http://gyermekneveles.elte.hu

# GYERMEKNEVELÉS
## TUDOMÁNYOS FOLYÓIRAT

JOURNAL OF EARLY YEARS EDUCATION

*2018. 6. évfolyam, 1. szám*

*Korszerű komplex matematikatanítás*

Kiadja az ELTE TÓK

DOI 10.31074
ISSN 2063-9945

2018/1. szám szerzői
Ádám Szilvia
Ambrus Gabriella
Bagota Mónika
Csíkos Csaba
Dékány Judit
Földi Fanni
Gyurcsik Anita
Gölcz Mira
Karika Tímea
Kovács Zoltán
Kónya Eszter
Láz Csabáné
Márkus Éva
Pintér Klára
Polgárdi Veronika
Svraka Tamásné
Szitányi Judit
Zsinkó Erzsébet

DOI 10.31074
HU ISSN 2063-9945

Felelős kiadó:
Márkus Éva dékán

gyermekneveles@tok.elte.hu
http://gyermekneveles.elte.hu

Szerkesztőség címe:
1126 Budapest, Kiss János altábornagy u. 40.
telefon: 00 36 1 487-81-00

Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Tanító- és Óvóképző Kar

# Korszerű komplex matematikatanítás

## Kedves olvasók!

A matematika a világ megismerésének alapja, szinte minden jelenség leírható matematikai képletekkel. Ezért a kora gyermekkori gondolkodásfejlesztésnek, a matematikai alapok megértésének kiemelkedő jelentősége van a gyermek későbbi tanulási sikereinek szempontjából, a világ megértéséhez, felfedezéséhez vezető úton. Jelen tematikus számunkban a matematika tanulásához és a gondolkodás fejlesztéséhez kapcsolódó tanulmányokat gyűjtöttünk azzal a szándékkal, hogy azt a matematikát tanító pedagógusok óvodában és az alsó tagozaton is felhasználhassák fejlesztő munkájukban.

A szám szerkesztője Szitányi Judit volt.

Jó olvasást, szakmai feltöltődést kíván a főszerkesztő!

Budapest, 2018. április 9.

F. Lassú Zsuzsa

# Korszerű komplex matematikatanítás

## Előszó a Gyermeknevelés folyóirat 6. évfolyamának 1. számához

Az MTA-ELTE Korszerű Komplex Matematikaoktatás Kutatócsoport tagjai három évvel ezelőtt kezdték meg a közös gondolkodást a matematika tanításának jobbításáért. Tematikus számunkba válogatott írások nagy része a kutatócsoport munkáját mutatja be.

A munka kiindulópontja a Varga Tamás és munkatársai által kidolgozott komplex matematikatanítási módszertan. Fontosnak tartjuk, hogy ezt az értékes hagyatékot a jelen kihívásait szem előtt tartva tudjuk megőrizni.

Az MTA–ELTE Korszerű Komplex Matematikaoktatás Kutatócsoport elkötelezett Varga Tamás matematikatanításának irányában.

A módszerben a komplexitás többféleképpen érthető és értelmezhető.

Egyrészt jelenti tudatos építkezést az óvodától a középiskola befejezéséig. A folytonosságot az egyes évfolyamok között a fogalom csírájától az absztrakt gondolkodási műveletekig. Kutatócsoportunk ezért kiemelt figyelmet fordít az átmenetek kérdésére: az óvodából az iskolába, az alsó tagozatból a felsőbe, az általános iskolából a középiskolába.

Másrészt a komplexitás nyomon követhető a matematika elvont világa és valóságos világ kapcsolatának erősítésében, valamint az egyes témák összeszövésében. „Valódi összeszövődésre kell gondolnunk. Nem arra, hogy egy-egy órán egymás után vegyünk egy-egy feladatot innen is, onnan is. Olyan összeszövésről gondolkodunk, amelyben az egyedi fogalmak alakulásának jól átgondolt rendjét tiszteletben tartva minden lehetséges kapcsolatot megkísérlünk megragadni, amely mélyebbé és biztonságossá teheti az adott fogalom tartalmát, más fogalmakhoz való viszonyát."[1] Éppen ezért kutatásunk fontos részét képezi a valóság modellezési lehetőségeinek feltárása, ezzel egyidejűleg az informatika és a modern eszközök térhódításának és meghatározóvá válásának figyelembevétele.

Harmadrészt elengedhetetlenül fontosnak érezzük a kognitív tudományok előrehaladásának, eredményeinek beépítését a matematika módszertanába.

Nem utolsó sorban tudjuk, hogy a matematika tanítása a köznevelésben akkor tud megújulni, ha megújul a tanító és tanárképzés is, ezért kutatómunkánk erre a területre is kiterjed.

Tematikus rovatunkban található írások a komplexitás ezen értelmezéseit mutatják be.

Két tanulmány kapcsolódik az átmenetek kérdésköréhez. Egy az óvoda – iskola átmenetével foglalkozik, egy pedig a törtfogalom alapozásával, ami mindig kritikus pont az aló tagozatból a felsőbe lépés során.

A valóságos szituációkon alapuló problémamegoldás két írásban kap helyet. Az egyik feltáró jellegű, a nyílt végű feladatok megoldását mutatja. A másik a problémamegoldás egy lehetséges útját dolgozza ki a mintakeresés módszerével.

A kognitív tudományok oldaláról két tanulmány érkezett. Az egyik egy napjainkban igen fontos kérdést, a diszkalkuliát elemzi. A másik a matematikatanulással kapcsolatos érzelmek világába enged bepillantást.

A képzés megújítását célzó tanulmány pedig tanító szakos hallgatók fejlesztésének lehetőségeit tárgyalja.

A műhely rovatban közölt írás az alkotó és kombinatív gondolkodási eljárások tanulásának támogatására alkalmas tankönyvi feladatok elemzésével foglalkozik. A feladatok abból a C. Neményi-féle tankönyvcsaládból származnak, amely jelenleg nincs a magyar tankönyvlistán.

Az MTA–ELTE Korszerű Komplex Matematikaoktatás Kutatócsoport elkötelezett

---

[1] C Neményi Eszter és Szitányi Judit (2015): A témák összeszövése egy matematika órán, *Tanító: a művelődési minisztérium módszertani folyóirata,* **53.** 7. sz., 28–32.

Varga Tamás matematikatanításának irányában. Nem véletlen, hogy e szám legtöbb írásában alapvető hivatkozásként jelenik meg a neve, mellette pedig C. Neményi Eszter vagy Szendrei Julianna neve is. A szerzők és a szerkesztők e három szellemi óriás előtti tiszteletüket kifejezve ajánlják a tanulmánygyűjteményt az Olvasó figyelmébe.

Bízunk benne, hogy a tisztelt Olvasó hasznos ismeretekkel bővítheti a matematikai neveléssel kapcsolatos tudását és a tematikus szám segíti a komplex matematikatanítás törekvéseinek értelmezésében.

Szitányi Judit

Szitányi Judit (2018): Korszerű komplex matematikatanítás. Előszó a Gyermeknevelés folyóirat 6. évfolyamának 1. számához. *Gyermeknevelés*, **6.** 1. sz., 1–2.

# A matematikai tanulás eredményességét befolyásoló tényezők

**Svraka Tamásné – Ádám Szilvia**
Eötvös Loránd Tudományegyetem Tanító- és Óvóképző Kar – Semmelweis Egyetem Magatartástudományi Intézet

*Életünk szinte minden területén jelen vannak a számok. Tanulmányaink során legtöbbet matematikaórán foglalkozunk velük. Nem mindegy, hogy milyen hozzáállással közelítünk feléjük. Szívesen foglalkozunk velük, vagy esetleg nem szeretjük használni őket, félünk tőlük. A félelem olyan mértékben eluralkodhat rajtunk, hogy stresszt generál és szorongássá alakul. A stressz pszichoszomatikus tüneteket is okozhat. A matematikai teljesítményben is megjelenik a szorongás mint gátló tényező, annak ellenére, hogy a tanuló rendelkezik a matematika tanulásához szükséges megfelelő képességekkel, vagy sem. A matematikától való félelem felemészti a munkamemória tartalékait, gátolja az absztrahálás folyamatát és megnehezíti a tanulást. A tanulmányban igyekszünk feltárni a matematikai szorongás számos forrásait, amelyek egymással kölcsönhatásban alakítják és tartják fent a szorongást, ezáltal befolyásolják a teljesítményt.*

***Kulcsszavak:** matematika, szorongás, pszichoszomatika, képesség, teljesítmény*

## Bevezető

A számosság fogalmának kezdetei már csecsemőkorban megfigyelhetők, melyek egész életünkben elkísérnek. Ez az alapja a 3–4 éves korban megjelenő számlálásnak. Az ötéves gyermek már 15-ig el tud számolni, a nyolcéves aritmetikai műveleteket végez. A számlálási algoritmustól való elszakadás akkor jelenik meg, amikor az emlékezeti tárból történik az előhívás, például a szorzótábla visszamondása esetén (*Csépe*, 2005). Az aritmetikai képességek vonatkozásában nagy szerepe van a hosszútávú memóriának és a munkamemóriának egyaránt (*Márkus*, 2007). A munkamemória működtetése elengedhetetlen a feladatmegoldások közben (*Ashcraft* és *Krause*, 2007). Ha a gyermeket valamilyen oknál fogva sikertelenség éri matematikaórán, azonnal megjelenhet a teljesítményszorongás, amely blokkolja a munkamemóriát, vagyis agyunk azon képességét, hogy mialatt új információt tárol, egyidejűleg valamilyen műveletet is végezzen vele (*Ashcraft* és *Krause*, 2007).

A matematikai szorongásnak számos forrása lehet, az eredményességet több tényező befolyásolhatja: az aritmetikai képességek különböző fokú nehezítettsége, a nem megfelelő tanítási, tanulási és értékelési módszerek, az elutasító tanári személyiség, a nem megfelelően támogató családi háttér. A matematikai szorongás kimutatásra több pszichopedagógiai vizsgálat létezik. Tanulmányunk a matematika tanulás eredményességét befolyásoló tényezők és egy magyar vizsgálóeljárás bemutatására vállalkozik.

## A számolási képesség

A számok jelenléte mindennapjaink fontos eleme. Megtaláljuk őket a születési dátumunkban, a telefonszámunkban, a súlyunkban és magasságunkban, a megszámlálható dolgokban.

A számlálás, számolás kognitív öröklődő képesség, és a kognitív rendszerek támogatják (nyelv, memória, téri feldolgozás stb.), a nevelés és a tanulás formálja azokat.

A számolási kompetenciák elsajátítását rendkívül megnehezítik az idegrendszer fejlődésére közvetlenül ható tényezők, melyek születés előttiek és utániak is lehetnek. Ezek lehetnek egészségügyi károsodások, nem megfelelő szociális helyzet, környezeti hatások és nem utolsó sorban érzelmi sérülések (*Márkus*,

DOI 10.31074/gyn20181311



Szvarka Tamásné: orcid.org/ 0000-0003-3090-7028
Ádám Szilvia: orcid.org/0000-0003-3755-3664

2007). De befolyásolhatja a gyermek személyisége is. *Beck* szerint (1985) vannak olyan személyek, akik idegrendszere genetikailag hajlamosabb a szorongásra, ők jobban felfigyelnek az esetleges negatív jelekre, amelyektől még jobban szorongóvá válik, valamint túlértékelik a lehetséges veszélyeket, mivel a szorongás egy vészjelzés, melynek létrejöttében a személy belső értékelő folyamatainak zavara áll, egy semleges inger félelemkeltővel asszociálódik.

Az eredményes iskolai matematikatanulás elengedhetetlen feltétele az elemi számolási készség elsajátítása. Az a gyermek, aki nem éri el a megfelelő fejlettségi szintet, behozhatatlan hátránnyal indulhat az iskolába, a kudarcok elkerülhetetlenek lesznek számára, a gyermek szorongóvá válhat. A fejlődésbeli elmaradások nem feltétlen eredményeznek intellektuális különbségeket. Ezekhez a fejlődésbeli különbségekhez a pedagógia tervezésnek kell alkalmazkodni, megadni az esélyt a felzárkóztatáshoz (*Józsa*, 2008).

A különbségek teljes kompenzálására nem minden esetben van lehetőség, ilyen például a számolási zavar. Ebben az esetben nem a számolási képesség fejlődésének időbeli eltolódását, hanem hiányosságát értjük, amely különböző eredetű és más-más súlyossági fokban nyilvánul meg (*Márkus*, 2007).

A számolászavarokat több szempont szerint csoportosíthatjuk: agyi lokalizáció (lebenykárosodás), kognitív diszfunkciók zavara, ismeretelsajátítás, illetve a megszerzett képesség elvesztése alapján (*Márkus*, 2007). Ezek szerint a fejlesztési, támogatási folyamatoknak is különbözőknek kell lenni; nagy hangsúlyt kell fektetni az osztályon, tanulócsoporton belüli differenciálásra, hogy a szorongás elkerülhető legyen. Ebben kiemelkedő szerepe van a tanító és gyógypedagógus kooperatív munkájának, használt módszereinek, személyiségének.

## Matematikatanítási módszerek

A gyermek matematikatanulási sikertelensége sok esetben az első számolási élményére vezethetők vissza. Ezt okozhatta valamilyen tanítási hiányosság vagy akár a nem megfelelően kiválasztott módszer (*Skemp*, 2005). A matematikai ismeretek sikeres elsajátítása nagymértékben függ a jó tanítási módszerektől és a tanító attitűdjétől.

A matematikai nevelés/oktatás módszerein azokat a tudatos eljárásokat értjük, amelyeket a pedagógus irányításával, eszközök segítségével, tapasztalás útján él meg a gyermek, mindeközben fejlődik a matematikai problémák megoldásához szükséges képessége. A módszer a matematikai nevelés/oktatás része, ami a probléma és szorongásmentes megvalósulást és elsajátítást biztosítja. Egy módszer megválasztásánál több szempontot kell figyelembe venni. Az egyik a téma, amely az óra/foglalkozás anyagát képezi. A másik a gyermekek tulajdonságai: érdeklődés, fejlettség, előzetes tudás. A harmadik a pedagógus személyisége, mely magában ösztönző erővel bír. Ha módszerei biztosítják a gyermek szabad gondolkodását, akkor saját ütemében, és képességeihez mérten fejlődik (*Perlai*, 2007).

## A meghatározó tanári személyiség

*Pólya György* (2000) a Gondolkodás iskolája című könyvében a következő általános közvélekedést idézi: „A jövendő tanárok az általános iskolában megtanulják a matematika utálatát és visszatérnek az általános iskolába, hogy nemzedékeket tanítsanak meg erre." (*Skemp,* 2005. 7. o.) Dienes Zoltán, a matematikatanítás reformátora is hasonlóan gondolkodott, de a gyerekek szemszögéből: „Túl sok az olyan gyerek, aki nem szereti a matematikát, és minél idősebb korosztályt tekintünk, annál több." (*Dienes* 1973*, idézi Klein* 1980. 22. o.) Ennek nem szabad tovább folytatódnia. Az a tantárgy, amelyik ilyen sokszínűen fejleszti az ember személyiségét, gondolkodását, kreativitását, a tanulásban kiemelt, pozitív szerepet kell, hogy kapjon.

Ebben fontos szerepe van a tanár személyének, aki a megfelelő módszerek kiválasztásával és a pozitív megerősítések révén nagy motiváló erővel bír. Ezáltal kialakulhat az érdeklődés a tantárgy iránt, a kisdiák szívesebben és többet foglalkozik a matematikával. Minél nehezebbek a feladatok, annál inkább szorul a tanuló a magyarázatra, egyre többször kér segítséget egy-egy feladat megoldásában. Ha a tanárral jó a kapcsolata, akkor a tanuló bátrabban kérdez, motiváltabb. Ha a személyközi kapcsolatok negatívak, ez szorongást eredményez, amely gátolhatja a matematikai képességek kialakulását, ezáltal kevésbé lesz eredményes az oktatás (*Skemp*, 2005). A tanító személye magában motiváló erővel bírhat. A tanulók azokat a tantárgyakat szeretik jobban, amelyeket könnyebben meg tudnak érteni, hamarabb el tudnak sajátítani, amiben több segítséget kapnak. Szükség van arra, hogy felkeltsük, és ébren tartsuk a tanulók érdeklődését. Az iskolai tevékenység fő hajtóereje a motiváció, az érzelmi tényezők és a beállítódás (*Mesterházi*, 1999).

## A motiváció ereje

A motiváció gyűjtőfogalom, a viselkedésünk energetizálásáért és irányításáért felelős motívumok (indítékok) összessége. A motivációt irányító tényezők: agyunk, testünk fiziológiai folyamatai és kulturális, interperszonális jelenségek összessége (*Atkinson*, 2000). A motívumok nagyobb köre az iskolai tanuláshoz kapcsolódik; ezek a tanulási motívumok, motívumrendszerek lehetővé teszik a tanulási környezethez való alkalmazkodást (*Fejes* és Józsa, 2005). „A motívum csak akkor hatékony, ha személyiségvonássá alakul, ha beállításhoz vezet." (*Mesterházi*, 1999. 7. o.). A tanulási motívumok kifejlesztését elősegítő belső tényezők: a gyermeki kíváncsiság, tevékenység-, teljesítményvágy, önmegvalósítás és megismerés. Ezek a tanulás belső szükségletei is egyben. A fő mozgatórugója a sikerélmény, amelyet akkor él át a tanuló, ha számára nehezebb feladatot sikerül megoldania. Ha túl könnyű a feladat, akkor fizikai és szellemi igénybevétel hiánya lép fel, gyenge a teljesítménymotiváció, nincs sikerélmény. Arra is vigyázni kell, hogy a feladat ne legyen túl nehéz, mert akkor kudarchelyzetet idézhetünk elő. Ha hasonló helyzettel találja szemben magát a gyermek, akkor megjelenhet a szorongás is, kudarckerülővé válik, sikerorientált törekvése megszűnik, csökken az igényszintje, aminek következménye az alacsony teljesítményszint. Azoknak a tanulóknak, akiknek az igényszintje magasabb, eredményesebbek a tanulás területén. Ezeknek a gyerekeknek nagyobb a munkabírása és a kitartása, a feladatmegoldása is gyorsabb. Vannak tanulók, akiknek több időre van szükségük a feladatmegoldáshoz. Bizonyos feladathelyzetekben, amikor időzített a munka, hátrányba kerülnek, a szorongás máris megjelenik. Ha ebben az esetben a család túlságosan noszogatja a gyermeket, az a várt eredmény ellenkezőjét eredményezi, zavarokhoz és kudarcokhoz vezethet (*Mesterházi*, 1999).

## A családi háttér szerepe

Abban, hogy a gyermek miként teljesít az iskolában, nagy szerepe van a családi háttérnek is. Az eltérő szociokulturális környezet a tanulási motívumok fejlődésében nagy különbségeket mutat, és eltérő képességstruktúrát is feltételez (*Fejes* és Józsa, 2005). A tanuló fejlődését elsősorban a család és az őt körülvevő környezet határozza meg. Az, hogy egy ember milyen érzelmi, társadalmi és kulturális környezetben nevelkedik, segíti vagy gátolja a társadalomba való beilleszkedését. Hazai és nemzetközi kutatások bizonyítják, hogy az a szülői nevelési bánásmód, amelyet alacsony gondoskodás és magas védelem (érzelemszegény kontroll) jellemez, kapcsolatban áll számos mentális zavar (depresszív zavarok, szociális fóbia, szorongásos zavarok) magas kockázatával (*Narita és mtsai*, 2000; *Margitics és Pauwlik*, 2006; *Parker*, 1983). Azon tanulók hajlamosabbak lelki zavarokra, akik korábban is fokozott elvárásoknak voltak kitéve, szorongóak, aggodalmaskodóak. Mindennek hátterében sokszor a kritikus, szeretetét kifejezni képtelen szülő áll (Ádám és *Hazag*, 2013). Az anyai szeretet nagyobb szereppel bír ezen betegségek pathomechanizmusában, mint az apai szeretet (*Duggan,* és *mtsai,* 1998; *Mackinnon, Henderson,* és *Andrews*, 1993). A túlvédő attitűdnek a depresszió, a szorongás és a neuroticizmus kialakulásában mutatták ki fontos szerepét, míg az anyai korlátozásnak a szorongásos megbetegedésekkel volt szoros kapcsolata (*Parker*, 1990). *Hall* és munkatársai (2004) az anyai szeretet prediktív jelentőségét mutatták ki az alacsony önbecsülés kialakulásában.

Ha a szülői magatartás nem példaértékű, feszült környezetben nevelkedik a gyermek, akkor nem várhatunk el tőle jó tanulmányi eredményeket. Az állandó feszültség nem teszi lehetővé a szellemi tevékenységet, a gyermek nyugtalanná és – nem utolsó sorban – agresszívvá válik. A szorongást az is kiválthatja, ha a szülők nevelési gyakorlata helytelen. Ha a rossz jegyért fizikai bántalmazás jár, azt tanulási problémák, alacsony önértékelés is követheti (*Mesterházi*, 1999). A szülők gyakran ilyen módon fejezik ki elégedetlenségüket az osztályzatok miatt, szerintük a gyerek otthon tudta a matematikapéldát (*N. Kollár* és *Szabó*, 2004). A szülőnek minden esetben tanácsos kikérni a pedagógus véleményét, mielőtt bármely módon számon kérné a gyermekét, de ez fordítva is igaz. Nem képzelhető el hatékony iskolai munka, ha a családdal nem építjük ki a megfelelő kapcsolatot. Említésre méltó több, a család és az iskola közötti partnerségre építő intézmény, ahol a tanári attitűd is különösen nagy jelentőségű, nevezetesen Winkler Márta Kincskereső Iskolája; Gyermekek Háza befogadó iskola, ahol a nyitott partnerség mellett a kreativitás és az elfogadás a fő alapelvek.

A többségi általános iskolákban, ahol hagyományos osztálytanítás folyik nagy létszámú osztályokban, ott kevesebb lehetőség van a szülőkkel való kapcsolattartásra és kevesebb egyéni odafordulás, figyelem jut a gyerekekre és az egyéni képességek figyelembevételére. Ha a diák lemarad, a megértési folyamatok sérülnek; ez fokozottan érvényes a matematika tanulására.

## Matematika megértése

Számos matematikai tanulási helyzettel találkozhatunk életünk során. Vannak, amelyekben jónak bizonyulunk és vannak, amelyekben nem vagyunk képesek megérteni a számunkra nyújtott ismereteket. Sok tanuló anélkül hald tovább az anyag elsajátításában, hogy értené az alapelveket, amelyre az épül. Ennek oka lehet egy egyszerű betegség miatti hiányzás is. Így nem tud mire építkezni, sosem fogja megtanulni azokat a fogalmakat. Akik nem értik meg a matematika anyagot, nem tudnak tovább haladni az ismeretszerzésben, így hiányában szorongókká válnak. Ez későbbiekben fordítva is igaz lesz, a szorongás akadályozza a megértés folyamatát. Minél jobban szorong a diák, annál inkább szeretne jól teljesíteni, igyekszik, de kevésbé lesz sikeres, vagyis a szorongás csökkenti a tanulás hatékonyságát (*Skemp*, 2005). „Minél szorongóbb egy tanuló, annál jobban igyekszik, de annál kevésbé képes a tanult anyag megértésére." (*Skemp*, 2005. 172. o.)

## Munkamemória-gát

A megértési nehézség abból is adódhat, hogy a szorongás kognitív folyamatokat szakít meg, miközben memóriakapacitást használ. Amikor nehezebb feladatot oldunk meg, a kognitív eljárás további munkamemória erőforrásokat követel, ekkor kevesebb figyelem jut a feldolgozásra. A szorongás blokkolja a munkamemóriát, amely nélkül nem lehet tananyagot megérteni és elsajátítani (*Ashcraft* és *Krause*, 2007).

## Szorongás és teljesítmény

Ha a gyermek fél a matematikától, olyan mentális folyamatot gátol, amely pontosan az aritmetikai és a geometriai műveletek végzéséhez szükséges (*Ashcraft* és *Krause*, 2007). A tanulók ilyenkor általában több erőfeszítést tesznek a matematika megértésének irányába, de teljesítményük alulmarad az elvárttól. Ezek a gyermekek aggódnak azért is, hogy milyen lesz a teljesítményük: jól oldották meg a matek feladatot vagy nem; hányast kapnak. Van, amikor tesztíráskor annyira izgulnak a diákok, hogy nem jut eszükbe semmi és nem képesek megírni a tesztet, elfelejtik, amit eddig tudtak (*Atkinson*, 2005). Ebben az esetben a félelem stresszé alakul, majd szorongást generál. A tesztszorongás azokban a helyzetekben jelenik meg, amikor a teljesítményt nyilvánosan értékelik (*Skemp*, 2007).

## Az értékelés kiemelt szerepe

A pedagógiai értékelés gyakorlata sokszínű, mégis nehéz kiválasztani a megfelelőt. Nagy jelentőséggel bír, hogy a tanáraink milyen mélységben sajátították el az értékelés pedagógiai és pszichológiai alapjait, módszereit, eszközeit, mennyire vannak tisztában az értékelő attitűdjük jelentőségével (*Hercz*, 2007). Értékelésre szükség van, „az iskolai élet mindennapjaihoz hozzátartozó történés, a tanárok munkájának ritmusát, a tanulók tudásához, az iskolához, a tantárgyakhoz való viszonyát, az iskolai munka légkörét, a tanulók hangulatát befolyásoló jelenség." (*Csapó*, 2002, 45., idézi *Hercz*, 2007)

Ha a hibázást és a helytelen választ az osztály magatartása és a tanár személye szégyellnivalónak és megalázónak ítéli, máris nyitva áll az ajtó a másodlagos számolási gyengeséghez, kialakulhat a matematikától való félelem (*Mesterházi*, 1999). Az értékelésnek ebben az esetben negatív szerepe van, ami szorongáshoz vezet.

## Arithmophobia – matematikától való kóros félelem

Az iskolás gyerekek körében a szorongás leginkább a matematikai szorongás és a teljesítmény kapcsolatára irányul. A félelem és a szorongás egészen sajátos módon gátolja a számolási gondolkodást (*Ashcraft* és *Krause*, 2007).

„A sikeres feladatvégzés olyan élményekhez juttatja a gyereket, amelyek segítik a felfedező matematikatanulást. Ezzel szemben, ha a gyerek gyakran tapasztalja saját sikertelenségét a matematikaórán, akkor kialakulhat benne az arithmophobia (matematikától való félelem) nehezen helyrehozható érzése. Ez egy olyan negatív érzelmi reakció, amit néhány ember tapasztal, amikor matematika feladatot kell megoldania. A feszültségnek és a szorongásnak olyan érzései, amik beleavatkoznak a számok manipulációjába. Ezek a reakciók változhatnak az erőstől a gyengéig. A szorongást felkelthetik mindennapos tevékenységek is, mint például: fizetés a pénztárnál." (*Mesterházi*, 1999. 7. o.)

Ha a feladatok megoldásában nyújtott teljesítmény észrevehetően romlik, akkor érdemes odafigyelni a megmutatkozó problémákra: koncentrációs nehézségek, logikus gondolkodás szétesése, figyelem könnyű elterelhetősége (*Atkinson*, 2005). Ezek a tünetek jelentkezhetnek gyengétől az erősig egyaránt, és megmagyarázhatatlan szorongásokat eredményezhetnek. Minél előbb diagnosztizáltatni kell, hogy a hibák mögött időszakosan előforduló hibákról van-e szó vagy tanulási zavarról, a matematika esetében diszkalkuliáról (*Mesterházi*, 1999).

## Szorongás – betegség?

*Mesterházi Zsuzsa* (1999) szerint bármilyen tanulást akadályozó tényező – legyen az tanulási zavar, a szociális hátrányból adódó tantárgyi lemaradás, vagy egészségügyi probléma – szorongást okozhat a tanórákon, ami leginkább a matematikaórán jelenik meg.

A tanulást akadályozó tényezők, valamint a környezeti, pszichés vagy szociális stresszorok mint például fontosabb élet-események (válás, halál a családban) vagy mindennapos kellemetlenségek (csúfolás az iskolában) stresszt okozhatnak a gyermek számára. Az eustressz, vagy más néven pozitív stressz motiváló hatású, fokozza az energiát, javítja a teljesítményt, azonban csak rövid távú hatása van. A distressz (negatív stressz vagy káros stressz) akár hosszútávon is képes szorongást okozni, csökkenti a teljesítményt, és mentális problémákhoz vezethet (*Atkinson és Hilgard*, 2005, idézi *Svraka, Major és Ádám*, 2017). A stressz során kialakulhatnak szomatikus, pszichológiai és magatartásbeli szimptómák, betegségek. Szomatikus tünet lehet például a fejfájás, heves szívdobogás, izomfájdalom, hátfájás, fogcsikorgatás, hasmenés, alvászavar stb. Pszichológiai tünet lehet a szorongás, nyugtalanság, ingerlékenység, kedélyállapot változás, harag, koncentráció hiánya stb. Végül a magatartásbeli szimptómák lehetnek például a túlevés, alultápláltság, dührohamok, szociális visszahúzódás, összeférhetetlenség stb. (Ádám, 2013).

A tartós stressz hatására megjelenhetnek a testi tünetek, krónikus fájdalmak is, melynek kezelése nagy terhet ró a családok mindennapjaira (*Svraka, Major és Ádám*, 2017).

Egyik leggyakoribb tünet a gyermekek körében a fájdalom. Az akut (heveny) fájdalom összetett szenzoros és emocionális élmény, melynek percepciója összetett folyamat, potenciális vagy aktuális szövetkárosodásra hívja fel a figyelmet, evolúciós célja tehát a szervezet integritásának megőrzése. Visszatérő, illetve több, mint három hónapja tartó panaszok esetén krónikus fájdalomról beszélünk, amely a heveny fájdalomtól különböző, összetett betegség, testi, pszichés és szociális tényezők összjátékaként alakul ki. Lényegében a fájdalomérző pályák fokozott érzékenysége (perifériás és centrális szenzitizáció) és ún. fájdalommemória alakul ki a visszatérő ingerek miatt. Az ilyen gyermekeknél a fájdalomérző idegek és a fájdalommátrix aktivitása már kis ingerek hatására, sokszor pl. hasi fájdalom esetén a normál emésztési folyamatok kapcsán is jelentkezik, lényegében tehát a fájdalom válik a betegséggé (*Atkinson és Hilgard*, 2005, idézi *Svraka, Major és Ádám*, 2017). Minden esetben szükséges a problémának utána nézni, ha jár testi tünetekkel a tartós stressz, ha nem. Testi tünetek jelentkezése esetén elsősorban a körzeti orvost kell felkeresni. Stressz és tanulásiteljesítménycsökkenés esetén a pedagógiai szakszolgálatok biztosítanak részletes kivizsgálást. Tapasztalatok alapján mondhatjuk, mindegy, hogy a tanuló matematikai részképesség nehézséggel küzd, vagy zavarral, intelligenciája normál átlagos intelligencia övezetbe tartozik vagy gyenge, általában a vezető tünetek között ott szerepel a szorongás (*Svraka és* Ádám, 2017*)*. Magyarországon a pedagógiai szakszolgálatok ezt általános tantárgyi/teljesítmény szorongásként vizsgálják és kezelik, pedig létezik több külföldi és hazai matematikai szorongást vizsgáló eljárás is, ilyen magyar teszt az MSzMT.

## Matematikai szorongást vizsgáló eljárás – MSzMT

Külföldön számos matematikai szorongást mérő teszt létezik. Ezek közül a leghatékonyabbnak bizonyult és a legtöbbször használt eszköz a Mathematics Anxiety Research Scale (*Richardson* és *Suinn*, 1972, idézi *Nótin*, *Páskuné* és *Kurucz*, 2012). Mára már számos változata létezik, például Revised Mathematics Anxiety Rating Scale (RMARS; *Alexander* és *Martray*, 1989, idézi *Nótin*, *Páskuné* és *Kurucz*, 2012), ezt a változatot több ország is átvette. Egy másik kérdőív a Fennema-Sherman Mathematics Anxiety Survey (*Fennema* és *Sherman*, 1976, idézi *Nótin*, *Páskuné* és *Kurucz*, 2012) és a Mathematics Anxiety Questionnaire (*Wigfield* és *Meece*, 1988, idézi *Nótin*, *Páskuné* és *Kurucz*, 2012). Egy tantárgyi szorongás vizsgálatánál nemcsak a matematikával kapcsolatos megnyilvánulásokat kell figyelembe venni, hanem a szorongás tüneteit is mérni kell.

Ezeket a szempontokat figyelembe véve és ez alapján dolgozták ki a Debreceni Egyetem munkatársai (*Nótin, Páskuné* és *Kurucz,* 2012) azt az új mérőeszközt, amivel mérhetjük a matematikai szorongás minden komponensét. A mérőeszköz neve: Matematikai Szorongást Mérő Teszt (MSzMT). A tesztben állítások szerepelnek, melyekről el kell dönteni a tanulónak, hogy mennyire tudja azokat saját magára vonatkoztatni egy hétfokú skálán való jelöléssel (1: egyáltalán nem jellemző, 7: teljes mértékben jellemző). A teszt 40 itemből áll, amelyeket két fő faktorba rendeztek: az első az érzelmi és fiziológiai tünetek; a második a az olyan kognitív tünetek itemeit tartalmazza, mint például az attitűdök, attribúciók és vélekedések. A matematikatanulás közben előtörő érzelmek szubjektívek, például a félelem, a szorongás, a nyugtalanság vagy éppen az ellenkezője: heurisztikus élmény, öröm, boldogságérzet. A szorongás sokszor testi tünetekben jelentkezik, tör elő: hányinger, hányás, hasfájás, hasmenés, szívdobogás, levegőtlenség, remegés, szédülés, gombóc a torokban (*Nótin, Páskuné* és *Kurucz,* 2012). Ezek fiziológiai tünetek, amelyek az érzelmi faktorral szorosan együtt járnak, egymás következményei, ezért sorolandóak egy faktorba (*Tringer*, 2005, idézi *Nótin, Páskuné* és *Kurucz*, 2012). A szorongás mögött negatív megnyilatkozások feltételezhetőek (*Ashcraft*, 2002, idézi *Nótin*, *Páskuné* és *Kurucz*, 2012), amelyek alfaktorai a következőek: attitűdök, attribúciók és vélekedések. A Kognitív tünetek faktor nem tagolódik további alfaktorokra, itt az összes matematikai gondolkodással kapcsolatos tartalom megjelenik, nem szükséges csoportbontás. Az állításokat úgy próbálták megfogalmazni, hogy minél jobban lefedjék a tartalmat. Mindkét faktorba húsz itemet generáltak, melyek elkészítésekor a MARS, a MAS s az ATMI kérdőíveket vették alapul. Arra is figyeltek, hogy az állítások az iskolás korcsoportnak könnyen érthető legyen (*Nótin, Páskuné* és *Kurucz*, 2012).

Ez a vizsgáló eljárás nem elterjedt, viszont nagyon jó lehetőséget biztosít a tünetek feltérképezésére, a matematikai szorongás okainak feltárására. Fontos, hogy a tünetek jelentkezésekor azonnal foglalkozzunk a problémával, még a pszichoszomatikus testi tünetek megjelenése előtt. Erre lehetőséget biztosítanak a pedagógiai szakszolgálatok pszichológiai és pedagógiai ingyenes fejlesztő foglalkozásai, hogy a tanulók sikerrel vegyék a matematikatanulás akadályait.

## Konklúzió – A sikerre épülő önbizalom

Tanulmányunk több oldalról vizsgálta és mutatta be a matematikai szorongás tényezőit. Az aritmetikai képességek nehezítettsége, a nem megfelelő tanítási, tanulási és értékelési módszerek, a pedagógus rideg személyisége, a nem megfelelően támogató családi háttér, mind forrása lehet a szorongásnak és ezáltal az alulteljesítésnek. Mi a matematika tantárgy esetében vontunk le következtetéseket és mutattunk be egy magyarországi matematikai szorongás vizsgáló eljárást, mint a probléma feltérképezésének egyik lehetőségét.

Ha a tanuló sokszor éli át a sikertelenséget, akkor maga a matematika válik a szorongás tárgyává (*Skemp*, 2005). Mivel a matematika a mindennapi élet eszköze, nem szabadna félni tőle. A pedagógusok feladata, hogy megtanítsák a tanulókat ennek használatára, a sikerélmény így biztosított. Ha a pedagógusok megteremtik az örömszerzés lehetőségét, kialakítják a megfelelő munkalégkört, elegendő időt és támogatást biztosítanak a feladatok megoldásához, elfogadják a hibázás lehetőségét, a gyermek megfelelő önbizalommal fog rendelkezni a matematikaórákon, meg is szeretheti a tantárgyat. Ez a folyamat nem mindig megy ilyen egyszerűen. Nemcsak a pedagógus felől érkeznek külső elvárások, amelyek meghaladhatják a tanuló képességeit, ilyenkor az öröm és a fejlődés kapcsolat gyöngül. Akinek túl nehéz feladatot kell megoldania, és nem képes rá, nincs sikerélménye, szorong. Akinek pedig a feladatok könnyűnek bizonyulnak, az unatkozik. Mindenkinek olyan szintű feladatot kell kapnia, amivel a képességei és előzetes tudása alapján megbirkózik, ezáltal nő az önbizalma és sikeres lesz (*Szendrei*, 2005).

„Az öröm akkor tűnik fel az unalom és az aggodalom közötti mezsgyén, amikor a kihívás nagysága arányban áll az egyén cselekvési képességével." (*Csíkszentmihályi*, 1991. 88. o.)

## Felhasznált irodalom

Ádám Szilvia és Hazag Anikó (2013): Magas a kiégés prevalenciája magyar orvostanhallgatók között: az elmélyülés és pozitív szülői attitűdök mint lehetséges protektív tényezők. *Mentálhigiéné és Pszichoszomatika*, **14**., 1. sz., 1–23.

Adam Szilvia (2013): *Work-Family Conflict among Female and Male Physicians in Hungary: Prevalence, Stressor Predictors and Potential Consequences on Physicians Wellbeing.* PÁLÚR Kft., Budapest.

Ashcraft, M. H. & Krause, J. A. (2007): Working memory, math performance, and math anxiety. *Psychonomic Bulletin & Review*, **14**. 2. sz., 243–248. https://doi.org/10.3758/BF03194059

Atkinson, H. (2005): *Pszichológia.* Osiris Kiadó, Budapest.

Beck, A.T & Emery, G. (1985): *A szorongásos zavarok és fóbiák kognitív szemlélete.* Animula Kiadó, Budapest.

Csapó Benő (2002): *Az iskolai tudás felszíni rétegei: mit tükröznek az osztályzatok?* In: Csapó Benő (szerk.) *Az iskolai tudás*. Osiris, Budapest, 29–65.

Csépe Valéria (2005): *Kognitív fejlődés neuropszichológiája*. Gondolat Kiadó, Budapest.

Csíkszentmihályi Mihály (1991): *Flow – Az áramlat. A tökéletes élmény pszichológiája*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Duggan, C., Sham, P., Minne, C., Lee, A. & Murray, R. (1998): Quality of parenting and vulnerability to depression: Results from a family study. *Psychological Medicine*, **28**, 2. sz., 185–191. https://doi.org/10.1017/S0033291797006016

Fejes József Balázs és Józsa Krisztián (2005): A tanulási motiváció jellegzetességei hátrányos helyzetű tanulók körében. *Magyar Pedagógia,* **105.** 2. sz., 185–205.

Hall, L. A., Peden, A. R., Rayens, M. K. & Beebe, L. H. (2004): Parental bonding: A key factor for mental health of college women. *Issues in Mental Health Nursing*, **25**., 3. sz., 277–291. https://doi.org/10.1080/01612840490274787

Hercz Mária (2007): *A pedagógiai* értéklés *gyakorlata* In: Bábosik István és Torgyik Judit *Pedagógusmesterség az Európai Unióban*. Eötvös Kiadó, Budapest, 191–214.

Józsa Krisztián (2008): *A tanulásban akadályozott gyermekek tanulási motivációja*. In: Szabó Ákosné (szerk.) *Tanulmányok a tanulásban akadályozottak pedagógiája és határtudományai köréből.* Educatio, Budapest.

Klein Sándor (1980): *A komplex tanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata.* Akadémiai Kiadó, Budapest.

Mackinnon, A., Henderson, A.S. & Andrews, G. (1993): Parental "affectionless control" as an antecedent to adult depression: A risk factor refined. *Psychological Medicine,* **23**, 4. sz., 135–141. https://doi.org/10.1017/S0033291700038927

Margitics, Pauwlik (2006). Megküzdési stratégiák preferenciájának összefüggése az észlelt szülői nevelői hatásokkal. *Magyar Pedagógia*, **106**. 1. sz., 43–62.

Mesterházi Zsuzsa (1999): *Diszkalkuliáról pedagógusoknak*. Bárczi Gusztáv Gyógypedagógiai Tanárképző Főiskola, Budapest.

Narita, T., Sato, T., Hirano, S., Gota, M., Sakado, K. & Uehara, T. (2000): Parental child-rearing behaviour as measured by the Parental Bonding Instrument in a Japanese population: Factor structure and relationship to a lifetime history of depression. *Journal of Affective Disorders*, **57**, 2. sz., 229–234. https://doi.org/10.1016/S0165-0327(99)00071-3

N. Kollár Katalin és Szabó Éva (2004): *Pszichológia pedagógusoknak.* Osiris Kiadó, Budapest.

Nótin Ágnes, Páskuné Kiss Judit és Kurucz Győző (2012): A matematika szorongásmérő személyen belüli tényezőinek vizsgálata középiskolás tanulóknál. Budapest, *Magyar Pedagógia,* **112.** 4. sz., 221–241.

Perlai Rezsőné (2007): *A matematikai nevelés módszertana*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Parker, G. (1983): Parental „affectionless controll" as an antecendent to adult depression. A risk factor delienated. *Archives of General Psychiatry*, **40**. 1. sz., 956–960.

Parker, G. (1990): The Parental Bonding Instrument: A decade of research. *Social Psychiatry and Psychiatric Epidemiology*, **25.** 1. sz., 281–282. https://doi.org/10.1007/BF00782881

Skemp, R. R. (2005): *A matematikatanulás pszichológiája.* Edge 2000 Kiadó, Budapest.

Svraka Tamásné, Major János és Ádám Szilvia (2017): Szorongás és következményei, a matematikai teljesítmény és hátrányos helyzet tükrében. In: Bukor József, Drahota-Szabó Erzsébet, Simon Szabolcs, Tóth Sándor János (szerk.) Érték, minőség és versenyképesség – a 21. század kihívásai Nemzetközi Konferenciájának tanulmánykötete, Selye János Egyetem, Komárom.

Svraka Tamásné és Ádám Szilvia (2017): Arithmophobia – számolástól való félelem. *Praxis*. **26**. 4. sz., 41–45.

Szendrei Julianna (2005): *Gondolod, hogy egyre megy?* Typotex Kiadó, Budapest.

**Emotional factors affecting mathematical performance**

*Numbers are present in almost every aspect of our lives. During our studies, most of the time we deal with them in mathematics lessons. It is important how we approach them. Either we are interested in them or we may not want to use them and we are afraid of them. This fear can overwhelm us, generate stress and can lead to anxiety. Stress can also cause psychosomatic symptoms. Anxiety also manifests itself in mathematical performance as an inhibitory factor irrespective of whether the student possesses the necessary abilities for learning mathematics or not. The fear of mathematics consumes the reserves of work memory, inhibits the process of abstraction and makes learning difficult. In this study, we aimed at exploring the sources of mathematical anxiety that interact with each other and maintain anxiety, thereby affecting performance.*

***Keywords***: *mathematics, anxiety, psychosomatics, ability, performance*

Svraka Tamásné és Ádám Szilvia (2018): A matematikai tanulás eredményességét befolyásoló tényezők. *Gyermeknevelés*, **6.** 1. sz., 3–11.

# A matematika helye az óvoda életében

**Szitányi Judit – Bagota Mónika – Pintér Klára**
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Tanító- és Óvóképző Kar – Eötvös Loránd Tudományegyetem, Tanító- és Óvóképző Kar – Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Pedagógusképző Kar, Tanító- és Óvóképző Intézet

*Napjaink közoktatásában hangsúlyos szerepet kap az óvoda-iskola átmenetének kérdése. A Magyar Tudományos Akadémia által finanszírozott, Korszerű komplex matematikaoktatás kutatócsoport 6. számú csoportjának célja az óvodáskorú gyermekek matematikai fogalomalkotásának vizsgálata. Széleskörű, tevékenység-alapú vizsgálatot végzünk a logikai képességek és a számfogalom szintjeinek meghatározásához. Ezzel kívánjuk feltárni az azonos életkorú gyerekek közötti különbségeket, valamint a számfogalom és a logikai képességek korrelációját. Munkánk kiindulópontjaként a matematikai nevelés jelenlegi helyét és szerepét igyekszünk meghatározni. Ehhez nemzetközi összehasonlító dokumentumelemzést végzünk, valamint nagymintás (N=253) kérdőíves felmérés adatait dolgozzuk fel. Ez a tanulmány a kérdőív kiértékelése során szerzett legfontosabb adatokat és következtetéseket mutatja be, amelyek által képet kaphatunk az óvoda pedagógiai gyakorlatáról. Kutatásunk eredményeit a szakmai közösségek mellett az oktatásirányítás résztvevői is hasznosíthatják.*

***Kulcsszavak:*** *matematika, óvoda, számfogalom, logika, matematikai fejlesztés*

## A kérdőív bemutatása

„Az óvodában a tanulás folyamatos, jelentős részben utánzásos, spontán tevékenység, amely nem szűkül le az ismeretszerzésre, hanem az óvodai nap folyamán adódó helyzetekben, természetes és szimulált környezetben, kirándulásokon, az óvodapedagógus által kezdeményezett foglalkozásokon és időkeretekben valósul meg." (Kormányrendelet az óvodai nevelés országos alapprogramjáról, 2012)

Az Óvodai nevelés országos alapprogramja (továbbiakban: Alapprogram) a matematikai nevelést a külső világ tevékeny megismerésébe ágyazva tervezi. Ez lehetőséget ad arra, hogy az óvodapedagógus döntsön a matematikai fejlesztés módjáról és mélységéről. Éppen ezért tartottuk fontosnak, hogy megismerjük az egyes óvodák nevelési gyakorlatát, megtudjuk, milyen módon illesztik be az óvodások matematikai tapasztalatszerző tevékenységeit a mindennapi életükben.

Az óvodák az Alapprogram alapján készítik el helyi programjukat. A kérdőív elemzésekor látható lesz, hogy ezek a programok óvodánként eltérő, változatos területeket fednek le. Éppen ezért kiemelkedően fontos látnunk, hogy a komplex óvodai programokba hogyan épül be a matematikai nevelés.

Kutatócsoportunk munkája alapvetően az iskolába lépő gyermek matematikai fogalomalkotására fókuszál, ezért kiemelt jelentőséget kap az óvoda–iskola átmenetének kérdésköre. Napjainkban a köznevelés fontos vitája az iskolarendszer lehetséges felépítésének megváltoztatása, melynek sarkalatos pontja az óvoda–iskola átmenetének problémája. Nemzetközi viszonylatban igen eltérő a kép ebben a tekintetben. Több országban függetlenül az iskolakezdés időpontjától az 5–6 éves gyermekek számára konkrétabb játékos matematikai fejlesztéseket írnak elő, mint a magyar Alapprogram (Enganging Young Children in Mathematics – USA, BELONGING, BEING & BECOMING – Ausztrál standard, Kormányrendelet az óvodai nevelés országos alapprogramjáról – Magyarország). Kutatócsoportunk dolgozik a különböző országok standardjának összehasonlításán, melyet egy másik tanulmányban kívánunk bemutatni.



DOI 10.31074/gyn201811223

Szitányi Judit: orcid.org/0000-0003-3266-5966
Bagota Mónika: orcid.org/0000-0001-9203-3552
Pintér Klára: orcid.org/0000-0002-9973-9408

Kérdőívünk[1] fontos részét képezi az iskolába lépő gyermek óvodai tevékenységének vizsgálata a matematikai fogalmak előkészítésének szempontjából.

### *A mintavétel*

Munkánk során szerettük volna az óvodák minél változatosabb spektrumát felölelni. Emellett a kérdőíves kutatás módszerével együtt járó, gyakran nemkívánatos tényezőt elkerülni. /Nevezetesen: a válaszadó gyakran nem a valóságot mutatja be, hanem inkább igyekszik a kérdező elvárásainak megfelelni./

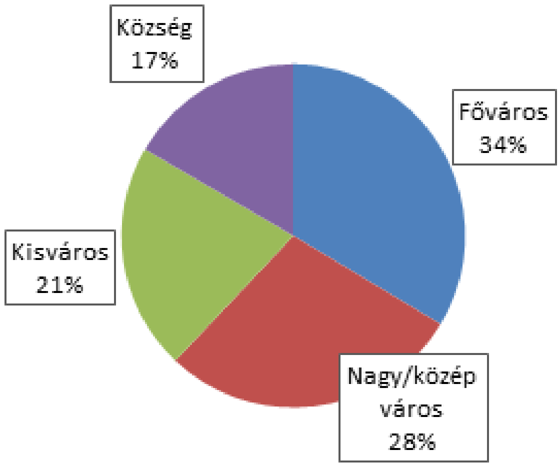
Úgy gondoltuk, hogy végzős óvodapedagógus hallgatókat kérdezünk, hiszen utolsó féléves (8–10 hetes) külső óvodai gyakorlatuk alkalmával volt alkalmuk megismerni egy-egy óvoda nevelési gyakorlatát. Ez a döntés egyrészt azért tűnt célszerűnek, mert az egyéni óvodai gyakorlatot nem a felsőoktatási intézmények szervezik, a hallgatók óvodaválasztását jellemzően a lakóhelyüktől mért távolság befolyásolja, így területileg az óvodák szélesebb köre elérhető.

Másrészt azt feltételezzük, hogy hallgatóink számára ebben az időszakban még aktív a képzés során használatos terminológia, ezáltal az egyes kérdések csak kevés magyarázatot igényelnek.

Ugyanakkor tisztában vagyunk azzal is, hogy az a tény, hogy egy óvoda/óvodapedagógus vállalja a hallgató mentorálását, 8–10 héten keresztül már önmagában egyfajta szelekciót jelenthet az óvodák között.

A kérdőív kitöltésében a Szegedi Egyetem, az ELTE-TÓK és a Kecskeméti Főiskola 2017-ben végzős óvodapedagógus hallgatói vettek részt, összesen 253 fő adott le értékelhető kérdőívet.

A felmérésben elért óvodák területaránya a következőképpen alakult:




*1. diagram:* A felmérésben részt vevő óvodák eloszlása terület szerint

Ez némi eltolódást jelent a lakosság településfajták szerinti eloszlásához képest a főváros javára, ugyanis 2016. január 1-én a számított adatok szerint a lakosság 17,9%-a élt a fővárosban. Viszont örvendetes, hogy a községi óvodák aránya megfelel a községekben lakók arányának (29,5%) (https://www.ksh.hu/docs/hun/xftp/idoszaki/mo/mo2015.pdf). (Érdekes megfigyelés, hogy a képzésen részt vevő hallgatók eloszlása viszont megfelel az országos eloszlásnak. Ennek az eltolódásnak magyarázata az lehet, hogy a hallgatóink nem minden esetben választják lakóhelyük óvodáit.)

### *A kérdőív felépítése*

A kérdőív kérdéseit három fő részre tagoltuk. Az első részben az óvodák szervezeti, személyi feltételeire, felszereltségére kérdeztünk rá. A második rész kérdései általában az óvodai tevékenységekre, a harmadik rész kérdései pedig speciálisan a matematikai fejlesztésre vonatkoznak.

A kérdések között sok nyílt kérdés szerepel, de a kérdések nagyobb részében megadott válaszok közül kellett választani, azonban ekkor is majdnem mindig nyitva hagytuk a megadottaktól eltérő válasz lehetőségét. A nyílt kérdések válaszait a tipikus válaszok alapján kategorizáltuk.

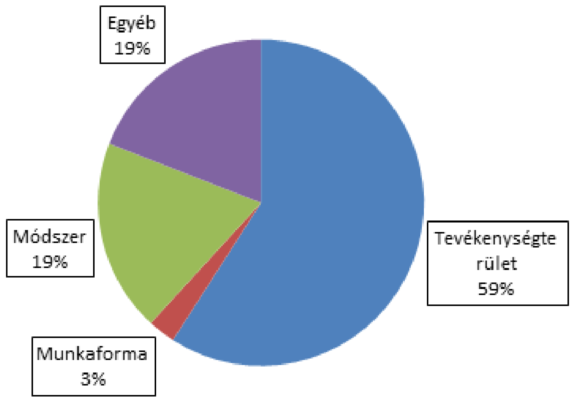
[1] Köszönettel tartozunk C. Neményi Eszternek a kérdőív összeállításában; a Kecskeméti Főiskola Tanítóképző Karának és Golyán Szilviának (ELTE TÓK) az adatgyűjtés megszervezésében, valamint Galambos Adrienn és Csárádi Barbara hallgatóknak az adatok rögzítésében nyújtott segítségükért.

## Szervezeti, személyi feltételek az óvodában. Felszereltség.

A megkérdezett óvodák többsége (90,54%) állami, vagy önkormányzat által fenntartott intézmény volt, a többi egyéb szervezet által működtetett vagy magánóvoda.

A kutatásban részt vevő hallgatók 81,17%-a nyilatkozott úgy, hogy a gyakorlat idején alkalma volt tanulmányozni az óvoda helyi programját.

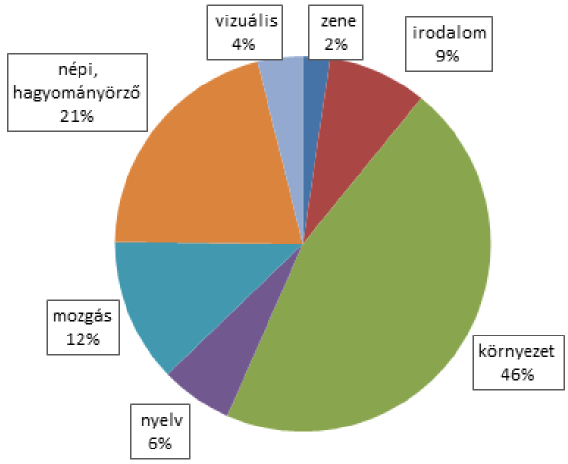
A helyi programok alapján az óvodák jellemzően valamilyen tevékenységterület, módszer vagy munkaforma mentén határozzák meg egyéni sajátosságaikat.




*2. diagram:* Az óvodák helyi programjának sajátosságai

A tevékenységterületi választás domináns megjelenése mellett a hallgatók válaszaiban az óvodában alkalmazott pedagógiai módszerek valamint az egyéb kategória jelenik meg számottevően. Módszerként jelölték például az epochális, a projekt vagy a tehetséggondozó kategóriákat. (További megfontolás tárgyát képezi az óvodapedagógus képzés számára ezeknek a kategóriáknak a tisztázása.)

Az egyéb kategóriába igen változatos meghatározások kerültek, mint „gyermekközpontú", „differenciáló", „vallás", „erkölcs". Örömmel olvastuk, hogy a játék fontosságát több óvoda is hangsúlyozta.




*3. diagram:* A helyi programok eloszlása a kiemelt tevékenységterület szerint

A népszerű tevékenységterület választáson belül is a környezeti tartalom dominanciája (45,74%) látható. Ez kapcsolatba hozható a jelenleg is népszerű öko- vagy zöld óvodák létével. A matematika szempontjából is örvendetes, hiszen a matematikai nevelés a külső világ tevékeny megismerésén alapul. Érdekesnek találtuk a népi, hagyományőrző óvodák magas számát (20,93%), emellett viszonylag magas (12,4%) a mozgási tevékenységet választók száma is a vizsgálatban részt vevő óvodai csoportokban.

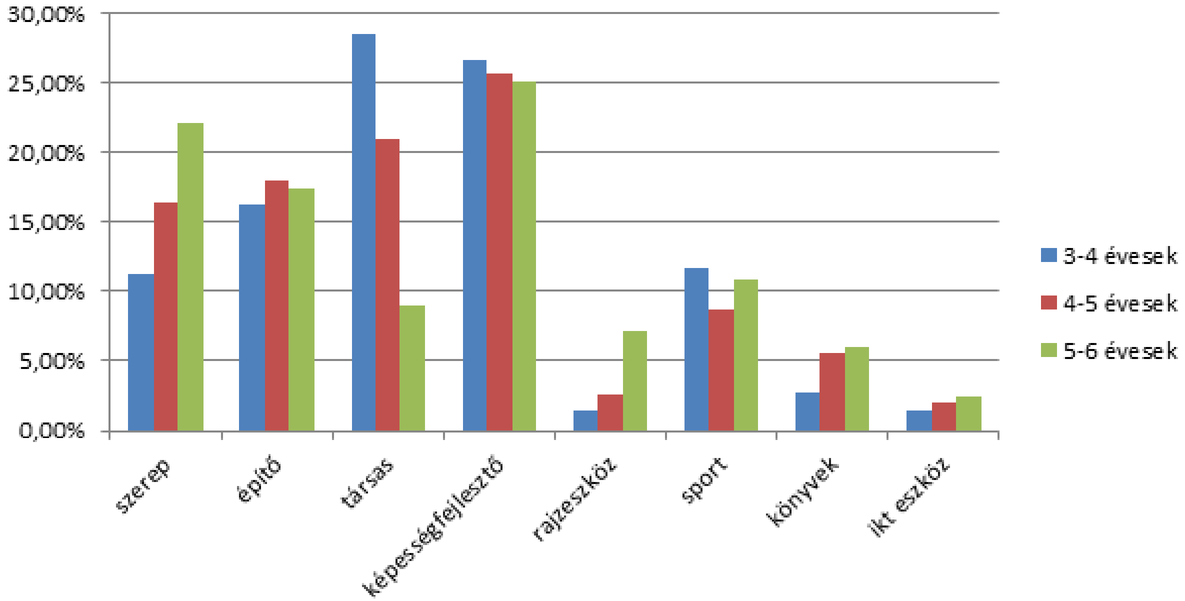
A vizsgálatban részt vevő óvodák majdnem ugyanolyan arányban választják a heterogén, mint a homogén csoportbeosztást (49,8%, illetve 50,2%). Az óvodai csoportok szervezése befolyással van a célzott fejlesztésre. Különösen 5–6 éves korban, az iskolába lépéskor érdemes fokozottan figyelni a gyermeki fogalomalkotás folyamatát. Később látni fogjuk azt is, hogy a csoport szervezése hatással van a matematikai foglalkozások szervezésére.

## Fejlesztő tevékenységek az óvodában

### *A szabad játék*

Az óvodás korú gyermek fejlesztése szempontjából a játéknak meghatározó szerepe van. Ezért fontosnak tartottuk feltérképezni, hogy milyen típusú játékok vannak az óvodákban, és a gyerekek melyiket választják ezek közül szívesen.

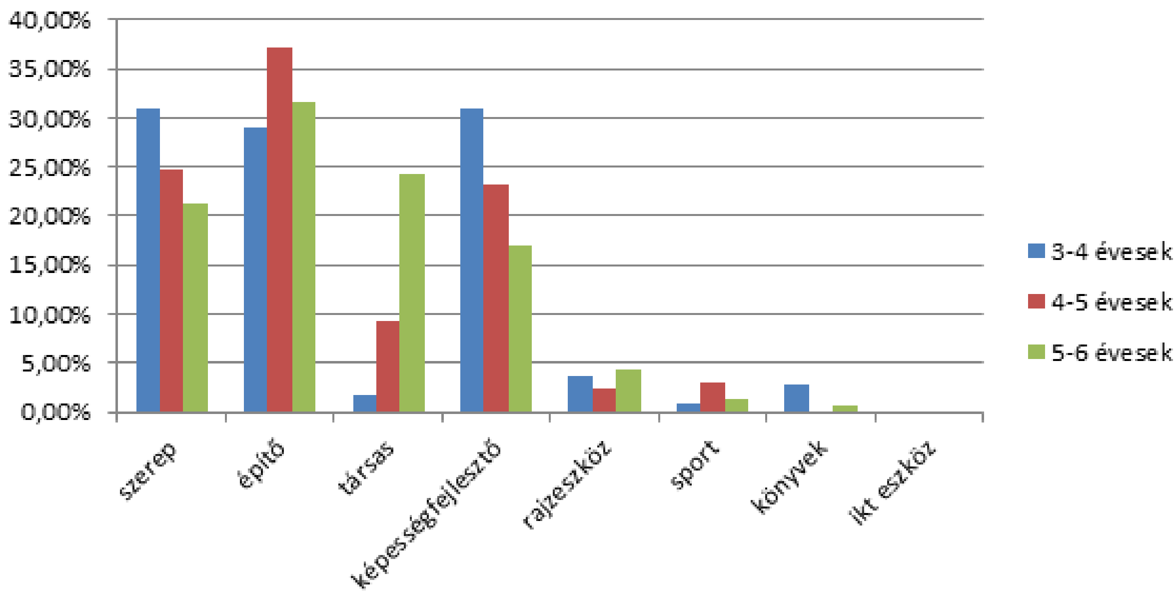
Megkérdeztük hallgatóinkat, hogy tapasztalataik szerint mivel játszanak szívesen a gyerekek a szabad játék idején.




*4. diagram:* Gyerekek kedvenc játékai

Örömmel tapasztaltuk, hogy a leghangsúlyosabb a képességfejlesztő, illetve a társasjátékok aránya. Ugyanakkor kicsit elgondolkodtató, hogy az életkor előrehaladtával egyre kevésbé választják szívesen a társas játékokat. A könyvek lapozgatásának alacsony aránya – bár nem tartozik szorosan témánkhoz – mind a három korcsoport esetén elgondolkodtató.

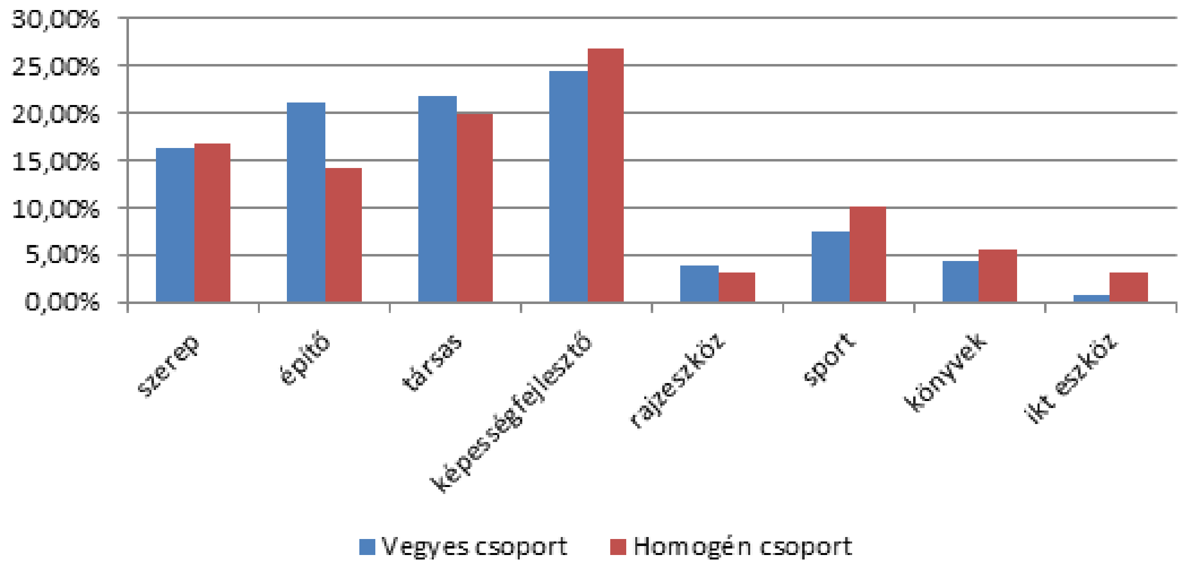
Megvizsgáltuk, hogy változik-e a kép, ha a csoportok összetételét is számításba vesszük. Meglepődve tapasztaltuk, hogy ha csak a homogén csoportokat vizsgáljuk, akkor egészen másfajta képet kapunk. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a csoport összetétele nagymértékben befolyásolja a gyerekek választását a szabad játék idején.




*5. diagram:* Kedvenc játékok a homogén csoportban

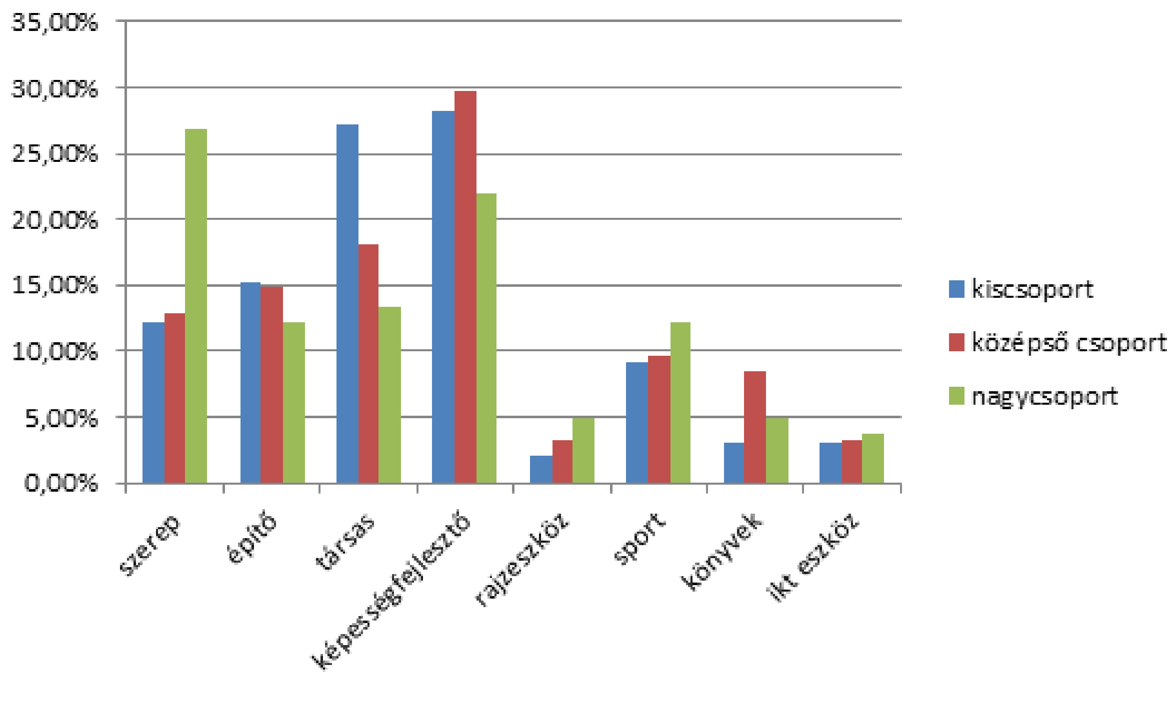
A leginkább szembeötlő az, hogy homogén csoportban az életkor előrehaladtával egyre népszerűbb a – matematikai fogalmak fejlődését egyébként nagymértékben támogató – társasjátékok választása, miközben a szerep- és építőjátékok választása csökken.

A játék választására az óvodapedagógus szempontjából is rákérdeztünk. Megkérdeztük, hogy milyen játékeszközt kapott a csoport a legutóbbi beszerzéskor. A válaszok alapján kevés eltérés tapasztalható a vegyes illetve homogén csoportban dolgozó óvodapedagógusok játékeszköz választása között.




*6. diagram:* A csoportok legutóbbi beszerzése

Részletesen megvizsgáltuk külön a homogén csoportokat, hogy az egyes életkorokban milyen játékot választanak ajándékként az óvodapedagógusok.




*7. diagram:* A homogén csoportok legutóbbi beszerzése

Érdekesnek találtuk, hogy a társasjátékok és a képességfejlesztő játékok választásának aránya jelentősen, az építőjátékok választása pedig kis mértékben csökken a homogén nagycsoportokban. Ezt nem magyarázza a korábbi játékok további használata, hiszen a szerepjátékok, amelyek aránya nő, ugyanúgy megmaradhattak a korábbi évekből. Úgy látjuk, hogy ezek a játéktípusok mindenképpen a matematikai fejlesztés szolgálatában állnak, nagycsoportban pedig különösen fontosnak véljük az ezekkel való foglalatoskodást.

Ugyanakkor minden esetben nagyon gyenge korrelációt véltünk felfedezni az egyes korcsoportokban az óvodapedagógus játékválasztása és a gyerekek által szívesen választott játék típusai között.

**Correlations**

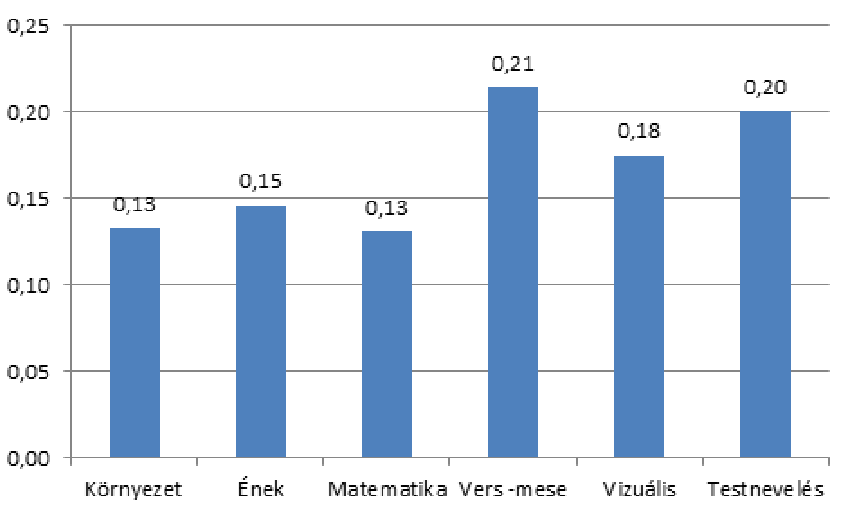
| Control Variables | | | VAR00001 | VAR00002 | VAR00003 |
|---|---|---|---|---|---|
| VAR00004 & VAR00005 & VAR00006 & VAR00007 & VAR00008 & VAR00009 & VAR00010 & VAR00011 & VAR00012 | VAR00001 | Correlation | 1,000 | ,428 | ,334 |
| | | Significance (2-tailed) | . | ,000 | ,000 |
| | | df | 0 | 242 | 242 |
| | VAR00002 | Correlation | ,428 | 1,000 | ,434 |
| | | Significance (2-tailed) | ,000 | . | ,000 |
| | | df | 242 | 0 | 242 |
| | VAR00003 | Correlation | ,334 | ,434 | 1,000 |
| | | Significance (2-tailed) | ,000 | ,000 | . |
| | | df | 242 | 242 | 0 |

*8. diagram:* Összefüggés a gyerekek ajándékai és a kedvenc játékai között életkorok szerint

### *A kezdeményezések*

A kötelező (az Alapprogram alapján nem létezik az óvoda életében, de a pedagógiai gyakorlatban megjelenik) vagy kötetlen foglalkozások az óvodapedagógus által kezdeményezett, tervezett tevékenységek, melyek a gyerekek célzott fejlesztését szolgálják. Ez a tevékenységi forma óvodáink többségében (73,53%) napi gyakorisággal megjelenik. Emellett az óvodák jelentős része (84,08%) szervez külső szakemberek bevonásával foglalkozást, melyekért a szülők külön fizetnek. Ezekben az óvodákban hetente átlagosan 2,45-féle fizetős foglalkozást szerveznek, ami esetenként időben ütközik az óvodapedagógus kezdeményezésével.

A foglalkozások tevékenységterületenkénti gyakoriságát a következő ábra mutatja. Ebben a kérdésben szándékosan szétválasztottuk a külső világ tevékeny megismerésén belül a matematikai és a környezeti tartalomra fókuszált tevékenységeket. Sajnálatos, hogy a matematikai fejlesztés aránya a legalacsonyabb a tevékenységterületek között.

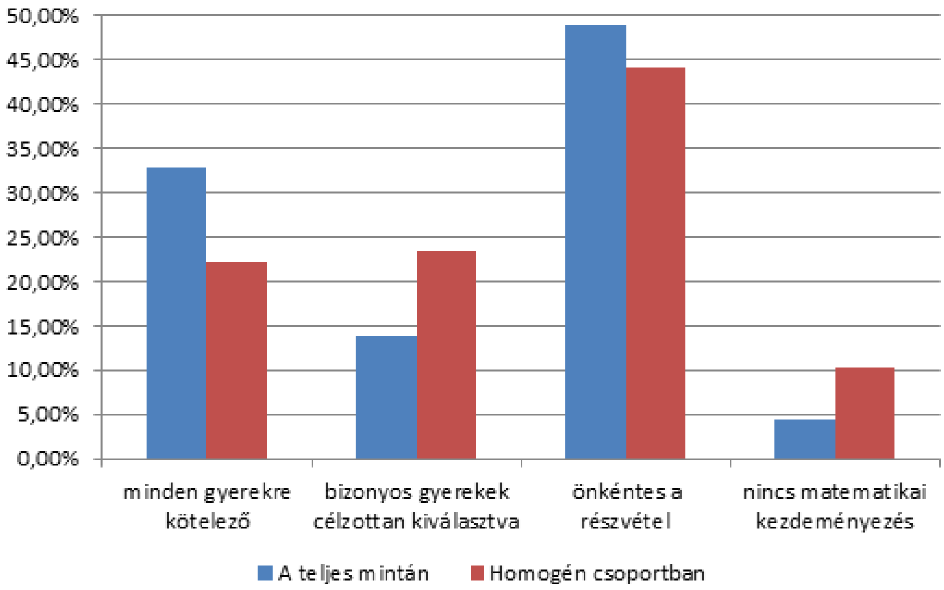



*9. diagram:* A foglalkozások aránya műveltségterületek szerint

## Matematikai tartalmú fejlesztő tevékenységek

Az óvodáskorú gyermekeknek is fontos az életkoruknak, fejlettségüknek megfelelő értelmi fejlesztés. Ez nem szabad, hogy „kis iskolát” jelentsen, azonban a megfelelő fejlesztések elmaradása hátrányt jelent a későbbiek során.

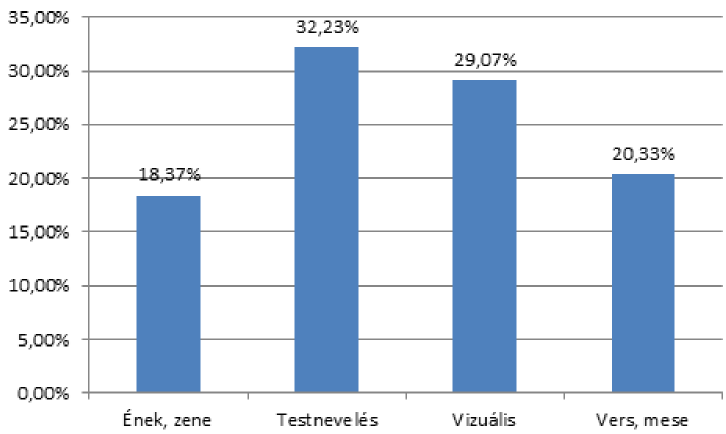
Lényeges különbségek láthatók a matematikai tartalmú foglalkozásokon való részvételben a teljes mintán, illetve homogén csoportokban. Természetesen mindkét esetben az önkéntes részvétel aránya a legmagasabb, azonban a homogén csoportokban gyakoribb bizonyos gyerekek célzott kiválasztása, míg a teljes mintában inkább minden gyerekre nézve kötelező az ilyen foglalkozásokon való részvétel. A homogén csoportok esetében meglepően magas számban fordul elő az, hogy nincs olyan jellegű kezdeményezés, amely matematikai tartalmú foglalkozást eredményezne.




*10. diagram:* Részvétel a matematikai tartalmú foglalkozásokon

Sajnálatos, hogy vannak óvodák, amelyekben egyáltalán nincsen matematikai tartalmú kezdeményezés. Bizonytalannak látszik az is, hogy minden gyermek megkapja a neki megfelelő fejlesztést, ugyanis a kezdeményezéseken való részvétel nagyobb részt önkéntes, és a minden gyermekre nézve kötelező foglalkozások mellett alacsony a célzott fejlesztések aránya.

Ugyanakkor az óvoda életében lehetőség van arra, hogy más foglalkozásokba ágyazottan jelenjen meg matematikai tartalom. Kérdőívünkben feltettünk erre vonatkozó kérdést is.



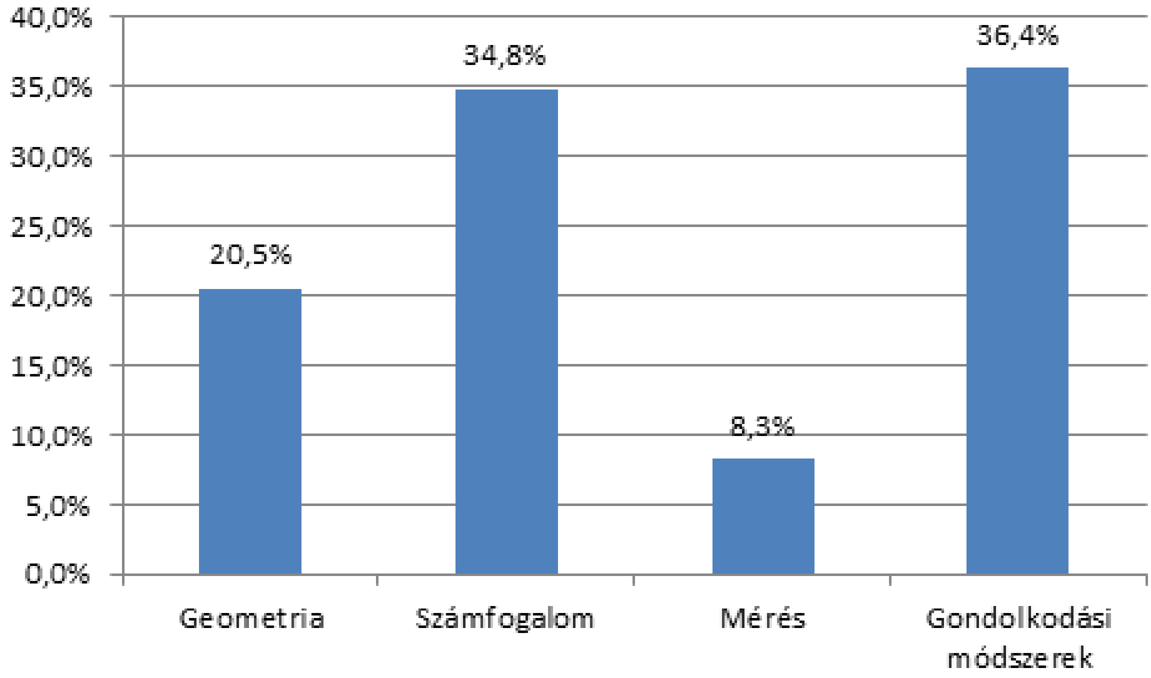

*11. diagram:* Matematikai tartalom megjelenése más foglalkozásokon

Örvendetes, hogy a nem matematikai foglalkozásokon is megjelenik a matematikai tartalom. Az óvodáskorú gyermekek természetes tevékenysége a mozgás, így megfelel az életkori sajátosságoknak, hogy matematikai tartalmat leginkább mozgásos tevékenységekbe illesztenek be. Érdekes, hogy a matematika legkevésbé az énekfoglalkozásokon jelenik meg, pedig a ritmus, a szabályosságok felismerése, az emelkedő, ereszkedő hangsorok mind a matematikai fejlesztést szolgálják. A számfogalom alakításában is fontos szerepet játszanak az auditív érzékelések.

Érdemes lehet esetleg utánajárni annak, hogy a vers- és mesefoglalkozásokon milyen módon, alakban fordul elő a matematikai tartalom.

Az óvoda életében persze nem csak a foglalkozások idején van lehetőség a matematikai tapasztalatszerzésre. Jelen van a mindennapi tevékenységekben, például a munka vagy a játék során. Ennek tudatos alkalmazása egy további kutatás tárgyát képezheti.

A foglalkozások matematikai fókuszait az óvodapedagógus határozza meg annak megfelelően, hogy mit lát leginkább szükségesnek az adott csoport vagy gyermek számára.

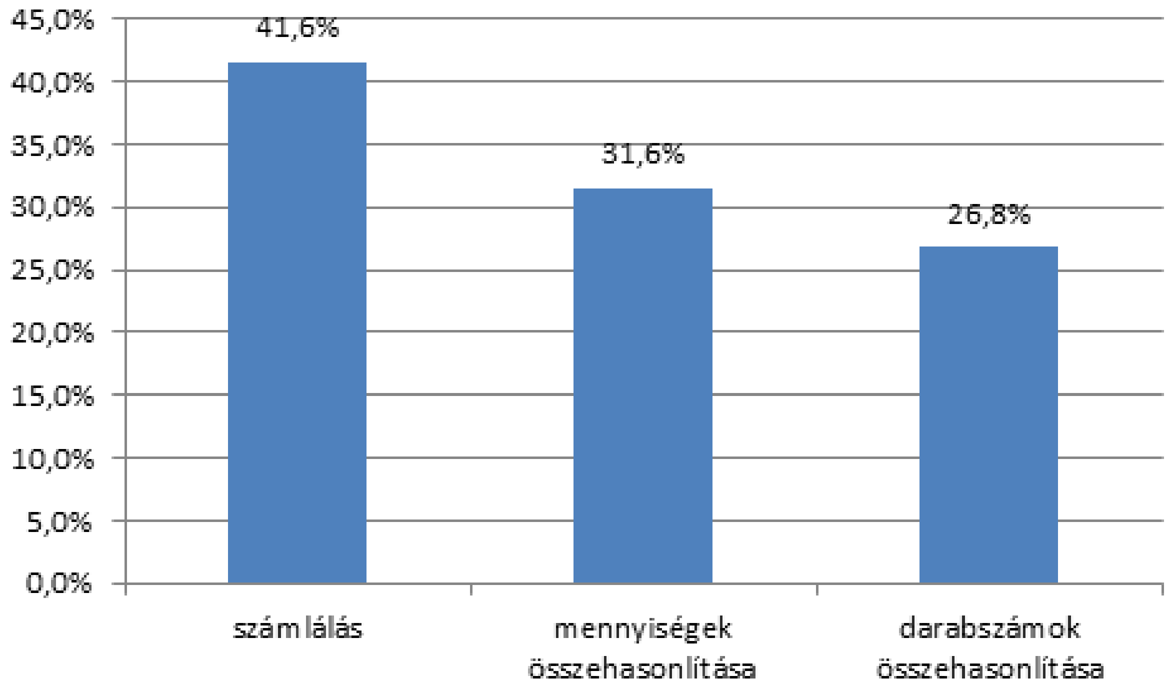



*12. diagram:* A foglalkozások domináns matematikai tartalma

Hagyományosan a számfogalom alakítását, a gondolkodás fejlesztését tekintik a matematikai foglalkozások legfontosabb tartalmainak. A vizuális képességeket fejlesztő matematikai tartalmak kisebb arányban fordulnak elő, miközben ezek sokszor a későbbi absztraháló képesség alapját szolgáltatnák. A mérések a számfogalom széleskörű alapozását segítik, az óvodai életben több lehetőség is adódhatna ezek gyakorlására.

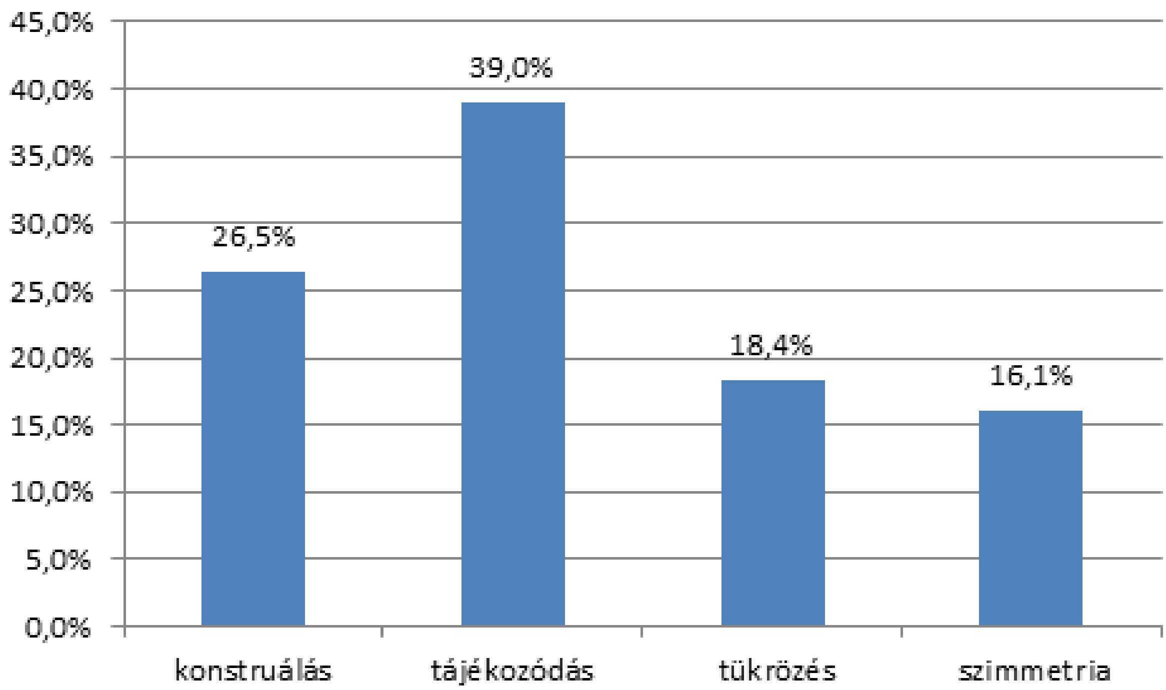
Elgondolkodtató az, hogy a foglalkozásokon milyen kis mértékben domináns matematikai tartalom a mérés. Meglepő ez azért is, hiszen ehhez a tartalomhoz nagyon sok olyan tevékenység kapcsolható, amellyel az óvodások is könnyedén és örömmel foglalkoznának. Célszerű lenne jobban beemelni a mérést a matematikai tartalmak közé, hiszen ez egy nehéznek számító témakör az alsó tagozaton, s az óvodai stabilabb megalapozással jobban segíthetnénk a gyerekeket.

A számfogalom és a geometriai tapasztalatok hangsúlyos összetevőinek vizsgálata fontos kérdés az iskolába lépő gyermekek szempontjából. A következő két diagram ezt mutatja be.




*13. diagram:* Hangsúlyok a számfogalom fejlesztésében

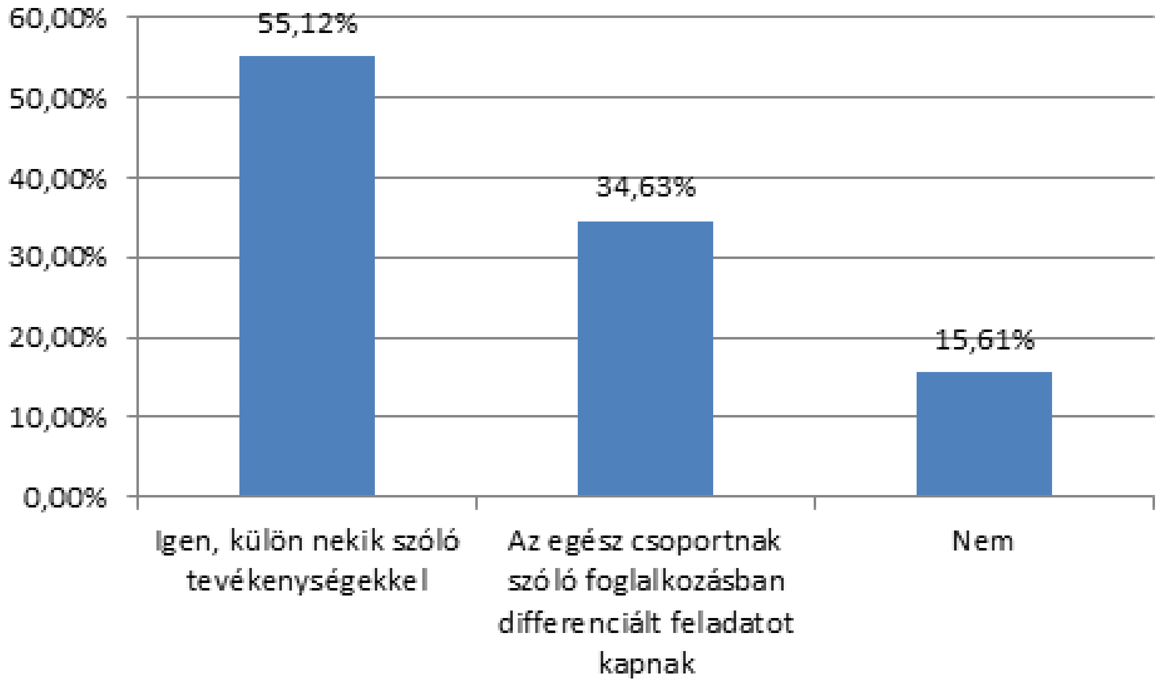
A 13. diagramon látható, hogy – nem meglepő módon – a számfogalom fejlesztésében az óvodában a legnagyobb hangsúlyt a számlálás kapja. Ugyanakkor tudjuk, hogy a számlálás a szám képzetének kialakulásához csak kis mértékben járul hozzá. A megfelelő számfogalom fejlődéséhez azonban nagy szükség van változatos érzékszervi tapasztalatokra, mennyiségi és egyéb összehasonlításokra, mérésekre, megfeleltetésekre, csoportosításokra. Kapcsolódva a 12. diagramhoz, ha emelkedne a mérés dominanciája a foglalkozások alkalmával, akkor a mennyiségek összehasonlítása is nagyobb fontosságot kaphatna a számfogalom fejlesztése során.




*14. diagram:* Hangsúlyok a számfogalom fejlesztésében

A geometriai fejlesztésre vonatkozó kérdésre adott válaszok igazolják azokat a tapasztalatokat, melyek szerint az óvodások többsége sikerrel megtanulja a téri tájékozódáshoz szükséges reláció szókincset, igyekszik elsajátítani az irányokat. A tájékozódás kiemelt szerepe nem meglepő, hiszen ez egy olyan geometriai tartalom, amelynek az írás és az olvasás elsajátítása során is fontos szerepe van. Kisebb hangsúlyt helyeznek a konstruáló tevékenységekre, amelyek pedig sokrétű vizuális fejlesztést eredményeznének. Talán célszerű lenne kicsit nagyobb hangsúlyt adni a konstruálásoknak már az óvodában is, mert ezzel jobban elősegíthetnénk a helyes tér- és síkgeometriai látásmód kialakulását. Érthető a tükrözés és a szimmetria kisebb szerepe, hiszen ezek a geometriai tartalmak még meglehetősen nehéznek bizonyulnak óvodáskorban.

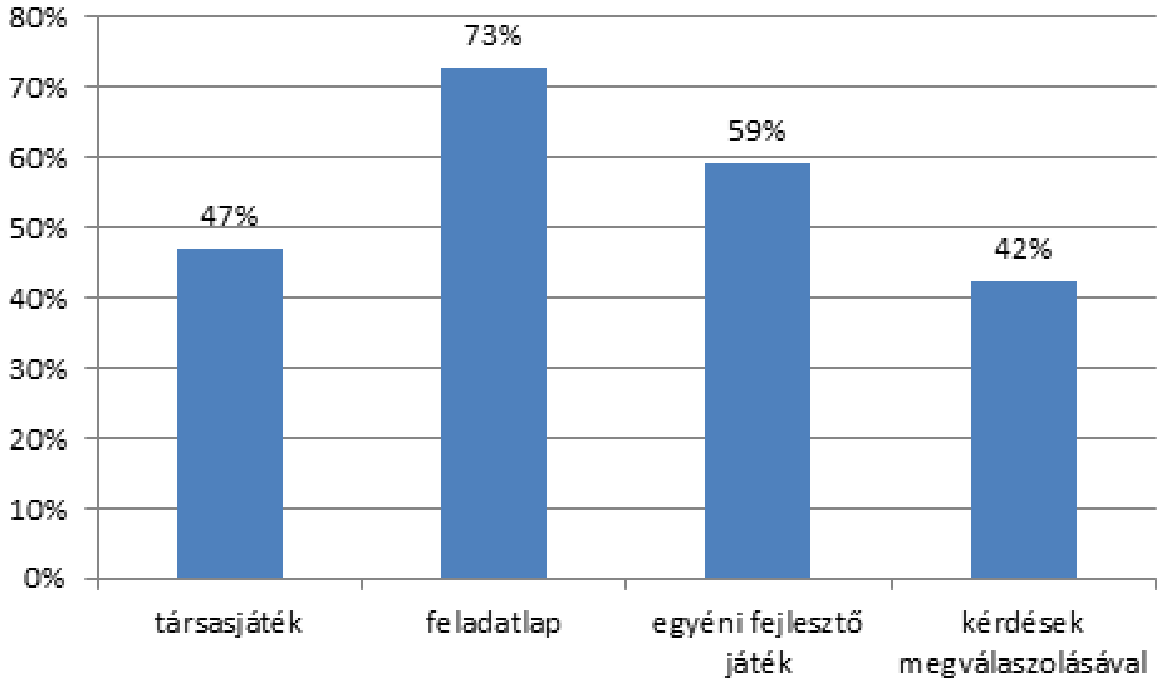
Kérdőívünk fontos kérdéscsoportja volt az iskolába lépő gyermekek célzott fejlesztése. Ezek közül most két aspektust mutatunk be. Megkérdeztük, hogy kapnak-e külön fejlesztést azok a gyerekek, akik éppen az iskolába készülnek.




*15. diagram:* Az iskolába lépő gyerek fejlesztésének keretei

Célszerű lenne inkább megfordítani az arányokat, azaz nem elkülöníteni az iskolába készülő gyerekeket, hanem differenciáltan foglalkoztatni őket. Így kevésbé lenne hangsúlyos az „iskolába készülünk” érzés és az óvodás tovább maradhatna óvodás. Nem meglepő a „nem”-ek nagy száma sem, hiszen ez azt a nézetet fejezi ki, mely szerint az óvodásnak nem kell az iskolával foglalkoznia, amíg a gyermek óvodába jár. Ugyanakkor nagyfokú óvodapedagógusi tudatosságot igényel, hogy az iskolába lépő gyerekek mégis megkapják a nekik szóló fejlesztést.

Ahol célzott fejlesztést kapnak az iskolába készülők, ott rákérdeztünk ennek módjára is. (A válaszoló több lehetőséget is megjelölhetett)




*16. diagram:* Az iskolába lépő gyerekek fejlesztésének módja

Úgy tűnik, hogy az iskola előkészítés legfontosabb eszköze a feladatlap, ami a gyermekek számára hasznos átmenetet jelent az óvodai tevékenységek és a későbbi iskolai feladatok között. Ugyanakkor egy kissé riasztó, hogy egy óvodáskorú gyermeket leginkább feladatlapok használatával lehessen fejleszteni. Ezen a szemléleten feltétlenül változtatni kell, és még jobban hangsúlyoznunk kell a jól megválasztott játékok fejlesztő hatását óvodáskorban (és iskoláskorban is). Talán kicsit furcsának tűnik a „kérdések megválaszolásával" kategória. Ez általában azokra a frontálisan irányított foglalkozásokra vonatkozik, ahol a pedagógus kérdez, a gyerek pedig válaszol. Hasznos fejlesztési forma lehet ez is, azonban lényegesen passzívabb, kevésbé motiváló, mint a megfelelő játék. Szerencsésnek látjuk, hogy a diagram alapján sok esetben fejlesztő játék, társasjáték biztosítja az értelmi fejlesztést.

## Összegzés

Az óvoda feladata a gyermekek életkorának megfelelő értelmi és érzelmi fejlesztése. A kötelező óvodáztatás célja részben az volt, hogy biztosított legyen a fejlesztés minden gyermek számára, növekedjen az esélyegyenlőség, csökkenjen az elmaradó gyermekek aránya, az azonos korú gyermekek közötti sokszor 1,5–2 évnyi különbség a fejlettségben. Mind az óvodában előforduló játékokat, mind a foglalkozások tartalmát, mind azok megvalósítási módját tekintve azt tapasztaltuk, hogy a változatos matematikai fejlesztés nem ugyanolyan hangsúllyal van jelen a különböző óvodák életében. Kívánatos lenne, hogy minden gyermek részesüljön a neki legmegfelelőbb szinten játékos matematikai fejlesztő tevékenységben, így ez megalapozhatná számára a sikeres iskolakezdést.

Ebben a kérdésben célszerű lenne több segítséget nyújtani az óvodapedagógusoknak, például a matematikai foglalkozások szervezéséhez és a matematikai gondolkodás tudatos fejlesztéséhez más tevékenységek, például a játék során adott tanácsokkal, segédanyagokkal.

## Felhasznált irodalom

*BELONGING, BEING & BECOMING – The Early Years Learning Framework for Australia* (2009): URL: http://files.acecqa.gov.au/files/National-Quality-Framework-Resources-Kit/belonging_being_and_becoming_the_early_years_learning_framework_for_australia.pdf

Barmby, P., Bilsborough, L., Harries, T. & Higgins, S. (2009): *Primary Mathematics, Teaching for Understanding*. Open University Press, Berkshire.

C. Neményi Eszter (2013): „Legyen a matematika mindenkié!" 25 éve halt meg Varga Tamás, *Gyermeknevelés*, **1.** 1. sz., 129–138.

Carrol, M. & McCullogh, M. (2014): *Understandin Teaching and Learning in Primary Education*. SAGE Publications Ltd, London.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2009): *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. Routledge, New York.

Clements, D. J., Sarama, J. & DiBiase A-M. (2003): *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education*. Routledge, New York.

Cotton, T. (2013): *Understanding and Teaching Primary Mathematics*. Routledge, New York.

*Enganging Young Children in Mathematics* (USA, Standard, New York)
URL: https://docs.education.gov.au/system/files/doc/other/belonging_being_and_becoming_the_early_years_learning_framework_for_australia.pdf

Kissné Zsámboki Réka, Az óvodai matematikai nevelés aktuális kérdései egy mikrokutatás tükrében, In: Karlovitz János Tibor (szerk.), *Válogatott tanulmányok a pedagógiai elmélet és szakmódszertanok köréből*, 342–351.
URL: http://www.irisro.org/pedagogia2017januar/73KissneZsambokiReka.pdf

*Kormányrendelet az óvodai nevelés országos alapprogramjáról*, 363/2012,
URL: https://net.jogtar.hu/jogszabaly?docid=a1200363.kor

Rausch Attila (2015): A matematikatanulás előfeltételeinek online mérése 5–6 éves korban. In: *IPSZILON-2015 – Ifjú Pszichológiai és Neveléstudományi Kutatók Országos Konferenciája*. Budapest, 2015. május 15-16.

Thompson, J. (2003): *Enhancing Primary Mathematics Teaching. Open University Press*, Maidenhead, Philadelphia.



**The place of mathematics in the life of kindergarten**

*The question of the kindergarten – school transition (5–6 year-olds) has a significant role in the present day public education in Hungary. The aim of Group 6 of the Complex Modern Mathematics Teaching Research Group, financed by the Hungarian Academy of Sciences is to study the mathematical concept development of 3–6 year-old children. We define the levels of logical capacities and number concept with the help of a wide scope, activity-based analysis. We wish to explore the differences among children, and the correlation of number concept and logical capacities. As a starting point we aim to define the current position and role of mathematics teaching. We perform an international comparative document analysis, and we process the data of a large sample (N=253) questionnaire survey. This study shows the most important and most interesting data and conclusions found during processing the questionnaires. The results of our research can be used by the professional communities as well as the participants of the educational administration.*

***Keywords**: mathematics, kindergarten, number concept, logic, mathematical support*

Szitányi Judit, Bagota Mónika és Pintér Klára (2018): A matematika helye az óvoda életében. *Gyermeknevelés*, **6.** 1. sz., 12–23.

# Alapismeretek a Diszkalkulia Pedagógiai Vizsgálatáról

**Polgárdi Veronika – Láz Csabáné – Dékány Judit**
ELTE GYOSZI (GYOPSZ) Diszkalkulia munkaközössége

*A DPV koncepciója azon alapul, hogy a számolásban résztvevő numerikus rendszerek és egyéb, nem matematika-specifikus rendszerek (részképességek) különböző módokon és szinteken diszfunkcionálhatnak. A teszt feladatai adott életkorokhoz rendelt fejlődési fázisokhoz igazodnak. A vizsgálat a hibaelemzés módszerével és objektív kritériumokkal térképezi fel a diszkalkuliára utaló tipikus hibákat, majd további szempontokat ad az egyéb részképességek működésének megfigyeléséhez és a gondolkodási, kompenzáló stratégiák számbavételéhez. A hangsúlyozottan egyéni vizsgálóeljárás átfogó képet ad a gyermek matematikai és kognitív képességeinek szintjéről. Az egyéni teljesítményprofil alapján lehetővé válik a fejlődési diszkalkulia (súlyos tanulási zavar) és a tanulási nehézség elkülönítése, ezeknek megfelelően az egyénre szabott terápiás célok, feladatok és módszerek meghatározása (terápia-relevancia).*

***Kulcsszavak:*** *számolási rendszerek, részképességek, differenciáldiagnosztika, gyógypedagógiai szemlélet, terápia-relevancia*

## Bevezetés

A Diszkalkulia Pedagógiai Vizsgálata (DPV 1–2.) 5–11 éves korú gyermekek alapvető matematikai képességeinek vizsgálatára szolgáló egyéni (gyógy)pedagógiai mérőeljárás, a Dékány–Juhász-féle diszkalkulia pedagógiai vizsgálat (*Dékány* és *Juhász*, 1999, 2007) neuropszichológiai/pszichológiai kutatásokkal alátámasztott, megújított változata. Nem csak egyes numerikus részterületeket mér, hanem átfogó képet nyújt a gyermek matematikai képességeiről, készségeiről és a nem matematika-specifikus kognitív funkcióiról, gondolkodási stratégiáiról, kompenzációs mechanizmusairól. Az átdolgozott vizsgálat a gyógypedagógia és határtudományainak legújabb ismereteit felhasználva törekszik mérhetően elkülöníteni a nem megfelelő oktatás vagy a környezeti hátrány okozta matematikai alulteljesítést, elmaradást, valamint súlyossági fok szerint a matematikatanulási nehézséget és a fejlődési diszkalkuliát mint specifikus tanulási zavart. A kvalitatív és a kvantitatív elemzés lehetővé teszi az egyénre szabott intervenció megtervezését. A mérőeljárás segít a diszkalkulia azonosításában, némely feladata azonban felhasználható az aritmetikai képességek szerzett sérülésének a felismeréséhez is (*Csonkáné*, 2013).

## 1. A fejlődési diszkalkulia

### *1.1. A fejlődési diszkalkulia meghatározása, jellemzői, típusai*

A fejlődési diszkalkuliának nincs egységesen elfogadott definíciója. Ez részben a fejlődési diszkalkulia multidiszciplináris jellegével, részben a vele kapcsolatos ismereteink hiányosságaival magyarázható (*Márkus*, 2007). A diszkalkulia terminológiája a gyógypedagógia és határtudományainak fejlődésével párhuzamosan változik (*Farkasné*, 2008).

A számolászavarral foglalkozó első kutatások agysérültek körében történtek, a szerzett diszkalkuliát vizsgálták. A fejlődési diszkalkuliával részletesebben foglalkozó tanulmányok sokkal később jelentek meg.

A számolászavarok kutatásának második szakasza az 1990-es évek után indult. Az új vizsgálati metódusok (elektrofiziológiai vizsgálatok: EEG, EKP; új képalkotó eljárások: fMRI, PET stb.) megjelenése lendületet adott a kognitív idegtudományok fejlődésének, lehetővé vált az aritmetikai feladatok megoldásában résztvevő neurológiai struktúrák követése. Szélesebb körű klinikai megfigyelések és vizsgálatok zajlottak, amelyek megteremtették a feltételeket a számolás (numerikus

GYERMEKNEVELÉS – online tudományos folyóirat
*Korszerű komplex matematikatanítás*, 2018/1


DOI 10.31074/gyn201812454

Polgárdi Veronika: orcid.org/0000-0003-2081-758X
Láz Csabáné: orcid.org/0000-0001-8029-0527
Dékány Judit: orcid.org/0000-0003-1077-1346

megismerés) kognitív modelljeinek megalkotásához. A kognitív funkciók természettudományos értelmezésében jelentős változást eredményeztek az idegtudományi alapkutatások is (*Márkus*, 2007, 2010). A matematikai képességek komolyabb kognitív pszichológiai és idegtudományi kutatása csak mintegy 10–15 éve indult el, melyek nyomán *két* fő kognitív modell alakult ki:

- folyamatorientált modell (*McCloskey*, 1992)
- kognitív idegtudományi komplex modell („a hármas kódolás modellje") (*Dehaene*, 1992, 2003).

A folyamatorientált modell szerint a numerikus megismerés folyamata numerikus feldolgozási folyamatokra és számolási mechanizmusokra bontható. A numerikus feldolgozás a számok és a mennyiségek megértésére (bemenetek/input) és produkciójára (kimenetek/output) vonatkozik (számok, mennyiségek beolvasása és létrehozása). A számolási mechanizmusok: az aritmetikai tények előhívása (például az egyszerű összeadások összegei vagy a szorzótábla eredményei) és a számolási procedúrák (eljárások, megoldási algoritmusok kivitelezése).

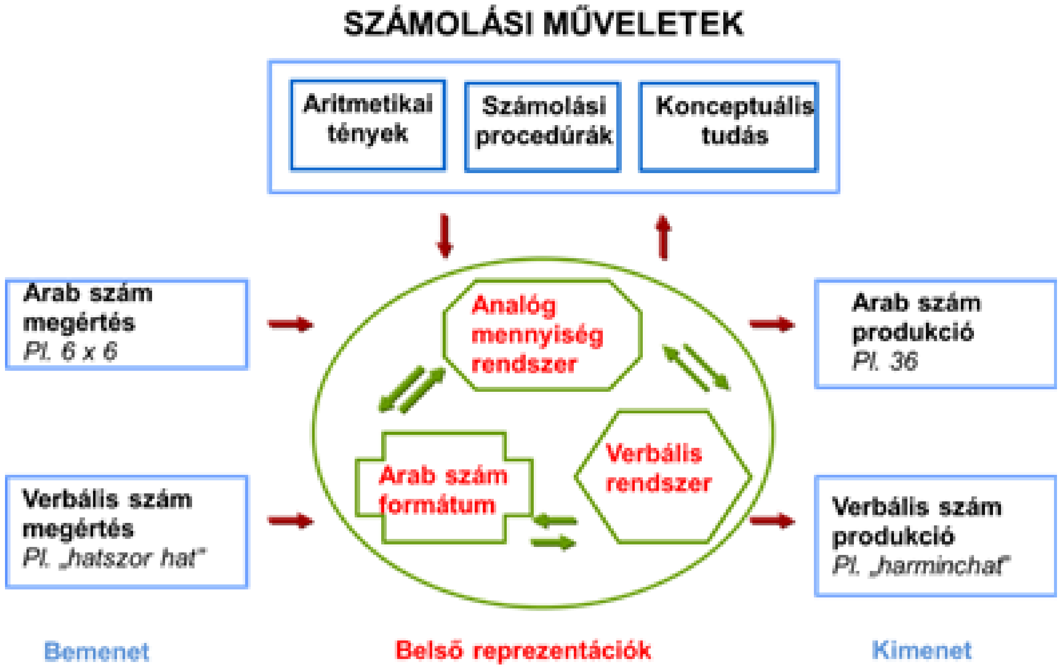
A különböző kutatások Dehaene hármas kódolás modelljére támaszkodnak, ám a nem szimbolikus ábrázolás, számérzék magyarázatának fontosságát, ill. az ezt igazoló méréseket a legújabb kutatások kritikával illetik (*Soltész* és *mtsai*, 2010; *Szűcs* és *mtsai*, 2013a, 2013b, 2014; *Szűcs* és *Goswami*, 2013). Dehaene szerint a numerikus reprezentációk elkülönülnek egymástól, nem alkotnak egy egységes rendszert és lokalizálhatók az agyban (különböző kérgi területekhez köthetők). A numerikus feladatok megoldásában három különböző rendszer működik közre, amelyek összekapcsolódnak (átkódolás folyamata), külön bemenettel és kimenettel rendelkeznek. A számolási képességnek tehát számos kapcsolata van a beszéd, az olvasás és az írás rendszereivel (*Krajcsi* 2003, 2008, 2010):

- analóg mennyiségreprezentáció („mentális számegyenes", közelítő mennyiségrendszer, „számérzék"): Ősi, filogenetikus rendszer, amely folytonosan tárolja a mennyiségeket. Minél nagyobbak a mennyiségek, annál pontatlanabbul tárol, ezzel összefüggésben a mennyiségi összehasonlításért, közelítő számolásért (becslés) felelős és a kivonásban érintett. A mentális számegyenes téri jellegzetességgel bír (logaritmikus skálájú számegyenes) és modalitásfüggetlen. A két másik rendszer közötti szemantikus kapcsolat/átkódolás e rendszer közvetítésével valósulhat meg, de a kapcsolat e nélkül (aszemantikus/jelentés nélküli módon), közvetlenül is történhet. A bilaterális horizontális intraparietális sulcus területéhez köthető.
- auditoros-verbális szókeret (verbális rendszer): Az információt hangok sorozataként tárolja, ezért pontosan tárolja az értékeket (diszkrét), de nincs tisztában azok jelentésével, a számok nagyságrendjével (aszemantikus feldolgozás). A betűket olvassa vagy írja, ill. a hallott, kimondott számneveket észleli, dolgozza fel. A hallott és leírt számszavakat tárolja (tíz alatti összeadások és a szorzótábla tényei; részeredmények átmeneti tárolása). A verbális reprezentáció a bal féltekei Sylvius-árok közötti területekhez köthető.
- vizuális arab számformátum (arab számjegyek szimbolikus rendszere): Arab számok formájában, szimbólumával pontosan tárolja a mennyiségeket, feltételezett funkciója a számok párossági információjának előhívásában és a többjegyű számokkal, írásban végrehajtott műveleteknél mutatkozik meg. A számjegyek olvasását és írását végzi. A vizuális alrendszer működése a kétoldali fusiform gyrushoz köthető.

A fentieken túl további fontos tényező a konceptuális tudás (matematikai szabályok és alapelvek birtoklása), amely számos műveletet irányít, és nagy szerepe van a műveletek megértésében, elvégzésében (*Delazer* és *mtsai*, 2004, idézi *Krajcsi*, 2010). Ilyen *explicit tudás* például az összeadás tagjainak és a szorzás tényezőinek felcserélhetősége (kommutativitás), illetve csoportosíthatósága (asszociativitás), a nullával való műveletvégzés vagy a műveletek közötti inverzitás.

Az eddig bemutatott rendszerek lehetséges sémáját az *1. ábra* mutatja be, melyen jól látható, hogy a két modell kiegészíti egymást:

Szükséges megjegyezni, hogy a szakirodalomban leírt hipotetikus neuropszichológiai modellek majdnem mindegyike felnőttekre vonatkozik, még nem ismeretes a számfeldolgozás és számolás átfogó, empirikusan ellenőrzött fejlődési modellje. Magyarul a témát összefoglalja *Jármi Éva* (2012, 2013). A számolási képességek tipikus fejlődési menetének vizsgálatai leginkább a preverbális időszakra irányulnak, csekélyebb számban olvashatók publikációk az óvodás- és iskoláskorú korosztályra vonatkozó kutatásokról




*1. ábra:* A numerikus megismerésben szerepet játszó rendszerek és reprezentációk összefoglaló ábrája (*McCloskey*, 1992, *Dehaene*, 2003, *Delazer és mtsai*, 2004, *Krajcsi*, 2010, 97. o.)

A nemzetközi szakirodalomban több évtizedre visszatekintve számos diszkalkulia-meghatározás és csoportosítás található (lásd *Szűcs* és *Goswami*, 2013 összefoglaló tanulmányát, magyarul lásd *Dékány* 1986, 1995; *Márkus* 1999, 2007, 2010; *Krajcsi* 2008, 2010; *Dékány és Mohai*, 2012 összefoglalóit).

A diszkalkulia háttérben meghúzódó problémák tekintetében eleinte két fő megközelítés körvonalazódik (*Krajcsi*, 2010, valamint *Szűcs* és *Goswami*, 2013 hivatkozásai alapján):

*Nem matematika-specifikus sérülés*
A teória szerint a diszkalkulia többféle sérülésnek lehet a következménye, amely nem elsődlegesen a matematikai feladatokra specializálódott rendszereket érinti, azonban megalapozzák a kultúrtechnikák elsajátítását (területáltalános képességek/bázisfunkciók): (*Koontz és Berch*, 1996; *Buill* és *Scerif*, 2001, *Geary*, 2004; *Passolunghi és Siegel, 2001; Swanson, 2011*), téri-vizuális zavar (*Rourke*, 1993), a figyelmi funkció károsodása (*Ashkenazi*, 2009; *Swanson*, 2011), a gátló funkció csökkenése (*Espy és mtsai*, 2004*; Blair és Razza*, 2007*; Bull és Scerif*, 2011, *Swanson*, 2011) és a fonológiai képesség csökkenése (*Swanson* és *Sachse-Lee*, 2011), ill. a szemantikus emlékezet zavara, általános lassú feldolgozás, gyenge fonetikus reprezentáció (mások kutatásait összegezve *Butterworth*, 2003).

*Matematika-specifikus sérülés*
A teória csak matematikai zavart feltételez, azaz a sérülés területspecifikus képességeket érint. Ilyen például az analóg mennyiségreprezentáció (mentális számegyenes) specifikus zavara (*Butterworth*, 2003; *Dehaene*, 2003); tények és eljárások disszociációja (*Temple*, 1991); az analóg mennyiségrendszer és az

arab számok kezeléséért felelős rendszer együttműködésének problémája (*Dehaene és mtsai*, 2004); az aritmetikai táblák, tények tanulási zavara, a számolási eljárások megértésének zavara, a számfogalom megértésének vagy a számok leírásának és kiolvasásának problémája (*Shalev és Gross-Tsur*, 2001). Fontos megjegyezni, hogy az analóg mentális számegyenes meghatározó szerepét a háttérokok között a legújabb kutatások kevésbé erősítik meg, a mentális számegyenes célzott fejlesztése nem javítja a szimbolikus számokkal végzett műveletek eredményeit (*Szűcs* és *Myers,* 2016). Ezen kutatási konklúziókat a Diszkalkulia munkacsoport gyakorlati tapasztalatai is alátámasztják.

Ezeken túlmenően egyes szerzők feltételezik, hogy a számolási készség hiánya sokszor összefügg genetikai problémákkal és az alacsony intelligenciával (*Ansari és Karmiloff-Smith*, 2002, idézi *Kajcsi* 2010). *Miller* és *Mercer* (1997) azt állítja, hogy a rossz oktatás okozhat matematikai problémákat, *Krüll* (2000) pedig a szorongás és a rossz oktatási módszer szerepét fejti ki. A korábbi kutatások nem tisztázták egyértelműen a matematikai szorongás és a matematikatanulási zavar közötti összefüggést. *Carey* és *mtsai* (2016) összefoglaló tanulmányukban hangsúlyozzák azt a kétirányú kapcsolatot, ami a matematikai szorongás és a matematikai teljesítmény között tapasztalható, az ún. kölcsönös elméletben a matematikai szorongás és a matematikateljesítmény egy „ördögi ciklusban befolyásolhatják egymást". *Devine* és *mtsai* (2017) legfrissebb eredményei is arra utalnak, hogy a kognitív és érzelmi matematikai problémák nagymértékben disszociálnak, a matematikai szorongás nem kizárólag a matematikai alulteljesítés velejárója. Vitathatatlan, hogy gyakoriak a kísérő emocionális, viselkedési, ill. beilleszkedési problémák is, ugyanakkor az alacsony intellektus, a szorongás, valamint a rossz oktatási módszer kizárólagosságának hangsúlyozása a diszkalkulia nagyon leegyszerűsített, helytelen megközelítése.

A diszkalkulia egyik leginkább ismert tüneti leírását *Desoete* (2006) felosztása adja (részletesen idézi *Krajcsi,* 2010. 100. o.):

- szemantikus emlékezeti deficit (numerikus tények elsajátításának, előhívásának zavara, munkamemória problémák)
- procedurális deficit (a műveletvégzési eljárások alkalmazásának nehézsége, fejletlen stratégiák alkalmazása)
- téri-vizuális deficit (számjegyek tükrözése vagy a számjegyek nem megfelelő sorrendű használata a műveletvégzéskor; nehezített a számegyenesen való tájékozódás, illetve tárgyak nagyságszerinti rendezése; téri, geometriai feladatokban való nehézség).
- számismereti deficit (a különböző modalitások közti hibás kódolás, a probléma lehet az absztrakt számmegértéssel, a számrendezéssel vagy számlálással)

*Temple* (1991) három problématerületet különít el McCloskey folyamatorientált modelljével összhangban, melynek hiányossága, hogy nem tér ki a fogalmi megértés kérdéseire:

- számjegy diszlexia (sérült a számok lexikai feldolgozása)
- számtani tények bevésésének, automatizálásának, felidézésének problémája
- procedurális zavar (nehezített a műveletvégzések lépéseinek, sorrendjének végrehajtása)

*Geary* (1993) tipikus hibák és deficitek összefüggései alapján csoportosít:

- procedurális típus (éretlen stratégiák a műveletvégzés terén, melynek hátterében munkamemória-deficit áll, de nem zárja ki a hiányos fogalmi megértést sem)
- szemantikus emlékezeti deficit (tények előhívásának zavara a nyelvi rendszer hiányos asszociációs kapcsolataival vagy az irreleváns asszociációk legátlásának deficitjével kapcsolatos)
- téri-vizuális képességek deficitje (komplex matematikai szöveges feladatok, továbbá mentális számegyenest igénylő feladatok, pl. becslés, megoldási nehézségei)

*Von Aster* (2000) tipológiája *Dehaene* (2003) hármas kódolás modelljét vette alapul:

- verbális típus (számolás, számlálás érintettsége)
- arab típus (az arab számok írása és kiolvasása/átkódolás nehezített)

- pervazív típus (analóg mennyiségrendszer sérülése, szinte minden feladatot érintő komoly elmaradás)

A fenti tipológiák rámutatnak arra, hogy a diszkalkulia olyan tünetegyüttes, melyben a tünetek különböző kombinációkban és mértékben fordulnak elő, és sokszor nem különülnek el egyértelműen (*Krajcsi*, 2010). Ezzel a problémával szembesül a kutató a diagnosztikus mérőeszközök kifejlesztésekor, valamint a gyakorló diagnoszta.

A hipotetikus modellek harmadikutas megközelítése áthidalja a matematikaspecifikus és a nem-matematikaspecifikus sérülés problematikáját, mivel a számolásban több kognitív rendszer is részt vesz. A biológiailag elsődleges matematikai képességekből kiindulva az alapvető bázisfunkciók (nyelv, munkamemória, végrehajtó funkciók, vizuális-téri feldolgozás) harmonikus fejlődése nélkül nem tudnak létrejönni a kultúra által közvetített, biológiailag másodlagos matematikai képességek. (*Geary,* 1996) A neurális konstruktivista szemlélet azt tükrözi, hogy az idegi struktúrák közti kétirányú kapcsolat folytán a számolásban résztvevő kiterjedt rendszerek bármely elemének szelektív sérülése kihat az egész fejlődő rendszer további elemeinek mechanizmusára (*Karmiloff-Smith*, 2006). Egyes agyterületek károsodása numerikus és nem numerikus diszfunkciókat is okozhat (pl. az intraparietális sulcus részt vesz nem numerikus funkciókban is, mint pl. a téri-vizuális feldolgozás/tárgy-fájl rendszer, ill. a téri deficit fontos tényező a téri-idői intervallumban való eligazodás és a számolás során.) Mindezek magyarázzák, hogy egy-egy terület sérülése különböző súlyosságú és típusú eltérést okozhat.

A numerikus megismerés fejlődésének négylépéses modellje (*Von Aster és Shalev*, 2007; idézi *Jármi*, 2013) a fentiekkel összhangban lehetséges magyarázata a *Von Aster* és *mtsai* (2007) által végzett kutatás alapján létrehozott altípusoknak:

- *tiszta fejlődési diszkalkulia:* az ún. területspecifikus magrendszer sérülése, genetikai okokkal a háttérben
- *komorbid fejlődési diszkalkulia*: a mentális számegyenes kiépüléséhez szükséges területáltalános képességek (nyelv, figyelem, munkamemória) gyengesége, melynek következtében a számolási zavar mellé olvasási zavar vagy ADHD társul.

A modell szerint a veleszületett, genetikailag determinált magrendszer (elsődleges biológiai matematikai képességek) jelenti azt a preverbális reprezentációt, mely alapjául szolgál a mentális számegyenes kifejlődésének, játék és tanulási tevékenységek által megszerzett tapasztalatoktól függően, melyet befolyásol a vizuális-téri képességek, képzelet, a nyelv és a munkamemória fejlődése.

Ezt a minőségi átalakulást az ún. reprezentációs újraírás (*Karmiloff-Smith,* 2006) vagy az ún. számdetektorok újrahangolásának elmélete (*Piazza*, 2010) is magyarázhatja.

Hasonló megközelítést ad az ún. hozzáférés sérülése hipotézis (*Roussel* és *Nöel,* 2007, *De Smedt* és *Gilmore,*2011, *Noël és Rouselle*, 2011), mely a mennyiségi reprezentáció és a szimbolikus számreprezentáció összekapcsolásában, megfeleltetésében (jelentés) feltételez sérülést.

*Passolunghi* és *Lanfranchi*, 2012; *Szűcs* és *mtsai*, 2014; *Szűcs*, 2016 hangsúlyozzák, hogy a matematikai teljesítmény a kognitív képességek komplex hálózatának koordinált funkciójára épül. *Fias és mtsai*, 2013, *Szűcs* és *mtsai* (2014) és *Szűcs* (2016) arra hívják fel a figyelmet, hogy a kutatások nem csak egyetlen vagy néhány magyarázó tényezőre kell, hogy összpontosítsanak. .A „végrehajtó memóriafunkció centrikus" modellben (*Szűcs és mtsai,* 2014) egy komplex számfeldolgozó hálózat fontos csomópontjaiként a fonológiai feldolgozást, a szóbeli ismereteket, a visuotérbeli rövidtávú munkamemóriát, a térbeli képességet és az általános végrehajtó működést határozták meg, mint komplex előrejelző területeket. A matematikai gyengeségek heterogenitása a fentiek figyelembe vételével egyértelmű: a kiterjedt feldolgozó hálózatok kisebb gyengeségei is megzavarhatják a matematikai teljesítményt.

A magyar szerzők közül *Mesterházi Zsuzsa* (1999) matematikai hibaelemzésekkel, valamint a gondolkodási képesség fejlesztésének és a matematikatanítás módszertanának kérdéseivel is foglalkozott. A diszkalkuliát olyan matematikatanulási nehézségként azonosította, mely különböző intelligenciaszint mellett folytonos eredménytelenségben, vagy tartósan nagyon alacsony szintű teljesítményben mutatkozik meg – a matematika bármely témakörében. *Farkasné* (2007, 2008) viszont elkülöníti a szűk („matematikai tanulási zavar") és a tág értelemben vett diszkalkuliát („matematikai tanulási nehézség"). Véleménye szerint a matematikai teljesítményben megjelenő, általános intelligenciaszintet nem érintő zavarról csak neurológiai, pszichológiai érintettség (strukturális, ill. funkcionális eltérés) esetén lehet szó, amely örökletes és/vagy szerzett sérülés eredménye. „A diszkalkulia megjelenésének formáját, méretét, kiterjedtségét a környezet nagymértékben befolyásolja, de nem képez oksági tényezőt (pl. családi szokások, fejlesztési módszerek)" (*Farkasné*, 2008. 211. o.).

*Dékány Judit* (1989, 1995) megfogalmazásában a diszkalkulia ép intelligenciaérték mellett olyan organikus hátterű, szint alatti teljesítmény, ahol az egyén a matematikában a tőle elvárt képességek szintje alatt kórosan elmarad. Ez lehet a motorikus, a perceptív funkciók területén létrejött károsodás következménye, nem egyszer a rövidtávú, szeriális emlékezet vagy a figyelem, a különböző gondolkodási műveletek (például analízis-szintézis, összehasonlítás, analógiás gondolkodás) végzésének nehezítettségével, leginkább azonban az absztrahálás súlyos zavarával, az elvont fogalmi emlékezés sérülésével, illetve a beszéd- és a nyelv eltérő fejlődésével magyarázható.

A modern magyar terminológia a gyógypedagógiában korábban használatos részképességzavar (POS, MCD) helyett specifikus tanulási zavar (jelen esetben a fejlődési diszkalkulia) kifejezést használja az angolszász területeken népszerű, az Egyesült Államokban a fogyatékos/képességzavarral küzdő személyek oktatását szabályzó törvényhez (Individuals with Disabilities Education Act: IDEA 2004) igazodva, melynek hátterében meghatározó a neurobiológiai eredet. Részletes áttekintést ad a kapcsolódó törvényi vonatkozások és az ún. sajátos nevelési igény (SNI) definíciójának változásairól *Lányiné* és *Kiss* (2013) tanulmánya, mely a napjainkban is átalakuláson megy át. *Gerebenné Várbíró Katalin* a tanulási zavar értelmezésére vonatkozó összefoglaló tanulmányában a külföldi szakirodalmak mellett a hazai diagnosztikai és terápiás tapasztalatokon alapuló gyógypedagógiai-pszichológiai felfogást is ismerteti (*Gerebenné*, 2002).

A szakirodalom ismeretében és a diszkalkulia munkacsoport több évtizedes diagnosztikus és terápiás munkája során szerzett tapasztalata alapján megállapítható, hogy a diszkalkulia olyan tünetegyüttes, ahol az okok és a tünetek, azok együttjárása, valamint a zavar súlyossága igen változatos és egyedi képet mutathat (a számolás rendszereinek, ill. a kognitív bázis funkciók atipikus fejlődése folytán heterogén tünetcsoport). A fejlődési diszkalkulia hátterében meghatározó az absztrakt diszkrét, szemantikus reprezentáció (számmegértés, szám- és műveleti fogalom) érintettsége (*Mohai és Dékány,* 2012*; Csonkáné,* 2012).

A 2012-től 2016-ig terjedő időszakban végzett adatgyűjtés több mint ezer esetnél, majd a feldolgozás 541 gyermeknél/tanulónál történt. A pszichometriai számítások – annak ellenére, hogy a teszt kritériumorientált jellegének megfelelően, célzottan kiválasztott alapvető matematikai fogalmakat, szám- és műveleti fogalmat, matematikai szövegértést és érvelést, valamint bázisfunkciókat mérő feladatokat tartalmaz, és az egyéni érési időt is figyelembe veszi – a Diszkalkulia munkacsoport tapasztalataival megegyező, az óvodai és alsó fokú oktatás, ill. pedagógusképzés tennivalóira vonatkozóan meghatározó konklúziókat mutató eredményeket hoztak. A kvantitatív értékelés alapján a gyermekek/tanulók teljesítménye korcsoportonként/osztályfokonként (10 féléves bontásban) 40%-ban mutatott súlyos, 70–80%-ban mérsékelt fokú alulteljesítést a matematikai képességek, készségek, ismeretek terén. Szignifikáns elmaradást a Pótlás, bontás, alapműveletek c. szubtesztben mértünk (*Rózsa*, 2015c). A kvalitatív értékelés alapján pl. a beiskolázás előtti nevelési év elején a nagycsoportos óvodás gyermekek 50%-a csupán egy, a Számlálás

c. szubtesztben teljesített életkorának megfelelően. A szociokulturális hátrány/matematikatanításbeli módszertani hiányosságok okozta alacsony teljesítmény kiküszöbölése sok gyermeknél – a dinamikus értékelés elve alapján – a megelőző korcsoportra/osztályfokra való ún. visszafordulás, ill. több ún. betanító feladat adásával vált lehetővé (*Polgárdi* és *Dékány*, m.a.).

A nyomonkövető vizsgálatok feldolgozása (*Polgárdi és Dékány*, m.a.) és a diszkalkulia munkacsoport tagjainak több évtizedes terápiás tapasztalata alapján megállapítható, hogy a fejlesztésnek leginkább ellenálló fejlesztendő területek fejlődési diszkalkulia esetén: idői tájékozódás, becslés, helyiérték-fogalom magasabb számkörökben, számfogalmak (nem pusztán számköri ismeretek) kialakulása (absztrakció), alkalmazása és az aritmetikai tények előhívása (kis számkörben történő készségszintű pontos, elvont számolás), legfőképp a szemantikus elaboráció nehezítettsége következtében (*Polgárdi* és *Dékány*, m.a.).

A diszkalkulia altípusainak felállítása a külföldi és a hazai szakirodalom alapján egyaránt kérdéses. Fontos megjegyezni, hogy még az altípusok is időbeli változékonyságot mutathatnak az egyéneken belül (*Silver* és *mtsai*, 1999). Ezért különös fontosságú a longitudinális vizsgálatok elvégzése, a munkacsoportunk tapasztalatával megegyezően a vizsgálati eredmények megismétlése és különböző időpontokban, a fejlődési diszkalkulia tartós fennállásának és a fejlődési diszkalkulia különböző javasolt altípusainak stabilitásának bizonyításához (*Szűcs* és *Goswami*, 2013).

### *1.2. A fejlődési diszkalkulia gyakorisága, komorbiditás, örökletesség*

Az iskoláskorú gyermekek (többnyire 8–12 éves korosztály) körében a gyakorisági mutatók eltérést mutatnak. Ennek hátterében több körülmény, tényező húzódik meg: a vizsgálatok eltérő fejlettségű, gazdasági és szociokulturális sajátosságokkal rendelkező országokban történtek; többnyire csak városi iskolákban végeztek kutatásokat (mintavételi eltérések); különböző teszteket használtak, a kritériumok nem voltak egységesek, és a kialakulatlan standard feltételek mellett felmerült még a vizsgálatvezető szubjektivitása is (*Márkus*, 1999, 2007).

Az első felmérések a fejlődési diszkalkuliát és a diszlexiát többnyire együtt vizsgálták. Egy ezres nagyságú populáción végzett vizsgálat (*Gross-Tsur* és *mtsai*, 1996, idézi *Márkus*, 1999) legfontosabb eredményei a következők voltak: a diszkalkulia gyakorisága a vizsgált populáció körében 6,5%-ot mutatott, a fiúk és a lányok azonos arányát tapasztalták. A diszkalkuliások 26%-ánál a tünetek ADHD-val társultak. A diszkalkulia és a diszlexia együttes előfordulása 17%-ban, a három tanulási zavar (diszkalkulia, diszlexia, diszgráfia) együttes előfordulását 7,5%-ban észlelték. A diszkalkulia gyakorisága hátrányosabb szociális körülmények között nagyobb volt. A diszkalkuliások elsőfokú rokonai között 10%-ban diszkalkuliát, 45%-ban egyéb tanulási zavart találtak.

Az eltérő tartalmú diagnosztikus eszközök alkalmazása és kritériumok megfogalmazása további arányeltolódást eredményez a gyakorisági értékekben. A DSM szerint a gyakoriság 1%. Egy norvég felmérés szerint pedig a „matematikatanulási képességzavar" a populáció 10,9%-át érinti (*Ostad*, 1998). Kritériumtól függ, de vélhetően 3-6% a diszkalkulia gyakorisági aránya az iskoláskorúak körében (*Shalev és Gross-Tsur*, 2001), hasonló az előfordulási arány, mint a többi tanulási zavar, hiperaktivitás vagy az ADHD esetében.

*Devine* és *munkatársai* (2013) tanulmányukban összefoglalják és elemzik az 1974 és 2011 között különböző országokban végzett gyakorisági vizsgálatokat. A különböző demográfiai vizsgálatokból származó prevalenciabecslések 1,3 és 10,3% közöttiek (az átlagos becslés 5–6%). Az eltérés egyrészt a kritériumok meghatározásának különbségében rejlik, pl. az IQ és a matematikateljesítmény diszkrepanciája, vagy a matematikai károsodás súlyossága, avagy a fejlesztésnek való ellenállás, valamint a határértékek különbözőségében. A vizsgálatok attól függően is eltérnek, hogy támaszkodtak-e kontrollváltozókra, vagy, hogy a kontrollváltozókat egyáltalán figyelembe vették-e. A különböző mintákba tartozó gyermekek szélsőséges változékonysága azt eredményezi, hogy nehéz összehasonlítani a kísérleti eredményeket. A tanulmány 1004 brit kisiskolás gyermek matematikai és olvasási teljesítményét elemezte, és ennek alapján 6%-ra teszik a fejlődési diszkalkulia arányát, a nemzetközi becslésekkel összhangban. A kutatók részletesen elemzik továbbá a nemek arányának kérdését, ami a múltbeli tanulmányokban nem volt konzisztens: a nemi különbségek pontos értékelése a matematikai teljesítményben és a fejlődési diszkalkuliában kérdéses. *Devine* és *mtsai* (2013) egyenlőnek találták a diszkalkuliás fiúk és a lányok arányát, összhangban egyes vizsgálatokkal (pl. *Koumoula és mtsai* 2004; *Lewis és mtsai*, 1994; *Mazzocco és Myers,* 2003).

A kutatók szerint egyúttal azonos matematikateljesítmény mellett a fiúknál nagyobb számban mérhető specifikus tanulási zavar előfordulása, valamint az iskolai tanulmányok végére a nemi arányok eltolódhatnak. Megjegyzik továbbá, hogy a matematikával kapcsolatos szorongás eltérő módon befolyásolhatja a lányok és fiúk matematikai teljesítményét (*Devine és mtsai*, 2012). Megerősítik, hogy a lányok és a fiúk különböznek a matematikához kapcsolódó motivációs, kognitív és érzelmi tényezők tekintetében: a matematikával kapcsolatos saját meggyőződéseik és érzelmeik különbözőképpen befolyásolhatják a lányok és fiúk teljesítményét (*Beilock és mtsai,* 2010).

Hazánkban pontos tudományos felmérésre épülő gyakoriság-meghatározást nem ismerünk.

A diszkalkuliához számos szomatikus, kognitív és emocionális állapot, betegség társulhat, amelyeket *Márkus* (2007, 2010) ismertet részletesen a külföldi és hazai szakirodalmak alapján.

A fejlődési diszkalkuliához gyakran társulnak zavarok, betegségek (*Márkus*, 2010).

A mentális diszfunkcióval (intellektuális képességzavarral) járó fejlődési zavarok jelentős részében a számolászavar valamely tünetegyüttes része. Ezen fejlődési zavarok háttere különböző eredetű lehet (*Márkus*, 2007).

Ilyen tünetegyüttesek: Fejlődési Gerstmann-szindróma, Williams-szindróma, Fragilis X szindróma, Turner-szindróma, Down-szindróma, DiGeorge-szindróma (DGS), Örökletes anyagcserezavar (fenilketonuria), Velocardiofacialis szindróma (VCFS), Fejlődési jobb agyfélteke szindróma, Figyelemzavar hiperaktivitással.

A szakirodalmi adatok alapján elmondható, hogy a diszkalkulia megjelenése önmagában ritkább, mint a társuló zavarokkal együttjáró diszkalkulia. Kiemelt jelentőségű a figyelemzavar hiperaktivitással, amelyhez 30-80%-ban járul tanulási zavar. A diszkalkuliához az esetek egyharmadában ADHD is társul. Az ADHD és a diszkalkulia kettős diagnózisa háromszor gyakoribb, mint amikor az ADHD diszlexiával jár együtt. Az együttes előfordulás egyik oka a közös genetikai eredet lehet. A két zavar közös hátterét sok esetben a vizuospaciális motoros koordináció, a figyelem, a konstruktivitás, a téri feldolgozás elmaradó fejlődése adja (*Márkus*, 2007). A másik lehetséges magyarázat: egyidejűleg több idegrendszeri terület sérül, pl. az intraparietális sulcus és a prefrontális lebeny, mely által az analóg mennyiségreprezentáció mellett a központi végrehajtó rendszer érintettsége mutatkozik (*Rubinstein* és *Henrik*, 2009, idézi *Jármi*, 2013).

Egymásra épülő zavarként vagy másodlagos tünetként értelmezendő az, amikor az ADHD hátterében az elsődleges zavar az executív funkciók terén jelentkezik. Ennek következtében a szám- és műveletfogalom kevésbé érintett, a műveletvégzésben azonban a figyelmi problémák és a gyengébb munkamemória sok a tévesztés és az eljárási hiba, valamint jellemző lehet a perszeveráció, a szempontváltási nehézség, illetve a fluktuáló teljesítmény (*Márkus* és *mtsai*, 2001). Az alapprobléma gyógyszeres kezelésével javulás mutatkozik a végrehajtó funkciókhoz leginkább köthető matematikai feladatokban (*Rubinstein* és *mtsai*, 2008, idézi *Jármi*, 2013). *Szűcs és mtsai* (2013a, 2013b, 2014) és *Szűcs* (2016) többdimenziós kutatásokat végeztek a matematikatanulási problémák hátterében fennálló verbális és vizuális memóriafolyamatok szerepének feltérképezésében.

A fejlődési diszkalkulia gyakran társul más tanulási problémával, különösen olvasási és helyesírási problémákkal (*Manor* és *mtsai*, 2001). A fejlődési diszkalkulia és az egyéb tanulási zavarok etiológiája hasonló: genetikai eredet és/vagy az intrauterin, perinatális időszakban az idegrendszer fejlődését befolyásoló hatások. A generalista gének hipotézise (a matematikai képességeket meghatározó gének nagy része felelős az nyelvi képességek szintjéért is) a gének általános hatását feltételezi a tanulási képességekre, a kognitív profilban mutatkozó különbségek az eltérő környezeti hatásoknak köszönhetők (*Kovas* és *Plomin*, 2007). További szempontként merül fel az ún. neuronális újrahasznosítási kapacitás (mennyire képes egy bizonyos funkcióhoz köthető idegrendszeri hálózat átvenni egy új, hasonló feladatot) (*Dehaene*, 2004). Mindezek a számolás, olvasás-írás területspecifikus alapjaira világítanak rá (*Jármi*, 2013).

A diszkalkulia és a diszlexia együttes előfordulásának hátterében *Márkus* (2007, 2010) szerint közös genetikai tényezők is feltételezhetők. Mindkettőt szimbólumalkotási zavar is okozhatja (bizonytalanok vagy nehezen hozzáférhetők a szimbólumreprezentációk; az aritmetikai és az olvasási képesség egyaránt téri, szeriális feldolgozást is igényel; felmerül a vizuális alakzatfelismerés és a többjegyű számok számjegyeinek sorrendi feldolgozásának összefüggése is). *Devine* és *mtsai* (2013) valószínűsítik, hogy a számszimbólumok összehasonlítása szoros összefüggést mutat az olvasási teljesítményen belül a fonológiai dekódolással. Egy ikervizsgálat *(Light és DeFries,* 1995) eredményei arra utalnak, hogy a genetikai és a megosztott környezeti hatások hozzájárulnak az olvasási és a matematikai nehézségek komorbiditásához.

A fejlődési diszkalkuliához gyakran társul emocionális zavar (szorongás, depresszió), amely kapcsolódó figyelemzavar esetén súlyosbodhat (*Márkus*, 2007). *Ashcraft és Kirk* (2001) szerint a matematikai szorongás minden számokkal kapcsolatos jelenségnél aktiválódhat. A matematikai félelem velejárója, hogy a munkamemória központi végrehajtó rendszerének kapacitása csökkenhet, ezáltal lelassul a feladatmegoldás, vagy pl. az idői nyomás éppen a hibaszám megnövekedéséhez vezet (például, ha időre kell elvégezni a feladatot). Lányoknál a matematikai szorongás magasabb szintjét tapasztalták az általános és a középiskolákban (*Hill* és *mtsai*, 2016). *Devine* és *mtsai* (2017) a fejlődési diszkalkulia és a szorongás komorbiditásának vizsgálata során, 1757 általános iskolás (8–9 éves) és középiskolás (12–13 éves) tanulót felmérve a diszkalkuliások között kétszer nagyobb arányban (a lányok és fiúk számát tekintve a lányoknál nagyobb mértékben) mértek matematikai szorongást, mint a megfelelő matematikai teljesítménnyel bíró tanulóknál.

*Carey* **és** *mtsai* (2017) megbízható és érvényes eszközként dolgozták át a serdülőknél, felnőtteknél már jól bevált rövidített matematikai szorongási skálát (AMAS, *Hopko* és *mtsai*, 2003) 8–13 éves brit gyermekekre (AMAS), mely mind a tesztelési szorongástól, mind az általános szorongástól függetlenül mér.

A fejlődési diszkalkuliával magatartászavarok is együttjárhatnak (pl. agresszivitás és antiszociális magatartás), valamint gyakran észlelhetők enyhébb neurológiai tünetek (pl. szenzomotoros integrációs zavar).

Genetikai tényezők (*Kosc*, 1974; *Shalev* és *mtsai*, 2001) hatása mellett a kulturális és szülői attitűdök összeadódnak a családban (*Stevenson* és *mtsai*, 1993; *Shalev* és *mtsai*, 2001). A genetikai magyarázatok nem szolgáltatnak bizonyítékot izolált számspecifikus faktor öröklésére. Különböző alapvető kognitív képességek, mint például a teljes memóriakapacitás vagy a feldolgozási sebesség genetikai befolyás alatt állhatnak, melyek meghatározhatják a matematikai képességek fejlődését (*Szűcs* és *Goswami*, 2013).

Egy nagyméretű ikertanulmány (*Kovas* és *mtsai*, 2007) arra a következtetésre jutott, hogy mind a genetikai, mind a környezeti tényezők mérsékelten befolyásolják a matematikai eredményeket. A környezeti tényezők hatását vizsgálva a kutatók arra mutatnak rá, hogy az evolúció által biztosított, veleszületett mennyiségfeldolgozási képesség a különböző kultúrákban azonos, azaz a nemzetek, népcsoportok között nincs lényeges különbség az elsődleges biológiai képességek tekintetében. A kultúrkörnyezet, az adott nemzet értékrendje, az oktatási forma, a számolási ismeretek gyakorlására fordított idő – mint biológiailag másodlagos komponensek – magyarázzák az országok, nagyobb népcsoportok közti különbséget az aritmetikai képességek tekintetében (*Márkus,* 2007).

## 2. A diszkalkulia diagnosztizálása

### *2.1. Problémák és új utak a diagnosztikában*

A diszkalkulia diagnózisát alapvetően az intellektuális és a matematikai képességek speciális vizsgálatával és összevetésével állítják fel.

Hazánkban a Köznevelési törvény alapján a pedagógiai szakszolgálatok keretében jelenleg folyó diagnosztizálás a *BNO-10* (1995, 2004) és a *DSM-IV* (1994, 2001) nemzetközi osztályozó rendszerek kritériumai szerint történik. A fejlődési diszkalkulia diagnózisa azon diszkrepanciaállításon nyugszik, miszerint a numerikus ismeretek, képességek, készségek – az intellektuális teljesítményhez, relatíve az életkorhoz, illetve az osztályfokhoz viszonyítva – az átlagos szint alatt vannak.

A *BNO-10* (1995, 2004) alapján az aritmetikai készségek zavara (dyscalculia) a mentális és viselkedészavarok főcsoportján belül, az iskolai teljesítmények specifikus fejlődési rendellenessége körébe (F81) tartozik F81.2 kódszámmal, a következő meghatározással:

Az aritmetikai készségek károsodása nem magyarázható mentális retardációval vagy nem megfelelő oktatással. A zavar vonatkozik alapvető feladatokra, mint az összeadás, kivonás, szorzás és az osztás, és sokkal kevésbé érinti a sokkal absztraktabb feladatokat, mint az algebra, trigonometria, geometria vagy kalkulációk. A funkciózavar kezdete csecsemő- és gyermekkor közé esik. Háttérben funkciókárosodás vagy fejlődési késedelem áll. (*BNO*, 1995) A károsodás vagy a késés fokozatosan csökken, ahogy az egyén felnő, de felnőttkorban is észlelhető még enyhe elmaradás (deficit) (*BNO*, 1995).

Az iskolai készségek kevert zavara is előfordul, amelyben az aritmetikai és az olvasási és/vagy (helyes)írási készségek is károsodnak (F81.3).

A fejlődési diszkalkulia meghatározása a *DSM-IV* (1994) szerint:

- A számolási képesség, egyénileg, standardizált tesztekkel vizsgálva, lényegesen alatta marad a személy biológiai kora, mért intelligenciája vagy a kor szerinti képzettség alapján elvárhatónak.
- Az előbbi zavar jelentősen kihat az iskolai teljesítményre vagy a számolási képességet igénylő mindennapi élettevékenységekre.
- Ha érzékelési deficit van jelen, a számolási nehézségek meghaladják az ahhoz rendszerint társuló zavar mértékét.

A diszkrepancia-modell kapcsán az alábbi problémák merülnek fel, a teljeség igénye nélkül:

Direkt összevethető-e az intellektuális és a matematikai teljesítmény (*Murphy* és *mtsai*, 2007)?

Torz eredményeket is kaphatunk, mivel más az elvárt teljesítmény, melyet a konfidencia intervallum is módosít. A legtöbb intelligenciatesztben több numerikus töltetű feladatot (is) találunk, melynek gyengébb eredménye torzíthatja a diszkalkuliás gyermek összteljesítményét.

A diszkalkuliás, valamint a matematikatanulási nehézséggel küzdők és az általánosan gyengén teljesítők, valamint az intellektuális képességzavarral küzdők egyaránt alulteljesítenek a matematikai feladatokban. A jelentős eltérés meghatározásán alapuló modell a hátrányos helyzetű tanulók felülreprezentáltságát eredményezheti a tanulási zavart mutató tanulók körében (*Fejes* és *Szenczi*, 2010), ugyanakkor az alacsony társadalmi-gazdasági státuszú gyermekeknél a korai beavatkozások különösen fontosak (*Griffin*, 2007, idézi *Szűcs és Goswami*, 2013).

Felmerül, hogyan határozhatjuk meg a kor szerinti matematikai készséget. A formális tanulás és a célzott fejlesztés során a gyermekek új információkat szereznek, változnak a stratégiáik, formálódnak, gazdagodnak reprezentációik (*Shalev és Gross-Tsur*, 2001) A fejlődés időbeli változékonysága a diagnózis instabilitását vagy bizonytalanságát is eredményezheti. Az idézett tanulmányok szerint a diszkalkuliás gyermekek 50-60%-ánál tartósan fennáll az elmaradás (*Shalev* és *mtsai*, 1998; *Silver*, 1999), 95%-uk hosszú távú gyenge matematikai teljesítményt mutat (*Shalev* és *mtsai*, 1998, idézi *Szűcs* és *Goswami*, 2013). Előfordulhat az is, hogy a diszkalkuliás tüneteket mutató gyermek a következő évben jobb teljesítményt mutat, és meghaladhatja a diagnózis küszöbértékét. Ilyen esetekben az elmaradó teljesítmény nem egy központi és tartós kognitív károsodásra utal, hanem olyan átmeneti tényezőknek tulajdonítható, mint például az alacsony motiváció, negatív attitűd vagy az átmenetileg lassabb érési folyamat (*Szűcs* és *Goswami*, 2013). Ha osztályfokban mérjük az elmaradást (1–2 év), felmerül az a gond, hogy a fejlődés nem lineáris, ill. az elmaradás mértéke más minőséget, hangsúlyt jelent az egyes osztályfokokon.

A 2013-ban megjelent DSM-5 diagnosztikai vizsgálat zsebkönyve a korábbi változatokhoz képest Az idegrendszer fejlődési zavarai főcsoporton belül új megközelítésben tárgyalja a Specifikus tanulási zavarokat, mely átfogó diagnosztikus kategóriát jelent. A DSM-IV többtengelyű megközelítését egytengelyű elgondolás váltotta fel, kiegészítve a pszichoszociális és környezeti problémákkal, ill. a funkcionális károsodásra vonatkozó súlyossági értékeléssel. A leíró kategória – melyet közös fenomenológia és patológia alapján alakítottak ki –kiszélesítésének célja, hogy segítsen a pontosabb diagnózis felállításában, valamint a kezelési terv és a lehetséges kimenetelek meghatározásában. A specifikus tanulási zavarok között jelöli a kategorizáció az olvasási zavart, az írásbeli kifejezőkészség zavarát és a számolási zavart. Közös ismérvként fogalmazza meg az alábbi négy diagnosztikus kritériumot, „mely a személyes élettörténet (fejlődési, egészségügyi, családi, oktatási), iskolai beszámoló és pszichoedukációs felmérés klinikai szintézisén alapul” (*DSM-5*, 2014. 100. o.).

„A) Nehézségek a tanulásban és az iskolai készségek használatában, melyek legalább 6 hónapja fennállnak, a célzott intervenciók ellenére, külön részletezve és példákkal leírva a területeket:

- Pontatlan vagy lassú és nehézkes olvasás (…)
- Nehézség az olvasott szöveg jelentésének megértésében (…)
- Nehézség a szavak betűzésében (…)
- Nehézség az írásbeli kifejezésben (…)
- A számok felfogásának, a számokkal kapcsolatos tények uralásának, a számolási készségnek a nehézsége (…)
- Nehézségek a matematikai érvelés, gondolkodás terén (…)

B) Az érintett készségek egyénileg, standardizált teljesítménytesztekkel és átfogó klinikai felméréssel vizsgálva, lényegesen és mennyiségileg meghatározhatóan elmaradnak az életkor szerint elvárthoz képest, és jelentős hatással vannak az iskolai és foglalkozásbeli teljesítményre vagy a mindennapi tevékenységekre…

C) A tanulási nehézségek az iskolai évek alatt kezdődnek, de nem teljesen válnak nyilvánvalóvá, amint az érintett iskolai készségekkel kapcsolatos követelmények meg nem haladják a személy korlátozott teljesítőképességét (pl. időkorlátos tesztek, hosszú, összetett beszámolók olvasása vagy írása szűk határidővel, rendkívül nehéz iskolai terhelés).

D) A tanulási nehézségeket nem magyarázza jobban intellektuális képességzavar, nem kezelt látás- vagy hallászavar, más mentális vagy neurológiai zavar, pszichoszociális hátrány, az iskolai instrukciók nyelvezetében való jártasság hiánya vagy nem megfelelő oktatói instrukciók.” (*DSM-5*, 2014. 98–102. o.)

A 315.1 (F81.2) specifikus tanulási zavar számolási zavarral: A számok felfogása, A számtani törvények megjegyzése, Pontos vagy folyékony számolás, Pontos matematikai érvelés zavaraival azonosíthatók, a jelen súlyossági fokok meghatározásával (*DSM-5*, 2014. 102. o.):

„Enyhe: Van valamennyi nehézség a tanulási készségekben egy vagy két iskolával kapcsolatos területen, de elég enyhe ahhoz, hogy a személy megfelelő elhelyezés vagy támogató ellátás esetén képes kompenzálni vagy jól funkcionálni, különösen az iskolaévek alatt.

Mérsékelten súlyos: kifejezett nehézségek a tanulási készségekben egy vagy több iskolával kapcsolatos területen annyira, hogy a személy az iskolaév közben beiktatott intenzív és specializált oktatási időszakok nélkül nem képes a hatékony tanulásra. Szükséges lehet valamilyen mértékű elhelyezés vagy támogató ellátás az iskolában, munkahelyen vagy otthon töltött idő legalább egy részében ahhoz, hogy a személy képes legyen pontosan, hatékonyan végezni a tevékenységeket.

Súlyos: súlyos nehézségek a tanulási készségekben, amelyek számos iskolával kapcsolatos területet érintenek annyira, hogy a személy az iskolaév nagy részében zajló folyamatos, intenzív, egyénre szabott és specializált oktatás nélkül valószínűleg nem képes elsajátítani ezeket a készségeket. Számos megfelelő otthoni, iskolai vagy munkahelyi elhelyezés vagy ellátás ellenére sem biztos, hogy a személy minden tevékenységet hatékonyan el tud végezni."

Összefoglalva tehát, jelentős nehézséget okoz, hogy a számolási zavarral rendelkező gyermekek csoportja rendkívül heterogén (multifaktoriális eredet), valamint a diszkalkulia gyakran együtt jár különböző eredetű teljesítményzavarokkal, melyek tüneti, viselkedéses szinten összemosódnak, átfedés mutatkozik. Magyarországon komoly problémát jelent még a fogalmi tisztázatlanság a szakemberek körében (mit takar a zavar, a nehézség vagy az elmaradás). A mai napig nincs egyértelmű, konszenzuson alapuló, érvényes definíció. A terminológiai bizonytalanságot fokozzák hazánkban a többletszolgáltatást igénylő gyermekek/tanulók változó jogszabályi kategóriái is (BTM, SNI), melyek tartalma nem pontosan meghatározott. Egyértelmű kritériumok és standardizált, jogtiszta, modern vizsgálóeljárások hiánya miatt a hazai diagnosztikus gyakorlatban sok szubjektív elem szerepelt (*Csépe*, 2008). A TÁMOP 3.4.2. B „Sajátos nevelési igényű gyerekek integrációja (Szakszolgálatok fejlesztése)" kiemelt projekt (Educatio Társadalmi Szolgáltató Nonprofit Kft.) keretében elkészült feltáró, igényfelmérő zárótanulmányok mindezekre részletesen rávilágítanak (*Lányiné*, 2014).

A diagnózis felállításában az aktuális állapotleírás mellett a deficitorientált diagnosztikus megközelítés helyett egyre jobban érvényesül, hogy fontos figyelembe venni a szociokulturális feltételrendszert is, az élettörténet eseményeit, a referenciaszemélyek, azaz szülő és a (fejlesztő) pedagógus megítélését, jellemzését a gyermek/tanuló matematikai képességeit illetően. Információkat szükséges gyűjteni a gyermek/tanuló viselkedéséről, egyéb viszonyulásairól (feladattudat, motiváció, önértékelés, stb.) is (*Lányiné* és *Takács*, 2004, idézi *Mohai*, 2009; *Gerebenné*, 2004). A további segítségnyújtás lehetőségeit, mikéntjét meghatározza a vizsgált személy személyiségdinamikája és struktúrája (önattitűd, megküzdési stratégiák, frusztráció tolerancia stb.) is (*Szabó* és *Mohai*, 2004, idézi *Mohai*, 2009). Mindezek hozzájárulnak az árnyaltabb értelmezéshez.

Munkaközösségünk több évtizedes diagnosztikus és terápiás tapasztalatával megegyezően diagnosztikus szempontnak tekinthető az ún. fejlesztésnek való ellenállás is (*Jármi*, 2013): ha huzamosabb ideig (félév – egy év) tartó általános pedagógiai módszerekkel történő felzárkóztatás ellenére sem történik előrelépés a nehézségek felszámolásában, az a számolási zavar jele lehet, mely célzott beavatkozást igényel. A korai diagnosztizáláson alapuló prevenció és a folyamatos nyomonkövetés megtervezése az RtI (Response to Intervention)-modell, a tanulási zavarral küzdő tanulók azonosításának támogatásközpontú, újfajta megközelítése (*Gresham* 2002; *Vaugh* és *Fuchs*, 2003, idézi *Fejes* és *Szenczi*, 2010).

### *2.2. Diagnosztikai eszközök a nemzetközi gyakorlatban*

A külföldi szakemberek más és más diagnosztikus eljárásokat alkalmaznak a matematikai képességek felmérésére. Ezen kívül iskolai felmérőkhöz hasonló feladatokat is használnak, melyekkel szemben jogos kritikaként fogalmazódik meg, hogy nem objektív mérőeljárások, valamint az, hogy a begyakorolt, túltanult folyamatokat és a hiányos oktatás hatását nem lehet kiszűrni általuk (*Krajcsi*, 2003, 2008, 2010).

A speciális tesztek a jellemző tüneteket vizsgálják. Többségük azonosságot mutat abban, hogy az iskolakezdést tekinti kritikus időszaknak a diagnosztizálás szempontjából, ill.

abban, hogy bázisképességeket is vizsgálnak (pl. vizuális percepció, munkamemória) és hibázást mérnek (könnyebben mérhető). Különböznek a reakcióidő mérésében, ez sok esetben pontosabb és megbízhatóbb (érzékenyebb) eredményt adhat (*Krajcsi*, 2008, 2010). Ugyanakkor kritikaként jelenik meg a gyógypedagógusok részéről (*Mohai* és *Dékány*, 2012), hogy az idői nyomás sok esetben frusztráló lehet, befolyásolhatja a teljesítményt.

## 3. A diszkalkulia kutatása Magyarországon

### *3.1. Matematikai képességvizsgáló eljárások*

Magyarországon a diszkalkulia kutatásában jelentős szerepet képvisel *Csépe Valéria* kutatóprofesszor vezette MTA Pszichológiai Intézet Fejlődés-pszichofiziológia Csoportja, *Márkus Attila*, *Krajcsi Attila* (ELTE-PPK Kognitív Pszichológiai Tanszék Matematikai Megismerés Kutatócsoport) és *Jármi Éva* (MTA Pszichológiai Intézet Fejlődés-pszichofiziológia Csoport) pszichológusok. Tudományos munkájuk során matematikai képességeket vizsgáló eljárásokat dolgoztak és dolgoznak ki (*M*árkus, 2007; *Jármi*, 2013), ill. külföldi eljárást adaptáltak (*Krajcsi és Hallgató,* 2012; *Igács, Janacsek és Krajcsi*, 2006, 2008). Figyelemre méltó magyar kezdeményezés a matematikai szorongás diagnosztizálása és terápiás megközelítése terén *Svraka Tamásné* (FPSZ II. Kerületi Tagintézménye, ELTE TÓK) gyógypedagógus kutatómunkája (*Svrakáné*, 2017), valamint *Farkasné Gönczi Rita* (2014) (Dyscalculiaport munkacsoport) és *Szabó Ottilia* (Dyscalculine Fejlesztőcsoport) gyógypedagógusok szakmai tevékenysége.

### *3.2. ELTE GYOPSZ Diszkalkulia (Gyógy) pedagógiai Munkacsoport (jogutód: Diszkalkulia Kutatócsoport)*

Támogató szakmai intézmények, szakemberek

A Bárczi Gusztáv Gyógypedagógiai Tanárképző Főiskola Gyakorló Beszédjavító Intézetében Dékány Judit gyógypedagógus vezetésével közel négy évtizede indult útjára a fejlődési diszkalkulia célzott kutatása. A kutatásokat leginkább az intézet napi gyakorlata indukálta, *Dr. Palotás Gábor* és *Dr. Juhász Ágnes* vezetésével: sok esetben volt tapasztalható, hogy a beszéd és a nyelv eltérő fejlődésére következményesen ráépült a matematikai képességek elmaradása. A tudomány fejlődésével egyre nyilvánvalóbbá vált, hogy komplex differenciáldiagnosztikára és terápiára van szükség a gyógypedagógia ezen területén is. A külföldi szakirodalmak összefoglalása alapján sor került a terápiás elvek és a fő terápiás területek meghatározására (*Dékány*, 1986). Ezzel egyidejűleg folyt a vizsgálat kidolgozása, majd publikálásra került a diszkalkuliaprevenciós vizsgálat és terápia (*Dékány*, 1989), elkészült *Dékány Judit* (1995) kézikönyve a diszkalkulia felismeréséhez és terápiájához. A diszkalkulia vizsgálata (*Dékány* és *Juhász*, 1999, 2007) óvodáskorú és iskoláskorú (1–4. osztályos) gyermekek számára a Logopédiai Vizsgálatok Kézikönyvében jelent meg. Ez utóbbit az egységes diagnosztizálási rendszer elemeként említi *Farkasné Gönczi Rita* (2007, 2008), a diagnózis és a terápia magyarországi gyakorlatának felmérése alapján. *Krajcsi Attila* több tanulmányában is nevesíti és összehasonlítja más vizsgálóeljárásokkal.

A gyógypedagógiai szemléletű vizsgálat alapját a diszkalkulia munkacsoport tagjainak hosszú évek diagnosztikus és terápiás munkájában felhalmozódott tapasztalatai nyújtották: a gyakorlat azt mutatta, hogy a fejlődési diszkalkulia feltűnő jelei sokszor már óvodás korban észrevehetők, majd iskolás korban tanulási nehézségként/zavarként manifesztálódhatnak. A prevenciót tehát már óvodás korban kívánatos elkezdeni, és sokszor iskolás korban is elengedhetetlen a gyermek terápiás kezelése, fejlődésének nyomon követése. A kontrollvizsgálatok hosszú évek alatt bebizonyították, hogy az alapvető matematikai (számossággal, szám- és műveleti fogalommal) kapcsolatos képességek érintettsége az idősebb korosztályokban, sőt felnőtt korban is kimutatható. Ezt az MTA Pszichológiai Kutatóintézetével végzett fejlődés-pszichofiziológiai kutatások is alátámasztották (*Soltész* és *mtsai*, 2006). A terápia hatékonyabb tervezését a diszkalkulia differenciáldiagnosztikájának fejlődése nagymértékben segíti (terápia-relevancia).

A diszkalkulia munkacsoport 2008-tól az ELTE Gyakorló Gyógypedagógiai és Logopédiai Szakszolgálat, Szakértői és Rehabilitációs Bizottság és Országos Gyógypedagógiai Szakmai Szolgáltató Intézetben (ELTE GYOSZI) Nagyné dr. Réz Ilona igazgató, majd az intézmény 2013/2014-es tanévben végbement átalakulásától (ELTE Gyakorló Országos Pedagógiai Szakszolgálat) dr. Mlinkó Renáta igazgató támogatásával működik. Tagjai a diszkalkulia diagnosztikájában és terápiájában magasan képzett szakemberek: szakvizsgázott óvodapedagógus, tanító, matematika szakos tanár, fejlesztőpedagógus, illetve különböző szakos gyógypedagógus és pszichológus végzettségű szakemberek, a legkülönbözőbb gyakorlati és klinikai helyszíneken szerzett tapasztalatokkal.

A munkához nagy segítséget nyújtottak a különböző köznevelési intézményekben, pedagógiai szakszolgálatokban dolgozó Kollégák, akik az egész ország területéről folyamatosan visszajelezték észrevételeiket, tapasztalataikat, javaslataikat. A munkacsoport tevékenységét segítette *dr. Csépe Valéria* (MTA Pszichológiai Kutatóintézet) és munkatársaival végzett közös kutatás (*Soltész* és *mtsai*, 2006), együttműködés *dr. Jármi Évával* (ELTE-PPK Iskolapszichológia Tanszék), *dr. Soltész Fruzsinával* (University of Southampton) és *dr. Szűcs Dénessel* (University of Cambridge). A szakmai munkacsoportot *dr. Márkus Attila* neurológus, pszichiáter és *dr. Krajcsi Attila* pszichológus (ELTE-PPK Kognitív Pszichológiai Tanszék), *dr. Mohai Katalin* (ELTE GYFK) és *Svraka Tamásné* gyógypedagógus (ELTE-TÓK, FPSZ II. Kerületi Tagintézménye) támogatja.

### 3.3. Dékány–Juhász-féle vizsgálóeljárás

Dékány Judit gyógypedagógus-logopédus nevéhez fűződik a diszkalkulia gyógypedagógiai vizsgálóeljárásának kidolgozása és széles körű elterjesztése Magyarországon (*Márkus* 2007, *Krajcsi* 2010, *Farkasné* 2007, 2008; *Dékány* és *Mohai*, 2012). A vizsgálatot két korosztály számára dolgozta ki: óvodások (prevenciós vizsgálat) és kisiskolások (alsó tagozatos korosztály) számára. A klinikai gyakorlatban a felső tagozatosok és a középiskolások vizsgálatának is ez az alapja, kiegészítve a magasabb rendű matematikai ismeretek, műveletek, mértékegységek feladataival (törtek értelmezése, százalékszámítás, negatív számok, egyszerű egyenlet rendezése, praktikus ismeretek). Az egységes eljárás beméréséhez és publikálásához egyre több adat áll rendelkezésre.

*Krajcsi* (2003, 2008, 2010) a diszkalkulia diagnosztizálására alkalmas módszerek között elemzi és hasonlítja össze más külföldi eljárásokkal a Dékány–Juhász-féle módszert, melynek bemért és átdolgozott változata a Diszkalkulia Pedagógia Vizsgálata.

Az eredeti Dékány–Juhász-féle vizsgálat a papír-ceruza teszek közé sorolható, viszont az iskolai felmérőkhöz hasonló feladatoktól több tekintetben eltér. Egyrészt a diszkalkuliás gyermekek feladatmegoldásai során előforduló tipikus hibákból indul ki. Másrészt a módszer a számfogalom meglétét ragadja meg átfogó feladatsorokkal. A feladatok a gyermek életkorának és iskolai osztályának megfelelő nehézségűek. A számoláshoz köthető feladatok (számlálás, mennyiségi relációk, mennyiségállandóság, globális mennyiségfelismerés, helyi érték, számjegyek írása, olvasása, szóbeli és írásbeli alapműveletek leírása és elvégzése, szöveges feladatok, matematikai szabályok felismerése) megfelelő altesztjei összhangban vannak *Dehaene* (1992, 2003) hármas kódolás modelljével. Emellett szerepelnek *Krajcsi* (2010) szerint olyan feladatok is, amelyek gyakran problémásak a diszkalkuliások esetében, ám nem feltétlenül diagnosztizálják a diszkalkuliát, pl. a számismétlési feladat összevethető *Baddeley* (2001) munkamemória-modelljével. A feladatok között szerepel a téri viszonyok felfogásának vizsgálata is (tájékozódás), amely gyakran sérül a fejlődési diszkalkulia esetében, ám nem tekinthető legfőbb kritériumnak a diagnózis felállításakor.

*Krajcsi* (2010) szerint a Dékány–Juhász-féle vizsgálat kevésbé objektív, mivel a teljesítmény nem számszerűsíthető. A hibaelemzés szempontjai sok segítséget nyújtanak, de nem tartalmaznak objektív kritériumokat a diagnózis felállításához. Így a teszt jogos kritikája az is, hogy kérdéses lehet azon gyermekek objektív elkülönítése, akik a rossz oktatási módszer miatt alulteljesítenek vagy ügyesen kompenzálnak, esetleg teljesítményszorongás jellemzi őket. *Krajcsi* (2010) szerint a teszt feladatsora valószínűleg jó eszköze a diszkalkulia diagnosztizálásának megfelelően tapasztalt, szakértelemmel rendelkező diagnoszta kezében, de a kritériumok nem explicitek. Ez a probléma nem csak a hazai gyakorlatra jellemző, hanem a világ számos országában kutatás tárgya a megfelelő kritériumok kidolgozása és a megbízhatóbb, objektívabb diagnosztikus módszerek kidolgozása. *Krajcsi* (2003, 2008, 2010). A fent jelzett hátrány kiküszöbölését célozta meg a DPV kidolgozása, bemérése.

## 4. A Diszkalkulia Pedagógiai Vizsgálatáról

### *4.1. A Dékány–Juhász-féle vizsgálóeljárás átdolgozásának célja*

A hazai diagnosztikai gyakorlatban is egyre inkább szükségszerűvé vált, hogy objektív kritériumokkal rendelkező, sztenderdizált pszichológiai, pedagógiai, gyógypedagógiai vizsgálatok álljanak rendelkezésre a gyakorló szakemberek számára (*Lányiné*, 2014). Ennek a jogos igénynek felel meg a DPV, mely korszerű vizsgálóeljárás a Dékány–Juhász-féle diszkalkulia pedagógiai vizsgálat bemért és kritériumorientált változata. A részletes dokumentációval, értékeléssel és értelmezéssel ellátott mérőmódszer nem csak a gyakorlat, hanem a hazai kutatások számára is egységes keretet biztosíthat.

### *4.2. A DPV helye a komplex diagnosztikában*

A teszt a specifikus tanulási zavarral (diszkalkuliával) küzdő gyermekek, tanulók szakértői vizsgálatának érvényes diagnosztikus protokolljában (*Nagyné* és *mtsai*, 2014) a komplex (orvosi, pszichológiai/neuropszichológiai, pedagógiai/gyógypedagógiai) szükségletorientált állapotmegismerés egyik fontos eleme, rendszerbe foglalt speciális anamnézist tartalmazó kérdőívekkel (*Dékány* és *Mohai*, 2012). A megfelelő differenciáldiagnosztika érdekében a hazai diagnosztikus protokollt megújító javaslatok között szerepel a kiegészítő vizsgálatok körének bővítése is (*Dékány* és *Mohai*, 2012).

A DPV is követi szemléletében a komplex gyógypedagógiai-pszichodiagnosztika korszerű követelményeit, amelyeket Lányiné dr. Engelmayer Ágnes a gyógypedagógiai, pedagógiai állapotmegismerő vizsgálatokkal szemben támaszt (*Lányiné*, 2014. 46–47. o.):

- „A diagnosztizálás kifejezés helyett kerüljön alkalmazásra az állapotmegismerés (assessment) fogalom, mely képességek, tulajdonságok, készségek megismerését, mérését, becslését egyaránt magában foglalja, és szakít az orvosi jelentésű diagnózis fogalommal. Ez jelenti a nemzetközi gyakorlathoz történő igazodást. (…)
- Ne legyen defektusleltár, vizsgálja és tárja fel az egyénben rejlő erősségeket, pozitív tulajdonságokat, épen maradt funkciókat. Ezek gyakran nem csak a kognitív képességekben és az ismeretekben nyilvánulnak meg, hanem a szociális kapcsolatok, az érzelmi élet, a motiváció területen. (…)
- Tekintse „vizsgálati eszköznek” a megfigyelést is (…). Egy állapotmegismerést szolgáló vizsgálat nem csak tesztelés!
- Vegye figyelembe az élettörténet eseményeit a vizsgálati eredmények értékelésekor. Tekintse az élettörténetet többnek, mint orvosi értelemben vett anamnézisnek.
- Vizsgálja tehát a gyermek szociális életterének körülményeit, szociális rétegehelyzetét, kötődéseit, életének pozitív vagy negatív élményeit, személyiségfejlődését segítő es a hátráltató körülményeket.
- A vizsgálati helyzeten kívül (…) támaszkodjon fontos referencia személyek írott vagy szóban közvetített beszámolóira.
- A diagnosztikus folyamat és az ennek nyomán készülő szakértői vélemény tartalmazza mind az egyéni állapotleírást, mind a diagnosztikai kategóriákba való besorolást, ha jelenleg ehhez

köti a hazai rendeletek világa a kedvezményekhez jutást.
- Szorgalmazza a diagnosztikus kategóriák felülvizsgálatát es a nemzetközi gyakorlattal való egyeztetést.
- Adjon lehetőséget a későbbi revízióra, hiszen az állapot változhat. Legyen képes a vizsgáló szakember a változásokat értelmezni.
- Legyen fejlesztésorientált, alapozza meg az egyéni nevelési, fejlesztési, rehabilitációs, terápiás terv kidolgozását. (…)
- A diagnosztikai feladatok ellátásnak az egyéni többletszolgáltatásokhoz, kedvezményekhez való hozzáférést kell elsősorban szolgálnia, nem a címkézést és a kirekesztést. (…)”

### *4.3. Korszerű elvárások érvényesülése, új elemek a DPV-ben*

A kutatómunka első szakaszában a vizsgáló eljárást az objektív kritériumoknak megfeleltettük, a kognitív idegtudományi komplex modellekhez igazodva néhány feladatot kiegészítettünk, illetve újakat építettünk be a mérőeszköz elméleti alapjainak korszerűsítése jegyében

A magyar gyógypedagógiai vizsgáló eljárást (DPV) a munkacsoport a Belgiumban kidolgozott, eredetileg francia nyelvű 4-9 éves korú óvodás, ill. általános iskolás gyermekek számára készült TEDI-MATH teszt (*Van Nieuwenhoven* és *mtsai*, 2001) német változatával (*Kaufman* és *mtsai*, 2008) külön tanulmányban hasonlította össze. A DPV és a TEDI-MATH empirikus összevetését több tényező is gátolta. Mivel a TEDI-MATH normaorientált teszt és a módszer hazánkban nem adaptált, így kvalitatív jellegű összevetést alkalmaztunk, illetve több konkrét eset kapcsán tanulmányban mutattuk be (*Lázné* és *Dékány*, 2016) a két mérőeszköz hasonlóságait és eltéréseit. A TEDI-MATH mérőeljárást részletesen megvizsgálva a diszkalkulia munkacsoport arra a következtetésre jutott, hogy a DPV mérési tartománya szélesebb, hiszen dinamikus szemlélete következtében nem pusztán a diszkalkulia diagnózisára összpontosít, hanem a differenciáldiagnosztikához szükséges területekre és a fejlesztési terv kidolgozásához szükséges elemekre is (*Rózsa*, 2015a).

A DPV validitásvizsgálata során elsőként a szubtesztek közötti, majd a WISC-IV intelligencia vizsgáló teszt (*Wechsler*, 2003) szubtesztjeivel való együttjárásokat vizsgáltuk meg. A DPV szubtesztek közötti korrelációs együtthatók a szakértői tapasztalatokat megerősítették. A WISC-IV és a DPV eredményei között eltérő összefüggések mutatkoztak (*Stoia*, 2016). A WISC-IV vagy a Woodcock Johnson Kognitív Képességek Tesztje (*Woodcock* és *mtsai*, 2003) eljárásokkal további méréseket folytatunk. A kutatómunka második szakaszának feladata a vizsgálóeljárás validálása.

Már fél éves életkor és óvodai vagy iskolai foglakozás is jelentős változást jelenthet a gyermek kognitív fejlődésében, ezért a gyermek/tanuló fejlettségi szintjéhez való jobb alkalmazkodás érdekében a vizsgálati mintát évenként bontottuk korcsoportokra, és ezen belül a félévenkénti fokozatok bontását használtuk fel a kvantitatív értékeléshez (összesen 10 életkornak/osztályfoknak megfelelő övezet).

A biológiailag elsődleges és másodlagos matematikai képességeket (*Geary*, 1996) egységben kezelve figyelembe vettük az új/kísérleti tantervi előírásokat is. A teszt az osztályfok adott félévében elvárható új ismeretekről is tartalmaz feladatokat, amelyeket a pontozásnál figyelmen kívül hagyunk, a kvalitatív megállapításokat azonban a terápia tervezéséhez felhasználhatjuk.

A teszt megújítása során különös figyelmet kapott az egyértelmű, pontosan kidolgozott, gyógypedagógiai szemléletű kérdés-megfogalmazás. Szükség esetén az instrukció értelmezése a gyermek számára segítő-rávezető kérdésekkel is biztosított, azért, hogy az adott képességek, készségek, ismeretek mérése célzott legyen, megfeleljen az adekvát válaszkényszer-követelménynek. Ezáltal kiküszöbölhetővé vált a megértésből, nyelvi zavarból eredő hiba, valamint az adott feladat szempontjából irreleváns részképességek, folyamatok befolyásoló hatása is (*Krajcsi* 2005; *Krajcsi és mtsai* 2007). A gyermekek verbális fejlettségét figyelembe véve készült a pontozási kritérium, ezért gyakran a válaszok jelentésére, az elvárt tartalomra helyeztük a hangsúlyt.

A korszerűsítés során az életkor(ok)hoz adekvátan igazodó és praktikusan használható komplex vizsgálócsomag készült:

Részletes és pontos, direkt tájékoztatást nyújt a szabályokról, utasításokról a vizsgálatvezető számára a korcsoportonként elkészített Vizsgálati útmutató, mely segíti az egységes és objektív tesztfelvételt. Pontosan tartalmazza – többek között – a feladatok felcserélhetőségének/felcserélésének, ill. a javasolt szünetek beiktatásának elveit (pl. kudarc, szorongás vagy fáradás okozta megtapadás esetében), továbbá az eszközhasználatot, a segítségadásokat, a javítási lehetőségeket, a motiváció formáját és a visszafordulás/folytatás eseteit. Az objektív pontozást elősegítik a példaválaszok, az elemzést pedig a részletes, konkrét példák.

A részletes és korszerű Vizsgálati űrlap és jegyzőkönyv (ún. hosszú űrlap) is korcsoportoknak megfelelően készült, a fő instrukciókat tartalmazza. Az űrlap vezetése során a vizsgálatvezető rögzíti a gyermek válaszait, és a megfigyelési szempontok alapján követi a gyermek teljesítményét (aláhúzza, bekarikázza stb.), valamint saját feljegyzéseket is készít. A teszt praktikusabbá tételéhez hozzájárul az űrlapok szimbólumokkal és színekkel strukturált szerkesztettsége is. Rutinosabb vizsgálatvezetői felhasználást teszi lehetővé a Vizsgálati és pontozó űrlap, a hosszú űrlap és a Tipikus hibák **értékelő** táblázatainak egybeszerkesztett változata (ún. rövid űrlap), mely a könnyebb kezelhetőség érdekében készült a DPV felvételében **már gyakorlottabb** szakemberek számára.

A vizsgáló eljárás felvételéhez szükséges tárgyi eszközök (pl. modellek, Tesztfüzet stb.) is kidolgozásra, legyártásra kerültek. Az iskolások vizsgálóeljárásának Tesztfüzete elektronikusan érhető el, kinyomtatva vagy laptopon/tableten prezentálható (a bemérések során mindkét használati forma bevált, a mérési eredményeken nem módosított). A Tesztfüzet a bemutatás sorrendjében tartalmazza az összes képet, előrajzolt feladatot, feladatlapot, illetve több számfeladatot, számjegyet (néhány feladatnál a hozzátartozó instrukcióval együtt), megkönnyítve a feladatok bemutatását.

„A diszkalkulia munkacsoport szándékosan szakított a teljesen számszerűsített és egyetlen mérőszámban kifejezett, igen gyakran stigmatizáló diszkalkulia index koncepcióval, helyette tágabb terület megragadását célozza. A DPV számos olyan területeket is igyekszik megragadni, ami a matematikatanulási probléma differenciál-diagnózisának felállítása szempontjából szükséges, valamint a fejlesztési/kezelési terv kidolgozása, a terápia és a gyermek érdeklődésének és motivációjának fenntartása szempontjából alapvető." (*Rózsa*, 2015c. 17. o.). A DPV ebből a nézőpontból teljesítményorientált mérőeljárás, hiszen az értékelés elsődleges célja a teljes körű állapotfelmérés, a személyiség egészének a megismerése és fejlesztése, ezért a DPV alapvetően a gyermek tevékenységre fókuszál. Nemcsak az elsajátított ismeretekre (leegyszerűsítve helyes vagy helytelen-e az eredmény), hanem a képességekre, készségekre, gondolkodási folyamatokra, viselkedésre, motivációra, stb. és az ezekben bekövetkező változásokra megfelelő súlyozással fókuszál. Ezért a diagnosztikus kategorizáció a tényleges objektív mutató (százalékos teljesítmény) és a minőségi mutatók értékelésének összhangjával történik. A fentiek értelmében tehát a DPV nem tekinthető klasszikus pszichometriai tesztnek, ahol a normák egyértelműen meghatározzák az eredményt, mivel a DPV egy kritériumorientált mérőeljárás, melyben a dinamikus szakértői értékelés is szerepet kap. Ezért a kvalitatív értékelési aspektusok a DPV képzés fontosságát is hangsúlyozzák, mely képzés biztosítja a DPV szakszerű és megbízható alkalmazását (*Rózsa*, 2015c). A tanfolyam lényeges elemei: 1. az alkalmazott mérőeszköz részletes bemutatása; az értékelés folyamatának és az alkalmazott kritériumoknak a megértése; az eredmények értelmezése, interpretációja (differenciáldiagnózis felállítása, vizsgálati vélemény készítése); terápiás, fejlesztési feladatok meghatározása.

Az Értékelő táblázatok a számszerű pontozást, a kvantitatív értékelést és a hibaelemzést, ill. a differenciál-diagnosztikát szolgáló kvalitatív értékelő részt integráltan tartalmazzák.

Az Értékelő táblázatokban az egyes szubtesztekhez, alpontokhoz, feladatcsoportokhoz tartozó Tipikus hibák táblázataiban a tudományos kutatások részletes elemzése és a több évtizedes diagnosztikus és terápiás tapasztalatok alapján a szakértő munkacsoportunk által felállított, az életkortól biztosan elvárható (tipikus fejlődés) és a tantervi követelmények által is meghatározott objektív kritériumok alapján, szakértői konszenzus során történő súlyozással ellátott pontszámmal szükséges értékelni az egyéni aktuális teljesítményt. Ezt követően az Értékelő táblázatok első oldalán lehet összesíteni a pontszámokat. Az egyes szubtesztekben/alpontokban elért nyerspontokat százalékos teljesítménnyé alakítjuk (Nyerspontok–Teljesítményszázalék–Százalékpont). Az így kapott objektív mutatók, melyek alapját a jelen kutatás empirikus mintája alkotta, a gyermek matematikai teljesítményének egyéni mintázatát adja, az első Profilíven rajzolható meg. A DPV-százalékpont (%p) a diagnosztikus besorolás számszerűsített alapját adja.

A komplex értékelés további része a kvalitatív értékelés (Jellemző–Nem jellemző minősítés), melynek egységei:

- Minőségi értékelés (adott szubtesztek/alpontok minőségi értékelései),
- A vizsgálatvezető megfigyelései (részletes megfigyelési szempontok) és Egyéb észrevételek (a vizsgálatvezető feljegyzései a megadott általános megfigyelési szempontok alapján).
- A kvalitatív értékelés területeit és szempontjait a Vizsgálati útmutatók és az Értékelő táblázatok korcsoportonként/osztályfokonként tartalmazzák. A kvalitatív eredményeket további két Profilíven összesítjük. A gyermekről megrajzolható profilívek alapján meghatározhatók a gyermek/tanuló erősségei és gyengeségei, melyek nem csupán a differenciál-diagnosztikához, hanem a célzott, egyénre szabott fejlesztési terv összeállításához is megfelelő támpontot nyújtanak.

A fentiek alapján felállított összetett teljesítménymutatók adják a további teljesítménysávokba való besorolás, státuszdiagnózis objektív alapját.

A komplex értékelés harmadik eleme a speciális anamnézis kérdőíveinek elemzése. Munkacsoportunk több évtizedes gyakorlati tapasztalatai alapján (*Dékány* és *Juhász*, 1999, 2007, *Polgárdi*, 2013) rendszerbe foglaltuk a speciális anamnézis szempontjait, valamint a vizsgálathoz/kontrollvizsgálathoz szükséges kérdéssorokat óvodás és iskolás korcsoportonként, szülő, pedagógus és fejlesztő szakember részére.

A vizsgálat során az általános anamnézist kiegészítjük a speciális anamnézissel, amely kimondottan a gyermek/tanuló tanulásban mutatkozó fejlődésére, szokásaira, jellemzőire kérdez rá, kiemelve a matematikai készségeket, a matematika tanulásában mutatkozó pozitívumokat és eltéréseket, az eddig kapott fejlesztéseket, azok gyakoriságát és formáját. Több nézőpontból (szülő, óvodapedagógus, tanító, fejlesztőpedagógus, terapeuta, korrepetitor) segít megismerni a gyermeket. A speciális anamnézis kérdéssorait a vizsgálatot megelőzően szükséges kitöltve bekérni a szülőtől, a gyermekkel foglalkozó pedagógusoktól (nyomtatott vagy elektronikus formában).

A gyermek a DPV-ben nyújtott teljesítményének értékelése történhet hagyományos (papíralapú) és digitális formában is.

A DPV diagnosztikus rendszere *Gerebenné* (2002) által összefoglalt komplex gyógypedagógiai-pszichológiai állapotmegismerésen nyugvó, feltáró, differenciáló, fejlesztő és nyomonkövető folyamaton alapul: „A tanulási zavar jelenségének feltárását az adott probléma többsíkú megközelítése teszi lehetővé, ami — különböző pedagógiai és pszichológiai vizsgálóeljárások, diagnosztikus módszerek alkalmazása mellett — a jelenség-tünet-ok viszonyrendszerében való gondolkodást jelenti. (…) A folyamatdiagnosztika lehetővé teszi a tanulási zavar többszintű, közelebbről a teljesítmény- és a funkciószint, valamint a biológiai alap szintje mentén történő leírását” (*Gerebenné*, 2002. 241. o.).

A DPV felvétele során végzett részletes (gyógy)pedagógiai megfigyelések, a hibaelemzések, a javasolt (neuro)pszichológiai, gyógypedagógiai vizsgálatok és orvosi vizsgálatok, valamint az anamnesztikus adatok, pedagógiai jellemzés(ek) és a füzetvizsgálat segítik hozzá a vizsgálót a megfelelő okok feltárásához. A komplex rendszerszemléletű diagnosztikai modellt (*Gerebenné*, 2004; *Mohai*, 2009) követve, a komplex szakértői vizsgálat, állapotfelmérés eredményeinek, megfigyeléseinek, ill. **összefüggései**nek elemzése alapján – felülvizsgálat során a módszer-specifikus terápia, komplex ellátás eredményeképp a fejlődés mértékét is figyelembe véve – bio-pszicho-szociális viszonyítási keret (*Gerebenné*, 2004; *Mohai*, 2009; *Lányiné*, 2014) mentén hozható meg a megalapozott, tényekkel alátámasztott (evidence-based) szakmai döntés. Az USA-ból elterjedt oktatási tevékenységek ún. tudományosan megalapozott beavatkozások elvét magyarul *Halász* (2007) ismerteti, a magyar oktatási viszonyokat, lehetőségeket ezen a téren *Csapó* (2008) elemzi. A pedagógiai szakszolgálatok gyakorlatában használatos vizsgálati eszközök jogtisztaságával, sztenderdizáltságával, minőségével, valamint a fejlesztő eszközök és fejlesztő eljárások besorolásával kapcsolatos új elvárásokra *Kapcsáné* és *Szító* (2013), ill. *Szító* (2015) előadásai világítanak rá.

A DPV-Kézikönyv a többféle forrásból származó adatokat felhasználó megbízható szakmai döntés és a hatékony beavatkozásra vonatkozó javaslattétel érdekében tartalmazza az **össze**tett mutatók alapján történő teljesítménysávokba való besorolást (státuszdiagnózis), az ezzel összefüggésben lévő differenciál-diagnosztikai nomenklatúra és a vonatkozó javaslattétel összefoglaló táblázatát (Diagnosztikus kategóriák), valamint a fejlődési diszkalkulia diagnosztikai kritériumának megállapítását (Diagnosztikai kritériumok).

## 4.4. A DPV elméleti alapja, főbb jellemzői és szemlélete

### *4.4.1. Elméleti alapok*

A DPV mérőeljárás – a Dékány–Juhász-féle vizsgálatra épülve – a numerikus megismerés két fő kognitív idegtudományi modelljéhez (*McCloskey*, 1992; *Dehaene* 1992, 2003) igazodik. Vizsgálja a belső reprezentáció elkülönülő hipotetikus rendszereit, az analóg mennyiségrendszert (összehasonlítás, közelítő számolás, becslés), az arab szám formátumot (arab számjegyek szimbolikus rendszere), a verbális rendszert (aritmetikai tények, pl. szorzótábla tárolása és előhívása), az alapvető kimeneti és bemeneti modalitásokat (számfeldolgozás, pl. a számok írása, olvasása). Kiemelt szempont a mérőeljárásban a számolási műveletek komponensei közül a számolási procedúrák (műveletvégzési eljárások) és a konceptuális tudás (aritmetikai szabályok és alapelvek, pl. felcserélhetőség, csoportosíthatóság, inverzitás) megfigyelése is. A vizsgálatban hangsúlyt kap továbbá a fő bázisfunkciók (*Geary*, 1996), a téri-vizuális és a központi végrehajtó rendszer (Krajcsi, 2005, *Szűcs* és *mtsai*, 2014), valamint a munkamemória (*Baddeley*, 2001; *Szűcs* és *mtsai*, 2014) és a nyelvi vonatkozások monitorozása is.

A vizsgálat fő célja a számfogalom (absztrakt, diszkrét szemantikus reprezentáció) és a műveleti fogalom állapotának felmérése, valamint a háttérben álló bázisfunkciók, részképességek működésének feltérképezése. A hibaelemzés módszerével feltárásra kerülnek a tipikus hibák (objektív kritériumok). A feladatsorok összeállítása, az utasítások megfogalmazása, a tudáselemek, készségek többszintű ellenőrzése, a részletes megfigyelési szempontok mind ezt a célt szolgálják.

### *4.4.2. Feladattípusok, feladatok jellege*

A DPV több szubtesztből áll, amelyek további alpontokat/feladatcsoportokat tartalmaznak, megtartva az eredeti vizsgálati egységeket (*Dékány* és *Juhász*, 1999, 2007). Az alpontokon belül a feladatok száma eltérő. Az életkorok/osztályfokok szerint összeállított mérőanyagok feladattípusai analóg módon egymásra épülnek, az intézményi fokozatok növekedésével eltérő számú feladatokból állnak, jellegük is változik az életkori sajátosságokhoz igazítva. A szubtesztek kidolgozása mögött a munkacsoport sokéves fejlesztő munkája áll, amelyet számos gyakorlati tény támaszt alá. A fejlesztést, átdolgozást célzó kutatómunka során nem az volt az alapelv, hogy megfelelő eloszlási mutatókkal rendelkező skálák jöjjenek létre, hanem olyan feladatok kidolgozása, amelyek jól különválasztják a számolási problémával küzdőket a tipikusan fejlődőktől, segítve a problémaazonosítást. Fontos megjegyezni, hogy a normális eloszlás sok hasonló feladat megkonstruálását igényli, ami a DPV felvételi idejét jelentősen megnövelte volna. „Ez a klinikai mintán történő alkalmazás során nem szerencsés, mert a fáradás, a motiválatlanság és a figyelmetlenségből fakadó hibázásokat nehéz különválasztani." (*Rózsa*, 2015c. 10. o.)

Az egyes feladatok feleletalkotó jellegűek, aktív (verbális és/vagy cselekvéses és/vagy írásbeli) válaszadást igényelnek, nem teremtenek olyan helyzetet, ahol a gyerekek helytelen megoldásokkal (pl. feleletválasztásos kérdésekkel) találkoznak (gyógypedagógiai szemlélet). A megújított mérőeszköz némely feladatánál többféle elfogadható válasz is megjelenik.

A DPV számolási feladatai (nehezedő sorrendben) az egyéni algoritmikus műveleti szinteket, sorrendeket tárják fel. Ezen egyéni algoritmusok nem is mindig tudatosak a gyermek részéről – sokszor a vizsgáló számára sem látható, hogy milyen módon számol a gyermek. A vizsgálatvezetőnek viszont folyamatosan arra kell törekednie, hogy az elemi lépések sorrendjét, a számolási technikákat (procedúrákat), az elvonatkoztatás szintjét, a gondolkodási stratégiákat és a kompenzáló eljárásokat feltárja, rögzítse.

A vizsgálat közben a gyermek instrukciót kap arra, hogy hangosan gondolkodjon, bátran használja a megszokott számolási technikáit, eszközeit, fogalmazza meg a stratégiáját: hangosan számoljon be, mire gondol a feladat megoldása közben, mondja ki a konkrét számolásának, feladatmegoldásának menetét. Ennek során képet kaphatunk arról a tudásról is, melyet a metakogníció (magyarul *Csíkos*, 2016) jelent. A saját mentális folyamataink ismerete magában foglalja a problémamegoldás közben végrehajtott önszabályozó mechanizmusokat is (tervezési, nyomon követési és kontrollfolyamatok), azaz a saját tudás működtetésének a kontrollját (*Flavell*, 1971, 1979). Kutatások szerint a metakognitív készségek az általános intelligencia színvonalától viszonylag függetlenek (*de Corte*, 2001). A DPV-ben az erre irányuló kvantitatív változókkal nehezen megragadható információkat a vizsgálatvezető folyamatosan feljegyzi. Ilyen értelemben a DPV nemcsak struktúra-, hanem eljárásorientált vizsgálati módszer is egyben. A diszkalkulia munkacsoport véleménye szerint alapvető, hogy mind a diagnoszta, mind a tanító, terapeuta szemlélete *Ginsburg* (1998) attitűdjét képviselje: képessé tegye önmagát és a gyermeket is arra, hogy hozzáférjen, megvizsgálja és megfogalmazza gondolkodási folyamatát azért, hogy „tökéletesítse azt".

A DPV ily módon elkülönül más statikus vizsgáló eljárásoktól: az objektivitást célzó, sztenderd kérdések egyidejűleg a dinamikus értékelés jellemzőit (magyarul összefoglalja *Bohács*, 2010) is magában hordozzák, mely által a vizsgálatvezető a személyes jelenlétével több információt tud gyűjteni a gyermek gondolkodási folyamatairól, a metakognitív aspektusairól, a feladatmegoldást kísérő nem intellektuális faktorokról (pl. motiváció, frusztráció-tolerancia). A DPV ezzel összefüggésben strukturális elemzést nyújt, ezen belül is a válaszmintázatok elemzésével feltárhatók az egyéni képességprofilok hátterei. Ezzel nyílik lehetőség a feltárt szükségletekhez igazodó, hatékony intervenció megtervezésére. Ezáltal a DPV kliensközpontú mérőeljárás, mely a fejlesztés oldaláról közelíti meg a gyermek problémáit. A számítógépes teszteknél kevésbé van jelen humán mediáció, így szűkül a megfigyelési lehetőség a kvalitatív elemzéshez. A fentiekkel összefüggésben a diagnosztikus kör pontjait (problémaazonosítás, diagnózis, prognózis, fejlesztési javaslatok, kontrollvizsgálatok) a DPV azonos hangsúllyal kezeli (*Polgárdi*, 2015).

### *4.4.3. További gyógypedagógiai szemléletű vizsgálati alapelvek*

A vizsgálat a különböző képességeket, készségeket, ismereteket különböző osztályfoknak megfelelő szakaszokban, az életkori és tantervi elvárásoknak megfelelő szinteken méri fel. A DPV ötvözi a tudásszintmérés és a képességvizsgálat jellemzőit (*Vidákovich*, 2001; *Bloom,* 1956; *Jukes és Dosaj,* 2006). A tanulás folyamatában három szint épül egymásra: a ráismerés (megértés), a reprodukálás (pl. analógiák használata) és az alkalmazás szintje. A vizsgáló ennek érdekében meghatározott standard keretek között fokozatos, hierarchikus módon segíti a válaszadást, és bizonyos esetekben megmondja a helyes választ. (*Polgárdi*, 2015) Ennek felel meg a vizsgálat során a „taníthatóság próbája" (gyakorlási transzfer) és a reakcióidő-megfigyelés, melyek a DPV kiemelt jelentőségű gyógypedagógiai alapelvei. A DPV maximális teljesítményhatárait a tantervi elvárások jelölik ki, ennek ellenére a DPV nem normaorientált, hanem kritériumorientált vizsgálóeljárás, annak ismérveivel és pszichometriai jellemzőivel. „Mivel a kritériumorientált eljárás során a teljesítmények megítélése, minősítése nem a csoport eredményeihez viszonyítva történik, a hangsúly az elemzésben sem az életkorokra, évfolyamokra jellemző statisztikai paraméterek kiszámításán van. A legfontosabb ebben az esetben az egyéni teljesítmények és a megállapított kritérium eltérésének vizsgálata." (*Vidákovich*, 2001. 323. o.)

Összefoglalva, a DPV komplex gyógypedagógiai-pszichológiai szemléletet tükröz: nem csak a diszkalkulia diagnosztizálását tűzi ki céljául, hanem a megfelelő terápia kiválasztásához és a pozitív terápiás környezet kialakításához szükséges erősségek meghatározásához is hasznos támpontokat ad, és nem utolsó sorban a differenciál-diagnosztikát is segíti. Ezzel összefüggésben nem a kizárólagos számszerűsítést igyekszik elérni, hanem inkább egy klienszközpontú mérőeszköz tulajdonságait tartja szem előtt, ami sokkal inkább az egyedi sajátosságokra összpontosít, nem a normákhoz való összehasonlítás lehetőségére. A mérések során tehát az egyén van a középpontban, a különböző területeken elért eredmények értékelése az elvárt teljesítményhez, azaz tudományosan megalapozott és részletesen kidolgozott kritériumokhoz (a tipikus fejlődés jellemzői és tantervi követelmények alapján) és önmagához mérten történik (*Rózsa*, 2015b). A méréssel lehetővé válik a gyermekek egyéni vagy kiscsoportos hatékony matematikai fejlesztésének és felzárkóztatásának megsegítése (intenzitás és tartalom kijelölése) a nevelési-oktatási intézményekben, útmutatás a fejlesztést végző szakember, valamint az óvodapedagógus és a tanító számára egyaránt – támogatva a tanulási problémával küzdő gyermekek, tanulók beilleszkedését, együttnevelését. Fontos megjegyezni, hogy ehhez nélkülözhetetlen az óvodában, majd az iskolában preventív és integrációs jelleggel a hatékonyan működő tanulásszervezési, módszertani, eszközbeli stb. változások alkalmazása, legfőképp a pedagógusok képzése, felkészítése a változtatások befogadására, valamint a folyamatos, problémaorientált továbbképzésük biztosítása. A Diszkalkulia Kutatócsoport ebben hosszú évek óta ebben aktív szerepet vállal.

### *4.5. Összefoglalás a Diszkalkulia Pedagógiai Vizsgálatáról (DPV)*

A Diszkalkulia Pedagógiai Vizsgálata felhasználja a gyógypedagógia és a határtudományok legújabb ismereteit. A megújítás során a Dékány–Juhász-féle diszkalkulia pedagógiai vizsgálat feladatai kiegészültek a modern idegtudományi kutatások modelljei alapján. A vizsgálóeljárás megőrizve az eredeti mérőeljárás koncepcióját és alapelveit, ill. feladatcsoportjait, továbbra is struktúra- és eljárásorientált: felméri a gyermek szám- és műveletfogalmi szintjét, folyamatában elemzi a működésmódokat, valamint a meglévő, jól működő képességeket, azok színvonalát, amelyre építve célzottan tervezhető a fejlesztés – immáron objektív kritériumok és részletesen kidolgozott megfigyelési szempontok, valamint a speciális anamnézist tartalmazó kérdőívek alapján. A vizsgálat elvárt megfigyelési szempontjai közül a legfontosabbak a reakcióidő, a részletes hibaelemzés, valamint a taníthatóság. Mindezek továbbra is feltételezik az egyénközpontú (egyedi sajátosságokat és szükségleteket figyelembe vevő) motiváló és dinamikus vizsgálatvezetést, értékelést, mely nagyban tükrözi a szerzők, ill. a munkacsoport komplex gyógypedagógiai-pszichológiai szemléletét.

A fentiek alapján a DPV a következő feltételeknek tesz eleget: félévenkénti mérőanyagot tartalmaz, mely 10 életkori változatot biztosít analóg, egymásra épülő struktúrákkal. Objektív kritériumokat állít fel, megfelelve a NAT elvárásainak is, adekvát válaszkényszerkövetelményt támaszt és reakcióidő-megfigyelésre ad lehetőséget. Lehetővé teszi az egyéni teljesítmény háttérében meghúzódó rendszerek, ill. részképességek feltérképezését (részletes hibaelemzés). Átfogó kép felállítására ad módot a gyermek matematikai és kognitív képességeinek, készségeinek szintjéről, gondolkodási stratégiáiról, kompenzációs mechanizmusairól (egyéni teljesítményprofil). Segít elkülöníteni a diszkalkulia, illetve a matematikatanulási nehézség és a számolási gyengeség (ép övezetbe tartozó alacsonyabb intelligencia-szintnek megfelelő gyenge matematikai képességek) eseteit, valamint elősegíti az oktatási hibából, esetleg a környezeti hátrány okozta alulteljesítésből, lemaradásból keletkező problémák kizárását (tipikus és atipikus fejlődés elkülönítése). Az értékelés komplexitását a kvantitatív és a kvalitatív eredmények, valamint a speciális anamnézis kérdőívek elemzésének az összehangolása adja. Rendelkezik a terápia-relevancia és a folyamatdiagnózis ismérveivel.

Összegzésül elmondhatjuk, hogy a DPV egy sokoldalú és komplex kliens-centrikus mérőeljárás. Megbízható használata, valamint az elvárt dinamikus szakértői értékelés megfelelő képzést igényel.

### *4.6. Szakmai tervek, fejlesztési elgondolások*

A DPV 1–2. óvodáskortól kezdve az iskoláskorú alsó tagozatos gyermekek vizsgálatát öleli fel, értékelése papíralapú, amelynek továbbfejlesztését tervezzük: Ehhez a továbbiakban a már meglévő diagnosztikus tapasztalataink további rendszerezése, adatelemzések, szakértői döntést segítő fejlesztő-kutató munka, valamint a vizsgáló eljárás bemérésének még szélesebb körű kiterjesztése szükséges a felső tagozatos és a középiskolás korosztályra (DPV 3–4.). *Pataki-Juhász Andrea* (2016) szakdolgozat keretében a DPV 2. adaptálási lehetőségeit kutatta mozgáskorlátozott kisiskolások körében. További célkitűzés a DPV 1–2. mérési adatainak gyűjtése más diagnosztikus kategóriába tartozó sajátos nevelési igényű gyermekeknél is. Ezen kívül fontos feladat bizonyos feladatcsoportok adaptálása előszűrés kidolgozása céljából, és digitális továbbfejlesztés az értékelés terén (értékelő szoftver).

## Felhasznált irodalom


Ansari, D. & Kramiloff-Smith, A. (2002): Atypical trajectories of number development: a neuroconstructivist perspective. *Trends in Cognitive Sciences*, **6.,** 12. sz., 511–516. https://doi.org/10.1016/S1364-6613(02)02040-5

Ashcraft, M. H. & Kirk, E. P. (2001): The relationships among working memory, math anxiety, and performance. *Journal of experimantal psychology*. General, **130.,** 2. sz., 224– 237. https://doi.org/10.1037/0096-3445.130.2.224

Ashkenazi, S., Rubinsten, O. & Henik A. (2009): Attention, automaticity, and developmental dyscalculia. *Neuropsychology*, **23**., 4. sz., 535–540. https://doi.org/10.1037/a0015347

Baddeley, A. (2001): *Az emberi emlékezet*. Osiris Kiadó, Budapest.

Blair, C. & Razza, R. P. (2007): Relating effortful control, executive function, and false belief understanding to emerging math and literacy ability in kindergarten. *Child Development,***78.**, 2. sz., 647–663. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.01019.x

Beilock, S., L., Gunderson, E.A., Ramirez, G. & Levine, S. C. (2010): Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America,* **107.**, 5. sz., 1860–1863. https://doi.org/10.1073/pnas.0910967107

Bloom, B. S. (1956): *Taxonomy of Educational Objectives: Cognitive Domain*. McKay, New York.

BNO-10 (1995): *A betegségek és az egészséggel kapcsolatos problémák nemzetközi statisztikai osztályozása*. Tízedik revízió. Népjóléti Minisztérium, Budapest.

BNO-10 Zsebkönyv (2004): *DSM-IV-TR meghatározásokkal.* Animula Kiadó, Budapest.

Bohács Krisztina (2010): *A dinamikus értékelés.* Magyar Pedagógia, **110.,** 4. sz., 311–328. URL: http://www.magyarpedagogia.hu/document/Bohacs_MP1104.pdf

Bull, R. & Scerif., G. (2001): Executive functioning as a predictor of children's mathematics ability: inhibition, switching, and working memory. *Developmental Neuropsychology,* **19.,** 3. sz., 273–293. https://doi.org/10.1207/S15326942DN1903_3

Butterworth, B. (2003): *Dyscalculia Screener*. Nelson Publishing Company Ltd., London.

Carey, E., Hill F., Devine, A. & Szűcs, D. (2016): The chicken or the egg? The directions of the relationship between mathematics anxiety and mathematics performance. *Frontiers in Psychology.* URL: https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fpsyg.2015.01987/full

Carey, E., Hill, F., Devine, A. & Szűcs, D. (2017): The Modified Abbreviated Math Anxiety Scale: A Valid and Reliable Instrument for Use with Children, *Frontiers in Psychology,* **8.**, 11. , 1–13. URL: https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fpsyg.2017.00011/full

Clearman, J., Klinger, V. & Szűcs, D. (2017): Visuospatial and verbal memory in mental arithmetic. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, **70.,** 9. sz., 1837–1855. URL: http://journals.sagepub.com/doi/10.1080/17470218.2016.1209534

Csapó Benő (1987): A kritérium-orientált értékelés. *Magyar Pedagógia*, **87.,** 3. sz., 247–266. URL: http://www.edu.u-szeged.hu/~csapo/publ/1987_Csapo_kriteriumorientalt.pdf

Csapó Benő (2002): *Az iskolai tudás.* Osiris Kiadó, Budapest. URL: http://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tkt/iskolai-tudas-eloszo/index.html

Csapó Benő (2005): *Az előzetesen megszerzett tudás mérése és elismerés*. Kutatási Zárótanulmány, Nemzeti Felnőttképzési Intézet, Budapest. URL: http://www.edu.u-szeged.hu/~csapo/publ/CSB_ElozetesTudas.pdf

Csapó Benő (2008): *A tanulás és tanítás tudományos megalapozása*. In: Fazekas Károly, Köllő János és Varga Júlia (szerk.) *Zöld könyv a magyar közoktatás megújításáért*. Oktatás és Gyermekesély Kerekasztal Ecostat, Budapest, 327–233. URL: http://mek.oszk.hu/08200/08222/08222.pdf

Csépe Valéria (2008): *A különleges oktatást, nevelést és rehabilitációs célú fejlesztést igénylő (SNI) gyermekek ellátásának gyakorlata és a szükséges teendők.* In: Fazekas Károly, Köllő János és Varga Júlia (szerk.) *Zöld könyv a magyar közoktatás megújításáért.* Oktatás és Gyermekesély Kerekasztal Ecostat, Budapest, 139–165. URL: http://mek.oszk.hu/08200/08222/08222.pdf

Csíkos Csaba (2006): Tudatosság és metakogníció viszonya. Az ezredforduló interdiszciplináris megközelítései. *Iskolakultúra*, **16.**, 12. sz., 69–82. URL: http://www.staff.u-szeged.hu/~csikoscs/publik/2006-12.pdf

Csonkáné Polgárdi Veronika (2012): Ismertető a Diszkalkulia Pedagógiai Vizsgálatáról óvodás és kisiskolás korú gyermekeknél (1. rész). A Dékány–Juhász-féle diszkalkulia pedagógiai vizsgálat sztenderdizált változata. *Gyógypedagógiai Szemle*, **40.**, 4. sz., 343–351. URL: http://www.prae.hu/prae/gyosze.php?menu_id=102&jid=41&jaid=605

Csonkáné Polgárdi Veronika és Dékány Judit (2013): Ismertető a Diszkalkulia Pedagógiai Vizsgálatáról óvodás és kisiskolás korú gyermekeknél (2. rész). A Dékány–Juhász-féle diszkalkulia pedagógiai vizsgálat sztenderdizált változata. *Gyógypedagógiai Szemle*, **41.,** 2. sz., 118–136. URL: http://www.prae.hu/prae/gyosze.php?menu_id=102&jid=43&jaid=622

De Corte, E. (2001): Az iskolai tanulás: legfrissebb eredmények és a legfontosabb tennivalók. *Magyar Pedagógia*, **101.**, 4. sz., 413-434.

Dehaene, S. (1992): Varieties of numerical abilities. *Cognition*, **44.,**1-2. sz. 1–42. https://doi.org/10.1016/0010-0277(92)90049-N

Dehaene, S. (2003): *A számérzék. Miként alkotja meg az emberi elme a matematikát?* Osiris Kiadó, Budapest.

Dehaene, S. (2004): *Evolution of human cortical circuits for reading and arithmetic: The "neuronal recycling" hypothesis.* In: Dehaene S, Duhamel, J.-R., Hauser, M. D. & Rizzolatti, M. (szerk.) *From monkey brain to human brain.* MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 133–158.

Dehaene, S., Molko, N., Cohen, L. & Wilson, A. J. (2004): Arithmetic and the brain. *Current Opinions in Neurobiology*, **14.,** 2. sz., 218–224. https://doi.org/10.1016/j.conb.2004.03.008

Delazer, M., Girelli, L., Graná, A. & Domahs, F. (2003): Number processing and calculation. Normative data from healthy adults. *The clinical neuropsychologist*, **17.**, 3. sz., 331–350.

DeLoache, J. S., (1995): Early symbolic understanding and use. In: Medin, D. (szerk.) *The psychology of learning and motivation*, Vol.33., Academic Press, New York, 65–114.

Dékány Judit (1986): A dyscalculia irodalma. A terápia első szakasza. In: Ajtony Péter (szerk.) *Logopédia a gyakorlatban*. Tankönyvkiadó, Budapest, 129–138.

Dékány Judit (1989): Dyscalculia prevenció. Vizsgálat és terápia. *Gyógypedagógiai Szemle*, **16.,** 3. sz., 203–212.

Dékány Judit (1995): *Kézikönyv a diszkalkulia felismeréséhez és terápiájához*. Bárczi Gusztáv Gyógypedagógiai Tanárképző Főiskola, Budapest.

Dékány Judit és Juhász Ágnes (1999): A diszkalkulia vizsgálata. In: Juhász Ágnes (szerk.) *Logopédiai vizsgálatok kézikönyve*. Új Múzsa Kiadó, Budapest, 117–138.

Dékány Judit és Juhász Ágnes (2007): A diszkalkulia vizsgálata. In: Juhász Ágnes (szerk.) Logopédiai vizsgálatok kézikönyve. Logopédia Kiadó, Budapest, 117–138.

Dékány Judit és Mohai Katalin (2012): *A Diagnosztikai kézikönyv* „Egyéb pszichés fejlődési zavarral küzdő gyermekek, tanulók komplex vizsgálatának diagnosztikus protokollja – Specifikus tanulási zavarok (írott nyelvhasználat zavarai, diszkalkulia)" c. 9. fejezete. Készült a „Koncepció kialakítása a diagnosztikus ellátórendszer intézményi struktúrájának megújítására és koncepció kidolgozása diagnosztikus módszertani protokollok egységes, átfogó alkalmazására, valamint Diagnosztikai kézikönyv elkészítése" c. kutatási program keretében, az Educatio Társadalmi Szolgáltató Nonprofit Kft. megbízásából a „21. századi közoktatás – fejlesztés, koordináció" (TÁMOP-3.1.1-08/1-2008-0002) kiemelt projekt keretében.

De Smedt, B. & Gilmore, C. (2011): Defective number module or impaired access? Numerical magnitude processing in first graders with mathematical difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, **108.**, 2. sz., 278–292. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2010.09.003

Desoete, A. (2006): *Dyscalculia in Belgium: definition, prevalence, subtypes, comorbidity, and assessment.* Department of Experimental Clinical and Health Psychology, Ghent University, Ghent.

Desoete, A. & Roeyers, H. (2002): Off-line metacognition. A domain-specific retardation in young children with learning disabilities? *Learning Disability Quarterly*. **25.**, 2. sz., 123–139.

Desoete, A. & Roeyers, H. (2005): Cognitive skills in mathematical problem solving in Grade 3. *British Journal of Educational Psychology*, Vol. 75., 119–138. https://doi.org/10.1348/000709904X22287

Devine, A., Fawcett,K. Szűcs, D. & Dowker, A. (2012): Gender differences in mathematics anxiety and the relation to mathematics performance while controlling for test anxiety. *Behavioral and Brain Functions.* **8.,** 33. sz. https://doi.org/10.1186/1744-9081-8-33

Devine, A., Hill, F., Carey, E. & Szűcs, D. (2017): Cognitive and Emotional Math Problems Largely Dissociate: Prevalence of Developmental Dyscalculia and Mathematics Anxiety. *Journal of Educational Psychology.* http://dx.doi.org/10.1037/edu0000222

Devine, A, Soltész, F., Nobes, A., Goswami,U. & Szűcs, D. (2013): Gender differences in developmental dyscalculia depend on diagnostic criteria. *Learning and Instruction,* Vol. 27.,31–39. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.02.004

A DSM-IV *Diagnosztikai kritériumai* (1994): Animula Kiadó, Budapest.

DSM-IV (2001): *Text Revision. A DSM-IV módosított szövege.* Animula, Budapest.

DSM-5. (2013): *Diagnostic andde corte Statistical Manual of Mental Disorders. Fifth. Edition*. American Psychiatric Association, APA, Washington, DC.

DSM-5 (2014): *Referencia kézikönyv a DSM-5 diagnosztikai kritériumaihoz.* Oriold és Társai, Budapest.

ELTE GYOSZI (GYOPSZ) Diszkalkulia munkaközössége (2017): *Kézikönyv a DPV alkalmazásához.* In: Dékány Judit (szerk.) *Alapismeretek a DPV-ről*. 1. MAPPA 1. fejezet, 1–64. Logopédia Kiadó, Budapest.

Farkasné Gönczi Rita (2007): *A diszkalkulia fogalma a neurológia, a pszichológia és a gyógypedagógia aspektusából.* Szakdolgozat. ELTE BGGYFK, Budapest.

Farkasné Gönczi Rita (2008): A diszkalkulia a gyógypedagógia és határtudományai aspektusából. *Gyógypedagógiai Szemle*. **36.**, 3.sz., 204-214.
URL: http://www.prae.hu/prae/gyosze.php?menu_id=102&jid=21&jaid=173

Farkasné Gönczi Rita (2014): *A számolási zavarok területére kidolgozott, számítógép alapú, mesébe ágyazott diagnosztikus eszköz fejlesztésének bemutatása* In: Nagyházi Bernadette (szerk.) *Innováció a neveléstudomány elméleti és gyakorlati műhelyeiben*. Tanulmánykötet. Kaposvári Egyetem, Kaposvár (elektronikus kiadvány a TÁMOP 4.1.2.B.2-13/1. Pedagógusképzést segítő hálózatok továbbfejlesztése a Dél-Dunántúl régióban c. pályázat keretében), 20–28.
URL:http://trainingandpractice.hu/sites/default/files/egyeb kotetek/INNOVACIO_TK_2014.pdf

Fejes József Balázs és Szenczi Beáta (2010): Tanulási korlátok a magyar és amerikai szakirodalomban. *Gyógypedagógiai Szemle*, **38.,** 4. sz., 273–287.
URL: http://www.prae.hu/prae/content/gyosze/gyosze_2010_4.pdf

Fias, F., Menon V. & Szűcs, D. (2013): Multiple components of developmental dyscalculia. *Trends in Neuroscience and Education*, **2.**, 2. sz., 43–47.
https://doi.org/10.1016/j.tine.2013.06.006

Flavell, J. H. (1971): First discussant's comments: What is memory development the development of? *Human Development*, **14.**, 4. sz, 272–278.

Flavell, J. H. (1979): Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist*, **34.**, 10. sz., 906–911.
https://doi.org/10.1037/0003-066X.34.10.906

Geary, D. C. (1993): Mathematical disabilities – cognitive, neuropsychological, and genetic components. *Psychological Bulletin*, **114.,** 2. sz., 345–362.
https://doi.org/10.1037/0033-2909.114.2.345

Geary, D. C. (1996): *Biológia, kultúra és a nemzetek közti különbségek a matematikai képességekben*. In: Sternberg, R. J. & Ben-Zeev, T. (szerk) *A matematikai gondolkodás természete.* 141–171. Vince Kiadó, Budapest.

Geary., D. C. (2004): Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities,* **37.**, 1. sz., 4–15.
https://doi.org/10.1177/00222194040370010201

Gerebenné Várbíró Katalin (2002): A tanulási zavar jelenségkörének gyógypedagógiai pszichológiai értelmezése. In: Zászkaliczky Péter (szerk.) *„... önmagában véve senki sem...” Tanulmányok a gyógypedagógiai pszichológia és határtudományai köréből Lányiné dr. Engelmayer Ágnes 65. születésnapjára*. 2. kiadás, ELTE Bárczi Gusztáv Gyógypedagógiai Főiskolai Kar, Budapest, 216–245.

Gerebenné Várbíró Katalin (2004): *Diagnosztika és gyógypedagógia* In: Gordosné Szabó A. (szerk) *Gyógyító pedagógia-nevelés és terápia*. Medicina Könyvkiadó, Budapest, 87–104.

Ginsburg, H. P. (1998): Toby matekja. In: Steinberg, R. J. & Ben-Zeev, T. (szerk.) *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest, 175–199.

Gresham, F. M. (2002): Responsiveness to intervention: An alternative approach to the identification of learning disabilities. In: Bradley, R. Danielson, L. & Hallahan, D. P. (szerk.) *Identification of learning disabilities: Response to treatment*. Erlbaum, Mahwah, NJ, 467–519.

Griffin (2007): Early intervention for children at risk of developing mathematical learning difficulties. In: Berch, D. B. & Mazzocco, M. M. (szerk.) *Why is math so hard for some children?: The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities.* Brookes Publishing, Baltimore, 373–396.

Gross–Tsur, V., Manor O. & Shalev, R. S. (1996): Developmental Discalculia: Prevalence and Demographic Features. *Developmental medicine and child neurology*, **38.**, 1. sz., 25–33.

Halász Gábor (2007): *Tényekre alapozott oktatáspolitika és oktatásfejlesztés*. Tanulmány a magyar miniszterelnök által összehívott Oktatási Kerekasztal titkárságának a megbízásából. URL: http://halaszg.ofi.hu/download/Evidence_based_study.pdf

Espy, K.A., McDiarmid, M.M., Cwik, F., Stalets, M. M., Hamby, A. & Senn, T. E. (2004): The contribution of executive functions to emergent mathematic skills in preschool children. *Developmental Neuropsychology*, **26.,** 1. sz., 465–486.
https://doi.org/10.1207/s15326942dn2601_6

Hill, F., Irene C., Mammarella, I. C., Devine, A., Caviola, S., Passolunghi, M. C., Szűcs & D. (2016): Maths anxiety in primary and secondary school students: Gender differences, developmental changes and anxiety specificity. *Learning and Individual Differences,* **48.**, 45–53. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2016.02.006

Hopko, D. R., Mahadevan, R., Bare, R. L. & Hunt, M. K. (2003): The abbreviated math anxiety scale (AMAS). *Assessment*, **10.**, 2. sz., 178–182. https://doi.org/10.1177/1073191103010002008

IDEA (2004): http://idea.ed.gov/

Igács János, Janacsek Karolina és Krajcsi Attila (2008): A Numerikus Feldolgozás és Számolás Teszt (NFSZT) magyar változata. *Magyar Pszichológiai Szemle*, **63.**, 4. sz., 633–649. https://doi.org/10.1556/MPSzle.63.2008.4.2

Jármi Éva (2012): Számolási képességek fejlődése óvodás és kisiskolás korban. *Pszichológia,* **32.,** 4 sz., 317–339. https://doi.org/10.1556/Pszicho.32.2012.4.2

Jármi Éva (2013): *Alapvető számolási képességek tipikus és atipikus fejlődése – a számolási zavar diagnosztikája.* Doktori (PhD) disszertáció. ELTE, Budapest.

Kapcsáné Németi Júlia és Szitó Imre (2013): *Minőségi kritériumok és szakmai szabályozók a szakszolgálati munkában*. Előadás. Educatio NKft. TÁMOP 3.4.2.B. kiemelt projektjének 2013. 12. 10-én megtartott Műhelymunkája

Kaufman, L. & Neuerk, H.-C. (2005): Numerical development: Current issues and future perspectives. *Psychology Science*, **42.**, 1. sz., 142–170.

Kaufman L., Nuerk H. C., Graf, M., Krinzinger, H., Delazer, M. & Willmes, K. (2008): *TEDI-MATH.* Test zur Erfassung numerisch-rechnerischer Fertigkeiten vom Kindergarten bis zur 3. Klasse. Deutschsprachige Adaptation des Test Diagnostique des Compétences de Base en Mathématiques. (TEDI-MATH) von Marie-Pascale Noel, Jaques Grégoire und Catherine Van Nieuwenhoven. Verlag Hans Huber Hogrefe AG, Bern.

Karmiloff-Smith, A. (2006): The tortuous route from genes to behavior: A neuroconstructivist approach. *Cognitive Affective & Behavioral Neuroscience*, **6.,** 1. sz., 9–17. https://doi.org/10.3758/CABN.6.1.9

Kosc, L. (1974): Developmental dyscalculia. *Journal of Learning Disabilities*, **7., 3.** sz., 164–177. https://doi.org/10.1177/002221947400700309

Koontz, K. L. & Berch, D. B. (1996): Identifying simple numerical stimuli: processing inefficiencies exhibited by arithmetic learning disabled children. *Mathematical Cognition*, **2.,** 1. sz., 1–23. https://doi.org/10.1080/135467996387525

Koumoula, A., Tsiromi, V., Stamouli,V., Bardani,I., Siapati, S. & Graham, A. (2004): An epidemiological study of number processing and mental calculation in Greek school children. *Journal of Learning Disabilities,* **37.,** 5. sz., 377–388. https://doi.org/10.1177/00222194040370050201

Kovas, Y. & Plomin, R. (2007): Learning abilities and disabilities – Generalist genes, specialist environments. *Current Directions in Psychological Science*, **16.**, 5. sz., 284–288. https://doi.org/10.1111/j.1467-8721.2007.00521.x

Krajcsi Attila (2003): Numerikus képességek. *Erdélyi Pszichológiai Szemle*, **4.**, 4. sz., 331–382.

Krajcsi Attila (2005): Numerikus feladatok mögött meghúzódó elemi funkciók mérése a szelektív terhelés módszerével. *Magyar Pszichológiai Szemle*, **60.,** 4. sz., 457–478.

Krajcsi Attila (2008): A numerikus képességek sérülései és a diagnózis nehézségei. *Pedagógusképzés*, **6.**, 1–2 tematikus szám: *A nevelés és az új idegtudomány*. 101–125.

Krajcsi Attila (2010): A numerikus képességek zavarai és diagnózisuk. *Gyógypedagógiai Szemle*, **38.,** 2. sz., 93–113. URL: http://www.prae.hu/prae/gyosze.php?menu_id=102&jid=32&jaid=468

Krajcsi Attila és Hallgató Emese (2012): Fejlődési diszkalkulia diagnózisa felnőtteknél: Az Aritmetikai Kognitív Fejlődési Képességek teszt. *Gyógypedagógiai Szemle*, **40.,** 4. sz., 330–342.

Krajcsi Attila, Racsmány Mihály, Igács János és Pléh Csaba (2007): *Fejlődési zavarok diagnózisa reakcióidő méréssel.* In: Racsmány Mihály (szerk:) *A fejlődés zavarai és vizsgálómódszerei. Neuropszichológiai diagnosztikai módszerek.* 210–239. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Krüll, K. E. (2000): *A diszkalkuliás (számolásgyenge) gyerekek.* Akkord Kiadó, Budapest.

Lányiné Engelmayer Ágnes (2014): Változásban a pszichológiai és gyógypedagógiai diagnosztika. *Neveléstudomány*, **3.**, 33–52. URL: http://nevelestudomany.elte.hu/downloads/2014/nevelestudomany_2014_3_33-52.pdf

Lányiné Engelmayer Ágnes és Kiss László (2013): *A (gyógy)pedagógiai vizsgálat fő elvei, gyakorlati kérdései és illeszkedése a komplex diagnosztikus folyamatba.* In: Zsoldos Márta (szerk.) *(Gyógy)pedagógiai diagnosztika és tanácsadás: Kézikönyv a nevelési tanácsadókban, szakértői és rehabilitációs bizottságokban végzett komplex vizsgálathoz.* Fogyatékos Személyek Esélyegyenlőségéért Közalapítvány. 1–38.

Lányiné Engelmayer Ágnes és Takács Katalin (2004): „Nem csak a sérült képességeket kell vizsgálni, hanem azt az embert, aki ezeknek a hordozója…" A fogyatékosság jelensége a pszichológiában. In: Zászkaliczky Péter és Verdes Tamás (szerk.) *A tágabb értelemben vett gyógypedagógia.* ELTE BGYPFK, Budapest.

Láz Csabáné és Dékány Judit (2016): A Diszkalkulia Pedagógiai Vizsgálat (DPV) és a Test Diagnostique des Compéten ces de Base en Mathéma (TEDI-MATH) gyógypedagógiai szempontú összehasonlítása (4. rész). *Gyógypedagógiai Szemle*, **44.,** 1. sz., 31–54. URL: http://www.prae.hu/prae/gyosze.php?menu_id=102&jid=56&jaid=773

Lewis, C., Hitch, G. J. & Walker P. (1994): The prevalence of specific arithmetic difficulties and specific reading difficulties in 9- to 10-year old boys and girls. *Journal of Child Psychology and Psychiatry,* **35.,** 2. sz., 283–292. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1994.tb01162.x

Light, J., G. & DeFries J., C. (1995): Comorbidity of Reading and Mathematics Disabilities. *Genetic and Environmental Etiologies,* **28.,** 2. sz., 96–106. https://doi.org/10.1177/002221949502800204

Manor, O., Shalev, R.S., Joseph & A., Gross-Tsur, V. (2001): Arithmetic skills in kindergarten children with developmental language disorders. *European Journal of Pediatric Neurology,* **5.,** 2. sz., 71–77. https://doi.org/10.1053/ejpn.2001.0468

Mazzocco, M. & Myers, G. (2003): Complexities in identifying and defining mathematics learning disability in the primary school-age years. *Annals of Dyslexia*, **53.,** 1. sz., 218–253. https://doi.org/10.1007/s11881-003-0011-7

Márkus Attila (1999): Számolási zavarok a neuropszichológia szemszögéből. *Fejlesztő Pedagógia, Különszám*, 151–163.

Márkus Attila (2007): *Számok, számolás, számolászavarok*. Pro Die Kiadó, Budapest.

Márkus Attila (2010): Számok, számolás, számolászavarok a kognitív neurológia megközelítésében. *Ideggyógyászati Szemle*, **63.** ,3–4. sz., 95–221.

Márkus Attila, Tomasovszki László és Barczi Judit (2001): Diszkalkulia (Dyscalculia – DC) és a figyelemzavar-hiperaktivitás szindróma (Attention Deficit with Hyperactivity – ADHD). *Magyar Pszichológiai Szemle*, **55.,** 4. sz., 567–582. https://doi.org/10.1556/MPSzle.55.2000.4.14

McCloskey, M. (1992): Cognitive mechanisms in numerical processing: Evidence from acquired dyscalculia. *Cognition*, **44**., 1–2. sz., 107–157. https://doi.org/10.1016/0010-0277(92)90052-J

Mesterházi Zsuzsa (1999, szerk.): *Diszkalkuliáról – pedagógusoknak*. ELTE Bárczi Gusztáv Gyógypedagógiai Főiskolai Kar, Budapest.

Mesterházi Zsuzsa (1999): *A matematikai feladatmegoldások hibái*. In: Mesterházi Zsuzsa (szerk.) *Diszkalkuliáról – pedagógusoknak*. Bárczi Gusztáv Gyógypedagógiai Tanárképző Főiskola, Budapest, 17–38.

Miller, S. P. & Mercer, C. D. (1997): Educational aspects of mathematics disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, **30.**, 1. sz., 47–56. https://doi.org/10.1177/002221949703000104

Mohai Katalin (2009): A diagnosztika szerepe a sikeres fejlesztésben. *Gyógypedagógiai Szemle*, **37.**, 5. sz., 331–342. URL: http://www.prae.hu/prae/gyosze.php?menu_id=102&jid=30&jaid=430

Murfy, M. M., Mazzocco, M. M. M, Hanich, L.B. & Early M. C (2007): Cognitive characteristics of children with mathematics learning disability (MLD) vary as a function of the cutoff criterion used to define MLD. *Journal of Learning Disabilities*, **40.,** 5. sz., 458–478. https://doi.org/10.1177/00222194070400050901

Nagyné Réz Ilona, Csepregi András, Puhala Ildikó és Bozsikné Vig Marianna (2014): *A szakértői bizottsági tevékenység területére kifejlesztett protokoll.* Educatio Társadalmi Szolgáltató Nonprofit Kft. „Sajátos nevelési igényű gyerekek integrációja (Szakszolgálatok fejlesztése)" c. TÁMOP-3.4.2.B-12-2012-0001 projekt keretében.

Noël, M. P. & Rouselle, L. (2011): Developmental changes in the profiles of dyscalculia: an explanation based on a double exact-and-approximate number representation model. *Frontiers in Human Neuroscience*, **5.**, 165. URL: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3243900/ https://doi.org/10.3389/fnhum.2011.00165

Nussbaum, A. M. (2013): *A DSM-5 diagnosztikai vizsgálat zsebkönyve*. Oriold és Társai, Budapest.

Ostad, S. (1998): Comorbidity between mathematics and spelling difficulties. *Logopedics Phoniatrics Vocology*, **23.**, 4. sz., 145–154. https://doi.org/10.1080/140154398434040

Passolunghi, M. C. & Lanfranchi, S. (2012): Domain-specific and domain-general precursors of mathematical achievement: A longitudinal study from kindergarten to first grade. *British Journal of Educational Psychology,* **82.,** 1. sz., 42–63. https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.2011.02039.x

Passolunghi, M. C. & Siegel, L. S. (2001): Short-term memory, working memory, and inhibitory control in children with difficulties in arithmetic problem solving. Journal of Experimental Child Psychology, **80.,** 1. sz., 44–57. https://doi.org/10.1006/jecp.2000.2626

Pataki-Juhász Andrea (2016): *Mozgáskorlátozott kisiskolások aritmetikai képességének, készségeinek diagnosztikus megközelíthetősége.* A Diszkalkulia Pedagógiai Vizsgálat 2. kipróbálásának tapasztalatai előszűrés kidolgozására. Szakdolgozat. ELTE Bárczi Gusztáv Gyógypedagógiai Kar, Budapest.

Piazza, M. (2010): Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations. Trends in *Cognitive Sciences*, **14.,** 12. sz., 542–551. https://doi.org/10.1016/j.tics.2010.09.008

Polgárdi Veronika (2013): Matematika szaktanári jellemzés (PMPSZ Szentendrei Tagintézménye helyi protokolljának anyaga).

Polgárdi Veronika (2015): Ismertető a Diszkalkulia Pedagógiai Vizsgálatáról óvodás és kisiskolás korú gyermekeknél (3. rész). A Dékány–Juhász-féle diszkalkulia pedagógiai vizsgálat sztenderdizált változata. *Gyógypedagógiai Szemle*, **43.,** 4. sz., 35–48. URL: http://www.prae.hu/prae/gyosze.php?menu_id=102&jid=52&jaid=723

Polgárdi Veronika és Dékány Judit (m.a.): Iskolai matematikatanulási problémák besorolása, javaslattétel a DPV-ben.

Rourke, B. P. (1993): Arithmetic disabilities, specific and otherwise: A neuropsychological perspective. *Journal of Learning Disabilities*, **26.,** 4. sz., 214–226. https://doi.org/10.1177/002221949302600402

Rousselle, L. & Noel, M. P. (2007): Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities: A comparison of symbolic vs non-symbolic number magnitude processing. *Cognition*, **102.,** 3. sz., 361–395. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2006.01.005

Rózsa Sándor (2015a): *Továbbfejlesztett módszertani felkészítési anyag* (Dékány-féle diszkalkulia-vizsgáló eszköz). „Diszkalkulia Pedagógiai Vizsgálat (Dékány-féle diszkalkulia-vizsgáló eszköz) sztenderdizálása, továbbfejlesztése és szakemberek felkészítése a tesztek használatára" című projekthez. Készült a „Sajátos nevelési igényű gyerekek integrációja (Szakszolgálatok fejlesztése)" (TÁMOP-3.4.2.B-12-2012-0001) c. pályázat keretében. OS Hungary Tesztfejlesztő Kft.

Rózsa Sándor (2015b): *Résztanulmány a sztenderdizálás tapasztalatairól és a korrekciós és továbbfejlesztési javaslatokról* (Dékány-féle diszkalkulia-vizsgáló eszköz). „Diszkalkulia Pedagógiai Vizsgálat (Dékány-féle diszkalkulia-vizsgáló eszköz) sztenderdizálása, továbbfejlesztése és szakemberek felkészítése a tesztek használatára" című projekthez. Készült a „Sajátos nevelési igényű gyerekek integrációja (Szakszolgálatok fejlesztése)" (TÁMOP-3.4.2.B-12-2012-0001) c. pályázat keretében. OS Hungary Tesztfejlesztő Kft.

Rózsa Sándor (2015c): *Összefoglaló Kutatási jelentés* (Dékány-féle diszkalkulia-vizsgáló eszköz). „Diszkalkulia Pedagógiai Vizsgálat (Dékány-féle diszkalkulia-vizsgáló eszköz) sztenderdizálása, továbbfejlesztése és szakemberek felkészítése a tesztek használatára" című projekthez. Készült a „Sajátos nevelési igényű gyerekek integrációja (Szakszolgálatok fejlesztése)" (TÁMOP-3.4.2.B-12-2012-0001) c. pályázat keretében. OS Hungary Tesztfejlesztő Kft.

Rubinsten, O., Bedard, A. & Tannock, R. (2008): Methylphenidate has differential effects on numerical abilities in ADHD children with and without co-morbid mathematical difficulties. *Open Psychology Journal*, **1.**, 11–17. URL: https://benthamopen.com/contents/pdf/TOPSYJ/TOPSYJ-1-11.pdf https://doi.org/10.2174/1874350100801010011

Rubinsten, O. & Henik, A. (2009): Developmental Dyscalculia: heterogeneity might not mean different mechanisms. *Trends in Cognitive Sciences*, **13.,** 2. sz., 92–99. https://doi.org/10.1016/j.tics.2008.11.002

Seth, A. K., Baars, B. J. & Edelman, D. B. (2005): Criteria for consciousness in humans and other mammals. *Consciousness and Cognition*, **14.**, 1. sz., 119–139. https://doi.org/10.1016/j.concog.2004.08.006

Shalev, R. S. & Gross-Tsur, V. (2001): Developemental dyscalculia. *Pediatric Neurology*, **24.,** 5. sz., 337–342. https://doi.org/10.1016/S0887-8994(00)00258-7

Shalev, R., S., Manor, O., Auerbach, J. & Gross-Tsur V. (1998): Persistence of developmental dyscalculia: what counts? Results from a 3-year prospective follow-up study. *The Journal of Pediatrics,* **133.**, 3. sz., 358–362.

Silver, C. H., Pennett, D. L., Black, J. L., Fair, G. W. & Blaise, R. R. (1999): Stability of arithmetic disability subtypes. *Journal of Learning Disabilities*, **32**., 2. sz., 108–119. https://doi.org/10.1177/002221949903200202

Soltész Fruzsina, Szűcs Dénes és Csépe Valéria (2006): A fejlődési diszkalkulia viselkedéses és elektrofiziológiai vizsgálata. In: Kubinyi Enikő és Miklósi Ádám (szerk.) *Megismerésünk korlátai.* Gondolat Kiadó, Budapest, 217–227.

Soltész, F., Szűcs, D. & Szűcs, L. (2010): Relationships between magnitude representation, counting and memory in 4- to 7-year-old children: a developmental study. *Behavioural and Brain Functions*, **6.**, 13. sz. URL: https://behavioralandbrainfunctions.biomedcentral.com/articles/10.1186/744-9081-6-13

Stevenson, H. W., Chen, C. & Lee S.Y. (1993): Mathematics achievement of Chinese, Japanese, and American children: ten years later. *Science*, **259.**, 5091. sz., 53–58. https://doi.org/10.1126/science.8418494

Stoia Ildikó (2016): *A diszkalkulia veszélyeztetettségének feltárása a WISC-IV teszttel.* Szakdolgozat. ELTE Pedagógiai és Pszichológiai Kar Tanácsadó Szakpszichológus Képzés.

Svraka Tamásné (2017): Matematikai szorongás és teljesítmény összefüggés vizsgálata az általános iskola 6. évfolyamán In: Kerülő Judit, Jenei Teréz és Gyarmati Imre (szerk): XVII. Országos Neveléstudományi Konferencia. Program és Absztrakt kötet, MTA Pedagógiai Tudományos Bizottság, Nyíregyházi Egyetem. 565. URL: http://onk2017.hu/wp-content/uploads/2017/11/ONK_20171127.pdf

Swanson, H., L. (2011): Working memory, attention, and mathematical problem solving: a longitudinal study of elementary school children. *Journal of Educational Psychology,* **103.,** 4. sz., 821–837. https://doi.org/10.1037/a0025114

Swanson, H. L. & Sachse-Lee, C. (2001): Mathematical problem solving and working memory in children with learning disabilities: both executive and phonological processes are important. *Journal of Experimental Child Psychology,* **79.**, 3. sz., 294–321. https://doi.org/10.1006/jecp.2000.2587

Szabó Ildikó és Mohai Katalin (2004): *A gyógypedagógiai pszichodiagnosztika megalapozó és integráló szerepe a gyógypedagógiai ismeretrendszerben*. Tudomány napja konferenciaelőadás „Kihívások és válaszok a gyógypedagógiai pszichológiában" – Illyés Gyuláné dr. Kozmutza Flóra születésének 100 éves évfordulója alkalmából.

Szitó Imre (2015): *Tényekre alapozott (evidence-based) fejlesztő eljárásokkal végzett szakmai tevékenység a pedagógiai szakszolgálatokban*, előadás, Utak-lehetőségek, Educatio NKft. TÁMOP 3.4.2.B. kiemelt projektjének záró konferenciája, Eger.

Szűcs, D (2016): Subtypes and comorbidity in mathematical learning disabilities: Multidimensional study of verbal and visual memory processes is key to understanding In: Cappelletti, M., Fias. W. (szerk.) *Progress in Brain Research. The Mathematical Brain Across the Lifespan*, **227**, 277–304. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S007961231630053X

Szűcs, D. & Goswami, U. (2013): Developmental dyscalculia: Fresh perspectives. *Trends in Neuroscience and Education*, **2.,** 2. sz., 33–37. https://doi.org/10.1016/j.tine.2013.06.004

Szűcs, D., Devine, A., Soltész F., Nobes, A. & Gabriel, F. C. (2013a): Developmental dyscalculia is related to visuo-spatial memory and inhibition impairment. *Cortex*, **49.,** 10. sz., 2674–3688.

Szűcs, D., Nobes, A., Devine, A.,Gabriel, F. & Gebuis, T. (2013b): Visual stimulus parameters seriously compromise non-symbolic number comparison differences between adults and children. *Frontiers in Psychology*, **4.,** 444. URL: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3715731/ https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00444

Szűcs D., Devine, A., Soltész F., Nobes, A. & Gabriel, F. (2014): Cognitive components of a mathematical processing network in 9-year-old children. *Developmental Sience*, **17.**, 4. sz., 506–524. https://doi.org/10.1111/desc.12144

Szűcs, D. & Myers, T. (2016): A critical analysis of design, facts, bias and inference in the approximate number system training literature: A systematic review. *Trends in Neuroscience and Education*, **6.**, 187–203. URL:https://www.researchgate.net/publication/311158820_A_critical_analysis_of_design_facts_bias_and_inference_in_the_approximate_number_system_training_literature_A_systematic_review https://doi.org/10.1016/j.tine.2016.11.002

Temple, C. M. (1991): Procedural Dyscalculia and Number Fact Dyscalculia: Double Dissociation in Developmental Dyscalculia. *Cognitive Neuropsychology*, **8.**, 2. sz., 155–176. https://doi.org/10.1080/02643299108253370

Van Nieuwenhoven, C., Grégoire, J. & Noël, M. (2001): *Le TEDI-MATH. Test Diagnostique des compétences de base en mathématiques*. ECPA, Paris.

Vaughn, S., Fuchs, L. S. (2003): Redefining learning disabilities as inadeyuate response to instruction: the promise and potential problems. *Learning Disabilities Research & Practice*, **18.**, 3. sz., 137–146. https://doi.org/10.1111/1540-5826.00070

Vidákovich Tibor (2001): *Diagnosztikus tudásszint- és képességvizsgálatok*. In: Csapó Benő és Vidákovich Tibor (szerk.) *Neveléstudomány az ezredfordulón*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 314–327.

Von Aster, M. G. (2000): Developmental cognitive neuropsychology of number processing and calculation: varietes of developmental dyscalculia. *European Child and Adolescent Psychiatry*, **9.**, 2. sz., 41–57. https://doi.org/10.1007/s007870070008

Von Aster, M. G. (2001): *Die Neuropsychologische Testbatterie für Zahlenverarbeitung und Rechnen bei Kindern (ZAREKI).* Swets & Zeitlinger, Swets Test Services, Lisse, Frankfurt.

Von Aster, M. & Shalev, R. (2007): Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine and Child Neurology*, **49.**, 11. sz., 868–873. https://doi.org/10.1111/j.1469-8749.2007.00868.x

Von Aster, M. G., Wienhold Zulauf, M. & Horn, R. (2006): *Neuropsychologische Testbatterie für Zahlenverarbeitung und Rechnen bei Kindern (ZAREKI-R)*. Harcour Test Services, Fankfurt am Main.

Wechsler, D (2003): *WISC-IV – Wechsler Intelligence Scale For Children – Fourth edition.* Magyar adaptáció: Nagyné Réz Ilona, Lányiné Engelmayer Ágnes, Kuncz Eszter, Mészáros Andrea, Mlinkó Renáta (2008): WISC-IV – Kézikönyv. Wechsler gyermekintelligenciateszt IV. kiadás. OS Hungary Tesztfejlesztő Kft., Budapest.

Wechsler, D. (2003): *WISC-IV – Technikai és értelmező kézikönyv.* Magyar adaptáció: Nagyné Réz Ilona, Lányiné Engelmayer Ágnes, Kuncz Eszter, Mészáros Andrea, Mlinkó Renáta (2008) OS Hungary Tesztfejlesztő Kft., Budapest.

Woodcock, R. W., Mcgrew, K. S. & Matrer, N. (2003): *Woodcock-Johnson Kognitív Képességek Tesztje.* Magyar Nyelvű Nemzetközi Kiadás. The Woodcock-Munoz Foundation, Nashville.

GYERMEKNEVELÉS – online tudományos folyóirat
*Korszerű komplex matematikatanítás*, 2018/1

**Elements for the Pedagogical Assessment of Dyscalculia**

*The Pedagogical Assessment of Dyscalculia (PAD) is a special educational testing method. It is the renewed version of the Dékány–Juhász method devised by the team of dyscalculia experts from ELTE GYOSZI (Special Educational Service of Eötvös Loránd University). It is also based on the findings of current neuropsychological researches. The concept of PAD is based on the assumption that the numeric and other non-mathematical-specific systems (partial abilities) which is a part of calculation may indicate dysfunction in different ways and on different levels. The tasks in the test are aligned with the developmental stages matching the given age of the child. By relying on the method of error analysis and on the use of objective criteria, the overall results indicate those typical mistakes which are indicative of the dyscalculia. It also provides eventuality for further inspections of other partial abilities and the cognitive compensatory strategies. The individual tests may provide the possibility of differentiating between the developmental dyscalculia (serious learning disability) and learning difficulties and other possible issues. As a result of this it becomes possible to create an individual development plan (therapy).*

***Keywords****: numeric systems, partial abilities, differential diagnosis, special education approach, relevance of therapy*

Polgárdi Veronika, Láz Csabáné és Dékány Judit (2018): Alapismeretek a Diszkalkulia Pedagógiai Vizsgálatáról. *Gyermeknevelés*, **6.** 1. sz., 24–54.

# Egy nyitott, valós szituáción alapuló feladat variációi az oktatásban és a didaktikai kutatásban

**Ambrus Gabriella**
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

*A matematikatanításban a feladatok[1] kiválasztásánál alapvető szempontok a tanítandó tananyag, és annak a csoportnak a szintje, akik majd részt vesznek a megoldásban. Vannak azonban olyan feladatok, amelyek jellegüknél fogva többféle módon is megoldhatók, és a megoldások aszerint is különböznek, hogy milyen feltételek mentén készültek – ezek az úgynevezett nyitott feladatok. Felhasználásuk és jelentőségük a matematikaoktatásban évtizedek óta kutatott téma. Ebben a témában én is évek óta végzek kutatásokat, melyhez egy alsó tagozatosoknak készült feladatomat (Ambrus, 2010) használom fel. A matematikai tartalmát megtartva, különféle szövegváltozatokat alakítottam ki. Vizsgálataim a felső tagozatosokon túl a középiskolai korosztályra, sőt a tanárszakos hallgatókra is kiterjednek. Bár a matematikai tartalom csekély, mégis nehéznek bizonyul általában a feladat megoldása, amelynek egyik oka, hogy a matematika-tankönyvek és -órák csupán ritkán foglalkoznak nyitott feladatokkal.*

***Kulcsszavak:*** *nyitott feladatok, valóságközeli szituáción alapuló feladatok, szöveges feladatok, probléma variációk*

## Bevezetés

A szöveges feladatok megoldása nem könnyű. A szöveg megértése, az összefüggések átgondolása, a megfelelő matematikai ismeret kiválasztása és helyes alkalmazása majd az eredmény összevetése a feladat kérdésével, amihez az ellenőrzés is hozzátartozik (kielégíti-e a feltételeket), nemcsak komplex feladat, de lépésenként is komoly próbatétel lehet.

A tanulók általában igyekeznek egyszerűsíteni és minél sikeresebbé tenni munkájukat, ezért különböző stratégiákat keresnek a megoldáshoz. Ezek között jelentős helyet foglalnak el azok, amelyek a szöveg gyors átolvasása során a „helyes művelet" megtalálására koncentrálnak és ehhez különböző „kulcsszavakat" keresnek (*Reusser és Stebler,* 1997), hiszen leggyakrabban erre van szükség a szövegbe öltöztetett számfeladványok megoldása során.

De mi a helyzet, ha ez a művelet nem is adhat megfelelő választ a feladat kérdésére, hiszen a megoldás további feltételektől is függ, és ezek mentén több helyes megoldás is lehetséges? Ugyanis olyan feladatról van szó, ami nyitott.

## Elméleti háttér

A magyar oktatási gyakorlatban főleg olyan feladatok szerepelnek, amelyek zártak, vagy zártnak tűnnek (*Ambrus*, 2004), noha a nyitott feladatok a matematika tanítása szempontjából fontosak (*Pehkonen*, 1995; *Munroe,* 2015).

A „nyitott közelítés" tanítási módszerét, melynek lényege nyitott végű problémák alkalmazása a matematikaórán a „matematikai" vitakészség fejlesztése céljából, Japánban dolgozták ki a XX. század hetvenes éveiben. Ezzel egy időben lettek népszerűek Angliában a kutatási, illetve matematikai vizsgálatokkal kapcsolatos feladatok a matematika tanításában (*Silver*, 1995).

### *a) Nyitott és zárt feladatok és kapcsolatuk*

Ha egy feladatban mind a kiindulási feltételek, mind az elérendő cél pontosan meghatározott, zárt feladatról beszélünk. Ha azonban

[1] A „feladat" és a „probléma" fogalmak a tanulmányban felváltva szerepelnek, és használatuk nem különül el élesen a téma jellege miatt.

DOI 10.31074/gyn201815565



Ambrus Gabriella: orcid.org/0000-0003-4302-5577

a kiindulás vagy a végállapot közül az egyik, vagy akár mindkettő nem ilyen, a feladat nyitott. A feladatok kezdeti és végállapota szerinti besorolásához többféle „feladattípus" megadható (*Pehkonen*, 1995).

Általánosabb értelmezés szerint azok a feladatok is nyitottnak tekinthetők, amelyeknél a kezdő és végállapot pontosan meghatározott, de többféle megoldás lehetséges (*Blum és Wiegand,* 1999). A kezdeti és végállapot illetve a megoldási mód egyértelműsége (ismertsége) alapján a feladatok típusokba is sorolhatók (*Büchter és Leuders*, 2005), aminek jelentőségét nem a kategóriák pontosítása adja, hanem – ennek révén – a különböző feladattípusok tudatos alkalmazása/készítése.

A hazai oktatási gyakorlatban jelen vannak a nyitott feladatok, hiszen optimális esetben egy matematikaórán még egyszerű feladatok esetén is gyakran hangzik el a „Te hogyan gondolkodtál?" vagy „Kinek van másik megoldása?" kérdés. Az érkező válaszok nemcsak a tananyag elsajátításának mértékéről adnak felvilágosítást, hanem a tanulók gondolkodásmódjáról is, és gyakran születnek különböző megközelítések alapján, lényegileg különböző megoldások. Azonban a nyílt és zárt feladatok nem feltétlenül különülnek el élesen egymástól, de az fontos is, hogy különböző módszertani célokhoz különböző jellegű feladatok kapcsolódjanak.

**1. Példa**
***Alapfeladat***

Számítsd ki:
4-102-6+26+6=

*1. Nyílt változat:*
Számítsd ki többféle módon az előbbi feladatot!

*2. Nyílt változat:*
Helyezz el zárójeleket és oldd meg a kapott feladatokat!
4-102-6+26+6=

*3. Nyílt változat:*
Fogalmazz meg olyan szöveges feladatot, amely a következő módon oldható meg:
4-102-6+26+6=

Az alapfeladat egyszerű számolás. Ha a tanár elsősorban a helyes műveletvégzésre kíváncsi – tehát az eredményt kérdezi csupán –, akkor zárt feladatként kezeli, hiszen a megoldási utat is adottnak veszi. A feladat célja ebben az esetben a számolási rutin begyakorlása. Ha azonban azt is megkérdezi, hogy ki hogyan gondolkodott, akkor már többféle eljárás is felmerülhet – tehát a feladatot nyitottként kezelte.

Az *első nyílt változatban* eleve nyitott feladatként adtuk fel a számítást, utalva arra, hogy többféle számítási mód megtalálása is feladat.

A *másik két nyílt változatban* pedig az eredeti feladat két olyan variációja szerepel, ami a feladatot szintén eleve nyitottá tette, de ezúttal további kiegészítéssel.

Ha nyilvánvaló, hogy nyitott a feladat, akkor sem egyszerű kezelni a nyitottságot, hiszen mint a példán is láttuk, tovább kell gondolkodni rajta, ötletekre, több számolásra van szükség.

***b) Valós/ elképzelhető helyzeten alapuló nyitott feladatok***

Valós helyzeten alapuló feladatok látszólag gyakran szerepelnek a matematika oktatásában, hiszen sok feladat szól mindennapi élettel kapcsolatos dolgokról, esetleg állatokról, növényekről. Ezek azonban sokszor nem valós adatokkal dolgoznak, illetve a megoldásuk során a szöveges feladatoknál már említett „beöltöztetett" művelet(sor) megtalálása a legfőbb cél. Több felmérés született már azzal kapcsolatban, hogy a szöveges feladatok megoldása során a tanulók rutinszerűen dolgoznak, a valós tartalmat figyelmen kívül hagyják (*Puchalska és Semadeni* 1987; *Verschaffel,* 1994; *Csíkos, Kelemen és Verschaffel*, 2011).

Egyszerű feladatok esetén is gyakran elfelejti a megoldó, miről is szól a feladat szövege, és a megadott számok, valamint a feltett kérdés között összefüggést próbál teremteni, de nem feltétlenül a szituáció átgondolásával.

2. Példa

a. Egy ember kötelet szeretne kifeszíteni két, egymástól 12 méterre levő rúd között, de csak 1,5 méteres darabok vannak. Hány darabot kellene ezekből összekötöznie, hogy átérjen a két rúd között?

b. Karcsinak 5 barátja van, Gyurinak pedig 6. Karcsi és Gyuri úgy döntöttek, hogy együtt rendeznek egy bulit. Meghívták valamennyi barátjukat, akik mind el is jöttek. Hányan voltak ott a partin?

A köteles feladatban a már korábban említett „keresett művelet” az osztás. A kapott eredmény egész szám, és látszólag rendben is van a dolog, hiszen 8 darab 1,5 m-es kötél jött ki és, ugye, ezt is kérdezte a feladat? Sajnos nem ezt, hiszen összekötésről is szó volt, amihez további kötélre van szükség – de ehhez meg kell gondolni, ez mennyi lehet, azaz figyelembe kell venni a valóságos helyzetet is.

A második feladatban látszólag még egyszerűbb a helyzet, csak összeadni kell egyjegyű számokat és 5+6+2=13 (látszólag) a helyes válasz. A valóságban azonban figyelembe kell venni, további feltételeket, hogy lehetnek például közös barátok, lehet, hogy a barátok közé már Karcsi és Gyuri is bele lett számítva.

A valós szituációkon alapuló nyitott feladatok – modellezési feladatok – megoldása ciklikus folyamatként képzelhető el, mely több vagy csak néhány lépésből áll (*Burkhardt,* 1994; *Blum és Niss,* 1991; *Verschaffel et al.* 2000; *Blum,* 2007; *Verschaffel,* 2010).

Az iskolai használatra Blum az egyszerűbb, négy lépéses modellezési ciklust (*Blum*, 2008) ajánlja, melynek lépései: 1. Feladat megértése, 2. Modell készítése, 3. A matematika alkalmazása, 4. Az eredmény értékelése. Az utóbbi lépés után szükség esetén megint az 1. lépés következhet – például abban az esetben, ha az alkalmazott modell helytelen eredményhez vezetett, vagy a kapott eredmény még „pontosításra” szorul, amelyhez a kezdeti feltételek alakítása szükséges.

## A felmérés alapfeladata és variációi

**Alapfeladat:**

*A királyné ruhái*

- Amióta a fiatal királyné a palotába költözött, minden héten új ruhát varratott. Hány napja lakik ott, ha már 35 új ruhája van?

(*Ambrus,* 2010, 25. o.)

*Lehetséges megoldás:*

Várható válasz a 245, 35 héttel „számolva”, hiszen 35-ször 7 = 245. De mi van, ha esetleg nem 35 teljes hét telik el, hiszen az is lehet, hogy miután megkapta a 35. ruhát, még további napok is eltelnek a következő, a 36. ruháig?

Először is szükséges a szituáció megismerése, feltételek tisztázása: (nyitott helyzet, 34 teljes hét és valamennyi nap még). Tegyük fel, hogy mindig a hét ugyanazon a napján kapta az új ruháját, az elsőt mindjárt érkezéskor. Majd elkészülhet a matematikai modell: $7 \cdot 34$ és még néhány nap de nem több, mint egy hét.

Ezt követi a számítás a modell alapján, azaz $7 \cdot 34 = 238$ a teljes hetek alatti napok száma, és ehhez még hozzájön legalább 1, de akár 2, 3, 4, 5, 6, 7 nap, attól függően, hogy hány nap telt el a 35. ruha „óta”. Azaz (helyesen) 239 nap legalább, és 245 nap legfeljebb az eredmény.

Az eredmény értékelése során kiderül az is, hogy akár 245 napnál is hosszabb ideje lehet ott, ha például más napon kapja a ruhát.

Ha tehát pontosabban szeretnénk megmondani, hány napja lakik ott, további feltételek kellenek.

A 245 tehát értelmetlen válasz egy egyszerű kérdésre? Nem, itt másról van szó, hiszen a 245 *egy lehetséges jó értéket ad* meg. Viszont a gond az, hogy az eredmény csak bizonyos feltételek között igaz, további/más feltételekkel más jó válaszok is lehetségesek, ami éppen a szituáció valóságközeli voltából, illetve a feladat nyitottságából adódik.

Az előbbi feladat tartalmában azonos szövegváltozata a következő:

*Zsebpénz*

- Amióta Pistiék új lakásba költöztek, hetente kapja a zsebpénzét, 1000 forintot, amit azóta mindig félre is tesz.
  Hány napja laknak ott, ha már 35 000 forintot gyűjtött így össze.

Bár az előbbi két feladatváltozat matematikai tartalma csekély, feltételek meghatározása és ezekhez a megfelelő megoldások elkészítése, rendszerezése már komoly feladat lehet a 14–18 éves korosztálynak is.

Például, nézzük a következő lehetséges feltételek alapján adódó megoldásokat az utóbbi szöveghez, ahol a „hét" naptári hét értelemben használatos:

1. Mindig a hét ugyanazon napján kapja a pénzt, és tudjuk, hogy a hét mely napján költöztek be.

Így például, ha hétfőn költöztek be, és mindig hétfőn kapja a zsebpénzt, akkor a következő megoldást kapjuk: Legalább 239 nap (34 teljes hét, 238 nap, +1 nap) és legfeljebb 245 nap.

2. Mindig a hét ugyanazon napján kapja a zsebpénzt és nem tudjuk melyik napon költöztek be az új lakásba. Így adódik az a megoldás, hogy legalább 239 napja és legfeljebb 251 napja lakhatnak ott.

3. Ismeretes melyik napon (a héten) költöztek be és a zsebpénzt a hét bármelyik napján kaphatja.

4. Nem ismeretes a hét mely napján költöztek be, és az sem, hogy melyik napon kap zsebpénzt. Így adódik a következő megoldás: Legalább 233 nap és legfeljebb 251 nap.

A két utóbbi feltétel szerinti megoldást részletezi a következő táblázat.

| Érkezési nap | Tartózkodás legalább | legfeljebb |
|---|---|---|
| Hétfő | 34×7+1= 239 | 35×7+6= 251 |
| Kedd | 6+33×7+1= 238 | 6+34×7+6= 250 |
| Szerda | 5+33×7+1= 237 | 5+34×7+6= 249 |
| Csütörtök | 4+33×7+1= 236 | 4+34×7+6= 248 |
| Péntek | 3+33×7+1= 235 | 3+34×7+6= 247 |
| Szombat | 2+33×7+1= 234 | 2+34×7+6= 246 |
| Vasárnap | 1+33×7+1= 233 | 1+34×7+6= 245 |

*1. táblázat:* Rögzített napon érkezett a család, de a hét bármelyik napján kaphat zsebpénzt Pisti (a héten egyszer)

A táblázatból kiolvasható, hogy például hétfői érkezés esetén, ha rögtön aznap zsebpénzt is kap Pisti, akkor 34 teljes hétnek legalább el kell telnie 34 heti zsebpénzhez, viszont minimum 1 további nap (akkor kap megint zsebpénzt) legalább szükséges. A hozzáadható napok száma viszont legfeljebb 6, hiszen a legkésőbb a 7. napig meg kell kapnia a 36. heti zsebpénzt.

Ha egyik feltételt sem rögzítjük (4. eset: a hét bármelyik napján érkezhetett és bármikor kaphat zsebpénzt egy adott héten), akkor a fenti táblázat két szélső értéke, azaz minimum 233 nap és maximum 251 nap a megoldás.

A feladat lehetséges megoldás(ai)hoz kevés matematikai ismeret szükséges, viszont különböző szinten készíthető(k) el és a szituáció is könnyen elképzelhető. Így ez a feladat (esetleg a két variáció felhasználásával) alkalmas arra, hogy különböző kutatási kérdéseket vizsgáljunk a feladattal kapcsolatban a korosztályok széles skáláján.

## Korábbi vizsgálatok

Tanulók és egyetemisták között azt vizsgáltuk, hogy mennyire képesek felismerni (és kezelni) a „A királynő ruhái", illetve a „Zsebpénz" feladat nyitottságát. Egy megoldást „nyitott"-nak tekintettünk, ha megjelenik benne (esetleg pontatlanul és hibákkal) hogy a feladatnak többféle jó megoldása is lehet. Például feltételt ad egyetlen számszerű eredményhez.

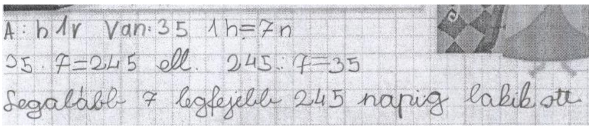
A résztvevőktől azt kértük, hogy a királynős/zsebpénzes feladatot önállóan oldják meg. A megoldáshoz semmilyen segítséget nem kaptak és név nélkül dolgozhattak. Időkorlát nem volt, de általában 10–15 percnél tovább nagyon kevesen akartak dolgozni. A megoldások beadása után az esetek többségében röviden megbeszélésre került néhány lehetséges megoldás. A felmérést részben a szerző, részben erre vállalkozó kollégák végezték.

Az *első vizsgálatokra* Németországban, Finnországban és Magyarországon került sor a „Királynő ruhái" feladattal (2010–2011), ebben 103 tanuló a 3. osztályokból és 216 tanuló a 4. osztályokból vett részt. A megoldások kiértékelése után részletes hibavizsgálat is készült. A vizsgálatban – Radatz hibakategóriáinak (*Radatz,* 1979, idézi *Ambrus és Szűcs,* 2016) felhasználásával – a tanulói hibákat elemeztük aszerint, hogy az illető zártan (feltételezve az egyetlen megoldás lehetőségét) vagy nyitottan (feltételezve feltételtől függően változó megoldás lehetőségét) gondolkodott (*Ambrus és Szűcs,* 2016).

| | Nyitott feladat-ként értelmezi | Zárt feladat-ként értelmezi | Nincs válasz | Összesen |
|---|---|---|---|---|
| 3. osztályból | 16 | 65 | 22 | 103 |
| 4. osztályból | 22 | 183 | 11 | 216 |
| Összesen | 38 | 248 | 33 | 319 |

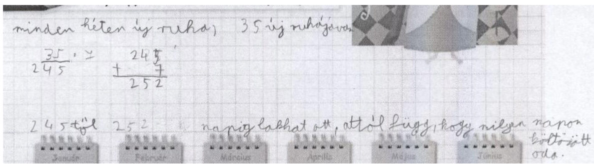
*2. táblázat:* Az első vizsgálatok eredményei német, finn és magyar alsó tagozatosok körében

Ahogy az a *2. táblázatból* látszik, a tanulók mintegy 10%-a értelmezte nyitottként a feladatot. A megoldásokban sok számolási hiba is akadt, és a nyitottnak tekinthető megoldások „színvonala" is igen különböző volt.



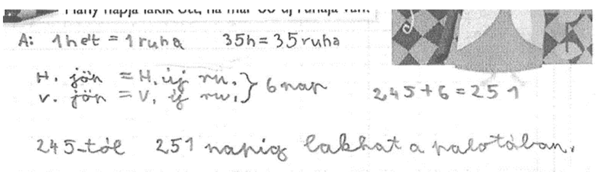

*1. ábra:* 3. osztályos tanuló megoldása

Az *1. ábrán* látható megoldásnál a kapott eredmény mellett válaszként megjelenik a sejtés, hogy a tanuló vélhetően nyitottnak értelmezte a feladatot, hiszen egy intervallumot ad meg megoldásul.




*2. ábra:* 4. osztályos tanuló megoldása

Ennél a tanulónál (*2. ábra*) a megoldásból látszik, hogy a kapott 245-ös eredmény után meggondolta, hogy akár további napok is eltelhettek még, és a ruhák száma nem gyarapodott. Azonban megfeledkezik arról, hogy a 7. napon már van újabb ruha.




*3. ábra:* 4. osztályos tanuló megoldása

A tanuló (l. *3. ábra*) feltételt is ad (2 példával): a királynő az érkezés napján kapja meg az első ruháját. Bár nem írja, de feltételezi, hogy ezek után mindig pontosan egy hét múlva ezen napon kapja a további ruhákat, így 35 teljes hét telik el, míg 35 ruhája van. A 246. napon ebben az esetben már a 36. ruhát kapná, de erről nem szól a megoldás. Viszont hozzáad legfeljebb 6 napot a 245-hoz, és ezzel gyakorlatilag az előbbi megoldás szerint gondolkodik. A tanulónál megjelenik tehát a nyitott gondolkodás, de ezzel kapcsolatos gondolatait rendezni még nem tudja.

A „A királynő ruhái" feladatot 5. és 6. osztályos tanulók is megoldották néhány magyar és német osztályban: a „nyitottság" felismerése némileg csökkent, annak ellenére, hogy magasabb évfolyamokról volt szó, a számolási hibák mennyisége azonban jelentősen csökkent.

Az előbbiek alapján egyrészt felmerült a kérdés, hogy vajon hogyan oldják meg a feladatot további korosztályok, másrészt az derült ki, hogy a megoldások kiértékelésénél „szélesebb korsáv"-okat is lehet használni, ugyanis a megoldások a nyitottság észlelése szempontjából nem mutattak jelentős eltérést minden korosztály esetében.

A kísérletben részt vevő tanítók és tanárok beszámoltak esetenkénti érdektelenségről is, amelyet a megoldás során tapasztaltak. Ezt a szövegezésnek tulajdonították. Több osztályban utóbb komoly vitát is kiváltott a kérdés, hogy miért kell a királynőnek ilyen sok ruha. Ezért egy másik szövegváltozat készült el, ezúttal „pénzes" témában, amely egyrészt érdekesebb téma, amely segítheti a megoldást is (*Mérő,* 2011), másrészt az idősebb korosztályoknak is megfelelőbb (l. „Zsebpénz" feladat).

*További felmérésekre* került sor 2012 és 2014 között magyar résztvevőkkel a „Zsebpénz" feladattal, amelyben egy kisvárosi általános iskola 6–7. osztályos 101 tanulója, budapesti „átlagosnak" mondható gimnáziumokból 9–12. osztályosok közül 45 tanuló, valamint 1. éves budapesti 136 egyetemista vettek részt. A vizsgálati feltételek ugyanazok voltak, mint az előző esetben és a vizsgálat célja is.

A feltételezés az volt, hogy a felsőbb iskolai osztályokban, illetve az egyetemen a tanulók/

egyetemisták a feladat nyitottságát könnyebben felismerik, hiszen egyrészt egy számukra bizonyára könnyen elképzelhető/átlátható szituációról van szó, másrészt a szükséges számolás már biztosan rutineljárás, tehát semmi gondot nem okoz, így különösen a középiskolai osztályokban módjuk van arra, hogy a rendelkezésre álló időt a szituáció alapos átgondolására fordítsák.

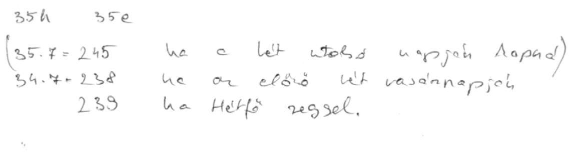
| **Tanulók** | **6–7. osztály** | **9–10. osztály** | **11–12. osztály** |
|---|---|---|---|
| Nyitott feladatként kezeli | 2 | 4 | 9 |
| Egyéb | 99 | 18 | 14 |
| Összesen | 101 | 22 | 23 |
| **Egyetemisták** | **Biológia szakos** | **Matematika szakos** | **Matematika tanári** |
| Nyitott feladatként kezeli | 10 | 31 | 34 |
| Egyéb | 40 | 7 | 12 |
| Összesen | 50 | 38 | 48 |

*3. táblázat:* Eredmények a további felmérések során, magyar tanulók és egyetemisták körében 2012–2014.

A táblázatból látható, hogy a feltételezésünk – a vizsgált körben – részben igazolódott, hiszen a feladatot valóban jelentősen többben kezelték nyitottan.

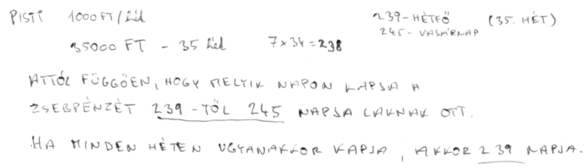
Bár ez a felmérés sem volt reprezentatív és a létszámok alapján is megalapozatlan lenne következtetéseket levonni, úgy tűnt bizonyos körülmények, például felsőbb korosztály, matematika-irányultság, javítja az eredményeket. A megoldások azonban változatosan alakultak.

Több dolgozatban megjelenik a feltételtől függő eredmény gondolata, ha nem is mindig tökéletesen, ahogy az a következőkben idézett tanulói megoldásokból is látszik.



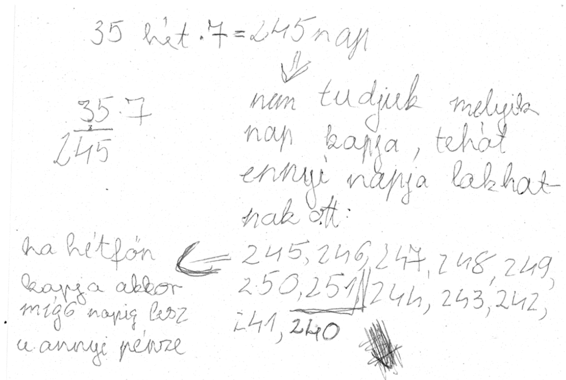

*4. ábra:* 12. osztályos tanuló megoldása

A megoldáson (*4. ábra*) látható, hogy a tanuló felismerte a feltételek megfogalmazásának szükségességét. Feltételként a zsebpénz megkapásának napját jelöli meg két konkrét eset tárgyalásával. Nem adja meg, hogy szerinte van-e még ilyen feltétel mellett más eset is, és nem jelenik meg az a lehetőség, hogy az adott nap előtt és után is van olyan időszak, amikor már ott lakhattak.




*5. ábra:* 12. osztályos tanuló megoldása

A megoldás (*5. ábra*) itt is feltételként a zsebpénz megkapásának napját jelöli meg. Az is látszik, hogy csak ezt a lehetőséget vizsgálja, hiszen, ha 239 napot ad meg arra az esetre, amikor Pisti mindig ugyanazon a napon és hétfőn kapta a zsebpénzt Ez azt is jelenti, hogy 34 teljes hét telik el addig, míg elkövetkezik az a nap, amikor megkapja az utolsó, 35. zsebpénzt, azaz összesen 238+1 nap. Ha a héten máskor kap pénzt mindig, akkor viszont további napokat kell hozzászámítani (legfeljebb további 6 eset lehetséges).




*6. ábra:* 6. osztályos tanuló megoldása

Ebben a megoldásban (*6. ábra*) a zsebpénz megkapásának feltételeként jelenik meg a teljes hét ott töltése, de megjelenik az a gondolat is, hogy akár 6 napig is ott lakhat még Pisti, amíg a következő heti zsebpénzt megkapja. Nem világos azonban, hogy a 251 utáni számok mire vonatkoznak – talán visszafelé számol, és arra gondol, hogy már akár az első zsebpénz megkapása előtt is ott lakhattak, de erről nem ír semmit.

Az egyetemisták esetében elmondható, hogy bár a felmérésben részt vett hallgatók esetében a biológiaszakosokhoz képest tapasztalható javulás a matematikaszakosoknál, azonban náluk sem természetes a „nyitottság" észrevétele, azaz a szituáció átgondolása – és ezt a 2016-ban végzett újabb (ezúttal németországi egyetemista csoportok bevonásával kiegészített) felmérések is alátámasztották, ahogy ez a *4. táblázatból* látszik.

| | magyar matematika tanárszakos hallgató I. éves | magyar matematika tanárszakos hallgató III. éves |
|---|---|---|
| nyitottnak kezeli | 21 | 2 |
| egyéb | 11 | 25 |
| **összesen** | **32** | **27** |
| | német matematika tanárszakos hallgató 4–6. féléves | német tanító szakos hallgató 6. féléves |
| nyitottnak kezeli | 8 | 3 |
| egyéb | 16 | 44 |
| **összesen** | **24** | **47** |

*4. táblázat:* A 2016-os vizsgálat eredményei magyar és német egyetemisták körében

A felsőbb osztályokban sem egyértelmű a „javulás", még ha a korábbi mérés szerint esetleg úgy is tűnik (*3. táblázat*), hiszen 2016-ban egy vidéki város gimnáziumában 9. és 10. osztályosok körében végezve a felmérést, 74 tanuló közül csak 6 olyan akadt, aki „nyitott"-nak értékelhető megoldást adott a „Zsebpénz" feladatra.

Átnézve az eddigi eredményeket a kép nemcsak változatos, de elgondolkodtató is. Egyrészt kiderült, hogy már kis mintán is látszik, hogy a feladat „nyitott" voltának felismerése nem a felsőbb évfolyamok kiváltsága, másrészt gyanítható, hogy a matematika iránti érdeklődés csak egy tényező (lehet) azok között, amelyek befolyásolják a megoldást.

Az eredmények hátterében az iskolai feladatkultúrával, a feladatok kezelésével kapcsolatos problémák is állhatnak. Egyrészt a valóban valós szituáción alapuló feladatok mennyisége, illetve ezek megfelelő kezelése lehet, hogy elmarad a kívánatostól. A tanulók matematikával szembeni beállítottsága is jelentősen befolyásolhatja a megoldás módját.

## A legújabb felmérés és első eredményei

Az eddigi eredmények alapján egyrészt felmerült, hogy pontosabb következtetéshez pontosabb mérési feltételek mellett, statisztikai módszerekkel kellene az összefüggéseket vizsgálni (például matematikai teljesítmény, érdeklődés a matematika iránt, évfolyam, megoldó neme) tekintetében. Másrészt az is, hogy majd ezekre a pontosabb vizsgálatokra alapozva fontos lenne olyan iskolai fejlesztési, illetve tanár-(tovább)képzési anyag kidolgozása, amely a valós tartalommal bíró szöveges feladatok realisztikus megoldását tűzné ki célul.

*Magyar Tudományos Akadémia kibővített szakmódszertani pályázat*ának *(2016–2020) keretén belül – A Komplex Matematikatanítás a XXI. században – A matematikai gondolkodás fejlesztése a legújabb kutatási eredmények alapján* – kutatócsoport[2] tagjaként nyílt lehetőségem az előbbi kutatás megkezdésére. A kutatócsoporton belül létrehozott kisebb tematikus csoportok közül a 3. csoport[3] foglalkozik a témával. A fő célunk annak vizsgálata, hogy a tanulók mennyire „nyitottan" képesek gondolkodni, hogyan tudnak nyitott, valós tartalmú szöveges feladatot kezelni, valamint annak kutatása, hogyan fejleszthető tanulók és tanárszakos, hallgatók gondolkodása ezen a téren.

Mindenekelőtt az eddigi eredményekre alapozva egy nagymintás iskolai vizsgálat megtervezésére és kivitelezésére került sor.

Felmérést a – jelenlegi kezdeti fázisban – először tanulók körében (2–10. osztályig) a „Zsebpénz" feladattal, illetve annak alkalmas

[2] Honlap: https://sites.google.com/view/mtakomplexmat

[3] Tagjai: Ambrus Gabriella, Csíkos Csaba, Emese György, Kovács Zoltán, Kónya Eszter, Szitányi Judit, Varga Eszter.

változatával végeztük 2017 első felében. Ehhez kérdőív is társult, amelyet a csoport tagjainak és gyakorló pedagógusok részvételével alakítottunk ki, és segítségével konkrétan a feladatra vonatkozó kérdéseken kívül s megoldó matematikával szembeni beállítottságával, illetve teljesítményével (osztályzat) kapcsolatban teszünk fel kérdéseket.

A tervek között további felmérések is szerepelnek tanár- és tanító szakos hallgatók körében – szintén kérdőívvel.

*Fő kutatási célunk ebben a felmérésben az, hogy hogyan alakul a tanulók realisztikus (a szituáció szempontjából helyesnek tekinthető) válaszadása a 2–10. évfolyamokon, és megoldásuk hogyan függ össze egyéb tényezőkkel (például osztályzat vagy matematikai érdeklődés).*

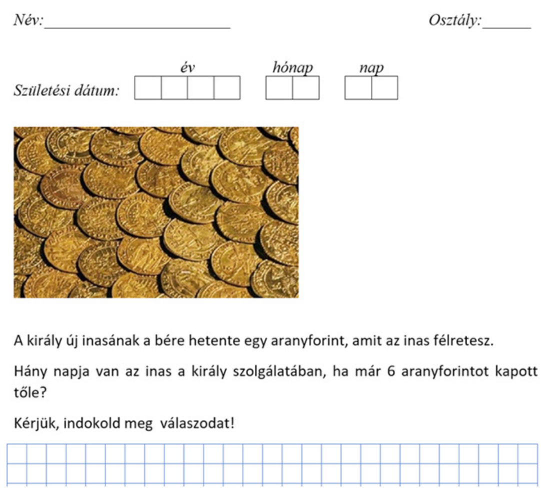
Az előzetes tapasztalatok alapján

- az alsó tagozaton évente, de ezután a magasabb évfolyamokon csak két évenként választottunk évfolyamot vizsgálatra,
- figyelembe vettük, hogy a számolás gondot okoz alsó tagozaton, de még hatodik osztály környékén is, ezért egy kisebb számkörben megoldható szövegváltozatot alkalmaztunk az alsóbb osztályokban, illetve a 6. osztályban az osztályok egyik fele a kisebb számkörben mozgó „Aranypénz", míg a másik fele a „Zsebpénz" feladatot oldotta meg.
- Nyilvánvaló volt, hogy elég nagy minta kell, ha a „realisztikus" megoldásokat is külön vizsgálni akarjuk – hiszen ilyen viszonylag kevés várható.
- Mivel feltételezhető kapcsolat a matematikában elért teljesítmény, valamint a matematikáról való vélekedés és a feladatmegoldás „minősége" között, ezért a már említett kérdőíven ezzel kapcsolatos kérdések is szerepelnek.

### *A felmérés körülményei*

A felmérés a 2., 3., 4., 6., 8., 10 osztályokban végeztük. Az iskolák kiválasztásánál szempont volt, hogy minél többféle intézménytípus szerepeljen (általános iskola, gimnázium, szakgimnázium). A választott iskolában legalább egy teljes évfolyam részt vett a felmérésben, hogy az osztályok/tanulócsoportok ne valamilyen szelekció alapján kerüljenek be.

A hatodik évfolyamon, ahol egy iskolában az osztályok egyik fele – véletlenszerű választás alapján – a „Zsebpénz", a többiek a másik, kisebb számkörben készült változatot (*7. ábra*) oldották meg. A 2., 3., és 4. évfolyamokon szintén az utóbbi feladat került megoldásra.



*Név:*____________________ *Osztály:*______

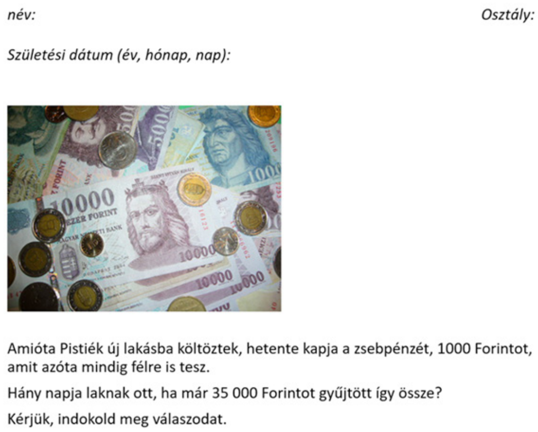
*Születési dátum:* *év* *hónap* *nap*

A király új inasának a bére hetente egy aranyforint, amit az inas félretesz.

Hány napja van az inas a király szolgálatában, ha már 6 aranyforintot kapott tőle?

Kérjük, indokold meg válaszodat!

*7. ábra:* Az „Aranypénz" feladat a tanulói lapon



*név:* *Osztály:*

*Születési dátum (év, hónap, nap):*

Amióta Pistiék új lakásba költöztek, hetente kapja a zsebpénzét, 1000 Forintot, amit azóta mindig félre is tesz.

Hány napja laknak ott, ha már 35 000 Forintot gyűjtött így össze?

Kérjük, indokold meg válaszodat.

*8. ábra:* A „Zsebpénz" feladat a tanulói lapon

A kivitelezés előkészítéséhez az iskolák kiválasztása után részletes útmutató készült tanároknak és diákoknak. A felmérés idejét az egyes iskolákban úgy alakítottuk ki, hogy az lehetőleg egy vagy két egymás utáni órában az egész iskolában megtörténjen.

A megoldásra, ahogy a korábbiak során, most is legalább 10 perc rendelkezésre állt, néhány perc hosszabbításra lehetőség volt. A feladatmegoldás után került sor a kérdőív kitöltésére, amely a matematikával és annak tanulásával kapcsolatos, valamint a feladatra vonatkozó állításokat tartalmazott, ezen kívül a lapon kértük a tanulóktól az előző év végi osztályzatuk, kedvenc és a legkevésbé kedvelt tantárgyuk felírását.

A felmérésben 7 iskola (2 budapesti, és 5 vidéki, általános iskola, gimnázium és szakgimnázium) tanulói vettek részt. A résztvevő 1346 tanuló munkájából különböző okok miatt végül 1283 volt értékelhető.

| évfolyamok | 2. | 3. | 4. | 6. | 8. | 10. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| létszám | 186 | 213 | 243 | 303 | 124 | 277 |
| | összesen: 1346 | | | | | |

*5. táblázat:* A kísérletben résztvevő évfolyamok és létszámuk

## A kiértékelés módja és első eredmények

A tanuló megoldásokat kódoltuk, amelyhez a *Verschaffel és munkatársai* által valós szituációhoz kapcsolódó szöveges feladatok megoldásainak számbavételéhez készített kódolást vettük alapul (*Verschaffel et al.,* 1994). A vizsgálatban használt feladat (két változatának) megoldása jellegében realisztikus és valóságban elképzelhető, egyszerű matematikai ismeretekre épít, mint azok a feladatok, amelyekhez az említett kódrendszer készült, így az alapvetően használható volt.

Az eredménykódok egyrészt a megoldásról (megoldási kód), másrészt annak „hátteréről" (indoklási kód) adnak felvilágosítást, az alábbiak szerint:

*Megoldási kód:*

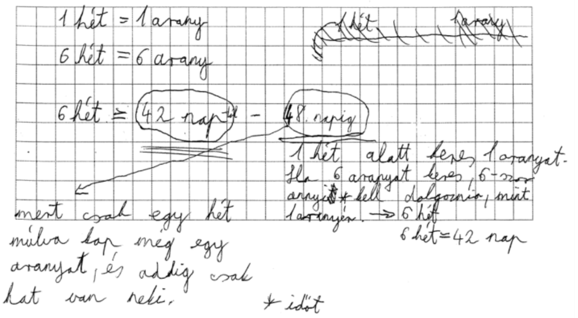
0: Nincs válasz azaz nincs semmi a papíron, vagy „nem tudom".
1: A várt válasz, ami a feladat szövegéből és a benne szereplő számokból következik (7 x 35 = 245).
2: Ugyanez, csak számolási hibával.
3: Realisztikus válasz. Megjelenik a valós helyzet figyelembe vétele számszerűen is, pl. „245–251 nap".
4: Egyéb válasz, például félreértésből adódó hiba: 35 nap, vagy valamilyen rossz indoklással helytelen válasz, vagy jó számolás, de rossz válasz.

*Indoklási kód:*

1 Látszik a tétovázás, de a helyes irányban, vagy bizonytalanság a realisztikus válaszban.
0 Számolás, és/vagy végeredmény pl. 245–251, vagy 245 tétovázás nélkül.

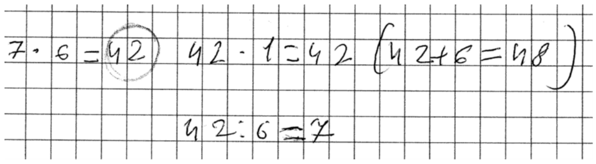
(*Verschaffel et al.,* 1994)

A következőkben tanulói megoldások segítségével mutatok be néhány kódolási esetet.



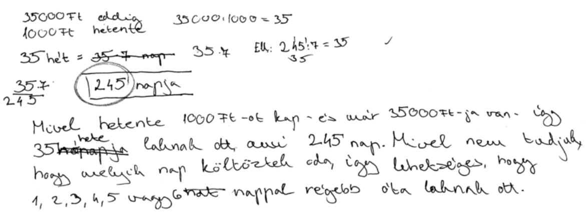

*9. ábra:* 6. osztályos tanuló megoldása, Kód: 3 0

A tanuló (*9. ábra*) az adatok felvétele után jól értelmezte a szituációt és észrevette, hogy akár több mint 42 nap is eltelhet, 6 nap legfeljebb, tehát 3 az első (megoldási) kód. Megoldásában biztos volt, nem jelezte, hogy esetleg ez a gondolat hibás lehet, tehát 0 a második kód.




*10. ábra:* 4. osztályos tanuló megoldása, Kód: 1 1

A *10. ábrán* látható megoldásban a tanuló megkapta a várható, de zárt gondolkodásra utaló 42-t. Ezért az első kód 1. A zárójelben azonban tétovázás látható, hogy esetleg más megoldás is lehet – mégpedig jó irányban gondolkodik, ezért a második kód 1.



*11. ábra:* 8. osztályos tanuló megoldása, Kód: 3 0

A megoldásra (*11. ábra*) a tanuló megkapta a 3-as kódot, hiszen egy feltételt vizsgálva, helyesen, több lehetséges számot is megad megoldásként. A válaszában bizonytalanság nem jelenik meg, így a második kód 0.

A tanulók realisztikus – a szituáció szempontjából helyesnek tekinthető – válaszadása az úgynevezett RR-módon (a realisztikus reakció) röviden is jelezhető.

A realisztikus reakciónál (RR) az előbbiek figyelembevételével a válaszkód és az indoklás kód együttese a következő kétjegyű számok lehetnek: 30, 31, 11, 21, 41.

A felmérés során 45 ilyen válasz született, az eredmények megoszlása a 6. táblázatban látható.

| | **Évfolyamok** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Kódok** | **4. (226)** | **6. (288)** | **8. (119)** | **10. (279)** | **2. (171)** | **3. (200)** |
| **3 0** | 1 | 2 A+1 | 5 | 12 | 0 | 0 |
| **1 1** | 1 | 1 | 2 | 13 | 0 | 0 |
| **2 1** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| **4 1** | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 1 |
| | **3** | **5** | **8** | **25** | **3** | **1** |

*6. táblázat:* Az RR-válaszok (realisztikus) száma évfolyamonként, összesen 1283 válaszból (zárójelben az egyes évfolyamok összes megoldóinak száma látható, az A jelzés a hatodik évfolyamon arra utal, hogy a jelzett két tanuló az „Aranypénzes" feladat megoldói közül való).

*Az eredmények kiértékelése még folyamatban van.* A „kedvenc" tárgyak és a válaszkódok összefüggését nézve az derült ki, hogy a 3 0 kódú határozottan RR-választ adók körében a következő a helyzet a kedvenc tárgyak esetében:

A 6. osztályosok körében a legtöbben a matematikát szeretik, de jelölték a földrajz, történelem, informatika tárgyakat is.

A 8. osztályosok is elsősorban a matematikát jelölték meg, szerepelt fizika, biológia, és földrajz is.

A 10. osztályosok körében a biológia kedveltsége megelőzte a matematikáét, majd sorrendben a történelem, (valamilyen) idegen nyelv, az informatika és a testnevelés következett.

A nem kedvelt tárgyaknál ugyanezen megoldók közül senki sem írta a matematikát.

A határozottan realisztikus válaszok a matematikából jobban teljesítők (4-es és 5-ös osztályzat) köréből kerültek ki inkább (hivatalos matematika jegy alapján). Viszont a jobban teljesítők jelentős többsége nem realisztikus választ adott.

## Értékelés, kitekintés

Ami már az első eredményekből is látszik, hogy nagyon kevés az RR-válasz, viszont a felsőbb évfolyamokon nőtt ezek száma, ahogy ez várható is volt. Az első vizsgálattal összevetve mindenképpen meg kell említeni, hogy itt „szigorúbb" az RR-válaszok besorolása, e kódrendszer szerint némelyik, akkor nyitottnak számító megoldás már nem kapott volna RR-besorolást.

A matematikáról való vélekedés és egyéb kérdések, valamint a megoldások összefüggésének statisztikai értékelése még hátravan. Izgalmas kérdés az is, hogy a hibák – ahol erre következtetni lehet az írásos anyagból – milyen gondolkodási módra engednek következtetni. Ennek pontosabb vizsgálatához még esettanulmányokat is tervezünk.

*A tanulmány a Magyar Tudományos Akadémia kibővített szakmódszertani pályázatának (2016–2020) – A Komplex Matematikatanítás a XXI. században, A matematikai gondolkodás fejlesztése a legújabb kutatási eredmények alapján – keretén belül valósult meg.*

## Felhasznált irodalom

Ambrus Gabriella (2004). Nyitott feladatok a matematikaórán, *Tanári Kincsestár* 2004, szeptember 1–26., RAABE Tanácsadó és Kiadó Kft.

Ambrus, Gabriella (2010). *Hétköznapok matematikája* 3, Munkafüzet, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Ambrus, G. & Szűcs, K. (2016). Fehleranalyse beim Lösen von offenen Aufgaben- Ergebnisse einer empirischen Studie in der Grundschule *TMCS*, Debrecen, 2016, **14.** 1. sz., 830–113.

Ambrus, G. (2016). The Pocket Money Problem In: Ana Kuzle / Benjamin Rott / Tatjana Hodnik Čadež (Eds.). *Problem Solving in the Mathematics Classroom – Perspectives and Practices from Different Countries,* WTM Verlag, 49–59.

Blum, W. & Wiegand, B. (1999). Offene Probleme für den Mathematikunterricht-Kann man Schulbücher dafür nutzen? *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Franzbecker.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—state, trends, and issues in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, **22.** 1. sz., 37–68. https://doi.org/10.1007/BF00302716

Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, **1.** 1. sz., 45–58.

Burkhardt, H. (1994). Mathematical applications in school curriculum. In. T. Husén, & T. N. Postlethwaite (Eds.), *The international encyclopedia of education* (2nd ed.) Pergamon Press, Oxford, 3621–3624.

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung prüfen*. Cornelsen, Berlin, 24–27.

Csíkos, Cs., Kelemen, R., & Verschaffel, L. (2011). Fifth-grade students' approaches to and beliefs of mathematics problem solving: a large sample Hungarian study. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* **43**., 561–571. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0308-7

Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren*. Cornelsen Scriptor, Berlin.

Mérő László (2001). Új észjárások, Tericum Kiadó, Budapest.

Munroe, L. (2015). The Open-Ended Approach Framework. *European Journal of Educational Research,* **4.** 3. sz., 97–104. https://doi.org/10.12973/eu-jer.4.3.97

Pehkonen, E. (1995). Introduction: Use of open-ended problems. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* **27.** 2. sz., 55–57.

Puchalska, E., & Semadeni, Z. (1987). Children's Reactions to Verbal Arithmetical Problems with Missing, Surplus or Contradictory Data, *For the Learning of Mathematics*, **7.** 3. sz. (Nov., 1987), 9–16, FLM Publishing Association, URL: http://www.jstor.org/stable/4024790

Radatz, H. (1979*). Fehleranalysen im Mathematikunterricht.* Vieweg, Braunschweig.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution – the social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction,* **7.** 4. sz., 309–327. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(97)00014-5

Schukajlow, S. (2011). *Mathematisches Modellieren. Schwierigkeiten und Strategien von Lernenden als Bausteine einer lernprozessorientierten Didaktik der neuen Aufgabenkultur*. Münster.

Silver, E. A. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* **27.** 2. sz., 67–72.

Verschaffel, L., DeCorte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems, *Learning and Instruction*, **4.** 4. sz., 273–294.

Verschaffel, L., Van Dooren, W., Greer, B. & Mukhopadhyay, S. (2010). Reconceptualising Word Problems as Exercises in Mathematical Modelling, *Journal für Didaktik der Mathematik,* **31.** 1. sz., 9–29.

**Open reality based tasks and its variations in the teaching and in the didactical research of mathematics**

*In the mathematics teaching by choosing tasks to solve, the teaching material and the level of the group – who is participating in the solution – are the basic point of views. However, there are problems, which can be solve on several ways and the solutions differ according to the initial assumptions – these are the so called open problems. The use and importance of such problems in the mathematics didactic has been researched for a long time. In this subject I have done investigations for several years, using my self-made task for undergraduate students (Ambrus, 2010). I prepared different text-variants for the task with the same mathematical content, and I involved into my investigations with the tasks secondary school students and teacher students as well. There is a little mathematical content in the problem, however the students have difficulty by solving it, which is obviously due to the fact, that open problems are quite rarely used in the mathematics lessons.*

***Keywords****: open problems, reality based tasks, word problems, problem variation*

Ambrus Gabriella (2018): Egy nyitott, valós szituáción alapuló feladat variációi az oktatásban és a didaktikai kutatásban. *Gyermeknevelés*, **6.** 1. sz., 55–65.

# „Keressük meg, hogy hol veszítette el a fonalat!” – Tanító szakos hallgatók képzésének lehetőségei egy vizsgálat tükrében

**Bagota Mónika**
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Tanító- és Óvóképző Kar

*Nagyon sok dolgot tanultam C. Neményi Esztertől, de ezek közül talán a legfontosabb a hallgatókhoz való hozzáállása. Számtalan alkalommal tapasztaltam, hogy minden hallgató esetében a lehető legtürelmesebben próbálja megkeresni azt a pontot, ahol a hallgató számára még minden világos volt a matematika tanulása során. Tőle hallottam egy alkalommal a címben is idézett mondatot: „Keressük meg, hogy hol veszítette el a fonalat!” Ez indított arra a gondolatra, hogy az elsőéves tanító szakos hallgatók 2016 őszén megírt dolgozatait próbáljam meg aszerint áttekinteni, hogy kiderüljön: kinél, hol szakadt el az a bizonyos fonál.*

***Kulcsszavak:*** *tanítóképzés, matematika, szintfelmérés, kompetenciamérés, felzárkóztatás*

## Bevezetés

Az ELTE TÓK Matematika Tanszéke a 2016/17-es tanévben egy új, Matematikai praktikum nevű tárgyat vezetett be az első évfolyamos tanító szakos hallgatók számára. Az indokolta a Matematikai praktikum tárgy létrehozását, hogy tanszékünk oktatói hosszú ideje úgy tapasztalják, hogy szükség van olyan jellegű matematikai tudásszint felmérésre, amely megmutatja, hogy hallgatóink rendelkeznek-e azokkal a matematikai ismeretekkel, amelyekre majd tanítói munkájuk során a későbbiekben szükségük lesz. Az volt a véleményünk, hogy erre a kurzusra ne kelljen minden hallgatónak járnia, csak azoknak, akik valóban rászorulnak a matematikai ismereteik felfrissítésére és a hiányosságaik pótlására, így még a tanév kezdete előtt minden hallgatóval megírattunk egy dolgozatot, és az itt elért pontszámok alapján határoztuk meg a kurzuson részt vevő hallgatók csoportjait. Az első évfolyamos hallgatók eredményeiről már részletes beszámoló is készült (*Dancs, Kulman és Pintér*, 2017).

A dolgozat 20 tesztfeladatból és 4 kifejtendő feladatból állt. Minden tesztfeladat esetében négy lehetséges megoldást adtunk meg, amelyekből csak egy volt helyes, és mindegyik tesztfeladat 1 pontot ért, így ezekből a feladatokból összesen 20 pontot lehetett elérni. A 4 kifejtendő feladat esetében részletes feladatmegoldást vártunk, s ezen feladatok mindegyike egységesen 4 pontot ért. A dolgozat elvégzéséhez 60 perc állt a hallgatók rendelkezésére.

Ebben a dolgozatban a tesztfeladatok eredményeit szeretném megvizsgálni abból a szempontból, hogy a hallgatók az egyes feladatoknál melyik választ jelölték meg (esetleg helytelen) megoldásként és mi lehet annak az oka, hogy éppen ezt az eredményt választották.

## Módszer

A dolgozat összeállítása során nagyon tudatosan ügyeltünk arra, hogy mind az egyszerűbb tesztfeladatok jelentős része, mind az alaposabb megfontolást igénylő kifejtős feladatok szöveges feladatok legyenek. A szöveges feladatok hangsúlyos szerepét több dolog indokolta: egyrészt a szöveges feladatokhoz tartozó különféle megoldási stratégiák alkalmazhatósága tapasztalataink alapján nem tudatos a hallgatók számára (*Csíkos, Szitányi és Kelemen*, 2012), másrészt a képzés során nagy hangsúlyt fektetünk a modellalkotás fejlesztésére (*Lindmeier*, 2011). „A szöveges feladatokkal való munkának az alsó tagozaton alapvetően két fő funkciója van. Az egyik szerepe


DOI 10.31074/gyn201816675
Bagota Mónika: orcid.org/0000-0001-9203-3552

a műveletek értelmezésében található. A másik szerepét a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésében, a matematizálás, modellalkotás területén végzett munkában tölti be” (*C. Neményi és R. Dr. Szendrei*, 2010. 213. o.).

A tesztfeladatok kiválasztásánál figyelmet fordítottunk arra is, hogy szerepeljen olyan feladat, amelynek

- modellje számfeladat vagy nyitott mondat;
- megoldása egy vagy esetleg több szám, számpár vagy adat;
- esetében egy vagy több lépésben kereshető a válasz;
- megfogalmazása egyenes szövegezésű, és olyan feladat is, amely fordított szövegezésű (*C. Neményi és R. Dr. Szendrei, 2010. 239. o.).*

A tesztfeladatok négy választható eredményét úgy állítottuk össze, hogy a három helytelen megoldás közül az egyiket egy esetleges számolási hiba esetén kaphassa meg a hallgató, a másik megoldás akkor jöhetett ki eredményként, ha a hallgató pontatlanul olvasta el vagy elvi hibásan oldotta meg a feladatot, a harmadik helytelen megoldásként pedig általában egy teljesen valótlan eredményt ajánlottunk fel.

Természetesen tisztában vagyunk azzal, hogy a feleletválasztós teszteknél nehéz kiszűrni a tippelt válaszokat. Azt biztosan lehet tudni, hogy a teljesen valószínűtlen eredményt választó hallgatók érdemben nem is foglalkoztak a feladattal, csupán választottak egyet a megadott esetek közül. A helyes válasznál azonban csak reménykedhetünk, hogy a választás tudatos feladatmegoldás eredménye. Ennek ellenére azért használtunk tesztfeladatokat is a kifejtős feladatok mellett, mert így az egyszerűbb és nehezebb feladatokkal és a többféle feladattípussal sokkal jobban le tudtuk fedni az alsós tananyagot.

A dolgozatot 233 első évfolyamos hallgató írta meg és a maximálisan elérhető 20 pontból a hallgatók átlagosan 14,59 pontot értek el. Az *1. ábra* azt mutatja meg, hogy a hallgatók az elérhető 20 pontból hány pontot értek el a tesztfeladatok megoldása során.

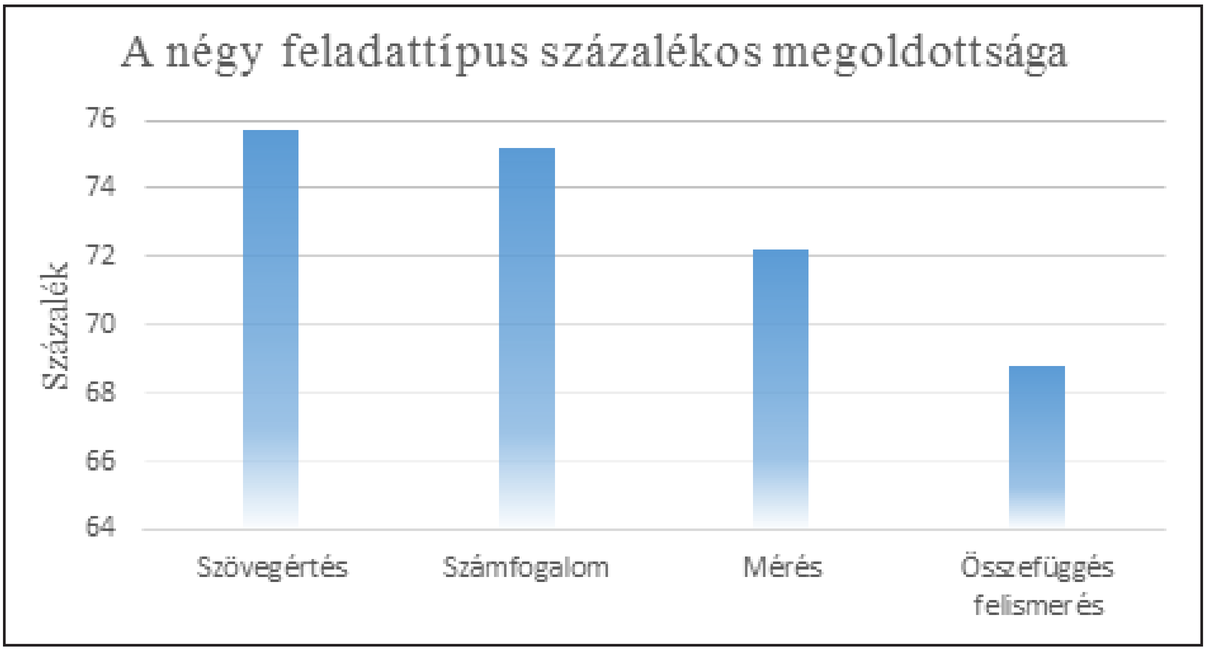

*1. ábra:* A tesztfeladatok eredményei

A tesztfeladatokat az alábbi négy feladattípusba válogattuk:

- szövegértéssel kapcsolatos feladatok;
- számfogalommal, műveletekkel kapcsolatos feladatok;
- mérés–mértékváltással kapcsolatos feladatok;
- összefüggés felismeréssel kapcsolatos feladatok.

Mindegyik kategória 5–5 feladatot tartalmazott, és kettő kivételével mindegyik feladatot alsó tagozatos tankönyvekből és munkafüzetekből válogattuk. (Több feladat esetében is előfordult az, hogy több típusba is sorolható, ekkor megpróbáltuk abba a típusba besorolni, amely a feladatot a leginkább jellemzi.

A *2. ábra* azt mutatja meg, hogy az általunk meghatározott négy feladattípusban hogyan teljesítettek az elsőéves hallgatók. A hallgatók teljesítménye jobb a számfogalom és a szövegértés témakörökben. Ez valószínűleg azzal magyarázható, hogy ez a két témakör elkíséri a matematikát tanuló diákot az alsó tagozattól egészen az érettségiig. Rosszabb a százalékos megoldottság a mérés–mértékváltás témakörben, ez tapasztalataink alapján nem meglepő, s mivel az ilyen típusú feladatok módszertani megalapozása az alsó tagozaton kezdődik el, így nekünk is nagy hangsúlyt kell helyeznünk erre a képzésünk során. Érdemes megfigyelni az összefüggés felismerés témakörbe tartozó feladatok kisebb mértékű sikeres megoldottságát, ennek az lehet a magyarázata, hogy az ilyen típusú feladatok általában kevésbé begyakorolhatók, megoldásuk a megszokottól eltérő gondolkodást igényel vagy valamilyen függvényre vezet.




*2. ábra:* A négy feladattípus megoldottsága

## A tesztfeladatok bemutatása

Az alábbiakban a 20 tesztfeladatot és az azokra adott válaszokat mutatom be részletesen, s ennek alapján pontosabb képet kaphatunk a 2. ábrán látható adatokról is. A bemutatás során nem térek ki minden feladat esetében mind a négy lehetséges válasz százalékos eredményeire, hanem igyekszem azokat a válaszokat bemutatni, amelyeket a legtöbb hallgató jelölt meg első vagy második válaszként, s csak azoknál a feladatoknál térek el ettől, ahol a másodikként, harmadikként vagy akár negyedikként bejelölt válaszok aránya igen kevéssé tér el egymástól. (A könnyebb áttekinthetőség kedvéért mindegyik feladat esetében vastagon, dőlt betűvel jelöltem meg a helyes választ.)

*Tesztfeladatok*

1. Katinak 990 forintja lenne, ha nem költötte volna el pénzének harmadát. Hány forintja van Katinak?

(A) 2970 Ft (B) 1320 Ft ***(C) 660 Ft*** (D) 330 Ft

A feladat kitűzése során azt kívántuk megvizsgálni, hogy a hallgatók pontosan tisztában vannak-e az egyszerűbb törtek (harmad, kétharmad) fogalmával, továbbá azt szerettük volna megfigyelni, hogy hányan követik el azt





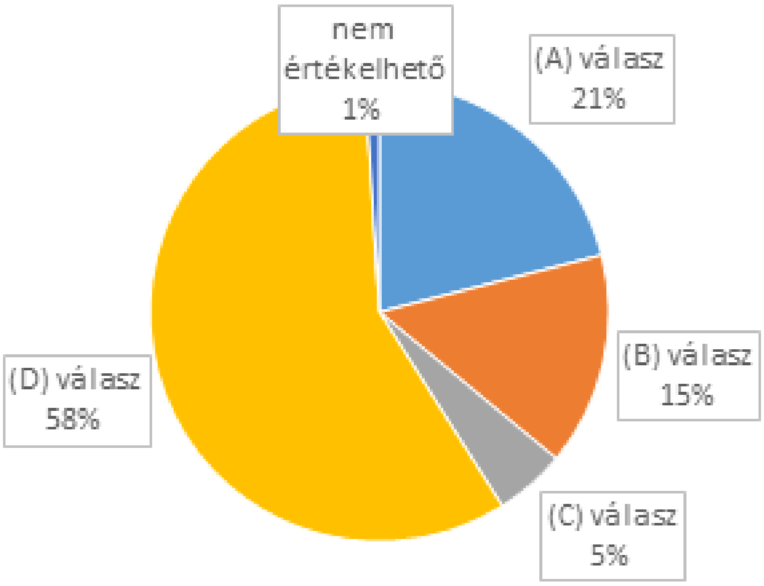
68

a típushibát, hogy 990 Ft-nak a harmadát: 330 Ft-ot adják meg válaszként a megfelelő, 660 Ft-os válasz helyett. A helyes választ végül a hallgatók 76%-a jelölte meg, míg a (D) választ, mint leggyakoribb rossz választ 15%-uk adta válaszként.

2. Milyen egész számokat írhatunk az a betű helyére, hogy helyes legyen a kerekítés, ha százasokra kerekítünk? (Adjuk meg az összes ilyen számot!)

(A) 7 (B) 4, 5, 6, 7 (C) 8, 9, 10 ***(D) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10***

Ez egy tipikus alsó tagozatos feladat, így nem meglepő a helyes megoldások alacsonyabb százaléka (lásd *3. ábra*). Érdekes megfigyelni, hogy milyen magas az (A) választ adó hallgatók száma, az általuk adott megoldás olyan szempontból jónak tekinthető, hogy ekkor kerül a szorzat a lehető legközelebb 100-hoz, azonban nem ez volt a kérdés. A (B) választ adó hallgatók már jobban figyeltek a kérdésre, de nem voltak elég kitartóak az összes megoldás megkeresése során.




*3. ábra:* A 2. feladat válaszainak előfordulása

3. a) 574 perc = … óra ... perc
b) 12 km 349 m - 7 km 597 m = ... km …. m

(A)
a) 9 óra 34 perc
b) 5 km 248 m

(B)
a) 5 óra 74 perc
b) 5 km 248 m

***(C)***
***a) 9 óra 34 perc***
***b) 4 km 752 m***

(D)
a) 6 óra 14 perc
b) 4 km 752 m

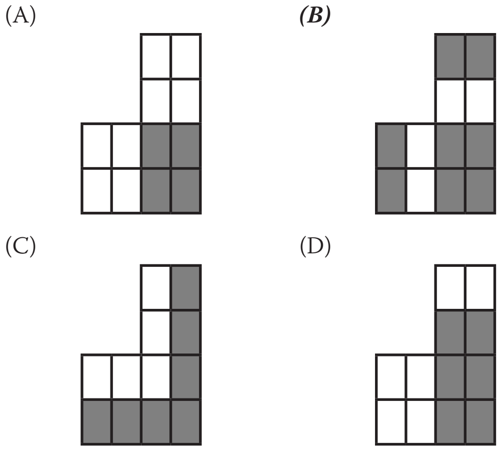
A feladat elég könnyűnek bizonyult, ezt igazolja a 80%-os helyes megoldási százalék. A 12%-os válaszadási százalék az (A) megoldás, mint leggyakoribb rossz válasz esetében átváltási és kivonási problémákból származott, itt a hallgatók nem vették észre, hogy a feladat nem oldható meg úgy, hogy 12 km-ből kivonunk 7 km-t.

4. Rékának 12 db cukorkája van, 3-mal kevesebb, mint Zita cukorkáinak negyede. Hány darab cukorkája van Zitának?

***(A) 60*** (B) 36 (C) 6 (D) 51

Bár a feladat könnyűnek bizonyult, hiszen 83% a helyes válaszok aránya, de meglepően magas, 11%-os a (B) választ, mint leggyakoribb rossz választ adók száma. Ez a válasz viszont egyértelműen a pontatlan értelmezésből adódik, hiszen ebben az esetben a hallgatók 12-ből kivonták a 3-at, ahelyett, hogy hozzáadták volna.

5. Melyik ábra 2/3-ad része van beszínezve?




Nagy örömünkre igen magas, 91% volt a helyes válaszok száma. A helytelen válaszok 3%-nál egyik lehetőség esetében sem voltak magasabbak, ez pedig megnyugtató egy tipikus alsó tagozatos feladat esetén.

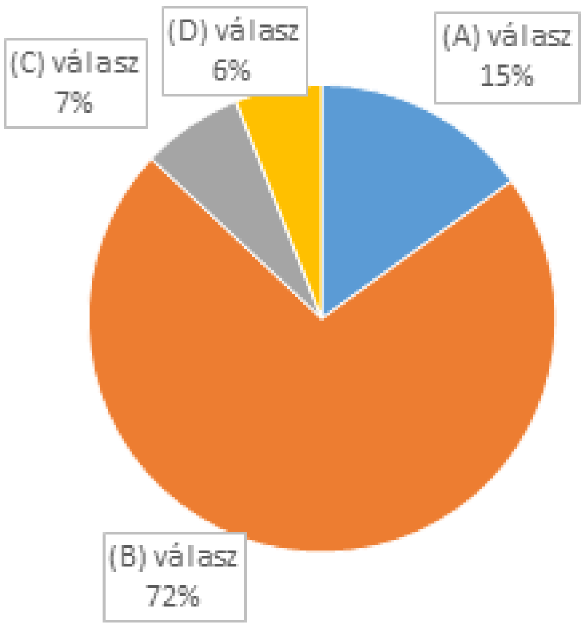
6. Adja meg a következő művelet eredményét tizedestört alakban!

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=$$

(A) $\frac{5}{4}$ ***(B)* *1,25*** (C) 1,58333... (D) 1,08333...

Bár a helyes megoldások száma 72% (lásd *4. ábra*), mégsem mondhatjuk, hogy a hallgatók nem tudták megoldani ezt a feladatot, hiszen az (A) választ, mint leggyakoribb rossz választ a hallgatók 15%-a jelölte be megoldásként és ez helyes megoldása a feladatnak, csak a megoldást ekkor nem tizedestört alakban kaptuk meg. Érdemes megfigyelni, hogy a (C) és (D) válaszokat együttesen a hallgatók 13%-a jelölte be, ezek a válaszok azonban éppen a pontos számolás ellenőrzését szolgálták (*Csíkos*, 2016), így ez a szám nem igazán megnyugtató.

(Bár ez a feladat már nem alsó tagozatos tananyagot tartalmaz, mégis beletettük a feladatsorba, mert szerettünk volna egy kis kitekintést tenni a törtekkel végzett műveletek és a tizedestörtek felé.)




*4. ábra:* A 6. feladat válaszainak előfordulása

7. Mely számok teszik igazzá?
689 - □ > 472

(A) □ > 217 (B) □ > 1161 ***(C)* □ < *217*** (D) □ < 1161

A 72%-os megoldottság is jelzi, hogy a feladat nehéznek bizonyult, s bár a hallgatók 18%-a adta meg az (A) választ, mint leggyakoribb rossz választ helyes megoldásként (vagyis többé-kevésbé tudta, hogy mit kell tennie), van még bőven teendőnk az egyenlőtlenségek terén.

8. Töltse ki a táblázatot a megadott szabály szerint!
   $3 \cdot x = y + 3$

| x | 4 | -3 | | |
|---|---|---|---|---|
| y | | | 27 | -18 |

(A)

| x | 4 | -3 | 10 | -7 |
|---|---|---|---|---|
| y | 9 | 6 | 27 | -18 |

(B)

| x | 4 | -3 | 78 | -57 |
|---|---|---|---|---|
| y | 9 | -12 | 27 | -18 |

(C)

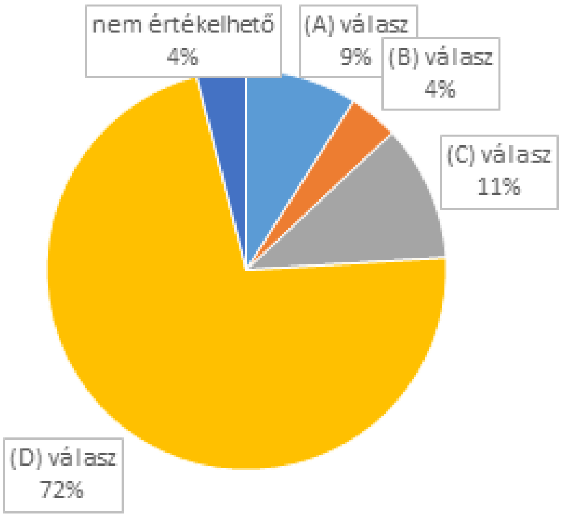
| x | 4 | -3 | 12 | -9 |
|---|---|---|---|---|
| y | 15 | -6 | 27 | -18 |

***(D)***

| x | 4 | -3 | 10 | -5 |
|---|---|---|---|---|
| y | 9 | -12 | 27 | -18 |

A „gépes játékok” hangsúlyos szerepet kapnak az alsó tagozatos matematikaórákon, a feladat lényegében ezt szemlélteti olyan módon, amely talán közelebb áll az elsőéves hallgatókhoz. Tisztában vagyunk azzal, hogy ez egy nehéz témakör, s ezt az *5. ábrán* található számok is jól mutatják. A hallgatók képzésük során sokat foglalkoznak majd „gépes játékokkal”, s ezáltal könnyebbé válik számukra a függvény fogalmának megértése is (*C. Neményi*, 2008). Elgondolkodtató az, hogy az (A) és (C) válaszokat együttesen a hallgatók 20%-a jelölte meg megoldásként, ezek a válaszok arra utalnak, hogy a hallgatónak vagy a negatív számokkal lehet problémája vagy pedig a megadott egyenlet rendezésével.

(Bár ez a feladat már nem alsó tagozatos tananyagot tartalmaz, mégis beletettük a feladatsorba, mert szerettünk volna egy kis kitekintést tenni a negatív számokkal végzett műveletek felé.)




*5. ábra:* A 8. feladat válaszainak előfordulása

9. Mennyi a következő összeg: 27 tízes + 32 ezres + 85 egyes + 19 százas?

| (A) | (B) | ***(C)*** | (D) |
|---|---|---|---|
| 32 192 785 | 3 311 155 | ***34 255*** | 33 155 |

Ez a feladat is tipikus alsó tagozatos feladat és alapvetően nem sikerült rosszul, hiszen 83%-os a helyes válaszok száma. Eléggé aggasztó azonban a 10%-os (A) válaszok, mint leggyakoribb rossz válaszok száma, hiszen ez a válasz egy elvi hibás gondolatmenetre utal a helyiértékes írásmóddal kapcsolatban. Ez a feladat azonban nemcsak a pontos helyiértékes írásmód, hanem a pontos számolás ellenőrzésére is szolgál (*Csíkos*, 2016), ilyen szemszögből nem igazán megnyugtató a 6%-os (D) válaszok száma, amely a pontatlan számolásra utal.

10. Hányféleképpen ülhet le Anna, Bea, Cili és Dóra egy sorban egymás mellé a moziban, ha Anna mindenképpen Cili mellé akar ülni?

(A) 6 (B) 24 (C) 2 ***(D) 12***

Szomorú, de sajnos nem meglepő a 61%-os helyes válaszok száma, hiszen tapasztalataink alapján a kombinatorika feladatok általában nehézségeket okoznak a hallgatók körében. Némi optimizmusra az adhat okot, hogy az (A) választ, mint leggyakoribb rossz választ bejelölő hallgatók száma 31%-os, és ez a válasz arra utal, hogy nem gondolkoztak teljesen rosszul a hallgatók, csak nem vették figyelembe azt a tényt, hogy Anna és Cili akár helyet is cserélhetnek.

11. Gondoltam egy számra, a felét elosztottam 3-mal, így 7 lett a hányadosom és 2 a maradék. Melyik számra gondoltam?

(A) 21 (B) 23 ***(C) 46*** (D) 10

A feladat megoldásához ismerni kell a maradékos osztásban szereplő számok pontos elnevezését és a maradékos osztás osztandójának kiszámítását az osztó, a hányados és a maradék segítségével. S bár a hallgatóknak csupán 76%-a választotta a helyes megoldást, mégis szinte mindenki tisztában van ezekkel a fogalmakkal, hiszen a hallgatók 21%-a jelölte be megoldásként a (B) választ, mint leggyakoribb rossz választ, ez azonban arra utal, hogy „csak" pontatlanul olvasták el a feladatot.

12. Timi és Anna együtt 40 liter vizet hoztak a kútról. Timi négyszer többet hozott Annánál. Mennyit hozott Anna?

(A) 10 liter ***(B) 8 liter*** (C) 32 liter (D) 30 liter

A hallgatók 79%-a jelölte be megoldásként a (B) választ, meglepően magas, 16%-os ugyanakkor az (A) választ, mint leggyakoribb rossz választ bejelölő hallgatók száma. Ez azért nem megnyugtató, mert ennek a válasznak a bejelölése elvi hibás gondolatmenetre utal.

13. Melyik az a legnagyobb háromjegyű szám, amelyben a tízesek helyén álló számjegy kétszer akkora, mint az egyesek helyén álló, a százasok száma pedig fele az egyeseknek?

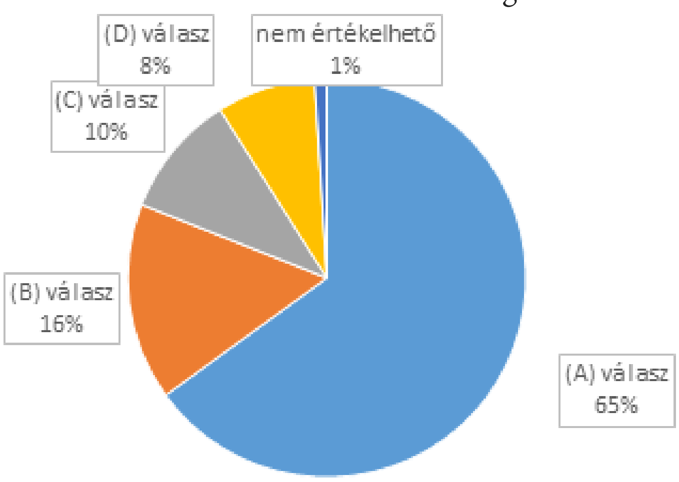
***(A) 284*** (B) 142 (C) 4168 (D) 248

Ennél a feladatnál lényegében minden hallgató pontosan tudta, hogy mit kell csinálnia, 82%-uk a helyes megoldást is választotta közülük. A hallgatók 14%-a a (B) választ, mint leggyakoribb rossz választ jelölte meg megoldásként, s ez is arra utal, hogy ők is helyesen gondolkodtak, csak arra nem figyeltek, hogy a feladat a legnagyobb háromjegyű számot kéri válaszként.

14. Öt barátnő életkorának az összege 42 év. Hány év lesz az életkoruk összege 6 év múlva?

***(A) 72 év*** (B) 48 év (C) 78 év (D) 60 év

Kissé szokatlan feladat (bár az ilyen típusú feladatok gyakran szerepelnek felső tagozatos feladatgyűjteményekben) és első olvasásra talán úgy tűnhet, mintha nem lenne elég adatunk a megoldáshoz. Ennek fényében nem meglepő a 65%-os helyes válaszadás (lásd *6. ábra*), azonban érdemes megfigyelni a helytelen válaszok sokféleségét. A 16%-os (B) válasz arra utal, hogy ekkor a hallgatók vagy nem vették figyelembe, hogy mind az öt barátnő öregszik hat évet vagy pedig egyszerűen csak összeadták a feladatban szereplő két számot, a 10%-os (C) válasz esetén pedig nem figyeltek arra, hogy a feladat szövegében öt barátnő szerepel, nem pedig hat, továbbá magas, 8%-os a teljesen valótlan eredményt választó hallgatók száma is.




*1. ábra:* A 14. feladat válaszainak előfordulása

15. Egy kétkarú mérleggel mérünk egyforma zacskó paprikákat. Az egyik serpenyőben két egyforma zacskó paprika mellett egy 50 g-os súly, a másik serpenyőben egy 20 dkg-os súly van. Így a mérleg egyensúlyban van. Hány gramm paprika van egy zacskóban?

| (A) 7,5 dkg | ***(B) 75 g*** | (C) 7,5 g | (D) 750 g |
|---|---|---|---|

Lényegében azt mondhatjuk, hogy a hallgatók nagy része tisztában volt azzal, hogyan kell megoldani a feladatot, bár a 70%-os helyes válaszok száma nem egészen erre utal. Azonban hozzátéve azt, hogy az (A) választ a hallgatók 11%-a választotta, látjuk, hogy ők is jól gondolkodtak, de nem figyeltek arra, hogy grammra vonatkozik a kérdés, nem pedig dekagrammra. Magas, 13%-os a (D) választ, mint leggyakoribb rossz választ adó hallgatók száma, ők úgy tűnik, nem emlékeznek a dekagramm-gramm átváltásra.

16. Kati hétfőn 20 perc alatt tanulta meg a leckéjét, kedden 40 perc alatt, szerdán 45 perc alatt, csütörtökön 35 perc alatt, pénteken nem kellett tanulnia. Átlagosan hány percet töltött hétfőtől péntekig tanulással?

| (A) 20 percet | (B) 30 percet | ***(C) 28 percet*** | (D) 35 percet |
|---|---|---|---|

A feladatot csupán a hallgatók 65%-a oldotta meg helyesen. Azonban abból, hogy a hallgatók 26%-a a (D) választ, mint leggyakoribb rossz választ jelölte meg megoldásként, látható a hibás gondolatmenet. Ők ugyanis nem vették figyelembe a pénteki napot az átlagszámításnál, valószínűleg azért, mert ezen a napon Kati nem tanult egy percet sem.

17. Hány fokot fordul el az óra kismutatója 3 óra alatt?

| (A) 30° | (B) 45° | (C) 60° | ***(D) 90°*** |
|---|---|---|---|

A hallgatóknak csak a 63%-a választotta a helyes megoldást, míg 26%-uk a (B) választ, mint leggyakoribb rossz választ jelölte meg megoldásként. A feladat feltételezi a hagyományos óra ismeretét, így remélhetőleg a későbbiek során javulni fog majd a hallgatók eredménye, mivel a hagyományos órával nagyon sokat foglalkozunk a képzésünk során.

18. Egy 2 cm széles és 10 cm hosszú téglalap kerülete ugyanakkora, mint egy négyzet kerülete. Hány centiméter a négyzet oldala?

| (A) 3 cm | (B) 5 cm | (C) 1 cm | ***(D) 6 cm*** |
|---|---|---|---|

A hallgatók 73%-a oldotta meg helyesen a feladatot, érdekes megfigyelni, hogy 18%-uk a (B) választ, mint leggyakoribb rossz választ jelölte meg megoldásként, ami arra utal, hogy a téglalap kerülete helyett annak területét számolták ki. A hallgatók 7%-a pedig az (A) választ adta, ami azt feltételezi, hogy a téglalapnak nem a kerületét számolták ki, csak két szomszédos oldal hosszának az összegét. Elgondolkodtató, hogy a kerületszámítás milyen nehézséget okoz a hallgatók körében. Talán az lehet ennek a magyarázata, hogy nem látják szemléletesen azt, hogy mit is jelent a kerület, így viszont nehézségekbe ütköznek majd akkor is, amikor az alsó tagozatos gyerekeknek próbálják megtanítani a fogalmat.

19. Tömör téglatestet építünk 1 cm élhosszúságú kis kockákból. A téglatest egy csúcsba futó éleinek hossza 3 cm, 4 cm, 4 cm. Hány kis kockából áll a téglatest?

| (A) 16 | (B) 12 | ***(C) 48*** | (D) 11 |
|---|---|---|---|

Ennél a feladatnál a téglatest térfogatának ismeretére kérdeztünk rá és a hallgatók 75%-a oldotta meg helyesen a feladatot. Érdekesen alakultak a rossz válaszok: a hallgatók 12%-a jelölte be a (B) választ megoldásként (ez volt a leggyakoribb rossz válasz), ez arra utal, hogy ők nem figyeltek a téglatest magasságára, csupán az alapjának a területére. A hallgatók 7%-a pedig a (D) választ jelölte meg, ők pedig egyszerűen csak összeadták a feladatban szereplő három számot.

20. Ádám és Béla gyufaszálakkal játszott. Az asztalon 60 gyufaszál hevert. Ádám kirakott egy olyan háromszöget, melynek mindegyik oldala 6 gyufaszálból állt. Béla a maradék gyufaszálakból egy olyan tég-

lalapot rakott ki, melynek egyik oldala 8 gyufaszálból állt. Hány gyufaszálnyi volt a téglalap másik oldala, ha a fiúk felhasználták az összes gyufaszálat az alakzatok kirakásához?

(A) 26 (B) 46 (C) 19 ***(D) 13***

Ez egy kicsit összetettebb feladat volt, de lényegében itt is a háromszög és a téglalap kerületét kellett ismerniük a hallgatóknak. A helyes megoldást a hallgatók 64%-a jelölte meg, míg 23% az (A) választ, mint leggyakoribb rossz választ adta meg megoldásként. Ez arra utal, hogy ezek a hallgatók nincsenek pontosan tisztában azzal, hogyan kell a téglalap kerületét kiszámítani.

## Összegezés

Áttekintve a tesztfeladatokra adott válaszokat, az alábbiak látszanak kirajzolódni (összhangban a *2. ábrán* látható adatokkal). A feladatok jelentős részében a hibás megoldás abból adódik, hogy a hallgatók pontatlanul olvasták el a feladatot vagy valamilyen szövegértési problémába ütköztek a feladat megoldása során. Nagyon komolyan kell vennünk ezt a jelzést és minél több és minél többfajta szöveges feladattal kell megismertetnünk a hallgatókat tanulmányaik ideje alatt. A helytelen válaszok ugyanakkor felvetik a feladatmegoldás ellenőrzés igényének a hiányát is, s ez azért is aggasztó, mert az ellenőrzés a tanulás és a feladatmegoldás fontos része. A képzés során az eddigi gyakorlathoz hasonlóan nagy hangsúlyt kell fektetnünk a helyiértékes írásmód alapos elsajátítására és a kerekítés szabályainak pontos ismeretére, továbbá még gondosabban kell ügyelnünk arra, hogy hallgatóink pontosan számoljanak. Nagyon alaposan és minél szemléletesebben körül kell járnunk a kerület, terület, felszín és térfogat fogalmakat. Továbbra is sokat kell foglalkoznunk a „gépes játékokkal", hogy megkönnyítsük a hallgatók számára a függvény fogalmának megértését. Bővítenünk kell hallgatóink kombinatorikai ismereteit egyszerűbb kombinatorikai feladatokkal és a hozzájuk tartozó tevékenységekkel. Érdemes megjegyezni azt is, hogy a feladatok nagy része megoldható lett volna úgy is, hogy behelyettesítjük a megadott számokat a szövegbe. A hallgatókkal való beszélgetés során azonban kiderült, hogy ez a megoldási mód egyáltalán nem jutott eszükbe a dolgozatírás során.

## Felhasznált irodalom

Ambrus Gabriella (2004): A gyakorlás újfajta értelmezése a matematikadidaktikában és a matematikatanárok képzésében. *A matematika tanítása*, **12.** 3. sz., 10–15.

C. Neményi Eszter (2008): *Relációk, függvények, sorozatok. A törtszám. A negatív szám*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest.

C. Neményi, Eszter és R. Dr. Szendrei Júlia (2010): *A számolás tanítása. Szöveges feladatok*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest.

Csíkos, Cs. (2016): Strategies and performance in elementary students' three-digit mental addition. *Educational Studies in Mathematics*, **91.** 1. sz., 123–139. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9658-3

Csíkos, Cs., Szitányi, J. & Kelemen, R. (2012): The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics*, **81.** 1. sz., 47–65. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9360-z

Dancs Gábor, Kulman Katalin és Pintér Mariann (2017): Elsőéves tanítóképzős hallgatók matematikai képességfelmérésének eredményei. In: Karlovitz János Tibor (szerk.) *Válogatott tanulmányok a pedagógiai elmélet és szakmódszertanok köréből*, 228–235. URL: http://www.irisro.org/pedagogia2017januar/index.html

Lindmeier, A. (2011): *Modeling and measuring knowledge and competencies of teachers: A threefold domain-specific structure model for mathematics*. Waxmann, Münster.

**„Find, where he has lost the track!” – Possibilities in the course of teaching primary school teacher students using the results of a pilot research**

*I have learnt from Eszter C. Neményi a lot, but perhaps the most important thing I have learnt from her is the approach to university students. I have experienced several times that she tried to find the areas with great care where for the student was still everything clear during his/her mathematical studies. I heard from her once the sentence quoted in the title: „Find, where he has lost the track!” This motivated me to clarify according to the tests written in autumn 2016 by first grade students, who and where has lost that track.*

***Keywords**: primary school teachers' training, mathematics, assessment, measurement of competences, upgrading*

Bagota Mónika (2018): „Keressük meg, hogy hol veszítette el a fonalat!” – Tanító szakos hallgatók képzésének lehetőségei egy vizsgálat tükrében. *Gyermeknevelés*, **6.** 1. sz., 66–75.

# Fedezzük fel a megoldást: keressünk mintát!

**Kónya Eszter – Kovács Zoltán**
Debreceni Egyetem, Természettudományi és Technológiai Kar – Nyíregyházi Egyetem

*Az MTA Tantárgypedagógiai Kutatási Programja támogatásával egy olyan kutatási programot dolgoztunk ki, melyben a problémamegoldó gondolkodás sajátosságait vizsgáljuk az alsó tagozatos kortól kezdve tanárjelöltekkel bezárólag különböző képességű csoportokban. Dolgozatunkban egy olyan problémára adott tanulói válaszokat elemzünk, amely mindegyik korosztály számára valós problémaszituációt jelenthet. Kutatásunk elsősorban a tanulók modellalkotó és szabályfelismerő képességeiről ad képet, általánosabban arról, hogy a sorozatképzés, szabályfelismerés (összefoglalóan mintakeresés) és a megalkotott szabály indoklása hogyan vezet felfedezéshez. Külön vizsgáljuk azt is, hogy a probléma különböző típusú reprezentációi hogyan befolyásolják a problémamegoldás folyamatát.*

***Kulcsszavak:*** *probléma alapú tanulás, mintakeresés, reprezentáció, definiált sorozat, induktív gondolkodás*

## Bevezetés

Dolgozatunk egyik kulcsfogalma, a felfedezésen alapuló (felfedeztető) tanulás egyrészt folyamatosan gazdagodó fogalmi struktúraként van jelen mind a matematika didaktikai, mind a neveléstudományi irodalomban, másrészt terminológiai és fordítási viták is kísérik használatát (Csíkos, 2010), ezért mindenekelőtt tisztáznunk kell, hogy milyen értelemben használjuk ezt a fogalmat. *Paul Ernest* munkája (1991) a felfedeztető módszer (*inquiry method*) három formáját különbözteti meg: az irányított felfedezést (*guided discovery*), a problémamegoldást (*problem solving*) és a kutatásalapú tanulást (*investigatory approach*). A különbségtétel alapja a tanulói és a tanári szerep. A problémamegoldás jellemzéseként a tanár szerepét a probléma kitűzésében, a tanuló szerepét a probléma saját erőből történő megoldásában látja a szerző. A kutatásalapú tanulástól elsősorban a tanári szerep különbözteti meg, ahol a tanár csak a probléma szituációt határozza meg, magát a problémát a tanuló fogalmazza meg, mint ahogyan a probléma megoldási kísérlete is a tanuló feladata. Az irányított felfedezésben a tanuló befogadó, tanárt követő szerepe dominál. A neveléstudományi irodalom ugyanakkor különbséget tesz a problémamegoldás (*problem solving*) és a problémaalapú tanulás (*problem based learning*) között, utóbbit önszabályozó tanulói folyamatként mutatja be (Molnár, 2004). Dolgozatunk szóhasználatához *Csíkos Csaba* meghatározása áll legközelebb: „A matematika területén a problémaalapú tanulás azt jelenti, hogy a tanulónak matematikai problémahelyzetet kell elemezniük, saját és társaik gondolatmenetéhez kritikusan kell viszonyulniuk, és meg kell tanulniuk elmagyarázni és igazolni gondolatmenetüket." (*Csíkos*, 2010. 53. o.) Az általunk vizsgált szituációt az előbbi meghatározás mindhárom eleme jellemzi, így kutatásunk leírásához megfelelő fogalmi keretet szolgáltat.

A felfedezésen alapuló tanulás modern elméletének egyik kifejtője *Jerome S. Bruner*, aki szerint a tanuló a felfedezésen alapuló tanulás során kutatóként viselkedik, és a tanulás, problémamegoldás lehetőségek felkutatásán keresztül történik (*Bruner*, 1974). A magyar matematikadidaktikai hagyományoknak fontos eleme a felfedezésen alapuló tanulás, amely szoros kapcsolatban van az induktív gondolkodással, vagy a pólyai aktív tanulás alapelvével: „Eredményes lesz a tanulás, ha a tanuló maga találja ki az elsajátítandó tananyag akkora hányadát, amekkorát az adott körülmények között egyáltalán lehet" (*Pólya*, 1985. 114. o.), így *Bruner* konstruk-




DOI 10.31074/gyn201817685

Kónya Eszter: orcid.org/0000-0003-2871-8412
Kovács Zoltán: orcid.org/0000-0002-7359-9435

tivista elméletéhez direkt módon kapcsolódnak *Pólya* heurisztikával és induktív gondolkodással kapcsolatos tézisei (Pólya, 1988). A felfedezésen alapuló tanulás a közoktatási gyakorlatban markánsan a *Varga Tamás* nevével fémjelzett komplex matematikatanítási kísérletben alapelvként jelenik meg. A komplex matematikatanítási kísérlet egyik fontos hatásának látjuk, hogy ennek az elvnek finomítása, továbbfejlesztése, azóta is jelen van a matematikatanítás és -tanulás mindennapi gyakorlatában. Ezen a helyen *C. Neményi Eszter* tantárgy-pedagógiai munkáját emeljük ki, melynek az egyik fókuszpontja a tanulói felfedezés támogatása elsősorban a szabályfelismerő képesség fejlesztésén keresztül (C. Neményi, 1999).

A téma kutatóiban folyamatosan felvetődnek szakmai és etikai kérdések is a felfedezéses tanulással kapcsolatban. Lehet-e önálló (vagy irányított) felfedezést elvárni minden tanulótól, érthető-e mindenki számára a példák és ellenpéldák szerepe, nem vezethet-e a felfedezésen alapuló tanulás értelem nélküli tanuláshoz, ahol tehát a felfedezés végeredménye nem kap kiemelt szerepet a felfedezéshez vezető úttal szemben, egyáltalán szabad-e a felfedezéses tevékenységet értékelni. Ezekre a dilemmákra csak úgy lehet megnyugtató választ adni, ha a felvetett problémákat tudományos alapossággal megvizsgáljuk. Minél jobban megismerjük a tanulók problémamegoldó gondolkodásának sajátosságait a különböző életkorokban, illetve minél alaposabban elemezzük, hogy osztálytermi környezetben mitől lehet hatékony a felfedezéses matematikatanítás, annál biztosabban tudjuk alkalmazni ezt a módszert.

A kérdések tanulmányozására a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgypedagógiai Kutatási Programja támogatásával egy kutatási programot dolgoztunk ki, melyben a problémamegoldó gondolkodás sajátosságait vizsgáljuk az alsó tagozatos kortól kezdve tanárjelöltekkel bezárólag különböző képességű csoportokban. Kutatásunk egyik alprogramjában, amely jelen munka tárgya is, olyan problémára adott tanulói válaszokat dolgoztunk fel, amely mindegyik korosztály számára valós problémaszituációt jelenthetett. A probléma kézenfekvő matematikai modellje sorozattal adható meg, többféle módon is. Így kutatásunk eredménye elsősorban a tanulók modellalkotó és szabályfelismerő képességeiről ad képet, általánosabban arról, hogy a sorozatképzés, szabályfelismerés (összefoglalóan mintakeresés) és a megalkotott szabály indoklása hogyan vezet felfedezéshez. Ebben a kontextusban felfedezésen azt értjük, hogy a tanuló nem tanári magyarázatot követve jut el a probléma megoldásához, hanem önállóan. Külön vizsgáltuk azt is, hogy a probléma különböző típusú reprezentációi hogyan befolyásolják a problémamegoldás folyamatát.

A kutatási módszer a tanulók gondolkodásának megfigyelése és elemzése volt. 2016 őszén és 2017 tavaszán végzett keresztmetszeti kutatásunkban minden tanulói csoportot beleszámítva 155 írásbeli munkát és 16 (a 4–11. évfolyamok mindegyikéről két-két) videón rögzített klinikai interjút dolgoztunk fel. Az írásbeli munkákat az alkalmazott problémamegoldási stratégiák alapján elemeztük, kiemelt figyelmet fordítva a mintakeresési stratégiára. Az interjúk kiértékelésénél a fenti szempontokat kiegészítettük egy továbbival, amely különböző típusú reprezentációinak megjelenésére vonatkozott.

Jelen dolgozatban két-két negyedikes és ötödikes, jó matematikai képességekkel rendelkező tanuló teljesítményét elemezzük a velük készített interjúk alapján. A tanulók egy nagyvárosi, matematikai tehetséggondozásban hagyományokkal és országos szintű eredményekkel rendelkező iskolába járnak. Az interjú résztvevőit saját szaktanáruk jelölte ki, kérésünknek megfelelően, az átlagostól jobb képességűek közül. A vizsgálatba bevont tanulók ilyen módon történő kiválasztásával arra törekedtünk, hogy behatároljuk az egyes korosztályok életkori lehetőségeit az adott probléma megoldásának vonatkozásában. Feltehető ugyanis, hogy a vizsgált életkorban az átlagos tanulói gondolkodás nem fejlettebb az interjúban szereplőkénél.

## A kutatás elméleti háttere

### *A mintakeresés mint problémamegoldási stratégia*

Kutatásunk keretében olyan problémát használtunk, amely nyílt volt abban az értelemben, hogy nem a probléma megadott megoldásáról kellett bizonyítani, hogy az helytálló, hanem a megoldást meg kellett sejteni, azt szavakkal, vagy szimbólumokkal megfogalmazni, majd helyességét bizonyítani. A nyíltság megjelenik ott is, hogy magát a sejtést is többféle formában lehetett megfogalmazni. A fiatalabb korosztály számára lényeges, hogy pusztán aritmetikai módon meg lehessen fogalmazni az összefüggést, míg idősebb korosztályban már lehetséges az algebrai gondolkodásmód, az algebrai forma. A „bizonyítás" alatt nem feltétlenül matematikai értelemben vett teljes értékű bizonyítást értünk, hanem az életkornak megfelelő különböző szintű érvelést, magyarázatot, amely lehet akár egyetlen konkrét példán bemutatott indoklás. A problémamegoldás szempontjából az első akadály a sejtés megfogalmazása, ennek az akadálynak a leküzdéséhez vezethet a mintakeresés mint problémamegoldási stratégia. „Valamit megsejteni azon múlik, hogy képesek vagyunk-e mintát vagy analógiát felismerni; más szavakkal, képesek vagyunk-e általánosítani" (*Mason, Burton és Stacey*, 2010. 73. o.). Ugyanitt a szerzők háromszavas „ökölszabályt" adnak a gyakorlati megvalósításhoz: *try* (próbáld ki), *maybe* (talán), *why* (miért). Ennek a folyamatnak a részletesebb kifejtésére több munka is vállalkozik. Például Rivera (2013) a minta általánosítását olyan komplex tevékenységként írja le, amely egy felismert struktúra konstruálását, kifejezését és igazolását foglalja magában. Az igazolás vagy „bizonyítás" módja a tanulók életkorától és matematikai képzettségétől függően eltérő lehet: történhet konkrét példákkal végzett, de általános lépésekből álló eljárással, deduktív levezetéssel vagy teljes indukcióval.

Mi a kutatásunk során a következő, ötlépcsős modellt használtuk:

1. Numerikus tapasztalat gyűjtése, elrendezése.
2. A felismert minta követése, akár általános szabály megfogalmazása nélkül.
3. Sejtés megfogalmazása, azaz plauzibilis szabályszerűséget keresünk az adatainkban.
4. Próba, azaz újabb numerikus példával meggyőzőbbé tesszük a sejtést, vagy elvetjük azt.

Ezek a mintakeresési stratégia induktív, tapasztalaton alapuló lépései.

5. Bizonyítás, annak indoklása, hogy a megsejtett szabály mint matematikai modell miért felel meg a probléma által definiált matematikai háttérnek.

Az ötödik lépés az induktív szakasz deduktív lezárása.

A mintakeresés stratégiája feltételezi, hogy a tanulónak már van tapasztalata plauzibilis minták felfedezésében. Ennek legegyszerűbb formája, amikor adott számsorozathoz, rajzhoz, vagy tevékenységhez olyan szabályt kell keresni, mely a sorozat megadott tagjaira illik, s a talált szabály alapján a sorozatot folytatni kell. Egy példával illusztráljuk a plauzibilis mintakeresés feladatát:

Keressünk szabályt a következő egészekből álló számsorozathoz: 1, 2, 4, 7, …

Matematikai szempontból a sorozat következő tagja bármilyen egész szám lehet, azonban nem azt kérdezzük, hogy mi a sorozat következő tagja, hanem azt kérjük, hogy találjunk egy lehetséges szabályt a sorozathoz. Ilyen szabály például, hogy a sorozat negyedik tagjától kezdve a következő tag az előtte levő három tag összege: 1, 2, 4, 7, 13, …. Az is megfelelő szabály azonban, hogy a sorozat második differenciája 1, azaz a folytatás most 1, 2, 4, 7, 11, …. Alsó tagozatban is használatos terminológiával: egy változó különbségű sorozat első négy tagjáról van szó, ahol a szomszédos tagok különbsége rendre 1; 2; 3; …. Az így kapott sorozat már állandó különbségű sorozat (számtani sorozat).

### *A sorozatokkal kapcsolatos tevékenységek fejlesztő hatása*

A matematika tananyagban a sorozatokkal kapcsolatos tevékenységeknek *C. Neményi Eszter* (1999) szerint három féle célja, szerepe van. *Ezek:*

1. A modellszerep bemutatása, azaz a sorozat a valódi probléma matematikai modellje
2. Összefüggés-felismerő képesség fejlesztése
3. Egyszerű elemi ismeretek feltárása a matematikai fogalommal kapcsolatban

Sokféle probléma megértéséhez, megoldásához egy-egy sorozat szolgáltatja a matematikai modellt, azaz a megértést, vagy megoldást egy alkalmas sorozat megtalálása jelenti: ezt értjük a sorozat *modellszerepén*. A megoldásnak ez az útja induktív út, az egyes helyzetek, állapotok megfigyelésétől halad a mintafelismerés és az általánosítás irányába. Ilyen esetekben a felismert minta mindig definiált, éppen a valós szituáció az, ami a mintát és az azt leíró sorozatot egyértelművé teszi. A valós szituációból nyert számsorozat folytatásával, a minta felfedezésével a probléma még nem megoldott. A modell akkor válik teljessé, ha a sorozatot kapcsolatba hozzuk a valóságos problémaszituációval, azaz ha azt is megmutatjuk, hogy a felismert sorozat valóban kifejezi a probléma matematikai hátterét. Az is előfordul, hogy különböző képzési szabályokat ismerünk fel és követünk, ám ezek, amennyiben helyesen írják le a problémát, ugyanahhoz a sorozathoz vezetnek. Tapasztalati függvények, sorozatok alkotását, értelmezését, a változások leírására szolgáló *matematikai modell keresését* a NAT[1] az elsőtől a tizenkettedik évfolyamig előírja, mint a megismerésre vonatkozó fejlesztési feladatot.

A teljes közoktatási folyamaton átívelő fejlesztési célként fogalmazza meg a NAT a sorozatokra vonatkozó összefüggések megalkotását is, mint az alkotás és kreativitás fejlesztésének eszközét. Az összefüggés-felismerő képesség fejlesztés *C. Neményi* munkájának is központi eleme. „Az összefüggés felfedezése tájékozódással, próbálgatással kezdődik és a talált szabály kifejezésével folytatódik. A megtalált szabály kifejezése történhet egyszerűen a sorozat folytatásával, ellenpéldák kizárásával, szavakkal vagy szimbólumokkal történő megfogalmazásával is. Maguk a sorozat tagjai többféle módon reprezentálhatók. Tárgyi tevékenységgel, ábrákkal, számokkal, szimbólumokkal. (*C. Neményi*, 1999. 6. o.).

A sorozatokkal kapcsolatos problémák az életkortól függően hordozhatnak matematikai ismereteket. A dolgozatunkban bemutatott problémához szükséges matematikai ismeret hatodik osztályig a különbségi sorozat képzése, illetve természetes számokból képezett állandó differenciájú sorozat (azaz számtani sorozat, amelyet ekkor még természetesen nem nevezünk néven) összegének meghatározása, megoldási stratégiától függően. Az ismeretek skálája azonban nagyon tág a vizsgált problémánál, a másik végén az állandó második differenciájú sorozatok zárt alakjának meghatározása szerepel.

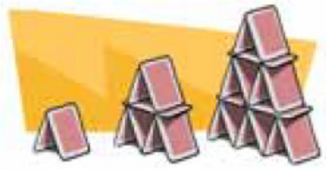
### *Bruner reprezentációelmélete*

Egy probléma megértésének elengedhetetlen feltétele, hogy azt a tanuló valamilyen reprezentációs módban ábrázolja. Ez lehet tárgyi tevékenység (enaktív sík), rajzos tevékenység (ikonikus sík), történhet szimbólumokkal (szimbolikus sík). A szimbólumok lehetnek számok, betűk, egyéb jelek, amelyek jól fejezik ki a feltárt, feltárható összefüggéseket. Természetes, hogy az egyes reprezentációs módok nem elkülönülten jelennek meg a problémamegoldó tevékenység során, de az jól megfigyelhető, hogy a gondolkodás egyes fázisaiban melyik reprezentációs forma domináns. Éppen ezért lényeges kérdés az egyes reprezentációs módok között váltás képessége. Megfigyelési szempontjaink közé tartozik egyrészt, hogy melyik síkon képes hatékonyan gondolkozni a tanuló, képes-e magától váltani a síkok között, amennyiben az egyik módban nem boldogul, rájön-e, hogy a probléma áthelyezése segíthet, illetve, hogy a tanár által kínált reprezentációs módra át tud-e állni.(*Bruner*, 2004).

[1] A Kormány 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról.

## A vizsgált problémaszituáció: Építsünk kártyavárat!

Egyik ötödikeseknek szóló tankönyvben (*Wintsche*, 2016) található a következő probléma: Építsetek kártyavárat a képen látható módon! Beszéljétek meg, hogy hány lap kell az 1, 2, 3, … szintes vár elkészítéséhez! (A tankönyvben a feladathoz az 1. ábra van megadva.)



*1. ábra:* A tankönyv szemléltető ábrája a problémához

A probléma kitűzését korosztályonként módosítottuk. Lényeges változás volt, hogy a különböző korosztályokban más-más kártyavárra kérdeztünk rá: „alacsony” várra, pl. ötszintesre, „magas várra” pl. harmincszintesre, vagy általánosan az n-szintes várra. Minden esetben csak egyetlen kártyavár fotóját adtuk meg, a háromszintes várét, ellentétben a tankönyvi ábrával. Ezt a módosítást azért tartottuk szükségesnek, hogy ne sugalljuk rögtön a probléma kitűzésekor a sorozatképzés ötletét. Sorozatképzésre ugyanis legalább két lehetőség van, ezek mint jellemző összeszámlálási stratégiák ténylegesen meg is jelentek a kísérlet során:

1. Az n-edik kártyavárhoz szükséges lapok számából álló sorozat, melynek kezdő tagjai 2, 7, 15, 26. Ez egy olyan sorozat, melynek második differenciája 3 és a sorozat -edik tagját keressük.
2. Az n-szintes kártyavár egyes szintjeinek megépítéséhez szükséges lapok számából álló sorozat, melynek első három tagja 2, 5, 8, ha felülről lefelé haladunk, s a vertikális helyzetű lapokat „tetőnek” fogjuk fel és nem „padlónak”. Ez egy 3 differenciájú számtani sorozat, melynek összegét keressük.

A probléma kapcsán több kutatási kérdést tettünk fel:

1. *A probléma bruneri értelemben vett reprezentációi hogyan befolyásolják a problémamegoldást?* Ebbe a kérdésbe beleértjük azt is, hogy a megoldás érdekében képes-e a reprezentációk közötti váltásra a tanuló. A várat meg lehet építeni (hatodik osztállyal bezárólag a kártyavárat ténylegesen megépíttettük a tanulókkal), le lehet rajzolni, és meg lehet adni az előző két stratégiának megfelelően a lapok számának sorozatát, így jelen van mind a háromféle bruneri reprezentációs mód (enaktív, ikonikus, szimbolikus).
2. *Megjelenik-e valamilyen problémamegoldási stratégia a válaszadás során, s ha igen hogyan lehet ezeket jellemezni?* Itt is fontos kérdés, hogy vált-e a tanuló stratégiát a megoldás folyamán. A stratégia függhet a kérdéstől, más lehet, ha alacsony, magas, vagy „általános” várra kérdezünk rá.
3. *Mi jellemzi az adott korosztályban a mintakeresést mint általános problémamegoldó stratégiát?* A sorozat létrehozása, tanulmányozása után történik-e szabályfelismerés, szabálykövetés, illetve a felfedezett szabály indoklása?

Tanulmányunkban két negyedikes (Ádám és Dávid, 10 évesek) és két ötödikes (Gergő és Judit, 11 évesek) tanuló[2] klinikai interjú formájában adott megoldását elemezzük. Az interjúk mindegyike 12–13 perces, ezekről videófelvételek készültek.

## A problémamegoldás folyamata

Negyedik osztályban a tanulók feladatlap nélkül, csak a tanár instrukciói alapján dolgoztak. A tapasztalatokat az egyes kérdésekre adott tanulói válaszok segítségével mutatjuk be.

1. *Építsd meg a képen látható háromszintes kártyavárat!*

Mindkét tanuló könnyen megépítette a fénykép alapján a várat, a problémaszituáció megértése nem okozott gondot. Számlálással megállapították, hogy a vár 15 lapból áll.

2. *Hogyan egészítenéd ki négyszintesre? Hány lapot tennél hozzá?*

A háromszintes vár négyszintesre történő kiegészítését, amelyhez 11 kártyalap kell, a tanár nem engedte ténylegesen elvégezni, csak a kiegészítéshez kért lapokat adta oda a tanulóknak. A felvételeken jól látszik, hogy gondolatban továbbépítették a várat: szemükkel követve, az egyes lépéseknek

[2] A tanulmányban fiktív nevek szerepelnek.

megfelelően sorolják, hogy ehhez hány lapra lenne szükségük. Az első két lépésben a kezükkel is mutatják az éppen kért lapok helyét a háromszintes vár mellett.

3. *Hány lapot kérsz még, hogy ötszintes legyen? Hogyan okoskodtál?*

Mivel a négyszintes vár nincs megépítve, most az előző módon nehezebb megválaszolni a kérdést. Önmaguktól nem, de tanári javaslatra a tanulók áttérnek a rajzolásra. Ádám lerajzolja előbb a háromszintes várat, majd az előbb elmondott módon rajzban kiegészíti négyszintessé. Végül helyes választ ad. Dávid egyből az ötszintes várat rajzolja le alulról felfelé haladva, soronként. Az elkészült rajz alapján azonban nem tudja megmondani, hogy a négyszintes várat hány lappal kellett volna kiegészítenie. A tanár arra kéri, hogy színes ceruzával húzza át azokat a lapokat, amiket a négyszinteshez pluszban kell kérnie. Miután kiderül, hogy Dávid nem tudja elkülöníteni a rajznak azt a részletét, amely a négyszintes várnak felel meg, a tanár javaslatára külön lerajzolja a négyszintes várat, és az ábrát színessel ötszintesre kiegészítve állapítja meg, hogy 14 lapra van szükség.

4. *Írd le, hogy hány lapból áll egy egyszintes, kétszintes, háromszint*es, négyszintes, ötszintes vár!

Tanári utasításra a tanulók számokkal leírják az egyes várakhoz szükséges lapok számát. Az egy-, két- és háromszintes várak lapjainak számát az építményt figyelve helyesen adják meg (2, 7, 15 lap). A négyszintes várat mindketten megrajzolják soronként, majd megszámolják a lapokat. Ádám 27-et, Dávid 25-öt kap (a helyes válasz 26). Noha már mindketten tudják, hogy a háromszintes vár 15 lapból áll, és hogy ehhez 11 kiegészítő lap szükséges, ezt nem tudják felhasználni. A helyes értéket mindketten csak többszöri újraszámolás után állapítják meg.

5. *Észreveszel-e szabályszerűséget?*

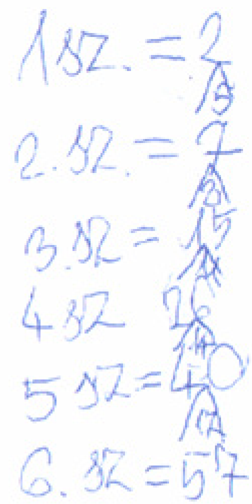
Miután felírták a 2, 7, 15, 26 sorozatot, a tanár a képzési szabály megfogalmazására kéri őket.

Mindkét tanuló felismeri a képzési szabályt, ezt Ádám a következőképpen fejezi ki:

*Ádám:* Mindig hozzá kell adni hármat ... ahhoz, amit hozzáadtunk. Ötöt adunk hozzá, nyolcat adunk hozzá, tizenegyet adunk hozzá, akkor a következő 14 lesz (a sorozat tagjai fölé írja rendre a különbségeket).
…
*Tanár:* És el tudod mondani szavakkal, hogy a magasabb várat hogyan építed fel?
*Ádám:* Egyet mindig mellérakok, (a kezével mutatja az alsó két lapot a rajzon)
*Tanár:* De mit raksz mellé?
*Ádám:* Két darab kártyát, aztán felé egyet, aztán még egyszer kettőt, aztán még egyszer egyet, … (mutatja a rajzán) és *ahány szintes, annyiszor kell megismételni.*

Dávid az alábbiak szerint összegzi a tapasztalatait (2. ábra):

*Tanár:* Mennyit kell még pluszba kérni ahhoz, hogy egy szinttel több legyen?
*Dávid:* Mindig 3-mal nő.
*Tanár:* Akkor mi lenne a következő a sorozatban?
*Dávid:* 17. 17-tel nagyobb, mint az ötszintes. És az 57. A hatszintes.




*2. ábra:* Dávid feljegyzése az egyes kártyavárakhoz szükséges lapok sorozatáról

A felismert szabály helyességét tanári felszólítás után Ádám az építési folyamatra utalva így magyarázza:

*Ádám:* Mert a tetejét mindig át kell húzni eggyel, hogy megálljon, és arra még kell kettő.

Dávid nem ad magyarázatot, de a rekurzív szabályt általánosan ő is megfogalmazza:

*Dávid:* … minden szinthez kell rakni 3-at. Az alsónál csak 2-t.

Az ötödikesek feladatlapon dolgoztak, a problémamegoldás folyamatát a feladatlap kérdései alapján követjük nyomon.

1. *Építs háromszintes várat a* fénykép alapján!

Gergő az alacsonyabb várat rendre kiegészíti, így jut el a háromszintes várig. Judit soronként közvetlenül építi meg. Az elkészült vár négyszintessé való kiegészítéséhez a negyedikesekhez hasonlóan a kész háromszintes várat nézve, gondolatban elvégezve az építést helyesen adják meg a szükséges 11 lapot.

2. *Az egyszintes és a kétszintes várat lerajzoltuk, folytasd a rajzolást a háromszintes várral! Írd a rajzok alá, hogy hány kártyalapból áll a vár!*


*3. ábra:* A feladatlapon szereplő illusztráció

A háromszintes várat mindketten a kétszinteset oldalról kiegészítve rajzolják le. A kész rajzokon megszámolják a szükséges lapokat és az ábrák alá írják.

3. *Egy négyszintes várat kell megépítened! Mondd meg, ehhez hány lap szükséges!*

Először mindkét tanuló le akarja rajzolni az újabb várat, de a tanár emlékezteti őket, hogy korábban már erről volt szó. Ellentétben a negyedikesekkel, ők már össze tudták kapcsolni a korábban szerzett információkat a kérdés megválaszolásához.

4. Hány lap *szükséges a nyolcszintes várhoz?*

*Gergő:* … (gondolkodik) Hát, mindig, amennyit hozzáadunk, az kettővel növekszik, mert a tetejére rakunk még egyet [egy szintet], és az két lap.
*Tanár:* Nézd meg [a számsorozatot], az tényleg kettővel növekszik?
*Gergő:* Ötöt adunk hozzá, itt meg nyolcat. Nem, 3-mal [növekszik, amit hozzáadunk.]

Gergő a felismert szabályt könnyen alkalmazza és megadja a nyolc-, majd a kilencszintes vár lapjainak számát. Tanári kérdésre a 30-szintes vár lapjainak számát ugyanezzel a rekurzív módszerrel kezdi el számolni, de arra, hogy a 29-szintes várat hány lappal kellene kiegészíteni 30-szintessé, már nem tud válaszolni. Annak ellenére sem, hogy a tanár feleleveníti vele a háromról négyszintesre történő kiegészítés módját. A felismert szabály indoklására nem kerül sor.

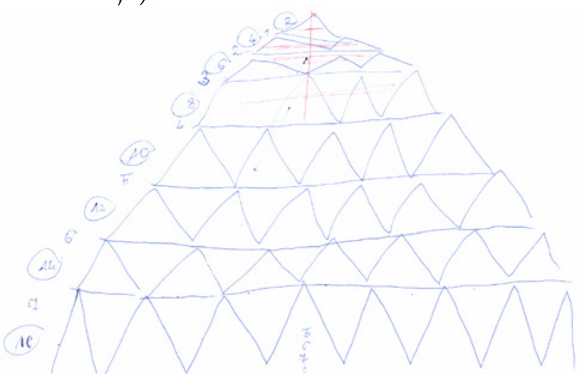
Judit először – helytelenül – a szintek száma és a vár megépítéséhez szükséges lapok száma között egyenes arányosságot feltételez:

*Judit:* A négyszinteshez kellet 26 lap. És még 4 szintet rá kell rakni ... (hosszabb gondolkodás után) az még 26 lap? … [Bizonytalanul, kérdő hangsúllyal.]

A sejtés ellenőrzéséhez magától felrajzolja a nyolcszintes várat, majd elkezdi megszámolni a lapokat az alsó sorban. Tanári javaslatra leírja soronként a kapott számokat. Ezek alulról fölfelé haladva: 16, 7, 14, 6, 12, 5, 10, 4, 8, 3, 6, 2, 4, 1, 2 (*3. ábra*). A 12 leírásáig mindig egyesével megszámolja a sorban lévő lapok számát, de a 10-et már úgy írja oda, hogy végignéz az korábbi számokon:

*Tanár:* Hogyan írtad oda azt a 10-et? Nagyon gyorsan odaírtad.
*Judit:* Észrevettem, hogy mindig kettő-

vel csökken [szintenként a dőlő lapokra gondol], mert egy párt leveszünk mindig belőle (kezével az alsó sor végén lévő párra mutat). És akkor itt is mindig 1-gyel csökken (a vízszintes lapokat mutatja).



*4. ábra:* Judit rajza a nyolcszintes várról

A felismert szabályt követve soronként leírja a szükséges lapok számát, majd ezeket a számokat összeadva helyes eredményt (100) kap. A tanár emlékezteti a korábbi sejtésére, Judit a következőképpen magyarázza meg, hogy az miért nem volt helyes:

*Judit:* Akkor arra [gondoltam], hogy még 26, de ez …
*Tanár:* És miért volt ez rossz vajon?
*Judit:* Mert, hogy mindig több kell, vagy, … hát, …ha fentről megyünk lefelé, akkor mindig nagyobb lett és akkor úgy több kellett (két kezével mutatja, hogy szélesedik a vár)

Tanári kérésre azt is meg tudja mutatni, hogy hol van a négyszintes vár a nyolcszintesben.

## Tapasztalatok

Az interjúk tapasztalatait a kutatási kérdések alapján foglaljuk össze.

1. *A probléma enaktív, ikonikus, szimbolikus reprezentációi hogyan befolyásolják a megoldást?*

A probléma értelmezését tárgyi tevékenység, a háromszintes vár megépítésével segítettük. A vizsgált 10–11 éves tanulóknak ez nem jelentett problémát, ahogyan az sem, hogy a tevékenység tényleges elvégzése nélkül, látva a háromszintes várat, gondolatban folytatva az építkezést egészítsék ki négyszintessé. Az enaktívról az ikonikus síkra történő váltás egyik esetben sem történt meg önállóan. A negyedikes tanulók a tanár javaslatára tértek át erre a reprezentációs módra, mert enélkül nem tudtak válaszolni az ötszintesre történő kiegészítés kérdésére. Ugyancsak a tanár utasítására jegyezték le a részeredményeiket a rajzok alá. Az ötödikesek a feladatlapon szereplő második utasítás alapján tértek át a rajzolásra, és ezzel egyidejűleg az eredmények számokkal történő lejegyzésére. A gondolkodás áthelyezése az ikonikus illetve a szimbolikus síkra ugyanakkor problémamentes volt. A megoldás során előfordult, hogy váltani kellett oda-vissza a reprezentációs módok között. A sorozat képzési szabályának megfogalmazásánál a szimbolikus és az ikonikus síkon párhuzamosan kellett gondolkodni. Ez mind a négy tanulónak sikerült. Megfigyelésünk összhangban van *Ambrus András* azon megállapításával, hogy az egyik reprezentációs módról a másikra való áttérés növeli a rugalmasságot, és a problémamegoldás hatékonyságát (Ambrus, 1995). A felismert szabály indoklása során a számsorozat megfigyeléséből kiindulva Ádám (10) és Judit (11) a manipulatív tevékenységet felidézve a rajzon mutatta meg, hogy a második különbségek miért egyenlők 3-mal. A másik két tanuló erre a kérdésre nem adott választ.

2. *Megjelenik-e valamilyen problémamegoldási stratégia a válaszadás során, s ha igen hogyan lehet ezeket jellemezni?*

A manipulatív és a rajzos tevékenység során kétféle építési stratégiát figyeltünk meg: Az egyik egy rekurzív stratégia, az alacsonyabb vár eggyel magasabbra való *kiegészítése* úgy, hogy a szükséges lapokat szintenként melléhelyezik el (pl. Gergő építkezése és rajza). A másik módszerrel közvetlenül az adott szintes vár állítható elő úgy, hogy szintenként egyszerre tesszük le a szükséges lapokat. Ez a korábban említett második típusú sorozatképzésnek felel meg. Olyan rekurzív módszerrel nem találkoztunk, amely az alacsonyabb vár rajzát egy alsóbb szint „alárajzolásával" egészítette volna ki. Ennek valószínűleg az az oka, hogy a tárgyi síkon ez az eljárás nem kivitelezhető.

A lapok összeszámlálása mindig egyesével, soronként történt. Egy alkalommal, Juditnak a nyolcszintes várnál javasolta a tanár, hogy egy-egy sor lapjainak számát írja a rajz mellé. Ezzel segítette a dőlt és vízszintes lapok sorozatának felismerését, és a számlálás helyett a szabálykövetés után a kapott tagok összeadását. Mind a négy tanuló esetében megtörtént a háromszintes vár lapjainak összeszámolása (15 lap) és annak megállapítása, hogy a négyszintessé történő kiegészítéshez 11 lap szükséges. Ennek ellenére egyik tanuló sem használta ezt fel magától a négyszintes vár lapjainak megállapításához. Az ötödikesek, miután a tanár erre emlékeztette őket, könnyen és kétkedés nélkül alkalmazták ezt az összefüggést, a negyedikesek azonban nem tudták felhasználni ezeket az információkat az adott kérdés megválaszolásához. Annak ellenére, hogy többször is eltérő lett a négyszintes vár lapszámára számlálással kapott érték, nem fogadták el ellenőrzésként a 15+11 összeg eredményét, hanem ismételten újrakezdték a számlálást. Jól kitűnik tehát, hogy a szükséges lapok számát kétféle módon meghatározva a negyedikesek nem érzékelték, hogy ugyanarra az eredményre kell jutniuk.

A sorozat újabb tagját, akár a következő tagról (*öt*szintes vár), akár egy közeli, de nem közvetlenül következő tagról (nyolcszintes vár), illetve egy távoli tagról (30-szintes vár) van szó, egyaránt rekurzív módon határozták meg. Az ötödikes Gergő csak a számsorozat folytatásával kapott eredményt, a többi tanuló azonban a szükséges rajzokat is elkészítette.

3. *Mi jellemzi az adott korosztályban a mintakeresést mint általános problémamegoldó stratégiát?*

Mind az n-edik kártyavárhoz szükséges lapok számából álló sorozat (2, 7, 15, 26, …), mind az -szintes kártyavár egyes szintjeinek megépítéséhez szükséges lapok számából álló sorozat (2, 5, 8, 11, …) előfordult a tanulók megoldásaiban. Az első típusú sorozatot mind a négy tanuló használta, a második típusút pedig egy tanuló. A szabályfelismerés a számsorozat alapján megtörtént, mindegyik tanuló rájött, hogy a különbségek sorozata 3-mal nő az első típusú sorozatban. Ennek megfogalmazása pontatlan, utal a sorozat első néhány tagjára: „mindig hozzá kell adni 3-at" (Ádám), „mindig 3-mal nő" (Dávid), 3-mal [növekszik, amit hozzáadunk] (Gergő) és „mindig kettővel csökken … itt is mindig 1-gyel csökken (Judit). Elgondolásukat a sorozat konkrét tagokkal történő folytatásával tették egyértelművé.

A felismert szabály indoklása, ti., hogy hol ez a 3 lapból álló növekmény az építményben, Ádám és Judit esetében sikerült. Mindketten az építkezés folyamatával indokoltak: „Mert a tetejét mindig át kell húzni 1-gyel, hogy megálljon, és arra még kell 2." (Ádám), és „Észrevettem, hogy mindig 2-vel csökken [szintenként a dőlő lapokra gondol], mert egy párt leveszünk mindig belőle (kezével az alsó sor végén lévő párra mutat). És akkor itt is mindig 1-gyel csökken. (a vízszintes lapokat mutatja)" (Judit). Megemlítendő még Judit magyarázata, aki az első, egyenes arányosságra vonatkozó sejtésének helytelenségét a nyolcszintes vár megrajzolásával ellenőrizte, és – igaz, csak tanári kérdésre –magyarázta is, megmutatva a rajzon, hogy az hogyan foglalja magában az alacsonyabb várat.

## Összegzés

A három reprezentációs sík használata nem idegen a vizsgált 4–5. osztályos (10–11 éves) tanulóktól. A manipulatív síkon magabiztosan mozognak, a probléma megértését ez a reprezentációs mód nagyon jól segíti. Az ikonikus síkra önmaguktól ugyan nem térnek át, ám tanári javaslatra ezt problémamentesen képesek megtenni. A tapasztalatok számsorozat formájában történő leírása szintén tanári utasításra történik, ugyancsak probléma nélkül. A fiatalabbaknál a reprezentációs módok közötti váltás nehézkesebb, az idősebbek mindkét irányban könnyen váltanak érvelés közben.

A problémamegoldásban használt stratégiák közül kiemelhető a konkrét esetek vizsgálata, a lapok számának meghatározása egyszerű leszámolással.

A sorozat folytatása a tárgyi és rajzos tevékenység folyamatát követve rekurzív módon történik, a felismert szabály melletti érvelés jellemzően az építkezési folyamatra utal. A mintakeresés mint problémamegoldó stratégia két esetben a minta konkrét alkalmazásával lezárul, két esetben pedig megtörténik a minta igazolása is a tárgyi tevékenységre támaszkodva.

A kiinduló probléma tehát jól szolgálja a sorozat modellszerepének megismerését és az induktív gondolatmenet a reprezentációs módok váltogatásával együtt hozzájárul a tanulók összefüggésfelismerő képességének fejlesztéséhez.

## Köszönetnyilvánítás

A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgypedagógiai Kutatási Programja támogatta.

## Felhasznált irodalom

Ambrus András (1995): *Bevezetés a matematika-didaktikába.*: ELTE Eötvös Kiadó, Budapest.

Bruner, Jerome S. (1974): *Új utak az oktatás elméletéhez.* Gondolat, Budapest.

Bruner, Jerome (2004): *Az oktatás kultúrája.* Gondolat, Budapest.

C. Neményi Eszter (1999): *Relációk, függvények, sorozatok. A törtszám. A negatív szám.* Budapesti Tanítóképző Főiskola, Budapest.

Csíkos Csaba (2010): Problémaalapú tanulás és matematikai nevelés. *Iskolakultúra,* **20.** 12. sz., 52–60.

Ernest, P. (1991): *The Philosophy of Mathematics Education.* Routledge, London.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010): *Thinking Mathematically.* Pearson, Harlow.

Molnár Gyöngyvér (2004): Problémamegoldás és probléma-alapú tanulás. *Iskolakultúra***, 14.** 2. sz., 12–19.

Pólya György (1985): *A problémamegoldás iskolája, II. kötet.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Pólya György (1988): *A matematikai gondolkodás művészete I. Indukció és analógia.* Gondolat, Budapest.

Rivera, F. (2013): *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics.* Dodrecht, Heidelberg, Springer, New York, London. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2712-0

Schreier, M. (2012): *Qualitative Content Analysis in Practice.* Sage, Los Angeles, London, New Delhi, Singapore, Washington DC.

Wintsche Gergely, Gedeon Veronika, Korom Pál József, Számadó László és Tóthné Szalontay Anna (2016): *Matematika 5. Újgenerációs tankönyv.* Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet.

**Let's discover the solution: look for a pattern!**

*With the support of the Content Pedagogy Research Program of the Hungarian Academy of Sciences, we have developed a research program that examines the characteristics of problem-solving thinking in different age groups. In our paper, we analyse students' responses to a question that can represent a proper problem for each age group. Our research focuses primarily on students' capabilities of modelling and recognizing patterns. Our question is the following: how does recognizing patterns and arguing for them lead to discovery. We also examine how do different types of representations of the same problem affect the problem solving process.*

***Keywords****: problem based learning, patterning, representations, definite pattern, inductive reasoning*

Kónya Eszter és Kovács Zoltán (2018): Fedezzük fel a megoldást: keressünk mintát! *Gyermeknevelés,* **6.** 1. sz., 76–85.

# A törtfogalom fejlődésének segítése az alsó és a felső tagozat határán

**Karika Tímea – Csíkos Csaba**
Szent Lőrinc Katolikus Általános Iskola – Eötvös Loránd Tudományegyetem, Tanító- és Óvóképző Kar

*A tanulmány a törtfogalom fejlődésének segítéséről szól. Megoldandó probléma, hogy az alsó tagozat végére, 4. osztályban a tanulók jellemzően egyféle törtértelmezéssel találkoznak: egységtörtek és ezek többszörösei kerülnek elő, általában többféle manipulatív és képi szemléltetés mellett. Ehhez képest 5. osztályos kortól a törtek a racionális számok halmazának képviselőiként kerülnek elő, két egész szám hányadosaként. Ahhoz, hogy az alsó tagozaton kialakult törtfogalom megfelelően segítse a felső tagozatos tanulmányokat, szükségesnek látjuk a C. Neményi Eszter által „második értelmezésnek" nevezett törtértelmezés hangsúlyosabb megjelenését. A törtfogalom második értelmezése azt jelenti, hogy valamely egység többszöröseinek valahányad részeként tekintünk az egységtörtek többszöröseire. Javaslatunkat tankönyvrészletek elemzésével és a nemzetközi szakirodalomban megjelent kutatási eredményekkel támasztjuk alá.*

***Kulcsszavak:*** *törtfogalom, alsó tagozatos matematika, felső tagozatos matematika, szemléltetés, tankönyvelemzés*

## A törtfogalom fejlődésének segítése az alsó és a felső tagozat határán

Gyakran halljuk az általános iskola felső tagozatán oktató matematikatanároktól, hogy a tanulók fejletlen törtfogalommal érkeznek az alsó tagozatról: a tanulók számára egyáltalán nem nyilvánvaló például, hogy a háromnegyed az nem csupán a negyed háromszorosa, hanem három egésznek a negyedrésze is. (Sőt, bár talán nem várja el a felső tagozat az alsó tagozattól ennek megmutatását: a három és a négy hányadosa.) Míg az alsó tagozatos tankönyvekben a törtekkel sok konkrét tevékenység közben, a mozgás, látás, tapintás élményét kihasználva foglalkozunk, addig az 5. osztálytól kezdve elkezdjük a törteket racionális számokként kezelni; az alsó tagozaton megszokott számkör-bővítést (amely a természetes számok világán belül történt) számhalmazok bővülő körei váltják föl. A Nemzeti alaptanterv előírása, hogy 4. osztály végére a 2, 3, 4, 10 és 100 nevezőjű törteket ismerjék a tanulók a mindennapi életben.

Meglehetősen régi felismerés a hazai matematikadidaktikában (ld. pl. *C. Neményi*, 2002a) hogy az alsó tagozat vége és a felső tagozat kezdete között hiányzik a szerves átmenet. Nemcsak a minden iskolai évfolyamot érintő nyárvégi teljesítmény-visszaesés, nemcsak a szakos tanári rendszerre átállás, hanem magának a matematika tananyagnak a szerveződése okozza, hogy minden szereplő jelentős, hirtelen ugrásnak érzi, ami 4. és 5. osztály között történik. *C. Neményi, Radnainé Szendrei és Varga* (1981) az utolsó hazai központi, előíró tanterv matematika fejezetének szerzői makacsul ragaszkodtak ahhoz, hogy a fejlesztési feladatokat 1–3., majd 4–5. osztályokra jelöljék ki, eltérően a központi tanterv összes többi fejezetétől, amelyek alsó és felső tagozat között jelöltek ki fejlesztési határt. Ugyanakkor a nehezen mozduló iskolai gyakorlat az általános iskola 5. osztályát olyan mérföldkőként kezeli, amely a formalizáltabb matematikatanulás bevezetésével jellemezhető.

A formalizált matematikaoktatás kritikáját a holland realisztikus matematikai mozgalom egyik nagy alakja, Treffers (l. *Van den Heuvel-Panhuizen*, 2000) a horizontális és vertikális matematizálás fogalmával érzékeltette. Míg a horizontális matematizálás a matematikai és a minket körülvevő közötti kapcsolatok megteremtésével, matematikai modellezésével valósul meg, addig a verti-


DOI 10.31074/gyn201818698

Csíkos Csaba: orcid.org/0000-0003-3328-5535

kális matematizálás a matematikai fogalmak rendszerén belül maradva építi tovább a matematikai tudást. Problémát az jelent, amikor a vertikális matematizálás túlsúlya azzal jár együtt, hogy már elveszítjük a külvilág matematikai modellezésének igényét, és maguk a matematikai jelek és fogalmak válnak a matematikai gondolkodás szinte kizárólagos nyersanyagává. Minduntalan visszajutunk Bruner elképzeléseihez, aki a különböző tudásreprezentációs formák egymást segítő kapcsolataival képzeli el nemcsak a matematikatanítást, hanem általában véve az iskolai oktatást. A bruneri értelemben vett enaktív (mozgásba, cselekvésbe írt), ikonikus (valamely érzékszervi modalitás által generált képzet) és szimbolikus (elsősorban nyelvi, vagy – különösen a matematikában – más egyezményes kódrendszerben) tárolt tudásformák együttes fejlődése és fejlesztése látszik a leghatékonyabbnak (*Sriraman és English*, 2005).

Mit tehetünk az alsó tagozat végén azért, hogy a törtek tanulása a felső tagozaton egyszerre könnyebb és ugyanakkor szakmailag-matematikailag továbbra is megalapozott legyen? Tanulmányunkban ezt a kérdést igyekszünk körüljárni a hazai, elsősorban C. Neményi Eszter munkásságában lefektetett didaktikai hagyományra, valamint a témakör újabb nemzetközi szakirodalmára építve. Témánk szűkre szabottsága arra sarkall minket, hogy rögtön rámutassunk két általánosítási lehetőségre. Egyrészt a törtek tanításának problémája az alsó és felső tagozat közötti átmenet általános oktatás-módszertani nehézségeit hívja elénk. Másrészt a törtek tanításában uralkodó multimodális felfogás más matematikai témák, sőt, más tantárgyak számára is tanulságokat rejt.

## Fogalmi kérdések a törtek tanításának oktatás-módszertanában

A Matematika Tantárgypedagógiai Füzetekben, amely sorozat Kárpát-medence-szerte a tanítóképzés fontos forrásmunkáját jelenti, *C. Neményi Eszter* (2008) a törtszámok tanításáról szóló részt két nagy egységre osztja, nagyjából két egyforma terjedelműre. Elsőként az egységtörtek megismeréséről, a tapasztalatszerzés a fogalomalakítás lépéseiről ír, és ezt követi az egységtörtek többszöröseivel ismerkedés. E második nagyobb egység végén, két oldalon foglalkozik a törteknek azzal az értelmezésével, amelyben az egységtörtek és azok többszörösei felől haladással szemben két egész szám hányadosaként értelmezzük a törteket.

Amikor általános iskolai matematikai tanulmányaink során számhalmazokról tanultunk, akkor a racionális számok halmazánál találkoztunk azzal, hogy a racionális számok felírhatók két egész szám hányadosaként. A kétharmad például racionális szám, mert kettőt hárommal osztva megkapjuk, de ugyanígy a kettő is racionális szám, mert mondjuk négy osztva kettővel alakban megkapható. Függetlenül azonban a racionális számok szoros értelemben vett matematikai értelmezésétől, a pedagógia számára igazán izgalmas kérdések a racionális számok, ezen belül a „valódi" törtszámok mentális reprezentációval kapcsolatosak. Valódi törtnek a matematikában – kissé régiesen – a nulla és egy közötti racionális számokat hívjuk.

*C. Neményi* (2008) a törtszámok tanítására kétféle megközelítést tárgyal, ám ezek közül az egyiket fejti ki részletesen, és ajánlja a gyakorlat számára, míg az úgynevezett „második értelmezésről" egy rövid áttekintést ad, azzal az instrukcióval, hogy „van olyan elképzelés, amely szerint ezt a megközelítést lenne érdemes előbb kidolgozni, s csak aztán kapcsolni hozzá a másikat." (120. o). Ez a gyakorlatban azt jelentené, hogy egész számok hányadosaiként vezetnénk be a törteket, majd ebből a megközelítésmódból speciális esetként adódnának az egységtörtek, melyek az első, részletesen kifejtett megközelítésmód alapját szolgáltatják. Ugyanott így folytatja: „Lehetséges, hogy azoknak a gyerekeknek, akik a számok sokféle »műveletes alakjával« korán megbarátkoznak, nem okozna gondot ez az építkezés sem. Személyes tapasztalat híján azonban nem tudjuk meggyőződéssel javasolni ezt a sorrendet." (uo.)

A tankönyvekből rekonstruálható hazai körkép után a nemzetközi szakirodalomban rendelkezésre álló empirikus eredmények áttekintésével igyekszünk következtetéseket levonni a hazai tanítási gyakorlat számára. A nemzetközi szakirodalom áttekintésével egyrészt kiderülhet, hogy nem szükséges éles fogalmi választóvonalat tenni a kétféle törttanítás közé, azaz az egységtörtek többszörösei és a két egész szám hányadosára építő felfogások között nem feltétlenül van éles határvonal. Ami viszont bizonyos, hogy a törtek tanításában a „multimodális" felfogás elsőbbségét igazolja a szakirodalom (összhangban C. Neményi Eszter felfogásával), és ezen belül vannak további árnyalatok (számítógépes támogatás, a konkrét tartalmi területek, ahol törtek megjelennek: pl. csoki, óra, hosszúság).

A törtek tanítása az alsó tagozaton kezdődik, de a törtfogalom kialakulása már megkezdődik az óvodás korban. Magyar nyelvű publikációkból is megismerhető már a természetes számok agyi és mentális reprezentációira vonatkozó hármaskód-elmélet, amely elsősorban Stanislas Dehaene nevéhez köthető (l. *Csíkos és Dobi*, 2001). Ez alapján a matematikadidaktika gyakorlatát is egyre inkább áthatja az a felismerés, hogy idegrendszerünkben különböző helyek felelősek a természetes számok tárolásáért és felidézéséért. A szám kimondott neve az egyik forrás, és ezzel magyarázható, hogy a számolás lényegében mindenkinél egy nyelvhez kötődik, amely nyelven elsőként megjelennek a számok nevei. Ez legtöbbször az anyanyelv, de ha az iskoláztatás más nyelven történik, az iskolában használt nyelven. A számok puszta neveit ugyan már az óvodások is képesek kántálni (számmondókákkal), de a számnevekhez kötődő mennyiségreprezentációk kialakulása éveket vesz igénybe. Az ujjak, a dobókocka pöttyei, később a mentális számegyenes jelentik a legkézenfekvőbb reprezentációk bázisát. Iskoláskorban csatlakozik ehhez a két kódhoz harmadikként a számok leírt alakja, a mi kultúránkban ma elsősorban az arabnak nevezett számok. Vajon van-e hasonló hármas rendszer a törtszámokra?

Az bizonyos, hogy a törtek nevei is előbb megjelennek a gyermeki szóhasználatban, mint a hozzájuk kötődő mennyiségreprezentáció vagy szimbolikus jelölés. Legnagyobb eséllyel a „fél", „fele" törtszámokat fogják a gyermekek elsőként használni. A négyévesek pontosan végre tudják hajtani azt az utasítást, hogy adja a babának a süteménye vagy a pizzája felét. Ugyanakkor az $\frac{1}{4}$- del vagy a $\frac{3}{4}$-del hét éves korig várnunk kell (*Siegler, Fazio, Bailey és Zhou*, 2013). A gyerekek a mindennapi életük során sokféle tapasztalatot szereznek a mennyiségekről. „Mire iskolába lépnek a gyermekek, általában már világos fogalmuk van a félről, sőt a negyedről is." (*Peller*, 2011, 130. o.).

Kérdés, amelyre a választ csak a legutóbbi években találta meg az emberiség (l. később, a nemzetközi szakirodalommal foglalkozó részben), hogy az agyunkban a törtszámok vajon a természetes számokhoz hasonló hármas kóddal vannak-e jelen. A kérdés a matematikadidaktika szempontjából is jelentős, mert előfordulhat, hogy a természetes számok hármas rendszerére épül a törtszámok agyi reprezentációja, és ebben az esetben a fejlesztés analógiája a C. Neményi-féle „második értelmezést" támogathatja.

## A törtek tanításának iskolai gyakorlata Magyarországon a tankönyvek tükrében

Az áttekintés végén látni fogjuk, hogy a mai napig a C. Neményi Eszter által javasolt felépítés jelenik meg a magyar közoktatásban. Alsó tagozaton a törtek értelmezése esetén szinte kizárólag az első értelmezést tanítják, a „második értelmezést" egyes tankönyvek meg sem említik, más könyvek tesznek róla említést, de csupán néhány javaslat jelenik meg a kézikönyvekben, hogy célszerű megmutatni a „második értelmezést. Feladatokat nem, vagy alig találunk erre. Az egységtörtek többszöröseinek vizsgálata általában 4. osztályra marad. Minden tankönyvben megjelenik valamilyen szinten, de alig találunk hozzá feladatokat.

C. Neményi Eszter azon felvetése, hogy a számok sokféle „műveletes alakjával" ismerkedjenek meg a gyerekek, inkább a felső tagozaton képzelhető el. Ott viszont jó lenne, ha a „multimodális" felfogás megjelenne és a különféle (immár nem egy vagy kétféle) értelmezések közötti kapcsolatot is hangsúlyoznánk. Ezt több nemzetközi kutatás igazolta. Többek között *Moseley* (2005) tanulmánya szerint, a tanulók racionális szám megértése növekedett, ha többféleképp tanították a törteket, nem csak rész-egész helyzetben. A TIMSS vizsgálatai is rámutattak (*Brenner és mtsai* 1997; *Mullis és mtsai*, 1997), hogy a kiemelkedő teljesítményű nemzetek diákjai – szingapúri vagy japán – rugalmasan értelmezték a racionális számokat.

Már *Beke Manó* (1909) a magyar matematikatanítás reformjának vezető egyénisége is foglalkozott a XX. század elején azzal a kérdéskörrel, hogy a törtek tanítása hogyan kezdődjön. A közönséges és a tizedestörtek tanítása közül a közönséges törtekkel való indítás mellett foglalt állást. Vita tárgyát képezte az is, hogy egyáltalán tanítsanak-e törteket.

> *„Még azon is vitatkoznak sokan, hogy kell-e törtszámokat tanítanunk? Mások meg azt a kérdést feszegetik, hogy mit kell előbb tanítanunk, a közönséges törteket-e vagy a tizedes törteket? És kuruczok meg labanczok, welfek és ghibellinek nem víttak elkeseredettebb harczokat, mint az újabbkori számtani methodika e vitás kérdéseinek szóvivői... A közönséges tört ismeretének okvetlenül meg kell előznie a tizedes törtét. Már csak azon egyszerű okból is, hogy az egyszerűbb, a természetesebb előzze meg a complikáltabbat. De meg a gyermek tapasztalati körében is előbb jelentkezik a közönséges tört, mint a tizedes tört.”* (Beke, 1909, 169.o.)

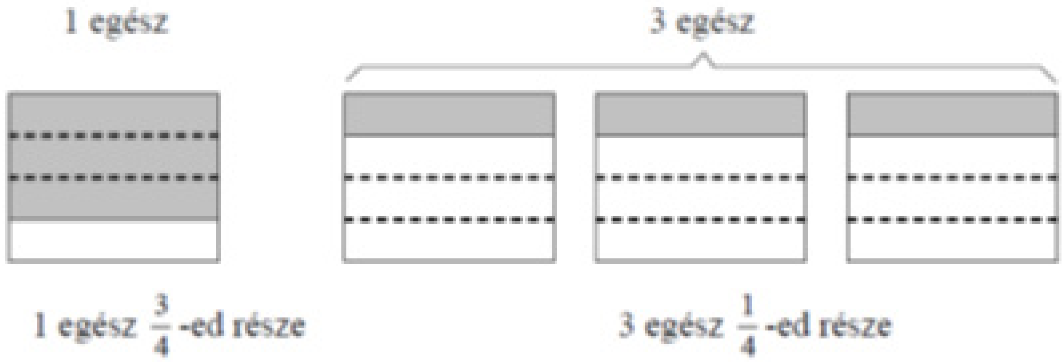
Ezt a gyakorlatot a mai napig megtartottuk, alsó tagozaton kezdenek ismerkedni a közönséges törtekkel. Az első értelmezésben az egységtörtekkel, majd ezek többszöröseivel. Később jelenik meg a „második értelmezés”. Ma már nem vonják kétségbe, hogy szükséges megismerkedniük a gyermekeknek a törtekkel. Ugyanakkor az elsajátításának módjában nem találunk egységes állásfoglalást. A jelenleg a piacon található tankönyvek és módszertani útmutatók megosztottak abból a szempontból, hogy milyen mértékben és hogyan építik be a törtfogalom tanításába a C. Neményi-féle második értelmezést, de hozzá kapcsolódó feladatokat, vagy akár vizuális megjelenítést elvétve találunk csak az alsó tagozatos tankönyvekben. A tanítókkal folytatott beszélgetésekből általában az derül ki, hogy csak az „okos gyerekeknek” szokták megmutatni a második értelmezést.

Ha átlépünk a felső tagozatra, az ötödik osztályban megjelenik a „második értelmezés”, és rohamléptekben a többi is, de talán nem kap kellő hangsúlyt, nem erősítik kellőképpen a gyermekekben, hogy itt többfajta értelmezésről van szó, és ezek között kapcsolat van. A későbbi sikertelenségek egyik forrása lehet, hogy nem tudatosul a tanulókban, hogy a törteknek többfajta értelmezése létezik, az értelmezések közötti kapcsolat megmutatása, erősítése és legfőképpen a manipulatív tevékenységek nagyfokú visszaszorulása a felső tagozaton forrása lehet a közismerten igen gyenge matematikai teljesítménynek. *Dienes Zoltán* (1973) is hasonlóan vélekedik: szerinte azért nehéz sokak számára a matematika, mert a matematikai fogalmakat nem képesek valamilyen képzethez, tapasztalathoz vagy tárgyhoz kapcsolni. Ha a tanulók ismeretei valamilyen korábbi ismerethez, képzethez kapcsolódnak, akkor könnyebb a felidézés, az ismeret tartósabbá, alkalmazhatóbbá válik.

Jelen pillanatban többféle matematikatankönyv van forgalomban Magyarországon. Ezekhez találunk tanári kézikönyveket, amelyek módszertani ajánlásokat is megfogalmaznak. Ha megvizsgáljuk ezeket a könyveket, kézikönyveket, módszertani ajánlásokat, néhány következtetést levonhatunk. Az alsó tagozat végén jó lenne, ha már megjelenne a „második értelmezés”, de ez a gyakorlatban elvétve fordul elő. A felső tagozaton ötödik osztályban tananyag a második és a többi értelmezés is. De egyrészt tekinthetnek rá úgy, hogy ezt már ismerik a gyerekek, másrészt rohamléptekben haladva nem jut idő a fogalom kialakítására, elmélyítésére, arra, hogy valóban megjelenjenek a mentális reprezentációk.

A probléma forrása lehet a tagozat és tanárváltás, esetleges egymásra mutogatás, hiszen a tanító gondolhatja, hogy majd felsőben megtanulja, a felsős tanár feltételezheti, hogy már alsóban megtanulta. Ennek alátámasztására, ha beletekintünk a kézikönyvekbe, a következőket találjuk: *Török Tamás* (2016) a tanítóknak szánt matematika-kézikönyvében azt írja, hogy „a törtek bevezetéséhez (a természetes, majd az egész számfogalom kialakításához hasonlóan) sem kezdhetünk absztrakt módon, tárgyiasítást és tevékenységet nélkülöző fogalmak, illetve formális műveletvégzési technikák bemutatásával. A szemléletes út megkerülésével a matematikai ismeretelsajátítás lényegéről, a megértésről mondanánk le, amely nyilván nem lenne kívánatos. A törtfogalom alakításához sok-sok tevékenységen keresztül megszerezhető tapasztalatra van szükség. A *NAT* (2012) 3–4. osztályban tananyagként rögzíti a törtszámokkal való ismerkedést, mennyiségek mérőszámaként történő értelmezését. Elvárja továbbá az ily módon származtatott mennyiségek összehasonlítási képességének megszereztetését.” (A törtfogalom kialakítása, 5. o.) Ehhez a szerző felajánlja a törtek első és „második értelmezését” is.

Például a következő módon mutatja be a $\frac{3}{4}$ értelmezését:




A gyakorlatban is megvalósítható, kézbe vehető, ízlelhető, igazságérzetünket is kiszolgáló osztozkodást szemléltet a következő ábra, amelyen a $\frac{3}{4}$ kétféle értelmezését látjuk. Ha valakinek háromnegyed tábla csokoládé jut, akkor lehet, hogy egy tábla csoki negyedének a háromszorosát kapja, de történetbe jobban beágyazható, ha három teljes tábla négy felé osztását valósítjuk meg – mindössze két felezéssel, vagy egy darab negyedeléssel.

Az első értelmezéshez az egységtörtek, majd ezek többszöröseinek bevezetése szükséges. A „második értelmezés" szemléltetése azért körülményesebb, mert az egészet meg kell többszörözni, és mindegyiken végrehajtani az egyenlő részekre osztást. *Török* (2016) is megerősíti, hogy a tankönyvi feladatok szinte kizárólag az 1. értelmezéshez kapcsolódnak, ezért néhány osztozkodási problémán keresztül célszerű felfedeztetni, hogy a C. Neményi-féle második értelmezés is ugyanazt a mennyiséget számszerűsíti.

A hozzá kapcsolódó, ötödik osztálynak készült tankönyv (*Csahóczy és mtsai*, 2016) kézikönyve úgy fogalmaz, hogy alsó tagozaton már ismerkedtek a kétféle értelmezéssel a tanulók. A Wintsche alkotószerkesztésével készült újgenerációs OFI-tankönyv (*OFI*, 2016a) nem utal expliciten az alsó tagozatos előzményekre.

Másik tankönyvcsaládot (*Hajdu* és mtsai, 2013, *Hajdu* és mtsai, 2014) vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy ötödik-hatodik osztályban nagy hangsúlyt helyeznek a kétféle értelmezés és ezek közötti kapcsolat bemutatására, de a manipulatív tevékenységekhez kapcsolódó feladatok száma itt is alacsony. A tankönyvköz íródott programban (*Hajdu* és mtsai, 2003) így fogalmaznak: „Az alsó tagozaton a törtszám fogalmának kialakítása, elmélyítése, a törtek átalakításának megtanulása, a törtekkel végzett műveletek értelmezése és begyakorlása a felső tagozat feladata. Az alsó tagozatban a fogalmak előkészítését, a szemléleti alapozást végezzük, nem a megtanítás, hanem a tapasztalatgyűjtés igényével." A felső tagozatos program (*Czeglédy és mtsai*, 2006) így fogalmaz: „A törtek fogalmának kialakítása alsó tagozaton kezdődik. Ezt az időszakot a manipulációnak és a tapasztalatgyűjtésnek kell jellemeznie. Sem a ráfordítható óraszám, sem a tanulók fejlettsége, előképzettsége nem teszi lehetővé az absztrakciót. Az elsietett fogalomalkotás hátrányát igazából a felső tagozaton éreznénk, elsősorban akkor, amikor a tanulók olyan ismérveket is a törtek fogalomjegyei közé sorolnának, amelyek nem tartoznak oda, illetve több fogalmi jegyet elhagynának. A nem kellően megalapozott ismereteket a tanuló könnyen elfelejti, nem képes újszerű feladatban alkalmazni (transzferálni)" (80.o.).

A Mozaik Kiadó Sokszínű Matematika tankönyvcsaládjában 4. osztályban csak az első értelmezéssel találkozunk. Viszont ez az egyetlen könyv ahol már 4. osztályban törtalakban írják a törteket (Árvainé *és mtsai*, 2017), nem olyan módon, mint a többi könyv esetén: 3 negyed. Az ötödik osztályos tankönyvben (*Csordás és mtsai*, 2017) megjelenik a kétféle értelmezés, de hozzákapcsolódó feladat nagyon kevés van benne.

A Nemzeti Tankönyvkiadó gondozásában megjelent C. Neményi Eszter 3. osztályos tankönyvében (*C. Neményi és Wéber*, 2008) az egységtörtekkel és ezek többszöröseivel ismerkednek. A negyedik osztályos könyvben (*C. Neményi és Káldi*, 2009) a második értelmezés csak szövegben jelenik meg, rajz nem készült hozzá és feladatok sem kapcsolódnak hozzá. Viszont azt is megemlíti, hogy az egész számok is felírhatók törtalakban.

Az Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet gondozásában megjelent kísérleti, illetve újgenerációs tankönyveket és munkafüzeteket áttekintve a harmadik osztályos taneszközökben (*OFI*, 2017a és *OFI*, 2017b) feladatokon keresztül megjelenik nem csak az első értelmezés, hanem a második is, sőt találkozunk folytonos mennyiségekből származtatott tört értelmezéssel, és a méréssel is. A negyedik osztályos taneszközökben (*OFI*, 2015a és *OFI*, 2015b) viszont már csak az egységtört és ennek többszörösei dominálnak, néhány folytonos mennyiséggel találkozhatunk a feladatokban. Az ötödik osztályos tankönyvben a törtek értelmezésének három definíciójával találkozunk. Korábban csak feladatok voltak. Összességében nagyon kevés feladatot tartalmaznak az ötödikes taneszközök (*OFI*, 2016a és *OFI*, 2016b) az értelmezésre, abból is csak az első értelmezésre, és a hirtelenjében bevezetett számegyenesen ábrázolásra. Az újgenerációs tankönyvekhez készült tanári kézikönyv (*OFI*, 2017c, 5. o.) megfogalmazza, hogy „az iskolai matematikatanítás csak úgy lehet hatékony, ha az ismeretek közvetítése a tanulók mindennapi életéből, környezetéből vett tapasztalatokra, tárgyakkal való manipulációjára épül." Ezt a törtek értelmezése esetén nem látszik megvalósulni. „A hiányos matematikai ismeretek akadályát jelentik a modellalkotásnak, és ezzel az alkalmazásnak is" (*OFI*, 2017c, 5.o).

A törtek matematikadidaktikai szempontú értelmezésének legalább 5 formája van. Az első a C. Neményi Eszter által is említett egységtörtek és ezek többszörösei, ez a nemzetközi irodalomban rész-egész néven szerepel. A „második értelmezés" a hányados néven lelhető fel külföldi kutatásokban, ami irányulhat az osztás eredményére vagy magát a folyamatot emeli ki.

*C. Neményi Eszter* (2008) egyetemi jegyzetében is megjelenik a tört helye a számegyenesen. A számegyenest korábban úgy hoztuk létre, hogy egy-egy pontjához hozzárendeltünk egy-egy természetes számot, úgy, hogy a szám a pontnak a 0-tól mért távolságát jelentse pozitív irányba. *C. Neményi Eszter* (2008, 119. o.) így fogalmaz ezzel kapcsolatban:

> *Annak ellenére, hogy a mérésből indultunk ki, mégis nagyobb fokú absztrakciót kíván, hogy egy ponthoz rendeljünk hozzá egy számot, mint amikor egy szakasz hosszát jelöljük vele. A törtszámok számegyenesen való elhelyezkedését is a 0-tól való távolságra építjük. Nem a szakaszhoz rendeljük azonban az adott egységgel mért hosszát, hanem egy ponthoz, ami ilyen messze van a 0-tól. Emellett azonban a számegyenes több konkrét tartalmú ismeretet fog össze, ezért nem kell siettetni."*

A nemzetközi irodalomban ez a megközelítésmód a mérés nevet viseli. A gyermekek ötödik osztályban közvetlenül a „második értelmezés" után ismerkednek vele.

*C. Neményi Eszter* (2008) jegyzetében úgy fogalmaz, hogy „a számok arányát szintén tört fejezi ki, ez a törtfogalom harmadik – [nálunk már a negyedik] – értelmezése." (126. o) Jellemző, hogy ezzel a megközelítésmóddal sem foglalkoznak alsó tagozaton, ám az OFI (2016a) újgenerációs tankönyvben a törtekkel foglalkozó fejezet első oldalán már megjelenik. A nemzetközi irodalomban ez az arány nevet viseli.

A matematikaoktatással foglalkozó alapvető szakirodalom említi még a műveletet, ami azt a szituációt hangsúlyozza, amiben a racionális számoknak mennyiségeket növelő/csökkentő szerepe van. Ez C. Neményi Eszternél nem jelenik meg, de *Ambrus* (2013) említi a törtek értelmezésénél a tanárképzésben használt módszertani jegyzetében.

Megvizsgálva a NAT 2012-t, az kijelenti, hogy az alsó tagozaton az ismeretszerzésnek szinte kizárólagos útja az induktív út. *C. Neményi Eszter* (2008, 120.o) úgy vélekedik: „A törteknek ezzel a második értelmezésével kapcsolatban nehezebb szemléletes képet alkotni, mint az elsővel. Ezért nem is feltétlenül kell hangsúlyosan találkozniuk vele a gyerekeknek már az alsó tagozaton." Ezt erősíti meg *Czeglédy István* (2000) a matematika-tantárgypedagógia jegyzetében, aki szerint alsó tagozaton a törtfogalom kialakítása csak elkezdődik sok manipulációval, játékos feladatokkal, és majd ötödik osztályban mutatjuk meg a gyermekeknek a törtek kétféle értelmezést.

*Peller József* (2011) is megemlíti, hogy a (magyar) oktatási gyakorlatban általában az első értelmezést választják. Véleménye szerint a gyerekek az első értelmezést annyira megszokják, hogy a másodikat már nehezen értik. Javaslata szerint ennek úgy vehetjük elejét, ha a törtek mindkét értelmezését megmutatjuk a tanulóknak megfelelő modell választásával.

## A törtek tanításához kapcsolódó eredmények a nemzetközi szakirodalomban

A törtek tanításával kapcsolatos neveléstudományi kutatási eredmények szemezgetése előtt fontos visszakanyarodnunk a számok hármaskód-elméletéhez, olyan értelemben, hogy a természetes számok mellett vajon a törtszámokra is létezik-e hasonló. *Jacob, Vallentin és Nieder* (2012) fMRI-vizsgálatának eredményei szerint a törtszámok éppen azokat az agyi területeket aktivizálják, amelyeket a korábbi kutatások az egész számokhoz kapcsoltak. Ez azt jelenti, hogy van egy neuronhálózat, amely a kimondott törtszám-név tárolásáért és felidézéséért felelős; van egy terület, amely a törtszám reprezentációjáért, és van egy harmadik, amely a leírt törtszámnevet az előző kettőhöz kapcsolja. Az olvasó önmagán is könnyen elvégezheti azt a kísérletet, miszerint egy leírt törtszám olvastán automatikusan kimondjuk a törtszám nevét, és szerencsés esetben (ha a szövegkontextus ezt igényli) egy megfelelő mennyiségreprezentációt is társítunk hozzá. Látván leírva a $\frac{3}{4}$ törtet, számunkra természetes, hogy „háromnegyed" néven kiolvassuk, és ha szükséges, el tudjuk képzelni egy adott helyzetben, mit jelent, ha például a lakosság $\frac{3}{4}$ része városokban él. A törtek mennyiségi reprezentációiról önmagunk számára is nehéz számot adnunk. A vizuális reprezentációk is sokfélék lehetnek, akár vonalakkal, akár szalaggal, és ezen belül vízszintes vagy függőleges helyzetűn, vagy akár kördiagramon képzeljük el, mit jelent a lakosság háromnegyed része. *Jacob, Vallentin és Nieder* (2012) kutatása alapján a tanítás feladataként rögzíthetjük, hogy a törtszámok tanításában is háromféle modalitású információt kell egymással összekapcsolnunk. A természetes számok esetében a számok neveihez évek során kapcsoljuk a számok leírt alakját és igyekszünk hozzájuk megfelelő mennyiségi reprezentációkat kialakítani. A kisebb természetes számoknál a mennyiségi reprezentációk a számok leírása nélkül is pontosan kapcsolódnak a szám nevéhez a két kezünkön megszámolható mennyiségnél. A pápua okszapmin törzsnél például a testszámolás sémája 27-ig teszi lehetővé a számok nevének és a hozzájuk kötődő, jól vizualizálható mennyiségeknek összekapcsolását (ld. *Saxe, Dawson, Fall és Howard*, 1998). Hasonló a helyzet az egységtörteknél, amelyeknél egy szakasz vagy egy körlap (vagy akár másfajta vizuális mennyiségreprezentáció) részeihez kapcsoljuk a törtszámok kimondását az óvodás kor végétől kezdve.

Mindezek alapján adódik a következtetés, hogy a természetes szám fogalmának alakulásához hasonlóan a törtszám-fogalom fejlődésében is kulcsszerep jut a vizuális reprezentációknak. A vizuális reprezentációk szerepe egyre jelentősebb súlyúvá válik a matematikatanításban. *Csíkos, Szitányi és Kelemen* (2012) tanulmányának idevágó részei kiemelik, hogy nem önmagában a vizualitás mindenek fölötti elsőbbségét emeli ki a szakirodalom, hanem *Hegarty és Kozhevnikov* (1999) kutatása alapján legalább kétféle vizuális reprezentáció kap szerepet a matematikai gondolkodásban: sematikus és piktoriális reprezentációk. Világos, hogy a törtszám-fogalomhoz sematikus reprezentációk szükségesek, és – ahogyan utaltunk rá – ezek jellemzően vízszintes vagy függőleges vonalak, szalagok, esetleg kördiagramok. (Természetesen a piktoriális reprezentációk is jelentősek lehetne a törtszám-fogalom adott fejlődési szakaszában: előfordulhat, hogy a negyed egységtört tartósan az óra számlapjához vagy akár egy pizzaszelethez kapcsolódik.) Mivel az egyéni különbségek a törtszám-fogalom fejlődésében is jelentősek, csakúgy, mint a fogalom alkotóelemeként kiépülő vizuális reprezentációk, logikusnak látszik a sokféle reprezentációt felhasználó szemléltetést.

A racionális számok tanításában a multimodalitás szerepéről *Chanine* (2013) úgy vélekedik, hogy a különböző módszerek használatának hatása a diákok esetén fejleszti a törtes tudást. A kvantitatív és a kvalitatív elemzésekből származó bizonyítékok alátámasztják azt az állítást, miszerint többféle módszert alkalmazva megkönnyítjük az alapvető törtes fogalmak megértését. Ha csak a szimbólumok használatát hangsúlyozzuk, akkor az korlátozott képet ad a törtekről. Előfordulhat, hogy a törtek helyett csak számjegyeket látnak, és így nehéz összehasonlítani például a különböző alakúra vágott darabok képe által képviselt törteket. Ennek megfelelően a diagramok használata sem sokat segít az azonos nagyságú törtek felismerésében, csakúgy, mint az az algoritmus, amelyben a számlálót és a nevezőt ugyanazzal a számmal szorozzuk. A tanulmányban az alapfeltevés az, hogy a multimodalitás használata a racionális számok tanítása során biztosítja az ilyen fogalmak megértését és javítja a diákok teljesítményét. Többféle módszert alkalmazva mérsékelték és következésképpen áthidalták a törtek konkrét ábrázolásának és az absztrakt kapcsolatok szétválasztását. *Monk* (2003) szerint nem az a cél, hogy kiválasszunk egy vagy két reprezentációs formát a diákoknak, amit megtanítunk nekik és ezt használjuk minden helyzetben, hanem az volna ideális, ha egy adott kontextushoz és célhoz különböző reprezentációkat alkalmazzanak.

A törtek iskolai tanításának módszerei idővel változtak. Az 1970-es évek előtt a törtek elméleti oktatására helyezték a hangsúlyt, és ezt formálisan mutatták be a tanulóknak. *Streefland* (1990) említi Dienes Zoltán 1967-ben megjelent könyvét a „Fractions – An Operational Approach"-ot, amelyben a törtek tanításának nagyon formális példáját mutatja be. Dienes Zoltán a világ számos országába dolgozott matematika – didaktikusként és nemzetközi hírnevet szerzett. Széles körben publikált a matematikatanulás lélektanáról; tanárok százaival és gyermekek ezreivel dolgozott. Fő célja az volt, hogy a megértést terjessze, és lelkesedést keltsen. Munkája során rengeteg játékos taneszközt fejlesztett ki.

Az 1980-as években indultak nagyszabású nemzetközi kutatások a diákok nehézségeinek feltárására a matematika különböző területein. A törtekre vonatkozó ismeretek és készségek vizsgálata (pl. *Ekenstam & Greger*, 1982; *Kerslake*, 1986) megmutatta a törtek fogalmának összetettségét és a megfelelő megértés nehézségeit. A tanárok egyre inkább tudatába lehetnek annak, hogy a törtek témája nehéz a tanulók számára és nagyobb figyelmet kell fordítani a törtek fogalmának kialakítására. Az utóbbi évtizedben a törtek tanításának különböző intuitív aspektusai kerültek a középpontba, ilyen a rész-egész, a hányados, a mérés, a művelet és az arány.

*Alajmi* (2011) három olyan ország matematika tankönyvét hasonlította össze, akik különböző szinten teljesítettek a TIMSS (*Gonzales és mtsai*, 2008; *Mullis és mtsai*, 1997) negyedik osztályos mérésén. Japán kiemelkedően, az USA az átlag körül és Kuvait az átlag alatt. Vizsgálatában a törtek tanítását vette górcső alá, mikor és hogyan kezdenek a törtekkel foglalkozni, milyen típusú feladatokat alkalmaznak és mennyit ismételnek. Japánban csak harmadik osztályban vezetik be a törteket és akkor is a lineáris modellt használják (hosszúságmérés méterben), vagy a méréshez kapcsolják a tört értelmezését (folyadékok mennyisége literben). Az USA-ban és Kuvaitban már első osztályban találkoznak a törtekkel, konkrét dolgokon keresztül mutatják be a törteket. Különösen Kuvaitban, néhány területmodell képi reprezentációján keresztül kerül bevezetésre a tört. Ezek a tankönyvek a számítási módszerek sztenderd algoritmusára fókuszálnak. Minden országban külön fejezetben foglalkoztak a törtekkel. A japán könyvek lényegesen kevesebb időt fordítanak a törtek tanítására, de azt úgy teszik, hogy hogy a gyermek életéből választanak problémát, vagy egy világjelenségre hívják fel a figyelmet, és ennek megoldására ösztönzik a tanulókat. Japánban a számegyenes használatára helyezik a hangsúlyt, ez segíti a tanulókat a törtek megjelenítésében és összehasonlításában. A törtek területmodelljét, mint például a rész-egész értelmezést, csak a vegyes szám összeadásánál, kivonásánál használják. Az amerikai könyvek az első három évfolyamon csak modelleket használnak, de ötödik osztályra hirtelen absztrakttá válik és lényegesen lecsökken a modellhasználat. Nagyobbrészt a területmodellt használják és a számegyenes csak a feladatok 20 %-ában jelenik meg. A japán könyvek gyakran mutatnak a gyermekeknek két megoldási módot és azt kérik tőlük, hogy hasonlítsák össze a két eljárást. A kuvaiti és az amerikai könyvek lényegesen többet ismételnek a korábbi évek anyagából, mint a japán.

*Alajmi* (2011) az alábbi következetéseket vonta le: a törtek korai bevezetése és ismétlése nem feltétlenül jelenti azt, hogy jobban fog menni a tanulás. Mind a kuvaiti, mind az amerikai diákok nehézségekbe ütköznek a szabályok alkalmazása során. A *National Research Council* (2001) ajánlását is figyelembe véve a törtek bevezetésével célszerű lenne megvárni a negyedik osztályt. Fontos lenne, hogy megmutassuk a diákoknak, hogy a törteknek az ő életükben is van jelentőségük. Az oktatásnak hangsúlyt kellene helyezni a törtek értelmezésére és a törtek nagyságának megértésére. A tankönyveknek a lineáris modellek használatára kellene összpontosítaniuk, segíteniük megérteni és összehasonlítani a törtek nagyságát.

A valós életből vett problémák fontosak a megértés folyamatában, áthidalják azt a szakadékot, ami az informális és a formális matematika között van. A választott kontextusnak nem feltétlenül kell igazinak lenni, lehet akár mesebeli is, mindaddig, amíg értelme van a gyermekek számára, és ösztönzik a matematizálási folyamatokat, amelyek potenciálisan relevánsak a valósághoz képest (*Selter*, 1998).

*Zhang* (2014) az egységtörtek értelmezését vizsgálta a területmodelltől indulva a multimodális megközelítésig. Fejlesztő kísérletében felhasználta *Dienes Zoltán* (1967) módszerét, amely szignifikáns javulást eredményezett. Itt jegyzi meg, „hogyha csak a területmodellt használjuk vagy ez az elsődlegesen használt modell és a többit elhanyagoljuk, akkor ez valószínűleg korlátozza a tanulók gondolkodását. Nyilvánvalóan itt az ideje, hogy áttérjünk a területmodell megközelítésről a multimodális megközelítésre, hogy megbízható fogalmakat alakítsunk ki a törtekről a gyermekek fejében” (257. o.).

## Összegzés

Elemzésünk folyománya a gyakorlat számára, hogy a 4. és 5. osztályos tankönyvek, és ezekkel korrelálóan az oktatási megközelítésmódok és módszerek között rugalmas átmenetre van szükség. A tanítóképzésben, a tanítók továbbképzésein ezzel kapcsolatos teendőnk, hogy kitekintést nyújtunk arra vonatkozóan, milyen alapokat feltételeznek egyes témakörökben, így például a törtek vonatkozásában az 5. osztályos tankönyvek. A felső tagozaton oktatók számára pedig fontos bemutatni a tanárképzésben és a továbbképzéseken, hogy korántsem annyira stabil még 5. osztályos korban a törtfogalom, hogy a formalizálás és a hányadosként értelmezés gyorsan megvalósuljon. Nem csak ezen a területen, hanem például a természetes számok számköreinek bővítésében is szakadék tátong a taneszközökben és az alkalmazott módszerekben egyaránt.

C. Neményi Eszter azon az úton járt, amit Varga Tamás és munkatársai kijelöltek. Varga Tamás volt az egyetlen matematika-didaktika kutató, aki a teljes általános iskolai tantervet és a módszereket egységes egészként tekintette és alkotta meg a komplex matematikatanítási módszert. Varga Tamás folyamatosan bővítette, ellenőrizte a matematikatanításról kialakult koncepcióját és a világ számos kutató bázisával állandó kapcsolatot tartva formálta. Átvette és a magyar viszonyokhoz igazította a jó elgondolásokat, eredményeket. A legfontosabb, hogy elvetette a formalizmusba hajló tévutakat. Ez napjaink matematikaoktatásának is megfelelő irányt mutatna. A kezdeti időben folyamatos képzést tartott a tanítók számára, eredményeit beépítette módszerébe. Erre hivatkozva írja *C. Neményi Eszter* (2002b) a matematika tantárgy helyzetének elemzésében: „Igen nagy jelentősége lenne annak, hogy folyjanak nagyobb számban tantárgy-pedagógiai kutatások annak még hatékonyabb alátámasztására, hogy a 6–10 éves gyerekek ismeretelsajátítási folyamatát és kognitív képességei fejlődését milyen módon lehet a tanítói munkában szolgálni. Hogy ne lehessen – tudatlanságból vagy egyéb okokból – olyan módszereket kínálni és alkalmazni, amelyek hátráltatják a gyerekek fejlődését, fogalmi rendszerük épülését.” Megállapítását kiegészíthetjük, hogy a felsőbb évfolyamokra ennek ugyanúgy igaznak kellene lennie. A törtfogalom-tanítás egyik problémájának áttekintése során végül ahhoz a merész következtetéshez is eljuthatunk, hogy a 21. században egy Varga Tamás komplex szemléletét tükröztető matematikaoktatásnak a sokféle vizuális reprezentáció felhasználásán kell alapulnia. Ha ehhez még hozzátesszük, hogy a sokféle vizuális reprezentációról való beszéd, a róluk való gondolkodás alsó tagozatos kortól megragadható lehetőség a matematikaórákon, akkor máris az emberi gondolkodás stratégiai összetevőinek átfogó fejlesztéséhez jutunk. Ez a gondolatmenet a törtfogalom alakításának alsó-felső tagozat közötti átmenetében felbukkanó problémán keresztül az oktatás kultúrájának általános kérdéseihez vezet el.

## Köszönetnyilvánítás

A tanulmány elkészítését az MTA–ELTE Korszerű Komplex Matematikaoktatás Kutatócsoport támogatta.

## Felhasznált irodalom

Alajmi, A. H. (2011): How do elementary textbooks address fractions? A review of mathematics textbooks in the USA, Japan, and Kuwait. *Educational Studies in Mathematics*, **79.** 2. sz., 239–261.

Ambrus Gabriella (2013): Matematikadidaktikai szemelvények II. Gondolatok a törtek tanításával kapcsolatban az 5–6. osztályban. In: Vásárhelyi Éva (szerk.) *Matematika módszertani példatár*. TAMOP4.1.2.A/1-11/1-2011-0064 jegyzet, 116–131.

Árvainé Libor Ildikó, Lángné Juhász Szilvia és Szabados Anikó (2017): *Sokszínű Matematika 4.* Mozaik Kiadó, Szeged.

Beke Manó (1909): *A középiskolai matematika tanítás reformja*. Franklin Kiadó, Budapest.

Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Duran, R., Smith-Reed, B. et al. (1997): Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal*, **34.** 4. sz., 663–689. https://doi.org/10.3102/00028312034004663

C. Neményi Eszter (2002a): Az alsó tagozatos matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai. *Új Pedagógiai Szemle*, **52.** 12. sz., 89–98.

C. Neményi Eszter (2002b): *A matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai. 1–4. évfolyam*, OFI, Budapest.

C. Neményi, Eszter (2008): *Relációk, függvények, sorozatok; A törtszám; A negatív szám.* ELTE TÓFK, Budapest.

C. Neményi Eszter és Káldi Éva (2009): *Matematika tankönyv. Általános iskola 4. osztály*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

C. Neményi Eszter és Wéber Anikó (2008): *Matematika tankönyv. Általános iskola 3. osztály*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

C. Neményi Eszter, Radnainé Szendrei Júlia és Varga Tamás (1981): Matematika 1-4. osztály. In: Szebenyi Péter (főszerk.), *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve.* 2. kiadás. OPI.

Chahine, I. C. (2013). The impact of using multiple modalities on students' acquisition of fractional knowledge: An international study in embodied mathematics across semiotic. *The Journal of Mathematical Behavior*, **32.** 3. sz., 434–449. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.04.004

Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Széplaki Györgyné és Szeredi Éva (2016): *Matematika 5. (AP).* OFI, Budapest.

Csíkos Csaba és Dobi János (2001): Matematikai nevelés. In: Báthory Zoltán és Falus Iván (szerk.) *Tanulmányok a neveléstudomány köréből – A Magyar Tudományos Akadémia Pedagógiai Bizottságának gyűjteménye*. Osiris, Budapest, 355–372.

Csíkos, C., Szitányi, J. & Kelemen, R. (2012): The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungairian students. *Educational Studies in Mathematics,* **81.** 1. sz., 47–65. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9360-z

Csordás Mihály, Konfár László, Kothencz Jánosné, Kozmáné Jakab Ágnes, Pintér Klára és Vincze Istvánné (2017): *Sokszínű matematika 5.* Mozaik Kiadó, Szeged.

Czeglédy István, Orosz Gyuláné, Szalontai Tibor és Szilák Aladárné (2000): *Matematika tantárgypedagógia II.*, Bessenyei György Könyvkiadó, Budapest.

Czeglédy István, Czeglédy Istvánné, Hajdu Sándor, Novák Lászlóné és Zankó Istvánné (2006): *Matematika 5. Program*. Műszaki Kiadó, Budapest.

Dienes, Z. P. (1967): *Fractions: an operational approach*. Herder and Herder, Portsmouth.

Dienes Zoltán (1973): Építsük fel a matematikát. Gondolat Kiadó, Budapest.

Ekenstam, A., & Greger, K. (1982): Non-algorithmic basic skills. *Journal für Mathematik-Didaktik,* **3.** 1. sz., 21–46. https://doi.org/10.1007/BF03338658

Gonzales, P., Williams, T., Jocelyn, L., Roey, S., Kastberg, D. & Frenwald, S. (2008): *Highlights from TIMSS 2007: Mathematics science Achievement of U.S. fourth-and eighth-grade Students in an international context* (NCES 2009–001 Revised). National Center for Education Statistics, US Department of Education, Washington.

Hajdu Sándor, Köves Gabriella, Novák, Lászlóné és Scherlein Márta (2003): *Matematika 4. Program*, Műszaki Kiadó, Budapest.

Hajdu Sándor, Czeglédy István, Czeglédy Istvánné és Zankó Istvánné (2013): *Gondolkodni jó! Matematika 5.* Műszaki Kiadó, Budapest.

Hajdu Sándor, Czeglédy István, Czeglédy Istvánné és Zankó Istvánné (2014): *Gondolkodni jó! Matematika 6.* Műszaki Kiadó, Budapest.

Jacob, S. N., Vallentin, D. & Nieder, A. (2012): Relating magnitudes: the brain's code for proportions. *Trends in Cognitive Sciences,* **16.** 3. sz., 157–166.
https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.02.002

Kerslake, D. (1986): *Fractions: Children's strategies and errors.* The NFER – NELSON Publishing Company Ltd., Windsor, Berkshire.

Monk, S. (2003): Representation in school mathematics: Learning to graph and graphing to learn. In: J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (eds.) *Research companion to principles and standards for school mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 250–261.

Moseley, B. (2005): Students' early mathematical representation knowledge: The effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics,* **60.** 1. sz., 37–69.
https://doi.org/10.1007/s10649-005-5031-2

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Beaton, A. E., Gonzalez, E. J., Kelley, D. L. & Smith, T. A. (1997): *Mathematics achievement in the primary school years: IEA's Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS). Boston College, Boston.

National Research Council (2001): *Adding it up: Helping children learn mathematics.* National Academy Press, Washington.

Nemzeti Alaptanterv (2012): *Magyar Közlöny*, 66, 10639–10847.

OFI (2017a): *Matematika 3. Újgenerációs tankönyv.* OFI, Budapest.

OFI (2017b): *Matematika 3. Munkafüzet II. kötet. Újgenerációs tankönyv.* OFI, Budapest.

OFI (2015a): *Matematika 4. Kísérleti tankönyv.* OFI, Budapest.

OFI (2015b): *Matematika 4. Munkafüzet II. kötet. Kísérleti tankönyv.* OFI, Budapest.

OFI (2016a): *Matematika 5. Újgenerációs tankönyv.* OFI, Budapest.

OFI (2016b): *Matematika 5. Munkafüzet. Újgenerációs tankönyv*. OFI, Budapest.

OFI (2017c): *Tanári kézikönyv a matematika 5–6. Újgenerációs tankönyvekhez.* OFI, Budapest.

Peller József (2011): *A matematikai ismeretszerzési folyamatról.* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest.

Saxe, G. B., Dawson, V., Fall, R. & Howard, S. (1996): Culture and childrens mathematical thinking. In R. J. Stenberg & T. Ben-Zeev, (eds.) *The nature of mathematical thinking.* Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ, 119–144.

Siegler, R. S., Fazio, L. K.,. Bailey, H.K & Zhou, X. (2013): Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, **17.** 1. sz., 14–19.
https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.11.004

Sriraman, B. & English, L. (2005): On the teaching and learning of Dienes' principles. *International Reviews in Mathematics Education (ZDM),* **37.** 3. sz., 258–262.

Streefland, L. (1990): *Fractions in realistic mathematics education, a paradigm of developmental research.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Török Tamás (2016): *Tanító kézikönyv Matematika, 1–4. osztály*, OFI, Budapest.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000): *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. Freudenthal Institute CD-rom for ICME9.* Utrecht University, Utrecht.

Zhang, X., Clements, M. A. K. & Ellerton, N. F. (2014): Conceptual mis(understandings) of fractions: From areamodels to multiple embodiments. *Mathematics Education research Journal,* 72, 233–261.

**Fostering the concept of fractions at the boundary of primary and lower secondary school grades**

*This paper focuses on the ways of fostering the concept of fractions. The main concern to be discussed is the controversy between the concept of fractions pupils possess at the end of their primary school years (Grade 4) and the expectation raised by the textbooks in Grade 5. In their primary years, students encounter fractions as either fractions with 1 as numerator or the multiples of such fractions – both with various kinds of manipulative or visual aids. To the contrary, in Grade 5, fractions immediately appear as rational numbers, i.e., the ratio of two whole numbers. In order to appropriately build the concept of fractions in Grade 4, we advise to emphasize the so-called "second interpretation" (C. Neményi) of fractions. This "second interpretation" of the multiples of fractions with 1 as numerator means that multiples of a unit are divided into equal parts according to the denominator. Our message has been approved and supported by means of analyzing textbook passages and results available in the international literature.*

***Keywords***: *concept of fractions, primary school, mathematics, lower secondary school mathematics, illustration, textbook analysis*

Karika Tímea – Csíkos Csaba (2018): A törtfogalom fejlődésének segítése az alsó és a felső tagozat határán. *Gyermeknevelés*, **6.** 1. sz., 86–98.

# Gondolkodási eljárások tanulása

**Zsinkó Erzsébet**
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Tanító- és Óvóképző Kar

*A matematikai problémák sikeres megoldásának egyik kulcskérdése, hogy a tanulók ki tudják-e választani és tudják-e alkalmazni a megfelelő gondolkodásmódokat. Ehhez többféle gondolkodási eljárás megismerésére és elsajátítására van szükség. Mit tehet a tanító annak érdekében, hogy hozzásegítse tanítványait gondolkodási eljárások tanulásához? A válasz egyértelmű: jól megválasztott problémafelvetésekkel és tapasztalásra alkalmas tevékenységek szervezésével hozzájárul a tanulási készségek és az önálló tanulás módjainak fejlesztéséhez. Ebben a cikkben tankönyvi feladatok elemzésével mutatok olyan példákat, amelyek alkalmasak gondolkodási eljárások tanulásának támogatására.*

***Kulcsszavak:*** *tanulás, gondolkodási eljárás, képességfejlesztés, alkotás, fogalomalkotás*

## Bevezetés

A gondolkodásról és annak fejlesztéséről nagyszámú szakirodalom alapján tájékozódhatunk. Cikkekben, tanulmányokban olvashatunk olyan kutatásokról is, amelyek kisiskolások gondolkodási képességeinek vizsgálatáról vagy fejlesztési lehetőségeiről szólnak. A matematikai képességek közül *Vidákovics* (2008) kiemeli az induktív, deduktív, kombinatív, rendszerezési és korrelatív gondolkodás képességét.

Az oktatás-irányítás dokumentumaiban is megfogalmazódik az igény, hogy a nyomtatott taneszközök alkalmasak legyenek gondolkodási eljárások tanulására. Ezt igazolja a „Pedagógiai szakértői értékelőlap", melyben a fentiekhez hasonló képességfejlesztés szükségességéről olvashatunk. Például a rendszerező és a kombinatív képességek, valamint a kritikai gondolkodás fejlesztésének elvárásáról. A nyomtatott taneszközöknek lehetőséget kell adniuk „az elemzésre, a direkt és indirekt bizonyításra, a következtetésre, a konkretizációra, az absztrakcióra, az általánosításra, az induktív, a deduktív és a korrelatív gondolkodási képességek"[1] fejlesztésére is.

Ez a cikk nem vállalkozhat a különféle gondolkodási képességfejlesztések átfogó rendszerezésére. Csupán néhány példát mutat a gondolkodás egyes típusainak mozgósítására alkalmasan megválasztott feladatokon és feldolgozásukon keresztül.

A bemutatásra kerülő feladatok értékét, sokszínűségét és fejlesztő hatását megoldás közben könnyű átlátni, átgondolni, ezért javaslom, hogy szánjon az olvasó időt a megoldásra, mielőtt az elemzést elolvasná!

A feladatok abból a C. Neményi-féle tankönyvcsaládból származnak, amely jelenleg nincs a magyar tankönyvlistán, ugyanakkor Finnországban – ahol egyre jobbak a matematikatanulás eredményei – használják a tankönyvcsalád adaptált változatát. Ezek a tankönyvek alapul veszik a Skemp által – a fogalom épülésével kapcsolatban – megfogalmazott igazságot, melynek lényege, hogy kisgyerekkorban a valóság megismerése csak induktív úton kezdődhet. A gondolkodási eljárások is a cselekvő módon, személyesen bejárt úton alakulnak.

## Példák alkotást igénylő problémafelvetésekre

Tevékenységek közben a gyerekek tapasztalatokat gyűjtenek, ismeretekre tesznek szert, cselekvés közben gondolkodási műveleteket végeznek, fizikai eljárások által gondolati eljárásokat tanulnak. Az alkotások közben analizálnak,

[1] https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tankonyv/05a_pedagogiai_szakertoi_ertekelolap_tk_20170330.doc (letöltés ideje: 2017. márc. 30.)

DOI 10.31074/gyn2018199107


Zsinkó Erzsébet: orcid.org/0000-0002-2335-5125

összefüggéseket keresnek, és fedeznek fel, szintetizálnak. A fogalmak megértéséhez többet ad az alkotás közben átélt tapasztalat, mint a kész objektumok szemlélése, elemzése. A matematika minden területe alkalmas arra, hogy a gyerekek saját alkotásokat hozzanak létre.

### *Számok alkotása különböző feltételek alapján számjegy-kártyákból, számjegyekből*

A következő hat számkártyából egyszerre három kétjegyű szám állítható össze.

8 6 1 2 3 9

Készitsd el úgy a három kétjegyű számot, hogy
a) mindegyik nagyobb legyen 50-nél!
b) a lehető legkisebb számegyenes-darabon legyen a három szám!
c) be lehessen illeszteni őket ebbe a számsorba:
30 < ...... < 50 < ...... < 70 < ...... < 90

Például: 3. osztályos tankönyv, 21. oldal, 40. feladat (*C. Neményi és Wéber*, 2002)

A feladat a) része többnyire nem okoz problémát a gyerekeknek, ha számkártyákat adunk a kezükbe és kérjük az előállított számok ellenőrzését. Azonban várhatóan lesznek tanulók, akik számára a kártyák húzogatása közben tudatosul, hogy a szám nagyságát a (leg)nagyobb helyiértéken álló számjegy befolyásolja elsősorban, tehát a tízes helyiértékre válogatják a 8, 6, 9 számjegyeket. Miközben keresik a maradék három számkártya helyét, felismerhetik, hogy ezek tetszőleges elhelyezése esetén a feltételnek megfelelő számokhoz jutnak. A gyorsabbak talán biztatás nélkül is megkeresik mind a hat lehetséges megoldást, amellyel egy önállóan alkotott kombinatorikai problémát oldanak meg.

Összetettebb gondolkodást igényel a b) feladat. Mikor kerülnek egymáshoz közel a számok? Mikor lesz a köztük lévő különbség kicsi? Elegendő most is a tízes helyiértéken lévő számjegyekre figyelni? Természetesen fontos, hogy a tízesek eltérése a lehető legkisebb legyen, így a számok első számjegye 1, 2, 3 lehet. De kirakás közben rájöhetnek a gyerekek, hogy az egyesek elrendezése is csökkentheti a különbséget, hiszen, ha a legkisebb számban az egyesek számát a lehető legnagyobbra, a legnagyobb számban pedig a lehető legkisebbre választjuk, akkor lesz a számok közti különbség a lehető legkisebb. Így, ennek a feladatnak egy megoldása van. A három szám: 19, 28, 36. Természetes, hogy a különféle megoldási javaslatokat is ellenőrizzük, és megállapítjuk, hogy mely esetben milyen hosszú számegyenes-darabon áll a három szám.

Az előzőek után a c) feladatban biztosan sok tanuló fogja hezitálás nélkül elhelyezni először a tízesek számát, és csak elvétve találkozhatunk azzal, hogy valaki a 36-ot vagy a 38-at elhelyezi a 30 és az 50 közé. Ha mégis, akkor rá fog jönni, hogy később szüksége lesz a 6-os számkártyára ahhoz, hogy 50 és 70 közötti számot is tudjon alkotni.

A feltételek szerinti számalkotások során tapasztalhattuk, hogy a meglévő ismeretek alkalmazásán túl fontos szerephez jut a becslés, az összehasonlítás, a számolás, a számolásos következtetés, a kombinálás is.

## *Számok közelítése adott számokból műveleti jelek választásával*

Írd be a műveleti jeleket!

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 867 | 359 | ≈ | 500 |
| | 442 | 372 | ≈ | 800 |
| 678 | 243 | 119 | ≈ | 300 |
| 678 | 243 | 119 | ≈ | 600 |
| 678 | 243 | 119 | ≈ | 1000 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 456 | 361 | 698 | ≈ | 800 |
| 456 | 361 | 698 | ≈ | 100 |
| 698 | 361 | 456 | ≈ | 600 |
| 698 | 361 | 456 | ≈ | 800 |
| 698 | 361 | 456 | > | 1000 |

Írásbeli művelettel ellenőrizd elgondolásodat!

Például: 3. osztályos tankönyv, 138. oldal, 37. feladat (*C. Neményi és Wéber*, 2002).
A feladat az írásbeli összeadás és kivonás fejezet végén található.

Amikor az önálló munkára kijelölt írásbeli műveletvégzések előtt becslésre bíztatjuk a gyerekeket, gyakran tapasztalhatjuk, hogy többen fordított sorrendet választanak. Először (akár fejben) elvégzik a műveletet, és annak eredményét kerekítik, hogy választ adjanak a becslést firtató kérdésre is. Esetleg azért, mert tartanak attól, hogy túl nagy lesz az eltérés a becslésük és a művelet eredménye között.

Miért is erőltetjük a művelet eredményének előre becslését? Nyilván azért, hogy a nagy eltérés felhívja a figyelmet az esetleges hibára.

Ez a feladat nem engedi a becslés megkerülését, felszólítás nélkül is becslésre ösztönzi a feladat megoldóját. Tudatosul, hogy mitől lesz kisebb vagy nagyobb egy műveleti sor eredménye. Észrevehetik, ha a műveletek sorrendje változást okoz. A feladat megoldása és az önellenőrzés nemcsak a becslőképesség és az írásbeli számolási képesség fejlesztését szolgálja, hanem az összefüggés-keresésben, összefüggés-megértésben is támogatja a gondolkodást.

## *Számsorozatok alkotása*

Folytasd a sorozatot! Írd alá a különbségeket!

34 36 39 41 ........ ........ ........ ........ ........ ........ ........

........ ........ ........ ........ ........ ........ ........ ........ ........ ........

Mit gondolsz, melyik szám lesz benne a sorozatban a következők közül?

1997, 1998, 1999, 2000, 2001

Például: 4. osztályos munkafüzet, 122. oldal, 2. feladat (*C. Neményi és Káldi*, 2002).

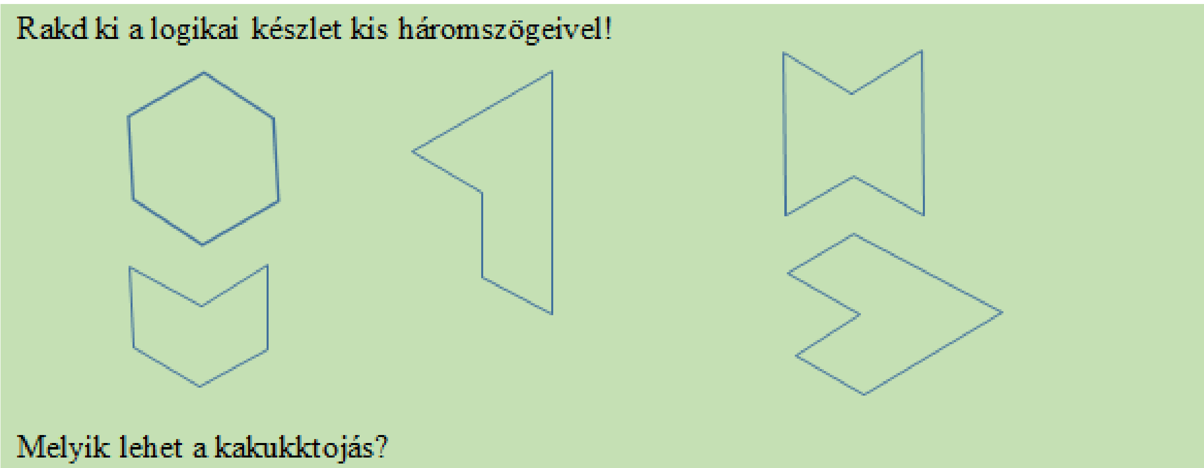
A gyerekek az utasításban kapják meg azt a kicsi segítséget, amely alapján váltakozó különbséggel tudják folytatni a sorozatot. Ennek a szabálynak a rögzítését követő sorozatalkotás során már feltűnhet sokak számára az egyes helyiértéken álló számjegyek periodikus váltakozása, azaz, hogy csak a 4, 6, 9, 1 állhat az egyesek helyén, de a megfigyelést ösztönzi a felvetett kérdés is.

Természetesen, a megbeszélés során újabb provokatív kérdésekkel kicsalogathatunk meggyőző indoklásokat is. Honnan lehet azt tudni, hogy az első 10–12 tagnál megfigyelt tulajdonság vég nélkül folytatódik? Miért lehetünk biztosak abban, hogy nem lesz köztük egyetlen 8-ra végződő szám sem? Azt is meg tudjuk mondani, hogy hányadik tagja lesz a sorozatnak az 1999, anélkül, hogy az összes előtte álló tagot felsorolnánk? Miközben a gyerekek választ keresnek ezekre a kérdésekre, fontos ismereteket alkalmaznak. Megállapítják, hogy minden negyedik szám (2+3+2+3=) 10-zel nagyobb, így a 39-től induló, tízesével növekvő sorozat minden tagja benne lesz a sorozatban. Ez pedig azt jelenti, hogy ha az egyesek helyén 9-es áll, akkor az ilyen szám biztosan megtalálható a sorozatban. Hasonlóan érvelhetnek a 4-re, 6-ra és 1-re végződő számok mellett is. Ez indokolja azt is, hogy más végződésű szám nem tagja a sorozatnak. Azt is megállapíthatjuk, hogy az 1999 a sorozat 787., a 2001 pedig a 788. tagja, hiszen 41-től 2001-ig 197 db 1-re végződő szám van, de csak minden negyedik szám ilyen, így a 2001 a 4·197=788. szám a sorozatban. Persze azt is észrevehetik a gyerekek, hogy a 34-től induló, ötösével növekvő és a 36-tól induló, ugyancsak ötösével növekvő sorozatok összefésülésével jött létre ez a váltakozó különbségű sorozat.

A sorozatalkotás során tett megfigyelés sejtés megfogalmazását, összefüggés-felismerést ösztönöz, a kérdésfeltevés tudatosításhoz, sőt akár általánosításhoz is vezethet. A provokatív kérdések felkeltik a bizonyítás igényét.

### *Geometriai alkotások*

*Sokszögek kirakása*




Például: 3. osztályos tankönyv, 59. oldal, 4. feladat (*C. Neményi és Wéber*, 2002).

Első látásra, a feladat megoldása nélkül, valóban a címben megfogalmazott tartalom jut csak eszünkbe. Amint hozzálátunk a kirakáshoz, akár kérdezés nélkül is további tartalmakat fedezhetünk fel. Például, hány háromszögre van szükség egy-egy alakzat lefedéséhez? (Területmérés.) Miközben elhelyezzük a háromszögeket, oldalhosszakat, szögeket hasonlítunk össze, formákat figyelünk meg, szimmetriákat veszünk észre.

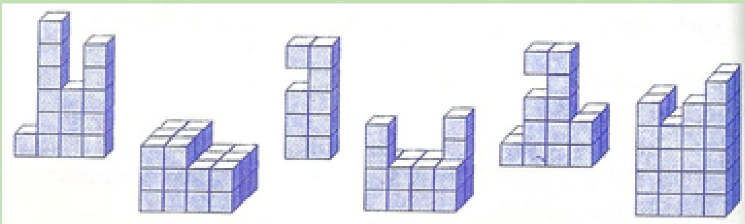
Ha válaszolni szeretnénk a feladatban megfogalmazott kérdésre, az öt alakzat közül 4-nek keressük azt a közös tulajdonságát, amellyel az ötödik alakzat nem rendelkezik. (Címkézés.) Vajon melyik lehet a kakukktojás? Talán a hatszög? Lehet, ha egy van belőle! Ellenőrizzük! Azt vesszük észre, hogy 4 hatszög van köztük, így a csúcsok száma szerint éppen az a kakukktojás, amelyiknek csak 5 csúcsa van. ()

Azt is észrevehetjük, hogy ez az alakzat nem csak a csúcsok számában tér el a többi alakzattól, hanem az oldalak számában is, és abban, hogy ez az egyetlen alakzat, amelyik nem tükrös. A csúcsok számlálásakor több alakzatnál is segítségre szorulhatnak a gyerekek, azonban biztosan nem lesz probléma a szabályos hatszög csúcsainak megszámlálása. Közben kimondtuk a tulajdonságot, ami az első hatszöget megkülönbözteti az összes többitől, így a szabályos hatszög is lehet kakukktojás. Valóban, de találhatunk más tulajdonságot is, ami megkülönbözteti a többitől. Egy ilyen alakú kertben nem érdemes bújócskázni (konvex), míg a többiben igen (ezek nem konvexek). Ennek az alakzatnak 6 tükörtengelye van, a többinek nincs ennyi. Viszont a tükörtengelyek száma alapján lehet kakukktojás a jobb felső ( ) síkidom is, hiszen ez az egyetlen alakzat, amelynek 2 tükörtengelye van. Vajon lehet-e kakukktojás az 1 tükörtengellyel rendelkező két sokszög közül valamelyik? Ha elvégezzük a kis háromszögekkel a lefedéseket, láthatjuk, egy olyan alakzat van köztük, aminek a lefedéséhez csak 4 háromszögre van szükség ( ), így a terület szerint ez is eltér az összes többitől. De megfogalmazhatunk összetett állítást is erről az alakzatról, amely megkülönbözteti az összes többitől: minden oldala egyenlő hosszú és nem konvex.

Ez az egyszerűnek tűnő feladat többféle tartalomhoz kapcsolódik, újabb tulajdonságokra irányíthatja a figyelmet, korábban tanult ismereteket mozgósít, fejleszti a halmazszemléletet, tudatos megfigyelést igényel, összehasonlítást, azonosítást és megkülönböztetést végeznek közben a gyerekek és kreativitásra ösztönöz.

Az egyszerű „másolással" elvégzett alkotás is fejleszthet egyszerre különféle gondolkodási képességeket. Szép példája ennek a 3. osztályos tankönyv, 58. oldal, 3. feladata (*C. Neményi és Wéber*, 2002).

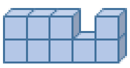
Építsd meg, amelyiket tudod! Ha szükséges, állítsd másképpen!



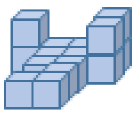
Építsd meg mindegyiket más színű rudakkal is: ha több kiskockát be lehet váltani nagyobb rúdra, cseréld fel vele! Vigyázz arra, hogy ugyanolyan alakú legyen az új építmény is!

Ahhoz, hogy a képen látható építményeket a gyerekek maguk is meg tudják alkotni, először szükség van tudatos, elemző megfigyelésre: hány kockából épült a test, azok hogyan helyezkednek el egymáshoz képest. Elképzelik, vagy az építés során tapasztalják, hogy két alakzat csak másként állítva építhető meg.

A harmadikat akár kétféle állásban is felépíthetik,



míg az ötödiket csak egyféleképpen:



Ez a térbeli forgatás komoly térlátást igényel. És éppen ez által hozzájárul a térlátás fejlődéséhez.

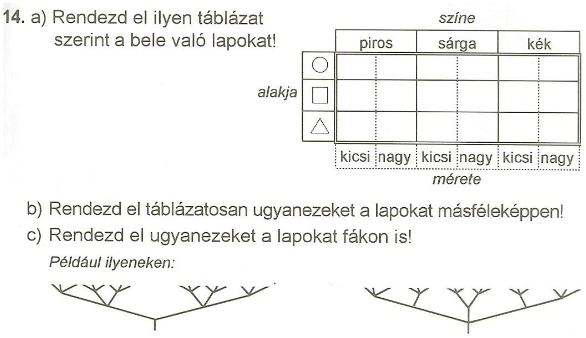
Amikor több kiskockát váltanak be nagyobb rúdra, az alak és a méret azonosítása a cél. Az ilyen tevékenységek (másolások azonos és más elemekkel) indítják el az egybevágóság fogalmának alakítását.

## A kombinatorikus gondolkodás eljárásainak tanulása

A kombinatorikus gondolkodás formálására is sok példát sorakoztathatunk. A tankönyvcsalád nem akar belesulykolni a gyerekek fejébe kiszámítási módokat, de még csak eljárásokat, módszereket sem kíván rájuk kényszeríteni a lehetséges esetek előállítása érdekében. Figyelembe veszi a Varga Tamás által megfogalmazott fejlesztési folyamatot (*Varga*, 1977), melynek első lépcsőfoka az adott feltételnek megfelelő egy vagy több eset előállítása. Erre találunk kedves, tevékenységet igénylő feladatokat már az 1. osztályos tankönyvben, melynek során a gyerekek megalkotják a többféle sorrendet. 2. osztályban fadiagram segítségével kicsi elemszám esetén eljuthatnak az adott feltétel szerinti minél több, sőt, az összes eset előállításához.

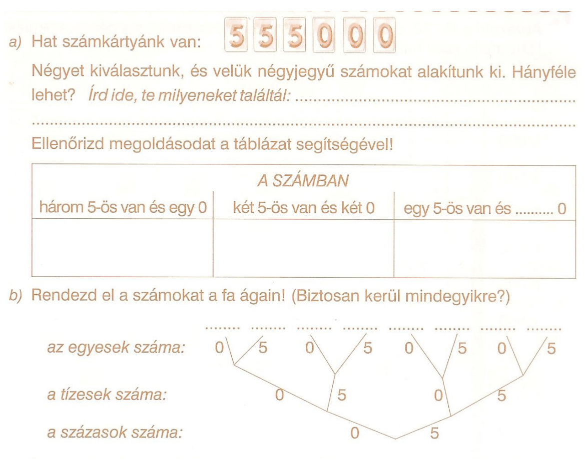
3. osztályban elkezdődik a gyerekek gondolkodásának tapintatos irányítása, hogy maguk fedezzenek fel követhető eljárásokat,

amelyek követésével megtalálják a feltételnek megfelelő összes esetet. Ezt szolgálják először a már előállított elemek önálló elrendezésére való felszólítások (hogy a hiányt vagy az ismétlődést egyszerűbb legyen felismerni). Ezt segítik a fadiagramon való ábrázolások, a táblázatba rendezések, a javasolt egyszerűsített rajzok, vagy a kísérletek lehetséges kimeneteleinek megfigyeltetése játékok során. Szép példákat találunk a modellek közti kapcsolat felismertetésére is.




Például: 3. osztályos tankönyv, 83. oldal, 14. feladat (*C. Neményi és Wéber*, 2002).

4. osztályban újabb lépést tehetnek a gyerekek az összes eset megkeresésében a talált esetek rendezésével és a rendszerben talált hiányok keresésével.




Például: 4. osztályos munkafüzet, 29. oldal, 1. feladat (*C. Neményi és Káldi*, 2002).

A feladat b) részében az ágrajzon nem jelenik meg az az ág, hogy az ezresek száma 5 – hiszen 0-val nem kezdődhet a négyjegyű szám. Ennek felismertetése, megbeszélése hozzájárul az önálló megfigyelés motiváltságához.

Ezek a tevékenységek, módszerek ráirányítják a figyelmet a rendteremtés lehetőségére és hasznára a kombinatorikus feladatok megoldásában és általában az ismeretek rendszerezése területén is.

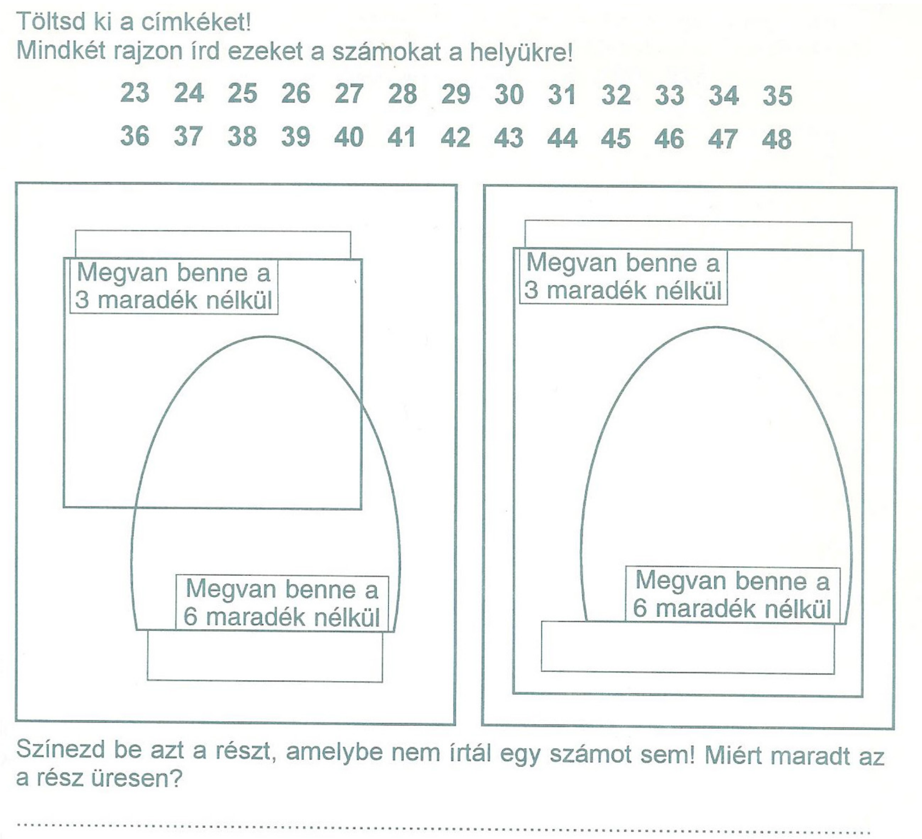
## A fogalmak építése

A gondolkodási folyamatok közül kiemelt szerepe van a fogalomalakulásnak és a fogalmak közti kapcsolatrendszerek, összefüggések alakulásának. A fogalomalakítás folyamatáról részletesen olvashatunk *Skemp* (2005) könyvében. Ennek leegyszerűsített lépései: 1. A sok egyedi példa közös tulajdonságát megragadva alakul a fogalomról az elsődleges képzet. 2. A közös jegyek, hasonlóságok szerint összetartozó képzetek egy osztályt alkotnak, ezek az elsődleges fogalmak. 3. Az elsődleges fogalmak közös tulajdonsága alapján épülnek a másodlagos fogalmak. 4. „Egyre absztraktabb fogalmak láncolatai alakulnak ki gondolkodásunkban: bármelyik kialakulásához az absztrakciós skálán alá tartozó fogalmak meglétére és mobilizálhatóságára van szükség." (*C. Neményi*, 2003. 226. o.)

A C. Neményi-féle tankönyvcsalád legnagyobb értéke, hogy gondoskodik a fogalmak folyamatos épüléséről és egymáshoz kapcsolásáról, a fogalmi rendszer alakításáról. Mindegyik fogalom érzékszervi tapasztalásra épül. Az alakítandó fogalom sokféle konkrét tartalommal, sokféle helyzetben, különféle más fogalmakhoz kapcsolva jelenik meg, amelyeket a kisgyerek számos módon érzékel, (tapint, lát, hall) és számos teendőt végez vele. A sokféle módon megjelenő állandó tulajdonság felerősödik, és a kisgyerek emlékezete a tapasztalt közöset raktározza el. Általában így alakulnak az elsődleges fogalmak, amelyek többnyire tárgyak, tulajdonságok egy-egy osztálya, mint például a kettő, öt…, háromszög, négyszög…, fél, harmad… (*C. Neményi*, 2003).

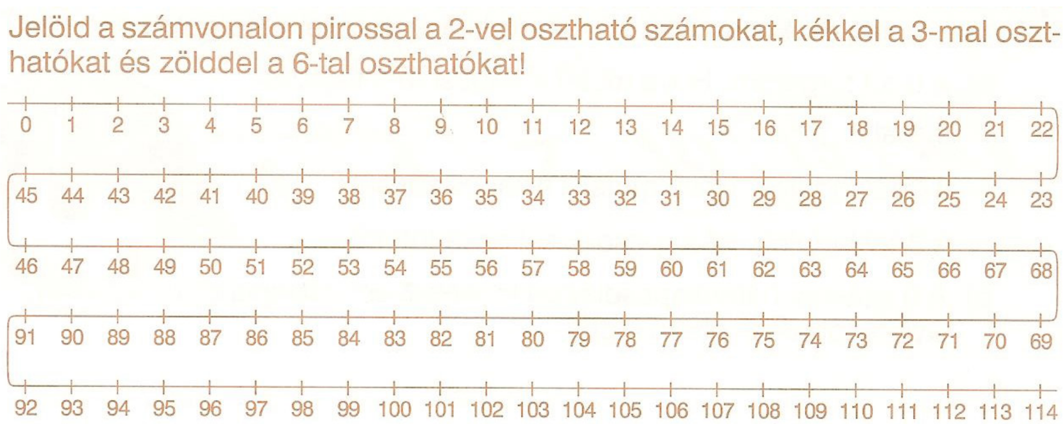
A szerzők betartják a célszerű sorrendet, késleltetik a fogalom megnevezését és jelölését, és csak az elsődleges fogalmak kialakítását követi a másodlagos fogalmak építése, mint például (a kettő, öt… elsődleges fogalmakhoz kapcsolva) a szám, (a háromszög, négyszög… tartalmak megismeréséhez) a sokszög, (a fél, harmad, háromnegyed… egyedi fogalmakhoz) a törtszám.

A tiszta, szakszerű fogalomalakításhoz hozzátartozik a fogalmak egymáshoz való viszonyának formálása, tudatosítása. A kisiskolások számára is érthető módon fedeztetik fel az egymás mellé rendelt, vagy az alá- és fölérendelt fogalmak kapcsolatát.



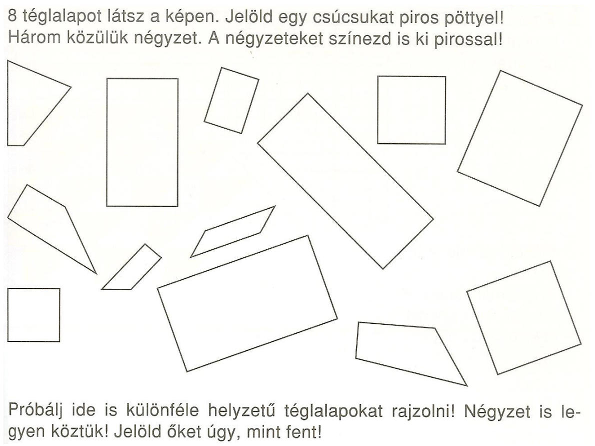

Például: 3. osztályos munkafüzet, 73. oldal, 1. feladat (*C. Neményi és Wéber*, 2002).

Ugyanazoknak a számoknak a kétféle ábrán való elhelyezése, valamint a különbségre irányított figyelem segíti, hogy a gyerekek maguk fogalmazzák meg a 3 és a 6 többszöröseinek kapcsolatát. Azt is megfigyelhetjük, hogy a szerzők nem akarják túl hamar lezárni, készre kimunkálni az ismeretet, a 4. évfolyamon (és később) további tevékenységek járulnak hozzá a tudatosításhoz, mint például többszörösök jelölése számegyenesen (4. osztályos munkafüzet, 85. oldal, 1. feladat (*C. Neményi és Káldi*, 2002).



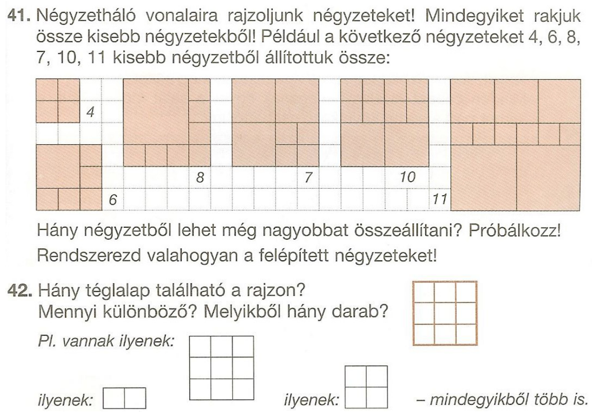
### *Fogalomalakítás a geometria témaköréből*

Érdemes megfigyelni a fogalomalakítás folyamatát a geometria területén is, ahol egy általánosabb fogalomtól haladunk a speciális fogalmak felé. Első osztályban konkrét alakzatok megfigyelése, válogatása, papírból, szívószálból való előállítása, oldalainak, csúcsainak számlálgatása elegendő pl. a négyszög fogalmának alakulásához. Már első osztálytól, vagy akár még előbb használják a téglalap, négyzet szavakat, de a fogalmakat még csak ráismerés szinten ismerik. Másodikban tevékenységekkel kezdik megismerni az alakzatok tulajdonságait. Megfigyelik, hogy a téglalapot pontosan félbe lehet hajtani mindkét szemközti oldalpár közepénél. E szerint kiválogatják a négyszögek közül a téglalapokat. Tapasztalatot szereznek arról, hogy a négyzetet nem csak a két szemközti oldalpár közepénél, hanem a csúcsain át is félbe lehet hajtani. A tapasztalatok után konkrét feladatban találkoznak először azzal a megfogalmazással, hogy a négyzet is téglalap (2. osztályos munkafüzet, 97. oldal, 1. feladat (*C. Neményi és Sz. Oravecz*, 1998)).




A 3. osztályos tankönyv, amikor téglalapról beszél, természetes módon jelenteti meg a konkrét elemek között az egyenlő oldalhosszúságú téglalapokat, de fontosnak tartja észrevetetni, hogy ezek közül miért kaptak külön nevet a négyzetek, milyen tulajdonságaik figyelhetők meg, amelyekkel viszont nem rendelkezik minden téglalap. Ilyen tulajdonság a 4 tükörtengely (3. osztályos tankönyv, 155. oldal, 6. feladat (*C. Neményi és Wéber*, 2002)), vagy a negyedrendű forgásszimmetria (3. osztályos tankönyv, 156. oldal, 11. feladat (*C. Neményi és Wéber*, 2002)), illetve annak felismertetése, hogy a négyzetek mind hasonlóak egymáshoz (3. osztályos tankönyv, 156. oldal (*C. Neményi és Wéber*, 2002)).

4. osztályban további tapasztalatokat szereznek a szomszédos oldalak merőlegességéről, a szemközti oldalak párhuzamosságáról, a szögek és a szemközti oldalak egyenlőségéről, valamint az alakzatok területének és kerületének méréséről. Összegzik, megfogalmazzák és alkalmazzák ismereteiket.




Például: 4. osztályos tankönyv, 127. oldal, 41. feladat, 128. oldal, 42. feladat (*C. Neményi és Káldi*, 2002).

Ezek a példák jól mutatják azt a folyamatot, melynek során a gyerekek megalkotják maguk számára a fogalmakat, bővíthetik meglévő ismereteiket, illetve alkalmazhatják azokat a problémamegoldások során.

## Összegzés

A taneszközök mintát mutatnak arra, hogyan lehet elérni azt, hogy a gyerekek úgy érezzék, ők találnak fel jól működő eljárásokat, ők fedeznek fel érdekes összefüggéseket, és hogy képesek az önálló problémamegoldásra, mások meggyőzésére megoldásuk helyességéről.

A gondolkodás fejlesztésében természetesen a felsorolt és elemzett feladatok más-más feldolgozás esetén nem egyformán hatékonyak. Ha bármelyiket előkészítés nélkül bízzuk a gyerekekre, és nincs lehetőség arra sem, hogy kifejezhessék a megoldás során alakuló gondolataikat, meghallgathassák mások ötleteit, könnyen elhalványodhatnak az élményemlékek, és végül maradandó hatás talán nem is születik belőlük. Nagyon nem mindegy, hogy milyen konkrét tapasztalati előzményekre támaszkodik egy-egy ilyen feladat. Lényeges az is, hogy hogyan illeszkednek egymáshoz a hasonló gondolkodást stimuláló problémahelyzetek. Hogy lehet-e, érdemes-e felidézni, alkalmazni a már egyszer működő gondolkodásmódot. Igen fontos szerepe van annak a légkörnek, amelyben a tévedéseknek, értelmes vitáknak, gondolatok megmutatásának, szavakkal, írásban való kifejezésének, a megismert eljárások tudatosításának, rendszerezésének is helye és lehetősége van. Elengedhetetlen feltétele a gondolkodás fejlődésének az elegendő idő, a türelem, hogy ne zárja le a problémamegoldást a valaki által kimondott jó „eredmény". Sokszor maradhasson nyitva, lehessen továbbfűzni, újabb nézőpontból újra és újra visszatérni rá.

A fent elemzett feladatok abból a tankönyvcsaládból származnak, amelyek évtizedeken keresztül támogatták a kisiskolások matematikai fejlesztését. Hasznos lenne, ha Magyarországon is újból hozzájuthatnának az iskolák ezekhez a kiadványokhoz!

## Felhasznált irodalom

C. Neményi Eszter (2003): Gondolkodási és megismerési módszerek. In: C. Neményi Eszter és Sztrókay Vera *Matematika segédanyag az esti tanítóképzéshez.* ELTE TÓFK, Budapest, 223–265.

C. Neményi Eszter és Sz. Oravecz Márta (1998): *Matematika tankönyv, Útjelző és Munkafüzet 1. osztály*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

C. Neményi Eszter és Sz. Oravecz Márta (1998): *Matematika tankönyv, Útjelző és Munkafüzet 2. osztály*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

C. Neményi Eszter és Wéber Anikó (2002): *Matematika tankönyv és munkafüzet 3. osztály*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

C. Neményi Eszter és Wéber Anikó (é.n.): *Kézikönyv a matematika 3. osztályos anyagának tanításához.* Nemzeti Tankönyvkiadó–Budapesti Tanítóképző Főiskola, Budapest.

C. Neményi Eszter és Káldi Éva (2002): *Matematika tankönyv és munkafüzet 4. osztály*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Pedagógiai szakértői értékelőlap URL: https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tankonyv/05a_pedagogiai_szakertoi_ertekelolap_tk_20170330.doc (letöltés ideje: 2017. márc. 30.)

Richard R. Skemp (2005): *A matematikatanulás pszichológiája*. SHL Kiadó, Budapest.

Robert Fisher (2002): *Hogyan tanítsuk gyermekeinket gondolkodni?* Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Varga Tamás (1977): *A matematika tanításának várható fejlődése. A matematikatanítás módszertanának néhány kérdése.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Vidákovics Tibor (2008): *A matematikai kompetencia fejlesztése más tantárgyak keretei között.* Education Kht, Budapest.

**Learning about thinking processes**

*One of the key questions of successful math problem solving is whether students can choose and apply the right way of thinking. To do this, you need to know and master several thinking processes. What can the teacher do to help their pupils learn about thinking methods? The answer is clear: it contributes to the development of learning skills and self-learning ways by organizing activities that are well-suited to problem orientation and experience. In this article, I analyze examples of textbook tasks that can be used to support learning methods.*

***Keywords**: learning, thinking process, skill development, creation, conceptualization*

Zsinkó Erzsébet (2018): Gondolkodási eljárások tanulása. *Gyermeknevelés*, **6.** 1. sz., 99–107.

# Gondolkodás játék közben: Recenzió *A gondolkodás fejlesztése 4–8 éves életkorban* című kiadványról

**Földi Fanni – Gyurcsik Anita**
Szegedi Tudományegyetem, Bölcsészettudományi Kar, Neveléstudományi Intézet, Neveléstudomány MA-program

Józsa Krisztián, Zentai Gabriella és Hajdúné Holló Katalin 2017-ben megjelent könyve a DIFER-könyvsorozat újabb kötete, amely a 4–8 éves gyermekek gondolkodásának fejlesztésével foglalkozik. A könyv egy mappában kapott helyet, amely a könyv mellett tartalmazza a sztenderdizált teszteket, a tesztfelvételhez szükséges eszközöket, valamint egy fejlődési mutató füzetet (*Józsa*, *Zentai* és *Hajdúné*, 2017a, 2017b). A mappával párhuzamosan megjelent egy játékkártya gyűjtemény is, olyan kártyákat találunk benne, melyek a módszertani kiadványban szereplő fejlesztő játékok segédeszközei (*Józsa*, *Zentai* és *Hajdúné*, 2017c).

A sikeres iskolakezdést nagymértékben segíti az alapkészségek koragyermekkori fejlesztése, ami hozzájárulhat a gyermekek közötti kognitív és szociális fejlettségbeli különbségek csökkentéséhez. A 4–8 éves kori készségfejlődés mérésére és fejlesztésére alkalmas a DIFER programcsomag (Diagnosztikus fejlődésvizsgáló és kritériumorientált fejlesztő rendszer), amely a PREFER (Preventív fejlettségvizsgáló rendszer) továbbfejlesztése (*Józsa*, 2016). A DIFER-tesztek alkalmazásával az elemi alapkészségek fejlesztését megalapozó mérési eredményekhez jutunk, a fejlesztéssel pedig megszilárdíthatjuk az írás, olvasás és a számolás tanulásának alapfeltételeit (*Nagy, Józsa, Vidákovich és Fazekasné*, 2004a, 2004b). Az elmúlt években folyamatosan jelentek meg a DIFER készségek fejlesztését elősegítő módszereket leíró könyvek: *Fazekasné* (2006) a beszédhanghallás, *Miskolcziné* és *Nagy* (2006) az írásmozgás-koordináció, *Zsolnai* (2006) a szocialitás, *Nagy* (2010) a nyelvi logikai képességek és a relációszókincs, *Józsa* (2014) a számolás fejlesztésére alkalmas módszereket mutatja be. Ebbe a sorozatba illeszkedik a gondolkodás fejlesztését elősegítő új kiadvány, amely összekapcsolja a koragyermekkori gondolkodásfejlesztést megalapozó pedagógiai elméletet és gyakorlatot. A könyv három fő részből áll, az első fejezet az *Elméleti háttér,* amely a fejlesztés hátterét tárgyalja, ezt követően a gondolkodás fejlesztéséhez szükséges *J*átékgyűjteményt mutatja be, végül a *Foglalkozás- és Projektterv* című fejezet ad mintákat a tervezéshez. A könyv mellékletében néhány mese található.

Az elméleti hátteret bemutató része több alfejezetre osztott. Az első alfejezetben az elemi rendszerező és elemi kombinatív képesség jellemzőit ismerhetjük meg, kiemelve azokat a kutatási eredményeket, amelyek a fejlesztés szempontjából lényegesek. A fejezetből kiderül, hogy a rendszerező és a kombinatív képesség fejlesztése hozzájárul a mindennapi gondolkodás kialakulásához. A rendszerező képesség két szintjét különböztetik meg a szerzők: manipulatív és fogalmi. A manipulatív szint elsősorban óvodáskorban, míg az erre épülő fogalmi szint főképp iskoláskorban fejlődik intenzíven. A könyv játékgyűjteményt tartalmazó részében a manipulatív fejlesztést segítő játékokat mutatják be a szerzők. A manipulatív rendszerezés során tárgyak, képek, játékok szelektálása, szortírozása, sorba rendezése valósul meg. Az elemi rendszerező képesség szoros kapcsolatban áll az elemi alapkészségek fejlettségével, így például a számolással. Az elemi kombinatív képesség egyszerűbb kombinatív műveleteket jelent, a variálás, kombinálás és permutálás ismétléses és ismétlés nélküli változatai tartoznak ide. Óvodáskorban tárgyak rakosgatásával, a különböző kombinatív összetételek kirakásával lehet fejleszteni a kombinatív gondolkodást, a mintaként kidolgozott játékok ebben adnak segítséget.

Az elméleti háttér egyik alfejezete a *Honnan induljunk?* címet kapta, ennek a résznek az a célja, hogy ismertesse a tesztek felvételének menetét. Ez a rész konkrét utasításokat ad az egyéni vizsgálatok lebonyolításához, az eredmények rögzítéséhez és értelmezéséhez. A mérési eredmények a *Fejlődési mutató*ban (*Nagy* és *Józsa*, 2016) rögzíthetők, ebben követhető nyomon a fejlődés. A DIFER Programcsomag eddig hét elemi alapkészség mérésére szolgált. Az újonnan megjelent kiadvány hiánypótló, mert általa két új teszttel bővült a DIFER Programcsomag, így az elemi alapkészségek rendszerének teljesebb megismerését és fejlesztését valósíthatják meg a szülők és a pedagógusok. Az elemi rendszerező és kombinatív képesség mérésére készült teszteket a szerzők vizsgálataikban kipróbálták, a könyvben megtalálhatóak a hozzájuk kapcsolódó életkori sztenderdek. Külön alfejezet segíti a gyermekek fejlődésének nyomon követését, az országos vizsgálat eredményeiből készült grafikonok és táblázatok elemzését. Az eredmények megfogalmazása  a szülők és pedagógusok számára is könnyen értelmezhető.

A szerzők egy alfejezetben elemzik a gyermekek közötti fejlődésbeli különbségek lehetséges okait, amelyek származhatnak az eltérő fejlődési ütemből, a családi háttér különbözőségéből vagy atipikus fejlődésből. Az azonos életkorú gyermekek között 4–5 évnyi fejlettségbeli különbség is lehet, amely bizonyos határok között természetes velejárója a gyermekek egyéni fejlődési ütemének. A családi háttér befolyásoló hatását a szülők iskolázottsága és a hátrányos helyzet alapján jellemzik. A szerzők bemutatják egyik kutatásuk eredményeit, amelyben azt vizsgálták, hogy a gyermekek koragyermekkori alapkészségeinek fejlődése milyen mértékben függ attól, hogy a szülők mennyi időt töltenek a gyermekükkel, mennyit beszélgetnek, mesélnek és játszanak velük. Olvashatunk a tanulásban akadályozott tanulók gondolkodásának jellemzőiről, azokról a tényezőkről, melyekben leginkább eltérően viselkednek, fejlődnek többségi társaikhoz képest.

Az elméleti háttér utolsó alfejezete fejlesztő programok hatásvizsgálatának eredményeit mutatja be. Azokról a programokról van itt szó, amelyeket a gyűjteményben szereplő játékok kipróbálására végeztek pedagógiai kísérletek keretében. Ezeknek a fejlesztő programoknak az eredményei azt mutatták, hogy jelentősen csökkenthető az alacsonyabb fejlettségi szintről induló gyermekek lemaradása. Emellett a magasabb fejlettségi szintről induló gyermekek motivációjára is számottevő pozitív hatással vannak a játékok. Az első fejezet végén konkrét javaslatokat fogalmaznak meg a hatékony fejlesztéshez, például érdemes kihívást igénylő 10–15 perces feladatokat adni a gyermekeknek napi rendszerességgel, amely során fontos cél, hogy a gyermekek örömmel vegyenek részt a játékban.

A könyv második része egy *J*átékgyűjtemény, amely az elemi rendszerező és az elemi kombinatív képesség fejlesztését szolgálja. A játékok eltérő nehézségűek, bonyolultságúak, így minden játék mellett szerepel, hogy milyen fejlettségi szintre javasolják azt. Ennek köszönhetően a gyermekek egyéni fejlesztését és a differenciálást nagymértékben segíti. A *Játékgyűjtemény* két részre bontható, az első részben a rendszerező, a második a kombinatív képességek fejlesztésére alkalmas játékokat találjuk. A játékok között találunk számos olyat, melyek azonos gondolkodási műveletekre épülnek, de eltérő bonyolultságúak. Az alacsonyabb fejlettségi szinten például a piros színű fonálra a piros színű gombokat kell felfűzni a gyermekeknek, míg magasabb szinten méret és szín szerint is szét kell válogatni a gombokat, majd ennek megfelelően felfűzni a fonálra. A kombinatív képességre irányuló játékok között a szerzők megkülönböztetik az ismétléses és az ismétlés nélküli műveletekre épülőket. Ezek között a műveletek között az a különbség, hogy az ismétlés nélküli feladatoknál különböző dolgokat kell kiválasztani, az ismétléses feladatoknál azonos elemekkel is kell dolgozniuk a gyermekeknek. A játékok az óvodai, iskolai pedagógiai gyakorlatba sokszínűen beépíthetők, csoportosan és egyénileg is játszhatóak, használhatók hozzá a már meglévő játékok, eszközök, de természetesen a pedagógusok a helyi lehetőségek szerint is elkészíthetik az eszközöket.

A kötet utolsó fejezete az óvodai és a tanórai foglalkozások megszervezéséhez ad segítséget. A rendszerező és a kombinatív képesség fejlesztésére összesen négy foglalkozási tervet és két projekttervet mutat be, amelyek figyelembe veszik a gyermekek fejlettségi szintjét, emellett a speciális pedagógia területein is felhasználhatóak. A tervek az alapkészségek komplex fejlesztését segítik, a gondolkodási képességek mellett hozzájárulnak a szociális készségek, a finommotorika, az éneklés és a számolás fejlesztéséhez is. A foglalkozás- és projekttervek egy-egy konkrét téma köré csoportosítva a fejlesztés egy megvalósítható menetét tartalmazzák.

A könyv széles olvasóközönségnek íródott, elméleti háttere logikusan felépített, könnyen értelmezhető, a gyakorlati példák nagyban segítik az elmélet és gyakorlat egymásra épülésének a megértését. A gyűjtemény játékait óvodapedagógusok, tanítók, gyógypedagógusok mellett szülők is alkalmazhatják a gyermekek egyéni, játékos formában történő fejlesztéséhez. A DIFER Programcsomag korábbi kiadásaihoz hasonlóan ez a kiadvány is jól áttekinthető, színes képeket és illusztrációkat tartalmaz.

## Felhasznált irodalom

Fazekasné Fenyvesi Margit (2006): *A beszédhanghallás fejlesztése 4–8 éves életkorban*. Mozaik Kiadó, Szeged.

Józsa Krisztián (2014): *A számolás fejlesztése 4–8 éves életkorban*. Mozaik Kiadó, Szeged.

Józsa Krisztián (2016): Kihívások és lehetőségek az óvodai fejlesztésben. *Iskolakultúra*, **26**. 4. sz. 59–74.

Józsa Krisztián, Zentai Gabriella és Hajduné Holló Katalin (2017a): *A gondolkodás fejlesztése 4–8 éves életkorban: Módszertani kézikönyv szülőknek, óvodapedagógusoknak, tanítóknak.* Mozaik Kiadó, Szeged.

Józsa Krisztián, Zentai Gabriella és Hajduné Holló Katalin (2017b): *A gondolkodás fejlesztése 4–8 éves életkorban. Programcsomag tesztekkel és fejlesztő anyagokkal*. Mozaik Kiadó, Szeged.

Józsa Krisztián, Zentai Gabriella és Hajduné Holló Katalin (2017c): *Kártyagyűjtemény: A gondolkodás fejlesztésére 4–8 éveseknek.* Mozaik Kiadó, Szeged.

Miskolcziné Radics Katalin és Nagy József (2006): *Az írásmozgás-koordináció fejlesztése 4–8 éves életkorban.* Mozaik Kiadó, Szeged.

Nagy József és Józsa Krisztián (2016): *DIFER – Fejlődési mutató*. Mozaik Kiadó, Szeged.

Nagy József, Józsa Krisztián, Vidákovich Tibor és Fazekasné Fenyvesi Margit (2004a): *DIFER Programcsomag: Diagnosztikus fejlődésvizsgáló és kritériumorientált fejlesztő rendszer 4–8 évesek számára.* Mozaik Kiadó, Szeged.

Nagy József, Józsa Krisztián, Vidákovich Tibor és Fazekasné Fenyvesi Margit (2004b): *Az elemi alapkészségek fejlődése 4–8 éves életkorban*. Mozaik Kiadó, Szeged.

Nagy József (2009, szerk.): *Fejlesztés mesékkel: Az anyanyelv, a gondolkodás fejlődésének segítése mesékkel 4–8 éves életkorban.* Mozaik Kiadó, Szeged.

Zsolnai Anikó (2006): *A szocialitás fejlesztése 4-8 éves életkorban: Módszertani segédanyag* óvodapedagógusokna *és tanítóknak.* Mozaik Kiadó, Szeged.

Földi Fanni és Gyurcsik Anita (2018): Gondolkodás játék közben: Recenzió A gondolkodás fejlesztése 4–8 éves életkorban című kiadványról. *Gyermeknevelés*, **6.** 1. sz., 108–110.

# Recenzió. A német nemzetiségi oktatásban használt tankönyv

### Lazri Judit (2001): Kombi Spielheft Kombi Spielheft, Konsept-H Könyvkiadó

**Gölcz Mira – Márkus Éva**
Eötvös Loránd Tudományegyetem Pedagógiai és Pszichológiai Kasr, Neveléstudományi Doktori Iskola – Eötvös Loránd Tudományegyetem, Tanító- és Óvóképző Kar

A tankönyv az általános iskola alsó tagozatára készült, az első osztályos, kezdő nyelvtanulók részére. A nemzetiségi tankönyvjegyzékben szerepel. A nemzetiségi oktatásban használható tankönyveket központilag, rendeletben szabályozzák[1].


A tankönyv szemlélete korszerű, a jelen kor oktatási, tanulói, tanítói és szülői elvárásaihoz alkalmazkodó. Faji, nemi, etnikai és vallási előítéletektől mentes, hiszen egy Magyarországon élő kisebbség nyelvi oktatásához készült. A környezet, a kulturális örökség, nemzetiségi értékek védelmére ösztönöz. Előszó, ajánlás nem tartozik a könyvhöz. Első osztályos, írni és olvasni még nem tudó gyermekeknek készült. A tananyag strukturáltsága megfelelő. A tananyagot 11 jól tagolt részre osztja (Spielen, Schule, Schulweg, Familie, Im Haus/Im Zimmer, Essen/Trinken, Bad/Körper, Tiere, Jahr, Feiertage, Lieder). A tananyaghoz választott képek, ábrák minősége szépen kidolgozott. Egy-egy új szó képpel és képaláírással is szerepel, mely megkönnyíti az otthoni gyakorlást, tanulást is. Az adott tanórára tervezett tananyag, szómennyiség megfelelő, bár a könyvben egy-egy anyagrész gyakorlására csak néhány feladatot találunk. A tanítóknak kreatívnak kell lenniük ahhoz, hogy kiegészítő példákkal, játékokkal, feladatokkal segítsék a tanulók tananyag-elsajátítását. A tananyagrészek fokozatosan egymásra épülnek. A tananyag utal az interdiszciplináris vonatkozásokra (környezet, ének-zene, rajz stb.), így valósítva meg a tantárgyközöttiség elvét. A tankönyv figyelembe veszi a tanulók lelki és szociális érettségének szintjét. Ismeret- és feladatmennyisége arányos a tanulók befogadóképességével és a rendelkezésre álló idővel, bár véleményünk szerint több, változatosabb gyakorlati példára lenne benne szükség. A könyv szaknyelvben nem gazdag, hiszen ennél a korosztálynál csak nyelvtanilag egyszerű szavakat, szószerkezeteket, mondatokat használunk a nyelvtanítás során. Ezáltal a könyv nyelvezete és stílusa a tanulók életkorának megfelelő. Ügyel a közvetítendő ismeretek életszerű bemutatására például párbeszédek használatával.

Tanulásmódszertani szempontból megállapíthatjuk, hogy néhány helyen, sajnos nem mindenhol ad a könyv lehetőséget az önellenőrzésre. A tankönyv otthoni tanulásra csak akkor alkalmas, ha a szülők beszélik az adott nyelvet, hiszen konkrét utasítások magyarul egyáltalán nem, de németül is csak ritkán jelennek meg egy-egy feladatnál. A követelmények a tanuló számára nyilvánvalóak. A tankönyv kihasználja azokat a lehetőségeket, amelyekkel a tanulók érdeklődését felkelti, tanulásra, gyakorlásra motiválja. Játékra, cselekvésre, feladatmegoldásra ösztönöz.

---

[1] https://ofi.hu/sites/default/files/attachments/nemzetisegi_a_nemzetisegi_tankonyvrendeles_gyakorlati_kerdesei.pdf

Márkus Éva: orcid.org/0000-0002-3571-8472

Az illusztrációk sokfélék (képek, ábrák, grafikonok, sémák, térképek stb.) Tartalmuk összhangban áll a tankönyv magyarázó szövegével. Az illusztrációk száma megfelelő, azok hatékonyan segítik a tanulást (nem pusztán dekoratív szerepük van). Konkrét, a feladatokra irányuló kérdések nincsenek a tankönyvben. Reproduktív és elemző, a fontos területekre irányuló kérdéseket a tanítóknak maguknak kell kitalálniuk. Ha a tankönyv használhatóságát próbáljuk elemezni a tanítók szempontjából, akkor a vélemények vélhetően nagyon eltérőek lennének. A tankönyv a legfontosabb, a gyermekek életkorához alkalmazkodó témával foglalkozik, megtanítja az ezekhez kapcsolódó fontosabb szavakat, egyszerű kifejezéseket, mondatokat. Sajnos nem tartalmaz elég gyakorló feladatot, tehát ezek kitalálása, megalkotása a tanítókra hárul.

Differenciálás egyáltalán nincs benne, tehát egy olyan gyermek számára, aki otthonról hozott tudással már rendelkezik, akár könnyen unalmassá is válhat. Hivatkozások (irodalom, forrás, kép, ábra stb.) egyáltalán nem találhatóak a könyvben. A tankönyv alkalmas a követelményekben előírt tantárgyi készségek és képessége fejlesztésére. A könyv írástanítást nem tartalmaz. Ez azért helyes, mert a tanulók ekkor kezdik el a magyar nyelv olvasását és írását is tanulni, tehát ha párhuzamosan folyna a két különböző nyelv írástanítása, az összezavarná a gyereket. A gyerekek életkori sajátosságait figyelembe véve kibővítő lenne a könyv mozgásos, játékos feladatokkal, olyan énekekkel, melyekhez játékok, mozgások kapcsolódnak, mert a gyermekek figyelme ebben a korban 10–15 percnél nem terjed tovább. Nemzetiségi nevelésben-oktatásban használatos tankönyv révén akár az év szokásaihoz kapcsolódó feladatokkal is bővíthető lehetne a könyv. Előnye a könyvnek, hogy alsó tagozatra teljesen kidolgozott a folytatása is. Jelenleg minden kötethez tankönyv és munkafüzet is tartozik. A mai kor oktatási igényeihez igazodva a könyv digitalizált formában is elérhető. A digitális használattal a pedagógusok lehetőséget kapnak arra, hogy tanóráikat színesebbé, változatosabbá tegyék, hiszen a jelen kor tanulóinak és szüleinek ez elvárása.

Gölcz Mira és Márkus Éva (2018): Recenzió. Lazri Judit (2001): *A német nemzetiségi oktatásban használt Kombi Spielheft Kombi Spielheft*, Konsept-H Könyvkiadó című tankönyvről. *Gyermeknevelés*, **6.** 1. sz., 111–112.

# Recenzió Marion Techmer – Maximilian Löw (2017): Spielerisch Deutsch lernen. Wortschatz-Trainer Aufbauwortschatz. Hueber Verlag című könyvről

**Márkus Éva – Gölcz Mira**
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Tanító- és Óvóképző Kar –
Eötvös Loránd Tudományegyetem Pedagógiai és Pszichológiai Kasr, Neveléstudományi Doktori Iskola

A „Spielerisch Deutsch lernen" (= Játékosan németül tanulni) sorozatban megjelent 40 oldalas A4 alakú füzet tetszetős, színes tananyag alsó tagozatos német, mint idegen nyelvet tanuló diákok számára, akiknek már van némi német nyelvismeretük és a nyomtatott betűk írásában is vannak alapszintű ismereteik. Ez a magyar gyermekek számára furcsa lehet, hiszen ők a nyomtatott betűket írni nem, csak elolvasni tanulják. Jelenleg nagyon fontos elvárás, hogy legyenek korszerű nyelvkönyvek a nem német anyanyelvű diákok számára. A bevezető a füzetet mind iskolai nyelvoktatásra, nyelvi fejlesztéshez, mind otthoni önálló tanuláshoz is ajánlja, esetleg szülői segítségnyújtással. Ez utóbbit segíti a füzet végén a mellékletben a megoldókulcs (38-39. oldal). A szülői segítségnyújtás nagyon fontos, hisz így a tanuló nyelvi fejlődésének nyomon követése nem csak tanórai keretek között, hanem a családi környezetben is megvalósul.

A bevezető után rövid és egyszerű jelmagyarázat következik, majd a nyomtatott kis- és nagybetűk írásának elsajátítását könnyítő betűábrákat találunk, nyilakkal és számokkal ellátva. A tematikus rész három nagyobb egységből áll, azok pedig egyenként négy-négy kisebb egységből, fejezetből: Az első nagyobb egységben a következő témák kaptak helyet: hónapok, időjárás, évszakok, számok 1-20-ig. A második nagyobb egység tárgyalja a háziállatokat, a parasztudvar állatait, az óra szerinti időt és a napirendet (egy gyermek napja). A harmadik nagyobb egység foglalkozik azzal, hogy mi található a lakóházban, a fürdőszobában, a nappaliban, valamint a médiával (úgy, mint mobiltelefon, tablet, számítógép, internet, egér stb.). A gyermekek számára fontos, hogy a mai kor használati tárgyait is megismerteti a könyv, ezáltal jobban alkalmazkodik a „Z" generáció igényeihez, jobban felkelti érdeklődésüket, hiszen olyan szavakat, kifejezéseket is megismerhetnek, melyek számukra nagyon fontosak. Mindhárom nagyobb egység végén a diákok számára két oldalas összefoglaló feladatok találhatók, ahol átismételhetik a tanultakat, ellenőrizhetik a tudásukat („Was ich schon auf Deutsch kann"). Ismét kimondanak és leírnak minden előzőleg tanult szót. Például a háziállatok esetében – de minden egyéb téma esetében ugyanígy – képek alapján meg kell nevezni a háziállatokat, és a képek melletti kis négyzetben jelölhetik, melyik szót ismerték, és melyiket nem. Az eredmény alapján kis közlekedési jelzőlámpán jelölhetik, milyen szinten állnak, van-e szükségük még gyakorlásra vagy továbbhaladhatnak. Ez a tudásellenőrzési lehetőség teret enged az önálló tanulásnak, tapasztalatszerzésnek és fejleszti a gyermekek önértékelését is. Mind a beszéd, mind az írás területén értékelhetik magukat a jelzőlámpák segítségével. Az összefoglaló feladatok mindig ugyanazt a sémát követik, mely akár unalmassá válhat egy idő után a gyerekek számára, de észrevétlenül a lényeges dolgok kiemelésére, megjegyzésére is megtanítja őket. A bevezető hangsúlyozza, ezzel a recenzens is egyetért, mennyire fontos a nyelvelsajátításban a gyermekek dicsérete, az előrehaladásuk tudatosítása, értékelése, önbizalmuk növelése, megerősítése. A tárgyalt témák egyszerű, a diákok számára releváns szituációkban jelennek meg.

Minden fejezet két oldal terjedelmű. Az első oldal 9–14 szót ismertet meg a tanulókkal, képek segítségével. A szóképeket először

Márkus Éva: orcid.org/0000-0002-3571-8472

a nyomtatott kép alapján kell leírni, a világosszürkén nyomtatott betűkre kell ráírniuk a gyerekeknek, majd önállóan is le kell írniuk, másolniuk ugyanazt a szóképet, a névelőjével együtt. Fontos, hogy ezáltal több módon rögzül egy-egy szó, kifejezés a gyermekekben. A magyar iskolákban feltehetően írott betűkkel teszik ezt. A második oldalon lehet gyakorolni, és különböző helyzetekben, egyszerű mondatokban, párbeszédekben felhasználni a megismert a szókincset. Ezek mindig a gyerekek élethelyzeteiből származnak. Például a hónapok gyakorlása során a gyerekek megtanulják németül elmondani és leírni, melyik hónapban van a születésnapjuk. Az évszakok fejezetben megtanulják németül, hogy nyáron szünet, vakáció van, télen van karácsony, tavasszal húsvét és ősszel Szent Márton napja. Az életközeli szituációk, történetek tudományos vizsgálatok alapján jobban rögzülnek a gyermekek memóriájában. A gyakorlatok sorrendjét színes számok jelzik, a sárgák az egyszerűbb, könnyebb feladatok, a piros szám jelzi a nehezebb feladatokat. A gyakorlatok változatosak és játékosak, van köztük kiegészítős feladat, számozásos, hozzárendelős, szóhálóban keresős stb., melyek segítségével az alapszókincset és az egyszerű szókapcsolatokat megtanulják.

Nagy előnye a füzetnek, hogy a benne szereplő összes szót és mini-párbeszédet meg tudják hallgatni a diákok a megadott honlapcímről (https://www.hueber.de/audioservice) kis keresgélés után a fájlokat letöltve, melyek a 12 fejezet szerint vannak mappákba rendezve. Ezek meghallgatásával a helyes kiejtést is hallják és gyakorolni is tudják. Több személy hangját hallani a felvételeken, - akik szépen artikulálva ejtik ki a szavakat -, férfi- és női hangokat is, ami változatossá teszi az anyag hallgatását.

Irmtraud Guhe illusztrációi szépek, tiszták, egyszerűek. Felhívják a gyerekek figyelmét a részletekre, például a háziállatok tárgyalása során az állatokat a 2. feladatban egy-egy részletük alapján (fej, láb, test, nyak stb.) kell felismerni.

Az utolsó oldalon fel van sorolva az összes szó, amit a gyerekek megtanultak, a főnevek többes számú alakja is, a névelők pedig négyféle színnel szedve, kék a hímnem (der), piros a nőnem (die), zöld a semlegesnem (das), sárga a többes számú névelő (die) jele.

Összességében elmondható, hogy egy gyermekbarát, a gyermeki igényeknek megfelelő, igényes kiállítású, modern idegen nyelvi tananyagról van szó, ami segíti a kisgyermekeket az önálló tanulásban, csupán a nyomtatott íráskép gyakoroltatása miatt javasolható a füzet magyar iskolai viszonyokhoz való alakítása. További előnye, hogy a folytatás is kidolgozott a kezdő kötethez, tehát a nyelvelsajátítás felsőbb szinten is megoldott.

Márkus Éva – Gölcz Mira (2018): Recenzió Marion Techmer – Maximilian Löw (2017): S*pielerisch Deutsch lernen*. Wortschatz-Trainer Aufbauwortschatz. Hueber Verlag című könyvről. *Gyermeknevelés*, **6.** 1. sz., 113–114.

ELTE TANÍTÓ- ÉS ÓVÓKÉPZŐ KAR 1869 EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM