

Gian-Carlo Rota: Tíz lecke – bárcsak valamennyit megtanították volna nekem

Először is hadd nyugtassam meg valamennyiüket: a következő fél óra nem azzal fog eltelni, hogy megköszönöm a konferencián való részvételüket, meg azt, hogy a munkájuktól elszakadva ideutaztak Cambridge-be.

És hogy egy másik lehetséges aggodalmukat is eloszlassam: nem hajdani történeteket készülök itt felidézni – az elmúlt években teljes komolysággal és olykor a valóságot megszépítve már közreadtam ilyeneket.

Ezt a két lehetőséget elvetettem tehát; de mi legyen akkor az előadás címe? Szerencsére emlékeztem egy szemináriumi előadásra még az 50-es évek végéről; az volt az egyik legelső előadás, amit itt, az MIT-n hallgattam. Eugenio Calabi volt az előadó. A hallgatóság első sorában ült Norbert Wiener – szokásához híven a tapsig aludt –, és Dirk Struik, Calabi egyik tanára a 40-es évekből, amikor Calabi az MIT-n tanult. Az előadás témája felfoghatatlannak tűnt nekem; az első öt perc után teljesen elvesztettem a fonalat. Az előadás végén egy homályos beszélgetés zajlott az előadó és a hallgatóság egyik-másik tagja – ha jól emlékszem, Ambrose és Singer – között, majd feszült csend. Struik professzor törte meg a hallgatást: felemelte a kezét, és így szólt: „Mondjon nekünk valamit, amit hazavihetünk magunkkal!”. Calabi így is tett: a következő öt percben csodás egyszerűséggel elmagyarázta az előadás lényegét. Mindenki meglelégedéssel távozott.

Struik professzornak igaza volt: az előadó próbáljon meg valami olyat adni, amit a hallgatóság magával vihet. De mit? Összegyűjtöttem egy-két jó tanácsot, s ezeket folyamatosan mondogatom magamnak; olyan arany-szabályok ezek, amelyeket minduntalan megszegek, és alighanem meg is fogok szegni. Van, aki már megtapasztalt egy-két ilyen finomságot. Egy csokorba gyűjteni és egy beszédben elmondani őket: talán ez látszik a legkevésbé ellenszenves pimaszságnak részemről. A másoknak adott tanácsokra rendszerint magunknak van a legnagyobb szükségünk. Mivel már túl késő megtanulnom ezeket a leckéket, inkább megosztom Önökkel, s ezzel elvégzettnek gondolom a magam el nem végzett feladatát. A leckék sorrendje nem véletlen: előbb jönnek a kevésbé vitathatók, a vitathatóbbak meg később.

2 Gian-Carlo Rota: Tíz lecke – bárcsak valamennyit megtanították volna nekem

1. Előadásmód

Egy jó előadásnak négy alapkövetelménye van, bár ezek egyáltalán nem tűnnek nyilvánvalónak – azokból a matematikaelőadásokból ítélve legalábbis nem, amelyeket az elmúlt hatvannégy évben hallottam.

a. Minden előadás egyetlen lényeges pontot hangsúlyozzon. W. G. Hegel német filozófus azt írta, hogy nem lehet jó filozófus az, aki túl gyakran használja az „és” szót. Azt hiszem, igaza volt, legalábbis ami az előadásmódot illeti. Minden előadásban egyetlen lényeges pontot kell megfogalmazni, majd azt újra és újra ismételtetni, mint egy zenei téma variációit. A hallgatóság olyan, mint egy tehéncsorda: lassan húzódik abba az irányba, amerre terelik. Ha csak egyvalamire összpontosítunk, akkor a hallgatóság jó eséllyel megtalálja a helyes irányt; ha többre, akkor azok a tehenek szétszélednek a legelőn: a hallgatóság ilyenkor elveszíti az érdeklődését, és ki-ki visszatér félretett korábbi gondolataihoz.

b. Soha ne lépd túl az időkeretet. Túllépni a megadott időkeretet a legmegbocsáthatatlanabb hiba egy előadó részéről. Ötven perc (Neumann János szavajárásával: egy mikroévszázad) után mindenkinek elkalandozik a figyelme, még ha éppen a Riemann-sejtést bizonyítanánk is. Egy perc időtúllépés a legjobb előadásokat is tönkretesetheti.

c. Kapcsolódj a hallgatósághoz. Ahogy belépsz az előadóterembe, próbálj kiszemelni valakit, akinek legalább egy kicsit jártas vagy a munkásságában. Gyorsan rendezd át a mondanivalód úgy, hogy az illető munkái közül is megemlíthess néhányat. Ezáltal biztosan lesz legalább egyvalaki, aki elmélyült figyelemmel fog hallgatni, és még egy barátira is szert teszel. Titkon mindenki azzal a reménnyel jön az előadásodra, hogy hallani fogja a nevét és valamelyik munkáját.

d. Adj át valamit, amit haza lehet vinni. Nem könnyű Struik professzor tanácsát követni. Sokkal könnyebb megfogalmazni, hogy egy előadás mely jellegzetességeire fog a hallgatóság mindig emlékezni; és a válasz nem túl szívderítő. Gyakran találkozom reptereken, az utcán vagy néha kínos helyzetekben egykori MIT-s hallgatókkal, akik egy vagy több kurzusomra is jártak. Többnyire bevallják, hogy elfelejtették a kurzus témáját és azt is a matematikából, amelyet legjobb tudomásom szerint megtanítottam nekik, viszont örömmel idézik fel ott elsütött vicceimet, anekdotákat, beszélásokat, zárójeles megjegyzéseket vagy éppen az általam ejtett hibákat.

Gian-Carlo Rota: Tíz lecke – bárcsak valamennyit megtanították volna nekem 3

2. Táblahasználat

A táblahasználatnak két sarkalatos pontja van.

Győződj meg arról, hogy a tábla makulátlanul tiszta.

Különösen fontos, hogy azokat a foltokat is letöröljük, amelyek a nem egyenletes törlés következményeképpen maradtak vissza. Ha makulátlanul tiszta táblával kezded az előadást, akkor finoman azt a benyomást kelted, hogy a mondandód éppilyen tiszta lesz.

A bal felső sarokban kezdj írni a táblára.

Úgy írjunk a táblára, ahogyan azt viszontlátni szeretnénk a figyelmes hallgatóság jegyzeteiben. Ajánlatos lassan és jókora betűkkel írni, rövidítések nélkül. Akik jegyzetelnek a hallgatóságból, azok szívességet tesznek nekünk, s miért ne segíthetnénk őket a másolásban. Ha táblára írás helyett diát vetítünk, akkor megfelelő ideig kell magyarázni – ha kell, lényegtelen vagy felesleges szavakkal, ismétlésekkel is –, hogy a hallgatóságban mindenki mindent leír hasson. Mindannyian azt hisszük, hogy a hallgatóság az előadás után majd időt szán a kiosztott írásos anyag elolvasására; ez azonban hiú ábránd.

3. Többször publikáld ugyanazt az eredményt

Tanulmányaim végeztével néhány évig funkcionálanalízissel foglalkoztam. Rögtön megvettem Riesz Frigyes összegyűjtött munkáit, mihelyt a vasikos, súlyos, túlméretezett köteteket kiadták. Mikor elkezdtem végiglapozni, feltűnt, hogy a könyvlapok különösen vastagok, szinte olyanok, mint a kartonpapír. Furcsamód, Riesz Frigyes minden publikációja rendkívül nagy betűtípussal volt újraszedve. Kedveltem Riesz cikkeit: mindig gyönyörűen meg voltak írva, és az olvasóban a véglegesség érzetét keltették.

De az összegyűjtött munkákat átnézve egy másikfajta kép is kirajzolódott bennem. A szerkesztők mindent megtettek, hogy a Riesz által valaha publikált munkákat mind közreadják, még a legapróbbakat is. Világosan látszott, hogy Riesznek kevés publikációja volt. S ami még meglepőbb: hogy a cikkei többször is megjelentek. Egy ötlet első, nyers változatát Riesz alighanem valamely eldugott magyar folyóiratban közli. Néhány évvel később a Francia Akadémia Comptes Rendus folyóiratába küldött közlemények sorozatában alaposabban kidolgozza a témát, s még később franciául vagy angolul megjelenteti a végleges cikket.

4 Gian-Carlo Rota: Tíz lecke – bárcsak valamennyit megtanították volna nekem

Korányi Ádám, aki járt Riesz óráira, azt mondta nekem, hogy Riesz ugyanarról a témáról mintha évről évre tartana előadásokat, s közben folyamatosan a leírandó végleges változaton elmélkedne. Nem csoda, hogy a végső változat mindig tökéletes volt.

Megéri Riesz példáját követni. A matematikus közösség kis csoportokra bomlik, s mindegyik ilyen csoportnak megvannak a maga szokásai, jelölései, elnevezései. Idővel elkerülhetetlen, hogy ugyanazt az eredményt többféle változatban, egy-egy szűkebb csoport számára is érthető módon bemutassuk; különben el kell viselnünk, hogy más nyelvet és jelöléseket használva valaki újra felfedezi a munkánkat – és jogosan a magáénak fogja tartani.

4. Leginkább a magyarázó munkáidról fognak rád emlékezni

Nézzünk két példát. Kezdjük Hilberttel; rá gondolva néhány nagyszerű tétel jut eszünkbe, például a bázistétel. De Hilbert neve gyakrabban ötlik fel számelméleti munkássága, a Zahlbericht, valamint a geometria alapjairól és az integrálegyenletekről szóló könyvei miatt.

A „Hilbert-tér” elnevezést Stone és Neumann vezette be Hilbert integrálegyenletekről szóló tankönyve előtti tisztelgésként; ebben a könyvben jelent meg először a „spektrum” – legalább húsz évvel a kvantummechanika felfedezése előtt. Hilbert integrálegyenletekről szóló tankönyve nagyrészt magyarázó jellegű, s Hellinger meg több más, mára feledésbe merült matematikus munkájára támaszkodik.

A geometria alapjairól szóló könyvében – s az tette Hilbert nevét igazán ismertté a matematikusok között – szintén kevés az eredeti munka: számos geométer eredményeit foglalta egybe – Kohnét, Schurét (ez nem az a Schur, akiről hallottak), Wienerét (ez is egy másik Wiener), Paschét, Pieriét és néhány további olasz matematikusét.

Sőt, Hilbert alapvető munkája, a számelméletben korszakalkotó jelentőségű Zahlbericht is áttekintésnek készült eredetileg; a felkérés a Német Matematikai Társaság közleményei közé szánt munka megírására szólt.

Hasonló példa lehet William Feller. Fellerre a valaha írt leghíresebb valószínűségszámítási tankönyv szerzőjeként emlékezünk. A valószínűségszámítással foglalkozó mai kutatók közül csak kevesen tudnak Fellertől egy-két tudományos cikknél többet idézni; a legtöbb matematikus nem is hallott arról, hogy Feller korábban konvex geometriával foglalkozott.

Engedjék meg, hogy felidézzek egy személyes emléket is. Időről időre a filozófia fenomenológia tárgykörében is szoktam írásokat közreadni. Megje-

Gian-Carlo Rota: Tíz lecke – bárcsak valamennyit megtanították volna nekem 5

lent ebben a tárgyban az első tanulmányom, ám a Fenomenológiai és Egzisztenciális Filozófiai Társaság egy összejövételén félreérthetetlen szavakkal, nyersen közölték velem – s mélyen meg is bántottak vele –, hogy csupa már jól ismert dolgot írtam le benne. Ez többször is megtörtént, s végül kénytelen voltam átgondolni a fenomenológiai publikációkban követendő irányelveket.

Az alapvető fenomenológiai tanulmányok ugyanis tömény, nehéz, filozofikus német nyelven íródtak. A hagyomány azt követelte, hogy a mondani-való soha ne legyen példával szemléltetve. Egy nap – komoly aggodalmak közt – mégis arra jutottam, hogy publikálok egy tanulmányt, s abban voltaképp felfrissítem és egy-két példával kiegészítem Edmund Husserl egyik könyvének néhány bekezdését. A lehető legrosszabbra voltam felkészülve a Fenomenológiai Társaság következő összejövételére menet, de a fenomenológia egyik kiváló tudósa széles mosollyal az arcán jött oda hozzám. Elismerően szólt a tanulmányomról, és határozottan bátorított, hogy fejlesszem tovább az ott kifejtett újszerű és eredeti gondolatokat.

5. Minden matematikusnak csupán néhány trükkje van

Egyszer egy idős és jól ismert számelméletész becsmérő megjegyzéseket tett előttem Erdős Pál munkásságára. Önök bizonyára legalább annyira csodálják Erdős matematikai eredményeit, mint én; s én bizony bosszantónak éreztem, hogy ez az idősebb matematikus határozottan lekicsinyli Erdőst: hogy Erdős minden munkája „lecsupaszítható” néhány trükkre, s hogy Erdős folyton ezekre a trükkökre támaszkodik a bizonyításaiban. A számelméletész nem ismerte fel, hogy valójában más matematikusok is csupán néhány trükköt vetnek be – még a legjobbak is –, és újra meg újra felhasználják őket. Vegyük például Hilbertet. Összegyűjtött munkáinak második kötetében vannak az invariánselméleti cikkek. Fontosnak éreztem, hogy ezekből a cikkekből néhányat alaposan elolvassak. Szomorúan kell megjegyeznem, hogy Hilbert gyönyörű eredményei közül több teljesen feledésbe merült. Ám Hilbert meghökkentő és mély tételeinek bizonyítását olvasván meglepődve állapítottam meg, hogy ezek a bizonyítások ugyanarra a néhány trükkre épültek. Még magának Hilbertnek is csupán néhány trükkje volt!

6. Ne aggódj a hibáid miatt

Hadd kezdjem megint Hilberttel. A németek kiadni készültek Hilbert összegyűjtött munkáit – és azzal megajándékozni őt egy későbbi születés-

6 Gian-Carlo Rota: Tíz lecke – bárcsak valamennyit megtanították volna nekem

napján –, de ráébredtek, hogy a cikkeket nem jelentethetik meg eredeti változatukban, mert tele vannak hibával, olykor igen súlyos hibával. Hamarjában szerződtettek egy fiatal munkanélküli matematikust – Olga Taussky-Toddot –, hogy nézze át Hilbert cikkeit, és javítsa ki az összes hibát. Olga három évig dolgozott ezen, s kiderült, hogy mindegyik hiba kijavítható az adott tétel állításának lényegesebb megváltoztatása nélkül. Egyetlen kivétel akadt: egy időskori Hilbert-tanulmányt sehogy sem lehetett helyrehozni. Ez a kontinuumhipotézis egy állítólagos bizonyítása volt; a Mathematische Annalen folyóiratban jelent meg, valamikor a harmincas évek elején. Végül a Geheimrat (Hilbert, a titkos tanácsos) születésnapján megkapta ajándékba munkáinak frissen nyomott gyűjteményét; gondosan végiglapozta, és semmi nem tűnt fel neki.

Ugorjunk most a spektrum másik végére, s hadd meséljek el egy újabb személyes anekdotát. 1979 nyarán egy filozófiai találkozón vettem részt Pittsburgh-ben, s egyszer csak levált a retinám. Hála Joni azonnali közbeavatkozásának, még idejében megműtöttek, és nem vesztettem el a látásomat.

A műtét utáni reggelen bekötött szemmel feküdtem a kórházi ágyon; Joni bejött meglátogatni. Mivel legalább egy hétig ott kellett maradnom abban a pittsburgh-i kórházban, úgy határoztunk, hogy írunk egy cikket. Joni kihalászott egy kéziratot a bőröndömből; említettem neki, hogy a szövegben van néhány hiba, s hogy lehetőség szerint hozza rendbe őket.

Húsz perc csend következett: Joni átnézte a piszkozatot. „Hát, az egész hibás!” – jegyezte végül meg fiatalos hangján. Igaza volt. A kézirat mindegyik állításával volt valami baj. Mindazonáltal némi munkával sikerült az összes hibát kijavítani, és a cikk végül megjelent.

Kétféle hiba létezik. Van végzetes hiba, amely lerombol egy elméletet, de van esetleges hiba is: az hasznos lehet az elmélet szilárdságának kipróbálásában.

7. Használd a Feynman-módszert

Richard Feynman gyakran adott tanácsot arra nézve, hogyan legyünk zsenik. Folyamatosan észben kell tartanod egy tucat kedvenc problémádat – mondta –, még ha azok többé-kevésbé szunnyadó állapotban fognak is maradni. Valahányszor hallasz vagy olvasol egy új trükköt vagy egy új eredményt, mindannyiszor próbáld ki mind a tizenkét problémán, hogy lásd, előbbre jutsz-e vele. Egyszer-egyszer csak beüt a szerencse, és akkor az emberek azt mondják majd: „Hogy csinálta? Biztosan zseni!”.

Gian-Carlo Rota: Tíz lecke – bárcsak valamennyit megtanították volna nekem 7

8. Szórd bőkezűen az elismeréseket

Gyakran éreztem rosszkedvűnek magam, ha egy éppen olvasott cikkben nem ismerték el kellően a munkámat, és azt gyanítom, hogy ezzel más is így van. Végeztem egyszer egy kísérletet. Megírtam egy meglehetősen hosszú cikket, s vázlatképpen összeraktam egy részletes irodalomjegyzéket. A pillanat hevében úgy döntöttem, hogy idézek néhány olyan cikket is, amelynek nem volt semmi köze az én cikkem tartalmához; kíváncsi voltam, hogy mi lesz.

Némi meglepetésemre levelet kaptam két olyan szerzőtől is, akiknek a cikke benne volt az irodalomjegyzékben, bár szerintem a cikknek semmi köze nem volt az enyémhez. Mindkét levél baráti hangnemben íródott; mindketten szívből gratuláltak ahhoz, hogy – elsőként – elismertem az ezen a területen elért tudományos eredményeiket.

9. Írj tartalmas bevezetést

Manapság ritka, hogy töviről hegyire végigolvasnánk egy matematikai cikket. Ha azt szeretnénk, hogy cikkünket elolvassák, akkor érdemes komoly ösztönzéssel megkönnyíteni a leendő olvasó dolgát. Egy hosszabb bevezetés – ha mások eredményeit elismerve összefoglaljuk benne a téma előzményeit, majd esetleg vonzóan és logikusan felvázoljuk a cikk tartalmát – hozzásegíthet bennünket néhány olvasóhoz.

Az *Advances of Mathematics* folyóirat szerkesztőjeként gyakran küldtem vissza benyújtott cikkeket azzal, hogy jobb lenne kibővíteni a bevezetést. A szerzők nemegyszer visszaírtak, hogy az *Annals of Mathematics* folyóirat korábban épp azért utasította vissza a munkájukat, merthogy túlságosan hosszú a bevezetés.

10. Légy felkészülve az idős korra

Néhai barátom, Stan Ulam szokta volt mondogatni, hogy az élete élesen két részre különült. Élete első felében mindig ő volt a legfiatalabb a társaságban; a második felében meg mindig ő volt a legidősebb. A kettő között nem volt semmi átmenet.

Most látom csak, hogy mennyire igaza volt. Úgy tűnik, hogy az idős kor illemszabályai nincsenek megírva, azokat a magunk kárán kell megtanulnunk. Az alapfelfogáson múlik, s ahhoz időbe telik hozzászokni. Meg

8 Gian-Carlo Rota: Tíz lecke – bárcsak valamennyit megtanították volna nekem

kell értened, hogy egy bizonyos életkor elérése után nem személyként tekintenek rád; egyszerűen intézménnyé válsz, és úgy is bánnak veled, ahogyan intézménnyel szokás. Elvárják, hogy úgy viselkedj, mint egy antik bútordarab, egy építészeti műalkotás vagy egy ősnymtatvány.

Nem sokat számít, hogy publikálsz-e még vagy sem. Ha a cikkeid hasznavehetetlenek, akkor azt fogják mondani: „Mit vártál? Hiszen egy őskövyet!”; és ha véletlenül valamelyik cikked érdekesnek bizonyul, akkor meg azt mondják majd: „Mit vártál? Egész életében ezen dolgozott!”. Az egyetlen észszerű lehetőség az, hogy élvezettel játszod az intézmény szerepét.

Megjegyzés. Gian-Carlo Rota (1932–1999) olasz születésű amerikai matematikus és filozófus. A cikk egy 1996. április 20-i előadásának írott változata: a Massachusettsi Műszaki Egyetemen (Massachusetts Institute of Technology, röviden MIT) tartotta, az egyesült államokbeli Cambridge-ben, a hatvannegyedik (azaz 2⁶-adik) születésnapját ünneplő Rotafest konferencián. Megjelent az *Indiscrete Thoughts* by Gian-Carlo Rota című könyvben (Birkhäuser, 1997; szerkesztette: Fabrizio Palombi, akinek szíves engedélyével jelentetjük meg a fordítást).

Fordította: Besenyei Ádám. A fordító köszönetet mond Seres Ivánnak a szöveg átolvasásáért és a hasznos észrevételekért.

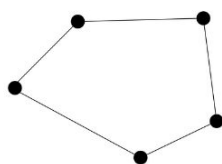
A Matematikai Lapok jelen számát nagyrészt az Érintőben (a Bolyai János Matematikai Társulat és a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet online folyóirata: ematlap.hu) megjelent cikkekből állítottuk össze. Köszönjük az ő engedélyüket és a szerzőkét is.

A fenti cikket az Érintő 2018. márciusi számából vettük át.

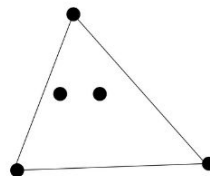
Tardos Gábor, Tóth Géza: Áttörés az Erdős–Szekeres-problémában

1. Konvex sokszögek

Egy véges síkbeli P ponthalmazt *konvex helyzetűnek* nevezünk, ha mindegyik pontja elválasztható a többitől egy egyenessel, azaz bármelyik $p \in P$ ponthoz található olyan egyenes, melynek p az egyik, míg P többi pontja a másik oldalán van. Eszerint egy legfeljebb két pontú ponthalmaz mindig konvex helyzetben van, a legalább három pontú ponthalmazok közül éppen a konvex sokszögek csúcshalmazai vannak konvex helyzetben. Így egy egyenes pontjai között sosem találunk hármat konvex helyzetben. Hogy ezt a problémát elkerüljük, a továbbiakban csak *általános helyzetű* ponthalmazokkal foglalkozunk, azaz feltesszük, hogy a pontok közt nincs három egy egyenesen.



(a)



(b)

1. ábra. Öt pont (a) konvex, (b) nem konvex helyzetben

Klein Eszter, az akkor 22 éves egyetemista 1932-ben vette észre, hogy öt általános helyzetű pont között a síkon mindig van négy, ami konvex helyzetben van. A bizonyítás nagyon egyszerű. Ha a pontok konvex burka (a legnagyobb sokszög, amit meghatároznak) ötszög vagy négyszög, akkor az állítás nyilvánvaló. Ha a konvex burok egy abc háromszög, akkor további két pont, d és e , ennek a belsejében van. A de egyenes az abc háromszög két oldalát metszi, mondjuk ab -t és ac -t. Ekkor viszont b , c , d és e konvex helyzetben van. Klein Eszter megkérdezte, hogy ez az egyszerű észrevétele általánosítható-e: vajon elég sok általános helyzetű pont között már feltétlenül találunk-e ötöt (hatot stb.) konvex helyzetben? Tehát Klein Eszter kérdése a következő.

Igaz-e, hogy minden $n \geq 3$ természetes számhoz létezik egy N szám azzal a tulajdonsággal, hogy N általános helyzetű pont között a síkon mindig van n , amelyek konvex helyzetben vannak?

Érdekes meghatározni a legkisebb megfelelő N számot, legyen tehát $f(n)$ az a legkisebb N egész szám, hogy N általános helyzetű pont közül a síkon mindig van n konvex helyzetben. Ebben a megfogalmazásban Klein Eszter kérdése az, hogy létezik-e egyáltalán $f(n)$ minden n -re.

Világos, hogy $f(3) = 3$ és az előbbi észrevétel alapján $f(4) \leq 5$. De egy háromszög három csúcsa és egy belső pontja mutatja, hogy négy általános helyzetű pont nem mindig van konvex helyzetben, tehát $f(4) = 5$. Makai Endre és Turán Pál néhány héten belül belátták, hogy $f(5) = 9$ [2], majd Szekeres György még abban az évben bebizonyította, hogy $f(n)$ létezik minden n -re. Természetesen adódott a következő kérdés:

Erdős–Szekeres-probléma. *Határozzuk meg $f(n)$ értékét.*

Nem sokkal később Erdős alaposan megjavította Szekeres korlátját, majd közösen publikálták az eredményt [2], amely szerint minden $n \geq 3$ -ra

$$f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 1.$$

Sőt, $f(3)$, $f(4)$ és $f(5)$ értékei alapján a következő merész sejtést is megfogalmazták:

Sejtés. *Minden $n \geq 3$ -ra*

$$f(n) = 2^{n-2} + 1.$$

Ez az egyszerű probléma, eredmény, illetve sejtés korszakalkotó jelentőségűnek bizonyult, egyfelől azért, mert hozzájárult F. P. Ramsey öt évvel korábban megjelent eredményeinek [13] újrafelfedezéséhez és ezzel a Ramsey-elmélet megalapozásához, másfelől azért is, mert megnyitotta az utat pontthalmazok kombinatorikájának tanulmányozásához, ami mára szép és gazdag területe lett a matematikának.

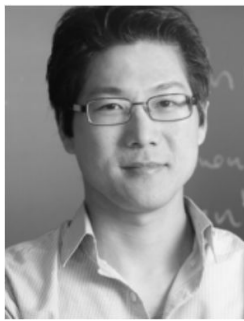
Klein Eszter és Szekeres György nem sokkal később összeházasodtak, ezért a problémát Erdős „Happy End Problem”-nek nevezte.

A legjobb ismert alsó korlát $f(n)$ -re éppen a sejtett értéke, $f(n) \geq 2^{n-2} + 1$, az ezt bizonyító konstrukciót Erdős és Szekeres találták 25 évvel később [3]. A konstrukció 2^{n-2} pontból áll és semelyik n pontja sincs konvex helyzetben. Nagyon szimmetrikus és „merev”, ha bármelyik pontját lényegesen elmozdítjuk, keletkezik n pont konvex helyzetben. Ezért a konstrukció alapján könnyen gondolhatja az ember, hogy nem javítható, vagyis a sejtés igaz.

Erdős és Szekeres felső korlátja, $\binom{2n-4}{n-2} \approx 4^n / \sqrt{n}$, tehát majdnem a négyzete az alsó korlátnak. A problémával nagyon sokan foglalkoztak,

szépsége és fontossága miatt, ennek ellenére a felső korlátot először 60 évvel később sikerült megjavítani. 1998-ban Fan Chung és Ron Graham [1] egy unalmas repülőúton azt vizsgálta, hogy ha az igazság pontosan a felső korlát lenne, tehát $f(n) = \binom{2n-4}{n-2} + 1$, akkor hogyan nézne ki egy $\binom{2n-4}{n-2}$ elemű ponthalmaz, amiben még nincs konvex n -szög. Belátták egy nagyon ügyes érveléssel, hogy ilyen ponthalmaz nem létezhet, és ezzel a felső korlátot a lehető legkisebb mértékben, 1-gyel megjavították. Ezen felbuzdulva Kleitman és Pachter [6] nagyjából egy hónappal később belátták, hogy $f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} + 7 - 2n$, tehát a javítás mértéke már tart a végtelenbe. Majd újabb egy hónap múlva Tóth és Valtr [16] belátták, hogy $f(n) \leq \binom{2n-5}{n-2} + 2$, ami már nagyjából a fele az eredeti korátnak. Ez a három javítás időben olyan közel volt egymáshoz, hogy a Discrete and Computational Geometry című újságnak ugyanabban a számában jelentek meg. Itt leállt a javítások sorozata egy időre, és továbbra is óriási volt az eltérés a felső és az alsó korát között. 2005-ben Tóth és Valtr [17] kombinálták a saját módszerüket Chung és Graham módszerével, így újra megjavították eggyel a felső korlátot.

2015-ben aztán újra megindult a lavina, Georgios Vlachos, egy MSc diák az MIT-ről, tovább javította a felső korlátot egy $\frac{29}{32}$ [15] faktorral. Hossein Mojarrraddal közösen alaposan leegyszerűsítették és tökéletesítették a bizonyítást, végül a $\frac{29}{32}$ faktor helyett egy $\frac{7}{8}$ faktorral javítottak [7]. Közben Norin és Yuditsky [9] is elérték lényegében ugyanezt a korlátot, de még egyszerűbb bizonyítással.



Ezután jött az igazi áttörés, 2016-ban Andrew Suk (l. a fotón) elképesztő javítással állt elő [14]. Több korábbi módszert, ötletet ügyesen kombinálva sikerült a felső korlátot levinnie az alsó korlát közelébe. Belátta, hogy $f(n) \leq 2^{n+6n^{2/3}\log n}$, ezzel kis híján megoldotta Klein, Erdős és Szekeres problémáját. Az elegáns bizonyítást Andreas Holmsen, Hossein Mojarrad, Pach János és Tardos Gábor tovább egyszerűsítette, és a korlátot is sikerült egy kicsit megjavítaniuk [5]. A pillanatnyilag

ismert legjobb felső korlát $f(n)$ -re az övék:

$$f(n) \leq 2^{n+6\sqrt{n\log n}}.$$

Könnyebb áttekinteni a különböző korlátokat, ha nem a fenti $f(n)$ függvényt, hanem az ekvivalens inverz problémát, és az alábbi $g(N)$

12 Tardos Gábor, Tóth Géza: Áttörés az Erdős–Szekeres-problémában

függvényt vizsgáljuk. Legyen $g(N)$ az a legnagyobb n egész szám, amelyre N általános helyzetű pont között a síkon mindig található n konvex helyzetben. Az Erdős–Szekeres-sejtés ekvivalans azzal, hogy

$$g(N) = \lceil \log N \rceil + 1$$

minden pozitív N egészre. Itt és a továbbiakban $\log$ a kettes alapú logaritmust jelöli. Az $f(n)$ -re adott alsó és felső korlátok szerepe megfordul. Erdős és Szekeres 1935-ös felső korlátjából [2] alsó korlát lesz $g(N)$ -re, míg az 1961-es alsó korlátjukból [3] $g(N)$ -re felső korlát adódik:

$$\frac{\log N}{2} + h(N) \leq g(N) \leq \lceil \log N \rceil + 1.$$

Itt $h(N)$ egy aszimptotikusan $(\log \log N)/2$ közeli függvény, ami az alsó becslés nagyságrendjét nem befolyásolja. Az $f(n)$ -re adott alsó és felső becslés közötti majdnem négyzetes eltérésből a $g(N)$ esetében egy majdnem kettes faktor eltérés marad. Chung és Graham [1] 1-gyel javította az $f(n)$ -re adott felső becslést, ebből a $g(N)$ -re adott aló becslés javítása következik 1-gyel, de csak bizonyos (ritka) N értékekre. A további javítások [6, 16, 17, 15, 7, 9] ugyancsak eggyel javították csak Erdős és Szekeres alsó becslését a $g(N)$ függvényre, de egyre több és több N érték esetén. Suk átütő eredménye [14] azonban aszimptotikusan bezárta az alsó és felső becslés közötti kettes faktor eltérést:

$$g(N) \geq \log N - 6 \log^{2/3} N \log \log N.$$

A hibatag nagyságrendjét [5] tovább csökkenti $\sqrt{\log N \log \log N}$ -re.

Az eddig tárgyalt becslések nem segítettek abban, hogy az $f(n)$ értéket minél több (kicsi) n értékre meghatározzuk. Említettük, hogy Klein Eszter 1932-ben belátta, hogy $f(4) = 5$, valamint hogy Makai és Turán ugyanakkor belátták, hogy $f(5) = 9$. Szekeres György bő hetven év elteltével visszatért a problémához és Lindsay Petersszel közös publikációban [12] belátták, hogy $f(6) = 17$. Ez az eredmény komolyabb komputeres esetvizsgálaton alapul és már Szekeres halála után jelent meg. Az $f(n)$ érték semmilyen $n > 6$ számra nem ismert.

Ebben a cikkben áttekintjük az alsó korlát konstrukciót, a felső korlát javításait, a felhasznált módszereket, és vázoljuk a legjobb ismert korlát bizonyítását.

Az Erdős–Szekeres-problémának számos általánosítását, módosítását vizsgálták, sok izgalmas és szép eredménnyel. Ezekről ad kiváló összefoglalót magyarul Pach János [10], angolul Morris és Soltan [8]. Suk eredményéről nagyon szórakoztató ismeretterjesztő cikket írt Hartnett [4].

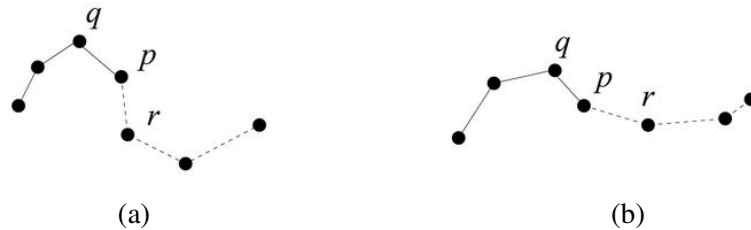
2. Hegyek és völgyek

Szekeres legelső bizonyítása [2] $f(n)$ létezésére a Ramsey-tételt használta, amit újra bebizonyított, mert nem ismerte Ramsey publikációját. Erdős javítása, [2] és az összes további javítás legfontosabb segédeszközei a hegyek és völgyek.

Definíció. Rögzítsünk egy xy koordinátarendszert a síkon. Ezentúl egy pont-halmazra akkor mondjuk, hogy *általános helyzetű*, ha nincs három pontja egy egyenesen, és nem egyezik meg két pontjának az x -koordinátája. Legyen $k \geq 2$, és legyenek $p_1, p_2, \dots, p_k$ általános helyzetű pontok, balról jobbra, vagyis növekvő x -koordináta szerint rendezve. A $p_1, p_2, \dots, p_k$ pontok egy k -hegyet (k -völgyet) alkotnak, ha konvex helyzetben vannak és $p_2, \dots, p_{k-1}$ a p_1p_k egyenes fölött (alatt) van (2. ábra).

A k -völgyek, illetve k -hegyek $k \geq 3$ esetén speciális konvex k -szögek. Vegyük észre, hogy három általános helyzetű pont vagy 3-hegyet, vagy 3-völgyet alkot. Erdős és Szekeres bizonyításának alapja a következő észrevétel.

Ha egy k -hegy utolsó pontja és egy l -völgy első pontja megegyezik, akkor valamelyiket egy ponttal meg lehet hosszabbítani.



2. ábra. (a) A 4-hegy kiegészíthető r -rel, (b) a 4-völgy kiegészíthető q -val

Valóban, legyen p a k -hegy utolsó pontja és az l -völgy első pontja, legyen q a k -hegy utolsó előtti pontja és legyen r az l -völgy második pontja. Ekkor qpr vagy hegyet, vagy völgyet alkot. Az első esetben r -rel kiegészíthetjük a hegyet egy $k+1$ -hegyggyé, a második esetben pedig a völgyet egészíthetjük ki q -val egy $l+1$ -völgyggyé (2. ábra).

Minden $k, l \geq 2$ -re legyen $f(k, l)$ az a legkisebb f szám, amelyre igaz, hogy f általános helyzetű pont között a síkon mindig van egy k -hegy vagy egy l -völgy. Nyilván $f(n) \leq f(n, n)$, ezért az alábbi tételből azonnal következik Erdős és Szekeres korlátja $f(n)$ -re. (Kicsit zavaró, hogy az „általános helyzet” fogalmát szigorítottuk, így elsőre csak az ilyen szigorúbb értelemben vett általános helyzetű $f(n, n)$ méretű síkbeli pontthalmazra adódik, hogy kiválasztható belőle n konvex helyzetű pont. Ez a probléma kezelhető azzal, hogy az xy koordinátarendszert úgy választjuk, hogy ne legyen két pontnak azonos az x koordinátája.) Meglepő módon, $f(n)$ -nel ellentétben, $f(k, l)$ értéket pontosan tudjuk.

1. Tétel. [2]

$$f(k, l) = \binom{k+l-4}{k-2} + 1.$$

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy minden $k, l \geq 3$ -ra

$$f(k, l) \leq f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1.$$

Tekintsünk egy $f(k-1, l) + f(k, l-1) - 1$ elemű általános helyzetű P pontthalmazt. Belátjuk, hogy mindenképpen tartalmaz k -hegyet vagy l -völgyet. Legyen Q a P -ben található $(k-1)$ -hegyek utolsó pontjainak a halmaza. Ha $|Q| \geq f(k, l-1)$, akkor Q vagy tartalmaz egy k -hegyet, és készen vagyunk, vagy egy $(l-1)$ -völgyet. De ekkor ennek az $(l-1)$ -völgynek az első pontja egyben egy $(k-1)$ -hegy utolsó pontja is, tehát vagy a hegy, vagy a völgy meghosszabbítható, és megint készen vagyunk. Vagyis feltehetjük, hogy $|Q| \leq f(k, l-1) - 1$, ekkor viszont $|P \setminus Q| \geq f(k-1, l)$, tehát $P \setminus Q$ tartalmaz egy l -völgyet, és ismét készen vagyunk, vagy egy $k-1$ -hegyet, ami ellentmondás, mert ennek az utolsó pontja Q -hoz tartozna.

Legyen $g(k, l) = \binom{k+l-4}{k-2} + 1$. Könnyű ellenőrizni, hogy

$$g(k, l) = g(k-1, l) + g(k, l-1) - 1.$$

Ezenkívül ha $k = 2$ vagy $l = 2$, akkor $f(k, l) = g(k, l)$. Ezekből pedig indukciónal adódik, hogy minden $k, l \geq 2$ -re $f(k, l) \leq g(k, l)$.

Az alsó korláthoz minden $k, l \geq 2$ -re konstruálunk egy $P(k, l)$ pontthalmazt, amely éppen $\binom{k+l-4}{k-2}$ pontból áll, és nem tartalmaz k -hegyet és l -völgyet. A $k = 2$, illetve $l = 2$ esetben egy egy pontból álló halmaz jó lesz. Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk a $P(k-1, l)$ és a $P(k, l-1)$ pontthalmazokat. Helyezzük el őket egymás mellé úgy, hogy $P(k-1, l)$

az y -tengelytől balra, $P(k, l - 1)$ pedig jobbra legyen, $P(k - 1, l)$ minden pontja a $P(k, l - 1)$ pontjai által meghatározott egyenesek fölött legyen, és $P(k, l - 1)$ minden pontja a $P(k - 1, l)$ pontjai által meghatározott egyenesek alatt legyen. Az utóbbi két feltétel biztosítható azzal, ha a $P(k - 1, l)$ pontthalmazt az y -tengellyel párhuzamosan megfelelő magasra toljuk. Ekkor minden $P(k - 1, l)$ -beli hegy maximum egy $P(k, l - 1)$ -beli ponttal egészíthető ki, és fordítva, minden $P(k, l - 1)$ -beli völgy maximum egy $P(k - 1, l)$ -beli ponttal egészíthető ki. Ebből adódik, hogy az így kapott $\binom{k+l-5}{k-2} + \binom{k+l-5}{k-3} = \binom{k+l-4}{k-2}$ elemű $P(k, l)$ halmaz nem tartalmaz sem k -hegyet, sem l -völgyet. $\square$

Vegyük észre, hogy ha n pont konvex helyzetben van, akkor felbontható két részhalmaz ún. íójára, amiből az egyik hegy, a másik völgy. A hegy a konvex n -szög „teteje”, a völgy az „alja” lesz. Ha feltesszük, hogy a pontok x -koordinátája páronként különböző, akkor a hegynek és a völgynek két közös pontja is lesz: a legkisebb és legnagyobb x -koordinátájú csúcsa a konvex n -szögnek. Láttuk, hogy $f(n, n)$ általános helyzetű pont közül mindig kiválaszthatunk n -et konvex helyzetben: egy n -hegyet, vagy egy n -völgyet. Találhatunk viszont $f(n, n) - 1$ pontot általános helyzetben, hogy nincs köztük sem n -hegy, sem n -völgy. Egy ilyen pontthalmaz nem tartalmaz $2n - 3$ pontot konvex pozícióban, hiszen az ellentmondana a fentebbi felbontásnak hegyre és völgyre.

Ez a gondolatmenet jól mutatja, hogy $g(N)$ értékére (ez a legnagyobb n szám, hogy N általános helyzetű pontból mindig kiválasztható n konvex helyzetben) Erdős és Szekeres által adott alsó és felső becslések között miért körülbelül egy kettes faktor differencia van: Pontosan tudjuk, hogy mekkora hegy vagy völgy választható ki N általános helyzetű pont közül, de azt már nehezebb meghatározni, hogy ezek mikor „illeszthetők össze” egy konvex pontthalmazzá.

A fenti gondolatmenetet direktben is használhatjuk arra, hogy $f(n)$ -re alsó becslést adjunk. Ha $k + l = n + 3$, akkor $f(n) \geq f(k, l)$, hiszen n konvex helyzetű pont között van k -hegy vagy l -völgy. A korábban megkonstruált $P(k, l)$ pontthalmazok egyes kombinálásával kissé erősebb alsó becslést kapunk, ami egyben megegyezik $f(n)$ sejtett értékével is:

2. Tétel. [3]

$$f(n) \geq 2^{n-2} + 1.$$

Bizonyítás. Legyen $n \geq 4$. Minden i -re ($2 \leq i \leq n$) helyezzük el $P(i, n + 2 - i)$ egy nagyon pici és nagyon lapos példányát az (i, i^2) pont

közelébe úgy, hogy a pontjai által meghatározott egyenesek mind majdnem vízszintesek. Nevezzük ezeket blokkoknak. Mindez azért lehetséges, mert a $P(i, j)$ pontthalmazt szabadon eltolhatjuk, kicsinyíthetjük, sőt „lapíthatjuk” is (alkalmazhatunk affin transzformációt az y -tengely irányában), mindez nem befolyásolja hogy mekkora hegyek és völgyek vannak a pontthalmazban. Legyen P_n a kapott halmaz. Világos, hogy

$$|P_n| = \sum_{i=2}^n |P(i, n+2-i)| = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} = 2^{n-2}.$$

Azt állítjuk, hogy P_n nem tartalmaz konvex n -szöget. Legyen Q egy konvex pontthalmaz P_n -ben. Legyen $P(k, n+2-k)$ a legalsó blokk, amiben Q -nak van pontja, és $P(l, n+2-l)$ a legfelső. Ha $k = l$, akkor Q a $P(k, n+2-k)$ blokk része, így a tétel kimondása előtti gondolatmenet alapján $|Q| \leq n-1$. Ha viszont $k < l$, akkor Q $P(k, n+2-k)$ -ből egy völgyet tartalmaz, amelynek a mérete legfeljebb $n+1-k$, $P(l, n+2-l)$ -ből egy hegyet, aminek a mérete legfeljebb $l-1$, és a köztük levő $k-l-1$ blokk mindegyikéből legfeljebb egy pontot.

Ezért $|Q| \leq n+1-k+l-1+k-l-1 = n-1$. $\square$

3. Javítások

Mint említettük, az első javítást Chung és Graham érte el 1998-ban, [1]. Azt látták be, hogy $f(n) \leq f(n, n) - 1 = \binom{2n-4}{n-2}$. Tekintsünk egy $f(n, n) - 1$ méretű pontthalmazt. Ha tartalmaz egy n -hegyet vagy n -völgyet, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor viszont Chung és Graham megmutatják, hogy található egy $n-1$ -hegy és „alatta” egy pont, vagy egy $n-1$ -völgy és „fölötte” egy pont, ami egy konvex n -szöget alkot.

A következő javítás Kleitman és Pachter eredménye, [6]. Észrevették, hogy az Erdős–Szekeres-féle hegyes-völgyes bizonyítás tetszőleges xy koordinátarendszerben elmondható. Úgy forgatták el a koordinátarendszert, hogy a konvex burok egyik éle függőleges legyen, és ezt a szakaszt „duplán” használták. Kiterjesztették a hegy és a völgy definícióját úgy, hogy ez a függőleges él lehet egy hegynek és egy völgynek is az utolsó éle. Ezzel egy kicsit jobb rekurziót kaptak, és azt, hogy $f(n) \leq \binom{2n-4}{n-2} - 2n + 7$.

Ezután következett Tóth és Valtr javítása, [16]. A módszerük lényege az, hogy a forgatásnál sokkal általánosabb transzformációt alkalmaznak a hegy-völgy érvelés előtt, mégpedig egy alkalmas projektív transzformációt. Tóth

és Valtr azt látták be, hogy $f(n) \leq f(n-1, n) + 1$. Legyen P egy $f(n-1, n) + 1$ elemű ponthalmaz és p a konvex burk egy csúcsa. Legyen $Q = P \setminus \{p\}$. Legyen ℓ egy p -t tartalmazó egyenes, amelynek Q minden pontja ugyanazon az oldalán van. Alkalmazzunk egy projektív transzformációt, amely ℓ -et a végtelen távoli egyenesbe viszi, p -t az $y = -\infty$ végtelen távoli pontba, Q -t pedig az R halmazba. Mivel $|R| = f(n-1, n)$, R tartalmaz egy $n-1$ -hegyet vagy egy n -völgyet. Ha n -völgyet tartalmaz, akkor könnyen látható, hogy a megfelelő pontok Q -ban is konvex helyzetben vannak. Ha $n-1$ -hegyet tartalmaz, akkor pedig a megfelelő pontok és p együtt is konvex helyzetben vannak. Tehát kész vagyunk.

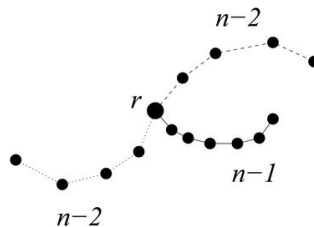
A következő javítás nem túl izgalmas, ugyancsak Tóth és Valtr, [17], a fenti $P \setminus \{p\}$ halmazra hasonlóan érvelt, mint Chung és Graham, így újból 1-et faragtak a korlátból.

További tíz évvel később Georgios Vlachos következett, [15]. Gondolatmenete úgy indul, mint Tóth és Valtr bizonyítása: Legyen P egy ponthalmaz, amely nem tartalmaz n pontot konvex helyzetben, és legyen p egy pontja a konvex burkon. Legyen $Q = P \setminus \{p\}$. Legyen ℓ egy p -t tartalmazó egyenes, amelynek Q minden pontja ugyanazon az oldalán van. Alkalmazzunk egy projektív transzformációt, amely ℓ -et a végtelen távoli egyenesbe viszi, p -t az $y = -\infty$ végtelen távoli pontba, Q -t pedig az R halmazba.

Az eddigiek alapján megállapíthatjuk, hogy R nem tartalmaz $n-1$ -hegyet és n -völgyet. Sőt, nem tartalmaz olyan r pontot, amely egyszerre végpontja egy $n-1$ -völgynek és kezdőpontja egy $n-2$ -hegynek.

Vlachos egy ennél bonyolultabb tiltott konfigurációt talált.

3. Lemma [15]. *Tegyük fel, hogy az R ponthalmaz tartalmaz egy r pontot, amely (1) egy $n-2$ -völgy végpontja, (2) egy $n-2$ -hegy kezdőpontja, (3) egy $n-1$ -völgy kezdőpontja, és az $n-1$ -völgy végpontja nem esik egybe az $n-2$ -hegy második pontjával. Ekkor R tartalmaz egy $n-1$ -hegyet vagy n pontot konvex helyzetben, következésképp P tartalmaz n pontot konvex helyzetben.*



3. ábra. Vlachos tiltott konfigurációja

Ez a bonyolult tiltott konfiguráció egy jobb rekurzióra adott lehetőséget, mint az eredeti, Vlachos ennek felhasználásával azt kapta, hogy

$$f(n) \leq \binom{2n-5}{n-2} - \binom{2n-8}{n-3} + \binom{2n-10}{n-3} + 2 \approx \frac{29}{64} \binom{2n-4}{n-2}.$$

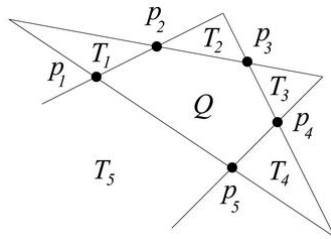
A gondolatmenetet tovább finomították és egyszerűsítették Hossein Mojaraddal [7], és azt kapták, hogy

$$f(n) \leq \binom{2n-5}{n-2} - \binom{2n-8}{n-3} + 2 \approx \frac{7}{16} \binom{2n-4}{n-2}.$$

Norin és Yuditsky [9] is ezt a tiltott konfigurációt használták, a korlátjuk lényegében ugyanennyi, sőt valamivel gyengébb, de az ő érvelésük nagyon egyszerű, impozáns, és remekül rámutat arra, hogy az új tiltott konfiguráció miért ad jobb korlátot. Nagyon élvezetes olvasmány.

4. Suk áttörése

Sok konvex n -szög. Legyen $n \geq 3$, és legyen Q egy konvex n -szög. Legyen $R = \{p_1, \dots, p_n\}$ Q csúcsainak halmaza egy fix körüljárás szerint felsorolva. Tehát R konvex helyzetben van. Tekintsük a sík azon $y \notin R$ pontjait, amire $R \cup \{y\}$ is konvex helyzetű. Ezek a pontok n „tüskét” alkotnak, ahol az i -edik tüske (jelöljük ezt T_i -vel) azon pontokból áll, amelyeket a $p_i p_{i+1}$ egyenes elválaszt Q belsejétől, de sem a $p_{i-1} p_i$ sem a $p_{i+1} p_{i+2}$ egyenes nem választ el Q belsejétől (4. ábra). Itt az indexeket modulo n értjük. Ha $n \geq 5$, akkor a tüskék közül legfeljebb kettő lehet végtelen tartomány, a többi tüske háromszög lesz. Vegyük észre, hogy akárhogy is veszünk ki egy-egy pontot mindegyik tüskéből, a kapott ponthalmaz konvex helyzetű lesz. A következő lemma tehát nagyon sok konvex n -szöget talál egy általános helyzetű pontthalmazban, ráadásul ezek jól struktúráltan helyezkednek el. Ez Pór Attila és Pavel Valtr [11] eredménye kicsit átfogalmazva.



4. ábra. A Q konvex sokszög és a hozzá tartozó T_i tüskék

4. Lemma [11]. *Legyen P általános helyzetű ponthalmaz a síkon. Ha $N = |P| > f(2n)$, akkor található egy n elemű $R \subset P$ ponthalmaz konvex helyzetben, hogy az általa meghatározott T_i tüskékre*

$$\prod_{i=1}^n |T_i \cap P| \geq \frac{N^n}{(f(2n))^{2n}}.$$

Bizonyítás. Egy egyszerű kettős leszámolással belátjuk, hogy sok konvex $2n$ -szög van P -ben. Minden $f(2n)$ elemű részében P -nek találunk legalább egy konvex $2n$ -szöget. Ez tehát $\binom{N}{f(2n)}$ konvex $2n$ -szög, de ezek nem mind különbözőek. Egy fix $2n$ elemű konvex helyzetű halmaz P pontosan $\binom{N-2n}{f(2n)-2n}$ darab $f(2n)$ elemű részhalmazában szerepel, tehát legalább

$$\frac{\binom{N}{f(2n)}}{\binom{N-2n}{f(2n)-2n}} \geq \frac{N^{2n}}{(f(2n))^{2n}}$$

különböző konvex $2n$ -szöget találtunk P -ben.

Most hagyjuk el ezen konvex $2n$ -szögek minden második csúcsát. Így egy konvex n -szöget kapunk. Nagyon durva felső becslést alkalmazva látjuk, hogy ilyen konvex n -szög maximum N^n van, így legalább $N^n / (f(2n))^{2n}$ különböző konvex $2n$ -szögből ugyanazt az R konvex n -szöget kell kapnunk. Márpedig ha egy konvex $2n$ -szög minden második csúcsát elhagyva pont R -et kapjuk, akkor az R -hez tartozó T_i tüskék mindegyikéből pontosan egy pontot hagytunk el, így a szóba jöhető konvex $2n$ -szögek száma maximum $\prod_{i=1}^n |T_i \cap P|$. Ez pont a lemma állítását igazolja. $\square$

Áttekintés

Andrew Suk bizonyítása így foglalható össze. Megfelelően nagy általános helyzetű ponthalmazban próbál konvex n -szöget találni. Ehhez a 4. Lemmát használja n helyett egy sokkal kisebb k értékre, és az így talált Q konvex k -szög T_i tüskéiben használja külön-külön Erdős és Szekeres hegyekre és völgyekre vonatkozó éles eredményét. Nem kétféle (hegy és völgy) részhalmazt keres T_i -ben, hanem négyféle „irányultságot” különböztet meg: (1) a Q felől nézve domború (a Q sokszögre „ráboruló”) íveket; (2) a Q felől nézve homorú (Q -tól „elhajló”) íveket; (3) a balról, T_{i-1} felől nézve domború íveket; és végül (4) a jobbról, T_{i+1} -felől nézve domború íveket. A pontos definíciót lásd később. A gondolatmenet lényege, hogy (1)-es típusú íveket

minden második tüskéből egyesíteni lehet, és még így is konvex helyzetű pontthalmazokat kapunk (5. ábra), valamint egy T_i tüskében lévő „jobbról domború”, azaz (4)-es típusú ív és a következő T_{i+1} tüskében lévő „balról domború”, azaz (3)-as típusú ív uniója is konvex helyzetű (6. ábra).

Ha k megfelelően kicsi n -hez képest, akkor a 4. Lemma nagyon hatékony. Legyen Q a lemma által biztosított k -szög. A Q -hoz tartozó egyetlen átlagos T tüskében a pontthalmazunk N pontjából legalább $N/(f(2k))^2$ darab esik, szóval alig veszünk valamit. A következő lépés a T -be eső pontpárok közötti szakaszok osztályozása „laposra”, azaz a Q k -szög T -t határoló oldalával majdnem párhuzamosra és „meredekre”. Egy klasszikus kombinatorikai tétel, a Dilworth-tétel biztosítja, hogy találunk egy nagy halmazt a T -ben, hogy a köztük levő szakaszok mind laposak, vagy mind meredek. A lapos esetben a klasszikus hegy-völgy tétel alapján találunk nagy (1)-es vagy (2)-es típusú ívet, a meredek esetben ugyanez a tétel biztosítja, hogy nagy (3)-as vagy (4)-es típusú ívet találunk. Itt az (1)-es típusú ívekből olyan sokat tudunk összefűzni, hogy ha így sem kapunk konvex n -szöget, akkor a lapos részek nagyon kicsik kell, hogy legyenek. A meredek részeknél meg épp két ívet tudunk összefűzni, ez adja a körülbelül kettes faktor javulást (konvex $n/2$ -szög helyett konvex n -szög), ami Suk bizonyításának a lényege.

A fenti intuíciót a következőkben precízebbé tesszük. A részletekben Suk eredeti bizonyítása, [14] helyett a Holmsen–Mojarrad–Pach–Tardos bizonyítást követjük, [5].

Részletek

Rögzítsünk egy nagy n természetes számot és egy általános helyzetű P pontthalmazt a síkban, ami nem tartalmaz n pontot konvex helyzetben. Célunk egy felső korlátot adni n függvényében az $N = |P|$ számosságra. Ez a korlát (pontosabban az eggyel nagyobb szám) nyilván $f(n)$ -nek is korlátja.

Először is választunk egy páros k számot, mely jóval kisebb n -nél. Alkalmazzuk a 4. Lemmát erre a k számra. Ha $N \geq f(2k)$, akkor kapunk egy $Q = p_1 p_2 \dots p_k$ konvex k -szöget úgy, hogy a hozzá tartozó T_i tüskék teljesítik, hogy

$$\prod_{i=1}^k |P_i| \geq \frac{N^k}{(f(2k))^{2k}}, \quad (1)$$

ahol $P_i = P \cap T_i$.

Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy a T_i tüskék mind háromszögek. Ez a feltevés két különböző okból sem jelent valódi megszorítást. Egyfelől pontosan ugyanezt a becslést lehet nagyon hasonlóan bizonyítani a feltételezés nélkül is, csak ehhez a végtelen tüskékben keresett pont-halmazokat kicsit körülményesebben kellene definiálnunk. Másfelől pedig használhatjuk, hogy $k \geq 5$ esetén legfeljebb kettő tüske nem háromszög. Ha ezekben a végtelen tüskékben egyáltalán nem keresünk konvex helyzetű pont-halmazokat, és csak a véges tüskékre koncentrálnunk, akkor a hasonló módszerrel kapott becslés csak egy konstans faktorról lesz rosszabb, azaz a kitevőben szereplő hibátág csak egy additív konstanssal nő.

Most egy fix P_i halmazt vizsgálunk, és definiálunk rajta egy részbenrendezést. Az $x, y \in P_i$ pontokra azt mondjuk, hogy $x \prec_i y$, ha a $p_{i-1}p_{i+2}y$ háromszög tartalmazza a $p_{i-1}p_{i+2}x$ háromszöget. Itt és a továbbiakban az indexeket modulo k értjük. Ez nyilván részbenrendezés. A bizonyítás áttekintésében az összehasonlítható pontpárok közötti szakaszt mondtuk meredeknek, a nem összehasonlíthatókat közöttit meg laposnak. Láncnak mondjuk P_i egy részhalmazát, ha bármely két eleme összehasonlítható ebben a részbenrendezésben, antiláncnak meg az olyan részhalmazt mondjuk, amely nem tartalmaz összehasonlítható elemeket. Dilworth tétele (illetve annak egyszerűbb iránya) szerint van olyan Q_i lánc és R_i antilánc P_i -ben, amelyekre

$$|Q_i| \cdot |R_i| \geq |P_i|. \quad (2)$$

Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy a $p_{i-1}p_i$ egyenes az y -tengellyel párhuzamos (függőleges) legyen, és p_i p_{i-1} fölött helyezkedjen el. Ezzel meghatároztuk, hogy R részhalmazai közül melyek a hegyek és melyek a völgyek. Legyen A_i és B_i a legnagyobb hegy, illetve völgy az R_i antiláncon belül. A bizonyítás áttekintésében ezeket hívtuk (1)-es és (2)-es típusú íveknek. Az R_i halmazban nincs sem $(|A_i| + 1)$ -hegy, sem $(|B_i| + 1)$ -völgy, így az 1. Tétel szerint

$$|R_i| \leq \binom{|A_i| + |B_i| - 2}{|A_i| - 1}. \quad (3)$$

Meg kell még említeni, hogy az 1. Tétel csak olyan pont-halmazokra alkalmazható, ahol az x -koordináták mind különböznek, de mivel feltettük, hogy a T_i tüske egy háromszög, R pedig egy antilánc, ez teljesül.

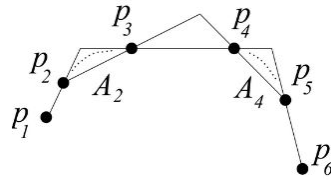
Most forgassuk el a koordináta-rendszert, mégpedig úgy, hogy p_{i+1} épp függőlegesen p_i fölött legyen. Legyen C_i , illetve D_i a legnagyobb hegy, illetve völgy a Q_i láncban erre a koordináta-rendszerre nézve. A bizonyítás

áttekintésében ezeket hívtuk (3)-as, illetve (4)-es típusú íveknek. Mivel Q_i lánc, pontjainak x -koordinátái különbözőek, így alkalmazhatjuk az 1. Tételt:

$$|Q_i| \leq \binom{|C_i| + |D_i| - 2}{|C_i| - 1}. \quad (4)$$

Egyszerű geometriai megfontolás mutatja, hogy $A_1 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{k-1}$ konvex helyzetben van (5. ábra), és ugyanez vonatkozik $A_2 \cup A_4 \cup \dots \cup A_k$ -ra is. (Itt is használjuk a feltevést, hogy minden tüske véges.) Feltettük, hogy a P ponthalmazban nincs n pont konvex helyzetben, így

$$\sum_{i=1}^k |A_i| < 2n. \quad (5)$$



5. ábra. $A_2 \cup A_4$ konvex helyzetben van

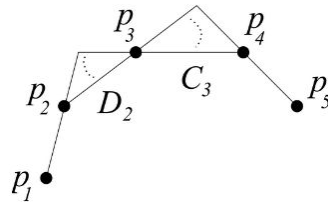
A B_i halmazokat nem tudjuk kombinálni, de egyenként mindegyik konvex helyzetben van, tehát

$$|B_i| < n \quad (6)$$

teljesül minden i -re.

Nem nehéz azt sem belátni, hogy a $D_i \cup C_{i+1}$ halmaz is konvex helyzetben van minden i esetén (6. ábra), így $|D_i| + |C_{i+1}| < n$, tehát

$$\sum_{i=1}^k (|C_i| + |D_i|) < kn. \quad (7)$$



6. ábra. $D_2 \cup C_3$ konvex helyzetben van

A bizonyítás befejezéséhez már csak némi számolásra van szükség. Először a (3) és (6) egyenlőtlenségekből, valamint egy elemi binomiális együtthatókra vonatkozó becslésből kapjuk az alábbiakat:

$$|R_i| \leq \binom{|A_i| + |B_i| - 2}{|A_i| - 1} < |B_i|^{|A_i|} < n^{|A_i|}.$$

Szorozzuk össze ezt a becslést minden i -re, és alkalmazzuk az (5) egyenlőtlenséget:

$$\prod_{i=1}^n |R_i| < n^{\sum_{i=1}^n |A_i|} < n^{2n} \quad (8)$$

A (4) egyenlőtlenségnél a binomiális együtthatót durván becsülve kapjuk, hogy $|Q_i| < 2^{|C_i|+|D_i|}$, és így a (7) egyenlőtlenséget is használva adódik, hogy

$$\prod_{i=1}^n |Q_i| < 2^{\sum_{i=1}^n (|C_i|+|D_i|)} < 2^{kn}. \quad (9)$$

Végül az (1), (2), (8) és (9) egyenlőtlenségekből kapjuk, hogy

$$\frac{N^k}{(f(2k))^{2k}} \leq \prod_{i=1}^k |P_i| \leq \left(\prod_{i=1}^k |Q_i| \right) \left(\prod_{i=1}^k |R_i| \right) < 2^{kn} n^{2n}.$$

Itt elég a durva $f(2k) \leq f(2k, 2k) = \binom{4k-4}{2k-2} \leq 2^{4k}$ becslést alkalmaznunk, és átrendezéssel kapjuk, hogy

$$N < 2^{n+8k+2n \log n/k}.$$

Látszik, hogy k legjobb választása $\sqrt{n \log n}/2$ körül van, ahonnan

$$f(n) \leq 2^{n+8\sqrt{n \log n}+1}$$

lesz a végső korlátunk. A $+1$ azért került a kitevőbe, mert k értéke nem mindig lehet pont $\sqrt{n \log n}/2$, hiszen páros egész számot választanunk.

Itt $f(n)$ sejtett értéke (és egyben az alsó korlátja) $2^{n-2} + 1$, így a fenti becslés kitevőjében $8\sqrt{n \log n} + 3$ tekinthető a hibatagnak. Ebben a 8-as faktor 6 alá csökkenthető azzal, ha $f(2k)$ értékének becslésére a bizonyításban nem Erdős és Szekeres eredeti felső korlátját használtuk, hanem az épp bizonyított jobb becslést alkalmazzuk indukcióval.

24 Tardos Gábor, Tóth Géza: Áttörés az Erdős–Szekeres-problémában

Irodalomjegyzék

- [1] F. R. K. Chung and R. L. Graham, Forced convex n -gons in the plane, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 367–371.
- [2] P. Erdős, G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry, *Compositio Mathematica* **2** (1935), 463–470.
- [3] P. Erdős, G. Szekeres, On some extremum problems in elementary geometry, *Ann. Univ. Sci. Eötvös Sect. Math.* **3-4** (1961), 53–62.
- [4] K. Hartnett, A Puzzle of Clever Connections Nears a Happy End, *Quanta Magazine* (2017).
- [5] A. Holmsen, H. Mojarad, J. Pach, G. Tardos, Two extensions of the Erdős–Szekeres problem, arXiv:1710.11415, (2017).
- [6] D. J. Kleitman and L. Pachter, Finding convex sets among points in the plane, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 405–410.
- [7] H. Mojarad, G. Vlachos, An Improved Upper Bound for the Erdős–Szekeres Conjecture, *Discrete and Computational Geometry* **56** (2016), 165–180.
- [8] W. Morris, V. Soltan, The Erdős–Szekeres problem on points in convex position – a survey, *Bulletin of the American Mathematical Society* **37** (2000), 437–458.
- [9] S. Norin, Y. Yuditsky, Erdős–Szekeres without induction, *Discrete and Computational Geometry* **55** (2016), 963–971.
- [10] Pach J., A Happy End probléma – A kombinatorikus geometria kezdetei, *Új matematikai mozaik* (Hraskó A., szerk.) Typotex, Budapest, 2002, 223–242.
- [11] A. Pór and P. Valtr, The partitioned version of the Erdős–Szekeres theorem, *Discrete and Computational Geometry* **28** (2002), 625–637.
- [12] G. Szekeres, L. Peters, Computer solution to the 17-point Erdős–Szekeres problem, *The ANZIAM Journal* **48** (2006), 151–164.
- [13] F. P. Ramsey: On a problem of formal logic, *Proceedings of the London Mathematical Society* **30** (1930), 338–384.
- [14] A. Suk, On the Erdős–Szekeres convex polygon problem, *Journal of the American Mathematical Society* **30** (2017), 1047–1053.
- [15] G. Vlachos, On a conjecture of Erdős and Szekeres, arXiv:1505.07549, (2015).
- [16] G. Tóth and P. Valtr, Note on the Erdős–Szekeres theorem, *Discrete and Computational Geometry* **19** (1998), 457–459.

Tardos Gábor, Tóth Géza: Áttörés az Erdős–Szekeres-problémában

25

- [17] G. Tóth and P. Valtr, The Erdős–Szekeres theorem, upper bounds and generalizations, *Discrete and Computational Geometry – Papers from the MSRI Special Program* (J. E. Goodman et al. eds.), MSRI Publications 52 Cambridge University Press, Cambridge (2005), 557–568.

Tardos Gábor kutatásait az MTA Kriptográfia „Lendület” programja, valamint a Nemzeti Kutatási és Innovációs Hivatal K-116769-es és SSN-117879-es számú programjai támogatják, Tóth Géza kutatásait a Nemzeti Kutatási és Innovációs Hivatal K-111827-es számú programja támogatja.

Andrew Suk bemutatása: <https://math.ucsd.edu/people/profiles/andrew-suk/>

A fenti cikket az Érintő 2018. márciusi számából vettük át.

Oláh Vera: Beszélgetés Boros Endrével

Boros Endre 1978-ban végzett az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán okleveles matematikusként. Csoporttársak voltunk, és sokat jártunk kirándulni. A több mint százfős évfolyamon egyike volt a legokosabbaknak. Egyéni szakon tanult, már az egyetemen tudtuk, belőle igazi matematikus lesz. Mégsem maradt az elméletnél, az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézetben kezdett dolgozni. Mára az elméletben, az alkalmazásokban és a számítástechnikai módszerekben egyaránt kiváló eredményeket elért nemzetközileg elismert kutató. Évtizedek óta Amerikában, New Jerseyben él, a Rutgers Egyetem professzora. Abból az alkalomból beszélgettünk, hogy miután 2016-ban megválasztották a Magyar Tudományos Akadémia külső tagjának, 2017 nyarán megtartotta akadémiai székfoglalóját Kvadratikus optimalizáció és alkalmazásai digitális képfeldolgozásban címmel.

Ennek az operációkutatási témának nagyon érdekes története van, hiszen egy-egy elméleti matematikai eredmény mindennapi alkalmazására néha csak sokszáz év elteltével – vagy még akkor sem – kerül sor.

Az MTA akadémiai székfoglalók oldalán, ahol az előadás teljes terjedelmében is megnézhető, a következőket írják:

„A digitális képfeldolgozásban sok különböző gyakorlati feladat vezethető vissza nemlineáris, azon belül különösen kvadratikus, 0-1-es optimalizációs problémákra. Boros Endre Hammer Péterrel még az 1980-as években felfedezett egy hatékony eljárást, amellyel e feladatok egyszerűbb és kisebb méretű formára hozhatók. A módszerrel bizonyos esetekben meghatározhatók a változók egy részének optimális értékei. A szép eredmény alkalmazása akkoriban megvalósíthatatlannak tűnt.

Úgy 12-13 évvel ezelőtt a megnövekedett számítógépes kapacitás lehetővé tette, hogy a módszert kipróbálják már a gyakorlatban is használható méretű problémákon. Meglepő módon sok gyakorlati problémára – köztük a képfeldolgozásból eredőkre – is igen hatékornak bizonyult: gyakran a változók 60–80%-át sikerült a bizonyíthatóan optimális értéken rögzíteni. Boros Endre egy 2006-ban a Cornell Egyetemen tartott előadása után a képfeldolgozással foglalkozó informatikusok felfigyeltek a módszerre. Néhány év alatt nagyon népszerű lett, QPBO néven terjedt el, és sok ma használatos szoftver épül rá. Ma a Google keresőben már majdnem 15 000 weboldal foglalkozik a kapcsolódó eredményekkel.”

Oláh Vera: Beszélgetés Boros Endrével

27

Hol is van a Rutgers Egyetem, mi ott a Te pozíciód?

Rutgers New Jersey állami egyeteme, tulajdonképpen 6 vagy 7 kampusza van, attól függ, hogyan számoljuk, de ez három nagy csoportban helyezkedik el. A fő csoport egy New Brunswick nevű kisváros közelében van. Ez a kampusz, ahol én vagyok, a Piscataway nevű helyen, a folyó túloldalán van. Itt vagyok kiemelt fokozatú, úgynevezett „distinguished” professzor. Nem minden egyetemen van ilyen, ezt a Rutgersen bevezették valamikor. Ez már azt jelenti, hogy tenured (kinevezett) professzorként állandó állásom van, és lényegében azt csinálom, amit akarok a Management Science and Information Technology tanszéken a Business Schoolon belül. Emellett a RUTCOR (Rutgers Center for Operations Research) operációkutatási intézet igazgatója vagyok. Ez egy picike és nem túl aktív intézet ebben a pillanatban.

Mit jelent, hogy picike?

Nincs sok állandó alkalmazott, időnként konferenciákat rendezünk. Attól függ, mennyi pénzt sikerül szereznünk, részben az egyetemtől, részben külső forrásokból. Pályázunk grantokra, alapkutatásra, és szoktak lenni olyan projektek, ahol elvárás, hogy a végén valami termék legyen. Ez néha csak ismeret, nem feltétlenül szoftver vagy más kézzelfogható termék. Néha csak meg kell érteni a rendszerüket, és segíteni kell módszerekkel. Tehát igazából ez is kutatás.

Az operációkutatási feladatoknak jellemzően sok alkalmazásuk van.

Így igaz, rengeteg alkalmazás van. Tehát sok ilyen projekten dolgoztunk az elmúlt években. A legtöbb a Department of Homeland Securitytől jön. Ők érzik leginkább úgy, hogy rengeteg feladatuk van, és nagyon nem tudják, hogyan kell azt jól csinálni. Sok az érdekes probléma, ezeknek jó része, de nem mindegyik operációkutatás. Gyakran jönnek adatelemzési, vagy policy elemzési kérdések is.

Visszatérve az egyetemre: egy professzor inkább kutat, vagy inkább tanít?

Aki professzor, attól elvárják, hogy kutasson. Az előmeneteleknél sokféle rang van, azokon végig kell menni. A fő szempont a kutatás és a teljesítmény, másodlagos szempont a tanítás, hogy mennyit, hogyan tanítok. Azt, hogy milyen minőségben, könnyű elbírálni. És akkor egy picike szerepe van annak is, hogy ki mennyire hajlandó részt venni mindenféle bizottságokban, meg egyéb módon az egyetem életében. De a fő hangsúly a kutatás, az az elsődleges elbírálni tényező. Amikor új kollégákat veszünk fel, elsődleges szempont, hogy milyen területen van, és hogy potenciálisan jó kutató-e.

Ettől van jó híre a Rutgersnek?

Természetesen ez jelentős szerepet játszik abban, hogy milyen az egyetemnek a híre. Az amerikai egyetemek szövetsége 3–5 évente elbírálja, hogy egy egyetem megüti-e az egyetemi szintet.

Akkor is, ha az egy elismert, kiváló intézmény?

Akkor is. Minden egyetemet megvizsgálunk, és az elbírálási tényezők között sok minden szerepel. Az egyik szempont az, hogy milyen a tudományos munka, mennyi publikáció van, mennyi pályázatot nyertek a kutatók, milyen sok előadást tartanak stb.

És a diákok véleménye?

A diákok véleménye is számít, úgy 30 százalékban. Hogy mennyire jó az oktatás. Milyenek az óraszámok, hogyan oktatnak a tanárok. De sokkal nagyobb a súlya annak, hogy milyen jó állásokat kapnak azután, hogy elvégezték a szakot. Tehát a kutatási output és az álláslehetőségek alkotnak jelentős szempontot.

Milyen módszerekkel tanítotok, illetőleg mekkorák az évfolyamok? Vagy nincs is olyan, hogy évfolyam?

Nálunk kreditrendszer van, igazából nincsenek évfolyamok. Sokféle órát adunk, és vannak bizonyos vonalak, amelyek mentén sorban fel lehet venni a tárgyakat, de ez nem egyértelmű. Több variáció is lehetséges, attól függően, hogy a diák hosszú távon milyen irányba akar menni.

A mi tanszékünknek lényegében két része van. Van egy operációkutatási csoport és egy informatikus csoport, akik inkább az adatelemzés irányába mennek el. Ez a kettő kiegészíti egymást, ha mondjuk egy üzleti tevékenységre gondolsz. Mi olyan órákat tartunk, ahol döntést segítő modelleket tanulnak, meg szoftvereket, meg számítási módszereket, másrésztől azt is tanítjuk, milyen adatbázisokat hogyan kell használni, vagy hogy miként lehet eljutni azokhoz az adatokhoz, amelyek a döntéselőkészítéshez szükségesek. Tehát a programokban a diákok között vannak, akik inkább az optimalizálás felé akarnak menni a jövőben, másokat jobban érdekel a statisztika, vagy az adatelemzés. Ennek megfelelően változik, hogy milyen órákat milyen sorrendben vesznek fel.

Jellemzően hány diák van egy órán?

Ez nagyon jó kérdés, mert tradicionálisan egy egyetemen, ha megnézed a tantermeket, látod, hogy 50–60 fő fér csak be egy terembe. Tehát ez a tipikus létszám, és általában nem is telnek meg a termek, úgy 40–50-en van-

nak. De pont most sok amerikai egyetemen – nálunk is – elindult egy folyamat, hogy megpróbálják az alapvető bevezető órákat áttenni olyan termekbe, ahol egyszerre 300 diák is befér, vagy 400. Úgyhogy most nálunk is ezzel kísérleteznek, van több ilyen tárgy. Nem egyértelmű a siker, mert persze az egyetem oldaláról jó, nem kell annyi erőfeszítés, mert kevesebb előadót kell fizetni, nem kell párhuzamosan ugyanazt 8 teremben tanítani. De cserébe a tanárok nem örülnek annyira, sokkal nehezebb ilyen nagylétszámú órákat tartani, sokkal nehezebb és több idő levizsgáztatni a diákokat.

Hogyan vizsgáztattok? Írásban? Szóban?

A legtöbb vizsga az írásbeli. Szóbeli vizsga az inkább csak a graduate szinten van.

Tehát a mesterképzéssel kezdődik. De ott már van?

Ott már van, persze, de undergraduate szinten nincs. Graduate szinten van több olyan nagy lépcső, amit nálunk régen szigorlatnak hívtak. Azok tipikusan szóbeli vizsgák. Az összes többi vizsga írásbeli. Ha egy tárgyat elvégzel, akkor jön a félév vége, le kell tenni a vizsgát, ami majdnem mindig írásbeli vizsgát jelent.

Matematikából például elég egy tételt ismerni, vagy a bizonyítást is kéritek?

Sokszor kérjük a bizonyítást is.

Le kell írnia a teljes bizonyítást?

Le kell írnia, vagy alkalmaznia kell tudni a tételt. Azon múlik, hogy tudod-e, hogy melyik feltételnek milyen szerepe volt. Trükkös alkalmazásokat adunk, ahol látni kell, hogy hohó, ez itt nem alkalmazható, mert az a feltétel hiányzik – ezt pedig fel kell ismerni.

Beszélgj most egy kicsit az akadémiai székfoglaló előadásod témájáról.

Amiről ott beszéltem, az az optimalizáció egy alkalmazása, egy szerencsés alkalmazás, mert tényleg szép, érdekes dolgok jöttek ki. De ez nagyon hosszú folyamat volt. Tehát azt próbáltam elmondani, hogy jó 12 éve kerültem kapcsolatba olyanokkal, akik a képfeldolgozási alkalmazásban dolgoznak. Az ő segítségükkel megértettem, hogy az az optimalizációs terület, amelyen én már évtizedek óta dolgozom, nagyon is hasznos az ő oldalukról. Nagyon jó kapcsolat alakult ki, volt egy közös grantunk. Több éven keresztül sok egyéb közös projektben vettünk részt, és ezek az eredmények, amelyekről beszámoltam, lényegében ezeknek a közös kutatásoknak a melléktermékei.

Ez azért egy kirívóan optimista példa a matematika alkalmazására viszonylag rövid távon. . .

Hát igen, mert ha meggondolod, az eredeti eredményt mi 89-ben találtuk, de aztán beraktuk a fiókba, mert senkit nem érdekelt. 20 év múlva már lehetett használni. Ez tényleg rövid idő. És szerencsés, úgy ahogy mondod. Ritkán van ilyen. Valahogy véletlenül belebotlottunk ebbe, és sikerült úgy alkalmazni, hogy tényleg hasznos is legyen valamilyen szinten. A másik dolog, amit én nagyon érdekesnek tartok ebben, és erről is próbáltam beszélni, hogy igazából abból, hogy itt az alkalmazás sikeres volt, és a partnereink ezt a módszert olyan módon alkalmazták, amire én nem is gondoltam, kijött egy csomó további új, érdekes kérdés.

Ami újabb elméleti problémákat vet fel?

Amin most gondolkozunk az elméletben. Aminek megint nincs közvetlen hatása, mert vagy megoldjuk vagy nem, de attól a képfeldolgozás alapvetően nem fog megváltozni. De megváltozhat egy picit, tehát például most, hogy megtaláltuk, hogy egy n -edfokú tagot lehet $\log(n)$ változóval kvadratizálni, az egy apró kis lépésnek tűnik, de ugyanakkor ez az alkalmazói oldalról azt jelentheti, hogy 80–90%-ban tudod csökkenteni a méretét annak a problémának, amivel foglalkozol. Tehát könnyen lehet, hogy lesz valami haszon belőle.

Ugye ez egy egészen friss eredményetek?

Ezt két héttel az akadémiai székfoglaló előadásom előtt fedeztük fel, tehát ebben az értelemben egészen friss. Van egy csomó érdekes kérdés, amit lényegében az alkalmazói oldalon dolgozók tettek fel. Mert tőlük jöttek a felvetések. Tehát az együttműködés úgy folyik, hogy a Cornellen van egy csoport, a kollégám New Yorkban a Google-nél dolgozik, én meg a Rutgersen ülök. Időnként kapok egy emailt, hogy te, most csináltuk ezt és ezt, mit tudsz erről? Én tíz esetből kilencszer vagy nem tudok semmit, vagy ha tudok is, triviális, csak ők tíz kérdésből egy érdekes, az nagyon jó arány.

30–40 évvel ezelőtt a matematikus még magányosan kutathatott, papíron és ceruzán kívül másra nemigen volt szüksége. Ez ma már szinte elképzelhetetlen. Akár vadidegen emberek is dolgozhatnak együtt a világ minden tájáról. . .

Ez is egy érdekes változás, igen, nagyon sok kutatócsoport van. Ebből a szempontból szerencsésnek tartom magamat, mert én sose voltam „magányos” matematikus. Nagyon kevés olyan eredményem van, amelyet

úgy találtam ki, hogy egyedül leültem a sarokba. Ha én egyedül ülök egy sarokban, akkor előbb-utóbb unatkozom. Valahogy nem fekszik nekem. De ha valakivel tudok beszélgetni, akkor egyszer csak előjönnek érdekes kérdések, érdekes ötletek, és az sokkal többet kihoz a témából, mintha egyedül gondolkoznék rajta. És szerencsém volt, mert sikerült olyan kutatócsoportokat szerveznem, ahol ez működött/működik. Máig is van 3-4 ilyen csoport, akikkel együtt dolgozunk.

Mennyire érzed ma hasznosnak azt, amit ELTE-n tanultál?

Nagyon is hasznos volt. Rengeteg kombinatorikát tanultunk az ELTE-n, és a diszkrét optimalizálás területén rengeteg elmélet alkalmazható egy az egyben. Az előadásomban említettem, hogy van néhány nagyon is elméleti, tiszta matematikai kombinatorikai eredmény, aminek az alkalmazása nagyon fontos. Tehát a gondolkodásmódot befolyásolják, ha az ember ismeri ezeket a feladatokat. Tudod, úgy van ez, hogy ha van egy kalapácsod, akkor mindent szögnek látsz. Itt is úgy van, hogy ha az ember gondolkodása beáll valamire, akkor megpróbálja arra a formára hozni a feladatokat, és modellezni a valóságot. Ebből a szempontból igenis sok haszna volt annak, amit az egyetemen tanultam.

Nagy a magyar és az amerikai matematikaoktatás közötti különbség?

Azt látni kell, hogy itt a gimnázium nagyon más. Az amerikai matematikaoktatás esetén több ezer egyetemről beszélünk, és azt lehetetlen leírni egységes rendszerként. Ilyen nem is létezik, és épp ezért ezen a felsőbb szinten, a graduate oktatás szintjén, sokkal-sokkal nagyobb a verseny, mint a magyar rendszerben. Már a diákok felvételénél is. Nagyon nehéz bekerülni egy jó egyetemre.

Sokan akarnak Amerikában matematikával foglalkozni?

Rengetegen akarnak, de nem mind amerikaiak. Mi veszünk fel diákokat Kínából, Indiából, Olaszországból stb. Ha azt nézed, hol van operációkutatás, jó matematikaoktatás, csak néhány amerikai egyetem az, ami dominál, ahová érdemes menni. Ezért, ha az összes külföldről érkezett diák ezekre a helyekre jelentkezik, ott nagyon komoly a verseny. Sokszáz diák jön a világ majdnem mindegyik országából. Például Kína, India is hatalmas országok, ahonnan nagyon sokan jönnek.

Hogyan tekintenek a magyar egyetemekről jöttekre?

A matematikán belül a magyar diákoknak nagyon jó híruk van. A magyar diákok szerintem élvezik a hírnév előnyeit. Ha valaki az ELTE-n tanult

matematikát, és jelentkezik egy graduate programra, akkor könnyedén bejut.

És hogyan lehet a Rutgersre professzornak bekerülni? Mondtad, hogy olyanokat vesztek fel, akiknek jók a kutatási eredményei. Hirdet állásokat a Rutgers?

Persze. Ez egy állami egyetem, hihetetlenül szigorú előírásai vannak, hogyan kell eleget tenni a különböző rendelkezéseknek, amelyek azt próbálják elérni, hogy mindenki egyenlő esélyt kapjon. Igazából nem lehet kivételezni. Nem lehet csak úgy valakit odahívni. Tehát hirdetni kell, a pályázatokat a bizottságnak el kell bírálni, rangsorolni kell, és akkor általában behívjuk interjúra az első 3-4 jelöltet, hogy elbeszélgessünk velük. Annak alapján kialakul egy vélemény, majd szavaz a bizottság.

Mi van a vendégkutatókkal?

A vendégkutató státusz az más. Vendégkutatók tipikusan a grantok esetében jönnek, őket nem az egyetem fizeti. Ott az számít, hogy kihez jössz, hogy kivel dolgozol, a pályázatot elnyert kutató dönti el, hogy kivel akar együtt dolgozni.

Értem. Akkor hogyan keletkezik egy valódi egyetemi állás?

Kétféleképpen. Az egyik eset, ha valaki nyugdíjba megy. És akkor hirtelen ott az állása. Szerencsés esetben ő idős, és magas a fizetése, akkor gyakran két embert is fel lehet venni abból az egy fizetésből. De a másik gyakori dolog az, hogy megnő egy tanítási programunk mérete. Így jártunk tavaly. Van egy masters programunk, ahol két éve 50 diák volt évente, most 400 jelentkezett. Tehát hirtelen sokkal több órát kell adni. Ilyenkor az ember elmegy a dékánhoz, dörömböl az ajtaján, és elmagyarázza, hogy nézd, most 8 órával többet kell leadjak ebben a félévben, ennyi új gyerek van. Adj nekem új vonalat, hogy felvehessünk új embereket tanítani. Kétféle állás van, az egyik az úgynevezett tenure track. Ebben vannak az igazi kutató jellegű állások, ahol komoly az elbírálás. De van egy másik, a nem tenure track vonal, ahol olyanokat veszünk fel, akiknek nincs annyi kutatási ambíciójuk, de hajlandók sokat tanítani. Tehát tipikusan ők kétszer annyit tanítanak, mint egy reguláris professzori állásban levő. Fizetésük sem annyira magas, (a tenured állás felét-harmadát keresik), viszont nincs az az elvárás, hogy annyit publikáljanak, mint a többi professzor. Az alapvető bevezető kurzusoknál sok ilyet alkalmazunk. De ez is szabályozva van, az összes professzori pozícióknak legfeljebb talán a 30%-a lehet ilyen, tehát az nem lehet, hogy mi csak kutatunk és felveszünk embereket fele pénzért tanítani, minden professzornak tanítani is kell.

Oláh Vera: Beszélgetés Boros Endrével

33

És te hogy kerültél ide Magyarországról?

1986-ban kaptam egy telefonhívást, hogy van itt egy ösztöndíj fél évre, ekkor mentem ki. Ez egy nagyon kis fizetésű posztdoktori ösztöndíj volt. Amikor megújították, akkor kihívtam a feleségemet meg a gyerekeimet is, hogy gyertek, élvezzétek ti is. A szerződésemet újabb egy évre meghosszabbították, és megszületett a kisebbik lányom, aki koraszülött lett, nagyon kis súllyal, kórházban volt hosszú ideig. Akkor döntöttük el, hogy most nem akarunk egy ideig hazajönni. Addigra lényegében kimerítettem azt a vízumlehetőséget, amit ilyen rövid távra kaphattam, tehát muszáj volt egy igazi állásért folyamodni, ahol tudnak támogatni, hogy kapjak rendes munkavállalási vízumot. Pályáztam, sok helyre elmentem, több állásajánlatot kaptam, végül a Rutgerset választottam.

Mi volt az előzménye, miért pont téged kerestek meg ezzel a telefonhívással 86-ban?

A RUTCOR, a Rutgers Center for Operations Research mint operációkutatási központ, egy nagy grant keretében 15 évre kapott komoly összeget, amiből sok embert oda tudtak hívni. Az igazgatója a magyar anyanyelvű Hammer Péter volt, aki Temesvárról származott el. Mint román állampolgár, disszidált a 60-as években, és ő irányította ezt a központot. A 80-as években Budapesten járt, meglátogatott minket a SZTAKI-ban, előadást is tartott, és körülnézett, hogy kit lehetne elhívni. Az egyik ilyen Prékopa András volt. Ő egy fél évvel korábban ment ki, és amikor már ott volt, akkor ő javasolt más magyarokat is.

A Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézet, a SZTAKI ma már több mint ötven éves. Te akkor a SZTAKI-ban dolgoztál?

Én végig a SZTAKI-ban dolgoztam az egyetem után. Tehát az előzmény annyi, hogy voltak emberek, akik ismertek engem. Ez majdnem mindig így van. Teljesen ismeretlenül nagyon nehéz valahová eljutni. De még egyszer, ez csak egy féléves ösztöndíj volt.

De most amerikai állampolgár vagy?

Persze.

Hogyan kaptad meg? Mennyi idő után?

Gyalogosan végigjártam a hivatalos utat. Amikor '90-ben megkaptam a munkavállalási vízumot, rögtön módomban volt beadni az úgynevezett zöldkártya kérvényt. Belekerült 3 évbe, hogy megkapjam. Elég lassú, nem

igazán barátságos folyamat. És ha megkapod a zöldkártyát, utána jogod van a kérni az állampolgárságot. Talán 5 évet kell várni. Én pontosan ezt csináltam.

Magyar állampolgár is maradtál?

Természetesen.

Tehát kettős állampolgár vagy. Neked a kisebbik lányod Amerikában született...

Mindegyik lányom magyar, ő is.

De ő születésekor amerikai állampolgár lett?

Igen, ő definíció szerint amerikai, de rögtön az első alkalommal, amikor jöttem Pestre, hoztam a születési papírjait, és bejegyeztettem itt is.

Tudom, elég sokat hazajársz. De mennyire érzed azt... most mennyire vagy amerikai és mennyire vagy magyar?

Egyik se. Egyik se már sajnos. Magyarország rengeteget változott, és én nem vagyok itt, csak ilyen rövid látogatásokra. Főleg eleinte nagyon hosszú ideig nem tudtam jönni, amíg az ember várja a zöldkártyát, addig nem is utazhat. Úgyhogy furcsa volt, amikor a 90-es évek közepén először visszajöttem, akkor már érződött, hogy nagy változások voltak. 86-ban mentem ki, évekkel a rendszerváltás előtt. Mikor visszajöttem, a mindennapi élet nagyon más lett: nagyon megváltozott az, hogy milyen boltok vannak, hogyan tudsz vásárolni, hogyan tudsz élni, hogy mi mennyibe kerül, hová tudsz menni. Ehhez hozzá kellett szokni.

Én emlékszem egy Boros Endrére, Enzora, aki azt mondta, hogy lehet, hogy inkább erdész lesz, mint matematikus.

Igen, kis híján... Nekem, tudod nem volt lakásom. Amikor a SZTAKI-ban elkezdtem dolgozni, nagyon nehéz volt a helyzetem, egy ócska kis lyukat béreltem. Rudas Tamás (volt évfolyamtársunk) zseniális ötlete az volt, hogy vegyünk egy rönkházat, és vegyünk egy kis telket valahol kint a hegyekben olcsón, állítsuk fel a faházat, és éljünk ott. Kis híján létrejött ez az akció. Azon bukott el, hogy mire eljutottunk oda, hogy szemrevételezzük a faházakat, már tél volt, és rájöttünk, hogy ebben kutya hideg lesz. Úgyhogy nem vettük meg.

Ezen bukott meg az erdész karrier...

Igen.

Nagyon sokat kirándultunk annak idején. És azóta?

Oláh Vera: Beszélgetés Boros Endrével

35

Hát kirándulgattunk igen, azért ott más a kirándulás. Ugye itt vonatra szállsz meg gyalogolsz, ott meg autóba ülsz és a távolságok sokkal nagyobbak.

Azért ez nem ugyanaz.

Hát utána gyalogoltunk! Voltak kedvenc helyeink, ahová mindig elmentünk a gyerekekkel. De ahogy az évek teltek, egyre kevesebbet gyalogoltam. Már nem vagyok olyan fürge, mint régen. És valahogy meg is változott az, hogy mit szeretek nézni. Rájöttem, hogy én azért inkább városi, mint falusi legény vagyok, tehát nem lennék erdész.

Tényleg?

Jobban érzem magam egy városban. Inkább szeretek sétálgatni a városi utcákon, mint kint egy erdőben.

Hát, változunk. Hogyan érzed, melyek voltak az életed fordulópontjai?

Még nem gondolkoztam ezen. Az egyik legfontosabb volt, amikor a feleségemmel találkoztam. És én azt is annak nevezném, amikor az egyetem éve alatt kapcsolatba kerültem a SZTAKI operációkutatási csoportjával. Mert igazából akkor nőtt meg az érdeklődésem az optimalizáció iránt. És annak is köszönhető, hogy ott állásom lett.

Te nem operációkutatási szakirányra jártál az egyetemen.

Egyéni szakon végeztem.

Mit tanultál akkor?

Véges geometriát. Annak nincs sok köze az optimalizációhoz. De az utolsó két évben folyamatosan jártam a SZTAKI-ba, érdekelt az egész értékű programozás meg ilyen dolgok.

Tehát itt alapozódott meg a későbbi karriered.

Igen. Meg hát ez a telefonhívás. Az intézet Victor Hugo utcai épületében üldögéltem, amikor átrohant a titkárnő, hogy jujj, telefonon hívnak Amerikából. Igazából én nem akartam kimenni. Mondtam Andrásnak, hogy miért nem hív mást. Menjen másvalaki. De akkor nagyon legorombított, hogy képzelem? Utána beszélgettem másokkal is, akik meggyőztek, azt mondták, hogy hat hónap, azt kibírod.

Te minek tulajdonítod, véletlennek vagy szükségszerűnek ezt a pályát, amit így befutottál, azt, amit elértél?

Hát nem véletlen, semmiképpen sem az. Valahol úgy érzem, sok-sok év után meg vagyok róla győződve, hogy igazából minden emberben van valami, amit jól tud csinálni. Ha sikerül, ha szerencséd van, és megtalálod azt

a pályát, amihez vonzódsz, akkor a legfontosabb dolog az életben. hogy azt csinálhatod, amit jól csinálsz. Ebből a szempontból nekem szerencsém volt, rátaláltam erre a helyre. Hozzá kell tennem, hogy ez a kutatócsoport a Rutgersen meg a kollégák a Computer Science-ről matematikailag nagyon is pezsgő, nagyon is inspiráló környezet volt, nagyon sokat segítettek a pályámon.

Egyetemistaként nyilván nem gondoltad, hogy egy amerikai egyetem professzoraként 2017-ben itt erről fogsz beszélgetni...

Nem, abszolút nem gondoltam.

Akkoriban volt valami távlati elképzelésed?

Hát talán még emlékszel, akkoriban kezdett el buzogni a programozás, tehát az első kicsit is jobb számítógépekhez hozzájutottunk, és én úgy képzeltem, hogy ez lesz, hogy én optimalizációs szoftvereket fogok fejleszteni.

Igen? Tehát nem elméleti matematikusnak gondoltad magad?

Szerettem az elméletet is, akkor is dolgoztam már, cikkeket írogattam. Ez később aztán megváltozott persze. Azért én elég sokat programoztam a SZTAKI-ban, és még ott kint Amerikában is eleinte megírtam a magam szoftvereit és optimalizációs módszereit. Később rájöttem, hogy ez azért időigényes, fárasztó, állandóan cserélődnek a rendszerek, tehát egy csomó olyan dolgot kell tanulni, aminek semmi köze ahhoz, hogy egy algoritmust hogyan értelmezek. Egyszerűen nem tudtam elég időt rászánni a programozásra. Minél kevesebbet csinálsz, annál távolabb kerülsz, mert nincs gyakorlatod... Tehát elszakadtam a területtől, és jobban elmentem az elmélet felé.

Sokat utazol a világban. Ez nyilván fontos neked.

Én olyan vagyok, aki úgy tud kutatni, hogy együtt valakivel, és nem is egy emberrel, hanem kis csoportokban. Tehát néha öten-hatan ülünk egy szobában. Ez akkor kezd működni, ha ott tudsz ülni 3-4 napot, és utána már mindenki érti ezt a témát.

Tehát a személyes kapcsolat a fontos.

A személyes kapcsolat nagyon fontos, és az, hogy ez az interakció létrejöjjön. Amikor meglátogatok valakit, akkor egy szobában ott ülünk napi 8–10 órát és a harmadik nap után hirtelen elkezdenek pezsegni az ötletek és a gondolatok. Tehát akkor beindul a dolog. Ha ott tudok lenni egy hetet, vagy kettőt, akkor igazából az ottlétem második része nagyon produktív szokott

Oláh Vera: Beszélgetés Boros Endrével

37

lenni. De még egyszer, ez függ az ember egyéniségétől. Valószínűleg nem mindenki működik így.

Értem.

Nekem ez a jó. Ezért szeretek utazni. Egyébként is világeletemben szerettem utazni, és így eljutok olyan helyekre, amelyekről gyerekkoromban csak álmodtam. Ez külön jó. Vannak kedvenc városaim, ahova mindig örömmel visszamegyek.

Például?

Ó, nagyon szeretem Rómát, Kiotót, Párizst. Azt kell mondjam, Rómát már jobban ismerem, mint Budapestet. Ha Budapesten ledobsz valahová, akkor lehet, hogy keresgélnem kell, hogy hol is vagyok. Rómában ez már nem így van.

Miért pont Róma?

Sokszor voltam ott, már legalább hússzor. 5 hetet, 6 hetet, 2 hónapot, mikor hogy. Nagyon szeretem Rómát, szeretem a városokat. Kiotót is, Tokiót is szeretem. Mondjuk Tokió nagyon nagy város, de Kiotó az gyönyörű, szeretek oda visszajárni. Például Japán olyan hely, ahol az igazán érdekes látnivalók mindig a városon kívül vannak. Csak kimész egy kicsit a város szélére, és ott egy gyönyörű hely. Tehát ez nem igazi kirándulás, nem olyan kirándulás. Picike kirándulás. De nem olyan, mint amit diákkorunkban csináltunk.

Ez megfelel végszónak is a beszélgetésünkhöz, köszönöm.

Oláh Vera

A fenti cikket az Érintő 2018. márciusi számából vettük át.

Tóth Árpád, Zábrádi Gergely: Wiles és az Iwasawa-elmélet fősejtése

1. Bevezetés

Andrew Wiles már a Fermat-sejtés bizonyítása előtt is híres matematikus volt. Kiemelkedő jelentőségű az Iwasawa-elméleti munkássága, melynek célja komplex L -függvények (a Riemann-féle ζ -függvény általánosításai) és különböző aritmetikai objektumok közötti kapcsolat létesítése. Ebben a cikkben ezt próbáljuk elmagyarázni a legegyszerűbb esetben, amikor az aritmetikai objektum az ún. Tate-motívum (ami lényegében az egységgyökök aritmetikáját írja le), az alaptest a racionális számok teste, a komplex L -függvény pedig a Riemann-féle ζ -függvény. Az Iwasawa-fősejtés bizonyítása ebben a legegyszerűbb esetben Wiles és Barry Mazur közös eredménye, de Wiles ezt általánosította a racionális számok helyett tetszőleges teljesen valós számtestre is (azaz olyan $\mathbb{Q}(\alpha)$ bővítésekre, hogy α minimálpolinomjának minden komplex gyöke valós). Továbbá Wiles témavezetőjével, John Coates-szal közösen igazolta az Iwasawa-fősejtést komplex szorzással (egyfajta ritka, de fontos szimmetriával) rendelkező elliptikus görbékre is, mely a legelső fontos részeredmény volt az azóta milleniumi egymillió dolláros problémává avanzsáló Birch–Swinnerton–Dyer-sejtésre.

2. Fermat-tól Kummerig

Mint az algebrai számelméletben szinte mindennek, az Iwasawa-elmélet gyökerei is a Fermat-sejtés – mely szerint az $x^n + y^n = z^n$ egyenletnek nincsenek nemtriviális megoldásai, ha $n > 2$ – bizonyítására adott korai próbálkozásokban vannak. Nyilvánvaló, hogy a sejtést elég bebizonyítani abban az esetben, amikor $n = 4$, vagy n egy páratlan prímszám. Maga Fermat az $n = 4$ esetre bizonyítást adott egy későbbi levelében. Euler az $n = 3$ (1770), Dirichlet az $n = 5$ esetet bizonyította (1828).

Ezek az elszigetelt esetek is rámutattak arra, hogy a Fermat-sejtésben két esetet érdemes megkülönböztetni: az ún. első esetet, amikor p nem osztja az x, y, z számok egyikét sem, illetve a második esetet, amikor p osztja valamelyiket (amennyiben az x, y és z számok relatív prímek, ami feltehető, akkor pontosan egyet).

Az első általános tétel, ami több, mint egy exponensről mond valamit, Sophie Germain¹ nevéhez fűződik: ha p egy olyan prím, hogy $2p + 1$ szintén prím, akkor a Fermat-tétel első esete igaz p -re. Germain módszerét általánosítva Legendre megmutatta, hogy az első eset igaz minden $p < 100$ prímre.

Az $n = 7$ eset nehéznek bizonyult. Az első bizonyítás Lamé nevéhez fűződik (1839). A korabeli matematikusok Cauchy, Lamé, és mások több cikkben tökéletesítették módszereiket, és 1847-ben Lamé a Francia Akadémián bejelentette, hogy belátta a Fermat-sejtést. Liouville azonban rámutatott, hogy a bizonyítás, amely az ún. körosztási testek egészeinek számelméletén alapszik, felhasználja a prímfelbontás tételét, ami ebben a gyűrűben bizonyításra szorul. Valójában, egy másik problémán dolgozva, Kummer már 1846-ban megmutatta, hogy a 23-adik egységgyökökkel képzett gyűrűben nem igaz a számelmélet alaptétele, és így Lamé² bizonyítása sem működhet.

Kummer azonban ennél jóval többet bizonyított, bevezette az ideális számok elméletét, és ennek segítségével igazolta a következőket. Legyen $\zeta_p = \cos(2\pi/p) + i \sin(2\pi/p)$ és

$$R = \mathbb{Z}[\zeta_p] = \{a_0 + a_1\zeta_p + \dots + a_{p-2}\zeta_p^{p-2} \mid a_0, a_1, \dots, a_{p-2} \in \mathbb{Z}\}.$$

Az R gyűrű két ideálja I, J legyen ekvivalens, ha van olyan $\alpha, \beta \in R$, $\alpha\beta \neq 0$, hogy $\alpha I = \beta J$. Kummer egyik legfontosabb felfedezése, hogy a számelmélet alaptétele az ideálok bevezetésével megmenthető, továbbá annak bizonyítása, hogy a fenti ekvivalenciareláció véges sok osztályra bontja az R gyűrű ideáljait. A továbbiakban jelölje az osztályok számát h_p .

A Fermat-sejtéssel kapcsolatban Kummer fő eredménye a következő. Legyen p egy olyan prím, hogy p nem osztja a h_p osztályszámot (ezeket reguláris prímeknek hívjuk). Ha p reguláris, akkor az $x^p + y^p = z^p$ egyenletnek az egész számok körében nincs olyan megoldása, melyre $xyz \neq 0$. Azóta is megoldatlan kérdés, hogy létezik-e végtelen sok reguláris prím – azt viszont tudjuk,³ hogy végtelen sok irreguláris prím van (a legkisebb a 37). Viszont

¹Sophie Germain a matematika romantikus korszakának izgalmas alakja, autodidakta matematikus, aki férfi néven végezte az egyetemet. (Nők ekkor még nem járhattak egyetemre, az emberi és polgári jogok nyilatkozata valójában a férfiak és polgárok jogainak nyilatkozata volt (Déclaration des droits de l’homme et du citoyen).)

²Lamé mindezek mellett kiváló matematikus volt, és egyike azon 72 tudósnak akinek nevét megörökítették az Eiffel tornyon.

³K. L. Jensen eredménye 1915-ből.

40 Tóth Árpád, Zábrádi Gergely: Wiles és az Iwasawa-elmélet fősejtése

heurisztikus gondolatmenetek azt mutatják, hogy a prímek kb. 60,65%-a reguláris – ez Siegel sejtése (1964).

Ezen túlmenően Kummer kapcsolatot talált a h_p osztályszám és a Riemann- ζ függvény negatív egész helyeken felvett értékei között. Ennek segítségével a h_p osztályszám p -vel való oszthatóságára a következő kritériumot adta: p pontosan akkor reguláris prím, ha p nem osztja a B_k Bernoulli-szám egyszerűsített alakjának számlálóját semmilyen $k = 2, 4, \dots, p-3$ páros számra sem.

Az alapfogalmakban jártas olvasó innen folytathatja az 5. fejezettel, átugorva a 3. és 4. fejezeteket.

3. Riemann ζ -értékek

A ζ -függvény, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergens, ha $s > 1$ valós. Riemann megmutatta, hogy ez a függvény természetes módon kiterjeszthető komplex értékekre, az $s = 1$ kivételével, és a kiterjesztett függvény zérushelyei pontos információval rendelkeznek a prímszámok eloszlásáról. Ezen alapvető észrevételeiért a függvényt Riemann-féle ζ -függvénynek hívjuk.

Már jóval korábban, az analízis születésekor izgalmas kérdés volt $\zeta(2)$ értéke. Ezt Euler határozta meg, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Euler e munkáját kiteljesítette, belátta, hogy $\zeta(2n) = (-1)^{n+1} B_{2n} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$. Itt a B_k Bernoulli számok a következőképpen adhatók meg. Legyen

$$F(t) = \begin{cases} \frac{t}{e^t - 1}, & \text{ha } t \neq 0, \\ 1, & \text{ha } t = 0; \end{cases}$$

akkor $B_k = F^{(k)}(0)$, azaz az F függvény k -adik deriváltja $t = 0$ -ban. Ekvivalens módon $F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k$, és így a Bernoulli-számok az $(e^t - 1)F(t) = t$ egyenletből rekurzívan számíthatók. Feladat: igazoljuk, hogy $B_k = 0$, ha $k > 1$ páratlan.

Euler ezen túlmenően észrevette, hogy ha a ζ -függvény valamilyen természetes módon értelmezhető lenne negatív egészekben, akkor a $\zeta(k)$ és $\zeta(1-k)$ értékek között egy egyszerű kapcsolat áll fenn. Ezt a szimmetriát Riemann munkája után a ζ -függvény függvényegyenletének hívjuk. Euler speciális eredménye a

$$\zeta(1-k) = -\frac{B_k}{k}$$

összefüggés, ha $k \geq 2$ páros.

Euler ötlete a következő. A $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$ azonosságban a $q = e^t$ helyettesítés után az $\frac{e^t}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{nt}$ azonosságot kapjuk, ami értelmes és igaz minden $t < 0$ valós számra. Ha az így kapott azonosságot k -szor deriváljuk, és utána az értelmezési határon lévő $t = 0$ -t helyettesítünk, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} n^k$ -ra kapnánk értéket. Ez persze ebben a formában még nem alkalmazható, hisz két értelmetlen mennyiség között fennálló formális azonosságot ad. Ehelyett Euler a következő trükkal élt:

$$q + q^2 + q^3 + q^4 \cdots = (q - q^2 + q^3 - q^4 + \cdots) + 2(q^2 + q^4 + \cdots).$$

Ebből átrendezés után az előbbi helyettesítést alkalmazva

$$\frac{e^t}{1 + e^t} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{nt} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{2nt}.$$

Itt a bal oldalon álló függvény már értelmes $t = 0$ környezetében, és így k -szor deriválva a

$$\left[\left(\frac{d}{dt} \right)^k \left(\frac{e^t}{e^t + 1} \right) \right]_{t=0} = (1 - 2^{k+1}) \sum_{n=1}^{\infty} n^k$$

azonosságot kapjuk, ahol persze a jobb oldal értelmetlen, de Euler ezzel a módszerrel definiálja. Pl. $k = 1$ esetében Euler jelölése szerint

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}.$$

A $\zeta(1-k) = -\frac{B_k}{k}$ azonossághoz csak az $\frac{e^t}{e^t+1}$ függvény 0 körüli Taylor-sorát kell kifejezni a Bernoulli-számok segítségével, (ami viszonylag könnyen megtehető, felhasználva, hogy $\frac{e^t}{e^t+1} - \frac{1}{2}$ páratlan).

Euler fenti felfedezése a Riemann-féle kiterjesztés segítségével válik majd pontossá.

4. p -adikus számok

Mint ahogy a valós számok legintuitívabb bevezetése a végtelen tizedestörteken keresztül történik, a p -adikus számokat is legegyszerűbb végtelen

42 Tóth Árpád, Zábrádi Gergely: Wiles és az Iwasawa-elmélet fősejtése

p -hatványösszegekként felfogni. Ugyanakkor egy elsőre furcsának tűnő változtatást végzünk: egy p -adikus szám

$$x = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n p^n,$$

ahol az $\{a_n\}$ számjegyek a $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ értékek körül kerülnek ki. Fontos, hogy itt most a kitevők tetszőlegesen nagyok lehetnek. Ebben a világban $\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0$ fog fennállni, és p^{-n} lesz divergens. A p -adikus számok összességét $\mathbb{Q}_p$, azon p -adikus számok halmazát, amelyek csak nem-negatív p -hatványt tartalmaznak $\mathbb{Z}_p$ jelöli. Érdekes meggondolni, hogy a fenti formális végtelen összegek összeadása vagy szorzása az általános iskolában megszokott módszerrel, a maradékok helyiértékes továbbvitelével könnyen definiálható, és így $\mathbb{Z}_p$ egy gyűrű. Tehát bármilyen meglepő, nincs szükség előjelre, például $-1 = \sum_{n=0}^{\infty} (p-1)p^n$.

Ugyanakkor jogosan merül fel a kérdés, hogy ez az önmagában esztétikus matematikai rendszer mire hasznos. Az nyilvánvaló, hogy klasszikus geometriára nem, a geometria számszerűsítésében a negatív hatványok a kicsik – bár van olyan fizikai elmélet, mely szerint a kis távolságokban a tér nem a valós számokhoz, hanem a p -adikusakhoz hasonlóan viselkedik.⁴ Habár a halmazelmélet szempontjából a $[-0,01; 0,01]$ intervallum ugyanakkora mint a $[-100; 100]$ intervallum, a geometriai intuíció szerint a $[-0,01; 0,01]$ intervallum lényegesen kevesebb helyet foglal el. Nyilvánvaló, hogy jóval több információ van egy hosszról, ha tudjuk, hogy kisebb mint 0,01, mintha csak azt tudnánk róla, hogy kisebb, mint 100.

Az egész számok halmazán ugyanígy joggal gondolhatjuk a 9-cel osztható számokról, hogy egy kisebb hányadát alkotják a számoknak.⁵ Ezt az információt egy újfajta, aritmetikus és nem geometriai metrika bevezetésével fejezhetjük ki. Legyen $d(x, y) = |x - y|_p$, ahol $|z|_p = p^{-n}$, ha z osztható p^n -nel, de p^{n+1} -gyel már nem. A $d(x, y)$ metrikát definiál $\mathbb{Z}$ -n, és a p -adikus egészek $\mathbb{Z}_p$ gyűrűje $\mathbb{Z}$ teljessé tétele ebben a metrikában.

A p -adikus számok tehát a p^k hatványok szerinti kongruenciák vizsgálatában játszik fontos szerepet. Egy fontos konkrét alkalmazás a következő. Egyszerű akadály a számelméleti egyenlet megoldhatóságának, ha már

⁴L. V. S. Vladimirov: *p-adic Analysis and Mathematical Physics* World Scientific, Singapore, 1994.

⁵A számológépek megjelenése előtt a kilenccel adott maradékok megegyezése könnyen kivitelezhető teszt volt az egyszerű számítási hibák kiküszöbölésére.

valamely egész szerinti maradékok vizsgálata kimutatja, hogy az egyenlet kielégíthetetlen. Ha $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$, akkor a kínai maradéktétel szerint már valamely prímmhatványra sincs megoldás. Ennek a módszernek a szofisztikáltabb változata az ún. lokális-globális elv, ami központi szerepet játszik a modern algebrai számelméletben. Vegyük észre, hogy nem elég prímmodulusokat nézni: pl. az

$$x^2 + y^2 = 3z^2$$

egyenletnek modulo 3 létezik nem-triviális megoldása (jelesül a $(0, 0, 1)$), és mod 9 is, de már csak olyan, amiben x , y , és z is osztható 3-mal (feladat az olvasónak: miért is?). Persze a szó eredeti értelmében tetszőleges n -re létezik olyan megoldás mod 3^{2n} , mely nem csupa 0-kból áll, de minden ilyen megoldásra 3^n osztója kell legyen x , y és z mindegyikének. Ha n -nel tartunk a végtelenbe, akkor ezek a megoldások $\mathbb{Z}_3$ -ban már csupa 0-vá válnak, tehát a fenti egyenletnek nem lehet nem-triviális racionális megoldása sem. A p -adikus számok tehát lehetővé teszik, hogy a p prím egyre növekvő hatványai szerinti maradékosztályok gyűrűjét egyetlen nagy gyűrűbe foglaljuk össze, ezek a p -adikus egészek.

Bár a p -adikus számok axiomatikus megalapozása terjedelmes, a tételek és bizonyítások technikailag sokkal egyszerűbbek, mint a valós számok esetében. Az érdeklődő olvasó könnyen megtalálja az elmélet kifejtését pl. Gouvêa: *p-adic Numbers, An Introduction*, Springer (1997) könyvében.

5. Mi is az a p -adikus L -függvény?

Kummer a 19. század végén nem csak azt vette észre, hogy a Riemann-féle ζ -függvény negatív egész helyeken felvett értékei és a körosztási testek osztályszáma között összefüggés van. Az ő nevéhez fűződnek a következő kongruenciák a Bernoulli-számokra:

$$\begin{aligned} (1 - p^{k-1})\zeta(1 - k) &= (p^{k-1} - 1)\frac{B_k}{k} \equiv (p^{l-1} - 1)\frac{B_l}{l} \\ &= (1 - p^{l-1})\zeta(1 - l) \pmod{p^m}, \end{aligned} \quad (1)$$

ha $p - 1 \nmid k \equiv l \pmod{\varphi(p^m)}$, ahol $\varphi(p^m) = p^{m-1}(p - 1)$ az Euler-féle φ -függvény. Ezt úgy kell érteni, hogy a két oldalon álló racionális számok nevezője nem osztható p -vel, ezért tekinthetjük mindkét oldalt modulo p^m .

44 Tóth Árpád, Zábrádi Gergely: Wiles és az Iwasawa-elmélet fősejtése

A következő heurisztikus gondolatmenet szigorúan véve teljesen hibás, és nem is lehet ilyen formában precízzé tenni, de mégis rámutat arra, hogyan lehet egy ilyen Kummer-féle kongruenciát megsejteni. Induljunk ki a ($\text{Re}(s) > 1$ esetén értelmes)

$$\zeta_p^*(s) := (1 - p^{-s})\zeta(s) = \prod_{q \neq p \text{ prím}} \frac{1}{1 - q^{-s}} = \sum_{1 \leq n, (n,p)=1} \frac{1}{n^s}$$

formulából: ez nem más, mint a módosított ζ -függvény, ahol a p -hez tartozó Euler-faktort kihagyjuk a szorzatból. Vegyük észre, hogy az Euler–Fermat-tétel értelmében (mivel feltettük, hogy $(n, p) = 1$)

$$\text{ha } k \equiv l \pmod{\varphi(p^m)}, \text{ akkor } n^k \equiv n^l \pmod{p^m}.$$

Ha ennek a végtelen sok kongruenciának a reciprokat összeadjuk, akkor

$$(1 - p^{-k})\zeta(k) \equiv (1 - p^{-l})\zeta(l) \pmod{p^m}$$

adódik. Sajnos ezzel a gondolatmenettel több bökkenő is van:

1. egyrészt miért lehetne összeadni végtelen sok kongruenciát;
2. másrészt ha k és l pozitív egészek, akkor $\zeta(k)$, ill. $\zeta(l)$ nem racionális, de még csak nem is algebrai szám – mi értelme lenne akkor egy ilyen kongruenciának?;
3. harmadrészt ha viszont negatív egész k -t és l -et veszünk (ilyenkor $\zeta(k)$ és $\zeta(l)$ valóban racionális), és az 1. számú problémával valamilyen csodával határos módon megbírkózunk, akkor pedig az a baj, hogy a $\sum_{1 \leq n, (n,p)=1} \frac{1}{n^k}$ összeg nem konvergál.

Annál inkább bámulatos, hogy az (1) kongruenciák mégis teljesülnek (legalábbis, ha $p - 1 \nmid k$)!

Az (1) kongruenciát a következőképpen is interpretálhatjuk. Rögzítsünk egy j nemnulla maradékot modulo $p - 1$, azaz egy számot 1 és $p - 2$ között, továbbá egy $\mathfrak{s} \in \mathbb{Z}_p$ p -adikus egész számot, azaz egy $\mathfrak{s} = a_0 + a_1p + \dots + a_mp^m + \dots$ formális összeget, ahol $a_m \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$ ($m \geq 0$). Szeretnénk a $\zeta_p^*(s) = (1 - p^{-s})\zeta(s)$ függvényt értelmezni (rögzített j esetén $\mathfrak{s}$ -ben p -adikusan folytonosan) a $(j, \mathfrak{s})$ rendezett párra úgy, hogy a függvényérték egy p -adikus szám legyen. Ha a függvényértéket valamilyen

$m > 0$ egészre modulo p^{m+1} szeretnénk megmondani, akkor ehhez vegyünk egy olyan $k_m < 0$ egész számot, amire

$$\begin{aligned} k_m &\equiv j \pmod{p-1}, \\ k_m &\equiv a_0 + a_1p + \dots + a_{m-1}p^{m-1} \pmod{p^m}. \end{aligned}$$

Ilyen persze létezik a kínai maradéktétel szerint, hiszen $(p-1, p^m) = 1$. Tekintsük a $\zeta_p^*(k_m) = (1 - p^{-k_m})\zeta(k_m) \in \mathbb{Q}$ számot. Vegyük észre, hogy az (1) kongruencia miatt $\zeta_p^*(k_m)$ osztási maradéka modulo p^{m+1} nem függ k_m választásától. Így definiálhatjuk a $\zeta_p^*(j, \mathfrak{s})$ szám p^{m+1} -gyel való osztási maradékát ennek a számnak! Végül ha m -mel tartunk a végtelenbe, akkor kapunk egy $\zeta_p^*(j, \mathfrak{s})$ jóldefiniált p -adikus számot. Ez a konstrukció Kubota és Leopoldt nevéhez fűződik 1964-ből.

Más szóval az $(1 - p^{-s})\zeta(s)$ -függvényt a negatív egész számokról ki tudtuk terjeszteni folytonosan

$$(\mathbb{Z}/(p-1) \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}_p\text{-re,}$$

azaz a p -adikus egészek $p-2$ példányára.⁶ Rögzített $j \in (\mathbb{Z}/(p-1) \setminus \{0\})$ esetén a kapott függvényt $\zeta_{j,p}$ -vel jelöljük, és a p -adikus ζ -függvény j -hez tartozó ágának nevezzük. Vegyük észre, hogy páros j esetén ez a függvény azonosan 0, hiszen a Riemann-féle ζ -függvény eltűnik negatív páros egész helyeken. Igazi aritmetikai tartalmat tehát a páratlan j -hez tartozó ágak hordoznak.

6. Az Iwasawa-fősejtés

Az Iwasawa-fősejtést Wiles 1984-ben Barry Mazurrel közösen bizonyította, majd 1990-ben egyedül is adott rá egy új bizonyítást általánosabb formában, nemcsak a racionális számok testére, hanem tetszőleges teljesen valós testre. Az állítás lényegében annak a precíz megfogalmazása, hogy milyen aritmetikai információt hordoznak a $\zeta_{1,p}, \zeta_{3,p}, \dots, \zeta_{p-2,p}$ p -adikus zeta-függvények. A pontos megfogalmazáshoz szükséges ismeretek összefoglalására ez a cikk túl szűk lenne. Az alábbi kitekintés erre az általános elméletre, reméljük,

⁶Ez a $(p-2)$ darab kiterjesztés olyasmi, mint a komplex test fölött a négyzetgyökfüggvény két ága. Valójában van még egy $(p-1)$ -edik ága is a p -adikus ζ -függvénynek, ami 0 modulo $p-1$ maradékhoz tartozik, de ahhoz kicsit erősebb kongruenciákkal kell dolgozni, és ennek az ágnak pólusa lesz az $\mathfrak{s} = 0$ -ban.

sok olvasóban kelti fel az érdeklődést a Galois-elmélet és a p -adikus analízis iránt. Az érdeklődő olvasó bevezető szinten olvashat a szükséges fogalmakról az alábbi egyetemi jegyzetben, az Iwasawa-fősejtés bizonyítását pedig Coates és Sujatha: *Cyclotomic Fields and Zeta Values*, Springer (2006) könyvében találja.

Iwasawa 60-as években megfogalmazott észrevétele az volt, hogy – a sejtés szerint – ezen függvényekből nemcsak a p -edik körosztási test, hanem minden m -re a p^m -edik körosztási test osztályszámának p részét is meg lehet határozni. Az aritmetikai oldalon a kiindulópont a következő: Adott $m > 0$ -ra jelölje $\mathcal{Y}_m$ a $\mathbb{Q}(\mu_{p^m})$ körosztási test osztálycsoportjának p részét (azaz p -Sylow részcsoportját). Ezen hat a $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^m})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/p^m)^\times$ Galois-csoport, továbbá minden $m > 0$ -ra van egy természetes $\mathcal{Y}_{m+1} \rightarrow \mathcal{Y}_m$ vetítő leképezés. Ha m -mel tartunk a végtelenbe, akkor vehetjük a $\mathcal{Y}_\infty := \varprojlim_m \mathcal{Y}_m$ inverz limeszt, amin már a p -adikus egészek $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_p^\times$ multiplikatív csoportja hat. Viszont itt $\mathbb{Z}_p^\times$ izomorf a p elemű test $\mathbb{F}_p^\times$ multiplikatív csoportjának és a p -adikus egészek $\Gamma \cong \mathbb{Z}_p$ additív csoportjának (nemkanonikus) direkt szorzatával. Itt $\mathbb{F}_p^\times$ egy $p - 1$ -edrendű ciklikus csoport, melynek p karakterisztikában minden véges dimenziós reprezentációja féligeegyszerű, tehát egy p -hatvány rendű Abel-csoporton is karakterek direkt összegén keresztül hat. Továbbá ezen karakterek ugyanúgy a 0-tól $p - 2$ -ig terjedő egészekkel vannak indexelve, mint a p -adikus zeta-függvény ágai, így van köztük egy (természetes) kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. A máig nyitott (és egyelőre elérhetetlen) Vandiver-sejtés szerint a páros indexű karakterekhez tartozó izotipikus komponensei $\mathcal{Y}_\infty$ -nek triviálisak (azaz $\mathcal{Y}_\infty$ -ben nincs olyan nemnulla elem, amin $\mathbb{F}_p^\times$ egy páros indexű karakteren keresztül hat). Ez azzal analóg, hogy a páros j -hez tartozó ágai a p -adikus zeta-függvénynek azonosan 0-k, viszont ezen komponensekről nem mond semmit az Iwasawa-fősejtés. Ugyanakkor a Γ csoport hatása $\mathcal{Y}_\infty$ -n a konstrukcióból adódóan folytonos, így kiterjed a $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ telített csoportalgebrára (az ún. *Iwasawa-algebrára*), mivel $\mathcal{Y}_\infty$ egy pro- p Abel-csoport, speciálisan $\mathbb{Z}_p$ -modulus is. Viszont a $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ Iwasawa-algebrát (nemkanonikusan) azonosíthatjuk a $\mathbb{Z}_p$ feletti $\mathbb{Z}_p[[T]]$ egyváltozós formális hatványsorgyűrűvel. Utóbbi egy kétdimenziós lokális gyűrű, ami feletti modulusoknak létezik – a főideálgyűrű feletti végesen generált modulusok klasszifikálásához hasonló – struktúraelmélete: a végesen generált torzió modulusokat pszeudo-izomorfizmus (jelen esetben véges elemszámú modulus) erejéig meghatározza a *karakterisztikus ideáljuk* (ami a véges Abel-csoport

rendjével, illetve a négyzetes mátrixok karakterisztikus polinomjával analóg fogalom). Másrészt a p -adikus zeta-függvény páratlan j -hez tartozó ága is (formális) hatványsorba fejthető, tehát – lényegében – a $\mathbb{Z}_p[[T]]$ gyűrű egy elemét definiálja. Az Iwasawa-fősejtés azt mondja ki, hogy – megfelelő normalizáció mellett – a páratlan j -hez tartozó $\mathbb{F}_p^\times$ -karakter $\mathcal{Y}_\infty$ -beli izotipikus komponensének mint $\mathbb{Z}_p[[T]]$ -modulusnak a karakterisztikus ideálját a $\zeta_{j,p}$ zeta-függvény mint p -adikus hatványsor generálja.

Ez a – két látszólag teljesen különböző – objektumokat összekötő tétel összefoglalja mindazt, amit tudunk a Riemann-féle ζ -függvény speciális értékei és a körosztási testek aritmetikája közti misztikus kapcsolatról. A sejtésnek léteznek olyan általánosításai, melyben az osztálycsoport szerepét elliptikus görbék p -Selmer-csoportja játssza, a Riemann-féle ζ -függvény helyett pedig a görbe L -függvénye jön elő – ezeknek alapvetően fontos alkalmazásai vannak a Birch–Swinnerton-Dyer-sejtés ismert eseteinek bizonyításában. Az elmélet új, manapság is folyamatosan fejlődő ága a nemkommutatív Iwasawa-elmélet, melyben a racionális test körosztási bővítése helyett más, nemkommutatív Galois-csoportú bővítéseit használják.

A fenti cikket az Érintő 2018. márciusi számából vettük át.

Pálfalvi Józsefné, Tikk Domonkos: Votisky Zsuzsa (1948–2018)

Votisky Zsuzsa 1948-ban született Budapesten, polgári családban.

Bár már fiatakorában is leginkább a képzőművészet és a művészettörténet érdekelt, ésszerűbbnek látszott, hogy reál irányban tanuljon tovább, mivel tartott attól, hogy a családot sújtó hátrányos megkülönböztetés miatt nem vesz fel humán szakokra. Így hát a Veres Pálné Gimnázium elvégzése után matematika-fizika tanári szakra jelentkezett az ELTE-re, és elsőre felvételt nyert.

Az egyetem befejezését követően a Vas utcai közgazdasági szakközépiskolában tanított. Komolyan foglalkoztatta a matematikaoktatás megreformálása, de néhány év után rájött, hogy a szakközépiskola ehhez kevés mozgásteret ad, ezért átment az Országos Pedagógiai Intézetbe, majd később a Műszaki Könykiadóban dolgozott szerkesztőként.

40 éves korára találta meg a számára ideális szakmai feladatot, amelyben egyaránt kamatoztathatta a matematikai és a reáltudományok iránti érdeklődését, valamint biztosította a számára mindig szükséges szellemi kihívást. 1988-ban többedmagával megalapította a Typotex Kft. elődjét, akkor még gmk-ként, majd a berlini fal leomlásának a napján a cég átalakult a jelenlegi kft.-vé.

A cég első éveiben még csak a TeX szedőprogrammal végzett nyomdai előkészítést, 1991-től lépett fokozatosan a könyvkiadás felé. Nagyon biztos értékítélettel választotta ki az első időkben még főleg matematikai tematikájú könyveket, majd egyre szélesebb lett a paletta: hiánypótló és érdekes műveket adott ki magyarul, elsősorban a tudományos ismeretterjesztés és a művészettörténet területéről.

A könyvkiadó meghozta számára a nemzetközi szakmai életbe való belépést és az ottani elismerést is. Világpolgár lett, rendszeresen járt ki a Frankfurti Könyvvásárra már a 90-es évek elejétől, és nagyon otthonosan érezte magát ebben a vibráló közegben. Rengeteg új ötlettel tért vissza ezekről az utakról, és számos új kezdeményezést honosított meg a magyar könyvszakmában. Ezek közül a szívéhez legközelebb talán a Bábelmátrix projekt állt, aminek létrehozását épp az a felismerése motiválta, hogy külföldi barátainak nem tudja – az ő nyelvükön – elmondani a kedvenc magyar verseit.

Pálfalvi Józsefné, Tikk Domonkos: Votisky Zsuzsa (1948–2018)

49

Sikeres üzleti és szellemi vezetőként felfuttatta a kiadót, amelyet a magyar szellemi élet egyik fontos eligazodási pontjává tett.

Nagyvonalú és nagylelkű volt, értő stílusú, ugyanakkor kitartó és következetes. Életteli volt, másokat is magával ragadott kisugárzása és lendülete. Hosszú ideje mindent elkövetett azért, hogy a kiadó, ez a szellemi műhely nélküle is működőképes maradjon.

Az idei tél is egy szokásos megfázással indult, ami aztán végzetesnek bizonyult. Mindannyiunk számára megdöbbentő hirtelenséggel ment el.

(Részletek fia, Tikk Domonkos búcsúztatójából, elhangzott 2018. január 24-én az Óbudai Temetőben.)

Kedves Zsuzsa!

Mindig „régí harcostársadnak” neveztl, hiszen együtt voltunk a 70-es évek nagy reformküzdemeiben. Jártunk a „kutás terembe” Surányi János módszertani szemináriumaira Bartal Andreával, Gádor Pirivel, Halmos Marival és még sok más kiváló és lelkes kollégával. Nagy tudásvággal hallgattuk a „nagyok”, köztük Péter Rózsa előadásait, és örömmel és persze gyakran felbukkanó vitatkozó hajlammal vettünk részt a tanítás jobbítását célzó beszélgetésekben. Néhányunkat az a megtiszteltetés ért, hogy részt vehettünk a Surányi János által szervezett tanulmányi kiránduláson Krakkóban. Itt nagy tisztelettel próbáltuk megérteni Krygowska professzor asszony előadásait, és látogattuk az általa vezetett kísérlet keretében szervezett középiskolai órákat a geometriai transzformációk és az analízis újszerű tanításáról. A hivatalos programok mellett arra is emlékszem, mekkora lelkesedéssel nézted az Egyetem könyvtárának fantasztikus gyűjteményét, és micsoda meghatott csodálkozással a „Hermelines nő” képét, de ma is bennem él az a mélységes döbbenet, amit Auschwitz borzalmait látván éreztünk ott együtt.

Surányi János „csapatával” hosszú éveken át próbálkoztunk Varga Tamás szellemiségét bevinni még a középiskolába is, ebben te mindig fontos közreműködő voltál.

Amikor a számítástechnika egyre jobban kezdett „begyűrűzni” a magyar oktatási köztudatba is, te elsők között voltál, akik ennek a fontosságát és szükségességét meglátták. Tisztelettel és nagy együttérzéssel figyeltük a Kiadó megalapítása és megerősödése körüli küzdemeidet. Jó, hogy legalább a baráti beszélgetések révén vagy a készülő írások kapcsán én is egy kicsit beavatottnak érezhettem magamat. Amikor Varga Tamás szellemisége egyre inkább kiszorulni látszott a magyar matematikaoktatás területéről, te akkor is igyekeztél az őrzőket segíteni.

Sokat köszönhetünk neked a Varga Tamás Alapítvány folyamatos működtetéséért, a Varga Tamás Napok konferenciák támogatásáért. A te ötleted alapján és aktív közreműködéssel alakult meg a Varga Tamás Alapítvány keretében a Varga Tamás Módszertani Központ, majd később hathatós segítséget nyújtottál a „Játéktól a kutatásig” című sikeres diákprogram megvalósításához is.

Biztos vagyok benne, hogy az elmúlt évtizedek matematikatanárai sosem felejtik el a Hangos könyvek felolvasóesteket a Rátz László Vándorgyűléseken és a Varga Tamás Napokon, ahol a te általad szervezett kiváló előadóművész csapat segítségével próbáltál mindnyájunkat beavatni az „olvasás gyönyörűségébe”.

Kedves Zsuzsa!

Sajnos, most már legfeljebb „az örök vadászmezőkön” lehetünk újra együtt harcostársak.

Köszönettel és soha el nem múló baráti szeretettel gondolok rád.

Sári

Pálfalvi Józsefné

Budapest, 2018. 01. 23.

(Elhangzott 2018. febr. 18-án a budapesti Nyitott Műhelyben, Zsuzsa emlékestjén)

A fenti cikket az Érintő 2018. márciusi számából vettük át.

Surányi László:

Sohasem azt tanítjuk, amit tanítunk – 100 éve született Surányi János

10 éve, 2006. december 8-án halt meg apám, Surányi János. Ez alkalomból a Természet Világa írást kért tőlem. Sokáig haboztam, hogy elvállaljam-e, hiszen nyilván nem vagyok objektív. Végül rábeszélésre elvállaltam. Az objektív adatokat aránylag könnyű leírni, a legfontosabbak: 1945–48 között a Szegedi Tudományegyetemen, 49-50-ben a Neveléstudományi Intézetben, majd 1950-től nyugdíjba vonulásáig az ELTE TTK Algebra és Számelmélet tanszékén dolgozik, 1960-tól egyetemi tanárként, 1976–1988 között a tanszék vezetője. Hosszú időn át a Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) főtitkára, majd elnöke, egyben a Középiskolai Matematikai Lapok (KöMaL) egyik háború utáni újraindítója és 1970-ig főszerkesztője. Emellett a magyar középiskolai matematikatanítás megújításának egyik úttörője és szervezője, akit előbb az ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) tagjának, majd alelnökének is megválasztottak. Mindkét magyarországi Matematikai Diákolimpia szervező bizottságának elnöke volt. Az igazán lényeges ez után következik: annak bemutatása, hogy mindez milyen magatartás, milyen elvek és milyen élet külső eredménye. Ehhez azt az utat választottam, hogy dokumentumokra, leveleire, a vele készült interjúkra, valamint pályájának egy-egy vetületét nálam jobban ismerők emlékeire támaszkodva írok apámról. [1] Nem tudományos munkásságát és életútját akarom ismertetni, hanem főleg a magyar matematikai közéletnek a 2. világháború utáni megújításában és a középiskolai matematikatanítás reformtörekvéseiben játszott szerepét, valamint ezek emberi, etikai, szellemi hátterét.

A családi-szellemi háttér

1918-ban született, apja, Surányi Ede tüdőgyógyász a II. világháború előtt Kálban (Heves megye) volt körzeti orvos. Anyja, Gráber Kornélia tanítónő. A szülők a Galilei-körben ismerkedtek meg. Apám és iker-testvére, Surányi Péter az általános iskolát Kálban végezték, majd a budapesti Mátyás Király Reálgimnáziumban tanultak, itt is érettségiztek. A tanév során nagynénjükénél, az individuálpaszichológus Bíró Lipótnénál laktak, annak két gyermekével, Bíró Gáborral és Endrével. Utóbbi neves biokémikus

professzor lett, emellett Joyce szinte fordíthatatlan regényéből, a *Finnegans Wake*-ből is ő fordított magyarra először egy válogatást. [2] A nyarat aztán a négy fiú Kálban töltötte, ahol gyakran megfordult apámék anyai nagynénje, Gráber Margit festőművész és – rövid ideig – férje, Perlrott Csaba Vilmos, aki szintén festő, a magyar „Vadak” egyik legmarkánsabb képviselője. Mindketten nagy hatással voltak apámra, aki maga is szeretett rajzolni. Az unokatestvéreken keresztül került kapcsolatba a filozófus és rajzművész Szabó Lajossal, aki fiatal korának egyik mentora volt. Tervezte, hogy Szabó *Adalékok a halmazelmélet kérdéseihez* c. írását a szakmatematikusoknak szóló előszóval látja el, és így kiadja. [3]

Apámat a matematika már általános iskolás korában elragadta. Elmondása szerint harmadikos korában lenyűgözte, hogy *bizonyítani* lehet azt, hogy a háromszög szögösszege 180° . Ez a pontosság vagy gondolati szigor(úság) volt az egyik pólusa a matematika iránti vonzódásának. De volt egy ellenpólus is, amit apám Péter Rózsa megfogalmazásában szeretett idézni: „Én nem azért szeretem a matematikát, mert – így mesélték nekem – alkalmazni lehet a technikában, hanem azért, mert szép. Mert *játékos kedvében* teremtette az ember.” [4] A játékoság a legelemibb szinten is fontos volt apámnak. Ha külföldre utazott, mindig meglepően egyszerű, mégis varázslatos játékokkal tért haza, ebben különös örömét lelte. De a játékoság mélyebb formái iránt is nagyon vonzódott. Kedvelte a festészetben is – családjában festők vették körül, anyjának is rajztanárnői képesítése volt, és művészi értékű hímezéseket készített, Endre unokatestvérének felesége, Gedő Ilka is nagyszerű festő. Apám is jól rajzolt. Nagy versolvasó is volt, és sok verset tudott kívülről. (Nagyon lassan olvasott; közös olvasásnál sokáig kellett várni, amíg ő is eljut az oldal aljára. De amit elolvasott, azt néha elsőre meg is tanulta.) Ha egy versre azt mondta, hogy „erős”, ez egyfajta elismerést jelentett akkor is, ha különben a vers „irányával” nem rokonszenvezett. Hozzá azok a költők álltak közel, akiknél a komolysághoz játékoság is vegyült. Végül, de nem utolsósorban, hanem elsősorban a matematika éppen azért vonzotta annyira, mert ott szétválaszthatatlanul együtt volt a játék és a gondolati szigorúság. Didaktikai munkásságának is az volt a célja, hogy ezt a kettősséget és a belőle származó örömezt át tudja adni. Laczkovich Miklós, aki közelinek érezte magához apámat, a szelídsége mellett a kulturális tágasságát emelte ki: „Kedves ember volt, érdekes ember volt, nagy tudású ember volt. A kultúrára gondolok. Ki volt még, akitől tanulni lehetett volna nem csak matematikát, miután Rényi meghalt, Péter Rózsa elkerült a tanszékről? ... Beszélgettünk mindenféléről. Mikről? Mindenről.”

A fiatalkor és a megismerkedés Kalmárral

A pedagógia fontosságát már az iskolában is megtapasztalta. Erről így számol be: „A gimnázium, ami régen nyolcosztályos volt, számomra rosszul kezdődött. Első két osztályban hibátlan dolgozataim sorra elégségesek lettek. Nagyon bosszantott a dolog, és (bár ez tilos volt), egy dolgozatjavítás alkalmából hazavittem a füzetemet. Otthon megmutattam a nagynénémnek, aki néhány nap múlva bement az iskolába érdeklődni. A dolgozatról sem ő, sem a tanár nem szólt semmit. Év végén viszont, ki tudja miért, jelest kaptam. Később megtudtam, hogy a tanár többször állt ideggyógyászati kezelés alatt. Azután egy új tanárt kaptunk, aki igencsak igazságos valaki hírében állt. Nagyon meg akartam mutatni mit tudok.” Az első félévben számolási hibáktól hemzsegték a dolgozatai. Viszont a tanár sose hívta ki felelni, így nem tudott javítani. Rettentő szorongva várta a félévi bizonyítványt, hogy akkor most megint rossz jegyet kap matematikából, és meglepve látta a jelest. A tanárnak nyilván nem volt szüksége rá, hogy feleltesse, az órai munka alapján világos volt számára, hogy milyen jó matematikából. A történet vége: „Ezután már nem volt ’jó’-nál rosszabb dolgozatom.” [5]

1936-ban, a gimnázium befejezése után apám az ELTE matematika szakára jelentkezett, de kétszer sem vették fel, [6] így végül Szegeden ún. „keresztfélèvesként” kezdte meg tanulmányait. „Azt gondoltam, ha Szegeden sikeresen dolgozom, akkor majd átkerülhetek Pestre. Egy félév után már eszembe se jutott elmenni Szegedről. Az évfolyamban összesen hatan voltunk, így mindegyikünkkel személyesen tudtak foglalkozni. Sok kellemes élményről számolhatnék be”, mondja előbb idézett visszaemlékezéseiben. Nemcsak a matematika, hanem a filozófia is érdekelt, így amikor a könyvtárban meglátta Hilbert logikáját, azt mondta magában: „Hilbert matematikus, a logika filozófia”, így hát hazavitte és – a kötelezőkkel ellentétben – ezt ki is olvasta. Így fedezte fel magának az akkor még feljövőben levő kutatási ágat, majd annak a korban legkimagaslóbb magyar képviselőjét, a Szegeden tanító Kalmár Lászlót. Ez sokszorosán telitalálatnak bizonyult. Nála szakdolgozott és doktorált, és az ún. eldöntésproblémáról később sok közös cikket is publikáltak. Ám Kalmár hatása ennél lényegesen mélyebbnek és tartósabbnak bizonyult. Nemcsak a logika kötötte őket össze, hanem szinte családi kapcsolat is kialakult közöttük. Egy 47-es, Szabó Lajosnak írt levelében, amelyben a számfogalom kialakulására és az egyszerű elsajátítására vonatkozó gondolatait írja le, Kalmár lányát, Évát hozza példaként. A szoros családi kapcsolatról a *Kalmárium II*-ben megjelent

pontosan százoldalnyi levelezésük is tanúskodik. [7] Apám nagyon várta ezt a kötetet, sajnos már nem élhette meg, hogy annak borítóján is az a levele olvasható, amellyel első publikációját Kalmárnak ajánlja. Kalmárral a tanítás iránti mély elkötelezettség, a didaktikai és pedagógiai érdeklődés is összekötötte. Valószínűleg Kalmár révén ismerkedett meg Karácsony Sándorral és körével, [8] köztük Varga Tamással. És szintén Kalmáron keresztül ismerkedhetett meg Péter Rózsával és Gallaival, csupa olyan név, akik később fontos szerepet játszanak a matematikatanítás megújításáért folytatott harcban.

A világháború utáni újrakezdés

A világháború alatt apám két és fél évig volt munkaszolgálatban, majd német táborban, végül magyar szükségkórházban („flekktífusz” miatt). Hazatérve szinte belevetette magát a matematikába. Szervezte a matematikai közéletet, így egyik motorja volt a Bolyai János Matematikai Társulat újjászervezésének és a tanulmányi versenyek újraindításának, ill. megindításának. A „Társulat” szó az ő esetében nagyon pontosan kifejezi azt, ahogyan ő viszonyult a matematikai közülethez. Az intézményi lét csak azért volt fontos a számára, hogy keretet adjon egy barátságos közületnek, ahol az emberek otthon érezhetik magukat, otthonos körülmények között beszélhetik meg problémáikat, és teret adjon az előremutató kezdeményezéseknek. Ezt képviselte a Társulat főtítkáráként, majd elnökeként is. A diktatúra alatt azután a Társulat mint intézmény is jelentős védelmet jelentett a matematikus társadalomnak a diktatúrával szemben.

1947-ben a Társulat keretén belül újítják meg Soós Paulával a Középiskolai Matematikai Lapokat. Energikus szervezőmunkája eredményeként újra indul az Eötvös-verseny (1949 óta korábbi szervezőjéről Kürschák József Matematikai Tanulóversenynek nevezik, és máig minden évben megrendezik). A szervezés fáradságairól így számol be egy '47 októberi levelében: a KöMaL „most már a megvalósulás közelében van. Elkezdtem még akkor piszkálni a társaságot, hogy mikor akarják az októberi tanulmányversenyt elkezdni szervezni. Végül is most Pesten összeszedtem feladatnak valókat, megbeszéltük ott, hogy ki legyen a bizottság, megbeszéltük itt (értsd mindenkinek a nyakára mentem és mondtam, hogy a többiekkel ebben állapodtam meg), aztán az elnök szétküldtem a választmányi ülés meghívóit, a főtítkár összeállítottam a tárgysorozatot stb. Így szombaton választmányi ülés lesz, mely elvállalja a középiskolai lap kiadását, kiküldi a verseny bíráló bi-

zottságát, mely már előre meg fogom hirdetni a versenyt a lapokban okt. 25-re. Szóval így él a társulat és nem élek én.” Valójában ezekben a szervezési munkákban is ő élt: érzelmileg is nagyon kötődött nemcsak a Társulathoz, hanem közelebbről a KöMaL-hoz csakúgy, mint a Kürschák-versenyhez. A KöMaL-ben ismerte meg sok későbbi jó barátja nevét. Sokat emlegette például a korán meghalt Szele Tibort. Ugyanilyen személyes ügye volt a Kürschák-verseny is, amelynek feladatai és megoldásai kiadásában mindvégig fontos szerepet játszott, és azt a többi szerzőtárs (Kürschák, Neukomm Gyula és Hajós György) halála után egyedül folytatta szinte a haláláig. [9] A versenybizottságnak kezdettől tagja, majd Hajós 1972-ben bekövetkezett halála után évekig az elnöke volt. Szimbolikus, hogy 2006-ban épp a verseny eredményhirdetésének napján halt meg. Hatvan év alatt korábban talán egyszer fordult elő, hogy – akkor is egészségi okokból – nem tudott jelen lenni az eredményhirdetésen. A bizottságban végzett munkáját Urbán János, a nagyszerű tanár apám sírjánál tartott gyászbeszédében szemléletformálónak nevezte. Ebbe nyilván beleértette azt a magától értetődő demokratikus habitust, ami közös is volt bennük, s amelyet jól jellemez az, amiért apám e versenyhez különösen kötődött. Végig fontosnak tartotta, hogy itt csak is olyan feladatok szerepeljenek, amelyekhez nem kell több tudás, mint amit egy átlagos gimnázium nyújt. (A mai, sokkal feszítettebb körülmények között ez a szempont a versenyen sajnos lassan háttérbe szorul.) Ugyanennek a habitusának egy másik megnyilvánulása, hogy a munkaszolgálat alatt – az emberséges századparancsnokuk révén – megszervezik, hogy kijárjanak a faluba az ottani diákokat felkészíteni vizsgáikra. Apám németet és ha jól emlékszem elbeszélésére, latint is tanított. A felszabadulás után pedig nem tartotta rangján alulinak, hogy ún. szakérettségiseket tanítson. (Ez a magatartás akkor egyébként sokak számára természetes volt.) Viselkedését sosem az éppen aktuális rangja, hanem mindig a jóindulat, a barátságosság és a segítő szándék határozta meg. (Néha olyankor sem tudta rangját érvényesíteni, amikor ezzel jót tett volna az általa képviselt ügynek.) Amikor már professzorként is egyre energikusabban foglalkozott a matematikatanítás problémáival, akkor sem jutott eszébe ezt a tevékenységét „leereszkedésként” értelmezni.

A fent idézett levél címzettje a már említett Szabó Lajos. Ő 46-tól Pesten magánszemináriumokat tartott [10], s ezekre apám is eljárt, ha éppen Pesten volt. Máskor unokatestvére, Endre számolt be neki hosszú levelekben az itt zajló vitákról. Később, apám Budapestre költözése után kettőjüknek is tartott szemináriumot. Apám szegedi elméleti vitáiról a Szabónak írt leve-

lekből értesülhetünk. E levelek arról tanúskodnak, hogy az otthonról „kapott” harcos ateista-szabadgondolkodó magatartás ellenpólusaként fontos volt neki az a támogatás, amit a szintén szabadgondolkodó, de teista Szabó Lajos nyújtott e vitáihoz. A levelekben beszámol a „Bubával”, azaz Rényi Alfréddal Szegeden folytatott elméleti vitáiról. Az ő lényegében materialista és empirista álláspontjával szemben apám azt képviseli, hogy gondolat és anyag, elmélet és tapasztalat sosem választható el egymástól, mindig ugyanannak az egy valóságnak a két oldala. Amilyen szintű tapasztalatot feltételezünk, olyan szintű gondolatot is feltételeznünk kell, írja. A viták Kalmár „expozéjából” nőnek ki, amit ők ketten aztán fiatalos hévvel, behatóan megvitatnak. Azért is tanulságos olvasni ezeket a beszámolókat, mert kitetszik belőlük, hogy akkoriban a matematikusok között (is) mennyire magától értetődőek voltak a világnézeti tisztázó viták. A „fordulat éve” után az ilyen viták, beszélgetések, ha egyáltalán voltak, a közéletből visszaszorultak a magánéletbe. A közéletbe éppen a matematika-pedagógiai vonalon lopakodtak vissza, és ami nyilvánosan megmaradt belőlük, az mintegy oda „csatornázódott be”.

Ennek megfelelően a Bíró Endrével és Szabó Lajossal folytatott beszélgetéseknek kevésbé volt folytatása, mint a Rényivel és Kalmárral folyt vitáknak. Ez utóbbiaknak nemcsak önmagukban volt jelentőségük. Egyik kiváltója volt azoknak a törekvéseknek, amelyek a matematikatanítást akarták megújítani, s a diákok gondolkodásának felszabadítására irányultak – ez rögtön érthetővé teszi, hogy miért kellett akkora ideológiai ellenállással is megharcolnia e törekvéseknek. A viták hatását példázza a következő. Ismeretes, hogy Rényi az MTA Matematikai Kutató Intézetének igazgatójaként később jelentős szerepet vállalt a matematikatanítás megújításáért folytatott küzdelemben, például amikor 1962-ben megalapította intézetében a Didaktikai Csoportot, amelyet apám vezetett. Erről még bővebben is szó lesz. Azt viszont csak az ezekről a vitákról beszámoló levelekből tudhatjuk, hogy éppen ezek során nyeri meg apám Rényit a pedagógiai és didaktikai újítások fontossága számára.

Oktatói pályája

1945 szeptemberétől 1950-ig a Szegedi Egyetemen tanársegéd, majd 1950-ben kerül az ELTE Algebra és Számelmélet tanszékére. (Igazi szakterületének, a matematikai logikának nem volt tanszéke az egyetemen.) Másik nagy szenvedélye a matematikatanítás volt. Kurzusairól Reiman

István, aki hosszú évtizedekig készítette fel a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia magyar csapatát, ezt mondta: „Először középiskolához közel eső dolgokról Surányi János professzortól hallottam... *Elemi matematika* című gyakorlatában fordultak elő először olyan feladatok, amik a középiskolához közel álltak.” [11] Később ezeket a kurzusokat elvették tőle, amit fájdalommal vett tudomásul.

Folyamatosan tanított számelméletet, olykor lineáris algebrát is. Sárközy András elmondta, hogy az ő szemináriumán ismerte meg azt az eredményt, amely meghatározója lett további munkásságának. Később együtt adták ki a mai napig használt számelméleti példatárat. [12] Nagy hatása volt az Erdős Pállal közösen írt könyvének, a *Válogatott fejezetek a számelméletből* c. kötetnek. Számtalan alkalomra emlékszem, amikor részletesen átbeszélték a megírandókat (ha pedig Erdős külföldön volt, levelek sorát küldte a témában). A konkrét leírás persze apám dolga volt. Úgy tűnik, nagyon jól eltalálta azt a nyelvet, amelyen a matematika iránt igazán érdeklődő, de még nem mélyebben képzett tizenéves diákoknak el lehet mondani a számelmélet gimnáziumon már jócskán túlmutató tételeit is. „Ronggyá olvastam”, mondja Laczkovich Miklós, sokak véleményét foglalva össze. Lovász László: „ennek a könyvnek csodaszépen leírt bizonyításaiból értettem meg igazán, mi is a matematika”. Apám élete végéig gondozta, az új kiadásokra bővítette a könyvet (amíg Erdős élt, persze vele együtt). Sokáig tartott, amíg sikerült elérni, hogy angolul is kiadják. [13]

Kandidátusi és akadémiai doktori értekezését az eldöntésproblémából írta, amelyet lényegében az ő eredményei „zártak le”. [14] 1960-ban egyetemi tanárrá nevezik ki, majd Turán Pál halála után 1976-tól 1988-as nyugdíjba vonulásáig ő vezeti a tanszéket. Megint csak eleve demokratikus habitusára jellemző – és tegyük hozzá: ezzel korántsem volt egyedül, elég csak Erdős Pál, Péter Rózsa vagy Gallai Tibor nevét említeni –, hogy professzor létére sem derogált neki akár gimnazista diákok problémáival foglalkozni. [15] Lovász László így emlékezett erre gyászbeszédében: „Könyvének elolvasása és megszeretése után nem sokkal személyesen is beajánlottak hozzá, és rendszeresen eljártam a lakására, ahol számelméletre tanított, feladatokat mondtott, olvasnivalót adott. Magyarázataiban mindig a lényeg kiemelésére törekedett, egy-egy bizonyítás kapcsán mindig azt is ecsetelte, hogy honnan származik a bizonyítás ötlete, hogyan lehet arra rájönni.” „Furcsa volt, hogy magáz, de egyoldalú tegezésre nem volt hajlandó”, emlékezett egy ilyen beszélgetésükre gimnazista korából Pósa Lajos.

Mire ő lett a tanszékvezető, a militáns pártvonal már szinte teljesen

átvette a hatalmat a karon („az egy brutális helyzet, egy *Iskola a határon* szituáció volt”, jellemezte Laczkovich a helyzetet). De ahol lehetett, apám megpróbált védekezni. A harcok idején barátai azzal vádolták, hogy túl sötéten látja a helyzetet, amire ő az ismert választ adta: ő nem pesszimista, hanem realista – és általában „bejöttek” kellemetlen jóslatai. A harcok rengeteg energiáját elemésztették, otthon nagyon sokszor láttuk kétségbeesettnek és dühösnek. Ám a megkérdezett tanszéki kollégái szerint az egyetemen igen nyugodt, elfogadó légkört sugárzott maga körül. Úgy tűnik, az egyetem, azon belül a matematikusi közélet volt az igazi otthona. Freud Róbert szerint „jóvialis, elfogadó emberként nyugodtságot árasztott maga körül. Talán csak egyszer láttam sodrából kijönni. Tanszékvezetőként figyelmesen követte, ki nek milyen problémája van a tanszéken.” A tanszék neve szerint is „algebra és számelmélet tanszék”, ő a számelmülethez értett, az algebrát a másik egyetemi tanárra, Fried Ervinre bízta azzal, hogy ott „azt csinálisz, amit akarsz, én majd tartom a hátam”. [16] Volt benne egy nem elvi, hanem magától értetődő demokratizmus. Nem számított, hogy már professzor volt, hogy megválasztották az ICMI alelnökének, [17] hogy több nemzetközi didaktikai folyóirat szerkesztőbizottságába is meghívták, ő soha nem a rangját nézte. „Bármi extrát kértek tőle a hallgatók”, mondja Freud Róbert, pl. hogy külön időpontban tartson valamit, rögtön beleegyezett. Nem azért, mert kereste a hallgatók kegyét, hanem mert ez jött a természetéből.”

A „Vándorgyűlés” és a didaktikai szemináriumok

A BJMT nyaranta a mai napig megszervezi a Matematikatanárok Rátz László Vándorgyűlését. Apám ezen is ott volt, amíg egészségi állapota engedte. Laczkó László, aki 1971 óta tanít tagozaton is, írja le, hogy egy, a szöveges feladatokról tartott előadása után apám előbb megdicsérte, majd hosszan kiegészítette új gondolatokkal. Laczkót az nyűgözte le, hogy – mint fogalmazott – „ezeket a dolgokat, amik nem is egy professzornak a dolga”, ő simán vállalta. „És hozzászólt olyan egyszerű kérdésekhez, hogy hogyan tanítsunk a középiskolában olyasmit, ami még csak nem is tagozatos, hanem normál osztályos tananyag.” Ez is a belülről jövő demokratizmushoz tartozik: nem „felülről”, professzorosan viszonyult a tanárok problémáihoz, hanem a magáénak tekintette azokat. „Én azt láttam, hogy nagyon jóindulatú, szerettem a környezetében lenni.”

Ennek a – nemcsak apámra jellemző – belülről jövő demokratikus hozzáállásnak nagy szerepe volt abban, hogy a matematikatanítás

megújítását már a negyvenes évek végétől „napirendre tűzte” egy sor egyetemi oktató és akadémiai kutató. Közöttük volt Péter Rózsa és Gallai Tibor. Ők ketten 1949-ben írtak egy I. és II. gimnazista tankönyvet, Pálmay Lóránt szerint a legjobbat. De nehéznek bizonyult, no, nem a diákoknak, hanem a tanároknak, tette hozzá. E könyv mellett, folytatta, „nagy hatással (voltak) sokunkra Péter Rózsa, Surányi János, Varga Tamás pedagógiai elképzelései is”. Minthogy mindhármut erősén inspirálta Kalmár László, ezért Halmos Mari sarkító fogalmazása szerint a modern magyar matematikatanítás élharcosai „Kalmár László köpönyegéből bújtak elő”. Ők, ahogy Pálmay fogalmaz, „a prelegáló tanítás helyett a gyerekek aktivitására építő tanítást sugalmazták”. Ennek hatására, mondja, az évek során ő maga is sokat változtatott a tanítási stílusán. Pálmay őszinteségére és nyíltságára jellemző, ahogyan folytatja: „Ebből a szempontból veszélyes, ha az ember jól tud magyarul. Így kevésbé aktivizálja az ember a diákokat; jól értették, amit magyaráztam, türelmes voltam, ha szóltak, hogy valamit nem értenek, akkor újra és újra elmondtam, és így is jól megvoltunk. Egy bizonyos idő kellett, mire rájöttem, hogy ha kevesebbet is végzek, hasznosabb, ha lehetőséget adok arra is, hogy ők maguk próbáljanak felfedezéseket tenni, ahelyett, hogy mindent elmagyaráznék.” [18]

A történet azért is tanulságos, mert megmutatja, hogy aki a saját erényeiben biztos, az bátran tud tanulni abból, ha olyannal találkozik, ami új perspektívát ad a tanításának. Nem az erényeihez ragaszkodik, hanem a célhoz: a matematika megszerettetéséhez és a gyerekek szeretetéhez. Itt talán érdemes megemlíteni, hogy Pálmay magatartása apámék hatására nemcsak a saját tanítására vonatkozóan változott meg, hanem azt határozottan képviselte akkor is, amikor másokat kellett megvédenie. „a középiskolában örültem a dupla órának”, mert ilyenkor „meg tudtam tenni azt, hogy az első órán felírtam feladatokat, utána meg járkáltam közöttük, és hagytam, hogy dolgozzanak”, mondja önmagáról. Egyik tanítványa, Táborné Vincze Márta bemutató óráján történt, hogy az óra elején felírt egy feladatot. Ezután 40 percig látszólag semmi nem történt, csak járt fel s alá a diákok között, néha egy-két szót váltva velük, hol tartanak, hol, miért akadtak el. Az utolsó öt percben aztán peregték a megoldások. Az óra után a látogató tanárok felháborodtak, hogy ez nem egy óra, ebből nincs mit tanulni. Pálmay Lóránt határozottan válaszolt: de igen, pontosan ebből lehet sokat tanulni.

Hogy egy erős gondolat nagyon messzire elhat, és megtalálja a rá fogékonyakat, arra Pálmay mellett egy másik nagy formátumú tanár, a Berzsényi legendás tanára, később a rádióban a matematikát népszerűsítő

adásairól híres Herczeg János is példa. Ő – szintén a rá jellemző önismerettel – így foglalja össze, amit tanult tőle: bár eleinte „keménykedett”, néha buktatott is, ez „lassanként megváltozott, mert nagyjából egyetértek azzal, amit Surányi János professzor úrtól hallottam később: ’Ha Józsika megbukik matematikából, akkor Józsika matematikatanára megbukott matematikatanításból.’” Ez persze csak egy olyan társadalmi környezetben volt maradéktalanul igaz, ahol a tanulásnak nem olyan alacsony a társadalmi értéke, mint ma. Másrészt számba kell venni azt a sokszor értelmetlen követelményrendszert is, amelyet a matematikatanár kénytelen-kelletlen képvisel. Éppen ez alól a követelményrendszer alól akarta az új matematikatanítási mozgalom felszabadítani a tanárokat.

Herczeg leírja azt a tapasztalatot is, amelyet ismer minden kezdő tanár, akinek fontos, hogy a diákok mindent jól megértsenek. Épp ezért „le tud ragadni” egy témánál, ha az a diákoknak nehezen megy. Minél többet gyakoroltatjuk, annál nagyobb a görcs, és ez annál nehezebben oldható. De „nincs olyan, hogy megtanítom”, írja Herczeg. „Tanítom, és aztán menni kell tovább, vagy belerakódik valami a fejébe, vagy nem. Később majd úgys valahol visszatér, és akkor hirtelen világosabb lesz. Később Surányitól hallottam, hogy *’sohasem azt tanítjuk, amit tanítunk’*. Azonnal bevettem a jeliszavaim közé, mert akkorra már megtapasztaltam a saját vérverejtékemen, illetve a szegény gyerekekkel való fuserálásban. Menni kell előre. Bízni kell abban, a gyerek fejében azért tovább munkálnak a dolgok.” [19]

Herczeg János emlékeinek van egy közös jellemzője: apám egy-egy jól „ülő” tömör mondatban fejezi ki a gondolatát. Az ilyen mondat azonban nem pusztán „bon mot”, hanem sok, nehéz tapasztalatot foglal össze és világít meg, mutat egy új irányt ott, ahol a tanár könnyen leragad. Az ilyen tömör, ahogyan Pelikán József fogalmazott, „pengeéles mondatok” különben is mindenütt jellemzőek voltak rá.

„Néha kissé elkalandozott, ezért is ugyancsak érdekesek voltak az előadásai”, folytatja Herczeg. „Különben is a módszertanban könnyen elkalandozik az ember, mert az önmagában is érdekes, hogy egy valamiről mi minden juthat az ember eszébe.” [20] Amúgy is szeretett anekdotázni, ezek jól megformált kis történetek voltak, amelyek jól jellemezték egy-egy szereplőt. Máskor, azzal a bizonyos „pengeélesen megfogalmazott mondattal” világított rá egy-egy szereplő jellemére, indítékaira. Egyszerre volt nagyon kritikus megfigyelő, ugyanakkor nemcsak az egyetemen, de az 1962-ben alakult Didaktikai Csoportban is minden munkatársa azt a nyugodt, békés hangulatot emelte ki, amit maga körül teremtett. [21] A később csatlakozó Pósa

Surányi László: Sohasem azt tanítjuk, amit tanítunk

61

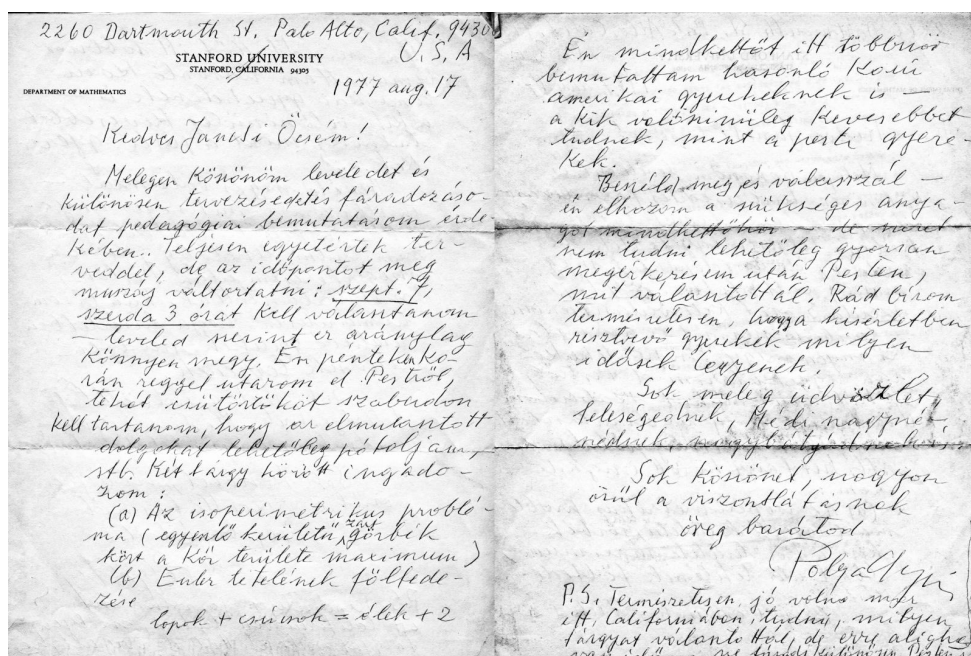
Lajos így fogalmaz: „Nagyon jól éreztem magamat. Tiszták, világosak voltak a feladatok, ill. sok szempontból mindenki maga tervezte meg, hogy mit akar csinálni. Alaphelyzet: az alapelvekben mindenki egyetért.” „De hogy mit kell ezen érteni, az már nem volt egyértelmű”, tette hozzá. A „kalandozás” és célirányosság, játékoság és fogalmi pontosság közötti arányokban nagy eltérések voltak. [22] Mint láttuk, Laczkó László is hasonlóan fogalmazott.

A Didaktikai Csoport és előzményei – a tanítási kísérletek és a „specmat”

A matematikatanítás megújítását „napirenden tartó” egyetemi oktatók és akadémiai kutatók között konszenzus volt abban, hogy a megújítást az általános iskola elején kell kezdeni. Az általános iskolai kísérleteket Varga Tamás fogta össze, irányította, ezért érthető, hogy az ő nevével fonódott össze az egész kísérlet. Valójában vele párhuzamosan folyt az apám által vezetett középiskolai kísérlet is. A lényeg az volt, hogy a munka összehangoltan folyt, és egyre több lelkes tanárt sikerült bevonni a tervezésbe és a konkrét kísérletekbe is. A közös elveket röviden úgy lehet összefoglalni, hogy az akkor még magától értetődőnek tartott, és ma frontálisnak nevezett tanítási móddal szemben a diákok aktivitására építő, *felfedeztető* oktatást kell bevezetni. A diákoknak nagyobb szabadságot kell adni, erősíteni kell az órák játékos hangulatát (ennek különböző fokozatait képviselte pl. Varga Tamás, Gábos Adél, a budapesti Radnóti Gimnázium tanára egyrészt, és apám, illetve később Pósa Lajos másrészt). A hagyományos matematikai felépítésről, amely pl. alapfokon egyoldalúan a számolási készség kialakítását erőltette, áthelyezni a hangsúlyt a gondolkodtatásra, a fogalomalkotásra.

Mindebben nagy szerepe volt a magyar származású, de akkor már az USA-ban élő, nagyszabású matematikapedagógus (és neves matematikus) Pólya Györgynek, akinek *How to solve it* c. könyvét 1957-ben sikerült magyarul is megjelentetni. [23] Ő később többször is járt Magyarországon, még nyolcvanévesen is tartott bemutató órát a budapesti Fazekas Gimnázium nagytermében, az erkélyen is tolongtunk. A mellékelt levelet az egyik ilyen bemutató órájának előkészületeivel kapcsolatban írta apámnak. A „Kedves János Öcsém” megszólítás onnan ered, hogy régről ismerte: Pólya még fiatal korában, a Galilei-körben ismerte meg apám már említett festő nagynénjét, akinek kis ideig „tette is a szépet”.

Nagy lökést adott a szintén magyar származású Dienes Zoltán, aki először 1960-ban, a Magyarországon rendezett Nemzetközi Matematikai Kongresszus alkalmából járt itt, majd 1962 nyarán általános iskolás diákok számára tartott egy tényleg egészen szabadszellemű, játékos szakkört. Ő fogalmazta meg explicite és radikálisan, hogy *a matematikatanítás elsődleges feladata a személyiség építése* (tegyük hozzá: mint minden igazi tanításé). Az ő elképzelései is beépültek a magyar kísérletbe. Varga Tamás, majd apám is töltött egy évet a kanadai Sherbrooke egyetemén, ahol 1966 és 1978 között Dienes tanított. [24]



Nem volt könnyű a megfogalmazott elvek alapján dolgozni, nagy volt a politikai, de a társadalmi és – sajnos – a tanári ellenállás is. Szerencsére voltak azonban lelkes hívei is az újfajta, „felfedeztető”, a gyerekek érdeklődését felkelteni és arra építeni törekvő tanítási módszernek. Nem egészen világos, hogy mikortól, de valamikor a hatvanas évek elejétől – Pálmay Lóránt emlékei szerint a BJMT felkérésére – heti-kétheti rendszerességgel szemináriumok folynak az Intézet nagytermében. És már most szögezzük le: az, hogy a mostoha körülmények ellenére eredményes tudott lenni ez a tanítási kísérlet, annak is köszönhető, hogy a szemináriumokon a sok-sok lelkes tanár folyamatos jelenléte mutatta: itt egyfajta mozgalom bontakozik

ki. Ez volt az az „aranyfedezet”, ami pl. saját elbeszélése szerint Pósa Lajost is vonzotta. [25] Persze: a „tanári aranyfedezet” mellett ott volt a „matematikus aranyfedezet” is: a kezdeményező matematikusoknak az a belülről jövő demokratizmusa, amelyet Laczkó László emelt ki apámnál: a tanárok problémáit saját problémáiknak tekintették.

A hatvanas évek elején különben is volt egy relatív áttörés: 1962-ben hivatalosan is megindulhatott az első alsó tagozatos kísérleti osztály. Másrészt megindulhatott az első speciális matematika tagozatos osztály is. [26] Ez utóbbi furcsa kétértelmű eredménnyel járt: egyrészt, mint erről rögtön szó lesz, sok energiát elvont a középiskolás kísérlettől, másrészt ez az osztálytípus maradt meg máig is intézményi szinten. (És produkálja is az eredményeket. Apám sokszor mérgelődött is, hogy emiatt a hivatalosoknak úgy tűnik, mintha a magyar matematikatanításban tulajdonképpen minden rendben volna.)

Mindenesetre tény, hogy akkor nagy volt az öröm, hiszen régóta folyt a küzdelem a színvonalasabb matematikaoktatásért, és most itt volt a lehetőség, hogy végre megindulhasson egy, az eddigi, meglehetősen betokosodott és konzervatív tanítási irányzattól független, friss szellemű oktatás. Nagy volt a felbuzdulás – de a feladat is: a középiskolás kísérletek még el sem indultak, és bár sok jó ötlet volt, ahogy Herczeg János fogalmaz, „Valójában akkor még senki sem tudta, hogy mit kell ezekben a specmat osztályokban csinálni a heti 9-10 órában. Eleinte nem volt hozzá semmi anyagunk, kivéve néhány jó könyvet, szakköri füzetet.” Az világos volt, hogy semmi értelme az első éves egyetemi tananyagot „levinni” a gimnáziumba, viszont voltak új területei a matematikának, amelyekről az oktatás addig nem vett tudomást, másrészt a már bevett tananyagot is lehetett szélesebb és mélyebb alapokon tanítani – ha megvan hozzá a didaktikai átgondoltság. Mindezt elősegítendő Rényi Alfréd, az MTA Matematikai Kutató Intézete akkori igazgatója, aki addigra már (l. említett vitáját apámmal) elkötelezett híve volt annak, hogy az oktatásnak, didaktikának helye van az akadémiai kutatásban is – átgondolt, sokkal gyerekközpontúbb didaktikán alapuló oktatás nélkül nem szüntethető meg a társadalomban meglevő ellenérzés a matematikával szemben –, létrehozta az intézet Didaktikai Csoportját, és vezetésével apámat bízta meg. Hivatalosan állásban apám mellett csak Halmos Mari volt, de igen sokan mások is részt vettek a munkában. Egészen biztos, hogy nem teljes a lista, de akiket össze tudtam szedni, azok nevét ideírom: Gábos Adél, Gábor Endréné, Gara Ernőné, Varga Katalin, Szendrei Júlia, Pálfalvi Sarolta,

Bartal Andrea, Szerediné Loparits Éva, Herczeg János, Votisky Zsuzsa. Ezek csak a legközvetlenebb segítők. Mert ahogy Halmos Mari fogalmaz, „valamilyen formában, kísérletező tanárként, a munkát aktív ötletekkel segítőként, írásos anyagok készítőjeként vagy bírálójaként legalább százan vettek részt. Ez egy lelkes mozgalom volt, amihez egy-egy időszakra, egy-egy feladatra nagyon sokan csatlakoztak.” És itt említendő, hogy egyetemi oktatók, pl. Pálmay Lóránt, Tusnády Gábor is vállaltak középiskolai oktatást, akár tagozaton, akár a kísérletekben. Urbán János pedig 1991-től a Berzsenyi tagozatának meghatározó alakja volt. [27]

A Didaktikai Csoport működése

A Didaktikai Csoportnak sokféle feladata volt egyszerre. Egyrészt folynak a szemináriumok, immár a specmat problémáiról is. A következő évtől megindult több tagozatos osztály, így a Berzsenyiben, az Istvánban, a szegedi Ságváriban, a debreceni Fazekasban, a veszprémi Lovassyban és a miskolci Földesben. (A veszprémi sajnos megszűnt, viszont a felsoroltak mellett ma is van tagozat Szolnokon a Verseghyben, Székesfehérváron a Teleki Blankában, és Szegeden a Radnótiban.) A tanárok minden évben sorra látogatták az összes tagozatos iskolát. Erről Halmos Mari így számolt be: „Megnéztünk néhány órát, és utána volt közös megbeszélés. A módszertani tanácsok, amelyeket ilyenkor adott az édesapád a többieknek, nagyon hasznosak voltak. Erről beszél (Herczeg) János, amikor az életéről beszél, ezt külön kiemelte. Ez eleve hét iskola volt, reggel mentünk, sokszor – ha vidéken voltunk –, akkor egyszer (egy éjszakát) ott is aludtunk.” És Herczeg János: „Délelőtt végigültük az órákat hátul. Délután részben ezekről az órákról beszéltünk, sok értelme nem volt, mert senki sem kritizálta a másikat. Később inkább az óráktól független tapasztalatokat adtunk át egymásnak, sok jó ötlet került itt elő. Surányi János volt a szervező, és a megbeszéléseket is ő vezette kibontakoztatva pedagógiafilozófiai bölcsességét. Második meszteremnek tekintem, elméleti gondolatokon kívül olyan gyakorlati fogásokat is tőle lestem el, mint, hogyan lehet ügyesen felírni a polinomok szorzatát.” Laczkó: „Ha valaki előadott az óralátogatásokon vagy a továbbképzéseken, az Öreg (=apám) ezt végighallgatta, és utána akár fél órát is hozzá tudott szólni a témáról. Én ezt bámultam rajta, hogy nem az volt, hogy előre felkészült a témára, de összeszedetten, baromi jó dolgokat tudott hosszan mondani ilyenkor.” Amikor két évtizeddel később magam is specmaton kezd-

Surányi László: Sohasem azt tanítjuk, amit tanítunk

65

tem tanítani, még akkor is jól érezhető volt, hogy a specmatos tanárok egy mozgalom részének tekintették magukat, és ez külön erőt adott, előhívta vagy fokozta kezdeményező kedvüket.

Mint említettem, a kis létszámú Csoportnak sok aktív segítője volt. Sok egyetemi oktató is „beszállt”: „Részben a Te érdemed volt az is, hogy az induláskor az akkori igen tehetséges, fiatal, később világhírű matematikusok közül többen elvállalták egy-egy témakör tanítását az induló osztályban, sőt tankönyvrészletek írására is vállalkoztak”, mondta Urbán János apám temetésén mondott beszédében. Csakhamar létrejött tehát az első – három-, majd négykötetes, a specmatosok között kinézete alapján „Fehér elefánt”-ként ismert – specmatos tankönyv. [28] De ezzel nem volt vége, hiszen rengeteg kérdés volt: mi az a matematika frissebb ágaiból, amit érdemes már a középiskolában „megkóstoltatni” legalább a matematikailag érdeklődőbb diákokkal, és hogyan történjék ez. Sok olyan terület van, amit a középiskolában *még* nem tanítunk, az egyetemi oktatás viszont mint túl egyszerűn, hamar túlszáguld rajta – ezekből mit lehet bevonni a középiskolai oktatásba, és hogyan. Az ilyen didaktikai kérdéseken túl jobb volt közösen megbeszélni a diplomáciai, sőt ideológiai(!) konfliktusokban követendő stratégiát. A feszültségek abból adódtak, hogy a specmat speciális oktatási módját a tanári karokban, hogy egy szójátékot megengedjek magamnak, nem mindenütt fogadták tárt karokkal. A problémák közös megbeszélése tágabb háttérrel és valamivel nagyobb öntudatot adott a helyi küzdelmekben is. Az ideológiai ellenállás persze érthető volt, hiszen a specmatos tanítás egyik kimondott célkitűzése a diákok önálló gondolkodásra nevelése volt (és maradt). Márpedig ezt egyetlen egy-párt által irányított berendezkedés sem szereti.

Ezért egyrészt közösségerősítési, másrészt önképző céllal az iskolalátogatásokon túl az apám irányította Csoport megszervezi a nyári továbbképzéseket. Ami az önképző célt illeti: ha egy tanár őszinte magához, akkor tudja, hogy igazán tanítani egy tananyagot csak akkor tud, ha a fontosságát és/vagy a szépségét át tudja adni. Átadni pedig a lelkesedést lehet, az tud „ragadós” lenni, ha valóban friss élményen alapul. Szükség van (ma a tanárok elképesztő túlterheltsége miatt inkább csak: lenne) tehát arra, hogy a tananyagra mindig más, új és friss szemmel tudjunk ránézni.

Magáról a továbbképzésről Herczeg János ír a legplasztikusabban: „Nyáranként aztán ’edzőtáborba’ vonultunk. Az első évben Nyíregyházán voltunk két hétig, aztán azért kicsit kímélősebben csak egy hétig tartottak ezek

a nyári továbbképzések. Délelőtt 5, délután 4 óra előadás. Az előadók azzal jöttek, hogy olyasmiket mutatnak, amikkel szerintük lehetne foglalkozni a specmaton.” Előadott itt Lovász László a véges geometriákról, Tusnády Gábor a sztochasztikáról, az akkor még itthon élő Bollobás Béla topológiáról stb. „Ebben a posztgraduális képzésben 8–10 óra alatt nagyon sok mindent el lehet mondani. Szinte többet tanultam matematikából ezeken a nyári heteken, mint az egyetemen. Ami persze nem igaz, de nem csak új ajtók nyíltak, esetenként régi homályok kaptak új megvilágítást. Említettem a kezdőkori számolástanítási bonyodalmainkat és a még gimnazistakori töprengéseimet az irracionalitásról. Amit Surányitól a számkör bővítéseiről és a számfogalom axiomatikus felépítéseiről hallottam itt, nagy rendet teremtett bennem. ... A tudásom rendeződött is, modernizálódott is, és az aktív része gyarapodott. Ilyen szinten már nem kell sok, csak nagyon jó. Ezt minden tanárnak meg kellene adni, mert nagyon megéri. Ráadásul jól is éreztük magunkat. A szünetekben fociztunk, esténként nagyokat beszélgettünk többnyire nagy sétákon. Volt, hogy a foglalkozást a Balaton partján tartottuk.” [29] Ezek a továbbképzések sajnos, csakúgy mint az iskolalátogatások, a nyolcvanas évek végére megszűntek. Utóbbiakat aztán kb. egy évtized múlva sikerült felújítani. A nyári továbbképzéseket – bár szerényebb formában – csak tavaly sikerült újraindítani az MTA támogatásával.

Ami pedig a Didaktikai Csoportot illeti, annak vezetését apám 1988-ban átadta Pósa Lajosnak, az ő vezetésével kiadott középiskolai tankönyvsorozat kötetei elé írt előszóban ezt olvashatjuk: „Köszönetet mondunk Surányi Jánosnak, aki két évtizedig vezette a kutatócsoport sok nehézséggel terhes munkáját, figyelemmel kísérte, összefogta és kézben tartotta a tanítási kísérletet, nagy szakmai tudásával és emberségével segítette az iskolákban folyó munkát, a tanárok számára komoly támaszt jelentve; vállalta a kísérleti anyagok elkészítésének folyamatos szakmai irányítását, beleértve az anyagokhoz készített részletes bírálatait, amelyek alapján az évek folyamán sok jelentős javításra került sor.” [30] Ezt a pár mondatot matematikusok írták, ennek megfelelően nem retorikus fordulatokról van szó. Pontosan azt emelik ki és köszönik meg (az axiomatikus követelményeknek megfelelően: sem többet sem kevesebbet annál), ami valóban megköszönni való.

(Másodközlés, a Természet Világa főszerkesztőjének szíves engedélyével.

http://www.termeszetvilaga.hu/szamok/tv2017/tv1701/suranyi_diak.pdf)

- [1] Köszönetet mondok Kalmár Évának, Freud Róbertnek, Laczkovich Miklósnak, Laczkó Lászlónak, Pelikán Józsefnek, Pósa Lajosnak és Sárközy Andrásnak, hogy időt szakítottak az interjúkra. Külön köszönet illeti Halmos Istvánnét, azaz Halmos Marit, aki az interjú mellett dokumentumokkal és sok-sok adattal, emlékekkel is segített.
- [2] James Joyce, *Finnegan ébredése*, részletek. Ford., bevezetővel és jegyzetekkel ellátta Bíró Endre, Holnap Kiadó, 1992. A könyvet – amelyből részleteket korábban csak a párizsi Magyar Műhely közölt – Bíró Endre Szabó Lajos emlékének ajánlotta.
- [3] Az erről folyt levelezésnek csak az elejét ismerjük. Az írás végül csak nagy késéssel, jóval a szerző 1967-ben bekövetkezett halála után, 1989-ben, az *Életünk* c. folyóiratban jelent meg.
http://lajoszszabo.com/SZL/Adalekok_a_HE_kerdeseihez_01.pdf
- [4] Kiemelés tőlem, SL. Az idézet vége: „és a legnagyobb játékra is képes: megfoghatóvá tudja tenni a végtelent.” Péter Rózsa, *Játék a végtelennel*, Dante könyvkiadó, 1944; 3.
- [5] Fried Ervinné, *A tudományos munka és az oktatás összhangja egy életút során – Beszélgetés Surányi Jánossal*, KöMaL, 2003/12
<http://www.komal.hu/cikkek/2003-12/suranyi/suranyi.h.shtml>
- [6] Mint később megtudta, „politikai okokból”, amit az ő esetében nehéz értelmezni, valószínűleg összekeverték valakivel.
- [7] Szabó Péter Gábor (szerk.), *Kalmárium II. Kalmár László levelezése magyar matematikusokkal*, Polygon, Szeged, 2008. 268–367.
- [8] Karácsony Sándor (1891–1952), pedagógus és gondolkodó, a harmincas évektől egyre jobban ismerik, a témánk szempontjából elsősorban azért fontos, mert a diákok önálló gondolkodásának jelentőségét hangsúlyozza műveiben. Szerinte a nevelés kulcsa „a másik ember”. A Karácsony-kör egyik 46-os rendezvényére írt hozzászólásáról apám részletesen beszámol egy, Szabó Lajosnak írt levelében. A kör szegedi tagjai sokszor Kalmár lakásán gyűltek össze.
- [9] *Matematikai versenytételek*. Az első két kötetet még Neukommal és Hajóssal közösen adták ki, a III. és IV. kötet már egyedül apám munkája.
- [10] Szabó Lajos, *Szemináriumi előadásai I*, Typotex, 1997 és ugyanő, *Tény és titok*, Medium, 1999. 159–480. Mindkettő Kotányi Attila és Kunszt György jegyzetei alapján közli az előadásokat. Némely előadásokról maradtak fenn jegyzetek apámtól is. A szeminárium keretében volt egy matematikaelméleti előadásorozat az ún. nyelvmatézisről. Érdekes módon ezekről eddig nem kerültek elő jegyzetek apám papírjai között.

- [11] Gordon Győri János – Halmos Mária – Munkácsy Katalin – Pálfalvi Józsefné, *A matematikatanítás mestersége*, Gondolat, 2007, 126.
- [12] Sárközy András – Surányi János, *Számelmélet – feladatgyűjtemény*, Tankönyvkiadó, 1977. Azóta többször is kiadták újra.
- [13] Erdős Pál – Surányi János, *Válogatott fejezetek a számelméletből*, Tankönyvkiadó, 1959. Második, bővített kiadás: Polygon, Szeged, 1996. Angol kiadás: P. Erdős, J. Surányi, *Topics in the theory of numbers*, ford. Barry Guiduli, Springer, 2003, ISBN 0387953205
- [14] Surányi János, *Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der ersten Stufe*, Akadémiai Kiadó, Budapest, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959.
- [15] Sárközy András említette, hogy apja csak azután egyezett bele, hogy matematikus szakra jelentkezzen, miután apám „megnézte” a fiút matematikából, majd az apának azt tanácsolta: „Senki nem lehet boldog, ha nem a szívének kedves pályát választja.”
- [16] Fried Ervin megemlékezése:
<http://www.termeszetvilaga.hu/szamok/tv2007/tv0703/suranyi.html>
- [17] „Talán nem is realizáljuk, milyen szerencsések voltunk, hogy a magyar matematikatanítást olyan tudós személyiség képviselte a nemzetközi porondon, mint Surányi János”, mondta gyászbeszédében Lovász László.
- [18] Az idézetek helye: *A matematikatanítás mestersége*, 35–62.
- [19] Az idézetek helye: *A matematikatanítás mestersége*, 89–118.
- [20] Uo.
- [21] Minden tagozatos iskolában volt egy tanáregyéniség, aki megalapozta az ot-tani közösséget, és ezek többnyire hasonló légkört alakítottak ki, ilyen volt pl. Kőváry Károly, Szvetits Zoltán, Herczeg János, Hajnal Imre.
- [22] Pálmay megfogalmazásában: „ha a meghatározások, tételek, bizonyítások megfogalmazását mind a gyerekre bízuk, az könnyen vezethet oda, hogy számárságokat fogalmaz meg, és aztán azt is tanulja meg.” *id.h.*
- [23] Pólya György, *A problémamegoldás iskolája*. Azóta számtalan új kiadást ért meg, bővített változatban is.
- [24] Könyve magyarul: Dienes Zoltán Pál, *Építsük fel a matematikát*, ford. Sztrókay Kálmán, Gondolat, 1973 (új kiadás Edge 2000 kft, 2015). Dienest sokan „a matematikatanítás varázslójának” nevezték.
- [25] Elmondása szerint ő akkoriban „mai eszével teljesen irracionális módon” egyenesen abban bízott, hogy az itt képviselt tanítási elvek megvalósítása révén „tíz éven belül a matematika lesz a diákok kedvenc tárgya és ezt látva a többi tanár is kénytelen lesz” átvenni ezt a szabad szellemű tanítási módot, ha

nem akarja, hogy a gyerekek a háta mögött összenevessenek. Később be kellett látnia, hogy a társadalom tehetetlenségi erejével nem számolt, a tanárok tanítási stílusa „mélyen beléjük van betonozva; nem tudnak kibújni a megszokásokból: ezt a direkt közlő stílust látták végig tanulmányaik során. Persze, van egy pár elhivatott is köztük, aki változtatni akar.”

- [26] Ennek néhol abszurd körülményeiről lásd *Kevés ilyen inspiráló légkört tapasztaltam* c. cikkemet a Természet világa 2012. júniusi számában: <http://www.termeszetvilaga.hu/szamok/tv2012/tv1206/suranyi.html>
- [27] Ennek is van „előzménye”: Péter Rózsa és Gallai Tibor középiskolai tanárként kezdte pályáját, de még sokkal előbb pl. Kürschák József is sokáig volt középiskolai tanár. S hogy három kiemelkedő magyar gondolkodót is említsünk: Posch Jenő (nagyapám szeretett magyar tanára), Fülep Lajos és Zalai Béla is tanított középiskolában (utóbbi matematika-fizika-filozófia szakon végzett).
- [28] A könyvet a Tankönyvkiadó adta ki az „MM Közoktatási Főosztály és az Országos Pedagógiai Intézet irányításával”, de ha a névsort megnézzük, valójában a specmatos munkaközösség adta ki, apám egy anyagrészt írt, és az egész egyben tartása mellett nagy részt vállalt a szoros lektorálásban is. A gyorsaságra és a sietségre jellemző a könyv technikai minősége: a papírja vastag, a nyomtatás nagyjából stencil minőségű. Érdemes felsorolni a szerzőket, köztük olyan egyetemi oktatók és akadémiai kutatók is vannak, mint Fried Ervin, Hajnal András, Kiss Ottó, Komlós János, Révész Pál, id. Ruzsa Imre, Surányi János – de akkor már soroljuk a nem kevésbé fontos kitűnő tanárszerzőket is: Bakos Tibor, Cseh Andor, Herczeg János, Könyves Tóth Kálmán, Kőváry Károly, Molnár József, Oláh Gyuláné, Rábai Imre. Az itt különösen fontos lektorálásban rajtuk kívül id. Böröczky Károly, Gallai Tibor, Jelítai Árpád, Juvancz Iréneusz, Králik Dezső, Némethy Katalin, Péter Rózsa, Rácz János, Reményi Gusztáv, Szeredai Erik, Tolnai Jenő. De a „nem hivatalos” lektorok közt találjuk Pálmay Lórántot is. Kétségtelen, hogy az egyes fejezetek nem egyenletes színvonalúak, de sok közülük ma is használható. Mindenképp érdemes kiemelni, hogy Hajnal András *Gráfelmélet* fejezete az akkor nagy iramban – és nagymértékben magyar kutatók révén – fejlődő gráfelmélet eredményeinek első magyar nyelvű tankönyve.
- [29] Uo.
- [30] A tankönyvsorozatot a Műszaki Kiadó adta ki, a bevezetőben csak az 1973-tól folyó kísérletekről van szó.

A fenti cikket az Érintő 2018. júniusi számából vettük át.

Szabó Péter Gábor:

Robotkatica és kibernetika – Muszka Dániel élete

Arra készültem, hogy amikor legközelebb találkozunk, el fogom majd mesélni neki, mit láttam legutóbb a szegedi fogadalmi templom látogatóközpontjában, ahol a híres néprajzkutató Bálint Sándorra emlékező kiállítást mentem megnézni. A dóm történetét bemutató teremben ugyanis legnagyobb meglepetésemre egyszer csak megláttam Muszka Dánielt egy fekete-fehér 1959-ben készült filmhíradó felvételén. Ott arról számoltak be, hogy hazánkban először Szegeden állítottak elő elektromos úton haranghangot, amikor a dóm második világháború idején leszerelt jobb oldali harangjának pótlására kérték meg az egyetem munkatársait. *Vajon tudsz-e erről Dani bátyám, hogy a filmfelvételeken Te is ott szerepelsz a dóm történeti részlegében?* – gondoltam rögtön magamban. *No, majd elmesélem, ha találkozunk!* Aztán teltek a hetek, és egyik nap közös barátunk és kollégánk Bohus Misi jött be hozzám az egyetemre, tőle tudtam meg, hogy Dani beteg. Legközelebb, amikor találkoztunk, Misi már csak ennyit mondott: *Dani megérkezett!*

Nem könnyű a feladat Muszka Dánielről írnom. Több mint másfél évtizede, hogy először találkoztunk személyesen, ami ugyan nem rövid idő, de hol van ez azokhoz képest, akik több évtizede vagy egy fél évszázada ismerték őt. Ott volt ugyanis a kibernetika szegedi hőskorában, a hazai informatika megindulásának első lépéseinél, olyan embereket ismert és dolgozott velük együtt, akiket mi fiatalabbak már csak ritka felvételekről, olvasmányokból vagy elbeszélésekből ismerhetünk. Muszka Dániel egyike volt az informatika nagy hazai úttörőinek, akinek híres Katicabogaráért volt, aki még Ausztráliából is ideutazott Szegedre, hogy azt eredetiben megnézzé, mivel a maga nemében a hasonló korabeli kibernetikai műállatok közül világviszonylatban is a legesztétikusabbnak tartotta.

Egyetemi évek

Muszka Dániel 1930. június 30-án született Nagykőrösön, gimnáziumi tanulmányait is ott végezte. Gyermekkorában imádott szerelni, villamosmérnöknek szeretett volna tanulni a Műegyetemen, azonban jó tanulmányi eredményei ellenére sem vették fel. Ipari tanulóként így rádiók javításával kezdett el foglalkozni, szakmunkás oklevelet szerzett, villanysze-

relőként dolgozott. Egy idő után újabb próbát tett, a műszaki tanárképzőbe jelentkezett, de ismét elutasították. Mint kiderült, a súlyos problémát a család vallásos kapcsolatai adták, nagynénje az angolkisasszonyok rendfőnöke volt, műszaki pályán továbbtanulni ilyen háttérrel nem lehetett. Szerencsére azonban kiderült, hogy a Szegedi Tudományegyetemen éppen akkor – 1951-et írunk – volt még üres hely, így ideutazva hamarosan matematika-fizika tanárszakra lett egyetemi hallgató.

A Bolyai Intézetben akkoriban a második matematikus triumvirátus működött: *Kalmár László, Rédei László és Szőkefalvi-Nagy Béla*. Dani bátyánk sok remek anekdotát, történetet mesélt ezekről az időkről, különösen Kalmár professzornál a matematikai logikából tett egyik vizsgáját emlegette gyakran. Amíg még az ítéletkalkulusról kellett beszélnie, az rendben is volt, no de aztán következett a függvénykalkulus! *Három-négy mondat után Kalmár professzor 10 másodperc alatt észrevette, hogy nekem gőzöm nincs ezekről a dolgokról.*

– *Maga mit csinált azelőtt, hogy idejött az egyetemre?* – *kérdezte tőlem.*

– *Rádió- és villanyszerelő voltam* – *mondtam neki.*

– *Igen? Ért a kenyérpírtókhoz is?*

– *Igen, biztos. . . Az egy egyszerű elektromos szerkezet.*

– *No, akkor jöjjön velem!*

Kalmár professzor akkoriban vett Angliában egy kenyérpírtót, ami azonban sajnos elromlott. Sok mesternek megmutatta, de mind azt mondta, hogy már nem lehet megcsinálni. Óriási szerencsémre nekem sikerült! Életének ez egy sorsdöntő eseménye volt, de ez majd csak a tanulmányai után derült ki. 1955-ben kapott középiskolai tanári oklevelet.

A szegedi logikai gép

Kalmár László a kibernetikával az 1950-es évek közepétől kezdett el foglalkozni, amikor már a hivatalos politikai vélekedés is kicsit enyhült a korábban *burzsoá áltudomány*nak minősített téma iránt. Kalmár szinte azonnal felismerte a benne rejlő forradalmi lehetőséget. A szegedi egyetemen szemináriumot szervezett a matematikai logika műszaki alkalmazásainak megismerésére. Írásos dokumentuma ennek az a spirálfüzet, amiben az 1956. április 10-én tartott első megbeszélés résztvevőinek neve ott áll rögtön az első oldalon: *Bakos László, Bakos Tibor, Bereczki Ilona, Csákány Béla, Fodor Géza, Hajnal András, Kalmár László, Muszka Dániel, Pollák György és Szász Gábor.*

Hamar kiderült, hogy a témával úgy kerülhetnek szorosabb kapcsolatba, ha nemcsak könyveket, cikkeket tanulmányoznak, hanem maguk is megpróbálkoznak valamilyen konkrét számítástechnikai berendezés építésével. Kalmár egyik adjunktusa felvetette, hogy építsenek egy kis elektronikus számológépet. Pesti kollégájuk, *Tarján Rezső* azonban hamar lebeszélte őket arról, hogy számológép építésébe kezdjenek. Kalmár televíziós felvételen, a kamera előtt mondta el, hogy ennek indoklása az volt, hogy túl drága lenne. Muszka Dániel viszont egyszer azt mondta nekem, hogy ő ott volt személyesen ezen a megbeszélésen és a főbb indok inkább úgy szólt, hogy „Vigyázzatok! Az ilyesmiért becsukják az embert!” Tarján ugyanis nem sokkal előtte jött a ki börtönből.

Tarján Rezső javasolta, hogy foglalkozzanak inkább logikai gépekkel, adott hozzá szakirodalmat is. Kalmár emlékezett egykori tanítványára, aki sikeresen megjavította a kenyérpirítóját, így őt is meghívta a szemináriumra. De adjuk át most a szót Muszka Dánielnek.

Első feladatom a szemináriumon az volt, hogy hozzak egy jelfogót, mert ezt meg kell ismerni, ugyanis – mint (akkor már nekem is így volt szólítható) Laci bácsi mondta – ez lesz a leendő gépünk építőköve. Mindenkit nagyon érdekelt a jelfogó: ki lelkesen, ki kissé borzongva vette kezébe ezt a különös izét... (egy közönséges, 48 V-os, két váltóérintkezős postai jelfogó volt, ám akikkel itt kapcsolatba került, azok az elméleti matematika kitűnősegei voltak, így érthető volt borzongásuk, és tiszteletreméltó az azt legyőző tudásvágyuk). Néhány hónap elteltével Laci bácsi, a frissen szerzett jelfogós ismeretei birtokában, kidolgozta egy 8 változós, jelfogós logikai gép áramköri terveit. (Ezeket később megmutattam egy postamérnöknek, aki a relés telefonközpontok specialistája volt: zseniálisnak, lélegzetelállítóan szellemesnek találta, és teljességgel kizártnak tartotta azt, hogy ezt egy olyan ember készítette, aki néhány hónappal ezelőtt látott először jelfogót. Persze ő nem ismerte még Laci bácsit...)

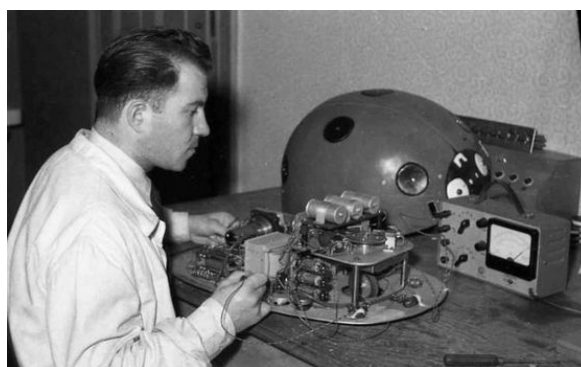
Muszka Dániel egyetemi tanulmányai után egy ideig rádióműszerészként dolgozott, de aztán Kalmár professzor meghívására 1957-ben az MTA Matematikai Kutató Intézetének Matematikai Logika és Alkalmazásai Osztályára került, az akkor létesült Gép kutató Laboratóriumba. 1957–58-ban Kalmár professzor tervei alapján ekkor készítette el a *szegedi logikai gépet*. 1958. május 1-én már a szegedi *Délmagyarország* is beszámolt róla. *A logikai gépbe hét darab, egyenként hateleemes számjegygépet, a vezérlést és a variálásokat végző negyvenkét darab jelfogót, huszonhárom darab különböző nagyságú jelzőlámpát, sok kapcsolót, ellenállást és más kisebb alkatrészt,*

valamint kb. 1200 méter hosszú, harmincöt féle színű huzalt építettünk be. – nyilatkozta a lapnak Kalmár László.

Az elektromechanikus vezérlésű logikai gép segítségével az ítéletkalkulus logikai formuláiról lehetett eldöntetni, hogy azok mikor kielégíthetők. A konstrukció egyik érdekessége az volt, hogy a logikai változók értékeit nem két érintkezős bemenettel, hanem hárommal valósította meg. Egy tisztán huzalos megoldású konstrukció volt, „programozása” dugaszolás útján történt.

A szegedi Katicabogár

Ekkoriban készült el az első hazai kibernetikai állatmodell is, a szegedi Katicabogár. A Lélektani Intézetből jött az ötlet, hogy Szegeden is lehetne készíteni egy műállatot. Muszka Dániel megcsinálta, nagyon jól sikerült, a mai napig nagy figyelmet vált ki, nemzetközi vonatkozásban is az egyik legjobb a hasonló konstrukciók között. A feltétlen és a feltételes reflexek modellezésére szolgált, elektroncsövekből, germániumdiódákból, fotocellákból, jelfogókból, elektromotorokból és mikrofonból állt össze. Ha egy fényforrásból rávilágítottak, magától elindult a fény irányába; ha furulyaszót hallott, akkor villogott a szemével. Néhányszori együttes impulzus után egy beépített tanulóalgoritmus alapján elég volt csak furulyázni neki, követte a hangot. A hétpettyes katicabogár érzékeny jószág volt, ha hozzáérték valamelyik pettyéhez, megállt és morgott, de ha megsimogatták a hátát, megnyhült.



Muszka Dániel és a szegedi Katicabogár

A szegedi Katicabogár a szegedi logikai géppel együtt az Informatika Történeti Múzeum Alapítvány szegedi gyűjteményében, a Szent-Györgyi

Albert Agórában tekinthető meg. A világhálón számos videofilmet [1] is találhatunk róla, ahol működés közben látható. Az eredeti példány mellett két további másolata is elkészült, 2011-ben nagy sikere volt a londoni Science Múzeumban rendezett robotikai kiállításon.

A szegedi robotkisasszony és robotember

Miközben vonaton és autóbuszon befutnak az első vendégek, az utolsó ellenőrzéseket végzik Kalmár László akadémikus és Muszka Dániel tudományos kutató közös konstrukcióján, a csinos robotkisasszonyon. Hús kérdésre négy nyelven válaszol. – adott hírt a korabeli Filmhíradó 1962-ben egy újabb szegedi konstrukcióról, a szegedi robotkisasszonyról. A Szegedi Szabadtéri Játékokra érkező vendégek kaphattak útbaigazítást és információkat tőle.

Ugyanebben az évben az *Ezermester* című lapban Barna Mihály már a szegedi robotemberről írt:

Az Úttörőház előterében áll és előzékenyen köszön. A mozdulatlan eziüstsztínnű bádogember merev nyaka megmozdul balra, két szeme kigyúl és a feje búbjába szerelt V alakú antenna forogni kezd. Bal kezében táblát tart, amelyen 24 kivilágítható válaszban adja meg a feleletet azokra a kérdésekre, amelyeket a tőle távolabb álló műszerasztalon olvashatok. Pl. Hol van az igazgatói iroda? Hol van a repülőmodellező szakkör? [...] Amikor a kiválasztott kérdéshez tartozó gombot megnyomom, egy piros égőszem jelzi, hogy a robotember működésbe lépett. A kérdés feladása után 20–25 mp gondolkodási idő telik, amíg a válasz megszületik és a válaszadó táblácska kigyúl, szövege – a válasz – leolvasható.

– *Mi játszódik le ez alatt a 20–25 mp alatt? – ezt kérdeztem Muszka Dániel kutatótól, a MTA Matematikai Kutató Intézet munkatársától. Ő az értelmi szerzője és társadalmi munkása a bádogruhájú embernek.*

– *Minden tapasztalat nélkül fogtunk hozzá a pajtások rádiós szakkörével a robotember megépítéséhez. Kibernetikus jellegét, hogy ti. a válaszon gondolkodik – EL84-es rádiócső fűtőkörének beiktatásával értük el. A rádiócső termikus emissziója, a cső felfűtése következtében az anód-kör jelfogója meghúz, kikapcsolja a gomb-jelfogó tartóköreit, a műszerasztalon levő kérdés piros lámpája kialszik, viszont bekapcsolja a válaszadó lámpasort. Egyben kikapcsolja saját fűtését és kezd a cső hűlni, amíg az anódáram oda nem csökken, hogy a jelfogó elenged. [...] Ugyanilyen elvek alapján szólal meg a robotember jobb kezében lévő táskarádió hangszórója is.*

A Kibernetikai Laboratórium, M-3, MINSZK-22, R-40

Munkáját a szegedi egyetemen 1963-ban megindult Kibernetikai Laboratóriumban folytatta, nem sokkal később 1965-ben került az egyetemre az első számítógép is, az M-3 (teljes nevén M-3-M). Elektroncsövekkel működő első generációs gép volt, és egyben az első magyar építésű elektronikus számítógép. Budapesten az MTA Kibernetikai Kutatócsoportja készítette szovjet dokumentációk alapján az 1950-es évek végén. Nagy kaland volt 1965-ben a Budapestről Szegedre költöztetése és üzembeállítása is. Ismét Muszka Dánielt idézzük.

Kibontva azokat a ládákat, amelyekben a gondosan csomagolt al-egységek voltak, szomorúan tapasztaltuk, hogy annak elemei – ellenállások, kondenzátorok, diódák – helyenként nem láthatók a rájuk rakódott, vastag korom-rétegtől. (Hát, igen! Budapesten már akkor sem volt valami tiszta a levegő!) Az alegységek kirakódása után úgy néztünk ki, mint egy szorgalmas kéményseprő – munka után...

Erősen töprengtünk, hogy mitévők legyünk, amikor az egyik munkatársunk lelkenézve hívott, hogy nézzük meg a „kísérletét”. Egy alegységet vett kézbe és a csatlakozójának két pontja között ellenállást mért. A műszer 10 kOhm-ot mutatott. Ekkor erősen belefűjt, sötét koromfelhő keletkezett és az ellenállás 80 kOhm-ra emelkedett. Elképesztő, hogy milyen volt a lelkivilágunk ezekben a percekben... Rövid lelkitusa után meghoztuk a döntést, miszerint meg kell mosdatni az M-3-at. Az akció nagyon gondos, főként a tűzvédelemre kiterjedő előkészítés után, kb. 40 liter benzín felhasználásával, három nap alatt ment végbe. Büszkén és boldogan mutogattuk a gyönyörűen kitisztított gépet azoknak a kollégáknak, akik Budapestről a gép felélesztéséhez érkeztek (Kovács Győző és kis csapata: Drasny József, az aranyos humorú „Jócska bácsi” és az örökké mosolygó kitűnőség: Kardos Kálmán). Büszkéek voltunk, mert az M-3 szinte „felismerhetetlenségig” tisztává vált és boldogok, mert nem robbantunk fel.

Győzőék arcán a várt öröm helyett őszinte döbbenet ült: most mi lesz? Később ugyanis kiderült, hogy a lerakódott kormot ők már a gép áramköreibe „beépült” elemnek tekintették és kezelték, a feszültségviszonyokat sok helyen ennek megfelelően állították be. Valóban nagyon sok helyen kellett beavatkozni, a feszültségosztókon változtatni, de ami a lényeg, az M-3 július közepére ismét üzemkész állapotba került. Hatalmas, fáradságos munka volt benne.

Mint minden beállításnál, így az M-3 esetében is elérkezett az ünnepélyes üzembe helyezés napja. Előző este úgy 9 óra tájban bejött Laci bácsi a gépterembe és érdeklődött, hogy minden rendben van-e? Teljesen megnyugtató választ tudtunk adni, hiszen a teszt-programok és a laboratórium matematikusai által már elkészített programok napok óta hibátlanul futottak. Laci bácsi távozása után, mintegy félóra elteltével elementáris erejű zivatar tört ki, óriási villámlások kíséretében. Néhány perc múlva, egy hatalmas villanás után az áramszolgáltatás megszűnt. . . Aki valaha is dolgozott elsőgenerációs (azaz elektroncsöves) számítógéppel, annak nem kell különösebben ecsetelni, hogy mit jelentett a gép számára az ilyen körülmények között létrejött áramkimaradás. Azoknak – és ma már ők vannak nagy többségben – akik csak hallottak az ilyen gépekről, csak annyit: az áramszünet 20 percig tartott; ezután visszakapcsoltuk, és reggel 5 óráig több, mint 40 darab meghibásodott elektroncsövet cseréltünk ki a gép különböző egységeiben. Reggel 6 órakor a tesztek ismét hibátlanul futottak, és délelőtt az ünnepélyes üzembe helyezés zavartalanul megtörtént.

1968-ig működött az egyetemen az M-3, ekkor váltotta fel a második generációs (immár tranzistorokkal működő) számítógép, a Minszk-22, amit aztán 1975-ben a harmadik generációs, integrált áramkörökkel működő, modern R-40-re cseréltek le. Ehhez 1977-ben már csatolt terminálokat helyeztek üzembe, vagyis olyan képernyős egységeket, amelyeken keresztül lehetővé vált, hogy a gép szolgáltatásait egyszerre többben is igénybe vehessék.

Muszka Dánielnek számos találmánya volt. Érdeemes lenne egyszer összegyűjteni a korabeli lapokból az ezekről szóló híradásokat. Például a szegedi *Délmagyarországban* *Húsz ország érdeklődésének középpontjában* címmel jelent meg 1964-ben hír arról, hogy felszerelték az első ülőfonó automatikát az újszegedi cérnázóban. A fonóiparban hasznosítható találmányt Kalmár Lászlóval közösen jegyezték. A fonónők és egyéb szövödei gépen dolgozók egy műszak alatt kb. 25–30 kilométert is gyalogoltak a munkagépeik mellett, ami nagy fizikai megterhelést jelentett. Olyan automatikát kellett szerkeszteni, amely a dolgozókat kímélve oldotta meg a mozgatót.

1967-ben védte meg egyetemi doktori értékezését a kibernetikai módszerek alkalmazásáról a gépjármű-közlekedés problémáinak témájában, majd még ugyanabban az évben kinevezték a Kibernetikai Laboratórium tudományos osztályvezetőjének. Titkára volt a Neumann János Számítógéptudományi Társaság Csongrád megyei területi szervezetének, szerkesztőbizottsági tagja az első hazai nemzetközileg is jegyzett ma is működő informatikai lapnak, az angol nyelvű *Acta Cyberneticanak*.

Ott volt az első Neumann-kollokviumok megindításánál is. A *Számítástechnikai és kibernetikai módszerek alkalmazása az orvostudományban és biológiában* című rendezvénysorozat 1970-ben indult meg, a rendezőbizottság elnöke Muszka Dániel volt. Gyakran mesélt az első Neumann-kongresszus megszervezéséről is, amelyet 1979 decemberében Szegeden tartottak, mintegy 600 résztvevővel és 78 előadással.

1981-től a szegedi Új Élet Mezőgazdasági Termelőszövetkezet műszaki vezetőjeként dolgozott, 1986-tól a Mezőgazdasági Üzemszervezési, Számítástechnikai és Informatikai Rt. dél-alföldi területi igazgatója lett. 2000-ben ment nyugdíjba.

Megőrizni a múlt értékeit, az Informatika Történeti Múzeum Alapítvány

Már az 1970-es években a Neumann János Számítógép-tudományi Társaság akkori főtitkárával, Kovács Győzővel megkezdte azt az informatikai gyűjtőmunkát, amely mára Szegeden a Szent-Györgyi Albert Agórában látható Informatika Történeti Kiállításához vezetett. Az 1991-ben létrejött *Informatika Történeti Múzeum Alapítvány* adott intézményi keretet ehhez a gyűjtéshez. A kb. 12 ezer darabos gyűjtemény becsült tömege 200 tonna.

Számos saját kiállítási demonstrációval gazdagította a gyűjteményi tárgyak állományát. Leleményességének köszönhető, hogy a 10 kg-os latin abc és 20 kg-os latin/cirill abc-s nyomtatóhengert megvilágítva forgathatjuk. Csinált bináris összeadót, klasszikus logikai áramköri, Kalmár-logikai áramköri, 0-1 bites fizikai tárolási áramköri táblákat sok kapcsolóval, főleg a gyerekek részére. Számláló beléptető kaput, elektronikus kártyákból várat, tápegység-pótló erőművet, vincseszter-kar mozgását bemutató, zenés tárlatvezetést biztosító rendszert készített. Négy évig készült a mágnesszalagos tároló egység (200 kg) működésének a forgótárolós bemutató eszköze (egy mechanikus, elektromos, pneumatikus, hidraulikus automata, IBM 1970, magyar-angol lámpás kiírásokkal, 4/4-es kitarulkozással, csendes, rángásmentes forgással, rádiós PLC vezérléssel).

A több évtizedes kitartó és fáradhatatlan munkája során segítőkivel, vagy ahogyan néha ő mondta „tettestársaival”, „harcostársaival” világviszonylatban is rendkívüli gyűjteményt sikerült létesítenie, amelynek megőrzése, gondozása, gyarapítása most már a következő generációk feladata lesz.

Muszka Dániel a munkásságáért számos díjat és kitüntetést is kapott, így többek között Neumann-díjat (1977), Kalmár-díjat (2005), valamint a Sze-

78 Szabó Péter Gábor: Robotkatica és kibernetika – Muszka Dániel élete

gedért Alapítvány Debreczeni Pál-díját (2014). Távozásával a magyarországi kibernetika egyik utolsó nagy alakja ment el. Személyes ismerősei azonban biztosan sokáig őrzik, őrizzük majd még emlékét, huncutkás mosolyát, kiváló humorérzéssel elmesélt remek történeteit Kalmár Laci bácsiról és az informatika hazai hőskoráról. Búcsúztatóját a szegedi Agórában az Informatika Történeti Kiállítás helyszínén 2018. április 13-án tartották.

Az utolsó időkből egy meglepetéssel készült. Saját kezűleg, nyolcvanon túl, egy 1930-as ötletet gondolt át újra, modern, Dani-féle gépkonstrukcióval. Néhányan tudtunk csak róla a környezetében. Sajnos nem maradt már rá ideje, hogy teljesen megcsinálja, de reméljük, sikerülni fog még befejezni. Ez lesz Dani bácsi utolsó robotja!

Köszönetnyilvánítás.

Köszönöm dr. Bohus Mihálynak a dolgozat megírásában nyújtott segítségét!

Irodalomjegyzék

1. Barna Mihály: Hogyan született a szegedi robotember?, *Ezermester*, 1962. május, 158–159.
2. Bohus Mihály – Muszka Dániel – Szabó Péter Gábor: A szegedi informatikai gyűjtemény, *Új Kép* 9 (2005), No. 10., 35–40.
3. Képes Gábor – Álló Géza: *A jövő múltja*, NJSZT, Budapest, 2013.
4. Kovács Győző: *Válogatott kalandozásaim Informatikában*, GÁMA-GEO Kft., Masszi Kiadó, Budapest, 2002.
5. Muszka Dániel: *Szemelvények a számítástechnika szegedi történetéből (Nem típusos visszaemlékezés Kalmár László akadémikusra)*, in: *Kalmárium II. Kalmár László levelezése magyar matematikusokkal*. Összeállította: Szabó Péter Gábor. Polygon, Szeged, 2008, 31–37.
6. Muszka Dániel: *Tudományos önéletrajz*, SZTE, Szeged. Elérhető az alábbi címen:
<https://www.u-szeged.hu/oktatas/informatikai-torteneti/tudomanyos-oneletrajz>
7. *Muszka Dániel életrajza*, Neumann János Számítógép-tudományi Társaság Informatikatörténeti Fórum. Elérhető az alábbi címen:
http://itf2.njszt.hu/324rtr4/uploads/muszka_cv.pdf
8. Szabó Péter Gábor: *40 éves a Neumann János Számítógép-tudományi Társaság Csongrád Megyei Területi Szervezete* (A bevezetőt írta: Gyenizse Pál), NJSZT Csongrád Megyei Területi Szervezet, Szeged, 2010, 30 old.
http://njszt.hu/sites/default/files/Neumann_Janos_Tarsasag_fuzet_1123.pdf

9. Szabó Péter Gábor: *Informatika*, in: *90 éves a szegedi természettudományi képzés*, SZTE TTIK, Szeged, 2011, 117–133.

<http://www.sci.u-szeged.hu/karunkrol/evkonyv/90-eves-szegedi>

10. Szabó Péter Gábor: Kalmár László, a számítástudomány hazai úttörője, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **32** (2015), 79–94.

http://aml.math.bme.hu/wp-content/uploads/2016/03/32_Kalmar.pdf

[1] Néhány megtekintésre ajánlott film (2018. május 27.)

<https://www.youtube.com/watch?v=EfPDyW22Ntw> (Muszka Dániel szabadegyetemi előadása Szegeden, 2010.)

<https://www.youtube.com/watch?v=3rOc6hjL-o8> (A szegedi katicabogár, TiszapART TV, 2010)

<https://www.youtube.com/watch?v=VAFcTK-tuv8> (Muszka Dániel portréja, főszerkesztő: Kutor László, 2012.)

<https://www.youtube.com/watch?v=Abaapdeoamw> (Muszka Dániel az OMFB történetéről, 2012.)

<https://www.youtube.com/watch?v=Vecp8-TzjLM> (Muszka Dániel és a Szegedi katicabogár, 2013.)

<https://www.youtube.com/watch?v=C8BtlcNLZvE> (Muszka Dániel az M-3 szegedi utóéletéről, 2014.)

<https://www.youtube.com/watch?v=mFjESUrEah4> (Muszka Dániel az AEA klubon, 2015.)

<https://www.youtube.com/watch?v=83DFJpjWmUs> (Daniel Muszka's Szeged Katicabogar, 2009.)

A fenti cikket az Érintő 2018. júniusi számából vettük át.

Szabó Szilárd: Stephen Hawking matematikai munkáiból – A Gibbons–Hawking konstrukció

1. Bevezetés

Ebben az írásban a G. Gibbons és S. Hawking által megtalált aszimptotikusan lokálisan lapos gravitációs (anti-)insztanton-családot ismertetjük, és leírjuk ezek aszimptotikus viselkedését a sokaság végtelen távoli részén. A második szakaszban a differenciálgeometriában kevésbé járatos olvasó számára bevezetjük ezen egyenletek természetes nyelvezetét, az úgynevezett Riemann-sokaságok és ezek Riemann-féle görbületi tenzorának fogalmát. A harmadik szakaszban megadjuk a 4-sokaságok görbületi tenzorának felbontását, és bevezetjük a gravitációs anti-insztanton fogalmát. A negyedik szakaszban gravitációs anti-insztantonok két konstrukcióját mutatjuk meg, és leírjuk a kapott megoldások aszimptotikus viselkedését.

2. Riemann-sokaságok, Levi-Civita-konnexió, görbület

Legyen M összefüggő szeparábilis Hausdorff-tér és $n \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy M -en adott egy n dimenziós differenciálható sokaság struktúra, ha létezik M -beli nyílt halmazok olyan $\{U_i\}_{i \in I}$ családja, amelyre

$$M = \cup_{i \in I} U_i,$$

és minden $i \in I$ esetén létezik

$$\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$$

homeomorfizmus valamely nyílt $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazra, valamint minden $i, j \in I$ esetén a

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$$

leképezés inverzével együtt differenciálható.

Legyen M n dimenziós differenciálható sokaság és $x \in M$. Ekkor M -nek az x -beli érintőtere az összes $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ görbe halmaza valamely $\varepsilon > 0$ esetén, amelyre $\gamma(0) = x$ és valamely (ekvivalens módon, bármely) $i \in I$ -re $\varphi_i \circ \gamma_1$ sima, a következő ekvivalenciareláció erejéig: két ilyen γ_1, γ_2 görbe akkor és csak akkor ekvivalens egymással, ha valamely olyan $i \in I$ esetén, amelyre $x \in U_i$, teljesül

$$(\varphi_i \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi_i \circ \gamma_2)'(0).$$

Szabó Szilárd: Stephen Hawking matematikai munkáiból

81

Az n dimenziós M differenciálható sokaság x -beli érintőttere egy n dimenziós vektortér, amelyet $T_x M$ -mel jelölünk. Egy sima vektormező M -en egy szelése az érintőnyalábnak, azaz egy

$$X: x \mapsto X(x) \in T_x M$$

hozzárendelés, amelyre $X(\varphi_i^{-1}(y))$ sima y -ban. Egy f függvény deriváltja egy X vektormező mentén az az $X.f$ függvény, amelyre

$$(X.f)(x) = (f \circ \gamma)'(0)$$

bármely $X(x)$ -et reprezentáló γ görbe esetén.

Egy *konnexió* M -en egy olyan eljárás, ami két X, Y sima vektormezőhöz egy $\nabla_Y X$ vektormezőt rendel, teljesítve a következő feltételeket:

- *additivitás Y -ban:* bármely X, Y_1, Y_2 vektormezőkre

$$\nabla_{Y_1+Y_2} X = \nabla_{Y_1} X + \nabla_{Y_2} X;$$

- *linearitás Y -ban skalármezők felett:* bármely f sima függvényre M -en

$$\nabla_{fY} X = f \nabla_Y X;$$

- *additivitás X -ben:* bármely X_1, X_2, Y vektormezőkre

$$\nabla_Y (X_1 + X_2) = \nabla_Y X_1 + \nabla_Y X_2;$$

- *Leibniz-szabály:* bármely f sima függvényre M -en

$$\nabla_Y (fX) = (Y.f)X + f \nabla_Y X.$$

Legyenek X, Y sima vektormezők egy M differenciálható sokaságon. Ekkor létezik egy olyan $[X, Y]$ sima vektormező M -en, hogy bármely f sima függvényre M -en

$$X.(Y.f) - Y.(X.f) = [X, Y].f.$$

A $[X, Y]$ vektormezőt X és Y *Lie-zárójelének* nevezzük. Egy ∇ konnexió torziója az X, Y irányokban a

$$T_{\nabla}(X, Y) = T_{\nabla}(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

mennyiség. Egy ∇ konnexiót torziómentesnek hívunk, ha minden X, Y sima vektormezők esetén $T_\nabla(X, Y) = 0$.

Egy *Riemann-metrika* egy n dimenziós M differenciálható sokaságon az M érintőterein adott g szimmetrikus pozitív definit bilineáris formák olyan

$$g_x: T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$$

családja, hogy bármely X, Y sima vektormezők esetén

$$g_x(X(\varphi_i^{-1}(y)), Y(\varphi_i^{-1}(y)))$$

sima függvény y -ban. Egy *Riemann-sokaság* egy (M, g) páros, ahol M egy n dimenziós differenciálható sokaság és g egy Riemann-metrika M -en. Legyen adott egy (M, g) Riemann-sokaság. Ekkor bármely $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ sima görbének definiálhatjuk a hosszát az

$$l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt$$

képlettel. Továbbá bármely $x, y \in M$ esetén definiálhatjuk az x és y közötti távolságot a

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} (l(\gamma))$$

képlettel, ahol az infimumot az összes olyan $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ sima görbére vesszük, amelyre $\gamma(0) = x$ és $\gamma(1) = y$. Ekkor d egy metrika M -en; innen ered a „Riemann-metrika” elnevezés is. Innentől feltesszük, hogy az (M, g) Riemann-sokaságból ezzel az eljárással nyert (M, d) metrikus tér teljes.

Egy ∇ konnexiót *kompatibilisnek* mondunk egy g Riemann-metrikával, ha bármely X, Y, Z vektormező esetén teljesül, hogy

$$Z.(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

A Riemann-geometria főtétele szerint minden (M, g) Riemann-sokaságon létezik pontosan egy torziómentes konnexió, amely kompatibilis g -vel. Ezt a konnexiót az (M, g) Riemann-sokaság *Levi-Civita-konnexiójának* nevezzük, és ∇^{LC} -vel jelöljük. A Levi-Civita-konnexióból származtatható egy $(1, 3)$ típusú R tenzormező a

$$R_x(X, Y, Z) = \nabla_X^{\text{LC}}(\nabla_Y^{\text{LC}} Z)(x) - \nabla_Y^{\text{LC}}(\nabla_X^{\text{LC}} Z)(x) - \nabla_{[X, Y]}^{\text{LC}} Z(x)$$

Szabó Szilárd: Stephen Hawking matematikai munkáiból

83

képlettel. R -et az (M, g) Riemann-sokaság *Riemann-féle görbületi tenzorának* hívjuk. Jelöljük Ω_x^2 -vel a $T_x M$ -en értelmezett antiszimmetrikus bilineáris alakok vektortérét, ellátva a g által indukált metrikával. Ekkor R_x -nek vannak bizonyos szimmetriái, amik miatt felfogható egy

$$R_x \in O(\Omega_x^2, g_x)$$

szimmetrikus lineáris transzformációként. Végül, a Riemann-féle görbületi tenzorból származtatható a

$$Ric_x \in O(T_x M, g_x)$$

Ricci-féle görbületi tenzormező a

$$Ric_x(X, Y) = \sum_{i=1}^n g_x(R_x(E_i, X, Y), E_i(x))$$

képlettel, ahol $E_1(x), \dots, E_n(x)$ a $(T_x M, g_x)$ euklideszi tér egy tetszőleges ortonormált bázisa. A Ricci-görbület tehát a Riemann-görbület nyoma az első és utolsó változójában. Az általános relativitáselmélet (Riemann-féle) *vákuum Einstein-egyenlete* az eddigi jelölésekkel felírható a

$$Ric_x = k g_x$$

alakban, ahol $k \in \mathbb{R}$ (a g metrika úgynevezett Einstein-állandója).

3. Gravitációs anti-insztantonok

Az Einstein-egyenlet a 4 dimenziós téridő fizikai modelljéből származó matematikai egyenlet, amelynek ismertek érdekes megoldásai. Ezek ismeretétől azonban most eltekintünk, mert cikkünk szorosabban vett témája egy ehhez kapcsolódó, ám matematikailag jobban kezelhető egyenlet felírása és megoldásainak vizsgálata. Ebben a szakaszban az M Riemann-sokaság dimenziója $n = 4$.

Legyen adott egy (M, g) Riemann-sokaság. Ekkor, minden $T_x M$ érintőtéren kapunk egy dV_x *térfogati formát*, azaz egy alternáló

$$T_x M \times T_x M \times T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$$

multilineáris leképezést: egy $E_1(x), \dots, E_4(x)$ ortonormált bázisra

$$dV_x(E_1(x), \dots, E_4(x)) = 1.$$

Továbbá, minden $\alpha, \beta \in \Omega_x^2$ párhoz hozzárendelhetünk egy $\alpha \wedge \beta$ térfogati formát a

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, X_2, X_3, X_4) = \frac{1}{4} \sum_{\sigma \in S_4} \text{sgn}(\sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}) \beta(X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)})$$

képlet által. A *Hodge-operátor* egy 4 dimenziós (M, g) Riemann-sokaságon az a

$$*: \Omega_x^2 \rightarrow \Omega_x^2$$

leképezés, amelyre minden $\alpha, \beta \in \Omega_x^2$ esetén

$$\alpha \wedge * \beta = g_x(\alpha, \beta) dV_x.$$

Könnyen látható, hogy $* \circ * = \text{Id}_{\Omega_x^2}$, tehát Ω_x^2 felbomlik

$$\Omega_x^2 = \Omega_x^+ \oplus \Omega_x^-$$

alakban, ahol

$$\Omega_x^\pm \subset \Omega_x^2$$

a Hodge-operátor ± 1 -sajátértékhez tartozó altere. Az $\Omega_x^\pm$ alterek egyenként 3 dimenziósak, és elemeiket rendre *önduális*, illetve *anti-önduális* 2-formáknak nevezzük.

Bontsuk fel a Riemann-féle görbületi tenzort ezen felbontás szerinti tömb-mátrixokra. Ehhez előbb írjuk fel a Ricci-görbületet a nyoma és nyom nélküli része összegeként:

$$\text{Ric} = \frac{s}{4} \text{Id}_{T_x M} + \text{Ric}_0,$$

ahol

$$s = \text{tr}(\text{Ric}): M \rightarrow \mathbb{R}$$

az M skalár-görbülete, Ric_0 pedig a *nyom-nélküli Ricci-görbület*. Kiderül, hogy Ric_0 felcseréli az $\Omega_x^\pm$ altereket, és R_x alakja erre a felbontásra nézve a következő:

$$\left(\frac{s}{12} \text{Id}_{\Omega_x^+} + W \dots \text{Ric}_0 \quad \frac{s}{12} \text{Id}_{\Omega_x^-} + W^- \right).$$

Az itt bevezetett $W^\pm$ tenzorokat (M, g) pozitív illetve negatív *Weyl-tenzorának* nevezzük. Azt mondjuk, hogy egy (M, g) Riemann-féle 4-sokaság *gravitációs anti-insztanton*, ha teljesül

$$\text{Ric} = 0, \quad W^+ = 0.$$

Az első egyenlet éppen az Einstein-egyenlet $k = 0$ állandóval, a második pedig a görbület anti-öndualitását írja elő. Az egyenletrendszer elnevezése is ezt tükrözi: a gravitációs jelző arra utal, hogy az Einstein-egyenlet a gravitációt írja le, míg az anti-insztanton általános elnevezés anti-öndualitási egyenletek megoldásaira. Itt tehát e két egyenletrendszer csatolásából álló rendszert vizsgáljuk. A gravitációs insztanton fogalma teljesen hasonló a gravitációs anti-insztantonéhoz, azzal a különbséggel hogy ekkor W^- -ről követeljük meg ugyanazt mint fent W^+ -ről; e két egyenlet kicserélődik egymással a sokaság irányításának megfordítása esetén, ezért az előjelnek ebben az elméletben nincs fontos szerepe.

Amennyiben M teljesít egy egyszeresen összefüggőségnek nevezett globális topológiai tulajdonságot, akkor kiderül, hogy (M, g) akkor és csak akkor gravitációs anti-insztanton, ha Ω^+ -nak létezik egy globális ∇^{LC} -párhuzamos bázisa – az ezzel a tulajdonsággal rendelkező Riemann-féle 4-sokaságokat hiperkähler 4-sokaságoknak nevezzük.

4. Gravitációs anti-insztantonok konstrukciói: tegez-varietások, Eguchi–Hanson- és Gibbons–Hawking-terek

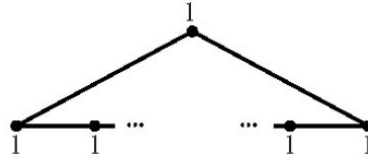
M. Atiyah, V. Drinfeld, N. Hitchin és Y. Manin egy 1978-as konstrukciója, az úgynevezett *ADHM-konstrukció* [1], illetve annak P. Kronheimer és H. Nakajima általi továbbfejlesztése [5] egy általános módszert ad hiperkähler-sokaságok konstruálására. Az így kapott sokaságok általános neve tegez-varietás. A tegez-varietások konstrukciójának kiinduló adata egy véges Γ gráf, V csúcspont- és E élhalmazzal, egy

$$\vec{d} : V \rightarrow \mathbb{N}$$

függvény (az úgynevezett *dimenzió-vektor*), valamint egy rá merőleges

$$\vec{\zeta} : V \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$$

vektor. Minden véges Γ gráfhoz, $\vec{d}$ dimenzió-vektorhoz és $\vec{\zeta}$ vektorhoz tartozik tehát egy $(M(\Gamma, \vec{d}, \vec{\zeta}), g)$ tegez-varietás egy Riemann-metrikával, amely kellően általános $\vec{\zeta}$ esetén egy sima hiperkähler-sokaság. Speciálisan, legyen Γ egy k -hosszú ciklus és a $\vec{d}$ dimenzió-vektor rendeljen Γ minden csúcsához 1-et (ahogy az ábra is mutatja), valamint legyen $\vec{\zeta}$ kellően általános.



1. ábra. A ciklikus Γ gráf

Kiderül, hogy az ezekkel a választásokkal kapott $M(\Gamma, \vec{d}, \vec{\zeta})$ tegez-varietás egy olyan 4 dimenziós gravitációs anti-insztanton, amelynek alap-tere diffeomorf az

$$xy + z^k = 0$$

egyenlettel definiált A_{k-1} egyszerű komplex felület-szingularitás kisimításával. Az így kapott 4 dimenziós gravitációs anti-insztantonokat *Eguchi–Hanson-tereknek* nevezzük.

A tegez-varietások egyik alapvető tulajdonsága, hogy nem kompaktak, azonban a g metrika viselkedése valamely K kompakt halmazon kívül jól behatárolt, úgynevezett aszimptotikusan lokálisan euklideszi (ALE). Ennek a fogalomnak a megértéséhez vegyük észre, hogy a 4 dimenziós euklideszi tér metrikája az origón kívül előáll

$$g_{R^4} = r^2 g_{S^3} + dr^2$$

alakban, ahol r az origótól mért távolság, g_{S^3} pedig g_{R^4} megszorítása az S^3 egységgömbre. Ez az azonosság azt a szemléletesen nyilvánvaló ténnyt fejezi ki, hogy az r -sugarú gömbfelület metrikája r -szerese az egység-sugarú gömbének. Ezt általánosítva azt mondjuk, hogy egy M nem-kompakt Riemann-féle 4-sokaság aszimptotikusan lokálisan euklideszi, ha valamely $K \subset M$ kompakt halmazra

$$M \setminus K = S \times \mathbb{R},$$

valamely 3 dimenziós S Riemann-sokaságra, és a metrikák között áll a

$$g_M \approx r^2 g_S + dr^2$$

aszimptotikus egyenlőség. Az Eguchi–Hanson-terek metrikája tehát teljesíti ezt a feltételt, $S = S^3/A_{k-1}$ választással.

Analitikus szempontból az aszimptotikusan lokálisan euklideszi terek a végtelenben nagyon természetes viselkedésűek, mert hasonlítanak az euklideszi terekre. Léteznek azonban másfajta aszimptotikus viselkedésű gravitációs anti-insztantonok is. Ezek közül több szempontból az úgynevezett aszimptotikusan lokálisan lapos (ALF) terek lényegesek. Ezen terek aszimptotikus viselkedése a következő: valamely $K \subset M$ kompakt halmazra

$$M \setminus K = S \times \mathbb{R},$$

valamely 3 dimenziós S Riemann-sokaságra, továbbá S fibrálódik egy Σ Riemann-felület felett $S^1 = \{e^{2i\pi\theta}\}$ körvonal-fibrumokkal, a metrika pedig valamely $\beta > 0$ skalárra teljesíti a

$$g_M \approx r^2 g_\Sigma + \beta d\theta^2 + dr^2$$

aszimptotikus egyenlőséget. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy ha tekintjük az r távolságra levő S sokaságot, akkor nem a teljes S metrikája szorozódik meg r^2 -tel, hanem annak csak egy rögzített 2 dimenziós irányba eső része, a maradék 1 dimenziós rész átmérője pedig tart $2\pi\beta$ -hoz ahogy r tart a végtelenbe. Fizikailag ezen β érték (egy állandó erejéig) a megoldás hőmérsékletének inverzeként interpretálható.

Aszimptotikusan lokálisan lapos gravitációs anti-insztantonokat konstruálni bonyolultabb, mint aszimptotikusan lokálisan euklideszieket. Az első ilyen konstrukciót G. Gibbons és S. Hawking írta le [3, 4]. A konstrukció a következő: legyen $U \subset \mathbb{R}^3$ véges sok, egymástól különböző $\{p_1, \dots, p_k\}$ pont komplementere és $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ egy harmonikus függvény, amelyre

$$\left[\frac{*dV}{2\pi} \right] \in H^2(U, \mathbb{Z})$$

egész kohomológia-osztály. (A képletben szereplő $*$ a 3 dimenziós Hodge-operátor.) Ez a feltétel felfogható egy kvantálási feltételként. A Chern–Weil-elmélet szerint létezik egy S^1 -nyaláb U felett valamely M totális térrel, valamint egy η konnexió-forma M -en, amelyre

$$*dV = d\eta.$$

Ekkor M -en a

$$g = \frac{1}{V} \eta^2 + V(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

metrika gravitációs anti-insztanton, amely kiterjed a p_i pontokra. Ezen konstrukció

$$V(x) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{|x - p_i|}$$

választással visszaadja a $G = \mathbb{Z}/(k-1)$ véges csoporthoz (pontosabban, az A_{k-1} szingularitáshoz) tartozó Eguchi–Hanson-tereket. Minden $\beta > 0$ esetén a

$$V(x) = \beta^{-1} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{|x - p_i|}$$

választás azonban aszimptotikusan lokálisan lapos teret eredményez ugyan-ezen sima sokaságon.

Ilyen értelemben a Gibbons–Hawking-terek általánosításai a már korább-ról ismert és aszimptotikusan egyszerűbb viselkedésű aszimptotikusan lokálisan euklideszi gravitációs anti-insztantonoknak. Számos azóta született matematikai-fizikai eredmény (például [2, 6]) azt mutatja, hogy ezek a megoldások sok szempontból alapvetőbb jelentőségűek aszimptotikusan lokálisan euklideszi társaiknál. Ezen elméletek leírása azonban már túlmutat jelen cikk keretein.

Irodalomjegyzék

- [1] M. Atiyah, V. Drinfeld, N. Hitchin, Y. Manin, Construction of Instantons, *Physics Letters* **65A** (1978), 185–187.
- [2] A. Braverman, M. Finkelberg, H. Nakajima Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $\mathcal{N} = 4$ gauge theories, II, <https://arxiv.org/abs/1601.03586>
- [3] G. Gibbons, S. Hawking, Gravitational multi-instantons, *Physics Letters B* **78** (1978), 430–432.
- [4] G. Gibbons, S. Hawking, Classification of Gravitational Instanton symmetries, *Comm. Math. Phys.* **66** (1979), 291–310.
- [5] P. Kronheimer, H. Nakajima, Yang–Mills instantons on ALE gravitational instantons, *Math. Ann.* **288** (1990), 263–307.
- [6] E. Witten, Geometric Langlands From Six Dimensions, <https://arxiv.org/abs/0905.2720>

A fenti cikket az Érintő 2018. júniusi számából vettük át.

Simonyi Gábor, Fritz József: Konferencia Csiszár Imre 80. születésnapja tiszteletére

Néhány szó az Ünnepeletről

Csiszár Imre a magyarországi matematikai közösség kimagasló alakja. Tíz éven át (1996–2006) volt a Bolyai Társulat elnöke és negyven éven át (1968–2008) vezette a Matematikai Kutatóintézet (a későbbi években már Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet) információelméleti kutatócsoportját. E csoport nemzetközi elismertségéről érdemes megjegyezni, hogy annak három tagja is elnyerte az IEEE Information Theory Society legrangosabb díját, a Claude Shannon Award elnevezésű kitüntetését. (Csiszár Imre 1996-ban, Marton Katalin 2013-ban, Körner János 2014-ben; Körner János ekkor már bő két évtizede Olaszországban dolgozott, de információelméleti eredményeinek nem csekély részét még itthon érte el.) Ezt a díjat egy embernek adják évente, eddig összesen 41 kutató részesült benne.

Csiszár Imre Miskolcon született 1938. február 7-én. Az Eötvös Loránd Tudományegyetemre eredetileg fizikus hallgatóként iratkozott be 1956-ban. Elsőévesen harmadik díjat nyert a Schweitzer-versenyen, majd 1957-ben másodéves, még mindig fizikus hallgatóként első díjat. A következő három évben már matematikus hallgatóként érte el ugyanezt az eredményt, amivel egy máig megdöntetlen rekordot elsőként állított be (illetve akkor még fel): a verseny hetvenéves történetében összesen hatan nyertek négy alkalommal első díjat, közöttük Csiszár Imre volt az első. (Ezt a rekordot az Érintő 2017. márciusi számában a Schweitzer-versenyről olvasható cikk is megemlíti, és fel is sorolja a hat nevet, l. itt: <https://ematlap.hu/index.php/interju-portre-2017-03/417-schweitzer-2016-jelentes>) A Matematikai Kutatóintézetben rögtön az egyetem elvégzése után kezdett dolgozni 1961-ben. Magyarországon az információelméleti kutatásokat Rényi Alfréd, az Intézet első, alapító igazgatója kezdeményezte. Csiszár Imre az ő tanítványa, majd rövidesen az információelmélet vezető kutatója lett.

Matematikai eredményeit itt nem részletezzük, de megemlítjük, hogy Körner Jánossal közösen írt „Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems” című könyve az információelmélet klasszikus monográfiáinak egyike. 2011-ben, harminc évvel az első kiadást követően, jelent meg a könyv két új fejezettel bővített második kiadása a Cambridge University Press gondozásában.

Csiszár a fent már említett Shannon-díj mellett más jelentős nemzetközi díjaknak is birtokosa, ezek közül a legnevezetesebb alighanem a 2015-ben neki ítelt IEEE Hamming Medal. Idehaza 2007-ben Széchenyi-díjat kapott, a Magyar Tudományos Akadémiának pedig 1990 óta tagja.

Conference on Channels, Statistics, Information, Secrecy, Zero-error And Randomness

A fenti címben dőlttel kiemelt kezdőbetűk alighanem érthetővé teszik, miért nem érdemes a konferencia címét lefordítani és arra is magyarázatot adnak, hogy miértadtunk a rendezvénynek ilyen hosszú címet.



A résztvevőkről a Rényi Intézet udvarán június 5-én készült fénykép. Guggol, illetve ül (balról): Prakash Narayan, Sergio Verdú, Csiszár Imre, Thomas Breuer. Állnak (balról): Gács Péter, Raymond Yeung, Michelle Effros, Mosonyi Milán, Linder Tamás, Farkas Lóránt, Marton Katalin, Kói Tamás, Soltész Dániel, Körner János, Csirmaz László, Łukasz Dębowski (takarásban), Igal Sason, Andrew Barron, Tusnády Gábor, Csóka Endre, Móri Tamás, Michaletzky György, Arató Miklós, Simonyi Gábor, Una Radojičić, Dina Abdelhadi.

A kétnapos, június 4-én és 5-én a Rényi Intézetben megrendezett konferenciára tizenöt előadót hívtunk meg. Nem egészen három héttel a konferencia kezdete előtt tragikus hír érkezett: az egyik meghívott, František Matuš hosszú betegség után elhunyt. Matuš nem pusztán meghívottja, de egyik kezdeményezője is volt a konferenciának. Korábban rendszeresen vendégeskedett Budapesten, és számos közös cikket írt Csiszár Imrével. Kedves alakját a Rényi Intézetben sokan ismertük, korát is tudva (1961-ben

született) halálhíre különösen megrázó volt. Csirmaz László, aki szintén írt vele közös cikket, és a szervező bizottságnak is tagja volt, vállalta, hogy az eredetileg Fero (ezen a becenéven ismerte mindenki, leveleit is így írta alá) előadására szánt időben ő tartson megemlékező előadást „Fero Matúš’ Work on the Shape of the Entropy Region” címmel.

A további meghívottak a következők voltak. (Természetesen ez a névsor csak annak mond igazán sokat, aki valamennyire jártas a Csiszár Imre által művelt területeken. Az általuk képviselt intézmények sokfélesége és rangja azonban talán mások számára is informatív.) Andrew Barron (Yale University), Thomas Breuer (FH Vorarlberg), Michelle Effros (Caltech), Gács Péter (Boston University), Elisabeth Gassiat (Université Paris-Sud), Körner János („Sapienza” Università di Roma), Marton Katalin (MTA Rényi Intézet), Mosonyi Milán (BME), Prakash Narayan (University of Maryland), Igal Sason (Technion, Haifa), Flemming Topsøe (Københavns Universitet), Tusnády Gábor (MTA Rényi Intézet), Sergio Verdú (Princeton University), Raymond Yeung (The Chinese University of Hong Kong). (Tusnády Gábor előadását, kérésére, társszerzője, Michaletzky György, az ELTE professzora tartotta meg.)

A június 4-e hétfő reggeli rövid megnyitón Miklós Dezső, a Rényi Intézet igazgatóhelyettese üdvözölte a megjelenteket, majd elhangzott az igazgató, Pálffy Péter Pál levélben küldött üzenete – ő maga éppen az Egyesült Államokból tartott hazafelé egy másik rendezvényről, ezért nem tudott személyesen jelen lenni. Köszöntője Csiszár Imre számos, a jelen írás előző részében már említett érdeme mellett szót ejtett arról az anekdotaszerű tényről is, hogy az MTA Matematikai Osztályának az Akadémia helyesírással foglalkozó bizottságába való delegáltjaként azt is neki köszönhetjük, hogy nem szegünk szabályt, ha kötőjel nélkül egybeírjuk a valószínűségszámítás szót. Ennek helyénvalóságáról ugyanis Csiszár Imre győzte meg az említett bizottságot.

Az első előadást Sergio Verdú tartotta „Imre Csiszár and Information Measures” címmel. Az előadás híres magyarországi születésű matematikusok és fizikusok arcképének kivetítésével kezdődött: középen megjelent Csiszár Imrének a konferencia honlapján látható arcképe, majd egyesével újabb arcok bukkantak fel, melyek végül körülfogták az első képet. A közönség feladatuk kapta, hogy mindig nevezze meg azt, akinek a képe megjelenik, és az volt a meglepő, hogy ez közel sem volt minden esetben triviális. Természetesen a Rényi Intézetben ülő hallgatóságnak nem okozott

gondot Neumann János, Erdős Pál, vagy éppen Rényi Alfréd felismerése, és a kivetített két Nobel-díjas fizikust, Wigner Jenőt és Gábor Dénest sem az előadónak kellett megneveznie. Kálmán Rudolf arcképének megjelenését viszont hosszabb csönd fogadta, s bár én hallottam, hogy a pár sorral mögöttem ülő Lovász László félhangosan kimondta a nevét, a legtöbben az előadótól tudták meg, hogy kit ábrázol a kép. Az ezután következő Wald Ábrahám fiatalkori képét pedig úgy tűnt, hogy senki sem ismerte föl. (Talán érdemes itt megjegyezni, hogy Jordan Ellenberg magyarul 2016-ban megjelent „Hogy ne tévedjünk – a mindennapi élet rejtett matematikája” című érdekes könyvében nagy hangsúllyal szerepel egy történet, aminek Wald a főszereplője.)

Hétfőn nyolc, kedden hét, egyenként negyvenperces előadás hangzott el, a részletes program az előadások kivonatával együtt megtalálható itt: <https://www.renyi.hu/conferences/csiszar80/program.html>

Szokásos eleme a konferenciáknak egy közös vacsora, a bankett, ami-re az első nap estéjén került sor. Hárman lettek megkérve, hogy szóljanak néhány ünnepi szót: Sergio Verdú, Körner János és Prakash Narayan. Amellett, hogy milyen nagy hatással volt Csiszár Imre a pályájukra, mindhárman kiemelték sokak által megtapasztalt és felemlgetett nagyvonalúságát. Ezt illusztrálандó Körner János a következő történetet mesélte el. Feladatnak javasolt egy problémát közös könyvükbe (a Csiszár–Körner-könyv számos eredményt feladatként dolgoz fel), amit Imre rögtön nagy tetszéssel fogadott. Rövidesen eszébe jutott azonban, hogy hallott már erről korábban, és arra is emlékezett, hogy az szerepel Flemming Topsøe egy cikkében. Lementek hát a könyvtárba, ahol Csiszár tényleg gyorsan megtalálta a cikket és benne a releváns eredményt. Egy apró részlet, amiről megfeledkezett, a kapcsolódó tételt bevezető részből derült ki. Nevezetesen, hogy az eredmény Csiszár Imrétől származik.

Pár szót maga az ünnepelt is szólt a banketten. Egyebek mellett azt emelte ki, milyen szerencsésnek érzi magát amiatt, hogy mind a munkája, mind a családja rengeteg inspiráció és öröm forrása volt mindig a számára.

A kedd délutáni utolsó előadást követő fotózás után vettek búcsút egymástól a résztvevők. (Sajnos voltak, akiknek már korábban el kellett menniük, és emiatt lemaradtak a fényképről.) Természetesen ilyenkor mindenki udvarias, de elköszönő szavaikból úgy lehetett érezni, hogy kellemes emlékekkel térnek haza erről az ünnepi találkozóról.

További részletek (és további fotók) találhatóak a konferenciáról annak honlapján: <https://www.renyi.hu/conferences/csiszar80/>

Simonyi Gábor, Fritz József: Konferencia Csiszár Imre tiszteletére

93

Köszönetnyilvánítás

Az IEEE Information Theory Society Newsletter című kiadványa szintén kért beszámolót az eseményről. Ezúton mondok köszönetet az IEEE IT Society Publications Committee felelős tagjainak ahhoz való hozzájárulásáért, hogy az oda már korábban leadott cikk egyes részeit a jelen beszámoló megírásakor felhasználjam. Szintén köszönöm Körner Jánosnak a jelen írással kapcsolatos hasznos észrevételeit.

Simonyi Gábor

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

80 éves Csiszár Imre, Széchenyi-díjjal kitüntetett akadémikus

Csiszár Imre már gimnazista korában is sikeresen szerepelt a matematikai és a fizikai tanulmányi versenyeken. Az érettségi után az ELTE TTK fizikus szakára iratkozott be, majd tanulmányait a matematikus szakon fejezte be. Felesége, Kárpáti Andrea is matematikus, négy gyermekük van.

Számos hazai kitüntetést kapott, mint például: Grünwald Géza-díj (1964), Akadémiai Díj (1988) és Szele Tibor-emlékérem (2003), Széchenyi-díj (2007). Diplomázás után az MTA Matematikai Kutató Intézetébe került, ahol létrehozta a hamarosan világhíressé váló Információelméleti kutatócsoportot. Végleges formába öntötte a Shannon-elméletet, amit aztán Körner Jánossal írott könyve részletez. Csaknem száz tudományos dolgozatára mintegy kétezer független hivatkozás érkezett. 1996-tól 2006-ig a Bolyai Társulat elnökeként is működött. Számos külföldi egyetem vendégprofesszora volt (Stanford, Maryland, Leuven stb.). Tudományos munkásságát a nemzetközi közösség a Shannon-, Hamming-, Bolzano- és Dobrushin-díjjal honorálta. Oktatott az ELTE TTK-n, ahol 2017-ben díszdoktorrá avatták, és a BME-n is, ez utóbbinak Professor Emeritusa.

Kedves Imre! Tisztelőid, munkatársaid, barátaid nevében kívánok további eredményeket és jó egészséget:

Fritz József

BME TTK Matematikai Intézet

A fenti cikket az Érintő 2018. szeptemberi számából vettük át.

Ruzsa Z. Imre: Kata és gyermekei

1. Fejtörő

Vica és Samu testvérek, mindkettő életkora négyzetszám. Anyjuknak, Katának életkora a két gyerek korának szorzata. A három életkor összege is négyzetszám. Hány évesek?

Ha feltesszük, hogy az anya idősebb gyermekeinél, de nem több, mint 100 évvel, pontosan egy megoldás van, amit az Olvasó nyilván gyorsan megtalál. Matuzsálemi életkorokkal több lehetőség adódik, például 9, 16, 144, aminek az a külön bája, hogy a gyerekek életkorainak összege is négyzetszám.

A folytatásban leírom a fenti szöveges feladatnak megfelelő

$$x^2 + y^2 + (xy)^2 = z^2 \quad (1)$$

egyenlet összes megoldását.

A nevek valódiak: az anya, unokahúgom, Ruzsa Kata boldogan mondta, hogy végre valaki értékeli e számok szépségét. (Azóta idősebbek lettek, már nem áll az egyenlet.)

Mindkét oldalhoz 1-et adva (1) a gyönyörű

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = z^2 + 1 \quad (2)$$

alakot ölti, de ez a megoldásban nem sokat segít.

2. Rekurzív leírás

Mivel egyenletünk az x, y változóiban szimmetrikus és csupa négyzet van benne, feltehetjük, hogy $0 \leq x \leq y$.

Könnyen látszik, hogy $x = y$ csak a triviális $(0, 0, 0)$ megoldásban fordul elő. A továbbiakban az $y > x \geq 0$ megoldásokkal foglalkozunk. Ha $x = 0$, akkor $y = z$; az így kapott $(0, n, n)$ megoldáscsaládot nevezzük gyökérmegoldásoknak.

1. tétel. Az összes megoldások a gyökérmegoldásokból keletkeznek az alábbi transzformációk ismételt alkalmazásával:

$$\begin{aligned} x' &= y, & y' &= 2y(z - xy) - x, \\ z' &= z + 2y(y(z - xy) - x), \end{aligned} \quad (T1)$$

Ruzsa Z. Imre: Kata és gyermekei

95

$$\begin{aligned} x' &= y, \quad y' = 2y(z + xy) + x, \\ z' &= z + 2y(y(z + xy) + x), \end{aligned} \quad (T2)$$

$$\begin{aligned} x' &= x, \quad y' = 2x(z + xy) + y, \\ z' &= z + 2x(x(z + xy) + y). \end{aligned} \quad (T3)$$

A $(0, n, n)$ elfajuló megoldást (T3) helybenhagyja, (T1) és (T2) egyaránt az $(n, 2n^2, 2n^3 + n)$ megoldásba viszi. Ettől kezdve különböző transzformációsorozat különböző megoldásokat ad, vagyis *e* transzformációk a nem elfajuló megoldások halmazán szabad félcsoporthént hatnak.

Az $(n, 2n^2, 2n^3 + n)$ megoldássorozatot nevezzük tőssorozatnak. Minden gyökérből kinő egyetlen tő, majd belőle 3 ág, amelyek újból háromfelé ágaznak a csillagos évig.

Másik figyelemre méltó megoldáshalmaz az $(1, 2, 3)$ megoldásból (T1) ismétlésével keletkező $(n, n+1, n^2+n+1)$ sorozat; ezt hívjuk főssorozatnak, mivel – mint látni fogjuk – ez adja a megoldások zömét.

3. Bizonyítás

A tételbeli transzformációk a változók értékét növelik: $x' \geq x$, $y' > y$. Úgy fogjuk megkapni őket, hogy leírunk három *csökkentő* transzformációt, amelyek közül bármely megoldásra csak egy alkalmazható; látni fogjuk, hogy ahol a csökkenő sorozat megakad, azok $(n, 2n^2, 2n^3 + n)$ alakúak. E csökkentő transzformációk inverzei lesznek (T1)–(T3).

A $z = xy + t$ helyettesítéssel egyenletünk

$$x^2 + y^2 - t^2 = 2xyt \quad (3)$$

(szintén szép, és ráadásul csak harmadfokú) formát ölt. (Az (x, y, t) jelöléssel a gyökérsorozat $(0, n, n)$, a tőssorozat $(n, 2n^2, n)$, a főssorozat pedig $(n, n+1, 1)$ alakúvá válik.)

Ez y -ban másodfokú, így van neki egy másik $\bar{y}$ megoldása. A gyökök és együttthatók összefüggése szerint (ahogy gimiben tanultuk)

$$y + \bar{y} = 2xt, \quad y\bar{y} = x^2 - t^2.$$

Ha $t < x$, akkor

$$0 < \bar{y} < x^2/y < x.$$

Ekkor a (3) egyenletnek új megoldását adja

$$\underline{x} = \bar{y} = 2xt - y, \quad \underline{y} = x, \quad \underline{t} = t. \quad (\text{T1-})$$

Ha $t > x$, akkor $\bar{y} < 0$. Mivel az eredeti (1) egyenletben csak négyzetek voltak, sejthetjük, hogy $y^* = -\bar{y} = y - 2xt$ is jó lesz valamire. Ezt y helyébe téve (3) helyett az alábbi fog teljesülni:

$$x^2 + y^{*2} = x^2 + \bar{y}^2 = t^2 + 2x\bar{y}t = t^2 - 2xy^*t.$$

A jobb oldalt kicsit átírjuk:

$$t^2 - 2xy^*t = t(t - 2xy^*) = \underline{t}(\underline{t} + 2xy^*), \quad t = t - 2xy^*.$$

Így (3) helyett azt kapjuk, hogy

$$x^2 + y^{*2} - \underline{t}^2 = 2xy^*\underline{t}.$$

Tudjuk, hogy $y^* = y - 2xt < y$, de $y^* < x$ és $y^* > x$ egyaránt lehetséges. Aszerint, hogy melyik lehetőség teljesül, az alábbi csökkentő transzformáció egyike keletkezik:

$$\underline{x} = y^* = -\bar{y} = y - 2xt, \quad \underline{y} = x, \quad t = t - 2xy^* = t - 2x(y - 2xt), \quad (\text{T2-})$$

avagy

$$\underline{x} = x, \quad \underline{y} = y^* = -\bar{y} = y - 2xt, \quad \underline{t} = t - 2xy^* = t - 2x(y - 2xt). \quad (\text{T3-})$$

Végezetül ha $t = x$, akkor $y = x^2$, megérkeztünk az $(n, 2n^2, n)$ tőrsorozatba, (T1-) és (T2-) egyaránt a gyökérsorozatba visz le.

Ha a (T1-)-(T3-) képletekben az x, y, t változókat kifejezzük $\underline{x}, \underline{y}, \underline{t}$ segítségével, megkapjuk a növelő inverzeket:

$$x = \underline{y}, \quad y = 2xt - \underline{x} = 2\underline{y}\underline{t} - \underline{x}, \quad t = \underline{t}, \quad (\text{T1+})$$

$$x = \underline{y}, \quad y = 2\underline{y}(2\underline{x}\underline{y} - \underline{t}) - \underline{x}, \quad t = 2\underline{x}\underline{y} - \underline{t}, \quad (\text{T2+})$$

$$x = \underline{x}, \quad y = 2\underline{x}(2\underline{x}\underline{y} - \underline{t}) - \underline{y}, \quad t = 2\underline{x}\underline{y} - \underline{t}. \quad (\text{T3+})$$

Ha x, y, t helyére x', y', t' -t, $\underline{x}, \underline{y}, \underline{t}$ helyére x, y, t -t írunk, a $z = xy + t$ vissza-helyettesítéssel a tétel (T1-)-(T3) transzformációit kapjuk.

Ruzsa Z. Imre: Kata és gyermekei

97

4. Játékos megjegyzés

A bevezetőben feltettük, hogy az életkort években számoljuk. Más időegységben más megoldások vannak: lehetnek például 4, 64, 256 hónaposak ($2^2 + 8^2 + 16^2 = 18^2$), 4, 441, 1764 hetesek ($2^2 + 21^2 + 42^2 = 47^2$) vagy 4, 3025, 12100 naposak ($2^2 + 55^2 + 110^2 = 123^2$). Az Olvasóra hagyom az órákban, percekben vagy másodpercekben kifejezett megoldások megtalálását.

5. Püthagoraszai megoldások?

Melyek (1) azon megoldásai, ahol $x^2 + y^2$ is négyzetszám? A fősorozatban végtelen sok ilyen van. Az ezeket leíró

$$n^2 + (n+1)^2 = m^2$$

egyenlet összes megoldása az (érdektelen) $n = 0, m = 1$ megoldásból az

$$n' = 3n + 2m + 1, \quad m' = 3m + 4n + 2$$

rekurzióval nyerhetők; elsőnek a bevezetőben említett $x = 3, y = 4$, utána $x = 20, y = 21$.

Van-e a fősorozaton kívül?

6. A rekurzió másképp

Ha feladjuk a változók előjelére és nagyságára tett kikötést, (T1)–(T3) invertálhatók lesznek, vagyis transzformációcsoportot generálnak. Hozzájuk vehető néhány *uncsi* transzformáció: x, y, z bármelyike előjelének megváltoztatása, valamint x és y felcserélése. Észrevehetjük, hogy (T2) és (T3) néhány uncsi transzformáció és (T1) kompozíciójával nyerhető.

Csoport szebb, mint félcsoport, viszont így az egyértelműség elvész (legalábbis nem könnyen nyerhető), és a csoport szerkezetéről se tudunk meg sokat.

Több szerencsével járunk, ha a módosított

$$x^2 + y^2 - t^2 = 2xyt \tag{4}$$

egyenletet tekintjük.

Uncsi transzformációk: x és y fölcserélése, P ; x, y, t közül bármely 2 előjelének megváltoztatása, S_x, S_y, S_t , ahol az index jelöli azt a változót,

amelynek előjele marad. Ezek 8 elemű csoportot generálnak; az így nyert egyenletek lényegében azonosak, és egy ilyen nyolcas kupacban pontosan egy olyan van, amelyre $0 < x < y$ vagy $0 = x < y$, $t > 0$, a kupac *reprezentánsa*. (Kivétel az izolált $(0, 0, 0)$ hármas.) Egy kupac elemeit *rokonoknak* nevezzük.

Egyszerűbb lesz a folytatás, ha megtartjuk az összes egész megoldást.

Egyenletünk mindhárom változójában másodfokú, mindegyikben van még egy gyöke (melyek közül egyet használtunk elébb). A gyökök-együtt-hatók kapcsolata mindháromra felírva így fest:

$$\begin{aligned}x + \bar{x} &= 2yt, & x\bar{x} &= y^2 - t^2, \\y + \bar{y} &= 2xt, & y\bar{y} &= x^2 - t^2, \\t + \bar{t} &= -2xy, & t\bar{t} &= -(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

Ezek adják a három *izgi* transzformációt:

$$\begin{aligned}R_x : & \quad x' = \bar{x} = 2yt - x, \quad y' = y, \quad t' = t, \\R_y : & \quad y' = \bar{y} = 2xt - y, \quad x' = x, \quad t' = t, \\R_t : & \quad t' = \bar{t} = -2xy - t, \quad x' = x, \quad y' = y.\end{aligned}$$

Mindegyik másodrendű. S_x, S_y, S_t felcserélhető egymással és R_x, R_y, R_t -vel, P viszont egyiket másikba viszi: $PS_x = S_yP$, $PR_x = R_yP$. A transzformációcsoport azonos, bár a leírás más.

2. tétel. Legyen (x, y, t) a (4) egyenlet olyan megoldása, amelyben $xy \neq 0$. Ekkor R_x, R_y, R_t közül pontosan egy, mégpedig amelyik a legnagyobb abszolút értékűre hat, annak abszolút értékét csökkenti, a másik kettő az érintett változó abszolút értékét növeli. (Csak egy maximális abszolút értékű van.)

Így bármely megoldásból a csökkentő transzformációkat alkalmazva előbb-utóbb leérünk egy olyanba, ahol $xy = 0$; ezek $(0, n, n)$ és rokonai, a *gyökérmegoldások*. Egy ilyenből a növelő transzformáció $(-2n^2, n, n)$ -be visz, ez és rokonai a *tömegoldások*, a másik kettő csak előjelet változtat. Az összes megoldást leíró rekurzió most így néz ki: kiindulunk egy gyökérmegoldásból; egyértelműen felmegyünk egy tömegoldásba; onnantól kezdve mindig kétfelé mehetünk tovább.

A 3. fejezetben mindig háromfelé ágazott a felmenő út, itt mindig kétfelé. Ez azon múlik, hogy ott átléptünk azokon a megoldásokon, ahol $t < 0$, tulajdonképpen a most leírt R_t transzformációval.

3. tétel. R_x, R_y, R_t olyan csoportot generál, amely három kételemű csoport szabad szorzata.

Ez azt jelenti, hogy ezeket bármely sorrendben egymás után alkalmazva, ha két szomszédos sosem azonos, csupa különböző transzformációt kapunk. *Figyelem:* nem állítjuk, hogy bármely megoldásból kiindulva mindig mást kapunk (ez nem is igaz), csak azt, hogy két különböző sorozathoz *van olyan* megoldás, hogy a transzformációk után más megoldást kapunk.

7. Paraméteres előállítás?

Megadtunk egy eljárást, amely előállítja az összes megoldást. Paraméteres előállítás, mint a püthagoraszai számhármásokra, szebb lenne. Azt sejttem, hogy ilyen nincs. Ennek eldöntéséhez pontos értelmet kell adni a „paraméteres előállítás” kifejezésnek. A lehető legegyszerűbb eset kizárható.

4. tétel. Nem adható meg véges sok (f_i, g_i, h_i) polinomhármás (akárhány változós), hogy

$$x = f_i(n), \quad y = g_i(n), \quad z = h_i(n), \quad n \in \mathbb{Z}^k$$

az (1) egyenlet összes egész megoldásait adják.

Bizonyítás. A (4) formával fogunk dolgozni.

Nevezzük *margónak* azokat a megoldásokat, ahol $xy = 0$ vagy $t = \pm 1$ (tehát valamelyik változó az általa felvehető legkisebb értéken áll). Bármely megoldásból kiindulva a csökkentő transzformációk valahány lépés után a margóra vezetnek; e lépések számát nevezzük a megoldás *szintjének*. A margó tehát a 0. szint; a gyökér és a (kicsit általánosított) fősorozat uniója. A fősorozatban tudnánk lejjebb sétálni, $(n, n+1, 1)$ -ről $(n-1, n, 1)$ -re egészen $(0, 1, 1)$ -ig, de nem tesszük.

Belátjuk, hogy ha f, g, h (akárhány változós, egész értékű) polinomok, melyekre

$$f^2 + g^2 - h^2 = 2fgh,$$

akkor az összes $(f(n), g(n), h(n))$ hármások (itt $n \in \mathbb{N}^k$, ha a polinomok k változósak) véges sok szinten helyezkednek el.

Minden nem azonosan 0 polinomnak van foka. Megpróbáljuk az (f, g, h) polinomhármásra alkalmazni az R_x, R_y, R_t transzformációk valamelyikét úgy, hogy az a fokszámot csökkentse. Ez az eljárás véges sok lépés után

megakad: vagy úgy, hogy 0 polinomot kapunk, vagy úgy, hogy egyik módon sem csökken a foksám.

Belátjuk, hogy ez utóbbi esetben valamelyik polinom konstans.

Tegyük fel, hogy f fokszáma az (egyik) legnagyobb. Az egyenlet f által leírt gyökéhez tartozó társgyök megkapható az

$$\bar{f} = 2gh - f$$

képlettel, vagyis szintén polinomiális megoldást ad. Ha ettől a foksám nem csökken, akkor mivel

$$f\bar{f} = g^2 - h^2,$$

ezért

$$2\deg f \leq \deg f + \deg \bar{f} = \deg(g^2 - h^2) \leq 2\max(\deg g, \deg h),$$

vagyis van még egy ugyanakkora fokú, legyen ez mondjuk g . Ekkor

$$2\deg f + \deg h = \deg(2fgh) = \deg(f^2 + g^2 - h^2) \leq 2\deg f,$$

vagyis $\deg h = 0$. Más maximális fokú esetén ugyanígy zajlik a számolás.

Ha $f = 0$, akkor $g = h$ vagy $g = -h$, az értékek a gyökérben vannak; ha $g = 0$, hasonlóképpen, $h = 0$ pedig lehetetlen.

Tegyük fel most, hogy egyik sem 0, de valamelyik konstans, mondjuk $f = c$. Ekkor

$$g^2 - 2cgh - h^2 = -c^2,$$

amit így is írhatunk:

$$(g - (c + \sqrt{c^2 + 1})h)(g - (c - \sqrt{c^2 + 1})h) = -c^2.$$

Tehát mind $g - (c + \sqrt{c^2 + 1})h$, mind $g - (c - \sqrt{c^2 + 1})h$ konstans, így g , h is konstansok.

Ha pedig h konstans, a fentiek így alakulnak:

$$f^2 - 2cfg + g^2 = c^2,$$

vagyis

$$(f - (c + \sqrt{c^2 - 1})g)(f - (c - \sqrt{c^2 - 1})g) = c^2.$$

A konklúzió ugyanaz, kivéve a $c = \pm 1$ esetet, amikor $f = g$ vagy $f = -g$ adódik.

Mindegyik esetre áll, hogy (f, g, h) értékei egyetlen szinten vannak. Ha az eredeti hármashból mondjuk k lépésben jutottunk ide, akkor a kiinduló értékek innen k transzformációval elérhetők, ami ettől maximum k szintnyi eltérést jelent. $\square$

Ruzsa Z. Imre: Kata és gyermekei

101

8. Hány megoldás van?

Jelöljük $F(N)$ -nel a $0 < x < y \leq N$ feltételt kielégítő megoldások számát.

5. tétel. *Vannak olyan $c_3, c_4, \dots$ számok, hogy bármely k -ra teljesül az*

$$F(N) = N + \sqrt{N/2} + c_3 N^{1/2} + \dots + c_k N^{1/k} + O(N^{1/(k+1)})$$

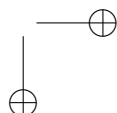
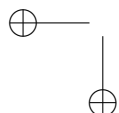
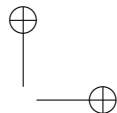
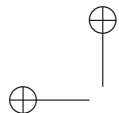
becslés.

Ebből N a fősorozat, $\sqrt{N/2}$ a bázissorozat.

Ennek bizonyítása, amit nem részletezek, az előző tétel gondolatmenetének megfordításán múlik. Bármely szint előállítható véges sok polinommal, ezekből jönnek a melléktagok. A hibatag becslése nem egészen egyszerű.

Rényi Alfréd Matematikai Kutató Intézet Budapest, Pf. 127, H-1364

E-mail address: ruzsa@renyi.hu



Tartalom

Gian-Carlo Rota: Tíz lecke – bárcsak valamennyit megtanították volna nekem	1
1. Előadásmód	2
2. Táblahasználat	3
3. Többször publikáld ugyanazt az eredményt	3
4. Leginkább a magyarázó munkáidról fognak rád emlékezni	4
5. Minden matematikusnak csupán néhány trükkje van	5
6. Ne aggódj a hibáid miatt	5
7. Használd a Feynman-módszert	6
8. Szórd bőkezűen az elismeréseket	7
9. Írj tartalmas bevezetést	7
10. Légy felkészülve az idős korra	7
Tardos Gábor, Tóth Géza: Áttörés az Erdős–Szekeres-problémában	9
1. Konvex sokszögek	9
2. Hegyek és völgyek	13
3. Javítások	16
4. Suk áttörése	18
Oláh Vera: Beszélgetés Boros Endrével	26
Tóth Árpád, Zábrádi Gergely: Wiles és az Iwasawa-elmélet fősejtése	38
1. Bevezetés	38
2. Fermat-tól Kummerig	38
3. Riemann ζ -értékek	40
4. p -adikus számok	41
5. Mi is az a p -adikus L -függvény?	43
6. Az Iwasawa-fősejtés	45
Pálfalvi Józsefné, Tikk Domonkos: Votisky Zsuzsa (1948–2018) .	48
Surányi László: Sohasem azt tanítjuk, amit tanítunk – 100 éve született Surányi János	51

A családi-szellemi háttér	51
A fiatalkor és a megismerkedés Kalmárral	53
A világháború utáni újrakezdés	54
Oktatói pályája	56
A „Vándorgyűlés” és a didaktikai szemináriumok	58
A Didaktikai Csoport és előzményei – a tanítási kísérletek és a „specmat”	61
A Didaktikai Csoport működése	64
Szabó Péter Gábor: Robotkatica és kibernetika – Muszka Dániel élete	70
Egyetemi évek	70
A szegedi logikai gép	71
A szegedi Katicabogár	73
A szegedi robotkisaszony és robotember	74
A Kibernetikai Laboratórium, M-3, MINSZK-22, R-40	75
Megőrizni a múlt értékeit, az Informatika Történeti Múzeum Alapítvány	77
Szabó Szilárd: Stephen Hawking matematikai munkáiból – A Gibbons–Hawking konstrukció	80
1. Bevezetés	80
2. Riemann-sokaságok, Levi-Civita-konnexió, görbület	80
3. Gravitációs anti-insztantonok	83
4. Gravitációs anti-insztantonok konstrukciói: tegez-varietások, Eguchi–Hanson- és Gibbons–Hawking-terek	85
Simonyi Gábor, Fritz József: Konferencia Csiszár Imre 80. születésnapja tiszteletére	89
Néhány szó az Ünnepeletről	89
80 éves Csiszár Imre, Széchenyi-díjjal kitüntetett akadémikus .	93
Ruzsa Z. Imre: Kata és gyermekei	94
1. Fejtörő	94
2. Rekurzív leírás	94
3. Bizonyítás	95
4. Játékos megjegyzés	97
5. Püthagorasz megoldások?	97
6. A rekurzió másképp	97
7. Paraméteres előállítás?	99
8. Hány megoldás van?	101

Contents

Gian-Carlo Rota: Ten lessons I wish I had been taught	1
Gábor Tardos, Géza Tóth: A breakthrough in the Erdős–Szekeres problem	9
Vera Oláh: Conversation with Endre Boros.....	26
Árpád Tóth, Gergely Zábrádi: Wiles and the main conjecture of Iwasawa theory	38
Józsefné Pálfalvi, Domonkos Tikk: Zsuzsa Votisky (1948–2018).....	48
László Surányi: János Surányi was born 100 years ago	51
Péter Gábor Szabó: Robotics and cybernetics – The life of Dániel Muszka	70
Szilárd Szabó: Excerpt from the mathematical work of Stephen Hawking – The Gibbons–Hawking term	80
Gábor Simonyi, József Fritz: Conference in honour of Imre Csiszár’s 80th birthday	89
Ruzsa Z. Imre: Kata and her children	94