mint a nagyobb térrészben, hiszen a hőmérséklet és részecskeszám ugyanakkora, a térfogatok aránya viszont 1 : 2:

$$p_1 = 2p_2.$$

Végezzük el a következő gondolatkísérletet. A kisebb térrészben vegyünk körbe ΔN számú iont egy könnyű ballonnal, ahol ΔN sokkal kisebb a teljes gázmennyiség részecskeszámánál. Jelölje a ballon kezdeti térfogatát ΔV_1. Vigyük át gondolatban ezt a ballont a másik térrészbe, majd engedjük ott izotermikusan kitágulni akkora ΔV_2 térfogatig, ameddig a bezárt gáz nyomása p_1 értékről p_2-re csökken (*9. ábra*). Számítsuk ki, mekkora munkát kell végeznünk a folyamat közben!



9. ábra

Amikor a ΔV_1 térfogatú ballont a kisebb térrészből eltávolítjuk, a térrészben lévő p_1 nyomású gáz igyekszik a ballont „kilökni” onnan. Ennek megakadályozására nekünk negatív,

$$W_1 = -p_1\Delta V_1$$

munkát kell végeznünk. Ezután a fémháló elektromos mezőjén a térerősséggel ellentétes irányban kell elmozdítani az $e\Delta N$ össztöltésű gázmennyiséget, ez további

$$W_2 = e\Delta N\cdot U$$

munkát igényel. Amikor a ballont izotermikusan kitágítjuk a végső ΔV_2 térfogatra, az általunk végzett munka negatív, értéke

$$W_3 = -\Delta N kT\ln\frac{\Delta V_2}{\Delta V_1}.$$

Nem szabad megfeledkeznünk arról sem, hogy a nagyobb térrészben ΔV_2 térfogatú helyet kell szorítani az oda átvitt gázmennyiségnek, ehhez

$$W_4 = p_2 \Delta V_2$$

munka szükséges. A képzeletbeli folyamat során tehát összesen

$$W_{\text{teljes}} = -p_1 \Delta V_1 + e\Delta N \cdot U - \Delta NkT \ln \frac{\Delta V_2}{\Delta V_1} + p_2 \Delta V_2$$

munkát végeztünk. Vegyük észre, hogy az első és az utolsó tag kiejti egymást, hiszen az ideális gázok állapotegyenlete szerint

$$p_1 \Delta V_1 = \Delta NkT, \qquad p_2 \Delta V_2 = \Delta NkT.$$

Szintén ebből következik, hogy a ballon végső és kezdeti térfogatának aránya kifejezhető a nyomások arányával:

$$\frac{\Delta V_2}{\Delta V_1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

A teljes munkavégzés tehát így írható:

$$W_{\text{teljes}} = e\Delta N \cdot U - \Delta NkT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Ha ez a munka negatív lenne, akkor a folyamat magától végbemenne, azaz a kis gázmennyiség átjutna a kisebb térrészből a nagyobb térrészbe. Ellenkező esetben, ha a munka előjele pozitív lenne, a folyamat az ellentétes irányban menne végbe spontán módon. Mivel stacionárius állapotban egyik sem történik meg, W_{teljes} szükségképpen zérus:

$$e\Delta N \cdot U - \Delta NkT \ln \frac{p_1}{p_2} = 0.$$

A mozgatott gázmennyiség ΔN részecskeszámával leoszthatunk, majd közvetlenül megkapjuk az

$$U = \frac{kT}{e} \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) = \frac{kT}{e} \ln 2$$

eredményt, amely megegyezik az I. megoldás eredményével.

III. megoldás. Vegyük észre, hogy a megoldás, amit kaptunk, átrendezhető a következő alakba:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1} = \mathrm{e}^{-\frac{eU}{kT}} = \mathrm{e}^{-\frac{\Delta E}{kT}},$$

ahol ΔE a két térrész közötti (elektrosztatikus) potenciális energia különbsége. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha átrendezzük a jól ismert „barometrikus magasságformula” képletét:

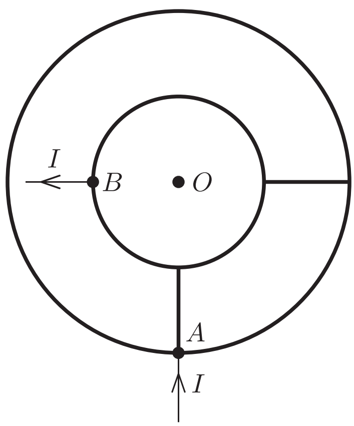
$$\frac{p_2}{p_1} = \mathrm{e}^{-\frac{\varrho g \Delta h}{p_1}} = \mathrm{e}^{-\frac{mg\Delta h}{kT}} = \mathrm{e}^{-\frac{\Delta E}{kT}},$$

ahol ϱ a gáz sűrűsége, g a nehézségi gyorsulás, Δh a magasságkülönbség, m a részecskék tömege, és ΔE itt is a két helyzet közötti (gravitációs) potenciális energia különbsége.

Ha nem a „nagy szabad úthossz” közelítését vizsgálnánk, a két fémháló között a nyomás ugyanúgy változna, mint a „barometrikus magasságformula” izotermikus légoszlopában. Az mg nehézségi erő helyére az eE elektromos erő kerülne.

Mindkét esetben megjelenik az $\mathrm{e}^{-\frac{\Delta E}{kT}}$ Boltzmann-tényező. Ennek magyarázata az, hogy a gázrészecskéket energetikai szempontból jellemző (v_x, v_y, v_z) sebességkomponensek mellett a feladatbeli rendszerben megjelenik még egy „szabadsági fok” is: az, hogy a részecske melyik térfélben helyezkedik el. A nagyobb (2-es számú) térrészben az ionok potenciális energiája $\Delta E = eU$ értékkel magasabb, mint a kisebb (1-es számú) térrészben, ezért az ionok megtalálási valószínűség-sűrűségének (vagy az azzal arányos részecskesűrűségek) aránya $\mathrm{e}^{-\frac{eU}{kT}}$.

Ezzel a gondolatmenettel a megoldás – megfelelő indoklással – egyetlen sorban megkapható.



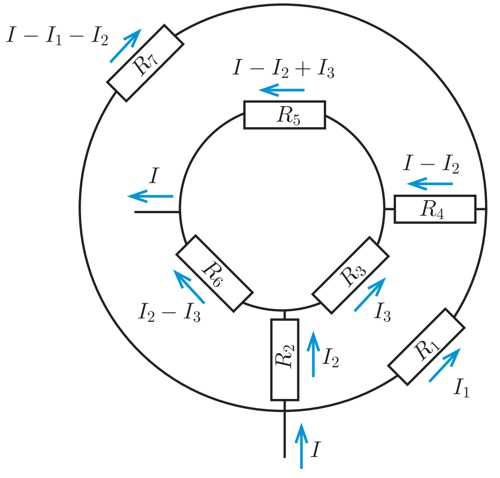
3. feladat. *Egyenletes vastagságú ellenálláshuzalból r és $2r$ sugarú karikákat készítünk, és azokat egy síkban, koncentrikusan helyezzük el. A karikákat két helyen, ugyanabból az ellenálláshuzalból készült, sugárirányú „küllőkkel” kötjük össze, az ábrán látható módon. Az elrendezés A pontjánál (sugárirányban) I erősségű áramot vezetünk be, a B pontjából pedig (szintén sugárirányban) elvezetjük azt. Mekkora a mágneses indukcióvektor nagysága a karikák O középpontjában?*

(*Cserti József*)

I. megoldás. A feladat megoldása során először a Kirchhoff-törvények segítségével meghatározzuk az egyes vezetékekben folyó áramokat, majd kiszámoljuk az ezek által keltett mágneses teret a karikák közös O középpontjában.

Jelölje R az r hosszúságú vezetékdarab ellenállását! Így az egyes körívek, illetve a küllők ellenállása, az ábrán megadott jelöléseket használva, az alábbiak szerint adódik: $R_1 = \pi R$, $R_2 = R_4 = R$, $R_3 = R_6 = \frac{\pi}{2} R$, $R_5 = \pi R$, $R_7 = 3\pi R$.

Az A pontban bevezetünk, a B pontban kivezetünk I áramot. Az egyes vezetékdarabokon folyó áramokat a *10. ábra* alapján vesszük fel, ahol már kielégítettük a Kirchhoff-féle csomóponti törvényeket, azaz bármely csomópontra a bemenő és kimenő áramok összege megegyezik. Láthatjuk, hogy összesen három ismeretlen paraméterünk van: I_1, I_2 és I_3, melyeket a huroktörvényekből határozhatunk meg. Írjuk fel a huroktörvényeket a külső karikára, a belső karikára, valamint a jobb alsó



10. ábra

negyed körgyűrű határára:

$$(1) \qquad R_1 I_1 - R_7(I - I_1 - I_2) = 0 \quad \to \quad \pi R\big[I_1 - 3(I - I_1 - I_2)\big] = 0,$$

$$R_3 I_3 + R_5(I - I_2 + I_3) - R_6(I_2 - I_3) = 0,$$

amiből

$$(2) \qquad \frac{\pi R}{2}\big[I_3 + 2(I - I_2 + I_3) - (I_2 - I_3)\big] = 0,$$

adódik, és végül

$$(3) \qquad R_2 I_2 + R_3 I_3 - R_4(I - I_2) - R_1 I_1 = R\left[I_2 + \frac{\pi}{2} I_3 - (I - I_2) - \pi I_1\right] = 0.$$

Az ismeretlen paraméterek (I_1, I_2 és I_3) egy háromismeretlenes, lineáris egyenletrendszer megoldásaként adódnak. Tényleg szükség van ezek kiszámolására? Próbáljuk megoldani a feladatot enélkül!

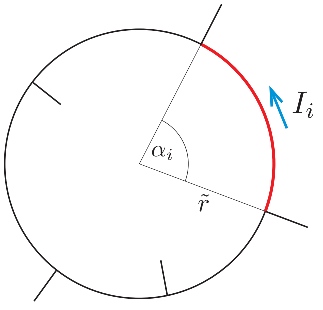
A sugárirányú bevezetések, kivezetések és küllők a Biot–Savart törvény értelmében nem adnak járulékot a középpontban mért mágneses tér értékéhez. A mágneses indukció nagysága egy r sugarú, I áramjárta körvezető középpontjában $B = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{r}$. Ha csak egy α középponti szöggel leírható körív járulékát tekintjük a középpontban, az $B = \frac{\mu_0 \alpha}{4\pi}\frac{I}{r}$ alakban adódik. Ezek alapján már kiszámíthatjuk a külső, majd a belső karika által keltett mágneses teret. A külső karika esetén:

$$B = \frac{\mu_0}{8}\frac{I_1}{2r} - \frac{3\mu_0}{8}\frac{I - I_1 - I_2}{2r} = \frac{\mu_0}{16r}\big[I_1 - 3(I - I_1 - I_2)\big] = 0,$$

azaz a mágneses indukció értéke nulla a középpontban. A levezetés utolsó lépésében felhasználtuk az (1) egyenletet. A belső karika esetében:

$$B=\frac{\mu_0}{8}\frac{I_3}{r}+\frac{2\mu_0}{8}\,\frac{I-I_2+I_3}{r}-\frac{\mu_0}{8}\,\frac{I_2-I_3}{r}=\frac{\mu_0}{8r}\big[I_3+2(I-I_2+I_3)-(I_2-I_3)\big]=0,$$

itt is nullának adódik a mágneses indukció nagysága. Az utolsó lépésben a (2) egyenletet használtuk fel. Összegezve, a teljes rendszer esetében is nulla a mágneses indukcióvektor a középpontban. Mi a mélyebb fizikai oka ennek az eredménynek? Nézzük át a probléma általánosított megoldását!



11. ábra

II. (általános) megoldás. A felrajzolt *11. ábra* csak sugárirányú küllőkből és koncentrikus karikákból áll. A sugárirányú szakaszok által keltett mágneses tér a középpontban nulla. Tekintsünk egy $\tilde{r}$ sugarú karikát, melyet a befutó sugárirányú vezetékek körívekre bontanak. Az i. körív középponti szöge legyen α_i, hossza ℓ_i, rajta átfolyó áram I_i, ellenállása R_i, ezen ellenálláson eső feszültség U_i.

Az i. körív által keltett mágneses tér a középpontban

$$B_i=\frac{\mu_0\alpha_i}{4\pi}\,\frac{I_i}{\tilde{r}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\ell_i I_i}{\tilde{r}^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{rR_iI_i}{R\tilde{r}^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{rU_i}{R\tilde{r}^2},$$

ami arányos a köríven eső feszültséggel. Összegezve az összes körív járulékát:

$$B=\sum_i B_i=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{r}{R\tilde{r}^2}\sum_i U_i=0.$$

A huroktörvény alapján a feszültségesések összege a zárt karikára nulla, így a karika által keltett mágneses tér is nulla a középpontban. Az általános megoldás alapján akárhány koncentrikus kör és sugárirányú vezetékből összeállított elrendezés esetén nulla a mágneses tér a középpontban.

❄

Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2022. november 25-én délután került sor az ELTE TTK Konferenciatermében. Meghívást kaptak az 50 és 25 évvel ezelőtti Eötvös-verseny nyertesei is. A 25 évvel ezelőtti díjazottak közül *Egri Győző, Koncz Imre* és *Várkonyi Péter* jöttek el – ők pár mondatban beszéltek a pályafutásukról.

Ezután következett a 2022. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az 1. feladat megoldását *Gnädig Péter,* a 2. feladatét *Vankó Péter,* a 3. feladatét *Széchenyi Gábor* ismertette.

Az esemény végén került sor az eredményhirdetésre. A díjakat *Ormos Pál,* az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

Mindhárom feladat helyes megoldásáért *első díjat* nyert **Kovács Balázs Csaba,** az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Hatvani Bajza József Gimnáziumban érettségizett *Maruzsiné Sevella Judit* tanítványaként.

Az első feladat helyes, valamint a második és harmadik feladat lényegében helyes megoldásáért *második díjat* nyert **Kincses Ábel,** a BME fizika BSc szakos hallgatója, aki a Deák téri Evangélikus Gimnáziumban érettségizett *Horváth Gabriella és Szőkéné Mezősi Tímea* tanítványaként.

Az első és a harmadik feladat helyes megoldásáért *harmadik díjat* nyert **Gurzó József,** az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumban érettségizett *Nagy Piroska Mária* tanítványaként.

A harmadik feladat helyes, valamint az első vagy a második feladat lényegében helyes megoldásáért *kiemelt dicséretet* kapott **Bognár András Károly,** a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, Nagy Piroska Mária tanítványa; **Csonka Illés,** a Ciszteri Rend Nagy Lajos Gimnáziuma 11. osztályos tanulója, *Jéhn János és Pálfalvi László* tanítványa; valamint **Hajós Balázs,** az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium 12. osztályos tanulója, *Gyertyán Attila* tanítványa.

Az első vagy a harmadik feladat helyes, vagy a második feladat lényegében helyes megoldásáért *dicséretet* kapott **Bencz Benedek,** a Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Diákotthon 10. osztályos tanulója, *Horváth Norbert* tanítványa; **Blázsik Árpád,** az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Békásmegyeri Veres Péter Gimnáziumban érettségizett *Rakovszki Andorás* és *Székely György* tanítványaként; **Gábriel Tamás,** a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, Nagy Piroska Mária tanítványa; **Halász Henrik Kristóf,** a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Gutai Árpád* és *Csányi Sándor* tanítványa; **Horváth Ákos Zsolt,** a BME fizika BSc szakos hallgatója, aki a Kempelen Farkas Gimnáziumban érettségizett *Bakosné Novák Andrea* és *Horváth Eszter* tanítványaként; **Kohut Márk Balázs,** a Kecskeméti Katona József Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Sáróné Jéga-Szabó Irén* tanítványa, **Köpenczei Csanád,** a Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium és Kollégium 12. osztályos tanulója, *Wiandt Péter* tanítványa; **Molnár Barnabás,** a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, Nagy Piroska Mária tanítványa; **Molnár-Szabó Vilmos,** a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, Nagy Piroska Mária tanítványa; **Schäffer Donát,** a Pécsi Janus Pannonius Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Lehőcz Mária* és *Lányi Veronika* tanítványa; valamint **Toronyi András,** az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Diákotthonban érettségizett Horváth Norbert tanítványaként.

Az első díjjal a verseny plakettjén kívül az *Andersen Adótanácsadó Zrt.* és a *Nanorobot Vagyonkezelő Kft.* adományából 80 ezer forint, a második díjjal 65 ezer, a harmadik díjjal 50 ezer, a kiemelt dicsérettel 30 ezer, a dicsérettel 15 ezer forint pénzjutalom járt. A díjazottak tanárai könyveket kaptak az Eötvös Loránd Fizikai Társulat ajándékaként. Köszönjük az adományozók önzetlen támogatását!

Gnädig Péter, Széchenyi Gábor, Vankó Péter, Vigh Máté

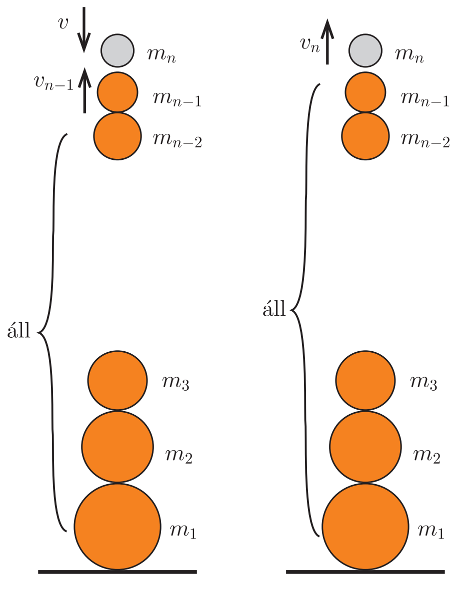
Fizika gyakorlatok megoldása

G. 791. *Zsonglőrködő elméleti fizikus a következő mutatványt találja ki. Egymás tetejére helyez n számú, tökéletesen rugalmas labdát, közöttük igen kicsiny résekkel. A labdatornyot kemény felületre ejti, ahová a labdák v sebességgel érkeznek meg. A sorozatos pillanatszerű ütközések után a legfelső labda kivételével minden lejjebb lévő labda megáll, a legfelső viszont nv sebességgel pattan fel. Bizonyítsuk be (például a teljes indukció módszerével), hogy ez a mutatvány akkor teljesülhet, ha a labdák tömege kielégíti a következő formulát:*

$$m_k = \frac{2m_0}{k(1+k)},$$

ahol m_0 a legalsó labda tömege, valamint $k = 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$.

(4 pont)



Megoldás. Ha alulról számolva az $(n-1)$-edik, m_{n-1} tömegű, felfelé v_{n-1} sebességgel haladó labda rugalmasan ütközik az m_n tömegű, lefelé v sebességgel mozgó labdával, és az ütközés után az alsó labda megáll (lásd az *ábrát*), a felső pedig v_n sebességgel kezd el mozogni felfelé, akkor a lendület- és az energiamegmaradás törvénye szerint fennáll:

$$m_{n-1}v_{n-1} - m_n v = m_n v_n,$$

tehát

$$\text{(1)}\qquad \frac{m_{n-1}}{m_n} = \frac{v_n + v}{v_{n-1}},$$

illetve

$$\frac{1}{2}m_{n-1}v_{n-1}^2 + \frac{1}{2}m_n v^2 = \frac{1}{2}m_n v_n,$$

tehát

$$\text{(2)}\qquad \frac{m_{n-1}}{m_n} = \frac{v_n^2 - v^2}{v_{n-1}^2}.$$

A (2) egyenletet (1)-gyel elosztva kapjuk, hogy

$$(3)\qquad 1=\frac{v_n-v}{v_{n-1}}, \qquad v_n=v_{n-1}+v.$$

Mivel $v_1=v$, (3) szerint

$$v_2=2v,\ v_3=3v,\ \ldots,\ v_n=nv,$$

ahogy ez a feladat szövegében is szerepel.

A v_n sebességek ismeretében akár (1)-ből, akár (2)-ből kiszámíthatjuk, hogy

$$(4)\qquad m_n=\frac{n-1}{n+1}m_{n-1}.$$

Mivel $m_1=m_0$, $m_2=\frac{1}{3}m_0$, $v_3=\frac{2}{4}m_2=\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}m_0$, és általában

$$m_k=\frac{k-1}{\boldsymbol{k+1}}\,\frac{k-2}{\boldsymbol{k}}\,\frac{k-3}{k-1}\ldots\frac{5}{7}\,\frac{4}{6}\,\frac{3}{5}\,\frac{\mathbf{2}}{4}\,\frac{1}{3}\,\boldsymbol{m}_0.$$

Sorozatos egyszerűsítések után csak a vastagon szedett tényezők maradnak meg:

$$(5)\qquad m_k=\frac{2m_0}{k(k+1)},$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

Az (5) formula érvényességét (4)-ből kiindulva a *teljes indukció* módszerével is beláthatjuk. Tudjuk, hogy $m_1=m_0$ és $m_2=\frac{1}{3}m_0$, tehát $k=1$-re (5) érvényes. De akkor (4) alapján $k+1$-re is érvényes, hiszen

$$\frac{k-1}{k+1}m_{k-1}=\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{2m_0}{(k-1)k}=\frac{2m_0}{k(k+1)}=m_k.$$

Több dolgozat alapján

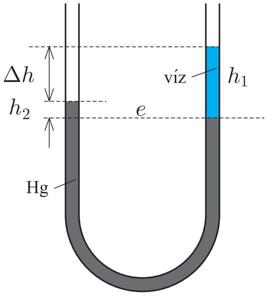
11 dolgozat érkezett. Helyes Antal Áron, Bencze Mátyás, Nagy Csenge, Sütő Áron, Tóth Hanga Katalin, Zhang Wenshuo Steve és Žigo Boglárka megoldása. Nem versenyszerű (nem a versenykiírásnak megfelelő formátumú) 4 dolgozat.

G. 794. U *alakú cső keresztmetszete* 1,5 cm^2*. A csőbe higanyt töltünk úgy, hogy az mindkét szárban elég magasan álljon. A cső egyik szárába a higanyra* 0,1 dl *vizet öntünk. Melyik szárban és mennyivel fog magasabban állni a folyadék felszíne?*

(4 pont)

Megoldás. Az $A=1{,}5\ \mathrm{cm}^2$ keresztmetszetű csőben lévő $V=0{,}1\ \mathrm{dl}=10\ \mathrm{cm}^3$ térfogatú vízoszlop magassága

$$h_1=\frac{V}{A}\approx 6{,}7\ \mathrm{cm}.$$



A higany és a víz nem keveredő folyadékok. Az egyensúly beálltával a cső két szárában a higany azonos magasságú pontjaiban, például az *ábrán* e-vel jelölt vízszintes vonal mentén a hidrosztatikai nyomások megegyeznek.

Jelöljük a higanyszintek magasságkülönbségét h_2-vel. Egyensúlyban a h_1 magas vízoszlop hidrosztatikai nyomása megegyezik a h_2 magas higanyoszlop hidrosztatikai nyomásával.

$$\varrho_{\text{víz}} g h_1 = \varrho_{\text{higany}} g h_2,$$

vagyis

$$h_2 = \frac{\varrho_{\text{víz}}}{\varrho_{\text{higany}}} h_1 = \frac{1}{13{,}6} \cdot 6{,}7\ \text{cm} \approx 0{,}5\ \text{cm}.$$

Ezek szerint a „vízes oldalon” fog magasabban állni a folyadék, és a szintkülönbség

$$\Delta h = h_1 - h_2 \approx 6{,}2\ \text{cm}.$$

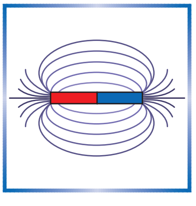
Medgyesi Júlia (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Kezdetben a cső mindkét szárában „elég magasan” áll a higany, emiatt nem fordulhat elő, hogy a betöltött víz részben vagy teljesen „átnyomja” a higanyt az egyik szárból a másikba.

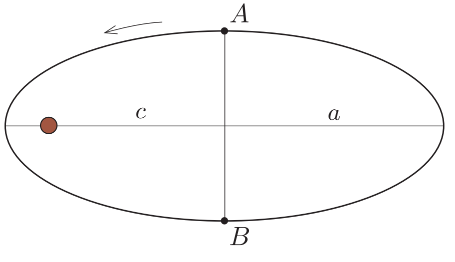
2. A számolás rész- és végeredményét 2 jegy pontossággal adtuk meg. Ennél sokkal pontosabb számításnak itt most nincs értelme, hiszen a kezdeti adatokat (a víz térfogatát és a cső keresztmetszetét) is csak 1–2 jegy pontosan ismerjük.

(*G. P.*)

39 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 6, hibás 1, nem versenyszerű 6 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

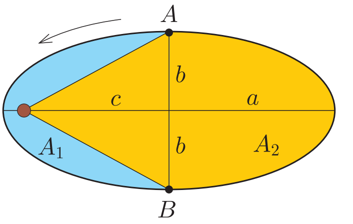


P. 5411. *A Föld körül egy műhold $c/a = e$ numerikus excentricitású ellipszispályán kering, keringési ideje T. Mennyi idő alatt ér a műhold az* ábrán *jelölt A pontból a B pontba?*

(*4 pont*)

Közli: *Szász Krisztián*, Budapest

Megoldás. Jelöljük a műhold A pontból B pontba érésének idejét T_1-gyel, a B-ből A-ba történő mozgás idejét pedig T_2-vel. Nyilván $T_1+T_2=T$. Az *ábra* a műhold ellipszispályáját mutatja a szokásos jelölésekkel.



A Föld középpontját a műholddal összekötő egyenes, vagyis a vezérsugár T_1 idő alatt a kékkel jelölt A_1 területet, T_2 idő alatt pedig a sárgával jelölt A_2 területet „súrolja”. Ismert, hogy az ellipszis területe $ab\pi$, a derékszögű háromszögeké pedig összesen bc, így

$$A_1=\frac{ab\pi}{2}-bc, \qquad \text{illetve} \qquad A_2=\frac{ab\pi}{2}+bc.$$

Kepler II. törvénye szerint

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{A_1}{A_2}=\frac{\pi a-2c}{\pi a+2c}.$$

Figyelembe véve, hogy $c=ea$, továbbá $T_2=T-T_1$, kapjuk, hogy

$$T_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{e}{\pi}\right)T \qquad \text{és} \qquad T_2=\left(\frac{1}{2}+\frac{e}{\pi}\right)T.$$

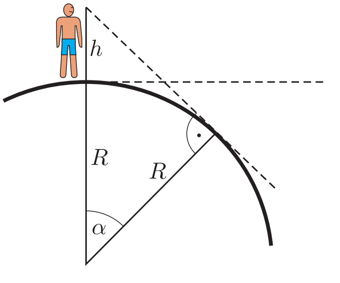
Pethő Dorottya (Kecskemét, Katona József Gimn., 11. évf.)

25 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (2 pont) 1, hibás 1 dolgozat.

P. 5428. *Képzeljük el, hogy nap-éj egyenlőség idején egy egyenlítői ország tengerpartján hason fekszünk a homokban, és figyeljük a naplementét. A tenger tükörsima, az ég tiszta kék, és abban a pillanatban, amikor a Nap utolsó sugara eltűnik a horizonton, hirtelen felállunk, és így még újra láthatjuk a Nap felső karimáját. Becsüljük meg, hogy felállásunk után mennyi idővel tűnik el újra a napkorong!*

(*4 pont*) Amerikai feladat nyomán

Megoldás. Az *ábra* (ami nem méretarányos) az Egyenlítő síkjára merőleges irányból mutatja a Földet. Ha R a Föld sugara, h pedig a felálló ember magassága, akkor a horizontja



$$\alpha=\arccos\frac{R}{R+h}$$

szöggel „fordul el”.

Tudjuk, hogy $R\approx 6370$ km, h pedig (a feladatmegoldó saját testmagasságát fogadva el) kb. 1,7 m-nek becsülhető, a fenti képletből

$$\cos\alpha\approx 0{,}999\,999\,73, \qquad \text{azaz} \qquad \alpha\approx 0{,}042^\circ$$

adódik.

Mivel a Föld 24 óra alatt 360°-kal fordul el, az α szögű elfordulása

$$\Delta t = \frac{\alpha}{360^\circ} 24 \cdot 3600 \text{ s} \approx 10 \text{ s}$$

alatt következik be. Ennyi idővel tolódik el a hirtelen felálló ember számára a naplemente.

Megjegyzés. Minél magasabb a tengerparti homokról felemelkedő ember, annál hosszabb ideig láthatja még a Napot, de az időeltolódás a testmagasságával nem egyenesen arányos.

Wodala Gréta Klára (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn., 10. évf.)

55 dolgozat érkezett. Helyes 41 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 4, nem versenyszerű 5 dolgozat.

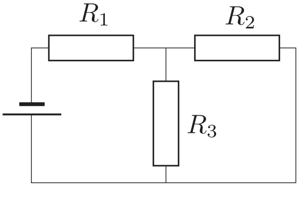
Fizikából kitűzött feladatok

M. 420. Mérjük meg különböző átmérőjű csövekbe töltött rizsoszlop alján a nyomást a magasság függvényében! Eredményeinket grafikonon ábrázoljuk!

(*6 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

G. 805. Becsüljük meg, hogy a légköri nyomás hányszorosával kell a fokhagymát átsajtolni egy fokhagymaprésen!

(*3 pont*) Közli: *Németh László*, Fonyód



G. 806. Az *ábrán* látható kapcsolásban ismert az R_1, R_2 és az R_3 ellenállás, valamint az R_3 ellenálláson átfolyó áram I_3 erőssége.

Határozzuk meg

a) a másik két ellenálláson átfolyó I_1 és I_2 áramok erősségét;

b) a telep elektromotoros erejét!

c) Mennyi hő fejlődik összesen t idő alatt a rendszerben?

(*Adatok:* $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 40\ \Omega$, $I_3 = 2$ A, $t = 30$ s.)

(*3 pont*)

G. 807. 20 méter magasból másodpercenként indítunk acélgolyókat, összesen hármat. Az első golyó kezdősebességének a vízszintessel bezárt szöge 30° felfelé, a harmadiknak ugyancsak 30°, de lefelé, míg a második golyót kezdősebesség nélkül ejtjük le. Mindhárom golyó egyszerre éri el a talajt. Mekkora volt az első és a harmadik acélgolyó kezdősebessége?

(*4 pont*)

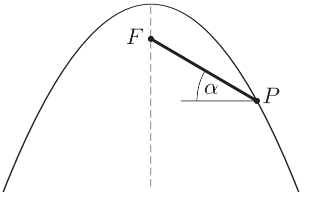
G. 808. Egy dugattyúval ellátott, henger alakú tartályban 20 °C-os, 30% relatív páratartalmú levegő található. Állandó hőmérséklet mellett hányszorosára változtassuk meg a tartályban a levegő térfogatát, hogy a benne lévő vízpára elkezdjen kicsapódni?

(*4 pont*)

P. 5463. Egy ismeretlen, légkör nélküli bolygó felett $H = 225$ m magasságban „lebeg" egy rozoga űrszonda. Egymás után lepottyan róla két csavar. A második csavar akkor válik le az űrszondáról, amikor az első éppen 16 métert esett. Mekkora a két csavar távolsága abban a pillanatban, amikor az első eléri a bolygó felszínét?

(*4 pont*) Közli: *Baranyai Klára,* Veresegyház

P. 5464. Egy függőleges tengelyű, lefelé nyíló parabola F fókuszpontján keresztül különböző hajlásszögű lejtőket fektetünk. Mekkora a hajlásszöge annak a lejtőnek, amelyen az F pontból kezdősebesség nélkül induló, súrlódásmentesen lecsúszó pontszerű test a lehető legrövidebb idő alatt éri el a parabolát?



(*5 pont*) *Faragó Andor* (1877–1944) feladata nyomán*

P. 5465. Egy D rugóállandójú, könnyű rugóra M tömegű, nehéz testet függesztünk. A rendszert nyugalomban tartjuk, majd egy adott pillanattól kezdve a rugó felső végét állandó v_0 sebességgel emeljük. Adjuk meg a test elmozdulását az idő függvényében!

(*4 pont*) Közli: *Wiedemann László,* Budapest

P. 5466. Egy nyirkos tavaszi reggelen a hőmérséklet 1 °C, a relatív páratartalom pedig 80%-os. Egy szobában 20 °C-on a relatív páratartalom 40%. Nő vagy csökken a szoba páratartalma, ha szellőztetünk?

(*4 pont*) (*Példatári feladat nyomán*)

P. 5467. Egy 20 cm hosszú, 3 cm^2 keresztmetszetetű, megfelelő elektromos szigeteléssel ellátott rézrúdon teljes hosszában egyenletesen feltekert fűtőszál van. A rudat függőlegesen tartjuk úgy, hogy az alsó vége éppen beleér egy olvadó jeget

* Faragó Andor indította újra 1925-ben az I. világháború miatt megszüntetett KöMaL-t, és annak 1938-ig szerkesztője, kiadója volt. Ő vezette be a kiemelkedő feladatmegoldók fényképeinek közlését.

tartalmazó pohár vizébe, így folyamatosan 0 °C hőmérsékletű marad. Hány fokra melegszik fel elegendően hosszú idő alatt a rúd másik vége, ha a fűtőszál 100 W teljesítménnyel melegíti a rézrudat?

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 5468. A haladó hullámok nemcsak energiát, hanem lendületet (impulzust) is hordoznak.

a) Mértékegységelemzéssel (dimenzióanalízissel) állapítsuk meg, hogy milyen összefüggés fedezhető fel a hullámban terjedő energia és impulzus között!

Egy 100 m^2-es felületű, függőleges falfelületre 100 dB erősségű hanghullám érkezik, mely merőleges visszaverődés után 60 dB erősségű visszhangként verődik vissza.

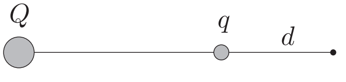
b) Becsüljük meg, hogy mekkora erővel nyomja a visszaverődő hanghullám a falat!

Útmutatás. Az I intenzitású hanghullám erősségét decibel egységben a következő formulával adhatjuk meg:

$$\beta = 10\ \mathrm{dB}\lg\frac{I}{I_0},$$

ahol $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$, amit hallásküszöbnek hívunk. Az intenzitás jelentése az egységnyi felületen, merőlegesen, másodpercenként áthaladó energia mennyisége.

(*5 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház



P. 5469. Súlytalanságban egy rögzített $Q = 6\cdot 10^{-7}$ C értékű ponttöltés elektromos mezejében egy $q = 4\cdot 10^{-7}$ C töltésű, $m = 3$ g tömegű pontszerű test mozog. Kezdősebesség nélkül indulva $d = 0{,}8$ m távolság megtétele közben sebessége $v = 2$ m/s értékre növekedett.

Mekkora volt a két töltés távolsága kezdetben?

(*3 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5470. Két egyforma gyűjtőlencsét egymással szemben úgy helyezünk el, hogy fókuszpontjaik egybeesnek. Az egyik lencsét a közös optikai tengellyel párhuzamos, monokromatikus, egyenletes energiaáram-sűrűségű fénynyalábbal világítjuk meg. A lencsék antireflexiós (visszaverődést megakadályozó) réteggel vannak bevonva, a lencsék belsejében történő fényelnyelődéstől és az ottani visszaverődésektől eltekinthetünk.

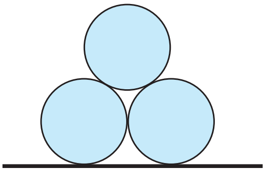
a) Milyen irányú erő hat a lencsékre?

b) Becsüljük meg a lencsékre ható erők nagyságát!

Adatok: a lencsék fókusztávolsága 10 cm, átmérőjük 5 cm, a megvilágító nyaláb fényének hullámhossza 590 nm, az első lencsére 1 W fényteljesítmény jut.

(*5 pont*) Közli: *Domokos Péter,* Budapest

P. 5471. Három egyforma, R sugarú, m tömegű jéghengert készítünk, és azokat az *ábrán* látható helyzetből kezdősebesség nélkül elengedjük. A jég felülete nagyon síkos, emiatt a súrlódás mindenhol elhanyagolható.



a) Határozzuk meg és ábrázoljuk vázlatosan az egyik alsó jéghenger mozgási energiáját a felső henger elmozdulásának függvényében!

b) Mekkora sebességgel csapódik a felső jéghenger a talajhoz, és mekkora sebességre gyorsul fel a másik két jéghenger?

(*6 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 2023. március 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 73. No. 2. February 2023)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 95): **K. 754.** Matt and Seb are playing tic-tac-toe. When Seb wins, he will get 3 candies from Matt. When Matt wins, he will get 2 candies from Seb. (There is no draw.) After 30 games, Seb had the same number of candies as initially. How many games did Seb win? **K. 755.** What is the maximum possible number of sides that a convex polygon may have if it has exactly 3 obtuse angles? Give an example of such a polygon. **K. 756.** A shop sells wooden cubes in two sizes: cubes of edge 1 cm and those with edges of 2 cm. The surfaces of the cubes are painted. In the case of the smaller cubes the paint represents 60% of the material costs, while the rest is the price of the wood. Both kinds of cube are made of the same type of wood and they are coated with a thin layer of paint with the same thickness. Labour costs are the same for each cube, independent of the size. Considering all costs, it costs the shop 830 forints (HUF, Hungarian currency) to manufacture 10 small cubes and 5 large ones. 5 small cubes and 15 large ones cost 1490 forints to manufacture. What is the labour cost of one cube? **K/C. 757.** Kate is planning to cut a 4×4 sheet of squared paper into pieces with scissors, cutting along grid lines only. Show that she can make exactly 11 different kinds of puzzle that is symmetrical in all four symmetry axes of the original square sheet. The *diagram* shows a possible puzzle. **K/C. 758** A sail is shaped like a right angled triangle and it has the red symbol of the boat class at a height such that $MA + AC = CB + BM$

(see the *figure*). If $BM = 7$ m and $CB = 5$ m, what is the height of the peak of the sail above the red mark?

New exercises for practice – competition C (see page 96): **Exercises up to grade 10: K/C. 757.** See the text at Exercises **K. K/C. 758.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1753.** A long strip of paper is divided into squares. The numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 are written in the first ten squares, then the same numbers are written in the next ten squares, too, and so on. There are exactly 2030 squares numbered in this way. A token is placed in square 1. In each move, the token is moved as many squares ahead as the number written in the square it is standing on. What is the number in the square where the token is when its next move would get out off the paper strip of length 2030? (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1754.** Squares $ABCD, BEFC$ and $EGHF$ are drawn next to each other in a plane. The foot of the perpendicular drawn from B to DE is K. Show that the points A, K, H are collinear. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1755.** What integers a, b and c satisfy the equality $a^2 + b^2 - 8c = 6$? (*Canadian problem*) **Exercises upwards of grade 11: C. 1756.** Solve the equation $4 \cdot \cos\big(\pi \cdot \sin(\pi \cdot x)\big) = -5x^2 + 15x - \frac{61}{4}$ over the set of real numbers. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1757.** Johnny got a robot for Christmas, and he is trying it on a square carpet. The length of the sides of the square is 4 metres, and its vertices are A, B, C and D, in this order. Let P denote the interior point of square $ABCD$ which is exactly 1 metre away from both of sides AB and BC. The robot is initially standing at point P, and starts to move in a random direction. When it has covered 2 metres, it will stop. What is the probability that the robot will get off the carpet? (Proposed by *K. A. Kozma,* Győr)

New exercises – competition B (see page 97): **B. 5294.** Two altitudes of an acute-angled triangle ABC are AT_A and BT_B. The midpoint of AB is F, and the midpoint of T_AT_B is G. Prove that FG is perpendicular to T_AT_B. (*3 points*) (Proposed by *V. Vígh,* Sándorfalva) **B. 5295.** Find the largest integer k for which 1722 divided by k leaves a remainder of $2m$ and 2179 divided by k leaves a remainder of $3m$ (for some appropriate natural number $0 \leqslant m < k/3$). (*3 points*) (Proposed by *K. A. Kozma,* Győr) **B. 5296.** A rook is moving from the bottom left corner of a 8×8 chessboard to the top right corner. It starts by moving to the right, then up, and so on, right and up alternatingly. How many different sequences of moves are there? (*4 points*) (Proposed by *B. Hujter,* Budapest) **B. 5297.** In a triangle ABC, $\angle BAC = 2\angle CBA$. Let A', B', C' denote interior points of sides CA, AB and BC, respectively, such that triangle $A'B'C'$ is similar to triangle ABC. Show that the angle bisectors of angles BAC and $B'A'C'$ intersect each other on the line segment $B'C'$. (*4 points*) (Proposed by *G. Kós,* Budapest) **B. 5298.** Solve the following system of equations over the set of real numbers: $y + yx^2 - 2x = 0$, $z + zy^2 - 2y = 0$, $x + xz^2 - 2z = 0$. (*5 points*) (*American problem*) **B. 5299.** There is a flea sitting at each of points $1, 2, 3$ of the number line. If one flea is at point a and another is at point b, then the flea at a may jump to the point $2b - a$. Is it possible for the fleas to end up at points $2^{100}, 3^{100}, 2^{100} + 3^{100}$ with a finite sequence of such steps? (*6 points*) (Proposed by *P. P. Pach,* Budapest) **B. 5300.** Let T be a regular tetrahedron of unit edge. Inscribe a cube in T such that exactly two vertices of the cube lie on each face of T, as shown in the *figure* (the dashed lines are parallel to the appropriate edges of the tetrahedron). What is the volume of the cube? (*5 points*) (Proposed by *V. Vígh,* Sándorfalva) **B. 5301.** Given that the sum of the reciprocals of ten distinct positive integers is 1, prove that each of them is smaller than 10^{1000}. (*6 points*) (Proposed by *V. Vígh,* Sándorfalva)

New problems – competition A (see page 98): **A. 845.** The incircle of triangle ABC is tangent to sides BC, AC, and AB at points D, E, and F, respectively. Let A' denote the point of the incircle for which circle $(A'BC)$ is tangent to the incircle. Define points B' and C' similarly. Prove that lines $A'D$, $B'E$ and $C'F$ are concurrent. (Proposed by *Áron Bán-Szabó,* Budapest) **A. 846.** Let n be a positive integer and let vectors $v_1, v_2, \dots, v_n$ be given in the plain. A flea originally sitting in the origin moves according to the following rule: in the i^{th} minute (for $i = 1, 2, \dots, n$) it will stay where it is with probability $1/2$, moves with vector v_i with probability $1/4$, and moves with vector $-v_i$ with probability $1/4$. Prove that after the n^{th} minute there exists no point which is occupied by the flea with greater probability than the origin. (Proposed by *Péter Pál Pach,* Budapest) **A. 847.** Let A be a given finite set with some of its subsets called *pretty.* Let a subset be called *small,* if it's a subset of a pretty set. Let a subset be called *big,* if it has a pretty subset. (A set can be small and big simultaneously, and a set can be neither small nor big.) Let a denote the number of elements of A, and let p, s and b denote the number of pretty, small and big sets, respectively. Prove that $2^a \cdot p \leqslant s \cdot b$. (Proposed by *András Imolay,* Budapest)

Problems in Physics

(see page 122)

M. 420. Fill several tubes having different diameter with rice. Measure the pressure as a function of height at the bottom of the rice column for each tube. Plot your results on a graph.

G. 805. Estimate the factor by which the pressure required to push garlic through a garlic press is greater than the atmospheric pressure. **G. 806.** In the circuit shown in the *figure,* the resistors R_1, R_2 and R_3 are known, as well as the current I_3 which flows through resistor R_3. Determine the *a*) values of the current, I_1 and I_2, through the other two resistors, *b*) the electromotive force of the battery. *c*) How much heat is dissipated in the whole system in a time of t? (*Data:* $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 40\ \Omega$, $I_3 = 2$ A, $t = 30$ s.) **G. 807.** From a height of 20 metres, three steel balls are projected one after the other in every second. The angle between the horizontal and the initial velocity of the first ball is 30° upwards, that of the third ball is 30° downwards, and the second ball is dropped without initial velocity. All three balls hit the ground at the same time. What were the initial velocities of the first and third steel balls? **G. 808.** A cylindrical container with a piston contains air of temperature 20 °C, and of relative humidity 30%. Keeping the temperature constant, to how many times of the original value must the volume of air in the container be changed to cause the water vapour in the container to begin to condense?

P. 5463. A rickety space probe "hovers" above the surface of an unknown planet, which has no atmosphere, at a height of $H = 225$ m. One after the other, two screws fall off. The second screw falls from the space probe just as the first has fallen 16 m. What is the distance between the two screws at the moment when the first one reaches the surface of the planet? **P. 5464.** Inclined planes of different angles of inclination are laid through the focus F of a parabola with vertical symmetry axis and opening downtranslwards. What is the angle of inclination of that inclined plane along which a point-like body, starting from the point F without initial velocity and sliding frictionlessly down, reaches the parabola in the shortest possible time? **P. 5465.** A heavy body of mass M is suspended on a light spring of spring constant D. The system is held at rest, and from a given moment the upper end of the spring is raised at a constant velocity v_0. Give the displacement of the body as a function of time. **P. 5466.** On a damp spring morning, the temperature is 1 °C and the relative humidity is 80%. In a room the temperature is 20 °C, and the relative humidity is 40%. Does the humidity in the room increase or decrease when the room is ventilated? **P. 5467.** A heating filament is wound uniformly along a 20 cm long copper rod of cross section 3 cm^2. The rod has a suitable electrical insulation along its entire length. The rod is held vertically such that its lower end is just immersed into water in a glass containing melting ice as well, so it remains at a constant temperature of 0 °C. How many degrees Celsius will the other end of the rod heat over a sufficiently long period of time if the heating filament heats the copper rod with a power of 100 W? **P. 5468.** Travelling waves carry not only energy but also momentum. *a*) Analysing the units (using dimensional analysis), find the relationship between the energy and the momentum transferred in a wave. A 100 m^2 vertical wall surface receives a sound wave of 100 dB, which is reflected back perpendicularly as an echo of pressure level 60 dB. *b*) Estimate the force exerted on the wall by the reflected sound wave! *Hint:* the pressure level of sound of intensity I can be given in decibel units according to the following formula: $\beta = 10\ \mathrm{dB} \lg \frac{I}{I_0}$, where $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$, which is called the threshold of hearing. Intensity is the amount of energy that passes through a unit surface, perpendicularly, in a second. **P. 5469.** A point-like body with a charge of $q = 4 \cdot 10^{-7}$ C and a mass of $m = 3$ g is at zero gravity, and is moving in the electric field of a fixed point charge of $Q = 6 \cdot 10^{-7}$ C. It starts from rest and its velocity increases to $v = 2$ m/s, while it covers a distance of $d = 0.8$ m. What was the initial distance between the two charges? **P. 5470.** Two identical converging lenses are placed opposite each other so that their focal points coincide. One lens is illuminated by a beam of monochromatic light of uniform energy flux density. The beam is parallel to the common principal axis of the lenses. The lenses are coated with an anti-reflection layer, so that the effects of light absorption and reflection inside the lenses are negligible. *a*) Determine the direction of the forces exerted on the lenses. *b*) Estimate the magnitude of the forces. *Data:* the focal length of each lens is 10 cm, their diameter is 5 cm, the wavelength of the light which is used for illuminating is 590 nm, the power received by the first lens is 1 W. **P. 5471.** Three identical cylinders of radius R and mass m are made from ice and they are all released without initial velocity from the position shown in the *figure*. The surface of the ice is smooth, so friction is negligible everywhere. *a*) Determine and sketch the kinetic energy of one of the lower ice cylinders as a function of the displacement of the upper cylinder. *b*) What is the speed at which the top ice cylinder hits the ground, and to what speed do the other two ice cylinders accelerate?

Problems of the 2022 Kürschák competition

1. A square is divided into 2022 rectangles. Consider the lines determined by the sides of all the rectangles. At most how many different lines can we get?

2. For the primes p, q having residue 3 modulo 4 the equation $x^2 - pqy^2 = 1$ is solvable with positive integers x, y. Prove that the equation $|px^2 - qy^2| = 1$ is also solvable with positive integers x, y.

3. Let n be a positive integer. Suppose that for the real numbers $a_{i,j}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ we have $a_{i,j} + a_{j,i} = 0$ for all i, j (in particular, $a_{i,i} = 0$ for all i). Prove that

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right)^2 \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

When do we have equality?

Eötvös-verseny 2022

Díjazott versenyzők és néhányuk tanára: Gyertyán Attila, Hajós Balázs, Horváth Eszter, Horváth Ákos Zsolt, Bencz Benedek, Kincses Ábel, Kovács Balázs Csaba, Maruzsiné Sevella Judit, Blázsik Árpád, Rakovszki Andorás, Toronyi András, Gurzó József, Horváth Norbert, Kohut Márk Balázs

Varga József
matematika

Erdős Gábor
matematika

Koncz Károly
fizika

Moróné Tapody Éva
fizika

Rátz Tanár Úr Életműdíj 2022

Tölgyesné
Kovács Katalin
kémia

Hotziné Pócsi Anikó
kémia

Fazakas Andrea
biológia

Bertáné
Kövesdi Gabriella
biológia

Petőfi Kulturális Ügynökség
Nemzeti Együttműködési Alap
nka Nemzeti Kulturális Alap
Bethlen Gábor Alapkezelő Zrt.
Miniszterelnökség