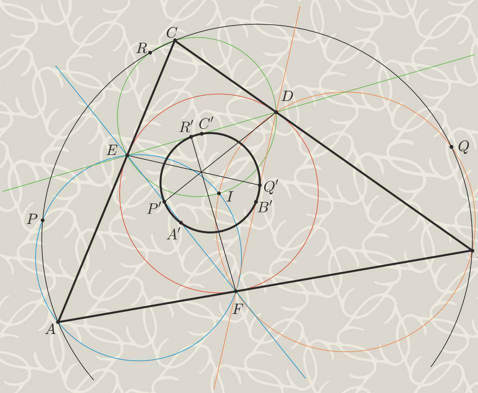
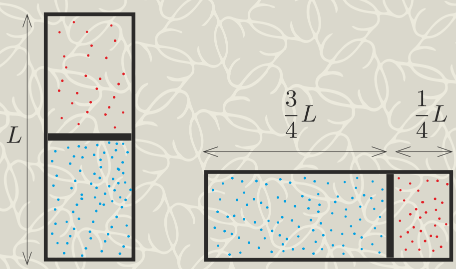
Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok
Informatika rovattal

B. 5221.



P. 5422.



Projektív geometria és társai – avagy hogyan birkózzunk meg egy feladattal 1. | Megoldások

Emelt szintű érettségi feladatsor matematikából

Térből síkba visszalépés fizikai problémák megoldásánál II.

KöMaL

73. évfolyam
1. szám
2023.
január

ANKÉT DÍJKIOSZTÓ – 2022

A KöMaL támogatói

Nemzeti Tehetség Program

Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

Kulturális és Innovációs Minisztérium

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

73. évfolyam 1. szám Budapest, 2023. január

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1100 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 9200 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Holló-Szabó Ferenc
(1965–2022)

Tizenhét éves diák volt, amikor megismertem egy egyetemre előkészítő nyári táborban. Friss diplomás matematikusként tanítottam érettségi és felvételi előtt álló középiskolásokat. Feri már akkor kitűnt lelkesedésével, amikor matematikai társasjátékokat játszottunk és elemeztünk. Ötvenhét éves volt, amikor az általa üzemeltetett matematikai múzeum bejáratánál utoljára láttam; igazgatta az óvodai korosztály számára odarakott matematika-szertári tárgyakat. Matematika oktatása óvodásoknak az egyetemen? Számára nem volt ebben semmi furcsaság. Ahogyan az sem volt meglepő, hogy budapesti látogatásakor *Kányádi Sándort,* a híres költőt is behívta „az első magyar matematikai múzeum" könyvekkel, modellekkel, logikai játékokkal feltöltött, szűk termébe. „Aki megért, s megértet, / Egy népet megéltet." – ezt írta a költő, ez került az egyik Bolyai-díjra. Ezt vallotta Holló-Szabó Ferenc is, de ő nemcsak megértetni, hanem megszerettetni, szenvedéllyé tenni is akarta a matematikát. A családja mellett a matematika tanítása, népszerűsítése volt számára a legfontosabb. Rövid élet jutott neki osztályrészül, de a rövid életét nagyon intenzíven élte meg.

Kiskunfélegyházán született 1965. június 21-én. Édesapja László, apai nagyapja Ferenc; a családnév leginkább kunsági elterjedésű. Édesanyjáról, Czakó Veronikáról Feri így vallott egyik önéletrajzában: „Czakó-falváról származom anyai ágon. Ez az államosításig egy virágzó major volt Kiskunfélegyháza és Bugac között. Kilenc gyermeket hozott a gólya a családunkba, a sorban én vagyok a negyedik." Mivel a „cakó" régi magyar nyelven gólyát jelent, Feri gyakran tréfálkozott, hogy náluk tényleg a gólya hozta a kistestvéreket. Mindig nagy melegséggel beszélt ezekről az évekről. Édesanyja nyolcvanötödik születésnapjára még versbe is szedte a szép emlékeit: „Légy áldott örökre Édesanyám / És társad örökre Édesapám! / Gyötört az élet, sosem volt bőség ... Laci, Kati, Olga, Feri, Rozi / ... Gyuri, Ancsa, Peti s Gyöngyi / Olyan sosem volt, hogy unatkozzunk ..."

Gyermekkorában Feri megtanulta: szorgosan és leleményesen kell dolgozni, és ha a szükség úgy hozza, a jég hátán is meg kell élni. Kezdetben megfelelő szemüveg híján a hallott szó alapján tanult, és amikor már lett alkalmas szemüvege, rengeteget olvasott. Tizenhatodik születésnapja előtt írt róla az újság először: az Arany Dániel matematikai versenyen dícséretben részesült; ugyanerről a sikerről a KöMaL 1981. novemberi száma tudósított. Feri megszerette a matematikát, sikerélménye is lett; így történt, hogy a középiskolájából, egy gépipari technikumból nem mérnöki pályára ment, hanem inkább a matematika tanára szeretett volna lenni. Egy évvel később már az ELTE-re jelentkezni szándékozó középiskolásként ismerhettem meg. Könnyű volt vele összebarátkozni, hiszen Ferinek mindig, minden helyen, minden korosztályból sok barátja lett. Hamar rákapott a NIM játék ízére, és a többi matematikai társasjáték és rejtvény is nagyon érdekelte. Rádöbbent, hogy nem ő az egyetlen különc a matematika játékosságának élvezetében, és ez szemmel láthatóan felszabadította.

Érettségi után tanárképző főiskolán, matematika–fizika szakon tanult; 1990-ben diplomázott. Később egyetemi szinten is szerzett matematika tanári oklevelet, így már középiskolai tanárként is működhetett. Még később egyetemi adjunktusi címig jutott az ELTE-n. A szigorú szabályok szerinti elméleti kutatás lehetősége azonban nem hozta lázba. Ő a matematika csodáinak ismertetését, a matematikai élmények elterjesztését választotta. *Öveges József* volt a példaképe. *Bolyai Farkas* és *János* ugyanolyan fontos nemzeti hősök voltak a szemében, mint *Hunyadi János* és *Mátyás.* Holló-Szabó Ferenc neve mellé idővel ilyen állandósult jelzők kerültek: „a matematika lánglelkű lovagja” vagy „igazi stand up matematikus”. Az is ráillik, hogy „a matematika kézműves mestere”. Mindig szerette, ha a matematika kézzelfogható, ezért számtalan eszközt készített (vagy ajándékba kapott, esetleg vásárolt). Ördöglakatok, számoló segédeszközök, összerakós rejtvények, számkitalálós bűvészkellékek és sokféle más tárgy hatalmas gyűjteményét halmozta fel. Megvoltak neki a pihekönnyű habszivacs poliéder-modellek éppúgy, mint a harminckilós tömör fém Gömböc, továbbá bűvös kockák változatai, logikai társas- és türelemjátékok, továbbá régi és új logarlécek, függvénytáblázatok, matematikakönyvek.

Oktatási tevékenységét több területen végezte. Az első tanári diplomájának kézhezvétele után az ELTE Tanárképző Főiskolai Kar Matematika Tanszékén, majd miután a matematikatanár-képzés átkerült az ELTE TTK-ra, a Matematikai Intézetben a Matematikatanítási és Módszertani Központban tevékenykedett egészen 2018-ig, az utolsó években adjunktusi beosztásban. Időközben 2004-től a Szilágyi Erzsébet Gimnáziumban volt matematikatanár 2012-ig, majd a Svábhegyi Jókai Mór Általános Iskolában tanított. Ezt követte a Sashegyi Arany János Általános Iskola és Gimnázium 2015 és 2018 között. Főállású matematikatanár lett 2018-tól haláláig Esztergomban, a Temesvári Pelbárt Ferences Gimnáziumban. Mindegyik oktatási intézményben szakkörök vezetését is vállalta és szorgalmazta a tanítványainál a KöMaL pontversenyeit, és más matematikai összeméréttetéseket is. Szakköri diákjai közül kimagasló eredményeket ért el például *Tossenberger Anna, Lőrincz Dóra* és *Záhonyi Petra.* Egyetemi oktatóként szakdolgozatok témavezetését is vállalta. Ilyen címekkel írtak nála szakdolgozatokat: „Francia matematikusok magyar szemmel”, „Magyarországi konferenciák a matematikaoktatás szolgálatában”, „Interaktivitás a matematikaórán: kiindulópontunk a kocka”.

Sokféle publikációja volt. 1999-ben a KöMaL-ban a Riemann-függvényől írt. 2002-ben a Képmás családmagazin a két Bolyairól szóló írását közölte, és ugyanebben az évben, ugyanebben a magazinban jelent meg „Izgalom és rácsodálkozás” címmel az írása Öveges József (1895–1979) tanár úrról is. Több dolgozatot publikált a „Matematika tanítása” című folyóiratban. Ezek – többek közt – a Pascal-háromszögről, különleges sorozatokról, különleges számtáblázatokról, ikerprímekről és *Bakos Tibor* (1909–1998) tanár úrról szóltak.

Oktatási tevékenysége elismeréseképpen Holló-Szabó Ferenc 2019-ben elnyerte az „Ericsson a matematika és a fizika népszerűsítéséért” díjat. Az olvasók figyelmébe ajánljuk az ezzel kapcsolatos videót az interneten. Itt most csak két mondatot idézünk a díjra való felterjesztésből, melyet *Nagyné Szokol Ágnes* szövegezett meg:

„Holló-Szabó Ferenc önzetlen lelkesedéssel és mély tisztelettel él a matematika szépségeinek és a tudásmegosztásnak … Egyéni látásmódjával, derűs stílusával a matematikában kevésbé ügyes gyerekekhez is közel kerül.”

Holló-Szabó Ferenc egyike volt azoknak, akik három évtizede már a KöMaL összes számának digitalizálását szorgalmazták. Az akkor még csak 100 éves KöMaL-t egyik legértékesebb nemzeti kincsünknek tartotta, a 125. évfordulóra pedig egy kiállítást is elkészített. Az ünnepségsorozat részeként még egy emlékfa ünnepélyes elültetését is megszervezte[1], száraz időkben a csemete öntözését saját kezűleg végezte.

Az ezredforduló előtt átvette Bakos Tibor matematikai szertárát, helyet keresett annak, és így jött létre az „első magyar matematikai múzeum”, röviden „MaMa”[2]. Két és fél évtized alatt a múzeum nagyon sokat gyarapodott elsősorban az alapító munkája révén, de az ő lelkesedését látó kollégák önzetlen adományozásai okán is. Egyszer például tanúja voltam, hogy egy kollégánk külföldre költözést tervezve a régi középiskolai versenyfeladatok példatárait becipelte a múzeumba. Természetesen megvolt minden KöMaL-füzet és minden, a Bolyaiakkal kapcsolatos könyv a matematikai gyűjteményben. A már nagyon idős *Rábai Imre* tanár úr teljes szakkönyvtárát hagyta volna a múzeumra, csak nem volt annyi hely, hogy a sok, zömmel orosz nyelvű tankönyv és monográfia szépen rendszerezetten polcokra kerülhessen. Gyakran jöttek látogatók, egy-egy osztály valamely iskolából, de külföldiek is. New York városából itt járt *Glen Whitney,* aki Amerikában azzal kezdte egy matematikai múzeum alapítását, hogy összekoldult rá 20 millió dollárt. Egyszerűen nem értette, hogy Budapesten nulla költségvetésből hogyan lehet ennyi érdekes tárgyat összeszedni. És hogyan lehet fejből annyi érdekességet elmondani a matematikai játékokról vagy a könyvek szerzőiről?

KöMaL Ankéton 2015-ben

Egyik utolsó előadása közben a matematikai múzeumban

Már egy hete csak a MaMára gondolok! Sokszor sóhajtottunk fel, amikor hetente egy-egy délutánra összejöttünk a múzeumban. Gyakran voltak érdekes előadások. Egyszer a számítógépes háromdimenziós grafikáról volt szó, máskor több

[1] Lásd a 2020. márciusi szám első belső borítóját.
[2] Lásd a 2022. novemberi szám belső borítóit.

évezreddel ezelőtti nyelvek matematikai szerkezetéről. Grafikusok, játékkészítők is tartottak bemutatókat.

Ha gyerekek jöttek, kicsik vagy nagyok, mindig nagyon élvezték a múzeumban eltöltött időt, természetesen leginkább a játékokat, összerakós feladványokat, ördöglakatokat. A múzeum vendégkönyve megőrizte például ezeket a sorokat: „Köszönöm a mai estét. Jó lenne, ha minél többen láthatnák, mennyire szerethető a matematika!” vagy „The museum is absolutely fascinating.” Mosolyt fakasztó például ez: „Itt járt Háromszéki Ilcsike, és csodálta a csodálni valót ... ”

Hosszú betegség győzte le Holló-Szabó Ferencet, de csak a testét. Rövid élete volt, de mindig azt tette, amit szeretett, és ami másoknak is tudást, élményt adott. Végakarata szerint kedves múzeuma közelében temették el. Egyik mondását gyakran idézik: „A matematikát úgy kellene felfogni, mint egy természettudományt. Odamenni, megtapasztalni, kézbe venni, játszani vele.”

Hujter Mihály
Budapest

Projektív geometria és társai – avagy hogyan birkózzunk meg egy feladattal 1.

Bevezetés

Versenyfeladatok megoldásakor előfordul, hogy olyan tételek használatával lehet célbaérni, amelyek a hagyományos középiskolai oktatás tananyagában nem szerepelnek. A cikksorozat ilyen tételeket mutat be. Épp ezért nem célunk a pontos és részletes bizonyítás, de igyekszünk forrásokat adni azok számára, akik mélyebben elmerülnének a témában. Több olyan módszer is van, amivel a KöMaL feladatok megoldásában is lehet találkozni. Ilyen rögtön az inverzió.

1. Az inverzió

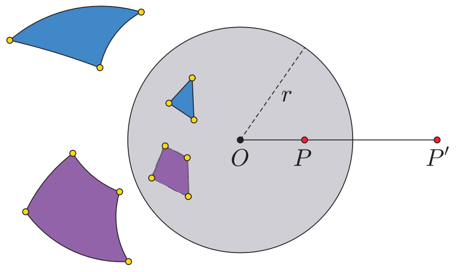
1.1. Ismerkedés az inverzióval

Az inverzió nem más, mint egy körre való „tükrözés”. Érdemes itt inkább a körvonalra gondolni, mint a körlemezre, de ahogy azt később látni fogjuk, a kör középpontja és sugara lesz a meghatározó.

A transzformációt a következő módon definiáljuk:

1.1. definíció (Inverzió). Adott egy O középpontú és r sugarú ω kör (ez az alapkör). Ekkor az ω körre való Ψ inverzió minden $P \neq O$ pontot egy olyan $P' \in OP$ pontba visz, melyre teljesül, hogy

$$OP \cdot OP' = r^2.$$



1. ábra. Az ábrán egy pont és két sokszög inverz képe van. Látható, hogy az inverz geometria nem kezeli jól a háromszögeket, négyszögeket, ezért érdemesebb csak a pontok, egyenesek és körök képeivel foglalkozni

Itt a szakaszokat úgymond irányított szakaszokként kezeljük, azaz P' rajta van az OP **félegyenesen.**

Az inverzió lényegében a kör belsejét viszi ki a körön kívüli síkrészre és fordítva. Sokszor érdemes úgy tekinteni rá, mint egy szimpla tükrözésre. Habár nem hasonlósági transzformáció, az elmondható, hogy ha az X és Y alakzatok tükörképek voltak Z-re nézve (ahol Z kör vagy egyenes), akkor ez X, Y és Z ugyanazon körre való invertálása után is így marad.

Az O pontot nem világos, hogy hova lehetne küldeni. Felmerül az ötlet, hogy önmagába, de ehelyett inkább bevezetünk egy *képzeletbeli* P_∞ pontot. Úgy definiáljuk ezt a pontot, hogy rajta legyen minden egyenesen. Persze ez a valós síknak nem pontja, úgy érdemes tekinteni rá mint valami „végtelenben lévő” pontra. Erre tehát $\Psi : O \mapsto P_\infty$ és persze $P_\infty \mapsto O$.

1.1. lemma. *Az O középpontú r sugarú körre való inverzió főbb tulajdonságai:*

- *involutív, azaz ha A képe B, akkor B képe A;*
- *pontosan az alapkör pontjai maradnak fixen;*
- *egy O-n átmenő egyenes képe önmaga (invariáns), míg egy O-n át nem menő egyenes képe egy O-n átmenő kör;*
- *egy O-n átmenő kör képe egy O-n át nem menő egyenes, míg egy O-n át nem menő kör képe szintén egy O-n át nem menő kör;*
- *szögtartó, azaz körök és egyenesek bezárt szögeit megtartja (viszont vigyázni kell, mert irányított szögekkel számolva az inverzió gyakran ellentettjére változtatja a szöget).*

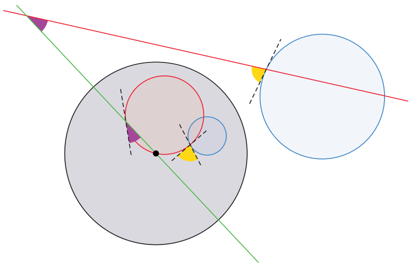
Két metsző kör vagy egy kör és egy őt metsző egyenes bezárt szögét a közös pontban húzott érintők vagy az érintő és az egyenes által bezárt szögeként definiáljuk.

Fontos továbbá megjegyezni, hogy érintő körök vagy egyenesek inverzió után is érintők maradnak, hiszen a bezárt szögük 0°. Illetve ha két érintő kör vagy egyenes érintési pontja körül rajzolunk egy kört és arra invertálunk, akkor két párhuzamos egyenest kapunk. Ugyanis az érintés lényegében azt jelenti, hogy pontosan egy közös pontjuk van, és két párhuzamos egyenesre ez teljesül (P_∞ az egyetlen közös pont.)

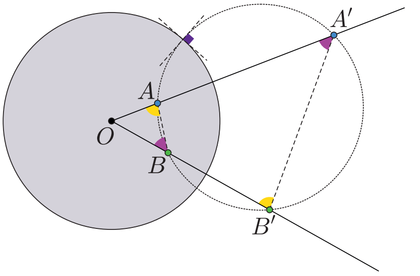
1.2. lemma. *Egy O középpontú r sugarú körre való invertálás során legyen A képe A' és B képe B' (feltesszük, hogy az O, A, B pontok nincsenek egy egyenesen). Ekkor*

$$OAB\triangle \sim OB'A'\triangle.$$

Illetve ebből könnyen következik, hogy



2. ábra. Inverz alakzatpárok és bezárt szögeik



3. ábra. Az 1.2-es lemma

- $OAB\sphericalangle = OB'A'\sphericalangle$;
- *az A, B, A', B' pontok egy körön vannak, és ez a kör merőleges az alapkörre (azaz arra a körre, amelyre elvégezzük az inverziót);*
- $|A'B'| = \frac{|AB| \cdot r^2}{OA \cdot OB}$.

Érdemes megjegyezni, hogy ha például B az alapkörön van, tehát $B = B'$, akkor az $ABB'A'$ kör (amely így az ABA' kör) érinti az OB egyenest.

1. példafeladat (Ptolemaiosz-egyenlőtlenség). Ha $ABCD$ egy négyszög, akkor

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD,$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a négyszög húrnégyszög. (Tehát egy négyszögben a szemközti oldalak szorzata legalább akkora, mint az átlók szorzata.)

Megoldás. Invertáljunk egy D középpontú r sugarú körre. Jelölje A', B', C' rendre az A, B, C pontok képét az inverzió során. Az $A'B'C'$ háromszögre felírva a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$A'B' + B'C' \geqslant A'C',$$

ami az **1.2. lemma** miatt

$$AB \cdot \frac{r^2}{DA \cdot DB} + BC \cdot \frac{r^2}{DB \cdot DC} \geqslant AC \cdot \frac{r^2}{DA \cdot DC}.$$

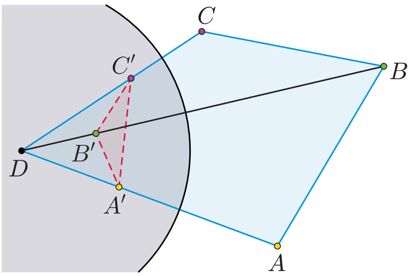
Szorozva $\frac{DA \cdot DB \cdot DC}{r^2}$-nal:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD.$$

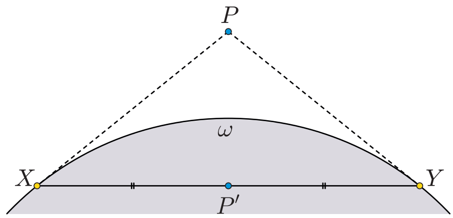
Egyenlőség akkor teljesül, ha a háromszög-egyenlőtlenségben is fennáll az egyenlőség, ami akkor történik, ha az A', B', C' pontok egy egyenesen vannak (és B' az A', C' pontok között van). Ez persze azt jelenti, hogy az A, B, C, D pontok egy körön vannak (továbbá, hogy B és D átellenes csúcsok).

Ahogy most is láttuk, nem mindig fontos az alapkör sugara, sokszor elég a középpontját meghatározni, ezért bevett szófordulat, hogy „invertáljunk O középpontra”.

1.3. lemma. *Egy alapkörtől különböző kör (vagy egyenes) képe akkor és csak akkor lesz önmaga, ha merőleges az alapkörre.*



4. ábra. Ábra a Ptolemaiosz-egyenlőtlenséghez



5. ábra. Ábra az 1.4-es lemmához

Legyen ω_1, ω_2 két kör, melyeknek középpontjait jelölje O_1 és O_2, illetve melyek egymást az A, B pontokban metszik. Érdemes geometriai feltételt adni ω_1 és ω_2 merőlegességére:

- az O_1A, O_1B egyenesek közül bármelyik érinti ω_2-t (és persze fordítva);
- az O_1AO_2B négyszög (deltoid) A és B csúcsánál derékszög van.

Ha egy P pont két kör hatványvonalán van, vagy éppen három kör hatványpontja, akkor amennyiben P a körökön kívül helyezkedik el, létezik egy P középpontú kör, amely merőleges a körökre (húzzunk érintőket P-ből és azoknak az érintési pontjai egy körön lesznek). Általában célszerű erre a körre invertálni.

1.4. lemma. *Legyen P egy ω körön kívüli pont, és húzzunk P-ből érintőket ω-hoz. Ha az érintési pontok X és Y, akkor P inverze ω-ra az XY szakasz felezőpontja.*

Majd később, a pólus-poláris témakörnél fogjuk látni ennek a lemmának az igazi hasznát.

Mikor érdemes inverzióval próbálkoznunk?

- ha sok a kör és kevés az egyenes;
- ha van egy kiemelt jelentőségű pont, amelyen sok kör/egyenes átmegy;
- ha közös végpont nélküli szakaszok szorzata, vagy közös szögszár nélküli szögek összege vagy különbsége szerepel a feladatban, erre egy jó példa az IMO1993/2[1];
- ha érintő körök vannak – ezt az inverzió remekül kezeli.

[1] `http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=199318`

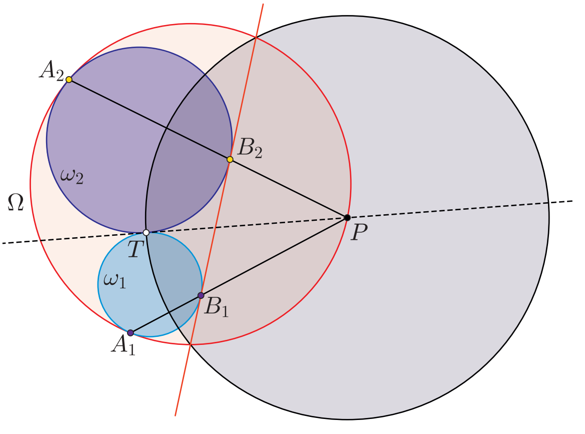
Mikor nem érdemes inverziót használnunk?

- ha sok az egyenes és kevés a kör (kivétel, ha az egyenesek átmennek egy közös ponton, hiszen ekkor a közös metszéspont körül invertálva az egyenesek helyben maradnak);
- ha olyan szögekkel kell számolnunk, melyek nem írhatóak fel az inverzió középpontja segítségével;
- ha területek vagy mérőszámok szerepelnek (a szimpla inverziós távolságképletünkön kívül nincs sok használható képlet).

2. példafeladat. Az ω_1, ω_2 körök kívülről érintik egymást a T pontban, míg az Ω kör mindkét kört érinti, rendre az A_1, A_2 pontokban úgy, hogy Ω tartalmazza a másik két kört. A $P \in \Omega$ pontra teljesül, hogy PT érinti az ω_1, ω_2 köröket. Igazoljuk, hogy ha $PA_1 \cap \omega_1 = B_1 \neq A_1$ és $PA_2 \cap \omega_2 = B_2 \neq A_2$, akkor a B_1B_2 egyenes érinti az ω_1, ω_2 köröket.

Megoldás: A P ponton egy kör és két egyenes is átmegy, így eszünkbe juthat invertálni egy P középpontú körre, speciálisan a P középpontú, PT sugarú körre. Mivel ez a kör merőleges az ω_1, ω_2 körökre, ezért azok az inverzióra nézve invariánsak. Viszont A_1, A_2 nincs rajta az alapkörön, ezért egyik sem önmagába megy át. Mivel A_1 képe rajta lesz a PA_1 egyenesen és ω_1-en is, ezért $A_1 \leftrightarrow B_1$. Hasonlóan $A_2 \leftrightarrow B_2$.

Mivel Ω átmegy az alapkör P középpontján, egyenes lesz a képe, amely átmegy az A_1 és az A_2 pont képén is, ami a B_1B_2 egyenes. Így, mivel Ω érintette az ω_1, ω_2 köröket, Ω képe, azaz a B_1B_2 egyenes is érinteni fogja a két kört (hiszen mindkettő képe önmaga).



6. ábra. Ábra a 2. példafeladathoz

Források: Általában a KöMaL archívumát érdemes megnézni, lehet benne címre / szövegre / kategóriára keresni.

1. Surányi László – Tusnády Gábor: Az inverzióról, 1968. nov., 97–101. o., `http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=196810`.

2. Hajós György: Bevezetés a geometriába,
https://dtk.tankonyvtar.hu/xmlui/handle/123456789/13101.
3. Hutai Dániel Gábor: Az inverzió és alkalmazásai (szakdolgozat),
https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mattan/2016/hutai_daniel_gabor.pdf.

Gyakorlófeladatok[2]

F/1. Adott négy kör, k_1, k_2, k_3, k_4 úgy, hogy k_i érinti k_{i+1}-et minden $i = 1, 2, 3, 4$-re ($k_5 = k_1$). Igazoljuk, hogy a négy érintési pont vagy egy körön vagy egy egyenesen van.

F/2. Legyen Ω egy PQ átmérőjű félkör. Az ω kör Ω-t és a PQ szakaszt is érinti, az utóbbi szakaszt C-ben. Az $A \in \Omega$, $B \in PQ$ pontokra teljesül, hogy C a PB szakasz belső pontja, és az AB egyenes érinti az ω kört és merőleges a PQ egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy AC felezi a $PAB\sphericalangle$-et.

F/3. (IMO 1996.) Legyen P az ABC háromszög olyan belső pontja, amelyre

$$APB\sphericalangle - ACB\sphericalangle = APC\sphericalangle - ABC\sphericalangle$$

teljesül. Legyen D, illetve E az APB, illetve APC háromszögek beírt körének középpontja. Mutassuk meg, hogy az AP, BD és CE egyenesek egy ponton mennek át.

F/4. (P. 196., KöMaL 1973. dec., megoldás:
http://db.komal.hu/KomalHU/felhivatkoz.phtml?id=23855.)
Adott a síkon véges számú pont úgy, hogy

a) semelyik három sincs egy egyenesen;

b) bármelyik három által meghatározott körön van közülük legalább egy további.

Igaz-e, hogy a megadott pontok mind egy körön vannak?

F/5. (B. 3796., KöMaL 2005. febr., megoldás:
http://db.komal.hu/KomalHU/felhivatkoz.phtml?id=46489.)
A k körhöz a külső A pontból érintőket húzunk, az érintési pontok E és F, az EF szakasz felezőpontja G. Egy A-n átmenő egyenes a B, C pontokban metszi a k kört. Bizonyítsuk be, hogy az EF egyenes felezi a BGC szöget.

F/6. (B. 4175., KöMaL 2009. ápr., megoldás:
http://db.komal.hu/KomalHU/felhivatkoz.phtml?id=53512.)
Legyenek A, B, C, D általános helyzetű pontok a síkon. Igazoljuk, hogy ha az ABC és az ABD körök merőlegesen metszik egymást, akkor ugyanez igaz az ACD és a BCD körökre is.

[2] Az első három feladat megoldásának vázlatos gondolatmenete ugyanebben a számban a 22. oldaltól olvasható. A KöMaL archívumban még vannak inverzió témakörben feladatok.

F/7. (B. 4765., KöMaL 2016. jan., megoldás: `https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=B4765&l=hu`.) Az $ABCD$ húrnégyszögben az $ADB\sphericalangle$ és $ACB\sphericalangle$ szögek felezői az AB oldalt rendre az E és F pontokban, a $CBD\sphericalangle$ és $CAD\sphericalangle$ szögek felezői pedig a CD oldalt rendre a G és H pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy az E, F, G, H pontok egy körön vannak.

Bán-Szabó Áron
Budapest

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő feladatokat:

a) $|\sin x| > \cos x - 1$; (*5 pont*)

b) $27x^6 + 26x^3 - 1 = 0$. (*7 pont*)

2. Egy fagráf éleit újabb 435 él behúzásával kiegészítettük, így egy egyszerű, összefüggő teljes gráfot kaptunk. Hány pontú ez a gráf? (*4 pont*)

b) Igazoljuk a következő állítást: bármely n pontú fagráf annyi újabb él behúzásával tehető egyszerű, összefüggő teljes gráffá, amennyi az $n-1$ pontú teljes gráf éleinek száma. (*4 pont*)

Leonardo Pisano (kb. 1170 – kb. 1250?) olasz matematikus Fibonacci néven lett ismert. Több érdekes könyve, feladata maradt fenn. Róla nevezték el a következő sorozatot: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$. A sorozat tetszőleges tagja úgy kapható meg, hogy az előző két tagot összeadjuk. Az első és második tag is 1.

c) Egy pozitív tagú mértani sorozat három egymást követő tagjának összege 700. Ha az első számhoz 44-et, a második számhoz 33-at adunk, a harmadik számból pedig 23-at kivonunk, a Fibonacci-sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Melyek ezek a számok? (*6 pont*)

3. A Derelye pékségben jártunk.

a) A pékség polcán 30 darab mákos kifli van. Vannak közte olyan darabok, amelyek nem felelnek meg a szigorú minőségi követelményeknek. Ha két kiflit – visszatevés nélkül – kiveszünk, akkor annak a valószínűsége, hogy mind a kettő hibátlan $\frac{38}{9}$-szer nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy mindkét kivett darab hibás. Hány nem megfelelő mákos kifli van a polcon? (*7 pont*)

A túrós batyukat is szigorú ellenőrzés alá vonjuk a pékségben. Lemérve a polcon található darabokat, a következő értékeket kapjuk grammban: 132, 132, 133, 132, 130, 129, 129, 131, 130, 130, 132, 130, 130, 128, 127, 129, 132, 131, 133, 131, 129, 127, 128, 127, 129.

b) Készítsünk az adatokból gyakorisági táblázatot. Igazoljuk, hogy az adatok szórása nem haladja meg a megengedett 2 értéket. (*5 pont*)

4. Bármely szabályos sokszögnek van beírt és köréírt köre is.

a) Mekkora a szabályos nyolcszögnél a beírható és köré írható kör sugarának aránya? (*3 pont*)

Egy szabályos sokszög beírható körének sugara (r) és köré írható körének sugara (R) között a következő összefüggés áll fenn:

$$4r^2 + 3R^2 = 4\sqrt{3}rR.$$

b) Mekkora az $\frac{r}{R}$ arány értéke? (*6 pont*)

c) Hány oldalú lehet a sokszög? (*4 pont*)

II. rész

5. Adott két, pozitív valós számok halmazán értelmezett függvény:

$$f(x) = x^{2-\log_2 x} + x \quad \text{és} \quad g(x) = x^{3-\log_2 x} - x.$$

a) Igazak, vagy hamisak az alábbi állítások? (*5 pont*)

A) $f(1) = 2$;

B) $2 \cdot f(2) = g(2)$;

C) $g(1) + g(2) + g(4) + g(8) = -5$.

b) Adjuk meg az összes olyan $a \in D_f \cap D_g$ valós számot, melyre $f(a) - g(a) = 2$. (*11 pont*)

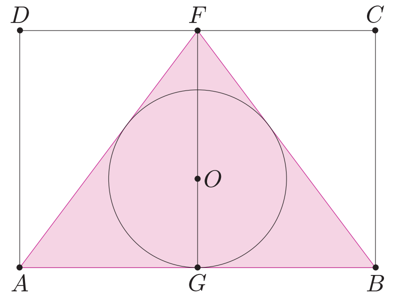
6. Egy baráti társaság együtt lottózik. Minden alkalommal a hagyományos ötöslottón töltenek ki szelvényeket (kilencven számból kell ötöt eltalálni). Az egyik héten a nagy nyeremény reményében újra összeültek és megtervezték a kitöltés módszerét. A csoport minden tagja ugyanannyi szelvényt töltött ki, de ügyeltek arra, hogy minden szelvény különbözőképpen legyen kitöltve.

a) Hányan voltak a csoportban, ha ügyes szervezéssel mindenki 25 különböző szelvényt töltött ki és így pontosan annyi különbözően kitöltött szelvényük lett, amennyi egy sorsolásnál a különböző négytalálatos szelvények lehetséges száma? (*6 pont*)

b) Az azon a héten kihúzott öt szám (x, y, z, u, v) értékére a következő összefüggések írhatók fel:

$$x + y + z = 49, \qquad y + z + u = 101, \qquad z + u + v = 173,$$
$$u + v + x = 147, \qquad v + x + y = 109.$$

Mik voltak a nyerőszámok? (*10 pont*)



7. Gábor egy különleges kis dartstáblát készít kisfiának: egy téglalapban egyenlő szárú háromszög és annak beírt köre látható az *ábra* szerint. A téglalap és a háromszög közös oldala 6 deciméter, a háromszögbe írt kör sugara 15 centiméter.

a) Mekkora a háromszög területének és kerületének pontos értéke? (*10 pont*)

Feltételezzük, hogy a játékkal játszó kisfiú minden lövése egyenlő eséllyel éri el a téglalap alakú céltábla bármely pontját.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a körbe talál a lövés? (*3 pont*)

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a háromszög körön kívüli pontját találja el a lövés? (*3 pont*)

8. Adott az $n^4 + 64 \cdot m^4$ kifejezés, ahol n és m pozitív egész számok.

a) Igazoljuk, hogy ha $n = m = 2$, a kifejezés osztható 13-mal. (*2 pont*)

b) Adjunk meg olyan n és m értéket, amelyek relatív prímek és amelyekre a kifejezés értéke osztható 5-tel. (*3 pont*)

c) Igazoljuk, hogy bármely n és m pozitív egész esetén a kifejezés értéke nem prímszám. (*11 pont*)

9. Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ függvény.

a) Határozzuk meg a függvény és a koordinátatengelyek által alkotott, első negyedben levő síkidom területét. (*6 pont*)

b) Egy egyenes áthalad az előbbi f függvény $P(2;3)$ koordinátájú pontján. Mi lehet ennek az egyenesnek az egyenlete, ha tudjuk, hogy az első negyedben létrejött síkidomot úgy vágja két részre, hogy az egyik rész területe kétszer akkora, mint a másik rész területe? (*10 pont*)

Tatár Zsuzsanna Mária
Esztergom

Megoldásvázlatok a 2022/9. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Az a_n számtani sorozat különbsége* 4, *az első hét tagjának összege* 105. *Adjuk meg a sorozat első tagját.* (*3 pont*)

b) *A b_n mértani sorozat hányadosa* 4, *az első hét tagjának összege* 16 383. *Adjuk meg a sorozat első tagját.* (*3 pont*) *c) A c_n sorozat minden tagja az n elsőfokú függvénye. A sorozat második tagja 7, a hetedik tagja 27. Adjuk meg a sorozat első tagját.* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) A szokásos jelölésekkel: $a_1 + (a_1 + 4) + (a_1 + 8) + (a_1 + 12) + + (a_1 + 16) + (a_1 + 20) + (a_1 + 24) = 105$, amelyből $7a_1 + 84 = 105$, $a_1 = 3$.

b) A mértani sorozat összegképlete alapján: $b_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = 16\,383$, behelyettesítés után $b_1 \cdot \frac{4^7-1}{4-1} = 16\,383$, amelyből megkapjuk, hogy $b_1 = 3$.

c) A feltételek alapján: $c_n = a \cdot n + b$, ahol a, b valós számok, de $a \neq 0$. Továbbá, $c_2 = a \cdot 2 + b = 7$ és $c_7 = a \cdot 7 + b = 27$, így a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$2a + b = 7,$$

$$7a + b = 27.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $a = 4$, illetve $b = -1$, amelyből $c_1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3$.

2. *a*) *Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:*

$$5^{-x+1} - 10 \cdot 5^{-x-1} + 6 \cdot 5^{-x-2} = 16{,}2. \qquad (6 \text{ pont})$$

b) *Igazoljuk, hogy*

$$\lg 3^{2x} \cdot \lg 7^{2x} \leqslant \left(\lg 3^x + \lg 7^x\right)^2$$

minden valós x esetén fennáll. (*7 pont*)

Megoldás. *a*) A hatványozás azonosságait használva:

$$5 \cdot 5^{-x} - 2 \cdot 5^{-x} + 0{,}24 \cdot 5^{-x} = 16{,}2,$$

amelyből $3{,}24 \cdot 5^{-x} = 16{,}2$, ezért $5^{-x} = 5^1$. Az 5-ös alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért $x = -1$. Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy hivatkozás az ekvivalens átalakításokra.

b) A bizonyítandó állításban szereplő kifejezések minden valós x-re értelmezettek. Rendezzük 0-ra, és hajtsunk végre néhány ekvivalens átalakítást:

$$0 \leqslant (\lg 3^x + \lg 7^x)^2 - \lg 3^{2x} \cdot \lg 7^{2x} = (\lg 3^x + \lg 7^x)^2 - \lg (3^x)^2 \cdot \lg (7^x)^2,$$

$$0 \leqslant (\lg 3^x + \lg 7^x)^2 - 4 \cdot \lg 3^x \cdot \lg 7^x, \quad \text{amelyből}$$

$$0 \leqslant (\lg 3^x - \lg 7^x)^2.$$

A kapott egyenlőtlenség igaz, és ezzel állításunkat igazoltuk.

3. *Egy üzemben* 5 *milliméter vastagságú,* 80 *centiméter oldalhosszúságú négyzet alakú acéllapokból a lehető legnagyobb, szabályos tizenkétszögeket vágnak ki úgy, hogy a tizenkétszögek két-két oldala illeszkedjen a négyzetlapok oldalára. Tudjuk, hogy az acél sűrűsége* $7{,}8\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

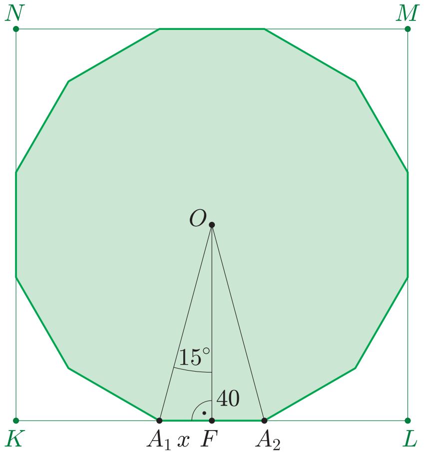
a) *Mekkora lesz* 75 *darab legyártott tizenkétszög tömege?* (*7 pont*)

A szabályos tizenkétszög csúcsait megszámozzuk sorban 1-től 12-ig. A sorszámozott csúcsok közül bármelyik három egy-egy háromszöget alkot.

b) Adjuk meg az így kapott derékszögű és nem derékszögű háromszögek számát. *(6 pont)*

Megoldás. *a*) Legyen a kiinduló négyzet a $KLMN$, és a tizenkétszög A_1A_2 oldala illeszkedjen a négyzet KL oldalára. Legyen továbbá a négyzet átlóinak metszéspontja O, a KL felezőpontja pedig F.

Használjuk az *ábra* jelöléseit. A szabályos tizenkétszög tulajdonságai és a megadott adatok alapján: $A_1OA_2\sphericalangle = 30°$, $OF = 40$ cm, vagyis $A_1OF\sphericalangle = 15°$. Az A_1OF derékszögű háromszögből kapjuk, hogy $x = 40 \cdot \operatorname{tg} 15°$. A tizenkétszög területe (cm^2-ben):



$$T = 12 \cdot T_{A_1A_2O} = 12 \cdot \frac{A_1A_2 \cdot OF}{2} =$$

$$= 12 \cdot x \cdot OF = 12 \cdot (40 \cdot \operatorname{tg} 15°) \cdot 40 =$$

$$= 19\,200 \cdot \operatorname{tg} 15°.$$

A megadott sűrűséggel a 75 darab, 0,5 centiméter vastagságú tizenkétszög tömege

$$75 \cdot 19200 \cdot \operatorname{tg} 15° \cdot 0{,}5 \cdot 7{,}8 \approx 1\,504\,803 \text{ (gramm)},$$

amely kerekítve 1505 kilogramm.

b) A Thalész-tétel (megfordítása) miatt derékszögű háromszöget akkor kapunk, ha a háromszög leghosszabb oldala a tizenkétszög köré írt körének átmérője, tehát ennek az oldalnak a két végpontja a tizenkétszög két átellenes csúcsa. Ilyen módon két csúcsot hatféleképpen tudunk választani: A_1A_7, A_2A_8, A_3A_9, A_4A_{10}, A_5A_{11}, A_6A_{12}. A háromszög harmadik, a derékszögű csúcsa a maradék 10 csúcs közül bármelyik lehet. Ez mind a hat esetben 10 lehetőséget jelent, vagyis a derékszögű háromszögek száma: $6 \cdot 10 = 60$. Az összes háromszög számát úgy kapjuk, ha a 12 csúcs közül az összes lehetséges módon kiválasztunk három darabot. Ezeknek a száma: $\binom{12}{3} = 220$, azaz a nem derékszögű háromszögek száma: $220 - 60 = 160$.

4. *Magyarországon 2022-ig a gépkocsik (nem egyedi) rendszáma három betűből és három számjegyből állt. Az ábécé 26 betűje használható ezekben a rendszámokban.*

a) Hány autó kaphat ilyen módon rendszámot? *(4 pont)*

b) Hány olyan rendszám lehet, amelyikben kétféle betű, és kétféle számjegy szerepel? *(5 pont)*

c) Az elképzelhető összes rendszámból véletlenszerűen választunk egy darabot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy három különböző betűből és három különböző számjegyből áll ez a rendszám? *(5 pont)*

Megoldás. a) Mivel többször is szerepelhetnek a betűk és a számjegyek is egy-egy rendszámban, ezért a három betű 26^3, a három számjegy pedig 10^3 darab lehet, az összes lehetőség ezek alapján: $26^3 \cdot 10^3 = 17\,576\,000$.

b) Legyen a rendszámban szereplő kétféle betű az A és a B. Ezek 6-féleképpen fordulhatnak elő: AAB, ABA, BAA, ABB, BAB, BBA. Mivel a 26 betű közül $\binom{26}{2}$-féleképpen választhatunk ki két betűt, ezért minden választás esetén $6 \cdot \binom{26}{2}$, azaz 1950 rendszám betűit tudjuk előállítani. A számjegyek esetén is hasonlóan gondolkodhatunk: $6 \cdot \binom{10}{2} = 270$. Ezek alapján az összes megfelelő rendszám darabszáma: $1950 \cdot 270 = 526\,500$.

c) Az összes elképzelhető rendszám száma: $26^3 \cdot 10^3$. Mivel most csak egyszer szerepelhetnek a betűk és a számjegyek is egy-egy rendszámban, ezért a három betű $26 \cdot 25 \cdot 24$, a három számjegy pedig $10 \cdot 9 \cdot 8$ darab lehet. A kedvező lehetőségek száma ezek alapján: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$. A keresett valószínűséget a kedvező esetek számának és az összes eset számának hányadosa adja, vagyis annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott rendszám három különböző betűből és három különböző számjegyből fog állni:

$$p = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{26^3 \cdot 10^3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 9 \cdot 8}{26^2 \cdot 10^2} \approx 0{,}639.$$

II. rész

5. *Adott a következő két függvény:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = -x - 1, \quad \textit{és} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad g(x) = -x^2 - 10x - 19.$$

a) Oldjuk meg az $f(x) = g(x)$ egyenletet a valós számok halmazán. *(3 pont)*

b) Írjuk fel az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ egyenletű alakzatok közös pontjaiban az $y = g(x)$ egyenletű görbéhez húzható érintők egyenletét. *(7 pont)*

c) Számítsuk ki az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ egyenletű alakzatok által közbezárt síkidom területét. *(6 pont)*

Megoldás. a) Rendezés után a következő másodfokú egyenletet kell megoldanunk: $x^2 + 9x + 18 = 0$. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával látható, hogy $x_1 = -3$, $x_2 = -6$.

b) Adott pontban a függvénygrafikon érintőjének meredeksége egyenlő a függvény első deriváltjának értékével. Mivel $g'(x) = -2x - 10$, ezért az e_1 érintő meredeksége $m_1 = g'(-3) = -4$, az e_2 érintő meredeksége $m_2 = g'(-6) = 2$. Az e_1 egyenes átmegy a $g(x)$ grafikonjának $P_1(-3; 2)$ pontján, ezért $2 = -4 \cdot (-3) + b_1$, amelyből $b_1 = -10$, így $e_1 : y = -4x - 10$. Hasonlóképpen, a $P_2(-6; 5)$ pont illeszkedik az e_2 egyenesre, ezért $5 = 2 \cdot (-6) + b_2$, ebből $b_2 = 17$, tehát $e_2 : y = 2x + 17$.

c) A grafikonok által meghatározott síkidom területét a következő határozott integrál kiszámításával kaphatjuk meg:

$$\int_{-6}^{-3}\big(g(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x=\int_{-6}^{-3}(-x^2-9x-18)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}-4{,}5x^2-18x\right]_{-6}^{-3}=$$

$$=22{,}5-18=4{,}5.$$

A síkidom területe 4,5 területegység.

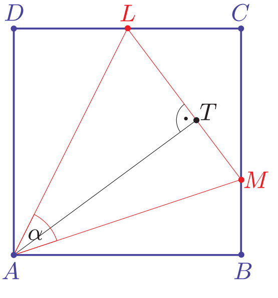
6. *Egy 600 méter oldalhosszúságú, négyzet alakú parkot futópálya határol. A park egyik csúcsától indítja András, az edző a két futóatlétáját, akik egyszerre indulnak, de más irányban. András helyben marad, Lali* 9 km/h*, Máté* 8 km/h *egyenletes sebességgel fut az edzésen.* 6 *perc elteltével a három szereplő az ALM háromszög csúcsaiban van, ahol a háromszög csúcsait a szereplők nevének a kezdőbetűjével jelöltük.*

a) Milyen messze van ekkor Andrástól Lali és Máté? (*4 pont*)

b) Milyen messze van ekkor egymástól a két futó? (*2 pont*)

c) Igazoljuk, hogy ekkor András pontosan $45°$*-os szögben látja az LM szakaszt.* (*5 pont*)

d) A parkban az L és M között van egy egyenes sétaút is. Milyen messze van András ettől az úttól? (*5 pont*)



Megoldás. *a*) 6 perc, azaz 0,1 óra alatt Lali 900 métert, Máté pedig 800 métert fut. Ezek alapján: $AD+DL=600+300=900$ méter, $AB+BM==600+200=800$ méter. A Pitagorasz-tételt használva az ADL derékszögű háromszögben András és Lali távolsága: $AL^2=AD^2+DL^2=600^2+300^2=450\,000$, amelyből $AL=\sqrt{450\,000}=300\sqrt{5}\approx 671$ méter.

A Pitagorasz-tételt használva az ABM derékszögű háromszögben András és Máté távolsága: $AM^2=AB^2+BM^2=600^2+200^2=400\,000$, amely alapján $AM=\sqrt{400\,000}=200\sqrt{10}\approx 632$ méter. Andrástól Lali 671 méterre, Máté pedig 632 méterre van.

b) Mivel $DL=300$, ezért $LC=300$. Mivel $BM=200$, ezért $MC=400$. A Pitagorasz-tételt használva az LCM derékszögű háromszögben Lali és Máté távolsága: $LM=\sqrt{LC^2+MC^2}=\sqrt{300^2+400^2}=500$ (méter).

A két sportoló 500 méterre van egymástól.

c) Az ALM háromszögre használjuk a koszinusztételt:

$$LM^2=AL^2+AM^2-2\cdot AL\cdot AM\cdot\cos\alpha.$$

A háromszög oldalainak hosszát már ismerjük, végezzük el a behelyettesítést, de az igazolás miatt csakis a pontos értékeket használhatjuk:

$$250\,000=450\,000+400\,000-2\cdot 300\sqrt{5}\cdot 200\sqrt{10}\cdot\cos\alpha,$$

amelyből azt kapjuk, hogy

$$\cos\alpha = \frac{450\,000 + 400\,000 - 250\,000}{2 \cdot 300\sqrt{5} \cdot 200\sqrt{10}} = \frac{600\,000}{120\,000 \cdot \sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Az α egy háromszög belső szöge, ezért a $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenlet megoldását a $]0°; 180°[$-on keressük. Az egyedüli megoldás $\alpha = 45°$, és ezzel az állítást igazoltuk.

d) Az AT szakasz hosszát kell meghatároznunk. Írjuk fel az ALM háromszög területét kétféleképpen:

$$T = \frac{LM \cdot AT}{2} = \frac{500 \cdot AT}{2} = 250 \cdot AT,$$

illetve

$$T = \frac{AL \cdot AM \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{300\sqrt{5} \cdot 200\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 150\,000.$$

Ebből következik, hogy $250 \cdot AT = 150\,000$, azaz $AT = 600$ (m).

András 600 méterre van az úttól.

7. *Boglárka érdekes számhármasokat gyűjtött, és a következőket állapította meg:*

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2,$$
$$7^2 + 24^2 = 25^2,$$
$$9^2 + 40^2 = 41^2.$$

a) *Béla meglátta Boglárka egyenleteit és elgondolkodott azon, hogy lehet-e egy ilyen tulajdonságú számhármas legkisebb eleme a* 2023. *Segítsünk Bélának, határozzuk meg $k \in \mathbb{Z}$ értékét, ha $2023^2 + k^2 = (k+1)^2$.* *(4 pont)*

b) *Bálint azt állítja, hogy a végtelenségig folytatható az egyenlőségek sorozata, azaz minden $2n+1$ $(n \in \mathbb{N})$ alakú páratlan szám négyzetéhez hozzáadva a $2n(n+1)$ négyzetét, éppen a következő négyzetszámot kapjuk. Igazoljuk Bálint állítását.* *(6 pont)*

c) *Bizonyítsuk be, hogy $1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + 4^{2023} + 5^{2023}$ osztható 5-tel.* *(6 pont)*

Megoldás. *a*) Bontsuk fel a zárójelet, majd az egyenlet mindkét oldalából vonjunk ki k^2-t:

$$2023^2 + k^2 = k^2 + 2k + 1,$$
$$2023^2 = 2k + 1.$$

Ebből rendezés után azt kapjuk, hogy

$$k = \frac{2023^2 - 1}{2} = 2\,046\,264.$$

Ellenőrzés: $2023^2 + 2\,046\,264^2 = 4\,187\,200\,450\,225 = 2\,046\,265^2$.

b) Bálint állítása a következő: Minden $n \in \mathbb{N}$-re igaz, hogy

$$(2n+1)^2 + \big(2n(n+1)\big)^2 = \big(2n(n+1)+1\big)^2.$$

Az egyenlet bal oldalából kiindulva, azonos átalakításokat végzünk:

$$4n^2 + 4n + 1 + 4n^2(n^2+2n+1) = 4n^2(n^2+2n+1) + 4n(n+1) + 1 =$$

$$= \big(2n(n+1)\big)^2 + 2 \cdot 2n(n+1) + 1 = \big(2n(n+1)+1\big)^2,$$

így éppen a jobb oldalon álló kifejezést kapjuk. Ezzel a bizonyítás végére értünk, megmutattuk, hogy Bálint állítása igaz.

c) *I. megoldás.* Az $1^{2023} = 1$, a 2 pozitív egész kitevőjű hatványainak végződései négyesével ismétlődnek $(2, 4, 8, 6, 2, \ldots)$, és $2023 = 505 \cdot 4 + 3$, ezért a 2^{2023} utolsó számjegye 8. A 3 pozitív egész kitevőjű hatványainak végződései is négyesével ismétlődnek $(3, 9, 7, 1, 3, \ldots)$, ezért a 3^{2023} utolsó számjegye 7. A 4 pozitív egész kitevőjű hatványainak végződései kettesével ismétlődnek $(4, 6, 4, \ldots)$, tehát páratlan kitevő esetén 4-re végződnek, ezért a 4^{2023} utolsó számjegye 4. Az 5 pozitív egész kitevőjű hatványainak végződése mindig 5, tehát az 5^{2023} utolsó jegye 5. Ezek alapján az öttagú összeg utolsó jegye 5, vagyis osztható 5-tel. Ezzel a bizonyítás kész.

II. megoldás. Mivel az 5 bármelyik pozitív egész kitevőjű hatványa osztható 5-tel, így elég megmutatnunk, hogy $1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + 4^{2023}$ osztható 5-tel. A kifejezés tagjait alkalmasan csoportosítjuk:

$$1^{2023} + 4^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023},$$

majd alkalmazzuk az

$$a^n + b^n = (a+b)\big(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \ldots \pm \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}\big)$$

azonosságot, amelyben n pozitív, páratlan szám:

$$\big(1^{2023} + 4^{2023}\big) + \big(2^{2023} + 3^{2023}\big) =$$

$$= (1+4) \cdot (\text{egész szám}) + (2+3) \cdot (\text{egész szám}) = 5 \cdot (\text{egész szám}),$$

azaz beláttuk, hogy a kifejezés osztható 5-tel.

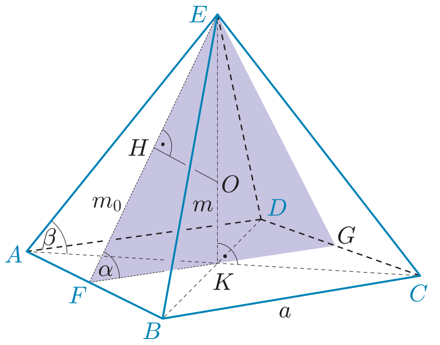
8. *Egy vállalkozás olyan négyzet alapú egyenes gúlákat rendel reklámajándéktárgyként, amelyeknek az oldallapjai az alaplappal* $60°$*-os szöget zárnak be, és az alapéleinek a hossza* 12 *centiméter. A négy kiemelkedő termékük reklámját szeretnék elhelyezni a gúla egy-egy oldallapján.*

a) *Határozzuk meg mekkora területű részre kell megtervezni egy termék reklámját.* (*3 pont*)

b) *Mekkora a gúla térfogata?* (*3 pont*)

c) *Mekkora szöget zárnak be a gúla oldalélei az alaplappal?* (*4 pont*)

d) *A gúla alakú dobozok belsejében egy-egy (gömb alakú) ajándék labdát is elhelyeznek, amelyek mind a négy oldallapot és az alaplapot is érintik. Mekkora a labda sugara?* (*6 pont*)



Megoldás. a) Legyen az AC és a BD átló metszéspontja K, a gúla testmagassága $EK = m$. Az AB él felezőpontja F, így $FE = m_0$ az ABE oldallap magassága, és $KFE\sphericalangle = \alpha = 60^\circ$ az alaplap és az oldallapok bezárt szöge.

A KFE derékszögű háromszögből

$$m_0 = \frac{a}{2 \cdot \cos 60^\circ} = \frac{12}{2 \cdot \cos 60^\circ} = 12 \text{ (cm)}.$$

Ezt felhasználva a gúla egy oldallapjának a területe, ahová egy terméknek a reklámját kell megtervezni:

$$T_{\text{oldallap}} = \frac{a \cdot m_0}{2} = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72 \text{ cm}^2.$$

b) A KFE derékszögű háromszögből

$$m = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{12}{2} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 6 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}.$$

A gúla térfogata:

$$V = \frac{a^2 \cdot m}{3} = \frac{12^2 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}{3} = 288 \cdot \sqrt{3} \approx 498{,}8 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

c) A gúla forgásszimmetrikus, ezért az oldalélek az alaplappal ugyanakkora szöget zárnak be. Az EA oldalél alaplappal alkotott β szögét az EAK derékszögű háromszögből határozhatjuk meg:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{EK}{KA} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 12} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

innen $\beta \approx 50{,}77^\circ$.

d) A gúla beírt gömbjének sugarát kell meghatároznunk. Ez a gömb az oldallapokat azok lapmagasságain, az alaplapot a négyzet átlóinak metszéspontjában érinti. Legyen a CD él felezőpontja G, a gúlának egy alaplapra merőleges síkmetszete a GFE háromszög. A beírt gömb O középpontja az EK tengelyre illeszkedik, ezért a GFE sík egy olyan főkört metsz ki a gömbből, amely egyúttal a GFE háromszög beírt köre. A GFE háromszögben FO szögfelező, ezért $OFK\sphericalangle = 30^\circ$. A gömb sugara:

$$r = KO = KF \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 \cdot \sqrt{3} \approx 3{,}5.$$

A gúla alakú dobozokban 3,5 cm sugarú labdákat helyeztek el.

Megjegyzés. A GFE háromszög beírt körének r sugara többféleképpen is meghatározható. Alkalmazhattuk volna az $r = \frac{t}{s}$ képletet, de hasonlósággal is célt lehetne érni. Ha a kör az EF szakaszt H-ban érinti, akkor az EHO és az EKF háromszögek hasonlók.

9. *a*) *Egy matematikatanár tanít a* 12. A *és a* 12. B *osztályban is. Íratott egy közös dolgozatot, amelyben* 120 *pont volt az elérhető legmagasabb pontszám. Az* A *osztályban* 84 *pont, a* B *osztályban* 74 *pont lett az átlag. Az* A *osztályos fiúk átlagosan* 81, *a* B *osztályos fiúk pedig* 71 *pontot értek el. Az* A *osztályban a lányok átlagosan* 90, *míg a* B *osztályban a lányok átlagosan* 76 *pontos dolgozatot írtak. Tudjuk továbbá, hogy az összes fiú átlaga* 79 *pont lett. Mennyi a két osztályban az összes lány átlagpontszáma?* (*8 pont*)

b) *Az* A *osztályban tanuló Andrásnak hat jegye van matematikából, és a hat jegynek a mediánja* 4. *Mit mondhatunk a* B *osztályban tanuló Benedek matematikajegyeinek mediánjáról, ha hat jegye pontosan megegyezik András jegyeivel, de neki van még ezen túl egy hetedik jegye, amely* 5*-ös?* (*4 pont*)

c) *Három barátnő, Anna, Bea és Cili matematikából, fizikából és kémiából elért félévi eredményeiket vizsgálta.*

I. *Kiszámolták mindegyiküknek az átlagát, majd ezeknek az átlagoknak vették az átlagát.*

II. *Kiszámolták a három tantárgy átlagát, majd ezen átlagok átlagát vették.*

Mutassuk meg, hogy a kétféle módon kapott átlag egyenlő egymással. (*4 pont*)

Megoldás. *a*) A következő *táblázat* tartalmazza az ismert átlagokat, az összes lány átlagpontszámát jelölje x:

	fiúk átlaga	lányok átlaga	osztály átlaga
12. A	81	90	84
12. B	71	76	74
átlag	79	x	

A 12. A osztályban a fiú, a 12. B osztályban b fiú, a 12. A osztályban c lány, a 12. B osztályban d lány van. A táblázat első sora alapján a következő egyenletet írhatjuk fel: $81a + 90c = 84(a + c)$, amelyből $a = 2c$. A táblázat második sora alapján pedig a következő: $71b + 76d = 74(b + d)$, amelyből $d = 1{,}5b$. A táblázat első oszlopa alapján: $81a + 71b = 79(a + b)$, ebből $a = 4b$. A táblázat második oszlopa alapján: $90c + 76d = x(c + d)$, vagyis $x = \frac{90c+76d}{c+d}$. Mivel $a = 2c$ és $a = 4b$, ezért $2c = 4b$, vagyis $c = 2b$. Alkalmazzuk az x-re kapott összefüggésben a $c = 2b$ és a korábban kapott $d = 1{,}5b$ helyettesítést:

$$x = \frac{90 \cdot 2b + 76 \cdot 1{,}5b}{2b + 1{,}5b} = \frac{180 + 114}{3{,}5} = 84.$$

A két osztályban az összes lány átlagpontszáma 84.

b) Legyen András hat jegye: $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e \leqslant f$. Mivel ezeknek az érdemjegyeknek a mediánja 4, és páros darabszámú jegyről van szó, ezért $\frac{c+d}{2} = 4$. Benedek hét jegyével kapcsolatban három eset lehetséges. Ha $c = 3$ és $d = 5$, akkor a sorrend: $a, b, c, 5, d, e, f$, vagyis a medián 5. Ha $c = 4$ és $d = 4$, akkor a sorrend: $a, b, c, d, \ldots$, vagyis a medián $d = 4$-gyel egyenlő. Ezek alapján, ha a hat érdemjegyhez hozzáveszünk egy 5-öst, akkor a hét számnak a mediánja, azaz Benedek matematikajegyeinek mediánja vagy 4, vagy 5 lesz.

c) A megfelelő félévi jegyet a következő táblázatban rögzítettük ($a, b, \dots, i \in$ $\in \{1; 2; 3; 4; 5\}$):

	matematika	fizika	kémia
Anna	a	b	c
Bea	d	e	f
Cila	g	h	i

Anna átlaga: $\frac{a+b+c}{3}$, Bea átlaga: $\frac{d+e+f}{3}$, Cili átlaga: $\frac{g+h+i}{3}$. A három tanuló átlagának az átlaga:

$$\frac{\frac{a+b+c}{3}+\frac{d+e+f}{3}+\frac{g+h+i}{3}}{3}=\frac{a+b+c+d+e+f+g+h+i}{9}.$$

A matematika átlaga: $\frac{a+d+g}{3}$, a fizika átlaga: $\frac{b+e+h}{3}$, a kémia átlaga: $\frac{c+f+i}{3}$. A három tantárgy átlagának az átlaga:

$$\frac{\frac{a+d+g}{3}+\frac{b+e+h}{3}+\frac{c+f+i}{3}}{3}=\frac{a+b+c+d+e+f+g+h+i}{9}.$$

Láthatjuk, hogy a három tanuló átlagának az átlaga és a három tantárgy átlagának az átlaga egyenlő.

Kozma Katalin Abigél, Győr
Számadó László Budapest

Projektív geometria és társai – avagy hogyan birkózzunk meg egy feladattal 1. első három gyakorlófeladatának megoldásvázlata

F/1. Megoldásvázlat. Legyen a négy érintési pont A, B, C és D (ebben a sorrendben). Invertáljunk egy A középpontú körre. Ekkor k_1 és k_2 (melyek az A-n átmenő érintő körök voltak) párhuzamos k_1', k_2' egyenesekbe mennek és a k_3, k_4 körök k_3', k_4' képei olyan körök, melyek C'-ben érintik egymást, és k_2'-t B'-ben, míg k_1'-et D'-ben érintik. Igen egyszerű szögszámolással adódik, hogy B', C', D' egy egyenesen van. Visszainvertálva: ha ez az egyenes átment A-n, akkor A, B, C, D egy egyenesen van, és ha ez az egyenes nem ment át A-n, akkor az egyenes képe az $ABCD$ kör lesz.

F/2. Megoldásvázlat. Invertáljunk egy C középpontú körre. A PQ átmérőjű félkör a $P'Q'$ átmérőjű félkörbe megy (hiszen a középpont rajta marad a $P-C-Q$ egyenesen), míg ω egy e egyenesbe, amely érinti a $P'Q'$ átmérőjű félkört és párhuzamos $P'Q'$-vel, hiszen az inverzió szögtartó és eredetileg is érintették egymást. Az AB egyenes képe egy olyan k kör lesz, amelynek a középpontja $P'Q'$-n van és érinti ω'-t. Így Ω' és k kongruens lesz. A k kör Ω'-t A'-ben, míg

$P'Q'$-t B'-ben metszi el. Ekkor $P'A'B'$ egyenlő szárú, azaz $PAC\sphericalangle = A'P'C\sphericalangle = A'B'C\sphericalangle = BAC\sphericalangle$.

F/3. Megoldásvázlat. Érdemes lehet egy A középpontú körre invertálni, hiszen minden szöges feltételben ott van A. Nagy haszna lesz az **1.2**-es lemmának. Jelölje az inverzió során X képét X'. Ekkor

$$APB\sphericalangle - ACB\sphericalangle = APC\sphericalangle - ABC\sphericalangle,$$
$$AB'P'\sphericalangle - AB'C'\sphericalangle = AC'P'\sphericalangle - AC'B'\sphericalangle,$$
$$P'B'C'\sphericalangle = P'C'B'\sphericalangle,$$
$$P'B' = P'C'.$$

A szögfelező-tétel miatt ahhoz, hogy BD és CE ugyanabban a pontban messe el AP-t, az kell teljesüljön, hogy $AB/BP = AC/CP$. Az APB, $AB'P'$ és az ACP, $AP'C'$ háromszögek hasonlóságából pedig adódik, hogy

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AP'}{P'B'} = \frac{AP'}{P'C'} = \frac{AC}{CP}.$$

Matematika feladatok megoldása

B. 5202. *Két racionális számot* ismerősnek *nevezünk, ha van olyan p/q, illetve r/s alakjuk (p, q, r, s egészek), amelyekre $|ps-qr|=1$. Hány közös ismerőse lehet két ismerős racionális számnak?*

(*5 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

Megoldás. Legyen a p/q és r/s két ismerős racionális szám, megfelelő alakjukban (p, q, r, s egészek, q és s sem nulla).

Ha a négy egész között van nulla, az általánosság rovása nélkül föltehetjük, hogy $p=0$. Ekkor q és r is 1 vagy -1. Vagyis a 0-nak csak a ±1 lesz az ismerőse.

Ezek után vegyük fel a síkon az $A(p;q)$ és $B(r;s)$ rácspontokat. Az O origóval együtt alkotott ABO rácsháromszögük területe éppen $\frac{1}{2}|ps-qr| = \frac{1}{2}$ (hiszen ismerősek), vagyis ABO üres rácsháromszög.

Azt kaptuk tehát, hogy a két racionális szám ismerőssége azt jelenti, hogy az $A(p;q)$ és $B(r;s)$ pontok az origóval együtt üres rácsháromszöget fognak közre. Ha ismerősek, akkor ez láttuk, hogy teljesül és ha ez teljesül, akkor $|ps-qr|=1$, vagyis ismerősök. (Ha s és r továbbra sem nulla.)

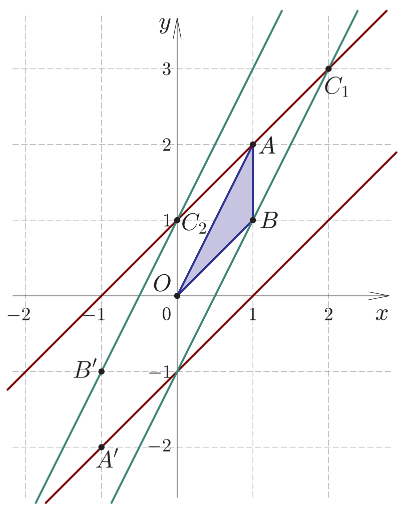
Ha a négy egész között nincsen nulla, akkor p, q, illetve r, s relatív prímek, hiszen ha valamely párnak d egy közös osztója, akkor az osztja a $|ps-qr|$ kifejezést is, ami viszont éppen az 1.

Két ismerős $\frac{p}{q}$ és $\frac{r}{s}$ számnak (láttuk, hogy önmagával senki sem lehet ismerős) közös ismerőse mindkét ponttal együtt választva az origóval üres rácsháromszöget alkot, vagyis ha $A(p;q)$ és $B(r;s)$ mellé létezik ilyen $C(x,y)$, akkor ABO, ACO és BCO is üres rácsháromszög.

Mindegyik háromszög területe $\frac{1}{2}$, és az ABO és ACO háromszögnek AO közös oldala, vagyis egyenlő az ezen oldalhoz tartozó magasságuk. Így C és B egyenlő messze lesz AO-tól, vagyis C-be eljuthatunk B-ből, vagy B'-ből (B' a B pont O-ra vonatkozó tükörképe, a „másik oldal") az $\overrightarrow{OA}$ valahányszorosát lépve. Mivel ABO üres rácsháromszög, ezért az OA szakasz belsejében nincs rácspont. Tehát C lehetséges helye a párhuzamos egyeneseken éppen az $\overrightarrow{OA}$ egész többszöröseivel való lépés lesz.

Logikai szimmetriával C-be eljuthatunk A-ből és A'-ből (A' az A pont O-ra vonatkozó tükörképe) az $\overrightarrow{OB}$ egész számú többszöröseit lépve.

C a két-két, origóra szimmetrikus párhuzamos egyenes metszéspontjában lehet. Ezek így éppen egy origóra szimmetrikus paralelogramma négy csúcsát határozzák meg. Az origóra szimmetrikus csúcspárokban a két koordináta-arány egyforma, vagyis valójában csak két közös ismerős valós számot kaphatunk.



Az *ábra* alapján ezt a kettőt valóban meg is találhatjuk (A-ból $\overrightarrow{OB}$ és így B-ből $\overrightarrow{OA}$, vagy A-ból $\overrightarrow{BO}$ és így B'-ből $\overrightarrow{OA}$):

$$C_1(p+r;q+s),$$

$$C_2(p-r;q-s).$$

Ezek valóban racionális számot adnak és létezik két közös ismerősük, ha $q+s$ és $q-s$ sem nulla, vagyis $|q|\neq|s|$. Például 1-nek és $\frac{1}{2}$-nek a 0 és a $\frac{2}{3}$. Előfordulhat, hogy mégis egyenlő az abszolút értékük, ekkor csak egy megoldás létezik, de az biztosan, például 1-nek és 2-nek csak a $\frac{3}{2}$ a közös ismerőse.

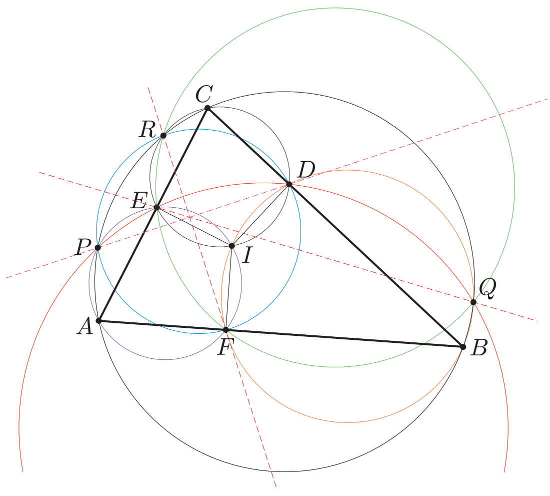
Csakaós kiga csapat:
Gábriel Tamás, Mezey Dorottya és *Seres-Szabó Márton*
(Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

68 dolgozat érkezett. 5 pontos 37, 4 pontos 10, 3 pontos 3, 2 pontos 4, 1 pontos 2, 0 pontos 11 dolgozat.

B. 5221. *Az ABC hegyesszögű háromszögben a beírt kör érintési pontja a BC, CA, AB oldalon rendre D, E, illetve F. A háromszög köré írt kör az AEF kört az A-tól különböző P, a BFD kört a B-től különböző Q, a CDE kört pedig a C-től különböző R pontban metszi. Mutassuk meg, hogy a DP, EQ és FR egyenesek egy ponton mennek át.*

(*6 pont*) Javasolta: *Lovas Márton* (Budapest)

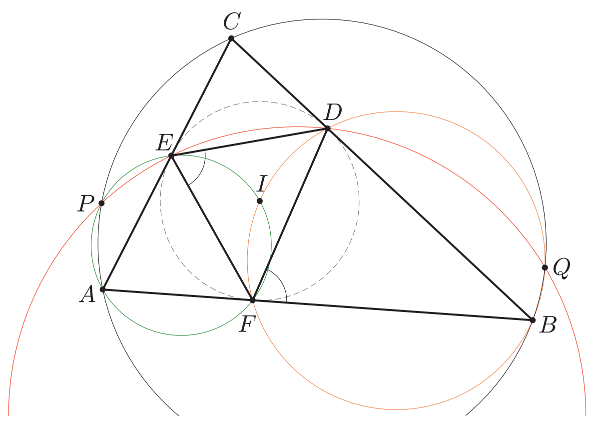
I. megoldás. A megoldáshoz készítsünk egy részletes *ábrát.* A jobb áttekinthetőség érdekében az egyes köröket különböző színekkel jelöltük.



1. ábra

Azt fogjuk belátni, hogy a $DEPQ$ (piros), a $DFPR$ (kék), illetve az $EFQR$ (zöld) pontnégyesek egy-egy körön vannak. Ismert, hogy az egymást két pontban metsző körök hatványvonala a metszéspontokon átmenő egyenes. Ebből már következik a feladat állítása, ugyanis az egymást páronként két pontban metsző körök hatványvonalai DP, EQ és FR egyenesek, és ezek a hatványponttétel miatt valóban egy ponton mennek át.

A három négyszög hasonlóan keletkezik: két csúcs az ABC háromszög beírt körének a háromszög két szomszédos oldalán található érintési pontja, a másik két csúcs pedig a harmadik oldal két végpontján áthaladó – a feladatban definiált – körök metszéspontjait tartalmazza a körülírt körrel. Ezért elegendő csak azt belátnunk, hogy $DEPQ$ húrnégyszög.



2. ábra

Itt egy elkészített ábrának sokféle változata lehet, ezért a diszkusszió elkerülése érdekében végig irányított szögekkel fogunk dolgozni. (Ha négy pont közül két megfelelő hármast kiválasztva a két szög megegyezik vagy 180°-ra egészíti ki egymást egyaránt tudjuk, hogy a négy pont egy körön van.) A $DEP\sphericalangle$ egyaránt jelentheti magát a szöget, illetve a 180°-ra kiegészítő szöget is. Ez jelentősen megkönnyíti a leírást.

Célunk tehát annak belátása, hogy $DEP\sphericalangle = DQP\sphericalangle$, ebből a kerületi szögek tételének megfordítása, illetve a húrnégyszögek tétele miatt már következik, hogy a négy pont egy körön van.

Ehhez először is az $AEFP$ és $ABPQ$ körökből $FEP\sphericalangle = FAP\sphericalangle \equiv BAP\sphericalangle = BQP\sphericalangle$, míg azt használva, hogy $BDFQ$ konciklikus: $BQD\sphericalangle = BFD\sphericalangle$. Az előző kettőből azt kapjuk, hogy $DQP\sphericalangle = BQP\sphericalangle - BQD\sphericalangle = FEP\sphericalangle - BFD\sphericalangle$. Számoljuk ki most a DEP szöget (kihasználva, hogy a C, E, A pontok egy egyenesen fekszenek, ezért $CEA\sphericalangle = 180°$): $DEP\sphericalangle = (180°) - CED\sphericalangle - PEA\sphericalangle$. (A 180° azért van zárójelben, mert az összeg előjeles mennyiség, így ez elhagyható lenne, és a továbbiakban el is hagyjuk.) Így már csak azt kell belátnunk, hogy $FEP\sphericalangle - BFD\sphericalangle = -CED\sphericalangle - PEA\sphericalangle$, azaz

$$FEP\sphericalangle + CED\sphericalangle + PEA\sphericalangle - BFD\sphericalangle = 0.$$

A negatív előjellel szereplő $BFD\sphericalangle$ irányítását megfordítva, és kihasználva, hogy $FEP\sphericalangle + PEA\sphericalangle = FEA\sphericalangle$, a bizonyítandó ekvivalens az

$$FEA\sphericalangle + CED\sphericalangle + DFB\sphericalangle = 0$$

állítással. Mivel $CED\sphericalangle + DEF\sphericalangle + FEA\sphericalangle = 0$, rögtön adódik, hogy már csak a $DFB\sphericalangle = DEF\sphericalangle$ állítást kell belátnunk.

Ez pedig közvetlen szögszámításokkal néhány lépésben belátható. Ha ugyanis bevezetjük a háromszög irányított szögeire az $CAB\sphericalangle = \alpha$, $ABC\sphericalangle = \beta$, $BCA\sphericalangle = \gamma (= -\beta - \alpha)$ jelöléseket, és felhasználjuk, hogy az érintőszakaszok egyenlősége miatt $AE = AF$, $BF = BD$, illetve $CD = CF$, azt kapjuk, hogy $DFB\sphericalangle = -\frac{180°-\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$ (a BDF háromszög egyenlő szárúságából), és

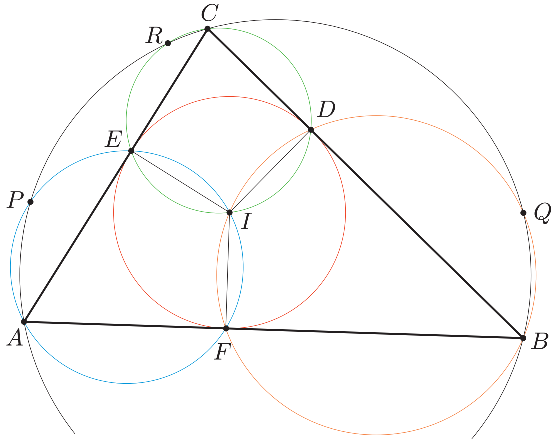
$$DEF\sphericalangle = -FEA\sphericalangle - CED\sphericalangle = -\left(-\frac{180° - \alpha}{2}\right) - \left(-\frac{180° - \gamma}{2}\right) = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}$$

(mivel az előzőek szerint az AEF és CED háromszögek egyenlő szárúak). Innen pedig már világos, hogy $DFB\sphericalangle = DEF\sphericalangle$, hiszen igaz az ekvivalens átalakítások során kapott $-\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$ összefüggés (a háromszög belső szögeinek összege alapján). Mivel pedig a $DFB\sphericalangle = DEF\sphericalangle$ összefüggéshez ekvivalens lépésekkel jutottunk el, ebből az is következik, hogy $PQDE$ konciklikus. Ez pedig az első bekezdés szerint a bizonyítandót is vonja maga után.

A bizonyítás során mindvégig irányított szögeket használtunk, és pusztán szögszámításokkal jutottunk el a bizonyítandóhoz, további diszkusszióra nincs szükség.

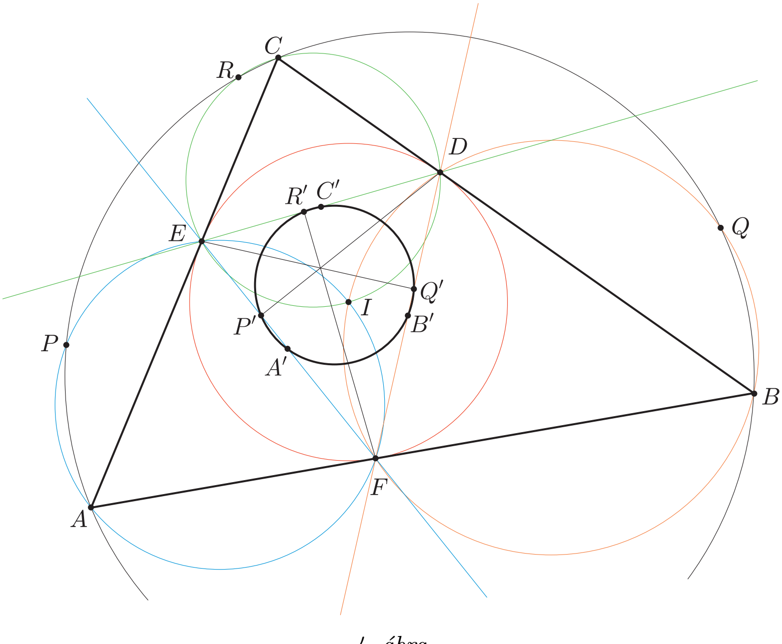
Varga Boldizsár (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Az állítás inverzió felhasználásával is igazolható. Legyen az ABC háromszög körülírt köre w, beírt köre pedig k, ennek középpontja I. Invertáljuk a feladatban szereplő pontokat és köröket a beírt k körre. Ekkor $D' \equiv D$, $E' \equiv E$ és $F' \equiv F$.



3. ábra

Az $AEIF$ négyszögben E-nél és F-nél derékszög van, a négyszög húrnégyszög, körülírt köre átmegy az inverzió centrumán, tehát a kör inverz képe egyenes. Mivel E és F helyben marad, az inverz kép az EF egyenes. Mivel AE és AF az A pontból a beírt körhöz húzott érintő szakaszok, ezért egyenlő hosszúak: $AE = AF$. Az AEF



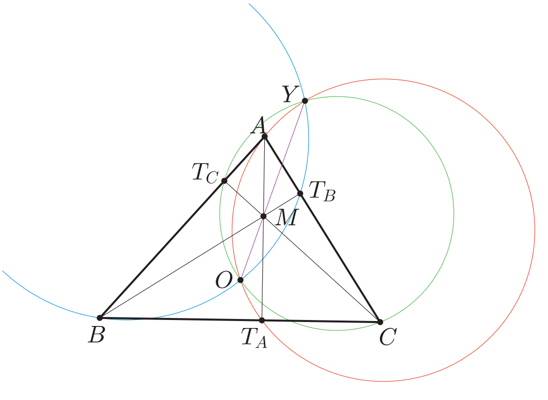
4. ábra

háromszög egyenlő szárú, így az A csúcsbeli szögfelező egyben oldalfelező merőleges is, tehát AI merőlegesen felezi az EF szakaszt. Mivel $A' \in EF$ és $A' \in AI$, azért A' a két szakasz metszéspontja, egyúttal az EF szakasz felezőpontja. Ugyanezzel a gondolattal látjuk, hogy B' és C' pontok is oldalfelező pontok a DEF háromszögben. A w kör nem megy át az inverzió centrumán, így képe ismét kör, az $A'B'C'$ háromszög körülírt köre, vagy másképpen a DEF háromszög Feuerbach-köre.

Az AEF kör és a körülírt kör második metszéspontja a P pont, az inverzeiknél ez a második metszéspont a DEF Feuerbach-körének és az EF egyenesnek az A'-től különböző metszéspontja, vagyis a DEF háromszög D-hez tartozó magasságvonalának talppontja. A logikai szimmetria alapján ezek szerint a P', Q' és R' pontok a DEF háromszög magasságainak talppontjai.

A PD egyenes inverz képe, $P'D'$ általában I-n átmenő kör. (Külön vizsgálatot igényel, ha P, I és D egy egyenesre esnek.) Ezzel az eredeti állítás átfogalmazható: bizonyítandó, hogy a $P'D'I$, $Q'E'I$ és $R'F'I$ köröknek van egy közös, I-től különböző metszéspontja. A DEF háromszög szögei $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\gamma+\alpha}{2}$, vagyis mindenképpen hegyesszögű.

A megszokott betűzésekre térve azt kell tehát még bizonyítanunk, hogy ha az ABC hegyesszögű háromszög magasságainak talppontjai T_A, T_B és T_C, körülírt körének középpontja O, akkor az AT_AO, BT_BO és CT_CO köröknek van egy O-tól különböző közös pontja.



5. ábra

Legyen az ABC háromszög magasságpontja M. Az ABT_ATB húrnégyszög, mert $AT_AB\sphericalangle = AT_BB\sphericalangle = 90°$. Az $M = AT_A \bigcap BT_B$, így az M pontnak erre a körre vonatkozó hatványa $MA \cdot MT_A = MB \cdot MT_B$. Legyen az AT_AO kör és az OM egyenes O-tól különböző metszéspontja Y. Van ilyen második metszéspont, hiszen a háromszög hegyesszögű, M az AT_A szakaszon helyezkedik el, a kör belsejében, és OM nem lehet a kör érintője. Az M pont AT_AO körre vonatkozó hatványa alapján $MA \cdot MT_A = MY \cdot MO$, $MY = \frac{MA \cdot MT_A}{MO}$.

Legyen a BT_BO kör és az OM egyenes O-tól különböző metszéspontja Z. Az M pont BT_BO körre vonatkozó hatványa alapján $MB \cdot MT_B = MZ \cdot MO$, $MZ = \frac{MB \cdot MT_B}{MO}$.

Mivel $MA \cdot MT_A = MB \cdot MT_B$, ezért $MY = MZ$ előjelben is egyezően, az Y és Z pont megegyezik. Ugyanígy az is teljesül, hogy CT_CO is átmegy ezen az Y ponton.

Vizsgáljuk meg, hogy lehet-e az I pont a PD egyenesen. Ez azt jelenti az újrafogalmazott feladatunkban, hogy a körülírt kör középpontja az egyik magasságvonalon van. Ez akkor teljesül, ha a háromszög egyenlő szárú. Ekkor az AT_AO, BT_BO és CT_CO körök közül az egyik elfajuló és megegyezik az OM egyenessel, a másik kettő pedig az OM egyenesen metszi egymást egy további pontban. (Szabályos háromszög esetén mindhárom kör elfajuló, és O a közös pont.)

A bizonyítást befejeztük.

Kercsó-Molnár Anita (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Összesen 23 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott: Baski Bence, Bencsik Dávid, Diaconescu Tashi, Duchon Márton, Kalocsai Zoltán, Kercsó-Molnár Anita, Lovas Márton, Mohay Lili Veronika, Somogyi Dalma, Varga Boldizsár, Virág Rudolf, Wiener Anna és a Csakaós Kiga csapat. 5 pontos 3, 4 pontos 3, 3 pontos 2 dolgozat. 2 pontot kapott 1, 0 pontot szintén 1 tanuló.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (749–753.)

K. 749. Aladdin egy szelencében 5 pénzérmét talált, melyekből az egyik hamis. Azt, hogy melyik az, csak Abu, a kismajom tudja. Aladdin 3 érmét kiválaszthat, ebből egyet Abunak ad, cserébe Abu megmondja a másik kettőről, van-e közte hamis. Abu valódi érméért igazat mond, és hazudik, ha hamis érmét kap. Lehet-e legfeljebb három kérdéssel azonosítani a hamis érmét?

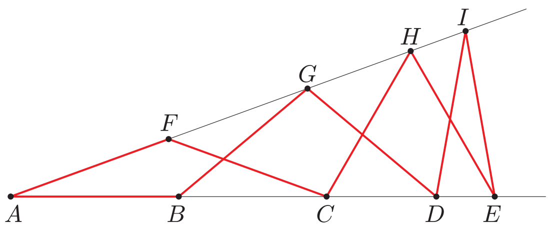
Róka Sándor (Nyíregyháza) javaslata alapján

K. 750. Peti mindig ugyanakkora sebességgel megy az iskolába, de néha siet, ilyenkor kétszer akkora sebessséggel halad. Tegnap az iskolába menet az út harmadáig sétált, aztán pedig sietett, ma pedig 6 perccel többet sétált, mint sietett. Hány perccel hosszabb a mai útja a tegnapinál?

K. 751. Van öt csokigolyónk, melyek külsőre ugyanúgy néznek ki. Három csokigolyó mindegyikének tömege 20 g, egy csokigolyó 19 g tömegű, egy pedig 21 g-os. Rendelkezésünkre áll egy kétkarú mérleg. Igazoljuk, hogy a 19 g tömegű csokigolyót három méréssel kiválaszthatjuk, de kevesebbel nem.

K/C. 752. A 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 számok közül k-féleképpen választhatunk ki legalább két olyan számot, amelyek összege osztható 3-mal. Fejezzük ki k segítségével, hogy hányféleképpen választhatunk ki a 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 számok közül legalább kettőt úgy, hogy az összegük osztható legyen 3-mal. (Két kiválasztás akkor különböző, ha nem ugyanazok a számok szerepelnek benne.)

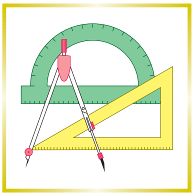
K/C. 753. Az A csúcsú szög egyik szárán lévő B, C, D és E pontokra, illetve a másik szárán lévő F, G, H és I pontokra igaz, hogy $AB = BG = GD = DI = IE = EH = HC = CF = FA$. Mutassuk meg, hogy a CEH és az IGD háromszögek szabályosak.



❄

Beküldési határidő: 2023. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (752–753., 1748–1752.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 752. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 753. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1748. Mutassuk meg, hogy egy egységsugarú körbe írt húrnégyszög legrövidebb oldalának hossza nem lehet nagyobb $\sqrt{2}$-nél.

(*Kanadai feladat*)

C. 1749. Számítsuk ki $\sqrt[3]{K}$ pontos értékét, ha K a 2025 összes pozitív osztójának a szorzata.

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

C. 1750. Az O_1 középpontú k_1 és az O_2 középpontú k_2 körök közös pontjai M és N. Az M ponton áthaladó szelő a k_1 kört az A, a k_2 kört a B pontban metszi úgy, hogy A a k_2 körre, B a k_1 körre nézve külső pont. Az AO_1 és BO_2 egyenesek közös pontja P. Az N és a P pont az O_1O_2 egyenes által meghatározott két félsík közül ugyanabba esik. Mutassuk meg, hogy P illeszkedik az O_1NO_2 háromszög körülírt körére.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1751. Legyenek a és b olyan pozitív valós számok, melyekre $a^2+b^2=\frac{2}{9}$. Igazoljuk, hogy
$$\frac{1}{2-3a}+\frac{1}{2-3b}\geqslant 2.$$

Javasolta: *Szmerka Gergely* (Budapest)

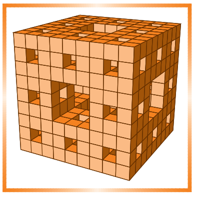
C. 1752. Hatan sorban állnak. Sokat kell várniuk, ezért játékból egy bizonyos szabály szerint sorrendet cserélnek és azt háromszor egymás után végrehajtják. Egy ilyen szabály (ún. permutáció) például: az 1. a 3. helyre áll, a 2. az 1. helyre, a 3. a 2. helyre, a 4. a 6. helyre, az 5. az 5. helyen marad, végül a 6. a 4. helyre áll. Mekkora a valószínűsége, hogy legalább az egyikük az eredeti helyére kerül?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

Beküldési határidő: 2023. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5286–5293.)



B. 5286. Melyik az a legkisebb pozitív egész n, amelyre az $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ szám osztható a $\underbrace{33\ldots3}_{100}$ számmal (10-es számrendszerben)?

(*3 pont*) (*Brazil feladat*)

B. 5287. Két kör kívülről érinti egymást. A körök középpontján átmenő egyenes a köröket – az érintési ponton kívül – az A és a B pontokban metszi. A körök egyik közös külső érintőjének az érintési pontjai P és Q. Igazoljuk, hogy az AP és BQ egyenesek a körök közös belső érintőjén metszik egymást. (Az A és P pontok vannak az egyik körön, a B és Q pontok pedig a másikon.)

(*3 pont*) Javasolta: *Molnár István Ádám* (Miskolc)

B. 5288. Két játékos a következő játékot játssza egy 8×8-as sakktáblán. A játékosok felváltva lépnek, egy lépésben egy játékos a két szomszédos mezőt elválasztó szakaszok egyikét sárgára színezi. Az a játékos veszít, akinek a lépése után először jön létre egy olyan sokszög, amelynek minden oldala sárga. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

(*4 pont*) (*Amerikai versenyfeladat* alapján)

B. 5289. Legyenek a, b, c és d olyan nemnegatív valós számok, amelyekre $a+b+c+d=1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\geqslant\frac{7}{2}.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 5290. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív egész számok halmazán:

$$3^n+4^n+\ldots+(n+2)^n=(n+3)^n.$$

(*6 pont*) Javasolta: *Káspári Tamás* (Paks)

B. 5291. Az ABC háromszög beírt körének középpontja I, körülírt körének középpontja O. Mekkora a háromszög területe, ha $OIA\sphericalangle=90^\circ$, $AI=89$ és $BC=160$?

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5292. Adott egy k kör és a belsejében a P és a Q pontok. Szerkesszünk* a P és Q pontokon át olyan kört, amely a k kört két átellenes pontjában metszi. A P és Q pontok helyzetétől függően hány megoldása van a feladatnak?

(*5 pont*) Javasolta: *Kató Gábor* (Kápolnásnyék)

B. 5293. Legyen p egy prímszám. Legfeljebb hány egész együtthatós polinom adható meg úgy, hogy semelyik kettő különbsége ne legyen minden egész helyen p^2-tel osztható?

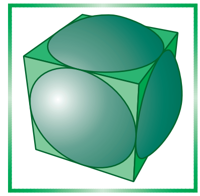
(*6 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2023. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

* Írjuk le a szerkesztés menetét (az elemi szerkesztési lépéseket, mint pl. szög felezése, tengelyes tükrözés, nem kell részletezni) és indokoljuk az eljárás helyességét. Magát a szerkesztést nem kell papíron elvégezni.



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (842–844.)

A. 842. Egy faluban n ember él, akik klubokba járnak (egy ember több klubnak is lehet tagja). Akárhogy választunk ki néhány (de legalább egy) klubot, lehet találni a faluban egy olyan embert, aki a kiválasztott klubok közül páratlan soknak tagja. Mutassuk meg, hogy a klubok száma legfeljebb n.

Javasolta: *Pálvölgyi Dömötör* (Budapest)

A. 843. Legyen N azon n pozitív egészek halmaza, melyekre tetszőleges k pozitív egész esetén teljesül, hogy ha $n \mid k^k - 1$, akkor $n \mid k - 1$. Bizonyítsuk be, hogy ha $n_1, n_2 \in N$, akkor a legnagyobb közös osztójuk is N-ben van.

A. 844. Az ABC háromszög beírt köre a BC, AC és AB oldalakat rendre a D, E és F pontban érinti. Legyen E' az E tükörképe a DF egyenesre, F' pedig F tükörképe a DE egyenesre. Messe az EF egyenes az $AE'F'$ háromszög köréírt körét X-ben és Y-ban. Bizonyítsuk be, hogy $DX = DY$.

Javasolta: *Lovas Márton* (Budapest)

Beküldési határidő: 2023. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Informatikából kitűzött feladatok

I. 580. Egy áruház a *„minden ötödik ingyen”* mottóval árulja termékeit. Ez azt jelenti, hogy ha valaki egy vásárlás során legalább öt terméket megvesz, akkor minden ötödik termék árát elengedik. A kedvezmény számításakor a termékek sorrendjét az áruház szabja meg úgy, hogy az eladás az áruháznak a legtöbb bevételt hozza. Tehát az elengedett ötödik termékeket az áruház választja ki.

Az áruházban n különböző termék kapható, melyek ára $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tudjuk ugyanakkor, hogy egy vevő $v_1, v_2, \ldots, v_n$ számú terméket vásárolt a bolt kínálatából. Adjuk meg ezek alapján, hogy a kedvezmények levonása után mekkora összeget kell fizetnie.

A program a *standard bemenet* első sorából olvassa be a termékek n számát ($2 \leqslant n \leqslant 10$), a második sorból n darab egész számot: a termékek egységárát

($1 \leqslant a_i \leqslant 100$), és a harmadik sorából szintén n egész számot: a vevő által vásárolt termékek darabszámát ($1 \leqslant v_i \leqslant 100$).

A program a standard kimenet egyetlen sorába írja a vásárlás során fizetendő összeget.

Példák:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`3 / 24 28 30 / 4 7 8`	`460`
`2 / 70 41 / 17 3`	`1120`

Magyarázat: az első példában a három termékből összesen 19 darabot vásárolt a vevő, így három ötös csoport jött létre, és a kedvezmény három 24 egységárral forgalmazott termékért járt. A második példában a 20 darab termék vásárlásakor négy termék árát engedték el: három 41 és egy 70 egységárral forgalmazott termékét.

Beküldendő egy tömörített `i580.zip` állományban a program forráskódja, valamint a program rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 581. Bizonyára mindenki elő tud ásni valamilyen emlékfoszlányt, hogy könnyű vagy nehéz volt-e annak idején megtanulnia a szorzótáblát. Persze minden számrendszernek más a szorzótáblája. Ezek előállítása lesz a feladatunk.

Például az egyjegyű számok szorzótáblája 4-es és 8-as számrendszerben a következő:

④	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

⑧	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

A dolgot még bonyolítja, hogy a tíznél nagyobb alapú számrendszerekben a 9 feletti számjegyeket a 36-os számrendszerig latin nagybetűkkel jelöljük: 10 = A, 11 = B, …, 15 = F, …, 28 = S, …, 34 = Y, 35 = Z. Természetesen például a 20-as számrendszerben a legnagyobb számjegy a 19-et jelentő J, 30-asban a 29-et jelölő T.

A feladat a következő:

1. Nyissunk meg egy üres munkafüzetet és mentsük el **szorzotabla** néven.
2. Csak egyetlen munkalapja legyen **Tabla** néven.
3. A munkalap betűtípusát állítsuk be Courier New, Nimbus Mono vagy más rögzített szélességű karakterekből álló betűtípusra.
4. Állítsuk be, hogy a munkalapon a felhasználó csak az `A1`-es cellába tudjon adatot írni. A lapvédelem jelszava legyen „`komal`”.

5. A munkalap szükséges celláinak szélességét állítsuk be úgy, hogy a kétkarakteres szöveg is olvasható legyen.
6. Ha az A1-es a cellába egy 2 és 36 közötti számot írunk, akkor jelenjen meg a B2-es cellától kezdődően a minta szerinti formátumban az adott számhoz mint alapszámhoz tartozó szorzótábla.
7. A munkalapot a következők szerint formázzuk:
   - 7.*a*. Keretezés és színezés csak a szükséges cellákon legyen.
   - 7.*b*. Az adatok cellán belüli igazítása, betűmérete és betűstílusa legyen azonos a mintán láthatóval.

Segédszámításokat az AM oszloptól jobbra vagy a 39. sor alatt végezhetünk, de ügyeljünk arra, hogy ezek a cellatartalmak alapból ne legyenek láthatók. A megoldás során saját függvény vagy makró nem használható, csak a táblázatkezelő beépített függvényei.

Minták:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	7		**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**		
2			0	1	2	3	4	5	6		
3	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0		
4	**1**	1	0	1	2	3	4	5	6		
5	**2**	2	0	2	4	6	11	13	15		
6	**3**	3	0	3	6	12	15	21	24		
7	**4**	4	0	4	11	15	22	26	33		
8	**5**	5	0	5	13	21	26	34	42		
9	**6**	6	0	6	15	24	33	42	51		
10											
11											

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	10		**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**		
2			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
3	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
4	**1**	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
5	**2**	2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18		
6	**3**	3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27		
7	**4**	4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36		
8	**5**	5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45		
9	**6**	6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54		
10	**7**	7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63		
11	**8**	8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72		
12	**9**	9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81		
13														
14														

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	16		**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**		
2			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		
3	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
4	**1**	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F		
5	**2**	2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E		
6	**3**	3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D		
7	**4**	4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C		
8	**5**	5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B		
9	**6**	6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A		
10	**7**	7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69		
11	**8**	8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78		
12	**9**	9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87		
13	**A**	10	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96		
14	**B**	11	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5		
15	**C**	12	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4		
16	**D**	13	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3		
17	**E**	14	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2		
18	**F**	15	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1		
19																				
20																				

Beküldendő egy tömörített `i582.zip` állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

I. 582 (É). A magyar oktatás és nevelés történetében ritkán volt a különböző kormányokban önálló minisztériuma az oktatásnak. A rendelkezésre álló és letölthető adatbázisban az oktatásért felelős miniszterek és minisztériumok adatai állnak rendelkezésre.

Az adatbázis a következő táblákat tartalmazza:

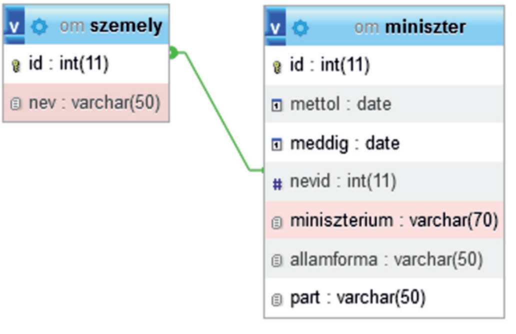
miniszter (id, mettol, meddig, nevid, miniszterium, allamforma, part)

id	a miniszteri megbízás azonosítója (szám), ez a kulcs;
mettol	a miniszteri megbízás kezdő dátuma (dátum);
meddig	a miniszteri megbízás befejező dátuma (dátum);
nevid	a miniszter azonosítója (szám), idegen kulcs;
miniszterium	a minisztérium neve, amelyhez az oktatásügy tartozik (szöveg);
allamforma	a megbízás idején az államforma neve (szöveg), például: Magyar Királyság, Magyar Köztársaság stb.;
part	a minisztert adó párt neve (szöveg).

szemely (id, nev)

id	a miniszteri feladattal megbízott személy azonosítója (szám), ez a kulcs;
nev	a személy neve (szöveg), az adatbázisban névrokonok szerepelnek.

A táblák közötti kapcsolatok:



A következő feladatokat megoldó SQL parancsokat rögzítsük a feladatok végén zárójelben megadott névvel az `om_megoldas.sql` nevű állományban. A javítás során csak ennek az állománynak a tartalma lesz értékelve. Ügyeljünk arra, hogy a lekérdezésekben pontosan a kívánt mezők szerepeljenek, felesleges mezőt ne jelenítsünk meg. A feladat megoldásához a digitális kultúra emelt szintű érettségin használható XAMPP használatát javasoljuk.

1. Az `oktatas.sql` állomány tartalmazza az adatbázist és a táblákat létrehozó, valamint az adatokat a táblába beszúró SQL parancsokat. Futtassuk a lokális SQL szerveren az `oktatas.sql` parancsfájlt.
2. Adjuk meg lekérdezés segítségével, hogy 1923. január 1-én ki volt az oktatásért felelős miniszter és mi volt a minisztérium neve. (`2szazeve`)

3. Listázzuk lekérdezés segítségével az első 5 leghosszabb ideig miniszteri megbízású személy nevét, figyelembe véve többszöri miniszterségüket. (`3top5`)
4. Az egyik leghíresebb miniszter volt *Klebelsberg Kuno* gróf. Lekérdezéssel adjuk meg, hogy kitől vette át és kinek adta tovább a miniszteri megbízást. (`4klebelsberg`)
5. Adjuk meg lekérdezés segítségével, hogy *Hóman Bálint* első és utolsó miniszteri megbízatása között ki volt még miniszter. (`5homan`)
6. Lekérdezéssel határozzuk meg, hogy a magyar politikai pártok hány miniszteri megbízást kaptak. A listában a pártonkívüliek és a ki nem töltött adattal rendelkező személyek ne szerepeljenek. (`6partonkent`)
7. Készítsünk lekérdezést, amely kilistázza azokat a személyeket, akik több párt színeiben kerültek miniszteri pozícióba. A listában a személyek neve és a különböző pártok színeiben való megbízások száma jelenjen meg, az utóbbi szerint csökkenő sorrendben. (`7tobb`)
8. Adjuk meg lekérdezés segítségével azt az évet, amikortól már a „vallás” szöveg nem szerepel többet a minisztérium nevében, mert önálló hivatalt kap. (`8vallas`)
9. Lekérdezés segítségével adjuk meg azokat a minisztériumi neveket, amelyekben nem szerepel az „oktatás”, „művelődés” és „kulturális” szavak egyike sem. A listában a minisztériumok neve ábécé sorrendben, ismétlődés nélkül jelenjen meg. (`9nevek`)

Beküldendő az `om_megoldas.sql` nevű állomány, amely a feladatok megoldását tartalmazza.

I/S. 68. Adott egy N-jegyű pozitív egész szám. Egy lépés során kitörölhető egy számjegy az összes helyről, ahol előfordul, ha a visszamaradt szám pozitív szám marad, és nem kezdődik 0-val. Például egy lépés során a 33 013 211 számból az 1-es számjegyek kitörlésével a 33 032 számot kapjuk, viszont a 3-as számjegyet nem lehet kitörölni, mert akkor a visszamaradt szám 0-val kezdődne. Hasonlóan a 777 számból sem törölhető ki a 7-es számjegy.

Adjuk meg, hogy legföljebb K törlés után melyik az a legkisebb szám, amit kaphatunk.

A bemenet első sorában az N és K szám szerepel szóközzel elválasztva, a második sorban az N-jegyű szám szerepel.

A kimenet egyetlen sorában egyetlen szám szerepeljen: a legföljebb K törlés után megmaradt szám.

Példák:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`6 1 / 909991`	`90999`
`5 2 / 31123`	`2`
`2 2 / 10`	`1`

Korlátok: $1 \leqslant N, K \leqslant 1000$. Időlimit: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha a program helyes kimenetet ad az $N \leqslant 9$ esetekben.

Beküldendő egy `is68.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható. A dokumentáció tartalmazza a megoldás elméleti hátterét, az esetleg felhasznált forrásokat. Ne tartalmazzon kódrészleteket, azok magyarázata kódkommentek formájában a forrásprogramban szerepeljen.

S. 167. Egy hegy tetejére N lépcsőből álló lépcsősor vezet fel. Egy szerzetes T egymást követő napon felment a hegyre. Első nap az l_1 lépcsőfokról indult és minden lépésnél kihagyott d_1 lépcsőfokot. Rálépett tehát az $l_1+(d_1+1)$, l_1+ $+2(d_1+1)$, $\ldots$ lépcsőfokokra egészen addig, míg fel nem ért a hegycsúcsra. Ha az utolsó lépés magasabbra ért volna, mint N, akkor rálépett az N-edik fokra és ezzel feljutott a hegycsúcsra.

Az első napot követő napokon az l_i és d_i értékeket a következő szabály szerint változtatta: $l_{i+1}=(l_i+1) \mod L$ és $d_{i+1}=(d_i+1) \mod D$, ahol $1\leqslant i\leqslant T-1$. Sajnos a szerzetes már nem emlékszik rá, hogy így hány lépcsőfokra lépett rá felfelé menet. Készítsünk programot, ami meghatározza ezt a számot.

A bemenet első sorában hat egész szám szerepel: a lépcsők N száma, a napok T száma, az L és D modulusok, illetve az első napon az l_1 lépcsőfok, amiről indulunk, és a lépésenként kihagyott lépcsőfokok d_1 száma.

A kimenet első és egyetlen sorába írjuk ki, hogy összesen hány lépcsőfokra lépett rá a szerzetes felfelé menet.

Példa:

Bemenet	Kimenet
`11 3 2 4 1 1`	`12`

Magyarázat: az első napon az első fokról indul és minden másodikra lép rá (5 lépés). A második napon a nulladik fokról indul és minden harmadik lépcsőfokra lép rá (4 lépés). A harmadik napon az első fokról indul és minden negyedikre lép rá (3 lépés).

Korlátok: $1\leqslant N,T\leqslant 10^9$, $1\leqslant L,D\leqslant 400$, $L,D\leqslant N$, $0\leqslant l_1<L$, $0\leqslant d_1<D$. Időkorlát: 1 mp.

Értékelés: A pontok 40%-a kapható, ha a program helyes kimenetet ad a $T\leqslant 10^5$ bemenetekre.

Beküldendő egy `s167.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható. A dokumentáció tartalmazza a megoldás elméleti hátterét, az esetleg felhasznált forrásokat. Ne tartalmazzon kódrészleteket, azok magyarázata kódkommentek formájában a forrásprogramban szerepeljen.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2023. február 15.

Sikeres KöMaL-rendezvény az ELTE-n

Október utolsó hétvégéjén rendezte meg a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok szokásos Ifjúsági ankétját a MATFUND Alapítvány szervezésében, a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat háttértámogatásával.

A rendezvény programja és további támogatóinak listája a

`https://www.komal.hu/hirek/anket/2022/program2022.h.shtml`

oldalon található.

A kétnapos előadássorozatra a KöMaL 2021–22-es tanév pontversenyeinek legjobbjai kaptak meghívást, de szép számmal jöttek el az ELTE TTK Fizika épületébe tanárok, szülők és érdeklődők is. A résztvevők mindegyike kapott egy KöMaL-pólót és egy KöMaL-tollat, valamint a közeli, Infoparkbeli Ericsson-székház éttermébe szóló ebédjegyet, amelyért cserébe az első nap finom ételek többféle kínálatából válogathattak.

Az első nap délelőtt négy előadás követte egymást.

Gnädig Péter térből síkba visszalépő módszerekről beszélt a KöMaL egyik kitűzött fizika faladata kapcsán – ez épp az olyan geometriai feladatok fordítottja, amelyeknél szép megoldásokra lehet jutni, ha a síkból kilépünk a térbe. A kiinduló feladat egy kúp felszínén haladó áramfolyamról szólt, a megoldáshoz a kúpot kellett kiteríteni a síkba. A probléma a fizika és a matematika iránt érdeklődőknek egyaránt érdekes volt, ráadásul még a beteg kutyák nyakravalóját is felhasználta a szemléltetéshez a KöMaL fizika szerkesztője. A feladat általánosításához pedig a legyező-leképezés (egy aránytartó leképezés) adta meg a kulcsot.

Csiszár Villő könyveket vett le a könyvespolcról, de más helyekre rakta azokat vissza, így vezette be az inverziókat és az azon alapuló többféle távolságfogalmat. A véletlen sorbarendezések és átrendezések jelentősége mára megnőtt, felhasználása nemcsak a játékoknál, vagy az iskolai tananyagban, de a való életben is fontos.

Frenkel Péter bemutatta a Lovász-esernyőt, egy kémfeladat geometriai interpretációjú megoldását. Szóba kerültek a megkülönböztethető sálak, és kiderült, hogy kombinatorikai feladatok geometriai megoldása a koordinátageometria révén magasabb dimenziós terekben algebrai problémává válhat.

Fajszi Bulcsú és *Rábay Kristóf* visszatérő vendégei az Ifjúsági Ankétnak a támogató Hiflylabs cég képviseletében. Rámutattak, hogy az informatika milyen gyorsan fejlődik az utóbbi pár évben is – köszönhetően többek között a matematika legújabb eredményeinek. A mesterséges intelligencia egyre jobb szöveganalitikára képes, ami lehetővé teszi, hogy a rengeteg fontos adatot, amire ma már alapvető szükségünk van, a számítógép elolvassa és értelmezze is, például jogi szövegkörnyezetből kiemelje a lényeget. Az MI eredményezi a BI, az üzleti intelligencia alkalmazásának lehetőségét. A matematikai nyelvészet, a (magyar) nyelv szemantikai feldolgozása a matematika, a programozás és a nyelvészet kölcsönhatásából alakult ki, napjainkra egyre fontosabb lesz. Nagyon érdekes feladatok várnak a mostani középiskolás nemzedékre, akár a matematikát, akár a fizikát, akár az informatikát választják.

Az első nap délutánján került sor a szokásos KöMaL díjkiosztó ünnepségre. Minden évben száz körüli a jutalmazottak száma, és bár a díjak anyagi értéke nem túl nagy, de erkölcsi értékük egy egész életre szóló. A mostani eredmények – 1996 óta a korábbi tanéveké is – a `https://www.komal.hu/eredmeny` oldalon találhatók. A díjak kiosztása közben egy előadásra is sor került: *Asbóth János* beszélt a „kísérteties távolhatásról”, ami a múlt évszázad ismert paradoxonait, Schrödinger macskáját[*], és a kvantummechanika Einstein–Podolsky–Rosen[†] nevezetes gondolatkísérletét köti össze a 2022-es fizikai Nobel-díjasok eredményeivel.

A rendezvény második napján is hasznos és érdekes ismereteket szerezhettek az érdeklődők.

Jenei Péter válogatott kísérleteket mutatott az Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenyéről, *Kiss György* ezután matematikai témát, a Moore-gráfokat és véges geometriákat hozott középiskolás szinten. *Olosz Balázs* komplex számokat alkalmazott a váltóáramú fizika feladatok megoldásánál, *Számadó László* előadása pedig matematikai játékokról és a játékok matematikájáról szólt. A délutáni előadók, *Szeidemann Ákos* és *Kadlecsik Ádám* három izgalmas folyadékos problémát oldottak meg.

A KöMaL Ifjúsági Ankét sikeréhez hozzájárultak a szerkesztőség lelkes munkatársai, a pénteki fogadás szendvicsei és süteményei, a szombati pizza és a délutáni kötetlen játékok is.

Oláh Vera

Térből síkba visszalépés fizikai problémák megoldásánál II. rész (konform leképezések)

Megjegyzések és általánosítások a P. 5399. feladat megoldásához[1]

Amikor sok tükör sem segít

A cikk I. részében a **P. 5399.** feladat (közölte: *Vigh Máté,* Biatorbágy) bizonyos (tükrözésekkel megoldható) általánosításait vizsgáltuk. Rácsodálkozhatunk arra, hogy a C pontbeli áramsűrűséget végtelen sok esetben (minden pozitív egész n-re)

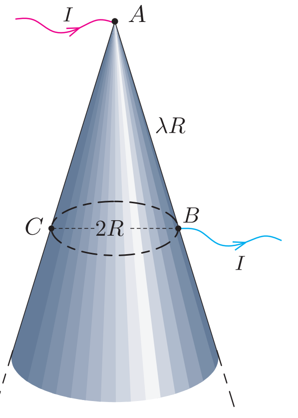
[*] `https://hu.wikipedia.org/wiki/Schrödinger_macskája`

[†] `https://hu.wikipedia.org/wiki/EPR-paradoxon`

[1] A feladatot és annak megoldását lásd a KöMaL 2022. évi decemberi számának 565. oldalán.

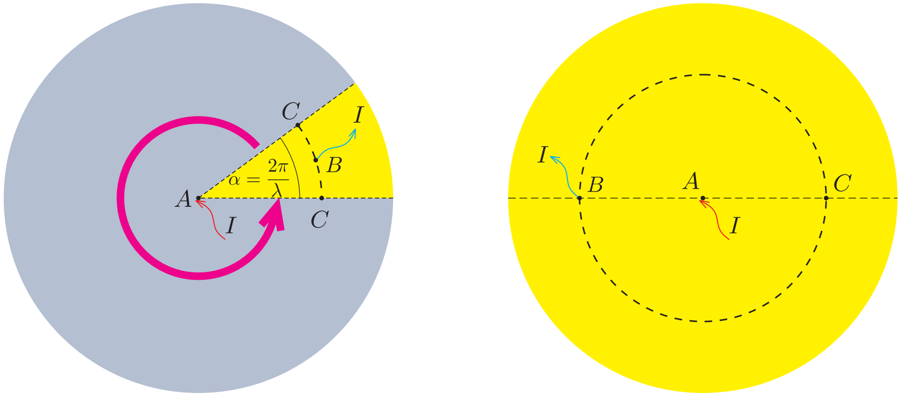
ugyanazzal a formulával tudjuk kiszámítani. Az a sejtésünk támadt, hogy a $j(C) = \frac{I}{4\pi\delta R}$ képlet talán *tetszőleges* nyílásszögű kúpra is igaz.

Legyen a kúp palástján mért AB távolság λR, míg BC továbbra is $2R$, de λ tetszőleges (1-nél nagyobb) szám (lásd a *6. ábrát*).



6. ábra

Ha a kúp palástját – a korábbiakban leírtakhoz hasonlóan – felvágjuk az AC egyenes mentén, majd kiterítjük a síkba, akkor a teljes síknak $2\pi/\lambda$ nyílásszögű szögtartományát kapjuk (lásd a *7. ábra bal oldali* részében a sárga tartományt). Az ebben a szögtartományban kialakuló árameloszlást keressük olyan határfeltételek mellett, hogy az A pontnál bevezetünk, a B pontnál kivezetünk I erősségű áramot, továbbá a tartomány határát képező AC egyenesek áramvonalak. (A két határvonal fizikai értelemben ugyanaz a vonal, és a két helyen is jelölt C pont tulajdonképpen csak egyetlen pont, hiszen a kúp palástján is csak egy C pont volt.)



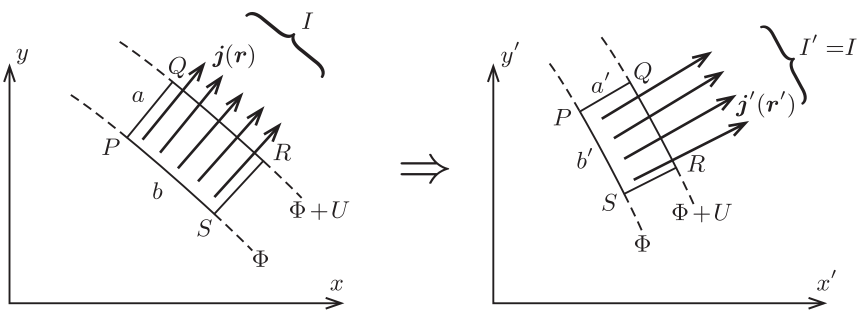
7. ábra

Mivel λ az általános esetben *nem* egész szám, a tükrözéses módszert nem alkalmazhatjuk. Ha viszont a sárga cikkelyt – mint egy legyezőt – valamilyen módon „kinyithatnánk” (lásd a nyilat és a *7. ábra jobb oldali* részét), akkor egy teljes (minden irányban végtelen kiterjedésű) síkot kapnánk, amiben folyó áramok eloszlása éppen a $\lambda = 1$ esetnek felelne meg, amelyet jól ismerünk. Természetesen ez a transzformáció csak akkor kap értelmet, ha megadjuk az egymásnak megfeleltethető pontok viszonyát, és azt is, hogy mi a kapcsolat az eredeti és az áttranszformált tartomány árameloszlása között. Ezeket a kérdéseket részletesen tárgyalta egy kétrészes cikk a KöMaL korábbi számaiban.[2] Az alábbiakban felidézzük ennek a cikknek – számunkra legfontosabb – gondolatait, majd alkalmazzuk azokat a most vizsgált problémára.

[2] Elek Péter és Szász Krisztián: Síkbeli elektromos vezetési problémák, I. és II. rész, *KöMaL* 2019. évi 1. és 2. szám.

Egy elektromosan vezető síklemezbe, amely lehet véges kiterjedésű, vagy akár „végtelen" nagy, bizonyos helyeken áramokat vezetünk be, illetve áramokat vezetünk el róla. A lemez homogén, vastagsága δ, fajlagos ellenállása ϱ, a vezetőképessége tehát $\sigma = 1/\varrho$.

Tételezzük fel, hogy ismerjük a kialakuló árameloszlást, vagyis a $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ áramsűrűséget, valamint az elektromos potenciál $\Phi(\boldsymbol{r})$ függvényét. Mindezek a mennyiségek az áramvezető lemez $\mathcal{F}$ felülete (síkja) mentén helyről helyre változnak; értéküket egy alkalmasan választott derékszögű (x, y) koordináta-rendszerben adhatjuk meg (lásd a *8. ábra bal oldali* részét), de használhatjuk az (r, φ) síkbeli polárkoordinátákat is. Válasszuk ki az árameloszlásnak egy kicsiny, téglalap alakúnak tekinthető részét, amit két egymástól csak kicsit eltérő ekvipotenciális görbe és két közeli áramvonal határol (így az áramsűrűség-vektor ebben a tartományban állandó). Legyenek a téglalap oldalai a és b, és jelöljük a P és S pontok közötti szakaszon átfolyó áram erősségét I-vel. (Ugyancsak I erősségű áram folyik a Q és az R pontok között is, hiszen az áramlási kép stacionárius, a töltések sehol nem halmozódhatnak fel egyre növekvő mértékben.)



8. ábra

Az áramerősség az áramsűrűséggel arányos, az áramsűrűség az elektromos térerősséggel, a térerősség pedig a potenciálkülönbséggel fejezhető ki:

$$I = |\boldsymbol{j}| \cdot b\delta, \qquad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \sigma \boldsymbol{E}, \qquad |\boldsymbol{E}| = \frac{U}{a},$$

így tehát a P és S pontok közötti $b \cdot \delta$ nagyságú felületen átfolyó áram erőssége:

$$I = U\delta\sigma \cdot \frac{b}{a}.$$

Ha valamilyen transzformáció (leképezés) az $\mathcal{F}$ sík pontjait átviszi egy másik, $\mathcal{F}'$ sík pontjaiba, az árameloszlás is megváltozik, ami az (x', y') koordinátarendszerben megadható $\boldsymbol{j}'(\boldsymbol{r}')$ árameloszlással írható le (lásd a *8. ábra jobb oldali* részét). Kikötjük még, hogy a potenciálok értéke az egymásnak megfeleltetett pontokban ugyanakkora legyen, vagyis $\Phi'(\boldsymbol{r}') = \Phi(\boldsymbol{r})$ teljesüljön.

A vizsgált kicsiny (jó közelítéssel egyenes oldalakkal határolt) tartományon átfolyó áram erőssége:

$$I' = U\delta\sigma \cdot \frac{b'}{a'}.$$

Felhasználtuk, hogy a transzformált áramsűrűség-vektorok merőlegesek a transzformált ekvipotenciális görbékre, tehát a $PQRS$ téglalap „képe” ugyancsak téglalap, melynek oldalai (a' és b') általában különböznek az eredeti méretektől.

A két elrendezés (ugyanakkora be- és kivezetett áramok esetén) akkor egyenértékű, ha minden kicsiny részletében az egymásnak megfeltethető szakaszokon ugyanakkora az áramerősség, vagyis $I' = I$. Ez láthatóan akkor teljesül, ha

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a},$$

vagyis a transzformáció (kis méretek esetén) *aránytartó.*

Megjegyzés. Az aránytartás tulajdonsága nemcsak az egymást derékszögben metsző rövid szakaszokra érvényes, hanem egy adott ponton átmenő, tetszőleges irányú, kicsiny szakaszpárokra is fennáll. Igaz továbbá, hogy a transzformáció *szögtartó*, vagyis az egymást metsző görbék érintőinek szöge a leképezés során nem változik meg. Az arány- és szögtartó síkbeli transzformációkat *konform leképezéseknek* nevezik.

A továbbiakban bemutatunk néhány – a fizikai alkalmazások szempontjából lényeges – konform leképezést. Mivel az ilyen leképezések egymás után történő alkalmazása ugyancsak szög- és aránytartó transzformációt eredményez, néhány alapesetből kiindulva a fizikai problémák meglepően széles körének megoldására nyílik lehetőségünk.

Nyilvánvaló, hogy szög- és aránytartó leképezés az *eltolás* (a sík egészét valamilyen adott síkbeli vektorral odébbtoljuk), az *elforgatás* (a síknak tetszőleges pont körüli, tetszőleges szögű elforgatása), valamint a *nagyítás* és a *kicsinyítés* (egy adott pontból a sík különböző pontjaiba mutató vektorokat valamekkora számmal szorozzuk).

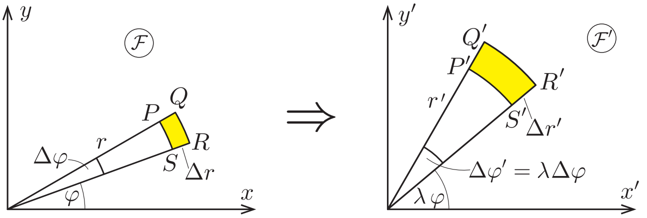
Ezek a transzformációk lényegében nem változtatják meg az áramlási képet (az áramvonalakat), csupán annak felelnek meg, hogy a koordináta-rendszer kezdőpontját máshová helyezzük, az x tengelyt másfelé irányítjuk, illetve a távolságok mértékegységét megváltoztatjuk (például centiméter helyett inch egységeket használunk).

A következő két leképezésnél azonban nem ez a helyzet, azok lényeges változást eredményeznek az árameloszlásban, tehát fizikailag különböző problémákat kapcsolnak össze.

„Legyezőleképezés”

Tekintsük azt a leképezést, ami a $2\pi/\lambda$ szögű szögtartomány egyes pontjaihoz tartozó helyvektor x tengellyel alkotott φ szögét λ-szorosára növeli: $\varphi' = \lambda\,\varphi$. Szemléletesen ez olyan, mintha egy legyezőt λ-szor nagyobb méretűre nyitnánk ki. Ez a leképezés éppen az a transzfomáció, ami a 7. ábrán látható kúp kiterített palástját a teljes síkba viszi át, vagyis a kúpfelület áramvezetésének bonyolult feladatát egy síklap – könnyen megoldható – problémájává alakítja.

A *9. ábrán* egy $\boldsymbol{r}$ helyvektorú, r és φ polárkoordinátákkal megadott pont körüli, kicsiny (sárga színnel jelölt) $PQRS$ tartomány transzformációját láthatjuk.



9. ábra

Ahhoz, hogy a leképezés (kicsi méretek esetén) aránytartó is legyen, az szükséges, hogy a

$$\frac{PQ}{PS} = \frac{P'Q'}{P'S'},$$

vagyis a

$$\frac{\Delta r}{r \cdot \Delta\varphi} = \frac{\Delta r'}{r' \cdot \lambda\Delta\varphi}$$

egyenlőség teljesüljön. Innen következik, hogy ($\Delta r \ll r$ és $\Delta r' \ll r'$ esetén)

$$\frac{\Delta r'}{r'} = \lambda\frac{\Delta r}{r}. \tag{4}$$

A cikk I. részében felírt (2) összefüggés szerint (4) akkor teljesül, ha

$$r' = K\, r^{\lambda}.$$

A K állandót (aminek a mértékegysége a hosszúság $(1-\lambda)$-adik hatványa) célszerű $r_0^{1-\lambda}$ alakban felírni, ahol r_0 egy önkényesen választott hosszúságegység. Ennek megfelelően

$$r' = r_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda}. \tag{5}$$

Látható, hogy a λ-szorosára kinyitott „legyező" esetében akkor kapunk aránytartó transzformációt, ha a helyvektorok (r_0 egységekben mért) nagyságát λ-adik hatványra emeljük. A sík pontjainak az origótól mért távolsága érdekes (nemlineáris) módon transzformálódik: az r_0-nál távolabbra mutató helyvektorok megnyúlnak, a közelebbre mutatók zsugorodnak, az r_0 sugarú, $2\pi/\lambda$ nyílásszögű körív pontjainak radiális koordinátája pedig változatlan marad, tehát ezek a pontok egy r_0 sugarú teljes körbe mennek át.

„Szalagleképezés"

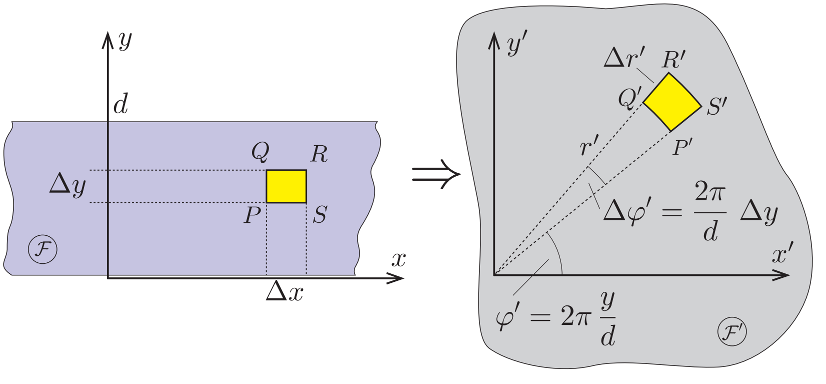
Véges szélességű, nagyon hosszú, elektromosan vezető lemezben folyó síkbeli árameloszlások leírásánál hasznos lehet egy olyan konform (szög- és aránytartó) leképezés, amely a szalagot egy végtelen síkba transzformálja. Legyen a szalag az x tengellyel párhuzamos, és y irányban d széles.

Válasszunk egy olyan transzformációt, ami az x tengellyel párhuzamos vonalakat (amelyekre $y = y_0 =$ állandó, $0 < y_0 < d$) az origóból kiinduló „sugarasan" szétfutó vonalakba viszi át. Ezeket a $\varphi' =$ állandó összefüggés jellemzi, ahol φ' a leképezés során kapott vektoroknak az x' tengellyel bezárt szöge. Legyen például

$$\varphi' = 2\pi \frac{y}{d}.$$

Ilyen választás mellett $0 \leqslant \varphi' \leqslant 2\pi$, vagyis a szalag „képe" lefedi a teljes síkot. (A szalag két határoló egyenese a leképezés során ugyanarra helyre kerül, hiszen az egyikük képét a $\varphi' = 0$, a másik képét a $\varphi' = 2\pi$ összefüggés jellemzi.)

Az x tengellyel párhuzamos vonalseregre merőleges vonalak (egyenesek) egyenlete: $x = x_0 =$ állandó. Ezek az egyenesek a leképezés után az origón áthaladó „sugaras egyenesekre" merőleges görbékbe, azaz valamekkora sugarú körökbe mennek át. Azt, hogy mi a kapcsolat az x koordináta és az r' sugár között, a leképezés aránytartóságának követelménye határozza meg.



10. ábra

A *10. ábráról* leolvasható, hogy

$$\frac{\Delta r'}{\Delta x} = \frac{r'\Delta\varphi'}{\Delta y},$$

ahonnan $\Delta\varphi' = \frac{2\pi}{d}\Delta y$ miatt

$$\frac{\Delta r'(x)}{r'(x)} = \frac{2\pi}{d}\Delta x.$$

Ez az egyenlet a kamatos kamat vagy a radioaktív bomlások exponenciális törvényével azonos alakú, a megoldása (2) szerint:

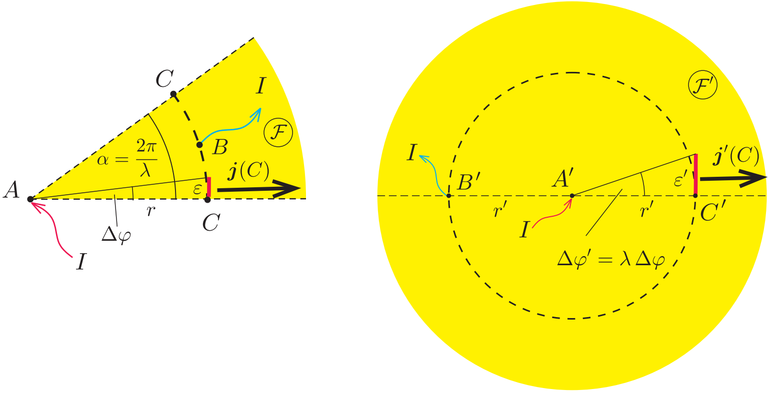
$$r'(x) = r_0 \mathrm{e}^{2\pi x/d},$$

ahol r_0 egy önkényesen választható állandó.

A szalagleképezés jól alkalmazható például olyan problémánál, amelyben egy nagyon hosszú fémhengerbe annak egyetlen pontjánál áramot vezetünk be, és keressük a kialakuló áramsűrűségeket. A hengert az áram bevezetési pontjával átellenes alkotó mentén „felvághatjuk” (hiszen azon keresztül nem folyik áram), majd az így kapott végtelen hosszú szalagot a szalagleképezés segítségével teljes síkká alakítjuk.

A kúp palástjában folyó áram eloszlása

Térjünk vissza az eredeti feladatunkhoz, illetve annak általánosított változatához. A legyezőleképezés segítségével az $\mathcal{F}$ síkba kiterített kúppalástot (*11. ábra bal oldali* része) áttranszformálhatjuk a teljes $\mathcal{F}'$ síkba (*11. ábra jobb oldali* része).



11. ábra

A leképezés tulajdonságai:

$$\varphi' = \lambda\varphi, \qquad r' = r_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda}.$$

Ismerjük a kinyitott legyezőnél a C' ponthoz tartozó $j'(C')$ áramsűrűséget, mert az I. részben megadott (1) összefüggésnek megfelelően a be- és kivezetett áramok járulékának szuperpozíciója:

$$j'(C') = \frac{I}{2\pi\delta r'} - \frac{I}{2\pi\delta(2r')} = \frac{I}{4\pi\delta r'}. \tag{6}$$

Mi azonban nem a $j'(C')$ áramsűrűséget, hanem az $\mathcal{F}$ síkhoz tartozó $j(C)$ áramsűrűséget keressük. Tekintsünk a C és a C' pont közelében egy-egy rövid, az áramsűrűségek irányára merőleges (a leképezés révén egymásnak megfeleltethető) körívet, amelyek – mivel nagyon rövidek – jó közelítéssel egyenes szakaszokkal is helyettesíthetőek. Ezen szakaszok hossza:

$$\varepsilon = r\Delta\varphi \qquad \text{és} \qquad \varepsilon' = r'\Delta\varphi' = r'\lambda\Delta\varphi, \tag{7}$$

ahol $r = AC = AB = R\lambda$.

Az áramsűrűségek közötti kapcsolatot az adja meg, hogy az egymásnak megfelelő szakaszokon átfolyó teljes áram ugyanakkora:

$$\varepsilon \cdot j(C) = \varepsilon' \cdot j'(C'). \tag{8}$$

A (6), (7) és (8) összefüggések egybevetéséből kapjuk, hogy

$$j(C)=j'(C')\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}=\frac{I}{4\pi\delta r'}\cdot\frac{r'\lambda\Delta\varphi}{r\Delta\varphi}=\frac{I}{4\pi\delta}\cdot\frac{\lambda}{r}=\frac{I}{4\pi\delta R}.$$

(Látható, hogy r' kiesett a képletből, így az eredmény nem függ a tetszőlegesen választható r_0 távolságtól.)

Ezzel tehát beláttuk, hogy a kérdéses $\boldsymbol{j}(C)$ vektor nagysága tetszőleges λ érték mellett minden esetben ugyanakkora, iránya pedig A-tól C felé mutat.

Gyakorló feladatok

A konform leképezéssel kapcsolatos ismeretek elmélyítése céljából közlünk néhány feladatot, útmutatással és végeredménnyel.

1. *Határozzuk meg az általánosított* **P. 5399.** *feladat elrendezésében az áramsűrűség nagyságát az AC egyenes mentén, a kúp csúcsától x távolságban! Mekkora az áramsűrűség a kúp csúcsától messze? (A nagyon nagy méretű kúp A csúcsánál vezetünk be I áramot, és a csúcstól λR távolságra lévő B pontnál vezetjük ki, ahol a kúp „alaplapjának” sugara R. A C pont az alaplapon a B-vel ellentétes pont.)*

Útmutatás. Alkalmazzuk a legyezőleképezést!

Megoldás.

$$j(x)=\frac{I}{2\pi\delta}\cdot\frac{\lambda}{x}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\lambda R}\right)^{\lambda}}.$$

Ha $x=\lambda R$, akkor megkapjuk a cikkben szerelő formulát, ha pedig $x\gg R$, akkor

$$j(x)\approx\frac{I}{2\pi\delta R}\left(\frac{\lambda R}{x}\right)^{\lambda+1}.$$

2. *Vezessünk be a kúp csúcsától λR távol lévő B pontban I erősségű áramot. Ez az áram a kúp távoli részeinél (a „végtelenben”) folyik ki a lemezből. Mekkora az áramsűrűség a B-vel átellenes C ponton áthaladó alkotó mentén a csúcspont közelében, attól x távolságban ($x\ll R$)?*

Útmutatás. Alkalmazzuk a legyezőleképezést!

Megoldás.

$$j(x)\approx\frac{I}{2\pi\delta R}\left(\frac{x}{\lambda R}\right)^{\lambda-1}.$$

3. *Egy nagyon hosszú, R sugarú, vékony, $\delta\ll R$ falvastagságú fémcső A pontjánál I erősségű áramot vezetünk be a hengerpalástba, és a cső egyik (távoli) végénél vezetjük el azt. Mekkora áramsűrűség alakul ki az A-val átellenes B ponton áthaladó alkotó mentén, a B ponttól x távolságban?*

Útmutatás. Alkalmazzuk a szalagleképezést!

Megoldás.

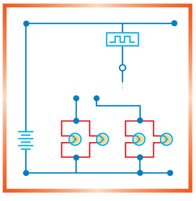
$$j(x) = \frac{I}{2\pi\delta R}\,\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x/R}}.$$

4. *Egy R sugarú, szigetelőállványon lévő iskolai földgömböt egyenletesen, $\delta \ll R$ vastagságú fémréteggel vontak be. A földgömb északi sarkához (az A pontban) I erősségű áramot vezetünk, az egyenlítő B pontjánál pedig elvezetjük azt. Mekkora és milyen irányú az áramsűrűség az egyenlítő azon C pontjánál, amelyik B-től keletre, az egyenlítő hosszának negyedrészével megegyező távolságra található?*

Útmutatás. Alkalmazzunk a gömbfelületre B középpontú térbeli inverziót.[3] (A térbeli inverzió szög- és aránytartó leképezés, ami gömböt gömbbe vagy síkba visz át.)

Megoldás. Az áramsűrűség $\frac{I}{\sqrt{8}\pi\delta R}$ nagyságú és délnyugati irányú.

Gnädig Péter



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 786. *Egy decemberi és egy júniusi napon, Ecuadorban, délben, védőszemüvegben arccal a Nap felé fordulunk. Mit látunk, merre mozog a Nap az égen, jobbra vagy balra?*

(*3 pont*)

Megoldás. A Föld forgástengelyének „ferdesége” miatt, ha az Egyenlítőn állva decemberben, délben nézünk a Nap felé, akkor dél felé fordulva állunk. Ilyenkor a Nap (a nálunk megszokottal ellentétesen) balról jobbra „halad”. Ha júniusban tesszük ugyanezt, akkor észak felé nézünk, ilyenkor a Nap (a nálunk megszokott irányban) látszólag jobbról balra mozog.

Szendrői Bori (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyakorló Gimn., 9. évf.)

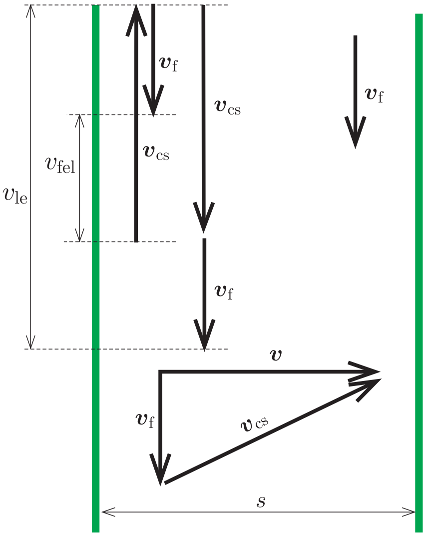
58 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 11, hibás 19, nem versenyszerű 12 dolgozat.

G. 788. *Egy fiú csónakjával átevez egy folyón a pontosan szemben lévő mólóhoz, majd azonnal megfordul és visszaevez a kiindulási pontba. A* 288 m *széles folyó vizének sebessége* 1 m/s, *a csónak vízhez viszonyított sebessége* 2,6 m/s. *A fiú azt is kipróbálja, hogy a folyón felfelé tesz meg* 288 *métert, majd a visszautat is ugyanúgy evezve teszi meg. Számítsuk ki a csónak kétféle mozgásának idejét!*

(*4 pont*)

[3] Lásd Faragó Andor: *Inverzió a térben* c. cikkét a KöMaL 1927. évi 10. számában, `http://db.komal.hu/scan/1927/10/`.

Megoldás. Ismert adatok:
– A folyó szélessége: $s = 288$ m;
– a folyóvíz sebessége: $v_{\mathrm{f}} = 1$ m/s;
– a csónak sebessége a folyó vizéhez viszonyítva: $v_{\mathrm{cs}} = 2{,}6$ m/s.



1. eset: merőleges átkelés. Mivel a folyó a víz folyásirányával megegyező irányba viszi a csónakot, a fiúnak a vízhez képest enyhén „felfelé” kell eveznie. A csónaknak a parthoz viszonyított sebességvektora (lásd az *ábrát*)

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{f}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{cs}},$$

amelynek nagysága (a Pitagorasz-tétel szerint)

$$v = \sqrt{v_{\mathrm{cs}}^2 - v_{\mathrm{f}}^2} = \sqrt{2{,}6^2 - 1{,}0^2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} =$$

$$= 2{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ezzel a sebességgel haladva a $2s$ hosszúságú oda-vissza utat

$$t_1 = \frac{2s}{v} = \frac{576\ \mathrm{m}}{2{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 240\ \mathrm{s} = 4\ \mathrm{perc}$$

idő alatt teszi meg.

2. eset: a folyón felfelé, majd lefelé evezés. A fiú felfelé lassabban, lefelé viszont gyorsabban tud haladni. Felfelé evezve a parthoz viszonyított sebessége

$$v_{\mathrm{fel}} = v_{\mathrm{cs}} - v_{\mathrm{f}} = 1{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

lefelé evezve pedig

$$v_{\mathrm{le}} = v_{\mathrm{cs}} + v_{\mathrm{f}} = 3{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ezekkel a sebességekkel az s távolságot oda-vissza

$$t_2 = t_{\mathrm{fel}} + t_{\mathrm{le}} = \frac{s}{v_{\mathrm{fel}}} + \frac{s}{v_{\mathrm{le}}} = \frac{288\ \mathrm{m}}{1{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} + \frac{288\ \mathrm{m}}{3{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 180\ \mathrm{s} + 80\ \mathrm{s} = 260\ \mathrm{s} = 4\ \mathrm{perc}\ 20\ \mathrm{s}$$

idő alatt teszi meg a fiú.

Tajta Sára (Budapest, Városmajori Gimn., 9. évf.)

58 dolgozat érkezett. Helyes 30 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 17, hibás 2, nem versenyszerű 7 dolgozat.

G. 796. *Egy ózongenerátor óránként 5 g ózont állít elő kisüléssel, és ventilátorral juttatja azt a fertőtlenítendő felületre.*

a) Hány ózonmolekula keletkezik 1 óra alatt?

b) A használati útmutató 28 m² felület fertőtlenítésére 30 percet javasol. A levegő tiszta és pormentes, így a keletkező ózon csak a felületen bomlik fel. Becsüljük meg, hány ózonmolekula jut egy olyan baktériumra, amely 10 négyzetmikron felületet foglal el!

(*4 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár

Megoldás. *a*) Az ózon (O_3) móltömege 48 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$, tehát óránként

$$N = \frac{5\ \mathrm{g}}{48\ \mathrm{g}}\, 6{,}02 \cdot 10^{23} = 6{,}27 \cdot 10^{22}$$

ózonmolekula keletkezik.

b) 30 perc alatt

$$N_1 = \frac{1}{2} N = 3{,}13 \cdot 10^{22}$$

ózonmolekula keletkezik, és azok $A_1 = 28\ \mathrm{m}^2$ felületen oszlanak szét. Ha az egyik baktérium által „elfoglalt terület”

$$A_{\text{baktérium}} = 10\ (\mu\mathrm{m})^2 = 10^{-11}\ \mathrm{m}^2,$$

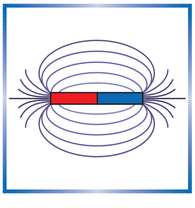
akkor erre a baktériumra kb.

$$N_{\text{baktérium}} = N_1 \cdot \frac{A_{\text{baktérium}}}{A_1} = 1{,}12 \cdot 10^{10} \approx 10^{10}$$

számú ózonmolekula jut.

Tajta Sára (Bp.,Városmajori Gimn., 9. évf.)

45 dolgozat érkezett. Helyes 25 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 6, nem versenyszerű 7 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 5406. *Maximálisan mekkora potenciálkülönbség hozható létre egy U feszültségű telep és két egyforma kondenzátor segítségével? A kondenzátorok feltöltésük után szabadon átrendezhetők és újra beköthetők egy hálózatba.*

(*5 pont*) Példatári feladat nyomán

Megoldás. Egymás után rákapcsolva a kondenzátorokat a telepre, mindkettőt fel lehet tölteni U feszültségre. Utána sorba kötve a két kondenzátort és a telepet, $3U$ potenciálkülönbséget hozhatunk létre. Vajon elérhető-e nagyobb potenciálkülönbség a kondenzátorok és a telep ügyes kapcsolgatásával?

Ha a telepet és az egyik ($\mathcal{A}$ jelű) U feszültségű kondenzátort (azonos polaritással) sorba kötjük, és ezt a $2U$ feszültséget rákapcsoljuk a másik ($\mathcal{B}$ jelű), korábban már U feszültségre feltöltött kondenzátorra, akkor tovább növelhetjük annak feszültségét. $\mathcal{B}$ feltöltődése közben $\mathcal{A}$ részben kisül, így $\mathcal{B}$ feszültsége nem éri el a $2U$ értéket. Egy ilyen elrendezésben ugyanis a két kondenzátor össztöltése nem változik, hiszek az őket közvetlenül összekapcsoló vezető nincs mással összekötve. A két kondenzátor feszültsége között viszont a telep miatt U különbség lesz. Első lépésben tehát az $\mathcal{A}$ jelű kondenzátor feszültsége $\frac{1}{2}U$-ra csökken, a $\mathcal{B}$ kondenzátor pedig $\frac{3}{2}U$ feszültségre töltődik fel.

A lecsökkent töltésű, $\frac{1}{2}U$ feszültségű $\mathcal{A}$ kondenzátort ismét feltölthetjük U-ra, majd sorba köthetjük a teleppel, miáltal $2U$ feszültséget kapunk. Ezzel tovább tölthetjük a folyamat kezdetekor $\frac{3}{2}U$ feszültségű $\mathcal{B}$ kondenzátort.

Ezeket a lépéseket ismételgetve addig növelhetjük $\mathcal{B}$ feszültségét, amíg az $2U$-t el nem éri, pontosabban: amíg $2U$-hoz tetszőlegesen közel nem kerül. Ekkor a másik ($\mathcal{A}$ jelű) kondenzátor feszültsége gyakorlatilag U lesz.

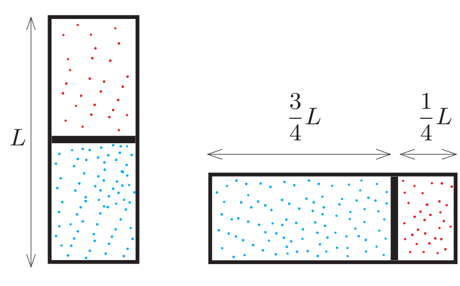
Innen nem tudjuk tovább növelni a feszültséget, mert az U feszültségű $\mathcal{A}$ kondenzátort hiába kapcsoljuk önmagában a telepre, a feszültsége nem változik. Ekkor már az sem segít, ha felcseréljük a két kondenzátort: a $2U$ feszültségű $\mathcal{B}$-t kapcsoljuk sorba a teleppel, és a $3U$ feszültséget rákötjük az U feszültségű $\mathcal{A}$-ra. Ekkor ugyanis megcserélődik a két kondenzátor feszültsége, $\mathcal{B}$ töltéseinek fele $\mathcal{A}$-ra kerül, így a feszültsége U-ra csökken, $\mathcal{A}$ pedig $2U$ feszültségre töltődik fel.

A kialakult (pontosabban: tetszőlegesen megközelített) állapotban tehát az egyik kondenzátor feszültsége $2U$, a másiké U lehet. Ezeket – azonos polaritással – a teleppel sorba kapcsolva maximalisan $4U$ potenciálkülönbség érhető el.

Csillingek csapat:
Csilling Dániel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) és
Csilling Katalin (Budapest, Szilágyi E. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

8 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Bencz Benedek és a Csillingek megoldása. megoldás. Hiányos (1 pont) 6 dolgozat.

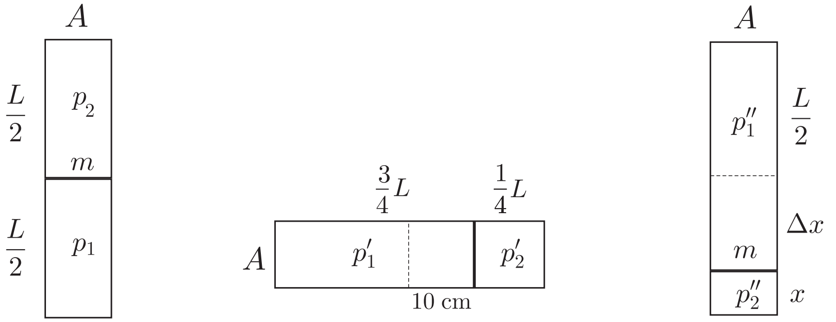
P. 5422. *Egy zárt, henger alakú, $L=40$ cm hosszúságú, hővezető falú tartályt egy vékony dugattyú oszt két részre, amelyekben ideálisnak tekinthető gáz található. Kezdetben a tartály tengelye függőleges, a dugattyú pedig egyensúlyi állapotában éppen a tartály felénél helyezkedik el. Ezután a tartály szimmetriatengelyét 90°-kal las-*



san elforgatjuk, melynek eredményeképp a dugattyú 10 cm *távolsággal mozdul el. Mennyivel mozdult volna el a dugattyú, ha* 90° *helyett* 180°*-kal forgattuk volna el a tartályt? A hőmérséklet mindvégig állandó.*

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

Megoldás. Legyen a dugattyú keresztmetszete A, tömege m, továbbá a 180°-kal elfordított tartálynál a dugattyú keresett elmozdulása Δx. Az *ábra* a szóban forgó 3 esetet mutatja a nyomások és a térfogatok feltüntetésével.



1\. eset 2. eset 3. eset

A hőmérséklet állandó, az állapotváltozásokra tehát alkalmazható a Boyle–Mariotte-törvény. Az 1. és a 2. esetre felírhatjuk, hogy

(1) $$p_1 A\frac{L}{2} = p_1' A\frac{3}{4}L, \qquad \text{ahonnan} \qquad p_1' = \frac{2}{3}p_1,$$

valamint

(2) $$p_2 A\frac{L}{2} = p_2' A\frac{1}{4}L, \qquad \text{tehát} \qquad p_2' = 2p_2.$$

A dugattyú mechanikai egyensúlyának feltétele az 1. esetben:

(3) $$p_1 = p_2 + \frac{mg}{A},$$

a 2. esetben pedig

(4) $$p_1' = p_2'.$$

Az (1)–(4) egyenletekből következik, hogy

$$p_1 = \frac{3}{2}\frac{mg}{A} \qquad \text{és} \qquad p_2 = \frac{1}{2}\frac{mg}{A}.$$

A Boyle–Mariotte-törvényt az 1. és a 3. esetre alkalmazva:

$$p_1 A\frac{L}{2} = p_1'' A(L-x), \qquad \text{továbbá} \qquad p_1 A\frac{L}{2} = p_2'' Ax,$$

vagyis

$$p_1'' = \frac{3mgL}{4A(L-x)}, \qquad \text{illetve} \qquad p_2'' = \frac{mgL}{4Ax}. \tag{5}$$

A fenti képletekben $x = (L/2) - \Delta x$.

A dugattyú mechanikai egyensúlyának feltétele a 3. esetben:

$$p_2'' = p_1'' + \frac{mg}{A},$$

amelybe behelyettesítve az (5)-ben szereplő nyomásokat

$$\frac{mgL}{4Ax} = \frac{3mgL}{4A(L-x)} + \frac{mg}{A},$$

azaz

$$L(L-x) = 3Lx + 4x(L-x)$$

adódik. Ennek a másodfokú egyenletnek az egyik megoldása:

$$x_1 = L + \frac{\sqrt{3}}{2}L,$$

ami nagyobb, mint a tartály L hossza, tehát számunkra érdektelen. A másik (valós fizikai tartalommal rendelkező) megoldás:

$$x_2 = L - \frac{\sqrt{3}}{2}L,$$

és így a dugattyú elmozdulása az 1. esettől a 3. esetig

$$\Delta x = \frac{L}{2} - x_2 = \frac{L}{2}\big(\sqrt{3} - 1\big) \approx 14{,}6 \text{ cm}.$$

Molnár Zétény (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 10. évf.)

65 dolgozat érkezett. Helyes 34 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 14, hibás 4, nem versenyszerű 6 dolgozat.

P. 5426. *A fotonrakéta olyan elképzelt rakéta, amelynek hajtóműve az üzemanyagot fotonokká alakítja, majd azokat egyirányban, párhuzamosan kilövelli. Egy hosszútávú űrutazás során a rakéta nyugalomból indulva egyenes pályán haladva felgyorsul valamekkora sebességre, majd a hajtóművét az ellenkező irányban üzemeltetve az úticélig fékezve megáll. Ezalatt a rakéta tömege negyedére csökken. Mekkora volt a rakéta maximális sebessége?*

*(A relativisztikus dinamikáról rövid cikk olvasható a KöMaL honlapján**.*)*

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

* `https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`.

Megoldás. A rakéta mozgása során három jellegzetes eseményt érdemes megjelölni (lásd az *ábrát*):

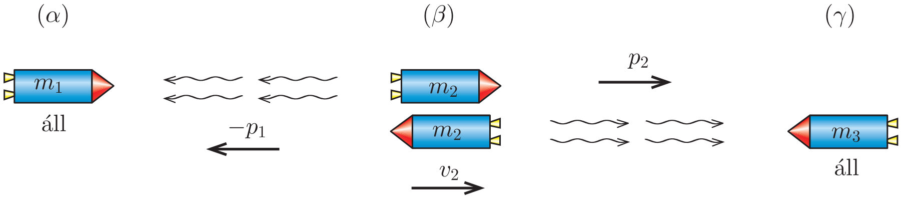
(α) A rakéta éppen elindul. Tömege m_1, sebessége: $v_1 = 0$.

(β) A rakéta eléri a maximális sebességét. Ekkor a tömege m_2, sebessége v_2.

(γ) A rakéta eléri úticélját. A tömege

$$m_3 = \frac{m_1}{4}, \tag{1}$$

a sebessége pedig $v_3 = 0$.



A rakéta az (α) és a (β) esemény között összesen $-p_1$ lendületű, p_1c energiájú fotont bocsát ki. (A rakéta haladási irányát tekintjük pozitív iránynak.) A (β) eseménynél a rakéta megfordul, és az út hátralévő részében, vagyis (β)-tól (γ)-ig összesen p_2 lendületű, tehát p_2c energiájú fotonokat bocsát ki a haladási irányában (előre).

Írjunk fel megmaradási törvényeket a különböző események között. Az (α) és a (γ) esemény között a relativisztikus összenergia megmarad:

$$m_1c^2 = m_3c^2 + p_1c + p_2c. \tag{2}$$

Ugyanakkor a rendszer (rakéta+fotonok) összes lendülete is állandó marad:

$$0 = p_2 - p_1, \qquad \text{tehát} \qquad p_1 = p_2 \equiv p. \tag{3}$$

Az (1) és (3) összefüggéseket (2)-be visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$m_1c^2 = \frac{m_1c^2}{4} + 2pc, \quad \text{vagyis} \quad p = \frac{3}{8}m_1c.$$

Az (α) és a (β) események között az energiamegmaradás:

$$m_1c^2 = \frac{m_2c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} + pc, \tag{4}$$

és a lendületmegmaradás:

$$0 = -p + \frac{m_2v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{3}{8}m_1c = \frac{m_2v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}.$$

Innen m_2-t kifejezve és (4)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$m_1c^2 = \frac{3}{8}m_1\frac{c^3}{v_2} + \frac{3}{8}m_1c^2, \quad \text{tehát} \quad \frac{5}{8} = \frac{3}{8}\,\frac{c}{v_2},$$

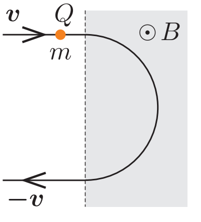
és így a keresett maximális sebesség: $v_2 = \frac{3}{5}c$.

Kollmann Áron Alfréd (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

22 dolgozat érkezett. Helyes Bencz Benedek, Lumity csapat (Kurucz Kende és Vidor Nikoletta), Kollmann Áron Alfréd, Nemeskéri Dániel és Lincoln Liu megoldása. Kicsit hiányos (4–5 pont) 4, hiányos (1–3 pont) 10, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5442. *Egy eredetileg nyugvó atommag* 20 kV *potenciálkülönbség befutása után a haladási irányára merőleges,* 1,0 T *indukciójú homogén mágneses mezőbe kerül. A mágneses mezőt egy, a részecske haladási irányára merőleges sík választja el az erőtérmentes tartománytól. A részecske* $3{,}3\cdot 10^{-8}$ s *múlva lép ki a mágneses mezőből. Melyik atommagról van szó?*

(*4 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest



Megoldás. Az *ábrán* szürkével jelölt térrészben homogén, B indukciójú mégneses mező van. A mezőt határoló síkra merőlegesen érkező atommagot a mágneses mező körpályára kényszeríti, és a részecske egy félkör alakú pálya megtétele után ismét merőlegesen hagyja el a mágneses teret. Egy teljes kör megtételének T periódusideje a mágneses mezőben töltött t idő kétszerese lenne.

A Q töltésű, v sebességű, m tömegű atommagra a mágneses térben $F = QvB$ nagyságú, a sebességére merőleges Lorentz-erő hat. A Newton-féle mozgásegyenlet szerint:

$$QvB = mv\omega, \quad \text{ahol} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{t} = 9{,}52\cdot 10^7\ \mathrm{s}^{-1}.$$

A mozgásegyenletből (v-vel való egyszerűsítés után) az atommag tömegének és a töltésének arányára

$$\frac{m}{Q} = \frac{B}{\omega} = \frac{1{,}0\ \mathrm{T}}{9{,}52\cdot 10^7\ \mathrm{s}^{-1}} = 1{,}05\cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{C}}$$

adódik, amiből az atommag A tömegszámának és Z rendszámának arányára következtethetünk. Mivel $m = A\cdot \mathrm{u}$ (ahol $\mathrm{u} = 1{,}66\cdot 10^{-27}$ kg az atomi tömegegység), valamint $Q = Z\cdot e$ (ahol $e = 1{,}60\cdot 10^{-19}$ C az elemi töltés), azt kapjuk, hogy

$$\frac{A}{Z} = \frac{m}{Q}\,\frac{e}{\mathrm{u}} = 1{,}01 \approx 1{,}0.$$

Ha az atommag tömegszáma (a protonok és a neutronok számának összege) megegyezik a rendszámmal (a protonok számával), akkor ebben az atommagban nincs neutron. Ilyen atommag csak egy van: a *hidrogén.*

Gerendás Roland (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. Az U gyorsítófeszültség számszerű értéke látszólag szükségtelen adat, az A/Z arány kiszámításánál nincs szükségünk rá. Megadása mégsem volt fölösleges, hiszen ha U túlságosan nagy, akkor az atommag sebessége megközelítheti a fénysebességet (c), és emiatt a newtoni mechanika képleteinek alkalmazása hibás eredményre vezet. Esetünkben a felgyorsított protonok (hidrogénatommagok) sebessége a munkatétel szerint

$$v=\sqrt{\frac{2QU}{m}}=\sqrt{\frac{2eU}{\mathrm{u}}}\approx 2\cdot 10^6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ll c=3\cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

tehát nem volt szükség relativisztikus képletek alkalmazására.

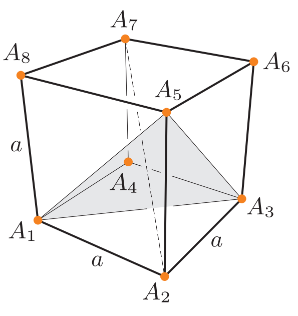
Fórizs Borbála (Budapest, Városmajori Gimn., 11. évf.)

26 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (2 pont) 3, nem versenyszerű 2 dolgozat.

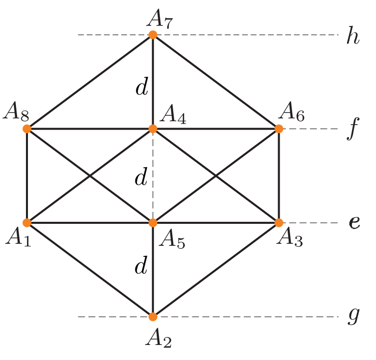
P. 5443. *A* KCl *lapcentrált kockarendszerben kristályosodik, és a rácsállandója* 628 pm. *Legfeljebb mekkora lehet a röntgenfény hullámhossza, hogy létrejöhessen Bragg-reflexió az elemi cella testátlóira merőleges rácssíkokon? (Lásd* A röntgenszórás, más néven Bragg-reflexió *c. cikket* 2022. *novemberi számunk* 489. *oldalán.)*

(*4 pont*) Közli: *Woynarovich Ferenc,* Budapest

Megoldás. Határozzuk meg az elemi cella testátlójára merőleges rácssíkok távolságát. Tekintsük a rács egyik, az *1. ábrán* látható elemi celláját, ami egy a oldalélű kocka.



1. ábra



2. ábra

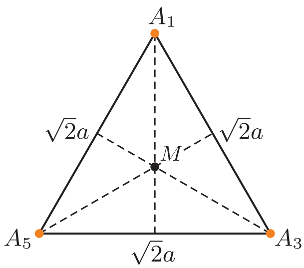
A $\sqrt{3}a$ hosszúságú A_2A_7 testátlóra merőleges síkok az A_1, A_3, A_5 és az A_4, A_6, A_8 pontokra illeszkedő e és f, továbbá az A_2-n, valamint A_7-en átmenő és az A_2A_7 egyenesre merőleges g és h síkok. Ezen síkok d távolsága határozza meg a legnagyobb hullámhosszúságot, amelyre létrejöhet Bragg-reflexió (*2. ábra*).

Határozzuk meg először a g és az e sík távolságát. Tekintsük ehhez a $\sqrt{2}a$ oldalélű A_1, A_3, A_5 szabályos háromszöget az e síkban. Az A_2A_7 testátló a háromszög M súlypontjában metszi az e síkot (*3. ábra*). A Pitagorasz-tételt felhasználva kapjuk, hogy

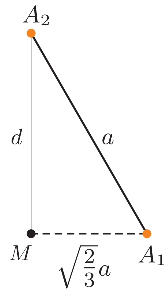
$$MA_1=\frac{2}{3}\sqrt{2a^2-\frac{a^2}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}a,$$

a *4. ábráról* pedig leolvashatjuk, hogy

$$d = MA_2 = \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$



3. ábra



4. ábra

Az e és g síkok távolsága tehát a testátló $\frac{1}{3}$ része, és ugyanekkora a h és f, továbbá az f és e síkok távolsága is:

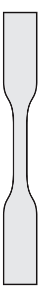
$$d = \frac{628\ \text{pm}}{\sqrt{3}} = 362{,}6\ \text{pm}.$$

A Bragg-egyenlet szerint az elemi cella testátlójára merőleges rácssíkon szóródó röntgenfény hullámhossza legfeljebb $\lambda_{\max} = 2d = 725$ pm lehet.

Bencz Benedek (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 10. évf.)

11 dolgozat érkezett. Helyes Bencz Benedek, Schmercz Blanka és Szabó Márton megoldása. Hiányos (1–2 pont) 6, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok



M. 419. Vágjunk ki A4-es fénymásolópapírból kb. 2 cm szélességű csíkokat a papírlap hosszabb, illetve a rövidebb oldalaival párhuzamosan. A papírcsíkok középső harmadát az *ábrának* megfelelően, ívelt vonalak mentén keskenyítsük el! Mérjük meg ezek használatával a papír (MPa egységekben kifejezett) szakítószilárdságát! Van-e eltérés a hosszabb, illetve a rövidebb irányban kivágott csíkok szakítószilárdsága között?

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter*, Vácduka

G. 801. Vízszintes talajon két, síléceken álló, 72 kg tömegű férfi közül az első 0,02 bar, míg a második 0,025 bar nyomást gyakorol a hóra. A második férfi 5 kg tömegű hátizsákot is visel a hátán.

a) Mekkora a sílécek nyomófelülete?

b) Mekkora lesz a második férfi alatt a nyomás, ha hátizsákját ledobja és féllábra áll?

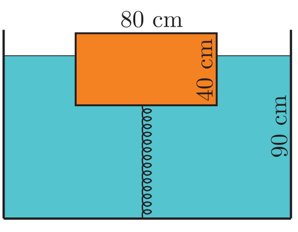
(*3 pont*)

G. 802. Körülbelül hány perccel később delel a Nap Sopronban, mint Mátészalkán?

(*3 pont*) Közli: *Németh László*, Fonyód

G. 803. Egyenes mentén állandó lassulással haladó test egy pályaszakasz végére érve elveszíti kezdősebességének a felét. Kezdősebességének hány százalékát vesztette el a pályaszakasz felezőpontjáig?

(*4 pont*)



G. 804. Egy 0,6 $\mathrm{kg/dm^3}$ sűrűségű fahasáb, melynek magassága 40 cm, alapélei pedig 80 cm és 30 cm hosszúak, egy nagy méretű medencében úszik. A hasábot az *ábrán* látható módon a medence aljához rögzítettük egy rugóval, melynek nyújtatlan hossza 50 cm.

a) Mennyi látszik ki a hasábból, ha víz mélysége 90 cm és a rugó rugóállandója 1440 N/m?

b) Legalább mekkora munkavégzés árán lehet a hasábot teljesen a víz felszíne fölé emelni, ha a rugó közben nem szakad el?

(*4 pont*)

P. 5454. Az autógumik javítása után a kerekeket nagy fordulatszámra pörgetik, és az esetleges „ütést” kicsiny nehezékekkel kiegyensúlyozzák (centírozzák a kereket). Az egyik kereket álló helyzetből állandó szöggyorsulással forgásba hozzák. Egy bizonyos pillanatban a tengelytől $R = 20$ cm távolságban lévő szelepsapka gyorsulásának nagysága kétszer akkora, mint az induláskor, és a sebessége ekkor $v = 1$ m/s.

a) Mennyi idő telt el az indulásától számítva?

b) Mennyi volt a szelepsapka gyorsulása induláskor?

c) Mennyi utat tett meg a szelepsapka ezalatt?

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5455. Egy függőleges tengelyű, 45°-os félnyílásszögű, súrlódásmentes tölcsér belső felületére, a tengelyétől 10 cm távolságban v_0 nagyságú vízszintes sebességgel egy pontszerű testet juttatunk. Mekkora lesz a test legnagyobb sebessége, ha

a) $v_0 = 0{,}5$ m/s;

b) $v_0 = 2{,}0$ m/s?

(*5 pont*) Példatári feladat nyomán

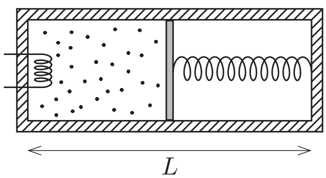
P. 5456. A *képen* azt láthatjuk, hogy munkások egy kútgyűrűt raknak fel (vagy esetleg engednek le) pallókon egy teherautóról. A kútgyűrű tömege 300 kg, átmérője 1 m, a pallók hossza 5 m, a teherautó platójának magassága 1 m. Tegyük fel, hogy a munkások kezei által kifejtett erők eredője párhuzamos a pallókkal, valamint a kezük és a kútgyűrű között 0,8 a tapadási súrlódási együttható, továbbá a kútgyűrű nem csúszik meg a pallón.

Határozzuk meg, hogy a pallókkal párhuzamosan legalább mekkora erőt kell a betongyűrűre kifejteni, ha egyenletes mozgással, megcsúszás nélkül akarjuk görgetni

a) felfelé;

b) lefelé!

(*5 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház



P. 5457. Hőszigetelt, hengeres tartály belső hossza L. A tartályt egy hőszigetelő dugattyú két részre osztja; a bal oldali térfélben egyatomos ideális gáz, a jobb oldaliban vákuum van (lásd az *ábrát*). A dugattyút a tartály jobb oldali végével rugó köti össze, melynek feszítetlen hossza L. A gázt a bal oldali térfélben lévő fűtőszál segítségével lassan melegíteni kezdjük.

Határozzuk meg a gáz mólhőjét ebben a folyamatban!

(*5 pont*) Oroszországi feladat nyomán

P. 5458. Három telep mindegyike 12 V üresjárási feszültségű és 3 Ω belső ellenállású. A telepek milyen kapcsolása esetén kapjuk az R külső ellenálláson a legnagyobb teljesítményt, és mekkora ez a teljesítmény, ha

a) $R = 1\ \Omega$;

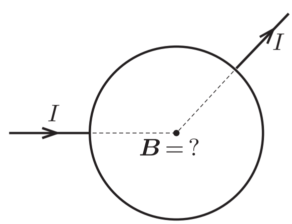
b) $R = 3\ \Omega$;

c) $R = 3{,}5\ \Omega$;

d) $R = 6\ \Omega$?

(*4 pont*) Közli: *Székely György*, Budapest

P. 5459. Egyenletes vastagságú ellenálláshuzalból R sugarú kört hajlítunk. A kör egyik pontjánál „sugárirányban” I erősségű áramot vezetünk be, egy másik pontjánál pedig (ugyancsak sugárirányban) elvezetjük azt.



Milyen irányú és mekkora nagyságú a mágneses indukcióvektor a kör középpontjában?

(*3 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

P. 5460. Színes parfümöt 4 cm külső átmérőjű, 10 cm magas, állandó falvastagságú, henger alakú, $n = 1{,}5$ törésmutatójú üvegben hoznak forgalomba. A parfümöt a polcon szemmagasságban helyezik el, és hátulról világítják meg. A távoli vásárlók úgy látják, mintha a hengerpalást falvastagsága nulla lenne*. Legalább hány ml parfüm lehet az üvegben?

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

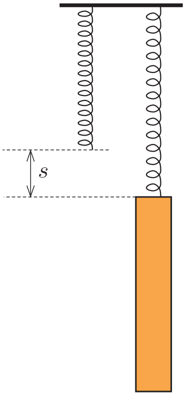
P. 5461. A ^{40}K izotóp más elem bomlása közben nem jön létre, így a mennyisége a Föld létrejötte óta 1,25 milliárd évenként feleződik. A ^{40}K 11%-ban elektronbefogással (EB) vagy β^{+}-bomlással, 89%-ban β^{-}-bomlással alakul át.

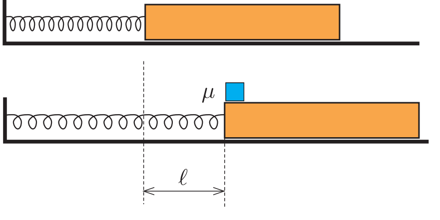
a) Milyen magok keletkeznek az egyes radioaktív folyamatokban?

b) Az egyik bomlástermék gáz halmazállapotú, amely egy adott kőzet megszilárdulása után már nem jut ki abból. Ezt a kőzetmintát analizálva azt tapasztaljuk, hogy a keletkezett gáz anyagmennyisége 90%-a volt a még meglevő ^{40}K-nak. Mennyi idővel ezelőtt szilárdult meg a kőzet?

(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5462. Elhanyagolható tömegű rugóhoz hosszú hasábot erősítünk. Ha a rugót a másik végénél fogva felfüggesztjük, megnyúlása $s = 15$ cm lesz. Ezután a rugót és a hasábot vízszintes, súrlódásmentes síkra helyezzük, és a rugó szabad végét rögzítjük. A hasábot az *ábrán* látható módon ℓ távolsággal hátrahúzzuk, így a rugó megnyúlik. Végül a hasáb felső lapjára, annak rugó felőli végére egy kocka alakú testet helyezünk. A hasáb és a kocka közötti (tapadási és csúszási) súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$.





* A fénykép csak illusztráció, az üveg alakja és a falvastagsága eltér a feladatban leírtaktól.

Ha a hasábot elengedjük, a rendszer mozgásba jön, és a kocka elcsúszik a hasábon. A két test közötti csúszás azt a pillanatot követően szűnik meg, amikor a hasáb gyorsulása nullává válik.

a) Mennyi ideig csúszott a kocka a hasábon?

b) Legalább mekkora az ℓ távolság, ha a leírt mozgás létrejöhetett?

c) Mekkora távolsággal csúszott el a kocka a hasábon?

(*6 pont*) Közli: *Wiedemann László,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 2023. február 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 73. No. 1. January 2023)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 29): **K. 749.** Aladdin found five coins in a box. One of them is a counterfeit coin, and the monkey Abu is the only one who knows which. If Aladdin selects three coins and gives one of them to Abu, then Abu will tell him whether there is a counterfeit one among the other two. Whenever Abu gets a real coin, he will tell the truth, but he will lie if he gets a counterfeit coin. Is it possible to identify the counterfeit coin with at most three questions? (Based on the idea of *S. Róka,* Nyíregyháza) **K. 750.** When Pete walks to the school, he always has the same speed. Sometimes he is in a hurry and then he runs, with twice the walking speed. Yesterday he walked the first third of the distance to the school and then covered the rest of the distance running. Today, he walked 6 minutes longer than the time spent running. How many minutes longer did it take him today to get to the school than yesterday? **K. 751.** We have five chocolate trufles, all of them look alike. However, three of them weigh 20 g each, one weighs 19 g, and one weighs 21 g. We want to identify the 19-g trufle with the help of an equal-arm balance only. Prove that it is possible to do it by using the balance three times, but less than three is not enough. **K/C. 752.** There are k ways to select at least two of the numbers 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 such that their sum is divisible by 3. In how many ways is it possible to select at least two of the numbers 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 such that their sum is divisible by 3? Express your answer in terms of k. (Two selections are considered different if they do not consist of the same set of numbers.) **K/C. 753.** Points B, C, D and E lie on one arm of an angle of vertex A, and points F, G, H and I lie on the other arm. Given that $AB = BG = GD = DI = IE = EH = HC = CF = FA$ (see the *figure*), show that the triangles CEH and IGD are equilateral.

New exercises for practice – competition C (see page 30): **Exercises up to grade 10: K/C. 752.** See the text at Exercises **K. K/C. 753.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1748.** Show that the shortest side of a cyclic quadrilateral inscribed in a unit circle cannot be longer than $\sqrt{2}$. (*Canadian problem*) **C. 1749.** Calculate the exact value of $\sqrt[3]{K}$, where K denotes the product of all positive factors of 2025. (Proposed by *K. A. Kozma,* Győr) **C. 1750.** M and N are the common points of circles k_1, centred at O_1 and k_2, centred at O_2. A secant drawn through point M intersects circle k_1 at point A and circle k_2 at point B such that A lies outside circle k_2 and B lies outside circle k_1. Lines AO_1 and BO_2 intersect at point P. Points N and P lie in the same half plane determined by line O_1O_2. Show that P lies on the circumscribed circle of triangle O_1NO_2. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **Exercises upwards of grade 11: C. 1751.** Let a and b denote positive real numbers such that $a^2+b^2=\frac{2}{9}$. Prove that $\frac{1}{2-3a}+\frac{1}{2-3b}\geqslant 2$. (Proposed by *G. Szmerka,* Budapest) **C. 1752.** There are six people waiting in a line. It is taking very long, so they decide to play. They select a permutation of the six positions at random, and perform it three times successively. (A permutation is a rule of obtaining a new order by assigning a (possibly) new position to everyone. For example they may chose the following rule: the person at position 1 goes to position 3, the one at position 2 goes to position 1, the third goes to position 2, the fourth goes to position 6, the fifth stays in place, and the sixth goes to position 4.) What is the probability that at least one of them will be standing in their initial position at the end? (Proposed by *K. A. Kozma,* Győr)

New exercises – competition B (see page 31): **B. 5286.** What is the smallest positive integer n for which the number $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ (in decimal notation) is divisible by the number $\underbrace{33\ldots3}_{100}$? (*3 points*) (*Brasilian problem*) **B. 5287.** Two circles touch each other externally. The line passing through the centres of the circles intersects the circles again at points A and B. The points of tangency on one of the common external tangents of the circles are P and Q, respectively. Prove that the lines AP and BQ intersect on the common internal tangent of the circles. (*3 points*) (Proposed by *I. Á. Molnár,* Miskolc) **B. 5288.** Two players are playing the following game on a 8×8 chessboard. They take turns in selecting one side of a field of the chessboard, separating two adjacent fields of the board, and colouring it yellow. The player who is first forced to create a closed yellow polygon will lose the game. Which player has a winning strategy? (*4 points*) (Based on an *American competition problem*) **B. 5289.** Let a, b, c and d denote non-negative real numbers such that $a+b+c+d=1$. Prove that $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\geqslant\frac{7}{2}$. (*5 points*) (Proposed by *J. Szoldatics,* Budapest) **B. 5290.** Solve the following equation over the set of positive integers: $3^n+4^n+\cdots+(n+2)^n=(n+3)^n$. (*6 points*) (Proposed by *T. Káspári,* Paks) **B. 5291.** The centre of the inscribed circle of a triangle ABC is I, and the centre of its circumscribed circle is O. Given that $\angle OIA=90^\circ$, $AI=89$ and $BC=160$, what is the area of the triangle? (*5 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 5292.** Given a circle k and points P and Q in its interior, construct* a circle through points P and Q that intersects the circle k at two diametrically opposite points. Depending on the position of points P and Q, how many solutions will the problem have? (*5 points*) (Proposed by *G. Kató,* Kápolnásnyék) **B. 5293.** Let p denote a prime number. What is the largest number

* Write down the steps of the construction (basic construction steps like bisecting an angle, reflecting over a line, etc. do not need to be described in detail) and explain why the method is correct. It is not required to perform the construction on paper.

of polynomials with integer coefficients such that there are no pairs of polynomials such that the value of their difference is divisible by p^2 at every integer? (*6 points*) (Proposed by *P. P. Pach,* Budapest)

New problems – competition A (see page 33): **A. 842.** n people live in a town, and they are members of some clubs (residents can be members of more than one club). No matter how we choose some (but at least one) clubs, there is a resident of the town who is the member of an odd number of the chosen clubs. Prove that the number of clubs is at most n. (Proposed by *Dömötör Pálvölgyi,* Budapest) **A. 843.** Let N be the set of those positive integers n for which $n \mid k^k - 1$ implies $n \mid k - 1$ for every positive integer k. Prove that if $n_1, n_2 \in N$, then their greatest common divisor is also in N. **A. 844.** The inscribed circle of triangle ABC is tangent to sides BC, AC and AB at points D, E and F, respectively. Let E' be the reflection of point E across line DF, and F' be the reflection of point F across line DE. Let line EF intersect the circumcircle of triangle $AE'F'$ at points X and Y. Prove that $DX = DY$. (Proposed by *Márton Lovas,* Budapest)

Problems in Physics

(see page 57)

M. 419. Cut out approximately 2 cm wide strips from a sheet of A4 copy paper, parallel to its longer and to its shorter side. Narrow the middle third of the paper strips along the curved lines as shown in the *figure.* Measure the tensile strength of the paper. (Express the tensile strength in MPa units). Is there a difference between the tensile strength of the longer and shorter strips?

G. 801. Two men, each having a mass of 72 kg, are standing on skis on the horizontal ground. The pressure exerted on the snow by the first man is 0.02 bar, and the pressure exerted by the second one is 0.05 bar. The second man is also carrying a 5 kg backpack on his back. *a*) What is the surface area of the skis, which is in contact with the snow? *b*) What will the pressure exerted by the second man be if he drops his backpack and stands on one leg only? **G. 802.** Approximately how many minutes later does the solar noon happen in Sopron than in Mátészalka? **G. 803.** The speed of an object travelling in a straight line with constant deceleration decreases to half of its initial value when it reaches the end of a straight path. What percentage of its initial speed is lost when it reaches the midpoint of the path? **G. 804.** A wooden block of density 0.6 kg/dm^3 is floating in a large pool. It has a height of 40 cm, the length of its base is 80 cm and the width of its base is 30 cm. The block is fixed to the bottom of the pool by a spring, having an unstretched length of 50 cm, as shown in the *figure.* *a*) What is the height of that part of the block, which is not under the water if the depth of the water is 90 cm and the spring constant of the spring is 1440 N/m? *b*) At least how much work is required to raise the block completely above the surface of the water if the spring does not break?

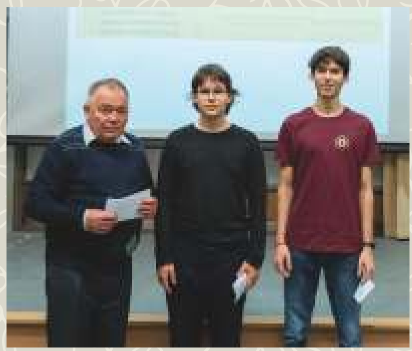
P. 5454. After repairing the tires of cars, the wheels have to be balanced. The wheels are placed to a balancing machine which spins them at very high speed, and measures the imbalance of the wheel. Then small wheel weights are mounted to the appropriate positions in order to balance the wheel. A wheel is rotated at a constant angular acceleration from rest. At a certain moment the speed of the valve cap, which is at a distance of $R = 20$ cm from the axle, is $v = 1$ m/s, and its acceleration is twice as big as it was when the wheel was started to move. *a*) How much time elapsed from the start? *b*) What was the acceleration of the valve cap, at the start of the rotation? *c*) How much distance did the valve cap cover during its rotation? **P. 5455.** A point-like object is given an initial horizontal velocity of magnitude v_0 and is placed to the inner surface of a frictionless funnel, 10 cm from the symmetry axis of the funnel. The symmetry axis of the funnel is vertical and the angle between the symmetry axis and the wall of the funnel is 45°. What will the greatest speed of the object be if *a*) $v_0 = 0.5$ m/s; *b*) $v_0 = 2.0$ m/s? **P. 5456.** In the *picture,* you can see workers rolling up a well ring to a lorry along the planks (or they may also roll down the ring, along the planks). The weight of the well ring is 300 kg, the diameter is 1 m, the length of the planks is 5 m, and the height of the lorry platform is 1 m. Assume that the net force exerted by the workers' hands is parallel to the planks, the coefficient of friction between their hands and the well ring is 0.8, and that the well ring does not slide on the plank. Determine the minimum force that must be exerted on the concrete well ring parallel to the planks if it is to roll uniformly, without slipping *a*) upward; *b*) downward. **P. 5457.** The internal length of a thermally insulated cylindrical tank is L. The container is divided into two parts by an insulating piston; the left part contains a sample of monatomic ideal gas, and there is vacuum in the right part (see the *figure*). The piston is connected to the right end of the tank by spring, whose unextended length is L. The gas is slowly heated by an electric heating element in the left half of the cylinder. Determine the molar heat of the gas in this process. **P. 5458.** Three batteries have the same electromotive force of 12 V and each of them has an internal resistance of 3 Ω. How should the batteries be connected in order that we obtain the maximum power dissipated in the external resistance R, and what is this power if *a*) $R = 1\ \Omega$; *b*) $R = 3\ \Omega$; *c*) $R = 3.5\ \Omega$; *d*) $R = 6\ \Omega$? **P. 5459.** A piece of wire, whose thickness is the same everywhere, is bent into a circle of radius R. At one point of the circle, a current of magnitude I flows into the wire in "radial direction" and at another point (also in the radial direction) it flows out of the wire. What is the direction and the magnitude of the magnetic induction at the centre of the circle? **P. 5460.** Coloured perfume is marketed in cylindrical bottles with an outer diameter of 4 cm, and a height of 10 cm. The thickness of the wall of the bottle is constant and its material has a refractive index of $n = 1.5$. The perfume is placed on the shelf at eye level and backlit. Distant customers see the cylinder as having a wall thickness of zero[†]. At least how many ml of perfume can be in the bottle? **P. 5461.** The ^{40}K isotope is not produced by the decay of other elements, so its quantity on the Earth has halved every 1.25 billion years since the Earth was formed. The ^{40}K decays by electron capture or by β^+ decay (11%) and by β^- decay (89%). *a*) What nuclei are produced in each radioactive process? *b*) One of the decay products is gaseous and does not escape after a rock solidifies. Analysing this rock sample, it was found that the amount of gas produced was 90% of the ^{40}K that was still present. How long ago did the rock solidify? **P. 5462.** A long rod is attached to a spring of negligible mass. If the spring is suspended by the other end, its elongation will be $s = 15$ cm. Then the spring and the rod are placed on a horizontal, frictionless surface and the free end of the spring is fixed. The rod is pulled back by a distance of ℓ as shown in the *figure,* so the spring will be stretched. Finally, a cube-shaped body is placed on the top face of the rod, at that end of the rod which is closer to the spring. The coefficient of friction (both static and dynamic) between the rod and the cube is $\mu = 0.2$. When the rod is released, the system starts to move and the cube slides on the rod. The sliding between the two bodies ceases after the moment when the acceleration of the cube becomes zero. *a*) How long did the cube slide on the rod? *b*) What is the least distance of ℓ in order that the above described motion could occur? *c*) How much distance did the cube slide along the rod?

[†] The photograph is for illustration purposes only, the shape of the bottle and the wall thickness are different from those described in the exercise.










COGNEX ERICSSON Morgan Stanley hiflylabs E·L·T·E

Petőfi Kulturális Ügynökség

Nemzeti Együttműködési Alap

nka Nemzeti Kulturális Alap

Bethlen Gábor Alapkezelő Zrt.

Miniszterelnökség