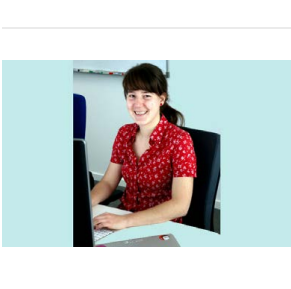
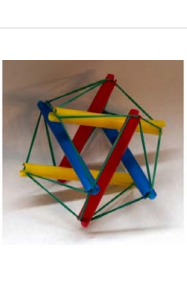
30. szám 2023. december



2023. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Ugródeszkák matek szakon – Czeller Ildikó

Az Ugródeszkák matek szakon sorozat utolsó interjúalanya egy amerikai, ételrendeléssel foglalkozó cégnél dolgozik mint adatelemző, data scientist. És tetszik neki, élvezi a sokféle feladatot; van, amit tanult, és van, amit nem tanult az egyetemen. Egyet azonban biztosan tud: a cég működése alapvetően nem az adatokon, hanem a konyhán múlik. A kérdező *Paulovics Zoltán*.



2023. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Tensegrity a karácsonyfán

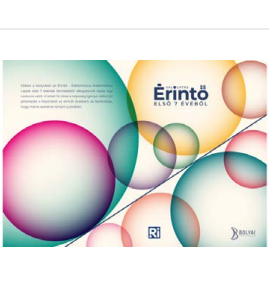
Ez micsoda? – kérdezték tőlem gyerekek és szülők, akik egy közös adventi készülődésen odasereglettek körém, amikor meglátták előttem a színes szívószálakat és gumikarikákat, amikből valami különös térbeli szerkezet kezdett kialakulni. Amikor megmondtam, hogy ez egy tensegrity szerkezet, akkor megint csak az volt a kérdés: Az meg micsoda? Aki szeretne ilyet készíteni a karácsonyfára, az olvassa el *Gáspár Merse Előd* írását.

APP&X pályázat Szavazz!
bolyai.hu
Neked melyik pályamű tetszik a legjobban?
KÖZÖNSÉGSZAVAZÁS: 2023. december 8-18.
BOLYAI

2023. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

APP&X pályázat – közönségszavazással!

Épp e napokban zajlik (és december 18-án zárul) a Bolyai János Matematikai Társulat APP&X pályázatának közönségszavazása. A pályázat elnevezése arra utal, hogy Bolyai János a nemeuklideszi geometria felfedezését az „Appendix – A tér tudománya" című tanulmányában írta le részletesen. A pályázatra 238 pályamű érkezett az alsó tagozatosoktól a középiskolás diákokig az ország minden tájáról. A zsűri (amelynek tiszteletbeli elnöke Szilágyi Áron, háromszoros olimpiai bajnok vívó) a közönségdíjon kívül 9 alkotást díjaz. Részletesebben....



2023. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

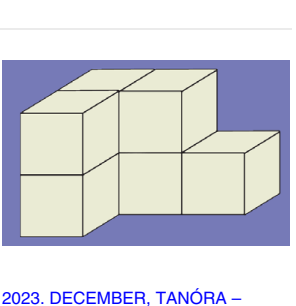
Válogatás az Érintő első 7 évéből

A Bolyai Társulat kiadásában 2023 decemberében megjelent könyvben az első 7 év terméséből válogattunk össze egy csokorra valót. A teljesség igénye nélkül rendeztük kötetbe online matematikai lapunk pár cikkét, amelyek megítélésünk szerint jól jellemzik az újságot az elmúlt években, és bemutatják, hogy merre szeretne tartani a jövőben. A 168 oldalas kiadvány a BJMT honlapján pdf formátumban olvasható és ingyenesen letölthető. *Stipsicz András* és *Titkos Tamás* írt a könyvhöz előszót.

2023. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Matek az utcán 2024 – Legyél Te is önkéntes

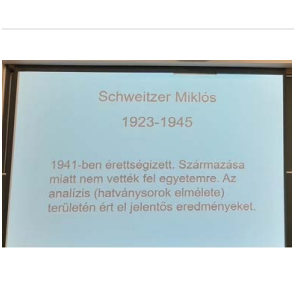
2023 márciusában a Bolyai János Matematikai Társulat és 70 önkéntes az ország 7 helyszínén rendezte meg a Matek az Utcán eseményt, amiről az Érintő is beszámolt. A kezdeményezés a Matematika Nemzetközi Világnapját (3.14) ünnepli. Képünkön a tavalyi ceglédi flashmob drónfelvétele. A nagy sikerre való tekintettel jövőre is lesz Matek az Utcán.



2023. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Nyolcadik osztályból a kilencedikbe

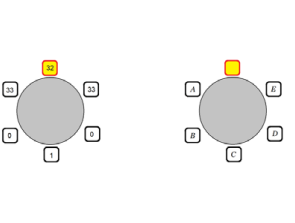
2024. januárjában a középiskolai felvételiken már azok a diákok fognak részt venni, akik az elmúlt 4 évben az új NAT szerint tanultak, az új kerettantervek szerint írt tankönyveket használták. Tanároknak és szülőknek is sok fejtörést okoz, hogy milyen változást hozhat ez a tény a központi felvételi feladatsorokban. Elsősorban nekik szánja gondolatait *Horváth Eszter*, arról, hogy miben változhatott a diákok tudása, milyen témákra lenne jó még a felvételi előtti hónapban egy kicsit ráerősíteni. Tapasztalatait itt osztotta meg.



2023. DECEMBER, HÉTTUSA

Hogyan lett egy Héttusa-feladatból Schweitzer-probléma?

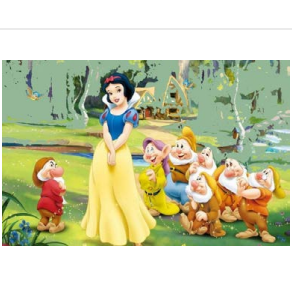
A 2023-as – egy hétig tartó – Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny november 6-án ért véget. A verseny feladatait egyetemi hallgatók számára tűzik ki, közülük is csak a legjobb matematikusok képesek megoldani azokat. A Héttusa versenyben ninccsenek ilyen nehéz problémák, a példáink megoldását bárki beküldheti. Ezért is különleges, hogy idén a 6. Schweitzer-feladat a Héttusa verseny júniusban közzétett feladatainak egyike ihlette. Hogyan? *Makay Géza* cikkéből, amely a KöMaL 2024. januári számában jelenik meg, ki fog derülni, itt pedig ízelítőt kapunk belőle..



2023. DECEMBER, HÉTTUSA

Beszámoló a Héttusa második fordulójáról

A szeptemberi Érintőben megjelent Héttusa feladatok legeredményesebb megoldóit és a megoldásokat ismerteti *Róka Sándor* beszámolója. A harmadik forduló feladatai és a beküldési feltételei pedig itt találhatók. Még most is érdemes bekapcsolódni a versenybe, hiszen a 4. forduló után az élmezőny tagjai könyvjutalomban részesülnek. Továbbra is várjuk új és régi matematika héttusázóinkat!



2023. DECEMBER, HÉTTUSA

Héttusa 3. forduló (2023. december)

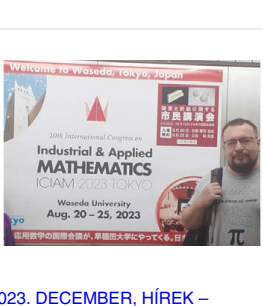
A Héttusa rovatban kitűzött feladatokra bárki küldhet megoldást. Elég a feladat kérdésére a feladatok sorszámát és a feltett kérdésekre a válaszokat megküldeni, indoklást, részletes megoldást nem szükséges írni. A beküldési határidő: **2024. január 8.** Következnek az új feladatok.

Semmiből egy új más világot teremtettem

2023. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Bolyai János korszakalkotó felfedezése két évszázad tükrében

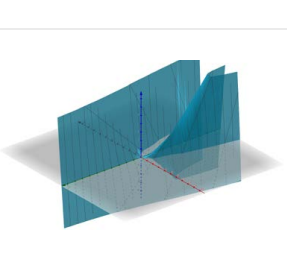
Pálfy Péter Pál 2023. november 3-án, a Magyar Tudomány Ünnepén megnyitó ünnepi ülésén, a Szegedi Tudományegyetem díszteremben megtartott előadásának szerkesztett szövegét adjuk közre. A cikket a Magyar Tudomány folyóirat engedélyével közöljük. Az idei nyitóelőadás Bolyai Jánosról szólt, aki kétszáz évvel ezelőtt, 1823. november 3-án írta meg édesapjának azt a levelet, amelyben bejelentette a nemeuklideszi geometria fölfedezését ezekkel a szavakkal: „a semmiből egy ujj más világot teremtettem". Tovább...



2023. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A világ legnagyobb matematikai konferenciája: ICIAM 2023 Tokióban

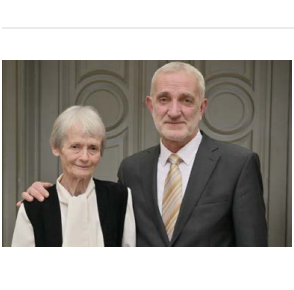
A matematikai konferenciák jellemzően kicsik, legalábbis mondjuk a hatalmas orvosi kongresszusokhoz képest. Van azonban néhány egészen nagy, ahol ezres nagyságrendű a résztvevők száma. Ezek közül is a legnagyobb az ICIAM, amire idén Tokióban mintegy ötezer matematikus gyűlt össze. A konferencia hangulatát *Róst Gergely* tudósítása érzékelteti.



2023. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A 100 éve született René Thom tudományos hagyatéka

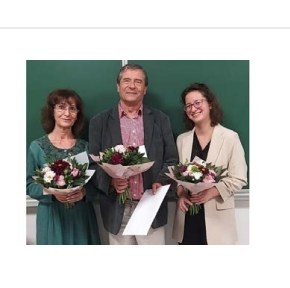
2023 szeptemberében volt *René Thom*, a neves és sokoldalú francia geométer és topológus születésének százados évfordulója. Ebből az alkalomból eseménysorozattal emlékezett meg róla a párizsi Francia Tudományos Akadémia és volt munkahelye, az Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS) kutatóintézet. *Szabó Szilárd* beszámolót készített az ünnepi alkalmakról.



2023. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Rátz Tanár Úr-díjas tanárok – Nobel-díjas tanítványok

2023. december 11-én, egy nappal azután, hogy Karikó Katalin és Krausz Ferenc átvették a Svéd Királyi Akadémia Nobel-díját, a Magyar Tudományos Akadémián átadták a Rátz Tanár Úr Életműdíjakat. A két eseményt több megszólaló is kapcsolatba hozta az MTA nagytermében, ahol 23 alkalommal díjazták a közoktatásban legjobbnak ítélt, természettudományokat és matematikát tanítókat. A fényképen látható *C. Neményi Eszter* és *Kosztolányi József* érdemelte ki idén matematikából az elismerést. De szó lesz néhány korábbi Rátz Tanár Úr díjazott tanárról is...



2023. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

35. Varga Tamás Módszertani Napok

Az idei, XXXV. Varga Tamás Módszertani Napokat 2023. november 3-4-én rendezte meg a Varga Tamás Alapítvány és az ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központja. Az esemény honlapja részletesen tájékoztat az előadásokról és a különböző szekciók programjáról. A Varga Tamás Junior díjat idén Dankowsky Anna Zóra, a Szent István Gimnázium matematikatanára, az életmű díjat pedig Sinkáné Papp Mária, nyíregyházi tanító és matematikatanár, valamint Vancsó Ödön, a Matematikatanítási és Módszertani Központ vezetője kapta. A szervezők, *Csapodi Csaba, Kiss Anna, Móricz Márk, Vancsó Ödön* fotókkal illusztált beszámolója következik.

2023. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Neumann-emlékülések Budapesten és New Yorkban

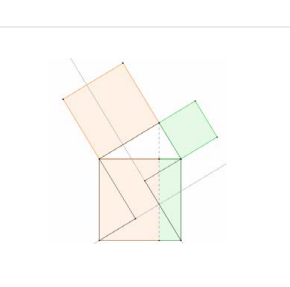
A fotón Neumann János szobra látható a budapesti Infoparkban. 2023-ban több eseménye és emlékkonferenciája is sor került Neumann János születésének 120. évfordulójának megünneplésére itthon és külföldön. Közülük kettőről számol be cikkében Molnár Lajos és Stipsicz András.

Schweitzer Miklós
1923-1945

2023. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Magas részvétel az idei Schweitzer-versenyen

A Bolyai János Matematikai Társulat 2023. október 27. és 2023. november 6. között rendezte meg a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, továbbá azok vehettek részt, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 2023-ben fejezték be. 23 versenyző összesen 135 megoldást nyújtott be a 11 kitűzött feladatra. Mindegyikük elismerést érdemel, különösen a képen látható Gáspár Attila, aki hibátlanul teljesített, és akinek első díját Molnár Lajos, a versenybizottság tagja adta át december 14-én, a Társulat ünnepi ülésén. A versenybizottság két titkára, *Gyenizse Gergő* és *Vígh Viktor* írták meg a díjátadón kihirdetett jelentést



2023. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – IV. rész

A 2024-es érettségi követelményeket 2023-as cikksorozatunk témakörök szerint tárgyalja. A negyedik részben a geometria témakörének változásait mutatjuk be táblázatos formában, kiemelve az újonnan bekerült, illetve a törölt tartalmakat. Néhány feladat is segítheti a most érettségire készülőket, tanárokat és diákokat. Ismét *Csapodi Csaba* mutatja be az újdonságokat.

2023. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

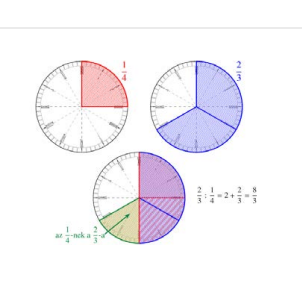
A Bolyai Borkóstolók hatéves története

Idén júniusban 14. alkalommal tartották meg a Bolyai Borkóstolót, a szegedi matematikusok immár hagyományává vált, érdekes matematikával és kötetlen társasjátékozással színesített (bor)kulturális alkalmat. A jó hangulatú „matekos borkóstolón" legutóbb Makay Géza szolgáltatta a matematikai tartalmat, a borokról pedig Varga Zoltán Gábor, a BorPont cég tulajdonosa mesélt érdekességeket. Örömmel lát a következő alkalommal minden érdeklődőt a szervező, *Győrffy Lajos*.

2023. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Az Erdős Center első két éve

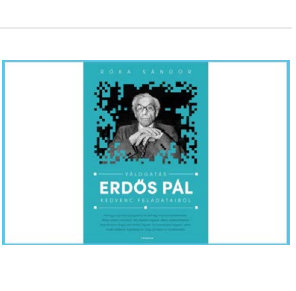
2021 szeptemberében már hírt adtunk az Erdős Pálról elnevezett konferenciaközpont létrejöttéről és céljairól, ami magasszintű workshopok, konferenciák és nyári iskolák szervezése mellett azt alkalmazó tematikus szemeszterek keretében, és fiatal, illetve elismert vendégprofesszorok meghívása. A HUN-REN Magyar Kutatási Hálózat támogatásával a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet által alapított Erdős Center működéséről, rendezvényeiről és jövőbeli terveiről írt *Böröczky Károly*, a konferenciaközpont igazgatója.



2023. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Nem megy a matek – avagy a törtek osztása egy rajzfilmben

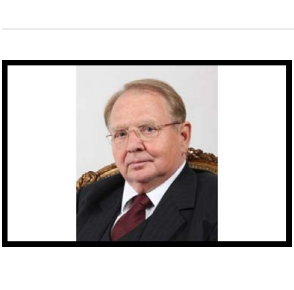
Arra szeretném felhívni a figyelmet, hogy egy-egy matekos témának (is) ezernyi arca van, és mindenki más irányból érkezik a megértéshez, és más irányból akad el. Az elakadás végteles is lehet ...., egész életre elvághatja a diákot a matematikától és mindentől, ami arra épül. – *Pintér Gergő* egy japán rajzfilm egyik jelenetéből kiindulva a törtek osztásának meg(nem)értését hozza fel példaként. Akadhatnak, akik egyetértenek a véleményével, és olyanok is, akik nem...



2023. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Válogatás Erdős Pál kedvenc feladataiból

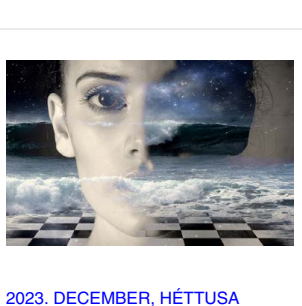
Róka Sándor Erdős Pál híres és középiskolai tudással is megérthető feladataiból válogatott legújabb könyvében. Miért különleges ez a válogatás? A válasz: a feladatok egyedisége, szépsége, eleganciája, ami a megjelenésük idején sokszor szokatlan volt, de most is jól felismerhetővé teszi őket. Kiknek ajánlja a könyvet *Sándor Csaba*, aki a kombinatorikus számelmélet kutatójaként is talált benne általa nem ismert számelméleti Erdős-feladatot? Hasznonal forgathatják a matematikai versenyekre készülő diákok és mindazok, akik örömüket lelik érdekes feladatokon való gondolkodáson. Tovább...



2023. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Daróczy Zoltán (1938–2023)

Daróczy Zoltán akadémikus tanítványai közül későbbi kollégáikként többen szintén a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagjai lettek. Tanítványaival, munkatársaival nemcsak szakmai, hanem bensőséges emberi kapcsolatokat ápolt. A vezetésére bízott közösségeket nagy empátiával, hozzáértéssel irányította... Olvasottsága, műveltsége, nyitottsága és tájékozottsága példaértékű volt. Halálával a Debreceni Egyetem és a Magyar Tudományos Akadémia egy kiváló oktatóját, kutatóját és szellemi vezetőjét veszítette el. A Debreceni Egyetem professor emeritusának életéről és tudományos eredményeiről *Páles Zsolt* írását közöljük.



2023. DECEMBER, HÉTTUSA

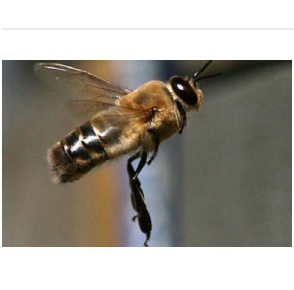
Kitekintés – egy beküldő megoldásai

Aki már elolvasta a Héttusa szeptemberben kitűzött feladatainak „hivatalos" megoldásait, itt azt is megtudhatja, hogy *Makay Géza*, a feladatsor egyik megoldója milyen (számítógépes) módszereket használt, és hogyan gondolta tovább a példák általánosítását. Aki pedig még nem ismeri a Héttusa versenyt, annak legyen ez az írás ösztönző: héttusára fel!

2023. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

No Time to be Brief: Hraskó Péter Relativitáselmélet c. tankönyvéről

Mindig nagy öröm olyan relativitáselméleti bevezető könyvet kézbe venni, amely a szerző érett oktatói tapasztalatain alapulva didaktikai nehézségeket kerül el, és ezáltal olvasása szinte bizonyosan fiatal fizikusokat fog elindítani ebbe az irányba. Azonban nemcsak Hraskó Péter Relativitáselmélet c. tankönyvéről szól *Etesi Gábor* recenziója: kitér az általános relativitáselmélet meglapozására több mint egy évszázaddal ezelőtt, és az azt követő fizikatörténeti fejleményeken át egészen az utóbbi évtized felgyorsult kutatásainak eredményeire. Tovább...



2023. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Egy geometriai kapcsolat a Fibonacci-sorozat és a Lucas-számok sorozata között

A Fibonacci-számok sokak érdeklődését felkeltik, hiszen többféle módon összekapcsolják a természetben előforduló jelenségekkel is. Itt például a méhek családfája került szóba. A szerzők egy érdekes geometriai kapcsolatra is rábukkantak: *Silling Szintia* a Debreceni Egyetem Turizmus-vendéglátás szakán tanul, ezért külön érdeklődéssel fogadtuk matematika témájú cikkét, amelyet konzulensével, *Figula Ágotával* közösen írtak.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

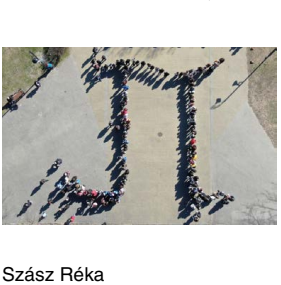
Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **HÍREK – ÚJDONSÁGOK** ROVAT A MATEMATIKÁHOZ ÉS A BOLYAI TÁRSULATHOZ KAPCSOLÓDÓ ESEMÉNYEKRŐL, ÚJDONSÁGOKRÓL SZÓL. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÁKÓCZI ILDIKÓ*.)



Szász Réka
2023. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

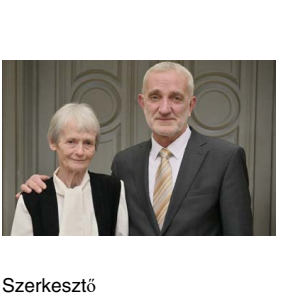
Matek az utcán 2024 – Legyél Te is önkéntes

2023 márciusában a Bolyai János Matematikai Társulat és 70 önkéntes az ország 7 helyszínén rendezte meg a Matek az Utcán eseményt, amiről az Érintő is beszámolt. A kezdeményezés a Matematika Nemzetközi Világnapját (3.14) ünnepli. Képünkön a tavalyi ceglédi flashmob drónfelvétele**.** A nagy sikerre való tekintettel jövőre is lesz Matek az Utcán**.**

Gyenizse Gergő, Vigh Viktor
2023. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Magas részvétel az idei Schweitzer-versenyen

A Bolyai János Matematikai Társulat 2023. október 27. és 2023. november 6. között rendezte meg a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, továbbá azok vehettek részt, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 2023-ben fejezték be. 23 versenyző összesen 135 megoldást nyújtott be a 11 kitűzött feladatra. Mindegyikük elismerést érdemel, különösen a képen látható Gáspár Attila, aki hibátlanul teljesített, és akinek első díját Molnár Lajos, a versenybizottság tagja adta át december 14-én, a Társulat ünnepi ülésén. A versenybizottság két titkára, *Gyenizse Gergő* és *Vigh Viktor* írták meg a díjátadón kihirdetett jelentést



Szerkesztő
2023. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Rátz Tanár Úr-díjas tanárok – Nobel-díjas tanítványok

2023. december 11-én, egy nappal azután, hogy Karikó Katalin és Krausz Ferenc átvették a Svéd Királyi Akadémia Nobel-díját, a Magyar Tudományos Akadémián átadták a Rátz Tanár Úr Életműdíjakat. A két eseményt több megszólaló is kapcsolatba hozta az MTA nagytermében, ahol 23. alkalommal díjazták a közoktatásban legjobbnak ítélt, természettudományokat és matematikát tanítókat. A fényképen látható *C. Neményi Eszter* és *Kosztolányi József* érdemelte ki idén matematikából az elismerést. De szó lesz néhány korábbi Rátz Tanár Úr díjazott tanárról is...

Röst Gergely
2023. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

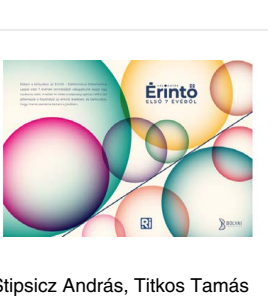
A világ legnagyobb matematikai konferenciája: ICIAM 2023 Tokióban

A matematikai konferenciák jellemzően kicsik, legalábbis mondjuk a hatalmas orvosi kongresszusokhoz képest. Van azonban néhány egészen nagy, ahol ezres nagyságrendű a résztvevők száma. Ezek közül is a legnagyobb az ICIAM, amire idén Tokióban mintegy ötezer matematikus gyűlt össze. A konferencia hangulatát *Röst Gergely* tudósítása érzékelteti.

Szász Réka
2023. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

APP&X pályázat – közönségszavazással!

Épp e napokban zajlik (és december 18-án zárul) a Bolyai János Matematikai Társulat APP&X pályázatának közönségszavazása. A pályázat elnevezése arra utal, hogy Bolyai János a nemeuklideszi geometria felfedezését az „Appendix – A tér tudománya” című tanulmányában írta le részletesen. A pályázatra 238 pályamű érkezett az alsó tagozatosoktól a középiskolás diákokig az ország minden tájáról. A zsűri (amelynek tiszteletbeli elnöke Szilágyi Áron, háromszoros olimpiai bajnok vívó) a közönségdíjon kívül 9 alkotást díjaz. Részletesebben....



Stipsicz András, Titkos Tamás
2023. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Válogatás az Érintő első 7 évéből

A Bolyai Társulat kiadásában 2023 decemberében megjelent könyvben az első 7 év terméséből válogattunk össze egy csokorra valót. A teljesség igénye nélkül rendeztük kötetbe online matematikai lapunk pár cikkét, amelyek megítélésünk szerint jól jellemezték az újságot az elmúlt években, és bemutatják, hogy merre szeretne tartani a jövőben. A 168 oldalas kiadvány a BJMT honlapján pdf formátumban olvasható és ingyenesen letölthető. *Stipsicz András* és *Titkos Tamás* írt a könyvhöz előszót.

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Szász Réka 2023. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Matek az utcán 2024 – Legyél Te is önkéntes

2023 márciusában a Bolyai János Matematikai Társulat és 70 önkéntes az ország 7 helyszínén rendezte meg a Matek az Utcán eseményt, amiről az Érintő is beszámolt.

A kezdeményezés a Matematika Nemzetközi Világnapját (3.14) ünnepli. A nagy sikerre való tekintettel jövőre is lesz **MATEK AZ UTCÁN, 2024. március 16-án szombaton 10-13 óráig.** A program célja, hogy az utca emberét bevonjuk érdekes matematikai tevékenységekbe szabadtéri helyszíneken szerte az országban. Hogy milyen helyszíneken és milyen programmal, az az önkénteseken múlik.

Aki szívesen lenne önkéntes bármilyen településen akár egy órára, jelentkezzen elköteleződés nélkül ezen az űrlapon. Az önkéntesek részt vehetnek programok előkészítésében, segíthetnek más által előkészített tevékenységben, vagy vezethetnek saját tevékenységet is.

A részletes programról az Érintő facebook-oldalán, a nap eseményeiről pedig az Érintő júniusi számában számolunk majd be.

Szász Réka, Bolyai János Matematikai Társulat

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Gyenizse Gergő, Vigh Viktor 2023. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Magas részvétel az idei Schweitzer-versenyen

Jelentés a 2023. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat 2023. október 27. és 2023. november 6. között rendezte meg a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, továbbá azok vehettek részt, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 2023-ben fejezték be.

A verseny lebonyolítására a Társulat a következő bizottságot kérte fel: Krisztin Tibor (elnök), Gyenizse Gergő (titkár), Vígh Viktor (titkár), Bodor Bertalan, Fodor Ferenc, Hajnal Péter, Kevei Péter, Molnár Lajos Gábor, Nagy Béla, Nagy Gábor Péter, Röst Gergely, Totik Vilmos.

A bizottság október 20-i ülésén kiválasztotta a 11 kitűzendő feladatot. A bizottság köszönetét fejezi ki mindazoknak, akik feladatot javasoltak a versenyre. A kitűzött feladatokat javasolták: 1. Totik Vilmos, 2. Juhász István, 3. Totik Vilmos 4. Laczkovich Miklós és Totik Vilmos, 5. Waldhauser Tamás, 6. Makay Géza, 7. Bodor Bertalan, 8. Nagy Béla és Totik Vilmos, 9. Krisztin Tibor, 10. Molnár Lajos, 11. Kevei Péter és Vígh Viktor.

A verseny eredményes volt; 23 versenyző összesen 135 megoldást nyújtott be. Ez az elmúlt jónéhány év legmagasabb részvétele, a bizottság reméli, hogy egyre többen kapnak majd kedvet a versenyzéshez az elkövetkezendő években.

A versenybizottság a beérkezett megoldásokat kiértékelte, majd november 23-i ülésén a következő díjakat ítélte oda, amelyeket a Társulat évzáró díjátadó ünnepi ülésén december 14-én Molnár Lajos, a versenybizottság tagja adott át (a feladatok és a nem hivatalos megoldások itt találhatóak):

Gáspár Attila hibátlanul oldotta meg mind a 11 kitűzött feladatot, köztük a legnehezebbnek bizonyult 10. feladatot egyedüliként. Leírásai precízek, mintaszerűek; a 8. és 10. feladatokra különösen elegáns megoldást adott.

Ezek alapján *I. díjban* és 100 000 Ft pénzjutalomban részesül **Gáspár Attila**, az ELTE idén végzett matematikus hallgatója.

Schweitzer Miklós
1923-1945
1941-ben érettségizett. Szá…zása
miatt nem vették fel egyete… Az
analízis (hatványsorok elm…
területén ért el jelentős …veket.

Kocsis Anett hibátlanul oldotta meg az 1., 2., 3., 4., 5., 6., valamint a 8., 9. és 11. feladatokat, a 7. feladatra adott megoldása lényegében helyes. Zólomy Kristóf hibátlan megoldást adott a 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9. és a 11. feladatokra, valamint az 1. feladatban értékelhető részeredményre jutott.

Ezek alapján *II. díjban* és egyenként 60 000 Ft pénzjutalomban részesül **Kocsis Anett**, az ELTE I. éves matematikus mesterszakos hallgatója, valamint **Zólomy Kristóf**, az ELTE végzett matematikus hallgatója.

Füredi Erik helyesen oldotta meg a 3., 4., 5., 6., 7., valamint a 11. feladatokat, továbbá lényegében helyes az 1. és a 8. feladatokra adott megoldása. Imolay András hiánytalanul oldotta meg az 1., 2., 3., 4., 5., 7. és 11. feladatokat, valamint értékes részeredményekre jutott a 6. és 8. feladatokban

Ezek alapján *III. díjban* és egyenként 40 000 Ft pénzjutalomban részesül **Füredi Erik**, az ELTE III. éves matematikus alapszakos hallgatója, valamint **Imolay András**, az ELTE végzett matematikus hallgatója.

Kökényesi Márk hibátlan megoldást adott a 3., 7. és 11. feladatokra, valamint lényegében helyesen oldotta meg a 2. és 4. feladatokat. Az 5. feladatban adott konstrukciója helyes, de az indoklása hiányos, a 6., 8. és 10. feladatokban szintén értékes eredményeket ér el, de indoklásai hibákat tartalmaznak.

Ezek alapján *kiemelt dicséretben* és 30 000 Ft pénzjutalomban részesül **Kökényesi Márk**, az ELTE II. éves alapszakos hallgatója.

Hegedűs Dániel és Földesi András mindketten öt-öt feladatot oldottak meg hiánytalanul vagy lényegében helyesen.

Ezek alapján *dicséretben* és 20 000 Ft pénzjutalomban részesül **Hegedűs Dániel** és **Földesi András**, mindketten az ELTE III. éves alapszakos hallgatói.

Gyenizse Gergő, Vigh Viktor

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Szerkesztő 2023. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Rátz Tanár Úr-díjas tanárok – Nobel-díjas tanítványok

Huszonharmadszor vett részt Rátz Tanár Úr Életműdíj átadó ünnepségen Kroó Norbert professzor, a Magyar Természettudományos Oktatásért Alapítvány kuratóriumának elnöke, valamint a díj alapítói közül ketten is, Bogsch Erik, a Richter Gedeon Nyrt. igazgatóságának elnöke és Bojár Gábor, a Graphisoft alapítója. Ez is jelzi azt, hogy 2000 óta az Ericcson Magyarország K+F központ vezetőségével együtt mindannyian elköteleződtek a magyar természettudományos oktatás fontossága és tanárainak elismerése mellett. A matematika-, fizika-, kémia- és biológiaoktatás területén nyújtott kimagasló teljesítményéért 2000 óta az Alapítvány összesen 176 pedagógust díjazott (Idén a pénzjutalom összege fejenként kétmillió forint volt.)

Az életművet díjazó elismerésre bárki felterjesztheti a saját életében meghatározó szerepet betöltő pedagógusát, éppen ezért az Alapítvány folyamatosan bátorítja a diákokat, szülőket, kollégákat és intézményeket az ország minden területén, hogy nevezzék azokat a reáltárgyakat oktató tanárokat, akiket érdemesnek tartanak a díjra. Az idei évben közel 100 pályázat érkezett 6 vármegyéből, a pályázati időszak lezárását követően pedig a négytagú kuratórium – Dr. Kroó Norbert professzor, akadémikus, a kuratórium elnöke, Lajos Józsefné, matematika tantárgyi szakértő, Dr, Falus András professor emeritus, akadémikus, Dr. Ifj.Szántay Csaba professzor, az MTA doktora – választotta ki a díjazott pedagógusokat.

Kroó Norbert megnyitó beszédében megemlítette, hogy éppen hatvan éve személyesen is részt vehetett egy magyar fizikus, Wigner Jenő Nobel-díj átadóján. Beszédében kitért arra, hogy két idei Nobel-díjasunk sikerének része az is, hogy kiktől tanultak az általános- és a középiskolában. A kiváló tanár felismeri a tehetséges diákot és segíti előmenetelében. Példa erre Dr. Tóth Albert József földrajz-biológia szakos pedagógus, Karikó Katalin egykori tanára is, aki munkájáért 2015-ben vehette át a Rátz Tanár Úr Életműdíjat.

Ezt a díjat kapta meg 2009-ben Láng Hugó tanár úr is, akit más tanárai között Krausz Ferenc több helyen is idézett interjújában méltatott:

„A magyarországi indulás volt a lehető legfontosabb ebben az egész történetben, ugyanis ha az indulás nem úgy zajlik le, ahogy lezajlott, akkor a többi nem történt volna meg. A Nobel-díjhoz vezető út úgy kezdődött, hogy az általános iskolában volt egy egészen kimagasló képességű fizikatanárom, Kiss tanár úr, aki vasszigorral tartott rendet az osztályban, és egészen lenyűgöző órákat tartott kísérletekkel, úgyhogy többé-kevésbé ott dőlt el, hogy én fizikus leszek. Ez az elhatározás aztán tovább szilárdult bennem a középiskolai tanulmányok során, Láng Hugó tanár úrhoz, a székesfehérvári Teleki Blanka Gimnázium matematikatanárához jártam be Mórról hetente egyszer külön matematikafoglalkozásra, az valami fantasztikus volt, miközben a móri Táncsics Mihály Gimnáziumban végeztem a tanulmányaimat, szintén nagyszerű tanárokkal. Abban a fantasztikus szerencsében volt részem, hogy így a középiskolai tanulmányaim végére közvetlen kapcsolatba kerülhettem talán minden idők egyik legnagyobb magyarországi középiskolai fizikatanárával, Vermes Miklós tanár úrral, akivel intenzív levelezést is folytattunk. Amikor egy évig katona voltam Debrecenben, akkor szinte havonta váltottunk levelet és cseréltünk ki ötleteket különböző fizikai feladatokról. Ilyen tanárok hatása egy fiatalember döntésére az ügyben, hogy ő mit kezd magával, egészen döntő jelentőségűek voltak.” (Aki kíváncsi arra, hogyan vette át Karikó Katalin és Krausz Ferenc a Nobel-díjat, itt megnézheti.)

Bojár Gábor a Rátz Tanár Úr díjátadó ünnepségen így fogalmazott: *„Ez a díj természetesen elsősorban hála azon tehetséges diákok oktatásáért, akiknek üzleti sikereinket köszönhetjük. De nemcsak az. Ez a díj üzenet is szeretne lenni a gazdaság szereplőinek részéről a mindenkori döntéshozók felé, hogy az oktatásba, ezen belül különösen a pedagógusok megbecsülésébe történő befektetés a legbiztosabban megtérülő gazdasági befektetés.”*

Röviden arról is szólt, hogy bár ellentmondás látszik ebben az évben a két magyar Nobel-díjas sikere és a magyar PISA-eredmények között, de nemcsak nálunk, hanem még a példaként emlegetett északi országokban is romló eredményeket mértek az iskolások körében, és ez részben bizonyára a COVID következménye: a rohamosan elterjedt távoktatás nem tud mindent helyettesíteni, amit a tanár személyes varázsával tud átadni a diákjainak.

2023
RÁTZ TANÁR ÚR
ÉLETMŰDÍJ

Bojár Gábor

2023 Rátz Tanár Úr Életműdíjjal kitüntetett pedagógusai (zárójelben a róluk készült videók youtube-linkje, a videók alatt olvashatók a laudációk is):

2023 Rátz Tanár Úr díjazottai

Biológia

- **Csombóné Szaniszló Margit**, Eperjesi Általános Iskola, Eperjes (https://www.youtube.com/watch?v=7pqGB-7Ua9Y)
- **Gergely Tibor**, Nyíregyházi Krúdy Gyula Gimnázium, Nyíregyháza **(**https://www.youtube.com/watch?v=u15XQGWYTTc**)**

Fizika

- **Punyiné Kandrács Erzsébet,** Kántor Mihály Általános Iskola, Cigánd (https://www.youtube.com/watch?v=xVnM80pY8wI)
- **Tófalusi Péter**, Debreceni Református Kollégium Dóczy Gimnáziuma, Debrecen (https://www.youtube.com/watch?v=aASfi3nVPu4)

Kémia

- **Dr. Petz Andrea**, Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma és Kollégiuma, Pécs (https://www.youtube.com/watch?v=qq1TFi6mPXA)
- **Lovasi Ildikó,** Hunyadi Mátyás Általános Iskola, Budapest XIII. kerület (https://www.youtube.com/watch?v=F8ZborQJuvg)

Matematika

- **C. Neményi Eszter**, Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanítói- és Óvóképző Kar, Matematika Tanszék, Budapest (https://www.youtube.com/watch?v=F5DLq6eD-w8)
- **Dr. Kosztolányi József**, Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet, Analízis Tanszék, Szeged (https://www.youtube.com/watch?v=5receeYFRog)

C. Neményi Eszter és Kosztolányi József

Aki a korábbi évek Rátz tanárjaira és tanárnőire is kíváncsi, nyissa meg az Életműdíj honlapját: https://www.ratztanarurdij.hu/.

Még egy korábbi díjazottat mindenképpen meg kell említenünk: ő **Katz Sándor,** aki 2007-ben kapott Rátz Tanár Úr Életműdíjat.

Dr. Katz Sándor 2023-ban a magyar oktatás és köznevelés kategóriában elnyerte a Prima Primissima díjat is, amelyet december 1-én vett át. A díjátadóról itt olvashatnak..

Megemlítjük azt is, hogy a magyar tudomány kategóriában két fizikus, Kiss L. László és Sólyom Jenő mellett a matematikus nyelvész Prószéky Gábor is Prima Primissima díjas lett 2023-ban.

Minden díjazottnak gratulálunk, és reméljük, hogy mindazok, akik eddig is támogatták a legjobb pedagógusok elismerését, a jövőben is meghirdetik ezeket a lehetőségeket. *A szerk.*

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Copyright © BOLYAI TÁRSULAT Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Adatkezelés
Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Röst Gergely 2023. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A világ legnagyobb matematikai konferenciája: ICIAM 2023 Tokióban

A matematikai konferenciák jellemzően kicsik, legalábbis mondjuk a hatalmas orvosi kongresszusokhoz képest. Van azonban néhány egészen nagy, ahol ezres nagyságrendű a résztvevők száma. Ezek közül is a legnagyobb az ICIAM, amire idén Tokióban mintegy **ötezer matematikus** gyűlt össze.

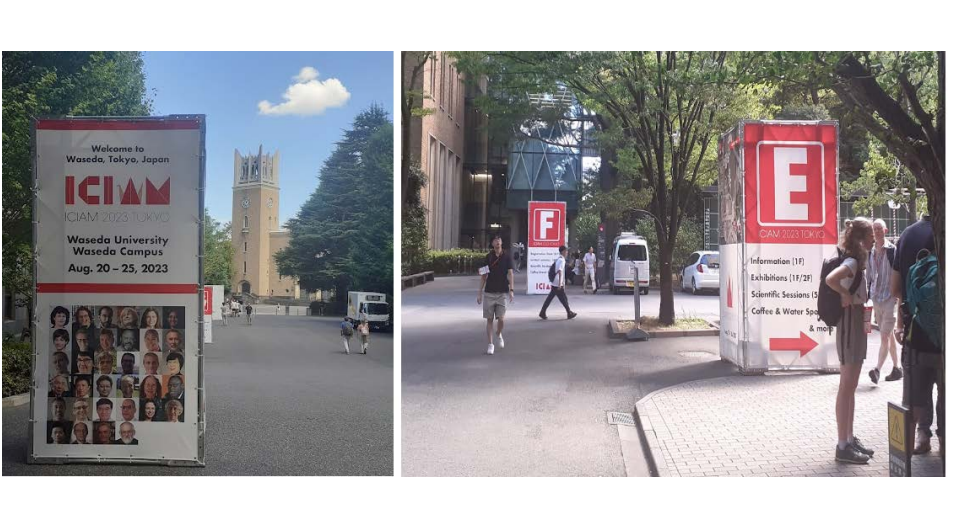
Az ICIAM betűszó az International Congress on Industrial and Applied Mathematics, vagyis a Nemzetközi Ipari és Alkalmazott Matematikai Kongresszus rövid változata, amit a legnagyobb alkalmazott matematika társulatokból álló tanács, az International Council for Industrial and Applied Mathematics nevű szervezet (rövidítve szintén ICIAM) rendez négyévente. Az első ilyen kongresszus 1987-ben volt Párizsban, én idén harmadszor vettem részt 2011 Vancouver és 2019 Valencia után. 2023-ban Tokióban a Vaszeda Tudományegyetem kampusza kiváló helyszínt biztosított a nagyszabású rendezvénynek. Az egész Vaszeda városnegyed a kongresszus lázában égett, mindenhol az ICIAM 2023 poszterei voltak: a lámpaoszlopokon, a buszok oldalán, a metróállomáson. A környékbeli éttermeket, kávézókat ellepték a matematikusok.

ICIAM poszter minden villanyoszlopon

ICIAM a buszokon és a metróban

Még a kisebb utcák is tele voltak plakátokkal

Mi is történik egy ilyen kongresszuson? Először is sok matematikai előadás van, sőt rengeteg: több mint 80 (!) párhuzamos szekció futott egyszerre. Ember legyen a talpán aki ki tudja választani mit lenne a leginkább érdemes meghallgatni. Az előadások mellett vannak még poszter szekciók, ezen főleg a fiatalabb kutatók szokták bemutatni az eredményeiket. A poszter szekciók úgy zajlanak, hogy egy teremben felállítanak sok állványt, és arra mindenki kifüggeszti a kutatásait összefoglaló posztert, majd a szekció ideje alatt, ami általában másfél-két óra szokott lenni, ott álldogál a posztere mellett és mesél róla az arra járó érdeklődőknek. Van egy kis bazár jellege a dolognak, csak a portékáink itt tételek, számítások és alkalmazások. Élettudományi konferenciákon általában viszonylag kevés előadás és sok poszter van, alkalmazott matematikai konferenciákon az arány nagyjából fordított, elméletibb konferenciákon pedig elég ritka a poszter szekció.



Tájékozódás a Vaszeda-kampuszban

A konferencia látványos megnyitója klasszikus japán tánccal kezdődött, majd a szervezők felszólalásai következtek. Beszédet mondott az oktatásért, kultúráért, sportért, tudományért és technológiáért felelős miniszter a japán kormányból, de üzenetet küldött a japán miniszterelnök és a tokiói polgármester is. Végül tudományos díjakat át.

A kongresszuson bemutatott eredmények lényegében minden létező témát felöleltek: az ipar és a gazdaság különböző szektorai, pénzügy, ökológia, orvostudomány, klímamodellezés, illetve a ma már mindent átszövő adattudomány, gépi tanulás, és mesterséges intelligencia matematikája. A többszáz miniszimpózium megmutatta, hogy a matematikát tényleg az élet minden területén lehet alkalmazni. Nagyon intenzív volt az élet az ICIAM-en: minden nap reggel 8:30-tól este 8:30-ig ment a program. A kiemelt előadásokra esténként került sor.

A Neumann-előadás felkonferálása

Ezek közül az egyik legnagyobb presztízsű a Neumann-előadás, amit ezúttal Yousef Saad, a minnesotai egyetem professzora tartott. Az előadásban tárgyalt probléma látszólag nagyon egyszerű: oldjuk meg az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, vagyis egy négyzetes A mátrixra és egy b vektorra keressük meg az x vektort. Igazából már az ókori Kínában is tudták, hogyan kell ezt megoldani, csakhogy manapság az alkalmazásokban a vektorok mérete hatalmas. A kérdés tehát az, hogy amikor az egyenletrendszer óriási nagy, akkor hogyan lehet ezt gyorsan és hatékonyan megoldani. Ilyen nagy problémák gyakran előfordulnak a kvantumkémia, a számítógépes grafika, a folyadékdinamika (parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása), az elekromos hálózatok, a gépi tanulás és optimalizálás területén. Neumann János maga is foglalkozott ilyen kérdésekkel, de az előadásnak más magyar vonatkozása is volt: a történelmi visszatekintésben az előadó többször említette Lánczos Kornél nevét, aki szintén kidolgozott módszereket nagy mátrixok kezelésére. Idézte továbbá a magyar származású Richard S. Vargát, aki a 60-as években napi szinten oldott meg ilyen egyenletet 20 000 dimenzióban egy atomenergia-intézet számára: az akkori számítógépekkel és kreatív matematikával ez már lehetséges volt. Azóta volt fejlődés mind a számítási kapacitásokban, mind a matematikai módszerekben, és a modern alkalmazásokban már több millió dimenziós vektorokkal kell dolgozni, de Richard S. Varga *Matrix Iterative Analysis* c. könyve máig a témakör egyik klasszikus mesterműve. Richard S. Varga 2022-ben elhunyt, de 2016-ban még ott volt a Bolyai János Matematikai Társulat Győrben rendezett magyar alkalmazott matematikai konferenciáján, ahol ő nyitotta meg plenáris előadóként a szakmai programot. Életművéről az Érintőben is olvashatunk.

Az előadásokon túl a konferencia érdekes színfoltja volt a matematikai expo: itt könyv- és folyóiratkiadók, matematikai társulatok, vállalatok standjain lehetett böngészni a legújabb kiadványok között, vagy éppen kipróbálni fejlesztés alatt álló matematikai szoftvereket.

A konngresszus hangulatát jól összefoglalja a kisfilm.

A következő ICIAM 2027-ben lesz, a helyszín Hága, Hollandia.

A képen a szegedi delegáció (Garab Ábel, Röst Gergely, Bartha Ferenc)

Röst Gergely

Szegedi Tudományegyetem

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Szász Réka 2023. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

APP&X pályázat – közönségszavazással!

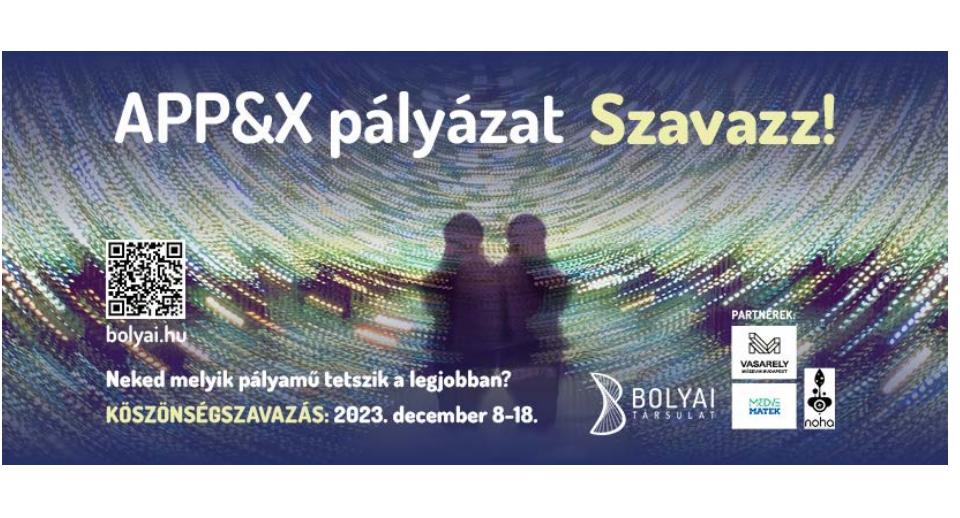
UNESCO
unesco
Bolyai János levelének 200. évfordulója a nem-euklidészi geometria felfedezéséről (1823) UNESCO-val közös megemlékezés

A Bolyai János Matematikai Társulat egész éves programsorozattal ünnepli a 2023-as Bolyai emlékévet, amelynek keretében iskolásoknak hirdették meg az APP&X pályázatot.

A pályázat célja, hogy különböző érdeklődésű gyerekekhez közel vigye a matematikát az alkotáson keresztül. Bolyai János éppen 200 évvel ezelőtt jelentette be a nemeuklideszi geometria felfedezését, és ezt az „Appendix – A tér tudománya” című tanulmányában írta le. Erre utal a pályázat elnevezése, és a pályaműveknek is kapcsolódniuk kellett legalább két ehhez tartozó fogalomhoz: végtelen, távolság, találkozás, világok, tér, párhuzamosok, appendix.

A pályázaton 3-13. évfolyamos diákok három műfajban nyújthattak be alkotásokat. 238 pályamű érkezett, 212 kép, 17 szöveges, és 9 videó. 37 különböző községből érkeztek a pályaművek az ország minden tájáról. A 74 támogató tanár a legkülönfélébb művészeti tárgyakat tanítja, mint például rajz és vizuális kultúra, grafika, ábrázoló művészet, digitális média, mozgóképkultúra és fotográfia. A többi tanár között vannak matematika, digitális kultúra, magyar nyelv és irodalom, természettudomány, technika, idegen nyelv és testnevelés szakosak, tanítók és egy könyvtáros is.

A zsűri 27 művet választott ki a közönségszavazásra. „Öröm volt látni a rengeteg különböző ötletettel és sokféle megközelítéssel elkészített pályaműveket. Nagyon nehéz volt kiválasztani, hogy melyek induljanak a közönségszavazáson, hiszen szívünk szerint szinte az összeset beválogattuk volna” - mondta Simon Péter, a Bolyai Társulat főtitkára, aki a zsűrinek is tagja.


APP&X pályázat Szavazz!
bolyai.hu
Neked melyik pályamű tetszik a legjobban?
KÖSZÖNSÉGSZAVAZÁS: 2023. december 8-18.
BOLYAI TÁRSULAT
PARTNEREK:
VASARELY
MEDVE MATEK
noha

A közönségszavazás épp most zajlik, december 8. és 18. között mindenki szavazhat, hogy mely pályaművek tetszenek neki a legjobban. Ezután fogja a zsűri kihirdetni a díjakat. A nyeremények élmények: a díjazottak tábort, tanfolyamot vagy szabadulószobát választhatnak. A zsűri tiszteletbeli elnöke Szilágyi Áron, háromszoros olimpiai bajnok vívó (videóüzenete itt látható). A díjkiosztó a Vasarely múzeumban lesz 2024. januárjában.

Szász Réka, Bolyai János Matematikai Társulat

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Stipsicz András, Titkos Tamás 2023. DECEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Válogatás az Érintő első 7 évéből

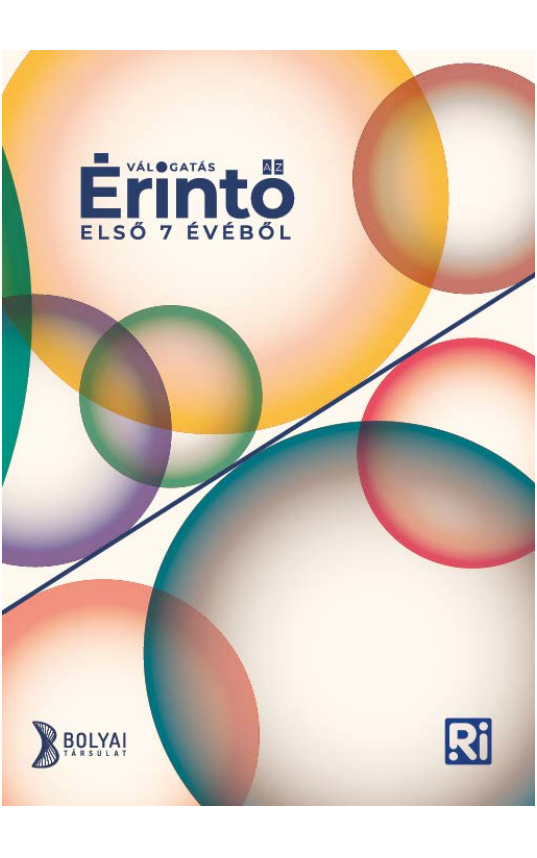
Előszó

„Kutya nehéz úgy hazudni, ha az ember nem ösmeri az igazságot" - kezdődik Esterházy Harmonia Caelestis-e. Az igazság ismerete nélkül azonban nem csak hazudni, hanem igazat mondani sem könnyű. Egyszerű azt mondani, hogy a matematika mai modern világunkban mindenütt ott van (mutogathatunk elektronikus eszközökre, mobil alkalmazásokra, online bankolásra), de pontosan megnevezni a matematikát, ami ott van, és hogy milyen közvetett módon van ott, már nem is olyan könnyű. Persze az olvasó dolga sem egyszerű. Azt nem nehéz elfogadni, hogy a matematika jelen van, de az igazság megtalálásához még átlagos matematikai ismeretekkel is nagyon komoly erőfeszítéseket kell tenni.

A legfőbb nehézséget az okozza, hogy az iskolában tanult matematika és a mai modern matematika között hatalmas szakadék tátong, és a leghétköznapibb alkalmazás hátterét is olyan matematika szolgáltatja, amit meglehetősen nehéz a középiskolás tananyaghoz kapcsolni. Gondoljunk a mai autókban található automatikus fékező és sebességszabályozó rendszerekre, amiket kamerák vagy különböző radarok segítségével vezérel egy fedélzeti számítógép. Milyen elven működik ez a rendszer? Hogyan észleli, hogy fékezni kell? Mennyire kell fékezni? Hogyan kell kivitelezni magát a fékezést? Próbáljunk meg ennek a komplex rendszernek csak egy nagyon lecsupaszított feladatára fókuszálni: egy 100 km/h sebességgel haladó autót egyenletes fékezéssel állóra kell fékeznünk 3 másodperc alatt. Ez alatt a 3 másodperc alatt hány métert tesz meg az autó? Ha szeretnénk elkerülni az ütközést, akkor ezt az adatot feltétlenül ki kell tudnunk számolni. A kérdés megválaszolásához egy másodrendű differenciálegyenletet kell megoldanunk. Középiskolából emlékezhetünk másodfokú egyenletekre (sokan talán még a megoldóképletet is tudják), és valóban, az egyszeri ismeretterjesztőnek szerencséje van, mert egy ponton – némi integrálás után – másodfokú kifejezésekkel kell számolni. Tehát a feladatot hozzá tudjuk kapcsolni a középiskolás emlékeinkhez. De mit tudunk felidézni akár csak egy egyismeretlenes, de harmadfokú egyenlet megoldhatóságáról? A harmadfokú egyenlet megoldóképlete a XVI. század óta ismert, csak épp nagyon bonyolult, megértéséhez nem elegendő a valós számok ismerete, szükségesek hozzá a komplex számok. Tehát már a XVI. századi matematika bemutatásához is jócskán el kéne emelkedni a mai középiskolás tananyagtól; hát még mire vállalkozik az, aki a XX., vagy pláne a XXI. századi fejleményekről akar beszámolni? Egy másik példa: az internetes bankolás manapság igazán egyszerű feladatnak tűnik – persze szeretnénk magunkat biztonságban tudni, ne kerüljenek személyes vagy banki adataink illetéktelenek kezébe-gépére. Az internetes titkosítás (nem meglepő módon) szintén matematikai eredményeken alapul – ez esetben a középiskolából jól ismert prímszámok és azok bizonyos tulajdonságai játsszák a főszerepet. De melyek is ezek a tulajdonságok, azokat hogyan lehet felhasználni, és aztán ezt az elméletet hogyan lehet a gyakorlatba átültetni?

Az Érintő szerkesztői 7 évvel ezelőtt arra vállalkoztak, hogy megpróbálják áthidalni azt a bizonyos szakadékot.

Létrehoztunk egy elektronikus lapot, ami – hála mostanra már többszáz szerzőnknek – minden matematika iránt érdeklődő olvasó számára – előképzettségüktől függetlenül – mond valamit. Rendszeresen beszámolunk az éppen aktuális magyar vonatkozású érdekességekről, és megpróbáljuk megszólítani azokat is, akik nem rendelkeznek komoly matematikai háttérrel, de érdeklődnek a tudomány iránt. Tanóra–szakkör rovatunkkal a matematikatanárok eszköztárának gazdagításához és diákjaik motiválásához igyekszünk hozzájárulni. Az Érintő hetedik évében elindítottuk Héttusa rovatunkat, amely a rejtvények, fejtörők kedvelőinek szól, és persze azoknak, akiknek hiányoznak a korábbi tanulmányok során megszokott (esetleg trükkös) kihívások.



Most a Bolyai János Matematikai Társulat kiadásában megjelentettünk egy könyvet is: ebben az első 7 év terméséből válogattunk össze egy csokorra valót. A teljesség igénye nélkül rendeztük kötetbe online matematikai lapunk pár cikkét, amelyek megítélésünk szerint jól jellemezték az újságot az elmúlt években, és bemutatják, hogy merre szeretne tartani a jövőben.

Az Érintő szerkesztésében 2022-ben bekövetkezett váratlan haláláig meghatározó szerepet töltött be Besenyei Ádám, aki egymaga megtestesítette célkitűzéseinket. Elkötelezett volt nemcsak a tudomány és alkalmazásai, de a tudományos ismeretterjesztés iránt is, életének utolsó éveiben pedig az egyetemi teendői mellett végtelen lelkesedéssel tanított középiskolában is. Ezzel a könyvvel rá is emlékezünk.

Stipsicz András főszerkesztő,

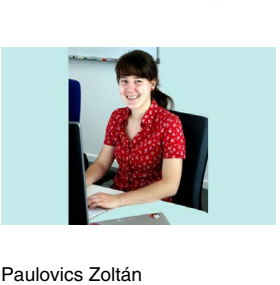
Titkos Tamás rovatvezető szerkesztő

Megj.: A 168 oldalas könyv a BJMT honlapján pdf formátumban olvasható és ingyenesen letölthető: https://www.bolyai.hu/kiadvanyaink-valogatas-az-erinto-elso-het-evebol/.

.

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

AZ **INTERJÚ-PORTRÉ** MENÜPONT JÓL VAGY KEVÉSBÉ ISMERT MATEMATIKUSOKAT, VAGY OLYAN, EGYKOR MATEMATIKUSKÉNT VÉGZETTEKET SZERETNE BEMUTATNI, AKIK MA MÁS SZAKMA ELISMERT KÉPVISELŐI, SPORTOLÓK, MŰVÉSZEK...(ROVATSZERKESZTŐ: *OLÁH VERA*.)



Paulovics Zoltán
2023. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Ugródeszkák matek szakon – Czeller Ildikó

Az Ugródeszkák matek szakon sorozat utolsó interjúalanya egy amerikai, ételrendeléssel foglalkozó cégnél dolgozik mint adatelemző, data scientist. És tetszik neki, élvezi a sokféle feladatot; van, amit tanult, és van, amit nem tanult az egyetemen. Egyet azonban biztosan tud: a cég működése alapvetően nem az adatokon, hanem a konyhán múlik. A kérdező *Paulovics Zoltán*.

Páles Zsolt
2023. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Daróczy Zoltán (1938–2023)

Daróczy Zoltán akadémikus tanítványai közül későbbi kollégákként többen szintén a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagjai lettek. Tanítványaival, munkatársaival nemcsak szakmai, hanem bensőséges emberi kapcsolatokat ápolt. A vezetésére bízott közösségeket nagy empátiával, hozzáértéssel irányította... Olvasottsága, műveltsége, nyitottsága és tájékozottsága példaértékű volt. Halálával a Debreceni Egyetem és a Magyar Tudományos Akadémia egy kiváló oktatóját, kutatóját és szellemi vezetőjét veszítette el. A Debreceni Egyetem professor emeritusának életéről és tudományos eredményeiről *Páles Zsolt* írását közöljük.

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Paulovics Zoltán 2023. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Ugródeszkák matek szakon – Czeller Ildikó

Beszélgetés Czeller Ildikóval (Data scientist, Sunbasket)

Az első kérdésem, hogy szerinted mi fontos ahhoz, hogy valaki jó legyen matekból?

Ez nehéz kérdés, mert tipikusan az ember ennek csak az egyik oldalát tapasztalja meg. Általános bölcsességeket nem szeretnék mondani, de három dolgot kiemelnék. Azt gondolom, hogy egyrészt fontos a részletekre figyelés. Matekozás során az ember általában nem lehet nagyvonalú, hiszen a legapróbb részleteken is múlhat, hogy valami igaz vagy sem. Másrészt szükség van érdeklődésre, illetve olyan feladatokra, amelyek felkeltik az ember érdeklődését. Sokszor van, hogy valaki, aki az iskolában nem sikeres matekból, az más helyzetben szívesen gondolkozik feladatokon. És természetesen kitartás is kell: ha egy kicsivel nehezebb feladatot kell megoldani, amire nem elég 10 perc, akkor fontos, hogy ne adjuk fel.

Kik, illetve mi segített téged, hogy ezek kialakuljanak benned, hogy aztán jó matematikus legyél?

Normál iskolai keretek között is jó tanáraim voltak, de már általános iskolától kezdve volt lehetőségem plusz tanórán kívüli feladatokkal foglalkozni, kezdve az ABACUS-szal, KöMaL-lal. A versenysikerek további motivációt adtak. Minden évben indult plusz matek szakkör az iskolában, aztán elkezdtem járni Pósa-táborokba. Ezek mind-mind olyan helyszínek voltak, ahol tipikusan a kötelező iskolai anyagnál érdekesebb feladatokkal lehetett találkozni, ezeken szívesen gondolkoztam. Gimnáziumban már magamtól is kerestem a plusz lehetőségeket a matekozásra, nem csak a tanárok által adott feladatokon gondolkoztam.

Motiváltak a versenyek. A sikernek is örültem, de nem feltétlenül csak azért indultam. Nem áltatom magam: ha nem indultam volna, akkor kevesebb szabadidőmet töltöttem volna korábbi évek feladatsorainak oldogatásával. Így viszont csináltam, élveztem és közben egyre jobb is lettem.

Kell idő ahhoz, ha valaki a matekkal, vagy bármi mással akar foglalkozni. Ez szükséges feltétel, nem megy egyik napról a másikra. De itt nekem is megvannak a magam korlátai: az érettségi szintjénél azért jobban elmélyültem, de annyira már nem akartam, hogy például kutató matematikus legyek.

Hogyan kezdődött ez a mélyülés? Mikor „szippantott" be a matek?

Általában szerettem a kihívásokat: a matekóra könnyen ment, így logikusnak tűnt, hogy akkor valami plusz is lehetne belőle. Csináltam, ami szembejött, élveztem. Emlékszem olyan versenyfeladatokra, amelyeket mondjuk 5. osztályosként nem értettem meg igazán mélyen, de ez akkor nem zavart. Megállapítottam, hogy az osztálytársam meg tudta oldani, én meg nem, de nem foglalkoztam vele. Később, a 7. osztályban kezdődő Pósa-táborokban – amiket nekem Juhász Péter tartott – már sokkal intenzívebben megvolt bennem a matematika iránti érdeklődés és a megértés utáni vágy.

Az ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskola 12 évfolyamos osztályába jártam; halványan felmerült 8.-ban, hogy a több matek miatt átmenjek-e a Fazekasba, de jól éreztem magam és elég sok plusz matek lehetőség volt ott is. Szüleim mindenfelé tanulást támogattak, és egyértelművé tették, hogy ezt értéknek gondolják, továbbá azt is fontosnak tartották, hogy olyannal foglalkozzak, amit szeretek. Különben két nagyszülőm is matematikus, úgyhogy nem kellett messzire szaladni a matematika szeretetéért, és nem ment csodaszámba, hogy én miért foglalkozom matekkal a szabadidőmben.

Gondolom 12.-ben nem sokat vívódtál azon, hogy hova jelentkezz továbbtanulni.

9. osztálytól erős lehetőségként jelen volt, hogy matematikus leszek, de kémiával és fizikával is szívesen foglalkoztam. Bíztam abban, hogy az ELTE matek jó és hasznos lesz. Az segített a döntésben, hogy nem volt más, ami jobban érdekelt volna, és tudtam, hogy a matematika nagyon jó alap sok mindenhez. Azaz: jobb választás a matek szak, ha az ember nem akar matematikus lenni, mintha kémia szakra menne úgy, hogy nem akar kémikus lenni.

Nyugodt voltam a döntésem felől, nem éreztem, hogy ez túlságosan lekötne egy irányba, hanem bíztam abban, hogy azon túl, hogy élvezni fogom, sok szakmához hasznos lesz.

Mégsem alkalmazott matematikus lettél…

Igen, végül elméleti matematikusként végeztem. Azt reméltem, hogy ott a konkrét órák nagyobb része lesz számomra érdekes, miközben fel tudtam venni alk.mat.-os tárgyakat is. Továbbá, habár az alkalmazott matematikus szakon sincsenek sokan, de az elméleti szakirány kifejezetten kiscsoportos, ami lehetővé tette, hogy előadások is interaktívabbak legyenek. Illetve abban bíztam, hogy egy konkrét alkalmazott munkához szükséges tudás elsajátítása talán könnyebben megy majd az egyetemi kereteken kívül is. De például, ha nem veszem fel a Geometriai mértékelmélet című órát, akkor azt aztán sohasem tanultam volna meg.

Melyik tárgyakat szeretted a legjobban?

Nálam nem alakult ki annyira, hogy a mateknak melyik alterülete az, amelyik érdekel. Sokkal inkább a konkrét tárgyon és a tanári előadásmódon múlott. Nagyon élveztem Zábrádi Gergely Algebra, Elekes Márton Valós függvénytan és Leíró halmazelmélet, de Frank András Diszkrét optimalizálás óráit is.

Akkor ne próbálkozzak a „diszkrét vagy folytonos" beskatulyázással?!

Ha nagyon választani kellene, akkor talán a folytonost választanám, de nem meghatározó: sok nagyon különböző tárgyat élveztem nagyon.

Nem muszáj választani! Hogy látod, milyen képességeidet fejlesztette, csiszolta a sok év intenzív matekozás?

Ezt nehéz biztosan tudni, de az – alkalmazott munkában is hasznos – absztrakciós készségem nagyon sokat erősödött. Továbbá az is, hogy mennyire komplex összefüggéseket tudok a fejemben tartani. Valószínűleg a lényeglátásom is fejlődött, ami szintén sokat számít munkahelyi környezetben is.

Az egyetemen tanultakból konkrét tananyag szinten a valószínűségszámítás, statisztika és a lineáris algebra jön elő a munkámban. A többi főleg csak áttételesen, de például húsz algoritmus ismerete sokat segít egy huszonegyedik megértésében, még ha más is a terület.

És gondolom, még a programozás ismerete sem árt.

Egy-két félév programozás gyakorlatra jártam, ami elindított, de az elég minimális volt. Igazából online anyagokból, tanfolyamokból és leginkább sok önálló gyakorlással tanultam magamtól, illetve aztán munka közben fejlődtem rengeteget a feladatok révén és a kollégáktól tanulva. Most már nagyon másként gondolok a programozásra, mint az egyetemi kurzusok végén.

Mikor kezdtél el dolgozni?

A negyed- és ötödév közötti nyáron az Emarsys-nál végeztem szakmai gyakorlatot. Nekem is tetszett, és ők is meg voltak elégedve velem, így az utolsó évben már végig dolgoztam részmunkaidőben.

Nem ment a matek rovására?

De, ám annyira nem bántam, mert nagyon jól éreztem magamat a munkahelyemen. Tetszett, hogy az absztrakt matematika mellett sokkal kézzelfoghatóbb dolgokkal is tölthetek időt. Kevesebb energiám jutott az egyetemre, de egyrészt tudtam, hogy nem kutató matematikus szeretnék lenni, másrészt nyilván nem engedtem el az egyetemet sem: nem voltam fáradt, csak a szabad matekozással töltött órák száma csökkent.

Megmaradt az absztrakt dolgok értékelése, továbbra is – mind a mai napig – lenyűgöz a matematika, inkább úgy fogalmaznék, hogy már nincs elég türelmem, hogy olyan sok időt töltsek vele – akár a megértéssel, akár a kitalálással.

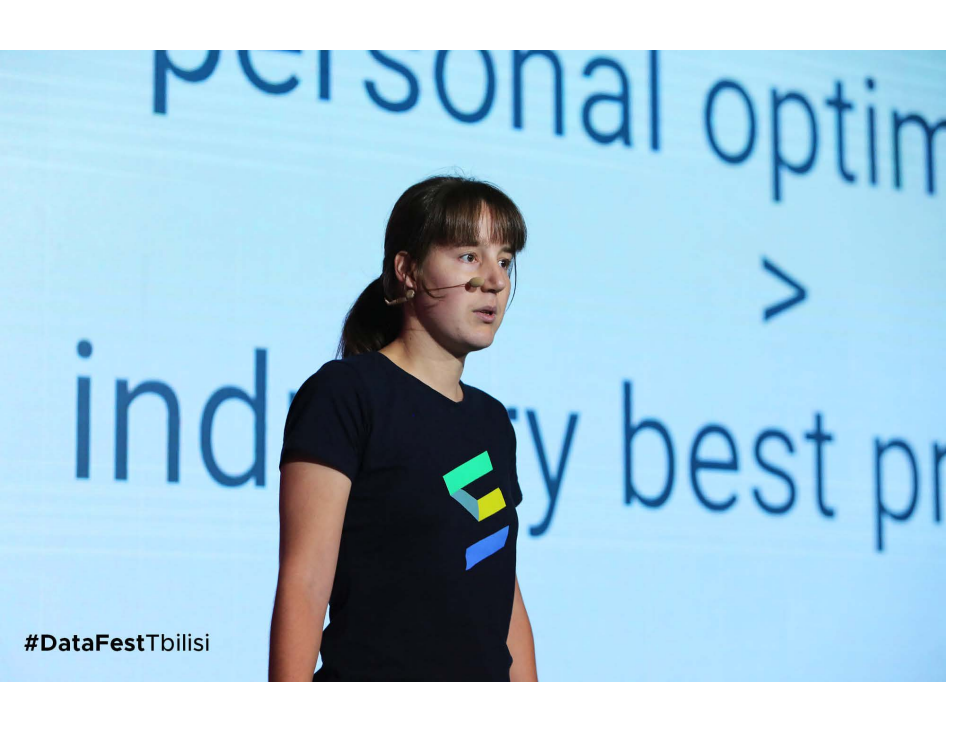
Azzal, hogy az MSc után teljes állásban kezdtél el dolgozni náluk, változott a munkaköröd?

Nem, data scientist pozícióban maradtam, ugyanabban a csapatban. Többféle feladatunk volt. Legfőképpen segítettük a termékfejlesztést, azaz mi feleltünk a cég fő termékének azon komponenseiért, amelyek erősebben támaszkodtak adatokra, például adattisztításra, modellezésre. Emellett elemzéseket készítettünk a cég működése kapcsán, kiértékeltük, hogy melyik termék hogyan teljesít.

Példa egy konkrét projektre: a cég elsősorban online (például email) marketinggel foglalkozik. Volt egy olyan termékrész, ahol a marketingesek optimalizálhatták, hogy a nap melyik órájában érdemes kiküldeni egy levelet az egyes ügyfeleknek aszerint, hogy várhatóan mikor fognak rá nagyobb eséllyel reagálni. A data scientist csapat javasolt egy algoritmust, és utána a szoftverfejlesztőkkel együttműködtünk abban, hogy ez ténylegesen meg is valósuljon, azaz bekerüljön a szoftverbe. Miután az ügyfelek elkezdték használni, kielemeztük, hogy milyen eredményeket hoz, illetve továbbfejlesztettük a visszajelzések és saját méréseink, elemzéseink alapján. Ez egy összesen több éven átívelő projekt volt.

Amíg részmunkaidőben dolgoztál, még azért élvezhetted az egyetemistalét szabadságát. Megerőltető volt a 40 órás munkahétre történő váltás?

Nem annyira. 40 órát kellett dolgozni, de csak annyit. A megerőltetés inkább abból fakadt, hogy sokszor nem tudtam elengedni a munkaidő végén a munkát. Nem várta el tőlem senki, hogy pluszban dolgozzak, de engem foglalkoztatott: próbáltam utána olvasni, tanulni. Persze néha fárasztó volt, de nagyon jól éreztem magam, motivált voltam, szívesen szántam rá a szabadidőm egy részét, habár nem várta el tőlem senki.



Ez változott az évek során?

A céljaim változásával megtanultam egyre jobban figyelni arra, hogy ha hazamegyek, akkor letegyem a munkát. De a munkakör változása is hatott rám, ugyanis öt év után – amit a data scientist csapatban dolgoztam végig – váltottam a cégen belül: az utolsó két évben szoftverfejlesztő voltam.

És nem jött be ez a váltás? Miért kerestél új munkahelyet?

Jól éreztem magam, és nagyon hasznos, hogy szoftverfejlesztői tudást és tapasztalatot szereztem, de hét év után új területre vágytam. Másfél éve egy amerikai ételrendelős cégnél, a Sunbasket-nél dolgozom. Az új iparág, és a cégnél használt, számomra részben új technológiák miatt is sok újat tanulok. Kisebb a cég technológiai részlege, ketten vagyunk data scientist beosztásban, így lényegében minden, aminek köze van az adatokhoz a cégen belül, az hozzánk fut be.

Például?

A feladatunk jelentős része üzleti döntéseket és kimutatásokat támogató elemzések készítése a felsővezetők számára. Ehhez kapcsolódik mindenféle támogató funkció tervezése, kiépítése is: például annak a kitalálása, hogy milyen adatokat, hogyan gyűjtsünk, tehát az adatbázis létrehozása is. Majd erre épülően persze az adatokkal történő számolgatás, infrastruktúrával kapcsolatos kérdések. Egy kicsit más jellegű feladatunk prediktív modellezés segítségével megbecsülni, hogy a következő hetekben milyen alapanyagból várhatóan mennyire lesz szüksége a konyhának.

Élvezed ezt a munkát?

Nagyon. Itt nekem testhezálló, hogy a mindennapi feladatok viszonylag változatosak. Az Emarsys sokat nőtt abban a hét évben, amit náluk töltöttem, a data scientist csapat pedig arányosan is többet. A végén több kisebb csapatban dolgoztunk, a feladat-, illetve felelősségi körök is szűkebbek voltak emiatt. Én pedig jobban élvezem azt, hogy többféle dolgot csinálhatok, és nem egy témára kell specializálódnom. Illetve, hogy az üzleti döntéstámogatásban tényleg nagyon gyors a visszacsatolás: konkrétan tudom, hogy melyik vezető szeretné tegnapra, vagy egy héten belül látni az adott kimutatást. Ehhez képest egy új termék több hónapos, vagy akár éves fejlesztésének egy részletén dolgozni nagyon más.

Nem stresszes, hogy itt nagyobb a felelősség?

Abban az értelemben nagyobb, hogy itt a pénzügyi vezetővel közvetlen kapcsolatban vagyok, vagy döntésekhez készítünk kimutatásokat, de egyrészt kisebb a cég, másrészt a cég működése alapvetően nem az adatokon, hanem a konyhán múlik. Mivel fizikai dolgokat gyártó cég vagyunk, ezért mindenen kisebb a hangsúly, ami technológiai jellegű (programozás, adatok stb). Tehát azért az megnyugtató, hogy a napi működéshez lényegében nincs rám szükség.

Az évek során sokat változott, bővült a data scientist munkakörben dolgozók munkaköri leírása. Hogyan látod, mi várható még? Öt vagy tíz év múlva szükség lesz még data scientistre, vagy a mesterséges intelligencia képes lesz elvégezni ezeket a feladatokat?

Attól egyáltalán nem félek, hogy ne lenne szükség valami hasonló munkakörre. Konkrétan az én munkámban rengeteg olyan feladat van, ami arról szól, hogy eljussunk egy olyan definiálhatósági szintig, amit már be tudnánk adni egy AI-nak, hogy oldja meg. Rengeteg apróságot kell nyomozni. Például a cég sok éves működése alatt apró-cseprő hibák, vagy szuboptimális megoldások halmozódnak fel. Ezeknek utánajárni sem könnyű, vagy egyszerűen az, hogy eszünkbe jusson: attól, hogy van egy adatforrás, abban lehetnek hibák. Másrészt a technológiai megoldás után sem ér véget a munkám: a produktumot el is kell tudni magyarázni a területhez adott esetben kevésbé értő kollégáknak. Nem az a munka nagy része, hogy egy nagyon jól definiált feladatra megírjam a lekérdezést, csináljak egy grafikont, hanem hogy kitisztázzam azt a sok-sok részletet, amitől az üzleti kérdés lefordíthatól egy technológiai kérdésre. Biztosan változni, fejlődni fog sok eszköz, ehhez alkalmazkodni kell, de drasztikus változásra nem számítok.

Az elmúlt 10-20 évben is sok fejlődés történt, aminek igyekszünk is kihasználni az előnyeit. Például egy prediktív modellezési feladathoz egy XGBoost-modellt használunk, ami már egy viszonylag magas szintű, sok esetben jól működő modell. A modellparaméterek tekergetésével nekem már nem kell foglalkoznom – azt a gép intézi, de azzal igen, hogy a bemenő adatok olyan formában legyenek, hogy azt utána a gép optimalizálni tudja, vagy pontosabban: a kiadott optimum értelmes és hasznos legyen számunkra. Ahogyan én látom, a data scientist pozíciók jelentős része az enyémhez hasonló abban, hogy főleg sokkal pragmatikusabb, hétköznapibb, de mégsem könnyen automatizálható problémák jönnek elő, tehát ezeknél nem az AI további fejlődésén múlik a siker. De természetesen sok különböző cég és munkakör létezik, van, ahol több a repetitívebb munka, amit valószínűleg lehetne egyszerűsíteni, akár kiváltani, míg másutt éppen sokkal specializáltabb tudásra van szükség, például ahol az engem kiváltó mesterséges intelligencián dolgoznak. :)

Akkor mit javasolsz, a tanulmányaik során mire fókuszáljanak azok a hallgatók, akik data scientistként is el tudják képzelni a jövőjüket?

Szerintem azt érdemes észben tartani, hogy a szigorúan vett elméleti, szakmai kvalitásokon túl sok minden más is fontos. Sokféle feladatra való nyitottság: ha az kell az adott projekt sikerességéhez, hogy néhány órán keresztül manuálisabb feladatot végezzek, vagy tíz különböző emberrel beszéljek ahhoz, hogy megtudjak egy szükséges információt, akkor nem mondhatom azt, hogy az én szakterületem más, ezzel nem vagyok hajlandó foglalkozni.

A cégen belül csapatjáték zajlik: merni kell segítséget kérni, akár szakmai, akár a cég életére vonatkozó információk kapcsán. Ez nyilvánvalónak hangzik, de amikor valaki először bekerül egy céghez, akkor meglepő lehet, hogy mennyi apróság van, ami szükséges a napi munkához, de nem készítették fel rá, nem tudhatja. Persze a matek szak segítségkérésre is nevel, sok tárgy nagyon nem könnyű, ha az ember nem kérdez a társaitól vagy az oktatóktól.

Nagyon fontos a hatékony írásbeli kommunikáció. Egyszerre kell lényegre törőnek, pontosnak és közérthetőnek lennie. Erre jó gyakorlás lehet a beadandók igényes megírása, de egy akár nem szakmai blog vezetése is.

Azok a képességek, amelyeket az interjú elején felsoroltál, a jelenlegi munkádban is nagyon fontosak: precizitás, érdeklődés, kitartás.

Igen, ez abszolút igaz. Csak azt nem tudom, hogy ezek mennyire személyiségbeli, adottságbeli tulajdonságok, vagy pedig fejleszthetők-e?

Akkor ennek eldöntését az Olvasókra bízzuk…

Czeller Ildikóval az interjút Paulovics Zoltán készítette

HÍREK CIKKEI
PORTRÉ CIKKEI
TANÓRA CIKKEI
KÖNYVESPOLC CIKKEI
TUDOMÁNY CIKKEI
GAZDA(G)SÁG CIKKEI
HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat
Szerkesztőség
Leírás szerzőknek
Szerzői jogok
Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Páles Zsolt 2023. DECEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Daróczy Zoltán (1938–2023)

Daróczy Zoltán élete

Daróczy Zoltán egy bihartordai jegyző második gyermekeként 1938-ban született. Református nevelést kapott és igen jól tanult, ezért szülei a Debreceni Református Kollégiumba küldték. Diákként kedvelte az irodalmat, a történelmet és a matematikát. „A matematika az nem más, mint szabatos beszéd.” – hallotta ezt gimnáziumi matematikatanárától, Nagy Gézától. Tanára hatására és biztatására részt vett az Arany Dániel matematikai versenyen és a KöMaL pontversenyében is. Talán ezek miatt választotta Daróczy Zoltán a tanári pályát, és felvételizett 1956-ban a Kossuth Lajos Tudományegyetem matematika-ábrázoló geometria szakára. Maximális pontszámmal is csak fellebbezés után vették fel. Alig kezdődött el az egyetemi oktatás, kitört az 56-os forradalom. Egyetemistaként a nemzetőrséghez csatlakozott, és így próbált tenni valamit az igaz ügyért. A forradalom leverését követően az oktatás csak 1957 tavaszán indult újra és mivel nem zárták ki az egyetemről, így 1961-ben kitüntetéses diplomával végezhetett. Jó tanárai voltak. A matematikai analízist, annak szépségét és szeretetét Rapcsák Andrástól és Aczél Jánostól tanulta. Hamar megértette a hangyabokányi epszilon fogalmát és később, amikor már ő állt a katedrán, tanárgenerációknak adta tovább, amit tanáraitól tanult: tudományt, műveltséget és emberséget. Daróczy Zoltán közel öt évtizeden keresztül volt a KLTE TTK matematika tanárszakos és matematikus hallgatóinak meghatározó és széles körben kedvelt oktatója. Előadásain diákjaival megszerettette a mértékelméletet és a valós függvénytant. Híresek voltak speciálkollégiumai, amelyeken hallgatóit eljuttatta az aktuális kutatási kérdésekig. Igazi reneszánsz ember volt, a tudományokat komplex módon oktatta, rávilágítva a tágabb összefüggésekre, de teret hagyva az önálló gondolkodásnak is.

Tanulmányai befejezése után nem kapott állást a Kossuth Lajos Tudományegyetemen, de az egyik első tudományos dolgozatában rámutatott Rényi Alfréd egy pontatlanságára. Ennek köszönhetően Rényi ösztöndíjasként felvette a Matematikai Kutatóintézetbe. Az itt töltött egy év alatt szerezte meg az egyetemi doktori fokozatot Aczél János irányítása mellett. 1963-tól egy évig a Bécsi Egyetem Matematikai Intézetének munkatársa volt Leopold Schmetterer meghívására. 1964-től dolgozott folyamatosan a KLTE-n, majd a jogutód Debreceni Egyetemen. 29 évesen a matematikai tudomány kandidátusa, 38 évesen a matematikai tudomány doktora lett és kinevezték egyetemi tanárnak. A Magyar Tudományos Akadémia 1985-ben levelező, 1990-ben pedig rendes tagjává választotta.

Az egyetem Analízis Tanszékének vezetését 1968-tól kezdve 16 éven át látta el. Pályája során 5 évig volt a Matematikai Intézet igazgatója, a Természettudományi Kar dékánhelyettese, majd dékánja. A rendszerváltást megelőző időszakban három–három évig volt az egyetem rektorhelyettese, majd rektora. Alapítója, majd 18 éven át vezetője volt a Debreceni Egyetem Matematika és Számítástudományok Doktori Iskolájának. 2008-ban, nyugdíjba vonulásakor, professor emeritusi címet kapott. Fiatalon a legfontosabb eredményeit az információelméletből származó függvényegyenletek vizsgálatában, a Shannon-entrópia karakterizációival kapcsolatban érte el. Az ezeket az eredményeket is bemutató, Aczél Jánossal közösen írt monográfiája a témakör legtöbbet idézett könyvévé vált. Jelentős a hozzájárulása a közepek elméletéhez is. Bevezette az eltérésközepek fogalmát, és alapvető eredményeket ért el a közepekre vonatkozó úgynevezett invariancia-egyenletek vizsgálatában.

1. ábra. Daróczy Zoltán (1938–2023)

Aczél János 1965-ben elhagyta Magyarországot, de a vele való baráti kapcsolata és együttműködése sohasem szakadt meg. Innen kezdve több mint ötven évig vezette, tanácsaival irányította a függvényegyenletek és egyenlőtlenségek kutatócsoportot, amely világszerte nagy elismerést szerzett. Lényeglátó képességének köszönhetően a hozzá közel álló kutatók, oktatók mindig a témakör legfontosabb kérdéseire koncentrálhattak. A kutatócsoport nemzetközi kapcsolatai a 70-es években kiszélesedtek, a csoport tagjai innentől kezdve számos fontos nyugati konferenciára kaptak meghívást. Emlékezetesek voltak az ezekre történő kiutazások, az együtt töltött idő és a nehézségeket is megkönnyítő, megértő jó természete. Témavezetése mellett 14 tanítványa (ld. Mathematical Geneaology) szerzett PhD fokozatot, akik többsége ma is aktív, nemzetközileg is elismert oktató- és kutatómunkát végez. Közülük Nagy Béla, Sebestyén Zoltán, Maksa Gyula, Járai Antal, Székelyhidi László, Páles Zsolt az MTA doktori címet is megszerezte. A saját sikereinél is fontosabbak voltak számára tanítványai sikerei. Mindent megtett az ő elismertetésük érdekében és aztán velük örült, ha ez bekövetkezett. Az is nagy örömére szolgált, hogy Bálint fia az ő nyomdokaiba lépett és a matematikusi életpályát választotta.

Az Analízis Tanszék életében fontos szerepet játszottak a tanszéki szemináriumok. Ezek egyik fontos változata a 80-as évek közepétől napjainkig évente megrendezett Síkfőkúti Analízis Szeminárium. Az ilyen összejöveteleken a tanszéki kollégák és a PhD hallgatók mellett azok családtagjai is részt vehettek. Ezek a rendezvények nagyban segítették az emberi, baráti kapcsolatok kialakulását. Daróczy Zoltán 40 éven keresztül családjával együtt szinte állandó résztvevője volt ezeknek az szemináriumoknak. A gyerekek, köztük Orsi és Bálint, együtt játszottak. Olyanok voltunk, és vagyunk ma is, mint egy nagy család. Zolinak, kortól függetlenül, mindenkihez volt egy kedves szava. Humora, empatikussága és tájékozottsága révén mindig a társaság középpontja volt.

Daróczy Zoltán már középiskolás korában elkezdett versenyszerűen sakkozni, egyetemi évei alatt pedig a DEAC sakkcsapatában játszott. A 70-es, 80-as években a mindig felállított sakktáblánál a TTK és BTK számos oktatója vívott schnell partikat vele és a tanszék tagjaival. Csak mostanra tudatosult bennünk, hogy milyen erős közösségformáló ereje volt ennek a tevékenységnek is.

Tudományos pályája mellett a politikai életben is aktívan részt vett. A 80-as évek végén csatlakozott a reformmozgalmakhoz, amelyek végül az egypártrendszer felbomlásához és a rendszerváltáshoz vezettek. Az 1990-es országgyűlési képviselőválasztáson a Magyar Szocialista Párt Hajdú-Bihar megyei területi listájáról, négy évvel később pedig az egyik debreceni egyéni körzetben szerzett mandátumot és lett parlamenti képviselő.

Daróczy Zoltán hazai elismertségét többek között az Akadémiai Díj, a Szele Tibor-emlékérem, a Szent-Györgyi Albert-díj, a Széchenyi-díj és a Magyar Köztársasági Érdemrend középkeresztje mutatja. Tudományos tevékenységét külföldön is felismerték: A világ egyik legrégebbi tudományos szervezete, a Hamburgi Matematikai Társaság 2008-ban tiszteletbeli tagjává választotta.

Tanítványaival, munkatársaival nemcsak szakmai, hanem bensőséges emberi kapcsolatokat ápolt. A vezetésére bízott közösségeket nagy empátiával, hozzáértéssel irányította, tanácsaival, szeretetével mindannyiunk életét segítette. Olvasottsága, műveltsége, nyitottsága és tájékozottsága példaértékű volt. Halálával a Debreceni Egyetem és a Magyar Tudományos Akadémia egy kiváló oktatóját, kutatóját és szellemi vezetőjét veszítette el.

Charles Dickens a „Karácsonyi ének”-ben ezt írja: „A végzet minden emberre kiszabta, hogy szellemével hasson embertársaira, környezetére.” Daróczy Zoltánról ezt biztosan elmondható.

Daróczy Zoltán tudományos eredményei

Az alábbiakban a célunk Daróczy Zoltán néhány alapvető és sokat idézett matematikai eredményének a bemutatása. Ennek a résznek a megírásakor felhasználtuk a szerző és Székelyhidi László [53] dolgozatát.

1. Additív függvények homogenitási tulajdonságai

Daróczy Zoltán egyik első tudományos dolgozata a szegedi Acta Sci. Math.-ban jelent meg és ebben a valós additív függvények homogenitási tulajdonságait tisztázta.

Egy $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt additívnak nevezünk, ha teljesíti az alábbi Cauchy-féle függvényegyenletet:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\qquad (x,y\in\mathbb{R}).$$

Az $f(x)=cx$ (ahol $c\in\mathbb{R}$) alakú függvények ennek a függvényegyenletnek a folytonos megoldásai. Hamel 1905-ös [39] dolgozatának köszönhetően tudjuk, hogy ennek az egyenletnek vannak nem folytonos megoldásai is, sőt véve a valós számoknak mint egy a racionális számok teste feletti vektortérnek egy tetszőleges (Hamel) bázisát, bármely ezen a bázison értelmezett valós értékű függvény egyértelműen kiterjeszthető $\mathbb{R}$-re egy additív függvénnyé.

Jól ismert (és nem is nehéz igazolni azt), hogy minden additív függvény $\mathbb{Q}$-homogén, azaz minden $r\in\mathbb{Q}$ esetén teljesül

$$f(rx)=rf(x)\qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Folytonos additív függvények esetén ez az egyenlőség minden r valós számra is fennáll. Természetesnek tűnő probléma tehát az, hogy milyen s,t irracionális számok esetén van olyan f nem azonosan nulla additív függvény, amelyre teljesül

$$f(tx)=sf(x)\qquad (x\in\mathbb{R}).\tag{1}$$

Daróczy Zoltán [9] alábbi eredménye ezt a kérdést teljesen megválaszolja.

1.1. tétel. *Ha $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ egy olyan nem azonosan nulla additív függvény, amelyre teljesül (1) valamilyen $s,t\in\mathbb{R}$ irracionális számpárra, akkor vagy s és t algebraiak és egymás algebrai konjugáltjai (azaz közös a definiáló polinomjuk), vagy s és t transzcendens.*

2. Kiterjesztési tételek

A függvényegyenletek megoldása során nagyon sokszor áll elő az a helyzet, amikor egy valós függvényről az additivitást csak a számpároknak egy részhalmazán lehet igazolni. Az alapkérdés, hogy ilyenkor a függvény milyen közel áll az additív függvényekhez. Ezen a területen Aczél János és Erdős Pál [2] érte el az első eredményt.

2.1. tétel. *Legyen $f\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}$ egy olyan függvény, amelyre $f(x+y)=f(x)+f(y)$ teljesül minden $x,y\in[0,\infty)$ esetén. Ekkor f egyértelműen terjeszthető ki $\mathbb{R}$-re egy additív függvénnyé, azaz van egy olyan egyértelműen meghatározott $\widetilde{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ additív függvény, hogy $\widetilde{f}(x)=f(x)$ minden $x\in[0,\infty)$ esetén.*

A másik alapvető kiterjesztési tételt Daróczy Zoltán és Losonczi László [23] találta meg.

2.2. tétel. *Legyen $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ egy olyan függvény, amelyre $f(x+y)=f(x)+f(y)$ teljesül minden olyan $x,y\in[0,1]$ esetén, amelyre $x+y\leq 1$. Ekkor f egyértelműen terjeszthető ki $\mathbb{R}$-re egy additív függvénnyé, azaz van egy olyan egyértelműen meghatározott $\widetilde{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ additív függvény, hogy $\widetilde{f}(x)=f(x)$ minden $x\in[0,1]$ esetén.*

Ezek az eredmények számos további vizsgálatot indukáltak és a függvényegyenletek megoldásának a mai napig az alapvető eszközei. A teljesség igénye nélkül az olvasó figyelmét a következő dolgozatokra hívjuk fel: [3, 25, 43, 44, 52, 55, 58].

3. Információfüggvények jellemzése

A 60-as–70-es években az információelmélet a függvényegyenletek elmélete számára számos érdekes és mély problémát szolgáltatott. Aczél János és Daróczy Zoltán 1975-ben publikált [1] monográfiája az ezen a területen elért legfontosabb eredményeket foglalta össze. Az alábbiakban az információfüggvényekkel kapcsolatosan elért eredményekből válogatunk.

Legyen $\beta>0$ egy rögzített konstans. Egy $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ leképezést β-típusú információfüggvénynek nevezünk, ha $f(0)=f(1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$, és minden olyan $x,y\in[0,1)$-ra, amelyre $x+y\leq 1$, fennáll az

$$f(x)+(1-x)^{\beta}f\Big(\frac{y}{1-x}\Big)=f(y)+(1-y)^{\beta}f\Big(\frac{x}{1-y}\Big)$$

egyenlet. Ha $\beta=1$, akkor f-et közönséges információfüggvénynek mondjuk.

A $\beta\neq 1$ esetben a fenti függvényegyenlet a megadott mellékfeltételek mellett megoldható, és a következő eredmény igazolható [11]:

3.1. tétel. *Ha $\beta\neq 1$, akkor $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ pontosan akkor β-típusú információfüggvény, ha*

$$f(x)=\frac{1}{2^{1-\beta}-1}\big(x^{\beta}+(1-x)^{\beta}-1\big)\qquad (x\in[0,1]).$$

Tehát $\beta\neq 1$ esetén a β-típusú információfüggvények egyértelműen meghatározottak és folytonosak. Ha képezzük a $\beta\to 1$ határátmenetet, akkor eredményül az

$$S(x):=-x\log_2 x-(1-x)\log_2(1-x)\qquad (x\in[0,1])$$

képlettel megadható függvényt kapjuk, amit Shannon-féle információfüggvénynek nevezünk (itt a $0\cdot\log_2 0:=0$ konvencióval élünk). Az könnyen látható, hogy a Shannon-függvény 1-típusú információfüggvény, azaz minden olyan $x,y\in[0,1)$-ra, amelyre $x+y\leq 1$, teljesül az

$$\boldsymbol{f(x)+(1-x)f(\frac{y}{1-x})=f(y)+(1-y)f(\frac{x}{1-y})}$$

függvényegyenlet.

Az információfüggvényekkel kapcsolatban természetes feltétel a nemnegativitásuk. A Shannon-függvény triviálisan ilyen, de nem nyilvánvaló, hogy van-e más nemnegatív információfüggvény. A következő eredményt Daróczy Zoltán Kátai Imrével [14] együtt találta.

3.2. tétel. *Ha $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ egy korlátos és nemnegatív információfüggvény, akkor $f=S$.*

Ha a korlátosság feltételét elhagyjuk, akkor a helyzet gyökeresen megváltozik. Ezt Daróczy Zoltán és Maksa Gyula [24] alábbi eredménye mutatja.

3.3. tétel. *Ha $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ egy nemnegatív információfüggvény, akkor $S\leq f$. Továbbá léteznek a Shannon-függvénytől különböző nemnegatív információfüggvények.*

4. A természetes számok homomorfizmusai kompakt Abel-csoportokba

Daróczy Zoltánnak és Kátai Imrének az egyik fontos közös kutatási területe volt az additív számelméleti függvények aszimptotikus tulajdonságainak a vizsgálata. Ebből az együttműködésükből több mint 10 közös dolgozatuk született. A [15] dolgozat egyik főeredménye az alábbi

4.1. tétel. Legyen G egy kompakt Abel-csoport és legyen $\varphi\colon\mathbb{N}\to G$ egy additív függvény. Ekkor φ pontosan akkor teljesíti a

$$\lim_{n\to\infty}\big(\varphi(n+1)-\varphi(n)\big)=0$$

egyenlőséget, ha minden olyan (n_k) olyan növekvő természetes számsorozat esetén, amelyre a $\big(\varphi(n_k)\big)$ sorozat konvergens, konvergens a $\big(\varphi(n_k+1)\big)$ sorozat is.

A direkt implikáció azonnal látható. A fordított irányú implikáció igazolásához viszont nem triviális ötletre van szükség.

Ez az eredmény Daróczy Zoltán és Kátai Imre számos további közös dolgozatának volt a kiindulópontja. A teljesség igénye nélkül csak a következő cikkeket említjük meg: [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22].

5. Közepek homogenitása

Az entrópia fogalmak axiomatikus vizsgálata során Rényi Alfréd az alábbi fogalmat vezette be: Ha adott egy $\varphi\colon(0,1)\to\mathbb{R}$ folytonos és szigorúan monoton függvény, akkor értelmezzük az

$$\mathcal{R}_{\varphi}\colon\bigcup_{n=1}^{\infty}(0,1)^n\to(0,1)$$

közepet az alábbi képlettel:

$$\mathcal{R}_{\varphi}(x_1,\dots,x_n)=\varphi^{-1}\bigg(\frac{x_1\varphi(x_1)+\dots+x_n\varphi(x_n)}{x_1+\dots+x_n}\bigg)\qquad (n\in\mathbb{N},\ x_1,\dots,x_n\in(0,1)).$$

Rényi azt sejtette, hogyha ez a közép a nemteljes valószínűségeloszlások halmazán homogén, akkor φ vagy a logaritmus függvényhez, vagy egy hatványfüggvényhez hasonló. A sejtést Daróczy Zoltán [10] igazolta az alábbi eredményében.

5.1. tétel. *Legyen $\varphi\colon(0,1)\to\mathbb{R}$ folytonos és szigorúan monoton függvény. Ha*

$$\mathcal{R}_{\varphi}(tx_1,tx_2)=t\mathcal{R}_{\varphi}(x_1,x_2),$$

teljesül minden olyan $x_1,x_2,t\in(0,1)$ esetén, amelyre $x_1+x_2\leq 1$, akkor léteznek olyan $a,b\in\mathbb{R}$ konstansok, hogy vagy $\varphi(x)=a\log x+b$, vagy pedig $\varphi(t)=ax^p+b$ teljesül minden $t\in(0,1)$ esetén valamilyen $p\neq 0$ konstanssal.

A Rényi által vizsgált közepekről kiderült, hogy egy a Bajraktarević [4, 5] által bevezetett középosztálynak egy részosztályát alkotják. Legyen $I\subseteq\mathbb{R}$ egy (nemdegenerált) intervallum, és legyenek $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ olyan függvények, hogy g pozitív és az f/g hányadosfüggvény szigorúan monoton és folytonos. Ekkor értelmezzük a $\mathcal{B}_{f,g}\colon\bigcup_{n=1}^{\infty}I^n\to I$ közepet az alábbi képlettel:

$$\mathcal{B}_{f,g}(x_1,\dots,x_n):=\Big(\frac{f}{g}\Big)^{-1}\bigg(\frac{f(x_1)+\dots+f(x_n)}{g(x_1)+\dots+g(x_n)}\bigg)\qquad (n\in\mathbb{N},\ x_1,\dots,x_n\in I).$$

Ha $I:=(0,1)$, $f(x):=x\varphi(x)$ és $g(x):=x$, akkor $\mathcal{B}_{f,g}$ egyenlő a fentebb bevezetett Rényi-féle $\mathcal{R}_{\varphi}$ középpel. Ha pedig $g\equiv 1$, akkor látható, hogy $\mathcal{B}_{f,g}$ egy úgynevezett kváziaritmetikai középre egyszerűsödik.

A Bajraktarević-közepek homogenitásának szükséges és elegendő feltételét Aczél János és Daróczy Zoltán az alábbi tételben írták le:

5.2. tétel. *Legyenek $f,g\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, hogy g pozitív és f/g szigorúan monoton. Ekkor a $\mathcal{B}_{f,g}$ közép pontosan akkor homogén, azaz teljesül rá a*

$$\mathcal{B}_{f,g}(tx_1,\dots,tx_n)=t\mathcal{B}_{f,g}(x_1,\dots,x_n)\qquad (n\in\mathbb{N},\ t,x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}_+).$$

függvényegyenlet, ha léteznek olyan $p,q\in\mathbb{R}$ számok, hogy $\mathcal{B}_{f,g}$ egyenlő a

$$\mathcal{G}_{p,q}(x_1,\dots,x_n):=\begin{cases}\bigg(\dfrac{x_1^p+\dots+x_n^p}{x_1^q+\dots+x_n^q}\bigg)^{\frac{1}{p-q}} & p,q\in\mathbb{R},\ p\neq q,\\[2ex] \exp\bigg(\dfrac{x_1^p\log(x_1)+\dots+x_n^p\log(x_n)}{x_1^p+\dots+x_n^p}\bigg) & p=q\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

képlettel értelmezett $\mathcal{G}_{p,q}\colon\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{R}_+^n\to\mathbb{R}_+$ Gini-középpel.

Megjegyezzük, hogy az [1] cikkben található tétel arra az esetre is kiterjed, amikor a $\mathcal{B}_{f,g}$ közép a pozitív valós számok halmazának csak egy valódi részintervallumán van értelmezve, és ekkor a jellemzésben a Gini-közepek konjugált komplex (p,q) párokra vonatkozó kiterjesztései is fellépnek.

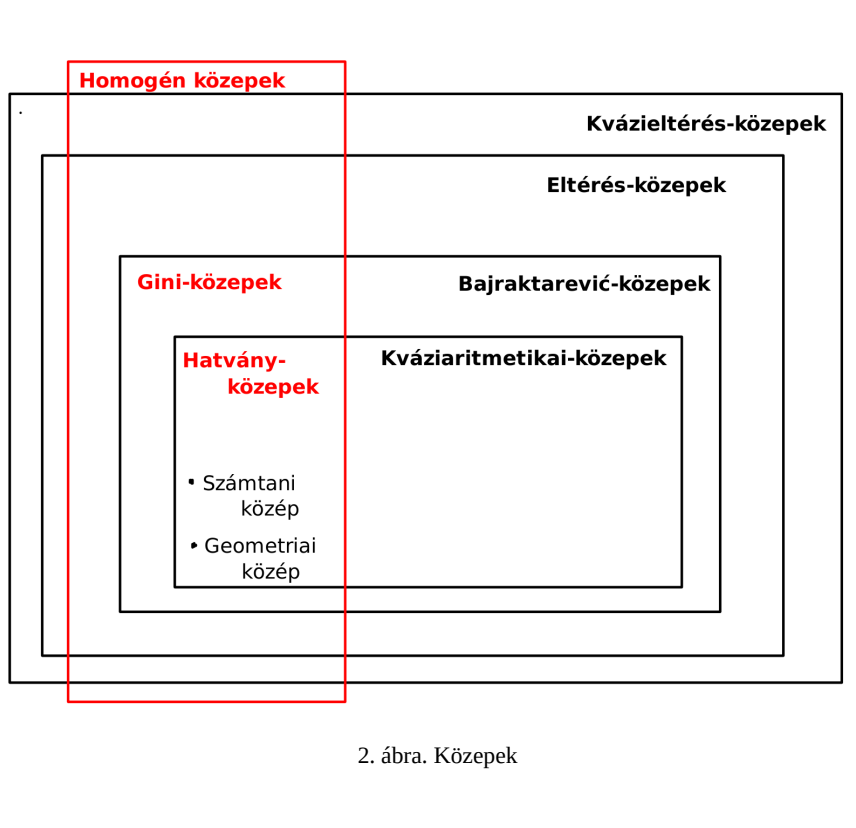
6. Eltérésközepek és egyenlőtlenségek

Daróczy Zoltán 1971-72-ben megjelent [12, 13] dolgozataiban a közepek egy olyan új osztályát vezette be, amely az addig ismert legfontosabb középosztályokat speciális esetként tartalmazta. Legyen $I\subseteq\mathbb{R}$ egy nemelfajuló nyílt intervallum. Egy olyan kétváltozós $E\colon I\times I\to\mathbb{R}$ függvényt, amely a második változójában folytonos és szigorúan monoton csökkenő, továbbá eltűnik a diagonális elempárokon (azaz $E(x,x)=0$ minden $x\in I$ esetén), eltérésfüggvénynek nevezünk. Ekkor nem nehéz belátni, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ és $x_1,\dots,x_n\in I$ esetén az

$$E(x_1,y)+\dots+E(x_n,y)=0$$

egyenletnek pontosan egy y megoldása van I-ben és ez $\min(x_1,\dots,x_n)$ és $\max(x_1,\dots,x_n)$ közé esik. Ezt az egyértelműen meghatározott y megoldást az $x_1,\dots,x_n$ számok E-eltérésközepének (vagy Daróczy-közepének) nevezzük és $\mathcal{D}_E(x_1,\dots,x_n)$-vel jelöljük.

Könnyű belátni, hogy az $E(x,y):=x-y$ függvény eltérésfüggvény, és hogy az általa meghatározott közép a számtani közép. A geometriai közép, a harmonikus közép, általánosabban a hatványközepek, a kváziaritmetikai közepek, a Gini-közepek és a Bajraktarević-közepek az eltérésközepek részosztályait alkotják. A közöttük fennálló tartalmazásokat az alábbi diagram szemlélteti.



2. ábra. Közepek

Az eltérésközepekkel kapcsolatos legalapvetőbb probléma az egyenlőség, illetve az összehasonlíthatóság kérdése. De amint látni fogjuk, a Hölder- és Minkowski-típusú egyenlőtlenségek teljesülését is jellemezhetjük. A Daróczy Zoltán által talált eredmények megfogalmazásához valamelyest szűkítjük az eltérésfüggvények osztályát. Azt mondjuk, hogy egy $E\colon I\times I\to\mathbb{R}$ eltérésfüggvény reguláris, ha a második változója szerint differenciálható minden diagonális pontban, és itt a második változó szerinti parciális derivált negatív. Ha E egy reguláris eltérésfüggvény, akkor az E regularizáltján az alábbiak szerint megadott $E^*\colon I\times I\to\mathbb{R}$ függvényt értjük:

$$E^*(x,y)=\frac{E(x,y)}{-\partial_2E(y,y)}\qquad (x,y\in I).$$

A fenti jelölések birtokában kimondhatjuk az alábbi tételt, ami a [12] dolgozatból származik.

6.1. tétel. *Legyenek $I,J,K\subseteq\mathbb{R}$ nemüres nyílt intervallumok és $E\colon I\times I\to\mathbb{R}$, $F\colon J\times J\to\mathbb{R}$, $G\colon K\times K\to\mathbb{R}$ reguláris eltérésfüggvények és $f\colon I\times J\to K$ egy differenciálható függvény. Ekkor a*

$$\mathcal{D}_G(f(x_1,y_1),\dots,f(x_n,y_n))\leq f\big(\mathcal{D}_E(x_1,\dots,x_n),\mathcal{D}_F(y_1,\dots,y_n)\big)$$

egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül minden $n\in\mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_n\in I$ és $y_1,\dots,y_n\in J$ esetén, ha

$$G^*(f(x,y),f(u,v))\leq\partial_1f(u,v)E^*(x,u)+\partial_2f(u,v)F^*(y,v),$$

érvényes minden $x,u\in I$-re és $y,v\in J$-re.

Ebből a tételből a Minkowski- és Hölder-típusú egyenlőtlenségek fennállásának szükséges és elegendő feltételeihez lehet jutni az $I:=J:=K:=\mathbb{R}_+$ és $f(x,y):=x+y$, illetve $f(x,y):=xy$ választásokkal. Ha a fenti tételt az $f(x,y)=x$ függvényre alkalmazzuk, akkor a [13] dolgozatban igazolt összehasonlítási tételt kapjuk.

6.2. tétel. *Legyen I egy nemüres nyílt intervallum és $E,F\colon I\times I\to\mathbb{R}$ reguláris eltérésfüggvények. Ekkor a*

$$\mathcal{D}_E(x_1,\dots,x_n)\leq\mathcal{D}_F(x_1,\dots,x_n)\tag{2}$$

egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül minden $n\in\mathbb{N}$ és $x_1,\dots,x_n\in I$ esetén, ha

$$E^*(x,y)\leq F^*(x,y)$$

érvényes minden $x,y\in I$-re.

A Daróczy Zoltánnal közös [29] dolgozatunkban sikerült az összehasonlítási tételt az eltérésfüggvények regularitásának feltétele nélkül is megtalálni.

6.3. tétel. *Legyenek I egy nemüres nyílt intervallum és $E,F\colon I\times I\to\mathbb{R}$ eltérésfüggvények. Ekkor a (2) egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül minden $n\in\mathbb{N}$ és $x_1,\dots,x_n\in I$ esetén, ha létezik egy olyan $p\colon I\to\mathbb{R}$ pozitív függvény, hogy*

$$E(x,y)\leq p(y)F(x,y)$$

érvényes minden $x,y\in I$-re.

Az eltérésközepeknek számos általánosítása, alkalmazása található például a következő dolgozatokban: [7, 8, 30, 31, 47, 48, 49, 50, 51]

7. Invarianciaegyenlet kváziaritmetikai közepekkel

Legyen I egy nemüres nyílt intervallum. Ha $M,N\colon I^2\to I$ kétváltozós közepek, akkor tetszőleges $x,y\in I$ esetén tekintsük az

$$\begin{aligned} x_1&:=x, & y_1&:=y,\\ x_{n+1}&:=M(x_n,y_n), & y_{n+1}&:=N(x_n,y_n)\qquad (n\in\mathbb{N})\end{aligned}$$

képletekkel megadott Gauss-típusú iterációt. Feltételezve, hogy M és N folytonos és szigorú közepek belátható, hogy az (x_n) és (y_n) sorozatok egy közös $K(x,y)$ határértékhez konvergálnak. Ez az eljárás egy olyan $K\colon I\times I\to I$ kétváltozós közepet határoz meg, amely a

$$\boldsymbol{K(M(x,y),N(x,y))=K(x,y)\qquad (x,y\in I).}$$

függvényegyenlet egyértelműen meghatározott megoldása. Ezt az egyenletet az (M,N) párra vonatkozó invarianciaegyenletnek nevezzük, és az ezt kielégítő K közepet pedig egy (M,N)-invariáns középnek mondjuk. Egy egyszerű példa az invarianciaegyenletre az alábbi azonosság

$$\sqrt{\frac{x+y}{2}\cdot\frac{2xy}{x+y}}=\sqrt{xy}\qquad (x,y\in\mathbb{R}_+).$$

ami azt mutatja, hogy a kétváltozós geometriai közép invariáns a kétváltozós számtani és harmonikus közepekre nézve.

Carl Friedrich Gaussnak a számtani-geometriai középpel kapcsolatos alapvető eredménye [37] így fogalmazható:

7.1. tétel. *Egy folytonos $K\colon\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ közép pontosan akkor megoldása a*

$$K\Big(\frac{x+y}{2},\sqrt{xy}\Big)=K(x,y)\qquad (x,y\in\mathbb{R}_+)$$

egyenletnek, ha

$$K(x,y)=\bigg(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{x^2\cos^2t+y^2\sin^2t}}\bigg)^{-1}\qquad (x,y\in\mathbb{R}_+).$$

A [35] dolgozat célkitűzése az olyan kétváltozós kváziaritmetikai középpárok meghatározása, amelyekhez tartozó invariáns közép szintén kváziaritmetikai. Ez a probléma könnyen kitalálható helyettesítések után arra a speciális esetre redukálható, amikor az invariáns közép a kétváltozós számtani közép. Tehát a feladat az olyan $\varphi,\psi\colon I\to\mathbb{R}$ folytonos és szigorúan monoton függvények meghatározása, amelyek teljesítik a

$$\varphi^{-1}\bigg(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\bigg)+\psi^{-1}\bigg(\frac{\psi(x)+\psi(y)}{2}\bigg)=x+y\qquad (x,y\in I)\tag{3}$$

függvényegyenletet. Ezt az egyenletet O. Sutô [56, 57] 1914-ben megjelent dolgozataiban az analitikus függvények körében vizsgálta és meghatározta megoldásait. Janusz Matkowski [45] 1999-ben kétszeri folytonos differenciálhatóság feltételezése mellett igazolta, hogy a fenti egyenletnek a megoldásai változatlanok. A probléma természetes regularitási feltételek melletti megoldását a [35] (magyar nyelven a [32]) dolgozatunkban adtuk meg.

7.2. tétel. *Legyenek $\varphi,\psi\colon I\to\mathbb{R}$ folytonos és szigorúan monoton függvények. Ekkor a (3) invarianciaegyenlet akkor és csak akkor teljesül a φ,ψ függvényekre, ha léteznek olyan a,b,c,d valós konstansok, hogy $ac\neq 0$ és vagy $\varphi(x)=ax+b$ és $\psi(x)=cx+d$ teljesül minden $x\in I$ esetén, vagy pedig létezik egy olyan $p\neq 0$ valós konstans, hogy fennáll $\varphi(x)=ae^{px}+b$ és $\psi(x)=ce^{-px}+d$, ha $x\in I$.*

A tétel bizonyításának lényege annak kimutatása volt, hogy a (3) invarianciaegyenlet fennállásából a φ,ψ függvények kétszeri differenciálhatósága következik. Ehhez többek között Lebesgue-nek a monoton függvények majdnem mindenütti differenciálhatóságára vonatkozó tételét, vagy Baire-nek a deriválfüggvények folytonossági helyeinek a sűrűségére vonatkozó tételét is fel kellett használni. A további részletek a [35], illetve a [32] dolgozatokban találhatók meg. A témakörrel kapcsolatos további eredmények születtek még a következő cikkekben: [6, 26, 27, 28, 32, 33, 34, 36, 38, 40, 41, 42, 46, 54].

Páles Zsolt
Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet

Irodalomjegyzék

[1] J. Aczél and Z. Daróczy. *On Measures of Information and Their Characterizations*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 115.

[2] J. Aczél and P. Erdős. The nonexistence of a Hamel-basis and the general solution of Cauchy's functional equation for nonnegative numbers. *Publ. Math. Debrecen*, 12:253–263, 1965.

[3] J. Aczél and L. Losonczi. Extension of functional equations. In *The mathematics of Paul Erdős, II*, page 251–263. Springer, Berlin, 1997.

[4] M. Bajraktarević. Sur une équation fonctionnelle aux valeurs moyennes. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske Ser. II*, 13:243–248, 1958.

[5] M. Bajraktarević. Sur une généralisation des moyennes quasilinéaires. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, 3 (17):69–76, 1963.

[6] P. Burai. Matkowski–Sutô type equation on symmetrized weighted quasi-arithmetic means. *Results Math.*, 63(1-2):397–408, 2013.

[7] J. Chudziak. On applications of inequalities for quasideviation means in actuarial mathematics. *Math. Inequal. Appl.*, 21(3):601–610, 2018.

[8] J. Chudziak and M. Chudziak. On some applications of quasideviation means. *J. Difference Equ. Appl.*, 25(9-10):1429–1437, 2019.

[9] Z. Daróczy. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von nichtkonstanten Lösungen linearer Funktionalgleichungen. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 22:31–41, 1961.

[10] Z. Daróczy. Über die gemeinsame Charakterisierung der zu den nicht vollständigen Verteilungen gehörigen Entropien von Shannon und von Rényi. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 1:381–388, 1962.

[11] Z. Daróczy. Generalized information functions. *Information and Control*, 16:36–51, 1970.

[12] Z. Daróczy. A general inequality for means. *Aequationes Math.*, 7(1):16–21, 1971.

[13] Z. Daróczy. Über eine Klasse von Mittelwerten. *Publ. Math. Debrecen*, 19:211–217 (1973), 1972.

[14] Z. Daróczy and I. Kátai. Additive zahlentheoretische Funktionen und das Mass der Information. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, 13:83–88 (1971), 1970.

[15] Z. Daróczy and I. Kátai. On additive number-theoretical functions with values in a compact Abelian group. *Aequationes Math.*, 28(3):288–292, 1985.

[16] Z. Daróczy and I. Kátai. Additive functions. *Anal. Math.*, 12(2):85–96, 1986.

[17] Z. Daróczy and I. Kátai. On additive arithmetical functions with values in topological groups. I. *Publ. Math. Debrecen*, 33(3-4):287–291, 1986.

[18] Z. Daróczy and I. Kátai. On additive arithmetical functions with values in the circle group. *Publ. Math. Debrecen*, 34(3-4):307–312, 1987.

[19] Z. Daróczy and I. Kátai. On additive arithmetical functions with values in topological groups. II. *Publ. Math. Debrecen*, 34(1-2):65–68, 1987.

[20] Z. Daróczy and I. Kátai. Characterization of additive functions with values in the circle group. *Publ. Math. Debrecen*, 36(1-4):1–7 (1990), 1989.

[21] Z. Daróczy and I. Kátai. On additive functions taking values from a compact group. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 53(1-2):59–65, 1989.

[22] Z. Daróczy and I. Kátai. Characterization of additive functions with values in the circle group. II. *Publ. Math. Debrecen*, 44(3-4):391–394, 1994.

[23] Z. Daróczy and L. Losonczi. Über die Erweiterung der auf einer Punktmenge additiven Funktionen. *Publ. Math. Debrecen*, 14:239–245, 1967.

[24] Z. Daróczy and Gy. Maksa. Nonnegative information functions. In *Analytic function methods in probability theory (Proc. Colloq. Methods of Complex Anal. in the Theory of Probab. and Statist., Lajos Kossuth Univ. Debrecen, Debrecen, 1977)*, page 67–78. North-Holland, Amsterdam, 1979.

[25] Z. Daróczy and Gy. Maksa. Functional equations on convex sets. *Acta Math. Hungar.*, 68(3):187–195, 1995.

[26] Z. Daróczy and Gy. Maksa. On a problem of Matkowski. *Colloq. Math.*, 82(1):117–123, 1999.

[27] Z. Daróczy, Gy. Maksa, and Zs. Páles. Extension theorems for the Matkowski–Sutô problem. *Demonstratio Math.*, 33(3):547–556, 2000.

[28] Z. Daróczy, Gy. Maksa, and Zs. Páles. Functional equations involving means and their Gauss composition. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134(2):521–530, 2006.

[29] Z. Daróczy and Zs. Páles. On comparison of mean values. *Publ. Math. Debrecen*, 29(1-2):107–115, 1982.

[30] Z. Daróczy and Zs. Páles. Multiplicative mean values and entropies. In *Functions, series, operators, Vol. I, II (Budapest, 1980)*, page 343–359. North-Holland, Amsterdam, 1983.

[31] Z. Daróczy and Zs. Páles. Generalized-homogeneous deviation means. *Publ. Math. Debrecen*, 33(1-2):53–65, 1986.

[32] Z. Daróczy and Zs. Páles. Középértékek Gauss-féle kompozíciója és a Matkowski–Sutô probléma megoldása. *Mat. Lapok (N.S.)*, 8/9(3-4):1–53, 1998/99 (2003).

[33] Z. Daróczy and Zs. Páles. On means that are both quasi-arithmetic and conjugate arithmetic. *Acta Math. Hungar.*, 90(4):271–282, 2001.

[34] Z. Daróczy and Zs. Páles. A Matkowski–Sutô type problem for quasi-arithmetic means of order α. In Z. Daróczy and Zs. Páles, editors, *Functional Equations — Results and Advances*, volume 3 of *Adv. Math. (Dordr.)*, page 189–200. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.

[35] Z. Daróczy and Zs. Páles. Gauss-composition of means and the solution of the Matkowski–Sutô problem. *Publ. Math. Debrecen*, 61(1-2):157–218, 2002.

[36] Z. Daróczy and Zs. Páles. A Matkowski–Sutô-type problem for weighted quasi-arithmetic means. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 22:69–81, 2003.

[37] C. F. Gauss. *Bestimmung der Anziehung eines elliptischen Ringes*. Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., Leipzig, 1927. Nachlass zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktion.

[38] R. Grünwald and Zs. Páles. On the invariance of the arithmetic mean with respect to generalized Bajraktarević means. *Acta Math. Hungar.*, 166(2):594–613, 2022.

[39] G. Hamel. Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y)=f(x)+f(y)$. *Math. Ann.*, 60:459–462, 1905.

[40] J. Jarczyk. Invariance of weighted quasi-arithmetic means with continuous generators. *Publ. Math. Debrecen*, 71(3-4):279–294, 2007.

[41] J. Jarczyk. Invariance of quasi-arithmetic means with function weights. *J. Math. Anal. Appl.*, 353(1):134–140, 2009.

[42] J. Jarczyk and J. Matkowski. Invariance in the class of weighted quasi-arithmetic means. *Ann. Polon. Math.*, 88(1):39–51, 2006.

[43] K. Lajkó. Applications of extensions of additive functions. *Aequationes Math.*, 11:68–76, 1974.

[44] L. Losonczi. An extension theorem. *Aequationes Math.*, 28(3):293–299, 1985.

[45] J. Matkowski. Invariant and complementary quasi-arithmetic means. *Aequationes Math.*, 57(1):87–107, 1999.

[46] J. Matkowski and Zs. Páles. Characterization of generalized quasi-arithmetic means. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 81(3-4):447–456, 2015.

[47] Zs. Páles. Characterization of quasideviation means. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 40(3-4):243–260, 1982.

[48] Zs. Páles. Ingham Jessen's inequality for deviation means. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 49(1-4):131–142, 1985.

[49] Zs. Páles. General inequalities for quasideviation means. *Aequationes Math.*, 36(1):32–56, 1988.

[50] Zs. Páles. On a Pexider-type functional equation for quasideviation means. *Acta Math. Hungar.*, 51(1-2):205–224, 1988.

[51] Zs. Páles. On homogeneous quasideviation means. *Aequationes Math.*, 36(2-3):132–152, 1988.

[52] Zs. Páles. Extension theorem for functional equations with bisymmetric operations. *Aequationes Math.*, 63(3):266–291, 2002.

[53] Zs. Páles and L. Székelyhidi. Laudation to Zoltán Daróczy. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 40:9–20, 2013.

nonsymmetric Bajraktarević means. *Aequationes Math.*, 93(1):37–57, 2019.

[55] J. Rimán. On an extension of Pexider's equation. *Zbornik Rad. Mat. Inst. Beograd (N.S.)*, 1(9):65–72, 1976. Symposium en Quasigroupes et Équations Fonctionnelles (Belgrade-Novi Sad, 1974).

[56] O. Sutô. Studies on some functional equations I. *Tôhoku Math. J.*, 6:1–15, 1914.

[57] O. Sutô. Studies on some functional equations II. *Tôhoku Math. J.*, 6:82–101, 1914.

[58] L. Székelyhidi. An extension theorem for a functional equation. *Publ. Math. Debrecen*, 28(3-4):275–279, 1981.

GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

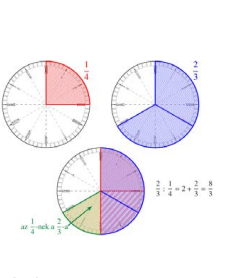
Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon: ›

SOKSZOR TALÁLKOZUNK OLYAN FELADATTAL, ÖTLETTEL, AMIT SZÍVESEN ELTESZÜNK KÉSŐBBI HASZNÁLATRA. A **TANÓRA – SZAKKÖR** ROVAT SZERETNE HOZZÁJÁRULNI A MATEMATIKATANÁROK ESZKÖZTÁRÁNAK GAZDAGÍTÁSÁHOZ, FÓRUMOT KÍVÁN ADNI A GONDOK, NEHÉZSÉGEK MEGTÁRGYALÁSÁRA IS. (ROVATSZERKESZTŐ: *HORVÁTH ESZTER*.)

Csapodi Csaba, Kiss Anna, Móricz Márk, Vancsó Ödön,
2023. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

35. Varga Tamás Módszertani Napok

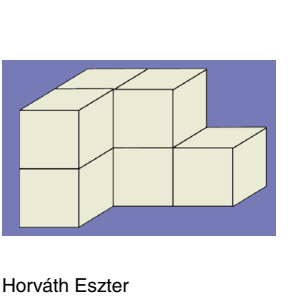
Az idei, XXXV. Varga Tamás Módszertani Napokat 2023. november 3-4-én rendezte meg a Varga Tamás Alapítvány és az ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központja. Az esemény honlapja részletesen tájékoztat az előadásokról és a különböző szekciók programjáról. A Varga Tamás Junior díjat idén Dankowsky Anna Zóra, a Szent István Gimnázium matematikatanára, az életmű díjat pedig Sinkáné Papp Mária, nyíregyházi tanító és matematikatanár, valamint Vancsó Ödön, a Matematikatanítási és Módszertani Központ vezetője kapta. A szervezők, *Csapodi Csaba, Kiss Anna, Móricz Márk, Vancsó Ödön fotókkal illusztált beszámolója következik*.



Pintér Gergő
2023. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Nem megy a matek – avagy a törtek osztása egy rajzfilmben

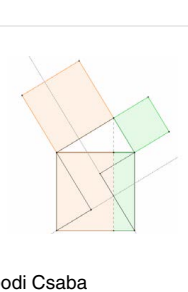
Arra szeretném felhívni a figyelmet, hogy matekos témának (is) ezernyi arca van, és mindenki más irányból érkezik a megértéshez, és más irányból akad el. Az elakadás végzetes is lehet ...., egész életre elvághatja a diákot a matematikától és mindentől, ami arra épül. – *Pintér Gergő* egy japán rajzfilm egyik jelenetéből kiindulva a törtek osztásának meg(nem)értését hozza fel példaként. Akadhatnak, akik egyetértenek a véleményével, és olyanok is, akik nem...



Horváth Eszter
2023. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Nyolcadik osztályból a kilencedikbe

2024. januárjában a középiskolai felvételiken már azok a diákok fognak részt venni, akik az elmúlt 4 évben az új NAT szerint tanultak, az új kerettantervek szerint írt tankönyveket használták. Tanároknak és szülőknek is sok fejtörést okoz, hogy milyen változást hozhat ez a tény a központi felvételi feladatsorokban. Elsősorban nekik szánja gondolatait *Horváth Eszter*, arról, hogy miben változhatott a diákok tudása, milyen témákra lenne jó még a felvételi előtti hónapban egy kicsit ráerősíteni. Tapasztalatait itt osztotta meg.



Csapodi Csaba
2023. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – IV. rész

A 2024-es érettségi követelményeket 2023-as cikksorozatunk témakörök szerint tárgyalja. A negyedik részben a geometria témakörének változásait mutatjuk be táblázatos formában, kiemelve az újonnan bekerült, illetve a törölt tartalmakat. Néhány feladat is segítheti a most érettségire készülőket, tanárokat és diákokat. Ismét *Csapodi Csaba* mutatja be az újdonságokat.

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Csapodi Csaba, Kiss Anna, Móricz Márk, Vancsó Ödön, 2023. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

35. Varga Tamás Módszertani Napok

Az idei, XXXV. Varga Tamás Módszertani Napokat 2023. november 3-4-én személyes részvétellel rendezte meg a Varga Tamás Alapítvány és az ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központja az ELTE TTK Lágymányosi Déli épületében. Az esemény honlapja részletesen tájékoztat az előadásokról és a különböző szekciók programjáról.

Péntek délután 15 órától egy plenáris előadáson és egy tanári fórumon vehettek részt a regisztráló kollégák, majd az idei Varga Tamás Díjak átadására került sor. A plenáris előadást Klein Sándor pszichológus tartotta *Módszer vagy kísérlet? – Varga Tamás és a magyarországi matematikatanítás megújulásának reménye* címmel. Klein Sándor elsősorban a „komplex matematika” pszichológiai hatásvizsgálatával segítette Varga Tamás kísérleteit. Az ezzel kapcsolatos tapasztalatai mellett Dienes Zoltánhoz fűződő kapcsolatáról is beszélt előadásában.

Ehhez kapcsolódóan Csapodi Csaba, az ELTE Tanárképző Központ főigazgatója és a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet munkatársa egy új tanárhálózat kialakításának a terveiről beszélt. Az elképzelésről Szmerka Gergely vezetett egy rövid fórumot.

Ezt követően a 100 éve született Imrecze Zoltánné emlékét idézték fel kollégái, tanítványai: Kovács Csongorné, Ács Katalin, Fried Katalin, Lajos Józsefné és Szolgáné Kurovszki Ilona. Imrecze Zoltánnét az 1960-70-es években az egész ország ismerhette az Iskolatévéből, a visszaemlékezésekről az Érintő 2024. márciusi számában részletesebben is beszámolunk.

A nap zárásaként került sor az idei Varga Tamás Díjak átadására. Junior díjat kapott Dankowsky Anna Zóra, a Szent István Gimnázium matematikatanára. Életmű díjat kapott: Sinkáné Papp Mária, nyíregyházi tanító és matematikatanár, valamint Vancsó Ödön, a Matematikatanítási és Módszertani Központ vezetője. A laudációkat az esemény honlapján olvashatják.

Szombaton 9 és 14 óra között több különböző szekcióban zajlottak az események. Tanítóknak (1-4. évfolyam) és tanároknak (5-8. valamint 9-12. évfolyam) is szerveztünk előadásokat, workshopokat, idén kizárólag személyes jelenléttel. Az alsós szekció programját Kulman Katalin és Móricz Márk, a felsős szekcióét Kiss Anna, a középiskolai szekciók előadásait Csapodi Csaba állította össze. Az előadások egy részének vetített anyaga elérhető a honlapon.

Az alsós szekcióban a veresegyházi Jövő Iskolája mutatkozott be. Az alapítványi iskolát az iskola igazgatója, Ungár Ágnes mutatta be. Előadásában az iskola legfontosabb elveit és módszertanait ismerhettük meg. Az iskola különlegessége, hogy nem kapcsolódik semmilyen alternatív hagyományhoz, hanem többféle gyerekközpontú szemléletet és gyakorlatot integrál nagyfokú pedagógusi szabadságot engedve.

Juhászné Antal Judit, az iskola egyik pedagógusa, a kooperatív tanítási gyakorlataiból hozott ízelítőt, ötleteket. Kollégája Néder-Buzási Éva pedig rengeteg játékkal mutatta meg, hogy ő hogyan csinál a tanulásból élményt, a játékból tanulást.

Összességében a délelőtt folyamán olyan tudással és tapasztalattal lettünk gazdagabbak, melyek „alternativitásuk” mellett megfelelőek ahhoz, hogy a közoktatás keretei között is el lehessen kezdeni alkalmazni.

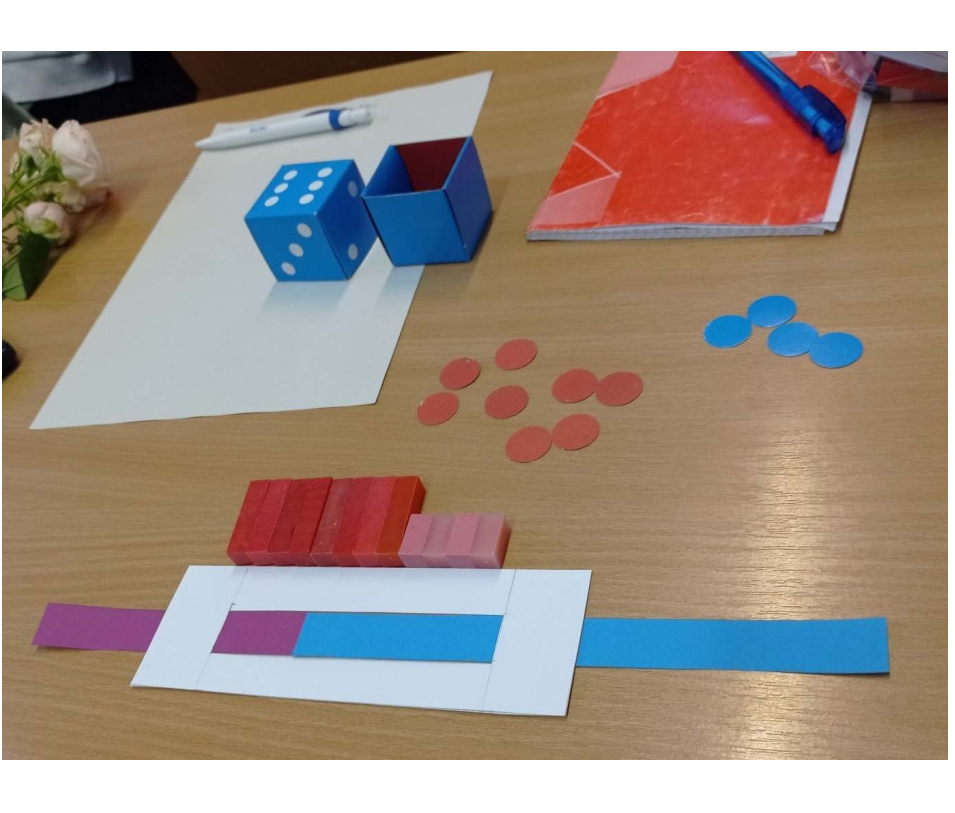
A felső tagozatos szekció elejétől a végéig telt házzal, a jelenlévő tanárok és tanárjelöltek aktív, cselekvő részvételével zajlott. A négy 45 perces foglalkozás igazi pezsgő hangulatban zajlott, és nagyon gazdag matematikai-módszertani tartalommal bírt.

Az első foglalkozáson a miskolci Fényi Gyula Jezsuita Gimnázium tanára, Németh Anna vezetésével a teniszlabdákkal játszottunk. Először szabad játékkal, majd az erre épülő strukturált játékkal a függvények fogalmát alapoztuk meg. A pattogtatások számán, magasságán, az adott hosszúságú gurítások stopperrel mért idején, a hajítások telefonnal videóra vett ívén, a vászon anyagból kialakított különböző görbületű lejtőkön más-más tempóban végiggördülő teniszlabdák tapasztalatán keresztül különböző mennyiségek közötti kapcsolatokat, egyenes arányosságot, gyorsuló és lassuló mozgást stb. vizsgáltunk.

A második foglalkozáson Horti Krisztina szegedi PhD hallgató valószínűségi játékokkal varázsolta el a hallgatóságot. A nagyon jó ízléssel kiválasztott-megalkotott játékokat a résztvevők végig izgatottan és élvezettel játszották, és a játékok kapcsán az iskolai tapasztalatokból és a módszertani következményekből is kaphattunk kóstolót.

A harmadik foglalkozáson Pintér Gabriella, a Wisconsin-Milwaukee egyetem (USA) oktatója egy szakköri feladat apropóján játékos módszerekkel a matematikai kérdésfeltevés, a felfedezés, a differenciálás, a megválaszolt és megválaszolatlan matematikai problémák és a művészetek világába kalauzolta az aktívan gondolkodó és kombináló résztvevőket.

A negyedik foglalkozáson Bereczki Ildikó budapesti PhD hallgató az arányossági gondolkodás fejlesztésére elérhető szakirodalmat és az iskolai gyakorlatot kapcsolta össze. Az ügyesen strukturált tevékenységekkel, változatos eszközökkel (korongok, színes rudak, színes papír csúszkák, narancslé stb.) párhuzamosan a mögöttes módszertani csomópontok is világossá váltak, és Ildikó eddigi iskolai kísérleteinek egy-egy különösen izgalmas eredményét is megismerhettük.



A nap zárásaként Kántor Tünde (Debreceni Egyetem) Bolyai Jánosra és munkásságára emlékezett abból az alkalomból, hogy éppen 200 évvel ezelőtt, 1823. november 3-án keltezte azt a levelét édesapjának, amiben bejelentette: *„a semmiből egy ujj, más világot teremtettem.”*

Az egyik középiskolai szekcióban először a frissen díjazott Dankowsky Zorka és Szűcs Gábor (Rényi Intézet) mutatott be egy új fejlesztésű, iskolai kísérletekkel alátámasztott koordinátageometriai tananyagot, majd Ujházy Márton (ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium) bocsátotta közkinccsé saját fejlesztésű segédanyagait, amelyekkel a szögfüggvények kiterjesztésének tanítását lehet megtámogatni.

Két statisztika témájú előadás következett két doktori hallgatótól. Boller Balázs a korreláció- és regressziótanítás bevezetésének lehetőségeit és ennek lehetséges pozitív hatásait kutatja, Jánvári Zsuzsanna pedig a 2024-től érvényes érettségi követelményekhez illeszkedő feladatokkal segítette a felkészítő tanárok munkáját.

Ebéd után Fülöp Zsolt (Károli Gáspár Református Egyetem Pedagógusképző Intézet) előadásában a magyarországi általános iskolai tankönyvek elemzését mutatta be az aritmetikáról az algebrára történő átmenet legfontosabb szempontjai szerint.

A másik középiskolai szekcióban elsőként Paulovics Zoltán doktori hallgató tartott egy 90 perces foglalkozást a kutatási témájáról: *Hibák, hibás gondolatok felismerése és szerepe a mindennapi oktatásban*. Olykor a hallgatóságot is bevonva mutatott kombinatorikai feladatmegoldásokat, amelyekről el kellett dönteni, hogy jó-e vagy hibás, és megindokolni, miért. Közben általános megjegyzésekkel megmutatta, mire és hogyan használható ez az iskolában. A módszernek nagy erénye a kritikai gondolkodás fejlesztése. Továbbá remekül illeszkedik Varga Tamás egyik fontos eszméjéhez, a tévedés jogához, ami megilleti a gondolkodó embert, s amit néha a matematikatanárok nem vesznek figyelembe.

Második előadónk Juhász Péter volt, a Rényi Intézet Szakmódszertani Osztályának vezetője és a Szent István Gimnázium tanára, aki a GPS és egyéb rendszerek matematikájáról tartott előadást, ami a matematika alkalmazásai főtémába illeszkedett. Világosan megkülönböztette a két feladatot, ami gyakran összemosódik a mindennapi használat során: a helymeghatározást és az útvonaltervezést. Bemutatta az alkalmazott Dijkstra-algoritmust, amellyel az útvonal tervezhető.

Ezt követte *A matematika a művészeti nevelésben* előadás, amelyet Juhász Litza tartott. Ő Amerikából származik, de magyar állampolgár és múzeumpedagógus a Szépművészeti Múzeumban, egyik feladata a budapesti Victor Vasarely múzeumban tárlatvezetés különleges matematikaóra keretében. Bemutatta, hogyan szokta csinálni a foglalkozásait, a közönség pedig ügyesen alkalmazkodott a diák szerephez. Szabályos hatszöget készítettünk egy A4-es lapból, csak hajtogatással és végül egy ollóval kivágva. A program egyik vonzereje, hogy Juhász Litza nem matematikus, így a matematika iránt kevésbé érdeklődő diákokat is másként nyerheti meg a matematikának.

Az ebédszünet után zárásként meghallgattuk Ambrus Andrást, aki a matematikadidaktika igazi doyenjeként egyik fő témájáról, a problémamegoldásról beszélt. Bemutatta a Pólya-tanítvány Alain Schoenfeld újabb óriásprojektjét, beleépítve a kognitív terheléselmélet eredményeit a munka és a hosszútávú memória működésével kapcsolatban, amelyek figyelembevétele az oktatás tervezésekor igen fontos szempont.

Csapodi Csaba, Kiss Anna, Móricz Márk, Vancsó Ödön

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

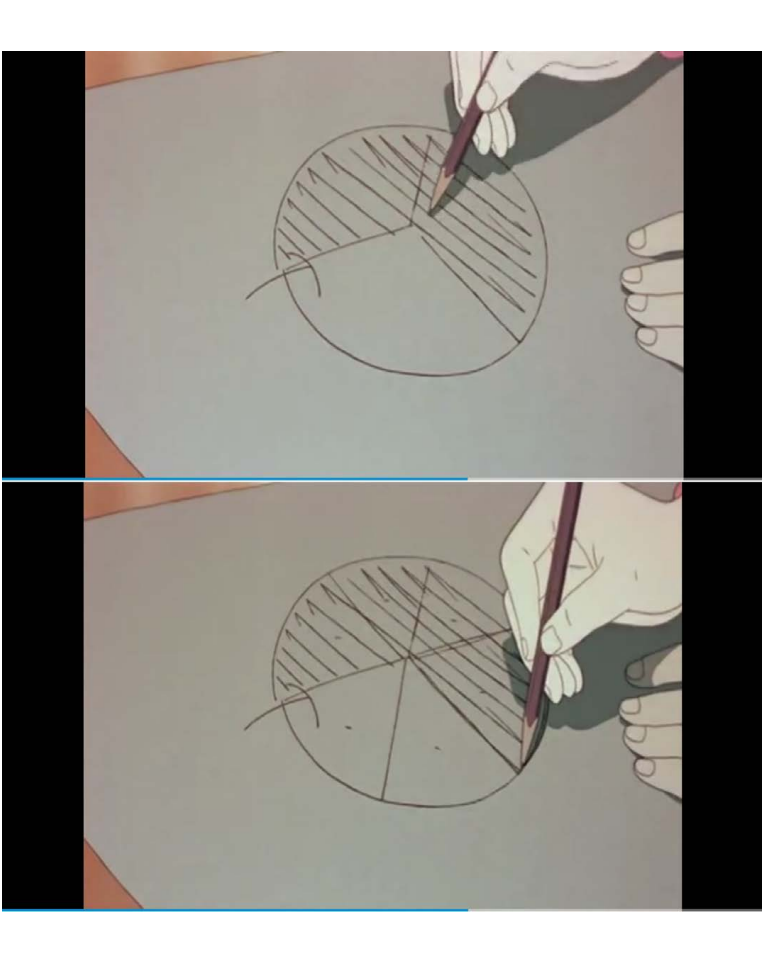
Pintér Gergő 2023. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Nem megy a matek – avagy a törtek osztása egy rajzfilmben

Rendszerint gyanakodva fogadom, amikor valaki arról beszél, hogy nem ment neki a matek. Lehet, hogy nagyon is jól ment – volna, csak nem úgy mondták el neki, ahogy ő be tudta volna fogadni. Esetleg benne ragadt egy kérdés még az elején, amire senkitől nem kapott választ. Talán meg sem tudta jól fogalmazni a problémáját, mégis elvesztette emiatt a bizalmát és az érdeklődését. Vagy – szoktam ilyenkor gondolni – az illető igazából nem is találkozott még matematikával. Amivel találkozott az iskolában, azt nem nevezném annak. A japán rajzfilmkészítő, Takahata Iszao Yesterday – Vissza a gyerekkorba című animációs filmjének egyik jelenetében nagyon tanulságos példát láthatunk erre a jelenségre (1:04:10-nél kezdődik).

A film főhősének, Taekonak ötödikes korában nem ment a törtek osztása. Rossz dolgozatot írt belőle, és az édesanyja a nővéréhez küldte őt korrepetálásra. Hamar kiderült, hogy Taeko is tudja, hogyan kellene kiszámolni a helyes eredményt, de nem érti, mi ennek a jelentése. Pontosabban amire ő gondol, az más eredményt ad, és emiatt össze van zavarodva.

„Mi az egyáltalán, hogy törtet osztunk törttel?” – kérdezi Taeko a nővérét. Az ő eszmefuttatása szerint $2/3$-ot elosztani $1/4$-del azt jelentené, hogy 4 felé osztjuk, tehát $1/6$-ot kapunk. A nővére nagyon helyesen rámutat, hogy így nem osztott, hanem szorzott $1/4$-del, de Taeko számára ez újabb ellentmondást okoz: „Hogy lenne kisebb, ha szorzok?” A nővére próbál belegondolni az $1/4$-del való osztás jelentésébe, sikertelenül, majd elhangzik az a mondat, ami talán egész életére meghatározza Taeko viszonyát a matematikához: „Nem ez a lényeg. Verd ki a fejedből az almákat! Csak megcseréled, aztán pedig megszorzod, ezzel törődj!”



A $2/3$ négy részre osztása Takahata Iszao: Vissza a gyerekkorba című animációs filmjében, amit a főhős, Taeko $1/4$-del való osztásnak gondol – pedig valójában szorzás $1/4$-del.

Akkor végülis tényleg nem ment a törtek osztása Taekonak? Ő is ki tudta – volna – számolni ugyanúgy, mint a nővére. Csak nem volt hajlandó ész nélkül alkalmazni egy receptet, aminek nem látja az értelmét. Nem volt butább a többieknél, sőt, talán matekosabb gondolkodásra vall, hogy meg is akarja érteni, amit csinál. De ebben a megértésben senki nem tudott segíteni neki. Volt egy elakadása, amin aztán nem tudott továbblendülni, úgy maradt, rossz matekos lett.

Vajon hányan ülhetnek hasonló tapasztalattal az iskolapadokban, és mennyien lehetnek a felnőttek között, akiket elkönyveltek rossz matekosnak, pedig csak gondolkodtak, nem látták értelmét, és nem kaptak segítséget? Úgy képzelem, hogy ez egész általános jelenség lehet: ha valaki nem matekzseni, hogy magától rájöjjön, vagy legalább nagyon precíz kérdést fogalmazzon meg, de közben gondolkozik, keresi az értelmét az iskolában tanultaknak, akkor szükségszerűen belebotlik ehhez hasonló kérdésekbe – és kétséges, hogy talál-e valakit, aki ezeken átsegíti őt.

Én saját élményként is jól ismerem ezt a fajta elakadást, igaz, leginkább nem általános iskolából, hanem a kutatói munkámból. De attól még ugyanolyan frusztráló, sőt! Egyre kevesebb ember van a bolygón, akivel az ilyen elakadásokat részletesen át tudom rágni, hiszen ehhez kell az, hogy nagy tudása legyen az adott témáról, és rám szánja a figyelmét, hogy megértse, hogy én mit nem értek. Másrészt pedig egész tudományágak is működnek hasonló elakadásban. Például a kvantummechanika értelmezésével kapcsolatban csak félig viccesnek szánt szállóige, hogy „Fogd be a szád, és számolj!”

De térjünk vissza Taekohoz. Mit válaszolnánk neki, hogyan magyaráznánk el a törtek osztását? Ha hozzám fordulna Taeko ezzel a problémával, elősziris a törtek szorzását tisztáznám vele. A magyar nyelv kicsit félrevezető ez ügyben (bár a japánt nem tudom). Valamit elnegyedelni annyit tesz, mint négy egyenlő részre osztani, így amit ő lerajzolt, az a $2/3$ osztva 4-gyel, a $2/3$ negyed része, vagy ha úgy tetszik, a $2/3$ egy negyede. Ez az $1/4$-de való szorzás:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}.$$

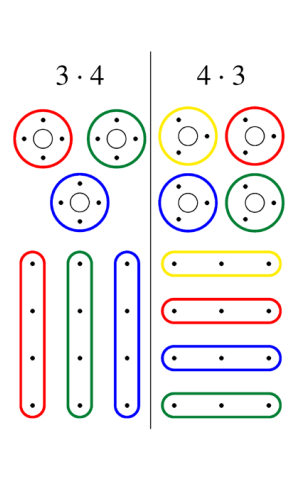
Igen, megszoroztam és kisebb lett, mert 1-nél kisebb számmal szoroztam – ezen el lehet tűnődni más példák kapcsán is. De a negyedelés miért $1/4$-del való szorzást jelent? Ez számomra úgy lesz igazán meggyőző, hogyha egész számot szorzok $1/4$-del, például $6\cdot 1/4$, és fordítva tekintem: a 6-tal szorzom meg az $1/4$-et, azaz 6-szor összeadom önmagával:

$$6\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=2+\frac{1}{2}=\frac{6}{4}.$$

Összefoglalva: a törttel való szorzás a törtrész kiszámítása. Ez a legalapvetőbb gondolat nem nyilvánvaló, inkább meglepő.

Most jöhet az osztás! Valóban elakadunk már az elején: mit jelent az, hogy a $2/3$-ot $1/4$ darab egyenlő részre osztom? Nem azt, amit Taeko rajzolt, mert az a 4-gyel való osztás, azaz $1/4$-del szorzás. Tudjuk, hogy mit nem jelent, de attól még nem tudjuk, hogy mit jelent. Lépjünk hát egyet hátra! Nézzünk olyan példát, amiben tudjuk az osztás jelentését, mondjuk, 12 osztva 3-mal ($12/3$). 12 ember belép az étterembe, őket kell 3 egyenlő csoportra osztani, vagyis 3 asztalhoz leültetni. Így egy-egy asztalnál 4 ember fog ülni.

De van ennek egy másik jelentése is! 12-ben a 3 (azaz $12:3$) azt jelenti, hogy 3-mas csoportokat alkotunk a 12 emberből, azaz 3 fős asztalokhoz ültetjük le az embereket. Így összesen 4 csoport keletlkezik, 4 asztalt fognak elfoglalni. Az eredmény, $12/3$ vagy $12:3$ mindenképpen 4, de más a jelentése. Ezt az második féle jelentést szokás bennfoglalásnak hívni, és ezt jelöli a kettőspont.



$$3\cdot 4=4\cdot 3$$

A bennfoglalás az általános iskolás matematika tananyag egyik legbizarrabb eleme, ekkor szoktak a szülők tömegesen reklamálni, hogy nem értik, amit a másodikos gyerekük tanul. Igen, mert a bennfoglalás ugyanaz, mint az osztás, pontosabban más a jelentése, de ugyanaz az eredménye. Valójában a különbség a kétféle szorzásból adódik: $3\cdot 4$ jelentése az, hogy $4+4+4$, míg a $4\cdot 3$ azt jelenti, hogy $3+3+3+3$. Különböző a jelentés, de az eredmény ugyanaz.

És most már válaszolhatunk Taekonak és a nővérének. A $(2/3):(1/4)$ műveletet nem tudjuk osztásként értelmezni, hiszen nem tudunk $1/4$ darab csoportot képezni a $2/3$-ből. Az osztás első féle jelentése tehát ebben az esetben nem működik. Működik viszont a bennfoglalás: hányszor van meg $2/3$-ban az $1/4$? Taeko rajzán belemérhetjük az egésznek a $2/3$ részébe az $1/4$ részét: belefér kétszer, meg még maradt egy pici. Ez a fennmaradó rész az $1/4$-nek a $2/3$ része, azaz $2/3$-szorosa. Tehát az $1/4$ a $2/3$-ba belefér 2-szer és még $2/3$-szor. Azaz

$$\frac{2}{3}:\frac{1}{4}=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}.$$

Tényleg ugyanaz, mint a reciprokkal való szorzás eredménye – a recept alkalmazása:

$$\frac{2}{3}:\frac{1}{4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{1}=\frac{8}{3}.$$

Megvan tehát, hogy mi a törttel való osztás jelentése. Igazából törttel való bennfoglalásnak kellene hívni, ha ehhez a szóhoz nem kapcsolódna egy 5. osztályra talán már sikeresen elnyomott trauma. Azt is látjuk a példán, hogy működik a recept. Legalábbis helyes eredményt ad, de egyelőre nem nyilvánvaló belőle, hogy ennek mindig így kell lennie.

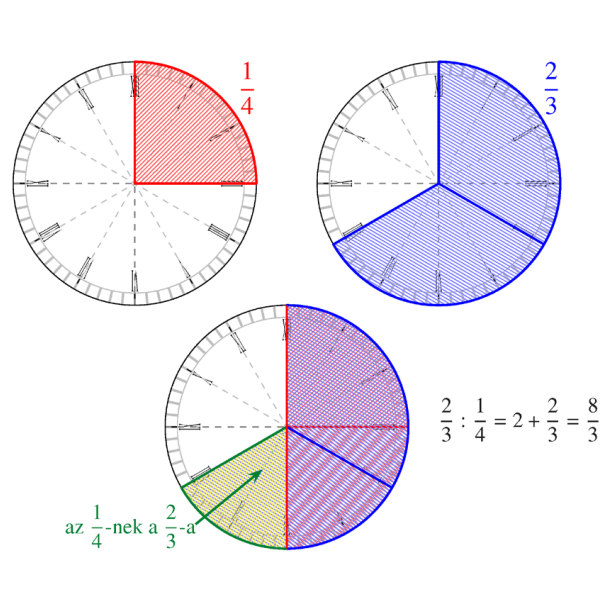
Van másik módszer is, ahogy a törttel való osztást származtathatjuk, csak az sokkal formálisabb. E szerint az $1/4$-del való osztás eredménye olyan szám, amit $1/4$-del szorozva megkapjuk azt a számot, amit elosztottunk. Azaz – általánosan:

$$x:\frac{a}{b}=y,\ \text{ha}\ y\cdot\frac{a}{b}=x.$$

Ez a magyarázat Taeko számára nem volna kielégítő, hiszen nem derül ki belőle, mit jelent ez a művelet az almák darabolására vonatkoztatva. Viszont a jól ismert reciprok-recept kiolvasható belőle:

$$x:\frac{a}{b}=x\cdot\frac{b}{a},\ \text{hiszen}\ \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=1,\ \text{és ezért}\ x\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=x\cdot 1=x.$$

Látjuk, hogy egy matematikai fogalomnak nemcsak egyféle jelentése van, hanem különböző jelentésrétegei. Továbbá a megértés szubjektív dolog, mindenkinek mást jelenthet:


$\frac{1}{4}$
$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}:\frac{1}{4}=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$
az $\frac{1}{4}$-nek a $\frac{2}{3}$-a

$2/3$-ban az $1/4$

(1) *A recept alkalmazása:* Taeko nővérének az volt a megértés, hogy tudja a receptet, tudja, hogyan kell kiszámolni. Biztos vannak olyan diákok, akiket nem érdekel mélyebben a dolog, megelégszenek ezzel. Ilyen esetben jó célja a tanításnak, hogy gyakoroltassuk be velük a receptet, hogy tudják használni. De érdemes tudni, hogy lehetnek olyan diákok, akiket éppen ezzel veszítünk el, ráadásul ők azok, akiket érdekelne is a matek. Nekik mondanám azt felnőtt korukban, hogy igazából nem találkoztak matematikával. Mert ami nem ment nekik, az nem az volt, hanem gépies számolás.

(2) *A matematikai megértés:* A matematikai formalizmus számára a megértés az, hogy az osztás eredményét (a hányadost) visszaszorozva az osztóval kijön az eredeti szám (az osztandó). Ebből az elvből azonnal következik a recept, ezért a megértésnek ezen a szintjén mozogni kényelmes és rendkívül gyümölcsöző. A matematika javarészt ezen a szinten mozog. De ez a szint nem foglalkozik a világi (matematikán kívüli) jelentéssel.

(3) *Világi megértés:* Visszatérni a törtek (egyik) jelentéséhez, és az almákon elvégezni az $1/4$-del való osztás matematikai műveletét jóval nehezebb feladat, egyáltalán nem magától értetődő. A megértésnek ezen a szintjén nem véd meg a matematika, kiléptünk annak biztonságot adó formalizmusából, és bele kell gondolnunk a valóságba. Taeko azért került nehéz helyzetbe, mert a megértésnek ezt a szintjét igényelte (volna).

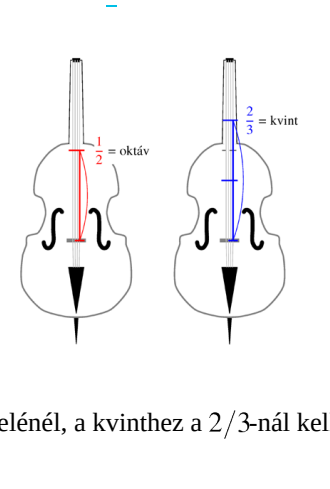
Az is kiderül ebből, hogy mindenki a személyes igénye szerint képes a megértésre, a más szinteken érkező magyarázatok nem működnek nála. Taeko nővérének hiába mutogatnánk a kördiagramot, hiszen ő megelégedett a recepttel, míg Taekonak a recept önmagában semmitmondó, csak kérdéseket vet fel. Ráadásul a törtek osztásának tényleges jelentése nem egy könnyű gondolat, ezért egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy melyik módon érdemes bevezetni a témát.[1]

Ez tehát rossz hírnek tűnhet az oktatás számára: nincsen mindenki számára kielégítő magyarázat. Jó hír viszont, hogy minden értelmezhető sokféle módon, mindenkinek juthat az osztályban személyre szabott megértés, ami a többiekét is teljesebbé teszi. Ehhez „csak” az kell, hogy megértsük, hogy ki hogyan nem érti.

A matematikai fogalmak esetén minden alkalmazás új jelentésrétegeket nyit meg. Minden új alkalmazás új megértés és új ábrázolás is egyúttal. Most erre nézünk egy példát a törtek osztása esetén. Ez a példa elsőre nem segíti a törtekkel végzett műveletek megértését, hiszen még azt a területet is meg kell hozzá érteni, ahonnan a példa származik, ami jelen esetben a zene lesz. Ezt követően azonban mégis egy új színfoltot ad a történek osztásához.

Tehát ahogy említettem, a törtek szorzása és osztása nagyon szépen megjelenik a zenében, ha egy húr rezgéseit vizsgáljuk. A teljes sztorit el lehet olvasni Székely Péter cikkében vagy az én könyvemben, itt csak az idevágó gondolatot foglalom össze.

Minden tört – arány – egy adott hangköznek felel meg: ha olyan arányban fogom le a húrt, mennyivel lesz magasabb a hangja a húr alaphangjánál. Például ha egy húrt lefogunk a felénél, éppen egy oktávval magasabb hang szólal meg, mintha az eredeti húrt pengetnénk. A negyedénél lefogva (a negyedét pengetve) két oktávval magasabb hangot hallunk, a nyolcadát pengetve három oktávval magasabb és így tovább. A $2/3$-nak megfelelő hangköz a kvint: a húr hosszának $2/3$-át pengetve a húr alaphangjánál egy kvinttel magasabb hangot hallunk. [2]



Az oktávhoz a felénél, a kvinthez a $2/3$-nál kell lefogni a húrt.

Milyen arány felel meg a kvint kiegészítő hangközének, a kvartnak? Azaz az oktávnál egy kvinttel mélyebb hang milyen aránynak felel meg az alaphanghoz képest? A kvinttel magasabb hang a $2/3$-dal való szorzás, tehát ha kvinttel mélyebb hangot szeretnék, akkor osztani kell $2/3$-dal. Mivel az oktáv az eredeti húrhossz $1/2$-szerese, ezért az oktávnál egy kvinttel mélyebb hangnak a

$$\frac{1}{2}:\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

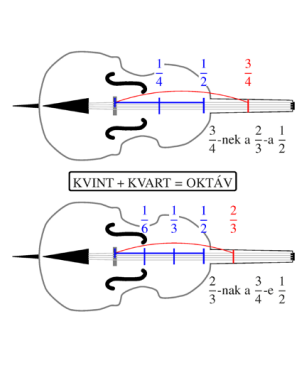
arány felel meg, azaz a húr $3/4$-ét kell pengetni ahhoz, hogy az alaphangnál egy kvarttal magasabb hangot kapjunk. Tehát az a zenei formula, hogy

$$\text{kvint}+\text{kvart}=\text{oktáv},$$

így fordítható le matematikára:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}.$$

És most érdemes megvizsgálni a számolás jelentését a világi szinten is! Ha a húr $3/4$-ének veszem a $2/3$-át, az 2 darab negyed lesz, vagyis a húr fele. Fordítva, ha a $2/3$-nak veszem a $3/4$-ét: ehhez érdemes hatodokra bontani, mint Taeko az almát. A $2/3$ egy negyede $1/6$, tehát a három negyede $3/6$, azaz $1/2$.



A kvint és a kvart oktávra egészítik ki egymást.

Arra szeretném tehát felhívni a figyelmet, hogy egy-egy matekos témának (is) ezernyi arca van, és mindenki más irányból érkezik a megértéshez, és más irányból akad el. Az elakadás végzetes is lehet egy ennyire egymásra épülő tudományban, mint a matek, egész életre elvághatja a diákot a matematikától és mindentől, ami arra épül. Ha ezt elfogadjuk, és figyelembe is akarjuk venni az oktatásban, nem tudok jobb módszert javasolni, mint a kétirányú kommunikációt a tanár és a diákok között. Ijesztően hangzik, hiszen rengeteg diák van, kevés idő, sok tananyag. De valójában, ha sikerülne átsegíteni egymást a személyes elakadásokon, azzal rengeteg extra erőfeszítést (munkát, időt) spórolnánk meg, mindenki jobb kedvvel és lelkesebben tanulna, dolgozna. És mivel mindenkinek másmilyen a megértése és az elakadása, a diákok igazából egymásnak tudnának a legtöbbet segíteni. Idealistán hangzik? Véleményem szerint akkor is ez az igazság.

Az ELTE matematikus szakán sikerült egy ilyen idilli rendszerben tanulnunk, együtt az évfolyamtársaimmal és a tanárainkkal a közös ügyért. Ez semmi máshoz nem fogható élmény. Ha szerencsém van, a különféle alkalmazások és kapcsolatok varázslatos színfoltjai egész életemen keresztül színezni fogják a világomat.

Lábjegyzetek

[1] A magyarországi matematikatanítás hagyományosan felfedeztető jellegű, a tananyag spirális felépítésű. Ezért ha jól tanítjuk a matematikát, akkor a gyerekekben sok matematikai kép, modell előbb alakul ki (nem verbálisan), mint ahogyan azt a tanterv elvárja. Ez az értelmezés előkészítő szakasza. A tankönyvekben is ez köszön vissza (lásd `https://www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/OH-MAT06TA__teljes.pdf` 54–76. oldal, `https://www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/OH-MAT06TB__teljes.pdf` 149–178. oldal). Nagy hangsúlyt igyekszünk fektetni a tapasztalatszerzésre, ami lehetőséget teremt a gyerekeknek arra, hogy a saját elképzeléseik szerint építsék fel magukban a megértéshez szükséges szemléletet. Ilyen előkészületek esetén sokkal nagyobb az esély rá, hogy a tanulók megértik a törtekkel végzett műveleteket. Könnyen elképzelhető viszont, hogy idővel csak a szabályra emlékeznek, és nem fogják feltétlenül az értelmet keresni mögötte. Az, hogy természetes módon tudják elvégezni a műveleteket a törtekkel (anélkül, hogy újra és újra végig kelljen gondolniuk az értelmezésen alapuló hátteret), az absztrakció egy magasabb szintjét jelenti. (*Szerkesztői megjegyzés.*)

[2] A hangközök zenei elnevezései (oktáv, kvint, kvart, …) a mi szempontunkból félrevezetőek, mivel másfajta rendszerből származnak. A hangoknak a zongora billentyűzetén elfoglalt helyét jelölik, és semmi közük a felhangrendszerbeli jelentéshez. Például a kvint jelentése öt(ödik), ennek semmi köze nincs a $2/3$-hoz, mint ahogy az oktávnak (nyolc(adik)) sincs köze az $1/2$-hez. A kétféle megközelítés persze egy adott ponton találkozik, ezt a prímszámokról szóló könyvemben végigvezetem, de Székely Péter cikke is támpontot adhat.

Pintér Gergő, BME Elméleti Fizika Tanszék

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Horváth Eszter 2023. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Nyolcadik osztályból a kilencedikbe

2024. januárjában a középiskolai felvételiken már azok a diákok fognak részt venni, akik az elmúlt 4 évben az új NAT szerint tanultak, az új kerettantervek szerint írt tankönyveket használták. Tanároknak és szülőknek is sok fejtörést okoz, hogy milyen változást hozhat ez a tény a központi felvételi feladatsorokban. Ezzel az írással szeretném áttekinteni az elmúlt évek felvételi feladatsorainak szerkezetét. Én sem tudom, hogy milyen lesz a januári felvételi, de néhány gondolatot leírok majd arról, hogy miben változhatott a diákok tudása, milyen témákra lenne jó még a felvételi előtti hónapban egy kicsit erősíteni. Mindezt sok évi tapasztalat alapján, de nem a feladatsorok készítőjeként írom, akár tévedhetek is.

Ebben az írásban a gondolataimat az alábbi tényekre alapozva írtam:

1. A most felvételiző nyolcadikosok 1-4. osztályokban a 2012-es NAT szerint, az 5-8. osztályokban a 2020-as NAT szerint tanultak. Az ezek alapján készült kerettantervek az Oktatási Hivatal honlapján érhetők el.

2. Szintén a hivatal honlapján találunk tájékoztatást a magyar és matematika írásbeli feladatlapokról. Ebben az anyagban olvasható ez a mondat is:

A feladatlapok összeállításának szempontjai, a feladattípusok belső arányai a korábbi évekhez képest alapvetően nem változnak, így az OH honlapján megtalálható korábbi feladatsorok továbbra is segítik a felkészülést.

3. Az írásbelin ebben a tanévben szereplő témakörökről is tájékoztat az OH honlapja:

4. Simon Judit tanárnő a facebook Matematikatanítás felső tagozaton (5–8 osztály) TANÁRI CSOPORT számára készített egy összehasonlító táblázatot, amelyben összehasonlítja a korábbi évek követelményeit a mostaniakkal.

A változások röviden így foglalhatók össze:

Kikerült a követelményrendszerből:

– a normál alak ismerete;

– egyenletek megoldása, helyette elsőfokú egyenletek megoldása szerepel;

– függvény, értelmezési tartomány, értékkészlet fogalma, meghatározása egyszerű esetekben, függvény megadási módjai, függvény és grafikonja;

– lineáris függvények ábrázolása képlet alapján, táblázattal és paraméterei alapján;

– egybevágóság általános fogalma nem szerepel, de háromszögek egybevágósága igen;

– kerület-, területszámítás általánosan nincs, de szerepel a háromszög, paralelogramma, trapéz és deltoid kerülete, területe;

– a háromszög köré írt körének fogalma, tulajdonságainak alkalmazása feladatmegoldásokban;

– a háromszög beírt körének fogalma, tulajdonságainak alkalmazása feladatmegoldásokban;

– a háromszög magasságvonala, magasságpontja;

– a kör kerülete és területe;

– a henger felszíne és térfogata.

Bekerült a követelményrendszerbe:

– számrendszerek ismerete;

– megfeleltetés, arányos osztás, egyenes arányosság, koordináta-rendszer, pont koordinátái. grafikon.

Hogyan készüljünk? Hogyan gyakoroljuk?

Nem tudunk mást tenni, mint hogy a régebbi évek feladatsorait használjuk. De lesznek olyan feladatok, amelyeket a mostani nyolcadikosok nem tanultak, vagy nem olyan mélyen tanultak. Ezeket a feladatokat kivehetjük a feladatsorból.

Aki a korábbi években felvételire készített elő diákokat, az tudja, hogy jól meghatározott típusfeladatok vannak ezekben a feladatsorokban. Beszélgethetnénk arról, hogy jó-e ez vagy sem. De most ne tegyünk ilyet. Megmondhatjuk, hogy milyen szokott lenni az első, a második, a harmadik feladat… Ezt érdemes átgondolni és tudatosítani magunkban. A diákoknak, a matematikából nem extrán tehetségeseknek különösen fontos, hogy ezeket az ötleteket begyakorolják, rutint és bátorságot szerezzenek a típusfeladatok megoldásában. Az utolsó három feladat már változatosabb, nehezebb. Ezek megoldása ad komolyabb pontszámot, ha a tanítványunk egy erős középiskolába felvételizik.

Az alábbiakban válogattam 10 feladatot az elmúlt 10 évből. Megfogalmaztam azt is, hogy a feladatsor adott sorszámú feladata sokszor milyen ismeretet kér számon. Persze ez nem szabály, amitől ne lehetne eltérni, de elindulásnak, kiindulópontnak használható. Mindegyik feladat más évből való, de akár egy feladatsorban is lehetnének…

1. Számolási műveletek, egész számok, törtszámok, műveleti tulajdonságok

2012. január 21. 1. feladat:

Határozd meg az a, b, c és d értékét, és írd a megfelelő helyre!

a) $a = -5{,}2 - (-3{,}4)$ $a =$

b) $b = 10{,}2 : (-3)$ $b =$

c) $c \cdot 0{,}6 = 6$ $c =$

A fenti eredmények ismeretében határozd meg a d értékét! Írd le a számolás menetét is!

d)–e) $d = 5a + 0{,}6c$ $d =$

Általában ehhez hasonlóak a feladatsorok első feladatai. Az is jellemző, hogy néhány részfeladat eredményéből egy további számolás során egy betűs kifejezés értékét kell kiszámítani, ahogy ez a feladat is mutatja.

2. Mértékegység-átváltások

2013. január 19. 2. feladat:

Tedd igazzá az alábbi egyenlőségeket a hiányzó adatok beírásával!

a) 16,5 hl + 32 l= ……………l

b) 2013 s = 30 min + …………… s

c)–d) 36,28 t = …………… kg = …………… kg − 40 kg

Sokszor szerepel a mennyiségek összeadása, kivonása. Gyakoroljunk hasonlókat.

A kerettanterv szerint ezek az elvárások a felső tagozaton:

– ismeri az idő, a tömeg, a hosszúság, a terület, a térfogat és az űrtartalom szabványmértékegységeit, használja azokat mérések és számítások esetén;

– idő, tömeg, hosszúság, terület, térfogat és űrtartalom mértékegységeket átvált helyi értékes gondolkodás alapján, gyakorlati célszerűség szerint.

3. Kombinatorika – adott tulajdonsággal rendelkező konstrukció előállítása

Fel kell sorolni vagy le kell rajzolni bizonyos feltételeknek eleget tevő eseteket.

2014. január 19. 3. feladat:

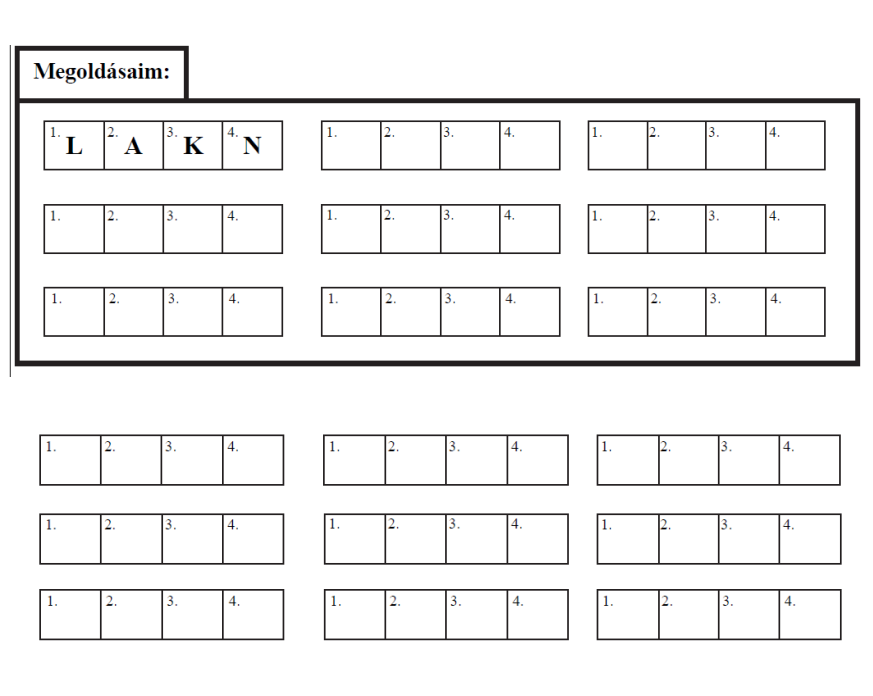
Luca (L), Krisztina (K), Angéla (A) és Nóra (N) 400 méteres futásban mérték össze az erejüket. A verseny után a következőket mondták el a barátjuknak, Rékának (aki nem látta a versenyt): Sem Luca, sem Angéla nem lett utolsó, sem Krisztina, sem Nóra nem lett első. Milyen sorrendben érkezhettek a célba, ha nem volt holtverseny?

Írd a táblázat mezőibe a versenyzők nevének kezdőbetűit a feltételnek megfelelő valamennyi lehetséges sorrend szerint! Egy lehetséges sorrendet előre beírtunk a megoldások táblázatába.

Megoldásaidat a vastag vonallal körülvett mező táblázataiba kell beleírnod, mivel csak ezeket értékeljük. A többi táblázatban próbálkozhatsz, de azokat NEM értékeljük!

Lehet, hogy a bekeretezett részben több táblázat van, mint ahány megoldás lehetséges.

Vigyázz! Ha a megoldásaid között hibásan kitöltött táblázat is szerepel, azért pontlevonás jár.



Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy legyen valamilyen stratégiánk az esetek összegyűjtésére. Így kisebb a veszélye annak, hogy valami kimarad vagy többször szerepel.

4. Táblázatból, grafikonról olvasd le! Töltsd ki a táblázatot! Készíts grafikont!

2015. január 17. 4. feladat:

Három különböző korosztályból összesen 400 embert kérdeztek meg, hogy a labdarúgás, vízilabda és kézilabda sportágak közül melyiket szeretik legjobban. Mindannyian válaszoltak.

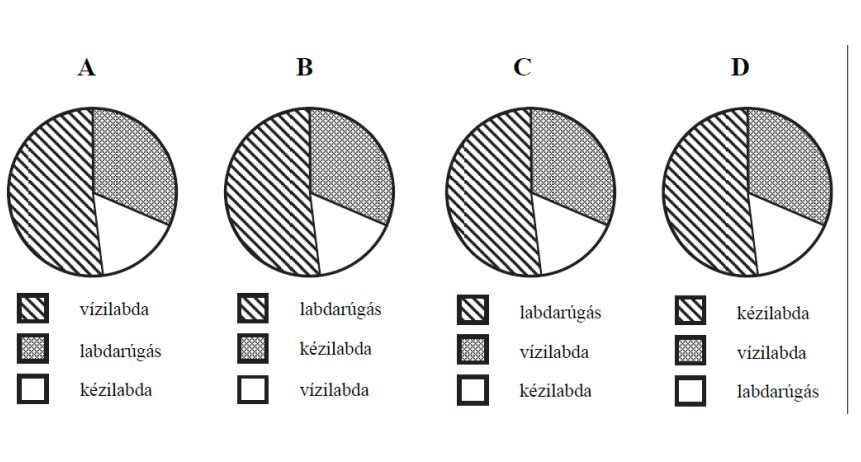
A felmérés néhány eredménye az alábbi táblázatban található.

	15 évesnél fiatalabbak	15–30 évesek	30 évesnél idősebbek	Összesen
Labdarúgás	62	28		160
Vízilabda	36	63	31	130
Kézilabda	22	37		

a) Töltsd ki a táblázat hiányzó mezőit!

b)–c) A 15 évesnél fiatalabb megkérdezettek hány százaléka válaszolta azt, hogy a vízilabdát szereti legjobban? Írd le a számolás menetét!

d) Karikázd be annak a kördiagramnak a betűjelét, amelyen a 15 évesnél fiatalabb megkérdezettek válaszainak az eloszlását ábrázoltuk!

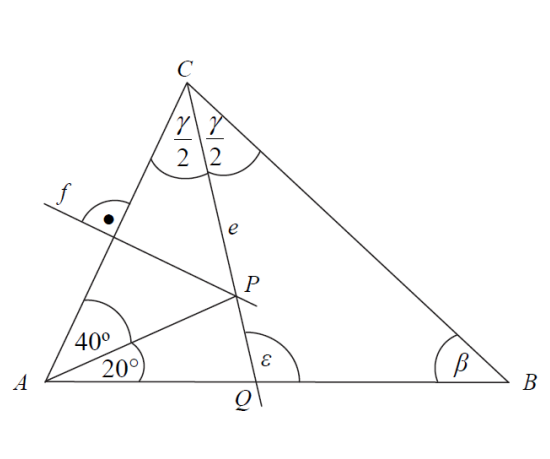


Most olyan feladatot választottam, ahol kördiagram szerepel. Gyakoriak a vonaldiagramok, oszlopdiagramok is. Érdemes azt megbeszélni, hogy milyen tengelyeket használunk, hogyan választunk egységeket, milyen feliratok szükségesek a tengelyekre.

5. Szögek kiszámítása: egyenlő szárú háromszögek, négyszögek tulajdonságai

2016. január 16. 5. feladat:

Az alábbi ábrán az e félegyenes az ABC háromszög C csúcsánál lévő belső szögszögfelezője, az f egyenes az AC oldal oldalfelező merőlegese. Az e és f metszéspontját P jelöli. Az e szögfelező félegyenes az AB oldalt a Q pontban metszi. Az ábrán néhány szög nagyságát megadtuk.



(Az ábra csak tájékoztató jellegű vázlat, nem pontos méretű.)

a) Mekkora a $\frac{\gamma}{2}$ szög nagysága?

b) Mekkora az ε szög nagysága?

c) Mekkora a β szög nagysága?

Az ilyen típusú feladatokban az alapgondolatok ezek lehetnek:

– A szakaszfelező merőleges pontjai egyenlő távol vannak a szakasz végpontjaitól

– Egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlőek.

– A háromszög egymás mellett lévő belső és külső szöge 180°-ra egészíti ki egymást.

– A magasságvonal merőleges az oldalra.

– A háromszög szögeinek összege 180°, a négyszög szögeinek összege 360°.

– Esetleg az ábra tengelyesen szimmetrikus.

6. Egyszerűbb szöveges feladat a feladatsor közepén

2020. január 18. 6. feladat:

Viola macskájának kedvenc cicakonzerve két webáruházból rendelhető.

Az ALFA webáruházban egy ilyen cicakonzerv ára 400 Ft, a kiszállítás egyszeri ára a megrendelt darabszámtól függetlenül 1200 Ft.

A BÉTA webáruházban egy ilyen cicakonzerv ára 425 Ft, de a megrendelt darabszámtól független kiszállítás egyszeri díja itt csak 850 Ft.

Hány cicakonzerv megrendelése esetén kerül Violának ugyanannyiba a vásárlás, függetlenül attól, hogy melyik webáruházból rendel?

Írd le a számolás menetét is!

Ezekben a feladatokban talán ez a kerettantervi elvárás fogalmazódik meg:

Egyszerű szöveges feladat matematikai tartalmának felismerése, és az annak megfelelő műveletsor felírása.

7. Válaszd ki az igaz állítást – Sokszor vegyes témakörökből 3-4 kérdésre vár választ a feladat.

2021. január 23. 7. feladat:

Írj X-et a táblázat megfelelő mezőibe!

		Nem teljesülhet	Lehetséges, de nem mindig teljesül	Biztosan teljesül
a)	Ha helyesen összeszorzunk két véletlenszerűen kiválasztott egész számot, akkor a szorzat nagyobb lesz a két szám összegénél.			
b)	Ha helyesen összeadunk négy véletlenszerűen kiválasztott különböző prímszámot, akkor az összeg páros szám lesz.			
c)	Ha helyesen kiszámítjuk egy tetszőleges konvex négyszög belső szögeinek összegét, akkor ez az összeg nagyobb lesz a külső szögei összegénél.			
d)	Ha helyesen összeadunk két véletlenszerűen kiválasztott egész számot, akkor az összeg racionális szám lesz.			

8. Koordináta-rendszer használata

2023. január 21. 8. feladat:

Az $ABCD$ téglalap csúcsai betűzésének sorrendje A, B, C és D.

Az $ABCD$ téglalap szimmetrikus az x tengelyre úgy, hogy az A csúcs tükörképe a B csúcs, a C csúcs tükörképe a D csúcs.

Az $ABCD$ téglalap A csúcsának koordinátái $(3;2)$.(3; 2).

Az $ABCD$ téglalap területe 20 területegység.

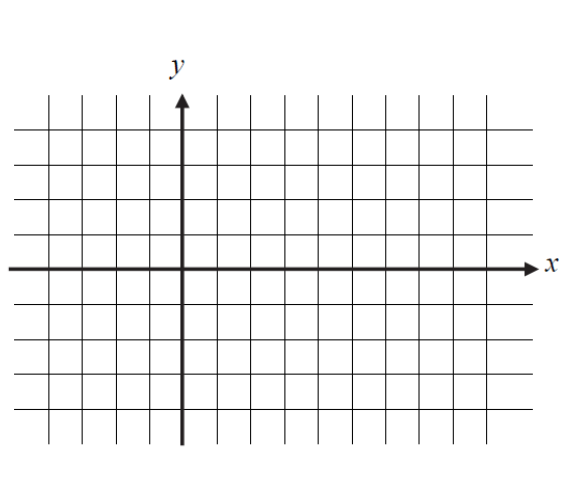
a) Melyek a B csúcs koordinátái? $B(\,.....\,;\,.....\,)$

b) Keresd meg mindkét ilyen tulajdonságú téglalapot, és rajzold be az alábbi koordinátarendszerekbe!

A rácsnégyzetek egységnyi oldalhosszúságúak.

Egy koordináta-rendszerbe egy téglalapot rajzolj!

Határozd meg az egyes téglalapok C és D csúcsának koordinátáit!



C(…….; …….) D(…….; …….)

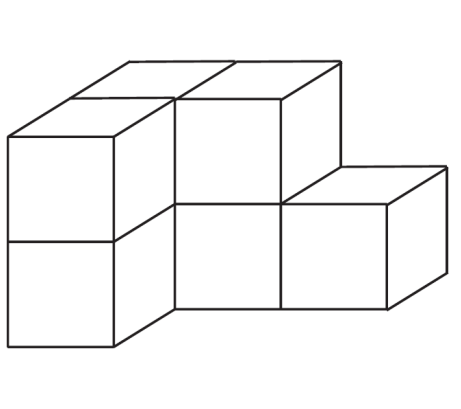
A diákok (persze nem a legokosabbak) gyakran cserélik fel az első és második koordinátát. A fontolva haladókkal ezt érdemes gyakorolni.

9. Térgeometria – Gyakran néhány kockából, téglatestből álló alakzat ábrája látható a feladatban. Erről kell megállapítani, hogy pl. hány kockából áll, Milyen méretűek a szakaszok, mennyi a felszín, a térfogat…

2017. január 21. 9. feladat:

Hét darab egybevágó kockából ragasztottuk össze az ábrán látható testet. Két szomszédos kocka egy-egy teljes lapjával van összeragasztva. Egy kocka térfogata 8cm3
.

(Az ábra csak tájékoztató jellegű vázlat, nem pontos méretű.)



a) Hány cm hosszú egy kocka éle?

b) Hány cm az ábrán látható test leghosszabb éle?

c) Hány cm2 az ábrán látható test felszíne?

Írd le a számolás menetét is!

Egy síkbeli ábra alapján nehéz elképzelni a térbeli viszonyokat. Amikor ilyen feladatokat gyakorlunk, rakjuk ki a valóságban is a testeket. Térbeli feladatokhoz, vagy csak egy kis játékhoz is használjunk építőkészleteket.

10. Nehezebb szöveges feladat

2022. január 22. 10. feladat:

A városi labdarúgóklub toborzót rendezett, amelyre előzetesen kellett jelentkezni. Az előzetesen jelentkezők $\frac{1}{15}$ része nem jelent meg a toborzón. A megjelentek $\frac{5}{7}$ része teljesítette a fizikai felmérés követelményeit, a többiektől elbúcsúztak az edzők.

A fizikai felmérést eredményesen teljesítőknek labdás gyakorlatokat kellett végezniük, amelyeket 40%-uk teljesített hibátlanul, őket leigazolta a klub.

A városi labdarúgóklubnak 28 új igazolt játékosa lett.

Hányan jelentkeztek előzetesen a toborzóra?

Írd le a számolás menetét is!

Az „utolsó szöveges feladatra” nem csak a tankönyvi feladatok megoldásával készülhetünk. Válogassunk a versenyfeladatokból, az ABACUS újság feladataiból is.

Felsorolok néhány további témakört, amely az elmúlt 5 év feladatsoraiban szerepelt:

– adott mennyiség tört része, százalékszámítás;

– arányok, arányos osztás;

– számok kerekítése;

– oszthatóság, osztók száma;

– betűs kifejezés helyettesítési értéke.

Természetesen a felvételi anyaga nem ennyire leszűkített típusfeladatokban mutatható be. Minden bizonnyal az iskolákban a 8 év alatt ennél tágabb témakörökkel foglalkoztak, a diákok matematikai gondolkodása sokféle módon fejlődött. Sokan még meg is szerethették a matematikát. A célegyenesben se csak felvételi feladtasorokat oldjunk meg – „minél többet” jelszóval. Válogassunk érdekes, gondolkodtató feladatokat is más feladatanyagból, gyűjteményből. Ezen nem feltétlenül nehezeket értek. A sikerélménnyel a diákjaink bátorságát, önbizalmát is növelhetjük.

Az új NAT-tal kapcsolatban végezetül két témakört emelek ki, amire érdemes figyelnünk mind a tanítás során, mind a felvételire készülve:

– A korábbi években a függvények tanítása is szerepelt az általános iskola felső tagozatában: elsőfokú, másodfokú, abszolútérték. egészrész … stb. Egyszerű függvénytranszformációk is előfordultak.

Most a függvények teljesen kimaradnak. Az ehhez kapcsolható fogalmak viszont nem egészen, „megfeleltetés” címmel szerepelnek „A függvény fogalmának előkészítése” témakörben. A kerettanterv így fogalmaz: Konkrét megfeleltetések legalább egy lehetséges szabályának megadása. Nincs elsőfokú függvény, de van egyenes arányosság és annak grafikonja. Vannak fordítottan arányos mennyiségek. És táblázatokba összetartozó értékeket írunk be, grafikonokat rajzolunk és elemzünk.

– A betűs kifejezések használatával a gyerekek egyszerű formában már a 6. évfolyamon találkoztak. Az új NAT szerint ez a 7. évfolyamra került. Ebből következik, hogy az egyenletek felírásában, megoldásában is kisebb rutinra tehettek szert a diákok. Felvételi előtt, a nehezebb szöveges feladatokat gyakorolva erre is gondoljunk.

Végezetül a felkészítő tanároknak, szülőknek és nem utolsó sorban a diákoknak is kitartást és derűt is kívánok a januári írásbelire való készüléshez.

Horváth Eszter, a Tanóra–szakkör rovat szerkesztője

Irodalomjegyzék

1. https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek

2. https://www.oktatas.hu/kozneveles/kozepfoku_felveteli_eljaras/tajekoztato_matek_magyar

3. https://www.oktatas.hu/kozneveles/kozepfoku_felveteli_eljaras/kozponti_feladatsorok/temakorok_matek_9

4. https://www.facebook.com/groups/355332874634288/permalink/2546344378866449

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült

Adatkezelés Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Csapodi Csaba 2023. DECEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – IV. rész

A cikksorozat harmadik részében közölt feladatok megoldása itt található. A negyedik részben a geometria témakörének változásait mutatjuk be. Először az érettségi követelmények változását ismertetjük táblázatos formában. A táblázatban (piros színnel) jelezzük az újonnan megjelenő követelményeket és a törölt ismereteket is. (Ha egy követelmény átkerült középszintről emelt szintre, akkor azt csak a középszinten jelöltük kihúzással és emelt szinten nem pirosítottuk ki, hiszen eddig is része volt az emelt szintű követelményeknek.) A táblázat után a legfontosabb változásokat röviden megmagyarázzuk, értelmezzük, indokoljuk. Ezután néhány, újdonságnak számító ismeret esetén mutatunk olyan feladatokat, amelyeket a követelmények alapján el tudnánk képzelni egy feladatsorban. Hangsúlyozzuk, hogy ezek személyes elképzelések, az érettségi feladatokat összeállító bizottság nyilvánvalóan saját ötletei és szakmai meggyőződése szerint fog dolgozni.

4. Geometria

TÉMÁK	VIZSGASZINTEK	
	Középszint	**Emelt szint**
4.1 Elemi geometria	Ismerje és használja megfelelően az alapfogalom, axióma, definiált fogalom, bizonyított tétel fogalmát.	
4.1.1 Térelemek	Ismerje a térelemeket és a szög fogalmát. Ismerje a szögek nagyság szerinti osztályozását és a nevezetes szögpárokat. Tudja a térelemek távolságára és szögére (pont és egyenes, pont és sík, párhuzamos egyenesek, párhuzamos síkok távolsága; két egyenes, egyenes és sík, két sík hajlásszöge) vonatkozó meghatározásokat.	Tudja kitérő egyenesek távolságát és hajlásszögét meghatározni.
4.1.2 A távolságfogalom segítségével definiált ponthalmazok	Ismerje a kör, gömb, szakaszfelező merőleges, szögfelező fogalmát. Használja a fogalmakat feladatmegoldásokban.	Ismerje a parabola fogalmát.
4.2 Geometriai transzformációk		Ismerje a geometriai transzformációk és a függvények kapcsolatát.
4.2.1 Egybevágósági transzformációk	Ismerje a síkbeli egybevágósági transzformációk (eltolás, tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, pont körüli forgatás) leírását, tulajdonságaikat, és alkalmazza ezeket feladatokban. Tudjon végrehajtani transzformációkat konkrét esetekben. Ismerje és tudja alkalmazni feladatokban a háromszögek egybevágósági alapeseteit. Ismerje fel és használja feladatokban a különböző alakzatok szimmetriáit.	Tudja pontosan megfogalmazni az egybevágósági transzformációk definícióit, a síkidomok egybevágóságának fogalmát, valamint a sokszögek egybevágóságának feltételét. Ismerjen példákat a térbeli egybevágósági transzformációkra.
4.2.2 Hasonlósági transzformációk	Ismerje a középpontos hasonlósági transzformáció leírását, tulajdonságait. Alkalmazza a középpontos nagyítást, kicsinyítést egyszerű, gyakorlati feladatokban. Tudjon szakaszt adott arányban felosztani. Ismerje és tudja alkalmazni feladatokban a háromszögek hasonlósági alapeseteit. Ismerje fel a hasonló alakzatokat, tudja felírni a hasonlóság arányát. Ismerje és alkalmazza feladatokban a hasonló síkidomok területének arányáról és a hasonló testek felszínének és térfogatának arányáról szóló tételeket.	Ismerje a középpontos hasonlósági transzformáció és a hasonlósági transzformáció definícióját. Ismerje és alkalmazza a párhuzamos szelők tételét, a tétel megfordítását és a párhuzamos szelőszakaszok tételét. Bizonyítsa és alkalmazza a belső szögfelező tételt.
4.2.3 Egyéb transzformációk		
Merőleges vetítés		Ismerje és alkalmazza feladatokban a merőleges vetítést.
4.3 Síkbeli és térbeli alakzatok	Ismerje a síkidomok, testek csoportosítását különböző szempontok szerint.	
4.3.1 Síkbeli alakzatok		
Háromszögek	Tudja csoportosítani a háromszögeket oldalak és szögek szerint. Ismerje és alkalmazza az alapvető összefüggéseket háromszögek oldalai, szögei, oldalai és szögei között (háromszög-egyenlőtlenség, belső, illetve külső szögek összege, nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van). Ismerje és alkalmazza speciális háromszögek tulajdonságait.	
	Ismerje és alkalmazza a háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó definíciókat, tételeket (oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, magasságpont, súlyvonal, súlypont, középvonal, körülírt, illetve beírt kör). **Bizonyítsa az oldalfelező merőlegesek és a belső szögfelezők metszéspontjára vonatkozó tételt.**	Bizonyítsa a háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó tételeket.
	Ismerje és alkalmazza a Pitagorasz-tételt és megfordítását. **Bizonyítsa a Pitagorasz-tételt.** ~~Ismerje és alkalmazza a magasság- és a befogótételt.~~	Bizonyítsa a Pitagorasz-tétel megfordítását. Ismerje, bizonyítsa és alkalmazza a magasság- és a befogótételt.
Négyszögek	Ismerje a speciális négyszögek fajtáit (trapéz, paralelogramma, deltoid, rombusz, téglalap, négyzet) és tulajdonságaikat, ismereteit alkalmazza egyszerű feladatokban. Ismerje a konvex négyszög belső és külső szögeinek összegére vonatkozó tételeket, alkalmazza ezeket egyszerű feladatokban.	Bizonyítsa a húrnégyszögek és az érintőnégyszögek tételét, ismerje a tételek megfordítását. Ismereteit alkalmazza feladatok megoldásában.
Sokszögek	Ismerje, **bizonyítsa** és alkalmazza konvex sokszögeknél az átlók számára, a belső és külső szögösszegre vonatkozó tételeket. Ismerje a szabályos sokszögek definícióját.	
Kör	Ismerje a kör részeit, ismereteit alkalmazza egyszerű feladatokban. Tudja és használja, hogy a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, és hogy külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak. Tudjon szöget mérni fokban ~~és radiánban~~. Tudja és alkalmazza feladatokban, hogy a középponti szög arányos a körívvel és a hozzá tartozó körcikk területével.	Bizonyítsa, hogy a kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, valamint hogy a külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak. Tudjon szöget mérni radiánban. Bizonyítsa és alkalmazza feladatokban a kerületi és középponti szögek tételét és a kerületi szögek tételét. Ismerje és használja a látókör fogalmát.
	Ismerje és alkalmazza feladatokban a Thalész-tételt és megfordítását. **Bizonyítsa a Thalész-tételt.**	Bizonyítsa a Thalész-tétel megfordítását. ~~Ismerje és alkalmazza a körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tételét.~~
4.3.2 Térbeli alakzatok	Ismerje a következő testeket és azok részeit, alkotóelemeit: hasáb, henger, gúla, kúp, gömb, csonkagúla, csonkakúp. Ismereteit alkalmazza egyszerű feladatokban.	
4.4 Vektorok síkban és térben	Ismerje és alkalmazza feladatokban a következő definíciókat, tételeket: - vektor fogalma, abszolútértéke, - nullvektor, ellentett vektor, - vektorok összege, különbsége, vektor skalárszorosa, ~~- vektorműveletekre vonatkozó műveleti azonosságok,~~ ~~- vektor felbontása összetevőkre.~~ ~~Ismerje a skaláris szorzat definícióját, tulajdonságait.~~	Ismerje és alkalmazza a vektorműveletekre vonatkozó műveleti azonosságokat. Ismerje és alkalmazza a skaláris szorzat definícióját, tulajdonságait.
	Ismerje és alkalmazza feladatokban a következő definíciókat, tételeket: - vektor koordinátái, ~~- a vektor 90°-os elforgatottjának koordinátái,~~ - vektorok összegének, különbségének, skalárral való szorzatának koordinátái. ~~- skalárszorzat kiszámítása vektorok koordinátáiból.~~	Tudja koordinátáikkal adott vektorok hajlásszögét meghatározni. Ismerje az egyértelmű vektorfelbontás tételét. Ismerje és alkalmazza feladatokban a vektor 90°-os elforgatottjának koordinátáit, valamint a skalárszorzat kiszámítását vektorok koordinátáiból. Ismerje és bizonyítsa a skalárszorzat koordinátákból való kiszámítására vonatkozó tételt.
4.5 Trigonometria	Tudja hegyesszögek szögfüggvényeit derékszögű háromszög oldalarányaival definiálni, ismereteit alkalmazza feladatokban. **Tudja származtatni tompaszögek szögfüggvényeit a kiegészítő szögek szögfüggvényeiből**. ~~Tudja a szögfüggvények általános definícióját.~~ Tudja és alkalmazza a szögfüggvényekre vonatkozó alapvető összefüggéseket: pótszögek, kiegészítő szögek, ~~negatív szög szögfüggvénye,~~ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. .	Ismerje a szögfüggvények általános definícióját, és alkalmazza forgásszögekre a középszinten szereplő összefüggéseket.
	Ismerje és alkalmazza a nevezetes szögek (30°, 45°, 60°) szögfüggvényeit. **Szögfüggvény értékének ismeretében tudja a szöget meghatározni számológép segítségével.** Ismerje és alkalmazza feladatokban a szinusz- és a koszinusztételt. **Bizonyítsa a szinusztételt.**	Függvénytáblázat segítségével tudja alkalmazni egyszerű feladatokban az addíciós összefüggéseket (sin(α + β), cos(α + β), tg(α + β), sin 2α, cos 2α, tg 2α). Bizonyítsa a koszinusztételt.
4.6 Koordinátageometria	Tudja kiszámítani $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátáit, abszolútértékét.	
4.6.1 Pontok, vektorok	Tudja kiszámítani két pont távolságát. Tudja kiszámítani szakasz felezőpontjának koordinátáit, ~~és harmadoló pontjainak koordinátáit,~~ alkalmazza ezt feladatokban. ~~Tudja felírni a háromszög súlypontjának koordinátáit, alkalmazza ezt feladatokban.~~	Igazolja a szakasz felezőpontja és harmadoló pontjai koordinátáinak kiszámítására vonatkozó összefüggéseket. ~~Tudja kiszámítani szakasz $n:m$ arányú osztópontjának koordinátáit.~~ Igazolja és alkalmazza a háromszög súlypontjának koordinátáira vonatkozó összefüggést.
4.6.2 Egyenes	Tudja felírni ~~különböző adatokkal meghatározott~~ egyenesek egyenletét ***y* = *mx* + *b* illetve *x* = *c* alakban.** Tudja kiszámítani egyenesek metszéspontjának koordinátáit. Ismerje **meredekséggel megadott** egyenesek párhuzamosságának és merőlegességének koordinátageometriai feltételeit. Tudjon megoldani egyszerű geometriai feladatokat koordinátageometriai eszközökkel.	Tudja többféle alakban felírni és levezetni az egyenes egyenletét a síkban különböző kiindulási adatokból. Ismerje egyenesek párhuzamosságának és merőlegességének koordinátageometriai feltételeit. Tudja síkbeli egyenesek hajlásszögét meghatározni.
4.6.3 Kör	Tudja felírni adott középpontú és sugarú kör egyenletét. ~~Tudja meghatározni kétismeretlenes másodfokú egyenletből a kör középpontját és sugarát.~~ ~~Tudja meghatározni kör és egyenes metszéspontját.~~ ~~Tudja felírni a kör adott pontjában húzott érintő egyenletét.~~	Tudja levezetni a kör egyenletét. Ismerje a kör és a kétismeretlenes másodfokú egyenlet kapcsolatát. Tudja meghatározni kétismeretlenes másodfokú egyenletből a kör középpontját és sugarát. Tudja meghatározni kör és egyenes metszéspontját. Tudja felírni a kör adott pontjában húzott érintő egyenletét. Tudja meghatározni két kör kölcsönös helyzetét, metszéspontjait. ~~Tudja felírni külső pontból húzott érintő egyenletét.~~
4.6.4 Parabola		Tudja levezetni a parabola $x^2 = 2py$ alakú egyenletét. Tudjon feladatokat megoldani **az *y* tengellyel** ~~koordinátatengelyekkel~~ párhuzamos tengelyű parabolákkal.
4.7 Kerület, terület	Ismerje a kerület és a terület szemléletes fogalmát. Tudja kiszámítani a háromszög területét különböző adatokból: $t=\frac{a\cdot m}{2}=\frac{ab\cdot\sin\gamma}{2}$.	Bizonyítsa a háromszög területének kiszámítására használt képleteket, továbbá ismerje és alkalmazza az alábbi összefüggéseket: $t = sr$ (bizonyítással), $t=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.
	Tudja kiszámítani nevezetes négyszögek, szabályos sokszögek, továbbá kör, körcikk, körszelet, **körgyűrű** kerületét és területét.	Bizonyítsa nevezetes négyszögek és szabályos sokszögek területképleteit.
4.8 Felszín, térfogat	Ismerje a felszín és a térfogat szemléletes fogalmát. Tudja kiszámítani hasáb, gúla, forgáshenger, forgáskúp, gömb, csonkagúla és csonkakúp felszínét és térfogatát egyszerű esetekben.	Bizonyítsa a csonkagúla és a csonkakúp térfogatképletét.

Mint látható, sok változás történt ebben a témakörben, de a változások nagy része – mindkét szinten – abból áll, hogy a korábban a követelmények részét képző ismeret kikerült a RÉV-ből.

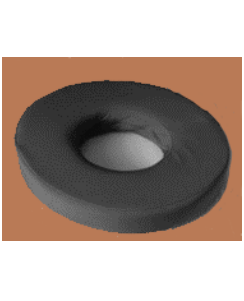
Középszintről kikerült (de továbbra is az emelt szintű követelmények részét képezi) a magasság- és befogótétel ismerete, az ívmérték, a skaláris szorzat fogalma, a valós számok halmazán értelmezett trigonometria. Jelentős változás, hogy ezentúl az egyenesnek csak a meredekséggel felírható alakját kell tudni alkalmazni, nem kell ismerni a normál- és irányvektor fogalmát. Sokat egyszerűsödtek a körre vonatkozó koordinátageometriai ismeretek is (nyilvánvalóan azzal összefüggésben, hogy nem kell tudnia a vizsgázóknak másodfokú egyenletrendszert megoldani). Középszinten bekerült több tétel bizonyításának ismerete a követelmények közé. (Itt emlékeztetünk arra, amit az I. részben már leírtunk: ez nem jelenti azt, hogy a középszintű matematika írásbeli vizsgán a diákoknak valamely, a követelményekben szereplő tétel bizonyítását kellene leírniuk. Ha valahol ezek a bizonyítások megjelenhetnek, az a szóbeli vizsga, erre a 2024-től érvényes vizsgaleírás is utal.)

Emelt szintről is kikerült néhány ismeret követelménye.

Miután ezt a témakört inkább a követelmények csökkenése jellemzi, így kevés igazi újdonságot jelentő mintafeladatot tudunk mutatni. A korábbi évek feladatsorainak azok a feladatai, amelyek megfelelnek a követelményeknek, továbbra is jól használhatók az érettségi vizsgára történő felkészítés során.

1. Egy egyenlőszárú háromszög egyik szögéről tudjuk, hogy szinusza $\frac{1}{2}$, koszinusza pedig $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Mekkorák a háromszög szögei?
2. Flóra szerint, ha két háromszögről tudjuk, hogy szögeik megegyeznek, és van egy-egy egyenlő hosszúságú oldaluk, akkor a két háromszög egybevágó. Igaza van-e Flórának? Válaszát indokolja!
3. Egy háromszögről tudjuk, hogy két magassága egyenlő hosszú. Bizonyítsa be, hogy a háromszög egyenlőszárú!
4. Egy paralelogramma egyik átlója szögfelező egyben. Mutassa meg, hogy ez a paralelogramma egy rombusz!
5. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik az *A* (–1; 5) és *B* (8; –13) pontokra!

Végül a 18. feladat a 2023. őszi középszintű feladatsorból megmutatja, hogy a körgyűrű területének kiszámítása tulajdonképpen eddig is részét képezte a követelményeknek.



6. Egy párnákat gyártó cég a képen látható ülőpárnát szivacsból készíti, majd szövettel befedi. A szivacsból először egy 42 cm átmérőjű, 7 cm magasságú körhengert vágnak ki. Ezután a henger közepéből kivágnak egy 18 cm átmérőjű kisebb körhengert. (A két henger alapkörének középpontja egybeesik.)
   a) Számítsa ki a párna szivacsos részének térfogatát!
   b) Mennyi szövetre van szükség 30 párna befedéséhez? Válaszát négyzetméterben, egészre kerekítve adja meg! (A veszteségektől itt eltekintünk.)

Csapodi Csaba

ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ,

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet Módszertani Osztály

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

Adatkezelés Elfogadom.

A **KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ** ROVATBAN ELSŐSORBAN OLYAN KÖNYVEKRŐL SZERETNÉNK TUDÓSÍTANI ÉS OLYAN ELEKTRONIKUSAN ELÉRHETŐ ÍRÁSOKAT AJÁNLUNK, AMELYEK A MATEMATIKA BÁRMELY RÉSZE VAGY KAPCSOLATAI IRÁNT ÉRDEKLŐDŐK SZÁMÁRA KÍVÁNATOSAK LEHETNEK. (ROVATSZERKESZTŐ: *TÓTH JÁNOS.)*

Etesi Gábor
2023. DECEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

No Time to be Brief: Hraskó Péter Relativitáselmélet c. tankönyvéről

Mindig nagy öröm olyan relativitáselméleti bevezető könyvet kézbe venni, amely a szerző érett oktatási tapasztalatain alapulva didaktikai nehézségeket kerül el, és ezáltal olvasása szinte bizonyosan fiatal fizikusokat fog elindítani ebbe az irányba. Azonban nemcsak Hraskó Péter Relativitáselmélet c. tankönyvéről szól *Etesi Gábor* recenziója: kitér az általános relativitáselmélet meglapozására több mint egy évszázaddal ezelőtt, és az azt követő fizikatörténeti fejleményeken át egészen az utóbbi évtized felgyorsult kutatásainak eredményeire. Tovább...

Sándor Csaba
2023. DECEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Válogatás Erdős Pál kedvenc feladataiból

Róka Sándor Erdős Pál híres és középiskolai tudással is megérthető feladataiból válogatott legújabb könyvében. Miért különleges ez a válogatás? A válasz: a feladatok egyedisége, szépsége, eleganciája, ami a megjelenésük idején sokszor szokatlan volt, de most is jól felismerhetővé teszi őket. Kiknek ajánlja a könyvet *Sándor Csaba*, aki a kombinatorikus számelmélet kutatójaként is talált benne általa nem ismert számelméleti Erdős-feladatot? Haszonnal forgathatják a matematikai versenyekre készülő diákok és mindazok, akik örömüket lelik érdekes feladatokon való gondolkodáson. Tovább...

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

2023. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

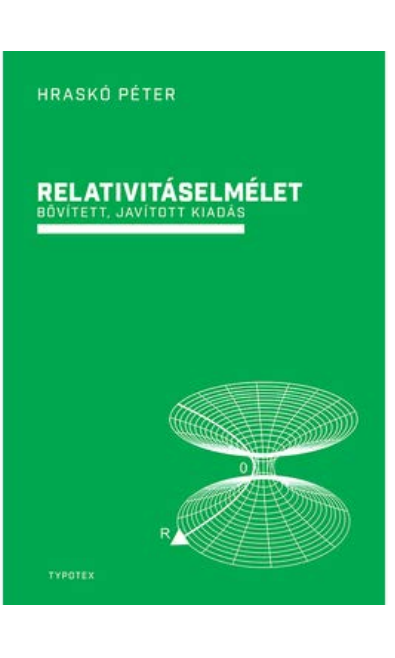
Etesi Gábor

No Time to be Brief: Hraskó Péter Relativitáselmélet c. tankönyvéről

Az általános relativitáselmélet alapjait Einstein 1915-re fektette le tíz évnyi nagyrészt magányos kutatás eredményeképpen. Az akkori próbálkozások fősodrából való kilépés a végeredményre is rányomta a bélyegét: más versengő, az elektrodinamikából kiinduló vektor- (elsősorban Lorentz, Poincaré), illetve a klasszikus gravitációelmélet potenciálos megfogalmazását követő skalárelméletekkel (elsősorban Abraham, Mie, Nordström) ellentétben az általános relativitáselméletben a dinamikai változó egy tenzormező és magukat a gravitációs jelenségeket e tenzormező által meghatározott téridő-geometria görbülete írja le. Az elmélet meghökkentő szerkezete ellenére gyors kezdeti sikereket ért el: a Schwarzschild-megoldás 1916-os felfedezésével a Merkúr perihélium-elfordulásának magyarázata, illetve az 1919-es Napfogyatkozás során az elmélet által megjósolt fényelhajlás igazolása Einstein forradalmi elgondolásainak szó szerint is fényes igazolásait adták. Az 1920-as évek során az Einstein-egyenlet kozmológiai megoldását is megtalálták, és ez a belátható Univerzum tágulását jelezte előre: Einsteint ez aggodalommal töltötte el elmélete helyességét illetően, viszont a tágulást Hubble csillagászati megfigyelései 1929-től tényleg elkezdték alátámasztani.

Ezt követően a kibontakozás lelassult. A közismert történelmi eseményeken túl nagyrészt azért, mert az elmélet magvát adó Einstein-egyenlet egy rendkívül bonyolult globális másodrendű nemlineáris parciális differenciálegyenlet, amelynek kezeléséhez a matematikai technikák igazából máig is hiányoznak; emiatt a fizikailag is releváns megoldások halmaza nehezen bővült (habár magának az egyenletnek egyre több ad hoc egzakt megoldása vált ismertté). Az 1960–70-es évek hoztak újabb lendületet, ami a Kerr-megoldás 1965-ös megtalálásán túl az elmélet még részben hiányzó koncepcionális fizikai illetve matematikai alapjainak szisztematikus kidolgozását is eredményezte (Geroch, Hawking, Leray, Lichnerowicz, Penrose és sokan mások). Ennek az elméleti tisztázódásnak a során az is nyilvánvalóvá vált, hogy az einsteini elmélet fizikai szerkezete a fizikatörténetben ismert korábbi elméletekkel ellentétben mélyebben összefonódott a megfogalmazásához felhasznált modern absztrakt differenciálgeometria matematikai szerkezetével (egy gyors példa: mi egy differenciálható sokaság automorfizmusainak vagyis diffeomorfizmusainak fizikai jelentése?). Mindenesetre csupán ekkortól kezdve, vagyis csak mintegy fél évszázada, jóval Einstein halála utántól beszélhetünk az általános relativitáselméletről úgy, mint egy fizikailag és matematikailag is jól megalapozott, a fizikus és matematikus társadalom széles köreiben is elfogadott *teóriáról*.

De továbbra is, nem állt rendelkezésre elegendő kísérleti megfigyelési adat az elmélet robusztus fizikai jóslatainak ellenőrzésére. Ezek a kísérleti alátámasztások egészen az elmúlt évtizedig várattak magukra: végül is aztán a gravitációs hullámok 2016-os észlelésével, majd az első közvetlen feketelyuk-portré 2019-es elkészültével azt lehet mondani,[1] hogy száztíz évnyi kemény, összehangolt elméleti és kísérleti fizikusi valamint matematikusi erőfeszítés eredményeképpen az általános relativitáselmélet bevonulhatott a fizika elméletek pantheonjába.



Azért kezdtük Hraskó Péter Relativitáselmélet című egyetemi tankönyvének (Typotex, Budapest, 2016) recenzióját e rövid történeti bevezetővel, hogy nyilvánvalóvá váljék: a gravitációelmélet történetében a nem is olyan rég volt 2010-es évek meghatározó jelentőségűek; ez a történeti észrevétel komoly vonzerővel hathat és már önmagában is indokolja egy ebbe a forrongó, ám igencsak nehéz témakörbe bevezető tankönyv ez idő tájra eső megjelentetését. A könyvet fellapozva azonnal kiderül, hogy a szerző több évtizednyi előadási tapasztalatához és remek előadói képességeihez illően a könyv világos szerkezetű, mondatai szabatosak, s így a könyv nagyon jól olvasható. A könyv kilenc fejezetből áll: először a speciális relativitást tárgyalja (1. Speciális relativitáselmélet (téridő-geometria), 2. Speciális relativitáselmélet (dinamika)); ezt követi a gravitáció einsteini felfogását segítő intuitív bevezetés (3. A gravitáció mint geometria); az elkerülhetetlenül szükséges szigorúan minimális matematikai eszköztár fölvonultatása (4. A Riemann-geometria alapjai); az elmélet elsődleges szerkezetének áttekintése (5. A pszeudoriemann-téridő és az ekvivalencia-elv); majd az elmélet magva (6. Az Einstein-egyenlet); végül következnek a legfontosabb alkalmazások (7. A magányos csillag térideje, 8. A gravitációs sugárzás, 9. A kozmológia alapjai). A megértést tovább segítik az egyes fejezetekben található feladatok (gyakran részletes megoldásaikkal együtt). E sorok írója különösen megvilágítónak találta a 3. fejezetet, amelyben a szerző eredményesen küzdött meg a motiváció és intuitív alapozás igen nehéz feladatával. Fontos továbbá a 6.3 alfejezet, amely az általános relativitáselmélet egyik legbonyolultabb problematikájába: a gravitációs energia kérdéskörébe enged bepillantást. (A gravitációs energia kvázilokális természetének fizikai, leírásának matematikai tisztázása máig is aktívan nyitott elméleti kutatási terület, egyelőre igazán megnyugtató válaszok nélkül.) A gravitációs hullámokat és a kozmológiát tárgyaló 8–9. fejezetek fontosságát pedig az adja, hogy a 2010-es évekkel elkezdődött a „gravitációs csillagászat” tudománytörténeti jelentőségű új korszaka.

Zárásképpen következzék egy kritikai észrevétel, amely nélkül egyetlen recenzió sem lehet igazán meggyőző. A könyv mottója így szól: „Jegyezze meg fiatal barátom, hogy a fizikában nem a matematika nehéz, hanem a fizika.” A mondás I. M. Frank szovjet fizikustól származik, aki 1958-ban kapott fizikai Nobel-díjat a Cserenkov-sugárzás elméleti magyarázatáért. A fizikai Nobel-díj említése kapcsán a gravitációelmélet szempontjából nem feledkezhetünk el arról, hogy a brit R. Penrose szintén elnyerte a fizikai Nobel-díjat 2020-ban az általános relativitáselmélet fekete lyukakkal kapcsolatos bizonyos jóslatainak matematikai megfogalmazásáért (e jóslatokat részben kísérletileg is ellenőrizték a 2019-es feketelyuk-megfigyelésben). (Természetesen ezt a 2016-ban megjelent könyv még nem tartalmazhatta. *A szerk. megj.*) Penrose matematikus körökben is jól ismert (pl. a Penrose-csempézések kapcsán) olyannyira, hogy jelen pillanatban nehéz lenne megmondani, matematikai vagy fizikai munkássága lesz jelentősebb az utókor számára. Fentebb csupán megemlítettük, hogy az elmélet 1960–70-es évekbeli szisztematikus megalapozása során az derült ki, hogy az elmélet mélyszerkezete inherensen összekapcsolódik bizonyos nehéz differenciálgeometriai problémákkal is. Ezt úgy is átfogalmazhatnánk, hogy immár bő fél évszázada kifinomult differenciálgeometriai ismeretek nélkül az általános relativitáselmélet jelenleg átlátott mélységében már nem igazán művelhető. E fejlődéstörténet visszatükröződését fedezhetjük fel a témával kapcsolatos bevezető könyvek stílusának megváltozásában is, amelyben az ugrást a Hawking–Ellis könyv 1973-as megjelenése jelentette. A Frank-idézet arra vonatkozó törekvéseket fogalmaz meg tömör alakban, hogy „de az általános relativitást tanítsuk továbbra is fizikus módon”. Ezt a szerző a Bevezetésben (l. 10. oldal) azzal indokolja, hogy például a modern absztrakt differenciálgeometria eszköztára lehetővé teszi nem triviális topológiájú sokaságok vizsgálatát is, amelyekre viszont (első ismerkedésben) nincs szükség. Viszont ugyanakkor már az Einstein-egyenlet legelső, legegyszerűbb megoldásai is nem triviális topológiájú sokaságokon adódnak (például a könyvben is tárgyalt nem-kiterjesztett Schwarzschild-, illetve Kerr-megoldások alaptere $S^2 \times \mathbb{R}^2$, és e terekben a fekete lyuk megléte éppen ezzel a ténnyel kapcsolatos abban a formában, hogy a fekete lyuk pillanatnyi eseményhorizontja reprezentálja a $H_2(S^2 \times \mathbb{R}^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ homológiacsoport egy generátorát stb.). Sőt az 1980-as évekkel kezdődően matematikusok derítettek fényt arra, hogy már a lehető legegyszerűbb szerkezetű négydimenziós tér, az $\mathbb{R}^4$ is kontinuum sok különböző differenciálható struktúrával látható el (úgynevezett egzotikus vagy hamis $\mathbb{R}^4$-ek)[2] és e terek között lokálisan semmilyen módon nem tehető különbség; viszont az Einstein-egyenlet globális megoldásai érzékenyek e struktúra megváltoztatására. Például a mai kutatások egyik központi kérdése: a (szintén Penrose által felvetett) úgynevezett Erős Kozmikus Cenzor Hipotézis érvényessége vagy érvénytelensége szempontjából. Kissé hatásvadászan fogalmazva azt mondhatnánk, hogy az 1980-as évek óta egyre bővülő matematikai ismereteink fényében már a legegyszerűbb szituációról – az általunk tapasztalt lapos téridőről – sem tudjuk megmondani, hogy az a Minkowski-féle téridő-e vagy pedig az Einstein-egyenlet egy még ismeretlen megoldása ismeretlen további tulajdonságokkal. Hogy ez a nyugtalanító lehetőség fizikailag is releváns-e, egyebek közt további differenciáltopológiai vizsgálatokat igényel.

Úgy érezzük, hogy a fizikai és a matematikai gondolkodás éles, de csakis történetileg, tehát tudományfilozófiailag szólva csakis módszertani konvencionalizmussal indokolható különválasztása egy sajátosan magyar jelenség: a hazai fizikus és matematikus közösség évtizedek óta fennálló hermetikus elkülönültségének következménye, mely fizikus oldalról talán Jánossy Lajos, Marx György, matematikus oldalról pedig Erdős Pál öröksége.

Hraskó Péter

Összefoglalva: mindig nagy öröm olyan relativitáselméleti bevezető könyvet kézbe venni, amely a szerző érett oktatási tapasztalatain alapulva didaktikai nehézségeket kerül el, és ezáltal olvasása szinte bizonyosan fiatal fizikusokat fog elindítani ebbe az irányba. Ugyanakkor annak ellenére, hogy az általános relativitáselmélet oktatása sok helyen (így idehaza is) nem szerepel az egyetemi törzsanyagban, annak már a legegyszerűbb bemutatásban is megjelenő koncepcionális és technikai kifejtése időigényessége miatt, az a meggyőződésünk, hogy igazából már az első találkozás során sem érdemes elkerülni az elmélet mögötti (el kell ismerni: nehéz) differenciálgeometriai és topológiai, parciális differenciálegyenletekkel kapcsolatos „sötét hátteret” mert előbb-utóbb úgyis szükség lesz rá. Ahogy W. Pauli (szintén Nobel-díjas fizikus) fogalmaz egyik angol nyelvű levelében: *No Time to be Brief.*

Etesi Gábor egy. docens
BME Algebra és Geometria Tanszék

Lábjegyzetek

[1] Előbb itt azért meg kell még említeni a gravitációs vöröseltolódás laboratóriumi megfigyelését; egymás körül keringő pulzárok keringési idejének einsteini elmélet szerinti módosulásának évtizedeken át tartó igazolását; illetve mesterséges holdakon éveken keresztül folyamatos szabadesésben lévő különféle anyagú testek megfigyelésével az ekvivalencia-elv ultrapontos igazolásait is.
[2] Ebben a kontextusban elgondolkodtató, hogy ez a matematikai jelenség az $\mathbb{R}^n$-ek között csak akkor lép fel, ha $n = 4$, és ez éppen a makroszkopikus fizikai téridő dimenziója.

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Adatkezelés
Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Sándor Csaba 2023. DECEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Válogatás Erdős Pál kedvenc feladataiból

Róka Sándor: Válogatás Erdős Pál kedvenc feladataiból (Typotex, Budapest, 2023)

RÓKA SÁNDOR
VÁLOGATÁS
ERDŐS PÁL
KEDVENC FELADATAIBÓL
Kell egy bizonyos szorgalom, és kell egy bizonyos érdeklődés. Rényi szokta mondani: Ha jókedvű vagyok, akkor matematikával foglalkozom, hogy jobb kedvű legyek. Ha rosszkedvű vagyok, akkor matematikával foglalkozom, hogy elmúljon a rosszkedvem.
TYPOTEX

Erdős Pál (1913–1996) a 20. század egyik legnagyobb hatású matematikusa volt; a matematika számos területén új kutatási irányok kezdeményezője, új módszerek kidolgozója. Jelentőségét érzékelteti az általa írt 1500 cikk, amit összesen közel ötszáz társszerzővel készített el. A magyarországi matematikának is központi alakja, már a sokadik generáció járja az általa megkezdett utakat. Életéről több könyvet is írtak, kettő magyarul is olvasható: Bruce Schecter: *Agyam nyitva áll!: Erdős Pál matematikai utazásai.* Ford. Gyárfás Vera. Budapest: Park; Vince Kiadó, 1999 és Paul Hoffmann: *A Prímember.* Scolar Kiadó, 1999. Számelméleti gondolatainak egy részébe bepillanatást ad az először 1959-ben megjelent, Surányi Jánossal írt Válogatott fejezetek a számelméletből című könyv. Örömteli esemény, hogy most megjelent Róka Sándor tollából (klaviatúrájából) egy *Válogatás Erdős Pál kedvenc feladataiból.*

Erdős Pál matematikáját méltatlan lenne pár sorban jellemezni; jelentőségét, sokrétűségét több konferencia és tanulmánykötet tárgyalta. A matematikusoknak többfajta osztályozása ismert. Az egyik ilyen szerint vannak elméleteket alkotók és vannak problémamegoldók. Erdőst a problémafelvetők és problémamegoldók egyik legnagyobbikának tartja a matematikus társadalom. Sok ezer kérdést vetett fel, csak a számelméleti problémákat egy 128 oldalas, Ronald Grahammel írt *Old and new problems and results in combinatorial number theory* című könyvben foglalta össze. A cikkeinek többsége a Rényi Intézet honlapjáról elérhető és Grahammel írt könyve is letölthető az internetről.

Erdős a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (KöMaL) feladatainak megoldása során köteleződött el a matematika mellett, és ennek hatására egész életében sok olyan feladatot tűzött ki, amelyek mindössze középiskolai tudást, de nagyfokú leleményességet igényeltek. Ezek többsége a KöMaL-ban és a The American Mathematical Monthly-ban jelent meg. Ezekből nyújt válogatást Róka Sándor könyve 65 feladatot közreadva.

A könyv először nyolc oldalon bemutatja Erdős életét saját és kollégái visszaemlékezéseit felhasználva. Utána következnek a feladatok, mindegyik egy-egy új lapon. Külön értéke a könyvnek, hogy a hátterükről is sok mindent elárul, ezek mutatják a feladatok fontosságát, kapcsolatait más kérdésekkel. Persze könnyű lenne kétszer, de akár tízszer ennyit is írni róluk, de ez is épp elég, és ráadásul olvasmányos. A könyv további részeiben megoldások olvashatók, és végül néhány Erdősről szóló írás ajánlásával, köszönetnyilvánítással zárul a könyv.

A könyvben szereplő feladatokat a könnyű érthetőség és elegancia jellemzi. Alapvető jellemzője a kombinatorikus kérdésfelvetés, bizonyos dolgok megszámlálása. A feladatok első kétharmada a számelmélethez kapcsolódik, majd utána kombinatorikus halmazelméleti, gráfelméleti és végül geometriai feladatok következnek.

A számelméleti feladatok során bepillantást nyerhetünk Erdős prímszámokkal kapcsolatos elemi bizonyításaiba (Csebisev-tétel, a prímszámok reciprokainak összege divergens); találkozunk oszthatósági feladotokkal (pl. az Erdős–Ginzburg–Ziv-tétel speciális esetei) és sok olyan kérdés is olvasható, amelynek során az első N pozitív egész közül kell a kiválasztani a lehető legtöbb olyat, amelyik rendelkezik egy adott tulajdonsággal. Itt nagyon eltérő nehézségű feladatokat találhatunk, de ezekről a bevezető informál.

A kombinatorikus halmazelmélet feladatai között az Erdős-Ko-Rado tételt is megtaláljuk, a gráfelméletből a Ramsey-számokra vonatkozó becslések szerepelnek. Így rövid bepillantást kapunk az Erdős által kifejlesztett véletlen módszerbe is. A kombinatorikus geometriát többek között a „Happy end”-problémaként elhíresült, sokcsúcsú konvex sokszöget kereső feladat valamint a gráfelmélet és a geometria kapcsolatát mutató 55. feladat képviseli. Az utolsó feladat a háromszögek geometriájának egyik fontos egyenlőtlensége, az Erdős-Mordell tétel.

Mi az, ami kiemeli Erdős Pál feladatait a versenyekre felkészítő feladatgyűjtemények közül? Az egyik a feladatok egyedisége, ami a megjelenésük idején sokszor szokatlan volt, de most is jól felismerhetővé teszi őket. A másik a szépségük és eleganciájuk. Megragadja az olvasót az, amikor középiskolás szintű fogalmakat használva váratlan összefüggésekre mutatnak rá. Nem begyakoroltatni akar módszereket, hanem minden feladathoz új ötletre van szükség.

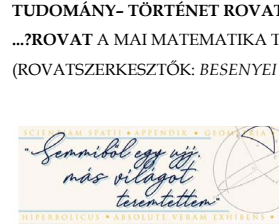
Kinek ajánljuk a könyvet? Haszonnal forgathatják a matematikai versenyekre készülő diákok és mindazok, akik örömüket lelik érdekes feladatokon való gondolkodáson. A jelen ismertetés írója a kombinatorikus számelmélet kutatója és ő is talált általa nem ismert számelméleti Erdős-feladatot, ezért nyugodtan javasoljuk kutató matematikusoknak is, biztos találnak benne újdonságot.

Végezetül köszönetet mondok Róka Sándornak a könyv megírásáért és mindazoknak, akik segítették a munkáját. Biztosak lehetünk benne, hogy a könyv jelentősen hozzájárul ahhoz, hogy Erdős Pál gondolatai a következő generációk számára is hozzáférhetőek, inspirálóak legyenek.

Sándor Csaba egy. docens
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

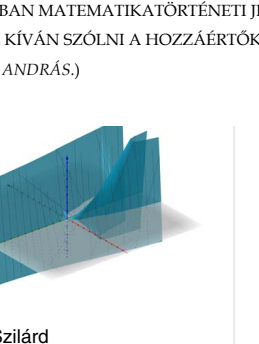
A **TUDOMÁNY** MENÜPONT TÖBBFÉLE, A MATEMATIKA TUDOMÁNYÁHOZ KAPCSOLÓDÓ FUNKCIÓT TAKAR..**A TUDOMÁNY- TÖRTÉNET ROVAT** CÉLJA ELSŐSORBAN MATEMATIKATÖRTÉNETI JELLEGŰ ÍRÁSOK KÖZLÉSE. **A MI IS ...?ROVAT** A MAI MATEMATIKA TUDOMÁNYÁRÓL KÍVÁN SZÓLNI A HOZZÁÉRTŐKNEK.
(ROVATSZERKESZTŐK: *BESENYEI ÁDÁM; STIPSICZ ANDRÁS.*)


Semmiből egy ujj más világot teremtettem

Pálfy Péter Pál
2023. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Bolyai János korszakalkotó felfedezése két évszázad tükrében

Pálfy Péter Pál 2023. november 3-án, a Magyar Tudomány Ünnepének megnyitó ünnepi ülésén, a Szegedi Tudományegyetem dísztermében megtartott előadásának szerkesztett szövegét adjuk közre. A cikket a Magyar Tudomány folyóirat engedélyével közöljük. Az idei nyitóelőadás Bolyai Jánosról szólt, aki kétszáz évvel ezelőtt, 1823. november 3-án írta meg édesapjának azt a levelet, amelyben bejelentette a nemeuklideszi geometria fölfedezését ezekkel a szavakkal: „a semmiből egy ujj más világot teremtettem". Tovább...



Szabó Szilárd
2023. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

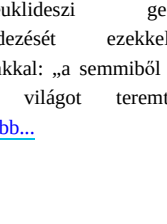
A 100 éve született René Thom tudományos hagyatéka

2023 szeptemberében volt *René Thom*, a neves és sokoldalú francia geométer és topológus születésének századik évfordulója. Ebből az alkalomból eseménysorozattal emlékezett meg róla a párizsi Francia Tudományos Akadémia és volt munkahelye, az Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS) kutatóintézet. *Szabó Szilárd* beszámolót készített az ünnepi alkalmakról.

Böröczky Károly J.
2023. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Az Erdős Center első két éve

2021 szeptemberében már hírt adtunk az Erdős Pálról elnevezett konferenciaközpont létrejöttéről és céljáról, ami magasszintű workshopok, konferenciák és nyári iskolák szervezése matematikai, vagy azt alkalmazó témákban tematikus szemeszterek keretében, és fiatal, illetve elismert vendégprofesszorok meghívása. A HUN-REN Magyar Kutatási Hálózat támogatásával a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet által alapított Erdős Center működéséről, rendezvényeiről és jövőbeli terveiről írt *Böröczky Károly*, a konferenciaközpont igazgatója.



Molnár Lajos, Stipsicz András:
2023. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Neumann-emlékülések Budapesten és New Yorkban

A fotón Neumann János szobra látható a budapesti Infoparkban. 2023-ban több eseményre és emlékkonfereciára is sor került Neumann János születésének 120. évfordulójának megünneplésére itthon és külföldön. Közülük kettőről számol be cikkében Molnár Lajos és Stipsicz András.

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

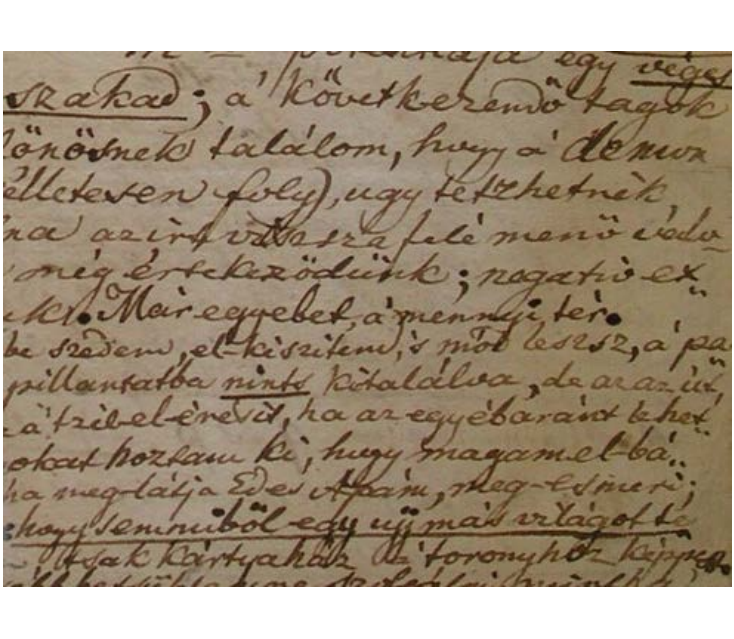
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Pálfy Péter Pál 2023. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Bolyai János korszakalkotó felfedezése két évszázad tükrében

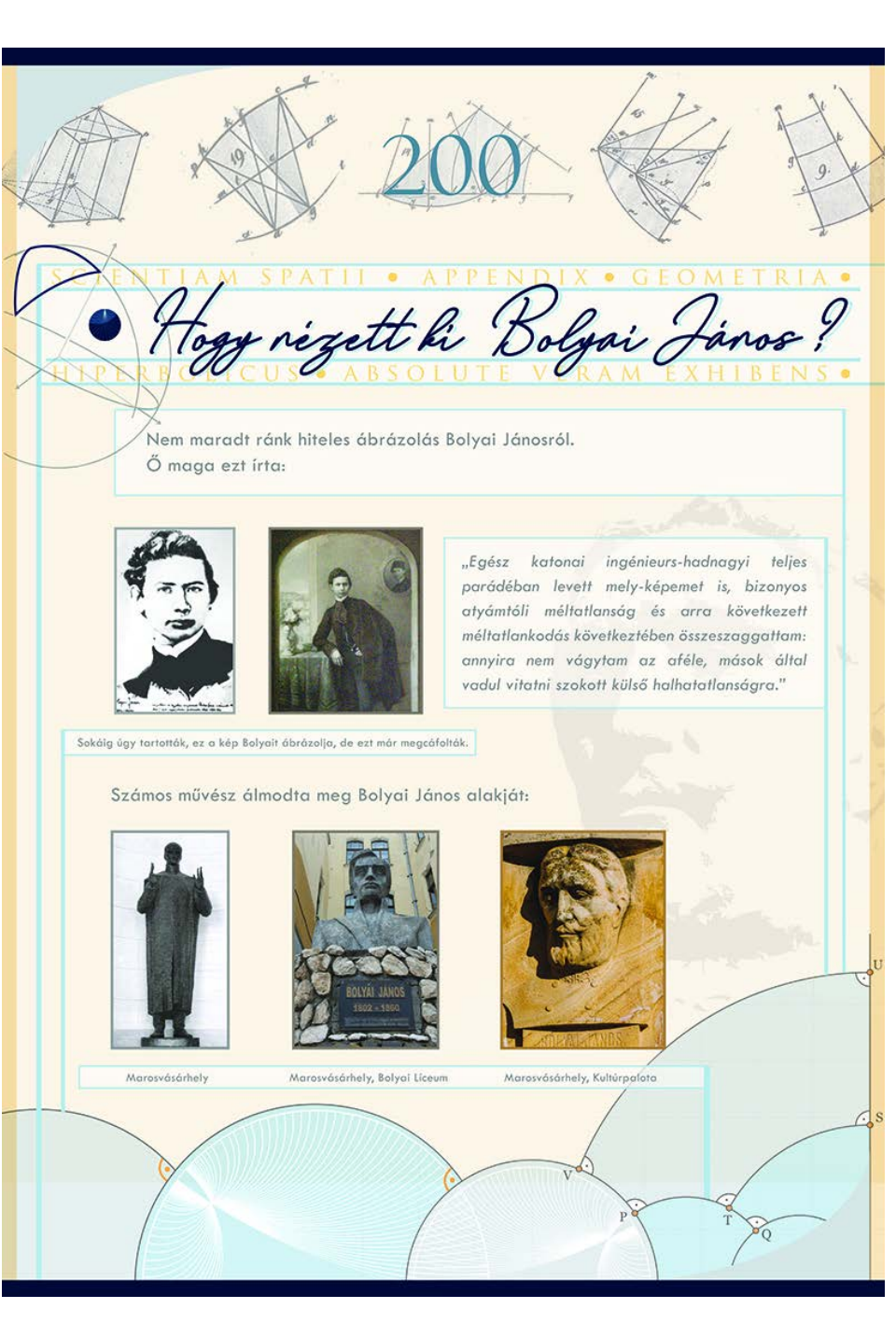
A Magyar Tudomány Ünnepét azért tartjuk november 3-án, mert 198 évvel ezelőtt Széchenyi István ezen a napon tette nemes felajánlását a Magyar Tudós Társaság megalapításának elősegítésére. De ez a nap egy különleges alkalom, egy kettős évforduló, ugyanis szintén november 3-án, ám két évvel korábban írta meg Bolyai János Temesvárról azt a levelet édesapjának Marosvásárhelyre, amelyben bejelentette, hogy „a semmiből egy ujj más világot teremtettem". A 200 éves évfordulót ünnepli ma a tudományos világ. A bicentenáriumot az UNESCO is fölvette a kiemelkedő évfordulók közé, mint ahogy 2009-ben Bolyai művének kézirata is a Világemlékezet listára került. Általában a tudósok születésének vagy halálának évfordulója ad alkalmat a megemlékezésre. Ritka az ilyen eset, amikor egy tudományos fölfedezés köthető egy konkrét dátumhoz. Természetesen Bolyai éveken át törte a fejét azon a geometriai problémán, amelynek megoldását ebben a levélben bejelentette, de ezen a napon jutott el oda, hogy eredményét közölje apjával. Utána még hosszú évek teltek el, amíg kicsiszolt formában munkája nyomdába kerülhetett, mindazonáltal 1823. november 3. az a nap, amelyre a Bolyai-geometria születésnapjaként tekinthetünk.

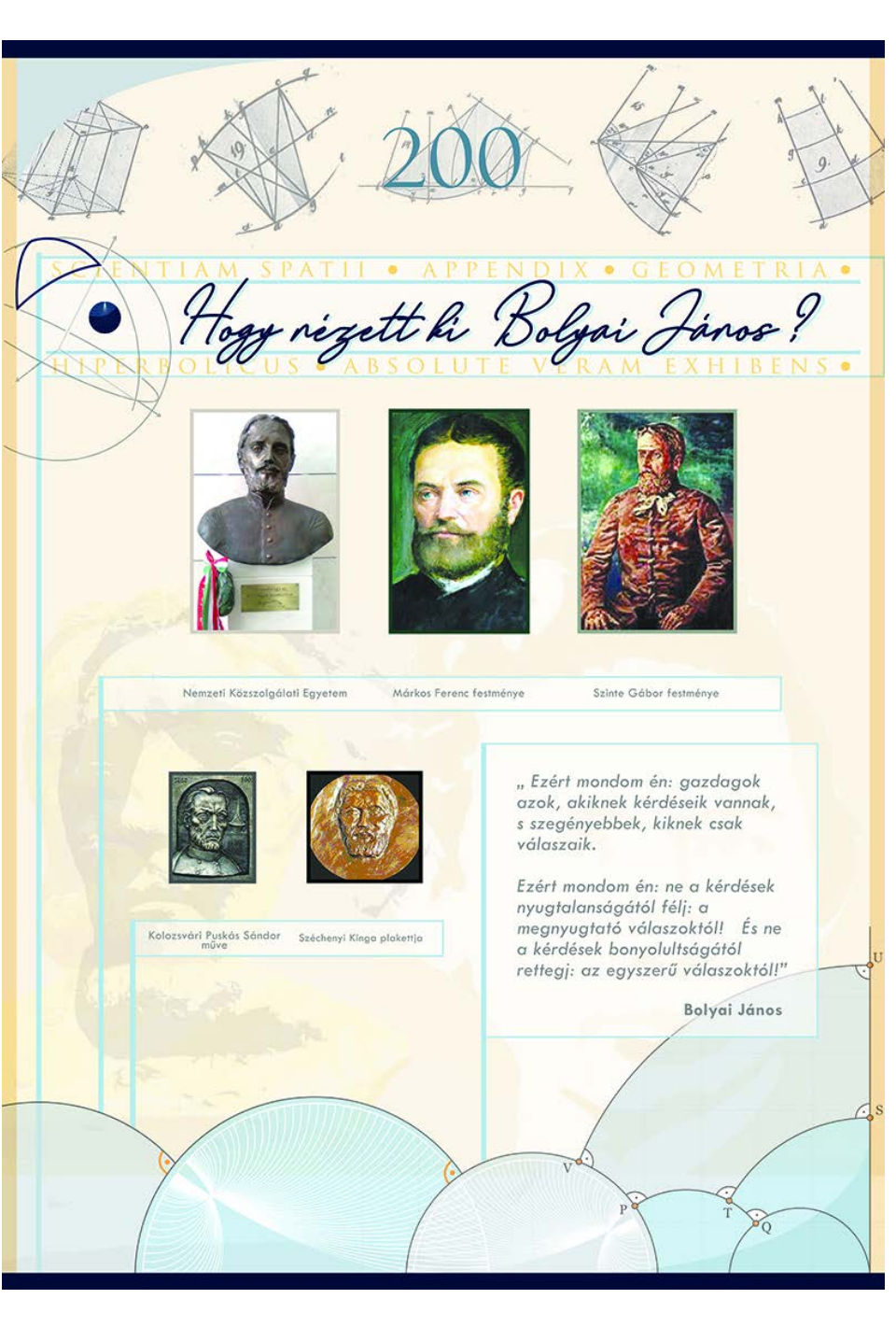


A Szegedi Tudományegyetem méltó helyszíne a rendezvénynek, hiszen ez az egyetem a Kolozsvári Tudományegyetem utóda, és Bolyai János Kolozsváron született. Ma az ottani egyetem a Babeş-Bolyai Tudományegyetem nevet viseli, Szegeden pedig az egyetem matematikai intézetét hívják Bolyai Intézetnek, és az Aradi vértanúk terén a bejárat fölött a Bolyai Épület feliratot olvashatjuk.

Nem vagyok Bolyai-kutató, és matematikusként sem a geometria a szakterületem. Azért vállalkoztam mégis erre az előadásra, mert jelenleg én töltöm be a Bolyai János Matematikai Társulat elnöki tisztét, ennélfogva kötelességemnek éreztem, hogy a mai ünnepi ülés keretében röviden bemutassam Bolyai Jánost, a 200 évvel ezelőtt bejelentett fölfedezését és ennek hatását a tudomány fejlődésére. Erre vonatkozó ismereteimet a Bolyairól szóló gazdag szakirodalomból szereztem, ezek közül csak néhányat tudok az irodalomjegyzékben fölsorolni.

Bolyai János képét sajnos nincs lehetőség bemutatni, mivel hiteles arcképünk nincsen róla. Ő maga írta: „Egész katonai ingénieurs-hadnagyi teljes parádéban levett melyképemet is, bizonyos atyámtóli méltatlanság és arra következett méltatlankodás következtében összezaggattam; annyira nem vágyom az afféle, mások által vadásztatni szokott külső halhatatlanságra, minden affélét semminek nézvén." [9, 212. old.]. Fogadjuk hát meg intelmét, és tekintsük inkább művének halhatatlanságát! Ugyanis az annak idején bélyegen is megjelenített ábrázolás azon a festményen alapul, amelyről egy időben azt hitték, hogy róla készült, de aztán bebizonyosodott, hogy ez tévedés. Számos művész is megpróbálkozott Bolyai alakjának megjelenítésével, mintául véve a marosvásárhelyi Kultúrpalota homlokzatán látható szobrot.


200
Hogy nézett ki Bolyai János?
Nem maradt ránk hiteles ábrázolás Bolyai Jánosról.
Ő maga ezt írta:
„Egész katonai ingénieurs-hadnagyi teljes parádéban levett mely-képemet is, bizonyos atyámtóli méltatlanság és arra következett méltatlankodás következtében összezaggattam: annyira nem vágyom az afféle, mások által vadul vitatni szokott külső halhatatlanságra."
Sokáig úgy tartották, ez a kép Bolyait ábrázolja, de ezt már megcáfolták.
Számos művész álmodta meg Bolyai János alakját:
Marosvásárhely
Marosvásárhely, Bolyai Líceum
Marosvásárhely, Kultúrpalota

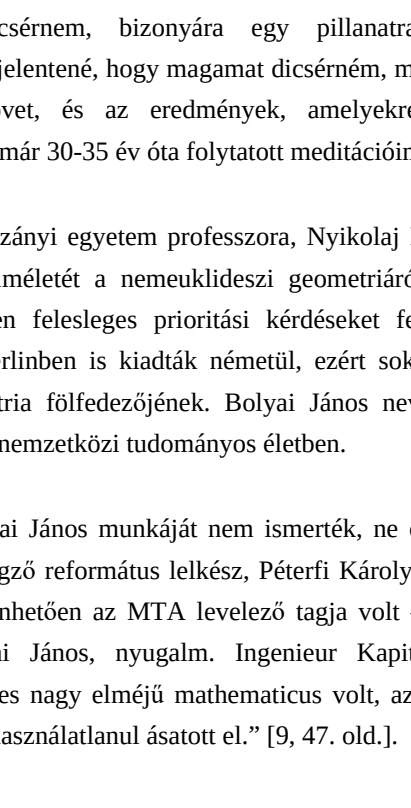

200
Hogy nézett ki Bolyai János?
Nemzeti Közszolgálati Egyetem
Márkos Ferenc festménye
Szinte Gábor festménye
Kolozsvári Puskás Sándor műve
Széchenyi Kinga plakettje
„Ezért mondom én: gazdagok azok, akiknek kérdéseik vannak, s szegényebbek, kiknek csak válaszaik.
Ezért mondom én: ne a kérdések nyugtalanságától félj: a megnyugtató válaszoktól! És ne a kérdések bonyolultságától rettegj: az egyszerű válaszoktól!"
Bolyai János

(A két poszter és e cikk nyitóképe is a Kántor Sándorné és Patócs Dóra közreműködésével, Somogyvári Andrea kivitelezésében készült Bolyai 200 kiállításról származik.)

Nézzük most Bolyai János főbb életrajzi adatait! Kolozsváron született 1802. december 15-én. Édesapja, Bolyai Farkas sokoldalú, tehetséges ember volt, elsősorban matematikus, de például drámákat is írt. 1832-ben az Akadémia levelező tagjának választották. János még kétéves sem volt, amikor Marosvásárhelyre költöztek, ahol apja a református kollégiumban kapott tanári állást. János tehetsége korán kibontakozott. Apja azt szerette volna, ha az ő nyomdokán Göttingába ment volna egyetemi tanulmányokat folytatni, de az ifjúkori barát, Gauss nem válaszolt a segítségét kérő levélre. Így a matematikához kapcsolódó felsőfokú tanulmányok közül a család lehetőségei folytán csak a katonai, hadmérnöki pálya jöhetett szóba. János kiváló eredménnyel végezte tanulmányait Bécsben, amelynek végeztével 1823 szeptemberében megkapta első beosztását alhadnagyi rangban Temesvárra. Néhány héttel szolgálatának megkezdése után született a híres levél, amelynek az évfordulójára emlékezünk ma. Később Aradon, Lembergben és Olmützben is szolgált. Egészsége fokozatosan romlott, maláriát, kolerát kapott, közlekedési baleset is érte (felborult vele a szekér, amin Olmützbe tartott), így aztán 1833-ban kérelmére nyugdíjazták. Ezután visszavonultan élt Marosvásárhelyen, illetve a domáldi családi birtokon. Folytatta tudományos vizsgálódásait. Óriási – jelentős részében még mindig feldolgozatlan – kéziratos hagyatéka található a Teleki Tékában. Mivel nem tudta letenni a megkívánt kauciót, katonatisztként nem kaphatott engedélyt a házasságkötésre, csak a szabadságharc idején adódott lehetősége, hogy elvegye gyermekei anyját. 58 éves korában, 1860. január 27-én halt meg.

Térjünk most rá a matematikára! Ami kora számos matematikusával együtt Bolyai Farkast és Jánost is foglalkoztatta, az a párhuzamosok problémája volt. Miről is szólt ez a kérdés? Időszámításunk előtt 300 körül keletkezett az a mű, ami korának matematikai ismereteit összefoglalta, Euklidész *Elemek* című munkája. Ennek az első könyve (a 13-ból) geometriával foglalkozik. Legelső lapjain 23 definíciót, 5 posztulátumot és 9 axiómát találunk. Ezekre az alapvetőnek tekintett fogalmakra és igazságokra építve dolgozta ki Euklidész a geometria elméletét, az első könyv végére eljutva a Pitagorasz-tételig. Az 5. posztulátum egyáltalán nem olyan magától értetődő, mint a többi. Így szól: „És hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegben) két derékszögnél kisebb szögek vannak." [4]. Ezzel egyenértékű az a megfogalmazás, hogy egy egyeneshez egy rajta kívül levő ponton át egyetlen olyan egyenes húzható, amelyik az adott egyenest nem metszi, azaz párhuzamos vele. Ezért szokásos az 5. posztulátumot „párhuzamossági axióma" néven emlegetni. Korábban is, de különösen a 18. század végén és a 19. század elején számos matematikus próbálkozott azzal, hogy ezt a posztulátumot a többi axióma segítségével levezesse, és így posztulátum helyett geometriai tétellé avassa. A problémát vizsgáló matematikusok megpróbáltak ellentmondásra jutni abból a feltevésből kiindulva, hogy egy egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át több olyan egyenes is húzható, amelyik az első egyenest nem metszi. Meghökkentő következtetésekre jutottak, például, hogy egy háromszög belső szögeinek összege kisebb 180 foknál. Arra is következtettek, hogy az euklideszi posztulátum tagadása maga után vonja, hogy nem létezik tetszőlegesen nagy területű háromszög és így tovább. De mindezek csak látszólagos ellentmondások, pusztán az euklideszi geometriában megtanult ismereteinkkel állnak szemben.

Bolyai János következetesen végigvitte, hogy az 5. posztulátum (ami egyébként az Elemek más kiadásaiban a 11. axiómaként szerepel, és ő is így hivatkozik rá) elhagyásával hogyan lehet kiépíteni a geometria elméletét. Ehhez roppant fegyelmezett gondolkodásra volt szüksége, nehogy valahol öntudatlanul felhasználjon egy euklideszi geometriából ismert tényt. Az eredmény egy csodálatos szellemi alkotás, *A tér tudománya*. Ez az igen tömören megírt munka végül nem egy tudományos folyóiratban vagy önálló kiadványként jelent meg, hanem édesapja latin nyelvű tankönyvének függelékeként, ezért hivatkozunk rá az *Appendix* névvel. Az igazi címe viszont így hangzik lefordítva: *A tér abszolút igaz tudománya, a XI. Euklidész-féle axióma (a priori soha el nem dönthető) helyes vagy téves voltától független tárgyalásban. Annak téves volta esetére, a kör geometriai négyszögesítésével* [2]. Bolyai János zseniális felismerése tehát abban rejlett, hogy nem bizonyítást akart találni a párhuzamossági axiómára, hanem attól függetlenül építette fel a geometria elméletét, ami nem csak egyszerű mértani tételeket tartalmazott, hanem magában foglalta a trigonometriát, a területszámítást, a szerkesztéseket. Mindezt mindössze 24 oldalon!



Bolyai nem az egyetlen volt, aki fölfedezte a nemeuklideszi geometriát. Carl Friedrich Gauss, akit kortársai „a matematika fejedelmének" neveztek, a nála két évvel idősebb Farkasnak diáktársa és barátja volt Göttingában, és már akkor sokat beszélgettek a párhuzamosok problémájáról. Erre vonatkozó eredményeit azonban Gauss sohasem publikálta. János munkáját megkapván különös választ írt Farkasnak, ami a Bolyaiakat nagyon elkeserítette. Idézem: „Most valamit fiad munkájáról. Ha azzal kezdem, hogy nem szabad megdicsérnem, bizonyára egy pillanatra meghökkensz; de ha megdicsérném, ez azt jelentené, hogy magamat dicsérném, mert a mű egész tartalma, az út, amelyet fiad követ, és az eredmények, amelyekre jutott, majdnem végig megegyeznek részben már 30-35 év óta folytatott meditációimmal." [9, 88. old.]

Egy orosz tudós, a kazányi egyetem professzora, Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij is kidolgozta a maga elméletét a nemeuklideszi geometriáról. Nem tudtak egymásról Bolyaival, így teljesen felesleges prioritási kérdéseket feszegetni. Az ő munkáját azonban 1840-ben Berlinben is kiadták németül, ezért sokáig őt tartották egyedül a nemeuklideszi geometria fölfedezőjének. Bolyai János neve és munkája csak jóval később vált ismertté a nemzetközi tudományos életben.

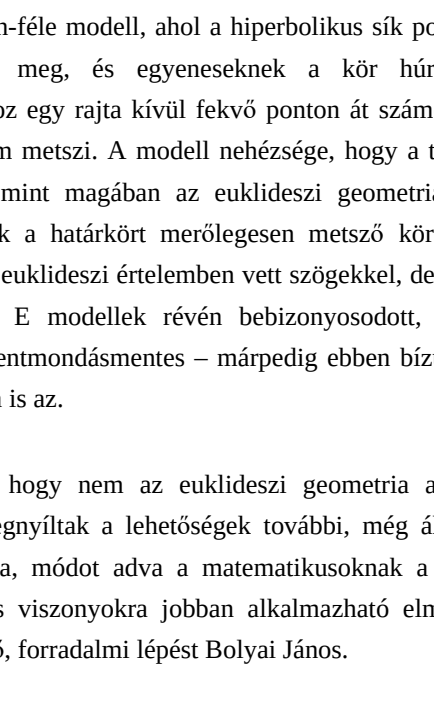
Magyarországon Bolyai János munkáját nem ismerték, ne csodálkozzunk hát, hogy a temetési szertartást végző református lelkész, Péterfi Károly – aki egyébként filozófiai munkásságának köszönhetően az MTA levelező tagja volt – ezt jegyezte be a halotti anyakönyvbe: „Bolyai János, nyugalm. Ingenieur Kapitány – meghalt agy- és tüdőgyulladásban. Híres nagy elméjű mathematicus volt, az elsők között is első. Kár, hogy nagy talentuma használatlanul ásatott el." [9, 47. old.].

Hadd jegyezzem meg, hogy Gauss, aki a korábban idézett furcsa módon kerülte meg János dicséretét, egy tanítványának viszont azt írta, hogy „Ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Grösse."[9, 92. old.]. Nyilvánosan azonban sohasem említette Bolyai János nevét.

Gauss halála után, levelezésének – így Farkassal váltott leveleinek – sajtó alá rendezése kapcsán figyelt fel a tudományos világ János munkájára, és néhány lelkes kutató hamarosan lefordította olaszra (1868), franciára (1867), németre (1872) és angolra (1891). (Bár az évszám későbbi, az olasz fordítás került ki korábban a nyomdából.) A világnyelveken történt kiadások nyomán Bolyai János műve megkezdte megérdemelt diadalútját a nagyvilágban. Végül aztán – meglehetősen megkésetten – a magyar tudományosság is elismerte Bolyai Jánost, és 1897-ben megjelent az első (majd kisvártatva a második) magyar fordítás is.

A 20. század elejének legnagyobb matematikusait is foglalkoztatták a nemeuklideszi geometria kérdései, elég csak Henri Poincaré [7] és David Hilbert [6] nevét említeni. Érdekesség, hogy az MTA első két Bolyai-díját éppen ők kapták 1905-ben, illetve 1910-ben. A díj alapításával Bolyai János születésének centenáriumán Akadémiánk tompítani próbálta lelkiismeret-furdalását, hogy külföldön előbb figyeltek fel Bolyai zseniális eredményére, mint idehaza. Ez volt akkoriban a legjelentősebb nemzetközi matematikai díj, bár értéke körülbelül egytizede volt a Nobel-díjénak. Aztán 1915-ben a háború, majd az infláció nem tette lehetővé a díj újbóli kiadását. 2000-ben újította meg ezt a hagyományt az MTA, azóta ismét ötévenként ítélik oda a Bolyai János nemzetközi matematikai díjat.

Bolyai János nagyságának illusztrálására hadd hozzak még egy példát. Stephen Hawking – van-e ki e nevet nem ismeri? – összeállított egy matematikai szöveggyűjteményt, ami Euklidésztől Turingig 2300 év legjelentősebb matematikai munkáit tartalmazza angolul [5]. A 21 szerző között, azaz a tudománytörténet legkiemelkedőbb 21 matematikusa között ott látjuk Bolyai Jánost! A termékeny matematikusok munkáiból természetesen csak szemelvényeket tud közölni ez a vaskos kötet: Euklidésznek például 117 oldalt, Gaussnak 72-t szentel a válogatás, míg Bolyai János teljes műve és az ehhez fűzött kommentárok 53 oldalt tesznek ki a könyvben. A kötet címe – *God created the integers* – egyébként Leopold Kronecker 19. századi német matematikus mondását idézi, miszerint Isten teremtette az egész számokat, minden más az emberek műve a matematikában.


GOD
CREATED
the
INTEGERS
NEW EDITION
Now includes selections from Euler, Bolyai, Lobachevsky, and Galois!
THE MATHEMATICAL BREAKTHROUGHS THAT CHANGED HISTORY
EDITED, WITH COMMENTARY, BY
STEPHEN
HAWKING

Már említettem, hogy a legkiválóbb matematikusok foglalkoztak a Bolyai–Lobacsevszkij-geometriával, más nevén hiperbolikus geometriával. A matematikának egy új ága jött létre e fölfedezés nyomán. Egy dolog azonban tulajdonképpen hiányzott Bolyai művéből. Az euklideszi posztulátum tagadásából kiindulva a sokak által keresett ellentmondás helyett egy csodálatos elméletet sikerült fölépítenie. De valóban soha nem is fogunk ellentmondásra bukkanni, ha a 24 oldalon leírt tételeken túl még tovább építjük az elméletet? Az ellentmondás-mentesség kérdését csak jóval később sikerült eldönteni azáltal, hogy az euklideszi geometriában konstruáltak olyan rendszereket, amelyek a Bolyai–Lobacsevszkij-geometria tulajdonságaival rendelkeznek. Ilyen például a Beltrami–Klein-féle modell, ahol a hiperbolikus sík pontjainak egy körlemez belső pontjai felelnek meg, és egyeneseknek a kör húrjait tekintjük. Ekkor nyilvánvalóan egy húrhoz egy rajta kívül fekvő ponton át számos olyan húr található, amelyik az első húrt nem metszi. A modell nehézsége, hogy a távolságok és a szögek másképp számítandók, mint magában az euklideszi geometriában. A Poincaré-féle modellben egyeneseknek a határkört merőlegesen metsző köríveket tekintjük. Itt a szögek megegyeznek az euklideszi értelemben vett szögekkel, de a távolságokat szintén másképpen kell mérni. E modellek révén bebizonyosodott, hogy amennyiben az euklideszi geometria ellentmondásmentes – márpedig ebben bízunk – akkor a Bolyai–Lobacsevszkij-geometria is az.

Azáltal, hogy kiderült, hogy nem az euklideszi geometria az egyetlen lehetséges geometriai rendszer, megnyíltak a lehetőségek további, még általánosabb geometriai rendszerek kidolgozására, módot adva a matematikusoknak a tér fogalmát kitágító, ugyanakkor a valóságos viszonyokra jobban alkalmazható elméletek megalkotására. Ezen az úton tette az első, forradalmi lépést Bolyai János.

Természetes, hogy a nemeuklideszi geometria csak lassan vált elfogadottá, hiszen állításai ellentétben álltak a 2000 éven át megkérdőjelezhetetlennek tekintett euklideszi tételekkel. Idézhetem Aquinói Szent Tamást, aki azt írta: „Isten nem teremthet olyan háromszöget, melynek szögösszege két derékszögtől eltér" [8, 35. old.]. Ezzel szemben a Bolyai János által teremtett új, más világban minden egyes háromszög belső szögeinek összege kisebb 180 foknál. Mi több, a háromszög területe arányos azzal a különbséggel, amennyivel a szögösszeg elmarad a 180 foktól. Ebből következik, hogy létezik egy határ, amelyet egyetlen háromszög területe sem léphet túl, sőt el sem érhet.

De ha a geometria lehet ilyen is, meg olyan is, akkor nem állja meg a helyét az a filozófiai megközelítés, hogy a tér érzékelésünk a priori sajátossága, ahogyan azt Immanuel Kant *A tiszta ész kritikájá*ban megfogalmazta. Valószínűleg a nemeuklideszi rendszernek ez a filozófiai „mellékhatása" lehetett az, ami Gausst visszatartotta attól, hogy maga is papírra vesse vizsgálódásainak konklúzióját. Bolyai János azonban nem tántorodott el, a világ elé tárta radikálisan új elméletét.

A nemeuklideszi geometria döntő hatással volt a fizika fejlődésére is. Egy tanulmányában Einstein [3] arról ír, hogy a 19. század fizikusai evidenciának tekintették az euklideszi geometria fogalmait és posztulátumait. Ennek a hozzáállásnak a meghaladása majdnem egy évszázadba telt, és azokon a tisztán elméleti matematikai kutatásokon alapult, amelyeket még jóval azelőtt végeztek, hogy „az euklideszi geometria zubbonya túl szűknek bizonyult a fizika számára". A nemeuklideszi geometria kialakulásáról így fogalmaz: „lassan kialakult az a sejtés, hogy [a párhuzamossági axióma] a többitől független. Ezt oly módon lehetett bizonyítani, hogy egy olyan ellentmondásmentes logikus rendszert építünk, ami az euklidesztől abban és csak abban különbözik, hogy a párhuzamossági axiómát egy másikkal helyettesítjük. Hogy ezt a gondolatot önállóan megfogalmazták és meggyőzően megvalósították, az egyrészt Lobacsevszkij, másrészt Bolyay (apa és fiú) [sic!] elévülhetetlen érdeme." Az általános relativitáselméletben a geometria és a gravitáció szerves egységbe forr.

Végezetül hadd említsem meg, hogy Bolyai műve és személye nem csak a tudomány és a tudománytörténet számára nyújt inspirációt, hanem a művészetekben is megjelenik. A szépirodalomból Babits Mihály híres Bolyai-szonettje, Németh Lászlónak *A két Bolyai* című drámája, továbbá Láng Zsoltnak a négy évvel ezelőtt megjelent regénye juthat elsőként eszünkbe, de a sort hosszan lehetne folytatni. A képzőművészetekben nemcsak Bolyai alakja, hanem Bolyai matematikája is megjelenik, mint például Márton A. András képein, vagy ilyen a marosvásárhelyi Bolyai utcában álló pszeudoszféra szobor is, Horváth Sándor alkotása. (A pszeudoszféra egyébként egy olyan felület, amelyen – lokálisan – a hiperbolikus sík tulajdonságai érvényesülnek.)

Azt remélem, hogy még ha a matematikai részletekkel nem is volt lehetőség foglalkozni ennek a rövid előadásnak a keretében, talán sikerült érzékeltetnem Bolyai János fölfedezésének rendkívüli jelentőségét. Joggal írhatta tehát levelében 200 évvel ezelőtt ő ezeket a sorokat: „olyan felséges dolgokat hoztam ki, hogy magam elbámultam, […] ha meglátja Édes Apám, megesmeri; most többet nem szóllhatok, csak annyit: hogy semmiből egy ujj más világot teremtettem." [1, 158.old.].

Én nem tudok elég költőien fogalmazni, ezért akadémiánk egykori elnökének, Szentágothai Jánosnak a szavaival zárom előadásomat: „A magyar nép géniusza – a tudomány területén – a legmagasabb fokon Bolyai Jánosban öltött testet." [9, 9.old.].

Pálfy Péter Pál

az MTA rendes tagja, kutatóprofesszor, Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Irodalom

[1] Benkő Samu (1975): *Bolyai-levelek*. Bukarest: Kriterion Könyvkiadó.

[2] Bolyai János (1977): *Appendix. A tér tudománya.* (szerk. Kárteszi Ferenc) Budapest: Akadémiai Kiadó.

[3] Einstein, Albert (1925): Nichteuklidische Geometrie und Physik. *Die neue Rundschau* 36, 1, 16-20.

[4] Euklidész (1983): Elemek. (ford. Mayer Gyula) Budapest: Gondolat.

[5] Hawking, Stephen (2007*): God created the integers. The mathematical breakthroughs that changed history*. Philadelphia – London: Running Press.

[6] Hilbert, David (1903): Neue Begründung der Bolyai–Lobatschefskyschen Geometrie, *Mathematische Annalen* 57, 137–150.

[7] Poincaré, Henri (1902): *La science et l'hypothèse*, (Chapitre III: Les géométries non euclidiennes). Paris: Flammarion.

[8] Tóth Imre (2002): Bécstől Temesvárig: Bolyai János útja a nemeuklideszi forradalom felé. Budapest: Typotex,

[9] Weszely Tibor (2002): *Bolyai János. Az első 200 év*. Budapest: Vince Kiadó.

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Szabó Szilárd 2023. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

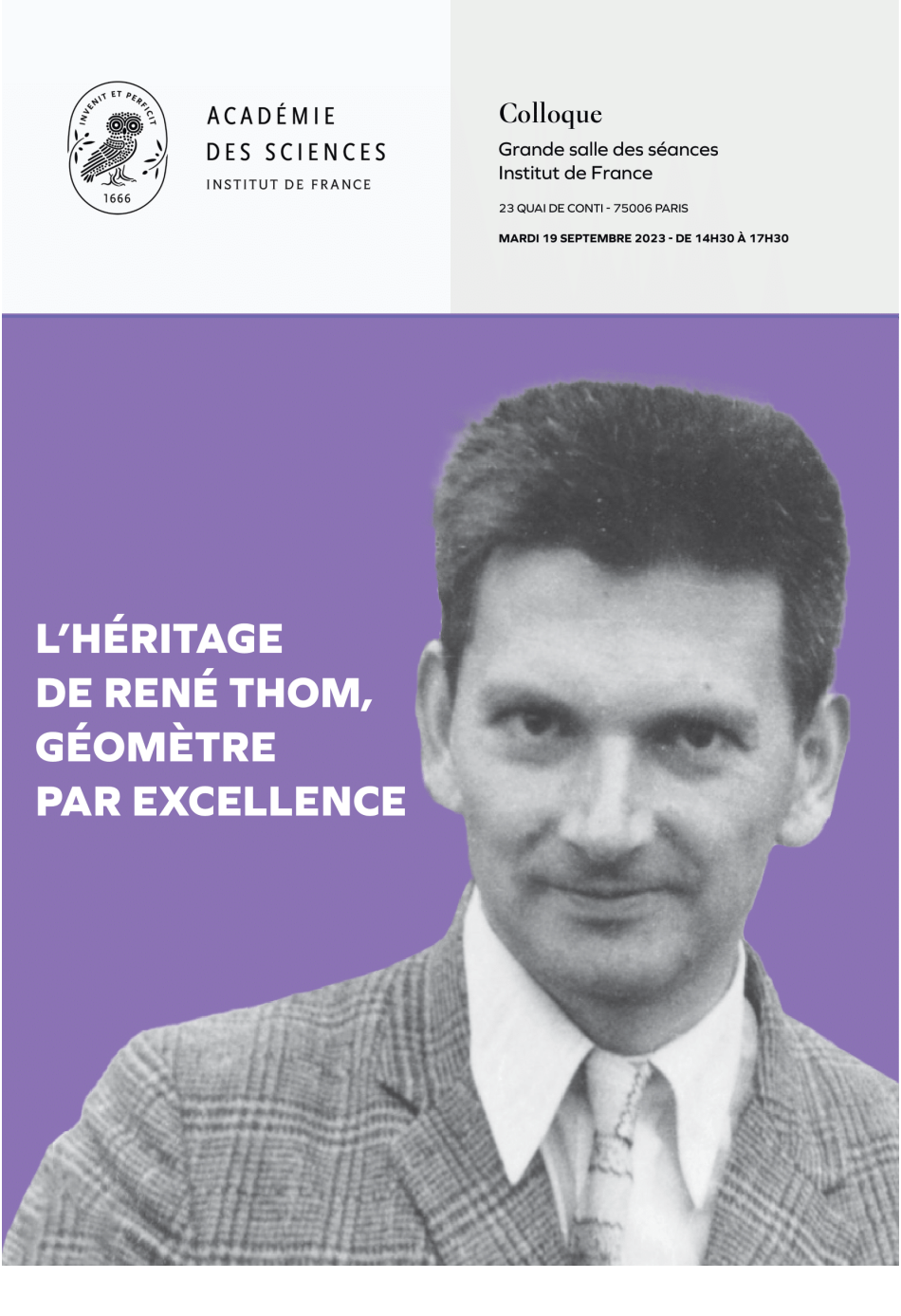
A 100 éve született René Thom tudományos hagyatéka

> *Mottó: „Akkor, amikor világszerte annyi tudós számol, nem kívánatos-e hogy néhányan, akik tudnak, álmodjanak?” (R. Thom)*

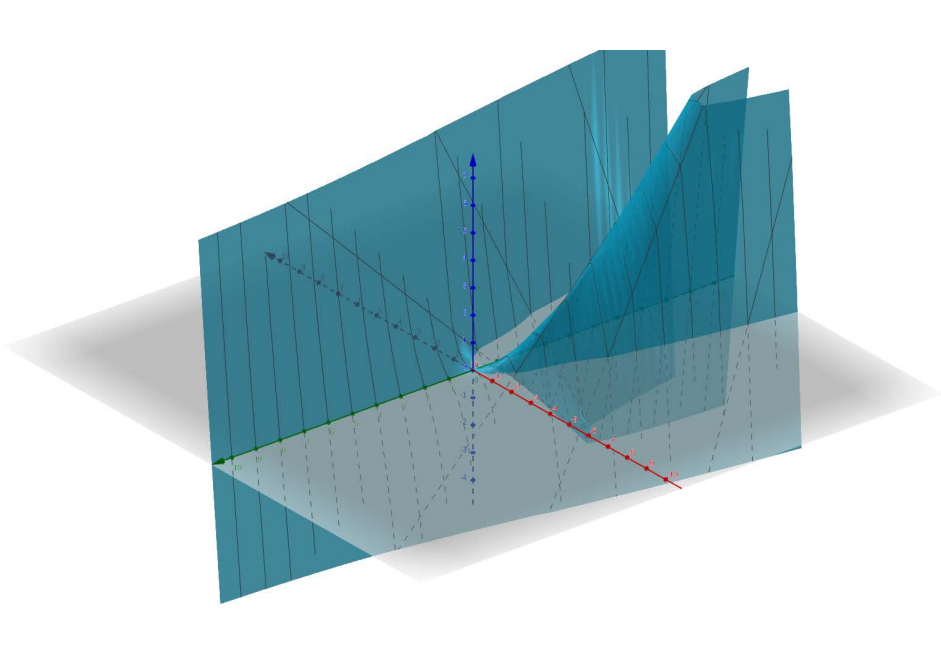
2023 szeptemberében volt René Thom, a neves és sokoldalú francia geométer és topológus születésének századik évfordulója. Ebből az alkalomból eseménysorozattal emlékezett meg róla a párizsi Francia Tudományos Akadémia és volt munkahelye, az Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS) kutatóintézet. Beszámolót készítettünk az ünnepi alkalmakról.

Emlékülés a Francia Tudományos Akadémián

Szeptember 19-én, a Francia Tudományos Akadémia épületében nem szakmai közönségnek szóló megemlékezés zajlott[1] a tudós családjának jelenlétében. Ennek felvezetőjeként Étienne Ghys matematikus, az Akadémia örökös titkára vázolta fel Thom nagyívű tudományos munkásságát és pályáját: miközben a matematikában megalkotta a kobordizmusok elméletét valamint a népszerűvé vált katasztrófaelméletet, emellett foglalkozott biológiai, nyelvészeti és filozófiai kérdésekkel is, olyannyira, hogy több könyvet jelentetett meg e témákról. A matematikában az ő nevéhez fűződik a leképezések transzverzalitásának [3] és generikusságának fogalma is [4]. Ghys több Thommal készült interjúrészletet lejátszott, amelyekből kiderült többek között az, hogy – jóllehet a kutatás hatalmas szabadságérzetet nyújtott neki –, a kutatópályája kezdeti útkeresését elvesztegetett időként élte meg. Azt is megtudhattuk, hogy Thomnak az 1958-ban a kobordizmuselméleti munkájáért nyert Fields-érme a véleménye szerint maga helyett Arisztotelésznek járt volna.



Ghys felvezetőjét Patrick Popescu-Pampu matematikus előadása követte (aki szoros kapcsolatot ápol a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetbeli szingularitáselméleti iskolával, mint Némethi András többszörös társszezője és rendszeres vendége). Kifejtette, hogy Thom alapvető érdeklődési területe az alakok egymásba való átváltozása lett a matematikában (pl. Morse-elmélet) éppúgy, mint a biológiában (morfogenezis, azaz az alakok kialakulása és fejlődése). Ezek kapcsán szót ejtett a Thom által megteremtett struktúrális stabilitás fogalmáról: hétköznapi szóhasználattal élve, ez a jelenség akkor áll fenn, ha a formák változásában nem következik be változás. Ezt a jelenséget egy negyedrendű potenciálárok több (alacsonyabb rendű) árokká való szétválásával illusztrálta. Ezután részletesen számba vette Thom elméletének [5] 7 „katasztrófáját” (azaz, legfeljebb 4 kodimenziós stabil szingularitását), úgymint: hajtás, csúcs (az alábbi ábrán), fecskefarok, pillangó, hiperbolikus, elliptikus és parabolikus köldökpont[2], és ezek körkörös egymásba való átmenetét.



Végül bemutatott egy részletet a híres filmrendező, Jean-Luc Godard Thommal készült dokumentumfilmjéből, amelyben a tudós a rendező egy kérdésére válaszolva azt a véleményét fejtegeti, hogy a definíciója alapján a mindennapi élet bizonyos jelenségei tekinthetők „katasztrófának”: a matematikai bifurkációkhoz hasonló mintákat találunk bennük. Mint ebből a részletből is kitűnik, Thom egész életében kereste a matematika kapcsolódását más tudományokhoz, a művészethez és a mindennapi élethez – attól sem riadva vissza, hogy provokatív kijelentései miatt időnként más tudósokkal, művészekkel konfliktusba kerüljön. Különösen kiélezett hangnemű vitát folytatott a tudomány determinisztikus létéről való nézeteltérésük miatt Ilya Prigogine Nobel-díjas vegyésszel, akit egyik írásában [7] egyszerűen „csalónak” minősített. Prigogine nézete szerint ugyanis a determinisztikus tudományok kora leáldozott, az ilyen folyamatok a mai tudományban inkább kivételnek számítanak, mint gyakorinak, míg Thom ragaszkodott a tudomány determinisztikus jellegéhez, és nézete szerint különbséget kell tenni folyamatok leírhatósága és előrejelezhetősége között.

A harmadik előadó Annick Lesne biológusnő volt, aki ismertette Thom alakfejlődéssel kapcsolatos meggondolásainak visszatükröződését a modern biológián belül. Mint elmondta, Thomra főleg D'Arcy Thompson „On growth and forms” és Conrad Hal Waddington „The strategy of the genes” című munkái gyakoroltak hatást. Kiemelte, hogy Thom vigyázott rá, nehogy a makroszkopikusan alkalmazható geometriai gondolatmeneteit mikroszkopikus (sejt-szintű) kérdésekre alkalmazzák.

Végül, az utolsó előadást Fabrice Hyber művész tartotta, Thomnak a művészetekre gyakorolt hatásáról. Megtudhattuk tőle, hogy (némileg talán meglepő módon) Salvador Dali festőművész rajongott Thomért, és életének utolsó évében több képét (köztük életének legutolsó képét) is Thomnak ajánlotta.

A hozzászólásokban további érdekes részleteket tudhattunk meg a tudós életéről. David Ruelle fizikus, aki az IHÉS-en vele szomszédos irodában dolgozott, felelevenítette gyakori beszélgetéseiket, amelyekből kiderült, hogy mennyire nem értenek egyet például a valószínűségszámítás kvantumfizikabeli szerepéről. Thom rendszerint a (korábban mások mellett Albert Einstein által is képviselt) determinisztikus, „valószínűség-mentes” fizika mellett érvelt, míg Ruelle (a modern statisztikus fizika egyik legjelesebb képviselője) ez ellen. Kiemelte azonban, hogy nézeteik különbözőségeinek ellenére személyes kapcsolatuk kitűnő volt. Étienne Ghys ennek kapcsán megemlített egy másik érdekességet, miszerint Thom és a vele egyidőben szintén az IHÉS-en tevékenykedő Alexander Grothendieck algebrai geométer között ki sem alakult érdemi tudományos párbeszéd. Ennek oka minden bizonnyal különböző hozzáállásukban gyökerezett: míg Thom más tudományokban is előszeretettel alkalmazott geometriai módszereket, addig Grothendieck ezzel éppen ellenkezőleg a geometria algebrizálásán munkálkodott.

Emlékkonferencia az IHÉS-en

Szeptember 20-22. között nemzetközi konferenciát rendeztek az IHÉS-en Thom kutatási területeiről[3]. Az elhangzott előadások közül itt csupán azokat ismertetjük, amelyek szorosan kapcsolódnak Thom matematikai munkájához.

Emmanuel Giroux előadásából megtudhattuk többek között, hogy a Morse-elméletet megalapozó cikk [2] nagyjából Thommal egyidőben született meg: ugyan csak 1925-ben közölték, ám már 1923 decemberében benyújtásra került. Ez az elmélet alapvetően meghatározó volt Thom egész matematikai gondolkodásmódjában. Erre például megemlítette Thom 1957-es ötletét (amely nyomtatásban itt található meg: [1]), amelyben Morse-elméleti módszerrel látja be Lefschetz tételét komplex projektív varitások hipersík-metszetének homológiacsoportjairól.

Dennis Sullivan (a 2022. évi Abel-díj kitüntetettje) előadásának első részében a szinguláris sokaságok lokális alakjáról beszélt Thom [6] cikkét felidézve. Később áttért Thomnak a Steenrod-kérdésre adott példájára: ez egy olyan 7-dimenziós homológiaosztály egy 10-dimenziós sokaságban, amely semmiképpen sem reprezentálható mint valamely 7-sokaság képe.

Daniel Bennequin előadásában – Thom nyomán – az információ és a topológiai bonyolultság kapcsolata mellett érvelt, ezáltal kapcsolódva a pszichológiában Roger Shepard alapította irányzathoz. Említést tett Hermann Grassmann munkásságáról is, aki Thomhoz hasonlóan egyaránt alkotott a matematikában (az ő munkájából eredt a lineáris algebra későbbi szabatos megalapozása Giuseppe Peano és Hermann Weyl által), a nyelvészetben (szanszkrit–német szótár és a Rigvéda német fordítása) és a pszichológiában (a színek keverése alapszínekből és percepciójuk). Előadása végén ismertette saját kutatásainak eredményét a sztochasztikus információ topológiai értelmezéséről.

Az esemény fénypontjaként Jean-Pierre Bourguignon, az IHÉS korábbi igazgatója, felidézte Thom életútjának fő állomásait (Montbéliard, Strasbourg, Bures-sur-Yvette), személyes visszaemlékezéseket olvasott fel pályatársaktól és tanítványoktól, fényképeket és videófelvételeket játszott le életéről és az általa inspirált műalkotásokról.

Irodalomjegyzék

[1] A. Andreotti, T. Frankel, *The Lefschetz Theorem on Hyperplane Sections*, Ann. Math. (3) **69** 713–717.

[2] M. Morse, *Relations between the critical points of a real function of n independent variables*, Trans. Amer. Math. Soc. **27** (1925), no.3, 345–396.

[3] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables* Comment. Math. Helv.**28** (1954), 17–86.

[4] R. Thom *Les singularités des applications différentiables* Séminaire Bourbaki **3** (1956), Exp. No. 134, 357–369. Société Mathématique de France, Paris

[5] R. Thom, *Topological models in biology* Topology, 8 (1969) pp. 313–335.

[6] R. Thom, *Ensembles et morphismes stratifiés*, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 240–284.

[7] R. Thom, *Halte au hasard, silence au bruit*, Le Débat 1980/3 (no. 3.), 119–132.

Szabó Szilárd
Budapesti Műszaki Egyetem, Matematika Intézet

Lábjegyzetek

---

[1] https://www.academie-sciences.fr/fr/Colloques-conferences-et-debats/rene-thom-geometre-par-excellence.html
[2] https://encyclopediaofmath.org/wiki/Thom catastrophes
[3] https://indico.math.cnrs.fr/event/9880/timetable/

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Böröczky Károly J. 2023. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Az Erdős Center első két éve

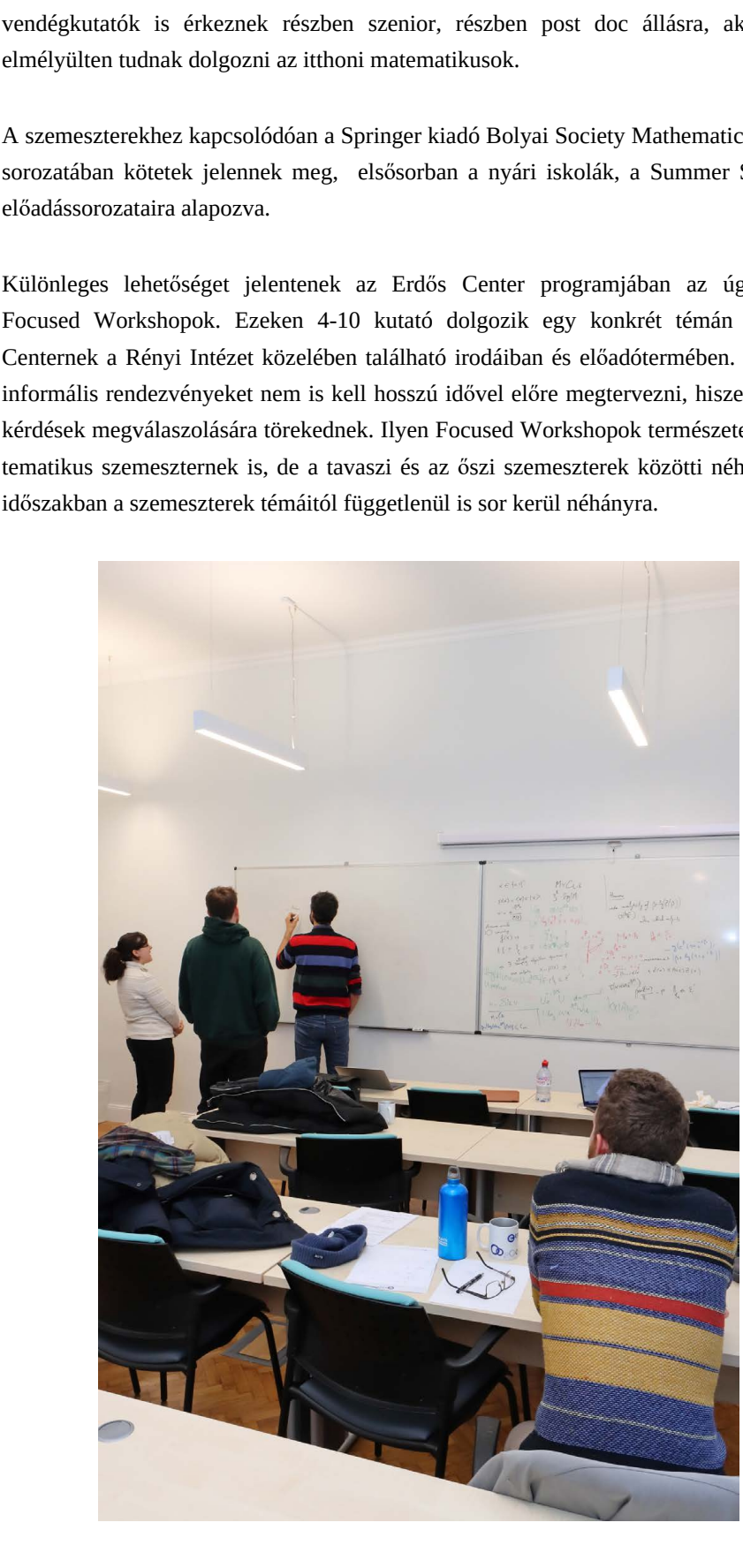
Az Erdős Center megalapítása és céljai

Majd 75 éves történelme során a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet mindig is egyik fő feladatának tekintette, hogy a magyarországi matematika minél szorosabban kapcsolódhasson a világ élvonalát jelentő kutatásokhoz. Már az alapító, Rényi Alfréd igazgatósága alatt is igen sok nemzetközi konferenciának adott otthon az Intézet, többet közösen szervezve az itthoni egyetemekkel. Az Erdős Center, amely a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet jelenlegi igazgatója, Stipsicz András kezdeményezésére jött létre 2021-ben, ennek a szép hagyománynak ad keretet, ideális környezetet teremtve a legelismertebb kutatók és a fiatal tehetségek fogadásásra, a matematika műveléséhez elengedhetetlen informális együttgondolkodásra, továbbá szélesebb tömegeket érintő előadások és konferenciák szervezésére.

Az Erdős Center hasonlóan működik, mint más matematikai konferenciaközpontok, mint például a kaliforniai MSRI, az angliai Newton Center, a németországi Hausdorff Center vagy a svédországi Institut Mittag-Leffler. Igy ősszel és tavasszal is sor kerül tipikusan egy-egy tematikus szemeszterre, bár van olyan félév, amelynek során két mini-szemeszter kerül megszervezésre. Egy szemeszternek általában két-két Summer School (kb. 40-80 PhD diákkal/post doc-kal) és a hozzájuk kapcsolódó intenzív workshop (kb. 40-40 résztvevővel) jelenti a gerincét. Egy-egy szemeszter kapcsán vendégkutatók is érkeznek részben szenior, részben post doc állásra, akikkel így elmélyülten tudnak dolgozni az itthoni matematikusok.

A szemeszterekhez kapcsolódóan a Springer kiadó Bolyai Society Mathematical Studies sorozatában kötetek jelennek meg, elsősorban a nyári iskolák, a Summer School-ok előadássorozataira alapozva.

Különleges lehetőséget jelentenek az Erdős Center programjában az úgynevezett Focused Workshopok. Ezeken 4-10 kutató dolgozik egy konkrét témán az Erdős Centernek a Rényi Intézet közelében található irodáiban és előadótermében. Ezeket az informális rendezvényeket nem is kell hosszú idővel előre megtervezni, hiszen aktuális kérdések megválaszolására törekednek. Ilyen Focused Workshopok természetes részei a tematikus szemeszternek is, de a tavaszi és az őszi szemeszterek közötti néhány hetes időszakban a szemeszterek témáitól függetlenül is sor kerül néhányra.



Közös munka az Erdős Centerben (Szilágyi Gergely fotója)

Az Erdős Center egyik központi célja az egész magyarországi matematika és az itthoni egyetemek lehetőségeinek gazdagítása. Rögtön a legelső szemesztertől kezdődően aktívan vettek részt a szemeszterek és a workshopok szervezésében is egyetemi kutatók, és a Summer School-ok hallgatóinak jó része magyarországi PhD hallgató vagy fiatal kutató.

A fiatal matematikusok látókörének szélesítése rendkívül fontos feladatunk. Az eddigi nyári iskoláink nagyon jól sikerültek, időnként alig fért be a hallgatóság a Rényi Intézet Nagytermébe.

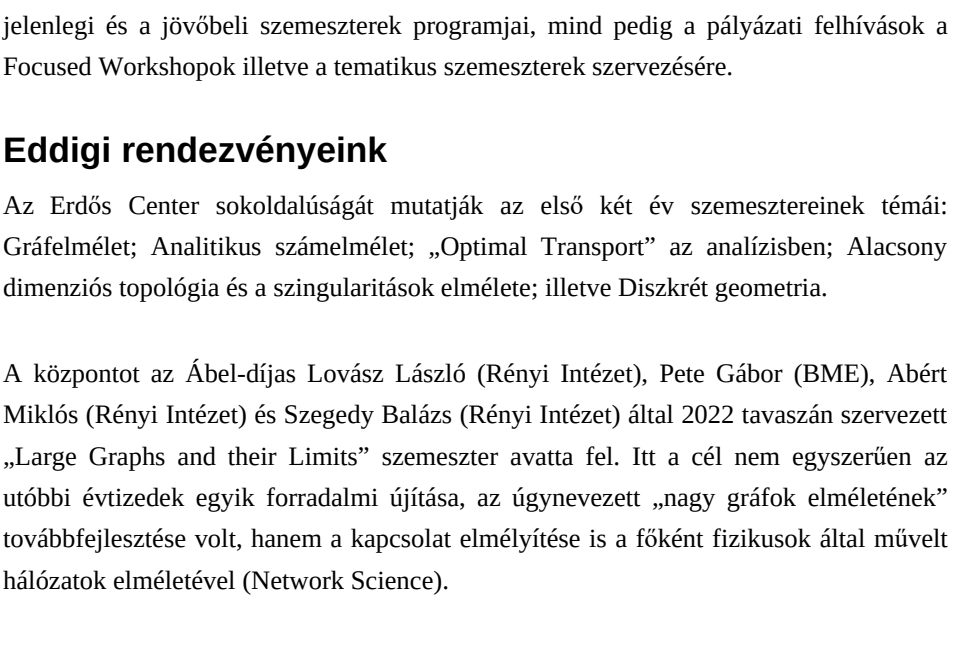
Az Erdős Centert jelenleg az Alfréd Rényi Matematikai Kutatóintézet finanszírozza részben a HUN-REN Magyar Kutatási Hálózat által biztosított költségvetéséből, másrészt az Intézetben futó EU-s ERC és egyéb magyar pályázatokból. Miután a konferenciaközpont már bizonyította eredményességét, azt tervezzük, hogy indulunk olyan nagyobb külsős pályázatokon is, amelyek kifejezetten az Erdős Központot támogatnák.

Az Erdős Centerről részletes információt szolgáltat a https://erdoscenter.renyi.hu/ honlap, ahol megtalálhatók mind a múltbeli, a jelenlegi és a jövőbeli szemeszterek programjai, mind pedig a pályázati felhívások a Focused Workshopok illetve a tematikus szemeszterek szervezésére.

Eddigi rendezvényeink

Az Erdős Center sokoldalúságát mutatják az első két év szemesztereinek témái: Gráfelmélet; Analitikus számelmélet; „Optimal Transport" az analízisben; Alacsony dimenziós topológia és a szingularitások elmélete; illetve Diszkrét geometria.

A központot az Ábel-díjas Lovász László (Rényi Intézet), Pete Gábor (BME), Abért Miklós (Rényi Intézet) és Szegedy Balázs (Rényi Intézet) által 2022 tavaszán szervezett „Large Graphs and their Limits" szemeszter avatta fel. Itt a cél nem egyszerűen az utóbbi évtizedek egyik forradalmi újítása, az úgynevezett „nagy gráfok elméletének" továbbfejlesztése volt, hanem a kapcsolat elmélyítése is a főként fizikusok által művelt hálózatok elméletével (Network Science).



Lovász László előadása az Erdős Centerben (Szilágyi Gergely fotója)

2022 őszén két mini-szemeszterre is sor került. Az egyik témája a klasszikus, a már több mint egy évszázada intenzíven művelt automorf formák, amely a számelmélet központi jelentőségű területe. Ennek a mini-szemeszternek szervezői az Ábel-díjas Szemerédi Endre (Rényi Intézet), Özlem Imamoglu (ETH Zürich), Tóth Árpád (ELTE), Zábrádi Gergely (ELTE), Harcos Gergely (Rényi Intézet) és Maga Péter (Rényi Intézet). A másik 2022 őszi mini-szemeszter az „Optimal transport" elméletére koncentrált, amelyet a közgazdaságtanban, képalkotásban, PDE-ben, analízisben és a geometriában egyaránt használnak. Ezt a programot Jan Maas (IST Austria), Simone Rademacher (IST Austria), Titkos Tamás (Rényi Intézet) és Virosztek Dániel (Rényi Intézet) szervezték.

A 2023. év tavaszi programja „Singularities and Low Dimensional Topology" rendezvénysorozat, amelyet Vértesi Vera (Uni Wien), Javier Fernández de Bobadilla (BCM, Spanyolo.), Szabó Zoltán (Princeton), Marco Marengon (Rényi Intézet), Némethi András (Rényi Intézet) és Stipsicz András (Rényi Intézet) szervezett. Az alacsony, azaz 3- vagy 4-dimenziós sokaságok elmélete a matematika egyik legintenzívebben kutatott területei közé tartozik, így rendkívül nagy volt az érdeklődés. A szemeszter hozzásegített ahhoz is, hogy ez a nagyvilágban központinak számító téma Magyarországon is elterjedhessen.

Ezzel ellentétben a magyarországi matematika egyik erőssége – nagyjából az utóbbi 80 évben –.a most folyó „Discrete Geometry and Convexity" szemeszter témája, amelyet Pach János, Bárány Imre, Naszódi Márton, Tardos Gábor és Tóth Géza szerveznek. Ennek megfelelően erre a szemeszterre is eljönnek a téma elismert művelői, és itt nagy számban vesznek részt magyarországi kutatók is.

Talán ez a kis összefoglaló is mutatja, milyen intenzív és színes munka folyik az Erdős Center keretei között. Mindent megteszünk azért, hogy nemzetközi mércével is jól felszerelt közegben, otthonos és inspiráló légkörben alkothassnak a magyar és a nagyvilágból idesereglett kutatók.

Böröczky Károly J., az Erdős Center igazgatója

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Molnár Lajos, Stipsicz András: 2023. DECEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

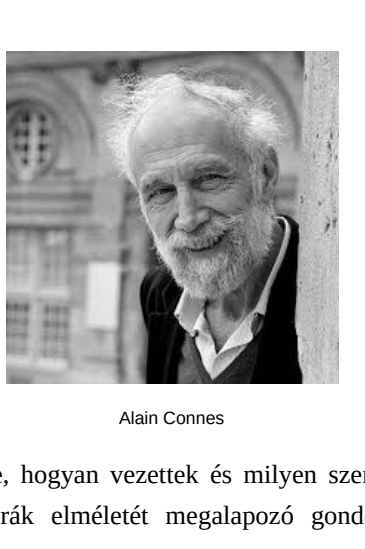
Neumann-emlékülések Budapesten és New Yorkban

Neumann János szobra Budapesten, a XI. kerületi Infoparkban, Szathmáry Gyöngyi alkotása. (Készítette: Both Előd a(z) magyar Wikipédia projektből, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=47207314)

2023-ban ünnepli a világ Neumann János születésének 120-adik évfordulóját. A megemlékezésből természetesen a Magyar Tudományos Akadémia sem maradt ki. Szeptember 14-én az MTA támogatásával a Neumann János Számítógéptudományi Társaság által szervezett egész napos konferenciának adott otthont a Széchenyi István téri székház.

Matematikai programmal pedig a Rényi Alfréd Matematikai Intézet készült; ahol négy előadással emlékeztünk Neumann János matematikai munkásságának egy-egy szeletére. Ezek témái a halmazelmélet, a matematikai logika, az ergodelmélet illetve az operátoralgebrák elméletének területeire estek. Az eseményről a Rényi Intézet Neumann120 honlapja tájékoztat, és mind a négy előadás visszanézhető a Rényi Video Portálján. Közülük itt az elsőt ismertetjük.

Ennek előadója Alain Connes volt, aki a 20. század második felének és jelen korunknak is egyik legkiemelkedőbb matematikusa. Alan Connes az operátoralgebrák elméletében végzett alapvető jelentőségű munkáiért és a nemkommutatív geometria területének létrehozásáért 1983-ban Fields-érmet kapott. Eredményei nagy hatásúak a kvantum- és részecskefizika bizonyos területein is, valamint az általa kidolgozott eszközök a Riemann-hipotézissel kapcsolatos kutatásokban is komoly jelentőséggel bírnak.



Alain Connes

Előadásában azt mutatta be, hogyan vezettek és milyen szerepet játszottak Neumann Jánosnak az operátoralgebrák elméletét megalapozó gondolatai a nemkommutatív geometria megszületésében.

Az előadás első része a Neumann-faktorokról szólt (ezen operátoralgebrák közös jellemzője, hogy algebrai centrumuk triviális). Az előadó elmondta, hogyan merült fel a faktorok fogalma Murray és Neumann 1936 és 1943 között írt „On rings of operators" címmel megjelent, az operátoralgebrák elméletét megindító cikksorozatának első darabjában, a kvantummechanikai rendszerek részrendszereinek matematikai leírásával kapcsolatban.

Neumann és társszerzője a faktorokat három csoportba sorolta. Szeparábilis Hilbert-tér esetén az I. típusúak pontosan a teljes mátrixalgebrák illetve a Hilbert-tér teljes operátoralgebrája. A II. típusú faktorok már jóval komplikáltabbak. Ilyen faktoron megadható egy ún. dimenziófüggvény, amelynek az értékei nem diszkrétek, hanem „folytonosak", a $[0,1]$ vagy a $[0,\infty]$ intervallumot futják be. A III. típusba eső faktorok pedig azok, amelyek nem tartoznak az I-II. csoport egyikébe sem. Hogy egyáltalán létezik ilyen faktor, azt Neumann Jánosnak 1940-ben sikerült bizonyítania. (A történet hazai vonatkozásaként említjük azt a nagy jelentőségű eredményt, amit az akkor Szegeden frissen doktorált Pukánszky Lajos ért el 1956-ban. Nevezetesen példát adott két nem izomorf III. típusú faktorra. Az eredményt a Publ. Math. (Debrecen) folyóirat közölte.)

Nagy lendületet adott a III. típusú faktorok mély vizsgálatához Araki egy 1964-ben publikált munkája, e szerint az elméleti fizikában fellépő Neumann algebrák többsége éppen III. típusú.

A fiatal Alain Connes igazi áttörést jelentő eredményeket ért el a területen. Az előadásban elhangzott, hogy először egy kvantum statisztikus fizikai probléma kapcsán Tomita és Takesaki eredményeinek segítségével 1972-ben, doktori értekezésében megmutatta, hogy valamennyi Neumann-algebra rendelkezik egy bizonyos belső dinamikával: automorfizmusainak van egy olyan kitüntetett egyparaméteres csoportja, ami lényegében egyértelműen meghatározott az illető algebra által. Erre az eredményre támaszkodva, Neumann-algebrákra vonatkozóan felfedezett két algebrai invariánst, illetve kapcsolatot talált a III. típusú algebrák és II. típusúak között. 1976-ra pedig eljutott az ún. hipervéges III. típusú faktorok (ezek olyanok, amelyeket végesdimenziós részalgebráinak egy bővülő sorozata generál) teljes klasszifikációjáig. Ezek a III_λ faktorok, ahol $\lambda \in [0,1]$ (pontosabban, a III_1 típusú hipervéges faktor egyértelműségének kérdése nyitva maradt, azt Haagerup tisztázta 1987-ben). Connes ezen eredményeit a 20. századi matematika csúcsteljesítményei között szokás említeni. (További hazai vonatkozásként megjegyezzük, hogy Connes a fentiekhez vezető munkáinak egy darabját a szegedi Actában publikálta. Az 1975-ben beküldött cikk 1977-ben jelent meg.)

Az előadás második része operátoralgebráknak a differenciálgeometriában való megjelenéséről, a nemkommutatív geometria születéséről szólt. Nevezetesen Alain Connes-nak arról az 1978-ban publikált eredményéről, amely szerint sokaságokon adott fóliázások természetes módon generálnak ún. véletlen operátorok alkotta algebrákat (ezen véletlen operátoroknak nevezett objektumok pontosabban operátorseregek, amiknek elemei a fóliázás leveleihez tartozó L^2-tereken ható operátorok). Az említett algebrák Neumann-algebrákként tekinthetők, és kiderült, hogy már az egyszerű fóliázásokhoz is bonyolult ilyen algebrák társulnak. Sőt, minden III. típusú faktor fellép valamilyen fóliázáshoz kapcsolódóan. Ezek az eredmények adják Connes nemkommutatív geometriájának kiindulópontját. Az alapészrevétel talán úgy jellemezhető, hogy Descartes-nak a tér koordinátázására vonatkozó gondolatát Connes kiterjesztette „nemkommutatív koordináták" használatára.

A következőkben az előadó rámutatott, hogy Neumann János operátoralgebrai munkái nemcsak a geometria egy újfajta szemléletéhez vezettek hanem egy új kalkulushoz is. Nevezetesen, Connes a Newton által megfogalmazott infinitezimális változók fogalmát alapul véve bevezette a kvantumelméleti infinitezimális változókat (amelyek éppen az ún. kompakt operátorok), és kidolgozott egy kapcsolódó operátorelméleti integrálfogalmat (megemlítette annak érdekes tulajdonságai közül azt, hogy az integrál független az integrálban szereplő infinitezimálistól). Ezzel összefüggésben az előadás utolsó részében az előadó beszélt azon munkáiról, amelyekben a Riemann-geometriai távolság alapvető fogalmát kvantumos, operátoralgebrai környezetre terjesztette ki és vázolta ennek fizikai hátterét.

A matematika és a fizika számos területét érintő előadását Alain Connes egy táblázattal zárta, amiben bemutatta, hogy a nemkommutatív geometria mára a matematika szerteágazó területeivel áll kapcsolatban.

A Rényi Intézetben lezajlott esemény után New Yorkban a Főkonzulátus épülete adott otthont november 8-án egy filmvetítéssel egybekötött megemlékezésnek, amelynek során Lax Péter magyar-amerikai matematikus (az Abel-díj 2005. évi kitüntetettje) megkapta a „Magyar Érdemrend parancsnoki keresztje a csillaggal" kitüntetést. (Erről a hírt a Rényi honlapján olvashatják.)

Lax professzor idén töltötte be 97. életévét, a fia vette át nevében az elismerést. Beszédében felemlítette, hogy amikor Lax Péter 1941-ben, 15 évesen New Yorkba érkezett, Neumann János is tanácsokkal látta el a kiemelkedő tehetségű fiatal matematikust további tanulmányait illetően. November 9-én pedig a New York University egyik termében egész napos konferencia foglalkozott Neumann János szerteágazó munkásságával, annak későbbi hatásával, illetve olyan időszerű problémák megvitatásával, mint a mesterséges intelligencia térnyerése és ennek hatása a társadalomra.

A konferencián a Rényi Intézet képviseletében Stipsicz András osztotta meg a hallgatósággal a Jones-polinom felfedezésének történetét: a Neumann-algebrák elmélete vezette Vaughan Jones Új-Zélandi matematikust egy új csomóinvariáns felfedezésére. A Jones-polinom új kutatási területet, sokaságok és csomók „kvantum-invariánsainak" kifejlesztését indította el. Jones felfedezéséért 1990-ben Fields Érmet kapott; sőt, ugyanezen alkalommal Edward Witten elméleti fizikust a Jones-polinom kvantumtér-elmélettel való definíciójáért ugyanebben az elismerésben részesítették. A Jones-polinom története azonban itt nem ért véget, 2000-ben Mikhal Khovanov egy olyan homológiaelméletet talált, amelynek Euler-karakterisztikája a Jones-polinom, majd 2015-ben Lipshitz és Sarkar olyan tereket tudtak csomókhoz rendelni, amelyeknek szinguláris homológiája épp a Khovanov-homológia. Ilymódon Neumann János majd egy évszázada bevezetett algebrái napjaink matematikájára is inspiráló és megtermékenyítő hatással vannak, mutatva a Neumann-algebrák matematikában és fizikában elfoglalt központi szerepét.

Molnár Lajos, Szegedi Egyetem, Bolyai Intézet, Analízis Tanszék vezetője

Stipsicz András, Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet igazgatója

The Man from the Future
NEUMANN SYMPOSIUM
The Lasting Legacy of John von Neumann

2023. november 27-én a hollandiai *Delfti Műszaki Egyetem* adott otthon az Ember a jövőből – Neumann János maradandó öröksége című Neumann-szimpóziumnak. *A szerk.*

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

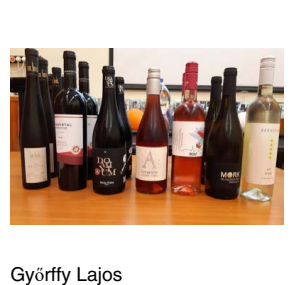
A **GAZDA(G)SÁG** NEVET ADTUK A **GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET ROVATNAK**, AMELYBEN BEMUTATJUK, HOL, MIKÉPPEN HASZNÁLJÁK FEL A MATEMATIKÁT, MILYEN GAZDAG IS AZ A KÖR, AMELYIK ÉRINTI EZT A TUDOMÁNYÁGAT. (ROVATSZERKESZTŐK: *ILLÉS TIBOR, MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR ÉS RÖST GERGELY.*)

Figula Ágota, Silling Szintia Adriána

2023. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Egy geometriai kapcsolat a Fibonacci-sorozat és a Lucas-számok sorozata között

A Fibonacci-számok sokak érdeklődését felkeltik, hiszen többféle módon összekapcsolják a természetben előforduló jelenségekkel is. Itt például a méhek családfája került szóba. A szerzők egy érdekes geometriai kapcsolatra is rábukkantak: *Silling Szintia* a Debreceni Egyetem Turizmus-vendéglátás szakán tanul, ezért külön érdeklődéssel fogadtuk matematika témájú cikkét, amelyet konzulensével, *Figula Ágotával* közösen írtak.

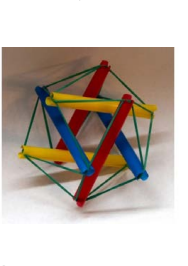


Győrffy Lajos

2023. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

A Bolyai Borkóstolók hatéves története

Idén júniusban 14. alkalommal tartották meg a Bolyai Borkóstolót, a szegedi matematikusok immár hagyománnyá vált, érdekes matematikával és kötetlen társasjátékozással színesített (bor)kulturális alkalmát. A jó hangulatú „matekos borkóstolón” legutóbb Makay Géza szolgáltatta a matematikai tartalmat, a borokról pedig Varga Zoltán Gábor, a BorPont cég tulajdonosa mesélt érdekességeket. Örömmel lát a következő alkalommal minden érdeklődőt a szervező, *Győrffy Lajos*.



Gáspár Merse Előd

2023. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Tensegrity a karácsonyfán

Ez micsoda? – kérdezték tőlem gyerekek és szülők, akik egy közös adventi készülődésen odasereglettek köröm, amikor meglátták előttem a színes szívószálakat és gumikarikákat, amikből valami különös térbeli szerkezet kezdett kialakulni. Amikor megmondtam, hogy ez egy tensegrity szerkezet, akkor megint csak az volt a kérdés: Az meg micsoda? Aki szeretne ilyet készíteni a karácsonyfára, az olvassa el *Gáspár Merse Előd* írását.

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Adatkezelés

Elfogadom.

Figula Ágota, Silling Szintia Adriána 2023. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Egy geometriai kapcsolat a Fibonacci-sorozat és a Lucas-számok sorozata között

1. Bevezető

A híres Fibonacci-sorozat évszázadok óta magával ragad matematikusokat, művészeket, tervezőket és tudósokat. A Fibonacci-sorozat kezdő tagjai a következők:

$$F_0=0,\qquad F_1=1,\qquad F_2=1,\qquad F_3=2,\qquad F_4=3,\qquad F_5=5,\qquad \dots$$

és definíciója rekurzívan adható meg a következő módon:

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\qquad n>1. \tag{1}$$

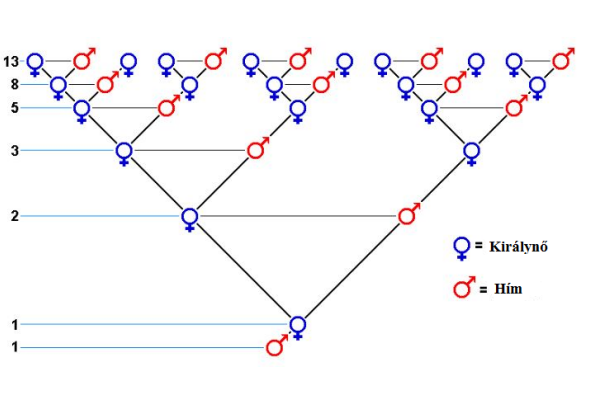
A Lucas-számokból álló sorozat ugyanezzel az (1) rekurzív képlettel adható meg, de a kezdő tagja eltér a Fibonacci-sorozatétól. Így a Lucas-számok sorozatának első néhány tagja:

$$L_0=2,\qquad L_1=1,\qquad L_2=3,\qquad L_3=4,\qquad L_4=7,\qquad L_5=11,\qquad \dots$$

A Fibonacci-számsorozatot alaposan tanulmányozták és több példa van arra, hogy a természetben felfedezhetők olyan jelenségek, amelyekben ennek a számsorozatnak a tagjai megjelennek. A 2. fejezetben bemutatjuk, hogy a méhek családfájában megfigyelhető az (1) rekurzió. Ezt Fibonacci, Leonardo da Pisa (1170–1250) olasz matematikus is tanulmányozta. A 3. fejezetben a Fibonacci-sorozat tagjait megadó explicit formulát, a Binet-formulát vezetjük le, ami kapcsolatot teremt a sorozat és az aranymetszés arányszáma között. Továbbá levezetünk néhány olyan összefüggést a Fibonacci-sorozat és a Lucas-számokból álló sorozat tagjai között, amelyet alkalmazni fogunk a 4. fejezetben. A 4. fejezetben egy geometriai kapcsolatot mutatunk be a Fibonacci-sorozat és a Lucas-számokból álló sorozat között.

2. A Fibonacci-sorozat és a méhek családfája

A Fibonacci-sorozatot önmagában is különlegesen érdekes tanulmányozni, ugyanakkor rádöbbent annak a világnak az összetettségére és rendjére, amelyben élünk ([4]). Amikor Fibonaccit megkérdezték, hogy miért vizsgálja ezeket a számokat és a hányadosukat, ő ezt válaszolta: „Egy napon ezek a számok felfedik a természet titkát és érthetővé teszik, hogy egy hím méhnek miért nincs apja” ([2]). A hím méhek ugyanis a megtermékenyítetlen petesejtekből kelnek ki. Ezzel ellentétben a nőstény méhek – amelyek lehetnek anyaméhek, azaz királynők, vagy dolgozók – a hímek által megtermékenyített petesejtekből jönnek a világra. Az 1. ábra a méhek érdekes családfáját mutatja be.



1. ábra. A méhek száma a különböző generációs szinteken és a Fibonacci-sorozat tagjai

Az ábra egy kiválasztott hím méh felmenőinek számát szemlélteti. Az ábrán alul, a 0. generációs szinten van a kiválasztott hím. Neki csak anyja van, egy nőstény méhkirálynő, az 1. generációban. Ennek a nőstény méhnek két szülője van, egy hím méh és egy nőstény méhkirálynő. Ők találhatók a 2. generációs szinten. Ők ketten a kiválasztott hím méh nagyszülei. A 2. generációs szinten álló nőstény méhkirálynőnek, két szülője van, míg ezen a szinten a hímnek csak egy (a királynő), így két nőstény méh és egy hím méh áll a 3. generációs szinten, és így tovább (lásd [5]). A méhek családfája egyedülálló, hiszen mind a méhkirálynők mind pedig a hímek generációiban a Fibonacci-sorozat tagjai szerepelnek. Jelölje K_n, illetve H_n az n-ik generációban a méhkirálynők, illetve a hím méhek számát, ha $n>0$. Legyen $K_0=0$, $H_0=1$. Ekkor az $(n+1)$-ik generációban a méhkirálynők száma, illetve a hím méhek száma

$$K_{n+1}=K_n+H_n,\ \text{ illetve }\ H_{n+1}=K_n. \tag{2}$$

Mivel a (2) második egyenlőségéből tudjuk, hogy $H_n=K_{n-1}$, így az első egyenlőségből azt kapjuk, hogy $K_{n+1}=K_n+K_{n-1}$, azaz a méhkirálynők számára az (1) rekurzió érvényes. Mivel

$$H_{n+1}=K_n=K_{n-1}+H_{n-1}=H_n+H_{n-1},$$

ezért $n\geq 1$-től az egymást követő generációs szinteken a hím méhek száma is a Fibonacci-számok sorozata szerint növekszik.

3. A Binet-formula

A Fibonacci-sorozat a matematikában az egyik legismertebb másodrendben rekurzív sorozat. Tekintsük egy mértani sorozatot, jelölje a_1 a sorozat első tagját és q a hányadosát. A sorozat n-edik tagját az $a_n=a_1q^{n-1}$ összefüggés adja meg. Határozzuk meg, hogy milyen q esetén kapunk Fibonacci-sorozatot, azaz milyen q esetén teljesíti egy mértani sorozat az (1) rekurziós képletet ([3]). Ekkor igaz, hogy

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2},$$

azaz

$$a_1q^{n-1}=a_1q^{n-2}+a_1q^{n-3}.$$

Ha $a_1\neq 0, q\neq 0$, akkor egyszerűsítés után a

$$q^2=q+1 \tag{3}$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek két irracionális valós gyöke van: $\alpha:=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ami a híres aranymetszés arányszáma, és $\beta:=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. A [6] forrás alapján a Fibonacci-sorozat és az aranymetszés közötti kapcsolat Kepler egy 1608-ban írt levelében szerepelt, illetve már a 16. század elején ismert volt.

Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856) francia matematikus a Fibonacci-sorozat tagjaira egy explicit formulát adott. Felhasználva a $q^2=q+1$ összefüggést q hatványaira, azt nyerjük, hogy

$$q^3=q\cdot q^2=q(q+1)=q^2+q=q+1+q=2q+1$$

$$q^4=q(2q+1)=2q^2+q=2(q+1)+q=3q+2$$

$$q^5=q(3q+2)=3q^2+2q=3(q+1)+2q=5q+3$$

$$q^6=q(5q+3)=5q^2+3q=5(q+1)+3q=8q+5.$$

3.1. Lemma. *Tetszőleges n pozitív egészre $q^n=F_n\cdot q+F_{n-1}$.*

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukció alkalmazásával végezzük el. $n=1$ esetén a $q=q$ azonosságot kapjuk. $n=2$ esetén a $q^2=q+1$ összefüggéshez jutunk. Tegyük fel, hogy $n=k$-ra igaz az állítás, azaz teljesül, hogy $q^k=F_k\cdot q+F_{k-1}$. Ekkor

$$q^{k+1}=q\cdot q^k=q(F_k\cdot q+F_{k-1})=F_k\cdot q^2+F_{k-1}\cdot q=$$

$$=F_k(q+1)+F_{k-1}\cdot q=(F_k+F_{k-1})q+F_k=F_{k+1}\cdot q+F_k.$$

Ezzel megkaptuk az állítást $n=k+1$ esetén. Ez bizonyítja a lemmát. □

Mivel α és β megoldása a (3) másodfokú egyenletnek, ezért a 3.1. Lemma miatt igaz, hogy

$$\alpha^n=F_n\alpha+F_{n-1},\quad \beta^n=F_n\beta+F_{n-1}.$$

A második egyenlet kivonása az első egyenletből a következő eredményt adja:

$$\alpha^n-\beta^n=F_n(\alpha-\beta).$$

Mivel $\alpha-\beta=\sqrt{5}$ ebből adódik a Binet-formula:

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n). \tag{4}$$

A következő lemma analóg összefüggést ad a Lucas-számokból álló sorozat tagjai valamint az α és β számok között ([1], Lemma 3.3.2, p. 14).

3.2. Lemma. *Minden $n\geq 0$ esetén teljesül, hogy $L_n=\alpha^n+\beta^n$.*

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük el. Ha $n=0$, akkor $L_0=\alpha^0+\beta^0=1+1=2$. Ha $n=1$, akkor $L_1=\alpha^1+\beta^1=1$.

Tegyük fel, hogy $n=k$ esetén igaz az $L_k=\alpha^k+\beta^k$ összefüggés. Belátjuk, hogy $n=k+1$-re is érvényes, azaz $L_{k+1}=\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}$ teljesül. Felhasználva az (1) rekurziót, azt kapjuk, hogy:

$$L_{k+1}=L_k+L_{k-1}=\alpha^k+\beta^k+\alpha^{k-1}+\beta^{k-1}=\alpha^k(1+\alpha^{-1})+\beta^k(1+\beta^{-1}). \tag{5}$$

Mivel α és β megoldása a (3) egyenletnek, ezért $\alpha^2=\alpha+1$, illetve $\beta^2=\beta+1$. Osztva α-val, illetve β-val rendezés után nyerjük, hogy

$$\alpha^{-1}=\alpha-1\quad\text{és hasonlóan}\quad\beta^{-1}=\beta-1. \tag{6}$$

Ezt alkalmazva az (5) azonosság jobb oldalára, kapjuk, hogy

$$\alpha^k(1+\alpha-1)+\beta^k(1+\beta-1)=\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}.$$

Így az állítást bebizonyítottuk. □

A következőkben megvizsgálunk két, az utolsó fejezetben felhasznált összefüggést a Fibonacci-számok és a Lucas-számok kapcsolatára, amelyek bebizonyítására alkalmazzuk a (4) Binet-formulát.

3.3. Lemma. *Minden $n\geq 1$ esetén teljesül, hogy*

$$L_n=F_n+2F_{n-1}. \tag{7}$$

Bizonyítás. Az állítás jobb oldalát felírjuk a (4) Binet-formula segítségével:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)+2\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n+2\alpha^{n-1})-\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^n+2\beta^{n-1}). \tag{8}$$

Alkalmazva (6)-ot a (8) jobb oldalára, kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n(2\alpha-1)-\frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n(2\beta-1).$$

Mivel $2\alpha-1=\sqrt{5}$ és $2\beta-1=-\sqrt{5}$, ezért a jobb oldal egyenlő $\alpha^n+\beta^n$-nel, ami a 3.2. Lemma szerint bizonyítja az állítást. □

3.4. Lemma. *Minden $n\geq 2$ esetén teljesül, hogy*

$$L_n=F_{n+2}-F_{n-2}. \tag{9}$$

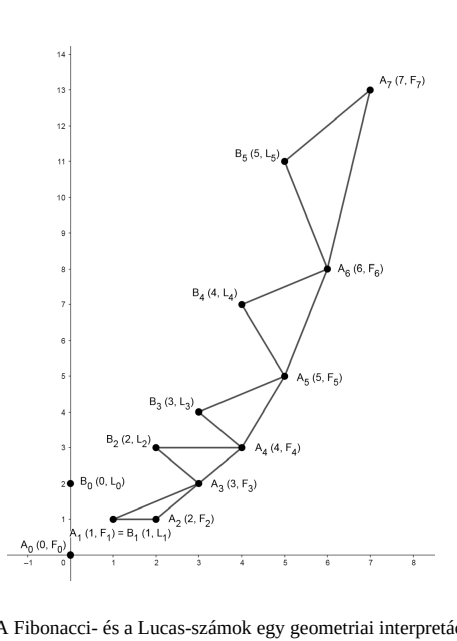
Bizonyítás. Az állítás jobb oldalát felírjuk a (4) Binet-formula segítségével:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2})-\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+2}-\alpha^{n-2})-\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^{n+2}-\beta^{n-2})=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n(\alpha^2-\alpha^{-2})-\frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n(\beta^2-\beta^{-2}). \tag{10}$$

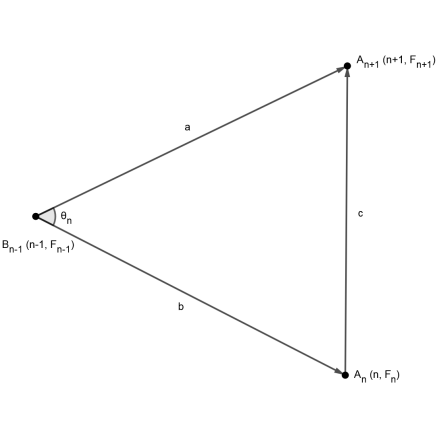
A (6) felhasználásával kapjuk, hogy $\alpha^2-\alpha^{-2}=(\alpha+\alpha^{-1})(\alpha-\alpha^{-1})=(2\alpha-1)=\sqrt{5}$ és $\beta^2-\beta^{-2}=(\beta+\beta^{-1})(\beta-\beta^{-1})=(2\beta-1)=-\sqrt{5}$. Így (10)-re azt nyerjük, hogy $\alpha^n+\beta^n$, ami a 3.2. Lemmát felhasználva éppen L_n. Ez bizonyítja az állítást. □

4. Egy geometriai kapcsolat a Fibonacci-sorozat és a Lucas-számok sorozata között



2. ábra. A Fibonacci- és a Lucas-számok egy geometriai interpretációja: a $B_n=(n, L_n)$, illetve az $A_n=(n, F_n)$ koordinátájú pontok

Érdekes geometriai kapcsolat fedezhető fel a 2. ábrán a Fibonacci- és a Lucas-számok felhasználásával létrehozott háromszögek sorozata között. Ha a derékszögű koordináta-rendszerben kijelöljük azokat a pontokat, amelyeknek x koordinátája $0,1,2,3,4,5,\dots$, y koordinátája pedig a megfelelő indexű Fibonacci-, illetve Lucas-szám, akkor a pontokat az ábrán látható módon összekötve háromszögeket kapunk: A 2. ábrán jelölje B_n az (n, L_n), illetve A_n az (n, F_n) koordinátájú pontokat. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyek csúcspontjai B_{n-1}, A_n, és A_{n+1}.



3. ábra. A B_{n-1}, A_n, A_{n+1} csúcspontú háromszög, amelynek θ_n a B_{n-1} csúcsnál levő szöge.

Jelölje rendre $\bar{a}$, $\bar{b}$ és $\bar{c}$ a $\overline{B_{n-1}A_{n+1}}$, $\overline{B_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_{n+1}}$ vektorokat (lásd 3. ábra). Legyen $n\geq 3$. A (9) összefüggést felhasználva kapjuk, hogy

$$\bar{a}=\overline{B_{n-1}A_{n+1}}=(n+1, F_{n+1})-(n-1, L_{n-1})=(2, F_{n+1}-L_{n-1})=$$

$$=(2, F_{n+1}-F_{n+1}+F_{n-3})=(2, F_{n-3}).$$

Az (1) és a (7) összefüggéseket alkalmazva

$$\bar{b}=\overline{B_{n-1}A_n}=(n, F_n)-(n-1, L_{n-1})=(1, F_n-L_{n-1})=(1, F_n-F_{n-1}-2F_{n-2})=$$

$$=(1, F_n-F_{n-1}-2F_n+2F_{n-1})=(1, -F_n+F_{n-1})=(1, -F_{n-2}).$$

Alkalmazva az (1) összefüggést azt kapjuk, hogy

$$\bar{c}=\overline{A_nA_{n+1}}=(n+1, F_{n+1})-(n, F_n)=(1, F_{n+1}-F_n)=(1, F_{n-1}).$$

A $B_{n-1}A_nA_{n+1}$ háromszög B_{n-1} csúcsánál levő θ_n szögének koszinuszára a koszinusztétel és az (1) segítségével azt kapjuk, hogy

$$\cos\theta_n=\cos(B_{n-1}A_nA_{n+1}\sphericalangle)=\frac{|\bar{b}|^2+|\bar{a}|^2-|\bar{c}|^2}{2\cdot|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{2-F_{n-3}\cdot F_{n-2}}{\sqrt{4+F_{n-3}^2}\sqrt{1+F_{n-2}^2}}.$$

A $B_{n-1}A_nA_{n+1}$ háromszögek, ahol $n\geq 3$, a következő állításokat elégítik ki ([7]).

4.1. Tétel. *(i) A B_{n-1} csúcsnál lévő θ_n szögek határértéke*

$$\lim_{n\to\infty}\theta_n=\pi.$$

(ii) A $B_{n-1}A_nA_{n+1}$ háromszögek oldalhosszainak hányadosai a következő határértékekhez tartanak:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|A_nA_{n+1}|}{|B_{n-1}A_{n+1}|}=\alpha^2,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{|B_{n-1}A_n|}{|B_{n-1}A_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|A_nA_{n+1}|}{|B_{n-1}A_n|}=\alpha.$$

Bizonyítás. Meghatározzuk a $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\theta_n)$ határértéket:

$$\lim_{n\to\infty}\cos(\theta_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2-F_{n-3}\cdot F_{n-2}}{\sqrt{4+F_{n-3}^2}\sqrt{1+F_{n-2}^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{F_{n-3}\cdot F_{n-2}}-1}{\sqrt{\frac{4}{F_{n-3}^2}+1}\sqrt{\frac{1}{F_{n-2}^2}+1}}=-1.$$

Mivel a $[0,\pi]$ intervallumon $\cos(\pi)=-1$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=\pi$. Ez bizonyítja az (i) állítást.

Most kiszámítjuk a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|A_nA_{n+1}|}{|B_{n-1}A_{n+1}|}$ határértéket:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|A_nA_{n+1}|}{|B_{n-1}A_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+F_{n-1}^2}}{\sqrt{4+F_{n-3}^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{1}{F_{n-3}^2}+\frac{F_{n-1}^2}{F_{n-3}^2}}{\frac{4}{F_{n-3}^2}+\frac{F_{n-3}^2}{F_{n-3}^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_{n-3}}.$$

Felhasználva a (4) Binet-formulát és azt, hogy $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1$ azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_{n-3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\sqrt{5}}}{\frac{\alpha^{n-3}-\beta^{n-3}}{\sqrt{5}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha^{n-3}-\beta^{n-3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^{n-3}}-\frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-3}}}{\frac{\alpha^{n-3}}{\alpha^{n-3}}-\frac{\beta^{n-3}}{\alpha^{n-3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^2-\beta^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-3}}{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-3}}=\alpha^2.$$

Tehát az állítás (ii) részében szereplő első határérték valóban α^2.

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|B_{n-1}A_n|}{|B_{n-1}A_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+F_{n-2}^2}}{\sqrt{4+F_{n-3}^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{1}{F_{n-3}^2}+\frac{F_{n-2}^2}{F_{n-3}^2}}{\frac{4}{F_{n-3}^2}+\frac{F_{n-3}^2}{F_{n-3}^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-2}}{F_{n-3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\sqrt{5}}}{\frac{\alpha^{n-3}-\beta^{n-3}}{\sqrt{5}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\alpha^{n-3}-\beta^{n-3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha^{n-2}}{\alpha^{n-3}}-\frac{\beta^{n-2}}{\alpha^{n-3}}}{\frac{\alpha^{n-3}}{\alpha^{n-3}}-\frac{\beta^{n-3}}{\alpha^{n-3}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha-\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-3}}{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-3}}=\alpha.$$

Tehát az állítás (ii) részében szereplő második határértéket is kiszámítottuk.

Végezetül meghatározzuk az (ii) rész harmadik, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|A_nA_{n+1}|}{|B_{n-1}A_n|}$ határértékét:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|A_nA_{n+1}|}{|B_{n-1}A_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+F_{n-1}^2}}{\sqrt{1+F_{n-2}^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{1}{F_{n-2}^2}+\frac{F_{n-1}^2}{F_{n-2}^2}}{\frac{1}{F_{n-2}^2}+\frac{F_{n-2}^2}{F_{n-2}^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\sqrt{5}}}{\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\sqrt{5}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^{n-2}}-\frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-2}}}{\frac{\alpha^{n-2}}{\alpha^{n-2}}-\frac{\beta^{n-2}}{\alpha^{n-2}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha-\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-2}}{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-2}}=\alpha.$$

Így a tétel állítását bebizonyítottuk. □

Irodalomjegyzék

[1] B. Barik, Lucas sequence, its properties and generalization. MSc Thesis, National Institute of Technology Rourkela (2013), http://ethesis.nitrkl.ac.in/5270/1/411MA2130.pdf .

[2] Bees and Fibonacci Sequence, Beekeeping and aquaculture, Module 6, Livestock, Unit 18, New Agriways, EDISCO Editrice, 1-3,

https://www.edisco.it/newagriways/wpcontent/uploads/sites/101/2019/07/36_Bees_and_Fibonacci_sequence.pdf

[3] B. Énekes, G. Kós, Néhány érdekesség a Fibonacci- és a Fibonacci-típusú sorozatokról, KöMaL, 2000/december, 517–523, http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=200117 .

[4] A. Grigas, The Fibonacci Sequence: Its History, Significance, and Manifestations in Nature, Senior Honors Theses. 334 (2013), https://digitalcommons.liberty.edu/honors/334 .

[5] T. Gross, A secret of bees, https://www.bristol.ac.uk/media-library/sites/engineering/engineering-mathematics/documents/modelling/teacher/bees_t.pdf

[6] R. Herz-Fischler, Letter to the Editor, Fibonacci Quart. 24 (4) (1986) 382.

[7] I. M. Radu, A geometric approach to Fibonacci and Lucas sequences. Parabola, 56 (1) (2020) 1–5.

Munkánkat a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (NKFI) K132951 támogatta.

Figula Ágota
Debreceni Egyetem, TTK, Matematikai Intézet
Silling Szintia Adriána
Debreceni Egyetem, GTK, Turizmus-vendéglátás szakos BSc hallgató

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Győrffy Lajos 2023. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

A Bolyai Borkóstolók hatéves története

Idén júniusban 14. alkalommal tartottuk meg a Bolyai Borkóstolót, a szegedi matematikusok immár hagyománnyá vált, érdekes matematikával és kötetlen társasjátékozással színesített (bor)kulturális alkalmát. A jó hangulatú „matekos borkóstolón" ezúttal Makay Géza szolgáltatta a matematikai tartalmat, a borokról pedig Varga Zoltán Gábor, a BorPont cég tulajdonosa mesélt érdekességeket.

A Bolyai Borkóstolók története a szegedi Eötvös Kollégium borkóstolóinak történetéből ágazik el, ahogy egy oltott szőlővessző az eredeti oltványból. Történt ugyanis, hogy már jó pár „Eötvösös" verses/zenés borkóstolót szerveztem, amikor elhívtam néhány matematikus kollégámat is. Előbbi alkalmakon minden bor „tételhez" az aktualitásokat figyelembe véve (pl. Nőnap, Költészet napja, Húsvét, vagy az aktuális évszak) egy-egy verset vagy zeneművet szolgáltattunk. A matematikus barátokkal közösen kifundált terv szerint pedig – talán kitalálható módon – **minden bor tételhez egy-egy matematika tételt, érdekességet, érdekes feladatot párosítottunk** (később csak az első három tételhez), ami valószínűleg egyedülálló párosítás a világon:

Bor és matematika.

Egy kis kitérőt hadd tegyek az **Eötvös Kollégium borkóstolóinak** története felé is, mert érdemes. Amikor 2007-ben bekerültem elsős matematika szakos hallgatóként a Kollégiumba, már néhány éve virágzó borkulturális élet folyt a falak között. **Pardi Norbert** ugyanis (azóta Pennsylvaniai biológus kutató, a friss Nobel-díjas Karikó Katalinnal dolgoznak együtt többek között a Covid oltáson is) minden hónapban tartott egy kóstolót vagy akár kirándulást is szervezett, olykor tájegységenként, olykor fajtánként, olykor csak vegyesen a kedvenceiből. Az utolsó egy-két évben a borokhoz zeneműveket is társított egy zongorista és hegedűs barátjával, ami egészen egyedi hangulatot teremtett a 30-40 fő érdeklődő számára. Innen jött később a verses-zenés kóstolónk ötlete is. Amikor Norbi már jó pár éve nem volt Szegeden, én pedig PhD hallgatóként senior lettem, 2016 őszén újraindítottam a havi rendszerességű kóstolókat az Eötvös Kollégiumban. Eleinte néhány lelkes (volt) kollégistával összefogva tartottuk, majd amikor látszott, hogy van igény rá, „profibb" segítség is kínálkozott éppen.

Az SZTE Móra Ferenc kollégium pincéjének büféjéből **Varga Zoltán Gábor** éppen akkoriban futtatta fel a BorPont vállalkozását. Zoli küldetésének érezte, hogy az egyetemista fiatalok is jó borokat igyanak (olcsón), ezért olyan borászokkal épített ki kapcsolatot, akik egy adott tájegységen nem a legismertebbek, de tudják hozni azt a szintet (jóval olcsóbban), amit a nagyok. Zoli személyesen ismeri a borászokat, pincészeteket, mesél a borkészítésről, a tájegységről, szőlőfajtáról, borászról és a konkrét tételről, összehasonlítva esetleg más borászok hasonló tételeivel. Kezdő borkóstolóknak is ugyanolyan örömmel magyaráz, mint a rutinosaknak. De még utóbbiaknak is mindig tud újat mondani. Vidám ember, már a megjelenésével jó hangulatot tud teremteni, amit különleges nevetésével még fokozni is tud a negyedik-ötödik bor környékén.

Általában egy klasszikus borsort kóstolunk, 7-8 tétellel: A bevezető könnyed, reduktív fehér vagy gyöngyözőborok után, testesebb fehér(ek), egy rozé, könnyed vörös, testesebb vörösök és a végén egy desszertbor, igény szerint a fehérek vagy vörösek felé billentve a hangsúlyt. A borok mellé friss bagett, szőlőmagolaj (ebbe lehet mártogatni a bagettet) és ásványvíz is dukál.

És hogy hogy jön ide a matematika? Mivel a résztvevők zöme matematikus kutató/oktató/hallgató, adja magát, hogy némi matematikát is becsempésszünk a borok közé. Eredetileg a „Könyvből" szerettünk volna néhány tételt és bizonyítás ötletet elmondani, de később egyéb apróbb matematikai érdekességek is felmerültek. A teljesség igénye nélkül, adott elő ilyen borkóstolón **Totik Vilmos, Hajnal Péter, Pluhár András, Németh József, Fodor Ferenc intézetvezetőnk, Waldhauser Tamás, Szűcs Gábor, Bogya Norbert** is; a legutóbbi alkalmakon pedig **Makay Géza** vállalta az előadói szerepet, több érdekes kiselőadással.

Júniusban 24-en vettünk részt a Bolyai Borkóstolón, bár korábban olykor negyvenen is megfordultak egy-egy hasonló összejövetelen. Ezúttal néhány földrajzos vendégünkre tekintettel Makay Géza a térképészet matematikájáról beszélt három részletben, a történeti áttekintéstől a vetületek programozhatóságán át a saját, témában való munkásságáig.

Az utóbbi időben kb. félévente egy-egy matematika-borkóstolót szervezünk, vizsgaidőszak végén (február elején és június végén). Ha valaki kedvet kapott a részvételre, örömmel látjuk a következő alkalommal.

Győrffy Lajos

SZTE Bolyai Intézet, adjunktus, szervező

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI
GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Gáspár Merse Előd 2023. DECEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

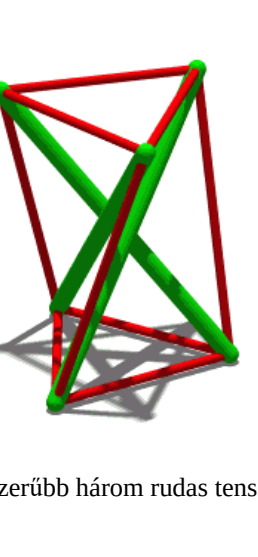
Tensegrity a karácsonyfán

Ez micsoda? – kérdezték tőlem gyerekek és szülők, akik egy közös adventi készülődésen odasereglettek körém, amikor meglátták előttem a színes szívószálakat és gumikarikákat, amikből valami különös térbeli szerkezet kezdett kialakulni. Amikor megmondtam, hogy ez egy tensegrity szerkezet, akkor megint csak az volt a kérdés: Az meg micsoda? De az érdeklődés itt nem állt meg, nagy örömömre szolgált, hogy az egészen kicsiktől a nagyobb gyerekeken át a felnőttekig, mindenki megpróbálta elkészíteni, és sokan még fel is írták maguknak ezt a különleges szót, hogy majd a neten is utána tudjanak nézni. Az a nagyon jó ebben a szerkezetben, amit most bemutatok, hogy tényleg könnyen, gyorsan és olcsón elkészíthető néhány hétköznapi apróságból, ráadásul ragasztás és maszatolás nélkül, és amit kapunk, az szinte csoda. De ne szaladjunk ennyire előre, kezdjük az alapoknál.

Képzeljünk el egy szerkezetet, amely rudakból áll, és a rudak a végpontjaikban egymáshoz vannak rögzítve, de a rögzítési pontok körül szabadon elforoghatnak. A rudak végére ideális gömbcsuklókat képzelhetünk, amik ezt megvalósítják. Az ilyen szerkezeteket rúd-csukló szerkezeteknek nevezzük, és megkérdezhetjük, hogy merev-e egy ilyen szerkezet. Egy tetraéder élváza például merev. Egy kocka nem merev, el tud deformálódni például paralalepipedonná, és teljesen össze is tud csuklani, viszont merevíthető néhány lapátlóval, ezt szokták csinálni az állványzatok építésénél is. Gondoljon utána a kedves olvasó, minimálisan hány merevítés szükséges? Olyan ez, mint síkban a háromszögelés, térben tetraéderekből építkezve mindig merev élvázat kapunk. Többek között a különféle síkbeli és térbeli szerkezetek merevítéséhez minimálisan szükséges rudak számával foglalkozik a matematika egyik ága, az ún. merevségelmélet. A gyakorlatban persze meghibásodásra is kell számítani, ezért biztonsági szempontból túlmerevítést szokás alkalmazni. Minél több merevítőt használunk, annál stabilabb és biztonságosabb lesz a szerkezet. A merevségelmélet azonban nem csak az építészetben találta meg az alkalmazhatóságát, a fehérjék szerkezetének vizsgálatában is fontos szerepet játszik.

De mi van akkor, ha nem csak merev rudakból építkezünk? Hidaknál gyakran előfordul, hogy kábeleket vagy láncokat is használnak. Ez utóbbiaknak lényeges tulajdonsága, hogy feszíteni lehet őket, de nem tudjuk őket két végüknél fogva összenyomni, azaz húzni tudnak, de tolni nem. Ha például csak kötelekből szeretnék merev hálózatot készíteni, az lehetetlen. A pókháló is csak akkor kifeszíthető, ha egy külső merev kerethez csatlakozik. Ha viszont van egy meglévő rudakból álló szerkezet, akkor abba van értelme plusz merevítőként köteleket és kábeleket is használni. Most pedig jöjjön a találós kérdés. Ha különálló merev részszerkezeteink vannak, akkor azokat csak kötelekkel összekötve tudjuk-e merevíteni? Konkrétabban, létezik-e olyan, csak kötelekből és rudakból álló szerkezet, amely merev, de a rudak sehol nem érintik egymást, még a végpontjaikban sem?

Sajnos a bejegyzés címe elég árulkodó. Nyilván kitalálható, hogy léteznek ilyenek, és tensegrity szerkezeteknek hívják őket. A kifejezés Buckminster Fullertől származik az 1960-as évekből, aki a „tensional integrity” szókapcsolatot vonta össze, de nem ő fedezte fel ezeket a szerkezeteket, mert egy orosz konstruktivista művész (Karl Ioganson) már 1921-ben kiállított egy három rudas konstrukciót. Három rúdra minimum szükség van, hiszen könnyen belátható, hogy egy ilyen szerkezetnek a tér minden irányába ki kell terjednie. (Egyébként Fullerről nevezték el a 60 szénatomból álló fullerénmolekulát. *A szerk.*)

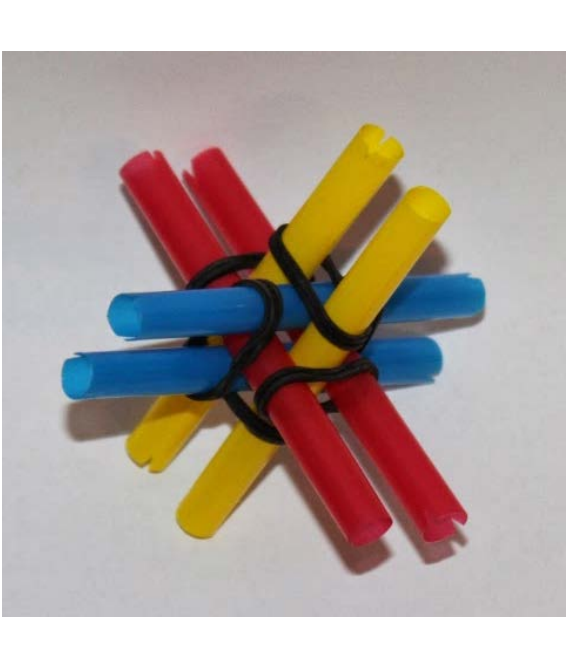


1. ábra. A legegyszerűbb három rudas tensegrity szerkezet

(Wikimedia By Cmglee - Own work, CC BY-SA 3.0)

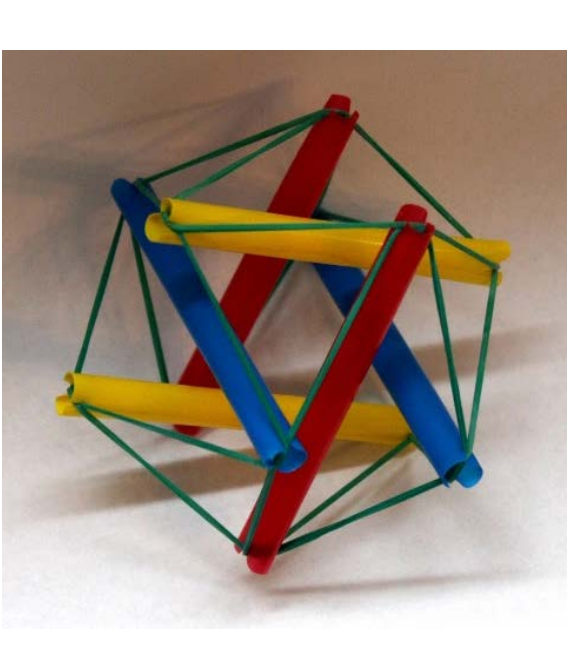
Tetszőleges szerkezetű tensegrity készítése nem lenne könnyű feladat, főleg kis méretben, hiszen a tensegrity csak a rudak és kötelek összeállítása után nyeri el merevségét, és az építés közben nehéz lenne csupán a két kezünkkel térben megtartani az alakzatot. A most bemutatásra kerülő szerkezetben azonban több trükköt is alkalmazunk. Mi egy hat rudas változatot fogunk készíteni, amely szép szimmetriával rendelkezik, ez meg fogja könnyíteni a munkát, másrészt kötelek helyett befőttesgumikat fogunk használni, amelyeket nem kell majd kötözni. A gumi természetesen azt eredményezi majd, hogy nem lesz tökéletesen merev a szerkezet, de egyensúlyban lesz, azaz feldobva a levegőbe nem esik szét, és a rugalmassága miatt megfigyelhetjük a különleges deformációs tulajdonságait is. Ha majd a végén a gumifonál helyére nyújthatatlan kötelet képzelünk, akkor valóban egy teljesen merev tensegrity szerkezetet kapunk.

A szerkezet elkészítéséhez nincs másra szükség, mint szívószálakra és befőttesgumikra. Érdemes szép színes 7-8 mm átmérőjű ún. koktél szívószálakat használni, mégpedig háromféle színt, mert három pár párhuzamos rúd alkotja az alakzatot. A szívószálakból 7-8 cm hosszú egyforma darabokat vágjunk le, és a végeiken kisollóval csináljunk 2-3 mm mélyen apró V alakú bemetszéseket, minden szívószál végén kettőt egymással szembe, mégpedig úgy, hogy a függőlegesen tartott szívószálak esetében a bemetszések pont egymás alá essenek. Mivel betiltották a műanyag szívószálakat, ami az ábrán is látszódik, ezért nagyon változatos anyagokból készítenek újabban szívószálakat, papírból, lebomló műanyagból, és más különleges anyagokból, ezért nehéz általános javaslatot tennem, de érdemes minél erősebb, azaz merevebb szívószálakat választani, és ha ollóval nem megy, akkor használjunk szikét a bemetszéshez. Ezután a szívószálakból készítsük el a 2. ábrán látható térbeli kereszt alakzatot, és hat befőttesgumival rögzítsük a szerkezetet. A itt használt befőttesgumikat a végén el fogjuk vágni, most csak azt a célt szolgálják, hogy ne mozduljon el a szerkezet váza, amíg a többi gumikarikát felhelyezzük.



2. ábra.Térbeli kereszt szívószálakból

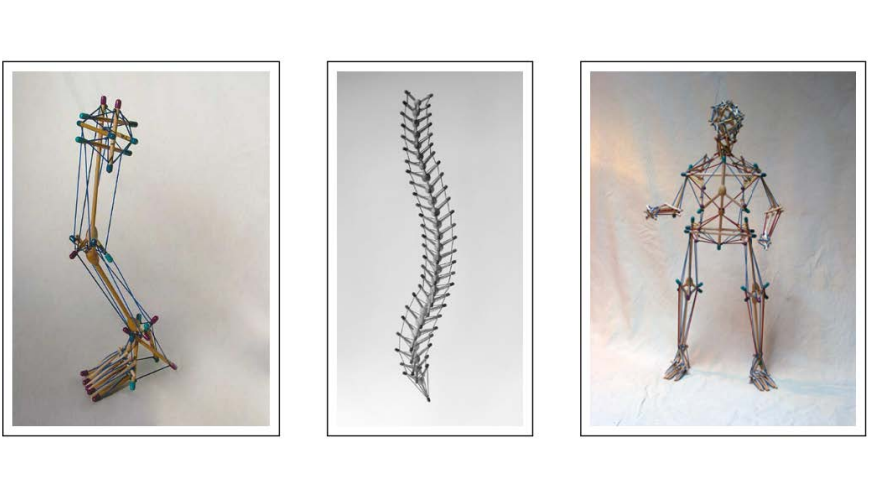
Ezután jönnek a szerkezetet alkotó valódi gumikarikák, szintén hat darab, amiket úgy kell felhelyezni a szívószálakra, hogy minden rúdra kerüljön egy karika olyan módon, hogy a gumikarikák átellenes pontjait akasszuk a rúd két végén lévő vájatokba, és gumit vezessük át egy, a rúdra merőleges rúdpár azonos oldali végpontjaiban lévő vájatokon az ábra szerint. A vájatokat előzetesen érdemes a megfelelő irányba állítani, és fontos, hogy egyforma és még nem használt gumikkal dolgozzunk, hogy mindegyik egyformán feszüljön, mert ellenkező esetben deformált lesz a szerkezetünk. Az is lényeges, hogy a vájat olyan szűk legyen, hogy a beleakasztott gumi ne tudjon odébbcsúszni. Ha befejeztük a gumik felhelyezését, akkor a segédgumikat elvágva a szívószálak eltávolodnak, és megszületik a tensegrity szerkezet. Ha egy kicsit deformált, akkor a gumikarikákon még igazíthatunk, az a lényeg, hogy minden él egyforma hosszú és egyformán feszes legyen. Ha jól csináltuk, akkor a kapott szerkezet konvex burkolójában egy ikozaéderre ismerhetünk rá, a szerkezet pontos neve egyébként *tensegrity icosahedron*, amivel elsőként Kenneth Snelson foglalkozott 1949-ben.



3. ábra. Tensegrity ikozaéder

Természetesen tetszés szerint más anyagokat is használhatunk, a szívószálnál erősebb lufipálcát, hurkapálcát, bambuszt, stb. Ilyenkor a vájatokat érdemes például reszelővel kireszelni. Illetve a szerkezet nagyobb méretben is elkészíthető, a fenti méret épp karácsonyfadísznek való. Ha viszont más méretben készítjük, arra figyeljünk, hogy a rúd méretéhez méretezzük a gumikat, az a jó, ha a gumit egy rúdra rátéve nem laza, de van még benne feszítési lehetőség. Ha valaki elég ügyes, akkor egyébként a szerkezet segédgumik nélkül is összerakható. Ilyenkor érdemes az összes rúdra felarkni előbb egy-egy gumit, úgy, hogy ezek a gumik csak hosszában futnak a rúd mentén két oldalt. A két oldal legyen egyformán feszes, azaz előbb a rúd egyik végén lévő vájatba akasszuk be a gumit, majd megkeresve a gumikarika felét, pont a felezőpontot akasszuk be a rúd másik végén lévő vájatba. Ezután színek szerint haladjunk, előbb az egyik szín két rúdjával kössük össze egy másik szín két rúdjának megfelelő gumiszakaszait (így kapunk egy H betűre emlékeztető alakzatot). Ehhez a rúdvégeket mindig úgy csatlakoztassuk a megfelelő gumiszakasz felezőpontjához, hogy a rúd végen már ott lévő gumit picit húzzuk le, és a másik gumit rakjuk a helyére, majd tegyük rá vissza a feszes gumit. Ez azért hasznos, mert a rudakra kezdetben rárakott saját gumijuk kezdettől fogva feszesek, és meg tudják tartani azokat a gumikat, amik majd csak a szerkezet befejezésekor feszülnek meg, és addig könnyen lecsúsznának.

További érdekesség egyébként a tensegrity szerkezetekkel kapcsolatban, hogy az élő rendszerekben is fontos szerepük van. Az élő szervezetek nem egyneműek, ha például merevek lennénk, akkor hamar összetörnénk, de az sem lenne jó, ha szétfolynánk vagy gumiszerű anyagból lennénk. A komplex élő rendszerek szerkezetében általában vegyesen megtalálhatók a merev és rugalmas részek egyfajta egyensúlyban, sőt valójában a sejtjeinktől a csontvázunkig minden szinten megtalálhatók a tensegrity szerű struktúrák a testünkben. Gondoljunk bele, hogy csontjaink nem érnek össze, mert hamar elkopnának, de sejteinknek is van vázuk, az ún. citoszkeleton, amelynek modellezéséhez szintén használják a tensegrity modelleket.



4. ábra. Biotensegrity (Tom Flemon modelljei Copyright © T.E. Flemons 2012)

Az interneten keresve sokféle egyéb alkalmazás is előbukkan, pl. köztéri tensegrity szobrok és alkotások, lebegő mágeneses tensegrity asztal.

Gáspár Merse Előd

fizikus, kognitív kutató, CEU Kognitív Tanszék

A karácsonyfadíszek elkészítéséhez jó szórakozást, egyúttal kellemes ünnepeket kíván az Érintő szerkesztősége.

HÍREK CIKKEI
PORTRÉ CIKKEI
TANÓRA CIKKEI
KÖNYVESPOLC CIKKEI
TUDOMÁNY CIKKEI
GAZDA(G)SÁG CIKKEI
HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

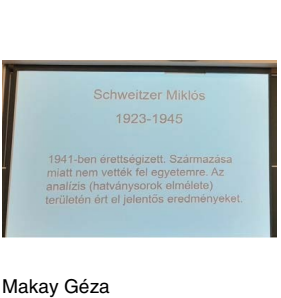
Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

AZ ÉRINTŐ 7 ÉVES ÉVFORDULÓJÁRA ÚJ ROVAT INDULT, A **HÉTTUSA:** MINDEN LAPSZÁMUNKBAN 7 MEGOLDHATÓ ÉS BÁRKI ÁLTAL BEKÜLDHETŐ FELADATOT TESZÜNK KÖZZÉ, AMELYEKEN JÓ GONDOLKOZNI, ÉRDEKESEK, ÉS AMELYEK ÚJABB KÉRDÉSEKET, MÉLYEBB ÉS ÁLTALÁNOSABB VIZSGÁLATOKAT IS INSPIRÁLHATNAK. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÓKA SÁNDOR*.)

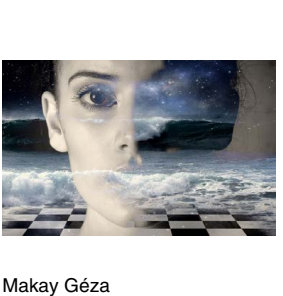


Schweitzer Miklós
1923-1945
1941-ben érettségizett. Származása miatt nem vették fel egyetemre. Az analízis (hatványsorok elmélete) területén ért el jelentős eredményeket.

Makay Géza
2023. DECEMBER, HÉTTUSA

Hogyan lett egy Héttusa-feladatból Schweitzer-probléma?

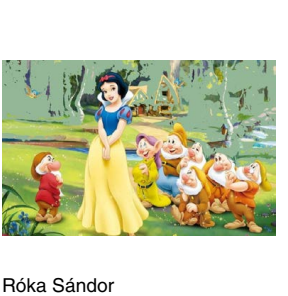
A 2023-as – egy hétig tartó – Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny november 6-án ért véget. A verseny feladatait egyetemi hallgatók számára tűzik ki, közülük is csak a legjobb matematikusok képesek megoldani azokat. A Héttusa versenyben nincsenek ilyen nehéz problémák, a példáink megoldását bárki beküldheti. Ezért is különleges, hogy idén a 6. Schweitzer-feladatot a Héttusa verseny júniusban közzétett feladatainak egyike ihlette. Hogyan? *Makay Géza* cikkéből, amely a KöMaL 2024. januári számában jelenik meg, ki fog derülni, itt pedig ízelítőt kapunk belőle..



Makay Géza
2023. DECEMBER, HÉTTUSA

Kitekintés – egy beküldő megoldásai

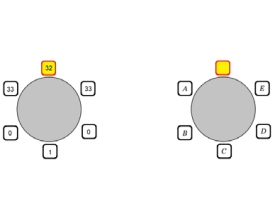
Aki már elolvasta a Héttusa szeptemberben kitűzött feladatainak „hivatalos" megoldásait, itt azt is megtudhatja, hogy *Makay Géza*, a feladatsor egyik megoldója milyen (számítógépes) módszereket használt, és hogyan gondolta tovább a példák általánosítását. Aki pedig még nem ismeri a Héttusa versenyt, annak legyen ez az írás ösztönző: héttusára fel!



Róka Sándor
2023. DECEMBER, HÉTTUSA

Héttusa 3. forduló (2023. december)

A Héttusa rovatban kitűzött feladatokra bárki küldhet megoldást. Elég a feladat kérdésére a feladatok sorszámát és a feltett kérdésekre a válaszokat megküldeni, indoklást, részletes megoldást nem szükséges írni. A beküldési határidő: **2024. január 8.** Következnek az új feladatok.



Róka Sándor
2023. DECEMBER, HÉTTUSA

Beszámoló a Héttusa második fordulójáról

A szeptemberi Érintőben megjelent Héttusa feladatok legeredményesebb megoldóit és a megoldásokat ismerteti *Róka Sándor* beszámolója. A harmadik forduló feladatai és a beküldési feltételei pedig itt találhatók. Még most is érdemes bekapcsolódni a versenybe, hiszen a 4. forduló után az élmezőny tagjai könyvjutalomban részesülnek. Továbbra is várjuk új és régi matematika héttusázóinkat!

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Makay Géza 2023. DECEMBER, HÉTTUSA

Hogyan lett egy Héttusa-feladatból Schweitzer-probléma?

A Héttusa verseny még nagyon fiatal: fél éve indult, és egyelőre csak reméljük, hogy legalább olyan hosszú életű lesz, mint a patinás és az egész világon ismert és méltán elismert Schweitzer-verseny [1]. Ez utóbbi 1949 óta kifejezetten a legkiválóbb egyetemi hallgatók versenye, amelyről egy korábbi Érintő-cikkben is írtunk [2].

Ezért is különleges, hogy az idei verseny egyik feladata, amelyet Makay Géza, az SZTE Bolyai Intézetének docense javasolt, a júniusi Érintőben megjelent Héttusa egyik feladatából nőtt ki [3]:

Feladat: *Van-e olyan szám, amelynek pontosan tíz pozitív osztója van a 20-nál nem nagyobb számok között?*

Megoldás: Mivel oszthatóságról, osztókról van szó, az embernek óhatatlanul eszébe jut a prímfelbontás. A keresett számunk legyen

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_l^{\alpha_l}$$

alakú, ahol a p_i-k különböző prímek, α_i-k pedig pozitív egészek. Feltehetjük, hogy $p_i^{\alpha_i} \leq 20$, hiszen ha egy prímhatvány 20-nál nagyobb, akkor minden osztó, amelyben az tényezőként szerepel, szintén 20-nál nagyobb lesz. Kezdjük felépíteni egy egyszerű „mohó algoritmussal”[1] a számunkat prímhatvány tényezőnként (a legkisebb prímtől kiindulva) úgy, hogy a 20-nál nem nagyobb osztók száma ne lépje túl a 10-et:

$2^4=16$ a 20-nál nem nagyobb osztóinak száma 5,
;
$2^4\cdot 3^2=144$ a 20-nál nem nagyobb osztóinak száma 10.
;

És a feladatot megoldottuk.

A feladat elég könnyen megoldható egyszerű számolással. De muszáj rögtön megoldást találni? Nem élvezhetnénk egy kicsit magát a problémát? ☺

A következő kérdéseket lehet feltenni:

1. kérdés: *Milyen alakú számok jöhetnek szóba megoldásként?*

Megoldás: Már pedzegettük a kérdést a feladat megoldásában: olyan megoldásokat keresünk, ahol a számnak nincs 20-nál nagyobb p^α osztója, tehát ezek a prímhatványok jöhetnek szóba:

$$2^4, 3^2, 5, 7, 11, 13, 17, 19.$$

Más szóval a lényegesen különböző megoldások a

$$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 232792560$$

osztói közül kerülhetnek ki. Az osztókból véges sok van, ellenőrizhető, hogy közülük melyek megoldások (ld. a következő kérdést). Egy megoldásból újabb megoldást kapunk, ha egy olyan prímhatvánnyal szorozzuk meg, amellyel megszorozva nem keletkezik újabb 20-nál kisebb osztó. Ilyen lehet egy 20-nál nagyobb prím hatványa, de lehet például a 2 valamilyen pozitív egész hatványa is, hiszen ez utóbbi esetben a 2 legalább az 5-en szerepelne, ami már nagyobb, mint 20. Például a $144 \cdot 2 = 288$ és a $144 \cdot 3 = 432$ megoldások, nem megoldás a $144 \cdot 5 = 720$, de megoldás a $144 \cdot 23 = 3312$. Ezzel a módszerrel megkaphatjuk az összes megoldást.

A megoldáshalmaz egy érdekes tulajdonsága, hogy a megoldások 232792560-periodikusan helyezkednek el a számegyenesen. Ez azért teljesül, mert egy megoldás azért megoldás, mert a 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 prímek olyan hatványon szerepelnek benne, amilyenen, és ez nem változik a 232792560-nal való eltolással. Ebben a kijelentésben azért van egy kis csúsztatás: ha a megoldásban az egyik prím maximális (vagy annál nagyobb) hatványon szerepel, akkor az eltolással neki változhat a kitevője, de nem csökkenhet a maximális kitevő alá, és ez a 20-nál kisebb osztók számát nem befolyásolja.

2. kérdés: 232792560*-nak hány olyan pozitív osztója van, amelynek pontosan tíz pozitív osztója van a 20-nál nem nagyobb számok között?*

Megoldás: 232792560 osztóiból az ismert állítás alapján

$$5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 960$$

darab van, így ezt már nem szívesen ellenőrizné az ember „kézzel”, érdemes programot írni rá.

De ha már emlegettük az „ismert állítást”, ne essünk neki teljesen naív módon az osztók keresésének végignézve a számokat 1-től 232792560-ig: a trükk az állítás bizonyításában, hogy az osztókban minden prímtényező kitevője lehet bármi 0-tól a számban található kitevőig, hát listázzuk ez alapján az osztókat a programban.

Nyilván tovább is fogunk általánosítani, tehát ne direktben erre a 20-as számra írjuk meg a programunkat, hanem általánosabban: k darab osztót fogunk keresni, amelyek nem nagyobbak n-nél.

Amikor az ember elkezd gondolkodni egy program megírásán, akkor végig kell gondolnia, hogy mit hogyan kíván „modellezni” a programban, mit hogyan kell tárolni, melyik adatot hogyan kell kezelni és milyen algoritmus alapján fog dolgozni a program.

Az algoritmus a KöMaL-ban megjelent cikkben [4] részletesen szerepel, ennek alapján a kérdésre a válasz, hogy összesen 84 darab számnak van 10 db 20-nál nem nagyobb osztója.

A programmal különféle n és k számokkal kísérletezve mindig találunk megfelelő számot, ráadásul kiderül az is, hogy a fenti mohó algoritmus ezekben az esetekben mindig működik. Ennek következménye a következő

Állítás: *A fenti mohó algoritmussal lehet találni olyan természetes számot, amelynek pontosan k db pozitív osztója van az n-nél nem nagyobb számok között ($k \leq n$).*

Megoldás: Ennek az állításnak egy egyszerűbb (?) változata volt a 2023. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny egyik feladata, amelyben a mohó algoritmusra való utalás nélkül és csak elegendően nagy n-ekre kellett belátni az állítást. A kitűzés már megjelent, és a bizonyítás is hamarosan felkerül a Bolyai Társulat honlapjára [5]. (A nem hivatalos megoldások itt találhatóak.) Ez az állítás annyival több annál a feladatnál, hogy ezt minden n-re be kell látnunk. A megjelent bizonyítás nem foglalkozik azzal a kérdéssel, hogy konkrétan milyen nagy n-ektől kezdve teljesül az állítás, de óvatosabb becsléseket alkalmazva ellenőrizhető, hogy $n \geq 599$ esetére is adható hasonló bizonyítás. Az pedig egy elég optimálisan megírt programmal pár másodperc alatt megmutatható, hogy 599-nél kisebb n-ekre is igaz az állítás.

Ezt a kutatást a TKP2021-NVA-09 projekt támogatta. A TKP2021-NVA-09 számú projekt a Magyar Innovációs és Technológiai Minisztérium támogatásával valósult meg a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból, a TKP2021-NVA támogatási konstrukció keretében.

Irodalomjegyzék

[1] https://www.bolyai.hu/versenyek-schweitzer-miklos-emlekverseny/
[2] https://ematlap.hu/index.php/interju-portre-2017-03/417-schweitzer-2016-jelentes
[3] https://ematlap.hu/fooldal-2023-2
[4] Makay Géza: *Matematika és informatika – kéz a kézben, avagy Egy 2023-as Schweitzer példa előzménye*, KöMaL, 2024. januári szám, megjelenés alatt.
[5] https://www.bolyai.hu/versenyek-schweitzer-miklos-emlekverseny/

Makay Géza

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

Lábjegyzet

---

[1] A mohó algoritmus olyan döntéshozó algoritmus, amely minden egyes lépésnél a legjobbnak tűnő döntést hozza a rendelkezésre álló lehetőségek közül, anélkül hogy előretekintene.

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Makay Géza 2023. DECEMBER, HÉTTUSA

Kitekintés – egy beküldő megoldásai

Mottó: „Mi kell egy matematikusnak? PC: papír és ceruza.”

Egy matematikai állítás felfedezéséhez vagy bizonyításához ma már a legtöbb matematikus nem csak papírt és ceruzát használ, sok esetben segítségül hívja a számítógépet. A számítógépes programokat milliónyi adaton lefuttatva megsejthető a válasz egy-egy híres problémára, vagy egy új tétel kérdésfelvetésére – akkor már „csak” be kell bizonyítani matematikai módszerekkel ☺.

Ez a gondolkodásmód is megjelenik Makay Géza megoldásai között, amelyek kitekintést nyújtanak túl a hivatalos mintamegoldásokon.

Makay Géza 1985-ben és '86-ban is érmet szerzett a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián, azóta is szereti a kihívást jelentő matematikai problémákat. 1991 óta a Szegedi Tudományegyetem Analízis Tanszékének oktatója, hobbija a programozás. Nem csoda hát, hogy szerepel a Héttusa megoldói között, néhány feladathoz programot ír, néhány példát általánosít.

8. *Igaz-e, hogy bármely pozitív páros szám előáll két olyan szám összegeként, amelyek mindegyike páratlan számjegyekből áll?*

Megoldás: A rövid válasz, hogy az állítás nem igaz, például a 220 nem állítható elő így. De lássuk, hogy honnan is jön ez az ellenpélda, vizsgáljuk meg a feladatot kicsit részletesebben.

A csupa páratlan számjegyből álló számokat nevezzük ezentúl *erősen páratlan számoknak*. Könnyen ellenőrizhető, hogy a 20-nál kisebb pozitív páros számok előállnak két erősen páratlan szám összegeként.

Próbáljuk ki, hogyan lehetne egy nagyobb, több számjegyből álló páros számot felbontani két erősen páratlan szám összegére. Ehhez gondoljuk át a papíron való összeadás műveletét. Az összegben adott helyiértéken szereplő számjegy három másikból áll elő: a két összeadandó megfelelő helyiértékén levő számjegyéből és az esetleges átvitelből. Vagyis ha két erősen páratlan szám összegében páratlan számjegy áll, az vagy úgy lehetséges, hogy az előző helyiértéken átvitel keletkezik, vagy úgy, hogy az egyik összeadandónak már nincs azon a helyiértéken számjegye. Pozitív páros számunkból képezzünk annyi páros számot, amennyi helyiértékből az áll. Kezdjük az egyesekkel, haladjunk visszafelé. Egy helyiértékhez tartozó szám legyen ugyanaz, mint az eredetiben, ha az páros. Ha pedig az eredeti szám egyik helyiértékén páratlan szám szerepelt, ehhez a helyiértékhez tartozzon eggyel kisebb szám és az „átvitel”: az előző helyiértékhez tartozó páros számhoz adjunk hozzá 10-et. Így az eredeti számunkat felbonthatjuk speciális alakú számok összegére, amelyekben vagy egy páros számjegy után, vagy egy 1-es és egy páros számjegy után a helyiértéknek megfelelő számú 0 van, ez pontosan megfelel a papíron való összeadás műveletének. Tekintsük példaként a 736450 számot.

10	egyesek	10
+ 4	tízesek	+ 40
+ 4	százasok	+ 400
+ 16	ezresek	+ 16000
+ 12	tízezresek	+ 120000
+ 6	százezresek	+ 600000
736450	összeg	736450

A ténylegesen összeadott számok a megfelelő helyiérték után csupa 0 számjegyet tartalmaznak, az azelőtti részen pedig egy 20-nál kisebb páros szám áll (ez a fenti bal oldali oszlopban jól látszik). Ez utóbbi mindig felbontható két páratlan számjegy összegére, így kaphatjuk meg például a következő felbontást:

$$736450=(300000+300000)+(30000+90000)+(7000+9000)+(100+300)+(10+30)+(5+5).$$

Minden zárójeles kifejezésből egy-egy tagot véve, az eredeti számot két csupa páratlan számjegyet tartalmazó szám összegére bonthatjuk:

$$736450=337115+399335.$$

Mindig működik-e ez az eljárás? A válasz az, hogy nem: ha valamelyik fenti, 20-nál kisebb számunk a 0 lenne (ha az összegben azon a helyiértéken 0 vagy 1 áll, és az eggyel nagyobb helyiértéken páros szám van), akkor ezt a 0-t csak átvitellel tudjuk felbontani két páratlan szám összegére, és a következő helyiértéken átvitelt kapunk, pedig nem kellene. És ez az egyetlen eset, ami problémát okozhat, bár nem feltétlenül okoz, hiszen pl. $120=115+5$. De a 220 nem bontható fel, hiszen az átvitel miatt az utolsó két számjegyet csak úgy lehet előállítani, hogy az egyikben van egy páros számjegy a tízes helyiértéken. Igaz, az lehet 0 is (sőt, ebben a konkrét esetben annak kell lennie), az viszont azt jelenti, hogy annak a számnak nagyobb helyiértékű számjegye nem lehet, mert akkor a 0 számjegy konkrétan meg is jelenne a számban, és nem lenne erősen páratlan. Így viszont bármilyen páratlan p számjegyet is veszünk annak a számnak, a másik tag $220-p=210+q$ alakú, ahol $q=10-p$, és így abban a számban a százasok helyén mindig páros szám (2) áll.

8.1. kérdés: *Melyek azok a számok, amelyek nem bonthatók fel két erősen páratlan szám összegére?*

Megoldás: Probléma akkor lehet, ha egy páros számjegyet 0 vagy 1 számjegy követ. Hogy tömörebben tudjunk fogalmazni, bevezetjük az informatikában jól ismert és mintailleszkedés vizsgálatára gyakran használt *reguláris kifejezés* fogalmát, persze nem a maga teljességében, mert az messze túlmutat ezen a problémán. Van is egy vicc ezzel kapcsolatban: „Egy programozónak van egy problémája. Úgy gondolja, hogy majd reguláris kifejezésekkel oldja meg. Most már két problémája van.” ☺. Ez rám nem vonatkozik, egyrészt, mert matematikus vagyok, másrészt, mert egy reguláris kifejezéseket is használó programmal ellenőriztem a dolgokat és szereztem sejtést, harmadrészt, mert most már nincs problémám, megoldottam a feladatot... ☺

Szögletes zárójelben fogjuk felsorolni egy adott helyiértéken szereplő lehetséges számjegyeket, a „.” karakter egy tetszőleges számjegyet jelölhet. A „.*” karaktersor akárhány (akár 0 darab) számjegyet helyettesíthet, míg például a „[13579]*” akárhány páratlan számjegyet jelenthet. Így a megoldás első mondatából az derül ki, hogy a „.*[02468][01].*” alakú számokkal lehet probléma, de nem biztos, hogy van. Bontsuk ezt esetekre:

1. A „.*[2468].*[2468][01].*” alakú számokkal mindenképpen baj van, mert az átvitel miatt a [01] előtti [2468] számjegy helyiértékén az egyik összeadandóban 0-nak kell lennie, így abban nagyobb helyiértékű számjegy sem lehet. Ez azt jelenti, hogy a másik összeadandóban van egy páros számjegy az első [2468] számjegy helyiértékén, így az nem erősen páratlan. Erre példa a 220 is, de hosszabb és bonyolultabb számot is könnyen mondhatunk a reguláris kifejezés mintája alapján, pl. az 54378167258 számban a 81-es rész a probléma, és mivel afelett van páros számjegy, ezért nincs felbontás. Vegyük észre, hogy az „[13579]*[2468][01].*” alakú számok felbonthatók (persze ha a „.*” rész nem illeszkedik valamelyik kizárható esetre), így már csak a „.*[0][01].*” alakú számokat kell megvizsgálnunk.

2. Ha a „.*[0][01].*” alakú számban a [0] számjegy előtt páros számjegy áll, akkor újrakezdhetjük a reguláris kifejezés illesztését az 1. ponttól. Ez azt jelenti, hogy már csak a „.*[13579][0][01].*” alakú számok lehetnek problémásak.

3. A „.*[3579][0][01].*” alakú számok sem bonthatók fel, mert az átvitel miatt a [01] előtti 0 számjegy ismét csak átvitellel bontható fel, így az az előtti páratlan számból valami nem 0 páros lesz, és az megintcsak a fennmaradó egyetlen összeadandónak lesz azon a helyiértéken a számjegye. Például a 300 ilyen alakú szám, de a 36701962 is ilyen, hiszen ott van benne a reguláris kifejezés mintája: a 701-es rész. Megmaradtak még a „.*[1][0][01].*” alakú számok, amelyeket meg kell néznünk.

4. A „.*[123456789].*[1][0][01].*” alakú számok sem jók felbontási szempontból, mert az átvitel miatt a [01] előtti 0 számjegy ugyancsak átvitellel bontható fel, így az az előtti 1-esből 0 lesz. Ez még nem is lenne baj (például $100=95+5$), de ha az 1-es számjegy előtt is van még valami értékes számjegy, akkor annak valamelyik összeadandóban meg kellene jelennie, de a 100 csak úgy bontható fel, hogy a felbontásban a 100-as helyiértékeken már 0 kell legyen mindkét összeadandóban, így egyik sem tudja produkálni a magasabb helyiértéken levő számjegyet. Erre a mintára a legkisebb példa az 1100, de erre is lehetne ennél nagyobb példákat is hozni. A „[1][0][01].*” alakú számok felbonthatók (persze ismét csak akkor, ha a „.*” rész nem illeszkedik valamelyik kizárható esetre), és ezzel az összes esetet végignéztük.

8.2. kérdés: *Egy adott szám hányféleképpen bontható fel két erősen páratlan szám összegére?*

Megoldás: Már tudjuk, hogy mely számokra lesz az eredmény 0. Nézzük a többit.

Ha még egyszer meggondoljuk a papíron való összeadás műveletét, akkor kiderül, hogy csak a fenti módszerrel lehet egy páros számot erősen páratlan számokra bontani annyi módosítással, hogy a 0-t csak átvitellel tudjuk felbontani. Emiatt az annál nagyobb helyiértéknél a felbontásban szereplő számjegyeknek páratlannak kell lenniük, vagy másképpen fogalmazva, azok felbontásában az egyik tagnak ott minden számjegye 0. Vagyis a fenti példán bemutatott helyiértékes felbontást el kell végeznünk, és az egyértelmű lesz. Abban minden szám egy páros, 0 és 18 közé eső szám valamilyen 10 hatvánnyal szorozva. A 0 és 18 közötti számok ennyiféleképpen bonthatók fel páratlan számjegyek összegére:

0 (5 db): $1+9$ $3+7$ $5+5$ $7+3$ $9+1$ (extra átvitel!)
2 (1 db): $1+1$
4 (2 db): $1+3$ $3+1$
6 (3 db): $1+5$ $3+3$ $5+1$
8 (4 db): $1+7$ $3+5$ $5+3$ $7+1$
10 (5 db): $1+9$ $3+7$ $5+5$ $7+3$ $9+1$
12 (4 db): $3+9$ $5+7$ $7+5$ $9+3$
14 (3 db): $5+9$ $7+7$ $9+5$
16 (2 db): $7+9$ $9+7$
18 (1 db): $9+9$

A helyiértékes felbontásban szereplő számokra ez alapján meg tudjuk mondani, hogy hányféleképpen tudjuk felírni azokat páratlan számjegy és egy csomó 0 alakú számok összegeként. Ezekből a felbontásokból az első tagokat összeadva is, és a második tagokat összeadva is erősen páratlan számokat kapunk, és ezek a különböző felbontások esetén különbözőek leszek. A fenti felbontásban a sorrend azért számít, mert így akkor az összes lehetséges felbontást megkapjuk. Ez alapján az összes lehetséges két erősen páratlan szám összegére bontás darabszáma nem más, mint a helyiértékes felbontások darabszámainak szorzata. A fenti példában

$$736450=600000+120000+16000+400+40+10,$$

így a 736450 számot $3\cdot 4\cdot 2\cdot 2\cdot 5=240$-féleképpen bonthatjuk erősen páratlan számok szorzatára. Példaként nézzünk egy „problémás” számot is, aminek azért van felbontása:

$$572072=400000+160000+12000+0+60+12=571000+1000+60+12.$$

Ebben a felbontásban az 571000-et mindig az első összeadandóhoz „csapjuk hozzá”, a lehetséges kombinációkat meg fogja adni a többi tag erősen páratlanokra bontása. Így ebben az esetben $5\cdot 3\cdot 4=60$ lehetséges erősen páratlan számra bontás van.

9. *Marci bástyákat rak egy üres sakktáblára. Az első bástyát bárhová teheti, ezután minden újabb bástyát úgy tesz le, hogy az páratlan számú korábban elhelyezett bástyát tartson ütés alatt. Legfeljebb hány bástyát helyezhet a táblára Marci?*

Megoldás: Bevallom, programot írtam rá, nem túl optimálisat, nem is biztos, hogy lehet olyat írni, ami végig is ellenőrzi az összes esetet. De elég sokáig elfutott a program ahhoz, hogy sejtést szerezzek a bizonyításhoz. Igaz, a sejtés hamis volt, de rávezetett a megoldásra.

A sakktábla mind a négy sarkába nem kerülhet bástya. Ugyanis a sarkokat csak 0, 1 vagy 2 bástya ütheti, és ha már három sarokban van bástya, akkor a negyedik sarkot már két bástya üti. És tudunk olyan megoldást adni, ami csak azt a sarkot nem tölti ki, minden mást igen. Könnyen ellenőrizhető, hogy az alábbi példában a megadott szabályok szerint raktuk le a bástyákat; itt a számok azt jelzik, hogy az adott mezőbe hányadik lépésben rakunk le bástyát:

1	63	55	47	39	31	23	8
2	62	54	46	38	30	22	15
3	61	53	45	37	29	21	14
4	60	52	44	36	28	20	13
5	59	51	43	35	27	19	12
6	58	50	42	34	26	18	11
7	57	49	41	33	25	17	10
	56	48	40	32	24	16	9

10. *Hányféleképp lehet egy 4×4-es táblázat mezőiből néhányat pirosra festeni úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban páros legyen a befestett mezők száma?*

Megoldás: Fessük ki tetszőleges módon a táblázatunk bal felső 3×3-as részét. Az, hogy minden sorban és oszlopban páros sok piros legyen, meghatározza az első három sor jobboldali, illetve az első három oszlop alsó mezőinek színét. Ebből az is következik, hogy a bal felső 3×3-as részben lévő pirosak számának paritása ugyanannyi, mint az első három sor végén lévő pirosak számának paritása, és ugyanannyi, mint az első három oszlop végén lévő pirosak számának paritása. Vagyis a jobb alsó sarokban lévő elem is egyértelműen tölthető ki ez alapján. Tehát a lehetséges kitöltések száma $2^{3\cdot 3}=2^9=512$. Teljesen hasonló módon $n\times m$-es táblázat esetén a lehetséges kitöltések száma $2^{(n-1)(m-1)}$.

11. *Igaz-e a következő állítás? Ha két ugyanakkora kerületű háromszögnek a területe is egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.*

Megoldás: Nem igaz. Induljunk ki két elfajult, azonos kerületű háromszögből. Mindkettő legyen „egyenlő szárú”, az egyiknél a szárak essenek egybe és az alap hossza legyen 0, a másiknál a két szár adja ki az alap hosszát, és a magasság legyen 0. Mindkét háromszöget alakítsuk úgy, hogy menet közben maradjanak egyenlőszárúak, és a kerületük se változzon. Az elsőnél kezdjük el folytonos módon növelni az alap hosszát, a másiknál a magasságot. Mindaddig, amíg a két háromszög nem lesz szabályos, nem lehetnek egybevágóak: az első alapja mindig rövidebb lesz, mint a kerület harmada, a másodiké pedig mindig hosszabb lesz. Mindkét esetben igaz, hogy amíg az elfajult állapotból elérünk az egyenlő oldalú állapotig, addig a terület (a Heron-féle képlet alapján) folytonosan változik 0-tól a kerületnek megfelelő egyenlő oldalú háromszög területéig. Így Bolzano tétele alapján az első háromszög bármilyen állásához lesz a második háromszögnek olyan állása, amelynek pontosan ugyanaz lesz a területe. És ezzel az állítást beláttuk.

Egy kicsit formálisabban, legyen a kerület fele s, az első háromszög alapjának hossza $2a$ (így a szárai $s-a$ hosszúak), a második háromszög szárának hossza b (így alapja $2s-2b$ hosszú). A Heron-képlet szerint, ha területük egyenlő, akkor

$$\sqrt{s(s-(s-a))(s-(s-a))(s-2a)}=\sqrt{s(s-b)(s-b)(s-(2s-2b))}.$$

Az egyszerűség kedvéért legyen $s=2$ (hasonlósággal mindig elérhető, és mivel úgyis ellenpéldát konstruálunk, akár vehetjük így hasonlóság nélkül is), így kapjuk, hogy

$$a\cdot a\cdot(1-a)=(2-b)(2-b)(b-1)\quad\Leftrightarrow\quad a^3-a^2+(2-b)(2-b)(b-1)=0.$$

Egy triviális megoldás (ami az első egyenlőségből látszik igazán jól) az $a=2-b$, ami pontosan annak felel meg, hogy a két háromszög egybevágó. A második egyenlőségben levő polinom ezek szerint osztható az $a-(2-b)$ gyöktényezővel. Ha osztunk vele, akkor kapjuk az

$$a^2+a(1-b)+(1-b)(2-b)=0$$

másodfokú egyenletet, ami megoldható:

$$a_{1,2}=\frac{b-1\pm\sqrt{(1-b)^2-4(1-b)(2-b)}}{2}.$$

b (amikor már nem elfajuló a háromszög) nyilván 1-nél nagyobb. Mivel a háromszög kerülete 4, a két b hosszú szár hossza darabonként kisebb, mint 2, vagyis $4(1-b)(2-b)<0$. Ebből tudjuk, hogy a fenti képletben a négyzetgyökvonás eredménye nagyobb, mint $b-1$, így a két gyök közül csak a pozitív előjelű ad a háromszögoldal felének megfelelő pozitív számot, tehát

$$a=\frac{b-1+\sqrt{(1-b)^2-4(1-b)(2-b)}}{2}.$$

Eszerint valóban lehet találni nem egybevágó háromszögeket, amelyeknek azonos a területe és kerülete is. De hozzá kell tenni, hogy ezek közül nem mindegyik ad nem egybevágó háromszöget: $b=4/3$-ra $a=2/3$ adódik, és ez megfelel az egyenlő oldalú háromszög esetének, de ez az egyetlen eset, amikor a háromszögek ebben az esetben egybevágóak.

Érdekességképpen megjegyezzük, hogy a Wolfram Mathematica program meg tudja oldani a feladatban feladott egyenletrendszert. Ha a_1,a_2,a_3 és b_1,b_2,b_3 a háromszögek oldalai, akkor ezt az egyenletrendszert kell megoldani:

$$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$$

$$(-a_1+a_2+a_3)(a_1-a_2+a_3)(a_1+a_2-a_3)=(-b_1+b_2+b_3)(b_1-b_2+b_3)(b_1+b_2-b_3)$$

A megoldás többoldalas képleteket tartalmaz, amelyben persze szerepelnek azok az esetek is, amikor a két háromszög egybevágó (az oldalhosszak egymás valamilyen permutációi), de van más megoldás is. Ha ez alapján akarnánk igazolni, hogy nem teljesül az állítás, akkor ezeket a képleteket kellene megvizsgálnunk, hogy azok adnak-e nem egybevágó háromszögeket is, és mivel a képletek elég hosszúak és bonyolultak, épeszű ember nem kezd neki... ☺

12. *Felföldön a parlament 40 szenátorból áll, mindegyikük munkáját 3-3 titkár segíti. A 40 szenátor és 120 titkár bizottságokban dolgozik, minden szenátor 6 bizottságnak, és minden titkár 2 bizottságnak a tagja. Egy bizottság vagy 5 szenátorból, vagy 3 szenátorból és 6 titkárból áll. Hány bizottság van összesen?*

Megoldás: A 120 titkárnak van összesen 240 bizottsági tagsága, ezt csak a második típusú bizottságban tudják teljesíteni, és mivel azokban 6-6 titkár van, 40 darab második típusú bizottság van. A szenátoroknak szintén 240 bizottsági tagsága van, ebből a 40 darab második típusú bizottságban 120 tagság lekötődik, a fennmaradó 120 tagságot az első típusú bizottságban kell teljesíteniük, így abból 24 db van. Összesen tehát 64 bizottság van: 24 első és 40 második típusú.

A feladat formálisan egy lineáris egyenletrendszerre vezet. Ha n darab első típusú és m darab második típusú bizottság van, akkor a feltételek alapján

$$5n+3m=6\cdot 40,\qquad 0n+6m=2\cdot 120.$$

És ez egyértelműen megoldható, mert az egyenletek lineárisan függetlenek.

13. *Sandokan és öt kalóza egy asztal körül ülnek, hogy elosszák a zsákmányolt 99 aranyat. Sandokan javaslatot tesz arra, hogy kinek hány arany jusson, ezután az öt kalóz szavaz erről. Egy kalóz igent mond a javaslatra, ha neki több arany jut, mint két szomszédjának összesen. A javaslat szerint osztoznak az aranyon, ha legalább hárman mellette szavaznak. Ha kevesebb a támogató szavazat, akkor Sandokan a szerencsétlen javaslata miatt semmit sem kaphat a zsákmányból. Legfeljebb hány aranyat tud megszerezni Sandokan?*

Megoldás: Vegyük észre, hogy két szomszédos kalóz közül legfeljebb az egyik szavazza meg a javaslatot, hiszen mindkettőre igaz az, hogy megszavazáshoz többet kell kapjon, mint bármelyik szomszédja. Vagyis Sandokan szomszédainak és a vele szemben ülőnek kell megszavaznia a javaslatot. Mivel a fennmaradó két kalóz úgysem szavazza meg a javaslatot, ne pazaroljuk az aranyakat rájuk, a javaslat szerint kapjanak 0 aranyat. Sandokan két szomszédjának legalább eggyel több aranyat kell kapnia, mint Sandokannak, de a szemben ülőnek is juttatni kell legalább egy aranyat, hogy megszavazzák a javaslatot. Így Sandokantól indulva körbe a Sandokan számára legjobb javaslat: 32, 33, 0, 1, 0, 33.

Ha (Sandokanon kívül) páratlan sok kalóz van, és legalább a felüknek meg kell szavaznia a javaslatot, akkor a fenti okoskodással meghatározható, hogy hány aranyat tud megszerezni Sandokan saját magának. A javaslat megint úgy fog szólni, hogy a szomszédai eggyel több aranyat kapjanak, mint ő, és minden második kalóz kapjon még 1-1 aranyat. Ha ez nem adja ki a teljes aranymennyiséget, akkor a Sandokannak szimpatikusabb kalózok kaphatnak többet is... ☺. Például 9 kalóz és 99 arany esetén a minimalista javaslat a 31, 32, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 32 lenne, de ez összesen csak 98 arany.

Ha (Sandokanon kívül) páros sok kalóz van, és még mindig legalább a felüknek meg kell szavaznia a javaslatot, akkor is használható fenti okoskodás. Ilyenkor csak az egyik szomszédnak, és tőle számítva minden második kalóznak kell megszavaznia a javaslatot. A szomszéd most is kapjon eggyel több aranyat, mint Sandokan, a többi javaslatot megszavazó kalóz 1-1 aranyat, a többiek semmit. Itt sem biztos, hogy „kijön” a teljes aranymennyiség, például 8 kalóz és 99 arany esetén 42, 43, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0 lenne a minimális javaslat és ez megint csak 98 arany.

Érdekes, hogy ugyanezeket a megoldásokat kapjuk akkor is, ha egy kalóz már akkor is megszavazza a javaslatot, ha mindkét szomszédja kevesebb aranyat kap, mint ő.

Ha a kalózok felénél kevesebb szavazat is elég a javaslat elfogadásához, akkor Sandokan legjobb stratégiája, hogy a szomszédainak nem javasol aranyat, és egymástól legalább 2 távolságra levő, a javaslat megszavazásához szükséges számú kalóznak ad 1-1 aranyat, a többieknek semmit. Így az aranyakból a szükséges szavazatok számával kevesebbet meg tud szerezni.

Ha a kalózok felénél legalább eggyel több szavazat kell a javaslat elfogadásához, akkor Sandokan a megoldás első mondatában megfogalmazottak szerint mindenképpen hoppon marad.

Azt is érdemes meggondolni, hogy mi a helyzet, ha egy kalóz már akkor igennel szavaz, ha legalább az egyik szomszédjánál több aranyat kap. Ez ugyanis közelebb állhat egy kalóz lelkivilágához, hiszen ezzel biztosítva van, hogy nem ő kapja a legkevesebb aranyat. Ilyenkor optimálisan szomszédos kalózpároknak oszthatunk ki 1-1 aranyat úgy, hogy a szomszédjukban ülők ne kapjanak semmit, mert akkor ők már megszavazzák a javaslatot. Itt kevés kalóz esetén szükség van egy kis trükközésre; ha n arany van és k kalóz, akkor az optimális javaslatok így néznek ki (ahol n persze elég nagy kell legyen, hogy Sandokannak is maradjon arany):

k	javaslat
1	$[(n-1)/2]$, $n-[(n-1)/2]$
2	$n-1$, 1, 0
3	$n-3$, 2, 1, 0
4	$n-2$, 0, 1, 1, 0
5	$n-3$, 0, 1, 1, 0, 1
6	$n-3$, 0, 1, 1, 0, 1, 0
7	$n-4$, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0
8	$n-4$, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0
9	$n-5$, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0
10	$n-5$, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0

Itt is az a helyzet, hogy legalább 4 kalóz esetén az aranyakból a szükséges szavazatok számával kevesebbet meg tud szerezni.

14. *Egy tízfős társaság több megbeszélést tartott. Minden egyes találkozón a tíz emberből öten vettek részt. A társaságnak nincs két olyan tagja, akik együtt három megbeszélésen is jelen lettek volna. Legfeljebb hány találkozóra kerülhetett sor?*

Megoldás: Programot írtam rá, és az azt mondta, hogy maximum 8 találkozó lehetett, és adott is rá példát (a számok 0-tól 9-ig jelölik, hogy melyik találkozón melyik emberek vettek részt):

$$\{01234\},\{01256\},\{03478\},\{05678\},\{13579\},\{14679\},\{23589\},\{24689\}.$$

Próbáljuk meg bebizonyítani, hogy 8-nál több találkozóra nem kerülhet sor. 10 emberből párokat $\binom{10}{2}$-féleképpen lehet kiválasztani. Ezek a párok maximum 2-2 találkozón vehetnek részt, így a párok $2\cdot\binom{10}{2}=90$ részvételt produkálhatnak. Mivel egy találkozón 5 ember vagyis $\binom{5}{2}$ pár vesz részt, ezért minden találkozót 10-szer számoltunk, tehát a találkozó száma maximum 90/10=9 lehet. Ezt csak akkor lehet elérni, ha (szimmetria okok miatt) mindenki pontosan ugyanannyi találkozón vesz részt, de a 9 találkozó darabonkénti 5 részvételét, vagyis 45-öt nem lehet 10 emberre egyenletesen szétosztani. Vagyis a találkozók száma tényleg nem lehet több, mint 8.

Általánosítsunk egy kicsit. Legyen $2n$ ember, akik n fős találkozókra mennek úgy, hogy nincs olyan pár, akik három talákozón is résztvesz. A fenti számolás alapján a találkozók száma maximum

$$\frac{2\cdot\binom{2n}{2}}{\binom{n}{2}}=\frac{4(2n-1)}{n-1}=8+\frac{4}{n-1}.$$

Ez a mennyiség pozitív irányból, monoton csökkenve tart 8-hoz, miközben n tart végtelenbe, és $n\geq 6$ esetén már kisebb, mint 9. $n\leq 5$-re kiszámolva ezeket (programmal) könnyen találhatunk maximális számú találkozót, ami 4 és 5 esetén nem éri el a számolás alapján elvileg leheséges 9 találkozót, azoknál csak 8 találkozót tudunk létrehozni.

n	becslés	egy lehetséges találkozó kiosztás
2	12	$\{01\}\{01\}\{02\}\{02\}\{12\}\{12\}\{03\}\{03\}\{13\}\{13\}\{23\}\{23\}$
3	10	$\{012\}\{013\}\{024\}\{134\}\{234\}\{125\}\{035\}\{235\}\{045\}\{145\}$
4	9	$\{0123\}\{0124\}\{0356\}\{0456\}\{1357\}\{1457\}\{2367\}\{2467\}$
5	9	$\{01234\}\{01256\}\{03478\}\{05678\}\{13579\}\{14679\}\{23589\}\{24689\}$

$n\geq 6$-ra a becslés alapján nem lehet több találkozó, mint 8. 6 és 7 esetén a program még kivárható időn belül lefut, és például a következő találkozó-kiosztásokat adja:

$$n=6:\{0,1,2,3,4,5\},\{0,1,2,6,7,8\},\{0,3,4,6,9,10\},\{0,5,7,8,9,10\},$$
$$\{1,3,5,7,9,11\},\{1,4,6,8,9,11\},\{2,3,6,7,10,11\},\{2,4,5,8,10,11\}.$$

$$n=7:\{0,1,2,3,4,5,6\},\{0,1,2,7,8,9,10\},\{0,3,4,7,8,11,12\},$$
$$\{0,5,6,9,10,11,12\},\{1,3,5,7,9,11,13\},\{1,4,6,8,10,11,13\},\{2,3,6,8,9,12,13\},$$
$$\{2,4,5,7,10,12,13\}.$$

Ebből a sejtés nyilvánvalóan az, hogy $n\geq 6$-ra 8 találkozó mindig megszervezhető. De a sejtés nem igaz, és erre is a program vezetett rá. Valami mintát kerestem abban, hogy hogyan osszuk el az embereket a találkozók között. Ehhez (többek között) kiírattam a programmal, hogy az egyes emberek hányadik találkozókon vettek részt. Mivel 8 találkozó van, az így keletkező kombinációk száma véges: $2^8=256$ (mellesleg, úgy tűnik, hogy egy ember mindig pontosan 4 találkozón vesz részt, így a kombinációk száma még kevesebb: $\binom{8}{4}=70$). Ez azt jelenti, hogy ha legalább 257 emberrel próbálnánk meg a találkozókat megszervezni, akkor a skatulya-elv szerint lenne két ember, akik pontosan ugyanazokra a találkozókra mentek el. Ha ez legalább három találkozó, akkor a kiosztás nem felel meg a feltételeknek. Ha pedig legfeljebb 2 ilyen találkozó van, akkor mindkét emberre igaz az, hogy a találkozókon (rajtuk kívül) legfeljebb $2(n-2)=2n-4$ másik emberrel találkozhatnak (multiplicitással számolva), ők pedig kétszer találkoznak. Vagyis ez a két ember a találkozóbeli párok számához $2(2n-4)+2=2(2n-3)$-al járul hozzá, a többiek legfeljebb $2\cdot\binom{2n-2}{2}=(2n-2)(2n-3)$ párral, ami összesen $2n(2n-3)$ pár. Egy találkozón $\binom{n}{2}$ pár vesz részt, így a találkozók száma legfeljebb

$$\frac{2n(2n-3)}{\binom{n}{2}}=\frac{4(2n-3)}{n-1}<8$$

lehet, ami ellentmond annak, hogy ki tudnánk osztani az embereket 8 találkozóra is. Érdekes eredmény, de azért valahol várható is: mivel az első becslésünk alapján a találkozók számának felső becslése tart 8-hoz, egyre optimálisabban kellene kiosztanunk az embereket, és úgy tűnik, hogy ez egy idő után már nem megy.

De tovább is tudunk menni. Megnézve a feladat hivatalos megoldását, valóban be lehet látni, hogy egy ember legfeljebb 4 találkozón vesz részt. Ugyanis ha egy ember minden másikkal legfeljebb 2-szer találkozik, akkor összesen (multiplicitással) maximum $2(2n-1)$ párban vesz részt. Ha viszont 5 találkozón venne részt, akkor $5(n-1)$ párban lenne benne, de $5n-5$ nagyobb, mint $4n-2$, ha $n>3$, így ez nem lehetséges. Másrészt ha produkálni szeretnénk a 8 találkozót, akkor azokon összesen $8n$ ember vesz részt, így mindenkinek pontosan 4 találkozón kell megjelennie, hogy ezt végre tudjuk hajtani. Ráadásul ezt úgy kell megtenniük, hogy semelyik két ember ne legyen ott három találkozón. Ha a találkozókon való megjelenést kettes számrendszerben ábrázoljuk minden emberre úgy, hogy egy adott helyiértéken levő 0 számjegy jelenti, hogy nem jelent meg azon a találkozón az illető, és az 1, hogy igen, akkor ezek 8 jegyű számok lesznek (amik kezdődhetnek 0-val is). A jelenléti feltétel erre átfogalmazva azt jelenti, hogy bármelyik két számra igaz, hogy legfeljebb 2 helyiértéken lehet mindkét számban 1-es. De mivel a számokban 4-4 darab 0-s és 1-es számjegy van, ez azt is jelenti, hogy legfeljebb 2 helyiértéken lehet mindkét számban 0-s, tehát a két szám legfeljebb 4 helyiértéken egyezhet meg. Azt, hogy a két bináris szám hány helyiértéken tér el, az irodalomban *Hamming-távolságnak* hívják; itt a feltétel eszerint az, hogy bármely két szám Hamming-távolsága legalább 4 legyen. Egy egyszerű programmal ellenőrizhető, hogy ilyen számokból legfeljebb 14 darab van, például ezek:

11110000, 11001100, 00111100, 10101010, 01011010, 01100110, 10010110,

00001111, 00110011, 11000011, 01010101, 10100101, 10011001, 01101001.

Ezek szerint 14 ember esetén 8 találkozót össze lehet hozni, és ezt már a korábbi programunk is tudta produkálni. Mivel a számok itt párban vannak abban az értelemben, hogy ha egy szám szerepel a listán, akkor az egyes komplemense (amelyikben minden számjegyet kicserélünk 0-ról 1-re vagy 1-ről 0-ra, a fenti listában egymás alatt vannak ezek a számok) is benne van, ezért ilyen párokat elhagyva minden találkozóról 1-1 embert veszünk ki, és így 12, 10 és 8 ember esetén is van megfelelő kiosztás (de ezt is tudtuk korábbról).

Mi a helyzet az $n\geq 8$ esetekkel? Az biztos, hogy 4 találkozó akárhány emberrel megszervezhető: az emberek egyik fele menjen el kétszer találkozni egymással, a másik fele is csinálja ugyanazt, és megvan a 4 találkozó. És persze az is igaz, hogy ha 8 találkozót meg lehet rendezni 14 emberrel, akkor 7, 6, és 5 találkozót is meg lehet rendezni ugyanannyi emberrel (néhány találkozó elmarad). Nem sikerült olyan szabályosságot találnom, ami megmagyarázná az eredményt, de a programom szerint 7 találkozó még mindig csak 14 emberrel valósítható meg:

1111000, 1100110, 0011110, 1010101, 0101101, 0110011, 1001011,

0000111, 0011001, 1100001, 0101010, 1010010, 1001100, 0110100.

A 6 és az 5 találkozó már 20 emberrel is működik:

111000, 110100, 101100, 011100, 110010, 101010, 011010, 100110, 010110, 001110,

000111, 001011, 010011, 100011, 001101, 010101, 100101, 011001, 101001, 110001,

illetve

11000, 11100, 11010, 10110, 01110, 11001, 10101, 01101, 10011, 01011,

00111, 00011, 00101, 01001, 10001, 00110, 01010, 10010, 01100, 10100.

Néhány érdekesség (szintén magyarázat nélkül). $n=6$, 7 és 8 esetén permutációtól eltekintve egyetlen megoldás van, és az egyes komplemens párokból áll. $n=5$-re vannak nem egyes komplemens párokból álló megoldások is, de az egyes komplemens párokból álló megoldás permutációtól eltekintve szintén egyértelmű. $n=4$-re viszont egyes komplemens párokból álló megoldásból is sok van, hiszen bármilyen módon osztjuk két egyenlő részre az emberek halmazát, azok a részhalmazok, mint a találkozók résztvevői, megfelelőek lesznek. És további, ennél bonyolultabb megoldások is vannak.

Ezt a kutatást a TKP2021-NVA-09 projekt támogatta. A TKP2021-NVA-09 számú projekt a Magyar Innovációs és Technológiai Minisztérium támogatásával valósult meg a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból, a TKP2021-NVA támogatási konstrukció keretében.

Makay Géza
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség

Adatkezelés
Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Róka Sándor 2023. DECEMBER, HÉTTUSA

Héttusa 3. forduló (2023. december)

A Héttusa rovatban kitűzött feladatokra bárki küldhet megoldást. Elég a feladat kérdésére a feladatok sorszámát és a feltett kérdésekre a válaszokat megküldeni, indoklást, részletes megoldást nem szükséges írni.

A megoldásokat erre az emailcímre küldjék: **hettusa@ematlap.hu**. A beküldési határidő: **2024. január 8.**

A verseny nyilvántartása érdekében kérjük, hogy megoldásaikat névvel vagy olyan álnévvel írják alá, amit nyilvánosan közzétehetünk.

Versenyzőinket két kategóriában jutalmazzuk: diák (azaz általános vagy középiskolás), illetve felnőtt. Kérjük, hogy beküldéskor jelezzék, melyik kategóriában indulnak. Aki ezt nem teszi, őt a felnőttek közé soroljuk.

Fordulónként a legjobb megoldók között könyveket sorsolunk ki. A 4. forduló után az élmezőnyt (10-20 versenyzőt) jutalmazzuk. Ehhez ajándék könyveket ajánlott fel a Bolyai János Matematikai Társulat és a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete.

A határidőt követően a megoldások megjelennek a Facebook-oldalunkon. Az ezután beküldött megoldásokat nem értékeljük a versenyben. Az Érintő következő számában olvashatják a legjobb megoldók nevét és az útmutatókat, kiegészítéseket a megoldásokhoz.

Feladatrovatunkhoz örömmel veszünk minden segítő szándékot, várjuk új feladatjavaslataikat kitűzésre, valamelyik feladat szép megoldását, vagy a feladat általánosítását.

A 3. forduló feladatai

15. Az a, b, c egész számokra az $a \cdot b$ és $b \cdot c$ számok négyzetszámok. Igaz-e, hogy ekkor $a \cdot c$ is egy egész szám négyzete?

16. Adott egy négyzetalapú gúla és egy tetraéder. Ezeknek minden éle 1 egység hosszú. A tetraédert a gúla egyik oldallapjára illesztettük úgy, hogy az illeszkedő lapok fedik egymást. Hány oldallapja van az így kapott testnek?

17. Marci bástyákat rak egy üres sakktáblára. Akkor helyezhet el egy bástyát egy üres mezőre, ha annak legalább két oldalszomszédja üres. Legfeljebb hány bástyát helyezhet a táblára Marci?

18. Gondoltam egy különböző jegyekből álló négyjegyű számra. A számnak az 5870, 1763, 9342, 4016 számok mindegyikével pontosan két közös számjegye van, és ezek a jegyek más helyeken állnak, mint a gondolt számban. Mi ez a szám?

19. A síkon felvettünk 8 pontot úgy, hogy nincs közte három, amely egy egyenesre esne. Az egyik pont piros, a többi kék. Nevezzünk egy kék csúcsú háromszöget pirosnak, ha a belsejében ott van a piros pont. Lehetséges-e, hogy a háromszögeknek legalább a fele piros?

20. Lehetséges-e egy társaságban, hogy a jelenlévők közül mindenki 4 másikat ismer, és a társaság bármely két egymást nem ismerő tagjának a többiek között pontosan 2 közös ismerőse van? (Az ismeretségek kölcsönösek, és a társaságnak vannak tagjai.)

21. Hófehérke a törpék kerek asztalánál névtáblákkal megjelölte mind a hét törpe helyét. Kuka érkezett elsőként, de figyelmetlenségből nem a helyére, hanem az óramutató járása szerint következő szomszédos helyre, Szundi helyére ült. Ezután, ha jött egy törpe, megkereste a helyét, és ha az üres volt, akkor elfoglalta, ha pedig már ült ott törpe, akkor az óramutató járását követve tovább ment az asztal körül, és leült az első szabad székre. Így hányféle ülésrend alakulhat ki?

A feladatokat válogatta: Róka Sándor

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon:

Róka Sándor 2023. DECEMBER, HÉTTUSA

Beszámoló a Héttusa második fordulójáról

A Héttusa verseny második fordulójának feladatait (8–14. feladatok) 2023. szeptemberi számunkban tűztük ki.

Míg az 1. forduló feladataira 19 beküldőtől 69 jó választ kaptunk, most a 2. fordulóban 85 jó válasz érkezett 18 beküldőtől.

A feladatok nehézségi sorrendjét jelzi a beérkezett helyes válaszok száma:

A feladat sorszáma	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**
A beérkezett helyes válaszok száma	13	8	9	14	16	15	10

A következő táblázat mutatja, hogy a legeredményesebb beküldők mely feladatokra adtak helyes választ. (Vannak, akik a saját nevükkel szerepelnek, és vannak, akik más nevet választottak maguknak.)

A feladat sorszáma	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**14.**
Kovach M. László	X	X	X	X	X	X	X
Makay Géza	X	X	X	X	X	X	X
Belzebub	X	X	X	X	X	X	X
Orangestripes	X	X		X	X	X	X
Ujházy Márton		X	X	X	X	X	X
Vaszary Krisztián	X		X	X	X	X	X
Jankó Zsuzsanna	X		X	X	X	X	X
Danka Emma			X	X	X	X	X
Megérek egy Petákot	X	X		X	X	X	
Szemerédi Ferenc	X		X	X	X	X	
D & 2d	X	X			X	X	
Drágos Rolland	X				X	X	X
Nicolcescu Magdalena	X				X	X	X
Berkó Erzsébet	X		X	X	X		

Fordulónként a legjobb megoldók közül néhányan könyvjutalmat kapnak. A három diák közül Danka Emma, a felnőttek kategóriájában versenyzők közül pedig Vaszary Krisztián kapott a mostani forduló után jutalomkönyvet. A Typotex kiadó kínálatából ezeket a könyveket választották:

Pintér Gergő: Új világok teremtése. Geometriai képzetek és képződmények, Typotex, 2020

Róka Sándor: Válogatás Erdős Pál kedvenc feladataiból, Typotex, 2023

A 4. forduló után az élmezőnyt (10-20 versenyzőt) jutalmazzuk. Ehhez ajándék könyveket ajánlott fel a Bolyai János Matematikai Társulat és a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete. Húsznál több könyvből választhatnak a versenyzők, a Bolyai Társulat és a Springer közös köteteiből, illetve a Polygon kiadványaiból.

`https://www.bolyai.hu/files/KOTETEK_Springer_kozos_kotetek.pdf`

`https://www.math.u-szeged.hu/polygon/konyvtar.htm`

`https://www.math.u-szeged.hu/polygon/jegyzet.htm`

A feladatok megoldása

8. Igaz-e, hogy bármely pozitív páros szám előáll két olyan szám összegeként, amelyek mindegyike páratlan számjegyekből áll?

Megoldás. A válasz: Hamis az állítás.

Például a 300 nem áll elő két olyan szám összegeként, amelyek mindegyike páratlan számjegyekből áll.

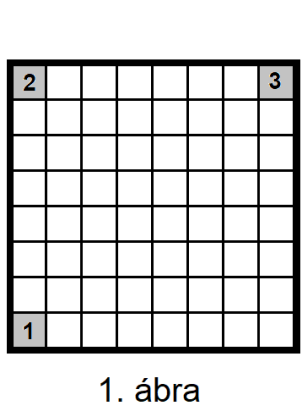
Ha $300=\overline{abc}+\overline{r}$, akkor $c+r=10$, ezért $b=9$, és $a=2$, ami páros.

Ha $300=\overline{abc}+\overline{pqr}$, vagy $300=\overline{abc}+\overline{qr}$, akkor $c+r=10$, ezért $b+q=9$, és itt b vagy q páros. (a, b, c, p, q, r mind 0 és 9 közötti számjegyek.)

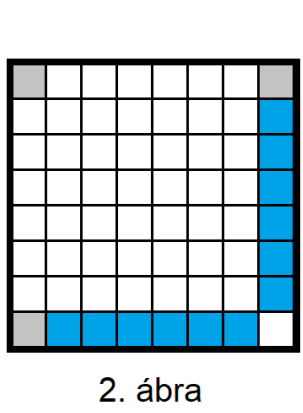
9. Marci bástyákat rak egy üres sakktáblára. Az első bástyát bárhová teheti, ezután minden újabb bástyát úgy tesz le, hogy az páratlan számú korábban elhelyezett bástyát tartson ütés alatt. Legfeljebb hány bástyát helyezhet a táblára Marci?

Megoldás. A válasz: 63.

Helyezzünk három bástyát az 1. ábra szerint a számok sorrendjében a tábla sarkaiba.



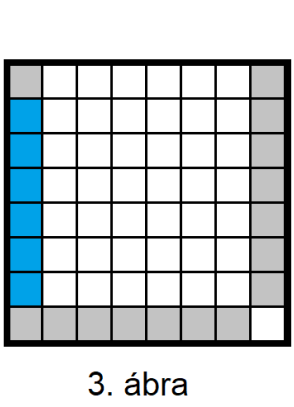
1. ábra



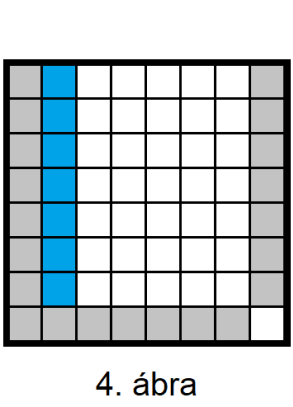
2. ábra

Ezután ahogyan a 2. ábra mutatja, töltsük fel az alsó sort balról jobbra, és a jobb szélső oszlopot fentről lefelé. (A kék mezőkre pakoljuk a bástyákat.)

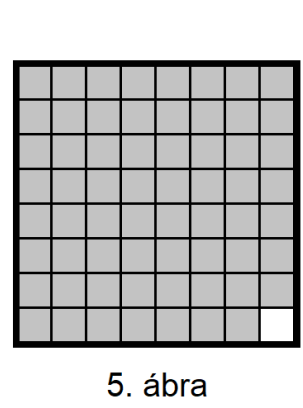
Folytassuk az oszlopok feltöltésével, alulról felfelé haladva. Előbb a bal szélső oszlopot (3. ábra), majd a mellette lévőt, és így tovább.



3. ábra



4. ábra



5. ábra

63 bástyát fel tudtunk tenni.

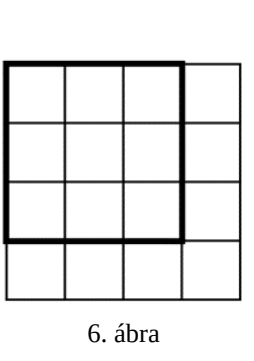
64 bástya nem helyezhető el. Ha a tábla három sarokmezőjén már van bástya, akkor a negyedik sarokba nem tudunk bástyát állítani, mert onnan pontosan kettőt fog eltalálni, függetlenül a többi bástya helyzetétől.

10. Hányféleképp lehet egy 4 x 4-es táblázat mezőiből néhányat pirosra festeni úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban páros legyen a befestett mezők száma?

Megoldás. A válasz: 512.

A 4 x 4-es táblának tekintsük a bal felső 3 x 3-as részét. Ebben a részben a 9 mező mindegyikéről szabadon dönthetünk, hogy befestjük vagy sem. Ennek a 9 mezőnek összesen $2^9=512$ különböző színezése van. Mindegyik színezés egyértelműen befejezhető a 4 x 4-es tábla jobb szélső oszlopának és alsó sorának színezésével úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban páros legyen a befestett mezők száma.

Ha az első sorban az első 3 mező között páratlan a piros mezők száma, akkor a sorban az utolsó mezőt pirosra festjük; ha pedig páros volt a piros mezők száma, akkor nem festjük be. Ezt megtesszük a tábla első 3 sorában, és hasonlóan járunk el az első 3 oszloppal.



6. ábra

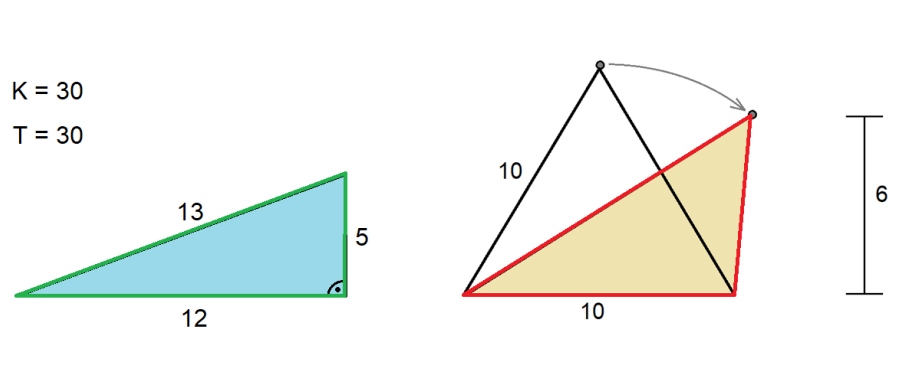
Mi lesz a 4 x 4-es tábla jobb alsó mezőjével? Ha az oszlopában fölötte lévő piros mezők száma páratlan, akkor pirosra festjük; míg ha páros, akkor nem festjük be. Ha a tábla utolsó sorát nézzük, akkor a jobb alsó mezőt akkor festjük pirosra, ha abban a sorban az előtt lévő piros mezők száma páratlan. Akár az utolsó oszlopra figyelünk, akár az utolsó sorra, mindkét esetben ugyanazt a választ kapjuk a jobb alsó mező befestéséről. Ugyanis akkor festjük be a jobb alsó sarkot pirosra, ha a bal felső 3 x 3-as részben a piros mezők száma páratlan.

11. Igaz-e a következő állítás? Ha két ugyanakkora kerületű háromszögnek a területe is egyenlő, akkor a két háromszög egybevágó.

Megoldás. A válasz: Az állítás HAMIS.

Legyen az egyik háromszög az 5, 12 és 13 egység oldalhosszú derékszögű háromszög. Ekkor $T=30$ és $K=30$.

Zsinegből készítsünk egy 30 egység hosszúságú hurkot. Ha ezt szabályos háromszög alakban feszítjük ki, annak a magassága nagyobb 6-nál. A kifeszített háromszög egyik csúcsát mozgassuk el addig, míg a szemközti oldalhoz tartozó magasság hossza lecsökken 6-ra.



7. ábra

Az így konstruált háromszög területe és kerülete akkora, mint az 5, 12 és 13 oldalú háromszögé ($T=30$ és $K=30$), és ez egy ettől különböző háromszög, hiszen egyik oldala 10 egység.

12. Felföldön a parlament 40 szenátorból áll, mindegyikük munkáját 3-3 titkár segíti. A 40 szenátor és 120 titkár bizottságokban dolgozik, minden szenátor 6 bizottságnak, és minden titkár 2 bizottságnak a tagja. Egy bizottság vagy 5 szenátorból, vagy 3 szenátorból és 6 titkárból áll. Hány bizottság van összesen?

1. megoldás. A válasz: 64.

Ha minden szenátor kap egy pontot minden bizottságért, amelynek tagja, és minden titkár $1/3$ pontot kap minden tagságért, akkor a 40 szenátor összesen 240 pontot, a 120 titkár pedig összesen 80 pontot kap. Ez összesen 320 pont. Másrészt minden bizottságban 5 pontot osztanak szét, tehát $320/5=64$ bizottság van.

2. megoldás.

Az 5 szenátorból álló bizottságok száma legyen x, a vegyes bizottságok száma y.

Olvassuk fel a vegyes bizottságokban részt vevő titkárok neveit, bizottságonként 6 nevet, ez összesen $6y$ név. Mivel minden titkár két bizottságban vesz részt, így $120\cdot 2=240$ nevet olvasunk fel. Tehát $240=6y$, a vegyes bizottságok száma $y=40$.

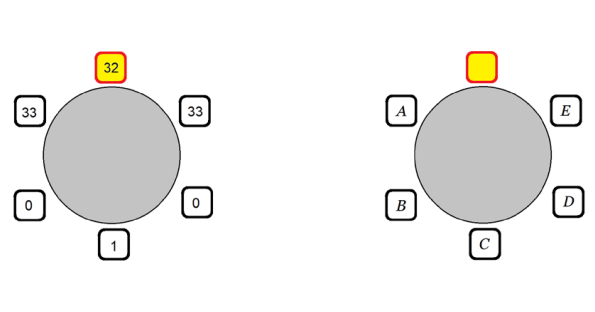
Most soroljuk fel a bizottságokban résztvevő szenátorok nevét, bizottságonként 5 vagy 3 nevet, ez összesen $5x+3y$ név. Minden szenátor 6 bizottságban vesz részt, ezért most $40\cdot 6=240$ név hangzik el. $5x+3y=240$, azaz $5x+3\cdot 40=240$, így $x=24$.

A bizottságok száma $24+40=64$.

13. Sandokan és öt kalóza egy asztal körül ülnek, hogy elosszák a zsákmányolt 99 aranyat. Sandokan javaslatot tesz arra, hogy kinek hány arany jusson, ezután az öt kalóz szavaz erről. Egy kalóz igent mond a javaslatra, ha neki több arany jut, mint két szomszédjának összesen. A javaslat szerint osztoznak az aranyon, ha legalább hárman mellette szavaznak. Ha kevesebb a támogató szavazat, akkor Sandokan a szerencsétlen javaslata miatt semmit sem kaphat a zsákmányból. Legfeljebb hány aranyat tud megszerezni Sandokan?

Megoldás. A válasz: 32.

Az első ábrán azt látjuk, hogy Sandokan kaphat 32 érmét, ha két szomszédjának 33-33 aranyat ad, az azok mellett ülő kalózok semmit sem kapnak, míg a Sandokannal szemközti kalóznak 1 arany jut.



8. ábra

Sandokan nem szerezhet 32-nél több érmét.

Lehetetlen, hogy két szomszédos kalóz mindegyike igennel szavazzon, mivel az igennel szavazó kalóznak több pénzt kell kapnia, mint a szomszédjának.

3 támogató szavazat úgy szerezhető, ha az A, C, E kalózok a javaslat mellett vannak.

Ha Sandokan magának legalább 33 érmét ad, akkor az A és E kalózok legalább 34 érmét kapnak, ám ekkor hármójuknak legalább $34+33+34=101$ érme jutna, ami nem lehet.

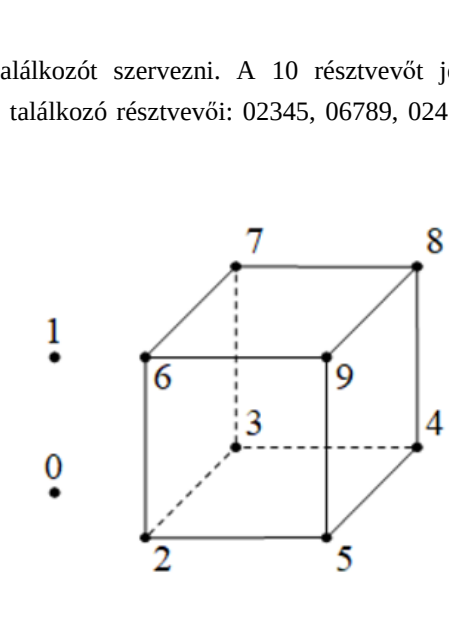
14. Egy tízfős társaság több megbeszélést tartott. Minden egyes találkozón a tíz emberből öten vettek részt. A társaságnak nincs két olyan tagja, akik együtt három megbeszélésen is jelen lettek volna. Legfeljebb hány találkozóra kerülhetett sor?

Megoldás. A válasz: 8.

Ha minden találkozón a résztvevők kezet fognak egymással, akkor egy ember a 9 másikkal összesen legfeljebb 18-szor fog kezet. Egy résztvevő egy találkozón 4 másikkal fog kezet, így legfeljebb 4 találkozón vehet részt, különben legalább $5\cdot 4=20$ kézfogásban vesz részt, ami 18-nál több.

A 10 résztvevő legfeljebb $4\cdot 10=40$ találkozón vesz részt, és így minden találkozót az öt résztvevő miatt 5-ször számolunk, ezért a találkozók száma legfeljebb $40/5=8$.

Lehetséges 8 találkozót szervezni. A 10 résztvevőt jelöljük a 0, 1, 2, …, 9 számokkal. A 8 találkozó résztvevői: 02345, 06789, 02479, 03568, 12376, 13487, 14598, 15269.



9. ábra

Ha a 2, 3, …, 9 számokat az ábra szerint egy kocka csúcsaiba helyezzük, akkor az előbbi találkozókat tudjuk szemléltetni. A 0 és az 1 kiegészül a kocka valamelyik lapjával (ez 6 lehetőség), vagy négy olyan csúccsal, melyek között nincs kettő, amit él köt össze (ez 2 lehetőség, 2 tetraédert adunk meg ezekkel a pontokkal). Két szomszédos csúcs együtt két lapra illeszkedik, két nemszomszédos csúcs együtt egy lapon és egy tetraéderen szerepelnek. Azaz, a négyesekben előforduló számpárok mindegyikét legfeljebb két négyesben láthatjuk együtt. Ezeket a négyeseket úgy egészítettük ki a 0-val, illetve az 1-gyel, hogy ezek a kocka egy-egy csúcsával legfeljebb kétszer kerülnek közös csoportba.

Róka Sándor, a Háttusa rovat szerkesztője

HÍREK CIKKEI PORTRÉ CIKKEI TANÓRA CIKKEI KÖNYVESPOLC CIKKEI TUDOMÁNY CIKKEI
GAZDA(G)SÁG CIKKEI HÉTTUSA CIKKEI
Copyright © BOLYAI TÁRSULAT Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ
Kapcsolat
Szerkesztőség
Leírás szerzőknek
Szerzői jogok
Adatkezelés
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. NKA Nemzeti Kulturális Alap EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA Petőfi Kulturális Ügynökség

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 30. szám 2023. december Válasszon: ›

100

Cím	Szerző
Matek az utcán 2024 – Legyél Te is önkéntes	Írta: Szász Réka
Magas részvétel az idei Schweitzer-versenyen	Írta: Gyenizse Gergő, Vigh Viktor
Rátz Tanár Úr-díjas tanárok – Nobel-díjas tanítványok	Írta: Szerkesztő
A világ legnagyobb matematikai konferenciája: ICIAM 2023 Tokióban	Írta: Röst Gergely
APP&X pályázat – közönségszavazással!	Írta: Szász Réka
Válogatás az Érintő első 7 évéből	Írta: Stipsicz András, Titkos Tamás
Ugródeszkák matek szakon – Czeller Ildikó	Írta: Paulovics Zoltán
Daróczy Zoltán (1938–2023)	Írta: Páles Zsolt
A matematika érettségi követelményeinek változása 2024-től – IV. rész	Írta: Csapodi Csaba
Nem megy a matek – avagy a törtek osztása egy rajzfilmben	Írta: Pintér Gergő
35. Varga Tamás Módszertani Napok	Írta: Csapodi Csaba, Kiss Anna, Móricz Márk, Vancsó Ödön,
Nyolcadik osztályból a kilencedikbe	Írta: Horváth Eszter
No Time to be Brief: Hraskó Péter Relativitáselmélet c. tankönyvéről	Írta: Etesi Gábor
Válogatás Erdős Pál kedvenc feladataiból	Írta: Sándor Csaba
A 100 éve született René Thom tudományos hagyatéka	Írta: Szabó Szilárd
Bolyai János korszakalkotó felfedezése két évszázad tükrében	Írta: Pálfy Péter Pál
Neumann-emlékülések Budapesten és New Yorkban	Írta: Molnár Lajos, Stipsicz András:
Az Erdős Center első két éve	Írta: Böröczky Károly J.
A Bolyai Borkóstolók hatéves története	Írta: Győrffy Lajos
Tensegrity a karácsonyfán	Írta: Gáspár Merse Előd
Egy geometriai kapcsolat a Fibonacci-sorozat és a Lucas-számok sorozata között	Írta: Figula Ágota, Silling Szintia Adriána
Beszámoló a Héttusa második fordulójáról	Írta: Róka Sándor
Kitekintés – egy beküldő megoldásai	Írta: Makay Géza
Hogyan lett egy Héttusa-feladatból Schweitzer-probléma?	Írta: Makay Géza
Héttusa 3. forduló (2023. december)	Írta: Róka Sándor

Kapcsolat

Szerkesztőség

Leírás szerzőknek

Szerzői jogok

Adatkezelés

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült. Nemzeti Kulturális Alap Emberi Erőforrások Minisztériuma Petőfi Kulturális Ügynökség