

ÉVFOLYAM
Volume

II

1999

**G E O M A T I K A I
K Ö Z L E M É N Y E K**

Publications in Geomatics

SZERKESZTŐ
Editor

ZÁVOTI J, BÁNYAI L, PAPP G

A geodézia korszerű matematikai módszerei
Sopron, 1999

HU ISSN 1419-6492

MTA GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI KUTATÓINTÉZET, SOPRON

Geomatikai Közlemények

Publications in Geomatics

kiadja az

MTA GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI KUTATÓINTÉZET

9400 Sopron, Csatkai E. u. 6-8. Pf. 5.

tel.: 99 – 314-290 fax.: 99 - 313-267

felelős kiadó

Varga Péter

igazgató

szerkesztő

Závoti József, Bányai László és Papp Gábor

technikai szerkesztő

Karner Ani

készült a

LÓVÉR PRINT Kft. nyomdájában

9400 Sopron, Ady Endre u. 5.

tel.: 99 - 329-977

megjelent 100 példányban
Sopron, 1999

HU ISSN 1419-6494

A GEODÉZIA KORSZERŰ MATEMATIKAI MÓDSZEREI

Doktori disszertáció

Dr. habil. Závoti József

a műszaki tudomány kandidátusa, egyetemi tanár

MTA Geodéziai és Geofizikai Kutató Intézete

Sopron, 1999

Tartalomjegyzék

Bevezetés	5
1. A robusztus becslések valószínűségi modellje	9
1.1 A normalitás problémája	9
1.2 A durva hibák felderítése statisztikai tesztekkel	10
1.3 A robusztus becslés fogalma	10
1.4 Matematikai alapfogalmak	12
1.5 A robusztus kiegyenlítő számítási modell	13
1.6 Robusztus becslési módszerek	14
1.7 Speciális esetek	14
1.7.1 Normális eloszlás	14
1.7.2 Laplace eloszlás	15
1.8 Különböző robusztus becslési módszerek	17
1.8.1 Huber módszer	17
1.8.2 Hampel módszer	18
1.8.3 Dán módszer	19
1.8.4 Soproni módszer	20
2. Az iterációs úton újra súlyozott legkisebb négyzetek módszere	21
2.1 Az M-becslés fogalma	21
2.2 Az M-becslések kiegyenlítése iteratív súlyozással	24
2.3 Speciális esetek	25
2.3.1 Lineáris regresszió robusztus becsléssel	25
2.3.2 A síkbeli projektív transzformáció M-becslései iteratív súlyozással	34
2.3.2.1 Hagyományos kiegyenlítési modell	34
2.3.2.2 Percy Tham modell	36
2.3.2.3 Tárcazy-Hornoch modell	39
Mellékletek	42

3.	Az L_p normás becslések	49
3.1	Gauss-Markov matematikai modell	50
3.2	Becslés különböző normákban	51
3.3	Az L_p normás kiegyenlítés	53
3.3.1	Algoritmus I.	55
3.3.2	Algoritmus II.	55
3.4	A 2D és 3D hasonlósági transzformációk L_p normában	56
4.	Geodéziai alkalmazások L_1 normában	63
4.1	A legkisebb abszolút értékek összegének elve	63
4.2	Kiegyenlítés L_1 normában	64
4.3	Transzformációs paraméterek meghatározása az abszolút értékek legkisebb összegének módszerével	65
4.4	Helmert transzformáció megoldása L_1 normában	66
4.5	Projektív transzformáció L_1 normában	71
4.6	A 3D hasonlósági transzformáció paramétereinek közvetlen meghatározása L_1 normában	74
	Mellékletek	79
5.	Az L_1 normás becslés a Boscovich-Laplace feltétel alkalmazásával	84
5.1	A Boscovich-Laplace feltétel	84
5.2	A Boscovich-Laplace módszer a regressziós egyenes illesztésére	86
5.3	A regressziós egyenes meghatározásának modellje	87
5.4	A síkbeli hasonlósági transzformáció	92

6.	A módosított legkisebb négyzetes, minimum normás becslések	98
6.1	Matematikai modell	98
6.2	A legkisebb négyzetes, minimum normás becslés (LN)	101
6.3	A súlyozott becslések egy osztálya	103
6.3.1	Kombinatív főkomponens becslés (CPC)	104
6.3.2	Egyparaméteres főkomponens becslés (SPPC)	104
6.3.3	MSE minimalizálás	105
6.4	Numerikus példa	105
7.	A Föld pólusmozgásának idősor analízise	110
7.1	A trend leválasztása	111
7.2	Digitális szűrés trigonometrikus interpolációval	113
7.3	Fourier- és wavelet transzformáció	119
8.	Wavelet transzformáció a térinformatikai adatrendszerekben	129
8.1	A wavelet transzformáció matematikai összefüggései	129
8.2	A diszkrét wavelet transzformáció	132
8.3	A kétdimenziós wavelet transzformáció	134
8.4	A wavelet transzformáció tulajdonságai	135
	Összefoglalás	140
	Irodalomjegyzék	142

E l ő s z ó

A ***Geomatikai Közlemények II.*** kötete egy összefoglaló jellegű mű, amely a szerzőnek a modern matematikai módszerek alkalmazásával a geodéziában mintegy másfél évtized alatt elért kutatási eredményeit tartalmazza. A szerző a bemutatott módszereket konkrét geodéziai problémák megoldására alkalmazta. Természetesen, a korszerűség a tudomány fejlődése folyamán relatív, gyorsan változó fogalom, ahol a teljességet biztosítani szinte lehetetlen. Ennél fogva a kötet címe és tartalma nem kizárólagos értelemben értendő. A tárgyalt módszereken kívül még számos korszerű matematikai módszert alkalmaznak a geodéziában. Nyilvánvalóan sok egyéb fontos témakört, nem ismertetett eljárást, kiváló kollégák kutatási eredményeit is fel kellett volna dolgozni. Ilyen értelemben tekintse e művet bevezetésnek a tisztelt Olvasó, amelyben az ismertetett módszerek bárki által, más problémák megoldására is továbbfejleszthetők.

Minden nyomdatermék megjelenésekor felmerül a természetes kérdés: kiknek készül a kiadvány? A korszerű matematikai módszerek geodéziai alkalmazásai napjainkban is számos kutatási területen gyorsan terjednek. Úgy gondolom, hogy olyan témakörökben, mint a robusztus becslések, a wavelet transzformáció stb..., igény van arra, hogy a lényegre koncentráló, az alkalmazás módját bemutató eljárások nagy hatásfokkal elsajátíthatók legyenek. Remélem, haszonnal fogják forgatni ezen lapokat matematikai ismeretekkel megáldott doktoranduszok, a matematika iránt fogékony fiatal kutatók és a matematikai módszereket alkalmazni kívánó mérnökök.

A problémák felvetéséhez, a lehetséges megoldások kereséséhez, az eredmények diszkussziójához nagyon sok segítséget kaptam kollégáimtól. Ezúton szeretném mindazoknak a munkáját is megköszönni, akik valamilyen formában hozzájárultak a mű létrejöttéhez.

Köszönet illeti az MTA Veszprémi Területi Bizottságát és az OTKA T 025320 pályázatát, hogy anyagi támogatásukkal lehetővé tették a kiadvány megjelenését.

Závoti József

BEVEZETÉS

A geodéziában a Gauss és Legendre által lefektetett matematikai alapokra az eltelt két évszázad során egy összetett logikai rendszer épült. A modern mérés technikai eszközök (GPS, mesterséges holdak, inerciális műszerek...) fejlődése új matematikai modellek és megoldási módszerek megteremtését teszi szükségessé.

Az elkerülhetetlen megfigyelési hibák jelenlétének tudatában, a geodéziában nem elégszünk meg az adott feladat megoldásához szükséges legkevesebb számú mérés elvégzésével, hanem fölös méréseket végzünk. Így a megfigyelések és a keresett mennyiségek (ismeretlenek, paraméterek) között nem állítható fel ellentmondásmentes (konzisztens) függvénykapcsolat. Feladatunk: a végrehajtott mérések alapján a keresett mennyiségekre a legmegbízhatóbb becslést adni.

Boscovich (1757) és *Laplace* (1799) erre a célra az abszolút eltérések összegének minimalizálását (L_1 norma) használta. *Gauss* (1794) a legkisebb négyzetek módszerét (LNM, L_2 norma) vezette be, *Csebisev* (1853) a maximális eltéréseket minimalizálta (mini-max módszer, L_∞ norma).

Ha normális eloszlású megfigyeléseink vannak, akkor a lineáris becslések osztályában a LNM (Gauss-Markov elmélet) szolgáltatja a legmegbízhatóbb értékeket a keresett mennyiségekre. A módszer kimerítő elméleti tárgyalása többek között Detrekői, Koch és Wolf kiegyenlítő számítást tárgyaló könyveiben található meg. A LNM legnagyobb hátránya, hogy nagyon érzékeny a megfigyelésekben

esetlegesen előforduló durva hibákra. A módszer alapvető tulajdonsága (hibája), hogy a lokálisan fellépő kiugró értékeket az összes javításra szétosztja. Különösen nagy adathalmazok feldolgozásánál adódhatnak megbízhatósági problémák, mivel egyidejűleg több kiugró érték is előfordulhat.

Ezzel szemben léteznek nemlineáris becslési módszerek, amelyek robusztusak, azaz kevésbé érzékenyek a normális eloszlástól való eltérésekre.

A matematikai statisztika elmélete az utolsó évtizedekben egy új áramlattal, a robusztus becsléssel gazdagodott. Ennek az új áramlatnak a megjelenése azzal a ténnyel hozható kapcsolatba, hogy a paraméterbecslésekhez alkalmazott feltételezések, pl. normalitás, linearitás, függetlenség csak közelítőleg teljesülnek. Ezen kívül az automatizálásra való törekvés magában hordja a durva hibák megmaradásának veszélyét, ami nagymértékben csökkenti a becslések megbízhatóságát a klasszikus módszerek esetén.

A robusztus becslési módszerek lehetővé teszik a kiugró értékek automatikus kizárását, valamint lehetőséget biztosítanak arra, hogy bizonyos határok között csökkentsék a "szennyezett" mérési adatok hatását a paraméterbecslés során.

A robusztus becslések területén végzett kutatásaim kezdetén céloknak tekintetem, hogy a matematikai statisztikában előforduló robusztus becslési módszereket megismerjem, ezek tulajdonságait bemutassam, e módszereket különböző geodéziai feladatok megoldására felhasználjam és a kapott becslések megbízhatóságát megítéljem.

Az 1. fejezetben tárgyaltam a robusztus becslési módszerek matematikai alapfogalmait.

A 2. fejezetben megvizsgáltam a maximum likelihood típusú becslések (M-becslések) geodéziai alkalmazhatóságát. Ennek keretében különböző robusztus becslési módszereket hasonlítottam össze, és új robusztus becslési eljárásokat is bevezettem. Ilyenek többek között a Huber-, Hampel-, Soproni- és L_p normás becslések, valamint egyéb, különböző súlyfüggvényekre alapozott megoldások. A Helmert- és a projektív transzformációkra is megadtam az M-becslési módszerekből levezetett iteratív súlyozási szabályokat. A Percy Tham- és Tárczy-Hornoch-féle módszerekre is kidolgoztam az M-becslési modelleket.

A 3. fejezetben az L_p normás becslések elméletét tárgyaltam és megoldást adtam a Gauss- Markov modellre, a két- és háromdimenziós (2D-3D) hasonlósági transzformációkra.

A digitális fotogrammetria sok adatból álló és durva hibákkal terhelt adatrendszereinek különböző transzformációinak végrehajtásához robusztus becslési módszereket szükséges ismerni. A 4. fejezetben L_1 normában megalkottam a Helmert-, a projektív és a 3D hasonlósági transzformáció matematikai modelljét.

Az 5. fejezetben tanulmányoztam és kidolgoztam a Boscovich-Laplace feltétel alkalmazását az L_1 normás becslésekre. Ezen megoldást is kiterjesztettem a lineáris regresszióra és a nemlineáris hasonlósági transzformációkra. A különböző eljárásokat Monte Carlo módszerrel teszteltem.

A nem teljes rangú Gauss-Markov kiegyenlítő számítási modellek matematikailag korrekt feldolgozása az SVD módszerrel történik. A szinguláris vagy numerikusan közel szinguláris normálmátrixszal rendelkező geodéziai problémák nagy középphibával oldhatók meg. A robusztus becslési módszerek tanulmányozása során szerzett tapasztalatokat felhasználva a 6. fejezetben kidolgoztam egy olyan becslési módszert, amely az LN megoldásokat súlyozza és minimális középphibát ad.

A sztochasztikus folyamatok analizálásának első lépése a determinisztikus összetevő eltávolítása. A 7. fejezetben megvizsgáltam, hogy az általam általánosított spline interpoláció alkalmas-e a trend leválasztására. Az alacsony frekvencia komponensek kiszűrését a trigonometrikus interpoláció újfajta alkalmazásával kíséreltem meg.

A térinformatikában, a digitális képfeldolgozásban előforduló nagyméretű adatrendszerek tömörített formában való tárolása alapvetően fontos feladat. A wavelet transzformáció ortogonális tulajdonságát kihasználva a 8. fejezetben azt kaptam, hogy kiválóan alkalmas az adatrendszerek tömörítésére.

Az elméleti levezetésekén túlmenően valamennyi módszerre kifejlesztettem a gyakorlati alkalmazásokhoz szükséges programrendszereket is.

1. A ROBUSZTUS BECSLÉSEK VALÓSZÍNŰSÉGI MODELLJE

Az elmúlt időszakban a geodéziai szakirodalomban számos, a robusztus becslések témaköréhez kapcsolódó tanulmány jelent meg. A geodéziai és fotogrammetriai méréseket a véletlen jellegű hibák mellett szabályos és durva hibák terhelhetik, és figyelembe nem vételük, illetve kiszűrésük nélkül a legkisebb négyzetek elve alapján történő kiegyenlítés eredménye bizonytalan lesz. Ennek megfelelően a durva hibák kiegyenlítés előtti felderítése igen fontos fázisa a geodéziai számításoknak. Kiszámú mérési adat feldolgozása esetén nem is jelent nagy gondot ez az ellenőrzés, de a számítástechnika fejlődése, az automatikus adatnyerés és feldolgozás igénye már megnehezíti az adatok manuális ellenőrzését. További gondot jelent az is, hogy a mérési adatokat "szennyező" kisebb durva hibák nehezen deríthetők fel. Ezek a tények alapozták meg azt az igényt, hogy a geodéziában megszokott számítási módszerek mellett új módszereket dolgozzunk ki a durva mérési hibák szűrésére. Ebben a fejezetben összefoglalom a geodéziai adatok feldolgozásához leginkább alkalmazott különböző robusztus becslési eljárásokat. A magyar geodéziai szakirodalomban *Detrekői* (1986) tanulmánya tárgyalta először a robusztus becslések alkalmazását mérési adatok feldolgozásához. A téma jelentőségét mutatja, hogy *Detrekői* (1991) a kiegyenlítő számítást tárgyaló könyvében külön fejezetet szentelt e témának. *Soha* (1986) a mérési javításoktól függő súlyozásokon alapuló megoldást ismertetett.

1.1 A normalitás problémája

A megfigyelések alapján való paraméterbecslésre (kiegyenlítés) a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazzák. Ez a becslési eljárás akkor előnyös, ha a mérési hibák normális eloszlásúak, azaz a méréseket csak véletlen jellegű hibák terhelik. A normális eloszlással való összekapcsolás Gausstól származik. Megállapította, hogy az ismeretlenek legvalószínűbb értékét csak akkor lehet meghatározni, ha ismerjük a hibák

eloszlásfüggvényét. Egy ilyen függvényt ismerni csak elméleti úton, feltételezéssel lehetséges. Az ilyen jellegű becslés alapján feltételezhető, hogy a hiba valószínűsége arányos a normális eloszlás sűrűségfüggvénye alapján képzett exponenciális kifejezéssel.

Annak ellenére, hogy a legkisebb négyzetek módszere nagyon jól alkalmazható és általánosan elterjedt a geodéziai gyakorlatban, alkalmazhatóságának elméleti háttere nem teljesen problémamentes. A méréseket terhelő durva hibák következtében nem mindig a számtani közép adja a legvalószínűbb értékeket. Hatásukra a hibák eloszlása eltér a normális eloszlástól. A kiegyenlítés ezeket a hibákat elkeni, és ezáltal a becslés bizonytalanná válik. Alapvető kérdés a durva mérési hibák hatástalanítása.

1.2 A durva hibák felderítése statisztikai tesztekkel

A durva hibák felderítésére általában a legkisebb négyzetek elvén való kiegyenlítés eredményeinek statisztikai teszteken alapuló szűrését alkalmazzák. Ennek az elvnek számos változata ismert. A geodéziai gyakorlatban leginkább a *Baarda* (1968) által kidolgozott tesztelési módszer, a data-snooping terjedt el. Ez a tesztelés nagyon munkaigényes, mivel igényli vagy a normálegyenlet mátrixának invertálását, vagy a kiegyenlítés megismétlését az egyedi kiugró mérések fokozatos egyenkénti kizárásával. Abban az esetben, ha több durva hiba terheli a méréseket, nem biztos, hogy jó eredményt ad, mivel azt a döntést, ami kizár egy „hibás” mérést, a további számítások során nem vizsgálják felül. Így előfordulhat, hogy a kiegyenlítés során a „hibátlan” megfigyeléshez rendelt javítás miatt ezt a jó megfigyelést kiszűrjük. A durva hibák felderítésének τ statisztikán alapuló módszerét *Kubik* et al. (1985) ismerteti.

1.3 A robusztus becslés fogalma

Amíg az igen durva hibák viszonylag könnyebben kiszűrhetők, addig a kisebb hibákkal terhelt – a statisztikai irodalomban „szennyezett”-nek nevezett – megfigyelések nehezebben deríthetők fel. A legkisebb négyzetek módszere, amely

alapját képezi a különböző matematikai-statisztikai tesztelési eljárásoknak, ezeket a hibákat szétosztja a többi megfigyelésre. Ez a felismerés vezetett olyan becslési eljárások kidolgozásához, amelyek relatíve érzéketlenek a mérések eloszlásfüggvényeinek kis változásaira és így a durva és szabályos hibák jelenlétére is. Ilyenek a robusztus becslések. A robusztusság fogalmát *Box* (1953) vezette be. A robusztus becslések elvére számos megoldást dolgoztak ki, de a legismertebbek a *Huber* (1981) és a *Hampel* (1985) által javasolt módszerek. Ez a technika eltér a statisztikai teszteléseken alapuló eljárásoktól, elsősorban annál a tulajdonságánál fogva, hogy minden adatot felhasznál a becslés során, és sima átmenetet biztosít a teljes elfogadás és teljes elvetés között.

A robusztus kiegyenlítés során a mérések eloszlásának normalitása nem szükséges feltétel.

A mérési hibákat sztochasztikus valószínűségi változóknak tekintjük az alábbi eloszlással:

$$F = (1 - \varepsilon)\Phi + \varepsilon H \quad , \quad (1.1)$$

- ahol Φ a normáeloszlás, H a durva hibák ismeretlen eloszlásának eloszlásfüggvénye és ε az a valószínűség, amellyel a durva hibák fellépnek. A megfigyelések csaknem normális eloszlásúak, és a feltételezett középhiba igaz a mérési értékek többségére. Léteznek azonban olyan megfigyelések (durva hibák), amelyek az alapmodellnek nem felelnek meg. Ezek eloszlása ismeretlen.

A becslési függvények matematikai összefüggések a mért megfigyelési értékek és a keresett paraméterek között. A robusztus becslési függvények fontos jellemzője a töréspont, amely a becslés robusztusságának mértéke.

A robusztus becslési módszerek közül a geodéziában az elsőként a *Huber* (1964) által javasolt maximum likelihood módszer (M-becslés) jelent meg. A módszer kialakulása Bernoulli munkásságáig nyúlik vissza. Elméleti szempontból a legjelentősebb általánosan használható robusztus becslési módszer.

1.4 Matematikai alapfogalmak

A vizsgált valószínűségi változó **sűrűségfüggvényét** az alábbi formában is megadhatjuk:

$$f(y_i; x) = e^{-\rho(y_i; x)} \quad , \quad (1.2)$$

- ahol y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) a valószínűségi változóra vett független mintaelemek.

A sűrűség függvény logaritmusát képezve a **célfüggvény**hez jutunk:

$$\sum_i \rho(y_i; x) \rightarrow \min \quad , \quad (1.3)$$

- ahol $\rho(y_i; x) = -\ln f(y_i; x)$.

Feltesszük, hogy ρ differenciálható, konvex függvény.

Az x változó szerinti derivált képzésével a **hatásfüggvény**et kapjuk:

$$\psi(y_i; x) = \frac{d\rho(y_i; x)}{dx} \quad . \quad (1.4)$$

Feltételi egyenlet: a szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a derivált függvény zérus legyen a keresett helyen:

$$\sum_i \psi(y_i; x) = 0 \quad . \quad (1.5)$$

A matematikai modellhez tartozó **súlyfüggvény**et a következő módon definiáljuk:

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{\psi(x)}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases} \quad . \quad (1.6)$$

1.5 A robusztus kiegyenlítő számítási modell

A módszer elve: az ismeretlen \mathbf{x} paramétervektort a vizsgált valószínűségi változóra vett megfigyelési minta alapján úgy kell becsülni, hogy a sűrűségfüggvény maximumot vegyen fel. Ehhez ismernünk kell a vizsgált valószínűségi változó sűrűségfüggvényét, vagy feltételezéssel kell élni a sűrűségfüggvény típusára vonatkozóan. Az (y_1, y_2, \dots, y_n) független megfigyelési minta alapján az együttes sűrűségfüggvény így adható meg:

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \mathbf{x}) \quad , \quad (1.7)$$

- ahol f a vizsgált valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.

A likelihood elv szerint a többváltozós sűrűségfüggvény maximumát kell az \mathbf{x} paraméter vektor ismeretlenjeként megkeresni. A sűrűségfüggvény logaritmus az ún. likelihood függvény:

$$L = \ln f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \ln f(y_i; \mathbf{x}) \quad . \quad (1.8)$$

A többváltozós függvény szélsőérték helyének megkereséséhez képezni kell a parciális deriváltakat, azokat egyenlővé kell tenni nullával. Így adódik egy egyenletrendszer, amelynek a megoldása szolgáltatja az \mathbf{x} paramétervektor maximum likelihood elv szerinti becslését.

Normál eloszlású megfigyelések esetén ez az egyenletrendszer lineáris lesz, és megállapítható, hogy a maximum likelihood elv szerinti becslés és a legkisebb négyzetek elve szerinti becslés azonos eredményre vezet. Minden más eloszlás esetén nemlineáris egyenletrendszer adódik, amelynek a megoldásához iteratív numerikus eljárásokra van szükség.

Ilyen algoritmusokat ad meg *Beaton* és *Tukey* (1974) és *Tukey* (1960).

1.6 Robusztus becslési módszerek

Legyen $\boldsymbol{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ valószínűségi vektor változó $\mathbf{y}^T = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ mintaelemeinek együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(y_i; x_1, x_2, \dots, x_m) \quad , \quad (1.9)$$

- ahol $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$, és R^m a becslési tartomány.

Az (1.8) összefüggés alapján a likelihood függvényre az alábbi kifejezést kapjuk:

$$L(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \ln f(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \ln f(y_i; \mathbf{x}) \quad . \quad (1.10)$$

A likelihood becslés a parciális deriváltak nullával való egyenlőségének szükségességéből adódik:

$$\frac{\partial L(\mathbf{y}; \mathbf{x})}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f(y_i; x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_j} = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, m \quad . \quad (1.11)$$

1.7 Speciális esetek

Elméleti és gyakorlati szempontból két fontos esetet tárgyalunk.

1.7.1 Normális eloszlás

Az együttes sűrűségfüggvény:

$$f(\mathbf{y}; \vartheta, \sigma) = \prod_{i=1}^n \varphi(y_i; \vartheta, \sigma) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \vartheta)^2} \quad , \quad (1.12)$$

- ahol σ a szórás,
 ϑ a várható érték.

A likelihood függvény:

$$L(\mathbf{y}; \vartheta, \sigma) = \ln c - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \vartheta)^2 . \quad (1.13)$$

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele alapján:

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \vartheta) = 0 , \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = -n + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \vartheta)^2 = 0 , \quad \sigma \neq 0 .$$

A fentiekből az ismeretlen paraméterek becslésére az alábbi összefüggések adódnak:

$$\hat{\vartheta} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} , \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \left(y_i - \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right)^2}{n} . \quad (1.15)$$

Tehát a hagyományos becslési eljárás normális eloszlás esetén a várható értéket a számtani középpel, a szórásnégyzetet a tapasztalati (empirikus) szórásnégyzettel becsüli.

1.7.2 Laplace eloszlás

A kétoldalú exponenciális eloszlás, azaz a Laplace eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(y; \vartheta, \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|y-\vartheta|}{\sigma}} . \quad (1.16)$$

Az együttes sűrűségfüggvény:

$$f(\mathbf{y}; \vartheta, \sigma) = \frac{1}{(2\sigma)^n} \prod_{i=1}^n e^{-\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |y_i - \vartheta|} . \quad (1.17)$$

A likelihood függvény:

$$L(\mathbf{y}; \vartheta, \sigma) = \ln c - n \ln \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |y_i - \vartheta| . \quad (1.18)$$

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele alapján:

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = n^+ - n^- = 0 , \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = -n + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |y_i - \vartheta| = 0 , \quad \sigma \neq 0 ,$$

- ahol n^+ és n^- a pozitív és negatív deriváltak száma.

A fenti egyenletekből az ismeretlen paraméterek becslésére az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\hat{\vartheta} = \underset{i \in n}{\text{med}} y_i , \quad \hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \vartheta|}{n} . \quad (1.20)$$

Tehát Laplace eloszlás esetén a várható érték becslésére a medián, a szórás becslésére a legkisebb abszolút eltérés (LAD) adódik.

1.8 Különböző robusztus becslési módszerek

1.8.1 Huber módszer

A legkisebb abszolút értékek összegének módszere normális eloszlású megfigyelések esetén nem ad olyan pontos becsléseket, mint a legkisebb négyzetek módszere. Ezért *Huber* (1964) kidolgozott egy robusztus ρ függvényt, amely a következő minimum-feltételt elégíti ki:

$$\sum_i \rho(y_i; x) \rightarrow \min . \quad (1.21)$$

Az (1.21) összefüggésben a ρ célfüggvény a következő:

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & , |x| \leq a \quad \text{- normál eloszlás} \\ a|x| - \frac{a^2}{2} & , |x| > a \quad \text{- Laplace eloszlás} \end{cases} , \quad (1.22)$$

és a célfüggvény ψ hatásfüggvénye:

$$\psi(x) = \begin{cases} x & , |x| \leq a \\ a \frac{x}{|x|} & , |x| > a . \end{cases} \quad (1.23)$$

Az a állandó érték, amit általában 1.5-nek vesznek, de a hibamodell feltételezése alapján változtatható. A módszer $a \rightarrow \infty$ esetén az L_2 norma megoldását adja. A Huber-féle becslés hibamodellje a közepén normális eloszlású és a széleken duplán exponenciális. Huber megoldását *Carosio* (1979) alkalmazta geodéziai problémák robusztus kiegyenlítésére.

1.8.2 Hampel módszer

A Huber-féle becslés ún. nem csökkenő becslés az ψ függvény alakja miatt. Az ilyen típusú becslésekre az jellemző, hogy minden megfigyelés befolyásolja a becslést. A kiugró értékek kizárása érdekében Hampel (1985) egy csökkenő becslési függvényt javasolt, ami a robusztus tulajdonságok mellett egyes megfigyelések kizárását is biztosítja. Hampel célfüggvénye a következő:

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & , |x| \leq a \\ a|x| - \frac{a^2}{2} & , a < |x| \leq b \\ -\frac{a}{2} \frac{(c-|x|)^2}{c-b} + \frac{a}{2}(b+c-a) & , b < |x| \leq c \\ \frac{a}{2}(b+c-a) & , |x| > c , \end{cases} \quad (1.24)$$

és a célfüggvény ψ hatásfüggvénye:

$$\psi(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq |x| \leq a \\ a \operatorname{sign}(x) & , a < |x| \leq b \\ a \frac{c-|x|}{c-b} & , b < |x| \leq c \\ 0 & , |x| > c , \end{cases} \quad (1.25)$$

- ahol $0 < a < b < c < \infty$.

Mivel az ψ függvény csökkenő, vagy leszálló, a hozzátartozó célfüggvény nem konvex, ennek következtében a numerikus megoldásnál konvergencia-problémák léphetnek fel.

Hampel az állandók értékeire a következő választást javasolta:

$$a = 2 , \quad b = 4 , \quad c = 8 .$$

Hampel módszerével a dán alaphálózatot *Borre et al.* (1983) egyenlítették ki.

1.8.3 Dán módszer

A módszert Krarup ötlete alapján fejlesztették ki (Krarup et al. 1980), és elsődleges célja a durva hibák kiszűrése. Ez a becslési eljárás az előzőleg tárgyaltakhoz hasonlóan a legkisebb négyzetek elve alapján történő kiegyenlítéssel indul. Az eredetileg Krarup által javasolt modell súlyfüggvénye nem volt folytonos, így numerikus instabilitáshoz vezetett. Az a paraméter alkalmas választásával a szakadás megszüntethető és a becslési módszer beilleszthető a robusztus becslések osztályába.

A célfüggvény:

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & , |x| \leq a \\ \frac{5}{2}a^2 - a(a + |x|)e^{-\frac{|x|}{a}+1} & , |x| > a . \end{cases} \quad (1.26)$$

A hatásfüggvény:

$$\psi(x) = \begin{cases} x & , |x| \leq a \\ xe^{-\frac{|x|}{a}+1} & , |x| > a . \end{cases} \quad (1.27)$$

Az első kiegyenlítés javításai alapján új súlyokat határoznak meg az egyes mérésekhez a következő súlyfüggvény alapján:

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & , |x| \leq a \\ e^{-\frac{|x|}{a}+1} & , x > a . \end{cases} \quad (1.28)$$

Az a állandó értékének általában 2 vagy 3 a javasolt. Ezekkel a súlyokkal egy újabb kiegyenlítést hajtanak végre, és az eljárást addig ismétlik, míg nem konvergál (5-10 iteráció). Az eljárás végén a durva hibák súlya közel nulla lesz. A különböző jellegű geodéziai problémák megoldásához lehetőség van különböző súlyfüggvények felvételére. A módszer alkalmazását mutatta be Somogyi és Závoti (1993).

1.8.4 Soproni módszer

Ez a matematikai modell a Huber módszer módosításának tekinthető. A centrumban megtartja a Gauss eloszlást, a szárnyakon viszont a Laplace eloszlást a gyakorlatban igen sokszor előforduló Cauchy eloszlással pótolja.

A célfüggvény:

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & , |x| \leq a \\ a^2 \ln \frac{\sqrt{e}}{2} \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right) & , |x| > a . \end{cases} \quad (1.29)$$

A hatásfüggvény:

$$\psi(x) = \begin{cases} x & , |x| \leq a \\ \frac{2x}{1 + \frac{x^2}{a^2}} & , |x| > a . \end{cases} \quad (1.30)$$

A súlyfüggvény:

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & , |x| \leq a \\ \frac{2}{1 + \frac{x^2}{a^2}} & , |x| > a . \end{cases} \quad (1.31)$$

Somogyi és Závoti (1996) különböző robusztus becslési módszereket hasonlít össze.

2. AZ ITERÁCIÓS ÚTON ÚJRA SÚLYOZOTT LEGKISEBB NÉGYZETEK MÓDSZERE

Különböző tudományterületeken, így a geodézia területén is az adatok feldolgozásához leginkább a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazzák. Az LNM-nek előnyei vitathatatlanok és szerepe a jövőben sem fog csökkenni, főleg olyan adatok esetén, amelyeknél a mérési hibák eloszlása normálisnak tehető fel. Általában a hibák normális eloszlásának feltételezése csak közelítőleg érvényes, sőt kiugró értékek jelenléte esetén kevert eloszlás adódik. A probléma megoldására robusztus becslési módszereket fejlesztettek ki. A robusztusság bizonyos határok között a feltételezésektől való eltérések iránti érzéketlenséget jelenti. Így a jó robusztus becslés megfelelően hatásos (rendszerint 90-95 %), ha a hibák eloszlása normális, de akkor is igen hatásos, ha az adatok között kiugró értékek is előfordulhatnak (hosszúfarkú eloszlás). Számos robusztus módszert dolgoztak ki, ezek többségében maximum likelihood típusú ún. M-becslések, amelyeknek hatásfüggvényei (ψ függvény) általában nemlineárisak, és így a LNM-hez viszonyítva bonyolultabb iterációs megoldást igényelnek.

A különböző iterációs megoldások közül a geodéziai gyakorlathoz is közel állnak a *Beaton* és *Tukey* (1974), valamint *Andrews* (1974) által javasolt súlyfüggvényekre alapozott becslések, amelyek visszavezethetők az iterációs úton újra súlyozott LNM-re. Itt a súlyfüggvény kiszámítását kell megadni, és azután bármilyen meglévő súlyozott legkisebb négyzetes algoritmus felhasználható a megoldáshoz.

2.1 Az M-becslés fogalma

A modern kiegyenlítő számítási módszerek figyelembe tudják venni azt is, hogy a megfigyelések nem minden esetben tökéletesen normális eloszlásúak. Az M-becslések különösen alkalmasak geodéziai feladatok megoldására, mindenek előtt a geodéziában leggyakrabban alkalmazott legkisebb négyzetek módszerével való hasonlósága miatt. E

módszer esetén az ismeretleneket és a javításokat úgy kell meghatározni, hogy teljesüljön az alábbi feltétel:

$$\sum \rho(v_i) \rightarrow \text{minimum} . \quad (2.1)$$

A nehézség a ρ függvény helyes megválasztásában rejlik. $\rho(v) = v^2$ függvény esetén a legkisebb négyzetek módszere szerinti becsléshez jutunk. *Huber* (1981), *Hampel* (1974), *Andrews* (1974), *Carosio* (1992) javasoltak különböző célfüggvényeket, amelyek a megoldás során általában nemlineáris egyenletrendszerekre vezetnek. *Borutta* (1988) geodéziai alkalmazásokat mutatott be disszertációjában.

A többváltozós függvények extrémális pontjainak meghatározási eljárásának megfelelően a parciális deriváltak képzésével a hatásfüggvény alapján jutunk a nemlineáris egyenletrendszerhez. Minden hatásfüggvényhez levezethető a neki megfelelő súlyfüggvény. Ezen súlyfüggvények segítségével képezzük a normálegyenleteket. Számos numerikus módszer létezik, amelyek alkalmazásával az ismeretlenek becsléseit megkaphatjuk. Valamennyi eljárás iteratív. Első lépésben a súlyokat egységnyinek választjuk, és a következő iterációk során a normálegyenleteket a súlyfüggvény alapján módosított súlyokkal képezzük. Az egész eljárást egy általunk választott kritérium alapján meghatározott iteráció elvégzése után állítjuk le.

Programrendszerünkben a javításokat iterációként osztályokba soroljuk és az iterációt akkor állítjuk le, ha két egymást követő iterációban a javítások osztályokba sorolása nem változik meg. Az osztályba sorolások paramétereit a robusztus becslési függvények töréspontjai alapján határozzuk meg. Egységes programrendszert dolgoztunk ki a Gauss (normális), a Cauchy, a Welsch, a Laplace (L_p norma), a Lognormális eloszlások kiegyenlítésére, valamint a Huber, a Soproni, a Dán, továbbá az Andrews, a Biweight, a Háromszög módszerek közös kezelésére.

Kerékfy (1978) alapján a normális és a Laplace eloszlású becslésekre az alábbi levezetéssel származtathatunk cél-, hatás-, és súlyfüggvényeket:

A standard normális eloszlás esetén az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2.2)$$

sűrűségfüggvényből az (1.3) formula alapján származtathatjuk a ρ függvényt:

$$\rho(x) = 0.5 \ln(2\pi) + \frac{x^2}{2} . \quad (2.3)$$

Az (1.4) összefüggés alapján kapjuk a ψ hatásfüggvényt:

$$\psi(x) = x . \quad (2.4)$$

Az (1.6) összefüggés definiálja a standard normális eloszlásra levezetett súlyfüggvényt:

$$\omega(x) = 1 . \quad (2.5)$$

A Laplace eloszlás esetén teljesen hasonló megfontolás után kapjuk a megfelelő ρ , ψ és ω függvényeket:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} , \quad \rho(x) = \ln 2 + |x| , \quad (2.6)$$

$$\psi(x) = \text{sign}(x) , \quad \omega(x) = \frac{1}{|x|} , \quad x \neq 0 .$$

A robusztus kiegyenlítési eljárások fő előnye a gazdaságosság: automatikusan lehet a nagy adatrendszerekben előforduló durva hibákat kiszűrni.

Valamennyi módszer matematikai összefüggéseit tartalmazza a 2.1 melléklet, a Soproni módszer statisztikai tulajdonságait a 2.2 melléklet szemlélteti.

2.2 Az M-becslések kiegyenlítése iteratív súlyozással

Tekintsük az (1.7)-(1.9) robusztus becslési modellt. *Huber* (1981) általánosította a maximum likelihood elvet a differenciálható, konvex függvények osztályára. Általában feltesszük, hogy ρ páros függvény, de *Collins* (1976) alapján ez a feltevés sem szükséges.

A robusztus becslések $\rho(x)$ célfüggvénye egy feltételezett eloszlás sűrűségfüggvényére vonatkozik. Így a $\psi(x)$ hatásfüggvényből származtatott ω súlyfüggvény is kapcsolatba hozható a feltételezett eloszlással. Minden $\rho(x)$ függvényhez tartozó $\psi(x)$ függvényből levezethető a megfelelő ω súlyfüggvény, ezért az ismeretlen paraméterek becslésére számos lehetőség adódik. Ezek a súlyfüggvények $\psi(x)$ hatásfüggvény viselkedése alapján is osztályozhatók, ill. minősíthetők. *Holland* és *Welsch* (1977) nyolc különböző ω függvényt hasonlítottak össze úgy, hogy Monte Carlo módszerrel három különböző méretű mintával ezen ω függvényekre alapozott várható érték becslések hatásosságát tanulmányozták. *Kelma* (1976) munkájában az előbb említett nyolc súlyfüggvényt magába foglaló szubrutin könyvtárat ismertet.

A súlyfüggvények egy általánosabb, teljesebb körű statisztikai analízis eredményeként adódó törésmentes-, kevert normális-, és levágó-típusú rendszerezését adja meg az általunk szerkesztett 2.3 melléklet.

Az M-becslések a törésmentes osztályból a Cauchy és Welsch, a kevert normális osztályából a Dán és a Huber, a levágó típusú osztályból az Andrews és Biweight becslési eljárások célfüggvényeit az 2.4 melléklet szemlélteti.

Ugyanezen robusztus becslési módszereknek, ugyanezen felosztás szerinti hatásfüggvényei a 2.5 mellékleten, súlyfüggvényei a 2.6 mellékleten tanulmányozhatók.

2.3 Speciális esetek

Kutatásaink során a szakirodalomban tárgyalt különböző megadott ω súlyfüggvényre alapozott robusztus programcsomagot fejlesztettünk ki. A szakirodalomból ismert súlyfüggvények mellett általunk kidolgozott megoldásokat is kipróbáltunk.

Legyen Koch (1996) alapján az m dimenziós \mathbf{x} ismeretlen paraméterek becslési célfüggvénye az alábbi:

$$\sum_{i=1}^n \rho(y_i; g_i(\mathbf{x})) \rightarrow \min, \quad (2.7)$$

- ahol $g_i(\mathbf{x})$ tetszőleges függvény, amely megadja a megfigyelések és az ismeretlen paraméterek közötti összefüggést.

2.3.1 Lineáris regresszió robusztus becsléssel

Somogyi és Závoti (1996) alapján tekintsük a következő lineáris regressziós modellt:

$$\mathbf{y} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (2.8)$$

- ahol \mathbf{y}

$n \times 1$ vektor,

\mathbf{A} $n \times m$ rendű mátrix,

\mathbf{x} az ismeretlen paraméterek $m \times 1$ vektora és

\mathbf{v} $n \times 1$ javítási vagy hiba vektor.

A \mathbf{x} vektor robusztus becsléséhez a (2.7) egyenletet egy ρ robusztus célfüggvénnyel minimalizáljuk. Lineáris modell esetén:

$$g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = y_i + v_i , \quad (2.9)$$

$$D^2(y_i) = \sigma^2 , \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

- ahol \mathbf{a}_i az \mathbf{A} mátrix i -dik sorának vektora.

A javítások így számolhatók:

$$v_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - y_i , \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (2.10)$$

A fenti javítások helyett a standardizált javításokat vezetjük be:

$$\hat{v}_i = \frac{\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - y_i}{\sigma} = \frac{v_i}{\sigma} , \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (2.11)$$

Tudjuk, hogy

$$\rho'(x) = \psi(x) . \quad (2.12)$$

Tehát a minimum létezése esetén a parciális deriváltak a következő feltételeket elégítik ki:

$$\sum_{i=1}^n \psi \left(\frac{\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - y_i}{\sigma} \right) \frac{a_{ij}}{\sigma} = 0 , \quad j = 1, 2, \dots, m . \quad (2.13)$$

Az ω_i súlyokkal és a v_i javításokkal a hatásfüggvény kapcsolatba hozható.

A súlyfüggvény (1.6) összefüggése, azaz $\psi(x) = x\omega(x)$ definíciója alapján – a $\psi(x) = \text{sign}(x)$ esetet kizárva, ami a medián becsléshez vezet – fenti egyenletünket a következő formába írhatjuk:

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \omega_i v_i a_{ij} = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, m \quad . \quad (2.14)$$

Ugyanis az

$$\omega_i = \frac{\psi\left(\frac{v_i}{\sigma}\right)}{\frac{v_i}{\sigma}} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.15)$$

összefüggésből ψ -t kifejezve kapjuk:

$$\psi\left(\frac{v_i}{\sigma}\right) = \omega_i \frac{v_i}{\sigma} \quad . \quad (2.16)$$

A javítások (2.10) összefüggését felhasználva írhatjuk:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i a_{ij} \left(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - y_i \right) = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, m \quad . \quad (2.17)$$

A fenti egyenletek rendezésével adódik:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \omega_i \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \omega_i y_i \quad , \quad j = 1, 2, \dots, m \quad . \quad (2.18)$$

Ezen egyenleteket mátrix alakba írva adódik a következő összefüggés:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{y} \quad , \quad (2.19)$$

- ahol \mathbf{W} $n \times n$ -es diagonál mátrix.

A továbbiakban feltesszük, hogy a fenti normálegyenlet mátrixa nem szinguláris.

Az ω_i súlyokat a javításokból a (2.15) formula alapján az $\omega(v) = \psi(v)/v$ súlyfüggvénnyel adjuk meg, így a javítások skála invariánsak. Tehát a súlyok kiszámításának formulája:

$$\omega_i = \begin{cases} \psi\left(\frac{\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - y_i}{\sigma}\right) & , \text{ ha } y_i \neq \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \\ \frac{\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - y_i}{\sigma} & \\ 1 & , \text{ ha } y_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} . \end{cases} \quad (2.20)$$

Tehát a lineáris regresszió robusztus becslési módszere a súlyozott legkisebb négyzetek módszerének egyenletrendszerére vezet. Az iteratív legkisebb négyzetek módszerének a k -dik iterációja a Huber-féle algoritmussal:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{(k)} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}^{(k)} \mathbf{y} \quad , \quad (2.21)$$

vagy a Tukey-féle algoritmussal:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + (\mathbf{A}^T \mathbf{W}^{(k)} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}^{(k)} (\mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)}) \quad . \quad (2.22)$$

A javítások minden k lépés esetén meghatározhatók és így $\mathbf{W}^{(k)}$ diagonális súlymátrix átlós elemei becsülhetők:

$$\mathbf{W}^{(k)} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(k)} & & & \\ & \omega_2^{(k)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\psi\left(\frac{v_1^{(k)}}{\sigma}\right)}{\frac{v_1^{(k)}}{\sigma}} & & & \\ & \frac{\psi\left(\frac{v_2^{(k)}}{\sigma}\right)}{\frac{v_2^{(k)}}{\sigma}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\psi\left(\frac{v_n^{(k)}}{\sigma}\right)}{\frac{v_n^{(k)}}{\sigma}} \end{pmatrix} . \tag{2.23}$$

Például a Huber-féle súlyfüggvény alapján az alábbi súlyok adódnak:

$$\omega_i^{(k)} = \begin{cases} 1 & , \quad \frac{|v_i^{(k)}|}{\sigma} \leq a \\ \frac{a}{\frac{|v_i^{(k)}|}{\sigma}} & , \quad \frac{|v_i^{(k)}|}{\sigma} > a \end{cases} , \quad i = 1, 2, \dots, n . \tag{2.24}$$

Az algoritmus első lépésében legyen $\omega_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) és az ismeretlen paraméterek első közelítésére és a javításokra kapjuk:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y} , \tag{2.25}$$

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{A} \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{y} .$$

Az egész eljárást ismételhetjük egy általunk választott k lépésig. Jobb, ha iterációként osztályba soroljuk a javításokat és az iterációt akkor állítjuk le, ha két egymást követő iterációban a javítások osztályba sorolása nem változik meg. Az ilyen típusú robusztus becslések geodéziai és fotogrammetriai alkalmazására már történtek kísérletek. Legismertebb az ún. Dán módszer, *Kraup et al.* (1980), *Götze* (1983) ennek egy változatát dolgozta ki. A Beaton-, Tukey-féle Biweight súlyfüggvényt *Veress és Youcai* (1987) alkalmazta földi fotogrammetriai (close range photogrammetry) feladathoz, *Faig és Owolabi* (1988) az Andrews-féle súlyfüggvényt használta nyalábkiegyenlítéshez, *Somogyi és Kalmár* (1991), valamint *Kalmár* (1994) a sík hasonlósági transzformáció robusztus kiegyenlítésére dolgozott ki egy súlyfüggvényes megoldást. *Somogyi* (1988) a 3D hasonlósági transzformáció modelljét adta meg.

A robusztus kiegyenlítő számítási modellt, a megoldási algoritmusokat az 2.7 melléklet tartalmazza.

A geodéziában gyakori eset, hogy véges sok pont koordinátái adottak egy koordináta-rendszerben, és keressük ugyanezen pontok koordinátáit egy másik koordináta-rendszerben. Ha rendelkezésre áll néhány közös pont mindkét koordináta-rendszerben, akkor megfelelő függvény transzformáció választásával megoldható a feladat. Azt a koordináta-rendszert, amelyből transzformálunk általában kiindulási (lokális) koordináta-rendszernek, ahová transzformálunk cél (globális) koordináta-rendszernek nevezzük. A pontokat, amelyek mindkét rendszerben meg vannak adva, közös pontoknak hívjuk. A gyakorlatban célszerű olyan transzformációt – ha lehetséges – választani, amely a geometriai tulajdonságokat (szögviszonyok, távolságviszonyok, párhuzamossági viszonyok stb. ...) a transzformáció végrehajtása után is megtartja. Az ilyen leképezéseket hasonlósági transzformációknak nevezzük.

Detrekői (1991) alapján a sík 2D hasonlósági – vagy más néven Helmert – ortonormált transzformációjának képlete a következő:

$$\begin{aligned} X &= m x \cos \varphi - m y \sin \varphi = r x - s y , \\ Y &= m x \sin \varphi + m y \cos \varphi = s x + r y , \end{aligned} \tag{2.26}$$

- ahol (x, y) lokális súlyponti koordináták,
- (X, Y) globális súlyponti koordináták,
- $r = m \cos \varphi$,
- $s = m \sin \varphi$,
- φ elforgatás szöge,
- m méretarány.

A következőkben az előzőekben ismertetett súlyfüggvényekre alapozott robusztus megoldásokat a 2D Helmert transzformáció példáján mutatjuk be. A demonstrációhoz ugyanazt a példát választottuk, amelyet *Fuchs* (1980) már használt. A lokális koordináta rendszer 1., 2. és 10. pontjában $0.846 m$, $1.51 m$ és $0.253 m$ durva hibát feltételezünk. A két koordináta rendszer között van $0.0785398 \cdot 10^{-3}$ radián forgatás és mindkét tengely irányában $0.1 m$ eltolás. A két koordináta rendszert a durva hibákkal terhelt 1. és 2. pont segítségével közelítőleg transzformáltuk.

2.1 Példa

Input: A 2.1 táblázat két koordináta-rendszerben adott pontokat tartalmaz.

	X	Y	x	y
1	9500.000	1000.000	9500.000	1000.000
2	10500.000	10000.000	10500.000	10000.000
3	6000.000	9500.000	5999.354	9500.571
4	2500.000	9000.000	2499.393	9000.296
5	500.000	6000.000	499.628	6000.139
6	2500.000	2500.000	2499.903	2500.296
7	8500.000	3000.000	8499.864	3000.768
8	9000.000	6000.000	8999.629	6000.807
9	5500.000	8000.000	5499.472	8000.532
10	4500.000	4500.000	4500.000	4500.453
11	5500.000	3500.000	5499.825	3500.532
12	5863.636	5727.273	5863.287	5727.833

2.1 táblázat. Közös pontok

Output: Az iterációs úton újra súlyozott legkisebb négyzetek módszerével kapott javításokat a 2.2 táblázat, a súlyokat a 2.3 táblázat, a paraméterek becsléseit a 2.4 táblázat adja meg.

pnr		Cauchy	Welsch	Huber	Dán	Andrews	Biweight
1	*	0.827	0.719	0.809	0.845	0.846	0.735
2	*	1.133	1.022	1.116	1.151	1.154	1.037
3		0.010	0.078	0.021	0.000	0.002	0.068
4		0.012	0.085	0.024	0.001	0.003	0.075
5		0.013	0.097	0.026	0.001	0.003	0.085
6		0.012	0.090	0.025	0.001	0.003	0.079
7		0.015	0.096	0.028	0.002	0.003	0.084
8		0.012	0.083	0.024	0.001	0.002	0.073
9		0.005	0.044	0.012	0.001	0.002	0.039
10	*	0.258	0.286	0.263	0.254	0.253	0.282
11		0.008	0.053	0.015	0.001	0.002	0.046
12		0.003	0.017	0.005	0.001	0.000	0.015

2.2 táblázat. $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

pnr		Cauchy	Welsch	Huber	Dán	Andrews	Biweight
1	*	0.055	0.278	0.115	0.000	0.040	0.272
2	*	0.030	0.196	0.062	0.000	0.008	0.193
3		0.997	0.952	1.000	1.000	1.000	1.000
4		0.997	0.944	1.000	1.000	1.000	1.000
5		0.996	0.929	1.000	1.000	1.000	1.000
6		0.996	0.937	1.000	1.000	1.000	1.000
7		0.995	0.929	1.000	1.000	1.000	1.000
8		0.996	0.946	1.000	1.000	1.000	1.000
9		0.999	0.984	1.000	1.000	1.000	1.000
10	*	0.375	0.623	0.734	0.000	0.766	0.709
11		0.998	0.978	1.000	1.000	1.000	1.000
12		1.000	0.998	1.000	1.000	1.000	1.000

2.3 táblázat. Súlyok

	m	φ	c_x	c_y	ATL	LAD	MSE	MED
Cauchy	1.000001	0.000076	0.0772	0.1043	0.1924	0.2735	0.3642	0.0124
Welsch	1.000009	0.000059	0.0988	0.1469	0.2225	0.2265	0.3028	0.0878
Huber	1.000003	0.000073	0.0845	0.1087	0.1972	0.2659	0.3542	0.0244
Dán	1.000000	0.000079	0.0995	0.0988	0.1881	0.2809	0.3740	0.0010
Andrews	1.000000	0.000079	0.1003	0.0940	0.1895	0.2808	0.3742	0.0030
Biweight	1.000007	0.000061	0.0991	0.1422	0.2181	0.2332	0.3113	0.0770

2.4 táblázat. A paraméterek becslései

2.3.2 A síkbeli projektív transzformáció M -becslései iteratív súlyozással

Gruber (1930) tanulmánya alapján a sík centrális projekciójának alapösszefüggései a jólismert törtlineáris egyenletekkel adható meg:

$$X = \frac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + 1}, \quad Y = \frac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + 1}, \quad (2.27)$$

- ahol (x, y) a képpont koordinátái,
 (X, Y) a tárgypont koordinátái,
 $\mathbf{q}^T = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2)$ ismeretlen paraméterek.

A nyolc független ismeretlen paraméter meghatározásához legalább négy nem kollineáris pontpárra van szükség. Négynél több adott pontpár esetén kiegyenlítéssel határozhatjuk meg az ismeretleneket. Az ismeretlen paraméterek meghatározása után az (2.27) egyenletek használhatók tetszőleges, a képkoordináta-rendszerben megadott pontnak a tárgykoordináta-rendszerbe való transzformációjához.

2.3.2.1 Hagyományos kiegyenlítési modell

Az (2.27) formulák közös nevezőjével történő átszorzás, valamint az egyenletek rendezése után kapjuk:

$$\begin{aligned} -X &= -a_1x - a_2y - a_3 + c_1xX + c_2yX, \\ -Y &= -b_1x - b_2y - b_3 + c_1xY + c_2yY. \end{aligned} \quad (2.28)$$

A síkbeli projektív transzformáció hagyományos kiegyenlítési modelljében a tárgykoordináták kapják a javításokat. Mátrixos formában a javítási egyenletek így adhatók meg:

$$\begin{pmatrix} -x_1 & 0 & -y_1 & 0 & -1 & 0 & x_1 X_1 & y_1 Y_1 \\ 0 & -x_1 & 0 & -y_1 & 0 & -1 & x_1 Y_1 & y_1 X_1 \\ -x_2 & 0 & -y_2 & 0 & -1 & 0 & x_2 X_2 & y_2 Y_2 \\ 0 & -x_2 & 0 & -y_2 & 0 & -1 & x_2 Y_2 & y_2 X_2 \\ \vdots & & & & & & & \\ -x_n & 0 & -y_n & 0 & -1 & 0 & x_n X_n & y_n Y_n \\ 0 & -x_n & 0 & -y_n & 0 & -1 & x_n Y_n & y_n X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X_1 \\ -Y_1 \\ -X_2 \\ -Y_2 \\ \vdots \\ -X_n \\ -Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ \vdots \\ v_{x_n} \\ v_{y_n} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Az (X_i, Y_i) $(i = 1, 2, \dots, n)$ pontokhoz rendelt súlyokat jelölje (p_{x_i}, p_{y_i}) .

Ekkor a fenti kiegyenlítő számítási modell normálmátrixa a következőképpen adható meg:

$$\begin{pmatrix} \sum p_{x_i} x_i^2 & 0 & \sum p_{x_i} x_i y_i & 0 & \sum p_{x_i} x_i & 0 & -\sum p_{x_i} x_i^2 X_i & -\sum p_{x_i} x_i y_i X_i \\ 0 & \sum p_{y_i} x_i^2 & 0 & \sum p_{y_i} x_i y_i & 0 & \sum p_{y_i} x_i & -\sum p_{y_i} x_i^2 Y_i & -\sum p_{y_i} x_i y_i Y_i \\ \sum p_{x_i} x_i y_i & 0 & \sum p_{x_i} y_i^2 & 0 & \sum p_{x_i} y_i & 0 & -\sum p_{x_i} x_i y_i X_i & -\sum p_{x_i} y_i^2 X_i \\ 0 & \sum p_{y_i} x_i y_i & 0 & \sum p_{y_i} y_i^2 & 0 & \sum p_{y_i} y_i & -\sum p_{y_i} x_i y_i Y_i & -\sum p_{y_i} y_i^2 Y_i \\ \sum p_{x_i} x_i & 0 & \sum p_{x_i} y_i & 0 & n & 0 & -\sum p_{x_i} x_i X_i & -\sum p_{x_i} y_i X_i \\ 0 & \sum p_{y_i} x_i & 0 & \sum p_{y_i} y_i & 0 & n & -\sum p_{y_i} x_i Y_i & -\sum p_{y_i} y_i Y_i \\ -\sum p_{x_i} x_i^2 X_i & -\sum p_{x_i} x_i^2 Y_i & -\sum p_{x_i} x_i y_i X_i & -\sum p_{x_i} x_i y_i Y_i & -\sum p_{x_i} x_i X_i & -\sum p_{x_i} x_i Y_i & \sum p_{x_i} x_i^2 (X_i^2 + Y_i^2) & \sum p_{x_i} x_i y_i (X_i^2 + Y_i^2) \\ -\sum p_{y_i} x_i y_i X_i & -\sum p_{y_i} x_i y_i Y_i & -\sum p_{y_i} y_i^2 X_i & -\sum p_{y_i} y_i^2 Y_i & -\sum p_{y_i} y_i X_i & -\sum p_{y_i} y_i Y_i & \sum p_{y_i} x_i y_i (X_i^2 + Y_i^2) & \sum p_{y_i} y_i^2 (X_i^2 + Y_i^2) \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

A normálvektor az alábbi alakot veszi fel:

$$\left(-\sum p_{x_i} x_i X_i, -\sum p_{y_i} x_i Y_i, -\sum p_{x_i} y_i X_i, -\sum p_{y_i} y_i Y_i, -\sum p_{x_i} X_i, -\sum p_{y_i} Y_i, -\sum p_{x_i} x_i (X_i^2 + Y_i^2), -\sum p_{y_i} y_i (X_i^2 + Y_i^2) \right)^T. \quad (2.31)$$

Az első lépésben $p_{x_i} = 1$ és $p_{y_i} = 1$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ súlyokkal elvégzünk egy hagyományos kiegyenlítést, majd a kapott javítások alapján a választott M-becslési módszer súlyfüggvénye segítségével meghatározzuk az új súlyokat. Az iterációt addig folytatjuk, amíg a konvergencia egy adott határt el nem ér.

2.2 Példa

Input: *Tárczy-Hornoch* (1941) alapján tekintsük a hagyományos kiegyenlítési modellbe bemenő adatoknak a 2.5 táblázatban megadott koordinátákat.

pnr	X	Y	x	y
5	.000	.000	.000	.000
13	-45.615	56.437	0.000	72.755
3	13.697	43.416	37.948	24.700
4	6.170	18.815	16.712	10.551
7	35.116	-7.040	22.592	-27.057
8	-32.611	66.381	16.533	72.116
9	-56.768	77.970	04.873	97.054
10	-72.283	66.410	-14.760	98.016
12	-48.274	33.986	-16.295	56.788

2.5 táblázat. Közös pontok

Output: A 2.6 táblázat különböző M-becslésekkel kapott paraméterértékeket tartalmaz.

	a ₁	a ₂	a ₃	b ₁	b ₂	b ₃	c ₁	c ₂
Cauchy	.77851	-.63796	-.014	.63652	.79004	-.016	-.0000278	.0002426
Welsch	.77850	-.63811	-.005	.63677	.79006	-.011	-.0000237	.0002439
Huber	.77864	-.63788	-.021	.63650	.79013	-.021	-.0000287	.0002430
Dán	.77866	-.63793	-.019	.63662	.79016	-.019	-.0000268	.0002437
Andrews	.77728	-.63774	.014	.63504	.78897	.002	-.0000544	.0002296
Biweight	.77666	-.63692	-.000	.63437	.78820	.004	-.0000646	.0002180

2.6 táblázat. M-becslések a hagyományos modellel

2.3.2.2 Percy Tham modell

A síkbeli projektív transzformáció *Tham* (1933) tanulmánya alapján a képkoordinátákról tételezzük fel, hogy hibákkal terheltek.

Legyen

$$\begin{aligned} s_x &= a_1^0 x + a_2^0 y + a_3^0 \quad , \\ s_y &= b_1^0 x + b_2^0 y + b_3^0 \quad , \\ \theta &= c_1^0 x + c_2^0 y + 1 \quad . \end{aligned} \quad (2.32)$$

A kezdőértékeket megadhatjuk a hagyományos modell első iterációjából származó értékekkel.

Az $X (a_1, a_2, a_3, c_1, c_2)$ és $Y (b_1, b_2, b_3, c_1, c_2)$ függvényeket közelítsük lineárisan a többváltozós függvények *Taylor* sora szerinti sorbaféjtéssel:

$$X = \frac{s_x}{\theta} + \frac{x da_1}{\theta} + \frac{y da_2}{\theta} + \frac{da_3}{\theta} - \frac{s_x x dc_1}{\theta^2} - \frac{s_x y dc_2}{\theta^2} \quad , \quad (2.33)$$

$$Y = \frac{s_y}{\theta} + \frac{x db_1}{\theta} + \frac{y db_2}{\theta} + \frac{db_3}{\theta} - \frac{s_y x dc_1}{\theta^2} - \frac{s_y y dc_2}{\theta^2} \quad .$$

A fenti egyenletekből a síkbeli projektív transzformáció *Percy Tham*-féle közvetítő egyenleteire a következő kifejezéseket kapjuk:

$$s_x - \theta X = -x da_1 - y da_2 - da_3 + \frac{s_x x}{\theta} dc_1 + \frac{s_x y}{\theta} dc_2 \quad , \quad (2.34)$$

$$s_y - \theta Y = -x db_1 - y db_2 - db_3 + \frac{s_y x}{\theta} dc_1 + \frac{s_y y}{\theta} dc_2 \quad .$$

Az $i = 1, 2, \dots, n$ pontban a *Percy Tham*-féle modell közvetítő egyenleteinek mátrixa a következőképpen adható meg:

$$\begin{pmatrix} -x_1 & 0 & -y_1 & 0 & -1 & 0 & x_1 \frac{s_x}{\theta} & y_1 \frac{s_x}{\theta} \\ 0 & -x_1 & 0 & -y_1 & 0 & -1 & x_1 \frac{s_y}{\theta} & y_1 \frac{s_y}{\theta} \\ -x_2 & 0 & -y_2 & 0 & -1 & 0 & x_2 \frac{s_x}{\theta} & y_2 \frac{s_x}{\theta} \\ 0 & -x_2 & 0 & -y_2 & 0 & -1 & x_2 \frac{s_y}{\theta} & y_2 \frac{s_y}{\theta} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & -x_n & 0 & -y_n & 0 & -1 & x_n \frac{s_x}{\theta} & y_n \frac{s_x}{\theta} \end{pmatrix} . \quad (2.35)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$dX_i = s_x - \theta X_i , \quad (2.36)$$

$$dY_i = s_y - \theta Y_i .$$

Ebben az esetben a normálvektor a következő formában adódik:

$$\left(-\sum x_i dX_i, -\sum x_i dY_i, -\sum y_i dX_i, -\sum y_i dY_i, -\sum dX_i, -\sum dY_i, \sum x_i (s_x X_i + s_y Y_i), \sum y_i (s_x X_i + s_y Y_i) \right)^T . \quad (2.37)$$

A projektív transzformáció *Percy Tham* -féle módszerének robusztus becslési modelljét úgy kapjuk, hogy a (2.35) közvetítő egyenletekhez súlyokat rendelünk – első lépésben $p_{x_i} = 1$; $p_{y_i} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – és ezen súlyok felhasználásával végezzük el a kiegyenlítést. A további lépésekben az iteratív robusztus becslés algoritmus szerint hajtjuk végre a számításokat.

2.3 Példa

Input: *Tham* (1939) a 2.5 táblázatban adott pontokból az 5. pontszámmal jelzett pontot törölte.

Output: A 2.7 táblázat különböző M-becslésekkel kapott paraméterekértékeket tartalmaz.

	a ₁	a ₂	a ₃	b ₁	b ₂	b ₃	c ₁	c ₂
Cauchy	.77921	-.63766	-.050	.63679	.79060	-.047	-.0000317	.0002454
Welsch	.77925	-.63770	-.050	.63689	.79072	-.051	-.0000309	.0002463
Huber	.77918	-.63771	-.047	.63682	.79057	-.045	-.0000312	.0002454
Dán	.77919	-.63773	-.047	.63684	.79057	-.043	-.0000308	.0002458
Andrews	.77974	-.63462	-.185	.63367	.78806	.016	-.0000762	.0002179
Bíveight	.77969	-.63461	-.184	.63358	.78797	.019	-.0000770	.0002172
Tham	.77910	-.63780	-.045	.63714	.79073	-.054	-.0000261	.0002465

2.7 táblázat. M-becslések Percy Tham modellel

2.3.2.3 Tárczy-Hornoch modell

Tárczy-Hornoch (1941) tanulmánya alapján a képkoordinátákat tekintjük megfigyeléseknek, így a kiegyenlítés során a képkoordinátákhoz rendeljük a javításokat:

$$X = \frac{a_1(x + v_x) + a_2(y + v_x) + a_3}{c_1(x + v_x) + c_2(y + v_y) + 1}, \quad (2.38)$$

$$Y = \frac{b_1(x + v_x) + b_2(y + v_x) + b_3}{c_1(x + v_x) + c_2(y + v_y) + 1}.$$

A keresett ismeretlenekre vezessük be az $a_1^0, a_2^0, a_3^0, b_1^0, b_2^0, b_3^0, c_1^0$ és c_2^0 közelítő értékeket, amelyeket megkaphatunk például a hagyományos kiegyenlítésből.

Az $X(a_1, a_2, a_3, c_1, c_2)$ és $Y(b_1, b_2, b_3, c_1, c_2)$ függvények Taylor sorfejtésében hanyagoljuk el a másod- és magasabb rendű tagokat, ekkor a (2.38) összefüggésekből kapott javítási egyenletek a következő alakot veszik fel:

$$\begin{aligned}
 s_x - xXc_1^0 + yXc_2^0 - X &= (Xc_1^0 - a_1^0)v_x + (Xc_2^0 - a_2^0)v_y - xda_1 - yda_2 - da_3 + xXdc_1 + yXdc_2, \\
 s_y - xYc_1^0 + yYc_2^0 - Y &= (Yc_1^0 - b_1^0)v_x + (Yc_2^0 - b_2^0)v_y - xdb_1 - ydb_2 - db_3 + xYdc_1 + yYdc_2.
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

A fenti egyenleteket valamennyi illesztőpontra felírhatjuk:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{q} &= \mathbf{b}_1, \\
 \mathbf{R}_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{q} &= \mathbf{b}_2, \\
 &\vdots \\
 \mathbf{R}_n \mathbf{v}_n + \mathbf{A}_n \mathbf{q} &= \mathbf{b}_n,
 \end{aligned}
 \tag{2.40}$$

vagy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{R}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n \end{bmatrix} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix},
 \tag{2.41}$$

- ahol

$$\mathbf{q}^T = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, c_1, c_2),$$

$$\mathbf{b}_i = \begin{pmatrix} s_{x_i} - x_i X_i c_1^0 + y_i X_i c_2^0 - X_i \\ s_{y_i} - x_i Y_i c_1^0 + y_i Y_i c_2^0 - Y_i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} X_i c_1^0 - a_1^0 & X_i c_2^0 - a_2^0 \\ Y_i c_1^0 - b_1^0 & Y_i c_2^0 - b_2^0 \end{pmatrix},
 \tag{2.42}$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} -x_i & 0 & -y_i & 0 & -1 & 0 & x_i X_i & y_i X_i \\ 0 & -x_i & 0 & -y_i & 0 & -1 & x_i Y_i & y_i Y_i \end{pmatrix}.$$

A feladat hipermátrixos alakja:

$$Rv + Aq = b \quad (2.43)$$

Az (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) pontokhoz rendelt súlyokat jelölje (p_{x_i}, p_{y_i}) .

Ezen súlyokat az első lépésben egységnyiinek választjuk. A további iterációs lépések során a súlyok értékének megállapítása a robusztus M becslési módszerek adott súlyfüggvényei alapján történik.

A (2.43) összefüggésben adott kiegyenlítő számítási modell megoldása *Mikhail* és *Ackermann* (1976) alapján:

$$q = \left(A^T (RQR^T)^{-1} A \right)^{-1} A^T (RQR^T)^{-1} b \quad (2.44)$$

- ahol Q a p_{x_i} és p_{y_i} súlyok felhasználásával adódó kofaktor mátrix.

A megoldási algoritmust új súlyok bevezetésével addig ismételjük, amíg az egymás utáni lépésekben számított javítások az általunk választott stabilitási kritériumnak megfelelnek.

2.4 Példa

Input: A 2.5 táblázatban megadott adatokat dolgozzuk fel.

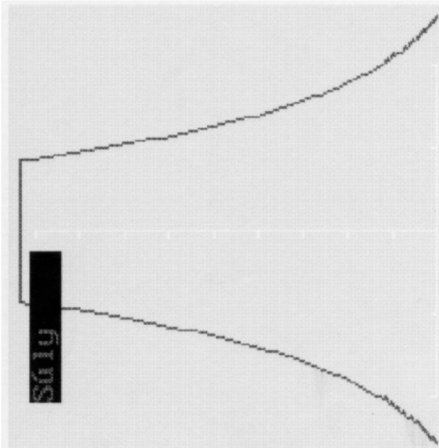
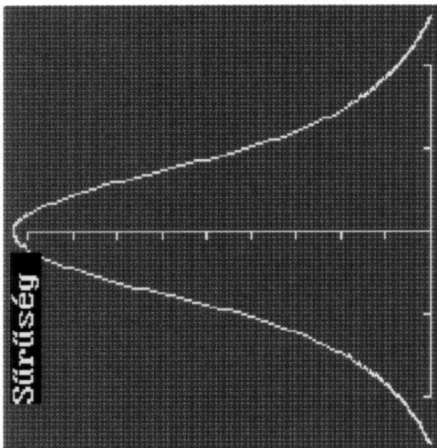
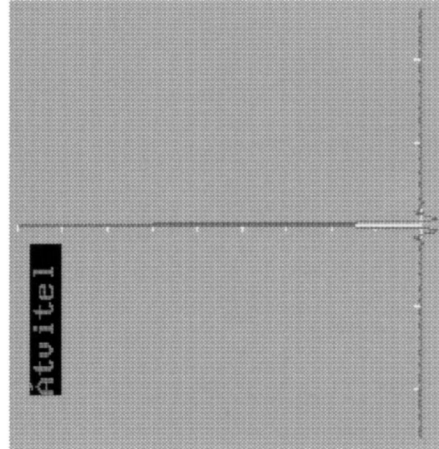
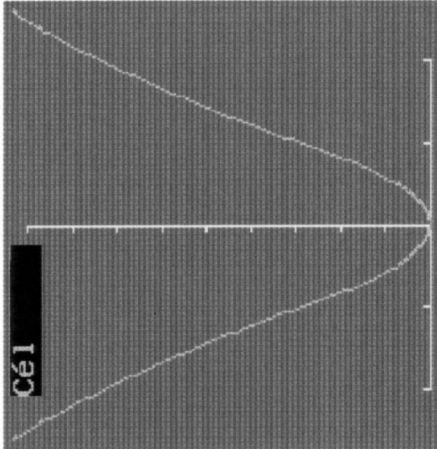
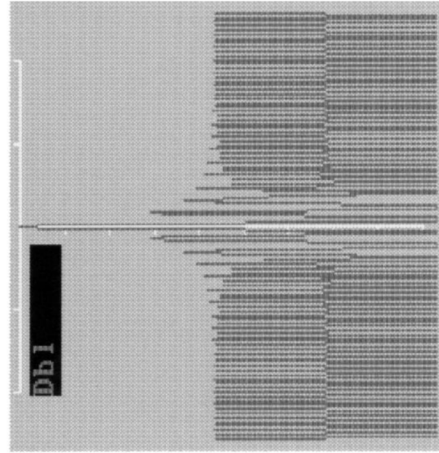
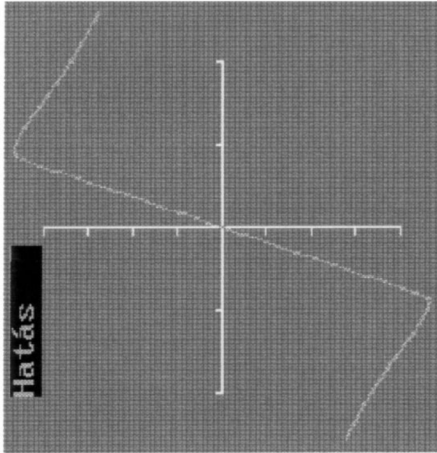
Output: A 2.8 táblázat szemlélteti a különböző M-becslésekkel kapott paraméterek értékeit.

	a ₁	a ₂	a ₃	b ₁	b ₂	b ₃	c ₁	c ₂
Cauchy	.77956	-.63688	-.084	.63465	.78983	-.035	-.0000637	.0002368
Welsch	.77964	-.63554	-.149	.63216	.78915	-.060	-.0000970	.0002232
Huber	.77927	-.63735	-.058	.63541	.78993	-.024	-.0000487	.0002400
Dán	.77929	-.63731	-.060	.63534	.78991	-.025	-.0000499	.0002396
Andrews	.77888	-.63743	-.038	.63527	.78974	-.027	-.0000481	.0002371
Biweight	.77871	-.63743	-.032	.63511	.78962	-.028	-.0000493	.0002352
Tárczy	.77862	-.63774	-.028	.63617	.79008	-.028	-.0000341	.0002414

2.8 táblázat. M-becslések a Tárczy-Hornoch modellel

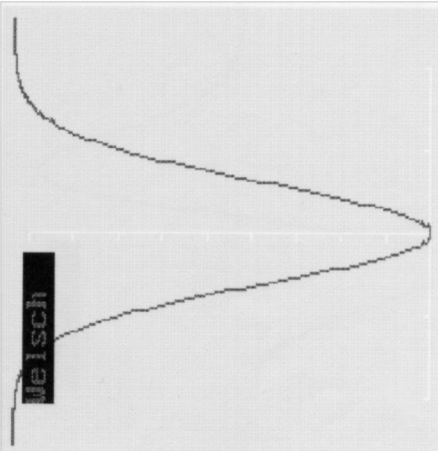
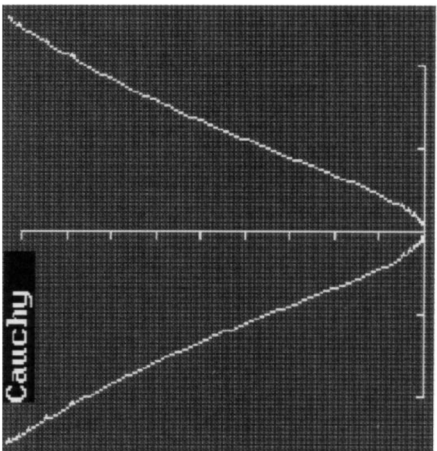
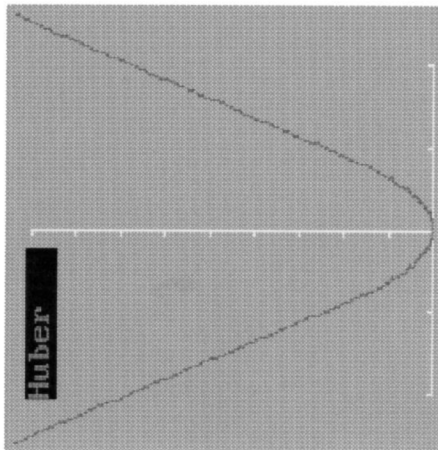
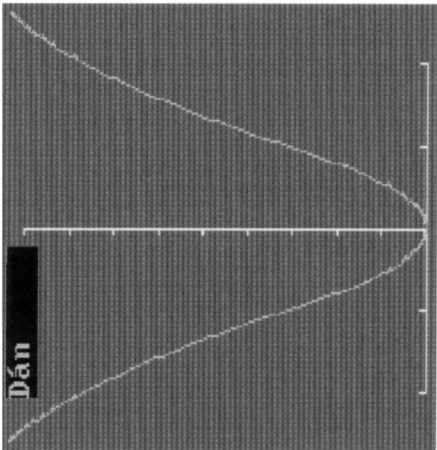
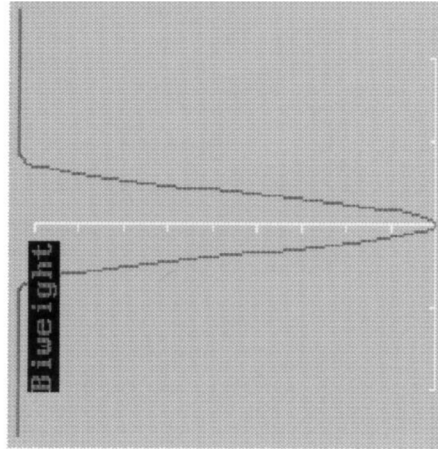
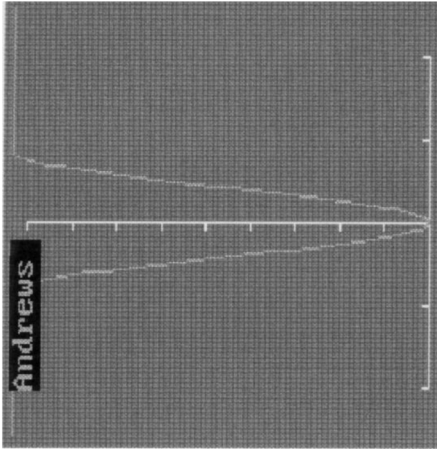
Eloszlás	Sűrűség $f(x)$	Cél $\rho(x)$	Hatás $\psi(x)$	Súly $\omega(x)$
Normális	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$	$\frac{\ln 2\pi}{2} + \frac{x^2}{2}$	x	1
Cauchy	$\frac{1}{a\pi \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)}$	$\ln a\pi + \ln \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)$	$\frac{2x}{1 + \frac{x^2}{a^2}}$	$\frac{2}{1 + \frac{x^2}{a^2}}$
Welsch	$e^{-\rho(x)}$	$\frac{a^2}{2} \left(1 - e^{-\frac{x^2}{a^2}}\right)$	$xe^{-\frac{x^2}{a^2}}$	$e^{-\frac{x^2}{a^2}}$
Laplace	$e^{-\frac{ x ^a}{a}}$	$\frac{ x ^a}{a}$	$ x ^{a-1}$	$ x ^{a-2}$
Log	$e^{-\rho(x)}$	$a^2 \ln \left(\cosh \frac{x}{a}\right)$	$a \tanh \left(\frac{x}{a}\right)$	$\frac{\tanh \left(\frac{x}{a}\right)}{a - \frac{x}{a}}$
Huber	normális eloszlás $ x \leq a$	$\frac{x^2}{2}$ $ x \leq a$	x $ x \leq a$	1 $ x \leq a$
	Laplace eloszlás $ x > a$	$a x - \frac{a^2}{2}$ $ x > a$	$a \frac{x}{ x }$ $ x > a$	$\frac{a}{ x }$ $ x > a$
Sopron	normális eloszlás $ x \leq a$	$\frac{x^2}{2}$ $ x \leq a$	x $ x \leq a$	1 $ x \leq a$
	Cauchy eloszlás $ x > a$	$a^2 \ln \frac{\sqrt{e}}{2} \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)$ $ x > a$	$\frac{2x}{1 + \frac{x^2}{a^2}}$ $ x > a$	$\frac{2}{1 + \frac{x^2}{a^2}}$ $ x > a$
Dán	normális eloszlás $ x \leq a$	$\frac{x^2}{2}$ $ x \leq a$	x $ x \leq a$	1 $ x \leq a$
	ismeretlen eloszlás $ x > a$	$\frac{5}{2}a^2 - a(a + x)e^{-\frac{ x }{a}+1}$ $ x > a$	$xe^{-\frac{ x }{a}+1}$ $ x > a$	$e^{-\frac{x}{a}+1}$ $ x > a$
Andrews	$e^{-\rho(x)}$	$a^2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{a}\right)$ $ x \leq a$	$a \sin \frac{\pi x}{a}$ $ x \leq a$	$\frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{\frac{\pi x}{a}}$ $ x \leq a$
		$2a^2$ $ x > a$	0 $ x > a$	0 $ x > a$
Biweight	$e^{-\rho(x)}$	$\frac{a^2}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^3\right]$ $ x \leq a$	$x \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2$ $ x \leq a$	$\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2$ $ x \leq a$
		$\frac{a^2}{2}$ $ x > a$	0 $ x > a$	0 $ x > a$
Háromszög	$e^{-\rho(x)}$	$x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3a}\right)$ $ x \leq a$	$x \left(1 - \frac{x}{a}\right)$ $ x \leq a$	$1 - \frac{x}{a}$ $ x \leq a$
		$\frac{a^2}{6}$ $ x > a$	0 $ x > a$	0 $ x > a$

2.1 melléklet. Robusztus becslési modellek

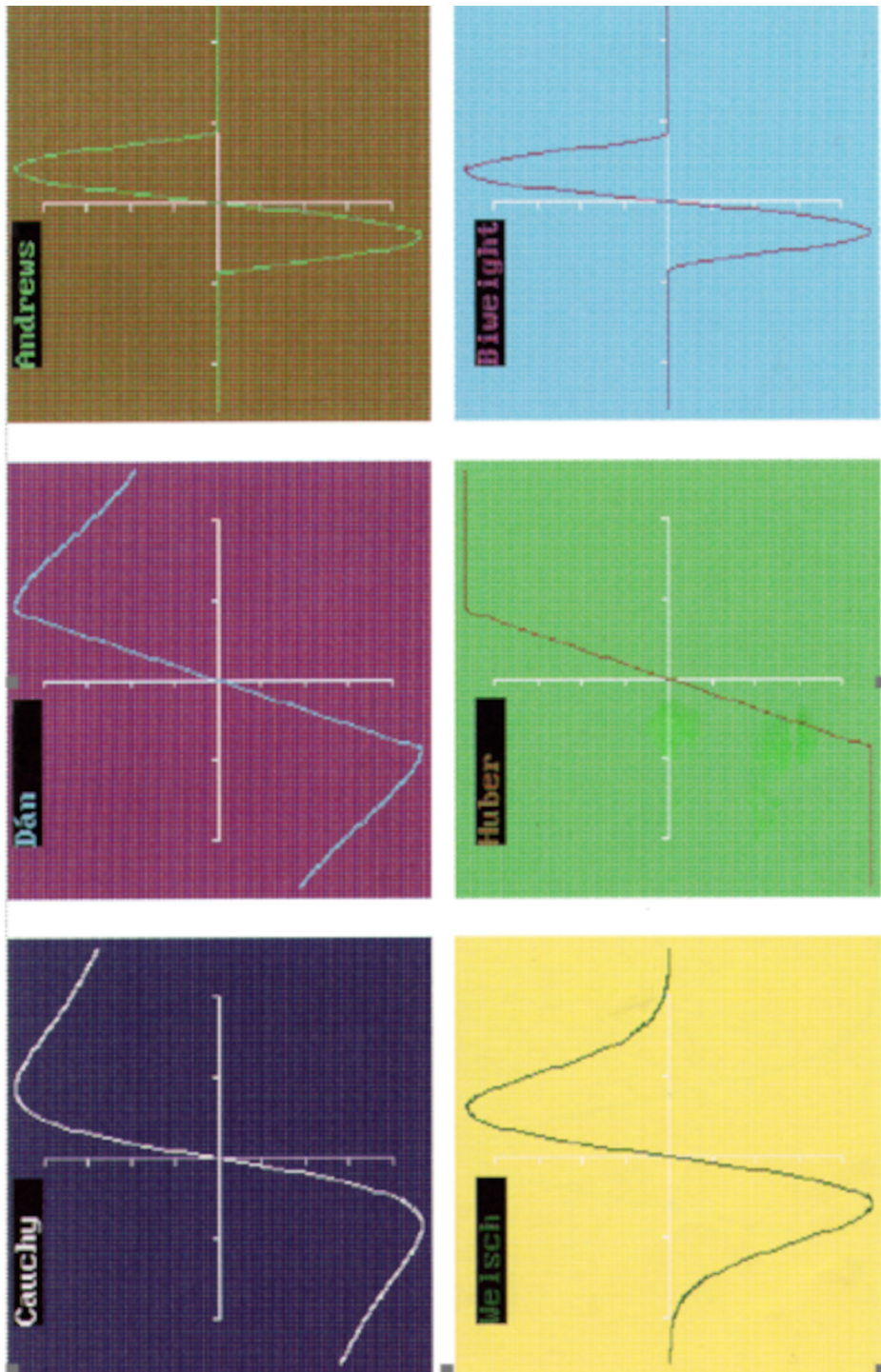


2.2 melléklet. A soproni módszer

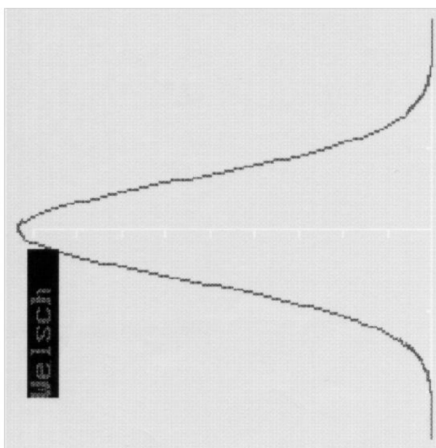
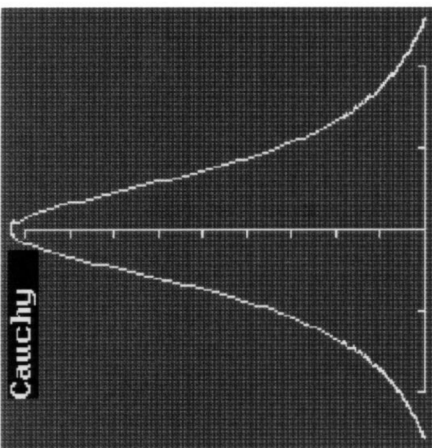
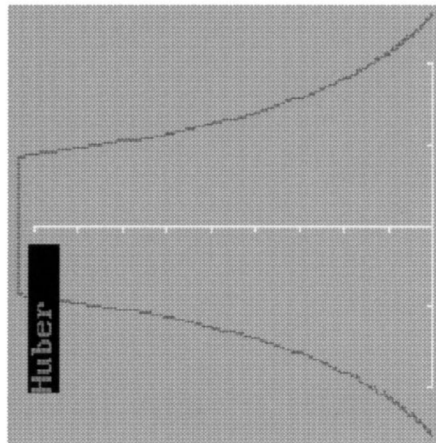
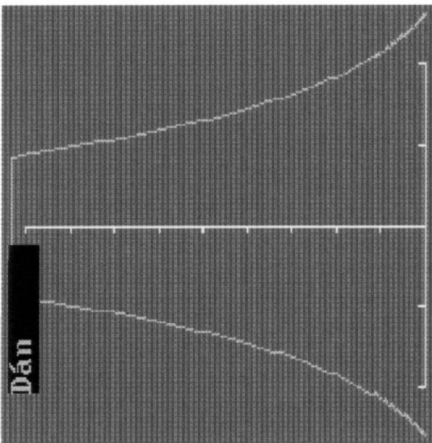
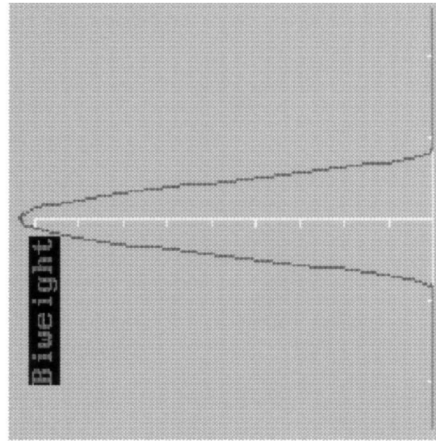
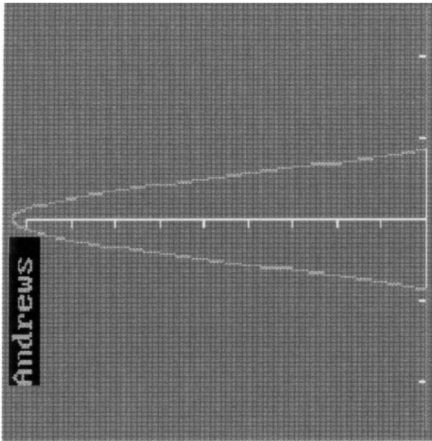
törésmentes $\psi(x)$	kevert normális $\psi(x)$	levágó $\psi(x)$
<u>Cauchy</u>	<u>Dán</u>	<u>Andrews</u>
Ca $\omega(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}}$	D $\omega(x) = \begin{cases} 1 & x \leq a \\ e^{-\frac{x}{a} + 1} & x > a \end{cases}$	A $\omega(x) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{\pi x}{a}}{\pi x} & x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}$
<u>Welsch</u>	<u>Huber</u>	
W $\omega(x) = e^{-\frac{x^2}{a^2}}$	H $\omega(x) = \begin{cases} 1 & x \leq a \\ \frac{a}{ x } & x > a \end{cases}$	<u>Biweight</u> B $\omega(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 & x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}$
<u>Log</u>	<u>Sopron</u>	
Lo $\omega(x) = a \frac{\tanh\left(\frac{x}{a}\right)}{x}$	S $\omega(x) = \begin{cases} 1 & x \leq a \\ \frac{2}{1 + \frac{x^2}{a^2}} & x > a \end{cases}$	<u>Háromszög</u> T $\omega(x) = \begin{cases} 1 - \frac{ x }{a} & x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}$
<u>Laplace</u>		
Lp $\omega(x) = x ^{a-2}$		



2.4 melléklet. Célfüggvények



2.5 melléklet. Hatásfüggvények



2.6 melléklet. Súlyfüggvények

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v} ,$$

$$\sum_{i=1}^n \rho \left(\frac{y_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}}{\sigma} \right) \rightarrow \min , \quad \sigma \text{ adott} ,$$

$$\sigma = 1.48 \left\{ \text{med}_i \left| y_i - \mathbf{a}_i^T \hat{\mathbf{x}}_0 \right| - \text{med}_i \left(y_i - \mathbf{a}_i^T \hat{\mathbf{x}}_0 \right) \right\} .$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \psi \left(\frac{y_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}}{\sigma} \right) = 0 , \quad j = 1, 2, \dots, m .$$

Algoritmusok :

Newton - Raphson

$$\text{I} \quad \hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_0 + \sigma \left[\mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi} \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_0}{\sigma} \right) \mathbf{A} \right]^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi} \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_0}{\sigma} \right) .$$

Huber

$$\text{II} \quad \hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_0 + \sigma \left[\mathbf{A}^T \mathbf{A} \right]^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi} \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_0}{\sigma} \right) .$$

Tukey

$$\text{III} \quad \hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}_0 + \left[\mathbf{A}^T \mathbf{W} \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_0}{\sigma} \right) \mathbf{A} \right]^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_0}{\sigma} \right) (\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_0) .$$

2.7 melléklet. Robusztus kiegyenlítő számítási modell

3. AZ L_p NORMÁS BECSLÉSEK

A geodéziai gyakorlatban leginkább alkalmazott becslés, a legkisebb négyzetek módszere a hibák normális eloszlását tételezi fel. Ez a módszer nagyon érzékeny a normalitástól való eltérésre, különösen, ha a mérések hibáit kiugró értékek vagy hosszúfarjú eloszlásokból származó adatok okozzák. Ezt *Tukey* (1960) mutatta be nagyon meggyőzően a szennyezett normális eloszlásokra vonatkozó tanulmányában. Ezért kiegyenlítés előtt kívánatos a mért adatok ellenőrzése az esetleges durva hibák kiszűrése érdekében. Erre a célra különböző matematikai statisztikai módszereket dolgoztak ki. A geodéziában az adatszűrésre elsőként a *Baarda* (1968) által javasolt tesztelési módszer, a data-snooping terjedt el. A statisztikai tesztelésen alapuló ellenőrzés többletmunkát jelent, nehezíti az adatok automatikus feldolgozását, és talán, ami a leglényegesebb, nem ad biztosítékot az összes „szennyezés” felderítésére. Ez a felismerés vezette a statisztikusokat – elsősorban *Huber* (1964) és *Hampel* (1974) - az ún. robusztus becslési eljárások kidolgozásához, amelyek érzéketlenek a mérések eloszlásfüggvényeinek kis változásaira, és így bizonyos számú durva és szabályos hiba jelenlétére is.

Különböző robusztus becslési eljárások geodéziai alkalmazására történt már néhány kísérlet; például *Carosio* (1979), *Borre et al.* (1983), *Fuchs* (1982), *Somogyi és Kalmár* (1988). Az utóbbi időben *Wicki* (1998) disszertációja készült a robusztus becslések témaköréből.

A következőkben egy olyan megoldási lehetőséget mutatunk be a legkisebb négyzetek módszerének alternatívájaként, amely normális eloszlású adatok esetén alig tér el attól, de szennyezett eloszlások esetén kisebb szórású becslést biztosít.

Ez a módszer a diszkrét L_p normás becslés.

Gauss-Markov matematikai modell

Koch (1987) alapján legyen:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{D}(\mathbf{y}) = \sigma^2 \mathbf{P}^{-1} \quad , \quad E(\mathbf{v}) = 0 \quad , \quad (3.1)$$

- ahol \mathbf{y}_n a megfigyelések egy véletlen vektora,

\mathbf{v}_n a hibák vektora,

\mathbf{x}_m az ismeretlenek vektora,

\mathbf{D}_{nn} az \mathbf{y} vektor kovariancia mátrixa,

\mathbf{P}_{mm} az \mathbf{y} megfigyelések ismert súlymátrixa,

σ ismeretlen tényező, súlyegység szórása,

\mathbf{A}_{nm} együttható mátrix.

Feladat: az ismeretlen \mathbf{x} paramétervektort úgy kell becsülni, hogy a \mathbf{v} hiba vektor

$$\left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.2)$$

normája minimális legyen tetszőleges $1 \leq p < \infty$ értékre.

* Ha $p=1$, akkor az L_1 norma adódik, és a hibák abszolút értékének összegét minimalizáljuk. Ekkor a hibák eloszlása Laplace vagy exponenciális eloszlásfüggvény.

* Ha $p=2$, akkor a jólismert legkisebb négyzetek módszerét kapjuk. A hibák eloszlása a normális eloszlásfüggvényt követi.

* Ha $p=\infty$, akkor a hibák maximumát minimalizáljuk, és a mini-max módszert, az L_∞ normát kapjuk. A hibák eloszlása ebben az esetben egy korlátos zárt intervallumon egyenletes eloszlású.

Mindhárom módszer közös jellemzője, hogy a megoldást szimplex módszerrel is megkaphatjuk. A $p=1$ esetre *Barrodale* és *Roberts* (1973), a $p=\infty$ esetre *Barrodale* és *Phillips* (1978) dolgozott ki numerikus algoritmust.

L_p normában a 2D (*Helmert*) és 3D hasonlósági transzformáció paramétereinek becslésére numerikus algoritmusokat *Somogyi* és *Závoti* (1990) tanulmányban adtuk meg.

3.2 Becslés különböző normákban

A (3.1) összefüggés alapján a közvetítő egyenleteket – az y_i megfigyelések, a kiegyenlítésel meghatározandó x_j ismeretlenek és az együtthatók között – az alábbi matematikai összefüggéssel adhatjuk meg:

$$y_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j + v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.3)$$

- ahol v_i a javításokat,

a_{ij} az egyenletrendszer együtthatóit jelenti.

Legyen az A mátrix rangja m és $n > m$.

A statisztikai becslést úgy értelmezzük, hogy vesszük azt a becsült értéket, amely minimalizálja a következő vektor normáját:

$$y_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

Általánosan írható:

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_p\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |y_i - y_{p_i}|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (3.5)$$

- ahol \mathbf{y}_p a becslt, vagy illesztett érték, ha \mathbf{y}_p minimalizálja az L_p normát.

Becsléshez a p értékét általában $1 \leq p \leq 2$ között választjuk, de a $p > 2$ választás is lehetséges. Ez a csoport tartalmazza a jólismert L_1 , L_2 és L_∞ normás megoldásokat, attól függően, hogy $p = 1$, $p = 2$ vagy $p = \infty$.

Az L_p becslések hatásfoka nagymértékben függ a v_i hibák eloszlásától, így ugyanaz a norma nem megfelelő a különböző hibaeloszlások esetén. A leggyakrabban alkalmazott becslés az L_2 norma vagy más szóval a legkisebb négyzetek módszere. Valóban ez a legjobb becslés akkor, ha a v_i hibák normális eloszlásúak. De ha a hibák eloszlása eltér a normálistól, például kiugró értékeket tételezünk fel, akkor célszerű hosszúfarkú valószínűségi sűrűségfüggvényeket használni az adatrendszer bizonytalanságának modellezéséhez. Ilyen a szimmetrikus exponenciális függvény is, ami az L_1 norma exponenciális sűrűségfüggvényének megadásával azonos. Az L_1 norma a legrobustusabb becslés, mivel érzéketlen a kiugró értékekre.

Az L_∞ norma alkalmazása akkor merül fel, ha az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvényét használjuk a hibák valószínűségi eloszlásának modellezésére, azaz a hibák eloszlása egy adott intervallumon egyenletesnek tekinthető. Itt feltétel a hibák szigorú ellenőrizhetősége, például ha a hibák az adatok kerekítéséből adódnak.

A $p = 1$ és $p = \infty$ esetekben a megoldás lineáris programozási feladat megoldásához vezet, $1 \leq p \leq 2$ esetekre az inverz probléma megoldása a legkisebb négyzetek módszerére vezethető vissza. Ha p értékét $1 < p < 2$ intervallumban választjuk, olyan kvázi robusztus becsléshez jutunk, ami az L_1 és L_2 norma között hat, és szennyezett megfigyelések esetén az L_2 normánál jobb eredményt biztosít.

3.3 Az L_p normás kiegyenlítés

A Merle és Späth (1974) alapján a diszkrét L_p közelítés megoldására két algoritmust dolgoztunk ki.

Túlhatározott lineáris egyenletrendszer azon megoldásait keressük, amelyekre az egyenletrendszer hibája L_p norma szerint minimális.

Keresendő az

$$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (3.6)$$

vektor, amelyre

$$T_p(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left| y_i - \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \right|^p} \quad (3.7)$$

m változós függvény minimumot vesz fel.

Ha $p = 2$, a jól ismert legkisebb négyzetek módszerét kapjuk:

$$T_2(\mathbf{x}) = \|\mathbf{W}(\mathbf{y} - \mathbf{Ax})\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i \left(y_i - \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \right)^2}, \quad (3.8)$$

- ahol $\mathbf{W} = \mathbf{diag}(\sqrt{w_1}, \sqrt{w_2}, \dots, \sqrt{w_n})$ és w_i ($i = 1, 2, \dots, n$) jelenti az \mathbf{A} mátrix soraihoz tartozó súlyokat.

Mivel $1 < p < \infty$ esetén $T_p(\mathbf{x})$ szigorúan konvex, így a (3.7) minimalizálási probléma egyértelműen megoldható.

Legyen:

$$S_p(\mathbf{x}) = [T_p(\mathbf{x})]^p. \quad (3.9)$$

A szélsőérték-feladat megoldását a fenti célfüggvény deriválásával kapjuk:

$$\frac{\partial S_p(\mathbf{x})}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.10)$$

Részletezve:

$$\frac{\partial S_p(\mathbf{x})}{\partial x_j} = -p \sum_{i=1}^n w_i \left(y_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right) a_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.11)$$

- ahol $w_i = w_i(\mathbf{x}) = \left| y_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right|^{p-2}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Tehát meg kell oldanunk az alábbi típusú egyenletrendszert:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{A}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{y}, \quad (3.12)$$

- ahol k jelenti az iterációk számát.

A megoldandó egyenletrendszer $p \neq 2$ esetén nemlineáris, a megoldás visszavezethető a négyzetes esetre, mivel p csak a súlyfüggvényben szerepel.

A legkisebb négyzetes értelemben optimális \mathbf{x} vektor előállításához két algoritmust alkalmaztunk.

3.3.1 Algoritmus I.

1. lépés. Legyen:

$$k = 0, \quad \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{I} \quad , \quad (3.13)$$

- ahol \mathbf{I} egység mátrix.

2. lépés. Oldjuk meg az

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{y} \quad (3.14)$$

egyenletrendszert a legkisebb négyzetek elvén $w_i(\mathbf{x}^{(k)})$ súlyozással. Ebből adódik:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{y} \quad . \quad (3.15)$$

3. lépés. Ha az iterálás során az $\mathbf{x}^{(k)}$ és $\mathbf{x}^{(k+1)}$ között az eltérés abszolút értelemben egy adott korlát alá esik, akkor az eljárást befejezettnek tekintjük. Ha nem, akkor $k = k+1$, és (3.11) képlet alapján meghatározzuk a $w_i(\mathbf{x}^{(k+1)})$ súlyokat és a második lépést megismételjük.

Azt találtuk, hogy ez az algoritmus nem konvergál $p = 4, 6, \dots$ esetén.

3.3.2 Algoritmus II.

1. lépés. Legyen:

$$k = 0, \quad \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{I} \quad .$$

2. lépés. Oldjuk meg az

$$A\mathbf{b} = \mathbf{y}$$

egyenletrendszert a legkisebb négyzetek elvén $w_i(\mathbf{x}^{(k)})$ súlyozással, és legyen:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \frac{1}{p-1} \left[(p-2)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \right] \quad p \neq 1 \quad . \quad (3.16)$$

3. lépés. Mint a 3.3.1. algoritmusnál.

Az iterációt mindkét algoritmus esetén a következő feltétel teljesülése mellett állíthatjuk le:

$$\sum_{j=1}^m |x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}| < \varepsilon \sum_{i=1}^m |x_j^{(k+1)}| \quad , \quad (3.17)$$

- ahol $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$.

A gyakorlatban kombináljuk a két algoritmust:

$1 \leq p \leq 2$ esetén a 3.3.1 algoritmust használjuk,
 $p > 2$ esetén pedig a 3.3.2 algoritmust.

3.4 A 2D és 3D hasonlósági transzformációk L_p normában

Tekintsük a 2D hasonlósági transzformáció (2.26) összefüggéssel megadott matematikai modelljét. Tegyük fel, hogy a kiindulási rendszerben a pontok koordinátái hibamentesek, a cél koordináta-rendszerben adott pontok koordinátái egymással nem korreláltak.

Jelölje:

$$F_1(r, s) = \|\mathbf{X} - \mathbf{x}_p\|^p = \sum_{i=1}^n |X_i - x_i r + y_i s|^p, \quad (3.18)$$

$$F_2(r, s) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{y}_p\|^p = \sum_{i=1}^n |Y_i - x_i s - y_i r|^p,$$

- ahol n a két rendszerben adott közös pontok száma.

Az \mathbf{x}_p és \mathbf{y}_p becsléseket, amelyek L_p normában minimalizálják a (3.18) képletel megadott szélsőérték-feladatot, a (3.9) összefüggésből nyerjük.

A szélsőérték-feladat megoldásának szükséges feltétele a parciális deriváltak eltűnése:

$$\frac{\partial F_1}{\partial r} = -p \sum_{i=1}^n x_i |X_i - x_i r + y_i s|^{p-2} (X_i - x_i r + y_i s),$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial s} = p \sum_{i=1}^n y_i |X_i - x_i r + y_i s|^{p-2} (X_i - x_i r + y_i s), \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial r} = -p \sum_{i=1}^n y_i |Y_i - x_i s - y_i r|^{p-2} (Y_i - x_i s - y_i r),$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial s} = -p \sum_{i=1}^n x_i |Y_i - x_i s - y_i r|^{p-2} (Y_i - x_i s - y_i r).$$

A szélsőérték-feladat megoldását a következő egyenletrendszerből kapjuk:

$$\frac{\partial F_1}{\partial r} + \frac{\partial F_2}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial s} + \frac{\partial F_2}{\partial s} = 0. \quad (3.20)$$

A megoldást a (3.20) egyenletrendszerből kifejezhetjük:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{D} (bB + dA) , \\ s &= \frac{1}{D} (aB - cA) , \\ D &= ad + bc , \end{aligned} \quad (3.21)$$

- ahol

$$\begin{aligned} A &= \sum (\omega_i^{yY} Y_i + \omega_i^{xX} X_i) , & B &= \sum (\omega_i^{xY} Y_i - \omega_i^{yX} X_i) , \\ a &= \sum (\omega_i^{yY} y_i + \omega_i^{xX} x_i) , & b &= \sum (\omega_i^{xX} y_i - \omega_i^{yY} x_i) , \\ c &= \sum (\omega_i^{xY} y_i - \omega_i^{yX} x_i) , & d &= \sum (\omega_i^{yX} y_i + \omega_i^{xY} x_i) , \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \omega_i^{xX} &= x_i |X_i - x_i r + y_i s|^{p-2} , \\ \omega_i^{yY} &= y_i |Y_i - y_i r - x_i s|^{p-2} , \\ \omega_i^{xY} &= x_i |Y_i - y_i r - x_i s|^{p-2} , \\ \omega_i^{yX} &= y_i |X_i - x_i r + y_i s|^{p-2} . \end{aligned}$$

A 3D hasonlósági transzformáció paramétereinek analitikus meghatározásához tekintjük a Somogyi és Závoti (1993) tanulmányban tárgyalt matematikai modellt. A 3D transzformáció közvetítő egyenletei a következő formában adhatók meg:

$$\begin{aligned} (Z_i + z_i)\beta - (Y_i + y_i)\gamma &= (X_i - x_i) , \\ -(Z_i + z_i)\alpha + (X_i + x_i)\gamma &= (Y_i - y_i) , \\ (Y_i + y_i)\alpha - (X_i + x_i)\beta &= (Z_i - z_i) , \\ i &= 1, 2, \dots, n , \end{aligned} \quad (3.22)$$

- ahol X, Y, Z a célrendszer súlypontra redukált koordinátái,

x, y, z a transzformálandó rendszer súlypontra redukált és méretarányra hozott koordinátáit jelenti.

A fenti egyenletek alapján a 3D hasonlósági transzformáció (3.9) összefüggése így írható fel:

$$\begin{aligned}
 F_1(\beta, \gamma) &= \sum_{i=1}^n |Q_i - t_i \beta + u_i \gamma|^p, \\
 F_2(\alpha, \gamma) &= \sum_{i=1}^n |U_i + t_i \alpha - q_i \gamma|^p, \\
 F_3(\alpha, \beta) &= \sum_{i=1}^n |T_i - u_i \alpha + q_i \beta|^p,
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

- ahol

$$\begin{aligned}
 X_i - x_i &= Q_i, & X_i + x_i &= q_i, \\
 Y_i - y_i &= U_i, & Y_i + y_i &= u_i, & i &= 1, 2, \dots, n. \\
 Z_i - z_i &= T_i, & Z_i + z_i &= t_i,
 \end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned}
 \omega_i^{zx} &= t_i |Q_i - t_i \beta + u_i \gamma|^{p-2}, \\
 \omega_i^{yx} &= u_i |Q_i - t_i \beta + u_i \gamma|^{p-2}, \\
 \omega_i^{zy} &= t_i |U_i + t_i \alpha - q_i \gamma|^{p-2}, \\
 \omega_i^{xy} &= q_i |U_i + t_i \alpha - q_i \gamma|^{p-2}, \\
 \omega_i^{yz} &= u_i |T_i - u_i \alpha + q_i \beta|^{p-2}, \\
 \omega_i^{xz} &= q_i |T_i - u_i \alpha + q_i \beta|^{p-2},
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

A fenti jelölésekkel az F_1, F_2 és F_3 függvények α, β és γ változók szerinti parciális deriváltjai így fejezhetők ki:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial \beta} &= -p \sum_{i=1}^n \omega_i^{zx} (Q_i - t_i \beta + u_i \gamma) , \\
\frac{\partial F_1}{\partial \gamma} &= p \sum_{i=1}^n \omega_i^{yz} (Q_i - t_i \beta + u_i \gamma) , \\
\frac{\partial F_2}{\partial \alpha} &= p \sum_{i=1}^n \omega_i^{xy} (U_i + t_i \alpha - q_i \gamma) , \\
\frac{\partial F_2}{\partial \gamma} &= -p \sum_{i=1}^n \omega_i^{xy} (U_i + t_i \alpha - q_i \gamma) , \\
\frac{\partial F_3}{\partial \alpha} &= -p \sum_{i=1}^n \omega_i^{yz} (T_i - u_i \alpha + q_i \beta) , \\
\frac{\partial F_3}{\partial \beta} &= p \sum_{i=1}^n \omega_i^{xz} (T_i - u_i \alpha + q_i \beta) .
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Az α , β és γ ismeretleneket a következő egyenletrendszer megoldásával állítjuk elő:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} &= 0 , \\
\frac{\partial F_1}{\partial \beta} + \frac{\partial F_3}{\partial \beta} &= 0 , \\
\frac{\partial F_1}{\partial \gamma} + \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} &= 0 .
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Az L_p normás kiegyenlítés szemléltetésére a 3D hasonlósági transzformációt választottuk.

3.1 Példa

Input: Az $m = 0.079$ méretarány tényezővel, a 3.1 táblázatban megadott \mathbf{R} forgatási mátrixszal előállítottuk a 3.2 táblázatban megadott értékeket.

R		
0.999833	0.012286	-0.013529
-0.012084	0.999817	0.014864
0.013709	-0.014698	0.999798

3.1 táblázat. Adott forgatási mátrix

pnr	X	Y	Z	x	y	z
1	100.000	600.000	50.000	84.277	473.546	33.606
2	425.000	490.000	120.000	339.164	384.388	93.696
3	410.000	700.000	70.000	329.897	549.805	51.605
4	750.000	640.000	80.000	597.755	499.281	63.873
5	575.000	575.000	130.000	458.363	450.203	102.231
6	830.000	460.000	240.000	657.487	358.225	193.200
7	600.000	400.000	180.000	475.882	312.325	144.023
8	770.000	240.000	370.000	606.583	186.562	297.796
9	560.000	150.000	510.000	438.329	119.123	407.141
10	450.000	250.000	320.000	353.500	196.893	254.720
11	340.000	50.000	430.000	264.451	41.301	342.738
12	150.000	100.000	380.000	115.389	82.013	300.286
13	270.000	220.000	270.000	212.514	174.361	213.628
14	225.000	465.000	150.000	180.626	366.145	115.563
15	50.000	300.000	290.000	39.306	239.885	226.114

3.2 táblázat. Közös pontok

Output: Az L_p normás kiegyenlítés eredményeit $p = 1, 1.5, 2$ és 2.5 értékekre a 3.3. táblázat, a becslült forgatási mátrixokat a 3.4 táblázat adja meg.

p	Iter	m	α	β	γ	σ
1	1	0.7898804	-0.0073994	-0.0068612	-0.0060631	0.1806265
	2	0.7899998	-0.0073889	-0.0068181	-0.0060911	0.1829709
	3	0.7900004	-0.0073934	-0.0068213	-0.0060938	0.1830182
1.5	1	0.7898804	-0.0073948	-0.0068645	-0.0060637	0.1805626
	2	0.7899998	-0.0073801	-0.0068363	-0.0060876	0.1824659
	3	0.7900004	-0.0073840	-0.0068430	-0.0060806	0.1824984
2	1	0.7898804	-0.0073929	-0.0069086	-0.0060515	0.1802400
	2	0.7900022	-0.0073620	-0.0069195	-0.0060676	0.1817253
	3	0.7900004	-0.0073855	-0.0069187	-0.0060465	0.1820403
2.5	1	0.7898804	-0.0073544	-0.0068978	-0.0060045	0.1810019
	2	0.7900009	-0.0073544	-0.0069026	-0.0059786	0.1831018
	3	0.7900004	-0.0073396	-0.0069114	-0.0059897	0.1833626

3.3 táblázat. A becslült paraméterek értékei

p	R		
1	0.9998327	0.0122868	-0.0135506
	-0.0120851	0.9998164	0.0148679
	0.0137308	-0.0147016	0.9997976
1.5	0.9998324	0.0122606	-0.0135942
	-0.0120585	0.9998170	0.0148492
	0.0137738	-0.0146828	0.9997973
2	0.9998312	0.0121934	-0.0137462
	-0.0119890	0.9998178	0.0148526
	0.0139248	-0.0146853	0.9997952
2.5	0.9998327	0.0120792	-0.0137331
	-0.0118763	0.9998205	0.0147599
	0.0139089	-0.0145944	0.9997968

3.4 táblázat. Forgatási mátrixok

4. GEODÉZIAI ALKALMAZÁSOK L_1 NORMÁBAN

A durva hibák kiszűrésére való törekvés egyidős az adatfeldolgozással. Ez a megállapítás fokozottan érvényes a geodéziában, ahol statisztikai vonatkozásban a mintavétel kisszámú adathalmazra vonatkozik. Ez bizonyos mértékig megkönnyíti az adatok ellenőrzését, ami igen fontos munkafázis, mivel a paraméterbecslésre általánosan alkalmazott legkisebb négyzetek módszere bizonytalanná válik ki nem zárt hibás adatok esetén.

A számítás- és mérés technika nagyarányú fejlődése, az automatikus adatfeldolgozás igénye a geodéziára különösen jellemző. A fotogrammetriai és űrtechnikai mérési módszerek nagy adattömegek feldolgozását igénylik, ami már szükségessé teszi a hagyományos adatfeldolgozási módszerek mellett a robusztus statisztikai módszerek alkalmazását is. Ilyen irányú törekvések már tapasztalhatók, de a gyakorlatban való elterjedésüket a hagyományos módszerekhez való kötődés nehezíti.

4.1 A legkisebb abszolút értékek összegének elve

A módszer régóta ismert, már Laplace is javasolta 1799-ben. A minimalizálandó célfüggvénnyel (L_1 norma) a várható érték becslése a következő formában adható meg:

$$\rho(y - \vartheta) = \sum_{i=1}^n |y_i - \vartheta| \rightarrow \min . \quad (4.1)$$

A minimum megtalálásához az (4.1) egyenletet parciálisan deriválva, és az így kapott ψ vagy hatásfüggvényt nullával egyenlővé téve:

$$\sum_{i=1}^n \psi(y_i - \vartheta) = \sum_{i=1}^n \text{sign}(y_i - \vartheta) = 0 . \quad (4.2)$$

Láttuk az (1.18) összefüggésben, hogy ez a módszer a várható értéket a mediánnal becsüli. Eloszlása a Laplace eloszlásnak felel meg, tehát eloszlásfüggvénye a normális eloszláshoz viszonyítva laposabb, és így több kiugró érték is előfordulhat. A medián meghatározása több változó esetén lineáris programozási feladat, ami eltér a geodéziában általánosan alkalmazott számítási algoritmusoktól. Azonban a számítástechnika területén mutatkozó dinamikus fejlődés a lineáris programozás geodéziái gyakorlatban való elterjedését és gazdaságos alkalmazását lehetővé fogja tenni.

4.2 Kiegyenlítés L_1 normában

Az L_1 normás megoldás olyan módszer túlhatározott egyenletrendszerek kiegyenlítésére, amelynek célfüggvénye a javítások abszolút értékeinek az összegét minimalizálja. Nagymértékű robusztussága révén különleges helyet foglal el a különböző kiegyenlítési módszerek között. Az eljárás legkevésbé érzékeny a megfigyelésekben esetenként előforduló durva hibákra. Az általunk kifejlesztett algoritmus az L_1 normás megoldását számolja egy n lineáris egyenletből álló, m ismeretlent tartalmazó túlhatározott egyenletrendszernek:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3)$$

Legyen $n > m$.

Az eljárás meghatároz egy $\{x_j; j = 1, 2, \dots, m\}$ vektort, amely minimalizálja a v_i reziduálok abszolút értékeinek összegét:

$$\sum_{i=1}^n |v_i| = \sum_{i=1}^n \left| y_i - \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \right|. \quad (4.4)$$

A megoldási algoritmus a lineáris programozásból ismert szimplex módszer módosítása az L_1 normás problémára. A szakirodalomban is ismert eljárásokon túlmenően az ún. kétfázisú szimplex algoritmust vezettük be. Az 1. fázisban a lineáris programozási feladat egy megengedett bázismegoldását keressük. A 2. fázisban az 1. fázis eredményeként nyert szimplex táblát kiinduló táblaként használva kapjuk a túlhatározott egyenletrendszer L_1 normás megoldását. A kétfázisú szimplex módszer tetszőleges lineáris programozási feladat megoldására alkalmas. Mivel egyes ismeretlen változók – fizikai jelentésüknél fogva – nemcsak pozitív értéket vehetnek fel, célszerű az optimalizálási számításokat a duál feladaton keresztül megoldani.

Az L_1 normás kiegyenlítés lineáris programozási modelljét adja meg a 4.1 melléklet.

A következőkben a geodéziai adatok feldolgozásában igen jelentős szerepet játszó két-, és háromdimenziós koordináta-transzformációk paramétereinek L_1 norma szerinti kiegyenlítésére mutatunk be megoldási lehetőségeket. Lokális és regionális geodinamikai vizsgálatokra *Bányai* (1993) L_2 normában alkalmazott hasonlósági transzformációt.

4.3 Transzformációs paraméterek meghatározása az abszolút értékek legkisebb összegének módszerével

Durva hibák kiszűrésére igen hatásos robusztus becslés az abszolút értékek legkisebb összegének módszere.

Ez a módszer a helyzeti paramétert (várható értéket) a mediánnal becsüli. Eloszlásfüggvénye a normális eloszláshoz viszonyítva laposabb, és így több kiugró értéket tűr meg. Numerikus számítási nehézségek miatt – egy lineáris programozási feladat megoldásáról van szó – ez a módszer ez ideig nemigen terjedt el a gyakorlatban. A számítástechnika területén mutatkozó dinamikus fejlődés hatására olyan algoritmusokat fejlesztettek ki (pl. szimplex módszer), amelyek biztosítják a módszer

gazdaságos alkalmazását. A közeljövőben újabb és egyszerűbb algoritmusok megjelenése várható. Több kísérlet történt a geodéziai megfigyelések L_1 norma szerinti kiegyenlítésére. Például *Fuchs* (1980), *Hahn* és *Bill* (1984), *Ebong* (1985), *Kampmann* (1986), *Burstedde* és *Cremer* (1986), valamint *Somogyi-Závoti* (1987). *Dodge* (1992) az L_1 norma statisztikai analizisét tárgyalta.

4.4 Helmert transzformáció megoldása L_1 normában

Tekintsük a (2.26) összefüggéssel megadott Helmert transzformációt. *Detrekői* (1991) alapján a sík egyik legáltalánosabb hasonlósági transzformációjának Helmert-féle függvényalakja a következő:

$$\begin{aligned} X &= m x \cos \varphi - m y \sin \varphi + c_x, \\ Y &= m x \sin \varphi + m y \cos \varphi + c_y. \end{aligned} \quad (4.5)$$

A fenti $X(m, \varphi, c_x, c_y)$ és $Y(m, \varphi, c_x, c_y)$ többváltozós függvényeket fejtsük Taylor sorba az elsődrendű tagokig az $(m_0, \varphi_0, c_{x_0}, c_{y_0})$ pont környezetében:

$$\begin{aligned} X &= m_0 x \cos \varphi_0 - m_0 y \sin \varphi_0 + c_{x_0} + dm x \cos \varphi_0 - dmy \sin \varphi_0 - d\varphi m_0 x \sin \varphi_0 - d\varphi m_0 y \cos \varphi_0 + dc_x, \\ Y &= m_0 x \sin \varphi_0 + m_0 y \cos \varphi_0 + c_{y_0} + dm x \sin \varphi_0 + dm y \cos \varphi_0 + d\varphi m_0 x \cos \varphi_0 - d\varphi m_0 y \sin \varphi_0 + dc_y, \end{aligned} \quad (4.6)$$

- ahol dm a méretarány változása,
- $d\varphi$ a forgatási szög változása,
- dc_x, dc_y az eltolási értékek változása.

Tekintsük a $P(X_i, Y_i)$ $i = 1, 2, \dots, n$ ponthalmazt. Jelölje $Q(x_i, y_i)$ $i = 1, 2, \dots, n$ a transzformálandó pontokat és a transzformáció utáni koordináták legyenek $(X_i + v_{x_i}, Y_i + v_{y_i})$.

A Helmert transzformáció (4.6) képletében legyen $m_0 \approx 1$ és $c_{x_0} \approx c_{y_0} \approx 0$, ekkor kapjuk:

$$\begin{aligned} X_i + v_{x_i} &= c_i + dm c_i - d\varphi s_i + dc_x \quad , \\ Y_i + v_{y_i} &= s_i + dm s_i + d\varphi c_i + dc_y \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad , \end{aligned} \quad (4.7)$$

- ahol $c_i = x_i \cos \varphi_0 - y_i \sin \varphi_0$,

$$s_i = x_i \sin \varphi_0 + y_i \cos \varphi_0 \quad .$$

Első közelítésben $\varphi_0 \approx 0$ esetén írhatjuk:

$$\begin{aligned} v_{x_i} &= x_i dm - y_i d\varphi + dc_x + dx_i \quad , \\ v_{y_i} &= y_i dm + x_i d\varphi + dc_y + dy_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad , \\ r_i &= \sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2} \quad . \end{aligned} \quad (4.8)$$

- ahol $dx_i = x_i - X_i$,

$$dy_i = y_i - Y_i \quad .$$

(Egy előzetes transzformációval a feltételezett közelítő értékek realizálhatók.)

A javítások alapján követeljük meg az illeszkedés r_i mértékére az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2} \leq r_i \quad , \quad r_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad . \quad (4.9)$$

Ezek után keressük az alábbi célfüggvény minimumát:

$$\sum_{i=1}^n r_i \rightarrow \min \quad . \quad (4.10)$$

Az (4.8), (4.9), (4.10) összefüggések egy konvex, nemlineáris optimalizálási feladatot definiálnak.

Fuchs (1980) alapján könnyen belátható, hogy az (4.9) összefüggést a következő végtelen sok lineáris egyenlőtlenséggel közelíthetjük:

$$v_{x_i} \cos \alpha + v_{y_i} \sin \alpha \leq r_i, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.11)$$

Kiindulásként válasszunk véges sok α szöget valamennyi pont esetén:

$$\alpha_{ij} = (j-1) \frac{\pi}{2}, \quad m_i = 4, \quad j = 1, 2, \dots, m_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.12)$$

Ekkor az eredeti (4.8), (4.9), (4.10) probléma a következő lineáris programozási feladatként fogalmazható meg:

$$\begin{aligned} & (x_i \cos \alpha_{ij} + y_i \sin \alpha_{ij}) dm + (x_i \sin \alpha_{ij} - y_i \cos \alpha_{ij}) d\varphi + \cos \alpha_{ij} dc_x + \sin \alpha_{ij} dc_y - r_i \leq -(dx_i \cos \alpha_{ij} + dy_i \sin \alpha_{ij}), \\ & - \sum_{i=1}^n r_i \rightarrow \max, \quad r_i \geq 0, \quad (4.13) \\ & j = 1, 2, \dots, m_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Célszerű a fenti lineáris programozási feladat duáltját képezni:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{m_i} \pi_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ & - \sum_{i=1}^{n_0} \sum_{j=1}^{m_i} \pi_{ij} \sin \alpha_{ij} = 0, \\ & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \pi_{ij} \cos \alpha_{ij} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} (x_i \sin \alpha_{ij} - y_i \cos \alpha_{ij}) \pi_{ij} = 0 \quad , \\
 & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} (x_i \cos \alpha_{ij} + x_i \sin \alpha_{ij}) \pi_{ij} = 0 \quad , \\
 & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} (dx_i \cos \alpha_{ij} + dy_i \sin \alpha_{ij}) \pi_{ij} \rightarrow \max \quad , \\
 & \pi_{ij} \geq 0 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

A duál lineáris programozási feladat megoldásához a kétfázisú szimplex módszert ajánljuk, mivel a kétfázisú szimplex módszer tetszőleges lineáris programozási feladat megoldására alkalmas. Az egyetlen kikötés, a normál vektor nemnegativitásának feltétele triviálisan teljesíthető. A primál feladat optimális megoldását úgy kapjuk, hogy a duál feladatot a kétfázisú szimplex módszerrel megoldjuk.

Megoldásként adódik $dm^{(1)}, d\varphi^{(1)}, d_{c_x}^{(1)}, d_{c_y}^{(1)}, r_i^{(1)}$.

Az (4.8) összefüggés alapján meghatározhatók a v_{x_i}, v_{y_i} javítások, amelyekből $\hat{r}_i^{(1)}$ becsülhető:

$$\hat{r}_i^{(1)} = \sqrt{\left(v_{x_i}^{(1)}\right)^2 + \left(v_{y_i}^{(1)}\right)^2} \quad .
 \tag{4.15}$$

Azon pontokra, amelyek esetén az LP feladatból kapott r_i értékekre nem áll fenn az

$$r_i^{(1)} \leq \hat{r}_i^{(1)}
 \tag{4.16}$$

egyenlőtlenség, határozzuk meg a következő szöveget:

$$\tau_{im_i+1} = \arctg \left(\frac{v_{y_i}^{(1)}}{v_{x_i}^{(1)}} \right) \quad ,
 \tag{4.17}$$

$$m_i = m_i + 1 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, m_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad .$$

Ezek a szögek a (4.13) összefüggéshez további egyenlőtlenséget szolgáltatnak. Ily módon addig iterálhatunk, amíg valamennyi pontra a (4.17) összefüggéssel számolt két egymás utáni τ szög abszolút értékének különbsége adott korláton (pl. $\varepsilon = 0.01$) belül esik. A (4.13) összefüggésekkel adott lineáris programozási modell primál feladatának szimplex tábláját a 4.2 melléklet tartalmazza, duál feladatának szimplex táblája a 4.3 mellékletben tanulmányozható. A matematikai modellt *Somogyi és Závoti* (1989) tanulmánya is megadta.

Tekintsük a 2.1 példában megadott feladatot.

4.1 Példa

Input: 2.1 táblázat

Output: Az L_1 normás kiegyenlítés eredményét a 4.1 táblázat, a becsült paraméterek értékeit a 4.2 táblázat tartalmazza.

pnr		dx	dy	v _x	v _y	r	α
1	*	0.000000	0.000000	-0.020556	-0.844925	0.845	-1.596
2	*	0.000000	0.000000	0.685808	-0.923410	1.150	-0.933
3		-0.645996	0.571289	0.000614	0.001112	0.001	1.075
4		-0.606934	0.295898	0.000413	0.000415	0.001	0.808
5		-0.372009	0.139160	-0.000130	0.000628	0.001	1.762
6		-0.096924	0.295898	0.000271	0.000375	0.000	0.945
7		-0.135742	0.768066	0.000732	0.001637	0.002	1.151
8		-0.371094	0.807129	0.000838	0.001475	0.002	1.060
9		-0.527832	0.532227	0.001048	0.001282	0.002	1.202
10	*	0.000000	0.453125	0.254177	0.000624	0.254	-0.002
11		-0.174805	0.531982	0.000894	0.001011	0.001	0.852
12		-0.349121	0.560059	0.001387	0.000561	0.001	0.397

4.1 táblázat. Helmert transzformáció L_1 normában

dm	d φ	c _x	c _y
0.000080	-0.078485	-0.099041	-0.099319

4.2 táblázat. Megoldás

4.5 Projektív transzformáció L_1 normában

Az (2.27) egyenletrendszer nevezőjével való átszorzás, és az egyenletek rendezése után a mérési eredményekre az alábbi javítási egyenletek írhatók fel:

$$\begin{aligned} v_{x_i} &= -a_1 x_i - a_2 y_i - a_3 + c_1 x_i X_i + c_2 y_i X_i + X_i \quad , \\ & \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, \dots, n \quad , \\ v_{y_i} &= -b_1 x_i - b_2 y_i - b_3 + c_1 x_i Y_i + c_2 y_i Y_i + Y_i \quad , \end{aligned} \quad (4.18)$$

- ahol $n \geq 4$ a mindkét rendszerben adott közös pontok száma.

L_1 normában az ellentmondást a következőképp definiáljuk:

$$r_i = \sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2} \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad . \quad (4.19)$$

Célunk megkeresni az alábbi célfüggvény minimumát:

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n r_i \quad . \quad (4.20)$$

Helyettesítsük (4.19) összefüggést az alábbi egyenlőtlenséggel:

$$\sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2} \leq r_i \quad . \quad (4.21)$$

A (4.21) formula megengedi, hogy a transzformált pont vagy a r_i sugarú kör belsejében, vagy a kör határán helyezkedjék el.

A (4.18), (4.20) és (4.21) összefüggések egy nemlineáris optimalizálási feladatot definiálnak. Ezt a nemlineáris optimalizálási feladatot a *Fuchs* (1982) által bevezetett módszerrel linearizáljuk.

A (v_{x_i}, v_{y_i}) ellentmondás vektorokat írjuk fel polárkoordinátás alakban is:

$$v_{x_i} = r_i \cos \tau_i, \quad v_{y_i} = r_i \sin \tau_i. \quad (4.22)$$

Ekkor tetszőleges α ($0 \leq \alpha < 2\pi$) esetén igazak a következő összefüggések is:

$$\begin{aligned} v_{x_i} \cos \alpha &= r_i \cos \tau_i \cos \alpha, \\ v_{y_i} \sin \alpha &= r_i \sin \tau_i \sin \alpha. \end{aligned} \quad (4.23)$$

A (4.23) alatti egyenleteket összeadva kapjuk:

$$v_{x_i} \cos \alpha + v_{y_i} \sin \alpha = r_i \cos(\tau_i - \alpha) \leq r_i, \quad (4.24)$$

$$0 \leq \alpha \leq 2\pi, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

A fentiek szerint az (4.21) összefüggés helyettesíthető végtelen sok ($\alpha \in [0, 2\pi]$) (4.24) formulával megadott egyenlőtlenséggel:

$$\begin{aligned} -a_1 x_i \cos \alpha - a_2 y_i \cos \alpha - a_3 \cos \alpha + c_1 x_i X_i \cos \alpha + c_2 y_i Y_i \cos \alpha + X_i \cos \alpha + \\ -b_1 x_i \sin \alpha - b_2 y_i \sin \alpha - b_3 \sin \alpha + c_1 x_i Y_i \sin \alpha + c_2 y_i X_i \sin \alpha + Y_i \sin \alpha \leq r_i, \\ 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Válasszunk minden pontra csak véges sok α_{ij} ($j = 1, 2, \dots, m_i$) értéket, ahogyan a (4.12) összefüggésben tettük. Geometriailag ez azt jelenti, hogy a kört egy m_i oldalú poligonnal közelítjük. Ekkor az eredeti nemlineáris optimalizálási feladatunk a következő lineáris programozási feladatba megy át:

$$\begin{aligned} -a_1 x_i \cos \alpha_{ij} - b_1 x_i \sin \alpha_{ij} - a_2 y_i \cos \alpha_{ij} - b_2 y_i \sin \alpha_{ij} - a_3 \cos \alpha_{ij} - b_3 \sin \alpha_{ij} \\ + c_1 (x_i X_i \cos \alpha_{ij} + x_i Y_i \sin \alpha_{ij}) + c_2 (y_i X_i \cos \alpha_{ij} + y_i Y_i \sin \alpha_{ij}) - r_i \leq -X_i \cos \alpha_{ij} - Y_i \sin \alpha_{ij}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\sum_{j=1, 2, \dots, m_j} r_j \rightarrow \min, \quad r_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Az előbbi lineáris programozási feladat az eredeti nemlineáris optimalizálási feladatot approximálja. A (4.26) összefüggésekkel adott lineáris programozási primál feladat szimplex tábláját áttekinthető formában a 4.4 melléklet tartalmazza. Ha a (4.26) formulákkal definiált modellt primál lineáris optimalizálási feladatnak tekintjük, akkor a hozzátartozó duál problémát is megadhatjuk. A síkbeli projektív transzformáció lineáris programozási modell duál feladatának szimplex tábláját adja meg a 4.5 melléklet.

A módszer alkalmazását egy szimulált rács-adatrendszer feldolgozásával mutatjuk be. A 4.5 táblázat 2. sorában szereplő értékekkel előállítottuk a 4.3 táblázatban adott koordinátákat.

4.2 Példa

Input: A kép koordinátákra a 4.3 táblázatban adott zajokat szuperponáltunk.

pnr	X	Y	x	y	z _x	z _y
1	1000	1000	-86.361	-204.274	-0.002	-0.001
2	1000	2000	-84.865	-62.220	0.004	0.003
3	1000	3000	-83.662	52.099	-0.005	0.001
4	2000	1000	32.013	-169.044	-0.009	0.007
5	2000	2000	22.339	-50.815	0.003	-0.001
6	2000	3000	14.305	47.389	-0.001	0.004
7	3000	1000	117.813	-143.508	0.000	5.998
8	3000	2000	102.429	-42.295	0.002	-0.006
9	3000	3000	89.345	43.781	0.003	-0.001

4.3 táblázat. (X, Y)_m, (x, y)_{mm} koordináták és a zaj

Output: Az L_1 normás kiegyenlítés eredményeként kapott javításokat és hibajellemzőket a 4.4 táblázat, a becsült és adott paraméterek értékeit a 4.5 táblázat tartalmazza.

pnr		V_x	V_y	r	α
1		0.000120	-0.000045	0.000	-0.003
2		-0.000744	-0.000945	0.004	-2.235
3		-0.000043	0.000016	0.000	2.852
4		0.000455	0.000314	0.000	0.987
5		-0.000242	-0.000028	0.000	-3.025
6		0.000450	-0.000419	0.002	-0.408
7	*	-0.115673	-0.501912	0.515	-1.806
8		-0.000873	0.000886	0.001	1.870
9		-0.000117	0.000030	0.000	2.910

4.4 táblázat. Javítások és hiba-jellemzők

a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2
7999.99	-1100.02	1800.00	-4000.02	7399.99	2500.00	-1.5	-1.0
8000.	-1100.	1800.	-4000.	7400.	2500.	-1.5	-1.0

4.5 táblázat. A becsült és az adott paraméterek értékei

4.6 A 3D hasonlósági transzformáció paramétereinek közvetlen meghatározása L_1 normában

Az L_1 normás megoldás tipikus alkalmazási területe a hasonlósági transzformáció. Két különböző koordináta rendszerben megadott ponthalmaz közös pontjai alapján megalkotott túlhatározott egyenletrendszer megoldható kiegészítő minimum feltételekkel is. Az L_1 normás megoldás tulajdonságai lehetővé teszik az egyes pontokban esetlegesen fellépő durva hibák felismerését.

A 3D hasonlósági transzformáció matematikai modelljét L_1 normában a *Somogyi és Závoti* (1993) tanulmánya tárgyalta, míg L_2 normában az utóbbi időben *Bácsatyai* (1993) is feldolgozta.

A 3D hasonlósági transzformáció általános alakja:

$$X = mR x + c \quad , \quad (4.27)$$

- ahol \mathbf{X} a cél koordináta-rendszerben adott pontok vektora,
- \mathbf{x} a kiindulási koordináta-rendszerben adott pontok vektora,
- m a méretarány értéke,
- \mathbf{R} a forgatási mátrix,
- \mathbf{c} az eltolás vektora.

Amint az jól ismert, a térbeli transzformáció (a sík is) három fázisból tevődik össze: eltolás, méretarány változás és a három koordinátatengely körüli forgatás. Matematikai szempontból a harmadik fázis a legérdekesebb, mivel az \mathbf{R} orthogonális forgatási mátrix koefфициensei nemlineáris függvényei a három független forgatási paraméternek. Ezért általában iterációs megoldást alkalmazunk a (4.27) képletek differenciálása útján nyert lineáris egyenletek segítségével. De lehetőség van \mathbf{R} közvetlen meghatározására is. Például *Schut* (1959), *Somogyi* (1969) tanulmányokban található ilyen algoritmusok, amelyek főleg a fotogrammetriai gyakorlatban terjedtek el.

Az eltolás súlyponti koordináták bevezetésével kiküszöbölhető, és a két koordináta-rendszer közös méretarányra hozatala is könnyen elvégezhető. Az \mathbf{R} mátrix $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{33}$ koefфициenseit alkotó három független paramétert jelölje α, β és γ , velük \mathbf{R} a következőképpen írható:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} & \frac{2(\alpha\beta - \gamma)}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} & \frac{2(\alpha\gamma + \beta)}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \\ \frac{2(\alpha\beta + \gamma)}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} & \frac{1 + \beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} & \frac{2(\beta\gamma - \alpha)}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \\ \frac{2(\alpha\gamma - \beta)}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} & \frac{2(\beta\gamma + \alpha)}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} & \frac{1 + \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Thompson (1959) alapján a két koordináta rendszerben n közös pont felhasználásával a három független paraméter meghatározására a következő lineáris egyenletek írhatók fel:

$$\begin{aligned}
& (Z_i + z_i)\beta - (Y_i + y_i)\gamma = (X_i - x_i) , \\
& - (Z_i + z_i)\alpha + (X_i + x_i)\gamma = (Y_i - y_i) , \\
& (Y_i + y_i)\alpha - (X_i + x_i)\beta = (Z_i - z_i) , \\
& i = 1, 2, \dots, n ,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

- ahol X, Y, Z a célrendszer súlypontra redukált koordinátái,
 x, y, z a transzformálandó rendszer súlypontra redukált és méretarányra hozott koordinátáit jelenti.

A szimplex tábla felállítása a (4.29) összefüggés alapján a következő módon történik:

$$\begin{aligned}
a_{i1} &= 0 & , & & a_{i2} &= Z_i + z_i & , & & a_{i3} &= -Y_i - y_i & , & & b_i &= X_i - x_i & , \\
a_{i+n1} &= -Z_i - z_i & , & & a_{i+n2} &= 0 & , & & a_{i+n3} &= X_i + x_i & , & & b_{i+n} &= Y_i - y_i & , \\
a_{i+2n1} &= Y_i + y_i & , & & a_{i+2n2} &= -X_i - x_i & , & & a_{i+2n3} &= 0 & , & & b_{i+2n} &= Z_i - z_i & , \\
& & & & & & & & & & & & & & i = 1, 2, \dots, n .
\end{aligned} \tag{4.30}$$

A túlhatározott $3n$ lineáris egyenletrendszer α, β és γ ismeretlenjeinek L_1 norma szerinti megoldásához a *Barrodale és Roberts* (1973) algoritmust használtuk. Az algoritmus meghatározza azokat az α, β és γ értékeket, amelyekre a maradékok abszolút értékeinek összege minimális:

$$\sum_{i=1}^{3n} |v_i| = \sum_{i=1}^{3n} |b_i - a_{i1}\alpha - a_{i2}\beta - a_{i3}\gamma| . \tag{4.31}$$

Ezután a kiszámított α, β és γ értékek segítségével az \mathbf{R} forgatási mátrix $r_{11}, r_{12}, \dots, r_{33}$ elemeit határozzuk meg. Végül az egyes javításokat a következő összefüggés alapján kapjuk:

$$\begin{aligned}
 v_{x_i} &= X_i - r_{11}x_i - r_{12}y_i - r_{13}z_i , \\
 v_{y_i} &= Y_i - r_{21}x_i - r_{22}y_i - r_{23}z_i , \quad i = 1, 2, \dots, n . \\
 v_{z_i} &= Z_i - r_{31}x_i - r_{32}y_i - r_{33}z_i ,
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Tehát a fenti képletekben a koordináták a koordináta-rendszerek súlypontjára vonatkoznak, és a x_i, y_i, z_i koordináták már az m méretarányal módosítottak. A méretarány meghatározásához a kiegyenlítésbe bevont koordináták súlypontra vonatkozó távolságait vesszük, és belőlük számítunk egy átlagos értéket.

A kiinduló adatokban előfordulható durva hibák a méretarány meghatározását bizonytalanná tehetik, mivel ennek az ismeretlenek meghatározása nem L_1 norma szerint történik. A durva hibák méretarányra vonatkozó hatását úgy küszöböljük ki, hogy a (4.32) egyenletrendszer L_1 norma alapján történő megoldása során az ellentmondások értékére egy felső korlátot adtunk meg. Ha valamely pontokra számított ellentmondás túllépi ezt a határértéket, a program újakezdi a számításokat úgy, hogy a korlátot meghaladó pontok már nem vesznek részt a méretarány meghatározásában. Az iterációt addig ismételjük, amíg a (4.32) egyenletekben valamennyi ellentmondás a megadott határértéknél kisebb lesz - feltéve, hogy elegendő pont marad az ismeretlenek meghatározására. Ellenkező esetben növelnünk kell a felső korlát értékét.

A módszer működésének illusztrálására tekintsük a 3.1 és a 3.2 táblázatban megadott értékeket.

4.3 Példa

Input: 3.2 táblázat.

Output: A 4.6 táblázat az L_1 normával, a 4.7 táblázat az L_2 normával becsült paraméterértékeket tartalmazza. A 4.8 táblázatban a két módszerrel kapott javítások vethetők össze az eredeti szuperponált zajjal. Felhívjuk a figyelmet az L_1 és L_2 normás kiegyenlítéssel kapott javítások közötti nagyságrendi eltérésekre. A 4.9 és 4.10 táblázatban kapott eredményeket a 3.1 táblázat értékeivel célszerű összevetni.

Iter	L_1	m	α	β	γ
1	MIN=3.703 STEP=9	0.7898804	-0.0074057	-0.0068273	-0.0060254
2	MIN=2.215 STEP=9	0.7900004	-0.0073960	-0.0068101	-0.0060948
3	MIN=2.213 STEP=7	0.7900004	-0.0073963	-0.0068081	-0.0060957

4.6 táblázat. L_1 normás kiegyenlítés

Iter	L_2	m	α	β	γ
1	ERR= .185	0.7898804	-0.0073929	-0.0069086	-0.0060515
2	ERR= .082	0.7900022	-0.0073620	-0.0069195	-0.0060676
3	ERR= .055	0.7900004	-0.0073855	-0.0069187	-0.0060465

4.7 táblázat. L_2 normás kiegyenlítés

pnr	L_1			L_2			Zaj		
1	0.000	0.000	-0.002	-0.016	0.026	0.060	0.001	0.000	-0.002
2	-0.004	0.007	0.003	-0.016	0.009	0.009	-0.003	0.007	0.002
3	0.004	-0.001	0.006	-0.001	0.001	0.011	0.005	-0.001	0.004
4	-0.004	-0.004	-0.003	-0.012	-0.028	-0.055	-0.003	-0.006	-0.005
5	-0.004	0.000	0.003	-0.008	-0.010	-0.018	-0.003	-0.001	0.001
6	-0.005	-0.002	-0.008	0.002	-0.030	-0.071	-0.003	-0.003	-0.009
7	0.002	-0.002	-0.001	-0.007	-0.013	-0.023	0.003	-0.003	-0.002
8	0.009	0.003	0.003	0.021	-0.018	-0.046	0.010	0.003	0.003
9	-0.003	0.000	-0.002	0.027	-0.002	-0.013	-0.002	0.002	-0.001
10	* -0.948	-0.034	-0.001	-0.943	-0.036	0.012	-0.947	-0.032	0.000
11	0.006	0.002	0.002	0.014	0.017	0.032	0.006	0.005	0.005
12	* -0.001	-0.005	-0.320	0.000	0.025	-0.258	0.000	-0.003	-0.317
13	0.000	-0.001	-0.001	-0.007	0.015	0.038	0.000	0.000	0.002
14	* -0.005	-0.752	0.049	-0.009	-0.734	0.086	-0.004	-0.751	0.050
15	0.000	-0.002	0.000	0.002	0.032	0.076	0.000	0.000	0.002

4.8 táblázat. Javítások és zaj

R		
0.9998330	0.0122904	-0.0135241
-0.0120890	0.9998163	0.0148735
0.0137044	-0.0147075	0.9997979

4.9 táblázat. L_1 normás forgatási mátrix

R		
0.9998312	0.0121934	-0.0137462
-0.0119891	0.9998178	0.0148526
0.0139248	-0.0146853	0.9997952

4.10 táblázat. L_2 normás forgatási mátrix

KIEGYENLÍTÉS L_1 NORMÁBAN

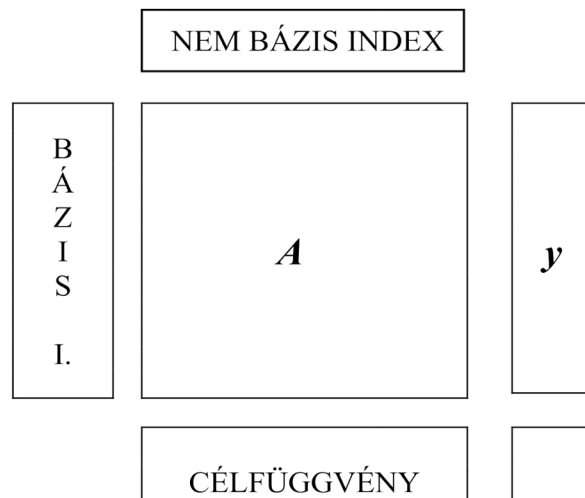
$$Ax = y + v \qquad \sum |v_i| \rightarrow \min$$

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

$$v_i = v_i^+ - v_i^-$$

$$Ax^+ - Ax^- - v^+ + v^- = y$$

$$\sum v_i^+ + v_i^- \rightarrow \min$$



BARRODALE & ROBERTS (1973)

4.1 melléklet. L_1 normás kiegyenlítés modellje

Prímál Feladat										
dm	dφ	dc _x	dc _y	r ₁	r ₂	r _n	r _n	r _n	r _n	
$x_1 \cos \alpha_{1,1} + y_1 \sin \alpha_{1,1}$	$x_1 \sin \alpha_{1,1} - y_1 \cos \alpha_{1,1}$	$\cos \alpha_{1,1}$	$\sin \alpha_{1,1}$	-1						$-(dx_1 \cos \alpha_{1,1} + dy_1 \sin \alpha_{1,1})$
$x_1 \cos \alpha_{1,2} + y_1 \sin \alpha_{1,2}$	$x_1 \sin \alpha_{1,2} - y_1 \cos \alpha_{1,2}$	$\cos \alpha_{1,2}$	$\sin \alpha_{1,2}$	-1						$-(dx_1 \cos \alpha_{1,2} + dy_1 \sin \alpha_{1,2})$
$x_1 \cos \alpha_{1,m_1} + y_1 \sin \alpha_{1,m_1}$	$x_1 \sin \alpha_{1,m_1} - y_1 \cos \alpha_{1,m_1}$	$\cos \alpha_{1,m_1}$	$\sin \alpha_{1,m_1}$	-1						$-(dx_1 \cos \alpha_{1,m_1} + dy_1 \sin \alpha_{1,m_1})$
$x_2 \cos \alpha_{2,1} + y_2 \sin \alpha_{2,1}$					-1					$-(dx_2 \cos \alpha_{2,1} + dy_2 \sin \alpha_{2,1})$
$x_2 \cos \alpha_{2,2} + y_2 \sin \alpha_{2,2}$					-1					$-(dx_2 \cos \alpha_{2,2} + dy_2 \sin \alpha_{2,2})$
$x_2 \cos \alpha_{2,m_2} + y_2 \sin \alpha_{2,m_2}$										$-(dx_2 \cos \alpha_{2,m_2} + dy_2 \sin \alpha_{2,m_2})$
$x_n \cos \alpha_{n,1} + y_n \sin \alpha_{n,1}$	$x_n \sin \alpha_{n,1} - y_n \cos \alpha_{n,1}$	$\cos \alpha_{n,1}$	$\sin \alpha_{n,1}$						-1	$-(dx_n \cos \alpha_{n,1} + dy_n \sin \alpha_{n,1})$
$x_n \cos \alpha_{n,2} + y_n \sin \alpha_{n,2}$	$x_n \sin \alpha_{n,2} - y_n \cos \alpha_{n,2}$	$\cos \alpha_{n,2}$	$\sin \alpha_{n,2}$						-1	$-(dx_n \cos \alpha_{n,2} + dy_n \sin \alpha_{n,2})$
$x_n \cos \alpha_{n,m_n} + y_n \sin \alpha_{n,m_n}$	$x_n \sin \alpha_{n,m_n} - y_n \cos \alpha_{n,m_n}$	$\cos \alpha_{n,m_n}$	$\sin \alpha_{n,m_n}$						-1	$-(dx_n \cos \alpha_{n,m_n} + dy_n \sin \alpha_{n,m_n})$
0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	→ max

4.2 melléklet. Helmert transzformáció prímál feladata

Primal Feladat

a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	c_1	c_2	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	
$-X_1 \cos \alpha_{11}$	$-X_1 \sin \alpha_{11}$	$-Y_1 \cos \alpha_{11}$	$-Y_1 \sin \alpha_{11}$	$-\cos \alpha_{11}$	$-\sin \alpha_{11}$	$x_1 X_1 \cos \alpha_{11} + x_1 Y_1 \sin \alpha_{11}$	$y_1 Y_1 \sin \alpha_{11} + y_1 X_1 \cos \alpha_{11}$	-1										$\leq -(X_1 \cos \alpha_{11} + Y_1 \sin \alpha_{11})$
$-X_1 \cos \alpha_{12}$	$-X_1 \sin \alpha_{12}$	$-Y_1 \cos \alpha_{12}$	$-Y_1 \sin \alpha_{12}$	$-\cos \alpha_{12}$	$-\sin \alpha_{12}$	$x_1 X_1 \cos \alpha_{12} + x_1 Y_1 \sin \alpha_{12}$	$y_1 Y_1 \sin \alpha_{12} + y_1 X_1 \cos \alpha_{12}$	-1										$\leq -(X_1 \cos \alpha_{12} + Y_1 \sin \alpha_{12})$
.										
.										
$-X_1 \cos \alpha_{1m_1}$	$-X_1 \sin \alpha_{1m_1}$	$-Y_1 \cos \alpha_{1m_1}$	$-Y_1 \sin \alpha_{1m_1}$	$-\cos \alpha_{1m_1}$	$-\sin \alpha_{1m_1}$	$x_1 X_1 \cos \alpha_{1m_1} + x_1 Y_1 \sin \alpha_{1m_1}$	$y_1 Y_1 \sin \alpha_{1m_1} + y_1 X_1 \cos \alpha_{1m_1}$											$\leq -(X_1 \cos \alpha_{1m_1} + Y_1 \sin \alpha_{1m_1})$
$-X_2 \cos \alpha_{21}$	$-X_2 \sin \alpha_{21}$	$-Y_2 \cos \alpha_{21}$	$-Y_2 \sin \alpha_{21}$	$-\cos \alpha_{21}$	$-\sin \alpha_{21}$	$x_2 X_2 \cos \alpha_{21} + x_2 Y_2 \sin \alpha_{21}$	$y_2 Y_2 \sin \alpha_{21} + y_2 X_2 \cos \alpha_{21}$	-1										$\leq -(X_2 \cos \alpha_{21} + Y_2 \sin \alpha_{21})$
$-X_2 \cos \alpha_{22}$	-1										$\leq -(X_2 \cos \alpha_{22} + Y_2 \sin \alpha_{22})$
.										
.										
.										
$-X_2 \cos \alpha_{2m_2}$	$-X_2 \sin \alpha_{2m_2}$	$-Y_2 \cos \alpha_{2m_2}$	$-Y_2 \sin \alpha_{2m_2}$	$-\cos \alpha_{2m_2}$	$-\sin \alpha_{2m_2}$	$x_2 X_2 \cos \alpha_{2m_2} + x_2 Y_2 \sin \alpha_{2m_2}$	$y_2 Y_2 \sin \alpha_{2m_2} + y_2 X_2 \cos \alpha_{2m_2}$	-1										$\leq -(X_2 \cos \alpha_{2m_2} + Y_2 \sin \alpha_{2m_2})$
.										
.										
.										
$-X_n \cos \alpha_{n1}$	$-X_n \sin \alpha_{n1}$	$-Y_n \cos \alpha_{n1}$	$-Y_n \sin \alpha_{n1}$	$-\cos \alpha_{n1}$	$-\sin \alpha_{n1}$	$x_n X_n \cos \alpha_{n1} + x_n Y_n \sin \alpha_{n1}$	$y_n Y_n \sin \alpha_{n1} + y_n X_n \cos \alpha_{n1}$											$\leq -(X_n \cos \alpha_{n1} + Y_n \sin \alpha_{n1})$
$-X_n \cos \alpha_{n2}$	$-X_n \sin \alpha_{n2}$	$-Y_n \cos \alpha_{n2}$	$-Y_n \sin \alpha_{n2}$	$-\cos \alpha_{n2}$	$-\sin \alpha_{n2}$	$x_n X_n \cos \alpha_{n2} + x_n Y_n \sin \alpha_{n2}$	$y_n Y_n \sin \alpha_{n2} + y_n X_n \cos \alpha_{n2}$											$\leq -(X_n \cos \alpha_{n2} + Y_n \sin \alpha_{n2})$
.											
.											
.											
$-X_n \cos \alpha_{nm_n}$	$-X_n \sin \alpha_{nm_n}$	$-Y_n \cos \alpha_{nm_n}$	$-Y_n \sin \alpha_{nm_n}$	$-\cos \alpha_{nm_n}$	$-\sin \alpha_{nm_n}$	$x_n X_n \cos \alpha_{nm_n} + x_n Y_n \sin \alpha_{nm_n}$	$y_n Y_n \sin \alpha_{nm_n} + y_n X_n \cos \alpha_{nm_n}$											$\leq -(X_n \cos \alpha_{nm_n} + Y_n \sin \alpha_{nm_n})$
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	$\rightarrow \max$

4.4 melléklet. Projektív transzformáció primal feladata

DUAL FELADAT

$\pi_{1,1}$	$\pi_{1,2}$	π_{1,m_1}	$\pi_{2,1}$	$\pi_{n,1}$	π_{n,m_n}
$-y_1 Y_1 \sin\alpha_{11} - x_1 Y_1 \sin\alpha_{11}$	$-y_1 Y_1 \sin\alpha_{12} - x_1 Y_1 \sin\alpha_{12}$	$-y_1 Y_1 \sin\alpha_{1m_1} - x_1 Y_1 \sin\alpha_{1m_1}$		1	1
$\sin\alpha_{11}$	$\sin\alpha_{12}$	$\sin\alpha_{1m_1}$			
$\cos\alpha_{11}$	$\cos\alpha_{12}$	$\cos\alpha_{1m_1}$			
$y_1 \sin\alpha_{11}$	$y_1 \sin\alpha_{12}$	$y_1 \sin\alpha_{1m_1}$			
$y_1 \cos\alpha_{11}$	$y_1 \cos\alpha_{12}$	$y_1 \cos\alpha_{1m_1}$			
$x_1 \sin\alpha_{11}$	$x_1 \sin\alpha_{12}$	$x_1 \sin\alpha_{1m_1}$			
$x_1 \cos\alpha_{11}$	$x_1 \cos\alpha_{12}$	$x_1 \cos\alpha_{1m_1}$			
$X_1 \cos\alpha_{11} + Y_1 \sin\alpha_{11}$	$X_1 \cos\alpha_{12} + Y_1 \sin\alpha_{12}$	$X_1 \cos\alpha_{1m_1} + Y_1 \sin\alpha_{1m_1}$	$X_2 \cos\alpha_{21} + Y_2 \sin\alpha_{21}$	$X_n \cos\alpha_{n1} + Y_n \sin\alpha_{n1}$	$X_n \cos\alpha_{nm_n} + Y_n \sin\alpha_{nm_n}$
$-y_1 Y_1 \sin\alpha_{11} - x_1 Y_1 \sin\alpha_{11}$	$-y_1 Y_1 \sin\alpha_{12} - x_1 Y_1 \sin\alpha_{12}$	$-y_1 Y_1 \sin\alpha_{1m_1} - x_1 Y_1 \sin\alpha_{1m_1}$	$-y_2 Y_2 \sin\alpha_{21} - x_2 Y_2 \sin\alpha_{21}$	$-y_n Y_n \sin\alpha_{n1} - x_n Y_n \sin\alpha_{n1}$	$-y_n Y_n \sin\alpha_{nm_n} - x_n Y_n \sin\alpha_{nm_n}$
$\sin\alpha_{11}$	$\sin\alpha_{12}$	$\sin\alpha_{1m_1}$	$\sin\alpha_{21}$	$\sin\alpha_{n1}$	$\sin\alpha_{nm_n}$
$\cos\alpha_{11}$	$\cos\alpha_{12}$	$\cos\alpha_{1m_1}$	$\cos\alpha_{21}$	$\cos\alpha_{n1}$	$\cos\alpha_{nm_n}$
$y_1 \sin\alpha_{11}$	$y_1 \sin\alpha_{12}$	$y_1 \sin\alpha_{1m_1}$	$y_2 \sin\alpha_{21}$	$y_n \sin\alpha_{n1}$	$y_n \sin\alpha_{nm_n}$
$y_1 \cos\alpha_{11}$	$y_1 \cos\alpha_{12}$	$y_1 \cos\alpha_{1m_1}$	$y_2 \cos\alpha_{21}$	$y_n \cos\alpha_{n1}$	$y_n \cos\alpha_{nm_n}$
$x_1 \sin\alpha_{11}$	$x_1 \sin\alpha_{12}$	$x_1 \sin\alpha_{1m_1}$	$x_2 \sin\alpha_{21}$	$x_n \sin\alpha_{n1}$	$x_n \sin\alpha_{nm_n}$
$x_1 \cos\alpha_{11}$	$x_1 \cos\alpha_{12}$	$x_1 \cos\alpha_{1m_1}$	$x_2 \cos\alpha_{21}$	$x_n \cos\alpha_{n1}$	$x_n \cos\alpha_{nm_n}$
$X_1 \cos\alpha_{11} + Y_1 \sin\alpha_{11}$	$X_1 \cos\alpha_{12} + Y_1 \sin\alpha_{12}$	$X_1 \cos\alpha_{1m_1} + Y_1 \sin\alpha_{1m_1}$	$X_2 \cos\alpha_{21} + Y_2 \sin\alpha_{21}$	$X_n \cos\alpha_{n1} + Y_n \sin\alpha_{n1}$	$X_n \cos\alpha_{nm_n} + Y_n \sin\alpha_{nm_n}$
					max

4.5 melléklet. Projektív transzformáció dual feladata

5. AZ L_1 NORMÁS BECSLÉS A BOSCOVICH-LAPLACE FELTÉTEL ALKALMAZÁSÁVAL

A geodéziai gyakorlatban általában a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazzák paraméterek becsléséhez. A módszer elterjedése az egyszerű matematikai kifejezhetőség és viszonylag könnyű számítás mellett még azzal is indokolható, hogy az általában kis mintákon alapuló geodéziai megfigyelések hibái normális eloszlásúnak tekinthetők.

Az új, korszerű és automatizált mérés technikák elterjedésével és a geodinamikai célú folyamatos megfigyelésekkel a nagyobb mintákon alapuló paraméterbecslések a geodézia és geofizika területén is mindennapos feladattá váltak.

A paraméterek becslése alatt a megfigyelésekből alkotott függvényt, statisztikát értjük. A LNM akkor optimális, ha a megfigyelések hibái normális eloszlásúak (Gauss-Markov elv). Más eloszlású hibák esetén az LNM nem ad optimális eredményt. Ilyenek lehetnek például a hosszúfarkú eloszlások (Laplace- és Cauchy-féle eloszlások), vagy a mérési adatokat terhelő kisebb-nagyobb szennyezések okozta kevert normális eloszlások. A nagytömegű és részben automatikusan nyert megfigyelések esetén a normalitás egyértelmű feltételezése csökkentheti a paraméterbecslés megbízhatóságát. Szükség van alternatív megoldásokra, amelyek védelmet biztosítanak a különböző hibák elkövetése ellen.

5.1 A Boscovich-Laplace feltétel

Paraméterek becslésére számos módszer áll rendelkezésre. A három legismertebb megoldás a következő:

- a) az eltérések négyzetösszegének minimalizálása,
- b) az abszolút eltérések összegének minimalizálása,
- c) a legnagyobb abszolút eltérés minimalizálása.

Ezek a megoldások az L_p becslések csoportjába tartoznak, amelyek az ún. Minkowsky-mértéket vagy L_p normát minimalizálják:

$$\left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}, \quad (5.1)$$

- ahol v_i az eltéréseket jelenti és $p \geq 1$.

A következőkben Maire és Boscovich (1755) valamint Boscovich (1757) alapján a Boscovich-Laplace módszert ismertetjük, ami egy alternatívája az L_p normás becslésnek, és vizsgáljuk geodéziai célú alkalmazhatóságát.

A (3.1) összefüggéssel adott Gauss-Markov matematikai modell a Boscovich-Laplace (BL) feltétel esetén megoldható a

$$\sum_{i=1}^n |v_i| \rightarrow \min \quad (5.2)$$

célfüggvénnyel és azzal a kiegészítő feltétellel, hogy a javítások összege nulla legyen:

$$\sum_{i=1}^n v_i = 0 \quad (5.3)$$

Tehát ez az eset egy általános L_1 normás kiegyenlítés és egy pótlólagos korlátozó feltétellel adott hibrid becslésnek felel meg. A gyakorlatban a Boscovich-Laplace feltétel igen egyszerűen megfogalmazható. A javítások abszolút értékeinek minimalizálása közismerten egy lineáris programozási feladatra vezethető vissza. Ezen optimalizálási feladathoz a BL feltétel figyelembe vétele a szimplex tábla egy sorral történő kiegészítését jelenti. A BL módszer így az L_1 normás eljárás kiterjesztését jelenti, mégpedig az L_2 normás módszer irányába, ezért ezen módszer kevésbé robusztus, mint az L_1 módszer, de robusztusabb, mint az L_2 módszer. Olyan esetekben célszerű alkalmazni, ahol

sem az L_1 , sem az L_2 norma alkalmazhatóságának feltételei nem teljesülnek, azaz a megfigyelés hibáinak eloszlása sem nem Gauss-, sem nem Laplace- eloszlás.

5.2 A Boscovich-Laplace módszer a regressziós egyenes illesztésére

A legkisebb négyzetek módszerének megjelenése előtt már léteztek különböző megoldások a lineáris modellek paramétereinek becslésére. Erről nagyon jó áttekintést ad *Harter* (1974) tanulmánya.

1770-ben *Boscovich* az $y_i = ax_i + b + v_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) egyenletek a és b ismeretlen paramétereinek a meghatározására azt javasolta, hogy minimalizálják a legkisebb abszolút eltérések összegét azzal a kényszerrel, hogy az eltérések algebrai összege nulla legyen.

$$\sum_{i=1}^n |y_i - ax_i - b| = \sum_{i=1}^n |v_i| \rightarrow \min \quad , \quad (5.4)$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = \sum_{i=1}^n v_i = 0 \quad . \quad (5.5)$$

Ez a javaslat a legkisebb négyzetek módszerének előfutáraként tekinthető. *Laplace* (1799) átvette *Boscovich* (1770) kritériumát, és algebrai megoldást dolgozott ki a becslés kiszámítására, előtte már az angol *Simpson* (1757) is adott egy megoldást. Egy évszázaddal később *Edgeworth* (1887) angol matematikus foglalkozott a *Boscovich*-típusú becslésekkel, és az L_1 és L_2 módszerek közötti figyelemre méltó hibridként jellemezte azt.

A legkisebb négyzetek módszerének felfedezése és térhódítása az egyéb megoldásokat – főleg a nehezebb kezelhetőségük miatt – háttérbe szorította, és csak a modern számítógépek elterjedésével és a robusztus becslési eljárások bevezetésével kerültek ismét az érdeklődés előterébe. Elsősorban az L_1 normás módszerről, mint a legrégebb robusztus becslési eljárás újrafelfedezéséről beszélhetünk a LNM egyik megfelelő robusztus alternatívájaként. *Koenker* és *Basset* (1985) elméletileg vezették le a *Boscovich*-

Laplace becslés aszimptotikus elméletét Edgeworth előzőekben említett megállapításának igazolására.

A becslés más módszerekkel való összehasonlítására és magasabb rendű feladatok megoldására *Kampmann* (1988) végzett vizsgálatokat. Ő a szabad hálózatok kiegyenlítésére dolgozott ki számítási módszert, és teszhálózatok segítségével az L_1 és az L_2 normás kiegyenlítések eredményeit hasonlította össze.

5.3 A regressziós egyenes meghatározásának modellje

A regressziós modellt elsősorban azért választottuk, mivel a matematikai, statisztikai irodalom a különböző paraméterbecslési eljárások vizsgálatát általában regressziós problémához kapcsolja.

Legyen a regressziós egyenes modellje a következő:

$$y_i = ax_i + b + v_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad . \quad (5.6)$$

A BL-feltétel alapján:

$$\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \quad . \quad (5.7)$$

Az (5.7) összefüggésből kapjuk:

$$\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - nb = 0 \quad . \quad (5.8)$$

A (5.8) egyenletből kifejezhető b :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n} = y_s - ax_s, \quad (5.9)$$

- ahol

$$y_s = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, \quad x_s = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (5.10)$$

a súlypont koordinátái.

Minimalizáljuk a következő kifejezést az (5.4) összefüggés alapján:

$$\sum_{i=1}^n |y_i - y_s - a(x_i - x_s)| \rightarrow \min. \quad (5.11)$$

Átalakításokkal nyerjük:

$$\sum_{i=1}^n |y'_i - ax'_i| = \sum_{i=1}^n |x'_i| \left| \frac{y'_i}{x'_i} - a \right| \rightarrow \min, \quad (5.12)$$

- ahol $x'_i = x_i - x_s$,

$y'_i = y_i - y_s$ súlyponti koordináták.

Könnyen belátható (az LP megoldás sajátossága), hogy létezik olyan i_0 index, amelyre

$$a = \frac{y'_{i_0}}{x'_{i_0}} = \frac{y_{i_0} - y_s}{x_{i_0} - x_s} \quad (5.13)$$

és az (5.12) kifejezés minimális.

Ekkor kapjuk

$$b = \frac{x_{i_0} y_s - y_{i_0} x_s}{x_{i_0} - x_s} . \quad (5.14)$$

A geodéziai gyakorlatban regressziós problémák ritkábban fordulnak elő. Egyenes és görbeillesztéseken kívül esetleg geodinamikai vonatkozású mérések változásainak statisztikus analizálásához alkalmazzák. Ennek ellenére ezt a modellt választottuk, mivel a matematikai statisztikában a különböző paraméter becslési eljárásokat általában regressziós problémákkal tesztelik. Monte Carlo módszer alkalmazásával vizsgáltuk a Boscovich-Laplace, az L_1 és L_2 normás becsléseknek a lineáris regressziós modellre és a sík hasonlósági transzformációra vonatkozó viselkedését. A szimulált adatokhoz normális, szennyezett normális és Cauchy eloszlású zajokat generáltunk.

Lineáris regressziós modellünkben a vizsgált becslési módszerek összehasonlítása céljából az (5.6) egyenlet alapján megadott a és b paraméterekhez szimulált y_i és x_i adatok közül az y_i értékekre normális, normális és szennyezett (N+K), valamint Cauchy eloszlású zajokat generáltunk. A megváltozott adatokkal az a és b paramétereket L_1 , L_2 és BL módszerrel történő kiegyenlítéssel határoztunk meg. A számításokat több ismétléssel végeztük. Az egyes kísérletek között lényeges eltérések nem mutatkoztak.

5.1 Példa

Input: A regressziós egyenes BL feltétellel történő meghatározásához szimulált értékeket és különböző eloszlású zajokat az 5.1 táblázat tartalmaz.

			N	N+K	C
pnr	x	y	z ₁	z ₂	z ₃
1	10	21	-0.006	-0.006	-0.237
2	15	31	0.001	0.001	0.005
3	20	41	0.001	0.001	-0.021
4	25	51	-0.002	-0.252	0.009
5	30	61	0.002	0.002	-0.006
6	35	71	-0.002	-0.002	-0.010
7	40	81	-0.009	-0.009	-0.006
8	45	91	0.004	0.004	-0.004
9	50	101	0.011	0.011	-0.003
10	55	111	0.010	0.010	-0.580
11	60	121	0.010	0.010	0.010
12	65	131	-0.001	-0.001	0.006
13	70	141	0.003	0.003	0.002
14	75	151	-0.002	-0.002	-0.004
15	80	161	-0.008	-0.008	0.000
16	85	171	-0.003	-0.003	0.000
17	90	181	-0.004	-0.004	0.001
18	95	191	0.004	0.004	0.002
19	100	201	0.003	0.003	-0.008
20	105	211	0.007	1.007	0.381
21	110	221	0.005	0.005	-0.005

5.1 táblázat. Szimulált értékek és különböző eloszlású zajok

Output: A kiegyenlítések eredményeként kapott javításokat az 5.2 táblázat, statisztikai jellemzőket és a becsült paraméterek értékeit az 5.3 táblázat adja meg.

pnr	N			N + K			C		
	L ₁	L ₂	BL	L ₁	L ₂	BL	L ₁	L ₂	BL
1	0.004	-0.005	0.004	0.004	0.205	0.000	0.460	-0.261	0.397
2	-0.009	0.009	-0.009	-0.009	0.190	-0.006	-0.025	0.207	-0.085
3	-0.008	0.008	-0.008	-0.008	0.161	0.003	0.028	0.138	-0.030
4	0.018	-0.019	0.018	0.498	-0.373	0.517	-0.033	0.183	-0.089
5	-0.009	0.008	-0.009	-0.009	0.105	0.018	0.000	0.134	-0.053
6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.068	0.034	0.009	0.109	-0.042
7	0.015	-0.015	0.015	0.015	0.025	0.057	0.002	0.100	-0.046
8	-0.010	0.010	-0.010	-0.010	0.022	0.039	-0.001	0.087	-0.047
9	0.014	-0.015	0.014	0.014	-0.030	0.071	-0.002	0.072	-0.045
10	-0.023	0.023	-0.023	-0.023	-0.021	0.042	1.153	-1.097	1.112
11	-0.020	0.020	-0.020	-0.020	-0.052	0.052	-0.030	0.068	-0.068
12	0.003	-0.003	0.003	0.003	-0.103	0.083	-0.018	0.039	-0.053
13	-0.005	0.004	-0.004	-0.005	-0.124	0.083	-0.003	0.009	-0.036
14	0.006	-0.006	0.006	0.006	-0.163	0.102	-0.014	0.004	-0.044
15	0.019	-0.019	0.019	0.019	-0.204	0.122	-0.003	-0.023	-0.031
16	0.010	0.010	0.010	0.010	-0.223	0.121	0.000	-0.042	-0.025
17	0.012	-0.013	0.013	0.012	-0.253	0.131	0.001	-0.059	-0.022
18	-0.003	0.003	-0.002	-0.003	-0.266	0.123	0.000	-0.074	-0.020
19	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.297	0.134	0.019	-0.109	0.001
20	-0.007	0.007	-0.007	-2.007	1.676	-1.864	-0.758	0.651	-0.773
21	-0.010	0.010	-0.010	-0.010	-0.343	0.139	0.013	-0.135	0.000

5.2 táblázat. Javítások

$\sum v_i $	0.205	0.207	0.204	2.685	4.904	3.741	2.572	3.601	3.019
$\sum v_i^2$	0.0029	0.0027	0.0028	4.278	3.557	3.881	2.120	1.891	2.032
MSE	0.012	0.011	0.011	0.451	0.412	0.430	0.318	0.300	0.311
\hat{a}	1.9998	1.9999	1.9998	1.9998	1.9942	1.9983	1.9998	1.9966	1.993
\hat{b}	1.0094	1.0089	1.0096	1.0094	1.2742	1.0289	1.0155	1.2459	1.0838

5.3 táblázat. Adott: $a = 2$ és $b = 1$

5.4 A síkbeli hasonlósági transzformáció

A sík Helmert-féle hasonlósági transzformációját L_1 normában BL feltétel nélkül *Fuchs* (1980) oldotta meg doktori disszertációjában, de korábban már *Meissl* (1968) L_∞ normában tárgyalt hasonló jellegű a problémát.

Az alapfeladat: egy méretarány, egy elforgatás és síkbeli eltolási paraméterekkel megadott transzformációval vigyük át az egyik pontrendszert a másikba úgy, hogy a két rendszer közötti eltérések abszolút értékeinek összege minimum legyen. Ezt a célfüggvényt egészítsük ki a BL feltétellel: előírjuk, hogy a koordináták javításainak összege külön - külön zérus legyen. Ez is egy olyan nemlineáris optimalizálási feladat, amely visszavezethető egy lineáris optimalizálási feladatra.

A sík hasonlósági (Helmert) transzformációjára az L_1 normás megoldást *Boscovich-Laplace* feltétellel kiegészítve egy lineáris programozási modellt vezetünk be.

Vizsgáljuk a (4.5) összefüggésekkel megadott síkbeli hasonlósági transzformációt. Tekintsük a $P_i(X_i, Y_i)$ és a $Q_i(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) pontrendszereket. A Q_i pont-halmazt egy méretarány, egy elforgatás és egy síkbeli eltolási paraméterekkel megadott transzformációval vigyük át a P_i pontrendszerbe úgy, hogy a két rendszer közötti eltérések abszolút értékeinek összege minimum legyen. Ezt a célfüggvényt egészítsük ki az ún. *Boscovich-Laplace* feltétellel. Követeljük meg, hogy a koordináták javításainak összege külön-külön zérus legyen.

A (4.6) összefüggésekben megfelelő közelítő értékek – $\varphi_0 \approx 0$, $m_0 \approx 1$ és $c_{x_0} \approx 0$, $c_{y_0} \approx 0$ – esetén kis változásokat tételezhetünk fel. Ekkor a sík hasonlósági transzformációjának L_1 normás megoldásához első közelítésben írhatjuk:

$$\begin{aligned} v_{x_i} &= x_i dm - y_i d\varphi + dc_x + dx_i \quad , \\ & \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, \dots, n \quad , \qquad (5.15) \\ v_{y_i} &= y_i dm + x_i d\varphi + dc_y + dy_i \quad , \end{aligned}$$

- ahol $dx_i = x_i - X_i$,

$dy_i = y_i - Y_i$.

A transzformált pontok illeszkedését definiáljuk így:

$$r_i = \sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2} , \quad r_i \geq 0 , \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (5.16)$$

Keressük a következő célfüggvény minimumát:

$$\sum r_i \rightarrow \min . \quad (5.17)$$

Amennyiben megengedjük, hogy a transzformált pont vagy az r_i sugarú körön vagy a körön belül is lehet, kapjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2} \leq r_i , \quad r_i \geq 0 , \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (5.18)$$

Az (5.15) összefüggés alapján a *Boscovich-Laplace* feltételből adódik:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i dm - \sum_{i=1}^n y_i d\varphi + ndc_x &= -\sum_{i=1}^n dx_i , \\ \sum_{i=1}^n y_i dm + \sum_{i=1}^n x_i d\varphi + ndc_y &= -\sum_{i=1}^n dy_i . \end{aligned} \quad (5.19)$$

Meissl (1968) és *Fuchs* (1982) alapján belátható, hogy a

$$\sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2} \leq r_i , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.20)$$

feltétel helyettesíthető végtelen sok egyenlőtlenséggel a következő közelítés felhasználásával:

$$v_{x_i} \cos \alpha + v_{y_i} \sin \alpha < r_i , \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi , \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (5.21)$$

A számítások során kényszerűségből az r_i sugarú kört véges sok α érték felvételével sokszöggel helyettesítjük.

Az (5.19) Boscovich-Laplace feltételből levezetett formulából kapjuk:

$$\begin{aligned} dc_x &= -(dx_s + x_s dm - y_s d\varphi) , \\ dc_y &= -(dy_s + y_s dm + x_s d\varphi) . \end{aligned} \quad (5.22)$$

- ahol

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} , & dx_s &= \frac{\sum_{i=1}^n dx_i}{n} , \\ y_s &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} , & dy_s &= \frac{\sum_{i=1}^n dy_i}{n} . \end{aligned}$$

A fenti ismeretleneket helyettesítsük (5.15) összefüggésekbe:

$$\begin{aligned} v_{x_i} &= (x_i - x_s) dm - (y_i - y_s) d\varphi + dx_i - dx_s , \\ v_{y_i} &= (y_i - y_s) dm + (x_i - x_s) d\varphi + dy_i - dy_s , \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (5.23)$$

Így természetes módon az (x'_i, y'_i) és a (dx'_i, dy'_i) súlyponti koordinátákra térhetünk át, és a javításokra a következő kifejezéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} v_{x_i} &= x'_i dm - y'_i d\varphi + dx'_i , \\ v_{y_i} &= y'_i dm + x'_i d\varphi + dy'_i . \end{aligned} \quad (5.24)$$

Helyettesítsük a v_{x_i} és v_{y_i} javításokat az (5.21) egyenlőtlenségekbe, akkor a sík hasonlósági (Helmert) transzformáció Boscovich-Laplace feltétellel kiegészített lineáris programozási modelljéhez jutunk:

$$(x'_i \cos \alpha_{ij} + y'_i \sin \alpha_{ij}) dm + (x'_i \sin \alpha_{ij} - y'_i \cos \alpha_{ij}) d\varphi - r_i < -(dx'_i \cos \alpha_{ij} + dy'_i \sin \alpha_{ij}) , \quad (5.25)$$

$$\sum_{i=1}^n r_i \rightarrow \min , \quad r_i \geq 0 ,$$

$$0 \leq \alpha < 2\pi , \quad j = 1, 2, \dots, m_j , \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

Azaz a nemlineáris optimalizálási feladat visszavezethető lineáris optimalizálási feladatra.

A lineáris programozási feladat duáltját képezve a megoldást a Fuchs-féle (4.12) - (4.17) összefüggésekben megadott iterációval nyerhetjük. A módszert *Somogyi és Závoti* (1992) tanulmánya részletesen ismertette.

5.2 Példa

Input: Az 5.4 táblázat a két koordináta-rendszerben adott közös pontokat, az 5.5 táblázat különböző eloszlású zajokat ad meg.

pnr	X	Y	x	y
1	100	600	-46.372	478.295
2	425	490	224.120	460.808
3	410	700	169.736	617.988
4	750	640	441.452	641.722
5	575	575	321.203	556.340
6	830	460	539.303	520.725
7	600	400	376.062	427.913
8	770	240	538.501	340.579
9	560	150	396.656	228.964
10	450	250	292.270	282.780
11	340	50	249.224	107.673
12	150	100	94.016	106.978
13	270	220	161.049	223.084
14	225	465	76.616	400.838
15	50	300	-23.186	239.148

5.4 táblázat. A két koordináta-rendszer közös pontjai

pnr	N		N + K		C	
	Z _x	Z _y	Z _x	Z _y	Z _x	Z _y
1	-0.002	-0.001	-0.002	-0.001	-0.003	0.000
2	0.002	-0.004	0.002	-0.004	0.000	0.190
3	0.004	-0.003	0.036	-0.003	0.058	-0.140
4	-0.005	-0.001	-0.005	-0.001	-0.001	0.000
5	0.001	-0.005	0.001	-0.005	0.000	0.004
6	-0.009	0.007	-0.009	0.007	-0.001	-0.002
7	-0.002	-0.003	-0.002	-0.003	-0.004	-0.008
8	0.003	-0.001	0.003	-0.064	-0.002	0.004
9	-0.001	-0.007	-0.001	-0.007	0.002	-0.004
10	0.010	0.004	0.010	0.004	0.086	-0.002
11	0.005	0.000	0.005	0.000	-0.001	0.002
12	0.000	-0.002	0.000	-0.002	-0.012	-0.002
13	0.002	-0.006	0.151	-0.006	0.001	0.033
14	0.003	0.004	0.003	0.004	-0.001	0.009
15	0.002	0.001	0.002	0.001	0.004	0.123

5.5 táblázat. Zaj értékek

Output: Az 5.6 táblázatban a becsült paraméterek értékei találhatóak

	m	φ	c _x	c _y	zaj
L ₁	0.7899998	0.2618009	0.002	-0.002	N
L ₂	0.7899997	0.2618052	-0.004	0.003	
BL	0.7899998	0.2618031	0.003	-0.001	
L ₁	0.7899936	0.2618039	0.002	0.001	N + K
L ₂	0.7899862	0.2617985	-0.020	0.004	
BL	0.7900023	0.2617828	0.005	-0.002	
L ₁	0.7899963	0.2617874	-0.002	0.003	C
L ₂	0.7899657	0.2617550	-0.017	-0.049	
BL	0.7899777	0.2617679	0.018	0.028	
adott	0.7900000	0.2617999	0.000	0.000	

5.6 táblázat. A becsült paraméterek értékei

A szennyezett normális és Cauchy eloszlású példák eredményei jól mutatják az L_1 -becslés durvahiba-érzékletlenségét és az LNM durva hibák iránti érzékenységét, amit a szakirodalom is igazol. Asszimmetrikus eloszlású durva hibák jelenlétekor a BL becslés (5.3) kényszerfeltétele erősen növeli a becslés durvahiba-érzékenységét. Egy nagyobb kiugró érték előfordulásával a legtöbb javítás azzal ellentétes előjelű, így a becsült paraméterek szabályos hibahatással terhelődnek.

Szimmetrikus eloszlású durva hibák esetén a BL-becslés érzékletlensége jelentősen megnövekszik és elfogadható eredményt ad. Ez érthető, mivel ilyenkor az ellentétes előjelű durva hibák az (5.3) kényszerfeltételben hatástalanítják egymást.

6. A MÓDOSÍTOTT LEGKISEBB NÉGYZETES, MINIMUM NORMÁS BECSLÉSEK

A geodézia korszerű kiegyenlítő számítási módszerei közé tartozik az alakmátrix felbontása, spektrálanalízise szinguláris értékei szerint (Singular Value Decomposition, SVD). Az SVD tanulmányozása során arra a következtetésre jutottunk, hogy léteznek mátrixok, amelyek éppen a sajátérték-feladat megoldására gyengén meghatározottak. A geodéziában előforduló szimmetrikus mátrixok egy osztályáról, a szintezési hálózatok normálmátrixairól sikerült kimutatni, hogy annak sajátértékei jól meghatározottak, azaz kevésbé érzékenyek a mátrix elemeinek kis megváltoztatására.

A sajátvektorok nem minden esetben folytonos függvényei a mátrix elemeinek, ezért a mátrix egyes elemeit kissé megváltoztatva, a sajátvektorok nagy megváltozása fordulhat elő. Sikerült bizonyítani, hogy a sajátértékek érzékenysége attól függ, hogy a hozzá tartozó sajátérték mennyire különbözik a vele szomszédos sajátértékektől. Ha a sajátérték jól elkülönített, akkor az ehhez tartozó sajátvektor is jól meghatározott.

A SVD módszer középhibája igen nagy, ha a legkisebb nemnulla sajátérték közel van a nullához. A robusztus becslésekhez hasonlóan kidolgozásra került egy olyan új iterációs eljárást, amely az SVD módszer középhibáját minimalizálja. A javított becslés az eredeti SVD megoldás súlyozott lineáris kombinációja, a levezetett súlyozás a kombinatív főkomponens becslésnél is, és az egyparaméteres főkomponens becslésnél is kisebb középhibát ad.

6.1 Matematikai modell

A geodéziai alkalmazások területén még mindig nagy érdeklődés mutatkozik a szinguláris értékek szerinti felbontás iránt. Több publikációban – például *Perelmuter* (1979), *Jia* (1987) és *Yang* (1989) – tárgyalták az SVD módszer kiegyenlítő számításokban való alkalmazását. A robusztus becslések témakörében találkozhatunk SVD-vel kapcsolatos kísérletekkel, nem teljes rangú Gauss-Markov modellek alkalmazásával *Koch* (1987) foglalkozott, és L_p normás becslések lineáris konform leképezésekre való

alkalmazását *Somogyi és Závoti* (1998), valamint *Závoti* (1999) tárgyalta. Az SVD-vel folytatott kísérletekről jó áttekintést ad *Qingming és Xurong* (1993).

Tekintsük a Gauss-Markov (GM) matematikai modellt:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{D}(\mathbf{v}) = \sigma^2 \mathbf{P}^{-1} \quad , \quad E(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad , \quad (6.1)$$

- ahol \mathbf{y}_m a megfigyelések egy véletlen vektora,

\mathbf{v}_m a javítások vektora,

\mathbf{x}_n az ismeretlenek vektora,

\mathbf{D}_{mm} az \mathbf{y} vektor kovariancia mátrixa,

\mathbf{P}_{mm} az \mathbf{y} megfigyelések ismert súlymátrixa ($\mathbf{P} > \mathbf{0}$),

σ^2 ismeretlen tényező,

\mathbf{A}_{mn} együttható mátrix, rang $(\mathbf{A}) = n_0$.

Az \mathbf{A} mátrix defektusa: $d = n - n_0$.

Amennyiben $d = 0$, teljes rangú a G-M modell, ha $d > 0$, nem teljes rangú a G-M modell.

A mátrix szinguláris értékek szerinti felbontása a numerikus analízis korszerű technikái közé tartozik. Az SVD-vel általánosított értelemben megoldhatók olyan lineáris algebrai egyenletrendszerek, amelyeknek az együtthatómátrixa szinguláris vagy numerikusan majdnem szinguláris.

Penrose (1955) alapján bármely valós \mathbf{A}_{mn} ($m \geq n$) mátrix felbontható a következő alakban:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T \quad , \quad (6.2)$$

- ahol

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad , \quad (6.3)$$

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}_n \quad . \quad (6.4)$$

Az U mátrix n oszlopát az AA^T mátrix n legnagyobb sajátértékéhez tartozó ortonormált sajátvektorok alkotják. A V mátrix oszlopai az $A^T A$ mátrix ortonormált sajátvektorai. A Λ főátló elemei az AA^T mátrix sajátértékeinek nemnegatív négyzetgyökei. Ha az A mátrix rangja n_0 , akkor $\lambda_i > 0 \quad i=1, 2, \dots, n_0$. Tehát a pozitív saját értékek száma egyenlő az A mátrix rangjával. Az A mátrix spektrális felbontása során a Householder-transzformációk alkalmazásával kétátlós alakra redukáljuk, majd meghatározzuk a kétátlós mátrix szinguláris értékeit.

Az A mátrix Moore-Penrose pszeudo inverzének nevezzük az A^+ mátrixot, ha kielégíti a következő négy feltételt:

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+$$

és

(6.5)

$$AA^+, \quad A^+A$$

szimmetrikus mátrixok.

Bebizonyítható, hogy minden A mátrixhoz létezik egyetlen ilyen A^+ mátrix. Ha A nonszinguláris, négyzetes mátrix, akkor $A^+ = A^{-1}$.

Ha $\text{rang}(A) = n$, akkor $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ és a G-M modell egyértelműen megoldható.

Ha $\text{rang}(A) = n_0 < n$, akkor a pszeudo inverz mátrixot a szinguláris értékek szerinti felbontással állítjuk elő.

A kiegyenlítő számításban előforduló mátrixok általában túlhatározottak ($m > n$) és nincs megoldásuk. Ilyen esetben célszerű bevezetni az általánosított megoldás, illetve a legkisebb négyzetes megoldás fogalmát. Olyan x vektort keresünk, amely minimummá teszi az $y - Ax$ hibavektor euklideszi normáját. Ha az A mátrix n_0 rangja kisebb, mint n , akkor a megoldás nem egyértelmű. A megoldás egyértelművé válik, ha a megoldások közül a legkisebb euklideszi normájút keressük.

6.2 A legkisebb négyzetes, minimum normás becslés (LN)

A G-M modell legkisebb négyzetes, minimum normás becslése a

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P}\mathbf{v} \rightarrow \min, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{x} \rightarrow \min \quad (6.6)$$

feltételekkel a következő:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{y}, \quad (6.7)$$

- ahol $^+$ jelöli a Moore-Penrose-féle általánosított inverzet.

Legyenek:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \lambda_k \geq 1 > \lambda_{k+1} \geq \dots \lambda_{n_0} > \lambda_{n_0+1} = \dots = \lambda_n = 0 \quad (6.8)$$

rendezett sajátértékei az $\mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{A}$ mátrixnak, $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ a megfelelő ortonormált sajátvektorok.

Jelölje:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n) = (\mathbf{Q}_{n_0} \mathbf{Q}_0) , \\ \mathbf{Q}_{n_0} &= (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{n_0}) , \\ \mathbf{Q}_0 &= (\mathbf{q}_{n_0+1}, \dots, \mathbf{q}_n) , \\ \mathbf{\Lambda} &= \mathit{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_0}, 0, \dots, 0_n) , \\ \mathbf{\Lambda}_1 &= \mathit{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_0}, 1, \dots, 1_n) . \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ekkor

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T . \quad (6.10)$$

Az $A^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ mátrix Moore-Penrose általánosított inverze egyszerűen kiszámítható, miután elvégeztük a $A^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ mátrix SVD felbontását, azaz előállítottuk, a \mathbf{Q} és $\mathbf{\Lambda}$ mátrixokat. *Ben-Israel* és *Greville* (1974), valamint *Popper* és *Csizmás* (1993) alapján írhatjuk:

$$\left(A^T \mathbf{P} \mathbf{A}\right)^+ = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}^+ \mathbf{Q}^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i^+ \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T, \quad (6.11)$$

- ahol

$$\mathbf{\Lambda}^+ = \mathbf{diag}\left(\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_n^+\right) \quad (6.12)$$

és

$$\lambda_i^+ = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_i} & , \lambda_i \neq 0 \\ 0 & , \lambda_i = 0 . \end{cases} \quad (6.13)$$

A (6.11) összefüggést a (6.7) egyenletbe helyettesítve kapjuk a legkisebb négyzetes, minimális normás becslés spektrális dekompozícióját:

$$\hat{\mathbf{x}}(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^+ \tilde{\mathbf{x}}_i, \quad (6.14)$$

- ahol

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{y}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.15)$$

A (6.14) összefüggés alapján a (6.1) G-M modell \mathbf{x} vektorára új becsléseket definiálhatunk:

$$\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n w_i \tilde{\mathbf{x}}_i. \quad (6.16)$$

A fenti alakból látható, hogy $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{w})$ a w_i súlyokkal képzett lineáris kombinációja az $\tilde{\mathbf{x}}_i (i = 1, 2, \dots, n_0)$ független statisztikai mennyiségeknek.

Amennyiben $w_i = \lambda_i^+$, visszajutunk a legkisebb négyzetes, minimum normás becslésekhez, de egyéb alkalmas választási lehetőség is van. A (6.11) összefüggésből következik:

$$\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{w}) = \mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Q}^T \hat{\mathbf{x}}(\lambda) . \tag{6.17}$$

6.3 A súlyozott becslések egy osztálya

A G-M modell legkisebb négyzetes, minimum normás becslésének középhibája *Qingming és Xurong* (1993) alapján:

$$MSE(\hat{\mathbf{x}}(\lambda)) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n_0} \frac{1}{\lambda_i} + \sum_{i=n_0+1}^n (\mathbf{q}_i^T \mathbf{x})^2 . \tag{6.18}$$

Abban az esetben, ha a legkisebb nemnulla sajátértékek a nullához közel esnek, a fenti középhiba nagyon nagy lehet. A legkisebb négyzetes, minimum normás megoldásokból kiindulva az (6.16) alakban megadott megoldáshoz olyan súlyok bevezetését javasoljuk, amelyek minimalizálják az alábbi középhibát:

$$MSE(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{w})) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n_0} w_i^2 \lambda_i + \sum_{i=1}^{n_0} (w_i \lambda_i - 1)^2 (\mathbf{q}_i^T \mathbf{x})^2 + \sum_{i=n_0+1}^n (\mathbf{q}_i^T \mathbf{x})^2 . \tag{6.19}$$

A fenti célfüggvény szélsőérték-helyeinek létezésének szükséges feltétele, hogy a parciális deriváltak eltűnjenek:

$$\frac{\delta MSE(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{w}))}{\delta w_i} = 2\sigma^2 w_i \lambda_i + 2\lambda_i (w_i \lambda_i - 1) (\mathbf{q}_i^T \mathbf{x})^2 = 0 , \tag{6.20}$$

$$i = 1, 2, \dots, n_0 .$$

Az egyenletrendszer megoldásai szeparálhatók:

$$w_i = \frac{1}{\lambda_i + \frac{\sigma^2}{(\mathbf{q}_i^T \mathbf{x})^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n_0. \quad (6.21)$$

A második parciális deriváltak alapján a szélsőérték-feladatnak minimuma van:

$$\sigma^2 \lambda_i + \lambda_i^2 (\mathbf{q}_i^T \mathbf{x})^2 > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_0. \quad (6.22)$$

6.3.1 Kombinatív főkomponens becslés (CPC)

A kombinatív főkomponens becslés esetén Jia (1987) alapján:

$$\tilde{\mathbf{x}}(\lambda_1^{-2}, \lambda_2^{-2}, \dots, \lambda_k^{-2}, 1, \dots, 1) = \mathbf{Q} \mathbf{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_k^{-1}, \lambda_{k+1}, \lambda_{n_0}, 1, \dots, 1) \mathbf{Q}^T \hat{\mathbf{x}}(\lambda). \quad (6.23)$$

6.3.2 Egyparaméteres főkomponens becslés (SPPC)

Legyen $\mathcal{G} \in (\lambda_{n_0}, 1)$ adott szám. Yang (1989) alapján:

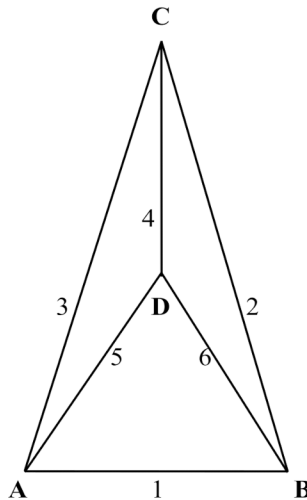
$$\tilde{\mathbf{x}} \left(\frac{\lambda_1 - 1 + \mathcal{G}}{\lambda_1^2}, \frac{\lambda_2 - 1 + \mathcal{G}}{\lambda_2^2}, \dots, \frac{\lambda_k - 1 + \mathcal{G}}{\lambda_k^2}, \mathcal{G}, \dots, \mathcal{G} \right) = \mathbf{Q} \mathbf{diag} \left(\frac{\lambda_1 - 1 + \mathcal{G}}{\lambda_1}, \frac{\lambda_k - 1 + \mathcal{G}}{\lambda_k}, \mathcal{G} \lambda_{k+1}, \dots, \mathcal{G} \lambda_{n_0}, 1, \dots, 1 \right) \mathbf{Q}^T \hat{\mathbf{x}}(\lambda). \quad (6.24)$$

6.3.3 MSE minimalizálás

$$\tilde{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 + \frac{\sigma^2}{(q_1^T \hat{x}(\lambda))^2}}, \frac{1}{\lambda_2 + \frac{\sigma^2}{(q_2^T \hat{x}(\lambda))^2}}, \dots, \frac{1}{\lambda_k + \frac{\sigma^2}{(q_k^T \hat{x}(\lambda))^2}}, 1, \dots, 1 \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \text{diag} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \frac{\sigma^2}{(q_1^T \hat{x}(\lambda))^2}}, \dots, \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \frac{\sigma^2}{(q_k^T \hat{x}(\lambda))^2}}, 1, \dots, 1 \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T \hat{\mathbf{x}}(\lambda) \quad (6.25)$$

6.4 Numerikus példa

A módosított legkisebb négyzetes, minimális normájú becslések előnyeinek illusztrálására bemutatunk egy geodéziai példát. Kiegészítjük a 6.1 ábrán adott négy pontból, hat szintezési szakaszból, három zárt körből álló szabad szintezési hálózatot.



6.1. ábra. Szintezési hálózat

A 6.1 táblázat tartalmazza a négy pont közelítő magasságait, a korrelálatlan megfigyeléseket, – amelyek különbségei a megfelelő pontok magasságainak – és a megfigyelésekhez tartozó súlyokat.

	megfigyelések (m)	súly		Közelítő magasságok (m)
1	1.015	0.5	<i>A</i>	33.3
2	11.561	0.3	<i>B</i>	34.3
3	12.570	0.4	<i>C</i>	45.9
4	6.414	0.2	<i>D</i>	39.5
5	6.161	0.05		
6	5.140	0.1		

6.1. táblázat. Mérési adatok

A táblázatban szereplő súlyok fiktívek, csak a tárgyalt módszer alkalmazásának bemutatására szolgálnak.

Kiszámoljuk a négy pont kiegyenlített magasságait a hagyományos legkisebb négyzetes, minimum normájú becsléssel és az általunk javasolt módszerekkel.

Jelölje:

$$x_i = x_i^0 + \hat{x}_i, \quad i = A, B, C, D, \quad (6.26)$$

- ahol x_i az i -dik pont becsült magassága,

x_i^0 az i -dik pont közelítő magassága,

\hat{x}_i ismeretlen paraméter, az x_i^0 érték korrekciója.

A megfigyelésekből felírhatunk hat közvetítő egyenletet:

$$\begin{aligned}
(34.3 + \hat{x}_B) - (33.3 + \hat{x}_A) &= \mathbf{v}_1 + 1.015, \\
(45.9 + \hat{x}_C) - (34.3 + \hat{x}_B) &= \mathbf{v}_2 + 11.561, \\
(45.9 + \hat{x}_C) - (33.3 + \hat{x}_A) &= \mathbf{v}_3 + 12.570, \\
(45.9 + \hat{x}_C) - (39.5 + \hat{x}_D) &= \mathbf{v}_4 + 6.414, \\
(39.5 + \hat{x}_0) - (33.3 + \hat{x}_A) &= \mathbf{v}_5 + 6.161, \\
(39.5 + \hat{x}_0) - (34.3 + \hat{x}_B) &= \mathbf{v}_6 + 5.140.
\end{aligned} \tag{6.27}$$

A fenti egyenlet mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_A \\ \hat{x}_B \\ \hat{x}_C \\ \hat{x}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -39 \\ -30 \\ 14 \\ -39 \\ -60 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_5 \\ \mathbf{v}_6 \end{bmatrix}. \tag{6.28}$$

A tiszta tag értékei mm -ben adottak.

A levezetett normálmátrix és normálvektor:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.95 & -0.5 & -0.4 & -0.05 \\ -0.5 & 0.9 & -0.3 & -0.1 \\ -0.4 & -0.3 & 0.9 & -0.2 \\ -0.05 & -0.1 & -0.2 & 0.35 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -38.55 \\ -14.80 \\ 49.10 \\ 4.25 \end{bmatrix}. \tag{6.29}$$

Az $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ mátrix sajátértékei és a sajátértékekhez tartozó sajátvektorok, amelyek a megfelelő ortogonális mátrix oszlopait alkotják az alábbiak:

$$\lambda_1 = 1.45249, \quad \lambda_2 = 0.0, \quad \lambda_3 = 0.44749, \quad \lambda_4 = 1.2 \quad (6.30)$$

és

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4), \quad (6.31)$$

- ahol

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -0.77554 \\ 0.56149 \\ 0.28074 \\ -0.06669 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0.36793 \\ 0.32527 \\ 0.16262 \\ -0.85580 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_4 = \begin{bmatrix} -0.11470 \\ -0.57354 \\ 0.80296 \\ -0.11471 \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

A különböző módszerek eredményei a 6.2 táblázat adatai alapján hasonlíthatók össze:

		LN		CPC		SPPC		min MSE	
$\ \bar{x}\ $		59.347		42.280		47.418		51.569	
σ		11.362		9.369		6.126		4.922	
MSE		697.0		247.087		137.592		113.1216	
K		3.246		2.109		1.559		1.456	
x _A	x _B	-35.736	-21.864	-22.419	-16.077	-26.839	-14.374	-29.036	-15.991
x _C	x _D	36.151	21.449	31.198	7.298	35.973	5.240	39.049	5.978
w _A	w _B	0.688	0.0	0.474	1.0	0.641	0.9	0.687	1.0
w _C	w _D	2.235	0.833	1.0	0.694	0.9	0.764	1.1	0.833

6.2. táblázat. A különböző módszerek eredményei

- ahol

$$K = \frac{\max\{w_i, 1\}}{\min\{w_i, 1\}} \quad (6.33)$$

az egyenlet rendszer kondíciójára jellemző mennyiség, a becslés stabilitását jelöli.

Egy új iterációs eljárást adtunk meg, amely hasonló a robusztus becslésekhez és amely minimalizálja a SVD módszerhez tartozó MSE középhibát. A javított becslés az eredeti SVD megoldás súlyozott lineáris kombinációja; a kapott MSE pedig kisebb, mint a kombinatív főkomponens becsléshez vagy az egyparaméteres főkomponens becsléshez tartozó értékek. Megadtunk egy numerikus példát a nagyobb pontosság bemutatására és az alkalmazási lehetőségek illusztrálására.

7. A FÖLD PÓLUSMOZGÁSÁNAK IDŐSOR ANALÍZISE

A Föld pólusának helyzetváltozásai egy év során egy hozzávetőlegesen 200 m²-es területen játszódnak le. Ezen belül a földi árapály és a globális meteorológiai folyamatok következtében létrejövő elmozdulások amplitúdói nem haladják meg a néhány decimétert. Nyilvánvaló tehát, hogy a fenti jelenségek vizsgálatához igen kifinomult mérés technikára van szükség. Ilyenek korunkban mindenképp előtt az űrgeodéziai eszközök és módszerek. Ezek közül *Ádám* (1990) alapján a VLBI (Very Long Baseline Interferometry,) és az SLR (Satellite Laser Ranging) az egy év és egy nap közé eső periódusú pólusváltozásokat képesek kimutatni, míg a GPS (Global Positioning System) és a VLBI továbbfejlesztett feldolgozási rendszere ezen túlmenően az egy napnál rövidebb folyamatok vizsgálatára is alkalmas.

Denis et al. (1992) alapján a Föld pólusmozgásának vizsgálata több szempontból fontos:

- lehetőséget biztosít a Föld dinamikus folyamatainak megfigyelésére, és a bolygónk belsejében lejátszódó folyamatok kutatására,
- a globális meteorológiai folyamatok modellezésére,
- nagyobb lokális hatások (pl. nagy földrengések) és a pólushelyzet változásainak egybevetésére.

A GPS megfigyelésekből származó pólusmozgás és forgássebesség változási adatsorok lehetővé teszik az 1 év, 0.5 év, 0.25 év periódusú szezonális meteorológiai folyamatoknak a tengelykörüli forgás paramétereire gyakorolt hatásának kutatását. *Zharkov et al.* (1996), valamint *Varga et al.* (1992) szerint az árapály különböző periódusú komponensei közül a lokális (14-28 nap) árapály elsősorban a tengelykörüli forgás sebességének változását idézi elő, míg a fél és egész napos (tesszerális és szektorális) hullámok a pólusmozgás okozói.

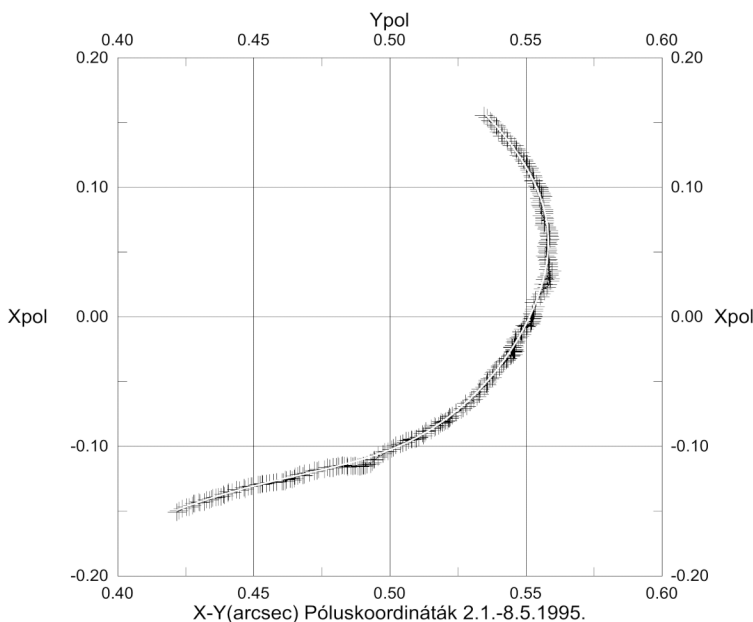
A pólusmozgás és forgássebesség változások kutatásához a műholdpályák igen pontos meghatározására van szükség. Ám az így nyert adatokkal az eddigi vizsgálatoknál sokkal részletesebb és többcélú vizsgálatra nyílik lehetőség. A pólusmozgás adatok-

ban elkülöníthetők a földi és a tengeri árapály okozta változások. *Kosek et al. (1995)* alapján a 40-60 nap periódusú meteorológiai eredetű anomáliákat az eddigieknél meg-alapozottabban lehet modellezni. Kutatható a Föld szeizmicitása és a pólushelyzet közti kapcsolat is.

7.1 A trend leválasztása

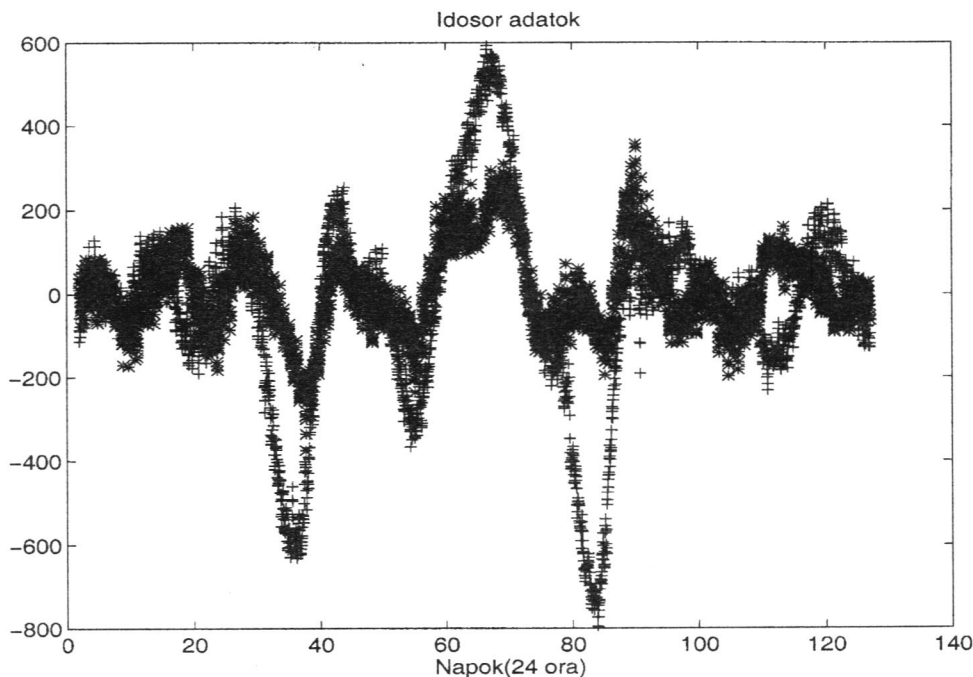
A Föld pólusmozgási adatainak feldolgozásához matematikai eszközként használtuk fel a lineáris szűréseket, a Fourier transzformációt, a *Brzezinski (1995)* által kidolgozott maximum entrópia programrendszert, de vizsgálatainkat elsősorban a wavelet analízisre alapoztuk.

A Föld pólusának idősor analíziséhez szükséges adatrendszereket a Darmstadti Műszaki Egyetem Fizikai Geodézia Intézete bocsátotta rendelkezésünkre. A pólus koordinátákat a Berni Egyetem Csillagászati Intézete GPS mérések alapján határozta meg. Az általunk mintafeladatnak választott és tesztelt adatrendszer tartalmazza a pólus mindkét (X-Y) koordinátáját az 1995. január 2.- május 8. közötti időszakban, a póluskoordináta értékek 1 óra időtartammal követik egymást. A 7.1 ábra a Föld pólusának 125 nap alatt végzett mozgását szemlélteti.



7.1 ábra A Földpólus 125 napos elmozdulása.

Az eredeti adatrendszerből a nagy frekvenciával rendelkező folyamatok vizsgálata előtt el kell távolítani a trendet, a szabályos részt. A szakirodalomban ehhez különböző fokszámú polinomokat ajánlanak. Ennél a módszernél a legnagyobb bizonytalanság a polinom fokszámának megválasztásában rejlik. Megállapítottuk, hogy a vizsgált adatrendszer esetén egy elsőfokú polinom legkisebb négyzetek módszerével történő illesztése már megfelelő eredményeket szolgáltat. Azonban a trendleválasztás általános problémájának megoldásához Závoti (1985) által általánosított spline interpolációt ajánljuk. A hagyományos interpolálási eljárások nemkívánatos oszcillációkat mutatnak, különösen az idősor elején és végén torzítják az eredményeket. Az általunk kidolgozott eljárás kiküszöböli ezt a problémát, megszűnik a peremhatás. A módszer alapelve: az idősor adatait három, közel egyenlő hosszúságú részintervallumra bontjuk. Mind a három részintervallumra kiegyenlítéssel harmadfokú spline polinomokat illesztünk úgy, hogy az adatrendszerekre legkisebb négyzetes értelemben legjobban illeszkedjenek. A csatlakozási pontokban a függvényre és deriváltjaira feltételi egyenletek felírásával biztosítjuk az interpolált függvény folytonosságát. Az eljárás iteratív, az egymást követő lépésekben a póluskoordináták a trendfüggvénytől való távolságukkal fordított arányban kapnak súlyokat. Ezzel a módszerrel az adatrendszerben előforduló durva hibák is felderíthetők és a feldolgozásból kiküszöbölhetők. Az általunk kidolgozott módszer gyakorlati alkalmazására - a korábban levezetett matematikai formulákon túlmenően - FORTRAN forráskódú programrendszert fejlesztettünk ki. A programrendszert felhasználtuk a póluskoordináták trendjének eltávolítására. A fenti módszerrel további felhasználásra alkalmas adatrendszereket nyertünk. A trend leválasztása után kapott idősor grafikus képe a 7.2 ábrán látható.



7.2 ábra Pólusingadozás a trend leválasztása után.

7.2 Digitális szűrés trigonometrikus interpolációval

A következő adatfeldolgozási lépés a póluskoordináták idősorának adott frekvenciasávba eső komponenseinek szűrése. A szakirodalomban erre a célra is számos módszer ismeretes. *Arfa-Kaboodvand* és *Grotten* (1998) a Butterworth felüláteresztő szűrőt alkalmazta. *Fritsch* (1982) a rekurzív szűrőket elemezte. A digitális szűrőkről tudni kell, hogy velük ideális átvitel nem valósítható meg. Az ideális esethez közelítő digitális szűrés problémájának megoldására a trigonometrikus interpolációt javasoljuk.

Tegyük fel, hogy az alábbi függvény esetén ismert a pozitív T periódus és ismeretlen az A amplitúdó, valamint ismeretlen a t_0 fáziseltolás. Az y megfigyelések alapján becsüljük meg az A és a t_0 paramétereket!

$$y = A \cos \left[\frac{2\pi}{T} (t - t_0) \right] = A \cos(\omega t - \omega t_0) = A \cos \omega t_0 \cos \omega t + A \sin \omega t_0 \sin \omega t \quad (7.1)$$

Végezzük el a következő csoportosítást:

$$y = A \cos \omega t \cos \omega t_0 + A \sin \omega t \sin \omega t_0 . \quad (7.2)$$

Jelölje

$$A \cos \omega t_0 = a_1 , \quad (7.3)$$

$$A \sin \omega t_0 = a_2 .$$

Ekkor (7.1) képlet így írható:

$$y = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t . \quad (7.4)$$

Az a_1 , a_2 és az A , t_0 paraméterek között fennáll:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} , \quad (7.5)$$

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a_2}{a_1}$$

összefüggés, ezért az a_1 és a_2 becslések értékéből kapjuk A és t_0 becsléseit.

Diszkrét, egyenközü megfigyelések esetén: $t = i \cdot \Delta t$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Tehát a közvetítő egyenletek így írhatók fel:

$$y_i = a_1 \cos \omega i \Delta t + a_2 \sin \omega i \Delta t , \quad i = 0, 1, 2, \dots, n . \quad (7.6)$$

Az a_1 és a_2 paraméterek becslésére alkalmazzuk a legkisebb négyzetek módszerét:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \omega \Delta t & \cos \omega 2\Delta t & \dots & \cos \omega n\Delta t \\ 0 & \sin \omega \Delta t & \sin \omega 2\Delta t & \dots & \sin \omega n\Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos \omega \Delta t & \sin \omega \Delta t \\ \cos \omega 2\Delta t & \sin \omega 2\Delta t \\ \cdot & \cdot \\ \cos \omega n\Delta t & \sin \omega n\Delta t \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

A mátrixszorzást elvégezve kapjuk:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 + \sum_1^n \cos^2 \omega i \Delta t & \sum_1^n \sin \omega i \Delta t \cos \omega i \Delta t \\ \sum_1^n \sin \omega i \Delta t \cos \omega i \Delta t & \sum_1^n \sin^2 \omega i \Delta t \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

A trigonometrikus függvények átalakításával adódik:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_1^n \cos 2\omega i \Delta t & \frac{1}{2} \sum_1^n \sin 2\omega i \Delta t \\ \frac{1}{2} \sum_1^n \sin 2\omega i \Delta t & \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_1^n \cos 2\omega i \Delta t \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Kiemeléssel és a trigonometrikus függvényekre jólismert addíciós formulák alapján egyszerű levezetéssel nyerjük:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n+2 + \frac{\sin n \omega \Delta t \cos(n+1)\omega \Delta t}{\sin \omega \Delta t} & \frac{\sin n \omega \Delta t \sin(n+1)\omega \Delta t}{\sin \omega \Delta t} \\ \frac{\sin n \omega \Delta t \sin(n+1)\omega \Delta t}{\sin \omega \Delta t} & n - \frac{\sin n \omega \Delta t \cos(n+1)\omega \Delta t}{\sin \omega \Delta t} \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

A mátrix minden tagjából $1/\sin \omega \Delta t$ kiemelésével a következő alakra jutunk:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2 \sin \omega \Delta t} \begin{pmatrix} (n+2) \sin \omega \Delta t + \sin n \omega \Delta t \cos(n+1)\omega \Delta t & \sin n \omega \Delta t \sin(n+1)\omega \Delta t \\ \sin n \omega \Delta t \sin(n+1)\omega \Delta t & n \sin \omega \Delta t - \sin n \omega \Delta t \cos(n+1)\omega \Delta t \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

További trigonometrikus összefüggéseket felhasználva kapjuk:

$$N = \frac{1}{4 \sin \omega \Delta t} \begin{pmatrix} (2n+3) \sin \omega \Delta t + \sin(2n+1) \omega \Delta t & \cos \omega \Delta t - \cos(2n+1) \omega \Delta t \\ \cos \omega \Delta t - \cos(2n+1) \omega \Delta t & (2n+1) \sin \omega \Delta t - \sin(2n+1) \omega \Delta t \end{pmatrix} . \quad (7.12)$$

Trigonometrikus azonosságokat felhasználva a mátrix determinánsának értékét az alábbi levezetésből nyerjük:

$$D = (2n+3)(2n+1) \sin^2 \omega \Delta t - 2 \sin \omega \Delta t \sin(2n+1) \omega \Delta t - \sin^2(2n+1) \omega \Delta t - \cos^2 \omega \Delta t + 2 \cos \omega \Delta t \cos(2n+1) \omega \Delta t - \cos^2(2n+1) \omega \Delta t . \quad (7.13)$$

A fenti összefüggés tovább alakítható:

$$D = 4(n+1)^2 \sin^2 \omega \Delta t + 2 \cos 2(n+1) \omega \Delta t - 2 . \quad (7.14)$$

Végül kapjuk:

$$D = 4(n+1)^2 \sin^2 \omega \Delta t - 4 \sin^2(n+1) \omega \Delta t . \quad (7.15)$$

Ha $D \neq 0$, egyszerű megfontolással az N mátrix inverzéhez jutunk:

$$N^{-1} = \frac{\sin \omega \Delta t}{D} \begin{pmatrix} (2n+1) \sin \omega \Delta t - \sin(2n+1) \omega \Delta t & -\cos \omega \Delta t + \cos(2n+1) \omega \Delta t \\ -\cos \omega \Delta t + \cos(2n+1) \omega \Delta t & (2n+3) \sin \omega \Delta t + \sin(2n+1) \omega \Delta t \end{pmatrix} . \quad (7.16)$$

A következő lépésben az a_1 és a_2 paraméterek becsléseit így határozhatjuk meg:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = N^{-1} \begin{pmatrix} y_0 + \sum_1^n y_i \cos \omega i \Delta t \\ \sum_1^n y_i \sin \omega i \Delta t \end{pmatrix} . \quad (7.17)$$

A póluskoordinátákat zéró várható értékű sztochasztikus folyamatnak tekintjük, az interpoláló függvényt pedig ismeretlen amplitúdójú és fázisú, adott pozitív egész periódusú cosinus függvényként vesszük fel. A póluskoordináták alapján becsüljük az amplitúdó és fázis értékeit. A becsléshez a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazzuk. Ezen eljárás kidolgozásával lehetővé vált adott periódusú komponensek leválasztása a jelről.

Jelölje a Nyquist frekvenciát:

$$f_N = \frac{1}{2\Delta t} . \quad (7.18)$$

Legyen f_1 és f_2 ($f_1 < f_2$) két adott frekvencia érték. Trigonometrikus interpolációval távolítsuk el a spektrumból az $f \in [f_1, f_2]$ frekvenciákat! Határozzuk meg az alábbi indexeket:

$$k_1 = \frac{n f_1}{2 f_N} , \quad (7.19)$$

$$k_2 = \frac{n f_2}{2 f_N} .$$

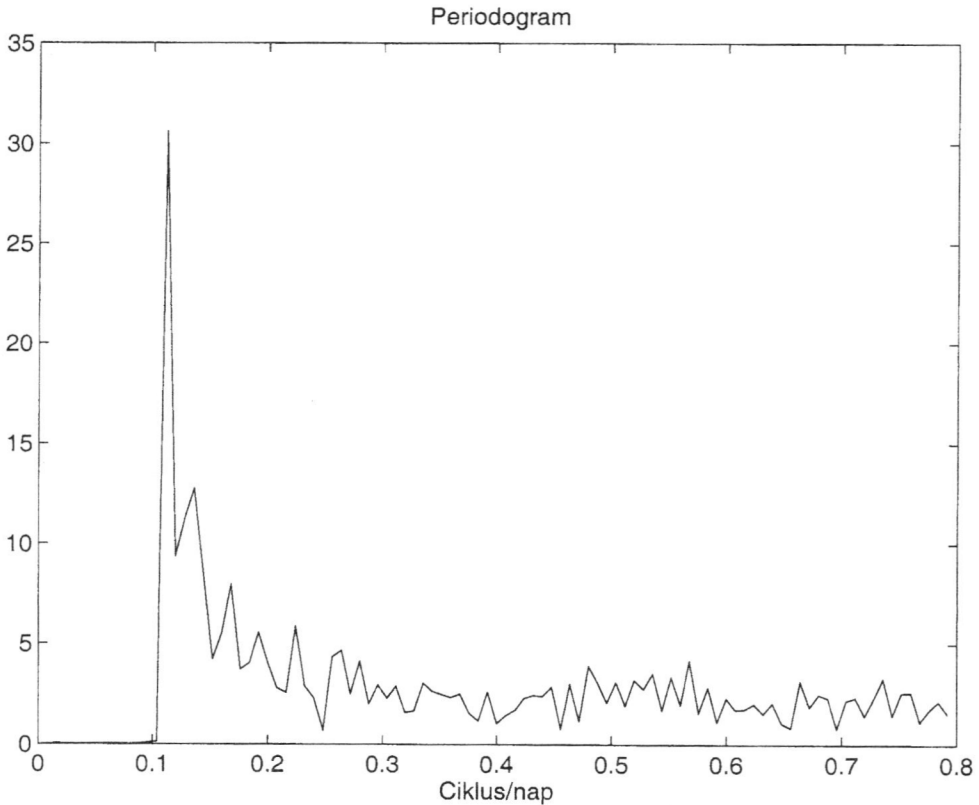
A (7.1) kifejezésben tekintsük adottnak a következő

$$\frac{1}{T_j} = \frac{2f_N}{n} j , \quad j = k_1, k_1 + 1, \dots, k_2 \quad (7.20)$$

összefüggéssel definiált periódusokat.

Valamennyi T_j ($j = k_1, k_1 + 1, \dots, k_2$) periódusra meghatározhatók a (7.17) összefüggéssel adott a_1 és a_2 értékek. A továbbiakban a (7.6) formulával meghatározott értékek egyszerű kivonással eltávolíthatók az idősből.

Így a frekvencia tartományból eltávolítottuk a 10 napnál hosszabb periódusokat. A trigonometrikus interpolációval végzett szűrés eredményét a (7.3) ábra mutatja.



7.3 ábra. A trigonometrikus interpolációs szűrés eredménye.

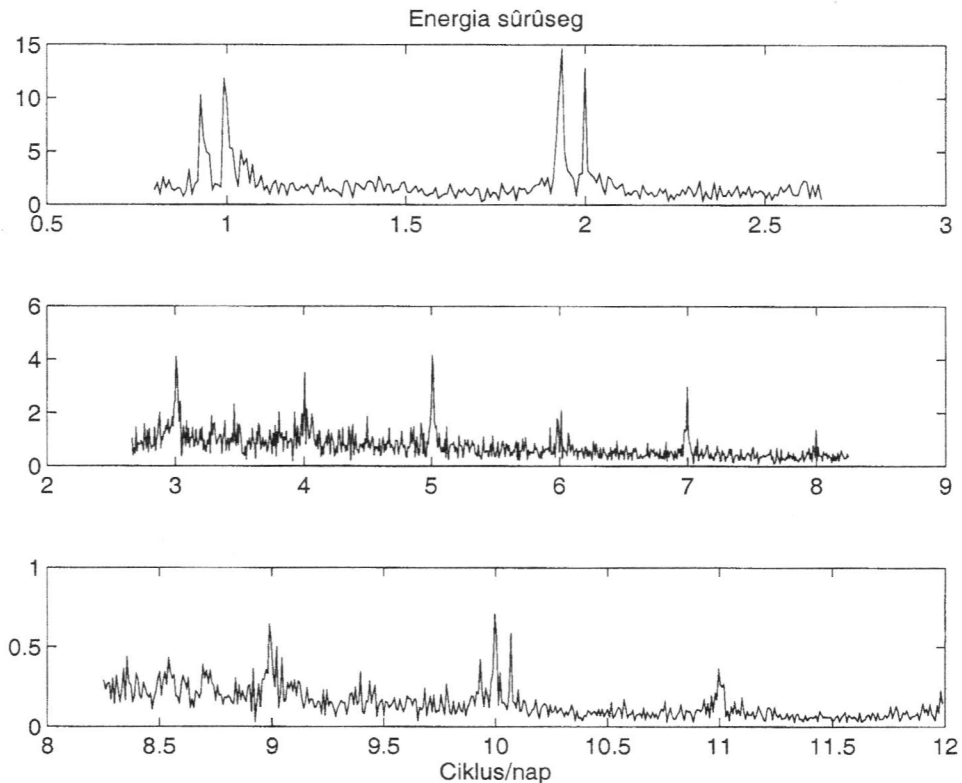
A trigonometrikus interpoláció fenti tárgyalása *Lomb* (1976) tanulmányára vezethető vissza. Az idézett tanulmány nem egyenközű adatok frekvencia analizisére adott meg eljárást a legkisebb négyzetek módszerével. Egyenközű adatok esetén a (7.17) összefüggésben adott speciális képletek vezethetők le a frekvencia analizishez, amelyek egyszerűen felhasználhatók az idősorok szűréséhez.

7.3 Fourier- és wavelet transzformáció

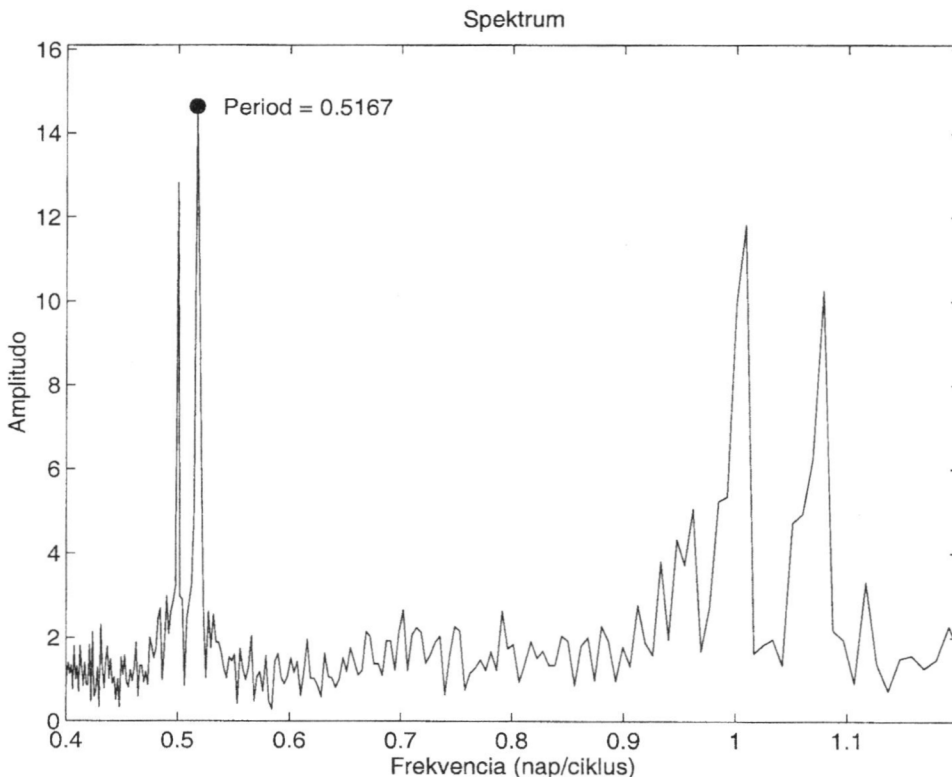
A fenti adatelőkészítés után jutunk el a tényleges Fourier és wavelet analízishez.

A Fourier transzformáció széles körben ismert a digitális jelfeldolgozásban. Egy jel, egy folyamat tulajdonságainak leírása a jelet alkotó frekvenciák révén szokás.

A Földpólus helyzetének változása tipikusan olyan jelenség, amelynél a frekvenciák az idő függvényében változnak, ezért időtől függő frekvencia analízist vezetünk be. Ebben az esetben az volt a célunk, hogy tisztázzuk az idő-frekvencia tartományban ható wavelet transzformációnak a póluskoordinátákra való alkalmazásának feltételeit, ezen túlmenően a transzformáció előnyös tulajdonságainak felhasználásával elvégezzük a rendelkezésünkre álló adatrendszer wavelet analízisét.



7.4 ábra. A pólusingadozás periódusai.



7.5 ábra Pólusingadozás spektruma.

Az eredmények értékelése alapján arra a következtetésre juthatunk, hogy a Föld pólusának változása a jólismert egy napos, fél napos periódusokon túlmenően napi 3, 4, 5, ..., 12 (természetes számok) ciklusokat is tartalmazhat. Valamennyi periódus érték magyarázatára mindezen ideig nem született fizikai elmélet. Az egyik magyarázat az "aliasing" jelenség lehetne. A Fourier analízishez szükséges számításokat saját fejlesztésű, FORTRAN forrásnyelvű programokkal végeztük, az egész eljárást MATLAB környezetben megismételtük. Az energia sűrűség becslését a 7.4 ábra szemlélteti.

A 7.5 ábra a pólusmozgás spektrumának egy részét mutatja be.

A wavelet transzformáció előnye abban rejlik, hogy egyidejűleg lehet az idő- és frekvencia analízist végrehajtani. Az analizálandó jelet (esetünkben a póluskoordinátákat) egy bázisfüggvénnyel mind az idő, mind a frekvencia tartományban letapogatjuk. Az alapfüggvény (ún. anya függvény) választása a feladat céljaitól függ. A szakiroda-

lomban a Haar, a Morlet, a Mexikói kalap bázis függvények alkalmazása terjedt el. Ezeket a módszereket ismerteti *Závoti* (1995) tanulmánya.

Tekintsük a következő függvény transzformációt:

$$\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in R, \quad (7.21)$$

- ahol $\psi(t)$ az ún. anya wavelet, b az eltolás, $a > 0$ a skála paraméter.

Speciális esetben legyen $\psi(t) = (1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$, az ún. Mexikói kalap függvény.

Dorize és *Villemoes* (1991) alapján az $s(t)$ analizálandó jel $S(b,a)$ wavelet transzformáció alapformulája a következő:

$$S(b,a) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (7.22)$$

A következőkben levezetjük a Mexikói kalap függvény Fourier transzformáltját, amely megkönnyíti a egydimenziós wavelet transzformáció számítását.

Matematikai szakkönyvekből, mint például *Kreyszig* (1993) alkalmazott matematikai könyvéből jólismertek a Fourier transzformációra vonatkozó következő összefüggések:

$$\begin{aligned} F\left\{e^{-at^2}\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}, \\ F\{f'(t)\} &= j\omega F\{f(t)\}, \quad j = \sqrt{-1}, \\ F\{f''(t)\} &= -\omega^2 F\{f(t)\}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

Tekintsük a következő függvényt:

$$f(t) = -a^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}. \quad (7.24)$$

Ekkor a második deriváltat kiszámolva kapjuk:

$$f''(t) = \left(a^{-\frac{1}{2}} t e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(1 - \frac{t^2}{a^2} \right) e^{-\frac{t^2}{2a^2}} . \quad (7.25)$$

A (7.25) formula a (7.22) integrál transzformáció frekvencia tartománybeli kiszámításához szükséges a Mexikói kalap bázisfüggvény esetén.

A (7.23) képletek első tagja alapján az $f(t)$ függvény Fourier transzformáltjára kapjuk:

$$F\{f(t)\} = -a^2 e^{-\frac{a^2 \omega^2}{2}} . \quad (7.26)$$

A (7.23) formulák harmadik tagja alapján a függvény második deriváltjának Fourier transzformáltja:

$$F\{f''(t)\} = a^2 \omega^2 e^{-\frac{a^2 \omega^2}{2}} . \quad (7.27)$$

A Fourier transzformációra érvényes eltolási képlet alapján:

$$\int f(t-b) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega b} F(\omega) . \quad (7.28)$$

Ekkor a következő összefüggéshez jutunk:

$$F \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \left[1 - \left(\frac{t-i\Delta t}{a} \right)^2 \right] e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-i\Delta t}{a} \right)^2} \right\} = \sqrt{a} a^2 \omega^2 e^{-\frac{a^2 \omega^2}{2}} e^{-j\omega i\Delta t} . \quad (7.29)$$

A pólus koordinátáit egy stacionárius, kétdimenziós, sztochasztikus folyamattal modellezzük, amely az (x, y) koordinátával rendelkező pontot valószínűségi változónak tekinti.

A wavelet kutatásaink eredményeként új matematikai modellezést adtunk az idő-frekvencia analízisben használatos wavelet transzformációra.

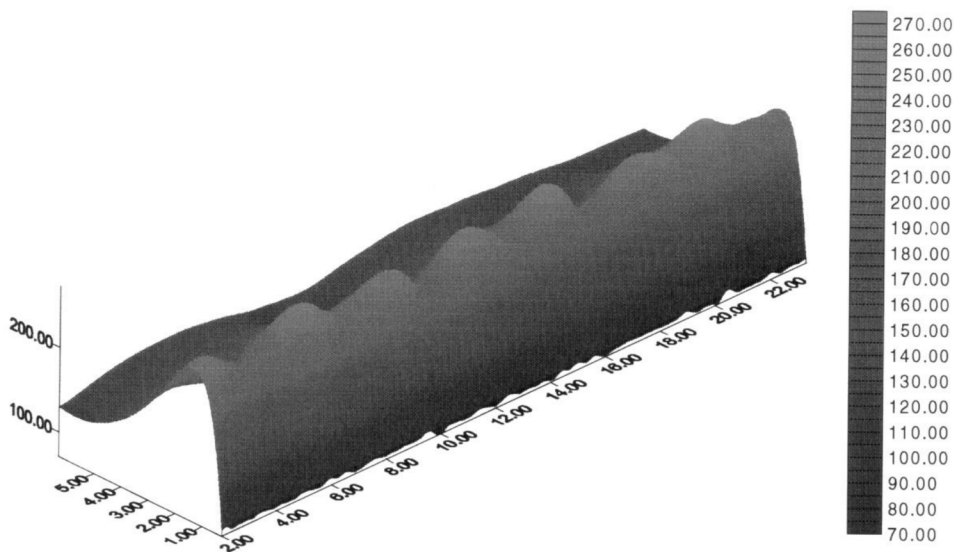
A Föld pólusmozgásának wavelet analízise a megfelelő bázisfüggvény megválasztásával vált lehetővé. Erre a célra a Mexikói kalap wavelet bázist alkalmaztuk. *Arfa-Kaboodvand* et al. (1998) a Morlet bázisfüggvény hatását is megvizsgálta. Az általunk használt módszerrel is sikerült a pólusmozgás változásaiban az egy napos és félnapos periódusokat kimutatni, amely eredmény összhangban van *Arfa-Kaboodvand* és *Groten* (1998) tanulmányában közölt eredményekkel.

A pólusmozgás vizsgált 125 napos időtartamából az első 21 napra a wavelet analízis eredményét a (7.6) ábra mutatja. Az ábrán megfigyelhető az 1 napos periódus időbeli változása.

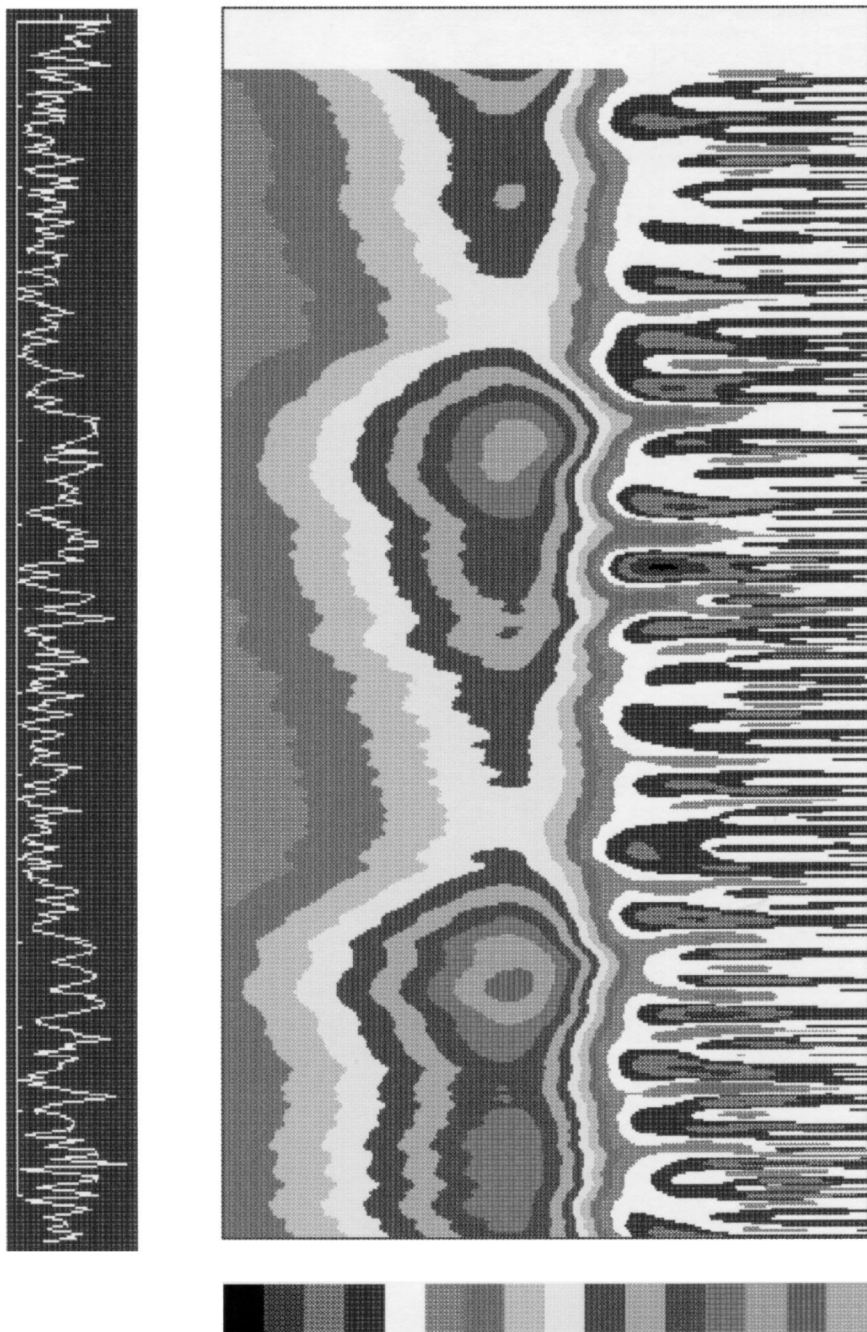
A (7.7), (7.8), (7.9) és (7.10) ábrák az első 2048 óra wavelet analízis eredményét szemléltetik.

Megállapítható, hogy a Föld pólusmozgásának idősor analízisére a trend leválasztására kidolgozott általánosított spline interpoláció kiválóan alkalmas. Idősorok digitális szűrésére a trigonometrikus interpolációt javasoljuk, amely lehetővé teszi adott frekvenciájú komponensek ideális leválasztását a jelről. Wavelet transzformációval sikerült kimutatni, hogy a Föld pólusának ingadozása egy- és félnapos árapály periódusokat is tartalmaz.

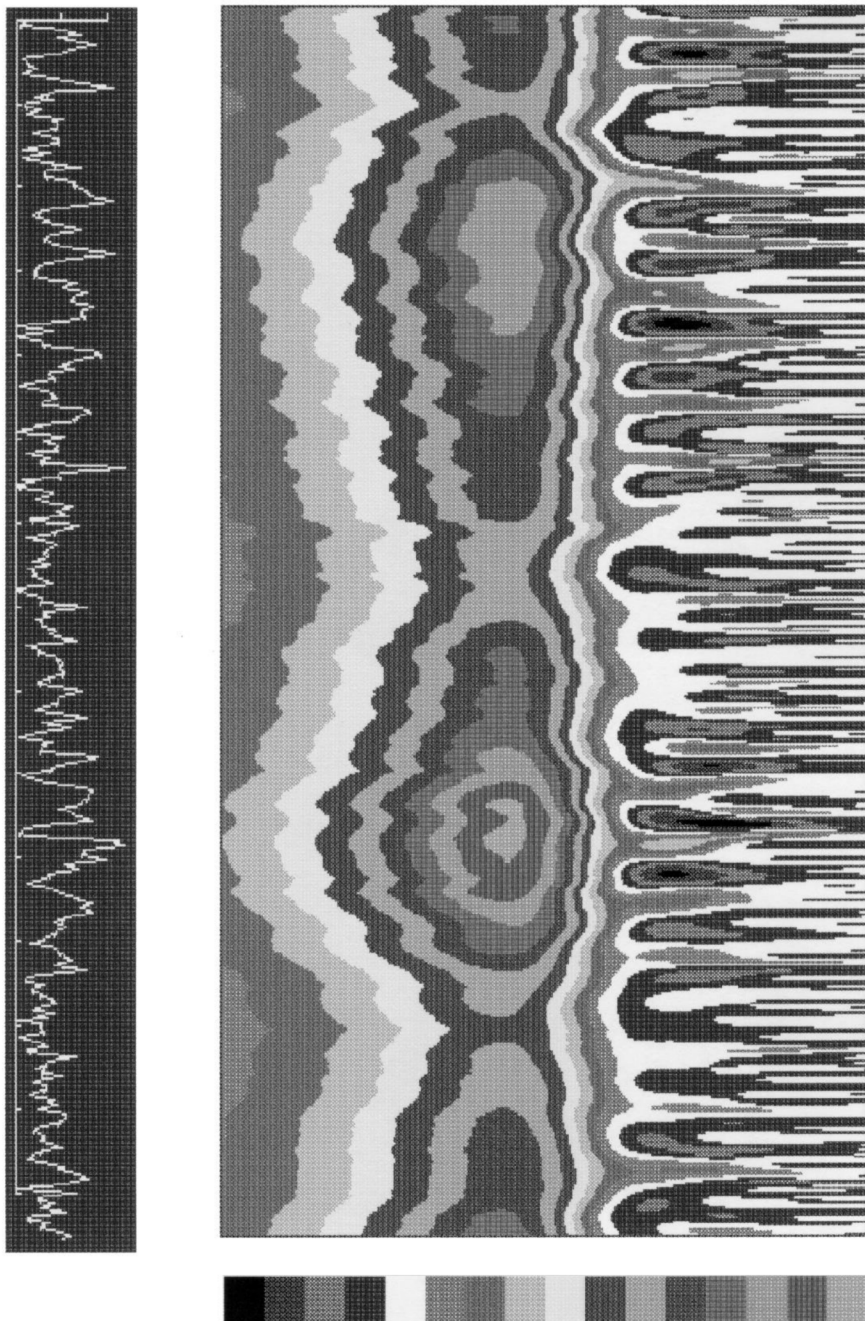
A Föld pólusingadozása



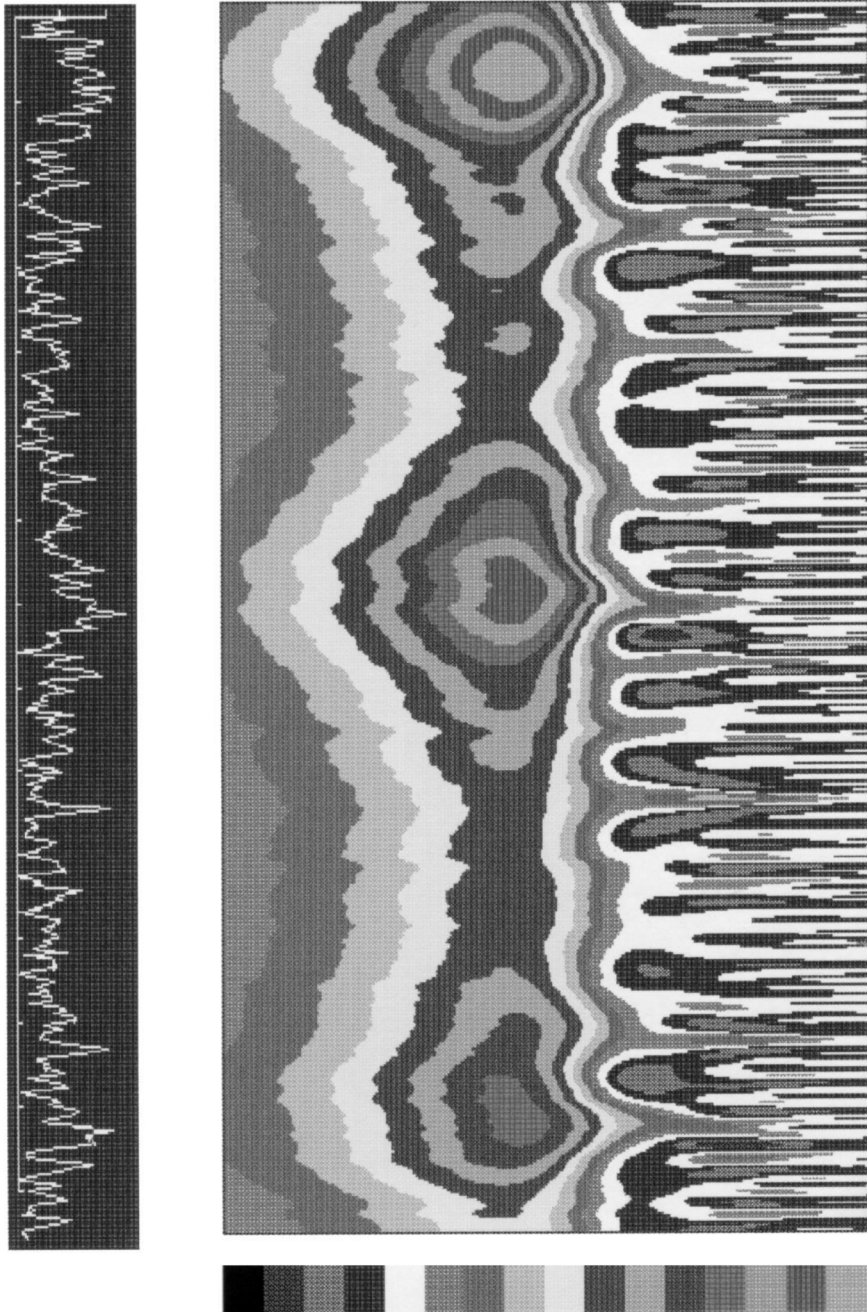
7.6 ábra. A wavelet analízis eredménye



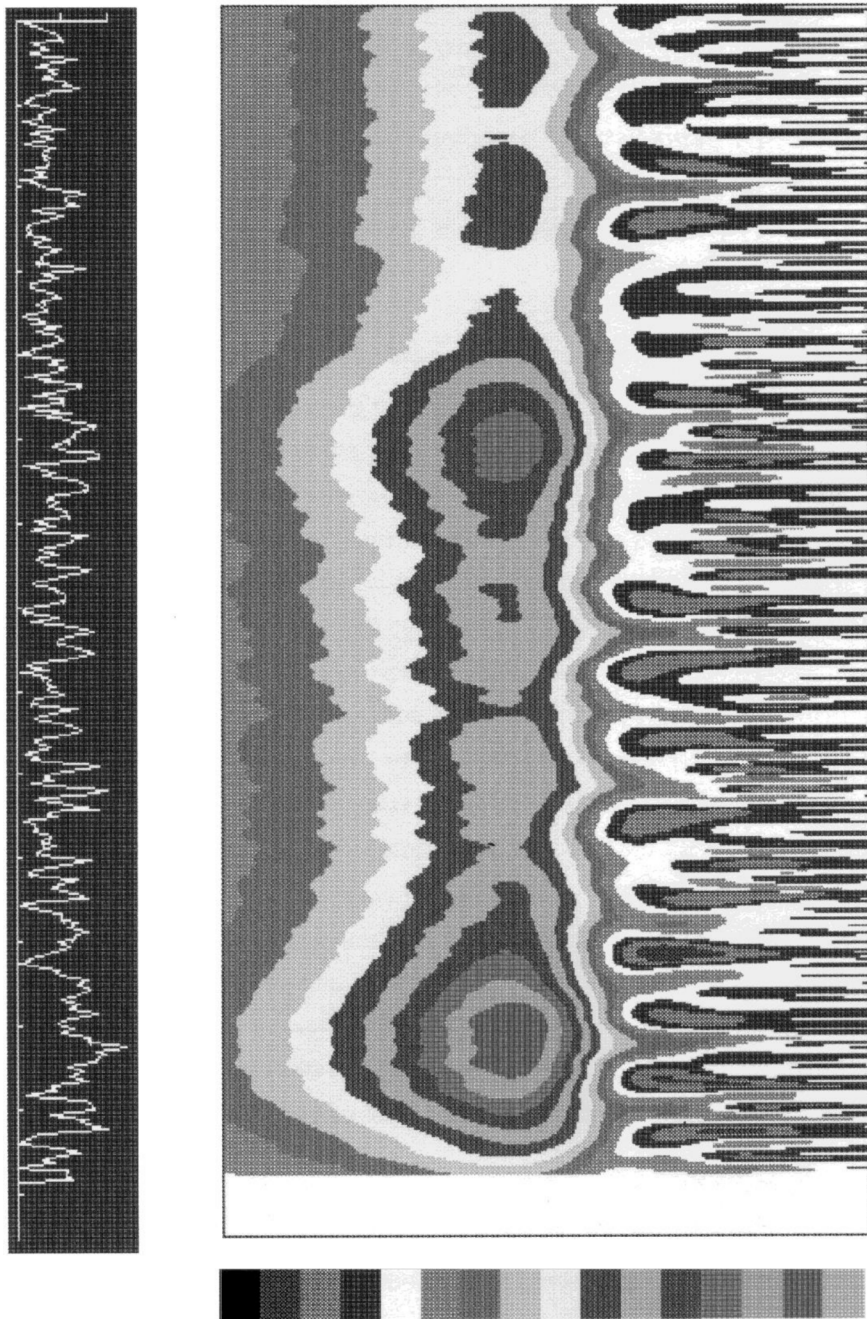
7.7 ábra. WT: 1-512 h



7.8. ábra. WT: 513-1024 h



7.9. ábra WT: 1025-1536 h



7.10 ábra. WT: 1537-2048 h

8. WAVELET TRANSZFORMÁCIÓ A TÉRINFORMATIKAI ADATRENDSZEREKBEN

A digitális jelfeldolgozás általánosan használatos eszköze a Fourier transzformáció. A sztochasztikus folyamatok, a jelek tulajdonságainak megadása a jelet alkotó frekvenciák meghatározásával történhet. Stacionárius folyamatok leírásához a frekvencia dekompozíció általában elegendő információt nyújt. A természetben előforduló folyamatok azonban nem feltétlenül elégítik ki a stacionaritás feltételét, az analizált jel karakterisztikája időfüggést mutathat.

Az olyan jelenségek elemzéséhez, amelyekben a frekvenciák az idő függvényében változnak, időtől függő frekvencia - analízist szükséges bevezetnünk. A célunk az, hogy megadjuk az idő-frekvencia tartományban ható wavelet transzformációnak az általános matematikai definícióját, valamint ezen transzformáció előnyös tulajdonságainak felhasználásával nagy adatrendszerek tömörítésére adjunk meg eljárást.

Ebben a fejezetben a wavelet transzformáció geodéziai alkalmazásához kapcsolódó kutatások eredményeit ismertetjük. A földrajzi információs rendszerek (GIS), speciálisan a digitális képfeldolgozás nagy adatrendszereinek tárolása aktuális probléma. A wavelet transzformáció módszerét sikerrel alkalmazzák az akusztikában, az elektronikában és a geofizikában is. A GIS adattömörítési eljárásait a wavelet transzformáció (WT) módszerrel bővítettük. *Antonini* et al. (1990) és *Beylkin* et al. (1991) adtak meg a WT kiszámítására kiválóan alkalmas algoritmusokat.

8.1 A wavelet transzformáció matematikai összefüggései

Legyen $\psi(t)$ a következő tulajdonságokkal rendelkező függvény:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\bar{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty, \quad (8.1)$$

- ahol $\bar{\psi}(\omega)$ a $\psi(t)$ függvény Fourier transzformációját jelöli.

A fenti feltétel teljesül, ha a $\psi(t)$ függvény integrálható, négyzetesen is integrálható és nincs nulla frekvencia komponense.

A fenti feltételekkel egyenértékű kikötést adhatunk, ha a $\psi(t)$ függvényre a következő összefüggések teljesülését követeljük meg:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad , \quad \psi(\pm\infty) = 0 \quad . \quad (8.2)$$

Ezen feltételek teljesülése azt jelenti, hogy a $\psi(t)$ függvénynek van néhány oszcillációja és a végtelenben eltűnik, egyébként tetszőleges függvény.

A $\psi(t)$ függvényt anya waveletnek nevezzük.

Az anya waveletet mindig a feladatnak megfelelően kell választani, a szakirodalomban leggyakrabban a következő függvények használatosak - például *Hanusse* (1989) és *Meyer* (1989) alapján:

$$\text{Hanusse függvények:} \quad \psi_1(t) = te^{-t^2} \quad , \quad \psi_2(t) = (1 - 2t^2)e^{-t^2} \quad ,$$

$$\text{Mexikói kalap:} \quad \psi(t) = (1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}} \quad ,$$

$$\text{Morlet függvény:} \quad \psi(t) = e^{j\omega t} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad .$$

Tekintsük a következő függvény transzformációt:

$$\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad , \quad a, b \in R \quad , \quad (8.3)$$

- ahol $\psi(t)$ az anya wavelet, b az eltolás, $a > 0$ a skála paraméter.

Az anya wavelet függvény-transzformációjával (független változó eltolása és skalárral való szorzása) a waveletek egy halmazához jutunk, ahol az $a < 1$ eset megfelel a magas, az $a > 1$ eset pedig az alacsony frekvenciával rendelkező waveletnek.

Legyen $s(t)$ egy tetszőleges analizálandó jel, akkor a wavelet transzformáció alapformulája a következő (c.g. *Dorize és Villemoes (1991)*):

$$S(b,a) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (8.4)$$

A fenti definícióból világos, hogy a wavelet transzformáció a négyzetesen integrálható függvények terében az $s(t)$ és $\psi_{a,b}(t)$ függvények belső (vagy skaláris) szorzatának felel meg, s így a két függvény hasonlóságának mértékét adja.

$$S(b,a) = \langle s, \psi_{b,a} \rangle \quad (8.5)$$

- ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzat jele.

A konvolúció fogalmának felhasználásával is megadhatjuk a wavelet transzformáció alapformuláját. Jelölje:

$$\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t}{a}\right) \quad (8.6)$$

Ekkor a (8.4) képlet alapján és a konvolúció definíciójából közvetlenül adódik a wavelet transzformációra a következő összefüggés:

$$S(a,b) = s * \psi_a \quad (8.7)$$

- ahol $*$ a konvolúció-képzés jele.

A (8.7) összefüggés előnye, hogy megadja a wavelet transzformáció kiszámításának egy további módját:

$$S(a,b) = F^{-1}(\bar{s}\bar{\psi}_a) \quad (8.8)$$

- ahol F^{-1} az inverz Fourier transzformációt jelöli,
 \bar{s} az $s(t)$ jel Fourier transzformáltja.

Meyer (1992) alapján a wavelet transzformáció is rendelkezik a Fourier transzformációnál megszokott megfordíthatósággal, invertálhatósággal:

$$s(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} S(b,a) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dbda}{a^2}, \quad (8.9)$$

- ahol

$$c_\psi = 2\pi \int \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega. \quad (8.10)$$

8.2 A diszkrét wavelet transzformáció

A gyakorlatban a (8.9) összefüggés integráljait diszkrét összegekkel közelítjük. Daubechies (1988) vezette be a következő diszkrétizációt:

Legyenek

$$a = a_0^m \quad \text{és} \quad b = nb_0 a_0^m, \quad m, n \in Z \quad \text{és} \quad a_0 > 1, b_0 > 0 \quad (8.11)$$

adott számok.

Ekkor a diszkrét wavelet dekompozíció alakja a következő:

$$s(t) = \sum \sum c_{m,n} \psi_{m,n}(t), \quad (8.12)$$

- ahol

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} t - nb_0) \quad (8.13)$$

az ún. skálázó függvény.

Ha $a_0 = 2$ és $b_0 = 1$, $\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m} t - n)$, akkor Coifman és Meyer (1986) tanulmánya szerint létezik olyan ortonormált bázis, amelyre

$$c_{m,n} = \langle \psi_{m,n}, s \rangle = \int s(t) \psi_{m,n}(t) dt \quad (8.14)$$

Daubechies (1992) konstruált egy, az előző feltételeknek megfelelő ortonormált bázist úgy, hogy a $\psi_{m,n}(t)$ függvényeket nem adta meg explicite, hanem megadott két szűrőegyüttható sorozatot, amely sorozatok az anya waveletet is és a skálázó függvényeket is egyértelműen meghatározza:

$$H =: \{h_k\}_{k=1}^{2M}, \quad G =: \{g_k\}_{k=1}^{2M}, \quad g_k = (-1)^{k-1} h_{2M-k+1}, \quad (8.15)$$

$$k = 1, 2, \dots, 2M,$$

- ahol M jelentése az, hogy a $\psi(t)$ függvény M -dik momentumának eltűnését követeljük meg.

A páros $\{H,G\}$ együttható sorozatokat kettős tükör szűrőnek nevezzük, ahol a H szűrő úgy hat, mint egy integrátor, G szűrő hatása pedig olyan, mint egy differenciátor.

Az $M=10$ esetig *Daubechies* (1988) a szűrőegyütthatókat táblázatban numerikusan is megadta. A H szűrőegyüttható sorozat ismeretében az $\{s_k^0\}_{k=1}^{2^L}$ $0 < L < \infty$ jelre a wavelet transzformáció algoritmus a következő összefüggésekkel adható meg:

$$s_k^1 = \sum_{n=1}^{2M} h_n s_{n+2k-2}^0, \quad d_k^1 = \sum_{n=1}^{2M} g_n s_{n+2k-2}^0$$

és

$$(8.16)$$

$$s_k^j = \sum_{n=1}^{2M} h_n s_{n+2k-2}^{j-1}, \quad d_k^j = \sum_{n=1}^{2M} g_n s_{n+2k-2}^{j-1}.$$

Adott (s^j, d^j) szintről az eredeti $\{s^0\}$ vektor rekonstruálható a következő rekurzív algoritmussal:

$$s_{2n}^{j-1} = \sum_{k=1}^M h_{2k} s_{n-k+1}^j + \sum_{k=1}^M g_{2k} d_{n-k+1}^j \quad ,$$

$$s_{2n-1}^{j-1} = \sum_{k=1}^M h_{2k-1} s_{n-k+1}^j + \sum_{k=1}^M g_{2k-1} d_{n-k+1}^j \quad .$$
(8.17)

Press et al. (1992) alapján példaként legyen $M=2$ és $L=3$, valamint jelölje a WT kiinduló vektorát

$$s^0 = [s_1^0, s_2^0, s_3^0, s_4^0, s_5^0, s_6^0, s_7^0, s_8^0]^T \quad .$$

Ekkor

$$\begin{array}{cc} \overline{h_1 \ h_2 \ h_3 \ h_4} & \overline{h_4 - h_3 \ h_2 - h_1} \\ s_1^1 = s_1^0 \ s_2^0 \ s_3^0 \ s_4^0 & d_1^1 = s_1^0 \ s_2^0 \ s_3^0 \ s_4^0 \\ s_2^1 = s_3^0 \ s_4^0 \ s_5^0 \ s_6^0 & d_2^1 = s_3^0 \ s_4^0 \ s_5^0 \ s_6^0 \\ s_3^1 = s_5^0 \ s_6^0 \ s_7^0 \ s_8^0 & d_3^1 = s_5^0 \ s_6^0 \ s_7^0 \ s_8^0 \\ s_4^1 = s_7^0 \ s_8^0 \ s_1^0 \ s_2^0 \quad , & d_4^1 = s_7^0 \ s_8^0 \ s_1^0 \ s_2^0 \quad . \end{array} \quad (8.18)$$

A WT 1.szintje

$$s^1 = [s_1^1, s_2^1, s_3^1, s_4^1, d_1^1, d_2^1, d_3^1, d_4^1]^T \quad .$$

$$\begin{array}{cc} s_1^2 = s_1^1 \ s_2^1 \ s_3^1 \ s_4^1 \quad , & d_1^2 = s_1^1 \ s_2^1 \ s_3^1 \ s_4^1 \quad , \\ s_2^2 = s_3^1 \ s_4^1 \ s_1^1 \ s_2^1 \quad , & d_2^2 = s_3^1 \ s_4^1 \ s_1^1 \ s_2^1 \quad . \end{array} \quad (8.19)$$

A WT 2. szintje

$$s^2 = [s_1^2, s_2^2, d_1^2, d_2^2, d_1^1, d_2^1, d_3^1, d_4^1]^T \quad .$$

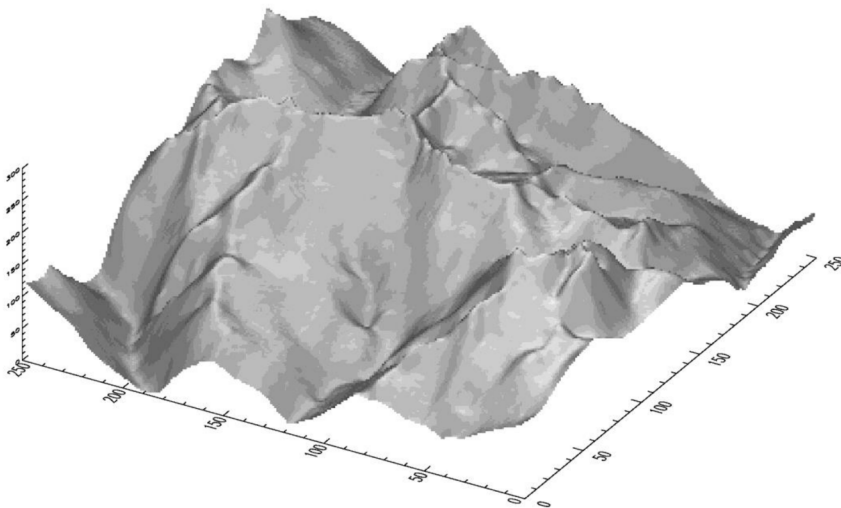
8.3 A kétdimenziós wavelet transzformáció

A wavelet transzformáció kétdimenziós változatát a 2D Fourier transzformációhoz hasonlóan kell végrehajtani. Egy mátrixformában adott adatrendszer wavelet transzformáltját úgy kapjuk, hogy először alkalmazzuk az egydimenziós wavelet transzformációt a mátrix valamennyi sorára, ezt követően pedig az eredményül kapott mátrix minden oszlopára. Minden transzformációs lépés egy ortogonális mátrixszal való szorzásnak felel meg, ezért az ortogonális mátrixok szorzásának asszociativitása miatt a végeredmény független a transzformációk végrehajtásának sorrendjétől.

8.4 A wavelet transzformáció tulajdonságai

A wavelet transzformáció hasznos tulajdonsága, hogy a wavelet transzformáció eredményül kapott együtthatókat egyszerűen csonkítani lehet, anélkül, hogy az eredeti adatrendszer lényeges torzulást szenvedne. A Fourier transzformációnál a helyzet éppen ellenkező. *Meskó* (1984) alapján külön csonkító függvények bevezetésével lehet az átvitel tulajdonságait javítani.

A csonkítás hatásának bemutatására tekintsünk egy példát. A terep magasságait *Frederiksen et al.* (1978) alapján egy stacionárius kétdimenziós sztochasztikus folyamattal modellezzük, amely az (x, y) koordinátával rendelkező pont magasságát egy normális eloszlású valószínűségi változónak tekinti. (Tehát a t időváltozó szerepét távolságjellegű változók veszik át.) Az 8.1 ábrán látható egy 256×256 pixel méretű digitális terepmodell. A digitalizálás lépésköze 20m. Az adott térrész az Alpok egy gerincével és völgyekkel gazdagon szabdalta, igen változatos terepe.



8.1 ábra. A digitális terepmodell

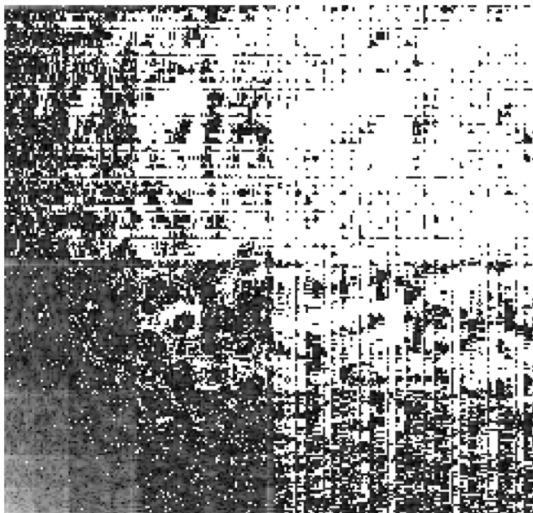
A terep koordináta rendszerét az óramutató járásával ellenkező irányban 60° -kal elforgattuk és 30° -kal előre döntöttük. A magasságokat egy relatív skálán adtuk meg.

Ugyanezen terep magassági viszonyait a 8.2 ábra egy 8 bit fokozatú szürkeségi színskálán (minél magasabb egy tereppont, annál világosabb a megjelenítésben) ábrázolja.



8.2 ábra. Szürkeségi térkép

A 2D wavelet transzformációt végrehajtva jutunk a 8.3 ábrán bemutatott képhez.

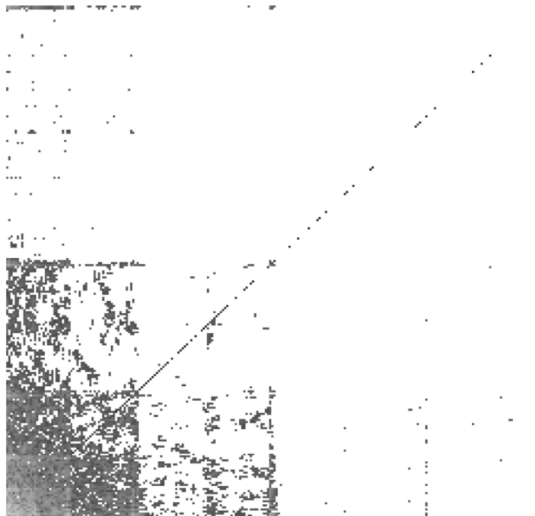


8.3 ábra. Wavelet transzformáció

Megfigyelhető, hogy a wavelet transzformáció eredményeül kapott kép felhasad alacsony felbontású részre és differencia jelekre. Az alacsony felbontású kép mérete negyede az eredeti képnek. A differencia jelek írják le a különbséget az alacsony felbontású kép és az eredeti kép között. Ha nagy a korreláció az eredeti adatrendszer adatai között, akkor a differencia jelek nagyon sok értéke közel esik nullához. A differencia jelek közül kettő az x tengelyirányú, illetve az y tengelyirányú élek jelenlétére utal; míg a harmadik differencia jel a markáns pontokhoz tartozó információkat rögzíti. Az alacsony felbontású kép adatai még tartalmaznak korrelációkat, így célszerű a dekompozíciót megismételni. Ezzel a gúla alakú képfelbontáshoz jutunk.

A kétdimenziós wavelet transzformációt közvetlenül felhasználhatjuk nagy adatrendszerek tömörítésére: valamennyi olyan wavelet együtthatót tartunk meg, amely abszolút értékben nagyobb egy megadott $\varepsilon > 0$ korlátnál és a korlátnál kisebb értékeket tegyük egyenlővé nullával.

A korlát megválasztásával szabályozhatjuk, hogy az eredeti kép részleteit milyen pontossággal kívánjuk megőrizni. A wavelet transzformáció előnyös tulajdonsága, hogy a wavelet együtthatók értékének nagy része közel esik nullához, ezért az adatrendszer nagy százaléka csonkítható. A 8.4 ábra illusztrálja a csonkított wavelet reprezentációt.



8.4 ábra. Csonkítás

Ezen esetben a korlát értékét $\varepsilon = 6.5$ -nek választva a csonkítás után a 65536 wavelet együttható helyett mintegy 6500 együtthatót hagyunk meg. A paraméterek ezen választása révén kb. 90%-os adattömörítést érhetünk el.

Egy másik vizsgálat azt mutatta, hogy ha az eredeti adatrendszer adatai között nagyobb korreláció áll fenn - ez biztosítható a digitalizálás lépésközének 20m helyett 1m-es választásával-, akkor az adatrendszer tömörítése mintegy 1000 adat megtartásával, azaz az adatok kb. 98%-os csökkentésével azonos pontosság érhető el.

A csonkított adatrendszerre az inverz wavelet transzformációt alkalmazva az 8.5 ábrához jutunk.



8.5 ábra. Inverz wavelet transzformáció

Az 8.5 ábrát a 8.2 ábrával összevetve megállapítható, hogy lényeges eltérés nem észlelhető az eredeti és a csonkítással kapott képek között. Statisztikai vizsgálatok is alátámasztják a fenti tapasztalatot, mivel maximális eltérésként 9.83 *m* adódott.

Sárközy és Závoti (1995) tanulmánya is a GIS adatok modellezését és tömörítését tárgyalta.

E fejezetben általános leírását adtuk az idő frekvencia analízisben használatos wavelet transzformációnak. Bemutattunk egy módszert arra, hogy egy mátrixalakban megadott adatrendszert hogyan lehet visszavezetni egy csaknem ugyanolyan informá-

ciótartalmú ritka mátrixban tárolt adatrendszeré. Az adattömörítés a megfelelő bázis megválasztásával vált lehetővé, erre a célra a Daubechies-féle wavelet bázist alkalmaztuk. A javasolt módszerrel magas tömörítési arány érhető el, így az eljárás egyik alkalmazási területe a képfeldolgozási rendszerek adatállományainak sűrített tárolása lehet.

A módszer további alkalmazására példaként említjük a nagyméretű lineáris egyenletrendszerek megoldását, vagy a véges elemek módszerénél fellépő parciális differenciálegyenletek redukálását ritka lineáris rendszeré.

A 7. fejezetben láttuk, hogy a WT-re kidolgozott módszer lehetőséget nyújt idősorok analizálására, vizsgálatára is. A WT alkalmazásával a pólusingadozás időtől függő spektrálanalízisét végrehajtva, a rövid periódusú oszcillációk változékonyságát mutattuk ki.

ÖSSZEFOGLALÁS

Remélem, hogy az Ön által kézben tartott értekezésből egy jó áttekintést kapott a mai kiegyenlítő számításban használatos optimalizálási elvekről, a geodéziában jelenleg alkalmazott korszerű matematikai módszerekről.

A számítás technikai nehézségei, amelyek a geodéziát a múltban csaknem kizárólag a legkisebb négyzetek módszerének használatára korlátozták, a számítástechnika hatalmas fejlődésével megszűntnek tekinthetők. A különböző mérési eredmények kombinációjából a legkülönbözőbb becslendő paramétereket korrekt matematikai modellek megalkotásával lehet megkapni. A modellek egyre komplexebbek és általánosabbak lesznek. A gyakorlati alkalmazások szinte kivétel nélkül nemlineáris modellel adhatók meg. Így az utóbbi években a geodéziában is a nemlineáris robusztus becslési módszerek terjedtek el.

A kiegyenlítő számításhoz hozzátartozik a megalkotott modell tulajdonságainak vizsgálata is. Ehhez a kiegyenlítő számítással összenőtt matematikai statisztika kínál gazdag lehetőségeket. A pontosság és a megbízhatóság – a két fontos kritérium, amelyek a mérési eredmények optimális kiértékelésében nagy szerepet játszanak.

Gondolom, disszertációm hatására az eredetileg oly sok területen eredményes és a geodétákhoz oly közel álló legkisebb négyzetek módszerét nem fogják a robusztus becslési módszerek kiszorítani. Azt viszont remélem, hogy hatására a legkisebb négyzetek módszere a jövőben nem lesz az egyetlen, minden geodéziai feladatra használatos módszer, hanem az új módszert a régivel párhuzamosan kipróbálják, azzal a céllal, hogy a mérési adatokból és az alkalmazott matematikai modellből a lehető legjobb eredményt hozzák ki. Az eredmények magukért fognak beszélni... Öröömre szolgál, hogy ezzel a törekvéssel az utóbbi időben Magyarországon is egyre többször találkozhatunk.

A robusztus becslési módszerek alkalmazásának megvan az az előnye, hogy a durva hibáknak kisebb a hatása a becsült paraméterekre, ugyanakkor normális eloszlású

megfigyelések esetén azonos eredményt szolgáltat, mint a legkisebb négyzetek módszere. Akadémikusi a kérdés: melyik módszert célszerű használni?

A geodéziában márpedig léteznek szinguláris normálmátrixra vezető feladatok is. Ilyenkor jobb híján marad az SVD. Alkalmazzuk az LN-t minimális középphibával!

A Fourier transzformáció keletkezésekor nagy eredménynek számított, hogy bármely függvényt szinuszos és koszinuszos szerint sorba lehet fejteni. A Fourier-analízis számtalan alkalmazása nem valósulhatott volna meg, ha matematikailag nem tisztázták volna az elméletét. Mégis...

Közel száz évnek kellett eltelti ahhoz, hogy a dolgok a helyükre kerüljenek. A Fourier elmélet hiányosságának egyik következménye a wavelet transzformáció megalkotása.

Kell-e a matematika?

A matematikai módszerek alkalmazása a geodéziában akkor hasznos, ha gazdagítja a geodéziát, ha pontosan és megbízhatóan illeszkedik a már meglévő dolgokhoz, mintegy kiegészítve azokat. Akkor haszontalan, ha túl bonyolult, öncélú, nincs a geodézia szempontjából használható eredménye.

A tizenkilencedik században a matematika még szorosan összefonódott a geodéziával. Mára ez az egység – elsősorban a gyors technológiai fejlődés következtében – megbomlani látszik. Mostanra kialakult a geodézia korszerű eszközeit és módszereit alkalmazók, és az azokat megteremtő kutatók, fejlesztők tábora. A két tábor között nincsenek éles határvonalak. A geodézia matematikai alkalmazásainak spektruma teljesen összemosódik. A geodézia régen is, most is egyike a legtöbb matematikai ismeretekre támaszkodó földtudományoknak. Sem a geodézia, sem a matematika nem zárkozhat el a másik eredményeinek felhasználásától.

A matematikai módszerek alkalmazását a geodéziában ahhoz a térképhez hasonlíthatjuk, amelyet nagyobb utazásainkra magunkkal szoktunk vinni. Természetesen, a térképet nem használjuk mindig, csak akkor, ha elbizonytalanodunk a helyes utat illetően, ha ismeretlen útra tévedünk – vagy, ha a megszokott helyett új utat keresünk.

Irodalomjegyzék

- Ádám J 1990*: Estimability of geodetic parameters from space VLBI observables.
Report of the Ohio State University, Columbus, 406, 1-82.
- Andrews D F 1974*: A robust method for multiple linear regression.
Technometrics 16, 523-531.
- Antonini M, Borlaud M, Mathieu P, Daubechies I 1990*: Image coding using vector quantisation in the wavelet transform domain.
IEEE, 2297-2300.
- Arfa-Kaboodvand K, Groten E 1998*: Einsatz des Wavelet – Transform zur Untersuchung der kurzperiodischen Variation der Polbewegung.
Zeitschrift für Vermessungswesen, 8, 259-265.
- Arfa-Kaboodvand K, Groten E, Závoti J, Varga P 1998*: Stochastische und deterministische Analyse sowie Modellierung der Erdrotation.
Publikationen der DFG, 1-8.
- Baarda W 1968*: A testing procedure for use in geodetic networks.
Netherlands Geodetic Commission, Publication on Geodesy, 2.
- Baarda W 1968*: Measures for the accuracy of geodetic networks.
in: Optimization of Design and Computation of Control Networks in Sopron,
Akadémia Kiadó, Budapest, 419-426.
- Barrodale I, Roberts F D K 1973*: An improved algorithm for discrete L_1 approximation.
SIAM, Journal of Numerical Analysis, 10, 839-848.
- Barrodale I, Phillips C 1978*: Solution of an overdetermined system of linear equations in the Chebisev norm.
ACM-Transactions on Mathematical Software, 1, 264-270.
- Bácsatyai L 1993*: Magyarországi vetületek.
Mezőgazdasági Könyvkiadó, Budapest.
- Bányai L 1993*: Lokális és regionális geodinamikai vizsgálatok geodéziai módszerei.
Kandidátusi értekezés, Sopron.
- Beaton A E, Tukey J W 1974*: The fitting of power series, meaning polynomials, illustrated on band-spectroscopic data.
Technometrics, 16, 147-185.

- Ben-Israel A, Greville T 1974*: Generalised inverses: theory and applications.
John Wiley & Sons, New York.
- Beylkin G, Coifman R, Rokhlin V 1991*: Fast wavelet transforms and numerical algorithms.
Communication on Pure and Applied Mathematics, 44, 141-183.
- Borre K, Jorgensen P C, Kubik K 1983*: Robust adjustment of the danish fundamental triangulation network.
Buletins of the Stanislaw Staszic University of Mining and Metallurgy, Krakow, 949, 57-69.
- Borutta H 1988*: Robuste Schätzverfahren für geodätische Anwendungen.
Bundeswehr München, Neubiberg, 33.
- Boscovich R J 1757*: De litteraria expeditione per pontificiam ditionem, et synopsis amplioris operis, ac habentur plura ejus ex exemplaria etiam sensorum impressa.
Bononiensi Scientiarum et Artum Instituto Atque Academia Commentarii, 4, 353-396.
- Box G E P 1953*: Non normality and tests on variances.
Biometrika, 40, 318-335.
- Brzezinski A 1995*: On the interpretation of maximum entropy power spectrum and cross-power spectrum in earth rotation investigations.
Manuscripta Geodaetica, 20, 248-264.
- Burstedde J, Cremer K 1986*: Zur Ausgleichung geodätischer Netze nach der L_1 -Norm.
Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 6, 228-234.
- Carosio A 1979*: Robuste Ausgleichung.
Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, 11, 293-297.
- Carosio A 1992*: Fehlertheorien und Ausgleichungsrechnung.
ETH, Zürich.
- Coifman I, Meyer Y 1986*: Nonlinear harmonic analysis, operator and P.D.E.
Annals of Math. Studies, Princeton, E Stein ed.
- Collins J R 1976*: Robust estimation of a location parameter in the presence of asymmetry.
The Annals of Statistics, 4, 68-85.
- Csebisev 1853*: Mathematik II.
Frankfurt am Main, 9.
- Daubechies I 1988*: Orthonormal bases of compactly supported wavelets.
Communication on Pure and Applied Mathematics, 41, 909-996.

- Daubechies I 1992*: Ten lectures on wavelets.
Society for Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania.
- Denis C, Varga P, Varga T, Závoti J 1992*: Figures d'équilibre et paléorotation de la Terre.
Actes des Journées "Géodynamique Globale et System de Référence", 17, 177-180.
- Dodge Y 1992*: L_1 statistical analysis and related methods.
Elsevier Science Publishers, North-Holland, London, New York.
- Detrekői Á 1986*: A durva hibák figyelembevételére a mérési eredmények feldolgozásakor.
Geodézia és Kartográfia, 3.
- Detrekői Á 1991*: Kiegyenlítő számítások.
Tankönyvkiadó, Budapest.
- Dorize C, Villemoes L F 1991*: Optimizing time-frequency resolution of orthonormal wavelets.
Proc. of the IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech and Signal Processing, Toronto, 2029-2032.
- Ebong M B 1985*: The least sum adjustment of a geodetic levelling network.
Manuscripta Geodaetica, 10, 32-36.
- Edgeworth F Y 1887*: A new method for reducing observations relating to several quantities.
Phil. Mag., 5 th Series, 222-224.
- Faig W, Owolabi K 1988*: Distributional robustness in bundle adjustment.
Proceedings of ACSM-ASPRS Annual Convention, St. Louis, 169-180.
- Frederiksen P, Jacobi O, Justensen J 1978*: Fourier-Transformation von Höhenbeobachtungen.
Zeitschrift für Vermessungswesen, 103, 64-79.
- Fuchs H 1980*: Untersuchung zur Ausgleichung durch Minimierung der Absolutsumme der Verbesserungen.
Dissertation, Graz.
- Fuchs H 1982*: Contributions to the adjustment by minimising the sum of absolute residuals.
Manuscripta Geodaetica, 7, 151-207.
- Fritsch D 1982*: Entwurf digitale zweidimensionaler nichtrekursiver Filter.
DGK, Reihe C, München, 275.

- Gauss C F 1794*: Theoria motus corporum celestium in sectionibus conicis solem ambientium.
Hamburg.
- Götze F 1983*: Robust statistical methods.
DGK, Reihe A, München, 98.
- Gruber O 1930*: Ferienkurs in Photogrammetrie.
Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart.
- Hahn M, Bill R 1984*: Ein Vergleich der L_1 - und L_2 -Norm am Beispiel Helmertttransformation.
Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 11-12, 440-450.
- Hampel F R 1985*: Robust statistics.
John Wiley & Sons, New York.
- Hampel F R 1974*: The influence curve and its role in robust estimation.
Journal of the American Statistical Association, 69, 383-393.
- Hanusse P 1989*: An algorithm for fast imaging of wavelet transforms.
Springer-Verlag, Berlin, New York, 305-312.
- Harter H L 1974*: The method of least squares and some alternatives I.
Int. Stat. Rev., 42, 147-174.
- Holland P W, Welsch R E 1977*: Robust regression using iteratively reweighted least squares.
Commun. Statist.-Theor. Meth., 9, 813-827.
- Huber P J 1964*: Robust estimation of a location parameter.
Annals of Mathematical Statistics 35, 73-101.
- Huber P J 1981*: Robust statistics.
John Wiley & Sons, New York.
- Jia Z Z 1987*: Combinative principal components estimate for regression parameter.
Journal of Mathematical Statistics and Applied Probability, 2, 257-366.
- Kalmár J 1994*: A digitális terepmodell-kutatások új eredményei.
Kandidátusi értekezés, Sopron.
- Kampmann G 1986*: Robuster Ausreissertest mit Hilfe der L_1 -Norm-Methode.
Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 4, 139-147.
- Kampmann G 1988*: Zur kombinativen Norm-Schätzung mit Hilfe der L_1 -, der L_2 -und der Boscovich-Laplace Methode mit den Mitteln der Linearen Programmierung.
Veröff. des Geod. Inst. der Rhein. Westf. Techn. Hochschule, Aachen, 43.

- Kelma V 1978*: An iteratively reweighted least squares system.
Conference on Mathematical Programing, Government Printing Office,
Washington, 319-327.
- Kerékfy P 1978*: A robusztus becslésekről.
Alkalmazott Matematikai Lapok, Budapest, 4, 329-357.
- Koch K-R 1987*: Parameter estimation and hypothesis testing in linear models.
Springer-Verlag, Berlin, New York.
- Koch K-R 1996*: Robuste Parameterschätzung.
Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 103, 1-18.
- Kocnker R, Bosset G 1985*: On Boscovich's estimator.
The Annals of Statistics. 13, 1625-1628.
- Kosek W, Nastula J, Kolaczek B 1995*: Variability of polar motion oscillations with
periods from 20 to 150 days in 1979-1991.
Bulletin Géodésique, 69, 308-319.
- Krarup T, Juhl J, Kubik K 1980*: Götterdämmerung over least squares adjustment.
14th ISPRS Congress, Hamburg, 369-378.
- Kreyszig E 1993*: Advanced engineering mathematics.
John Wiley & Sons, New York, Toronto.
- Kubik K, Weng W, Fredriksen P 1985*: Oh, Grosserrors!
Aust. J. Geod. Photo. Surv., 42.
- Laplace S 1799*: Traité de mécanique céleste.
Paris, 2.
- Lomb NR 1976*: Least squares frequency analysis of unequally spaced data.
Astrophysics and Space Science, 39, 447-462.
- Maire Ch, Boscovich R J 1755*: De litteraria expeditione per pontificiam ditionem ad
dimetiendas duas Meridiani gradus, et corrigendam mappam geographicam, jussu,
et auspiciis Benedicti XIV Pont. Max. suscepta. Romae.
- Meissl P 1968*: Überbestimmte Punkttransformation nach dem Prinzip der kleinsten
maximalen Klaffung.
Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, 56, 140-149.
- Merle G, Späth H 1974*: Computational experiences with discrete L_p -approximation.
Computing, 12, 315-321.
- Meskó A 1984*: Digital filtering.
Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984.
- Geomatikai Közlemények II., 1999*

- Meyer Y 1989*: Orthonormal wavelets.
Springer-Verlag, Berlin, New York, 21-37.
- Meyer Y 1992*: Wavelets and applications.
Springer-Verlag, Paris, Milan.
- Mikhail E M, Ackermann 1976*: Observations and least squares.
Dun-Donnelley, New York.
- Penrose R 1955*: A generalized inverse for matrices.
Cambridge Phil. Society, 51.
- Perelmuter A 1979*: Adjustment of free networks.
Bulletin Geodesique, 4.
- Popper Gy, Csizmás F 1993*: Numerikus módszerek mérnököknek.
Akadémia Kiadó, Budapest.
- Press WH, Teukolsky S A, Vetterling WT, Flannery B P 1992*: Numerical recipes.
Cambridge University Press, Cambridge.
- Qingming G, Xurong D 1993*: A class of biased estimates for LN estimations problem: a class of biased estimates for improving LN estimates.
Manuscripta Geodaetica, 18, 1-9.
- Sárközy F, Závoti J 1995*: Conceptual data model for modelling of scalar fields and one compression method usable for its implementation.
Proceeding of the 4th International Symposium of TU Wuhan, China, 1-10.
- Schut G H 1958-59*: Construction of orthogonal matrices and their application in analytical photogrammetry.
Photogrammetria, 15, 149.
- Simpson T 1757*: Miscellaneous tracts ...
London: Nourse
- Soha G 1986*: Robusztus kiegyenlítés mérési javítástól függő súlyozással.
Geodézia és Kartográfia, 4, 267-271.
- Somogyi J 1969*: About the direct determination of the elements of rotation matrix.
Acta Geod. Geoph. Hung., 4, 451-458.
- Somogyi J 1988*: Robust estimation of the parameters for three dimensional transformation.
DGK, Reihe B, 287.

- Somogyi J, Kalmár J 1988:* Verschiedene robuste Schätzungsverfahren für die Helmerttransformation.
Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 95, 4, 141-147.
- Somogyi J, Kalmár J 1991:* The use of robust estimation in the geodetic data processing.
Acta Geod. Geoph. Hung., 26, 57-68.
- Somogyi J, Závoti J 1987:* Különböző kiegyenlítési módszerek durva mérési hibák szűrésére.
Geodézia és Kartográfia, 4, 240-243.
- Somogyi J, Závoti J 1989:* Determination of transformation parameters with the method of the least sum of absolute values.
Acta Geod. Geoph. Hung., 24, 237-249.
- Somogyi J, Závoti J 1990:* Die Anwendung der L_p -Norm- Schätzung für Ähnlichkeits-Transformationen.
Zeitschrift für Vermessungswesen, 115, 28-36.
- Somogyi J, Závoti J 1992:* Zur Anwendung der Boscovich - Bedingung bei Schätzungen mit der L_1 Norm.
Zeitschrift für Vermessungswesen, 117, 336-344.
- Somogyi J, Závoti J 1993:* Eine Lösung von 3D-Transformationen mit Hilfe der Methode der kleinsten Absolutwertsumme.
Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, 81, 16-26.
- Somogyi J, Závoti J 1993:* Robust estimation with iteratively reweighted least squares method.
Acta Geod. Geoph. Hung., 28, 413-420.
- Somogyi J, Závoti J 1996:* A comparison of weight-functions in robust regression using iteratively reweighted least squares.
Acta Geod. Geoph. Hung., 31, 11-24.
- Somogyi J, Závoti J 1998:* The robust estimation of the 2D projective transformation.
Acta Geod. Geoph. Hung., 33, 279-288.
- Tárczy-Hornoch A 1941:* Zur numerischen Festpunktbestimmung aus Luftbildaufnahmen.
Mitteilungen der berg- und hüttenmännischen Abteilung an der kgl. ung. Palatin Joseph Universität, Sopron, 13.
- Tham P 1939:* Photogrammetrische Auswertung ebener Gelände.
Centraltryckeriet Esselte Aktiebolag, Stockholm.
- Thompson E H 1959:* An exact linear solution of the problem of absolute orientation.
Photogrammetria, 15, 163.

- Tukey J M 1960*: A survey of sampling from contaminated distribution.
Stanford University Press, Stanford, California.
- Varga P, Denis C, Varga T, Závoti J 1992*: Statistical modelling of the tidal history of the Earth-Moon system.
Proceeding of the JLG-Meeting, Bruxelles, 73, 1-7.
- Veress S A, Youcai H 1987*: Application of robust estimation in close-range photogrammetry.
Phot. Eng. and Remote Sensing, 53, 167-169.
- Wicki F 1998*: Robuste Schätzverfahren für Parameterschätzung in geodätischen Netzen.
Dissertation ETH, Zürich.
- Wolf H 1968*: Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.
Dümmler-Verlag, Bonn.
- Yang H 1989*: A single parametric principal components regression estimator.
Journal of Applied Mathematics, 11, 169-180.
- Závoti J 1985*: A DTM matematikai alapjai és geodéziai alkalmazásai.
Kandidátusi értekezés, Sopron 1-142.
- Závoti J 1995*: Application of wavelet transform for compression of signals used in geographic information systems.
Acta Geod. Geoph. Hung., 30, 217-225.
- Závoti J 1999*: Modified versions of the estimates based on the least squares and minimum norm.
Acta Geod. Geoph. Hung., 34, 79-86.
- Zharkov V N, Molodensky M S, Brzezinski F, Groten E, Varga P 1996*: The Earth and its rotation.
Wichmann Verlag, Stuttgart.