

ÉVFOLYAM  
*Volume*

IV

2001

---

**GEOMATIKAI  
KÖZLEMÉNYEK**

*Publications in Geomatics*

SZERKESZTŐ  
*Editor*

ZÁVOTI J, BÁNYAI L, PAPP G

---

**Somogyi József Emlékkülés**

Sopron, 2001. december 6-7.

---

HU ISSN 1419-6492

*MTA FFK GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI KUTATÓINTÉZET, SOPRON*

## **Geomatikai Közlemények**

*Publications in Geomatics*

kiadja az

**MTA FKK GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI KUTATÓ INTÉZET**

9400 Sopron, Csatkai E. u. 6-8. Pf. 5.

tel.: 99 - 508-340 fax.: 99 - 508-355

E-mail: [geomatika@ggki.hu](mailto:geomatika@ggki.hu)

felelős kiadó

**Závoti József**

igazgató

szerkesztő

**Závoti József, Bányai László és Papp Gábor**

technikai szerkesztő

**AnKa**

készült a

**LŐVÉR PRINT Kft.** nyomdájában

9400 Sopron, Ady Endre u. 5.

tel.: 99 - 329-977

megjelent 150 példányban

Sopron, 2001

HU ISSN 1419-6492

# GEOMATIKA A GEODÉZIA ELMÉLETÉBEN ÉS GYAKORLATÁBAN

## Emlékülés

*Somogyi József születésének 70. évfordulója*

*Sopron, 2001. december 6-7.*

*szervezte:*

MTA FKK Geodéziai és Geofizikai Kutató Intézet

*Szervező bizottság:*

Závoti József                      zavoti@ggki.hu

Papp Gábor                          papp@ggki.hu

Bányai László                      banyai@ggki.hu

## TARTALOMJEGYZÉK

Curriculum vitae József Somogyi .....	7
<b>Závoti József</b>	
Transzformációk a geoinformatikában.....	11
<b>Bácsatyai László - Závoti József</b>	
<i>A helyzeti adatok transzformációja</i> .....	<b>11</b>
Definíciók .....	11
Alkalmazható és javasolt transzformációk, szigorú és közelítő átszámítások .	12
Vonatközi és vetületi rendszer megválasztása a nemzetközi együttműködésben .....	13
<i>A leíró adatok transzformációja</i> .....	<b>16</b>
A wavelet transzformáció matematikai összefüggései.....	16
A diszkrét wavelet transzformáció alkalmazása .....	17
A wavelet transzformáció tulajdonságai .....	17
A GIS adatmodell harmadik évtizede .....	21
<b>Sárközy Ferenc</b>	
Az adatmodellek típusai.....	22
A kezdőpontok .....	23
Modell fejlődés a nyolcvanas években .....	25
A térbeli adatátviteli szabványok szerepe .....	30
Néhány szó az objektum orientáltságról .....	32
Függvény tér modellek.....	35
A több méretarányú objektum reprezentáció .....	37
Grafika-, vagy földrajz-központú adatmodellek .....	39
Az optimális vágat kihajtási sebesség meghatározása .....	43
<b>Patvaros József</b>	
Geodéziai és geodinamikai műszerfejlesztések az MTA Geodéziai és Geofizikai Kutató Intézetben .....	47
<b>Mentes Gyula</b>	
A műszerfejlesztési kutatások rövid története.....	47
Műszervizsgálatok céljára kifejlesztett jelentősebb műszerek .....	48
Geodéziai célú műszerek és mérőrendszerek.....	51
Geodinamikai műszerek fejlesztése .....	54
A relatív tájékozás paramétereinek robusztus becslése.....	61
<b>Battha László</b>	
Projektív leképezés paramétereinek becslése.....	61
Képpár relatív tájékozása .....	62
Relatív tájékozás 2-dimenziós projektív transzformációkkal.....	65

Robusztus becslési módszerek a geodéziában .....	69
<b>Kalmár János</b>	
Miért van szükség a robusztus becslésekre? .....	69
A robusztus M-becslők jellemzése.....	70
Huber és Hampel becslési eljárásai.....	71
Az M-becslők alkalmazása közvetett mérések kiértékelésére.....	71
A W-becslés, mint az M-becslés közelítő formája.....	76
Az M-és W-becslők alkalmazásának konvergencia problémái.....	77
A síkbeli Helmert-transzformáció robusztus megoldása.....	77
Az analitikus relatív tájékozás robusztus megoldása .....	79
A digitális fotogrammetria újabb eredményei a NYME Földmérési és Távérzékelési Tanszékén.....	83
<b>Bácsatyi László - Czimber Kornél - Király Géza</b>	
Az analóg kezdetek .....	84
StereoCord G3 .....	85
A Fertő tó digitális felületmodellje .....	86
Czimber Kornél diplomaterve: a döntő lépés a digitális fotogrammetriához... 86	
A STEREO térkiértékelő program és a DigiTerra cég megalakulása .....	88
Digitális képfeldolgozás és digitális ortofotó.....	91
Tömbkiegyenlítés.....	93
Automatikus felületmodell kinyerés .....	95
Alkalmazások.....	96
Térinformatika a magán-erdőgazdálkodásban .....	103
<b>Gyimóthy Attila</b>	
Problémák .....	103
Megoldások.....	104
További lehetőségek .....	105
Forgatás .....	107
<b>Csepregi Szabolcs</b>	
<b>1. A Forgatási Mátrix.....</b>	<b>109</b>
1.1. Bevezetés.....	109
1.2. A Forgatási Mátrix Tulajdonságai .....	110
1.3. Jelölések.....	112
1.4. A Forgatási Mátrixok Összefoglalása .....	113
1.4.1. Euler négy szimmetrikus paramétere.....	113
1.4.2. Ferdén szimmetrikus paraméterek.....	113
1.4.3. Rodrigues paraméterek .....	113
1.4.4. Térbeli tengely körüli forgatás .....	113
1.4.4. Átlón kívüli elemek különbsége.....	114
1.4.5. Euler forgatás három tengely körül.....	114
1.4.6. Euler forgatás két tengely körül .....	114

1.4.7. Euler hat szög-paramétere .....	114
<b>2. A forgatási mátrix paramétere</b> .....	<b>115</b>
2.1. Térbeli forgástengely körüli forgatás.....	115
2.2. Az átlón kívüli elemek különbsége, mint paraméter.....	117
2.3. Forgatási mátrix felírása ferdén szimmetrikus mátrixból .....	118
2.4. Forgatás Rodrigues mátrixszal.....	119
2.5. Euler szimmetrikus paramétere .....	120
2.6. Koordináta tengely körüli forgatások .....	121
2.7. Euler forgatás három tengely körül.....	122
2.8. Forgatás két tengely körül .....	123
2.9. Euler hat szög-paramétere .....	124
2.10. A három átlón kívüli elem, mint paraméter .....	125
2.11. Forgatás kis szögekkel, közelítő forgatás .....	125
<b>3. A forgatási paraméterek kapcsolata .....</b>	<b>127</b>
3.1. Az Euler-féle, a ferdén szimmetrikus és a Rodrigues paraméterek kapcsolata .....	127
3.2. Az Euler paraméterek kifejezése a forgástengely valamint a két tengely körüli forgatás kapcsolata .....	128
3.3. A Euler tengely körüli forgatás szögtékeinek meghatározása Euler paraméterekkel.....	128
<b>4. A paraméterek meghatározása a forgatási mátrixból.....</b>	<b>129</b>
4.1. A forgás-tengely meghatározása.....	129
4.2. Az Euler paraméterek meghatározása.....	130
4.3. Ferdén szimmetrikus paraméterek meghatározása .....	131
4.4. Három tengely körüli forgás-szögek meghatározása .....	131
4.5. Két tengely körüli forgás-szögek meghatározása .....	133
4.6. Paraméterek számítása a forgatási mátrixból.....	134
<b>5. A forgató mátrix meghatározása kiegyenlítéssel.....</b>	<b>136</b>
5.1. A kiegyenlítés javítási egyenletének felírása .....	135
5.2. Kiegyenlítés az ortogonalitási kényszerek felírásával .....	138
5.2.1. Merőlegességi kényszerek felírásával.....	138
5.2.2. Kilenc kényszer felírásával .....	138
5.2.3. Kettős merőlegességi kényszer felírásával .....	138
5.3. Kiegyenlítés a forgató mátrix inverzének kényszere alapján.....	139
5.4. Kiegyenlítés kis szögekkel meghatározott forgatással.....	140
5.5. A ferdén szimmetrikus paraméterek kis változásainak számítása kiegyenlítéssel.....	141
5.6. Az Euler paraméterek kis változásainak meghatározása .....	141
5.7. Térbeli tengely körüli elemi elfordulás meghatározása .....	142
5.8. Az iterációs megoldások tapasztalatai .....	142

<b>6. Számpéldák a forgató mátrix meghatározására.....</b>	<b>144</b>
6.1. A minta példák felvétele.....	144
6.2. Kiegyenlítés kényszer feltételekkel .....	146
6.2.1. Merőlegességi kényszerek felírásával.....	146
6.2.2. Kilenc kényszer felírásával.....	147
6.2.3. Kettős merőlegességi kényszer felírásával .....	147
6.3. Kiegyenlítés a forgató mátrix inverzének kényszere alapján.....	149
6.4. Kis szögekkel végzett forgatás .....	149
6.5. A ferdén szimmetrikus paraméterek változásának meghatározása kiegyenlítéssel.....	151
6.6. Az Euler paraméterek kis változásainak meghatározása iterációval...	152
6.7. Térbeli tengely körüli elemi forgatás kiegyenlítése .....	152

## A projektív invariánsok és szerepük a digitális fotogrammetriában .... 155

### Somogyi József

1. Bevezető.....	155
<b>2. A geometriai invariánsok.....</b>	<b>155</b>
2.1. Meghatározás és általános leírás.....	155
<b>3. Az egyes transzformációs csoportok rangsorolása.....</b>	<b>156</b>
3.1. A térről síkba történő transzformációk rangsora.....	156
3.1.1. Projektív transzformáció .....	156
3.1.2. Affin transzformáció .....	157
3.1.3. Hasonlósági transzformáció.....	157
3.2. A síkból síkba történő transzformációk rangsora .....	157
3.2.1. A sík projektív csoport .....	157
3.2.2. A sík affin csoport.....	158
3.2.3. Az euklideszi sík csoportja .....	158
<b>4. A projektív invariánsok.....</b>	<b>159</b>
4.1. Értelmezés .....	159
4.2. A kettősviszony meghatározása a $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2$ és $\mathbf{P}^3$ projektív terekben .....	159
4.3. A kettősviszony szimmetria tulajdonságai.....	161
4.4. Öt komplanár pont invariánsai.....	161
4.5. Öt komplanáris egyenes invariánsai .....	162
4.6. Két pont és két egyenes invariánsa .....	162
4.7. Négy pont és egy egyenes invariánsai .....	162
4.8. Két komplanár másodfokú síkgörbe invariánsai.....	162
4.9. Egy másodrendű síkgörbe és két egyenes invariánsa .....	163
4.10. 3D projektív pontokkal képezhető invariánsok .....	163

## **CURRICULUM VITAE JÓZSEF SOMOGYI**

### *Závoti József\**

Somogyi József 1931. november 9-én született Sopronban. Édesapja szakmunkás volt. Az elemi iskola elvégzése után polgári iskolába járt, ahol 1946-ban fejezte be tanulmányait. Ezután a Fáy András Közgazdasági Gimnáziumba iratkozott be. Már középiskolai évei alatt megmutatkozott közösségi hajlama, tagja lett különböző diákszövetségeknek és egy évre az iskola vezetőségébe is beválasztották. 1950-ben érettségizett és még ez évben felvételt nyert a Műszaki Egyetem Sopronban működő Földmérő Mérnöki Karára. Mint egyetemi hallgató aktívan részt vett az évfolyam társadalmi munkájában, emellett sportolt, és a IV. évfolyam tanulmányi csoportvezetője lett.

1954 őszén okleveles földmérő mérnök diplomát szerzett és a gyakorlati évei letöltését a Pécsi Geodéziai Vállalatnál kezdte meg. 1955-ben áthelyezéssel az MTA soproni Geodéziai Kutató Laboratóriumába került, ahol 1968-ig tudományos munkatársként dolgozott.

1956 januárjában megnősült. Felesége, Lengyel Katalin Cegléden született, és az Elzett soproni gyárában adminisztrátori munkakörben tevékenykedett. 1956 októberében született Péter, 1960 júliusában pedig Zoltán fiúk.

Tanulmányai befejezése után sem szakadt meg kapcsolata a sporttal. 1958-ban az Erdőmérnöki Főiskola Sportkörének vezetősége felkérte a SMAFC teniszszakosztályának vezetésére. 1960-ban a Városi Tenisz Szövetség titkárának választották meg. Emellett 1972-ig munkahelyén szakszervezeti titkári tevékenységet is folytatott.

Tudományos közéleti tevékenysége folyamán a Nemzetközi Geodéziai és Geofizikai Unióban (IUGG) 1980-tól tisztségviselő, mint a Pénzügyi Bizottság tagja, majd 1987-1991 között a Bizottság titkára. 1982-ben a Nemzetközi Földmérés Osztrák Bizottsága levelező tagjává választotta.

Hazai szakmai közéleti tevékenysége során 1972-1992 között tanácskozási jogú tagja volt az MTA X. Földtudományi Osztályának. Az IUGG Magyar Nemzeti Bizottságának 1975-től tagja, elnöke 1985-1991 között volt. Számos hazai tudományos bizottság kérte fel, hogy tevékenységével segítse a bizottság munkáját, így a TMB Bányászati, Földtani, Geodéziai és Geofizikai Szakbizottságának 1973-tól 1985-ig volt tagja. Ezt követően 1985-1991 között a Szakbizottság elnöki tisztségét is ellátta.

Geodéziai és Kartográfiai Egyesület alelnöki tiszttét 1973-1990 töltötte be, 1985-1989 években a GKE Soproni Csoport elnöke is volt. 1987-1991 években a VEAB alelnökeként tevékenykedett.

Az Acta Geodatica et Geophysica Hungarica szerkesztőbizottságának 1981-től tagja, az 1991-1993 években főszerkesztője.



MTA Geodéziai Bizottságának 1972-től tagja, 1996-1999 között pedig az MTA Geodéziai Tudományos Bizottságának elnöke.

Pályafutása kezdetén a Soproni Földmérőmérnöki Kar nappali tagozatán a geodézia, a bányamérés és a kiegyenlítőszámítás gyakorlatok vezetésével és előadások tartásával nagy oktatói gyakorlatra tett szert. Geodézia és fotogrammetria tárgyából tartott a jogutód Erdőmérnöki Karon is előadásokat és vezetett gyakorlatokat. Az itt szerzett tapasztalatokat hasznosította a későbbi években, amikor a Budapesti Műszaki Egyetemen a szakmérnöki oktatás keretében analitikus fotogrammetria tárgykörben kérték fel előadások tartására.

Tudományos pályafutásának nagy lökést adott, hogy 1964 szeptemberétől 1965 decemberéig a kanadai NRC Fotogrammetriai Intézetnél ösztöndíjasként tevékenykedhetett. Szakmai fejlődésében igen sokat jelentett ez az időszak. Kanadában a fotogrammetria nemzetközileg elismert kutatóival dolgozhatott együtt, és minden technikai segítséget megkapott kutatásaihoz. Ottawában elsősorban analitikus fotogrammetriával foglalkozott. Az ottani kutatási eredményei képezik alapját kandidátusi disszertációjának, amelyet hazaérkezése után „Az analitikus légi háromszögelés elmélete és gyakorlata” címmel írt meg. A disszertációját 1968-ban védte meg, a műszaki tudományok kandidátusa lett, ezt követően 1971-ig tudományos főmunkatársként nevezték ki. Kandidátusi fokozata alapján még 1968-ban a Budapesti Műszaki Egyetem műszaki doktora lett.

1971-ben a Geodéziai és Geofizikai Laboratóriumokból, valamint a Budapesti Szeizmológiai Observatóriumból létre jött az MTA soproni Geodéziai és Geofizikai Kutatási Intézete. Tudományos igazgatójának 1972. január 1.-től Somogyi Józsefet nevezték ki. Az igazgatói tevékenysége során irányította az Intézet fejlesztési és beruházási programját. Igazgatása első éveiben az Intézet létszáma és műszerállománya majdnem háromszorosára növekedett. Igazgatóként mindig támogatta a fiatal pályakezdőket, segítette beilleszkedésüket. Külföldi aspiránsokat fogadott, irányította munkájukat és nagyban hozzájárult ahhoz, hogy hazájukba visszatérve sikeres emberek lettek és még most is tartják a kapcsolatot Magyarországgal.

1977-ben védte meg a „Tömbkiegyenlítések hazai alkalmazása pontosság és gazdaságosság figyelembevételével” címmel írt disszertációját, amellyel a műszaki tudományok doktora fokozatot nyerte el. 1983-ban a Budapesti Műszaki Egyetem címzetes egyetemi tanára lett. 1979-ben a Munka Érdemrend ezüst, majd 1988-ban az arany fokozatát is megkapta.

Az Intézet tudományos igazgatói funkcióját 1990. december 31.-ig töltötte be, 1991-től tudományos tanácsadóként dolgozik.

Fő kutatási területe a geodéziai adatok nyerésének és korszerű feldolgozásának témaköréhez kapcsolódik. Méréstechnikai vonalon a geodéziai műszerek pontosságvizsgálataival foglalkozott (pl. teodolitok tengely-ingadozása, távcsövek negatív lencséinek vezetési hibája, diagramkörök pontossága, szintezőműszerek teljesítményadatainak meghatározása). A kutatások eredményeit elsősorban a magyar műszeripar hasznosította, de a teodolitok állótengely-ingadozásának vizsgálatára és a szintezőműszerek teljesítményadatainak meghatározására Alpár Gyulával közösen kidolgozott módszereikre nemzetközi vonatkozásban is felfigyeltek.

Fotogrammetriai kutatásai főként számítástechnikai vonatkozásúak. Magyarországon elsőként javasolt és alkalmazott analitikus megoldásokat. A légi felvételeken mutatkozó földgörbületi és refrakciós hatások miatt fellépő torzulások hatásának csökkentésére kidolgozta a Magyarországra vonatkozó normál atmoszférát és kiszámította a megfelelő korrekciókat. Az Alpár Gyulával együtt asztali számítógépre kidolgozott sorháromszögelési módszerük a hazai gyakorlatban is alkalmazásra került. A módszer a maga idejében nemzetközi vonatkozásban is korszerű és új volt. A BME Fotogrammetriai Tanszékén ez a megoldás oktatási anyagként szerepelt. Az egy éves kanadai ösztöndíja idején az akkor ott használt IBM 360-as számítógépre programozott egy olyan sorkiegyenlítési eljárást, amely a nemzetközi irodalomban az első publikált megoldás volt az  $x$ ,  $y$ ,  $z$  koordináták egyidejű meghatározására ill. kiegyenlítésére. Ő írta meg az első fotogrammetriai témával foglalkozó kandidátusi disszertációt. Elsőként javasolta és kezdeményezte a tömbkiegyenlítések hazai alkalmazását. A tömbkiegyenlítések pontosságának fokozására, a szabályos hibák hatásának csökkentésére végzett kutatásainak eredményeit doktori disszertációja foglalta össze. A témával kapcsolatban munkatársával több nemzetközi munkacsoport programjában vállalt szerepet.

A geodinamikai kutatásai során a függőleges kéregmozgás mérések pontosságának növeléséhez kezdeményezője és irányítója volt egy, az invar-szintezőlécek ellenőrzésére szolgáló terepi léckomparátor kifejlesztésének. Elméletet állított fel a kétlépcsős komparálás igényére és szükségességére. Kezdeményezője és részese volt egy, a másodperlibellák, az elektronikus libellák és a különböző dőlésmérők ellenőrzésére szolgáló új elven alapuló libellamérleg kifejlesztésének. Mindkét műszert az igazgatósága alatt újjászervezett és kibővített műszerfejlesztő részleg készítette el. Javaslatra és elképzelései alapján egy, a földalatti vágatok deformációinak meghatározására alkalmas sztereokamera készült. Kezdeményezésére a bécsi Műszaki Egyetem Felsőgeodéziai Intézetével együttműködve, geodinamikai jelenségek mérésére szolgáló ún. terepi zenitkamerát fejlesztettek ki.

Az utóbbi tizenöt évben kutatói munkájának érdeklődése főként a robusztus becslések geodéziai alkalmazására irányult. Robusztus becslési kutatásai során a maximum likelihood típusú becslésekkel foglalkozott. A Helmert- és a projektív transzformációkra iteratív súlyozási módszert vezetett be. A digitális fotogrammetria sok adatból álló és durva hibákkal terhelt adatrendszerének feldolgozásához az  $L_1$  normás Helmert-, és 3D hasonlósági transzformáció robusztus becslési modelljét javasolta. A két- és háromdimenziós hasonlósági transzformációkra az  $L_p$  normás becslések geodéziai alkalmazhatóságát is vizsgálta. Az adatok durva hibaszűrésére az  $L_1$  normás becslésnek a Boscovich-Laplace feltétellel történő kiegészítését tanácsolta.

Visszatekintve megállapíthatjuk, hogy a geodéziai műszerek pontosságának vizsgálata, ezen belül a teodolitok tengelyingadozása volt kutatási tevékenységének egyik fő állomása. Az irányzó távcsövek, szintezőműszerek teljesítményadatainak meghatározásában is értékes eredményeket ért el. A szintezőlécek komparálására kidolgozott módszere nemzetközi összehasonlításban is megálta a helyét. Az Intézetnek jó hírnevet hoztak az általa irányított műszerfejlesztések. Az analitikus fotogrammetriában a sor- és tömbkiegyenlítési módszerek kifejlesztésével és magyarországi bevezetésével úttörő munkát végzett a fotogrammetriai kutatások terén. Elindítója és motorja volt a Tárczy-Hornoch akadémikus kiegyenlítőszámítási munkásságának örökébe lépni szándékozó soproni robusztus becslési kutatásoknak.

A digitális fotogrammetria hazai elterjesztésének is egyik fő támogatója. Elnyert kutatási pályázatait mindig tisztességesen igyekezett teljesíteni, és a kutatásokba bevont kollégáit is alapos munkára ösztönzi.

Kutatásainak eredményeit különböző tudományos folyóiratokban tette közzé Magyarországon és külföldön. Publikált 76 cikket, amelyekre közel 100 hivatkozás érkezett, bizonyítva, hogy kutatási eredményei visszhangra találtak a tudományos közéletben. Egy könyv és két idegen nyelvű kiadvány szerkesztésében működött közre. Kandidátusi és doktori értekezései mindig az adott kor legaktuálisabb tudományos feladataival foglalkoztak, és a kiválasztott problémák megoldásával, kidolgozásával hozzájárult a magyar geodézia fejlődéséhez. A geodézia, ezen belül a fotogrammetria területén szerzett alapos tudása révén, számos konferencián és szemináriumon kérték fel tudományos előadások tartására.

Eredményes kapcsolatai és együttműködései voltak külföldi tudósokkal és nemzetközi szervezetekkel. Ezek közül csak a Bécsi Műszaki Egyetem Fotogrammetriai Intézetét, személyesen Karl Krauss Professzor urat és a Grazi Műszaki Egyetem Fizikai Geodézia Intézetét, személyesen Helmut Moritz Professzor urat említem. De elismertségnek örvendett mindkét Németországban, a volt szocialista államok tudósai között és a tengerentúlon is vannak tudós barátai.

Somogyi József 70. születésnapja alkalmából a hazai és nemzetközi geodéziai és geofizikai társadalom, a Magyar Tudományos Akadémia Geodéziai és Geofizikai Kutató Intézetének dolgozói, kollégái és barátai nevében szívből gratulálok eddigi sikeres életútjához és mindannyiunk nevében további hosszú, aktív életet kívánok.

*Závoti József*

# TRANSZFORMÁCIÓK A GEOINFORMATIKÁBAN

Dr. Bácsatyai László\* - Dr. Závoti József\*\*

*A geoinformációs rendszerekben - a transzformáció célját tekintve - kéttípusú transzformációt különböztethetünk meg:*

- 1. A helyzeti adatok transzformációja (lehetséges alternatív kifejezések: geometriai, kvantitatív transzformáció)*
- 2. A leíró adatok transzformációja (lehetséges alternatív kifejezések: radiometriai, kvalitatív transzformáció)*

**Kulcsszavak:** vonatkozási rendszer, WGS-84 ellipszoid, 7 paraméteres transzformáció, UTM vetület, wavelet transzformáció.

## A helyzeti adatok transzformációja

A geoinformációs rendszerek adatbázisaiban tárolt tematikák rendszerint több vonatkozási, ill. vetületi rendszerben állnak rendelkezésünkre. A különböző tematikák egységes kezelhetősége, közöttük elemző műveletek végzése csak úgy lehetséges, ha a tematikákat ugyanazon vonatkozási, ill. vetületi rendszerbe transzformáljuk. Különleges fontossága van a nemzetközi kooperációban megvalósuló projektek egységes rendszerben való kezelésének, úgy az egységes vízszintes, mint az egységes magassági koordináták vonatkozásában.

A geometriai transzformációval kapcsolatos mondanivalónkat az alábbi felépítésben tárgyaljuk:

- Definíciók: alapfelület, vonatkozási, vetületi és koordináta-rendszer.
- Az alkalmazható és javasolt transzformációk, szigorú és közelítő átszámítások.
- Vonatkozási és vetületi rendszer megválasztása a nemzetközi együttműködésben.

### *Definíciók*

Alapfelület: a Föld fizikai alakját, felszínét helyettesítő, a *geodéziai számítások* végrehajthatóságát biztosító, matematikai függvénnyel leírható *elméleti alak*, ill. *geometriai idom*.

*Alapfelületek:*

- geoid: a Föld nehézségi erőtere potenciáljának (speciális) szintfelülete;
- ellipszoid (fél nagytengely, lapultság);
- gömb (sugár).

Vonatkozási rendszer: olyan alapfelület, amelynek földfelszíni kezdőpontja és tájékozása van, valamint ismert a geoidunduláció a kezdőpontban. Az alapfelületek közül geodéziai értelemben vonatkozási rendszer a forgási ellipszoid (vonatkozási ellip-

\*NYME, SEK, Földmérési és Távérzékelési Tsz. 9400, Sopron, Ady E. u. 5.

E-mail: [bacsaty@emk.nyme.hu](mailto:bacsaty@emk.nyme.hu)

\*\*MTA FKK Geodéziai és Geofizikai Kutató Intézet, Sopron, Csatka E. u. 6-8.

[zavoti@ggki.hu](mailto:zavoti@ggki.hu)

szoid). A Föld fizikai alakjához, felszínéhez képest az ellipszoid helyzetét a vonatkozási rendszer definiálja.

**Képfelület (vetület):** az alapelületet érintő, vagy metsző, a *térképi ábrázolás céljából* az alapelületnél legalább egyvel alacsonyabb rendű felület, geometriai idom. Geodéziai értelemben képfelület (vetület) a Gauss-gömb és a sík, vagy a síkba fejthető felület (*henger, kúp*).

**Koordinátarendszer:** tetszőleges térbeli pont helyét rögzíti az *alapelületen* (az *alapelülethez képest*), ill. a *képfelületen*.

**Vetületi koordinátarendszer:** tetszőleges térbeli pont helyét rögzíti a vetület síkjában.

Ugyanazon vonatkozási rendszerhez elvileg többféle vetület tartozhat. Ezért az adatok egységes kezeléséhez a tematikák vonatkozási és vetületi koordináta rendszerének is meg kell egyeznie.

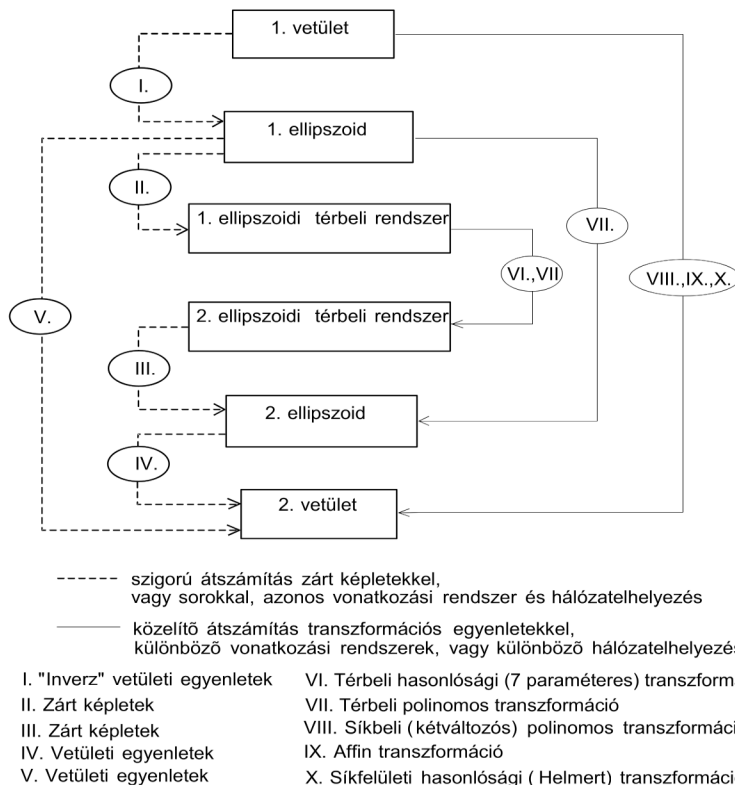
### ***Alkalmazható és javasolt transzformációk, szigorú és közelítő átszámítások***

Az egyes vonatkozási rendszereket geometriai-matematikai szempontból a hozzájuk rendelt alapelületek (ellipszoidok), ill. a csatlakozó képfelületek (vetületek) és koordinátarendszerek határozzák meg; így a vonatkozási rendszerek közötti átszámítások az utóbbiak közötti átszámításokat jelentik.

A számítástechnika és elektronika, valamint a fejlődésükkel szoros kapcsolatban lévő korszerű geodéziai helymeghatározási módszerek (különösen a GPS) az átszámítási lehetőségeket nagymértékben kiszélesítették, ill. szükségessé tették. Így globalizálódó világunkban a hagyományos kétdimenziós átszámítások (affin, síkfelületi hasonlósági - Helmert - transzformáció, grafikus eljárások) mellett megjelentek az addig matematikailag ugyan ismert, de abban az időben számítástechnikailag nem, vagy csak nehezen kivitelezhető háromdimenziós átszámítások, amelyek napjainkra jelentős mértékben megnövekedtek az eljárások alkalmazhatóságának területi kiterjedését, ill. lehetővé tették, hogy az addig egymástól függetlenül kezelt két- és egydimenziós feladatokat egységes rendszerben, összefüggően oldjuk meg (3D geodézia). Bár a területi kiterjedés ez esetben is korlátozott, mert a különböző vonatkozási rendszerekhez tartozó geodéziai alaphálózatok létrehozásakor a legtöbb országban eltérő, különböző mérési pontosságú mérési technológiákat alkalmaztak, a GIS vonatkozásában mindenképpen a térbeli átszámítások javasolhatók még akkor is, ha magasság információkat tartalmazó tematikák nem szerepelnek a tematikák között.

A számos lehetséges módszer közül az alkalmazásra ajánlható *közvetlen* átszámítási kapcsolatokat, ill. a *közvetett átszámítási utakat* az 1. ábrán foglaljuk össze. Vastag vonallal a szigorú, zárt képletekkel, vagy sorokkal kifejezhető átszámításokat, vékony vonallal a közelítő, transzformációs egyenletekkel leírható átszámításokat szimbolizáljuk. Az ábra jól szemlélteti az ismert tényt, hogy szigorú képletekkel csak úgy térhetünk át az egyik vetületi rendszerről a másikra, ha mindkettőnek közös a vonatkozási rendszere (1. ellipszoid: a VI. - X. átszámítási út). Ennek a geoinformációs rendszerek szempontjából nemzetközi kitekintésben a különböző kezdő meridiánú UTM vetületi sávok között van jelentősége. Minden más esetben közelítő módszert kell használnunk, sőt, a III., IV. és V. típusú átszámítások kivételével, a közelítő mellett szigorú módszert is.

A közelítő módszereknél mindig ún. azonos pontokat használunk, vagyis olyanokat, amelyek helyzete mindkét rendszerben pontosan ismert.



1. ábra. Az átszámítás leggyakoribb lehetőségei.

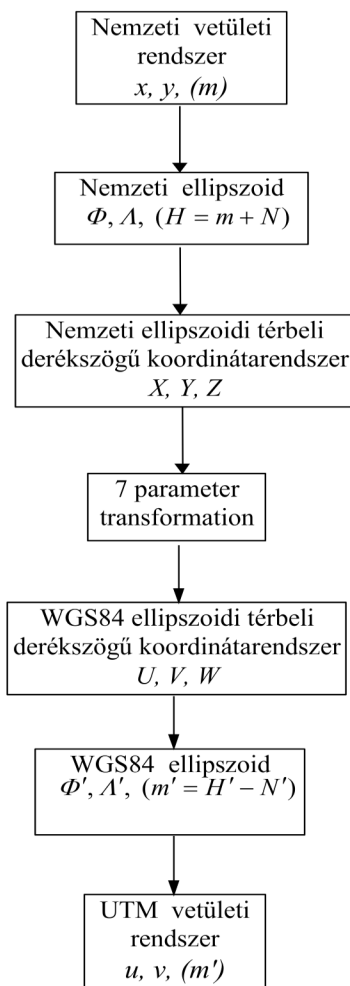
### ***Vonatkozási és vetületi rendszer megválasztása a nemzetközi együttműködésben***

A napjainkban egyre jobban terjedő nemzetközi, itt közelünkben az Európai Unió - több országot átfogó nagy területre kiterjedő kutatások olyan vonatkozási, ill. vetületi rendszert kívánnak meg, amely közösnek fogadható el minden egyes együttműködő ország számára, s amelybe - éppen a területi kiterjedés miatt - térbeli transzformációval térhetünk át. Ilyen rendszerként kínálják magukat azok, amelyekben a GPS vevők által szolgáltatott helymeghatározás eredményei is megjelennek. Vagyis ebben a vonatkozásban a transzformáció az ország saját rendszere és a GPS vonatkozási rendszere közötti matematikai kapcsolat megteremtését jelenti.

A GPS műholdak pontos koordinátáit az ITRS (International Terrestrial Reference System - Nemzetközi Földi Vonatkozási Rendszer) rendszerben adják meg. Mivel a rendszert létrehozó állomások helyzete a kontinens vándorlás (a litoszféra lemezek mozgása) következtében változik, az állomások koordinátái mellett a koordináta irányú sebességeket is ismerni kell. Az ITRS mellett bevezették az eurázsiai litoszféra lemez mozgásához kapcsolódó ETRS (European Terrestrial Reference System - Európai Földi Vonatkozási Rendszer) rendszert, amelyre Európában a GPS gyakorlati mérései vonatkoznak. A rendszer jelenleg érvényes realizációja az ETRS89 (vagy EUREF89 - European Reference Frame 1989) európai koordináta rendszer.

A GPS *vezérlő szegmense* követő állomásainak a koordinátáit a WGS-84 vonatkozási rendszerben adják meg. Az említett három rendszer eltérése egymástól csak néhány cm, a gyakorlati térinformatikai feladatok végrehajtása során ettől eltekinthetünk, azaz tekinthetjük úgy, hogy a mérési eredmények a WGS84 ellipszoidra vonatkoznak.

Az 1. ábra két térbeli közelítő transzformációt kínál: a térbeli hasonlósági és a térbeli polinomos transzformációt. Tudomásunk szerint nincs egységes, ill. egyértelmű álláspont, hogy a kettő közül melyik a "jobb" (egyébként is: mi az hogy "jobb"?), ezért nem vállalkozunk arra, hogy perdöntően állást foglaljunk, s nem bocsátkozunk most a különböző szempontok szerinti összehasonlítások elemzésébe sem. Az alkalmazó országok többsége - már csak az analitikus fotogrammetriával való kapcsolata miatt is - a 7 paraméteres hasonlósági transzformációt alkalmazza, maradjuk mi is ennél. A 2. ábra - az 1. ábrára támaszkodva - mutatja be javaslatunkat az egységes rendszerre való áttérésre.



**2. ábra.** Átszámítási séma az egységes rendszerbe.

Jelölések:

$H, H'$  - Ellipszoidi magasság  $x, y, u, v$  - Vetületi koordináták  
 $m, m'$  - Tengerszint feletti magasság  $\Phi, \Lambda, \Phi', \Lambda'$  - Ellipszoidi földrajzi koordináták  
 $N, N'$  - Geoidunduláció  $X, Y, Z, U, V, W$  - Geocentrikus térbeli koordináták

Elvileg a  $\Phi, \Lambda'$  földrajzi szélesség és hosszúság, valamint az  $m'$  tengerszint feletti magasság (a  $H'$  ellipszoidi magasság a gyakorlati feladatok végrehajtásakor nem használható) is lehetne a GIS tematikák koordináta rendszere, de - elsősorban a raszteres állományok - e rendszerben nehezen lennének kezelhetők. Célszerű tehát vetületi rendszerben dolgozni. Itt az UTM vetületi rendszer választása már csak azért is egyértelmű, mert a WGS84 koordinátákról való áttérést a legtöbb geoinformációs szoftver (így pld. az Arc-View) tartalmazza.

Kérdés, hogy - a tematikák egységes vízszintes helyzetének UTM vetületben történő rögzítése mellett - foglalkozunk-e egy egységes magassági rendszerre történő áttéréssel is, mint a 2. ábra ezt sugalmazza, vagy minden ország maradjon meg a saját rendszerénél. A kérdés megvizsgálásához induljunk ki abból, hogy pozitív válasz esetén szükség van mind a nemzeti vetület vonatkozási ellipszoidja és saját választott tengerszintje, mind a WGS84 ellipszoid és az egységes tengerszint különbségeinek, a geoidundulációknak az ismeretére (ld. a 2. ábrán az  $N$  és  $N'$  értékeket). Ekkor a 7 paraméteres transzformáció, ill. az transzformáció után az új rendszerbeli magasságok megkaphatók. Megjegyzendő, hogy a geoidundulációkat többnyire diszkrét pontokban ismerjük, így egy adott konkrét pontra interpolálni kell.

Sok esetben a geoidundulációk nem, vagy nem mindkét vonatkozási rendszerben, esetleg nem kellő sűrűségben állnak rendelkezésre. Ha az országos geodéziai adatbázisok között vannak is geoidundulációk, de a transzformáció adatait magunknak kell előállítani, nem szívesen foglalkozunk a geoiddal, ráadásul a geoinformatikát használó szakemberek többnyire nem is értenek hozzá.

Nem teljesen korrekt, de a tapasztalatok azt mutatják, hogy ha a 2. ábrán a nemzeti ellipszoidnál a geoidundulációkat figyelmen kívül hagyjuk, vagyis  $m = H$ , azaz az ellipszoidi magasságok helyett az adott ország tengerszint feletti magasságait szerepeltetjük, s így számítjuk át az ellipszoidi felületi koordinátákat a nemzeti ellipszoidi térbeli derékszögű koordinátarendszerre ( $X, Y, Z$ ), a paraméterek mások lesznek, de a geoinformatikai célokat teljesen kielégítő eredményeket kapunk. A transzformációhoz a WGS84 ellipszoidnál szükség van az ellipszoidi magasságokra (a geoidundulációkra nem), de ez automatikusan adódik, ha a 7 paraméteres transzformációhoz szükséges *azonos pontokat* GPS vevőkkel is meghatározzuk.

A geoinformatikai alkalmazások során a magasságokat általában nem ellipszoidi, hanem tengerszint feletti rendszerben kívánjuk kezelni. Itt maradhatunk az eredeti saját országos magassági rendszerünkénél, vagy - az együttműködés mélységétől függően - választhatunk egy egységes tengerszintet (pld. az *amszterdamit*). Az első esetben a kapott WGS84 ellipszoidi magasságokat az átszámításnál egyszerűen figyelmen kívül hagyjuk, az egységes rendszerre való áttérésnél pedig mindössze a két tengerszint eltérést kell ismernünk. A geoidundulációkat így itt is megkerülhetjük, csak a vízszintes koordináták változnak, a térbeli transzformációra a területi kiterjedés, ill. a pontosság miatt volt szükség.



## A leíró adatok transzformációja

A célunk az, hogy megadjuk a tér-frekvencia tartományban ható wavelet transzformációnak az általános matematikai definícióját, valamint ezen transzformáció előnyös tulajdonságainak felhasználásával nagy adatrendszerek tömörítésére adjunk meg eljárást.

A földrajzi információs rendszerek (GIS), speciálisan a digitális képfeldolgozás nagy adatrendszereinek tárolása aktuális probléma. A GIS adattömörítési eljárásaira a wavelet transzformációt (WT) ajánljuk.

### *A wavelet transzformáció matematikai összefüggései*

Az anya waveletet mindig a feladatnak megfelelően kell választani, a szakirodalomban leggyakrabban a következő függvények használatosak:

$$\text{Hanusse függvények:} \quad \psi_1(t) = te^{-t^2}, \quad \psi_2(t) = (1 - 2t^2)e^{-t^2},$$

$$\text{Mexikói kalap:} \quad \psi(t) = (1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (1)$$

$$\text{Morlet függvény:} \quad \psi(t) = e^{j\omega t} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Tekintsük a következő függvény transzformációt:

$$\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in R, \quad (2)$$

- ahol  $\psi(t)$  az anya wavelet,  
 $b$  az eltolás,  
 $a > 0$  a skála paraméter.

Az anya wavelet függvény-transzformációjával (független változó eltolása és skalárral való szorzása) a waveletek egy halmazához jutunk, ahol az  $a < 1$  eset megfelel a magas, az  $a > 1$  eset pedig az alacsony frekvenciával rendelkező waveletnek.

Legyen  $s(t)$  egy tetszőleges analizálandó jel, akkor a wavelet transzformáció alapformulája a következő (Závoti 1995):

$$S(b,a) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (3)$$

A fenti definícióból világos, hogy a wavelet transzformáció a négyzetesen integrálható függvények terében az  $s(t)$  és  $\psi_{a,b}(t)$  függvények belső (vagy skaláris) szorzatának felel meg, s így a két függvény hasonlóságának mértékét adja.

A gyakorlatban a (3) egyenletben szereplő integrál approximációja diszkrét összegzéssel történik.

### A diszkrét wavelet transzformáció alkalmazása

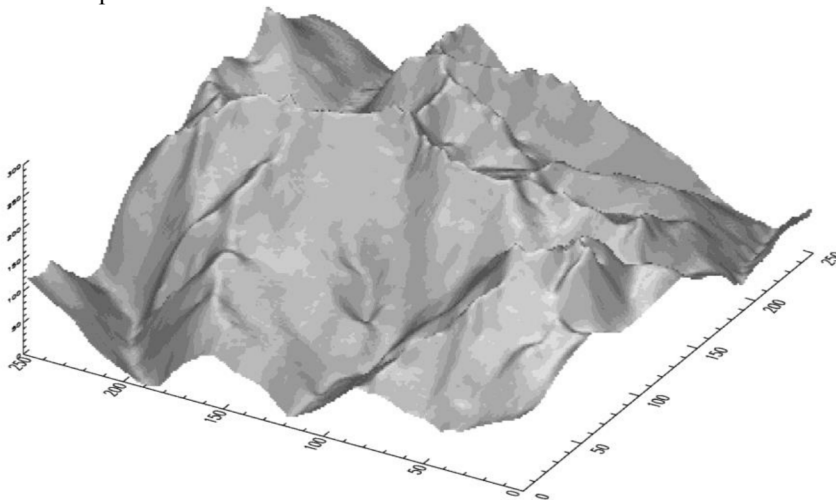
Daubechies (1988) konstruált egy, az előző feltételeknek megfelelő ortonormált bázist úgy, hogy a bázis függvényeket nem adta meg explicite, hanem megadott két szűrő-együttható sorozatot, amely sorozatok az anya waveletet is és a skálázó függvényeket is egyértelműen meghatározza.

A wavelet transzformáció kétdimenziós változatát a 2D Fourier transzformációhoz hasonlóan kell végrehajtani. Egy mátrixformában adott adatrendszer wavelet transzformáltját úgy kapjuk, hogy először alkalmazzuk az egydimenziós wavelet transzformációt a mátrix valamennyi sorára, ezt követően pedig az eredményül kapott mátrix minden oszlopára. Minden transzformációs lépés egy ortogonális mátrixszal való szorzásnak felel meg, ezért az ortogonális mátrixok szorzásának asszociativitása miatt a végeredmény független a transzformációk végrehajtásának sorrendjétől.

### A wavelet transzformáció tulajdonságai

A wavelet transzformáció hasznos tulajdonsága, hogy a wavelet transzformáció eredményül kapott együtthatókat egyszerűen csonkítani lehet, anélkül, hogy az eredeti adatrendszer lényeges torzulást szenvedne. A Fourier transzformációnál a helyzet éppen ellenkező.

A csonkítás hatásának bemutatására tekintsünk egy példát. A terep magasságait egy stacionárius kétdimenziós sztochasztikus folyamattal modellezzük, amely az  $(x,y)$  koordinátáival rendelkező pont magasságát egy normális eloszlású valószínűségi változónak tekinti. (Tehát a  $t$  időváltozó szerepét távolságjellegű változók veszik át.) A 1. ábrán látható egy  $256 \times 256$  pixel méretű digitális terepmodell. A digitalizálás lépésköze 20m. Az adott térrész az Alpok egy gerincekkel és völgyekkel gazdagon szabdalt, igen változatos terepe.



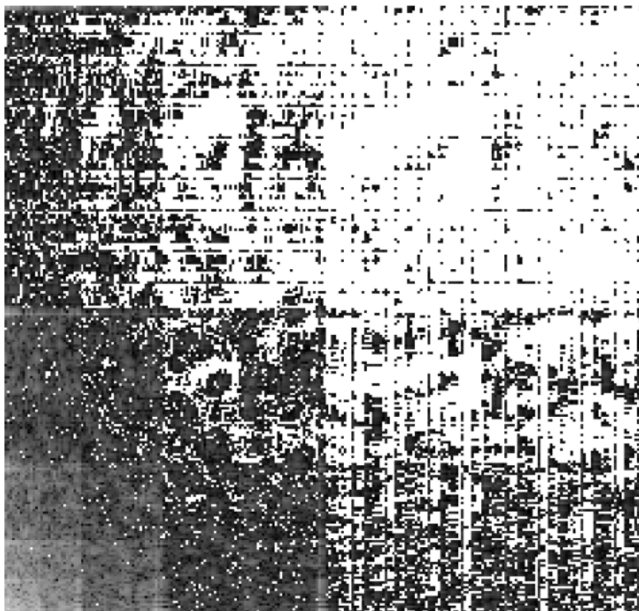
1. ábra. A digitális terepmodell.

A terep koordináta rendszerét az óramutató járásával ellenkező irányban  $60^\circ$ -kal elforgattuk és  $30^\circ$ -kal előre döntöttük. A magasságokat egy relatív skálán adtuk meg. Ugyanezen terep magassági viszonyait a 2. ábra egy 8 bit fokozatú szűrkeségi színskálán (minél magasabb egy tereppont, annál világosabb a megjelenítésben) ábrázolja.



**2. ábra.** Szűrkeségi térkép.

A 2D wavelet transzformációt végrehajtva jutunk az 3. ábrán bemutatott képhez.

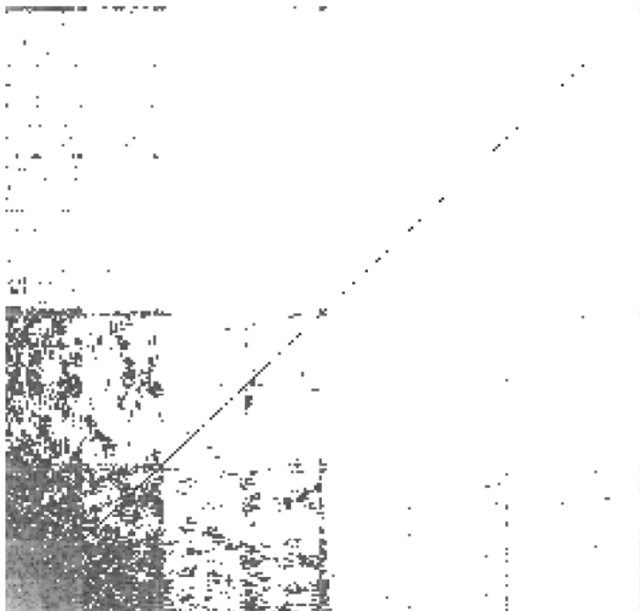


**3. ábra.** Wavelet transzformáció.

Megfigyelhető, hogy a wavelet transzformáció eredményéül kapott kép felhasad alacsony felbontású részre és differencia jelekre. Az alacsony felbontású kép mérete negyede az eredeti képnek. A differencia jelek írják le a különbséget az alacsony felbontású kép és az eredeti kép között. Ha nagy a korreláció az eredeti adatrendszer adatai között, akkor a differencia jelek nagyon sok értéke közel esik nullához. A differencia jelek közül kettő az  $x$  tengelyirányú, illetve az  $y$  tengelyirányú élek jelenlétére utal; míg a harmadik differencia jel a markáns pontokhoz tartozó információkat rögzíti. Az alacsony felbontású kép adatai még tartalmaznak korrelációkat, így célszerű a dekompozíciót megismételni. Ezzel a gúla alakú képfelbontáshoz jutunk.

A kétdimenziós wavelet transzformációt közvetlenül felhasználhatjuk nagy adatrendszerek tömörítésére: valamennyi olyan wavelet együtthatót tartunk meg, amely abszolút értékben nagyobb egy megadott  $\varepsilon > 0$  korlátnál és a korlátnál kisebb értékeket tegyük egyenlővé nullával.

A korlát megválasztásával szabályozhatjuk, hogy az eredeti kép részleteit milyen pontossággal kívánjuk megőrizni. A wavelet transzformáció előnyös tulajdonsága, hogy a wavelet együtthatók értékének nagy része közel esik nullához, ezért az adatrendszer nagy százaléka csonkítható. A 4. ábra illusztrálja a csonkított wavelet reprezentációt.



4. ábra. Csonkítás.

Ezen esetben a korlát értékét  $\varepsilon = 6.5$ -nek választva a csonkítás után a 65536 wavelet együttható helyett mintegy 6500 együtthatót hagyunk meg. A paraméterek ezen választása révén kb. 90%-os adattömörítést érhetünk el.

A csonkított adatrendszerre az inverz wavelet transzformációt alkalmazva a 5. ábrához jutunk.



5. ábra. Inverz wavelet transzformáció.

A 5. ábrát a 2. ábrával összevetve megállapítható, hogy lényeges eltérés nem észlelhető az eredeti és a csonkítással kapott képek között. Statisztikai vizsgálatok is alátámasztják a fenti tapasztalatot, mivel maximális eltérésként 9.83 *m* adódott.

### Hivatkozások

- Bácsatyai L** (1998): Átszámítások vonatkozási rendszerek között. *Geomatikai Közlemények I.* (Geomatika a geodézia elméletében és gyakorlatában), 163-178.
- Borza T** (1998): Az országos GPS hálózat geodéziai jelentősége. *Geomatikai Közlemények I.* (Geomatika a geodézia elméletében és gyakorlatában), 37-42.
- Daubichies I** (1988): *Comm. Pure Appl. Math.*, 41, 909-996.
- Sárközy F, Závoti J** (1995): Proc. of the 4<sup>th</sup> International Symposium of LIESMARS, Wuhan, 1-10.
- Závoti J** (1995): *Acta Geod. Geoph. Hung.*, 30, 217-225.

## A GIS ADATMODELL HARMADIK ÉVTIZEDE

Sárközy Ferenc\*

*A GIS adatmodell közel harminc éves történetét az állandó fejlődés jellemzi, mely szoros kölcsönhatásban volt magában a térinformatikában elért eredményekkel. Ez a folyamat ma is élő és minden valószerűség szerint a jövőben is hatni fog.*

*A jövő változásait csak akkor prognosztizálhatjuk, ha levonjuk a fejlődéstörténet tanulságait: elemezzük a változások összetevőit, az azokat kiváltó okokat és az általuk elért eredményeket.*

*Az adatmodell alkotó elemei szintén megváltoztak. A koncepcionális adatmodell mind formában, mind tartalomban változott. A logikai adatmodell kapcsolata a koncepcionális modellel szorosabbá vált. A fizikai modellt napjainkban már alapvetően az operációs rendszer kezeli, ugyanakkor helyette előtérbe került az implementációs modell, mely a logikai modell folytatásának tekinthető és a korábbi értelemben vett fizikai modell mellett magában foglalja az alkalmazott GIS szoftver belső adatmodelljét is.*

*A tanulmány felvázolja a fejlődés néhány legfontosabb állomását és vizsgálja az azokat kiváltó okokat.*

*A szoftver és hardver feltételek fejlődése mellett a folyamatot jelentős mértékben befolyásolták az új adatnyerési technológiák is. Ezzel is magyarázható a függvény tereket leíró adattípus jelentőségének erősödése. Ez a jelenség új módszerek bevezetését indokolja ezeknek az adatoknak a leképezésére. Ezek közül elsősorban a mesterséges neurális hálózatok szerepére hívjuk fel az olvasó figyelmét.*

*A következtetésekben többek között rámutatunk, hogy a jövő adatmodelljének a valós földi objektum osztályokon kell alapulnia, olyan objektum orientált implementációban, mely konform az információs technológia legújabb vívmányaival, s egyben a felhasználó számára lehetővé teszi a több méretarányú elemzést és megjelenítést.*

**Kulcsszavak:** térbeli adatok, adatmodellek, GIS, Relációs Adatbázis Kezelő Rendszerek, objektum orientáltság, mesterséges neurális hálózatok, földrajzi adat központi modell.

### Bevezetés

Az első széleskörűen elérhető GIS szoftverek a nyolcvanas évek elején kerültek forgalomba jó tíz éves késéssel az első kereskedelmi adatbázis kezelő rendszerek (IMS az IBM-től) és az első CAD rendszerek (Computervision) megjelenése után. Mivel a GIS alapfunkciója a térbeli adatok kezelése, elemzése és megjelenítése volt a korai GIS szoftverek készítői nem kerülhették el, hogy átvegyék a korábbi technológiák olyan rész kérdéseiben született megoldásokat, melyek a GIS-ben is fontos szerepet játszanak (adatkezelés, megjelenítés). Az új technológia két, teljesen különböző koncepcionális modellt használt: a függvény térét, melyet raszter modellnek neveztek el és egyszerű fájl rendszerrel implementáltak valamint a topológiai vektor modellt, melynek implementálására készült az úgy nevezett „georelációs modell”.

Ez a két modell néhány kisebb módosítással - melyek közül a legjelentősebbek a hibrid adatmodell, illetve ritkább előfordulással, a harmadik dimenzió bevezetése volt

– szinte kizárólagos volt a kereskedelmi GIS szoftverekben a korai kilencvenes évek előtt.

Az igazi modell változásokat a valódi vagy állítólagos objektum orientáltság bevezetése, a leíró és geometriai adatok közös adatbázisban történő tárolása és a függvény tér adatoknak a közös adatstruktúrába való beillesztése jelentették. Ezekre azonban (kivéve a közös adatbázist) csak a kilencvenes évek elején került sor.

A tanulmány célja, hogy feltárja az újításokhoz vezető okokat, kifejtse a változások legfontosabb következményeit, felvessen és megválaszoljon néhány vitatott kérdést, néhány új módszert javasoljon a függvény terek modellezésére és hogy prognosztizálja a jövő fejlődés legfontosabb irányait.

## Az adatmodellek típusai

Amint azt a legtöbb adatbázisokat tárgyaló tankönyv bevezető fejezete megfogalmazza **koncepcionális**, **logikai** és **fizikai modelleket** különböztetünk meg. A két utóbbit cikkünkben rendszerint **implementációs modellnek** hívjuk.

A **koncepcionális modell** azonosítja a földfelszín, légkör, szilárd földkéreg és az óceánok objektumait attribútumaikkal (beleértve a geometriai tulajdonságaikat is), felépíti egymásközi kapcsolataikat és azok számosságát (1:1, 1:N, N:M). 1976 óta az Entitás-Kapcsolat (Entity-Relationship = ER) Diagrammok segítségével jeleníthetjük meg grafikusán a modellt. Az ER diagram térbeli kiterjesztése a korai kilencvenes években jelent meg. Az utóbbi években számítógéppel támogatott programozási (angol rövidítéssel CASE) eszközök jelentek meg a piacon, melyek nem csak az ábrák készítését támogatják, de le is fordítják a kérdéses diagramot valamely programozási (vagy adatleíró) nyelvre, azaz képesek létrehozni a **logikai modellt** is. Például a SmartER (<http://www.kbsi.com/Software/Smarter.htm>) program segítségével olyan SQL táblázatokká alakíthatjuk az ábrát, mely megfelel az IDEF1X (FIPS 184 1993) amerikai katonai adatbázis szabványnak. Meg kell jegyeznünk ugyanakkor, hogy ez a szabvány nem tér ki térbeli adatokra.

Az utóbbi néhány évben az objektum orientált adatmodell egyre fontosabb szerepet játszik. Az objektum orientált folyamat, szoftver, és adatmodellezés ma már szinte kizárólagos eszköze az Univerzális Modellező Nyelv - UML (OMG 1999). A Rational Rose nevű szoftver (<http://www.rational.com/products/rose/prodinfo.jsp#rose>) ezen a nyelven tesz lehetővé diagram szerkesztést és kódgenerálást. A **Rose 2001A Enterprise** nevű programverzió többek közt lehetővé teszi a grafikus objektum modellezést, adat modellezést, adatbázis tervezést vagy az objektum modellen alapuló adat definíciós nyelvi szkriptek készítését. Mivel azonban eredetileg az UML-t sem térbeli adatokra dolgozták ki további fejlesztésére van szükség térbeli adatok esetében. Egyik térbeli továbbfejlesztéséről a GeoOOA eszközről 1996-ban olvashattunk először (Kösters at al. 1996). Ez a kutatói szoftver később kereskedelmi terméké vált REGIS néven (<http://www.isoware.de/>).

A **logikai modell** a szoftver független koncepcionális modell leképezése valamely adatleíró nyelvvel (angol rövidítéssel DDL) definiált rekord struktúrába. Napjainkban a nem térbeli adatokat rendszerint relációs adatbázisokban tárolják, ezért a logikai modellezés tulajdonképpen a koncepcionális modellnek megfelelő táblák kialakításából áll. A CASE eszközök segítségével ez a folyamat automatizálható. Térbeli adatok esetére az automatizált kódolás az objektum orientált adatmodell és a nyílt, objektum orientált GIS szoftverek megjelenésével kezdett valósággá válni. A hagyományos GIS szoftverek esetében a leíró adatok adatbázis sémáját vagy manuálisan tervezik meg vagy

valamely CASE eszköz segítségével transzformálják az ER diagramot adatbázis táblákba. A geometriai adatok logikai modelljét ugyanakkor elrejtik az adatbeviteli modul vezérlő utasításai. A térbeli és leíró adatok kapcsolatát rendszerint manuálisan hozzák létre a GIS szoftver felhasználói interfésze segítségével.

A **fizikai modell** merevlemez területeket rendel a logikai modellben meghatározott adatokhoz. Annak érdekében, hogy egy választott régió objektumait gyorsan be lehessen olvasni valamilyen térbeli indexelést, például négyágú fa (quadtree) indexeket használnak a szoftverek. A fizikai modell a GIS szoftverben és az operációs rendszerben elrejtve automatikusan létrejön a logikai modell lefordításakor.

## A kezdőpontok

A korai nyolcvanas években a számítógépek teljesítménye igen alacsony volt. Igen bonyolult, nagytömegű grafikus és leíró adat kezelését kellett megoldani a lehető legegyszerűbben. Mind a korai CAD rendszerek eredményei, mind a kiteljesedő relációs adatbázis kezelési technológia képes volt olyan alapvető megoldásokat nyújtani, melyeket a grafikus és leíró adatok közös kezelése hasznosítani tudott.

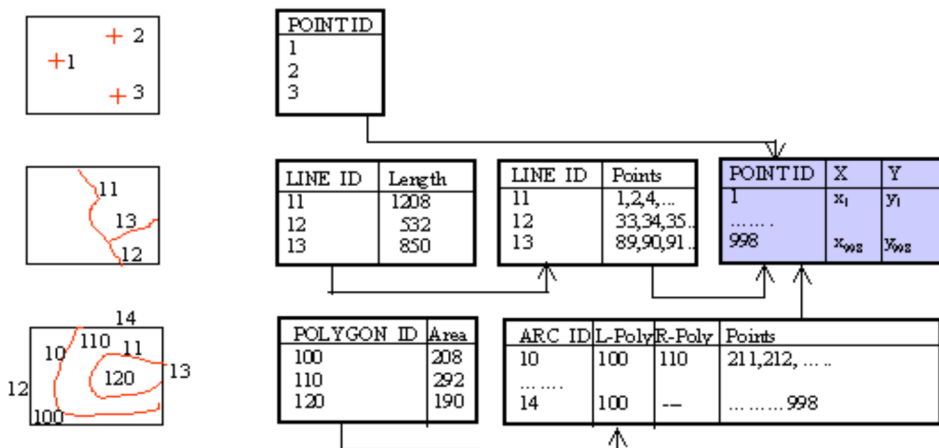
Az **Arc/Info georelációs adatmodellét** ezen az alapon hozták létre. A modell alap gondolata az volt, hogy a koordináta illetve leíró adatokat külön kell tárolni. A modell alapobjektumai a geometriai objektumok: a pont, vonal és zárt sokszög (poligon). Valamennyi objektum koordinátáit egyedi azonosítóval ellátott, bináris „arc” fájlokban tárolták. A leíró adatokat és a topológiát relációs adatbázis, eredetileg INFO táblázatokban helyezték el. A leíró adatok rekordjait a koordinátákhoz a már említett azonosítók kapcsolták (1. ábra).

A modell objektumai tehát **geometriai struktúrák**, ugyanaz az objektum, például egy zárt sokszög jelenthet egy házat vagy egy telket is, ha alakjuk és helyzetük azonos. Az egyetlen különbség az attribútumaikban van. A modell lényeges eleme még az úgynevezett síkbeli kényszer, mely azt jelenti, hogy a síkot az objektumok hézag nélkül, folyamatosan, átfedés nélkül borítják.

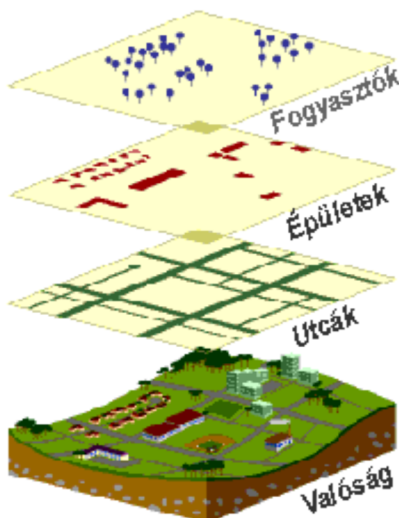
Hogy a valós világ objektumai is kezelhetők legyenek, a modell az utóbbiakat fedvényekbe szervezi (2. ábra). A rétegekre vonatkozó egyetlen **elvi** megkötést a síkbeli kényszer jelenti (azt a másik megkötést, hogy pontok és poligonok nem lehetnek ugyanazon a fedvényen már az implementáció eredményezte). Bár az alkalmazások természetesen valamilyen tartalmi megfontolások alapján szervezik a rétegeket **szigorú objektum osztályok hiányában a felhasználó elvileg szabadon válogathatja ki a rétegek tartalmát**.

A modell nagy előnye volt a relatíve gyors adatfeldolgozás és megjelenítés, és tekintettel arra, hogy ezekben az években az alapvető adatnyerési módszer a térképdigitalizálás volt, a forrásanyagok egyszerűsített előfeldolgozási igénye. Érdemes megemlíteni, hogy a topológia explicit tárolásának, ha nem is azért mint annak idején (gyors adatfeldolgozás) ma is nagy jelentősége van. Ha ugyanis **számítjuk** a topológiát, úgy annak következtében hogy a legtöbb GIS csak kétdimenziós vetületekkel dolgozik, ott is metszést (csomópontot) fog számolni, ahol a keresztezés nem szintbeli. Ez a topológia explicit tárolásával elkerülhető.





1. ábra. A georelációs adatmodell.



2. ábra. A réteg modell alapelve.

A fájl alapú rendszerekben a teljesítmény korlátok következtében a munkaterületet lapkákra osztják. A szomszédos fedvényeket a „könyvtáros” fogja össze, mely az egész munkaterületre kiterjedő poligon index fedvényt és a lapkák fizikai tárhelyeire mutató pointer-rekorddal működik. Ez az implementáció, bizonyos szempontból akadályozza, hogy a munkaterületet egészként kezeljük.

Az első, szélesen elterjedt **raszter alapú** oktatási szoftver a **Map Analysis Program (MAP)** 1980-ban keletkezett. A raszter modell alapötlete egyszerűen származtatható a nem sokkal korábban bevezetett színes képernyők működési elvéből. A **raszter modell** eredeti formájában külön réteget rendel a vizsgált jelenség valamennyi leíró

adatához. A derékszögű munkaterületet négyzetek hálózata borítja (ez a raszter), melynek minden eleméhez egy érték tartozik. Ebben a modellben a valós világ objektumait olyan cellákba képezik le, melyeknek meghatározott helyük van a tömbben, értékkel rendelkeznek és valamelyik réteghez tartoznak. Arra a kérdésre, hogy miért nem az azonos értékű cellák foltjait tekintjük objektumnak a rendszer a válasz egyszerű – az **egy** attribútumos struktúra nem teszi lehetővé az objektum fogalom kiterjesztését.

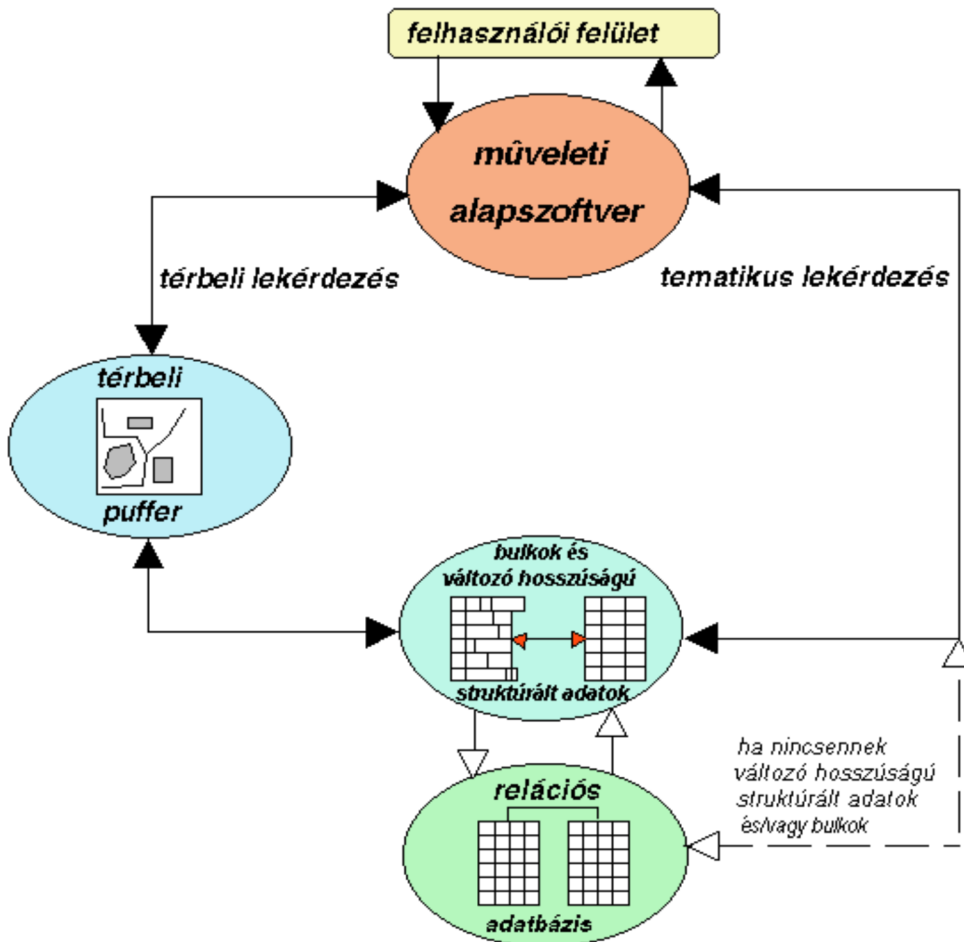
A korai raszter rendszerek implementációját munkaterületenként könyvtárakba szervezett egyszerű réteg fájlokkal valósították meg.

A korai térbeli adatmodellek főbb jellemzőit a következőkben foglalhatjuk össze:

- A modellek objektumai kétdimenziós geometriai struktúrák voltak;
- A geometriát két fő módszerrel – a vektoros illetve a raszteres megközelítéssel modellezték;
- A vektoros modellben explicite tárolták a topológiát;
- Mindkét modellben az attribútumokat az objektumokhoz elsődleges kulcsok kapcsolták;
- A vektor modellben az objektumhoz több attribútum kapcsolható, melyeket relációs adatbázisban tároltak, a raszter cellákhoz csak egy-egy attribútumot lehetett kapcsolni, melyek tárolására egyszerű lista szolgált;
- A földrajzi objektumokat mindkét esetben a réteg szerkezettel modellezték, a réteg vektoros esetben egy önkényesen definiált **objektum osztálynak** felelt meg, míg a raszterek esetében csak **egy objektum típusnak**;
- A modellek implementációja elsősorban arra törekedett, hogy az alacsony számítógép teljesítmények ellenére is viszonylag gyorsan működő, egyszerű rendszerek jöjjenek létre;
- Az ilyen implementáció kizárja a párhuzamos szerkesztések lehetőségét és méret korlátozásokat szab meg a fájlokra;
- Az első elterjedt GIS alkalmazások grafikus terminálokkal felszerelt „mini” számítógépeken futottak, mely platformot hamarosan felváltották a „munkaállomások”, melyek tulajdonképpen kiemelt grafikai képességű, terminál nélküli, szintén „mini” osztályú számítógépek voltak.

## Modell fejlődés a nyolcvanas években

A „georelációs adatmodell” legfőbb kritikájaként, elsősorban Európában gyakran felvetették, hogy a modell nem használja mindkét adattípusára ugyanazt az adatbázis kezelő rendszert s ezzel megakadályozza, hogy a jól kidolgozott integrálás és konzisztencia vizsgálatok az egész adatállományon lefussanak. Az európai probléma felvetéséhez kapcsolható, hogy ott már napirenden volt a LIS rendszerek létrehozása, melyeket a gyakran túlzottan is szigorú hagyományos kataszteri elvek alapján akartak felépíteni.

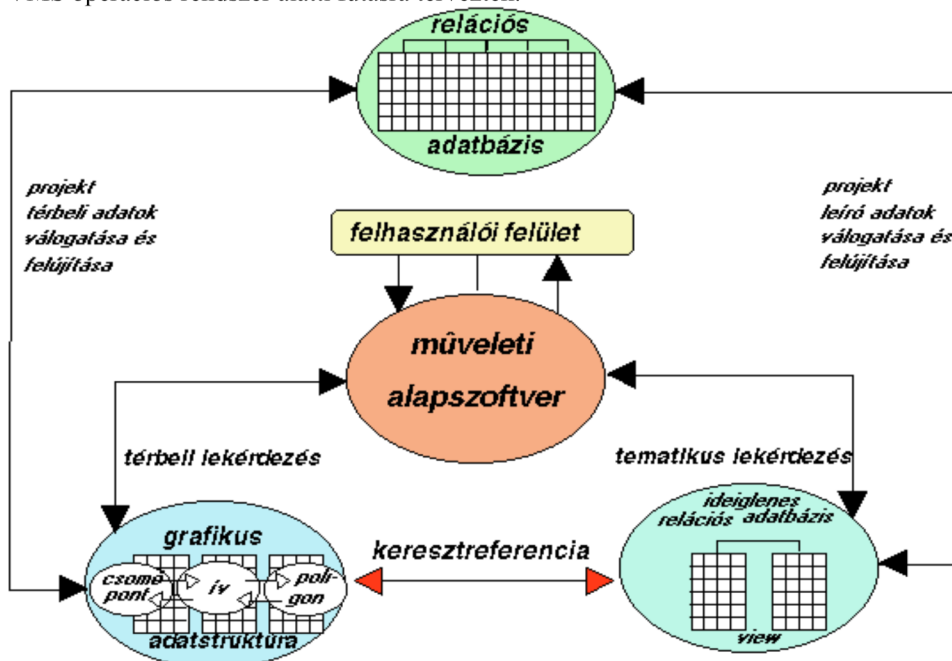


3. ábra. Az egységes adattárolás elvi vázlatja.

A probléma felvetésre az első választ a **Prime System9** GIS szoftver szolgálta. Ez a szoftver munkaállomásokon futott UNIX operációs rendszer alatt. A szoftver mind a grafikai mind a leíró adatokat közös „Empress” relációs adatbázis táblákban tárolja. Hogy ezt megtehesse a különböző hosszúságú grafikus rekordokat (különböző töréspontú vonalak) szabványos relációs adatbázis táblázat formátumba konvertálja (3. ábra). Minden hátránya ellenére (fejletlen felhasználói interfész, gyöngé grafika, bonyolult adat importálás, magas ár) ez a termék megmutatta, hogy a közös tárolás elve még alacsony teljesítményű hardver esetében is realizálható.

Hasonló újítások jelentkeztek a „projekt orientált rendszereknek” nevezett GIS szoftverek esetében is. Ezekben a rendszerekben a munkafolyamatot és a tárolást a **tranzakciónak** nevezett művelet sor választja el. Az induló tranzakció során a rendszer leválasztja a relációs adatbázisból a kijelölt munkaterületet és létrehoz belőle egy ideiglenes „georelációs munkamodellt”, melyben az aktuális munkák végrehajtnak (4.

ábra). A munkanap végeztével a záró tranzakció során a rendszer konvertálja az ideiglenes adatmodellt végleges relációs adatbázis táblákba, elvégzi az integritás és konzisztencia vizsgálatot és hiba esetén felkéri az operátort a szükséges javítások elvégzésére. Az egyik legismertebb példa a projekt orientált rendszerekre a **Kern** (később Leica) **INFOCAM GIS** nevű szoftvere volt. Eredetileg a rendszert DEC munkaállomáson, VMS operációs rendszer alatti futásra tervezték.



4. ábra. A tranzakciós rendszer vázlatja.

A közös tárolás valamint a tranzakciók elve mindmáig továbbélt az objektum orientált GIS szoftverekben. A tranzakciók jelentősége akkor nő meg, ha különböző felhasználók egy időben, ugyan azt a régiót veszik munkába. Ezekben az esetekben az adatmegosztást különböző stratégiákkal lehet feloldani. Ezek tárgyalása azonban túlnő cikkünk témáján.

Az adatmodellezés szempontjából a koncepcionális modell változatlan maradt a projektorientált rendszerekben. Ugyanakkor a logikai illetve implementációs modell lényeges változáson ment keresztül a szoftver kétrétegű szerkezete következtében. Azt a tényt azonban nem hagyhatjuk figyelmen kívül, hogy ez a felhasználók szempontjából észrevehetetlen mivel a második réteget a rendszer automatikusan alakítja ki, azaz a felhasználóknak ugyanúgy kell megtervezniük az adatbázisukat, mint a georelációs modell esetében.

A korai vektoros és raszteres rendszerek talán legproblematisabb közös jellemvonása a harmadik dimenzió hiánya volt. Ez jelentősen hátráltatta a GIS alkalmazását a legkülönbözőbb tudományos és mérnöki területeken. A nyolcvanas és kilencvenes évek fordulóján a bányászat, a geológia és oceanográfia, tíz évvel később az építészet, környezetvédelem igényelték leginkább a harmadik dimenziót.

1986-1990 között a szerző által irányított tanszéki kutatócsoport folytatott háromdimenziós adatmodell kutatásokat a földtudományok és mérnöki tevékenység számá-

ra (Sárközy 1990), (Sárközy 1994). Megállapítottuk, hogy az első 3D-s modelleket a CAD rendszerek hozták létre. Két fő módszerük a *határleírás* és a *konstruktív testgeometria* (angol rövidítéssel CSG) volt (Siki 1990). A határleírás egy fajta 3D-s vektor reprezentáció, míg a CSG egy igen speciális 3D-s tesszellációs modell. A korai határleírás modellek szabályos lapokat és rajtuk lévő lukakat használtak, a lapok élekben találkoztak, az élek pedig csúcsokban. A lapok, élek, csúcsok, üregek száma ki kell hogy elégítse az általánosított *Euler* törvényt. A testek felépítése e törvényen alapuló operátorokkal végezhető (Mantyla et al. 1982). A CSG elemi szabályos testekből (kockák, hasábok, gúla, stb.) építi fel az objektumot a halmaz műveletek és néhány speciálisan bevezetett művelet (pld. A ragasztás) segítségével. Ezek a rendszerek használhatók a bányászatban és építészetben, de nem elégítik ki a 3D-s GIS követelményeit mivel a korai CAD rendszerek attribútum kezelése igen korlátozott volt.

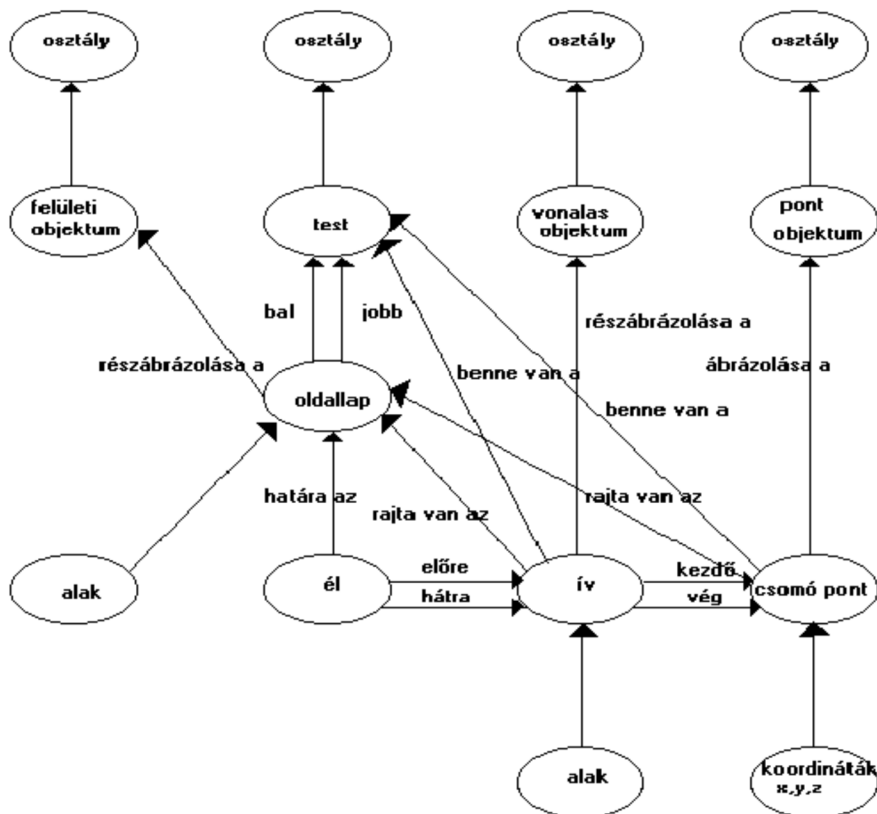
Az általános célú 3D-s GIS használhatja a *Molenaar* által javasolt 3D-s vektor modellt (Rikkers et al. 1993), melyet az 5. ábrán mutatunk be. Nem szabad ugyanakkor elfelejtenünk, hogy ezt vagy hasonló modellt a tárgyalt időszakban a szoftvergyártók nem implementáltak.

Az első, széleskörűen használt, 3D-s térbeli adatmodell a raszter modell térbeli kiterjesztése az úgynevezett *voxel modell* volt. A modell alapeleme a kocka, mely korlátlanul osztható vagy aggregálható hasonló kisebb illetve nagyobb kockákká. A voxeleket tárolási és kezelési célokból a nyolcágú fa (octree) különböző módosulataiba szervezik (Samet 1989), (Samet 1990). A modell igen alkalmas a halmaz műveletek és köbtartalom számítások végrehajtására. Előnyös tulajdonságai indokolják gyakori használatát a szórt pontokon végrehajtott interpoláció másodlagos modelljeként.

Érdekes ugyanakkor megemlíteni, hogy a kiterjesztett raszter modell algoritmusai (Samet 1989), (Samet 1990) szinte több alkalmazásra találtak a vektoros rendszerekben mint a raszteres GIS-ekben.

Igen előremutató lépés volt a koncepcionális modell fejlődésében az *összetett objektumok* fogalmának bevezetése. Az összetett objektumok olyan entitások, például házak, gyárak, közutak, stb., melyeknek részei vannak és esetleg a részeik is tovább bonthatók. Magának az összetett objektumnak is van azonosítója és vannak attribútumai, de a részei a közös attribútumokon kívül egyedi attribútumokkal is rendelkezhetnek. A modell a *hipergráf* elméleten alapul (Berge 1973), melynek földrajzi alkalmazásokra történt továbbfejlesztéséről *Bouillé* számtalan cikkében olvashatunk (például a (Bouillé 1987)-ben). A széles GIS közösség számára az elv egy kissé később került implementálásra, azután, hogy az objektum orientált térbeli adatmodell kialakításra került.

A nyolcvanas évek végétől kezdődően a hibrid adatmodellek gondolata (Fritsch 1988) megkezdte az átmenetet a kutatási szférából a megvalósulás felé. Ennek az új modellnek nem csak gyakorlati de elvi előnyei is voltak. A modell kialakulásának feltehetőleg az adta a döntő lökést, hogy a digitális raszteres adatok mennyisége igen erős növekedésnek indult. Az esetek többségében, legalább is a fejlett térbeli infrastruktúrával rendelkező területeken, mind vektoros mind raszteres adatok is elérhetők ugyanarra a régióra. A hibrid rendszerekben együtt használjuk a két struktúrát kihasználva a bennük rejlő előnyöket. A modellben a vektor adatokat, raszter adatokat és attribútum adatokat a kérdéses modellnek legjobban megfelelő módon külön-külön tárolják. Magukat a műveleteket mindig abban a modellben hajtják végre ezek a rendszerek, mely előnyös a kérdéses művelet szempontjából. A rendszerek széleskörűen alkalmazzák a vektor-raszter, raszter-vektor átalakításokat a műveletek előtt és után.



5. ábra. A 3 dimenziós vektoros elvi vázlat.

Érdekességként megjegyezzük, hogy már a System9 képes volt a referencia rendszerbe transzformált képet háttérként megjeleníteni a vektoros réteg mögött. Habár a kilencvenes években már szinte valamennyi GIS szoftver kezelni tudta valamilyen mértékig a hibrid modellt, a legnépszerűbb alkalmazás továbbra is a kezdetektől jelenlévő háttér raszter megjelenítés volt, melyet rendszerint a „fej feletti„ digitalizálásra használtak.

A nyolcvanas évek modell fejlesztési eredményeit az alábbiakban összegezhetjük:

- lezajlottak az első ipari kísérletek a leíró és geometriai adatok közös adatbázisban történő tárolására;
- megjelent a projekt orientált rendszer architektúra – közös adatbázissal és tranzakciókkal;
- elkészült az első elméleti 3D-s koncepcionális vektor modell, gyakorlati eredményeket értek el helyi bányászati rendszerek a voxel modell alkalmazásával;
- kidolgozták a négyágú fa, (nyolcágú fa) indexelési módszerek elméleti alapjait;

- elméleti publikációk jelentek meg a hipergráf elmélet térbeli objektumokra történő alkalmazásáról;
- gyakorlatilag megvalósították a hibrid adatmodellt;
- a vizsgált évtized talán legfontosabb eredménye, mely döntő hatással volt a következő évtized szoftver fejlődésére is az a platform csere volt, mely a PC Arc/Info kibocsátásával vette kezdetét.

### A térbeli adatátviteli szabványok szerepe

A térbeli adatok szabványosítása szinte egykorú az első kereskedelmi GIS szoftverekkel: 1977-ben a FIG kongresszuson lehetőségem volt meghallgatni E. R. DeMeter “A DMA digitális adatainak szabványosítása” című előadását (DeMeter et al. 1977). Mégis, a szélesebb GIS társadalmat csak azután érintette meg a szabványosítás problematikája, hogy 1986-ban kiadták a brit térbeli adatátviteli szabvány, az **NTF** első verzióját.

Ez a szabvány döntően a **geometria központú** vektoros adatmodellt tárgyalta. Ebben a koncepcióban a modell alapelemeit azok a geometriai struktúrák képezik, melyekhez a modell „szint” függvényében egy vagy több attribútum csatolható és melyek alkalmasak a térbeli entitások leképezésére. A struktúrák a spagettitől a teljes topológiáig terjednek. A szabvány lehetővé teszi egyszerű objektumokból álló összetett objektumok modellezését is.

Az ER diagramokkal leírt koncepcionális modellt a rekord szerkezet megadásával változtatja logikai modellé a szabvány, magát az átviteli fájlt pedig „**plain NTF**”-nek nevezett egyszerű rendezési szabályokkal definiálja.

Habár elméleti szempontból az NTF nagyon sokat adott az adatmodellezőknek, gyakorlati használata meglehetősen korlátozottnak bizonyult, részben azért, mert a szoftver gyártók főleg az USA-ban székelnek, részben azért mert a raszter modell elég alacsony szinten szerepelt az NTF-ben.

Az amerikaiak 1992-ben fejezték be térbeli adatátviteli szabványuk (angol rövidítése SDTS) első verzióját (Fegeas et al. 1992). Ennek a szabványnak jóval bonyolultabb a rekord struktúrája (a szabvány a rekordot module-nak nevezi) és fizikai modelljét egy nemzetközileg elfogadott általános adatátviteli szabvány (ISO 8211) alkotja. Számunkra azonban a szabvány két másik új eleme tűnhet érdekesnek.

Először, a szabvány a második fejezetben kísérletet tesz 200 szabványosított objektum típus és 244 attribútumának a definiálására. Ez úgy is interpretálható mint az első kísérletek egyike egy (geo)objektum központú adatmodell létrehozására.

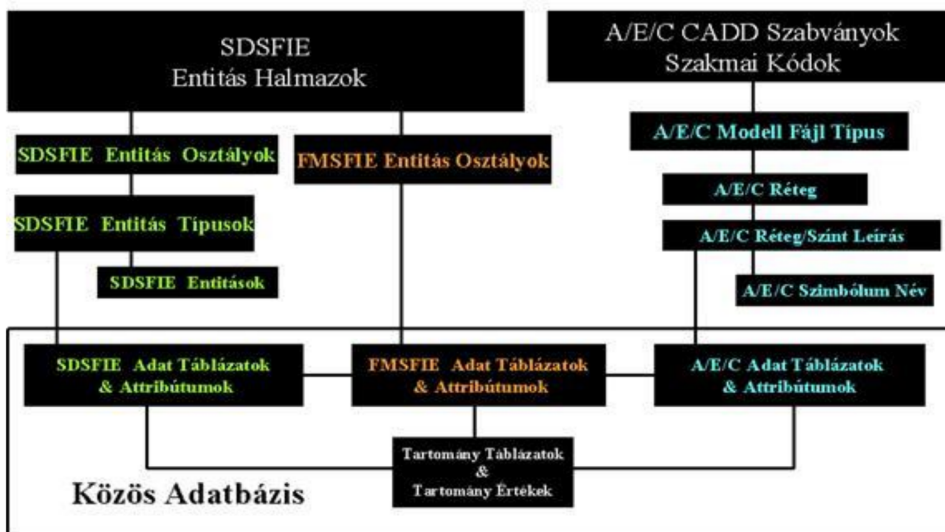
Másodszor, a szabvány által bevezetett **profilok** – a szabvány eszköztrendszerének tematikus részhalmozai – kiindulási pontnak is tekinthetők a szabvány absztrakt osztályok szerinti rendezésének.

Míg a vektor geometriát számtalan modell írja le a szabványban, a raszteres rész még az újjólag hozzátett kiegészítésekkel (SDTS 1997) is elég szegényes (még a tesszerális indexelést sem engedi meg). Ezek a kiegészítések egyébként lehetővé teszik (1) az ISO BIFF formátum, (2) a JPEG formátum és (3) a GEOTIFF formátum opcionális használatát.

Az Egyesült Államok jelentős térbeli adat infrastruktúra projektjei (meg az amerikai telephelyű szoftver gyártók) elősegítették a szabvány széleskörű elterjedését.

A TSSDS amerikai katonai szabványt először 1993-ban publikálták, később átkeresztelték SDSFIE-re (<http://tsc.wes.army.mil/products/TSSDS-TSFMS/tssds/html/>), legújabb verziója a 2.0.

## A CADD/GIS/FM Szabványok Elvi Fejlesztési Modellje



6. ábra. Az SDSFIE szabvány felépítése és kapcsolata a tervezési és üzemelési adatszabványokkal.

Az SDSFIE adatmodell objektum központú (6. ábra). Az ábrát a hivatkozott URL-ről kölcsönöztük és (részben) magyarra fordítottuk. Az ábrán szerepelnek a szintén a CADD-GIS Technológiai Központ által kidolgozott AEC (Építész, Mérnök, Építő) CAD adat szabványok, valamint a TSFMS betűkkel rövidített (közmű) üzemi szabvány, illetve ezek kapcsolata. Az SDSFIE a következő 26 entitás halmazt tartalmazza:

Hallási, Fauna, Talaj, Határ, Flóra, Közlekedés, Épületek, Jövő Tervek, Köz-művek, Kataszter, Geodézia, Látási, Klíma, Geológia, Közös, Hidrográfia, Távközlés, Javítások, Kulturális, Tájformák, Néprij, Föld Státus, Környezeti Veszélyek, Katonai Műveletek, Ökológia, Szaglási.

Az *entitás halmazok entitás osztályokból* állnak, melyek *entitás típusokra* oszlanak, ez utóbbiak egy vagy több *entitást* tartalmaznak. Az entitás halmazok *absztrakttól struktúrák*, míg az entitás típusokból konkrét objektumok képezhetők, melyeket a szabvány entitásoknak nevez. A szabvány 181 entitás osztályt, 1006 entitás típust és 5453 entitást határoz meg.

A szabványt különböző GIS és CAD szoftverekre kívánták alkalmazni. A kérdéses platformok a georelációs adatmodell különböző megvalósításai. A Központ kifejlesztett egy olyan segédsoftvert (CASE eszközt), mely képes a különböző relációs adatbázis kezelő rendszerekben, figyelembe véve az alkalmazandó GIS/CAD szoftvert is, létrehozni a szabványnak illetve szoftvernek megfelelő táblázatokat. A táblázatok feltöltése után (mely valamely táblázatkezelőből történő exporttal is megoldható) a grafikát



manuálisan kell összhangba hozni a leíró adatokkal az alapszoftver segítségével, felhasználva a Központ útmutatóit és segédfájljait (pld. a szimbólumokra).

Talán legkonzekvensebb a modellezésben és adatdefinícióban a kanadai SAIF (Spatial Archive and Interchange Format) térbeli adatátviteli és archiválási szabvány, mely első verziója 1989-ben jelent meg, az érvényes 3.2 verziójának a dátuma pedig 1995 (SAIF 1995).

A SAIF olyan objektum orientált adatmodellt használ, mely a „*SAIFtalk*” nevű adat definíciós nyelv segítségével realizálódik. A nyelv két részből áll: a *Class Syntax Notation (CSN)* szolgál a típus definíciókra, míg az *Object Syntax Notation (OSN)* segítségével készülnek az objektumok ASCII reprezentációi. A két nyelvnek azonos a nyelvtana és szintaxisa.

A SAIF nem hangsúlyozza a különbséget a grafikus és leíró adatok között: az objektum térbeli és nem térbeli adatait is egyaránt attribútumokként kezeli.

A SAIF megengedi a többszörös öröklést, de adatátviteli méret takarékoságból nem kapcsol mód szereket az objektumokhoz.

Lehetővé teszi az összetett objektumok definiálását vagy más objektumok elemeiből, vagy egyszerű objektumok együtteseként.

A szabvány nem szabályozza a fizikai implementációt, a gyakorlat rendszerint „zip” tömörített ASCII fájlokat használ az átvitelre.

A térbeli adat(átviteli) szabványok megjelenése jelentősen támogatta mind a GIS elterjedését, mind a GIS elmélet fejlődését többek közt az alábbiakkal:

- szoftver független adatformátumokkal;
- az adatmegosztás lehetővé tételével;
- a koncepcionális adatmodell tisztázásával, elsősorban a vektor struktúrákra, a függvény-tér fogalmának bevezetésével a raszteres esetre (SAIF);
- azzal az első próbálkozással az objektum központú adatmodell létrehozására, mely az SDSFIE készítőinek nevéhez fűződik;
- konzekvensen objektum orientált adatmodell és adatdefiníciós nyelv megalkotásával (lsd. SAIF).

## Néhány szó az objektum orientáltságról

Az objektum orientáltság eredetileg egy jól meghatározott programozási paradigma volt szigorú szabályokkal és jellemző szerkezetekkel. Az alapvető struktúrát a hierarchikusan szervezett **osztályok** alkotják. Az osztály hierarchia felső szintjén a legáltalánosabb osztályok helyezkednek el, melyek alatt kevésbé általános alosztályok vannak. Az általános osztályokat **absztrakt osztályoknak** nevezik, mivel belőlük nem lehet objektum példányokat létrehozni.

Az osztályokat típusoknak vagy sablonoknak kell elképzelnünk. Az objektumok konkrét értékek, melyek megfelelnek annak a típusnak vagy sablonnak, amit az az osztály képvisel amiből létrehozták. Az osztálynak **attribútumai** vannak, amelyek meghatározzák, hogy az osztályból létrejövő objektumoknak milyen adatai lehetnek. Az osztályhoz „**módszereknek**” nevezett eljárások is tartozhatnak, melyek az osztály által meghatározott adatokkal végeznek műveleteket. Az osztálynak **interfészei** is vannak, melyek lehetővé teszik a más osztályokkal való együttműködést – az osztályt más osztályok csak

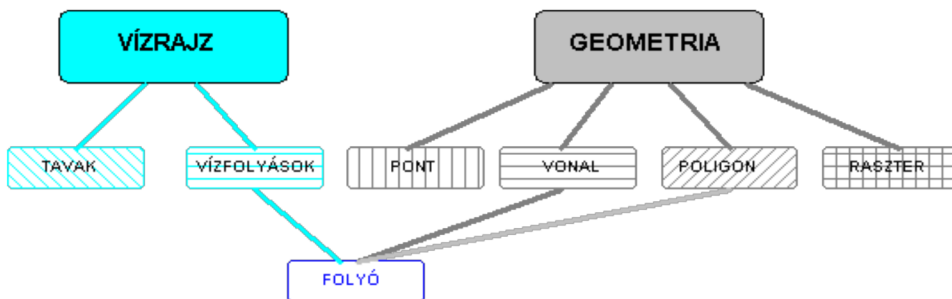
az interfészeken keresztül érhetik el. Az együttműködés az „*üzenetek*” segítségével megy végbe, melyek elindítják az osztály megfelelő módszereit.

Az alosztályok (a hierarchia alsóbb szintjén lévő osztályok) *öröklik* a felsőbb szinteken deklarált attribútumokat, módszereket és interfészeket. Ha az alsóbb szinten valamely attribútum vagy módszer újból meghatározásra kerül, úgy az örökölték érvényüket veszítik.

Ha egy alsóbb osztály különböző osztályoktól örököl, úgy *többszörös öröklésről* beszélünk. A 7. ábrán felvázoltuk a FOLYÓ osztály öröklését. A FOLYÓ örököl néhány attribútumot a FOLYÓVIZEK és néhány attribútumot a GEOMETRIA szuperosztálytól. Feltételeztük, hogy adatainkat több méretarányú megjelenítésre gyűjtöttük, és ezért a FOLYÓ-nak alkalmasnak kell lennie mind a területi, mind a tengely adatok fogadására. Természetesen az ebből az osztályból létrehozott egyedi objektumok vagy vonalak vagy területek lesznek a „geometriai reprezentáció” attribútum értékének függvényében.

Az objektum orientáltság egyik legfontosabb alapelve, hogy minden állandó objektum egyértelmű *azonosítást* kap, mely nem változhat az objektumon végrehajtott műveletek következtében.

Ha az objektum orientáltság elvein alapuló programozási nyelvet használunk, úgy eredményként objektum orientált szoftvert kapunk. Ha az eredmény GIS szoftver úgy működéséhez nagy mennyiségű térbeli és nem térbeli adata van szükség, melyek tárolásáról és manipulálásáról adatbázis kezelő rendszer gondoskodik. A GIS-nek rendszerint új adatokra is szüksége van, melyeket be kell tölteni a rendszerbe. Kézenfekvő, hogy az objektum orientált GIS számára az volna a legkényelmesebb megoldás, ha adatait objektum orientált adatbázisban tárolhatná. Hasonlóképpen, ha az új adatoknak objektum orientált struktúrájuk van sokkal egyszerűbb betöltésük a rendszerbe.



7. ábra. A többszörös öröklés illusztrálása.

Az irodalomban különféle meghatározásokat találhatunk az objektum orientált adatbázisokra (Parsaye et al. 1989), (Batty 1994). Az objektum orientált adatbázisok alaptulajdonsága, hogy alkalmas a szabványos adatbázis műveletekre s e mellett gondoskodik az objektumok állandó tárolásáról objektum orientált programozási környezetben az után is miután a program befejezi a futást, e mellett lehetővé teszi az objektumok közvetlen elérését.

Az objektum orientált adatstruktúra támogatja a rendszert nagytömegű adatállományok varrat nélküli kezelésében, objektumok aggregálásában (összetett objektumok létrehozásában), a nagyfelbontású adatok több méretarányú reprezentálásában, a számítógépen (desktop-on) futó alkalmazások adatacseréjében, de fő előnye mégis az, hogy jól

illeszkedik a hálózati kliens-szerver architektúrába és hogy megkönnyíti a szabványosított földrajzi objektum osztályok létrehozását.

Az első objektum orientált GIS szoftverek (pld. a Laser-Scan illetve a Smallworld) a kilencvenes évek elején jelentek meg. Az objektum orientált adatbázis kezelő rendszerek viszonylag újaknak számítottak ezidőtájt. Ezért óvatosságból a Smallworld objektum orientált interfészt alkalmazott egy kereskedelmi relációs adatbázis kezelő rendszerhez és csak a Laser-Scan fejlesztett ki egy új objektum orientált adatbázis kezelőt a GOTHIC GIS program csomag részeként. Igen érdekes, hogy várakozásunkkal ellentétben, a relációs adatbázis kezelők alkalmazása az objektum orientált GIS szoftverekben nem redukálódott az idő múlásával hanem általánossá vált az új fejlesztésekben. A már említett Laser-Scan hibrid adatbázis alkalmazásokat fejleszt, az új Arc/Info szintén objektum-relációs megoldást választott, és a példák még sorolhatók. Annak, hogy ez így történik három oka lehet:

- a GIS és vállalati adatbázis egybeolvasztásának gondolata (Sárközy 1996) napjainkra reális feladattá vált;
- a hagyományos, nem térbeli adatbázisokat rendszerint relációs adatbázis kezelő rendszerek üzemeltetik;
- a relációs adatbázis kezelő rendszerek gyártói jelentős erőfeszítéseket tettek, hogy rendszereiket térbeli, kép, objektum, stb. kiterjesztésekkel lássák el (lásd pld az Oracle 8-at), illetve később igyekeztek megfelelni az Open GIS Consortium (OGC) specifikációinak, ami sikerült is az Oracle 9 esetében.

Az objektum orientáltságnak a térbeli adatmodellre való hatásainak összegzésekor induljunk ki azokból a jelenségekből melyek kiváltották, majd foglaljuk össze a következményeit és előnyeit:

- az objektum orientált programozás igen gyorsan terjedt el mivel lehetővé tette, hogy egyszerre több programozó egymástól függetlenül írja a programot, e mellett lehetővé tette az előre gyártott program komponensek (osztály könyvtárak) több alkalmazás által történő használatát;
- a digitális adathálózatok (LAN, WAN, INTERNET), osztott adatbázisok és más hálózati technológiák rohamosan növekvő szerepe nagy mértékben elősegítette az objektum orientált nyelvek (például a JAVA, IDL) és hálózati architektúrák (pld. CORBA, COM) elterjedését;
- az új lehetőségek új felhasználói igényeket ébresztettek a szoftver interoperabilitás vonatkozásában először a számítógép (desktop) (pld. az MS Office program csomag különböző programjai között), később a hálózat szintjén, amelyek hatékonyan csak objektum orientált architektúrában eléghetőek ki;
- az objektum orientáltság általános elfogadását jelentősen erősítette az UML nyelv szabványosítása (OMG 1999) és olyan diagram szerkesztő úgy nevezett CASE eszközök készítése, melyek támogatják a modellezési folyamatot;
- az általános trend is arra ösztökélte a szoftvergyártókat, hogy termékeiket objektum orientáltan készítsék el. Ez a folyamat azonban nem minden esetben volt következetes és közvetlen. Az ESRI például első lépésként egy objektum orientált burkot készített (az ArcStorm objektum orientált adattárolási rendszert és az

Avenue objektum orientált makro nyelvet) a különben változatlan georelációs adatmodell tetejére;

- az a tény, hogy mind a hálózati technológiák, mind az új GIS szoftverek támogatják az objektum orientáltságot objektum orientált térbeli adatmodellek kialakulásához vezetett. Az adatbázis sémák felépítéséhez olyan adat definíciós nyelvek használhatók mint az 5. pontban már említett SAIFtalk, az EXPRESS (EXPRESS 1998), vagy az UML és kiterjesztései;
- a kereskedelmi relációs adatbázis kezelők széleskörű elterjedtségének és magas műszaki színvonalának következtében napjainkban az objektum orientált modellek tartós tárolását az úgynevezett objektum-relációs adatbázisok végzik. Ez tulajdonképpen azt jelenti, hogy vagy a relációs adatbázis kezelőt vagy az alkalmazási szoftvert vagy mindkettőt olyan szoftver komponensekkel egészítik ki, melyek az objektumokat adatbázis táblázatokká transzformálják, illetve táblázatokból objektumokat hoznak létre, s e mellett úgy biztosítják az objektumok elérését mintha azok valódi objektum orientált adatbázisban lennének tárolva. Ez a helyzet feltehetőleg csak akkor fog megváltozni, ha az objektum orientált adatbázisok átveszik az uralkodó szerepet a relációs adatbázis kezelőktől a vállalati szintű információs rendszerekben;
- az adatok és szoftver modulok hálózaton keresztüli interoperabilitásának a megteremtése a célja az Open GIS Consortium (OGC) 1994-ben indult szabványosítási munkájának, sajnos a tervezett specifikációk elkészítése elég lassan halad;
- az objektum orientáltság önmagában nem határozza meg egyértelműen az adatmodellt, az osztály hierarchiát illetve az egyes osztályok jellemzőit minden konkrét esetre definiálni kell. Ez a helyzet csak akkor fog megváltozni, ha lehetőségünk lesz szabványos osztály hierarchia és osztály jellemzők használatára.

### Függvény tér modellek

Talán a raszteres GIS gondolatának felmerülésekor a kutatók gondoltak arra, hogy ez az eszköz elsősorban a függvény tér adatok kezelésére, elemzésére és megjelenítésére alkalmas, de ha így is volt később elfelejtkeztek róla: a raszteres GIS-t úgy tekintették mint bizonyos furcsaságokkal rendelkező általános célú elemző-megjelenítő eszközt.

Tudomásom szerint, a függvény tér adatmodell fontosságára először a (Sárközy et al. 1992) hívta fel a figyelmet, később a modell részletesebb felvázolására a teljes térbeli adatmodell részeként került sor (Sárközy 1994). A SAIF a 'fedvényvel' kapcsolatban (2.4.1.2 pont) szintén meghatározza a „térbeli függvények” fogalmát (SAIF 1995). Ambiciózusabban közelíti meg a kérdést a GISER modell (Shekhar et al. 1997), mely megpróbálja beolvasztani a függvény tér modellt az általános térbeli adatmodellbe. Ez a módszer felöleli az egész folyamatot az adatnyeréstől a megjelenítésig. Véleményem szerint azonban (Sárközy 1999a) az adat előállítás és adat használat elkerülhetetlen szétválása következtében, melyet egyrészt az új adatnyerési eszközök és módszerek, másrészt a GIS nemzeti térbeli adatinfrastruktúrák által támogatott iparosodása hozott létre a két szint modelljeit külön kell kezelni. Ha még szabatosabban fogalmazunk, akkor három modellről beszélünk:

- *az adat előállítási modell azt a folyamatot írja le, melyben mérési eredményekből térbeli adat osztályokat hoznak létre;*

- **a GIS adatmodell részhalmaza valamennyi lehetséges objektum osztálynak, mely az előző modellben létrehozható;**
- **a GIS folyamat modell leírja a GIS adatokon a GIS szoftver eszközeivel elvégzett műveleteket, melyek eredményeképpen elérjük a kitűzött célt.**

A függvény tér adatokat napjainkban szórt pontokkal vagy Delone háromszögekkel reprezentálják (TIN) a vektoros modellben illetve szabályos ráccsal (DEM) a raszter megközelítésben. Igen gyakran a szabályos rácspontok értékeit valamilyen interpolációval vezetik le a szabálytalanul elhelyezkedő mérési értékekből. Jogosan merül fel a kérdés, hogy miért nem tároljuk magukat az interpolációs eljárásokat azok részleges eredményei helyett.

A GIS-ben alkalmazott interpolálásról szóló cikkemben (Sárközy 1999) javasoltam, hogy tekintsük a mesterséges neurális hálózat objektumot a GIS adatmodell olyan részének, mely helyettesíti a DEM és TIN adatokat valamint a GIS szoftver interpoláló függvényeit. Ebben az esetben, természetesen legalább a „sim” függvényt<sup>1</sup> be kell foglalni a hálózat objektumba.

Mind a saját kísérleteim (Sárközy 2000), mind más szerzők eredményei (pld. (Gilardi et al. 2000)) egyértelműen igazolják, hogy a mesterséges neurális hálózatok, néhány más módszerrel párhuzamosan (pld. a „szakértők keveréke” nevűvel a (Gilardi et al. 2000)-ben), megbízhatóan képezik le a térbeli függvényt annak egész értelmezési tartományában és ezzel új lehetőségeket biztosítanak a függvény különféle jellemzőinek meghatározására, illetve más térbeli függvények leképezéseivel végrehajtott kölcsönhatási számításokra.

A neurális hálózat tárolási igénye kismértékben meghaladhatja a DEM tárolási igényét, de alacsonyabb a TIN modellénél.

A függvény objektumok használata világossá teszi *hogy miért kell elválasztani az adatgyártási modellt a GIS adat modelltől*. Míg az adat előállításnak minden új adatállomány esetére meg kell keresnie az optimális módszert és adekvát paramétereit, a GIS alkalmazásnak minden esetben ugyanúgy, az input értékek megadásával kell elindítania a „sim” függvényt. A GIS elemző semmilyen elvi különbséget sem fog észrevenni a különböző módszerekkel modellezett objektumok között, hacsak nem vet egy pillantást a metaadatokra.

A további kutatást elsősorban az adat előállítási szféra igényli. A modell GIS oldala talán csak az optimális lapokra osztás kutatásában érdekelt. A lapokra osztásnak itt más a szerepe mint amikor szórt pontok relációs adatbázisba helyezésétével kapcsolatban vizsgáljuk. Míg ez utóbbi a keresés meggyorsítását célozza valamely térbeli indexelési eljárás (pld. négyágú fa index) felhasználásával, a hálózati objektumok lapokra osztását az adat előállítási folyamatok indokolják. Több tízezer mintából álló kiterjedt adat együttes tanítása igen nagy komputer teljesítményt igényel. Ami magát a keresést illeti, a hálózat esetében csak a lapkát kell megkeresni, míg a hagyományos megközelítés esetén a lapkán belül még a kérdéses pontot is.

A függvény terek szerepe rohamosan nő mind a természet,- mind a társadalom- tudományokban. Ezt a folyamatot főként az új adatnyerési lehetőségek indukálják. A tereket gyakran használják a különböző tudományos modellező algoritmusok, melyek lazán vagy szorosan kapcsolódnak a GIS-hez (Westervelt et al. 2000). A tudományos modelle-

---

<sup>1</sup> a sim (szimuláció) függvény – úgy szimulálja a hálózatot, hogy a  $p$  hálózati inputból és a hálózatot reprezentáló „net” objektumból kiszámolja a hálózat outputját  $a$ -t

zés és GIS integrálására szolgáló új keretszoftverek objektum orientált szoftver fejlesztésen és adatmodellen alapulnak (Sydelko et al. 2000), (Bernard et al. 2000). Kézenfekvő, hogy a hálózatos tér modell jól illik ebbe a környezetbe. A téma összefoglalásaként állíthatjuk, hogy

- jó okunk van, hogy a függvény tér adatokat mesterséges neurális hálózati objektumokkal vagy más alkalmas tanuló algoritmus együttműködéssel reprezentáljuk;
- ***ez a megközelítés megköveteli az adat előállítási modell elválasztását a GIS adatmodelltől;***
- ***a hálózat objektumnak tartalmaznia kell olyan módszert mely képes kiszámítani a tér értékét a kívánt helyeken;***
- az új adatnyerési technológiák rohamosan növelik a függvény tér adatok választékát, mennyiségét és minőségét, a hagyományos tudományos modellezési eszközök képtelenek voltak felhasználni ezeket az új lehetőségeket, ezért új, objektum orientált szoftver keretrendszerek megjelenésének lehetünk a tanúi, melyek támogatják a GIS és folyamatmodellezés integrációját, s evvel együtt az új lehetőségek kihasználását;
- a hálózat objektum adatmodell feljavítja ezeknek a rendszereknek a teljesítményét.

## A több méretarányú objektum reprezentáció

Az az ötlet, hogy a nagyobb felbontású térbeli adatok alapján állítsák elő a különböző, kisebb méretarányú térképeket egyidős az első országos, digitális, nagyméretarányú adatnyerési programmal, melyet a brit Ordnance Survey (állami felmérési szolgálat) 1973-ban kezdett meg. A program előrehaladásával azonban hamarosan világossá lett, hogy az automatizált generalizálás általános alkalmazásához akkorra még nem értek meg a feltételek.

Azóta számtalan fejlesztési törekvésnek lehettünk tanúi, melyek mind arra irányultak, hogy az automatikus generalizálás végtelenül bonyolult feladat rendszerének egy-egy részkérdését megoldják. A kutatások eredményeiként olyan számítógépes programok jelentek meg, melyek interaktívan segítik a kartográfusok manuális munkáját.

A generalizálás eredményét külön tárolták minden méretarány számára. Az automatizálásnak ezen a szintjén tehát az alap GIS adatbázis mellett annyi kartográfiai adatbázist is tárolni kellett ahány méretaránya volt az elfogadott térképsorozatnak. Papír térképek esetében a fenti séma fő problémáját a felújítás végrehajtása jelentette: ha csak a GIS adatbázist újították fel valamennyi kartográfiai adatbázist újólag létre kellett hozni a számítógép támogatta generalizálás módszerével, ha viszont a felújítást párhuzamosan végezték valamennyi kartográfiai adatbázison, nem lehetett kizárni az inkonzisztenciát.

Teljesen más problémák lépnek fel, ha a digitális térképeket számítógép vagy mobil telefon képernyőjén kívánjuk megjeleníteni. A nagyítási (zoom) funkció használata ugyanis jelen idejű generalizálást igényel. Bár ezek a térképek talán kevésbé tökéletesen is élvezhetők mint a papír térképek, előállításuk olyan gyors, automatizált generalizálást igényel, mely jól értelmezhető képet biztosít a vizuális elemzésre.

Új kihívásokat jelentett a jelen idejű generalizálásnak a „kívánságra” történő térképezés széleskörű elterjedése az Interneten, és különösen az olyan ambiciózus WEB projektek beindulása mint például az amerikai „Digital Earth (Digitális Föld)” (Morrison

1999). Bár korlátozott kiterjedés és kevés méretarány esetén a WEB-en történő megjelenítés nem csak lehetséges de gyorsabb is lehet előre generalizált adat együttesekkel (Lé-tourneau 1999), ez a megközelítés értelmetlenül nagy tárolási igényekkel jelentkezik, ha az egész Föld tetszés szerinti méretarányban történő megjelenítéséről van szó.

Ahogy azt korábban már láttuk, az objektum orientált adatmodell képes a földrajzi entitásokhoz többféle reprezentációt kapcsolni. Másfelől ez a modell arra is képes, hogy az objektumokhoz módszereket illesszen. Ezek a módszerek (melyeket gyakran „viselkedéseknek” is neveznek) részei az adatbázis sémának (Hardy 1999). Ha ez így van, akkor ez azt is jelenti, hogy az objektum orientált adat együttes importálásakor az adatok mellett azokat az eljárásokat is importálhatjuk, amelyek az adatokat valamilyen szempontból feldolgozzák.

Például, ha egy olyan utca objektumunk van, melyet 1:5000 méretarányig poligon, kisebb méretarányokban pedig a tengelyvonal reprezentál, akkor egy az utca objektumhoz csatolt módszer kell hogy számolja a tengelyvonalat, ha a méretarány kisebb a küszöb értéknél (1:5000), egy másik csatolt módszerre pedig azért van szükségünk, hogy az aktuális méretarányhoz megfelelően elvégezze a vonal generalizálást.

Az automatizált generalizálás azonban sokkal többet jelent mint az *egyszerű objektumok* többszörös reprezentációja. *Ez a folyamat számtalan kartográfiai szabállyal vezérelt, egymásnak ellentmondó korlátozásokkal behatárolt, dinamikus optimalizálásként határozható meg.* Néhány legújabb eredmény (Govorov 2001), (Barrault et al. 2001) azt bizonyítja, hogy objektum orientált környezetben gyors és megbízható eredmények érhetők el az automatikus generalizálással. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy a „több ügynökös – multi agent” generalizálás esetén (Barrault et al. 2001) az ügynök objektumokhoz csatolt módszerek nem az adatokhoz, hanem az alkalmazáshoz tartoznak.

A pont lényege a következő:

- a WEB földrajz különböző területei gyors, jelen idejű kartográfiai generalizálást igényelnek igen széles méretarány tartományban;
- ugyanez igaz a mobil (navigációs) térkép alkalmazásokra is;
- a képernyő megjelenítés más, bizonyos szempontból kevésbé szigorú generalizálási szabályokat igényel mint a nyomtatott térkép készítés;
- az objektum orientált térbeli adatmodell a megfelelő módszerek hozzákapcsolásával az adatokhoz alkalmassá válik egyszerű objektumok többszörös reprezentációjára;
- az objektum orientált programozási környezet és az objektum orientált adatmodell felhasználásával sokat ígérő automatizált generalizálási rendszerek jelentek meg az utóbbi egy-két évben.

## **Grafika-, vagy földrajz-központú adatmodellek**

Függetlenül az implementáció milyenségétől (georelációs, relációs, objektum orientált) az adatmodellek különféleképpen szemléltetik a valós világ jelenségeit. Vannak modellek melyekben a főszereplők az egyszerű vagy összetett grafikus objektumok (pontok, vonalak, területek és a belőlük létrehozott halmazok), más modellek először az entitások jelentését vizsgálják (terep, növényzet, épületek, utak, stb.) és csak másodlagosan, hogy milyen grafikus alakzattal reprezentálhatók.

A GIS korai fejlődési szakaszában szinte kizárólag grafika-központú modelleket találunk. Ez a jelenség egyrészt a grafika újdonságával magyarázható a hagyományos alfanumerikus adatbázisokhoz viszonyítva, másrészt azzal a gyakorlati ténnyel, hogy a néhány grafikus objektumot egyszerűbbnek látszott definiálni (és ez még ma is igaz), mint a földrajzi objektumok kiterjedt halmazát. A grafika-központú modellek a földrajzi objektumok szerinti rendezést a réteg struktúra segítségével próbálták megoldani, ez az osztályozás azonban nem volt szigorú, a felhasználó a saját elképzelése szerint alakíthatta ki.

A szabványokról szóló részben utaltunk rá, hogy az egyik első próbálkozás a földrajzi objektumok szabványosítására az SDTS szabványban található.

Az első teljesen földrajzi objektum-centrikus adatmodellt az SDSFIE térbeli adat szabvány fogalmazza meg. Ez a megközelítés talpára állította a georelációs modellt elsődlegesen meghatározva a szabványosított földrajzi tartalmat és ahhoz rendelve a munkaterületeket, rétegeket, adatbázis táblázatokat, objektumokat és azok szimbólumait.

Ami viszonylag egyszerűen megvalósítható egy olyan zárt és fegyelmzett közösség számára mint a hadsereg, sokkal nehezebben készíthető el a Földdel kapcsolatos térbeli adatokat felhasználó számtalan szakma, és szakterület esetében.

A jövő komoly erőfeszítéseket igényel valamennyi résztvevőtől a szabványosított földrajzi objektum modell létrehozásában. Ez a modell különösen akkor lesz hasznos, ha objektum orientált környezetben implementálják. A modell alapján, valamely CASE segédeszköz támogatásával a felhasználó elkészítheti az objektum orientált adatbázis sémáját. A séma default módszereket tartalmaz a grafikus típusokhoz kapcsolva és üres rekeszeket az adatok számára. A betöltés során az adatok betöltődnek a rekeszekbe, a default módszerek pedig inaktívalódnak, **ha az adatok tartalmazzak** azonos rendeltetésű, de újabb módszereket.

A földrajzi objektum osztályokat fokozatosan kell definiálni mind a különböző osztályok, mind az osztályon belüli mélység vonatkozásában. Csak azokat az általános osztályokat szabad rögzíteni, melyek az érdekelt szakágak többsége számára elfogadhatók. Az osztályhierarchia kialakításában nagyobb rugalmasságra van szükség. Csak az általánosan elfogadható alosztályokat kell meghatározni és nyitva kell hagyni a lehetőséget arra, hogy egyes szűkebb szakmai csoportok saját alosztályokat is definiálhassanak.

A szabványosított objektum-központú adatmodell elősegíti, hogy az azonos célú de különböző módszerű modellezések összehasonlítható eredményeket szolgáltatssanak. Megkönnyíti továbbá a geo-adatbázis feltöltését mivel lehetővé teszi, hogy olyan adat együtteseket válogassanak, melyek jellemzői megegyeznek a projekt tervezési szakaszában figyelembe vett értékekkel. Persze ez csak akkor működik, ha mind az adat előállító, mind az adatszétosztó alrendszerek összhangban vannak a szabvány követelményeivel.

Az Open GIS Consortium (OGC) a kilencvenes évek közepén meghirdette az „információs közösségek” közti „szemantikus fordítók” létrehozásának gondolatát mint a GIS interoperabilitás egyik megoldandó feltételét. E szerint a koncepció szerint minden szakmai csoportnak ki kell alakítania a saját geo-objektum szabványát, majd olyan szoftvereket kell létrehozni, melyek lefordítják az egyik csoport objektum rendszerét egy másik csoport objektum rendszerére (az elképzelt fordítás mindig két csoport között megy végbe). Az elmúlt évig azonban, ahogy ezt a (McKee 2000) újság cikk tanúsítja ez az elképzelés még nem igen közeledett a megvalósuláshoz. Azt hiszem, hogy az OGC elképzelése nem eléggé hatékony. Szerintem mindenek előtt egy multidiszciplináris, nemzetközi testületet kell létrehozni, mely feladata az alap geo-objektum osztályok meghatározása volna, melyet a következő lépésben a nagy nemzetközi tudományos-



szakmai szervezetek (pld. IAGG, ISPRS, ICA, IGA, stb.) vitatnának meg. A szükséges korrekciók elvégzése után a tervezetet továbbítani kellene az ISO felé.

A földrajzi objektumok szabványosításakor figyelembe kell vennünk, hogy az objektumok *teljes együttese* le kell, hogy írja az *egész föld felszín* valamint az atmoszféra, földkéreg és óceánok figyelembe veendő részeinek objektív valóságát. Ha elosztott és megosztott geo-adatbázisokkal dolgozunk már a pusztá gazdaságosság is azt diktálja, hogy olyan adatokkal dolgozzunk, melyek megfelelnek a szabványnak. Ebben az esetben valamennyi „információs közösség” azokat az attribútumokat használhatja a közös adatokból, melyek kifejezik az adott szakma szemléletét a kérdéses geo-objektumra.

E pont alapján a következőket jegyezhetjük meg:

- az objektum központú adatmodell különböző implementációkban realizálható;
- az objektum központú adatmodell objektum orientált implementációja minden szempontból a legtokéletesebb;
- az objektum központú adatmodell csak akkor előnyös, ha a geo-objektumok szabványosítottak;
- az első kísérlet a geo-objektumok teljes körű szabványosítására egy korlátozott szakmai csoport számára az SDSFIE térbeli adat szabványban valósult meg;
- Megérett a helyzet egy multidiszciplináris, nemzetközi szakmai testület létrehozására, mely feladata a geo-objektumok teljes halmazára vonatkozó alapvető szabványosítás megkezdése volna.

## Összefoglalás

A térbeli adatmodell fejlődését főként a következő tényezők befolyásolták:

- a felhasználói igények;
- a komputer hardver és rendszer szoftverek műszaki jellemzői;
- az információ technológia főbb trendjei.

A modellek javítása különböző technikai szinteken is lehetséges, azonban a korlátozott erőforrások hátráltatják a fejlett modellek gyakorlati felhasználását (pld. közös adatbázis a geometriának és attribútumoknak).

A relációs adatbázis kezelő rendszerek fejlődése, az adathálózatok terjedése, a kliens-szerver technológia térhódítása lehetővé tették a GIS-t is magába foglaló vállalati szintű adatbázis koncepció megvalósítását.

Az objektum orientált adatmodellnek számtalan előnye van a kiterjedt, osztott, nagy adatbázisok vonatkozásában, különösen igaz ez a közművek térinformatikai rendszereire. Az újonnan kifejlesztett CASE eszközök támogatják az adatbázis séma létrehozását.

Az objektum orientáltságnak döntő szerepe van az Internet GIS létrehozásában is.

A függvény tér adatmodell jelentősége folyamatosan nő, egyrészt az új adatnyelési technikák létrejötte, másrészt az új természet-, és társadalom-tudományos modellezési-szimulációs módszerek kidolgozása következtében. A rácsban elhelyezett vagy szórt pontokban megadott függvény értékek helyettesítése mesterséges neurális hálózatokkal (ANN) vagy más megadott függvény értékek helyettesítése mesterséges neurális hálózatokkal (ANN) vagy más megadott függvény értékek helyettesítése mesterséges neurális hálózatokkal (ANN) jelentős előnyöket nyújt, különösen a modellezésben.

Az objektum orientált környezetben implementált ANN megköveteli, hogy bizonyos módszereket is együtt tároljanak az objektum attribútumaival. Ugyanez igaz a több méretarányú objektum reprezentációra is a generalizáló módszerek vonatkozásában. A fentiekből következik, hogy új adat előállítás és átviteli szabványok kidolgozására van szükség.

*A jövő adatmodellje geo-objektum központú objektum orientált modell lesz, melyben az adat előállítóknak kell kitölteni az előre gyártott osztály hierarchia minták rekeszeit esetleges új módszerekkel és aktuális attribútum értékekkel.*

Ahhoz hogy ez megvalósuljon az alábbiakra van szükség:

- új elvekre az adat előállításban;
- megújított adatátviteli szabványokra;
- olyan új szabványra, mely meghatározza a földrajzi objektumokat.

A publikáció alapját képező kutatás az OTKA T 030643 számú téma keretében anyagi támogatásban részesült.

## Hivatkozások

- Batty P** (1994): Smallworld GIS: Object-orientation – some objectivity please! *SMALLWORLD TECHNICAL PAPER NUMBER 7*. (Letölthető az alábbi URL-ről: <http://www.smallworld-us.com/english/products/whitepapers/OOobjectivity.pdf>)
- Berge C** (1973): Graphs and hypergraphs. (Translated by E. Minieka). *North-Holland Publishing Company*. Amsterdam, 1973.
- Bernard L, Krüger T** (2000): Integration of GIS and Spatio-temporal Simulation Models: Interoperable Components for Different Simulation Strategies. *Transactions in GIS*, 2000, vol 4, no 3, pp. 197- 215.
- Bouillé F** (1987): A survey on the HBDS methodology applied to cartography and land planning. *Proceedings Euro-Carto VI*. Brno, 1987. pp. 20-28.
- DeMeter E, Dixon D** (1977): Defense Mapping Agency Digital Data Standardization. *Personal Presentation on the XV FIG Congress*, Stockholm, Sweden, 1977.
- EXPRESS** (1998): EXPRESS Information modelling language - ISO WD 10303-11 (edition 2). (Letölthető az alábbi URL-ről: <http://www.eurpc2.demon.co.uk/part11.htm>)
- Fegeas R, Cascio J, Lazar R** (1992): An Overview of FIPS 173, The Spatial Data Transfer Standard. *Cartography and Geographic Information Systems*, volume 19, NO. 5, 1992.
- FIPS 184** (1993): INTEGRATION DEFINITION FOR INFORMATION MODELING (IDEFIX). Federal Information Processing Standards Publications 184. (Letölthető az alábbi internet címről: <http://www.sdct.itl.nist.gov~ftp/idef/idef1x>)
- Fritsch D** (1988): Hybrid graphic systems - a new generation of Geo-information Systems. *Geo-Informationssysteme*. Vol. 1, No. 1, 1988. pp.12-19. (In German).
- Kösters G, Pagel B** (1996): The GeoOOA-Tool and Its Interface to Open Software Development Environment for GIS. *Proceedings of the fourth ACM workshop on Advances in Geographic Information Systems, GIS 96*, Rockville MD USA. (Letölthető az alábbi internet címről: <http://www.acm.org/pubs/articles/proceedings/cikm/258319/p163-kosters/p163-kosters.pdf>)
- Gilardi N, Bengio S** (2000): Local Machine Learning Models for Spatial Data Analysis. *Journal of Geographic Information and Decision Analysis*, vol. 4, no. 1, 2000, pp. 11-28 (Letölthető az alábbi URL-ről: [http://publish.uwo.ca/~jmalczew/gida\\_7/Gilardi/Gilardi\\_Bengio.htm](http://publish.uwo.ca/~jmalczew/gida_7/Gilardi/Gilardi_Bengio.htm))
- Govorov M** (2001): Behaviour analysis of multi-detailed representation of spatial and cartographic objects. *Proceedings of the 20th International Cartographic Conference, Beijing China*, August 6 to 10, 2001, volume 3, pp. 1922-1930.
- Hardy P** (1999): Active Object Techniques for Production of Multiple Map and Geodata Products from a Spatial Database. *Proceedings CD of the 19th International Cartographic Conference, OTTAWA ICA*, August 14 to 21, 1999.
- Létourneau F** (1999): A fully integrated Geospatial Data Warehouse. *Proceedings CD of the 19th International Cartographic Conference, OTTAWA ICA*, August 14 to 21, 1999.
- Mantyla M, Sulonen R** (1982): GWB: a solid modeler with Euler operators. *Computer Graphics & Applications*. September 1982. pp. 17-31.
- McKee L** (2000): Geo-semantics and the "New Renaissance". *GEO AsiaPacific*, April 2000. (Letölthető az alábbi URL-ről: <http://www.opengis.org/info/gisworld/GeoAsiaPacific/GAP.htm>)

- Morrison J** (1999): Important Initiatives in Geographic Information Science and Spatial Data Collection with Implications for Cartography. *Proceedings CD of the 19<sup>th</sup> International Cartographic Conference, OTTAWA ICA*, August 14 to 21, 1999.
- OMG** (1999): Unified Modeling Language Specification (draft). Version 1.3 alpha R5, March 1999. (Letölthető az alábbi internet címről: <http://www.rational.com/uml/resources/documentation/index.jtmpl>)
- Parsaye K, Chignell M, Khoshafian S, Wong H** (1989): Intelligent databases. John Wiley & Sons, Inc. 1989.
- Rijkers R, Molenaar M, Stuiver J** (1993): A query oriented implementation of a 3D topologic datastructure. *EGIS '93. Proceedings*. Vol. 2. Genoa 1993. pp. 1411-1420.
- SAIF** (1995): Spatial Archive and Interchange Format: SAIF. Formal Definition. Release 3.2, January 1995. (Letölthető az alábbi ftp-ről: <ftp://home.gdbc.gov.bc.ca/SAIF/>)
- Samet H** (1989): Application of spatial data structures. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- Samet H** (1990): The design and analysis of spatial data structures. Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- Sárközy F** (1990): Designing an integrated 2.5 and 3 dimensional information system for geoscientific and engineering purposes. *Proceedings FIG XIX Congress, Helsinki, 1990. Vol. 6. pp.131-145*.
- Sárközy F** (1994): The GIS concept and the 3-dimensional modeling. *Computers, Environment and Urban Systems*. Vol. 18. No. 2, 1994. pp.111-121.
- Sárközy F** (1996): Prospects of GIS approaching the 21 century. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*. Vol.40, No. 1. 1996. pp. 55-71
- Sárközy F** (1999a): GIS FUNCTIONS. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*. Vol. 43, No. 1. 1999. pp. 89-110 (Letölthető az alábbi URL-ről: [http://bme-geod.agt.bme.hu/public\\_e/gis\\_func/funcnt26.htm](http://bme-geod.agt.bme.hu/public_e/gis_func/funcnt26.htm))
- Sárközy F** (1999): GIS FUNCTIONS - INTERPOLATION. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*. Vol. 43, No. 1. 1999. pp. 65- 88 (Letölthető az alábbi URL-ről: [http://bme-geod.agt.bme.hu/public\\_e/funcint/funcint.html](http://bme-geod.agt.bme.hu/public_e/funcint/funcint.html))
- Sárközy F** (2000): Function Field Data Model Implemented by Artificial Neural Networks (ANN). *Elektronikus publikáció*. (Letölthető az alábbi URL-ről: [http://bme-geod.agt.bme.hu/public\\_e/dem/DEMbyANN2.htm](http://bme-geod.agt.bme.hu/public_e/dem/DEMbyANN2.htm))
- Sárközy F, Gáspár P** (1992): Modelling of scalar fields represented by scattered 3D points. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*. Vol. 36, No. 2. 1992. pp.187-200.
- SDTS** (1999): Spatial Data Transfer Standard (SDTS) Part 5: Raster Profile and Extensions. FGDC-STD-002.5-1999. (Letölthető az alábbi ftp-ről: <ftp://sdts.er.usgs.gov/pub/sdts/standard/approved/fgdc/srpe0299.pdf>)
- Shekhar S, Coyle M, Goyal B, Liu R, Sarkar S** (1997): Data Models in Geographic Information Systems. *COMMUNICATIONS OF THE ACM*, April 1997/Vol. 40, No. 4. (Letölthető az alábbi URL-ről: <http://www.acm.org/>.)
- Siki Z** (1990): Mathematical model for solids under the surface of the earth. *Periodica Politechnica Civil Engineering*. Vol. 34. Nos 3-4. pp. 143-152. Budapest 1990.
- Sydelko P, Dolph J, Majerus K, Taxon T** (2000): An advanced object-based software framework for complex ecosystem modeling and simulation. *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Integrating GIS and Environmental Modeling (GIS/EM4): Problems, Prospects and Research Needs*. Banff, Alberta, Canada, September 2 - 8, 2000. (Letölthető az alábbi URL-ről: <http://www.colorado.edu/research/cires/banff/upload/171/>)
- Westervelt J, Shapiro M** (2000): Combining Scientific Models into Management Models. *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Integrating GIS and Environmental Modeling (GIS/EM4): Problems, Prospects and Research Needs*. Banff, Alberta, Canada, September 2 - 8, 2000. (Letölthető az alábbi URL-ről: <http://www.colorado.edu/research/cires/banff/upload/209/>)

## AZ OPTIMÁLIS VÁGAT KIHAJTÁSI SEBESSÉG MEGHATÁROZÁSA

*Patvaros József\**

*A gyakorlatban nagyon fontos feladatként jelentkezik úgy az ásványvagyon kitermelésére szolgáló vágatok, mint a földalatti különböző célú tárolóterek kiszolgálását biztosító folyosók létesítésénél az optimális kihajtási sebesség meghatározása.*

*Ennek a feladatnak a megoldásában rendszerint alapvető követelmény a vágathálózat létesítési költségek minimalizálása azzal a feltétellel megszabva, hogy közben az összes vágathajtási idő egy műszakilag – gazdaságilag – biztonságilag – környezetvédelmileg indokolt T időtartamot ne lépjen túl.*

**Kulcsszavak:** vágathajtási költség, vágathajtási sebesség, létesítési idő, kihajtási szelvényterület.

Az összes vágathajtási költség felírásához az egyes vágat szakaszok hossza következőképpen fejezhető ki:

$$l_i = v_i \cdot t_i \quad (1)$$

amelyben

$v_i$  – a rendelkezésre álló technikai – technológiai megoldással (fűrő – robbantó komplex gépesítésű) elérhető átlagos vágathajtási sebesség adott vágatszakaszk kiképzésnél meghatározott mellékközet tulajdonságok, lejtéviszonyok és kitörési szelvényméretek esetén (m/nap).

$t_i$  – egy adott hosszúságú vágatnak az átlagos vágathajtási sebességgel elérhető létesítési ideje (nap).

Az említettek szerint egy  $n$  tagból álló, meghatározott szelvény területű vágatszakaszkokból álló hálózat összes kihajtási költsége (Ft) a következő formában írható fel:

$$\sum K = v_1 \cdot t_1 \cdot F_1 \cdot k_1 + v_2 \cdot t_2 \cdot F_2 \cdot k_2 + \dots + v_n \cdot t_n \cdot F_n \cdot k_n \quad (2)$$

$v_1; v_2; \dots v_n$  Az egyes vágat szakaszok átlagos kihajtási sebessége (m/nap)

$t_1; t_2; \dots t_n$  A hálózatot alkotó vágatok létesítési ideje (nap)

$F_1; F_2; \dots F_n$  A hálózatot alkotó egyes vágatok kihajtási szelvényterülete, amelyet előírt szellőztető légmennyiség esetén a biztonságilag megengedett légsebesség, valamint az alkalmazott szállító berendezések méretei határoznak meg (m<sup>2</sup>)

$k_1; k_2; \dots k_n$  Az egyes vágatszakaszkok kihajtási technikától és technológiától (fűrő-robbantó, komplex gépesítésű) függő átlagos fajlagos létesítési költségei, amelyek meghatározott szelvényterületek esetén jó közelítéssel állandónak vehetők. (Ft/m<sup>3</sup>)

Az egyes vágatszszakaszok kihajtási idejének figyelembevételével a teljes vágathálózat létesítésére vonatkozóan teljesülnie kell a következő mellékfeltételnek:

$$l_1 / v_1 + l_2 / v_2 + \dots + l_n / v_n - T = 0 . \quad (4)$$

Illetve

$$\sum l_i / v_i - T = 0 . \quad (5)$$

Egy határozatlan együtthatónak, az úgynevezett Lagrange multiplikátornak a bevezetésével a feltételes (kötött) szélsőérték számítási feladat visszavezethető a következő összegfüggvény szabad szélsőértékének a meghatározására

$$\begin{aligned} \Phi(v_1; v_2; \dots; v_n) = & v_1 \cdot t_1 \cdot F_1 \cdot k_1 + v_2 \cdot t_2 \cdot F_2 \cdot k_2 + \dots + v_n \cdot t_n \cdot F_n \cdot k_n + \\ & + \lambda \cdot (l_1 / v_1 + l_2 / v_2 + \dots + l_n / v_n) . \end{aligned} \quad (6)$$

Ezen összegfüggvénynek ott van szélsőértéke, ahol az első parciális deriváltak a  $v_i$  szerint zérussal egyenlők:

$$\begin{aligned} \Phi / v_1 = t_1 \cdot F_1 \cdot k_1 - \lambda \cdot l_1 / v_1^2 &= 0 \\ \Phi / v_2 = t_2 \cdot F_2 \cdot k_2 - \lambda \cdot l_2 / v_2^2 &= 0 \\ &\vdots \\ \Phi / v_n = t_n \cdot F_n \cdot k_n - \lambda \cdot l_n / v_n^2 &= 0 . \end{aligned} \quad (7)$$

A felemlített parciális deriváltak alapján az egyes vágatszszakaszok optimális kihajtási sebessége (m/nap) a következő összefüggéssel állapítható meg:

$$v_1 = \sqrt{\lambda \cdot l_1 / t_1 \cdot F_1 \cdot k_1} . \quad (8)$$

A  $\sqrt{\lambda} = \mu$  helyettesítés után az egyes vágatszszakaszokra vonatkozó optimális kihajtási sebesség a következő formában írható fel: (1)

$$\begin{aligned} v_1 &= \mu \cdot \sqrt{l_1 / t_1 \cdot F_1 \cdot k_1} \\ v_2 &= \mu \cdot \sqrt{l_2 / t_2 \cdot F_2 \cdot k_2} \\ &\vdots \\ v_n &= \mu \cdot \sqrt{l_n / t_n \cdot F_n \cdot k_n} . \end{aligned} \quad (9)$$

Az egyes vágatszszakaszok optimális kihajtási sebességeire vonatkozó képletek behelyettesítésével a teljes vágathálózatra vonatkozóan a globálisan legkedvezőbb létesítési összes időtartam a következő kifejezéssel állapítható meg.

$$T = l_1 / \mu \cdot \sqrt{l_1 / t_1 \cdot F_1 \cdot k_1} + l_2 / \mu \cdot \sqrt{l_2 / t_2 \cdot F_2 \cdot k_2} + \dots + l_n / \mu \cdot \sqrt{l_n / t_n \cdot F_n \cdot k_n}$$

(10)

Ebből a határozatlan együttható számszerű értékének meghatározására a következő összefüggés nyerhető: (1)

$$\mu = \sum l_i \cdot t_i \cdot F_i \cdot k_i / T . \quad (11)$$

Illetve

$$\lambda = \mu^2 . \quad (12)$$

Az a tény, hogy a vágathajtási összköltség függvénynek milyen szélsőértéke van, az úgynevezett Hesse-féle sarok aldeterminánsok képzésével állapítható meg:

$$\partial \Phi / \partial v_1^2 = 2 \cdot \lambda \cdot l_1 / v_1^3 \quad \text{az elsőrendű,}$$

$$\partial \Phi / \partial v_1^2 \cdot \partial v_2^2 = \begin{vmatrix} 2 \cdot \lambda \cdot l_1 / v_1^3 & 0 \\ 0 & 2 \cdot \lambda \cdot l_2 / v_2^3 \end{vmatrix} \quad \text{a másodrendű,}$$

$$\partial \Phi / \partial v_1^2 \cdot \partial v_2^2 \cdot \dots \cdot \partial v_n^2 = \begin{vmatrix} 2 \cdot \lambda \cdot l_1 / v_1^3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 \cdot \lambda \cdot l_2 / v_2^3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 \cdot \lambda \cdot l_n / v_n^3 \end{vmatrix} \quad \text{az } n\text{-ed}$$

rendű sarok aldetermináns.

Az összefüggésekből jól látható, hogy az összes sarok aldetermináns pozitív értékű, tehát a vágathajtási összes költség függvénynek minimuma van az egyes vágatszszakaszok optimális kihajtási sebesség értékeinél.

## Összefoglalás

Az ismertetett módszerrel végső soron több vágat globálisan összehangolt legkedvezőbb kihajtási ütemezését lehet megtervezni, és folyamatosan ellenőrizni úgy, hogy azok rugalmasan alkalmazkodjanak a földtani adottságokhoz, a rendelkezésre álló technikai-technológiai lehetőségekhez, a biztonsági és környezetvédelmi korlátokhoz, valamint a váratlan üzemzavarokhoz is

Az optimalizálási számítások gyors elvégzése és a megfelelő intézkedések foganatosítása a következő alapesetekben válik szükségessé:

ha a  $T$  összes létesítési időtartamot le kell csökkenteni műszaki – gazdasági – biztonsági – környezetvédelmi hatékonyság növelési okokból.

Ha megváltozhatatlan  $T$  teljes időtartamhoz és az adott földtani sajátosságokhoz igazodva ki kell választani a legcélszerűbb vágathajtási technikai – technológiai megoldásokat.

Természetesen igen gyorsan megállapítható az is, hogy bármely paraméter spontán megváltozása, illetve tervszerű megváltoztatása az összes költségeket milyen mértékben módosítja kedvező, vagy előnytelen irányban.

### Hivatkozások

- Bronstein IN, Szemengyev KA** (1987): Matematikai zsebkönyv, 6. átdolgozott kiadás, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest, P.1180
- Patvaros J** (1979): Feasibility of Combined Mining Technological Systems in Production of Mineral Massifs, *Acta Geod. Geophys et Montan Acad Sci. Hung.* Tom 14/14 p.437-448.
- Patvaros J** (1990): Bányászati technológiai rendszerek szintézise, Akadémiai doktori értekezés, Miskolc, p.109
- Zambó J** (1985): A bányaművelés alapjai, *Akadémiai Kiadó*, Budapest, p.163.
- Zambó J** (1989): Bányatelepítés és építés, *Tankönyvkiadó*, Budapest, p.251.

# GEODÉZIAI ÉS GEODINAMIKAI MŰSZERFEJLESZTÉSEK AZ MTA GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI KUTATÓINTÉZETBEN

*Mentes Gyula\**

*Az MTA Geodéziai és Geofizikai Kutatóintézetében - fennállása óta - nagy hagyományai vannak a geodéziai és geodinamikai műszerek fejlesztésének, a műszervizsgálatoknak és a műszerek kalibrálásának. Ez a tanulmány összefoglaló áttekintést ad az intézetben végzett legfontosabb munkákról, röviden ismerteti a kifejlesztett műszereket, azok fontosabb paramétereit.*

**Kulcsszavak:** geodéziai műszer, geodinamikai műszer, műszerfejlesztés, műszervizsgálat, kalibrálás, mérési módszer.

## Bevezetés

Ez az összefoglaló tanulmány Somogyi József 70. születésnapja alkalmából készült. Somogyi József 1972 és 1990 között volt az MTA Geodéziai és Geofizikai Kutatóintézet (MTA GGKI) igazgatója és ez idő alatt – folytatva elődjé, Tárczy-Hornoch Antal által elkezdett műszerfejlesztéseket – egy hatékony műszerfejlesztési osztályt és egy korszerű műszervizsgáló laboratóriumot hozott létre, intenzíven támogatta az intézet obszervatóriumainak fejlesztését, valamint szoros nemzetközi kapcsolatokat alakított ki a műszerfejlesztések területén. Ő maga is több műszer elvét dolgozta ki, részt vett a tervezési munkákban és a kivitelezés irányításában.

E tanulmány célja bemutatni azokat a legfontosabb műszereket, mérési módszereket, műszervizsgáló és kalibrálási eljárásokat, amelyek legjobban jellemzik az intézet tevékenységét és amelyek jelentősen hozzájárultak az intézet nemzetközi és hazai hírnevének megalapozásához.

## A műszerfejlesztési kutatások rövid története

1947-ben kezdte meg tudományos tevékenységét Sopronban a Geodéziai és Geofizikai Munkaközösség, amelyből 1955-ben jött létre az MTA Geodéziai és Geofizikai Kutatólaboratóriuma, mai intézetünk jogelődjé. Már ebben az időszakban nagy jelentőséget tulajdonítottak a geodéziai műszerek vizsgálatának. A nagypontosságú, másodperc libellákhoz kapcsolódó vizsgálatok már 1953-ban elkezdődtek Tárczy-Hornoch Antal vezetésével. Mérési és számítási módszerek kidolgozása mellett több, különböző típusú libellamérleget is kifejlesztettek. 1971-ben a Geodéziai és Geofizikai Kutatólaboratórium egyesült a Budapesten működő Szeizmológiai Obszervatóriummal és létrejött az MTA Geodéziai és Geofizikai Kutatóintézete. A geodéziai műszervizsgálatok és műszerfejlesztések fontossága miatt a Geodéziai Főosztályon belül létrehozták a Műszertechnikai Osztályt. Az intézet vezetését 1972 január 1-től Somogyi József vette át, aki elődjéhez – Tárczy-Hornoch Antalhoz - hasonlóan szorgalmazta a műszeres kutatásokat. 1973 augusztusában az intézet új épületet kapott, melynek alagsorában egy világviszonylatban is korszerű műszervizsgáló laboratórium került átadásra (1. ábra). A műszeres kutatások



során kezdetben a MOM számára végzett prototípus és egyéb műszervizsgálatok, valamint mérési módszerek kidolgozása, majd a műszerek fejlesztésében való részvétel dominált. Emellett egyre nagyobb szerepet kapott az intézeti saját kutatásokhoz szükséges nagypontosságú műszerek fejlesztése, továbbá hazai és külföldi intézetek számára speciális, egyedi műszerek fejlesztése. A műszerfejlesztési kutatásokhoz valamilyen formában (pl. matematikai számítások végzése, prototípus vizsgálatok, stb.) a Geodéziai Főosztály szinte valamennyi kutatója csatlakozott. Közülük kiemelkedő szerepe volt Alpár Gyulának, aki mint a Geodéziai Főosztály vezetője, a kezdetektől fogva részt vett a műszerfejlesztési kutatások irányításában és sok ötlettel segítette mások munkáját. A geodéziai műszerek vizsgálatában pedig Orbán Aladár tevékenysége kiemelkedő fontosságú.



1. ábra. Az MTA Geodéziai és Geofizikai Kutatóintézet Műszervizsgáló Laboratóriuma.

## Műszervizsgálatok céljára kifejlesztett jelentősebb műszerek

Az intézet műszerfejlesztési hírnevét az intézetben folytatott libellavizsgálatok és az e célra kifejlesztett libellamérlegek alapozták meg. A 2. ábrán a kifejlesztett libellamérlegek láthatók. A 2a. ábra az 50-es években kifejlesztett, nagypontosságú mérőcsavarral és precíziós forgástengellyel felépített mechanikus libellamérleget mutatja. A nagy gondossággal készült mérőcsavarral a libellamérleg asztalának dőlése 0,05 szögmásodperc pontossággal állítható (Tárczy-Hornoch 1961a, 1961b). Ehhez a libellamérleghez a 80-as években egy interferométeres szögmérőt is készítettek. Csöves libellák automatikus vizsgálatára kifejlesztettek egy automatikus libellamérleget (2b. ábra). A libella dőlésszögének változtatása egy elektromotor segítségével egyenletesen történt és a buborék

mozgását fotópapírra rögzítették, ezáltal a buborék folyamatos és egyenletes mozgása könnyen ellenőrizhető volt. E műszer alapján készítették a MOM konstruktőrei a 2c. ábrán látható libellamérleget a libellák sorozatgyártás közbeni el-lenőrzésére (Tárczy-Hornoch et al. 1972). A 2d. ábrán látható félautomatikus libellamérleg kanadai megrendelésre, a Canadian Surveying megrendelésére készült 1983-ban. A műszer elektronikus és folyadéklibellák pontosságvizsgálata céljából készült. A libellát hordozó asztal dőlését léptetőmotorral egyenletesen lehet változtatni, a dőlés mértékét egy kapacitív mérőátalakító méri. Folyadéklibellák mérésénél a buborék elmozdulását egy koincidenciás mikroszkóppal lehet követni. A mikroszkóp elmozdulásának mérése egy inkrementális szögadóval történik. A buborék mozgása és az asztal dőlése a műszer kijelzőjéről közvetlenül leolvasható, ill. az elektronikus egység számítógéphez való csatlakoztatása esetén a libella karakterisztikája automatikusan felrajzolható (Somogyi et al. 1984).



a.



b.



c.



d.

2. ábra. Az MTA GGKI-ben kifejlesztett libellamérlegek.

Szintezőlécek komparálására a 70-es évek végén és a 80-as évek elején terepi léckomparátort fejlesztettek ki (Halmi 1978, Somogyi et al. 1981), amelyből több darabot adtak el Kanadában és Pakisztánban (3a. ábra). A terepi komparátor egy félméteres, nulla hőtágulású etalonnal hasonlítja össze két egymástól félméterre levő lécosztás távolságát. A lécet 10-20 cm-es lépésekben komparálva a durva léchibák terepen is kiszűrhetők. Hagyományos szintezőlécek kalibrálása céljából a Canadian Surveying megrendelésére 1990-ben, Mentés Gyula és Bánfi Frigyes egy automatikus lézerinterferométeres léckomparátort fejlesztettek ki (3b. ábra). A lécet egy léptetőmotor mozgatta egyenletes

sebességgel a fotoelektromos mikroszkóp alatt, amely minden osztásnál egy impulzust adott a lézinterferométernek és az a mért értéket számítógépbe továbbította. A számítógép automatikusan értékelte ki a mérés eredményeit és rajzolta meg a lécz hibagörbéjét. Az MTA GGKI műszercsarnokában felépített sínpályán a komparátor ismétlési pontossága  $\pm 5\mu\text{m}$ -en belül volt.



a.



b.

**3. ábra.** Terepi és laboratóriumi, automatikus, lézinterferométeres léczkomparátor.

A kompenzátoros szintezőműszerek megjelenését követően új műszervizsgálati probléma merült fel. Meg kellett vizsgálni, hogy külső elektromágneses terek milyen mértékben térítik el a műszer kompenzatorát. Ebből a célból épült a 4. ábán látható műszer, amely két, egymásra merőleges tengelyű Helmholtz-tekerescből áll. A tekercsekben folyó áramok változtatásával a tekercsek által létrehozott mágneses térerővektor a függőleges síkban körbeforgatható. A tekercsek egy vízszintes síkban körbeforgatható asztalon helyezkednek el, ezáltal tetszőleges irányú térerővektor hozható létre. Az előállítható térerősség a földiének több mint 50-szerese (Orbán és Bánfi 1988).

Pontos szögérések és műszervizsgálatok céljára a 80-as évek közepén mérőkollimátort fejlesztettek ki, amelyből Kanadába is exportáltak (5. ábra).



**4. ábra.** Kompenzátoros szintezőlécz vizsgálata mágneses térben.

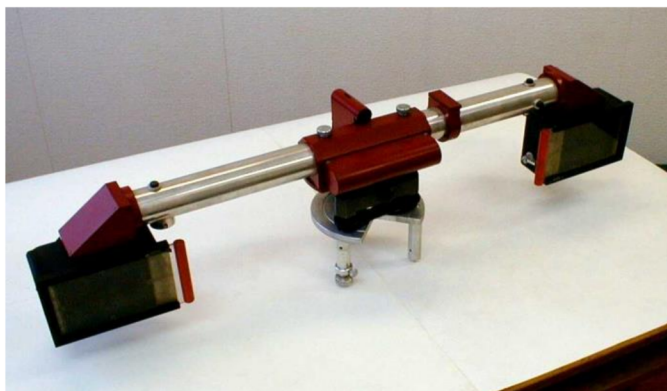
### Geodéziai célú műszerek és mérő-



**5. ábra.** Mérőkollimátor.

## rendszerek

1981-ben sztereokamerát fejlesztettek ki bányavágatok alakjának, alakváltozásának meghatározása céljából (6. ábra). A fejlesztés célkitűzése az volt, hogy olyan olcsó kamerát hozzanak létre, amely a zord földalatti körülményeket elviseli és tönkremenetele esetén - olcsósága miatt – nem keletkezik nagy kár. A kamerával 5-20 m tárgytávolságon a tárgyponatok koordináta hibája a  $\pm 2$  cm-t nem lépte túl (Battha et al. 1981).



6. ábra. Sztereokamera.

1983-ban a Bécsei Műszaki Egyetem Felsőgeodézia Tanszékével közösen egy hordozható zenitkamerát fejlesztettek ki (7. ábra) asztronómiai helymeghatározás céljából. A kamera



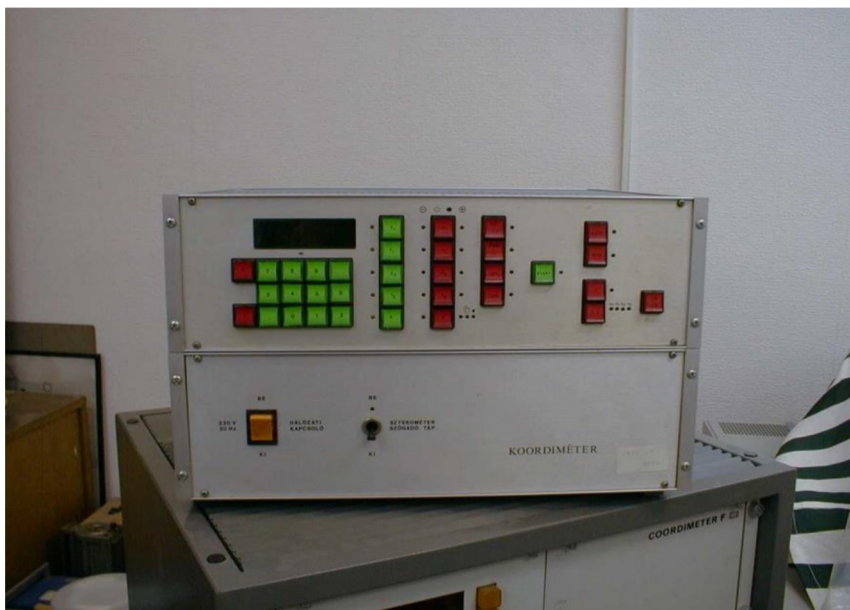
7. ábra. Zenitkamera.



8. ábra. Mérnökszintező.

objektívjének fókusz távolsága 70 cm, nyílászövege 1:5. A kamera központi zára elektromágnessel vezérelhető és a zár egyik lamelláján speciálisan elhelyezett lyukak vannak, amelyeken keresztül egy fotodióda világítja meg a fényérzékeny lemezt. Ezzel a módszerrel fel lehet venni a zár mozgásának diagramját. Az expozíciós időt DCF 77 időjeladó vezérli és 0,5 – 2 s között állítható be. A kamerával négy azimutban (0°, 90°, 180°, 270°) mérnek. A megvilágítási időpontok számítógépen regisztrálhatók. A kamera tengelyének függőlegesítése két elektromos Talyvel libellával történik. A kamera külső pontossága kb. 3 szögmásodperc (Bretterbauer et al. 1984).

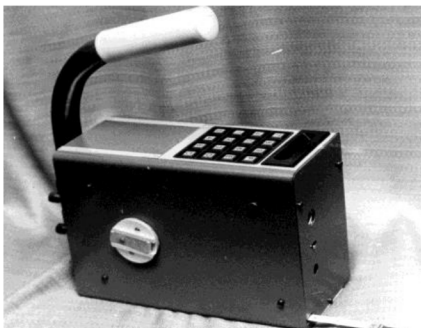
Az intézetben az új műszerek építése mellett nagy súlyt fektettek a meglévő műszerek korszerűsítésére is. Ez különösen érvényes volt a nagyértékű fotogrammetriai műszerekre. 1978-ban digitális kijelzéssel látták el a Jénai Zeiss 1818 sztereokomparatórt (Mentes és Nagy 1979). 1987-ben pedig új, mikroprocesszorral működő elektronikus egységet fejlesztettek ki a Jénai Zeiss gyártmányú Stecometerhez, amelyet a gyártócégnak is felajánlottak, de ők is ugyanakkor végeztek az elektronika korszerűsítésével (Mentes 1988, Mentes és Bánfi 1988).



9. ábra. Új elektronikus egység a Jénai Zeiss Stecometerhez.

Az intézetben szinte a mikroprocesszorok megjelenésével egyidejűleg elkezdődött a mikroprocesszoros geodéziai műszerek fejlesztése. Az első berendezés, egy automatikus lengésközépgépjelölő volt, amely 1975-ben készült giroszkópokhoz a MOM számára. A fejlesztések megkönnyítése érdekében az intézetben egy olyan mikroprocesszoros fejlesztőrendszert alakítottak ki, amelynek alapegységeiből, a mindenkorra igényeknek megfelelő, tetszőleges felépítésű mikroszámítógépet állíthattak elő (Mentes 1978, Kaiser és Mentes 1983). E fejlesztőrendszer segítségével készültek a félautomatikus libellamérleg (2d. ábra), a lézeres léckomparátor (3b. ábra), a Stecometer elektronika (9. ábra) és a

továbbiakban ismertető műszerek többsége is. Ezek közé tartozik pl. az Országos Földmérési és Térképészeti Hivatal (OFTH) részére kifejlesztett digitális mérőszalag (10. ábra) prototípusa (Deme et al. 1979), a Földmérési Intézet (FÖMI) számára készített és a 11. ábrán látható SZIREG elektronikus szintezési jegyzőkönyv (Mentes 1980, Mentés 1983a, Mentés és Tikász 1983), valamint a Földhivatalok számára készített digitális planiméter (12. ábra).



10. ábra. Digitális mérőszalag prototípusa.

A fenti műszerek sorozatgyártását kis méretben az akkori hazai gyártástechnika vagy még nem tette lehetővé, vagy gazdaságosan nem volt megoldható. Ennek ellenére ezek a műszerek előremutattak a technikai haladás irányába. A nagy műszergyártó cégek későbbi műszereiben is felismerhetők a fenti műszerekben kidolgozott elvek, vagy megoldások.

Az intézetben létrejött mikroprocesszoros műszertervezési kapacitás tette lehetővé, hogy a 80-as években bekapcsolódjanak a MOM ilyen jellegű fejlesztési munkáiba is. Ezek közül a digitális rajzasztal, valamint az inerciális műszerek fejlesztése különösen említésre méltó. Sajnos ez utóbbi 1989-ben félbeszakadt.

Az intézetben több speciális célú adatgyűjtőt is kifejlesztettek. Ilyen volt például az intelligens obszervatóriumi adatgyűjtő (Mentes 1985, 1986), amely lehetővé tette a regisztrált árapály adatok obszervatóriumi szűrését és a tárolandó adatmennyiség csökkentését. Különösen említésre méltó az FR-1 automatikus földrengésfelismerő és regisztráló műszer, amely veszélyes ipari létesítmények környezetében a mikroszeizmikus tevékenység megfigyelésére alkalmas. A műszer csak a felismerett földrengések kezdeti szakaszát tárolta el a pontos beérkezési időponttal együtt (Mentes 1991a). Ezt az adatgyűjtőt más geodinamikai folyamatok megfigyelésre is alkalmassá tették, ezáltal ipari



11. ábra. SZIREG szintezési adatgyűjtő.

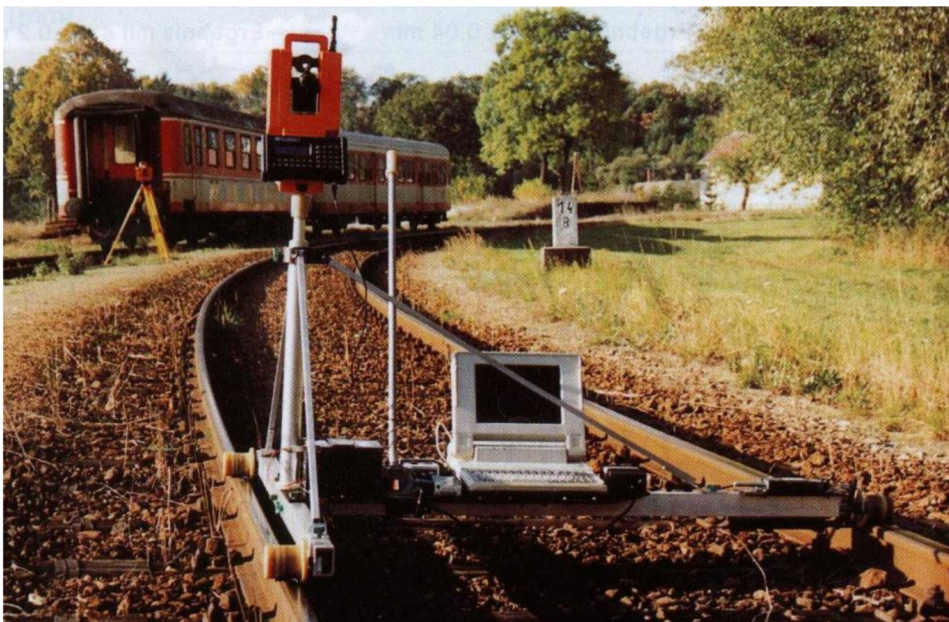


12. ábra. Digitális planiméter.

létesítmények környezetében egy komplex geodinamikai megfigyelőrendszer intelligens adatgyűjtőjeként használhatták (Mentes 1996).

A geodézia területén nemcsak egyedi műszerek fejlesztése folyt, hanem komplex mérőrendszereké is. Egy vasúti pályaellenőrző mérőrendszerrel mutat a 13. ábra, amelyet a Bécsi Műszaki Egyetem Mérnökgeodéziai Intézetével közösen fejlesztettek ki. A mérőkocsi méri a sínek távolságát, valamint dőlését és a nyomvonalat GPS vagy aktív reflektoros mérőállomás segítségével tűzik ki, ill. mérik be (Retscher 1996).

A 90-es években a Bécsi Műszaki Egyetemen közösen hidrosztatikai mérőrendszereket fejlesztettek ki ipari létesítmények (erőművek, völgyzárógáták, hidak, stb.) deformáció és mozgásvizsgálatára (Mentes és Kahmen 1998, Kahmen és Mentes 1998).



13. ábra. Vasúti pályakitűző mérőkocsi.

## Geodinamikai műszerek fejlesztése

Az intézetben 1971-ben kezdődtek meg a geodinamikai műszerfejlesztési kutatások, amelyek célja nagypontosságú és nagystabilitású műszerek kifejlesztése volt a földi árapály regisztrálása céljából. Az első műszer egy kapacitív mérőátalakítós horizontális inga (14. ábra) volt (Alpár 1975, Mentes 1979, Mentes 1981). A potsdami Központi Földfizikai Intézetrel közösen foglalkoztak régi terepi graviméterek átalakításával a földi nehézségi erőter változásainak folyamatos regisztrálása céljából. 1983-ban készültek el egy GS11 típusú terepi graviméter átalakításával, amelynél a tömeg elmozdulását egy nagyérzékenységű kapacitív mérőátalakítóval érzékelték (Mentes 1983b). A műszer még ma is működik a Sopronbánfalvi Geodinamikai Observatóriumban.

A 80-as években nagyérzékenységű és igen nagy stabilitású kapacitív mérőátalakítókat fejlesztettek ki. Ezek nagy felbontóképessége lehetővé tette, hogy azokat extenzométerek érzékelőiként is használják. Ezeket a mérőátalakítókat a Budapesti Geodinamikai Observatóriumban (Mátyáshegy) a fotoregisztrálással működő, a moszkvai Földfizikai Intézetrel közösen installált extenzométerekre szerelték fel először.



14. ábra. Kapacitív mérőátalakításos horizontális inga.



15. ábra. A soproni extenzométer.



16. ábra. A pécsi extenzométer.



1990-ben a Föld belső szerkezetének jobb megismerése érdekében és tektonikai mozgások regisztrálása céljából kvarccsöves extenzométert (15. ábra) installáltak a soproni obszervatóriumban a moszkvai Földfizikai intézettel való együttműködés keretében (Mentes 1991b). Ez volt az első extenzométer, amely már közvetlenül kapacitív mérőátalakítóval készült. Ez a műszer 1990 óta folyamatosan szolgáltatja az adatokat.

1991-ben a prágai Geofizikai Intézetrel kooperálva két extenzométert installáltak Lazecban egy graffitbányában, az intézetben kifejlesztett kapacitív mérőátalakítóval.

1992-ben a Mecsekurán Rt. megrendelésére az intézetben elkészült az első teljesen saját fejlesztésű extenzométer (16. ábra), amelyet az uránbányában 1040 m mélyen installáltak földi árapály, tektonikai és bányabeli mozgások megfigyelése céljából (Mentes és Berta 1997). Ez a műszer az uránbánya bezárásáig 1999 júliusáig működött folyamatosan.

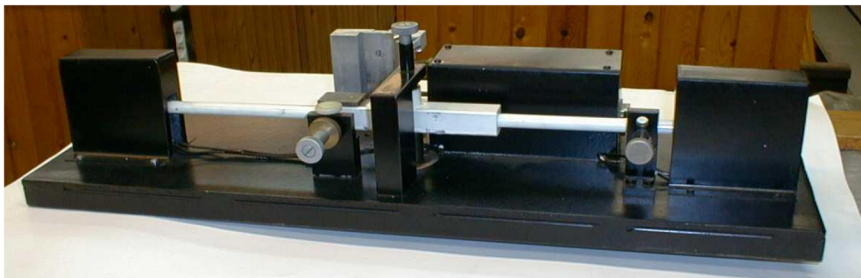
1995-ben a szlovákiai Vyhneben található extenzométert szerelték fel kapacitív mérőátalakítóval (Mentes és Brimich 1996). 2000-től pedig a Jénától délre, kb. 50 km távolságra elhelyezkedő Moxai Geodinamikai Állomáson működnek az intézetben kifejlesztett kapacitív mérőátalakítók.

2000-ben a Mecsekurán megrendelésére egy háromdimenziós extenzométeres mérőállomást terveztek és építettek Bakonyán. Ez az állomás egy hosszú (20 m) és három egymásra merőleges rövid (1,5 m) extenzométerből áll. Az egyik rövid extenzométer párhuzamos a hosszú extenzométerrel. Sajnos az obszervatórium a műszerek installálása és a hőszigetelés elkészítése után annyira nedvessé vált, hogy a műszereket máshová kell telepíteni. Az állomást a Dél-Dunántúl neotektonikai folyamatainak jobb megismerése céljából létesítették. A 17. ábra a vertikális extenzométer egyik végének a kőzethez való rögzítését mutatja.

Az intézetben oldották meg először az extenzométerek beépített kalibrátorainak nagy pontosságú laboratóriumi kalibrálását (Mentes 1995a). Ehhez egy olyan berendezést fejlesztettek ki, amellyel a lézer interferométerek felbontóképességét két nagyságrenddel alá tudják osztani (18. ábra).



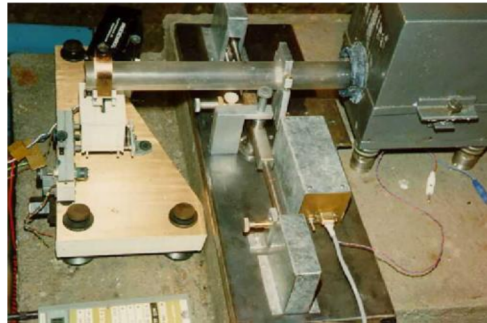
**17. ábra.** A 3D extenzométeres állomás (Bakonya) vertikális extenzométerének rögzítése a kőzethez.



**18. ábra.** Laboratóriumi és in-situ obszervatóriumi kalibráló berendezés.

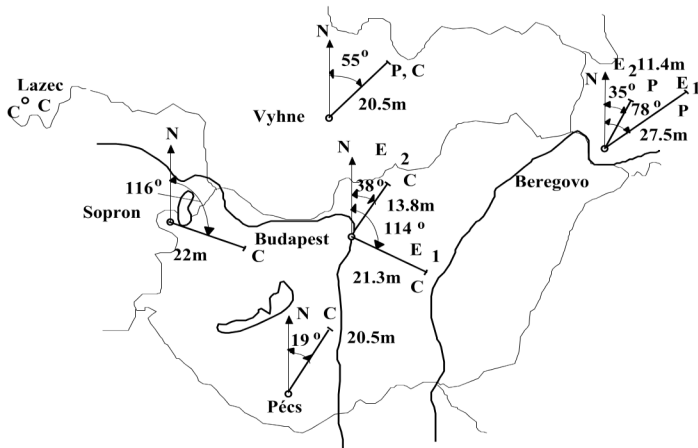
Ezzel a berendezéssel sikerült megoldani az extenzométerek obszervatóriumi, in-situ kalibrálását is, amely lehetővé tette az egyes műszerek skálatényezőinek közvetlen ösz-

szezhasonlítását és az extenzométerek által regisztrált adatok megbízhatóbb interpretálását (Mentes 1993, Mentes 1995b). A 19. ábra az egyik budapesti extenzométer in-situ kalibrálását mutatja. A kvarccső végén az extenzométer saját elektronikája, kicsit beljebb pedig a kalibrálóegység csatlakozik a kvarccsőhöz.



19. ábra. Egyik budapesti extenzométer in-situ kalibrálása.

A 20. ábrán láthatók azok az obszervatóriumok (Moxa kivételével), amelyekkel az intézet szoros kapcsolatot alakított ki. A műszer mellett feltüntetett „C” betű jelzi, hogy a műszer az intézetben kifejlesztett kapacitív mérőátalakítóval működik. Ezeket a műszereket a beregszászi (beregovoi) és a lazeci műszerek kivételével az intézet kalibrálta. Az intézet nemcsak a műszerfejlesztések és közös mérések, hanem az adatok közös kiértékelése és értelmezése területén is együttműködik a különböző intézetekkel.



20. ábra. Extenzométeres hálózat a Pannon-medencében és környezetében (Pécs mellett Bakonyán négy extenzométeres 3D állomás működik 2000-től).

1993-ban egy mikrobarográfot fejlesztettek ki, amely alkalmas a barometrikus árapály megfigyelésére (Mentes 1994, Mentes és Eper 1997). Ezen kívül a műszer által szolgáltatott adatok az extenzométeres mérési eredmények légnyomás korrekciójához is felhasználhatók. A jövőben tervezik más geodinamikai jelenségek kimutatását is a mikrobarográf adataiból. A műszer belsejét az érzékelő membránnal és a membrán elmozdulását mérő differenciálkondenzátoros mérőátalakítóval a 21. ábra mutatja. A 22. ábrán a mikrobarográf hitelesítője látható. A mikrobarográf légnyomásmérés közben egy, a külső légnyomással kapcsolatban levő tartály belsejében helyezkedik el. Kalibráláskor a külső légnyomástól a műszert elzárják, és a külső nyomáshoz képest egy levegő szivatty-

tyúval különböző nagyságú és előjelű nyomáskülönbségek hozhatók létre, amelyek egy U-csöves nyomásmérőről vízszlop milliméterben olvashatók le. A műszer így tisztán fizikai elven, nagy pontossággal kalibrálható.



**21. ábra.** A mikrobarográf belseje az érzékelővel.



**22. ábra.** A mikrobarográf hitelesítője.

Nagypontosságú, geodinamikai célú dőlésmérők, mint pl. horizontális ingák és fűrőlyuk-dőlésmérők kalibrálására a libellamérlegeknél nagyobb pontosságú mérőberendezéseket és mérési eljárásokat dolgoztak ki (Mentes 1989, Mentés et al. 1996).

Az intézetben a geodéziai, geodinamikai műszerek és kalibrálóberendezések fejlesztése folyamatos. Jelenleg pl. olyan nagypontosságú dőlésmérő fejlesztésén dolgoznak, amelynél CCD érzékelőt alkalmaznak elmozdulás-, ill. szögelfordulás-érzékelőként, hogy a műszerdriftet minimálisra csökkentsék. Ez különösen a mérnök-geodéziában és a hosszúidejű tektonikai mozgás- és deformációméréseknél fontos szempont. A 23. ábrán egy CCD érzékelős dőlésmérő pontossági vizsgálata látható.



**23. ábra.** CCD érzékelős dőlésmérő pontosságvizsgálata.

## Hivatkozások

- Alpár Gy** (1975): Investigations to the Development of Zöllner-Suspension Horizontal Pendulums. *Acta Geod. Geoph. Mont. Hung.*, 10, 329-337.
- Battha L, Halmi E, Somogyi J** (1981): Neue Stereokammer, Mess- und Rechenmethode in Untertagebau. *Acta Geod. Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung.*, Tomus 16. (2-3-4)
- Bretterbauer K, Somogyi J, Szádeczky-Kardoss Gy** (1984): Die Sopron-Wiener Zenitkammer. *Mitteilung des Lohrmann-Observatoriums der TU Dresden*, No. 51.
- Deme Gy, Mentés Gy, Reszler Á** (1979): Kísérletek a digitális mérőszalaggal, *Geodézia és Kartográfia*, 31, 406-415.
- Halmi E** (1978): Feldkomparator für Invarband-Nivellierlatten, *Acta Geod. Geoph. Mont. Hung.*, 13, 144-152.
- Kahmen H, Mentés Gy** (1998): Contribution to the dynamics of hydrostatic tiltmeters. Kahmen/Brückl/Wunderlich (Eds.): Geodesy for Geotechnical and Structural Engineering. Institut für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie, *Abteilung Ingenieurgeodäsie, TU Wien*, pp. 301-306.
- Kaiser I, Mentés Gy** (1983): Mikroprozessor-rendszer geodéziai műszerek fejlesztéséhez, *Geodézia és Kartográfia*, 35, 333-335.
- Mentés Gy** (1978): A mikroprocesszorok geodéziai műszerekben való alkalmazásának feltételei, *Geodézia és Kartográfia*, 30, 422-425.
- Mentés Gy** (1979): Development of horizontal pendulum recordings, *Acta Geod. Geoph. Mont. Hung.*, 14, 101-109.
- Mentés Gy, Nagy I**, (1979) Jénai Zeiss 1818 sztereokomparátor átalakítása digitális kijelzésűre, *Geodézia és Kartográfia*, 31, 264-268.
- Mentés Gy** (1980): Terepi kazettás adatgyűjtő, *Geodézia és Kartográfia*, 32, 211-213.
- Mentés Gy** (1981): Horizontal pendulum with capacitive transducer, *Acta Geod. Geoph. Mont. Hung.*, 16, 269-280.
- Mentés Gy** (1983a): Problems of field data collection in geodetic measurements, *Acta Geod. Geoph. Mont. Hung.*, 18, 67-70.
- Mentés Gy** (1983b): Capacitive transducers for horizontal pendulums and gravimeters, *Acta Geod. Geoph. Mont. Hung.*, 18, 359-368.
- Mentés Gy, Tikász E** (1983): A SZIREG elektronikus színtezési jegyzőkönyv ismertetése és alkalmazásának gyakorlati tapasztalatai, *Elektronikus adatfeldolgozás és automatizálás a geodéziában, MTE SZ kiadvány*, 202-214.
- Mentés Gy** (1985): An intelligent tidal signal recording system, *Marees Terrestres Bulletin d'Informations, Bruxelles*, 94, 6293-6297.
- Mentés Gy** (1986): An intelligent digital data acquisition system for recording the tidal signal, *Acta Geod. Geoph. Mont. Hung.*, 21, 21-29.
- Mentés Gy** (1988): Intelligens elmozdulás- és szögadó interfész, *Magyar Elektronika*, 12, 29-31.
- Mentés Gy, Bánfi F** (1988): Új elektronikus egység a Stecometerhez, *Geodézia és Kartográfia*, 40, 332-335.
- Mentés Gy** (1989): Determination of transfer functions of horizontal pendulums on the basis of laboratory measurements, *Marees Terrestres Bulletin d'Informations, Bruxelles*, 104, 7319-7329.
- Mentés Gy** (1991a): The FR-1 field instrument for automatic recognizing of near earthquakes, *Acta Geod. Geoph. Mont. Hung.*, Vol (1-4), pp. 45-55.
- Mentés Gy** (1991b): Installation of a quartz tube extensometer at the Sopron Observatory, *Marees Terrestres Bulletin d'Informations, Bruxelles*, 110, 7936-7939.
- Mentés Gy** (1993): Sort remarks concerning the calibration of quartz tube extensometers, *Marees Terrestres Bulletin d'Informations, Bruxelles*, No. 115, pp. 8467-8471.
- Mentés Gy** (1994): Instruments for Precise Determination of Horizontal Deformations in the Pannonian Basin, *Acta Geod. Geoph. Mont. Hung.*, 29/1-2, 161-177.
- Mentés Gy** (1995a): High Precision Calibration of Quartz Tube Extensometers. Proceedings of the Twelfth International Symposium on Earth Tides (Ed. H. T. Hsu), *Science Press, Beijing, New York*, 1995, pp. 209-214.
- Mentés Gy** (1995b): In-situ calibration of quartz tube extensometers, *Marees Terrestres Bulletin d'Informations, Bruxelles*, No. 121, pp. 9070-9075.
- Mentés Gy** (1996): Measuring and Data Acquisition System for Controlling of Movements and Deformations in Industrial and Mining Areas. H. Pelzer, R. Heer (Eds.): Proceedings of the 6<sup>th</sup> International FIG-Symposium on Deformation Measurements. *Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover*, Nr. 217, Hannover pp. 495-504.
- Mentés Gy, Brimich L** (1996): Calibration of quartz-tube extensometer at the Vyhne tidal station, *Contributions of the Geophysical Institute of the Slovak Academy of Sciences*, 26, pp. 85-92.

- Mentes Gy, Lehmann, K, Varga P, Kümpel, H-J** (1996): Some Calibration of the Applied Geomechanics Inc. Borhole Tiltmeter Model 722. *Acta Geod. Geoph. Hung.*, Vol. 311-2, 79-89.
- Mentes Gy, Berta Zs** (1997): First results of the extensometric measurements in South Hungary. *Marees Terrestres Bulletin d'Informations, Bruxelles*, No. 127, pp. 9744-9749.
- Mentes Gy, Eper P. I** (1997): Atmospheric tide measured by microbarograph. *Marees Terrestres Bulletin d'Informations, Bruxelles*, No. 127, pp. 9826-9833.
- Mentes Gy, Kahmen H** (1998): Analysis of thermally induced errors on hydrostatic measurements of height variations. Kahmen/Brückl/Wunderlich (Eds.): *Geodesy for Geotechnical and Structural Engineering*. Institut für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie, *Abteilung Ingenieurgeodäsie, TU Wien*, pp. 210-215.
- Orbán A, Bánfi F** (1988): Szabatos kompenzátoros szintezőműszerek mágneses hatás miatti hibáinak hazai vizsgálata. *Geodézia és Kartográfia*, 40, 5-11.
- Retscher G** (1996) Gleiserfassung mit einem Multisensorsystem und linearen Filterverfahren. *Technische Universität Wien. Geowissenschaftliche Mitteilungen*, Heft 44. P. 103.
- Somogyi J, Závoti J, Beskó D** (1981): About the Calibration of Invar Leveling Rod. *Acta Geodaet. Geophys. et Montanist. Acad. Sci. Hung.*, Tomus 16. (2-3-4)
- Somogyi J, Krausz K, Mentes Gy** (1984): A new apparatus for testing bubble vials, electronic levels and automatic levels, *Acta Geod. Geoph. Mont. Hung.*, 19, 225-233.
- Tárczy-Hornoch A** (1961a): Ein neuer automatischer Libellenprüfer für Sekundenlibellen, *Geofisica Pura e Applicata*, 48, 27-34.
- Tárczy-Hornoch A** (1961.b): Über einen halbautomatischen Libellenprüfer für Libellen mittlerer Genauigkeit, *Özfv*, 49, 65-73.
- Tárczy-Hornoch A, Alpár Gy, Bummer A** (1972): Bubble level testing with a fully automatic level trier, *MOM Review* 4, 3-7.

## A RELATÍV TÁJÉKOZÁS PARAMÉTEREINEK ROBUSZTUS BECSLÉSE

Battha László\*

*A fotogrammetria alapfeladataira (projektív leképezés, relatív tájékozás) adunk eljárásokat különböző becslési módszerek (L1, L2, Cauchy) igénybevételével. Az eljárásokat szimulált adatrendszerre, valódi mérésekből kapott adatokra és durva hibákkal terhelt adatrendszerre is végrehajtottuk.*

**Kulcsszavak:** projektív leképezés, relatív tájékozás, becslési módszerek, durva hibák.

### Projektív leképezés paramétereinek becslése

Két sík közötti projektív leképezés az alábbi egyenletekkel írható le (Závoti 1999):

$$X_i = \frac{a_1 x_i + a_2 y_i + a_3}{c_1 x_i + c_2 y_i + 1}, \quad Y_i = \frac{b_1 x_i + b_2 y_i + b_3}{c_1 x_i + c_2 y_i + 1} \quad (1 \leq i \leq n), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} -X_i x_i c_1 - X_i y_i c_2 + x_i a_1 + y_i a_2 + a_3 &= X_i \\ -Y_i x_i c_1 - Y_i y_i c_2 + x_i b_1 + y_i b_2 + b_3 &= Y_i \end{aligned} \quad (2)$$

Robusztus becslés céljából a Cauchy eloszlást alkalmazzuk:

$$\rho(x) = \ln(1 + x^2) + C, \quad \psi(x) = 2x / (1 + x^2) \quad (3)$$

( $\psi$  a hatásfüggvény).

A paraméterek becslése céljából az  $f(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \rho(u_i) + \sum_{i=1}^n \rho(v_i)$  függvény minimumát kell meghatároznunk, ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= (c_1, c_2, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3), \\ u_i &= -X_i x_i c_1 - X_i y_i c_2 + x_i a_1 + y_i a_2 + a_3 - X_i, \\ v_i &= -Y_i x_i c_1 - Y_i y_i c_2 + x_i b_1 + y_i b_2 + b_3 - Y_i. \end{aligned} \quad (4)$$

A fenti egyenletrendszert módosított gradiens módszerrel oldjuk meg.  $\mathbf{g}$  = grad  $f$  kiszámításához felhasználjuk a következő azonosságokat:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial c_j} &= \sum \Psi(u_i) \frac{\partial u_i}{\partial c_j} + \sum \Psi(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial c_j}, \\ \frac{\partial f}{\partial a_j} &= \sum \Psi(u_i) \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \sum \Psi(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial a_j}, \\ \frac{\partial f}{\partial b_j} &= \sum \Psi(u_i) \frac{\partial u_i}{\partial b_j} + \sum \Psi(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial b_j}.\end{aligned}\quad (5)$$

A fenti megoldási módszert egy szimulált példán vizsgáltuk, ahol a számított értékekre normális eloszlású zajt szuperponáltunk, majd az adatokat egy durva hibával szennyeztük:

**1. táblázat.** Szimulált adatok projektív leképezésre.

P	X <sub>i</sub>	Y <sub>i</sub>	x <sub>i</sub>	y <sub>i</sub>	zaj	
					x	y
		m	mm		mm	
1	800	1650	-112.376	-112.859	-0.002	-0.001
2	1000	3400	-83.244	91.812	0.004	0.003
3	1500	3500	-32.966	95.527	-0.005	0.001
4	1300	1900	-48.833	-70.555	-0.009	0.007
5	1850	2550	4.285	5.100	0.003	-0.001
6	2400	1800	59.312	-67.706	0.000	+5.998
7	3000	1700	106.776	-70.898	0.002	-0.006
8	3100	3300	92.241	66.577	0.003	-0.001

A legkisebb négyzetek módszerével és a Cauchy féle eloszlás-függvénnyel az alábbi eredményeket kaptuk:

**2. táblázat.** A becslésekből adódó eltérések projektív leképezésnél.

P	Normális eloszlás		Cauchy eloszlás	
	v <sub>X</sub>	v <sub>Y</sub>	v <sub>X</sub>	v <sub>Y</sub>
	m		m	
1	-0.016	0.035	-0.018	0.024
2	-0.022	0.001	-0.039	0.014
3	0.047	0.001	0.049	0.001
4	0.047	-0.062	0.078	-0.080
5	-0.052	0.018	-0.018	0.026
6	-0.015	-0.004	-7.800	-55.000
7	0.018	0.011	-0.076	0.035
8	-0.006	0.000	-0.001	-0.022

### Képpár relatív tájékozása

A bal képpont térbeli koordinátái:

$$\mathbf{x}\mathbf{i} + \mathbf{y}\mathbf{j} + \mathbf{c}\mathbf{k} \quad (x, y \in R) \quad (6)$$

A bázis:  $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k} = \overrightarrow{OO'}$  .

A jobb képet forgatással kapjuk ( $\mathbf{i}' = R\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}' = R\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}' = R\mathbf{k}$ ) :

$$x'\mathbf{x}' + y'\mathbf{j}' + c'\mathbf{k}' \quad (x', y' \in R) \quad (7)$$

A teljes forgatás három elemi forgatásból tevődik össze:

$$(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \xrightarrow{\mathbf{k}(\alpha)} (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}) \xrightarrow{\mathbf{v}(\beta)} (\mathbf{i}', \mathbf{v}, \mathbf{w}) \xrightarrow{\mathbf{i}(\gamma)} (\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}') . \quad (8)$$

(A nyilak felett a forgatás tengelye és a forgatási szög van feltüntetve.) Így a következő adódik:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= \cos \alpha \cos \beta \mathbf{i} + \sin \alpha \cos \beta \mathbf{j} - \sin \beta \mathbf{k} \\ \mathbf{j}' &= (\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma) \mathbf{i} \\ &\quad + (\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) \mathbf{j} \\ &\quad + \cos \beta \sin \gamma \mathbf{k} \\ \mathbf{k}' &= (\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) \mathbf{i} \\ &\quad + (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma) \mathbf{j} \\ &\quad + \cos \beta \cos \gamma \mathbf{k} . \end{aligned} \quad (9)$$

Legyen a terepi pont:  $\mathbf{r} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$  , továbbá a megfelelő képi pontok:

a bal képen,  $\mathbf{e} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + c\mathbf{k}$  és a jobb képen  $\mathbf{v} = \mathbf{b} + x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + c'\mathbf{k}' = \mathbf{b} + \mathbf{f}$  .

Sugármetszéssel kapjuk, hogy:

$$\mathbf{r} = \mu \mathbf{e}, \quad Z = \langle \mathbf{r}, \mathbf{k} \rangle = \mu c ; \quad (10)$$

$$\mathbf{r} = \mu \mathbf{e}, \quad Z = \langle \mathbf{r}, \mathbf{k} \rangle = \mu c . \quad (11)$$

$$x = \langle \mathbf{e}, \mathbf{i}' \rangle = \frac{1}{\mu} \langle \mathbf{r}, \mathbf{i}' \rangle = \frac{c}{Z} X , \quad y = \langle \mathbf{e}, \mathbf{j}' \rangle = \frac{c}{Z} Y ;$$

és így a képkoordináták:

$$x' = \langle \mathbf{f}, \mathbf{i}' \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle \mathbf{r} - \mathbf{b}, \mathbf{i}' \rangle = \frac{c \langle \mathbf{r} - \mathbf{b}, \mathbf{i}' \rangle}{\langle \mathbf{r} - \mathbf{b}, \mathbf{k}' \rangle} , \quad (12)$$

$$y' = \langle \mathbf{f}, \mathbf{j}' \rangle = \frac{c \langle \mathbf{r} - \mathbf{b}, \mathbf{j}' \rangle}{\langle \mathbf{r} - \mathbf{b}, \mathbf{k}' \rangle} . \quad (13)$$

Mivel  $|\mathbf{b}| = 1$ ,  $b_x = \cos \omega \cos \phi$ ,  $b_y = \cos \omega \sin \phi$ ,  $b_z = \sin \omega$  írható.



$\{(x_i, y_i), (x'_i, y'_i)\}_{i=1}^n$  képkordinátákra relatív tájékozást végzünk a  $(\omega, \phi, \alpha, \beta, \gamma)$

paraméterek meghatározására. Legyen  $\mathbf{e} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{f} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + c\mathbf{k}'$ . Mivel a sugarak a  $(\mu \in R)$ ,  $+\lambda\mathbf{f}$  ( $\lambda \in R$ ) alakban írhatók, sugármetszéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{b} + \lambda\mathbf{f} - \mu\mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{b} + \lambda\mathbf{f} - \mu\mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

ahol a sugarak távolsága  $d = |\mathbf{b} + \lambda\mathbf{f} - \mu\mathbf{e}|$ . Az

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \mu - \langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle \lambda &= \langle \mathbf{b}, \mathbf{e} \rangle, \\ \langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle \mu - \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle \lambda &= \langle \mathbf{b}, \mathbf{f} \rangle \end{aligned} \quad (15)$$

egyenletrendszert, ahol:

$$\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = x^2 + y^2 + c^2, \quad \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = x'^2 + y'^2 + c'^2, \quad (16)$$

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{e} \rangle = xb_x + yb_y + cb_z.$$

Megoldjuk  $\mu, \lambda$ -ra.  $\langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle, \langle \mathbf{b}, \mathbf{f} \rangle$  számításához felhasználjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}, \mathbf{i} \rangle &= x'\langle \mathbf{i}', \mathbf{i} \rangle + y'\langle \mathbf{j}', \mathbf{i} \rangle + c\langle \mathbf{k}', \mathbf{i} \rangle, \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{j} \rangle &= x'\langle \mathbf{i}', \mathbf{j} \rangle + y'\langle \mathbf{j}', \mathbf{j} \rangle + c\langle \mathbf{k}', \mathbf{j} \rangle, \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{k} \rangle &= x'\langle \mathbf{i}', \mathbf{k} \rangle + y'\langle \mathbf{j}', \mathbf{k} \rangle + c\langle \mathbf{k}', \mathbf{k} \rangle. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} D &= \langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle^2 - \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle, \\ \mu &= (\langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{f} \rangle - \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{e} \rangle) / D, \\ \lambda &= (\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{f} \rangle - \langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{e} \rangle) / D. \end{aligned} \quad (18)$$

A következő függvényt kell minimalizálnunk:

$$F(\omega, \phi, \alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=1}^n \log(1 + d_i^2) \quad (19)$$

A fenti módszert az alábbi szimulált adatrendszerre alkalmaztuk:

3. táblázat. Szimulált adatrendszer képpár relatív tájékozásra.

P	$x'$ (mm)	$y'$ (mm)	$x''$ (mm)	$y''$ (mm)
1	73.342	<b>85.813</b>	92.753	92.513
2	-88.918	86.918	-71.388	86.619
3	-90.801	-89.764	-67.611	-87.303
4	69.330	-89.003	91.031	-85.367
5	36.804	42.841	56.097	46.947
6	-47.545	44.713	-28.644	45.945
7	-49.753	-49.521	-27.748	-47.601
8	38.266	-50.961	60.420	-47.687

(durva hiba:  $y'_1 = 85.313$ )

A három különböző normával ( $Cf$  = Cauchy függvény) végzett kiegyenlítés után megmaradt parallaxisok:

4. táblázat. Relatív tájékozás végrehajtása után a különböző becslések után megmaradó parallaxisok.

P	$P_y$ értékek (mm)		
	$L1$	$Cf$	$L2$
1	2.33	2.467	0.580
2	0.000	0.001	0.199
3	0.000	0.001	0.029
4	0.001	0.000	0.163
5	0.075	0.000	0.981
6	0.028	0.004	0.190
7	0.006	0.001	0.059
8	0.014	0.004	0.108

## Relatív tájékozás 2-dimenziós projektív transzformációkkal

Mindkét képet egy közös képsíkra vetítjük, melytől a perspektivitási centrumok egyenlő távolságra vannak. A vetítés egyenletei:

$$\begin{aligned} X'_i &= \frac{a_1 x'_i + b_1 y'_i + c_1}{g_1 x'_i + h_1 y'_i + 1} & Y'_i &= \frac{d_1 x'_i + e_1 y'_i + f_1}{g_1 x'_i + h_1 y'_i + 1} \\ X''_i &= \frac{a_2 x''_i + b_2 y''_i + c_2}{g_2 x''_i + h_2 y''_i + 1} & Y''_i &= \frac{d_2 x''_i + e_2 y''_i + f_2}{g_2 x''_i + h_2 y''_i + 1} \end{aligned} \quad (18)$$

A két epipólus a közös képsíkon egybeesik, és az epipoláris sugarak a közös epipólusra illeszkednek. Sztereo-pár előállításához az  $Y$ -koordináták meg kell egyezzenek, ami az  $Y$ -parallaxisok eliminálását jelenti:  $Y'_i = Y''_i$ . Ekkor az epipólus végtelen távoli pont lesz, az epipoláris sugarak pedig párhuzamosakká válnak. A megoldandó egyenletrendszer:

$$m_1 x'_i x''_i + m_2 x'_i y''_i + m_3 x'_i + m_4 y'_i x''_i + m_5 y'_i y''_i + m_6 y'_i + m_7 x''_i + m_8 y''_i + m_9 = 0,$$

(20)

ahol

$$\begin{aligned}
 m_1 &= d_1 g_2 - g_1 d_2 & m_2 &= d_1 h_2 - g_1 e_2 & m_3 &= d_1 - g_1 f_2 \\
 m_4 &= e_1 g_2 - h_1 d_2 & m_5 &= e_1 h_2 - h_1 e_2 & m_6 &= e_1 - h_1 f_2 \\
 m_7 &= f_1 g_2 - d_2 & m_8 &= f_1 h_2 - e_2 & m_9 &= f_1 - f_2 \\
 m_8 &= -1(m_7 m_8 \text{ esetén } m_7 = -1)
 \end{aligned}$$

A terepi koordináták az alábbi képletekből adódnak:

$$X_i = \frac{x'_i B_x}{p_i}, \quad Y_i = \frac{(y'_i + y''_i) B_x}{2p_i}, \quad Z_i = \frac{-h B_x}{p_i}, \quad (21)$$

ahol  $p_i = x'_i - x''_i$ ,  $h$ : kamera-állandó.

3-dimenziós affín transzformációval a lineáris deformáció megszüntethető (3 terepi pont). Helyes méretarányhoz egy terepi távolság ismerete kell.

A következőkben használt numerikus példa (Brandstätter 1991)-ből való, a kamera Rolleimetric 6006,  $c = 51.18$ . A mért koordináták mm-ben megadva:

5. táblázat. Mért adatok képpár relatív tájékozásához.

$x'$	$y'$	$x''$	$y''$
-1.851	2.316	-10.62	1.694
14.936	1.613	8.308	0.808
-7.583	13.604	-16.623	14.596
22.767	17.806	17.472	13.804
-15.519	-0.481	-11.904	-1.314
1.799	-1.931	14.764	-2.293
-18.058	6.299	-21.802	6.968
-4.346	8.746	-12.778	8.77

A becsléseknél adódó eltérések ( $\mu\text{m}$ -ben) a következők:

6. táblázat. A becslések után megmaradt eltérések.

L1-norma				Cauchy			
$\Delta x'$	$\Delta y'$	$\Delta x''$	$\Delta y''$	$\Delta x'$	$\Delta y'$	$\Delta x''$	$\Delta y''$
-1	2	-1	-2	1	2	1	-2
0	2	0	-3	-1	2	-1	-2
0	-1	1	-1	-1	-1	-1	0
1	-1	1	-1	1	1	1	1
0	1	-2	1	0	0	0	0
-1	-2	0	2	0	-1	-1	0
0	0	-1	-1	1	0	0	-1
0	0	0	-1	0	0	0	1

A mért koordináták középhibái: L1-norma: 1.24  $\mu\text{m}$   
 Cauchy: 1.01  $\mu\text{m}$

Ezután durva hibát szuperponáltunk az adatrendszerre:  $x_1'' = -10.62$  helyett  $x_1'' = -9.00$ .

Az így kapott becslések:

7. táblázat. Durva hibával terhelt adatrendszerre elvégzett relatív tájékozás után megmaradó eltérések különböző becslések esetén.

L1-norma				Cauchy			
$\Delta x'$	$\Delta y'$	$\Delta x''$	$\Delta y''$	$\Delta x'$	$\Delta y'$	$\Delta x''$	$\Delta y''$
1	3	1621	-3	0	2	1619	-3
0	2	0	-3	-1	2	-1	-2
0	0	0	1	-1	-1	-1	0
1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	-1	1	0	0	0	-1
-1	-2	1	2	0	-1	-1	1
0	0	0	-1	0	0	0	-2
1	-1	1	-1	-1	0	0	1

## Összefoglalás

Az eredményekből megállapítható, hogy a robusztus becslési eljárások sikeresen kiküszöbölik a durva hiba káros hatását, továbbá a Cauchy becslés az L1-normás becslésnél valamivel jobb eredményt ad.

Az itt ismertetett kutatás a 030239 számú OTKA pályázat támogatásával készült.

## Hivatkozások

- Battha L, Somogyi J** (1997): *Acta Geod. Geoph. Hung.*, 32, 245-248.  
**Brandstätter G** (1991): *ÖZ Vermessungswesen und Photogrammetrie*, 79, 273-280.  
**Haggr'en H, Niini I** (1990): *The photogramm. Journal of Finland*, 12, 22-33.  
**Somogyi J, Závoti J** (1989): *Acta Geod. Geoph. Mont. Hung.*, 24, 237-249.  
**Somogyi J, Závoti J** (1992): *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 117, 336-344.  
**Somogyi J, Závoti J** (1993): *ÖZ Vermessungswesen und Photogrammetrie*, 81, 16-24.  
**Závoti J** (1999): A geodézia korszerű matematikai módszerei, *Geomatikai Közlemények II.* 1-149.

# ROBUSZTUS BECSLÉSI MÓDSZEREK A GEODÉZIÁBAN

*Kalmár János\**

*A dolgozat bemutatja a statisztikai kiértékelések egy speciális formáját, a robusztus becsléseket, melyek a feltételezett (általában normális) eloszlástól eltérő adatsorokat is hatékonyan és pontosan képesek feldolgozni. Ismertetésre kerülnek Huber, Hampel és Collins módszerei, illetve egy hasonló elvre épülő saját eljárás is, melyek jól használhatók a geodéziában lineáris egyenletrendszerrel leírható paraméterbecslések kivitelezésére. A cikk végül adaptálja az említett becsléseket a Helmert-transzformáció ill. a relatív tájékozás kivitelezésére, és gyakorlati példán mutatja be a módszer eredményeit.*

**Kulcsszavak:** statisztika, robusztus becslés, M-becslők, Helmert-transzformáció, relatív tájékozódás, Huber, Hampel, Collins.

## Miért van szükség a robusztus becslésekre?

A statisztikai becslések felhasználási területein előforduló megfigyelésekről megállapítható, hogy egyes kivételes esetektől eltekintve, hibaeloszlásuk nem normális, bár ezt a nagy számok törvénye alapján általában feltételezik. A valamely paraméteres modell alapján létrehozott optimális becslések általában nagyon érzékenyek a modelltől való eltérésre. Sajnos ezek a modellek szinte sohasem igazak; a használatuk során felmerült problémák vezettek arra, hogy a 60-as évek közepén fellendült az ilyen eltérésekkel szemben kevésbé érzékeny becslések kutatása (Kalmár 1995).

A modelltől való eltérések okai 4 fő csoportba sorolhatók:

- (1) nagy (durva) hibák előfordulása: egy értéket nem pontosan másoltak le, rosszul olvasták le a mérőeszköztől, vagy valami mást mértek (pl. hibás irányzás)
- (2) a mérések eleve korlátozott pontosságúak, kerekítések előfordulhatnak
- (3) ha az előző hatásokat sikerül is elég alacsonyan tartani, gyakran előfordul, hogy a valódi eloszlás jelentősen különbözik a paraméteres modellben levőtől. Sokszor maga a modell is csak közelítőleg érvényes, vagy paramétere időben változó mennyiség
- (4) hosszú és 'független' (pl. csillagászati) adatsorozatok is mutathatnak jelentős korrelációt

Az irodalomban találhatunk példákat a fenti okokra; Hampel szerint 5-10% durva hiba inkább szabálynak látszik, mint kivételnek, továbbá nagy és pontos geodéziái minták is a normálisnál hosszabb 'farok'-kal rendelkező hibaeloszlást mutatnak.

A modelltől való eltérések nem hagyhatók figyelmen kívül a gyakorlatban, mert még enyhe és észrevehetetlen eltérések is teljesen elronthatják az 'optimális' becslés viselkedését. A robusztus becsléseket akkor használjuk, ha a kiugró (outlier) értékeket elhagyni, vagy súlyukat csökkenteni szeretnénk, tehát olyan módszert alkalmazunk, amely jól működik a modellben kiugró értékek és más eltérések esetén is (Huber 1981). A robusztus becslések fő megközelítési módja az, hogy létrehozunk egy modellt a paraméteres modelltől való eltérések kezelésére, és olyan becsléseket keresünk, melyek jól

\*MTA FKK Geodéziái és Geofizikai Kutató Intézet, Sopron 9400, Csatkai E. u. 6-8.

E-mail: kalmar@ggki.hu

megfelelnek ennek a modellnek, és közelítőleg optimálisak (Carosio 1979, Bill & Hahn 1984). Tulajdonképpen a kiértékelések eddigi, manuális gyakorlatában sokszor már eddig is robusztus becslést alkalmaztak, hiszen el szokták hagyni a kiugróan rossz értékeket, vagy súlyukat jelentősen csökkentették (Somogyi 1988). De az ilyen intuitív módszerekkel mégsem elégedhetünk meg, mert:

- i. Sokszor nem is olyan egyszerű kiválasztani az elhagyandó értéket
- ii. Ha csak elhagyásos becslést alkalmazunk, akkor a becslés hatékonysága csökken, vagyis valamilyen mértékig az outliereket is figyelembe kell venni
- iii. A gépi adatfeldolgozás elterjedése is megköveteli, hogy becsléseink figyelembe vegyék a durva hibákat, hiszen elmarad az adatok előzetes manuális ellenőrzése.

A robusztus becsléseknek tehát alapvető jellemzője az, hogy kevésbé érzékenyek a feltételezett (paraméteres) modelltől eltérő eloszlású adatsorokból történő paraméterbecslésre. Az érzékenység egyébként annak mértéke, hogy egy lokális zavaró hatás mennyire befolyásolja a becslés értékét.

### A robusztus M-becslők jellemzése

Az általam vizsgált és alkalmazott becslési módszerek az M-becslők osztályába tartoznak, vagyis a  $\Theta$  paramétervektort az  $L(\underline{x}, \Theta)$  likelihood függvény maximumából határozzák meg (Kerékfy 1974), ahol

$$L(\underline{x}, \Theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \Theta) \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

ha az  $x_1, \dots, x_n$  minta feltételezhetően  $f(x, \Theta)$  sűrűségfüggvényű eloszlásból származik. A megoldás szokásos módszere az, hogy (1) helyett a likelihood függvény negatív logaritmusát minimalizáljuk:

$$-\ln L(\underline{x}, \Theta) = -\sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \Theta) = \sum_{i=1}^n \rho(x_i, \Theta). \quad (2)$$

A vizsgált függvény szélsőértékét deriváltjának gyökeként is megkaphatjuk:

$$\frac{\delta}{\delta \Theta} \left[ \sum_{i=1}^n \rho(x_i, \Theta) \right] = 0, \quad (3)$$

vagyis a minimumképzés egyenlet(rendszer) megoldására vezethető vissza. Nevezzük a  $\Psi(x) = \rho'(x)$  függvényt a becslés hatásfüggvényének, és definiáljuk a  $\omega(x)$  súlyfüggvényt a következőképpen:

$$\omega(x) = \Psi(x) / x \quad x \neq 0. \quad (4)$$

Az ismertebb eloszlástípusokra a várható érték M-becslése a következőképpen alakul:

a.) normális eloszlás

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \rho(x) = \frac{x^2}{2} \quad \Psi(x) = x \quad \omega(x) = 1$$

az M-becslés az átlaggal egyezik meg.

b.) szimmetrikusan exponenciális eloszlás:

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \rho(x) = |x| \quad \Psi(x) = \operatorname{sign}x \quad \omega(x) = \frac{1}{|x|}$$

az M-becslés a mediánnal egyezik meg (Somogyi, Závoti 1987).

c.) Cauchy eloszlás:

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)} \quad \rho(x) = \ln(1+x^2) \quad \Psi(x) = \frac{2x}{(1+x^2)} \quad \omega(x) = \frac{2}{(1+x^2)}$$

az M-becslés csak iterációval határozható meg.

### Huber és Hampel becslési eljárásai

Látható, hogy a normális eloszlás hatásfüggvénye nem korlátos, ezért nem is robusztus, de b. -c. becslők már robusztusak. A tapasztalatok szerint a geodéziai mérési eredmények hibaeloszlása középen normális, de a széleken bizonytalan. Ezen segítendő, Huber (1973) az alábbi hatásfüggvényt konstruálta:

$$\Psi(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } |x| \leq a \\ a \operatorname{sign}x & \text{egyébként} \end{cases}, \quad \omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |x| \leq a \\ \frac{a}{|x|} & \text{egyébként} \end{cases}$$

Később Hampel (1974) az outlierek biztos kizárása érdekében az intervallumbeosztást tovább finomítva a hatásfüggvényt a széleken csökkentette:

$$\Psi(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } |x| \leq a \\ a \operatorname{sign}x & \text{ha } a < |x| \leq b \\ \frac{a(c \operatorname{sign}x - x)}{(c-b)}, & \text{ha } b < |x| \leq c \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}, \quad \omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |x| \leq a \\ \frac{a}{|x|}, & \text{ha } a < |x| \leq b \\ \frac{a(1-c)}{b-c}, & \text{ha } b < |x| \leq c \\ 0 & \text{ha } |x| > c. \end{cases}$$

### Az M-becslők alkalmazása közvetett mérések kiértékelésére

Alkalmazzuk ezután Hampel módszerét az  $r$  elemű  $\Theta$  paramétervektor becslésére, ha a  $\underline{v}$  hibavektor  $\Theta$ -tól lineárisan függ:

$$\underline{v} = A\Theta - \underline{l} \quad \text{és} \quad A = [a_{i,j}]_{i=1,n}^{j=1,r} \quad (5)$$

Ha a  $\underline{v}$  hibavektort tekintjük mintának, feltételezve, hogy  $f(\underline{v}, \Theta)$  eloszlásfüggvénye ismert, akkor levezethető a (2) likelihood függvény, vagyis felírható a  $\Theta$  paramétervektor legjobb becslésének feltételi egyenlete:

$$\sum_{i=1}^n \rho(v_i, \Theta) \Rightarrow \min.$$

Oldjuk meg (5) figyelembe vételével az aktuális szélsőérték feladatot:

$$\begin{aligned} v_i &= \sum_{j=1}^r a_{i,j} \Theta_j - 1_i \quad i = 1, \dots, n \\ \text{ezért} & \\ \frac{\delta v_i}{\delta \Theta_k} &= a_{i,k} \quad k = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (6)$$

és így (3) a következőképpen alakul:

$$\frac{\delta}{\delta \Theta_k} \left[ \sum_{i=1}^n \rho(v_i(\Theta)) \right] = \sum_{i=1}^n \frac{\delta \rho(v_i)}{\delta v_i} \cdot \frac{\delta v_i}{\delta \Theta_k} = \sum_{i=1}^n a_{i,k} \Psi(v_i) = 0 \quad k = 1, \dots, r,$$

ami tömörített írásmódban

$$A^T \Psi(\underline{v}) = \underline{0} \quad \text{ahol } \Psi(\underline{v}) = \begin{pmatrix} \Psi(v_1) \\ \Psi(v_2) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Láttuk, hogy a normális eloszlás hatásfüggvénye  $\Psi(v) = v$ , ezért (7) a következő alakot veszi fel:

$$A^T \underline{v} = A^T (A \Theta - \underline{l}) = \underline{0},$$

melyből a legkisebb négyzetek módszerével kapott megoldás már levezethető:

$$\Theta = (A^T A)^{-1} A^T \underline{l}.$$

Nézzük most meg, hogy néznek ki a Hampel módszeréből levezetett feltételi egyenletek!

Feltesszük, hogy az  $A$  mátrixot a  $v_i$  hibák nagysága alapján függőlegesen 4 almátrixra bonthatjuk, melyek legyenek rendre  $A_1 (|v_i| \leq a)$ ,  $A_2 (a < |v_i| \leq b)$ ,  $A_3 (b < |v_i| \leq c)$  és  $A_4 (c < |v_i|)$ . Ennek megfelelően particionáljuk (5)-ben a  $\underline{v}$  hibavektort és  $\underline{l}$ -et is:



$$\begin{pmatrix} \underline{v}^1 \\ \underline{v}^2 \\ \underline{v}^3 \\ \underline{v}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} \cdot \Theta - \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Ezután írjuk fel (7)-et is particionálva:

$$\begin{bmatrix} A_1^T & A_2^T & A_3^T & A_4^T \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi(\underline{v}^1) \\ \Psi(\underline{v}^2) \\ \Psi(\underline{v}^3) \\ \Psi(\underline{v}^4) \end{pmatrix} = \underline{0}.$$

Tehát

$$A_1^T \Psi(\underline{v}^1) + A_2^T \Psi(\underline{v}^2) + A_3^T \Psi(\underline{v}^3) + A_4^T \Psi(\underline{v}^4) = \underline{0}. \quad (9)$$

A megfelelő hatásfüggvények behelyettesítésével adódik:

$$A_1^T \underline{v}^1 + A_2^T \text{asignv}^2 + A_3^T a(\text{csignv}^3 - \underline{v}^3)/(c-b) = \underline{0}.$$

A  $\underline{v}^i = A_i \cdot \Theta - l_i$  (8) behelyettesítése után kapjuk:

$$A_1^T (A_1 \Theta - l_1) + A_2^T \text{asignv}^2 + A_3^T a/(c-b)(\text{csignv}^3 + l_3 - A_3 \Theta) = \underline{0}.$$

Az egyenletet rendezve adódik:

$$\{A_1^T A_1 - A_3^T A_3 a/(c-b)\} \Theta = A_1^T l_1 - A_2^T \text{asignv}^2 - A_3^T a/(c-b)[\text{csignv}^3 + l_3].$$

Végeredményben tehát egy  $B\Theta = \underline{d}$  alakú egyenletrendszerhez jutunk, ahol

$$B = A^T P A \quad \text{és} \quad \underline{d} = A^T P l - a A^T Q \text{signv}, \quad (10)$$

ahol  $P$  és  $Q$  átlós súlymátrixok, melyeknek főátlóelemei

$$p_{i,i} = \begin{cases} 1 & \text{ha } |v_i| \leq a \\ a/(b-c) & \text{ha } b < |v_i| \leq c \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad q_{i,i} = \begin{cases} 1 & \text{ha } a < |v_i| \leq b \\ b/(c-b) & \text{ha } b < |v_i| \leq c \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Mivel a megoldás iterációban történik, ezért  $\text{signv}$ -t lépésenként konstansként kezeljük, és a  $\underline{v}$  ellentmondás-vektor alapján a kiegyenlítést mindig az aktuális osztályba sorolnának megfelelően ismételjük meg. A  $\Theta$  paramétervektor kezdőértékét pedig a feladat jellegétől függően becsléssel állapítjuk meg.

Huber módszerének munkaképleteit külön nem részletezzük, mivel azt a Hampel módszer speciális esetként ( $b = c = \infty$ ) már tartalmazza.

A becslés hatékonysága még bizonyosan robusztus hatásfüggvény esetén is függ attól, mennyire felel meg a hatásfüggvény a minta valódi eloszlásának, ezért indokoltnak tűnt más hatásfüggvények konstruálása és tesztelése is. Ennek kapcsán kedvező eredményeket értünk el az alábbi, saját fejlesztésű hatásfüggvénnyel (Somogyi és Kalmár 1991), melyen a soproni módszer alapul:

$$\Psi(x) = \begin{cases} x & \text{ha } |x| \leq a \\ a[x + (a - 2b)\text{sign}x]/2/(a - b) & \text{ha } a < |x| \leq b \\ \frac{a\text{sign}x}{2} & \text{ha } b < |x| \leq c \\ 0 & \text{ha } c < |x| \end{cases},$$

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |x| \leq a \\ a[1 + (a - 2b)/|x|]/2/(a - b) & \text{ha } a < |x| \leq b \\ \frac{a/2}{|x|} & \text{ha } b < |x| \leq c \\ 0 & \text{ha } c < |x| \end{cases}.$$

A becslés ötlete tulajdonképpen a Hampel módszerből származik oly módon, hogy felcseréltük az  $(a, b)$  illetve  $(b, c)$  intervallumokon feltételezett mintaeloszlást. A Hampel módszernél már látott levezetés most is végigvihető, de a módszert leíró (10) képlet P és Q súlymátrixai a korábbiaktól különbözni fognak:

$$p_{i,i} = \begin{cases} 1 & \text{ha } |v_i| \leq a \\ a/(a - b)/2 & \text{ha } a < |v_i| \leq b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases},$$

$$q'_{i,i} = \begin{cases} (2b - a)/(a - b)/2 & \text{ha } a < |v_i| \leq b \\ -1/2 & \text{ha } b < |v_i| \leq c \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Collins (1976) alapján más hatásfüggvény alkalmazhatóságát is megvizsgáltuk.

Legyen  $x_1$  megfelelően választott konstans, akkor Collins hatásfüggvénye:

$$\Psi(x) = \begin{cases} x & \text{ha } |x| \leq a \\ x_1 \operatorname{th} \left[ \frac{1}{2} x_1 (b - |x|) \right] \operatorname{sign} x & \text{ha } a < |x| \leq b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (11)$$

Az  $x_1$  paraméter értékét a hatásfüggvény folytonossági követelményéből vezethetjük le  $x = a$  pontban:

$$a = x_1 \operatorname{th} \left[ \frac{1}{2} x_1 (b - a) \right],$$

vagyis

$$\operatorname{ar} \operatorname{th} \frac{a}{x_1} = \frac{1}{2} \ln \left[ \left( 1 + \frac{a}{x_1} \right) \left( 1 - \frac{a}{x_1} \right) \right] = \frac{1}{2} [\ln(x_1 + a) - \ln(x_1 - a)] = \frac{1}{2} x_1 (b - a),$$

ezért  $x_1$  paramétert az

$$\ln(x_1 + a) - \ln(x_1 - a) - x_1 (b - a) = 0 \quad (12)$$

egyenlet gyökeként definiáljuk. Tudjuk, hogy a tangens hiperbolikus függvény páratlan, ezért teljesül  $\operatorname{sign} \operatorname{th} x = \operatorname{th}(x \operatorname{sign})$ , ezért (11) középső szakasza

$$\Psi(x) = x_1 \operatorname{th} \left[ \frac{1}{2} x_1 (b \operatorname{sign} x - x) \right]$$

alakban is felírható. A Hampel módszernél már látott (9) particionálás a 3 hibaosztályra most is érvényes, ezért

$$A_1^T \Psi(\underline{v}^1) + A_2^T \Psi(\underline{v}^2) + A_3^T \Psi(\underline{v}^3) = \underline{0}, \quad (13)$$

ahol  $\underline{v}^i = A_i \Theta - l_i$ , és  $\Psi(\underline{v}^1) = \underline{v}^1$ ,

$$\Psi(\underline{v}^2) = x_1 \operatorname{th} \left[ \frac{1}{2} x_1 (b \operatorname{sign} \underline{v}^2 + l_2 - A_2 \Theta) \right], \quad \Psi(\underline{v}^3) = 0$$

így (13) rendszer  $i$ -dik ( $i = 1, \dots, r$ ) egyenlete a következőképpen írható fel:

$$\sum_{m=1}^{j_1} a_{m,i} \left\{ \sum_{k=1}^r a_{m,k} \Theta_k - l_m \right\} + x_1 \sum_{m=j_1+1}^{j_2} a_{m,i} \operatorname{th} \left\{ \frac{1}{2} x_1 \left( b \operatorname{sign} v_m + l_m - \sum_{k=1}^r a_{m,k} \Theta_k \right) \right\} = 0,$$

ahol feltételezzük, hogy  $A_1$  sorainak száma  $j_1$ , és  $A_2$  sorainak száma  $j_2 - j_1$ . Látható, hogy a most kapott egyenletrendszer nem lineáris függvénye a  $\Theta$  paramétervektornak, ezért jó közelítő érték és megbízható többváltozós gyökkereső algoritmus (pl. a számítógépes konjugált gradiens módszer) nélkül reményünk sem lehet a megoldásra.

A  $\operatorname{th}$  függvény hatványsora alapján belátható, hogy az origó közelében teljesül  $\operatorname{th} x \approx x$ , ezért Collins módszere is jól közelíthető Hampel módszerének azon módosításával, melyben a hatásfüggvény konstans szakasza 0 hosszú. Várható, hogy Collins

módszere bizonyos mérési folyamatokra kedvezőbb paraméterbecslést szolgáltat, mint Hampelé, de további tesztek szükségesek ennek eldöntésére.

### A W-becslés, mint az M-becslés közelítő formája

Már Collins (1976) módszerének bemutatása során kiderült, hogy a hatásfüggvény önkényes (bár célszerű) megválasztása a paraméterbecslés gyakorlati kivitelezhetőségét teszi kétségessé, mert nemlineáris egyenletrendszer megoldásához vezethet. Térjünk ezért vissza a közvetett mérések M-becslése megoldásának (7) alakjához:

$$A^T \Psi(\underline{v}) = \underline{0}, \quad \text{ahol} \quad v_i = v_i(\Theta).$$

Láttuk, hogy a (7) feladatot a paramétervektor egy  $\Theta^0$  kezdő becsléséből indulva iterációval kell megoldani, mert a hatásfüggvény értelmezése intervallum-szakaszonként különböző. Tehát a  $k$ -ik iterációs lépésben a paramétervektor megelőző  $\Theta^{k-1}$  becsléséből írhatjuk fel a megfelelő  $\Psi(v_i)$  függvényeket, és oldhatjuk meg (7)-et a paramétervektor következő  $\Theta^k$  becslése céljából:

$$A^T \Psi(\underline{v}(\Theta^k)) = \underline{0}. \quad (14)$$

A W-becslés, ami végeredményben súlyozott kiegyenlítést jelent, a  $\Psi(\underline{v})$  hatásfüggvénynek a  $\omega(\underline{v})$  súlyfüggvénnyel való (15) közelítésén alapszik:

$$\Psi(v_i(\Theta^k)) \approx \frac{\Psi(v_i(\Theta^{k-1}))}{v_i(\Theta^{k-1})} v_i(\Theta^k) = \omega(v_i(\Theta^{k-1})) v_i(\Theta^k), \quad (15)$$

ami praktikusán bármely hatásfüggvény esetén lehetővé teszi a közelítő M-becslést, mert (15) alapján (14) megoldása

$$A^T P \underline{v} = \underline{0} \quad \underline{v} = A \Theta^k - \underline{l}$$

alakban adódik, ahol  $P$  diagonális súlymátrix, és

$$P_{i,i} = \omega(v_i(\Theta^{k-1})) \quad i = 1, \dots, n.$$

Tehát a  $\Theta$  paramétervektor új becslését az

$$A^T P A \Theta^k = A^T P \underline{l} \quad (16)$$

egyenletrendszer gyökeként kapjuk, ami közismerten a súlyozott megfigyeléseken alapuló kiegyenlítés megoldása.

Szeretném kihangsúlyozni, hogy a W-becslés nem ekvivalens az M-becsléssel, még akkor sem, ha ugyanazon hatásfüggvényen alapulnak. Az viszont igaz, hogy a két módszer fixpontja szükségszerűen egybeesik, tehát ha a  $\Theta$  paramétervektor az egyik módszernek fixpontja (ami azt jelenti, hogy  $\Theta^{k-1} = \Theta^k = \Theta$  teljesül), akkor fixpontja lesz a másik eljárásnak is. Problémát csak az jelent, hogy egyik módszernél sem garantált, hogy az iteráció eléri a fixpontot (szélsőséges esetben akár divergens is lehet).

## Az M-és W-becslők alkalmazásának konvergencia problémái

Láttuk, hogy a  $\underline{v}$  ellentmondás-vektoron alapuló paraméterbecslés feltételez egyrészt  $\mathcal{O}$  kezdeti értéket, másrészt egy, a hatásfüggvényhez kapcsolódó intervallumbeosztást ( $a$ ,  $b$  és  $c$  korlátokat). A paramétervektor kezdőértékét a robusztus becsléstől független pre-processzing eljárás szolgáltatja, ami lehet egy szokványos legkisebb négyzetes kiegyenlítés is. A megoldandó geodéziai probléma sajátosságaitól függ, hogy az (5) ellentmondások milyen  $a$  korlátig tolerálhatók,  $b$  és  $c$  korlátokat már az  $a$  többszöröseként írjuk elő. A skálázás azonban ezzel még korántsem tekinthető megoldottnak, mert könnyen előfordulhat olyan eset, amikor a paramétervektor kezdeti becslése annyira rossz (pl. néhány outlier megléte miatt), hogy egyetlen mérés sem kerül az elfogadható 1. osztályba. Ebből viszont a (10) egyenletrendszer szingularitása következhet, amit úgy küszöböltem ki, hogy az iterációval párhuzamosan csökkenő intervallumbeosztást írtam elő. Az intervallumbeosztást úgy inicializáltam, hogy az 1. iterációban pontosan egy mérés kerüljön a kidobandó (0 hatásfüggvényű) kategóriába, és a részintervallumok hossza minden iterációban 0.8-al szorzódik (vagyis rövidül) addig, míg el nem éri az a priori előírt határt (Kalmár 1995).

Következő kérdés az, hogy meddig folytassuk az iterációt? Ideális esetben az algoritmus fixpontban fejeződik be, ami a kerekítési hibákat is figyelembe véve azt jelenti, hogy a  $\mathcal{O}$  paramétervektor változása két iteráció között egy korlát alatt marad. Sajnos a gyakorlatban ez az ideális eset ritkán fordul elő, ezért az iterációt az alábbi szabályok szerint vezéreltük:

- Az iteráció legalább addig tartson, míg az intervallum-beosztás le nem csökken az a priori előírt szintre.
- Ha az intervallumbeosztás már nem változik, akkor figyeljük a mérések (ellentmondások) osztályba-sorolását; ha két, egymást követő iterációban a mérések kategorizálása nem változik, akkor készen vagyunk.
- Ha b. szabály szerint az algoritmust nem sikerül előbb befejezni, akkor megadott számú (pl. 20) iteráció után mindenképp kilépünk.

A gyakorlatban az is előfordulhat, hogy  $\mathcal{O}$  kezdeti paraméter olyan jó, hogy azonnal az a priori intervallumbeosztást kell alkalmazni (lejjebb nem mehettünk), és kidobandó mérést nem is kapunk. Ekkor természetesen csak b. és c. szerint figyeljük a kilépési feltétel meglétét.

Látható, hogy bár b. feltétel gyengébb, mint a fixpontfeltétel, de még így is előfordulhat, hogy c. szerint kell kilépni, elkerülendő a végtelen ciklust.

Akadhat ugyanis olyan mérés, ami éppen intervallumhatárra esik, és iterációnként változtatja kategóriába sorolását (ld. Digitális hőmérő).

## A síkbeli Helmert-transzformáció robusztus megoldása

Az alapfeladat a következő (Somogyi 1969):

Legyen adott a síkon egy  $P_i(x_i, y_i)$  pontsorozat, melyet egy Helmert-transzformáció (forgatás, nyújtás és eltolás) képez le a  $Q_i(X_i, Y_i)$  pontsorozatba. Határozzuk meg a nevezett transzformáció paramétereit, melynek ismeretében azután más pontok leképezése is elvégezhető. A leképezést célszerűen az alábbi formában írhatjuk fel, vagyis kezeljük összevontan a forgatást és a nyújtást:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Látható, hogy a transzformációt az  $(X_0, Y_0, r, s)$  paraméterekkel jellemezzük, melyek két pont és képének ismeretében már meghatározhatók. Amennyiben több transzformált pontot ismerünk, a transzformáció paramétereit már kiegyenlítőssel kell meghatározni, hogy a leképezés (mérés) esetleges hibáit kompenzálni tudjuk. A hibaegyenletek a következők lesznek (Somogyi, Závoti 1990):

$$\begin{aligned} v_{x_i} &= x_i r - y_i s + X_0 - X_i \\ v_{y_i} &= y_i r + x_i s + Y_0 - Y_i \end{aligned}, \quad (18)$$

vagyis  $\underline{v} = A\Theta - \underline{l}$  jelölés mellett  $\Theta = (X_0, Y_0, r, s)^T$  és

$$\begin{aligned} a_{2i-1,1} &= 1, & a_{2i-1,2} &= 0, & a_{2i-1,3} &= x_i, & a_{2i-1,4} &= -y_i, & l_{2i-1} &= X_i \\ a_{2i,1} &= 0, & a_{2i,2} &= 1, & a_{2i,3} &= y_i, & a_{2i,4} &= x_i, & l_{2i} &= Y_i \end{aligned}$$

Amennyiben az egyes pontok leképezéséhez (méréséhez) a priori eltérő  $p_i$  súlyokat rendelünk, akkor a paraméterek meghatározása az

$$A^T P A \Theta = A^T P \underline{l} \quad (19)$$

egyenlet alapján történhet, ahol  $P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & p_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & p_2 & 0 & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ .

Ha a  $P_i$  pontok koordináta-rendszerének origója egybeesik a pontok súlypontjával (eltolással mindig elérhető  $\sum p_i x_i = \sum p_i y_i = 0$ ), akkor (19) egyenletrendszer az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$A^T P A = \begin{pmatrix} \sum p_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum p_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum p_i (x_i^2 + y_i^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum p_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}$$

$$A^T P \underline{l} = \begin{pmatrix} \sum p_i X_i \\ \sum p_i Y_i \\ \sum p_i (x_i X_i + y_i Y_i) \\ \sum p_i (x_i Y_i - y_i X_i) \end{pmatrix},$$

ezért közvetlenül megoldható:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\sum p_i X_i}{\sum p_i}, & r &= \frac{\sum p_i (x_i X_i + y_i Y_i)}{\sum p_i (x_i x_i + y_i y_i)} \\ Y_0 &= \frac{\sum p_i Y_i}{\sum p_i}, & s &= \frac{\sum p_i (x_i Y_i - y_i X_i)}{\sum p_i (x_i x_i + y_i y_i)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Tehát az iteratív robusztus becsléshez a transzformációs paraméterek első közelítését egy lépésben előállíthatjuk, miáltal a  $v$  ellentmondásvektor is meghatározott. Elindítható tehát a robusztus becslés szerinti iteráció, amely a korábbiak szerint majd olyan (10) súlyozást generál, ahol az egyes súlyok a pontok előző iterációbeli ellentmondásaitól függenek (Kalmár, Somogyi 1988, 1989).

12 pontos mintapéldánkban a koordináta-hibák szórása 3.5 cm volt, és  $v_{x_1} = 50$  cm,  $v_{y_6} = -20$  cm,  $v_{x_{12}} = 15$  cm durva hibákkal indítottunk. Az eredménytáblából jól látszik, hogy a legkisebb négyzetek módszere kevésbé alkalmas a durva hibák kiszűrésére és a hibátlan pontokat is eltorzíthatja.

1. táblázat. Mintapélda a síkbeli Helmert-transzformációra.

Sorszám	Legkisebb négyzetek		Huber módszere		Hampel módszere	
	$v_x$	$v_y$	$v_x$	$v_y$	$v_x$	$v_y$
1.	-37.9	-6.9	-44.5	-4.9	-48.8	-5.4
2.	5.6	-2.9	1.4	1.1	0.0	4.0
3.	7.8	0.4	3.9	1.7	3.8	1.1
4.	1.1	-0.9	-0.6	2.3	2.2	0.0
5.	9.7	9.9	6.3	8.8	7.7	5.0
6.	5.8	16.9	-0.1	20.4	-4.0	22.0
7.	5.6	-2.9	1.4	1.1	0.0	4.0
8.	4.8	-3.9	1.8	-1.6	2.5	-0.6
9.	10.6	0.1	5.8	1.4	4.2	0.4
10.	4.1	-6.1	-3.0	-2.9	-8.3	-2.0
11.	-1.7	-4.5	-7.1	0.0	-10.6	3.3
12.	-15.4	0.7	-16.6	0.9	-12.7	0.3

### Az analitikus relatív tájékozás robusztus megoldása

Az alapfeladat a következő (Somogyi 1966, Battha & co 1981):

A terep egy  $P_i$  pontsorozatát centrális leképezéssel fényképekre transzformáljuk. Jelölje  $(x, y)$  a  $P$  pont koordinátáit a balképen,  $(x', y')$  pedig a jobbképen. Határozzuk meg a két kép egymáshoz viszonyított relatív helyzetét, ha ismert a balkép  $f$ , illetve jobbkép  $f'$  fókusz távolsága.

Ha a képek képfőponthoz illesztett koordináta rendszereinek origóját a leképezési centrumba (fókuszba) mozgatjuk, akkor  $z = f$  illetve  $z' = f'$  teljesül. Ezután tegyük forgatással egyirányúvá a két kép koordináta rendszerét! Feltételezzük, hogy az

egyenes tengelyek körüli forgatási szögek elég kicsik ahhoz, hogy a  $H$  forgatási mátrixban a szögfüggvények helyett az alábbi közelítéseket alkalmazzuk:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = H \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (21)$$

ahol

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -d\kappa & d\varphi \\ d\kappa & 1 & -d\omega \\ -d\varphi & d\omega & 1 \end{pmatrix}.$$

Jelölje  $(b_x, b_y, b_z)$  a jobbkép origójának koordinátáit a balkép koordinátarendszerében!

A két koordinátarendszer már egyirányú, ezért az  $(x'', y'', z'')$  jobbképpont koordinátái a balképpont rendszerében nyilván  $(x'' + b_x, y'' + b_y, z'' + b_z)$  lesznek. Mivel a  $P$  pont képei és a jobbfókusz koordinátái most már ugyanabban a (balkép fókuszához illesztett) koordinátarendszerben vannak megadva, ezért felírható az un. komplanaritási feltétel, ugyanis a fentiek értelmében a 3 pont és az origó egy síkba esik:

$$0 = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ x & y & z \\ x'' + b_x & y'' + b_y & z'' + b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ x & y & z \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

vagyis

$$b_x(y + z'' - y''z) - b_y(xz'' - x''z) + b_z(xy'' - x''y) = 0. \quad (22)$$

Tudjuk, hogy  $b_x$  bázistávolság ismert (szabadon választható), és feltételezzük, hogy  $b_y = b_y^0 + db_y$ ,  $b_z = b_z^0 + db_z$ , ahol  $b_y^0$  és  $b_z^0$  ismert közelítések,  $db_y$  és  $db_z$  pedig az ismeretlen javítások. Ugyancsak ismeretlenek  $d\omega$ ,  $d\varphi$ ,  $d\kappa$  kicsi forgatási szögek, melyek meghatározására (22) nyújt lehetőséget. (21) behelyettesítése után kapjuk, hogy (Kalmár 1985, 1990):

$$\begin{aligned} & [b_x(yy' + ff') - b_y^0xy' - b_z^0xf']d\omega + \\ & [b_y^0(xx' + ff') - b_xyx' - b_z^0yf']d\varphi + \\ & [b_z^0(xx' + yy') - b_xfx' - b_y^0fy']d\kappa + \\ & (fx' - xf')db_y + (xy' - yx')db_z + \\ & b_x(yf' - y'f) - b_y^0(xf' - x'f) + b_z^0(xy' - x'f) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Legyen  $\Theta = (d\omega, d\varphi, d\kappa, db_y, db_z)^T$ , akkor (23)alapján a  $\underline{v} = A\Theta - \underline{l}$  feltételi egyenlet együtthatói:



$$\begin{aligned}
 a_{i,1} &= b_x (yy' + ff') - b_y^0 xy' - b_z^0 xf' \\
 a_{i,2} &= b_y^0 (xx' + ff') - b_x yx' - b_z^0 yf' \\
 a_{i,3} &= b_z^0 (xx' + yy') - b_x fx' - b_y^0 fy' \\
 a_{i,4} &= fx' - xf' \quad a_{i,5} = xy' - yx' \\
 l_i &= -b_x (yf' - y'f) + b_y^0 (xf' - x'f) - b_z^0 (xy' - x'f).
 \end{aligned}$$

A feladat megoldásakor a  $b_y^0 = b_z^0 = 0$  kezdőértékkel indulunk neki (23) megoldásának, és csak néhány legkisebb négyzetes kiegyenlítés után térünk át a robusztus eljárásra, vagyis az illesztés hibájától függő súlyozás és korrekció használatára.

Az eljárás tesztelésére valós fotogrammetriai mérési eredményeket használtunk, melyre egy példát a (2) táblázatban mutatunk be. A mérőműszer pontossága  $\pm 2\mu$  volt.

2. táblázat. Mintapélda az analitikus relatív tájékozásra.

Azonosító	Balkép		Jobbkép		Parallaxis ( $\mu$ )		
	$x$	$y$	$x'$	$y'$	L2	Huber	Hampel
Képfőpont	119.534	120.668	120.312	121.817			
9114	23.184	188.647	106.366	192.821	-5	0	1
9113	24.441	97.611	107.472	101.502	1	-4	0
9033	25.236	37.405	107.909	41.024	3	-2	0
9032	79.021	73.574	162.230	77.162	-17	-24	-20
9031	116.425	120.199	200.163	123.963	-2	-9	-4
9030	138.327	169.470	222.285	173.299	4	1	4
9039	64.565	170.136	147.917	174.130	15	15	17
341	107.023	23.741	190.451	26.865	-5	-3	1
331	117.225	225.452	201.159	229.556	-5	1	-1

Látható, hogy mindhárom módszer kimutatja a durva hibát a 9032 és 9039 pontokban, de a robusztus eljárások észrevehetően érzékenyebbek.

## Összefoglalás

A dolgozat bemutatta, hogy a hatékonynak számító M és W típusú robusztus becslések könnyen adaptálhatók lineáris kényszerfeltételekkel adott közvetett mérések kiértékelésére, és a Helmert-transzformáció ill. a relatív tájékozás példáján keresztül demonstrálta alkalmazásának előnyeit a hagyományos, legkisebb négyzetek elvén alapuló kiegyenlítéssel szemben.

Ezúton köszönöm meg Dr. Somogyi József és Dr. Závoti József professzor uraknak a cikk megírásához nyújtott sokoldalú segítségüket. Kutatásaim finanszírozását az OTKA T0030239 és T025320 számú pályázatait tették lehetővé.

## Hivatkozások

- Battha L, Nagy I, Somogyi J** (1981): Compensation of systematic errors in blockadjustment with independent models, *Acta Geod. Geoph. et Mont. Hung.*, 16. 209-235.
- Bill R, Hahn M** (1984): Ein Vergleich der  $L_1$ - und  $L_2$  Norm am Beispiel Helmertrtransformation, *AVN*, 11-12. 440-450.
- Carosio A** (1979): Robuste Ausgleichung, *Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik*, 11. 293-297.
- Collins JR** (1976): Robust estimation of a location parameter in the presence of asymmetry, *Annals of Statistics*, 4. 68-85.
- Hampel FR** (1974): The influence curve and its role in robust estimation, *J. Am. Stat. Ass.*, 69. 383-393.
- Huber PJ** (1973): Robust regression: asymptotics, conjectures and Monte-Carlo, *Annals of Statistics*, 1, 799-821.
- Huber PJ** (1981): Robust Statistics, *New-York: Wiley*.
- Kalmár J** (1990): Analytical relative orientation with robust estimation, *Acta Geod. Geoph. et Mont.*, 25. 453-458.
- Kalmár J** (1985): Fotogrammetriai nyalábkiegyenlítő programrendszer kisszámítógépre, *Geodézia és Kartográfia*, 37. 365-367.
- Kalmár J** (1995): A digitális terepmodell kutatások új eredményei, Kandidátusi értekezés.
- Kalmár J, Somogyi J** (1988): Verschiedene robuste Schätzungsverfahren für die Helmertrtransformation, *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten*, 95. 141-146.
- Kalmár J, Somogyi J** (1989): Robusztus becslési eljárások a Helmert-transzformációhoz, *Geodézia és Kartográfia*, 41. 6-10.
- Kalmár J, Somogyi J** (1991): The use of robust estimation in the geodetic data processing, *Acta Geod. Geoph. et Mont. Hung.*, 26. 57-68.
- Kerékfy P** (1978): A robusztus becslésekről, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 4. 327-357.
- Somogyi J** (1969): About the direct determination of the elements of rotation matrix, *Acta Geod. Geoph. et Mont. Hung.*, 4. 451-458.
- Somogyi J** (1988): Robust estimation and their use in geodesy, *Acta Geod. Geoph. et Mont. Hung.*, 23. 45-53.
- Somogyi J, Závoti J** (1987): Determination of transformation parameters with the method of the least sum of absolute values, *Acta Geod. Geoph. et Mont. Hung.*, 22. 237-249.
- Somogyi J, Závoti J** (1990): Die Anwendung der  $L_p$ -Norm-Schätzung für Ähnlichkeitstransformationen, *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 1. 28-36.

# A DIGITÁLIS FOTOGRAMMETRIA ÚJABB EREDMÉNYEI A NYME FÖLDMÉRÉSI ÉS TÁVÉRZÉKELÉSI TANSZÉKÉN

*Dr. Bácsatyai László, Czimber Kornél, Király Géza\**

*A cikk ismerteti a tanszéken folyó digitális fotogrammetriai kutatások újabb eredményeit. Áttekintést ad a kutatásokról, ismerteti az elméleti szoftverfejlesztési eredményeket, valamint a legjelentősebb gyakorlati alkalmazásokat.*

**Kulcsszavak:** digitális fotogrammetria, ortofotó, mozaikolás, tömbkiegyenlítés, felületmodell kinyerés.

## Bevezetés

Ez az összeállítás Somogyi József 70. születésnapja alkalmából készült. Az 1960-as évek végén Somogyi József volt az, aki - kanadai tanulmányútjáról hazatérve - a fenti szerzőtársak közül az elsőt "rászoktatta" a mátrixok megbecsülésére: a magyar geodéták körében akkortájt még ritka volt az, aki a mátrix-algebrát a geodézia és a fotogrammetria területén alkalmazta. Ugyanezen időben került a MTA Geodéziai Kutató Laboratóriumba egy - ird és mondd - 8 Kb. (!) operatív memóriájú (ma RAM-nak hívjuk) HP számítógép, amelyen - már a mátrix-algebrai ismeretek birtokában és szintén Somogyi József kezdeményezésére - sikerült megoldani a 7 paraméteres Helmert transzformáció programozását. Ez volt a szerző számára az első lépés az analitikus fotogrammetria területén. Az analitikus fotogrammetria tiszteletét később - már egyetemi oktatóként - sikerült átplántálni a szerzőtársakba, s ennek révén alakulhatott ki az a szerencsés helyzet, hogy a digitális fotogrammetria témakörében a fenti című előadást Somogyi József tiszteletére összeállíthattuk. Köszönet Márkus Istvánnak, a Távérzékelés tantárgy és a távérzékelési témájú pályázatok tanszéki felelősének, mert nélküle az előadást megalapozó eredmények jelentős része nem jöhetett volna létre.

A fotogrammetriát a feldolgozandó képanyag és a kiértékelő eszközök szerint ismeretesen az alábbiak szerint csoportosíthatjuk:

- Analóg fotogrammetria: analóg képek kiértékelése analóg műszerekkel.
- Analitikus fotogrammetria: analóg képek kiértékelése analitikus műszerekkel.
- Digitális fotogrammetria: digitális képanyag kiértékelése digitális eszközökkel.

Tanulmányunk az alábbi részekből épül fel:

- Az analóg kezdetek
- 1989. StereoCord G3
- 1991-1995. A Fertő tó digitális felületmodellje
- 1994. Czimber Kornél erdőmérnök hallgató diplomaterve: a döntő lépés a digitális fotogrammetriához
- 1996. Stereo - digitális térkiértékelő program, a DigiTerra cég megalakulása
- 1997. Image - digitális képfeldolgozó program és digitális ortofotó előállítás
- 2000. Tömbkiegyenlítő program

- 2001. Automatikus felületmodell kinyerés
- Alkalmazások (folyamatos)

## Az analóg kezdetek

A magyarországi fotogrammetria kezdő lépéseként 1854 nyarán Selmezbányán, a Bányászati és Erdészeti Akadémián Ujsághy Zsigmond erdőmérnök hallgató beszámolt arról, hogy "a daguerretyipiai ...., de kivált photographiai felvételekből, az orthogonális projectio minden méreteit, tehát úgy a vízszintes mint a függélyes távolságokat levezetni lehet, ....". "Későbbben, .... már egy lábnyi nagyságú photographiai képek is készülvén, mellyel egész tájakok felvehetők, Bécsben ... gyakorlati kísérlet tétetett ily fényképi felméréssel, de az csak vázlatnak nevezhető sikert aratott, mert a felvételi képek mosásnak lévén kitéve, a képek széthúzódnak, a mérési pontosság kárára." (Ujsághy, 1882). "Tehát az elv helyessége bebizonyosodott, csak az alap torzulása miatt nem kaptak pontos eredményt." (Németh, 1998).

Az Erdészeti Földméréstani Tanszék 1904 és 1923 közötti vezetője, Jankó Sándor, 1917-ben Pozsonyban jelentette meg az első magyar nyelvű Fotogrammetria tankönyvet.

Hosszabb szünetet követően, "a budapesti erdészeti gyakorlati fotogrammetria félbeszakadása után Sopronban az Erdészeti Földméréstani Tanszéken foglalkoztak gyakorlati fotogrammetriával 1952-1956 között. Mivel a tanszék keretein belül földi fotogrammetriai munka végzésére nyílt csak alkalom, a gyakorlati tevékenység is csak erre korlátozódott. Sébor János - Farkas Tibor - Sárkány Jenő - Teszárs Géza - Veress Sándor végezte a munkálatokat. Több írásban számoltak be az elért eredményekről, amelyek kiterjedtek mindazokra az erdőgazdasági tevékenységekre, tervezésekre, amelyeknél a földi fotogrammetriát sikerrel lehet alkalmazni. Sébor János egyetemi tanár 1952-ben megjelentette fotogrammetriai előadásainak anyagát jegyzet alakban." (Németh, 1998). Az erdészeti igényeket még kielégítő pontosságú, egyszerűbb fotogrammetriai munkamódszerekhez szolgáltak alapul Teszárs Géza és Kocsis József az 1960-1962 években publikált vizsgálatait.

Dr. Bezzegh László Kossuth díjas műszerkonstruktor, 1965 és 1979 között a Földméréstani Tanszék vezetője, az 1970-es években alkotta meg sztereofotogrammetriai műszerének, a StereoMOM-nak a prototípusát, amely, sajnos, nem került sorozatgyártásra és néhány év után helyhiány miatt szét kellett szedni. Sok-sok darabban most is ott található valahol az Egyetem raktárépületében. Ugyancsak nem kísérte siker az elvében részletesen kidolgozott radiálortoszkópia elnevezésű egyedül-álló ortofotó készítési eljárását, amelyet akadémiai doktori értekezésésként is benyújtott, de végül nem védte meg.

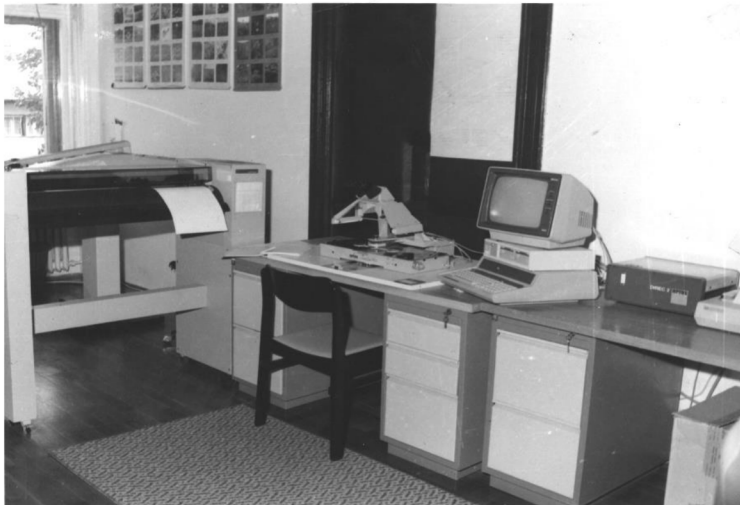
Bánky József egyetemi adjunktus 1987-ben "Ortofotók hasznosítása gazdálkodási, erdészeti céltérképek készítésében" című egyetemi doktori értekezésében az akkor legkorszerűbbnek számító AVIOPLAN OR1 műszerrel készített ortofotótérképek erdészeti alkalmazhatóságát vizsgálta. Az "analóg" időszakban számos fotogrammetriai témájú diplomaterv is született, elsősorban a földi fotogrammetria, a fotointerpretáció és az ortofotó témájában. A tanszéken készült fotogrammetriai témájú diplomatervek közül néhányat az alábbiakban sorolunk fel:

- Bácsi B: Illesztőpontok meghatározása ortofotó készítés céljára, 1986.
- Katona G: Színes infravörös légifelvételek felhasználása az erdőmérnöki gyakorlatban, 1987.

- Pintér Z: Kisfilmes, amatőr kamerás, infraszínes légifelvétel alkalmazásának vizsgálata, 1987.
- Szedlák T: Faállományjellemzők mérési lehetőségeinek vizsgálata amatőr kamerás földi sztereofotogrammetriai módszerrel, 1987.
- Kardos J: A fotogrammetria, a fotointerpretáció és a távérzékelés erdészeti alkalmazása, 1988.
- Ruff J: A digitalizált 1818 Zeiss sztereokomparátor üzemi próbája és pontosságának vizsgálata, 1988.
- Fekete Z - Milasovszky Z: Fertő-parti táj- és műemléképületek környezetének és homlokzatának felmérése földi és földi fotogrammetriai úton, 1992.
- Roska L - Szabó K: Színes digitális ortofotó alapú erdőterképezés, 1997.
- Király G: Nagyterületi erdőleltározás digitális úrfelvétel felhasználásával, 1997.
- Tajnai R: Illesztőpontok meghatározása a Fertő-Hanság Nemzeti Park területén GPS-szel, 2000.

### StereoCord G3

A tanszék oktatási és kutatási munkáiban jelentős szerepet játszott a StereoCord G3 számítógéppel segített, a sztereokomparátor elvén alapuló fotogrammetriai rendszer (1. ábra). A még analóg fényképeken mért  $x$  és  $y$  képkoordináták, ill. a  $px$  és  $py$  parallaxisok matematikai feldolgozását a mindössze 64 Kílobyte operatív memóriával rendelkező HP 86 típusú számítógép végezte, amelyet már lemezegységgel és grafikus mátrixnyomtatóval egészítettek ki. A számítógép ún. felhasználói szoftvere olyan erdészeti célú programokat is tartalmazott, mint fmagasság, koronaátmérő és fatömeg-meghatározás, állományosztályozás.

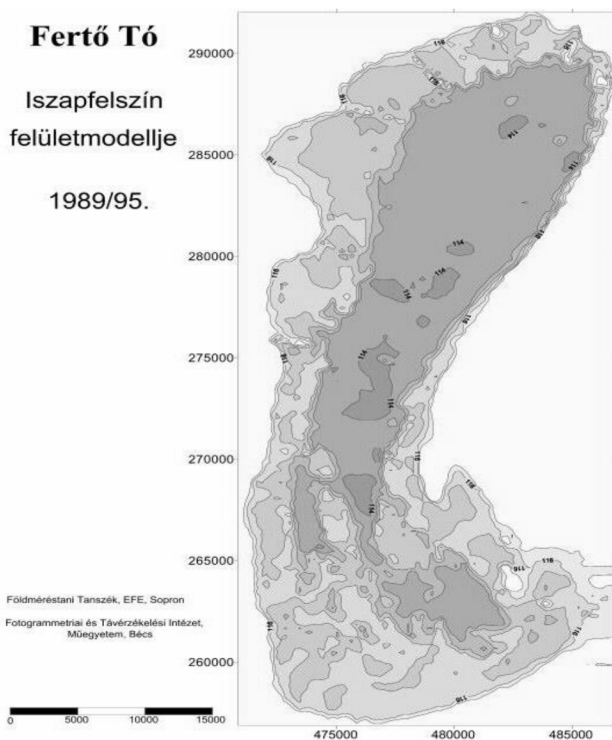


1. ábra. A StereoCord G3.

## A Fertő tó digitális felületmodellje

Az 1991-95 években OTKA pályázat keretében speciális eszközökkel kiegészített elektronikus tahimetriával előállítottuk a Fertő tó szilárd tófenék és iszapfelszín, valamint - a kettő különbségeként - az iszapvastagság digitális felületmodelljét. Mivel a Bécsi Műszaki Egyetem Fotogrammetriai és Távérzékelési Intézete már ezt megelőzően 1989-ben előállította a Fertő tó osztrák részének hasonló felületmodelljeit, az első határokon átnyúló tudományos együttműködés eredményeként létrejött a Fertő tó - későbbi közös kutatásokat is megalapozó - együttes magyar-osztrák felületmodellje (2. ábra).

Ez a munka, természetesen, nem kapcsolódott közvetlenül a digitális fotogrammetriához, de felsorolásunkból kihagyni nem lehet, hiszen sok tapasztalatot szereztünk a későbbi digitális ortofotó előállításához nélkülözhetetlen digitális felületmodellekről.



2. ábra. A Fertő tó iszapfelszín felületmodellje.

## Czimer Kornél diplomaterve: a döntő lépés a digitális fotogrammetriához

Az 1994-ben diplomatervét tanszékünkön készítő és védő Czimer Kornél erdőmérnök hallgató, későbbi tanszéki kollégánk elsődleges szerepet játszott abban, hogy tanszékünkön a digitális fotogrammetria művelése elkezdődhetett. "Digitális felületi modellek az

erdészeti tervezésben" c. diplomatervének mintegy melléktermékeként készített egy digitális felületmodellező szoftvert "DIGITERRA" címmel. Ez a program volt az a mag, amely köré kiépült az a geoinformatikai rendszer, amelyen belül alapvető szerepet játszanak a részben addig számítógépes célra még nem alkalmazott algoritmusokkal dolgozó digitális fotogrammetriai modulok. Diplomatervében a Mátra hegység, Nyírjes völgy közelében lévő lucfenyő származási kísérleti terület famagasság modelljét állította elő a talaj földi mérésekből és a fakorona felület légifényképekből létrehozott digitális felületmodellje alapján. Diplomatervéről annak külső bírálója, Csóka Péter, az akkori FM Erdőrendezési szolgálatának műszaki igazgatója többek között az alábbiakat írta: "A feladat valóságos pilot-programmá vált azáltal, hogy a rendkívül alapos geodéziai előkészítés nem csupán az eredmények megbízhatóságát növeli, hanem a módszer értékeléséhez is biztos alapot teremt. Ily módon szinte két diplomatervnyi feladat került megoldásra, hiszen a digitális felületkezelő program önmagában is megállja a helyét".

A digitális képfeldolgozás és fotogrammetria előfeltétele a számítógép háttértárolóján tárolt digitális kép. A digitális kép előállításának leghatékonyabb módszere a digitális letapogatók (szkenner, angolul scanner) használata. A letapogató berendezés soronként vizsgálja a pixeleket és fotodiódáival meghatározza minden egyes pixel intenzitását. A lapolvasó egyik legfontosabb ismérve a felbontóképesség. A szkennelt fényképek mérete rendkívül nagy lehet, így a felbontás kiválasztásánál ezekkel számolni kell (1. táblázat). A szkennelés során elérhető felbontás ma még nem éri el az analóg képek felbontását.

1. táblázat. Felbontás és lapméretek.

Szkennelés		Képméret, ISO lapméret, az adatok MB-ban értendők					
Felbontás	Színmélység	6x6 cm	23x23 cm	A5	A4	A3	A2
300 dpi	Színes	1.4	21.1	12.5	24.9	49.8	99.6
	Szürkeskálás	0.5	7.0	4.2	8.3	16.6	33.2
600 dpi	Színes	5.7	84.5	50.0	99.6	199.1	398.3
	Szürkeskálás	1.9	28.2	16.7	33.2	66.4	132.8
1200 dpi	Színes	23.0	<b>337.8</b>	199.8	398.3	796.6	1593.1
	Szürkeskálás	7.7	112.6	66.6	132.8	265.5	531.0
2400 dpi	Színes	92.0	<b>1351.2</b>	799.2	1593.1	3186.3	6372.5
	Szürkeskálás	30.7	450.4	266.4	531.0	1062.1	2124.2

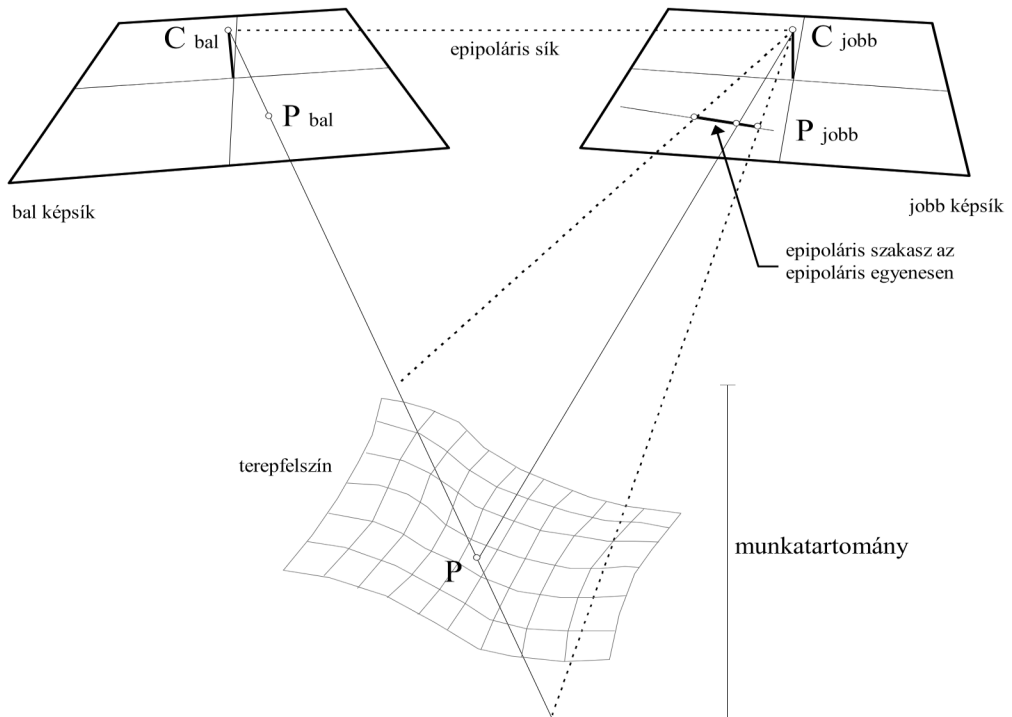
Elsősorban a digitális képek nagy mérete miatt a digitális fotogrammetriai fejlesztés tanszékünkön a megfelelő képességű hardver beszerzése után kezdődhetett el. A rendkívül drága, a térmodell közvetlen szemlélését is lehetővé tevő fotogrammetriai munkaállomás beszerzése nagymértékben meghaladta tanszékünk anyagi lehetőségeit, így a fejlesztés PC-s környezetben történt. Olyan program született, amely egyszerű személyi számítógépeken fut, nem biztosít térbeli szemlélést, de minden tekintetben támogatja a kiértékelést.

## A STEREO térkiértékelő program és a DigiTerra cég megalakulása

1996-ban elkészült a STEREO elnevezésű térkiértékelő program. Mivel itt nincs térbeli szemlélet, az irányítás a képek közötti perspektív kapcsolaton alapul. Az irányítás során az egyik képen megjelölt pont és a kép perspektív centruma között egy térbeli egyenes jön létre, melyet a másik képre vetítünk. A vetített egyenesen, amelyet epipoláris egyenesnek vagy magsugárnak nevezünk, kell lennie a megjelölt pont homológ párjának. A manuális irányítás egy pontmegjelölésből és a kirajzolt epipoláris egyenesen a homológ pont kiválasztásából áll. Az epipoláris egyenes megfogalmazható a két perspektív centrum, a két összetartozó képi pont által meghatározott sík, mint epipoláris sík vagy magsík és a képsík metszésvonalaként is. Az irányítás több módon is segíthető:

- a térbeli egyenesnek csak azt a részét vetítjük a képsíkra, amelyik a munkatartományba esik, az epipoláris egyenesnek ezt a részét nevezzük epipoláris szakasznak.
- ezek a rendszerek tetszőleges számú képet tudnak egy időben feldolgozni, ezért az irányításhoz bármelyik két kép, vagy az összes felhasználható tetszőleges sorrendben.
- digitális képek közötti hasonlóság alapján a rendszer az epipoláris szakasz mentén megkeresi, és felajánlja a homológ pontot. A felkeresés korreláció-számításon alapul.

A 3. ábra a képek perspektív kapcsolatát illusztrálja:



3. ábra. A képek perspektív kapcsolata.



Az automatikus irányzás az egyik legfontosabb a digitális fotogrammetriai rendszer által nyújtott funkciók közül. Segítségével a kiértékelés folyamata többszöröse gyorsítható, illetve digitális felületmodellek állíthatók elő.

Az automatikus irányzás a képek közötti perspektív kapcsolaton túl a képi tartalom egyeztetésén alapul. Amennyiben az egyik képen megjelölünk egy képi pontot, a pont és a perspektív centrum közötti térbeli egyenes egy részének másik képre történő vetítésével megkaphatjuk a képi ponthoz tartozó epipoláris szakaszt. Ezek után a számítógépes program a megjelölt pont megadott régió belüli pixeleit és a vetített szakasz egyes pontjai körüli pixeleket hasonlítja össze. Ahol a szakaszpont pixelei a legjobban hasonulnak, korrelálnak a megjelölt pont pixeleivel, ott van a homológ pont. A megjelölt és a homológ pont közötti perspektív kapcsolat alapján a térbeli koordináták számíthatók. A kiértékelőnek így elegendő csak az egyik képen megjelölni a mérendő pontot.

A kiértékelés előtti fontos művelet a képek megfelelő tájékozása. A tájékozás folyamata belső-, relatív- és abszolút tájékozásra bontható. A belső tájékozás a keretjelek képi pozíciójának megjelöléséből és mért/kalibrált koordinátáinak megadásából áll. A relatív tájékozás a közismert koplánaritási egyenleteken alapul. Lényege, hogy egy terepi pont két felvételen leképeződött képe és a két felvétel perspektív centruma egy síkon helyezkedik el. A felvételek abszolút tájékozása viszont a kollinearitási egyenletek segítségével történik:

$$\begin{aligned} p_x - k_x &= \frac{(x - C_x) \cdot r_{11} + (y - C_y) \cdot r_{12} + (z - C_z) \cdot r_{13}}{(x - C_x) \cdot r_{31} + (y - C_y) \cdot r_{32} + (z - C_z) \cdot r_{33}} \cdot (-f) \\ p_y - k_y &= \frac{(x - C_x) \cdot r_{21} + (y - C_y) \cdot r_{22} + (z - C_z) \cdot r_{23}}{(x - C_x) \cdot r_{31} + (y - C_y) \cdot r_{32} + (z - C_z) \cdot r_{33}} \cdot (-f) \end{aligned} \quad (1)$$

ahol  $p_x, p_y$  : P illesztőpont képi koordinátái  
 $k_x, k_y$  : képfőpont eltolódás  
 $x, y, z$  : P illesztőpont valós (vetületi) koordinátái  
 $C_x, C_y, C_z$  : a C perspektív (leképezési) centrum valós koordinátái  
 $f$  : elméleti fókusz távolság (kamera állandó)

A kollinearitási egyenletekben szereplő  $r_{11}, r_{12}, r_{13} \dots$  tagokat a következő forgatási mátrix szerint kell értelmezni:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2)$$

(Más szakirodalmakban használatos  $\omega, \varphi, \kappa$  elforgatási szögek helyett az  $x, y, z$  tengelyek körüli forgatásokat itt rendre az  $\alpha, \beta, \gamma$  szögek jelölik.)

A kollinearitási egyenleteket a program a Newton-féle linearizálással oldja meg. A lineáris formában felírható egyenletek iterációja, megfelelő előtájékozás után, kvadratikusan konvergál, és már 5-6 lépés után a megfelelő eredményeket kapjuk. Az eljárás előnye a gyorsaságán kívül az, hogy semmilyen egyszerűsítést nem kell alkalmazni (például az analitikus fotogrammetriában használt  $\sin(\alpha) = \alpha, \cos(\alpha) = 1$ , ha  $\alpha$  kis érték stb.) és közvetlenül a forgatási szögeket, koordinátákat kapjuk. További előny, hogy tetszőleges felvételi helyzetű (földi, légi, ferde, űr) képek tájékozására is alkalmas.

Az eljárás alapegyenletei a (1) formulák rendezésével a következők:

$$F = (p_x - k_x)((x - C_x)r_{31} + (y - C_y)r_{32} + (z - C_z)r_{33}) + f((x - C_x)r_{11} + (y - C_y)r_{12} + (z - C_z)r_{13}) = 0$$

$$G = (p_y - k_y)((x - C_x)r_{31} + (y - C_y)r_{32} + (z - C_z)r_{33}) + f((x - C_x)r_{21} + (y - C_y)r_{22} + (z - C_z)r_{23}) = 0 \quad (3)$$

Az eljárás segítségével az  $F$  és  $G$  egyenletek bármely eleme javítható. Egy adott kép elforgatási szögeinek ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) és perspektív centrumának ( $C_x, C_y, C_z$ ) javítása a következő két differenciál egyenlettel történik:

$$F + d_1 \frac{dF}{d\alpha} + d_2 \frac{dF}{d\beta} + d_3 \frac{dF}{d\gamma} + d_4 \frac{dF}{dC_x} + d_5 \frac{dF}{dC_y} + d_6 \frac{dF}{dC_z} = 0 \quad (4)$$

$$G + d_1 \frac{dG}{d\alpha} + d_2 \frac{dG}{d\beta} + d_3 \frac{dG}{d\gamma} + d_4 \frac{dG}{dC_x} + d_5 \frac{dG}{dC_y} + d_6 \frac{dG}{dC_z} = 0$$

Természetesen minél több pontot vonunk be a tájékozásba, annál több differenciál egyenletpárt írhatunk fel. A fenti esetben a szögek és a centrum javításához minimum 3 illesztőpont szükséges. Több pont megadása esetén a legkisebb négyzetek módszere alkalmazható. Az így kapott egyenletrendszert a program a legkisebb négyzetek módszerével oldja meg. A megoldás sebességre optimalizált módosított Gauss-eliminációval történik. A megoldás a  $d_{1..n}$  differenciákat adja, melyeket rendre hozzá kell adnunk a javítandó elemekhez.

A program a tájékozáshoz számos interaktív eszközt kínál: hibavektorok, mintavételi rács, pontfelkeresés, pontok rendezése a képi hiba nagysága szerint stb. A későbbiekben említett sugárnyaláb kiegyenlítés is a kollinearitási egyenleteken és a Newton-féle linearizáláson alapul.



4. ábra. A STEREO program még saját fejlesztésű grafikus felülettel készült.

A STEREO program, ill. az erdészeti gyakorlathoz kapcsolódó egyéb modulok piaci értékesítése meghaladta tanszékünk lehetőségeit, nem beszélve arról, hogy nem is ez a feladata. Ezért volt diplomatervező hallgatóink, Nyull Balázs, Czimmer Kornél, valamint az Erdőrendezéstani tanszéken diplomatervezett Eöry Gyula 1996-ban megalakították a Czimmer Kornél diplomatervében szereplő szoftver nevével azonos DigiTerra Bt-t. A DigiTerra cég legújabb térinformatikai és digitális fotogrammetriai fejlesztéseivel a mai napig nemcsak az erdészeti ágazatban, hanem a geodézia területén is komoly tekintélyt vívott ki magának. Tanszékünk teszteni a DigiTerra cég programjait, cserébe azokat oktatási és kutatási célra térítésmentesen használhatja. A 4. ábrán a STEREO program munkafelületét mutatjuk be.

## **Digitális képfeldolgozás és digitális ortofotó**

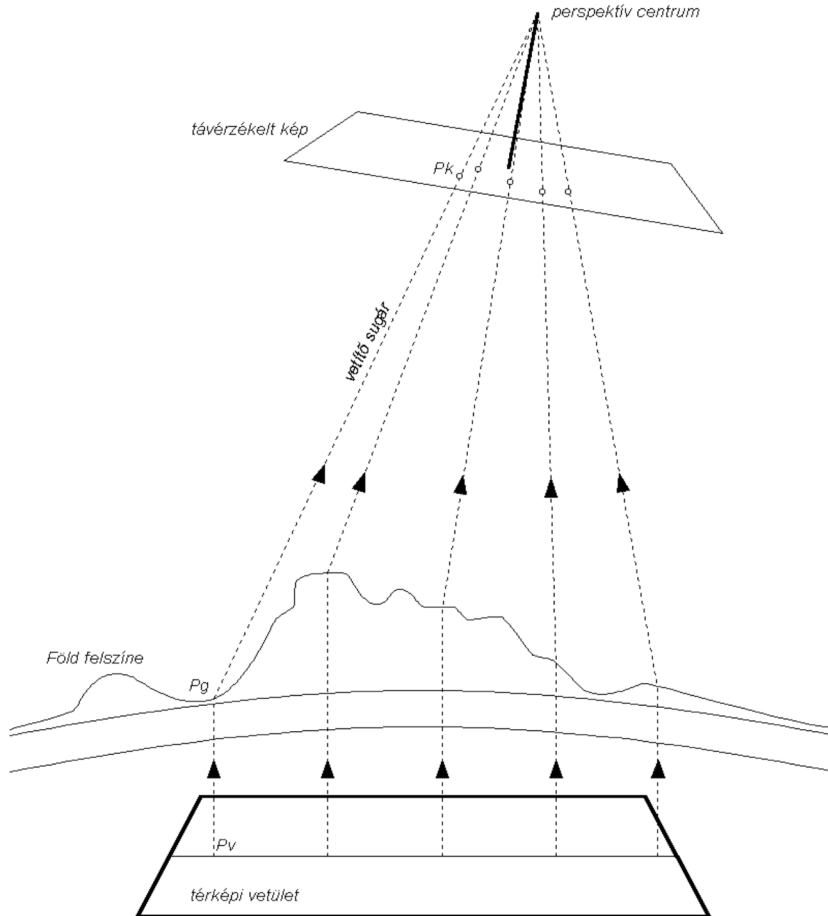
1997-ben a DigiTerra programrendszer két újabb modullal bővült, melyek közül tanulmányunk szempontjából a IMAGE szoftver érdekes. Az IMAGE digitális képfeldolgozó program az első magyar fejlesztésű szoftver, mely digitális ortofotót állított elő.

Az IMAGE modul általános képfeldolgozó szoftver. Segítségével tetszőleges távérzékelt digitális kép feldolgozható. A szoftver számos funkciót rejt magában: vizuális interpretáció, kép statisztikák, kontraszt széthúzás, szűrés, képalgebra, képjavítás, tanuló- és teszterületek megjelölése, képek osztályozása. Digitális képeken kívül a program raszteres digitális terepmodellek előállításához nyújt eszközöket. Funkciói között megtalálható a képek radiometriai- és geometriai korrekciója, darabolása, összedolgozása. A geometriai javítás polinomiális és projektív tájékozáson alapulhat. A fentiekből látható, hogy az ortofotó készítéshez szükséges minden egyes elem megtalálható a programban. 1999-ben a képfeldolgozó és ortofotó készítő modul beépült a DigiTerra Map programban is, és ott került továbbfejlesztésre.

A digitális ortofotó előállítása a digitális fotogrammetriai szoftverek talán legfontosabb funkciója. Az analóg ortofotó készítés aprólékos, pontos munkát igénylő, apró részterületek átfényképezéséből áll. A digitális változat a tájékozott digitális képek és az átalakítandó rész digitális felületmodelljének ismeretében egy könnyen, egyszerűen megfogalmazható eljárás. Az eljárás elvét az 5. és a 6. ábrán kísérhetjük nyomon.

A fényképek tájékozása után a készítendő ortofotó befoglaló méreteivel meg egyező, az eredmény vetületi rendszerben elhelyezett szabályos rácshálót definiálunk. A rácsháló minden egyes képelemét – a digitális felületmodell közbeiktatásával – vetítésugarak segítségével rávetítjük az eredeti képre. A vetítésugarak a perspektív centrumból indulnak ki. A vetítésugarak által az eredeti képből kimetszett pixelek szürkeségi vagy színértékeit az ortofotó megfelelő képelemébe visszairjuk.

A digitális ortofotó előállítás sarkalatos pontja a pontos tájékozás és a precíz digitális felületmodell. A felületmodellnek le kell tudni írni az épületek, háztetők sík felületeit, a terep törésvonalait és mesterséges alakzatait. Ebből következik, hogy a digitális ortofotó készítés feltételezi a korszerű digitális felületmodellezési eljárások alkalmazását. A DigiTerra programrendszer több felületmodellezési eljárást támogat. Eljárásai között megtaláljuk a raszteres, szintvonal, idomvonal, törésvonal, szabálytalan háromszögháló, háromdimenziós test alapú modellezési eljárásokat is.



5. ábra. Digitális ortofotó készítésének elve.

Az úrfelvételek és a kisméretarányú légitényképek esetében a Föld görbületével és az atmoszférával is számolni kell. Számos mérőkamera esetében ismertek az elrajzolási hibák, amelyek szintén bevonhatók az ortofotó készítésbe. Megfelelő számú hiteles illesztőpont esetén a tájékozás folyamán az elrajzolási hibák számíthatók.

A korrekt ortofotó elkészítése rendszerint több távérzékelte felvétel merőleges helyreállításával történik. Ennek egyik oka az, hogy egy képről az ortofotó területének csak egy kis részét tudjuk kitölteni és több felvételből áll össze a végeredmény. A másik ok, hogy a képen előfordulhatnak kitekart részek. A teljes ortofotó több képből történő összeállítását nevezzük mozaikolásnak, mely rendszerint a képi tartalomhoz igazodó határok mentén (vonalas létesítmények, épületek szélei) kapcsolja össze a transzformált képeket.

A DigiTerra Map ortofotó készítő modulja támogatja az automatikus és a manuális mozaikolást is. Lehetőség van szabályos és szabálytalan alakzatokkal történő vágásra, kontraszt–fényerő–színtónus valós idejű módosítására. A mozaik tetszőleges része elmenthető.



6. ábra. Ortofotó készítés lépései: 1. légifénykép tájékozása, 2. digitális térkép és terepmodell, 3. ortorektifikáció.

## Tömbkiegyenlítés

A tömbkiegyenlítésre alkalmas DigiTerra modul 2000-ben készült el. A tömbkiegyenlítés lényege, hogy az átfedéssel készült, sorokba, majd tömbökbe rendezett légifelvételék tájékozása együttesen történik. Előnye, hogy az átfedő részekben tetszőleges számú, a képen azonosítható, de valós koordinátáit tekintve határozatlan kötőpont definiálható. A kötőpontok által nyújtott perspektív kényszer biztosítja a tömb együttes tájékozásának és túlhatározottság esetén a tömb kiegyenlítésének lehetőségét. Az abszolút tájékozáshoz elegendő mindössze három illesztőpontot definiálnunk. Meg nem közelíthető területek a kötőpontok segítségével áthidalhatók.

A szakirodalom számos tömbkiegyenlítési lehetőséget említ. A DigiTerra szoftverkörnyezet talán a legrugalmasabb sugárnyaláb kiegyenlítést támogatja. Az eljárás a rendezett kollinearitási egyenletpárból (3) indul ki. Ha a Newton-féle linearizálást kiterjesztjük több képre és a pontok valós koordinátáira, akkor eljuthatunk a sugárnyaláb kiegyenlítéshez. A (4) egyenletpár egy adott pont és egy adott kép esetében, melyben a tájékozási elemeken kívül az illesztőpont koordinátáit is javítjuk, a következőre módosul:

$$F + d_1 \frac{dF}{d\alpha} + d_2 \frac{dF}{d\beta} + d_3 \frac{dF}{d\gamma} + d_4 \frac{dF}{dC_x} + d_5 \frac{dF}{dC_y} + d_6 \frac{dF}{dC_z} + d_7 \frac{dF}{dx} + d_8 \frac{dF}{dy} + d_9 \frac{dF}{dz} = 0 \quad (5)$$

$$G + d_1 \frac{dG}{d\alpha} + d_2 \frac{dG}{d\beta} + d_3 \frac{dG}{d\gamma} + d_4 \frac{dG}{dC_x} + d_5 \frac{dG}{dC_y} + d_6 \frac{dG}{dC_z} + d_7 \frac{dG}{dx} + d_8 \frac{dG}{dy} + d_9 \frac{dG}{dz} = 0$$

A fenti differencia egyenletpárba a belső tájékozási elemek (elrajzolás, képfőpont eltolódás) is bevonhatók. Több kép és több pont esetén számos egyenletpár írható fel. Előfordulhat, hogy ugyanarra a pontra két vagy több képről is történik mérés. Ha a pont síkbeli koordinátáit ismerjük (térvépről levett pont), akkor síkpontról, ha a magasságát (házte-tő), akkor magaspontról beszélünk. Ha a pont minden egyes koordinátáját ismerjük, és nem akarjuk javítani, akkor illesztőpontról, viszont ha a pont mindhárom koordinátáját javítani akarjuk, akkor kötőpontról beszélünk.

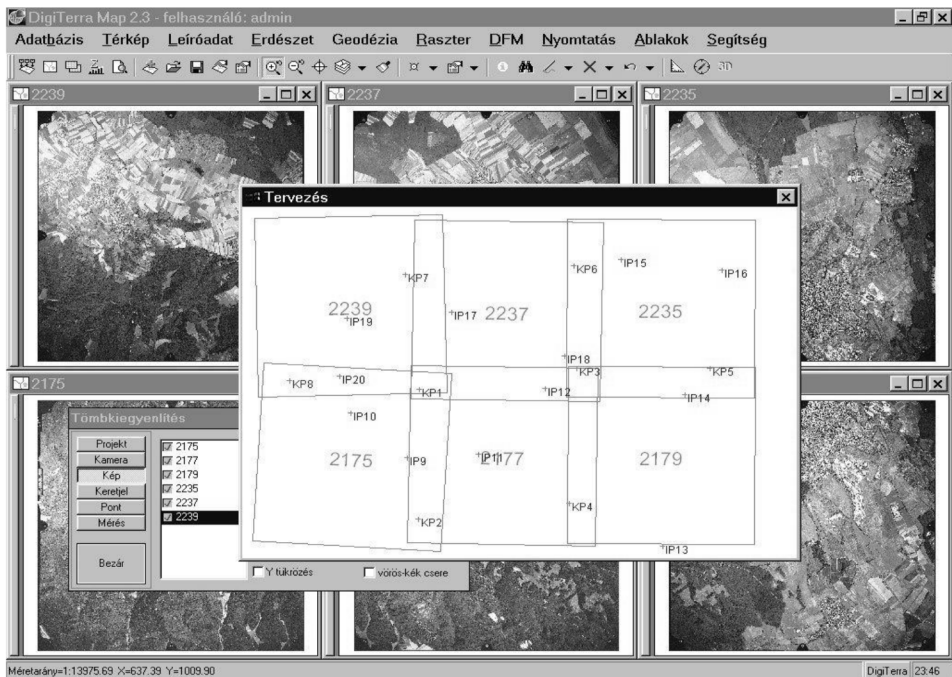
Attól függően, hogy egy pontra történő méréskor mely elemeket tekintjük ismertnek, melyeket ismeretlennek és a pontra mely képekről történik mérés egy rendkívül összetett differenciál egyenletrendszer kaphatunk. Az egyenletrendszerben sok esetben

több ezer – több tízezer ismeretlen lehet. Az egyenletrendszer megoldása mátrix alakban már számos speciális megoldást kíván. A mátrix 1-10%-ban feltöltött ritka mátrix. Az első speciális szoftvertechnológiai módszer a mátrix tömörítése, és tömörített formában kezelése. A másik módszer pedig a számítás minimalizálása. Erre számos lehetőség kínálkozik: főelem kiválasztása csak a főátló környezetében, a bázistranszformációnál az üres sorok és oszlopok átugrása stb. A nagyfokú optimalizálásnak köszönhetően a Digi-Terra sugárnyaláb kiegyenlítő modulja a jelenlegi PC-s környezetben pár másodperc alatt tájékoz egy 100 képből álló modellt.

A sugárnyaláb kiegyenlítésnek számos további előnye származik. A kiegyenlítés egyszerre történik, a hibák szisztematikusan tárhatók fel. A kiegyenlítés után egy lépésben indulhat az ortofotó készítés. Az ortofotó készítéskor a mozaikolás, az átfedések, a színegyensúly, fényesség különbségek már készítés közben figyelembe vehetők. Lehetőség van térkiértékeléshez a tájékozott felvételpárok átvételére, illetve a tanulmányban lejjebb olvasható automatikus felületmodell kinyerésre.

Tömbkiegyenlítés során gyakran 50-100 képpel kell dolgozni. Tekintettel a képek méreteire (300MB-1.2GB) ez sok esetben hatalmas, nehezen mozgatható adathalmazt jelent. Tanszékünk munkájában bevett gyakorlat a köztes munkaszakaszokban a digitális képek tömörítése (Wavelet tömörítés), és lehetőleg csak a végső fázisban a forrásképek használata.

A 7. ábrán a program munkafelületét láthatjuk:



7. ábra. A tömbkiegyenlítő modul munkafelülete a tervezési munkaszakaszban.

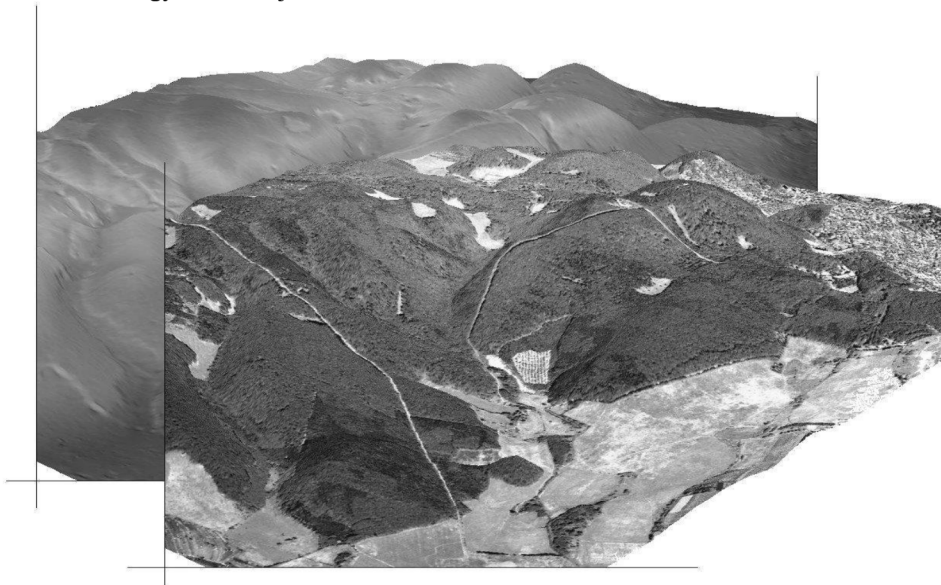
## Automatikus felületmodell kinyerés

Az automatikus felületmodell kinyerés a tájékozott légifelvételék átfedő részein történik. A módszer a sztereoszkópikus elven és a képrészletek vagy képbjektumok egyeztetésén alapul. Különleges előnye van a digitális ortofotó létrehozásában azokon a területeken, ahol nincs domborzatmodell vagy az nem megfelelő pontosságú. Segítségével lehetővé válik a valós ortofotó elkészítése, vagyis az ortorektifikáció nem a domborzat, hanem a borított felszín alapján készülhet el, így az épületek, fák függőlegesek lesznek, és több kép bevonása esetén nem lesz kitakart rész. A DigiTerra környezetben az automatikus felületmodell kinyerés 2001-ben vált lehetővé.

Mivel az automatikus felületmodell kinyerés a tömbkiegyenlítő modulhoz kapcsolódik, elsődleges igény volt, hogy ne csak két képre, hanem az egész tömbre készüljön el a felületmodell. Ezért olyan módszert kellett választani, amely nem csak két kép között működik, hanem az átfedő részeken akár több kép alapján készíti el a felületmodellt. A módszer a legegyszerűbben úgy kivitelezhető, ha az ortofotó térben történik a képegyeztetés. Az eredmény felületmodell a forrásképek terepi felbontásával megegyező vagy annál kisebb felbontású raszteres felületmodell lesz.

Tekintettel a képek nagy méretére, elengedhetetlen volt az eredmény felületmodell részletekben történő megoldása, vagyis a blokkosítás. Természetesen a blokkokat a végeredményben össze kell illeszteni és simítani. A blokkok mérete általában 1024x1024 elem.

Az egyes blokkok megoldása a blokkot átfedő forrásképek betöltésével indul. A megoldás több lépcsős, ún. piramistechnikát használ. A megoldás első lépésében egy kis felbontású sík felületből indulunk ki, amely a magassági javítás után a következő szintnek szolgál alapul. A következő szint már dupla akkora felbontású, és ez mindaddig folytatódik míg a megkívánt terepi felbontást el nem érjük. Ezzel a technikával elkerülhető a hibás egyeztetések jelentős része.



**8. ábra.** Hátterben az automatikusan generált felületmodell, előtérben a felületmodellre húzott digitális ortofotó.

Az egyes szintek esetében a magassági javítás az aktuális felületmodell függőleges eltolásával kezdődik. A magassági eltolás általában a  $-2TF$  ..  $+2TF$  értékkel történik általában 9 lépésben, ahol  $TF$  az aktuális terepi felbontás. Az eltoló felületmodellekre minden egyes betöltött forrásképről elkészítjük az ortofotókat. Ezután a vizsgálat képelemenként folytatódik. A képelem új magassága az lesz, ahol az egyes ortofotó részletek között számított korreláció a legnagyobb. Az ortofotó részletet általában egy  $11 \times 11$  méretű ablak határozza meg.

Az aktuális szint magassági javítása után a következő lépés a simítás. A simítás első feladata a gyenge korrelációval rendelkező területek áthidalása. Ezek a területek általában textúrában szegény, homogén részek: vízfelület, erdő, szántóföld. A simítás második feladata a tévesztések kiejtése. A simítást a program szintén piramistechnikával oldja meg. A simítás után jön a következő szint magassági javítása. Ha elértük a kívánt terepi felbontást, akkor a blokk megoldottnak tekinthető.

Minden egyes blokk megoldása és összeillesztése után az eredmény felületmodell előállt. A módszernek köszönhetően a felületmodellel párhuzamosan elkészül a korrelációs kép és a globális ortofotó is. Eddigi tapasztalatok szerint a felületmodell magassági pontossága a képi tartalomtól függően a terepi felbontás 2..4-szeresében adható meg.

Az automatikusan kinyert borított felszín modelljéből átlagoló és minimumszűrők alkalmazásával levezethető a domborzat digitális modellje. A domborzatmodell lehetővé teszi további tematikák, így a lejtőkategória, kiettség, megvilágítás, láthatóság elkészítését is. A módszerben számos további lehetőség rejlik: automatikus mozaikolás és színegyensúly számítás, 3D városmodellek, földi fotogrammetria stb.

## Alkalmazások

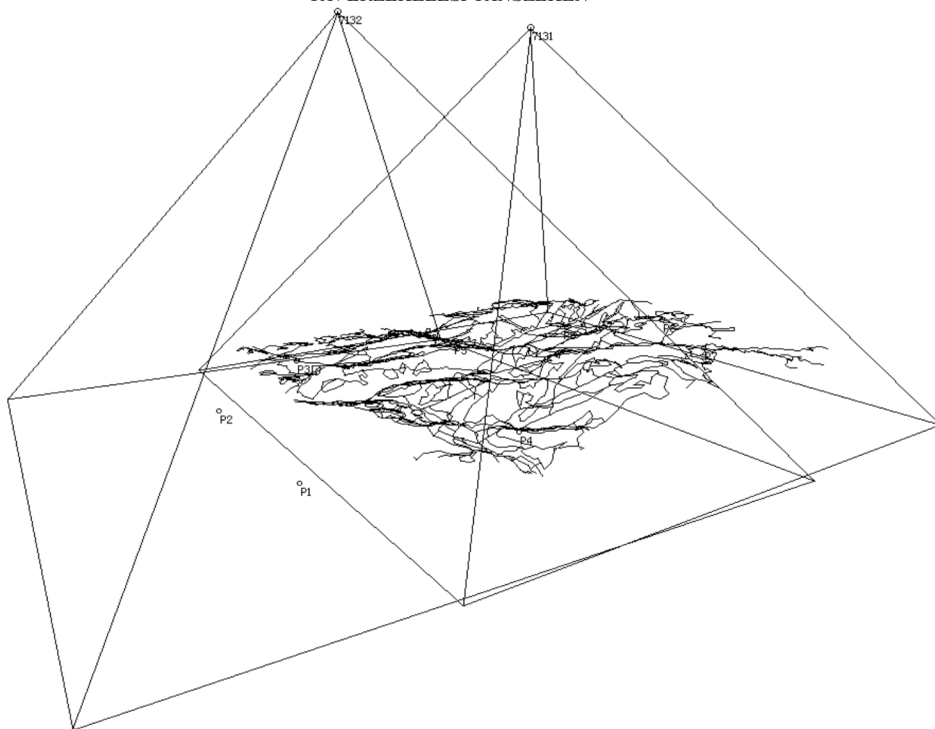
A digitális fotogrammetria fentebb vázolt lehetőségei számos pályázatban, ill. amatőr szinten kerültek alkalmazásra. Ezek közül a fontosabbak:

- **Király Géza diplomaterve, 1997.**
- **Első ortofotók, 1998.**
- **A Fertő-Hanság Nemzeti Park és Szigetközi Tájvédelmi körzet térinformációs rendszere, PHARE CBC, 1999.**
- **A NYME soproni Botanikus Kertjének digitális ortofotója, 2000.**
- Két mintaterület faállomány-paramétereinek fotogrammetriai meghatározása, 2000.
- **A Soproni-hegység ortofotó-mozaikja, 2000.**
- **A Matterhorn digitális ortofotója amatőr ferde tengelyű földi felvételekből, 2000.**
- A Soproni-hegység tömbkiegyenlítése, 2001.
- **Hasselblad amatőr kamerás felvételek tömbkiegyenlítése a Fertő tó hínártérképezéséhez, KÖC pályázat, 2001.**
- Emberi arc domborzati modellje amatőr digitális képekből, 2001.

A fenti témákat az alábbiakban ismertetjük részletesebben.

**1997**-ben a DigiTerra Stereo programot elsőként Király Géza alkalmazta, aki erdőrészlet határok meghatározására használta hegyvidéki területen (Király, 1997). Munkájának egyik eredménye egy 3 dimenziós digitális üzemi térkép, melynek részletét mutatja be a 9. ábra:





9. ábra. 3D-s üzemi térkép perspektív képe.

1998-ban az IMAGE program segítségével ortofotókat állítottunk elő. Ezeknek az alapját analóg infraszínes felvételek adták, amelyeket asztali szkennerek segítségével, 85 mikronos felbontással (300 dpi) digitalizáltunk. A felületmodellként a DDM-10-et, illetve saját vektorizálást használtunk. Az illesztőpontok egyrészt földi mérésekből (Bácsi 1986, Bánky 1987), másrészt az erdészeti üzemi térképről származtak.

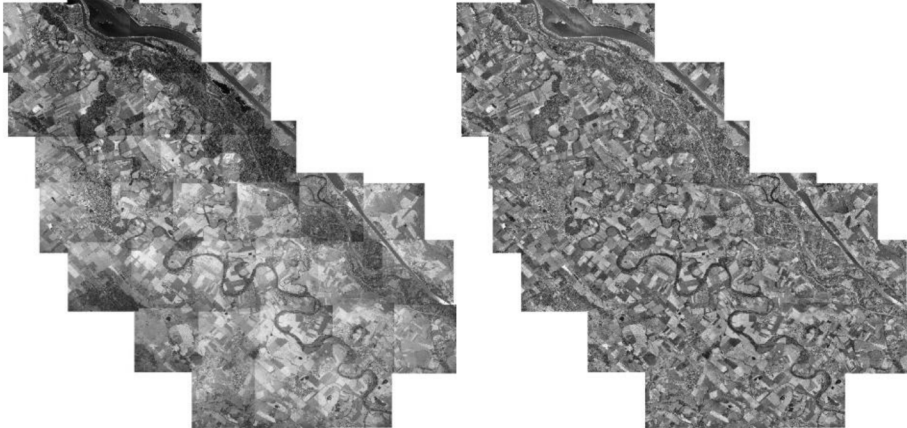
1999-ben Dr. Márkus István témavezetésével a PHARE CBC – Fertő-Hanság NP és Szigetközi TK Térinformációs Rendszerének Kifejlesztése c. projekt keretén belül hatalmas területről készítettünk ortofotó-mozaikokat. Az ortofotók alapját képező légi-fényképek adatait az alábbi táblázat tartalmazza:

2. táblázat. Légifényképek adatai.

Film típusa:	Kodak Aerochrome II Infrared Film 2443
Felvétel időpontja:	1999. augusztus 1-2.
Méretarány:	~ 1 : 30 000
Kamera típusa:	RC20
Objektív típusa és száma:	15/4 UAGA-F; 13096
Szkennelés	42 mikron (600 dpi), professzionális
Terepi felbontás	~ 1,2 m

Ennél a munkánál a képekből egyenként készítettünk ortofotót, majd összemozsajkoltuk őket. 4 területen (Fertő, Hanság, Szigetköz, Répce) összesen 74 képet dolgoztunk fel,

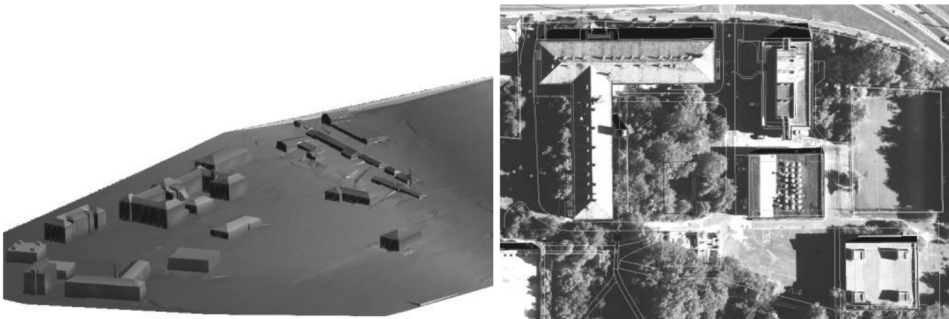
nem kis tapasztalatot szerezve az ortofotó-készítés és mozaikolás terén. A kutatásban főként az ER Mapper szoftvert alkalmaztuk, és a tapasztalatok beépültek a DigiTerra Map programba. A szigetköz mozaikolását a 10. ábra szemlélteti:



10. ábra. Mozaikolás és színegyensúly számítás.

2000-ben igen sok új eredmény született fotogrammetriai téren. A fent említett PHARE CBC projekt keretében sikerült pár nagyméretarányú képpárt is beszerezni, egyrészt az egyetem botanikus kertjéről, másrészt két faállománnyal borított mintaterületről.

A Botanikus Kert esetében 2 diplomaterv keretében elkészült az alaptérkép (Török 1998, Jurák 2000.). A földi mérésekből származó felületmodellt az épületek fotogrammetriai felmérésével egészítettük ki. Így megkaptuk – legalábbis az épületek esetében – a borított felszín modelljét. Ennek segítségével készítettük el a területről az ortofotót. A két képből előállított ortofotót oly módon mozaikoltuk össze, hogy a perspektív középpontokból láthatósági vizsgálatot végeztünk, és a kitarart részeket a másik képpel helyettesítettük. Erről ad szemléltetést a 11. ábra:



11. ábra. Az épületekkel kiegészített felületmodell perspektív képe, valamint a valós ortofotó.

Az AESZ, a DigiTerra, valamint a tanszék között létrejött háromoldalú megállapodás keretében ortofotókat készítettünk a Soproni-hegységről, valamint megvizsgáltuk ezek pontosságát.



12. ábra. A Soproni-hegység ortofotó-mozaikja az erdőrészlet-határokkal (részlet).

A pontossági vizsgálat során különböző illesztőpontokat, felületmodelleket és szoftvereket alkalmaztunk, és vizsgáltuk ezek hatását a pontosságra. Az illesztőpontok az alábbi csoportokban álltak rendelkezésünkre:

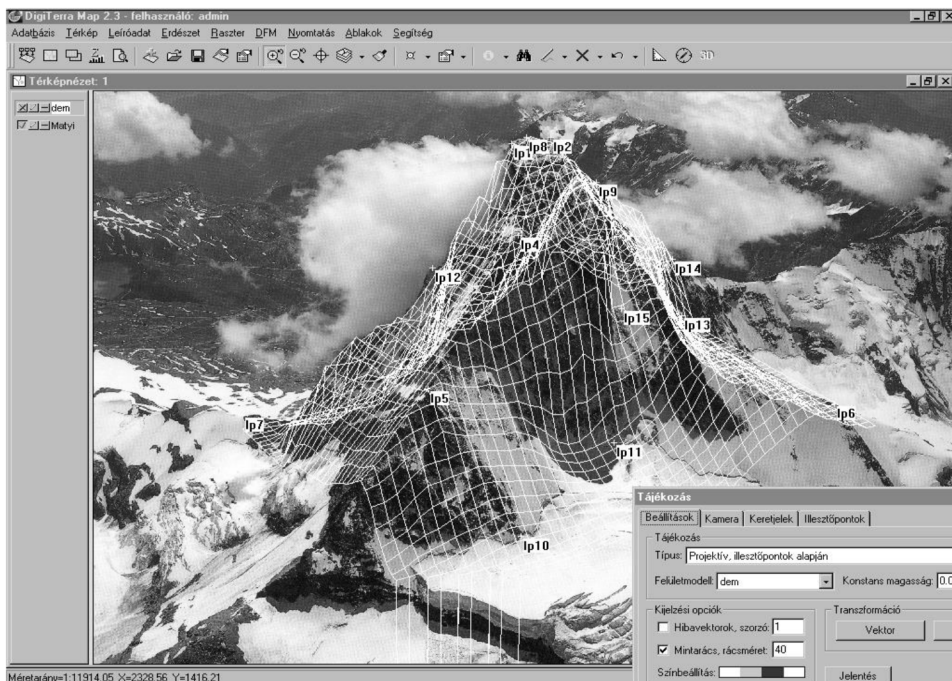
- tahimetriával meghatározott pontok 18 pont két csoportban
- GPS-szel meghatározott pontok 23 pont két csoportban
- digitális térképekről levett pontok:
  - digitális erdészeti üzemi térképről levett pontok 9 pont
  - DTA 50-ről levett pontok 10 pont
  - 1:10 000-es topográfiai térképről levett pontok 10 pont
- Összesen 70 pont

Az összes pont közül kiválasztottunk egy olyan ponthalmazt, amely a legjobb tájékozást adta. Ez után összehasonlítottuk az egyes pontcsoportokkal történő tájékozást a többi pontcsoportéhoz viszonyítva. Az eredmények összefoglalását tartalmazza a 13. táblázat:

3. táblázat. Az illesztőpontok hatása a tájékozára.

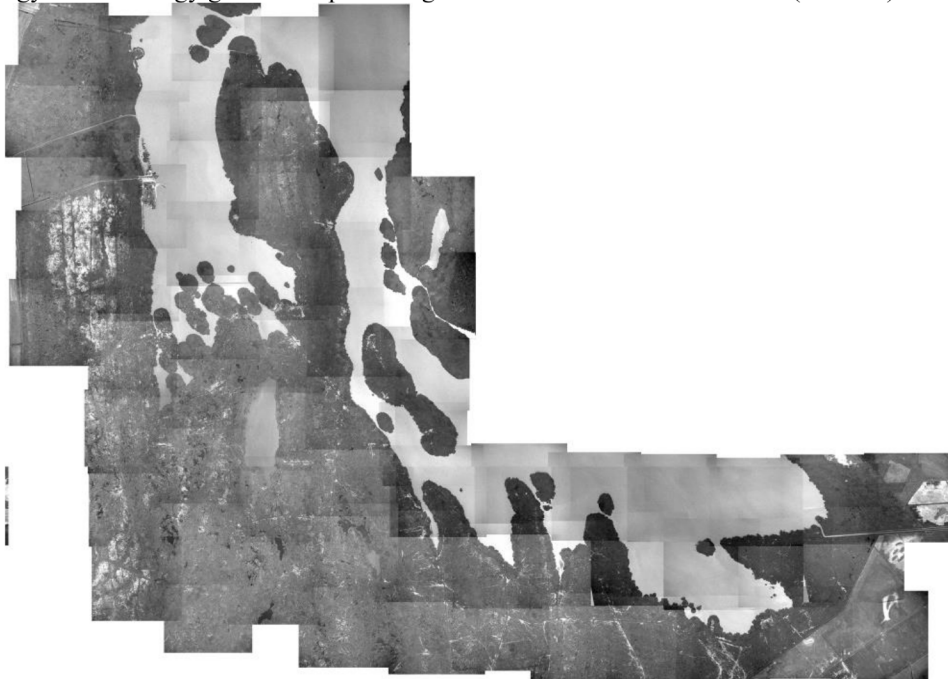
Illesztőpontok	Ellenőrző pontok								
	Jó	Tahim I.	Tahim II.	DTA 50	GK 10000	GPS I.	GPS II.	Üzemi	
Jó	<b>1.355</b>	1.626	2.221	18.140	5.137	2.391	1.592	17.099	
Tahim I.	1.424	<b>1.136</b>	2.032	17.535	5.670	2.168	1.135	17.493	
Tahim II.	3.489	3.378	<b>0.692</b>	19.398	5.385	6.687	5.031	16.728	
DTA 50	9.715	9.753	8.670	<b>13.370</b>	13.525	11.498	10.091	21.602	
GK 10000	3.145	3.480	1.663	19.612	<b>3.684</b>	6.174	1.536	16.642	
GPS I.	3.866	3.168	3.414	18.121	5.916	<b>0.719</b>	0.286	19.164	
GPS II.	2.717	2.500	2.651	20.681	4.955	2.865	<b>0.158</b>	15.593	
Üzemi	8.873	9.263	8.348	27.034	11.198	13.024	5.294	<b>12.428</b>	

Szintén ez évben készült el a Matterhorn ortofotója. Ez egy régi szerelem eredménye. Király Géza még diplomatervező korában készítette el a hegy felületmodelljét. Ahogy a fotogrammetriai lehetőségeink bővültek, úgy kristályosodott ki az ortofotó készítésének lehetősége. Itt minden ismeretlen volt. A kép egy naptárból származott, ahol ráadásul tükörképként szerepelt. Ismeretlenek voltak a kameraállandó, a képméret, és az egyéb kameraparaméterek, illetve még az sem volt biztos, hogy teljes képpel, vagy esetleg egy kivágattal dolgozunk. Mindezek ellenére a tájékozás jól sikerült. Ezt szemlélteti a 13. ábra:



13. ábra. A Matterhorn (4476 m, Wallisi-Alpok, Svájc)-ról készült amatőr felvétel tájékozása. A képen láthatók az illesztőpontok és a rektifikáció mintavételi rácsa is.

A 2001-es évben alkalmaztuk először a Map program tömbkiegyenlítő modulját. Elsőként a Soproni-hegység képsorozatának feldolgozása készült el ezzel a módszerrel. Az igazi próbát azonban az jelentette, amikor a Dr. Márkus István vezette Fertő-hínár kutatás keretében elkészült képekből állítottunk elő ortofotó-mozaikot. A kutatás keretében a Fertő-tó magyarországi szabad vízfelületeiről Hasselblad ELX 500-as kisképes amatőr kamerával készült 66 db színhelyes színes, illetve sárga-szűrőzött felvételtől tömbkiegyenlítéssel nagy geometriai pontosságú ortofotó-mozaikot készítettünk (14. ábra).



14. ábra. A Fertő-tó szabad vízfelületeinek ortofotó-mozaika.

## Összefoglaló

A mintegy évtizedes múltra visszatekintő digitális fotogrammetria olyan számítástechnikai eszközökkel vértette fel a hagyományos fotogrammetriai eljárásokat, mely a feldolgozás mennyiségét nagyságrendekkel, de minőségét is növelte. A tanulmányban a digitális fotogrammetria tanszéki eredményeinek bemutatására koncentráltunk, de áttekintést adtunk a kezdetekről, ill. átmenetekről is, amelyek a digitális fotogrammetria tanszéki művelését megelőzték, ill. megalapozták.

Az elméleti eredmények mellett a gyakorlati alkalmazások bemutatásával egy teljesebb képet próbáltunk adni arról, hogy a tanszékünkön folyó kutatásokat hogyan tudtuk a gyakorlatba is átültetni, az ott szerzett tapasztalatokat felhasználni. A fotogrammetria, és főként a digitális fotogrammetria még rengeteg kihívást és lehetőséget tartogat számunkra.

## Fontosabb irodalom

- Bácsi B** (1986): Illesztőpontok meghatározása ortofotó készítés céljára, Diplomaterv, Sopron.
- Baillard C - Dissard O** (2000): A Stereo Matching Algorithm for Urban Digital Elevation Models, *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, September, 1119-1128.
- Bánky J** (1987): Ortofotók hasznosítása gazdálkodási, erdészeti céltérképek készítésében, Doktori értekezés, Sopron.
- Chester C S (editor)** (1980): Manual of Photogrammetry, Fourth Edition, *American Society of Photogrammetry*.
- Czímber K** (1997): Geoinformatika. Egyetemi jegyzet. Soproni Egyetem.
- Gülch E** (1995): From control points to control structures for absolute orientation and aerial triangulation, *Zeitschrift für Photogrammetrie und Fernerkundung*, 130-136.
- Haala N - Plietker B - Sester M** (1994): Automatische Bildinterpretation, *Zeitschrift für Photogrammetrie und Fernerkundung*, 228-238.
- Jurák Gábor** (2000): A Soproni Egyetem felső Botanikus Kertjének felmérése, digitális térképének elkészítése és ..., Diplomaterv, Sopron.
- Király Géza** (1997): Nagyterületi erdőleltározás digitális úrfelvételek felhasználásával, Diplomaterv, Sopron.
- Kraus K** (1997): Fernerkundung I-II., *Ferd. Dümmler Verlag*, Bonn.
- Kraus K** (1997): Photogrammetry I-II., *Ferd. Dümmler Verlag*, Bonn.
- Németh F** (1998): A magyarországi erdőfelmérés története: a kezdetektől 1990-ig. Kiad. Állami Erdészeti Szolgálat, 111 p.
- Schiller W** (1995): Ein operationelles Verfahren zur automatischen inneren Orientierung von Luftbildern, *Zeitschrift für Photogrammetrie und Fernerkundung*, 115-122.
- Török Tamás** (1998): A Soproni Egyetem alsó Botanikus kertje digitális térképének elkészítése, Diplomaterv, Sopron.
- Ujsághy Zs** (1882): A fényképmérés feltalálója. *Erdészeti Lapok*, 21. Évf. Bp.
- Wang Y** (1995): A new method for automatic relative orientation of digital images, *Zeitschrift für Photogrammetrie und Fernerkundung*, 122-130.
- Wiman H** (1998): Automatic Generation of Digital Surface Models Through Matching in Object Space, *Photogrammetric Record* 16(91).

# TÉRINFORMATIKA A MAGÁN- ERDŐGAZDÁLKODÁSBAN

Gyimóthy Attila\*

*A magán-erdőgazdálkodás - jellegeből adódóan - pontos, naprakész nyilvántartási rendszert és helymeghatározást igényel. Szükséges volt egy olyan rendszer kialakítása, mely mind az erdőtulajdonosok, mind az erdőrészek adatait tartalmazza; elemzéseket, döntéseket tesz lehetővé. A helyhez kötött információk nagy száma miatt ez térinformációs rendszer létrehozásával oldható meg.*

**Kulcsszavak:** magán-erdő, térinformatika, földrészlet, fedvények, erdőrészlet.

## Bevezetés

A privatizáció során és a termelészövetkezetek felszámolásával sokan jutottak erdőtulajdonhoz. Az egy tulajdonosra jutó erdőterületek kis méretéből következő gazdaságtalanság, illetve az, hogy azonos helyrajzi számon közösen kell gazdálkodni, különböző típusú erdőgazdálkodó szervezetek kialakítását tette szükségessé. Ezen szervezetek megfelelő működésének feltétele, hogy rendelkezzenek a tulajdonukról térképekkel, leíró adatokkal, 10 évre szóló erdőgazdálkodási tervvel; illetve előírás számukra az éves tervek, jelentések készítése.

## Problémák

Az erdőtulajdonosok és az erdőgazdálkodók közötti konfliktusok leggyakoribb oka az, hogy a földrészletek határai (mely a tulajdonlás alapja) és az erdőrészletek határai (mely az erdőgazdálkodás alapja) nem esnek egybe, közöttük metszések fordulnak elő, így nehéz az erdőrészletekben elvégzendő munkákat, költségeket, bevételeket megosztani a tulajdoni hányad alapján, amely a földrészletre vonatkozik.

Hasonló problémát jelent, hogy az Állami Erdészeti Szolgálat az erdészeti üzemi térképeit nem EOV-ban, hanem sztereografikus vetületben készíti, ami szintén nehezíti az erdőrészlet és a tulajdonosok azonosítását.

A második nagy problémakört a magán-erdőgazdálkodó szervezeteknél az adatok nyilvántartása jelenti. A magyar erdőgazdálkodás világszó az erdőrészleteket leíró adatok gyűjtésében, kezelésében. Egyetlen erdőrészletről – melynek nagysága 0,1 és 30 hektár között változik – majdnem 300 adatot tárolnak, melyeknek nagy része évente változik. Ezeken kívül a gazdálkodó szervezeteknek tárolni kell az erdőtulajdonosok adatait is: név, lakcím, adószám, helyrajzi szám, tulajdoni hányad. Tárolni kell még a gazdasági, statisztikai adatokat is: bevételek, kiadások, munkák, partnerek, tervek, jelentések. Az adatok mind egyértelműen helyhez köthetők: az erdészeti-gazdálkodási adatok az erdőrészletekhez, a tulajdonosi adatok a földrészletekhez, illetve a lakcímhöz.

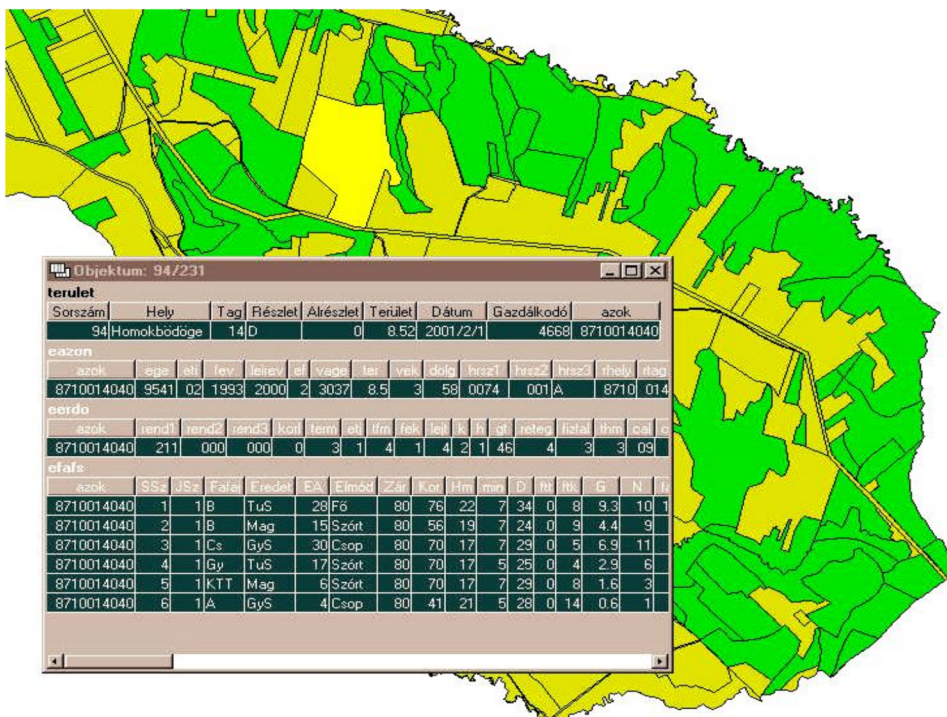
\*MTA FKK Geodéziai és Geofizikai Kutató Intézet, Sopron 9400 Csatka u. 6-8.

E-mail: [gyimothy@ggki.hu](mailto:gyimothy@ggki.hu)

## Megoldások

Az általános megoldás a térképi adatok és a leíró adatok közös vonatkozási rendszerben történő együttes kezelése, mely térinformációs rendszer kialakítását jelenti. A közös kapcsolatot az adatok között a térbeli hely, amelyhez az alapot a közhiteles állami földmérési alaptérkép biztosítja. Ehhez kell illeszteni a közös vetületi rendszerben (EOV) az erdészeti üzemi térképet. A közös térbeli helyhez kapcsolt erdészeti- és tulajdonosi adatokkal megoldható a gazdálkodás levetítése egyes tulajdonosokra is.

A térinformatikai rendszerrel szembeni elvárások a funkcionalitás széles skáláját lefedik, az egyszerű lekérdezéstől a tematikus térképeken át a tulajdonosok/erdőgazdálkodók számára készítenő teljes körű döntés-előkészítő adatszolgáltatásokig.



1. ábra. Adott erdőrésztel adatainak megjelenítése a tájékozott erdészeti üzemi térképpel.

A fentiek alapján egy magán-erdőgazdálkodó szervezet térinformációs rendszerének a következő fedvényeket kell tartalmaznia:

- földhasználati fedvény: A digitalizált közhiteles állami földmérési alaptérképből a kapcsolódó leíró adatokkal (földrészlet adatai: községhatár, postai cím, helyrajzi szám, terület; tulajdonosi adatok: név, lakcím, tulajdoni hányad) együtt előállítható.

- erdőrésztel fedvény: A terület erdőgazdasági üzemi térképéből és az Erdőállomány Adattár adataiból létrehozható fedvény, mely erdőrésztelenként tartalmazza az



azonosító és leíró adatokat, valamint a 10 éves gazdálkodási terv adatait. Mivel az erdőgazdálkodás alapja az erdőrészlet, ehhez a fedvényhez kapcsolódik a gazdasági-statisztikai adatokat (mennyiségek, árak, munkák, stb.) tartalmazó adatbázis is.

- domborzatmodell: A terület topográfiai térképe alapján állítható elő. A kitettség és lejtés meghatározására szolgál, melyek az erdőművelési és erdőhasználati munkák megtervezéséhez nyújtanak segítséget.

- vadgazdálkodási fedvény: A vadgazdálkodás az erdőgazdálkodással szorosan összefüggő, tőle nem elválasztható tevékenység, ezért itt találhatóak a vadgazdálkodási egységek határai, az eszközök leíró adatai.

- talajfedvény: A területen végzett talajszelvény vizsgálatok adatait tartalmazza.

- A gazdálkodáshoz szükséges egyéb adatok (utak, elektromos távvezetékek, vízfolyások) is egy fedvényben kell megjeleníteni.

Követelmény még az egységes vonatkoztatási rendszer, a közös fájlformátum, és a nagy mennyiségű adat használata miatt a kódszótárak alkalmazása.

## További lehetőségek

A leíró adatok tovább bővíthetők: földrészletekként bejegyzett jogok, tények (terhek, jelzalog, szolgalom) és széljegyzetek.

Raszteres háttérként beilleszthetőek légi felvételek, melyek a komplex geometriai adatgyűjtésen túlmenően a változások bemérésére és átvezetésére is használhatóak. Napjainkban előtérbe kerül az úrfelvételek felhasználása is.

Az adatok szolgáltatásának kérdését meg kell oldani. Mindegyik tulajdonos szeretné ismerni lehetőségeit, kötelezettségeit, illetve az adott körülményeket, ezért szükséges egy biztonságos, naprakész kapcsolat kialakítása a tulajdonosok és a rendszer között. Erre legalkalmasabb on-line rendszer az interneten keresztül működhetne.

A rendszer kialakítási költségei nagyok, ezért érdemes egy régió magánerdő-tulajdonosait, gazdálkodó szervezeteit egy közös rendszerben kezelni. A költségek csökkentése érdekében érdemes a szolgáltatások körét bővíteni, a rendszert más célokra is felhasználni (pl. önkormányzati térinformációs rendszer, környezet- és természetvédelem, területfejlesztés).

## Összefoglalás

Hazánkban jelenleg egyetlen magán-erdőgazdálkodó szervezet hozott létre térinformációs rendszert, mely több szoftverre is ki lett alakítva, általánosan az ESRI cég ArcView szoftverére, illetve a DigiTerra cég Map programjára, ami az erdészeti feladatok megoldására alkalmasabb. A rendszer a fenti elvek alapján fél éve sikeresen üzemel, a tervezési és nyilvántartási feladatok jelentősen leegyszerűsödtek.

# FORGATÁS

*Csepregi Szabolcs\**

*A dolgozatban a térbeli forgatással foglalkozunk. A gyakorlatban ez a legfontosabb térbeli transzformációs eljárás. A forgatási mátrix tulajdonságainak bemutatása után. Külön fejezetben foglalkozunk azok felírásának lehetőségeivel, 8 különböző forgatási mátrixot írunk fel. Ezek paramétereinek kapcsolatát is vizsgáljuk. Többféle lehetőséget mutatunk be a paraméterek meghatározására a forgatási mátrixból. Az utolsó két fejezetben a forgatási mátrix kiegyenlítéssel történő meghatározását mutatjuk be, az ortogonalitási kényszerfeltételek felírásával és a kis elfordulások, paraméterváltozások bevezetésével alkalmazott iterációs eljárásokat ismertetjük. A dolgozatban szereplő számítási eljárásokat számpélda kapcsán is bemutatjuk. A dolgozat nem lezárt. További kiegyenlítési megoldások is vannak részben készen. Ezekről egy későbbi tanulmányban szeretnénk beszámolni.*

A forgatással foglalkozó jelen dolgozatban, 6 fejezetben mutatjuk be a kapcsolatos ismereteket.

Az **első** fejezetben adjuk a forgatási mátrix tulajdonságait. Itt mutatjuk be az alkalmazott jelöléseket, melyeket az egész dolgozatban alkalmazni fogunk. Összefoglaljuk a későbbiekben részletesen bemutatandó forgatási mátrixokat.

A **második** fejezet a forgatási mátrix különböző felírási lehetőségeit tárgyalja. Tárgyaljuk a térbeli tengely körüli forgatást, az átlón kívüli elemek különbségei alapján felírható forgatási mátrixot, ferdén szimmetrikus mátrixból felírható forgatási mátrixot, a Rodrigues mátrixot, Euler szimmetrikus paramétereit, a koordináta tengely körüli forgatások esetében a három különböző tengely körüli és a két különböző tengely körüli forgatást mutatjuk be. Ezután az Euler hat szögparaméterével felírható mátrixszót, és a három átlón kívüli elem paraméterként való használatát mutatjuk be. Végül a kis szögekkel és más kis paraméterváltozásokkal végzett forgatást mutatjuk be.

A **harmadik** fejezetben a különböző forgatási paraméterek kapcsolatával foglalkozunk.

A **negyedik** fejezet, egy adott forgatási mátrixból, a különböző paraméterek meghatározásával foglalkozik.

Az **ötödik** fejezetben mutatjuk be a forgatási mátrix kiegyenlítéssel történő számítását. Bemutatjuk a forgatási mátrix meghatározását kényszer feltételi egyenletek felírásával, és a paraméterek kis változásainak segítségével való megoldását.

A **hatodik** fejezetben mintapéldákat adunk az elmondottakra és az iterációs megoldások tapasztalatait ismertetjük.

A dolgozat csak a kutatások első részét mutatja be, a további eredményekről a folytatásban szeretnénk beszámolni.

Egy forgatásról szóló dolgozatban meg kell emlékezni Euler Leonhard svájci matematikusról is.

\*NYME Geoinformatikai Főiskolai Kar, Székesfehérvár, 8000 Pirosalma utca 1-3.

E-mail: [csepregi@cslm.hu](mailto:csepregi@cslm.hu)

**Leonhard EULER**, 1707-ben, Bázelen született. Apja szegény református lelkész volt. Johann Bernoulli ismerte fel matematikai tehetségét. Ott kötött barátságot a két Bernoulli fiúval, Nicolausszal és Daniellel. Az egyetemet kiváló eredménnyel végezte de nem kapott állást. A Bernoulli testvérek segítségével kerül a szentpétervári akadémiára 1727-ben. Kezdetben az élettant tanította, de csakhamar átkerült a matematikai fizikai tanszék-re és ennek lett később a tanára. Közben Oroszország térképeit is szerkeszti. Valószínűleg ebbe a munkába vakul meg egyik szemére 31 éves korára, 59 évesen már majdnem teljesen vak. Ez időben munkáit tanítványainak és inasának diktálta. 1741-től Berlinben dolgozik az akadémián, a szentpétervári akadémiának továbbra is tiszteletbeli tanára maradt. Katalin cárnő továbbra is fizetést adott neki, és az ő hívására, 1766-ban ismét Szentpétervárra ment az akadémiára. 886 könyve és tanulmánya jelent meg. A matematika majd minden ágával foglalkozott. 1783-ban halt meg.

# 1. A FORGATÁSI MÁTRIX

## 1.1. Bevezetés

A leggyakrabban használt transzformáció a térbeli forgatás. Geodéziai gyakorlatban igen széles körben kerül alkalmazásra.

A lineáris transzformációk egyenletét az alábbi formában szoktuk felírni

$$Y = R \cdot X + T ,$$

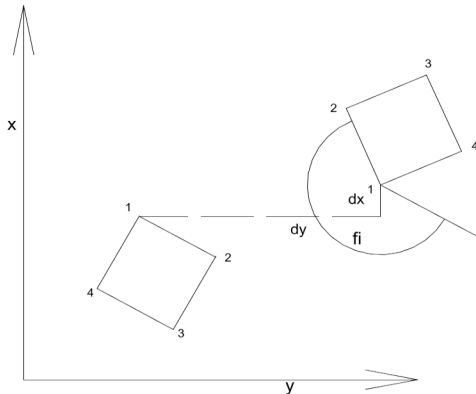
ahol az  $X$  koordináta vektor az első rendszerbeli koordinátákat foglalja magába. Az  $Y$  vektor a második rendszerbeli koordinátákat tartalmazza. Az  $T$  vektor az eltolás (transzformáció) paramétereit foglalja magába. Az  $R$  mátrix a transzformáció mátrixa.

$$Y = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} .$$

Az  $R$  mátrix tulajdonságaitól függ, hogy a transzformáció milyen lesz. Ha az  $R$  mátrix tetszőleges, akkor a leképezés térbeli affin transzformáció lesz. A transzformációs egyenletet transzponált formában is felírhatjuk

$$Y^T = X^T R^T + T^T .$$

Ezt az egyenletet elsősorban az  $R$  mátrix kiegyenlítéssel történő meghatározásánál fogjuk használni.



Eltolás és elforgatás síkban

1-1a ábra.

A két különböző koordináta halmaz egymásba transzformálása két féleképpen fogható fel.

Az első esetben a két koordináta halmazt két különböző koordináta rendszerben lévőnek fogjuk fel, ekkor a két koordináta rendszer egymáshoz képest eltolás és elforgatott helyzetben van. A transzformáció paramétereit az eltolás és elforgatás. Síkban ez két eltolást és egy elforgatást jelent. Térben három eltolási paraméter van és három forgatási paraméter.

A forgatást úgy is felfoghatjuk, hogy az ugyan azt a két koordináta halmazt egy koordináta rendszerben lévőnek fogjuk fel, melyek különböző helyen vannak. A két halmaz kapcsolatát úgy teremtjük meg, hogy síkban megadjuk

egy pont koordinátáját és megadjuk az elfordulás szögét. Térben ez egy forgástengely megadását jelenti egy pontjával és irányával, valamint az elforgatás szögét rögzítjük. Ez három meg két és még egy adat megadását jelenti, ez összesen hat adat, ugyan annyi,



A sorok és oszlopok ortogonalitási feltételei:

<i>A sorok vektorának hossza 1-el egyenlő</i>	<i>Az oszlopok vektorának hossza 1-el egyenlő</i>
$r_{11} \cdot r_{11} + r_{12} \cdot r_{12} + r_{13} \cdot r_{13} = 1$	$r_{11} \cdot r_{11} + r_{21} \cdot r_{21} + r_{31} \cdot r_{31} = 1$
$r_{21} \cdot r_{21} + r_{22} \cdot r_{22} + r_{23} \cdot r_{23} = 1$	$r_{12} \cdot r_{12} + r_{22} \cdot r_{22} + r_{32} \cdot r_{32} = 1$
$r_{31} \cdot r_{31} + r_{32} \cdot r_{32} + r_{33} \cdot r_{33} = 1$	$r_{13} \cdot r_{13} + r_{23} \cdot r_{23} + r_{33} \cdot r_{33} = 1$
<i>A két sor szorzata 0-val egyenlő</i>	<i>A két oszlop szorzata 0-val egyenlő</i>
$r_{11} \cdot r_{21} + r_{12} \cdot r_{22} + r_{13} \cdot r_{23} = 0$	$r_{11} \cdot r_{12} + r_{21} \cdot r_{22} + r_{31} \cdot r_{32} = 0$
$r_{11} \cdot r_{31} + r_{12} \cdot r_{32} + r_{13} \cdot r_{33} = 0$	$r_{11} \cdot r_{13} + r_{21} \cdot r_{23} + r_{31} \cdot r_{33} = 0$
$r_{21} \cdot r_{31} + r_{22} \cdot r_{32} + r_{23} \cdot r_{33} = 0$	$r_{12} \cdot r_{13} + r_{22} \cdot r_{23} + r_{32} \cdot r_{33} = 0$

a fentieket a következő rövidebb formában is írhatjuk

$$\sum_{j=1}^3 r_{ij} \cdot r_{kj} = \sum_{j=1}^3 r_{ji} \cdot r_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq k \\ 1, & \text{ha } i = k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

1.2.-3

Az előzőek alapján a 9 elem között 6 (kényszer) feltétel áll fenn, ezért csak  $9 - 6 = 3$  elem független.

A forgatási mátrix egyes elemei a koordináta tengelyek irány-koszinuszai

$$R = \begin{bmatrix} \cos(x, x') & \cos(x, y') & \cos(x, z') \\ \cos(y, x') & \cos(y, y') & \cos(y, z') \\ \cos(z, x') & \cos(z, y') & \cos(z, z') \end{bmatrix}.$$

1.2.-4

Bármely elem egyenlő a hozzá tartozó aldetermináns értékével.

$r_{11} = \begin{vmatrix} r_{22} & r_{23} \\ r_{32} & r_{33} \end{vmatrix}$ $= r_{22} \cdot r_{33} - r_{23} \cdot r_{32}$	$r_{12} = - \begin{vmatrix} r_{21} & r_{23} \\ r_{21} & r_{33} \end{vmatrix}$ $= r_{23} \cdot r_{21} - r_{21} \cdot r_{33}$	$r_{13} = \begin{vmatrix} r_{21} & r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{vmatrix}$ $= r_{21} \cdot r_{32} - r_{22} \cdot r_{31}$
$r_{21} = - \begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} \\ r_{32} & r_{33} \end{vmatrix}$ $= r_{13} \cdot r_{32} - r_{12} \cdot r_{33}$	$r_{22} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{13} \\ r_{31} & r_{33} \end{vmatrix}$ $= r_{11} \cdot r_{33} - r_{13} \cdot r_{31}$	$r_{23} = - \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{31} & r_{32} \end{vmatrix}$ $= r_{12} \cdot r_{31} - r_{11} \cdot r_{32}$
$r_{31} = \begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} \\ r_{22} & r_{23} \end{vmatrix}$ $= r_{12} \cdot r_{23} - r_{13} \cdot r_{22}$	$r_{32} = - \begin{vmatrix} r_{11} & r_{13} \\ r_{21} & r_{23} \end{vmatrix}$ $= r_{13} \cdot r_{21} - r_{11} \cdot r_{23}$	$r_{33} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix}$ $= r_{11} \cdot r_{22} - r_{12} \cdot r_{21}$

1.2.-5

Az átlón kívüli szimmetrikusan elhelyezkedő elemek összegének és különbségének szorzata egyenlő

$$\begin{aligned}(r_{12} + r_{21}) \cdot (r_{12} - r_{21}) &= r_{12}^2 - r_{21}^2 = 16lmnr \\(r_{13} + r_{31}) \cdot (r_{13} - r_{31}) &= r_{13}^2 - r_{31}^2 = 16lmnr \\(r_{32} + r_{23}) \cdot (r_{32} - r_{23}) &= r_{32}^2 - r_{23}^2 = 16lmnr .\end{aligned}$$

1.2.-6

A bizonyítást az 5.2.-3 képlete alapján láthatjuk.

Bármely elem sorában lévő két másik elem négyzetének összege egyenlő az oszlopában lévő két másik elem négyzetének összegével. Ez az összeg egyenlő az elem négyzetének 1-től való különbségével.

$$1 - r_{i,j}^2 = r_{i,j+1}^2 + r_{i,j-1}^2 = r_{i+1,j}^2 + r_{i-1,j}^2 \quad i, j = 1, 2, 3, 4 = 1, 5 = 2 .$$

1.2.-7

Ez következik az 1.2.-3 egyenletekből, a sorokra és oszlopokra felírt négyzetösszegek értékéből. De következik a tengely körüli forgatások egyenleteiből is, ha megnézzük a három tengely körüli forgatás első oszlopát és harmadik sorát, vagy a két tengely körüli forgatás első sorát és első oszlopát. Ha a tengely körüli forgatások sorrendjét megváltoztatjuk, akkor ezek a sorok és oszlopok mindig más-más helyre kerülnek. A négyzetösszeg átlón kívüli elem esetében a három tengely körüli forgatás középső szögforgatás koszinuszának négyzetével egyenlő, átlóban szereplő elem esetében a két tengely körüli forgatás középső szögforgatás szinusznak négyzetével egyenlő.

### 1.3. Jelölések

A dolgozatban lehetőség szerint egységes jelölést fogunk használni.

A **forgatási-mátrix** **elemait**, mint ahogy már megtettük,

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

betűkkel és indexekkel fogjuk jelölni.

Az **Euler féle szimmetrikus paraméterek** jelölésére az  $l, m, n, r$  betűket használjuk.

A **ferdén szimmetrikus** mátrixból felírt forgatási-mátrix paramétereit  $e, f, g$  betűkkel írjuk. Itt előforduló segédmenyiséget  $h$ -val jelöljük.

A **Rodrigues mátrix paramétereinek** jelölését az  $a, b, c$ , és a segédmenyiség jelölését  $d$  betűvel végezzük.

A **térbeli tengely körüli forgatás** tengelyét  $c_1, c_2, c_3$ , irány koszinuszokkal jelezzük, az elfordulási szög jele:  $\varphi$  lesz.

A tengely körüli forgatások leírásánál a **három tengely körüli forgatásnál** az elfordulási szögek jele  $\alpha, \beta, \gamma$  görög betűkkel jelöljük az  $x, y, z$  tengelyek körüli forgatásokat.

A **két tengely körüli forgatásnál** a tengelyek körüli forgatásokat  $\xi_1, \eta, \xi_2$  görög betűkkel jelöljük, a koordináta tengelyeknek megfelelően.

A **hat Euler féle szögparamétert**  $\zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3 : \eta_1 : \eta_2 : \eta_3$  görög betűkkel jelöljük.

A képleteket számában az első két szám a főfejezet és az alfejezet száma mindkettő után pontot téve majd kötőjellel elválasztva a képlet sorszáma következik.

Az ábrák számozásánál az első szám a főfejezet száma majd kötőjellel elválasztva az ábra sorszáma következik.

## 1.4. A forgatási mátrixok összefoglalása

### 1.4.1. Euler négy szimmetrikus paramétere

$$R = \begin{bmatrix} l^2 - m^2 - n^2 + r^2 & 2(lm - nr) & 2(ln + mr) \\ 2(lm + nr) & m^2 - l^2 - n^2 + r^2 & 2(mn - lr) \\ 2(ln - mr) & 2(mn + lr) & n^2 - l^2 - m^2 + r^2 \end{bmatrix}$$

$$l^2 + m^2 + n^2 + r^2 = 1$$

### 1.4.2. Ferdén szimmetrikus paraméterek

$$R = \frac{1}{1 + ee + ff + gg} \begin{bmatrix} 1 + ee - ff - gg & -2g + 2ef & +2f + 2eg \\ +2g + 2ef & 1 - ee + ff - gg & -2e + 2fg \\ -2f + 2eg & +2e + 2fg & 1 - ee - ff + gg \end{bmatrix}$$

### 1.4.3. Rodrigues paraméterek

$$R = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{4}(a^2 - b^2 - c^2) & -c + \frac{1}{2}ab & +b + \frac{1}{2}ac \\ +c + \frac{1}{2}ab & 1 + \frac{1}{4}(-a^2 + b^2 - c^2) & -a + \frac{1}{2}bc \\ -b + \frac{1}{2}ac & +a + \frac{1}{2}bc & 1 + \frac{1}{4}(-a^2 - b^2 + c^2) \end{bmatrix}$$

$$h = 1 + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

### 1.4.4. Térbeli tengely körüli forgatás

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi + c_1^2(1 - \cos \varphi) & c_1c_2(1 - \cos \varphi) - c_3 \sin \varphi & c_1c_3(1 - \cos \varphi) + c_2 \sin \varphi \\ c_2c_1(1 - \cos \varphi) + c_3 \sin \varphi & \cos \varphi + c_2^2(1 - \cos \varphi) & c_2c_3(1 - \cos \varphi) - c_1 \sin \varphi \\ c_3c_1(1 - \cos \varphi) - c_2 \sin \varphi & c_3c_2(1 - \cos \varphi) + c_1 \sin \varphi & \cos \varphi + c_3^2(1 - \cos \varphi) \end{bmatrix}$$



**1.4.5. Átlón kívüli elemek különbsége**

$$R = \begin{bmatrix} 1 - k(d_2^2 + d_3^2) & kd_1d_2 - d_3 & kd_1d_3 + d_2 \\ kd_1d_2 + d_3 & 1 - k(d_1^2 + d_3^2) & kd_2d_3 - d_1 \\ kd_1d_3 - d_2 & kd_2d_3 + d_1 & 1 - k(d_1^2 + d_2^2) \end{bmatrix}$$

$$\sin^2 \varphi = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$$

**1.4.6. Euler forgatás három tengely körül**

$\cos \beta \cos \gamma$	$\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$ $+ \cos \alpha \sin \gamma$	$-\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma$ $+ \sin \alpha \sin \gamma$
$-\cos \beta \sin \gamma$	$-\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ $+ \cos \alpha \cos \gamma$	$\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$ $+ \sin \alpha \cos \gamma$
$\sin \beta$	$-\sin \alpha \cos \beta$	$\cos \alpha \cos \beta$

**1.4.7. Euler forgatás két tengely körül**

$\cos \eta$	$\sin \xi_1 \sin \eta$	$-\cos \xi_1 \sin \eta$
$\sin \eta \sin \xi_2$	$-\sin \xi_1 \cos \eta \sin \xi_2$ $+ \cos \xi_1 \cos \xi_2$	$\cos \xi_1 \cos \eta \sin \xi_2$ $+ \sin \xi_1 \cos \xi_2$
$\sin \eta \cos \xi_2$	$-\sin \xi_1 \cos \eta \cos \xi_2$ $-\cos \xi_1 \sin \xi_2$	$\cos \xi_1 \cos \eta \cos \xi_2$ $-\sin \xi_1 \sin \xi_2$

**1.4.8. Euler hat szög-paramétere**

$$R = \begin{bmatrix} \sin \zeta_1 & \sin \zeta_2 & \sin \zeta_3 \\ \cos \zeta_1 \sin \eta_1 & \cos \zeta_2 \sin \eta_2 & \cos \zeta_3 \sin \eta_3 \\ \cos \zeta_1 \cos \eta_1 & \cos \zeta_2 \cos \eta_2 & \cos \zeta_3 \cos \eta_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \tan \zeta_1 \cdot \tan \zeta_2 \cdot \tan \zeta_3 = \sqrt{-\cos(\eta_1 - \eta_2) \cdot \cos(\eta_2 - \eta_3) \cdot \cos(\eta_3 - \eta_1)}$$

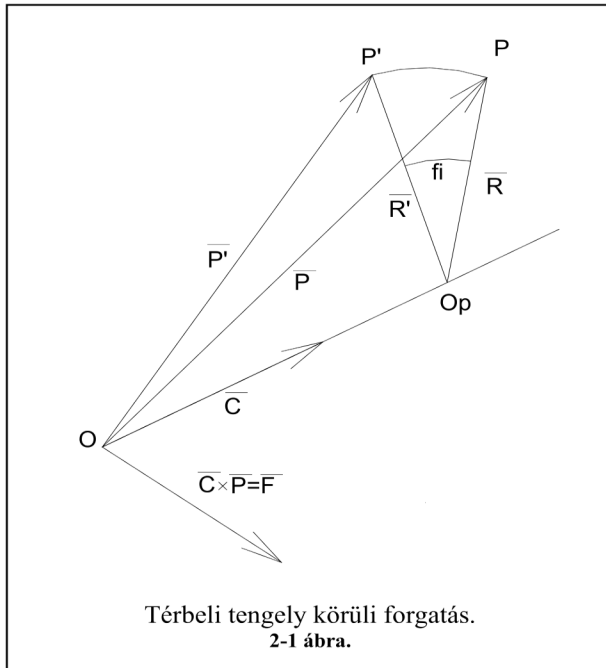
$$\tan \zeta_1 = \frac{-\Delta}{\cos(\eta_2 - \eta_3)} \quad \tan \zeta_2 = \frac{-\Delta}{\cos(\eta_3 - \eta_1)} \quad \tan \zeta_3 = \frac{-\Delta}{\cos(\eta_1 - \eta_2)}$$

## 2. A FORGATÁSI MÁTRIX PARAMÉTEREI

A forgatási mátrix három független paraméter függvényeként állítható elő. Ezek felvételére többféle lehetőség van. Ebben a fejezetben ezek ismertetését tesszük meg.

### 2.1. Térbeli forgástengely körüli forgatás

Vegyünk fel egy pontot, melyen keresztül megy a forgástengely. Ez a pont lesz a koordináta rendszer kezdőpontja. A forgástengely irányát a  $C$  vektorral adjuk meg, a  $c_1, c_2, c_3$  három iránykoszinusszal, ahol  $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = I$ . Az elfordulás értéke  $\varphi$ . A négy paraméter közül a három iránykoszinusz között fennáll az előbbi feltétel, így összességében csak három független paraméter van. Egy tetszőleges  $P$  pont koordinátái legyenek  $x, y$  és  $z$  értékűek. Ezt a  $P$  pontot forgassuk el  $\varphi$  szöggel a felvett forgástengely



körül (2-1 ábra).

Forgatás közben a  $P$  pont egy köríven mozdul el, melynek középpontja a forgástengelyre esik. Ez a pontot  $O_P$ -vel jelöljük. Először számítsuk ki a kezdőpontból a  $O_P$ -be mutató  $T$  vektort. A kezdőponttól mért távolságot a  $P$  és  $C$  vektorok skaláris szorzata adja, ezt a  $C$  vektorral való szorzással kapjuk meg a kezdőpontról az  $O_P$  pontba mutató vektort.

$$\vec{T} = (\vec{P} \cdot \vec{C}) \cdot \vec{C}$$

2.1.-1

A következőkben határozzuk meg az  $O_P$  pontból a  $P$  pontba mutató  $R$  vektort. A  $\vec{F} = \vec{C} \times \vec{P}$  vektor szorzat a  $C$  és  $P$  vektorokra merőleges vektort ad eredményül,

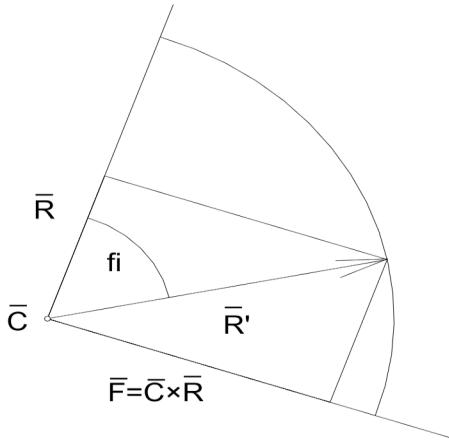
ennek nagysága megegyezik a  $O_P P$  távolsággal, de iránya arra merőleges. Ezt ismét megszorozva  $C$  vektorral, az eredő vektor hossza nem változik, de irányra már megfelelő lesz.

$$\vec{R} = (\vec{C} \times \vec{P}) \times \vec{C} = \vec{P} - \vec{T} .$$

2.1.-2

A második egyenlőségben az  $R$  vektort, mint a pont  $P$  vektorának és ennek forgástengelyre eső vetületének különbségét képeztük.

Ezt az  $R$  vektort forgassuk el  $\varphi$  szöggel a  $c$  tengely körül.



Elforgatás vektorok között.  
2-2 ábra.

Az elforgatott  $R'$  vektort a 2.-2 ábra szerint írjuk fel. Az ábrán a  $C$  tengelyt egy pontban látjuk, az  $R$  vektorra merőleges vektort a  $\bar{C} \times \bar{R} = \bar{C} \times \bar{P} = \bar{F}$  vektor szorzat adja. Az  $R$  vektor és a  $\bar{C} \times \bar{R} = \bar{F}$  vektor egy derékszögű koordináta rendszeret alkot. Ebben a rendszerben az elforgatott  $R'$  vektort az

$$\bar{R}' = \bar{R} \cdot \cos \varphi + (\bar{C} \times \bar{R}) \cdot \sin \varphi \quad 2.1.-3$$

képlettel fejezhetjük ki. Az elforgatott  $P'$  pont helyét a

$$\bar{P}' = \bar{T} + \bar{R}' = (\bar{P} \bullet \bar{C}) \cdot \bar{C} + \bar{R} \cdot \cos \varphi + (\bar{C} \times \bar{R}) \cdot \sin \varphi \quad 2.1.-4$$

vektor összeg adja. Fejtsük ki az egyes szorzatokat. A  $T$  vektor a következő lesz.

$$\bar{T} = (\bar{P} \bullet \bar{C}) \cdot \bar{C} = \begin{cases} T_x = c_x c_x \cdot x + c_x c_y \cdot y + c_x c_z \cdot z \\ T_y = c_x c_y \cdot x + c_y c_y \cdot y + c_y c_z \cdot z \\ T_z = c_x c_z \cdot x + c_y c_z \cdot y + c_z c_z \cdot z \end{cases}$$

2.1.-5

Ez után írjuk fel előbb  $C \times P$  vektor szorzatot.

$$\bar{F} = \bar{C} \times \bar{P} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ c_x & c_y & c_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{cases} F_x = c_y \cdot z - c_z \cdot y \\ F_y = c_z \cdot x - c_x \cdot z \\ F_z = c_x \cdot y - c_y \cdot x \end{cases}$$

A következő lépésben számítsuk az  $R$  vektort.

$$\begin{aligned} \bar{R} = \bar{F} \times \bar{C} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ c_y z - c_z y & c_z x - c_x z & c_x y - c_y x \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \\ &= \begin{cases} R_x = +(1 - c_x c_x) \cdot x - c_x c_y \cdot y - c_x c_z \cdot z \\ R_y = -c_x c_y \cdot x + (1 - c_y c_y) \cdot y - c_y c_z \cdot z \\ R_z = -c_x c_z \cdot x - c_y c_z \cdot y + (1 - c_z c_z) \cdot z \end{cases} \end{aligned}$$

2.1.-6

És végül határozzuk meg a  $C \times R$  vektor szorzatot.

$$\bar{V} = \bar{C} \times \bar{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ c_x & c_y & c_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \begin{cases} V_x = +0 \cdot x - c_z \cdot y + c_y \cdot z \\ V_y = +c_z \cdot x + 0 \cdot y - c_x \cdot z \\ V_z = -c_y \cdot x + c_x \cdot y + 0 \cdot z \end{cases} = \bar{F}$$

2.1.-7

Az előző képleteket írjuk be 2.1.-5 kifejezésbe.

$$R = \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_1c_2 & c_2^2 & c_2c_3 \\ c_1c_3 & c_2c_3 & c_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-c_1^2 & -c_1c_2 & -c_1c_3 \\ -c_1c_2 & 1-c_2^2 & -c_2c_3 \\ -c_1c_3 & -c_2c_3 & 1-c_3^2 \end{bmatrix} \cos \varphi + \begin{bmatrix} 0 & -c_3 & +c_2 \\ +c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & +c_1 & 0 \end{bmatrix} \sin \varphi$$

2.1.-8

A fentiekből láthatjuk, hogy a forgatási mátrix egy elfordulási szögtől független és két elfordulási szögtől függő tagból tevődik össze. Ezek közül az első szimmetrikus, a második pedig aszimmetrikus mátrix.

Gyakrabban írjuk fel az előzőt a következő alakban.

$$R = \cos \varphi \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \cos \varphi) \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & c_1c_3 \\ c_2c_1 & c_2^2 & c_2c_3 \\ c_3c_1 & c_3c_2 & c_3^2 \end{bmatrix} + \sin \varphi \begin{bmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1.-9

A felírt képlet első két tagja a forgatási mátrix szimmetrikus összetevőit mutatják, a szimmetriától való eltérést az utolsó tag hozza létre. A második tag mátrixát a forgástengelyirány-koszinuszainak szorzata adja, a  $CC^T$  szorzat formájában. A szorzatokat kifejtve az alábbi alakot kapjuk

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi + c_1^2(1 - \cos \varphi) & c_1c_2(1 - \cos \varphi) - c_3 \sin \varphi & c_1c_3(1 - \cos \varphi) + c_2 \sin \varphi \\ c_2c_1(1 - \cos \varphi) + c_3 \sin \varphi & \cos \varphi + c_2^2(1 - \cos \varphi) & c_2c_3(1 - \cos \varphi) - c_1 \sin \varphi \\ c_3c_1(1 - \cos \varphi) - c_2 \sin \varphi & c_3c_2(1 - \cos \varphi) + c_1 \sin \varphi & \cos \varphi + c_3^2(1 - \cos \varphi) \end{bmatrix}$$

2.1.-10

A forgatási mátrix elemeiből könnyen kifejezhetők a forgás-tengely irány-koszinuszai (Korn-Korn 1975, Rinner 1975).

## 2.2. Az átlón kívüli elemek különbsége, mint paraméter

Az előző forgatási mátrixból egyszerűen levezethetünk egy olyan forgatási mátrixot, melyben az átlón kívüli elemek különbségei szerepelnek paraméterként. Osszuk el és szorozzuk meg az előző 2.1.-11 forgatási mátrix elemeit  $\sin^2 \alpha$ -val. Vezessük be a

$$k = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \quad d_1 = c_1 \sin \varphi \quad d_2 = c_2 \sin \varphi \quad d_3 = c_3 \sin \varphi .$$

2.2.-1

Ezek beírása után a forgatási mátrix

$$R = \begin{bmatrix} 1 - k(d_2^2 + d_3^2) & kd_1d_2 - d_3 & kd_1d_3 + d_2 \\ kd_1d_2 + d_3 & 1 - k(d_1^2 + d_3^2) & kd_2d_3 - d_1 \\ kd_1d_3 - d_2 & kd_2d_3 + d_1 & 1 - k(d_1^2 + d_2^2) \end{bmatrix} .$$

2.2.-2

A paraméterek között fenn áll a következő

$$\sin^2 \varphi = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 .$$

2.2.-3

Az átlós elemek

$$r_{11} = kd_1^2 + \cos \varphi \quad r_{22} = kd_2^2 + \cos \varphi \quad r_{33} = kd_3^2 + \cos \varphi$$

2.2.-4

formában is felírhatók, de szebb az eredeti felírás, mert nem szerepel a  $\varphi$  szög paraméterként (Schut 1959).

### 2.3. Forgatási mátrix felírása ferdén szimmetrikus mátrixból

Forgatási mátrixot könnyen előállíthatunk ferdén szimmetrikus mátrixból.

A ferdén szimmetrikus mátrixot írjuk fel az alábbi módon

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -g & f \\ g & 0 & -e \\ -f & e & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és erre fenn áll, hogy} \quad S^T = -S$$

2.3.-1

és ebből számíthatjuk a forgatási mátrixot az

$$R = (E + S) \cdot (E - S)^{-1}$$

2.3.-2

összefüggésnek megfelelően. Végezzük el az előírt számításokat

$$(E - S) = \begin{bmatrix} 1 & g & -f \\ -g & 1 & e \\ f & -e & 1 \end{bmatrix} ,$$

melynek determinánsa

$$\det = 1 + efg - efg + ee + ff + gg = 1 + ee + ff + gg = h^2 ,$$

és képezzük az adjungált mátrixot az inverz képzéséhez

$$\text{adj}(E - S) = \begin{bmatrix} 1 + ee & g + ef & -f + eg \\ -g + ef & 1 + ff & e + fg \\ f + eg & -e + fg & 1 + gg \end{bmatrix}.$$

Ezután végezzük el az előírt szorzást

			$1+ee$	$-g+ef$	$+f+eg$
			$+g+ef$	$1+ff$	$-e+fg$
			$-f+eg$	$+e+fg$	$1+gg$
$1$	$-g$	$+f$	$1+ee-gg$ $-efg-ff+efg$	$-g+ef-g$ $-ffg+ef+ffg$	$+f+eg+eg$ $-fgg+f+fgg$
$+g$	$1$	$-e$	$+g+eeg+g$ $+ef+ef-eeg$	$-gg+efg+1$ $+ff-ee-efg$	$+fg+egg-e$ $+fg-e-egg$
$-f$	$+e$	$1$	$-f-ee+eg$ $+eef+eg$	$+fg-ee+e$ $+eff+e+fg$	$-ff-efg-ee$ $+efg+1+gg$

Ezzel a következő forgatási mátrixot kapjuk

$$R = \frac{1}{1+ee+ff+gg} \begin{bmatrix} 1+ee-ff-gg & -2g+2ef & +2f+2eg \\ 2g+2ef & 1-ee+ff-gg & -2e+2fg \\ -2f+2eg & 2e+2fg & 1-ee-ff+gg \end{bmatrix}.$$

2.3.-3

Ez rokon a következőkben tárgyalandó Rodrigues mátrixszal és az Euler szimmetrikus paraméterekkel felírt mátrixával (Fazekas 1972, Mirski 1955).

## 2.4. Forgatás Rodrigues mátrixszal

Az előző mátrixhoz hasonlóan írhatjuk fel a Rodrigues mátrixot is.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} & 0 & -\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} & \frac{a}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix  $R = (E + S) \cdot (E - S)^{-1}$  szorzata elvégzése után a következő forgatási-mátrixot kapjuk.

$$R = \frac{1}{d^2} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{4}(a^2 - b^2 - c^2) & -c + \frac{1}{2}ab & b + \frac{1}{2}ac \\ c + \frac{1}{2}ab & 1 + \frac{1}{4}(-a^2 + b^2 - c^2) & -a + \frac{1}{2}bc \\ -b + \frac{1}{2}ac & a + \frac{1}{2}bc & 1 + \frac{1}{4}(-a^2 - b^2 + c^2) \end{bmatrix}$$

$$d^2 = 1 + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

2. 4.-1

Ez természetesen szoros kapcsolatban van az előzőekben tárgyalt ferdén szimmetrikus paraméterekkel, és az Euler szimmetrikus paraméterekkel (Detrekői 1991).

## 2.5. Euler szimmetrikus paramétere

Euler négy szimmetrikus paraméterrel írja fel a forgatási-mátrixot. Ez a ferdén szimmetrikus paraméterekből is származtatható. A négy paraméter között fennáll a következő feltétel

$$l^2 + m^2 + n^2 + r^2 = 1$$

$$R = \begin{bmatrix} l^2 - m^2 - n^2 + r^2 & 2(lm - nr) & 2(ln + mr) \\ 2(lm + nr) & m^2 - l^2 - n^2 + r^2 & 2(mn - lr) \\ 2(ln - mr) & 2(mn + lr) & n^2 - l^2 - m^2 + r^2 \end{bmatrix}.$$

2. 5.-1

Ezt leggyakrabban a kvaternió algebra segítségével vezetik le. A térbeli forgatás a következő kvaternió szorzás segítségével végezhető el

$$\bar{Y} = q \cdot \bar{X} \cdot q^{-1},$$

ahol

$$\bar{Y} = x' \cdot i + y' \cdot j + z' \cdot k$$

az elforgatott pont vektora

$$\bar{X} = x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k$$

az eredeti pont vektora

$$q = r + l \cdot i + m \cdot j + n \cdot k$$

nem skalár egység kvaternió, a forgatás kvaterniója

$$q^{-1} = r - l \cdot i - m \cdot j - n \cdot k$$

a kvaternió inverze, egység kvaternió esetén konjugáltjával egyezik meg.

Végezzük el a kijelölt szorzásokat

$$\begin{aligned} & (r + l \cdot i + m \cdot j + n \cdot k) \cdot (x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k) \cdot (r - l \cdot i - m \cdot j - n \cdot k) = \\ & = (rx \cdot i - lx - mx \cdot k + nx \cdot j + ry \cdot i - ly \cdot k - my + ny \cdot i - rz \cdot k - lz \cdot j - mz \cdot i - nz) \cdot \\ & \cdot (r - l \cdot i - m \cdot j - n \cdot k) = \end{aligned}$$

a konjugálttal számított szorzás

$$\begin{aligned}
 &+ rrx \cdot i - lrx - mrx \cdot k + nrx \cdot j + \\
 &+ rry \cdot j + lry \cdot k - mry - nry \cdot i + \\
 &+ rrz \cdot k - lrz \cdot j + mrz \cdot i - nrz + \\
 &+ lrx + llx \cdot i + lmx \cdot j + lnx \cdot k + \\
 &+ mry \cdot k - lly \cdot j + lmy \cdot i - lny + \\
 &+ lrz \cdot j - llz \cdot k + lmz - lnz \cdot i + \\
 &+ mrx \cdot k + lmx \cdot j - mmx \cdot i + mnx + \\
 &+ mry + lmy \cdot i + mmy \cdot j - mny \cdot k + \\
 &+ mrz \cdot i - lmz - mmz \cdot k + mnz \cdot j + \\
 &+ nrx \cdot j + lnx \cdot k - mnx - nnx \cdot i - \\
 &- rry \cdot i + lny + mny \cdot k - nny \cdot j + \\
 &+ mrz + lnz \cdot i + mnz \cdot j + nnz \cdot k =
 \end{aligned}$$

Amiből a forgatási mátrix

	$x$	$y$	$z$
$0$	$-lr + mr - mr + lr = 0$	$-mr - lr + mr + lr = 0$	$-nr + lm - lm + nr = 0$
$i$	$rr + ll - mm - nn$	$2lm - 2nr$	$2ln + 2mr$
$j$	$2lm + 2nr$	$rr - ll + mm - nn$	$2mn - 2lr$
$k$	$2ln - 2mr$	$2mn + 2lr$	$rr - ll - mm + nn$

Az első sor elemei mind 0-val egyenlők.

A szorzásoknál figyelembe kell venni, hogy fenn állnak a vektorszámításnál ismert összefüggések

$$\begin{aligned}
 i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1 & \quad i \cdot j = k & \quad j \cdot k = i & \quad k \cdot i = j \\
 j \cdot i = -k & \quad j \cdot k = -i & \quad k \cdot i = -j
 \end{aligned}$$

A felírt forgatási-mátrix rokon a ferdén szimmetrikus mátrixból származtatottal. Ez jól látszik a felírt mátrix elemeinek hasonlóságából. A ferdén szimmetrikus és a Rodrigues paraméterek esetében van egy szorzótényező, itt ez egységnyi (Euler 1921, Ferenczi 1887, Korn-Korn 1975).

## 2.6. Koordináta tengely körüli forgatások

A forgatás leggyakrabban használt leírásában a forgatást tengely körüli forgatásokkal írjuk le. Ez nagyon szemléletes, de felírásuk sok esetben nehézkes, ezért matematikailag nehezebben kezelhetők.

A forgatási-mátrixot ebben az esetben az egyes tengelyek körüli forgatásokból írjuk fel. Az egyes forgatások mindig egymás után következnek és a következő forgatást a már elforgatott koordináta tengely körül végezzük. Ezért mondjuk, hogy a forgatások együtt mozgó koordináta rendszerre vonatkoznak.

Először írjuk fel az egyes tengelyek körüli forgatás mátrixait. A tengelyek körüli forgatásoknál, ahhoz a koordináta-tengelyhez tartozó koordináták, mely körül a forgatást végezzük változatlanok maradnak, és csak a másik két koordináta értékek változnak.



Először írjuk fel a síkbeli forgatás egyenleteit.

A síkbeli forgatásnál pozitív forgatásnál a koordináta rendszer  $x$  tengelyét forgatjuk az  $y$  tengely felé. Ez a bal sodrású és jobb sodrású rendszerekben is fenn áll. A felírt képletek mindkét sodrású rendszerben helyesek, csak más ábra tartozik hozzá.

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha \\ y' &= -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad Y = R \cdot X$$

2.6.-1

Ez alapján írjuk fel a térbeli tengelyek körüli forgatási mátrixokat. mátrix a következő lesz.

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad R_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$R_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.6.-2

Az egyes tengelyek körüli forgatáskor a forgástengelyt követő koordináta tengely forog az őt követő tengely felé. A koordináták sorrendje az  $x$ - $y$ - $z$ , amely  $x$ - $y$ - $z$  sorrendben folytatódik.

Forgatás az  $x$  tengely körül  $\alpha$  szöggel. Az  $y$  tengely fordul a  $z$  tengely felé.

Forgatás az  $y$  tengely körül  $\beta$  szöggel. A  $z$  tengely fordul a  $x$  tengely felé.

Forgatás az  $z$  tengely körül  $\gamma$  szöggel. Az  $x$  tengely fordul az  $y$  tengely felé.

Térbeli forgatások két formában állíthatók elő tengely körüli forgatásokkal. A gyakoribb esetben mind a három tengely körül forgatunk, meghatározott sorrendben. A másik esetben két tengely körül forgatunk. Először a kiválasztott első tengely körül, majd egy másik tengely körül forgatunk, és végül ismét az első tengely körül végezzük a forgatást, egy eltérő szögértékkel. A tengely körüli forgatásoknál a forgatási-mátrixot úgy kapjuk, hogy az egyes tengely körüli forgatási mátrixokat megfelelő sorrendben összeszorozzuk.

Ezeket a forgatásokat Euler szögekkel végzett forgatásoknak nevezzük, mert részletes ismertetésük tőle származik. (Euler 1921, Schut 1959, Ugrin 1978, Korn-Korn 1975).

### 2.7.1. Euler forgatás három tengely körül

A három tengely körüli forgatásnál a három tengely sorrendjét tetszőlegesen választhatjuk ki. Ez összességében hat lehetőséget jelent ( $xyz$ ,  $xzy$ ,  $yxz$ ,  $yzx$ ,  $zxy$ ,  $zyx$ ).

Mi, válasszuk a természetesnek tűnő első lehetőséget.

1. forgatás az  $x$  tengely körül  $\alpha$  szöggel,
2. forgatás az  $y$  tengely körül  $\beta$  szöggel,
3. forgatás a  $z$  tengely körül  $\gamma$  szöggel.

A forgatási mátrixot ennek megfelelően a következő sorrendben állítjuk elő:

$$R = R_\gamma R_\beta R_\alpha, \quad R^{-1} = R^T = R_\alpha^T R_\beta^T R_\gamma^T. \quad 2.7.-1$$

Ezzel a transzformációt az alábbi módon számíthatjuk:

$$\begin{aligned} Y &= R \cdot X & Y^T &= X^T R^T \\ X &= R^{-1} \cdot Y = R^T \cdot Y & X^T &= Y^T R \end{aligned}$$

Végezzük el a kijelölt szorzásokat.

			1	0	0
			0	$\cos \alpha$	$\sin \beta$
			0	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\cos \beta$	0	$-\sin \beta$	$\cos \beta$	$\sin \alpha \sin \beta$	$-\cos \alpha \sin \beta$
0	1	0	0	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
$\sin \beta$	0	$\cos \beta$	$\sin \beta$	$-\sin \alpha \cos \beta$	$\cos \alpha \cos \beta$
$\cos \gamma$	$\sin \gamma$	0	$\cos \beta \cos \gamma$	$\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$ $+ \cos \alpha \sin \gamma$	$-\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma$ $+ \sin \alpha \sin \gamma$
$-\sin \gamma$	$\cos \gamma$	0	$-\cos \beta \sin \gamma$	$-\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ $+ \cos \alpha \cos \gamma$	$\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$ $+ \sin \alpha \cos \gamma$
0	0	1	$\sin \beta$	$-\sin \alpha \cos \beta$	$\cos \alpha \cos \beta$

2.7.-2

## 2.8. Forgatás két tengely körül

Két tengely körüli forgatásnál a tengelyek sorrendjét szintén megválaszthatjuk. Ekkor is 6 különböző eset lehet ( $xyx, xzx, yxy, yzy, zxz, zyz$ ). Mi most is az első esetet választjuk, és ennek megfelelően írjuk fel a forgatási mátrixot.

Először az  $X$  tengely körül  $\xi_1$  szöggel, másodszer az  $Y$  tengely körül  $\eta$  szöggel, és harmadszor az  $X$  tengely körül  $\xi_2$  szöggel forgatunk.

			1	0	0
			0	$\cos \xi_1$	$\sin \xi_1$
			0	$-\sin \xi_1$	$\cos \xi_1$
$\cos \eta$	0	$-\sin \eta$	$\cos \eta$	$\sin \xi_1 \sin \eta$	$-\cos \xi_1 \sin \eta$
0	1	0	0	$\cos \xi_1$	$\sin \xi_1$
$\sin \eta$	0	$\cos \eta$	$\sin \eta$	$-\sin \xi_1 \cos \eta$	$\cos \xi_1 \cos \eta$
1	0	0	$\cos \eta$	$\sin \xi_1 \sin \eta$	$-\cos \xi_1 \sin \eta$
0	$\cos \xi_2$	$\sin \xi_2$	$\sin \eta \sin \xi_2$	$-\sin \xi_1 \cos \eta \sin \xi_2$ $+ \cos \xi_1 \cos \xi_2$	$\cos \xi_1 \cos \eta \sin \xi_2$ $+ \sin \xi_1 \cos \xi_2$
0	$-\sin \xi_2$	$\cos \xi_2$	$\sin \eta \cos \xi_2$	$-\sin \xi_1 \cos \eta \cos \xi_2$ $-\cos \xi_1 \sin \xi_2$	$\cos \xi_1 \cos \eta \cos \xi_2$ $-\sin \xi_1 \sin \xi_2$

2.8.-1

Az  $x$  tengely körüli forgatáskor az  $y$  tengelyt forgatjuk a  $z$  tengely felé.

Az  $y$  tengely körüli forgatáskor az  $z$  tengelyt forgatjuk az  $x$  tengely felé.

A  $z$  tengely körüli forgatáskor az  $x$  tengelyt forgatjuk az  $y$  tengely felé.

Ezért vált előjelet a  $\sin \eta$ , az  $y$  tengely körüli forgatáskor.

## 2.9. Euler hat szög-paramétere

Euler 1775-ben adott egy forgatási mátrixot, melyben 6 szög paraméter szerepel. A forgatási mátrixot az alábbi módon írja fel

$$R = \begin{bmatrix} \sin \zeta_1 & \sin \zeta_2 & \sin \zeta_3 \\ \cos \zeta_1 \sin \eta_1 & \cos \zeta_2 \sin \eta_2 & \cos \zeta_3 \sin \eta_3 \\ \cos \zeta_1 \cos \eta_1 & \cos \zeta_2 \cos \eta_2 & \cos \zeta_3 \cos \eta_3 \end{bmatrix},$$

2.9.-1

$$\Delta = \tan \zeta_1 \cdot \tan \zeta_2 \cdot \tan \zeta_3 = \sqrt{-\cos(\eta_1 - \eta_2) \cdot \cos(\eta_2 - \eta_3) \cdot \cos(\eta_3 - \eta_1)},$$

2.9.-2

és

$$\tan \zeta_1 = \frac{-\Delta}{\cos(\eta_2 - \eta_3)} \quad \tan \zeta_2 = \frac{-\Delta}{\cos(\eta_3 - \eta_1)} \quad \tan \zeta_3 = \frac{-\Delta}{\cos(\eta_1 - \eta_2)}.$$

2.9.-3

Ezek az összefüggések megadják a kapcsolatot a hat paraméter között.

A forgatás három független paramétereként két eset lehetséges. Független paraméterként választhatjuk az  $\eta_1 \eta_2 \eta_3$  szögforgások értékét. Másik lehetőség a  $\zeta_1 \zeta_2 \eta_1$  szögeértékek megadása.

Az  $\eta_1 \eta_2 \eta_3$  megadásakor először számítjuk a  $\Delta$  értékét a 2.8.-2 második képletével, majd a  $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$  szögeket a 2.8.-3 képletekkel határozhatjuk. Ezzel meghatároztuk a hat szög paramétert és felírhatjuk a forgatási mátrixot.

A második esetben a harmadik  $\zeta_3$  szöget az első sor egységnyi hossza alapján a

$$\sin \zeta_3 = \sqrt{1 - \sin^2 \zeta_1 - \sin^2 \zeta_2}$$

képlettel számíthatjuk, majd képezhetjük a  $\Delta$  értékét a 2.9.-2 első összefüggésével. Ezután az  $\eta_1 \eta_2 \eta_3$  szögek különbségeit határozhatjuk meg a

$$\cos(\eta_2 - \eta_3) = \frac{-\Delta}{\tan \zeta_1} \quad \cos(\eta_3 - \eta_1) = \frac{-\Delta}{\tan \zeta_2} \quad \cos(\eta_1 - \eta_2) = \frac{-\Delta}{\tan \zeta_3}$$

képletekkel, a koszinusz visszakeresése után. Ezután számítsuk a

$$\eta_2 = \eta_1 - (\eta_1 - \eta_2) \quad \text{és} \quad \eta_3 = (\eta_3 - \eta_1) + \eta_1$$

szögeket. Ellenőrzést többféleképpen végezhetünk, például Számíthatjuk az  $\eta_1$  szöget a másik két szögből, vagy meghatározhatjuk a  $\Delta$  értékét a koszinusz összefüggésből. Legjobb ellenőrzés azonban, ha a kiszámított szögekből meghatározzuk a forgatási mátrixot és ellenőrizzük annak ortogonalitását (Schut 1959).

## 2.10. A három átlón kívüli elem, mint paraméter

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{1-r_{12}^2-r_{13}^2} & r_{12} & r_{13} \\ \frac{-r_{11}r_{13}r_{23}-r_{12}r_{33}}{1-r_{13}^2} & \sqrt{1-r_{21}^2-r_{23}^2} & r_{23} \\ r_{12}r_{23}-r_{13}r_{22} & r_{13}r_{21}-r_{11}r_{23} & \sqrt{1-r_{13}^2-r_{23}^2} \end{bmatrix}$$

2.10.-1

fejezzük ki az  $r_{21}$  -et aldeterminánsként, és ebbe írjuk be az ismeretlen  $r_{32}$  elemhez tartozó aldeterminánst:

$$r_{21} = - \begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} \\ r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = r_{13}r_{32} - r_{12}r_{33} = r_{13}(r_{21}r_{13} - r_{11}r_{23}) - r_{12}r_{33},$$

mivel  $r_{32} = - \begin{vmatrix} r_{11} & r_{13} \\ r_{21} & r_{23} \end{vmatrix}$  és az így kapott egyenletből kifejezhetjük az  $r_{21}$  értékét az

alábbi formában:  $r_{21} = \frac{-r_{11}r_{13}r_{23} - r_{12}r_{33}}{1 - r_{13}^2}$ . Ezután számíthatjuk a többi hiányzó

elemet is. A meghatározás másik lehetősége, hogy az  $r_{32}$  elemet számítjuk hasonló

módon:  $r_{32} = - \begin{vmatrix} r_{11} & r_{13} \\ r_{21} & r_{23} \end{vmatrix} = r_{13}r_{21} - r_{11}r_{23} = r_{13}(r_{13}r_{32} - r_{12}r_{33}) - r_{11}r_{23}$  amibe

az  $r_{21}$  értékét írjuk be aldetermináns formájában.  $r_{21} = - \begin{vmatrix} r_{12} & r_{13} \\ r_{32} & r_{33} \end{vmatrix}$ . Az így kapott

egyenletből az  $r_{32} = \frac{-r_{12}r_{13}r_{33} - r_{11}r_{23}}{1 - r_{13}^2}$  kifejezést kapjuk (Wang Zhizhuo 1990).

## 2.11. Forgatás kis szögekkel, közelítő forgatás

A forgatási mátrix felírását gyakran kis szögekkel írjuk fel. Ezt a forgatási mátrixot többféle képen származtathatjuk. Leggyakrabban a három tengely körüli forgatásból vezetjük le. A felírt 2.6.-2 összefüggéseket írjuk fel kis szögekkel. Kis szögek esetén az  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $\gamma$  szögek szinuszaik függvényei ívmértékükkel egyenlő, a szögek koszinuszaik 1-el lesznek egyenlők.

$$\sin \alpha = \Delta \alpha \quad \cos \alpha = 1 \quad \sin \beta = \Delta \beta \quad \cos \beta = 1 \quad \sin \gamma = \Delta \gamma \quad \cos \gamma = 1$$

2.11.-1

Két kis szög szinuszának szorzatát 0-nak vesszük. Ezzel a forgatási mátrix az alábbi lesz:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\gamma & +\Delta\beta \\ +\Delta\gamma & 1 & -\Delta\alpha \\ -\Delta\beta & +\Delta\alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

2.11.-2

Származtathatjuk az Euler paramétereiből is, kis forgatásnál az

$$l = \Delta l, \quad m = \Delta m \quad \text{és} \quad n = \Delta n \quad \text{lesz, az } r = 1$$

2.11.-3

értékű lesz. A ferdén szimmetrikus paraméterek esetében az

$$e = \Delta e \quad f = \Delta f \quad \text{és} \quad g = \Delta g$$

2.11.-4

kis értékek lesznek. A térbeli tengely körüli forgatásnál a térbeli tengely körüli elforgatási szög lesz kis értékű

$$\varphi = \Delta\varphi.$$

2.11.-5

A forgástengely irány koszinuszai nem lesznek kis számértékek.

A forgatási mátrixot ezek alapján a következő formában írhatjuk fel kis elfordulási szög esetén:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta n & +\Delta m \\ +\Delta n & 1 & -\Delta l \\ -\Delta m & +\Delta l & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta g & +\Delta f \\ +\Delta g & 1 & -\Delta e \\ -\Delta f & +\Delta e & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -c_3\Delta\varphi & +c_2\Delta\varphi \\ +c_3\Delta\varphi & 1 & -c_1\Delta\varphi \\ -c_3\Delta\varphi & +c_1\Delta\varphi & 1 \end{bmatrix}.$$

2.11.-6

A felírt elemi forgatás mátrix mindhárom esetben egyezik a három tengely körüli forgatásból felírttal, csak az elemi forgatási paraméter értéke más magyarázatból származik.

Ez a mátrix egyezik a ferdén szimmetrikus paraméterek eredeti

$$R=E+S$$

2.11.-7

mátrixával.

A két tengely körüli forgatásból ezt a mátrixot nem lehet felírni.

Gyakorlati szempontból ennek az elemi forgatási mátrixnak nagyon sok alkalmazása van. A forgatási mátrix kiegyenlítésével való meghatározásánál.

### 3. A FORGATÁSI PARAMÉTEREK KAPCSOLATA

#### 3.1. Az Euler-féle, a ferdén szimmetrikus és a Rodriques paraméterek kapcsolata

A Euler szimmetrikus paraméterek, a ferdén szimmetrikus paraméterek és a Rodriques paraméterek alapján felírt forgatási-mátrixok sok hasonlóságot mutatnak. Ezek alapján vizsgáljuk meg a köztük fennálló kapcsolatot.

Az arányossági tényező az Euler paraméternél 1-el egyenlő. A Rodriques paramétereknél

$$d^2 = 1 + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = 1 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

A ferdén szimmetrikus paraméterek esetén ez

$$h^2 = 1 + e^2 + f^2 + g^2$$

-vel egyenlő.

A forgatási mátrix első sorának első elemét a következőképpen írhatjuk a Rodriques paraméterekkel

$$r_{11} = l^2 - m^2 - n^2 + r^2 = \frac{1 + \frac{1}{4}(a^2 - b^2 - c^2)}{d^2} = \left(\frac{a}{2d}\right)^2 - \left(\frac{b}{2d}\right)^2 - \left(\frac{c}{2d}\right)^2 + \left(\frac{1}{d}\right)^2.$$

Ugyanez a ferdén szimmetrikus paraméterekkel felírva

$$r_{11} = \frac{1 + e^2 - f^2 - g^2}{h^2} = \left(\frac{e}{h}\right)^2 - \left(\frac{f}{h}\right)^2 - \left(\frac{g}{h}\right)^2 + \left(\frac{1}{h}\right)^2.$$

Ebből már felírhatjuk a paraméterek kapcsolatát

$$l = \frac{a}{2d} = \frac{e}{h} \quad m = \frac{b}{2d} = \frac{f}{h} \quad n = \frac{c}{2d} = \frac{g}{h} \quad r = \frac{1}{d} = \frac{1}{h},$$

ahol

$$d^2 = h^2 = \left(\frac{l}{r}\right)^2 + \left(\frac{m}{r}\right)^2 + \left(\frac{n}{r}\right)^2 + 1 = \frac{1}{r^2}.$$

3.1.-1

A Rodriques paraméterek kifejezve a másik két paraméter csoporttal

$$a = \frac{2l}{r} = 2e \quad b = \frac{2m}{r} = 2f \quad c = \frac{2n}{r} = 2g$$

3.1.-2

és a ferdén szimmetrikus paraméterek a

$$e = \frac{l}{r} = \frac{a}{2} \quad f = \frac{m}{r} = \frac{b}{2} \quad g = \frac{n}{r} = \frac{c}{2}$$

3.1.-3

képletekkel írhatók fel.

A felírt összefüggések alapján láthatjuk, hogy a kapcsolat nagyon szoros, ez lehetővé teszi hogy a többi forgatási-mátrixszal való kapcsolatokat együtt vizsgáljuk. Ezek közül is az Euler paraméterek fontossága igen jelentős, mert a forgatási-mátrixban az arányosági tényező 1-el egyenlő.

### 3.2. Az Euler paraméterek kifejezése a forgástengely valamint a két tengely körüli forgatás kapcsolata

Az Euler paraméterek és a forgástengely valamint a két tengely körüli forgatás közötti kapcsolat a következő formában írható fel

$$\begin{aligned} l &= c_1 \sin \frac{\varphi}{2} = -\sin \frac{\xi_2 + \xi_1}{2} \cos \frac{\eta}{2} \\ m &= c_2 \sin \frac{\varphi}{2} = -\cos \frac{\xi_2 - \xi_1}{2} \sin \frac{\eta}{2} \\ n &= c_3 \sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\xi_2 - \xi_1}{2} \sin \frac{\eta}{2} \\ r &= \cos \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\xi_2 + \xi_1}{2} \cos \frac{\eta}{2} \end{aligned}$$

3.2.-1

A Korn-Korn 1975 –ben adott képletekkel formailag azonos.

Ez alapján könnyen kifejezhetjük a Euler paraméterekkel a forgás tengely iránykoszinuszait és az elfordulási szöget

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\pm \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}{r}$$

$$c_1 = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}; \quad c_2 = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}; \quad c_3 = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

3.2.-2

### 3.3. A Euler tengely körüli forgatás szögértékeinek meghatározása Euler paraméterekkel

A 4. fejezetben leírjuk a forgásszögek számítását a forgatási mátrix elemeiből.

A 4.4.-5 képletekbe írjuk be az elemek Euler paramétereit, rendezés után a következőt kapjuk:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{l + n}{m - r} = \frac{e + g}{f - l} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{n - l}{m + r} = \frac{g - e}{f + l} . \quad 3.3.-1$$

Hasonlóan ezt megtehetjük a 4.5.-5 összefüggés esetén is:

$$\operatorname{tg} \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} = -\frac{l}{r} = -e \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \frac{\xi_1 - \xi_2}{2} = \frac{n}{m} = \frac{g}{f} . \quad 3.3.-2$$

Az  $\eta$  szög meghatározását a 4.5.-1 és a 4.5.-2 képletek segítségével végezhetjük, ezekbe a forgatási-mátrix elemei helyére írjuk be az Euler paramétereket:

$$\operatorname{tg} \frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{l^2 + r^2}} = \sqrt{\frac{l}{l^2 + r^2} - 1} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{1 - (m^2 + n^2)}} . \quad 3.3.-3$$

## 4. A PARAMÉTEREK MEGHATÁROZÁSA A FORGATÁSI MÁTRIXBÓL

### 4.1. A forgás-tengely meghatározása

Írjuk fel az átlón kívüli elemek különbségeit

$$r_{21} - r_{12} = 2c_3 \sin \varphi, \quad r_{13} - r_{31} = 2c_2 \sin \varphi, \quad r_{32} - r_{23} = 2c_1 \sin \varphi .$$

ahol  $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$  .

Számítsuk ki a főátló nyomát:

$$\begin{aligned} \operatorname{Spur} R &= 3 \cos \varphi + (1 - \cos \varphi) \cdot (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) = 2 \cos \varphi + 1 \\ \cos \varphi &= \frac{\operatorname{Spur} R - 1}{2} = \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} . \end{aligned}$$

Az elfordulási szög szinusa az átlón kívüli elemek különbségéből

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{(r_{21} - r_{12})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{32} - r_{23})^2}}{2} ,$$

ebből a forgástengely irány-koszinuszai és az elfordulási szög

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{r_{32} - r_{23}}{2 \sin \varphi} & c_2 &= \frac{r_{13} - r_{31}}{2 \sin \varphi} & c_3 &= \frac{r_{21} - r_{12}}{2 \sin \varphi} \\ \varphi &= \arctan \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sqrt{(r_{21} - r_{12})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{32} - r_{23})^2}}{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1} \end{aligned}$$



4.1.-1

a szögnegyedet a szinusz és a koszinusz előjele határozza meg. Ha a számlálót, a gyökvonás miatt, mindig pozitív értékűnek vesszük akkor az elfordulási szög mindig kisebb lesz, mint  $180^\circ$ . Ennek megfelelően  $180^\circ$ -nál nagyobb elfordulás esetén visszaszámolva a forgatási-mátrixból a forgástengely ellentétes irányú lesz, úgy, hogy az elfordulási szög  $180^\circ$ -nál kisebb legyen.

## 4.2. Az Euler paraméterek meghatározása

Képezzük a főátló nyomát

$$\text{Spur}R = -l^2 - m^2 - n^2 + 3r^2 = -l^2 - m^2 - n^2 - r^2 + 4r^2 = 4r^2 - 1,$$

és ebből az  $r$  paraméter

$$r = \frac{\sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1}}{2}.$$

4.2.-1

Az átlón kívüli elemek különbségei

$$r_{21} - r_{12} = 4nr \quad r_{13} - r_{31} = 4mr \quad r_{32} - r_{23} = 4lr$$

és így

$$l = \frac{r_{32} - r_{23}}{4r} \quad m = \frac{r_{13} - r_{31}}{4r} \quad n = \frac{r_{21} - r_{12}}{4r}$$

4.2.-2

képletekkel számíthatjuk a hiányzó három paramétert.

Az  $r$  kifejezésében gyökvonás szerepel, ezért az  $r$  előjele mindig pozitív lesz, ennek megfelelően alakulnak a további paraméterek. Az  $l, m, n, r$  forgatás és a  $-l, -m, -n, -r$  ugyanazt a forgatást állítja elő. Így pozitív előjelű  $r$  esetén is van egyértelműen meghatározható paraméter négyes.

A forgatási-mátrix elemei és az Euler paraméterek között felírható néhány jellegzetes összefüggés.

<i>Az átlón kívüli elemek összege</i>	<i>Az átlón kívüli elemek különbsége</i>	<i>Euler paraméterek négyzete az átlós elemekből</i>
$r_{12} + r_{21} = 4lm$	$r_{12} - r_{21} = 4nr$	$1 + r_{11} - r_{22} - r_{33} = 4l^2$
$r_{13} + r_{31} = 4ln$	$r_{13} - r_{31} = 4mr$	$1 - r_{11} + r_{22} - r_{33} = 4m^2$
$r_{23} + r_{32} = 4mn$	$r_{32} - r_{23} = 4lr$	$1 - r_{11} - r_{22} + r_{33} = 4n^2$
		$1 + r_{11} + r_{22} + r_{33} = 4r^2$

4.2.-3

Ezek a képletek lehetővé teszik a paraméterek kifejezését. Ez különösen a ferdén szimmetrikus paraméterek meghatározására érvényes.

Az alább felírt összefüggésekben az Euler paraméterek hányadosának értékét a forgatási mátrix elemeivel fejezzük ki. A második és harmadik egyenlőségjel után az átlón kívüli elemek összegének és különbségének hányadosaival határoztuk meg. A

negyedik egyenlőség után az átlón kívüli elemekből számítottuk. Végül az ötödik képletek az átló elemeiből és az aszimmetrikus elemek különbségéből való számítási lehetőséget mutatja.

$$e = \frac{l}{r} = \frac{r_{12} + r_{21}}{r_{13} - r_{31}} = \frac{r_{13} + r_{31}}{r_{21} - r_{12}} = \frac{r_{13} + r_{31} - r_{12} - r_{21}}{r_{31} + r_{21} - r_{13} - r_{12}} = \frac{l + r_{11} - r_{22} - r_{33}}{r_{23} - r_{32}}$$

$$f = \frac{m}{r} = \frac{r_{12} + r_{21}}{r_{32} - r_{23}} = \frac{r_{23} + r_{32}}{r_{21} - r_{12}} = \frac{r_{12} + r_{21} - r_{23} - r_{32}}{r_{32} - r_{23} - r_{21} + r_{12}} = \frac{l - r_{11} + r_{22} - r_{33}}{r_{13} - r_{31}}$$

$$g = \frac{n}{r} = \frac{r_{13} + r_{31}}{r_{32} - r_{23}} = \frac{r_{23} + r_{32}}{r_{13} - r_{31}} = \frac{r_{23} + r_{32} - r_{13} - r_{31}}{r_{23} + r_{13} - r_{31} - r_{32}} = \frac{l - r_{11} - r_{22} + r_{33}}{r_{21} - r_{12}}$$

4.2.-4

Ezek az összefüggések már inkább a következő fejezethez tartoznak.

### 4.3. Ferdén szimmetrikus paraméterek meghatározása

A mátrix felírása hasonló az Euler paraméterekkel felírt mátrixhoz. Ezért itt is hasonló módon végezzük a számítást. Először a mátrix nyomát képezzük

$$SpurR = \frac{-e^2 - f^2 - g^2 + 3 + l - l}{l + e^2 + f^2 + g^2} = \frac{4}{h^2} - 1,$$

amiből a forgatási-mátrix szorzótényezőjének reciproka

$$h = \frac{2}{\sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + l}}.$$

Az átlón kívüli elemek különbségei

$$r_{21} - r_{12} = 4 \frac{g}{h^2} \quad r_{13} - r_{31} = 4 \frac{f}{h^2} \quad r_{32} - r_{23} = 4 \frac{e}{h^2}$$

és így

$$e = \frac{r_{32} - r_{23}}{r_{11} + r_{22} + r_{33} + l} \quad f = \frac{r_{13} - r_{31}}{r_{11} + r_{22} + r_{33} + l} \quad g = \frac{r_{21} - r_{12}}{r_{11} + r_{22} + r_{33} + l}.$$

4.3.-1

Ezenkívül nézzük meg az előző fejezet 4.2.-4 összefüggéseit.

### 4.4. Három tengely körüli forgás-szögek meghatározása

Három tengely körüli forgatás forgás szögeit a forgatási mátrix első oszlopa és harmadik sora elemeiből számíthatjuk.

A harmadik sor második és harmadik eleméből

$$r_{32} = -\sin \alpha \cos \beta \quad r_{33} = \cos \alpha \cos \beta$$

$$\alpha = \arctan \frac{-r_{32}}{r_{33}} \quad \text{és} \quad \cos \beta = \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}$$

4.4.-1

A fenti összefüggéssel számíthatjuk az  $\alpha$  szöget. Az  $\alpha$  szög-negyede az együtthatók előjeléből határozható meg, és hasonlóan Számíthatjuk a  $\gamma$  szöget is.

$$r_{11} = \cos \beta \cos \gamma \quad r_{12} = -\cos \beta \sin \gamma$$

$$\gamma = \arctan \frac{-r_{12}}{r_{11}} \quad \text{és} \quad \cos \beta = \sqrt{r_{11}^2 + r_{12}^2}$$

4.4.-2

A  $\beta$  szög meghatározásához az eddigiekből már ismerjük koszinuszának értékét, a gyök-vonás miatt mindig pozitív előjellel.

$$\beta = \arctan \frac{r_{13}}{\sqrt{r_{11}^2 + r_{12}^2}} = \arctan \frac{r_{13}}{\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}}$$

4.4.-3

formában határozható meg.

A  $\beta$  szög-negyede az együtthatók előjeléből határozható meg. Értéke azonban mindig  $270^\circ - 360^\circ = 0^\circ$  és  $90^\circ$  fok között esik, mert a koszinuszát pozitívnak tételeztük fel. Az  $\alpha$  és  $\beta$  szögeket is ezzel a feltétellel számítottuk. Ha ezekkel a szögértékekkel ismét számíthatjuk a forgatási mátrixot ugyanazt kapjuk meg, mert az  $R(\alpha, \beta, \gamma) = R(\alpha + 180^\circ, 180^\circ - \beta, \gamma + 180^\circ)$  forgatással.

A forgatás szögértékeit számíthatjuk más módon is. Írjuk fel az  $r_{12}$  és az  $r_{23}$  elemek összegét és különbségét, valamint ugyanezt az  $r_{13}$  és az  $r_{22}$  elemekre is.

$$r_{12} \pm r_{23} = \sin \alpha \cos \gamma \sin \beta + \cos \alpha \sin \gamma \pm \cos \alpha \sin \gamma \sin \beta \pm \sin \alpha \cos \gamma =$$

$$= +\sin(\alpha \pm \gamma) \cdot (\sin \beta \pm 1)$$

$$r_{13} \pm r_{22} = \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta + \sin \alpha \sin \gamma \mp \sin \alpha \sin \gamma \sin \beta \pm \cos \alpha \cos \gamma =$$

$$= \pm \cos(\alpha \mp \gamma) \cdot (1 \mp \sin \beta)$$

Ebből felírhatjuk a szögek összegének szinuszt és koszinuszát felhasználva, hogy  $\sin \beta = r_{31}$  egyenlő:

$\sin(\alpha + \gamma) = \frac{r_{12} + r_{23}}{1 + r_{31}}$	$\sin(\alpha - \gamma) = \frac{r_{23} - r_{12}}{1 - r_{31}}$
$\cos(\alpha + \gamma) = \frac{r_{22} - r_{13}}{1 + r_{31}}$	$\cos(\alpha - \gamma) = \frac{r_{22} + r_{13}}{1 - r_{31}}$

4.4.-4

Ezekből felírhatjuk a szögek felének tangensét a  $\operatorname{tg} \frac{X}{2} = \frac{\sin X}{1 + \cos X} = \frac{1 - \cos X}{\sin X}$  össze-  
függések felhasználásával:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{r_{12} + r_{23}}{1 - r_{13} - r_{31} + r_{22}} = \frac{1 + r_{13} + r_{31} - r_{22}}{r_{12} + r_{23}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{r_{23} - r_{12}}{1 + r_{13} - r_{31} + r_{22}} = \frac{1 - r_{13} - r_{31} - r_{22}}{r_{23} - r_{12}}.$$

4.4.-5

#### 4.5. Két tengely körüli forgás-szögek meghatározása

A két tengely körüli forgatás paramétereit az előzőhöz hasonlóan határozzuk meg. Az első sor második és harmadik eleméből a  $\xi_1$  kifejezhető:

$$r_{12} = \sin \xi_1 \sin \eta \quad r_{13} = -\cos \xi_1 \sin \eta \quad \text{és}$$

$$\xi_1 = \arctan \frac{r_{12}}{-r_{13}} \quad \text{és} \quad \sin \eta = \sqrt{r_{12}^2 + r_{13}^2},$$

4.5.-1

a  $\xi_1$  szög-negyede az együtthatók előjeléből határozható meg, azzal a feltételezéssel, hogy a  $\sin \eta$  előjele pozitív. Hasonlóan a  $\xi_2$  is meghatározható a forgatási mátrix első oszlopának elemeiből. Ekkor is ugyanazzal a feltételezéssel élünk mint az előbb.

$$r_{21} = \sin \eta \sin \xi_1 \quad r_{31} = \sin \eta \cos \xi_1 \quad \text{és}$$

$$\xi_2 = \arctan \frac{r_{21}}{r_{31}} \quad \text{és} \quad \sin \eta = \sqrt{r_{21}^2 + r_{31}^2}$$

4.5.-2

Az  $\eta$  szög számítását megint csak tangenséből számítjuk

$$\eta = \arctan \frac{\sqrt{r_{12}^2 + r_{13}^2}}{r_{11}} = \arctan \frac{\sqrt{r_{21}^2 + r_{31}^2}}{r_{11}}$$

4.5.-3

A forgásszögek nem mindig egyeznek az eredeti szögekkel. Ugyanazt a forgatási mátrixot más forgásszögekkel is előállíthatjuk. az  $R(\xi_1, \eta, \xi_2) = R(\xi_1 + 90^\circ, \eta, \xi_2 - 90^\circ)$  ugyanazt a forgatási-mátrixot állítja elő.

Az előzőhöz hasonlóan ennél a forgatásnál is meghatározhatjuk a forgásszögek összegét és különbségét. Írjuk fel az  $r_{22}$  és az  $r_{33}$  elemek összegét és különbségét, valamint írjuk fel ugyanezt az  $r_{23}$  és az  $r_{32}$  elemekre is.

$$r_{22} \pm r_{33} = -\sin \xi_1 \cos \eta \sin \xi_2 + \cos \xi_1 \cos \xi_2 \pm \cos \xi_1 \sin \eta \cos \xi_2 \mp \sin \xi_1 \sin \xi_2 = \\ = +\cos(\xi_1 \pm \xi_2) \cdot (1 \pm \cos \eta)$$

$$r_{32} \pm r_{23} = -\sin \xi_1 \cos \eta \cos \xi_2 - \cos \xi_1 \sin \xi_2 \pm \cos \xi_1 \cos \eta \sin \xi_2 \mp \sin \xi_1 \cos \xi_2 = \\ = \pm \sin(\xi_1 \mp \xi_2) \cdot (1 \mp \cos \eta)$$

Ebből felírhatjuk a szögek összegének szinusztát és koszinusztát felhasználva, hogy  $\cos \eta = r_{11}$  egyenlő:

$\sin(\xi_1 + \xi_2) = \frac{r_{23} - r_{32}}{1 + r_{11}}$	$\sin(\xi_1 - \xi_2) = \frac{r_{23} + r_{32}}{1 - r_{11}}$
$\cos(\xi_1 + \xi_2) = \frac{r_{22} + r_{33}}{1 + r_{11}}$	$\cos(\xi_1 - \xi_2) = \frac{r_{22} - r_{33}}{1 - r_{11}}$

4.5.-4

Ezekből felírhatjuk a szögek felének tangensét a  $\operatorname{tg} \frac{X}{2} = \frac{\sin X}{1 + \cos X} = \frac{1 - \cos X}{\sin X}$  össze-  
függés felhasználásával:

$$\operatorname{tg} \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} = \frac{r_{23} - r_{32}}{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} = \frac{1 + r_{11} - r_{22} - r_{33}}{r_{23} - r_{32}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\xi_1 - \xi_2}{2} = \frac{r_{32} + r_{23}}{1 - r_{11} + r_{22} - r_{33}} = \frac{1 - r_{11} - r_{22} + r_{33}}{r_{32} + r_{23}}.$$

4.5.-5

## 4.6. Paraméterek számítása a forgatási mátrixból

A következőkben számpéldán keresztül mutatjuk be az elmondottakat. Legyen a forgatási mátrix az alábbi:

+0.262 002 6	+0.964573 8	+0.030 855 1
-0.719 846 3	+0.174 033 5	+0.671 962 5
+0.642 787 6	-0.198 266 9	+0.739 942 1

Határozzuk meg a forgástengely irány koszinuszait és az elfordulási szöveget, az 4.1.-1 képletekkel. ( $2\sin \varphi = +0.992\ 242\ 9$ ,  $2\cos \varphi = +0.175\ 978\ 2$ )

$c_1 = -0.436\ 808\ 9$	$c_2 = -0.307\ 157\ 6$	$c_3 = -0.845\ 489\ 3$
$\varphi = +84^\circ 57' 07.4''$		

Számítsuk ki az Euler paramétereket az 4.2.-1 és az 4.2.-2 összefüggésekkel:

$l = -0.294\ 969\ 1$	$m = -0.207\ 417\ 9$	$n = -0.570\ 943\ 5$
$r = +0.737\ 559\ 9$		

Ferdén szimmetrikus paraméterek számítása az 4.2.-4 és az 4.3.-1 kifejezésekkel:

$e = -0.399\ 925\ 7$	$f = -0.281\ 221\ 8$	$g = -0.774\ 097\ 9$
----------------------	----------------------	----------------------

A  $h^2 = 1.838\ 253\ 7$  értéküre adódott.

A három tengely körüli forgatás szögértékeit az 4.4.-1, 4.4.-2 és a 4.4.-3 összefüggésekkel határozhatjuk meg. ( $\cos\beta=0.766\ 044\ 4$ )

$\alpha=15^{\circ}00'00.0''$	$\beta=40^{\circ}00'00.0''$	$\gamma=70^{\circ}00'00.0''$
------------------------------	-----------------------------	------------------------------

Ez egyezik az eredeti felvétellel, mert az eredeti forgatási mátrixot ebből számítottuk.

A két tengely körüli forgatás elfordulási szögeit az 4.5.-1, 4.5.-2 és az 4.5.-3 kifejezésekkel számíthatjuk: ( $\sin\eta=0.965\ 067\ 2$ )

$\xi_1=91^{\circ}49'55.8''$	$\eta=74^{\circ}48'39.9''$	$\xi_2=-48^{\circ}14'12.1''$
-----------------------------	----------------------------	------------------------------

A szögek összege és különbsége:  $\alpha+\beta=43^{\circ}35'43.7''$ ,  $\alpha-\beta=140^{\circ}04'07,9''$

A számításokat Matlab programmal végeztük, a paraméterek számítása után felírtuk a forgatási-mátrixot is és az egyezett az eredeti forgatási mátrixszal.

Kapcsolatos Matlab program: kapcs3.m.

Legyen a forgatási mátrix a későbbiekben számított kiegyenlített forgatási mátrix:

+0.29615521768158	+0.94146156021345	+0.16106587993871
-0.81360287185407	+0.16032108767828	+0.55888059167989
+0.50034233675633	-0.29655906576280	+0.81345575575019

A legnagyobb eltérés a forgatási mátrix ortogonalitási feltételeiben: 3.4416e-015

Euler forgatás három tengely körül:

$\alpha=20.03018299052931^{\circ}$	$\beta=30.02265140317529^{\circ}$	$\gamma=69.99825948812584^{\circ}$
------------------------------------	-----------------------------------	------------------------------------

Euler szimmetrikus paraméterei

$l=-0.28389186949132$	$m=-0.11259453166841$	$n=-0.58244730456719$
$r=+0.75331468542536$		

Ferdén szimmetrikus paraméterek

$e=-0.37685694303307$	$f=-0.14946546754871$	$g=-0.77317927797771$
-----------------------	-----------------------	-----------------------

Paraméterek hossza: 1.76216727739592

Rodrigues paraméterek

$a=-0.75371388606614$	$b=-0.29893093509742$	$c=-1.54635855595542$
-----------------------	-----------------------	-----------------------

Paraméterek hossza: 1.76216727739592

Euler forgatás két tengely körül

$\xi_1=+99.70821353890342^{\circ}$	$\eta=+72.77317779106365^{\circ}$	$\xi_2=-58.40968147333469^{\circ}$
------------------------------------	-----------------------------------	------------------------------------

Térbeli tengely körüli forgatás

$c1=-0.43166950710350$	$c2=-0.17120471281880$	$c3=-0.88563558134576$
------------------------	------------------------	------------------------

Elfordulási szög:  $\varphi=+82.24334439453386^{\circ}$

Kapcsolatos Matlab program: par.m.

## 5. A FORGATÁSI MÁTRIX MEGHATÁROZÁSA KIEGYENLÍTÉSEL

### 5.1. A kiegyenlítés javítási egyenletének felírása

A transzformációs egyenletet az

$$Y = R \cdot X + T$$

formában szoktuk felírni, ahol

$$Y = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} .$$

5.1.-1

$Y$  az áttanszformált pont koordinátái,  $X$  az átszámítandó pont koordinátái,  $T$  az eltolási paraméterek,  $R$  a forgatási mátrix.

Ha több pontot kell átszámítani, akkor kedvezőbb a transzformációs egyenletet a következő formában felírni:

$$B = A \cdot R^T + I \cdot T^T$$

$$B = \begin{bmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_n & y'_n & z'_1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \quad R^T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} .$$

5.1.-2

Ezekben a mátrixokban az átszámítandó koordinátákat  $A$ , az átszámítottakat a  $B$  mátrixban foglaltuk össze. A javítási egyenletet úgy írjuk fel, hogy csak az átszámított pontokat tekintjük hibátlannak, így a javítási egyenlet a következő lesz:

$$B + V = A \cdot R^T + I \cdot T^T \quad V = A \cdot R^T + I \cdot T^T - B ,$$

ahol

$$V = \begin{bmatrix} v_{x1} & v_{y1} & v_{z1} \\ v_{x2} & v_{y2} & v_{z2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{xn} & v_{yn} & v_{zn} \end{bmatrix} .$$

5.1.-3

Ebből a javítási egyenletet legtöbbször az alábbi formában írjuk fel:

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \\ x_T \\ y_T \\ z_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} .$$

5.1.-4

Ebben a javítási egyenletben a második rendszer koordinátáit  $B_x$ ,  $B_y$  és  $B_z$  vektorokra bontottuk, hasonlóan javításokat is  $V_x$ ,  $V_y$  és  $V_z$  tengely irányú javításokra és a forgatási mátrixot is  $R_x$ ,  $R_y$  és  $R_z$  oszlopokra bontottuk. Az így felírt javítási egyenleteket még ki kell egészíteni a paraméterek között fennálló kényszerfeltételekkel,

Az ebből felírható normál egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} A^T A & 0 & 0 & A^T I & 0 & 0 \\ 0 & A^T A & 0 & 0 & A^T I & 0 \\ 0 & 0 & A^T A & 0 & 0 & A^T I \\ I^T A & 0 & 0 & I^T I & 0 & 0 \\ 0 & I^T A & 0 & 0 & I^T I & 0 \\ 0 & 0 & I^T A & 0 & 0 & I^T I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \\ x_T \\ y_T \\ z_T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^T B_x \\ A^T B_y \\ A^T B_z \\ I^T B_x \\ I^T B_y \\ I^T B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

5.1.-5

Ha az első és a második koordinátákat is súlyponti koordinátákra számítjuk át, akkor az  $A^T I$  és az  $I^T B$  szorzatok 0-val lesznek egyenlők:

$$A^T I = I^T A = I^T B = 0 \quad \text{és} \quad I^T I = n .$$

5.1.-6

Ezzel az egyenletrendszer egy kilenc ismeretlenes egyenletté és három egy ismeretlenes egyenletté esik szét. Ez azzal az előnnyel is jár, hogy a forgatási mátrix elemeinek meghatározásánál nem szükséges paraméterként az eltolás három összetevőjét is szerepeltetni. Az eltolás mértéke a két rendszer súlypontjainak különbsége.

$$x_T = B_{xSp} - A_{xSp} \quad y_T = B_{ySp} - A_{ySp} \quad z_T = B_{zSp} - A_{zSp} .$$

5.1.-7

Azonban, ha az átszámított pontok pontosságát is számítani akarjuk, akkor figyelembe kell venni az eltolási paraméterek súlykoefficienseit is.

A felírt javítási egyenletekhez még hozzá tartozik a forgatási mátrix elemei között fennálló kényszerek egyenletei is.



## 5.2. Kiegyenlítés az ortogonalitási kényszerek felírásával

### 5.2.1. Merőlegességi kényszerek felírásával

Az 5.1.4 javítási egyenletekhez vegyük hozzá az 1.2.-3 feltételeket, kényszerként.

$r_{11} \cdot r_{11} + r_{12} \cdot r_{12} + r_{13} \cdot r_{13} = 1$	$r_{11} \cdot r_{21} + r_{12} \cdot r_{22} + r_{13} \cdot r_{23} = 0$
$r_{21} \cdot r_{21} + r_{22} \cdot r_{22} + r_{23} \cdot r_{23} = 1$	$r_{11} \cdot r_{31} + r_{12} \cdot r_{32} + r_{13} \cdot r_{33} = 0$
$r_{31} \cdot r_{31} + r_{32} \cdot r_{32} + r_{33} \cdot r_{33} = 1$	$r_{21} \cdot r_{31} + r_{22} \cdot r_{32} + r_{23} \cdot r_{33} = 0$

A kényszerfeltételekben csak olyan elemek szerepelnek, melyek meghatározandó paraméterek. Ezek értékét nem ismerjük, ezért a kényszer feltételi egyenleteket csak közelítően tudjuk felírni, valamilyen előzetes értékek alapján. Előzetes értéként számíthatjuk az affin transzformációs mátrixot, és ezeket használjuk fel első közelítő értékek. A megoldás így iterációs megoldássá válik. A második és minden további iteráció kezdetén előzetes értékeket az előző iterációban a kényszerfeltételbe beírt és a kiegyenlítés után a meghatározott együtthatók számtani középértékeként vesszük fel és ez lesz a következő iterációban a kényszerfeltétel együtthatója.

Az első oszlopban szereplő három kényszer felírása így egyértelmű. A második oszlopban lévő skaláris szorzatokat azonban többféleképpen is felírhatjuk, aszerint, hogy a szorzat melyik tényezőjét tekintjük ismeretlennek, és melyiket helyettesítjük közelítő értékkel. A következőkben a forgatási mátrix egyes sorait jelöljük  $r_x$ ,  $r_y$  és  $r_z$  vektorokkal.

A különböző felírási lehetőségek a következők:

$r_x \cdot r_y \cdots r_x \cdot r_z \cdots r_y \cdot r_z$	$r_y \cdot r_x \cdots r_z \cdot r_x \cdots r_y \cdot r_z$
$r_y \cdot r_x \cdots r_x \cdot r_z \cdots r_y \cdot r_z$	$r_y \cdot r_x \cdots r_x \cdot r_z \cdots r_z \cdot r_y$
$r_x \cdot r_y \cdots r_z \cdot r_x \cdots r_y \cdot r_z$	$r_x \cdot r_y \cdots r_z \cdot r_x \cdots r_z \cdot r_y$
$r_x \cdot r_y \cdots r_x \cdot r_z \cdots r_z \cdot r_y$	$r_y \cdot r_x \cdots r_z \cdot r_x \cdots r_z \cdot r_y$

5.2.-1

Itt minden szorzatnál az első tényezőt tekintjük a kényszer feltétel együtthatójának a második tényező pedig a paraméter. A felírható kényszerek számát tovább növeli, hogy a kényszereket a forgatási mátrix oszlopaira is felírhatjuk, mint ahogy azt az 1.2.-3 egyenletekben is láttuk.

A különböző felírások nem azonos kiegyenlítési eredményeket adnak. Más lesz a forgatási mátrix, és eltérnek a javítások is.

### 5.2.2. Kilenc kényszer felírásával

Az előzőekben láttuk, hogy a kényszereket különböző módon felírva eltérő eredményeket kapunk. A kényszerek felírását valamilyen módon egyértelművé kell tenni. Ennek több lehetősége van. Az egyik lehetőség az, hogy kétszer írjuk fel a skaláris szorzat feltételeit, így a három feltétel helyett hat feltételt írunk fel, melyek nem függetlenek, de elérjük, hogy minden együttható és paraméter azonosan szerepel a feltételekben.

$$r_x \cdot r_y = 0 \quad r_y \cdot r_x = 0 \quad r_x \cdot r_z = 0 \quad r_z \cdot r_x = 0 \quad r_y \cdot r_z = 0 \quad r_z \cdot r_y = 0.$$

5.2.-2

Ezzel a normál egyenletrendszer mérete megnövekszik. Már korábban is a 9 paraméter meghatározásához 6 kényszert kell hozzáírni, ezzel a normál egyenletrendszer 15 ismeretlenes volt, ez most további 3 ismeretlennel növekszik, és 18 ismeretlenesé válik.

A számítási tapasztalatok alapján a kényszerek ilyen felírása esetén a javítások négyzetösszege nem lett a legkisebb, egyes esetekben a más módon felírt kényszerekkel job megoldást kaptunk.

### 5.2.3. *Kettős merőlegességi kényszer felírásával*

A három skaláris szorzatot egyértelműen úgy írhatjuk fel, hogy mindegyiket kétszer írjuk be a kényszerfeltételei egyenletbe, az alábbi példának megfelelően

$$r_x \cdot r_y + r_y \cdot r_x = r_{11} \cdot r_{21} + r_{12} \cdot r_{22} + r_{13} \cdot r_{23} + r_{21} \cdot r_{11} + r_{22} \cdot r_{12} + r_{23} \cdot r_{13} = 0 . \quad 5.2.-3$$

Mindhárom feltételt ilyen *kettős feltétel* formájában írunk fel. Ezzel elérjük, hogy mind-egyik paraméter és együttható ugyanolyan felírással szerepel. A normál egyenletrendszer mérete sem növekszik, és az eredeti felírásnak megfelelően továbbra is 9+6=15 ismeretlenes lesz.

A kiválasztott mintapéldánál az iterációk is jól alakultak, gyorsan eredményre vezettek.

A iterációk esetén a normál egyenletrendszer együttható mátrixa az iterációk során nem változik, csak a kényszerfeltételek együtthatói változnak. Az iterációk során áll be a transzformációs mátrix merőlegességi feltételeinek teljesülése is. (A kapcsolatos Matlab program: W\*\*\*.M)

## 5.3. Kiegyenlítés a forgatási mátrix inverzének kényszere alapján

A forgatási mátrix tulajdonságainál láttuk, hogy a forgatási mátrix inverze egyenlő a transzponáltjával az 1.2.-2 képlet szerint. A kiegyenlítés javítási egyenletét írjuk fel az 5.1.-3 egyenletnek megfelelően, ezekből hagyjuk el az eltolási paramétereket, tehát térjünk át a súlyponti koordináta rendszerre

$$B + V = A \cdot R^T \quad V = A \cdot R^T - B . \quad 5.3.-1$$

Itt a javítások is egy mátrixban szerepelnek, egy sorban egy koordinátának  $x$ ,  $y$  és  $z$  irányú javításai. Ehhez vegyük hozzá az 1.2.-3 egyenletet, mint kényszerfeltételt.

$$R \cdot R^T = E , \quad 5.3.-2$$

ahol  $E$  egy 3×3-as egységmátrix.

Ebből a normál egyenletrendszer az alábbi

$$\begin{bmatrix} A^T A & R^T \\ R & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R^T \\ K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^T B \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad 5.3.-3$$

Itt a  $K$  egy  $3 \times 3$  korreláta mátrix, a három  $0$  mátrix is  $3 \times 3$  méretű  $0$  elemű mátrixok. A normál egyenletrendszer mérete is  $6 \times 6$ -os. Ez a megoldás is iterációs, mert a kényszer feltételben a meghatározandó  $R$  forgatási mátrix szerepel.

A kiegyenlítés kezdetén az előzetes forgatási mátrixot egy előzetes kiegyenlítéssel meghatározott affin transzformációs mátrixként vettük fel. Minden további iterációnál a következő előzetes forgatási mátrixot a kiegyenlítés sorrá meghatározott forgatási mátrix és az előző előzetesen felvett mátrix középértékeként számítjuk.

A javításokat is egy  $n \times 3$  méretű mátrixban kapjuk meg. A javítások négyzetösszegét egy  $3 \times 3$ -as mátrixként kapjuk meg, melynek nyoma lesz a javítások négyzet összege.

A számpéldák során a megoldás igen gyors iterációt eredményezett. A kapott forgatási mátrix, a javítások és azok négyzetösszege is azonos volt a 9 ortogonális feltétel felírásával kapott eredményekkel.

(A kapcsolatos Matlab program: R\*\*.M)

## 5.4. Kiegyenlítés kis szögekkel meghatározott forgatással

A geodéziában elvégzett forgatások esetén leggyakrabban ezt a kiegyenlítést alkalmazzák. A megoldásnál, ha a pontok között jelentős mértékű elfordulás van, akkor egy előzetes forgatással elvégezzük a pontok közelítő átranzformálását. Ezt egyszerűen úgy oldhatjuk meg, hogy előzetesen egy affin transzformációs paramétereket határozzunk meg kiegyenlítéssel és ezt forgatási mátrixnak tekintve a 4.4 fejezetben leírtaknak megfelelően számítjuk a három elfordulási szög értékét a 4.4.-1 –4.4.3 képletekkel. Ebből számíthatjuk a közelítő forgatás mátrixát a 2.6.-2 összefüggésekkel. Ezután közelítőleg átszámíthatjuk a pontokat a második rendszerbe, és így a két rendszer között már csak kis elforgatás szükséges, a meghatározandó forgatási mátrix most a 2.9.-2 alapján a következő alakú

$$R = \begin{bmatrix} I & -\Delta\gamma & +\Delta\beta \\ +\Delta\gamma & I & -\Delta\alpha \\ -\Delta\beta & +\Delta\alpha & I \end{bmatrix}.$$

A javítási egyenleteket a forgatási mátrix 2.9.-2-ben felírt alakjával végezzük.

Így a korábban súlyponti koordinátákra felírt

$$V = A \cdot R^T - B$$

egyenletben az  $R^T$  mátrix már lineáris. Így a javítási egyenletrendszer a következő

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_z & -A_y \\ -A_z & 0 & A_x \\ A_y & -A_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \\ \Delta\gamma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \\ B_z - A_z \end{bmatrix},$$

6.4.-1

itt az  $A$  mátrixban az első rendszerbeli közelítően átranzformált koordináták szerepelnek. A felírt javítási egyenletrendszerben 3 paraméter szerepel és a pontok számának 3 szoros egyenlet van.

A kiegyenlítés után meghatározott paraméterek csak közelítő értékek tekinthetők, mert ha nem kis értékek, akkor a forgatási mátrix csak közelítő. E miatt a kiegyenlítés csak közelítő és a kiegyenlítés iterációs eljárássá válik. A következő iterációnál a kiegyenlítést meg kell ismételni úgy, hogy az eredeti A első rendszerbeli koordinátákat ismét átszámítjuk a

$$\alpha = \alpha_e + \Delta\alpha \quad \beta = \beta_e + \Delta\beta \quad \gamma = \gamma_e + \Delta\gamma$$

6.4.-2

összefüggéseknek megfelelően, és ezekkel megismételjük az első rendszerbeli koordináták újraszámítását, és a kiegyenlítést újból elvégezzük.

A számítási tapasztalatokból láttuk, hogy az iteráció több esetben igen lassan és egyes esetekben rosszul következett be. Az iterációnál az egyik lépés után a javítások négyzetösszege nőni kezdett és az eredmény teljesen eltorzult. Az iteráción néhány esetben segíteni lehetett azzal, hogy az elforgatás szögét egy arányszámmal csökkentettük (Rinner 1957).

(A kapcsolatos Matlab program: B\*\*.M)

## 5.5 A ferdén szimmetrikus paraméterek kis változásainak számítása kiegyenlítéssel

A 2.9. fejezetben felírtunk még kis elforgatására vonatkozó képletet 2.9.-6 számmal:

$$R = \begin{bmatrix} I & -\Delta g & +\Delta f \\ +\Delta g & I & -\Delta e \\ -\Delta f & +\Delta e & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\Delta n & +\Delta m \\ +\Delta n & I & -\Delta l \\ -\Delta m & +\Delta l & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -c_3\Delta\varphi & +c_2\Delta\varphi \\ +c_3\Delta\varphi & I & -c_1\Delta\varphi \\ -c_3\Delta\varphi & +c_1\Delta\varphi & I \end{bmatrix}.$$

A felírt kis elforgatású forgatási mátrixok ugyan olyan alakúak, mint az előző fejezetben tárgyalt három tengely körüli kis Euler szögekkel végzett forgatás. A megoldás ezekben az esetekben is nagyon hasonló. A kiegyenlítés ugyanúgy történik, csak a meghatározott paraméterek értelmezése más.

Az első felírás szerinti megoldásnál először az ismert affín transzformációs mátrixot határozzuk meg kiegyenlítéssel. Ezt egy közelítő forgatási mátrixnak tekintjük és a 4.2.-4 vagy a 4.3.-1 összefüggésekkel kiszámítjuk az  $e f g$  paramétereket. Ebből számítjuk a forgatási mátrixot a 2.2.-3-nak megfelelően. Ezzel átszámítjuk az első rendszerbeli pontokat a második rendszerbe az 5.1.-3 első képlete szerint. A kiegyenlítést ezek között végezzük el.

A javítási egyenleteket most is a 6.4.-1 formában írjuk fel. A meghatározott  $\Delta e \Delta f \Delta g$  paramétereket Adjuk hozzá a paraméterek közelítő értékéhez és meg kapjuk a következő értékeket, melyekkel megismételjük a kiegyenlítést, ezt addig folytatjuk, amíg a változások 0 értékűek nem lesznek.

(A kapcsolatos Matlab program: C\*\*.M)

## 5.6. Az Euler paraméterek kis változásainak meghatározása

A második megoldásnál hasonló módon jártunk el. A paramétereket itt is mindig az előzőekben leírt módon határoztuk meg. A negyedik paramétert minden esetben az  $l, m$  és  $n$  paraméterek számítása után a feltételnek megfelelően számítottuk a  $r$  értékét. A forgatási mátrix minden közelítéskor pontos volt, tehát kielégítette a forgatási mátrix

feltételeit. A példák során tapasztaltunk olyan esetet is, melynél a iteráció folyamatosan lefutott, de az iterációk között volt olyan, melynél a javítások négyzetösszege kisebb volt mint, a végeredményé. A megoldás több esetben elszállt, azaz az iterációk egy darabig végzet szép csökkenés után, elkezdett emelkedni és a végén durva eltéréssel állt meg.

Az iterációk javíthatók azzal, hogy a kiszámított paraméter változás csak egy részét adjuk hozzá, ezzel lassítva az iterációt. Ha csökkent a javítások négyzetösszege akkor a csökkentés értéke 1-2 között változott, ha növekedés történt akkor ennél nagyobb 2-10 szerez osztót alkalmaztunk.

A különböző példák kiegyenlítése esetén több esetben gyenge iterációt tapasztaltunk.

(Kapcsolatos Matlab program:, D\*\*M )

## 5.7. Térbeli tengely körüli elemi elfordulás meghatározása

A harmadik képlet szerinti megoldásnál kicsit másképpen jártunk el. A  $c_1\Delta\varphi$   $c_2\Delta\varphi$   $c_3\Delta\varphi$  meghatározása után számítottuk a forgástengely iránykoszinuszait és a kis elfordulási szöget. Ezekből meghatároztuk a forgatási mátrixot, amivel megszoroztuk az előző forgatási mátrixot, így kaptuk a következő forgatási mátrixát

$$R^T = R_1^T \cdot R_2^T \cdot R_3^T \cdot \dots \cdot R_k^T .$$

5.5.-1

Ezt azért tesszük mert itt a paramétereket nem lehet összeadással számítani. Ilyen megoldást az előző kiegyenlítések esetén is alkalmazhatunk.

A megoldás most is iteráció, a tapasztalatok szerint ennél kaptunk a legjobb közeledést. Minden mintapéldát közvetlenül meg lehetett oldani, ami más megoldásoknál csak nehezen sikerült.

(Kapcsolatos Matlab program:, E\*\*M )

## 5.2. Az iterációs megoldások tapasztalatai

Az előzőekben bemutatott kiegyenlítések mind iterációs eljárások. Lényegében két csoportba sorolhatók, az első esetben a forgatási mátrixot kényszerek segítségével állítottuk elő, a második esetben a forgatási mátrixot közelítő paraméterek segítségével határoztuk meg.

A lényeges különbség a kettő között az, hogy az első esetben a forgatási mátrixnak kell előállni az iterációk során, míg a második esetben a közelítő paraméterek alapján felírt helyes forgatási mátrixnak kell befordulni a jó helyzetbe. Mindkét esetben a javítások négyzetösszegét minimalizáljuk, úgy, hogy más feltételnek is teljesülni kell.

Nézzük részletesebben a ortogonalitási feltételek felírását. Ekkor a javítások négyzetösszegének minimalizálása mellett a forgatási mátrix hat feltételnek is teljesülni kell. A kiegyenlítés során az előzetes közelítő forgatási mátrixot minden ciklus után módosítjuk. Nem elegendő figyelni a *négyzetösszeg minimumát és ennek változását* figyelni, hanem a *kényszer feltételek teljesülését* is figyeljük. Ezenkívül a *forgatási mátrix változásait* is figyelni kell. A ciklusok lefutásakor átmenetileg nőhet a javítások négyzetösszege, ez majd később csökkenni fog. A különböző példák megoldásakor általában elfogadható lefutásokat tapasztaltunk. A ciklusok lefutásakor ezek máshogy és máshogy teljesülnek. Csak akkor fogadhatjuk el a számítást, ha mindhárom teljesül.

A kiegyenlítés egyes iterációinál számított négyzetösszeg nem helyes, mert közben még nem teljesülnek a feltételek. Csak az utolsó után ciklus után számított négyzetösszeg a jó. Ezért a ciklusok számát sok esetben nem lehet előre megmondani. Ez függ a példa adataitól, általában ha ez ellentmondások kisebbek akkor a ciklusok száma is kevesebb lesz. Ezen kívül befolyásolja a ciklusok számát az előzetes közelítő mátrix felvétele, A átszámítandó pontok elhelyezkedése is befolyásoló probléma lehet.

A kényszerek felvételénél csak a kettős kényszerek felírásának van értelme, mert csak ebben az esetben ad jó eredményt. Az iterációk lefutása is ennél lett a legjobb.

A paraméterek kis változásainak meghatározásánál a kiegyenlítésnél kissé más a helyzet. Ekkor minden iterációnál olyan közelítő mátrixunk van, mely kielégíti a forgatási mátrix ortogonalitási feltételeit. Ezek minden közelítésnél szabatosan teljesülnek. A feladat az, hogy ezek olyan értékét határozzuk meg, melyek a legjobb forgatásnak feleljenek meg. Ekkor a felállított matematikai modell közelítő. Ezért a matematikai modell csak kis változás esetén elfogadható. Kis elforgatás esetén is azonban a következő forgatási mátrixot is a paramétereknek pillanatnyilag legjobb értékeiből a szigorú, közelítés nélküli képletekkel számítjuk. A kiegyenlítés után a így a javításokból számított négyzetösszeg nem lesz helyes, mert ez csak a közelítő matematikai modellnek felel meg és nem jó a szabatos megoldásnak. A kiegyenlítés utáni javításokat valójában a következő kiegyenlítés javítási egyenleteinek tisztatagjai adják. A javítások négyzetösszegét is ebből kellene számítani. Ezért itt is, nem elegendő a kiegyenlítés *javításainak négyzetösszegét* figyelni.

Emellett a *tisztatagok négyzetösszegét* is figyelni kell, ez az iterációk során közelíti a javítások négyzetösszegéhez. A meghatározott forgatási mátrix végső kiegyenlítés után már nem változhat. Ezért ennek változása is ellenőrizendő. Többször tapasztaltuk, hogy a *forgatási mátrix* még akkor is jelentősen *változik* amikor a másik két mennyiség már alig módosul. A különböző közelítő forgatási paraméterek esetén nem azonos iterációt kaptunk. Tapasztalataink szerint leggyengébb az Euler szimmetrikus paramétereinél volt, általában. A ferdén szimmetrikus paramétereknél és a három tengely körüli közelítő forgatásnál ez már jobb volt. Legjobb közelítés a térbeli tengely körüli kis forgatásnál volt.

Egyes példánál az iteráció szétesett, egy darabig szépen futott, de az egyik ciklus után a javítások négyzetösszege, és a többi figyelt szám értéke is romlani kezdett, olyannyira, hogy egy idő után már durva hibás volt a meghatározott forgatási mátrix. Ez több esetben előfordult a \*8H példánál, de tapasztaltuk a \*27 példánál is. Ezeknél a várható javítások relatíve lényegesen kisebbek, mint a bemutatásra választott \*8L példánál. A kiválasztott 8L példánál egyik megoldásnál sem tapasztaltunk ilyen eltorzulást.

A korábban említett példánál azonban többször előfordult. Ilyen esetekben sokszor segített, ha a számított változások csak egy részét engedjük, meghatározott hányadát adtuk hozzá a paraméterek előzetes értékéhez. De ez sem csodaszer, nem minden esetben eredményes. Felmerül, hogy a kiegyenlítésnek a legjobb minimum helye mellett van más helyi minimuma is, és előfordulhat, hogy egy ilyen helyi minimumban áll meg a kiegyenlítés.

A közelítő kiegyenlítéseknél nem lehet előre megadni a szükséges ciklusok számát. Ez a ciklusok alakulásától függ. Csak akkor lehetünk nyugodtak az eredmény helyességében, ha minden figyelt mennyiség a ciklusok során szépen megállapodott. A számpéldák során néhány ciklus lefutását is bemutatjuk. A ciklusszám jelentősen nagyobb, mint azt néhány esetben olvastuk. Ennek oka elsősorban abban van, hogy a bemutatott példánál viszonylag nagyok a hibák a gyakorlatban előforduló feladatokhoz képest, és a számítás eredményeinél is nagyobb élességet kívántunk meg.

## 6. SZÁMPÉLDÁK A FORGATÁSI MÁTRIX MEGHATÁROZÁSÁRA

### 6.1. A minta példák felvétele

A bemutatott kiegyenlítési eljárásokat számpéldával is vizsgáltuk. A példák során több különböző feladatot oldottunk meg. Ezek mind felvett számpéldák.

#### 1. példa

Az első példa adatait egy téglatest sarokpontjaiként vettük fel. A téglatest oldal hosszai közelítően  $800 \times 500 \times 200$  egység hosszúak, mintegy 50 egységgel ingadoznak jelzett értékekhez. A második rendszer koordinátáit úgy kaptuk, hogy eredeti koordinátákat áttranszformáltuk és egész értékre kerekítettük.

1. táblázat. Példa neve: \*8L.

	Első rendszer				Második rendszer		
Eredeti koordináták							
pontszám	X	Y	Z		X	Y	Z
1	104	209	351		503	112	258
2	972	217	329		743	937	384
3	938	753	395		329	971	732
4	143	701	378		128	219	561
5	159	735	543		187	191	717
6	187	242	504		577	150	414
7	915	280	587		804	817	620
8	990	791	553		303	979	890
súlypont	551	491	455		458	547	572
Súlyponti koordináták							
	Első rendszer				Második rendszer		
pontszám	X	Y	Z		X	Y	Z
1	-447	-282	-104		+45	-435	-314
2	+421	-274	-126		+285	+390	+188
3	+387	+262	-60		-129	+424	+160
4	-408	+210	-77		-330	-328	-11
5	-392	+244	+88		-271	-356	+145
6	-364	-249	+49		+119	-397	-158
7	+364	+211	+132		+346	+270	+48
8	-439	+300	+98		-65	+432	+318
$\Sigma$	0	0	0		0	0	0

A példában az egyes koordináták javításai viszonylag nagyok, sok esetben 0.5-0.7 egységűek. Ez a néhány százegységű oldalhosszakhoz nagy. Azért választottunk ilyen nagy hibákat, hogy a különböző megoldások közötti eltérések határozottan észre vehetők legyenek.

2. táblázat. A példa neve: \*8H.

pontszám	Első rendszer				Második rendszer		
	X	Y	Z		X	Y	Z
1	103	201	319		174.419	998.528	378.282
2	937	238	348		692.255	782.707	997.179
3	140	801	372		105.459	402.227	316.251
4	152	267	771		535.757	873.617	123.543
5	994	892	397		620.441	130.185	947.923
6	187	853	703		375.097	304.838	137.897
7	908	279	780		996.655	700.823	697.543
8	971	845	734		875.037	143.075	721.382

A példa pontjai közelítően egy téglalap sarok pontjai, a méretek  $800 \times 600 \times 400$  egységűek. A második rendszer pontjait három tizedes élességgel adtuk meg. Átszámítás után a pontok javításai 1-3-E-3 nagyságúak lesznek. Ezek a javítások már megfelelnek a geodéziai feladatok javításainak.

3. táblázat. A példa neve: \*27.

pontszám	Első rendszer				Második rendszer		
	X	Y	Z		X	Y	Z
1	124	238	429		359.2	485.5	079.3
2	153	308	491		391.7	437.7	158.4
3	101	570	413		249.7	209.7	231.0
4	151	247	703		609.4	454.5	190.3
5	138	371	794		660.4	335.0	273.5
6	175	579	791		589.5	191.3	411.5
7	147	200	934		841.1	456.3	234.1
8	159	314	982		85.3	365.5	318.4
9	179	535	972		772.1	202.4	447.7
10	458	285	422		281.5	644.7	366.4
11	413	374	401		243.1	550.7	371.0
12	491	505	481		266.1	480.3	526.7
13	471	273	703		547.0	621.4	457.4
14	481	397	708		513.2	527.7	532.2
15	473	532	718		483.9	413.9	600.0
16	408	205	934		794.9	605.2	443.4
17	419	348	978		792.0	491.4	541.1
18	487	583	979		711.7	343.8	718.8
19	842	205	419		236.7	934.2	627.2
20	831	315	490		272.7	829.8	698.5
21	815	591	428		135.4	609.5	811.9
22	874	207	782		571.7	898.8	766.3
23	892	371	778		516.4	779.4	865.7
24	874	509	711		415.7	668.4	903.2
25	818	281	948		715.4	783.1	812.5
26	851	308	918		673.7	785.3	843.5
27	870	528	998		680.5	609.5	999.0

A példa pontjai egy téglalapot sarokpontjai, ezt mindhárom irányba egy-egy síkkal elmet-szettünk és a metszésvonal pontjait is megadtuk. A pontok mintegy 50 egységgel illesz-kednek a szabályos téglalatra. A javítások várhatóan 0.2 egységnél kisebbek.



## 6.2. Kiegyenlítés kényszer feltételekkel

### 6.2.1. Merőlegességi kényszerek felírásával

Az 5.2 fejezetben leírtak alapján elvégeztük a kiegyenlítést. Az eredményeket az alábbi 4. táblázatban foglaltuk össze.

4. táblázat.

feltételek XY YZ XZ	javítások			javítás hossza
	Y00;	0Z0;	00X	
pontszám	X	Y	Z	D
1	+0.259 923 5	-0.196 817 0	-0.172 356 8	0.368 787 3
2	-0.844 095 5	+0.015 836 4	+0.021093 5	0.844 507 5
3	+0.132 494 9	+0.050 769 0	-0.040 281 9	0.147 495 9
4	+0.060 263 3	+0.103 966 9	+0.185 116 9	0.220 701 3
5	+0.781 793 6	-0.246 543 2	-0.037 282 7	0.820 009 0
6	+0.576 321 8	-0.058 146 3	+0.063 179 6	0.582 719 9
7	-0.694 071 4	+0.017 668 6	-0.090 979 1	0.700 231 7
8	-0.272 016 3	+0.313 634 0	+0.071 510 4	0.421 275 3
<b>Σvv</b>	<b>2.599 435 5</b>			
	<b>+0.295 419 9</b>	<b>+0.941 730 6</b>	<b>+0.160 843 4</b>	
<b>R=</b>	<b>-0.813 508 4</b>	<b>+0.159 688 1</b>	<b>+0.559 199 2</b>	
	<b>+0.500 930 2</b>	<b>-0.296 046 0</b>	<b>+0.813 280 8</b>	

A kiegyenlítés során az iteráció alakulását a javítások négyzetösszegének változása mellett, még a forgatási mátrix elemeinek változását és a forgatási mátrix ortogonalitásának alakulását is célszerű figyelni. Alkalmanként megfigyelhető volt, hogy a javítások négyzetösszege kis mértékben emelkedett az ortogonalitási feltételek teljesülése közben. A különböző példák esetében gyorsan bekövetkező eredményeket kaptunk.

Nézzünk egy másik kényszer felírási lehetőséget, 5. táblázat.

5. táblázat.

XY YZ XZ	Javítások			javítás hossza
	Y00;	0Z0;	00X	
pontszám	X	Y	Z	
1	+0.148 916 0	-0.260 565 3	-0.142 675 6	0.332 304 9
2	-0.379 198 6	-0.303 193 4	+0.062 780 1	0.489 550 0
3	+0.561 641 9	+0.198 571 4	-0.087 022 3	0.602 034 2
4	-0.295 035 5	+0.463 661 9	+0.130 930 2	0.564 952 1
5	+0.362 163 3	-0.055 257 2	-0.077 602 7	0.374 483 1
6	+0.176 207 3	-0.196 101 2	+0.106 716 8	0.284 417 2
7	-0.409 732 2	-0.357 031 6	+0.030 881 5	0.544 339 6
8	-0.132 870 1	+0.399 401 0	+0.037 754 8	0.422 612 2
<b>Σvv</b>	<b>1.727 739 4</b>			
XY YZ XZ	0X0;	0Z0;	Z00	
pontszám	X	Y	Z	
	<b>+0.296 413 5</b>	<b>+0.941 415 2</b>	<b>+0.160 861 9</b>	
<b>R=</b>	<b>-0.813 451 3</b>	<b>+0.160 601 6</b>	<b>+0.559 020 7</b>	
	<b>+0.500 435 9</b>	<b>-0.296 554 6</b>	<b>+0.813 399 8</b>	

A két megoldás eltér egymástól. A kényszerek felírásától függ a meghatározott forgatási mátrix. Jelentős eltéréseket tapasztaltunk a javítások négyzetösszegében és forgatási mátrix elemeiben is a különböző kényszereknél.

### 6.2.2. Kilenc kényszer felírásával

Nézzük meg a kényszerek egyértelmű felírását. Először vegyük a kilenc kényszernek megfelelő esetet, amikor a merőlegességi kényszereket kétszer írjuk fel, 6. táblázat.

6. táblázat.

Kilenc kényszer	Javítások			javítás hossza
	XY YZ XZ	0X0; Y00; 0Z0; 00Y; Z00; 00X		
pontszám	X	Y	Z	
1	+0.207 276 3	-0.207 592 0	-0.165 010 8	0.336 580 6
2	-0.542 506 1	-0.122 384 9	+0.190 576 8	0.587 886 5
3	+0.263 042 6	+0.110 437 1	-0.093 361 8	0.300 173 6
4	-0.101 742 6	+0.273 449 0	-0.006 692 3	0.291 840 2
5	+0.520 199 7	-0.113 774 5	-0.197 868 6	0.568 070 7
6	+0.458 506 6	-0.113 506 3	+0.112 292 2	0.485 511 6
7	-0.581 822 7	-0.161 135 7	+0.106 861 5	0.613 108 3
8	-0.222 953 8	+0.334 507 4	+0.053 203 2	0.405 504 8
$\Sigma v$	<b>1.732 933 7</b>			
	<b>+0.295 815 1</b>	<b>+0.941 572 8</b>	<b>+0.161 040 7</b>	
<b>R</b>	<b>-0.813 729 5</b>	<b>+0.160 082 8</b>	<b>+0.558 764 5</b>	
	<b>+0.500 337 6</b>	<b>-0.296 334 6</b>	<b>+0.813 540 5</b>	

A kilenc kényszer felírásakor nagyobbak a javítások négyzetösszege, mint az egyik bemutatott előző esetben. Ezt más példák esetében is tapasztaltuk. A forgatási mátrix elemei változtak

### 6.2.3. Kettős merőlegességi kényszer felírásával

Nézzük a másik megoldást, amikor a kényszerek egyértelmű felírására, ekkor minden kényszerben kétszer írjuk be a feltételt, így egy szorzat egyszer úgy szerepel, hogy az egyik tényezője paraméter, majd a második felírásnál a másik tényező lesz paraméter, ez tulajdonképpen a kényszer kettős felírását jelenti, 7. táblázat. Az iterációk lefutását a 8. táblázat mutatja.

7. táblázat.

XY YZ XZ	javítások			javítás hossza
	YX0; 0ZY	Z0X		
Pont szám	X	Y	Z	
1	+0.01902453652412	-0.20172130135711	-0.20017378435006	+0.28482092681576
2	-0.43460089933728	-0.20621888787321	+0.18002810938347	+0.51362855410172
3	+0.42757661162454	+0.14329272008393	-0.04813478860100	+0.45351022073493
4	-0.21429183367650	+0.38615990908687	+0.01395204501883	+0.44185418966739
5	+0.41817957098471	-0.03178399729870	-0.18685406006466	+0.45912832175317
6	+0.30339035662921	-0.14335297196607	+0.07008440577775	+0.34279382579084
7	-0.48410635086077	-0.28153826311114	+0.08033521225848	+0.56575303699405
8	-0.03517199188801	0.33516279243543	+0.09076286057723	+0.34901155182407
$\Sigma v$	1.51603588218931			

	+0.29615521768158	+0.94146156021345	+0.16106587993871	
<b>R=</b>	-0.81360287185407	+0.16032108767828	+0.55888059167989	
	+0.50034233675633	-0.29655906576280	+0.81345575575019	
	<b>1 304 660</b>	<b>76 298</b>	<b>40 376</b>	
<b>N=</b>		<b>523 402</b>	<b>42 781</b>	
			<b>73 394</b>	
	+344912	+1228535	+285364	<i>oszlopok szerint</i>
<b>n=</b>	-382139	+142637	+339664	
	+13845	+23111	+90109	

8. táblázat. Az iterációk lefutása.

Az iterációk lefutása				
Ciklus szám	Javítások négyzet összege	Eltérés az előzőtől	A forgatási mátrix változása	A merőlegességi feltétel teljesülése
1	3.76512471609177	-3.76512471609177	+0.00170282389996	+0.00135374249955
2	1.51652147623289	2.24860323985888	+0.00000103355468	+0.00000112895915
3	1.51603588235563	+0.00048559387726	+0.00000011986121	+0.00000000000040
4	1.51603588218931	+0.00000000016632	+0.00000005990536	+0.00000000000000
5	1.51603588218937	-0.00000000000006	+0.00000002994006	+0.00000000000000
6	1.51603588218924	+0.00000000000012	+0.00000001496373	+0.00000000000000
7	1.51603588218917	+0.00000000000007	+0.00000000747872	+0.00000000000000
8	1.51603588218951	-0.00000000000034	+0.00000000373779	+0.00000000000000
9	1.51603588218920	+0.00000000000030	+0.00000000186811	+0.00000000000000
10	1.51603588218948	-0.00000000000027	+0.00000000093366	+0.00000000000000
15	1.51603588218920	+0.00000000000012	+0.00000000002912	+0.00000000000000
20	1.51603588218922	+0.00000000000016	+0.00000000000091	+0.00000000000000
25	1.51603588218930	+0.00000000000001	+0.00000000000003	+0.00000000000000
30	1.51603588218934	+0.00000000000002	+0.00000000000000	+0.00000000000000
35	1.51603588218932	+0.00000000000001	+0.00000000000000	+0.00000000000000
40	1.51603588218931	-0.00000000000002	+0.00000000000000	+0.00000000000000
45	1.51603588218929	+0.00000000000002	+0.00000000000000	+0.00000000000000
50	1.51603588218931	-0.00000000000002	+0.00000000000000	+0.00000000000000

A ciklusok lefutása mutatja, hogy a javítások négyzetösszege már 5 ciklus után beáll a véglegest jól megközelítő értékre., azonban még az 50-dik ciklusban is mutat egy kis ingadozást. A forgatási mátrix azonban még változik és csak a 20-25-dik ciklus után nyugszik meg. A mátrix merőlegességi feltétele is igen hamar teljesül, a 4-5-dik ciklusra. Több példa megoldásánál is azt tapasztaltuk, hogy a kettős kényszerek felírásakor kapjuk a legkisebb értéket a javítások négyzet összegére. Az iterációk lefutása is kedvező volt.

### 6.3. Kiegészítés a forgatási mátrix inverzének kényszere alapján

9. táblázat.

pont száma	Javítások			Hossza
	X	Y	Z	D
1	+0.207 276 3	-0.207 592 0	-0.165 101 8	0.336 58 6
2	+0.542 506 1	+0.122 384 9	+0.190 576 8	0.587 886 5
3	+0.263 042 6	+0.110 437 1	-0.093 361 8	0.300 173 6
4	-0.101 742 6	+0.273 449 0	-0.006 692 2	0.291 840 2
5	+0.520 199 7	-0.113 774 5	-0.197 868 6	0.568 070 7
6	+0.458 506 6	-0.113 506 3	+0.112 292 2	0.485 511 6
7	-0.581 822 7	-0.161 135 7	+0.106 861 5	0.613 108 3
8	-0.222 953 8	+0.334 507 4	+0.053 203 2	0.405 504 8
<b>Σvv</b>	<b>1.285 881 5</b>	<b>-0.067 462 2</b>	<b>-0.286 949 9</b>	
		<b>+0.308 731 4</b>	<b>+0.009 134 8</b>	
			<b>+0.138 320 8</b>	<b>1.732 933 7</b>
	<b>+0.295 815 1</b>	<b>+0.941 572 8</b>	<b>+0.161 040 7</b>	
<b>R</b>	<b>-0.813 729 5</b>	<b>+0.160 082 8</b>	<b>+0.558 764 5</b>	
	<b>+0.500 337 6</b>	<b>-0.296 334 6</b>	<b>+0.813 540 5</b>	

Az eredmény teljesen azonos, mint a kilenc kényszer felírásakor. Az iteráció nagyon gyorsan megtörtént még ilyen viszonylag nagy javítások esetén is.

### 6.4. Kis szögekkel végzett forgatás

10. táblázat.

pont- szám	javítások			hossza
	X	Y	Z	d
1	+0.01902453652414	-0.20172130135706	-0.20017378435004	+0.28482092681571
2	-0.43460089933730	-0.20621888787330	+0.18002810938346	+0.51362855410177
3	+0.42757661162453	+0.14329272008387	-0.04813478860102	+0.45351022073489
4	-0.21429183367653	+0.38615990908690	+0.01395204501883	+0.44185418966743
5	+0.41817957098472	-0.03178399729861	-0.18685406006468	+0.45912832175319
6	+0.30339035662924	-0.14335297196600	+0.07008440577777	+0.34279382579085
7	-0.48410635086074	-0.28153826311117	+0.08033521225848	+0.56575303699403
8	-0.03517199188804	+0.33516279243531	+0.09076286057716	+0.34901155182394
<b>Σvv</b>	<b>+1.51603588218926</b>			
	+0.29615521768158	+0.94146156021345	+0.16106587993871	
<b>R</b>	-0.81360287185407	+0.16032108767828	+0.55888059167989	
	+0.50034233675633	-0.29655906576280	+0.81345575575019	

		E+6			E-9
		+1.48182084761984	-0.25900931055888	+0.14662964598678	+0.00716226383757
N   n			+0.72874469338951	+0.29662380091371	-0.07967673482795
				+1.59234645899065	+0.14855315068341
		E-5			Paraméterek az utolsó iteráció után E-16
		+0.07201443592144	-0.02477453475078	-0.00201635426972	-0.17577034253011
Q			+0.15700343104169	+0.02696540879634	-0.83262825516869
				+0.06800921919452	+0.79400263994016

Az eredmény teljesen egyezik a kettős kényszerek felírásakor kapott eredményekkel. Több példa alapján ez a megoldás gyakran vezet gyenge eredményre. Az iteráció egy darabig szépen folyik, de egy pontnál emelkedni kezd a javítások négyzetösszege és a kiegyenlítés eltorzul. Ilyen jelenséget a pontosabban felírt mintapéldánál is tapasztaltunk. Nagyon gyengén konvergált a 2 példa is pedig a várható javítások jelentősen kisebbek, mint a bemutatott példánál. Ezeknél olyat is tapasztaltunk, hogy a iteráció folyamatosan gyengébb eredményeket ad, a javítások négyzetösszege rendszeresen emelkedik, majd csökkenni kezd. Az iteráció lefutása több esetben más eredmény adott, ha az előzetes értékeket máshogy vettük fel előfordult, hogy az eredmény nagyon lassan konvergált egy értékhez, de nem vált véglegessé, egy érték körül ingadozott.

11. táblázat. Az iteráció alakulása (B8L.M példa).

Az iteráció alakulása				
	Javítások négyzetösszege	Eltérés az előzőtől	A tisztatagok négyzetösszegének eltérése	A forgatási mátrix eltérése az előző mátrixtól
1	1.51609138164660	-1.51609138164660	0.68395366590085	0.00139687091205
2	1.51602877777639	0.00006260387021	0.03346452835670	0.00067221389479
3	1.51603551714146	-0.00000673936507	0.00238462022401	0.00014959961866
4	1.51603573347776	-0.00000021633630	0.00062926122170	0.00003005629738
5	1.51603587760274	-0.00000014412498	0.00002952008783	0.00001747369195
6	1.51603588103046	-0.00000000342772	0.00000557422713	0.00000405592063
7	1.51603588201037	-0.00000000097991	0.00000078150612	0.00000135825763
8	1.51603588218522	-0.00000000017485	0.00000003414900	0.00000069561671
9	1.51603588218686	-0.00000000000165	0.00000001079085	0.00000012074723
10	1.51603588218924	-0.00000000000238	0.00000000075332	0.00000006639632
11	1.51603588218925	-0.00000000000001	0.00000000007303	0.00000002244171
12	1.51603588218934	-0.00000000000009	0.00000000001604	0.00000000489316
13	1.51603588218918	0.00000000000017	0.00000000000067	0.00000000292704
14	1.51603588218930	-0.00000000000012	0.00000000000016	0.00000000055223
15	1.51603588218937	-0.00000000000008	0.00000000000002	0.00000000024524
16	1.51603588218934	0.00000000000003	0.00000000000000	0.00000000010899
17	1.51603588218927	0.00000000000007	0.00000000000000	0.00000000001989
18	1.51603588218926	0.00000000000001	0	0.00000000001119
19	1.51603588218926	0.00000000000000	0	0.00000000000325

20	1.51603588218925	0.00000000000001	0	0.000000000000079
21	1.51603588218922	0.000000000000003	0.000000000000000	0.000000000000048
22	1.51603588218927	-0.000000000000005	0	0.000000000000009
23	1.51603588218936	-0.000000000000009	0	0.000000000000004
24	1.51603588218928	0.000000000000007	0	0.000000000000002
25	1.51603588218925	0.000000000000003	0.000000000000000	0.000000000000000
26	1.51603588218926	-0.000000000000001	0.000000000000000	0.000000000000000
27	1.51603588218919	0.000000000000007	0	0.000000000000000
28	1.51603588218926	-0.000000000000007	0	0.000000000000000
29	1.51603588218921	0.000000000000004	0	0.000000000000000
30	1.51603588218926	-0.000000000000004	0	0.000000000000000

A második és harmadik oszlopban a javítások négyzetösszegétől számított eltérések szerepelnek. A táblázatból láthatjuk, hogy a javítások négyzetösszege viszonylag gyorsan csökken, és ezt lassabban követi a tisztatagok négyzetösszegének csökkenése, még lassabban változik a forgatási mátrix elemeinek beállása. Azt is láthatjuk, hogy az iteráció szépen, folyamatosan alakul és jelentősebb ingadozás nélkül beáll a végső helyzetbe. Ebben az esetben is a  $\Sigma v$  a kezdetben kis mértékben nő és csak később csökken.

## 6.5. A ferdén szimmetrikus paraméterek változásának meghatározása kiegyenlítéssel

Az eredmény azonos a három tengely körüli kis szögekkel végzett, előző pontban ismertetett számítással.

12. táblázat.

Transzformációs mátrix			
+0.29615521768158	+0.94146156021345	+0.16106587993871	
-0.81360287185407	+0.16032108767828	+0.55888059167989	
+0.50034233675633	-0.29655906576280	+0.81345575575019	
Paraméterek			
e=+0.37685694303307	f=+0.14946546754871	g=+0.77317927797771	
Normál egyenletrendszer együttható mátrixa N E+6			
+1.48182084761984	-0.25900931055888	+0.14662964598678	
-0.25900931055888	+0.72874469338951	-0.29662380091371	
+0.14662964598678	-0.29662380091371	+1.59234645899065	
A súlykoefficiens mátrix Q E-5			
+0.07201443592144	+0.02477453475078	-0.00201635426972	
+0.02477453475078	+0.15700343104169	+0.02696540879634	
-0.00201635426972	+0.02696540879634	+0.06800921919452	
Javítások			
$V_x$	$V_y$	$V_z$	<i>hossza</i>
+0.01902453652415	-0.20172130135706	-0.20017378435005	+0.28482092681572
-0.43460089933730	-0.20621888787326	+0.18002810938346	+0.51362855410175
+0.42757661162450	+0.14329272008393	-0.04813478860101	+0.45351022073489
-0.21429183367654	+0.38615990908692	+0.01395204501884	+0.44185418966745
+0.41817957098466	-0.03178399729865	-0.18685406006465	+0.45912832175312
+0.30339035662926	-0.14335297196601	+0.07008440577776	+0.34279382579087
-0.48410635086072	-0.28153826311119	+0.08033521225847	+0.56575303699402
-0.03517199188805	+0.33516279243537	+0.09076286057722	+0.34901155182402

A paraméterek alakulása az iterációk során: (csak minden ötödik eredmény jelezve)			
	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
1	+0.37676522477341	+0.14949398697142	+0.77364578068435
5	-0.00002163597588	-0.00012668463165	-0.00000414770042
10	+0.00001248887811	+0.00000437491972	-0.00000753477032
15	-0.00000125137936	+0.00000134879384	+0.00000034076154
20	-0.0000005975224	-0.00000021062299	+0.0000006979174
25	+0.00000002517780	+0.0000000194121	-0.00000001266623
30	-0.0000000176835	+0.0000000297482	+0.0000000028730
35	-0.0000000019275	-0.0000000034478	+0.00000000016080
40	+0.0000000004715	-0.0000000000837	-0.00000000002139
45	-0.0000000000209	+0.0000000000609	-0.00000000000016
50	-0.0000000000049	-0.0000000000052	+0.00000000000034
55	+0.00000000000008	-0.00000000000004	-0.00000000000003
60	+0.00000000000000	+0.00000000000001	+0.00000000000000
61	+0.00000000000000	+0.00000000000001	+0.00000000000000
62	+0.00000000000000	+0.00000000000000	+0.00000000000000

## 6.6. Az Euler paraméterek kis változásainak meghatározása iterációval

Az eredmény azonos a három tengely körüli kis szögekkel végzett, előző pontban ismertetett számítással.

## 6.7. Térbeli tengely körüli elemi forgatás kiegyenlítése

Az eredmény azonos a három tengely körüli kis szögekkel végzett, 6.4 pontban ismertetett számítással.

14. táblázat. A kiegyenlítés lefutása (E8L.M).

A kiegyenlítés lefutása				
	Javítások négyzetösszege	Eltérés az előzőtől	Tisztatagok négyzetösszegének eltérése	Elfordulási szög
1	1.51604617865030	0.42449578412799	-0.42449578412799	1.43571789742617
2	1.51603588219517	0.00001029645513	-0.00000002936739	0.00052924875264
3	1.51603588218931	0.0000000000587	0.00000000000000	0.00000016340352
4	1.51603588218941	-0.0000000000011	0.00000000000000	0.00000000004811
5	1.51603588218941	0.00000000000000	0	0.00000000000002
6	1.51603588218932	0.00000000000009	0	0.00000000000000
7	1.51603588218931	0.00000000000002	0	0.00000000000000
8	1.51603588218928	0.00000000000002	0	0.00000000000000
9	1.51603588218925	0.00000000000004	0	0.00000000000000
10	1.51603588218923	0.00000000000002	0	0.00000000000000
11	1.51603588218923	0	0	0.00000000000000
12	1.51603588218923	0	0	0.00000000000000

A feladat lefutásából látjuk, hogy milyen szépen iterált a megoldás felé. Ha összehasonlítjuk a három tengely körüli közelítő forgatás lefutásával, akkor jelentős különbséget láthatunk. Az csak 25-30 ciklus után állt be a végleges értékre. Itt a hatodik ciklus után már beállt a megoldás és tovább már nem változott. A többi példánál is hasonló tapasztaltunk ennek a megoldásnak a javára.

## Hivatkozások

- Detrekői Á** (1991): Kiegyenlítő számítások. *Tankönyvkiadó*, Budapest.
- Downs L** (1998): Using Quaternions to Represent Rotation. *CSI84 home page*, Berkeley.
- Euler L** (1915): Demonstratio theorematís Fermatiani omnem numerum sive integrum ... (L. Euleri Opera Omnia, Series I.) *Teubner*, Leipzig, Volume II. 338-372.
- Euler L** (1921): Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile (L. Euleri Opera Omnia Series I.) *Teubner*, Leipzig/Bern, Volumen VI. 287-315.
- Fazekas F** (1972): Márixszámítás, *Műszaki Matematikai Gyakorlatok, C.IV. Tankönyvkiadó*, Budapest.
- Ferenczi J** (1887): Előiskola a Hamilton féle quaterniók elméletéhez, *Schempek Ede és Huszár István nyomdája*, Nyitra.
- Gellert W - Küstner H - Hellwich M - Kästner H** (1985): Kleine Enzyklopädie Mathematik. *VEB Bibliographisches Institut Leipzig*.
- Korn GA Korn TM** (1975): Matematikai kézikönyv műszakiaknak, *Műszaki könyvkiadó*, Budapest.
- Mirski, L** (1955): An Introduction to Linear Algebra, *Clanderon Press*, Oxford, Ch. VIII.
- Rinner K** (1957): Über räumliche Drehungen. *Deutsche Geodätische Kommission Reihe A, Heft 25*. München, *Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*.
- Rózsa P** (1974): Lineáris algebra és alkalmazásai, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest.
- Sain M** (1986): Nincs királyi út! Matematika történet, *Gondolat kiadó*, Budapest.
- Schut GH** (1958): Construction of Ortoogonal Matrices and their Application in Analitical Photogrammetry, *Photogrammetria* XV Nr. 4.
- Somogyi J** (1969): A forgatási mátrix elemeinek meghatározása közvetlen úton. *Geodézia és Kartográfia* 264-267.
- Ugrin N** (1978): A fotogrammetria geometriai alapjai. *Budapesti Műszaki Egyetem, egyetemi jegyzet*.
- Závoti J** (1999): A geodézia korszerű matematikai módszerei, *Geomatikai Közlemények II.*, Sopron, 1-150.
- Zhizhuo W** (1990): Principles of Photogrammetry. *Press of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, Publishing House of Surveying and Mapping*, Beijing.



# A PROJEKTÍV INVARIÁNSOK ÉS SZEREPÜK A DIGITÁLIS FOTOGRAMMETRIÁBAN

Somogyi József\*

*A digitális fotogrammetriai feladatok megoldásához az alapot a 3D térnek a 2D térre történő leképzése adja. A tanulmány a geometriai transzformációk invariáns tulajdonságaival foglalkozik a digitális fotogrammetriában való alkalmazhatóságuk vonatkozásában.*

**Kulcsszavak:** projektív invariánsok, projektív-, affin-, hasonlósági transzformáció.

## 1. Bevezető

A digitális fotogrammetriában a koordinátákra alapozott pontmeghatározások mellett jelentős figyelmet fordítanak azokra a kutatásokra is, amelyek a képek automatikus kiértékeléséhez kapcsolódnak. A kiértékelések alapját a 3D térről készült 2D analóg vagy digitális képek képzik. A síkra történő perspektív vetítések és a különböző álláspontokból készült felvételek megváltoztatják az egyes felvételeken leképzett tárgyak alakját. Így sokszor két különböző felvételen ugyanazon geometriai alakzat eltérően jelentkezik, ami nehezíti azok azonosítását. Ennek a problémának a megoldásához játszanak igen fontos szerepet az invariánsok.

## 2. A geometriai invariánsok

### 2.1. Meghatározás és általános leírás

Általános értelmezés alapján invariánsok alatt a geometriai alakzatok azon tulajdonságait értjük, amik nem változnak bizonyos transzformációk hatására. Például sík hasonlósági transzformáció alkalmazásakor egy egyenes szakasz hossza nem változik forgatás és eltolás esetén. Azaz ennél a transzformációnál a távolság invariáns a merev mozgásokra. Klein Félix (1848-1929) híres német matematikus azt tanította, hogy a geometria lényegében az invariánsok tanulmányozása. Az 1872-ből származó „Erlangeni programjában” azt fogalmazta meg, hogy az olyan absztrakt tárgyak mint a *pontok* vagy *egyenesek* invariáns tárgyak, és a geometria ezeken a tárgyakon való absztrakt műveletekkel foglalkozik. Wely Hermann (1885-1955) a modern csoportelmélet megteremtője kijelentette, hogy minden fizikai jelenség szignifikáns tulajdonságai a társult transzformációs csoport invariánsaival vannak összhangban.

Ennek megfelelően a számítógépes látáshoz és a digitális fotogrammetriához kapcsolódó kutatásoknál jelentős szerepet kapnak az invariánsokra vonatkozó vizsgálatok. A témával foglalkozó igen sok tanulmány közül néhány jelentősebb munka a következő: Barret et al.,(1991), Barret et al.,(1995), Forsyth et al.,(1990), Maybank,(1991), Meer and Weiss,(1992),Mohr and Maurin,(1991), Weinshall(1993), Weiss(1993).

Történelmileg az invariánsok elmélete és a projektív geometria az azonos dimenziós terek transzformációjához kapcsolódik. Ezért az ide tartozó kutatások eredményeinek a többsége a síkok közötti leképzésekre vonatkozik. Ennek az a magyarázata,

\*MTA FKK Geodéziai és Geofizikai Kutató Intézet, Sopron 9400 Csatkai E. u. 6-8.

E-mail: somogyi@ggki.hu

hogy amikor a terek dimenziója azonos, a transzformáció gyakran egy csoport művelet és a csoportelméletben jelentős az invariánsok szerepe. Ezért a számítógépes látásnál és a digitális fotogrammetriánál alkalmazott invariánsok többsége a síkról-síkra történő leképzésen alapul. Sokkal nehezebb a 3D invariánsoknak a 2D képek alapján történő felderítése és ez jelenti az invariáns kutatások fő célkitűzéseit.

Egy csoport meghatározására vonatkozó axiómák a következők:

Egy  $n \times n$  homogén  $T_1$  transzformációs  $\mathbf{H}$  mátrix halmaz akkor határoz meg egy csoportot ha :

1. Minden  $T_1, T_2 \in \mathbf{H}$ -hoz létezik egy  $T_3 \in \mathbf{H}$  úgy, hogy  $T_3 = T_1 T_2$ .
2. Létezik egy olyan  $\mathbf{I} \in \mathbf{H}$  hasonlósági transzformáció, hogy minden  $T \in \mathbf{H}$ -ra  $\mathbf{I} T = T \mathbf{I} = T$ .
3. Minden  $T \in \mathbf{H}$ -nak van egy olyan  $T^{-1}$  inverze úgy, hogy  $T T^{-1} = \mathbf{I}$ .
4. Minden  $T_1, T_2, T_3 \in \mathbf{H}$ -hoz érvényes az asszociativitás,  $T_1(T_2 T_3) = (T_1 T_2) T_3$ .

A fotogrammetriában alkalmazott projektív-, affin-, és hasonlósági transzformációk kifejezhetők csoport művelettel és így az invariánsok generálhatók. Ezek a csoportok a transzformációk általánossága alapján osztályozhatók. Minél általánosabb egy transzformáció annál több paraméterrel rendelkezik, amit szabadságfoknak (SzF) neveznek. A szabadságfok növekedése azzal jár, hogy az invariánsok számításához növelni kell a képi jellemzők számát. Például a sík hasonlósági transzformáció csak két pontot igényel egy invariáns távolsághoz, míg a projektív transzformáció esetén egy invariáns meghatározásához minimum négy kollineáris pont szükséges. A következőkben ezeknek a csoportoknak a legjellemzőbb tulajdonságait és a hozzájuk kapcsolódó invariánsokat foglaljuk össze.

### 3. Az egyes transzformációs csoportok rangsorolása

Az invariánsok vizsgálatával foglalkozó kutatók az invariánsok geometriai komplexitását és számát a transzformációs csoportok általánosságához kapcsolják. Minél általánosabb egy transzformáció, annál kisebb a meghatározható invariánsok száma.

#### 3.1. A térről síkba történő transzformációk rangsora

##### 3.1.1. Projektív transzformáció

A lineáris transzformációk legáltalánosabb esete a projektív transzformáció (kollineáció). 3D alakja analitikusan a következő módon fejezhető ki:

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}, \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}, \quad z' = \frac{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}$$

Ezek az összefüggések az  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  koordinátákat az  $x$ ,  $y$ ,  $z$  értékek törtlineáris függvényeként fejezik ki, ahol mindhárom egyenletnek közös a nevezője. Minden  $x$ ,  $y$ ,  $z$  pontnak megfelel egy meghatározott  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  véges pont és a közös nevező eltér a nullától. Amikor az  $x$ ,  $y$ ,  $z$  pont közeledik az  $a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0$  feltétel teljesítéséhez, akkor a megfelelő  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  pont a végtelen felé tart. Az ilyen síkot eltűnési síknak és pontjait eltűnési pontoknak nevezik és a projektív transzformáció során a tér végtelenben lévő távolságaiban értelmezhetők. Ennek a problémának a kezeléséhez a homogén koordinátákat használják.

A projektív transzformáció további fontos tulajdonságai a következők:

- 1). Egy megadott fokú görbét vagy felületet azonos fokú görbére vagy felületre transzformálja át.
- 2). Egy egyenesben metsződő síkokat ismét egy egyenesben metsződő síkokká transzformálja át.
- 3). Egy egyenest ismét egyenesbe képez le.
- 4). Egy pontban metsződő egyenesek a transzformáció után ismét egy egyenesben metsződnek (párhuzamos egyenesek a végtelenben lévő pontban metsződnek).
- 5). Pontot pontba transzformál.

### 3.1.2. Affin transzformáció

Egy affin transzformáció analitikusan úgy határozható meg, hogy az  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  koordináták az  $x$ ,  $y$ ,  $z$  koordinátáknak tetszés szerinti teljes lineáris függvényei:

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} , \\y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} , \\z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} .\end{aligned}$$

Az affinitás azt jelenti, hogy a transzformáció során a végtelenben lévő pontoknak ismét végtelenben lévő pontok felelnek meg.

További tulajdonságai a következők:

Az affin transzformáció pontot pontba, egyenest egyenesbe és síkot síkba képez le. Eltérően a projektív transzformációval véges pontokat csak véges pontokba viszi át és így a térnek csak a véges részét értelmezi. A párhuzamosságot megőrzi, de a merőlegességet nem. Minden másodfokú felületet másodfokú felületként képez le.

### 3.1.3. Hasonlósági transzformáció

Jelöljük  $\mathbf{A}$ -val a fenti affin transzformáció koefficienseinek a mátrixát, ekkor a hasonlósági transzformáció a következő módon határozható meg:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = m^2 \mathbf{I} ,$$

ahol  $\mathbf{I}$  az egységmátrix és  $m$  pedig egy méretarány-tényező. Ez a transzformáció megtarja az alakot, de a méretet nem. Ennek megfelelően megőrzi a párhuzamosságot és merőlegességet, de minden távolságot meg kell szorozni az  $m$  értékkel. Amikor  $m = 1$ , akkor a metrikus transzformációhoz jutunk.

A fenti transzformációs csoportokban a független paraméterek száma a következő. A projektív transzformáció 16 paraméteréből 15 független. Ez azzal igazolható, hogy amikor a 16-ik paramétert elosztjuk bármilyen nullától eltérő számmal, a kiinduló egyenlet nem változik meg. Az affin transzformációnál a független paraméterek száma 12, és a hasonlósági transzformáció 7 független paraméterrel rendelkezik.

## 3.2. A síkból síkba történő transzformációk rangsora

### 3.2.1. A sík projektív csoport

Két projektív sík közötti projektív transzformáció homogén koordináták bevezetésével a következő 8 szabadságfokkal rendelkező lineáris egyenlettel fejezhető ki:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

vagy általános mátrix jelöléssel

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Amikor ezt a transzformációt derékszögű koordinátákkal fejezzük ki, akkor jól érzékelhető, hogy a projektív transzformáció az euklideszi vagy affín térben nem lineáris.

$$x' = \frac{x'}{z'} = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \quad y' = \frac{y'}{z'} = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}.$$

A sík projektív transzformáció mint legáltalánosabb transzformáció rendelkezik a legkevesebb invariáns tulajdonsággal, a kettős viszonytal és a kollineációval.

### 3.2.2. A sík affín csoport

Két sík közötti affín transzformáció a következő 6 szabadságfokkal rendelkező lineáris egyenletekkel fejezhető ki:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}. \end{aligned}$$

Az affín transzformáció a projektív invariánsokon kívül még a következő invariánsokkal is rendelkezik:

- a.) *Párhuzamosság.* Párhuzamos egyenesek párhuzamos egyenesként képződnek le. A transzformáció geometriai jellemzője levezethető abból a tényből, hogy egy négyzet leképezhető egy tetszés szerinti paralelogrammába.
- b.) *Távolság és terület viszonya.* Egy egyenesen a távolságok és a síkon lévő területek viszonyát megőrzi az affín leképezés.

### 3.2.3. Az euklideszi sík csoportja

A 3 szabadságfokkal rendelkező sík hasonlósági transzformáció, amely a tárgyaknak egy merev 2D mozgását fejezi ki, a következő egyenletekkel írható le:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}. \end{aligned}$$

Ez az összefüggés annyiban különbözik az affín transzformációtól, hogy az  $\mathbf{A}$  forgatási mátrix elemeinek a következő két feltételt kell teljesíteniük (ortogonalitás feltételei):

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 &= a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} &= 0 \end{aligned}$$

A sík hasonlósági transzformáció az előző két transzformáció invariánsai mellett még a következő invariánsokkal rendelkezik:

- c.) *Távolság.* Megőrzi a két pont közötti távolságot.
- d.) *Szög.* Egyenesek által bezárt szögek nem változnak.
- e.) *Terület.* Egyenesek által körülhatárolt területek változatlanok maradnak.
- f.) *Görbület.* A görbék görbületei nem változnak.

Mivel egy kamera vetítési centrumán áthaladó sugarak a 3D környezet tárgypontjait a kamera képsíkjára vetítik, azért fejezhető ki ez a leképzés a projektív térben. A képek perspektív vetítések útján való kialakítása az előzőleg tárgyalt transzformációk egy nagyobb halmazát foglalja magába, de a perspektív torzulások hatására csak a projektív transzformáció invariánsai nem változnak. A 2D sík projektivitásai igen fontosak a síkon lévő tárgyak felismeréséhez. A projektív invariánsok segítségével a sík formái már egy képen is jelezhetők és felismerhetők. Alkalmazhatók 3-D tárgyakhoz is, mivel sok tárgy tartalmaz síkformákat, amelyek a képekre általában síkonként vetítődnek. Ezen kívül egy 3-D test kis területei síkokkal közelíthetők meg. Így a 2-D projektív transzformációk és azok invariánsai felhasználhatók 3-D tárgyak felismerésére is. A következőkben a projektív invariánsokat ismertetjük részletesebben.

#### 4. A projektív invariánsok

##### 4.1. Értelmezés

Jelöljük  $k_i$  -lél egy sík tárgy körvonalát leírójának egy halmazát a tárgysík homogén koordinátaival kifejezve. A tárgy és képsíkok közötti leképzést szolgáló projektív transzformációt pedig jelöljük  $T$ -vel. Az  $I(k_i)$  akkor nevezhető projektív invariánsnak, ha minden  $T$  transzformációra érvényes a következő egyenlőség:

$$I(k_i) = I(T(k_i)) .$$

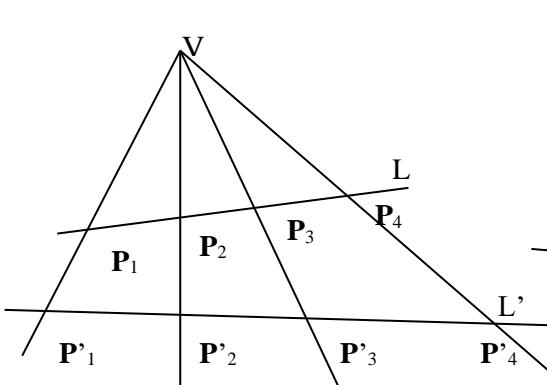
Például egy  $ax + by + cz = 0$  egyenes a  $(k_i)$  leíró útján egy  $\mathbf{I} = [a,b,c]^T$  és egy  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  síkgörbe pedig a következő  $C$  mátrix-al helyettesíthető:

$$[x,y,1] \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{p}^T C \mathbf{p} = 0 .$$

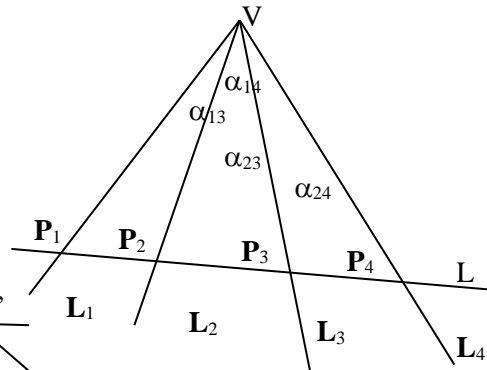
##### 4.2. A kettősviszony meghatározása a $P^1, P^2$ és $P^3$ projektív terekben

###### a.) Négy pont kettősviszonya

A projektív geometriában  $P^1$  tér alatt a projektív egyenest értik. Egy  $L$  projektív egyenesen található négy  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  pont kettősviszonya a következő (1.ábra):



1. ábra. Négy pont kettősviszonya.



2. ábra. Négy egyenes kettősviszonya.

$$KV(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2; \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4) = \frac{X_3 - X_1}{X_3 - X_2} : \frac{X_4 - X_1}{X_4 - X_2} = \frac{(X_3 - X_1)(X_4 - X_2)}{(X_3 - X_2)(X_4 - X_1)},$$

ahol  $X_1, X_2, X_3, X_4$  jelentik a pontok koordinátáit az  $L$  egyenes mentén. Ez a kettősviszony nem változik meg a projektív transzformáció során, azaz amikor a 1. ábrán látható négy  $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$  kollineáris pontot a  $V$  vetítési központon keresztül az  $L'$  egyenesre vetítjük  $(\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2, \mathbf{P}'_3, \mathbf{P}'_4)$ , akkor a megfelelő pontpárok kettősviszonya nem változik:

$$\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2; \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4\} = \{\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}'_2; \mathbf{P}'_3, \mathbf{P}'_4\}.$$

**b.) Négy egyenes kettősviszonya**

A  $\mathbf{P}^2$  projektív síkon egy  $V$  kezdőpontból kiinduló négy egyenesből  $(L_1, L_2, L_3, L_4)$  álló sugárnyaláb kettősviszonya (2.ábra) az egyenesek közötti szögekkel fejezhető ki:

$$KV(L_1, L_2; L_3, L_4) = \frac{\sin \alpha_{13}}{\sin \alpha_{23}} : \frac{\sin \alpha_{14}}{\sin \alpha_{24}} = \frac{\sin \alpha_{13} \sin \alpha_{24}}{\sin \alpha_{14} \sin \alpha_{23}}.$$

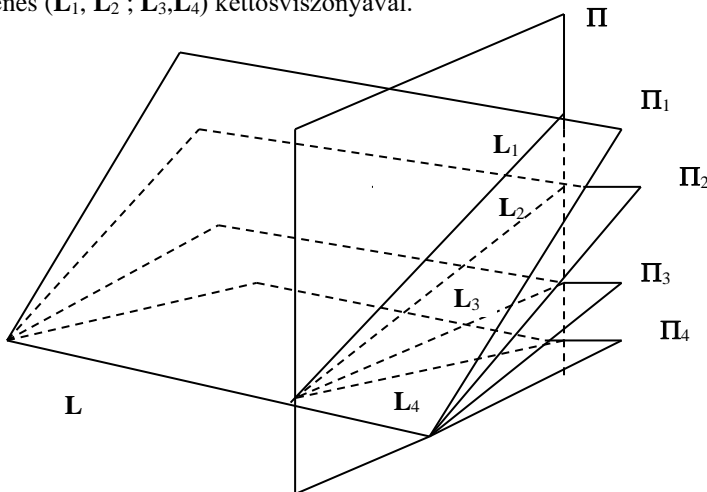
Mivel a pontok és egyenesek duálisak, ezért az egyenesek  $(L_1, L_2; L_3, L_4)$  kettősviszonya azonos egy a sugárnyaláb és egy tetszőleges  $L$  egyenes metsződéséből adódó négy pont  $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2; \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$  kettősviszonyával.

**c.) Négy sík kettősviszonya**

A négy pontra és a négy egyenesre vonatkozó kettősviszony általánosítható a  $\mathbf{P}^3$  projektív tér egy egyenesben metsződő négy síkjára. Legyen adva négy sík  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ , amely síkok az  $L$  egyenesben metsződnek (3.ábra). Ennek a síknyalabnak a kettősviszonya a következő módon fejezhető ki:

$$KV(\Pi_1, \Pi_2; \Pi_3, \Pi_4) = \frac{\Pi_3 - \Pi_1}{\Pi_3 - \Pi_2} : \frac{\Pi_4 - \Pi_1}{\Pi_4 - \Pi_2} = \frac{(\Pi_3 - \Pi_1)(\Pi_4 - \Pi_2)}{(\Pi_3 - \Pi_2)(\Pi_4 - \Pi_1)}.$$

Mivel a projektív térre is érvényes a dualitás elve, ezeknek a síkoknak a  $(\Pi_1, \Pi_2; \Pi_3, \Pi_4)$  kettősviszonya azonos egy a négy sík és egy tetszőleges  $\Pi$  sík metsződéséből adódó négy egyenes  $(L_1, L_2; L_3, L_4)$  kettősviszonyával.



3. ábra. Négy sík kettősviszonya.

### 4.3. A kettősviszony szimmetria tulajdonságai

Amikor egy L projektív egyenesen található négy  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  pontot úgy adunk meg, hogy nem rögzítjük sorrendjüket, akkor azok kombinációja  $4! = 24$  lehetséges permutációt eredményez és így 24 kettősviszony határozható meg. Azonban a permutáció egyes elemei nem adnak egymástól eltérő 24 értéket, hanem hat egyenértékű osztályt eredményeznek. Ennek igazolására jelöljük az eredeti pont-sorrend alapján meghatározott kettősviszonyt  $\alpha$ -val és cseréljük fel az egyes pontpárokat:

$$\begin{aligned} KV(P_1, P_2; P_3, P_4) &= \alpha, \\ KV(P_1, P_2; P_4, P_3) &= 1/\alpha, \\ KV(P_1, P_3; P_2, P_4) &= 1/\alpha, \\ KV(P_1, P_4; P_3, P_2) &= \alpha/(\alpha-1), \\ KV(P_3, P_1; P_2, P_4) &= (\alpha-1)/\alpha, \\ KV(P_2, P_3; P_1, P_4) &= 1/(1-\alpha). \end{aligned}$$

A többi variáció ezeket az értékeket ismétli. Pl az első és második pontpár cseréje nem változtatja meg a kettősviszony értékét mivel  $KV(P_3, P_4; P_1, P_2) = \alpha$  stb.

### 4.4. Öt komplanár pont invariánsai

Egy síkon található öt pont segítségével két projektív invariáns nyerhető, amely invariánsok jól felhasználhatók a fényképeken leképzett sík felületek megkeresésére. Az invariánsok levezetéséhez jelölje a síkon található  $p_i$  pontok homogén koordinátáit  $(x_i, y_i, z_i)$  ( $i = 1, \dots, 5$ ). Természetesen a levezetéshez azt is figyelembe kell venni, hogy a  $p_i \rightarrow \lambda p_i$  méretarány változás nem mérhető. Mint ahogy az a kettősviszonyokra érvényes, ezek az invariánsok skalár értékek viszonyait fejezik ki. Írjuk fel az öt pont közül három pontra vonatkozó  $m_{ijk}$  négyzetes mátrixot:

$$m_{ijk} = \begin{pmatrix} x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \end{pmatrix}.$$

Belátható, hogy az öt pontra vonatkozó  $m_{ijk}$  mátrixok  $|m_{ijk}|$  determinánsaira csak két olyan lineárisan független viszony írható fel, ami invariáns a projektív transzformációra és a homogén méretarány tényezőre:

$$I_1 = \frac{|m_{431}| |m_{521}|}{|m_{421}| |m_{531}|}, \quad I_2 = \frac{|m_{421}| |m_{532}|}{|m_{432}| |m_{521}|}.$$

Abban az esetben, amikor a három pont egy egyenesre esik, akkor az  $m_{ijk}$  pont mátrix determinánsa szingulárisává válik és ilyen esetben meghatározhatatlan az ide vonatkozó invariáns.

A homogén koordinátákkal megadott determinánsok helyett ez a két invariáns kifejezhető a pontok által meghatározott háromszögek  $S_{ijk}$  területeinek a viszonyával is:

$$I_1 = \frac{S_{431} S_{521}}{S_{421} S_{531}}, \quad I_2 = \frac{S_{421} S_{532}}{S_{432} S_{521}}.$$

#### 4.5. Öt komplanáris egyenes invariánsai

A pontok és egyenesek projektív síkon való dualitása miatt a fenti invariánsok meghatározhatók egy síkon fekvő öt egyenes alapján is. Legyen adott öt  $l_i$  ( $i=1, \dots, 5$ ) komplanáris egyenesünk, amik homogén koordinátákkal a következő módon adhatók meg:

$$i_1 x + i_2 y + i_3 z = 0.$$

Az  $\mathbf{M}_{ijk} = (l_i, l_j, l_k)$  mátrix  $|\mathbf{M}_{ijk}|$  determinánsainak viszonyai alapján a következő két független invariáns képezhető:

$$I_1 = \frac{|\mathbf{M}_{431}| |\mathbf{M}_{521}|}{|\mathbf{M}_{421}| |\mathbf{M}_{531}|}, \quad I_2 = \frac{|\mathbf{M}_{421}| |\mathbf{M}_{532}|}{|\mathbf{M}_{432}| |\mathbf{M}_{521}|}.$$

Abban az esetben, ha bármelyik egyenes csoport egyenesei metsződnének, az egyik invariáns meghatározatlanná válna.

#### 4.6. Két pont és két egyenes invariánsa

Egy síkban fekvő két pont és két egyenes viszonylatában a következő invariáns határozható meg:

$$I = \frac{l_1 x_1}{l_2 x_1} \cdot \frac{l_2 x_2}{l_1 x_2},$$

ahol  $l_i x_j = a_i x_j + b_i y_j + c$  az  $l_i$  egyenes és az  $x_j$  pont közötti algebrai távolságot fejezi ki. Mivel minden tag egy kovariáns, viszonyuk egy abszolút invariánst eredményez.

#### 4.7. Négy pont és egy egyenes invariánsai

Abban az esetben, amikor a síkon az  $x_j$  pontok ( $i = 1, \dots, 4$ ) nincsenek kollineáris kapcsolatban és nem fekszenek az  $l$  egyenesen, akkor a következő három invariáns határozható meg:

$$I_1 = \frac{l x_1}{l x_2} \cdot \frac{S_{234}}{S_{134}}, \quad I_2 = \frac{l x_1}{l x_3} \cdot \frac{S_{234}}{S_{124}}, \quad I_3 = \frac{l x_1}{l x_4} \cdot \frac{S_{234}}{S_{123}},$$

ahol  $S_{ijk}$  az  $x_j$  pontok által meghatározott háromszögek területeit jelöli.

#### 4.8. Két komplanár másodfokú síkgörbe invariánsai

Egy síkon található általános síkgörbe négyzetes alakja a következő:

$$Q(x,y) = \mathbf{x}^T C \mathbf{x} = 0,$$

ahol  $C$  a síkgörbe koefficienseinek egy  $3 \times 3$  szimmetrikus mátrixa, és  $\mathbf{x}^T = (x, y, 1)$  a síkon lévő pontok homogén koordinátáinak a vektora. Legyen

$$C = \begin{pmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{pmatrix},$$

ekkor

$$Q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ez + F.$$



A  $C_1$  és  $C_2$  mátrixokkal leírt síkgörbékhez ( feltételezve azt, hogy ezek a mátrixok normalizáltak, azaz  $|C_1| = |C_2| = 1$ ), két projektív invariáns határozható meg:

$$I_1 = \text{Sp} [C_1^{-1}C_2] \quad I_2 = \text{Sp} [C_2^{-1}C_1] .$$

Nem normalizált görbék esetén ezeknek az invariánsoknak a mérőszámai a következők:

$$I'_1 = \text{Sp} | C_1^{-1}C_2 | (| C_1 | / | C_2 |)^{1/3} \quad I'_2 = \text{Sp} | C_2^{-1}C_1 | (| C_2 | / | C_1 |)^{1/3} .$$

#### 4.9. Egy másodrendű síkgörbe és két egyenes invariánsa

Egy  $C$  másodrendű síkgörbe és a görbét nem érintő két egyenes egy invariánst határoznak meg, ami a következő módon fejezhető ki:

$$I = \frac{(\mathbf{I}_1^T C^{-1} \mathbf{I}_2)^2}{(\mathbf{I}_1^T C^{-1} \mathbf{I}_2)(\mathbf{I}_1^T C^{-1} \mathbf{I}_2)} ,$$

ahol  $C$  egy  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  egyenlettel meghatározott síkgörbe mátrixa, ami kifejezhető négyzetes formában

$$[x \ y \ 1] = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

vagy  $\mathbf{x}^T C \mathbf{x} = 0$  alakban.

#### 4.10. 3D projektív pontokkal képezhető invariánsok

Mivel a fényképezés során a 3D teret 2D síkra képezik le, a 3D projektív invariánsok kiszámításához szükséges pontokat minimum egy fényképpár alapján kell meghatározni.

Tételezzük fel, hogy a tárgy ill. a modell térben rendelkezésünkre áll a térben megfelelően elhelyezkedő hat 3D  $P_i$  pontunk,  $i = 1, \dots, 6$ , amely pontokat a megfelelő  $(X_i, x_i)$  vektorok képviselik. Ezekkel a pontokkal a 4. ábra alapján a következő invariánsok képezhetők:

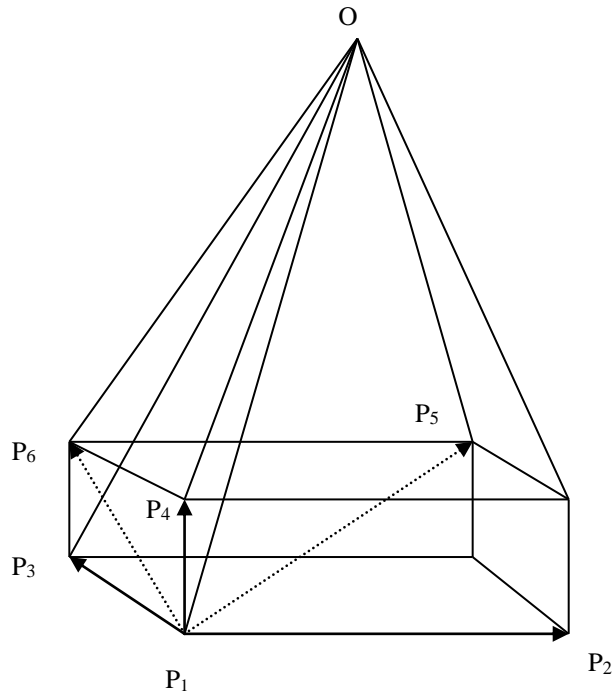
$$I_1^{(3)} = \frac{V_{1234} V_{1256}}{V_{1235} V_{1246}} \quad I_2^{(3)} = \frac{V_{1234} V_{1356}}{V_{1325} V_{1346}} \quad I_3^{(3)} = \frac{V_{2314} V_{2356}}{V_{2315} V_{2346}} ,$$

ahol  $V_{1234}, \dots, V_{2346}$ , az indexel jelölt pontok által képzett tetraéderek tömegét jelenti.

### Összefoglalás

A számítógépes látással foglalkozó tudományterület egyik legfontosabb megoldandó problémája a 3D térről készült analóg és digitális 2D képekre rögzített információk automatikus kiértékelése, azaz a mesterséges látás megoldása. A perspektív vetítések által torzított alakzatok felismerése azonban csak az algebrai projektív geometria, ezen belül az invariánsok segítségével oldható meg. A digitális fotogrammetriai kutatásoknál is fontos szerepet játszik a képek automatikus kiértékelése. Ez a tanulmány egy összefoglaló áttekintést nyújt az invariánsokhoz kapcsolódó általános transzformációs csoportokról és a projektív invariánsokról.

(A tanulmány az OTKA T 030239 sz. pályázatban végzett vizsgálatok eredményeit tartalmazza)



4. ábra. 3 D perspektív transzformációval meghatározható invariánsok.

## Hivatkozások

- Barret EB, Payton P, Haag N and Brill M** (1991): General methods for determining projective invariants in imagery, *Comput. Vis. Graph. Image Process.* 53, 45-65.
- Barret EB, Payton P, Gheen G** (1995): Robust algebraic invariant methods in geometry and imaging. In: *Schenk, T.F. (Ed.). Remote Sensing and Reconstruction for Three-Dimensional Objects and Scenes.* SPIE 2572, 30-42.
- Forsyth DA, Mundy JL, Zisserman AP and Brown CM** (1990): Invariance A New Framework for Vision. *Proc. ICCV3*, 598-605.
- Kanatani K** (1990): *Group Theoretical Methods in Image Understanding.* Springer, Berlin.
- Klein F** (1928): *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie. V. von Springer,* Berlin.
- Maybank SJ** (1991): The Projection of Two Non-complanar Conics. *Proc. 1<sup>st</sup> DARP ESPRIT Workshop on Invariance*, 47-54.
- Meer P and Weiss I** (1992): Point/line correspondence under 2D projective transformation. *Proc. Conf. Comput. Vis. Patt. Recog.*, Urbana Champaign IL, 115-121.
- Mohr R and Maurin L** (1991): Relative positioning from geometric invariants. *Proc. Conf. Comp. Vis. Patt. Recog.*, Maui, 139-144.
- Sample JG and Kneebone GT** (1952): *Algebraic Projective geometry.* Oxford University Press.
- Weinshall D** (1993): Model-Based Invariants for 3D-Vision. *Int. Journal of Comp. Vision*, 10:1, 27-42.
- Weyl H** (1946): *The Classical Groups. Their Invariants and Representations.* Princeton Mathematical Series, No. 1. Princeton University Press.
- Weiss I** (1993): Geometric Invariants and Object Recognition. *Int. Journal of Computer Vision*, 10:3, 207-231.