Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon: ›

28. szám 2023. június

Héttusa
Kihívás!

2023. JÚNIUS, HÉTTUSA

Héttusa (2023. június)

Kedves Olvasó! Hétéves lett az Érintő, ebből az alkalomból közkívánatra új rovatot indítunk Héttusa néven. Minden számunkban 7 érdekes feladatot tűzünk ki (például a 7. feladat így kezdődik: A varázslótanoncok iskolájában 7 tanítvány ül egy asztal körül, jövendölésből vizsgáznak...). A megoldásokat *bárki* (iskolás, egyetemi hallgató, felnőtt) beküldheti e-mailben a rovat szerkesztőjének, *Róka Sándornak.* A beküldés módja és az első feladatsor itt következik.

2023. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

T. Sós Vera

Szomorúan tudatta a Bolyai Társulat, az MTA és a sajtó, hogy 2023. március 22-én 93 évesen elhunyt a nemzetközileg elismert matematikus, oktató és kutató, T. Sós Vera. Életrajza már matematikatörténet, számtalan riport készült róla, megismerhetjük személyét, matematikáját, gondolatait Babai László 25 részes videósorozatából, és az Érintőben is megjelent egy korábban vele készült kisfilm. *Simonovits Miklós* lapunknak kiegészítette, további részletekkel bővítve a korábban a Rényi Intézet honlapjára írt visszaemlékezését.

PINTÉR GERGŐ
ÚJ VILÁGOK TEREMTÉSE
GEOMETRIAI KÉPZETEK ÉS KÉPZŐDMÉNYEK

2023. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Új vilagok teremtése

A matematika alapgondolata: hogy nem a valóság közvetlen leírása a célunk, hanem annak egy-egy részét megfogó modellek megalkotása, és ezen modellek vizsgálata, ami aztán információt adhat a (lehetséges) valóság(ok)ról is. Az Új világok teremtése fő eleme pontosan ennek a gondolatnak a bemutatása olyan módon, hogy azok az érdeklődők is be tudják fogadni, akiknek semmilyen előképzettségük sincs, viszont olyan hitelesen, hogy a matematikai tartalom se torzuljon. – *Pintér Gergő* „térteremtő” könyvéről *Csépai András* írt recenziót.

Sok sikert az érettségihez!
e-kepeslap.com

2023. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – II. rész

A cikksorozat második részében a Számelmélet, algebra témakör változásairól lesz szó. *Csapodi Csaba* először táblázatos formában mutatja be, hogyan módosulnak a számelmélet és algebra érettségi követelmények 2024-től. A középszinten is újdonságnak számító ismeretek esetén mutat néhány olyan feladatot, amit a követelmények alapján el tudna képzelni egy feladatsorban. A feladatok megoldása Facebook-oldalunkon és a következő számunkban is megjelenik. Következnek a részletek.

DERMOT TURING
AZ IGAZI ALAN
TURING

2023. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Az igazi Alan Turing

Dermot Turing helyenként nagyon személyes, különösen igényes életrajzot írt nagybátyjáról, a híres matematikusról. *Kutas Péter* pedig részletesen mesél a könyvről, Turing életéről a második világháború előtt, alatt és után, a kódfejtésének lényegéről, a korai számítógépek vagy a biológia iránti kutatói érdeklődéséről, korát megelőző vízióiról és tragikus haláláról. Igazán érdekes könyv.

Csilla Fülöp
Gabriella Sztranyák
Panka Wiener
Anita Kercsó-Moln
EGMO

2023. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

EGMO 2023: a 12. diákolimpia lányoknak

A magyar csapat nagyon szép teljesítménnyel 6. helyezéssel tért haza a 12. Európai Leány Matematikai Olimpiáról, *Fülöp Csilla* és *Sztranyák Gabriella* arany-, *Wiener Anna* ezüst-, *Kercsó-Molnár Anita* pedig bronzérmet szerzett. Élménybeszámolójukat is összegyűjtötte a csapat vezetője, *Kiss Melinda Flóra*, és helyettese, *Baran Zsuzsa*, akik jövőre várják az újakat is a matematikaversenyre készülő lányok közé. Mi minden történt az EGMO-n?

2023. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Workshop rólunk, matematikusokról...

2023. márciusában a Bolyai János Matematikai Társulat kezdeményezésére workshopsorozat indult olyan matematikusok részvételével, akik fontosnak tartják, hogy a matematika világában különböző területeken dolgozók szorosabban kapcsolódjanak egymáshoz, és gondolkodjanak a matematikával kapcsolatos szakmai/társadalmi kérdéseken, együtt keresve a megoldásokat. Az eddigi három sikeres workshopról az egyik házigazda, *Tardos Zsófia* számol be.

2023. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Ugródeszkák matek szakon – Mihálykó András

Az ELTE-n végeztem matematika BSc-t, majd matematikus MSc-t, és idén márciusban védtem meg a doktori értekezésemet, de alapvetően nem vágytam arra, hogy elméleti matematikus legyek. Már középiskolásként felismertem, hogy én programozni szeretnék, csak okosan. Matematikára jelentkeztem, de később valamilyen cégnél akartam elhelyezkedni, lehetőleg alkalmazott kutatásban. – Mihálykó Andrással *Paulovics Zoltán* készített interjút.

2023. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Repülő Iskola avagy repsuli

A hat éve működő Repülő Iskola A Gondolkodás Öröme Alapítvány és a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet közös programja. Az indulásról még 2017-ben Juhász Péter írt az Érintőben. A célokról, motivációkról, tapasztalatokról, a folytatásról és a foglalkozások hatásairól kérdezte *Dankowsky Zorka és Szűcs Gábor* a program tanárait, akik matematikus hallgatók illetve gyakorló középiskolai tanárok. Íme a válaszok.

2023. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Neumann János munkássága a kvantummechanika matematikai alapjainak területén

Neumann János tudományos munkásságának lényeges részét alkotják a kvantummechanika alapjainak területén folytatott vizsgálódásai. Lax Péter megítélése szerint Neumann Jánosnak ezen a területen elért eredményei fizikai Nobel-díjra érdemesítenék őt. 1928-ban Hilbert, Neumann és Nordheim dolgozata volt ez első kísérlet a kvantummechanika axiomatizálására, ami azonban matematikai ellentmondásokat tartalmazott. Ezeket az ellentmondásokat Neumann eredményei kiküszöbölték a kvantummechanikából. A téma elismert kutatója *Rédei Miklós.*

KÖZÉPISKOLAI
MATHEMATIKAI LAPOK
PROGRAMMUNK
KÖZÉPISKOLAI
MATEMATIKAI
FIZIKAI LAPOK
KöMaL
2000/8

2023. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

A Középiskolai Matematikai Lapok 100 éve 10 feladat tükrében

Éppen 130 éve, hogy Arany Dániel győri főreáliskolai tanár szerkesztésében először megjelent a Középiskolai Matematikai Lapok. *Bíró Bálint* 1900-tól 2000-ig tízévenként egy-egy feladatot választott ki a KöMaL csodálatos kincsestárából, mégpedig olyanokat, amelyek megoldói pályájuk során híres matematikusok lettek. A feladatok önmagukban is, megoldóik révén is érdekesek, de a szerző célja az is, hogy a mostani korosztály még szélesebb rétegeit buzdítsa részvételre a mai KöMaL feladatmegoldó versenyeiben. Következik a válogatás.

2023. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

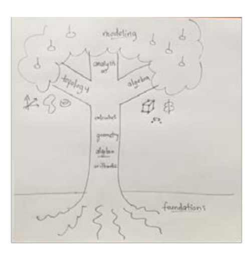
Emlékezés a 100 éve született Tamássy Lajosra

Tamássy Lajos a debreceni differenciálgeometriai iskola nemzetközi hírnevének megalapozója volt. 1958-ban lett egyetemi doktor, 1962-ben szerezte meg a kandidátusi, 1974-ben pedig a matematikai tudományok doktora fokozatot. 1973-tól 15 éven át vezette a Kossuth Lajos Tudományegyetem (későbbi Debreceni Egyetem) Geometria tanszékét. Közvetlenül nyugdíjba vonulása után, 1994-ben elnyerte a professor emeritus címet. 2019-ben bekövetkezett haláláig, tehát 66 éven át szolgálta példamutató odaadással az Egyetemet. Kollégái, barátai, *Kántorné Varga Tünde* és *Szilasi József* hiteles képet adnak élettútjáról és matematikai kutatásairól.

2023. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Akinek a matematika munka és szórakozás is

"… fő gondnak azt látom, hogy nincs benn a köztudatban, hogy ez egy biztos megélhetést nyújtó, kiváló karrierlehetőségekkel járó szakma. Pedig a statisztikák szerint a matematikus átlagfizetések meghaladják a mérnöki és informatikusfizetéseket." – nyilatkozta nemrégiben az Innotéka magazin riporterének *Röst Gergely*, akinek a matematika munka és szórakozás is.



2023. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Matematika számok nélkül

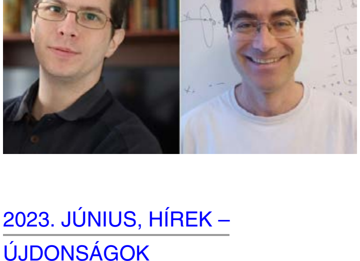
Dworák Bence nagy kedvet csinál *Milo Beckman* könyvének elolvasásához (aki pedig egy fiatalabb olvasó véleményére is kiváncsi, az kattintson ide). A *Matematika számok nélkül* a matematika lényegét igyekszik megragadni és közelebb hozni a hétköznapi olvasókhoz. A 28 éves manhattani születésű amerikai szerző rendkívül nyitott és kommunikatív, szenvedélyesen mesél a világ nagy összefüggéseiről, szereti a képszerű példákat. A matematikát egy nagy faként képzeli el, amelynek a törzsét az iskolában mindenki által megtanult matematikai fogalmak alkotják…Tovább...

matematika
számok
nélkül
milo
beckman
m erazo illusztrációival
Libri

2023. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Olvasónapló a számok nélküli könyvről

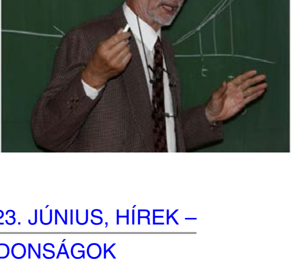
A könyv nagyon szenvedélyes, inspiráló, nehéz letenni. Csodás példákon keresztül mutatja be, hogy az egész világot behálózzák a matematikai struktúrák. A címhez hűen, az oldalszámokon kívül, számjeggyel leírt számok valóban nincsenek benne, betűkkel leírva is csak pár helyen… Ha ebben a stílusban tanítanák az iskolában a matematikát, akkor valószínűleg kevesebben fordulnának el ettől a tárgytól – véli egy iskolás olvasó, *Lóczi-Nagy Gemma.* (Milo Beckman könyvéről két párhuzamos recenzió is készült, érdemes elolvasni a másikat is.) Tovább...



2023. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Gács András-díj 2023

Ahogy azt a szervezők tavaly ősszel megígérték, az idei Matematikus Hangversenyt tavasszal, 2023. ápr. 13-án tartották meg az ELTE Jogi karának dísztermében (és ezentúl ismét tavaszi hangversenyek lesznek). Így a most már hagyományosan ehhez az eseményhez kapcsolódó Gács András-díjátadóra is ekkor került sor a hangverseny szünetében. Az idei díjazottak *Csikvári Péter és Pálvölgyi Dömötör*.



2023. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Szegedi Dinamikus Nap

A Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete „Szegedi Dinamikus Nap” címmel 2023. február 17-én konferenciát szervezett Hatvani László professzor, akadémikus 80. születésnapja alkalmából. A konferencián több mint negyven barátja, kollégája, tanítványa köszöntötte az ünnepeltet, és 11 előadás hangzott el, amelyekről *Dénes Attila* számolt be.

2023. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

120 éve született egy „marslakó”

2023-ban Neumann János tiszteletére nagyszabású megemlékezéssorozattal készült a Neumann János Számítógéptudományi Társaság. Céljuk a neumanni örökség minél szélesebb körű megismertetése. A honlapjukon nyomon követhető események közül *Oláh Vera* egy áprilisi kiállításon, *Kerékfy Pál* egy májusi emlékfa-ültetésen vett részt...

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon:

A **HÍREK – ÚJDONSÁGOK** ROVAT A MATEMATIKÁHOZ ÉS A BOLYAI TÁRSULATHOZ KAPCSOLÓDÓ ESEMÉNYEKRŐL, ÚJDONSÁGOKRÓL SZÓL. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÁKÓCZI ILDIKÓ.)*

Szerkesztő

2023. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Gács András-díj 2023

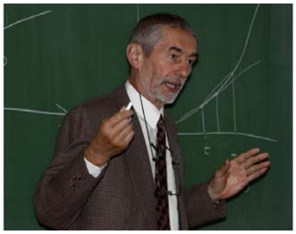
Ahogy azt a szervezők tavaly ősszel megígérték, az idei Matematikus Hangversenyt tavasszal, 2023. ápr. 13-án tartották meg az ELTE Jogi karának dísztermében (és ezentúl ismét tavaszi hangversenyek lesznek). Így a most már hagyományosan ehhez az eseményhez kapcsolódó Gács András-díjátadóra is ekkor került sor a hangverseny szünetében. Az idei díjazottak *Csikvári Péter* és *Pálvölgyi Dömötör*.

Szerkesztő

2023. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Akinek a matematika munka és szórakozás is

"… fő gondnak azt látom, hogy nincs benn a köztudatban, hogy ez egy biztos megélhetést nyújtó, kiváló karrierlehetőségekkel járó szakma. Pedig a statisztikák szerint a matematikus átlagfizetések meghaladják a mérnöki és informatikusfizetéseket." – nyilatkozta nemrégiben az Innotéka magazin riporterének *Röst Gergely*, akinek a matematika munka és szórakozás is.



Dénes Attila

2023. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Szegedi Dinamikus Nap

A Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete „Szegedi Dinamikus Nap” címmel 2023. február 17-én konferenciát szervezett Hatvani László professzor, akadémikus 80. születésnapja alkalmából. A konferencián több mint negyven barátja, kollégája, tanítványa köszöntötte az ünnepeltet, és 11 előadás hangzott el, amelyekről *Dénes Attila* számolt be.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

AZ **INTERJÚ-PORTRÉ** MENÜPONT JÓL VAGY KEVÉSBÉ ISMERT MATEMATIKUSOKAT, VAGY OLYAN, EGYKOR MATEMATIKUSKÉNT VÉGZETTEKET SZERETNE BEMUTATNI, AKIK MA MÁS SZAKMA ELISMERT KÉPVISELŐI, SPORTOLÓK, MŰVÉSZEK…(ROVATSZERKESZTŐ: *OLÁH VERA*.)

Paulovics Zoltán
2023. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Ugródeszkák matek szakon – Mihálykó András

Az ELTE-n végeztem matematika BSc-t, majd matematikus MSc-t, és idén márciusban védtem meg a doktori értekezésemet, de alapvetően nem vágytam arra, hogy elméleti matematikus legyek. Már középiskolásként felismertem, hogy én programozni szeretnék, csak okosan. Matematikára jelentkeztem, de később valamilyen cégnél akartam elhelyezkedni, lehetőleg alkalmazott kutatásban. – Mihálykó Andrással *Paulovics Zoltán* készített interjút.

Dankowsky Zorka, Szűcs Gábor
2023. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Repülő Iskola avagy repsuli

A hat éve működő Repülő Iskola A Gondolkodás Öröme Alapítvány és a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet közös programja. Az indulásról még 2017-ben Juhász Péter írt az Érintőben. A célokról, motivációkról, tapasztalatokról, a folytatásról és a foglalkozások hatásairól kérdezte *Dankowsky Zorka és Szűcs Gábor* a program tanárait, akik matematikus hallgatók illetve gyakorló középiskolai tanárok. Íme a válaszok.

Kántorné Varga Tünde, Szilasi József
2023. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Emlékezés a 100 éve született Tamássy Lajosra

Tamássy Lajos a debreceni differenciálgeometriai iskola nemzetközi hírnevének megalapozója volt. 1958-ban lett egyetemi doktor, 1962-ben szerezte meg a kandidátusi, 1974-ben pedig a matematikai tudományok doktora fokozatot. 1973-tól 15 éven át vezette a Kossuth Lajos Tudományegyetem (későbbi Debreceni Egyetem) Geometria tanszékét. Közvetlenül nyugdíjba vonulása után, 1994-ben elnyerte a professor emeritus címet. 2019-ben bekövetkezett haláláig, tehát 66 éven át szolgálta példamutató odaadással az Egyetemet. Kollégái, barátai, *Kántorné Varga Tünde* és *Szilasi József* hiteles képet adnak életútjáról és matematikai kutatásairól.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon: ›

SOKSZOR TALÁLKOZUNK OLYAN FELADATTAL, ÖTLETTEL, AMIT SZÍVESEN ELTESZÜNK KÉSŐBBI HASZNÁLATRA. A **TANÓRA – SZAKKÖR** ROVAT SZERETNE HOZZÁJÁRULNI A MATEMATIKATANÁROK ESZKÖZTÁRÁNAK GAZDAGÍTÁSÁHOZ, FÓRUMOT KÍVÁN ADNI A GONDOK, NEHÉZSÉGEK MEGTÁRGYALÁSÁRA IS. (ROVATSZERKESZTŐ: *HORVÁTH ESZTER*.)

Sok sikert az érettségihez!
e-kepeslap.com

Csapodi Csaba

2023. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – II. rész

A cikksorozat második részében a Számelmélet, algebra témakör változásairól lesz szó. *Csapodi Csaba* először táblázatos formában mutatja be, hogyan módosulnak a számelmélet és algebra érettségi követelmények 2024-től. A középszinten is újdonságnak számító ismeretek esetén mutat néhány olyan feladatot, amit a követelmények alapján el tudna képzelni egy feladatsorban. A feladatok megoldása Facebook-oldalunkon és a következő számunkban is megjelenik. Következnek a részletek.

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI LAPOK
KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI FIZIKAI LAPOK
KöMaL
2000/8

Bíró Bálint

2023. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

A Középiskolai Matematikai Lapok 100 éve 10 feladat tükrében

Éppen 130 éve, hogy Arany Dániel győri főreáliskolai tanár szerkesztésében először megjelent a Középiskolai Matematikai Lapok. *Bíró Bálint* 1900-tól 2000-ig tízévenként egy-egy feladatot választott ki a KöMaL csodálatos kincsestárából, mégpedig olyanokat, amelyek megoldói pályájuk során híres matematikusok lettek. A feladatok önmagukban is, megoldóik révén is érdekesek, de a szerző célja az is, hogy a mostani korosztály még szélesebb rétegeit buzdítsa részvételre a mai KöMaL feladatmegoldó versenyeiben. Következik a válogatás.

Csilla Fülöp
Gabriella Sztranyák
Panka Wiener
Anita Kercsó-Molnár
EGMO

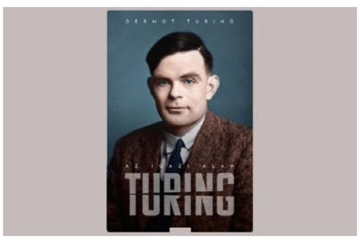
Baran Zsuzsa, Kiss Melinda Flóra

2023. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

EGMO 2023: a 12. diákolimpia lányoknak

A magyar csapat nagyon szép teljesítménnyel 6. helyezéssel tért haza a 12. Európai Leány Matematikai Olimpiáról, *Fülöp Csilla* és *Sztranyák Gabriella* arany-, *Wiener Anna* ezüst-, *Kercsó-Molnár Anita* pedig bronzérmet szerzett. Élménybeszámolójukat is összegyűjtötte a csapat vezetője, *Kiss Melinda Flóra*, és helyettese, *Baran Zsuzsa*, akik jövőre várják az újakat is a matematikaversenyre készülő lányok közé. Mi minden történt az EGMO-n?

A **KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ** ROVATBAN ELSŐSORBAN OLYAN KÖNYVEKRŐL SZERETNÉNK TUDÓSÍTANI ÉS OLYAN ELEKTRONIKUSAN ELÉRHETŐ ÍRÁSOKAT AJÁNLUNK, AMELYEK A MATEMATIKA BÁRMELY RÉSZE VAGY KAPCSOLATAI IRÁNT ÉRDEKLŐDŐK SZÁMÁRA KÍVÁNATOSAK LEHETNEK. (ROVATSZERKESZTŐ: *TÓTH JÁNOS.)*



Kutas Péter
2023. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Az igazi Alan Turing

Dermot Turing helyenként nagyon személyes, különösen igényes életrajzot írt nagybátyjáról, a híres matematikusról. *Kutas Péter* pedig részletesen mesél a könyvről, Turing életéről a második világháború előtt, alatt és után, a kódfejtésének lényegéről, a korai számítógépek vagy a biológia iránti kutatói érdeklődéséről, korát megelőző vízióiról és tragikus haláláról. Igazán érdekes könyv.

matematika számok nélkül
milo beckman

Lóczi-Nagy Gemma
2023. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Olvasónapló a számok nélküli könyvről

A könyv nagyon szenvedélyes, inspiráló, nehéz letenni. Csodás példákon keresztül mutatja be, hogy az egész világot behálózzák a matematikai struktúrák. A címhez hűen, az oldalszámokon kívül, számjeggyel leírt számok valóban nincsenek benne, betűkkel leírva is csak pár helyen… Ha ebben a stílusban tanítanák az iskolában a matematikát, akkor valószínűleg kevesebben fordulnának el ettől a tárgytól – véli egy iskolás olvasó, *Lóczi-Nagy Gemma.* (Milo Beckman könyvéről két párhuzamos recenzió is készült, érdemes elolvasni a másikat is.) Tovább...

PINTÉR GERGŐ
ÚJ VILÁGOK TEREMTÉSE
GEOMETRIAI KÉPZETEK ÉS KÉPZŐDMÉNYEK

Csépai András
2023. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Új vilagok teremtése

A matematika alapgondolata: hogy nem a valóság közvetlen leírása a célunk, hanem annak egy-egy részét megfogó modellek megalkotása, és ezen modellek vizsgálata, ami aztán információt adhat a (lehetséges) valóság(ok)ról is. Az *Új világok teremtése* fő eleme pontosan ennek a gondolatnak a bemutatása olyan módon, hogy azok az érdeklődők is be tudják fogadni, akiknek semmilyen előképzettségük sincs, viszont olyan hitelesen, hogy a matematikai tartalom se torzuljon. – *Pintér Gergő* „térteremtő” könyvéről *Csépai András* írt recenziót.

Dworák Bence
2023. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Matematika számok nélkül

Dworák Bence nagy kedvet csinál *Milo Beckman* könyvének elolvasásához (aki pedig egy fiatalabb olvasó véleményére is kiváncsi, az kattintson ide). A *Matematika számok nélkül* a matematika lényegét igyekszik megragadni és közelebb hozni a hétköznapi olvasókhoz. A 28 éves manhattani születésű amerikai szerző rendkívül nyitott és kommunikatív, szenvedélyesen mesél a világ nagy összefüggéseiről, szereti a képszerű példákat. A matematikát egy nagy faként képzeli el, amelynek a törzsét az iskolában mindenki által megtanult matematikai fogalmak alkotják…Tovább...

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon:

A **TUDOMÁNY** MENÜPONT TÖBBFÉLE, A MATEMATIKA TUDOMÁNYÁHOZ KAPCSOLÓDÓ FUNKCIÓT TAKAR..**A TUDOMÁNY– TÖRTÉNET ROVAT** CÉLJA ELSŐSORBAN MATEMATIKATÖRTÉNETI JELLEGŰ ÍRÁSOK KÖZLÉSE. **A MI IS …?ROVAT** A MAI MATEMATIKA TUDOMÁNYÁRÓL KÍVÁN SZÓLNI A HOZZÁÉRTŐKNEK.
(ROVATSZERKESZTŐK: *BESENYEI ÁDÁM; STIPSICZ ANDRÁS.*)

Rédei Miklós

2023. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Neumann János munkássága a kvantummechnika matematikai alapjainak területén

Neumann János tudományos munkásságának lényeges részét alkotják a kvantummechanika alapjainak területén folytatott vizsgálódásai. Lax Péter megítélése szerint Neumann Jánosnak ezen a területen elért eredményei fizikai Nobel-díjra érdemesítenék őt. 1928-ban Hilbert, Neumann és Nordheim dolgozata volt ez első kísérlet a kvantummechanika axiomatizálására, ami azonban matematikai ellentmondásokat tartalmazott. Ezeket az ellentmondásokat Neumann eredményei kiküszöbölték a kvantummechanikából. A téma elismert kutatója *Rédei Miklós*.

Simonovits Miklós

2023. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

T. Sós Vera

Szomorúan tudatta a Bolyai Társulat, az MTA és a sajtó, hogy 2023. március 22-én 93 évesen elhunyt a nemzetközileg elismert matematikus, oktató és kutató, T. Sós Vera. Életrajza már matematikatörténet, számtalan riport készült róla, megismerhetjük személyét, matematikáját, gondolatait Babai László 25 részes videósorozatából, és az Érintőben is megjelent egy korábban vele készült kisfilm. *Simonovits Miklós* lapunknak kiegészítette, további részletekkel bővítve a korábban a Rényi Intézet honlapjára írt visszaemlékezését.

Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon:

A **GAZDA(G)SÁG** NEVET ADTUK A **GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET ROVATNAK**, AMELYBEN BEMUTATJUK, HOL, MIKÉPPEN HASZNÁLJÁK FEL A MATEMATIKÁT, MILYEN GAZDAG IS AZ A KÖR, AMELYIK ÉRINTI EZT A TUDOMÁNYÁGAT. (ROVATSZERKESZTŐK: *ILLÉS TIBOR, MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR ÉS RÖST GERGELY*.)

Kerékfy Pál, Oláh Vera

2023. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

120 éve született egy „marslakó”

2023-ban Neumann János tiszteletére nagyszabású megemlékezéssorozattal készült a Neumann János Számítógéptudományi Társaság. Céljuk a neumanni örökség minél szélesebb körű megismertetése. A honlapjukon nyomon követhető események közül *Oláh Vera* egy áprilisi kiállításon, *Kerékfy Pál* egy májusi emlékfa-ültetésen vett részt...

Tardos Zsófia

2023. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Workshop rólunk, matematikusokról...

2023. márciusában a Bolyai János Matematikai Társulat kezdeményezésére workshopsorozat *i*ndult olyan matematikusok részvételével, akik fontosnak tartják, hogy a matematika világában különböző területeken dolgozók szorosabban kapcsolódjanak egymáshoz, és gondolkodjanak a matematikával kapcsolatos szakmai/társadalmi kérdéseken, együtt keresve a megoldásokat. Az eddigi három sikeres workshopról az egyik házigazda, *Tardos Zsófia* számol be.

Héttusa
Kihívás!

Róka Sándor

2023. JÚNIUS, HÉTTUSA

Héttusa (2023. június)

Kedves Olvasó! Hétéves lett az Érintő, ebből az alkalomból közkívánatra új rovatot indítunk Héttusa néven. Minden számunkban 7 érdekes feladatot tűzünk ki (például a 7. feladat így kezdődik: A varázslótanoncok iskolájában 7 tanítvány ül egy asztal körül, jövendölésből vizsgáznak...). A megoldásokat *bárki* (iskolás, egyetemi hallgató, felnőtt) beküldheti e-mailben a rovat szerkesztőjének, *Róka Sándornak.* A beküldés módja és az első feladatsor itt következik.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon: ›

Szerkesztő 2023. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

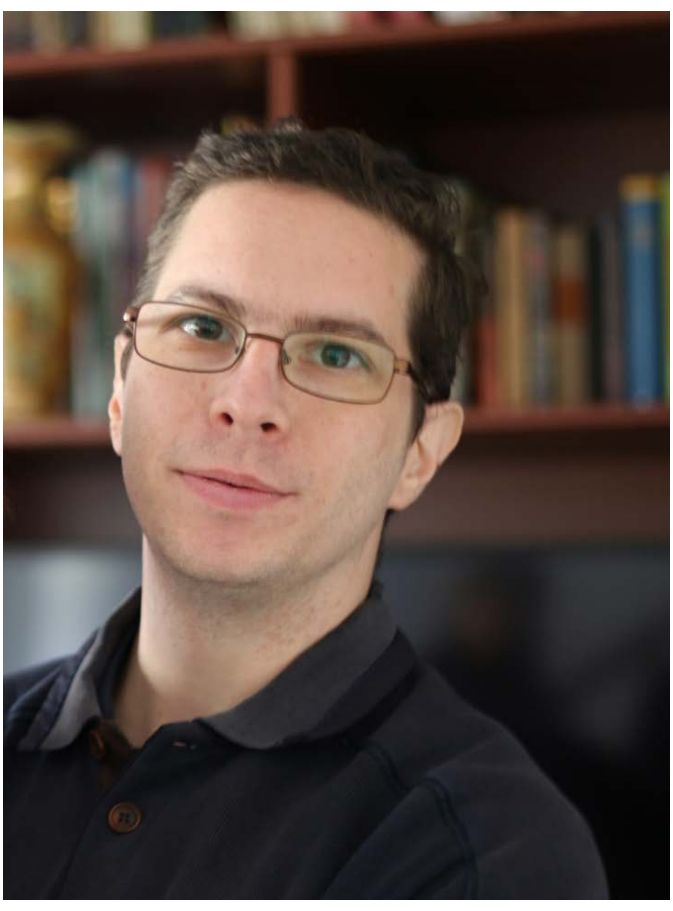
Gács András-díj 2023

A díj névadója Gács András (1969-2009) matematikus, aki kutatási eredményei mellett sokoldalúságával, nyitottságával és humorával hatott inspirálóan a diákokra.

Idén **Csikvári Péter**, az ELTE TTK és a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet kutató-oktatója és **Pálvölgyi Dömötör**, az ELTE TTK Matematikai Intézet és a Számítógéptudományi Tanszék kutató-oktatója vehette át Recski Andrástól és Gács Zsófiától a rangos elismerést a matematika egyetemi oktatásában nyújtott kiváló teljesítményéért.

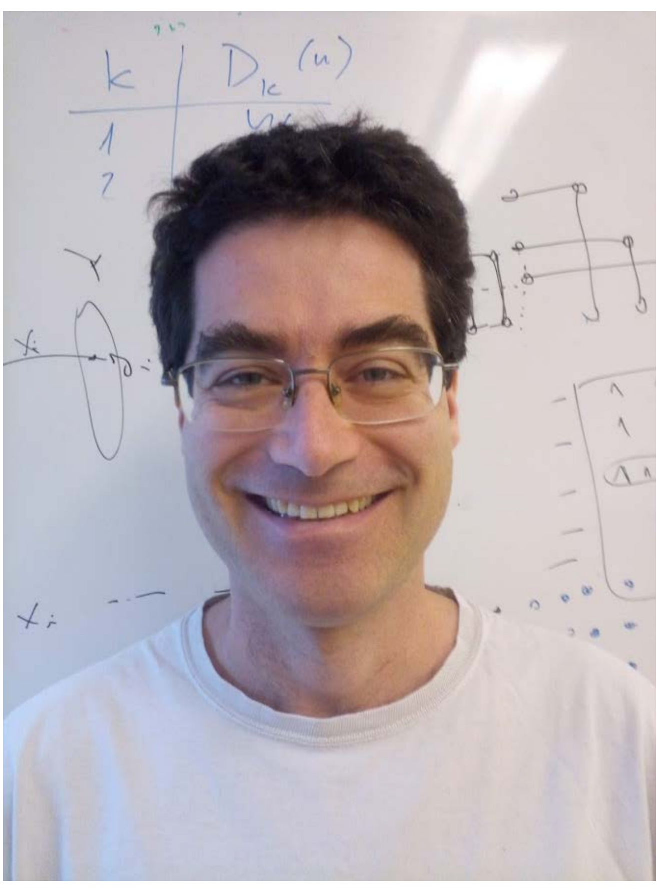
A díjazott matematikusok a díszoklevél és a maguk által választhatott játékos tárgyjutalom mellett a hazai egyetemi élet díjazásai között kiemelkedő mértékűnek számító 200-200 ezer forintos díjazásban és egy különleges műtárgy elismerésben is részesülnek. A díj különleges, összetett, megfejthetetlen formája jelképezi, hogy a szellemi teljesítmény és a személyes varázs, a tudományos eredmények és a fiatal kollégák iránti felelősségérzet, vagyis a tehetség, a szorgalom és a szüntelen kíváncsiság nem választhatók el egymástól.

Csikvári Péter 2011-ben szerzett PhD fokozatot. Kiemelkedő tudományos munkáját már eddig is számos díj fémjelzi, korábban elnyerte az Erdős-díjat, az Akadémiai Ifjúsági Díjat, a Grünwald Géza emlékérmet és a Patai-díjat. Kombinatorikával és statisztikus fizikával foglalkozó konferenciák rendszeres előadója, meghívott vendége. Kutatómunkája mellett nagyon fontosnak tartja a tanítást is, külföldön szerzett oktatási tapasztalatait és szemléletét a hazai oktatásban is törekszik meghonosítani, miközben az egyetemi tudományos diákköri élet szervezésében is aktív szerepet vállal. Ajánlása a díj honlapján olvasható.



Csikvári Péter

A másik díjazott, Pálvölgyi Dömötör egyetemi adjunktus a Grünwald Géza emlékérem mellett kutatói munkája elismeréseként a Marie Curie és a Bolyai ösztöndíjat is elnyerte. Szervezőként és előadóként is gyakori résztvevője kombinatorikával és kombinatorikus geometriával foglalkozó tudományos konferenciáknak. Tudományos munkássága mellett rendkívül komolyan veszi a témavezetést, tanítást is, számos szakdolgozat és PhD témavezetőjeként az egyik legnépszerűbb oktatónak számít. Ajánlását itt olvashatják.



Pálvölgyi Dömötör

A Gács András-díjról az Érintő minden évben beszámol, minden további részlet megtudható a http://www.gacsandrasdij.org/ honlapról.

Szerkesztő 2023. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Akinek a matematika munka és szórakozás is

Az Innotéka (tudomány, innováció, zöld környezet) magazin 2023. júniusi számában jelent meg a Röst Gergellyel készült legfrissebb riport.

„Manapság az iparban, a gazdaságban, a bankszektorban nagyon sok matematikus dolgozik, mint ahogy más tudományterületeken is szükség van ránk” – kezdi a lényeggel a Szegedi Tudományegyetem tanszékvezetője. Elmondja, hogyan szerette meg a matematikát és a focit. Beszél arról, hogyan szervezte meg Magyarországon az első matematikai járványtani kutatócsoportot, hogyan változott meg az élete 2020 tavaszától, amikor a koronavírus-járvány miatt élesben kellett alkalmaznia a matematikát.

2022 novembere óta Röst Gergely a szakmai vezetője az Egészségbiztonság Nemzeti Laboratóriumának, ahol 16 egyetem 160 kutatójának munkáját koordinálja. A laboratóriumban a járványmatematikai, a járványökológiai, az invázióbiológiai és az adatvezérelt egészség divízióban az első megfigyelésektől a járványterjedés modellezésén át az egészségügyi ellátórendszer felkészítéséig folynak a kutatások. Monitorozzák a magyar társadalmat a jövőben lehetségesen veszélyeztető kórokozókat, terjesztőiket, élőhelyeiket, kockázatelemzéseket, epidemiológiai előrejelzéseket készítenek.

A festményt Kotnyek István neves nagykanizsai festőművész (Röst Gergely apósa) készítette vejének ajándékba. Fotó: Innotéka/Karnok Csaba

A teljes riportot itt olvashatják: https://www.innoteka.hu/cikk/akinek_a_matematika_munka_es_szorakozas_is.2741.html.

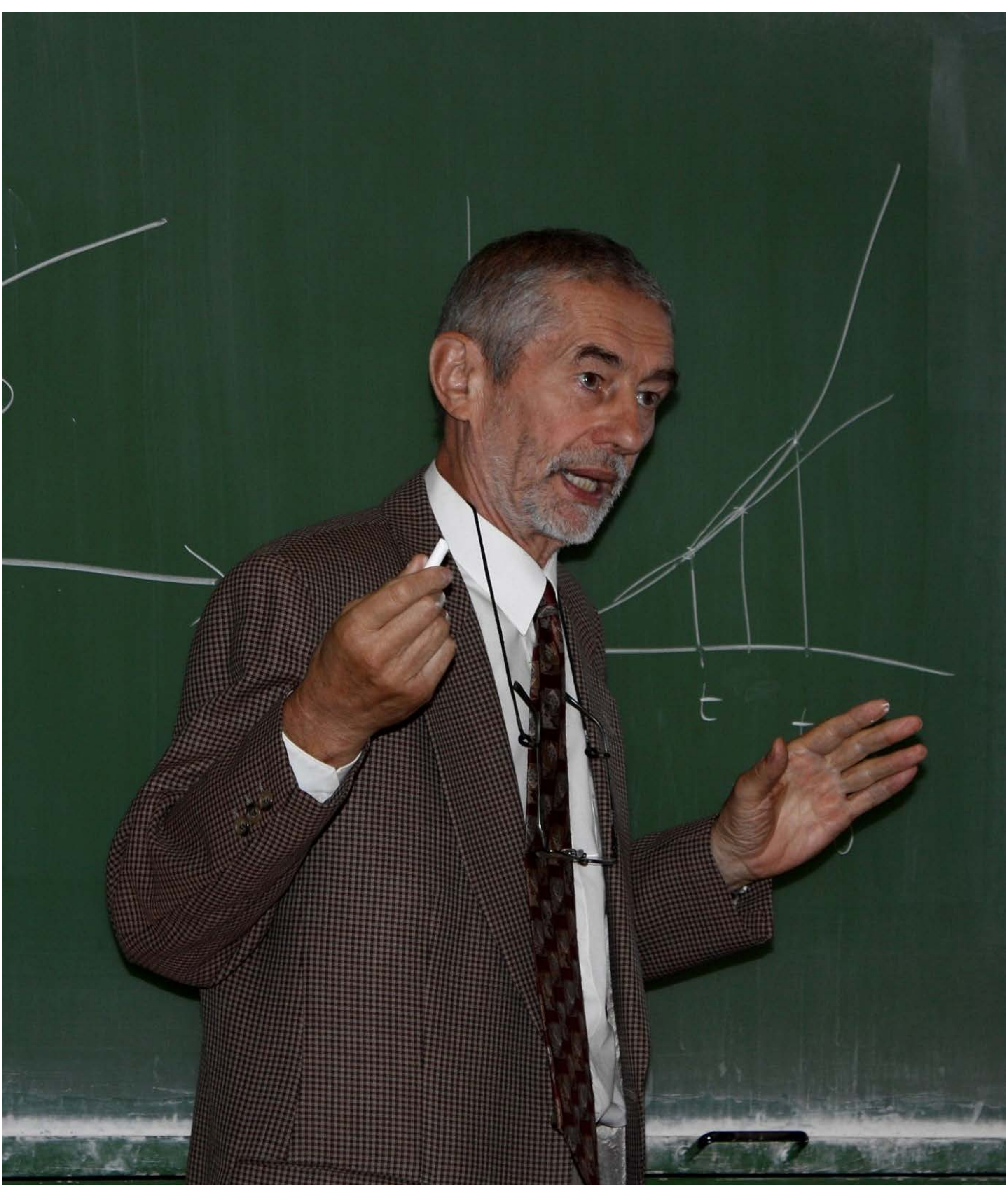
Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon:

Dénes Attila 2023. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Szegedi Dinamikus Nap

Hatvani László professzor 80. születésnapja alkalmából

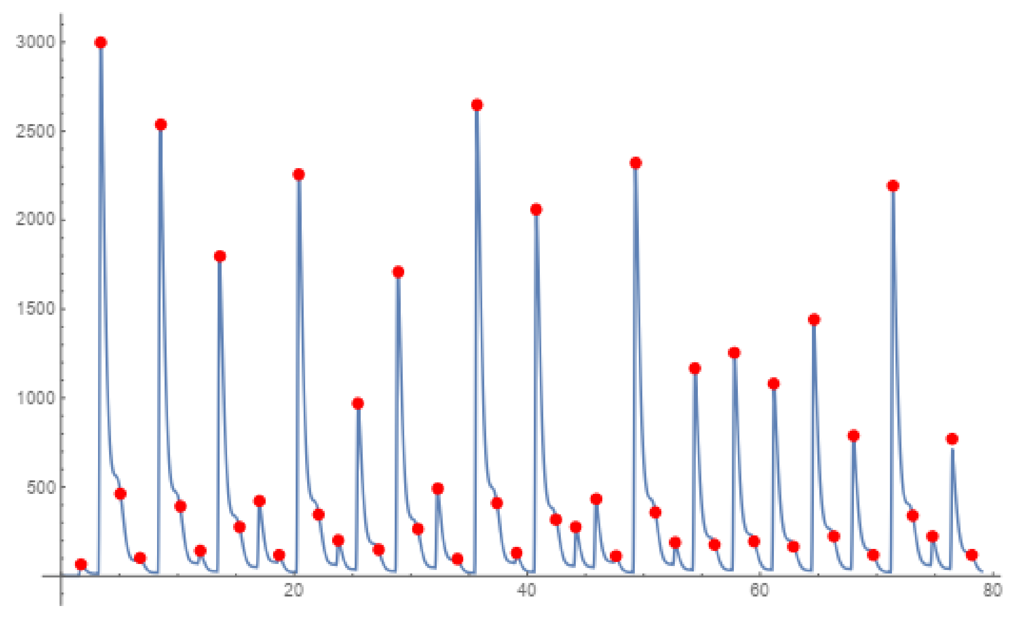
A Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete „Szegedi Dinamikus Nap” címmel 2023. február 17-én konferenciát szervezett Hatvani László professzor, akadémikus 80. születésnapja alkalmából.



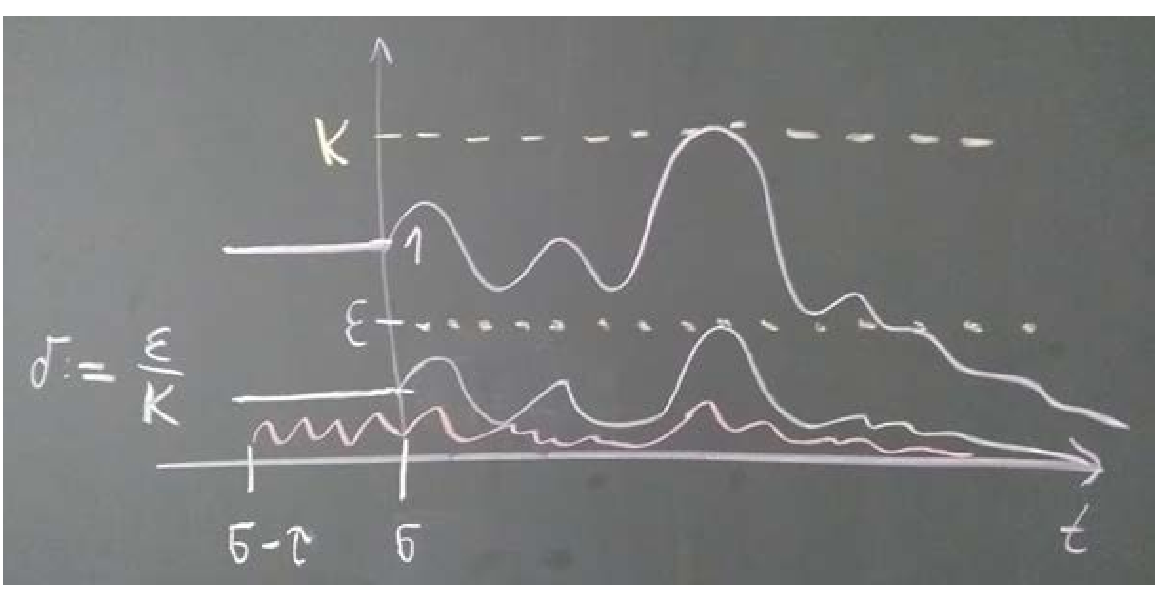
Hatvani László 1961 óta tagja a Bolyai Intézetnek, amikor megkezdte tanulmányait a József Attila Tudományegyetem matematika szakán. Tanulmányai alatt Pintér Lajos javaslatára kezdett differenciálegyenletekkel foglalkozni, hogy később a tudományterület világszerte elismert iskoláját alapítsa meg Szegeden. 1966-ban szerzett programtervező matematikusi diplomát, majd három évvel később védte meg egyetemi doktori disszertációját. 1971-től a Moszkvai Állami Egyetem elméleti mechanika szakán volt levelező aspiráns, ahol 1975-ben védte meg a matematikai tudomány kandidátusi, majd 1988-ban Budapesten akadémiai doktori értekezését. 1998-tól a Magyar Tudományos Akadémia levelező, 2004-ben pedig rendes tagja. A Leuveni Katolikus Egyetemen és a Dél-illinois-i Egyetemen vendégprofesszorként dolgozott. Számos neves matematikai folyóirat szerkesztőjeként végzett munkája mellett, 1998-ban indította el Theodore A. Burton professzorral közösen az *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations* című online folyóiratot (https://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/), amely (a legtöbb tudományos folyóirattal ellentétben) mind a szerzők, mind az olvasók számára ingyenes. 2002-ben végleges választ adott a funkcionál-differenciálegyenletek stabilitáselméletének egy központi problémájára.

Klasszikus mechanika matematikusoknak című könyvéről tavaly az Érintő is beszámolt.

A konferencián több mint negyven barátja, kollégája, tanítványa köszöntötte Hatvani Lászlót, és 11 előadás hangzott el. A konferenciát Krisztin Tibor akadémikus, a Bolyai Intézet professzora nyitotta meg, aki Hatvani professzor munkásságáról beszélt. A délelőtti szekcióban Stépán Gábor akadémikus, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem professzora a szerszámgépek mechanikájában használt késleltetett Mathieu-egyenletről és a marási folyamatok stabilitásáról beszélt, őt az ELTE két professzora követte: Simon L. Péter egy neuronhálózati modell globális bifurkációit ismertette, Faragó István pedig arról számolt be, hogy hogyan lehet a nem szabványos véges differenciák módszerét a malária terjedésének modelljeiben alkalmazni. A délután Csendes Tibor, az SZTE professzorának előadásával indult, aki robusztus mesterséges neuronhálókról és dinamikus rendszerekről beszélt, majd a szegedi Stachó László professzor az automorfizmus-folyamok holomorf Hille–Yosida típusú elméletének alapjait ismertette. Pituk Mihály, a Pannon Egyetem professzora közönséges differenciálegyenletek feltételes Lipschitz-féle árnyékolásáról, Röst Gergely, a Bolyai Intézet Alkalmazott és Numerikus Matematika Tanszékének vezetője pedig Hatvani professzor egyik kedvenc témájáról, a nemautonóm késleltetett lineáris differenciálegyenletek aszimptotikus stabilitásáról mutatott be új eredményeket. A konferencia záró szekciója Hartung Ferenc, a Pannon Egyetem professzorának előadásával indult, aki egy impulzív önfenntartó késleltetett differenciálegyenlet numerikus közelítésével kapcsolatos eredményeiről számolt be, majd a szegedi Garab Ábel Banach-térbeli differenciaegyenletek exponenciális stabilitásáról adott elő. A konferencia Hatvani László két egykori doktoranduszának előadásaival zárult: Dénes Attila néhány nemautonóm populációdinamikai modellről beszélt, Karsai János pedig olyan dolgokról, amelyek a tudományos előadásokból a legtöbbször kimaradnak: modellezésről, programozásról, tanításról, játékról.



Kép Dénes Attila előadásából, egy szabálytalanul változó populáció mérete (forrás: Dénes A, Röst G Single species population dynamics in seasonal environment with short reproduction period, COMMUNICATIONS IN PURE AND APPLIED ANALYSIS, 2021, 20(2): 755–762)



Kép Röst Gergely előadásából, részlet egy stabilitási állítás bizonyításából

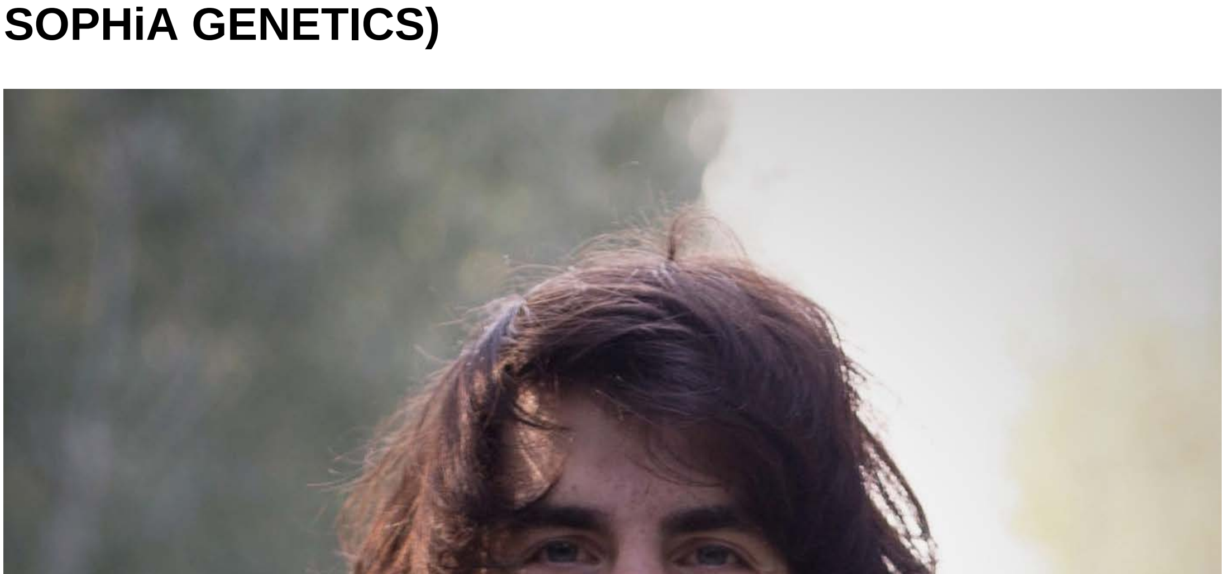
Az elhangzott előadások közül nyolc az SZTE Bolyai Intézet youtube csatornáján is megtekinthető (https: //youtube.com/@Bolyaiinstitute/videos).

Dénes Attila, SZTE Bolyai Intézet

Paulovics Zoltán 2023. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Ugródeszkák matek szakon – Mihálykó András

Beszélgetés Mihálykó Andrással (Algorithm Developer, SOPHiA GENETICS)



Ha jól tudom, elméleti matematikusként végeztél, nemrég védted meg a PhD-det, és mégsem akadémiai kutatóként dolgozol. Hogyhogy?

Valóban, az ELTE-n végeztem matematika BSc-t, majd matematikus MSc-t, és idén márciusban védtem meg a doktori értekezésemet, de alapvetően nem vágytam arra, hogy elméleti matematikus legyek. Már középiskolásként felismertem, hogy én programozni szeretnék, csak okosan. Matematikára jelentkeztem, de később valamilyen cégnél akartam elhelyezkedni, lehetőleg alkalmazott kutatásban.

Miért nem programozónak tanultál? Informatika tagozatra jártál a középiskolában, természetes folytatás lett volna. Ugyan matematika szakon is tanítanak programozni, de nyilván nem olyan mértékben, mint egy informatikust. Így is megérte?

Amikor én jelentkeztem egyetemre, több ismerősöm, akik nálam jóval jobb programozók voltak középiskolában, külföldre mentek informatika képzésre, vagy a matematika szakot választották. Én úgy látom – és ez nagy szívfájdalmam –, hogy itthon a programozás egyetemi oktatása jelentősen le van maradva a nemzetközi élvonalhoz képest. Egy példa: míg a középiskolásoknak rendezett Nemzetközi Informatika Diákolimpián ott van a magyar csapat és minden évben érmekkel térnek haza, addig az ACM ICPC-n, ami az egyik legrangosabb, egyetemisták számára szervezett nemzetközi programozási verseny, sok éve nem jutott ki magyar csapat a világdöntőbe. Bár azt is hozzá kell tennem, hogy utóbbi években egyre közelebb kerülnek hozzá az ELTE-s csapatok. Talán jövőre.

Mivel én „okosan" akartam programozni, ezért inkább olyan szakot választottam, ahol akkori reményeim szerint jobban fejlődhettem. Úgy vélem, abszolút megérte, hiszen a matematika oktatás itthon nagyon színvonalas.

Kutató matematikus szüleid örömmel fogadták a döntést?

Fontosnak tartották, hogy a testvéreimmel mi is foglalkozzunk a matematikával már fiatal korunktól fogva, de nem nehezedett ránk nyomás, hogy ezt a hivatást válasszuk. Én lettem az egyetlen, aki matematikára ment. Láttam, látom rajtuk, hogy élvezik, amit csinálnak. Ez sokat jelentett nekem.

Középiskolásként sok versenyen vettem részt, jól bírtam ezt a stresszt, még ha nem is értem el komolyabb eredményeket. A matematika megszerettetésében nagyon nagy szerepe volt Pósa Lajosnak, illetve Juhász Péternek is, akik nagyon élvezetesen tanítottak, hagyták nekünk felfedezni az érdekes összefüggéseket. Így a matekozás mint szórakozás lett része az életemnek, és ez jelenleg, munka mellett is így van.

A matek mellett maradt időd programozni is az egyetemen?

Elvégeztem néhány programozós kurzust, például a neurális hálókról, ami 2014-15-ben menőnek tűnt, és mára kiderült, hogy az is volt. Továbbá tanultam bioinformatikát és alkalmazott szemléletű egészértékű programozást is. De elsősorban nem ezek által fejlődtem a programozásban.

Hanem?

Leginkább azáltal, hogy programoztam. Sok programozási versenyen indultam: egyéni és csapat, illetve jelenléti és online versenyeken. Néhány, amire így hirtelen vissza tudok emlékezni: ACM, Topcoder, Google Code Jam, Codeforces, ProjectEuler, NNG programozási verseny. Emellett csak saját szórakozásból is programoztam.

Mindeközben az egyetemen, ha választanod kellett, az alkalmazott matematikusi irány helyett mindig az elméleti mellett döntöttél.

A BSc második évétől vált szét az alkalmazott és az elméleti matematikus képzés. A kollégiumi társaim – a Bolyai Kollégium tagja voltam – mind elméletire szakirányra mentek, és igazából az első évben én is intenzív szinten végeztem a tárgyakat, úgyhogy végül az elméleti mellett döntöttem. A Matematikus MSc pedig azért tűnt számomra megfelelőbbnek, mert szabadabban választhattam olyan tárgyakat, amelyeket akartam.

Meg volt egy kisebb megszakítás is a BSc és az MSc elméleti matematika között. A BSc utáni nyáron ugyanis két hónapot gyakornokoskodtam a Morgan Stanleynél. Jó volt, sokat tanultam például a vállalati kultúráról: milyen egy cégnél dolgozni, vagy látni a kollégákon, hogy milyen a munkamennyiség fluktuálása. Illetve más gyümölcse is volt: sikerült a Morgan Stanleyt megnyerni a Bolyai Konferencia szponzorálásának.

Az MSc alatt nem akartál náluk dolgozni?

Egyáltalán dolgozni nem akartam egyetem mellett. Azt akartam, hogy legyen elég időm a matekra, és nem mellékesen persze kikapcsolódásra, feltöltődésre. Én különben nem javaslom egyetemistáknak a tanulmányok melletti munkát, ha ezt pénzügyileg megengedhetik maguknak. Az egyetemista lét az életnek a legjobb része is lehet, jó szórakozás. Úgyis sokat kell tanulni, az azon túli időt inkább élvezzék, töltsék azzal, amit szeretnek csinálni. Ne az egyetem alatt égjenek ki! Lesz még rá elég lehetőségük később. Külön javaslom az Erasmust, érdemes legalább egy fél évet kint tölteni, nagyszerű élmény. Munkának a nyári gyakorlatot tudom ajánlani, azt érdemes legalább egyszer kipróbálni. Nem mellesleg az önéletrajzban is jól mutat.

De az MSc végeztével elérkezett az idő, hogy megvalósítsam a középiskolai tervemet: munkát kerestem, hogy „okosan" programozhassak. Elkezdtem dolgozni a SignAll Technologies nevű cégnél kutató-fejlesztőként.

A helyeden érezted magadat?

Igen, szerettem a munkát; jelnyelv automatikus fordításának leprogramozásával foglalkoztunk. Bár a matematikus gondolkodásmód folyamatosan segített, nem volt szükség mély matematikára: egy ilyen feladat esetén általában nem az optimális megoldás megadása a cél, hanem egy többségében jó megoldás megkeresése. De azért egy stabil párosítást csináló algoritmust csak belecsempésztem a kódba.

Mégis visszatértél az egyetemre.

Munka közben megmaradt a jó kapcsolat témavezetőmmel, Jordán Tiborral. Az MSc-s szakdolgozatom egyik új eredményéből cikk is született. Végül egy év munka után magánéleti okokból visszatértem az egyetemre, elkezdtem a doktori képzést. Nagyon hálás vagyok ezért a négy évért. Sok nehézség volt benne, cikkek, munka, covid, de végig megmaradt jó szórakozásnak. A disszertációm címe „Augmentation problems in count matroids and globally rigid graphs", fő témája a ritkasági matroidok és (k, l)-ritkaság volt, főként a kétdimenziós kombinatorikus merevségben előforduló kérdések által inspirálva.

Habár a szakdolgozataimat és a PhD disszertációmat is főként elméleti témákból írtam, mindegyikben hangsúlyos volt az algoritmikus szemlélet. Igaz, hogy nem alkalmazott matematikusként vagy programozóként végeztem, de az algoritmusfejlesztés szeretete végig megmaradt.

Doktori alatt nem is programoztál?

Az PhD alatt elindítottunk egy – különben még most is futó – neurális hálós projektet: Lukács András témavezetésével, Ács Judittal és Madarasi Péterrel dolgoztunk együtt. Igazán érdekes a kérdés, fő vonalaiban vázolhatom.

Egy egészértékű program (Integer Programming, IP) megoldására tervezett IP solver úgy működik, hogy valamilyen ötlet, heurisztika alapján eldönti, hogy hogyan, melyik részfeladatra keressünk megoldást a következő lépésben. A jól kiválasztott részfeladat nagyban tudja szűkíteni a még megoldásra váró részt, így gyorsítja a program futásidejét. A következő részfeladat kiválasztására vannak jobb és kevésbé jó heurisztikák. A jobbak azok, amelyek segítségével kevesebb részfeladat megoldása után megtaláljuk az optimális megoldást, de ezek persze nagyobb számítási igényű, lassabb futási idejű heurisztikák. Mire jó egy neurális háló, ha nem pont ilyen helyzet kezelésére?! Be akartunk tanítani egy hálót, hogy gyorsan és jól leutánozzon egy költséges heurisztikát.

Akartunk? Sikerült?

Nem… Voltak részeredményeink, hogy néhány speciális feladatot gyorsabban tudott megoldani, mint egy solver. Igaz, körülbelül egy éve szálltam ki a projektből, lehet, hogy most már jobb eredményeik vannak. Ez egy olyan elképzelés, ami jól hangzik, és komoly dolog lenne, ha ezt is meg tudnák oldani a neurális hálók, de egyelőre ez senkinek sem sikerült. Néhány másik kutatócsoport is foglalkozik ezzel világszerte, vannak versenyek, cikkek, de egyelőre nincs áttörés. Persze az is igaz, hogy ez messze nem annyira kutatott terület, mint például a természetes nyelvfeldolgozás. Valószínűleg a solverek cégei is dolgoznak ilyeneken, és minden bizonnyal észrevennénk, ha nekik összejönne. Ezzel a témával másfél-két évet foglalkoztam: csapatban, közösen programoztunk, nagyon hasznos volt.

Most pedig megint a középiskolai álmodat valósítod meg: egy cégnél programozol. Mesélj a mostani munkahelyedről!

Jelenleg Genfben élek, ugyanis feleségem, Zsófi itt kapott doktori ösztöndíjat. Három hónapig voltam vendégkutató az École Polytechnique Fédérale de Lausanne egyetemen, most pedig a SOPHiA GENETICS nevű cégnél dolgozom algoritmusfejlesztőként. A cég genetikai elemzéssel foglalkozik, amit főként rákdiagnosztikára és -gyógyászatra használunk.

Ezt kicsit kifejtenéd?

A különböző fajta rákoknak különböző genetikai mutációk az okai. Lehet, hogy bizonyos mutációk egy kezelésre jól reagálnak, míg más mutációk esetén ugyanaz a gyógymód teljesen hatástalan. Azért, hogy ne mindenkit kemoterápiával kezeljünk és gyengítsünk, érdemes mintát venni a rákos sejtekből és megvizsgálni, hogy milyen mutáció okozta a betegséget, így utána arra lehet célzott, kevesebb járulékos kárral járó kezelést adni. A cég egyrészt ezzel a diagnosztikával foglalkozik, másrészt pedig utánkövetéssel: gyűjti az adatokat, hogy melyik kezelés melyik betegeknél volt hatásos. Adatbázis építésével lehet javasolni kezelést másik, hasonló elváltozásos betegeknek. Mi a betegeket kezelő kórházakkal szerződünk, hogy ténylegesen a páciensek életminőségét javítsuk; értékes munka. Tíz éves a cég, és körülbelül 500-an dolgozunk itt.

És te mit csinálsz?

Egy hatfős csapat tagjaként én azokkal az algoritmusokkal dolgozom, amelyek a nyers adatot jobban értelmezhetővé teszik azoknak, akik utána a statisztikával foglalkoznak. Különben a szűkebb csapatomban mindenkinek van PhD-ja: egy bioinformatikus, négy fizikus és én, a matematikus (aki még várja, hogy kézbesítsék a hivatalos dokumentumokat).

Algoritmusfejlesztés informatikus nélkül?

Néha valóban hátrány, hogy hiányosabb a technikai tudásunk, de egyrészt a problémák által sok mindenbe beletanulunk, másrészt az egyikünk egészen jól ért az ilyen rendszergazdai feladatokhoz, általában ő szokta megoldani az elakadásokat.

Az egyetemen tanultakból mit tudsz felhasználni?

A gondolkodásmódot folyamatosan. Használok mellette algoritmuselméletet is, leggyakrabban dinamikus programozást. Néha valamilyen ismert algoritmussal dolgozom, nemrég a Smith–Waterman-algoritmus egy változatát implementáltam. Nem emlékszem, hogy pont ezt tanultam volna az egyetemen, de hasonlót egészen biztosan igen. Két string (szó) illeszkedésének az optimalizációjára szolgál.

Erről mesélj még!

Ugye a DNS-t felfoghatjuk egy stringnek, amiben csak négy betűt használhatunk. Van egy mintánk, a referencia DNS-ünk egy variánsa, és szeretnénk meghatározni, hogy ez a minta és a referencia DNS hogyan illeszkednek egymáshoz. A két string soron következő karaktereit párba állíthatjuk, ha azonosak. Ha különbözőek, akkor mondhatjuk, hogy ott eltérő a két string, de azt is, hogy a mintánkban ott van egy üres hely vagy pedig a minta tartalmaz beillesztett plusz karaktereket. Mindegyik műveletnek van egy költsége és az összköltséget szeretnénk minimalizálni.

Ez egyáltalán nem nehéz. Például, ha a referencia stringben van egy 23 hosszú karaktersor, ami a minta stringben nem található meg, a karaktersor előtt és után viszont szépen összepárosíthatók, akkor optimális eredményt kaphatunk, ha azt mondjuk, hogy a mintánkban van 23 üres hely. És általában csak ez lesz optimális. Na, de mit mondjunk, ha a 23 hosszú karaktersor a referencia stringben közvetlenül egymás után kétszer szerepel, a minta stringben viszont csak egyszer? Ekkor sokféleképpen (a példánkban 24-féleképpen) kijelölhetjük a 23 üres helyet és ezek mind ugyanolyan (optimális) költségűek. De nemcsak egy mintát veszünk le, hanem sokat. Hogyan tudjuk elérni, hogy azokat a mintákat, amik ugyanazt a variánst tartalmazzák, mindet ugyanúgy illesszük a referenciához?

Természetesen meghatározhatunk valamilyen sztenderdet, hogy hogyan ábrázoljuk a variánsokat. Ekkor minden mintát erre a sztenderdre kell hozni. Különben még ez sem nehéz, az az érzésem, hogy ezt egy viszonylag szép párosító algoritmussal lehet kezelni. Viszont a gyakorlatban nem minden ilyen egyszerű: ha van egy icipici zaj, azaz például a minta string néhány karakterét rosszul határozták meg, úgy a feladat lényege is megváltozik. Hiszen találhatunk mi optimális megoldást, meghatározhatjuk, hogy milyen illesztés eredményezi a minimális összköltséget, a matematikai optimum nagyon messze kerülhet a valós variánstól.

Én most gyakorlatilag egy olyan programot írok, ami még a zajos környezet ellenére is olyan megoldást ad, amilyet szeretnénk. Ez fogja szolgáltatni a bemenetet a következő modulnak. 4000 sor körül tartok és a tesztelések alapján jól fog működni, úgyhogy bizakodó vagyok.

Nagyon élvezetes munka lehet, pont olyan, mint amit annak idején megálmodtál!

Tényleg jó, szeretem a munkámat!

Elképzelhetőnek tartod, hogy egyszer majd mégiscsak visszatérsz az elméleti kutatáshoz?

Várhatóan néhány éven belül hazaköltözünk Magyarországra. Az akadémiával sem szakadt meg teljesen a kapcsolatom, egy cikkünk még nem jelent meg, szabadidőmben a doktori témámmal is foglalkozom valamennyit. Van még néhány elvarratlan szál benne, amit szeretnék befejezni. Szóval ki tudja? Nem valószínű, hogy végül elméleti kutatóként végzem, de nem zárom ki a lehetőségét.

Mihálykó Andrással az interjút Paulovics Zoltán készítette

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon:

Dankowsky Zorka, Szűcs Gábor 2023. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Repülő Iskola avagy repsuli

A 2017-ben indult Repülő Iskola A Gondolkodás Öröme Alapítvány és a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet közös programja. A programra középiskolák jelentkezhetnek, a tagozatos és a kiemelkedő versenyeredményeket elérő iskolák kivételével. A jelentkező középiskolák kilencedikesei számára egy kedvcsináló foglalkozást tartunk, ahol megismerkedhetnek a matematika szép és szórakoztató arcával.

Azok a diákok, akik az iskolai foglalkozás után kedvet kapnak a további matekozáshoz, két és fél éven át folytathatják, ennek során havonta egy-egy hétköznapot Budapesten, az ELTE Eötvös József Collegiumban töltenek matematikával foglalkozva. A program indulásáról még 2017-ben Juhász Péter írt az Érintőben.

A Repülő Iskolával kapcsolatos tapasztalataikról kérdeztük a program tanárait. A bemutató foglalkozásokatat főként matematikus hallgatók, míg a kétéves folytatást jellemzően gyakorló tanárok tartják.

A program célja

Mit tartasz a program céljának?

Surányi László: Hozzáférhetővé tenni minél több, az elit iskoláktól minél távolabbi, matek iránt érzékeny diákoknak a szabad levegőjű matekozás tapasztalatát. Ennek vannak azért határai, erre a későbbiekben visszatérek.

Imolay András: Hogy élvezetes matekot mutassunk olyan diákoknak, akik ilyennel még nem igazán találkoztak, és segítsünk elindítani a matematikai fejlődésüket egy új, gondolkodósabb irányba.

Az idei kilencedikes diákok a Collegium előtt

Motiváció

Mi motivált, miért vállaltad a bemutató foglalkozások megtartását?

Paróczi Orsi: Bármilyen programban szívesen veszek részt, ahol gyerekeket lehet lelkesíteni a matek iránt, a repsuliban még az is motivál, hogy ezek a gyerekek nem feltétlen gondolják magukról, hogy jók lennének matekból. Emiatt nekik különösen értékes egy felszabadult, jó hangulatú, matekhoz kötődő élményt adni.

Emellett az is izgalmas, hogy nem tudhatjuk előre, hogy mi fog történni, így mindenre felkészülten kell bemenni a tanterembe, sokat kell változtatni a feladatokon a foglalkozás közben is.

Sándor András: Az, hogy lássak sokféle iskolából sokféle gyereket, akik a mi érdekes feladatainkon gondolkoznak.

És mit tapasztaltál?

Sándor András: Ebből a szempontból érdekes volt azt látni, hogy ez a fajta matektanítás − legalábbis egy 3 órás foglalkozás erejéig − teljesen jól működik, akármilyen gyerekekkel. Annak ellenére jó tapasztalataim voltak, hogy sok diák csak azért jött, mert ellóghatott órákat, magától annyira nem érdekelte az egész.

Munka közben

Országjárás

Mindhárman speciális matematika tagozaton tanultatok középiskolában. Ez egy másik közeg, mint ahol a foglalkozások diákjai tanulnak. Milyen különbséget tapasztaltatok?

Hegedűs Dániel: Alapvetően szerintem nincsen hatalmas különbség a két közeg között. A repsulis foglalkozásokon is érdeklődő diákok vannak ugyanúgy, mint a Fazekasban.

Már az is újdonság lehet többeknek a programon, hogy az ilyen mateknak nem az a célja, hogy valami elméletet vagy módszert megtanuljanak. Hanem az, hogy új dolgot lássanak, amit remélhetőleg szórakoztatónak, érdekesnek fognak gondolni, sőt, ez a legfontosabb szempont a program megtartásakor.

Várkonyi Zsombor: Úgy éreztem, hogy a matek iránt lelkes gyerekek önmaguktól voltak azok, és nem volt ebben semmi megszokás. Sokuknak ez egy új érzés volt, lehet, hogy korábban még nem tekintettek úgy a matekra, mint egy szerethető, érdekes tárgyra.

Ezzel szemben a fazekasos közegben az a tipikus, hogy mindenkit érdekel a matek régóta, ezért magasabban is van a gyerekek ingerküszöbe, nem könnyű nekik olyat mondani, ami igazán meglepi őket.

Imolay András: Hmm, ez egy nehéz kérdés. A Repülő Iskola egy speciális, 3 órás foglalkozás, amihez teljesen máshogy állnak a diákok, mint egy matekórához. Számomra pozitív meglepetés, hogy lényegében mindenhol nagyon lelkesek, és sokszor aktívak és bátrak is a diákok. Ilyen szempontból nincs különbség a matekosabb közeghez képest.

Talán ami különbséget jelent, hogy az absztraktabb dolgok nem igazán érdeklik őket, sokszor nem is értik, mi értelme, és ilyenkor tanult szabályokhoz próbálnak visszanyúlni gondolkodás helyett. Jobban szeretik a minél kézzelfoghatóbb, földhözragadt feladatokat, amiket ki tudnak próbálni, akár gondolkodás nélkül is. Ilyenkor segít, ha valami segédeszköz is van a feladathoz (pl.: korong, kártya).

Említetted, hogy az absztrakt feladatokkal nehezebben boldogultak a diákok. Próbáltál ebbe az irányba menni?

Imolay András: Egy feladatra emlékszem, ami egy bűvésztrükk volt[1]. Általában ha a diákok találnak egy olyan sorozatot, ami két-három konkrét esetben működik, akkor odahívnak, és megmutatják, hogy kész vannak. Nem gondolkoznak annak az indoklásán, hogy biztosan jó-e a konstrukciójuk.

Sokszor nem értik igazán, hogy mit takar egy indoklás, és általában el sem hiszik nekem, hogy hibás a konstrukciójuk, amíg el nem játsszuk a trükköt. Általában az egy nehéz dolog, hogy lássák a bizonyítás fontosságát, és ez egy jó alkalom, hogy ezzel szembesüljenek. Hátránya a feladatnak, hogy sokszor a tippelgetve talált konstrukció valóban jó, és akkor nem lehet rámutatni a bizonyítás hiányosságára egy ellenpéldával.

Van-e kedvenc feladatod?

Nagy Kartal: Volt egy feladat, amit szinte mindenhol feladtam, de más-más mesékkel. Eleinte vonatos feladatként indult, majd kőszegi kirándulás, végül egy király lakomája lett belőle[2]. Jellemzően ezt a foglalkozások végén adom fel. Mivel a megoldásához szerintem egy elég egyedi gondolat kell, sokszor előfordul, hogy akiknek a többi feladat kevésbé megy, ezt gyorsan megoldják, és fordítva is, akik a többi feladaton gyorsan végigértek, ennél elakadnak. A konstrukció ránézésre komplikált, de aki rálát a lényegre, az könnyen meg tudja oldani a feladatot.

Van-e olyan dolog, amitől tartottál a foglalkozás előtt? Szoktál izgulni?

Paróczi Orsi: Számomra a legnagyobb nehézség talán az volt, hogy szörnyen idegeskedtem azon, hogy minden rendben lesz-e, jó nehézségű feladatokat válogattam-e össze, stb. Szerencsére ez a foglalkozás során szinte teljesen eltűnt.

Nagy Kartal: Általában izgulok azon, hogy odaérek-e a foglalkozásokra. Úgy tervezem az utazást, hogy időben odaérjek, de nem tudom, hogy mit csinálnék akkor, ha a MÁV beadja a kulcsot, és összeszed néhány órás késést a vonatom. Szerencsére eddig ilyen nem fordult elő.

21 foglalkozást tartottál, történt eközben valamilyen vicces eset?

Nagy Kartal: Az egyik helyszínen a tábla egy pingpongasztal hátulja volt. A tábla minősége megfelelő volt, persze a lábak azért megnehezítették a használatot. De végül áthidaltuk ezt a problémát, és szerencsére a diákokat sem viselte meg.

Tapasztalatok

Volt-e, amit a foglalkozások közben tanultál?

Sándor András: Talán annyi, hogy a színpadi elemek a tanításban nagyobb hangsúlyt kaptak. Érdekes módon a feladatok komikus, hatáskeltő poénjai jobban ültek. Jobban működtek a beugratós, becsapós feladatok, mint egy tapasztaltabb közegben.

A diákok írnak visszajelzéseket is a foglalkozásokról, ezzel kapcsolatban milyen tapasztalataid vannak?

Nagy Kartal: Legtöbbször azt látom a visszajelzésekben, amire egyébként is számítok. Jellemző az, hogy inkább előadás jellegű programra számítanak, és nem arra, hogy ők is aktívan részt vesznek majd a programban. Az ilyen visszajelzések pozitívak, örülnek a gondolkodásnak.

A legnagyobb eltérés az általam tapasztalt és a kérdőívben kapott visszajelzés közt abban szokott lenni, hogy ki az, aki fárasztónak találja és ki az, aki nem. Itt szoktak meglepetések érni.

Folytatás

Most kezdtél el a folytatásban is tanítani, most ért véget a második alkalom. Érzel különbséget az itteni diákok, és egy országjárás között?

Nagy Kartal: Maga a cél más a két foglalkozáson. A körbejáráson az a cél, hogy olyan feladatok legyenek, amelyek jobban felkeltik a diákok érdeklődését, és önmagukban is izgalmasak. A folytatásban nagyobb hangsúly van a témakörök felépítésén. Itt sokkal több idő van arra, hogy egy nehezebb feladat előtt feladjunk néhány felvezető feladatot, akár foglalkozásokon átívelően is.

A Repülő Iskolában a diákok havonta egy-egy napot töltenek a foglalkozáson. Mi ennek a konstrukciónak az előnye? Milyen hátrányait látod?

Surányi László: Előnye, hogy van egy ilyen nap. És aránylag nyugiban tudnak nehezebb feladatokon gondolkodni.

Hátránya, hogy a) a végére elfáradnak, b) nehéz fenntartani a folytonosságot.

És bár nem kérdezted, a legnagyobb probléma, hogy még mindig nagyon sok függ attól, hogy van-e lelkes tanár az adott iskolában, aki noszogatja a diákjait. Arról is van tapasztalat, hogy milyen nagy baj, ha a diák matek iránti amorf lelkesedésével a tanár nem tud mit kezdeni.

A diákok más közegből jönnek, mint a tagozatos iskolák diákjai. Érzékelhető-e ez a különbség a foglalkozásokon? (A tárgyi tudásban ez biztosan érzékelhető, van-e más is?)

Surányi László: Sok különbség van. Egyrészt nincs közösség-jelleg, alig beszélgetnek egymással, a különböző iskolából jöttek elég idegenek egymásnak. És még egy év után is „vigyázzban állnak" a matek előtt, nagyon nehezen oldódnak fel. De azért haladunk. Eddig a második évben már ugrásszerűen javulni szokott a dolog.

Ami a tárgyi tudást illeti, nagyon egyenetlen, és nem mindenkinek tesz jót, hogy többet tanult, mert megemésztetlen maradt. Másrészt minden csoportban van egy-két diák, aki matektagozaton is helyén lehetett volna.

Surányi László és Táborné Vincze Márta foglalkozás közben

Volt-e valami, ami meglepett, ellentétes volt a várakozásaiddal (akár pozitív, akár negatív irányban)?

Surányi László: Meglepett, hogy a covidos időszak alatt az online munka a diákok felével olyannyira folytatódott, hogy még egy plusz félévet kértek.

Folytonosan újra kell tanulni, hogy mit lehet csinálni, ha ilyen szaggatottan, havonta csak egyszer találkozom a diákokkal.

Volt kellemetlen meglepetés is: eddig minden csoportban volt olyan, aki nagyon idevaló lett volna, mégis kimaradt menet közben.

A foglalkozások hatása

Szerinted a program mennyire teljesíti azt a célját, hogy tehetségeket találjon?

Nagy Kartal: Az országjárás során sok tehetséges diákkal találkozunk. Egy részük eljön a folytatásra, de bőven vannak, akik nem érdeklődnek iránta. De ezt teljesen megértem, középiskolában sok dolguk van a diákoknak, és attól, hogy valakinek jól megy a matek, egyáltalán nem biztos, hogy ezzel szeretne foglalkozni.

Azt, hogy eléri-e a program a célját, azzal tudom illusztrálni, hogy a saját kollégiumi szobatársam is járt a Repülő Iskolába középiskolás korában. Azt persze nem tudom, hogy ennek hatására-e, de aztán az ELTE matematika szakán tanult tovább, és idén fog diplomázni alkalmazott matematikus szakon.

A program felhívásában megfogalmazott célja, hogy matekos tehetségeket tanítson. Ez megítélésed szerint mennyire teljesül? Mit gondolsz a folytatáson részt vevő diákok tehetségéről?

Surányi László: Nem tudtam, hogy a program megfogalmazott célja matekos tehetségek tanítása. Nem is tudom, ez így értelmezhető cél-e. „A zseni talán csak szorgalom”, mondja Goethe.

Teret adni matek iránt fogékony gyerekeknek, hogy fejlődjenek, ez igen. Hogy aztán mihez kezdenek vele, az még sok mindentől függ.

A tavalyi kilencedikes csoport

Az interjúk egymástól függetlenül készültek, akik a kérdéseket feltették:

Dankowsky Zorka és Szűcs Gábor

A Repülő Iskola honlapja: https://agondolkodasorome.hu/2022/09/13/repulo-iskola-2022/

A program a Nemzeti Tehetség Program keretében a Kulturális és Innovációs Minisztérium (NTP-TSZM-22-0077) támogatásával valósul meg.

[1] **Bűvésztrükk:** Mindenki kap négy kártyalapot: a piros, a tök, a zöld és a makk ászt. A trükk kezdetén a saját kártyáikat valamilyen sorrendbe rendezik A tanár minden körben kiválaszt egy színt, ez lesz a bűvös szín. A közönségnek a következők egyikét kell tennie.

- Ha a bűvös lapjuk a pakli tetején volt, akkor az aljára teszik.
- Ha a bűvös lapjuk nem a pakli tetején volt, akkor azt a tetejére teszik.

A trükk végeztével a közönség minden tagja meglepődve azt tapasztalja, hogy a lapjaik egy meghatározott sorrendbe rendeződtek. Mi lehet a trükk titka? Adj meg olyan színsorozatot, amellyel megvalósítható a trükk! Próbálj minél rövidebb sorozatot keresni!

[2] **Lakoma:** Egy királyi lakomát kell összeállítani, az egyes fogásokra a következő szabályok érvényesek:

- Két leves között mindenképpen fel kell szolgálni csirkét.
- Két csirke között mindenképpen fel kell szolgálni salátát.
- Két saláta között mindenképpen fel kell szolgálni tortát.
- Legfeljebb két torta lehet a lakomán.

Állíts össze minél több fogásból álló vacsorát, ha a fentieken kívül mást nem szolgálnak fel.

Kántorné Varga Tünde, Szilasi József 2023. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Emlékezés a 100 éve született Tamássy Lajosra

„Geometriam more geometrico”

Életút és pályakép

Tamássy Lajos 1923. április 17-én született Debrecenben, és ugyanitt hunyt el 96. életévében, 2019. február 12-én. Szülei Bészler (1929-től Tamássy) Lajos vaskereskedő és Dömsödi Emma, aki tanítónői képesítéssel rendelkezett. A négyosztályos elemi iskola elvégzése után Pécsett, a Zrínyi Miklós Reáliskolában kezdte el középfokú tanulmányait. 1941-ben érettségizett, majd felvételt nyert a Ludovika Akadémiára. 1944 őszétől frontszolgálatot teljesített. Egy felderítési akció során megsebesült, a visszavonuló magyar sereg sérülten szállította magával. Végül, már Németországban, amerikai hadifogságba esett, amelyből 1945. májusában szabadult. 1946 tavaszán tért haza szülővárosába. Ez év őszén beiratkozott a Debreceni Tudományegyetem matematika-fizika-ábrázoló geometria szakára – akkoriban ehhez elegendő volt az érettségi bizonyítványt bemutatni. 1951-ben vette kézhez tanári diplomáját. Ezt követően rövid ideig a debreceni Gépipari Technikum tanára volt. 1952-ben a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetében kapott tanársegédi állást. Ugyanebben az évben, Debrecenben életre szóló házasságot kötött a kutatás és oktatás iránt ugyanúgy elkötelezett Lentei Ilonával. Ő a Kossuth Lajos Tudományegyetem (a későbbi Debreceni Egyetem) Elméleti Fizikai Tanszékén lett egyetemi tanár, majd (1981-től) a Fizikai Intézet első igazgatója. Házasságukból gyermek nem született. Az 1953-as év hozta meg az új és igazi kezdetet Tamássy Lajos pályafutásában: januárban kinevezést nyert a Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematika Tanszékére. Végigjárta a teljes szolgálati utat: 1959-től adjunktus, 1964-től docens, 1975-től pedig egyetemi tanár. Közvetlenül nyugdíjba vonulása után, 1994-ben elnyerte a professor emeritus címet. Haláláig, tehát 66 éven át szolgálta példamutató odaadással az Egyetemet. Az előléptetések mindig a tudományos ranglétra magasabb fokára jutást követték. Tamássy Lajos 1958-ban lett egyetemi doktor, 1962-ben szerezte meg a kandidátusi, 1974-ben pedig a matematikai tudományok doktora fokozatot.

A Geometria Tanszék vezetését 1973-ban Rapcsák András akadémikustól vette át, és 15 éven át töltötte be ezt a pozíciót. Hatását tekintve, talán ez volt pályájának a legfontosabb szakasza. Átgondolt és következetesen végigvitt építkezés jellemzi ezeket az éveket mind a kutatási profil kor által megkövetelt modernizálásában (az értékes hagyományok megőrzése mellett), mind pedig a szükséges humánpolitikai lépések megtételében.

Jelentős energiát fordított arra, hogy ablakot nyisson a világra. 1976 nyarán főszervezője volt egy Debrecenben rendezett nagyszabású, magas színvonalú és rendkívül sikeres Differenciálgeometriai Kollokviumnak, amelyre szinte minden kontinensről érkeztek vezető kutatók. Ezt a konferenciát több hasonló is követte a Bolyai János Matematikai Társulat támogatásával.

A debreceni Geometria Tanszék 1979-ben: elöl ül Rapcsák András és Makoto Matsumoto, hátul állnak balról jobbra: Gyarmathi Attila, Kántor Sándorné, Szilasi József, Tamássy Lajos, Bácsó Sándor, Bélteky Károly, Varga József, Szabó József

Tamássy Lajos 1970-es években elért tudományos eredményei (amelyekről később kicsit bővebben szólunk) felkeltették a témában dolgozó és abban vezető szerepet játszó japán matematikusok érdeklődését. 1976 őszén több hónapra szóló vendégprofesszori meghívást kapott Japánba. Kint tartózkodása során a Kyotoi Egyetemen és a Japán Matematikai Társulat Tokiói Kongresszusán is tartott előadást. Viszonzásként Makoto Matsumoto, a Kyotoi Egyetem professzora töltött el 1979 januárjától négy hónapot intenzív munkával a debreceni Egyetemen. Heti két alkalommal tartott előadást a Geometria Tanszék oktatóinak a Finsler-geometria modern megalapozásáról, illetve speciális Finsler-sokaságokról, és Tamássy Lajossal közösen két dolgozatot is elkészített ([4], [5]). Ezzel a kölcsönös látogatással egy hosszan tartó és nagyon gyümölcsöző együttműködés indult meg a debreceni differenciálgeométerek és a Matsumoto professzor körül csoportosuló „Kyoto Group” kutatói között.

Tamássy Lajos Makoto Matsumotoval Japánban 1976-ban

Tamássy Lajos kezdettől fogva kiemelt feladatának tekintette egy kutatói utánpótlás kinevelését. Kilencen szereztek az irányításával kandidátusi, illetve – egyetemi doktori cím átminősítésével – PhD fokozatot. Tanítványai közül többen is a differenciálgeometria jeles kutatóivá váltak. Kimagasló iskolateremtő munkáját a Bolyai János Matematikai Társulat 1992-ben az általa adható legmagasabb kitüntetéssel, a *Szele Tibor Emlékéremmel* díjazta. Idézünk a laudációból:

„Tamássy Lajos egyik legkiemelkedőbb eredménye a Varga Ottó által alapított, majd később Rapcsák András által vezetett debreceni differenciálgeometriai iskola tovább vitele. Tamássy Lajosnak az utóbbi évtizedben sikerült a vezetése alatt dolgozó differenciálgeometriai kutatócsoport kutatásait a klasszikus lokális vizsgálatokról a modern globális vizsgálatokra átállítani. Tamássy Lajos érdeme, hogy a debreceni iskola megmaradt a magyarországi differenciálgeometriai kutatások nemzetközileg is elismert centrumának.”

Nyugdíjba vonulása után csak státusza változott, aktivitása nem. Naponta bejárt a Matematikai Intézetbe, részt vett annak életében. Vezette a doktori iskola „Differenciálgeometria és alkalmazásai” alprogramját. Egyetemi előadásokat tartott, kedvenc témáiban – még határozottabban a „more geometrico” szellemében – folytatta vizsgálódásait, és eredményeit rendszeresen publikálta. Jelentős külföldi konferenciákon adott elő meghívás alapján, így például 2010-ben, 87 évesen, Sanghajban a Chern Intézetben tartott plenáris előadást a síkprojektív terekről.

Még 1988-ban kinevezték a *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* főszerkesztőjévé, és ezt a feladatkört haláláig ellátta. Fáradtságot nem ismerő, igényes és pontos szerkesztői munkájának köszönhetően ennek a korábban is komoly presztizzsel bíró folyóiratnak a rangja tovább emelkedett.

Pálinkás József, az MTA elnöke átadja Tamássy Lajosnak az Eötvös József-koszorút

Tamássy Lajos munkásságát számos magas kitüntetéssel ismerték el. A Szele Tibor díjat már említettük. A továbbiak közül a legfontosabbak: *Szent-Györgyi Albert-díj*, a *Magyar Köztársasági Érdemrend tisztikeresztje* és *középkeresztje*; az MTA *Eötvös József-koszorú* díja. 2018-ban, 95 éves korában, elnyerte a *Debreceni Egyetem Díszérme* kitüntetést, amely az intézmény által adományozható legmagasabb elismerés.

Tenzornyalábokból a távolság-terekig

Tamássy Lajos első munkái a *tenzori összefüggések* (a ma inkább használatos kifejezéssel: *tenzori konnexiók*) elméletéből születtek, és ehhez a témához pályája során többször is visszatért.

Egy sima sokaságon adott minden lineáris konnexió (amely szabadon interpretálható egy kovariáns deriválásnak nevezett differenciáloperátorként) kovariáns deriválást indukál a sokaság fölötti tenzornyalábokon. Megfordítva, megadva egy tenzornyalábon egy kovariáns deriválást (egy „tenzori konnexiót”), fölvethetjük a kérdést: milyen feltételek mellett és hogyan származtatható ez az alapsokaság egy lineáris konnexiójából? Ez az egyszerű (és elég könnyen megválaszolható) kérdés a tenzori konnexiók elméletének kiindulópontja. Az elmélet elindítója Enrico Bompiani volt egy 1946-ban megjelent rövid, olasz nyelvű dolgozatával. Vizsgálatai a $(0,2)$- és az $(1,1)$-típusú tenzorokra korlátozódtak, Tamássy Lajos kiterjesztette ezeket általános, (r,s)-típusú tenzorokra ([1]). A parciális differenciálegyenletek elméletéből ismert Thomas–Veblen eljárás segítségével meghatározta ugyanazon tenzornyalábon adott két tenzori konnexió ekvivalenciájának feltételét, és ezen az úton olyan tenzorinvariánsokat talált, amelyek a tenzori konnexiók görbületi tenzorainak, illetve torziótenzorának szerepét játsszák.

Utólag nézve, a tenzori konnexiók számos új eredményt hozó tanulmányozása valójában az előmunkálatokat jelentette az *areal-terek* még kevéssé feltárt és bonyolult világának a vizsgálatához. A következőkben először is röviden vázoljuk, hogy milyen motivációk vezettek az areal-terek bevezetéséhez, és megadjuk egy egyszerű, indexmentes definíciójukat.

Tekintsünk egy n-dimenziós sima sokaságot, jelölje ezt M. Egy M-en adott *Riemann-féle metrikus tenzor* („Riemann-metrika”, vagy egyszerűen „metrika”) a sokaság minden pontjának érintőterét felruházza egy euklideszi skaláris szorzattal, amely (euklideszi) normát indukál. Ez lehetővé teszi azt is, hogy az érintőterekben *k-dimenziós területmérték*et („*area measure*”) vezessünk be, mégpedig egyértelműen, ha rögzítjük a k-dimenziós egységkocka mértékét.

*Élie Cartan*tól származik az a gondolat, hogy egy n-dimenziós sokaságon adjunk meg olyan k-dimenziós ($k\in\{1,\dots,n-1\}$) területmértéket, amelyet nem föltétlenül Riemann-metrika indukál, azaz építsünk fel egy olyan geometriát, amelyben van területmérték, de nincs a priori adott hosszmérték. Azt, hogy ez miként valósítható meg $k=n-1$ esetén, maga Cartan mutatta meg egy 1933-ban publikált könyvében ([B1]). Az általános eset kidolgozásához olyan jeles matematikusok járultak hozzá lényegesen, mint a japán *Akitsugu Kawaguchi*, a német *Woldemar Barthel*, a brit *Evan Tom Davies* és *Frederick Brickell* – s közéjük sorolható Tamássy Lajos is.

Az areal-terek definiálása céljából tekintsünk először egy n-dimenziós valós vektorteret, ahol $n\geq 2$; és legyen $k\in\{1,\dots,n-1\}$. Egy lineárisan független vektorok alkotta $(v_1,\dots,v_k)$ vektorsorozatról azt (is) mondjuk, hogy egy *k-él* (*k-frame*) V-ben. A V-beli k-élek halmazát $\mathrm{Fr}_k(V)$-vel jelöljük. Ez a halmaz rendelkezik egy természetes sima struktúrával, amellyel felruházva $\mathrm{Fr}_k(V)$ kn-dimenziós sokasággá válik, ez a V-beli k-élek alkotta *Stiefel-sokaság*. A *V vektortéren adott k-dimenziós területmértéken* olyan

$$f\colon\ \mathrm{Fr}_k(V)\to\mathbb{R}$$

pozitív differenciálható függvényt értünk, amely rendelkezik a következő *homogenitási tulajdonsággal*:

ha $(v_1,\dots,v_k)\in\mathrm{Fr}_k(V)$ *és φ pozitív determinánsú lineáris izomorfizmusa V-nek, akkor* $f(\varphi(v_1),\dots,\varphi(v_k))=(\det\varphi)f(v_1,\dots,v_k)$.

Ezen előkészületek után tekintsünk egy M n-dimenziós sokaságot (ahol $n\geq 2$), és képezzük az

$$\mathrm{Fr}_k(TM)=\bigsqcup_{p\in M}\mathrm{Fr}_k(T_pM)$$

diszjunkt uniót. Ez a halmaz természetes módon sokaság-struktúrával ruházható fel. Ily módon $\mathrm{Fr}_k(TM)$ az M sokaság fölötti fibrált nyalábbá válik (egy $p\in M$ pont fölötti fibrum az $\mathrm{Fr}_k(T_pM)$ Stiefel-sokaság). Az *M sokaságon adott k-dimenziós területmérték* egy olyan

$$F\colon\ \mathrm{Fr}_k(TM)\to\mathbb{R}$$

(C^∞-) differenciálható függvény, amelyre az teljesül, hogy $F\restriction\mathrm{Fr}_k(T_pM)$ k-dimenziós területmérték a T_pM érintőtéren, minden $p\in M$ esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy az (M,F) pár *areal-tér k-dimenziós területmértékkel* (röviden: *areal-tér*). Az F függvényt a tér *alapfüggvényeként* is említjük.

A legfontosabb speciális eset természetesen k=1 -re adódik.. Ekkor

$$\mathrm{Fr}_1(TM)=TM\setminus\{0_p\in T_pM\mid p\in M\}=:\overset{\circ}{T}M$$

(ahol $0_p\in T_pM$ az érintőtér zérusvektora) és az alapfüggvényre kiszabott homogenitási feltétel azt adja, hogy F *elsőfokú pozitív homogén*, azaz

$$F(\lambda v)=\lambda F(v)$$

minden $\lambda>0$ és $v\in\overset{\circ}{T}M$ esetén. A területmérték hosszmértékké válik, és definiálható tetszőleges $\gamma\colon\ [a,b]\to M$ reguláris differenciálható görbe

$$L(\gamma):=\int_a^b F\circ\dot{\gamma}$$

ívhossza (ahol $\dot{\gamma}\colon\ [a,b]\to\overset{\circ}{T}M$ a görbe sebességvektormezője). Ha az F függvényt kiterjesztjük TM-re, előírva, hogy zérusvektorban nullát vegyen fel, és megkívánjuk az alább megfogalmazásra kerülő (K) *konvexitási feltétel* teljesülését, akkor *Finsler-alapfüggvényről* vagy *Finsler-függvényről* beszélünk, s a Finsler-geometria világába jutunk.

(K) *Tetszőleges $p\in M$ pont és $v\in T_pM$ nemzérus érintővektor esetén a*

$$g_v:=\frac{1}{2}\left(F^2\restriction T_pM\right)''(v)\colon\ T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$$

szimmetrikus bilineáris forma pozitív definit.

A $g\colon\ v\mapsto g_v$ leképezés a Finsler-sokaság *metrikus tenzora*. Ez alkalmas hosszmérésre, ugyanis

$$g_v(v,v)=F^2(v),\quad v\in\overset{\circ}{T}M.$$

Térjünk vissza az általános

$$(M,F),\quad F\colon\ \mathrm{Fr}_k(TM)\to\mathbb{R}$$

areal-terekhez! Elméletük kiépítése során az első komoly nehézséget egy olyan metrikus tenzor bevezetése jelentette, amelyből a Finsler-eset mintájára visszakapható az alapfüggvény (s ilyen értelemben azzal „kompatibilis”) – és amely megnyitja az utat a metrikus differenciálgeometria ismert technikáinak alkalmazásához.

Ezt a problémát *Hideyuki Iwamoto* japán matematikus oldotta meg 1948-ban ([B2]). Egy általa bevezetett parciális derivált operátor alkalmazásával sikerült explicite leszármaztatnia az alapfüggvényből a kívánt tulajdonságú tenzort. Ezt *metrikus $2k$-tenzornak* nevezték, alkalmas lokális koordinátarendszerben ugyanis

$$g_{i_1\dots i_k j_1\dots j_k}=:g_{i[k]j[k]}$$

alakú komponensfüggvényekkel rendelkezik. Speciálisan szólhatunk két indexes, tehát $g_{ij}=g_{i[1]j[1]}$ alakú komponensekkel rendelkező *metrikus 2-tenzorokról*. Iwamoto azt is megmutatta, hogy ha egy k-dimenziós területmértékű areal-téren létezik metrikus 2-tenzor (és ez a helyzet, ha $k=1$ vagy $k=n-1$, azaz Finsler- és Cartan-sokaságok esetén), akkor ebből az általa bevezetett metrikus k-tenzor előállítható a

$$g_{i_1\dots i_k j_1\dots j_k}=g_{[i_1[j_1}\cdots g_{i_k]j_k]}\qquad(*)$$

formula alapján, ahol a jobb oldalon a szögletes zárójelek alternálást jelentenek az $i_1,\dots i_k$, illetve a $j_1,\dots,j_k$ indexekre. Azokat az areal-tereket, amelyeken létezik metrikus 2-tenzor és ezzel a $(*)$ összefüggés teljesül, *metrikus areal-tereknek* nevezték. Kawaguchi 1951-ben bebizonyította, hogy ha egy areal-tér metrikus $2k$-tenzorának komponenseiből képzett $\binom{n}{k}$ rendű determináns nem tűnik el, s az n és k számok relatív prímek, akkor a tenzorból véges számú algebrai operációval metrikus 2-tenzor származtatható, amely azonban általában nem tesz eleget a $(*)$ relációnak ([B3]). Az ilyen tulajdonságú terek alkotják a *szubmetrikus areal-terek* osztályát. Fölvetődik a kérdés: melyek azok a szubmetrikus areal-terek, amelyek egyúttal metrikusak is? Ezt 1953-ban *Kwoichi Tandai* definitíve megválaszolta: $1<k<n-1$ esetén *egy szubmetrikus areal-tér akkor és csak akkor metrikus, ha az alapfüggvénye az alapsokaságon adott Riemann-metrikából származik* ([B4]).

Ezzel a kérdéskör lezárulni látszott, az 1970-es évek elején azonban Tamássy Lajos új megvilágításba helyezte a dolgokat ([3], [4]). Alapötletének felvázolása céljából tekintsünk egy $F\colon\ \mathrm{Fr}_k(TM)\to\mathbb{R}$ k-dimenziós területmértéket, ahol $1<k<n-1$. Az M sokaságon adott minden g Riemann-metrika indukál egy ilyen területmértéket, jelölje ezt F_g. Kiválasztva egy $p\in M$ pontot és egy $(v_1,\dots,v_k)$ p-beli k-élt, létezik olyan g Riemann-metrika, hogy $F_g(v_1,\dots,v_k)$ $F(v_1,\dots,v_k)$-hoz, jól definiált értelemben, „geometriailag a legközelebb van”. Tamássy Lajos *regulárisnak* nevezte az areal-teret, ha minimalizáló Riemann-metrika minden $(p;(v_1,\dots,v_k))$ esetén *egyértelműen* létezik. Approximációs eljárásával, a regularitás feltétele mellett, olyan metrikus 2-tenzort konstruált, amelyből a $(*)$ formula szerint felépített $2k$-tenzor kompatibilis az alapfüggvénnyel, megmutatta továbbá, hogy van olyan areal-tér, amelyben a metrikus k-tenzor nem származtatható Riemann-metrikából.

Ilyen módon kiderült, hogy a geometriai szempontból igazán érdekes areal-terek osztálya lényegesen bővebb annál, amit az addig elvégzett kutatások sejtettek.

Az 1980-as évektől kezdve Tamássy Lajos növekvő számban publikált Finsler-geometria tárgyú dolgozatokat. E munkák egy része a Finsler-sokaságok egy speciális, az *általánosított Berwald-sokaságok* alkotta osztályával foglalkozik. Általánosított Berwald-sokaság esetén az alapsokaság – tehát nem annak érintősokasága! – el van látva olyan kovariáns deriválással (=lineáris konnexióval), amelyhez tartozó párhuzamos eltolások megőrzik a vektorok Finsler-normáját. Ha a kovariáns derivált torziómentes, akkor a *Berwald-sokaságokhoz* jutunk, amelyeket Berwald – igen találó módon – affinösszefüggő Finsler-sokaságokként említett. Szabó Zoltán munkásságának köszönhetően a Berwald-sokaságok teljes osztályozása ismert, az általánosított Berwald-sokaságok világában azonban még nagyon sok a felfedezni való. Vizsgálatukhoz mindenesetre nincs feltétlenül szükség az érintőnyalábon a Finsler-függvényből származó kovariáns deriválásokra; erre utalva Tamássy Lajos gyakran használta a *„pont Finsler-tér”* elnevezést ([6], [7]) vagy szólt *„vonalelemek nélküli Finsler-geometriáról”* ([8]). Az általánosított Berwald-sokaságok (összefüggő alapsokaság esetén) ekvivalens módon definiálhatók a következő feltétellel:

Bármely két pont érintőtere között megadható olyan lineáris izomorfizmus, amely az egyik érintőtér indikátrixát (azaz az 1 *Finsler-normájú vektorok halmazát) a másik érintőtér indikátrixába viszi át.*

Ezt a definiáló tulajdonságot tartva szem előtt, Tamássy Lajos egyszerű geometriai érveléssel megmutatta, hogy *az általánosított Berwald-sokaságok egy tág osztálya megkapható lapos (flat) Finsler-sokaságból az indikátrixok centroaffin deformációjával*. (Egy Finsler-sokaság *lapos*, ha a Berwald- és a Riemann-görbülete egyaránt eltűnik.)

Finsler-geometria tárgyú munkáinak további fontos témája volt a Finsler-sokaságok és a (topológiai értelemben vett) metrikus terek vagy *távolság-terek* kapcsolatának vizsgálata ([9], [10]). Ha egy $F\colon TM\to\mathbb{R}$ Finsler-függvény reverzibilis abban az értelemben, hogy $F(-v)=F(v)$ minden $v\in TM$ érintővektor esetén, akkor – rendelkezvén a görbeszakaszok ívhossz-mértékével – az M sokaság kézenfekvő módon távolság-térré tehető úgy, hogy a távolság-topológia megegyezzen a sokaság-topológiával. A kiinduló kérdés itt az, hogy

egy M sokaságon adott $\rho\colon M\times M\to\mathbb{R}$ távolságfüggvényből milyen feltételek mellett származtatható olyan $F\colon TM\to\mathbb{R}$ Finsler-függvény, amely a kiindulásul szolgáló ρ távolságfüggvényt indukálja?

Erre Tamássy Lajos 93 éves korában megjelent utolsó, Kertész Dáviddal közösen jegyzett dolgozatában ([11]) a következő választ adta:

Ha egy $\rho\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ távolságfüggvény bizonyos differenciálhatósági feltételek mellett eleget tesz két, tisztán geometriai, a ρ-szférákra és az egyenesek szerepét játszó görbékre vonatkozó feltételnek, akkor létezik olyan, ún. gyenge Finsler-függvény, amely ρ-t indukálja, és ez az

$$F(v)=\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{r}\rho(p,p+rv),\quad v\in T_p\mathbb{R}^n=\{p\}\times\mathbb{R}^n$$

formulával adható meg.

A „gyenge” jelző arra utal, hogy F a (K) feltételnél gyengébb konvexitási feltételnek tesz eleget.

Visszaemlékezések

„Egyetemi pályafutásom során három kiváló matematikus volt rám meghatározó hatással: Nyikolaj Sztyepánovics Szinjukov Odesszából, Makoto Matsumo Kyotoból, és mindenekelőtt Tamássy Lajos professzor, aki tanszékvezetőm volt. Vezető-, oktató- és kutatómunkáját a pontosság, korrektség és a szakmai igényesség jellemezte. Nagy megtiszteltetés volt számomra, hogy a tanszékvezetői megbízatásban én követhettem. Messzemenően támogatott odesszai tanulmányaimban, majd vezetői tevékenységemben. Matsumoto professzorral való kapcsolatomat is neki köszönhettem. Három évtizedet töltöttem a KLTE Matematikai Intézetében, ezen idő alatt mindig számíthattam megfontolt tanácsaira.”

Bácsó Sándor ny. egyetemi docens

„60 évvel ezelőtt, I. éves hallgató koromban tanárom volt, az egyik legnehezebb tantárgyunknak, az analízisnek, az előadója. Előadásai mintaszerűek voltak. Szigorú, igényes, korrekt, igazságos és mindenkor emberséges volt tanítványaival. Becsülte a tehetségeket. Úriember volt a szó legnemesebb értelmében. Különös megtiszteltetésnek tekintettük, ahogy minket, fiatalabb munkatársait kollégáivá fogadott. Életem egyik ajándéka, hogy később barátjának tekintett. Szakmai pályám egy-egy nehezebb időszakában mellettem állt, bölcs tanácsokkal támogatott. Ahogy Lajos Bátyámat és életpályáját jobban megismertem, a TANÁR és TUDÓS mellett egyre jobban tiszteltem benne az EMBERT, egyik példaképemmé vált. Átélt nehéz időszakokat, de elveihez mindig hű maradt. Ha kellett, inkább visszahúzódott, a szerényebb érvényesülést választotta, de a tisztességből nem engedett, megalkuvás nélkül haladt az általa helyesnek tartott úton.”

Győry Kálmán akadémikus

Irodalomjegyzék

(A) *Tamássy Lajos dolgozatunkban idézett munkái*

[1] Über den Affinzusammenhang von, zu Tangentialräumen gehörenden Produkträumen, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **1** (1960), 65–82.
[2] Metric tensors of areal spaces, Tensor N.S. **31** (1977), 165–174.
[3] On Euclidean osculation of areal spaces, Periodica Math. Hung. **2** (1978), 71–78.
[4] Direct method to characterize conformally Minkowskian Finsler spaces, Tensor N.S. **33** (1979), 379–384. (M. Matsumoto-val)
[5] Scalar and gradient vector fields of Finsler spaces and holonomy groups of nonlinear connections, Demonstratio Math. **14** (1981), 551–563. (M. Matsumoto-val)
[6] The point Finsler spaces and their physical applications in electron optics and thermodynamics, Math. Comput. Modelling **20** (1994), 93–107. (R. S. Ingarden-nel)
[7] Point Finsler spaces with metrical linear connections, Publ. Math. Debrecen **56** (2000), 643–655.
[8] Finsler geometry without line elements faced to applications, Reports on Math. Phys. **51** (2003), 233–250. (Kozma Lászlóval)
[9] Finsler geometry in the tangent bundle, Advanced Studies in Pure Math. **48** (2005), 163–194.
[10] Relation between metric spaces and Finsler spaces, Diff. Geom. Appl. **26** (2008), 483–494.
[11] Differentiable distance spaces, Acta Math. Hungar. **148** (2016), 405–424. (Kertész Dáviddal)

(B) *Egyéb hivatkozások*

[B1] Élie Cartan, Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire, Hermann, Paris, 1934.
[B2] H. Iwamoto, On geometries associated with multiple integrals, Math. Jap. **1** (1948), 74–91.
[B3] A. Kawaguchi, On areal spaces III, Tensor N. S. **1** (1951), 89–101.
[B4] K. Tandai, On areal spaces VI, Tensor N. S. **3** (1953), 40–45.

Kántorné Varga Tünde és *Szilasi József*
Debreceni Egyetem Matematikai Intézet

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon:

Csapodi Csaba 2023. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – II. rész

A cikksorozat első részében közölt feladatok megoldása itt található. A mostani, második részben a Számelmélet, algebra témakör változásairól lesz szó. Először bemutatjuk az érettségi követelmények változását táblázatos formában. A táblázatban (piros színnel) jelezzük az újonnan megjelenő követelményeket és a törölt ismereteket is. (Ha egy követelmény átkerült középszintről emelt szintre, akkor azt csak a középszinten jelöljük kihúzással, hiszen eddig is része volt az emelt szintű követelményeknek.) A táblázat után a legfontosabb változásokat röviden megmagyarázzuk, értelmezzük, indokoljuk. Ezután a középszinten is újdonságnak számító ismeretek esetén mutatunk néhány olyan feladatot, amit a követelmények alapján el tudnánk képzelni egy feladatsorban. Hangsúlyozzuk, hogy ezek személyes elképzelések, az érettségi feladatokat összeállító bizottság nyilvánvalóan saját ötletei és szakmai meggyőződése szerint fog dolgozni.

2. Számelmélet, algebra

TÉMÁK	**VIZSGASZINTEK**	
	Középszint	**Emelt szint**
2.1 Alapműveletek	Tudjon alapműveleteket biztonságosan elvégezni (zsebszámológéppel is). Ismerje és használja feladatokban az alapműveletek műveleti azonosságait (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás).	
2.2 A természetes számok halmaza, számelméleti ismeretek	Ismerje, tudja definiálni és alkalmazni az oszthatóság alapvető fogalmait (osztó, többszörös, prímszám, összetett szám). Tudjon természetes számokat prímtényezőkre bontani, tudja adott számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét kiszámítani; tudja mindezeket egyszerű szöveges (gyakorlati) feladatok megoldásában alkalmazni. Definiálja és alkalmazza feladatokban a relatív prímszámokat.	Tudja megfogalmazni a számelmélet alaptételét. Bizonyítsa, hogy végtelen sok prímszám van.
2.2.1 Oszthatóság	Ismerje a 10 hatványaira, illetve a 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 számokra vonatkozó oszthatósági szabályokat, tudjon egyszerű oszthatósági feladatokat megoldani.	Tudjon összetett oszthatósági feladatokat megoldani. Tudja meghatározni természetes számok pozitív osztóinak számát.
2.2.2 Számrendszerek	**Tudja a számokat átírni 10-es alapú számrendszerből *n* alapú ($n \leq 9$) számrendszerbe és viszont.** Ismerje a helyiértékes írásmódot.	Tudjon n alapú ($n \leq 9$) számrendszerben felírt számokat összeadni és kivonni.
2.3 Racionális és irracionális számok	Tudja definiálni a racionális és irracionális számokat, és ismerje ezek kapcsolatát a tizedestörtekkel.	Adott n (n N) esetén tudja eldönteni, hogy $\sqrt{n}$ irracionális szám-e. Bizonyítsa, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám. Tudja meghatározni tizedestört alakban megadott racionális szám közönséges tört alakját.
2.4 Valós számok	Ismerje a valós számkör felépítését (**N**, **Z**, **Q**, **Q***, **R**), valamint a valós számok és a számegyenes kapcsolatát. Tudjon ábrázolni számokat a számegyenesen. Ismerje és használja a nyílt és zárt intervallum fogalmát és jelölését. Ismerje az abszolútérték definícióját. Ismerje adott szám normálalakjának felírási módját, tudjon számolni a normálalakkal. Tudjon adott helyiértékre vonatkozóan helyesen kerekíteni.	Tudja, hogy mit értünk adott műveletekre zárt számhalmazokon.
2.5 Hatvány, gyök, logaritmus	Tudja értelmezni a hatványozást racionális kitevő esetén.	Ismerje a permanencia elvet. Tudja szemléletesen értelmezni az irracionális kitevőjű hatványt.
	Ismerje és használja a hatványozás azonosságait. **Bizonyítsa a hatványozás azonosságait konkrét alap és pozitív egész kitevő esetén.**	Bizonyítsa a hatványozás azonosságait egész kitevő esetén.
	Ismerje és alkalmazza a négyzetgyökvonás azonosságait. Definiálja és használja a $\sqrt{n}$ fogalmát.	Bizonyítsa a négyzetgyökvonás azonosságait. Ismerje és alkalmazza a gyökvonás azonosságait.
	Definiálja és használja feladatok megoldásában a logaritmus fogalmát. ~~valamint a logaritmus azonosságait.~~ ~~Tudjon áttérni más alapú logaritmusra.~~ **Tudja kiszámolni tetszőleges alapú logaritmus értékét 10-es alapú logaritmus segítségével.**	Ismerje, bizonyítsa és alkalmazza a szorzat, a hányados és a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosságokat. Ismerje, bizonyítsa és alkalmazza a más alapú logaritmusra való áttérés szabályát.
2.6 Betűkifejezések		Ismerje a polinom fokszámát, fokszám szerint rendezett alakját.
2.6.1 Nevezetes azonosságok	Tudja alkalmazni feladatokban a következő kifejezések kifejtését, illetve szorzattá alakítását: $(a + b)^2$, $(a – b)^2$, $a^2 – b^2$. Tudjon algebrai kifejezésekkel egyszerű műveleteket végrehajtani, algebrai kifejezéseket egyszerűbb alakra hozni (összevonás, szorzás, osztás, szorzattá alakítás kiemeléssel, nevezetes azonosságok alkalmazása).	Tudja alkalmazni feladatokban az $a^n – b^n$, illetve az $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ kifejezés szorzattá alakítását.
2.7 Arányosság	Tudja az egyenes és a fordított arányosság definícióját és grafikus ábrázolásukat. Ismerje és tudja feladatokban alkalmazni az arányosság fogalmát. Ismerje és tudja feladatokban alkalmazni a százalék fogalmát.	
2.7.1 Százalékszámítás		
2.8 Egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek, egyenlőtlenség-rendszerek	Ismerje az alaphalmaz és a megoldáshalmaz fogalmát. Alkalmazza a különböző egyenletmegoldási módszereket: mérlegelv, grafikus megoldás, ekvivalens átalakítások, következményegyenletre vezető átalakítások, új ismeretlen bevezetése, értelmezési tartomány és értékkészlet vizsgálata. Tudja meghatározni szöveges feladatban szereplő változók értelmezési tartományát és a feladat eredményét összevetni a feladat szövegével.	
2.8.1. Algebrai egyenletek, egyenletrendszerek	Alkalmazza az egyenleteket, egyenletrendszereket szöveges feladatok megoldásában.	
Elsőfokú egyenletek, egyenletrendszerek	Tudjon elsőfokú, egyismeretlenes egyenleteket és elsőfokú, kétismeretlenes egyenletrendszereket megoldani.	Tudjon paraméteres elsőfokú egyenleteket megoldani. Tudjon elsőfokú, háromismeretlenes egyenletrendszereket megoldani.
Másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek	Ismerje az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános alakját. Ismerje a másodfokú egyenlet diszkriminánsának fogalmát, és a diszkrimináns előjele és a (valós) megoldások száma közötti összefüggést. Ismerje és alkalmazza a másodfokú egyenlet megoldóképletét. Használja a teljes négyzetté alakítás módszerét. Alkalmazza feladatokban a gyöktényezős alakot. Tudjon ~~törtes egyenleteket,~~ másodfokú egyenletre vezető szöveges feladatokat megoldani. ~~Tudjon egyszerű másodfokú egyenletrendszereket megoldani.~~	Igazolja a másodfokú egyenlet megoldóképletét. Igazolja és alkalmazza a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket. Tudjon másodfokú paraméteres egyenleteket megoldani. Tudjon törtes egyenleteket megoldani. Tudjon egyszerű másodfokú egyenletrendszereket megoldani.
Magasabb fokú egyenletek	Tudjon egyszerű, másodfokúra visszavezethető egyenleteket megoldani.	Tudjon másodfokúra visszavezethető egyenletet, egyenletrendszereket megoldani. ~~Tudjon értelmezési tartomány, illetve értékkészlet-vizsgálattal, valamint szorzattá alakítással megoldható összetett feladatokat megoldani.~~
Négyzetgyökös egyenletek	Tudjon $\sqrt{x+b} = cx + d$ típusú egyenleteket megoldani.	Tudjon legfeljebb két négyzetre emeléssel megoldható egyenleteket megoldani.
2.8.2 Nem algebrai egyenletek		
Abszolútértékes egyenletek	~~Tudjon $\mid ax + b \mid = cx + d$ típusú egyenleteket megoldani.~~	Tudjon ~~összetett~~ egyszerű abszolútértékes egyenleteket algebrai úton megoldani.
Exponenciális egyenletek Logaritmusos egyenletek	Tudjon definíciók és azonosságok közvetlen alkalmazását igénylő exponenciális egyenleteket megoldani. **Tudjon exponenciális folyamatokkal kapcsolatos problémákat felismerni, modellezni és megoldani.**	Tudjon ~~összetett~~ exponenciális egyenleteket, egyenletrendszereket megoldani. Tudjon egyszerű logaritmusos egyenleteket megoldani.
Trigonometrikus egyenletek	~~Tudjon definíciók és azonosságok közvetlen alkalmazását igénylő feladatokat megoldani.~~	Tudjon definíciók és azonosságok közvetlen alkalmazását igénylő, és másodfokúra visszavezethető trigonometrikus egyenleteket megoldani.
2.8.3 Egyenlőtlenségek, egyenlőtlenségrendszerek	Tudjon egyszerű első- és másodfokú~~, valamint törtes~~ egyenlőtlenségeket ~~és egyszerű egyenlőtlenség-rendszereket~~ megoldani.	Tudjon első és másodfokú egyenlőtlenség-rendszereket megoldani. Tudjon egyszerű négyzetgyökös, abszolútértékes, törtes, exponenciális, logaritmusos és trigonometrikus egyenlőtlenségeket megoldani.
2.9 Középértékek, egyenlőtlenségek	~~Ismerje két pozitív szám számtani és mértani közepének fogalmát, kapcsolatát, használatát.~~	Ismerje ~~*n*~~ **két pozitív** szám számított középértékeit (számtani, mértani, négyzetes, harmonikus), valamint a nagyságrendi viszonyaikra vonatkozó tételeket. Bizonyítsa, hogy $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, ha $a, b \in \mathbb{R}^+$. Tudjon megoldani feladatokat számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján.

Mint látható, kevés érdemi változás történt ebben a témakörben. Kikerült a követelmények közül, vagy egyszerűsödött több megoldandó egyenlet-típus. Középszinten valódi újdonságot a kettestől eltérő alapú számrendszerek ismeretének megjelenése jelent. Hangsúlyozni kell, hogy a logaritmus fogalma továbbra is fontos, tanítandó ismeret, csak a logaritmus azonosságai nem képezik a követelmények részét. Az exponenciális folyamatok, ezek modellezése és megoldása eddig is (kimondatlan) része volt a követelmények, 2024-től várhatóan gyakrabban fognak ilyen feladatok megjelenni a középszintű érettségin. (De már az idei, 2023. évi májusi magyar nyelvű feladatsor 15. feladata is jó példa, középszinten ehhez hasonló problémákra kell számítani a jövőben.)

Egy további példa az exponenciális folyamatokkal kapcsolatos feladatokra szintén idén májusban az idegen nyelvű (és így talán kevesebb figyelmet kapó) középszintű feladatsor 17. feladata:

1. A 2018-as esztendőben az *A* kisüzem 500 millió forint, a *B* kisüzem 400 millió forint értékű terméket állított elő. A hosszú távú fejlesztési tervek szerint az *A* üzem évi 5%- kal, a *B* üzem évi 6%-kal növeli a termelési értékét.

   a) Számítsa ki, hogy a tervek szerint a következő 20 év alatt (2019-től 2038-ig) összesen hány millió forint értékű terméket állítanak elő az *A* üzemben!

   Egy gazdasággal foglalkozó portálon nyilvánosságra hozták a fenti terveket. A cikkhez kapcsolódó fórumon vita bontakozott ki. Az egyik hozzászóló szerint a következő időszakban évről évre egyre kisebb lesz a két üzem éves termelési értéke közötti különbség.

   b) Számítsa ki a megadott táblázat hiányzó adatait, és igazolja, hogy ez a kijelentés nem igaz!

	2018	2019	2020	2021
A üzem termelésének értéke (millió Ft)	500			
B üzem termelésének értéke (millió Ft)	400			

A vitafórum egy másik résztvevője szerint éppen ellenkezőleg: a két üzem éves termelési értéke közötti különbség az évek múlásával egyre nagyobb lesz, és a *B* üzem termelési értéke soha nem fogja meghaladni az *A* üzem termelési értékét. Egy harmadik hozzászóló szerint ez sem igaz.

c) Számítsa ki, hogy melyik évben éri utol a *B* üzem termelésének értéke az *A* üzem termelésének értékét! (Feltételezzük, hogy a termelések értéke valóban a tervek szerint alakul.)

Egy idei (szintén az idegen nyelvű feladatsorban szereplő) emelt szintű feladat alapján annak akár középszinten is szerepeltethető változata:

2. Az interneten található adatok alapján a napenergiát elektromos energiává alakító eszközök maximális összteljesítményének magyarországi alakulását az alábbi táblázat szemlélteti (megawattban mérve).

év	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
összteljesítmény (MW)	12	35	77	168	225	300	640	1277

a) Tételezzük fel, hogy az összteljesítmény évről évre ugyanannyiszorosára nőtt. 2013-tól 2019-ig évente hány százalékkal kellett volna növekednie az összteljesítménynek ahhoz, hogy 12 MW-ról 1277 MW-ra emelkedjen ezen időtartam alatt?

A maximális összteljesítmény alakulását exponenciális növekedésűnek feltételezve egy táblázatkezelő program a táblázatban megadott adatok alapján a

$$c(x) = 17,84 \cdot 1,848^x$$

közelítő összefüggést adja, ahol x a 2012 óta eltelt évek száma (x természetes szám), $c(x)$ pedig MW-ban adja meg a maximális összteljesítményt a modell szerint.

b) A kapott modell alapján hány százalékkal nő évről évre a maximális összteljesítmény?

c) Hány százalékkal tér el a 2018. évi 640 MW-os adattól a modell alapján kiszámítható 2018-as érték?

d) Ha a modellt hosszútávon is érvényesnek gondoljuk, akkor melyik évben éri el a maximális összteljesítmény a 40 000 MW-ot?

Ezekből az adatokból más típusú feladatot is készíthetünk, amely emelt szinten biztosan kitűzhető lenne, de talán a középszintű követelményeknek is megfelel:

3. Rendelkezésünkre állnak az alábbi adatok a napenergiát elektromos energiává alakító eszközök maximális összteljesítményének magyarországi alakulásáról.

év	2013	2019
összteljesítmény (MW)	35	1277

Tételezzük fel, hogy az összeteljesítmény exponenciálisan alakul a

$$c(x) = a \cdot b^x$$

hozzárendelés alapján, ahol x a 2012 óta eltelt évek száma (x természetes szám), $c(x)$ pedig MW-ban adja meg a maximális összteljesítményt. Számítsa ki a és b értékét!

A feladatok megoldása hamarosan megjelenik az Érintő Facebook-oldalán.

Csapodi Csaba

ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet Módszertani Osztály

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon: ›

Bíró Bálint 2023. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

A Középiskolai Matematikai Lapok 100 éve 10 feladat tükrében

Bevezetés

Éppen 130 éve, hogy Arany Dániel győri főreáliskolai tanár szerkesztésében először megjelent a Középiskolai Matematikai Lapok, vagy ahogy ma gyakran hívjuk, a KöMaL.

A folyóirat nagy szerepet töltött be a matematikai tehetségek felismerése és gondozása terén azzal, hogy izgalmas és érdekes problémákat tűzött ki, pontversenyt indított a feladatok megoldására és ezzel felkeltette, táplálta a matematika iránt fogékony, tehetséges tanulókban a versenyszellemet. A KöMaL ezt a szerepet minden bizonnyal ma is betölti.

Jelen írásnak nem célja a KöMaL történetének ismertetése vagy elemzése, az tanulmányozható például a felhasznált irodalomban szereplő [1] internetes oldalon is.

Meg kell említeni azonban a KöMaL történetének egy fontos dátumát, 1993-at, amikor is a 100 éves jubileum alkalmából megjelent egy dupla CD. Ez a két CD a KöMaL 1893-tól 1993-ig megjelent teljes anyagát tartalmazta ([2]).

A Bolyai János Matematikai Társulat 2022-ben Egerben rendezte a matematikát oktató tanítók és tanárok 61. Rátz László Vándorgyűlését. Ezen a vándorgyűlésen szerencsém és alkalmam volt a középiskolai szekcióban feladatmegoldó szemináriumot tartani.

Somfai Zsuzsa (†) ötletének megfelelően a „Nagyjaink KöMaL-megoldásai a múltban" címet adtam ennek a szemináriumnak. A szeminárium alapjául az szolgált, hogy a két CD tanulmányozása során egyrészt nagyon sok szép feladatot találtam, másrészt a megoldók között olyan nevekkel találkoztam, akiknek a középiskolás évek után a választott pályája a matematika lett, és abban az igazán nagyok közé emelkedtek.

Horváth Eszter, az Érintő Rátz Tanár Úr Életműdíjas szerkesztője vetette föl, hogy erről érdemes volna egy cikkben is megemlékezni. Így született meg az a gondolat, hogy 1900-tól 2000-ig a KöMaL csodálatos kincsestárából 10 évenként kiválasztok egy-egy feladatot, mégpedig olyanokat, amelyek megoldói pályájuk során híres matematikusok lettek.

Szép és izgalmas munka volt ez, különösen azért, mert 1900 és 2000 között minden évben találhattam ennek a feltételnek megfelelő feladatot és megoldókat.

A KöMaL 100 évének 10 feladata

Az alább következő tíz feladatot a Bevezetésben említett szempont alapján a KöMaL-ban 1900 és 2000 között megjelent sok-sok szép feladat közül válogattam, lényegében a bőség zavarával küszködve. Minden esetben ragaszkodtam a feladat eredeti szövegéhez. Az egyes feladatokhoz a versenyzők arcképét is mellékeltük. A képek legnagyobb része a KöMaL-archívum arcképcsarnokából származik, ahol ilyet nem sikerült találni, ott más internetes oldalról származó, nem diákkori képek kerültek beillesztésre.

Jelen válogatás nyilván nem mutathatja be, hogy a két időpont között eltelt 100 évben hogyan változott a KöMaL, milyen típusú és nehézségű feladatokat tűzött ki az éppen aktuális szerkesztőség. Csupán arra szeretnék kísérletet tenni a feladatokon és azok megoldásán keresztül, hogy érzékeltessem a nyilvánvalót, a KöMaL fontos szerepét a magyar matematikai tehetségek felismerésében és fejlődésében, a magyar matematika történetében.

A feladat után zárójelben szerepel a feladat szerzőjének neve (ahol az ismert), a megoldás közlésének éve és hónapja, a feladat sorszáma, végül pedig a feladat megoldóinak neve.

1. Legyenek a, b, c, d és m oly egész számok, hogy

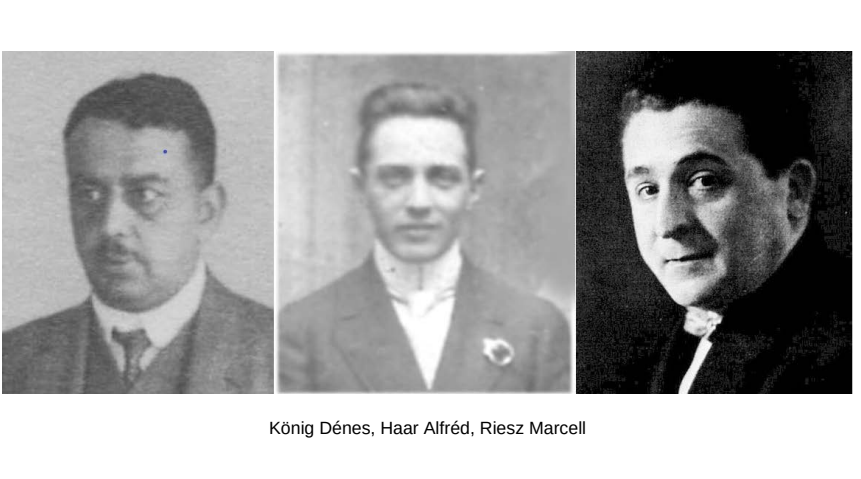
$$am^3+bm^2+cm+d$$

osztható 5-tel, de d nem osztható 5-tel. Bebizonyítandó, hogy ekkor mindig található oly n egész szám, hogy

$$dn^3+cn^2+bn+a$$

szintén osztható 5-tel.

(A Mathematikai és Phys. Társulat VII. tanulóversenyének tétele, 1901/2, 873., Kőnig Dénes, Haar Alfréd, Riesz Marcell)



König Dénes, Haar Alfréd, Riesz Marcell

Szegő Gábor

2. Ha az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ számok között vannak egymástól különbözők, akkor mutassuk meg, hogy

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)^2<n(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2).$$

(1911/6, 2029., Szegő Gábor)

3. Szerkesztendő a kör, mely 3 adott egyenesen egyenlő szeleteket vág ki.

(1925/9, 38., Hajós György, Klein Eszter)

Hajós György és Klein Eszter tablóképe,1925

Erdős Pál tablóképe, 1930

4. Bizonyítsuk be, hogy ha az

$$f(x)\equiv x^2+px+q=0$$

egyenletnek egyik gyöke 0 és 1 között van, akkor a

$$g(x)\equiv\frac{1}{x+2}+\frac{p}{x+1}+\frac{q}{x}=0$$

egyenletnek egy és csakis egy pozitív gyöke van.

(Vitéz Berend Iván tanár, Szeged, 1930/1, 526., Erdős Pál)

5. Egy halom pénz közt egy súlyban különbözik a többitől. Mennyi a legkevesebb mérés, amivel egy egyenlőkarú mérlegen eldönthetjük, hogy a rossz pénz könnyebb-e, vagy nehezebb a többinél?

(Kővári Tamás, Bp.-i ev.gimn.,VIII.o., 1948/9, 143., Fried Ervin, Gehér László)

Fried Ervin, Gehér László

Győry Kálmán tablóképe, 1958

6. Szerkesszünk ABC háromszöget, ha adva van a körülírt kör sugara r, továbbá az AM és MS szakaszok hossza, ahol M és S a háromszög magasság-, ill. súlypontja.

(Papp Éva, Bp., VIII., Ságvári lg., 1958/1, Győry Kálmán)

7. Adott az $y=kx^2$ parabola. Határozzuk meg az $x^2-2px+y^2-2qy=0$ kör középpontját úgy, hogy az adott parabolával való metszéspontjainak abszcisszái az $x^3+ax+b=0$ egyenlet gyökeit adják.

(Elemente der Mathematik, 1966/4, 1388., Recski András, Elekes György, Surányi László)

Recski András és Surányi László tablóképe (1966), középen Elekes György

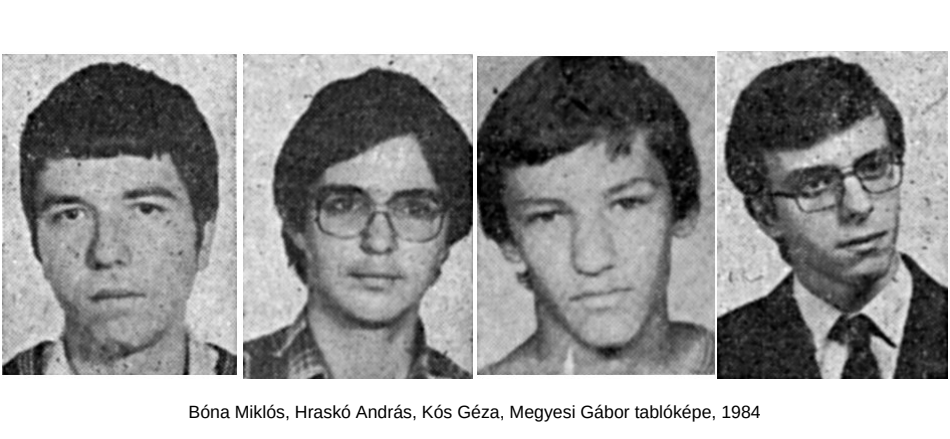
8. Adott egy különböző oldalú háromszög. Húzzuk meg egyik csúcsából a belső és külső szögfelezőt a szemben fekvő oldal egyeneséig és írjunk kört a végpontok közti szakasz mint átmérő fölé. Ismételjük meg szerkesztésünket egy másik csúcsból kiindulva és bizonyítsuk be, hogy a két körhöz a közös pontjukban húzott érintők közti hegyes szög 60°.

(1970/11, 1686., Frankl Péter, Komornik Vilmos)

Frankl Péter, Komornik Vilmos

9. A számegyenesen színezzük pirosra azokat a számokat, amelyek előállnak $81x+100y$ alakban, ahol x és y pozitív egészek, a többi egész számot pedig színezzük kékre. Bizonyítsuk be, hogy van olyan szám, hogy az erre szimmetrikusan elhelyezkedő számok színe különböző.

(1984/1, 2127. Bóna Miklós, Hraskó András, Kós Géza, Megyesi Gábor)



Bóna Miklós, Hraskó András, Kós Géza, Megyesi Gábor tablóképe, 1984

Csörnyei Marianna tablóképe,1992

10. Egy paralelepipedonba beírt tetraéder lapsíkjai a paralelepipedonból négy tetraédert metszenek le. A paralelepipedon térfogatának hányad része annak a tetraédernek a térfogata, amelynek csúcsai a levágott tetraéderek súlypontjai?

(Fitos László, Esztergom, 1992/10, 2901., Csörnyei Marianna)

A feladatok megoldásai

A feladatok megoldásaiban is ragaszkodtam a KöMaL-ban közölt eredeti megoldáshoz, annak szövegéhez, a geometriai feladatok esetében az eredeti ábrához is. Csak ahhoz a feladathoz készítettem saját ábrát, amelyikhez a megoldás közlésekor nem tartozott. Mindezeknek a célja nyilván az volt, hogy ne csak egy-egy szép feladatról, hanem a megoldók egyedi ötleteiről, ismereteiről, széles látóköréről, végső soron magukról a megoldók személyéről is szóljunk. Az érdeklődő olvasó persze megpróbálkozhat egy-egy feladatnak az eredetihez képest eltérő, más ötleten alapuló, más eszközöket használó megoldásával.

Egy-egy feladat után az eredeti közlésben szereplő megjegyzéseket is leírtam, néhol saját megjegyzést fűztem hozzá.

1. *Legyenek a, b, c, d és m oly egész számok, hogy*

$$am^3+bm^2+cm+d$$

osztható 5-tel, de d nem osztható 5-tel. Bebizonyítandó, hogy ekkor mindig található oly n egész szám, hogy

$$dn^3+cn^2+bn+a$$

szintén osztható 5-tel.

Megoldás. Minthogy m nem osztható 5-tel (ha ugyanis osztható volna, akkor az $A=am^3+bm^2+cm+d$ kifejezés csak úgy lenne osztható 5-tel, ha d is osztható volna vele, de ez a feltétel szerint nem lehetséges), ezért m csakis

$$5p+1;\quad 5p-1;\quad 5p+2;\quad 5p-2$$

alakú lehet, ahol p egész szám. Ha most m ezen értékeit helyettesítjük az A kifejezésbe és az 5-tel osztható tagokat elhagyjuk, akkor a következő kifejezéseket nyerjük:

$$\begin{aligned}A_1&=a+b+c+d,\\A_2&=-a+b-c+d,\\A_3&=8a+4b+2c+d,\\A_4&=-8a+4b-2c+d.\end{aligned}$$

Most már bebizonyítandó, hogy ha ezen kifejezések bármelyike osztható 5-tel, akkor található oly n szám, hogy $B=dn^3+cn^2+bn+a$ is osztható 5-tel, vagyis n helyébe is hasonlóan, mint előbb az $5q+1; 5q-1; 5q+2; 5q-2; 5q$ értékeket helyettesítve

$$\begin{aligned}B_1&=d+c+b+a,\\B_2&=-d+c-b+a,\\B_3&=8d+4c+2b+a,\\B_4&=-8d+4c-2b+a,\\B_5&=a\end{aligned}$$

kifejezések egyike is osztható.

Vegyük sorra az eseteket. Ha A_1 osztható, akkor a vele egyenlő B_1, ha pedig A_2, akkor negatív értéke: B_2 osztható. Továbbá, minthogy $2A_3-B_4=15a+10b+10d$ és $2A_4+B_3=-15a+10b+10d$ oszthatók 5-tel, ezért látjuk, hogy ha A_3 osztható 5-tel, akkor B_4, ha pedig A_4, akkor B_3 is osztható.

Bármily értéket teszünk is tehát A-ban m helyébe, hogy A osztható legyen 5-tel, mindig találtunk olyan n-t, hogy B is 5 többszöröse lett.

2. *Ha az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ számok között vannak egymástól különbözők, akkor mutassuk meg, hogy*

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)^2<n(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2).$$

Megoldás. Ha az adott számok között vannak különbözők, akkor nem minden (a_i-a_k) különbség értéke 0, tehát

$$\begin{gathered}(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+\ldots+(a_1-a_n)^2+\\+(a_2-a_3)^2+\ldots+(a_2-a_n)^2+\\\vdots\\+(a_{n-1}-a_n)^2>0.\end{gathered}$$

Mivel bármily a_i szám $n-1$ tagban fordul elő, azért a műveleteket végrehajtva ezt kapjuk:

$$(n-1)\cdot(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)-2\cdot(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_1a_n+\ldots+a_{n-1}a_n)>0,$$

azaz

$$(n-1)\cdot(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)>2\cdot(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_1a_n+\ldots+a_{n-1}a_n).$$

Adjuk az egyenlőtlenség mindkét oldalához az

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$$

összeget, akkor

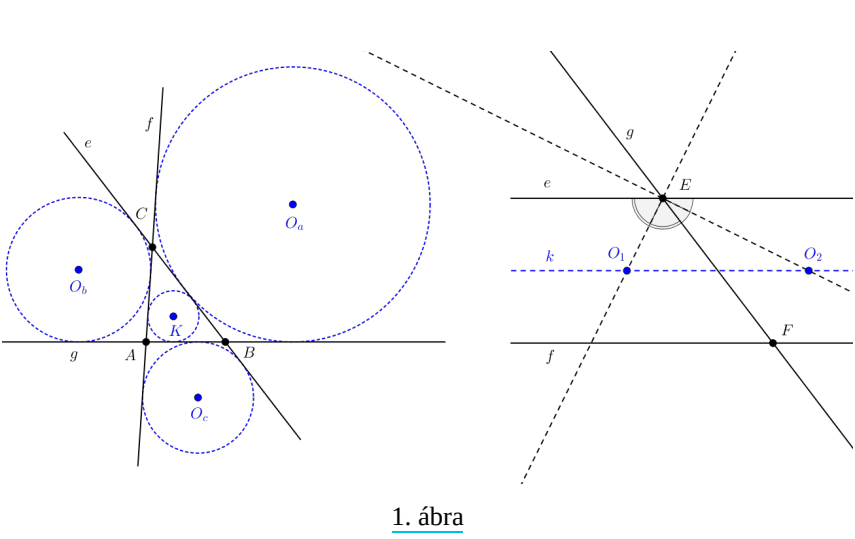
$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)^2<n(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2),$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

3. *Szerkesztendő a kör, mely 3 adott egyenesen egyenlő szeleteket vág ki.*

Megoldás. Az egyenesekből kivágott szeletek a kör húrjai; egyenlő húrok a kör középpontjától egyenlő távolságra vannak. Tehát oly pontot kell keresnünk, amely mindhárom egyenestől egyenlő távolságban van; ilyen pont, ha a három egyenes (e, f, g) közül kettő-kettő metszi egymást, 4 van, tudniillik az egyenesek metszéspontjaiként előálló ABC háromszöget belülről érintő kör és a három kívülről érintő kör középpontja. Ha ezen pontokból oly köröket rajzolunk, melyek rádiuszai nagyobbak, mint a beírt, illetve kívülről érintő (hozzáírt) körök sugarai, akkor ezek egyenlő szeleteket vágnak ki a három egyenesből.

Ha a három egyenes közül kettő párhuzamos (e és f), akkor az e, f egyenesek k középpárhuzamosán két olyan pont lesz (O_1, O_2), amely a kívánt tulajdonsággal rendelkező körök középpontja. Ezt a két esetet láthatjuk az alábbi ábrán.



1. ábra

Ha mindhárom egyenes párhuzamos, akkor a feladat nem oldható meg (a keresett kör középpontja a végtelenben van).

Végül, ha a három egyenes egy pontban metszi egymást, ez a pont egyszersmind a keresett körök középpontja (minden szelet egyenlő az átmérővel).

4. *Bizonyítsuk be, hogy ha az*

$$f(x)\equiv x^2+px+q=0$$

egyenletnek egyik gyöke 0 és 1 között van, akkor a

$$g(x)\equiv\frac{1}{x+2}+\frac{p}{x+1}+\frac{q}{x}=0$$

egyenletnek egy és csakis egy pozitív gyöke van.

Megoldás. Ha az $f(x)=0$ egyenletnek egyik gyöke 0 és 1 között van, akkor $f(0)$ és $f(1)$ ellenkező előjelűek:

$$f(0)=q;\quad f(1)=1+p+q,$$

tehát

$$q\cdot(1+p+q)<0. \tag{1}$$

A $g(x)=0$ egyenlet gyökeit megadja az

$$x\cdot(x+1)+px\cdot(x+2)+q\cdot(x+2)(x+1)=0$$

egyenlet, melyet rendezve:

$$(1+p+q)\cdot x^2+(1+2p+3q)\cdot x+2q=0. \tag{2}$$

A (2) egyenlet gyökeinek szorzata:

$$\frac{2q}{1+p+q}<0.$$

mert (1) szerint $q\cdot(1+p+q)<0$.

Ebből következik, hogy a (2) egyenlet gyökei valósak, és ellenkező előjelüek, tehát a $g(x)=0$ egyenletnek egy és csakis egy pozitív gyöke van.

5. *Egy halom pénz közt egy súlyban különbözik a többitől. Mennyi a legkevesebb mérés, amivel egy egyenlőkarú mérlegen eldönthetjük, hogy a rossz pénz könnyebb-e, vagy nehezebb a többinél?*

Megoldás. Osszuk a pénzeket három csoportba. Az egyikben a felénél kevesebb pénzdarab legyen, a másik kettőben egyenlő számú.

a) Tegyük mérlegre az utolsó két csoportot. Egyensúly esetén a harmadik csoportban van a hamis, tehát azt, ugyanannyi jónak bizonyult pénzdarabbal mérve meg, megkapjuk a választ kérdésünkre.

b) Ha a mérleg félrebillen, akkor vegyük pl. a nehezebb csoportot, tegyünk hozzá a félretett (tehát jónak bizonyult) pénzdarabok közül úgy, hogy összesen páros számú pénzdarab legyen és tegyük a két felét a mérlegre.

Egyensúly esetén a másik részben van, tehát könnyebb a rossz pénz a jóknál, ha pedig ismét megbillen a mérleg, akkor nehezebb a többinél.

A módszer csak 1 és 2 darab pénznél nem használható, de akkor nem is eldönthető a kérdés.

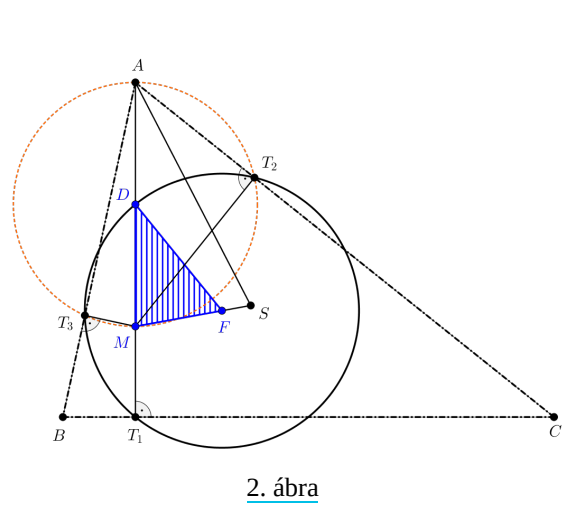
6. *Szerkesszünk ABC háromszöget, ha adva van a körülírt kör sugara r, továbbá az AM és MS szakaszok hossza, ahol M és S a háromszög magasság-, ill. súlypontja.*

Megoldás. A háromszög Feuerbach-körének tulajdonságait fogjuk felhasználni a szerkesztéshez.

Ismeretes, hogy az M magasságpont, a Feuerbach-kör F középpontja és az S súlypont egy egyenesen vannak, mégpedig úgy, hogy

$$MF=3FS,$$

azonkívül a Feuerbach-kör sugara a körülírt kör sugarának a fele. A Feuerbach-kör átmegy a magasságok talppontjain és az AM távolság D felezőpontján (2. ábra).



2. ábra

Ilyenformán az MFD háromszög szerkeszthető: oldalai ismertek. A háromszög megszerkesztése után megrajzoljuk az F középpontú, $\frac{r}{2}$ sugarú Feuerbach-kört. Az A csúcsot megkapjuk, ha M-et tükrözzük D-re. Az AM egyenesnek a Feuerbach-körrel való másik metszéspontja az A-ból húzott magasság talppontja, az erre a T_1 pontban állított merőleges a BC oldal irányát adja.

Az AM fölé rajzolt Thales-kör kimetszi a Feuerbach-féle körből a másik két magasságtalppontot, s az A pontot a $T_2; T_3$ pontokkal összekötve megkapjuk a C és B pontokat.

Van megoldása a feladatnak, ha egyrészt az MFD háromszög szerkeszthető, másrészt pedig, ha a $T_1; T_2; T_3$ talppontok léteznek.

Megjegyzések.

1. A feladatra a KöMaL 1958/1 száma több megoldást is közölt.

   A fenti (a nyomtatott számban a II.) megoldásba egy apró nyomdai hiba került bele, éspedig a helyes $MF=3FS$ összefüggés $MF=2FS$ alakban jelent meg. Ez azonban a megoldás menetét nem befolyásolta.

2. Egyik megoldás sem említette a feladat megoldhatóságát abból a szempontból, hogy az ABC háromszög hegyesszögű, tompaszögű vagy derékszögű.

7. *Adott az $y=kx^2$ parabola. Határozzuk meg az $x^2-2px+y^2-2qy=0$ kör középpontját úgy, hogy az adott parabolával való metszéspontjainak abszcisszái az $x^3+ax+b=0$ egyenlet gyökeit adják.*

Megoldás. Az előírt kör K középpontjának koordinátái $K(p;q)$. Ezek ismerete elegendő a kör megrajzolásához, mert a körnek át kell mennie az O origón, hiszen az $x=0, y=0$ értékpár kielégíti az egyenletet.

A parabolának és a körnek legfeljebb 4 közös pontja lehet. Ugyanis a két egyenletből y-t kiküszöbölve 4-edfokú egyenletet kapunk:

$$k^2x^4+(1-2kq)x^2-2px=0, \tag{3}$$

így legfeljebb 4 valós szám szerepelhet közös pont abszcisszájaként, és a parabolának minden abszcisszán csak egy pontja van. Egy közös pontjuk az origó, további közös pontjaik abszcisszái azt az egyenletet elégítik ki, amelyet (3)-ból az ismert $x=0$ gyökhöz tartozó x gyöktényező leválasztásával kapunk:

$$k^2x^3+(1-2kq)x-2p=0.$$

Itt $k\neq0$ – különben parabola helyett az $y=0$ egyenessel állnánk szemben –, ezért az egyenlet ekvivalens az alábbival:

$$x^3+\frac{1-2kq}{k^2}\cdot x-\frac{2p}{k^2}=0. \tag{4}$$

A parabolának és a körnek az origótól különböző metszéspontjaihoz tartozó abszcisszák adják meg az

$$x^3+ax+b=0 \tag{5}$$

egyenlet gyökeit – azaz minden valós gyökét –, ha (4) ekvivalens (5)-tel, vagyis ha további két együtthatójuk rendre egyenlő:

$$\frac{1-2kq}{k^2}=a,\qquad -\frac{2p}{k^2}=b,$$

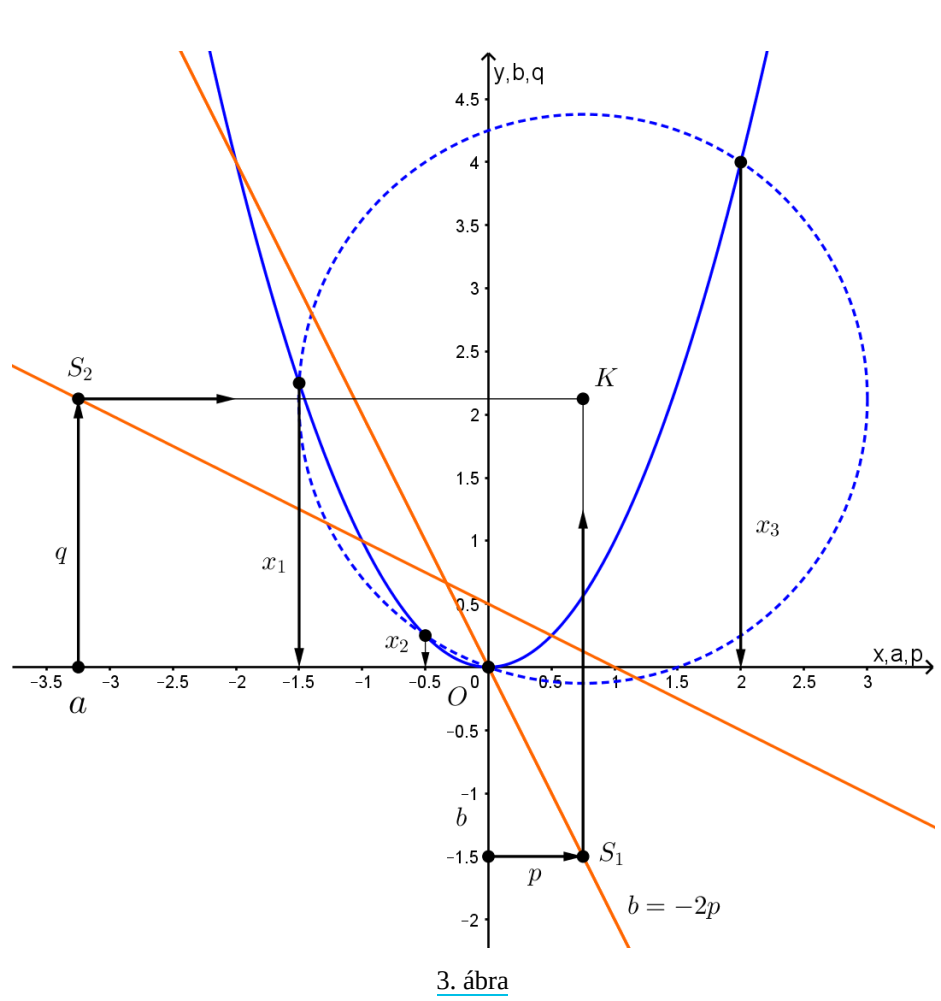
és innen

$$p=-\frac{k^2}{2}\cdot b,\qquad q=\frac{1}{2k}-\frac{k}{2}\cdot a. \tag{6}$$

Ezek szerint az (5) egyenlet gyökeit leolvashatjuk mint az adott $y=kx^2$ parabola és a (6) kifejezésekkel meghatározott $K(p;q)$ középpontú, KO sugarú kör közös pontjainak abszcisszáit. Pl. $k=1$-et választva a

$$K\left(-\frac{b}{2};\frac{1-a}{2}\right)$$

középpont körüli, az O-n átmenő körrel kell metszenünk a normálparabolát.



3. ábra

A 3. ábrán a $4x^3-13x-6=0$ egyenlet megoldása látható, itt $p=\frac{3}{4}, q=\frac{17}{8}$, továbbá $x_1=-\frac{3}{2}, x_2=-\frac{1}{2}$ és $x_3=2$.

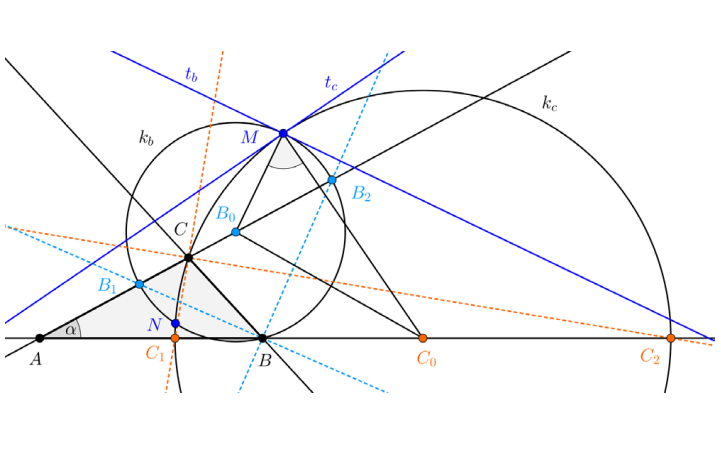
Megjegyzés. Kézenfekvő, hogy a harmadfokú egyenlet grafikus megoldásában a p, q koordinátákat is grafikusan állítsuk elő. Erre valók (továbbra is $k=1$ esetében) az ábra segédegyenesei, melyeknek egyenlete:

$$x=-\frac{y}{2},\qquad y=\frac{1-x}{2}.$$

Az elsőnek $y=b$ ordinátájú S_1 pontjához $x=-\frac{b}{2}=p$ abszcissza tartozik, tehát K az S_1 segédponton átmenő, az y-tengellyel párhuzamos egyenesen lesz. A második segédegyenes $x=a$ abszcisszájú S_2 pontjához tartozó ordináta $y=\frac{1-a}{2}=q$, tehát K-t a legutóbbi egyenesből az S_2-n átmenő, az x-tengellyel párhuzamos egyenes metszi ki.

8. *Adott egy különböző oldalú háromszög. Húzzuk meg egyik csúcsából a belső és külső szögfelezőt a szemben fekvő oldal egyeneséig és írjunk kört a végpontok közti szakasz mint átmérő fölé. Ismételjük meg szerkesztésünket egy másik csúcsból kiindulva és bizonyítsuk be, hogy a két körhöz a közös pontjukban húzott érintők közti hegyes szög 60°.*

Megoldás. Válasszuk úgy az ABC háromszög betűzését, hogy a szokásos jelölésekkel $a<b<c$ teljesüljön. Az állítást a C és B csúcsokból kiindulva kapott körökre bizonyítjuk, ennek mintájára végezhető a bizonyítás a további két körpár esetére is.



4. ábra

Legyen a C-ből induló belső és külső szögfelezőnek az AB egyenessel való metszéspontja C_1, illetve C_2, a C_1C_2 szakasz fölötti k_c Thalész-kör középpontja C_0, a B-ből kiindulva ugyanígy kapott pontok és kör rendre B_1, B_2, B_0, k_b, végül k_b és k_c egyik metszéspontja M.

A körök M-beli t_c, t_b érintőit M körül 90°-kal elforgatva a megfelelő sugarak MC_0, MB_0 egyenesét kapjuk, így elegendő azt belátni, hogy $B_0MC_0\sphericalangle$ értéke 60° vagy 120°, azaz, hogy

$$|\cos B_0MC_0\sphericalangle|=\frac{\left|MB_0^2+MC_0^2-B_0C_0^2\right|}{2MB_0\cdot MC_0}=\frac{1}{2}. \tag{7}$$

Az $a<b$ feltétel miatt C_1, C_2 az A-nak ugyanazon oldalán vannak, mint B és így C_0 is ezen az oldalon van, ennélfogva a szögfelezők osztásarányának tétele alapján

$$AC_0=\frac{AC_1}{2}+\frac{AC_2}{2}=\frac{bc}{2(b+a)}+\frac{bc}{2(b-a)}=\frac{b^2c}{b^2-a^2},$$

és ugyanezekkel a szakaszokkal

$$MC_0=C_1C_0=\frac{AC_2-AC_1}{2}=\frac{abc}{b^2-a^2};$$

továbbá hasonlóan

$$AB_0=\frac{c^2b}{c^2-a^2},\qquad MB_0=B_1B_0=\frac{abc}{c^2-a^2}.$$

Ezekkel a (7)-beli számláló, a koszinusztételt az AB_0C_0 és az ABC háromszögre alkalmazva:

$$\begin{gathered}\left|(MB_0^2-AB_0^2)+(MC_0^2-AC_0^2)+2AB_0\cdot AC_0\cdot\cos\alpha\right|=\\=\left|-\frac{b^2c^2}{c^2-a^2}-\frac{b^2c^2}{b^2-a^2}+\frac{b^2c^2(b^2+c^2-a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\right|=\frac{a^2b^2c^2}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}=MB_0\cdot MC_0,\end{gathered}$$

tehát (7) valóban fennáll. Ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzés.

A fentiekhez hasonlóan igazolható, hogy a két kör másik metszéspontjában, tehát a 4. ábra N pontjában is 60°-ot zárnak be az érintők.

9. *A számegyenesen színezzük pirosra azokat a számokat, amelyek előállnak $81x+100y$ alakban, ahol x és y pozitív egészek, a többi egész számot pedig színezzük kékre. Bizonyítsuk be, hogy van olyan szám, hogy az erre szimmetrikusan elhelyezkedő számok színe különböző.*

Megoldás. A legkisebb piros szám nyilván a $81\cdot1+100\cdot1=181$.

Megmutatjuk, hogy 8100 kék. Ha ugyanis $8100=81x+100y$ volna, ahol x és y pozitív egészek, akkor $81x$ osztható volna 100-zal. Mivel 81-nek és 100-nak nincs 1-nél nagyobb közös osztója, ezért x is osztható volna 100-zal, vagyis $81x\geq8100$ lenne. Ekkor viszont y nem lehet pozitív.

Belátjuk, hogy n és $(8281-n)$ közül az egyik piros, a másik kék. Ez egyúttal a feladat állítását is adja, hiszen ez éppen azt jelenti, hogy a $\frac{8281}{2}$-re szimmetrikusan elhelyezkedő számok különböző színűek.

Először is nem lehet n és $(8281-n)$ egyaránt piros. Ha mégis így volna, akkor pozitív egész x, y, x', y'-vel

$$n=81x+100y,\qquad 8281-n=81x'+100y'.$$

Ezeket összeadva kapjuk, hogy

$$8100=81(x+x'-1)+100(y+y'-1),$$

és itt $x+x'-1$, valamint $y+y'-1$ pozitív egészek. Így 8100 piros lenne, noha láttuk, hogy kék.

Elfogadom.

Így tehát n és $(8281-n)$ közül legalább az egyik kék.

Másodszor megmutatjuk, hogy ha n kék, akkor $(8281-n)$ piros, azaz e két szám közül legfeljebb az egyik lehet kék.

Mivel $21\cdot81=1701$, azért

$$81\cdot(21n)+100(-17n)=n. \tag{8}$$

Válasszuk meg a k egész számot úgy, hogy

$$0<21n-100k\leq100$$

legyen, ekkor az $a=21n-100k,\quad b=81k-17n$ kifejezéseket (8)-ba írva

$$81a+100b=n. \tag{9}$$

Itt a pozitív egész, n pedig kék, tehát b nem lehet pozitív, vagyis $b\leq0$.

A (9) összefüggésből

$$8281-n=81\cdot(101-a)+100(1-b).$$

Ebben az előállításban $(101-a)$ és $(1-b)$ is pozitív egész, ezért $8281-n$ piros.

Így n és $(8281-n)$ legalább és legfeljebb az egyik, vagyis pontosan az egyik kék, a másik piros.

Tehát az állításnak megfelelő szám.

$$\frac{8281}{2}$$

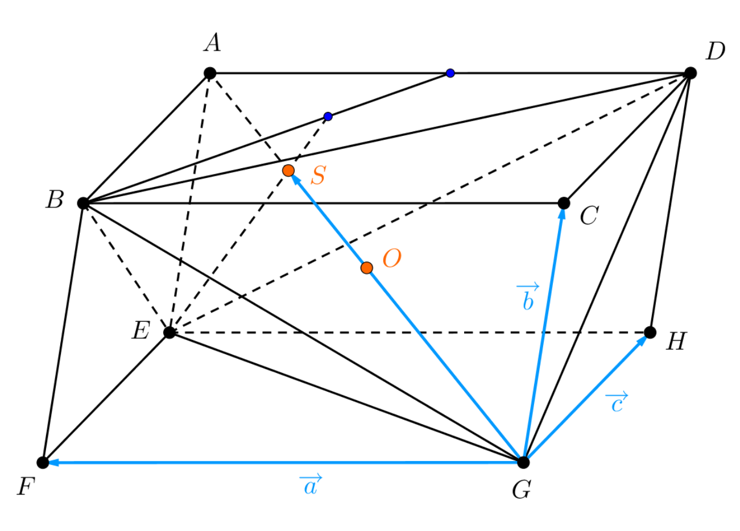
Megjegyzések.

1. A feladat szoros kapcsolatban áll az $ax+by=c$ alakú, úgynevezett diofantikus egyenletek vizsgálatával. Ebben az egyenletben a,b és c egészek, és a megoldásokat is az egész számok között keressük. Könnyen igazolható, hogy ennek az egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha c többszöröse a és b legnagyobb közös osztójának.

2. Ha a és b pozitív egészek, továbbá $(a,b)=1$, akkor az $ax+by=c$ egyenlet $c>ab$-re a pozitív számok körében mindig megoldható. Másfelől az $a+b\le c\le ab$ esetekben az $[a+b,ab]$ intervallum felezőpontjára szimmetrikusan elhelyezkedő számok közül pontosan az egyikre oldható meg az egyenlet.

10. *Egy paralelepipedonba írt tetraéder lapsíkjai a paralelepipedonból négy tetraédert metszenek le. A paralelepipedon térfogatának hányad része annak a tetraédernek a térfogata, amelynek csúcsai a levágott tetraéderek súlypontjai?*

Megoldás. Használjuk az 5. ábra jelöléseit.



5. ábra

Ismeretes, hogy minden paralelepipedonba két tetraédert lehet írni, amelyek a paralelepipedon O középpontjára tükrösek, és bármelyiknek a térfogata a paralelepipedonénak $\frac{1}{3}$-ad része.

Látni fogjuk, hogy a feladat megoldása szempontjából mindegy, hogy melyik tetraédert választjuk.

Az ábrán a $BEGD$ tetraédert rajzoltuk meg. Belátjuk, hogy ennek a térfogata a a paralelepipedonénak $\frac{1}{3}$-a.

Mivel pl. az $ABDE$ levágott tetraéder ABD lapjának területe a paralelepipedon $ABCD$ lapja területének a fele, az ezekhez a lapokhoz tartozó magasság pedig ugyanaz, ezért egy levágott tetraéder térfogata a paralelepipedon térfogatának $\frac{1}{6}$-od része. A négy levágott tetraéder térfogatának összege $4\cdot\frac{1}{6}$ rész, így a beírt tetraéder köbtartalma valóban $\frac{1}{3}$-a a paralelepipedon térfogatának.

Legyen az $ABDE$ tetraéder súlypontja S. Írjuk föl a $\overrightarrow{GS}$ vektort. Tekintve, hogy $\overrightarrow{GA}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\overrightarrow{GB}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{GD}=\vec{b}+\vec{c}$ és $\overrightarrow{GE}=\vec{a}+\vec{c}$, az $ABDE$ tetraéder súlypontjának helyvektora így kapható meg:

$$\overrightarrow{GS}=\frac{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}}{4}=\frac{3}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

Ezért

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{GS}-\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{GS}-\frac{\overrightarrow{GA}}{2}=\frac{3}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).$$

Ebből láthatjuk, hogy $\overrightarrow{OS}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OG}$, ami azt jelenti, hogy az O centrumú, $-\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságban G képe S.

Ugyanígy a másik három levágott tetraéder súlypontja a beírt tetraéder egy-egy további csúcsának képe az említett középpontos hasonlóságban. Ezért a súlypontok meghatározta tetraéder térfogata a beírt tetraéder térfogatának $\left(\frac{1}{2}\right)^3$-szerese, tehát a paralelepipedon köbtartalmának $\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$ része.

Megjegyzések.

1. Néhány megoldó elemi geometriai eszközökkel (paralelogramma tulajdonságok, súlyvonalak osztási aránya) találta meg az előzőekben leírt $-\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot. Ezek az egyébként szép megoldások valamivel hosszabbak, mint a fenti vektoros megoldás.

2. Csörnyei Marianna 2. megoldásában felhasználta, hogy a paralelepipedon affinitással kockába vihető át. Mivel az affinitás aránytartó, elegendő a feladatot kockára megoldani. Ezután kiszámította a súlypontok által meghatározott (szabályos) tetraéder élét, majd a térfogatát.

A feladatok megoldóiról

A fenti tíz feladat megoldói a KöMaL pontversenyén, a különféle országos versenyeken, a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián olyan sok szép eredményt értek el, hogy ennek teljes felsorolására jelen írás terjedelmi okokból nem vállalkozhat. Ezért ebben a fejezetben a feladatok megoldóinak matematikusi pályáját szeretnénk röviden ismertetni.

1. feladat

Kőnig Dénes (1884–1944): Matematikus, egyetemi tanár, *Kőnig Gyula* matematikus fia. Matematikusként a gráfelmélet világhírű úttörője és kutatója. Első gráfelméleti munkája a Középiskolai Matematikai Lapok 1926 májusi számában jelent meg *A graphokról* címmel. Nevét viseli például a gráfelméletben Kőnig-tételként ismert fontos eredmény.

Haar Alfréd (1885–1933): Matematikus, egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia tagja. Kutatási területei közé tartoztak az ortogonális függvénysorok, a parciális differenciálegyenletek, a többváltozós variációproblémák, illetve a szinguláris integrálok. 1929-ben Hamburgban vendégtanárként mutatta be a variációszámításban elért eredményeit. Az invariáns csoportmértékek *(Haar-mérték)* létezésének bizonyításával a modern matematikai kutatások elindítója lett.

Riesz Marcell: (1886–1969): Matematikus, egyetemi tanár, *Riesz Frigyes* matematikus testvére. Kutatásai kezdetben a trigonometrikus sorok vizsgálatára irányultak, ezen a területen nemzetközi hírnevet szerzett. A trigonometrikus polinomokra vonatkozó interpolációs képlete ma is e tudományág standard anyagát képezi. Érdeklődése később a potenciálelmélet, a hullámterjedés és a kvantummechanika matematikai problémái felé fordult, ezeken a területeken érte el legfontosabb eredményeit.

2. feladat

Szegő Gábor (1895–1985): Matematikus, a Magyar Tudományos Akadémia tagja, több külföldi egyetem tanára volt. Legjelentősebb matematikai eredményeit a komplex függvénytan, a Fourier-sorok, a potenciálelmélet területén érte el, de nevéhez fűződik az ortogonális polinomok általános elméletének kidolgozása is.

3. feladat

Hajós György (1912–1972): Matematikus, egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia tagja. Fontos eredményeket ért el a diszkrét geometria, a rácspont-geometria, a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria, a geometriai szerkesztések elmélete, a gráfelmélet, a nomográfia, és a numerikus analízis területén. Legjelentősebb, nemzetközi hírnevet is szerzett felfedezése Minkowskinak egy, az n dimenziós tér egységkockákkal történő rácsszerű lefedésével kapcsolatos sejtésének bizonyítása volt. Egyetemi tanárként sok tankönyvet, jegyzetet írt, egyik alapvető egyetemi tankönyve a *Bevezetés a geometriába* című, ezt az egyetemeken ma is használják.

Klein Eszter (1910–2005): Matematikus. Már budapesti gimnazistaként is a matematika iránt érdeklődőket tömörítő Anonymus-csoport tagja volt, Erdős Pállal, Turán Pállal, Szekeres Györggyel együtt. Klein Eszter nevéhez fűződik a ma *Happy End-probléma*ként ismert kombinatorikus geometriai feladat felvetése és első megoldása: bárhogyan veszünk fel a síkban öt általános helyzetű pontot, mindig kiválasztható belőlük egy konvex négyszög négy csúcsa. Ez ma a kombinatorikus geometria egyik alapvető eredménye. A problémát Erdős Pál és Szekeres György később közös dolgozatban általánosította. Klein Eszter és Szekeres György 1937-ben összeházasodtak (innen a probléma elnevezése), később Ausztráliában telepedtek le, életük végéig tanítottak Adelaide és Sydney egyetemein.

4. feladat

Erdős Pál (1913–1996): A 20. század egyik legnagyobb matematikusa, a Magyar Tudományos Akadémia tagja, az Akadémia Matematikai Intézete külső tudományos főmunkatársa, számtalan külföldi egyetem doktora, a londoni székhelyű Royal Society tagja. Munkássága a halmazelméletben, a kombinatorikában és a számelmélet több területén alapvetően meghatározta a matematika fejlődésének irányait. Rényi Alfréddal a véletlen gráfok elméletének kidolgozója. Több matematikai tétel névadója, de sejtései is világhírűvé váltak, mint például az elsőként L.J. Mordell által bizonyított *Erdős–Mordell-egyenlőtlenség*. Ez a nevezetes első megoldás a KöMaL-ban jelent meg 1935-ben. Erdős Pál sok díj és elismerés birtokosa volt, 1984-ben Wolf-díjat kapott.

5. feladat

Fried Ervin (1929–2013): Matematikus, az ELTE Algebra és Számelmélet Tanszékének professzora. Fő kutatási területe az algebra volt. Publikációi mellett több, az egyetemeken ma is használatos algebra tankönyv szerzője volt, megjelentek a modern algebrát népszerűsítő könyvei, mint például az *Absztrakt algebra elemi úton*, de középiskolai tankönyet is írt a speciális matematika tagozatos osztályok számára *Lineáris algebra* címmel.

Gehér László (1929–2011): Matematikus, középiskolai tanár. Nyugdíjazásáig a Szegedi Tudományegyetem Geometria tanszékének oktatója, 2002-től egyetemi docense. Doktori dolgozatát Szőkefalvi-Nagy Béla vezetésével 1985-ben fejezte be. Több tudományos cikket is publikált, de főként kiváló egyetemi előadó, emellett középiskolásoknak tartott olimpiai előkészítő szakkörök vezetője volt. Munkáját a Bolyai János Matematikai Társulat Grünwald Géza Díjjal ismerte el.

6. feladat

Győry Kálmán (1940–): Széchenyi-díjas matematikus, egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia tagja, a számelmélet nemzetközi hírű kutatója. Akadémiai disszertációjának címe: *Diofantikus problémákra vonatkozó effektív végességi tételek és alkalmazásaik*. Számtalan publikációja jelent meg magyar, angol és francia nyelven, 11 külföldi egyetem vendégprofesszora volt tudományos munkája során. Jelenleg is a a debreceni Számelméleti Kutatócsoport vezetője.

7. feladat

Recski András (1948–): Matematikus, a Budapesti Műszaki Egyetem tanszékvezető professzora. A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Bizottságának, Számítógéptudományi Bizottságának és Tudományetikai Bizottságának tagja, a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet külső tagja. Kutatási területe a diszkrét matematika, elsősorban a matroidelmélet és kombinatorikus optimalizáció, valamint ezek alkalmazásai a villamos hálózatok elméletében, a nagybonyolultságú integrált áramkörök tervezésében és a statikában, kutatásaival kapcsolatosan nagyszámú publikációt jelentetett meg. Emellett számos külföldi egyetemen vendégoktatóként dolgozott. A Bolyai János Matematikai Társulat elnökségi tagja volt.

Elekes György (1949–2008): Matematikus, 2001-től a Magyar Tudományos Akadémia doktora, 2005-től az ELTE egyetemi tanára, alapítója az ELTE Számítógéptudományi Tanszékének. Kutatási területei közé tartozott a kombinatorikus geometria, a számelmélet és a halmazelmélet. Erdős Pállal és Hajnal Andrással a kombinatorikus halmazelmélet egy új ágát fejlesztették ki. A geometriai algoritmusok területén alapvető eredmény kapcsolódik a nevéhez, amelyet angol nyelven *A geometric inequality and the complexity of computing volume* címmel publikált. Kiváló oktató volt, több egyetemi tankönyv szerzője.

Surányi László (1949–): Matematikus, 10 évig a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutatóintézetének munkatársa, majd középiskolai vezető tanár a Budapesti Fazekas Mihály Gimnáziumban. Kutatási területei közé tartozik a metaaxiomatika, a művészetek és a matematika kapcsolata. Számos angol és magyar nyelvű gráfelméleti publikáció szerzője illetve társszerzője, segédtankönyvet írt *Algebra-testek, gyűrűk, polinomok* címmel, tanulmányokat jelentetett meg Középiskolai Matematikai Lapokban, feladatgyűjtemények összeállításában vett részt. Szívesen publikál a matematika oktatásának általános kérdéseiről, rendszeres előadója a matematikatanárok Rátz László Vándorgyűlésének, de foglalkozik filozófiai kérdések széles körével is. Munkásságáért 2008-ban Rátz Tanár Úr Életműdíjban részesült.

8. feladat

Frankl Péter (1953–): Matematikus, a Tokioi egyetem tanára, a Magyar Tudományos Akadémia külső tagja. Kombinatorikával, illetve extremális hipergráf-problémákkal foglalkozik, ehhez a területhez jelentős eredményei fűződnek. A japán diákolimpiai csapat egyik felkészítője. Babai Lászlóval közösen írt egy könyvet a lineáris algebrai módszerek kombinatorikai alkalmazásáról. 1978-ban artistavizsgát tett.

Komornik Vilmos (1954–): Matematikus, a matematikai tudományok doktora, a Magyar Tudományos Akadémia külső tagja. Kutatási területei közé tartozik az analízis, a parciális differenciálegyenletek, a kontrollelmélet, és a kombinatorikus számelmélet. Publikációiban, szerzőként vagy társszerzőként írt könyveiben főként ezen területek problémáit elemzi.

9. feladat

Bóna Miklós (1967–): Az ELTE-n végzett matematikus szakon. Doktori dolgozatát az USA-ban a világhírű Massachusetts Institute of Technology intézetben készítette. Egy évet töltött Princetonban az Institute for Advanced Study tagjaként. A kombinatorika, ezen belül a permutációk elmélete, a számelmélet és a kommutatív algebra kutatója. 2010 óta az Electronic Journal of Combinatorics egyik főszerkesztője.

Hraskó András (1966–): Matematikus, 2006-ban az ELTE-n készítette doktori dolgozatát *Geometriai tételek a harmadrendű görbe csoporttulajdonságával összefüggésben* címmel. Dolgozott a speciális matematika tagozatos osztályok tanáraként a budapesti Fazekas Mihály Gimnáziumban, munkatársa volt az ELTE Matematikatanítási és Módszertani Központjának. Több, a matematikai tehetséggondozást segítő feladatgyűjtemény, interneten elérhető szakköri anyag [9] készítője, illetve a matematikát népszerűsítő kiadvány szerzője, vagy társszerzője: *Bergengóc példatár, Új matematikai mozaik*. Néhány éve a *The London School of Mathematics and Programming* munkatársa. 2000-ben a svájci *Elemente der Mathematik* folyóirat közölte egy angol nyelvű dolgozatát *Poncelet-type Problems, an Elementary Approach* címmel.

Kós Géza (1967–): Az ELTE matematikus szakán végzett 1991-ben. Az egyik kutatócsoportban a geometria informatikai kérdéseivel foglalkozott, az Informatika Karon ebből a témából szerezte meg doktori fokozatát 2002-ben. Több angol nyelvű tudományos dolgozat szerzője illetve társszerzője, az ELTE Analízis tanszékének adjunktusa. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpia problémakiválasztó bizottságának tagja, a magyar diákolimpiai csapat egyik felkészítője, korábbi csapatvezetője. A KöMaL matematikai szerkesztőbizottságának tagja, internetes megjelenésének, az úgynevezett *Munkafüzet*-nek a felelőse illetve internetes fórumának létrehozója.

Megyesi Gábor (1966–): Egyetemi matematikai tanulmányait Szegeden kezdte, később a cambridge-i Trinity College ösztöndíjas hallgatója lett. Doktori fokozatát is itt szerezte. Vendégoktatója volt a Max Planck Intézetnek (Németország) és az Utah Egyetemnek (USA). Jelenleg a Manchesteri Egyetem tanára, ahol kombinatorikát, gráfelméletet, matematikai kommunikációt és algebrai geometriát tanít. Kutatóként a szinguláris felületekre vonatkozó egyenlőtlenségek általánosításával foglalkozik.

10. feladat

Csörnyei Marianna (1975–): Matematikus szakon végzett az ELTE-n 1999-ben, ugyanebben az évben PhD fokozatot szerzett. Egy tanévet a Princeton Egyetemen töltött az Institute for Advanced Study kutatójaként. Jelenleg a Chicagói Egyetem professzora. A London Mathematical Society folyóiratainak szerkesztője. A Magyar Tudományos Akadémiának 2019-től külső tagja. A valós analízis, a geometriai mértékelmélet és a geometriai nemlineáris funkcionálanalízis kutatója, ezeken a területeken nemzetközileg elismert eredményekkel rendelkezik.

Összegzés

Nyilvánvaló, hogy a fenti írás nem adhatott teljes áttekintést a KöMaL 100 évéről. Ugyanakkor remélhető, hogy a kiválasztott feladatok önmagukban is érdekesek voltak, és a megoldási módjukban megnyilvánuló ötletek, módszerek tanulságul szolgáltak.

A KöMaL szerkesztőségi tagjaként (és a pontverseny valamikori résztvevőjeként) úgy vélem, hogy a feladatok rendszeres beküldése az egyik legjobb feladat-és problémamegoldó iskola. Ezt akartam érzékeltetni a feladatok egykori megoldóinak matematikusi pályáját ismertetve (ha mégoly röviden is).

Az írás tehát valójában a KöMaL pontversenyein való, az eddiginél is szélesebb körű és eredményesebb részvételre szeretne ösztönözni.

Felhasznált irodalom

[1] http://db.komal.hu/KomalHU/tortenet.phtml
[2] KöMaL-CD 1893.-1993.(szkennelt oldalak)
[3] http://db.komal.hu/KomalHU/ (KöMaL-archívum)
[4] https://www.nevpont.hu/foglalkozasok/matematikus
[5] https://www.arcanum.com/hu/adt/
[6] https://edu.ek.szte.hu/szegedi-tudosok-a-halozatban/a-szegedi-matematikai-iskola/kislexikon/
[7] https://math.unideb.hu/hu/oneletrajz
[8] https://m2.mtmt.hu/gui2/
[9] https://matek.fazekas.hu/

Bíró Bálint

Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon:

Baran Zsuzsa, Kiss Melinda Flóra 2023. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

EGMO 2023: a 12. diákolimpia lányoknak

A 12. Európai Leány Matematikai Olimpia (EGMO) 2023. április 13. és 19. között került megrendezésre Szlovéniában, Portorožban. Idén 55 ország 213 versenyzője írta meg a feladatsorokat. A versenyről az EGMO honlapján lehet olvasni, a feladatok magyarul itt találhatók: 1. nap, 2. nap.

A magyar csapat nagyon szép teljesítménnyel, **két arany-, egy ezüst- és egy bronzéremmel** tért haza, ezzel az összes (55) résztvevő ország között 9., míg az európai országok (38) között **6. helyezést** szerezve. Az eredmények:

Fülöp Csilla (Szeged, Radnóti Miklós Gimnázium) 40 ponttal **aranyérmet**,
Sztranyák Gabriella (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium) 38 ponttal **aranyérmet**,
Wiener Anna (Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium) 35 ponttal **ezüstérmet**,
Kercsó-Molnár Anita (Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium) 19 ponttal **bronzérmet** szerzett.

Köszönjük a Morgan Stanley és A Gondolkodás Öröme Alapítvány támogatását!

A versenyzők élménybeszámolójából ízelítőt kaphatunk az esemény részleteiről is:

Április 13-án, csütörtökön Budapestről indultunk neki a 7,5 órás vonatútnak Ljubljanába. Elsőre riasztóan hosszúnak tűnt, de beszélgetéssel és különböző játékokkal eltelt az idő. A szervezők a vasútállomáson vízzel és édességekkel vártak minket, így új erőre kapva álltunk készen a Portorožba vezető buszútra. Egy csapattársunk, Kercsó-Molnár Anita és csapatvezetőhelyettesünk, Baran Zsuzsa a hotelben csatlakoztak hozzánk, így vált teljessé a magyar küldöttség. Minden résztvevő országhoz rendelnek egy helyi kísérőt is, a mi guide-unk, Meta nagyon aranyos volt, előre tudta mindenki nevét, és segített megtalálni a szobáinkat. Minden szoba különböző emeleten volt, Anita és Panka (Wiener Anna) szobája valamivel nagyobb volt, a hajókra néző kilátással, Zsuzsa, illetve Gabi (Sztranyák Gabriella) és (Fülöp) Csilla gyönyörű erkélyeket is kaptak, amik a tengerre néztek, sőt, a tenger pár méterrel előttük terült el. Sajnos csapatvezetőnk, Kiss Melinda nem velünk, hanem a szomszédos hotelben aludt, de csak egy rövid séta választott el minket.
A másnap reggelt „kincskereséssel” indítottuk, Portorož és Piran között különböző rövid feladatokat kellett teljesítenünk, például tollakat kellett üvegekbe beleejtenünk vagy magunkból ki kellett raknunk az EGMO betűit.

Hungary
Csilla Fülöp
Gabriella Sztranyák
Panka Wiener
Anita Kercsó-Molnár
HUN
EGMO

A megnyitó színpadán balról jobbra: Meta Trdin (a csapat guide-ja), Fülöp Csilla, Sztranyák Gabriella, Wiener Anna, Kercsó-Molnár Anita.

Délután részt vettünk a megnyitón: néhány beszéd és zenés produkció után minden ország versenyzői kimentek a színpadra, feltartották a zászlójukat és megtapsoltuk őket. Ennek végén mindenki odaállt a színpad elé, és készült egy nagy csoportkép.

Versenyzők és vezetők: Baran Zsuzsa, Fülöp Csilla, Sztranyák Gabriella, Wiener Anna, Kercsó-Molnár Anita, Kiss Melinda Flóra, Csahók Tímea.

Előző este Melinda és Zsuzsa jótanácsokkal látott el bennünket („Nagy, SZERKESZTETT ábra;…”) és megbeszéltük, hogy mire figyeljünk majd a versenyen, most viszont csak egy-egy bátorító ölelést adtak, mert Melinda már ismerte a feladatokat és hamar szerettünk volna aludni menni, hogy a lehető legkipihentebbek lehessünk másnap. Ez egészen jól sikerült, és a versenyfeladatok is nekünk kedveztek: a legnehezebbnek egy kombinatorikai feladatot szántak, amit amíg több ország tényleg a legnehezebbnek tartott, addig szerintünk megoldható volt. Délután különböző workshopokon vehettünk részt, Gabi és Csilla például fürdőbombákat (pezsgőfürdő-golyókat) készített.
Vasárnap volt a második versenynap, ahol az utolsó geometria feladat mindenki szerint nehéz volt, sokat gondolkodtunk rajta, és a versenyen senki sem oldotta meg teljesen, bár Gabi még aznap este talált egy rövid befejezést a megoldáskezdeményére. Utána újabb programokat szerveztek nekünk: lehetett például kulcstartókat és karkötőket készíteni vagy ajakírt főzni.

Ljubljanski grad
#LjubljanaCastle

Ljubljanában a kastélyban Fülöp Csilla, Sztranyák Gabriella és Wiener Anna.

Amíg a csapatvezetőink a dolgozatainkat javították, mi elmentünk Ljubljanába, ahol egy idegenvezetőtől megtudtuk, hogy léteztek itt jó és rossz sárkányok, miközben együtt megnéztünk egy lakatos hidat, a várat, majd elmentünk a folyón hajókázni és megettük a szendvicsünket (erre utasítást is kaptunk). Végül a WOOP! Arénába mentünk, ahol például szabadulószobába menni vagy lézerharcolni lehetett. Gabi és Csilla lekésték a jelentkezést, így már csak bowlingozni tudtak volna, ezért inkább elmentek vásárolni.
Estére Zsuzsa és Melinda végeztek a koordinálással és megszavazták a ponthatárokat, így másnap együtt mentünk a „Kissárkány-barlangba” (Postojna). Ez egy cseppkőbarlang, ahol kis sárkányok (igazából barlagi gőték) élnek. Kisvonattal mentünk be és ki, közte sétáltunk és hallgattuk a túravezetőnk és egyéb túravezetők magyarázatát, amiben (ljubljanai idegenvezetőnkéhez hasolóan) meglehetősen sok szó esett sárkányokról.
Délután volt a záróceremónia, ahol a kivetítőn sajnos Anita neve mellett Brazíliát tüntették fel. Egyébként beszédek voltak (egyet elvileg ChatGPT írt), hárfázás, világítós táncolás, az érmek átadása és fárasztó zászlótartás. Az ünnepség és sok sorbanállás után fényképezkedés következett. (Anita betegen érkezett a versenyre, ezért a programoknak csak egy részén tudott részt venni, emiatt nem tudott megjelenni a keddi díjkiosztón sem.)

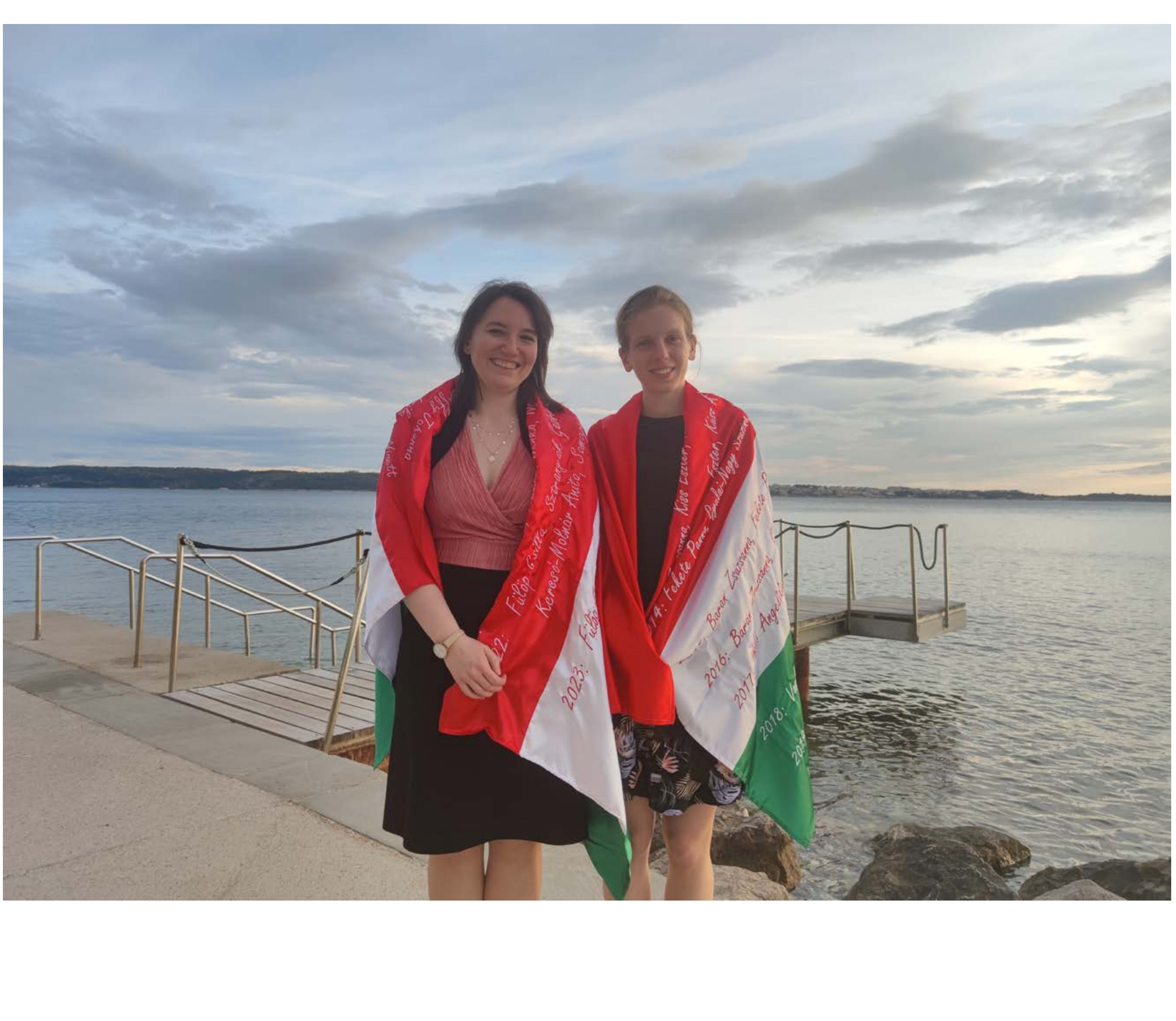
AVDITORIJ
PORTOROŽ - PORTOROSE
EGMO
EUROPEAN GIRLS' MATHEMATICAL OLYMPIAD 2023 SLOVENIA
egmo2023.dmfa.si
Be unique

Baran Zsuzsa, Fülöp Csilla, Sztranyák Gabriella, Wiener Anna, Kiss Melinda Flóra, Meta Trdin; helyszín: Avditorij Portorož.

Ezután került sor a búcsúvacsorára, ahonnan a magyar csapat szokás szerint késett, de szerencsére addigra még nem ettek meg mindent a többiek. Így legalább nem kellett sorbanállnunk, hiszen már mindenki vett az ételekből. Az estét egy buli zárta, ahol a hotel halljában táncoltunk, beszélgettünk és tortát, koktélokat (természetesen alkoholmenteset) fogyasztottunk. A hangulat olyan jó volt, hogy a bulit több, mint másfél órával tovább tartották a tervezettnél, és nagyjából 5 „utolsó dalt” kaptunk.
Szerdára már csak a hazautazás maradt, egy újabb 7,5 órás vonatút fél óra késéssel megtoldva, így 8 kerek órát tölthettünk egy kis fülkébe zárva. Nem nagyon volt olyan pillanat, amikor mindenki ébren volt, de legalább valamennyire ki tudtuk pihenni magunkat, miközben felidéztünk az elmúlt hét legemlékezetesebb eseményeit.

A jövő évi versenyt Grúziában rendezik meg 2024. áprilisában. A válogatási folyamat és a felkészítő program részleteiért a https://cms.renyi.hu/olimpiak/ oldal EGMO fülét érdemes ellenőrizni 2023. július közepétől. :-)
Bátran jelentkezzetek, a felkészülésbe szívesen várunk minden olyan lányt, akit érdekelne a versenyen való részvétel lehetősége vagy csak szeretne több időt tölteni komolyabb matematikafeladatok megoldásával.

Kiss Melinda Flóra, Baran Zsuzsa
az EGMO felkészítő csapat nevében



Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

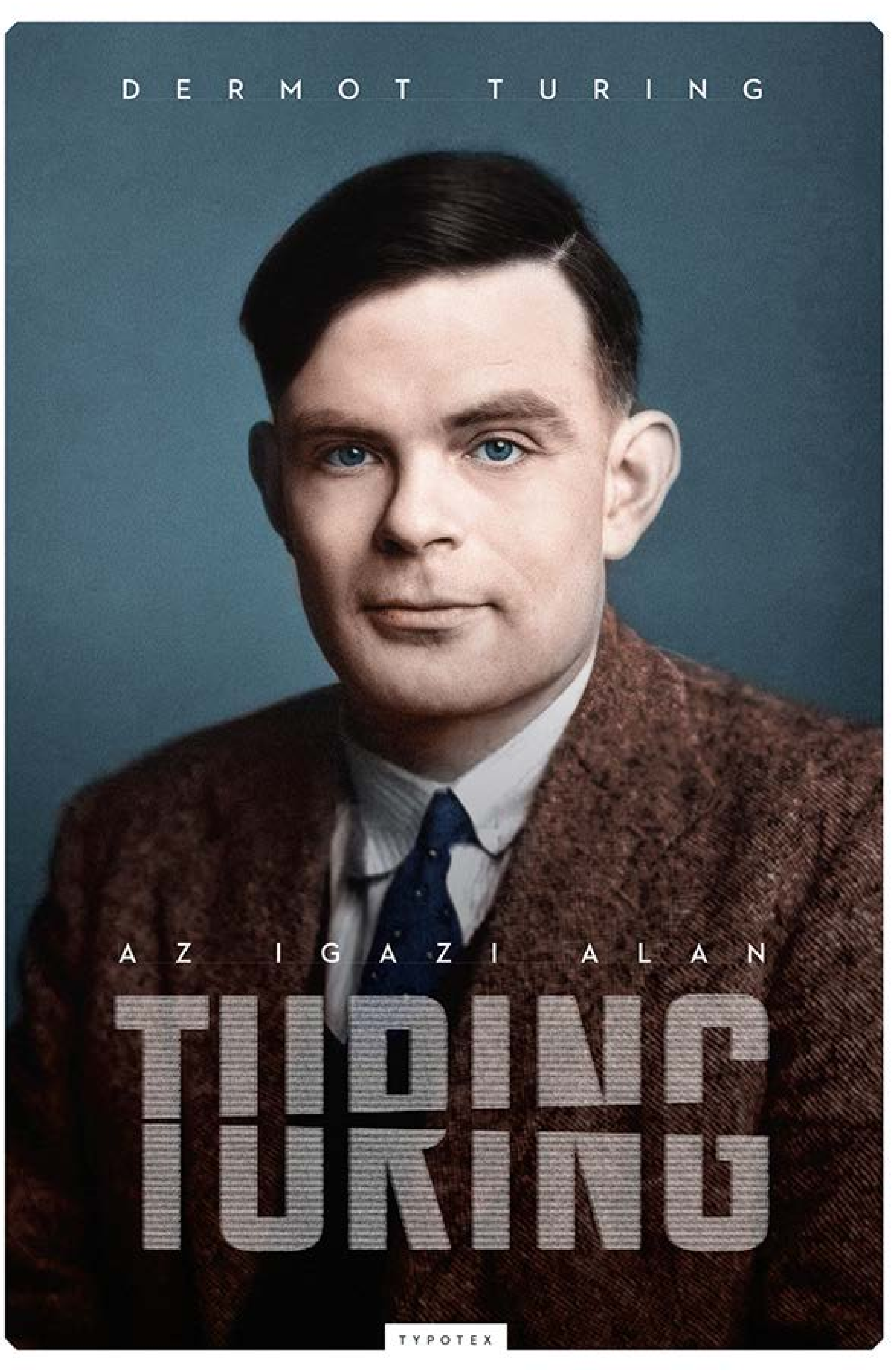
Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon:

Kutas Péter 2023. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Az igazi Alan Turing

***Dermot Turing: Az igazi Alan Turing** (Typotex Kiadó, 2022. Ford. Gyárfás Vera)*

Dermot Turing egy igazán érdekes könyvet írt nagybátyjáról (édesapja John Turing, Alan bátyja), amely helyenként nagyon személyes és különös igényességgel megírt életrajza a híres matematikusnak. A szerző maga is elismert jogtudós az oxfordi egyetemen, és egyszerre élvezetesen és tudományos precizitással mutatja be Alan Turing életútját.



A könyv első felében bemutatja Turing gyerekkorát és a Turing/Stoney család történetét. Turing felmenői között számos híres tudós és mérnök volt anyai ágon (apai ágon inkább a hivatalnokok voltak jellemzőek), ezek közül talán a leghíresebb George Johnstone Stoney fizikus, aki az elektron elnevezést kitalálta (mindezek mellett a Royal Society tagja, számos fontos cikk szerzője). Alan Turing édesapja hivatalnok volt Indiában. John, Alan bátyja, első éveiben a szüleivel Indiában élt, azonban vérhast kapott, és így a család úgy döntött, hogy rövid időre hazajönnek. Ekkor megszületett Alan, viszont a születése után szülei visszaköltöztek Indiába és így Alant és bátyját nevelőszülőkhöz adták. Ez a korai elszakadás a szüleitől az egész életére hatással volt, ugyanis sosem alakult ki bensőséges viszony közte és a szülei között (legfőképpen édesanyjával volt különös a kapcsolata). A könyv utána alaposan végig veszi Alan első éveit és iskoláit. Ebben kirajzolódik csodabogár jelleme, a sztereotipikus tudósé, aki szeret mindenféle furcsa dologgal kísérletezni, de nem jeleskedik az angolok számára fontos sportokban (például a rögbiben). Azonban ezeknél sokkal érdekesebb, hogy már nagyon fiatalon az egyedi, különutas megoldások mennyire jellemzőek voltak rá. Gimnáziumba a bentlakásos Sherborne iskolába vették fel és a tanév előtt a család Franciaországban nyaralt. Innen kellett volna Angliába utaznia hajóval, majd onnan vonattal leendő bentlakásos iskolájába. Terveit azonban meghiúsította a szénbányászok sztrájkja, amibe a vasutasokat is bevonták, így az ország teljes közlekedése megbénult. A 14 éves Alan Turingot ez cseppet sem zavarta, egyszerűen elbiciklizett az igencsak messze lévő iskolába, kivívva ezzel a leendő iskolája és a helyi újságok csodálatát. Ez a cselekedet számos későbbi jellemzőjét megmutatja: egyrészt a nagyon erős problémamegoldási készségét és az egyedi gondolkodásmódját. A Sherborne Academy amúgy híres iskola számos híres növendékkel (Alfred Whitehead, Jeremy Irons, Hugh Bonneville és mások). Kezdetben viszonylag pozitív volt a tanárok véleménye az ifjú Alanről, viszont ahogy elhalványult a híres biciklizős történet az emberek emlékezetében, úgy egyre inkább felülírták a tanárok véleményét a mindennapi nehézségei. Legfőbb problémájuk az volt, hogy Alan csúnyán írt, és trehány volt (legalábbis angol mércével), és nonkonformista módon mindent saját maga szeretett volna kitalálni. Ebben az iskolában ismerkedett meg közeli barátjával Christopher Morcommal, akiben intellektuális társra talált. Azonban Christopher fiatalon tüdőbajban elhunyt, és ez a veszteség kihatott Alan későbbi életére is.

A középiskola után a cambridge-i egyetem King’s College-ában tanult tovább. Itt amellett, hogy viszonylag jól teljesített a vizsgákon, az első komolyabb eredménye a centrális határeloszlás-tétel újrafelfedezése volt. Ezt be is adta disszertációnak, amelyet jelentős szakértők bíráltak el (többek között a matematikai statisztikában elismert Ronald Fisher). Természetesen tudományosan nem volt értékelhető az eredmény, amit már néhány évvel korábban Lindeberg felfedezett, de a bírálókat lenyűgözte Turing stílusa és eredetisége. Turing első komoly matematikai eredménye az úgynevezett „Entscheidungsproblem” megoldása volt. Hilbert azt kérdezte, hogy létezik-e olyan módszer, amivel egy adott állításról eldönthető, hogy bizonyítható-e. Erre Turing a híres „Computable Numbers” című cikkében ad negatív választ, amelyben megadja a ma róla elnevezett Turing-gép konstrukcióját, és bebizonyítja, hogy a leállási probléma eldönthetetlen. Az „Entscheidungsproblem”-et egyébként vele egyidőben Alonzo Church is megoldotta (sőt valamivel meg is előzte Turingot) egy teljesen másik módszerrel: az úgynevezett λ-kalkulus segítségével. Turing cikke a mai számítógépek és az algoritmuselmélet alapjait teremtette meg. Egészen meglepően kapcsolt össze természetében nagyon elméleti kérdést egy gyakorlati problémával. Ezek után 9 hónapot tölt Princetonban Church vendégeként, ahol megismerkedik Neumann Jánossal is. A könyvben nagyon sok híres matematikus jelenik meg, akikről személyes dolgokat is megtudhatunk. Viszont sosem süllyed le a bulvár szintjére, és mindig viszonylag angolos nagyvonalúsággal beszél különböző emberekről (például Neumannról sem említ meg semmilyen rossz tulajdonságot, pedig más forrásokból ismert, hogy nem volt könnyű személyiség). Technikailag Church lesz így Turing doktori témavezetője és a Princetonon doktorál, de nagyon hamar visszatér Angliába, noha Neumann szerzett neki egy princetoni ösztöndíjat (alapvetően szimpla honvágy vezérelte haza). A következő fejezetek Alan Turing világháborús kódfejtői tevékenységéről szólnak. A 1930-as évek vége fele az angolok már nagyon komolyan számoltak az elkövetkezendő világháborúval, és Denniston parancsnok toborzó körútba kezdett, hogy neves matematikusokat rávegyen arra, hogy segítsenek az ellenség kódjainak megfejtésében. Alan Turing pontos beszervezési körülményeit nem írja le a könyv, de az kiderül, hogy a háború kitörésekor már a GC&CS kötelékében dolgozott.

Az üzenetek titkosítása egészen az ókorig nyúlik vissza. Az első tipikus ötlet az volt, hogy egy adott szövegben, minden betűt valamilyen rendszer szerint helyettesítettek egy másik betűvel. Ez nagyon könnyen feltörhető, ugyanis minden nyelvben vannak gyakoribb, és kevésbé gyakoribb betűk, így egy egyszerű gyakoriságvizsgálattal visszafejthető a titkosított szöveg. Ezek után sok száz évig az úgynevezett könyvmódszert használták. Két fél megállapodott egy könyvben és abban egy bekezdésben. A titkosítás módja a szöveg karakterenkénti összeadása volt a titkos könyvvel, így az eredeti gyakoriságvizsgálat nem működik (mert mondjuk az A betű titkosítása nem mindig ugyanaz, hanem függ attól, hogy az adott helyen milyen karakter van a könyvben). Ezeket általában azért lehet feltörni, mert egy értelmes szöveget adunk az eredeti titkos szöveghez. Érdekes módon a legtöbb kezdeti kódfejtő emiatt inkább a bölcsészek közül került ki. A német Enigma innovációja, hogy az eredeti helyettesítéses módszert úgy változtatja meg, hogy egy mechanikus szerkezet segítségével a helyettesítés determinisztikus, de viszonylag komplikált módon történik. A készülékben van 3 tárcsa, ami minden leütés után változik. Illetve van egy kapcsolótábla, ami bizonyos betűpárokat köt össze. A visszafejtéshez ismerni kell a kezdő tárcsabeállításokat és a kapcsolótábla beállításait is. A gondolkodás nélküli próbálkozás túl költséges volt, különösen, ha az ember kézzel próbálta feltörni a kódot. A hatékony kommunikációhoz (azaz az üzenetek visszafejtéséhez) minden félnél volt egy füzet az aznapi beállításokkal, ezt a füzetet egy hónapra előre gyártották le. Az Enigmának azonban több sebezhető pontja volt. Egyrészt ugyan egy betűt többféleképpen titkosított egy szövegben, de sosem hagyta fixen (tehát az A betű titkosítása sose volt A). Másrészt minden reggel elküldték az időjárást az aznapi beállításokkal. Mivel ezek az üzenetek viszonylag hasonlóak voltak (például azzal indultak, hogy Wetterbericht) viszonylag sok esetet ki lehetett zárni a beállítások közül. Alan Turing és társai ehhez építettek egy gépet, ami a Bombe nevet kapta. Ennek egy elődje volt a lengyel kódfejtők által készített hasonló nevű gép, azonban az angolok egy sokkal jobb számítási kapacitással rendelkező gépet hoztak létre, amellyel könnyen fel tudták törni a légierő és a hadsereg Enigmáját. Ehhez nagyon komoly mérnöki munkára volt szükség melyet Alan Turing és Doc Keen végzett el közösen.

A könyv nagyon részletesen írja le a háborús időszakot, és az Enigma különböző verzióinak mérnöki és feltörési aspektusait. Különlegesen érdekes az úgynevezett tengerészeti Enigma feltörése, amelyben a tárcsabeállításokat is mindennap titkosítva küldték el, és nyolc tárcsával rendelkezett. Itt az előbb említett módszer mellett ügyes statisztikai trükköket (Bayes-tétel) alkalmazva tudta Alan Turing jelentősen csökkenteni a vizsgálandó esetek számát. Ezt a módszert az angol Banbury városáról banburizmusnak nevezték el. A könyvben számos egyéb variációról szó van, ezek saját véleményem szerint nem mindig könnyen követhetőek, mert időnként alaposabb mérnöki ismereteket tételeznek fel. Ami talán sok olvasó számára meglepő lehet, hogy Turing konstruktívan is hozzájárult az angol titkosításokhoz. Az egyik legfőbb probléma az angolok számára az volt, hogy Churchill tengerentúli telefonhívásait lehallgatták, így fontos volt azok titkosítása is. Ennek érdekében Turing a háború alatt Amerikába látogatott, ahol találkozott Claude Shannonnal, és megismerte az amerikai titkosítási technológiákat. A két fél amúgy kölcsönös megegyezés keretében titkosítási technológiákat cserélt, ami a háború alatt egy bonyolult folyamat volt (mert egyik fél sem bízott meg maradéktalanul a másikban). Itt találkozott Turing a bizonyíthatóan biztonságos titkosítási módszerrel. Az Enigma problémája, hogy determinisztikusan végzi el a betűk helyettesítését. Vernam ötlete az volt, hogy az ember egy véletlen szöveget generál, és azt adja hozzá a titkosítandó szöveghez, ezt hívják ,,One-time pad”-nek. Megjegyezném, hogy ma már ezt nem használják a gyakorlatban, ugyanis a titkos kulcs mérete így megegyezik a titkosítandó szöveggel. A ma leggyakrabban használt szimmetrikus titkosító az AES-256. Turing érdemeit hosszan titokban tartotta az angol GC&CS (a mai GCHQ jogelődje). Érdekességként megemlíteném, hogy a ma ismert RSA titkosítást is először a GCHQ kutatói fejlesztették ki (néhány évvel Rivest, Shamir és Adleman előtt), de ezeket a dokumentumokat csak 1990-es évek végén hozták nyilvánosságra.

A háború után Turing érdeklődése a számítógépek irányába fordult. Cambridge-i mentorával közösen a manchesteri egyetemen fejlesztették ki a Mark 1-es gépet. Erről az időszakról is hosszasan ír a könyv, külön kiemelve Turing ötleteit, különösen a gépek programozhatóságát illetően. A modern számítógépek innovációja az, hogy elvben bármilyen programot képesek lefuttatni, míg korábban alkalmazásspecifikus gépeket terveztek csak. Ami számomra meglepő, hogy a számítógépek tervezése kapcsán Turing rögtön azon kezdett el elmélkedni, hogy a gépek képesek lennének-e önállóan gondolkodni. Az érvelése teljesen megegyezett a mesterséges intelligenciáról alkotott mai felfogásunkkal. Én azt gondolom, hogy még a mai nagyon fejlett technológiai környezetben is elkápráztat minket, hogy mire képes a mesterséges intelligencia. Turing ezeket már akkor vizionálta, amikor az emberiség még csak nagyon kezdetleges gépek megépítésére volt képes. Persze mondhatjuk azt, hogy ábrándozni könnyű. Azonban olyan dolgokat előre látni, amik aztán ténylegesen be is következnek (és lényegében olyan módon, ahogyan azt Turing eredetileg elképzelte), sokkal nehezebb. A könyv részletesen leírja a Turing-féle „Imitation Game”-t, amit ma alapvetően Turing-tesztként ismerünk. Ennek a lényege az, hogy egy gép akkor tud igazán egyedül gondolkodni, ha nem tudjuk vakon eldönteni, hogy géppel vagy emberrel társalgunk.

Élete vége felé Turing érdeklődése a biológia irányába fordult. Azon gondolkodott, hogy egy embrió miként fejlődik állattá vagy emberré, és hogyan alakulnak ki a zebra csíkjai vagy hogyan tudja, hogy pontosan öt ujjának kell lennie egy embernek. Ezzel akarta többek között azt is megfejteni, hogy miként jelenik meg a természetben egyes helyeken a Fibonacci-sorozat. Ezt a biológiában a filogenezis elméletének hívják. A könyv arról nem ír, hogy mi a véleménye erről a modern biológiának. A kortársai viszonylag kétkedve fogadták Turing módszereit és eredményeit, amelyeket elhomályosított a DNS szerkezetének felfedezése is. Ehhez azonban hozzá kell tenni, hogy Turing mély matematikai módszereket alkalmazott (reakció-diffúzió egyenleteket), és a számítógép segítségét is komolyan igénybe vette. Mindenesetre manapság a matematika alkalmazásai a biológiában nagyon aktív kutatási terület, és talán Turing volt egyik pionírja ezeknek a módszereknek (noha az eredményeiről nem tudom, hogy sikeresek voltak-e)[1].

A könyv nagyon részletesen beszél Turing különböző életszakaszairól, és egyértelműen az az érzése az embernek, hogy a pályája felfelé ívelőben van. Azonban 1953-ban történik egy nagyon sajnálatos incidens. A könyv tökéletesen érzékelteti ennek az eseménynek a váratlanságát, és az írás tónusa is drasztikusan megváltozik. Alanhez betört egy kétes személy, és a vizsgálódás kapcsán kiderül a hatóságok számára homoszexualitása. Ez akkoriban bűncselekmény volt, és Alant el is ítélik: 12 hónap próbaidő, pszichoterápia és organoterápia. Az organoterápia egy hormonkezelés, ahol az elítéltnek ösztrogént adnak, hogy megpróbálják heteroszexuálissá átnevelni vagy legalább a libidóját úgy lecsökkenteni, hogy ellen tudjon állni a homoszexuális késztetésnek. Ahogy az elején említettem, Dermot Turing jogász, és nagyon közeli rokona Alan Turingnak. Ezen a ponton a könyv nagyon személyes hangnemet üt meg, és erősen érződik a szerző (természetesen teljesen jogos) felháborodása. Végigveszi azt is, hogy a bírói ítélet túlzó volt, és vélhetően elég lehetett volna a pszichoterápia is (az akkori jogot figyelembe véve). Alant nagyon megviselte ez az időszak, noha Greenberg személyében legalább egy képzett pszichológust kapott. Az talán mindenki számára ismert, hogy 1954-ben Alan Turing váratlanul meghalt, halálát ciánmérgezés okozta. Én eddig úgy tudtam, hogy egyértelműen öngyilkosságról volt szó, azonban a könyv azt is körbejárja, hogy a baleset sem zárható ki teljes mértékben (bár elég valószínűtlen). A könyv ezután pontosan olyan váratlanul ér véget, mint Alan Turing élete.

„Az igazi Alan Turing” megmutatja minden olvasó számára, hogy Alan Turing túl azon, hogy kiváló tudós volt, igazi polihisztor is, akinek víziói nagyon meghatározóak voltak a modern tudomány számára. A könyvet nem csak azoknak ajánlom, akik kíváncsiak Turing életútjára. A könyv legfőbb üzenete, hogy milyen fontos a tudományok közötti kapcsolódási pontok feltárása, az ambiciózus tervek kieszelése és a rendszerben való gondolkodás. Alan Turingot nem motiválták sem a díjak, sem a pozíciók, sem a pénz, sem az elismerés, csakis a tudomány szeretete és az emberiségbe vetett hite. Tragikus halála pedig örök szégyenfolt marad a modern történelemben.

Kutas Péter

ELTE Informatikai Kar, University of Birmingham

[1] Turing egyik legutolsó, új kutatási irányt indító cikkében megmutatja, hogy van olyan kémiai rendszer, amely homogén, jól kevert körülmények között stabilis, de diffúzió jelenlétében instabilis. Ez utóbbi esetben stacionárius térbeli mintázatok alakulhatnak ki, amilyenek például a zebra csíkjai is. Mintegy harminc évvel később sikerült is olyan reakció-diffúziórendszert találni, amelyben a jelenség kísérletileg kimutatható. (*A szerk. megjegyzése*)

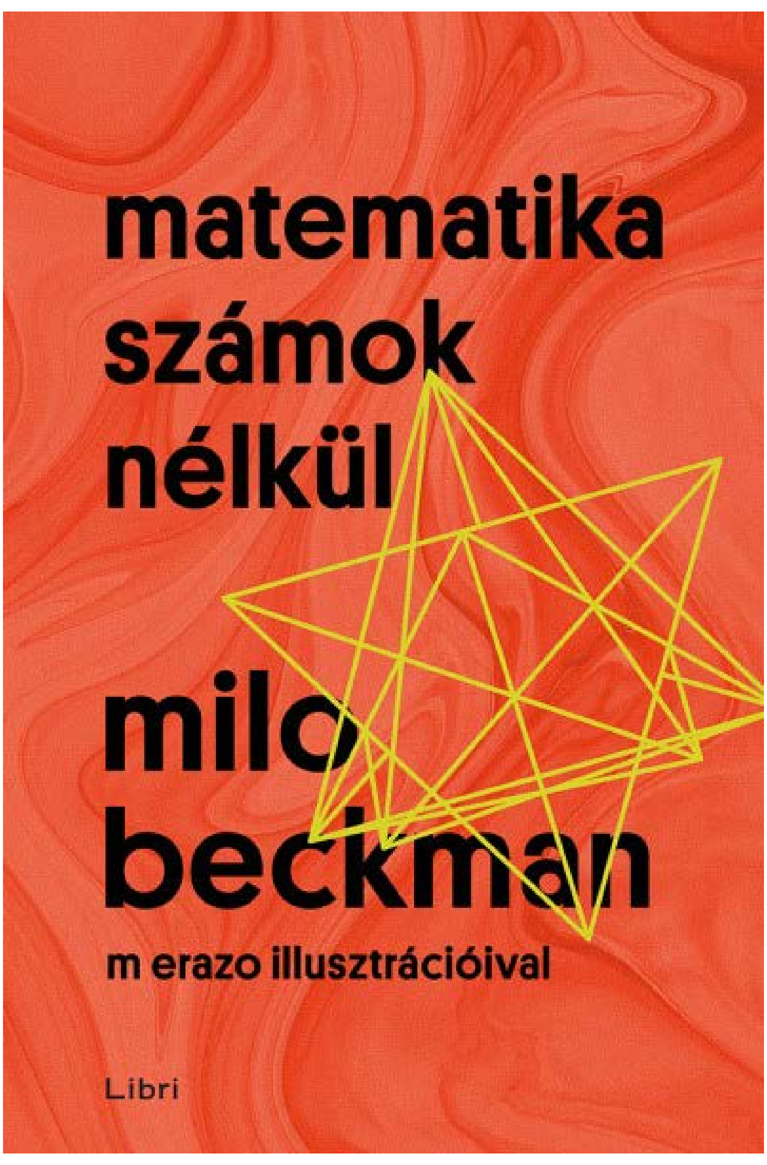
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon: ›

Lóczi-Nagy Gemma 2023. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Olvasónapló a számok nélküli könyvről

***Milo Beckman: Matematika számok nélkül,* Libri, 2022**



A matematika mindenhol megtalálható. Ott van az iskolás korunk óta használt mindennapi kifejezéseinkben, kezdve az egy dimenzióval mérhető mennyiségekkel – például *a hőmérséklet emelkedik vagy esik*, *december messze van*, *időben közeledik*, *az idő elrepül* –, egészen a három dimenzióval mérhető mennyiségekig – például *minden színárnyalatot a három alapszínből ki lehet keverni*.

Mire használható a való életben a matematika? A modellekről szóló fejezetben sok szó esik a kérdésről. Kiderülnek olyan érdekességek, mint például az, hogy még az internet is egy irányított gráf (a linkek valahová mutatnak). Vagy az, hogy az internetes keresőprogramok azt a linket helyezik a találati listában előrébb, amelyre több másik link mutat (ha persze nem nézzük a fizetett hirdetéseket). Vagy hogy gyakran ugyanazokkal a képletekkel lehet találkozni olyan területeken, amelyeknek látszólag egyáltalán nincs semmi közük egymáshoz. Az algebráról szóló fejezet megtanítja az olvasónak, hogy a matematikában nem csak a kézzelfogható dolgok szépek. Sőt, egy egész matematikai ág épül a nem kézzelfogható dolgokra, és ezen a területen nagyon sokan munkálkodnak, és számos komoly áttörést is elértek. Az egész könyvben egyedül ebben a fejezetben szerepel matematikai formula, ami nem rémiszti el az olvasót, mert előtte a szerző már megmagyarázta a jelentését.

A minket bombázó internetes hirdetések is matematikai modellekkel írhatóak le. Az egyik legelterjedtebb ilyen modell a *big five* modell, ami a felhasználó öt személyiségjegyéből dönti el azt, milyen hirdetésekkel célozza meg őt.

A könyvet olvasva sok érdekes kérdésre kapunk választ. Például van valami, ami nagyobb a végtelennél? A végtelenszer végtelen vajon nagyobb, mint a közönséges végtelen? Mitől alakult ki a Jupiteren egy dühöngő vihar közepén a csendes szem? Van-e harmadik lehetőség az igaz és a hamis között? Meg lehet-e magyarázni az emberi döntéseket? Gondoltuk volna, hogy a *kettő* is véges halmaz?

A témakörök a matematikának sok területét lefedik, beleértve a topológiát, analízist, algebrát, modellezést és egy kicsi matematikatörténetet. A 240 oldalnyi szöveghez igényes illusztrációk tartoznak, amelyek teljes mértékben illenek a szöveghez. A sok ábra jól tagolja a szöveget, a mondanivaló érthetőségét nagyban növeli. A címhez hűen, az oldalszámokon kívül, számjeggyel leírt számok valóban nincsenek a könyvben, betűkkel leírva is csak pár helyen.

A könyvből nem hiányoznak a matematikai bizonyítások és a gondolatmenetet összefoglaló „új szabályok”. Ezeket a szerző mindig külön kis keretben emeli ki és magyarázza el. A bizonyítások végén szereplő Q.E.D. szimbólum (quod erat demonstrandum: amint bizonyítandó volt) és a szakszavak helyes használata segíti a megértést a matematikában kevésbé tapasztalt olvasónak is.

A későbbi fejezetek építenek a korábbiakra (például az egyik axiómát használó levezetés később visszatér). A további fejezetekben fokozatosan egyre nehezebb és absztraktabb fogalmak kerülnek elő, ami viszont egyáltalán nem tűnik fel olvasás közben. A gondolatmenetek gyakran egy kérdéssel kezdődnek, majd együtt gondolkodva, felfedezve kapjuk meg a választ. A szerző közben nemegyszer kiszól az olvasóhoz. Az egyik, az alapokról szóló fejezet teljes egészében párbeszédből áll, mindig újabb és újabb érvek merülnek fel egy irányított gondolatmenet keretében. Ez végig fenntartja az olvasó érdeklődését!

A könyv jól követhető és olvasható. Az embernek nem kell matematikusnak lennie, hogy megértse a könyvet és tanuljon belőle. Olvasásához előzetes ismeretek nem szükségesek. Élvezetes olvasmány mindenkinek, akár gyerekeknek (felolvasva) is. Véleményem szerint a könyv azok számára a leghasznosabb, akik még nem tudnak annyit a matematikáról és nem annyira tapasztaltak benne, vagy az olyanoknak, akik még nem tudták eldönteni, pontosan milyen irányban tanuljanak tovább. De ugyanúgy érdekes lehet a szakembereknek is, könnyű olvasmányként.

A *Matematika számok nélkül* kritikus gondolkodásra tanítja az olvasót. Mindig kérdőjelezzük meg akár az ismert információkat is! Ez a matematikában és az életben is különösen fontos. A könyv nagyon szenvedélyes, inspiráló, nehéz letenni. A matematika nem csak száraz számokból áll! Csodás példákon keresztül mutatja be, hogy az egész világot behálózzák a matematikai struktúrák.

Ha ebben a stílusban tanítanák az iskolában a matematikát, akkor valószínűleg kevesebben fordulnának el ettől a tárgytól.

Lóczi-Nagy Gemma, tanuló

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon: ›

Csépai András 2023. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Új vilagok teremtése

Matematikusként sokszor tapasztaltam már, hogy az emberek többségének fogalma sincsen, mit jelent ezt a szakmát művelni a gyakorlatban, vagy hogy egyáltalán mi is az a matematika; pláne, hogy ezen belül topológiával foglalkozom, amiről a legtöbben még csak nem is hallottak. Pintér Gergő *Új világok teremtése* című könyvét – kicsit tisztességtelenül – már azelőtt is ajánlottam a munkám iránt érdeklődő ismerőseimnek olvasásra, hogy én magam akár csak belenéztem volna. Most, hogy elolvastam, már nyugodtan mondhatom, hogy jól tettem: remek ismeretterjesztő könyv, ami, bár a fülszöveg szerint laikusoknak szól, még a matematikában jártasabb embereknek is szórakoztató lehet (nekem legalábbis az volt).

PINTÉR GERGŐ
ÚJ VILÁGOK TEREMTÉSE
GEOMETRIAI KÉPZETEK ÉS KÉPZŐDMÉNYEK
TYPOTEX

A könyv egyik fontos inspirációja Péter Rózsa *Játék a végtelennel* című könyve; az *Új világok teremtése* ugyanebben a szellemben íródott, azaz képletek és precíz definíciók, számítások helyett a matematikai (és itt kifejezetten a geometriai és topológiai) szemlélet felépítése és bemutatása a cél. A könyv címe Bolyai János híres levelére utal, amelyben apjának számol be a hiperbolikus geometria megalkotásáról úgy fogalmazva, hogy *„semmiből egy ujj más világot teremtettem”*. Az akkor forradalmian új ötlet, az absztrakt objektumok szabad konstrukciója és ezek vizsgálata az azóta eltelt 200 évben természetes részévé – sőt, alapjává – vált a matematikának, amiről viszont azok, akik nem kifejezetten matematikai képzettségűek, nem sokat tudnak. Az iskolában a matekot általában úgy tanítják, hogy egy adott(nak vélt) rendszerben dolgoznak, és nem lépnek ki belőle, hogy más szabályok szerint működő valóságokat is bemutassanak. Így a laikusok számára rejtve marad a teremtésnek ez a szabadsága és ezzel együtt a matematika alapgondolata: hogy nem a valóság közvetlen leírása a célunk, hanem annak egy-egy részét megfogó modellek megalkotása, és ezen modellek vizsgálata, ami aztán információt adhat a (lehetséges) valóság(ok)ról is. Az *Új világok teremtése* fő eleme pontosan ennek a gondolatnak a bemutatása olyan módon, hogy azok az érdeklődők is be tudják fogadni, akiknek semmilyen előképzettségük sincs, viszont olyan hitelesen, hogy a matematikai tartalom se torzuljon az egyes konstrukciók szemléltetése során.

A könyv alapját Pintér Gergő ismeretterjesztő előadásai, a MateMorfózis-szeánszok képezik; az egyes fejezetekben egy-egy előadás témáját dolgozta fel, illetve fejtette ki bővebben, ahogyan erről már a könyv készülése közben az Érintőben is írt. Követve a személyes ismeretterjesztés logikáját, a könyvben is sok témát párbeszédes formában mutat be. Ez a (fiktív) párbeszéd mindig Gergő (G) és egy Túlművelt Érdeklődő (T) között zajlik általában olyan módon, hogy a felvetett témával vagy problémával kapcsolatban T kérdéseket tesz fel, ezekre G válaszol, rávezető ötleteket ad, és ezen folyamat során során közösen jutnak el a megoldásig. Itt a „túlművelt” jelző arra utal, hogy az érdeklődő már rendelkezhet egyfajta ismerettel az adott témáról, akár az iskolai tanulmányaiból, akár valahonnan máshonnan, viszont sokszor épp egy berögzült világkép akadályozza meg az embert a fogalmak szabad újraértelmezésében. Éppen ezért a könyv lebontja a már ismerős fogalmakat, hogy aztán egy tágasabb világ apró részeként tudja őket újraértelmezni, illetve ezen keresztül tud bemutatni egy sereg új konstrukciót. Az így teremtett új világok túlnyomórészt a geometria és a topológia objektumai, így sok helyen elengedhetetlenek a szemlélet megértéséhez a képes illusztrációk. Szerencsére az *Új világok teremtése* bővelkedik ezekben, a könyvet illusztráló – egyébként szintén matematikus – Szabari Mátyás rajzaival majd minden lapon találkozhatunk és ezek nagyon sokat hozzátesznek az érthetőséghez. Szerepelnek ezen kívül a témához kapcsolódó dalszövegbetétek is a könyvben, ezek nagyrészt Pintér Gergő (valamelyik zenekarának) dalai, de más magyar könnyűzenei előadók dalait is megtalálhatjuk itt.

Rögtön az első fejezet egy olyan fogalommal, a dimenzióval foglalkozik, amiről sokaknak van már kialakult képük: a minket körülvevő háromdimenziós tér és esetleg az idő, mint negyedik dimenzió. Itt tehát a feladat ezt a képet lebontani, megtalálni a fizikai fogalom matematikai gyökereit, majd ezen keresztül újraértelmezni azt; a fejezet így szemléletet ad az olvasónak magasabb – akár végtelen – dimenziós terekről, illetve megismertet új fogalmakkal is, amikre gondolhatunk egyfajta dimenzióként.

A második fejezet vezet át a topológia világába, ezen belül pedig (kimondatlanul) az absztrakt sokaságok elméletébe. Azzal a viszonylag népszerű kérdéssel kezd, hogy hogyan is nézhet ki a világegyetem „nagyban”, amit aztán pontosít arra, hogy a tér alakját szeretnénk vizsgálni, csakhogy ehhez tudni kell az alakot a tér belső tulajdonságaként értelmezni. Ennek a problémának a kibogozásához kétdimenziós konkrét terek (tórusz, gömb, Klein-kancsó) példáján keresztül visz minket a könyv, aminek során eljutunk az irányíthatóság fogalmához, a topológiai ragasztásokhoz és – bizonyítás nélkül – az irányítható zárt felületek osztályozásához.

A harmadik fejezetben aztán látszólag egész más vizekre evezünk, és megtanulunk Dobble-féle kártyapaklit gyártani. A gyerekek (és szüleik) körében pár éve népszerű Dobble-kártyajáték a hetedrendű projektív síkon alapul olyan módon, hogy minden kártyalapon 8 ábra van és bármely két lapon pontosan egy közös, illetve ha a pakliban szereplő 55 laphoz még kettőt hozzávennénk, akkor az is igaz lenne, hogy bármely két ábrához pontosan egy olyan lap van, amin mindkettő szerepel. Ahhoz tehát, hogy megértsük a Dobble-pakli struktúráját, meg kell értenünk a projektív síkokat és a véges testeket, valamint az ezek fölötti geometriákat; ezen a folyamaton vezeti át az olvasót a fejezet.

Ezután a negyedik fejezet kapcsolja össze az előző kettőt úgy, hogy a (valós) projektív sík topológiai tulajdonságait vizsgálja. Megmutatja, hogy a projektív síkban van egy Möbius-szalag, ezen keresztül pedig – megint csak bizonyítás nélkül – megismertet a zárt felületek teljes osztályozásával. Itt is és a második fejezetben is szó esik a felületek térbeli megvalósításairól és itt lehet igazán megérteni, hogy miért volt fontos a felületek belső tulajdonságainak megértése: amíg a második fejezetben tárgyalt felületek egész jól felismerhetőek a térben, addig a projektív sík térbeli képei már nagyon keveset mondanak a valódi alakjáról. A fejezet végén – ellentétesen a MateMorfózis és a könyv vezérelvével – egy konkrét matematikai számolás szerepel: annak a bizonyítása, hogy a különböző típusú kúpszeletek (ellipszis, parabola, hiperbola) csak az affin síkon különböznek egymástól, a projektív síkon ugyanolyanok; ez egy kitekintés arra vonatkozóan, hogy matematikai jelenségeket hogy lehet absztrakt új világok teremtése segítségével megérteni, és nyugodtan kihagyható, nincs rá szükség a könyv további részében.

Az ötödik fejezet a „tökéletes öleléssel”, azaz a – négydimenziós euklideszi térben természetes módon létező – háromdimenziós gömbfelületnek két tömör tóruszra való felbontásával foglalkozik. Ehhez – részben az első fejezetben látottak alapján – felfedezzük a magasabb dimenziós terekben élő gömböket, majd több szemléltetést is látunk arra, hogy hogyan állnak a háromdimenziós gömbön az egész teret kitöltő „ölelkező” tóruszok. Az előző fejezethez hasonlóan itt is van egy kis matematikai kitekintés, ezen tóruszok egyenletét levezetve.

A hatodik fejezet talán az, ami a leginkább belemegy a topológia technikáiba. A terek lyukasságának a fogalmát igyekszik megfogni úgy, hogy ez a tér belső tulajdonsága legyen. Ehhez a korábban vizsgált felületek – a tórusz, a gömb, a Klein-kancsó és végül a projektív sík – lyukasságának leírását tűzi ki célul, és a probléma (lyukasság, mint belső tulajdonság) megfogásához szemléletesen bevezeti a fundamentális csoport fogalmát. Bár a fundamentális csoport, mint funktor a pontozott topologikus terek homotopikus ekvivalenciaosztályainak kategóriájából a csoportok kategóriájába, eléggé elvont fogalom, itt mégis nagyon is közérthető formában van leírva, sőt, alkalmazva is: ennek segítségével oldjuk meg azt a feladatot, hogy hogyan lehet egy képet egy hurokkal felakasztani a falba vert két szögre úgy, hogy ha bármelyiket kihúzzuk a szögek közül, akkor már leesik. Ide kapcsolódóan megismerteti a fejezet az olvasót a fedő terek fogalmával, amikre gondolhatunk a terek „lyuktalanításaként”, végül pedig szó esik a lyukasság más dimenziós megfelelőiről is, ezáltal pedig a fundamentális csoport más dimenziós megfelelőiről, a homotopikus csoportokról – ezek az algebrai topológia alapvető és sokat vizsgált elemei.

A hetedik fejezetben a szimmetriákat vizsgáljuk azzal a fő céllal, hogy megértsük a háromdimenziós euklideszi tér forgatásainak $\mathrm{SO}(3)$ terét. Ez persze azt jelenti, hogy egy olyan teret kell vizsgálnunk, aminek a pontjai elvont fogalmak: a tér szimmetriái. Ehhez a fejezet először tisztázza a szimmetriák fogalmát, majd – egy dimenzióval lejjebb lépve – azonosítja az euklideszi sík forgatásainak $\mathrm{SO}(2)$ terét a körvonallal; ezután – immár visszatérve az eredeti problémára – az első fejezet alapján megmutatja, hogy $\mathrm{SO}(3)$ háromdimenziós, majd az „öves trükkel” szemlélteti $\mathrm{SO}(3)$ fundamentális csoportját, végül pedig azonosítja $\mathrm{SO}(3)$-at a háromdimenziós projektív térrel, a harmadik fejezetben bevezetett projektív sík háromdimenziós megfelelőjével. Ezután foglalkozik magasabb dimenziós terekben élő szimmetrikus testekkel, végül pedig a részecskék rejtélyes tulajdonságával, a spinnel, amely fogalmat épp $\mathrm{SO}(3)$ segítségével lehet megfogni.

Az utolsó, nyolcadik fejezet témája az általános relativitáselmélet, pontosabban annak matematikai modellje. A fejezet két paradoxonnal indít, aztán végigvezet minket a klasszikus, newtoni fizika világképén, amiben a sebesség relatív, de az idő abszolút; majd az abszolút fényterjedésre alapozva elveti az abszolút időt és szemléletesen bemutatja a speciális relativitáselméletet, ahol a négydimenziós téridőben a múltbeli és jövőbeli fénykúpokban található a múlt és a jövő „belátható” része. Végül ebben a modellben az egyidejűség fogalmát alaposan kielemezve kapjuk a feloldását mindkét paradoxonnak.

Így tehát az *Új világok teremtése* tartalma hű a címéhez, a könyv során jó pár absztrakt világ teremtésén végigmegyünk, és arra is látunk rengeteg példát, hogy hogyan lehet ezeket az elsőre nagyon elvont fogalmakat mégis megérteni és használni. Azontúl, hogy a könyv több gyakorlati alkalmazást is mutat absztrakt matematikai módszerekre, szerintem a legfontosabb mondanivalója a konstrukciók szabadságában van: azt teremtünk meg, amit épp akarunk és ha ez valaminek a megmutatására alkalmas, az igazolja a teremtés létjogosultságát. Ajánlom ezt a könyvet mindenkinek, aki nem nagyon jártas a matematikában, de szeretné mégis megérteni a „térteremtés” folyamatát és a geometriai, topológiai gondolkodást, vagy aki a tanulmányai során szeretné fejleszteni a szemléletét ezekben az irányokban.

Csépai András doktorandusz
ELTE TTK, Matematikai Intézet

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon:

Dworák Bence 2023. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

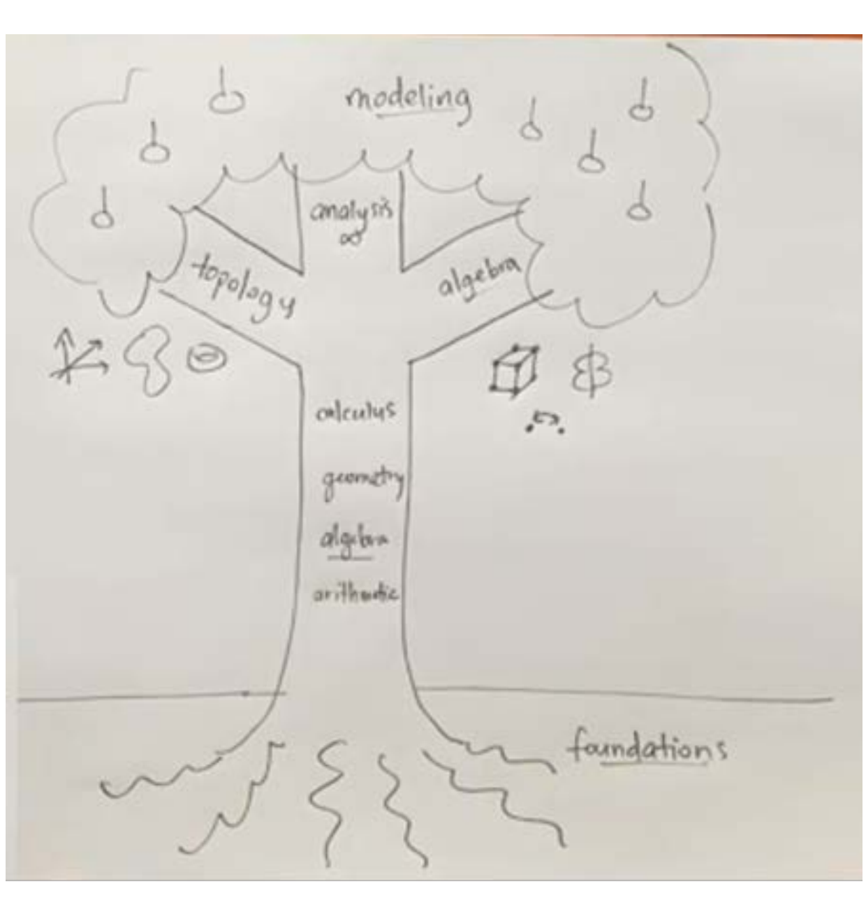
Matematika számok nélkül

„Egy algebrakönyvet órákon át lapozol oda-vissza, mert próbálod megjegyezni, hogy most akkor mi mit is akar jelenteni. És ha egy bizonyítás vagy egy példa végre összeáll, általában akkor sem valamilyen konkrét kép jelenik meg a fejedben, sokkal inkább csak egy mintaszerűség. „Valami történt itt, és valami szimmetrikus dolog történt ott, csak épp fordítva." Vagyis a kapcsolatok és a struktúrák tiszták, de aktuálisan nincsenek jelen objektumok. Ahhoz, hogy az ember az ilyen típusú algebrát művelni tudja, kell egy bizonyos tudatállapot. El kell felejtened a való világ dolgait, a fákat, a székeket, aztán el kell felejtened a matematika világát is, mert itt már nincsenek alakzatok és számok sem. Ki kell ürítened az elmédet, mintha valamilyen szigorú előírások mentén vezetett meditációra készülnél." (A könyvből: 109. oldal)

Milo Beckman könyve a matematika lényegét igyekszik megragadni és közelebb hozni a hétköznapi olvasókhoz. A 28 éves manhattani születésű amerikai matematikus srác már egészen fiatalon megfertőződött a matematika szeretetével. 13 évesen ő vezette a New York-i Matematikacsapatot, rengeteget publikált szaklapokban, számos szervezetnek dolgozott tanácsadóként különböző matematikai jellegű problémák kapcsán. Már kisgyerekként lenyűgözték a könyvek, az olvasás és az írás. Rendkívül nyitott és kommunikatív, szenvedélyesen mesél a világ nagy összefüggéseiről, szereti a képszerű példákat.

A matematikát egy nagy faként képzeli el, amelynek a törzsét az iskolában mindenki által megtanult matematikai fogalmak alkotják. Ez három vastagabb ágban folytatódik, ezek: a topológia, az analízis és az algebra. A fa lombja a kapcsolat a mindennapi élet legkülönbözőbb területeivel a matematikai modellalkotás segítségével, amelyen a matematika alkalmazott területei által teremnek gyümölcsök. A fa gyökérzetét a történelmi előzmények és a matematika létjogosultságához kapcsolódó filozófiai kérdések adják.

.



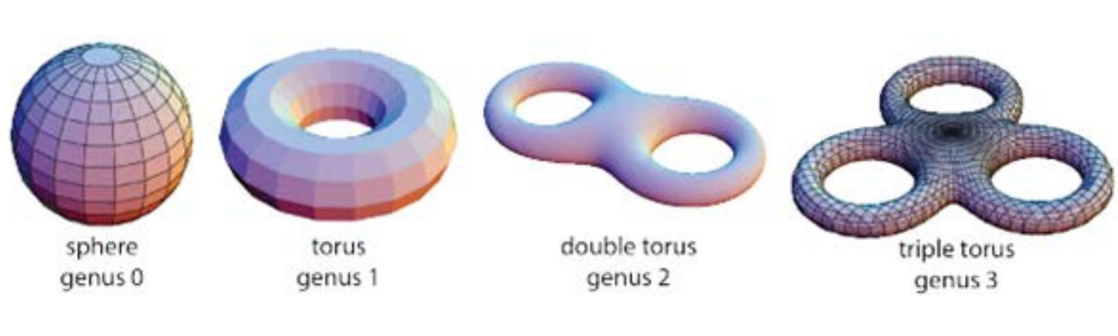
Beckman rajza a matematika felépítéséről és kontextusáról. (Forrás: https://www.youtube.com/channel/UCURP6q1VjGEFfy7GPP3Tm0w.)

A könyv célja, hogy széles körben bemutassa a matematika legmélyebb fogalmait minél egyszerűbben, szemléletesebben, ugyanakkor valamennyire átfogó képet adjon a matematika területeiről, és szoros kapcsolatáról mindennapi életünkkel, valamint a tudományos és társadalmi kontextusokkal. Igyekszik közelebb hozni az embereket ehhez a csodálatos tudományhoz. A kedves, logikusan felépített megfogalmazás egyébként le sem tagadhatná, hogy elsősorban az amerikai átlagembereket hivatott megcélozni. Gondolkodásra buzdítja az olvasót, ugyanakkor egészséges játékra invitálja, amit játékos matematikai fejtörőkkel tarkít.

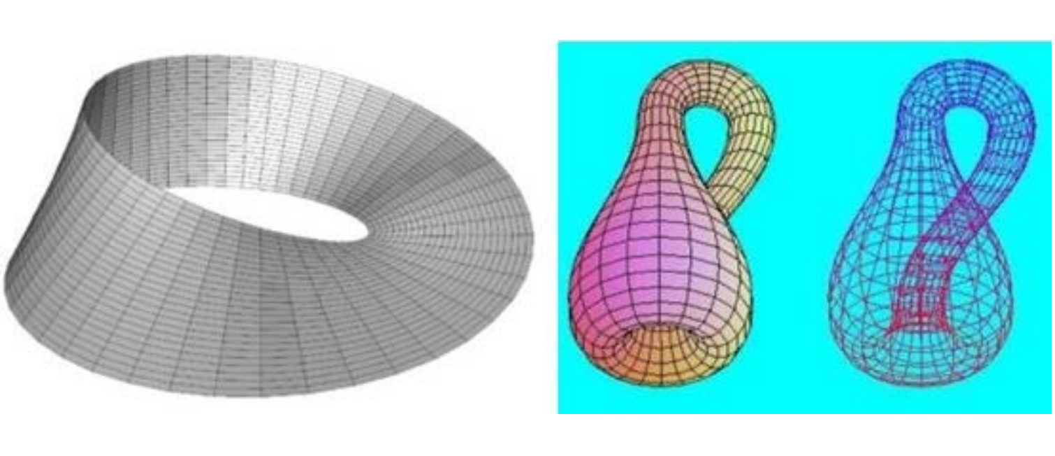
Egyszerre van jelen a matematika igazi mélysége és a hétköznapi ember egyszerű nyelvezete. A felépítés keretes szerkezetű, az elméleti matematika fontos területein fejezetenként (Topológia, Analízis, Algebra) elindulva és fontos fogalmakat bemutatva áttér a történeti alapokra és a lényeges filozófiai kérdésekre. Majd mindezeknek a gyakorlati jelentőségét az alkalmazott matematika szemüvegén át is szemügyre veszi a modellalkotás lényeges kérdésein keresztül, megemlítve az automaták igen termékeny területét, hogy a természet átfogó megértésére törekvő standard modell visszavezessen az elméleti matematika nagyszerűségéhez és megkerülhetetlen szerepéhez.

A cím ígérete, miszerint − a szó szoros értelmében véve − számok nélkül barangolunk a matematika ösvényein, valóban teljesül. Azonban az a képszerűség, amit ezáltal kínálna, pont ezért több ábrát; színes, nagyobb méretű képeket kívánna meg! A felvetett témákat, bemutatott fogalmakat mindenképpen szemléletesebb lett volna szerteágazóbb képi világgal illusztrálni!

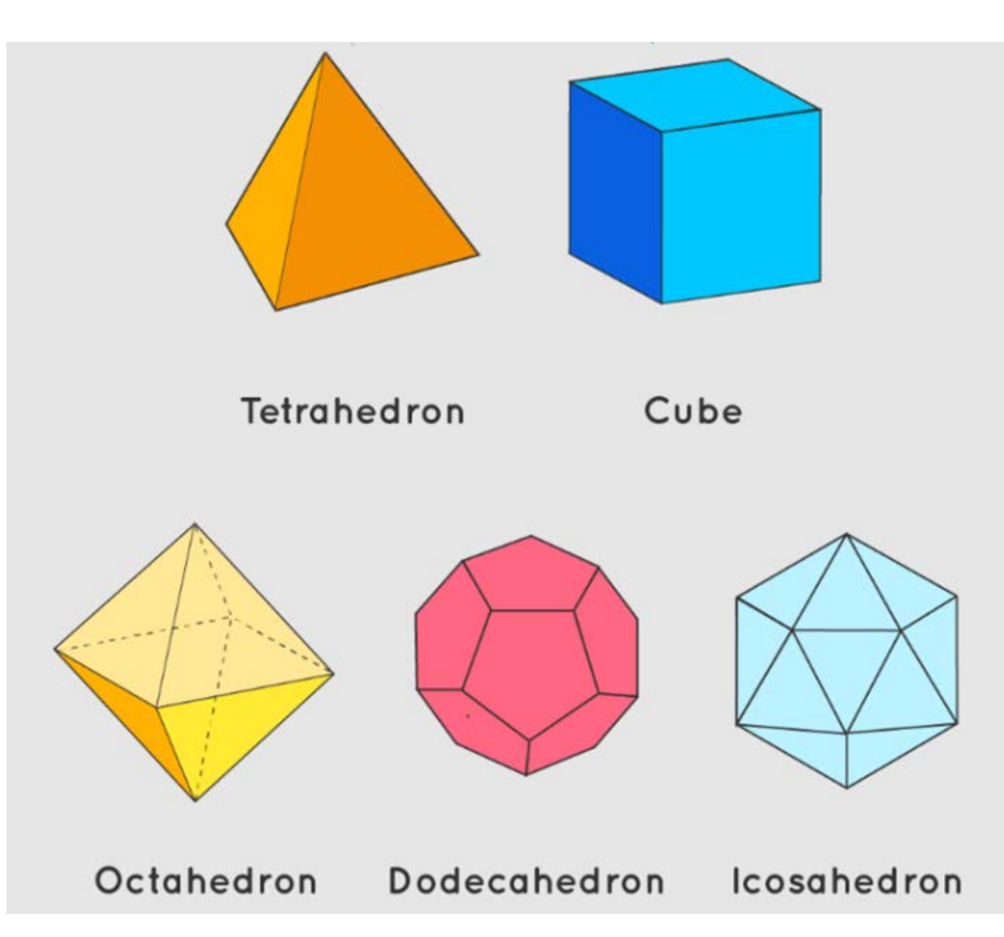
Kezdésként Beckman a leginkább megragadható, leghétköznapibb, körülöttünk lévő fogalmakkal indít, a formák, alakzatok és sokaságok kérdéskörével, és ezek osztályozásával. Sorra kerülnek a topológia kedvelt objektumai: síkidomok, gömbök, tóruszok, Möbius-szalagok, Klein-kancsó, politópok.



Gömb és különféle tóruszok. (Forrás: https://cemc.uwaterloo.ca/events/mathcircles/2019-20/Winter/Junior6_Mar03.pdf.)

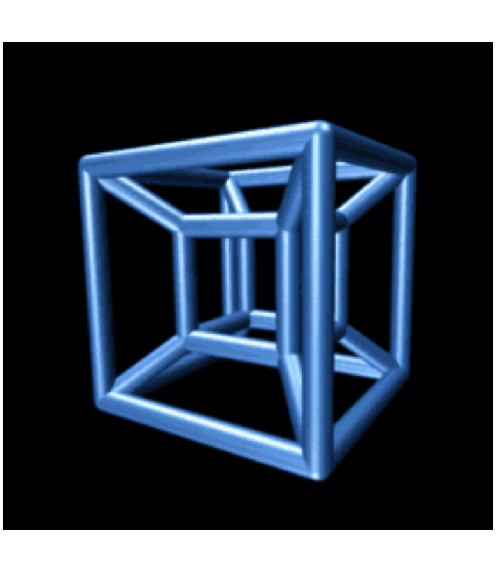


Möbius-szalag és Klein-kancsó. (Forrás: http://gyerek.jakd.hu/index.php?p=evfordulo&id=1950.)

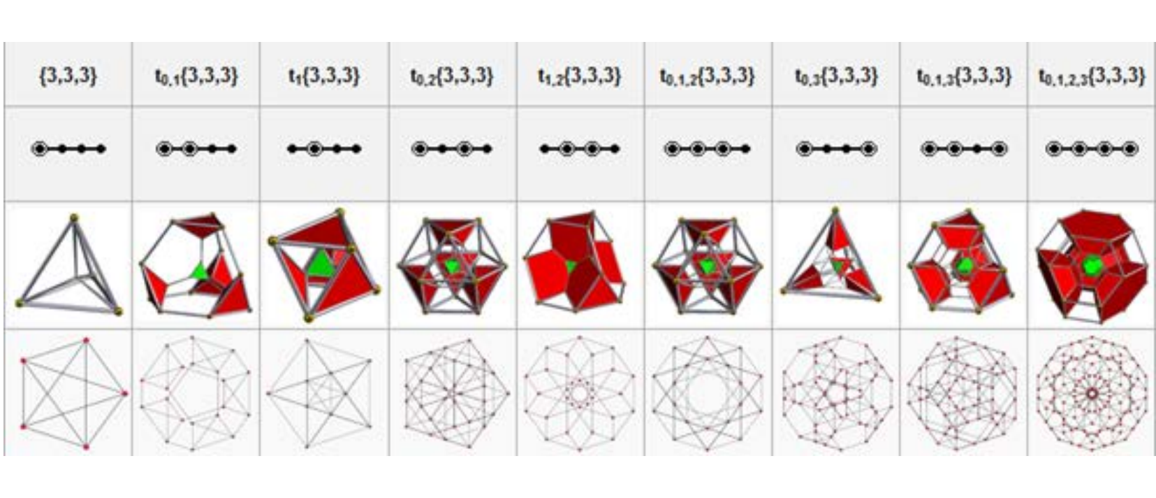


Az 5 szabályos poliéder. (Forrás: https://d138zd1ktt9iqe.cloudfront.net/media/seo_landing_files/types-of-polyhedron-2-1621858965.png.)

A dimenziók tárgyalásakor megemlít magasabb dimenziós objektumokat is.



Tesseract (négydimenziós hiperkocka). (Forrás: https://hu.m.wi https://hu.m.wikipedia.org/wiki/F%C3%A1jl:Tesseract.gif.)



Pentakoron. (Forrás: https://www.scientificlib.com/en/Mathematics/Geometry/images/UniformPolychora.png.)

A könyv lényegi célja miatt, tudniillik, hogy a laikus hétköznapi emberek is könnyen beleláthassanak az elméleti matematikusok munkájának gyümölcsébe, néhol szakadékot, legalábbis réseket vélünk felfedezni a pontos, egzakt tudományos fogalmak háttere és a szövegben felvázolt magyarázatok között. Ez persze nem feltétlenül von le a könyv értékéből, ha figyelembe vesszük, hogy mennyire közel hozza olvasóit a matematikához. Viszont a való életből vett példákban, amikhez kapcsolni igyekszik a bemutatott fogalmakat, néhol felfedezhetők pontatlanságok:

„Hiszen a hallásunkat egyetlen változóval, a hangmagassággal (frekvenciával) írjuk le, és mégis az emberek nap mint nap hoznak létre olyan új alkotásokat, amelyek a többitől különböző módon vezetnek végig bennünket röpke néhány perc alatt ezen az egydimenziós téren." (49. oldal)

Azért az emberi hallás ilyen figyelemreméltó leegyszerűsítése igen merész és erősen félrevezető!

Vagy az emberi látás kapcsán:

„ … a szemünkben háromféle színreceptor található, és ezek a fény más-más frekvenciatartományára érzékenyek. Amikor valamilyen színt érzékelünk, a piros, a zöld és a kék receptorok különböző intenzitással vibrálnak, ez pedig egy konkrét pontot jelöl ki a háromdimenziós szín-térben, és ennek eredményeként egy konkrét színt látunk." (49. oldal)

A könyv egy későbbi szakaszán erre a szerző fel is hívja azért a figyelmet, amikor a modellalkotásról ír:

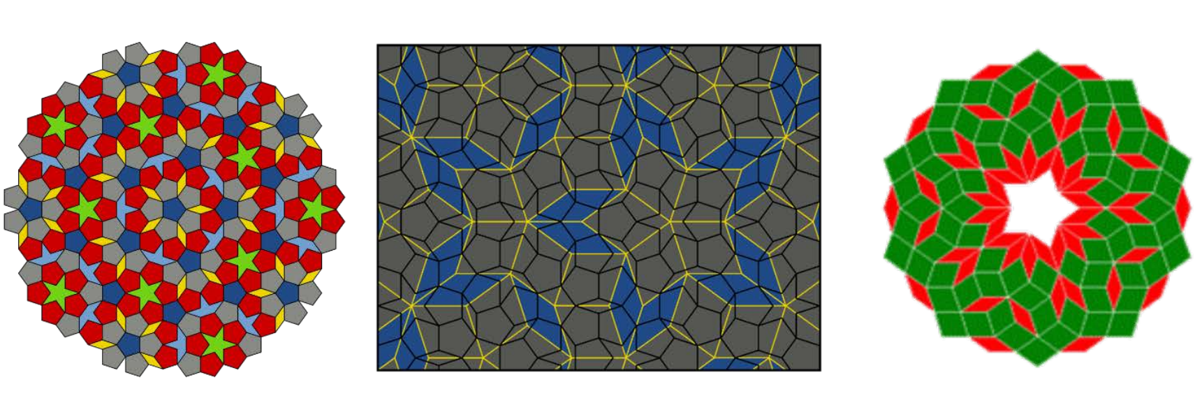
„Ez a lecsupaszító folyamat olykor túllő a célon, és a túlzottan leegyszerűsített modellek esetében nagyon óvatosnak kell lennünk a való világra levont következtetésekkel. Sokszor megesik, hogy kényelmes olyan feltételezésekbe bocsátkoznunk, amelyek nem teljesen igazak, vagy esetenként akár szemmel láthatóan hamisak." (202. oldal)

Azonban az olyan fontos fogalmakat, mint a végtelen, kontinuum vagy a különböző leképezések, rendkívül frappánsan sikerült megragadni és hétköznapi példákkal érzékeltetni.

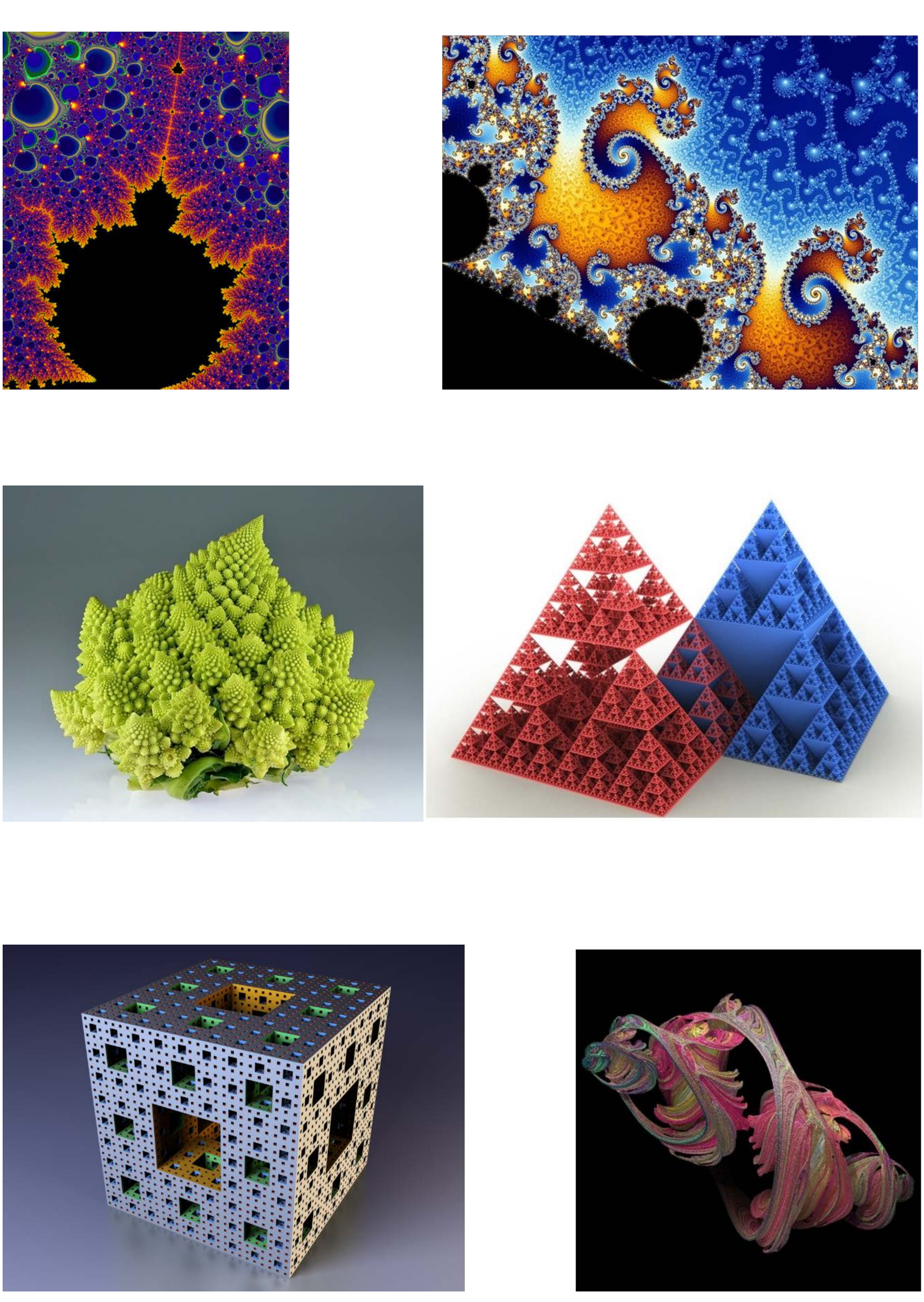
Az algebra területének bemutatását az absztrakció érzékeltetése után a struktúrák világával folytatja. A téma szerteágazó jellegét tekintve csupán ízelítőt ad, amolyan kedvcsinálót:

„Ne aggódj! Nem fogunk végigmenni az összes lehetséges struktúra teljes osztályozásán. Kinek van ennyi ideje? Hiszen rengeteg van belőlük, ami érthető is, mivel a „struktúra" igencsak tág fogalom." (123. oldal)

Utal fontos struktúrakategóriákra, mint a testekre, gyűrűkre, csoportokra, félcsoportokra, hálókra, hurkokra, grupoidokra, monoidokra stb. De picit konkrétabban főként a halmazokat, gráfokat (irányított- és súlyozott gráfokat, család- és játékfákat), valamint a szimmetria- és tapétacsoportokat mutatja be. Sajnos, a téma változatossága a terjedelmi korlátok miatt nem is igazán jön át az avatatlanabb olvasók számára, pedig igen komoly matematikai terület, és igen könnyen meg lehetne vele ragadni az érdeklődők fantáziáját!



Penrose-féle csempék. (Forrás: https://hu.wikipedia.org/wiki/Penrose-f%C3%A9le_csemp%C3%A9z%C3%A9s.)



Néhány fontosabb fraktál (önhasonló struktúra). Mandelbrot-halmaz, Pagodakarfiol, Sierpinski-piramis, Menger-szivacs, 3 dimenziós Júlia-halmaz.
(Forrás: https://elliptigon.com/insideout/, https://hu.wikipedia.org/wiki/Frakt%C3%A1l,

https://hu.m.wikipedia.org/wiki/F%C3%A1jl:Sierpinski_pyramid.png, https://hu.wikipedia.org/wiki/Menger-szivacs,

https://hu.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-halmaz#/media/F%C3%A1jl:Julia_set_(reversed_formula_3D).jpg.)

A könyv közepe a matematika történeti és filozófiai vonatkozásait mutatja be, igen szellemesen és stílusosan a Platón által kedvelt párbeszédes formában. Utalásokat vélünk felfedezni Hilbert munkásságára is, de például Gödel név szerint is meg lett említve.

Platón Raffaello festményén (Az Athéni iskola).
(Forrás: https://litera.hu/file/slides/1/162587/fe_800_500_platon.jpg.)

David Hilbert és Kurt Gödel. (Forrás: https://www.sapaviva.com/david-hilbert-2/, https://www.ias.edu/scholars/godel.)

A mélyebb filozofikus gondolatok után elég gyakorlatias vizekre evez, alkalmazott matematikai irányba kalauzolja az olvasót, miközben fokozatosan döbbenünk rá, hogy miért. A modellalkotás folyamatát, irányvonalait kezdi boncolgatni sok példán keresztül érzékeltetve a jelentőségét, miközben ott lebeg a kérdés a sorok között az elméleti matematika és az alkalmazott matematika kapcsolatáról. Vajon a tyúk volt előbb vagy a tojás? Az elméleti barangolások után találunk gyakorlati alkalmazásokat, vagy a gyakorlatból alkotjuk meg az elméleti összefüggéseket?

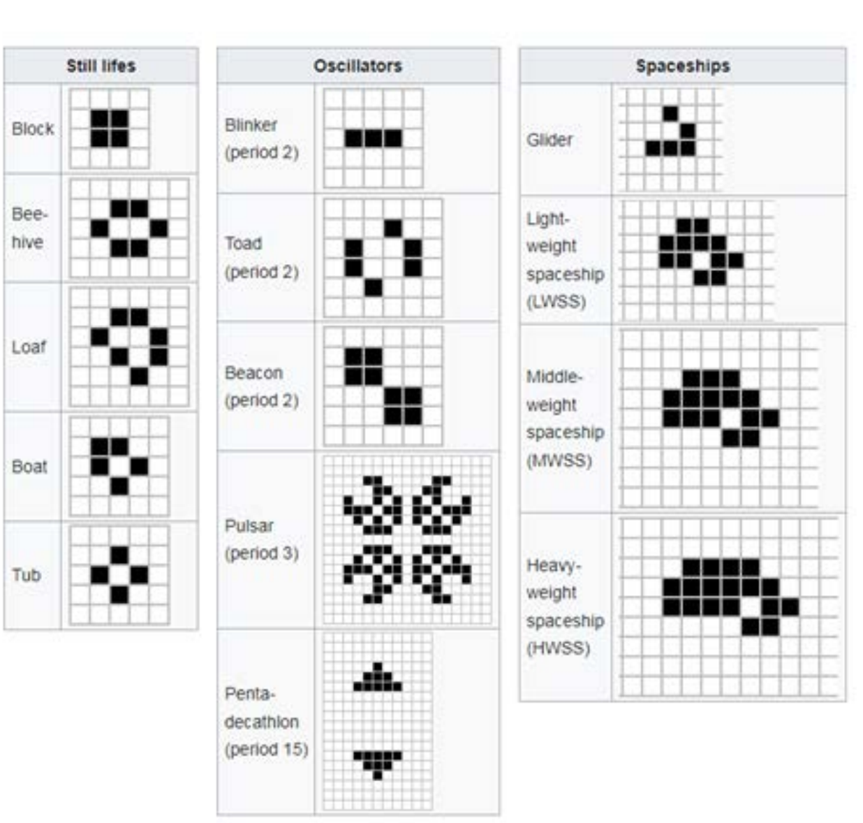
„Vajon a világ miért ennyire fogékony a matematikai modellekre?" (214. oldal)

Az elmélet és a gyakorlat párhuzamba állításából, a topológia, az analízis és az algebra fogalmi építőkockáinak modellbe rendezéséből jelentős filozófiai kérdés bontakozik ki.

„Lehet, hogy azért találunk lépten-nyomon matematikai mintázatokat a természetben, mert a világ matematikából készült. Lehet, hogy az egész világegyetem alapvetően matematikai természetű, és mégiscsak létezik Egy Igazi Modell, amely tökéletesen leírja a működését." (214. oldal)

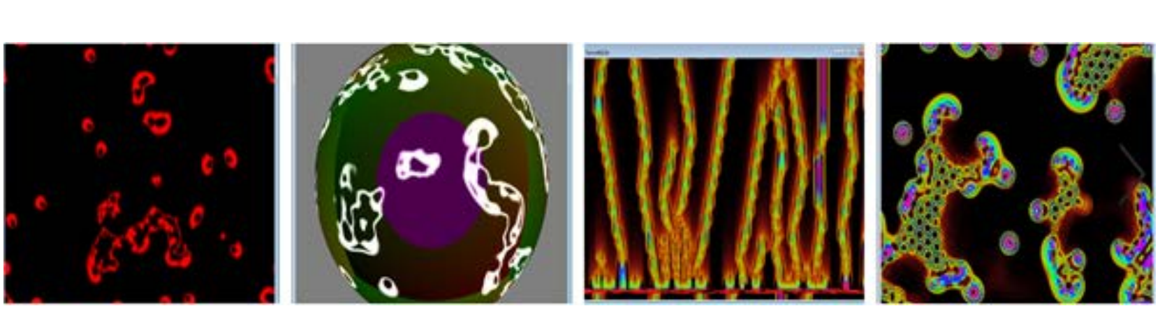
A világról végigvezetett gondolatmenetek, eszmefuttatások szimulációkban léptethetők végig, az egészen egyszerűtől a bonyolultabbakig, és máris eljutunk az automaták csodálatos világához! Először egyszerűbb: diszkrét egydimenziós, majd összetettebb példákat tár elénk Beckman, megalapozva John Horton Conway Életjátékának, az egyik leghíresebb automatának a bemutatását.

Alan Turing munkássága, kérdésfeltevései óriási hatással voltak Neumann Jánosra és kollégájára, Stanislaw Ulamra, aki kristályok növekedésének tanulmányozásakor kezdett diszkrét szimulációs rendszert használni. Neumann és Ulam alkotta meg a sejtautomatát, ami 1968-ban megihlette Conwayt. Ez vezetett el a méltán híressé vált diszkrét, kétdimenziós, Turing-teljes sejtautomatájának megalkotásához, ami az Életjáték nevet kapta a biológiai élet folyamatainak tanulmányozásához kapcsolódó párhuzamról (itt játszható).



Néhány jellegzetes mintázat Conway Életjátékából.
(Forrás: https://en.wikipedia.org/wiki/Conway%27s_Game_of_Life.)

A könyv még számos egyéb példát említ, többek között a SmoothLife nevű folytonos, kétdimenziós automatát. Ez gyakorlatilag a Conway-féle Életjáték közvetlen, folytonos kiterjesztése.



Néhány érdekes minta a SmoothLife automata projektből. Stephan Rafler munkája. (Forrás: https://sourceforge.net/projects/smoothlife/.)

A különböző egy- és kétdimenziós automaták felvezetése után egy rendkívül lényeges, nagyon komoly, mély témához érkezik a kötet, amelyben összegződik minden felvázolt fogalom, tükröződik az elméleti és alkalmazott matematika minden lényegesebb aspektusa, célja és szépsége. Mindannyiunk számára nagyon hangsúlyos kérdés, akár a matematika aktív művelőiről, akár érdeklődő laikusokról van szó, hiszen az Univerzum és az emberi lét hátterét hivatott elénk tárni (vagy legalábbis sejtetni), nem is akármilyen módon, hanem a részecskefizika standard modelljének folytonos, háromdimenziós automatája által.

„Ráadásul egy szép kerek, érthető történet is szőhető belőle, egy olyan valóságról, amely miriádnyi apró összetevő közös együttműködéséből születik, és ezt sokan gyönyörűnek, lenyűgözőnek tartják, ami alázatra tanít és ámulatba ejt." (241. oldal)

Noha *„rengeteg még a vakfolt"* (említi a 241. oldalon):

„Annyi azért bizonyos, hogy érdemes ***elgondolkodni*** *rajta egy kicsit."* (241. oldal)

Ha csak néhány ember elgondolkodik ezeket olvasva, ha a matematika szerepe és lényege pár ember számára új értelmet nyer, nyugodt szívvel mondhatjuk, hogy a könyv elérte célját!

Dworák Bence

okleveles villamosmérnök, mérnöktanár,

számítógépes és kognitív idegtudomány szakos hallgató (BME)

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon:

Rédei Miklós 2023. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Neumann János munkássága a kvantummechanika matematikai alapjainak területén

1. Bevezető megjegyzések

Neumann János tudományos munkásságának lényeges részét alkotják a kvantummechanika alapjainak területén folytatott vizsgálódásai. Lax Péter megítélése szerint Neumann Jánosnak ezen a területen elért eredményei fizikai Nobel-díjra érdemesítenék őt [11]. A terület iránt Neumann érdeklődése egész tudományos munkássága során megmaradt: A kvantummechanika alapjaival foglalkozó első (társszerzős) cikke 1928-ban jelent meg [10], és még 1954-ben is ezt a témát választotta elemzésre, amikor felkért előadást tartott a Nemzetközi Matematikai Kongresszuson [43], [18].

Neumann e területen végzett munkásságával kapcsolatban meg kell különböztetni két vonatkozást: egyfelől a kvantummechanika *matematikai* alapjainak tisztázásával kapcsolatos *tisztán matematikai* eredményeket, másfelől a kvantummechanika fogalmi-fizikai (és sokszor kifejezetten és tudatosan filozófiai) értelmezésére vonatkozó meggondolásokat. Ez a két vonatkozás azonban nem független. Neumann matematikai munkásságát általában is, de különösen a kvantummechanika számára fontos funkcionálanalízis területén, közvetlenül motiválták az empírikus tudományok problémái: Neumann úgy gondolta [44], hogy a matematika legabsztraktabb fogalmai is az empirikus tudományok azon igényéből fakadnak, hogy a tudományuk tárgyát kvantitatívan leírják. Ez a kvázi-empírikus matematikafelfogás ma sem univerzálisan elfogadott, sem a matematikusok, sem az elméleti fizikusok között. Neumann kortársai közül pl. sem Wigner, sem Gödel nem osztotta ezt a nézetet. (Neumann empírikus matematikafelfogásáról, és ennek a Wigner és Gödel által képviselt felfogásokhoz való viszonyáról a [20], [24], [6] és [25] dolgozatokban lehet bővebben olvasni).

Mivel Neumann matematikai eredményei a kvantummechanika matematikai alapjaival kapcsolatban nagyon szerteágazóak és összetettek, ez az írás csak arra tud vállalkozni, hogy azokat a legfontosabb neumanni eredményeket említse meg, amelyek a kvantummechanika általános matematikai szerkezete szempontjából lényegesek. Ez az általános matematikai szerkezet a nemkommutatív valószínűségszámítás.

Neumann munkássága ebből a szempontból két korszakra osztható: az első korszak az 1928–1932 közötti időszak. Neumann eredményei ebben az időszakban a kvantummechanika Hilbert-tér formalizmusának matematikai alapjait hozták létre. A második korszak az 1935 utáni idő. Ez utóbbi szakaszban az operátorgyűrűk (mai nevükön: Neumann-algebrák) elméletének megalkotásával jött létre a nemkommutatív mértékelmélet. A Neumann-algebrák elméletének keretei között nemkommutatív valószínűségi mértékterek léteznek. Ezek olyan kvantumfizikai rendszereket írnak le, amelyeknek leírása nem lehetséges a Hilbert-tér formalizmus nyújtotta nemkommutatív valószínűségszámítás keretei között.

E két korszakot megelőzi egy nagyon rövid periódus, amikor Neumann Hilberttel Göttingenben dolgozott egy a kvantummechanika alapjaival foglalkozó közös publikáción. A 2. fejezet röviden kitér erre a munkára. A 3. fejezet Neumannak a Hilbert-tér formalizmushoz való hozzájárulását foglalja össze, a 4. fejezetben Neumann néhány fontosabb gondolatát a Neumann-algebrák kvantummechanikai jelentőségével kapcsolatban említjük meg.

2. Az 1928-as Hilbert–Neumann–Nordheim-dolgozat

A [10] cikk Hilbert Göttingenben tartott előadásain alapul. A dolgozat két okból figyelemreméltó. Először amiatt, mert ez az első kísérlet a kvantummechanika axiomatikus felépítésére abban a szellemben, ahogyan Hilbert a fizikai elméletek axiomatizálásának programját megfogalmazta híres, Párizsban 1900-ban, a matematika legfontosabb nyílt problémáiról tartott előadásában [9] [49]. Nem nyilvánvaló azonban, hogy mit jelent axiomatikusan felépíteni egy természettudományos elméletet. Ennek megfelelően, az 1928-as cikkben a szerzők expliciten megfogalmazzák, mit értenek axiomatikus módszeren a fizikában. Erről az „opportunista, puha axiomatizmus”-nak nevezett axiomatizmusról a [21], [27] dolgozatokban lehet részleteket olvasni.

Az 1928-as cikk másik fontos tulajdonsága, hogy annak ellenére matematikailag nem kifogástalan, hogy a korszak vezető matematikai folyóiratában jelent meg. A szerzők ezzel teljesen tisztában vannak, amit jól mutat, hogy a dolgozat végén explicite meg is fogalmazzák ezt:

> „Azonban az itt elvégzett számítások matematikai szempontból […] meglehetősen nem-kielégítőek, mert sosem lehetünk biztosak abban, hogy az előforduló műveletek milyen mértékben megengedettek. Emiatt további részletezésüktől eltekintünk. Reméljük azonban, hogy egy más alkalommal visszatérhetünk ezekre a kérdésekre.” [10][30. old.]

És valóban: Neumann visszatér ezekre a kérdésekre, és tisztázza őket három alapvető fontosságú dolgozatban, amelyekben már egyedüli szerző [36], [38], [37]. Ezek a cikkek azok, amelyekben matematikailag kielégítő formában jelenik meg az, amit a mai napig a „kvantummechanika Hilbert-tér fomalizmusának” hívunk. Ez a három cikk az alapja Neumann 1932-ben megjelent könyvének [41], ami a Hilbert-tér formalizmusnak első szisztematikus és matematikailag precíz összefoglalása.

3. 1928–1932: Neumann hozzájárulása a kvantummechanika Hilbert-tér formalizmusának kidolgozásához

Mai terminológiában és modern jelölésben a kvantummechanika Hilbert-tér formalizmusa matematikai szempontból egy speciális típusú nemkommutatív valószínűségelmélet [28]. Ez azt jelenti, hogy a klasszikus, Kolmogorov-féle valószínűségi mértéktér $(X,\mathcal{S},p)$ helyébe (ahol X az elemi események halmaza, $\mathcal{S}$ egy Boole-algebra X-en, p valószínűségi mérték $\mathcal{S}$-en) a $(\mathcal{H},\mathcal{P}(\mathcal{H}),\phi)$ struktúra lép, ahol

- $\mathcal{H}$ egy absztrakt (komplex) Hilbert-tér,
- $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér projektorhálója (Hilbert-háló),
- ϕ egy $\mathcal{P}(\mathcal{H})$-n értelmezett additív mérték a $[0,1]$ intervallumba.

Továbbá:

- A klasszikus (valós értékű) véletlen változók kvantumos megfelelői a projektormértékek: az E Boole-algebra homomofizmusok a valós számok Borel-halmazalgebrájából a $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ projektorhálóba.
- Minden projektormértéknek megfelel egy (nem föltétlenül korlátos) önadjungált operátor és fordítva: Minden Q önadjungált operátor meghatároz egy E^Q projektormértéket („Spektráltétel”).
- Minden ϕ kvantumállapot $\phi(x)=\mathrm{Tr}(\rho x)$ alakú egy nemnegatív, egységnyomú ρ operátorral (sűrűségmátrix) („Gleason-tétel”).

Ezt a valószínűségelméletet azért hívjuk nemkommutatívnak, mert a projektorok szorzása nemkommutatív művelet, és a Hilbert-háló kommutatív projektorok által generált részhálója disztributív részháló (Boole-algebra).

Ennek a matematikai struktúrának a fizikai interpretációja: Ha a fizikai rendszer a ϕ-vel leírt állapotban van, akkor annak valószínűségét, hogy a Q operátorral reprezentált fizikai mennyiség értéke a d valós Borel-halmazba esik, a következő formula adja meg:

$$\phi(E^Q(d))=\mathrm{Tr}(\rho E^Q(d)) \qquad (1)$$

Az itt leírt Hilbert-tér formalizmus kulcsfontosságú fogalmait és eredményeit (kivéve a Gleason-tételt) Neumann alkotta meg: Neumann első dolgozata [36] létrehozta az absztrakt Hilbert-tér fogalmát, axiomatikusan rögzítve a konkrét Hilbert-tereket alkotó függvényterek lényeges strukturális-geometriai tulajdonságait (megkövetelve még az absztrakt Hilbert-terektől a szeparabilitást is – ezt ma már nem tekintjük a Hilbert-tér definíciója részének). A [36] cikk, és az ebben már idézett, de csak később megjelent [39] dolgozat lényegében megalkotja a projektormérték fogalmát, és bebizonyítja a spektráltételt.

A [38], [37] dolgozatok további fontos eredményei:

(i) A tiszta kvantumállapotok definíciója és annak megmutatása, hogy az egydimenziós projektorok mint sűrűsegmátrixok adják a tiszta állapotokat.

(ii) Egy Hamilton-operátorhoz és véges hőmérséklethez tartozó Gibbs-állapot definíciója.

(iii) A sűrűségmátrix entrópiájának (kvantumentrópia) bevezetése és ezáltal a kvantumstatisztikus mechanika alapjainak megalkotása.

Könyvében [41] Neumann továbbá megmutatja, hogy a tiszta kvantumállapotok sem szórásmentesek: *nem igaz*, hogy $\phi(P^2)-\phi(P)^2=0$ minden P projektorra, akkor sem, ha ϕ tiszta állapot. Emiatt nem lehetséges úgy gondolni a kvantumállapotokra, hogy azok szórásmentes állapotok kombinációi – ellentétben a klasszikus valószínűségszámítással, ahol az összes valószínűségi mértékek konvex halmazának extremális pontjai 0-1 értékű (azaz szórásmentes) mértékek. Ezt a tényt Neumann úgy értelmezi, hogy nem léteznek „rejtett paraméterek” – olyan fizikai mennyiségek, amelyek értékeinek rögzítésével fizikai rendszerek olyan statisztikus sokaságát lehet létrehozni, amelyekben a kvantum-megfigyelhető mennyiségek mindegyikének éles értéke van. Neumann ezen értelmezése kiindulópontja lett egy szerteágazó, ellentmondásos, a kvantummechanika alapjait, értelmezését illető filozófiai színezetű kutatásnak, amelynek főbb irányait áttekinteni már 50 éve is csak egy könyvben lehetett [2] (egy nagyon rövid összefoglalást ad [17] 9. fejezete).

Neumann eredményei kiküszöbölték az 1928-as dolgozatban [10] megfogalmazott axiomatizálás matematikailag nem kielégítő voltát, amely a Hilbert-téren értelmezett nemkorlátos lineáris önadjungált operátorok spektrálelméletének kidolgozatlanságából fakadt. Azon operátorok némelyike (pl. energia, helyzet, impulzus) amelyek fontos fizikai mennyiségek matematikai reprezentánsai, nem korlátos, és spektrumuk tartalmaz olyan valós számokat, melyek nem sajátértékek. Emiatt az ilyen operátorokkal való műveletek, és speciálisan ezen operátorok spektrális felbontásának meghatározása nem egyszerű, nehéz feladat. A matematikailag nem precíz elméleti fizikában ezt a problémát Neumann korában úgy kezelték, hogy megengedtek „nem igazi” sajátértekeket, amelyekhez „nem igazi” sajátfüggvények tartoznak. Ilyen volt a Dirac-féle delta függvény, ami nem volt matematikailag értelmes objektum. A kvantummechanika tehát lényegében matematikai ellentmondásokat tartalmazott. Ezeket az ellentmondásokat Neumann eredményei kiküszöbölték a kvantummechanikából.

4. Túl a Hilbert-tér formalizmuson

Nem sokkal a kvantummechanika Hilbert-tér formalizmusát összefoglaló könyvének megjelenése után Neumann arra az álláspontra jutott, hogy a Hilbert-tér formalizmus nem a legalkalmasabb matematikai keret a kvantummechanika számára. Ezt expliciten megfogalmazta Birkhoffhoz (minden valószínűség szerint 1935-ben írt) írt levelében:

> „Szeretnék egy vallomást tenni, ami erkölcstelennek tűnhet: Már nem hiszek teljesen a Hilbert-térben.” [47]

Sokrétűek az okai annak, hogy Neumann elvesztette a hitét a Hilbert-tér formalizmusban. Ezekben a technikai és interpretációs vonatkozások szorosan összefonódnak, ezekről részletesen a [16], [23], [19] dolgozatokban lehet olvasni. A történeti részletek mellőzésével, összefoglalásszerűen a következőket lehet mondani arról, hogy mai szempontból visszatekintve mi annak a lépésnek a matematikai tartalma és jelentősége, amit Neumann tett akkor, amikor a kvantummechanika Hilbert-tér formalizmusától eltávolodott 1935-ben.

Neumann 1935-ben már dolgozott az operátorgyűrűk (mai nevükön: Neumann-algebrák) elméletén J. Murray-vel. A Neumann-algebrák egy Hilbert-téren értelmezett összes korlátos lineáris operátorok algebrájának olyan részalgebrái, melyek zártak egy olyan topológiában, amely gyengébb mint az uniform topológia. Az ilyen algebrákkal kapcsolatos eredményeket négy (ma már klasszikus) cikkben publikálták [12], [13], [42] [14]. Ezeknek a cikkeknek a jelentősége a kvantummechanika – illetve általánosabban a fizika – számára az, hogy a Neumann-algebrák elmélete nemkommutatív mértékelméletül szolgál, amelynek keretein belül különböző típusú nemkommutatív valószínűségi mértékterek léteznek – hasonlóan ahhoz, ahogy a klasszikus mértékelmélet keretéül szolgál a klasszikus valószínűségelméletnek a valószínűségelmélet Kolmogorov-féle axiomatizálásában. A „típus” itt úgy értendő, hogy a *véges-végtelen* és *diszkrét-folytonos* jelzőpárok négy lehetséges kombinációjából adódó négyfajta klasszikus mértéktértípusnak a nemkommutatív megfelelőjét alkotják a Murray–Neumann-osztályozás szerinti különböző típusú (faktor) Neumann-algebrák. Az alábbi táblázat mutatja ezeket a klasszikus mértéktér típusokat, az utolsó oszlopban a megfelelő Murray–Neumann-típusokkal:

$X=\{x_1,\dots x_N\}$,	$p(x_i)=\frac{1}{N} \quad (i=1,\dots N)$	*diszkrét, véges*	I_N
$X=\{x_1,\dots x_N,\dots\}$,	$p(x_i)=1 \quad (i=1,\dots N)$	*diszkrét, végtelen*	I_∞
$X=[0,1]$,	$p=$ Lebesgue-mérték $[0,1]$-en	*folytonos, véges*	II_1
$X=\mathbb{R}$,	$p=$ Lebesgue-mérték $\mathbb{R}$-en	*folytonos, végtelen*	II_∞

Létezik még egy ötödik fajta Neumann-algebra is, a III típus, ez utóbbi egészen különleges, olyannyira, hogy az osztályozás publikálásakor nem is volt ismert példa ilyen Neumann-algebrára. Neumannak csak 1940-ben sikerült az első III típusú faktort megkonstruálnia [42]. Az I_N és I_∞ típusok a kvantummechanika Hilbert-tér formalizmusát adják: Az ilyen típusú Neumann-algebrák $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ alakúak, ahol $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-téren értelmezett összes operátorok algebrája. Az ilyen algebrák projektorainak hálója azonos a Hilbert-hálóval. A II_1 és II_∞ típusok teljesen újnak számítottak 1935-ben. A nem I_N vagy I_∞ típusú $\mathcal{M}$ Neumann-algebrák projekcióinak $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ hálói egy normális ϕ állapottal olyan $(\mathcal{P}(\mathcal{M}),\phi)$ kvantumvalószínűségi tereket alkotnak, amelyek strukturálisan lényegesen különböznek a Hilbert-tér formalizmus valószínűségi terétől: pl. nem atomosak (nincs bennük legkisebb, nem nulla valószínűségű elem). Mint ahogy a klasszikus valószínűségszámításban is előfordulhat, hogy bizonyos jelenségek leírásához szükség van nem diszkrét valószínűségi mértékterekre, bizonyos kvantumfizikai rendszerek sem írhatók le I_N vagy I_∞ típusú algebrák definiálta kvantumvalószínűségi mértékterekkel – azaz a Hilbert-tér formalizmuson belül. Tipikus ilyen rendszerek a kvantumterek [8] és a kvantumstatisztikus mechanikai rendszerek termodinamikai limeszben [4], [5]. Neumann munkássága az operátoralgebrák területén az 1930-as évek második felében tehát megalkotta azokat a matematikai eszközöket, amelyek a kvantumelmélet e későbbi fejleményei számára kulcsfontosságúnak bizonyultak [15].

Neumann ezeket az évtizedekkel későbbi feljeményeket természetesen nem láthatta. Ő úgy gondolta (nagyjából 1935-től), hogy a II_1 típusú Neumann-algebrák a kvantummechnika számára megfelelőbb matematikai keret, mint az I_∞ Neumann-algebrák, azaz a Hilbert-tér formalizmus:

> „… erősen hajlok arra, hogy a Hilbert-téren értelmezett összes korlátos operátorok gyűrűjét (a jelölésünkben a I_∞ eset) kevéssé vegyem komolyan, és a II_1 esetet komolyabban vegyem, amikor a kvantummechanika végső alapjairól gondolkodom.” [48]

Egyebek mellett amiatt gondolta Neumann így, mert úgy látta, hogy a II_1 nyújtotta keretben nincsenek jelen bizonyos matematikai patológiák, amelyeket a Hilbert-tér fomalizmusban látott. Ilyen patológia, hogy egy Hilbert-téren értelmezett összes nem korlátos önadjungált operátorok halmazában az algebrai műveletek nem végezhetők el korlátlanul, míg az összes olyan nem korlátos önadjungált operátor, amelynek spektrálprojektorai egy II_1 algebrába tartoznak, jól viselkedik algebrailag. Továbbá a Tr nyom-funkcionál nem korlátos az I_∞ esetben, míg egy II_1 típusú Neumann-algebrán létezik véges nyom τ (nyomszerű állapot). Ennek az a jelentősége, hogy az (1) formulában Tr nem értelmezhető valószínűségként a valószínűség Mises-féle értelemben vett [34], [35] relatív gyakorisági interpretációja mellett, mert egy statisztikus sokaságon vett relatív gyakoriságok 1-nél kisebbek. Ez azért volt probléma Neumann számára, mert a [36], [38], [37] dolgozatokban (és a [41] könyvben is) Neumann az (1) formula által adott valószínűséget olyan feltételes valószínűségként értelmezte, amely a Tr a priori mérték kondícionálásának eredményeképp adódik, és Neumann a valószínűséget Mises szellemében relatív gyakoriságként fogta fel.

Ezt az ellenmondást Neumann úgy oldja meg, hogy a Tr-rel adott valószínűségeket *relatív* valószínűségekként értelmezi, nem pedig *abszolút* valószínűségekként. A relatív valószínűség tartalmát nem fejti ki szisztematikusan általában, hanem a következő példán világítja meg [38], [41][310 old.]: Képzeljünk el egy olyan mennyiséget, amely bármely valós értéket egyenlő valószínűséggel vesz fel. Ekkor annak valószínűsége, hogy ezen mennyiség értéke egy véges intervallumba esik, nulla kell legyen, ha megköveteljük a valószínűségi mértéktől, hogy 1-re normált legyen. De ha ezt tesszük, nem kapunk információt arról, mi a viszonya annak a két valószínűségnek, hogy a mennyiség két különböző intervallumba esik. Ez utóbbi információ azonban fontos lehet, és ezt az információt a két intervallum hosszának viszonyát is tartalmazó nem korlátos hosszmérték tartalmazza.

Hogy ezzel a megoldással Neumann nem volt teljesen elégedett, azt egyrészt éppen az mutatja, hogy a II_1 típusú Neumann-algebrák definiálta nemkommutatív valószínűségszámítást alkalmasabbnak találta, mint a Hilbert-tér formalizmust, mert előbbiben létezik egy elvileg relatív gyakoriságként értelmezhető (apriori) valószínűségeket szolgáltató nyom. Másrészt az 1930-as évek közepétől Neumann feladta a kvantumvalószínűségek relativ gyakorisági értelmezését. Azt a munkát [45], amelyben ez a gondolat van kifejtve, Neumann nem publikálta, az töredékben maradt. A relatív gyakorisági értelmezés helyett Neumann egy – részletesen ki nem fejtett – logikai értelmezést lát alkalmasnak, amiről az 1954-es előadásában [43] ezeket mondja:

> „… azokban a rendszerekben, amelyek a kvantumelmélet logikai háttereként szolgálnak, az igaz, hogy amint a logika szokásos fogalmait rögzítjük valamely izomorf transzformációra nézve, a teljes valószínűségelmélet is rögzítődik. […] Amit állítok, az nem más, mint az, hogy a kvantummechanikában az a priori valószínűség fogalma már a legelején egyértelműen adva van. […] Ez azonban azt jelenti, hogy létezik egy formális mechanizmus, amelyben a logika és a valószínűségelmélet a kezdettől fogva egyszerre jön létre és egyszerre származtatható.” [43]

A fenti idézetbeni gondolat teljesen érthető, ha a II_1 típusú (faktor) $\mathcal{N}$ Neumann-algebra által definiált nemkommutatív valószínűségelméletet $(\mathcal{P}(\mathcal{N})),\tau)$ tekintjük: A $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ projektorháló a kvantumos analógja a Boole-algebrának mint klasszikus kijelentéslogikának – ez az a struktúra, amit Birkhoff és Neumann kvantumlogikának neveznek híres cikkükben [3], és amely önálló diszciplínává terebélyesedett kutatási területet alapozott meg [7], [23]. Az $\mathcal{N}$ algebra belső automorfizmusai (amiket az $\mathcal{N}$ algebra unitér elemei definiálnak), izomorfiznusai a $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ hálónak, és az $\mathcal{N}$-en a τ nyom az a korlátos funkcionál, amit *egyértelműen* meghatároz az a tulajdonság, hogy invariáns az unitér transzformációra.

Jóllehet $(\mathcal{P}(\mathcal{N}),\tau)$ ilymódon kitüntetett nemkommutatív valószínűségelmélet, Neumann gondolata, hogy ez a kvantumelmélet elégséges alapja lehet, fenntarthatatlannak – Araki megfogalmazásában utópiának [1] – bizonyult. Bizonyos kvantumjelenségek leírásához bizonyíthatóan II és III típusú Neumann-algebrákra van szükség (pl. kvantumstatisztikus fizikai rendszerek termodinamikai limeszben való leírásához [4], [5], vagy a relativisztikus kvantumtér-elméletben [8]). A kanonikus (Heisenberg-féle) felcserélési reláció sem reprezentálható egy II_1 típusú Neumann-algebrán [33] – ellentétben a Hilbert-tér formalizmussal, ahol a felcserélési reláció Schrödinger-reprezentációja nemcsak hogy létezik, de egyértelmű, amint azt épp Neumann bizonyította be [40].

Neumann érdeklődése az 1940-es évektől egyre inkább az alkalmazott matematika és a számítógéptudomány felé fordult, összefüggésben a világtörténelmi eseményekkel. Szisztematikus kutatást a kvantummechanika alapjainak területén sem végzett már ebben az időben, bár intellektuális érdeklódése fennmaradt a terület iránt. Úgy gondolta, hogy a kvantumlogika és a kvantum-valószínűségelmélet egyidejű keletkezése, amire a fentebb idézett 1954-es előadásában utal, axiomatikus kiépítést igényelne, és levelezéséből [46] úgy tűnik, hogy azokban a szabad perceiben, amiket a háborúval (pl. a Los Alamos projekttel) kapcsolatos munkája megengedett, foglalkozott is ezzel a problémával. De ezt a munkát sosem fejezte be. Ezt illető csalódásának így adott kifejezést egy levelében:

> „Talán, ha nem szakítanának félbe állandóan utazások és más kötelezettségek, amelyek a még mindig létező háborús munkából fakadnak, képes lettem volna megcsinálni – jóllehet még ebben sem vagyok biztos. Ahogy a dolgok állnak, a munkám minden vonatkozásban kárt szenvedett…” [46]

Az utókor is csak azt mondhatja: kár, hogy nem tudhatjuk, hogyan dolgozta volna ki Neumann ezt a gondolatot. De Neumann eredményei a kvantummechanika matematikai alapjainak területén enélkül is kivételes jelentőségűek.

A Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal támogatásával (K-134275). Köszönet a *Hamburg Institute for Advanced Study (HIAS)* intézetnek, ahol az írás készült.

Rédei Miklós professzor
Department of Philosophy, Logic and Scientific Method
London School of Economics and Political Science

Irodalomjegyzék

[1] H. Araki. Some of the legacy of John von Neumann in physics: Theory of measurement, quantum logic and von Neumann algebras in physics. In J. Glimm, J. Impagliazzo, and I. Singer, editors, *The Legacy of John von Neumann*, volume 50 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, pages 136–139. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[2] F. J. Belinfante. *A Survey of Hidden-variable Theories*. Pergamon Press, Oxford, 1973.

[3] G. D. Birkhoff and J. von Neumann. The logic of quantum mechanics. *Annals of Mathematics*, 37:823–843, 1936. Reprinted in [29], No. 7.

[4] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, volume I. C^*-algebras and von Neumann algebras. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1979.

[5] O. Bratteli and D. W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, volume II. Equilibrium States, Models in Quantum Statistical Mechanics. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1981.

[6] F. Csaba and M. Rédei. „Az intuicionizmus immár semmilyen alapon nem utasítható el” Neumann János Gödel nemteljességi tételeiről és a matematika természetéről. *Matematikai Lapok*, 11:16–25, 2006.

[7] M. L. Dalla-Chiara, R. Giuntini, and M. Rédei. The history of quantum logic. In D. M. Gabbay, editor, *Handbook of History of Logic*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2007.

[8] R. Haag. *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*. Springer Verlag, Berlin and New York, 1992.

[9] D. Hilbert. Mathematical problems. Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900. In F. E. Browder, editor, *Mathematical Developments Arising From Hilbert Problems*, volume 28 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, pages 1–34. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1983.

[10] D. Hilbert, J. von Neumann, and L. Nordheim. Über die Grundlagen der Quantenmechanik. *Mathematische Annalen*, 98:1–30, 1928. Received on April 4, 1927. Reprinted in [30] No. 7.

[11] P. Lax. Foreword. In [22], 2005.

[12] F. J. Murray and J. von Neumann. On rings of operators. *Annals of Mathematics*, 37:116–229, 1936. Reprinted in [31] No. 2.

[13] F. J. Murray and J. von Neumann. On rings of operators, II. *American Mathematical Society Transactions*, 41:208–248, 1937. Reprinted in [31] No. 3.

[14] F. J. Murray and J. von Neumann. On rings of operators, IV. *Annals of Mathematics*, 44:716–808, 1943. Reprinted in [31] No. 5.

[15] D. Petz and M. Rédei. John von Neumann and the theory of operator algebras. In F. Brody and T. Vámos, editors, *The Neumann Compendium*, volume I of *World Scientific Series of 20th Century Mathematics*, pages 163–181. World Scientific, Singapore, 1995.

[16] M. Rédei. Why John von Neumann did not like the Hilbert space formalism of quantum mechanics (and what he liked instead). *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 27:1309–1321, 1996.

[17] M. Rédei. *Quantum Logic in Algebraic Approach*, volume 91 of *Fundamental Theories of Physics*. Kluwer Academic Publisher, 1998.

[18] M. Rédei. „Unsolved problems in mathematics” J. von Neumann's address to the International Congress of Mathematicians Amsterdam, September 2–9, 1954. *The Mathematical Intelligencer*, 21:7–12, 1999.

[19] M. Rédei. Von Neumann's concept of quantum logic and quantum probability. In M. Rédei and M. Stöltzner, editors, *John von Neumann and the Foundations of Quantum Physics*, Institute Vienna Circle Yearbook, pages 153–172. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[20] M. Rédei. John von Neumann 1903-1957. *European Mathematical Society Newsletter*, pages 17–20, March 2004.

[21] M. Rédei. John von Neumann on mathematical and axiomatic physics. In P. Budinich G. Boniolo and M. Trobok, editors, *The Role of Mathematics in Physical Sciences: Interdisciplinary and Philosophical Aspects*, pages 43–54. Springer, Dordrecht, 2005.

[22] M. Rédei, editor. *John von Neumann: Selected Letters*, volume 27 of *History of Mathematics*, Rhode Island, 2005. American Mathematical Society and London Mathematical Society.

[23] M. Rédei. The birth of quantum logic. *History and Philosophy of Logic*, 28:107–122, May 2007.

[24] M. Rédei. Parallels and divergencies: Gödel and von Neumann. *Magyar Filozófiai Szemle*, 62(4):168–181, 2018.

[25] M. Rédei. On the tension between physics and mathematics. *Journal for General Philosophy of Science*, 51:411–425, 2020. open access: `https://link.springer.com/article/10.1007/s10838-019-09496-0`.

[26] M. Rédei and M. Stöltzner, editors. *John von Neumann and the foundations of quantum physics*. Institute Vienna Circle Yearbook. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[27] M. Rédei and M. Stöltzner. Soft axiomatization: John von Neumann on method and von Neumann's method in the physical sciences. In E. Carson and R. Huber, editors, *Intuition and the Axiomatic Method*, volume 70 of *Western Ontario Series in Philosophy of Science*, pages 235–249. Springer, Dordrecht, 2006.

[28] M. Rédei and S. J. Summers. Quantum probability theory. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 38:390–417, 2007.

[29] A. H. Taub, editor. *John von Neumann: Collected Works*, volume IV. Continuous Geometry and Other Topics, New York and Oxford, 1961. Pergamon Press.

[30] A. H. Taub, editor. *John von Neumann: Collected Works*, volume I. Logic, Theory of Sets and Quantum Mechanics, New York and Oxford, 1961. Pergamon Press.

[31] A. H. Taub, editor. *John von Neumann: Collected Works*, volume III. Rings of Operators, New York and Oxford, 1961. Pergamon Press.

[32] A. H. Taub, editor. *John von Neumann: Collected Works*, volume II. Operators, Ergodic Theory and Almost Periodic Functions in a Group, New York and Oxford, 1961. Pergamon Press.

[33] G. Valente. John von Neumann's mathematical „Utopia” in quantum theory. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 39:860–871, 2008.

[34] R. von Mises. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, 5:52–99, 1919.

[35] R. von Mises. *Probability, Statistics and Truth*. Dover Publications, New York, 2nd edition, 1981. Originally published as „Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit” (Springer, 1928).

[36] J. von Neumann. Mathematische Begründung der Quantenmechanik. *Göttinger Nachrichten*, pages 1–57, 1927. Communicated by M. Born on May 20, 1927. Reprinted in [30] No. 9.

[37] J. von Neumann. Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten. *Göttinger Nachrichten*, pages 273–291, 1927. Communicated by M. Born on November 11, 1927. Reprinted in [30] No. 11.

[38] J. von Neumann. Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik. *Göttinger Nachrichten*, pages 245–272, 1927. Communicated by M. Born on November 11, 1927. Reprinted in [30] No. 10.

[39] J. von Neumann. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. *Mathematische Annalen*, 102:49–131, 1930. Received by the journal on December 15, 1928. Reprinted in [32] No. 1.

[40] J. von Neumann. Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen operatoren. *Mathematische Annalen*, 104:570–578, 1931. Reprinted in [32] No. 7.

[41] J. von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer Verlag, Berlin, 1932. English translation: Mathematical Foundations of Quantum Mechanics (Princeton University Press, Princeton) 1955.

[42] J. von Neumann. On rings of operators, III. *Annals of Mathematics*, 41:94–161, 1940. Reprinted in [31] No. 4.

[43] J. von Neumann. „Unsolved problems in mathematics” J. von Neumann's address to the International Congress of Mathematicians, Amsterdam, September 2–9, 1954. in [26], 1954.

[44] J. von Neumann. The Mathematician. In A. H. Taub, editor, *John von Neumann: Collected Works*, volume I, pages 1–9. Pergamon Press, New York and Oxford, 1961. Originally published in *Works of the Mind* Vol. I no. 1 (University of Chicago Press, Chicago, 1947), 180–196.

[45] J. von Neumann. Quantum logic (strict- and probability logics). In A. H. Taub, editor, *John von Neumann: Collected Works*, volume IV. Continuous Geometry and Other Topics, pages 195–197. Pergamon Press, New York and Oxford, 1961. Unfinished manuscript, reviewed by A. H. Taub.

[46] J. von Neumann. Letter to F. B. Silsbee, July 2, 1945. In M. Rédei, editor, *John von Neumann: Selected Letters*, volume 27 of *History of Mathematics*, pages 218–220. American Mathematical Society and London Mathematical Society, Rhode Island, 2005. Original in: von Neumann Papers, Library of Congress.

[47] J. von Neumann. Letter to G. Birkhoff, November 13, 1935 (?). In M. Rédei, editor, *John von Neumann: Selected Letters*, volume 27 of *History of Mathematics*, pages 59–64. American Mathematical Society and London Mathematical Society, Rhode Island, 2005. Original in: Papers of G. Birkhoff, Harvard University Archives, Accession 13493.

[48] J. von Neumann. Letter to G. Birkhoff, November 6, 1935 (?). In M. Rédei, editor, *John von Neumann: Selected Letters*, volume 27 of *History of Mathematics*, pages 52–58. American Mathematical Society and London Mathematical Society, Rhode Island, 2005. Original in: Papers of G. Birkhoff, Harvard University Archives, Accession 13493.

[49] A. S. Wightman. Hilbert's 6th problem. In F. E. Browder, editor, *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, volume 28 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, pages 147–240. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1983.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon:

Simonovits Miklós 2023. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

T. Sós Vera

Amikor legutóbb T. Sós Verát 90. születésnapján köszönthettem, azzal kellett kezdenem, hogy Verát 1962-ben, érettségizőként ismertem meg, amikor az olimpiai szakkör vezetője, Reiman István (nagyon kedves tanárunk) elhívta őt, hogy tartson előadást nekünk. [1]

Én mindig nagyon örültem annak, hogy a környezetemben nagyon sok kiemelkedő személyiség volt, kiemelkedően okosak, kiemelkedően tehetségesek, és még sok más szempontból is kiválóak. Amikor rájuk emlékezünk, akkor mindig vigyáznunk kell arra, hogy személyesek legyünk, de róla beszéljünk, írjunk, ne saját magunkról.

Veráról beszélve legalább négy dolgot kell kiemelnünk: kiváló matematikus, kiváló egyetemi oktató, kiváló és nagyon-nagyon megnyerő ember volt. Amikor elsőéves hallgató lettem, heti 9 analízis és 2 kombinatorika órát tartott matematika szakos évfolyamunknak. Amit ott tanultunk, azért csak hálásak lehettünk: hihetetlenül sokat tanultunk tőle. Évfolyamunknak és még jó néhány évfolyamnak a legkedveltebb oktatója volt. (Lehet, hogy ma már mulatságosnak tűnik, de szavaztunk erről, és egyértelműen Vera nyert.) Kiemelendő az is, hogy nem csak jól választotta meg a tananyagot, de mert, merészelt nehéz anyagot is választani. Amikor elsőéves analízist oktatott, levezette a láncgörbe alakját, azaz, implicite megoldotta nekünk a megfelelő differenciálegyenletet. Sokszor egészen új matematikai területeket Vera vezetett be a magyar matematikába. Abban is döntő szerepe volt, hogy mi került bele a tananyagunkba diszkrét matematikából.

Itt némi magyarázattal is tartozom. A háború után az egyetemi rendszer a világ nagyon sok országában, így Magyarországon is döntően megváltozott. Nagyon megnőtt például az egyetemre felvettek száma.[2] Később, 1956 után egy második átalakulás is megfigyelhető volt: a tanári szakok mellett megjelentek a kutató szakok is. Ez azt is jelentette, hogy míg korábban matematika-fizika tanárokat képeztek, akik oktatásuk közepén szakosodtak tanároknak, vagy matematikusoknak, vagy fizikusoknak, 1957-ben beindították a fizikusképzést. Ez azt jelentette, hogy az érettségi után rögtön fizikusoknak vették fel a diákok egy részét. 1961-ben beindították a matematikusképzést[3], illetve például 1963-ban a biológusképzést is (korábban induláskor csak a megfelelő tanárképzés létezett). Számunkra ez két szempontból is fontos volt. Vera tanította például az induló fizikus szakot, később minket, matematikus szakosokat is, és sok évig a tanár szakos hallgatókat is, pl. analízisre. Az új képzések kialakulásakor a matematikusoknál sok idő szabadult fel azáltal, hogy szinte alig tanultunk fizikát, (ennek voltak előnyei és hátrányai is). Ezért néhány oktatónak át kellett gondolni, milyen új tantárgyakat kellene bevezetni, hogy egy modern matematikusi képzést kapjunk. Vera már diákkora óta részt vett a legkülönbözőbb tantárgyak oktatásában, és az új tanmenet kialakításban nagyon komoly szerepe volt.

Ezek az átalakítások néha komoly vitákban alakultak ki, amiben sajnos néha nemcsak szakmai szempontoknak volt szerepük, hanem annak is, hogy a sok órát tartó tanszékeknek több lehetőségük volt oktatók felvételére.

Az eredetileg kialakított rendszer egyébként akkor változott meg, amikor Berkes, Laczkovich, Lovász, Pósa, Pelikán évfolyama harmadéves lett. Ekkor alakult ki, hogy a harmadévesek a matematikán belül is szakosodtak.

A korábbi matematikatanári oktatásban szinte semmi kombinatorika nem szerepelt, talán Vera, Hajnal András és Rényi hatására alakult ki a modern *diszkrét matematikai* (kombinatorikai-gráfelméleti) oktatás. Ebben volt kiemelkedő szerepe Verának. Bevezette a gráfelmélet oktatását, majd ezen belül algoritmusokat is tanított, és például amikor a világ matematikájában megjelentek a matroidok, amelyekről leegyszerűsítve azt mondhatnánk, hogy a mátrixokat és a gráfokat általánosította, akkor Vera rögtön speciális előadást, pontosabban szemináriumot indított ebből a témából is.

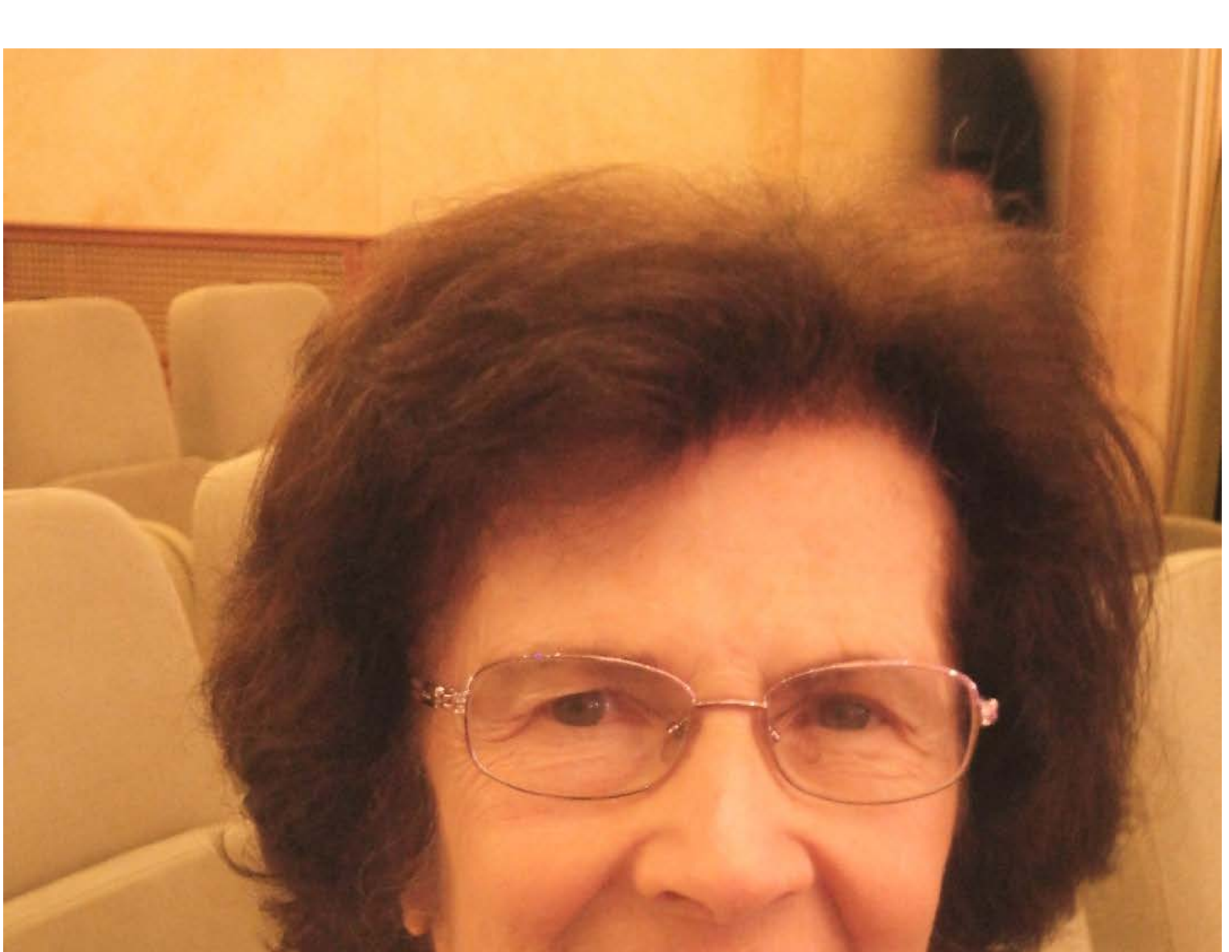
Amikor a mi évfolyamunknál befejezte a kombinatorika félévet, akkor Vera azt tovább folytatta egy gráfelméleti speciálelőadással, és mivel minden matematikus imádta előadási stílusát, a szemináriumán a legkülönbözőbb évfolyamok hallgatói töltötték meg a termet. Itt született meg a Katona-Nemetz-Simonovits cikkünk is (Katona és Nemetz három évvel feljebb jártak, mint én). Ez Nemetz Tibinek és nekem az első cikkem volt, és ma is sok nemzetközi hivatkozás születik rá, bár a cikk csak magyarul jelent meg. Ugyancsak ezen a speciálelőadáson adta elő azt az Erdős-cikket, amely egyik sejtésének megoldása volt Lovász Lacival két fontosabb közös cikkünk alapja.

De azt gondolom, Vera hatására született meg a Gyárfás-Gerencsér cikk is, amelyik nagy változást jelentett az általánosított Ramsey-elméletben is, illetve Kéri Gerzson cikke, amelyikben a Ramsey-küszöb egy javítását adta. (Emellett persze más hatásokat is említhetnék a környezetben, elsősorban Erdős, Gallai, Hajnal és Rényi hatását.)

De Vera nemcsak a véges matematikában, hanem más területeken is úttörő volt. Itt csak két apróbb dolgot említenék meg. Amikor a Berkes-Laczkovich-Lovász-Pelikán-Pósa évfolyam befejezte az első félévet, Vera úgy vélte, érdemes számukra egy külön speciálelőadást tartani a valós számok felépítéséről, axiómáiról. Ugyanezt a kérdést Hajós „.A geometria alapjai"-ban csak sokkal később tárgyalta (a Hilbert-féle felépítést követve).

Minden egyéb mellett ki kell emelnem Vera emberi tulajdonságait, a hihetetlen kedves, megnyerő egyéniségét, emberismeretét és az empátiáját is. És azt, hogy mindig nagyon törődött a környezetében levő fiatalokkal, és általában az emberekkel.

Verát 90. születésnapján a Rényi Intézetben öten köszöntöttük fel. Ha reális képet szerettünk volna adni Vera mérhetetlenül sok jó tulajdonságáról, akkor sokkal több előadó és idő kellett volna erre. (Ezt más fórumokon meg is tettük és meg is fogjuk tenni.) Amikor Vera végighallgatta azt a sok jót, amit róla ott elmondtunk, akkor szerényen csak annyit mondott, örülne, ha ennek a fele igaz lenne. (Ebben persze nem volt igaza, az a sok jó mind igaz volt.)



Mi, akik sok éve ismertük Verát, sokan vagyunk, akik először tanítványai voltunk, munkatársai, majd lassanként barátaivá váltunk. Úgy érezzük, hogy nagyon szerencsések voltunk ezzel. Én magam az egyetem elvégzése után három munkahely közül választhattam, és azt választottam, hogy Verával egy tanszéken, a Császár Ákos vezette Analízis I tanszéken dolgozzam. Ugyanezen az egyébként pici tanszéken dolgozott Hajnal András is, Rényi Kató is, Juhász Pista, majd később Pósa Lajos, Laczkovich Miki, Elekes Gyuri, és még sok kiemelkedő matematikus. (Formailag nem, de valójában ugyanitt dolgozott Péter Rózsa is, illetve később Lempert Laci, majd Szűcs Andris is, sőt formailag egy rövid ideig Lovász Laci is.)

Tömören, de kicsit alaposabban azt kellene elmondanom, hogy

- Vera legendás tanárunk volt, nekünk, és még sok más fizikus, matematikus, és matematika-fizika tanári évfolyamoknak minden kétségen felül az egyik legnagyobb hatású tanárunk. Gyakran még ma is érezzük hatását a gondolkodásunkban, matematizálásunkban, vagy amikor tanítunk, akkor abban is, hogy hogyan adunk elő. Három ember volt döntő hatással rám a matematikussá válásomban, Vera, Erdős, és Turán. Mindhármuktól nagyon sokat kaptam.

- Vera nemzetközi hírű, kiemelkedő matematikus volt. Eredményeivel, sejtéseivel, kérdéseivel számtalan területen indított el újabb kutatásokat. Bizonyos kérdései, illetve tételei körül egész elméletek alakultak ki, ezekre vonatkozóan naponta jelennek meg újabb és újabb eredmények kitűnő matematikusoktól.

Fejér Lipótnál doktorált, majd kezdetben az $\{n\alpha\}$ sorozatok eloszlásának egyenletességéről bizonyított be fontos tételeket. Idevonatkozó eredményei erősen hatottak a diszkrepancia-elméletben, egyebek között a Hlawka körül kialakult bécsi iskolára. Nagy számelméleti hatása mellett a kombinatorikai hatása is nagyon nagy volt. Erdős mellett talán Vera egyike azoknak, akinek a magyar kombinatorika sikerességében a legkiemelkedőbb szerepe volt.

- Vera a matematikát legalább három okból szerette. Megszerette, mert kitűnő volt a gimnáziumi matematikatanára, Gallai Tibor. Szerette a matematikát a szépsége miatt, szerette, mert valamilyen értelemben biztonságot is adott neki, és szerette, mert élete nehezebb periódusaiban extra biztonságot is nyújtott neki.

Bal szélen Gallai Tibor beszélget Sós Verával (1958)

- Vera matematikáját az is jellemezte, hogy kitűnő kérdéseket tudott feltenni. Ezek közül nem egy vált a diszkrét matematika egy alterületének elindítójává. Sokszor vitatkoztunk olyasmin, hogy egy adott területen érdekes kérdést mikor érdemes egészen más területekre is kiterjeszteni. Itt a következőket említeném meg.

  (a) Ha eltekintek attól, hogy Erdős problémafelvető cikkei gyakran számítottak survey (azaz összefoglaló) cikkeknek, akkor az első összefoglaló cikket Sós Verától olvastam: az 1976-os római cikkében Vera a véges geometriák, a gráfelmélet, illetve a metszettételek kapcsolatát vizsgálta. Sok fontos survey cikket írt, a survey cikkek írását is tőle tanultam, sőt írtunk közös survey cikkeket is. Ezek közül a Ramsey–Turán survey cikkünket emelném ki.

  (b) A *kombinatorikus számelméletben* fontosak a Sidon-sorozatok. Babai Laci és Sós Vera kiterjesztették ezeket Abel-csoportokra is, és azóta nagyon sok olyan eredmény jelent meg, amelyekben különböző kombinatorikus számelméleti kérdések vannak kiterjesztve Abel-csoportokra, vagy tetszőleges csoportokra. Fried Ervinnel a híres 3-távolság tételét terjesztette ki algebrai struktúrákra.

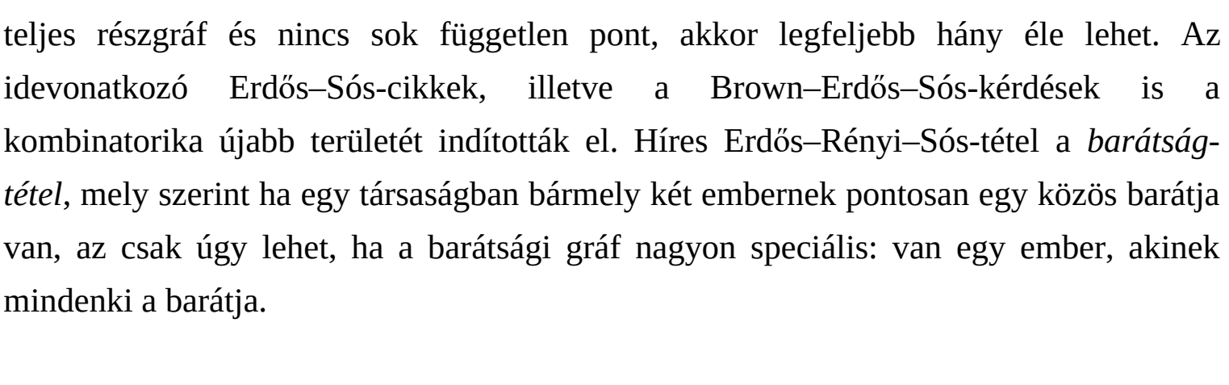
- Vera mint tudományszervező is a legnagyobb hatásúak közé tartozik. A Magyarországon megszervezett kombinatorikai konferenciákkal is nagyon nagy lépést tett abba az irányba, hogy a magyar matematika nemzetközileg ennyire elismert legyen. Amikor konferenciákat szervezett, természetesen a legfontosabb az volt számára, hogy magas színvonalú konferenciát szervezzen, de emellett a fontos szervezési kérdésekre, illetve apróságokra is nagyon odafigyelt.

  A magas szinthez az is hozzájárult, hogy a magyar kombinatorikai-gráfelméleti konferenciák találkozóhelyek voltak a nyugati és a szocialista országok legjobb matematikusai között. Az első nagyobb ilyen konferencia a tihanyi volt (főszervezői Erdős és Katona voltak, de Vera munkája is nagyon meglátszott rajta.) Ezek után sorra jöttek a további nemzetközi magyarországi kombinatorikai konferenciák, amelyek szintje többnyire akkoriban messze meghaladta a többi kombinatorikai konferencia szintjét.

- Mind szakmai, mind tudományszervező elismertségét nagyon jól tükrözi az, hogy mennyire sok nemzetközi folyóirat szerkesztőbizottsági tagja, hogy nemzetközi konferenciák rendszeres meghívottja volt, és még sok hasonló adat.

- Vera nagyon odafigyelt a környezetére, nagyon törődött az emberekkel, tanácsai gyakran meghatározó hatással voltak a környezetében élőkre is. (Amikor Szűcs Andris sok éve dolgozott átmeneti állásban, akkor is Vera volt, aki úgy döntött, ezt már nem lehet így folytatni, és véglegesítette őt a tanszékén.) Szociális érzékenységére az is jellemző, hogy kiemelten figyelt a környezetében levő személyek mellett például arra is, hogy mi történik a tanárokkal.

Az alábbiakban írnék néhány szót Sós Vera matematikájáról is, bár itt a mélyebb, nehezen érthető részeket elkerülöm. Az egyik cikkéből nőtt ki a Ramsey–Turán-elmélet, ahol olyan kérdésekről van szó, hogy ha például egy n csúcsú gráfban nincs p pontú teljes részgráf és nincs sok független pont, akkor legfeljebb hány éle lehet. Az idevonatkozó Erdős–Sós-cikkek, illetve a Brown–Erdős–Sós-kérdések is a kombinatorika újabb területét indították el. Híres Erdős–Rényi–Sós-tétel a *barátság-tétel*, mely szerint ha egy társaságban bármely két embernek pontosan egy közös barátja van, az csak úgy lehet, ha a barátsági gráf nagyon speciális: van egy ember, akinek mindenki a barátja.



Erdős Pállal

A számelméleti és egyéb eredményei is gyakran ahhoz kapcsolódnak, melyek azok a struktúrák, amelyek nem véletlen struktúrák, de úgy viselkednek, mintha véletlen struktúrák lennének. Ilyen struktúrák az $\{n\alpha\}$ sorozatok is, ezek egyenletes eloszlásúak, fontosak pl. a numerikus integrálásban is, de emellett a modern számítógéptudományban a véletlen számsorozatokat is helyettesítik, ezért váltak fontossá azon területeken, ahol a véletlen bitek felhasználása sokat gyorsít az algoritmusokon. Donald E. Knuth háromkötetes könyve (magyarul is megjelent) az elméleti számítógéptudomány „bibliájának" számított. Ennek nagyon nagy része foglalkozik ezzel a kérdéssel, és meglepetésünkre hivatkozott Vera ún. 3-távolság tételére. Amikor Sós Vera hatásáról beszélünk, én most mégis egy látszólagos apróságot emelnék ki. Amikor diák voltam, nagyon sokat kaptam Vera előadásainak hallgatásából, és abból is, ahogy a diákkörért felelős tanárok egyikeként, mennyire profi módon és áldozatosan végezte ezt a munkáját is. (Hosszú ideig Hajnal András és Sós Vera felügyelte a diákkört, ami a legtehetségesebb diákok szempontjából nagyon fontos volt.) Ezt, vagyis hogy hogyan kell úgy előadni, hogy az az átlagos hallgatóknak is jó legyen, de a legtehetségesebbeknek is, többen tanultuk meg tőle. Én magam biztosan, de nekem úgy tűnik, hogy Katona Gyuszi, Lovász Laci, Elekes Gyuri, vagy Babai Laci is, és még sokan mások is sok mindent Verától tanultunk.

Elöl ülnek Füredi Zoltán, Katona Gyula és T. Sós Vera

Lovász Laci Vera egyik születésnapi üdvözlését, az Érintőben írt cikkét így fejezte be:

> *Köszönöm a tanítást, támogatást, segítséget, közös munkát, és remélem és kívánom, hogy még sokáig kaphatok bölcs tanácsot, mély lényeglátást T. Sós Verától.*

Amikor Vera meghalt, az évfolyamomnak is megírtam ezt, meglepődtem, hogy a levelemre sokan válaszoltak. Bellay Ági, aki a Műegyetemen volt oktató, azt írta:

> *Én is az Analizist tanultam Verátol, de a szeretetet, tiszteletet, a pedagógiát is. Köszönöm neki! Sajnálom, hogy időben nem köszöntem meg. Igen, jegyzeteim, segédleteim alapját a Verától tanultak képezték.*

Kéri Gerzson csak ennyit írt:

> *Úgy vélem, a legjobb tanár volt azok közül aki tanította az évfolyamunkat. Nyugodjék békében.*

Fritz Jóska, aki fizikusnak kezdett, egy évvel felettünk, de azután évvesztéssel átjött hozzánk matematikusnak, elmondta, hogy ebben nagyon befolyásolták Vera előadásai is. (Ehhez tartozik, hogy sokszor Vera által tanított fizikusok is átjöttek hozzánk, Vera analízis előadására.)

… és még folytathatnám.

Vera tudta a matematikában és a mindennapi életben is, hogy mi a fontos. Emellett mindig kereste a látszólag távoleső területek közötti kapcsolatokat, összefüggéseket. (Egyik fontos elve az volt, hogy „minden mindennel összefügg".)

Említettem, hogy Vera nagyon törődött az emberekkel. Ha pl. egy fiatalabb matematikus eljutott odáig, hogy már ideje volt megírnia a kandidátusi, vagy a nagydoktori disszertációját, akkor szólt neki, rábeszélte, hogy ne halogassa tovább a megírást. Amikor a környezetében valakinek nem volt megfelelő állása, arra is nagyon odafigyelt.

Emellett számtalan más, nem matematikai terület iránt is érdeklődött, szeretett kirándulni, utazni, zenét hallgatni (koncertre, vagy operába menni. Nagyon harmonikus családban élt. Férje, Turán Pál, a magyar matematika egyik legkiemelkedőbb alakja volt, Erdős Pál egyik legjobb barátja. Két gyereke, György és Tamás szintén matematikusként végeztek, Gyuri matematika professzor Chicagóban, Tamás ma a hebraisztika kiemelkedő kutatója Budapesten és Jeruzsálemben.

Abban a 90-edik születésnapi köszöntőmben még azt is kiemeltem, hogy „Verában egy csalást látok. A személyi igazolványa szerint 90 éves elmúlt, de valójában ennél sokkal fiatalabb, a megjelenésében és a gondolkodásában is. Egyébként is, az utóbbi 40 évben Vera 10-20 évet bármikor letagadhatott volna a korából."

Amikor Erdős meghalt, Vojta Rödl a következőket írta: „Things won't be the same without uncle Paul." Nehéz valakit Erdőshöz hasonlítani, valamilyen értelemben most mégis ugyanez mondható Veráról. Már most nagyon hiányzik.

Sós Vera, egyik legkedvesebb barátom, egyike azon embereknek, akik sok szempontból, matematikailag és nem-matematikailag a legnagyobb hatással voltak rám. Amikor 92 évesen elesett és kórházba került, tudtam, hogy életveszélybe került. Mégis megdöbbentem, amikor meghalt. Újra és újra fájón megdöbbenek, amikor valamiért felhívnám, és ráébredek, hogy többé már nem hívhatom fel.

Lábjegyzetek

[1] Az olvasónak kicsit furcsa lehet, hogy ebben a cikkben nemzetközileg nagyon elismert matematikusokról a titulusuk kiírása nélkül írok, keresztnevükön vagy becenevükön említve őket, azokon a neveken, amelyeket a környezetünk használt, de ez a hagyományokban így alakult. Erdős Pál ebben kivétel, hiszen őt sokan E.P.-nek hívták, vagy Palinak, a fiatalabbak Pali bácsinak szólították, illetve Erdősként hivatkoztak rá. Erdős jellemző tulajdonsága volt, hogy amikor leült beszélgetni velünk, úgy beszélt, mintha egyenlő nagyságok lennénk.

Révész Pál, amikor Rényi Alfrédról szólt, elmondta azt is, hogy eleinte furcsa volt neki és a környezetének, hogy professzorukat, a nagy matematikust egyszerűen Bubának szólítsák. 50-60 évvel ezelőtt az is szokatlan volt, hogy a környezetünkben az emberek többsége tegezte egymást (Verával ez 1970 után kezdődött). Sokan tegeződtünk a diákjainkkal is.

Az itt említettek közül Rényi Alfréd tanszékvezető és a ma róla elnevezett Intézet vezetője volt. Akadémikus volt T. Sós Vera, férje, Turán Pál, középiskolai tanára, Gallai Tibor, Hajnal András, Péter Rózsa. Akadémikusok továbbá Babai László, Laczkovich Miklós, Lovász László, Katona Gyula, Szűcs András, Fritz József és Simonovits Miklós is. (Emellett nagyon sok akadémikust vagy a tudományok nagydoktorát említhettem volna, például nem említettem Szemerédi Endrét sem, a kombinatorika és a számelméleti iskola egyik legkiemelkedőbb alakját, csak mert nem írtam bizonyos témákról, és mert Szemerédi elsősorban Turán Pált szokta kiemelni azok közül, akik hatottak rá.)

[2] Előfordult, hogy egy évben 80 vegyészmérnököt vettek fel, a következőben már 320-at. A rendszerváltozás elött ez már visszájára fordult, kevesebb hallgatót vettek fel, mint amennyien nyugdíjba mentek.

[3] Az első évben csak 14 hallgatót vettek fel, a másodikban már 26-ot, és ahogyan megjelentek a számítógépek és a számítógép-programozás, ez a szám meredeken ment felfelé, de egy idő után beindult nagy létszámmal a programozó-programtervező képzés is.

Simonovits Miklós

Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon:

Kerékfy Pál, Oláh Vera 2023. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

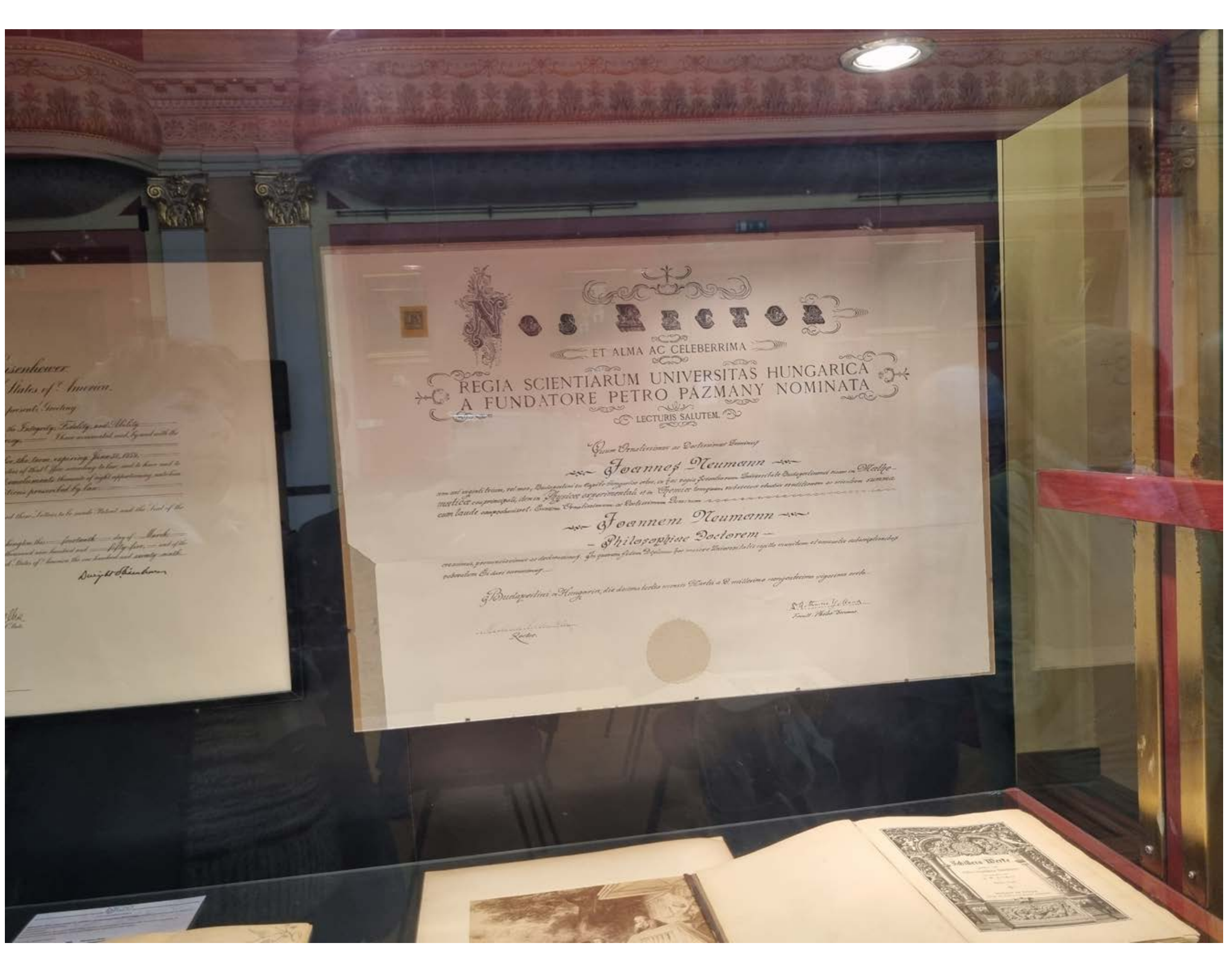
120 éve született egy „marslakó”

Kiállítás a Fasori Gimnáziumban: Neumann-milió

NEUMANN János
a családi milió
1903–1957
A CSALÁDI HÁTTÉR
THE FAMILY BACKGROUND

A Neumann-milió emlékkiállítást megnyitását követően két áprilisi hétvégén lehetett (előzetes regisztrációval) megtekinteni a Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium dísztermében. Bár néhány festmény és a Neumann-család egy-két személyes bútora próbálta megteremteni a miliőt, de az kicsit elveszett az egyébként gyönyörű nagy teremben.

Kárpótoltak a vitrinben kiállított kordokumentumok, köztük Eisenhower elnök elismerő köszönő oklevele, Neumann Jánosnak a budapesti Pázmány Péter Egyetemen (a mai ELTE-n) szerzett eredeti doktori diplomája (matematika, fizika, kémia), vagy az első kézzel írt számítógépes programjának részlete.



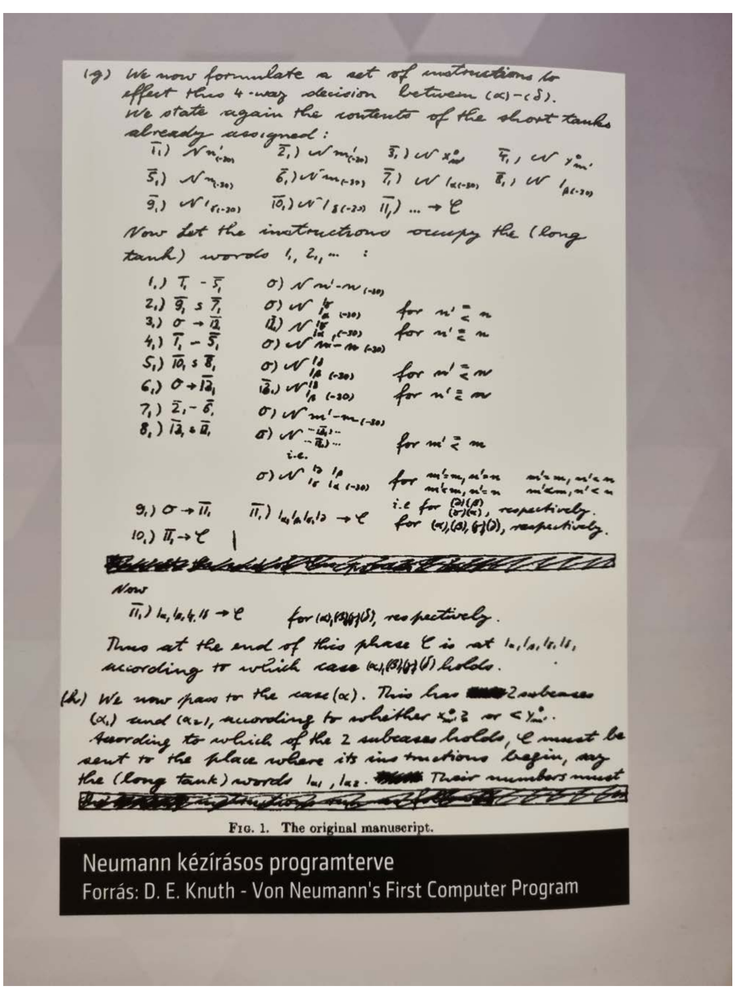
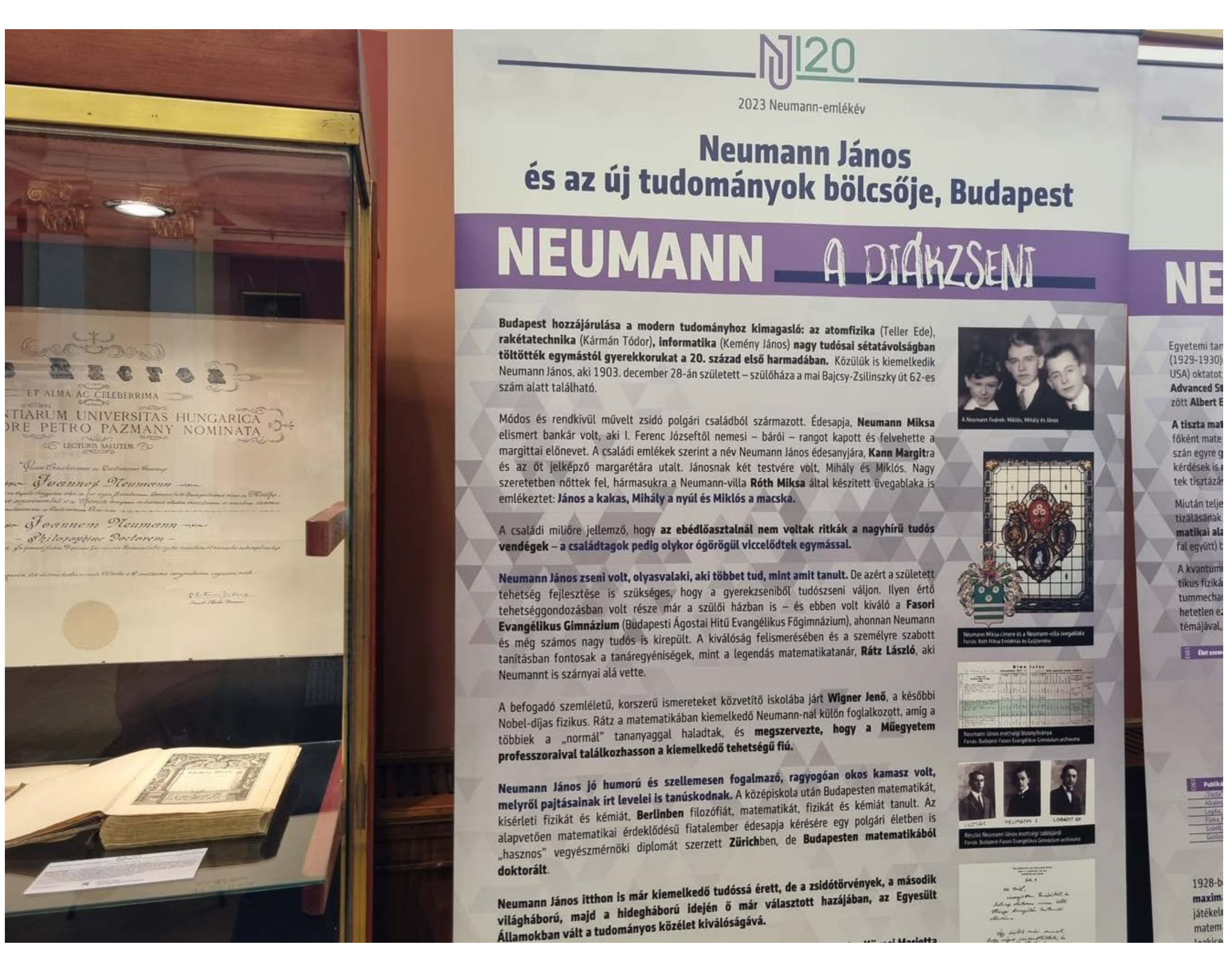
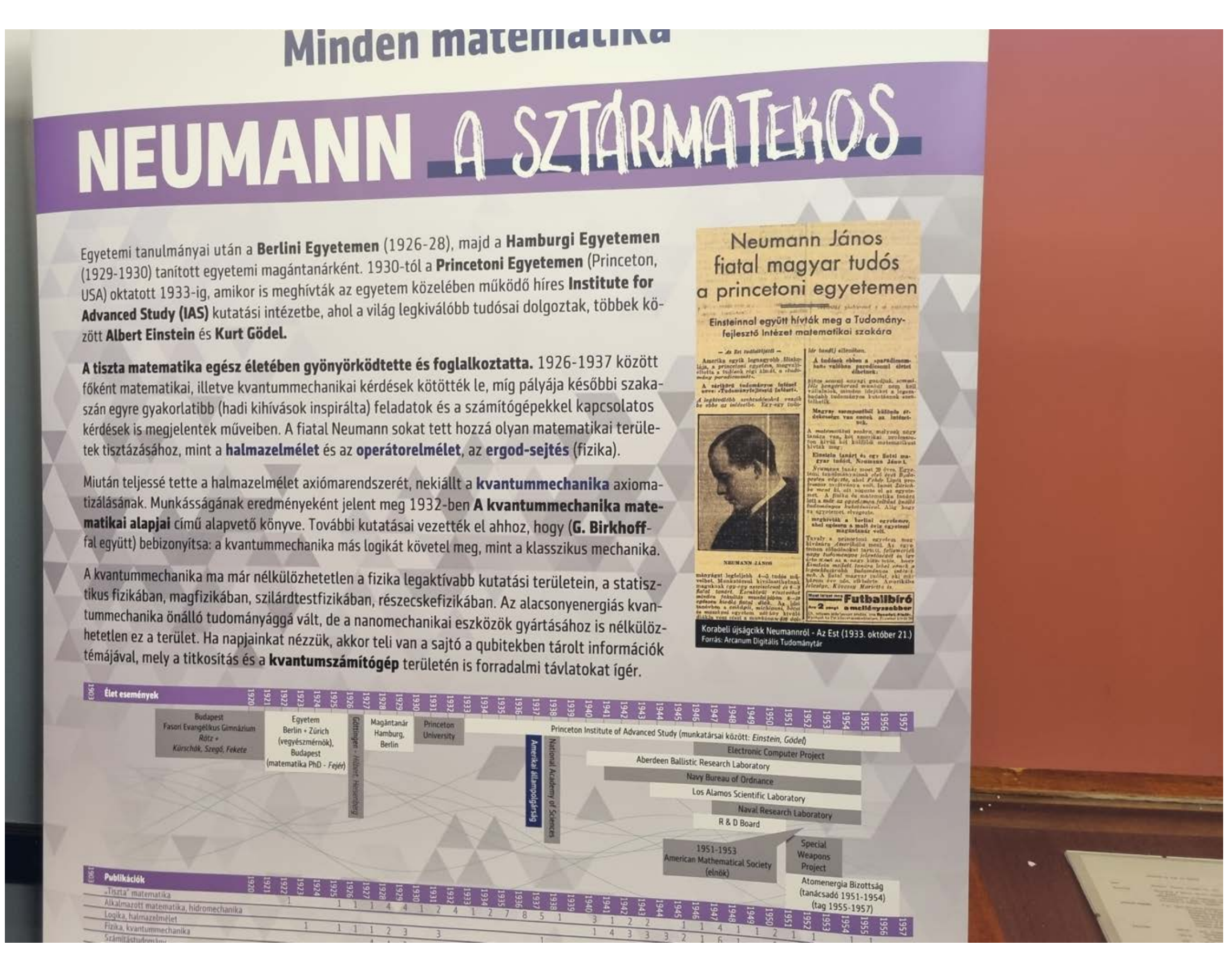


FIG. 1. The original manuscript.
Neumann kézírásos programterve
Forrás: D. E. Knuth - Von Neumann's First Computer Program

A Neumann János Számítógéptudományi Társaság névadójának teljes életútját, különböző tudományágakban elért eredményeit, jelentőségét, szerepét a második világháborúban, kutatásainak kihatásait a jövőre nagyon részletesen, érdekesen bemutató poszterkiállítás ez év során több helyre is eljut az országban. A Múzeumok éjszakáján az Óbudai Egyetem Neumann János Informatikai Karára, majd Tatabányára, Balassagyarmatra, Szombathelyre, Egerbe, Veszprémbe.





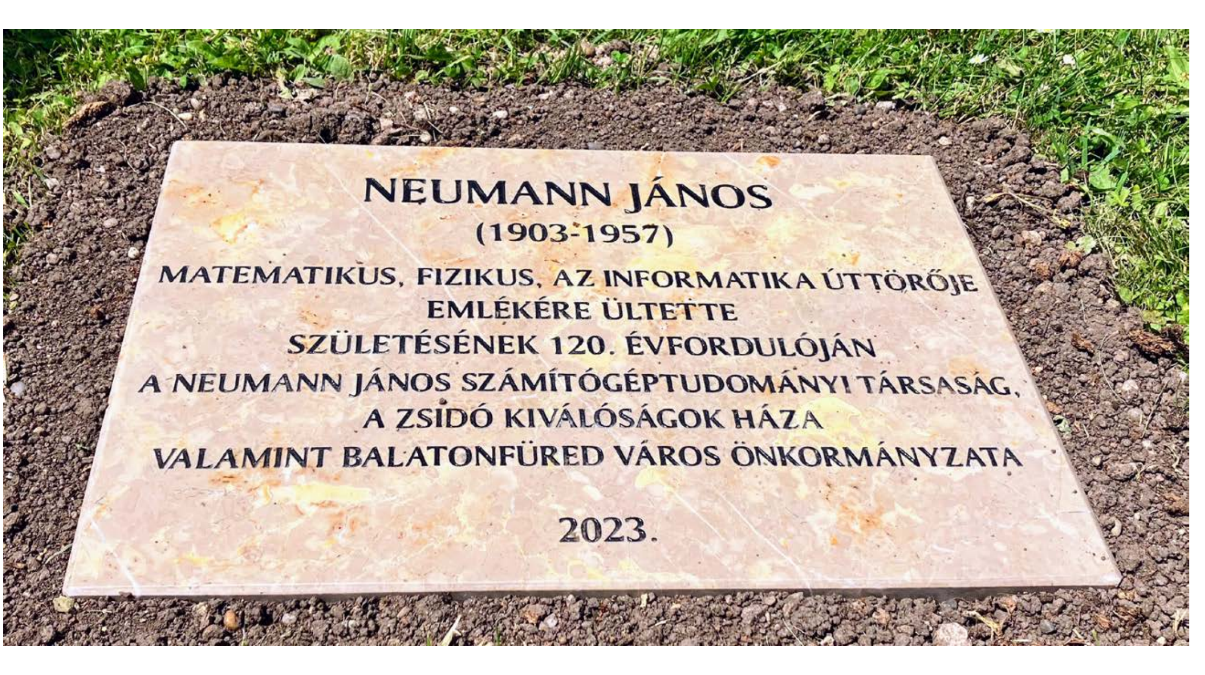
A kiállítás első helyszíne, a Fasori Gimnázium nemcsak Neumann, de *Wigner Jenő* középiskolája is volt, ahol *Rátz László* tanár úr fedezte fel matematikai tehetségüket.

Későbbi közös cikküknek köszönhetően kaptak mindketten meghívást a Princetoni Egyetemre, így kerültek ki Amerikába. A marslakók legendája a második világháború idején Los Alamosban terjedt el, Leon Ledermann könyvét idézi Marx György, aki az elnevezést meghonosította. *Neumann János*, *Wigner Jenő*, *Kármán Tódor* és *Teller Ede* alkották a nevezetes „marslakókat”: azokat a zseniális magyar származású tudósokat, akik magyar emigránsoknak álcázva magukat „beszivárogtak” a világ legjobb egyetemeire és kutatóintézeteibe.

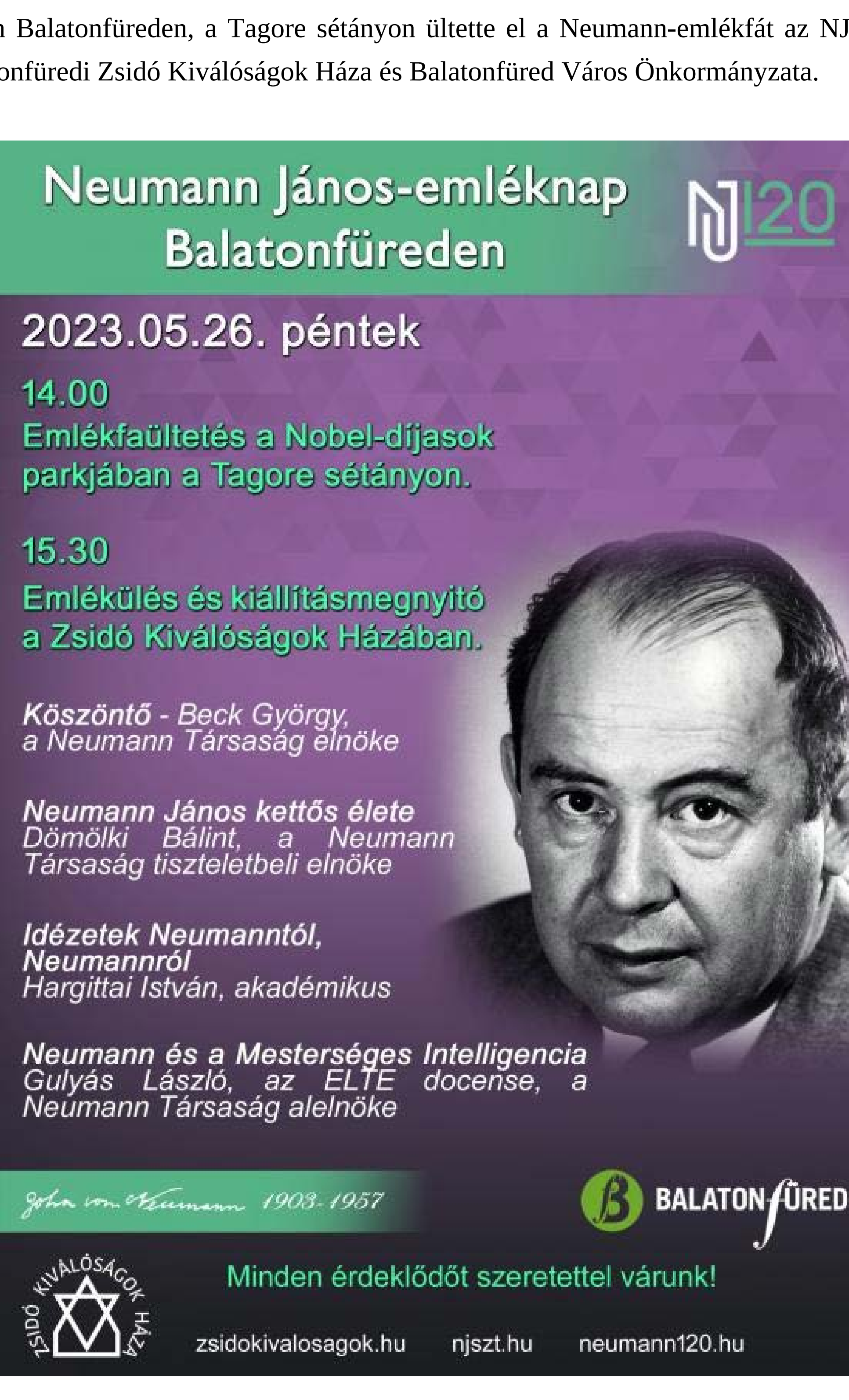
Oláh Vera

Emlékfa a 120 éve született „marslakó” tiszteletére

Idén decemberben lesz *Neumann János* születésének 120. évfordulója. Sok más matematikai, kvantummechanikai és közgazdaságtani kutatása és eredménye mellett, legfőképp a digitális számítógépek elvi alapjainak lerakása miatt ismerik világszerte a nevét (Neumann-elvek).


NEUMANN JÁNOS
(1903-1957)
MATEMATIKUS, FIZIKUS, AZ INFORMATIKA ÚTTÖRŐJE
EMLÉKÉRE ÜLTETTE
SZÜLETÉSÉNEK 120. ÉVFORDULÓJÁN
A NEUMANN JÁNOS SZÁMÍTÓGÉPTUDOMÁNYI TÁRSASÁG,
A ZSIDÓ KIVÁLÓSÁGOK HÁZA
VALAMINT BALATONFÜRED VÁROS ÖNKORMÁNYZATA
2023.

A Neumann János Számítógéptudományi Társaság (NJSZT) kezdeményezésére május 26-án Balatonfüreden, a Tagore sétányon ültette el a Neumann-emlékfát az NJSZT, a balatonfüredi Zsidó Kiválóságok Háza és Balatonfüred Város Önkormányzata.


Neumann János-emléknap
Balatonfüreden

NJ120

2023.05.26. péntek

14.00
Emlékfaültetés a Nobel-díjasok parkjában a Tagore sétányon.

15.30
Emlékülés és kiállításmegnyitó a Zsidó Kiválóságok Házában.

Köszöntő - *Beck György, a Neumann Társaság elnöke*

Neumann János kettős élete
Dömölki Bálint, a Neumann Társaság tiszteletbeli elnöke

Idézetek Neumanntól, Neumannról
Hargittai István, akadémikus

Neumann és a Mesterséges Intelligencia
Gulyás László, az ELTE docense, a Neumann Társaság alelnöke

John von Neumann 1903-1957

BALATONFÜRED

Minden érdeklődőt szeretettel várunk!

ZSIDÓ KIVÁLÓSÁGOK HÁZA

zsidokivalosagok.hu njszt.hu neumann120.hu

A gyönyörű koranyári időben hozzávetőleg negyvenen gyűltünk össze, hogy megemlékezzünk a zseniális magyar tudósról, aki a „marslakók” közé tartozott Amerikában, és sokak véleménye szerint munkássága alapján méltó lett volna a Nobel-díjra. Az erre az alkalomra kiválasztott páfrányfenyőt (*gingko biloba*) éppen ezért ültették el a Nobel-díjasok ligetében. Nem tudom, miért éppen ezt a fajt választották, de el tudom képzelni, hogy az akár ezer évig is élő növény a Neumann János által 1945-ben, a Neumann-elvek első publikálásával útjára indított számítógéptudomány jelentőségét és jövőjét szimbolizálja.

A liget fái közül az elsőt még 1926-ban ültette el a sétány névadója**,** *Rabindranath Tagore* Nobel-díjas indiai költő. A legtöbb fát maguk a Nobel-díjasok ültették, de nem Neumann az első, aki csak halála után kapott itt fát. *Gábor Dénes* fáját szintén a 120. születésnapja alkalmából ültették el 2020-ban.

A faültetésen *dr. Bóka István*, Balatonfüred polgármestere, *dr. Beck György*, az NJSZT elnöke és *prof. dr. Gulácsi László*, az Óbudai Egyetem kutatási rektorhelyettese mondott beszédet.

Öltönyös kertészek (balról jobbra: dr. Olti Ferenc**,** a Zsidó Kiválóságok Háza Alapítványának kuratóriumi elnöke, dr. Bóka István, Balatonfüred polgármestere, dr. Beck György, az NJSZT elnöke)

Az eseményen jelen volt *Hargittai István* akadémikus, tudománytörténész és *Dömölki Bálint* matematikus, informatikus, az NJSZT tiszteletbeli elnöke, az NJSZT Informatika Történeti Fórumának alapítója is, akik később, a délutáni minikonferencián előadást is tartottak.

Kerékfy Pál

Megjegyzés. Neumann Jánosról és a 2023-as év ünnepi eseménysorozatáról 2022. decemberi számunkban is olvashatnak *Benczúr András* cikkében.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon:

Tardos Zsófia 2023. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Workshop rólunk, matematikusokról...

...avagy közösségépítés matematikus fejjel

Idén tavasszal háromrészes workshopsorozat indult olyan matematikusok részvételével, akik fontosnak tartják, hogy a matematika világában különböző területeken dolgozók szorosabban kapcsolódjanak és gondolkodjanak, vagy akár tegyenek együtt. A cél egyrészt, hogy az akadémiai szektorban és a különböző cégeknél foglalkoztatott matematikus végzettségűek jobban megismerjék egymást. Másrészt pedig a matematikával kapcsolatos, a résztvevők által felvetett szakmai/társadalmi problémák, igények, lehetőségek megfogalmazása, amelyekre később közösen válaszokat kereshetünk.

Közösségfejlesztés matematikusoknak? Hogy jövök én ehhez?

Tardos Zsófia vagyok, matematikus szakot végeztem. Az egyetemi évek után néhány évig különféle oktatási tevékenységekben vettem részt, és most már jó ideje pénzügyi cégeknél dolgozom, közel hat éve a WorldQuant-nál. Mindemellett régóta van egy olyan mániám, hogy szerintem közösséghiányos a társadalom. Emiatt sok időt töltök különböző közösségépítéssel és -fejlesztéssel kapcsolatos csoportokon és tanfolyamokon. Ez egy külön szakma, azon belül számos ággal és módszertannal: egyáltalán nem mindegy, hogy egy beszélgetést, amiben a közös témáinkat keressük, hogyan bonyolítunk le. Sokszor nem is az eredményben mutatkozik meg a különbség, hanem abban, hogy ezt az eredményt mennyire érzik magukénak a résztvevők. Az utóbbi évben például egy szociodráma-képzésen vettem részt, ahol arról volt szó, hogy hogyan lehet különböző kreatív (főként dramatikus) módszerekkel úgy facilitálni egy csoportot, hogy az rátaláljon a közös, de valahogyan mégis személyes kérdéseire, és hogy úgy keressen arra új válaszokat, hogy ettől a folyamattól egyre inkább közösséggé váljon.

Sajnos a közösségfejlesztéshez kapcsolódó workshopokon szinte soha nem szoktam matematikához közel álló szakmájú emberekkel találkozni. Így egyrészt nem jut el információ a matematikusokhoz arról, hogy az eredményesség szempontjából fontos az, hogy egy vitát, beszélgetést milyen módon szervezünk, vezetünk le. Másrészt pedig hiány van az olyan közösségfejlesztési kérdésekhez értő szakemberekből, akik közvetíteni tudnak a matematikusok számára. Így aztán arra gondoltam, hogy megpróbálom kicsit pótolni ezt a hiányt! Derüljön ki, hogy milyen módszer hogyan működik a matematikus közegben!

Ennek jegyében először a Medve Matek-nál végeztem szervezetfejlesztő munkát, aztán az ELTE-n kezdtem el segíteni az elsős diákoknak szóló mentorprogram beindításában. Ennek során kiderült számomra, hogy többekben felmerülnek olyan, akár a képzés alapvető céljára is vonatkozó kérdések, amelyeknek fontos lenne valamilyen platformot adni. Másrészt pedig kezdtem újrakapcsolódni a saját egyetemi felemelő és nehéz élményeimmel és a saját szakmai identitásomat érintő problémákkal is. Így aztán személyesen is egyre motiváltabb lettem arra, hogy teremtsünk teret ezeknek a beszélgetéseknek.

Mindeközben megtalált engem a Bolyai Társulat kérdőíve, ami cégeknél dolgozó matematikusoknak szólt. Többek között arról kérték ki a véleményt, hogy ki hogyan látja Társulat jelenlegi működését, céljait, és csatlakozna-e a Társulat tevékenységéhez a matematika oktatása, népszerűsítése érdekében. Felkaptam a fejem, hogy itt mintha valami közösségépítési kezdeményezésről lenne szó! Gondoltam, hátha nyitottak rá, hogy itt próbáljam ki a szociodrámás szemléletet − dráma nélkül persze, nem őrültem meg! Nyitottak voltak, valóban éppen azon gondolkoztak, hogy szerveznének egy közösségépítő eseményt. A Társulattal közösen megszerveztük az első workshopot, facilitátortársként pedig csatlakozott hozzám Keszthelyi Gabriella (BME, Rényi), aki az akadémiai világot képviseli, oktatóként közelről látja a felsőoktatási helyzetet. Gabi sokat foglalkozik tudománykommunikációs témákkal, hamarosan megjelenik egy ismeretterjesztő könyve is. Nagyon örülök neki, hogy együtt formálhatjuk ezt a folyamatot.

Az alábbiakban röviden bemutatom a workshopokat és terveinket. A workshopok során különböző páros, kis- és nagycsoportos módszerekkel dolgoztunk, a workshopok aktuális céljainak megfelelően. Ugyan érdekes lenne mélyebben is belemenni, hogy mikor milyen módszertant választottunk, és miért, de ezek már inkább közösségfejlesztéssel kapcsolatos szakmai kérdések − ebben a cikkben inkább a workshopok eredményeire fókuszálunk.

Első alkalom: *„Workshop rólunk, matematikusokról”*

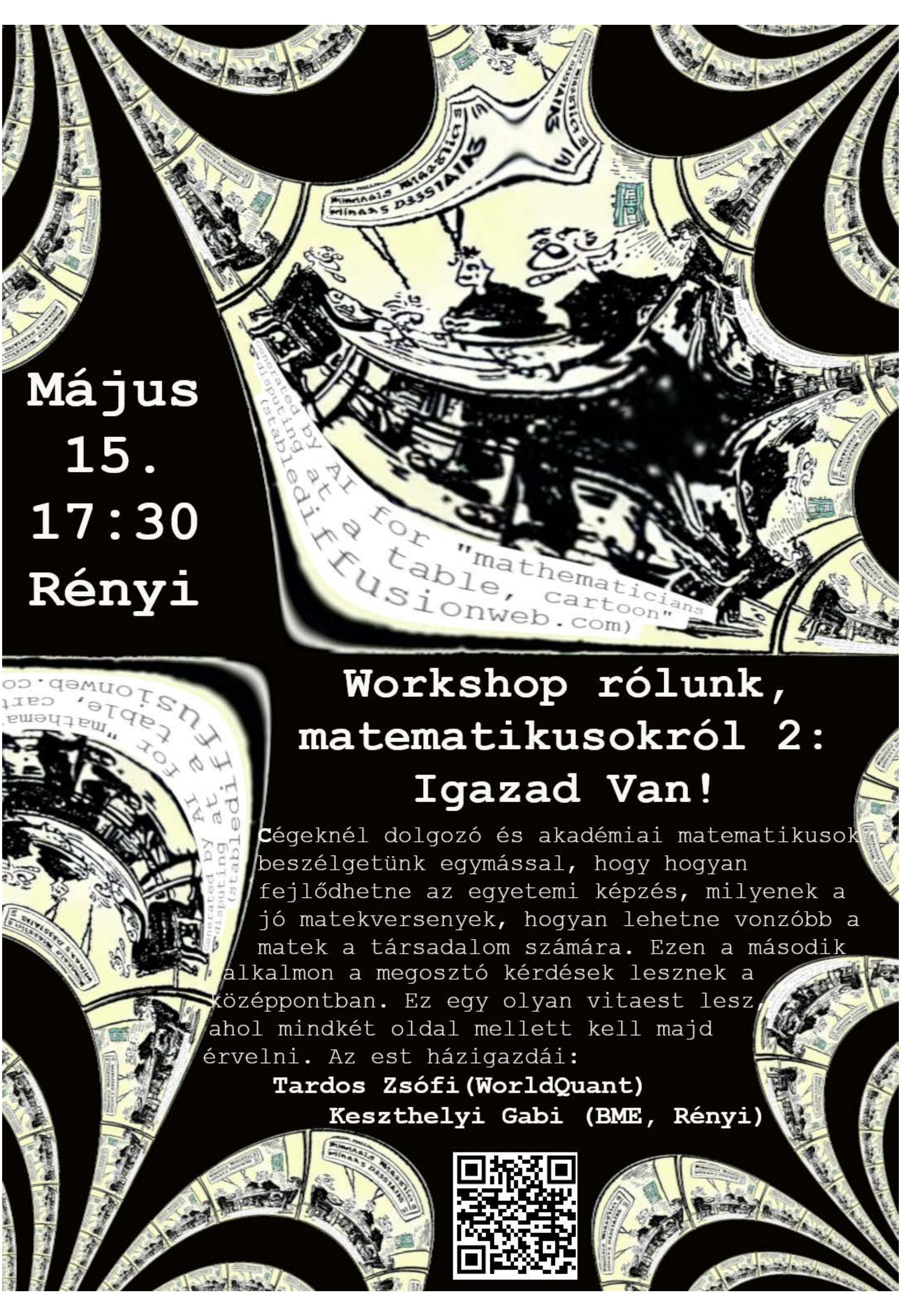
2023. március 24-én tartottuk nyitó workshopunkat A workshop egyik fő célja az volt, hogy kiderüljön, nekünk, az akadémiai szektorban és a cégeknél dolgozó matematikusoknak milyen közös, de egyúttal személyes feldolgozandó kérdéseink vannak a matematikával, illetve annak különböző társadalmi vetületeivel kapcsolódóan. Az eseményt a Bolyai Társulat hirdette meg, a helyszínt a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet biztosította.

Meglepetést okozott, hogy mindegyik csoport a népszerűsítés, oktatás, ismeretterjesztés, kapcsolatépítés körül látta a legfontosabb kérdéseket. Ezen belül kiemelt lehetőséget láttak a résztvevők abban, hogy „a matematika és a valóság közötti kapcsolatot erősítsék az oktatásban”, azaz az alkalmazás erőteljesebben jelenjen meg mindenütt, minden szinten. Ennek egyik megvalósítási lehetőségeként többek között olyan projektalapú felsőoktatási kurzus terve körvonalazódott, ahol matematikus és természettudományos hallgatók együtt dolgoznának egy-egy közösen felvetett problémán.

A fentieken felül felmerült még a kritikus gondolkodás fejlesztésének fontossága, a matematikusok és más tudományágak képviselői közötti kapcsolatépítés igénye, az egyetemi matematikusképzésben rejlő személyiségfejlesztési lehetőségek témája, illetve a kérdés, hogy ki milyen célcsoporthoz kapcsolódóan lát nagyobb potenciált a különböző matematika-népszerűsítési programokban.

Második alkalom: „Pro-Kontra”

Május 15-én, második workshopunkon vitajátékot szerveztünk. Célunk az volt, hogy a korábban felmerült témák közül néhányban mélyebbre ássunk. A résztvevők hat fős csoportokban ültek le beszélgetni egymással, a csapatok tíz megvitatásra felkínált állítás közül választották ki a számukra legérdekesebbet. Az állítások mentén kellett érvelniük azzal a csavarral, hogy a tőlük elsőre távolabb álló vélemény mellett is érveket kellett találniuk.


Május
15.
17:30
Rényi
enerated by AI for "mathematicians disputing at a table, cartoon" (stablediffusionweb.com)
Workshop rólunk, matematikusokról 2: Igazad Van!

Cégeknél dolgozó és akadémiai matematikusok beszélgetünk egymással, hogy hogyan fejlődhetne az egyetemi képzés, milyenek a jó matekversenyek, hogyan lehetne vonzóbb a matek a társadalom számára. Ezen a második alkalmon a megosztó kérdések lesznek a középpontban. Ez egy olyan vitaest lesz, ahol mindkét oldal mellett kell majd érvelni. Az est házigazdái:
Tardos Zsófi (WorldQuant)
Keszthelyi Gabi (BME, Rényi)

A két legnépszerűbb vitaindító állítás: 1: „Az, ahogyan egy vizsgára fel kell készülni a matematikus szakon (bizonyítások megértése és megtanulása) olyan képességeket fejleszt, amelyek később jól hasznosíthatóak a munkában, akár kutató, akár alkalmazott matematikusként”, 2: „A magyarországi matematikai tehetséggondozás túlzottan versenyközpontú”.

Sok érv összegyűlt amellett, hogy a bizonyítások tanulása hasznos tevékenység: jobb megértést ad, ami segíti az intuíciót is, bebetonozza a tudást, segít kifejleszteni olyan általános képességeket és attitűdöket, mint például a helyes érvelés, fegyelmezettség. Több gondolat felvetődött amellett, hogy más, az itthoni rendszerben kevésbé hangsúlyos tevékenységek is hasznosak lehetnének: fordulhatna több figyelem az alkalmazhatóságra és az alkalmazási készségekre, illetve a felsőoktatásban kínálhatnának olyan tantárgy teljesítési módokat is, amelyek jobban fejlesztenék a kreativitást. Szóba került az is, hogy sok külföldi képzés (pl. az USA-ban) jóval kevésbé bizonyításközpontú, és ezeknek a képzéseknek is sok előnye van, érdemes lehet innen is inspirálódni

A versenyek kapcsán egyrészt felmerült, hogy ezek az események sokak számára vonzóak, sok örömet, erős motivációt adnak arra, hogy fejlesszék magukat, továbbá maga az esemény és a felkészülés is tud jó közösségi élmény lenni. Másrészt viszont többen egyetértettek abban, hogy a versenyek által mért és fejlesztett képességek nem feltétlenül pont azok, amelyek a későbbi boldogulásban fontosak lehetnek. Felmerült az a gondolat is, hogy érdemes lenne jobban odafigyelni a versenyzés okozta lelki nehézségekre is, illetve alternatív lehetőségekkel támogatni azokat az egyébként érdeklődő és tehetséges diákokat, akiket a versenyzés gondolata nem vonz, inkább visszatart. Többen jutottak arra a konklúzióra, hogy ugyan látjuk, hogy szükség lenne más műfajokra is, egyelőre nem világos, hogy mik lehetnének ezek.

Harmadik alkalom: „Kínos piknik”

Június 3-án szombat délelőtt a Margitszigeten találkoztunk. Ezen az eseményen az volt a célunk, hogy kellemes környezetben, kötetlen hangulatban beszélgessünk a matekhoz fűződő kellemetlen élményeinkről, hátha együtt jobban meg tudjuk érteni és esetleg feloldani azokat.

A résztvevők saját személyes történeteiket egymással megosztva keresték az élményeik mögött meghúzódó közös pontokat. Érdekes volt látni, hogy a felmerült témák jelentős hányada összefüggésben állt egyfajta szégyenérzettel, szorongással, önbizalomhiánnyal. Ezek gyakran említett okaként említették a gyors gondolkodással kapcsolatos elvárásokat. A záró körben többen is azt emelték ki, hogy milyen jó érzés volt megtapasztalni, hogy sokan osztozunk ezekben a nehéz érzésekben, és hogy milyen őszintén megnyíltunk egymásnak. Feltették a kérdést, hogy mit tehetnénk annak érdekében, hogy gyakrabban beszéljünk meg egymással ilyesmit akár szervezett keretek nélkül is.

Kínos Piknik

A másik fontos kérdés az volt, hogyan tudnánk segíteni a fiataloknak abban, hogy ne érezzék magukat egyedül ezekkel az érzésekkel, amikor például egyetemre kerülnek. Jó lenne őket mentorálni, elmesélni nekik, hogy mások is hasonló érzésekkel küzdöttek, sőt küzdenek a mai napig. Többen kiemelték, hogy a doktori képzés évei emberpróbálóak tudnak lenni, így érdemes lenne több figyelmet szentelni annak, hogyan lehetne a doktoranduszokat jobban támogatni ebben az időszakban. Valamint többekben felmerült a matematikus- szocializációnkból fakadó, de aztán az élet sok területére kiterjedő maximalizmusunk témája is.

Hogyan tovább?

Rengeteg továbbgondolni való jó ötletet hallottunk egymástól, sok tanulsággal szolgáltak a workshopok. Mi, szervezők igyekszünk majd ezeket a nyár folyamán strukturálni, ősszel pedig úgy folytatjuk az első félévben elkezdett folyamatot, hogy már konkrét projekttervek is születhessenek.

Bármikor lehet csatlakozni ehhez a folyamathoz akár a MatEgylet néven létrejött Facebook-csoportunkba (ide posztoljuk majd az új eseményeket), akár rajtunk, facilitátorokon keresztül (Tardos Zsófi, tardoszs@gmail.com; Keszthelyi Gabi, keszthelyi.gabriella@renyi.hu). A rólunk, matematikusokról szóló workshopsorozat további alkalmait a Bolyai Társulat honlapján és Facebook-oldalán is meghirdeti.

Tardos Zsófia (és a szerkesztők)

Róka Sándor 2023. JÚNIUS, HÉTTUSA

Héttusa (2023. június)

A most induló Héttusa rovatban kitűzött feladatokra bárki küldhet megoldást. Elég a feladat kérdésére a feladatok sorszámát és a feltett kérdésekre a válaszokat megküldeni, indoklást, részletes megoldást nem szükséges írni.

A válaszokat a **hettusa@ematlap.hu** címre várjuk. **A beküldési határidő: 2023. július 9.**

A verseny nyilvántartása érdekében kérjük, hogy megoldásaikat névvel vagy olyan álnévvel írják alá, amit nyilvánosan közzétehetünk.

A határidőt követően a megoldások megjelennek a Facebook-oldalunkon. Az ezután beküldött megoldásokat nem értékeljük a versenyben. Az Érintő következő számában olvashatják a legjobb megoldók nevét és az útmutatókat, kiegészítéseket a megoldásokhoz.

Feladatrovatunkhoz örömmel veszünk minden segítő szándékot, várjuk új feladatjavaslataikat kitűzésre, valamelyik feladat szép megoldását, vagy a feladat általánosítását.

1. Van-e olyan szám, amelynek pontosan tíz pozitív osztója van a 20-nál nem nagyobb számok között?

2. Egy asztallapra 11 egybevágó fehér korongot helyeztünk úgy, hogy a korongok között nincs átfedés. Igaz-e, hogy a korongokat mindig kiszínezhetjük 3 színnel úgy, hogy az egymással érintkező korongok különböző színűek?

3. Legfeljebb hány pontot lehet megadni a kocka felületén, ha a pontok nem mind egy kockalapon fekszenek, és ezek egy szabályos sokszög csúcsait alkotják?

4. Van-e négy olyan racionális szám, amelyek egyike sem egész, de közülük bármely két szám szorzata egész szám?

5. Egy kör alakú nyakláncon 15 kék és néhány piros gyöngyszem van. A lánc bármely olyan szakaszán, ahol van 6 kék gyöngyszem, ott legalább 3 piros gyöngyszemet is találunk. Legkevesebb hány piros gyöngyszem van ezen a láncon?

6. Az újoncok felálltak egy sorban az őrmesterrel szemben. A „balra át” parancsra néhányan balra, a többiek jobbra fordultak. Kiderült, hogy kétszer több katona nézi a szomszéd hátát, mint az arcát. Ezután a „hátra arc” parancsra mindenki az ellenkező irányba fordult, és most háromszor több katona nézi a szomszéd hátát, mint az arcát. Hány katona áll a sorban?

7. A varázslótanoncok iskolájában 7 tanítvány ül egy asztal körül, jövendölésből vizsgáznak. Mindenki megjósolja, hogy önmagát és a két szomszédját kivéve a többi 4 tanonc közül kinek lesz majd sikeres a vizsgája. Egy vizsga akkor sikeres, ha a vizsgázó tanoncnak mind a 4 jóslata beválik. A tanoncok nem bíznak társaik képességeiben, mindenki azt jósolja, hogy sikertelen lesz a többiek vizsgája. Hányan mehettek át a vizsgán?

A feladatokat válogatta: Róka Sándor

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 28. szám 2023. június Válasszon:

100

Cím	Szerző
Akinek a matematika munka és szórakozás is	Írta: Szerkesztő
Gács András-díj 2023	Írta: Szerkesztő
Szegedi Dinamikus Nap	Írta: Dénes Attila
Emlékezés a 100 éve született Tamássy Lajosra	Írta: Kántorné Varga Tünde, Szilasi József
Ugródeszkák matek szakon – Mihálykó András	Írta: Paulovics Zoltán
Repülő Iskola avagy repsuli	Írta: Dankowsky Zorka, Szűcs Gábor
A Középiskolai Matematikai Lapok 100 éve 10 feladat tükrében	Írta: Bíró Bálint
EGMO 2023: a 12. diákolimpia lányoknak	Írta: Baran Zsuzsa, Kiss Melinda Flóra
A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – II. rész	Írta: Csapodi Csaba
Új vilagok teremtése	Írta: Csépai András
Az igazi Alan Turing	Írta: Kutas Péter
Olvasónapló a számok nélküli könyvről	Írta: Lóczi-Nagy Gemma
Matematika számok nélkül	Írta: Dworák Bence
T. Sós Vera	Írta: Simonovits Miklós
Neumann János munkássága a kvantummechnika matematikai alapjainak területén	Írta: Rédei Miklós
120 éve született egy „marslakó”	Írta: Kerékfy Pál, Oláh Vera
Workshop rólunk, matematikusokról...	Írta: Tardos Zsófia
Héttusa (2023. június)	Írta: Róka Sándor