Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

5. szám 2017. szeptember

2017. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Gondold tovább! – 1.

Mottó: „A legtöbb amit a tanár a diákjaiért tehet az, hogy észrevétlenül rávezeti egy-egy jó ötletre.” (Pólya György) *Katz Sándor* tanár úr előadásának szerkesztett változatát olvashatják ebben a cikkben és a következő számunkban megjelenő második részben, amelyet a 2017. évi székesfehérvári matematikatanári vándorgyűlésen hallgattak meg az ország különböző régióiból és a határon túlról érkezett kollégái. Jópár tanulságos feladat következik, mindegyiket érdemes lesz továbbgondolni!

2017. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Gauss és Bolyai János — újraértékelve

Írásom célja — amellett, hogy megemlékezzek „a matematikusok fejedelme” születésének 240. évfordulójáról — hogy felmentsem Gausst az alól a hamis vád alól, amely a köztudatban él, hogy Gauss nem ismerte el Bolyai János korszakalkotó felfedezését. — írja *Oláh-Gál Róbert*.

2017. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Európai dinamikus napok Szegeden

A Louvre-ban kiállított ókori tálon egy kiméra látható. Mi az a kiméra és hogyan kapcsolódik a dinamikához? Erről is ír *Röst Gergely*, aki részt vett a Szegeden rendezett európai dinamikus napokon, egy olyan matematikai konferencián, ahol a matematikusok vannak kisebbségben.

2017. SZEPTEMBER, INTERJÚ – PORTRÉ

Interjú a 2016-ban

2017. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Nemzetközi

2017. SZEPTEMBER, INTERJÚ – PORTRÉ

Adalékok

Abel-díjat nyert Sir Andrew Wiles professzorral 2. rész

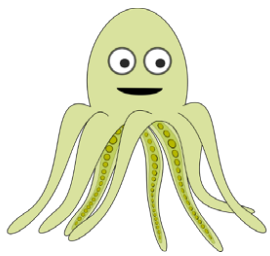
Sir Andrew Wiles több mint két évtizeddel Fermat utolsó tételének bebizonyítása után kapta meg az Abel-díjat. Hogyan sikerült igazolni a megoldhatatlannak hitt sejtést? *Martin Raussen* (Aalborg University, Dánia) és *Christian Skau* (Norwegian University of Science and Technology) riportjuk második részében a megoldás nyomában járnak. Fordította: *Besenyei Ádám*. (Az első rész az Érintő júniusi számában olvasható).

Matematikai Diákolimpia Rióban

Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát 2017. július 12-23. között Brazíliában, Rio de Janeiroban rendezték meg. Fényképünkön a riói Boulvard Olimpico. A beszámoló szövegét *Pelikán József*, a magyar csapat vezetője, fotóit *Kós Géza*, a nemzetközi feladatkiválasztó bizottság tagja készítette.

Dugonics András matematikapedagógiai munkásságának értelmezéséhez

2017. júniusi számunkban olvasható a Gondolat kiadó Matézis, mechanika, metafizika c. tanulmánykötetének ismertetése. Most az egyik tanulmányt, *Békés Vera* írását közöljük Dugonics András (1740—1818) matematikai munkásságáról. 2017. márciusában az Érintőben Csapodi Csaba írt többek között Dugonics Andrásról, mint a magyar matematikai nyelv egyik megalkotójáról.



2017. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is ... a csáp?

A *Notices of the American Mathematical Society* című folyóirat 2004. szeptemberi számában a *Mi is...?* rovatban jelent meg *Peter Teichner* írása, amelynek fordítását *Kalmár Boldizsár* készítette el (a kiadó és a szerző engedélyével). A *csáp* szót, mint matematikai kifejezést, nyomtatásban először *Jim Cannon* használta 1978-ban.

2017. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

A matek miatt nem lesz diplomám?

Napjainkban az egyetemen továbbtanuló diákok jelentős része középszintű érettségit tesz matematikából. Az egyetemek nem követelik meg az emelt szintű érettségit, így a diákok többsége nem választja ezt a rögös utat...Sok éves középiskolai és egyetemi tanítási tapasztalatom alapján megkerestem a középiskolai matematika tananyagban azokat a területeket, amelyeket sokkal jobban kellene tudni a sikeres egyetemi tanulmányokhoz — *Dékány Éva.*

2017. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

A gyorshajtástól az időjárásig

A Természet Világa ismeretterjesztő folyóirat 2017. augusztusi számában jelent meg Besenyei Ádám és Csomós Petra *A gyorshajtástól az időjárásig — Kalandok az alkalmazott matematikában* című írása, mely közérthető módon, játékos példákon keresztül vezeti be az olvasót a differenciálegyenletek izgalmas világába.

2017. SZEPTEMBER, INTERJÚ – PORTRÉ

Hálózatok irányítása — segítő-hálóval: Albert Réka

2017 májusában Budapesten dr. Albert Rékát, a Pennsylvania State University professzorát több alkalommal is felkérték előadónak. Fiatalon, mint általános hálózatkutató, a Barabási—Albert modell megalkotásával hozzájárult a skálafüggetlen hálózatok elemzéséhez. Érdeklődése néhány éve a biológiai hálózatok dinamikája felé irányult, és elsők között alkalmazta rájuk a Boole-logikán alapuló leírást.

2017. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Csodálatos magyar eredmények a 11. MEMO-n

Minden magyar résztvevő két éremmel a nyakában tért haza az augusztus végi Közép-európai Matematikai Olimpiáról. A MEMO-n csak olyan diákok indulhatnak, akik még nem szerepeltek a Nemzetközi Diákolimpián, az IMO-n. Többüknek ez volt az első nemzetközi versenye, de a kiváló eredményeket tekintve reméljük, egyiküknek sem az utolsó!

2017. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Utak a Fermat-sejtéshez

Szamuely Tamás 2016 decemberében tartott Rényi Intézetbeli előadásának célja az volt, hogy *Sir Andrew Wiles* Abel-díjának apropóján megismertesse a szélesebb matematikusközönséget azokkal a modern módszerekkel, amelyek a Fermat-sejtés megközelítésében kiemelt szerepet játszanak. Az alábbi cikk ennek az előadásnak az írásos változata.

2017. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

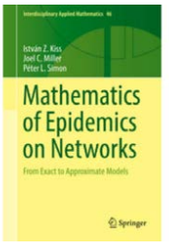
Honlapokat ajánlunk — Testvéreink

Összegyűjtöttük néhány magyarországi, illetve magyar nyelvű matematikai folyóirat honlapját (ők tehát a testvéreink). Bizonyosan nem teljes a lista, és többet is lehetne (érdemes is volna) írni róluk: rovatszerkesztőnk, *Tóth János* várja olvasóink visszajelzéseit. A fotón a Fine Hall Library, a Princetoni Egyetem Könyvtára látható.

2017. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is (és mire is jó) egy tiszta Hodge-struktúra?

A Mi is...? rovat újabb cikkében *Szabó Szilárd* témája csatlakozik több, előző és e számunkban megjelent íráshoz, a *Fermat-sejtés Andrew Wiles*-féle bizonyításához. Érdeklődő olvasóinknak ajánljuk *Tóth Árpád cikkét* a diofantikus egyenletekről, a Wiles-interjú 1. és 2. részét, vagy *Szamuely Tamás* előadásának írásos változatát Utak a Fermat-



2017. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Járványok hálózatokon

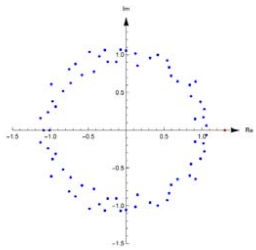
Kiss Z. István, Joel C. Miller és Simon L. Péter: *Mathematics of Epidemics on Networks* című könyve nemrég jelent meg a Springer kiadónál. *Bodó Ágnes* írt a könyvről és hátteréről, a járványok terjedéséről, a hálózatok matematikájának és a hálózatokon keresztül terjedő járványok tudományterületének fejlődéséről. A könyv szerzőinek felhívására pedig néhány vers is született e sejtéshez címmel. Most pedig jöhetnek a Hodge-struktúrák! A fotón Sir William Vallance Douglas Hodge (1903 - 1975).

témában, ezeket a recenzió után közöljük.

2017. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Robotépítő diákok nemzetközi sikere

Júliusban hangos volt a média a magyar diákok sikerétől a nemzetközi robotépítő versenyen. Néhány részlet következik a First Global Challenge-ről, a felkészülésről, a csapatról. Érdemes rákattintani a cikk végén a youtube linkekre!



2017. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Nézd és mondd!

Nézd és mondd! — avagy mi köze számok felolvasásának 71-ed fokú egyenletekhez és a periódusos rendszerhez? *Ferenci Tamás* az Óbudai Egyetem Élettani Szabályozások Kutatóközpontjából Conway számsorozatától kiindulva megold egy egyszerű 71-edfokú egyenletet — a képen látható, hogy a komplex számsíkon ábrázolt megoldások majdnem kört alkotnak — és eljut az „atomok bomlásáig”.

2017. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Negyedik lett az ELTE az egyetemisták nemzetközi matematikaversenyén

Az IMC, azaz International Mathematics Competition for University Students az utóbbi években az egyik legjelentősebb és legszínvonalasabb versenysorozattá nőtte ki magát, amit matematikus egyetemi hallgatóknak rendeznek Európában. Az idén nyáron immár 24. alkalommal rendezték meg a versenyt, a helyszín a bulgáriai Blagoevgrad volt. A képen az ELTE csapata.

2017. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Leendő diákolimpikonok tábora Dombóváron

2017. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Interaktív jegyzetfüzetek térnyerése

Az interaktív jegyzetfüzetben a

2017. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matematikai Modellalkotás Szeminárium

Az ezredforduló környékén és

Véletlen jószerencse (vagy a Sors akarata), hogy idén mind a matematikai diákolimpiai felkészülés, mind pedig a KöMaL hagyományos nyári fizikatáborának tervezett helyszíne és időpontja egybeesett. Így született a közös pályázás ötlete a Nemzeti Tehetség Program keretében az EMMI megbízásából kiírt hazai tematikus tehetségterületekhez — esetünkben matematikához és a természettudományokhoz — kapcsolódó tábor megvalósítására, a Bolyai János Matematikai Társulat és a MATFUND Alapítvány összefogásában.

feladatsorok olvasásán, szerkesztésén és kommentelésén túl lehetőségünk van előre vagy általunk megírt szimulációkat is futtatni. A jegyzetfüzet kiváló lehetőséget ad a kutatók eredményeinek prezentálására, tényleges kutatómunkára és ennek következményeként oktatási platform bevezetésére is. A hallgató a jegyzetfüzet használata során megismerkedik a Python nyelvvel, az alapvető html és TeX parancsokkal. Ideális esetben már a jegyzetfüzetében oldja meg a kitűzött feladatokat. Ez a fajta oktatási technika pedig az aktív tanulást segíti elő. *Fekete Imre* adja át tapasztalatait.

azóta is ugrásszerűen kiszélesedtek a matematika alkalmazási lehetőségei. Ilyenek pl. az automatizálás, a gépi tanulás, az adatbiztonság, a neurális hálózatok elméletével szorosan kapcsolódó mesterséges intelligencia kutatása és ugyancsak az optimalizálás kérdései az élet számos területén, többek között a pénzügyi matematikában. A BME-n 2001-ben indult el a Matematikai Modellalkotás Szeminárium, amelyről az akkori és a mostani titkár, *Molnár-Sáska Gábor* és *Mádi-Nagy Gergely* számol be.

2017. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

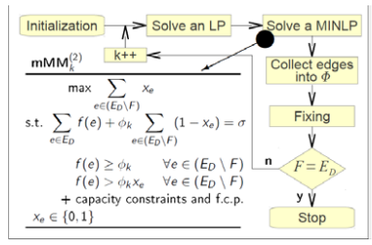
Beszámoló az 57. Rátz László Vándorgyűlésről

Július első hetében minden évben másik városban gyűlnek össze az ország különböző részeiből érkező matematikatanárok és tanítók a Bolyai János Matematikai Társulat hagyományos többnapos találkozójára. Ilyenkor az ország elismerten legjobb matematikatanárai is beülnek az iskolapadba. 2017-ben a matematikatanárok 57. Rátz László Vándorgyűlése — a vándorgyűlések történetében először — Székesfehérvárott volt.

2017. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Ericsson-díj 2017

Az Ericsson-díj 2017. évi díjátadó ünnepségét május 30-án tartották a Magyar Tudományos Akadémia Felolvasótermében. Az Ericsson Magyarország Kutatás-Fejlesztési Igazgatósága által 1999-ben alapított díjat általános-, vagy középiskolákban fizikát vagy matematikát oktató pedagógusok nyerhetik el. Az idei év volt a második, amikor a díjazott tanárok iskolái is pályázhattak az Ericsson egymillió forint értékű eszköztámogatására.



2017. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

XXXII. Magyar Operációkutatási Konferencia

Az operációkutatás mint önálló tudományterület a II. világháború során született: maga az operáció szó hadműveletre utal, a kutatás célja pedig kezdetben a haderő optimális mennyiségének, ütemezésének megtalálása volt. A háború után az optimalizálás tudománya elsősorban gazdasági és mérnöki területeken fejlődött tovább. Mai állapotában az operációkutatás egy szerteágazó, gyakran önmagában is szép és mély matematikai módszertanon alapuló, rengeteg gyakorlati alkalmazással rendelkező tudományterület.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **HÍREK – ÚJDONSÁGOK** ROVAT A MATEMATIKÁHOZ ÉS A BOLYAI TÁRSULATHOZ KAPCSOLÓDÓ ESEMÉNYEKRŐL, ÚJDONSÁGOKRÓL SZÓL. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÁKÓCZI ILDIKÓ.)*

Lenger Dániel, Szoldatics József

2017. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Csodálatos magyar eredmények a 11. MEMO-n

Minden magyar résztvevő két éremmel a nyakában tért haza az augusztus végi Közép-európai Matematikai Olimpiáról. A MEMO-n csak olyan diákok indulhatnak, akik még nem szerepeltek a Nemzetközi Diákolimpián, az IMO-n. Többüknek ez volt az első nemzetközi versenye, de a kiváló eredményeket tekintve reméljük, egyiküknek sem az utolsó!

Pelikán József

2017. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Nemzetközi Matematikai Diákolimpia Rióban

Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát 2017. július 12-23. között Brazíliában, Rio de Janeiroban rendezték meg. Fényképünkön a riói Boulvard Olimpico. A beszámoló szövegét *Pelikán József*, a magyar csapat vezetője, fotóit *Kós Géza*, a nemzetközi feladatkiválasztó bizottság tagja készítette.

Molnár-Sáska Gábor

2017. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Robotépítő diákok nemzetközi sikere

Júliusban hangos volt a média a magyar diákok sikerétől a nemzetközi robotépítő versenyen. Néhány részlet következik a First Global Challenge-ről, a felkészülésről, a csapatról. Érdemes rákattintani a cikk végén a youtube linkekre!

Ágoston Péter, Csernák Tamás, Fehér Zsombor, Maga Balázs, Szőke Tamás
2017. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Negyedik lett az ELTE az egyetemisták nemzetközi matematikaversenyén

Az IMC, azaz *International Mathematics Competition for University Students* az utóbbi években az egyik legjelentősebb és legszínvonalasabb versenysorozattá nőtte ki magát, amit matematikus egyetemi hallgatóknak rendeznek Európában. Az idén nyáron immár 24. alkalommal rendezték meg a versenyt, a helyszín a bulgáriai Blagoevgrad volt. A képen az ELTE csapata.

Nagyné Szokol Ágnes
2017. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Leendő diákolimpikonok tábora Dombóváron

Véletlen jószerencse (vagy a Sors akarata), hogy idén mind a matematikai diákolimpiai felkészülés, mind pedig a KöMaL hagyományos nyári fizikatáborának tervezett helyszíne és időpontja egybeesett. Így született a közös pályázás ötlete a Nemzeti Tehetség Program keretében az EMMI megbízásából kiírt hazai tematikus tehetségterületekhez — esetünkben matematikához és a természettudományokhoz — kapcsolódó tábor megvalósítására, a Bolyai János Matematikai Társulat és a MATFUND Alapítvány összefogásában.

Szerkesztő
2017. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Ericsson-díj 2017

Az Ericsson-díj 2017. évi díjátadó ünnepségét május 30-án tartották a Magyar Tudományos Akadémia Felolvasótermében. Az Ericsson Magyarország Kutatás-Fejlesztési Igazgatósága által 1999-ben alapított díjat általános-, vagy középiskolákban fizikát vagy matematikát oktató pedagógusok nyerhetik el. Az idei év volt a második, amikor a díjazott tanárok iskolái is pályázhattak az Ericsson egymillió forint értékű eszköztámogatására.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

2017. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Csodálatos magyar eredmények a 11. MEMO-n

Beszámoló a Közép-európai Matematikai Olimpiáról

Idén augusztus 21. és 27. között rendezték meg a Közép-európai Matematikai Olimpiát (MEMO), amelyen 10 ország vesz részt rendszeresen: Ausztria, Csehország, Horvátország, Lengyelország, Litvánia, Magyarország, Németország, Svájc, Szlovákia és Szlovénia. Az idei házigazdák a litvánok voltak, akik meghívták Fehéroroszországot is, így 11 országból 66-an versenyeztek a 11. MEMO-n Vilnius-ban.

Az első versenynapon van az egyéni verseny, amelyen a versenyzők egy-egy feladatot kapnak algebrából, geometriából, kombinatorikából és számelméletből. A MEMO egyik különlegessége a második versenynapon megrendezésre kerülő csapatverseny, ahol a hatfős nemzeti csapatoknak együtt kell dolgozniuk a kapott 8 feladaton. Aznap minden témakörből 1-1 könnyebb és 1-1 nehezebb feladatot kapnak. Mindkét napon 5 óra áll a diákok rendelkezésére, és minden feladatra 8 pontot lehet szerezni.

Idén a magyar csapat rendkívül szép eredményeket ért el. Az egyéni versenyen (ahol a maximális pontszám 32 volt)

Simon Dániel (Kecskemét, Bányai Júlia Gimn.) 32 ponttal,

Bukva Balázs (Budapest, Fazekas Mihály Gimn.) 26 ponttal

és ***Imolay András*** (Budapest, Fazekas Mihály Gimn.) 25 ponttal

aranyérmet,

Janzer Orsolya Lili (Budapest, Fazekas Mihály Gimn.) 21 ponttal

ezüstérmet,

Zsigri Bálint (Budapest, Szent István Gimn.) 18 ponttal

és ***Molnár-Sáska Zotán*** (Budapest, Fazekas Mihály Gimn.) 15 ponttal

bronzérmet szerzett.

A **csapatversenyen** pedig 45 ponttal **bronzérmet** nyertünk, csupán Lengyelország és Szlovénia csapata szerzett nálunk több pontot, mindketten 50-et. Így aztán minden diák két éremmel a nyakában térhetett haza.

A MEMO-n csak olyan diákok indulhatnak, akik még nem voltak a Nemzetközi Diákolimpián (IMO), de a következő IMO-n még indulhatnak. Így tehát a csodás eredményeket úgy érték el, hogy többüknek ez volt az első nemzetközi versenye, de reméljük, egyiküknek sem az utolsó!

Köszönünk minden segítséget a Bolyai János Matematikai Társulatnak és a MATEGYE Alapítványnak, akik támogatták az utazást!

Lenger Dániel (csapatvezető) és *Szoldatics József* (csapavezető-helyettes)

Most pedig következzen a diákok beszámolója:

Augusztus 21-én, hétfőn utaztunk Kijeven át Vilniuszba. Mire este 10-re megérkeztünk, már bezárt a konyha, de szerencsére kaptunk vacsorát, amit a szobáinkba vihettünk.

Első nap a megnyitó után egy városnéző túrán vettünk részt, ahol megismerhettük Vilniusz összes templomát, az ebédünket pedig a TV-toronyban fogyasztottuk el, miközben a csodálatos panorámát bámultuk. A TV-toronyban az asztalok lassan körbeforogtak, így körülbelül 40 perc alatt beláthattuk az egész várost. Este nem sikerült időben lefeküdnünk, mert Andris és Balázs a Goldbach-sejtésen gondolkodott. (Balázsnak kétszer ki is jött, de végül sajnos kiderült, hogy mindkétszer benézte, ezzel szemben Andrisnak csak egy használható ötlete volt, és azzal se jött ki.)

Második nap mindannyian izgatottan ébredtünk, hiszen ekkor volt az egyéni versenynap. A délután folyamán egy gyönyörű várat, és környékét nézhettük meg Trakaiban. A vár egy kisebb tó közepén áll, és hidakon keresztül lehet megközelítni. Még egy történelmi előadáson is részt vettünk, és az íjászkodást is kipróbálhattuk.

Csütörtökön megint izgalmas napunk volt, ekkor volt a csapatverseny. A délutáni program a helyi energia és technológia múzeum meglátogatása volt, ám erre a csapatból csupán egy fő ment el, mivel a csapat többi része inkább a szálláson lustálkodott. A múzeumban szó volt az első litván szénerőműről (melynek az épülete biztosította a múzeum számára a helyet), a litván ipari forradalomról, volt kisméretű fizika játszótér, és megtekintettünk néhány régi autót. Este levezetésképp hárman a csapatból úgy döntöttek, hogy beneveznek egy Codeforces nevű két és fél órás infóversenyre, mely mind a hármójuknak nagyon jól sikerült (kivéve Balázsnak, aki egy feladatot oldott meg, de azt is meghekkelték).

Pénteken a skanzenbe látogattunk el, majd Litvánia második legnagyobb városában, Kaunasban sétáltunk (itt lakott a csapat guide-ja). Itt még egy különleges litván fánkot is kipróbáltunk.

Szombaton aquaparkba mentünk, ami nagyon nagy volt és meglepően kevés volt az ember, ezért folyton lehetett csúszni. A csapat kedvenc csúszdája egy kétszemélyes U alakú csúszda volt. Délután jött az eredményhirdetés, amit mindenki izgatottan várt.

Végül pár gondolat a feladatokról:

I-1: „Egy könnyebb függvényegyenlet volt, a függvényt 0-ban vizsgálva, és a gyököket nézve megoldható volt.”

I-2: „Relatíve könnyebb kombinatorika feladat volt, szomszédos egészeket kellett ügyesen körbeírni.”

I-3: „Egy szép geometria feladat volt, amit kevesen oldottak meg.”

I-4: „Egy nem túl szép feladat volt, amihez nem kellett nagy ötlet, csak a maradékokkal kellett játszadozni és tudni kellett számolni.”

T-1: „Egy egyszerűbb algebra feladat volt, ami egy polinomos függvényegyenlet volt. A csapatverseny során voltak nagyobb problémáink, mint ez a feladat. A feladatot Balázs írta le és később a koordinátorok megjegyezték, hogy milyen szép és rendezett a leírás.”

T-2: „Ez a feladat nagy gondot okozott a csapatnak, olyannyira, hogy meg se oldottuk. Ez is algebra feladat volt, és kevésbé szép, mint a T-1.”

T-3: „Egy szép, tipikus, nem túl nehéz kombinatorikapélda volt.”

T-4: „Egy szép kombinatorika feladat, amelyen nagyon sokat gondolkoztunk, de végül sajnos nem jött ki a csapatnak.”

T-6: „Nehéz geometria, a versenyen meg se tudtuk oldani, csak utána sikerült.”

T-7: „Egy szép számelmélet példa volt, enyhe kombinatorikai vonásokkal.”

A magyar csapattagok

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Pelikán József 2017. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Nemzetközi Matematikai Diákolimpia Rióban

Beszámoló az 58. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról

Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát 2017. július 12-23. között Brazíliában, Rio de Janeiroban rendezték meg. A versenyen 111 ország 615 diákja vett részt. Ez a résztvevő országok számát és a résztvevő versenyzők számát tekintve is abszolút csúcs. (Az eddigi rekordok 109, ill. 602 voltak.)

A legtöbb ország a megengedett maximális létszámú, 6 fős csapattal szerepelt; az alábbi listában az országnév után zárójelben tüntettem fel az adott ország versenyzőinek számát, ha ez hatnál kevesebb volt.

A résztvevő országok:

Albánia, Algéria, Amerikai Egyesült Államok, Argentína, Ausztrália, Ausztria, Azerbajdzsán, Banglades, Belgium, Beloruszszia, Bolívia, Bosznia-Hercegovina, Botswana, Brazília, Bulgária, Chile, Ciprus, Costa Rica, Csehország, Dánia, Dél-Afrika, Dél-Korea, Ecuador, Egyiptom(3), Elefántcsontpart, Észtország, Finnország, Franciaország, Fülöp-Szigetek, Ghána(1), Görögország, Grúzia, Guatemala(4), Hollandia, Honduras(2), Hong Kong, Horvátország, India, Indonézia, Irak(4), Irán, Írország, Izland, Izrael, Japán, Kambodzsa, Kanada, Kazahsztán, Kenya, Kína, Kirgizisztán, Kolumbia, Koszovo(5), Kuba(1), Lengyelország, Lettország, Liechtenstein(3), Litvánia, Luxemburg, Macedónia, Magyarország, Makaó, Malajzia, Marokkó, Mexikó, Moldova, Mongólia, Montenegro(4), Myanmar, Nagy-Britannia, Németország, Nepál, Nicaragua(4), Nigéria(4), Norvégia, Olaszország, Oroszország, Örményország, Pakisztán, Panama(1), Paraguay, Peru, Portugália, Puerto Rico(5), Románia, El Salvador(4), Spanyolország, Sri Lanka, Svájc, Svédország, Szaúd-Arábia, Szerbia, Szingapúr, Szíria, Szlovákia, Szlovénia, Tadzsikisztán, Tajvan, Tanzánia(2), Thaiföld, Törökország, Trinidad és Tobago(1), Tunézia(5), Türkmenisztán, Uganda, Új-Zéland, Ukrajna, Uruguay, Üzbegisztán(5), Venezuela(5), Vietnam.

A versenyen szokás szerint mindkét napon négy és fél óra alatt 3-3 feladatot kellett megoldani. (A feladatokat alább közöljük.) Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont járt, így egy versenyző maximális teljesítménnyel 42 pontot szerezhetett. A verseny befejezése után megállapított ponthatárok szerint aranyérmet a 25-35 pontot elért, ezüstérmet a 19-24 pontos, míg bronzérmet a 16-18 ponttal rendelkező tanulók szereztek. (35-nél több pontot nem szerzett senki.) Dicséretben részesültek azok a versenyzők, akiknek 16-nál kevesebb pontjuk volt, de egy feladatot hibátlanul megoldottak.

A magyar csapatból
Borbényi Márton (Kaposvári Táncsics Mihály Gimn., 12. o. t.) és
Gáspár Attila (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 11. o. t.) egyaránt **25 ponttal** ***aranyérmet***,
Williams Kada (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 12. o. t.) **22 ponttal** ***ezüstérmet***,
Baran Zsuzsanna (Debreceni Fazekas Mihály Gimn., 12. o. t.) pedig **18 ponttal** ***bronzérmet*** **szerzett**.

Kovács Benedek (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. o. t.) 13 ponttal *dicséretben* részesült,
Matolcsi Dávid (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. o. t.) 12 pontot szerzett.

A magyar csapat vezetője *Pelikán József* (ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék), helyettes vezetője *Dobos Sándor* (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.) volt. *Kós Géza* (MTA SZTAKI, ELTE TTK) a feladatkiválasztó bizottság tagjaként és koordinátorként működött közre az olimpián.

Folyamatban a magyar dolgozatok elbírálása

Az országok (nem-hivatalos) pontversenyében Magyarország a résztvevő 111 ország között a 22-24. helyen végzett. A csapatverseny élmezőnyének sorrendje így alakult (megszerzett pontszámaikkal):

1. Dél-Korea 170, 2. Kína 159, 3. Vietnam 155, 4. USA 148, 5. Irán 142, 6. Japán 134, 7-8. Szingapúr és Thaiföld 131, 9-10. Nagy-Britannia és Tajvan 130, 11. Oroszország 128, 12-13. Görögország és Grúzia 127, 14-16. Belorusszia, Csehország és Ukrajna 122, 17. Fülöp-Szigetek 120, 18-21. Bulgária, Hollandia, Olaszország és Szerbia 116, 22-24. Lengyelország, Magyarország és Románia 115, 25. Kazahsztán 113, 26-28. Argentína, Banglades és Hong Kong 111, 29. Kanada 110, 30. Peru 109, 31. Indonézia 108, 32. Izrael 107, 33. Németország 106, 34. Ausztrália 103, 35-36. Horvátország és Törökország 102, 37-38. Brazília és Malajzia 101, 39-40. Franciaország és Szaúd-Arábia 100 ponttal.

Szeretnék köszönetet mondani a versenyzők tanárainak. Az alábbi felsorolásban minden tanár neve után monogramjukkal jelöltem azokat a diákokat, akik a tanítványaik:

Berzsán Gabriella (BM), *Dobos Sándor* (BM, BZs, GA, KB, MD, WK), *Fazakas Tünde* (KB), *Gulyás Tibor* (GA), *Győry Ákos* (GA), *Juhász Péter* (MD), *Kiss Gergely* (MD), *Kiss Géza* (MD), *Kosztolányi József* (WK) *Kubatov Antal* (BM), *Lakatos Tibor* (BZs), *Mike János* (WK), *Molnár-Sáska Gábor* (KB), *Nagy Zoltán Lóránt* (BZs), *Pósa Lajos* (BM, BZs, GA, KB, MD, WK), *Schultz János* (WK), *Szűcs Gábor* (GA), *Tóth Mariann* (BZs).

Ugyancsak szeretnék köszönetet mondani Dobos Sándornak mint a központi olimpiai előkészítő szakkör vezetőjének, továbbá mindazoknak, akik a felkészítésben közreműködtek.

Idén az olimpiai csapat kijelölése válogatóversenyek formájában történt. A válogatóverseny utolsó, kétnapos részét Kecskeméten rendeztük. Szeretnék köszönetet mondani a kecskeméti Mategye Alapítványnak azért, hogy a versenyt nagyvonalúan vendégül látták.

Az idei versenyre is rányomta bélyegét a túl nehéz feladatok kitűzése, ez azonban még a korábbi éveknél is szembetűnőbb volt. A hagyományosan legnehezebb 3. és 6. feladat közül a hatodikat a 615 versenyzőből csak 14 tudta megoldani, a harmadikat pedig csak 2(!) versenyző (egy ausztrál és egy orosz). A korábbi években még a nehéz feladatokra is jónéhányan kaptak töredékpontokat, idén a 3. feladatra a 615 diák közül 608 nulla pontot kapott! Mivel ugyanakkor a könnyűnek szánt (és ezen a szinten tényleg könnyű) 1. ill. 4. feladatra 446 ill. 394 teljes megoldás érkezett, a verseny lényegében a maradék két feladaton dőlt el. Ennek következménye a csapatok közötti holtversenyek (sőt hármas és négyes holtversenyek) abnormálisan magas száma. A kitűzött feladatok nehézségének jó megválasztása a korábbi években is visszatérő téma volt, azonban most nyilvánvalóvá vált, hogy erre a kérdésre a jövő évi olimpián megkülönböztetett figyelmet kell majd fordítani.

A rendezők által szervezett kirándulások közül kiemelkedett az, hogy a résztvevőknek alkalmuk volt meglátogatni a legendás Maracana stadiont.

A következő matematikai diákolimpiát Románia rendezi Kolozsvárott, 2018. július 3-14. között.

Pelikán József

A verseny feladatai:

2017. július 18., kedd

1. Feladat. Minden $a_0 > 1$ egész számra definiáljuk az a_0, a_1, a_2, ... sorozatot a következőképpen. Minden $n \geq 0$-ra legyen

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{ha } \sqrt{a_n} \text{ egész szám,} \\ a_n + 3 & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg az összes olyan a_0 értéket, amihez van olyan A szám, amire $a_n = A$ teljesül végtelen sok n-re.

2. Feladat. Legyen $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza. Határozzuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amire minden valós x, y szám esetén teljesül

$$f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy).$$

3. Feladat. Egy vadász és egy láthatatlan nyúl egy játékot játszik az euklideszi síkon. A nyúl A_0 kiindulópontja és a vadász B_0 kiindulópontja egybeesnek. A játék $(n-1)$-edik menete után a nyúl az A_{n-1} pontban, a vadász a B_{n-1} pontban van. A játék n-edik menetében a következő három dolog történik, ebben a sorrendben:

(i) A nyúl láthatatlan módon egy olyan A_n pontba megy, amire A_{n-1} és A_n távolsága pontosan 1.

(ii) Egy nyomkövető eszköz megad egy P_n pontot a vadásznak. Az eszköz által a vadásznak nyújtott információ mindössze annyi, hogy P_n és A_n távolsága legfeljebb 1.

(iii) A vadász látható módon egy olyan B_n pontba megy, amire B_{n-1} és B_n távolsága pontosan 1.

Igaz-e, bárhogyan mozogjon is a nyúl, és bármilyen pontokat jelezzen is a nyomkövető eszköz, hogy a vadász mindig meg tudja úgy választani a mozgását, hogy 10^9 menet után a távolság közte és a nyúl között legfeljebb 100 legyen?

2017. július 19., szerda

4. Feladat. Legyenek R és S különböző pontok egy Ω körön, amikre RS nem átmérője a körnek. Legyen ℓ az Ω körhöz a R pontban húzott érintőegyenes. Legyen T az a pont, amire teljesül az, hogy S az RT szakasz felezőpontja. Legyen J egy olyan pont az Ω kör rövidebb RS ívén, amire teljesül az, hogy a JST háromszög Γ körülírt köre az ℓ egyenest két különböző pontban metszi. Legyen Γ és ℓ

metszéspontjai közül az A pont az, ami közelebb van az R-hez. Az AJ egyenes Ω-val vett második metszéspontja legyen K. Bizonyítsuk be, hogy a KT egyenes érintője a Γ körnek.

5. Feladat. Adott egy $N \geq 2$ egész szám. $N(N+1)$ futballjátékos, akik között nincs két egyenlő magasságú, valahogyan felállnak egy sorban. Az edző ki akar hagyni ebből a sorból $N(N-1)$ játékost úgy, hogy a megmaradt $2N$ játékos alkotta sor játékosaira teljesüljön az alábbi N feltétel:

(1) senki nem áll a legmagasabb és a második legmagasabb játékos között,

(2) senki nem áll a harmadik legmagasabb és a negyedik legmagasabb játékos között,

$\vdots$

(N) senki nem áll a két legalacsonyabb játékos között.

Bizonyítsuk be, hogy ez mindig megtehető.

6. Feladat. Egy egész számokból álló (x, y) rendezett párt *primitív rácspont*nak nevezünk, ha x és y legnagyobb közös osztója 1. Ha adott primitív rácspontok egy véges S halmaza, bizonyítsuk be, hogy van olyan n pozitív egész, és vannak olyan a_0, a_1, ..., a_n egészek, hogy minden (x, y) S-beli pontra teljesül

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Molnár-Sáska Gábor 2017. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Robotépítő diákok nemzetközi sikere

Kiemelkedő sikert ért el a Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium csapata a First Global Challenge nevű robotikai versenyen. A csapat tagjai az iskola speciális matematika tagozatára járnak és a matematika mellett a programozás, műszaki alkalmazások is érdekli őket.

A 2017. július 14-19. között Washingtonban megrendezett informatikai versenyre a világ minden részéről összesen 163 csapat nevezését fogadták el, melyek tagjai 15 és 18 év közötti fiatalok. A First Global Challenge alapítója Dean Kamen, a Segway kifejlesztője, aki a First márkanév alatt több hasonló technológiai versenyt is létrehozott már.

A washingtoni helyszínen az országok képviselőit közös csapatokba sorsolták össze, így másokkal közösen dolgozva kellett feladatokat megoldaniuk, ami egy nagy, globális kihíváshoz kapcsolódott. Idén ez a kihívás az volt, hogy tiszta ivóvízhez biztosítsanak hozzáférést, ez az üzenet egy szimbolikus golyógyűjtő feladatban jelent meg, amit az épített robotokkal kellett kivitelezni.

A döntőben részt vevő, a győzelmet megszerző diákok: *Fey Mihály, Hervay Bence, Kurucz Márton, Martinák Zalán, Molnár-Sáska Zsófia, Umann Dávid.* A csapat kísérői Bácsi Sándor szakkörvezető, Karsai Zsuzsa műhelyvezető és Koren Balázs segítőtanár voltak.

A ma RoboTeam nevet viselő csoportot Karsai Zsuzsanna műhelyvezető indította el 2003-ban a Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnáziumban, akkor még LEGO Robotokra fókuszálva. Céljuk az volt, hogy a diákok részt vegyenek az FLL (FIRST Lego League) által szervezett nemzetközi robotikai csapatverseny angliai regionális fordulóján. A LEGO robotokra azért esett a választás mert már jó ideje futnak e témában diákversenyek, jól kidolgozott és bejártatott infrastruktúrája van, képzésre kiváló, és a gyerekek könnyen meg tudják mérettetni magukat versenyeken.

A csoport sikeres volt már a kezdetektől fogva, szép eredményeket értek el e területen. Az iskolában működő szakkör nyitott, bárkit szívesen várnak, aki érdeklődik, akár még a Fazekasba sem kell járnia. A hétköznapokban, amikor nem épp versenyre készül a csapat, a fókusz természetesen a robotépítés, a programozás, a megfelelő algoritmikusok megalkotása. A szakkört támogatja a Morgan Stanley és a Bolyai János Matematikai Társulat közös programja, segítségükkel Bácsi Sándor (BME hallgatója) oktatta a gyerekeket, méghozzá igen magas színvonalon: a 14-15 éves diákok már komoly programozási munkát végeznek, igaz, célirányosan, a robotikát a fókuszban tartva.

Molnár-Sáska Gábor

A csapat (balról jobbra): Fey Mihály, Molnár-Sáska Zsófi, Koren Balázs (mentor), Karsai Zsuzsanna (műhelyvezető), Martinák Zalán, Kurucz Márton, Umann Dávid, Hervay Bence, Bácsi Sándor (felkészítő)

http://first.global/h2o-flow/

https://www.youtube.com/watch?v=SIVEKzZPe9E

https://www.youtube.com/watch?v=NaR1PWCIWeI

https://www.youtube.com/watch?v=osNihdRkjhQ

- beszámolók

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Ágoston Péter, Csernák Tamás, Fehér Zsombor, Maga Balázs, Szőke Tamás

2017. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Negyedik lett az ELTE az egyetemisták nemzetközi matematikaversenyén

Az idén nyáron immár 24. alkalommal rendezték meg az egyetemisták nemzetközi matematikai versenyét, az IMC-t, a helyszín a bulgáriai Blagoevgrad volt. A verseny hivatalos neve International Mathematics Competition for University Students 2017, szervezője, mint az utóbbi időben minden alkalommal, az egyesült királyságbeli University College London, házigazdája pedig a blagoevgradi American University in Bulgaria. A rendezvény 2017. július 31-étől augusztus 6-áig tartott.

Érdemes tudni, hogy az IMC az utóbbi években az egyik legjelentősebb és legszínvonalasabb versenysorozattá nőtte ki magát, amit matematikus egyetemi hallgatóknak rendeznek Európában (noha a versenyzők korántsem csak Európából érkeznek). A résztvevők Európa és a világ számos egyeteméről kerülnek ki, s a hagyományosan erős csapatokat küldő orosz, ukrán, lengyel, cseh, magyar, izraeli, iráni, francia, román, spanyol, német és néhány más európai egyetemen kívül amerikai, kínai, brazil, vietnami, indonéz stb. hallgatók is rendszeresen szerepelnek a versenyen. A verseny immár hagyományosan két ötórás dolgozat megírásából áll. Az egyetemi képzés első négy évének tipikus témaköreiből kell öt-öt feladatot megoldani. Valamennyi feladat, függetlenül a nehézségétől, 10 pontot ér. A verseny nyelve az angol: angolul kapjuk a feladatokat, és angolul írjuk a megoldásainkat is.

Az idei IMC-n tízen vettünk részt három hazai egyetemről, s a következő eredményeket értük el:

Csernák Tamás (ELTE) — I. díj

Fehér Zsombor (ELTE) — I. díj

Maga Balázs (ELTE) — I. díj

Ágoston Péter (ELTE) — II. díj

Almási Péter (BME) — II. díj

Juhos Attila (BME) — II. díj

Szőke Tamás (ELTE) — II. díj

Nagy-György Pál (SZTE) — III. díj

Nagy-György Zoltán (SZTE) — dicséret

Bezdány Dániel (SZTE) — elismerő oklevél

A három csapatot három csapatvezető kísérte: ***Prőhle Péter*** (BME), ***Jankó Zsuzsanna*** (ELTE), valamint ***Bogya Norbert*** (SZTE). Zsuzsi a reklamáció folyamán hősiesen küzdve 20 megérdemelt ponttal járult hozzá ELTE-s csapatunk negyedik helyéhez az egyetemek közti rangsorban. Mindössze az izraeli nemzeti csapat, valamint a szentpétervári állami és a moszkvai fizikai-mérnöki egyetem ért el jobb eredményt. Ezzel olyan kiváló egyetemek kerültek csapatunk mögé, mint a Varsói Egyetem, a moszkvai Lomonoszov Egyetem, a kijevi Tarasz Sevcsenko Egyetem, a Barcelona Tech, a prágai Károly Egyetem, a bécsi vagy az amszterdami egyetem.

Mivel a verseny mindössze kétszer öt órát vett el a hétből, bőven volt lehetőség kötetlen programokra. Remek alkalmunk nyílt arra, hogy legalábbis érintőlegesen egyéb kultúrákkal ismerkedjünk meg, akár a focipályán, a pontokra való várakozáskor, vagy művészi igényű gitározás-éneklés közepette. Ezen túl az egyik napon buszos kiránduláson vettünk részt, hogy valódi bolgár bort kóstolhassunk. Ez készítői szerint a legpompásabb francia rokonaival is vetekszik, sorainkból kikerülő kóstolói kevésbé voltak elragadtatva tőle. A verseny főbb szponzorai szintén igyekeztek felhívni magukra a figyelmünket: egy kiemelkedő eredmény jó ugródeszka lehet olyan vezető cégekhez, mint a Jane Street.

Az utolsó teljes napon aztán sor került az eredményhirdetésre. Ez a hossza miatt némileg unalmasra sikeredett, de még így is meglepően hangulatos volt, hála elsősorban a brazil és görög diákoknak, akik minden társuk színpadra hívásakor fergeteges ovációt csaptak. Este díszvacsora volt, amit a verseny legkülönösebb hagyományos mozzanata követett. Mindenkit, aki erre igényt formált, megkoronáztak egy fél, kivájt görögdinnyehéjjal, amelybe szarvak gyanánt uborkák voltak állítva, miközben hálás alattvalói a nevét skandálták. Ezen az úton több magyar királyt is avattunk röpke másfél óra alatt, sőt, némelyikünk idén már második királyságát ünnepelhette. A hosszúra nyúlt éjszaka után másnap fáradtan, de elégedetten tértünk haza.

Az ELTE csapata

---

beszámolók

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

2017. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Leendő diákolimpikonok tábora Dombóváron

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokat kiadó MATFUND Alapítvány szervezésében 2017. június 25. és július 1. között összesen 52 hazai és határon túli középiskolás diák töltött el egy hetet Dombóvár—Gunarason a Hotel Európa és Apartmanparkban.

A szakmai program két szekcióban zajlott napi 8 órában. *Dobos Sándor, Kiss Viktor és Lenger Dániel* felügyelete mellett a matematikusok a közelgő Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára készültek intenzíven, míg *Gnädig Péter, Részeg Anna, Vladár Károly, Szász Krisztián* és két egyetemista koordinációjával a KöMaL fizika szerkesztőinek meghívására érkezett fiatalok vegyes életkorú csapatokba rendeződve versenyeztek. Az egyhetes játékos vetélkedés során a Nemzetközi Fizika Diákolimpia utánpótlás-válogatottjai hétköznapi eszközökkel különleges fizikai méréseket végeztek, de elméleti feladatokon is vitatkoztak. A Szlovákiából, Romániából és Szerbiából érkezett 18 diák is gyorsan beilleszkedett a csapatokban folyó munkába.

Fizikai kísérlet méréssel

Nehéz a feladat

Szabadidőben

Esténként ismeretterjesztő előadásokat hallgathattak a tábor résztvevői: *Frei Zsolt* fizikus a gravitációs hullámokról mesélt, *Kazsóki Attila* doktorandusz a megújuló energiaforrásokról tartott izgalmas beszámolót, *Kocsis Bence* fizikus szupernehéz fekete lyukakról beszélt, míg *Olosz Balázs* villamosmérnök-hallgató a föld elektrosztatikus térerősségét mérő, saját fejlesztésű műszerét mutatta be nagy sikerrel. A Dombóvári televízió készített egy riportot a helyszínen: http://dombomedia.hu/index.php/videotart/33-hirado/1552-hirado-2017-06-30 (A 16:04. perctől 2 perces beszámoló.)

A tábor a Nemzeti Tehetség Program keretében az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatásával valósult meg (NTP-TÁB-17-0030). A rendezvényt támogatta még az MTA Energiakutató Központ és az MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont.

Nagyné Szokol Ágnes
MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány

beszámolók

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2017. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Ericsson-díj 2017

Az Ericsson-díj 2017. évi díjátadó ünnepségét május 30-án tartották a Magyar Tudományos Akadémia Felolvasótermében. Az Ericsson Magyarország Kutatás-Fejlesztési Igazgatósága által 1999-ben alapított díjat általános-, vagy középiskolákban fizikát vagy matematikát oktató pedagógusok nyerhetik el. Az idei év volt a második, amikor a díjazott tanárok iskolái is pályázhattak az Ericsson egymillió forint értékű eszköztámogatására.

Az elismerés azért jött létre, hogy támogassa, elismerje és erősítse a magyarországi, világviszonylatban is kiemelkedő matematikai és természettudományos alapképzést. Az Ericsson Magyarország elkötelezte magát a hazai oktatás fejlesztése mellett; vállalásának fontos része ez a díj. A közel kétezer fős hazai vállalat nemcsak a telekommunikációs ipar egyik legnagyobb munkáltatója, hanem 1300 fős Kutató-Fejlesztő Központjával a legnagyobb telekommunikációs és informatikai kutatással, szoftver és hardverfejlesztéssel foglalkozó szellemi centrum Magyarországon. Számára ezért elengedhetetlen a kiválóan képzett fiatal diplomás munkaerő. A most díjazott pedagógusok szakmai munkája és emberi hozzáállása is hozzájárul ahhoz, hogy a hazai műszaki és természettudományi diplomával rendelkezők tudása megfelelő szellemi értéket képviseljen, és vonzóvá tegye a beruházást infokommunikációs csúcstechnológiák kutatás-fejlesztésébe Magyarországon.

Az Ericsson-díj 2017. évi pályázati kiírása szerint általános-, vagy középiskolákban 2 matematikát és 2 fizikát tanító pedagógusnak az „ERICSSON a matematika és fizika népszerűsítéséért” díjat, további 2 matematikát és 2 fizikát oktatónak pedig az „ERICSSON a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért” díjat ítélik oda.

Idén a matematika népszerűsítéséért a díjat

Koncz Levente, az Óbudai Árpád Gimnázium tanára, az iskola igazgatóhelyettese,

mestertanár, és

Staubingerné Kemler Anikó, a szekszárdi Garay János Gimnázium tanára vehette át.

A matematika tehetségeinek gondozásáért

Pálovicsné Tusnády Katalin, a zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium tanára és

Simonné Krum Eszter, a Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium tanára kapott Ericsson-díjat.

A díjakat Éry Gábor, az Ericsson Magyarország vezérigazgatója és Niclas Trouvé, Svédország magyarországi nagykövete adta át. A díjátadó ünnepségre hagyományosan minden díjazottról és tanítványairól pár perces rövidfilmet készítenek, amit levetítenek. Akik ott vannak, minden évben azt mondják, bárcsak minél többen megnéznék ezeket a riportfilmeket, annyira tanulságosak, szépek, emberiek, humorosak.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

AZ **INTERJÚ-PORTRÉ** MENÜPONT JÓL VAGY KEVÉSBÉ ISMERT MATEMATIKUSOKAT, VAGY OLYAN, EGYKOR MATEMATIKUSKÉNT VÉGZETTEKET SZERETNE BEMUTATNI, AKIK MA MÁS SZAKMA ELISMERT KÉPVISELŐI, SPORTOLÓK, MŰVÉSZEK...(ROVATSZERKESZTŐ: *OLÁH VERA*.)

Fordította: Besenyei Ádám
2017. SZEPTEMBER, INTERJÚ – PORTRÉ

Interjú a 2016-ban Abel-díjat nyert Sir Andrew Wiles professzorral 2. rész

Sir Andrew Wiles több mint két évtizeddel Fermat utolsó tételének bebizonyítása után kapta meg az Abel-díjat. Hogyan sikerült igazolni a megoldhatatlannak hitt sejtést? *Martin Raussen* (Aalborg University, Dánia) és *Christian Skau* (Norwegian University of Science and Technology) riportjuk második részében a megoldás nyomában járnak. Fordította: *Besenyei Ádám*. (Az első rész az Érintő júniusi számában olvasható).

Oláh Vera
2017. SZEPTEMBER, INTERJÚ – PORTRÉ

Hálózatok irányítása — segítő-hálóval: Albert Réka

2017 májusában Budapesten dr. Albert Rékát, a Pennsylvania State University professzorát több alkalommal is felkérték előadónak. Fiatalon, mint általános hálózatkutató, a Barabási—Albert modell megalkotásával hozzájárult a skálafüggetlen hálózatok elemzéséhez. Érdeklődése néhány éve a biológiai hálózatok dinamikája felé irányult, és elsők között alkalmazta rájuk a Boole-logikán alapuló leírást.

Békés Vera
2017. SZEPTEMBER, INTERJÚ – PORTRÉ

Adalékok Dugonics András matematikapedagógiai munkásságának értelmezéséhez

2017. júniusi számunkban olvasható a Gondolat kiadó *Matézis, mechanika, metafizika* c. tanulmánykötetének ismertetése. Most az egyik tanulmányt, *Békés Vera* írását közöljük Dugonics András (1740—1818) matematikai munkásságáról. 2017. márciusában az Érintőben Csapodi Csaba írt többek között Dugonics Andrásról, mint a magyar matematikai nyelv egyik megalkotójáról.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap

Fordította: Besenyei Ádám 2017. SZEPTEMBER, INTERJÚ – PORTRÉ

Interjú a 2016-ban Abel-díjat nyert Sir Andrew Wiles professzorral 2. rész

Sir Andrew Wiles-szal az interjút készítették: *Martin Raussen* (Aalborg University, Dánia), és *Christian Skau* (Norwegian University of Science and Technology, Norvégia). Az interjú első része az Érintő júniusi számában olvasható. A második részt *Besenyei Ádám* fordította magyarra.

A megoldás nyomában

Ez volt tehát az Ön saját kutatómunkájának kiindulópontja, amihez hozzájárult még Serre és Ribet néhány további döntő észrevétele, világossá téve a Fermat- és a modularitási sejtés kapcsolatát. Ha megengedi, röviden összefoglaljuk az ezt követő történéseket. Ön már sokszor elmesélte, és a BBC is készített erről dokumentumfilmet.

Az Egyesült Államokba költözve először a Harvardon, majd Princetonban lett professzor. Miután értesült Ribet eredményéről, minden kutatóidejét annak szentelte, hogy a modularitási sejtést a racionális számtest fölötti szemistabil elliptikus görbékre bizonyítsa. Hét év rendkívül kitartó, a külvilágtól elvonult munka következett. Mindeközben pedig Princetonban professzorként dolgozott, és kisgyermekei voltak.

1993-ban úgy tűnt, hogy sikerült kidolgoznia egy bizonyítást, és a munkafolyamat csúcspontjaként Angliában a cambridge-i Isaac Newton Intézetben egy három részből álló előadás-sorozat keretében jelentette be a Fermat-sejtés bizonyítását. A matematikus közösség ünnepelve fogadta. Még a világsajtó is érdeklődött a megoldás iránt, ami matematikai eredmények kapcsán meglehetősen ritka.

Ám amikor egy rangos folyóirat által felkért hat bíráló alaposan áttanulmányozta a bizonyítást, kiderült, hogy az egyik gondolatmenetében van némi hiányosság, és Ön kezdhetett mindent elölről. Nem sokkal ezután Princetonba hívta egykori tanítványát, Richard Taylort, hogy közös erővel dolgozzanak a hiba kijavításán. További tíz kemény és nyugtalanító hónap következett, amelyről vélhetően túlzás nélkül kijelenthetjük, hogy hősies küzdelem volt óriási nyomás alatt. És akkor egyszer csak egy váratlan ötlet által vezérelve rájött, hogy a korábbi megoldási kísérleteket néhány új eredménnyel ötvözve kikerülhető a gondolatmenet hiányosságát okozó probléma. Végső soron ez hiányzott ahhoz, hogy igazolni tudja a modularitási sejtésnek azon részét, amelyből a Fermat-sejtés bizonyítása már következett.

Micsoda megkönnyebbülés lehetett! Mesélne pár szóban erről a drámai történetről?

Ami a saját kutatásaimat illeti, matematikusi pályám kezdetén Coatesszal dolgozva felismertem, hogy nem szabad tovább foglalkoznom a Fermat-sejtéssel, mert az csupán időpazarlás, és tisztában voltam azzal, hogy az elmúlt száz évben szinte semmilyen előrelépés nem történt a kérdésben. Ráadásul láttam másokat, köztük nagyon kiemelkedő matematikusokat kudarcot vallani. Frey eredményének megszületésekor még egy kissé kételkedtem, hogy a sejtés Serre-féle része igaz lenne, ám miután Ribet igazolta azt, már éreztem, hogy ez a helyes irány.

Hosszú és kemény küzdelem volt. Bizonyos értelemben felelőtlenség minden egyebet félretéve egyetlen egy problémán dolgozni, de én hajlamos vagyok az ilyesmire. Bár a Fermat-sejtés egy viszonylag szűk témakör, mármint úgy értem, hogy mindössze egyetlen egyenletről van szó, amelynek megoldásáról nem tudjuk, segíthet-e esetleg más kérdésben is vagy sem, viszont a modularitási sejtés a számelmélet egyik nagy problémája. Azon dolgozni pedig mindenképpen nagyszerű dolog, tehát egy hatalmas lehetőség volt számomra.

Ha valaki egy ilyen jellegű problémán dolgozik, akkor több évbe is beletelik, mire kialakul valamilyen megérzése arról, hogy milyen eszközökre van szüksége, és a megoldás milyen dolgokon múlhat. Az ember mindent elvet, ami használhatatlan és nem fog működni, egészen addig, amíg már oly mértékben összpontosít a problémára, hogy még ha esetleg valahol hibázott is, már eleget látott ahhoz, hogy megtalálja a befejezéshez vezető utat.

Külön érdekesség, hogy az eredeti gondolatmenetemben lévő hibát tanulmányozva a kutatók nemrégiben azt találták, hogy a gondolatmenetem sok más hasonló esetben valóban működik. Pontosabban szólva, úgy tűnik, hogy minden szomszédos esetben az eredeti módszerhez hasonló elgondolások működnek, viszont ebben az egyetlen esetben nem alkalmazhatók, és ennek az okát egyelőre nem igazán tudjuk megmondani. Tehát az Euler-rendszerekre épülő gondolatmenet, amelyet alkalmazni próbáltam, bármely szomszédos esetben használható, kivéve azt az egyet, amelyikre nekem a Fermat-sejtéshez szükségem volt. Ez igazán rendkívüli.

A bizonyítás keresésének folyamatát egy alkalommal egy sötét és ismeretlen kastélyban való utazáshoz hasonlította. Ki tudná ezt bővebben fejteni?

Kezdetben a sötétben tapogatóztam. Semmiféle előzetes megérzésem nem volt arról, hogyan működhet a modularitási sejtés, és miként lehetne megközelíteni. A probléma egyik nehézsége – mint ahogy a Riemann-sejtés esetében is, de itt talán még jellemzőbb –, hogy nem tudni, a matematika melyik ága vezet el a megoldáshoz.

Először is a probléma megfogalmazására három lehetőség kínálkozik: egy geometriai, egy aritmetikai és egy analitikus út. És az analízisben jártasok között akadtak olyanok – bár a módszereiket egyáltalán nem sikerült volna jól megértenem –, akik előrelépést próbáltak tenni.

Azt hiszem, némi szerencsém volt, mert az ösztöneim az aritmetikai megközelítést súgták, és rögtön azon az úton indultam el, persze, akár tévedhettem volna is. A modularitási sejtés korábban csupán az úgynevezett CM típusú elliptikus görbék esetére volt megoldva, és annak bizonyítása teljes egészében analitikus.

Részben a szükség miatt, azt hiszem, részben pedig mivel ehhez értettem jobban, az aritmetikai utat választottam. Nagyon hasznos volt a problémáról úgy gondolkodni, ahogy korában az Iwasawa-elméletet tanulmányoztam. John Coatesszal az Iwasawa-elméletet elliptikus görbékre alkalmaztam. A Harvardra kerülve hallottam Barry Mazur moduláris görbék geometriájával kapcsolatos kutatásairól, amelyek kapcsán számos modern eszközt vetett be. Voltak bizonyos ötletek és technikák, amelyekből én is meríteni tudtam. Nem sokkal később felismertem, hogy ez számomra valójában egy kiindulási pont lehet, és egyfajta kapu a problémához.

Mielőtt a modularitási sejtéssel kezdett foglalkozni, egy közös cikkben Barry Mazurral az Iwasawa-elmélet fő tételét a racionálisok fölött igazolták. El tudná magyarázni, hogy miről is szól az Iwasawa-elemélet?

Az Iwasawa-elmélet Kummer körosztási testekkel kapcsolatos és a Fermat-sejtés megoldása felé irányuló munkásságából nőtt ki. Kummer a körosztási testek aritmetikáját, pontosabban azok ideálosztály-csoportjait tanulmányozta. Iwasawa ötlete az volt, hogy az összes p-hatványrendű egységgyököt egyidejűleg véve körosztási testek láncát tekintette. Az Iwasawa-elmélet fő tétele kapcsolatot létesít a Galois-csoport egy generátorának a p-primér osztálycsoporton való hatása és a p-adikus L-függvények között.

Ez hasonló ahhoz a konstrukcióhoz, mint amilyet véges testek fölötti görbék tanulmányozásában használnak, ahol a Frobenius-elem karakterisztikus polinomja a zéta függvénnyel áll szoros kapcsolatban.

És mindezek az eszközök hasznosnak bizonyultak, amikor elkezdett a modularitási sejtéssel foglalkozni?

Igen, kiindulópontként szolgáltak. Akkoriban persze ez nem volt nyilvánvaló, de amint egy kicsit jobban belegondoltam, rájöttem, hogy innen talán el lehet indulni.

Párhuzamok Abel munkásságával

Engedje meg, hogy felolvassunk egy idézetet: „A védőfalakat már mind lebontották, de odabent az utolsó menedékében a probléma még elszántan védi magát. Ki lesz az a szerencsés géniusz, aki az utolsó támadást vezeti majd vagy megadásra

kényszeríti a problémát?”

Ha jól sejtem, ez E. T. Belltől származik. Ugye?

Nem. Valójában Jean-Étienne Montucla [1725–1799] „Histoire des Mathématiques” című könyvéből való a 18. század utolsó harmadából. Ez volt az első igazi matematikatörténeti könyv, amelyet valaha írtak. Az idézet az ötödfokú egyenletek gyökjelekkel való megoldhatóságának vagy éppen megoldhatatlanságának problémájára utal.

Ahogy bizonyára Ön is tudja, Abel [1802–1829] 21 éves korában igazolta, hogy az ötödfokú egyenletek általában nem oldhatók meg gyökvonások segítségével. Matematikai értelemben véve teljesen elszigetelten dolgozott itt Oslóban. Abel megszállott volt, de legalábbis rendkívüli módon magával ragadta a probléma. Kezdetben ő is tévúton indult el. Úgy gondolta, hogy igazolni tudja, hogy az ötödfokú egyenletek megoldhatók gyökvonások segítségével. De aztán idővel felismerte a hibáját, és végül bebizonyította a megoldhatatlanságot.

Ez a probléma akkoriban már majdnem 300 éves volt, és meglehetősen híres. Ha 200 évet előreugrunk az időben, akkor a fenti idézet ugyanúgy elmondható a Fermat-sejtés kapcsán, amely nagyjából 350 éves volt, amikor Ön végül megoldotta. A két történet több szempontból is eléggé hasonló. Mit gondol erről?

Igen, bizonyos értelemben azt gondolom, hogy Abel és aztán Galois [1811–1832] átvezették az algebrai kutatásokat az egyszerű eszközökkel megoldható egyenletektől a gyökjelekkel nem megoldható egyenletek irányába. De ez egy algebrai átmenet volt, amely az ötödfokú egyenletekhez köthető.

Tulajdonképpen a számelméletben ma az uralkodó irányzat az alapvetően Abel-féle és esetleg feloldható bővítésektől a nem feloldható bővítések felé tolódik el. Hogyan vizsgáljuk a nem feloldható bővítések aritmetikáját?

Úgy vélem, hogy a modularitási sejtést azért sikerült megoldani, mert az eredeti Abel-féle alaphelyzetből elmozdultunk egy nem Abel-féle szituációba, és eközben kifejlesztettünk alapjában véve nem Abel-féle eszközöket, mint amilyen például a modularitás. (Bár azt hozzá kell tennem, hogy a bizonyítás jó részéhez elegendő volt a feloldható eset eszköztára, de nem azért, mert az lenne a természetesebb, hanem mert még nem oldottuk meg a kapcsolódó problémákat az általános, nem feloldható esetben.)

A számelméletben ez ugyanaz az átalakulás, mint amilyen az algebrában Abel nyomán ment végbe, és ez biztosítja az egyenlet megoldhatóságához az eszközöket. Van tehát párhuzam.

Van egy érdekes csavar Abel és a Fermat-tétel kapcsolatában. Abel 21 éves korában Koppenhágába utazott, hogy Dregen [1766–1825] professzorral találkozzon, aki akkoriban Svédország vezető matematikusa volt. Abel levelet írt mentorának, Holmboe-nak [1795–1850], amelyben három állítást fogalmazott meg a Fermat-egyenlettel kapcsolatban, mindet bizonyítás nélkül – az egyiket valójában egyáltalán nem is olyan könnyű igazolni. Ez persze ma már csak érdekesség.

Ugyanebben a levélben viszont csalódottságát is kifejezte, amiért nem sikerült rájönnie, hogy a lemniszkáta ívének n egyenlő részre osztásakor n-edfokú helyett miért n^2-edfokú egyenlet adódik. Csak később, Oslóba való visszatérése után fedezte fel, hogy a lemniszkáta-integrál és az általános elsőfajú elliptikus integrál kétszeresen periodikus függvények.

Ha belegondolunk, amit Abel a Fermat-egyenlethez közvetlenül kapcsolódóan alkotott, az csupán érdekesség. De amit az elliptikus függvényekkel kapcsolatban elért, beleértve az elliptikus görbéket is, később lényeges eszköznek bizonyult az egyenlet megoldásában. Természetesen Abelnek fogalma sem volt arról, hogy ennek köze lehet az aritmetikához. A történet tanulsága, hogy a matematika fejlődése néha kifürkészhetetlen.

Igen, ez mindenféleképpen így van.

Munkastílus

Ejthetünk pár szót általában a matematikusok és köztük az Ön munkastílusáról? Freeman Dyson, a princetoni Institute for Advanced Study neves fizikusa és matematikusa a 2008. évi Einstein-

előadásában a következőket mondta: „Egyes matematikusok olyanok, mint a madarak, mások pedig, mint a békák. A madarak magasan repülnek, és széles távlatokat képesek megfigyelni egészen a látóhatárig. Örömüket lelik az olyan fogalmakban, amelyek egységesítik a gondolkodásunkat, és a táj különböző részeiről változatos problémákat hoznak össze. A békák lent a sárban élnek, és csupán a közelben növő virágokat látják. Ők az egyes tárgyak részleteiben gyönyörködnek, és egyszerre csak egy probléma megoldásán dolgoznak.”

Freeman Dyson nem állította, hogy a madarak jobbak lennének, mint a békák, vagy fordítva. Ő saját magát inkább békának tartotta, mint madárnak.

Ha megvizsgáljuk az Ön munkásságát, akkor számunkra nem is olyan könnyű eldönteni, hogy Önt hova soroljuk: a madarak közé, akik elméleteket alkotnak, vagy a békák közé, akik problémákat oldanak meg. Ön mit gondol erről?

Nos, egyiknek sem érzem igazán magam. Biztosan nem vagyok a matematika különböző területeit egyesítő madár. A békák pedig szerintem sokat ugrálnak ide-oda. Én viszont kimondottan céltudatos vagyok. Nem tudom, hogy milyen állathoz hasonlíthatnám magam, de azt gondolom, nem vagyok béka abban az értelemben, hogy nem érdekel a közeli táj. Én rendkívüli mértékben koncentrálok arra a problémára, amellyel éppen foglalkozom, és nagyon válogatós vagyok. Még az is kifejezetten nehezemre esik, hogy csupán annyira levegyem róla a szemem, hogy a környező virágokat lássam. Ezért azt gondolom, hogy a két leírás közül egyik sem illik igazán rám.

A saját tapasztalatai alapján le tudná írni a kemény, tudatos és kitartó munka és a többnyire egy sokkal kipihentebb állapotban a semmiből hirtelen felbukkanó ötletek közötti összjátékot? Tudat alatt mindvégig a problémán jár az agya, ugye?

Azt hiszem, arról van szó, hogy egy olyan állapotba kerül az ember, amikor annyira jól ismer egy elméletet vagy akár többet is, hogy minden szemszögből látta már, és számtalan különböző utat végigjárt.

Az igazi ugródeszkát valójában az a hatalmas mennyiségű munka jelenti, amely az előkészítő szakaszban van, ahol meg kell érteni a részleteket, és még talán néhány példát is. Ha ezeken már túl vagyunk, akkor egyszerűen csak hagyjuk kikapcsolódni az agyunkat, és egy ponton – talán éppen, amikor otthagyjuk az egészet, és egy kicsit mással foglalkozunk –, amikor visszatérünk, hirtelen minden világossá válik. Miért nem gondoltam eddig erre? Ez valami olyasmi, amit az agyunk végez el helyettünk. Ilyenek az ötletek.

Emlékszem – ez most egy teljesen hétköznapi, nem matematikai hasonlat lesz –, hogy egyszer valaki mutatott nekem egy gót betűs szöveget, és én bizony semmit sem értettem belőle. Próbáltam néhány szót értelmezni, de feladtam. Aztán fél óra múlva visszatértem, és az egész szöveget el tudtam olvasni. Az elménk valahogy megteszi helyettünk, és nem igazán értjük, hogyan, de azt tudjuk, hogy milyen feltételeket teremtsünk ahhoz, hogy ez megtörténjen.

Ez emlékeztet egy történetre, amely Abelhez kapcsolódik. Berlini tartózkodása alatt közös lakásban lakott néhány nem matematikus norvég barátjával. Az egyikük később azt mesélte, hogy Abel általában az éjszaka közepén felébredt, gyertyát gyújtott, majd leírta azokat az ötleteket, amelyek miatt felébredt. Az agya alvás közben is folyamatosan járt.

Igen, ez velem is így van, kivéve, hogy nincs szükségem leírni, mert tudom, hogy nem fogom elfelejteni. Amikor viszont éppen lefekvés előtt jut eszembe egy ötlet, megijedek, hogy nem fogok felébredni ezzel az ötlettel, ezért muszáj leírnom.

Képletekben gondolkodik vagy geometriai képekben vagy esetleg valami másban?

Nem igazán geometriai jellegű. Talán inkább mintákról van szó, amelyek, azt hiszem, párhuzamok olyan helyzetek között, mint amilyeneket valahol már láttam és amilyennel éppen szemben állok. Egy tökéletes világban vajon merrefelé mutatnak ezek, milyen összetevők szükségesek a bizonyításhoz, mi az, amit még nem használtam a rendelkezésre állók közül? Néha mindez csak kétségbeesés. Összeillesztem az összes bizonyíték-darabkámat, és ez minden, amim van. Ezzel kell dolgoznom, nincs más.

Gyakran az az érzésem, hogy matematikával foglalkozni olyan, mint mókusnak lenni úgy, hogy egy nagyon magas fa tetején van néhány szem dió, de nem tudni, hogy a rengeteg fa közül éppen melyiken. Azt csinálod, hogy felszaladsz az egyik fára, majd úgy döntesz, nem, ez mégsem tetszik, ezért lemész és felmászol egy másikra, és egész életedet ezekre a fákra való fel-le mászással töltöd, de mindvégig csupán 30 láb magasságba mész fel. Ám ha valaki elárulja, hogy melyiken nincsenek a diók, akkor mindössze egyetlen fa marad, és nincs más dolgod, mint addig mászni a fán, míg meg nem találod. Tulajdonképpen a rossz esetek kizárása az, ami igazán lényeges. Ha hiszel a megérzésednek, és a megérzésed helyes, akkor csak ki kell tartani a fád mellett, és rá fogsz lelni a dióra.

A matematika problémái

Felix Klein [1849–1925] egyszer a következőt mondta: „A matematika fejlődésének útja a régi eredményeknek az új módszerek és ötletek révén való megértése és megvilágítása. A jobb és mélyebb megértéssel arányosan újabb problémák bukkannak fel.” David Hilbert [1862–1943] pedig hangsúlyozta, hogy „a matematika éltető elemei a problémák”. Egyetért Ön ezzel?

Igen, mindenféleképpen egyetértek Hilberttel. A matematikát a jó problémák éltetik. Azt hiszem, ez jól megfigyelhető a múlt század második felének számelméletében. Engem nyilvánvaló módon a modularitási sejtés, de az egész Langlands-program, valamint a Birch–Swinnerton-Dyer-sejtés: ezek a problémák világosan kijelölik számunkra, hogy milyen eredményeket kell elérnünk. Ott vannak még a véges testek fölötti görbékre és varietásokra vonatkozó Weil-sejtések vagy a Mordell-sejtés és így tovább.

Ezek a problémák valamiképpen összpontosításra késztetik az elménket, és közben egyszerűbbé teszik a céljainkat a matematikában. Különben túlságosan is széles körben mozognánk, és nem tudnánk mi az, aminek van jelentősége, és mi az, aminek nincs.

Akadnak manapság is olyan jó problémák, mint amilyenek 1900-ban, amikor Hilbert meghirdette a 23 problémáját?

Igen, úgy gondolom.

Ön szerint melyik ma a legfontosabb probléma ezek közül? És hogyan illeszkedik ehhez a Langlands-program?

Nos, úgy vélem, hogy a Langlands-program nem más, mint a szakterületemhez kapcsolódó problémák legszélesebb spektruma. Ha a matematikának az általam megértett területeit nézzük, akkor azt gondolom, hogy a Riemann-sejtés a lehető legnagyobb probléma. Néha nem tudom pontosan megmondani, hogy miért, de meggyőződésem, hogy a megoldása segíthet a már említett egyéb problémákban is. És persze nekem személyes kötődésem van a Birch–Swinnerton-Dyer-sejtéshez.

A megérzés gyakran tévútra vihet. Például Hilbert úgy gondolta, hogy a Riemann-sejtést még az ő életében sikerül megoldani. Ugyanakkor volt a listáján egy probléma, a hetedik, amelyről sosem hitte volna, hogy megéri a megoldását, ám Gelfond [1906–1968] 1934-ben megoldotta. Megeshet tehát, hogy a megérzésünk rossz.

Ez így van. Nem vagyok meglepve azon, amit Hilbert gondolt. A Riemann-sejtés egy elég világosan megfogalmazott állítás, amelynek a függvénytestek felett ismert a megfelelője. Értjük, hogy ott miért igaz, és az az érzésünk, hogy mindezt át is tudjuk ültetni. Természetesen már nagyon sokan megpróbálták, de mindenki kudarcot vallott. Jómagam mégis úgy vélem, hogy hamarabb meg fogják oldani, mint a Birch–Swinnterton-Dyer-sejtést.

Befektetés a matematikába

Reméljük, hogy megérjük!

A klasszikus matematikának lényegében két forrása van: az egyik a fizikai tudományok, a másikat pedig az egyszerűség kedvéért nevezzük olyan számelméleti spekulációknak, amelyek nem kapcsolódnak alkalmazásokhoz.

Ez megváltozott. Például az Ön szakterületének számító elliptikus görbéket a kriptográfiában modern titkosírások kapcsán alkalmazzák. Az emberek ma pénzt keresnek elliptikus görbék segítségével! Másrészt pedig a fizika mellett számos más tudomány is jelentős mértékben használja a matematikai gondolkodásmódot és támaszkodik a matematika eredményeire. Manapság az ipari fejlődés igen gyakran a matematikai modellezésen és az optimalizálási eljárásokon múlik. A tudomány és az ipar folyamatos kihívások elé állítja a matematikát.

Bizonyos értelemben a matematika alkalmazottabb lett, mint valaha. Felmerül, hogy ez vajon okozhat-e gondot a tiszta

matematika számára. Időnként úgy tűnik, hogy az elméleti matematika kissé háttérbe szorul, legalábbis ami a kutatási támogatásokat illeti. Súlyos problémának érzi ezt?

Nos, ha visszatekintünk a régmúlt időkre, akkor az embernek az az érzése támad, hogy 200-300 évvel ezelőtt a matematikusok a matematika jóval szélesebb spektrumában mozogtak otthonosan, és abban sokkal több volt az alkalmazott matematika, mint amennyivel ma egy tipikus matematikus foglalkozik. Ugyanakkor ennek az is lehet az egyik oka, hogy a múltból szinte csak a legkiválóbb és legsokoldalúbb matematikusokra emlékszünk.

Azt hiszem, az mindig baj, ha a kutatási támogatást nyújtó hivatalok nem hosszú távon gondolkoznak. Hogyha három éven belül eredményt szeretnének látni, az nem fog működni. Nehéz elképzelni, hogy egy tisztán elméleti eredmény és a hozzá kapcsolódó alkalmazás összességében 3-5 év alatt meg tudna valósulni. Ez valószínűleg nem fog bekövetkezni.

Másfelől pedig nem hiszem, hogy létezhetne jól működő alkalmazott matematika az elméleti matematika támasza nélkül, amely a jövőt biztosítja és kijelöli a helyes utat. Nagy butaság lenne tehát nem befektetni az elméleti matematikába.

Ez kicsit olyan, mintha csupán olyan energiaforrásokba fektetnénk be, amelyek jelenleg körülvesznek minket. A jövőbe kell befektetni, fúziós energiába, napenergiába vagy más ezekhez hasonló dolgokba. Nem úgy van, hogy felélünk mindent, amink van, és csak akkor kezdünk aggódni, amikor már elfogyott. A matematikával hasonló a helyzet, az nem járja, hogy kimerítjük a rendelkezésünkre álló tiszta matematikát, és elkezdünk aggódni, amikor valamely alkalmazáshoz egy elméleti eredményre lenne szükségünk.

Matematikai díjak

Már számos díjban részesült a matematikában elért eredményeiért, amelyeknek csúcsán a Fermat-sejtés bizonyítása áll. Megkapta többek között a Svéd Akadémia Rolf Schock-díját, Dániában átvehette az Ostrowski-díjat, Franciaországban a Fermat díjat, Izraelben a Wolf-díjat, Hong Kongban a kelet Nobel-díjaként emlegetett Shaw-díjat, és a sor tovább folytatódik egészen a holnapi Abel-díjig. Szereti-e a díjakat és az ezekkel járó ünnepségeket?

Igen, meg kell hogy mondjam, szeretem. Szerintem ez mind a matematika ünnepe. A Fermat-sejtés olyasvalami, aminek az emberek örülnek, hogy megérhették. Kétségtelenül én magam is kimondottan boldog lennék, ha megérhetném a Riemann-sejtés bizonyítását. Izgalmas lenne látni, végül hogyan oldódik meg, és mi lesz a történet vége. E történetek többségének nem tudjuk meg a végét. Minden egyes alkalommal, amikor egy ilyen történet a szemünk láttára fejeződik be, azt természetesen megünnepeljük. Jómagam E. T. Bell említett könyvében olvastam először a Fermat-sejtésről és a hozzá kapcsolódó Wolfskehl-díjról. És a díj akkor még mindig érvényben volt – éppenhogy, mondhatni, hiszen alig pár év maradt hátra a határidő lejártáig.

Rá is térhetünk arra, hogy erről a díjról is ejtsünk néhány szót. A Wolfskehl-díjat Paul Wolfskehl [1856–1906] német orvos alapította, aki érdeklődött a matematika iránt. 100 ezer német birodalmi márkát (mai értéken több mint egy millió dollárt) hagyott örökül annak, akinek először sikerül bizonyítania Fermat utolsó tételét. A végrendelet szerint a díj 2007. szeptember 13-ig volt érvényben, és Ön 1997-ben kapta meg. Akkorra, részben az első világháborút követően Németországban bekövetkezett hiperinfláció miatt a pénz már csak a töredékét érte.

Számomra a pénz összegének nem volt jelentősége, hanem a Wolfskehl-díjhoz fűződő érzelem volt igazán fontos.

Tanítványok

Eddig összesen 21 PhD hallgatója volt, vonzotta a tehetségesebbnél tehetségesebb diákokat. Néhányan közülük egészen kiemelkedők. Egyikük, Manjul Bhargava 2014-ben elnyerte a Fields-érmet. Bizonyára nagy öröm lehetett egy ilyen hallgató témavezetőjének lenni.

Igen, de nem szeretném eltúlozni az érdemeimet. Manjul esetében én csak javasoltam egy problémát, és utána semmi más dolgom nem volt. Ő maga állt elő ezekkel a bámulatos felfedezésekkel. Bizonyos értelemben nagyobb az elismertséged, ha tehetséges diákjaid vannak, de az az igazság, hogy nagyon tehetséges diákok nem igényelnek annyi segítséget.

Általában hogyan szokott diákokkal foglalkozni?

Azt hiszem, egy diák számára a legnehezebb dolog megtanulni azt, hogy később a szakmai életben saját magának kell boldogulnia, és egyáltalán nem könnyű megfelelő problémákat választani. Ha a diáknak kijelölünk egy problémát, és ő ezt megoldja, akkor ezzel tulajdonképpen nem adtunk neki túl sokat. Persze megoldotta a problémát, de az igazán nehéz az, hogy azt félretéve egy másik problémát találjon. Ezért leginkább azt szeretem, ha közösen döntjük el, hogy mi legyen a vizsgálandó probléma.

Anélkül, hogy igazán elmerülnék a problémában, adok számukra néhány kiindulási ötletet és iránymutatást, hogy a matematikai mely területén érdemes utánanézniük. Amint elkezdenek dolgozni, és egyre járatosabbak lesznek a témában, látni fogják, mi is a megfelelő kérdés. És máris a probléma kiválasztásának folyamatában találják magukat. Azt hiszem, ez egy sokkal kifizetődőbb befektetés a jövőjük szempontjából. Persze ez nem mindig működik, van, hogy a kiindulásként adott problémáról derül ki, hogy már az maga a jó irány. De többnyire azért nem ez a helyzet, és a jó probléma egy folyamat eredményeképpen születik.

Hobbi és érdeklődési kör

Az Abel-díjazottakkal készült interjúk végén a díjazottat mindig arról kérdezzük, hogy mivel szereti tölteni a szabad idejét, amikor éppen nem matematikával foglalkozik. Van-e valamilyen hobbija, és a matematikán kívül mi érdekli még?

Nos, ez időnként változik. Mialatt a Fermat-sejtésen dolgoztam, kisgyermekes apaként, akkor másra már nem jutott időm.

Szeretek olvasni, szeretem a regényeket és az életrajzokat, nagyjából egyformán. Más iránt nem érdeklődöm kifejezetten. Iskolás koromban csapatban sakkoztam és bridzseztem, de miután elkezdtem komolyabban foglalkozni a matematikával, már egyáltalán nem érdekeltek.

És a zenét szereti?

Koncertekre szoktam járni, de én magam nem játszom semmilyen hangszeren. Szeretek zenét hallgatni, főleg klasszikus zenét.

Érdekli a matematikán kívül valamely másik tudományterület is?

Igen, mondhatni. Ezek olyan dolgok, amelyeket kikapcsolódásképpen szoktam csinálni, ezért nem szeretem, ha túl közel áll a matematikához. Legyen szó akár az állatok viselkedéséről, akár az asztrofizikáról, vagy olyasvalamiről, ami nem számokkal kapcsolatos, mindenféleképpen szeretek róla új dolgokat megtudni. Arról, hogy a gépek mi mindenre képesek vagy egyéb dolgokról a népszerű tudományból úgyszintén, de azért nem fogom az időmet a húrelmélet részleteinek megismerésével tölteni. Túl céltudatos vagyok ahhoz, mintsem hogy ezt akarnám. Nem azért, mert nem érdekel, hanem mert ez az én választásom.

Szeretnénk megköszönni ezt a csodálatos interjút mindenekelőtt a magunk nevében, másrészt pedig a Norvég, a Dán és az Európai Matematika Társaság nevében. Köszönjük szépen!

Nagyon köszönöm én is!

Az interjút készítették: Martin Raussen (Aalborg University, Dánia), és Christian Skau (Norwegian University of Science and Technology, Norvégia). A 2. részt fordította: Besenyei Ádám.

Az eredeti cikk az Európai Matematikai Társulat EMS Newsletters 2016. szeptemberi számában jelent meg: Interview with Abel Laureate Sir Andrew Wiles, EMS Newsletter September 2016, p. 29—38. http://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2016-09-101.pdf#page=31

Ezúton is köszönjük az EMS, a szerzők és Wiles professzor szíves engedélyét a fordítás megjelentetéséhez.

A Wilesról készült két fénykép forrása a Wikimedia Commons: bevezető képünkön Wiles professzor 2010-ben Cambridge-ben a díszdoktorrá avatásán.

https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Andrew_Wiles#/media/File:Andrew_Wiles_Degree_2010.jpg By kwiles7 - http://www.flickr.com/photos/60548240@N07/5522712407/, CC BY 2.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?

curid=14588215

https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Andrew_Wiles#/media/File:Andrew_wiles1.jpg copyright C. J. Mozzochi, Princeton N.J

Abel-díj Andrew Wiles Fermat

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés
Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

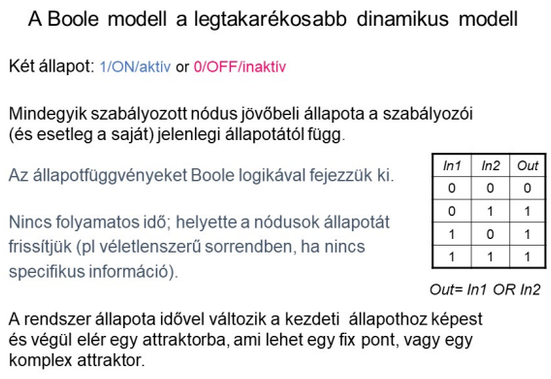
Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Oláh Vera 2017. SZEPTEMBER, INTERJÚ – PORTRÉ

Hálózatok irányítása — segítő-hálóval: Albert Réka

2017 májusában Budapesten dr. Albert Rékát, a Pennsylvania State University professzorát több alkalommal is felkérték előadónak. Fiatalon, mint általános hálózatkutató, a Barabási—Albert modell megalkotásával hozzájárult a skálafüggetlen hálózatok elemzéséhez. Érdeklődése néhány éve a biológiai hálózatok dinamikája felé irányult, és elsők között alkalmazta rájuk a Boole-logikán alapuló leírást.



Az illusztráló képek a Rényi Intézet szemináriumán megtartott *Biológiai hálózatok irányítása* című kétrészes előadásából valók: A biológiai rendszerek funkciója rendszerszintű, emergens tulajdonság. Az ilyen rendszerek külső irányításához (modulálásához) is a rendszer egészét kell figyelembe venni. Sajnos a legtöbb rendszer esetében nincs elég információ egy részletes dinamikus modell parametrizálásához. Ezért nagy az érdeklődés a hálózatstruktúra-alapú kontroll módszerek iránt. Ez az előadás három ilyen módszert hasonlított össze. Albert Réka kutatócsoportja a Boole-dinamika esetén érvényes stabil motívum alapú kontrollt kutatja, amit sikerrel alkalmaztak jelátviteli hálózatok irányítására.

Az előadás után készült az alábbi interjú.

Mit érdemes tanulni annak, aki hálózatokkal szeretne foglalkozni?

Elsősorban gráfelméletet és hálózattudományt, amit úgy értelmeznék, mint a gráfelmélet új, alkalmazott, adatirányított ágát. Az is nagyon fontos, hogy megértse azt a szakterületet, aminek a hálózataival foglalkozni fog. Tudnia kell, hogy mik azok a kérdések, amelyek fontosak ezen a területen, és meg kell találnia, hogyan lehet ezeket a kérdéseket hálózat-feladatként megfogalmazni es végül megoldani. Sok esetben a szakterület sajátos hálózatai új gráf-fogalmakat igényelnek. Például az általam kutatott sejt-biológiai hálózatokban fontosak a negativ élek, és az élek közötti együttműködes és függőség.

A gráfelmélet maga is fiatal ága a matematikának, a belőle kiinduló, de attól teljesen eltérő hálózattudomány pedig még újabb. Barabási Albert-László nevéhez kötik a „felfedezését”, és azóta a világon több reál, humán vagy közgazdasági tudományterület kutatói jöttek arra rá, hogyan alkalmazható az ő kutatásaikban.

László erről sokat ír a hálózatokról szóló könyveiben, mindkettő nagyon érdekes olvasmány: a *Behálózva - A hálózatok új tudománya* általános ismeretterjesztő, http://ematlap.hu/index.php/konyvespolc-2017-06/516-barabasi-albert-laszlo-a-halozatok-tudomanya*A hálózatok tudománya* tudományos szakkönyv. Nagyjából velünk egy időben *Steven Strogatz* és *Duncan Watts* is gondolkodott a hálózatokról. Úgy gondolták, hogy a rendszerek valahol a szabályos rácsok és a véletlen hálók között vannak. Az ő cikkük, ami a kisvilág modellt írja le, 1998-ban jelent meg, kevesebb mint egy évvel a mienk előtt. Mi akkor már szintén ezen a témán gondolkodtunk, és volt is már egy cikkünk, csak éreztük, hogy az még nem elég, így az ő publikációjuk még jobban inspirált bennünket a további munkára. A skálafüggetlen hálók és a Barabási—Albert modell fundamentálisan új volt, mert összekötötte a hálózat elemzését a hálózat dinamikájával. Azt mondta, hogy ha megértjük a hálózat dinamikus változását, és modellezzük azt, akkor meg fogjuk érteni a hálózat jelenlegi struktúráját, és meg tudjuk jósolni a jövőbeli struktúráját is. A két cikk együtt jelentette a nagy áttörést. Duncan Watts és László is nagyon aktívak voltak abban, hogy népszerűsítsék ezt a tudományt. Egyrészt nagyon sok fizikust inspirált a két cikk, másrészt sokan más területekről is megérezték a hálózatok alkalmazásának fontosságát.

Miben új, más a hálózatkutatás és milyen alkalmazási területe van?

A hálózatkutatás egyik újdonsága az, hogy utat mutat a komplex kölcsönható rendszerek megértése felé. A hagyományos módszerek (például redukcionizmus, vagy statisztikus fizika) nem igazán alkalmazhatók erre a célra, mert a komplex rendszerek nagyon heterogének es az emergens, rendszer-szintű tulajdonságaikat nem lehet egyedi elemekre, vagy átlagos tulajdonságokra visszavezetni. Az ilyen rendszerek megértésének első lépése, hogy hálózatként értelmezzük őket. A rendszer elemei a hálózat nódusaivá (csúcsaivá) válnak, a kölcsönhatásaik pedig élekké. A hálózat elemzése megmutatja a hálózat kapcsolatmintáit. Például megmutatja azokat a nódusokat, amelyeknek aránytalanul sok éle van, ezek nagy valószínűséggel fontos szerepet játszanak. Irányított hálózatok elemzése megadja a hálózat szorosan összefüggő komponenseit, vagyis olyan nódus-csoportokat, amelyek között sok visszacsatolás van, és amelyek dinamikája is valószínűleg összekapcsolódik.

Albert Réka honnan indult és hová jutott eddigi életében?

Szászrégenben születtem, Erdélyben, később Marosvásárhelyre költöztünk. Édesanyám, Barabás Sarolta, fizikatanárnő volt, most biogazda, édesapám, Barabás László, néprajzkutató, főiskolai docens. A gyerekkoromat a Ceausescu-diktatúra utolsó éveiben éltem, tizennyolc éves voltam a rendszerváltáskor. A matematika, fizika jelentette számomra azt a területet, ahol minden logikus, érthető volt, ahol meg tudtam oldani a problémákat. Kitűnő tanáraim voltak, általános iskolában Bató Domokos tanított matematikából es anyukám fizikából. A líceumban Dályai Pál tanította a matematikát, Tőkés András a fizikát. A kolozsvári Babes-Bolyai egyetem fizika szakán végeztem; Néda Zoltán, a szakdolgozati témavezetőm vezetett rá a kutatás izgalmas területére. Az egyetemen ismerkedtem meg Albert Istvánnal, aki technológiai fizika szakra járt, és akivel harmadévesen összeházasodtunk. A következő évben megszületett a fiunk, Ákos.

Mi voltunk az első évfolyam, amelyik mesterképzésre iratkozhatott be. Ez alatt az év alatt adódott egy fantasztikus továbbtanulási lehetőségünk. Barabási Albert-László ugyanis éppen akkor kezdett tanítani a Notre Dame egyetemen, es jó diákokat keresett. Néda Zoltán pedig engem es férjemet ajánlott neki. Letettük a vizsgákat es mindkettőnket felvettek Ph.D. hallgatónak, így költöztünk ki mindhárman Amerikába. A Ph.D. öt éve nagyon izgalmas, sűrű időszak volt, meghatározta életem további alakulását. László megismertetett a hálózattudománnyal, ami azóta is alapja a kutatásomnak. Férjemmel egymás utáni napokon védtük meg a disszertációinkat. Ezután két évig Minnesotában voltunk posztdoktori kutatók, majd megérkeztünk a Pennsylvania State Universityre. Azóta is ott tanítunk, kutatunk, most már tizennégy éve.

Azóta még egy kislányuk is van. Lehet egy nő egyszerre tudós és családanya?

Igen. Az kell hozzá, hogy ne legyenek maximalista elvárások egyik területen se. Egy tudósnak sem kell állandóan a kutatásán gondolkodnia. Az persze szükséges, hogy rendszeresen legyenek többórás megszakítás nélküli periódusok. Egy családanyának nem kell minden idejét a családjára fordítania, ha jó segítő-hálója van. Kulcsfontosságú, hogy a gyerekek napi foglalkozása jól meg legyen oldva, bölcsődében, óvodában, iskolában. Az is nagyon fontos, hogy a férj, családapa egyenlően részt vegyen a háztartásban, a családi feladatokban. Szervezés, rugalmasság, megértő rokonok, barátok, kollégák kellenek hozzá.

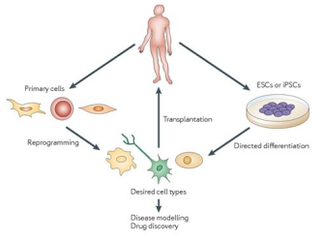
Hihetetlen érzés lehetett ilyen fiatalon, szinte véletlenül a tudományos pezsgés kellős közepébe csöppenni

Nagyon izgalmas, szép évek voltak. László a Notre Dame-os első tanítási évében felvett két diákot, az ő témájuk még nem hálózatkutatás volt. Én a második évében kerültem hozzá, én voltam az első, aki hálózatokkal kezdtem foglalkozni. Utánam jöttek aztán hárman, négyen, ők már mind hálózatokon dolgoztak. Nagyon ötletgazdag, pörgős kutatás volt, az egész csoportban nagyon nagy volt a lelkesedés, éreztem, hogy ez egy különleges kutatási téma.

Az én mostani kutatócsoportomban általában 3-4-en vannak, különböző területekről. Szeretem hogy általában a diákok keresnek meg engem: vagy egy fizikus azért jön, mert érdeklik a komplex rendszerek, vagy egy biológus rájön, hogy azon a szakterületen, ahol dolgozik, egy modellre van szükség, mert az egy hálózat-probléma. Ha ilyen motivált a diák, akkor nagyon jól megy a munka. Általában mindenkivel külön dolgozom a témáján, de elősegítem, hogy ők is találjanak egymással közös projekteket. Most például nálam egy fizikus és egy biológus együtt dolgozik: ugyanannak a problémának az egyszerűbb biológiai modellezését az egyikük végezte, ugyanakkor, amikor bonyolultabb modellre, új elméletre volt szükség, a másikuk tudott segíteni.

Ha bebizonyosodik egy feltevés egy biológiai modell esetén, ezután hogyan kerül sor a valódi alkalmazásra, amivel meg lehet állítani például a rák terjedését?

A sejt-újraprogramozás lényegében két attraktor közti irányított átmenet



Az irányított differenciálódás 1-4 növekedési faktor hozzáadásával, az újraprogramozási folyamat 1-3 transzkripciós faktor aktiválásával esetenként sikerült.

A visszacsatolási halmaz és stabil motívumok felderítése általános utat mutat a sejt-újraprogramozás felé.

Cohen, Melton, Nature Reviews Genetics (2011)
Albergante et al. eLife 3:e02863 (2014)

Az első lépés a modell, a modell alapján tudunk feltételezéseket tenni, jósolni; ezeket a jóslatokat a kísérletileg ellenőrizzük. Ha például a jóslat egy lehetséges célzott rákterápia az első kísérletek általában rákos sejtvonalakban történnek. Ha itt igazolódik, működik, a következő lépés a kísérlet a háromdimenziós szövetekben, ami kicsit bonyolultabb. Utána lehet egérkísérleteket végezni, ha ez mind sikeres, akkor jönnek a klinikai vizsgálatok. Ez a folyamat hosszú-hosszú évekbe telik. Ez már nem ez én területem, de próbálok együttműködni orvos-kutatókkal, hogy közelebb maradjak a folyamathoz. Például, társ-témavezetője voltam egy nagyon tehetséges MD/PhD hallgatónak, aki most már orvos-kutató.

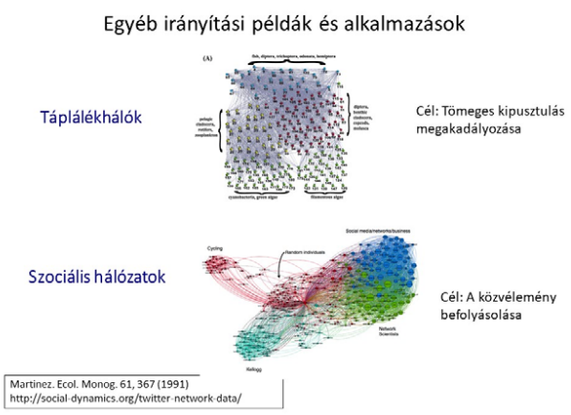
Széleskörűek a tudományos kapcsolatai?

Körülbelül tíz éve vannak Network Science konferenciák, az utóbbi években már évente kétszer is, ezek nagyon inspirálók. Másrészt ez egy óriási terület, lehetetlen elmenni mindenre, ezért én inkább a kisebb, biológiai hálózatokra fókuszáló konferenciákra járok. Magyarországról Csermely Péterrel (SOTE) tartom már 6 éve a kapcsolatot, ő hívott meg most is. Nagyon jó a hálózatkutatás a CEU-n is, Vedres Balázs vezetésével, és ott vannak Vicsek Tamás és kollégái az ELTÉ-ről, a RECENS kutatócsoport a MTA Társadalomtudományi Kutatóközpontjában, több csoport az MTA SZTAKI-n, a Rényi Intézetben.

Barabási évekkel ezelőtti előadásán zsúfolásig megtelt az előadóterem, olyanokkal is, akik talán először hallottak erről a témáról. Ebben az is benne volt, hogy a világhírű előadó magyar származású.

Jogosan büszkék a magyarok, hiszen valamikor Erdőssel, Rényivel és a gráfelmélettel kezdődött a mai hálózatkutatás.

Mit gondol a hálózattudomány jövőjéről? Most felszálló ágban van, meddig lehet eljutni?



Sokat fog még fejlődni, mert a rendszerek megkívánják a fejlődését. Ki kell találnunk új módszereket, fogalmakat; mi például kibővítjük a hálózatokat, stabil motívumokat keresünk. Szerintem sokat fog gazdagodni a hálózatok elmélete, és nyilván ki fognak bővülni az alkalmazási területek is.

Ez egy új látásmód. Egyre inkább felismerjük, hogy nagyon sok probléma hálózat-probléma, illetve ha hálózatként ábrázoljuk és hálózatként elemezzük, az előrevisz a megoldásában.

Korábban még nem volt elég járható út, de most már ott tartunk, hogy sok nemhomogén komplex rendszert is elemezni, jósolni tudunk. Most már a számítógépek is sokkal erősebbek, a módszerek is gazdagabbak. Megérett az idő erre a látásmódra minden tudományban, szükség van rá, ezért tovább fog fejlődni, bővülni, erősödni.

Köszönöm az interjút és azt is, hogy minden e-mailemre azonnal válaszolt: Oláh Vera.

---

hálózatok

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Erintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

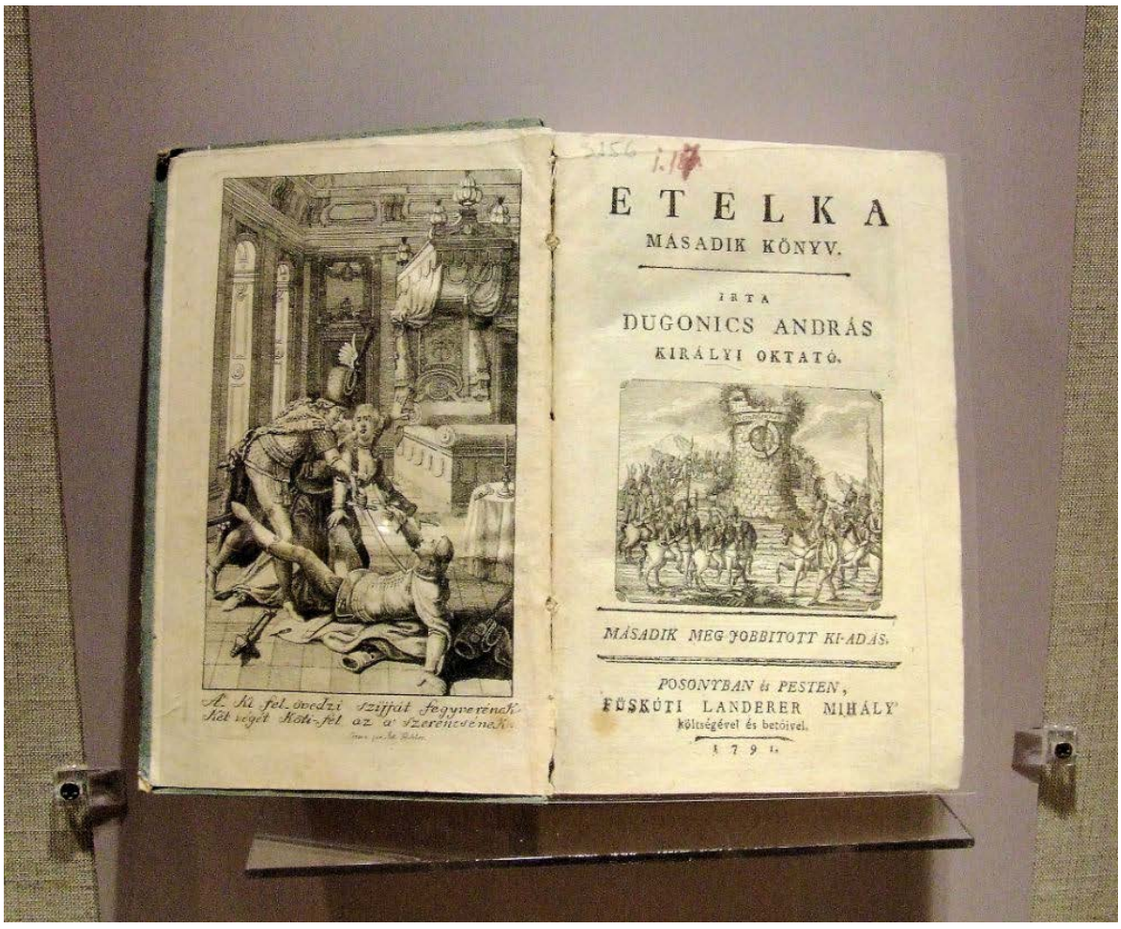
Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Békés Vera 2017. SZEPTEMBER, INTERJÚ – PORTRÉ

Adalékok Dugonics András matematikapedagógiai munkásságának értelmezéséhez

Dugonics András matematikai munkásságával kapcsolatban megoszlik a tudománytörténészek véleménye. A legtöbben csupán a korszerű magyar matematikai műnyelv egyik megteremtőjeként tisztelik őt. Mindemellett elismerik irodalomtörténeti jelentőségét, minthogy szépirodalmi művei (Különösen az *Etelka* trilógia) a korabeli ifjúság körében rendkívüli népszerűségnek örvendtek.



A képen Dugonics András Etelka című regényének második kiadása (Wosinsky Mór Múzeum, Szekszárd), az első magyar regény, mely a honfoglalás korában játszódik.

Forrás: https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:András_Dugonics#.

Ám önálló matematikusi teljesítményét — különösen a Bolyaiakkal összevetve — általában még említésre sem tartották méltónak, noha Dugonics évtizedeken át —

nyugalomba vonulásáig — a nagyszombati,
majd a jogutód budai illetve pesti egyetem matematika professzora volt. Pedagógiai, módszertani munkásságát pedig a történetírók többsége a magyar matematika fejlődése szempontjából — kortársaihoz mérve — egyenesen visszaesésként értékelte.

A magyar oktatásügy egyik meghatározó dátuma: 1773, amikor Mária Terézia vonakodva ugyan, de engedelmeskedett XIV. Kelemen pápa bullájának, és feloszlatta a magyarországi jezsuita rendet. Ennek nyomán a nagyszombati egyetem több tanszékén álláshelyek üresedtek meg, melyek betöltésére versenyt írtak ki. Így a piarista rendhez tartozó Dugonics 1774-ben — a nagy tekintélyű ex-jezsuita Makó Pál támogatásával — sikeresen pályázhatott az elemi matematika tanszéki állásra. A másik fontos dátum: az 1777-ben kibocsátott *Ratio Educationis* hosszú távon is megszabta a magyar oktatásügy rendjét. Ekkor költözött Budára (később Pestre) a nagyszombati Egyetem, ahol Dugonicsé lett a három matematika tanszék egyike. És miután II. József a pesti egyetem bölcsészkarán belül mérnök képző intézetet is alapított, nem volt már akadálya a rendszeres hazai önálló matematikai kutatásoknak. Ahogy a magyar matematikatörténet író, Sain Márton fogalmaz: „Bár egyik tanárának sem volt önálló matematikai teljesítménye, működésük mégis jelentős volt, mert különösen a műszaki képzés színvonalát emelte.” De — mint írja -, nem így történt: „Rosszabb lett a pesti egyetemen a matematika helyzete, mint Nagyszombatban volt a jezsuiták alatt. Még a Magyar Tudós Társaság, az Akadémia elődje is csak a matematika magyar nyelvének megteremtésével törődött. Ez kétségkívül nemes és a honi matematikára nézve is hasznos törekvés volt, de korántsem helyettesítette a szakkönyveket és a kutatómunkát.”[1] Végül felteszi a kérdést: „Mi az oka annak, hogy e szépen induló hazai matematikai fejlődés szárnyszegetten megtorpant a XVIII. század végén és a XIX. század elején?”[2]

Felmerülhet a gyanú, hogy a matematikai gondolkodás elmaradottságának ilyen túlzott vonásokkal való utólagos ábrázolása azt a célt szolgálta, hogy még inkább kiemelje a magányos, meg nem értett fároszok — a Bolyaiak — nagyságát.

A sivár pusztában magányos küzdelmét vívó hős alakja a magyar matematikatörténet narratívájának nagyon is jellegzetes eleme. Szily Kálmán például Apáczai Enciklopédiáját így mutatta be: „...egy hirtelen kiemelkedő s előhegyek nélküli magánosan álló csúcs, kietlen apály és pusztaság közepén.”[3] Sain Márton is hasonló képpel él: „Hogy milyen sötétségben vállalta a két Bolyai a világító fáklya szerepét, arra jellemző, hogy itthon szinte észre sem vették őket. Az 1830-ban alapított Magyar Tudományos Akadémia és az akkori egyetemi tanárok nem is álmodtak arról, hogy hazánkban az egész matematikai gondolkodás szempontjából milyen fontos felfedezés született, amely a modern geometria egyik alapja. Nem értették meg a Bolyaiak alkotásait. Bolyai Farkas ugyan levelező tagja lett az Akadémiának, de nem matematikai

„különcködéseiért”, hanem irodalmi érdemeit jutalmazták.”[4]

Dugonics András királyi oktató (Johann Heinrich Tischbein de Oudere—Gero von Wilpert: *Deutsche Literatur in Bildern*. Alfred Kröner, Stuttgart 1957, S. 129.)
Forrás: https://hu.wikipedia.org/wiki/Dugonics_Andr%C3%A1s#

Dugonicsnak azonban sem munkássága sem személyisége nem volt könnyen elhelyezhető egy ilyen, a tudománytörténet-írók által kedvelt, „sötétség a fénnyel szemben” képen. Vele kapcsolatban nem lehetett leírni azt, hogy meg nem értett fárosz volt, hiszen széles tanítványi köre volt, akik rajongtak érte. Feljegyezték, hogy módszeresen felépített tananyagát, a megfejtendő tételeket „oly világosan adá elő, hogy szavait rögtön nyomtatni lehetett volna. ...Előadásába gyakran vegyített más tárgyú tételeket, sőt jóízű történeteket is.”[5] Jellemző, hogy Szénássy Barna két ténnyel magyarázza a Dugonics munkáinak elragadtatott elismerését a kortársak, tanítványok részéről. Egyfelől kedvezett neki a korszellem: „a korabeli egyetemi ifjúság kritika nélküli lelkesedéssel fogadta Dugonics magyar nyelvű munkáit”; másfelől „matematikai műszavait is nyelvészek boncolgatták, és a szakmai használhatóság szempontjait nem vették figyelembe.”[6] A szakmai fanyalgás ellenére, ha csak néhány példát idézünk a sikeresen meggyökeresedett újítások közül, beláthatjuk, hogy Dugonicsnak döntő szerepe volt a magyar matematikai műnyelv megteremtésében[7]: derékszög, egyenlet, egyközű[8], *elv (elev ~lat. lemma), gömb, háromszög, hatszög, hossz, köb, kör, pont, sugár, szög, a szög szárai, rendszer, tompaszög, végtelen*. E közel sem teljes felsorolásból felmérhető, hogy milyen elismeréssel tartozik az utókor Dugonics Andrásnak, hiszen e kifejezések nélkül aligha lehetne a matematikát anyanyelven művelni illetve tanítani.

Kosáry Domonkos nagymonográfiájában Dugonics szakmai megítélésekor a kritikusokra, mindenekelőtt Szénássy Barna munkájára hagyatkozik[9]: „Az elemi matematika tanszékét 1774-ben a piarista Dugonics Andrásra bízták. Dugonics — tudjuk — igen sok sikert ért el a nemesi második szint írójaként.[10]Jóval kevesebbet azonban, mint a tantárgyának oktatója. Hallgatóiról a vizsgán kiderült, hogy nemigen értik a dolgokat. Teendőit mintha nem is végezte volna szívesen. Betegség címén elég gyakran nem tanított. Ürményi[11] 1783. végi vizsgálati jelentése szerint pedig ugyanakkor fölfelé fegyelmezetlen (subordinationis impatiens) volt. Egy időben áthelyezése is fölmerült.”[12] Gyimesi István ezzel szemben a piarista Lutter Nándort idézi, aki példaképnek állította Dugonicsot a tankönyvszerzők elé: „Kimondhatatlanul jól esik lelkemnek e szempontból halhatatlan Dugonicsunkra visszapillantani. Ritka ügyességgel járt ő el e tekintetben ‘Tudákosságának’ szerkesztésében, s a logikai rendet nem igen követő újabb mennyiségtaníróink Dugonicsunktól 76 év lefolyása után is igen sokat tanulhatnának.”[13] Dugonics alakját életében és halálában is legendák övezték. Jósika Miklós: *A szegedi boszorkányok* c. 1855-ben, emigrációjában írt regényében elbeszél egy megtörtént eseményeken alapuló, de lényegében fantázia szülte romantikus történetet. Eszerint Dugonics édesanyja az 1728-as boszorkányper máglyára ítéltjei között lett volna, akit a 13-14 éves fiú a betegágyából kirohanva próbált a tűzből kimenteni. Amint a kutatók tisztázták, valóságban a boszorkányként tizenketted magával máglyára vetett Dugonicsné az író dédapjának második felesége lehetett, és nem volt vérrokona a tizenkét évvel később született Dugonics Andrásnak.[14] Tegyük mindehhez hozzá, hogy a magát sokáig makacsul tartó legenda fennmaradásában szerepet játszhatott, hogy a boszorkánysággal vádolt anya és a fia története igen jól beleillett a korszak egyik divatos toposzába — ahogy ez megjelenik például a Cammarano szövegkönyvéből 1853-ban készült Verdi operában, A *Trubadúr*ban vagy Madách *Tragédiá*jának Kepler-színében.

Jelen dolgozat nem vállalkozik Dugonics matematikai munkáinak újraértékelésére. Fontos lépéseket tett már ez irányban a *Tudákosság könyvei*ből válogatást készítő, illetve azokhoz kommentárokat fűző szerkesztői munkaközösség,[15], valamint saját kutatásai alapján Gyimesi István.[16] E szerzők hajlanak Dugonics matematikusi teljesítményének elismerésre, mikor egyfelől azt vizsgálják, hogy a *Tudákosság* mint egyetemi előadás megfelelhetett-e kora követelményeinek, másfelől azt, hogy a mai matematikai ismeretek fényében helytállók-e az ott leírtak.

TUDÁKOSSÁGNAK
ELSŐ KÖNYVE,
BETŰ-VETÉS.
(ALGEBRA)
DUGONICS ANDRÁS.

Dugonics népszerű matematika tankönyve.

S mint Gyimesi írja, célja nem egy vadonatúj Dugonics-kép kialakítása csakis a szerző matematikai munkásságára vonatkozó tényeket gyűjti össze. Ám, mint rámutat, ezek között a korábban nem a maguk összefüggésében vizsgált faktumok között „vannak olyanok, amelyek megkérdőjelezik a mostanában megjelent átfogó történeti művekben található Dugonics-képet.”[17]

Ebben a rövid írásban a magam részéről csakis annak a sommás ítéletnek a megkérdőjelezéséhez szeretnék néhány adalékkal hozzájárulni, amely szerint Dugonics tanári munkássága *visszaesést* jelentett volna a magyar felsőfokú matematikaoktatás fejlődésében. Minél több történeti kommentárt nézünk ugyanis, annál több ellentmondásra bukkanunk.

Kosáry egyik megjegyzése nyomán fölfigyelhetünk egy magyarázatot igénylő, fontos tényre: „Érdekes, hogy midőn 1784-ben, a vizsgálat után II. József a bécsi egyetemen előírt tankönyvek használatát rendelte el Pesten is, itt a tanárok többsége mégis engedélyt nyert saját könyvének, kéziratának használatára. *Dugonics viszont Kästner göttingai német tankönyve nyomán tanított*.”[18] Ezen a nyomon elindulva talán magyarázatot kaphatunk a *Tudákosság* értékelése körüli zavarokra is.

Anfangsgründe
der
angewandten
Mathematik
abgefaßt
von
Abraham Gotthelf Kästner.

Der mathematischen Anfangsgründe
zweyter Theil.
Erste Abtheilung
Mechanische und Optische
Wissenschaften.
Dritte, durchaus verbesserte und vermehrte
Auflage,
Mit 9. Kupfertafeln.

Göttingen
Im Verlag der Wittwe Vandenhoek,
1780.

Kästner tankönyve. Forrás:
https://de.wikipedia.org/wiki/Abraham_Gotthelf_Kästner

Dugonicsról életrajzírói följegyezték, hogy pályájának korai szakaszában, 1777-től Budán komoly matematikai stúdiumokat folytatott, tanulmányozta a legkorszerűbbnek számító külföldi kortárs matematikai szakirodalmat[19]. Joggal feltételezhető, hogy e tanulmányokban előkelő helyet foglaltak el Abraham Gotthelf Kästner (1719—1800) könyvei. Kästner jelentőségét, a matematika fejlődéstörténetében beöltött szerepét manapság, a legújabb kutatások alapján, egyre kevésbé vitatják. Életművének átfogó rekonstrukciója azonban még várat magára.[20] Azt viszont már egy egészen rövid ismertetésben is meg kell említeni, hogy Kästnert, aki Segner András tanszéki utóda volt a göttingai egyetemen, a korabeli német tudományos körök Euler után a második legnagyobb hatású tekintélyként tisztelték.[21] Kästner göttingeni pályája előtt intenzíven foglalkozott természetfilozófiai kérdésekkel, egyebek között németre fordította Buffon *Histoire naturelle générale et particuliére* c. monumentális művének első három kötetét. E szöveghez fűzött jegyzeteiben megjelent jó néhány természetfilozófiai kulcsfogalom, melyeket azután tanítványai, köztük Blumenbach és Lichtenberg mélyítettek el.

Abraham Gotthelf Kästner göttingeni professzor (1719—1800) Forrás:
https://de.wikipedia.org/wiki/Abraham_Gotthelf_Kästner

Kästner göttingeni professzorként matematikát és fizikát tanított. Nevéhez olyan vita kezdeményezése fűződik, mint az euklideszi párhuzamossági posztulátum bizonyíthatóságának problémája. Kästner 1763-ban kiadott könyvében áttekintette a kérdéssel foglalkozó addigi irodalmat, és részletes történeti elemzését adta az euklideszi 11. axiómával kapcsolatos vizsgálatoknak. Évtizedes hatása elsősorban az analízis, illetve a geometria területén mutatkozott. Legnevesebb tanítványai közül Lichtenberg mellett meg kell még említeni Karl Gausst és Bolyai Farkast is.

Gauss diákkori karikatúrája Kästnerről, Bolyai Farkas magyarázó szövegével Forrás:
http://tom.haimath.at/xtras/matheblick/carl_friedrich_gauss.php

Míg (az amúgy nagyon kritikus szellemű) Lichtenberg feltétlen tisztelettel adózott Kästner zsenijének, Gauss viszonyulása nem volt ilyen egyértelmű: „A jó öreg Kästner professzorom, amikor kilépett a matematikából, tele volt szellemmel, de a szellem cserbenhagyta, mihelyst elmerült a matematikában.”[22]

Kästner megítélésének korszakonkénti változásai közvetve Dugonics értékelésének ellentmondásait is megvilágítják. Valószínűleg felülvizsgálatra szorul a 1830-50-es években kialakult vélemény, mely szerint Dugonics több évtizedes pályafutása alatt felgyűlt önálló matematikai teljesítménye semmit nem ér, egyetemi professzorként pedig egyenesen visszavetette a matematika oktatásának ügyét. Sokkal valószínűbb, hogy Dugonics (amint ezt többen feljegyezték róla) a Kästner féle — utóbb elavultnak minősített — (természet)filozófiai szemlélettel közeledett saját korának matematikai problémáihoz. A matematika történetében bekövetkezett nagyszabású fejlemények következtében azonban (mint pl. az aritmetika axiomatizálása, illetve a nem-euklideszi geometria kibontakozása, stb.), azok a problémák, amelyek az 1770-es évek „filozófiai" matematikájában ígéretesnek mutatkoztak, az 1800-as évek közepére úgymond „elavulttá" váltak, és ki is estek az uralkodó témák közül. Erre utal minden esetre Hermann Hankel (1839—1873) lekicsinylő nyilatkozata: „Gauss világhírű professzora, a nagy univerzális szellem, a mindentudó Kästner egyike volt a geometria Hófehérkéje hét törpéinek! Mit is produkált Németországban ez az egykor legkiválóbb matematikai géniuszként csodált Kästner? Semmit az égvilágon semmit! Töméntelen mennyiségű írása ízléstelenül terjengős üres fecsegés."[23]

Jelen írás tudomány-filozófiai-tudománytörténeti nézőpontja azonban nem azonos a tudományának történetét a mai csúcsteljesítményekhez vezető útként felvázoló matematikatörténet-íróéval, sem pedig a történészével, aki a szaktudósok ítéletére támaszkodva igyekszik egy-egy tudományág históriáját beilleszteni a korszak ideológiai-politikai összefüggéseibe. A tudományfilozófiai megközelítés célja: felhívni a figyelmet az ismert szövegek és tények újraértelmezésének esetleges hasznosságára. Márpedig az újabb, átfogó romantikakutatások eddigi eredményei azt mutatják, hogy a hagyományos, egyenes fejlődésvonalat felmutató kumulatív tudománytörténet-írás jó néhány ellentmondásba ütközik, miközben nagyon sok tudományos teljesítmény láthatatlan marad számára.

A romantika tudományos teljesítményét újragondoló komplex tudományfilozófiai vizsgálódások eddigi eredményei alapján, éppen ezért, megkockázatható az a feltevés, hogy Kästner matematikai munkásságának rekonstrukciója, s talán vele együtt közvetlen és közvetett tanítványai — közöttük Dugonics András - teljesítményének újragondolása valóban tartogathat meglepetéseket.

Békés Vera

MTA BTK Filozófiai Intézet (emeritus) főmunkatársa

http://www.fi.btk.mta.hu/hu/rolunk/kutatok/85-munkatarsak/96-bekes-vera

Megjegyzések

- Köszönjük a Gondolat kiadónak, *Berényi Gábornak*, a kötet szerkesztőjének, *Gurka Dezsőnek*, és a szerzőnek, hogy ezt az írást az Érintőben másodközlésben megjelentethettük.
- 2017. júniusi számunkban olvasható a Gondolat kiadó *Matézis, mechanika, metafizika* c. tanulmánykötetének ismertetése (http://ematlap.hu/index.php/konyvespolc-2017-06/518-matezis-mechanika-metafizika). *Békés Vera* írása Dugonics András (1740—1818) matematikai munkásságáról a tanulmánykötet 57—68. oldalain található.
- 2017. márciusában Csapodi Csaba írt többek között Dugonics Andrásról, mint a magyar matematikai nyelv egyik megalkotójáról (http://ematlap.hu/index.php/tudomany-tortenet-2017-03/456-szemelvenyek-a-magyar-matematika-munyelv-tortenetebol).

Lábjegyzetek

1

Sain Márton: *Matematikatörténeti ABC*. Tankönyvkiadó, Budapest. 1974. 161. o.

2

Sain M. im. 161. o.

3

Szily Kálmán: Apáczai Encyklopaediája mathem. és fizikai szempontból. Az *Adalékok a magyar nyelv és irodalom történetéhez. Összegyűjtött írások.* c. kiadványban. Hornyánszky Viktor Könyvnyomdája, Budapest, 1898. 113. o. Idézi Szénássy Barna, aki hozzáteszi még: „Ha az Enciklopédiában nem is fedezünk fel új matematikai eredményeket, és ha a benne tárgyalt anyag feldolgozása *metodikai* és *didaktikai* szempontból nem is képviseli az akkori legmagasabb külföldi szintet, az utókornak mégis méltányolnia kell a szerző nemes törekvését, vas szorgalmát, pedagógiai előrelátását és széles látókörét.” *A magyarországi matematika története.* Akadémiai Kiadó, Budapest. 1970. 59. o.

4

Sain M. im. 162. o. Persze ez a konstrukció megtalálható a hagyományos magyar tudománytörténet-írás egyéb területén is: ilyen „magányos bajnokai” a korai nyelvtudomány-történeti munkáknak pl. Sajnovics János, Gyarmathi Sámuel és Reguly Antal is.

5

Egykori diákjának beszámolóját idézi név nélkül Moyzes Károly. Vö. Kiss László (szerk.): *A’-mi vólt vittatni való. Válogatás Dugonics András matematikai írásaiból.* Tömörkény István Gimnázium, Szeged. 1968. 16. o.

6

Szénássy Barna: *A magyarországi matematika története.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1970. 105. o.

7

Az itt hozott valamennyi példa Dugonics 1784-es *Tudákosságá*ból származik. Vö. Szily Kálmán: *A magyar nyelvújítás szótára.* Hornyánszky, Budapest, 1902.

8

Végül a ‘párhuzamos’ kiszorította, de mint Szily Kálmán mondja, „nem azért mintha jobb volna, hanem, mivel jobban emlékeztet a *parallelára*. Szily Kálmán: *Apáczai Encyklopaediája mathem. és fizikai szempontból* 56. o.

9

Szénássy: im. 78—80, 103—107, 204, 330—332. o.

10

Piarista íróként sikeresen szolgálta a rokokó nemesi ízlést, jóllehet, ő maga nem nyert nemesi címet.

11

Ürményi József (1741—1825) Országbíró. Egyebek között a *Ratio Educationis* szellemének megfelelő új felsőoktatási rend kidolgozója és felügyelője volt.

12

Kosáry Domokos: *Művelődés a XVIII. századi Magyarországon.* Akadémiai Kiadó, Bp. 1980. 506. o.

13

Idézi Gyimesi István: Dugonics András matematikai munkássága, in Holl Béla (szerk.): *Piaristák Magyarországon, 1642—1992. Rendtörténeti tanulmányok.* Magyar Piarista Tartományfőnökség, Budapest, 1992. 62. o.

14

Részletesebben lásd erről: Péter László: Jósika szegedi boszorkányai, in: Szajbély Mihály (szerk.): *Mesterek és tanítványok. Ünnepi tanulmánykötet a hetvenéves Csetri Lajos tiszteletére.* Magvető Kiadó, Budapest, 416—428.

15

A’-mi vólt vittatni való. Válogatás Dugonics András matematikai írásaiból. Összeállította a Szegedi Tömörkény István Gimnázium matematikai tanári munkaközössége, Szeged 1968. Bevezetés.

16

Gyimesi István: *Dugonics András matematikai munkássága.* in: Piaristák Magyarországon, 1642—1992. Rendtörténeti tanulmányok. [szerk. Holl Béla]; kiad. a Magyar Piarista Tartományfőnökség, Bp. 1992. 186—231.

17

Gyimesi: im. 187. o.

18

Kosáry im.: 506. o. (kiemelés tőlem: B. V.)

19

A’-mi vólt vittatni való. Válogatás Dugonics András matematikai írásaiból. Összeállította a Szegedi Tömörkény István Gimnázium matematikai tanári munkaközössége, Szeged 1968. 12. o.

20

Ld. erről Békés Vera: A göttingai paradigma, in: Gurka Dezső (tanulmánykötet szerk.): *Göttingen dimenziói. A göttingeni egyetem szerepe a szaktudományok kialakulásában.* Gondolat kiadó, Budapest, 23—40. o.

21

Vö. pl. Timothy Lenoir: The Gottingen School and the Development of Transcendental Naturphilosophie in the Romantic Era. In: *Studies in the History of Biology,* Vol. 5, Baltimore: Johns Hopkins University Press. 111—205. (1982) 124. o.

22

Idézi: Tóth Imre: *Palimpszeszt — Szavak egy háromszög előtt.* Budapest, Typotex, 2001. 91. o. Gauss ezen megjegyzését egy későbbi kutatásnak érdemes majd annak fényében vizsgálni, hogy Kästner meggyőződéssel ragaszkodott az euklideszi alapvetéshez: „Senki, hacsak nem vesztette el ép eszét, nem létezik, aki kétségbe vonná Euklidész posztulátumát. El kell fogadni azt, anélkül, hogy a bizonyításával törődnénk.” Gauss pedig — saját állítása szerint — csak a „boeotiaiak lármázásától” tartva nem adta közre a nem-euklideszi geometria alapjait.

23

idézi: Tóth Imre: *Palimpszeszt* 91. o.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

SOKSZOR TALÁLKOZUNK OLYAN FELADATTAL, ÖTLETTEL, AMIT SZÍVESEN ELTESZÜNK KÉSŐBBI HASZNÁLATRA. A **TANÓRA – SZAKKÖR** ROVAT SZERETNE HOZZÁJÁRULNI A MATEMATIKATANÁROK ESZKÖZTÁRÁNAK GAZDAGÍTÁSÁHOZ, FÓRUMOT KÍVÁN ADNI A GONDOK, NEHÉZSÉGEK MEGTÁRGYALÁSÁRA IS. (ROVATSZERKESZTŐ: *HORVÁTH ESZTER*.)

Katz Sándor

2017. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Gondold tovább! – 1.

Mottó: „A legtöbb amit a tanár a diákjaiért tehet az, hogy észrevétlenül rávezeti egy-egy jó ötletre.” (Pólya György) *Katz Sándor* tanár úr előadásának szerkesztett változatát olvashatják ebben a cikkben és a következő számunkban megjelenő második részben, amelyet a 2017. évi székesfehérvári matematikatanári vándorgyűlésen hallgattak meg az ország különböző régióiból és a határon túlról érkezett kollégái. Jópár tanulságos feladat következik, mindegyiket érdemes lesz továbbgondolni!

Dékány Éva

2017. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

A matek miatt nem lesz diplomám?

Napjainkban az egyetemen továbbtanuló diákok jelentős része középszintű érettségit tesz matematikából. Az egyetemek nem követelik meg az emelt szintű érettségit, így a diákok többsége nem választja ezt a rögös utat...Sok éves középiskolai és egyetemi tanítási tapasztalatom alapján megkerestem a középiskolai matematika tananyagban azokat a területeket, amelyeket sokkal jobban kellene tudni a sikeres egyetemi tanulmányokhoz — *Dékány Éva.*

Fekete Imre

2017. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Interaktív jegyzetfüzetek térnyerése

Az interaktív jegyzetfüzetben a feladatsorok olvasásán, szerkesztésén és kommentelésén túl lehetőségünk van előre vagy általunk megírt szimulációkat is futtatni. A jegyzetfüzet kiváló lehetőséget ad a kutatók eredményeinek prezentálására, tényleges kutatómunkára és ennek következményeként oktatási platform bevezetésére is. A hallgató a jegyzetfüzet használata során megismerkedik a Python nyelvvel, az alapvető html és TeX parancsokkal. Ideális esetben már a jegyzetfüzetében oldja meg a kitűzött feladatokat. Ez a fajta oktatási technika pedig az aktív tanulást segíti elő. *Fekete Imre* adja át tapasztalatait.

Kosztolányi József

2017. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Beszámoló az 57. Rátz László Vándorgyűlésről

Július első hetében minden évben másik városban gyűlnek össze az ország különböző részeiből érkező matematikatanárok és tanítók a Bolyai János Matematikai Társulat hagyományos többnapos találkozójára. Ilyenkor az ország elismerten legjobb matematikatanárai is beülnek az iskolapadba. 2017-ben a matematikatanárok 57. Rátz László Vándorgyűlése — a vándorgyűlések történetében először — Székesfehérvárott volt.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Katz Sándor 2017. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Gondold tovább! – 1.

A 2017. évi székesfehérvári vándorgyűlésen elhangzott előadás szerkesztett változata

Mottó: „A legtöbb amit a tanár a diákjaiért tehet az, hogy észrevétlenül rávezeti egy-egy jó ötletre.” (Pólya György)

Ha egy feladatnak megtaláltuk a megoldását, ha egy állítást bebizonyítottunk, a legtöbb esetben ezzel nem zárult le a kérdés. Szinte mindig érdemes még tovább foglalkozni a problémával, további kérdéseket feltenni. Ha kreatív szakembereket akarunk képezni, akkor erre feltétlenül érdemes rászoktatni a tanítványainkat.

Természetesen az az ideális, ha a feladat megoldását, a bizonyítás lehetséges módját nem közöljük a tanulókkal, hanem csak segítjük őket, hogy felfedezzék a célravezető utat. Ekkor lesz a belátott ismeret is, és a célhoz vezető módszer is a tanulónak igazán sajátja, ekkor várható, hogy ezeket újabb problémák megoldásában használni tudja. De sajnos nincs mindig időnk arra, hogy kivárjuk, amíg a tanulók többsége maga fedezi fel a megoldás útját. Ha mi mutattuk meg a megoldást, akkor is sok haszonnal jár, ha továbbgondoljuk a problémát. A megoldás menetének áttekintése, további kérdések felvetése sokat segíthet abban, hogy mind az alkalmazott módszer, mind a kapott eredmény alkalmazásképes ismeretté váljon. Sőt a jó kérdések újabb hasznos ismeretekhez vezethetnek, kiválóan fejlesztik a kreativitást.

A kérdéseket először mi tesszük fel, majd fokozatosan érjük el, hogy ezeket már a tanulók maguk fogalmazzák meg. Ha ezt következetesen csináljuk, akkor eljuthatunk ahhoz az örömteli helyzethez, hogy a tanítványaink olyan érdekes kérdéseket is fel tudnak tenni, ami nekünk nem is jutott eszünkbe.

Néhány javasolt kérdés, amit célszerű feltenni

- Lehet-e a feladatnak több, más eredménye is?
- Lehet-e más módszerrel eredményre jutni? Melyik módszer a legalkalmasabb, melyik ragadja meg leginkább a feladat lényegét?
- Milyen más feladatokban vezethet eredményre a megoldásban alkalmazott módszer?
- Szükség volt-e a megoldáshoz minden feltételre?
- Lehet-e a problémát általánosítani?
- Megfordítható-e az állítás?
- Hogyan változhat a feladat eredménye, vagy megoldási módszere, ha a feltételeket kissé módosítjuk?
- Milyen alkalmazásai lehetnek a megoldott problémának?

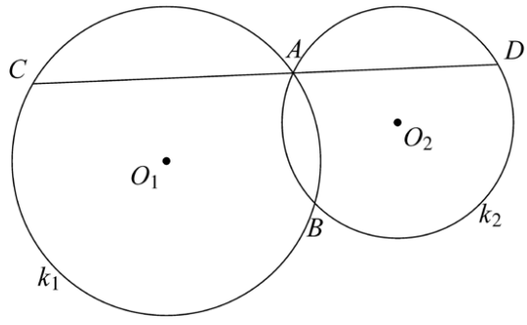
A továbbiakban bemutatok néhány példát arra, amikor tanítási vagy feladatkitűzői tevékenységem során a fenti kérdések tanulságos válaszokhoz vezettek. A példákat két cikkben mutatom be. Az elsőben a kérdéssor első részéhez mutatok példákat, a másodikban majd a további kérdésekkel foglalkozunk, amelyek kissé más típusú továbbgondolási lehetőségekre vezetnek.

I. Lehet-e a feladatnak több, más megoldása (eredménye) is?

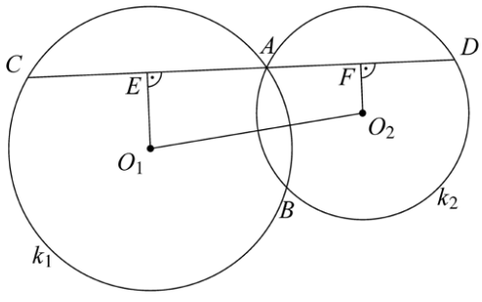
Ha megtaláltuk a feladatnak egy megoldását, akkor természetesen fel kell tennünk ezt a kérdést. Mégis, a legjobb tanulóknál is előfordul, hogy ez a kérdés elmarad, vagy felteszik ugyan a kérdést, de nem találják meg az összes megoldást. Sőt feladatgyűjteményekben is előfordul a nem teljes megoldás. Így volt ez a következő feladatnál is.

I/1. feladat. *Adott az* O_1 *középpontú,* r_1 *sugarú* k_1 *kör és az* O_2 *középpontú,* r_2 *sugarú* k_2 *kör, (* $r_1 \geq r_2$*). A két kör* A *és* B *pontokban metszi egymást. Az* A *pontra*

illeszkedő egyenesek közül melyiknek lesz a két körlemez egyesítésébe eső darabja a leghosszabb?



a) A szokásos megoldás:

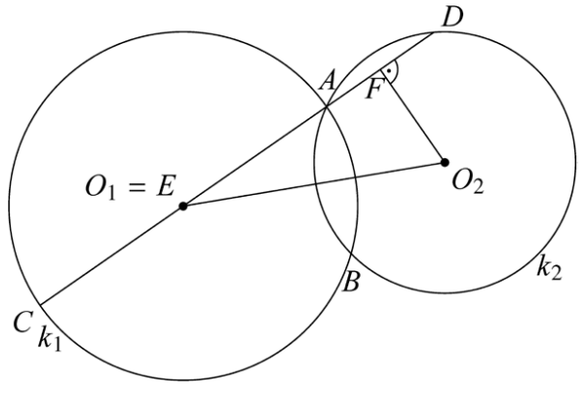


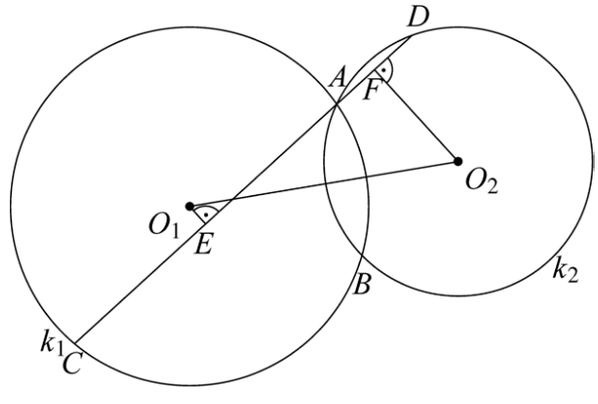
Állítsunk merőlegeseket a két középpontból a szelőre! Az így kapott O_1O_2FE derékszögű trapézban $EF \leq O_1O_2$. Egyenlőség akkor és csak akkor állhat, ha $CD \parallel O_1O_2$.

Másrészt E és F a húrdarabok felezőpontjai, ezért $CD = 2EF$.

Ebből $CD \leq 2 \cdot O_1O_2$. Tehát az A pontra illeszkedő egyenesek közül annak lesz a két körlemez egyesítésébe eső darabja a leghosszabb, amely párhuzamos a két kör középpontját összekötő szakasszal. Ekkor a maximum $2 \cdot O_1O_2$. A feltételeknek ez az egy egyenes felel meg.

Feladatgyűjteményben is ez a megoldás jelent meg, és versenyen a tanulók többsége is ezt a megoldást adta. Már itt szükséges meggondolni, hogy ha a szelőnek van közös pontja az O_1O_2 szakasszal, akkor az O_1O_2FE derékszögű trapéz háromszöggé vagy konkáv, hurkolt trapézzá fajul.

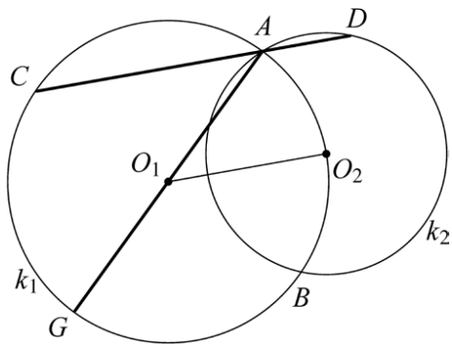




Az ábrákon látható, ezekben az esetekben $CD = 2 \cdot EF < 2 \cdot O_1O_2$. Tehát továbbra

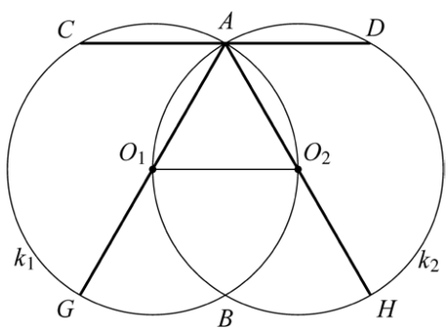
is érvényes, hogy a szelőnek a két körlemez egyesítésébe eső darabja nem lehet nagyobb $2 \cdot O_1O_2$*-nél.*

Egy minimális elemzés is gyanússá teheti, ezt a megállapításunkat. Nyilván, ez nem lehet jó, ha O_1O_2 *nagyon kicsi a sugarakhoz képest. Ez a megoldás csak akkor jó, ha* O_1O_2 *nagyobb a nagyobb kör sugaránál. Mi a helyzet a többi esetben?*



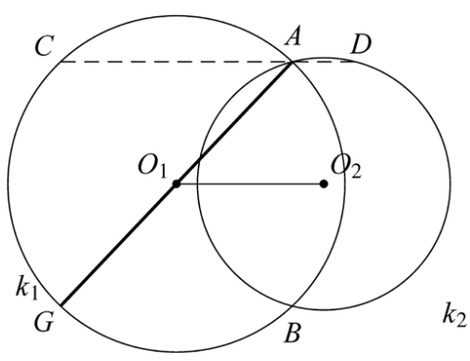
b) Ha $O_1O_2 = r_1 > r_2$:

Ez esetben az O_1O_2 szakasszal párhuzamos szakasz: $CD = 2 \cdot O_1O_2 = 2r_1$, de ugyanilyen hosszúságú a k_1 kör AG átmérője is. Tehát ebben az esetben két megoldás van.



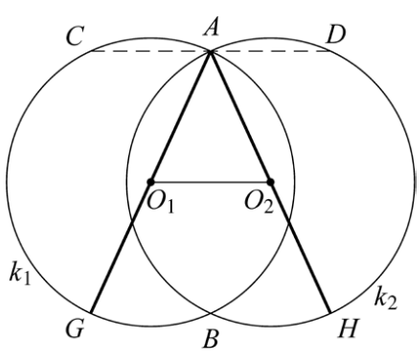
c) Ha $O_1O_2 = r_1 = r_2$:

Ez esetben az O_1O_2 szakasszal párhuzamos szakasz: $CD = 2 \cdot O_1O_2 = 2r_1 = 2r_2$, de ugyanilyen hosszúságú a k_1 kör AG átmérője és a k_2 kör AH átmérője is. Tehát ebben az esetben három megoldás van.



d) Ha $O_1O_2 < r_1$ és $r_1 > r_2$:

Ez esetben az O_1O_2 szakasszal párhuzamos szakasz: $CD = 2 \cdot O_1O_2 < 2r_1$, ezért csak a k_1 kör AG átmérője a megoldás. Tehát ebben az esetben egy megoldás van.



e) Ha $O_1O_2 < r_1 = r_2$:

Ez esetben az O_1O_2 szakasszal párhuzamos szakasz: $CD = 2 \cdot O_1O_2 < 2r_1 = 2r_2$, ezért most a k_1 kör AG átmérője és a k_2 kör AH átmérője a megoldás. Tehát ebben az esetben két megoldás van.

(A feladatot kitűztem a Fejér Lipót Matematikaversenyen 2005-ben a 11. évfolyam számára, de nem született teljes megoldás.)

A következő feladat is a Fejér Lipót Matematikaversenyen szerepelt 2004-ben a 12. évfolyam számára, de erre sem kaptunk teljes megoldást.

I/2. feladat. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!*

$$3\,\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \tag{1}$$

Alkalmazzuk a $\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta}{1\mp\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}$ összefüggéseket!

$$\frac{3\,\mathrm{tg}\,x+3\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x}+\frac{\mathrm{tg}\,x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{tg}\,x}=0 \tag{2}$$

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\,x+6\,\mathrm{tg}\,x+3\sqrt{3}-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\,x+2\,\mathrm{tg}\,x-\frac{\sqrt{3}}{3}=0$$

$$8\,\mathrm{tg}\,x+\frac{8\sqrt{3}}{3}=0$$

$$\mathrm{tg}\,x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\qquad k\in\mathbf{Z}$$

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk, hogy a kapott gyökök kielégítik az egyenletet.

De az is látható, hogy $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ is kielégíti az egyenletet. Hogyan lehetséges ez, hol veszett el ez a gyök?

A $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$ összefüggések alkalmazásánál az értelmezési tartomány szűkebb lesz! A bal oldal értelmezve van, ha α és β közül csak az egyik $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ alakú, de a jobb oldal ez esetben nincs értelmezve. Ezért *ezeknek az összefüggéseknek az alkalmazásakor meg kell vizsgálnunk, nem vesztettünk-e gyököt, azaz hogy azok a számok, amelyekkel az értelmezési tartomány szűkebb lett, megoldásai-e az eredeti egyenletnek.*

Látható, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ az eredeti (?) egyenletnek gyöke, de (?)-nek és a következőknek már nem. Tehát az (?) egyenlet gyökei $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ és $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, ahol $k \in \mathbf{Z}$.

Igen hasznosnak találom, ha versenyeken ilyen típusú feladat is szerepel, amelyben egy megoldást könnyű megtalálni, de a teljes megoldás komolyabb elemzést igényel. Így sok tanulónak van sikerélménye egy megoldás megtalálásával, de a legjobbak között lehet különbséget tenni aszerint, hogy meddig jutnak el a teljes megoldásból. Azért is jó, ha ilyen feladatok versenyeken szerepelnek, mert a teljes megoldáshoz szükséges elemzés azokban is megmarad, akik csak részeredményekig jutottak.

A következő, szintén a Fejér Lipót Versenyről választott feladatokban is könnyű egy megoldást találni, de a teljes megoldás megtalálása komolyabb odafigyelést követel. Ezen feladatok megoldását az olvasóra hagyjuk, illetve megtalálhatók [1]-ben.

I/3. feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy a p paraméter különböző értékei esetén hány megoldása lesz a $\sin 2x - \cos x = 2p \cdot \operatorname{tg} x \cos x - p$ egyenletnek a $[0; 2\pi)$ intervallumon?*

I/4. feladat. *A p valós paraméter milyen értékei esetén lesz pontosan egy valós gyöke a következő egyenletnek?*

$$\log_{(x-1)}(x+p) = 0{,}5$$

I/5 feladat. *Az a valós paraméter mely értékei esetén van pontosan egy valós megoldása a következő egyenletnek?*

$$25^x - (a-1)5^x + 2a + 3 = 0$$

A következő részben több egymással összefüggő, egymást kiegészítő továbbgondolási lehetőséget tekintünk át.

II. Lehet-e más módszerrel eredményre jutni? Melyik módszer ragadja meg leginkább a feladat lényegét? Milyen más feladatokban vezethet eredményre a megoldásban alkalmazott módszer? Szükség volt-e a megoldáshoz minden feltételre?

Elég természetes dolog matematikatanításunkban, hogy egy feladatnak többféle megoldását is keressük. Már csak azért is, mert lehet, hogy egy másik, hasonlónak tűnő feladatnál valamelyik módszer nem működik, akkor legyen kéznél más módszer is.

Erdős Pál szerint Istennek van egy könyve, és abban szerepel minden feladatnak a Megoldása. Az igazi, a legszebb, legelegánsabb Megoldás. Egy matematikus ne elégedjen meg azzal, hogy egy problémának megtalálja egy megoldását, törekedjen a Könyvben levő Megoldás megtalálására. Tanítványainkat is próbáljuk rávenni, arra, hogy a feladatoknak keressék az alapgondolatát, a feladat szellemiségéhez leginkább közelítő megoldását. Próbáljuk kitalálni, hogy mire is gondolt a feladat kitűzője.

A következő feladatoknak többféle megoldását is megadjuk, illetve keressük a feladat alapgondolatához leginkább közelítő megoldást.

II/1. feladat. *Az* a, b, c *valós számokra teljesül, hogy* $(a+b+c)c < 0$. *Igazoljuk, hogy ezekre a számokra* $b^2 > 4ac$ *is teljesül!*

1. megoldás. A szokásos megoldás az, hogy a feltételt alakítjuk addig, amíg megkapjuk az állítást.

Ez esetben nem látszik rögtön a célravezető út. Az látszik, hogy a kisebb oldalon a $4ac$ kifejezés kialakítható

$$(a+b+c)c < 0$$

$$0 > ac + bc + c^2 \qquad / \cdot 4$$

$$0 > 4ac + 4bc + 4c^2$$

Ha mindkét oldalhoz b^2-et adunk, akkor már az állítás minden eleme szerepelni fog.

$$b^2 > 4ac + b^2 + 4bc + 4c^2$$

Innen már látható a megoldás: $b^2 > 4ac + (b+2c)^2 \geq 4ac$.

2. megoldás. Ha egy feltételből kell egy állításhoz eljutni, akkor az indirekt bizonyítási mód is sokszor célra vezet. Tegyük fel, hogy a feltétel igaz, de az állítás nem igaz, és ebből jussunk ellentmondásra.

Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz: $b^2 \leq 4ac$. Adjuk ezt össze a feltételben szereplő $ac + bc + c^2 < 0$ egyenlőtlenség 4-szeresével!

$$b^2 + 4ac + 4bc + 4c^2 < 4ac$$

$$b^2 + 4bc + 4c^2 < 0$$

$$(b+2c)^2 < 0$$

Egy négyzetszám nem lehet negatív, így ellentmondásra jutottunk.

3. megoldás. Ha az állítást $b^2 - 4ac > 0$ alakban írjuk, akkor kézenfekvő, hogy a megoldást a másodfokú egyenletek, függvények témakörben keressük.

Tekintsük az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvényt!

Ha $a = 0$, akkor a feltétel miatt nem lehet b is 0, ezért a $b^2 > 4ac$ állítás teljesül.

Ha $a \neq 0$, akkor $f(1) = a + b + c$ és $f(0) = c$, ezek a feltétel szerint különböző előjelűek. Ha egy másodfokú függvény pozitív és negatív értéket is felvesz, akkor van két zérushelye, ezért diszkriminánsa $D = b^2 - 4ac > 0$.

(Talán joggal feltételezhetjük, hogy a kitűző erre a megoldásra gondolt.)

II/2. feladat. x, y, z *olyan pozitív valós számok, amelyekre*

$$\begin{aligned} x^2+xy+y^2 &= 25, \\ y^2+yz+z^2 &= 36, \\ z^2+zx+x^2 &= 49. \end{aligned}$$

Határozzuk meg $xy+yz+zx$ *értékét!*

1. megoldás. Az x^2+xy+y^2 kifejezés az x^3-y^3 kifejezés szorzat alakjának egyik tényezője, ezért szorozzuk az egyenleteket rendre $(x-y)$, $(y-z)$, $(z-x)$-szel!

Összeadva:

$$\begin{array}{r} x^3-y^3=25x-25y \\ y^3-z^3=36y-36z \\ z^3-x^3=49z-49x \\ \hline 0=13z+11y-24x \end{array}$$

Ebből $x=\dfrac{11y+13z}{24}$.

Helyettesítsük ezt vissza az eredeti első egyenletbe:

$$\frac{121y^2+286yz+169z^2}{576}+\frac{11y^2+13yz}{24}+y^2=25 \qquad / \cdot 576$$

A

$$\begin{aligned} 961y^2+598yz+169z^2 &= 14\,400 \\ y^2+yz+z^2 &= 36 \end{aligned}$$

egyenletrendszerben a konstanst érdemes kiküszöbölni.

$$961y^2 + 598yz + 169z^2 = 14\,400$$

$$400y^2 + 400yz + 400z^2 = 14\,400$$

$$561y^2 + 198yz - 231z^2 = 0 \qquad / : 33z^2$$

$$17\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 6 \cdot \frac{y}{z} - 7 = 0$$

Ennek pozitív megoldása $\frac{y}{z} = \frac{-3+8\sqrt{2}}{17}$, ebből $y = \frac{-3+8\sqrt{2}}{17}z$.

Ezt behelyettesítve az $y^2 + yz + z^2 = 36$ egyenletbe, a z-re kapott másodfokú egyenlet pozitív gyöke $z = 6 \cdot \sqrt{\frac{375-88\sqrt{2}}{433}} \approx 4{,}564$.

Ebből $y = 6\sqrt{\frac{207-104\sqrt{2}}{433}} \approx 2{,}232$,

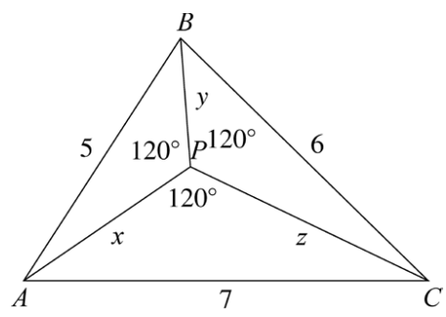
$$x = \frac{66\sqrt{\frac{207-104\sqrt{2}}{433}} + 78\sqrt{\frac{375-88\sqrt{2}}{433}}}{24} \approx 3{,}495.$$

Ezekből $xy + yz + zx \approx 33{,}94$. [1]

2. megoldás. Ezúttal geometriai, illetve trigonometriai meggondolásokat alkalmazunk.

Az egyenletek egy-egy olyan háromszögre felírt koszinusz-tételek, amelyekben az 5, 6, 7 egység hosszúságú oldalakkal szemben rendre $120°$-os szög van.

Az 5, 6, 7 egység oldalú ABC háromszögben P legyen az a pont, amelyből az oldalak $120°$-os szögben látszanak.[2]



Ekkor az egyenletekben szereplő ismeretlenek éppen az $x = PA$, $y = PB$, $z = PC$ értékeket adják.

Az egyenletrendszernek csak egy pozitív számhármas a megoldása[3], tehát ezek PA, PB és PC.

Mekkora $xy + yz + zx$ értéke?

Számítsuk ki az ABC háromszög területét kétféleképpen: Héron-képlettel és a kis háromszögekre felírt trigonometrikus területképletek összegeként:

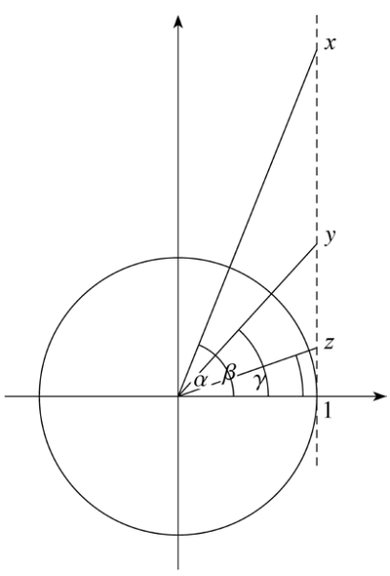
$$T = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = \frac{(xy+yz+zx)\cdot \sin 120^\circ}{2} = xy + yz + zx = 24\sqrt{2}$$

Ebből $xy + yz + zx = 24\sqrt{2} \approx 33{,}94$.

(Talán erről a megoldásról feltételezhetjük, hogy a Könyvből való.)

A trigonometria alkalmazása algebrai feladatok megoldását sokszor könnyebbé teszi. Most egy algebrai egyenlőtlenség és egy szélsőérték-feladat megoldására mutatunk trigonometrikus megoldást.

II/3. feladat. *Igazoljuk, hogy három pozitív valós szám közül mindig kiválasztható kettő,* x *és* y*, amelyekre* $0 \le \dfrac{x-y}{1+xy} < 1$ *teljesül!*



Az $\dfrac{x-y}{1+xy}$ kifejezés sugallja a $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ összefüggés alkalmazását.

Ha a három pozitív szám x, y, z, akkor α, β, γ legyenek azok a hegyesszögek, amelyekre $\operatorname{tg}\alpha = x$, $\operatorname{tg}\beta = y$, $\operatorname{tg}\gamma = z$.

A három hegyesszög között mindig van két olyan, amelyek különbsége kisebb 45°-nál. Ha például $0 \le \alpha - \beta < 45^\circ$, akkor $0 \le \operatorname{tg}(\alpha-\beta) < 1$. Ez pedig éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget adja.

Látható az is, hogy az alsó határ akkor érhető el, ha a számok között van két egyenlő. A felső határ nem csökkenthető, mert ha $x \to \infty$, $y = 1$, $z \to 0$, akkor $(\alpha-\beta) \to 45^\circ$ és $(\beta-\gamma) \to 45^\circ$, ezért mindkét hányados tetszőlegesen közel kerül 1-hez.

A trigonometrikus megoldás ötletet adhat tisztán algebrai megoldás alkalmazására is.

2. megoldás. Három pozitív szám között mindig van vagy kettő, amely 1-nél nem kisebb, vagy kettő, amely 1-nél nem nagyobb. Legyen ez a kettő x és y úgy, hogy $x \geq y$.

Ha $1 \leq y \leq x$, akkor $\dfrac{x-y}{1+xy} \leq \dfrac{x-1}{1+x} < 1$.

Ha $0 < y \leq x \leq 1$, akkor $\dfrac{x-y}{1+xy} < \dfrac{x}{1} \leq 1$.

Joggal állíthatjuk, hogy itt az első megoldás fejezi ki jobban a feladatban rejlő gondolatot, és a geometriai ábra alapján könnyebben látható, hogy a felső határ nem csökkenthető.

Különösen ajánlott a trigonometrikus helyettesítés, ha $x^2 + y^2 = c$ alakú egyenlettel vagy feltétellel találkozunk.

Egy ilyen szélsőérték-feladatot is választottam, olyat, amelyben a szokásos elemi módszerek, például nevezetes közepek nem látszanak célravezetőnek, a trigonometrikus helyettesítés viszont szép megoldásra vezet.

II/4. feladat. *Határozzuk meg az $x^2 + xy$ kifejezés maximumát, ha $x^2 + y^2 = 1$ és x, $y > 0$.*

(Szőkefalvi verseny 1992.)

Megoldás. Az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel sugallja, hogy vezessük be az $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$ helyettesítést! ($\alpha \in [0; \pi/2)$) Így a $\cos^2\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha$ kifejezés maximumát keressük a $[0; \pi/2)$ intervallumon.

$$f(\alpha) = \cos^2\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 0{,}5 \cdot (2\cos^2\alpha - 1 + 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha) + 0{,}5 =$$

$$= 0{,}5 \cdot (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha) + 0{,}5 = 0{,}5 \cdot \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 2\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 2\alpha\right) + 0{,}5 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(2\alpha + 45^\circ) + \frac{1}{2}.$$

Ennek maximuma $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$, ha $\alpha = 22{,}5^\circ$, azaz ha $x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

A következő feladat algebrai megoldása szintén nem kézenfekvő, de a geometria megoldás szép, elegáns.

II/5. feladat. *Legyenek x, y, z a $[0;1]$ intervallum tetszőleges számai. Mutassuk meg, hogy*

$$0 \le x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) \le 1!$$

(Arany D. versenyfeladat, 1992.)

A bal oldali egyenlőtlenség nyilvánvalóan igaz, hiszen mindhárom tag nem negatív.
Csak a jobb oldali egyenlőtlenséggel foglakozunk.

1. megoldás (algebrai). A jobb oldali egyenlőtlenség bizonyításához vizsgáljuk a tagok két tényezőjét.

I. Ha van köztük olyan, amelyben az egytagú nem kisebb a másiknál, például

$$x \ge 1 - y, \qquad (*)$$

akkor végezzük a következő becslést

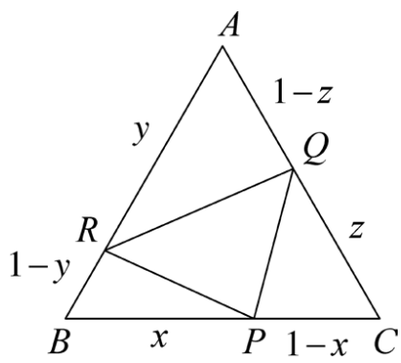
$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) = x + y + z - xy - yz - zx =$$
$$= z(1-y-x) + y + x - xy \le y + x - xy \le 1.$$

Az első egyenlőtlenség azért igaz, mert (?) miatt az elhagyott tag nem pozitív.
A második 0-ra redukálással, szorzattá alakítással látható be:
$0 \le 1 - y - x + xy = (1-x)(1-y)$, és itt mindkét tényező nemnegatív.

II. Ha minden a tagban az egytagú tényező kisebb a kéttagúnál: $x < (1-y)$,

$y < (1-x)$, $z < (1-x)$, akkor legyen $X = 1-x$, $Y = 1-y$, $Z = 1-z$, ebből $x = 1-X$, $y = 1-Y$, $z = 1-Z$, és ekkor az egyenlőtlenség új alakja: $(1-X)Y + (1-Y)Z + (1-Z)X \leq 1$. Itt viszont már $Y \geq 1-X$, ezért ez az egyenlőtlenség az I. pont szerint igazolható.

2. megoldás (geometriai). Mivel kéttényezős szorzatokat vizsgálunk, próbáljuk meg azokat területek mértékeként értelmezni! Tekintsünk egy 1 oldalú szabályos háromszöget, és ennek oldalain vegyük fel az x, y, z hosszúságú szakaszokat.



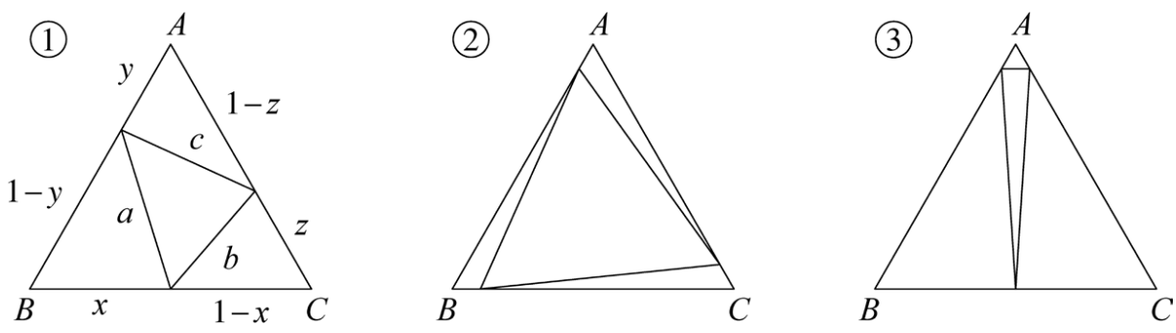
Ahhoz, hogy területeket tudjunk értelmezni, az $x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) \leq 1$ egyenlőtlenség mindkét oldalát szorozzuk $\frac{1}{2} \cdot \sin 60°$-kal!

$$\frac{x(1-y)\sin 60°}{2} + \frac{y(1-z)\sin 60°}{2} + \frac{z(1-x)\sin 60°}{2} \leq \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 60°}{2}$$

Az itt szereplő tagok, rendre a BPR, az AQR, a CPQ, illetve az ABC háromszögek területei.

Az ábra alapján nyilvánvaló az egyenlőtlenség helyessége.

A geometriai megoldásnak előnye itt is, hogy az ábráról könnyen leolvasható, mikor érhetők el, illetve hogyan közelíthetők a határok. Az alábbi ábrák mutatják, hogy az alsó határ akkor érhető el, ha $x = y = z = 0$, vagy $x = y = z = 1$. A felső akkor, ha x, y z közül egyik 0, a másik 1, a harmadik tetszőleges.



Megoldás nélkül adunk néhány algebra feladatot, amelyeket a geometriai, illetve trigonometriai megközelítéssel is megoldhatunk. További ilyen feladatokat találhatunk

[2]-ben, illetve [3]-ban.

II/6. feladat. *Igazoljuk, hogy*

$$\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\sqrt{n^2-3^2}+\ldots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}<0{,}8n^2,$$

ha n *pozitív egész szám!*

II/7. feladat. *Igazoljuk, hogy ha* a, b, c *pozitív számok, akkor*

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geq\sqrt{a^2+ac+c^2}!$$

II/8. feladat. *Az* $x^2+y^2=4$, $z^2+v^2=9$, $xv+yz\geq 6$ *feltételeknek megfelelő számnégyesek közül válasszuk ki azokat, amelyekre* $x+z$ *a legnagyobb!*

II/9. feladat. *Mutassuk meg, hogy ha az* a, b, c, d *valós számokra* $a^2+b^2=1$ *és* $c^2+d^2=1$, *akkor* $\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}+\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\leq 2\sqrt{2}$*!*

Nézzünk most egy másik megoldást a ***II/5.*** *feladatra, és gondoljuk tovább, hogyan lehet még hatékonyabban használni az alkalmazott ötletet.*

II/5. feladat 3. megoldása (függvénytani). Az $x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)$ kifejezést tekintsük x függvényének, ahol y és z paraméterek.

$$f(x)=(1-y-z)x+y-yz+z,$$

ahol $x\in[0;1]$.

Most is elegendő csak a jobb oldali egyenlőtlenséget vizsgálni. *Egy korlátos, zárt intervallumon értelmezett lineáris függvény szélsőértékeit az intervallum valamelyik végpontjában veszi fel, ezért elegendő megmutatni, hogy* $f(0)\leq 1$, *és* $f(1)\leq 1$. *(Ha a függvény konstans, akkor is a végpontokban veszi fel szélsőértékét, de nemcsak ott.)* $f(0)=y+z-yz$,

$$y+z-yz \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 1-y-z+yz \Leftrightarrow 0 \le (1-y)-z(1-y) \Leftrightarrow 0 \le (1-y)(1-z).$$

Ez igaz, mert az utolsó egyenlőtlenségben a feltételek szerint mindkét tényező nemnegatív.

$f(1) = 1-y-z+y+z-yz = 1-yz \le 1$, a feltételek szerint ez is igaz.

A felhasznált ötlet alkalmazható, ha olyan kifejezés maximumát keressük, amely valamelyik változónak lineáris függvénye, és ez a változó egy korlátos zárt intervallumon veszi fel értékeit. Ilyenkor elegendő a két végpontban felvett függvényértéket vizsgálni.

Mindkét feltétel a feladatok viszonylag szűk rétegében teljesül. A következő feladatban kissé szélesebb körben alkalmazzuk a fenti ötletet.

II/10. feladat. *Igazoljuk, hogy ha* a, b, $c \in [0;1]$, *akkor:*

$$a^2+b^2+c^2 \le a^2b+b^2c+c^2a+1$$

Megoldás. Tekintsük a $[0,1]$ intervallumon értelmezett $f(x) = (1-b)x^2 - c^2x + b^2 + c^2 - b^2c - 1$ függvényt. Azt kell belátnunk, hogy a $[0,1]$ intervallumon $f(x) \le 0$.

Ha $b=1$, akkor $f(x) = -c^2x + c^2 - c$, lineáris függvény, a **II/5.** feladat harmadik megoldása szerint elegendő belátni, hogy $f(0) = c^2 - c \le 0$ és $f(1) = -c \le 0$. Ez az adott intervallumon teljesül.

Ha $b \in [0,1[$, akkor f *grafikonja egyenes állású parabola, ezért* f *a* $[0,1]$ *intervallum valamelyik végpontjában veszi fel maximumát.*

$$f(0) = b^2+c^2-b^2c-1 = b^2(1-c)+(c-1)(c+1) = (1-c)(b^2-c-1)$$

$$f(1) = -b+b^2-b^2c = b(-1+b-bc)$$

Mindkét esetben az első tényező nem negatív, a második nem pozitív, ezért szorzatuk nem pozitív.

Most a felhasznált függvények köre bővült, de az még mindig eléggé leszűkíti az alkalmazhatóság körét, hogy a változók egy korlátos zárt intervallumon veszik fel értékeit.

A következő feladatban egy még szélesebb függvényhalmazban alkalmazzuk ötletünket.

II/11. feladat. *Az* a, b, c *valós számokra teljesül, hogy* $0 < a \leq b \leq c$. *Mutassuk meg, hogy*

$$9 \leq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \leq 9+2\left(\sqrt{\frac{c}{a}}-\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2!$$

Megoldás. A bal oldali egyenlőtlenség közismert, azonnal következik például az a, b, c pozitív számokra felírt harmonikus és számtani közepek között fennálló

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

egyenlőtlenségből. Egyenlőség $a=b=c$ esetén teljesül.

A jobb oldali egyenlőtlenség igazolásához tekintsük az $[a;c]$ intervallumon értelmezett

$$f(x)=(a+x+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}+\frac{1}{c}\right)$$

függvényt.

Azt kell belátnunk, hogy az $[a;c]$ intervallumon

$$f(x) \leq 9+2\left(\sqrt{\frac{c}{a}}-\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2.$$

Az f függvényt

$$f(x)=\frac{a+c}{x}+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)x+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+3$$

alakban írva látható, hogy a $g(x)=\frac{a+c}{x}$ törtfüggvény és a $h(x)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)x+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+3$ lineáris függvények összege, ezért a pozitív számok halmazán, így az $[a;c]$ intervallumon is folytonos és konvex.

Egy korlátos zárt intervallumon folytonos, konvex függvény az intervallum valamelyik végpontjában felveszi a maximumát.

Ezért elegendő belátnunk, hogy

$$f(a) \leq 9+2\left(\sqrt{\frac{c}{a}}-\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2 \qquad (*)$$

és

$$f(c) \leq 9 + 2\left(\sqrt{\frac{c}{a}} - \sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2. \qquad (**)$$

$$f(a) = (2a + c)\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{c}\right) = 5 + 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

és

$$f(c) = (a + 2c)\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{c}\right) = 5 + 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right).$$

Továbbá

$$9 + 2\left(\sqrt{\frac{c}{a}} - \sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2 = 9 + 2\left(\frac{a}{c} - 2 + \frac{c}{a}\right) = 5 + 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right).$$

Ezért a (*) és (**) egyenlőtlenségek teljesülnek. Látható az is, hogy egyenlőség $a = b$ vagy $b = c$ esetén teljesül.

Bevezetőnkben megvizsgálandó kérdésnek ajánlottuk, hogy szükség volt-e minden feltételre, felhasználtuk-e azt teljes egészében. Az utóbbi három feladat szép példa volt arra, hogy a feltételek továbbgondolásával hogyan lehet szélesebb körben használhatóvá tenni egy ötletet. (Azt, hogy elegendő az intervallum végpontjaiban felvett függvényértéket vizsgálni.) Az első feladatban lineáris függvényre alkalmaztuk, de ha csak a maximumát keressük a kifejezésnek, akkor „egyenes állású” másodfokú függvénynél is alkalmazható, a harmadikban pedig csak azt használtuk fel, hogy a függvény konvex. A következő feladatok megoldásához is ajánljuk a fenti ötlet alkalmazását.

II/12. feladat. *Az* a, b, c, d, e *valós számok a* $[p;q]$ *intervallum elemei, ahol* $0 < p < q$. *Igazold, hogy*

$$(a + b + c + d + e)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right) \leq 25 + 6\left(\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}} - \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}\right)^2!$$

II/13. feladat. *Az* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *valós számok az* $[a; b]$ *intervallum elemei, ahol* $0 < a < b$. *Igazold, hogy*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2!$$

II/14. feladat. *Legyenek* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *és* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *pozitív valós számok, és legyenek* m_i *(* $i = 1, 2, \ldots, n$*) olyan valós számok, amelyekre* $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 1$. *Igazoljuk, hogy akkor*

$$(m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n)(m_1b_1 + m_2b_2 + \ldots + m_nb_n) \leq m_1a_1b_1 + m_2a_2b_2 + \ldots + m_na_nb_2!$$

Katz Sándor

a Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium

és az Erdős Pál Tehetséggondozó Iskola tanára

Irodalomjegyzék

1
Katz Sándor: Matematika versenyfeladatok. A Fejér Lipót matematikaverseny feladatai 1987—2006. Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány 2009.
2
Róka Sándor: Algebrai feladatok megoldása geometriai hátérrel. A Matematika Tanítása 1996. 3. sz.
3
Katz Sándor: Néhány algebra feladat megoldása trigonometriai módszerekkel. POLYGON 2003. 1—2 sz.
4
K. A. Mnacakanyan, I. M. Szedrakjan: Egy függvénytulajdonság alkalmazása némely egyenlőtlenségekben MATEMATIKA V SKOLJE 1988/6. sz.

Lábjegyzetek

1

Megjegyzés: $xy + yz + zx$ pontos értéke is kiszámítható. Szerk.

2

Ez a háromszög úgynevezett izogonális pontja. Nem minden háromszögben esik a háromszög belsejébe — mint látni fogjuk, ezt kihasználjuk —, csak amelyekben minden szög is kisebb $120°$-nál. Az 5, 6, 7 oldalú háromszögben, mint az egyszerűen ellenőrizhető, ez a tulajdonság teljesül. Szerk.

3

Ha lenne egy másik pozitív x megoldás is, például PA-nál kisebb, akkor az első egyenlet szerint ehhez nagyobb pozitív y tartozna, de ehhez a második egyenlet szerint kisebb pozitív z lenne, és így a harmadik egyenletben kisebb x-ből és z-ből nem kaphatnánk 49-et.

Ugyanebben a számunkban olvasható a Rátz László Vándorgyűlésről szóló beszámoló.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Dékány Éva 2017. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

A matek miatt nem lesz diplomám?

Napjainkban az egyetemen továbbtanuló diákok jelentős része középszintű érettségit tesz matematikából. Az egyetemek nem követelik meg az emelt szintű érettségit, így a diákok többsége nem választja ezt a rögös utat. A sikeres egyetemi tanulmányokhoz viszont egy jeles középszintű érettségi gyakran nem elegendő. A jó hír az, hogy nem minden szakon elengedhetetlen a teljes emelt szintű tananyag ismerete.

Sok éves középiskolai és egyetemi tanítási tapasztalatom alapján megkerestem a középiskolai matematika tananyagban azokat a területeket, amelyeket sokkal jobban kellene tudni a sikeres egyetemi tanulmányokhoz. Alapvetően fontos, hogy a diákok hibátlanul és gyorsan bánjanak a **hatványokkal** és az **algebrai törtekkel**, ismerjék az elemi függvények alapvető tulajdonságait és grafikonjait (lásd függvénytábla), jártasak legyenek a függvény-transzformáció területén.

Jelen írásomban a matematika három olyan alapvető területét választottam ki, amivel szinte minden diák találkozik az egyetemen az első féléves matematika kurzusokon. Ezek a határértékszámítás, a differenciálszámítás és az integrálszámítás. Mindegyik témához mutatok néhány alapvető és jellemző feladatot. A feladatok megoldását elkezdem és addig folytatom, amíg az a középszintű érettségi tananyagának ismeretében lehetséges. Az a célom, hogy megmutassam, hogy a megoldás lépéseinek jelentős része sikeresen megtehető akkor is, ha korábban nem hallottunk sem határértékszámításról, sem differenciálszámításról, sem integrálszámításról. Azt állítom, hogy akár 50% fölötti eredményt is elérhetünk egy egyetemi zárthelyi dolgozatban ezen témakörökből, ha algebrából és a függvényekből nagyon biztos alapunk van. Bizonyos szavakat és fogalmakat írásomban félkövérrel kiemeltem, ezzel kívántam jól láthatóvá tenni, hogy milyen típusú egyetemi feladatok megoldásához milyen konkrét középiskolai matematikai ismereteket használunk.

Írásomnak az a célja, hogy arra buzdítsam kollégáimat és az egyetemre készülő diákokat, hogy ezeket a témaköröket kiemelten kezeljék. Ha a diákok úgy érzik, további gyakorlásra van szükségük a középszintű érettségin túl, akkor tegyék meg. Ne az egyetemen, az első kudarcok után szembesüljenek azzal, hogy a középiskolai hiányosságaik akadályozzák meg őket az egyetemi tananyag sikeres teljesítésében.

Határértékszámítás

A határértékszámítás az egyetemen tanított matematikai témakörök közül az egyik, amely a diákoknak a magukkal hozott hiányosságok miatt gondot szokott okozni. Nézzük a következő feladatot:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-18}{2x^2-5x-3}=?$$

A megoldás menete:

- **Kiszámoljuk** a számláló és a nevező **helyettesítési értékét** $x=3$ esetén. Mivel mindkettő nulla, ezért
- **szorzattá alakítjuk** a számlálót. Könnyebbé teszi a probléma megoldását, ha tudjuk, hogy a szorzattá alakítást **kiemelés**sel érdemes kezdeni. Utána **nevezetes azonosság** alkalmazásával folytatjuk:

$$2x^2-18=2\left(x^2-9\right)=2(x-3)(x+3)$$

- A nevezőt is szorzattá kell alakítanunk. Mivel itt nem érdemes kiemelni és nem is nevezetes azonosság, a **gyöktényezős alakra hozás**t alkalmazzuk, ami minden szorzattá alakítható másodfokú kifejezés esetén elvégezhető:

$$2x^2-5x-3=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)$$

- **Egyszerűsítjük a** kapott **törtet**. Éppen azért alakítottuk szorzattá a számlálót és a nevezőt is, hogy ezt megtehessük:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-18}{2x^2-5x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)(x+3)}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x+3)}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\dots$$

Egészen eddig a lépésig nem kellett figyelembe venni a $\lim\limits_{x\to 3}$ jelet, egy algebrai törtön végeztünk azonos átalakításokat. Vegyük észre, hogy a megoldáshoz szükséges öt lépés közül az első négy csak a középiskolai anyag ismeretét igényli.

Második feladat:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^4}\right)=?$$

- Mivel a **nullával való osztás értelmetlen** (és határértékben végtelen lenne), ezért elvégezzük a törtek kivonását. Ehhez először a két nevező **legkisebb közös többszörösét keressük meg**. Nem érdemes a nevezők szorzatát venni, mert akkor később kénytelenek lennénk egyszerűsíteni, ami megtehető, de fölöslegesen bonyolítaná a feladat megoldását.
- Mivel a két nevező legkisebb közös többszöröse x^4, ezért az első **törtet** x^4 nevezőjűvé **bővítjük**.
- **A két** azonos nevezőjű **törtet kivonjuk egymásból**:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^4}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^2}{x^4}-\frac{5}{x^4}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5}{x^4}=\dots$$

Egészen eddig a lépésig nem kellett figyelembe venni a $\lim\limits_{x\to 0}$ jelet, algebrai törtekkel végeztünk azonos átalakításokat. Vegyük észre, hogy a megoldáshoz szükséges négy lépés közül az első három csak a középiskolai anyag ismeretét igényli.

Differenciálszámítás

Az egyetemen tanított matematika anyag egyik központi kérdése, hogyan lehet egy függvény helyi szélsőértékét (minimumát/maximumát) megkeresni és monotonitási (növekedési/csökkenési) intervallumait meghatározni. Ehhez először deriválni kell a vizsgált függvényt, majd meg kell keresni a deriváltfüggvény zérushelyét. Más szóval olyan egyenletet kell megoldani, ahol az egyik oldalon nulla áll. Majd a deriváltfüggvény előjelét kell meghatározni a teljes értelmezési tartományon.

Feladat: Legyen $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{(x-2)^4}$. Határozzuk meg az összes helyi szélsőértékét!

- Először deriváljuk a függvényt:

$$f'(x)=\frac{3(x+1)^2(x-2)^4-(x+1)^3 4(x-2)^3}{\left((x-2)^4\right)^2}$$

- A számlálóban **kiemeljük** az összes közös tényezőt az előforduló legnagyobb kitevőn:

$$3(x+1)^2(x-2)^4-(x+1)^3 4(x-2)^3=(x+1)^2(x-2)^3\left(3(x-2)-(x+1)4\right)$$

- A nevezőben a **hatvány hatványa** azonosságot alkalmazzuk:

$$\left((x-2)^4\right)^2=(x-2)^8$$

$$f'(x)=\frac{3(x+1)^2(x-2)^4-(x+1)^3 4(x-2)^3}{((x-2)^4)^2}=$$

$$= \frac{(x+1)^2(x-2)^3(3(x-2)-(x+1)4)}{(x-2)^8} =$$

$$= \frac{(x+1)^2(x-2)^3(-x-10)}{(x-2)^8}.$$

- Meg kell oldanunk a $\frac{(x+1)^2(x-2)^3(-x-10)}{(x-2)^8} = 0$ egyenletet.

  a) A törtes egyenleteknél használt módszert alkalmazzuk, **beszorzunk a nevezővel** majd azt a tételt használjuk, hogy **egy szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla**. Így a -1, 2 és 10 értékeket kapjuk. Ezek közül a 2 **hamis gyök**, ott a nevező is nulla lenne, a 2 nem eleme az eredeti függvény értelmezési tartományának.

  Vagy azt mondjuk, hogy **egy tört pontosan akkor nulla, ha a számlálója nulla és a nevezője nem nulla**.

  b) **Egyszerűsítjük a törtet** $(x-2)^3$ tényezővel, majd megoldjuk a $\frac{(x+1)^2(-x-10)}{(x-2)^5} = 0$ egyenletet az előzőhöz hasonlóan. Így elkerüljük a hamis gyököt, csak a -1 és a -10 értékeket kapjuk meg.

- A továbbiakban az egyszerűsített törttel érdemes folytatni a feladat megoldását. Ennek az előjelét kell meghatározni a teljes értelmezési tartományán:

$$\frac{(x+1)^2(-x-10)}{(x-2)^5}$$

- **Meghatározzuk** a számláló **előjelét**. E**gy szorzat előjelét a tényezőinek előjele szabja meg**. Mivel $(x+1)^2$ teljes négyzet, ezért az $x=-1$ kivételével mindenütt pozitív. A $(-x-10)$ elsőfokú kifejezés, ami $x<-10$ esetén pozitív, különben negatív.

- Meghatározzuk a nevező előjelét. Mivel $(x-2)^5$ az $f(x)=x^5$ függvény transzformáltja, ezért, ha $x<2$, akkor negatív, ha $x>2$, akkor pozitív.
- Meghatározzuk a tört előjelét. **Egy tört előjelét a számlálójának és a nevezőjének az előjele szabja meg**. Tehát a deriváltfüggvény a $]-\infty;-10[$ és a

$]2;\infty[$ intervallumokon negatív lesz, a $]-10;-1[$ és a $]-1;2[$ intervallumokon pozitív lesz.

- ...

Vegyük észre, hogy a megoldáshoz szükséges nyolc lépés közül az első és az utolsó kivételével a többi csak a középiskolai anyag ismeretét igényli.

Integrálszámítás

Az integrálszámítás nem könnyű része a matematikának, mert kevés általános szabály létezik. Például csak speciális alakú szorzat, hányados és hatvány integrálására van megfelelő képlet. Így ebben a témakörben különösen fontos, hogy a hatványok értelmezését és azonosságait jól tudjuk és az algebrai átalakításokban is jártasak legyünk Nulladik szabálynak szoktam nevezni, hogy az integrálandó szorzatot, hányadost, hatványt végezzük el, ha lehet, mert így alapintegrálokra tudjuk visszavezetni az eredeti problémát.

Hatványfüggvény integráljára visszavezethető feladatok

Elvégezhető szorzat integrálása:

$$\int \left(x^2 \cdot x^3\right)\, dx = \int x^5\, dx = \dots$$

$$\int \left(x \cdot \frac{1}{x^3}\right)\, dx = \int \frac{1}{x^2}\, dx = \int x^{-2}\, dx = \dots$$

Elvégezhető hányados integrálása:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x}}\, dx = \int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \dots$$

Elvégezhető hatvány integrálása:

$$\int (x^2+1)^2\,dx = \int \left(x^4+2x^2+1\right)\,dx = \dots$$

Ezek kombinálásával nagyon bonyolultnak tűnő feladatokat is meg tudunk oldani. Például:

$$\int \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x^9\cdot\sqrt{x}}}{x^2\cdot\sqrt[8]{x}}}\cdot\sqrt[8]{x^9}\right)\,dx = ?$$

- Először **írjuk fel a gyököket törtkitevőjű hatványként**:

$$\int \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x^9\cdot\sqrt{x}}}{x^2\cdot\sqrt[8]{x}}}\cdot\sqrt[8]{x^9}\right)\,dx = \int \left(\left(\frac{\left(x^9\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^2\cdot x^{\frac{1}{8}}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{9}{8}}\right)\,dx =$$

- Majd a számlálóban és a nevezőben is alkalmazzuk az **azonos alapú hatványok szorzására** vonatkozó azonosságot, majd a **hatvány hatványára** vonatkozót:

$$\int \left(\left(\frac{\left(x^{\frac{19}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{17}{8}}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{9}{8}}\right)\,dx = \int \left(\left(\frac{x^{\frac{19}{4}}}{x^{\frac{17}{8}}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{9}{8}}\right)\,dx =$$

- Majd az **azonos alapú hatványok hányadosára** vonatkozó azonosságot, majd a **hatvány hatványára** vonatkozót, majd az **azonos alapú hatványok szorzatára** vonatkozót:

$$\int \left(\left(x^{\frac{21}{8}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{9}{8}}\right)\,dx = \int \left(x^{\frac{7}{8}}\cdot x^{\frac{9}{8}}\right)\,dx = \int x^{\frac{16}{8}}\,dx = \int x^2\,dx = \dots$$

Vegyük észre, hogy a megoldáshoz szükséges sok lépés közül egyedül az utolsó lesz az, melyet nem tudunk megtenni pusztán csak középiskolai érettségi anyagának ismeretében.

Végezetül önmagamat ismételném. Írásomnak az a célja, hogy arra buzdítsam kollégáimat és az egyetemre készülő diákokat, hogy az algebra témakörét kiemelten kezeljék. Remélem sikerült meggyőznöm az érdeklődőket, hogy milyen algebrai ismeretekre, hol és miért van óriási szükség. Ha a diákok úgy érzik, további gyakorlásra van szükségük a középszintű érettségin túl, akkor minél előbb tegyék meg. Ne az egyetemen, az első kudarcok után szembesüljenek azzal, hogy a középiskolai hiányosságaik akadályozzák meg őket az egyetemi tananyag sikeres teljesítésében.

Dékány Éva

Szent István Egyetem

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Fekete Imre 2017. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Interaktív jegyzetfüzetek térnyerése

A századunk elejétől kezdődő technológiai és információs forradalom egyik természetes következménye, hogy ezek egyes elemei mára már oktatásunk szerves részét képezik (laptopok és tabletek, IKT-eszközök, e-learning és open course lehetőségek, stb.).

2012-től kezdődően egy új, kifejezetten numerikus számításokat/szimulációkat és html/TeX megjelenítést ötvöző Python kernel alapú interkatív jegyzetfüzet kezdett teret nyerni a számítástudománnyal és számításmatematikával foglalkozó észak-amerikai kutatók körében. Felsőoktatásban az a bevett szokás, hogy a hallgatói feladatsorokat pdf formátumban tesszük közzé. Ezzel szemben az interaktív jegyzetfüzetben a feladatsorok olvasásán, szerkesztésén és kommentelésén túl lehetőségünk van előre vagy általunk megírt szimulációkat is futtatni. Az IPython notebook közel tíz éves fejlesztés után 2011 nyarán az EuroSciPy 2011 konferencián mutatkozott be a nagyközönség előtt [IPython, Fernando Perez: IPython notebook]. Fernando Perez alapító és társai év végén pedig kiadták az első hivatalos IPython 0.12-es verziót. A projekt hozzájárulhatott ahhoz, hogy 2014-re a legjobb 39 amerikai egyetem közül 27-ben Pythont használtak, és így a Python lett a legnépszerűbb programozási nyelv bevezető számítástudományi kurzusok esetében [Philip Guo: Python].

De miért is ért el ekkora sikert ez a projekt?

Előnyök és hátrányok

Az egyik legnagyobb vonzereje ennek a füzetnek, hogy teljes mértékben ingyenes. További fontos tényező a számításmatematikai társadalomban jelenlévő „Open source = Better Science” mozgalom is [numfocus.org]. Ezáltal a jegyzetfüzet kiváló lehetőséget ad a kutatók eredményeinek prezentálására, tényleges kutatómunkára és ennek következményeként oktatási platform bevezetésére is.

A jegyzetfüzetek elérhetők a legelterjedtebb operációs rendszereken (Linux, Mac OS, Microsoft Windows). Habár többnyire számítógépekre telepítik a szükséges csomagokat [Github], lehetőségünk van felhőalapú szolgáltatlást is igénybe venni (Sage Math Cloud, Wakari). Ekkor akár tabletről, akár mobilról is futtathatunk számításokat külföldi szerveren. Ha ezt az opciót választjuk, akkor egy csoportos beadandó/közös kutatómunka esetén ugyanazt a jegyzetfüzetet egyszerre többen is szerkeszthetjük.

A hallgató a jegyzetfüzet használata során megismerkedik a Python nyelvvel, az alapvető html és TeX parancsokkal. Az oktató tarthat olyan előadást, amelynek során a jegyzetfüzet egy eszköz a tananyag támogatásához. Továbbá gyakorlatot is tarthatunk ilyen módon, ahol ideális esetben a hallgatók már a jegyzetfüzetükben oldják meg a kitűzött feladatokat. Ez a fajta oktatási technika pedig az aktív tanulást segíti elő.

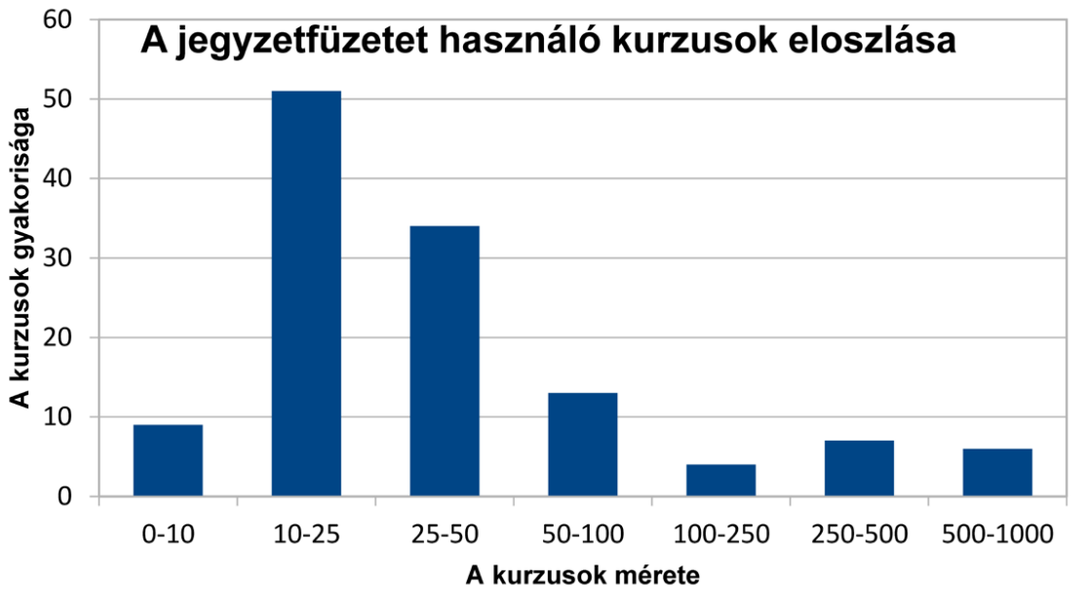
Hátrányként említhető meg, hogy a telepítés egy gyakorlottabb felhasználó számára is nehézkes. Továbbá a környezet demonstrálásra, kisebb méretű feladatok megoldására alkalmas. A többezer soros kódokat természetesen már a számunkra leginkább kényelmes editorba fogjuk begépelni.

Kiterjesztés és felsőoktatási felhasználás

Pontosan az open source mozgalom következményeként az eredeti IPython projektet olyan cégek támogatták, mint a Google vagy a Microsoft. Sőt, még az Európai Unió Horizont 2020 programja is kiemelten kezdte támogatni a projekt kiterjesztését. Ennek következménye lett az, hogy 2014-től kezdődően az IPython projekt a Project Jupyter része [Jupyter]. Azaz a fő cél az lett, hogy az eddigi Python kernel mellett más nyelveket is kombinálhassunk, és használhassuk a jegyzetfüzet adta előnyöket. A Jupyter projektben több, mint 40-féle kernelt telepíthetünk. A teljesség igénye nélkül a népszerűbbek: C++, C#, Java, Scala, R, Fortran, Octave, Julia, php, bash stb. Ezenfelül olyan népszerű kereskedelmi matematikai csomagokkal is kompatibilis, mint a MATLAB vagy a Wolfram Mathematica.

Ezekkel a nyelvekkel pedig az alkalmazhatóság és a lehetséges oktatói célközönség széles tömege nyílik meg előttünk. Ezt a felületet szinte az összes természettudományi ág, mérnöki tudományok, informatikai tudományok felhasználják numerikus szimulációkra vagy kód demonstrálásra.

Egy oktatási projekt keretében együttműködünk a Jupyter projekt egyik vezető fejlesztőjével, Jessica Hamrickkel (UC Berkeley, Computational Cognitive Science Lab). Ő készített tavaly nyáron egy oktatás alapú felmérést a jegyzetfüzet kapcsán [Github]. Ezekből a nyers adatokból az oktatási szempontból érdekeseket dolgoztunk fel.

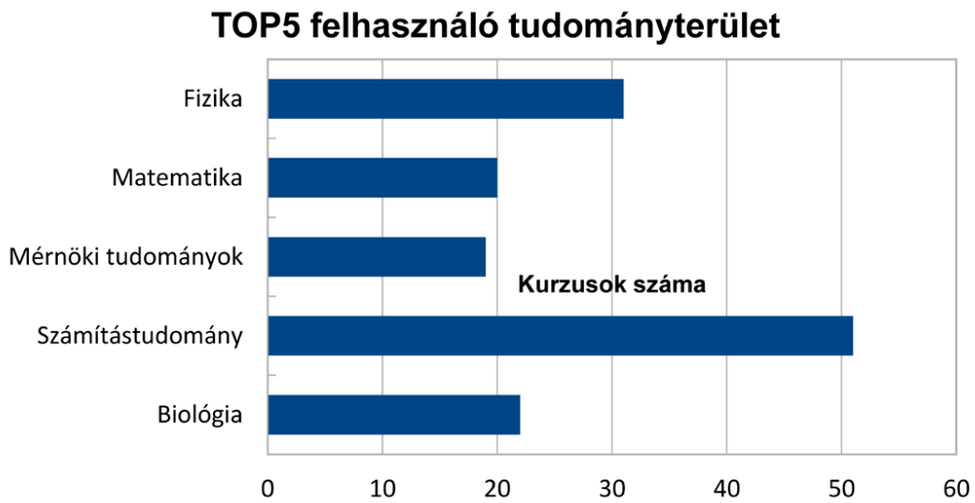


A fenti statisztikában szembetűnő, hogy nagyméretű előadások tartására is alkalmas a környezet, de tipikusan gyakorlatokra használják fel.

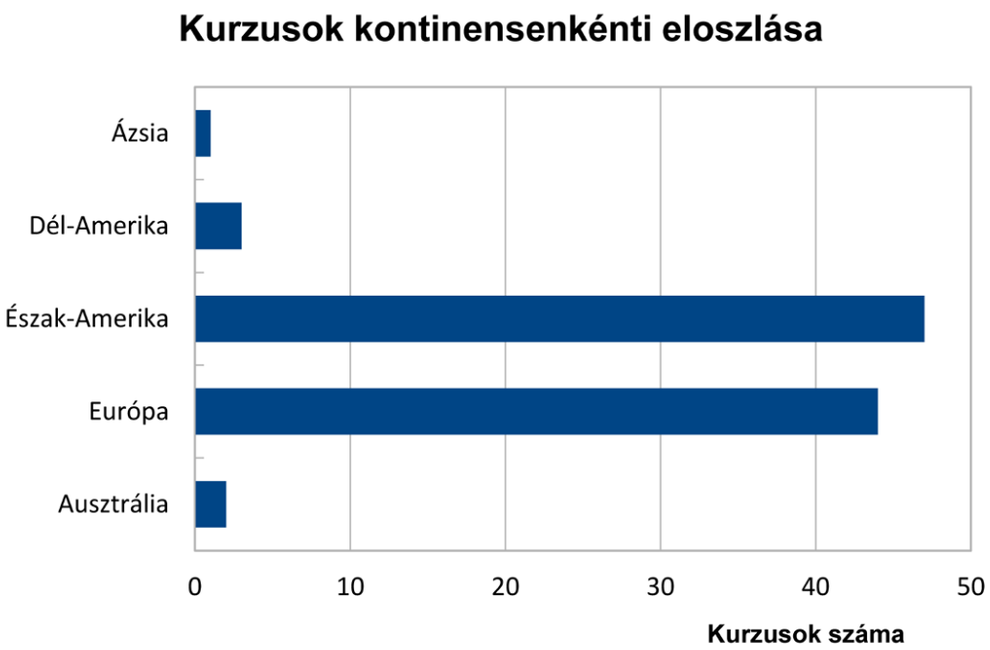
A legnagyobb felhasználó közeget az „Undergraduate”, azaz BSc és BA hallgatók biztosítják. Figyelemre méltó, hogy már középiskolában is bevezették ezt a fajta technikát. Professional event alatt általában cégek szakmai összejövetelét kell érteni. A felmérésben a cégek nem vettek részt, holott a Jupyter közösség felét ténylegesen cégek és kormányzati munkatársak alkotják.

TOP5 legnépszerűbb nyelv eloszlása

Nem meglepő módon a Python messze a legnépszerűbb nyelv az oktatás tekintetében, de későbbi felhőalapú szolgáltatásokkal egybekötve ez jelentősen változhat.



A legnépszerűbb tudományterületek tekintetében nem ért minket meglepetés. Megjegyezendő, hogy a Data Science tudományt egyelőre még a számítástudománnyal egybe vettük, illetve utóbbit szándékosan nem soroltuk a matematikához. Ha a Data Science-t külön tekintettük volna, akkor a mérnöki tudományok kiestek volna a TOP5-ből. Meglepő, hogy a jegyzetfüzetet irodalmi, művészeti, és történelmi kurzusok oktatására is felhasználták.



A várakozásnak megfelelően európai és észak-amerikai dominancia volt látható 2016 nyarán.

Az ELTE Matematikai Intézetének példája (Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék, Alkalmazott Analízis 1. c. kurzus) álljon előttünk zárásként, amellyel jobban el tudjuk képzelni a tényleges működést. A jegyzetfüzet környezetét a MATLAB nyelvvel kombináltuk a hallgatói előismeretek figyelembevételével. Mindenfajta előzetes telepítés nélkül az nbviewer honlap segítségével tekinthetjük meg az egyes jegyzetfüzetek anyagát, itt konkrétan az első óra anyagát [Jupyter, ELTE]. A többi órai anyag pedig az alábbi Github könyvtárban tölthető le és értelemszerűen tekinthető meg [Github, ELTE]. Módszertani szakemberek véleményének kikérése után három mérőszámban történt mérés, ezek mindegyike azt a következtetést vonta le, hogy a hagyományos oktatási módszer helyett numerikus számításokat (is) igénylő kurzusok esetében a jegyzetfüzettel történő oktatás szignifikánsan jobb eredményeket hoz.

Természetesen (és szerencsére) a 2016-os állapotokhoz képest ma már jóval nagyobb bázisa van a Jupyter közösségnek, amely továbbra is dinamikusan és rendületlenül fejlődik. Számtalan jó oktatási példa és segédanyag található meg a hivatalos oldalakról kiindulva. Remélhetőleg hazánkban is egyre inkább teret nyer majd ez a fajta oktatási stílus.

Fekete Imre

ELTE Matematikai Intézet, Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Emberi Erőforrások Minisztériuma Az Emberi Erőforrások Minisztériuma ÚNKP-17-4 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásával készült.

informatika

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Kosztolányi József 2017. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Beszámoló az 57. Rátz László Vándorgyűlésről

2017-ben a matematikatanárok 57. Rátz László Vándorgyűlésének — a vándorgyűlések történetében először — Székesfehérvár, ezen belül az Óbudai Egyetem Alba Regia Műszaki Kara adott otthont július 4 és július 7 között.

Az idei rendezvényen 204 regisztrált résztvevő volt, közülük 22-en érkeztek a határon túli magyarlakta területekről. Szerdától péntekig négy szekcióban (Alsó tagozat, Felső tagozat, Szakközépiskola és gimnázium, Speciális matematika tagozat) hallgathattak előadásokat és vehettek részt szemináriumokon a matematikatanárok.

A kedd délutáni ünnepélyes plenáris ülés a Városháza dísztermében volt, ahol először dr. Cser-Palkovics András Székesfehérvár Megyei Jogú Város polgármestere, dr. Györök György az Óbudai Egyetem Alba Regia Műszaki Karának dékánja és dr. Katona Gyula akadémikus, a Bolyai János Matematikai Társulat elnöke köszöntötte a Vándorgyűlés résztvevőit. Ezután került sor a Beke Manó Emlékdíjak átadására. A Beke

Manó Emlékdíj I. fokozatában részesült dr. Katz Sándor a Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium idén nyugdíjba vonult tanára. Katz Tanár Úr érdemei elévülhetetlenek abban a folyamatban, amely során a Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium a magyarországi matematikai tehetséggondozás egyik vidéki fellegvára lett. Emellett nagyon sokat tett és tesz ma is a magyar matematikatanítás jobbítása érdekében. A Beke Manó Emlékdíj II. fokozatában részesültek a következő kollégák: Árvainé Libor Ildikó, Bere Lászlóné, Fenyvesi Mária, Jakucs Erika, Stallenberger Józsefné, Szomódi Zsuzsanna, Tóthné Berzsán Gabriella.

A plenáris ülés második felében előbb Csíkos Csaba az ELTE Tanító- és Óvóképző Kar dékán-helyettese, egyetemi docens tartott előadást *Szöveges feladatok — matematikán innen és túl* címmel. Ezután Vancsó Ödön az ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központjának vezetője számolt be az MTA által finanszírozott, általa vezetett, több egyetem és köznevelési intézmény részvételével zajló módszertani kutatások első évéről és a jövőbeli tervekről *Komplex matematikaoktatás a XXI. században* címmel.

Hagyományosan a Vándorgyűlés plenáris délutánján szoktak előadást tartani az előző év végén Rátz Tanár Úr Életműdíjat kapott matematikatanárok is. Tarcsay Tamás *Mások vittek jó(?) utakra engem* címmel tartott a személyes tanári élményeket a matematikával briliáns módon ötvöző, kiváló előadást. Kónya István nem tudott jelen lenni, de a Vándorgyűlés résztvevőihez írt nagyon szép és tartalmas levelét felolvasták a plenáris ülésen.

A plenáris ülés után a Szent Imre templomban adott orgonára és fagottra írt darabokból koncertet a résztvevőknek Szarka Andrea és Moharos Sándor.

Szerda reggeltől péntek délig négy szekcióban kifejezetten színvonalas és tartalmas előadások és szemináriumok közül választhattak a résztvevők. A Vándorgyűlés egyéni értékelésére lehetőséget adó, a szervezőkhöz beérkezett kérdőívek alapján megállapítható, hogy a „színvonalas” és „tartalmas” jelzők egyrészt nem túloznak, másrészt a rendezvény egészét jellemzik. A hagyományos és nagy népszerűségnek örvendő programok idén is lezajlottak: volt Tanárverseny a MATEGYE Alapítvány szervezésében, volt szerda este Hangos Könyv a Typotex Kiadó szervezésében, Votisky Zsuzsa vezetésével, volt szerdán Budapest-Vidék focimeccs (döntetlenre végződött), és csütörtökön kirándulások. Két szervezett kirándulás volt: az egyik a fehérvárcsurgói Károlyi-kastély és a Gorsium Régészeti Park megtekintését, a másik pedig a Velencei tó körüli nevezettességek körbejárását foglalta magába. A második kiránduláson lehetőség volt hajózásra, kenuzásra illetve sárkányhajózásra is. Mindkét kirándulás népszerű volt, és a résztvevők beszámolói alapján jól sikerült. Ennek a sikernek nem elhanyagolható összetevőjeként az időjárás kegyes volt hozzánk a Vándorgyűlés teljes ideje alatt.

A jövő évi, 58. Rátz László Vándorgyűlés helyszíne még nem dőlt el, a kandidáló városok Budapest és Győr.

Kosztolányi József

a BJMT Oktatási Szakosztályának elnöke

Megjegyzések*:*

- A fotókat *Hubert Tibor* készítette.
- A konferencia programja és az elhangzott előadások anyagai a vándorgyűlés honlapján tekinthetők meg: http://rlv.berzsenyi.hu/2017
- További híradások a konferenciáról: http://www.szekesfehervar.hu/fehervaron-rendezik-a-matematikatanarok-orszagos-konferenciajat
- A Fehérvár TV-ben megjelent riport (08:18 perctől): http://www.fehervartv.hu/video/index/20537

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ** ROVATBAN ELSŐSORBAN OLYAN KÖNYVEKRŐL SZERETNÉNK TUDÓSÍTANI ÉS OLYAN ELEKTRONIKUSAN ELÉRHETŐ ÍRÁSOKAT AJÁNLUNK, AMELYEK A MATEMATIKA BÁRMELY RÉSZE VAGY KAPCSOLATAI IRÁNT ÉRDEKLŐDŐK SZÁMÁRA KÍVÁNATOSAK LEHETNEK. (ROVATSZERKESZTŐ: *TÓTH JÁNOS.)*

A szerk.
2017. SZEPTEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

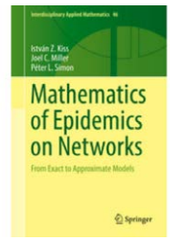
A gyorshajtástól az időjárásig

A Természet Világa ismeretterjesztő folyóirat 2017. augusztusi számában jelent meg Besenyei Ádám és Csomós Petra *A gyorshajtástól az időjárásig — Kalandok az alkalmazott matematikában* című írása, mely közérthető módon, játékos példákon keresztül vezeti be az olvasót a differenciálegyenletek izgalmas világába.

Tóth János
2017. SZEPTEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Honlapokat ajánlunk — Testvéreink

Összegyűjtöttük néhány magyarországi, illetve magyar nyelvű matematikai folyóirat honlapját (ők tehát a testvéreink). Bizonyosan nem teljes a lista, és többet is lehetne (érdemes is volna) írni róluk: rovatszerkesztőnk, *Tóth János* várja olvasóink visszajelzéseit. A fotón a Fine Hall Library, a Princetoni Egyetem Könyvtára látható.



Bodó Ágnes
2017. SZEPTEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Járványok hálózatokon

Kiss Z. István, Joel C. Miller és Simon L. Péter: *Mathematics of Epidemics on Networks* című könyve nemrég jelent meg a Springer kiadónál. *Bodó Ágnes* írt a könyvről és hátteréről, a járványok terjedéséről, a hálózatok matematikájának és a hálózatokon keresztül terjedő járványok tudományterületének fejlődéséről. A könyv szerzőinek felhívására pedig néhány vers is született e témában, ezeket a recenzió után közöljük.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

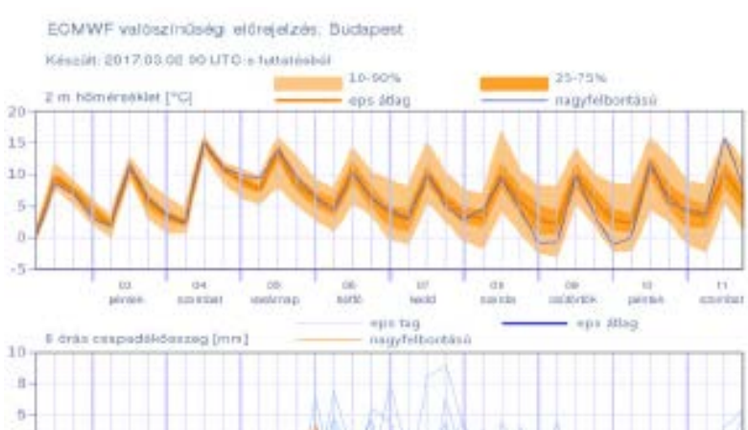
A szerk. 2017. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

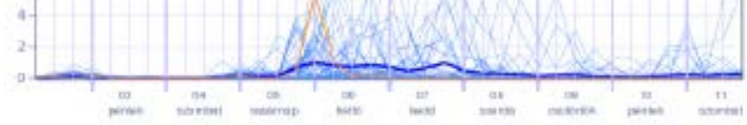
A gyorshajtástól az időjárásig

Környező világunk számtalan lehetőséget biztosít az időben változó folyamatok vizsgálatára. A szerzők ezek közül szemezgetve vezetik végig az olvasót az egyszerű differenciálegyenletek felírásától a bonyolult fizikai modellek megoldásakor felmerülő problémákig. Az írás Feynman tanmeséjével indul a gyorsan hajtó autósról. Valóban egy órája úton kellene lennie, ha óránként 90 kilométeres sebességgel hajtott? A sebességmérőhöz való hasonlósága okán a szerzők *matematikai traffipax* néven vezetik be a differenciahányados fogalmát, majd határértéket sejtetve jutnak el a deriváltig, ami a változás pillanatnyi ütemét adja meg.

Első példaként a Sosemvolt Bankban elhelyezett pénzösszeg időbeli változására írnak fel egyszerű elgondolásokból adódó differenciális összefüggéseket. Ezután egy kedves mesébe ágyazva egy királylány és négy, különböző viselkedésű kérője közt ébredő érzelmek időbeli változását vizsgálják. A harmadik példa Lorenz modellje, amellyel a szerzők a megoldás kezdeti értékekre való érzékenységét igyekeztek illusztrálni. Az írást mindhárom példa esetében a megfelelő fázisképek egészítik ki.

A kezdeti értékekre való érzékenység átvezet arra a nagyon is aktuális kérdésre, hogy előrejelezhető-e az időjárás. Ezzel a szerzők egy külön fejezetben foglalkoznak. Röviden és közérthetően (tehát matematikai formulák nélkül) mutatják be, hogyan lehet egy bonyolult, több parciális differenciálegyenletből álló rendszert közelítő módszerek és számítógépek segítségével megoldani, valamint egy példán szemléltetik is az eljárások hatalmas számítási és tárolási igényét.





Az írás a differenciálegyenleteket felhasználó többi tudományterületre való kitekintéssel zárul. Az érdeklődő olvasók pedig további olvasnivalót találhatnak az irodalomjegyzékben felsorolt hivatkozások között.

Az ismeretterjesztő írás kiválóan tükrözi a szerzők szándékát: megragadja a változás ütemének az időben változó folyamatok modellezése során játszott fontosságát, továbbá egyszerű és szórakoztató, mégis tudományosan érdekes példákon keresztül mutatja be a modellezés főbb lépéseit, és felhívja a figyelmet a nemlineáris folyamatok vizsgálatának nehézségeire.

A cikket minden érdeklődő középiskolásnak, de akár a differenciálegyenletekkel most foglalkozni kezdő egyetemistáknak is jó szívvel ajánljuk.

Besenyei Ádám és Csomós Petra
A gyorshajtástól az időjárásig — Kalandok az alkalmazott matematikában

***Természet Világa*, 2017. augusztus (148. évfolyam, 8. szám), 346—351. oldal**

Az írás elérhető a Természet Világa honlapján is:

http://www.termeszetvilaga.hu/szamok/tv2017/tv1708/besenyei.html

alkalmazott matematika recenzió

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Tóth János 2017. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Honlapokat ajánlunk — Testvéreink

Összegyűjtöttük néhány magyarországi és magyar nyelvű matematikai folyóirat honlapját. A folyóiratok nagyon rövid jellemzését is megadjuk, tartózkodva az értékelésüktől. Örülnénk, ha a kedves olvasó kiegészítené a listát.

A matematika tanítása

Módszertani folyóirat, 2014-ben megszűnt?

Abacus matematikai lapok 10-14 éves gyerekeknek | MATEGYE Alapítvány

A KöMaL kistestvére általános iskolások számára, a Bolyai János Matematikai Társulat lapja.

Acta Mathematica Hungarica

A Springer és az Akadémiai Kiadó közös folyóirata.

Alkalmazott Matematikai Lapok

Az MTA III. Osztályának és a Bolyai János Matematikai Társulatnak a folyóirata. Eredeti cikkek mellett összefoglaló cikkek fordítását, könyvek recenzióját is közli.

Analysis Mathematica

A Springer és az Akadémiai Kiadó közös folyóirata.

Annales Universitatis Scientiarium Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica

Az ELTE matematikai cikkeket közlő folyóirata.

Annales Universitatis Scientiarium Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Computatorica

Az ELTE (neve ellenére többségében) matematikai cikkeket közlő folyóirata.

Combinatorica

A Bolyai Társulat Springer által kiadott nemzetközi folyóirata, erős magyar dominanciával ☺.

Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok Informatika rovattal (KöMaL)

A legrégebbi magyar nyelvű matematikai folyóirat, elsősorban feladatmegoldást kedvelő középiskolások számára, a Bolyai János Matematikai Társulat lapja.

Matematikai Lapok

A Bolyai Társulat szakmai folyóirata.

Matlap — Ifjúsági matematikai lapok

A KöMaL romániai megfelelője.

Miskolc Mathematical Notes

A Miskolci Egyetem szakmai folyóirata.

Periodica Mathematica Hungarica

A Bolyai János Matematikai Társulat Springer és az Akadémiai Kiadó által kiadott, a Szegedi Egyetemen szerkesztett folyóirata.

Polygon. Matematikai, szakdidaktikai közlemények

A Szegedi Tudományegyetem által kiadott szakmai és módszertani folyóirat.

Publicationes Mathematicae Debrecen

A Debreceni Egyetem szakmai folyóirata.

Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica

Az MTA Rényi Intézetének matematikai folyóirata.

Szigma — Matematikai-Közgazdaságtani Folyóirat. A Gazdaságmodellezési Társaság lapja

A címe mindent elárul.

Végül mégis egy értékelő mondat. A magyar matematikai folyóiratok (a *Combinatorica* kivételével) a különböző formális összehasonlításokban nem látszanak jól szerepelni. (Hatástényezőjük általában 0.5 alatti, ami még matematikai folyóiratoknál is kevés, a hatástényezőnél sokkal megbízhatóbb Scimago Journal and Country Rank szerint általában a saját területükön belül a 3.—4. negyedbe esnek, azaz a Q3-Q4 kategóriába tartoznak.) Ez annyit jelent, hogy például a Fine Hall Library (a Princetoni Egyetem Könyvtára, mai nevén Lewis Library Fine Hall Wing (lásd a képen), ahol természetesen a Matematikai Lapok elődjével a Mathematikai és Physikai Lapokkal együtt, legalábbis 1987-ig szintén megtalálható) olvasói nem fognak izgatottan rohanni, amikor egy a fenti periodikák közül megjelenik, de **bármelyikben jelenhet (és jelent) meg kiváló cikk vagy kiváló szerző cikke.**

Tóth János

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Bodó Ágnes 2017. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Járványok hálózatokon

Kiss Z. István, Joel C. Miller és Simon L. Péter: ***Mathematics of Epidemics on Networks***

A különféle járványok folyamatosan végigkísérték az emberiséget a történelem során, gondoljunk csak például a már tízezer évvel ezelőtt felbukkant himlőre, de akár említhetnénk a középkorban több hullámban is lesújtó pestisjárványokat vagy a modern korból a spanyolnáthát, kolerát és az ebolát, amelyek mind milliónyi halálos áldozatot követeltek. A járványok vizsgálata a matematikusok figyelmét viszonylag hamar felkeltették. A himlő oltásának modellezésével az elsők között foglalkozott a svájci Daniel Bernoulli (1700–1782), aki egyszerre volt orvos, fizikus és matematikus, valamint kortársa, Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783) francia filozófus, fizikus és matematikus. A manapság elterjedt bonyolultabb modellek William Ogilvy Kermack (1898–1970) skót biokémikus és Anderson Gray McKendrick (1876–1943) skót fizikus és járványtani kutató munkásságához köthetők. A 20. század végére a gráfelmélet rohamos fejlődésével a járványok modellezése egyre szorosabban összefonódott a napjainkban virágkorát élő hálózatkutatás témakörével.

A hálózatokon zajló folyamatok tanulmányozása az utóbbi években egyre inkább az alkalmazott matematikai kutatások homlokterébe került, amit mi sem bizonyít jobban, mint hogy számos ismeretterjesztő és tudományos könyv jelent meg a témában [1]-[5]. A szűkebb témakörről, azaz a járványterjedési folyamatok matematikai vizsgálatáról azonban – fiatal tudományterületről lévén szó – egyelőre jóval kevesebb szakmai könyv áll rendelkezésre [6]-[8]. Ezért is örvendetes **Kiss Z. István** (Brighton), **Miller C. Joel** (Bellevue) és **Simon L. Péter** (Budapest) *Mathematics of Epidemics on Networks* című 423 oldalas monográfiájának megjelenése, amely elektronikus és nyomtatott formában egyaránt elérhető a Springer kiadó gondozásában. Mindhárom szerző a hálózati folyamatok nemzetközileg is elismert kutatója és az utóbbi években számos cikkük jelent meg a témakörben, a könyv bizonyára ennek eredményeképpen született.

A könyv a járványterjedés leírására szolgáló legújabb modelleket mutatja be, és elemzi azokat matematikai precizitással. Tökéletes modell természetesen nem létezik, George Box szavaival élve: „Minden modell rossz, de néhány hasznos”, ahogy ez a monográfiában is olvasható. Azonban a kezdetleges modellekhez képest az újabbak már sokkal pontosabban próbálják meg leírni a valóságot, viszont ezzel egyidejűleg a komplexitásuk is nő. Rendszerint az adott vizsgálandó problémától függ, hogy éppen melyik modell alkalmazható jól, akár több is, ennek eldöntése általában a kutatómunka egyik feladata. A komplex modellek megértése a matematika több ágában való jártasságot is megkövetel, mint például gráfelmélet, sztochasztikus folyamatok és dinamikai rendszerek. Az egyes kutatók eltérő háttérismeretének és az alkalmazások sokszínűségének köszönhetően egymástól különböző modellezési megközelítések alakultak ki. A monográfiában egyaránt találhatunk egzakt, sztochasztikus és közelítő modelleket is. A mű úttörő abból a szempontból, hogy nemcsak ismerteti az egyes modelleket, hanem azok egymáshoz való viszonyára is megpróbál rávilágítani.

A monográfia 11 fejezetből áll, a szakmai fejezeteket megelőzi egy rövid bevezető, amely a tárgyalt modellek megértéséhez szükséges definíciókat és összefüggéseket foglalja össze a hálózatok és járványterjedési folyamatok elméletéből. A könyv felépítése következetes, a témakörben kevésbé jártas olvasók számára is gördülékenyen olvasható. Mindehhez hozzájárulnak még a körültekintően megszerkesztett ábrák, példák és diagramok, továbbá a szürkével kiemelt részek, amelyek az egyszerűen implementálható modellekre mutatnak példákat. A művet haszonnal forgathatják mind a témakörrel most ismerkedők, mind pedig a területet már aktívan kutatók. A témában való elmélyülést nagyban elősegítik az egyes fejezetekben kitűzött feladatok, amelyek megoldását a könyvet használó oktatók számára elérhetővé tesznek majd a szerzők. A mű erényei között említendők ezenkívül az Appendixben lévő pszeudokódok és a [9] honlapon elérhető, Python programozási nyelven megírt implementációk, amelyek segítségével a leírt jelenségek lefolyását magunk is megszemlélhetjük, sőt akár ezek alapján tovább is fejleszthetjük a modelleket. A könyvet 331 művet felsoroló irodalomjegyzék és egy szószedet zárja.

Összegezve, Kiss Z. István, Miller C. Joel és Simon L. Péter monográfiája kiváló stílusban, matematikailag igényesen és jó angolsággal megírt munka. Bátran ajánlom a szakterület iránt érdeklődő olvasók számára.

Bodó Ágnes

Kiss Z. István, Joel C. Miller, Simon L. Péter: *Mathematics of Epidemics on Networks*, Springer, 2017

http://www.springer.com/gp/book/9783319508047

Járvány-szonettek

A szerzők közzétettek egy felhívást, amely versírásra buzdítja a téma iránt mélyebben érdeklődő irodalmi hajlamú olvasóit: https://github.com/springer-math/Mathematics-of-Epidemics-on-Networks/blob/master/EpidemicSonnetWorks.md

Egyikük, Joel Miller műve összegzi az első hat fejezetet:

When partnerships endure so long that to
Disease they are like frozen ties that bind,
Mass action fails us till new paradigms
Emerge; and networks then are useful tools.

Equation counts are exponential till
Reduced --- through automorphic symmetries
Or caref'ly cutting out some vertices.
But yet complexity is too high still.

And so our mod'ler must approximate
And close equations --- but not too simply.
For she must doubly count a high degree.
Or, she may watch diseases percolate.

With these techniques our mod'ler has new keys
To learn how partnerships affect disease.

Müller Viktor szonettje:

How clever your scheme, to put readers on the hook
By the lure of poetry, to spread word of your book.

Your challenge infects a web of minds who
See the trick, but do not mind.
In the love of maths we unite
And in your networks we find delight.

There is beauty in the fact that we use
Networks of neurons in our head to conceive
Ideas that then spread like diseases on a net.
And upon the nets of cells and minds imposed
There looms above the Internet, and this I use
To send you back this feeble piece of poetry
To win your book in paperback.

Végül egy neve elhallgatását kérő matematikus:

There was a young man from Chatsworth
Who studied epidemics on networks.
He got fed up with that,
Did sociology instead,
But then he found out that's worse.

Egész életemben arra vágytam,
Hogy valahogyan majd hasznos legyek,
És segíthessem az embereket:
De hogy is tudhatná ezt a számtan?

Hiszen matematikussá váltam,
Így ami hasznosat én tehetek:
A differenciálegyenletek,
S a matematikai járványtan.

Felállítok majd új modelleket,
Az összes egyensúlyi helyzetet,
S stabilitást meghatározván ott.

Backward bifurkációt keresek
És amit a leginkább szeretek:
Az alap-reprodukciósszámot.

Irodalomjegyzék

1
Barabási Albert-László: *A hálózatok tudománya*, Libri Könyvkiadó, Budapest, 2016.
2
Barabási Albert-László: *Behálózva - a hálózatok új tudománya*, Magyar Könyvklub, Budapest, 2003.
3
Barabási Albert-László: *Villanások - a jövő kiszámítható*, Nyitott Könyvműhely, Budapest, 2010.
4
A. Barrat, M. Barthelemy, A. Vespignani: *Dynamical processes on complex networks*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
5
M. E. J. Newman: *Networks: An Introduction*, Oxford University Press, Oxford, 2010.
6
R. M. Anderson, R.M May: *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*, Oxford University Press, Oxford, 1991.
7
M. Draief, L. Massoluié: *Epidemics and rumours in complex networks*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
8
F. Brauer, C. Castillo-Chavez: *Mathematical Models in Population Biology and*

Epidemiology, Springer, New York, 2012.
9
https://springer-math.github.io/Mathematics-of-Epidemics-on-Networks/

alkalmazott matematika recenzió

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot
készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **TUDOMÁNY** MENÜPONT TÖBBFÉLE, A MATEMATIKA TUDOMÁNYÁHOZ KAPCSOLÓDÓ FUNKCIÓT TAKAR..**A TUDOMÁNY– TÖRTÉNET ROVAT** CÉLJA ELSŐSORBAN MATEMATIKATÖRTÉNETI JELLEGŰ ÍRÁSOK KÖZLÉSE. **A MI IS ...?ROVAT** A MAI MATEMATIKA TUDOMÁNYÁRÓL KÍVÁN SZÓLNI A HOZZÁÉRTŐKNEK.
(ROVATSZERKESZTŐK: *BESENYEI ÁDÁM; STIPSICZ ANDRÁS*.)

Szamuely Tamás
2017. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Utak a Fermat-sejtéshez

Szamuely Tamás 2016 decemberében tartott Rényi Intézetbeli előadásának célja az volt, hogy *Sir Andrew Wiles* Abel-díjának apropóján megismertesse a szélesebb matematikusközönséget azokkal a modern módszerekkel, amelyek a Fermat-sejtés megközelítésében kiemelt szerepet játszanak. Az alábbi cikk ennek az előadásnak az írásos változata.

Szabó Szilárd
2017. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

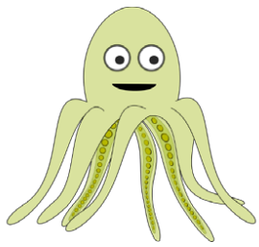
Mi is (és mire is jó) egy tiszta Hodge-struktúra?

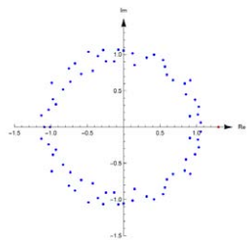
A Mi is...? rovat újabb cikkében *Szabó Szilárd* témája csatlakozik több, előző és e számunkban megjelent íráshoz, a *Fermat-sejtés Andrew Wiles*-féle bizonyításához. Érdeklődő olvasóinknak ajánljuk *Tóth Árpád cikkét* a diofantikus egyenletekről, a Wiles-interjú 1. és 2. részét, vagy *Szamuely Tamás* előadásának írásos változatát Utak a Fermat-sejtéshez címmel. Most pedig jöhetnek a Hodge-struktúrák! A fotón **Sir William Vallance Douglas Hodge** (1903 - 1975).

Oláh-Gál Róbert
2017. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Gauss és Bolyai János — újraértékelve

Írásom célja — amellett, hogy megemlékezzek „a matematikusok fejedelme” születésének 240. évfordulójáról — hogy felmentsem Gausst az alól a hamis vád alól, amely a köztudatban él, hogy Gauss nem ismerte el Bolyai János korszakalkotó felfedezését. — írja *Oláh-Gál Róbert*.





Peter Teichner

2017. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is ... a csáp?

A *Notices of the American Mathematical Society* című folyóirat 2004. szeptemberi számában a *Mi is...?* rovatban jelent meg *Peter Teichner* írása, amelynek fordítását *Kalmár Boldizsár* készítette el (a kiadó és a szerző engedélyével). A *csáp* szót, mint matematikai kifejezést, nyomtatásban először *Jim Cannon* használta 1978-ban.

Ferenci Tamás

2017. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Nézd és mondd!

Nézd és mondd! — avagy mi köze számok felolvasásának 71-ed fokú egyenletekhez és a periódusos rendszerhez? *Ferenci Tamás* az Óbudai Egyetem Élettani Szabályozások Kutatóközpontjából Conway számsorozatától kiindulva megold egy egyszerű 71-edfokú egyenletet — a képen látható, hogy a komplex számsíkon ábrázolt megoldások majdnem kört alkotnak — és eljut az „atomok bomlásáig”.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szamuely Tamás 2017. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Utak a Fermat-sejtéshez

Az alábbi cikk a Rényi Intézetben 2016 decemberében tartott összintézeti előadásom írásos változata. Előadásom célja az volt, hogy Sir Andrew Wiles Abel-díjának apropóján megismertessem a szélesebb matematikusközönséget azokkal a modern módszerekkel, amelyek a Fermat-sejtés megközelítésében kiemelt szerepet játszanak. Idő híján nem térhettem ki a Fermat-sejtés vizsgálata során elért híres történeti eredményekre, ezek bemutatása külön cikket kívánna. A módszerek igen haladott volta pedig sajnos nem tette lehetővé a téma elemi tárgyalását, ezért olvasóimról feltételeznem kell, hogy ismerik az absztrakt algebra, a számelmélet és a komplex függvénytan alapjait.

1. Faltings tételének alkalmazása

Mint az jól ismert, a Fermat-sejtés azt állítja, hogy ha $n \geq 3$ egész szám, akkor az

$$x^n + y^n = z^n$$

egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számok körében. Ezzel ekvivalens, hogy az egész számok körében csak olyan megoldás van, ahol valamelyik változó 0 (és akkor persze a másik két változó legfeljebb csak egy előjelben különbözhet) — ezek a *triviális megoldások*.

Gerd Faltings

A probléma ideális megközelítése az lenne, ha nemcsak a fenti speciális típusú egyenletekről, hanem egyenletek minél szélesebb családjáról ki tudnánk mutatni, hogy nincs pozitív egész megoldása. A legnevezetesebb általános állítás, amely a Fermat-egyenletre alkalmazható, a Mordell-sejtés, amelyet Gerd Faltings bizonyított 1983-ban. Faltings e Fields-érmes eredményének némileg szűkített verzióját a következőképpen fogalmazhatjuk meg. Bármely n-edfokú 3-változós $f(x,y,z)$ homogén polinom nullhelyei egy síkgörbét határoznak meg a projektív síkban. E síkgörbe *sima*, ha a $\partial_x f(x,y,z)$, $\partial_y f(x,y,z)$ és $\partial_z f(x,y,z)$ parciális deriváltaknak nincs közös nullhelye az $f(x,y,z)=0$ görbén.

Faltings tétele. Legyen $f(x,y,z)$ háromváltozós racionális együtthatós homogén polinom, amelynek foka legalább 4. Amennyiben az $f(x,y,z)=0$ síkgörbe sima, akkor csak véges sok egész koordinátájú pontja van a projektív síkban.

Fontos itt emlékeznünk rá, hogy bármely $\lambda \neq 0$ szorzóra a $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ számhármasok a projektív síknak ugyanazt a pontját definiálják. Így például az $(a,0,a)$ számhármasok, amelyek a Fermat-egyenletnek minden a-ra triviális megoldásait adják, csak egyetlen pontot adnak a projektív síkban.

Faltings tétele tehát speciálisan a Fermat-egyenletről is azt állítja, hogy $n \geq 4$ esetén konstans szorzótól eltekintve csak véges sok egész megoldása van. (Az $n=3$ esetet Euler már a 18. században megoldotta.) Másképp fogalmazva: ha az x,y,z megoldások relatív prímek, az $|xyz|$ abszolút érték valamely véges $C(n)$ korlát alatt marad. Amennyiben $C(n)$-re tudnánk valamilyen kiszámítható alakot (ezt nevezik a Mordell-sejtés *effektív* változatának), akkor lehetséges volna a Fermat-sejtést adott n-re úgy igazolni, hogy a $C(n)$ korlátig elmenve ellenőrizzük, hogy nincs nemtriviális megoldás, majd alkalmazzuk a tételt. Sajnos azonban Faltings eredménye csak a $C(n)$ konstans létezését igazolja.

Mégis, egy egyszerű ötlettel levezethető Faltings tételéből, hogy a Fermat-sejtés „majdem minden” n-re igaz. Michael Filaseta találta az alábbi trükköt. Fixáljunk egy p pozitív egészt. Ekkor a fentiek szerint a p-edfokú Fermat-egyenlet relatív prím megoldásainak szorzata legfeljebb $C(p)$ abszolút értékű. Ha most $m>0$ egész, akkor az mp fokú Fermat-egyenlet minden (u,v,w) pozitív egész megoldására (u^m, v^m, w^m) megoldása a p-edfokú Fermat-egyenletnek, tehát ha még u,v,w relatív prímek is, akkor $|uvw|^m \leq C(p)$. Mivel itt $|uvw| \geq 2$, nyilvánvalóan $m \leq C(p)$. Vagyis a Fermat-sejtés igaz minden olyan $n > pC(p)$ kitevőre, amely osztható p-vel. Ha most p-t változtatjuk, akkor ilyen n nagyon sok van. Pontosabban egy rövid szitamódszeres leszámlálással Andrew Granville és Roger Heath-Brown egymástól függetlenül a következőt vezették le Filaseta észrevételéből:

Tétel. Adott $x > 0$-ra jelölje $N(x)$ azon $n \leq x$ kitevők számát, amelyekre a Fermat-sejtés nem igaz. Ekkor $x \to \infty$ mellett az $N(x)/x$ hányados 0-hoz tart.

A fenti gondolatmenet szépséghibája, hogy bár nagyon sok kitevőre igazolja a Fermat-sejtést Faltings mély tételének felhasználásával, ezek között egyetlen prímszám sincsen. Márpedig a Fermat-sejtést elegendő prímszám kitevőkre igazolni. Mint látni fogjuk, ezek más módszerekkel érhetők el.

2. Elliptikus görbék és a Szpiro-sejtés

Az 1980-as években két olyan megközelítés is napvilágot látott, amely a Fermat-sejtést elliptikus görbék vizsgálatán keresztül kísérelte meg belátni. A kiinduló gondolat a következő. Legyen p prímszám, és tegyük fel, hogy az a, b, c relatív prím egészek teljesítik az

$$a^p + b^p = c^p$$

egyenlőséget. Ekkor az

$$y^2 z = x(x - a^p z)(x + b^p z)$$

egyenlet által definiált projektív síkgörbének olyan tulajdonságai vannak, amelyek „túl szépek ahhoz, hogy ilyen görbe létezzen”. Ez a görbe az elliptikus görbék osztályába tartozik, és először Yves Hellegouarch, illetve Gerhard Frey vizsgálták a Fermat-sejtéssel kapcsolatban. Hogy miért túl szép ahhoz, hogy igaz legyen, annak magyarázatához szükségünk van néhány alapfogalomra elliptikus görbékkel kapcsolatban.

Általában a racionális számtest felett egy E elliptikus görbét olyan

$$y^2 z = (x - e_1 z)(x - e_2 z)(x - e_3 z)$$

homogén harmadfokú egyenlet definiál, ahol az e_i-k egymástól különböző komplex számok, és az egyenlőség jobboldalán álló tényezők szorzata racionális együtthatós polinom. Könnyen ellenőrizhető, hogy a fenti típusú egyenlet akkor és csak akkor definiál sima síkgörbét az előző szakasz értelmében, ha az e_i-k különbözők. (Valóban: Ha $z \neq 0$ és az y szerinti parciális derivált 0, akkor $y = 0$; ekkor viszont az x szerinti parciális derivált pontosan akkor nem 0, ha az e_i-k különbözők.) Az egyszerűség kedvéért tegyük fel a továbbiakban, hogy az e_i-k még egész számok is; a tárgyalás kiterjeszthető az általános esetre. Ha tehát az e_i-k egészek, akkor az egyenletet tekinthetjük modulo q bármely q prímszámra, és így egy olyan síkgörbét kapunk, amely a q elemű test felett definiált. Ez azonban nem feltétlenül sima, hiszen bár az e_i-ről feltettük, hogy különbözőek, a mod q maradékosztályaik már nem feltétlenül azok.

Hogy a mod q redukciók viselkedését alaposabban tanulmányozhassuk, érdemes bevezetni az E görbe *diszkriminánsát:* ez a

$$\Delta(E) := [(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)]^2$$

konstans, amely a fentiek szerint nem 0. Fentiek szerint azt tudjuk tehát, hogy a mod q redukció akkor lehet nem sima, ha $q|\Delta(E)$. Itt viszont felmerül egy technikai nehézség: előfordulhat, hogy több fenti alakú egyenlet is ugyanazt a görbét definiálja, és ezek különböző diszkriminánsokat adnak. Például egy α skalár mellett az

$$x \mapsto \alpha^2 x, \quad y \mapsto \alpha^3 y, \quad z \mapsto z, \quad e_i \mapsto \alpha^2 e_i$$

helyettesítésekkel kapott egyenlet ugyanazt a síkgörbét definiálja, de a diszkrimináns egy α^{12}-es szorzóval változik. Belátható azonban, hogy csak a fenti típusú (polinomiális) helyettesítések őrzik meg az egyenlet fenti alakját. Így értelmes azt mondanunk, hogy az egyenlet q-ra nézve minimális, ha a fenti típusú helyettesítéseket megengedve q kitevője $\Delta(E)$-ben a lehető legkisebb. (Technikai okokból ez a definíció a $q = 2$ esetben módosításra szorul; ezt most nem részletezzük.) Egy nehéz tétel szerint a racionális számtest felett minden elliptikus görbének létezik olyan egyenlete, amely minden prímszámra egyszerre minimális: ez a *minimális egyenlet*.

Azt mondjuk, hogy az E görbének q-ban *jó a redukciója*, ha a minimális egyenlet mod q redukciója sima. A rossz redukciónál két eset van: a kevésbé rossz az, ha a mod q

redukciónál két e_i fut össze, a rosszabb az, ha mind a három. (Geometriailag ezek úgynevezett csomó (*node*), illetve csúcs (*cusp*) szingularitásoknak felelnek meg.) A diszkriminánsra pillantva látjuk, hogy adott elliptikus görbének véges sok kivétellel minden prímre jó a redukciója. John Tate egy tétele szerint minden görbéhez található legalább egy olyan prím, ahol rossz a redukció. Az viszont gyakran előfordul, hogy a rossz redukciójú prímek mind az imént említett „kevésbé rossz” kategóriába tartoznak, az ilyen elliptikus görbéket hívjuk *szemistabil*nak. Ellenőrizhető, hogy a Fermat-sejtéshez tartozó fenti Hellegouarch—Frey görbék szemistabilak.

Lucien Szpiro

Most már kimondhatjuk Lucien Szpiro 1980-as évekből származó sejtését, amely lényegében azt állítja, hogy szemistabil görbe esetén a diszkriminánsban előforduló prímek kitevői nem lehetnek túl nagyok. A pontos állításhoz vezessük be az m nemnulla egész szám radikáljának fogalmát: $\mathrm{rad}(m)$ az m prímosztóinak szorzata. A Szpiro-sejtést két formában szokás megfogalmazni.

Gyenge Szpiro-sejtés. Legyen E szemistabil elliptikus görbe a racionális számtest felett. Ekkor léteznek $\alpha, \beta > 0$ konstansok, amelyekre a minimális egyenlet $\Delta(E)$ diszkriminánsa teljesíti a

$$|\Delta(E)| \leq \alpha \,\mathrm{rad}(\Delta(E))^{\beta}.$$

egyenlőséget. (Amikor az e_i-k egészek, a baloldalon természetesen elhagyható az abszolút érték, de általában nem.)

Erős Szpiro-sejtés. A fenti szituációban minden $\varepsilon > 0$ valós számra létezik olyan $C(\varepsilon) > 0$ konstans, amelyre

$$|\Delta(E)| \leq C(\varepsilon)\,\mathrm{rad}(\Delta(E))^{6+\varepsilon}.$$

Az utóbbi sejtésben azért szerepel a $6+\varepsilon$ kitevő, mert a 6-os kitevőre létezik ellenpélda.

Alkalmazzuk a Szpiro-sejtést a fenti Hellegouarch—Frey görbére, amelynek emlékeztetőül az egyenlete $y^2 z = x(x - a^p z)(x + b^p z)$, ahol $a^p + b^p = c^p$ valamely

a, b, c relatív prím egészekkel. Ennek a görbének a diszkriminánsa

$$\Delta(E) = \left(\frac{a^p b^p c^p}{16}\right)^2 .$$

Látható, hogy elég nagy p-re sérül a gyenge Szpiro-sejtés, az erős Szpiro-sejtés pedig már $p > 11$-re nem teljesül. Más szóval nem létezik (a, b, c) számhármas a fenti tulajdonságokkal, tehát az erős Szpiro-sejtésből következik a Fermat-sejtés $p > 11$ esete.

Szpiro a fenti sejtésre az úgynevezett effektív Mordell-sejtés tanulmányozása során jutott. Ez utóbbi, mint már említettük, Faltings tételének azon élesítése, amely adott görbe racionális pontjainak koordinátáira kiszámítható korlátot is ad. Szpiro és Moret-Bailly megmutatták, hogy az effektív Mordell-sejtésből következik a gyenge Szpiro-sejtés (tehát a Fermat-sejtés is elég nagy p kitevőre). Ráadásul a bizonyításból látszik, hogy elég az effektív Mordell-sejtést *egyetlen* görbére ismerni ehhez a konklúzióhoz, tehát az előző szakaszban vázolt gondolatmenettel ellentétben nem kell végtelen sok egyenletre alkalmazni az effektív Mordell-sejtést ahhoz, hogy a Fermat-sejtést belássuk.

Másrészről Elkies belátta, hogy a Szpiro-sejtés egy módosított változatából (amely ekvivalens a híres *abc*-sejtéssel) következik a Mordell-sejtés, vagyis Faltings tétele. Ha e változat effektíven kiszámítható konstansokkal is ismert lenne, akkor az effektív Mordell-sejtés is következne.

2012-ben Shinichi Mochizuki nyilvánosságra hozott négy igen hosszú kéziratot, amelyeknek eredményeiből állítása szerint következik a Szpiro-sejtés erős és módosított formája is. 2016-ban Vesselin Dimitrov megmutatta, hogy amennyiben Mochizuki eredményei helyesek, akkor a sejtések effektív verziója is igaz. Mochizuki rendkívül bonyolult bizonyításait jelen pillanatig még nem dolgozta fel a nemzetközi matematikusközösség.

3. Moduláris formák és a Serre-sejtések

A Fermat-sejtéshez vezető másik módszer a moduláris formák elméletének segítségével mutatja meg, hogy az Hellegouarch—Frey görbe nem létezhet. Ez az az út, amelyen Andrew Wiles sikeresen eljutott a Fermat-sejtés igazolásához. Azóta azonban a Wilesénál erősebb eredmények is ismertek, amelyekből könnyebb levezetni a Fermat-sejtést, így az alábbiakban ezeket ismertetjük röviden.

Először is meg kell ismerkednünk az elliptikus görbékhez tartozó Galois-reprezentációk fogalmával. Diofantoszig nyúlik vissza az úgynevezett húr-érintő módszer, amellyel egy racionális számtest feletti elliptikus görbe pontjain összeadás definiálható (erről az olvasó Tóth Árpád minapi cikkében talál többet). Erre az összeadásra nézve a pontok Abel-csoportot alkotnak. Bennünket kizárólag a véges rendű elemek fognak érdekelni ebben az Abel-csoportban.

Tekintsük egy pillanatra a görbét a komplex számtest felett. Ekkor minden n-re belátható, hogy az n-t osztó rendű komplex pontok részcsoportja izomorf a $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ csoporttal. (A Riemann-felületek elméletében jártas olvasó tudja is, hogy miért: az elliptikus görbe komplex pontjainak sokasága holomorf módon izomorf egy komplex tórusszal, és ennél az izomorfizmusnál az összeadás pont abba az összeadásba megy át a tóruszon, amelyet úgy kapunk, hogy tekintjük a komplex síkot a szokásos összeadással, és lefaktorizálunk egy alkalmas parallelogrammaráccsal. Az n rendű pontok így a rács „n-szeres besűrítéséből” adódnak.)

Ha most az E elliptikus görbe $\mathbf{Q}$ felett definiált, akkor belátható, hogy létezik olyan $K|\mathbf{Q}$ véges testbővítés, amelyre az n-t osztó rendű pontok koordinátái mind K-ban vannak. Feltehető, hogy $K|\mathbf{Q}$ Galois-bővítés. Ekkor a $\mathrm{Gal}(K|\mathbf{Q})$ Galois-csoport hat az n-t osztó rendű pontok koordinátáin, és ezáltal a $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ csoporton. Ha itt $n = q$ prímszám, akkor tehát az $\mathbf{F}_q$ véges test feletti 2-dimenziós vektortéren kapunk egy csoportreprezentációt. A kapott

$$\rho_E\colon\ \mathrm{Gal}(K|\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$$

reprezentációt az E-hez tartozó Galois-reprezentációnak nevezzük. (Belátható, hogy ez — megfelelő értelemben véve — nem függ K-tól.)

Most egy időre elhagyjuk az elliptikus görbéket, és egy másik módon, moduláris formák segítségével definiálunk Galois-reprezentációkat. Kezdjük a moduláris formák elméletének nagyon rövid alapvetésével; egy általánosabb kontextusban továbbiak olvashatók a témában Harcos Gergely cikkében.

Adott $N \geq 0$ egész szám mellett tekintsük a

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) : c \equiv 0 \mod N \right\}$$

csoportot, amely tört-lineáris transzformációk által hat a

$$\mathbf{H} := \{z \in \mathbf{C} \colon \operatorname{Im} z > 0\}$$

komplex felső félsíkon:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Adott k páros pozitív egész szám mellett egy $f \colon \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ holomorf függvényt k *súlyú,* N *szintű moduláris formának* mondunk, ha teljesíti az

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$$

azonosságot minden $\Gamma_0(N)$-beli mátrix hatására nézve. Mivel speciálisan a $z \to z+1$ eltolások is előállnak egy $\Gamma_0(N)$-beli mátrix hatásaként (ahol $a = b = d = 1,\ c = 0$), a függvény erre az eltolásra nézve periodikus, így sorba fejthető a $q = e^{2\pi i z}$ paraméter szerint. Azt mondjuk, hogy f *csúcsforma*, ha e sorfejtés holomorfan kiterjed $q = 0$-ba is, és ott 0 értéket vesz fel. Ilyenkor tehát kapunk egy

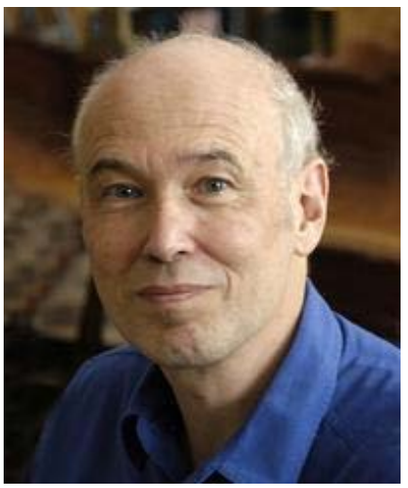
$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$$

előállítást.

Adott (k, N) pár mellett a k súlyú és N szintű moduláris formák lineáris alteret alkotnak a $\mathbf{H} \to \mathbf{C}$ függvények $\mathbf{C}$-vektorterében, amelyről megmutatható, hogy véges dimenziós. E véges dimenziós vektortéren definiáljuk most lineáris operátorok egy családját. Adott ℓ prímszám mellett a T_ℓ Hecke-operátort a

$$T_\ell\left(\sum a_n q^n\right) = \begin{cases} \sum a_{\ell n} q^n + \ell^{k-1} \sum a_n q^{\ell n} & \ell \nmid N \\ \sum a_{\ell n} q^n & \ell \mid N \end{cases}$$

formulák definiálják. Megmutatható, hogy a T_ℓ operátorok páronként kommutálnak egymással, így egy ismert lineáris algebrai tétel szerint közös bázisban diagonalizálhatók. Az is igaz továbbá, hogy ha az $f = \sum a_n q^n$ moduláris forma közös sajátvektora a T_ℓ operátoroknak, amelyet úgy normalizálunk, hogy $a_1 = 1$ teljesül, akkor az a_ℓ együttható épp a T_ℓ operátorhoz tartozó sajátérték lesz.



Pierre Deligne

Most már eljutottunk Pierre Deligne egy konstrukciójához, amely fenti tulajdonságú moduláris formáknak Galois-reprezentációkat feleltet meg oly módon, hogy a reprezentációt a Galois-csoport bizonyos kitüntetett elemeinek képei karakterizálják. A kitüntetett elemek a következők: minden ℓ prímszámhoz tartozik a $\mathrm{Gal}(K|\mathbf{Q})$ véges Galois-csoportban egy Frob_ℓ „Frobenius-elem”. Ezeket véges sok ℓ kivételével az a tulajdonság karakterizálja — konjugáltság erejéig —, hogy minden $a \in K$ algebrai egészre teljesül a $\mathrm{Frob}_\ell(a) \equiv a^\ell$ mod ℓ kongruencia. (A hiányzó ℓ-ekre a definíció bonyolultabb.)

Deligne tétele. Legyen f olyan csúcsforma, amely közös sajátvektora a T_ℓ Hecke-operátoroknak, q pedig prímszám (amely nem tévesztendő össze a q paraméterrel). Ekkor létezik $K|\mathbf{Q}$ véges Galois-bővítés és

$$\rho_f\colon\ \mathrm{Gal}(K|\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$$

reprezentáció, amely véges sok kivétellel minden $\ell \nmid qN$ prímszámra teljesíti a

$$\mathrm{Tr}\,\rho_f(\mathrm{Frob}_\ell) = a_\ell, \quad \det \rho_f(\mathrm{Frob}_\ell) = \ell^{k-1}$$

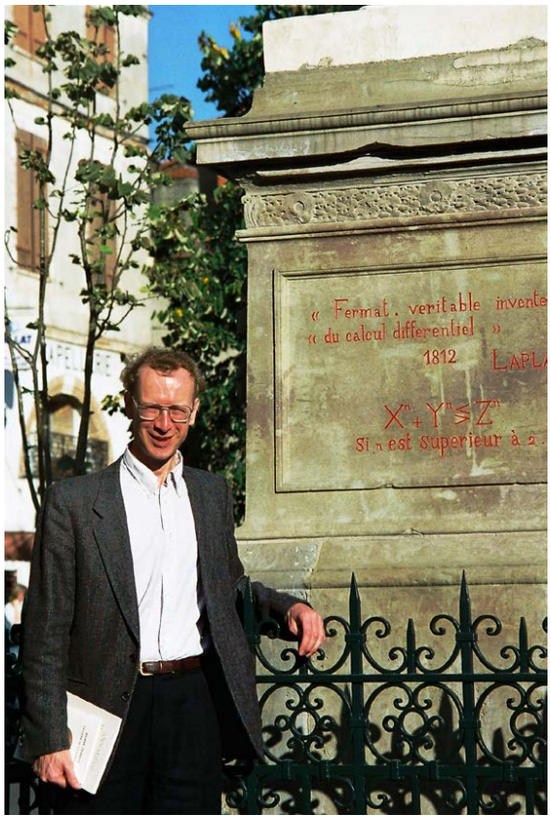
egyenlőségeket, ahol a_ℓ a T_ℓ-hez tartozó sajátérték. A fenti tulajdonságú ρ_f izomorfia erejéig egyértelműen meghatározott. (Itt a szokásos módon Tr egy mátrix nyomát, det pedig a determinánsát jelöli.)

Jean-Pierre Serre

Numerikus evidencia alapján Jean-Pierre Serre az 1980-as években azt sejtette, hogy szinte minden irreducibilis $\mathrm{Gal}(K|\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$ reprezentáció megkapható a fenti módon. Serre sejtését korábbi részeredmények után 2009-ben teljes egészében igazolta Chandrashekhar Khare és Jean-Pierre Winterberger:

Khare—Winterberger-tétel. Legyen $\rho\colon \mathrm{Gal}(K|\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$ irreducibilis reprezentáció, amelyre $\rho(c) = -1$, ahol $c \in \mathrm{Gal}(K|\mathbf{Q})$ az $a \to \bar{a}$ komplex konjugálást jelöli. Ekkor létezik olyan f moduláris forma, amelyre a Deligne-féle konstrukcióval kapott reprezentáció éppen ρ lesz. Ezen felül az f súlya és szintje is tisztán algebrai módon meghatározható a ρ reprezentáció bizonyos invariánsainak segítségével.

S hogy mi köze van mindennek a Fermat-sejtéshez? Térjünk csak vissza az $y^2 z = x(x - a^p z)(x + b^p z)$ Hellegouarch—Frey-féle elliptikus görbéhez. Korábban láttuk, hogy ehhez a görbéhez tartozik egy $\rho_E\colon \mathrm{Gal}(K|\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$ reprezentáció. Mint Serre rámutatott, Barry Mazur egy mély tételéből könnyen adódik, hogy e reprezentáció irreducibilis. Ellenőrizhető továbbá, hogy a $\rho(c) = -1$ feltétel is teljesül, és így a fenti tétel alkalmazható. Kapunk tehát egy moduláris formát, amelynek ráadásul ismerjük a k súlyát és az N szintjét is. A konkrét esetben kiszámítható, hogy $k = N = 2$. Azonban régóta ismert, hogy ilyen moduláris forma nincs! Ez az ellentmondás adja, hogy az Hellegouarch—Frey-görbe nem létezik, tehát a p kitevőjű Fermat-egyenletnek sincs nemtriviális megoldása.



Andrew Wiles 1995-ben Fermat emlékművénél

Amikor Andrew Wiles az 1980-as évek végén elkezdett a Fermat-sejtésen dolgozni, Serre sejtésének csak egyetlen nemtriviális esete volt ismert, az úgynevezett Langlands—Tunnell-tétel. Ez az igen nehéz eredmény bizonyos speciális Galois-reprezentációkhoz konstruált moduláris formát a $q = 3$ esetben. Ebből kiindulva Wiles belátta, hogy ha egy szemistabil elliptikus görbéhez tartozó azon $\widetilde{\rho}$ Galois-reprezentációt tekintjük, amely nem az $\mathbf{F}_q$-beli együtthatós mátrixok gyűrűjébe képez, hanem a q-adikus számok teste feletti 2×2-es mátrixokéba (ehhez az elliptikus görbe q^r rendű pontjait kell tekinteni minden r-re), akkor létezik olyan moduláris forma, amelyből $\widetilde{\rho}$ megkapható egy a fentihez hasonló konstrukció segítségével. Ez az állítás *Taniyama—Weil-sejtés* (vagy *modularitási sejtés*) néven volt ismert, és tetszőleges elliptikus görbékre később Breuil, Conrad, Diamond és Taylor igazolták Wiles módszerének továbbfejlesztésével. Ebből az állításból azonban a Fermat-sejtés nem vezethető le olyan röviden, mint a Khare—Winterberger-tételből, szükség volt még Ken Ribet egy nehéz technikai eredményére is. Természetesen Khare és Wintenberger bizonyítása használja mindazon technikákat, amelyeket Ribet, Wiles és Taylor korábban kifejlesztettek.

A Galois-reprezentációk és a moduláris (vagy általánosabban automorf) formák kapcsolatának vizsgálata ma is az algebrai számelmélet egyik legaktívabb területe, amelynek számos mély alkalmazása van. Hogy zárásképpen visszakanyarodjunk fejtegetéseink elejéhez, említsük meg példaként Minhyong Kim egy nagy hatású eredményét, amely szerint ha tudnánk bizonyos magasabb dimenziós Galois-reprezentációkról, hogy automorf formákból jönnek, akkor új, az eddigiektől teljesen különböző bizonyítást kapnánk Faltings tételére!

Hálásan köszönöm Zábrádi Gergely sasszemű észrevételeit.

Szamuely Tamás

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Bevezető irodalom a cikkben tárgyalt témákhoz:

- F. Diamond, J. Shurman. A First Course in Modular Forms, Springer, 2005.
- Y. Hellegouarch, Invitation to the Mathematics of Fermat—Wiles, Academic Press, 2001.
- J. H. Silverman, The Arithmetic of Elliptic Curves, Springer, 1986.

Az idézett tételek forrásai:

- C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, and R. Taylor, On the modularity of ellipic curves over $\mathbf{Q}$: wild 3-adic exercises, J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), 843—939.
- P. Deligne, Formes modulaires et représentations ℓ-adiques, Séminaire Bourbaki, vol. 11 (1968—1969), 139—172.
- V. Dimitrov, Effectivity in Mochizuki's work on the abc-conjecture, preprint arXiv:1601.03572.
- N. Elkies, ABC implies Mordell, Intern. Math. Research Notices 7 (1991), 99—109.
- G. Faltings, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, Invent. math. 73 (1983), 349—366.
- A Granville, The set of exponents for which Fermat's Last Theorem is true has density one, C. R. Acad. Sci. Canada 7 (1985), 55—60.
- R. Heath-Brown, Fermat's Last Theorem for “Almost All” Exponents, Bull. London Math. Soc. 17 (1985), 15—16.
- C. Khare, J-P. Wintenberger, Serre’s modularity conjecture (I), Invent. math. 178 (2009), 485—504.
- M. Kim, The unipotent Albanese map and Selmer varieties for curves, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 45 (2009), 89—133.
- S. Mochizuki, Inter-universal Teichmüller Theory I-IV, preprints, 2012.
- J. Oesterlé, Nouvelles approches du «théorème» de Fermat, Séminaire Bourbaki, vol. 30 (1987—1988), 165—186.

- K. Ribet, On modular representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ arising from modular forms, Invent. math. 100 (1990), 431—476.
- J-P. Serre, Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Duke Math. J. 54 (1987), 179—230
- L. Szpiro et al., Séminaire sur les pinceaux de courbes elliptiques, Astérisque 183, 1990.
- A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, Ann. of Math. 141 (1995), 443—551.

A fényképek forrásai:

- *Gerd Faltings*, német matematikus, szül. 1954. (Max Planck Matematikai Intézet, Bonni Egyetem, Princeton Egyetem, Wuppertal Egyetem) https://en.wikipedia.org/wiki/Gerd_Faltings (Copyright MSO, Renate Schmid http://owpdb.mfo.de/detail?photoID=7513)
- *Lucien Szpiro*, francia matematikus, szül. 1941. (City University of New York) https://en.wikipedia.org/wiki/Lucien_Szpiro (Copyright MSO, Renate Schmid http://owpdb.mfo.de/detail?photo_id=7514)
- *Pierre Deligne*, belga matematikus, szül. 1944. (Institute for Advanced Study Princeton, Institut des Hautes Études Scientifiques) https://www.ias.edu/scholars/deligne
- *Jean-Pierre Serre*, francia matematikus, szül. 1926. (Centre National de la Recherche Scientifique) https://en.wikipedia.org/wiki/Jean-Pierre_Serre
- *Andrew Wiles*, angol matematikus, szül. 1953. (University of Oxford, Princeton University) https://en.wikipedia.org/wiki/Andrew_Wiles : Andrew Wiles 1995 októberében Beaumont-d-Lomagne-ban, Fermat emlékműve előtt - Klaus Barner képe.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szabó Szilárd 2017. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is (és mire is jó) egy tiszta Hodge-struktúra?

Egyenletrendszerek megoldásai, így áttételesen az algebrai varietások vizsgálata a matematika egyik legrégebbi problémája. A számelmélet sok alapvető kérdése nyilvánvaló módon átfogalmazható egy X algebrai varietás racionális pontjainak létezésére vonatkozó kérdéssé. Például, az előző lapszámban Tóth Árpád cikkében taglalt, A. Wiles által 1994-ben belátott nagy Fermat-sejtés azzal ekvivalens, hogy az

$$x^n + y^n - z^n = 0, \quad n \geq 3$$

egyenlet által meghatározott görbének nincs nem-triviális (az $x = z, y = 0$ és $y = z, x = 0$ triviális megoldásoktól különböző) megoldása $\mathbf{Q}$ felett; ennek köze van az e lapszámban részletesen vizsgált

$$y^2 - x^3 - Ax - B = 0$$

egyenletű elliptikus görbék tulajdonságaihoz. Az együtthatók legkisebb közös többszörösével beszorozva látható, hogy minden $\mathbf{Q}$-együtthatós egyenletrendszer ekvivalens egy $\mathbf{Z}$-együtthatóssal. Amennyiben az egyenletrendszer homogén polinomokból áll (azaz minden tag össz-fokszáma megegyezik, mint pl. a Fermat-egyenletben), akkor az így kapott varietás projektív lesz: mivel ekkor minden (x, y, z) megoldás és minden 0-tól különböző t testbeli elemre (tx, ty, tz) is nyilván megoldás, ezért a „lényegesen” különböző (tehát, nem csak egy megoldáshármas minden elemét ugyanazzal az állandóval megszorozva kapott) megoldásokat úgy nyerjük, hogy a teljes megoldás-halmazt a $\mathbf{Q}^*$ multiplikatív csoporttal leosztjuk. Az így kapott megoldáshalmaz esetünkben a

$$\mathbf{Q}P^2 = (\mathbf{Q}^3 \setminus \vec{0})/\mathbf{Q}^*$$

racionális projektív sík részhalmaza. Hasonló érvelés bármely változószámú, csupa homogén polinomból álló rendszerre is érvényes, azzal a különbséggel hogy a megoldás-halmaz esetleg valamely 2-től eltérő dimenziós projektív tér része. Amennyiben az egyenleteink nem homogének, akkor egy egyszerű eljárással azzá tehetők: bevezetünk egy új változót, és minden monomot megszorzunk az új változó valamely hatványával. Az elliptikus görbe esetében például z-vel jelölve az új változót ennek eredménye az

$$y^2z - x^3 - Axz^2 - Bz^3 = 0$$

egyenlet. Természetesen, ezt az új változó lehető legalacsonyabb hatványaival hajtjuk végre.

Adott egész-együtthatós egyenletrendszer esetén bármely q prímhatványra redukcióval származtathatunk egy $\mathbf{F}_q$-együtthatós egyenletrendszert, ahol $\mathbf{F}_q$ a q-elemű véges testet jelöli. Szintén érdekes kérdés az így nyert algebrai egyenletrendszerek megoldhatósága egyre bővebb véges testekben: az úgynevezett Hasse-elv értelmében ilyen (és valós) megoldások bizonyos rendszereiből ugyanis néha konstruálható egész értékű megoldás. Az egyenletrendszert ismét tekinthetjük egy X algebrai varietás definiáló egyenleteinek $\mathbf{F}_q$ felett. A véges testek feletti eset előnye, hogy a megoldás létezésén túl azok számát is vizsgálhatjuk, azaz bevezethetünk egy

$$|X(\mathbf{F}_{q^n})|$$

leszámláló-függvényt, ahol $X(\mathbf{F}_{q^n})$ az X definiáló egyenleteinek $\mathbf{F}_{q^n}$ feletti megoldás-halmazát jelöli.

Egy $\mathbf{Q}$ feletti X algebrai varietáshoz természetes és egyértelmű módon társítható egy komplex algebrai varietás is: az azt megadó egyenletrendszer komplex test feletti megoldásainak halmaza. Egy sima komplex algebrai varietáson viszont többek között természetes módon adott egy $X_{\mathbf{C}}$ komplex analitikus sokaság-struktúra is: ez azt jelenti, hogy minden pontjának egy elegendően szűk környezetében bevezethetők a megszokott d-dimenziós komplex vektortéréhez hasonló $z_1, \ldots, z_d$ koordináták. Amennyiben $X_{\mathbf{C}}$ teljesít egy topologikus feltételt (az összefüggőséget), akkor az itt szereplő d érték független a tekintett ponttól, és X dimenziójának nevezzük. Ha pedig X projektív, akkor a kapott $X_{\mathbf{C}}$ kompakt. A továbbiakban X-ről feltesszük, hogy sima és projektív.

A fentiek alapján vizsgálhatjuk az X-hez rendelt $X_{\mathbf{C}}$ komplex analitikus sokaságon az ilyen sokaságokhoz rendelt algebrai invariánsokat. Az egyik ilyen invariáns-fajta az úgynevezett komplex együtthatós de Rham kohomológia-csoportok, amelyek valójában véges dimenziós komplex vektorterek. Konkrétan, minden X komplex d-dimenziós sokasághoz és $k \in \{0, \ldots, 2d\}$ számhoz tartozik egy $H^k_{dR}(X, \mathbf{C})$ véges dimenziós komplex vektortér. A de Rham-kohomológia értelmezéséhez szükség van az úgynevezett komplex-értékű k-adfokú differenciál-forma fogalmára. Lokális komplex analitikus koordinátákban egy k-forma egy

$$\alpha = \sum_{\vec{n},\vec{m}} f_{\vec{n},\vec{m}}(z_1, \ldots, z_d)\, \mathrm{d}\, z_{n_1} \wedge \cdots \wedge z_{n_p} \wedge \mathrm{d}\, \bar{z}_{m_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, \bar{z}_{m_q} \tag{1}$$

alakú kifejezés valamely sima $f_{\vec{n},\vec{m}}$ komplex-értékű függvényekre, ahol az összegzés az összes lehetséges

$$k = p + q \tag{2}$$

felbontásra[1], és

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (n_1, \ldots, n_p), & 0 < n_1 < \cdots < n_p < d \\ \vec{m} &= (m_1, \ldots, m_q), & 0 < m_1 < \cdots < m_q < d \end{aligned}$$

vektorokra fut. Rögzített (p, q) pár esetén a megfelelő α formát tiszta (p, q)-típusúnak nevezzük; komplex analitikus sokaságon egy k-forma (p, q)-típusú része jól meghatározott (azaz, a lokális koordinátarendszer választásától független). Az $X_{\mathbf{C}}$-n értelmezett k-formák vektorterét $\Omega^k(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$-val, a tiszta (p, q)-típusú formák vektorterét pedig $\Omega^{p,q}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$-val jelöljük. Minden, a (2) egyenletet teljesítő rögzített (p, q, k) számhármas esetén természetesen adódik tehát egy

$$\pi_{p,q} \colon \Omega^k(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) \to \Omega^{p,q}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$$

$$\alpha \mapsto \sum_{|\vec{n}|=p, |\vec{m}|=q} f_{\vec{n},\vec{m}}(z_1, \ldots, z_d)\, \mathrm{d}\, z_{n_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, z_{n_p} \wedge \mathrm{d}\, \bar{z}_{m_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, \bar{z}_{m_q}$$

projektor, ahol α lokálisan (1) által adott, és a fenti összegzés az összes rögzített p hosszúságú $\vec{n}$ vektorra fut. A $\pi_{p,q}$ leképezés globális jól-definiáltsága a komplex sokaság-struktúrából következik.

Mivel minden komplex analitikus sokaság egyúttal valós analitikus sokaság is, emiatt értelmezhető a differenciál-formákon egy természetes elsőrendű lineáris differenciál-operátor, a külső deriválás. Bizonyos értelemben a külső deriválás analóg a szemléletes geometriai perem-fogalmunkkal: ahogyan egy k-dimenziós szimpliciális komplexus pereme egy $(k-1)$-dimenziós szimpliciális komplexus, éppúgy egy $\alpha \in \Omega^k(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ differenciál-forma külső deriváltja egy $(k+1)$-edfokú $\mathrm{d}\,\alpha \in \Omega^{k+1}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ differenciál-forma. Vagyis, minden k-ra adódik

$$\mathrm{d} : \Omega^k(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) \to \Omega^{k+1}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}).$$

Egy komplex sokaság esetében ennek az operátornak a konkrét alakját a linearitás miatt elegendő (1) egy tagjára megadni:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\left(f_{\vec{n},\vec{m}}(z_1, \ldots, z_d)\,\mathrm{d}\,z_{n_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,z_{n_p} \wedge \mathrm{d}\,\bar{z}_{m_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,\bar{z}_{m_q}\right) \\
&= \sum_{s=1}^{d} \left(\frac{\partial f_{\vec{n},\vec{m}}}{\partial z_s} \mathrm{d} z_s + \frac{\partial f_{\vec{n},\vec{m}}}{\partial \bar{z}_s} \mathrm{d} \bar{z}_s \right) \wedge \mathrm{d} z_{n_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d} \bar{z}_{m_q}.
\end{aligned}$$

Az itt szereplő differenciálások a szokásos $z = x + iy$ valós-képzetes felbontásban a

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Cauchy—Riemann operátor, valamint annak konjugáltja:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Ahhoz, hogy a külső deriváltban kapott $\mathrm{d}\,z_s$ és $\mathrm{d}\,\bar{z}_s$ formákkal bővített rendszert újra növekvő sorrendbe rendezhessük, a következő relációkat használhatjuk:

$$\mathrm{d}\,z_s \wedge \mathrm{d}\,z_r = -\mathrm{d}\,z_r \wedge \mathrm{d}\,z_s$$

$$\mathrm{d}\,\bar{z}_s \wedge \mathrm{d}\,z_r = -\mathrm{d}\,z_r \wedge \mathrm{d}\,\bar{z}_s$$

$$\mathrm{d}\,\bar{z}_s \wedge \mathrm{d}\,\bar{z}_r = -\mathrm{d}\,\bar{z}_r \wedge \mathrm{d}\,\bar{z}_s.$$

Azt mondjuk, hogy α zárt, ha $\mathrm{d}\,\alpha = 0$, és α egzakt, ha $\alpha = \mathrm{d}\,\beta$ valamely $\beta \in \Omega^{k-1}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ formára. Kiderül, hogy minden egzakt forma zárt, ennek fordítottja azonban általában nem igaz. A k-adik de Rham-kohomológia csoport pontosan azt méri, hogy ez mennyire nem teljesül: a $H^k_{dR}(X, \mathbf{C})$ vektorér definíció szerint a zárt k-formák vektortere leosztva az egzakt k-formák vektorterével.

Algebrailag az előbb bevezetett hányados minden további meggondolás nélkül értelmes, az azonban nem világos, hogy véges dimenziós-e. Ennek megvizsgálásához hasznos W. Hodge tétele, amely kimondja, hogy a fenti hányados izomorf egy bizonyos X-en adott másodrendű elliptikus lineáris parciális differenciál-egyenlet L^2 megoldásterével. Az derül ki ugyanis, hogy ha X sima projektív, akkor az $X_{\mathbf{C}}$ komplex analitikus sokaságra a projektív térről egy speciális tulajdonságokkal rendelkező, úgynevezett Kähler-metrika öröklődik. A Kähler-metrika segítségével bevezethetjük az úgynevezett

$$\Delta_{\mathrm{d}} = \mathrm{d}^*\mathrm{d} + \mathrm{d}\mathrm{d}^*$$

Hodge—Laplace operátort a $\Omega^k(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ téren, ahol d^*-vel d adjungált operátorát jelöljük az L^2 metrikára. A következő eredmény ma már klasszikusnak számít [5]:

Sir William Vallance Douglas Hodge (1903 - 1975) (https://www.geni.com/people/Sir-W...Hodge)

1. Tétel (Hodge) *Legyen $X_{\mathbf{C}}$-n adott egy Kähler metrika. Jelöljük $\mathcal{H}^k(X_{\mathbf{C}})$-vel a*

belőle származtatott Hodge—Laplace operátor L^2 magját. Ekkor

$$H^k_{dR}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) \cong \mathcal{H}^k(X_{\mathbf{C}}).$$

A $\mathcal{H}^k(X_{\mathbf{C}})$ elemeit $X_{\mathbf{C}}$ feletti harmonikus k-formáknak nevezzük. A kompakt sokaságokon definiált elliptikus lineáris parciális differenciálegyenletek általános elmélete ekkor garantálja, hogy $X_{\mathbf{C}}$ de Rham kohomológia-terei véges dimenziósak.

A külső deriválásnak minden komplex sokaságon van egy természetes felbontása

$$\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$$

alakban, ahol minden $\alpha \in \Omega^{p,q}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ esetén

$$\begin{aligned} \partial\alpha &= \pi_{p+1,q}(\mathrm{d}\,\alpha) \in \Omega^{p+1,q}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) \\ \bar{\partial}\alpha &= \pi_{p,q+1}(\mathrm{d}\,\alpha) \in \Omega^{p,q+1}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}). \end{aligned}$$

Hasonlóan a Hodge—Laplace operátorhoz, bevezethetjük a

$$\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}^*\bar{\partial} + \bar{\partial}\bar{\partial}^*$$

Dolbeault—Laplace operátort. Könnyen látszik, hogy ez az operátor egy tiszta (p,q)-típusú formát ugyanilyen típusú formába képez. A Kähler-geometria alapvető azonossága ekkor azt mondja ki, hogy

$$\Delta_{\mathrm{d}} = 2\Delta_{\bar{\partial}}.$$

Ebből és az előző észrevételből azonnal következik, hogy a harmonikus k-formák vektortere felbomlik típus szerint:

$$\mathcal{H}^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(X),$$

ahol $\mathcal{H}^{p,q}(X)$ a tiszta (p,q)-típusú harmonikus formák tere. Továbbá, mivel Δ_{d} könnyen láthatóan valós operátor (azaz, kommutál a komplex konjugálással), azért létezik egy

$$\overline{\mathcal{H}^{p,q}(X)} = \mathcal{H}^{q,p}(X)$$

izomorfizmus. A fenti fogalmak és eredmények részletesebb kifejtése megtalálható például a [4] tankönyv bevezető fejezetében.

Az előző paragrafusban nyert struktúrát tetszőleges V véges-dimenziós, komplex konjugálással ellátott komplex vektortéren értelmezhetjük: azt mondjuk, hogy V-n egy

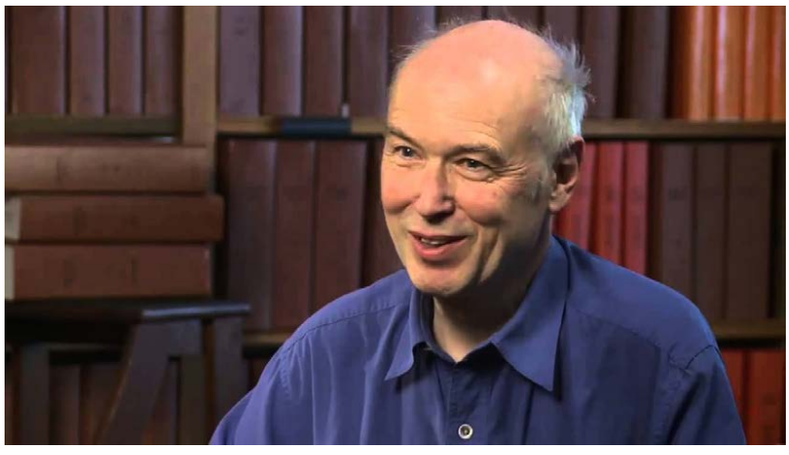
$$V = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$$

direkt-összeg felbontás megad egy tiszta k-súlyú komplex Hodge-struktúrát, ha minden p, q párosra teljesül a következő feltétel:

$$\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}.$$

Ezzel a terminológiával élve tehát Hodge tétele azt mondja ki, hogy a $H^k_{dR}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ de Rham kohomológia-téren létezik egy természetes tiszta k súlyú Hodge-struktúra.

Kanyarodjunk vissza a kiinduló-pontunkhoz: a véges testek feletti algebrai varietások racionális pontjainak kérdéséhez, amelyről 1949-ben A. Weil négy mély tulajdonságot sejtett meg. A Weil-sejtések teljes bizonyítása P. Deligne nevéhez fűződik [1], amely eredményéért 1978-ban Fields-éremmel jutalmazták. Magukat a sejtéseket itt teljes részletességgel nem közöljük, csupán egy azokból következő, első látásra talán meglepő összefüggést egy X algebrai varietás leszámláló-függvénye és az X-hez rendelt $X_{\mathbf{C}}$ komplex analitikus sokaság de Rham kohomológia-tereinek dimenziói között.



2. Tétel (Deligne) *Legyen X egy sima projektív algebrai varietás $\mathbf{Q}$ felett. Tegyük fel, hogy véges sok prím q hatványaitól eltekintve X leszámláló—függvénye polinom alakú:*

$$|X(\mathbf{F}_q)| = b_d q^d + b_{d-1} q^{d-1} + \cdots + b_0$$

valamely (q-tól független) $b_0, \ldots, b_d$ együtthatókra[2]. Ekkor, minden $k \in \{0, \ldots, d\}$ esetén

$$b_k = \dim_{\mathbf{C}} H^{2k}_{dR}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$$

és minden $k \in \{0, \ldots, d-1\}$ esetén

$$\dim_{\mathbf{C}} H^{2k+1}_{dR}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) = 0.$$

A tétel feltétele erősnek tűnhet, ám kiderül hogy az így is lefed számos érdekes esetet. Lássunk ezek közül egyet!

Példa *Legyen X a Fermat-görbe az $n = 2$ esetben, amelynek egyenlete könnyen láthatóan*

$$x^2 = (z - y)(z + y)$$

alakra hozható. Tegyük fel, hogy $q \neq 2$. Mivel a megoldásokat átskálázás erejéig azonosnak tekintjük, különböztessük meg az $x \neq 0$ és $x = 0$ eseteket. Az első esetben elérhetjük, hogy $x = 1$ legyen, és bevezethetjük az $u = z - y, v = z + y$ új koordinátákat. Ekkor minden rögzített $u \neq 0$ érték esetén $v = u^{-1}$ már egyértelműen meghatározott. Mivel $q \neq 2$, azért u és v pedig meghatározzák y és z értékét:

$$y = 2^{-1}(v - u), \quad z = 2^{-1}(v + u).$$

Látjuk tehát, hogy a $\mathbf{F}_q P^2$ projektív síkon $q - 1$ ilyen megoldás van: minden $u \in \mathbf{F}_q \setminus \{0\}$ esetén $[2 : u^{-1} - u : u^{-1} + u]$. Másrészről, amennyiben $x = 0$ akkor

sem y sem z nem lehet 0, így átskálázással elérhetjük hogy $y = 1$ legyen. Ekkor azonban $z = \pm 1$, amely a $q \neq 2$ esetben két egymástól különböző megoldást ad. Összeadva a különböző megoldások számát tehát megkapjuk a leszámláló—függvényt:

$$|X(\mathbf{F}_q)| = q + 1.$$

Mivel ez polinom, ezért alkalmazható Deligne tétele, és azt kapjuk hogy

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0_{dR}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) = 1 = \dim_{\mathbf{C}} H^2_{dR}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}),$$

és

$$\dim_{\mathbf{C}} H^1_{dR}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) = 0.$$

Ellenőrizzük most le geometriailag a kapott eredményt! A Fermat-egyenlet $n = 2$ esete egy sima másodfokú görbét határoz meg a projektív síkon. Ismert elemi projektív geometriából, hogy a komplex számok felett bármely sima másodfokú görbe homeomorf egy két-dimenziós S^2 gömbbel. Az S^2 kohomológia-csoportjainak dimenziója bizonyos standard technikák alkalmazásával egyszerűen kiszámolható: a 0-adik kohomológia-csoportját az állandó függvények alkotják, amelyek értelemszerűen 1-dimenziós vektorteret határoznak meg. A második kohomológia-csoportját bármely rögzített térfogati formájának többszörösei alkotják. Végül, azt hogy az első kohomológia-csoportja eltűnik, kicsit körülményesebb szabatosan belátni; következik például abból a szemléletesen (de matematikailag nem teljesen) nyilvánvaló észrevételből, hogy S^2-n minden hurok „pontra húzható”.

Deligne fenti tételének eredménye csak sima projektív varietásokra igaz. A tiszta Hodge-struktúra fogalmának létezik egy kiterjesztése, az úgynevezett kevert Hodge-struktúra, amelynek kidolgozása szintén Deligne érdeme [2], [3]. Bebizonyította többek között, hogy amennyiben X nem sima vagy nem projektív, akkor a de Rham-kohomológia terein kevert Hodge-struktúra értelmezhető. Ennek a kevert Hodge-struktúrának a segítségével pedig bevezethető egy $E_X(x, y)$ kétváltozós polinom. N. Katz általánosította Deligne tételeinek fenti következményét [6]: bebizonyította, hogy ha egy X algebrai varietás leszámláló-függvénye valamely P_X polinom, akkor $E_X(x, y) = P_X(xy)$.

Ezen további elméletek magyarázata azonban már túlmutat jelen cikkünk keretein.

Szabó Szilárd

BME Matematika Intézet, Geometria Tanszék

Irodalomjegyzék

1
P. Deligne, *La conjecture de Weil: I*, Publ. Math. IHES, **43**, 1974.
2
P. Deligne, *Théorie de Hodge. II*, Publ. Math. IHES, **40**, 1971.
3
P. Deligne, *Théorie de Hodge. III*, Publ. Math. IHES, **44**, 1974.
4
P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, 1978.
5
W. Hodge, *The Theory and Application of Harmonic Integrals*, Cambridge University Press, New York, 1941.
6
N. Katz, E*-polynomials, zeta-equivalence and polynomial count varieties*, függelék itt: T. Hausel, F. Rodriguez-Villegas, *Mixed Hodge polynomials of character varieties*, Invent. Math. **174**, 2008.

Lábjegyzetek

1
Remélhetőleg, az olvasó nem téveszti össze az itt bevezetett q számot a korábban szintén q-val jelölt prímhatvánnyal — mivel mindkét jelölés bevett az elméletben, a szerző nem kíván eltérni egyiktől sem.
2
A tétel ennél gyengébb feltételek mellett is igaz, amelyek kimondása azonban itt túl technikai lenne.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Oláh-Gál Róbert 2017. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Gauss és Bolyai János — újraértékelve

Gauss születésének 240. évfordulójára

Írásom célja — amellett, hogy megemlékezzek „a matematikusok fejedelme” születésének 240. évfordulójáról — hogy felmentsem Gausst az alól a hamis vád alól, amely a köztudatban él, hogy Gauss nem ismerte el Bolyai János korszakalkotó felfedezését.

240 éve, 1777. április 30-án született Gauss, a matematikusok fejedelme. Nekünk, magyaroknak, Gauss nevének hallatán önkéntelenül is a Bolyaiak jutnak eszünkbe, és nem éppen a legnagyobb kegyelettel és tisztelettel, hanem inkább keserű ízzel és tövissel a lelkünkben. Mégis fontosnak tartom bemutatni Gauss valódi tudósi és emberi nagyságát, és feloldozni a közismerten elterjedt vádaktól, jelesül, hogy agyonhallgatta Bolyai János felfedezését. Ideje, hogy kivessük Gaussról való vélekedésünkből a keserű ízt, és nehezményezésünket objektív és tiszta Gauss-képpel váltsuk fel.

Gauss nemcsak mint tudós volt nagy, de mint ember is a legtisztességesebb, legbecsületesebb német szellem volt. És nem másokat fogunk megidézni és tanúként meghallgatni Gauss feletti ítélkezésünkben, mint a két Bolyait. Kezdjük hát Gauss halálával. Íme, Bolyai Farkas búcsúverse:

„Summa et ima simul penetras vix extitit alter
Ultraque digna etiam promovit acumine eodem
Mens ingens, fulgore carens, sed lumina pollens
Quod mors frangendo fracta ipsa extinquera nequit
Atque Deo, ul Newton gandents pectore puri
Aetherer coelor pervandent ulteriores.”
„Mindenek velejébe hatolt, mint senki se jobban:
Földerítette a legmélyebbet s legmagasabbat.

Ritka nagy ész, nem csillámló, de világot özönlő:

Bár elhunyt, a halál nem bírja eloltani fényét,
S Isten színe előtt, mint Newton, úgy ő is a tiszta
Lelkek közt örvend, ott jár a boldog egekben[1].”

Sajnos nem eléggé közismertek azok a megrendítő sorok, melyeket Bolyai János írt atyjának, Farkasnak, miután értesült Gauss haláláról:

„A Gauss fátuma melyet magát jól-bírása mellett még távol lévőnek reménylettem, akkora fájdalmas hatással van rám, lelkem úgy siratja és oly mélyen gyászolja (részint annak elveszte miatt, mit még tehetett volna, részint mivel az igazi jó mathematicumok meg-ítélésében rajtunk kívül legcompetensebb Bíró veszett el a tan s köz-jó rendkívüli s alig ki-pótolható kárára), mintha egy második Atyámat vesztettem volna el! Nagy Sándor egy fényes expeditiójában, egy dombról el-nézve hatalmas számos hadseregét, sírt, azt felelvén a sírás okát kérdezőknek, hogy siratja az emberi mulandó sorsot, midőn mind-azon most oly tevékeny harcosokból 100 év múlva tán egy sem lesz többé. S az ezt író philosoph utána teszi: sírt, mert Nagy Sándor volt. Mennyivel inkább sírhatni a leg-kősziklább keblű férfinak is, és éppen annak, ha dologhoz értő, s egy oly embert egészen megítélni s tehát méltányolni is képes, akkora ember el-estét! De legnagyobb vigaszul szolgálhat az, hogy ha nem volna örök élet (mi föl-tét persze nem áll) bármi jó is csak ideigi volna; mivel örökké élünk, bármely vesztesség is csak ideigi, és semmi jó kárba nem megyen.”[2]

Tehát, Bolyai János is úgy siratta Gauss elhunytát, mintha egy másik atyját vesztette volna el!

Ha figyelmesen olvassuk Gauss 1832. márciusi levelét, azt is be kell látnunk, hogy az a bizonyos levél nagy hozzáértésről és magas fokú tájékozottságról ad tanúbizonyságot, vagyis Gauss valóban sokat elmélkedhetett a párhuzamossági axiómán.

Gauss egy olyan általános eszközt adott a matematikusok kezébe, nevezetesen a felületek általános elméletét, a differenciálgeometria „szerszámosládáját”, amellyel a nemeuklideszi geometria is egyértelműen és tökéletesen leírható és kezelhető. A Gauss-féle felületelmélet eszközeivel az akkori matematikai rendszereken belül is lehetségessé vált az új nemeuklideszi világ bemutatása.

A 20. század eleji nagy magyar matematikusok ezt szerintem tisztán látták. Ezért kezdeményezték a *Disquitiones generales circa superficies curvas* című híres művének magyarra fordítását és közzétételét. Sajnos, a későbbi tudománytörténeti kutatások ezt teljesen figyelmen kívül hagyták, és egyetlen magyar matematikatörténész sem említi meg ennek a korszakalkotó műnek a magyarra fordítását. Pedig a riemanni és az einsteini geometria Gauss eme korszakalkotó munkájára épül, és nem Bolyai János

Scientia Spatii absolutem vera művére, tehát nem Bolyai Jánosnak a *Tér abszolút igaz tudomány*ára építettek, hanem éppen Gauss általános felületelméletére!

Gauss *e* műve szerencsére (és nagy meglepetésemre) magyarul is olvasható *A felületek általános elmélete* címmel[3]. Ebben a műben Gauss lerakta a differenciálgeometria alapjait. Megmutatta, hogy egy geodetikus háromszög szögeinek összege lehet nagyobb is és kisebb is, mint 180 fok. Ma már tudjuk, hogy Gauss felületelméletére épül a modern differenciálgeometria, a Riemann-geometria, és hogy a konstans görbületű felületek belső geometriája egyenértékű a három elemi geometriával. Ahogy a lineáris algebra nevezetes tételei megfogalmazhatók az analitikus mértan nyelvén is, ahogy a gráfelmélet leírható formális nyelvekkel is, úgy írható le a nemeuklideszi geometria a Gauss-féle felületelmélettel is. Gauss 1827-ben publikálta *Disquisitiones generales circa superficies curvas* című művét, tehát a formális publikálással is megelőzte mind Lobacsevszkijt, mind Bolyait.

Végezetül idézzük fel Gauss vélekedését Bolyai Farkasról: „*Egyedül ő fogta fel metaphisikai eszméit a matematika felől*” vagy „*Bolyai a legritkább emberek közül való, kiket valaha láttam*”!

Végre megjelent Gauss és Bolyai Farkas levelezése magyarul[4], és így mindenki átolvashatja kettejük igen szoros és mély barátságának valósághű eseményeit. Bolyai Farkas költői lélek volt, és sajnos érzelmi túlfűtöttségét átvitte a Gauss-szal folytatott levelezésébe is. Általában igen elítélően írt a nőkről és a szerelemről is. Bolyai Farkas sokszor olyan stílust és hangnemet engedett meg magának a Gausshoz írt leveleiben, amely nagyon illetlen volt egy akkori német ember szigorú erkölcsi normája szerint. (Székelyesen szólva, nagyon bütürmec stílusban írt Gaussnak!) És ez volt az oka annak, hogy Gauss inkább a hallgatást választotta.

Bolyai Farkas boldogan számol be, hogy megnősült és várja fia születését:

„*A leányt, akiről írtam Neked, két évig szerettem hevesen tomboló szenvedéllyel, s ő minden üldözéssel dacolva ritka példáját adta állhatatosságnak. Feleségül vettem, remélem nemsokára apa leszek, s boldog férjnek tartom magam. De ne hagyd példámtól esetleg elcsábítani magad, a leányoknak akkor se higgy, ha lobogó lánggal esküsznek örök hűséget Neked; a roppant tűz leég, s a hamu sötét,...*”[5]

„*Olyannyira örvendek házi boldogságodnak. Ölelem hitvesedet, aki az élet legédesebb kincsét ajándékozza barátomnak. Azt írod, ne hagyjam példád által elcsábíttatni magam és sajna biztos az, hogy aki házasodik az lutrira tesz, ahol sok a kudarc és kevés a találat. Adja az ég, ha egyszer majd én is húzok, ne kudarc legyen osztályrészem.*”[6]

Viszont Bolyai Farkas óva inti Gausst a házasságtól és nagyon elmarasztalóan ír általában a nőkről:

„Ne higgy egy lánynak se, tessék bár olyan tisztának, mint a fénysugár, - szíve mint kellemetesen tiszta talajból feltörő kristályforrás, - puha mint a hűsítő esti lég a fülledt nyárban. Ne higgy! Alba ligustra cadunt (A fehér angyal lehull, a fehér hó elolvad, és fekete sár marad nyomában.)”[7]

Gauss megírja a barátjának, hogy ő is szerelmes egy igazi földre szállt angyalba:

„Olbersnél, ismerőseim közül az egyik legszeretetreméltóbb embernél, és Schröternél voltam egy hónapig Brémában és Lilienthalban, négy hónapot pedig Gothában időztem. Itt is sok barátra és ismerősre találtam. A legszebb azonban ezek közül egy gyönyörűséges leányka, aki egészen olyan, mint amilyennek életem társát mindig is elképzeltem. Csodálatosan szép Madonna-arc, tükre a lélek békéjének és egészségének, némiképp ábrándos szemek, hibátlan termet, és ha ez még nem volna elég, mindehhez világos értelem és művelt beszéd is hozzájárul...

Majd Gauss felrója Bolyai Farkasnak, hogy nem osztja azt a véleményét, hogy a nők mind csalfák:

„Barátom. E tulajdonságok idegenek az én Johannámtól (így nevezik őt, mint a te János fiadat). De őrá az öröklétig soha nem illő a Te szörnyűséges festményed.”[8]

Miután sok éves hallgatás után újra folytatódni kezd a kettőjük levelezése, és Bolyai Farkas elküldi Gaussnak fia korszakalkotó felfedezését, közvetlenül utána Bolyai Farkas azt írja Gaussnak, hogy a fia nagyon hálátlan, gonosz, sőt egyenesen őrültnek írja.

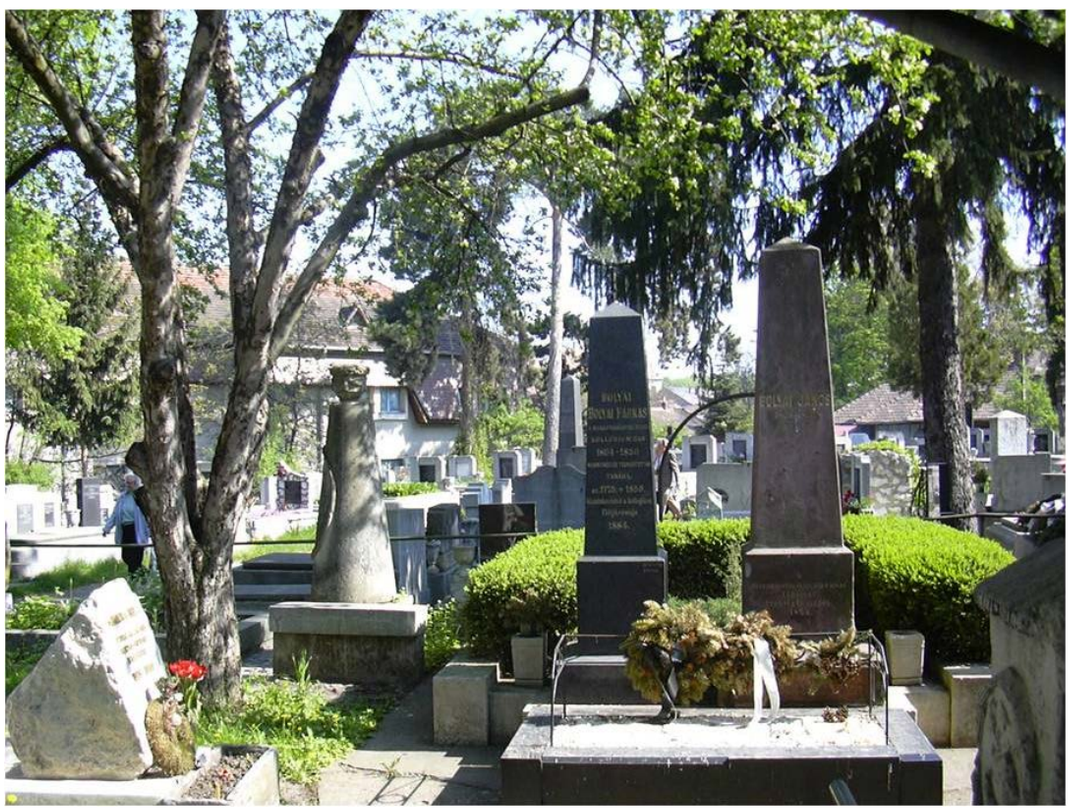
„A legsúlyosabb csapás azonban, ami megtörte szívemet, a fiam szinte hihetetlen hálátlansága, akiért annyit (olykor túlságosan sokat) tettem; évek (de legkivált a közelebb múltnak) óta az ő mártírja vagyok. Végül kénytelen voltam őt az atyai körből száműzni. S minthogy szívem lágyságát legyőzve megkeményítem magam, most kezd megtérni. A legrosszabb az, hogy öccsének is ellensége, s ha én meghalok, árva az ő karmai közé kerül. Minden tehetsége mellett iszonyúan lobbanékony és bosszúvágyó katona, s semmiségekért is huzamosan haragtartó, vagyis mindenütt kiállhatatlan. A legkevesebb az, hogy Lear szerepét játszatja el velem. Sokszor véltem Franz Moorhoz hasonlónak vagy bolondnak (mint anyja volt).”[9]

Ilyen körülmények között hogyan is várjuk el Gausstól, hogy elismerően írjon Bolyai Jánosról? Ha Bolyai Farkas nagyon emberi hangon megkéri Gausst, legyen szíves írjon néhány elismerő sort a fia munkájáról, Gauss biztosan meg is tette volna. De Gauss úgy értelmezte, hogy a *Tér abszolút igaz tudományát*, az apa és a fia együtt alkotta meg, és ez ellen Farkas nem is tiltakozott!

Összefoglalva tehát figyelmesen olvasva a Gauss-Bolyai levelezést, elmondhatjuk, hogy annak, hogy Gauss nem ismerte el Bolyai Jánost, okozója maga Bolyai Farkas volt, aki őrültnek, hálátlannak, gonosznak prezentálja fiát Gaussnak. Talán még Gauss sem hitte el, hogy Bolyai János őrült, mert ismerte költői képekben gondolkodó és túlzásokba eső barátját! Véleményem szerint Bolyai János matematikai tehetségét apjának köszönhette mind genetikailag, mind nevelés terén, de sajátos, magába húzódó (elefántcsont-toronyba zárt) életét és el-nem-ismertetését is apjának köszönheti.

Oláh-Gál Róbert egyetemi adjunktus

Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Csíkszeredai Kar



Jegyzetek

Carl Friedrich Gauss életének kronológiája[10]

1777. április 30-án megszületett Brunswickben.

1784. elkezdi a Szent Katalin iskolát Brunswickben.
1795. október 15-én beiratkozik a Göttingeni Egyetemre.
1796. március 30. Felfedezi a 17 oldalú szabályos sokszög szerkesztését. A táblát, amelyen a felfedezését levezette, Bolyai Farkasnak ajándékozta.
1801. szeptember 29. Közzéteszi a *Disquisitiones arithmeticae* című számelméleti művét.
1805. október 9-én feleségül veszi Johanna Osthoffot.
1806. augusztus 21-én megszületik Joseph fia.
1807. július 25. Hivatalos meghívás a Göttingeni Egyetemre. Elfogadja.
november 21. Megérkezik családjával Göttingenbe.
1808. február 29. Megszületik lánya, Minna.
április 14. Meghal apja.
1809. szeptember 10. Megszületik fia, Louis.
október 11. Meghal felesége.
1810. március 1. Meghal fia, Louis.
augusztus 4. Feleségül veszi Minna Waldecket.
1811. július 29. Megszületik fia, Eugen.
1813. október 23. Megszületik fia, Wilhelm.
1816. június 9. Megszületik Therese lánya.
1817. Megosztja otthonát idős édesanyjával.
1830. Fia, Eugen Amerikába megy.
1831. szeptember 12-én meghal a második felesége.
1839. április 18-án meghal az édesanyja.
1840. augusztus 12. Minna lánya meghal.
1849. július 16-án doktorátusa megszerzésének aranyjubileumát ünnepli. Az algebra alaptételének utolsó bizonyítása.

1855. február 23. Halála.
február 26. Temetése.

A Bolyaiak életének rövid kronológiája[11]

1775. február 9-én, Bólyában megszületett Bolyai Farkas.

1796. október. Göttingen. Beiratkozik Kemény Simon mentoraként az egyetem bölcsészeti karára.
1797. szeptember 29. Braunschweigből Gauss levelet ír Bolyai Farkasnak.
1802. szeptember 11. Domáldon Bolyai Farkas levelet ír Gaussnak.
1802. december 15. este 9 óra, Kolozsvár: megszületett Bolyai János.
1823. november 3-án a híres temesvári levél keltezése (...a semmiből egy új, más világot teremtettem...).
1831. június 20-án különlenyomatként megjelenik az *Appendix*.
1831. június 20. Marosvásárhelyről Bolyai Farkas levelet ír Gaussnak.
1832. március 6-án Gauss megírja „sokat vitatott értékű válaszlevelét” Göttingenből.
1832. március 9-én Bolyai Farkast a Magyar Tudós Társaság levelező tagjai közé választotta (a Természettudományi Osztályba, de egy napra rá átteszik a Matematikai Osztályba).
1856. november 20-án meghalt Bolyai Farkas.
1860. január 18-án Bolyai János nagyon rosszul lett, tüdőgyulladást kapott.
1860. január 26-án 22 órakor Bolyai János „szava elállott”.
1860. január 27-én elhunyt Bolyai János, minden idők egyik legnagyobb matematikusa.

Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij (Nyizsnyij Novgorod, 1792. december 1. — Kazány, 1856. február 24.)

Ez az írás a 2017. májusban megjelent cikk átdolgozása:

http://www.e-nepujsag.ro/op/article/240-éve-született-gauss

Gauss portréja a Wikipédián található, Gottlieb Biermann festménye, 1887-ből.

Lábjegyzetek

1

Ponori Thewrewk Emil fordítása.

2

Bolyai János levele Apjához, Marosvásárhely, 1856. július 12. Bolyai János élete és műve, Állami Tudományos Könyvkiadó, Bukarest, 1953. 418. old.

3

Mathematikai és Physikai Lapok, hatodik kötet, Budapest 1897, fordította Szíjártó Miklós, 47-114. old.

4

A Bolyai-Gauss levelezés, Szerkesztette: Nagy Ferenc, Bolyai Kiadó, Better MTA KIK, Budapest, 2015.

5

Bolyai — Gaussnak, Domáld, 1802. IX. 11.

6

Gauss — Bolyainak, Braunschweig, 1802.XII.3.

7

Bolyai — Gaussnak, Kolozsvár, 1803. febr. 27.

8

Gauss — Bolyaihoz, Braunschweig, 1804. VI. 28.

9

Benkő Samu: Bolyai-levelek, Kriterion, 2002, Bolyai Farkas - Gausshoz, Marosvásárhely, 1835. április 20. Pp. 182—183.

10

http://www.geocities.ws/RainForest/Vines/2977/gauss/g_charts.html (letöltés ideje 2006. Az adatok innen származnak.)

11

Az eredeti, 100 oldalas változat a Magyar Tudományos Akadémia Domus Programja által támogatott tevékenység keretében készült, 2013-ban.

Bolyai matematikatörténet Gauss

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

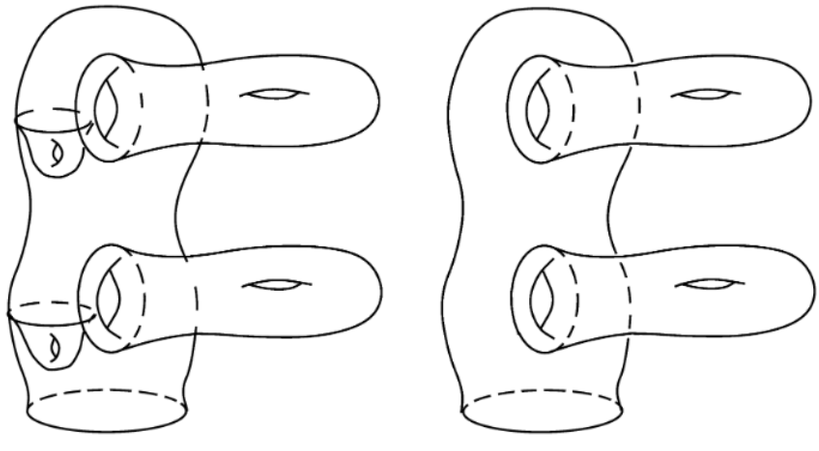
Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Peter Teichner 2017. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is ... a csáp?

A *csáp* (angolul *grope*, ami „tapogatózást” jelent) egy matematikai kifejezés, amely nyomtatásban először Jim Cannon 1978-as Bulletinben közölt cikkében [1] jelent meg. Ő a kifejezés kitalálójának egy madisoni geometriai topológus kollégáját, Russ McMillant tartotta. Cannon elmagyarázta, hogy azért nevezték ezt a dolgot csápnak, mert „számos tapogatózó ujj nő ki belőle”. Arra is felhívta a figyelmet, hogy „ez a szóhasználat rossz szóviccekhez vezethet” – némelyiknek ő sem tudott ellenállni. Az évek során még publikálásra szánt cikkek is vissza lettek utasítva, mert használták a *csáp* szót.



2 magasságú (balra) és 3 osztályú (jobbra) csápok

Matematikailag egy *csáp* egy bizonyos 2-dimenziós komplexus (amelynek egy körvonal a határa), amely *felületek* uniója (ahol felületen egy kompakt, összefüggő, irányított 2-dimenziós sokaságot értünk egy határoló körvonallal). Ahhoz, hogy beszélhessünk arról, hogyan vannak ezek a felületek összeragasztva, egy komplexitást mérő fogalmat, a csáp *magasságát* vezetjük be. Ha a csáp h magassága 1, akkor a csáp csak egy Σ felület. Ha $i = 1, \ldots, 2g(\Sigma)$, ahol $g(\Sigma)$ a Σ felület génusza, akkor alkossák az α_i-k a Σ felület egy körökből álló teljes szimplektikus bázisát. Ekkor egy

$h+1$ magasságú csápot úgy kapunk, hogy h magasságú csápokat ragasztunk az α_i-khez a csápok határoló körei mentén.

Ezért a csápok nem sokaságok, de az előforduló szingularitásaik nagyon egyszerű típusúak, úgyhogy ezek a 2-komplexusok bizonyos értelemben a felületek után a legegyszerűbb terek. Hogy motiváljuk a csápok és magasságuk definíciójának bevezetését, a következőkben elmagyarázzuk, hogyan kapcsolódik mindez a csoportelmélethez.

Csoport kommutátorok és csápok

Egy $S^1 \to X$ (a körvonalból valamilyen X térbe menő) folytonos leképezés a $\pi_1(X)$ fundamentális csoportnak egy elemét reprezentálja. Ez a leképezés pontosan akkor terjed ki valamilyen felületnek (azaz egy 1 magasságú csápnak) az X-be menő leképezésévé, ha egy kommutátort reprezentál $\pi_1(X)$-ben. Ezt úgy láthatjuk a legkönnyebben, hogy a g génuszú Σ felületre mint párosított oldalakkal rendelkező (és középen kilyukasztott) $4g$-szögre gondolunk. Ezt a párosítást úgy kapjuk, hogy vesszük a következő szót a $4g$-szög határának mentén:

$$\prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}.$$

Mivel Σ határoló köre a $4g$-szög közepén helyezkedik el, ezzel a kommutátorral kell megegyeznie. Iterált kommutátorok hasonlóan fejezhetők ki csápok X-be menő folytonos leképezéseivel: egy $S^1 \to X$ leképezés pontosan akkor reprezentálja $\pi_1(X)$ *leszálló lánca* h-adik tagjának egy elemét, ha kiterjed egy h magasságú csáp folytonos leképezésévé. Emlékeztetünk rá, hogy egy $G = G^{(0)}$ csoport leszálló lánca a $G^{(h+1)} := [G^{(h)}, G^{(h)}]$ iterált kommutátorokkal van definiálva. A csoport *feloldható*, ha ez a sorozat 1-ben végződik. A leszálló láncnak egy közeli rokona az *alsó centrális lánc*, melyet a $G = G_1$ csoportra a $G_{c+1} = [G, G_c]$ definícióval adunk meg. A csoport *nilpotens*, ha ez a sorozat 1-ben végződik. Az olvasó megpróbálhatja elképzelni hogyan definiáljunk bizonyos 2-komplexusokat (egy határoló körvonallal), amelyeket c *osztályú csápoknak* hívunk, úgy, hogy egy $S^1 \to X$ leképezés pontosan akkor reprezentáljon egy elemet $\pi_1(X)$ alsó centrális láncának c-edik tagjában, ha kiterjed egy c osztályú csáp folytonos leképezésévé. Valójában az ilyen csápok általánosabbak, mint amelyeket legelőször definiáltunk, és a szóhasználat meg is változott az évek során: a h magasságú csápokat ma *szimmetrikus csápoknak* is nevezzük. Ezek a csoportelmélet szerint $c = 2^h$ osztályúak. Nem minden csáp szimmetrikus, ahogy azt a fenti ábra is mutatja.

Geometriai csoport kommutátorok

Ahogyan csápok leképezéseivel leírhatunk iterált kommutátorokat $\pi_1(X)$-ben, nézhetünk *beágyazott* csápokat is ahhoz, hogy több geometriai kérdést tanulmányozzunk. Ezeknek a legközvetlenebb felhasználása tűnik a legaktuálisabbnak, és ezt a csomóelmélet témakörében találjuk. A csomóelmélet a 3-dimenziós térbe *beágyazott* körök elmélete (ami más, mint a körök folytonos leképezéseié a fundamentális csoport esetében). Emlékeztetünk rá, hogy minden csomó határol egy Seifert felületet a 3-dimenziós térben, de csak a triviális csomó határol beágyazott körlapot. Ezért az egész csomóelmélet a felületek és a körlap közötti különbségből ered. Ahogy láttuk, ez pont olyan, mint a különbség egy $\pi_1(X)$-beli kommutátor és a csoportbeli egységelem között. A csápok lehetőséget adnak arra, hogy filtráljuk ezt a különbséget, hasonlóan a csoportelméletbeli iterált kommutátorokhoz.

4-dimenzióban gondolkodva oda jutunk, hogy $S^3 = \partial D^4$-ben tanulmányozzuk a csomókat, amik kiterjednek h magasságú szimmetrikus csápok D^4-be való *beágyazásaivá*. Ez a *csomó konkordizmuscsoport* egy filtrálását adja meg, melyet Cochran, Orr és Teichner vezettek be 1998-ban. Megmutatták, hogy az összes előzőleg ismert konkordizmus invariáns megkapható ebből kis h-ra. Például ha a csomó egy 4 magasságú szimmetrikus csápot határol D^4-ben, akkor az összes Casson-Gordon-invariánsa eltűnik. A csomó komplementumának feloldható fedéseivel és annak von Neumann-szignatúráival megmutatták továbbá, hogy ennek a filtrációnak minden egymás után következő faktora nemtriviális.

Schneiderman bebizonyította, hogy minden csomó, amelynek triviális az Arf-invariánsa, határol valamilyen tetszőlegesen nagy *osztályú* (nemszimmetrikus) csápot D^4-ben. Viszont ha ilyen csápot a 3-dimenziós térbe ágyazva keresünk, akkor egy gazdag obstrukcióelméletet kapunk. Ezt Conant és Teichner dolgozta ki, és szorosan kapcsolódik a Vassiliev-féle csomóinvariánsokhoz, ahol a csáp osztálya pontosan megfelel az invariáns *véges típusának*.

A csápok ezen 3- és 3.5-dimenziós alkalmazásainak áttekintéséhez és további hivatkozásokhoz [3]-at ajánljuk.

A csápok rövid története

Csápokhoz hasonló objektumok először 1971-ben tűntek fel Stanko egy cikkében, aki megmutatta, hogy bizonyos 3 kodimenziós vad beágyazások sima beágyazásokat közelítenek meg. 1975-ben Cannon és Ancel kiterjesztették Stanko technikáját 1 kodimenzióra. 1977-ben Cannon bevezette a csápokat és a *diszjunkt körlap tulajdonságot*, hogy bebizonyítson számos sokaság-felismerési tételt. Közöttük volt a híres *Kétszeres szuszpenzió tétel*, ami azt állítja, hogy egy tetszőleges n-dimenziós homologikus gömb kétszeres szuszpenziója homeomorf a standard $(n+2)$-dimenziós gömbbel. (Egy X tér szuszpenziója az X két kúpjának X mentén vett uniója.) Az eredmény rendkívül meglepő volt, mivel egy X sokaság egyszeri szuszpenziója csak akkor lehet sokaság, ha X a standard gömb. Cannon előtt, és csápok használata nélkül Bob Edwards sok egyedi esetben bebizonyította a kétszeres szuszpenzió tételt (és belátta a Háromszoros szuszpenzió tételt). De ezen problémák megoldásában a csápok olyan sikeresnek bizonyultak, hogy Edwards azt javasolta, 4-dimenziós topológiában is használják őket. Michael Freedman vezette be őket az 1983-as varsói Nemzetközi Matematikai Kongresszus kiadványában megjelent cikkében. Ebben a cikkben kiterjesztette a *Körlap beágyazási tételét* az egyszeresen összefüggő esetről *jó* fundamentális csoporttal rendelkező 4-sokaságokra. Ez magában foglalta a véges és ciklikus csoportokat (de még mindig nyitott kérdés, hogy mely csoportok jók, pillanatnyilag a szubexponenciális növekedésű csoportok a legáltalánosabb ismert osztály). A [2] monográfiában a 4-sokaságok topologikus elmélete teljes egészében a szimmetrikus csápokkal lett megfogalmazva.

Érdekes megfigyelni, hogyan tolódott a csápok felhasználása az évek során egyre alacsonyabb dimenziókba. A szlogen azonban mindig ugyanaz maradt: ha egy körlapot keresel, próbálj meg először egy csápot találni.

Peter Teichner

Irodalomjegyzék

1

J. Cannon, *The recognition problem: What is a topological manifold?* Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), 832-866.

2

M. Freedman és F. Quinn, *The topology of 4-manifolds*, Princeton Math. Series **39**, Princeton, NJ, 1990.

3

P. Teichner, *Knots, von Neumann Signatures, and grope cobordism*, Proceedings of the international congress of mathematicians, Vol H: Invited lectures, 2002, 437-446.

Megjegyzések

- *Peter Teichner* a Berkeley California Egyetem matematika professzora. E-mail címe: teichner@math.berkeley.edu
- A szerző köszönetet mond Ric Ancelnek a vizsgált fogalom eredetének tisztázásáért.

- A fenti dolgozat eredetije 2004 szeptemberében jelent meg a *Notices of the American Mathematical Society* folyóiratban. Peter Teichner, WHAT IS...a Grope? *Notices Amer. Math. Soc.* Vol. 51 Num. 8 (September, 2004) 894-895. Ez a fordítás a szerző és az AMS engedélyével jelenik meg. ***Fordította Kalmár Boldizsár***.

Mi is...?

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Ferenci Tamás 2017. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Nézd és mondd!

Számsorozatok rengeteg matematikai mulatság tárgyát képezik. A hagyományosabbaktól (Fibonacci-sorozat — az első két szám 0 és 1, utána minden következő az előző kettő összege: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 stb.) az egészen elborultakig (lusta pincér sorozat — n számú vágással legfeljebb hány részre lehet szeletelni egy tortát: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22 stb.) Dunát lehet rekeszteni a különböző számsorozatokkal, a képzési lehetőségek végeláthatatlan volta miatt. 1964-ben egy Neil Sloane nevű matematikus elkezdte szisztematikusan gyűjteni az egész számokból álló számsorozatokat [6]. 1973-ban már több mint 2000-nél járt, 1995-ben elérte az 5000-et, mígnem 1996-ban egész projektjét feltöltötte az Internet-re, létrehozva az Számsorozatok Online Enciklopédiáját (OEIS, http://oeis.org/). Az OEIS-ben minden számsorozat egy egyedi azonosítóval rendelkezik, például a Fibonacci az A000045, a lusta pincér az A000124, és kommentárral, a számsorozatra vonatkozó tételekkel, őket generáló programmal stb. vannak ellátva. Az OEIS bővülési üteme egészen elképesztő, a 100 ezredik sorozatot 2004-ben, a 200 ezredik sorozatot 2011-ben adták hozzá; ma már több mint 250 ezer sorozatot tartalmaz. (Köztük azt, mely azokból az n számokból áll, melyekre igaz, hogy az An azonosítójú OEIS sorozat tartalmazza n-et: A053873-ös sorozat. Gondolatébresztő filozofikus kérdés: vajon az 53873 benne van az A053873-ös sorozatban?) Az OEIS messzemenőkig támogatja a közösségi bővítést: a meglevő számsorozatok kommentálhatóak, sőt, ha valaki talál egy sorozatot, amelyet újnak gondol, felajánlhatja nekik!

E sorozatok közül is kiemelkedik meghökkentő, sőt, helyenként egészen elképesztő tulajdonságai révén az a sorozat, melyet John Conway 1987-ben talált. (Conway számos egyéb szórakoztató matematikai konstrukció szerzője, az Életjáték nevű sejtautomatája például hazánkban is népszerűvé vált már 1970-es, 80-as években.)

1. Nézd és mondd

Conway sorozatának [1] képzési szabálya nagyon egyszerű: első tagja 1, az összes többit pedig úgy kapjuk, hogy kiolvassuk az előző tagot, és szó szerint leírjuk az ebben szereplő számokat. Például az 1 számot úgy olvassuk ki, hogy „1 darab 1-es”, így a sorozat második tagja: 11. Ennek kiolvasása: „2 darab 1-es”, így a következő tag 21. Ezt már úgy olvassuk ki, hogy „1 darab 2-es és 1 darab 1-es”, így a negyedik tag a 1211. És így tovább, a sorozat első néhány tagja:

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, 1113213211, 31131211131221.

(Remek fejtörő-feladvány e ponton megkérdezni gyanútlan ismerősünktől, akinek nem árultuk el a képzési szabályt, hogy vajon mi a sorozat következő tagja!)

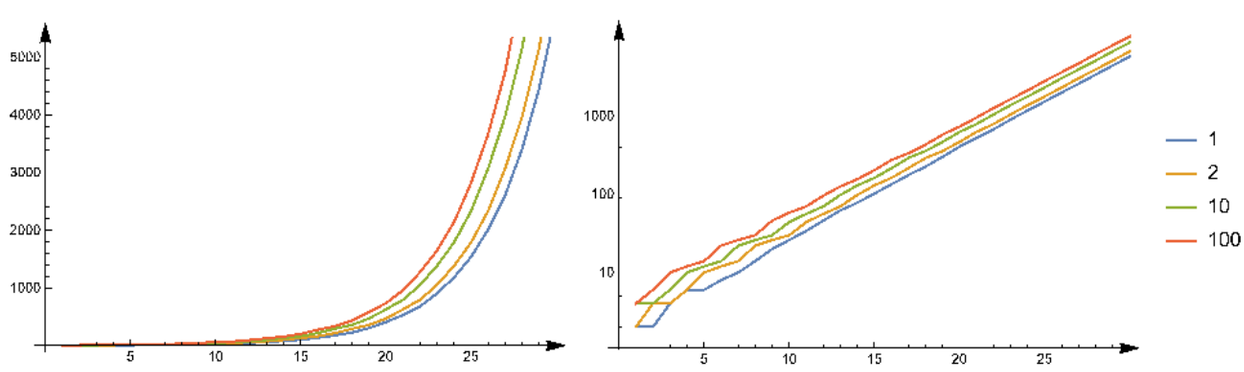
Persze nem muszáj 1-ből indulnunk: kezdhetünk 2-vel (2, 12, 1112, 3112, 132112, 1113122112, 311311222112 stb.) 3-mal (3, 13, 1113, 3113, 132113, 1113122113, 311311222113 stb.), sőt, az indító szám nyugodtan lehet több számjegyű is (például 21, 1211, 111221, 312211, 13112221 stb.).

Conway ezt nevezte „look-and-say” (nézd és mondd, avagy: olvasd fel és írd le) sorozatnak. Az egészben az a legérdekesebb, hogy miközben a sorozat (nagyon) nem „matematikai” módszerrel van generálva, kiderült, hogy egészen mellbevágó — és igencsak matematikai eszközökkel leírható — tulajdonságai vannak.

2. És akkor megoldunk egy egyszerű 71-ed fokú egyenletet

Néhány tulajdonsága a sorozatoknak elég könnyen látható. Például: új 4-es vagy annál nagyobb számjegy nem keletkezhet a második tag után, hiszen mondjuk az 1111 azt jelentené, hogy az előző tag 11 volt, ami lehetetlen, mert ezt egybe kellett volna írni: „1 darab 1-es és 1 darab 1-es nincs”, az „2 darab 1-es” kellett volna legyen.

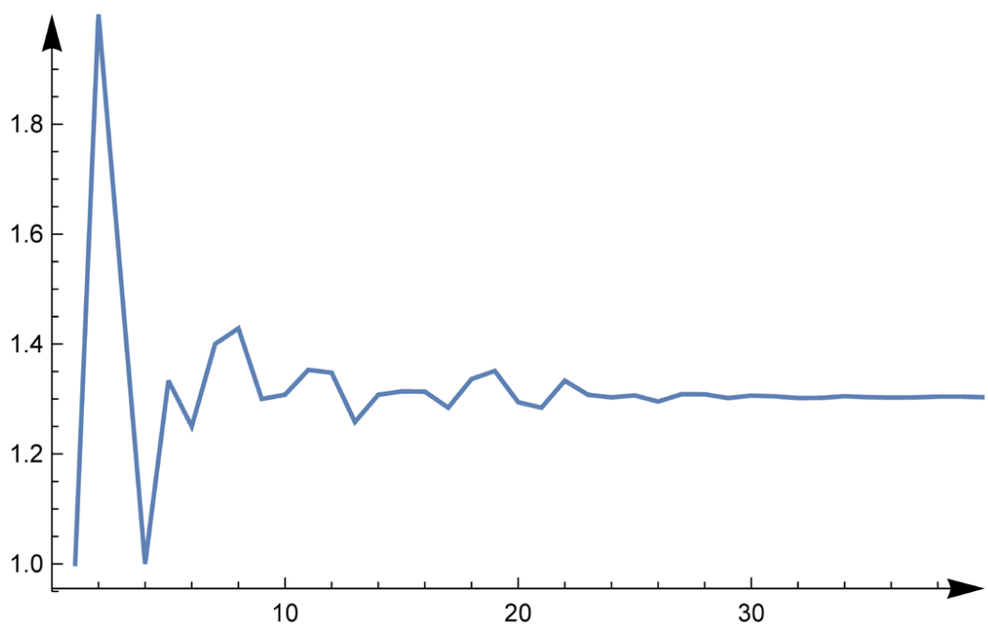
Ezzel együtt is érezhető, hogy annak nincs sok teteje, hogy a sorozat tagjait mint számokat tekintsük, de mi történik, ha azt vizsgáljuk, hogy az egyes tagok hány számjegyből állnak? A 22 végtelenül saját magát ismétli, ez tehát mindig 2 hosszú, de az összes többi esetben valami nagyon érdekes dologhoz jutunk; az 1. ábra mutat is erre pár példát.



(a) Lineáris skálán (b) Függőleges tengely logaritmikus

1. ábra: Sorozatok hosszának alakulása különböző kezdőértékekre

A számok hosszai tehát, nem túl meglepő módon, egyre nőnek — de nem akárhogy: exponenciális növekedést látunk, ráadásul nagyon hasonló mintájút! Ha a függőleges tengely skálázását logaritmikussá tesszük (1b. ábra), akkor egymással párhuzamos egyeneseket kapunk: el vannak tolva függőlegesen, de a meredekségük ugyanaz. Be lehet látni, hogy ez általánosságban is így van: az n-edik tag hossza $C\lambda^n$ alakú, ahol C minden kezdőszámra más, de a λ ugyanaz! Ez más szóval azt jelenti, hogy ha elosztjuk egymással a sorozatok egymást követő tagjainak hosszát, akkor egy adott, állandó számhoz tartó sorozatot kapunk, ez lesz ez a bizonyos λ (hiszen $C\lambda^{n+1}/C\lambda^n = \lambda$). Csakugyan, ha megnézzük például az 1 kezdőszámra, hogy hogyan alakul ez a hányados, akkor a 2. ábrán látható eredményt kapjuk.

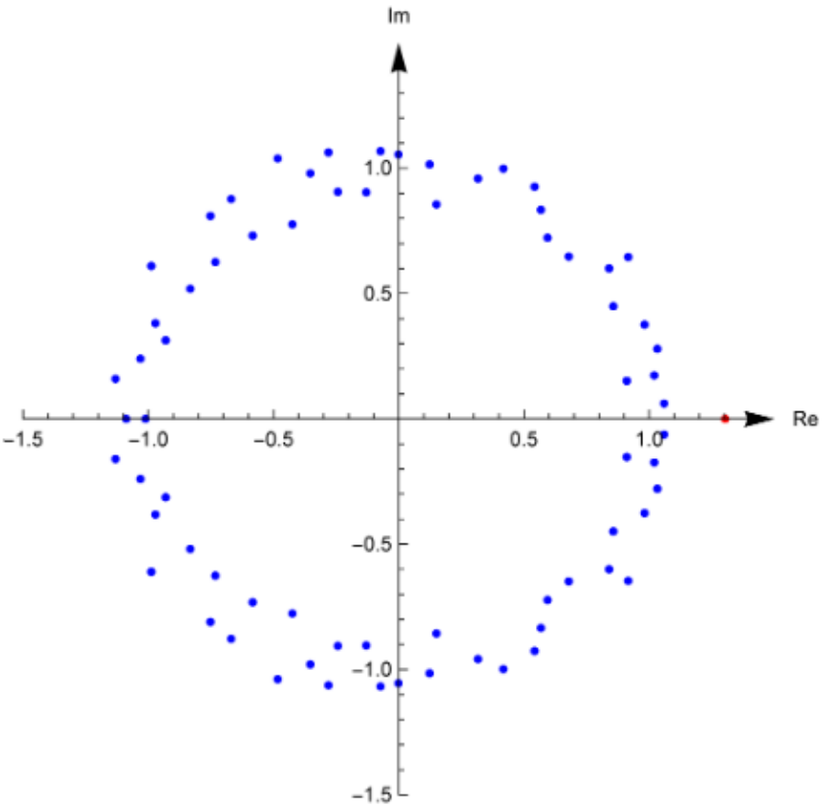


2. ábra. A sorozat egymást követő tagjai hosszának a hányadosa, ha az első szám 1

Jól látható, hogy a hányados valóban közelít egy adott számot, ez lesz a λ. De vajon mennyi ennek az értéke? Conway bebizonyította [1], hogy ez nem más, mint a következő 71-ed fokú egyenlet egyetlen pozitív valós szám megoldása:

$$x^{71} - x^{69} - 2x^{68} - x^{67} + 2x^{66} + \ldots - 7x^6 + 7x^5 - 4x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 3x - 6 = 0.$$

Az egyenlet — komplex — megoldásait a 3. ábra mutatja, pirossal kiemelve az említett egyetlen pozitív valós gyök. Nevezhetjük ezt Conway-állandónak is, értéke 10 tizedesjegy pontossággal: $\lambda = 1{,}3035772690$. Ez nem „közelítő" eredmény vagy becslés: a fenti egyenlet *egzaktan* λ-t szolgáltatja — ki gondolná, hogy a számok felolvasásával és leírásával kapott sorozat számjegyeinek növekedési ütemét pontosan megadja egy 71-ed fokú egyenlet?!



3. ábra. A Conway által megtalált 71-ed fokú egyenlet megoldásai a komplex számsíkon, piros kiemelés mutatja az egyetlen pozitív valós gyököt

3. Audioaktív bomlás

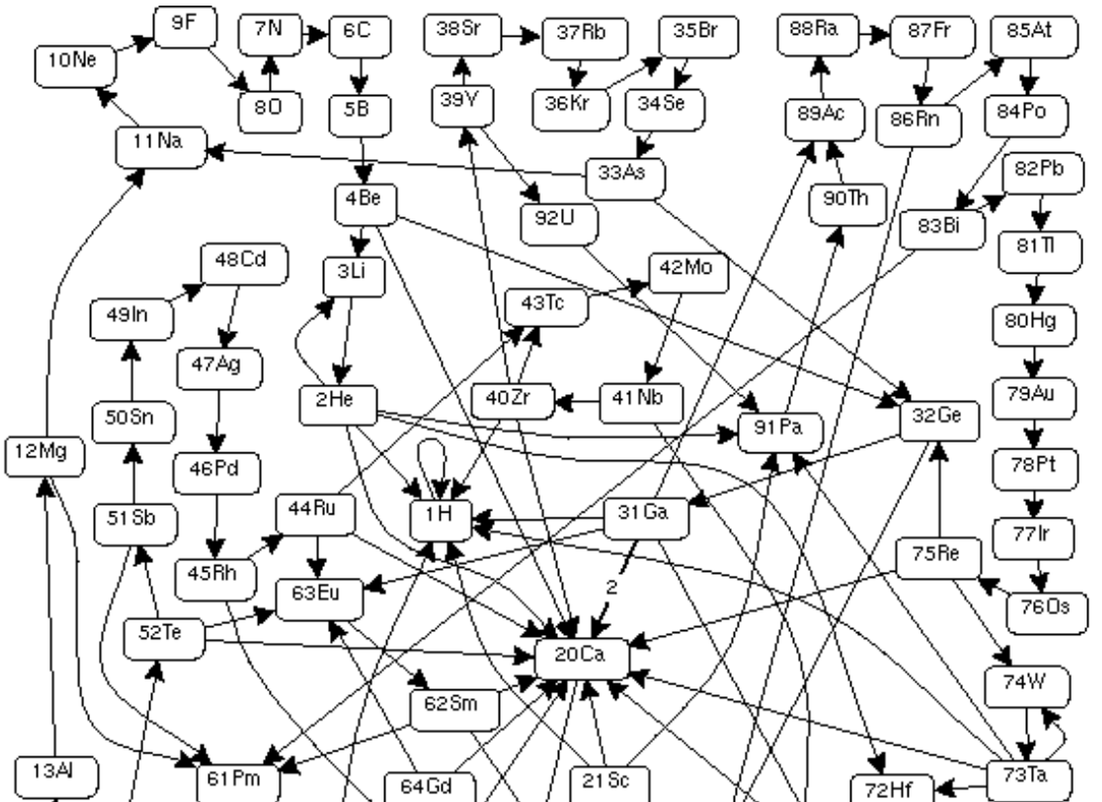
Conway tett egy fontos egyszerűsítő észrevételt is a számsorozatok képzésével kapcsolatban: bizonyos esetben egy hosszabb számsorozat felbontható két részre úgy, hogy az egyes részek „külön életet élnek”, olyan értelemben, hogy egymástól függetlenül vizsgálhatóak, ha a számsorozat további tagjaira vagyunk kíváncsiak. Tehát például ha kíváncsiak vagyunk, hogy egy XY alakú szám után 10-zel mi következik a számsorozatban, vagy, ahogy Conway fogalmazott: mi a 10. utódja XY-nak, akkor ezt megkaphatjuk úgy, hogy *külön* kiszámoljuk X 10. utódját *és* Y 10. utódját, majd a kettőt egész egyszerűen ilyen sorrendben egymás után írjuk. Azaz: nincs szükség a (hosszú) XY vizsgálatára, elég ha tudjuk, hogy a (rövid) X és Y hogyan viselkedik — a bonyolultabb probléma visszavezethető egyszerűbb problémákra. Ennek feltétele nyilván az, hogy X utódjai között egy olyan se legyen, melynek utolsó számjegye megegyezik Y ugyanazon sorszámú utódjának első számjegyével. Conway összeszedte az összes olyan esetet, amikor ez megtörténhet, példának okáért ilyen, ha X utolsó számjegye 4, Y-ban pedig nincs 4-es: ekkor a 4 szám mindig el fogja választani a két rész utódjait.

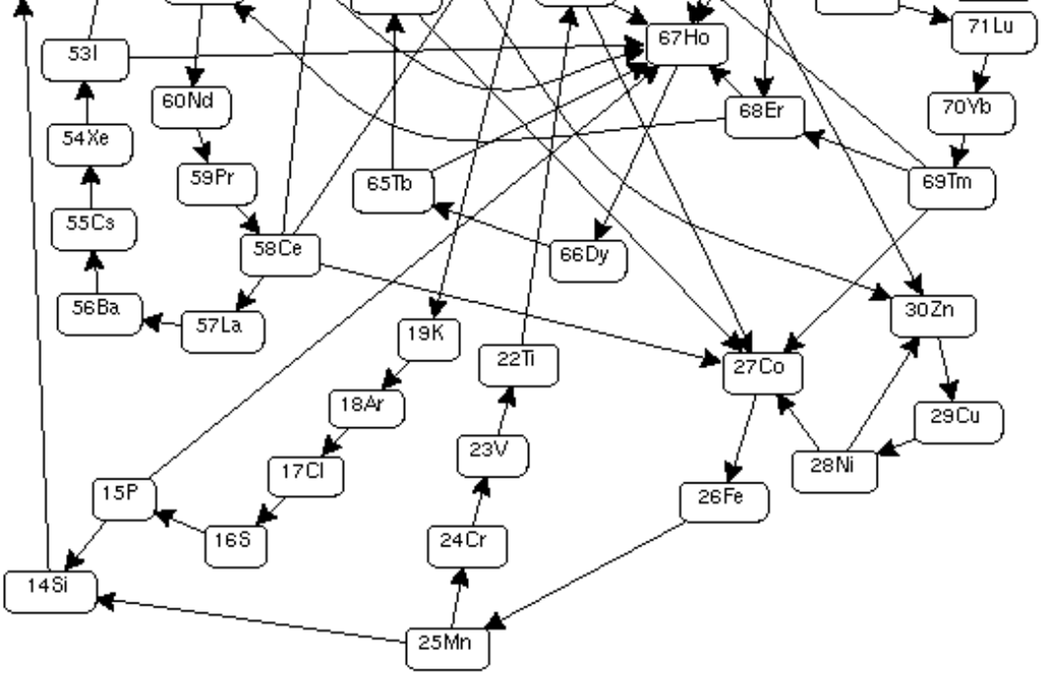
De mi van akkor, ha az X maga is szétbontható két részre? Ekkor még egyszerűbb az elemzés! És ha ezek a részek tovább bonthatóak...? Van ennek valahol határa? Azaz: léteznek olyan számok, amelyek már nem bonthatóak — a fenti értelemben — „elemibb” egységekre?

A válasz a kérdésre pozitív: léteznek olyan számok, amelyek tovább nem redukálhatóak a fenti módon; nevezzük az ilyen számokat *atomnak*, a több ilyenből felépülő számokat pedig az atomok által alkotott *molekulának*. Az igazán érdekes rész most jön: Conway felfedezte [1], hogy bár végtelen sok atom létezik, de van közöttük 92, ami igencsak megkülönböztetett szerepű, mindjárt látni is fogjuk, hogy miért.

92 atom? De hát pont ennyi a természetben előforduló atomok száma! (Legalábbis klasszikusan. Ma már tudjuk, hogy valójában a 43-as rendszámú technécium nem fordul elő a természetben, illetve a 93-98-as rendszámú elemek is előfordulnak, bár nagyon kis mennyiségben.) Conway el is nevezte ezeket a számokat: a hidrogén a 22, a hélium a 13112221133211322112211213322112, és így tovább, végezetül az urán a 3. Hogy teljes legyen az analógia, azt a műveletet, amikor egy számból „nézd és mondd” módon a következő számot származtatjuk, nevezzük *bomlásnak*. Conway ezzel megalkotta az „audioaktív” bomlást: számok lebomlását felolvasás alapján!

Mi a különleges ebben a 92 számban (atomban)? Először is, a bomlásuk zárt hálózatot alkot: a 92 szám mindegyike olyan számra bomlik, ami szintén benne van ebben a 92-ben. Ezt a hálózatot — matematikai szóval élve: gráfot — mutatja a 4. ábra, mely Mario Hilgemeiertől származik [4].





4. ábra. Az atomok bomlását mutató gráf

Például az 1-es jelű hidrogén, a 22 saját magára bomlik, ezért az önmagában mutató hurokél. A 2-es jelű hélium utódja egy olyan molekula, melyben van hidrogén, de még öt másik atom is (ellenőrizzük kézzel!), mindegyikbe mutat egy nyíl. És így tovább.

Az igazán elképesztő rész azonban még csak most jön.

4. Fermat után szabadon

Ahogy mondtam, végtelen sok atom van, így értelemszerűen a fenti 92 nem tartalmazza mindegyiket. Például, rögtön az 1-es nincsen benne. Azonban nézzük csak meg a „bomlási sorának” a hetedik tagját! 1113213211. Ha ezt összevetjük Conway táblázatával, akkor észrevesszük, hogy a 11132 épp a 72-es rendszámú hafnium, a 13211 pedig az 50-es rendszámú ón. Az 1-es bomlásakor tehát egy ponton „ón-hafnium” keletkezett — márpedig innentől kezdve a fentiek miatt *valamennyi* későbbi szám már *szükségképp* a 92 fenti atomból felépülő molekula kell legyen! Megnézve a gráfot, látjuk, hogy a hafnium a 71-es rendszámú lutéciumra (311312) bomlik, az ón pedig a 49-es rendszámú indiumra (11131221), márpedig ezek atomok, így egymástól függetlenül leszármaztathatóak. És valóban: ha visszalapozva megnézzük az 1 bomlási sorának következő „termékét”, akkor az tényleg a 31131211131221! (Íme az audoaktív kémia!) Hasonlóan végigkövethetőek a további lépések is.

És akkor jöjjön az elképesztő rész: Conway bebizonyította [1], hogy ez nem véletlen: előbb vagy utóbb *mindegyik* (!) kezdőszám olyan utódokat hoz létre, amiben ez a 92 atom fog szerepelni! Bármilyen számból is indítjuk a sort, egy ponton olyan szám fog létrejönni, ami kizárólag a 92 Conway által összegyűjtött számból — atomból — épül fel! Márpedig ha ez egyszer megtörténik, akkor a zártság miatt ez már az adott sorozat összes többi tagjára is igaz lesz. Ennek a pontnak az elérése ráadásul nem is igényel rengeteg lépést: Mike Guy igazolta, hogy legfeljebb 24 lépésen belül mindenképp elérjük a 92 atomból álló számokat, és ez a határ éles is, a $2233322211n$ szám esetén tényleg kell ennyi lépés, ahol n tetszőleges 1-nél nagyobb szám.

Ezzel azonban még mindig nincs vége a meghökkentő eredményeknek. Tegyük fel, hogy származtatunk egy számot, majd az eredményt felbontjuk atomokra. Ezt megtéve, meghatározhatjuk az egyes atomok arányát; például az 1 hetedik leszármazottjában 50% ón és 50% hafnium van. A nyolcadikban 50% lutécium és 50% indium. Ha tovább megyünk, akkor egyre több és több elem fog megjelenni. Sőt, ennél jóval több is igaz: a hidrogén kivételével *mindegyik* atom — és így az előbbiek miatt mindegyik szám — bomlási sorában előbb vagy utóbb az *összes* elem megjelenik! Azaz: bejárjuk a teljes fenti gráfot. Természetesen az elemek aránya, mint az előbb is láttuk, folyamatosan változik, de megdöbbentő dolgot találunk, ha nagyon sok bomlási lépésen keresztül követjük nyomon az egyes atomok arányait: azt fogjuk észrevenni, hogy ezek nem össze-vissza ingadoznak, hanem egyre közelebb kerülnek egy adott értékhez, az ón esetében ez például 1,6 ezrelék. Ráadásul Conway azt is bebizonyította [1], hogy *bármilyen* számból indítjuk a sorozatot, az arányok *mindig ugyanoda* fognak tartani! Nyugodtan mondhatjuk tehát, hogy az atomok „előfordulási gyakorisága” egy pusztán rájuk jellemző állandó. A leggyakoribb elem a hidrogén, a 22 (9,2%), a legritkább az arzén, a 111312211312113221133221 12 (27 per millió).

Ezen a ponton azt is elárulom, hogy egy kicsit csaltam a korábbi állítás megfogalmazásánál: valójában a 92 elemen kívül még előfordulhat több is a bomlási sorban, hosszú távon is (Conway a rá jellemző szellemességgel ezeket természetesen transzurán elemnek nevezte...), ám olyan értelemben „nem lényegesek”, hogy az előfordulási arányuk bizonyíthatóan a nullába tart.

A végére hagytam egy érdekes részt: e megállapítások — amit Conway egyébként „kozmológiai tételnek” nevezett el — bizonyításának történetét. Maga Conway az eredeti cikkben úgy jellemezte a problémát, hogy e tétel „„bizonyítása ELKÉPESZTŐEN nehéz”; csupa nagybetűs kiemelés az eredetiben. Leírta, hogy több kollégájával együtt egy hónapon keresztül „igen megfeszített” munkával dolgozott a kérdésen, és sikerült is két bizonyítást adni, mindegyik több tucat oldalt töltött meg — csakhogy a lapokat *elvesztették*! (De legalább nem könyv margójára próbálták írni...)

Tíz éven keresztül senki nem is bizonyította a tételt, mígnem Shalosh B. Ekhad és Doron Zeilberger 1997-ben megadta a második — első fennmaradt... — bizonyítást [2]. (A két szerzőből csak Doron Zeilberger szerző a szó hagyományos értelmében: Shalosh B. Ekhad nem más mint Zeilberger számítógépe — az izraeli matematikus annyira elkötelezett híve a számítógépek matematikában történő alkalmazásának, hogy rendszeresen feltünteti társszerzőként „őt”, Shalosh B. Ekhad ugyanis annyit tesz héberül, hogy 3B1, ami Zeilberger első gépének a típusszáma [3].) E bizonyítás hátránya, hogy csak annyit támaszt alá, hogy 29 lépésen belül elérjük a 92 atom valamelyikét, tehát a 24 lépéses határt nem hozza. Erre sem kellett azonban sokáig várni: 2003-ban Richard Litherland újabb bizonyítást adott, mely immár a 24 lépéses határt is alátámasztotta [5]. E sorok szerzője még egy további bizonyításról tud, ez pedig Kevin Watkins-tól származik 2006-ból [7].

Valamennyi bizonyítás közös jellemzője, hogy a problémát visszavezeti bizonyos esetek egyesével történő leellenőrzésére; „apró” különbség, hogy ezt Conwayék kézzel tették meg, míg a későbbi megoldások számítógéppel. Zeilberger Maple-t használt, Litherland C-t, Watkins Haskell-t. E módszerek felvetik az általános problémát, hogy vajon mikor tekinthető egy ilyen számítógép-program eredménye a szó matematikai értelmében „bizonyítás”-nak, ahogy az ma már legendás módon a négyszín-sejtés bizonyítása kapcsán közismert kérdéssé vált — de ez már egy másik írás témája lehetne.

Ferenci Tamás

Élettani Szabályozások Kutatóközpont, Óbudai Egyetem

Irodalomjegyzék

1
J. H. Conway. The weird and wonderful chemistry of audioactive decay.
In Thomas M. Cover and B. Gopinath, editors, *Open Problems in Communication and Computation*, pages 173—188. Springer New York, New York, NY, 1987.

2
Shalosh B. Ekhad and Doron Zeilberger. Proof of Conway’s lost cosmological theorem.
Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society, 3(11):78—82, 1997.

3
Joe Gallian and Michael Pearson. An interview with Doron Zeilberger.
FOCUS, 27(5):14—17, 2007.

4
Mario Hilgemeier. „one metaphor fits all": A fractal voyage with Donway's audioactive decay.
In Clifford Pickover, editor, *Fractal horizons: The future use of fractals*, chapter 7. St. Martin's Press, New York, 1996.

5
Richard A Litherland. Conway’s cosmological theorem.
https://www.math.lsu.edu/~lither/jhc/cct.pdf, 2003.

6

N. J. A. Sloane. The on-line encyclopedia of integer sequences.
AMS Notices, 50:912—915, 9 2003.

7

Kevin Watkins. Abstract interpretation using laziness: Proving Conway's lost cosmological theorem.
http://www.cs.cmu.edu/~kw/pubs/conway.pdf, 2006.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **GAZDA(G)SÁG** NEVET ADTUK A **GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET ROVATNAK**, AMELYBEN BEMUTATJUK, HOL, MIKÉPPEN HASZNÁLJÁK FEL A MATEMATIKÁT, MILYEN GAZDAG IS AZ A KÖR, AMELYIK ÉRINTI EZT A TUDOMÁNYÁGAT. (ROVATSZERKESZTŐK: *ILLÉS TIBOR, MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR ÉS RÖST GERGELY.*)

Mádi-Nagy Gergely, Molnár-Sáska Gábor
2017. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

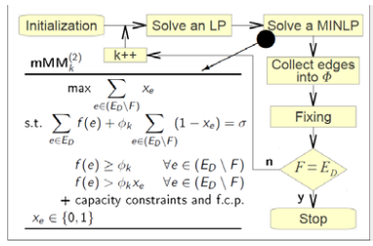
Matematikai Modellalkotás Szeminárium

Az ezredforduló környékén és azóta is ugrásszerűen kiszélesedtek a matematika alkalmazási lehetőségei. Ilyenek pl. az automatizálás, a gépi tanulás, az adatbiztonság, a neurális hálózatok elméletével szorosan kapcsolódó mesterséges intelligencia kutatása és ugyancsak az optimalizálás kérdései az élet számos területén, többek között a pénzügyi matematikában. A BME-n 2001-ben indult el a Matematikai Modellalkotás Szeminárium, amelyről az akkori és a mostani titkár, *Molnár-Sáska Gábor* és *Mádi-Nagy Gergely* számol be.

Röst Gergely
2017. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Európai dinamikus napok Szegeden

A Louvre-ban kiállított ókori tálon egy kiméra látható. Mi az a kiméra és hogyan kapcsolódik a dinamikához? Erről is ír *Röst Gergely*, aki részt vett a Szegeden rendezett európai dinamikus napokon, egy olyan matematikai konferencián, ahol a matematikusok vannak kisebbségben.



Mádi-Nagy Gergely
2017. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

XXXII. Magyar Operációkutatási Konferencia

Az operációkutatás mint önálló tudományterület a II. világháború során született: maga az operáció szó hadműveletre utal, a kutatás célja pedig kezdetben a haderő optimális mennyiségének, ütemezésének megtalálása volt. A háború után az optimalizálás tudománya elsősorban gazdasági és mérnöki területeken fejlődött tovább. Mai állapotában az operációkutatás egy szerteágazó, gyakran önmagában is szép és mély matematikai módszertanon alapuló, rengeteg gyakorlati alkalmazással rendelkező tudományterület.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Mádi-Nagy Gergely, Molnár-Sáska Gábor 2017. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matematikai Modellalkotás Szeminárium

Az ezredforduló környékén és azóta is ugrásszerűen kiszélesedtek a matematika alkalmazási lehetőségei. A hagyományos mérnöki alkalmazások mellett pl. egyre fontosabbá válnak az automatizálás, a gépi tanulás (machine learning), az adatbiztonság, a neurális hálózatok elméletével szorosan kapcsolódó mesterséges intelligencia kutatása és ugyancsak az optimalizálás kérdései az élet számos területén, többek között a pénzügyi matematikában. Ennek folyományaként a matematika és azon belül is a matematikai modellalkotás nagyon fontos része lett mindennapi életünknek. Ezt felismerve még 2001 őszén Szász Domokos vezetésével, Szántai Tamás és Molnár-Sáska Gábor (szeminárium titkár) közreműködésével a Budapesti Műszaki Egyetem Matematikai Intézete elindította a Matematikai Modellalkotás Szemináriumot (http://mmsz.math.bme.hu).

A szeminárium rendkívül sikeresnek bizonyult és a mai napig része nem csak a Műegyetem alkalmazott matematikus hallgatói tanrendjének, de az egész magyar alkalmazott matematika életének. A szeminárium titkári szerepét 2006-ban Mádi-Nagy Gergely vette át.

A szeminárium célja, hogy rendszeres fórumot biztosítson alkalmazott matematikai eredmények, modellek és problémák bemutatására, és ezzel

- elősegítse a BME Matematikai Intézetében és szélesebb körben is az alkalmazott matematikai ismeretek és kultúra elterjesztését;
- fejlessze egyfelől a Matematikai Intézet oktatói és diákjai között, másfelől más intézmények, intézetek (a BME több tanszékét, intézetét is ideértve), cégek, vállalatok matematika iránt fogékony munkatársaival a kapcsolattartást, együttműködést.

További alapvető cél, hogy a hallgatóság plasztikus képet nyerjen az alkalmazott matematika, mint szakma perspektivikus területeiről. A szeminárium előadásai általában érthetőek más területek felsőbbéves hallgatói számára is, akik akkor már túl vannak az igen sokoldalú alapképzésen. Az alkalmazott matematikai témáknál természetesen különösen fontos a problémafelvetés motivációja, a modellalkotás bemutatása és annak illusztrálása, hogy a javasolt megoldás mennyire segít a felmerült problémában.

A szeminárium egyúttal fóruma a BME-n 2003. tavaszán alakult Alkalmazott Matematika és Számítógépes Fizika Kutató Központnak.

A szeminárium előadói mind a magyar, mind a külföldi tudományos élet, illetve az üzleti szféra szereplői közül kerülnek ki.

Az előadók egyik csoportja olyanokból áll, akiknek munkája nem feltétlenül a matematikára fókuszál, mégis sikerrel alkalmazzák azt. Tanulságos, hogy az elmélet hogyan tud hasznosulni: milyen modellalkotási út vezet a képletektől, algoritmusoktól a kézzel fogható eredményekig, amelyek a pénzben mérhető haszontól kezdve egy másik tudományos területen elért átütő sikerig terjedhetnek.

Az előadások másik típusa egy-egy alkalmazott matematikai területet ölel fel, bemutatva az ott elért eredményeket, lehetséges alkalmazásokat. Az itt ismertetett eszköztárak, modellek érdekességén túl, több esetben fordult már elő, hogy bár a témakör alapvetően matematikai indíttatású volt, a későbbiekben gyakorlati alkalmazása széles körűvé vált: iparági sztenderd lett vagy éppen más tudományterületen Nobel-díjat eredményezett.

A szeminárium több mint másfél évtizede alatt számos színvonalas előadót, gyakran a saját területükön nemzetközi szinten magasan elismert szakembert sikerült meghívnunk. Példaként megemlíthetünk pár szélesebb körben is ismert nevet, mint például Bojár Gábor (Graphisoft alapító), Barabási Albert-László (nagy hálózatok egyik vezető kutatója) vagy éppen Domokos Gábor (a Gömböc felfedezője), vagy külföldről Lax Péter, Abel-díjas (azaz matematikai Nobel-díjas) matematikus illetve Alfio Quarteroni (az America's Cup nyertes Alinghí vitorlás tervezője). Üzleti oldalról pedig a Morgan Stanley befektetési bank modellező munkatársaitól hallhatunk minden évben előadásokat.

A felkészült és elismert előadókon túl avval próbáljuk emelni a színvonalat, hogy a szemináriumot egyre szélesebb körben tesszük ismertté.. A nemzetközi hallgatóság bevonása érdekében ettől az évtől kezdve nemcsak a honlapon találhatók meg angolul az anyagok, hanem az előadások fele is angol nyelven fog elhangozni. A fent említett honlap mellett Facebook oldalunkat is elindítottuk: https://www.facebook.com/matmodszem

A szeminárium minden őszi félévben kerül megrendezésre, az előadások nyilvánosak, minden érdeklődőt szeretettel várunk!

A szeminárium helye: ***BME Q épület QBF13 terem***

Időpontja: ***keddenként 16.15***

Az idei év programja és az előző évek előadásainak anyagai megtalálhatók honlapunkon: http://mmsz.math.bme.hu

Mádi-Nagy Gergely és Molnár-Sáska Gábor

---

alkalmazott matematika

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok
Bolyai János Matematikai Társulat — Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap

facebook

Röst Gergely 2017. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Európai dinamikus napok Szegeden

MEGOSZTÁS

A Dynamic Days Europe egy nagy hagyományokkal bíró rangos konferenciasorozat, aminek az egyik különlegessége, hogy ez egy olyan matematikai konferencia, ahol a matematikusok vannak kisebbségben. A találkozó fókuszában ugyanis a számos komplex fizikai, kémiai és biológiai rendszer működését leíró nemlineáris dinamika áll, ami sok természettudós napi munkájához kapcsolódik. Az 1980-ban, fizikusok kezdeményezésére indult konferenciasorozat másodszor járt Magyarországon, az előző alkalom 1994-ben volt Budapesten, idén pedig a Szegedi Tudományegyetem volt a házigazda. A rendezés jogát a szegedi kémikusok (*Horváth Dezső* és *Tóth Ágota*, a nemlineáris dinamika és kinetika kutatócsoport tagjai) nyerték el, de a szegedi hagyományokhoz híven a matematikusok is csatlakoztak, mind előadásokkal, mind a miniszimpóziumok számára szükséges helyszín biztosításával a Bolyai Intézetben.

A matematika univerzális hasznosságát mutatja a témák sokszínűsége: szó esett az óceánok áramlásáról, légköri folyamatokról, klímaváltozásról, járványok terjedéséről, kaotikus rendszerekről, robotok vezérléséről vagy éppen elektromos hálózatok szabályozásáról.

A konferencia egyik központi motívuma az volt, hogy mi történik akkor, ha sok, egyenként akár viszonylag egyszerű rendszert összekapcsolunk. Ilyen kérdések felmerülnek például az idegrendszer tanulmányozásakor, a kollektív sejtmozgások vizsgálata során, vagy amikor egy autonóm drónsereget akarunk építeni. A probléma története egészen 1665-ig nyúlik vissza, amikor Huygens holland tudós éppen betegségéből lábadozva a szobájában pihenve töltötte napjait. Ekkor vette észre, hogy az asztalon egymás mellett álló ingaórák tökéletes összhangban járnak. Arra gondolt, hogy az ingák bizonyára az asztal apró rezegtetésein keresztül hatnak egymásra. Ez az eredete a szinkronizáció kutatásának. Képzeljünk el sok azonos oszcillátort (egy olyan rendszert, aminek a természetes viselkedése egy periodikus mozgás, mint az ingának), és összekapcsoljuk őket azonos módon, például mindegyiket mindegyikkel, vagy mindegyiket két szomszédjával egy nagy körben: a lényeg, hogy az összeköttetéseket is figyelembe véve még mindig egyformák legyenek. A szimmetria miatt nyilvánvaló, hogy ha azonos állapotból indítjuk őket, akkor azonosan is viselkednek. Érdekesebb kérdés, hogy mi történik, ha összevissza állapotokból indítjuk őket. Azt várnánk, hogy a jellemző viselkedés vagy az lesz, hogy marad a disszonáns összevisszaság, vagy esetleg egy idő után szinkronizálódnak, mint Huygens ingái. Az elmúlt évtizedben azonban felfedeztek egy furcsa jelenséget: néha előfordul, hogy egy részük egymáshoz szinkronizálódik, egy másik részük viszont összevissza marad, annak ellenére, hogy a rendszer tökéletesen szimmetrikus. A nemlineáris dinamika megtöri a szimmetriát! Ezt nevezik kiméra állapotnak és máig intenzív kutatások témája, hogy ez a jelenség milyen rendszereknél, milyen összeköttetések mellett lép fel, lehet-e stabil, mennyi ideig marad fenn, hogyan lehet előidézni vagy éppen megszüntetni. A kiméra a görög mitológiában egy olyan lény, ami részben oroszlán, részben kecske, részben kígyó. A kiméra állapot pedig egyszerre szinkronizált is, meg nem is, mint az okos lány a Mátyás király mesében, aki hozott is meg nem is.

A plenáris előadók között a matematikusokat a biomatematika neves holland mestere, *Odo Diekmann* képviselte. De itt volt például a legendás *James Yorke* is, aki a káosz szót bevezette a matematikába, és akinek a híres, Li-vel közös *Period three implies chaos* című cikkét 1975 óta több mint négyezren idézték. James Yorke amúgy jellegzetes karakter, különös ismertetőjele, hogy minden alkalommal piros zoknit visel, ami elmondása szerint rendszeresen arra emlékezteti, hogy próbáljon egyedi módon gondolkodni.

A konferencia 200 résztvevőjének *Janáky Csaba* tartott előadást a szegedi szuperlézerről a városházán rendezett fogadáson, tartottak kerekasztal-beszélgetést a dinamikai rendszerek kutatásának jövőjéről, és a külföldi vendégeknek volt lehetőségük feltérképezni Szeged nevezetességeit is.

Röst Gergely

Részletek a konferenciáról:

https://dynamicsdays2017.akcongress.com/

http://www.dynamicsdays.org/

A kimérát ábrázoló fotó forrása:

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Chimera_Apulia_Louvre_K362.jpg#/media/File:Chimera_Apulia_Louvre_K362_-_full_image.jpg

alkalmazott matematika beszámolók konferencia

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés
Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Mádi-Nagy Gergely 2017. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

XXXII. Magyar Operációkutatási Konferencia

Az *operációkutatás* mint önálló tudományterület a II. világháború során született: maga az operáció szó hadműveletre utal, a kutatás célja pedig kezdetben a haderő optimális mennyiségének, ütemezésének megtalálása volt. A háború után az *optimalizálás tudománya* elsősorban gazdasági és mérnöki területeken fejlődött tovább. Mai állapotában az operációkutatás egy szerteágazó, gyakran önmagában is szép és mély matematikai módszertanon alapuló, rengeteg gyakorlati alkalmazással rendelkező tudományterület.

Magyarországon a tudományág térhódítása az 1960-as évekre tehető, párhuzamosan az alkalmazásához szükséges számítástechnika elterjedésével. Az operációkutatás köré épülő hazai konferenciák is ekkor indultak, elsősorban *matematikusok, közgazdászok és mérnökök* részvételével. Az operációkutatás (határon belüli és kívüli) művelőinek összességét megszólító Magyar Operációkutatási Konferenciát régebben évente, az utóbbi pár évtizedben pedig kétévente rendezik meg. Az eseményt három tudományos társaság szervezi egymást követve: a *Bolyai János Matematikai Társulat*, a *Gazdaságmodellezési Társaság* és a *Magyar Operációkutatási Társaság*.

Idén a Bolyai János Matematikai Társulat volt a soros főszervező, a konferenciát 2017. június 14. és 16. között tartották Cegléden. A konferenciát az *MTA SZTAKI* támogatta.

Az előadások témakörei rengeteg módszertani és alkalmazási területet érintettek, például

- Döntéselmélet
- Folytonos optimalizálás
- Gazdasági modellezés
- Gráfelméleti problémák
- Hálózati alkalmazások
- Ipari alkalmazások
- Játékelmélet
- Menedzsment alkalmazások

- Optimalizálás és irányítás
- Ütemezési és pakolási modellek
- Valószínűségi-statisztikai modellek

A plenáris előadások is több irányból közelítették meg az operációkutatást. *Illés Tibor* (BME Matematika Intézet) „Farkas lemmától az EP-tételekig” című előadása a módszertani oldal fejlődésére mutatott példát. Farkas Gyula 1894-ben született lemmáját nemzetközi szinten is a modern operációkutatás egyik előhírnökének tartják. Az előadó innen indulva alternatíva tételeken keresztül jutott el egyik aktuális kutatási területéhez, a lineáris komplementaritási feladatok lényegében polinomiális idejű megoldó algoritmusaihoz.

Az alkalmazási-modellezési oldalt mutatta be *Mellár Tamás* (PTE Közgazdaságtudományi Kar) „A potenciális kibocsátás, útfüggőség és hiszterézis-hatás” című előadása. A potenciális kibocsátás vagy másnéven egyensúlyi növekedési pálya becslése fontos információ a gazdaságpolitika számára a tényleges és a potenciális kibocsátás különbségeként adódó kibocsátási rés (output gap) ismeretén keresztül. Az előadás részletesen tárgyalta, hogy az (i) aggregált kereslet jelentős változása, (ii) a különféle átállási és tranzakciós költségek, (iii) az inflációs hatások, (iv) a beruházások és a tőkeállomány változása, (v) a technológiai megújulás és a szerkezeti váltás miként befolyásolják és változtatják meg a potenciális növekedési pályát.

Fleiner Tamás (BME VIK) „Mire jók a stabil párosítások?” című előadása a stabil párosítások a fixponttételre és gráfokra alapozott megközelítését és az ebből adódó eredményeket mutatta be. A stabil párosítások története 1962-ben kezdődik, amikor Gale és Shapley a lánykérő algoritmus segítségével demonstrálták, hogy mindig lehetséges stabil módon összeházasítani ugyanannyi férfit és nőt. Ezt követően Roth mutatott rá arra, hogy ezen múlik az USA-ban alkalmazott, központosított rezidensprogram sikere, azaz hogy az egyes kórházak nem próbálják a többiek elől megszerezni a legígéretesebb medikushallgatókat. A stabil párosítás alkalmazható további területeken pl. az egyetemi felvételi eljárások során, élődonoros vesetranszplantációk esetében is. Az alkalmazhatóság fontosságát mutatja, hogy idevágó munkásságuk elismeréseképp 2012-ben Roth és Shapley kapták a közgazdasági Nobel-emlékdíjat.

A konferencia külön szekciókkal tisztelgett a tavaly elhunyt Prékopa András, a Rutgers University professzora és az ELTE TTK Operációkutatási Tanszék professzor emeritusa emléke előtt. Tanítványai, munkatársai előadásaikban felelevenítették a közös munka személyes emlékeit illetve bemutatták annak eredményeit. Prékopa András professzor a magyar operációkutatás úttörője volt. Első operációkutatás témájú előadását 1958-ban tartotta. Szervezőképessége eredményeképpen már az ELTE 1965. évi reform tantervében elfogadták a matematikus szakon belüli operációkutatási szakirány létesítését. Túl az operációkutatás magyarországi meghonosításában elért eredményein, nemzetközi szinten is elismert tudós volt: a sztochasztikus programozás területének egyik legismertebb kidolgozója, kutatója. Már 39 évesen egyetemi tanár lett, ő alapította az ELTE Operációkutatási Tanszékét, ezenkívül oktatott a BME-n illetve vezette a SZTAKI Operációkutatási Osztályát. 1985-ben elfogadta az Amerikai Egyesült Államokbeli Rutgers Egyetem Operációkutatási Központjának meghívását, ahol haláláig full professor pozícióban dolgozott. Közel hatvanan szereztek témavezetése alatt doktori fokozatot, többen közülük azóta neves hazai és külföldi egyetemek tanárai lettek. Külföldi kapcsolatain keresztül számos tanítványának és kollégájának segített bekapcsolódni a nemzetközi kutatás vérkeringésébe. Ő szervezte az első magyarországi operációkutatási konferenciákat, ahol a programot több külföldi élvonalbeli kutató meghívásával tette még színvonalasabbá.

A Magyar Operációkutatási konferencia egyúttal hagyományos helyszíne két operációkutatással kapcsolatos díj átadásának is. Az *Egerváry Jenő emlékplakettet* a Magyar Operációkutatási Társaság (MOT) alapította. Az elismerést az operációkutatás és szélesebb körben az alkalmazott matematika területén sok éven át folytatott eredményes kutató, oktató munkáért, illetve a MOT szakmai tevékenységének tartós, aktív segítéséért lehet elnyerni. Az idei díjazott *Komlósi Sándor* volt. A Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Karának professzora a konvexitás elmélet területén elért kiemelkedő eredményeiért, illetve az operációkutatás területén folytatott jelentős hatású szakmai közéleti tevékenységéért kapta az elismerést.

A *Krekó Béla díjat* a Gazdaságmodellezési Társaság kuratóriuma ítéli oda. Idén *Mellár Tamás* vehette át az elismerést, ő ugyancsak a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Karának professzora. A díjat a makromodellezés terén kifejtett hosszú és eredményes kutató- és oktatómunkájával, valamint a Gazdaságmodellezési Társaság munkájában való aktív részvételével érdemelte ki. Mellár Tamás pályája során mindvégig foglalkozott a gazdaság működésének matematikai modellezésével, fő kutatási irányai a makro-gazdaságpolitika és a fejlődés-gazdaságtan. Az elméleti munka mellett valós adatokon végzett elemzésekkel is vizsgálja a modellek és tényadatok kapcsolatát.

A konferenciának az előadásokon túl fontos részei voltak a kávészünetek, közös étkezések és az esti bankett. A különböző itthoni és külföldi munkahelyeken dolgozó, kutató résztvevőknek itt lehetőségük nyílt régi szakmai és személyes kapcsolataik ápolására, illetve szert tenni új ismeretségekre. A visszajelzések alapján elmondható, hogy a konferencia sikeresen teljesítette azt a célt, hogy a magyar operációkutatók jobban megismerjék egymás munkáját, és természetesen egymást is. A következő konferenciára 2019-ben kerül sor a Magyar Operációkutatási Társaság főszervezésében: előre is sikeres munkát kívánunk nekik.

A konferencia programja és előadásai is megtalálhatóak az alábbi honlapon: http://www.bolyai.hu/mok17.htm

Mádi-Nagy Gergely

ELTE TTK Operációkutatási Tanszék

a szervezőbizottság titkára

A bevezető illusztráció Dobjánné Antal Elvira és Vinkó Tamás előadásából való:
http://www.bolyai.hu/MOK17eloadasok/AntalElviraVinko.pdf

---

beszámolók konferencia

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 5. szám 2017. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Cím	Szerző
Csodálatos magyar eredmények a 11. MEMO-n	Írta: Lenger Dániel, Szoldatics József
Nemzetközi Matematikai Diákolimpia Rióban	Írta: Pelikán József
Robotépítő diákok nemzetközi sikere	Írta: Molnár-Sáska Gábor
Negyedik lett az ELTE az egyetemisták nemzetközi matematikaversenyén	Írta: Ágoston Péter, Csernák Tamás, Fehér Zsombor, Maga Balázs, Szőke Tamás
Leendő diákolimpikonok tábora Dombóváron	Írta: Nagyné Szokol Ágnes
Ericsson-díj 2017	Írta: Szerkesztő
Interjú a 2016-ban Abel-díjat nyert Sir Andrew Wiles professzorral 2. rész	Írta: Fordította: Besenyei Ádám
Hálózatok irányítása — segítő-hálóval: Albert Réka	Írta: Oláh Vera
Adalékok Dugonics András matematikapedagógiai munkásságának értelmezéséhez	Írta: Békés Vera
Gondold tovább! – 1.	Írta: Katz Sándor
A matek miatt nem lesz diplomám?	Írta: Dékány Éva
Interaktív jegyzetfüzetek térnyerése	Írta: Fekete Imre
Beszámoló az 57. Rátz László Vándorgyűlésről	Írta: Kosztolányi József
A gyorshajtástól az időjárásig	Írta: A szerk.
Honlapokat ajánlunk — Testvéreink	Írta: Tóth János
Járványok hálózatokon	Írta: Bodó Ágnes
Utak a Fermat-sejtéshez	Írta: Szamuely Tamás
Mi is (és mire is jó) egy tiszta Hodge-struktúra?	Írta: Szabó Szilárd
Gauss és Bolyai János — újraértékelve	Írta: Oláh-Gál Róbert
Mi is ... a csáp?	Írta: Peter Teichner
Nézd és mondd!	Írta: Ferenci Tamás
Matematikai Modellalkotás Szeminárium	Írta: Mádi-Nagy Gergely, Molnár-Sáska Gábor
Európai dinamikus napok Szegeden	Írta: Röst Gergely
XXXII. Magyar Operációkutatási Konferencia	Írta: Mádi-Nagy Gergely

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.