Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

4. szám 2017. június

2017. JÚNIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

MateMorfózis – matematika máshogyan

A 2012-es Művészetek Völgyében aratott először nagy sikert a MateMorfózis, Taliándörögdön, ahol a szentendrei undergound művészeti mozgalom alkotta a közönség magját. A következő évben megtaláltuk egymást a Gólya Közösségi Presszóval, ami azóta is a programsorozat bázisául szolgál, az előadások nagy részét itt tartjuk. A Gólyában a filmvetítésekhez, slam poetry estekhez, koncertekhez és társadalmi beszélgetésekhez hasonló kulturális szórakoztató programmá vált a MateMorfózis. *Pintér Gergő* szerint az eddig kitalált matematika olyan, mint egy hatalmas fa. Minél hatalmasabb ez a fa, minél terebélyesebb a lombkoronája, annál kiterjedtebb a széle is, ahol véget érnek az ágak. A

2017. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Érettségik a határon túl

A vacsoránál négy különböző ország képviselője ült az asztalnál. Egy erdélyi tanárnő, egy kárpátaljai PhD hallgató, egy felvidéki tanárnő és jómagam…Beszéd közben felmerült, hogy mennyiben hasonló, illetve mennyiben más egy matematika érettségi Szlovákiában, Ukrajnában, illetve Romániában. Megkértem hát egy-egy embert öt környező országból, hogy röviden foglalják össze, mik a lényeges elemei az ő országukban a matematika érettségiknek. Mindenki csatolt legalább egy feladatsort is! A határon túli magyar nyelvű matematika érettségikről *Baranyai Tünde Klára* (Románia), *Stankov Gordana* (Szerbia), *Jakab Enikő* (Ukrajna), *Lilla Korenova* (Szlovákia), *Ivan Marinović* (Horvátország) és *Wintsche Gergely* (Magyarország) írt.

2017. JÚNIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

Interjú a 2016-ban Abel-díjat nyert Sir Andrew Wiles professzorral 1. rész

Nem hiszem, hogy bárki megoldhatta volna a Fermat-sejtést a 19. században, legalábbis azon az úton biztosan nem, ahogy végül a megoldás most megszületett. Túl nagy volt még a hézag matematikatörténeti szempontból: kellett várni 100 évet, mire a megfelelő eszközök megszülettek. Igazából sosem tudhatja az ember ezekkel a híres problémákkal, hogy vajon hozzáférhetők-e már az adott kor eszközeivel. — mondta Andrew Wiles 2016, május 23-án, az Abel-díj átvétele után *Martin Raussennek* (Aalborg University, Dánia), és *Christian Skaunak* (Norwegian University of Science and Technology), akik 2003 óta valamennyi Abel-díjas matematikussal készítettek matematikusok ezeken a végződéseken munkálkodnak, ezeket fejlesztik tovább.

interjút. Wiles professzor több mint két évtizeddel Fermat utolsó tételének bebizonyítása után kapta meg a „matematikai Nobel-díjat”.

2017. JÚNIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

Élet a Rényi Intézetben

Miklós Dezsővel, az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetének igazgatóhelyettesével és *Del Viscio Tizianával* beszélgettünk, aki az európai uniós pályázatok felelőse az Intézetben. Egy kutatóra jutó összeg tekintetében Európában kiemelkedően jók vagyunk, valószínűleg mi vagyunk Európában az egyik legsikeresebb matematikai intézet – állítja az igazgatóhelyettes, aki 1995 óta foglalkozik a kutatóintézet pályázataival és pénzügyeivel.

2017. JÚNIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

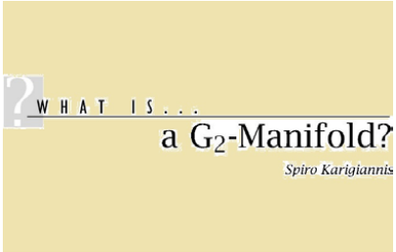
Kutatók és kutatások a Rényi Intézetben – Szegedy Balázs, Stipsicz András és Harangi Viktor

Az *Európai Kutatási Tanács* (ERC) működteti az Európai Unió legnagyobb felfedező kutatásokat támogató pályázati rendszerét. A támogatások odaítélésének egyedüli feltétele a tudományos kiválóság. Olyan vezető kutatók pályázhatnak a kutatók életkorára, nemére és származási országára vonatkozó bármely megkötés nélkül, akik Európában tervezik a projektek végrehajtását. A *Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet* ERC Grant támogatását elnyert vezető kutatói közül *Szegedy Balázs* és *Stipsicz András* eredményeiről kaphat képet az olvasó. A harmadik interjúban pedig *Harangi Viktor* Horizont 2020 Kiváló Tudomány – Marie-Skłodowska Curie programját ismerhetjük meg.

2017. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Nagyszerű eredmények a VI. EGMO-n – élmények az Európai Lány Diákolimpián

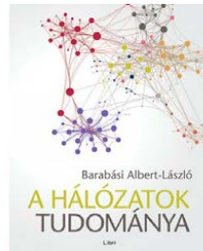
A Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (IMO) mintájára jött létre 2012-ben az Európai Lány Diákolimpia (EGMO) azzal a céllal, hogy megerősítse a matematikában tehetséges lányokat képességeik kibontakoztatásában. Úgy tűnik a magyar lányok esetében ez nagyon jól sikerült! A kérdés csak az, mi volt a nehezebb: elnyerni két arany- és két ezüstérmet, vagy egy pontos, hiteles és egyben humoros élménybeszámolót megírni . Csapatvezetők: *Fekete Panna* és *Nagy Zoltán Lóránt*, csapattagok: *Andó Angelika, Baran Zsuzsanna, Janzer Orsolya Lili* és *Kerekes Anna*.



2017. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is... egy G2-sokaság?

A *Notices of the American Mathematical Society* című folyóirat 2011. áprilisi számában a *Mi is...?* rovatban jelent meg *Spiro Karigiannis* írása, amely a Riemann-sokaságok holonómia-csoportjának definíciójával kezdődik. Az Érintő Mi is... rovata számára a fordítást *Muzsnay Zoltán* készítette el (a kiadó és a szerző engedélyével).



2017. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Barabási Albert-László: A hálózatok tudománya

A hálózatkutatás iránt érdeklődő magyar olvasók Barabási Albert-László újabb könyvét vehetik a kezükbe. *Czégel Dániel* szerint érdemes elolvasni, szellemi szórakozást kínál a felsőbbfokú matematikában jártas és kevéssé jártas olvasóknak egyaránt.

2017. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Mozdonyhozzárendelés a vasúti teherszállításban

Egy jól működő cég számára a rendelkezésre álló erőforrások optimális felhasználása kulcsfontosságú. A MÁV-TRAKCIÓ Zrt. (2014 óta a MÁV-START része) is ezért kereste meg a BME Matematika Intézetének *Illés Tibor* vezette Optimalizálási Csoportját. (Társszerző: *Molnár-Szipai Richárd*.) A vállalat vasúti vontatási feladatok ellátásával foglalkozik, vagyis megállapodik egy ügyféllel, hogy az ügyfél vasúti kocsikra pakolt szállítmányát egy adott helyen és időben felveszi, majd a saját mozdonyai segíségével elszállítja egy másik adott helyre és időre. A cég erőforrásai tehát a mozdonyok, illetve az általuk felhasznált üzemanyag. Ideális esetben egy vontatás elvégzéséhez nem az ország másik oldaláról szeretnének mozdonyt küldeni, hanem a közelből; tökéletes esetben egy mozdony pont azon az állomáson fejezett be egy korábbi vontatást, ahol egy újabb feladat várja. Az elvállalt megbízások ismeretében tehát egy olyan tehervonat menetrendet szeretnénk készíteni, ami minimalizálja a mozdonyok által megtett távolságot.

2017. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Hajós György Matematikaverseny, díj és kiállítás 2017-ben

Az első Hajós-versenyt 1979-ben hirdették meg, amelyet azóta minden évben megrendeznek. Kezdetben ezen csak műszaki főiskolák vehettek részt. A bolognai folyamat megvalósulásával a meghívottak száma egyre bővült: nemcsak a főiskolák, de az egyetemek műszaki, közgazdasági és informatikai karai is meghívást kapnak. Az idei verseny (szervezője *Lángné Dr. Lázi Márta*) különlegességét az adta, hogy a névadó Hajós György gyermekei az édesapjuk tiszteletére *Hajós György Díj* néven alapítottak egy új díjat. A neves matematikaprofesszor fotóit, személyes tárgyait bemutató tárlat pedig július közepéig látogatható a BME OMIKK Központi Könyvtárának aulájában.

2017. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Farkas Gyula nyomában: Szemelvények egy természettudós életéből és tudományos hatásából

Idén ünnepeljük Farkas Gyula fizikus, matematikus születésének 170. évfordulóját. Farkas Gyula életének jelentősebb eseményei – ma már – ismertek a magyar tudományos közélet előtt. *Illés Tibor* és *Oláh-Gál Róbert* megemlékezésében két kérdéssel foglalkozik: a Farkas-lemma hatásával és Farkas Gyula életének, néhány – nem mindenki számára ismert – részletével, amelyek egyszerre mutatják be Farkas Gyulát, az embert és a tudóst.

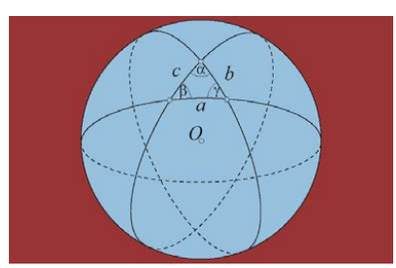
2017. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Számolni tudni kell?

Vizvári Béla egy nemzetközi egyetemen szerzett személyes tapasztalatairól számol be sok számítást igénylő tárgyak oktatásáról mérnök hallgatók számára. Kísérletet tesz a gyakorlatban hasznosítható didaktikai elvek megfogalmazására. Valószínűleg számos észrevétele a matematika oktatásában is hasznosítható.

2017. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Gödel nemteljességi



2017. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Nem-euklideszi geometriák, avagy

2017. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Donald Ervin Knuth

tételei: értelmezések és félreértések

Főként arról szól ez a tanulmány, hogy Gödel első és második nemteljességi tételének a népszerűsítő irodalomban szereplő interpretációi milyen értelemben tekinthetők helyesnek vagy hol váltanak át parttalan fantáziálásba, elfeledkezve arról, hogy ezek a tételek mindenféle interpretáció nélkül, önmagukban is érdekes állításokat tesznek a matematikáról. *Torkel Franzén: Gödel nemteljességi tételei című, Értelmezések és félreértések alcímű*, a TypoTeX kiadónál 2013-ban megjelent könyvéről *Molnár Zoltán Gábor* írt recenziót.

milyen a világ? Konstans görbületű terek

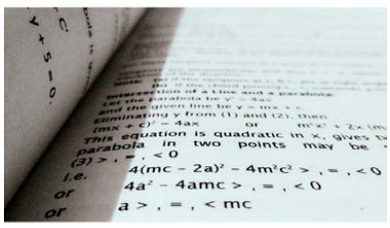
A gondolkodó embert mindig is foglalkoztatta az a kérdés, hogy az őt körülvevő világ milyen. Ennek leírása pedig csak geometriai fogalmakkal lehetséges, így nem meglepő ezek igen korai feltűnése. Jóval a görög matematika megjelenése előtt, már az egyiptomi matematikában találunk pontos térgeometriai számításokat, természetesen a ma euklideszi geometriának nevezett rendszer szabályai alapján. Lambert, Gauss és Riemann munkássága, Bolyai Farkas, Bolyai János és Lobacsevszkij kutatásai nyomán bizonyítást nyer, hogy van minden tekintetben megfelelő globális alternatívája is az euklideszi geometriának. Einstein munkásságával egyidőben alkotja meg Minkowski és Lorentz a téridő matematikai modelljét és alakul ki Minkowski másik geometriája... Ezekről a geometriákról szeretnénk ebben a cikkben írni, hiszen ezek képezik az alapjait minden további, a világ szerkezetének leírása céljából kidolgozott matematikai struktúrának. *G. Horváth Ákos*

„Korán nyugdíjba vonultam" — olvashattuk mintegy 20 éve, 1998-ban Knuth (ejtsd: /kəˈnuːθ/) úr hómpédzsének elején. „Rájöttem, hogy kb. 20 évnyi éjjel-nappali munkám szükséges még ahhoz, hogy befejezzem A számítógép-programozás művészete c. könyvet, életem főművét." Ez a ön-nyugdíjaztatás, mint később kiderült, elsősorban a remeteséget jelentette számára a társasági élet színterétől távol. Don (Knuth úr maga is így nevezi magát) mégsem fordított hátat a nagyvilágnak: hosszú évekig tartó szünet után végül mégis aktiválta email-címét... A TeX szövegszerkesztő programnyelvet használók körében alapműnek számító könyv további kötetei azonban még váratnak magukra. Szerzőnk *Kovács Zoltán*, jelenleg a Linzi Tanárképző Főiskolán tanít matematikát, a GeoGebra program egyik fejlesztője.

2017. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Programozás — Wolfram nyelv

Arra a kérdésre, hogy a matematikában vagy a



2017. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Szükséges, elégséges, lehetséges — Mennyi matek kell

2017. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

BME Alfa: interaktív gyakorlás és versenyzés

programozásban kell-e pontosabbnak lennünk, valószínűleg többen mondanák azt, hogy az elsőben, mint a másodikban, és talán ez is a gyakoribb eset. Most mégis mutatunk két (egymáshoz közeli) példát az ellenkezőjére. *Tóth János* rövid írása előtt érdemes elolvasni a Wolfram nyelv történetét (2016. szeptemberi számunkban, Lóczi Lajostól) és a TeX programozási nyelv keletkezéséről Kovács Zoltán mostani számunkban megjelent cikkét. A fényképen Stephen Wolfram látható 2008-ban.

egy kognitív tudományi mesternek?

A BME Természettudományi Karának kognitív tudományi mesterei számára tartott órák kapcsán elgondolkodtam néhány kérdésen — kezdi írását *Tóth János*. Mi az a kognitív tudomány? Mi a célja a kognitív tudományi mesterszakos hallgatók oktatásának? Ehhez milyen matematikai ismeretekre van szükség? Mit gondolnak erről mások bel- és külföldön? Mit lehet megtanítani, figyelembe véve a rendelkezésre álló időt (ami, ugye, mindig kevés), a hallgatók rendkívül vegyes előismereteit, az oktatók látókörének szélességét? Milyen módszerekkel érdemes kísérletezni? Milyen segédanyagra van szükség (ha nincs, az a baj, ha van, akkor pedig az). A szerző ezt az írást Érdi Péter kognitív tudományi nagymesternek 70. születésnapjára ajánlja.

Eredetileg a BME frissen felvett hallgatóinak készült az ***Alfa*** *interaktív gyakorlófelülete*, hogy a nulladik zárthelyire felkészülhessenek, és ne kudarcélménnyel kezdődjön az egyetem. 2015 óta *Lángné Lázi Márta* szervezésében, *Nagy Ilona* és *Molnár Zoltán* feladatsoraival nemcsak gyakorolhatnak, de versenyezhetnek is a középiskolások a *Műegyetemi alfa matematika pontgyűjtő versenyen.* Véleményük szerint ez segítheti a középiskolai pedagógusok munkáját is.

2017. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Matézis, mechanika, metafizika

A Gondolat Kiadó a természettudományok és a matematika, valamint a filozófia, a művészetek, az irodalom és a történettudomány kölcsönhatásait vizsgáló tudománytörténeti sorozatot indított útjára. E sorozat egyik – születésének 100. évfordulója

2017. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Diofantosz és a diofantikus egyenletek

A 2016-os Abel-díjas Andrew Wiles számos jelentős eredménnyel gazdagította a matematikát, de a világhírt a nagy Fermat-tétel bizonyítása hozta meg számára (ld. e számunk Interjú rovatában). Fermat híres állítását Diofantosz

2017. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A Farkas-féle szeminárium újra a differenciálegyenletek és alkalmazott matematikusok hazai és nemzetközi szakmai fóruma

Az Érintő 2017. márciusi számában adtunk hírt a *BME Farkas Miklós Alkalmazott*

alkalmából Simonyi Károly emlékének szentelt – darabja a *Matézis, mechanika, metafizika*. A 18-19. század korának eszmetörténeti hátterét elsősorban Descartes, Leibniz, Newton és Kant gondolatai adják, de – erre a kötet szerkesztője, *Gurka Dezső* tanulmánya a legjobb példa – a filozófiára éppúgy hatnak a természettudományok, mint a filozófiai gondolatok a tudományok alapkérdéseire. A tanulmánykötetet *Csizmadia Ákos* ismerteti.

Aritmetikájának olvasása közben jegyezte fel. De ki volt Diofantosz? Miről szólt az Aritmetika, és mi motiválta Fermat-t a híres megjegyzésre? *Tóth Árpád* segítségével bepillantást nyerünk a diofantoszi egyenletek témakörébe.

Analízis Szemináriumáról. További kiegészítésekkel szolgált *Illés Tibor* az előzményekről és a megalakulás körülményeiről, megemlékezve Farkas Miklósról.

2017. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matematika a (bio)Kémiai Kinetikában és a Vegyészmérnöki Tudományban

2017. május 25. és 27. között Budapesten rendezték a Mathematics in (bio)Chemical Kinetics and Engineering elnevezésű konferenciasorozat hetedik konferenciáját. A konferenciasorozat célja kezdettől fogva az volt, hogy a komoly matematikai eszközöket alkalmazó vegyészeket (vegyészmérnököket, biológusokat) és a valódi alkalmazásokkal foglalkozó matematikusokat (fizikusokat, informatikusokat) egymással összehozza. Ezt a célt általában igen széles spektrumot átfogó előadások és poszterek útján szokta teljesíteni.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet.

A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **HÍREK – ÚJDONSÁGOK** ROVAT A MATEMATIKÁHOZ ÉS A BOLYAI TÁRSULATHOZ KAPCSOLÓDÓ ESEMÉNYEKRŐL, ÚJDONSÁGOKRÓL SZÓL. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÁKÓCZI ILDIKÓ.)*

Lángné Dr. Lázi Márta
2017. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Hajós György Matematikaverseny, díj és kiállítás 2017-ben

Az első Hajós-versenyt 1979-ben hirdették meg, amelyet azóta minden évben megrendeznek. Kezdetben ezen csak műszaki főiskolák vehettek részt. A bolognai folyamat megvalósulásával a meghívottak száma egyre bővült: nemcsak a főiskolák, de az egyetemek műszaki, közgazdasági és informatikai karai is meghívást kapnak. Az idei verseny (szervezője *Lángné Dr. Lázi Márta*) különlegességét az adta, hogy a névadó Hajós György gyermekei az édesapjuk tiszteletére *Hajós György Díj* néven alapítottak egy új díjat. A neves matematikaprofesszor

Andó Angelika, Baran Zsuzsanna, Janzer Orsolya Lili, Kerekes Anna, Fekete Panna és Nagy Zoltán Lóránt,
2017. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Nagyszerű eredmények a VI. EGMO-n – élmények az Európai Lány Diákolimpián

A Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (IMO) mintájára jött létre 2012-ben az Európai Lány Diákolimpia (EGMO) azzal a céllal, hogy megerősítse a matematikában tehetséges lányokat képességeik kibontakoztatásában. Úgy tűnik a magyar lányok esetében ez nagyon jól sikerült! A kérdés csak az, mi volt a nehezebb: elnyerni két arany- és két ezüstérmet, vagy egy pontos, hiteles és egyben humoros élménybeszámolót megírni .

Illés Tibor
2017. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A Farkas-féle szeminárium újra a differenciálegyenletek és alkalmazott matematikusok hazai és nemzetközi szakmai fóruma

Az Érintő 2017. márciusi számában adtunk hírt a *BME Farkas Miklós Alkalmazott Analízis Szemináriumáról*. További kiegészítésekkel szolgált *Illés Tibor* az előzményekről és a megalakulás körülményeiről, megemlékezve Farkas Miklósról.

fotóit, személyes tárgyait bemutató tárlat pedig július közepéig látogatható a BME OMIKK Központi Könyvtárának aulájában.

Csapatvezetők: *Fekete Panna* és *Nagy Zoltán Lóránt*, csapattagok: *Andó Angelika, Baran Zsuzsanna, Janzer Orsolya Lili* és *Kerekes Anna*.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Lángné Dr. Lázi Márta 2017. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Hajós György Matematikaverseny, díj és kiállítás 2017-ben

A 39. Hajós György országos vándorversenynek a Műegyetem adott otthont.

Az Ybl Miklós Műszaki Főiskola az iparoktatás 100 éves évfordulója alkalmából a műszaki intézmények hallgatói számára hirdette meg az első Hajós-versenyt 1979-ben, amelyet azóta minden évben megrendeznek. Kezdetben ezen csak műszaki főiskolák vehettek részt. A bolognai folyamat megvalósulásával a meghívottak száma egyre bővült: nemcsak a főiskolák, de az egyetemek műszaki, közgazdasági és informatikai karai is meghívást kapnak. A versenyen a meghívott intézmények nappali tagozatos, első BSc diplomát szerző hallgatói előzetes nevezés alapján vehetnek részt.

Az idei verseny elnöke Obádovics J. Gyula professor emeritus, aki idén ünnepelte 90. születésnapját. A versenybizottság tagjai: Dr. Csató Sándor főiskolai docens (Szegedi Tudományegyetem Mérnöki Kar); Dr. Klincsik Mihály főiskolai tanár, (Pécsi Tudományegyetem Mérnöki és Informatikai Kar); Dr. Molnár-Sáska Katalin, (Budapesti Gazdasági Egyetem Külkereskedelmi Kar); Schmidt Edit mestertanár, (Óbudai Egyetem, Kandó Kálmán Villamosmérnöki Kar) és Dr. Székely László egyetemi docens (Szent István Egyetem Gépészmérnöki Kar).

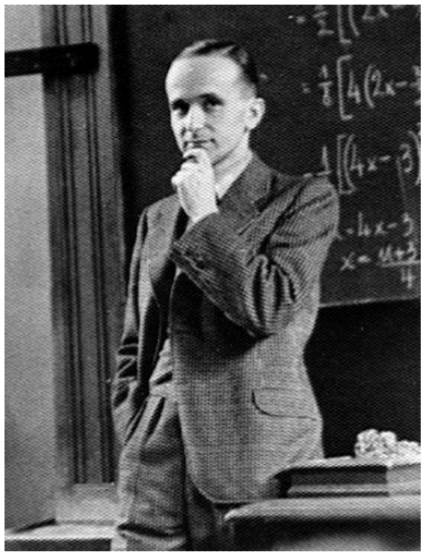
Az írásbeli verseny három órás, öt feladatot kellett megoldani. A példákat a versenybizottság tagjai által beküldött feladatokból választotta ki Obádovics J. Gyula elnökletével a bizottság.

Az intézmények karonként egy-egy 3-4 fős csapattal nevezhettek. A három legjobb eredményt elért csapattag összesített pontszáma alapján alakul ki a csapatok rangsora. Az első helyezést elért csapat kapja meg a következő versenyig a vándorserleget. Az egyéni teljesítmények is számítanak, azok adják az egyéni rangsort. Az első hat egyéni helyezettet és az első három csapat versenyzőit díjaztuk.

A 39. Hajós-versenyre 15 intézmény 30 csapata, összesen 112 versenyző nevezett be.

A csapatverseny első helyezettje és így a vándorserleg birtokosa egy évig a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Villamosmérnöki és Informatikai Karának csapata: Deák Elemér Dávid, Holczer András, Juhos András, Telekes Márton Gábor. Az egyéni verseny győztese: Telekes Márton Gábor (BME VIK).

Az idei verseny különlegességét az adta, hogy a névadó Hajós György gyermekei az édesapjuk tiszteletére Hajós György Díj néven alapítottak egy új díjat. Az elismerésben minden évben az a versenyző részesülhet, akit a versenybizottság erre kiválaszt. Az első alkalommal elnyerhető Hajós György Díj kitüntetettje: Telekes Márton Gábor (BME, VIK).



A felkészítő tanárok, kollégák között még akadnak olyanok, akik személyesen ismerték, ismerhették Hajós György világhírű matematikust. A fiatalabb korosztály tagjai, a versenyzők már csak hírből ismerhetik, vagy a már fogalommá vált tankönyvével találkozhattak.

A kétnapos program ebben az évben külön érdekességet is kínált a résztvevőknek. A verseny névadója 1935-1945 között a Műegyetem oktatója, később az ELTE tanszékvezető professzora volt. A generációk által elismert és használt, több nyelvre lefordított *Bevezetés a geometriába* című tankönyv szerzőjének életművébe szintén gyermekei engedtek bepillantást, amikor a BME OMIKK rendelkezésére bocsátották Hajós György értékes magánhagyatékát, amelyből Batalka Krisztina gondozásában kiállítás nyílt. A Központi Könyvtár aulájában július közepéig látogatható a neves matematikaprofesszor fotóit, személyes tárgyait bemutató tárlat, amelyen többek között Hajós György 8 éves korában saját kezűleg készített geometriai gyakorlófüzete vagy híres tankönyvének első kiadású, saját bejegyzésekkel ellátott példánya is megtekinthető.

A verseny részletei, a feladatok, az eredmények a http://hajos2017.math.bme.hu/ honlapon megtalálhatók.

A következő, 2018. évi verseny rendezési jogát a Pázmány Péter Katolikus Egyetem kapta meg.

Lángné Dr. Lázi Márta, szervező

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Andó Angelika, Baran Zsuzsanna, Janzer Orsolya Lili, Kerekes Anna, Fekete Panna és Nagy Zoltán Lóránt,
2017. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Nagyszerű eredmények a VI. EGMO-n – élmények az Európai Lány Diákolimpián

A Nemzetközi Matematikai Diákolimpia (IMO) mintájára jött létre 2012-ben az Európai Lány Diákolimpia (EGMO) azzal a céllal, hogy megerősítse a matematikában tehetséges lányokat képességeik kibontakoztatásában.

A verseny helyszínét minden évben más-más ország biztosítja, idén Zürich (Svájc) volt a rendező, április 6-12 között. Az IMO-hoz hasonlóan egymást követő két versenynapon 3-3 feladatot kell megoldani négy és fél óra alatt. Az egyéni eredmények alapján arany-, ezüst- és bronzérmet lehet kiérdemelni a legjobbaknak; emellett az összpontszám alapján az országok is versengenek egymással.

Az idei csapat tagjai az utóbbi évek szép eredményeit is túlszárnyalták:

Baran Zsuzsanna (Debreceni Fazekas Gimn.) 36 ponttal

és ***Janzer Orsolya Lili*** (Budapesti Fazekas Gimn.) 31 ponttal

aranyérmet,

Kerekes Anna (Budapesti Fazekas Gimn.) 20 ponttal

és ***Andó Angelika*** (Szegedi Radnóti M. Gimn.) 19 ponttal

ezüstérmet nyert!

A magyar tehetséggondozás hagyományai az IMO-n rendszeresen kiemelkedő sikereket hoztak nemzetközi összevetésben is az ezredfordulót megelőzően, azóta viszont világszerte egyre több helyen fordítanak külön figyelmet a tehetségek képzésére. Ezért is figyelemre méltó, hogy a 2017-es magyar csapat a közvetlen élmezőnyben tudott végezni**: Európában a 3. lett** 33 ország között, a nem-hivatalosan részt vevő országok mezőnyével együtt is a 4. (44 ország küldött csapatot, az európai országokon kívül például az USA, Japán, India, Mexikó és Izrael.)

A remek eredmények mögött nem csak tehetség áll. Többjük tanárai a tanórákon kívül is külön szántak időt rájuk; ők pedig jónéhány társukkal együtt a „szokásos” olimpiai szakköri, KöMaL-küldő extra matematika mellett elhivatottan küldték nekünk a felkészülő anyagok matematikai gondolkodtató feladataira megoldásaikat, továbbá a karácsony és újév közötti héten, és az EGMO-t megelőző hétvégén is a megszervezett felkészítő táborban töltötték az idejüket.

Persze akinek a matematika örömforrás, annak ez kaland is – ugyanakkor egyben kitartó, elhivatott munka.

Reméljük, hogy társaikkal együtt ezt az elhivatottságot megőrzik, és képességeiket tovább kamatoztatják a későbbiekben!

Fekete Panna (csapatvezetőhelyettes), *Nagy Zoltán Lóránt* (csapatvezető)

Íme a lányok beszámolója:

Gépünk április 6-án este landolt a zürichi reptéren. Az előző évekkel ellentétben idén közvetlen járattal utazhatott a csapat, de ennek ellenére is kimerülten érkeztünk meg. A helyi kísérőnk, Lara már ott várt ránk, és nagyon kellemes meglepetésként ért bennünket, amikor kiderült, hogy a német, angol és francia nyelvek mellett magyarul is tudunk beszélgetni vele.

A szállásra nem sokkal éjfél előtt érkeztünk meg, így a vacsoráról sajnos már lemaradtunk. Nagyban kárpótolt viszont az a csodás és bőkezű ajándékcsomag, amit a szervezők biztosítottak. Az EGMO-s tornazsákban találtunk svájci bicskát, képeslapokat, továbbá EGMO-s törölközőt, kulacsot és esernyőt is.

Egy ifjúsági szállóban lettünk elszállásolva, ahol a csapat egy nagyon családias méretű szobát kapott, két emeletes ággyal. Ez jó volt, mert egyrészt erősítette a csapatszellemünket, másrészt arra sarkallt bennünket, hogy minél több időt töltsünk a szobán kívül, a többi csapattal is találkozva. A svájciak környezettudatosságát mutatja, hogy a zuhanyzókban egy-egy mérő volt felszerelve, amelyen nyomon lehetett követni az elzuhanyzott víz mennyiségét és hőmérsékletét.

Másnap egy kellemes reggeli után meglátogattuk a közeli játszóteret, ahol egy kis mozgással indítottuk a napot. (Mikor Panna elejtette azt a megjegyzést, hogy a hintázás fejleszti a térlátást, rögtön jogosnak és megalapozottnak éreztük, hogy középiskolás létünkre játszótéren töltjük az időnket.) A délelőtt folyamán egy „Scavenger Hunt” nevű programon vehettünk részt. Mint kiderült, ez egy kincskereső túra volt a városban, Zürich különböző pontjain kellett különböző feladatokat teljesítenünk. Utaztunk fogaskerekűn, jártunk az egyetemeken, megcsodálhattuk a kilátást az egyik legmagasabb toronyból. Jártunk egy dadaista könyvesboltban, ittunk szörpöt (ami a svájci gyerekek kedvelt itala) és répát pucoltunk egy forgalmas sétálóutcán. A zöldséghámozót, amely egy igazi svájci darab, végül meg is tarthattuk. A városnézés során a csapatok több ország versenyzőiből álltak össze, így lehetőségünk nyílt másokkal is beszélgetni, barátkozni.

Délután került sor az ünnepélyes megnyitóra. A nyitóbeszédek után a csapatok egyesével a színpadra vonultak – ez remek alkalom volt az egyenpólóink bemutatására. Ezután jól belakmároztunk az állófogadáson.

Másnap, szombaton volt az első versenynap, így érthető, hogy igen izgatottak voltunk. Az előző nap már tapasztaltuk, hogy érdemes időben érkezni a reggelihez, ezért hárman korábban felkeltünk és beálltunk a sorba – így röpke 20 perc múlva már magunkénak is tudhattuk a csapat eledelét. A később érkezőkből hosszú, kígyózó sor alakult.

A versenyhelyszínre tömegközlekedéssel jutottunk el – a szervezők frappáns módon biztosították, hogy EGMO-s bilétáinkkal ingyen közlekedhessünk az egész városban. Zürichnek egyébként nagyon jó a tömegközlekedési hálózata.

Mielőtt beültünk volna a terembe, Panna és Zoli igyekeztek lelket önteni belénk. Az utolsó jó tanácsok mellé kaptunk Túró Rudit és egy szerencseölelést is. A 4 és fél óra során több kombinatorikus jellegű példával is találkoztunk, ami legtöbbünket kellemesen érintett (a magyar versenyzőknek általában ez a terület az egyik erősségük). A harmadik feladat Turbó csigáról szólt, akiről (a rajzfilmen kívül) a 2014 évi IMO shortlist C9-es példájában is lehetett hallani. A verseny után vegyes érzelmekkel jöttünk ki a teremből.

Délután különböző sportprogramok közül választhattunk. Anna és Lili a svájci testnevelés órák játékaival ismerkedett meg, Zsuzsi az uszodába ment, ahol nagy örömére felpróbálhatott egy pár békatalpat is, Angi pedig néhány ismerősével találkozott.

A második versenynap menetrendje is hasonló volt, csak a reggeli zajlott jóval gördülékenyebben. A szervezők az előző nap felmerült problémákra igen jól reagáltak. Beszereztek néhány kalapot is, annak a biztosítására, hogy verseny közben senkit ne zavarhasson a szemébe sütő nap.

A második dolgozat megírása után némileg felengedtünk és jókedvűen vághattunk neki az Uetliberg megmászásának. Útközben sokat beszélgettünk Larával, alapvetően magyarul, hiszen így tudja a legjobban gyakorolni a nyelvet. A csúcsról elképesztő kilátás tárult elénk, főleg képeslapon látni ilyen tájakat. A kilátó tetejére érve ez a látvány tovább fokozódott.

A szervezők bőkezűen gondoskodtak a programokról, este táncolni tanulhattunk. Igen szórakoztató volt, ahogy egy teremnyi lány (és 2-3 fiú) együtt igyekezett táncolni.

Eközben Zoli és Panna már keményen dolgoztak a dolgozataink kijavításán. Másnap zajlott a koordinálás - itt kellett a koordinátorokkal szemben megvédeniük a versenyzők pontjait. Miközben Zoli és Panna a javítókkal küzdöttek, mi az állatkertben múlattuk az időt. Láttunk pingvineket, hópárducot, kaméleont és újszülött elefántot, továbbá rengeteg plüssállatot is. Ezután a városban csokoládét vásároltunk a családunknak, barátainknak, hiszen Svájcból senki nem mehet haza igazi svájci csokoládé nélkül. Este a pályaválasztásról szóló előadáson sajnos nemigen tudtunk figyelni: a telefonjainkat nyomkodtuk, mivel ekkor kerültek ki az éremhatárok az internetre. (A dolgozatok pontozását is élőben követhettük a verseny honlapján, így előtte is lehetett már számolgatni.) A legtöbbünk számára katartikus élményt jelentett, nagyon elégedettek voltunk az eredményekkel.

Lili esti programját biztosította, hogy aznap volt 10-e, azaz a KöMaL beadási határideje. A változó minőségű internetkapcsolattal és a fáradtsággal megküzdve írta le az utolsó megoldásait.

Az utolsó nap délelőttjére még egy túra volt beütemezve, ezúttal a Rigire. Az itteni kilátást leginkább írólaphoz lehetett hasonlítani, a sűrű köd miatt sajnos nem láthattuk a híresen káprázatos tájat. Ebédet a hegycsúcson kaptunk, itt tradicionális svájci fogásokat kóstolhattunk meg, mint például a sajtfondü.

A délutáni záróeseményen megkaptuk az érmeinket. A ceremónia csak mérsékelten sikerült ünnepélyesre (egy-egy éremnél az összes érintett diák feltömörödött a színpadra, majd véletlenszerű kiszólításuk sorrendjében előléptek átvenni az érmet), de a meghívott bűvészek remekül szórakoztatták az egybegyűlteket.

A gálavacsora csodálatosra sikerült. Rengeteg fénykép készült az érmeinkkel és még a svájci delegációval is összeálltunk egy kép erejéig. A napot egy éjszakába nyúló zenés-táncos mulatság zárta. Hihetetlen hangulat volt és rendkívül szórakoztató látványt nyújtott, ahogy egy teremnyi lány és néhány csapatvezető együtt tombolt.

A gépünk április 12-én ért Budapestre, ahonnan hárman indultunk is tovább Debrecenbe, a Zrínyi-döntőre.

Mind a négyen nagyon örülünk, hogy ott lehettünk az idei EGMO-n. Értékes versenytapasztalatot jelentett részt venni egy ilyen nemzetközi versenyen. Ezenkívül Svájc egy csodálatos hely és a szervezők igazán kitettek magukért, így egy élményekben gazdag hetet tudhatunk magunk mögött.

Andó Angelika, Baran Zsuzsanna, Janzer Orsolya Lili és Kerekes Anna

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

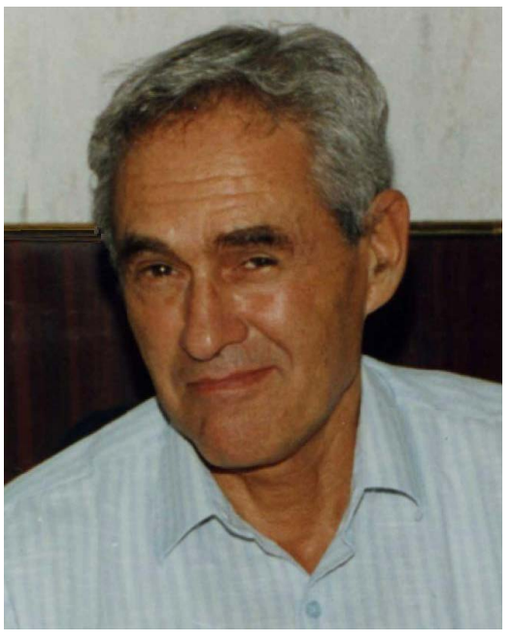
Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Illés Tibor 2017. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A Farkas-féle szeminárium újra a differenciálegyenletek és alkalmazott matematikusok hazai és nemzetközi szakmai fóruma

A híres Farkas-féle szeminárium, a differenciálegyenletek és alkalmazott matematikusok szakmai fóruma, Farkas Miklós súlyos betegsége idején szűnt meg.



Farkas Miklós és kutatócsoportja tiszteletére 1996-ban, a BME Matematika Intézet megalakulásakor, Differenciálegyenletek Tanszéknek (DET) nevezték el a Gépészmérnök Kari Matematika Tanszék jogutódát, amelyik tovább vitte elődjének alkalmazott matematikai profilját.

A Farkas-féle szemináriumot 2011-ben Illés Tibor, a tanszék új vezetője élesztette fel, mint a Differenciálegyenletek Tanszék szemináriumát, szakmai fórumot teremtve a differenciálegyenletek illetve az alkalmazott matematika különböző ágait művelő és alkalmazó matematikusok és mérnökök számára. A Differenciálegyenletek Tanszék szemináriumán számos matematikus, Kristály Sándor, Pituk Mihály, Rontó Miklós, Krisztin Tibor, Simon Péter, illetve mérnök,

Stépán Gábor, Halász Gábor, Paál György, Kalmár-Nagy Tamás és még sokan mások tartottak emlékezetes, gondolatébresztő előadásokat.

Illés Tibor felkérésére Faragó István 2016 őszén csatlakozott a BME DET oktatói gárdájához félállású professzorként, annak érdekében, hogy a tanszéken folyó differenciálegyenletek és alkalmazott matematika kutatásokat összefogja és irányítsa. Faragó professzor úr vezetésével a szeminárium új lendületet kapott és a terület nemzetközileg ismert, vezető kutatói is több előadást tartottak a H épületben a Farkas-féle szeminárium helyszínén és szokásos csütörtöki időpontjában. A szeminárium 2017. januárjától, Farkas Miklós professzor úr munkássága előtt tisztelegve, felvette a *Farkas Miklós* Alkalmazott Analízis Szeminárium nevet.

Az Érintő 2017. márciusi számában megjelent cikk: http://ematlap.hu/index.php/hirek-ujdonsagok-2017-03/435-farkas-miklos-alkalmazott-analizis-szeminarium-a-bme-matematika-intezeteben

Az érdeklődők a továbbiakban a szeminárium honlapjáról tájékozódhatnak.

A fényképeket Farkas Attila és Hujter Mihály, az írást Illés Tibor bocsátotta rendelkezésünkre.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

AZ **INTERJÚ-PORTRÉ** MENÜPONT JÓL VAGY KEVÉSBÉ ISMERT MATEMATIKUSOKAT, VAGY OLYAN, EGYKOR MATEMATIKUSKÉNT VÉGZETTEKET SZERETNE BEMUTATNI, AKIK MA MÁS SZAKMA ELISMERT KÉPVISELŐI, SPORTOLÓK, MŰVÉSZEK...(ROVATSZERKESZTŐ: *OLÁH VERA*.)

Pintér Gergő

2017. JÚNIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

MateMorfózis – matematika máshogyan

A 2012-es Művészetek Völgyében aratott először nagy sikert a MateMorfózis, Taliándörögdön, ahol a szentendrei undergound művészeti mozgalom alkotta a közönség magját. A következő évben megtaláltuk egymást a Gólya Közösségi Presszóval, ami azóta is a programsorozat bázisául szolgál, az előadások nagy részét itt tartjuk. A Gólyában a filmvetítésekhez, slam poetry estekhez, koncertekhez és társadalmi beszélgetésekhez hasonló kulturális szórakoztató programmá vált a MateMorfózis. *Pintér Gergő* szerint az eddig kitalált matematika olyan, mint egy hatalmas fa. Minél

Fordította: Matolcsi Máté

2017. JÚNIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

Interjú a 2016-ban Abel-díjat nyert Sir Andrew Wiles professzorral 1. rész

Nem hiszem, hogy bárki megoldhatta volna a Fermat-sejtést a 19. században, legalábbis azon az úton biztosan nem, ahogy végül a megoldás most megszületett. Túl nagy volt még a hézag matematikatörténeti szempontból: kellett várni 100 évet, mire a megfelelő eszközök megszülettek. Igazából sosem tudhatja az ember ezekkel a híres problémákkal, hogy vajon hozzáférhetők-e már az adott kor eszközeivel. — mondta *Andrew Wiles* 2016, május 23-án, az Abel-díj átvétele után *Martin Raussennek* (Aalborg University, Dánia), és *Christian Skaunak* (Norwegian University

A szerk.

2017. JÚNIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

Élet a Rényi Intézetben

Miklós Dezsővel, az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetének igazgatóhelyettesével és *Del Viscio Tizianával* beszélgettünk, aki az európai uniós pályázatok felelőse az Intézetben.

Egy kutatóra jutó összeg tekintetében Európában kiemelkedően jók vagyunk, valószínűleg mi vagyunk Európában az egyik legsikeresebb matematikai intézet – állítja az igazgatóhelyettes, aki 1995 óta foglalkozik a kutatóintézet pályázataival és pénzügyeivel.

hatalmasabb ez a fa, minél terebélyesebb a lombkoronája, annál kiterjedtebb a széle is, ahol véget érnek az ágak. A matematikusok ezeken a végződéseken munkálkodnak, ezeket fejlesztik tovább.

of Science and Technology), akik 2003 óta valamennyi Abel-díjas matematikussal készítettek interjút. Wiles professzor több mint két évtizeddel Fermat utolsó tételének bebizonyítása után kapta meg a „matematikai Nobel-díjat”.

A szerk.

2017. JÚNIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

Kutatók és kutatások a Rényi Intézetben – Szegedy Balázs, Stipsicz András és Harangi Viktor

Az *Európai Kutatási Tanács* (ERC) működteti az Európai Unió legnagyobb felfedező kutatásokat támogató pályázati rendszerét. A támogatások odaítélésének egyedüli feltétele a tudományos kiválóság. Olyan vezető kutatók pályázhatnak a kutatók életkorára, nemére és származási országára vonatkozó bármely megkötés nélkül, akik Európában tervezik a projektek végrehajtását. A *Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet* ERC Grant támogatását elnyert vezető kutatói közül *Szegedy Balázs* és *Stipsicz András* eredményeiről kaphat képet az olvasó. A harmadik interjúban pedig *Harangi Viktor* Horizont 2020 Kiváló Tudomány – Marie-Skłodowska Curie programját ismerhetjük meg.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Pintér Gergő 2017. JÚNIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

MateMorfózis – matematika máshogyan

El lehet-e mondani a matematikát laikusoknak? Talán sokan találkoztunk már ezzel a problémával. Évekig tanultuk magát a nyelvezetet is, amin megfogalmazható egy-egy érdekesség. Akkor milyen eséllyel állunk neki mesélni egy olyan embernek, aki a matematikát az örökre elfeledni kívánt traumák számára fenntartott agyrekeszbe helyezte az érettségit követően?
De miért akarnánk ilyet csinálni? Miért kell a matekot ráerőltetni valakire, akit nem is érdekel a matematika? Hát egyrészt indokul szolgálhatnak a szokásos kérdések matematikusokhoz: „Mit lehet még csinálni a matematikában? Már mindent kitaláltak, nem?” Vagy: „mit dolgoztok, nagyon nagy számokkal számoltok?”

Ezek a kérdések még a könnyebben kezelhetőek közé tartoznak és az őszinte megválaszolásuk valójában öncélú, hiszen csak a hivatásom közmegítélésének javítását szolgálja. Az elsőre kifejlesztettem egy rövid választ, a fa-hasonlat, leírom, hátha valaki még hasznát veszi: az eddig kitalált matematika olyan, mint egy hatalmas fa. Minél hatalmasabb ez a fa, minél terebélyesebb a lombkoronája, annál kiterjedtebb a széle is, ahol véget érnek az ágak. A matematikusok ezeken a végződéseken munkálkodnak, ezeket fejlesztik tovább.

De gondoljunk bele egy picit, az említett két kérdésbe hány tisztázásra szoruló félreértés van elrejtve! Hogy a középiskolából ismert matematika jelentős része az ókorból származik, és azóta nagyon sok minden történt, főleg az elmúlt 100 évben, amikor minden más területen is a feje tetejére állt a világ. De amíg művészetekből, irodalomból, sőt még fizikából is nyilvánvaló, mekkora felbolydulást hozott a 20. század, a matematikáról egy merev, változatlan és lezárt kép él az emberek többségében. Azzal az illúzióval kiegészítve, hogy a matematika annyi, amennyit középiskolában tanítottak nekik.

Az említett diszciplínák közül az irodalomnak többé-kevésbé ismerjük a történetét, mert tananyag. Részletesen tanuljuk azoknak az embereknek az életét, akik létrehozták a tartalmakat - szinte zavarba ejtő részletességgel. A munkásságuk az alapműveltség része. Azt mondom, Petőfi Sándor, azt mondod, Anyám tyúkja, március 15, Szendrey Júlia. A fizika és más természettudományok oktatása nem ennyire történet- és alkotóközpontú, mégis működik a kvíz-szintű alapműveltség, még a tanításból nagyrészt kimaradó múlt századi mozzanatokkal is. Azt mondom, Einstein, azt mondod, relativitáselmélet, fény, téridő, hivatalnok. Azt mondom, kvantummechanika, azt mondod Schrödinger macskája, meg Heisenberg. Talán még tovább is fűzöd a beszélgetést: hát tényleg, a gravitációs hullámokhoz mit szólok? „A természettudományok 20. századi nagy vívmányai" igenis kocsmatéma! Az irodalom (sőt, a mai, a legfrissebb irodalom!) pedig a szórakoztatóipar része minden szinten, gondoljunk csak a felolvasóestekre, a színdarabokra, a slam poetryra, versmegzenésítésekre vagy akár egyes pop-rock zenekarok dalszövegeire!

Hogy működik mindez a matekkal? Azt mondom, topológia. Azt mondják, térképészet. Azt mondom, nem igazán, de ők már írják is az interjúba: Pintér Gergő, aki a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben topográfiával foglalkozik. Azt mondom, dimenzió.„A negyedik dimenzió ugye az idő, azt még el tudom képzelni, de mi az ötödik? Olyan is van?" − vágják rá teljes magabiztossággal és őszinte érdeklődéssel. És hogy többféle végtelen van, amikkel számolni is lehet. „Akkor te inkább filozófiáról beszélsz az előadásaidon" − szokták megállapítani. Azt mondom Pitagorasz − a tételét ismerik, de sokan nem értik, miért nem írjuk egyszerűbben úgy, hogy a+b=c. Minek bonyolítjuk? Azt mondják, megoldóképlet, de már nem tudják fejből. „Az első fokúét se?" − kérdezem. Azt ők nem is tanulták. Kicsit mesélek a megoldóképletekről, és azt mondom, Galois − lehidalnak, hogy mik vannak!

Megengedett, sőt, trendi dolog nem tudni a matekot − de meg sem adjuk a tudásának a lehetőségét! Alapműveltséget mérő kvízekben is csak a − gyakran amúgy is szerencsétlen − elnevezéseket, definíciókat firtatják, meg a képleteket. Mintha irodalomból a címet kérdeznénk, meg a rímképletet. A matematikából átadott tananyagnak nincsen lelke és nem személyes. Nincs mihez kötni.

De az igazi motivációm a MateMorfózis előadássorozat, vagy talán inkább:

műhelysorozat elindításában nem ez volt! Nem a matematika reálisabb megítélése volt a célom. Fesztiválokon, koncerteken, művészek, bölcsészek, zenészek között gyakran szóba került a dimenzió, a végtelen, a fraktálok. Ezek a kissé misztikus, borzongatóan földöntúli fogalmak gyakran megragadják az emberek fantáziáját. Ilyen beszélgetések alkalmával elkezdtem mondani a matematika figyelemre méltó megközelítését e témákhoz, és általában a hirtelen kezdeti érdeklődést követő csalódottsággal reagált a hallgatóság. Egyszer egy házibuliban hajnaltájt elkészült a karfiolleves, megkínáltak vele. Nem szeretem a tört-dimenziós zöldségeket, válaszoltam erre. 5-6 ember szeme kapásból fölcsillant, mi az, hogy tört-dimenziós, hol van ebben a levesben a dimenzió? Nekiláttam hát a Hausdorff-dimenzió intuitív fogalmának bevezetéséhez. Előadásomat érdeklődés követte, egy ponton azonban már rajzolnom kellett volna. De ahogy elindultam tollért és papírért, máris jöttek a csalódott sóhajok. „Ó, én úgyis tudtam, hogy soha nem fogom megérteni a matematikát”, „mindig is rossz voltam belőle, pedig ez úgy érdekelne, de már az általános iskolában elvették a kedvem... ”. Ismerős szólamok, de ezúttal leállítottam őket: „Ezt itt és most abbahagyjuk, nem fogjátok kihasználni a mesémet arra, hogy újra megerősítsétek magatoknak, hogy semmi közötök nem lehet a matekhoz. Egy hét múlva találkozunk, mindenkinek legyen egy óra szabadideje. Rajzolni fogok, nem lesznek képletek, semmire nem kell emlékezni középiskolából, mindent elmondok, ami kell. Az elmúlt 10 perc egy órában, csak a türelmeteket és a fantáziátokat hozzátok, és adjatok egy esélyt az ügynek.”

Hát így kezdődött 2011 kora őszén. A baráti összejövetelnek indult előadássorozat két hét után átkerült a néhai Sirály Kávézóba rendszeres péntek délutáni programnak. A 2012-es Művészetek Völgyében aratott először nagy sikert a

MateMorfózis, Taliándörögdön, ahol a szentendrei undergound művészeti mozgalom alkotta a közönség magját.

A következő évben megtaláltuk egymást a Gólya Közösségi Presszóval, ami azóta is a programsorozat bázisául szolgál, az előadások nagy részét itt tartjuk. A Gólyában a filmvetítésekhez, slam poetry estekhez, koncertekhez és társadalmi beszélgetésekhez hasonló kulturális szórakoztató programmá vált a MateMorfózis, mely ma az időközben a budapesti értelmiség meghatározó helyszínévé vált szórakozóhely egyik legrégebb óta futó állandó programja. Emellett sok más helyszínen is szoktak lenni előadások, nyaranta például kulturális küldetéstudatú fesztiválokon, de matektanár szakos hallgatóknak ajánlott szabadon választható kurzusként is futott már az ELTE-n Ismeretterjesztő matematika néven.

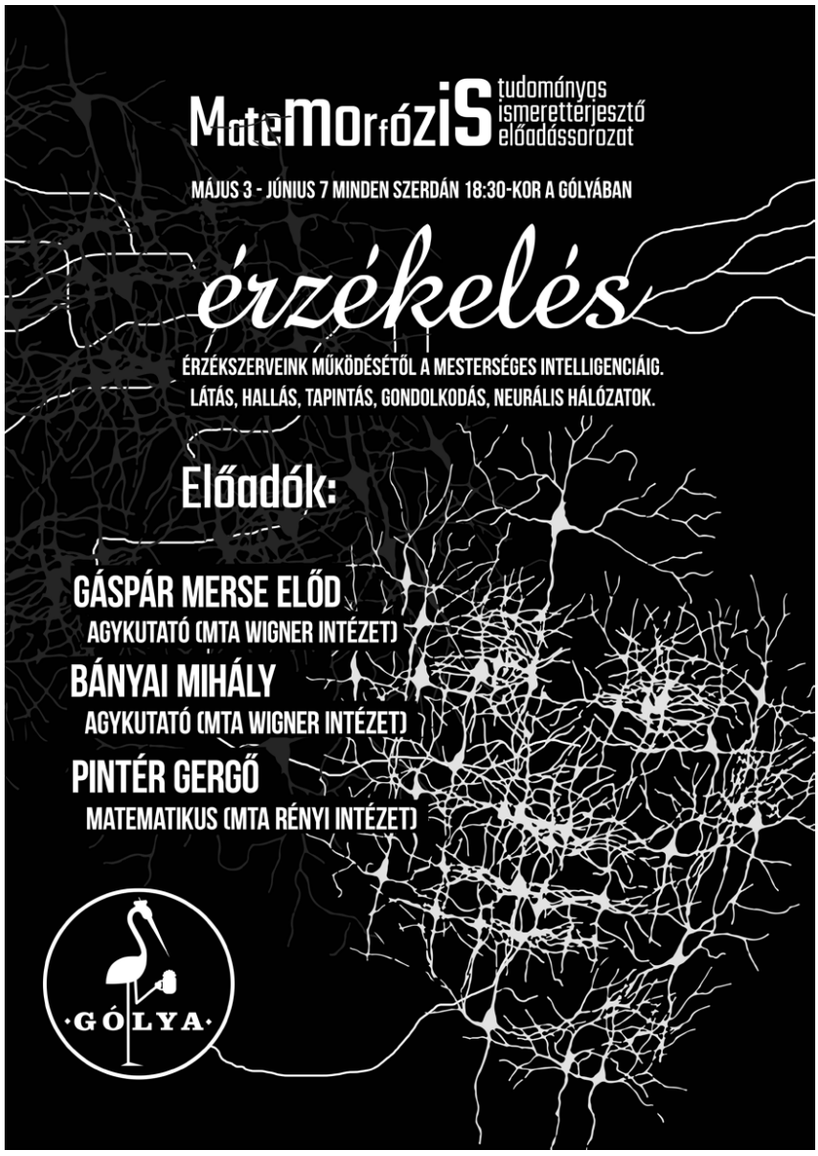
Nem minden előadást én csinálok, sok vendégelőadó is volt már. Krizsán Levente fizikáról, Márkus Benjámin biológiáról beszélt hasonló felfogásban, de volt már történelmi előadás is Erdélyi Andrástól. Januárban a „klasszikus” előadásaim közötti hetekben a TEDxYouth és a BudapestScience Meetup előadótársaim közül hívtam meg párat. Először nagyon megijedtek, hogy mit mondhatnának ők a matekról, de megnyugtattam őket: a saját témájukról kell beszélniük. A kapocs, ahogyan ők mégis a témába vágnak, az nem a tartalom, hanem a hozzáállás. Témájuk nyitott, átgondolt és mindenkihez szóló átadása, ahol a cél nem az, hogy kiderüljön, ők milyen okosak, hanem hogy az üzenet valóban átmenjen, és mindenki érezze: neki is lehet és van is köze hozzá.

A rendezvény népszerűsége és hangulata, a közönség összetétele időről időre változik. Van, hogy tényleg laikusok jönnek, de volt már, hogy mérnökök, matematikusok és fizikusok között találtam magam. Alapelv, hogy nem a túlképzettekhez igazítjuk az előadást, és mindenki azonnal kérdez vagy hozzászól, ha valami kikívánkozik belőle. Erre pedig az előadónak bármikor jogában áll azt mondani, hogy bocs, erre most nem válaszolok, messzire vinne. De szégyenkeznie senkinek nem kell, ha valamit nem tud, sem az előadónak, sem a közönségnek. Így próbáljuk fönntartani az őszinte, bizalmon alapuló kétirányú kommunikációt, ami szerintem a megértés egyetlen lehetséges alapja. Ez gyakran jól működik, felszabadult hangulat szokott kialakulni, és sokszor nagyon érdekes nézőpontokat jelenítenek meg a hozzászólások. Az ELTE-kurzuson éppen ezt hiányoltam: a hallgatók egy része eleve azzal a görccsel érkezett, hogy hogyan lesz ez számonkérve, hány kredit jár érte, hogy lesz ebből jegyük. Messze jártak attól, hogy kényelmesen hátradőljenek, és együtt élvezzük az elkövetkezendő 90 percet, és ez nagyon megnehezítette a dolgomat.

Apropó, megértés... érti mindenki? Hát nem. Nem érti mindenki. A kocsmai előadásaim résztvevői nem tudnának belőle zárthelyit írni, vagy az „anyaggal" kapcsolatos feladatokat megoldani. De ezt nem is kell! Mikor kérdezzük meg valakitől felolvasóest után, hogy mondja el az egyik verset? Vagy ha nem emlékszik, akkor csak jellemezze a szerkezetét. Moziból kijőve, hogy értette-e a filmet? MateMorfózison sem a szó szoros értelemben vett megértés a cél, hanem az, hogy átmenjen valami közöttünk. Hogy kapjon valamit a közönség, amit be tud fogadni, személyesen tud értelmezni, érezheti, hogy köze van hozzá! Nem akarok senkiből se matematikust nevelni.

A legelső témák azok voltak, amik az én kíváncsiságomat is legjobban felcsigázták, amik miatt matematikus szakra mentem. Ezek a területek nemcsak a középiskolai tanításból, de legtöbb egyetemi szak matematika kurzusaiból is teljes mértékben hiányoznak! A fraktálos előadásom már a legelső alkalommal jól sikerült. Az említett házibuli másnapján a metróaluljáróban fölmerült, hogy hogyan kerülhetnénk meg az oszlopokat 4 és többdimenziós terekben? Ezt a kérdést fejtegető, másodiknak szánt előadásom hatalmas nagy falatnak bizonyult, kudarcba fulladt. Ezt azóta is próbálom adagolni pici darabokban. A 4- és többdimenziós terekről szóló előadásban például először megpróbálom lerombolni a közönségnek azt a tévhitét, hogy a háromdimenziós teret értik, a negyedik pedig az idő. Majd mutatok néhány gyakorlatból vett példát, amelyekben jó geometriai szemléletet ad 3-nál több dimenziós terek teoretikus feltételezése. Ezután jönnek csak a többdimenziós kockák, szimplexek, tükrözések és a gömbök, ha még belefér az időbe. És hogy a téridő iránt érdeklődők ne csüggedjek el, van egy külön erről szóló előadás is, amelyben a tér, idő és a fény vizsgálatával gondolatkísérleteken keresztül jutunk el a relativitáselmélet két híres paradoxonjához. Természetesen ezt is teljesen képletek nélkül. A végtelenes előadásomban jóval kevesebb az eredetiség részemről: a számolni nem tudó juhász és a végtelen szállodák vonalán elindulva a matekos körökben közismert tanmesék által jutunk el Cantor végtelen számosságaihoz, és az így fölépített halmazelmélet paradoxonjaihoz. A folytonos és véges projektív geometriák tárgyalásához szenzációsan jó alapot ad a Dobble kártyajáték: szinte mindenki elveszíti a fonalat az előadás során, ez szinte szükségszerű, de amikor az előadás végén közösen kirakjuk a Dobble pakli lapjait 7-edrendű projektív sík formájában, és megtaláljuk a gyárilag hiányzó két kártyalapot, összeáll a kép. Mint a tőzsdén, nyújtják a náluk lévő lapokat, és kiabálnak, hogy „itt a dinoszauruszos egyenes végtelen távoli pontja". Egy matekos MateMorfózis vendégelőadótól, Pécsi Bertalantól tanultam, hogy ezt a paklit egész könnyen ki lehet így rakni, és közösségi élménnyé formáltam a folyamatot. Az egyszer majd talán összeálló oszlopkerülgetés témakörének a szilánkjait tartalmazzák a TEDxYouth és Budapest Science Meetup előadásaim videói.

Jelenleg szerdánként a Gólyában folynak az Érzékelés MateMorfózis előadásai két vendégelőadóval. Ők Gáspár Merse Előd és Bányai Mihály, agykutatók a Wigner Intézetből.



Aztán nekilátunk a fesztiváloknak. Kolorádó Fesztiválon a zenei skála felépítéséről lesz szó a felhangok alapján, és ha minden jól megy, hangszerbarkácsolással egybekötve. Lesz előadás Bánkitón is. Tű Fokán Fesztiválon többnapos MateMorfózis műhelyt tervezünk Váczi Lillával, aki a MOME-n végzett médiadizájn szakon. Ennek célja, hogy „analóg” illusztrációkat készítsünk néhány témához, amik megfoghatóak, mozgathatóak, művészeti produktumként, installációként is értelmezhetőek. Hosszabb távú céljaim között szerepel a művészekkel való közös munka fejlesztése műfaji kereteket áthágó matematikai installációk, performance előadások formájában. A tágabb értelemben vett matematika nagyon meglepő témákat is tud szolgáltatni, mint például az ősszel megrendezésre kerülő OFF Biennálé programjaként megvalósuló Köztudott tudás című, messzire vezető előadásom. Ennek magja a Terence Tao blogján is megjelent, információelméleti kérdéseket felvető fejtörő.

Hamarosan elindul a MateMorfózis youtube csatorna is, ami alkalmat ad elemibb, az előadásokból túlságosan kilógó fejtegetésekre is, mint pl. mit jelent az, hogy számolni. Emellett várom a megívásokat akár iskolákba, rendezvényekre a közönségnek megfelelő szintű MateMorfózis előadásra.

És remélem, hogy az előadássorozat szélesebb körökben is ismertté válik, és elterjed a koncepció, mint a tanításnak egy alternatív, azt kiegészítő formája.

Pintér Gergő

Pintér Gergő az ELTE matematikus szakán végzett 2010-ben, majd Phd képzést kezdett ugyanitt szingularitások topológiája témában. A BGF-en és a BME-n is tanít matematika tárgyakat. 2013 óta az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben dolgozik, 2015 óta Fiatal Kutatói Ösztöndíjas.

2011 óta működik különböző formákban a MateMorfózis előadássorozat, aminek alapítója, főszervezője és előadója. Egyike a La Femme magazinban bemutatott 50 fiatal magyar tehetségnek.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap

Fordította: Matolcsi Máté 2017. JÚNIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

Interjú a 2016-ban Abel-díjat nyert Sir Andrew Wiles professzorral 1. rész

Wiles professzor úr, engedje meg, hogy gratuláljunk a 2016-os Abel díj-elnyeréséhez. Őszintén szólva mi ketten arra számítottunk, hogy ez az interjú már évekkel ezelőtt megvalósul!

Ön nemcsak a matematikusok körében tett szert hírnévre, hanem a nagyközönség előtt is azzal, hogy az Abel-díjbizottságot idézve „bebizonyította a Fermat-sejtést az elliptikus görbékre vonatkozó Modularitási sejtés segítségével, és ezzel új korszakot nyitott a számelmélet történetében." Ez a bizonyítás 1994-ben született, tehát több mint 20 évet kellett várnia az Abel-díj elnyerésére. Mindazonáltal eddig Ön a legfiatalabb díjazott az Abel-díjasok között.

Miután bebizonyította a Fermat-sejtést, nagyon sok interjút kellett adnia, ami most megnehezíti a mi dolgunkat. Hogyan fogunk olyan kérdéseket találni, amelyeket még nem válaszolt meg száz és száz alkalommal? Ígérjük, megteszünk minden tőlünk telhetőt.

A Fermat-sejtés — történeti áttekintés

A legelején kell kezdenünk, egy latin idézettel: „…nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere", ami azt jelenti, hogy „nem lehet felosztani egy 2-nél magasabb hatványt két ugyanolyan hatvány összegére". Azaz, a modern matematikai jelöléseket használva, az $x^n + y^n = z^n$ *egyenletnek nincs megoldása a pozitív egészek körében ha* $n > 2$.

És az idézet így folytatódik „cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet", ami azt jelenti, hogy „felfedeztem egy igazán gyönyörű bizonyítást erre, de ez a margó túl kicsi ahhoz, hogy ideférjen". Ezt a megjegyzést 1637-ben írta Pierre de Fermat [1601—1655] francia jogász és amatőr matematikus Diofantosz Arithmetica című könyvének margójára. Biztosan nem számított rá, hogy ez a megjegyzés századokon át fogja izgalomban tartani a hivatásos és amatőr matematikusokat egyaránt, hogy megtalálják a bizonyítást.

Kérjük, röviden vázolja azokat a kísérleteket, amelyek a Fermat-sejtés bizonyítására születtek azelőtt, hogy Ön a sikeres módszerre rátalált volna. Továbbá, miért volt egy ilyen egyszerűnek tűnő kérdés ennyire vonzó, és a bizonyítási kísérletek miért voltak ekkora hatással a számelmélet fejlődésére?

Az első komoly megoldási kísérleteket valószínűleg maga Fermat tette. Sajnos azonban ezekről semmi többet nem tudunk, mint amit ő maga leírt az $n = 3$ és $n = 4$ esetek bizonyításánál.[1] Belátta, hogy egy köbszám nem bomlik két köb összegére, és egy negyedik hatvány nem bomlik két negyedik hatvány összegére. Ezt egy gyönyörű módszerrel bizonyította, amit azóta végtelen leszállásnak hívunk. Ez akkoriban új módszer volt a számelméletben, vagy legalábbis a bizonyításnak egy új nézőpontja. A módszert a kollégáihoz írt levelekben magyarázta el, illetve azon a bizonyos margón, már amennyi ráfért. Miután a margóra írt megjegyzéseket Fermat fia közzétette apja halála után, az egész dolog elfelejtődött egy darabig. Aztán Euler [1707—1783] felvette a fonalat, valamint mások is, akik megpróbálták megtalálni a csodálatos bizonyítást. És nem sikerült. A dolog meglehetősen drámaivá vált a 19. század közepére: több ember gondolta úgy, hogy megtalálta a megoldást. Volt erről egy vita a Francia Akadémián, ahol Lamé [1795—1870] azt állította, hogy megoldotta a problémát, és Cauchy [1789—1857] is ugyanezt állította magáról.

Valójában egy német matematikus, Kummer [1810—1893] addigra már írt egy cikket, amelyben elmagyarázta, hogy a probléma gyökere a számelmélet alaptételéhez nyúlik vissza. A természetes számok körében minden szám lényegében egyértelműen írható fel prímszámok szorzatára. Például 12 egyenlő 2-szer 2-szer 3. Nem lehet máshogy felbontani. De amikor a kutatók a Fermat-sejtést akarták bizonyítani, akkor olyan számrendszereket használtak, amelyben ez a felbontási egyértelműség nem igaz. Minden megoldási kísérlet azért fulladt kudarcba, mert ez a felbontási egyértelműség sérült. Kummer mindezt hihetetlen részletességgel elemezte. Gyönyörű eredményekkel állt elő, és végül sok speciális esetben belátta a Fermat-sejtést. Például, $n \leq 100$ esetén minden prím kitevőre megoldotta a 37, 59 és 67 kivételével. Végülis azonban nem tudott általános megoldást adni. A módszere a Fermat-féle végtelen leszállás volt ezekben az új számrendszerekben.

A Kummer által használt új számrendszerek vezettek az algebrai számelmélet mai formájának megszületéséhez. Az ember ezekkel a számokkal próbál egyenleteket megoldani ahelyett, hogy egész vagy racionális számokkal dolgozna. Ilyen irányú kísérletek még folytatódtak egy darabig, de aztán kifulladni látszottak a 20. századra. Senkinek sem volt alapvetően új ötlete. A 20. század második felére a számelmélet továbblépett más kérdések vizsgálatára, és a Fermat-sejtés szinte elfelejtődött a hivatásos matematikusok körében.

Aztán 1985-ben egy német matematikus, Gerhard Frey, egy váratlan új ötlettel állt elő: fogott egy feltételezett megoldást a Fermat-egyenletre, és egy átalakítás után nyert belőle egy úgynevezett elliptikus görbét. És megmutatta, vagy legalábbis utalt rá, hogy ennek az elliptikus görbének nagyon furcsa tulajdonságai vannak. Annyira furcsák, hogy azt sejtette, hogy ilyen görbék nem is létezhetnek. Frey ötletét fejlesztette tovább egy évvel később Kenneth Ribet amerikai matematikus, aki megmutatta, hogy a Fermat-egyenlet minden megoldása automatikusan ellenpéldát szolgáltatna egy másik jól ismert sejtésre is, a Modularitási sejtésre. Ezt a sejtést először Taniyama [1927—1958] fogalmazta meg egy gyengébb formában, majd később Shimura finomított rajta. A Modularitási sejtés igazságára vonatkozóan André Weil [1906—1998] szolgáltatta az első meggyőző érvet, aki lehetővé tette a sejtés részletes vizsgálatát. Ezután elég sok részleges bizonyítékot sikerült találni, amelyek mind azt mutatták, hogy a Modularitási sejtés valóban igaz. És emiatt a matematikusok azt látták, hogy „igen, a Fermat-sejtés is igaz kell, hogy legyen”. Sőt, kell, hogy legyen rá bizonyítás is.

Az történt ugyanis, hogy a Modularitási sejtés olyan jelentőségű probléma volt, hogy nem lehetett csakúgy félrerakni 500 évre. A modern matematika egyik központi sejtése volt. A Fermat-sejtés önmagában még elég marginális volt, és félre lehetett volna rakni akár örök időkre is, de a Modularitási sejtéssel már nem ez volt a helyzet. Tehát Ribet munkája után már láttam, hogy így talán meg lehet oldani a Fermat-sejtést, és azt is tudtam, hogy én meg fogom próbálni.

Térjünk vissza egy kicsit Fermat eredeti állítólagos bizonyítására. Gondolja, hogy Fermat ugyanazt az ötletet használta, mint Lamé, és hibásan azt feltételezte, hogy a megfelelő körosztási egészek között igaz az egyértelmű faktorizáció?

Nem, ezt nem hiszem, bár ez az ötlet is ott lehetett valahol. Nehéz ezt kinyomozni. André Weil írt erről: mindegyik másik probléma, amivel Fermat foglalkozott, 0 vagy 1 génuszú görbékkel volt kapcsolatban, és akkor most hirtelen egy magasabb génuszú görbét kezd vizsgálni. Vajon hogyan fog erről gondolkodni? Amikor tizenévesen megpróbálkoztam a sejtéssel, beleképzeltem magam Fermat helyébe, hiszen nem is nagyon tudtam mást tenni: képes voltam megérteni a 17. századi matematikát, de semmi annál sokkal mélyebbet. Úgy tűnt, hogy minden, amit Fermat csinált, végülis kvadratikus formákkal volt kapcsolatos, ezért úgy gondoltam, hogy talán ebből az irányból lehetne megközelíteni a sejtést. Persze nem jártam sikerrel, de nincs semmi, ami arra utalna, hogy Fermat az egyértelmű faktorizáció csapdájába esett volna. Sőt, a kvadratikus formák szemszögéből ő már tisztában volt azzal, hogy néha igaz az egyértelmű faktorizáció, és néha nem. Tehát már értette ezt a különbséget. Ezért alig hiszem, hogy ezt a hibát követte volna el.

André Weil „A számelmélet története Hammurapitól Legendre-ig” című könyvében, amelyre az előbb Ön is utalt, azt írja, hogy Fermat megvizsgálta az $x^3 - y^2 = 2$ egyenletet, és belátta, hogy annak csak az $x = 3$ és $y = \pm 5$ megoldása van. André Weil szerint Fermat ekkor a $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ gyűrűben dolgozott, amelyben igaz az egyértelmű faktorizáció.

Igen, Fermat használta az egyértelmű faktorizációt, de a kvadratikus formákon keresztül. És azt hiszem a $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ gyűrűnek megfelelő kvadratikus formákat is vizsgált, ahol viszont nincs egyértelmű faktorizáció. Tehát szerintem értette a különbséget. Legalábbis nekem ez a benyomásom.

Matematikai neveltetés

Úgy hírlik, hogy már kisgyerek korában érdekelték Önt a matematikai fejtörők. Honnan jött ez az érdeklődés? Volt valaki, aki hatással volt Önre?

Élveztem a matekot kisgyerek koromban. 10 éves koromban a könyvtárban a matematikai tárgyú könyveket nézegettem. Egyszercsak a kezembe akadt E. T. Bell [1883—1960]: „Az utolsó probléma” című könyve, amely már a borítóján tartalmazza a Fermat-egyenletet, és a probléma romantikus történetét. Teljesen magával ragadott a könyv.

Volt még más is Eric Temple Bell könyvében, ami megragadta a képzeletét?

Igazából az egész könyv a Fermat-egyenletről szól, és elég bőbeszédű. Kevesebb benne a matematika, mint gondolná az ember. Engem az egyenlet fogott meg. Aztán amikor rátaláltam erre az egyenletre, utána kikerestem más elemi matematika könyveket is számelméletről, tanultam kongruenciákról, és megnéztem egyéb dolgokat is, amiket Fermat csinált.

És mindezt a szokásos iskolai terhelés mellett?

Igen, az iskolát nem tartottam nagyon megterhelőnek, maradt mellette időm.

Már akkor világos volt az Ön számára, hogy kivételes tehetsége van a matematikához?

Az biztos, hogy volt matematikai tehetségem, és szerettem matekozni, de azt nem éreztem, hogy különleges lennék. Igazából nem is hiszem, hogy az voltam: az iskolámban sokan mások is jók voltak matekból, és vannak közülük, akik szintén matematikusok lettek.

Már ebben az életkorban is azt tervezte, hogy matematikát fog tanulni, és matematikusi életpályára megy?

Nem, mert akkor még nem értettem, hogy az ember akár az egész életét is a matematikára teheti fel. Ez csak később jött. De az biztos, hogy addig akartam matekot tanulni, ameddig csak lehet. Amennyi keveset előre láttam a jövőmbe, abban ott volt a matematika.

Oxfordban kezdte meg a matematikai tanulmányait 1971-ben. Kérjük, mondjon erről néhány szót. Voltak olyan tanárok vagy olyan szakterületek, amelyek nagyon meghatározóak voltak az Ön számára?

Mielőtt Oxfordba mentem volna, még középiskolában volt egy tanárom, akinek számelméletből volt PhD-je. Tőle kaptam egy példányt Hardy és Wright „Bevezetés a számelméletbe” című könyvéből, valamint találtam egyet Davenport „Magasabb aritmetika” című könyvéből is. Ez a két könyv nagyon inspiráló volt számomra számelméleti szempontból.

Tehát már Oxford előtt a pályára állították ezek a könyvek?

Igen, pályára álltam, a számelmélet felé fordultam. Sőt, úgy éreztem, hogy később az egyetem kissé megzavart ebben, hiszen csomó minden mást is kellett tanulnom: alkalmazott matematikát, logikát, és így tovább, pedig én csak számelméletet akartam tanulni. Az első évben egyáltalán nem is volt számelmélet, és igazából a harmadik évfolyam előtt nem is tudtam komolyan számelmélettel foglalkozni.

Tehát nem érdekelte Önt például a geometria annyira, mint az algebra és a számelmélet?

Elsősorban a számelmélet és az algebra érdekelt. Szívesen megtanultam a többi tárgyat is, de a legjobban a számelmélet izgatott. A tanáraim elintézték, hogy felvehessek extra kurzusokat számelméletből, de sajnos nem sok volt a kínálatban.

Egyszer elhatároztam, hogy a korábbi iskolai latintanulásomnak azzal vehetném hasznát, ha eredetiben olvasnám Fermat írásait, de ez végül túl nehéznek bizonyult. Még ha a latint meg is értettem, azokban az időkben még nem a mai algebrai jelöléseket használták, így igen nehéz volt eligazodnom.

Biztosan megkönnyebbülés volt, amikor végzett Oxfordban, és megkezdhette a tanulmányait immár tényleg csak számelméletben, John Coates témavezetésével Cambridge-ben.

Igen, az első évben több tárgyat is tanultam, aztán rátérhettem egy speciális cikk megírására. Amikor találkoztam John Coates-szal, és megkezdtem vele a kutatást, az csodálatos volt. Az egyetemi évek tanulásához, biflázásához képest a kutatás számomra csodálatos váltás volt.

Elliptikus görbék

John Coates terelte Önt az elliptikus görbék és az Iwasawa-elmélet felé?

Teljes mértékben. Volt néhány remek ötlete, és elég nagylelkű volt ahhoz, hogy megossza ezeket velem.

Elmondta neki, hogy Ön érdeklődik a Fermat-sejtés iránt?

Talán igen, nem emlékszem. De az volt a helyzet, hogy nem volt semmi új ötlet a témában a 19. század óta. A kutatók a régi ötleteket próbálták tovább finomítani, és igen, néha sikerült is egy-két finomítás. De nem úgy tűnt, hogy ezek valaha elvezetnek a teljes megoldáshoz. Túl nehéz volt abból az irányból megtalálni a megoldást.

Amikor elliptikus görbékkel kezdett foglalkozni John Coates hatására, akkor még nem sejtette, hogy ezek később döntő szerepet játszanak a Fermat sejtés megoldásában?

Nem, ez csak egy varázslatos véletlen, hogy így alakult. Az a furcsa, hogy Fermat munkásságában két dolog emelkedik ki, amikre máig emlékszünk: az elliptikus görbék, és a híres sejtése. Például az egyenlet, amit említett $y^2 + 2 = x^3$, ez is egy elliptikus görbe. És ez a két dolog végül egymásra talált a sejtés bizonyításában.

El tudná magyarázni, hogy mik is azok az elliptikus görbék, és mi a szerepük a számelméletben?

Egy számelméleti kutató számára az elliptikus görbék Fermat-val kezdődtek, olyan egyenletekkel ahol y^2 egyenlő az x-nek valamely racionális együtthatós harmadfokú polinomjával. A probléma az, hogyan találjuk meg egy ilyen egyenlet racionális megoldásait. Fermat a következőt vette észre: néha az ember kiindulhat egy vagy két megoldásból, és azokból generálhat végtelen sok új megoldást. Néha viszont egyáltalán nincs megoldás. Ez a helyzet például a Fermat-sejtésnél $n = 3$-ra, ami valójában álcázott formában egy elliptikus görbe egyenletére vezet. Néha meg lehet mutatni, hogy nincs racionális megoldás. Szóval néha végtelen sok van, néha pedig egy sem. Ezt már Fermat is látta.

A 19. században elkezdték ezeket az egyenleteket a komplex számok körében vizsgálni. Abel [1802—1829] maga is tanulmányozta az elliptikus függvényeket és a kapcsolatukat az elliptikus görbékkel, és megállapította, hogy az elliptikus görbéknek van egy csoport-struktúrája. Mindezeket már a 19. században jól értették a kétszeresen periodikus függvényekkel kapcsolatban. De ez a komplex megoldások elmélete.

Az egyenletek valós racionális megoldásait Poincaré [1854—1912] tanulmányozta. Amit most már Mordell-Weil tétel néven ismerünk, azt Mordell [1888—1972] bizonyította, majd aztán Weil az 1920-as években, megválaszolva ezzel Poincaré egy kérdését. A mi formalizmusunkban ez a tétel azt mondja, hogy a K-racionális pontok egy elliptikus görbén egy K számtest felett, tehát speciálisan K akár a racionális számok teste is lehet, egy végesen generált Abel-csoportot alkotnak. Azaz, Fermat nyelvén szólva, foghatunk véges sok megoldást, és azokból aztán az összes megoldás megtalálható a húr-érintő módszer segítségével.

Birch és Swinnerton-Dyer, valamint Tate—Safarevics és Selmer...

Tehát sikerült megérteni a megoldások struktúráját, ami egy gyönyörű algebrai struktúra, egy csoport struktúra, csak éppen ez nem segít a konkrét megoldások megtalálásában. Senkinek sem voltak módszerei a megoldások megtalálására az 1960-as évekig, a Birch—Swinnerton-Dyer-sejtés felbukkanásáig. Két oldala van a dolognak. Az egyik analitikus, míg a másik pedig az úgynevezett Tate —Safarevics csoporthoz kapcsolódik. Lényegében a Tate—Safarevics-csoport adja meg a megoldási algoritmus megtalálásának obstrukcióit. És a Birch—Swinnerton-Dyer-sejtés azt mondja, hogy van egy analitikus módszer a Tate—Safarevics-csoport tanulmányozására. Ha mindezt összerakja az ember, akkor végeredményben kap egy algoritmust a megoldások megtalálására.

Ön már dolgozott a Birch—Swinnerton-Dyer-sejtésen a posztgraduális képzésekor John Coates-szal, ugye?

Igen, pontosan ezt a témát javasolta nekem Coates. Sikerült is az első eredményeket belátnunk erről az analitikus kapcsolatról az elliptikus görbéknek egy speciális osztályára.

Ezek voltak azok a görbék, amelyeken a komplex szorzás értelmezhető?

Igen, pontosan, amelyeken a komplex szorzás értelmezhető.

Ez volt az első általános eredmény a Birch—Swinnerton-Dyer-sejtéssel kapcsolatban?

Az első olyan, ami a görbéknek egy egész családjára vonatkozik, nem pedig egy-egy speciális görbére. Sok numerikus adat volt egy-egy görbére, de ez volt az első eredmény, ami görbéknek egy végtelen családját kezelte.

Mindez a racionális számtest felett, ugye?

Igen.

Meg kell említenünk, hogy a Birch—Swinnerton-Dyer-sejtés egyike a Clay Milleniumi Díj Problémáknak, azaz ha valaki megoldja, 1 millió dollárral jutalmazzák.

Igen, így van. Azt hiszem ez egy vonzó probléma, mert a gyökerei Fermat-hoz nyúlnak vissza. Ez is egy olyan elemien megfogalmazható probléma, ami egyenletekkel kapcsolatos, ezúttal alacsony fokú egyenletekkel, amelyekkel nem boldogulunk, és amelyeket még Fermat kezdett vizsgálni. Nagyon vonzó problémának találom.

Úgy gondolja, hogy megvannak már az eszközök a megoldásához? Ha valaki elég bátor, annak sikerülhet? Vagy kell még várnunk 300 évet a megoldás megszületésére?

Nem hiszem, hogy 300 évet kéne várnunk, de azt sem gondolom, hogy ez a legkönnyebb a milleniumi problémák közül. Azt hiszem, valami még hiányzik a megoldáshoz. Hogy minden eszköz megvan-e már, nem tudom. Talán igen. De mindig ott vannak ezek a spekulációk az igazán nehéz problémákkal kapcsolatban: talán még nincsenek is meg hozzá az eszközeink.

Nem hiszem, hogy bárki megoldhatta volna a Fermat-sejtést a 19. században, legalábbis azon az úton biztosan nem, ahogy végül a megoldás most megszületett. Túl nagy volt még a hézag matematikatörténeti szempontból: kellett várni 100 évet, mire a megfelelő eszközök megszülettek. Igazából sosem tudhatja az ember ezekkel a híres problémákkal, hogy vajon hozzáférhetők-e már az adott kor eszközeivel. Ezért is akkora kihívás a megoldásuk: ha az ember tudná, hogy mit lehet megoldani a mai eszközökkel és mit nem, már pusztán ez is egy óriási lépés lenne a megoldás felé!

Említette a Tate—Safarevics-csoportot, és ezzel kapcsolatban felmerül a Selmer-csoport is. Selmer [1920—2006] norvég matematikus volt, és Cassels [1922—2015] nevezte el róla a Selmer-csoportot. Tudna mondani pár szót a Selmer-csoportról, és hogy hogyan kapcsolódik ez a Tate—Shafarevich-csoporthoz, még akkor is ha a részletek kissé technikaiak?

Igen a részletek elég technikaiak, de azért valószínűleg el tudom magyarázni a Selmer-csoport mögötti ötletet. Egy elliptikus görbén keressük a racionális megoldásokat. A módszer az, hogy ha van már néhány megoldásunk, akkor azok segítségével testbővítéseket csinálunk. Ezt úgy csináljuk, hogy bizonyos gyököket vonunk a görbén lévő pontokból — mint ahogy vehetjük például a számok között az 5-nek az n-edik gyökét vagy a 2-nek a köbgyökét. Hasonlóan, egy elliptikus görbén lévő pontnak is vehetjük az n-edik gyökeit. Ezek azok a pontok, amiket ha n-szer összeadunk (szorzás helyett), akkor visszakapjuk az eredeti pontot. Ezeknek a gyököknek a koordinátái aztán testbővítéseket generálnak, a mi esetünkben a racionális test bővítéseit.

Elég sok megszorítás tehető ezekre a testbővítésekre. És a Selmer-csoport lényegében a testbővítéseknek a legszűkebb halmaza, miután az ember a nyilvánvaló megszorításokat már feltételezte.

Összefoglalom még egyszer. Van a görbén lévő pontok csoportja. Ezek generálnak testbővítéseket (a gyökökön keresztül). De túl sok ilyen testbővítés van, nem akarjuk mindegyiket megengedni. Ezért lokális feltételekkel (p-adikus számokat használva) megszorításokat teszünk, amennyire csak lehet, és az így kapott testbővítések alkotják a Selmer-csoportot. És a görbén lévő pontok csoportja és a Selmer csoport közötti eltérést határozza meg a Tate—Safarevics csoport. Tehát bizonyos értelemben a Tate—Safarevics csoport adja meg a „hibatagot” amikor az ember a Selmer-csoportból akar következtetni a görbén lévő pontok csoportjára.

Selmer cikke, amelyre Cassels hivatkozik, a $3x^3+4y^3+5z^3=0$ egyenlettel foglalkozik, és hasonló egyenletekkel. Selmer belátta, hogy ennek csak a triviális megoldása van az egészek között, de minden n-re van nem-triviális megoldása modulo n. Tehát ezen a görbén nincsenek racionális pontok. Miért nevezte el Cassels Selmerről a felmerülő csoportot az általános esetben?

Valóban, ezek között elég finom kapcsolat van. Mi is a helyzet, ha egy elliptikus görbét tekintünk, ami ebben az esetben $x^3+y^3+60z^3=0$ lenne? Ez egy nem szokványos módon megadott elliptikus görbe, és a Tate—Safarevics-csoporthoz más hasonlókat is tekintenünk kell, mint például a $3x^3+4y^3+5z^3=0$ görbét, mely szinten 1 génuszú gorbe, de ez utóbbinak nincs racionális pontja. Ennek Jacobi-varietása az eredeti $x^3+y^3+60z^3=0$ elliptikus görbe. A Tate—Safarevics-csoport egy leirási módja épp ilyen, racionális ponttal nem rendelkező elliptikus görbekkel lehetséges. Ezeket valahogy összerakva kapható meg a Tate—Safarevics-csoport, és ez az összerakás tükröződik vissza a Selmer-csoportban. Kicsit bonyolult ahhoz, hogy szavakban röviden elmagyárazzuk. Jómagam egy sokkal aritmetikaibb leírást adtam erre modulusbővítések alkalmazásával. Az inkább geometriai leírás pedig ezen csavart formák segítségével tehető meg.

A Modularitási sejtés

Végeredményben Ön a Modularitási sejtés egy speciális esetét bizonyította be. Ahhoz, hogy ezt megértsük, először is a moduláris formákkal kell kezdenünk, valamint azzal, hogy mi közük van ezeknek az elliptikus görbékhez. El tudná ezt magyarázni?

Igen. Az elliptikus görbéket (a racionális test felett) egy $y^2=x^3+ax+b$ alakú egyenlet adja meg, ahol a és b racionális számok. (Továbbá van egy olyan feltétel is, hogy ne tűnjön el a diszkrimináns.) Ahogy elmondtam, már a 19. század elején leírást tudtak adni ennek az egyenletnek a komplex megoldásairól. Ezeket jól le lehet írni a Weierstrass-féle P-függvénnyel, egy speciális elliptikus függvénnyel. Azonban ezzel csak a komplex struktúrát lehet látni, és nekünk pedig valahogy azt kéne megfogni, hogy a és b racionális számok, és a racionális elliptikus görbékről leírást adni.

És ehhez a moduláris formák vagy moduláris görbék lesznek segítségünkre. Először néhány szót a moduláris függvényekről: ahhoz hozzá vagyunk szokva, hogy bizonyos függvények invariánsak egy eltolásra nézve. Például, amikor Fourier-sorokat használunk, akkor olyan függvényekkel dolgozunk, amik periodikusak, azaz invariánsak a periódussal való eltolásra nézve. A moduláris függvények olyan komplex függvények, amelyek invariánsak egy nagyobb csoport hatására nézve (általában az $SL_2(\mathbb{Z})$ egy részcsoportjára nézve). Tehát egy a felső félsíkon értelmezett $f(z)$ komplex változós függvénytől megköveteljük, hogy $f(z)$ egyenlő legyen $f\big((az+b)/(cz+d)\big)$-vel (vagy általánosabban megengedhetünk egy $(cz+d)$ hatványával való szorzást).

Ezek a moduláris függvények, és ezeket már behatóan tanulmányozták a 19. században. Meglepő lehet, de ezek adják a kulcsot az elliptikus görbék aritmetikájának tanulmányozásához. Talán a legegyszerűbb úgy elmagyarázni, hogy mivel az $SL_2(\mathbb{Z})$ csoport hat a H felső félsíkon (ahogy z átmegy $(az+b)/(cz+d)$-be), ezért le tudjuk faktorizálni H-t ezzel a hatással. És a faktor természetesen örökli egy racionálisok feletti görbe struktúráját.

Ha vesszük $SL_2(\mathbb{Z})$-nek azt az úgynevezett kongruencia részcsoportját, ahol c osztható egy N számmal, akkor a kapott görbét N-szintű moduláris görbének hívjuk. A Modularitási sejtés azt mondja ki, hogy minden elliptikus görbe a racionálisok felett megkapható úgy, mint valamely N-szintű modularitási görbe egy faktora. Ezzel az elliptikus görbéknek egy uniformizálást nyerjük a moduláris görbék által. Elsőre úgy tűnhet, hogy ezzel rajtavesztünk, hiszen az utóbbi egy magasabb génuszú görbe, tehát bonyolultabb. De valójában sokkal több struktúrája van.

És mindez egy nagyon erős eszközt ad a kezünkbe?

Igen, egy nagyon erős eszközt. Rendelkezésünkre állnak függvénytani módszerek, a deformáció elmélet, geometriai módszerek, stb. Sok-sok eszközünk van a tanulmányozásukra.

Taniyama, a fiatal japán matematikus, aki először észrevette ezeket az összefüggéseket, még ennél sokkal bizonytalanabb formában fogalmazta meg a sejtést, igaz?

Igen, az ő sejtése még nem volt ennyire pontosan megfogalmazva. Nem a modularitási csoportot használta az invarianciához. Már nem emlékszem pontosan, hogy mi is volt az ő sejtése, de az invariancia még valami másik csoportból származott. Nem volt ennyire pontosan kimondva, hogy a moduláris csoport kongruencia részcsoportjairól van szó. És eredetileg japánul volt írva, ezért nem kapott akkora nyilvánosságot, amelyet megérdemelt volna. Azt hiszem, egy Japánban lezajlott konferencia utáni kiadványban szerepelt.

Ez egy nagyon vakmerő sejtés volt abban az időben, ugye?

Igen, mindenképpen.

De aztán lassan a matematikusok felfigyeltek erre a sejtésre. Már említette, hogy Gerhard Frey a Fermat-sejtést összekötötte a Modularitási sejtéssel.

Igen. Gerhard Frey megmutatta, hogy ha a Fermat-egyenletnek van egy $a^p + b^p = c^p$ megoldása, és tekintjük az $y^2 = x(x-a^p)(x-b^p)$ elliptikus görbét, akkor ennek a görbének a diszkriminánsa egy teljes p-edik hatvány lenne. És ha meggondoljuk, hogy mit jelent ez a Modularitási sejtést feltételezve (igazából egy kicsit erősebbet is fel kell tennünk: a Serre-féle epszilon-sejtést), akkor azt látjuk, hogy ez a görbe csak $N=1$-szintű lehet, és így a hozzá tartozó kongruencia részcsoport az maga $SL_2(\mathbb{Z})$. De ha H-t lefaktorizáljuk $SL_2(\mathbb{Z})$-vel, akkor egy nulla génuszú görbét kapunk, aminek nincsenek elliptikus görbe faktorai. Ezért tehát a Fermat-egyenletnek sem lehet megoldása.

Az interjú folytatását 2017. szeptemberi számunkban közöljük. Következik: A megoldás nyomában.

Az interjút készítették: Martin Raussen (Aalborg University, Dánia), és Christian Skau (Norwegian University of Science and Technology, Norvégia). Fordította: Matolcsi Máté.

Az eredeti cikk az Európai Matematikai Társulat EMS Newsletters 2016. szeptemberi számában jelent meg: Interview with Abel Lauereate Sir Andrew Wiles, EMS Newsletter September 2016, p. 29—38. http://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2016-09-101.pdf#page=31

Ezúton is köszönjük az EMS, a szerzők és Wiles professzor szíves engedélyét a fordítás megjelentetéséhez.

A Wilesról készült fénykép forrása a Wikimedia Commons:

https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Andrew_Wiles#/media/File:Andrew_wiles1.jpg
copyright C. J. Mozzochi, Princeton N.J

Fermat képe: https://hu.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat

Lábjegyzet

1

Szigorúan véve először Euler adott teljes bizonyítást az $n = 3$ esetre.

Abel-díj Andrew Wiles Fermat

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés
Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A szerk. 2017. JÚNIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

Élet a Rényi Intézetben

Az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetének honlapja a szokásos hazai oldalaktól eltérően egyszerre kétnyelvű, de sokkal több angol, mint magyar szöveg olvasható rajta. Nemzetközi helyzetét és hírnevét illetően ez érthető, hiszen a Reáltanoda utcai épületben egyre több külföldi vendégkutató, konferenciavendég fordul meg, a nagyteremben elhangzó előadások, vagy a folyosói beszélgetések nagy része is angol nyelven folyik. Matematikusok több generációja dolgozik itt, egyre több a fiatal kutató és sokkal nagyobb az intézet létszáma, mint egykor.

A változások okairól és az intézet kutatóinak lehetőségeiről *Miklós Dezsővel*, az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetének igazgatóhelyettesével és *Del Viscio Tizianával*, az európai uniós pályázatok felelősével beszélgettünk.

Mióta dolgozik a Rényi Intézetben?

M.D.: 1982 óta vagyok az Intézetben, és 1995-ben lettem igazgatóhelyettes. Katona Gyula volt azokban az években az igazgató, ő bízta rám a pénzügyeket. Már-már legendaszámba ment, hogy minden évben azt kellett mondanom, ezt az évet anyagilag épp hogy túléltük, de jövőre össze kell húzunk a nadrágszíjat. 2006 óta Pálfy Péter Pál áll a Rényi Intézet élén (az igazgatót az Akadémia elnöke nevezi ki), de a helyettest az igazgató választja, így én maradtam igazgatóhelyettes.

A korábbiakhoz képest hogyan változott a Rényi anyagi helyzete?

M.D.: Még 90 és 95 között is a kutatóintézetek az Akadémiától kapták azt az állami támogatást, ami a bérekre és az alapvető működéshez volt elegendő. Kb. évente kerülhetett be egy-egy fiatal kutató tudományos gyakornokként, annak idején én is így kerültem ide. 1995 és 2005 között ez megváltozott, egyre fontosabb lett, hogy más források után nézzünk, de még mindig az állami támogatás adta az éves költségvetés bevételének legnagyobb részét. Az elnyert OTKA pályázatok összegének 20%-át az Intézet rezsiköltségként kapta meg, ebből tudtuk fenntartani például a könyvtárunkat. Ez egy kevés pluszbevétel volt, miközben a támogatás csökkent, szóval éppen hogy elegendő volt a szinten tartáshoz.

A 2000-es évek elején kezdtünk pályázni az Európai Unió kutatásfejlesztési és innovációs programjai keretében. Az úgynevezett Framework Programok (FP-k, keretprogramok) hétéves ciklusokban követik egymást. Az FP5-ben és FP6-ban voltak olyan pályázati formák, amelyek az akkoriban csatlakozó országok felzárkóztatását célozták, csak számukra írták ki. Az FP5-ben elnyertük a Center of Excellence címet, rajtunk kívül a magyar intézmények közül a KOKI, a SZTAKI, a Szegedi Biológiai Kutatóközpont, a mai Wigner, korábban KFKI két külön kutatóintézete és az akkoriban még működő Collegium Budapest kapta meg ezt a kitüntetést. Ez jó lehetőséget adott a Rényi Intézetnek. Megtanultuk, hogyan kell pályázni és nyertünk is. Mi voltunk az egyik első kutatóintézet, amelyik európai projektkoordinátort alkalmazott, annak ellenére, hogy viszonylag kicsik voltunk. Ezek az évek a tanulás évei voltak, nem is az elnyert pályázati pénzek voltak a legfontosabbak, hanem az, hogy kinyílt a világ, mi is utazhattunk, de hozzánk is jöttek. Projektkoordinátorunk, Pándi Veronika, Tiziana elődje kiválóan végezte a munkáját és a gazdasági osztállyal együtt kialakította azt a rendszert, ami máig is működik nálunk.

Az FP7 keretprogram alatt 2006-2013-ben Brüsszelben már azt gondolták, hogy nincs szükség a csatlakozó országok számára célzottan kiírt pályázatokra, ennek eredményeként szépen le is maradtak ezek az országok a pályázásban. Megalakították viszont az ERC-t, az Európai Kutatási Tanácsot (European Research Council), ahova most a legtöbb pályázatunkat adjuk be. Az ERC Grantek 1,5 – 3 millió eurót adnak egy kutatónak 5 évre, erre pályázhattunk mi is. Az FP7-ben az egész kelet-európai régió katasztrofálisan lemaradt, arányukhoz képest nagyon keveset nyertek. Magyarország viszonylag jól szerepelt, a legkevésbé maradt le, a lemaradók között mi vagyunk az élmezőny.

Most megint pályázatot indítottak azoknak, akik az FP7-ben rosszul szerepeltek. Sorrendbe állították az országokat, ki mennyit nyert, és egy vonalat húztak, amivel elkülönítették a megfelelően, illetve az alulteljesítők csoportjait. Majd olyan pályázatokat írtak ki, amelyeken csak a vonal alá kerültek pályázhattak. Érdekes, hogy Magyarország ennek a listának épp az élén áll, mögöttünk olyan országok, mint Portugália, de pl. Luxemburg is (ahol valószínűleg azért nem pályáznak, mert nincs a pénzre annyira szükségük).

Az FP7-et a Horizont 2020 elnevezésű program követte. A ***Horizont***

2020 *az Európa 2020 stratégia egyik alappilléreként az Európai Unió kutatás-fejlesztési és innovációs politikáját 2014-2020 között meghatározó program, amely közel 79 milliárd eurós költségvetéssel gazdálkodik. A Horizont 2020 program nemzetközi versenyben, közvetlenül Brüsszelből elnyerhető pályázati forrásokat jelent. A pályázatok brüsszeli elbírálásánál döntő szempont a kiválóság, a magas szakmai szintű és jól menedzselt konzorcium, illetve az uniós szinten is mérhető hatás. (Forrás:* http://www.h2020.gov.hu/horizont2020-program*)*

A fenti teljes költségvetés csaknem egyharmada a Kiváló tudomány program négy specifikus területének támogatását szolgálja Ezek:

- *az Európai Kutatási Tanács (ERC) különféle szintű Grant-jei, támogatásai;*
- *a Marie Skłodowska-Curie akciók karrierfejlesztési és képzési lehetősége egyéni kutatóknak nemzetközi mobilitásuk támogatásával;*
- *a Jövőbeni és feltörekvő technológiák együttműködési programjai;*
- *valamint a Kutatási infrastruktúra programok.*

M.D.: A Rényi Intézet Horizont 2020-as pályázatait főként a Kiváló tudomány kategóriában nyújtjuk be, azon belül is az ERC Grant-ekre, mivel a hagyományos kutatás-fejlesztéssel foglakozó más akadémiai intézményekkel szemben, mint a pl. az MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont vagy a Kísérleti Orvostudományi Kutatóintézet (KOKI), nálunk csak alapkutatás és nem fejlesztés folyik. Legfeljebb a programozáshoz tudunk tanácsokat adni.

Hány Horizont 2020-as projekt fut jelenleg az Intézetben?

D.V.T.: Harangi Viktor Marie Skłodowska-Curie projektje éppen mostanában zárult le, Pyber László ERC Grant-je majd augusztus 1-én indul. Abért Miklós ERC projektje aktív most a Horizont 2020 program keretében, és márciusban elkezdődött az a Marie Skłodowska-Curie mobilitási pályázat, amit Csóka Endre nyert el. De van olyan futó projektünk, ami még az FP7 keretprogramban indult, ilyenek Szemerédi Endre és Szegedy Balázs ERC Grant-jei, míg Pintz János, Bárány Imre és Stipsicz András FP7-es ERC projektjei már lezárultak[1].

Két típusú mobilitási pályázat van, amire egyéni kutatók pályázhatnak: amivel külföldre lehet menni (korábban ezek voltak többen) és amivel haza lehet jönni (most ezek szaporodnak). Itt a pályázó mellé ki kell jelölni egy őt koordináló kutatót a befogadó intézményből.

Szorosan kapcsolódik az ERC támogatásokhoz a 2005-ben az Akadémia által meghirdetett Lendület program, amelyben Tardos Gábor, Stipsicz András, Rásonyi Miklós, Szegedy Balázs, Abért Miklós, Virág Bálint, Harcos Gergely mint kutatásvezetők pályáztak sikeresen. Ezek a támogatások is, hasonlóan az EU-sokhoz, egy-egy jól megtervezett projektre fordíthatók. Az ERC Grant-ek (az Advanced és a Consolidator is) nagy összegűek, ezekből a hat nyertes közül hárman is párban dolgoztak. Volt több eset, amikor párhuzamosan zajlott Lendületes és az ERC Grant-tel támogatott kutatás is egy adott témában, így már annyi pénz folyt be, hogy abból fel lehetett építeni egy komoly, önálló kutatócsoportot[2].

Ez nagyon jó volt, hiszen tudományos presztízsünk, hírnevünk a világban növekedett, egyre több külföldi kutató érkezett, és anyagilag is egyre jobb helyzetbe kerültünk. Minden ilyen projekten van egy 20%-os overhead, amit rezsire fordíthat az illető kutató intézménye. Durván 5 évre 1,5 millió eurós támogatással számolva, 1 évre 300 ezer euró, annak a 20%-a 60 000 euro, azaz húszmillió forint többletbevételt jelent egy elnyert pályázat az intézet számára. Az intézetben így több dolgozó bére egészben vagy részben ebből a pénzből finanszírozható.

2015-16-ra az intézet pályázati bevétele meghaladta az akadémiai támogatási összeget. Nemcsak az alaptámogatást, de minden, az Akadémiától felújításra, konferenciaszervezésre, vagy egyéb, pályázati formában elnyerhető összeget, hozzátéve az alaptámogatást is. Ez egyrészt örvendetes, másrészt veszélyes, mivel, ha egyszer majd nem tudunk ilyen sikeresen pályázni, akkor le kell csökkenteni a létszámot, lejjebb kell helyezni a lécet.

Hányan dolgoznak összesen állandó, vagy meghatározott időre szóló munkaszerződéssel ma a Rényi Intézetben?

M.D.: Ezzel a kérdéssel megfogott, ez szinte naponta változik. A mostani létszám 130-140 körüli, amiből 25 fő az adminisztráció, a többi, kb. 110 fő mind kutató – nálunk nincs is más –, abból is átlag 10-15 fiatal, frissen végzett kutató, vagy még a PhD előtt, vagy közvetlenül azután, akiknek a munkabérét az Akadémia külön pályázat keretében finanszírozza 3 éven át. Ezek mellett vannak a „Lendületesek”, az ERC támogatását elnyertek, az európai mobilitási pályázattal határozott idejű munkaszerződéssel dolgozó kutatók és természetesen vannak a határozatlan idejű, állandó dolgozók, a 110-ből nagyjából fele-fele arányban.

Tiziana mióta dolgozik itt?

D.V.T.: 2008 óta, a lezáródó FP6, majd az FP7-es, most pedig a Horizont 2020 pályázataival foglalkozom.

Ez bizonyára rengeteg munkával jár, segíteni a pályázatok megírásában, megvalósításában, elszámolásában...ráadásul sokkal több a beadott pályázat, mint ami végül nyer is.

M. D.: A beadott pályázatoknak kb. a 20-30%-a nyer.

Bölcsészként hogyan került a matematikusok közé?

D.V.T.: Angol szakos voltam, franciául is jól beszélek az olaszon és magyaron kívül. Két anyanyelvű vagyok, mindig is a nyelvek érdekeltek, fordítás, tolmácsolás. Az Olasz Kereskedelmi Kamarában, ahol korábban dolgoztam, konferenciaszervezéssel és minden egyébbel foglalkoztam. Amikor Magyarország az uniós előcsatlakozás fázisában volt, egyre többször jöttek a Kamarához európai uniós támogatások iránt érdeklődő olasz cégek, ezért ott létrehoztunk egy pályázati irodát. Pályáztunk, nyertünk is a Strukturális Alapokból, és tanácsadással is foglalkoztunk. Több kiadványt készítettünk az új magyar operatív programok megismertetésére. Innen mentem el a brüsszeli olasz kereskedelmi kamara szervezésében az egyik egyetemmel karöltve Brüsszelbe egy több hónapos mesterképzésre pályázatíró és EU-s adminisztrátor szakra. Sokan közülünk olyan intézményekbe mentek dolgozni, amelyekkel én most kapcsolatot tartok a pályázatok beadása, elszámolása miatt. Miután hazajöttem, egy olasz tanácsadó céghez mentem operatív programok keretében pályázatokat írni, innen tulajdonképpen egy véletlen hozta, hogy megláttam a Rényi Intézet álláshirdetését.

M.D.: Mi akkor a közben eltávozott kitűnő kolleganőnk helyére már régóta kerestünk – de nem találtunk – olyan munkatársat, aki hasonló színvonalon tudta volna folytatni ezt a számunkra kiemelkedően fontos munkát. Nagyon sokfajta képességre van itt ugyanis szükség: például jól kell tudni kezelni az Excel táblázatokat, csakúgy, mint az embereket. Kapcsolatot kell tartani az EU-val, kétféle elszámolást vezetni, egyiket az EU-s, másikat a magyar szabályozók szerint. Adott esetben fel kell hívni telefonon a brüsszeli ügyintézőt, ebből a szempontból nagyon jól jön, ha valaki több nyelvet is beszél. Meg kell tanulni a brüsszeli nagyon bürokratikus rendszert.

D.V.T.: Szükséges még a jó problémamegoldó képesség. Ahhoz, hogy egy beadott pályázatunk nyerjen, nagyon sok mindennek össze kell jönnie: a pályázat szakmai (és kevésbé szakmai) szövegét is nagyon színvonalasan kell megírni, a témája érdekes, az esetleg ehhez a szűkebb területhez kevésbé hozzáértő értékelő számára is érthető és az érdeklődést kiváltó kell legyen, és akkor még nem beszéltünk a legalább 50%-os szerencsefaktorról. A bírálati folyamat során a pályázat három kategóriába kerülhet, bizonyos előre kiadott szempontok szerinti értékelés részpontszámainak összesítése után, ha az „A" kategóriába kerül, akkor támogatható. Ha a pályázat nyert, akkor kezdődik a projekt koordinálása, majd az elszámolás szakmai és pénzügyi része.

Évente írnak ki pályázatokat?

Igen, az ERC pályázatokat évente írják ki, de vannak olyan pályázatok, ahol két- vagy három évente lehet pályázni.

A sikeres pályázatok hozzájárulnak-e ahhoz, hogy a külföldi hasonló intézmények között a Rényi egyre jobb helyre került?

M.D: A Rényi Intézetnek korábban is elég jó híre volt a világban. Az, hogy ismét elnyertünk két ERC Grant-et, azt jelenti, hogy Magyarországon egyetlen intézmény nyert el nálunk több támogatást, a CEU.

Egy kutatóra jutó összeg tekintetében Európában kiemelkedően jók vagyunk, valószínűleg mi vagyunk Európában az egyik legsikeresebb matematikai intézet.

---

[1] http://mta.hu/mta_erc/az-erc-palyazatok-eddigi-magyar-eredmenyei-106281

[2] http://mta.hu/lendulet/az-mta-lendulet-kutatocsoport-halozata-105402

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Erintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A szerk. 2017. JÚNIUS, INTERJÚ – PORTRÉ

Kutatók és kutatások a Rényi Intézetben – Szegedy Balázs, Stipsicz András és Harangi Viktor

Az Európai Kutatási Tanács (European Research Council; ERC) közel egy évtizede jelentős részt vállal a hazai tudományos kutatások elősegítésében. Az Európai Unió legnagyobb felfedező kutatásokat támogató pályázati rendszere több tekintetben is egyedi az uniós kutatásfejlesztési programokon belül. Az ERC nem határozza meg előre a prioritásokat és kutatási célokat. A kutatók bármely tudományterületről benyújthatnak pályázatot.

A támogatások odaítélésének egyedüli feltétele a **tudományos kiválóság**.

Olyan vezető kutatók pályázhatnak a kutatók életkorára, nemére és származási országára vonatkozó bármely megkötés nélkül, akik Európában tervezik a projektek végrehajtását.

Az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetéből is több sikeres pályázat indult már az ERC úgynevezett *Consolidator Grant* (fontos publikációkkal rendelkező, önálló, független, ígéretes eredményeket felmutató jelentkezők részére) és *Advanced Grant* (az elmúlt tíz évben jelentős kutatási eredményeket elért aktív vezető kutatók részére) támogatási lehetőségeinek keretében (lásd http://www.h2020.gov.hu/horizont2020-program).

Szegedy Balázs Limits of discrete structures StrucLim című pályázatát az ERC Consolidator Grant-ra adta be, projektje az Európai Unió 2014 és 2020 között megvalósuló **Horizont 2020** kutatásfejlesztési programjának indulási évében kezdődött és 2019-ig tart.

Mi ennek a kutatásnak a témája és milyen más kutatási területekhez kapcsolódik?

Kutatásom lényege, hogy nagyon nagy rendszerek viselkedésében olyan vezérelveket találjunk, amelyek megkönnyítik a rendszer viselkedésének megértését. Ennek közvetlen haszna lehet egy olyan korban, amikor óriási információmennyiség áll rendelkezésünkre, amelyből a lényeget ki kell szűrni. A téma egyik kiemelten fontos iránya a nagy hálózatok tanulmányozása, mint például a szociális hálózatok vagy az emberi agy.
A témának rengeteg kapcsolódási pontja van más kutatási területekhez. Kiemelném a statisztikus fizikát, az információelméletet, a gráfelméletet, a dinamikus rendszerek elméletét. A kutatási programom egyik eleme az úgynevezett magasabbrendű Fourier-analízis, ami bonyolult rezgésekkel foglalkozik. Ezeken a területeken közvetlen alkalmazásaink is vannak idősorok elemzésében.

Kikkel dolgozik a kutatócsoportjában?

A csoportomban magyar és külföldi kutatók egyaránt részt vesznek: Pablo Candela (Sapnyolország), Matthias Hamann (Németorszag), Backhausz Ágnes, Kunszenti-Kovács Dávid, Podoski Károly és még sokan mások.

Hogyan kell a kutatás eredményeivel elszámolni a pályázat lejártakor?

A kutatás eredményével való elszámolás lényege, hogy a pályázatban kitűzött célok közül mennyi lett teljesítve. Ez elég jól mérhető. A produktum nagyrészben tudományos cikkekben van összefoglalva, de megjegyzem, hogy számitógépes algoritmusokat is fejlesztünk.

Stipsicz András még a Horizont 2020-at megelőző időszak 7. Keretprogramjában nyerte el 2012-ben az ERC Advanced Grantját.
(http://www.renyi.hu/~ldtbud/OVERVIEW/).

Milyen témájú pályázattal nyert és mióta dolgozik ezen a témán, kikkel közösen?

A pályázatomat *Alacsony dimenziós topológia* címmel adtam be; én evvel a témával foglalkozom a doktori iskola megkezdése óta. A témakörben elsősorban négydimenziós felületek topológiai tulajdonságait vizsgáljuk, emellett további területünk kontakt struktúrák létezése és egyértelműsége háromdimenziós sokaságokon. Mindkét kérdéskör szorosan kapcsolódik a Heegaard Floer homológiák elméletéhez, amiben szintén érdekes eredményeket értünk el.

Több társszerzővel dolgoztam az évek során, kiemelném Paolo Lisca olasz matematikust (vele kontakt struktúrák vizsgálatára fejlesztettünk ki egy új módszert). Ozsváth Péter és Szabó Zoltán azon cikkeimben volt társszerzőm, amikor (az egyébként általuk felfedezett) Heegaard Floer elméletben sikerült újabb konstrukciókat találni. Diarmuid Crowley és Jonathan Bowden pedig magasabb dimenziós kontakt topológiai kérdések vizsgálatában volt társam.

A kutatási projekt az Akadémia „Lendület” programjaként indult 2010 júniusában, és az ERC Advanced Grant elnyerésével folytatódott. Ezt a pályázatot még 2011-ben adtam be, a támogatás 2012-vel kezdődött, és épp a közelmúltban, 2017 áprilisában járt le.

Az ERC támogatása lehetőséget adott arra, hogy több neves külföldi kutatót vendégül lássunk, létre tudtam hozni egy posztdoktori programot, amelyben minden évben egy vagy két frissen doktorált kutatót tudtunk a Rényi Intézetbe szerződtetni, és több fiatal magyar tudósnak is meg tudtuk adni a lehetőséget, hogy hosszabb lélegzetű munkáikat egy-két év alatt be tudják fejezni. Nagyon aktív csoport jött létre az évek során.

Miért tartja fontosnak ezt a kutatást?

A három- es négydimenziós tér megismerése alapvető a matematika és az elméleti fizika számára − kutatásaink ezekben a kérdésekben nyújtanak előrelépést. Sokat foglalkoztunk különböző típusú csomók elméletével, ezek talán más közeli tudományterületeken is (esetleg csak később) felhasználható eredményeket adnak.

Milyen módon kapcsolódik a világ más részein folyó egyéb matematikai kutatásokhoz, van-e közvetlen vagy közvetett alkalmazása?

A fent leírt kutatások alapkutatás-jellegűek, közvetlen és gyors hasznosításuk nem igazán várható el. Topológián belül természetesen az eredményeket más kutatók alkalmazzák. Különösen igaz ez egyik legfrissebb cikkünkre, amelyben csomóknak egy függvény-jellegű invariánsát vezettük be − ez a módszer meglepően sok és szétágazó alkalmazásra talált más kutatók munkásságában.

Hogyan kell a kutatás eredményeivel elszámolni a pályázat lejártakor? Egy matematikai kutatáshoz vajon mire használják fel a kapott támogatást?

Épp a végső beszámoló elkészítésének közepén járunk. A matematikai teljesítmény legjobb elfogadott mérése a kutatás során létrehozott publikációk minősége és száma − a minőséget általában a cikk megjelenésének helyével szokták meghatározni. Az én pályázati időszakom során (mivel elég sok résztvevőnk volt) elég sok, és nemzetközileg magasan jegyzett folyóiratban megjelent cikk született.

A támogatás döntő része a vendégkutatók bérét fedezte, és jelentős forrást szenteltünk mind a csoport tagjainak konferencia-részvételére, mind helyben szervezett konferenciák anyagi hátterének biztosítására. Az elmúlt fél évtized szinte minden évében szerveztünk valamilyen tudományos találkozót, konferenciát, nyári iskolát, amelyre a témakörök vezető kutatói mellett rengeteg fiatal, friss PhD diplomával rendelkező pályakezdőt hívtunk meg, így sokuknak Budapest egyet jelent a tudományos életbe való belépés helyszínével. Reméljük, hogy ezeket a hagyományokat a későbbiekben is fenn fogjuk tudni tartani.

Harangi Viktor az Európai Unió 2014 és 2020 között megvalósuló kutatásfejlesztési programjának, a **Horizont 2020** Kiváló Tudomány – Marie-Skłodowska Curie programjának köszönhetően foglalkozik elméleti matematikával a Rényi Intézetben.

Milyen támogatások a Marie-Skłodowska Curie akciók?

2014 szeptemberében pályáztam a Marie Sklodowska-Curie Actions, Individual Fellowship Grant-re. Ez egy kutatói mobilitást ösztönző egyéni pályázat, amelyen bármilyen nemzetiségű kezdő és tapasztalt kutató egyaránt indulhat. Egyik feltétele, hogy a megelőző három évből legalább kettőt a célországon kívül kellett kutatni. Tehát magyar kutatók számára elsősorban külföldre (EU-n belül) "költözésre" használható, illetve egy pár éves külföldi kutatómunka után a "hazatéréshez" (akár EU-n kívülről is). Esetemben ez a torontói egyetemen töltött kétéves kanadai posztdoktori pozíció után Magyarországra, mint célországba költözést jelentett. A hivatalos pályázó a befogadó Rényi Intézet volt, koordinátorom Abért Miklós.

2015 februárjában értesítettek, hogy a pályázatom a nyertesek közé került, és 2015. május 1.-től 2017 májusáig tartott. A pályázatom címe: "Spectral theory of graph limits", magyarul: "Gráflimeszek spektrálelmélete". A Rényi Intézetben van egy viszonylag nagy gráflimeszes kutatócsoport, amely elsősorban Abért Miklós és Szegedy Balázs vezetésével jött létre, de most már ennek a csoportnak a tagja Virág Bálint is. Mindhárman kicsit más irányból közelítik meg ezt a kérdéskört. Egyébként többek között ezért is annyira érdekes ez a kutatási téma, ami számos matematikai terület találkozásánál van (csoportelmélet, valószínűségszámítás, dinamikai rendszerek, stb). Én személy szerint legszorosabban Virág Bálinttal, Gerencsér Balázzsal és Backhausz Ágnessel dolgozom együtt. Rengeteg lehetőség van az együttműködésre egy ilyen viszonylag nagy létszámú és pezsgő csapatban,

ráadásul majdnem minden héten érkeznek vendégkutatók is látogatóba a csoporthoz.

Miről szól a gráflimeszek spektrálelmélete?

A gráfok konvergenciája, gráflimeszek viszonylag friss téma, az elmúlt egy-két évtizedben fejlődött ki.

A matematikában egy gráf alatt lényegeben egy hálózatot értünk, amiben vannak csúcsok és bizonyos csúcspárok kapcsolatban állnak egymással, élekkel vannak összekötve. A gráflimeszek vizsgálatának elsődleges külső motivációja az az egyre növekvő igény, hogy képesek legyünk matematikailag kezelni az élet és a tudomány számos területén felbukkanó óriási hálózatokat (amelyeknek mondjuk több milliárd vagy akár még több csúcsa van), megértsük a viselkedésüket és tulajdonságaikat, illetve kidolgozzunk olyan algoritmusokat, amelyek nagyon magas csúcsszám esetén is gyors futási idővel bírnak. A klasszikus gráfelméleti módszerek gyakran nem működnek jól ezeknél az óriási hálózatoknál, új eszközökre van szükség. Az egyik megközelítés az, hogy egy nagy véges gráf helyett valamilyen limesz-objektumot vizsgáljunk, és így nyerjünk választ eredeti kérdéseinkre a véges gráfokról.

Hogyan képzeljük el ezeket a limesz-objektumokat?

Adott egy gráfokból álló növekvő sorozat, aminek egyre több és több csúcsa van. Egy ilyen sorozatot konvergensnek nevezünk, ha ezek a gráfok egyre inkább hasonlítanak egymásra bizonyos értelemben, például „távolról nézve őket” vagy lokális mintavételezés esetén. Többféle gráfkonvergencia-fogalom van attól függően, hogy mennyire sok él, kapcsolat van a hálózatban, a két legkidolgozottabb elmélet a sűrű gráflimesz és a ritka vagy korlátos fokú gráflimesz. Az egyik esetben a csúcsszámmal arányos az élek száma, a másik esetben pedig a csúcsszám négyzetével arányos. Egy rendkívül izgalmas és nagyrészt nyitott kérdés, hogy a kettő közötti élszám esetén milyen elméleteket lehet kidolgozni.

A két különböző gráflimesz-fogalomban lehet arról beszélni, mi egy konvergens gráfsorozat limesze. Ezt nem mindig egyszerű megfogalmazni, hogy mi ez a limesz-objektum, hogy mihez tartanak ezek a véges gráfok; nem feltétlenül egy végtelen gráfhoz. Van ilyen is, de sok esetben nem ennyire könnyű a helyzet. A sűrű gráflimeszek esetében ezek a *graphonok*, amik tulajdonképpen a síkon az egységnégyzetből a [0, 1]-be menő leképezések, ilyen ún. folytonos objektumokkal lehet leírni a konvergens gráfsorozatok limeszeit. A graphonok elméletének kidolgozása elsősorban Lovász László és Szegedy Balázs nevéhez köthető.

A ritka gráflimesz esetén pedig a *graphingok* vannak, egyfajta valószínűségi eloszlások végtelen gráfokon. Itt a limesz, ha úgy tetszik, egy véletlen végtelen gráf. Esetükben bejön egy nagyon szoros kapcsolat a valószínűségszámítással. A limesz-objektumok egy részének köze van a dinamikai rendszerekhez, ezeket ergodelmélet név alatt már nagyon sokat vizsgálták matematikai tudományágakban.

Kapcsolódik-e ez a kutatás a Barabási Albert-László nevével fémjelzett nagy hálózatok elméletéhez?

Nyilván a motiváció ugyanaz: a nagy hálózatok viselkedésének jobb megértése. Én csak nagyon felületesen ismerem az ő munkájukat. Azt hiszem, rengeteg adatot gyűjtenek valós hálózatokról és mélyrehatóan elemzik azokat. Náluk a fő cél olyan véletlengráf-modellek felépítése, amelyek a lehető legjobban hasonlítanak a valósághoz. Ennek számos közvetlen alkalmazása lehet. Nálunk viszont alapkutatás folyik, mi inkább a matematikai elmélet szempontjából fontos kérdéseket próbáljuk megtalálni és azokra válaszolni. Ezeket a kérdéseket a világ számos pontján többszázan kutatják, de a Rényi Intézetben kialakult nagyjából 15 fős csapat talán a legnagyobb ilyen csoport.

Tudjuk, hogy matematikában talán még inkább, mint más tudományokban, évtizedek elteltével, vagy csak többszáz év múlva derül ki, hogy egy elmélet hogyan hasznosul a gyakorlatban. Legtöbb esetben maga a matematikus sem tudja, mire lesz jó az eredménye.

A mi témánk óriási hálózatokhoz való kapcsolata miatt majdnem biztos vagyok abban, hogy ezeknek a dolgoknak a mély megértése hasznos lesz az alkalmazások szemszögéből is.

Megjegyzések:

Stipsicz András témájához kapcsolódó cikke az Érintő 2016. szeptemberi számában jelent meg.

A Rényi Intézet honlapjának GRANTS INFO menüpontja tájékoztat az Európai Unió 2014 és 2020 között megvalósuló kutatásfejlesztési programjáról, a **Horizont 2020**-ról és annak a matematikai kutatóintézetet leginkább érintő Kiváló Tudomány (Excellent Science) pilléréről, az Európai Kutatási Tanács, az ERC (European Research Council) Starting, Advanced és Consolidator Grants pályázati kiírásairól is.

Az European projects menüpont teljes körű tájékoztatást ad a kutatóintézetben lezajlott és most folyó EU-s pályázati támogatásokkal megvalósult kutatások pályázatonkénti részletes adatairól.

Az ERC pályázatok magyar eredményei az MTA honlapján:

http://mta.hu/mta_erc/az-erc-palyazatok-eddigi-magyar-eredmenyei-106281

Ennek alapján a Rényi Intézetből sikerrel pályázók:

Pintz János – ERC Advanced Grant 2008

Bárány Imre – ERC Advanced Grant 2010

Stipsicz András – ERC Advanced Grant 2011

Szemerédi Endre – ERC Advanced Grant 2012

Szegedy Balázs – ERC Consolidator Grant 2013

Abért Miklós – ERC Consolidator Grant 2014

Pyber László – ERC Advanced Grant 2016

A 2009 óta alakult Lendület-kutatócsoportok a Rényi Intézetben (forrás: http://mta.hu/lendulet/az-mta-lendulet-kutatocsoport-halozata-105402)*:*

2009–2012	Tardos Gábor	MTA RAMKI Lendület Kriptográfia Kutatócsoport
2010–2015	Stipsicz András	MTA Rényi Intézet Lendület Alacsony Dimenziós Topológia Kutatócsoport
2012–2017	Abért Miklós	MTA Rényi Lendület Csoportok és Gráfok Kutatócsoport
2013–2018	Szegedy Balázs	MTA Rényi Intézet Lendület Struktúrák Limeszei Kutatócsoport
2015–2020	Rásonyi Miklós	MTA Rényi Lendület Pénzügyi Matematika Kutatócsoport
2016-2021	Virág Bálint	MTA Rényi Lendület Véletlen Spektrum Kutatócsoport
2017-2022	Harcos Gergely	MTA Rényi Lendület Automorf Kutatócsoport

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

SOKSZOR TALÁLKOZUNK OLYAN FELADATTAL, ÖTLETTEL, AMIT SZÍVESEN ELTESZÜNK KÉSŐBBI HASZNÁLATRA. A **TANÓRA – SZAKKÖR** ROVAT SZERETNE HOZZÁJÁRULNI A MATEMATIKATANÁROK ESZKÖZTÁRÁNAK GAZDAGÍTÁSÁHOZ, FÓRUMOT KÍVÁN ADNI A GONDOK, NEHÉZSÉGEK MEGTÁRGYALÁSÁRA IS.
(ROVATSZERKESZTŐ: *HORVÁTH ESZTER*.)

Molnár Zoltán, Nagy Ilona, Lángné Lázi Márta
2017. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

BME Alfa: interaktív gyakorlás és versenyzés

Eredetileg a BME frissen felvett hallgatóinak készült az ***Alfa*** *interaktív gyakorlófelülete*, hogy a nulladik zárthelyire felkészülhessenek, és ne kudarcélménnyel kezdődjön az egyetem. 2015 óta *Lángné Lázi Márta* szervezésében, *Nagy Ilona* és *Molnár Zoltán* feladatsoraival nemcsak gyakorolhatnak, de versenyezhetnek is a középiskolások a *Műegyetemi alfa matematika pontgyűjtő versenyen.* Véleményük szerint ez segítheti a középiskolai pedagógusok munkáját is.

Vizvári Béla
2017. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Számolni tudni kell?

Vizvári Béla egy nemzetközi egyetemen szerzett személyes tapasztalatairól számol be sok számítást igénylő tárgyak oktatásáról mérnök hallgatók számára. Kísérletet tesz a gyakorlatban hasznosítható didaktikai elvek megfogalmazására. Valószínűleg számos észrevétele a matematika oktatásában is hasznosítható.

Baranyai Tünde Klára, Stankov Gordana, Jakab Enikő, Lilla Korenova, Ivan Marinović, Wintsche Gergely
2017. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Érettségik a határon túl

A vacsoránál négy különböző ország képviselője ült az asztalnál. Egy erdélyi tanárnő, egy kárpátaljai PhD hallgató, egy felvidéki tanárnő és jómagam…Beszéd közben felmerült, hogy mennyiben hasonló, illetve mennyiben más egy matematika érettségi Szlovákiában, Ukrajnában, illetve Romániában. Megkértem hát egy-egy embert öt környező országból, hogy röviden foglalják össze, mik a lényeges elemei az ő országukban a matematika érettségiknek. Mindenki csatolt legalább egy feladatsort is! A határon túli magyar nyelvű matematika érettségikről *Baranyai Tünde Klára* (Románia), *Stankov Gordana* (Szerbia), *Jakab Enikő* (Ukrajna), *Lilla*

Korenova (Szlovákia), *Ivan Marinović* (Horvátország) és *Wintsche Gergely* (Magyarország) írt.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Molnár Zoltán, Nagy Ilona, Lángné Lázi Márta 2017. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

BME Alfa: interaktív gyakorlás és versenyzés

A felvételi vizsgák megszűnésével csökkent a továbbtanuláshoz szükséges célirányos gyakorlás motivációja. Az érettségi komoly, hosszú távú munkát igénylő vizsga, de még a sikeres matematika érettségi sem jelent garanciát az eredményes továbbtanuláshoz a műszaki, természettudományos, vagy gazdaságtudományi képzésben. Aki az említett területeken tanul tovább, annak számára vannak kiemelten fontos témakörök (pl. a függvények, egyenletmegoldás, stb). Az összetettebb feladatok megoldásához, az elvont fogalmak megértésénél a kreativitás, a saját ötlet, a szövegértés nagyobb szerepet kap, miközben a nagyon biztos alapok is elengedhetetlenek a rutinfeladatokhoz.

2007-ben vetődött fel az a gondolat, hogy részben figyelemfelkeltés, részben oktatásszervezési szempontok miatt szinte a belépés pillanatában írjanak a frissen

felvett hallgatók egy felmérőt, az ún. nulladik zárthelyit azokból az ismeretekből, feladattípusokból, amelyekre mindenképpen építeni szeretnénk a felsőfokú tanulmányok során akár a matematikai és fizikai, akár a szakmai tárgyakban. Ebben a mozgalomban Dr. Pipek János, akkor még a BME TTK oktatási dékánhelyetteseként aktív szerepet vállalt. Így az egyetemünkön elsőként, és azóta is lényegében minden elsőéves hallgató megírja ezt a tesztet matematikából. Vannak olyan karok, ahol fizikából is. A teszteredmények az évek során több ellentmondásra is rávilágítottak. A sokéves tapasztalat az, hogy a magas felvételi pontszám, a sikeres matematika érettségi, az eredményes középiskolai szereplés ellenére meglepően alacsony a nulladik zárthelyi dolgozatokon elért eredmény, óriási különbségek vannak a hallgatók felkészültségében. Ha a hiányosságokat nem sikerül hamar pótolni, akkor az a tanulmányok megszakításához, a pálya elhagyásához vezethet. A kelleténél gyengébb eredményeknek sok oka lehet, a cikknek nem célja ezt kielemezni.

Az látszott már az első megírt teszt kiértékelése után, hogy a felvételt nyert nagy létszámú hallgatónak valamilyen módon segíteni kell, ösztönözni kell őket arra, hogy célirányosan foglalkozzanak a matematikával, szembesüljenek a hiányosságaikkal és minél előbb zárkózzanak fel. Ezeknek a célkitűzéseknek az elérése érdekében született meg, Dr. Pipek János irányításával 2012-re a *BME Alfa interaktív gyakorlófelület*. A honlap fejlesztése, működtetése a pályázati forrásokon túl a BME karainak támogatásával valósul meg.

A fejlesztéseket Rácz Éva (fizikus) és Ruppert László (matematikus) végezték és azóta is ők tartják karban, fejlesztik az oldalt. A honlap megszületésével egy időben sok száz feladat – legtöbb esetben megoldásokkal együtt – került a rendszerbe. Így a hallgatók, de akár a középiskolások számára is lehetővé vált véletlenszerűen összeállított tematikus tesztek, vagy nulladikzárthelyi-típusú feladatsorok generálása, megoldása. A gyakorlófelület elérése ingyenes, de regisztrációhoz kötött. Használata egyszerű, az eredmények azonnal rendelkezésére állnak a felhasználónak.

Az oldal látogatottsága egész évben, de a szeptemberi tanévkezdést megelőzően kiemelkedően nagy lett. Kezdetben a célunk az volt, hogy a példatárat elegendően sok, változatos példával, érthető megoldásokkal töltsük fel, és a feladatok nagy részének lefordításával a külföldi, angol nyelven tanuló diákok számára is tegyük hozzáférhetővé.

Később, 2015-ben ezen túlléptünk. Amellett, hogy a felület jelentősen megújult, elkészült egy témakörökre lebontott segédanyag, amely jelentős mértékben megnövelte a felület használhatóságát.

2015 óta versenyeket szervezünk középiskolások számára a gyakorlófelületen. A verseny célja az érettségire való felkészítés segítése mellett az, hogy a diákok összevethessék tudásukat a saját korosztályukon belül. Ez a megmérettetés nem a legnagyobb versenyeken edződött, legsikeresebb, legkiemelkedőbb diákokat célozza meg, hanem azokat „tömegeket” akik esetleg nem akarnak túl nagy energiát belefektetni a versenyzésbe, de szívesen foglalkoznak a matematikával, szívesen kipróbálják magukat, ilyen kényelmes körülmények között.

A *Műegyetemi alfa matematika pontgyűjtő versenyen* több kategóriában indulhatnak a diákok, választhatnak a korcsoportok és nehézségi szintek között. Minden fordulóban két hét áll rendelkezésre a feladatsorok megoldására. Az igazi kihívást nem önmagukban a feladatok, azok nehézsége jelenti, hanem a munkára rendelkezésre álló időkeret. Tehát a feladatok sikeres megoldása koncentrált, tempós munkát igényel a versenyzőktől. A versenyszabályok, a kategóriák kis mértékben ugyan, de minden évben változnak, az elégedettségi kérdőívekre kapott válaszok, visszajelzések figyelembevételével.

2017-ben, első alkalommal döntőt is szerveztünk (az NTP-TV-16 pályázat támogatásával). Az első 7 online fordulóban, az egyes kategóriákban legtöbb pontot gyűjtött versenyzők – összesen 27 diák – kaptak meghívást a döntőre. A mi versenyünk nagy előnye a kockázatmentesség, az anonimitás, továbbá az, hogy bárki bármikor bekapcsolódhat. Éppen ezért tartottunk attól, hogy a döntő iránti érdeklődés nem lesz elég nagy, nem akarnak, vagy nem tudnak személyesen megjelenni a diákok. Szerencsére tévedtünk! Az ország sok településéről, messziről (pl. Kisvárda), sőt a határon túlról is (pl. Zenta) érkeztek versenyzők. A döntő szintén a gyakorlófelületen, online formában zajlott, a Matematika Intézet számítógéptermében. Ezúttal kategóriánként 10–10 feladattal kellett 90 perc alatt megbirkózni. A döntő példáit érdekesnek, nem szokványosnak tartották a diákok. A feladatsorok összeállítását – az első 7 fordulóhoz hasonlóan – Nagy Ilona és Molnár Zoltán végezte.

A döntőben minden versenyző kapott az elismerő oklevél mellett díjat, ajándékot is. Az ajándékok egy részét – a kedvezményes belépőket – a Csodák Palotája ajánlotta fel.

A visszajelzések szerint a versenyzők pályaválasztási tervei nagyon különbözőek. Nemcsak a műszaki, a természettudományos, vagy a közgazdaságtudományi területen, hanem vannak, akik az orvosi pályán, vagy a humán tudományok területén képzelik el a jövőjüket. A beszélgetések, a visszajelzések alapján a diákok, tanárok kedvelik ezt a versenyt, jó ötletnek tartják ezt a lehetőséget.

Az elmúlt három év feladatai részletes megoldásokkal megtalálhatók a honlapon. Véleményünk szerint ez segíti, segítheti a középiskolai pedagógusok munkáját is.

Összességében sikeresnek érezzük a versenyt, folytatni szeretnénk, az eddigi eredmények azt igazolják, hogy van rá igény.

Adatok az oldal látogatottságára:

Év	**Új regisztrációk**	**Összes tesztkitöltés**	**Matematika tesztkitöltés**	**Fizika tesztkitöltés**	***Verseny tesztkitöltés***
2012	3 117	17 528	14 465	3 063	
2013	2 534	19 023	13 620	5 403	
2014	2 090	14 851	11 176	3 675	
2015	1 811	11 622	8 087	2 897	***638***
2016	2 716	18 958	13 601	4 061	***1 296***
2017 (4 hónap)		4 796			***1 602***

Molnár Zoltán, Nagy Ilona, Lángné Lázi Márta

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Vizvári Béla 2017. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Számolni tudni kell?

1990 előtt Magyarországon elitképzés folyt az egyetemeken, ahova csak az érettségizők 8 százalékát vették fel. 1990 után egyre többen kerültek be a felsőoktatásba. Ezzel minőségileg megváltozott az egyetemi hallgatóság befogadóképessége. Rontotta a helyzetet, hogy a műszaki és természettudományok presztízse leértékelődött. A jó hallgatók egy jelentős része jogot, közgazdaságtant vagy bölcsészeti tárgyat kívánt tanulni. Mindezt azonban nem követte a tanítás módszereinek változása. 1998-ra már világos volt, hogy súlyos problémák vannak [V]. Az egyetemi oktatás didaktikai elemzése és az oktatók ilyen irányú továbbképzése szervezett formában azóta sem merült fel.

2016 őszén belső vita robbant ki a kérdésről a BME Matematika Intézetében. Bár konkrét tanulság nem kristályosodott ki, világossá vált, hogy a téma el van hanyagolva. Vélelmezhető, hogy más, hazai műszaki egyetemeken a helyzet hasonló.

Az előzmények sorába tartozik, hogy a többszintű képzésre való áttéréskor az ELTE két lényeges újítást vezetett be 2005 táján. Az egyik, hogy minden matematika szakos hallgatónak tanulmányai megkezdése előtt le kell vizsgáznia a középiskolai anyagból, s ha eredménye nem megfelelő, akkor egy kredit nélküli tárgyat is el kell végeznie, ami pótolni hivatott a hiányokat. Ebben az ELTE némileg az amerikai Rutgers Egyetem gyakorlatát követi, ahol *minden* hallgatónak le kell vizsgáznia angol nyelvből és matematikából. A másik újítás hogy az egyes tárgyakat több szinten hirdetik meg, s a hallgató a saját befogadási szintje szerinti változat óráit látogathatja.

Bizonyos elemeket, különösen az ellenőrzésre és annak tanítására vonatkozóakat, felhasználok egykori középiskolás tanárom, Bánhegyi László módszereiből, leírva, hogy azokat hogyan próbáltam átültetni a gyakorlatba az oktatás során.

Az alábbiakban egy nem magyarországi nemzetközi egyetem mérnöki karán szerzett tapasztalatokról lesz szó. Az egyetemről előzetesen annyit érdemes megemlíteni, hogy az oktatást amerikai mintára tervezték és szervezték meg. A hallgatóság összetétele minden szempontból rendkívül vegyes. Nepáltól Marokkóig és Dániától Dél-Afrikáig vannak hallgatók. Szorosabban véve az ipari mérnök (*industrial engineer*) BSc hallgatókról lesz szó. Az ipari mérnök kifejezés szokatlan a magyar nyelvben annak ellenére, hogy használják. A tartalmát tekintve talán kifejezőbb lenne a „szervező mérnök" megnevezés. Az ipari mérnöki szakma igen nagy átfedést mutat az operációkutatással, tekinthető az utóbbi ipari környezetben való alkalmazásának, beleértve ennek mind a műszaki, mind a gazdasági oldalát. A karon a szakok ABET (*Accreditation Board for Engineering and Technology*) akkreditációval rendelkeznek. Ennek nagy előnye, hogy aki ABET akkreditációval rendelkező programban végzett, az könnyen folytathatja tanulmányait magasabb szinten az Egyesült Államokban.

A hallgatóság vegyes összetétele a diákok egyéni színvonalában is megmutatkozik. Vannak kiemelkedő képességűek, és olyanok is, akik igen lassan tudnak csak haladni. Egy tantárgy egy csoportján belül mindkettő előfordul, ami külön nehézzé teszi a tanítást, hiszen az okosat is szórakoztatni kell, és a szerény képességűnek is el kell magyarázni az anyagot. A csoportok korlátozott létszámúak, 50-nél több hallgató nincs egy csoportban. Ha ennél több hallgató vesz fel egy tárgyat, új csoportot nyitnak, illetve már eleve többet hirdetnek meg. Azonban az átlagos létszám jóval 50 alatt van. Minden tárgyhoz tartozik gyakorlat (*tutorial*) vagy számítógépes laboratórium, esetleg mindkettő. Ezeket mester és doktori szintű hallgatók tartják, de nem tilos magának az oktatónak a kezébe vennie a dolgokat. A tárgyakat a Magyarországon is használatos tantervi háló szerint lehet felvenni.

A tanítás nyelve az angol. Az esetek többségében amerikai tankönyveket használnak. Az amerikai piacon nagy a verseny. Így csak nagyon jól megírt tankönyvek jelenhetnek meg. Van azonban az amerikai tankönyveknek egy témánk szempontjából közös hiányossága. Bár az elmélet tárgyalása során bemutatnak kidolgozott példákat, de témánként kifejezetten kevés a megoldandó feladat, és nincsenek közöttük olyanok, amelyeknél a megoldás menetét is közölnék a könyv végén. Több tárgyhoz tartozik projekt vagy prezentáció. Van félévközi írásbeli vizsga, ismert a röpdolgozat és természetesen a félév végén van még egy további írásbeli vizsga. Szóbeli vizsga nincs. Egy vizsgaidőszak három hét. A vizsgák időpontját a rektori hivatal határozza meg, abba sem a tárgy előadójának, sem a hallgatóknak nincs beleszólása.

Sokszor esünk abba a hibába, hogy valamennyi tanárt, például az összes matematikatanárt, egy kalap alá veszünk. Egyetlen sorrendet állítunk fel közöttük, mintha egyetlen egy szerepük lenne csak. Pedig a tanárok nagyon sok különböző környezetben működnek, például igen eltérő korosztályokat tanítanak. Ennek megfelelően más és más befogadóképességű csoportokkal találkoznak. Kinek az egyik, kinek a másik tanítása megy könnyebben. Aki jó az általános iskolában, nem feltétlenül jó az egyetemen, pedig diplomája feljogosíthatja mindkét helyen való oktatásra. De még az egyetemen belül is, valaki kitűnő lehet a matematika egyes fejezeteinek tárgyalására, másvalaki pedig jobban be tudja vezetni a hallgatóit a kutatásba. Ezek intellektuálisan és emberileg nagyon eltérő tevékenységek. Nem szabad az egyiket a másik fölé helyezni. A fontos az, hogy mindenki saját képességeinek legjobban megfelelő közegben tudjon oktatni.

Egy tárgy tanításának története, feltételezve, hogy ugyanaz a tanár adja elő többször, fokozatosan bontakozik ki. Függetlenül attól, hogy az adott témakörben mennyire gyakorlott illetőről van szó, először az alkalmazott tankönyv feldolgozási módszerét kell magáévá tennie. Az első csoport vizsgái jelentik a kezdeti visszajelzéseket arra vonatkozóan, hogy mit értenek és mit nem a hallgatók. A későbbi osztályok hasonló visszajelzései jelentősen pontosíthatják vagy módosíthatják a képet. Azonban általános elvként fogalmazható meg, hogy:

1. Meg kell érteni, hogy mit nem értenek a diákok, s miért nem értik.

Különösen az utóbbi nem nyilvánvaló. Ennek egyik oka lehet, hogy az előadó és a hallgató az absztrakt gondolkodás egészen más szintjén állnak: ami az egyiknek természetes, tökéletesen ismeretlen a másiknak. Erre példa, hogy egy zambiai hallgató kérdéséből megértettem, hogy külön el kell magyarázni, hogy egy változó indexe nem más, mint a változó neve. Az eset után mindig használtam betűvel való indexelést is, és számmal valót is, és persze az index név voltát is elmagyaráztam.

A tárgy többszöri tanítása során fel fognak tűnni bizonyos típushibák. Ezekhez kapcsolódik a

2. A típushibákat gyűjteni kell, és később felhasználni a tanításban.

A későbbiekben még részletesen szó lesz a kritikus gondolkodásról (*critical thinking*), illetve ennek tanításáról. A típushibák itt használhatók fel.

Ugyancsak az absztrakt gondolkodáshoz kötődik, hogy tanítani kell a matematikai formulák összekötését a valósággal. Középiskolás szinten ez a szöveges feladatok megoldásának képességét jelenti. Ipari környezetben pedig annak tudatosítását jelenti, hogy:

3.Minden egyenletnek és formulának gyakorlati (műszaki vagy gazdasági) értelme van, ami szavakkal elmondható.

A matematikusoknak tudomásul kell vennie, hogy a mérnökök nem azért tanulják a matematika egyes fejezeteit, mert azok intellektuálisan szépek, hanem mert felhasználhatók valamire. A 3. elv könnyen megvalósítható szaktárgyakban abban az értelemben, hogy a dolgok jelentését az ember elmondja, esetleg fel is írja. Például egymáshoz kapcsolódó diszkrét időegységekben való ütemezés esetén az anyagfelhasználás egyenletének jelentése

amink van = amit felhasználunk.

Ez még mindig kifejthető szavakkal:

az induló készlet + a gyártott mennyiség = a felhasználás + a befejező készlet.

A matematikai formulák bevezethetők ezen magyarázatok után.

Tágabb értelemben itt a matematikai modellek tanításáról van szó. A modellek vonatkozásában a szakma nagyon kétarcú. Egyrészt mindenki igyekszik hangsúlyozni a modellek hasznosságát és ezen keresztül bizonyítani a matematika fontosságát. Másrészt azonban egy új modellt nem tekintenek egyenértékűnek egy bizonyított tétellel, és azt gondolják, hogy modellt mindenki tud készíteni. Mindkét utóbbi felfogás helytelen.

A tárgyalt programban 4–5 olyan tárgy is van, amelyben hangsúlyos a modellek oktatása. A modellezés intellektuális nehézségét mutatja, hogy a végzéskor még vannak, akiknek ez nem megy könnyen. A problémát a külső valóság és belső reprezentációjának összekötése okozza, ami bizonyos fokú absztrakt gondolkodást kíván. A vizsgált szakterületen fontos szerepet játszik az utazó ügynök feladat (*Traveling Salesman Problem, TSP*). Eredeti megfogalmazása a XIX. század első feléből származik, amikor még az utazás időigényes és költséges volt [TSP]. Egy kereskedő saját városából elindul. Néhány várost meglátogat, mindegyiket csak egyszer. Végül visszatér a saját városába. Az útját úgy kell megszervezni, hogy az a lehető legrövidebb legyen. Ez a feladat számos alkalmazásban merül fel. Az oktatás kritikus pontja annak felismertetése, hogy sok esetben a városok szerepét olyan objektumok játsszák, amelyeknek semmiféle köze valódi városokhoz nincs. Ennek megfelelően a közöttük lévő távolság sem utazási idő, hanem valami más. Például a városok lehetnek azonos gépen gyártott termékek, a távolságuk pedig közöttük szükséges átszerszámozás ideje. Ez azonban egy olyan „távolság”, ami nem szimmetrikus.

A vizsgáztatás a hallgató tudásának mérése. Több módja lehetséges. A Magyarországon egykor és részben a mai napig használatos német rendszerben a mérés egyetlen (idő)pontban történt, illetve történik. A hallgató ezen időpontban mutatott szerencsés vagy szerencsétlen szereplése és az oktató szintén pillanatnyi beállítottsága jelentősen befolyásolta az eredményt. A szóbeli vizsgák részbeni kiszorulásával az oktató szubjektív torzítása csökken.

Ezzel szemben a kérdéses egyetemen a fentebb vázolt, számos különféle elemet tartalmazó számonkérési rendszer tulajdonképpen egy integrál jellegű mérés. Bár lehetővé teszi, hogy a hallgató átmenjen súlyos hiányosságokkal, az én megítélésem szerint pontosabb és igazságosabb, mint az egyszeri mérés. Folyamatos munkára készteti a hallgatót. A rendszert kiegészíti a pótlás (*make-up*) intézménye, ami pótvizsga valamely elmaradt vagy rosszul sikerült vizsga helyett. A tanár megítélésétől függ, hogy ad-e pótlásra lehetőséget. Megfigyelésem szerint a pótlás újabb mód arra, hogy a hallgatót munkára serkentsük, mert azt már komolyan kell venni.

A vizsgákkal kapcsolatban kimondható egy fontos szabály.

4. *Vizsgán csak olyat szabad kérdezni, amire a hallgatót felkészítettük.*

Az elv megsértését talán legegyszerűbben egy orvosi példával lehet bemutatni. Ha egy szövetről a félév során kivetített képek mindig hosszanti metszetben mutatták a szövetet, akkor nem helyes a vizsgán kereszt irányú metszetet mutatni és elvárni, hogy felismerjék, feltéve, hogy a két metszet szerinti kép jelentősen különböző.

Az amerikai típusú oktatásnak megfelelően az előadások közelebb állnak a gyakorlatokhoz, mint Magyarországon, mert a tankönyvekhez hasonlóan, azokon is folyik feladatok megoldása. Egy mérnöki beállítottságú ember számára ez fontos. Sok évtizeddel korábbi élményem a következő. Egy eredetileg elektromérnök kollégám estin elvégezte a matematikus szakot is. Ő Karvasz Gyula[1] analízis előadását dicsérte, mert Karvasz kiszámolta egy gyufásdoboz optimális, azaz legkisebb anyagfelhasználású méretét adott gyufaszál mellett. Karvasz arra adott példát, hogy hogyan lehet a differenciálszámítást felhasználni, és egyben összekötötte az absztrakt matematikát a valósággal. A magam részéről ezt azzal egészítem ki, hogy az előbbi történethez képest sok évvel később kétszer is olyan számításra lett volna szükségem, ami nem tartozott a szűkebb matematikai szakterületemhez. Nem találtam olyan, az adott területen jártas kollégát egyik esetben sem, aki a számítás menetét meg tudta volna világosítani. Itt üt vissza az elméletnek és alkalmazásának éles szétválasztása.

5 Az előadásokon kereszthivatkozásokat kell mondani arról, hogy az adott téma hol fog még előjönni, illetve hol jött már elő.

A gyakorlatokat illetően fennáll egy probléma. Nevezetesen sok hallgató esetében pszichikai gát van a feladatmegoldás útjában. Szívesen veszik, ha az előadó vagy a gyakorlatvezető a táblánál bemutatja a megoldást, de nehezen kezdenek neki maguk. Ezt a gátat le kell dönteni, aminek radikális, de legjobb módja „Gerlits János-típusú”[2] gyakorlatot tartani. Vagyis ki kell osztani a feladatokat a gyakorlat kezdetekor, és a hallgatókat egyenként kell felkeresni, irányt mutatni nekik és a megoldásokat ellenőrizni. Tapasztalatom szerint nagyon hamar rákapnak a dolog ízére, lelkesen dolgoznak, különösen, ha az órán ők maguk is szabadon mozoghatnak, és a megoldásokat megbeszélhetik. És esetleg kis csoportokban dolgoznak.

Képzeljük el a hallgatót néhány évvel később, amikor magasabb végzettségénél fogva főnök lesz. Jelentéseket, számításokat fog kapni, amelyekről el kell tudni döntenie, hogy felhasználhatók-e. Vagyis ránézésre meg kell tudnia mondani egy eredményről, hogy gyanús-e. Ha pedig további tanulmányok után tervezőmérnök lesz, hasonló a helyzet, csak akkor saját magát és a számítógépet is ellenőrizni kell tudnia.

6. Az elfogadott és felhasznált részeredményekért a döntéshozó a felelős.

Ennek az elvnek azonnali következménye, hogy a végzett hallgatónak rendelkeznie kell az ellenőrzés képességével. Az ellenőrzés tanítható. Rengeteg módszere van, feladata válogatja, hogy melyiket lehet alkalmazni.

Az egyik általános módszer a számított végeredmény nagyságrendjének becslése, illetve a végeredményből kiindulva további, a nagyságrendeken alapuló számítások végzése. Például egy 10 évre szóló 10000 dolláros kölcsön havi részlete nem lehet 80 dollár, mert még a nominális érték visszafizetésére sem elég , de 200 dollár már irreálisan jó üzlet volna a bank számára (24000 USD). Ehhez kapcsolódóan tanítható a

7. Ha valamely gyakorlati dologgal kapcsolatban legalább két numerikus értéket ismerünk, akkor a két adat között legalább egy olyan alapművelet elvégezhető, amely értelmes eredményt ad.

Egy másik igen általános és egyszerű ellenőrzési mód az, hogy ha sok objektumra kell egyenként hasonló számítást végezni, akkor megszámláljuk, hogy hány objektumra hajtottuk végre a műveleteket, nem hagytunk-e ki eseteket.

Az ellenőrzés tanítása először példákon keresztül történhet. Ehhez lehet felhasználni a gyűjtött típushibákat, amelyeket a megfelelő ellenőrzési módszer kiszűr. Az ellenőrzés tanításának másik fontos eleme, hogy a dolgozatokban meg is kell követelni, hogy minden feladat megoldását ellenőrzés kövesse.

Az ellenőrzéshez fontos eszköz a számítások végzésében – vagyis a számolásban – való jártasság. A modern számítástechnikai környezet hajlamos ezt megölni, úgy kulturálisan – ki merne ellentmondani egy precíz számítógépnek – mint technikailag – hiszen nem kell már a számításokat magunknak végeznünk. Az utóbbira volt példa az alábbi eset; a sokkot a mai napig nem tudtam teljesen feldolgozni. A táblánál magyarázva mondtam, hogy ez 7, az meg 8, tehát összesen 15. Egy – hangsúlyozom – okos diák előkapta a kalkulátorát, beütötte, hogy 7+8, és meglepve tapasztalta, hogy valóban 15. Bár az eset kirívó, egyáltalán nem egyedi, s ne gondolja senki, hogy Magyarországon nem fordulhat elő. Azt gondolom, hogy 10 éven belül szükségessé válik, hogy mérnök hallgatóknak olyan tárgyat vezessünk be, ahol számolni tanulnak. A műszaki tudományok több ágához érdemes tudni hatványokat, prímszámokat. Fontos, hogy valaki gyorsan tudjon megbecsülni mennyiségeket. A jelenlegi helyzetet némileg enyhítheti, ha versenyt szervezünk ilyen témában. A verseny tudatosítja a számolás fontosságát, de sajnos azt is, hogy jól számolni csak kiváló emberek tudnak.

A hallgatók szintjén van az önellenőrzésnek egy természetes módja. Ez pedig az, ha létezik olyan feladatgyűjtemény, ami minden feladat megoldását tartalmazza lépésenként. Ebben a feladatgyűjteményben használhatók fel a begyűjtött típushibák olyan megfogalmazásban, hogy például miért nem fogadható el egy ilyen javasolt megoldás, vagy miért kér a menedzser azonnal korrekciót stb.

***

A végére hagytam két negatív jellegű megjegyzést.

Surányi Lászlóval, a Fazekas Gimnázium volt vezető tanárával interjú készült abból az alkalomból, hogy az MIT kitüntette [SUR]. Egy rövid részlet az írásból: „*Volt olyan diák, még a matekszakon is, aki szabotált mindent, és semmit sem lehetett neki megtanítani. “Egy kollégámmal egymásra néztünk, és azt mondtuk, ez a mi hibánk.”*” Nagyon szép, emberi megnyilatkozás, de nem értek egyet vele. Nincs mindenkihez kulcsunk. Tudomásul kell venni, hogy vannak emberek, akikkel nem találjuk meg a közös hangot. Ennek következménye a diák rossz eredménye. Nem arról van szó, hogy bárki is hibás volna. Egy jó tanár esetében az ilyen esetek száma kevés, de nem nulla. Azt kell figyelni, hogy ki mire reagál, hol lehet felvenni a kontaktust. Extrém ruházatú vagy extrém hajviseletű hallgatók ezzel – sokszor tudtukon kívül – provokálják a környezetüket. Nagyon sokat segíthet, hogy jelét adjuk annak, hogy elfogadjuk őket olyannak, amilyenek. Például feltűnően sokszor nekik magyarázunk. Megfigyelésem szerint ilyen esetben az extrém megjelenés is megszelídül.

Némileg ehhez kapcsolódik a következő. Amikor egy tárgyat sok hallgató vesz fel, esetleg számos csoportban, akkor elkerülhetetlen, hogy legyenek olyanok, akik ismételten buknak. Egy magára adó, igényes egyetemnek azokat, akik már kétszer megbuktak, egy ekvivalens, de teljesen más didaktikát alkalmazó tárgyra kell átirányítani.

Irodalom

[SUR] Interjú Surányi Lászlóval, a Fazekas Gimnázium kitüntetett tanárával, http://444.hu/2013/05/30/suranyi-laszlo-fazekas/

[TSP] Alexander Schrijver, Szemelvények a kombinatorikus optimalizálás történetéből 1960-ig, (ford.: Bernáth Attila, Fleiner Tamás, Pap Gyula), Alkalmazott Matematikai Lapok 25 (2008), 1-74.

[V] Vizvári Béla, Új didaktikai és erkölcsi dilemmák a matematika tanításában, A matematika tanítása, 1998. No. 5, pp. 11-14.

Vizvári Béla

---

[1] Karvasz Gyula (1930-1999) Riesz Frigyes tanszékén (Felsőbb Függvénytani Tanszék) tanársegédként kezdte egyetemi pályafutását, 1961-ben az akkor alakult Analízis II Tanszékre került. A Numerikus Analízis Tanszékről ment nyugdíjba. Kiváló oktató volt. Jelentős részt vállalt a fizikusok, matematika tanárok és informatikusok képzésében.

[2] Gerlits János 1968-ban végzett az ELTE matematikus szakán. A Schweitzer-versenyen egyszer kiemelt dicséretet, kétszer dicséretet kapott. Az MTA Rényi Intézetben dolgozott. Kutatásaiban halmazelméleti topológiával foglalkozott. Kandidátus 1977-ben lett. Az ELTÉ-n rendszeresen tartott gyakorlatot analízisből. 2008. augusztus 30.-án hunyt el.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Baranyai Tünde Klára, Stankov Gordana, Jakab Enikő, Lilla Korenova, Ivan Marinović, Wintsche Gergely

2017. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Érettségik a határon túl

A határon túli magyar nyelvű matematika érettségik

A vacsoránál négy különböző ország képviselője ült az asztalnál. Egy erdélyi tanárnő, egy kárpátaljai PhD hallgató, egy felvidéki tanárnő és jómagam. (Ez után a kezdés után bocsánatot kell kérnem Rejtő Jenőtől?) Arról beszélgettünk az MIDK konferencia után, hogy milyenek a magyar érettségik. Sokan egyetértettünk abban, hogy maga az érettségi rendszere bevált. Jó, hogy két szintje van, jól szelektál, csak sajnos nagyon kevesen választják maguktól az emelt szintű matematika érettségit, hiszen korábban nem volt elvárás. (Ezeket a sommás megállapításainkat később megerősítette *Csapodi Csaba* előadása a Módszertani Mesék sorozatban, előadásának címe: 12 éves és két szintje van. Mi az?) Beszéd közben felmerült, hogy mennyiben hasonló, illetve mennyiben más egy matematika érettségi Szlovákiában, Ukrajnában, illetve Romániában. Milyen lehetőségei vannak egy magyar anyanyelvű diáknak a környező országokban? Hol és mit biztosítanak számára kisebbségként, a határon 3 vagy 200 kilométeren túl? Egyáltalán, hasonlók-e az érettségi rendszerek szűkebb pátriánkban, vagy már a Kárpát-medencében is hatalmasak a különbségek? Az ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központjában dolgozva természetesnek tekintjük, hogy matematikából mindenkinek kell érettségizni, de vajon valóban természetes ez a környező országokban is? Ezek és hasonló kérdések merültek fel még januárban, amikor az érettségikről beszélgettünk.

Megkértem hát egy-egy embert öt környező országból, hogy röviden foglalják össze, mik a lényeges elemei az ő országukban a matematika érettségiknek. Mindenki csatolt legalább egy feladatsort is, amelyek talán tanulságosabbak, mint maguk az érettségi leírások.

Hogy mi lesz a tanulság?

„Semmi sem vész el ezen a világon,
egy a lélek és ezer a ruhája
s a valóság csak ez a könnyü pára.”
Szabó Lőrinc

Horvátország

Ivan Marinović

Az **Állami érettségi vizsgát** a horvát iskolákba a 2009/2010-es tanévben vezették be. Ettől a tanévtől kezdődően minden gimnáziumi tanuló köteles a negyedik osztály befejezése után érettségi vizsgát tenni. A gimnazistákon kívül azoknak a diákoknak is kötelező az érettségi vizsga, akik négyéves szakközépiskolába jártak és egyetemre akarnak jelentkezni Horvátországban. A diákok az Állami érettségi vizsgával fejezik be középfokú tanulmányaikat. Az érettségi vizsgát azoknak a diákoknak is le kell tenni, akik nem a horvát oktatási rendszerben fejezték be a középiskolát, de tanulmányaikat az egyik horvát egyetemen szeretnék folytatni.

A Horvát Köztársaságban minden felsőoktatási intézmény elfogadja az Állami érettségi vizsga eredményeit, és az eredmények alapján készített felvételi rangsorokat.

Az Állami érettségi vizsga két részből áll, kötelező és választható része van.

A vizsgák kötelező része:

- horvát nyelv,
- matematika,
- idegen nyelv.

A nemzeti kisebbségek (magyar, szerb, olasz), a horvát nyelvű vizsgák helyett választhatják az anyanyelven letett vizsgát is, kivéve az idegen nyelvet. Ebben az esetben a vizsgákat saját anyanyelvükre lefordítva kapják meg.

A vizsgák kötelező részén két szint közül lehet választani, felső szint (A) vagy alap szint (B).

Tanévenként két lehetőség van az érettségi vizsgák letételére: nyári vizsgaidőszak (május végén) és őszi vizsgaidőszak (augusztus végén).

A **matematika érettségi** célja az, hogy képet adjon a tanulók matematikai ismereteiről, tudásáról és ellenőrizze azokat a matematika következő területein:

- A matematikai szakszavak és jelölések használata a feladatok olvasása, értelmezése és megoldása során.
- A feladatokban lévő adatok értő olvasása, a táblázatok és grafikonok adatainak értelmezése, és az adatok alapján levont következtetések és feladatmegoldások logikus, pontos szövegezésű bemutatása.
- Matematikai modellek és eljárások használata valamely feladat megoldása során, valamint a kapott eredmények eredeti szövegkörnyezetben történő értelmezése.
- A matematika különböző területein szerzett ismeretek összekapcsolása és az ismeretek használata.
- Különböző matematikai módszerek, eljárások használata egy-egy feladat megoldása során.
- Számológép értő használata.

A matematika érettségi fő területei:

- Számok és algebra
- Függvények
- Egyenletek és egyenlőtlenségek
- Geometria
- Modellezés

A matematika érettségi vizsga felső szinten (A) 30 feladatot tartalmaz, alap szinten (B) pedig 28-at. A matematikai vizsga csak írásbeli. A feladatok a megoldás módja szerint három csoportra vannak osztva, amelyek három vizsgaszakaszt jelentenek. A vizsgák megszakítás nélkül zajlanak, felső (A) szintje 180 percig, az alap (B) szintje pedig 150 percig. A feladatlapok az NCVVO (Nemzeti Oktatási Értékelési Központ) honlapjáról letölthetők.

I. Többszörös választási lehetőségű feladatok

(Mi úgy mondanánk tesztfeladatok, de a feladatlapon nem így szerepel, ezért a könnyebb azonosíthatóság miatt megtartottam az eredeti megnevezést.)

Tesztfeladatok esetén a diákoknak egyszerűen meg kell jelölni a helyes választ, a négy lehetőség közül. Helyes válasz esetén, a feladat bonyolultságától függően, a tanuló feladatonként 1 vagy 2 pontot kap. A helytelen válasz 0 pontot ér. A feladat megoldásához vezető utat nem ellenőrzik, és nem javítják.

II. Rövid válaszú feladatok

(Mi úgy mondanánk, olyan egyszerű feladatok, ahol a helyes válaszokat is nekünk kell felírni, azok nincsenek négy lehetőségre korlátozva, mint az I. feladatrészben.)

A tanulók beírják az általuk kapott eredményeket a kijelölt részre. Minden helyes válasz 1 pont, helytelen vagy hiányzó válasz 0 pont. A feladat megoldásához vezető utat nem ellenőrzik, és nem javítják.

III. Hosszabb válaszú feladatok

(Mi úgy mondanánk, kifejtendő, vagy hosszabb választ és levezetést igénylő feladatok)

Ezek a feladatok csak a felső szintű (A) vizsgán jelennek meg. A tanulóknak le kell írni a megoldás menetét és a kapott eredményt. A leírt levezetésben be kell mutatni a megoldáshoz tartozó ábrákat és indokolni kell az egyes lépéseket. Amennyiben a tanuló a feladat egy részét fejben oldja meg, arra hivatkozni kell, és meg kell magyaráznia annak menetét. A megoldásokat előre rögzített és egységes elvek szerint pontozzák.

A érettségi vizsgán a tanulók használhatnak olyan tudományos (scientific) számológépet, amely képes kezelni exponenciális, logaritmikus és trigonometrikus függvényeket, és azok értékeit. Tilos olyan számológépek használata, amelyek képesek vezeték nélküli kapcsolatot létesíteni más eszközökkel, grafikus megjelenítést tesznek lehetővé vagy programozhatók.

Hivatkozások

[1] http://public.mzos.hr/Default.aspx?sec=2246

[2] www.ncvvo.hr/wp-content/uploads/2016/09/MATEMATIKA-2017.pdf

Szerbia

Stankov Gordana

Szabadkai Műszaki Szakfőiskola

Szerbiában minden tanuló a négyéves állami középiskola befejeztével érettségi vizsgát tesz. Ennek megvalósítása érdekében a középiskolai oktatásról és nevelésről szóló törvények [3] és [4] alapján az iskolák maguk határozzák meg a témaköröket és a konkrét vizsgafeladatokat. A tanulók kötelesek az érettségi vizsga részeként írásbeli vizsgát tenni szerb nyelv és irodalomból (ha szerb tanítási nyelvű osztályba jártak), vagy kisebbségi nyelv és irodalomból (ha kisebbségi tanítási nyelvű osztályba jártak). Így a magyarul tanuló diákok nem érettségiznek kötelezően szerb nyelv és irodalomból. Ennek az írásbeli vizsgának az időtartama négy tanóra. A téma szabadon választható a megadott négy közül, amelyet a vizsgabizottság a vizsga napján választ ki a szaktanárok által összeállított és a tantestület által jóváhagyott listáról. Minősítéskor az egyes osztályzat az elégtelen, a legjobb pedig az ötös.

A gimnáziumi érettségi vizsga célja az, hogy felmérje a tanuló érettségét és felkészültségét az esetleges további tanulmányok megkezdéséhez, míg a szakiskolai érettségin ezek mellett külön hangsúlyt kell fektetni a tanuló szakmai felkészültségének meghatározására. Ezért e két iskolatípusban az érettségi vizsga szabadon választható része jelentősen különbözik egymástól.

A gimnáziumokban a tanulók még egy, a minisztérium által meghatározott tantárgyból tesznek írásbeli vizsgát:

- a társadalomtudomány szakirányú gimnáziumokban szabadon választott idegen nyelvből;
- a természettudományi szakirányú gimnáziumokban (heti óraszám matematikából: 4-5-5-4), a különböző szakgimnáziumokban (informatikai, számítástechnikai, fizika) és az általános gimnáziumokban (heti óraszám matematikából: 4-4-4-4): matematikából vagy egy szabadon választott idegen nyelvből. A vizsgán a tanuló meg kell, hogy mutassa, milyen mértékben sajátította el a szükséges és a mindennapi életben alkalmazható matematikai tudást, és hogy mennyire lesz képes folytatni tanulmányait olyan területeken, ahol szükséges bizonyos szintű matematikai tudás;
- a matematikai szakirányú gimnáziumban (heti óraszám: analízis és algebra tárgyból 4 minden osztályban, geometriából 4 az első és a második osztályban, lineáris algebra és analitikus geometria 3 harmadik osztályban, valószínűségszámítás és matematikai statisztika a negyedik osztályban és numerikus matematika a negyedik osztályban) analízis és algebra tárgyból. Ilyen matematika szakirányú tagozatot (a képzőművészeti és sport tagozatok mellett) működtet a zentai Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium, az egyetlen magyar tannyelvű tehetséggondozó gimnázium a Vajdaság területén.

Az írásbeli vizsgákra ugyanaz vonatkozik, mint az anyanyelvi írásbelire azzal, hogy a vizsgabizottság egy öt feladatból álló feladatsort választ ki.

A gimnáziumi tanulók érettségi házi dolgozatot is írnak és védenek a minisztérium által meghatározott tantárgyak témaköréből (melyek kapcsolódnak a gimnázium típusához). A témákat a szaktanárok határozzák meg, és az iskola tantestülete hagyja jóvá. A kitűzött témák száma 5-tel több, mint a diákok száma. Mindegyik tanuló különböző témát választ és a témavezetőjével konzultálva megírja, beadja, majd az érettségi vizsgabizottság előtt védi meg maximum 30 percben. A tanulók a dolgozatokra külön jegyet kapnak (1-tól 5-ig).

Az érettségi vizsga érdemjegyét a három vizsgarész átlaga adja (két tizedesjegyre kerekítve). Ha az átlag legalább kettes, a tanuló letette az érettségi vizsgát, és erről oklevelet kap.

Érettségizni lehet júniusban és augusztusban (a magántanulók vizsgázhatnak más, az iskolák által meghatározott időpontokban is).

A szakiskolák tanulói az anyanyelven kívül még egy szabadon választott tantárgyból (mely a szaknak megfelelő minisztériumi listán található) szóbeli vizsgát tesznek, vagy felelnek szóban is és írásban is. Matematikából egy 3 példából álló feladatsort húz ki a tanuló. (A feladatsorokat a tantestület hitelesíti.) Ezeket megoldja, és az esetleges ezzel kapcsolatos kérdésekre válaszol a bizottság tagjainak. E vizsga időtartama maximálisan 30 perc tanulóként.

Minden szakiskolai tanuló egy gyakorlati munkát is kidolgoz a vezetőtanára segítségével, és ezzel kapcsolatban szóban az érettségi bizottság kérdéseire is felel.

Az érettségi vizsga minősítése ugyanúgy történik, mint a gimnáziumokban.

Szerbiában is tervezik a kompetencia alapú központi érettségi vizsga bevezetését. Egyes szakiskolák kísérleti tagozatainak tanulói szaktárgyakból már érettségiztek ilyen módon. [5]

Hogyan lehet felvételt nyerni a felsőoktatási állami intézményekbe?

A felsőoktatásról szóló állami törvény alapján [6] az egyetemek és a főiskolák saját beiratkozási szabályzatokat fogalmaznak meg. Közös bennük a következő:

- A jövendőbeli hallgatók a jelentkezési laphoz csatolják az érettségi bizonyítvány (egyes főiskolákon: záróvizsga bizonyítvány, ha hároméves középiskolát végeztek) és a középiskolai bizonyítványok (minden osztályra külön-külön) hitelesített fénymásolatait;
- A beiratkozásra jelentkező személy összpontszáma a középiskolai átlageredményének és a felvételi vizsgán szerzett pontoknak az összege lesz. A középiskolai átlageredmény alatt valamennyi középiskolai tanév 2-vel szorzott átlageredményének összege értendő. Ez alapján a jelentkező személy minimum 16, maximum 40 pontot érhet el. A középiskolai átlageredmény két tizedes jegy pontossággal határozandó meg. (A hároméves középiskolák esetén, a harmadik év átlageredményének kétszeresét veszik.) A felvételi vizsgán a jelentkező 0 és 60 pont közötti eredményt érhet el. A jelentkező választhat, hogy a tanulmányait az állami költségvetés terhére, vagy saját finanszírozásban szeretné megkezdeni. Ez a döntés az összpontszámának (maximálisan 100) és a ranglistán elfoglalt helyének függvénye.

Minden felsőoktatási intézmény beiratkozási szabályzatában meg van határozva, hogy a jelentkezőknek az egyes tanulmányi programokra miből kell felvételi vizsgát tenniük. A matematika, mint felvételi vizsga igen gyakori.

- Bemutatom a Szabadkai Műszaki Főiskola [7] felvételi feladatsorát matematikából. Itt az oktatás két nyelven folyik, szerbül és magyarul. A hallgatók kb. fele magyar nyelvű tagozatra iratkozik. A Vajdaság területén az összes felsőoktatási intézmények közül iskolánkban tanul a legtöbb hallgató magyar nyelven. A vizsgák feladatsorai általában kétnyelvűek és ez érvényes a felvételi vizsgára is.
- A másik feladatsor az Újvidéki Egyetem Természettudományi Kar, Matematika és Informatikai Osztályának feladatsora [8], amelyet a leendő matematika szakos hallgatók számára állítottak össze. Ezt azért választottam, mert ők lefordítják a felvételi vizsgák feladatsorait különböző kisebbségi nyelvekre, így magyarra is, hogy minden jelentkezőnek azonos feltételeket biztosítsanak a felvételi vizsgán.

Hivatkozások

[3] Закона о средњем образовању васпитању(„Службени гласник РС“ број 55/13.), http://www.mpn.gov.rs/dokumenta-i-propisi/zakonski-okvir/

[4] Закона о основама система образовања и васпитања ("Службенигласник РС" бр. 55/13.), http://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_osnovama_sistema_obrazovanja_i_vaspitanja.html

[5] Методологију оцењивања заснованог на компетенцијама у стручном образовању, http://www.zuov.gov.rs/zavrsni-ispit-i-matura/

[6] Törvény a felsőoktatásról, http://www.mnt.org.rs/dokumentumok/hasznos-tartalom/torvenyek-es-egyeb-jogi-dokumentumok-magyar-nyelven

[7] Szabadkai Műszaki Szakfőiskola, http://www.vts.su.ac.rs/hu

[8] Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, https://www.dmi.uns.ac.rs/sr

Szlovákia

Lilla Korenova

Szlovákiában az érettségi zárja le a középiskolai tanulmányokat. Mindenkinek kötelező érettségizni, aki gimnáziumba, művészeti középiskolába vagy szakközépiskolába járt. Minden érettségizőnek kötelező vizsgát tennie szlovák nyelv és irodalomból, egy idegen nyelvből és ha valamelyik nemzetiséghez tartozik, akkor a nemzetiségi nyelv és irodalomból. Az érettséginek egyetlen szintje van.

Azt, hogy milyen iskolatípusba járó diák milyen tárgyból tehet a kötelezőkön kívül érettségit, a szlovák minisztérium rendeleti szinten szabályozza. Aki valamilyen egyetemre készül, az más tanult tárgyakból is tehet érettségit, de azok nem kötelezők. Az egyes felsőoktatási intézmények írják le, hogy melyik az elvárt érettségi tárgy, ha valaki náluk szeretné folytatni a tanulmányait. A mérnöki, természettudományi, közgazdasági szakokon előnyben részesítik azokat, akik érettségiztek matematikából.

Az érettségi vizsgákat két szempont szerint is két csoportba osztják. Vannak írásbeli és szóbeli vizsgák, amelyek Magyarországon is megszokott elnevezések. Vannak azonban extern és intern vizsgák. (Megtartom az elnevezéseket, mert a szlovák és a magyar dokumentumok is ezekkel az elnevezésekkel hivatkoznak rájuk.) Az extern vizsgákat az iskoláktól független NÚCEM állítja össze, szervezi és összesíti. A NÚCEM az Oktatásügyi Szabványosított Mérések Nemzeti Intézete. Ez lényegében azt jelenti, hogy az iskoláktól független írásbeliket országosan egységesen tudják értékelni.

A matematika érettségik

Mint már korábban mondtuk, Szlovákiában nem kötelező matematikából érettségizni. Ha valaki mégis megteszi, akkor az érettségi két részből áll. Egy extern írásbeli vizsgából és egy intern szóbeli vizsgából. Az érettségizőnek márciusban a NÚCEM által összeállított 150 perces extern tesztet kell kitölteni. A teszteket mindenki anyanyelvén kaphatja, azaz a magyar iskolában tanulók magyarul. (Ha valaki kéri, akkor természetesen az államnyelven is megkaphatja.) A tesztben 30 kérdés van, 1-20 rövid választ igénylő, 21-30 tesztfeladatok. Az értékelés nyelvfüggetlen, mert a levezetést nem értékelik, csak a tesztlapra helyesen beírt, helyes válaszokra adható pont. A 2016-os tesztlap magyar nyelven.

A teszt témakörei

- A matematika alapjai
- Függvények
- Síkgeometria
- Térgeometria
- Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A szóbeli intern vizsga májusban van, a magyar iskolákban teljesen magyar nyelven folyik. A szóbeli vizsga háromfős bizottság előtt történik, ahol mindhárom tanár matematika szakos kell legyen, és a bizottság elnökének másik iskolából kell érkeznie. A tételeket az iskolák önállóan készítik el, de minden tételnek tartalmaznia kell egy elméleti kérdést, egy bizonyítást és egy számítási feladatot. A három rész a matematika különböző területeiről kell származzon. A vizsgázót megilleti 25 perc felkészülési és 25 perc felelési idő.

Ha valaki elégtelenre írta meg az írásbeli tesztet márciusban, akkor annak legalább hármasra kell teljesíteni a szóbelin, hogy megfeleljen. Ha valaki nem felel meg a matematika érettségin, akkor ősszel, vagy a következő év márciusában megismételheti.

Románia

Baranyai Tünde Klára

Romániában érettségi vizsgát tehet minden olyan diák, aki bármilyen tagozaton elvégezte a középiskolát. Az érettségi vizsga szabályzatát egy 2011 óta érvényben lévő határozat szabályozza [10] amelyhez minden évben kisebb kiegészítéseket csatolnak, illetve meghatározzák a vizsgák időpontját [11].

Az érettségi vizsga két alkalommal ingyenes. A sikeres érettségi vizsga teszi lehetővé a tanuló felvételét az egyetemekre. Az érettségi vizsga két részből áll. A végzős diákoknak részt kell venniük egy román nyelv és lingvisztika és egy digitális kompetenciák vizsgán (ECDL típusú feladatokat kell megoldaniuk), valamint a kisebbségi oktatásban tanuló diákok anyanyelvükön is vizsgáznak, ahol a nyelvi kompetenciákat mérik. Ezeket a vizsgákat külön értékelik, azaz a diákok mindegyik vizsgarészből önálló minősítést kapnak. [9]

A szóbeli vizsgákon kívül a kisebbségi oktatásban tanuló végzősöknek négy írásbeli vizsgán kell részt venniük: Román nyelv és irodalom (a vizsga azonos bármely szakon tanuló, illetve a kisebbségi oktatásban tanuló diákok számára), Anyanyelv és irodalom (a kisebbségi oktatásban részt vevő diákok számára, azonos minden szak számára), a szak szerinti kötelező tantárgy és a szak szerinti választott tantárgy. A dolgozatok értékelése 1-es jegytől kezdődik, mely jegyet minden vizsgán részt vevő tanuló megkap hivatalból, a maximális jegy pedig a 10-es, A sikeres vizsgát jelentő jegy minimuma az 5-ös.

Az érettségi vizsga sikeres, ha három feltétel egyidejűleg teljesül:

1. A diák részt vett minden vizsgán (ez a kisebbségi oktatásban részt vevők számára hét vizsgát jelent, a román nyelvű szakokon pedig öt vizsgát).
2. Minden vizsgán átmenő jegyet kapott (az első három vizsgán átmenő minősítést, az írásbeli vizsgákon pedig minimum 5-ös jegyet).
3. Az írásbeli vizsgák jegyeinek számtani közepe, kerekítés nélkül minimum 6-os.

A matematika tantárgy az érettségi vizsgán

Matematikából nem vizsgázik minden végzős diák, csak azok, akik az elméleti középiskolában reál tagozatra járnak. Ilyenek például a matematika-informatika vagy biológia-kémia szak, a katonai középiskolák, illetve a technológia szak vagy pedagógia szak végzősei. A humán szakra (filológia, társadalomtudományok, illetve művészet és teológia) járó tanulók csak tizedik osztályig tanulnak matematikát egy vagy két órában hetente, utána egyáltalán nem, ezért matematikából nem kell érettségizniük.

A matematika érettséginek minden évben négy változata van. Ez azért is indokolt, mert a diákok más tanterv szerint tanulnak a különböző szakokon. A matematika-informatika tagozatos illetve a katonai középiskolát végzett diákok az úgy nevezett M1 szintű érettség vizsgát kell teljesítsék, a biológia-kémia szakosok az M2 szintű vizsgán vesznek részt, illetve a szakiskolások és a pedagógia szakos diákok is más- és más típusú vizsgatételeket kapnak. A kisebbségi oktatásban tanuló diákok anyanyelvükön és az állam nyelvén is megkapják a tételeket. A matematika vizsgával kapcsolatban fontos még tudni, hogy a matematika és informatika illetve biológia-kémia szakos diákok ugyanazt tanulják 9. és 10. osztályban, viszont 11. osztálytól az informatika szakos tanulók a tanterv szerint egy komplexebb anyagot tanulnak. Ugyanakkor az M1 és M2 típusú érettségi vizsgák között elenyésző a különbség. A matematika vizsga mindig három részből áll, az első részben egyszerűbb feladatok vannak, de ha ezeket mind jól megoldja a tanuló, még akkor is csak 4-es osztályzatot kap, mely nem átmenő jegy. A második részben közepes nehézségű feladatok vannak, az utolsó részben pedig már nehezebb feladatok szerepelnek. A linken mellékelt fájlban található a 2016-os évi, M1 szintű matematika érettségi, ami tartalmazza a feladatok pontozását is. [12]

Hivatkozások

[9] http://bacalaureat.edu.ro/2016/ letöltés ideje 2017 február 5

[10] Anexa 2 la ordinul MECTS nr. 4799/31.08.2010, privind organizarea şi desfăşurarea examenului de bacalaureat -2011

[11]

http://subiecte2016.edu.ro/2016/bacalaureat/legislatie/Ordin%205080_examen%20de%20bacalaureat%202016.pdf letöltés ideje 2017 február 5

[12] http://subiecte2016.edu.ro/2016/bacalaureat/Subiecte_si_bareme/ letöltés ideje 2017 február 5

Ukrajna

Jakab Enikő

Ukrajnában 2008-tól kezdve egy új érettségi és egyben felvételi formát vezettek be: a ZNO tesztelést (ukránul: Зовнішнього Незалежного Оцінювання, magyarul Külső Független Tesztelés (Minősítés)), amelynek kereteiben a diákok nem saját tanintézményeikben érettségiznek, hanem kijelölt vizsgaközpontokban, rendszerint valamely megyei jogú város nagyobb középiskolájában. Az itt szerzett pontok egyben a felvételi pontjaik lesznek a felsőoktatási intézménybe való jelentkezéskor. A vizsgával kapcsolatos törvényeket minden évben módosítják valamelyest. Az emelt szintű érettségire való jelentkezéshez minden középiskolában ki van jelölve egy tanár, aki felelős és egyben segítséget nyújt a jelentkező diákoknak. A külső független tesztelés minden 11. osztályos diák számára kötelező, a végzősök egységes tesztek alapján adják le a ZNO-t, a vizsgára való jelentkezés ingyenes. Mindemellett van lehetőség fizetett próbaérettségit is tenni, amit hasonló körülmények között szerveznek minden évben, március hónap folyamán.

A vizsgázónak jelenleg minimum 3, maximum 5 tantárgyból kell vizsgáznia. A végzősöknek kötelező az ukrán nyelv és irodalom vizsga, emellett második vizsgának két tantárgy közül választhatnak (akár mindkettőt meg lehet adni): Ukrajna történelme vagy matematika. A kötelező tárgyakon kívül a következő tárgyak közül lehet választani: világtörténelem, biológia, földrajz, fizika, kémia, egy választott idegen nyelv (angol, német, francia orosz vagy spanyol), valamint 2013-tól világirodalom. Az világirodalom vizsgát leszámítva minden tárgyból készül fordítás is a nemzetiségi kissebségek nyelvére (orosz, moldáv, román, lengyel, magyar, krími-tatár), ezt az igényt előre kell jeleznie a jelentkezőnek. (Jellemző, hogy szinte évente meg kell küzdeni a fordítás jogáért.)

2015-től a felsőoktatási intézmények nem fogadják el a korábbi években kiadott emelt szintű ZNO-bizonyítványokat, mint ahogyan azt az előző években tették, azaz csak a felvételi évében született ZNO-eredményeket veszik figyelembe. A 2017-es felvételi eljárás során azonban újra engedélyezték az egy évnél nem régibb eredmények beszámítását is.

A külső független tesztelés értékelése egy 100-200 pont közötti skálán történik, eltörölték a mostanáig létező alsó ponthatárt (124 pont), és bevezették a „teljesítette” vagy „nem teljesítette” mutatókat. Szakértők vizsgálják meg, hány kérdésre kell megfelelnie a felvételizőnek a vizsga letételéhez. A felsőoktatási intézményekbe csak az nyerhet felvételt, aki minden tantárgyból sikeresen vizsgázik, tehát az adott évben elvárt minimumot teljesíti. Ebből kifolyólag, aki nem éri el a minimumot az ukrán nyelv és irodalom vizsgán, az már nem vehet részt a többi vizsgán. (Itt kell megjegyezni, hogy ugyanolyan szintű vizsgát tesz mindenki ukrán nyelvből és irodalomból, akkor is, ha ukrán filológia szakra jelentkezik, és akkor is, ha bármilyen más szakirányt választ.)

A vizsgázó összesen 5 felsőoktatási intézménybe nyújthatja be a jelentkezését, minden tanintézményben maximum 3 szakra, így összesen 15 lehetősége van.

Az ukrán nyelv és irodalom vizsga három részből áll: ukrán nyelv teszt, ukrán irodalom teszt és egy minimum 200 szóból álló fogalmazás adott témára. Ezt a vizsgát nem fordítják, csak ukránul lehet letenni.

Matematikából kétszintű (A szint – egyszerűbb; B szint – bonyolultabb) teszteket vezettek be. A matematikafeladatok megoldására szánt idő 180 perc, a megoldandó feladatok száma 33 különböző típusú feladat, melyeket négy részre osztottak:

- feleletválasztós egy jó válasszal (20 feladat);
- párosítós (4 feladat);
- válaszadós (6 feladat);
- kidolgozós (3 feladat).

A vizsgadolgozat, a fent említettek alapján, egyszerre minősül érettségi és felvételi vizsgának is, azonban az érettségi jegyet a kidolgozandó feladatok nélkül határozzák meg. Mellékelem a 2016 évi hivatalos érettségi lapokat magyar nyelven.
Az egyetemek önállóan határozzák meg felvételi szabályzataikban, hogy milyen szintű tesztet kell letennie a felvételizőnek egy adott szakirányra, illetve szakra. (Elvben az egyetemek határozhatják meg, hogy milyen szintű vizsgát kérnek, azonban az országos igen alacsony teljesítési szint miatt nagyon kevés jelentkező lenne, ezért gyakorlatilag nincs is olyan felsőfokú tanintézmény, amely ilyen elvárásokkal élne.)
Az emelt szintű érettségivel kapcsolatban minden információ megtalálható a következő honlapokon (ukrán nyelven):

Hivatkozások:

[13] http://testportal.gov.ua/

[14] http://osvita.ua/

[15] http://www.mon.gov.ua/

Baranyai Tünde Klára, Stankov Gordana, Jakab Enikő,

Lilla Korenova, Ivan Marinović, Wintsche Gergely

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés
Elfogadom.

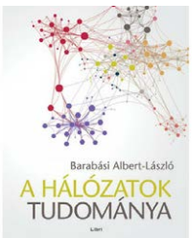
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ** ROVATBAN ELSŐSORBAN OLYAN KÖNYVEKRŐL SZERETNÉNK TUDÓSÍTANI ÉS OLYAN ELEKTRONIKUSAN ELÉRHETŐ ÍRÁSOKAT AJÁNLUNK, AMELYEK A MATEMATIKA BÁRMELY RÉSZE VAGY KAPCSOLATAI IRÁNT ÉRDEKLŐDŐK SZÁMÁRA KÍVÁNATOSAK LEHETNEK. (ROVATSZERKESZTŐ: *TÓTH JÁNOS.)*



Czégel Dániel
2017. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Barabási Albert-László: A hálózatok tudománya

A hálózatkutatás iránt érdeklődő magyar olvasók Barabási Albert-László újabb könyvét vehetik a kezükbe. *Czégel Dániel* szerint érdemes elolvasni, szellemi szórakozást kínál a felsőbbfokú matematikában jártas és kevéssé jártas olvasóknak egyaránt.

Molnár Zoltán Gábor
2017. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Gödel nemteljességi tételei: értelmezések és félreértések

Főként arról szól ez a tanulmány, hogy Gödel első és második nemteljességi tételének a népszerűsítő irodalomban szereplő interpretációi milyen értelemben tekinthetők helyesnek vagy hol váltanak át parttalan fantáziálásba, elfeledkezve arról, hogy ezek a tételek mindenféle interpretáció nélkül, önmagukban is érdekes állításokat tesznek a matematikáról. *Torkel Franzén: Gödel nemteljességi tételei című, Értelmezések és félreértések alcímű*, a TypoTeX kiadónál 2013-ban megjelent könyvéről *Molnár Zoltán Gábor* írt recenziót.

Csizmadia Ákos
2017. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Matézis, mechanika, metafizika

A Gondolat Kiadó a természettudományok és a matematika, valamint a filozófia, a művészetek, az irodalom és a történettudomány kölcsönhatásait vizsgáló tudománytörténeti sorozatot indított útjára. E sorozat egyik – születésének 100. évfordulója alkalmából Simonyi Károly emlékének szentelt – darabja a *Matézis, mechanika, metafizika*. A 18-19. század korának eszmetörténeti hátterét elsősorban Descartes, Leibniz, Newton és Kant gondolatai adják, de – erre a kötet szerkesztője, *Gurka Dezső* tanulmánya a legjobb példa – a filozófiára éppúgy hatnak a természettudományok, mint a filozófiai gondolatok a tudományok alapkérdéseire. A tanulmánykötetet *Csizmadia Ákos* ismerteti.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Czégel Dániel 2017. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Barabási Albert-László: A hálózatok tudománya

Akár Watts és Strogatz 1998-ban megjelent cikkét a kisvilág hálózatokról, akár Barabási és Albert '99-es skálafüggetlen hálókról szóló közleményét számítjuk a hálózatkutatás megszületésének, mostanra a tudományág nagykorúvá lett. Hogy ez nem csupán korát, hanem szellemi érettségét és jelentőségét tekintve is igaz, nagyszerűen bemutatja Barabási Albert-László A hálózatok tudománya című, itthon 2016-ban a Libri gondozásában megjelent hiánypótló tankönyve.

Tankönyv, mert fő célja az alapfogalmak megismertetése; hiánypótló, mert a terület interdiszciplináris voltához igazodva szellemi szórakozást kínál a felsőbbfokú matematikában jártas és kevéssé jártas olvasóknak egyaránt. Ezt a fejezetek nagyszerűen felépített, emészthető gondolati lépésekből álló matematikai váza mellett az egyes témák kulturális-történeti beágyazottságának bemutatása és a megértést elősegítő esztétikus ábrák teszik lehetővé. Az összekapcsoltság eszméje abban is megjelenik, hogy a szerző rendszerint bemutatja a használt (főleg statisztikus fizikán alapuló) matematikai módszerek alapjait és hálózattudományon kívüli alkalmazásait.

Empirikus eredményeket leírni kívánó matematikai modellek tanítása esetén felmerül a kérdés, hogy magukat a mért jelenségeket mennyire részletesen mutassuk be: a mérési eredmények túl alapos ismertetése unalomba fullaszt, nem elégséges bemutatása pedig nem világít rá a modellek relevanciájára. Ezt a problémát a könyv okosan azzal hidalja át, hogy minden főbb jelenséget egy-egy jellemző példán keresztül mutat be. Az empíriával való kapcsolat fontossága rámutat arra is, hogy miért nem tekintik a hálózattudományt a gráfelmélet alfejezetének: itt ugyanis csak olyan fogalmaknak van létjogosultságuk, melyek valós jelenségek leírását elősegítik. Mivel ezen fogalmak jellemzően statisztikus természetűek, a tankönyv leggyakrabban használt matematikai eszköze a valószínűségszámítás. Ennek ismerete sem szükséges a könyvben való előrehaladáshoz: főbb fogalmait a megfelelő oldalak margóján elhelyezett dobozok mutatják be.

A szerző hálózattudománnyal összefonódott életútját a nulladik fejezet mutatja be; ez egy tanulságos mese a kutatók világában való érvényesülésről napjaink tudománypolitikai környezetében. A hangsúlyok szubjektív megválasztása a könyv hátralevő részében is megmarad; mindazonáltal a fejezetek nagyjából lefedik a hálózattudomány irodalmának alapvető gondolatait.

Az egyes szakmai fejezeteket kiegészíti egy kedvcsináló bevezető, amely bemutatja a hálózattudomány társadalmi és tudományos jelentőségét; egy gráfelméleti bevezető, amely a hálózatok leírásának nem-statisztikus fogalmaira fókuszál; és egy összefoglaló arról, hogy a szerző tapasztalatai alapján milyen felépítésben érdemes hálózattudományt egyetemi kurzus keretében oktatni. Ez utóbbi fejezet nagyszerűen visszatükrözi a könyv fő célját, amely az, hogy a hálózattudomány alapfogalmait beépítse mindennapi gondolkodásunkba.

A könyv nagy erénye, hogy a hálózattudományon kívül használható képességeket is fejleszti: paradigmatikus példákon keresztül mutat be ügyes matematikai közelítő eljárásokat, trükköket, amelyek lehetővé teszik, hogy hozzávetőlegesen megértsük a szóban forgó modelleket anélkül, hogy elvesznénk a matematikai részletekben. Ezek egy részét a minden fejezet végén megtalálható „kiegészítés haladóknak” alfejezet mutatja be, így nem zavarják a főszöveg érthetőségét és tömörségét. Ezen levezetések, valamint a szimulációk és mérések nagy része a szerző mellett *Pósfai Mártonnak* köszönhető.

A magyar fordítás, amely *Kirchner Erika* munkája, kiváló. A hálózattudomány fő fogalmainak magyar megfelelői tekintetében eddig nem volt egyetértés; ezen mű e tekintetben is mérföldkő lehet.

Barabási Albert-László tankönyve tehát élvezetes és hasznos időtöltést kínál az érdeklődő Olvasó számára, felsőbb matematikában való jártasságtól függetlenül.

Czégel Dániel

Barabási Albert-László: A hálózatok tudománya, Libri Könyvkiadó Kft, Budapest, 2016.

https://www.libri.hu/konyv/barabasi_albert-laszlo.a-halozatok-tudomanya.html

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Molnár Zoltán Gábor 2017. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

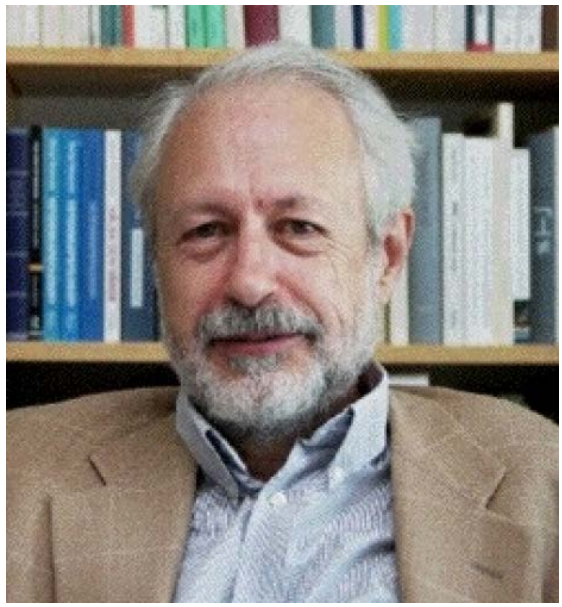
Gödel nemteljességi tételei: értelmezések és félreértések

Történt egyszer, a városi legenda szerint, hogy Esterházy Péter a megjelenése után erősen dicsérte Raymond Smullyan, *Gödel nemteljességi tételei* című könyvét,[1] amit ugyanúgy Csaba Ferenc fordított, mint Torkel Franzén azonos című (de más alcímű) kötetét. Fel is töltötték Smullyan munkájával az *Írók Boltjának* polcait, és a kötet abban az évben a literátus emberek sokaságának került a birtokába. Pedig Smullyan könyve néhány rövid szakaszt leszámítva szinte csak matematikusok számára fogyasztható, szemben Franzénével, hiszen ez utóbbi kötet minden érdeklődő számára szánt érthető olvasmány. Főként arról szól ez a tanulmány, hogy Gödel első és második nemteljességi tételének a népszerűsítő irodalomban szereplő interpretációi milyen értelemben tekinthetők helyesnek vagy hol váltanak át parttalan fantáziálásba, elfeledkezve arról, hogy ezek a tételek mindenféle interpretáció nélkül, önmagukban is érdekes állításokat tesznek a matematikáról.[2]

Torkel Franzén (1950–2006) már nincs köztünk. A nemteljességről írott könyve megjelenésének évében daganatos betegséget diagnosztizáltak nála, és néhány hónap múlva elhunyt, betölthetetlen űrt hagyva a matematikafilozófiát művelők világában. A Luleåi Műszaki Egyetemen, a Számítógép-tudományi Tanszéken dolgozott és a Stockolmi Egyetemen doktorált [7]. Franzénről nem lehet beszélni anélkül, hogy ne beszélnénk Dag Prawitzról (1936–) és Prawitzról pedig nem lehet beszélni, anélkül, hogy ne beszélnénk Gerhard Gentzenről (1909–1945), ezért néhány szóban bemutatjuk azt a logikafilozófiai közeget, amelyben ők alapvető szerepet játszanak.

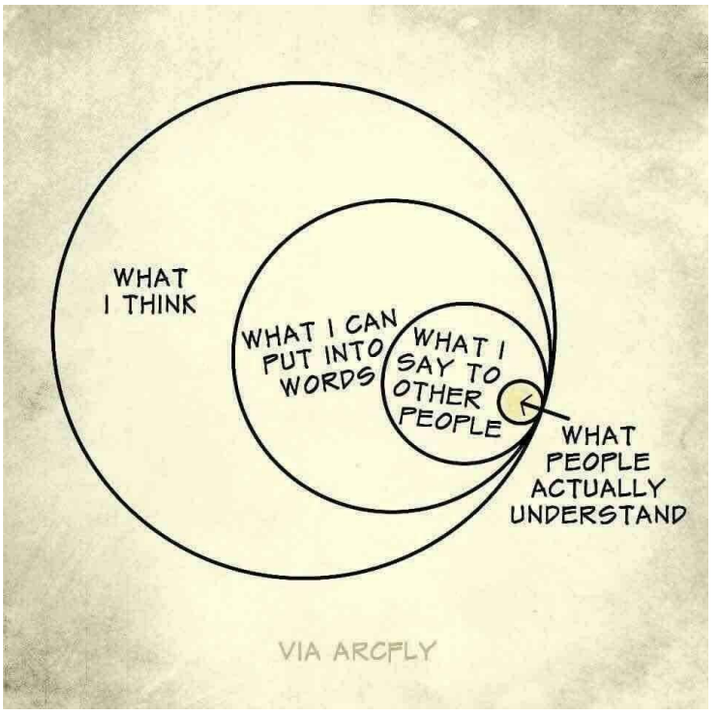
Torkel Franzén 2004-ben, Örnvikben egy konferencián

Gentzen, szemben a matematikai logikában ma is szokásos móddal, amely sok axiómával és kevés levezetési szabállyal dolgozik, olyan rendszert javasolt, amelyben sok a levezetési szabály, és nincsenek (logikai) axiómák. Az ilyen rendszereket természetes levezetési rendszereknek nevezzük. Az elnevezés indoka a következő egyszerű gondolaton alapul. A logikai konnektívumokhoz („és”, „vagy”, „ha, ... akkor, …”, ...) bevezetési és kiküszöbölési szabályokat rendel. A bevezetési szabályok olyanok, amelyek azt mondják meg, hogy egy logikai konnektívumot tartalmazó mondatra milyen körülmények között lehet következtetni. A kiküszöbölési szabályok pedig azt mondják meg, hogy ha egy mondatban egy logikai konnektívum szerepel, akkor ebből milyen következtetéseket lehet levonni. Például a legegyszerűbb: A és B együttes állítása alapot ad arra, hogy következtethessünk A&B-re (ez az &, azaz az „és” bevezetési szabálya); A&B állítása alapot ad arra, hogy akár A-ra, akár B-re következtethessünk. Hozzávetőlegesen ilyen egyszerűek, ilyen természetesek a természetes levezetési rendszer szabályai. Vegyük észre, hogy amikor az imént az „és” értelméről beszéltünk, akkor nem beszéltünk semmilyen értelemben az „igaz” illetve „hamis” értékről. Mi több, az „axióma” kifejezést sem használtuk. Ezeknek a szemantikai fogalmaknak mindenfajta használatát Gentzen elkerülte.



Dag Prawitz

Prawitz Gentzennek egyetlen félmondatát helyezte a vizsgálódásai középpontjába: „a bevezetési szabályok igazolják a kiküszöbölési szabályokat”. Ha ugyanis abban a helyzetben vagyunk, hogy állíthatjuk A&B-t, akkor ez csak úgy lehetett, ha magát A-t és B-t is állítottuk, azaz a kiküszöbölési szabályra egyáltalán nincs szükség. Az a tény, hogy a logika következtetési szabályai között ilyen mélyebb kapcsolat állhat fenn, szöget ütött Prawitz fejében. A levezetés, a bizonyítás a matematikai megismerés folyamatában lényegesebb és világosabb szerepet játszik, mint az, hogy egy matematikai állítás „igaz”. A matematika érvényes állításainak elkülönítésében és értelmük feltárásában a levezetés játszik alapvető jelentéselméleti szerepet, konkrétan pedig Prawitz arra az álláspontra helyezkedett, hogy a matematika jelentéselmélete rokonítható az analitikus nyelvfilozófiában használatelméletnek nevezett állásponttal. Gentzen félmondatán elgondolkodva Prawitz még arra is megkísérelt választ adni, hogy milyen jellegzetességekkel bír a matematikai nyelvnek ez a használatelméleti szemantikája. A matematikai kifejezések jelentése csak olyasmi lehet, amit *kommunikálni* lehet. Amit nem lehet megfogalmazni, közös és általános tudományos diskurzus tárgyává tenni, az nem lehet a jelentés része. Nincs értelme azon jelentésrészeknek, amelyekről ugyan az egyes szereplők külön meg vannak győződve, de nem tudnak beszélni róla. Jól ábrázolja ezt a jelenséget az alábbi mém: eszerint a szociálkonstruktivista felfogás szerint a legbelső pici körben lévő szakmai kommunikációra alkalmas mondanivaló az, ami a voltaképpeni (objektív) matematikát alkotná [6].



Hogyan érhető tetten ez a szemlélet Franzénnál? Franzén doktori témavezetője Prawitz volt, és mindenestül magáévá tette azt a személetet, mely képes elrugaszkodni nem csak az „igaz” és „hamis” használatától, de még a halmazelmélettől is. Képes tehát arra is, hogy a gyakorló matematikusok között általános halmazelméleti realizmusnak nevezett világnézettől eltérő módon szemlélje a matematikát, például ne hivatkozzon a véges Neumann-rendszámok ω halmazára, mely végső soron nem más, mint amit a középiskolában a természetes számoknak neveztünk.[3] Ne feledjük el, hogy ezt mindenféle tudományos inkorrektség nélkül megteheti, mert a matematikáról való gondolkodásnak is megvannak a maga tudományos módszerei, amelyeket éppen olyanok fektettek le, akik maguk is kiváló matematikusok voltak, gondolok itt David Hilbertre, Alfred Tarskira, Neumann Jánosra vagy Kurt Gödelre. Nos, Franzén, amikor a Gödel-tétel félreértelmezéseiről beszél, nagyon alaposan részletezi és mindkét oldalról (a halmazelméleti realizmus és a használatelmélet szempontjából is) megvilágítja a tévedések okát és esetleges javíthatóságát. Ez mindenképpen olyan unikális eljárás, mely sok élvezetet fog okozni azoknak is, akik már találkoztak a témával. Ráadásul hű a Gödel-tételkör megalkotóihoz is, akik még képben voltak Hilbert és Gentzen informális matematikafelfogását illetően.

Ha az ember figyelmesen olvassa a könyvet, akkor arra a következtetésre juthat, hogy Franzén, amellett, hogy nagyon széles perspektívát nyújt a tétel értelmezéseiről, megfogalmaz egy matematikafilozófiai tézist is, és ezt a tanulmányában központi helyre pozicionálja. A következő meglepő állítást teszi a formális-axiomatikus számelméletre, azaz a Peano-aritmetikára (PA) vonatkozóan:

> Másképpen: csupán a „PA konzisztens” és a „PA-ban bizonyítható az ikerprím sejtés” állítások alapján nem következtethetünk arra, hogy végtelen sok ikerprímpár létezik. (58. o.)

Illetve, amit többször is említ, és ami a (matematikai logikusok számára igen meglepő) tézise lenne:

> A nemteljességi tétel konkrét példával szolgál olyan *konzisztens elméletekre, amelyekben hamis állítások is bizonyíthatók.* (42. o.)

Hangsúlyozom, hogy Franzén nem áll a halmazelméleti realizmus talaján, tehát ezen nem azt érti, hogy valamely számelméleti állítás nem igaz ω-ban, hanem hogy egy más értelemben nem igaz.[4] Itt valami olyanról beszél, ami a formális nyelvekkel kapcsolatos igazsághoz és bizonyításhoz köthető, de nem feltétlenül a halmazelmélethez. Először egy nagyon gyenge érvet fogok az állítása mellett felhozni, majd megpróbálok rámutatni arra, hogy Franzénnak, amennyiben fenntartja az állítását, miért kell mégis csak a halmazelméleti realizmust elfogadnia.

A gyenge (de legalább jó) próbálkozás Franzén tézisének igazolására a következő gondolatkísérlet. Először is a formális rendszerek formális állításai formális bizonyításainak létezése nem feltétlenül vonja maga után, hogy az állítás „a valóságban is igaz”. A legegyszerűbb példa a Ramsey-tétel egy véges változata, mely tulajdonképpen teljesen mindegy, hogy mit mond ki – a skatulyaelv egy általános verzióját –, a lényeg, hogy PA-ban megfogalmazható, de nem vezethető le belőle.[5] Azt a tényt, hogy a véges Ramsey-tétel ezen verziója (nevezzük VRT-nek) nem vezethető le PA-ból, Paris–Harrington-tételnek hívjuk, tehát ez egy matematikai logikai tétel [5]. A halmazelméletben (mondjuk ω elemeire) VRT bizonyítható. Most nem arra szeretném felhívni a figyelmet, hogy ez milyen érdekes, hanem a másik szemszögből közelíteném meg a problémát. Tegyük fel, hogy azok, akik kitalálták a PA-t, nem szándékozták a VRT-t igaznak tekinteni, mert mondjuk olyan bonyolultnak tartották, hogy nem hittek benne. Éppen ezért úgy alakították ki PA axiómarendszerét, hogy abból a VRT-t ne lehessen levezetni. Mivel nem hittek benne, nem is tartották igaznak. És valóban, VRT nem is levezethető PA-ból. Ám az a helyzet, hogy a VRT már az úgynevezett másodrendű aritmetikában, a PA_2-ben is levezethető. PA_2-ben beszélhetünk a természetes számok részhalmazainak konkrét halmazairól is, ami szintén olyan tevékenység, amit korábban nem feltétlenül szerettek volna a számokkal foglalkozók (gondolok itt Eukleidészre, vagy a skatulyaelvre utaló első szerzőre, Jean Leurechon jezsuita szerzetesre, esetleg magára Giuseppe Peanora), ezért nem meglepő, hogy egy olyan eredmény is kijött, melynek az igazsága eredetileg nem volt kívánatos. Ekkor tehát azt mondjuk, hogy ha PA_2 ellentmondásmentes, akkor belőle egy nem szándékolt, hamis állítás is levezethető, ti. a VRT. Természetesen ez egy gondolatkísérlet. A feltevéssel szemben Eukleidészék semmit sem gondoltak a VRT-ről és a mai matematikusok azt gondolják, hogy a VRT bizonyítottan igaz. Elképzelhető azonban, hogy egy ilyen megtörténjen, tehát nem kizárt, hogy egy konzisztens formális rendszer ebben az értelemben vett hamis állítást bizonyítson.

Nagyon érdekes tehát, hogy Franzén nem mindig a halmazelméleti igazságra, hanem egy bővebb rendszerre, mondjuk a PA_2-ra vagy más érdekesebb elméletekre hivatkozik. S mivel ezt rendkívül olvasmányosan teszi, ezért ezek a gondolatmenetek akár a matematikában csak középiskolai szinten járatos, akár a magasabb szinten tájékozott olvasónak örömére és tanulságául szolgálhat. Vannak azonban olyan részei a könyvnek, mely a matematikai logika területén erősen iskolázott olvasó számára is kihívást jelentenek, de ezek a részek nem gyakoriak, és főleg a fent említett – a matematikai igazsággal kapcsolatos – téziséhez kapcsolódnak.

Azt mondja ugyanis Franzén, hogy egy *A* formális matematikai állítás igaz, ha az, amit *A* állít (mond, kifejez, megfogalmaz), a valóságban is úgy van. Ezt nagyon helyesen Alfred Tarskira hivatkozva teszi, melyet *Tarski-féle T-sémának* nevezünk:

> Alfred Tarski a múlt század 30-as éveiben mutatta meg, miként adható meg az igazság matematikai definíciója úgy, hogy az „*A* igaz” állítás ekvivalens legyen *A*-val. Tarski elméletét ebben a könyvben nem tárgyaljuk részletesen. (59. o.)

Nos, ez az utóbbi elég helytelen dolog, mert Tarski nem hallgatott el egy lényeges problémát [8]. Azt, hogy ez az elv ugyan sokszor megvalósítható, de konkrétan a formális-axiomatikus számelmélet esetén nem. Ott, a PA-ban, éppen az a helyzet, hogy van olyan *A* formális számelméleti kijelentés, melyet lefordítva természetes nyelvre (megnézzük mit mond valójában), a természetes nyelvi fordítása ekvivalens lesz azzal, hogy *A* hamis. Ez ugyanannak a jelenségnek a következménye, ami a Gödel-tételben is tapasztalható, csak nem a bizonyíthatóságra, hanem az igazságra vonatkozóan [4]. Természetesen vannak nagyon egyszerű formális állítások, melyeknek az igazsága problémamentes. Így például az 1+1=2 kijelentés pontosan akkor igaz, ha egy meg egy az kettő. De sokkal bonyolultabb állítások esetén a matematikai logikusoknak olyan tulajdonságokat kell megkövetelniük a számelmélet nyelvén felírt axiómarendszerekre vonatkozóan, amelyek legalább a formális állítások egy körére biztosítják, hogy ezeknek az igazsága ekvivalens legyen a természetes nyelvi fordításukkal. Az ilyen megszorítások azonban hivatkoznak ω-ra. Tehát vagy elfogadjuk a halmazelméleti realizmust vagy egyszerűen nem hivatkozunk az igazságra. Ezen kívül is vannak még megoldások, amelyekkel matematikafilozófusok éltek (akár David Hilbert [9], akár Michael Dummett [3]), de ezek a megoldások nem olyan egyszerűek, hogy egy olyan megnyugtató mondatba lehessen megfogalmazni, mint amilyen a Tarski-féle T-séma.[6] Sajnos ingatag lábakon álló tézisből messzemenő következtetéseket von le, például azt, hogy ellentmondásmentes elméletből hamis állítás is levezethető. Szerintem ez nem csak szokatlan, de hamis állítás is. Egy szó, mint száz, remélem, hogy az Olvasó is a Franzén és a köztem lévő nézetkülönbségben egy izgalmas diskurzus lehetőségét látja.

A könyvnek van egy nagyon figyelemre méltó része, mely a Gödel-tétel és az algoritmusok, a kiszámíthatóság kapcsolatát vizsgálja. Ezt együtt tárgyalja a Gödel-tétel és a diofantoszi egyenletek kapcsolatával, amely a középiskolai tudáshoz sokkal közelebb lévő fogalmakkal meséli el ezt a témakört. Ez a két átfogalmazás, a számítógépes interpretáció és a számelméleti egyenletek nyelvén elmondott történet azok számára is sokat mond, akik az egyetemen már találkoztak a Gödel-tételekkel, ritkaság ugyanis, hogy a matematikai logikai képzésben kitérnének arra, hogy milyen kapcsolat van a diofantikus egyenletek és a nemteljességi tételek között. Aki esetleg a könyv elejét magasabb matematikai műveltsége miatt unalmasnak találja, az is nagyon sok élvezetes és új gondolatmenetet találhat a kiszámíthatóságról szóló fejezetekben.

Csaba Ferenc fordítása szakmailag rendkívül megnyugtató. Régi jó ismerős ő logikai tárgyú könyvek és cikkek fordítása terén és nyelvhasználatban, szakmaiságban nem tud tévedni. Hogy csak egy alapvető tényt mondjak: *A matematika filozófiája a XXI. század küszöbén* c. gyűjteményes kötet, melynek ő a szerkesztője és a benne lévő cikkek közül néhánynak fordítója, elengedhetetlen a magyarországi matematikafilozófiai képzésben [1]. Két egyetem (a BME és az ELTE) egészen biztosan használja matematikafilozófiai népszerűsítő és professzionális kurzusain is. Összességében annak is örülhetünk, hogy Franzén könyve a kezünkbe kerülhet, de annak is, hogy ezt Csaba Ferenc kiváló fordításában olvashatjuk.

Torkel Franzén: Gödel nemteljességi tételei Értelmezések és félreértések, TypoTeX, 2013

Molnár Zoltán Gábor

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

A közölt képek forrásai sorrendben:

http://www.sm.luth.se/csee/csn/Ornvik2004Photos/

https://pp-prod-admin.it.su.se/polopoly_fs/1.208175!/image/image.jpg_gen/derivatives/article_465/image.jpg

https://yujiearthman.wordpress.com/2016/08/22/what-i-think-what-i-can-put-into-words-what-i-say-to-other-people-what-people-actually-understand/

Hivatkozások

[1] Csaba Ferenc, (szerk.), *A matematika filozófiája a XXI. század küszöbén.* Osiris, Bp. 2003.

[2] Raymond Smullyan, *Gödel nemteljességi tételei,* TYPOTeX, ford.: Csaba Ferenc, (1999), 2005

[3] Michael Dummett, *The philosophical significance of Gödel's theorem,* Ratio 5, 140–155. (1963), Reprinted in M. Dummett: Truth and Other Enigmas, Duckworth, London, 1978, 186–201., p. 186.

[4] Gödel, Kurt, *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems,* in From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931, ed.: Jean Van Heijenoort, Harvard University Press, 1967

[5] Paris, J. and Harrington, L. *A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic. In* Jon Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics),* North-Holland; New edition 1982

[6] Dag Prawitz, *Jelentés és bizonyítás: a klasszikus és intuicionista logika konfliktusa in* [1]

[7] Solomon Feferman nekrológja a FOM (Foundations of Mathematics) levelezési listán: http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/2006-April/010463.html

[8] Alfred Tarski, *Az igazság fogalma a formalizált nyelvekben,* in: Ruzsa I. (szerk.), *A. Tarski – Bizonyítás és igazság,* Gondolat, 1989

[9] Zach, Richard, *The Practice of Finitism: Epsilon Calculus and ConsistencyProofs in Hilbert's Program,* Synthese, 137:211-259, 2001.

Lábjegyzetek

[1] Raymond Smullyan, *Gödel nemteljességi tételei,* TYPOTeX, ford.: Csaba Ferenc, (1999), 2005
http://www.typotex.hu/book/196/raymond_smullyan_godel_nemteljessegi_tetelei

[2]*Gödel első nemteljességi tétele* azt mondja, ki, hogy a formális-axiomatikus számelmélet minden ellentmondásmentes, az emberi elme által áttekinthető axiómákkal történő bővítése olyan, hogy abban megfogalmazható egy olyan számelméleti állítás, amely se nem bizonyítható, se nem cáfolható az axiómák alapján. *A második tétel* pedig azt mondja ki, hogy ugyanebben az axiómarendszerben az axiómarendszer ellentmondás-mentességét megfogalmazó számelméleti állítás nem bizonyítható.

[3]Szűk értelemben véve, azaz a számelmélet kontextusában a halmazelméleti realizmus olyasmit jelent, hogy a számokat azonosítjuk a véges Neumann-rendszámokkal. A szokásos halmazelméleti felépítésben az üres halmaz felel meg a 0-nak, az üres halmazt tartalmazó egyelemű halmaz az 1-nek, ez utóbbi kettőt tartalmazó kételemű halmaznak a 2, és így tovább. Ezeknek a halmazoknak a halmazát nevezzük a véges Neumann-rendszámok halmazának és ω-val (omegával) jelöljük.

[4] Lásd a 3. lábjegyzetet.

[5] A véges Ramsey-tétel ezen verziója a következő. Minden pozitív egész n, $k>1$ ill. $m>n-1$ számhoz található olyan N pozitív egész szám, hogy ha kiszínezzük a $H = \{1, 2, 3,..., N\}$ halmaz összes n-elemű részhalmazát k színnel, akkor lesz H-nak olyan K

részhalmaza, mely legalább m elemet fog tartalmazni úgy, hogy K-nak minden n-elemű részhalmaza azonos színből fog állni, és K elemeinek száma legalább annyi, mint K elemei közül a legkisebb.

[6] Franzén a gondolatmenetében a 42. oldalon elfeledkezik arról, hogy Tarski feltette, hogy amikor a természetes nyelvben megfogalmazunk egy matematikai elméletet, akkor ott ugyanazokat a matematikai axiómákat kell megkövetelnünk, mint amelyeket a formális elméletben posztuláltunk (különben a fordítás nyilvánvalóan elromlik). Amikor Franzén áttér egy új axiómarendszerre a ZFC +„ZFC inkonzisztens”-re, akkor elfelejti az új axiómának megfelelő természetes nyelvi axiómát hozzávenni az eddigiekhez. Nehezíti még a problémát, hogy a fordítás ezen a helyen inkonzisztens helyett konzisztenst mond, ami elég erősen igénybe veszi az olvasó figyelmét. Hasonló elütések sajnos még néhány helyen találhatók a szövegben.

---

recenzió

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Csizmadia Ákos 2017. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Matézis, mechanika, metafizika

A 18–19. századi matematika, fizika és csillagászat eredményeinek reprezentációja a filozófiában és az irodalomban

A Gondolat Kiadó a természettudományok és a matematika, valamint a filozófia, a művészetek, az irodalom és a történettudomány kölcsönhatásait vizsgáló tudománytörténeti sorozatot indított útjára. E sorozat egyik – születésének 100. évfordulója alkalmából Simonyi Károly emlékének szentelt – darabja a *Matézis, mechanika, metafizika*. A 2016-ban megjelent könyv tárgya alcíme szerint *A 18–19. századi matematika, fizika és csillagászat eredményeinek reprezentációja a filozófiában és az irodalomban*. Az időhatárokat pontosítva: a szerzők nem lépnek túl a 19. század második harmadán, ugyanakkor visszanyúlnak a 17. század végéig is. A kor eszmetörténeti hátterét elsősorban Descartes, Leibniz, Newton és Kant gondolatai adják, de – erre *Gurka Dezső* tanulmánya a legjobb példa – a filozófiára éppúgy hatnak a természettudományok, mint a filozófiai gondolatok a tudományok alapkérdéseire. A kötet oly korba kalauzol minket, ahol a megismerés különböző területei még dinamikusan hatnak egymásra, sőt, az egyes diszciplínák határai is bizonytalanok; magának a természettudománynak az értelmezése is más, mint ahogy arra ma tekintünk.

A kötetben négy fejezetbe tagolva tizenkét tanulmánnyal találkozunk. *Schmal Dániel* írása indítja a sort **Leibniz az erők metafizikájáról – ikonográfiai kísérlet** címmel. Schmal Dániel a leibnizi természetfilozófiai szemlélet hatását vizsgálja a mérnöki ábrákra. Burckhard von Birckenstein 1686-os *A trónörökös mértankönyve* címmel ismertté vált könyvének Justus van Nypoort által készített metszetein keresztül mutatja meg, hogy Nypoort ábráiban, ha nem is közvetlenül, de a szerkesztési elvet figyelembe véve észrevehetjük a leibnizi fizika alapelveit. Ahogy Leibniznél az érzékelhető világ, annak geometriai, matematikai leírása és az ok-okozati kapcsolatot létrehozó fizikai közvetítő folyamat egymásra rétegezve, együtt adják ki az „egész harmóniáját”, Nypoort metszetein is láthatjuk a tájak, erődök valósághű ábrázolásait, valamint azok lényegének mértani megjelenítéseit. A mértani szerkesztések is a konstrukció folyamatát megjelenítő dinamikus folyamatábrák: az érzékekkel észlelt mozgalmas világ, valamint a dinamikus folyamatábrák a leibnizi fizika két rétegét jelenítik meg, míg a harmadik rétegnek, a „legmélyebb valóságnak” a kettőt egybefogó kompozíciós erő felel meg[1].

Mester Béla **Rozgonyi József Kant-kritikájának matematikafilozófiai aspektusai** c. munkája Rozgonyi József (1756–1823) losonci és sárospataki tanár Kant-bírálatának újabb aspektusaival ismertet meg.

Rozgonyi *Dubia* c. művének Kant-bírálata már azért is figyelemre méltó, mert Európa perifériájáról tudott a korban gyorsnak számító módon bekapcsolódni a kontinens centrumának filozófiai vitájába. Rozgonyi német, holland egyetemeken és Oxfordban is megfordult, tisztában volt a skót és német felvilágosodás vitáival. Rozgonyi elsősorban a skót felvilágosodás alakjának, Thomas Reidnek a gondolatai nyomán a common sense, a józan ész alapállásáról bírálja a kanti a priori szintetikus ítéletek lehetségességét. Míg azonban Reid a matematikát csak bírálatának egyik eszközeként alkalmazta, addig a magyar tudós kifejezett hangsúlyt helyezett a matematika megismerést érintő kérdéseire: Rozgonyinál a matematika igen korlátozottan alkalmas a valóság megismerésére, fogalmai csupán a külvilág durva közelítő modelljeinek megalkotására alkalmasak.

Mester Béla rámutat, hogy a magyar filozófia további történetében a Kant-vita sokkal inkább morálfilozófiai, mint ismeretelméleti vitává válik, és a matematikai megismerés kérdése eltűnik a diskurzusból.

Egyed Péter az „egyszerű kézműves polgárcsaládból” származó erdélyi matematikus Sipos Pál (1759–1816) pályáját, filozófiai és teológiai nézeteit ismerteti (**Sipos Pál filozófiája**), s mint típusos pályaívet jellemzi útját. A nagyenyedi református Bethlen Kollégium tanulója, majd szászvárosi részlegének rektora; 1805-től Sárospatakon találjuk. Főúri udvarokban nevelőként is működött, e minőségében a sziráki Telekiek könyvtárának szervezésében és gazdaságának irányításában is részt vesz. 1787-től 1797-ig külföldi utakra indult: hosszabb időt töltött Göttingenben, Bécsben. Élete végén tordosi lelkész: ekkor nyugodtan foglalkozhat irodalommal, filozófiával, matematikával. A kötetben bizonyos értelemben Sipos Pál Rozgonyi ellenpontja: Kant és Fichte magyarországi elfogadtatásáért dolgozik.

Sipos a felvilágosodás szempontjából értelmezte újra a régi filozófiai eszméket, és a valóságot állította gondolkodásának középpontjába. Valóságfelfogásában helyet kapott az ész által rendszerezett tárgyi összefüggések mellett a hitvalóság – a transzcendentális valóság – is. Kant és Fichte nyomán helyez központi hangsúlyt a szabadság kérdésére, melyben a teológus Sipos lelkiismeretet vizsgáló megközelítése nagy hangsúlyt kap.

Nem új Dugonics-képet tár elénk, hanem – címéhez méltón – inkább adalékokkal szolgál és a magyar tudománytörténet-írás egészét érintő fontos aspektusokat vet fel *Békés Vera* **Adalékok Dugonics András matematikapedagógiai munkásságának értelmezéséhez** című tanulmánya. Dugonics piarista tanárként a Jézus Társasága 1773-as feloszlatása után nyerhette el a jezsuita atyák által kényszerűségből elhagyott egyetemi pozíciót Nagyszombaton, majd az egyetem költözése után Budán, végül Pesten. Mint Békés Vera rámutat, Dugonics az eddigi megközelítés szerint tudományos teljesítményére nézve jelentéktelen alkotó, tanári munkássága pedig a magyar egyetemi oktatás színvonalának visszaeséseként értékelhető.

Felvethető azonban, hogy Dugonics háttérbe szorítása talán a Bolyaiak magányos fényét növelni kívánó narratíva eredménye. „A sivár pusztában magányos küzdelmét vívó hős alakja a magyar matematikatörténet narratívájának nagyon is jellegzetes eleme”, írja Békés Vera. Persze ez nem csupán matematikatörténeti jellegzetesség: lábjegyzetben – a nyelvtudomány területéről – a szerző is hoz erre a megközelítési módra egy további példát.

Békés Vera Dugonics matematikai munkásságának újraértékelésére nem vállalkozik, de megemlíti az e tárgykörben tett lépéseket. Tanári teljesítményének felülvizsgálatához azt a kiindulópontot veti fel, miszerint Dugonics mint Abraham Gotthelf Kästner követője az 1800-as évek közepére egy elavult filozófiai iskola tanítványaként tűnt fel; új szemmel vizsgálva a működését azonban „teljesítményének újragondolása tartogathat meglepetéseket”.

Oláh-Gál Róbert **Bolyai Farkas matematikatanárai**t tette kutatása tárgyává. Érdekes az előttünk kibontakozó erdélyi kapcsolati háló. Bolyai Farkas egyik tanítója ugyanis az a Herepei Ádám volt, aki mestere volt Kőrösi Csoma Sándornak is. Id. Kováts József pedig ugyan Bolyai Farkast közvetlenül nem tanította, de az őt elemista korában oktató nagyenyedi deáktanítóknak a tanára volt. Id. Kováts József egy másik neves tanítványa a fentebb már tárgyalt Sipos Pál. A lényegi kérdés persze az, hogy Bolyai Farkas matematikai tudását mely tanára alapozhatta meg: Oláh-Gál Róbert szerint e téren a fő érdem Méhes Györgyé és az általa szerzett, kézzel írott, kanti hatást tükröző *Compendium Geometriae* c. tankönyvé.

Megemlítendő még, hogy matematikaoktatásában Bolyai Farkas Kästnert követte, csakúgy, mint az előbb említett Dugonics András – és Kästner tanulmányozását ajánlotta fia, János figyelmébe is.

A következő részben *Szabó Péter Gábor* Bolyai Farkas munkásságának egy szeletét vette górcső alá: **A mozgás szerepe a geometria felépítésében Bolyai Farkasnál**. Bolyai felismerte a mozgás szerepét egy geometriai rendszer létrehozásában, és három egyszerű mozgásból építi fel az összetettebb mozgásokat, amelyek segítségével származtatja a geometriai alakzatokat. Ebben az eljárásban Szabó Péter Gábor Felix Klein Erlangeni programjának előképét látja.

A **Segner János András munkásságának kanti recepciójá**ban *Gurka Dezső*

tömör, adatgazdag összefoglalását adja Segner életének és sokrétű munkásságának. Segner nem azért kerül tárgyalásra, mert rá hatott volna valamely filozófus, hanem fordítva: az ő matematikai, fizikai tárgyú életműve hatott jelentősen Kantra. Éppen ezért, ha valaki a teljes kötet iránt érdeklődik, talán leginkább ezzel a tanulmánnyal érdemes kezdenie az olvasást.

Segner gondolataival találkozunk Kant folyadékfogalmának leírásakor, és a filozófus átvette Segner földmágnesesség-elméletét is. A leglényegesebb Segner-hatás azonban a kanti szemléletfogalom kialakulásában jelenik meg – a tanulmány rámutat arra a különös tényre, hogy a Kant állítása szerint Segnertől átvett egyszerű aritmetikai példa nem található meg sehol Segner életművében. Ugyanakkor „mindketten egy konkrét és érzékletes matematikai mennyiségeken túli előzetes ismeretre vezetik vissza a számok – illetve tágabb értelemben a fogalmak – konstrukciójának lehetőségét. E lényegi egybeesés éppen a Segner-recepció inspiratív hatását bizonyítja".

Gurka Dezső felhívja a figyelmet arra is, hogy Kant a világ megismerhetőségének kérdését is Segnert említve tárgyalja: az *Einleitung in Naturlehre* címlapjának rézmetszete Íziszt ábrázolja, akinek fátyla elrejti a valódi bölcsességet. Segner e műve 1770-ben jelent meg; a világ megismerhetőségére vonatkozó gondolkodás gyors változását jelzi, hogy Humboldt *Ideen zu einer Geopraphie der Pflanzen* c. 1807-es könyvén Apollón már leleplezi Ízisz szobrát. Korszakhatáron állunk, amikor Kant még állíthatja, hogy csak az a valódi természettudomány, amely a priori megismerhető természettörvényekkel dolgozik; miközben hivatkozási alapja, Segner éppen a kísérletező, empirikus fizikának az alakja. S ez az a kor, amikor a newtoni mechanika már nem kecsegtet a világ teljes megismerhetőségével, de a kísérletező tudomány ismét ennek lehetőségét villantja fel: ahogy Gurka Dezső idézi Schelling 1799-es megfogalmazását, „Minden kísérlet kérdés a természethez, amire a természet kénytelen válaszolni."

Kontler László **„Katolikus tudás" a felvilágosodásban. A csillagász Maximilan Hell stratégiái** c. tanulmánya „olyan gyakorlatokkal foglalkozik, amelyek a tudomány és a tudós szándékainak, értékeinek, érdekeinek a nyilvános térben való megjelenítését és érvényesítését célozzák". Kontler Hell-ábrázolása egy olyan nagyszerű csillagász arcélét villantja fel előttünk, aki tudományos tevékenysége mellett a korabeli asztronómiai információs háló középpontja, és akinek világa a magyarországi kisvárosoktól az európai központokon, uralkodói udvarokon át a sarkvidékig terjed.

Hell működésének megértéséhez a két kiindulási pont Hell identitásának négy aspektusa, és a korszellem, a felvilágosodás három póluson való megnyilvánulása. Hell identitásának négy aspektusa a Habsburg-monarchia iránti lojalitás; a jezsuita rend és a katolikus univerzalizmus iránti elkötelezettség; a respublica litteraria (tkp. az európai tudományos elit) tagja; és a Hungarus tudat (a Magyar Királyság latin nyelvű kulturális öröksége iránti tisztelet). A Hell pályájának felívelését, törekvéseinek érvényesülését elősegítető felvilágosodás három pólusa pedig a Habsburg-udvar bürokratikus-kormányzati felvilágosodása; a katolikus egyházon belül megjelent felvilágosodás; és maga a fősodor, az egyetemes progressziót és az emberi szolidaritás ügyét képviselő felvilágosodás eszméje.

Az udvari felvilágosodás törekvései Hell 1755-ös császári-királyi csillagászi kinevezésében is megjelennek: nemcsak a tudomány művelésére, infrastrukturális gyarapodásra, egyetemi oktatásra vonatkozó passzusokat tartalmazott, hanem utasítást a nagyközönség csillagászati megfigyelésekre való buzdítására, az asztrológiába vetett bizalom rombolására: mondhatni, népművelésre.

Hell kinevezése után hamarosan, 1757-től megjelentette az *Ephemerides* kalendárium sorozatot, mely a kor csillagászatának központi folyóiratává vált. Ekként Bécs és Hell az asztronómia információs központjának szerepét töltötte be; úgy tűnik, ennek az információs hálózatnak a létrejöttében segítette az is, hogy támaszkodhatott a jezsuita csillagvizsgálók együttműködésére.

Hell az 1769-es, a Nap–Föld távolság megmérésre irányuló, sarkkörön túlra vezetett Vénusz-expedíció után hamarosan változtatásokat eszközölt az *Ephemerides* szerkesztésében. Az 1770-es évek közepétől kezdve az európai központok adatainak közlése ritkul, helyette nagyobb hangsúlyt kapnak a német és skandináv területek, valamint a magyar csillagvizsgálók (Nagyszombat, Buda, Eger). Ennek okát Kontler László abban látja, hogy a jezsuita rend 1773-as feloszlatásával és a kormányzatnak a katolikus struktúrák visszaszorítására való törekvésével Hell korábbi bécsi érdekérvényesítő képessége nagyban romlott. Miután nem sikerült létrehozatnia az akadémiát, melyben nagyrészt korábbi tudós rendtársai játszottak volna szerepet, a birodalom magyar része felé fordult: mintegy visszatérve a régi hátországba, és ellenpólust képezve a központosító törekvésekkel szemben. 1776-os magyarországi asztronómiai körútjáról lelkesen számolt be az *Ephemerides*ben: számos tudós társával, köztük sok ex-jezsuitával találkozott, az egri püspök Eszterházy Károlyban pedig a katolikus tudomány új támaszát remélte. Nemzetközi kapcsolatait, az *Ephemerides* lehetőségeit arra is fordítja, hogy megmutassa „az én Magyarországom (hisz' jómagam Ungarus vagyok)", a birodalom keleti felének nagyobb jelentőségét a birodalom központjánál. Emellett a magyar őstörténetet, a honfoglalás és Szent István korszakát érintő történeti vizsgálódásokba is kezdett. Hell törekvései azonban nem gyümölcsöztek: a Sajnoviccsal karöltve hirdetett lapp rokonság felvetése például visszatetszést, vagy egyszerűen értetlenséget keltett a magyar nemességben.

Székely László **a kozmikus anyag körforgásának eszméjét vizsgálja Kantnál és a 19. századi csillagászatban.** Eszerint Descartes-nál még a csillagokból kiáramló és beáramló fény és hő egyensúlyban van, azok örökké fennmaradnak. Fontenelle és Kant szerint viszont az égitestek kihűlnek, ámde újak, akár új világok is

keletkezhetnek.

A 18. század végétől azonban a kérdés valójában már nem a filozófia, hanem a természettudomány körébe tartozik. A természettudomány eredményei pedig egy ködfelhőből formálódó Naprendszertől a kihűlő csillagokig vezető életútra engedtek következtetni; a kihűlt anyagot az újrakeletkezés lehetőségéhez semmi sem vezette át. Az univerzumnak ez a kilátástalanul hideg jövőképe csak egy meglehetősen vigasztalan, szorongással teli létezés lehetőségét nyújtotta az emberiségnek. Ahogy azonban a vallásoknak is szükségük van legalább egy isten örökkévalóságára, ugyanúgy a deista és ateista elképzeléseknek is szükségük van az örök materiális kozmoszra; azaz szükséges a holt anyag újjáéledése, szükséges a körforgás elmélete. A körforgáselméletet – mely az új világok és életek keletkezésének lehetőségét nyújtva bizonyos optimizmusra adott lehetőséget – képviselte Engels is.

Székely László végül Madách 1860-ban lezárt művére, *Az ember tragédiájá*ra irányítja a figyelmet. A tragédiában az ember biológiai, szellemi és erkölcsi hanyatlása után maga a világ jut el a fizikai megsemmisülésig. Madáchnál a kilátástalan helyzet megoldása – „Mondottam ember: Küzdj, és bízva bízzál!” – nem bibliai, nem keresztényi, nincs szó üdvözülésről – de mégis transzcendens.

Martinás Katalin és *Tremmel Bálint* **Az impulzusmegmaradás elvének megjelenése és eltűnésé**ben a Leibniz fizikájában használt definíciókat, amennyire lehetséges, a mai fizika definícióival feleltetik meg. Így a Leibniznél alapvető fogalomként szereplő aktív erő részben megfeleltethető az exergiával és a kiterjesztett entrópia nem egyensúlyi járulékával, illetve teljesen megfeleltethető az extrópiával. A passzív erők megmaradásának és az aktív erők csökkenésének leibnizi elve pedig összevethető a termodinamika I. és II. főtételével. Összességében felsejlik a kép, mely szerint a leibnizi gondolkodás nyomain haladva is megközelíthető a fizika felépítése.

Vörös Imre **Descartes és Newton megjelenését vizsgálja a 18. századi magyar irodalomban.** Míg Descartes csak tankönyvekben és értekezésekben bukkan fel, addig Newton elméletei szépirodalmi alkotásokban is témává válnak. Kezdetben a newtoni világkép megjelenése mintegy párhuzama az általános erkölcsi romlásnak; s van, hogy Ptolemaiosz, Tycho Brahe eszméi keverednek Newtonéi közé, mint ahogy a mágnesesség is azonos lehet a gravitációval. 1770 körül következik be a fordulat: az ismeretek letisztulnak, az indulatok alábbhagynak, a newtoni világkép elfogadott és ismertebb lesz. A példák közül említendő Verseghy Ferenc alkotása, aki költeményében arra a gondolatra jut, hogy a gravitáció Istennel azonosítható.

Az utolsó közlemény *Balogh Piroskáé*: **Szerdahely György Alajos és Schedius Lajos János** esztétikaprofesszorok művészetszemléletében vizsgálja a csillagászat szerepét.

A csillagászat iránt érdeklődő Schedius a magyar sajtótörténet kiemelkedő jelentőségű folyóiratának, az Urániának a címadásában játszhatott szerepet. Az Uránia indulásának idején zajlott ugyanis a vita, hogy a William Herschel által 1781-ben megtalált új bolygónak, melyet a felfedező „György király csillaga”-ként említett, mi legyen e végleges elnevezése: Uranus vagy Urania. Hell *Ephemerides*ében Szerdahely György Alajos – Hell inspirációjára – közölt egy latin nyelvű verset, Urania mellett téve le a voksát. Nyilvánvalóan feltehető, hogy az Uranus/Urania vita nem kerülte el Schedius figyelmét sem. Schedius ott bábáskodott az Uránia folyóirat megszületésénél; lehetséges, hogy a lap bevezető soraiban is vállalt feminitást tükröző címválasztás a csillagászati érdeklődésű esztétától származott.

Szerdahely György Alajos a fent említett Urania-verset több más csillagászati témájú alkotásával együtt kötetbe rendezve 1788-ban megjelentette: az alkotásokban antik mitológia, keresztény világ, csillagászati szimbolika (asztrológiai hagyomány) keveredik spekulatív kozmológiával.

Összegezve, a *Matézis, mechanika, metafizikáb*an közölt tanulmányok, akár csak kérdésfelvetésekkel vagy adalékokkal, akár kiforrott válaszokkal szolgálnak is: mindegyikük további gondolkodásra és kutatásra inspirál.

Matézis, mechanika, metafizika. A 18–19. századi matematika, fizika és csillagászat eredményeinek reprezentációja a filozófiában és az irodalomban Szerk. Gurka Dezső. Gondolat, Budapest, 2016

Csizmadia Ákos
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

[1] A nyitóoldalon Justus van Nypoort rézmetszete látható a mértankönyvből: Buják látképe, 1686. Forrás: http://rezkarcfitness.blogspot.hu/2011/08/justus-van-der-nypoort.html

matematikatörténet recenzió

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

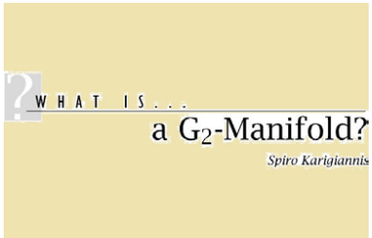
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **TUDOMÁNY** MENÜPONT TÖBBFÉLE, A MATEMATIKA TUDOMÁNYÁHOZ KAPCSOLÓDÓ FUNKCIÓT TAKAR..**A TUDOMÁNY– TÖRTÉNET ROVAT** CÉLJA ELSŐSORBAN MATEMATIKATÖRTÉNETI JELLEGŰ ÍRÁSOK KÖZLÉSE. **A MI IS ...?ROVAT** A MAI MATEMATIKA TUDOMÁNYÁRÓL KÍVÁN SZÓLNI A HOZZÁÉRTŐKNEK.
(ROVATSZERKESZTŐK: *BESENYEI ÁDÁM; STIPSICZ ANDRÁS.*)

Tóth Árpád
2017. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Diofantosz és a diofantikus egyenletek

A 2016-os Abel-díjas Andrew Wiles számos jelentős eredménnyel gazdagította a matematikát, de a világhírt a nagy Fermat-tétel bizonyítása hozta meg számára (ld. e számunk Interjú rovatában). Fermat híres állítását Diofantosz Aritmetikájának olvasása közben jegyezte fel. De ki volt Diofantosz? Miről szólt az Aritmetika, és mi motiválta Fermat-t a híres megjegyzésre? *Tóth Árpád* segítségével bepillantást nyerünk a diofantoszi egyenletek témakörébe.



Spiro Karigiannis
2017. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

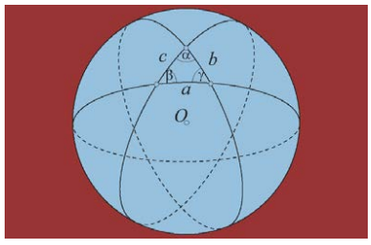
Mi is... egy G2-sokaság?

A *Notices of the American Mathematical Society* című folyóirat 2011. áprilisi számában a *Mi is...?* rovatban jelent meg *Spiro Karigiannis* írása, amely a Riemann-sokaságok holonómia-csoportjának definíciójával kezdődik. Az Érintő Mi is... rovata számára a fordítást *Muzsnay Zoltán* készítette el (a kiadó és a szerző engedélyével).

Illés Tibor, Oláh-Gál Róbert
2017. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Farkas Gyula nyomában: Szemelvények egy természettudós életéből és tudományos hatásából

Idén ünnepeljük Farkas Gyula fizikus, matematikus születésének 170. évfordulóját. Farkas Gyula életének jelentősebb eseményei – ma már – ismertek a magyar tudományos közélet előtt. *Illés Tibor* és *Oláh-Gál Róbert* megemlékezésében két kérdéssel foglalkozik: a Farkas-lemma hatásával és Farkas Gyula életének, néhány – nem mindenki számára ismert – részletével, amelyek egyszerre mutatják be Farkas Gyulát, az embert és a tudóst.



G. Horváth Ákos

2017. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Nem-euklideszi geometriák, avagy milyen a világ? Konstans görbületű terek

A gondolkodó embert mindig is foglalkoztatta az a kérdés, hogy az őt körülvevő világ milyen. Ennek leírása pedig csak geometriai fogalmakkal lehetséges, így nem meglepő ezek igen korai feltűnése. Jóval a görög matematika megjelenése előtt, már az egyiptomi matematikában találunk pontos térgeometriai számításokat, természetesen a ma euklideszi geometriának nevezett rendszer szabályai alapján. Lambert, Gauss és Riemann munkássága, Bolyai Farkas, Bolyai János és Lobacsevszkij kutatásai nyomán bizonyítást nyer, hogy van minden tekintetben megfelelő globális alternatívája is az euklideszi geometriának. Einstein munkásságával egyidőben alkotja meg Minkowski és Lorentz a téridő matematikai modelljét és alakul ki Minkowski másik geometriája... Ezekről a geometriákról szeretnénk ebben a cikkben írni, hiszen ezek képezik az alapjait minden további, a világ szerkezetének leírása céljából kidolgozott matematikai struktúrának. *G. Horváth Ákos*

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Erintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

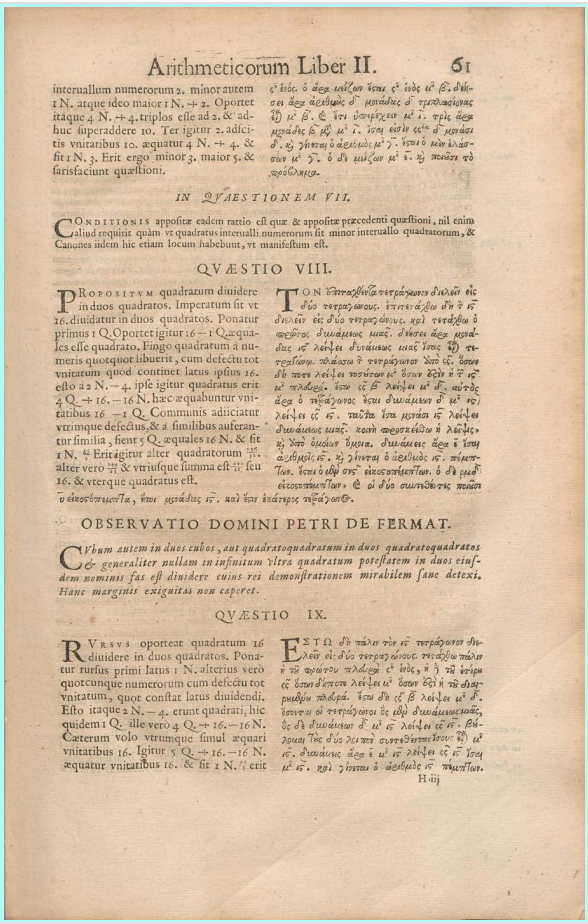
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap

Tóth Árpád 2017. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Diofantosz és a diofantikus egyenletek

A 2016-os Abel díjas Andrew Wiles számos jelentős eredménnyel gazdagította a matematikát, de a világhírt a nagy Fermat-tétel bizonyítása hozta meg számára: ha $n > 2$, akkor az $x^n + y^n = z^n$ egyenletnek nincsen olyan megoldása, ahol x, y, z zérustól különböző egészek.

Fermat ezt az állítást Diofantosz Aritmetikájának olvasása közben jegyezte fel. Az állítás, hogy az $x^n + y^n = z^n$ egyenletnek nincs pozitív egész megoldása, könnyen érthető, de a bizonyítás évszázadokba telt.



Arithmeticorum Liber II. 61

interuallum numerorum 2. minor autem 1 N. atque ideo maior 1 N. + 2. Oportet itaque 4 N. + 4. triplos esse ad 2. & adhuc superaddere 10. Ter igitur 2. adicitis vnitatibus 10. æquatur 4 N. + 4. & fit 1 N. 3. Erit ergo minor 3. maior 5. & satisfaciunt quæstioni.

IN QVÆSTIONEM VII.

CONDITIONIS appositæ eadem ratio est quæ & appositæ præcedenti quæstioni, nil enim aliud requirit quàm vt quadratus interualli numerorum sit minor interuallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum a numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto a 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16. − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & a similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$. Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$ & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

CVbum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16 diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ erit

H iij

Az Aritmetika Fermat jegyzeteivel ellátott kiadásából. A híres bejegyzés: “Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.” Avagy Bródy Ferenc míves fordításában: „Nincsen mód viszont felosztani köböt két köbre, sem négyzetes négyzetet két négyzetes négyzetre, és általában a négyzeten túl a végtelenig semmiféle hatványt két ugyanolyan nevezetűre; mely dolognak igazán csudálatos bizonyítását találtam. Szűkebb a margó, semhogy befogadná.”

De ki volt Diofantosz? Miről szólt az Aritmetika, és mi motiválta Fermat-t a híres megjegyzésre?

Az első kérdésre nincs kielégítő válaszunk. Sem Diofantoszról, sem tanárairól, sem tanítványairól nincsenek adataink. Ami biztos, hogy az i.e. 2. század és az i.sz. 4 sz. között élt, valószínűleg az i. sz. 2-3. században.

Diofantoszról a következő rejtvény maradt fenn. Az olvasóra bízzuk, hogy megfejtse, hány évet élt a nagy matematikus, ha az alábbiakat tudjuk róla:

Itt porlad Diofantosz mester, sírköve rajta.
Olvasd, közli veled, mily nagy a kor mit elért.
Élete egyhatodában gyermek volt, s a kamaszkor épp a tizenketted része az éveinek.
Számold rá a hetedrészt, ekkor házasodott meg.
Erre öt esztendőt, s megszületett a fia.
Ó jaj, szörnyű csapás ha fiunk megelőz a halálban!
Csak felennyi időt mért a fiúnak a sors mint neki.
Végül hogy négy év eltelt a magányban, várta a révész már, s átevezett vele is.

Diofantosz fő műve, az Aritmetika, témájában, eszközeiben és kifejezésmódjában is teljesen eltér az általunk ismert klasszikus görög matematikától. Az eredetileg 13 kötetből csupán 6 maradt fenn görögül, további példányok arab nyelven kerültek elő 1968-ban. Az arab könyvek feladatai más számozásúak, alkalmanként különböznek is. A görög nyelvű kötetek nagy valószínűséggel Hüpátia kommentárjai az eredetiről. (Heath: A history of Greek mathematics.)

Hüpátia Raffaello vatikáni freskóján. (Vagy nem.) Hüpátia (i.sz. 360 körül-415). Egy kortársa, Konstantinápolyi Szókratész egyháztörténeti leírása szerint „élt ebben az időben Alexandriában egy hölgy, Hüpátia, Theon filozófus lánya, aki oly sikereket ért el az irodalom és a tudományok terén, hogy jóval előtte járt minden kortárs filozófusnak. Platón és Plótinosz iskoláját kijárva, a filozófia alapelveit tanította diákjainak, akik közül sokan messze földről érkeztek.” Az egyik ilyen diákja, Kürénei Szünésziusz, későbbi püspök, így írt egy levelében neki: „Legnagyobb veszteségem, hogy nem lehetek az ön isteni szellemének közelében”. Hüpátia munkái is elvesztek, csak az Aritmetika átdolgozása maradt fenn.

A közhiedelemmel ellentétben Diofantosz elfogadott racionális számokat is megoldásként, mint a II. könyv híres 8. feladatában is, ami Fermat-t a híres margójegyzetre sarkallta. Habár megoldásként csak pozitív számokat fogadott el, számolás közben minden fenntartás nélkül használt negatív számokat is, tehát az elsők között ismerte fel a racionális számtest technikai előnyeit.

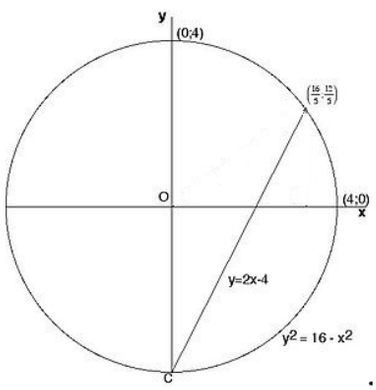
Amikor a XVI. században Európában újra felfedezték Diofantosz munkáit, az egyik első olvasója Bombelli olasz matematikus volt. Ő az Aritmetikában szereplő problémák jelentős részét beépítette Algebra című könyvébe, de a negatív számok használatából inspirációt merítve komplex számokat is használt harmadfokú egyenletek megoldására. Például az $x^3 = 15x + 4$ egyenlet megoldására a Cardano-féle képlet az $x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$ komplex számot adja. Bombelli megmutatta, hogy ez értelmezhető 4-ként (ami egy nyilvánvaló megoldás).

Diofantosz egy mai szemmel ugyan kezdetlegesnek tűnő algebrai jelölésrendszert használt, ám ez jelentős előrelépés volt a hagyományos körmondatokban leírt algebrai konstrukciókhoz képest. Pl. a változót ζ-val, a négyzetét Δ^{ν}-vel jelölte. A negatív előjelre a ψ megfordítottját, vagyis $\pitchfork$-t használta. Ugyanakkor ezzel a jelöléssel csak egy változó hatványait tudta jelölni, ezért ha további paraméterek jelentek meg, azokat mindig konkrét számnak választotta.

Így a XIX. században már sok olvasó számára tűnthetett úgy, hogy a könyv ad hoc trükkök gyűjteménye, és a többség egyetértett Hankel szavaival, aki szerint „100 probléma tanulmányozása után sem fogja tudni megoldani a 101-edik problémát”. Pedig ez távolról sincs így, a jelölésrendszeren és a racionális számtest használatán túlmutatóan is alapvető módszerek jelentek meg az Aritmetikában, amit alább két fontos példával is illusztrálunk.

Az első példa a fent említett II. könyv 8. feladata, ami Fermat-t híres sejtése megfogalmazására sarkalta. „Propositum quadratum dividere in duos quadratos...” azaz „Osszunk egy négyzetet két négyzet összegére”. Diofantosz megoldása (a fenti képen látható latin szövegben az N szám négyzetét Q jelöli, mi ehelyett a mai N^2 jelölést alkalmazuk) a következő.

Legyen a négyzet 16. Legyen az egyik oldal N^2, tehát a másik $16 - N^2$. Ez utóbbinak négyzetnek kell lennie. Egy olyan négyzetet képezek, amelynek oldala az N tetszőleges többszöröse a(z eredeti) négyzet oldalával csökkentve. Ez $2N - 4$[1]. Így ez a négyzet $4N^2 + 16 - 16N$. Ezt egyenlővé teszem $16 - N^2$-tel. Mindkét oldalhoz hozzáadok $N^2 + 16N$-t és kivonok 16-t. Így $5N^2 = 16N$ adódik, amiből tehát $N = 16/5$ következik. Tehát az egyik szám $\frac{256}{25}$, a másik pedig $\frac{144}{25}$. A két szám összege 16 és mindkettő négyzet.



Diofantosz szelő módszere

A megoldás a koordináta-geometria nyelvén jobban megérthető. Az $x^2 + y^2 = 16$ körön keresünk olyan pontot amelynek mindkét koordinátája (pozitív) racionális szám. A nyilvánvaló $(0, -4)$ ponton át indítsunk egyenest, pl. Diofantoszt követve legyen ez az egyenes az $y = 2x - 4$ egyenlettel megadva. Ez az egyenes két pontban metszi a kört, a $(0, -4)$ pontban, és a $(16/5, 12/5)$ pontban.

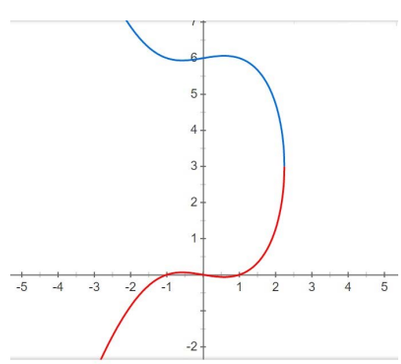
A módszer tetszőleges racionális meredekségű egyenesre ad egy új pontot. Ha $y = \frac{m}{n}x - 4$ akkor a másik metszéspont koordinátái egyszerűen kifejezhetők m, n segítségével. Az érdeklődő olvasó 16 helyett 1-et véve jobb oldalnak, az $x^2 + y^2 = 1$ megoldásait kifejezheti a $(0, -1)$ ponton átmenő $\frac{m}{n}$ meredekségű egyenest használva. Ily módon megadhatja az összes pitagoraszi számhármast, hiszen $a^2 + b^2 = c^2$ esetén $x = a/c$ és $y = b/c$ racionális megoldásai az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletnek.

A következő feladat megoldásának geometriai tartalma még érdekesebb.

IV. Könyv. 24. feladat. Bontsunk egy számot két részre, hogy a szorzatuk egy köb mínusz az oldal[2]. Diofantosz az „egy számot” 6-nak választja, így az

$$y(6 - y) = x^3 - x$$

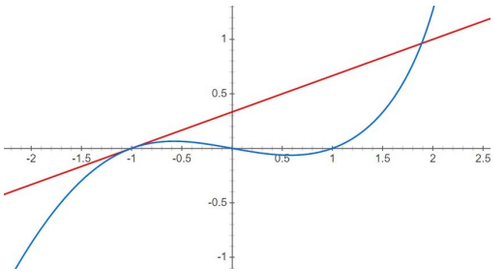
egyenletet kapja.



Ennek nyilvánvaló megoldása $x = -1$, $y = 0$. Nem véletlen tehát, hogy Diofantosz megint így gondolkodik: Az x szám legyen az y egy többszöröse eggyel csökkentve, azaz $x = ay - 1$. Ezután megkeresi a azon értékét amikor $(ay - 1)^3 - (ay - 1)$-ben y együtthatója 6. Ez akkor áll fenn, ha $a = 3$. Ekkor $6y - y^2 = (3y - 1)(3y - 2)3y$, azaz

$$-y^2 = 27y^3 - 27y^2.$$

Tehát $y = 26/27$ és $x = 17/9$.



Diofantosz érintő módszere

Talán az a legmeglepőbb az algebrai konstrukció ábráján, hogy Diofantosz itt egy görbe érintőjét konstruálja meg tisztán algebrai eszközökkel.

Az érintő-egyenes és a harmadfokú görbe metszéspontjai olyan racionális együtthatós harmadfokú polinomra vezetnek, aminek $y = 0$ kétszeres gyöke, így a harmadik gyöknek is racionálisnak kell lennie. Ez ismét csak egy általános módszer, aminek mélységét csak a XX. században, az elliptikus görbék tanulmányozásával értettük meg. Ezek a görbék (lásd lejjebb) megkerülhetetlen szerepet játszottak Fermat sejtésének megoldásában.

Érdekes módon Fermat (aki Descartes mellett a koordináta-geometria egyik megalkotója is volt), Diofantoszt olvasva vezette be a „közelítőleg egyenlő” fogalmát. Fermat a következő okoskodást használta maximumszámításhoz. Ha az $f(x)$ függvénynek maximuma van x-ben, akkor $f(x) \simeq f(x+e)$ közelítőleg egyenlő. Például, ha $f(x) = bx - x^2$, akkor az $f(x+e) - f(x) = (b+2x)e + e^2 \simeq 0$ közelítő egyenlőség akkor állhat fenn, ha $b + 2x = 0$. Fermat „levezetése” komoly ellenállásba ütközött. A pontosítás kísérlete, a végtelenül kicsiny mennyiségek bevezetése, ugyan nem oldotta meg a logikai problémákat, de megfelelő nyelvet teremtett a dinamikusan változó mennyiségek leírására, és több mint 200 évig dominálta az analízist.

Visszatérve a harmadfokú egyenletekkel megadható görbékre, már Newton belátta, hogy ha egy ilyen egyenletknek van legalább egy racionális pontja (azaz egy olyan pont aminek mindkét koordinátája racionális szám, és „rajta van a görbén”, azaz kielégíti az egyenletet), akkor az a változók egyszerű helyettesítése után, megfelelő A, B konstansokkal

$$y^2 = x^3 + Ax + B$$

alakra hozható. Például a fenti IV. 28. feladat esetén, y helyére $y - 3$-at, x helyére $-x$-et írva az

$$y^2 = x^3 - x + 9$$

egyenletet kapjuk.

Az ilyen típusú egyenletek által megadott görbét *elliptikus görbének* nevezzük, ha az $x^3 + Ax + B$ harmadfokú polinom gyökei különbözőek, mert Weierstrass megmutatta, hogy ezek a görbék az Euler és Abel által tanulmányozott ú.n. elliptikus függvényekkel paraméterezhetők.

A XX. század derekán Poincaré észrevette, hogy a Diofantosz által használt szelő-érintő konstrukció az elliptikus görbe pontjain csoport struktúrát eredményez. Ehhez ki kell egészíteni a görbét egy $[0]$ végetelen távoli ponttal; a függőleges egyenesek (és csak ezek) ugyanis csak két pontban metszenék a görbét, és a projektív geometria elvei alapján ezeknek a párhuzamos egyeneseknek a végtelen távoli közös metszéspontját adjuk a görbéhez.

Ezzel a kiterjesztéssel a következő műveletet képezhetjük. Legyen $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ két pont a görbén. Vegyük a P_1 és P_2 pontokon átmenő szelőt, vagy ha $P_1 = P_2$, akkor a pontbeli érintőt. Ha az így kapott egyenes a $P_3(x_3, y_3)$ pontban metszi újra a görbét, legyen

$$P_1 \boxplus P_2 = (x_3, -y_3).$$

(Vegyük észre, hogy ez épp a P_3 pont tükörképe az x-tengelyre nézve.) Ha pedig a kapott egyenes függőleges, azt mondjuk majd, hogy $P_1 \boxplus P_2 = [0]$. Az eredményül kapott $\boxplus$ egy kommutatív, asszociatív művelet, amire nézve a görbe pontjai a végtelen távoli ponttal kiegészítve csoportot alkotnak. Az $y^2 = x^3 - x + 9$ példán illusztrálva a diofantoszi konstrukció a $P(0,3)$ pontra a $P \boxplus P$ pontot számítaná ki.

Ennek a csoportnak a vizsgálata jelentős szerepet játszott a XX. század számelméletében. Ez a konstrukció, Diofantosz szellemében, bármely test (akár véges test) felett is megvalósítható. Egy talán váratlan meglepetésként, ezek a véges elliptikus görbék komoly szerepet játszanak modern kriptográfiai (vagyis titkosírás) alkalmazásokban.

Elliptikus görbék hozták meg a Fermat sejtés bizonyítását is. Frey (illetve korábban Helleougarch) javasolta, hogy a Fermat egyenlet egy hipotetikus $A^n + B^n = C^m$ megoldása esetén az

$$y^2 = x(x - A^n)(x - B^n)$$

elliptikus görbe nem lehetne moduláris. Ennek a gondolatnak a kifejtése külön cikket igényel, ami a következő számunkban jelenik majd meg.

A debreceni egyetem algebra és számelmélet tanszékének munkatársai

Végezetül pár szóban meg kell említenünk a diofantikus egyenletek hazai fellegvárát, a debreceni egyetem számelméleti kutatócsoportját. Ezt az iskolát Győry Kálmán teremtette meg, aki Alan Baker Fields-díjas matematikus módszerét fejleszette tovább. Megemlítendő, hogy Győry Kálmánon kívül, a csoport több más tagja, Pintér Ákos, Hajdu Lajos, Bérczes Attila is használták a Wiles-féle modularitási megközelítést, pl. az

$$Ax^n - By^n = z^n$$

egyenletcsaládra, ahol $AB = 2^\alpha q^\beta$, $q = 3, 5, 7, 11, 13$.

Tóth Árpád

ELTE, TTK Matematikai Intézet

Irodalomjegyzék

1. http://www.abelprize.no/nyheter/vis.html?tid=67106

2. Bashmakova, Isabella G., and Joseph H. Silverman. Diophantus and Diophantine equations. No. 20. Cambridge University Press, 1997.

3. Heath, Thomas Little, and Leonhard Euler. Diophantus of Alexandria: A study in the history of Greek algebra. CUP Archive, 1964.

4. Hellegouarch, Yves. Invitation to the mathematics of Fermat-Wiles. Academic Press, 2001.

5. Koblitz, Neal. “Elliptic curve cryptosystems.” Mathematics of computation 48.177 (1987): 203-209.

6. Liptai, Kriptográfia.
http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0038_matematika_Liptai_Kalman-Kriptografia/ch10s06.html#id538428

7. NSA. The case for Elliptic Curve Cryptography
https://web.archive.org/web/20090117023500/http://www.nsa.gov/business/programs/elliptic_curve.shtml

8. Rónyai Lajos. Fermat utolsó tétele http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=199401

9. Simon Singh: A nagy Fermat-sejtés (Park Könyvkiadó, Budapest, 1998

10. Stopple, Jeffrey. A primer of analytic number theory: from Pythagoras to Riemann. Cambridge University Press, 2003.

11. http://mta.hu/kozgyules2017/akademiai-elismereseket-adtak-at-az-mta-188-kozgyulesen-107676

Lábjegyzetek

[1] Itt Diofantosz a jelölésrendszer hiányosságai miatt, tetszőleges többszörös helyett egy konkrét számot, 2-t, választ.

[2] Ez mutatja, hogy Diofantosz nem hagyományosan gondolkodott, hiszen a megjelenő mennyiségeknek más dimenziójuk van, így egyenlőségük geometriailag értelmezhetlen.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Spiro Karigiannis 2017. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is... egy G2-sokaság?

A G_2-sokaság olyan Riemann-sokaság, melynek holonómiacsoportját a kivételes G_2 Lie-csoport tartalmazza. Ebben a cikkben megmagyarázzuk ezt a definíciót, leírjuk a G_2-sokaságok néhány fontos tulajdonságát, és megvizsgáljuk, hogy milyen hasonlóságok és különbségek fedezhetők fel ezen terek és a Kähler-, valamint a Calabi—Yau-sokaságok között.

Egy Riemann-sokaság *holonómiacsoportja* egy kompakt Lie-csoport, amely bizonyos értelemben globális mértékét adja a sokaság lokális görbületének. A sokaságra és a metrikára tett megfelelően szép feltételek mellett az öt kivételes Lie-csoport közül csak a G_2 léphet fel a tér holonómiacsoportjaként. Berger 1950-es klasszifikációja ugyan nem zárta ki, de az volt az általános nézet, hogy ilyen metrikák nem léteznek. 1987-ben azonban Robert Bryant sikeresen bizonyította lokális példák létezését. Két évvel később — bizonyos vektornyalábok totális terén egy szimmetriamódszert alkalmazva — Bryant és Simon Salamon találta az első teljes, nem-kompakt példákat ilyen metrikákra. Azóta fizikusok igen sok további példát találtak szimmetriával rendelkező G_2-holonómiájú nem *kompakt* terekre. Végül 1994-ben Dominic Joyce okozott nagy meglepetést több száz kompakt példa létezését bizonyítva. Bizonyítása nem konstruktív, felhasználja bizonyos nemlineáris elliptikus egyenletek megoldásának egzisztencia és unicitási eredményeit, ahogy a Kähler-sokaságokon a Calabi-sejtés Yau-féle megoldása sem konstruktív módon igazolja a bizonyos feltételeknek eleget tevő Calabi—Yau-típusú ($SU(m)$-holonómiájú) metrikák egzisztenciáját és unicitását. 2000-ben Alekszej Kovaljov talált G_2-holonómiájú kompakt sokaságokra egy másik konstrukciót, mellyel több száz újabb, nem explicit példát adott. Kompakt esetekre jelenleg is csak ez a két konstrukció ismert. A G_2-geometriákról és néhány kompakt példáról kiváló áttekintést találunk a [3] monográfiában.

A Riemann-holonómiát illetően a G_2 csoport jelentősége valójában nem abban rejlik, hogy ez egyike az öt kivételes Lie-csoportnak, hanem abban, hogy ez az automorfizmuscsoportja az októnionok $\mathbb{O}$ nyolcdimenziós nem asszociatív valós divízióalgebrájának. Az októnionokon adott egy pozitív definit belső szorzat; továbbá az $1 \in \mathbb{O}$ egységelem által kifeszített alteret valós, míg az ortogonális komplementerét tisztán képzetes októnionoknak nevezzük: $\mathrm{Im}(\mathbb{O}) \cong \mathbb{R}^7$. Ez teljesen analóg a kvaterniók $\mathbb{H}$ algebrájával, azzal a különbséggel, hogy az assszociativitás hiánya bizonyos bonyodalmakat okoz. Az analógia alapján bevezethetünk $\mathbb{R}^7$-en egy keresztszorzást az alábbi módon: legyen $u, v \in \mathbb{R}^7 \cong \mathbb{O}$, és legyen $u \times v = \mathrm{Im}(uv)$, ahol uv az októnionok szorzatát jelöli. (Az uv szorzat valós része nem más, mint $-\langle u, v\rangle$, pontosan úgy, ahogy a kvaterniók esetén, ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ az euklideszi belső szorzást jelöli.) Az így bevezetett keresztszorzat eleget tesz az

$$\begin{gathered} u \times v = -v \times u, \\ \langle u \times v, u\rangle = 0, \\ \|u \times v\|^2 = \|u \wedge v\|^2 \end{gathered}$$

relációknak, pontosan úgy, ahogy az $\mathbb{R}^3 \cong \mathrm{Im}(\mathbb{H})$-n bevezetett keresztszorzat teszi. Ugyanakkor van egy különbség: az $\mathbb{R}^3$ keresztszorzatával ellentétben

$$u \times (v \times w) + \langle u, v\rangle w - \langle u, w\rangle v$$

nem zérus, hanem a szorzat nemasszociativitását méri: $(uv)w - u(vw) \neq 0$. Megjegyezzük, hogy $\mathbb{R}^7$-ben a keresztszorzást felhasználva bevezethetünk egy 3-formát (mindhárom változójában lineáris és antiszimmetrikus formát) az alábbi módon: $\varphi(u, v, w) = \langle u \times v, w\rangle$. Itt nem részletezett okok miatt ezt a formát *asszociatív* 3-formának nevezzük.

Azt mondjuk, hogy egy 7-dimenziós sokaságon megadható egy G_2-*struktúra*, ha megadható a hozzá tartozó frame-nyaláb $GL(7, \mathbb{R})$ struktúracsoportjának egy redukciója a természetes módon $SO(7)$-beli részcsoportnak tekinthető G_2 csoportra. Ebből következik, hogy egy G_2-struktúra meghatároz egy Riemann-metrikát és egy irányítást. Valóban, egy G_2-struktúrával ellátott sokaságon létezik egy „nemelfajuló” φ 3-forma, melyre igaz, hogy az M sokaság minden p pontja körül megadható olyan koordinátarendszer, hogy a p pontban a φ megegyezik az $\mathbb{R}^7$-en korábban bevezetett asszociatív 3-formával. Továbbá a φ 3-formából egy metrika és egy irányítás származtatható kanonikus, ugyanakkor erősen nemlineáris módon. E metrika segítségével a φ-ből az „indexek felemelésével” bevezethetünk egy keresztszorzatot. Összegezve: a G_2-struktúrával rendelkező (M, φ) sokaság ellátható metrikával, keresztszorzással, 3-formával és irányítással, melyek eleget tesznek a

$$\varphi(u, v, w) = \langle u \times v, w \rangle$$

feltételnek. Ez teljesen hasonló a majdnem Hermite-sokaságok megfelelő struktúrájához, ahol adva van egy metrika, egy J majdnem komplex struktúra, egy ω 2-forma és egy irányítás, melyek eleget tesznek az

$$\omega(u, v) = \langle Ju, v \rangle$$

feltételnek. Lényegében egy sokaságon akkor adható meg egy G_2-struktúra, ha az érintőtere sima módon azonosítható a képzetes októnionok $\mathrm{Im}(\mathbb{O}) \cong \mathbb{R}^7$ terével, ahogy egy Hermite-sokaság esetén is az érintőtér sima módon azonosítható (a szokásos euklideszi belső szorzattal ellátott) $\mathbb{C}^m$-mel. Az Hermite-sokaságok pszeudo-holomorf görbéihez hasonlóan a G_2-struktúrával rendelkező sokaságokon is megadhatók kalibrált részsokaságok kitüntetett osztályai. A kalibrált részsokaságokról bővebben a [2] dolgozatban olvashatunk.

Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy sokaságon létezzen G_2-struktúra, az, hogy irányítható és hogy spin legyen, ami ekvivalens azzal, hogy az első két Stiefel—Whitney-osztálya zérus. Így tehát igen sok ilyen 7-dimenziós sokaság van, ahogy igen sok majdnem Hermite-sokaság is van. De a történetnek itt még nincs vége.

Legyen (M, φ) egy G_2-struktúrával rendelkező sokaság. Mivel ez meghatároz egy g_φ Riemann-metrikát és egy ehhez tartozó ∇ Levi-Civita-féle kovariáns deriválást is, vizsgálhatjuk, hogy teljesül-e a $\nabla\varphi = 0$ feltétel. Ha igen, akkor az (M, φ)-t G_2-sokaságnak nevezzük, és ekkor megmutatható, hogy a g_φ Riemann-féle holonómiacsoportját tartalmazza a $G_2 \subset SO(7)$ csoport. Egy ilyen „párhuzamos” G_2-struktúrát találni igen nehéz, mert az ismeretlen φ 3-formára egy bonyolult nemlineáris parciális differenciálegyenletet kell megoldani. A G_2-sokaságok esete bizonyos értelemben hasonló a Kähler-sokaságokéhoz, melyek pontosan azok a majdnem Hermite-sokaságok, melyekre teljesül a $\nabla\omega = 0$ feltétel. Ugyanakkor Kähler-sokaságokat sokkal könnyebb találni részben azért, mert a g metrika és a J komplex struktúra lényegében függetlenek egymástól (csak egy enyhe kompatibilitási feltételnek kell eleget tenniük), míg a G_2-sokaságok esetén mind a metrika, mind a keresztszorzat nemlineárisan származtatható a metrikából. Azonban az analógia nem teljes, mert megmutatható, hogy ha $\nabla\varphi = 0$, akkor a g_φ Ricci-görbülete eltűnik. Így tehát egy G_2 -sokaság mindig Ricci-lapos. (Ez az egyik magyarázata annak, hogy miért érdeklik a fizikusokat ezek a sokaságok: a 11-dimenziós M-elméletben — csakúgy, ahogy a Calabi—Yau-féle 3-sokaságok a 10-dimenziós húrelméletben — a „kompaktifikáció" szerepét játsszák. Az [1] dolgozatban áttekintést találunk a G_2-sokaságok szerepéről a fizikában.) Tehát bizonyos értelemben a G_2-sokaságok hasonlóak az olyan Ricci-lapos Kähler-sokaságokhoz, melyek épp a Calabi—Yau-sokaságok.

Ha megengedjük, hogy a holonómia valódi részcsoportja legyen a G_2 csoportnak, akkor igen sok példát kaphatunk G_2-sokaságra. Például a lapos T^7 tórusznak, vagy a $T^3 \times CY2$ és az $S^1 \times CY3$ szorzatsokaságoknak is (ahol CYn egy Calabi—Yau-féle n-sokaságot jelöl) a holonómiacsoportja a G_2-nek egy-egy valódi részcsoportja. Bizonyos értelemben ezek „triviális" példák, mert alacsonyabb dimenziós konstrukciókra redukálódnak. Az olyan sokaságokat, melyek holonómiacsoportja a teljes G_2 csoport, irreducibilis G_2-sokaságoknak nevezzük. Éppen ilyenek azok a sokaságok, melyeket Bryant, Bryant—Salamon, Joyce és Kovaljov konstruált.

Még hiányzik egy „Calabi—Yau-típusú" tétel, mely megadná annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy kompakt 7-dimenziós sokaságon, melyen megadható G_2-struktúra, mikor adható meg olyan G_2-struktúra, mely párhuzamos ($\nabla\varphi = 0$). Igazából még azt sem tudjuk, hogy mi lenne az erre vonatkozó sejtés. Néhány topologikus feltétel már ismert, de messze vagyunk még attól, hogy elegendőségi feltételt adjunk. De ahelyett, hogy ezt a problémát a Calabi-sejtéshez hasonlítanánk, inkább egy másikkal kellene összevetni, amelyre jobban hasonlít. Nevezetesen a következőhöz: tegyük fel, hogy M egy $2n$-dimenziós kompakt, sima sokaság, melyen megadható egy majdnem komplex struktúra. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az M-en létezzen Kähler-metrika? Számos szükséges topologikus feltétel ugyan ismert, de közelében sem vagyunk annak, hogy elegendőségi feltételt adjunk.

Ami miatt a Calabi-sejtés mégis kezelhető (bár kétségkívül nehéz), az az a tény, hogy ha egy Kähler-sokaságból indulunk ki (ahol a metrika holonómiája $U(m)$), akkor az $SU(m)$-hez csak eggyel kell csökkenteni a holonómiacsoport dimenzióját. Ezután a

Kähler-geometria $\partial\overline{\partial}$-lemmája alapján a Calabi-sejtést egy skalárfüggvényre vonatkozó (bár erősen nem lineáris) elliptikus parciális differenciálegyenlet megoldhatóságára lehet visszavezetni. Hasonló „sejtés” a Kähler- vagy a G_2-sokaságok esetén parciális differenciálegyenlet-*rendszerek* megoldhatóságára vezet, melyeket sokkal nehezebb kezelni.

Spiro Karigiannis

Irodalomjegyzék

[1] S. Gukov, *M-theory on manifolds with exceptional holonomy*, Fortschr. Phys. 51 (2003), 719—731.

[2] R. Harvey and H. B. Lawson, *Calibrated geometries*, Acta Math. 148 (1982), 47—157.

[3] D. Joyce, *Compact Manifolds with Special Holonomy*, Oxford University Press, 2000.

Megjegyzések

- Spiro Karigiannis a University of Waterloo adjunktusa. E-mail címe: karigiannis@math.uwaterloo.ca
- A cikk egy korábbi változata a MathOverflow-ban feltett kérdésre adott válaszként jelent meg, és elérhető a `http://mathoverflow.net/questions/49357/g-2-and-geometry` címen.
- A szerző köszönetet mond Pete L. Clarknak, aki e cikket a Notices of the AMS folyóirat “WHAT IS ...?” rovatába javasolta.

- A fenti dolgozat eredetije 2011 áprilisában jelent meg a *Notices of the American Mathematical Society* folyóiratban. Ez a fordítás a szerző és az AMS engedélyével jelenik meg. ***Fordította Muzsnay Zoltán***.
- Spiro Karigiannis, WHAT IS...a G_2-Manifold? *Notices Amer. MAth. Soc.* Vol. 58 Num. 4 (April, 2011) 580-581 ©2011 American Mathematical Society.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Illés Tibor, Oláh-Gál Róbert 2017. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Farkas Gyula nyomában: Szemelvények egy természettudós életéből és tudományos hatásából

170 évvel ezelőtt született Farkas Gyula fizikus, matematikus. Farkas Gyula életének jelentősebb eseményei — ma már — ismertek a magyar tudományos közélet előtt.[1] Megemlékezésünkben két kérdéssel foglalkozunk: a Farkas-lemma hatásával és Farkas Gyula életének, néhány — nem mindenki számára ismert — részletével, amelyek egyszerre mutatják be Farkas Gyulát, az embert és a tudóst.

1. „...eszméinek diadala...”

A tények azt mondják, hogy a magyar matematikusok közül Farkas Gyula lineáris egyenlőtlenséggel kapcsolatos eredményei mára az egyik legidézettebbek! Elevenítsük fel a híressé vált matematikai eredményt Farkas Gyula dolgozatának[2] egy részletével, amelyet a Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályának 1898. október 17-én megtartott ülésén ismertetett.

„...Legyen

$$\begin{array}{rcl} A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + \ldots + A_{1n}u_n \equiv \theta_1 & \geq & 0 \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + \ldots + A_{2n}u_n \equiv \theta_2 & \geq & 0 \\ & \vdots & \end{array} \qquad (1)$$

egyenlőtlenségi rendszerünk (1), és ennek minden megoldásában teljesüljön

$$A_1u_1 + A_2u_2 + \ldots + A_nu_n \equiv v \geq 0. \qquad (2)$$

A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásának algebrai alapját a következő tantétel képezi: mindig léteznek olyan nem negatív, az u vezérmennyiségektől független multiplicatorok λ, hogy

$$v \equiv \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \dots \qquad (3)$$

...”

Farkas jelölését megtartottuk, így talán egy kis magyarázatra szorul a mai olvasó számára. Legegyszerűbb az, ha kimondjuk a szövegben található definíciót és állítását a matematika mai jelölésrendszerét használva.

Definíció. Legyen adott egy A $m \times n$-es valós mátrix és egy n elemű valós c (oszlop)vektor. Tekintsük az

$$Au \geq 0 \qquad (4)$$

homogén lineáris egyenlőtlenség-rendszert, ahol u a változók egy n-dimenziós vektora. A

$$c^\top u \geq 0 \qquad (5)$$

lineáris egyenlőtlenség *következménye* a (4) rendszernek, ha (4) tetszőleges megoldása egyben (5) megoldása is.

A Farkas-lemmát, a mai matematikai nyelvezetet használva, abban a — kicsit általánosabb — formában mondjuk ki, ahogyan azt első — e témakörben megjelent — közleményében, 1894-ben[3] maga Farkas Gyula is megfogalmazta.

Lemma. *Legyen adott egy A $m \times n$-es valós mátrix és egy n elemű valós c (oszlop) vektor. Tekintsük a (4) homogén lineáris egyenlőtlenség-rendszert, ahol u a változók egy n-dimenziós vektora. Az (5) lineáris egyenlőtlenség pontosan akkor következménye a (4) homogén lineáris egyenlőtlenség-rendszernek, ha létezik m-dimenziós, nem negatív v vektor, amelyre a*

$$v^\top A = c^\top \qquad (6)$$

lineáris egyenletrendszer teljesül.

Most már csak egy apró lépés van hátra, ahhoz, hogy a Farkas-lemmát olyan formában (alternatíva tétel) fogalmazzuk meg, ahogyan azt ma ismerjük és használjuk.

Farkas-lemma. *Legyen adott egy* A $m \times n$*-es valós mátrix és egy* n *elemű valós* c *(oszlop)vektor. Ekkor a következő két lineáris egyenlőtlenségrendszer közül pontosan az egyiknek van megoldása*

$$\begin{array}{rcl} Au & \leq & 0 \qquad \text{és} \qquad c^\top u = 1, \qquad (7) \\ A^\top v & = & c \qquad \text{és} \qquad v \geq 0, \qquad (8) \end{array}$$

ahol az u *egy* n*-dimenziós, míg a* v *egy* m*-dimenziós vektor.*

Belátható, hogy a Farkas-lemma két különböző változata ekvivalens, és a második változat — kisebb adatmegadási eltérésektől eltekintve — az, amilyen formában az elmúlt közel 70 évben (leggyakrabban) hivatkozták.

Farkas Gyula, szerencsére, eredményeit több német nyelvű cikkben is közölte, amelyek közül az 1901-es cikk [4] a legismertebb.

Bármennyire is furcsa, de Farkas Gyula alapvető eredményének nagyobb idézettsége van, mint a Bolyai-geometriának, vagy Riesz Frigyes, Fejér Lipót, Erdős Pál, Rényi Alfréd eredményeinek.

Farkas német nyelvű közléseire a hivatkozások a Google Scholar [5]szerint meghaladják a 600-at. Ami még érdekesebb, hogy a Farkas-lemma közvetett hivatkozásai pedig a Google Scholar szerint több, mint 70 ezerre tehetők.

Természetesen ez nem azt jelenti, hogy ő lenne a legismertebb magyar matematikus, hiszen Erdős Pál sokkal ismertebb, de egyelőre — úgy tűnik, hogy — Farkas Gyula vezet az idézett magyar matematikai eredmények nem hivatalos listáján. Természetesen minden relatív, akár csak a sportban. Akinek ma van a legtöbb pontja, annak holnap már nincs, és ez a tudományban is így van!

A fentebb felsorolt nagy magyar matematikus nevek mellett talán éppen Farkas Gyula a legkevésbé ismert a közvélemény előtt! Először is azért, mert ő magát elméleti fizikusnak vallotta, és a matematikai eredményei is a fizikai meglátásainak bizonyítására kellettek.

De a Sors is nagyon érdekesen rendezte életét. Noha a mai csonka Magyarországon született egy pusztán, tevékenységét a kolozsvári Ferenc József Tudományegyetemen fejtette ki, ahol az elméleti fizika professzora volt. 1914-után újra Budapestre költözött és Pestszentlőrincen hunyt el. Ott is temették el. Az 1970-es években még Filep László (nyíregyházi matematikatörténész) és Prékopa András (matematikaprofesszor, az MTA rendes tagja) felkereste, és helyrehozatta a sírját, de azt később egy áruház építése miatt felszámolták. Így ma már nincs meg a sírja![6]

Az igazsághoz tartozik, hogy halála után még néhány évig a kortársai emlékeztek rá, de azután teljesen megfeledkeztek róla. Egészen 1951-ig, amikor is az amerikaiak felfedezték! Egészen pontosan Oláh-Gál Róbertnek így mesélte Prékopa András professzor Farkas Gyula felfedezését: Kuhn és Tucker egy monográfiát készültek írni a lineáris programozásról. Ekkor elküldték egyik PhD hallgatójukat, nézzen utána az egyetem könyvtárában, hogy kik is írtak addig a lineáris egyenlőtlenségekről. Így fedezték fel Farkas Gyula német nyelvű cikkét, amely a Crelle Journalban jelent meg 1901-ben. Kuhn és Tucker ezek után szisztematikusan megkeresték Farkas Gyula német nyelvű cikkeit. A nemlineáris (konvex) programozási feladat szükséges és elégséges optimalitási kritériumát [7] a Farkas-lemma segítségével igazolták, és Farkas Gyula 1901-es német nyelvű dolgozatára hivatkoztak. Kuhn és Tucker cikkének megjelenése után lett ismert a tudós világban az ún. Farkas-lemma.

Farkas Gyula lemmája a lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldhatóságával foglalkozik. Meglepő módon kevésbé ismert, hogy a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságát is vizsgálhatjuk alternatíva tételek segítségével. Ezek közül a legismertebb az un. *Rouché—Kronecker—Capelli-lemma*[8]. A *Rouché—Kronecker—Capelli*, illetve a *Farkas-lemmák* legegyszerűbb ismert bizonyítását Klafszky és Terlaky adták meg 1989-ben. Úgy gondoljuk, hogy ezek a bizonyítások már középiskolában — matematika szakkörön — elmondhatók a lineáris egyenletrendszer tárgyalása után.

2. Farkas Gyula és a Bolyaiak

Itt tennénk egy kis kitérőt. A Bolyaiak neve is azután lett ismert a világban, hogy Gauss halála (1855) után kiadták Gauss levelezését. Ebben Gauss azt írja, hogy csak a Bolyaiak értették meg metafizikai eszmefuttatásait. Ez késztette aztán arra a matematikus társadalmat, hogy utánanézzenek, kik is voltak a Bolyaiak! Ez azért érdekes, mert Farkas Gyula képviselte az MTA-t Marosvásárhelyen 1911. július 30-án a két Bolyai exhumálásán, ahol egy nagyon találó beszédet mondott:

„Bolyaiak! Mélységekben fürkésző apa és messzeségekbe ellátó fia! A Magyar Tudományos Akadémia nevében köszöntöm hamvaitokat. Íme, gondos intézkedés porotok egymáshoz térítette, mert hiába lett rajtatok is meghasonlás áldatlan foganatja: együvé tartoztok nemcsak a természet anyagbeli rendje szerint, hanem azon rendje

szerint is, a mely a szellemi élet országait kormányozza végtelen időkig.

Mióta pedig az örök békesség honába költöztetek, azóta ‚az arithmetica és geometria együtt gyökeredző s koronájukkal összefolyó fája' dúsan termett, s termésében megérlelte a ti eszméiteket is és az ‚Appendix, Scientiam Spatii absolute veram exhibens' nagy dicsőséghez jutott, és ma hatalmas természeti törvény is magához emeli azt, törvények törvénye, gondolkodásunkat oly téridő-világban szólító, a melyben a térnek Bolyai-világa új lendületre kap. Dicsőségtek fényében a Föld egész kerekségére szóló emléket állított Akadémiánk a Bolyai-alapítványban tinéktek, kik által a magyar államesze fogalma oszlopos alkotó elemmel lett gazdagabb.

Fájdalom, a tudomány amaz építő mesterinek a sorába kerültetek, akik nem érhetik meg eszméik diadalát. De ennek az emberi gyarlóságra nehezedő keserűsége elenyésző kicsinység annak a jutalomnak a mekkoraságához képest, a mely a megismerés fő-főmunkásait magában a megismerésben jutalmazza meg. Azért nem is fáj annyira, hogy csak mi távoli utódok hallathatjuk művetekben a méltó megbecsülés és hála igéit.

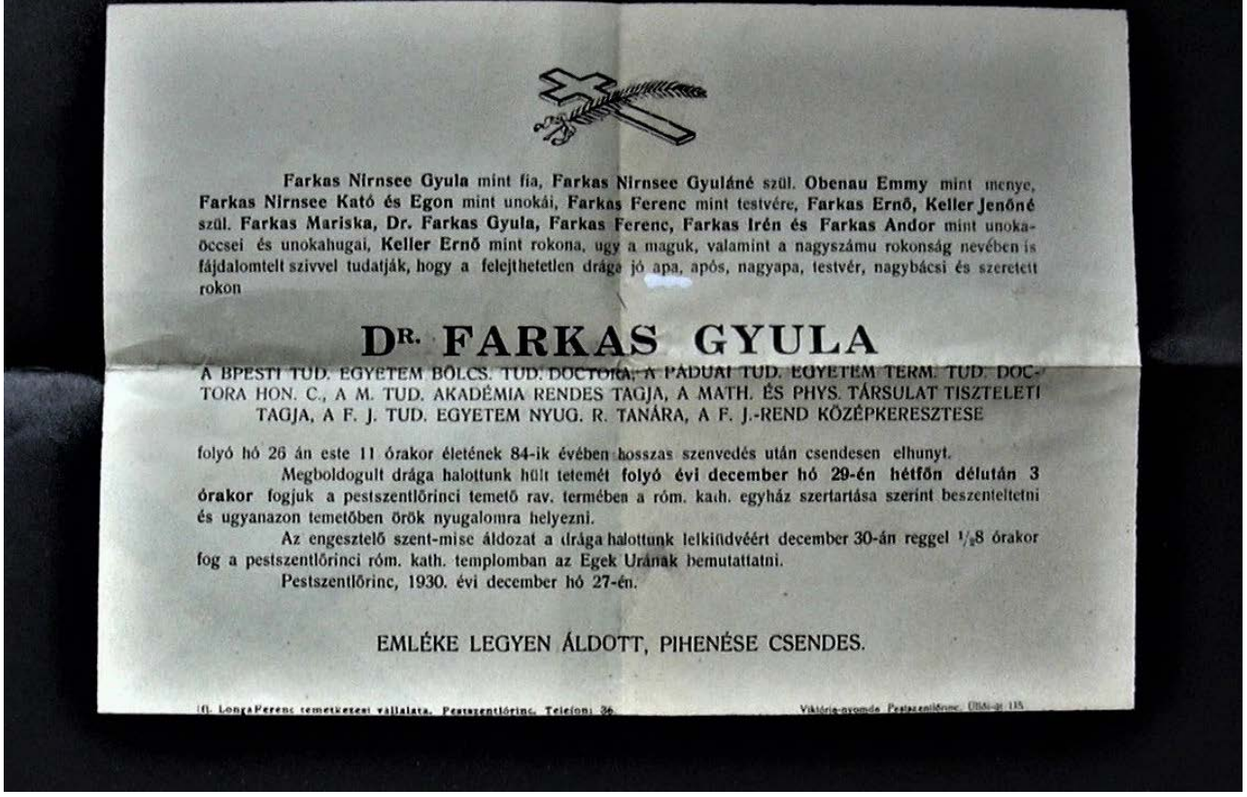
Ezek adójával teszem le én is drága sírotokra a Magyar Tudományos Akadémia koszorúját." [9]

Farkas Gyula fenti szavai prófétaiak lettek, mert az ő munkásságára is tökéletesen ráillik, hogy nem érhette meg eszméinek diadalát, de a tudományos megismerés bőségesen megjutalmazta az utódok kutatásaiban.

Farkas Gyulának életében kapott legnagyobb elismerése az volt, hogy a páduai egyetem díszdoktorává avatta. Ez igen mélyen megérintette őt, bár ez az elismerés valamelyest formális volt, mert az összes Galilei-ünnepségre meghívott külföldi küldöttet díszdoktorrá avatták.

3. „Meghalt Farkas Gyula, a magyar természettudósok nesztora"

Egy érdekes okirattal szeretnénk emlékezni Farkas Gyulára:



Farkas Nirnsee Gyula mint fia, Farkas Nirnsee Gyuláné szül. Obenau Emmy mint menye, Farkas Nirnsee Kató és Egon mint unokái, Farkas Ferenc mint testvére, Farkas Ernő, Keller Jenőné szül. Farkas Mariska, Dr. Farkas Gyula, Farkas Ferenc, Farkas Irén és Farkas Andor mint unokaöccsei és unokahugai, Keller Ernő mint rokona, ugy a maguk, valamint a nagyszámu rokonság nevében is fájdalomtelt szivvel tudatják, hogy a felejthetetlen drága jó apa, após, nagyapa, testvér, nagybácsi és szeretett rokon

Dr. FARKAS GYULA

A BPESTI TUD. EGYETEM BÖLCS. TUD. DOCTORA, A PADUAI TUD. EGYETEM TERM. TUD. DOCTORA HON. C., A M. TUD. AKADÉMIA RENDES TAGJA, A MATH. ÉS PHYS. TÁRSULAT TISZTELETI TAGJA, A F. J. TUD. EGYETEM NYUG. R. TANÁRA, A F. J.-REND KÖZÉPKERESZTESE

folyó hó 26 án este 11 órakor életének 84-ik évében hosszas szenvedés után csendesen elhunyt.

Megboldogult drága halottunk hült tetemét folyó évi december hó 29-én hétfőn délután 3 órakor fogjuk a pestszentlőrinci temető rav. termében a róm. kath. egyház szertartása szerint beszenteltetni és ugyanazon temetőben örök nyugalomra helyezni.

Az engesztelő szent-mise áldozat a drága halottunk lelkiüdvéért december 30-án reggel 1/2 8 órakor fog a pestszentlőrinci róm. kath. templomban az Egek Urának bemutattatni.

Pestszentlőrinc, 1930. évi december hó 27-én.

EMLÉKE LEGYEN ÁLDOTT, PIHENÉSE CSENDES.

(f). Longa Ferenc temetkezési vállalata. Pestszentlőrinc. Telefon: 36. Viktória-nyomda Pestszentlőrinc, Üllői-út 115.

Az Est újság 1830. december 30-i száma közölt egy rövid nekrológot. Honnan vettük észre? Fejér Lipót hagyatékában volt a kivágott újságcikk!

„Meghalt Farkas Gyula, a magyar természettudósok nesztora

Az Est tudósítójától

Farkas Gyula, aki a kolozsvári egyetemen tanította az elméleti fizikát egy emberöltőn át, tegnap meghalt. Farkas Gyula működésével dicsőséget szerzett a magyar matematikai és fizikai tudományosságnak. Hetvennél több tudományos értekezése jelent meg és pedig tetemes részük német és francia folyóiratokban, visszhangot keltve a külföldi tudósok munkáiban is.

1847-ben született egy fehérmegyei pusztán. Előbb jogásznak készült és csak később szánta el magát a matematikai stúdiumokra. 1870-től 1874-ig az akkori székesfehérvári alreáliskolában és később a pápai tanítóképzőben tanított.

Életének kialakulására döntő volt, hogy 1874-tői 1880-ig gróf Batthyány Gézánál működött mint nevelő. Növendékeivel sokat utazott külföldön és itt fejlődött ki benne a matematika és a természettan iránti mélységes érdeklődése. Elmélyedt a felsőbb matematikában annyira, hogy önálló dolgozatokat nyújtott be a párizsi akadémiának. Külföldről hazajövet megszerzi az egyetemi magántanárságot, olyan előadásokat hirdetett, aminőkről magyar egyetemi hallgató eladdig sohasem hallhatott. 1887-ben a kolozsvári egyetem tanára lett.

Ő volt az elsők egyike, aki Einstein elméletének jelentőségét felfogta.

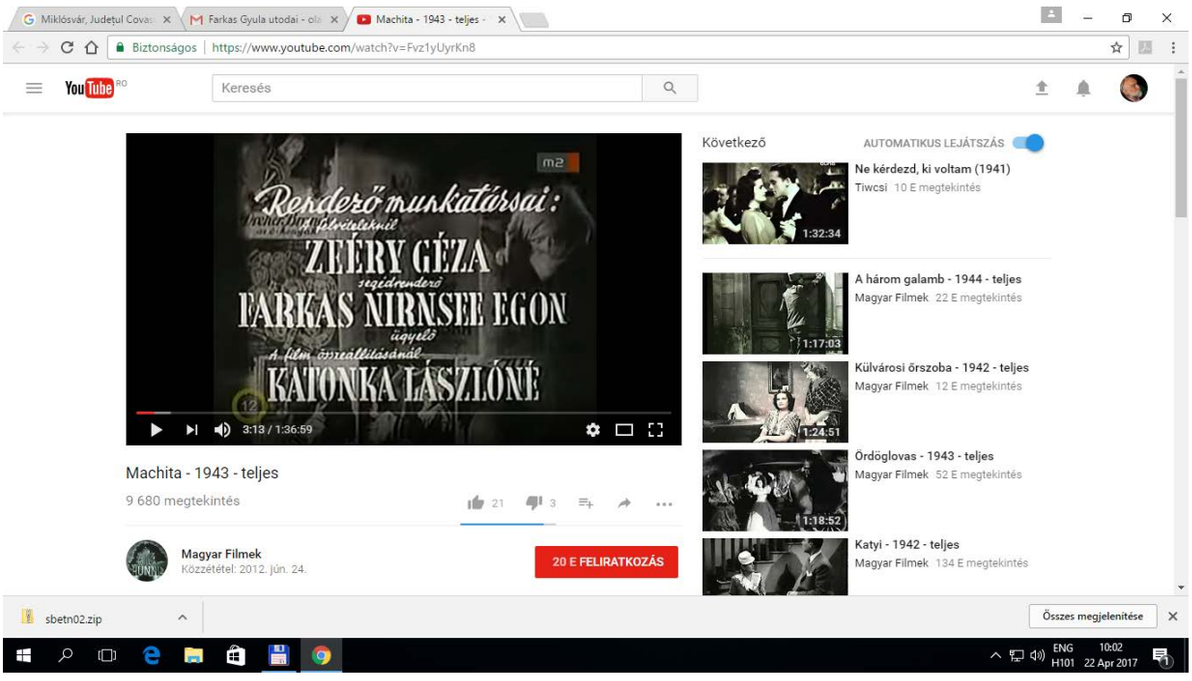
Alighogy a relativitásra vonatkozó einsteini dolgozat megjelent, már Farkas Gyula foglalkozott vele, és új szempontokból világította meg az elméletet. Ezzel és az elektromosság és mágnességre vonatkozó dolgozatok egész sorozatával szinte fiatalos lelkesedéssel iparkodott beléhatolni az újabb fizikai elméletekbe. Lelkének ruganyosságát mindvégig megőrizte, bár szemevilágát majdnem teljesen elveszítette és súlyos betegség rágta a szervezetét. Még néhány évvel ezelőtt is Einstein gravitációs nehézségi elméletéről értekezett.

Nemeslelkű, egyszerű, szerény, csak is a tudománynak élő tudós volt. Gyermeteg kedélyét mindvégig megőrizte.

Mindig a legjobbat kereste. A kolozsvári egyetemre minden melléktekintet nélkül a legkiválóbbakat hozta. Így Schlesingert, a bonni egyetem tanárát, Fehér Lipótot, Riesz Frigyest és Haár Alfrédot és ezzel egyetemét európai nívóra emelte. Amikor lemondott tanszékéről, hogy fiatalabb erőnek adja át a helyét, ő választotta ki utódjául a legarravalóbb fiatal tudóst.

Meg kellett érnie, hogy az ő nagyranevelt fakultása elmenekült, de egyben örömmel töltötte el lelkét, hogy megfiatalodva láthatta viszont Szegeden. Kartársai, akik közelebbről ismerték, rajongásig szerették, tanítványai imádták."

Felvetődik az a logikus kérdés, ki írhatott Farkas Gyula halála napján ilyen szakszerű nekrológot az Est újságban, és miért vágta ki ezt az újságcikket Fejér Lipót. Néhány, a matematika iránt érdeklődő kolléga szerint lehetséges, hogy a megemlékezést maga Fejér Lipót írta, vagy legalábbis szakmai segítséget nyújtott a korabeli tudósítónak, hogy ilyen pontos megemlékezést írjon. Akárhogy is történt, tény, hogy az Est megemlékezése telitalálat volt, mert Farkas Gyulából valóban a magyar természetvizsgálók nesztora lett. Farkas Gyula és Fejér Lipót igen jó barátságban és állandó levelezésben álltak. A Fejér Lipót kézirati hagyatékának igen becses értéke a Farkas Gyulával való levelezés, mely az ELTE Maglódi úti levéltárában olvasható. Ugyancsak ott találtuk meg Farkas Gyula itt bemutatott gyászjelentőjét is. A gyászjelentő azért érdekes és fontos, mert további kutatásra serkentheti a matematikatörténészeket, hogy felkutassák, mi lett a Farkas Gyula örökbefogadott fiával, illetve annak utódaival. A Farkas-Nirnsee-család kézirati hagyatékát keressük. Ez pedig igen fontos kérdésekre adhat választ. Tudjuk azt, hogy Farkas Gyulának levelet írt Minkowski, és tudjuk azt, hogy Haar Alfréd bizonyos értelemben kiegészítette Farkas Gyula lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó kutatásait. De vajon levelezett-e Farkas Gyula Minkowskival, Haar Alfréddal, esetleg Neumann Jánossal stb.? Ezek mára igen izgalmas kérdések volnának. Tehát érdemes volna megtudni, mi lett Farkas Gyula unokájával, Farkas-Nirnsee Egonnal. Egyelőre annyit tudunk róla, hogy a Karády-filmeknél ügyelő volt. [10] Tehát van esélye annak, hogy a család megőrizte Farkas Gyula kézirati hagyatékát!



Abban is reménykedünk, hogy talán szerény írásunk olvasói közt lesz olyan, aki többet tud a Farkas-Nirnsee-családról és azt szíveskedne nekünk is megírni. Mi mindenesetre megpróbáljuk felkutatni a Farkas Gyula utódait!

Illés Tibor

Differenciálegyenletek Tanszék,

Budapesti Műszaki és Közgazdaságtudományi Egyetem, Budapest

Oláh-Gál Róbert

Gazdaságtudományi Tanszék,

Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Csíkszereda

Lábjegyzetek

1

További információk találhatók Prékopa András, Az optimalizálás elmélet kialakulásának történetéről. *Alkalmazott Matematika Lapok* 4 (1978), 165—191. Gurka Dezső, Farkas Gyula munkásságának megújuló hatásai. *Alkalmazott Matematika Lapok* 25 (2008), 137—142.

2

Farkas Gyula: A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásának algebrai alapja. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 16. kötet 361—364. oldalak, Budapest, 1898. (Letölthető az alábbi címről: http://real-j.mtak.hu/4430/1/MatematikaiTermTudErtesito16.pdf)

3

Farkas Gyula: A Fourier-féle mechanikai elv alkalmazásai. *Mathematikai és Természettudományi Értesítő*, 12. kötet 457-472. oldalak, Budapest, 1894. (Letölthető az alábbi címről http://real-j.mtak.hu/4426/1/MatematikaiTermTudErtesito_12.pdf)

4

J. Farkas, Über die Theorie der einfachen Ungleichungen. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 124:1—27, 1901. (Letölthető az alábbi címről https://eudml.org/doc/149129)

5

https://scholar.google.com/scholar?hl=hu&q=J.+Farkas Google Scholar 679 idézetet mutat, de arra a 679 hivatkozóra még van kb. 70-80 ezer hivatkozás. Ezzel szemben az 1894-es első Farkas lineáris egyenlőtlenséges publikációra mindösszesen 61 hivatkozás ismert. Ekkora hátrány a magyar nyelv? (Érdekes, hogy Egerváry 1931-es magyar nyelvű cikkére 162 hivatkozást jegyez a Google Scholar.) A Farkas lemmára, https://www.google.co.uk/search?q=Farkas+lemma&ie=utf-8&oe=utf-8&client=firefox-b&gfe_rd=cr&ei=s-ayWNj_B87U8gfKiKe4CgFarkas-lemma már 75 200 hivatkozást ad a google!

6

Köszönet Kása Zoltán kolozsvári professzornak a fenti információkért! További információk találhatók Gurka Dezső, Farkas Gyula munkásságának megújuló hatásai. *Alkalmazott Matematika Lapok* 25 (2008), 137—142.

7

H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Nonlinear Programming. *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium.* Berkeley: University of California Press. pp. 481—492, 1951. (http://projecteuclid.org/euclid.bsmsp/1200500249)

8

Klafszky Emil és Terlaky Tamás, A pivot technika szerepe a lineáris algebra néhány alapvető tételének bizonyításában. *Alkalmazott Matematikai Lapok* 14 (1989) 425—448. (Letölthető az alábbi címről: http://real-j.mtak.hu/453/1/ALKMAT14.pdf)

9

Forrás: Farkas Gyula e. t. beszéde Bolyai János hamvainak atyja mellett elhelyezése alkalmával. Marosvásárhelyt, 1911. július 7. = Akadémiai Értesítő 22 (1911) p. 526.

10

Köszönet Szabó Péter Gábor szegedi matematikatörténész kollégának a közölt információért!

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

G. Horváth Ákos 2017. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Nem-euklideszi geometriák, avagy milyen a világ? Konstans görbületű terek

A gondolkodó embert mindig is foglalkoztatta az a kérdés, hogy az őt körülvevő világ milyen. Ennek leírása pedig csak geometriai fogalmakkal lehetséges, így nem meglepő ezek igen korai feltűnése. Jóval a görög matematika megjelenése előtt, már az egyiptomi matematikában találunk pontos térgeometriai számításokat, természetesen a ma euklideszi geometriának nevezett rendszer szabályai alapján. (A téma iránt érdeklődő olvasó számára ajánlom B. L. van der Waerden remek [17] könyvét.) A világ szerkezetének tudományos leírására való törekvésben az euklideszi geometria hegemóniája addig tartott, amíg a csillagászati méretek és a hatalmas sebességek tekintetében ki nem derült a Newtoni mechanika elégtelensége, és fel nem váltotta azt a fizikai világról alkotott képünk alakításában Einstein relativitáselmélete. Mindez a XX. század kezdetére tehető, természetesen nem minden előzmény nélkül. A XIX. század geometriájában történik egy radikális szemlélet változás, ami alapvetően határozta meg a további tudományos kutatások irányát, Lambert, Gauss és Riemann munkássága a háromdimenziós euklideszi tér felületeinek belső (mai szóhasználattal beágyazástól mentes) geometriájára irányítja a figyelmet, szétválasztva a lokális és globális geometriai tulajdonságokat egymástól; míg Gauss, Bolyai Farkas, Bolyai János és Lobacsevszkij kutatásai nyomán bizonyítást nyer, hogy van minden tekintetben megfelelő globális alternatívája is az euklideszi geometriának. Einstein munkásságával egyidőben alkotja meg Minkowski és Lorentz a téridő matematikai modelljét és alakul ki Minkowski másik geometriája, mely az analízis egyik alapstruktúrájának, a véges dimenziós normált térnek a geometriai tulajdonságait összegzi. Ezekről a geometriákról szeretnénk ebben a cikkben írni, hiszen ezek képezik az alapjait minden további, a világ szerkezetének leírása céljából kidolgozott matematikai struktúrának, a Riemann- és Lorentz-sokaságoknak, vagy a semi-Riemann- és Finsler-tereknek.

Analitikus euklideszi geometria

Az euklideszi geometria megalapozása közel 2000 éven keresztül szintetikus axiómarendszer használatával történt. Az első ilyen tárgyú rendszerezett munka i.e. 300 körül láthatott napvilágot Eukleidész Elemek c. művében (ld. [5]). Descartes nevéhez kapcsolható az első szisztematikus analitikus geometriai számítás, mely alapján kialakul a koordináta-rendszer fogalma és a koordinátánkénti számolás lehetősége. A vektor fogalom kialakulására a XIX. század közepéig kellett várni, habár Gauss és Cauchy már a század elején megalkotják a lineáris egyenletrendszerek elméletét, kidolgozva a determináns elméletet is. Maga a vektor szó W. R. Hamilton nevéhez kapcsolódik, aki ezt először a komplex számok felépítésénél majd a kvaterniók definiálása során használta (ld. [11]). A vektorterek elmélete mégis leginkább H. G. Grassmann 1844-ben megjelent [7] könyvéhez kapcsolható. Az euklideszi geometria modern analitikus tárgyalása így későbbre datálható, a vektorterek elméletének kidolgozása a XIX. század második felében történhetett meg. Ma a lineáris algebra kerek elméletként jelenik meg egy kiforrott, minden egyéb matematikában felbukkanó egységes törzsanyaggal. Ebben a lineáris függetlenség és összefüggőség alaptulajdonságainak vizsgálata után a legfontosabb lineáris leképezésekkel, ezek mátrix reprezentációival és egy szokatlan új művelettel, a skaláris szorzattal ismerkedhetünk meg. A skaláris (vagy belső) szorzás jelenti a hidat az absztrakt algebrai képződmény (a vektortér) és a valóságos geometriai tér között. Skaláris szorzattal rendelkező vektorteret nevezünk euklideszi vektortérnek, azon egyszerű oknál fogva, hogy ezen függvény segítségével lehet vektorok hosszát és hajlásszögét definiálni, beszélni hossztartó leképezésekről, másképpen izometriákról vagy egybevágóságokról.

Visszatérve az euklideszi geometriára, a Hilbert által felállított és azóta is leginkább használt szintetikus axiómarendszer (ld. pld [9]) analitikus modelljét a következőképpen kaphatjuk:

Legyen $\mathcal{M}$ egy halmaz, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pedig egy 3-dimenziós euklideszi vektortér a valós számtest felett. Az $\mathcal{M}$ halmazt 3-*dimenziós euklideszi térnek* nevezzük, ha pontjaiból alkotott rendezett $\{P, Q\}$ párok megfeleltethetők úgy a V-beli $v := \overrightarrow{PQ}$ vektoroknak, hogy

- minden $P \in \mathcal{M}$, $v \in V$ esetén legyen egyetlen Q úgy, hogy $v = \overrightarrow{PQ}$ teljesüljön,
- minden $P \in \mathcal{M}$ pont esetén, a $\{P, P\}$ párnak a 0 vektor feleljen meg,
- és minden $P, Q, R \in \mathcal{M}$ hármas esetén teljesüljön a $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = 0$ összefüggés.

Mivel a skaláris szorzat egy vektorpárokon értelmezett valós értékű pozitív definit, szimmetrikus, mindkét változójában lineáris függvény, a nem nulla vektorokhoz hozzárendelhető egy pozitív $\langle v, v \rangle$ szám, amelyet a vektor *hossznégyzetének* nevezünk.

(A hossz jelölésére az $|\cdot|$ jelölést használva $|v| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$.) A fenti három tulajdonság segítségével igazolható az ún. Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség, miszerint tetszőleges $u, v \in V$ vektorpárra igaz, hogy $\langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle$, röviden $|\langle u, v\rangle| \leq |u||v|$. Ebből rögtön adódik, hogy az $\arccos(\langle u, v\rangle/|u||v|)$ kifejezés értelmes minden, nullát nem tartalmazó vektorpárra, és egy egyértelműen létező 0 és π közötti szögértéket ad. Ezt hívjuk a *vektorpár hajlásszögének*. A $\pi/2$ a nem nulla vektorokra kapott $\langle u, v\rangle = 0$ esetben adódik, így a skaláris szorzat egyszerűen jellemzi a „merőlegességet". Az euklideszi vektortér speciális bázisa az ortonormált bázis, melyet páronként merőleges egységnyi hosszú vektorok alkotnak. Az ortonormált bázisról ortonormált bázisra való áttérés olyan lineáris transzformációval valósul meg, mely a vektorok hosszát nem változtatja meg, ezek a leképezések adják az euklideszi tér egybevágóságait vagy másképp *izometriáit*. Az izometriák csoportot alkotnak, melynek ismerete azért fontos, mert minden geometria keretein belül azonosnak tekintjük az egybevágó (vagy izometrikus) alakzatokat.

Modellünkben a pontpárokkal szeretnénk az egyeneseket, félegyeneseket és szakaszokat definiálni. Ehhez rögzítünk egy $O \in \mathcal{M}$ pontot (amelyet origónak vagy kezdőpontnak nevezünk) és egy kiindulási ortonormált bázist $i, j, k \in V$ elemekkel. A tér P pontjához most a $p := \overrightarrow{OP}$ helyvektor tartozik, mely az $\{i, j, k\}$ bázisra vonatkozó koordinátahármasával adott. A P, Q pontok összekötő egyenesének tetszőleges R pontja megadható mint az $r = \alpha p + \beta q$ helyvektor végpontja, ahol $\alpha + \beta = 1$. Ha az α, β együtthatókról feltesszük, hogy nem negatívak, akkor a fenti *affin* lineáris kombináció az ún. *konvex* kombinációvá válik, melyhez tartozó pontok összességeként definiálhatjuk a *szakaszt*. Három lineárisan független vektor affin kombinációi adják a három pont által kifeszített sík pontjait. A szakaszok egybevágóságát a hozzájuk rendelt vektorok hosszainak egyenlőségével definiálhatjuk. A szögvonalak és szögtartományok megadása után meg lehet fogalmazni ezek egybevágóságának analitikus feltételét is. Ezen az úton az ismert szintetikus geometriai tételek az analitikus modellben is leírhatók, ugyanakkor a szintetikus gondolatmenetek algebrai számításokkal helyettesítődnek.

A XIX. század végére a szisztematikus és szinte mindenre kiterjedő 3-dimenziós analitikus geometria vizsgálatok olyan tételek bizonyítását tették lehetővé, melyek szintetikus eszközökkel elérhetetlennek tűntek. Az érdeklődők számára ajánlom Salmon [15] könyvét a téma további tanulmányozására.

Hatalmas előnye az analitikus modellnek, hogy lényegében egyöntetűen kezelhető vele a sík és a tér esete, teret engedve a többdimenziós általánosításoknak is.

Szférikus geometria

A gömb az egyik legtökéletesebb forma minden kor embere számára. Már az egyiptomi tudósok is foglalkoztak vele, többek között meg szerették volna határozni a félgömb felszínét. Az Elemek c. könyvében Eukleidész a gömb térfogatának számítása mellett a szabályos testek köré írható gömbök sugarát is meghatározza. Az újkori matematika számtalan helyen kényszerült arra, hogy a gömb felületére rajzolt alakzatok különféle adatait határozza meg, ezért ezen számítások gyors elvégzése érdekében szisztematikus vizsgálat tárgyává tette a gömbfelszínt. Casey remek gyűjteménye (ld. [4]) a mai kor geométere számára is tartalmaz meglepetéseket. A „szférikus geometria” kifejezés ma is olyan állítások gyűjteményét jelenti, melyek a gömbfelszín alakzatainak metrikus tulajdonságairól szólnak. Ennek fő oka, hogy Hilbert axiómarendszere már az első axiómájában sérül, ha egyenesnek tekintjük a főköröket, két átellenes pont nem határoz meg egyértelműen egy egyenest. Ha viszont mesterségesen javítjuk ezt a „hibát”, azzal a feltevéssel, hogy két átellenes pont határozzon meg azonos modellpontot, akkor elveszítjük az egyenes egyik legfontosabb tulajdonságát, nem fogja a síkot két összefüggő részre vágni a továbbiakban. Így egy belső axiomatikus felépítés egy gyakorlatban jól alkalmazható metrikus struktúrától túl messzire visz, az így kapott ún. elliptikus geometria nem más, mint a valós projektív sík geometriája. A felületi alakzatok metrikus tulajdonságai ezen geometria keretein belűl többé-kevésbé érdektelenné válnak. Ezért a szférikus geometria megalapozásának legtermészetesebb módja továbbra is az, ha a tér felületének tekintjük. Ez a legegyszerűbb olyan felület, amelyet Gauss felületelméleti vizsgálatainak érdemes alávetni. Ezen vizsgálat lokális jellegű, ezért a teljes gömbfelszín egyben való kezelése során feltárt globális problémák (mint az egyenes határozatlansága) nem okoznak nehézséget. Kiderül, hogy minden pontjában a Gauss által definiált alapmennyiségek és alapformák ugyanazokat az értéket veszik fel, így a Gauss-féle szorzatgörbület minden pontban ugyanazt a pozitív értéket veszi fel, a gömb sugarának a reciprokát. Ezen tulajdonság alapján a szférikus geometriát pozitív konstans görbületű felületnek is szokták nevezni. (Jegyezzük meg, hogy az euklideszi sík beágyazva a háromdimenziós térbe konstans zéró görbületű felület.)

Ahhoz, hogy a szférikus és a későbbiekben szereplő hiperbolikus geometria közötti metrikus kapcsolatot észrevehessük, konkrét formulákat kell felírnunk.

Az R-sugarú szférát definiáljuk azon $(x, y, z)^T$ helyvektorok végpontjainak halmazaként, melyek teljesítik az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ feltételt. Egyeneseknek tekintjük a teljes főköröket, két pont két szakaszt határoz meg, ezek uniója az egyenes. Két pont távolságát és két egyenes hajlásszögét egyaránt euklideszi szöggel mérjük, az első a két helyvektor hajlásszöge, a második az egyeneseket tartalmazó két sík hajlásszöge. Szögtartományok hajlásszöge az őket tartalmazó térnegyedek szöge, így mind a szakaszhosszak, mind a szögmértékek a 0 és π értékek között mozognak. Egy gömbháromszög szögösszege legalább π és legfeljebb 3π. Egyik határ sem éretik el valódi háromszög szögösszegeként. Számításuk a beágyazó euklideszi tér analitikus geometriája alapján történik, ha P, Q két pont a p, q helyvektorokkal, akkor a távolságuk a

$$d(P,Q) = \arccos \frac{\langle p, q\rangle}{R^2}, \quad \text{avagy } \cos d(p,q) = \frac{\langle p, q\rangle}{R^2}$$

formulákból adódik. A trigonometrikus függvények használatával önálló trigonometrikus formulákat tudunk felírni a háromszögek adatainak összekapcsolására, amelyekben jelentkezik a szögek és távolságok számításának szimmetriája. Ha a, b, c egy gömbháromszög három oldalának a hossza, α, β, γ pedig az ezekkel szemben fekvő szögek mértéke, két koszinusztétel adódik az egyik az oldalakra:

$$\cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R} + \sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos\gamma,$$

a másik a szögekre:

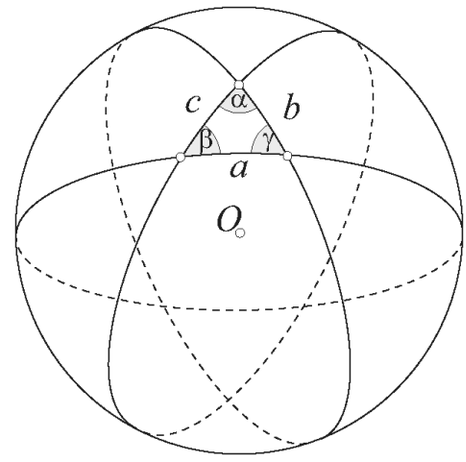
$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\frac{c}{R}.$$

Az első egyenlet $R \to \infty$ határátmenete azt árulja el, hogy a gömbsugárhoz képest kis oldalak esetén a háromszögre az euklideszi koszinusztétel teljesül, hiszen a trigonometrikus függvényeket a másodrendű Taylor polinomjukkal helyettesítve az

$$1 - \frac{c^2}{2R^2} = 1 - \frac{a^2}{2R^2} - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{a}{R}\frac{b}{R}\cos\gamma + o\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

egyenlőségre jutunk. A c oldal hosszához képest nagy R-re a második egyenlet a $\cos\gamma \approx -\cos(\alpha+\beta)$, egyenletre vezet, mutatva, hogy ha legalább az egyik oldala egy szférikus háromszögnek nagyon kicsi, akkor a szögeire vagy $\gamma \approx \pi - (\alpha+\beta)$, vagy $\gamma \approx (\alpha+\beta) - \pi$ áll fenn. Az első eset azt jelenti, hogy a háromszög szögeinek összege közel π, míg a második esetben a háromszög szögeinek összege $\pi + 2\gamma$.

Szemléltethetjük ezen két lehetőséget, ha egy γ szögű gömbkétszöget az egyik csúcsához közel haladó gömbi egyenessel két gömbi háromszögre bontunk. A kisebbik rész valamennyi oldala pici, ez így egy euklideszi háromszöghöz áll közel, ennek α, β, γ szögeire az $\alpha + \beta \approx \pi - \gamma$ összefüggés teljesül, akkor viszont a nagyobbik rész szögei $\gamma, \pi - \alpha, \pi - \beta$ a $\pi + 2\gamma$-hoz közeli szögösszeggel.



Különösen érdekes a szférikus sík geometriájában a háromszög területe. A gömbkétszöget egyetlen adata határozza meg, az α szöge. Területe így szintén ennek a függvénye. Ez a $(0, \pi) \to \mathbb{R}^+$ függvény additív és monoton, azaz lineáris. Ez azt jelenti, hogy $c\alpha$ alakú, ahol c egy pozitív konstans. Az $\alpha = \pi$ eset a félgömböt adja, így ha a felszín euklideszi számításával kompatibilis területfogalmat szeretnénk kialakítani, akkor célszerű a $c = 2R^2$ választás. Egy α, β, γ szögekkel rendelkező háromszög három gömbkétszög metszete, ezek szögei rendre α, β és γ. Ugyanezen gömbkétszögek az origóra vonatkozó tükörképeikkel együtt lefedik a gömböt oly módon, hogy a kiindulási háromszöget éppen az eredeti három gömbkétszög, míg a háromszög tükörképét a három tükörkép fedi. Ez alapján a keresett $T(\alpha, \beta, \gamma, R)$ területre fennáll a

$$4R^2\pi = 2R^2\left(2\alpha + 2\beta + 2\gamma\right) - 4T(\alpha, \beta, \gamma, R), \quad \text{avagy}$$
$$T(\alpha, \beta, \gamma, R) = R^2\left(\alpha + \beta + \gamma - \pi\right)$$

összefüggés.

Tekintettel az euklideszi térbe való beágyazottságra, a szférikus geometria egybevágóságai könnyen adódnak, ezek éppen azok az euklideszi egybevágóságok, melyek a modellgömböt saját magára képezik. Ezek adják az ortogonális csoportot, melyet az origón átmenő egyenesek körüli forgatások, illetve az origóra vonatkozó tükrözés generál.

A Bolyai–Lobacsevszkij-féle hiperbolikus geometria

Annak ellenére, hogy az euklideszi rendszer remek egyezést mutat a mérhető világgal, már Eukleidész informál minket arról, hogy nem minden alapállítást kell (lehet) azonos szinten kezelni. Az axiómák mellett (melyeket mindenki számára kötelezően elfogadandónak tart) használja a Posztulátum megnevezést is, mely gyengébb elfogadási szintet jelent. A vitában résztvevő felek egyike további gondolatmenetét valamely Posztulátumra alapozva, fenntartja a lehetőségét annak, hogy esetleg később ezen állítását revideálva új eredményre jusson. Az V. Posztulátum egy ilyen állítás. Ennek a i.sz. 300 körül élő Proklosztól származó párhuzamossági axiómának nevezett alakja a legismertebb. Eszerint *egy sík egy adott pontján keresztül, egy a ponton nem áthaladó adott síkbeli egyeneshez pontosan egy az adott ponton áthaladó és az adott egyenest nem metsző egyenest találunk.* Az V. Posztulátum igaz (a többi axiómákból igazolható) vagy hamis (a többi axiómákból nem igazolható) voltának eldöntésére tett kísérletek a matematika történetét 2 évezreden át gazdagították. A bőséges irodalomra tekintettel meg sem kíséreljük ezeket reprodukálni, javasoljuk azonban a közismert magyarul megjelent könyvek ([2], [1], [16]) mellett, egy ezzel a céllal íródott cikk elolvasását (ld. [10]) is. Annyit azonban mi is megemlítünk, hogy a két évezredes probléma a XIX. század első harmadának a végén oldódik meg. Bolyai János 1823-ban újságolja el levélben apjának felfedezését; 1826-ban küldi el német nyelven írt kéziratát volt tanárának; illetve nyomtatásban latin nyelven 1831-ben jelenteti meg apjának könyvéhez csatolt függelékként. Lényegében egyidőben, de attól függetlenül Nyikoláj Ivanovics Lobacsevszkij hasonló elméletével, melynek első nyomai egy 1823-as tankönyvében találhatók; teljességgel pedig egy 1835-ben kiadott Képzetes Geometria c. könyvben publikálódott. Bolyai felfedezése lényegében elakadt Gaussnál, néhány rövid soron kívül (amit Bolyai Farkasnak írt) sose beszélt ezen eredményről, nem említette Lobacsevszkijnek sem, akinek 1840-ben német nyelven írt összefoglalóját olvasta és terjesztette is. (Ez a munka Bolyaihoz 1848-ban jutott el.)

Mindketten igazolták, hogy van logikailag egyenértékű alternatívája az euklideszi síkgeometriának. Lobacsevszkij felépített egy elképzelt geometriát, melyben alapállításként a párhuzamossági axióma tagadását teszi fel, igazolja, hogy geometriájában a háromszögek szögösszege π-nél kisebb, kidolgozza a háromszögek trigonometriáját, és fontos lépéseket tesz a terület és térfogat számítások tárgykörében. Bolyai elhagyja a párhuzamossági axiómát és felépíti azt az abszolút geometriának nevezett geometriát, mely ezen axiómától független állításokat tartalmaz. A párhuzamossági axióma ebben a rendszerben egy elágazási pont, feltéve igaz voltát az euklideszi geometriához, tagadva azt egy másik az ún. hiperbolikus geometriához jutunk. Ezen utóbbi megegyezik Lobacsevszkij elképzelt geometriájával. Igazolja a két geometria relatív ellentmondás-mentességét. (A két fontos dolgozat állításait egyaránt megtaláljuk a [8] könyvben.)

Elképzelést kapni a hiperbolikus geometriáról több módón is lehetséges. Bolyai útja hosszadalmas, hiszen számos kisebb-nagyobb állítás bizonyítása formálja apránként szemléletünket mindaddig, míg természetesnek nem vesszük, hogy a síkon három lényegesen különböző lehetőség adódik két egyenes kölcsönös helyzetére; hogy a háromszögek szögösszege 0 és π között bármilyen értéket felvehet; és nincs akármilyen nagy területű háromszög, nem beszélhetünk hasonlóságról.

A modell módszer ezt az utat lerövidíti. A hiperbolikus geometria adaptálására a leggyakrabban használt modell a Cayley-Klein- vagy projektív modell. Az euklideszi sík egy r-sugarú körének belső pontjait tekintjük pontoknak, az egyenesek pedig a körbe metsző egyenesek körön belüli részei. Azonnal látható, hogy ebben a modellben nem teljesül a párhuzamossági axióma. A síkgeometria szokásos objektumai könnyen beazonosíthatók, de számítások elvégzéséhez szükségünk van a szakaszhossz és szögmérték megadására is. Ha P, Q két pontja a körnek, akkor az összekötő egyenesük két további pontban metszi a körvonalat, legyenek ezek U, V. Tegyük fel, hogy P és U között van a Q pont. Ekkor előjeles távolságokban gondolkozva is pozitív a

$$(PQUV) := \frac{PU}{UQ} : \frac{PV}{VQ}$$

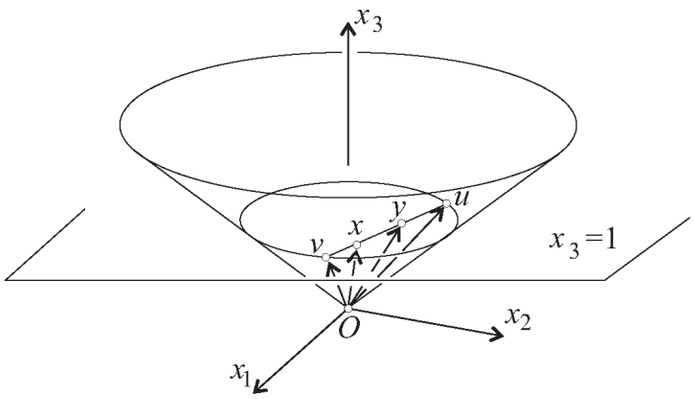
hányados, melyet a négy pont kettősviszonyának nevezünk. A kettősviszony rendelkezik a $(PQUV)(QRUV) = (PRUV)$ „multiplikatív” tulajdonsággal. Mivel a vizsgált kettősviszonyok pozitívak, értelmes a $PQ \mapsto c\ln(PQUV)$ megfeleltetés, melyre ezért a $c\ln(PQUV) + c\ln(QRUV) = c\ln(PRUV)$ egyenlőség is teljesül. A pontok távolságának értelmezése tehát a $d(P,Q) = c\ln(PQUV)$ formulával történhet, ahol a c konstans meghatározása még hátravan. Ha modellkörünk r sugarú, a P pontot a kör középpontjának választva, a $|PQ|$ euklideszi távolságot pedig X-el jelölve, az X-hez tartozó x modelltávolság a

$$x = c\ln(PQUV) = c\ln\left(\frac{r}{r-X} : \frac{-r}{r+X}\right) = c\ln\left(\frac{1+\frac{X}{r}}{1-\frac{X}{r}}\right) = 2c \cdot \operatorname{artanh}\frac{X}{r}$$

formulával számolható. Ha c-t $c = r/2$-nek választjuk, ez a formula a szimmetrikus

$$\frac{x}{r} = \operatorname{artanh}\frac{X}{r}, \quad \text{avagy} \quad \frac{X}{r} = \operatorname{tgh}\frac{x}{r}$$

alakot ölti.



A Cayley–Klein-modellben a Hilbert-féle axiómák ellenőrzése nem okoz nehézséget, ha közvetlenül definiáljuk a szögtartományok egybevágóságát. Azonban a szögtartományoknak olyan mértéket adni, melynek alapján a hiperbolikus trigonometria levezethető, nem magától értetődő feladat. Felix Klein, Cayley kúpszeletekre vonatkozó relatív távolságfogalmát alkalmazta modelljén, ezért dualitást követelt a távolság és szögmérték meghatározásának tekintetében. Azaz egy adott sugársorhoz hozzá kellett rendelnie két egyenest, amelyek a szög szárait adó sugársorbeli elemekkel együtt négy olyan egyenest jelentettek, melyeknek kettősviszonya definiált. Ezek az extra egyenesek az alapkúpszelethez a sugársor tartópontjából húzott érintők. A négy egyenes kettősviszonyának alkalmas logaritmusa a szög mértékét a pontok távolságának módján definiálhatja. Hiperbolikus metsző egyenespár közös pontjai a modell belső pontjai, ezért a szöget adó sugársornak nincs olyan egyenese, mely szokásos értelemben érinthetné a modellkört. De ha komplex együtthatókat is megengedünk, éppen két ilyet találunk.

Legyen az adott pont a modellkör középpontja és a modellkört adja meg az $x^2+y^2=r^2$ egyenlet valamilyen Descartes-féle koordináta-rendszerre nézve. A keresett egyenesek egyenlete $y=\zeta x$ alakú, ahol ζ komplex szám is lehet. Ebből kapjuk az $(1+\zeta^2)x^2=r^2$ egyenletet, melyben ζ-t úgy kell megválasztani, hogy a $D=4(1+\zeta^2)r^2$ diszkrimináns zérus legyen. Azaz $\zeta=\pm i$ és a keresett komplex érintők $y=\pm ix$, ahol $i^2=-1$. Az origón átmenő tetszőleges két, modellbeli, egymással α euklideszi szöget bezáró egyenes analitikusan megadható az $y=\operatorname{tg}\varphi\cdot x$, $y=\operatorname{tg}(\varphi+\alpha)\cdot x$ egyenletekkel. A négy egyenes kettősviszonya a Pappos-Steiner-tétel alapján megkapható teszőleges tőlük különböző egyenessel való metszetpontnégyes kettősviszonyával. Válasszuk ezen segédegyenesnek az $x=1$ egyenest. Ez rendre a $(\operatorname{tg}\varphi,1),(\operatorname{tg}(\varphi+\alpha),1),(i,1),(-i,1)$ pontokban metszi sugárnégyesünket. A négy pont (komplex) kettősviszonya tehát:

$$\frac{i-\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}(\varphi+\alpha)-i}:\frac{-i-\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}(\varphi+\alpha)+i}=\frac{i-\operatorname{tg}\varphi}{i+\operatorname{tg}\varphi}:\frac{i-\operatorname{tg}(\varphi+\alpha)}{i+\operatorname{tg}(\varphi+\alpha)},$$

amiből a hajlásszög definíciója alapján a

$$C\ln\left(\frac{i-\operatorname{tg}\varphi}{i+\operatorname{tg}\varphi}:\frac{i-\operatorname{tg}(\varphi+\alpha)}{i+\operatorname{tg}(\varphi+\alpha)}\right)=C\left(\ln\frac{i-\operatorname{tg}\varphi}{i+\operatorname{tg}\varphi}-\ln\frac{i-\operatorname{tg}(\varphi+\alpha)}{i+\operatorname{tg}(\varphi+\alpha)}\right)=$$

$$=C\ln\frac{i+\operatorname{tg}(\varphi+\alpha)}{i-\operatorname{tg}(\varphi+\alpha)}-C\ln\frac{i+\operatorname{tg}\varphi}{i-\operatorname{tg}\varphi}=\frac{2C}{i}\left(\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\varphi+\alpha))-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi)\right)=\frac{2C}{i}\cdot\alpha$$

végeredmény adódik. Ha C-t $i/2$-nek választjuk, a modellközéppontban találkozó egyenesek hiperbolikus és euklideszi hajlásszöge megegyezik. A kapott szögmérték használatával már igazolhatók a hiperbolikus háromszög trigonometrikus formulái, a két koszinusztétel az alábbi alakot ölti:

$$\cosh\frac{c}{r}=\cosh\frac{a}{r}\cosh\frac{b}{r}-\sinh\frac{a}{r}\sinh\frac{b}{r}\cos\gamma,$$

$$\cos\gamma=-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cosh\frac{c}{r}.$$

Azonnal feltűnik a gömbi geometria koszinusztételeivel való hasonlóság. Az ismert

$$\sin(ia)=i\sinh a,\quad \cos(ia)=\cosh a$$

azonosságok használatával a gömbi formulákból az $ir=R$ helyettesítés olyan hiperbolikus formulákhoz vezet, melyek határesete megint egy euklideszi formula. Ez arra utal, hogy a hiperbolikus és a szférikus terek az $r\leftrightarrow R$ paraméter megfeleltetéssel párokba rendezhetők, ahol $r,R\to\infty$ esetén ezen geometriák közös határhelyzete az euklideszi geometria. Az analógiát használva a háromszög területére vonatkozó gömbi formula a hiperbolikus α,β,γ szögekkel rendelkező háromszög területére nézve a jól ismert defektusra vonatkozó formulát adja:

$$t(\alpha,\beta,\gamma,r)=T(\alpha,\beta,\gamma,ir)=-r^2\left(\alpha+\beta+\gamma-\pi\right)=r^2\left(\pi-(\alpha+\beta+\gamma)\right).$$

Feltétlenül említenünk kell ezen a ponton Lambert nevét, aki abból a feltételezésből kiindulva, hogy a háromszög szögösszege kisebb mint π lényegében levezette a terület fenti kifejezését. Ő jött rá arra, hogy a „képzetes sugarú gömb” geometriája produkál a várt nemeuklideszi szintetikus észrevételekhez passzoló modellt ([12]). Mindazonáltal ezen lehetőség megvalósulását „igazi” geometria modellel nem tudta alátámasztani. A Cayley–Klein-modell jelentősége, hogy a hiperbolikus sík egésze tekintetében bizonyítható vele a relatív ellentmondástalanság, a hiperbolikus geometriában fellépő ellentmondás az euklideszi geometria ellentmondásaként is jelentkezne.

Gauss számára a szférikus geometria konkrét példát jelentett konstans pozitív görbületű felületre az euklideszi térben. Ez azért is fontos, mert felületelméletében kidolgozott egy szép tételt, mely a háromszög szögösszegét számítja ki a szorzatgörbület segítségével. A felület belső geometriájában egyenes szakasznak tekintendő egy felületen haladó két felületi pontot összekötő legrövidebb görbe vonal, melyet geodetikusnak szoktak nevezni. A geodetikus vonalakkal összekötött három pont a háromszög, ennek szögeit az egy csúcsban találkozó geodetikusok érintőinek hajlásszöge méri. Gauss tétele szerint az α, β, γ szögekkel bíró geodetikus háromszög szögösszegét az

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_A K(u,v)\,\mathrm{d}f$$

formulával lehet meghatározni, ahol a K függvény a felület szorzatgörbülete, $\mathrm{d}f$ a felszínéből származó mérték, A pedig az a paramétertartomány az (u,v) síkon, melyből a háromszögtartomány pontjai adódnak. (Egy pontosabb, könnyen érthető leírás Szenthe János cikkében található az [1] könyvben.) Így Gauss a gömb esetében megkapta a terület formulát, hiszen ekkor $K = 1/R^2$ és $\int_A \mathrm{d}f = T(\alpha,\beta,\gamma,R)$. Ezek szerint a 3-dimenziós euklideszi térben van olyan felületet, amelynek a belső (felületként való előállítástól független) geometriája konstans pozitív görbületű, így a háromszögeinek területe a szögösszegének a többletével arányos, és van olyan felületünk is, ahol ez a szögösszeg π, mert a szorzatgörbület azonosan zérus (az euklideszi sík). Gauss arra nem látott példát, hogy olyan is létezik, ahol a terület a hiánnyal arányos, mert a szorzatgörbület konstans negatív értéket vesz fel. Ha a teljes hiperbolikus sík megadható egy felületdarabjaként az euklideszi térnek, könnyű olyan koordinátázását megadni, melyre Gauss formuláit kiszámolva konstans negatív szorzatgörbületet kapunk. Gauss ilyen felület keresése közben foglalkozhatott a hiperbolikus geometria körébe vezető problémákkal, de szisztematikus vizsgálatnak írott nyoma nincs munkásságában. Az Appendix olvasása döbbenthette arra rá, hogy „lekésett” a Lambert féle képzetes sugarú gömb megvalósítása kérdésében, mert a probléma megoldása csak az axiomatika útján lehetséges, de ezt Bolyai János megcsinálta. (E tárgykörben ajánlom a [6] cikket olvasásra.) Mindenesetre Gauss problémájának komoly utóélete lett. Jóval később Beltrami ad meg először olyan felületet, melynek belső geometriája a hiperbolikus sík egy darabjának felel meg (ld. [3]) majd ezt a konstrukciót számos másik követte. De egyik sem a teljes hiperbolikus sík ábrázolását adja. (Mai szaknyelven nem a hiperbolikus sík izometrikus immertálásával adódó felület.) 1900-ban bizonyítja Hilbert, hogy a 3-dimenziós euklideszi térben ilyen felület nem is létezik.

Beltrami példája kellőképpen egyszerű, ahhoz, hogy vázlatosan tárgyaljuk. Tekintsünk egy tetszőleges pozitív a valós számot és keressük az (x, z) síknak olyan $z(x)$ görbéjét, mely átmegy az $(0, a)$ ponton és egy adott pontjában megrajzolt érintőjének az érintési pont és az x-tengely által közrezárt szakasza éppen a hosszúságú. A feltétel felírása után az ismeretlen függvényre az

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{z}{\sqrt{a^2 - z^2}}$$

egyenlet adódik, melynek mindkét oldalát integrálva az

$$x(z) = \pm\left(a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - z^2}}{z} - \sqrt{a^2 - z^2}\right) = \pm\left(a \cdot \operatorname{areasech} \frac{z}{a} - \sqrt{a^2 - z^2}\right) \qquad z \in (0, a]$$

explicit előállítást kapjuk. A kapott görbe a vonszolási görbe vagy *traktrix*, amelynek x-tengely körüli megforgatottja származtatja a Beltrami-féle *pszeudoszférát*. A pszeudoszféra szorzat görbülete $K = -1/a^2$, de az $x = 0$ síkbeli körmetszetének pontjaiban nem léteznek azok az alapmennyiségek, melyekből a szorzatgörbület számítható. Így a hiperbolikus sík tetszőleges korlátos darabjának ábrázolására alkalmas, de a teljes síkéra nem.

Utolsó megjegyzésként szeretném felhívni arra a figyelmet, hogy habár eddig az euklideszi geometriát tekintettük a másik kettő közötti határátmenetnek, erre nem feltétlenül kell így gondolni. Bolyai gondolatmenetében az euklideszi és hiperbolikus geometriák az édestestvérek, a közös tételeik alkotják a „tér abszolút és igaz tudományát”. A gömbi geometria lóg ki a sorból, ugyanakkor fontos közvetítő szerepe van. Világos, hogy a hiperbolikus téren belül is lehet önálló gömbi geometriát értelmezni, hiszen minden szükséges eszköz a kezünkben van ehhez. A kérdés az, hogy milyen kapcsolatban van egymással a hiperbolikus geometria és az euklideszi geometria gömbi geometriája. Bolyai először bizonyítja a szinusztétel mindkét geometriában érvényes abszolút alakját, majd ennek segítségével igazolja, hogy a gömbi trigonometria formulái egyaránt érvényesek a hiperbolikus és az euklideszi térben vizsgált gömbfelszíneken. Azaz a gömbi geometria abszolút érvényű!

A téridő modell

A XX. század eleje a világról alkotott statikus képet alaposan átformálta. Bernhard Riemann 1854-ben tartott habilitációs előadása olyan új lehetőséget tárt fel világképünk alakításához, amely ma is meghatározza azt. Felvázolta a Riemann-geometria alapgondolatát, mely úgy jelenik meg, mint a Gauss-féle felületgeometria olyan magasabb dimenziós általánosítása, mely független a beágyazással való realizálhatóságtól. A Riemann-geometriák dinamikusak abban az értelemben, hogy általános globális definíciójuk mellett metrikus szerkezetük pontról pontra változik, még a geodetikusok sem feltétlenül rendelkeznek általános érvénnyel, előfordulhat, hogy két pontot nem lehet geodetikussal összekötni. A XIX. század végének fizikája ezt a szemléletet erősíti. Sorban merülnek fel a kétségek a Newtoni fizika érvényességi körét illetően, míg Einstein meg nem fogalmazza először a speciális, majd az általános relativitáselméletet.

A téridő modell a speciális relativitáselmélethez kapcsolódó világról alkotott geometriai kép matematikai modellje. Hermann Minkowski javasolja használatát a [14] munkájában. Az euklideszi geometriában rögzíthetünk egy ortonormált bázist és egy hozzá kapcsolt Descartes-féle koordináta-rendszert, tekintve ezt a helymeghatározás abszolút rendszerének. Az euklideszi jellegért a kapcsolt euklideszi vektortér skaláris szorzatának három alaptulajdonsága felel. Ha azonban a világbeli pozíciónk leírására törekszünk, e három koordináta mellé egy negyediket is képzelnünk kell, mely azt az időpontot adja meg, amikor a vizsgált objektum az adott térbeli helyzetben volt. Egy részecskére gondolva egy ilyen négykoordinátás koordináta-rendszerben az első három koordináta a hol, az utolsó a mikor kérdésre ad választ. A kérdés az, hogy van-e olyan egységes számolási elv, mellyel az olyan geometriai fogalmak mint szakaszhossz, szögmérték, merőlegesség definiálhatók ilyen 4-vektorokra. Minkowski javaslata szerint négyeseinknek 4-dimenziós vektortér feleljen meg azzal a változtatással, hogy a skaláris szorzás definíciójában szereplő, pozitív definitségi tulajdonságot elhagyjuk. Skaláris szorzatunk általában legyen egy nem elfajuló, valós értékű, szimmetrikus, bilineáris függvény (indefinit skaláris szorzat). A fizikai tér leírásához így elegendő az indefinit skaláris szorzat függvényt megadni, egy adott bázisra vonatkozó koordinátákra gyakorolt hatása segítségével. Az euklideszi skaláris szorzatot az jellemzi, hogy ortonormált bázisra vonatkozó koordináták esetén a helyvektorok hossznégyzete a koordináták négyzetösszegével egyezik meg. Azaz valamilyen bázisra nézve $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ hossznégyzettel dolgozhatunk. Minkowski téridő modelljében az időnek megfelelő koordináta négyzetét levonjuk a térkoordináták négyzetösszegéből, azaz az adott bázisra vonatkozó koordinátákkal $\langle x, x\rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ teljesül. Hagyományos okokból az x_4 koordinátát t-vel jelölve a skaláris szorzatunk számításának módja az $\langle x, x'\rangle = x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' - tt'$ alakot ölti. Ebben a modellben háromfajta vektorunk van; azokat, amelyek hossznégyzete pozitív, nevezzük *térszerűnek*, amelyek hossznégyzete negatív, az *időszerű* vektorok, és amelyeknek hossznégyzete nulla, azok a *fényszerű* vektorok. A speciális relativitáselmélet keretein belűl a fizikai tér két megengedett vonatkoztatási rendszerében mért adatokat az ún. Lorentz-transzformáció köti össze. Minkowski modelljében reprezentálva a Lorentz-transzformációt azt kapjuk, hogy ezen vonatkoztatási rendszerekhez kapcsolt bázisok cseréje esetén az általuk definiált koordinátákkal Minkowski módján számított skalárnégyzet nem változik meg. (Megengedett két vonatkozási rendszer, ha az egyik a másikhoz viszonyítva egyenesvonalú egyenletes mozgást végez.)

Minkowski modellje Gauss kérdését a hiperbolikus sík izometrikus immertálásáról új megvilágításba helyezi. Tekintsük ugyanis most az $\langle x, x\rangle = -1$ felületet az x_3 koordináták elhagyásával kapott 3-dimenziós Minkowski-térben. Ennek minden érintősíkjára teljesül, hogy erre megszorítva az indefinit skaláris szorzatot, egy pozitív definit skaláris szorzatot kapunk. Azaz Gauss felületelméleti számításai alkalmazhatók rá, abban a formában, mint az euklideszi térben. Az is kiszámolható, hogy a szorzatgörbülete minden pontjában $K = -1$. A kapott felület így egy modellje a teljes hiperbolikus síknak. Lambert algebrai ötlete a képzetes sugarú gömbröl a Minkowski-térben az egyik legfontosabb felület, a képzetes sugarú egységgömb. Abban az euklideszi térben, amely ugyanarra a bázisra épül, mint a Minkowski-geometria csak a hossznégyzetet euklideszi módon a koordináták négyzetösszegeként származtatjuk, egy kétköpenyű hiperboloid reprezentálja, melynek egyik összefüggő darabját (pl. a felső féltérhez tartozót) szokás a hiperbolikus sík *hiperboloid modelljének* is nevezni. A hiperboloid modell maximális geodetikusai a beágyazó tér origóján áthaladó síkok által kimetszett teljes görbék, azaz teljes hiperbola ágak. Így az euklideszi tér egységgömbjén létrejövő szférikus geometriával analóg módon származtatott geometria ez a téridő modellen belül.

Az analógiát erősíti a pontpárok távolságát adó formula. Ha a $t = 1$ feltételnek eleget tevő pontok síkján tekintjük az időszerű vektorokat, egy euklideszi síkba ágyazott Cayley–Klein-modell pontjait kapjuk. Két ilyen pont P és Q hiperbolikus távolsága a már ismertetett formula alapján kiszámítható, használva a $p = (p', 1)^T$, $q = (q', 1)^T$ időszerű helyvektorokat és a PQ egyenesen elhelyezkedő $u = (u', 1)$, $v = (v', 1)$ fényszerű helyvektorokat. A kapott érték az

$$\frac{1}{2}\ln(PQUV) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{\langle u'-p', u'-p'\rangle_E}}{\sqrt{\langle q'-u', q'-u'\rangle_E}} : \frac{\sqrt{\langle v'-p', v'-p'\rangle_E}}{\sqrt{\langle q'-v', q'-v'\rangle_E}}\right)$$

formula eredménye, ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ a $t = 1$ sík skaláris szorzata. Mivel a p, q, u, v

vektorok különbségeinek az utolsó koordinátája nulla, a jobb oldal egyenlő a

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{\langle u-p,u-p\rangle}}{\sqrt{\langle q-u,q-u\rangle}}:\frac{\sqrt{\langle v-p,v-p\rangle}}{\sqrt{\langle q-v,q-v\rangle}}\right)$$

kifejezéssel, amelyben már az indefinit skaláris szorzat szerepel. Legyen $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ azon két pontja a hiperboloid modellnek, melyek centrális vetülete a $t=1$ síkra az origóból éppen P és Q; $\tilde{U}$ és $\tilde{V}$ pedig az a két fényszerű vektor, melyet a $\tilde{P}\tilde{Q}$ egyenes metsz ki a fénykúpból. Ekkor a Papposz–Steiner-tétel szerint ezen utóbbi érték éppen

$$\frac{1}{2}\ln(\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{U}\tilde{V})=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{\langle\tilde{u}-\tilde{p},\tilde{u}-\tilde{p}\rangle}}{\sqrt{\langle\tilde{q}-\tilde{u},\tilde{q}-\tilde{u}\rangle}}:\frac{\sqrt{\langle\tilde{v}-\tilde{p},\tilde{v}-\tilde{p}\rangle}}{\sqrt{\langle\tilde{q}-\tilde{v},\tilde{q}-\tilde{v}\rangle}}\right).$$

Feltéve, hogy $\tilde{u}=\alpha\tilde{p}+(1-\alpha)\tilde{q}$ és $\tilde{v}=\beta\tilde{p}+(1-\beta)\tilde{q}$, ha felhasználjuk, hogy

$\langle\tilde{p},\tilde{p}\rangle=\langle\tilde{q},\tilde{q}\rangle=-1$ és $\langle\tilde{u},\tilde{u}\rangle=\langle\tilde{v},\tilde{v}\rangle=0$ kapjuk, hogy

$0=-\alpha^2-(1-\alpha)^2+2\alpha(1-\alpha)\langle\tilde{p},\tilde{q}\rangle$, és

$0=-\beta^2-(1-\beta)^2+2\beta(1-\beta)\langle\tilde{p},\tilde{q}\rangle$ ahonnan az együtthatókra az

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{\langle\tilde{p},\tilde{q}\rangle-1}{\langle\tilde{p},\tilde{q}\rangle+1}}\right)\quad\text{és}\quad\beta=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{\langle\tilde{p},\tilde{q}\rangle-1}{\langle\tilde{p},\tilde{q}\rangle+1}}\right),$$

értékek adódnak. Mivel a $(\tilde{P},\tilde{Q},\tilde{U},\tilde{V})$ kettősviszony egyenlő az

$(1-\alpha)/\alpha:(1-\beta)/\beta$ számmal, és most $\alpha+\beta=1$ is teljesül kapjuk, hogy

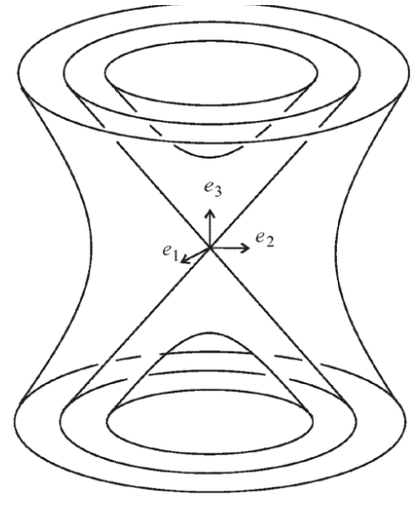
$$d(\tilde{P},\tilde{Q})=\frac{1}{2}\ln(\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{U}\tilde{V})=\frac{1}{2}\ln\frac{(1-\alpha)\beta}{(1-\beta)\alpha}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=\ln\frac{-1+\sqrt{\frac{\langle\tilde{p},\tilde{q}\rangle-1}{\langle\tilde{p},\tilde{q}\rangle+1}}}{1+\sqrt{\frac{\langle\tilde{p},\tilde{q}\rangle-1}{\langle\tilde{p},\tilde{q}\rangle+1}}}=$$

$$=\ln\frac{-\sqrt{\langle\tilde{p},\tilde{q}\rangle+1}+\sqrt{\langle\tilde{p},\tilde{q}\rangle-1}}{\sqrt{\langle\tilde{p},\tilde{q}\rangle+1}+\sqrt{\langle\tilde{p},\tilde{q}\rangle-1}}=\ln\left(\langle\tilde{p},\tilde{q}\rangle+\sqrt{\langle\tilde{p},\tilde{q}\rangle^2-1}\right)=\operatorname{areacosh}\langle\tilde{p},\tilde{q}\rangle.$$

Ha vizsgálatainkat a $t=r^2$ metszet Cayley–Klein-modelljére és így az $x_1^2+x_2^2-t^2=-r^2$ hiperboloid által meghatározott hiperbolikus geometriára végeztük volna, akkor hasonlóképpen a

$$\cosh \frac{d(P,Q)}{r} = \frac{\langle p, q \rangle}{r^2}$$

formulát kapjuk, mely a szférikus távolságfogalommal mutat pontos egyezést. A hiperbolikus sík modellje mellett a téridő modellben egyéb érdekes geometriák is reprezentálódnak mint alkalmas felület belső geometriája. Tekinthetjük azon pontok halmazát is, melyek helyvektorainak hossznégyzete 1. Ennek a halmaznak a pontjai a beágyazó tér egy egyköpenyű hiperboloidját adják, amelynek differenciálgeometriai értelemben vett görbülete $K = 1$, azaz a Minkowski-tér pozitív konstans görbületű felületeként jelentkezik. A kapcsolódó geometriát *de Sitter-térnek* nevezik. A geodetikusok a hiperboloid modellel analóg módon szintén az origón áthaladó síkokkal való hiperbola metszetek. Nem meglepő tehát, hogy a de Sitter-síknak is van egy szép egyszerű modellje a valós projektív síkon. Egy Cayley-Klein-modell komplementerében elhelyezkedő pontok halmaza az alaphalmaz, az egyenesek pedig a projektív egyenesek ezen alaphalmazzal való metszetei. A hiperbolikus és a de Sitter-sík egyaránt származtatható Klein módszerével, ezért ezen geometriák a kilenc Cayley–Klein-féle síkgeometria közül valók.



Vegyük észre, hogy a Minkowski-térnek megfeleltetett euklideszi tér egységgömbjének felszíne térszerű, időszerű és fényszerű vektorok végpontjaiból áll, azaz három diszjunkt halmaz egyikéhez sorolhatóak. A tér vektoraira ugyanez áll, hiszen valós számmal való szorzás a vektor jellegét nem változtatja meg. A három halmaz közül a fényszerű vektorok egy konvex kúpot határoznak meg, ez választja el egymástól az időszerű és térszerű vektorok halmazát. Az időszerű vektorok fekszenek ezen konvex kúp belsejében, a térszerűek a külsejében. Az időszerű vektorok „egységgömbje” a hiperbolikus sík, a térszerűeké a de Sitter-sík. A fényszerű vektorok kúpja a *fénykúp*, ennek az origó szinguláris pontja, de a többi pontban a szorzatgörbület $K = 0$, így ez a felület az euklideszi sík egy darabjának ábrázolását adja. Az euklideszi tér egységgömbje, mint a téridő modell egy felülete már nem konstans szorzatgörbületű felület.

A normált terek geometriája

Minkowski a geometriai számelmélet körében végzett vizsgálatai során a következő fontos észrevételt teszi: Ha adott egy euklideszi tér és benne egy origó közepű centrálszimmetrikus korlátos és zárt konvex test, akkor a vektorok hosszát mérhetjük relatív módon ehhez a $\mathcal{K}$ testhez viszonyítva is. A legkisebb olyan pozitív λ számot kell a vektor hosszának tekinteni, melyre $\lambda\mathcal{K}$ tartalmazza a vektor végpontját (a kezdőpont mindig az origó). Igazolja, hogy a $\mathcal{K}$ testhez rendelt ezen $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény rendelkezik az abszolútérték-függvény tulajdonságaival, azaz nem negatív értékeket vesz fel és ha ez nulla, akkor a vizsgált vektor a nullvektor, továbbá pozitív homogén, és szubadditív függvény. (Azaz $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ és $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ teljesül minden $\lambda \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}^3$ esetén.) Az olyan vektorteret, amelyen értelmezett egy norma függvény normált térnek nevezzük. A véges dimenziós valós test felett értelmezett vektorterekből származtatott normált tereket *geometriai Minkowski-tereknek* nevezzük, megkülönböztetve őket a téridőtől. A XX. század matematikájában a normált terek elméletének jelentős szerepe van, a matematika új és termékeny ágait hozta ez a fogalom létre. Cikkünkbe viszont más okból került. Az euklideszi geometriának általánosítását kapjuk így, hiszen ha a $\mathcal{K}$ egységgömbnek az euklideszi gömböt választjuk, akkor az euklideszi geometria vektorhossz fogalmát jelenti a vektor normája. Ugyanakkor számos olyan gyakorlatban fellépő feladat van, amelynek modellezésére egy másik konvex testhez tartozó távolságmérés megfelelőbb, mint az euklideszi. Ha például kirándulás közben szintkülönbségben szeretnénk jegyezni teljesítményünket, gyorsabban növeljük azt (ugyanazon gyaloglási sebesség mellett) ha a szintvonalakra merőlegesen haladunk, mintha egy szintvonalon. A szintvonalakat nagyjából koncentrikus konvex halmazoknak tekintve és egy ilyet egységgömbnek választva, a Minkowski-hossz kalkulálásának segítségével határozhatjuk meg teljesítményünket.

Ezen geometria is megfelel a korábbi differenciálgeometriai elvárásainknak, ha az

egységgömb alakjára további megszorításokat teszünk, de létrehozhatók olyan geometriák is, amelyek nem a fizikai térfogalom fejlődéséhez járulnak hozzá, hanem a tudomány más területeit segítik. Poliédrikus Minkowski-ternek nevezzük az olyan geometriai Minkowski-teret, melynek egységgömbje poliéder. Két fontos ilyen tér a kocka és a szabályos oktaéder egységgömbbel rendelkező terek, melyek a háromdimenziós l_1 illetve l_∞ tereknek felelnek meg. Minden $p \geq 1$ esetén az l_p tér is egy Minkowski-tér, közűlük az l_2 felel meg az euklideszi ternek.

Visszatérve a világ lehetséges leírásaira, ugyanúgy mint a fizikai, a geometriai Minkowski-tér is származtatható a skaláris szorzat alkalmas általánosítása útján. Ez az általánosítás a *félskaláris szorzat* függvény. Láttuk, hogy a skaláris szorzat függvény fontos tulajdonsága, hogy teljesíti a Cauchy–-Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget. Definiáljuk a félskaláris szorzatot egy olyan a vektorpárok halmazából a valós számok halmazába képező $[\cdot,\cdot]$ függvényként, mely pozitív definit ($[v,v] \geq 0$ és egyenlőség csak a nullvektor esetén áll fenn), az első változójában lineáris, a másodikban homogén (azaz $[\alpha u + \beta v, \gamma w] = \alpha\gamma[u,w] + \beta\gamma[v,w]$) és tetszőleges vektorpárra teljesíti a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget (azaz $|[u,v]| \leq \sqrt{[u,u]}\sqrt{[v,v]}$). Igazolható, hogy tetszőleges normához megadható olyan félskaláris szorzat, mely alapján történő hossznégyzet számítás az adott norma négyzetére vonatkozó értéket adja vissza. Ez alapján a félskaláris szorzat és a norma közötti kapcsolat megfelel a skaláris szorzat és az euklideszi hossz, vagy az indefinit skaláris szorzat és a téridő metrikájára vonatkozó hossz között fellépő kapcsolatoknak. A félskaláris szorzat bevezetése Lumer érdeme ([13]), aki funkcionálanalízisbeli vizsgálataihoz keresett alkalmas, a Hilbert-terek skaláris szorzatának megfelelő apparátust.

Utószó

Írásunkban láthatóan a XIX. század nagy matematikusainak tevékenységéhez kapcsolható geometriai térfogalmak szerepeltek. Ne vezessen ez minket tévútra ezen fogalmak korszerűségének a dolgában. Annak ellenére, hogy jelenleg a XXI. századot írjuk, ezen térfogalmak semmit sem koptak, valamennyi – a modern tudományban jelenleg használt – a fizikai világról szóló leírás kiindulási pontja a fent leírt geometriák egyike. A differenciálgeometriai vizsgálatok zömében speciális Riemann-, Finsler- vagy szemi-Riemann-terekben zajlanak. Az első tér pontjainak érintő terein skaláris szorzat által indukált euklideszi teret feltételezünk, a második érintőterein félskaláris szorzat által indukált norma adja a metrikát, míg a harmadik érintőterei indefinit skaláris szorzat által indukált pseudo-euklideszi terek (olyan fizikai Minkowski-terek, melyek szignatúrája esetleg különbözik a téridőétől).

A fizikai világhoz kapcsolt kutatások olyan Lorentz-sokaságokra vonatkoznak, melyek 4-dimenziós szemi-Riemann-sokaságok, téridö modellet adó geometriával az érintőtereiken. Még egy ilyen általános térfogalom is épülhet konkrét módon valamelyik fentebb említett geometriára. Az általános relativitás elméletének sarokköve Einstein azon egyenlete, mely egy ismeretlennek tekintett geometria Ricci-görbületét, skalárgörbületét és metrikus alaptenzorát kapcsolja össze a fizikai adatokat magában foglaló energiaimpulzus tenzorral. Az Einstein-egyenlet megoldása nehéz feladat, ennek ellenére számos megoldását ismerjük (az első Schwartschildtól származik). Közűlük egy a Robertson–Walker-féle téridő, mely szerkezetét tekintve olyan mint a téridő modell, avval a különbséggel, hogy egy fix koordináta-rendszer időtengelye abszolút időnek van kijelölve és az egy abszolút időpillanatban zajló események 3-dimenziós tere pedig egy konstans $\frac{1}{\varphi(t)}c$ görbületű tér, ahol c egy fix 3-dimenziós konstans görbületű tér görbülete. (A $\varphi(t)$ függvényt nevezik görbítő függvénynek.) Ha visszafelé haladunk az időben, e szerint a modell szerint a térszerű metszeteknek egyre jobban kell görbülniük (ha feltesszük, hogy $\lim_{t\to 0+0}\varphi(t)=0$), ami az ősrobbanás elméletéhez vezet. Az újabb mérési eredményekkel azonban csak olyan Robertson–Walker-téridő lehet összhangban, melyben a c görbület negatív. Ha ez a modell tükrözi világunkat a legjobban, akkor a hiperbolikus geometriának a fizikai számításainkban jelentős szerepe kell legyen.

G. Horváth Ákos

Irodalomjegyzék

1
Bolyai-emlékkönyv, Vince Kiadó, Budapest, 2004.

2
Bolyai, J.: Appendix Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.

3
Beltrami, E.: *Saggio di interpretatione della geometria non euclidea.* Giornale di Mathematiche, **6** (1869), 284-312.

4
Casey, J.: *A treatise on Spherical Trigonometry, and its application to Geodesy and Astronomy, with numerous examples,* Hodges, Figgis and CO., Grafton-ST. London: Longmans, Green, and CO., 1889.

5
Eukleidész: Elemek Gondolat, Budapest, 1983.

6
Abardia J., Reventós, A., Rodrigúes, C.J.: *What did Gauss read in the Appendix?* Historia Mathematica **39/3**, 292-323.

7
Grassmann, H. G.: Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik: dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert, O. Wigand, Leipzig, 1844.

8
G.Horváth, Á.: Csodálatos geometria, Typotex, 2013.

9
G.Horváth, Á, Szirmai, J.: A nemeuklideszi geometriák modelljei, Typotex, 2003.

10
Gray, J.: *Non-Euclidean geometry - a Re-interpretation.* Historia Mathematica **6** (1979), 236-258.

11
Hamilton, W. R.: *On quaternions or a new system of imaginaries in algebra.* Philosophical Magazine, (1844 to 1850)

12
Lambert, J. H.: *Theorie der Parallellinien* Mag. Reine Angew. Math. (1786), 137–164, 325–358.

13
Lumer, G.: *Semi-inner product spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961), 29-43.

14
Minkowski, H.: *Raum und Zeit* Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Leipzig, 1909.

15
Salmon, G.: A treatise on the analytic geometry of three dimension. (Fourth Edition) Hodges, Figgis and Co., 1882.

16
Szász, P.: Bevezetés a Bolyai-Lobacsevszkij-féle geometriába. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.

17
van der Waerden, B. L.: Egy tudomány ébredése. Gondolat, Budapest, 1977.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **GAZDA(G)SÁG** NEVET ADTUK A **GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET ROVATNAK**, AMELYBEN BEMUTATJUK, HOL, MIKÉPPEN HASZNÁLJÁK FEL A MATEMATIKÁT, MILYEN GAZDAG IS AZ A KÖR, AMELYIK ÉRINTI EZT A TUDOMÁNYÁGAT. (ROVATSZERKESZTŐK: *RÖST GERGELY* ÉS *MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR*.)

Illés Tibor, Molnár-Szipai Richárd

2017. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Mozdonyhozzárendelés a vasúti teherszállításban

Egy jól működő cég számára a rendelkezésre álló erőforrások optimális felhasználása kulcsfontosságú. A MÁV-TRAKCIÓ Zrt. (2014 óta a MÁV-START része) is ezért kereste meg a BME Matematika Intézetének *Illés Tibor* vezette Optimalizálási Csoportját. (Társszerző: *Molnár-Szipai Richárd*.) A vállalat vasúti vontatási feladatok ellátásával foglalkozik, vagyis megállapodik egy ügyféllel, hogy az ügyfél vasúti kocsikra pakolt szállítmányát egy adott helyen és időben felveszi, majd a saját mozdonyai segíségével elszállítja egy másik adott helyre és időre. A cég erőforrásai tehát a mozdonyok, illetve az általuk felhasznált üzemanyag. Ideális esetben egy vontatás elvégzéséhez nem az ország másik oldaláról szeretnének mozdonyt küldeni, hanem a közelből; tökéletes esetben egy mozdony pont azon az

A szerk.

2017. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matematika a (bio)Kémiai Kinetikában és a Vegyészmérnöki Tudományban

2017. május 25. és 27. között Budapesten rendezték a Mathematics in (bio)Chemical Kinetics and Engineering elnevezésű konferenciasorozat hetedik konferenciáját. A konferenciasorozat célja kezdettől fogva az volt, hogy a komoly matematikai eszközöket alkalmazó vegyészeket (vegyészmérnököket, biológusokat) és a valódi alkalmazásokkal foglalkozó matematikusokat (fizikusokat, informatikusokat) egymással összehozza. Ezt a célt általában igen széles spektrumot átfogó előadások és poszterek útján szokta teljesíteni.

Kovács Zoltán

2017. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Donald Ervin Knuth

„Korán nyugdíjba vonultam" — olvashattuk mintegy 20 éve, 1998-ban Knuth (ejtsd: /kə'nu:θ/) úr hómpédzsének elején. „Rájöttem, hogy kb. 20 évnyi éjjel-nappali munkám szükséges még ahhoz, hogy befejezzem *A számítógép-programozás művészete* c. könyvet, életem főművét." Ez a ön-nyugdíjaztatás, mint később kiderült, elsősorban a remeteséget jelentette számára a társasági élet színterétől távol. Don (Knuth úr maga is így nevezi magát) mégsem fordított hátat a nagyvilágnak: hosszú évekig tartó szünet után végül mégis aktiválta email-címét... A TeX szövegszerkesztő programnyelvet használók körében alapműnek számító könyv további kötetei azonban még váratnak magukra. Szerzőnk *Kovács Zoltán*, jelenleg a Linzi Tanárképző Főiskolán tanít matematikát, a GeoGebra program egyik fejlesztője.

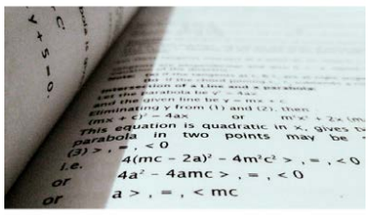
állomáson fejezett be egy korábbi vontatást, ahol egy újabb feladat várja. Az elvállalt megbízások ismeretében tehát egy olyan tehervonat menetrendet szeretnénk készíteni, ami minimalizálja a mozdonyok által megtett távolságot.

Tóth János

2017. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Programozás — Wolfram nyelv

Arra a kérdésre, hogy a matematikában vagy a programozásban kell-e pontosabbnak lennünk, valószínűleg többen mondanák azt, hogy az elsőben, mint a másodikban, és talán ez is a gyakoribb eset. Most mégis mutatunk két (egymáshoz közeli) példát az ellenkezőjére. *Tóth János* rövid írása előtt érdemes elolvasni a Wolfram nyelv történetét (2016. szeptemberi számunkban, Lóczi Lajostól) és a TeX programozási nyelv keletkezéséről Kovács Zoltán mostani számunkban megjelent cikkét. A fényképen Stephen Wolfram látható 2008-ban.



Tóth János

2017. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Szükséges, elégséges, lehetséges — Mennyi matek kell egy kognitív tudományi mesternek?

A BME Természettudományi Karának kognitív tudományi mesterei számára tartott órák kapcsán elgondolkodtam néhány kérdésen — kezdi írását *Tóth János*. Mi az a kognitív tudomány? Mi a célja a kognitív tudományi mesterszakos hallgatók oktatásának? Ehhez milyen matematikai ismeretekre van szükség? Mit gondolnak erről mások bel- és külföldön? Mit lehet megtanítani, figyelembe véve a rendelkezésre álló időt (ami, ugye, mindig kevés), a hallgatók rendkívül vegyes előismereteit, az oktatók látókörének szélességét? Milyen módszerekkel érdemes kísérletezni? Milyen segédanyagra van szükség (ha nincs, az a baj, ha van, akkor pedig az). A szerző ezt az írást Érdi Péter kognitív tudományi nagymesternek 70.

születésnapjára ajánlja.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Illés Tibor, Molnár-Szipai Richárd 2017. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Mozdonyhozzárendelés a vasúti teherszállításban

Bevezetés

Egy jól működő cég számára a rendelkezésre álló erőforrások optimális felhasználása kulcsfontosságú. A MÁV-TRAKCIÓ Zrt. (2014 óta a MÁV-START része) is ezért kereste meg a BME Matematika Intézetének Illés Tibor vezette Optimalizálási Csoportját. A vállalat vasúti vontatási feladatok ellátásával foglalkozik, vagyis megállapodik egy ügyféllel, hogy az ügyfél vasúti kocsikra pakolt szállítmányát egy adott helyen és időben felveszi, majd a saját mozdonyai segíségével elszállítja egy másik adott helyre és időre.

A cég erőforrásai tehát a mozdonyok, illetve az általuk felhasznált üzemanyag. Ideális esetben egy vontatás elvégzéséhez nem az ország másik oldaláról szeretnének mozdonyt küldeni, hanem a közelből; tökéletes esetben egy mozdony pont azon az állomáson fejezett be egy korábbi vontatást, ahol egy újabb feladat várja. Az elvállalt megbízások ismeretében tehát egy olyan tehervonat menetrendet szeretnénk készíteni, ami minimalizálja a mozdonyok által megtett távolságot.[1]

A projekt előtt a vállalat ezt úgy oldotta meg, hogy az országot három régióra osztotta, és mindegyiket egy tapasztalt diszpécser irányította, gyakorlatilag kézzel készítve a mozdonyfordulókat — az időnként — változó tehervonat menetrendre. Ez a működési forma a megbízások számának növekedésével egyre inkább tarthatatlanná vált. Természetesen a projekt után is szükség van emberi felügyeletre, de a mozdonyfordulók automatizált tervezése teher menetrend esetén is lehetségessé vált, megkönnyítve a diszpécserek munkáját. Az optimalizált mozdonyfordulók a mozdonyok hatékonyabb kihasználásával csökkentik a tehervonat vontatási költségeit, a késéseket, és nem utolsósorban a károsanyag-kibocsátást.

A fénykép forrása: http://iho.hu/hir/halasi-hatos (Kovács Kitti fotója)

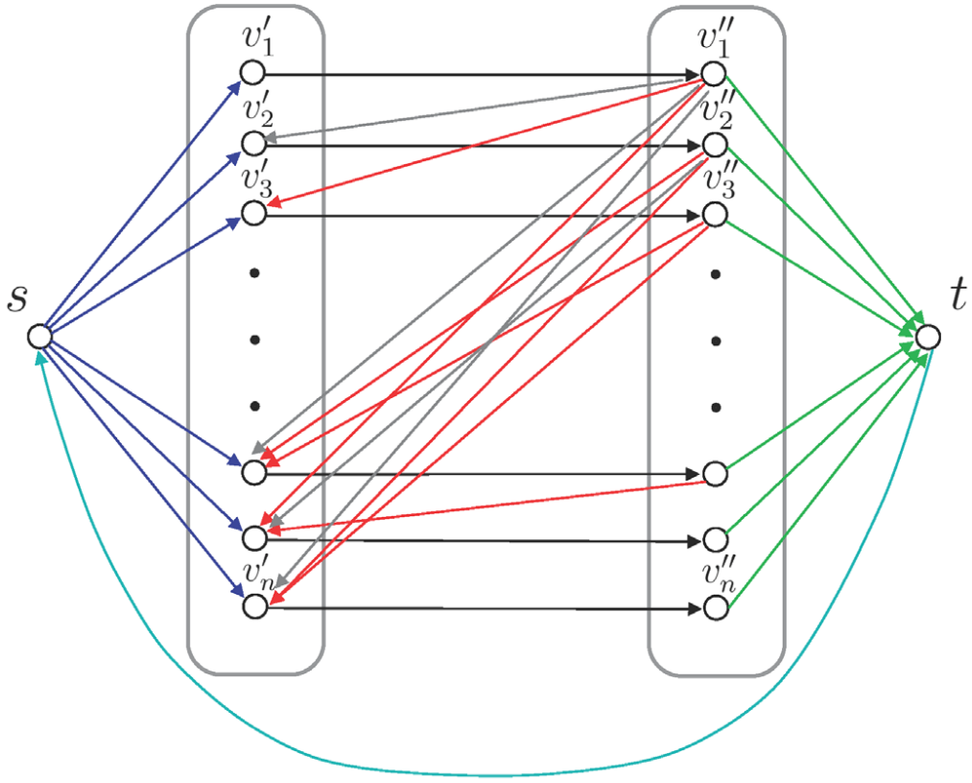
A matematikai modell

Legyen a teljesítendő megbízások (tehervonatok) halmaza V. Minden $v \in V$ megbízáshoz rendelkezésünkre állnak a következő adatok: indulási hely, indulási idő, érkezési hely, érkezési idő, útvonal, használható mozdonytípusok. A felépített matematikai modell egy hálózati folyam, melyben minden v megbízásnak megfelel egy v' és v'' csúcs, illetve egy (v', v'') él. Ha egy mozdony a v megbízás teljesítése után képes elvégezni a w megbízást, akkor felveszünk egy (v'', w') élt. Ez akkor teljesül, ha a v elvégzése után van elég idő az esetleges gépmenetre v érkezési helyéről w indulási helyére, illetve a szerelvények összerakására, ellenőrzésre („technikai idő”):

$$\text{érkezési idő}_v + \text{gépmenet}\left(\text{érkezési hely}_v, \text{indulási hely}_w\right) + \text{technikai idő} \leq \text{indulási idő}_w$$

Bevezetünk továbbá egy s forrást és t nyelőt, és felveszünk minden v-re egy (s, v') és (v'', t) élt. Végül bevezetünk egy (t, s) élt. Az így kapott hálózati folyamot szemlélteti az 1. ábra.

V' V''



1. ábra. Minimális költségű hálózati folyammodell

Látható, hogy egy 1 értékű s-ből t-be menő folyam megfeleltethető egy úgynevezett mozdonyfordulónak (egy mozdony által elvégzett feladatsorozat). Megkövetelve, hogy mindegyik (v', v'') típusú élen legalább 1 legyen a folyamérték, a modell megengedett megoldásai leírják a valós feladat megoldásait.

Mi legyen a feladat célfüggvénye? Ez gyakorlati feladatoknál nem mindig egyértelmű. A (t, s) élen levő folyamérték megegyezik az elvégzendő megbízások elvégzéséhez felhasznált mozdonyok számával, így tudjuk ezt is minimalizálni. Illetve a gépmeneteknek[2] megfelelő élek célfüggvény-együtthatóját a megtett távolságra állítva tudjuk az összes gépmenetet is minimalizálni. A két célfüggvény megfelelő súlyozásával (lineáris kombinációjával), a gyakorlatban is jól használható — optimális — megoldások állíthatók elő.[3]

Implementáció és eredmények

Egy jellemző méretű feladat a havi terv. Mivel a személyzetnek 15 nappal a hónap kezdete előtt meg kell adni egy munkabeosztástervet, így a következő hónap tervét a jelenlegi hónap közepén rendelkezésre álló adatok alapján kell optimalizálni. Ez persze szükségessé tesz későbbi változtatásokat, de a módszer hatékonyságát jól méri.

Egyik implementációnk egy C++ kód volt, melyben csak a felhasznált mozdonyok számát minimalizáltuk. Mivel itt nemnulla célfüggvény-együtthatója csak a (t, s) élnek van, így lényegében egy *maximális folyamfeladat*ról van szó. A havi terv mozdonytípusok szerint három feladattá lett szétbontva, ezeken a futási eredmények a következők voltak (Intel Core i7-3630QM processzoron):

Mozdonytípus	0431	0628	0630
Tehervonatok száma	3068	1458	2020
Gráf mérete	825 099 él	185 221 él	366 513 él
Optimum	34 mozdony	19 mozdony	25 mozdony
Futásidő	9 p 11 mp	45 mp	2 p 17 mp

Az így kapott megoldásokról elmondható, hogy viszonylag egyenletesen terhelik a mozdonyokat. Például a 0431-es típusú mozdonyok mindegyike 138 és 180 közötti megbízást végez el az adott hónapban, a 34 mozdony[4] közül 23 pedig 151 és 164 közöttit.

Másfelől a gépmenetek hossza nincs figyelembevéve a modellben, így nem meglepő, hogy a mozdonyfordulók elég pazarlók. Ismét a 0421-es típusú mozdonyokat tekintve, összességében a mozdonyok az összesen megtett távolság $35{,}3\%$-át gépmenetként végzik.

A feleslegesen megtett távolság csökkentése érdekében a maximális folyamfeladat helyett *minimál költséges folyamfeladat*ot fogalmaztunk meg. Ennek a modellnek a megoldására — a feladat mérete miatt — már optimalizálási feladatok megoldására specializált szoftvert használtunk: a matematikai modelleket Mosel modellezési nyelven fogalmaztuk meg, és az XPRESS-MP programcsomaggal oldottuk meg. Sikerült olyan megoldást találnunk, amelynél azonos mozdonyszám mellett a felesleges gépmenetek össztávolsága lényegesen leszoríthatóak (például a 0431-esek gépmenetaránya $11{,}2\%$-ra csökkent), míg a számítás futásideje nagyságrendileg megegyező maradt.[5]

Összefoglalás, további kutatási irányok

A felhasznált módszerek, számítási eredményeink meggyőzték a MÁV-TRAKCIÓ Zrt. munkatársait a (klasszikus) operációkutatási modellek és megoldási módszerek hasznosságáról, alkalmazhatóságáról középtávú tervezési feladatok megoldására.

A gyakorlatban a tehervonat-megrendelések eléggé kaotikus képet mutatnak, azaz a tervek elkészítésének időpontjában (15 nappal a modellezett hónap előtt) a valóságban közlekedő vonatok mindösszesen 65%-a ismert. Sőt a tervezett tehervonatok és a leközlekedett tehervonatok az indulást megelőző 3. napon is több, mint 20%-os eltérést mutatnak. Ez szükségessé tette a mozdonyfordulók újraütemezését. A bevezetett modellek már közel sem voltak klasszikus operációkutatási feladatnak tekinthetők, sőt a szakirodalom áttekintése után bebizonyosodott, hogy ezen a területen az újraütemezési modelljeink az operációkutatási szakirodalomban újak. Az újraütemezési feladatoknál az alapelvárás az volt, hogy a tervekhez képest minimális legyen a módosítás, vagy másképpen megfogalmazva, azok a tehervonatok, amelyek egy mozdonyfordulóba kerültek, lehetőleg maradjanak egy mozdonyfordulóban. Ennek az az értelme, hogy a mozdonyfordulók kialakítása után tervezik meg a személyzet hozzárendelését a tehervonatokhoz, vagyis ha a mozdonyfordulók jelentősen változnak, akkor a személyzet-hozzárendelést is módosítani kell.

A fénykép forrása: https://www.flickr.com/photos/gadam91/4457712466/in/gallery-41517609@N05-72157656244807942/ (Garamvölgyi Ádám fotója)

Az újraütemezési feladat már egy bonyolultabb operációkutatási problémára, a többtermékes hálózati folyamfeladatra vezetett, amelynek megoldására valószínűleg nem létezik polinomiális algoritmus.[6] Természetes következménye a többtermékes hálózati folyamfeladatra ismertetett bonyolultságelméleti eredménynek az, hogy az újraütemezési feladatok futási ideje még akkor is jelentősen megnövekedett, ha az újraütemezés időhorizontját egy hónap helyett egy hétre csökkentettük le. Találtunk olyan tesztfeladatot, amelynek a megoldása több órát vett igénybe. Ha azonban az újraütemezést csak három napra kívánjuk elvégezni, akkor az általunk vizsgált esetekben az XPRESS-MP futási ideje nem haladta meg az egy órát.

Az újraütemezési feladat jobb megismerése, politópjának vizsgálata, hatékony vágások előállítása még sok kutatási feladatot ad az operációkutatóknak. A gyakorlati feladatok gyorsabb megoldása érdekében hatékony approximációs algoritmusok, vagy a feladat tulajdonságait kihasználó heurisztikus módszerek kidolgozása szükséges.

Irodalomjegyzék

[1] Barta Zs.: Vasút optimalizálási problémák: matematikai módszerek és modellek. MSc diplomamunka, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2011.

[2] Illés T, Makai M, Vaik Zs.: Combinatorial Optimization Model for Railway Engine Assignment Problem. In: Kroon L G, Möhring R H (editors) Proceedings of the 5th Workshop on Algorithmic Methods and Models for Optimization of Railways.Dagstuhl: Internationales Begegnungs- und Forschungszentrum für Informatik (IBFI), 2006. ISBN: 978-3-939897-00-2.

[3] Illés T.: Optimization models for railway freight transportation. 26th European Conference on Operational Research, 2013, Róma.

[4] Illés T, Molnár-Szipai R.: Strongly polynomial primal monotonic build-up simplex algorithm for maximal flow problems. Discrete Applied Mathematics 214, 2016.

[5] Molnár-Szipai R.: Hatékony pivot algoritmusok hálózati folyamfeladatokra. MSc diplomamunka, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2012.

Illés Tibor, Molnár-Szipai Richárd,

BME Matematika Intézet

Lábjegyzetek

1

Természetesen más ésszerű célt is megfogalmazhatnánk, például a vontatás összköltségének a minimalizálását, amelyben a szükséges mozdonyok által befutott távolság csak az egyik összetevője az összköltségnek.

2

*Gépmenet*nek nevezzük a mozdonyok vontatás nélküli közlekedtetését, abból a célból, hogy egyik állomásról átkerüljön egy másikra, ahol elvégzendő megbízás várja.

3

Itt kell megjegyeznünk, hogy a feladat — matematikai — természetéből adódóan, létezhetnek un. *alternatív optimális megoldás*ok, amelyek azonos célfüggvényérték mellett, strukturálisan különböző megoldást eredményeznek, azaz a gyakorlati felhasználás szempontjából különbözhetnek.

4

A feladatok megoldásában jelentkező szükséges mozdonyszám egyben a mozdonyfordulók számát is jelenti.

5

A maximális folyam, illetve a minimál költséges folyam feladatok megoldására ismertek

polinomiális algoritmusok, amelyek a gyakorlatban is hatékonyak.

6

Az algoritmusok hatékonyságával, illetve a matematikai/számítástudományi/optimalizálási problémák bonyolultságával, komplexitásával foglalkozó területe a matematikának a bonyolultságelmélet, amelyiknek egyik eredménye az említett állítás, azaz a többtermékes hálózati folyamfeladat megoldására nem létezhet polinomiális algoritmus, ha $P \neq NP$

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A szerk. 2017. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matematika a (bio)Kémiai Kinetikában és a Vegyészmérnöki Tudományban

MaCKiE 2017

2017. május 25. és 27. között Budapesten rendezték a Mathematics in (bio)Chemical Kinetics and Engineering elnevezésű konferenciasorozat hetedik konferenciáját. Jelen voltak az alapító atyák közül Guy Marin és Grigorij Jablonszkij (ma már inkább Gregory Yablonsky), (Denis Constales nem). A konferenciasorozat célja kezdettől fogva az volt, hogy a komoly matematikai eszközöket alkalmazó vegyészeket (vegyészmérnököket, biológusokat) és a valódi alkalmazásokkal foglalkozó matematikusokat (fizikusokat, informatikusokat) egymással összehozza. Ezt a célt általában igen széles spektrumot átfogó előadások és poszterek útján szokta teljesíteni. Az idei konferencia külön érdekessége volt, hogy egészen sokan jöttek el olyan kutatók, akik formális determinisztikus és sztochasztikus reakciókinetikával foglalkoznak (bár a determinisztikust a terület talán legfontosabb alakja, Martin Feinberg nyomán inkább a kémiai reakcióhálózatok elméletének – Chemical Reaction NetworkTheory – szeretik nevezni.)

A résztvevők igen sok helyről jöttek (a végleges számok ettől kissé eltérhettek, de a regisztrálók között volt 12 Magyarországról, 9 az Egyesült Államokból, 7 Belgiumból, 4-4 Kínából, Indiából és az Egyesült Királyságból, 3-3 Ausztriából, Franciaországból, Pakisztánból és Lengyelországból, 2-2 Csehországból, Dániából, Olaszországból, Japánból, Luxemburgból és Szlovéniából végül 1-1 ezekből az országokból: Kanada, Németország, Indonézia, Kazahsztán, Marokkó, Hollandia, Nigéria, Szerbia, Svédország, Svájc, Tunézia, Törökország. Ha más szponzor is lett volna, mint a Springer Nature, akkor bizonyosan több diákot és több magyar résztvevőt is láttunk volna.

A matematikus olvasót nyilván az érdekli, hogy milyen területek bizonyulnak hasznosnak ezeken a területeken. Ez néhány kulcsszóval jellemezhető:

- a differenciálegyenletek kvalitatív elmélete, (szinkronizálás, bifurkáció, inverz feladatok, stacionárius állapotok létezése, egyértelműsége, stabilitása, multistabilitás, invariáns halmazok, Gröbner-bázis, oszcilláció, késleltetett egyenletek, matematikai programcsomagok alkalmazása, gráfok és dinamika)
- átlagolás, összevonás,
- paraméterbecslés,
- Lotka–Farkas-reakció, zéródeficiencia-tétel, szabályozás, vezérelhetőség,
- sztochasztikus modellek erős közelítése, Kurtz tétele, Komlós-Major-Tusnády–tétel,
- potenciálisenergia-felületek, reakciódiffúzió-modellek, anyagcsere-hálózatok,

A konferencia fent megadott honlapjáról letölthető az előadások kivonata. Ugyanott képek is találhatók a résztvevőkről.

A záró napon különdíjban részesültek a legjobb poszterek kitűzői, a legjobb fiatal előadók, továbbá ezúttal harmadik alkalommal adták át a MaCKiE Életműdíjat is a magas szintű matematikai módszerek (bio)kémiai és vegyészmérnöki alkalmazásában mutatott kiemelkedő tevékenységéért (A. N. Gorban és G. S. Yablonsky után) Tóth Jánosnak (BME). A konferencia szervező bizottságának (minden részletre kiterjedő figyelmű) elnöke Lente Gábor (DE) volt, a technikai lebonyolítást az Akadémiai Kiadó konferenciaszervező leányvállalata intézte, kedvesen pontosan. Egyes előadások szövege a Reaction Kinetics, Mechanisms and Catalysis folyóiratban fog megjelenni, bár a résztvevők között ott volt Mezey Pál, a Journal of Mathematical Chemistry, Karl Heinz Hoffmann, a Journal of Nonequilibrium Thermodynamics és Valery Romanovsky, a Qualitative Theory of Dynamics Systems (fő)szerkesztője is, akik (a szokásos lektorálás után) szintén szívesen közlik az előadásokat.

A legközelebbi hasonló összejövetel várhatóan 2018 végén, Gentben lesz.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Kovács Zoltán 2017. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Donald Ervin Knuth

„Korán nyugdíjba vonultam" — olvashattuk mintegy 20 éve, 1998-ban Knuth (ejtsd: /kə'nu:ϑ/) úr hómpédzsének elején. „Rájöttem, hogy kb. 20 évnyi éjjel-nappali munkám szükséges még ahhoz, hogy befejezzem *A számítógép-programozás művészete* c. könyvet, életem főművét." Ez a ön-nyugdíjaztatás, mint később kiderült, elsősorban a remeteséget jelentette számára a társasági élet színterétől távol. Don (Knuth úr maga is így nevezi magát) mégsem fordított hátat a nagyvilágnak: hosszú évekig tartó szünet után végül mégis aktiválta email-címét (Knuth@cs.stanford.edu), annak ellenére, hogy weblapján (http://www-cs-staff.Stanford.EDU/~knuth/) még mindig csak a FAQ-robot válaszol a gyakran feltett kérdésekre.

Ki ez az életvidám professzor, aki másodállásban orgonaművész; napi két órát tölt el könyvtárban olyan könyvek olvasásával, mint például az *Aranykapu* és *Az ember, aki ismerte a végtelent*; s szabadidejében a stanfordi színházba jár?

1. ábra. Donald és Jill Knuth 812 sípú családi orgonája (http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/organ.html)

1938. január 10-én született Milwaukee-ban Wisconsin államban. Felesége a nála egy évvel fiatalabb *Nancy Jill Carter*, 1961 óta házasok. Két gyermeke van: *John Martin* (1965) és *Jennifer Sierra* (1966).

Egyetemi tanulmányait a *Case Institute of Technology*-n végezte 1956 és 1960 között. Matematikából szerezte Ph.D. fokozatát 1963-ban a *California Institute of Technology*-

n. Doktori disszertációjának címe: *Véges ferde testek és projektív síkok*. 1960-tól 1968-ig a a kaliforniai *Burroughs Corporation*-nél dolgozik, eközben 1963 és 1968 között tanársegéd majd tudományos munkatárs a *California Institute of Technology*-n. 1968 óta a *Stanford Egyetem* professzora. 1968 és 1969 között Védelmi Analitikai Intézetben (*Institute for Defense Analyses*) dolgozik matematikusként a Kommunikációs Kutató Részlegen (*Communications Research Division*). Egy évet vendégprofesszorként tölt el az *Oslói Egyetemen* 1972-1973-ban. 1977 óta a Stanford Egyetemen az Elektromérnöki Kar tiszteletbeli professzora is. 1977-től 1989-ig *Fletcher Jones* ösztöndíjas, 1990 óta a „számítógépprogramozás művészetének professzora", 1993 óta ez a titulus az „emeritus" fokozattal is kibővült. 2002 és 2006 között, valamint 2011 óta az *Oxfordi Egyetemen* vendégprofesszor, de folytathatnánk a listát tovább is, hiszen életének csak a legkiemelkedőbb állomásait említettük.

2. ábra. A Stanford Egyetem. Donald Knuth 50 éve öregbíti az egyetem hírnevét.

1965 óta tagja az *Amerikai Orgonista Céhnek*. (Ezt annyira fontosnak tartja, hogy önéletrajzában minden más tudományos tagság előtt említi!) Az Amerikai Matematikai Társaság (*American Mathematical Society*, AMS) 1961 óta élvezi tagságát (1978 és 1981 között Knuth maga is elnökségi tag). Az ACM-nek (*Association for Computing Machinery*) 1959 óta tagja, 1963-64-ben vezetője is. 1959 óta a *Mathematical Association of America*, 1965 óta az Ipari és Alkalmazott Matematikai Társaság (*Society for Industrial and Applied Mathematics*) tagja.

5 bejegyzett szabadalma van, ebből négyet más tudósokkal együtt tett közzé. Ezek közül az egyik egyfajta speciális digitális számítógép (1969), egy másik egy számítógépes szerkesztő rendszer (1969), egy harmadik egy skálázó és számbázis-konvertáló módszer, a negyedik pedig a digitalizálási technológia egy újítása (1994, 1996). Saját szabadalma egy véletlenszám-generátor (1970).

Számos tudományos folyóirat szerkesztőségi tagja volt, illetve tagja ma is. Néhány fontosabb: *Acta Informatica* (1970—1979), *Combinatorica* (1985-), *Discrete and Computational Geometry* (1986-), *Discrete Mathematics* (1970—1978), *Fibonacci Quarterly* (1964—1979), *Historia Mathematica* (1972—1979), *Journal of Algorithms* (1979—2004), *Journal of Computer and System Sciences* (1969-), *Journal of Computer Science and Techology* (1989-), *Random Structures and Algorithms* (1990—2007),

SIAM Journal on Computing (1973—1979), *Structured Programming* (1989—2000), *Theory of Computing* (2004-).

Mintegy 100 díjat, emlékérmet kapott a világ sok országában. Az egyik legkiemelkedőbb a kiotói Inamori Alapítvány 50 millió jenes pénzdíja (*Kyoto Prize for Advanced Technology*, 1996), ez a kitüntetés Japánban a nyugat-európai Nobel-díjjal egyenértékű.

Legismertebb könyvéről már szóltunk: A számítógép-programozás művészete először 1969-ben jelent meg. Az első három kötet címe: *Alapvető algoritmusok*, *Szeminumerikus algoritmusok*, *Keresés és rendezés*. Érdekesség, hogy a könyv első kötetét először román nyelvre, majd oroszra, japánra, kínaira, spanyolra, indiaira, végül magyarra fordították le. Könyvét először 10 kötetesre szánta, de hosszú ideig csak az első három készült el. A negyedik — címe: *Kombinatorikus algoritmusok* — jelenleg is készülőfélben van, első része 2011-ben került nyomdába, a többi rész folyamatos fejlesztés alatt áll. Az ötödik kötetet *Szintaktikus algoritmusok* címmel 2025-re szándékozik befejezni. A számítógép-programozás művészetében megalkotott MIX gépről külön könyvet is írt (1971).

1974-ben írt könyvét (Surreal Numbers) szintén lefordították magyarra *Számok valóson innen és túl* címmel.

1979-ben jelent meg a *TEX and METAFONT: New Directions in Typesetting* című munkája. Ezzel párhuzamosan készítette el a *TEX* szövegkészítő programnyelv első verzióját, mellyel eredetileg az volt a célja, hogy A számítógép-programozás művészete c. könyv fárasztó tárgymutató- és tartalomjegyzék-összeállítását lerövidítse. 1984-ben kibővítette a TEX-ről írt könyvet *The TEXbook* címmel. Ez a majdnem 500 oldalas könyv fergeteges sikert aratott: azóta (1996-ig) 26 kiadást ért meg. Knuth közreadta a TEX forrásszövegét is a *TEX: The Program* (1986) című könyvében, mintegy 600 oldalon. A *The METAFONTbook*-ban (1986) a TEX karakter-generátor segédprogramjának, a *METAFONT*-nak a leírását közli. 1986-ban megjelenik a TEX alapbetűkészletének, a *Computer Modern Font*-nak a teljes dokumentációja is.

3. ábra. A TEX emblémája, szerzője Duane Bibby. (https://www.ctan.org/lion/)

A TEX azóta a tudományos élet első számú szövegkészítő programja lett. Elsősorban matematikusok számára nagyon hasznos a TEX nyelvezete: bármilyen matematikai formula viszonylag egyszerű módon szerkeszthető, s a kész anyag hordozható (ASCII) formátumú. Az elkészült cikk külalakja a legszigorúbb tipográfiai előírásoknak is megfelel, anélkül, hogy a TEX-programozó a nyomdatechnikában jártas volna. A TEX verziószáma a π-hez, a METAFONT-é az e-hez „konvergál": minden egyes változat verziószámában egy újabb tizedesjegy kerül az előzőek mögé . . .

Társszerzője a monumentális *Concrete Mathematics* c. könyvnek (1994). A hittudomány iránti érdeklődését mutatja a *3:16 Bible Texts Illuminated* c. könyv (1992), melyben a Szentírás könyveinek minden harmadik rész 16. verséhez fűz egy-egy kommentárt.

1993-ban egy munkatársával elkészíti a *CWEB* rendszert, mellyel a C nyelvet és a természetes nyelvű programozást házasítja össze (*The CWEB System of Structured Documentation*). A programozási nyelv elősegíti a kódolás és a dokumentáció elkészítésének párhuzamos elkészültét.

Néhány további, nagyobb lélegzetű könyve: *Literate Programming* (1992), *Axioms and Hulls* (1992), *The Stanford GraphBase: A Platform for Combinatorical Computing* (1993).

Munkáját 161 tudományos publikáció, 260 hírneves lapokban megjelent hozzászólás, feladatmegoldás fémjelzi. 61 cikke csak szűkebb körű nyilvánosság számára ismert.

Jelenlegi „nyugdíjában" „A szórakoztató számítógép" (*Computer Musings*) címmel tart előadásokat a Stanford Egyetemen.

Tervei szerint A számítógép-programozás művészete 4—5. kötetének megjelenése után az első hármat fogja egy kissé más formában újraírni. A MIX gépet az MMIX-re cserélné le, amely már RISC alapú processzorral működne (erről 2005-ben egy külön könyvet is írt, mely magyarul is megjelent 2009-ben *MMIX: RISC számítógép a következő évezredre* címmel). A 6—7. kötetet a *környezetfüggetlen nyelvtanok* elméletéről és a *fordítóprogramokról* írná. „Ha Isten is úgy akarja" — fűzi hozzá végül.

Kovács Zoltán

Kovács Zoltán matematika-számítástechnika szakos tanárként végzett 1999-ben a Szegedi Tudományegyetemen (akkori nevén: József Attila Tudományegyetemen). 2015-ben szerezte meg a doktori fokozatot matematika módszertanból a Linzi Johannes Kepler Egyetemen. Jelenleg Linz-Hagenbergben él, és a Linzi Tanárképző Főiskolán tanít matematikát leendő matematikatanároknak. A GeoGebra program egyik fejlesztője, fő kutatás-fejlesztési iránya az automatikus geometriai bizonyítások témája. Weblapja: https://sites.google.com/site/kovzol/.

Megjegyzések

1. Knuth-hoz hasonlóan Kiotó-díjat nyert 2010-ben alaptudományok (matematika) területén Lovász László is.

2. A számítógép-programozás művészete magyarul először a Műszaki Könyvkiadónál jelent meg 3 kötetben 1987-88-ban, hogy minél gyorsabban a magyar olvasók kezébe kerülhessen, matematikusok egész csapata fordította egyszerre a fejezeteket. (Főszerkesztő: Simonovits Miklós.)

3. Donald Knuth főoldalon megjelenő fényképének eredetijét Jacob Appelbaum készítette 2005-ben.
https://en.wikipedia.org/wiki/Donald_Knuth#/media/File:KnuthAtOpenContentAlliance.jpg

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot
készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

2017. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Programozás — Wolfram nyelv

Arra a kérdésre, hogy a matematikában vagy a programozásban kell-e pontosabbnak lennünk, valószínűleg többen mondanák azt, hogy az elsőben, mint a másodikban, és talán ez is a gyakoribb eset. Most mégis mutatunk két (egymáshoz közeli) példát az ellenkezőjére.

Ha adott az A és a B nem üres halmaz, és az $f: A \to B$ függvény, továbbá a függvény értelmezési tartományának $C \subset A$ részhalmaza, akkor szükségünk lehet a C halmaz elemeinek képeiből álló halmazra. A matematikus tehát bevezeti az $f(C) := \{f(x) | x \in C\}$ jelölést, mit sem törődve azzal a ténnyel, hogy az f függvény A **elemein**, és nem A **részhalmazain** volt értelmezve! Ha itt pontosabbak akarnánk lenni (bár valóban nem okoz igazán gondot ez a pongyolaság), akkor az f függvény által generált, A részhalmazait B részhalmazaiba képező függvényről van szó, amit a halmaz (angolul set) szó kezdőbetűjével tehetünk nyomatékosabbá, például így: $Sf(C) := \{f(x) \mid x \in C\}$ ($C \subset A$). Kézenfekvő, hogy a programnyelvek esetén világosan meg kell különböztetni az f és az Sf függvényt, de valahogyan a kapcsolatukat sem árt számon tartani. A Wolfram nyelv (leánykori nevén *Mathematica*, hogy ne csak Wolfram Alpha és Wolfram Science létezzék reklámhordozóként) bevezette a **Map** „kétváltozós" függvényt (ha tetszik: operátort) erre a célra. Ha tehát adott például a $C := \{a, b, c\}$ halmaz és az f függvény, akkor a C halmaz képe ennél a függvénynél, vagyis az $\{f[a], f[b], f[c]\}$ halmaz így számolható: $\mathbf{Map}[f, \{a, b, c\}]$. (Megjegyzendő, hogy egy idő után a Maple fejlesztői is kénytelenek voltak bevezetni ezt a függvényt.)

Nézzünk egy másik példát! Ha most f olyan függvény, amely a sík pontjainak koordinátáihoz rendel valamit, akkor értékét az épeszű így számolja: $f(x, y)$. A furmányos viszont természetesen így: $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$, hiszen függvényünk kétdimenziós vektorokhoz rendel valamit, nem számpárokhoz! (Aki teheti, gondoljon még arra is, hogy TeX-ben hány karakter kell, hogy ehhez a szép alakhoz eljussunk!) Amikor erről mégis szó esik, például analízisben, akkor eleinte az az ember érzése, hogy folyamatosan azonosítunk mindent önmagával, pedig tényleg két különböző fogalomról van szó. A Wolfram-nyelv erre a problémára a következő megoldást kínálja: Ha adott az $\{x, y\}$ vektor, és szeretnénk, ha komponensei az f **kétváltozós** függvény argumentumaiként szerepeljenek, akkor ezt kell írnunk: $\mathbf{Apply}[f, \{x, y\}]$, az eredmény pedig $f[x, y]$ leend.

A figyelmes Olvasó észrevehette, hogy egyszer halmazt, egyszer meg vektort mondtam. Ha a Wolfram nyelv értelmében pontos akartam volna lenni, akkor mindkét esetben listát kellett volna mondanom, ugyanis ez az ott használt alapvető adatszerkezet.

A programnyelv alaposabb tanulmányozása közben kiderül, hogy a fent bevezetett két operátor elképesztően hasznos eszköznek bizonyul. Lásd erről programozóknak vagy a közönséges halandóknak szóló bevezetőket.

TJ

Megjegyzések:

A Wolfram nyelv történetéről 2016. szeptemberi számunkban Lóczi Lajos írt: http://ematlap.hu/index.php/gazda-g-sag/340-a-wolfram-programozasi-nyelv-rovid-tortenete-3 .

A TeX programozási nyelv keletkezéséről mostani számunkban olvashatnak Kovács Zoltán cikkében.

Fényképünkön Wolfram 2008-ban, forrása: https://hu.wikipedia.org/wiki/Stephen_Wolfram (Stephen Wolfram's PR team/Stephen Faust. Received via email from Stephen Wolfram's staff. Publicity photo of Stephen Wolfram).

2017-05-28

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 4. szám 2017. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Tóth János 2017. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Szükséges, elégséges, lehetséges — Mennyi matek kell egy kognitív tudományi mesternek?

Bevezetés

Körülbelül tíz évvel ezelőtt Bádog tanár úr, alias (cybersznoboknak aka) Pléh Csaba akadémikus, miután 2004-ben megalapította a BME Kognitív Tudományi Tanszékét, mesterszak alapításába fogott. Ennek részeként nyilván saját meggyőződéséből fakadóan, de a műszaki egyetemi környezet hatására is úgy gondolta, matematikai tárgyakra (beleértve ebbe az informatikát is) szükség lenne a képzés részeként. Ezek kidolgozásához a vele folytatott konzultációk után fogtam hozzá.

Kognitív tudomány

Magam számára azt a definíciót találtam ki, hogy ez a tudomány (egyesek szeretik többes számba tenni) úgy jött létre, hogy miután a biológia, csillagászat, fizika és társai kiszabadultak a filozófia fogságából, az ismeretelmélet is ezt szeretné tenni. (A kedves kollégák elég jól viselik ezt a definíciót.) Mérésekkel, kísérletekkel, modellekkel megközelíteni a tudás megszerzésének, tárolásának, feldolgozásának folyamatát a korábbi elmélkedés (hogy ne mondjam, introspekció, azaz önmegfigyelés) helyett.

A képzés célja

Először nyilván meg kell határozni a képzés célját. Ha jól vettem ki, a *tanároké* az volt, hogy a doktori iskola számára képezzünk hallgatókat, egységes stabil tudásszintre hozva a legkülönbözőbb területekről érkező embereket, remélve azonban, hogy a sokféle előismeret a közös munka folyamán majd előnyökkel is fog járni. Visszatekintve úgy látom, hogy a *hallgatók* jelentős része azért jött hozzánk, hogy (akár munka mellett) mester szintű diplomát szerezzen, néha megfejelve a kevéssé kiváló helyen szerzett BSc/BA fokozatát. Nem elhanyagolható azok száma sem, akik semmilyen érdeket nem tartottak szem előtt, csak érdeklődést: passzióból végzik el (munka mellett) a négy félévet.

Másutt mi van

Rendszeres és alapos áttekintés helyett néhány benyomásom következik.

Először is: matematika és kognitív tudomány kapcsolatára keresve a neten elsősorban olyan munkákat találunk, amelyek arról szólnak, hogy mit tud a második adni az elsőnek. De tárgyunk most nem ez. Lássuk néhány intézmény képzését.

A Central European University-n tanítanak statisztikát, beleértve a kísérlettervezést is, továbbá játékelméletet. Programozás címén a MATLAB és a Python szerepel.

A New York University kurzusa rendkívül gazdag statisztikában, és óriási pozitívuma, hogy alaposan (ki)használják a számítógépet, még ha csak a MATLAB-ot is. Számomra viszont elképzelhetetlen, hogy az analízis alapjai nélkül vágnak bele például a Fourier-transzformált ismertetésébe.

Irvine-ben (University of California) körülbelül hasonló a kötelező anyag, mint nálunk, de BSc szinten. Továbbá (annak ellenére, hogy) a képzés a társadalomtudományi karon zajlik (megjegyzendő, hogy a mi képzésünk is ott indult), nagyon sok a kötelezően választható matematikai jellegű tárgyak száma, amelyek közül a diáknak kell néhányat választania.

Ha jól látom, a Budapest Semester in Cognitive Science különálló matematikai tárgyat nem tartalmaz, de modellekről bőven esik szó, nyilván feltételezhetők a hallgatókról alkalmas előismeretek.

Kedvencem persze ez:

Here's my list of math subjects that support the study of brain (from a computational neuroscientist's perspective):

- Linear algebra
  - to understand high dimensions, to compute things quickly, foundation for other math
- Calculus
  - basics for everything continuous valued
- Statistics
  - to analyze any data, you need stats!
  - basis for modeling, regression, clustering, classification, and all
- Differential equations (basis for dynamical system)
- Dynamical system

    - intuition for neural dynamics (deterministic approximation)
    - modeling single neuron, synapse, small network
- Statistical physics
    - modeling large scale noisy neural dynamics
- Information theory
    - quantify how much "information" is coded in neural signal
- Numerical computation
    - your data and algorithm needs to be implemented in a computer
- Convex optimization
    - your statistics/model requires optimization
- Probability theory (basis for stochastic process and statistics)
- Stochastic process
    - model of neural signals, decision process (diffusion), basis for advanced statistics
    - point process theory is useful for dealing with neural spike trains
- Time series analysis (your data is a time series!)
- Signal detection theory
    - psychophysics is often designed to be a detection task

Brain is quite noisy, you need tools to deal with noise. More applied math than pure math is needed.

I have only seen topology being used a handful of times, and they were not very useful nor impressive. I love set theory and mathematical logic, but sadly never used it nor seen it being used.

In addition, real/complex/functional analyses are also useful, just in general.

Alig többet sorol fel, mint amit egy matematikus öt év alatt kellene, hogy megtanuljon. Igaz, hogy nem az oktatandó anyag, hanem a tudomány jelenlegi állásának áttekintése kapcsán, de nagyjából ugyanilyen sok mindent sorol fel Andler (2012) is. Ő még a kategóriaelméletet is kiemeli, amely talán Piaget és társai (1990) hatására lett oly népszerű a kognitív tudományban.

Tervek

Lássuk tehát először is a terveket, majd a megvalósulást.

Három tantárgyat terveztünk, $2+2$ óra matematikát, 2 óra statisztikát és $2+2$ óra informatikát. A későbbiekben ezeknek az óraszámoknak módosítását javasoltam: az informatikára 2 óra maradt, a statisztika óraszáma $2+2$-re módosult.

Matematika

A Matematika tárgy tartalma a természettudományos és műszaki egyetemeken szokásos első félévi tematika töredéke: azt szeretném elérni, hogy eljussunk a derivált fogalmának legfőbb alkalmazásáig: a *függvényvizsgálat*ig. Menet közben viszont meglehetősen sokat (többet, mint a mérnök hallgatóknál) foglalkozunk a matematika felépítésével, logikával, bizonyítási módszerekkel, és amikor csak lehet, színes történeti és filozófiai megjegyzésekkel szórakoztatjuk a hallgatókat. Azt szeretnénk ugyanis elérni, hogy kedvük legyen a tárgyhoz, és hogy meglássák a számukra közvetve vagy közvetlenül hasznos elveket, módszereket. Általában azt gondolom (Tóth, 2001), hogy az egyetemen nehéz elméletet kell tanulni, mert ha ez elmarad, azt később sokkal több energiába kerül elsajátítani. Itt ezt a meggyőződésemet zárójelbe teszem.

Gyakorlatok

A gyakorlatokon meglehetősen kevés időt szánunk a deriválási szabályok begyakorlására, viszont olvasnivalókat osztunk szét a hallgatók közt, amiről azután beszámolnak.

Kedvenc feladatsorunk a természetes nyelvi mondatok formalizálása, például az ilyeneké (a szerzőket az idézetek alapján könnyen megtalálhatjuk a neten):

If you want a lover,
I'll do anything you ask me to
And if you want another kind of love,
I'll wear a mask for you
If you want a partner, take my hand
Or if you want to strike me down in anger,
Here I stand
I'm your man

Vagy egy régebbről származó kedvenc:

If you can talk with crowds and keep your virtue,
Or walk with Kings—nor lose the common touch,
If neither foes nor loving friends can hurt you,
If all men count with you, but none too much;
If you can fill the unforgiving minute
With sixty seconds' worth of distance run,
Yours is the Earth and everything that's in it,
And—which is more—you'll be a Man, my son!

Avagy ilyeneké, ahol már nem úszhatjuk meg a kvantorokat:

You can fool all the people some of the time, and
some of the people all the time, but you cannot fool all the people all the time.

Legyen egy magyar is:

Vagy bolondok vagyunk s elveszünk egy szálig,
Vagy ez a mi hitünk valóságra válik.

Ja, miért is angol idézeteket soroltam? Mert az eredeti, kőbe ugyan nem vésett elképzelés szerint a képzés nagyobbik része **angol** nyelven folyik. Korábban azt gondoltuk, hogy 95%-a, de ez ingadozik (lefelé). Például jobbat tesz a hallgatóknak, ha a matematika gyakorlatai magyar nyelven zajlanak. Tipikus, hogy a záróvizsgán az angolul írt diplomamunkájukat angolul ismertetik a hallgatók, míg a szakmai kérdésekre magyarul válaszolnak. Ez se tökéletes megoldás, mert tanulmányaik során az angol szaknyelvet sajátítják el.

Arra is felhívjuk a hallgatók figyelmét, hogy az elemi logikai műveletek és a kvantorok használata a matematika számára ugyan általában elegendő, de messze nem elégséges a hétköznapi nyelv számára. Ennek igazolásaként nagy örömmel loptam el Cseresnyési Lászlótól (2016) az alábbi példát:

Mari megcsókolta Julit, annyira örült.
Mari megcsókolta Julit, annyira sírt.

(Ki is az alanya a második tagmondatnak?)

Ami a függvényvizsgálatot illeti, ott fő példáink a normális eloszlás sűrűségfüggvénye, két exponenciális függvény különbsége, egy exponenciális és egy trigonometrikus szorzata — mind közvetlenül hasznosítható. Az ezt közvetlenül megelőző témakörből megemlítem kedvenc példámat. A szélsőérték-számítás egyszerűbb feladatai után érdemes megoldani azt a feladatot, hogy közelítsük az $(x_1y_1), (x_2y_2), \ldots, (x_ny_n)$ mérési pontokat origón átmenő egyenessel. Ehhez minimalizálni kell a $Q(a) := \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i)^2$ függvényt, ami a Q egyváltozós függvény stacionárius pontjának meghatározását jelenti, majd annak belátását, hogy ez a pont minimum. A feladat előkészíti a lineáris regressziót, amelynél a megfelelő kétváltozós függvény minimumának meghatározása már gondot szokott okozni.

Előadások

Módszerünk a frontális ismeretközlés. Viszont mielőtt szónokolni kezdek, mindig iratok egy kis röpdolgozatot az előző óra definícióiból. Közhely, hogy matematikát és nyelvet úgy lehet tanulni, hogy mindig, minden részletét mozgósítjuk. Az is ismeretes, hogy egy vegyészt nem engednek be gyakorlatra, ha nem ismeri a gyakorlat anyagát. Ennek analógiájára én is úgy gondolom, hogy az üljön be az órámra, aki minimális szinten követi az anyagot. A röpike elvesz egy kis időt az órából, ki is kell javítani (vagy inkább gyorsan pontozni kell), de állandóan éberségre készteti a hallgatókat, továbbá katalógusként is szolgál. Közönséges (például villamosmérnököknek vagy informatikusoknak tartott) gyakorlatokon is ezt műveltem. Szerettek ☺. Azok a kollégák nem kevésbé, akik túlmunkát élvező sztahanovisták.

Még egy apróság: soha nem tartom egyben a két 45 perces órát, hogy legyen módjuk a hallgatóknak is egymással ismerkedni, és én is tudjak velük beszélgetni.

Jegyzet

Mindig készülőben. Ugye, itt (mint majdnem mindenütt) az a csapda, hogy ha van jegyzet, akkor miért kellene előadásra járni, ha pedig nincs, akkor ez a súlyos hiányosság az előadó szemére vethető.

Vizsga

A vizsgán egyrészt az előadások és gyakorlatok matematikaanyagáról kell beszámolni egy tételjegyzék alapján. Ebből a részből az érdekel, hogy áttekintése van-e az egészről a hallgatónak, ebben az értelemben szigorlathoz jobban hasonlít.

A másik rész pedig beszámoló egy műről. Előre kiadok egy listát, ahol klasszikusok szerepelnek, ld. néhány példát a hivatkozások között (Hodgkin-Huxley, Arbib-Érdi-Szentágothai, Abbott, Neumann, Bush). Ezek közül a hallgató kiválaszt ötöt, és ezzel a szűkített listával és olvasmányonként két-két általa megfogalmazott kérdéssel jön a vizsgára, ahol én választok ki egyet, hogy ismertesse. A klasszikus irományok mellett lehet előadást választani a TED-ről, vagy majdnem akármit, majdnem akárhonnan, de azért legyen valami köze a matematikához és a kognitív tudományhoz. Örömmel tudtam meg, hogy a művek közül néhányat a Kognitív Tudományi Tanszék is ajánl különféle kurzusokon.

A gyakorlaton szerzett pontszámok nagy súllyal szerepelnek az értékelésben, amit azért hangsúlyozok, mert van, ahol ezeket kizárólag annak eldöntésére használják, hogy mehessen vizsgára a hallgató, de évközi teljesítményének mennyiségét és minőségét pedig semmire.

Statisztika

Az egyetemek természettudományos és műszaki szakjain az a szokás, hogy félév alatt, heti két órában eljutnak a kockadobástól a lineáris regresszióig, amit egy statisztikus csak borzadállyal szemlélhet, de ezeket az órákat kénytelen megtartani. Nálunk természetesen nemcsak a mértékelmélet hiányzik ahhoz, hogy matematikai statisztikát tanítsunk, de a mi matematikaóránkon még az integrálás sem tud előkerülni. A sok rossz megoldás közül most a számítógép gombjainak nyomogatása dívik. Az eredmény a diplomamunkában szereplő mérések és kísérletek elemzésénél ragyog fel igazán ☹.

Ami különlegesen fontos lenne, az annak tudatosítása, hogy a statisztikai módszerek alkalmazásának *feltételei* vannak, a számszerű eredmények pedig csak a számok jelentésének ismeretében interpretálhatóak értelmesen.

Informatika

Kétség sem merülhetett föl, hogy a Wolfram nyelv (leánykori nevén: *Mathematica*) elemeivel megismertetjük a hallgatókat. Itt most csak nagyon röviden érvelek emellett. Felépítése hihetetlenül egységes és átgondolt, azon kívül, hogy mindegyik programozási stílus használható benne, saját stílusa meglehetősen gazdaságos. Használható fekete dobozként, vagy szimbolikus kalkulátorként, de leáshatunk az algoritmusok mélyére is. A benne foglalt algoritmusok és adatok (!) mennyisége, hm, jelentős. (Az ötödik változat leírása 3000 oldal volt, a mostani 11-esé 50000 oldal lenne, ezért már kizárólag elektronikus formában létezik a kézikönyv.)

Korábban próbálkoztunk a szokásos, axiomatikusnak mondható felépítéssel: megbeszéltük a szintaxis részleteit, a programozás elemeit, az adatstruktúrákat, stb. Újabban azzal kísérletezünk, hogy belevágunk: a hallgatók számára érdekes feladatok (kép- és szövegfeldolgozás) megoldását mutatjuk meg. Ilyen szellemben készült Lóczi Lajos és Sándor Nóra (2014) jegyzete. A félév végére viszont elvárjuk, hogy a hallgatók önállóan (bár kis csoportokban) készítsenek egy értelmes programot és arról kiselőadásban számoljanak be.

Egyetlen példát említek: a (biológus előképzettségű) hallgató társastáncot is oktatott. Nehezen tudta elmagyarázni tanítványainak, hogyan váltsanak alakzatot tánc közben, hogyan formáljanak kört egyenesből stb. Készített egy animációt azzal, hogy a továbbiakban azt fogja használni. Nyilvánvaló, hogy máskor is képes lesz használni a programot bármilyen kutatási feladatához is.

Kapcsolatok

Az eddigiekből is látható, amit külön hangsúlyozni szeretnék: ezeknek a tárgyaknak még egymáshoz is van közük! Rendszeresen megemlítem, hogy a Wolfram nyelv mely függvényei használhatók az analízisben és a statisztikában. Volt olyan évfolyam, ahol valamennyire sikerült megvalósítani, hogy mindhárom tárgyban támaszkodjunk a Wolfram nyelvre. Meggyőződésem, hogy mesze a leggazdaságosabb megoldás ez, hosszú távú előnyökkel együtt.

A hallgatók

Ha valaki azt gondolná, hogy csak móka és kacagás itt az oktatás, annak hadd álljon itt néhány szak, amit diákjaink előzőleg elvégeztek: amerikanisztika, angol, általános iskolai tanár, biológia, farmakológia, filozófia, finn, fizika, gazdasági matematika, gyógypedagógia, informatika, kognitív tudomány (Angliában, ugyanis Magyarországon nincs alapképzés), konduktor, magyar, pénzügy, pszichológia, szociológia, tájtervező, történelem. (Érdekes, hogy matematikus végzettségű hallgatónk még nem volt.)

A félév elején a következőket szoktam megkérdezni: milyen szako(ka)t végzett, hol, milyen szinten. (Félévben mérve) mennyi matekot, statisztikát, informatikát tanult. Ha valaki két vagy több félévet tanult egyetemi szinten, annak az előadások látogatását nem tiltom meg, de számukra csak a zárthelyik megírása kötelező, illetve a vizsga. (Komolynak látszó előismerettel is szerepelt már rosszul hallgató.) Kicsit több a nő, mint a férfi. Az életkor becslésem alapján 21 és 55 között változik.

Előadásaimat (nem csak itt) azzal szoktam zárni a félév végén, hogy később, akár sok év múlva is megkereshetnek a hallgatók, amikor olyan problémájuk akad, amelyikben segíthetek. Viszont mi is sok segítséget kaptunk már tőlük: amikor sajókazai diákokat láttunk vendégül, elsőként a kognitív szakos hallgatók ugrottak, hogy segítenek. Van olyan hallgató, aki már az oktatásban segít, megint mással ismeretterjesztő cikket írattunk stb.

Az oktatók

Egy normális/tipikus matematikus még ma is vihogni kezd, ha meghallja, hogy kognitív tudományi képzés folyik a BME Természettudományi Karán. Nekem szerencsém volt olyan kollégákkal együtt dolgozni, akik tudják, hogy a gondolkodás tárgya lehet más is, mint operátor, funktor, sajátérték és görbület, és akik hajlandók külön készülni ezekre a speciális órákra.

Összegezve

A legfontosabbnak azt tartom, hogy kedvük legyen a tárgyhoz. Ne féljenek tőle.

(Gondoljuk meg, hogy a történelem folyamán minden új számfajta olyan nevet kapott, ami kifejezte az emberiség félelmét: negatív, képzetes, komplex, szürreális számok, sajnos, az irracionális nem illik a sorba, pedig a teljesség kedvéért szép lenne.) Ismerjék meg a matematika szerkezetét, az általa nyújtott lehetőségekről legyen valami fogalmuk. A deriválási szabályokat pedig (ha szükségesek) másutt gyakorolják be, vagy pedig használjanak erre alkalmas programot. A hatékonyság növelésére egyetlen lehetőséget látok: 10—12 fősnél nagyobb csoportot nem szabad képezni, vagyis a jelenlegi létszám mellett két csoport kell.

„Légvárak építésénél ne sajnáljuk a kacsalábat”

Ezt Halász Gábortól, Izraelben dolgozó kedves fizikus barátomtól tanultam. Az ideális helyzet tehát az lenne, ha kis csoportokban tanítanánk mindhárom tárgyat. Itt is (mint szerintem mindenhol) az előadásokat matematikusnak kell tartania, a gyakorlatokat pedig matematikához értő, de az alkalmazások iránt fogékony kollégának, tehát nem feltétlenül matematikusnak. Egységes, erős gépi támogatás kell. De miért épp a Wolfram nyelv? Mert egyetlen kereten belül lehet beszélni kép- és nyelvfeldolgozásról, folyamatokról, neuronhálózatokról és statisztikáról (olyan mélységben, ameddig kevés alkalmazó jut el). Lehet készíteni animációt, ábrát a cikkekbe, dolgozatokba, vagy akár teljes dolgozatot, akár prezentációt is lehet benne készíteni.

Lássunk még két példát a szövegfeldolgozás területéről.

Ha kíváncsiak vagyunk arra, hogy melyek azok a szavak az angol és a francia nyelvben, amelyek oda- és visszafelé olvasva azonosak, akkor ezeket így kaphatjuk meg:

```
Intersection @@(DictionaryLookup[{#, x__/; x === StringReverse[x]}]&
                                                    /@{“English”,”French”})
```

Ma már elképzelhetetlen, milyen mélységű aktuális számítástechnikai ismeret és milyen mennyiségű munka kellett a magyar nyelv a tergo (szóvégmutató) szótárának (Papp F., 1994) elkészítéséhez. Kedvenc programunk az angol nyelv beépített, mintegy 100 ezer szavas szótárából ezzel az utasítással készíti el másodpercek alatt az angolét:

```
StringReverse/@Sort[StringReverse/@DictionaryLookup[]]
```

Folytatás

Az ismertetett tárgyak a legelső félévben veendők fel. A második félévben tartunk — bár jobb meggyőződésem ellenére, de az én kezdeményezésemre — MATLAB órát, amire sokan jönnek a kognitív szak hallgatói közül.

Viszont az egyik évben azzal leptek meg bennünket a hallgatók, hogy szívesen hallgatnának előadásokat a kimaradt (és — teszem hozzá — máshol is általában kimaradó) témakörökről. Ezért aztán Molnár Zoltánnal közösen meghirdettünk egy fakultatív tárgyat *Érdekességek a matematika alkalmazásaiból* címmel. Erre mindenféle hallgató jön, még a kognitív tudományi mesterek is. Tematikája nagyjából: dinamikai rendszerek, logika és nyelvészet és hálózatok.

Másutt?

Érdeklődéssel olvasnám, hogy hogyan kell informatikusokat, biomérnököket okítani (elfeledve az egységes matematikaoktatás rémálmát). Ami például a biológusokat illeti, kiváló példája a személyekre (szakra) szabott tankönyvnek Izsák és társai műve (1982), amely minden fogalmat biológiai eredetű példák sokaságán mutat be. Annak is lehet némi magyarázata, hogy Alexits és Fenyő írása (1955) miért tudott német és francia nyelven is megjelenni. És lám, máris olvashatjuk Vizvári Béla írását a sok számítást igénylő tárgyak oktatásáról mérnök hallgatók számára az Érintő jelen számában.

Irodalomjegyzék

Abbott, E.: Flatland. A romance of many dimensions.

Alexits Gy., Fenyő I.: *Matematika vegyészeknek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1955.

Andler, D. Mathematics in cognitive science, In: Weber, M., Dieks, D., Gonzalez, W. J., Hartman, S. Stadler, F. and Stöltzner, M. (eds.), *Probabilities, Laws and Structures*, Springer Netherlands, Dordrecht, 2012, pp. 363–377.

Arbib, M., Érdi, P., Szenthágotai, J.: *Neural organization: Structure, function, dynamics, A Bradford Book*, MIT Press, Cambridge, MA, London, England, 1997. (Chapters 4 and 11)

Bush, V.: As we may think, *Atlantic Magazine*, (1945), 47–61.

Cseresnyési László: Nyelv és neurózis. Közös tudás, *Magyar Narancs* 2016/40 (október 6.)

Dehaene, S.: The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics, Oxford University Press, New York, 1997.

Wolfram Demonstrations Project

Emmer, M.: Mathematics and Culture II. Visual Perfection: Mathematics and Creativity, Springer, 2005.

Hersh, R.: *A matematika természete*, Typotex Kiadó, Budapest, 2000.

Izsák J., Juhász-Nagy, P., Varga Z.: *Bevezetés a biomatematikába*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.

Lóczi Lajos, Sándor Nóra: Informatics to Students of Cognitive Science, 2014.

Minsky, M.: Why people think computers can't, *AI Magazine* **3** (4) (1985), 2--15.

Neumann, J.: Probabilistic logic and the synthesis of reliable organisms from unreliable components, In *Automata Studies*, C. E. Shannon, J. McCarthy eds., 1956, pp. 43–98.

Papp Ferenc (szerk.): *A magyar nyelv szóvégmutató szótára*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1994.

Piaget, J., Herinques, G., Papert, S., & Ackerman-Valladao, E.: Morphismes et catégories: comparer et transformer. Delachaux et Niestlé Neuchâtel, 1990.
Rényi, Alfréd.*Ars mathematica*. Magvető Könyvkiadó, 1973.

TED. Ideas worth spreading
Tóth J.: Mennyi kell a Dedekind-tortából a programozónak?, *Tétékás Nyúz* **XXIII**/11 (2001. november 28.)

Turing, A. M.: Computing machinery and intelligence, *Mind* **59** (1950), 433–460.

Vizvári B.: *Tétékás Nyúz* **XXIII**/7 (2001)

Wigner, E.: The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **13** (1) (1960) 1–14.

Tóth János

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.